

---

**DGKS**

---

**DRUŠTVO GRAĐEVINSKIH  
KONSTRUKTERA SRBIJE**

---

**14. KONGRES**

NOVI SAD  
24-26. SEPTEMBAR

**2014.**

**14**

**K**

**O**

**N**

**G**

**R**

**E**

**S**

**2014**

U SARADNJI SA:



**GRAĐEVINSKIM FAKULTETOM  
UNIVERZITETA U BEOGRADU**

**MINISTARSTVOM PROSVETE,  
NAUKE I TEHNOLOŠKOG RAZVOJA  
REPUBLIKE SRBIJE**



**INŽENJERSKOM KOMOROM  
SRBIJE**

**ZBORNİK  
RADOVA**



**CHINA ROAD AND BRIDGE  
CORPORATION SERBIA BRANCH**

Izdavač: **Društvo građevinskih konstruktora Srbije**  
Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73/1

Urednici: prof. dr **Miloš Lazović**  
prof. dr **Boško Stevanović**

Tehnička  
priprema: **Saška - Stoja Todorović**

Priprema za  
štampu: **Nebojša Ćosić**

Štampa: **DC Grafički centar**

Tiraž: **150 primeraka**

Beograd, septembar 2014.

# ORGANIZACIONI ODBOR

## PREDSEDNIŠTVO DGKS

Prof. dr Miloš LAZOVIĆ, dipl.inž.grad., predsednik  
Aleksandar BOJOVIĆ, dipl.inž.grad., potpredsednik  
Prof. dr Boško STEVANOVIĆ, dipl.inž.grad., sekretar  
Prof. dr Đorđe VUKSANOVIC, dipl.inž.grad.  
Prof. dr Mihajlo ĐURĐEVIĆ, dipl.inž.grad.  
Prof. dr Dragoslav STOJIC, dipl.inž.grad.  
Prof. dr Đorđe LADINOVIĆ, dipl.inž.grad.  
Prof. dr Snežana MARINKOVIĆ, dipl.inž.grad.  
Prof. dr Aleksandar RISTOVSKI, dipl.inž.grad.  
Doc. dr Bratislav STIPANIĆ, dipl.inž.grad.  
Dr Zoran FLORIĆ, dipl.inž.grad.  
Mr Slobodan GRKOVIĆ, dipl.inž.grad.  
Branko KNEŽEVIĆ, dipl.inž.grad.  
Gojko GRBIĆ, dipl.inž.grad.  
Goran VUKOBRATOVIĆ, dipl.inž.grad.  
Đorđe PAVKOV, dipl.inž.grad.  
Svetislav SIMOVIĆ, dipl.inž.grad.

## ČLANOVI ORGANIZACIONOG ODBORA IZVAN PREDSEDNIŠTVA

Prof. dr Zlatko MARKOVIĆ, dipl.inž. grad.  
Miroslav MIHAJLOVIĆ, dipl.inž.grad.  
Aleksandar TRAJKOVIĆ, dipl.inž.grad.

## NAUČNO-STRUČNI ODBOR

1. Prof. dr Radenko Pejović, Građevinski fakultet Podgorica, Crna Gora
2. Prof. dr Duško Lučić, Građevinski fakultet Podgorica, Crna Gora
3. Prof. dr Goran Markovski, Univerzitet "Kiril i Metodij" Gradežen fakultet, Skopje, Makedonija
4. Prof. dr Meri Cvetkovska, Univerzitet "Kiril i Metodij" Gradežen fakultet, Skopje, Makedonija
5. Prof. dr Tatjana Isaković, Univerzitet u Ljubljani Fakultet građevinarstva i geodezije, Ljubljana, Slovenija
6. Prof. dr Viktor Markelj, Ponting d.o.o., Maribor, Slovenija
7. Prof. dr Zlatko Šavor, Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zavod za konstrukcije, Katedra za mostove, Zagreb, Hrvatska
8. Prof. dr Radu Bancila, University "POLYTEHNICA", Temišvar, Rumunija
9. Mr Predrag Popović, Čikago, SAD
10. Prof. dr Kostadin Topurov, Sofija, Bugarska
11. Prof. dr Dušan Najdanović, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Beograd, Srbija
12. Prof. dr Miloš Lazović, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Beograd, Srbija
13. Prof. dr Đorđe Vuksanović, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Beograd, Srbija
14. Prof. dr Dejan Bajić, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Beograd, Srbija
15. Prof. dr Đorđe Ladinović, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Srbija
16. Prof. dr Dragoslav Stojić, Arhitektonsko-građevinski fakultet, Niš, Srbija
17. Doc. dr Bratislav Stipanić, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Beograd, Srbija

## **14. KONGRES JE ORGANIZOVAN U SARADNJI SA:**

GRAĐEVINSKIM FAKULTETOM UNIVERZITETA U  
BEOGRADU

MINISTARSTVOM PROSVETE, NAUKE I TEHNOLOŠKOG  
RAZVOJA REPUBLIKE SRBIJE

INŽENJERSKOM KOMOROM SRBIJE, Beograd

## **DONATORI SIMPOZIJUMA:**

### **DIJAMANTSKI**

CHINA ROAD & BRIDGE CORPORATION, SERBIA BRANCH,  
Belgrade

### **SREBRNI**

SIKA d.o.o., Novi Sad

### **BRONZANI**

"POTISJE KANJIŽA" AD, Kanjiža

Zoran Koneski<sup>1</sup>, Kristina Kostadinović<sup>2</sup>, Saša Kovačević<sup>3</sup>, Žarko Lazić<sup>4</sup>

## **ANALIZA UTICAJA DEFORMACIJE SMICANJA NA SAVIJANJE PRAVOUGAONIH PLOČA**

### **Rezime:**

U radu je predstavljena *Reissner-Mindlin*-ova (RM) teorija savijanja pravougaonih ploča. Predstavljene su prednosti i nedostaci RM teorije, njena primena i konačni elementi (KE) za rešavanje savijanja ploča po RM teoriji. U softverskom paketu *Wolfram Mathematica* formiran je programski kod LESAP sa ugrađenim algoritmom za proračun ploča. Dobijeni rezultati za određen broj primera, koji uključuju tačnost, konvergenciju i brzinu konvergencije rešenja, upoređeni su sa rezultatima koji slede iz programskog paketa ABAQUS.

*Ključne reči: Reissner-Mindlin, MKE, shear locking, deformacija smicanja, LESAP*

## **THE EFFECT OF TRANSVERSE SHEAR DEFORMATION ON THE BENDING OF RECTANGULAR PLATES**

### **Summary:**

The review of the *Reissner-Mindlin's* (RM) theory of bending of rectangular plates is presented in this paper. Presented are the advantages and disadvantages of RM theory, its application and finite elements (FE) for solving plate bending by RM theory. The *Wolfram Mathematica* software package is used to create LESAP program code with built-in algorithm for calculation of the plate bending. The results for a given number of examples, which include accuracy, convergence and the speed of the solutions convergence, are compared with the results obtained using the software package ABAQUS.

*Key words: Reissner-Mindlin, FEM, shear locking, shear deformation, LESAP*

---

<sup>1</sup> Dipl. inž. građ., student doktorskih studija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, e-mail: koneskizoran@gmail.com

<sup>2</sup> Dipl. inž. građ., student doktorskih studija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, e-mail: kostadinovic.kristina@yahoo.com

<sup>3</sup> Dipl. inž. građ., student doktorskih studija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, e-mail: sasakovacevic988@gmail.com

<sup>4</sup> Dipl. inž. građ., student doktorskih studija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, e-mail: zarkolazic87@live.com

# 1 KONAČNI ELEMENTI ZA REŠAVANJE PROBLEMA SAVIJANJA PLOČA PREMA REISSNER-MINDLIN-OVOJ TEORIJI

## 1.1 TEORIJSKE OSNOVE REISSNER-MINDLIN-OVE TEORIJE

Ploče su trodimenzionalna tela kod kojih je debljina mala u odnosu na ostale dve dimenzije, pa se uz uvođenje određenih pretpostavki razmatranje kao trodimenzionalnih tela može svesti na područje površinskih nosača. Osnovne teorije savijanja ploča su: teorija tankih ploča, strožija teorija tankih ploča i teorija ploča višeg reda. Izbor teorije koja će dati zadovoljavajuću tačnost rešenja zavisi od odnosa debljine ploče i kraće strane ploče. U zavisnosti od debljine ploče prema kraćoj strani vrši se klasifikacija ploča na [1]:

- veoma tanke ploče – membrane – bez fleksione krutosti ( $h/b \leq 1/8 - 1/100$ )
- fleksibilne ploče – kombinacija ploča koje poseduju i membransku i fleksionu krutost
- tanke ploče ( $1/8 - 1/100 \leq h/b \leq 1/5 - 1/8$ )
- debele ploče ( $h/b \geq 1/5 - 1/8$ )

Najsloženiji matematički model koji idealizuje problem savijanja elastičnih ploča opterećenih upravno na srednju ravan predstavljao bi trodimenzionalni model koji se svodi na rešavanje osnovnih jednačina Teorije elastičnosti. RM teorija savijanja ploča je nastavak *Kirchhoff-Love*-ove teorije savijanja ploča koja uzima u obzir deformacije klizanja po debljini ploče. *Mindlin* je izložio teoriju 1951. [2] koja je nastala kao modifikacija slične ali ne iste teorije koju je 1945. izneo *Reissner* [3]. Razlike između ovih teorija su date u [1] a suštinska razlika je što *Reissner*-va teorija ne zanemaruje normalni napon  $\sigma_z$  po debljini ploče.

### 1.1.1 Diferencijalna jednačina savijanja ploče prema RM teoriji

Usvajajući osnovne pretpostavke *Mindlin*-ove teorije za homogen, elastičan i izotropan materijal, pomeranje ploče može se prikazati na sledeći način (*Slika 1*):

$$u(x, y, z) = z \cdot \theta_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = z \cdot \theta_y(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w^0(x, y)$$

gde je:

$x$  i  $y$  koordinate u Dekartovom koordinatnom sistemu u srednjoj ravni ploče,

$z$  koordinata u pravcu debljine ploče (upravno na srednju ravan),

$w^0$  pomeranje srednje ravni u pravcu ose  $z$ ,

$\theta_x$  i  $\theta_y$  ugao koji normala na srednju ravan ploče zaklapa sa  $z$  osom.

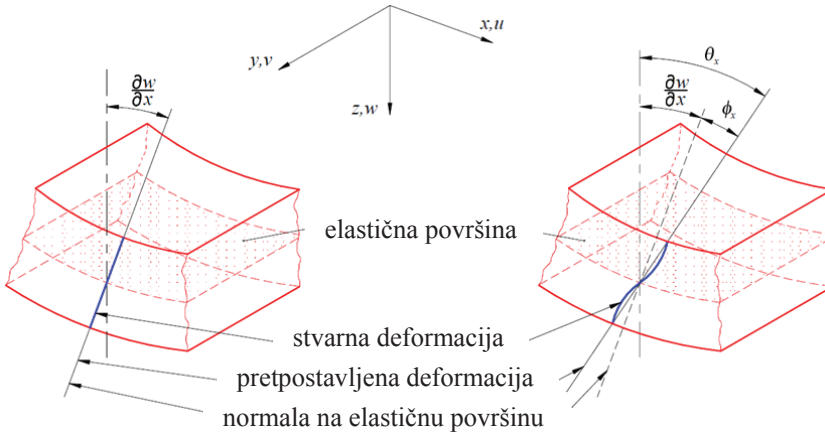
Deformacija u ravni ploče i deformacije klizanja u  $xz$  i  $yz$  ravni, zajedno sa izrazima za sile u presecima dati su u literaturi [1]. Uvođenjem ovih izraza u uslovima ravnoteže [1], dobijamo biharmonijsku diferencijalnu jednačinu (1) savijanja ploča po RM teoriji, preko koje se zajedno sa eliptičkom diferencijalnom jednačinom (2) predstavlja rešenje:

$$D\nabla^4 \omega = p - (h^2/6k(1 - \nu))\nabla^2 p \quad (1)$$

$$\nabla^2 \phi - (12k/h^2)\phi = \text{const.} = 0 \quad (2)$$

Rešenje ovih jednačina je moguće naći samo za jednostavne slučajeve. U slučajevima složene geometrije, složenih uslova oslanjanja i opterećenja rešenje nije moguće naći. U tom slučaju potrebno je koristiti neke od numeričkih metoda. U radu je predstavljena metoda konačnih

elemenata (MKE) i tipovi konačnih elemenata pomoću kojih se mogu uspešno rešavati problemi savijanja ploča.



Slika 1 - Deformacija po debljini ploče prema klasičnoj (levo) i RM (desno) teoriji

## 1.2 METODA KONAČNIH ELEMENATA U RM TEORIJI SAVIJANJA PLOČA

MKE je metoda diskretne analize koja se zasniva na fizičkoj diskretizaciji domena na odgovarajući broj konačnih elemenata. Konačni elementi su međusobno povezani pomoću jednog ili više čvorova i čine mrežu konačnih elemenata [4]. Kao što je već navedeno, RM teorija uzima u obzir uticaj smičućih sila na deformaciju. Na osnovu toga nepoznate promenljive su ugib  $w$  i klizanja  $\theta_x$  i  $\theta_y$ , pa je dovoljan samo kontinuitet  $C^0$  nezavisnih interpolacionih funkcija. Nedostatak primene MKE u RM teoriji je problem *shear locking*-a koji se javlja kod veoma tankih ploča uzimajući smičuću deformaciju u obzir.

### 1.2.1 Jednačina konačnog elementa

Na osnovu izložene teorije za pomeranje ploče (Slika 1) može se izvesti vektor pseudo-deformacije prikazan u zavisnosti od vektora stepeni slobode u čvorovima konačnog elementa [1]:

$$\varepsilon_p = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & -\partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & 0 & -\partial N_i / \partial y \\ 0 & -\partial N_i / \partial y & -\partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial x & -N_i & 0 \\ \partial N_i / \partial y & 0 & -N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} B_{bi} \\ B_{si} \end{bmatrix} q_i = \sum_{i=1}^n B_i q_i = Bq \quad (3)$$

Koristeći prethodnu jednačinu vektor krivina, vektor deformacije klizanja i ugib se mogu predstaviti kao:

$$\kappa = \sum_{i=1}^n B_{bi} q_i = B_b q \quad \gamma = \sum_{i=1}^n B_{si} q_i = B_s q \quad w = N_w q \quad (4)$$

gde je:

$N_i$  interpolaciona funkcija u  $i$ -tom čvoru,

$w_i$  ugib u čvoru  $i$ ,  
 $\theta_{xi}$  i  $\theta_{yi}$  obrtanje u čvoru  $i$ ,  
 $B_{bi}$  matrica transformacije deformacije za uticaj od savijanja i  
 $B_{si}$  matrica transformacije deformacije za uticaj od smicanja.

Potencijalna energija za jedan konačni element ploče jednaka je zbiru potencijalne energije deformacije savijanje i klizanja i potencijala spoljašnjih sila:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_A (\kappa^T D_b \kappa + \gamma^T D_s \gamma) dA - \int_A w q dA \quad (5)$$

Varijacijom ukupne potencijalne energije ploče po vektoru pomeranja čvornih tačaka sistema konačnih elemenata ploče i primenom stava o stacionarnosti funkcionala potencijalne energije dobija se matrica krutosti konačnog elementa [1]:

$$\delta \pi_e = \int_A (\delta \kappa^T D_b \kappa + \delta \gamma^T D_s \gamma) dA - \int_A \delta w q dA = 0 \quad (6)$$

$$\delta \kappa = B_b \delta q \quad \delta \gamma = B_s \delta q \quad \delta w = N_w \delta q \quad (7)$$

$$\left[ \int_A B_b^T D_b B_b dA + \int_A B_s^T D_s B_s dA \right] q = \int_A N_w q dA \quad [k_b + k_s] q = F_s \quad (8)$$

pri čemu jednačina konačnog elementa glasi:

$$Kq = F_s \quad (9)$$

## 1.2.2 Interpolacione funkcije

Predstavljaju funkcije kojima se pretpostavlja raspodela nepoznatih veličina u unapred odabranim čvorovima. Osnovne karakteristike interpolacionih funkcija su da moraju biti kontinualne unutar elemenata. Svaka od funkcija  $N_i$  ima vrednost jedinice u čvoru  $i$  odnosno nule u svima ostalim čvorovima. U slučaju debelih ploča obično se koriste iste funkcije za ugibe i rotaciju (nema jednoznačne veze između tih veličina). U [4] su predstavljene mnogobrojne funkcije (familije funkcija) koje se mogu koristiti za interpolacione funkcije. U radu, kao i u programskom kodu, su predstavljena dva tipa interpolacionih funkcija, oba iz familije *Lagrang*-ovih funkcija. Kao najjednostavniji KE izabran je bilinearni KE sa 4 čvora, koji koristi funkcije prvog reda (L1). Drugi tip je bikvadratni KE sa 9 čvorova koji se formira od *Lagrang*-ovih funkcija drugog reda (L2). Ove funkcije odnosno, aproksimacija polja pomeranja unutar L2 konačnog elementa u funkciji njegovih čvornih pomeranja prikazane su na *Slici 2*.

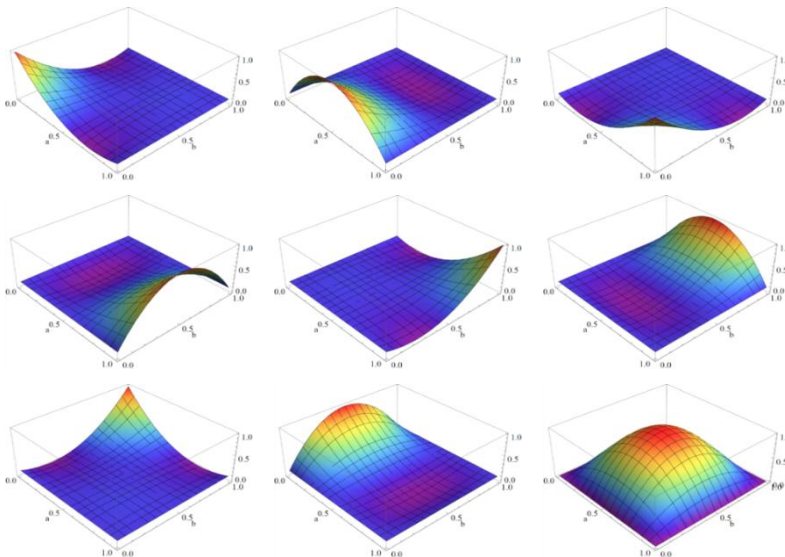
## 2 PROBLEM SHEAR LOCKING

Problem *shear locking*-a se javlja zbog *Kirchhoff*-ovog zanemarivanja uticaja transverzalnih smičućih deformacija usled zanemarivanja normalnih napona upravnih na srednju ravan ploče. Zbog toga se i usled čistog savijanja pojavljuju smičuće deformacije koje predstavljaju ključan faktor ovog fenomena. U RM teoriji *shear locking* se javlja kod veoma tankih ploča s obzirom da je smičuća deformacija uključena u proračun. U takvim slučajevima uticaj smicanja treba da teži nuli kada se i debljina ploče smanjuje. Problem se javlja u metodi konačnih elemenata kada se javljaju elementi većih vrednosti u matrici krutosti datog elementa što rezultuje nerealnim uticajima. Ovaj fenomen predstavlja svojstvo samog konačnog elementa [5]. Autori [6] su na osnovu protivurečnosti deformacije i sile koja dovodi do *shear locking*-a došli do zaključka da se za deformacije usled savijanja koriste elementi sa većim



redom interpolacije, dok za transversalne deformacije elementi sa manjim redom interpolacije. Najpoznatije procedure za eliminaciju *shear locking*-a su [7]: podizanje stepena interpolacionih funkcija, redukovana integracija (*reduced integration technique*), čvorna integracija (*nodal integration*), mešovita formulacija [8], paradigma konzistencije (*consistency paradigm*), promena promenljivih (*change of variables*) [9] i mnoge druge.

U programskom kodu LESAP problem *shear locking*-a je rešen podizanjem stepena interpolacionih funkcija. Posmatrane su *Lagrang*-ove funkcije prvog i drugog reda. Na graficima konvergencije u numeričkim primerima može se primetiti fenomen *shear locking*-a kod veoma tankih ploča i njegovo prevazilaženje sa L2 funkcijama. Nedostatak ove metode je u tome što konvergencija nije optimalna odnosno, potreban je veći broj stepeni slobode da se dođe do tačnog rezultata (*Slika 7 i 8*). Proces redukovane integracije je uveden od strane [10] a zasnovan je na matematičkim osnovama datim od [11] a bazira se na teoremi jednakosti (*equivalence theorem*). Ovom teoremom uvodi se dodatno polje sa čvornim tačkama u svakom elementu. Uniformno smanjenje integracije često dovodi do lažnih kinematičkih modova (*zero energy deformation modes*).

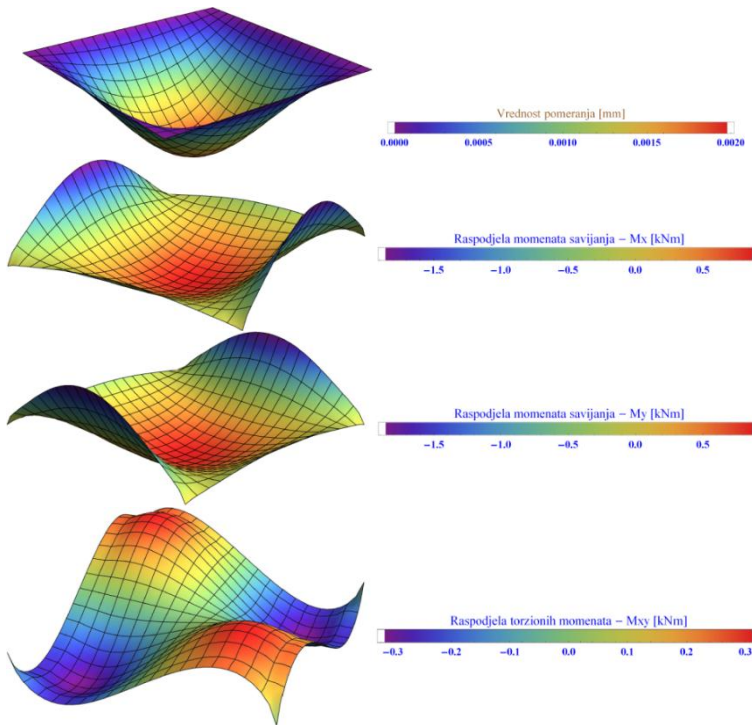


*Slika 2 – Interpolacione funkcije za Lagrang-ov bikvadratni konačni element sa 9 čvorova*

### 3 NUMERIČKI PRIMERI

Kroz izložene numeričke primere pokazaće se programski kod, koji je formiran u programskom paketu *Wolfram Mathematica* [12], nazvan LESAP (linearno elastična statička analiza ploča). U kodu su implementirana dva tipa konačnih elemenata za rešavanje problema savijanja ploča prema *Reissner-Mindlin*-ovoj teoriji, L1 i L2. Verifikacija koda je pokazana kroz izložene numeričke primere a rezultati su poredeni sa softverskim paketom ABAQUS [13]. U navedenom softveru su korišteni konačni elementi S4R.

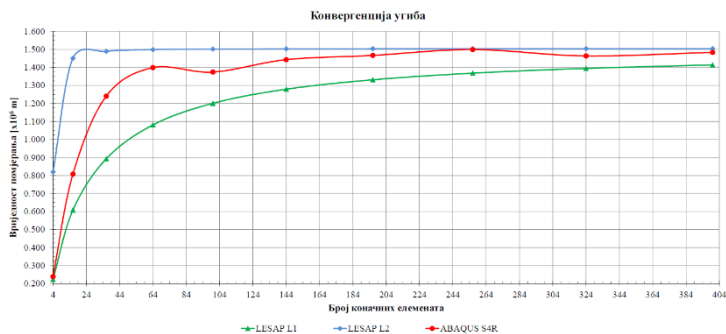
Kao i kod većine programa, osnovu algoritma čine ulazni podaci, obrada podataka i izlazni podaci. Za ulazne podatke neophodno je definisati: geometriju ploče i granične uslove, mrežu i tip konačnih elemenata, definisanje opterećenja i mehaničkih karakteristika materijala. Prvi korak u obradi podataka sastoji se od određivanja čvorova i koordinata svakog konačnog elementa. Zatim sledi proces asembliranja matrice krutosti i vektora opterećenja. Kao rezultat proračuna se dobijaju pomeranja, deformacije, presečne sile i naponi svih konačnih elemenata. Sve navedene veličine je moguće predstaviti na dva načina, tabelarno ili grafički. U kodu su trenutno implementirani grafici promene neke veličine na proizvoljnom mestu duž podužne ili poprečne ose ploče. Posebna pažnja je posvećena trodimenzionalnom predstavljanju rezultata. Primeri trodimenzionalne vizuelizacije za ugib i raspodelu momenata su prikazani na *Slici 3*.



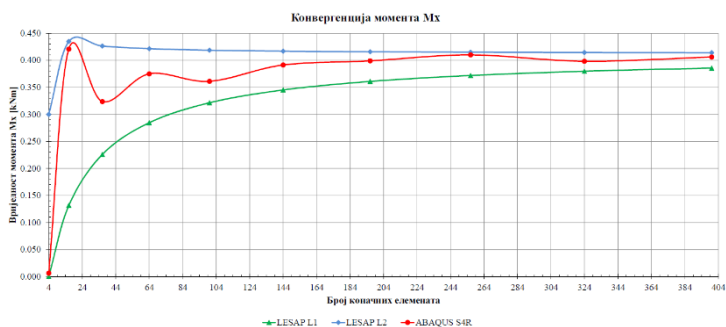
*Slika 3 – Primeri trodimenzionalne vizuelizacije u programskom kodu LESAP*

### 3.1 NUMERIČKI PRIMER 1

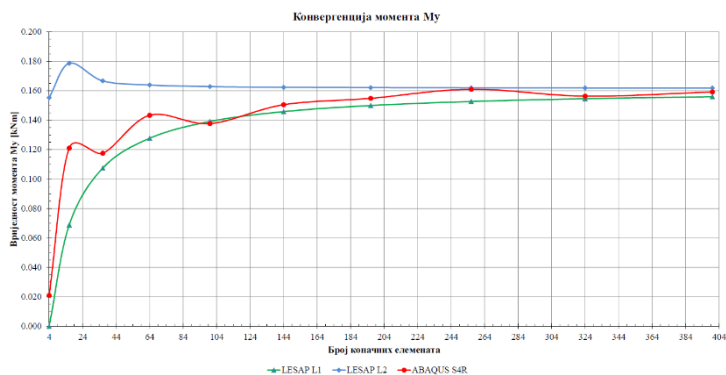
Prvi numerički primer obuhvata pravougaonu ploču uklještenu na svim stranama, dimenzija  $1 \times 2 \text{ m}$ . Ploča je opterećena jednako podeljenim opterećenjem intenziteta  $10 \text{ kN/m}^2$ . Odnos debljine ploče  $h$  i kraće stranice iznosi  $0.10$ . Posmatrane su konvergencije ugiba (*Slika 4*), momenata  $M_x$  (*Slika 5*) i momenata  $M_y$  (*Slika 6*).



Slika 4 – Konvergenција ugiba za pravougaonu ploču za različite tipove KE



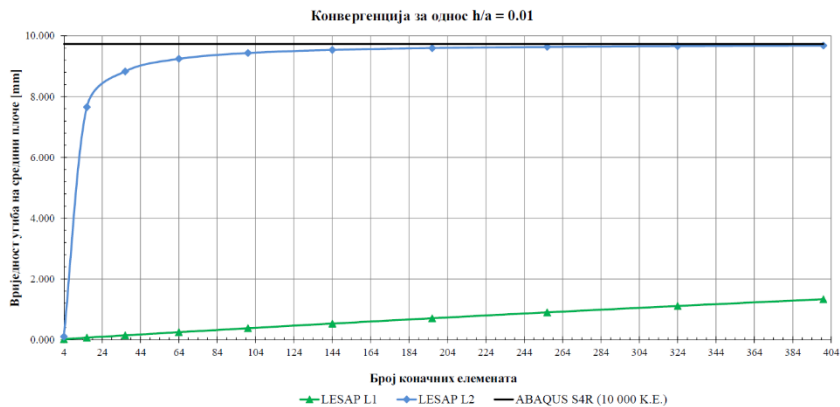
Slika 5 – Konvergenција momenta  $M_x$  za različite tipove KE



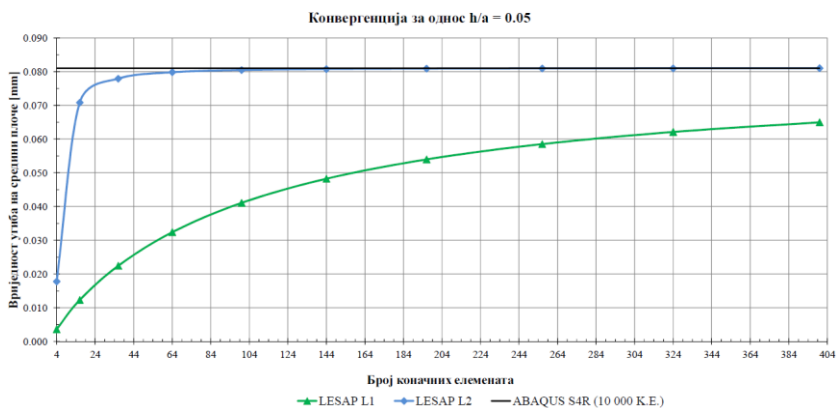
Slika 6 – Konvergenција momenta  $M_y$  za različite tipove KE

### 3.2 NUMERIČKI PRIMER 2

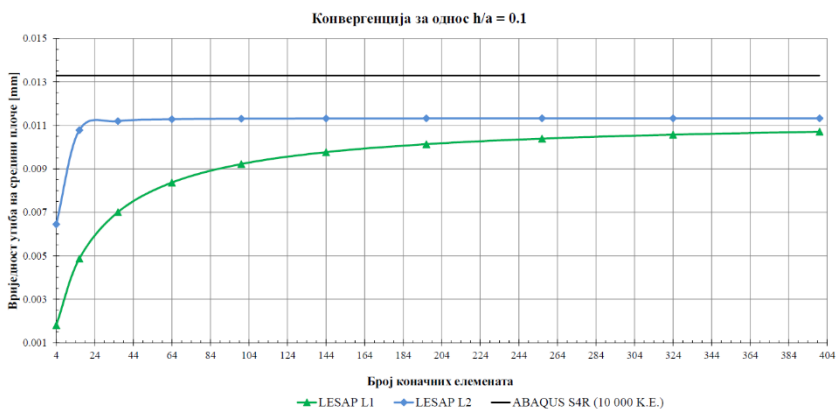
Sledeći numerički primer obuhvata kvadratnu ploču uklještenu na svim stranama, dimenzija  $2 \times 2 \text{ m}$ . Kao i u prethodnom primeru, ploča je opterećena jednako podeljenim opterećenjem intenziteta  $10 \text{ kN/m}^2$ . Razmatran je promenljiv odnos debljine ploče  $h$  i kraće stranice,  $h/a=0.01-0.25$ . Posmatrane su konvergenције ugiba za različite odnose debljine i dužine ploča prikazane na slikama u nastavku.



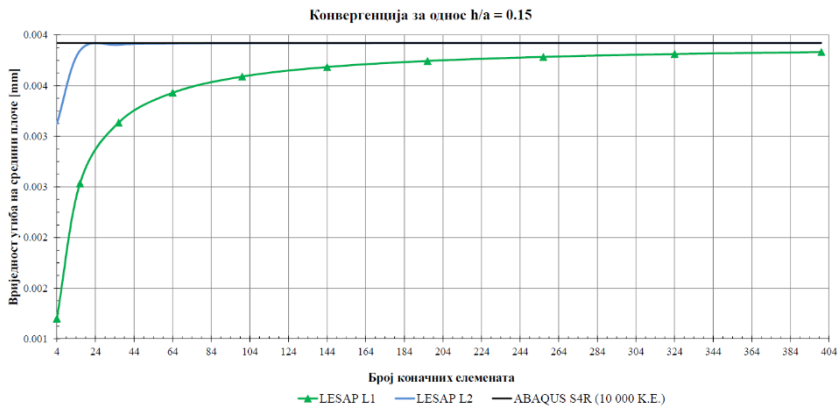
*Slika 7 – Konvergenција ugiba za  $h/a=0.01$*



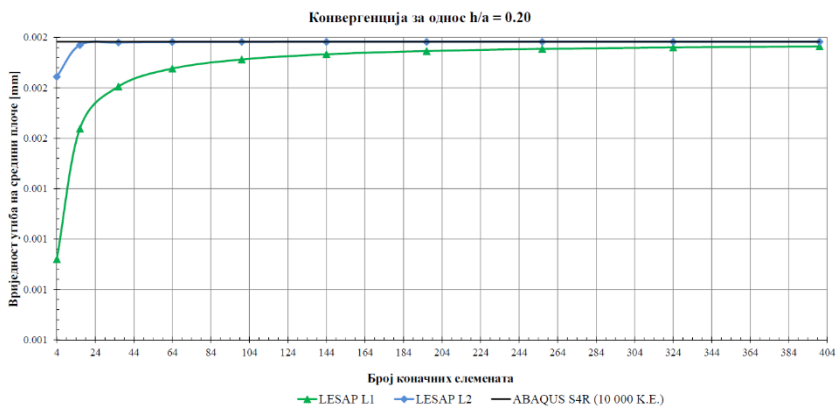
*Slika 8 - Konvergenција ugiba za  $h/a=0.05$*



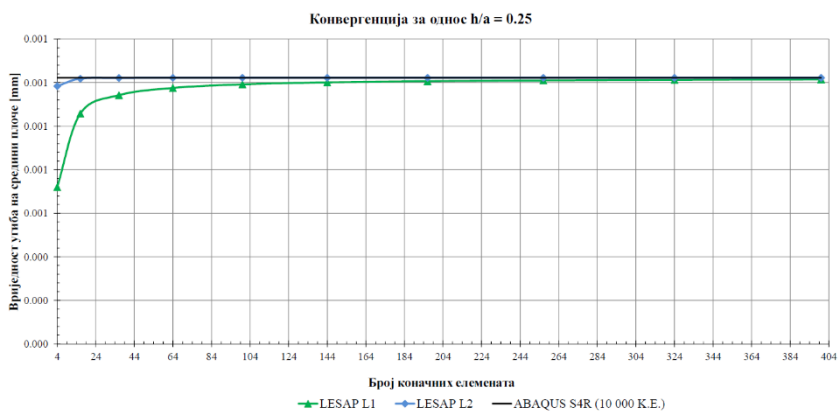
*Slika 9 - Konvergenција ugiba za  $h/a=0.10$*



*Slika 10 - Конвергенција угиба за  $h/a=0.15$*



*Slika 11 - Конвергенција угиба за  $h/a=0.20$*



*Slika 12 - Конвергенција угиба за  $h/a=0.25$*

## 4 ZAKLJUČAK

Iz prethodnih numeričkih primera može se videti da se upotrebom *Reissner-Mindlin*-ove teorije mogu uspešno rešiti problemi savijanja ploča pomoću MKE, kako za tanke tako i za debele ploče. Kod veoma tankih ploča, odnos  $h/a=0.01$  i  $h/a=0.05$  (Slika 7 i 8), neophodno je koristiti funkcije višeg reda ili neke druge postupke za eliminaciju fenomena *shear locking*-a. Drugim rečima, najvažniji korak pri proračunu veoma tankih ploča sa uključenom smičućom deformacijom je odabir tipa konačnog elementa. KE sa interpolacionim funkcijama višeg reda dosta brže i tačnije konvergira ka tačnom rešenju. Pored toga, posmatrajući grafike za slučaj debelih ploča, odnos  $h/a>0.15$ , može se primetiti da se tačno rešenje dostiže sa jako malo stepeni slobode, za oba tipa konačnih elemenata L1 i L2.

Na osnovu svega izloženog u radu može se konstatovati, da programski kod LESAP zadovoljava u pogledu konvergencije i tačnosti rezultata.

## LITERATURA

- [1] Đorđe Vuksanović, Branislav Pujević, *Teorija savijanja ploča - numeričke metode i računarski programi*, IP "Nauka", Beograd, 1997.
- [2] R. D. Mindlin, *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, 1951, str. 31–38.
- [3] E. Reissner, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, 1945, str. A68-77.
- [4] M. Sekulović, *Metod konačnih elemenata*, Građevinska knjiga, Beograd, 1988
- [5] K.J Bathe and E.N. Dvorkin, *A four-node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation*, Int J Numer Methods Engrg 21, 1985, str. 367-383.
- [6] J. C. Simo, R. L. Taylor, *A simple three dimensional model accounting for damage effects*, Rept. No. UCB/SESM/83-10 Department of Civil Engineering, University of California, Berkely, 1983
- [7] C. Tiago, V. M. A. Leitao, *Eliminating Shear-Locking in Meshless Methods: A Critical Overview and new Framework for Structural Theories*, Advances in Meshfree Techniques, Holandija, 2007, 123-145
- [8] J. Dolbow and T. Belytschko. *Volumetric locking in the element free Galerkin method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, str. 925-942
- [9] J. Y. Cho and S. N. Atluri, *Analysis of shear flexible beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, based on a locking-free formulation*. Engineering Computations, 2001, 215-240
- [10] O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, 3rd Edn. McGraw-Hill, London, 1977.
- [11] D.S. Malkus and T.J.R. Hughes, *Mixed finite element methods – Reduced and selective integration techniques: A unification of concepts*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1978, 63-81
- [12] Wolfram Research, Online: <http://reference.wolfram.com>. 2014
- [13] Karlsson & Sorensen: *ABAQUS/Standard Analysis User's Manual*. Incorporated Hibbit, 2007