

---

**DGKS**

---

**DRUŠTVO GRAĐEVINSKIH  
KONSTRUKTERA SRBIJE**

---

**14. KONGRES**

NOVI SAD  
24-26. SEPTEMBAR

**2014.**

**14**

**K**

**O**

**N**

**G**

**R**

**E**

**S**

**2014**

U SARADNJI SA:



**GRAĐEVINSKIM FAKULTETOM  
UNIVERZITETA U BEOGRADU**

**MINISTARSTVOM PROSVETE,  
NAUKE I TEHNOLOŠKOG RAZVOJA  
REPUBLIKE SRBIJE**



**INŽENJERSKOM KOMOROM  
SRBIJE**

**ZBORNİK  
RADOVA**



**CHINA ROAD AND BRIDGE  
CORPORATION SERBIA BRANCH**

Izdavač: **Društvo građevinskih konstruktora Srbije**  
Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73/1

Urednici: prof. dr **Miloš Lazović**  
prof. dr **Boško Stevanović**

Tehnička  
priprema: **Saška - Stoja Todorović**

Priprema za  
štampu: **Nebojša Ćosić**

Štampa: **DC Grafički centar**

Tiraž: **150 primeraka**

Beograd, septembar 2014.

## **ORGANIZACIONI ODBOR**

### **PREDSEDNIŠTVO DGKS**

Prof. dr Miloš LAZOVIĆ, dipl.inž.grad., predsednik  
Aleksandar BOJOVIĆ, dipl.inž.grad., potpredsednik  
Prof. dr Boško STEVANOVIĆ, dipl.inž.grad., sekretar  
Prof. dr Đorđe VUKSANOVIĆ, dipl.inž.grad.  
Prof. dr Mihajlo ĐURĐEVIĆ, dipl.inž.grad.  
Prof. dr Dragoslav STOJIC, dipl.inž.grad.  
Prof. dr Đorđe LADINOVIĆ, dipl.inž.grad.  
Prof. dr Snežana MARINKOVIĆ, dipl.inž.grad.  
Prof. dr Aleksandar RISTOVSKI, dipl.inž.grad.  
Doc. dr Bratislav STIPANIĆ, dipl.inž.grad.  
Dr Zoran FLORIĆ, dipl.inž.grad.  
Mr Slobodan GRKOVIĆ, dipl.inž.grad.  
Branko KNEŽEVIĆ, dipl.inž.grad.  
Gojko GRBIĆ, dipl.inž.grad.  
Goran VUKOBRATOVIĆ, dipl.inž.grad.  
Đorđe PAVKOV, dipl.inž.grad.  
Svetislav SIMOVIĆ, dipl.inž.grad.

### **ČLANOVI ORGANIZACIONOG ODBORA IZVAN PREDSEDNIŠTVA**

Prof. dr Zlatko MARKOVIĆ, dipl.inž. grad.  
Miroslav MIHAJLOVIĆ, dipl.inž.grad.  
Aleksandar TRAJKOVIĆ, dipl.inž.grad.

## **NAUČNO-STRUČNI ODBOR**

1. Prof. dr Radenko Pejović, Građevinski fakultet Podgorica, Crna Gora
2. Prof. dr Duško Lučić, Građevinski fakultet Podgorica, Crna Gora
3. Prof. dr Goran Markovski, Univerzitet "Kiril i Metodij" Gradežen fakultet, Skopje, Makedonija
4. Prof. dr Meri Cvetkovska, Univerzitet "Kiril i Metodij" Gradežen fakultet, Skopje, Makedonija
5. Prof. dr Tatjana Isaković, Univerzitet u Ljubljani Fakultet građevinarstva i geodezije, Ljubljana, Slovenija
6. Prof. dr Viktor Markelj, Ponting d.o.o., Maribor, Slovenija
7. Prof. dr Zlatko Šavor, Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, Zavod za konstrukcije, Katedra za mostove, Zagreb, Hrvatska
8. Prof. dr Radu Bancila, University "POLYTEHNICA", Temišvar, Rumunija
9. Mr Predrag Popović, Čikago, SAD
10. Prof. dr Kostadin Topurov, Sofija, Bugarska
11. Prof. dr Dušan Najdanović, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Beograd, Srbija
12. Prof. dr Miloš Lazović, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Beograd, Srbija
13. Prof. dr Đorđe Vuksanović, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Beograd, Srbija
14. Prof. dr Dejan Bajić, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Beograd, Srbija
15. Prof. dr Đorđe Ladinović, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Srbija
16. Prof. dr Dragoslav Stojčić, Arhitektonsko-građevinski fakultet, Niš, Srbija
17. Doc. dr Bratislav Stipanić, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, Beograd, Srbija

## **14. KONGRES JE ORGANIZOVAN U SARADNJI SA:**

GRAĐEVINSKIM FAKULTETOM UNIVERZITETA U  
BEOGRADU

MINISTARSTVOM PROSVETE, NAUKE I TEHNOLOŠKOG  
RAZVOJA REPUBLIKE SRBIJE

INŽENJERSKOM KOMOROM SRBIJE, Beograd

## **DONATORI SIMPOZIJUMA:**

### **DIJAMANTSKI**

CHINA ROAD & BRIDGE CORPORATION, SERBIA BRANCH,  
Belgrade

### **SREBRNI**

SIKA d.o.o., Novi Sad

### **BRONZANI**

"POTISJE KANJIŽA" AD, Kanjiža

*Selimir Lelović<sup>1</sup>*

## **STABILNOST GRANULARNOG MATERIJALA U TOKU ELASTO-PLASTIČNE DEFORMACIJE**

### ***Rezime:***

U radu je određeno kritično opterećenje granularnog materijala numeričkim postupkom korišćenjem algoritma za različite putanje napona. Konstitutivne jednačine za hijerarhijski model (hierarchical single surface model - HISS), su primenjene da bi se opisalo ponašanje granularnog materijala u toku deformacije. Rezultati dobijeni numeričkom analizom su upoređeni sa eksperimentalnim rezultatima za pesak (Leighton Buzzard Sand) u opitima: standardne triaksijalne kompresije (CTC) i zatezanja (TE). Razlike vrednosti kritičnih napona dobijenih numerički i eksperimentalno su za CTC test 6.2 % a za TE test 3.4%.

*Cljučne reči: stabilnost, površ tečenja, kritično opterećenje, numerička metoda*

## **STABILITY OF GRANULAR MATERIAL DURING ELASTO- PLASTIC DEFORMATION**

### ***Summary:***

Numerical method in determining critical stress in granular material using algorithm for different loading paths is presented. The constitutive relationships of the hierarchical single surface (HISS) model were used to describe the granular material during deformation. Critical stresses under applied triaxial compression and extension obtained numerically were compared with published results for Leighton Buzzard Sand in experiments of conventional triaxial compression (CTC) and triaxial extension (TE). Differences in numerical and experimental methods were for CTC test 6.2 % and for TE test 3.4%.

*Key words: Key words: stability, yield surface, critical loading, numerical method*

---

<sup>1</sup> dr Selimir V. Lelović, dipl.grad.inž., docent, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd, Srbija

## 1. UVOD

Problem stabilnosti geomehaničkih materijala za tačno utvrđenu geometriju, granične uslove i karakter opterećenja zahteva određivanje intervala parametara opterećenja pri kojem naponsko deformacijske veličine imaju konačne vrednosti. Sama reč stabilnost u ovom konceptu ima značenje kvazi-statičkog ponašanja materijala pri malim priraštajima deformacije. Potreban uslov za gubitak stabilnosti ponašanja materijala, gubitak jedinstvenosti rešenja i pojavu bifurkacije je promena znaka drugog izvoda funkcije rada [1-2]. S jedne strane Drucker-ov postulat [3] predviđa dovoljan uslov za stabilno ponašanje materijala, određena teorijska razmatranja ukazuju da je ovo možda samo potreban ali ne i dovoljan uslov [4]. Ponašanje materijala postaje nestabilno kada počinje da se gubi eliptičnost tangente matrice krutosti. Ovaj početak nestabilnog ponašanja materijala je vezan za tačku bifurkacije ili odstupanja od jedinstvenog rešenja na ravnotežnom putu [5-6]. Pojava lokalizovane deformacije je u klasičnom smislu diskontinuiteta obično povezana sa pojavom tačke bifurkacije. Klasični rezultati za elasto-plastični kontinuum izraženi preko kritične vrednosti modula ojačanja i odgovarajuća orijentacija trake klizanja ("shear band") prikazani su u radovima Hill, Rudnicki i Rice i Runesson[7-9]. U ovim radovima su definisani statički i kinematički uslovi za početak klizanja u granularnom materijalu. Matematički precizan kriterijum za određivanje položaja kritične tačke izveden iz generalnog razmatranja svojstvenih vrednosti tangentne matrice krutosti [10-15]. Ovako postavljen kriterijum za određivanje kritične tačke je vrlo pogodan sa stanovišta praktične primene. Ova metodologija je primenjena od strane velikog broja autora na granularne materijale s tim što su koristili Mohr-Coulomb-ov kriterijum kao funkciju tečenja. Valanis [16] je postavio pretpostavku da se gubitak stabilnosti ponašanja materijala treba povezati sa kritičnom tačkom u kojoj tenzor tangenti krutosti dobija vrednost jedinstvene nule (zero eigenvalue). Neilsen [17] je posmatrao gubitak eliptičnosti kao kriterijum koji pokazuje prvu tačku bifurkacije kao kinematički uslov za formiranje klizanja. U referenci [18] je dat veoma dobar pregled fenomena nestabilnosti u plastičnoj deformaciji granularnih materijala. U ovom radu, prvo su prikazana generalna razmatranja odnosa napon-deformacija i kriterijum za određivanje kritične tačke deformacije, zatim dva ilustrativna primera, poređenje dobijenih rezultata sa eksperimentalnim vrednostima i na kraju zaključak.

## 2. KONSTITUTIVNE JEDNAČINE

U teoriji plastičnosti se obično zanemaruju uticaji brzine deformacije i temperaturnog polja. Tako dobijena teorija zove se izotermička teorija plastičnosti. Ograničićemo naša razmatranja na izotermički process ( $T = \text{cons.} > 0$ ). Pomeranje tačke tela označićemo sa  $u(x)$ , gde su sa  $x$  označene pravougle Dekartove koordinate posmatrane tačke. Usvajajući pretpostavku o malim pomeranjima, tenzor deformacije se može napisati u obliku:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (1)$$

gde zarez označava parcijalni izvod po odgovarajućoj koordinati. Veza između napona i elastične deformacije je određena Hukovim zakonom. Funkcija plastičnog potencijala za izotropan materijal može se napisati u obliku:

$$f = f(\sigma, q) \quad (2)$$

gde  $q$  označava određenu unutrašnju promenljivu stanja materijala (tj. njen tenzor). Uslov tečenja  $f = f(\sigma, q) = 0$  definiše površ tečenja u  $(\sigma, q)$  prostoru. Neka  $Q$  označava izvod površi tečenja u odnosu na napon a  $R$  označava izvod u odnosu na unutrašnju promenljivu  $q$ :

$$Q(\sigma, q) = \frac{\partial f}{\partial \sigma}, R(\sigma, q) = \frac{\partial f}{\partial q} \quad (3)$$

Neka je  $P$  normala na površ tečenja koja označava pravac tečenja u odnosu na  $\sigma$ , onda ako je  $P = Q$  plastično tečenje se naziva asocijativno, dok za slučaj gde  $P \neq Q$  plastično tečenje se naziva ne-asocijativno. Plastični deo priraštaja deformacije je označen kao:

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda P(\sigma, q), \lambda > 0 \quad (4)$$

gde je  $\lambda$  arbitrarni faktor proporcionalnosti. Pozitivni znak za  $\lambda$  je usled činjenice da plastično tečenje uključuje gubitak energije. Tačka iznad promenljive označava puni izvod promenljive u odnosu na vreme, koji usled pretpostavke malih brzina, je isti kao i parcijalni izvod u odnosu na vreme. Efekti disipacije u materijalu koji prate deformaciju mogu se uzeti u obzir preko unutrašnje promenljive stanja. Brzina promene unutrašnje promenljive  $q$  je predstavljena sa nelinearnom funkcijom  $h$  koja sadrži  $\sigma$  i  $q$ ,

$$\dot{q} = \lambda h(\sigma, q) \quad (5)$$

Za infinitezimalne deformacije možemo izraziti tenzor deformacije kao zbir tenzora elastičnih i plastičnih deformacija:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (6)$$

gde indeks  $e$  označava elastičan deo, i indeks  $p$  označava plastičnu promenu u polju deformacija kada se unutrašnja koordinata  $q$  promeni u  $q + \dot{q}$ . Razmatrajući materijale kod kojih se konstitutivno ponašanje može idealizovati u segmentno-linearnoj formi:

$$\dot{\sigma} = L : \dot{\varepsilon} \quad (7)$$

gde je  $L$  konstitutivni tenzor materiala,  $(:)$  označava dijadu. Jedna forma konstitutivne jednačine (6) može se izraziti:

$$\dot{\sigma} = C : \left( \dot{\varepsilon} - \frac{1}{R \cdot h} P(Q : \dot{\sigma}) \right) \quad (8)$$

gde je  $C$  tenzor inkrementa modula elastičnosti,  $h$  je brzina promene ojačavanja ili omekšavanja. Desna strana jednačine (7) može se napisati u odnosu na  $\dot{\varepsilon}$ , i poređenjem sa jednačinom (6) dobija se sledeći odnos:

$$L = C - \frac{(C : P)(Q : C)}{Q : C : P - R \cdot h} \quad (9)$$

Ako se funkcija  $f$  može razviti u Tejlorov red do drugog stepena oko trenutnih vrednosti za deformaciju i plastične promenljive, onda se može dobiti sledeći izraz:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon + \dot{\varepsilon}^*, q + \dot{q}^*) &= f(\varepsilon, q) + \frac{\partial f}{\partial \sigma} : (L : \dot{\varepsilon}^*) + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q}^* + \\ &\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial \sigma} : (L : \dot{\varepsilon}^*) : (L : \dot{\varepsilon}^*) + \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial q} : (L : \dot{\varepsilon}^*) \cdot \dot{q}^* + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial q} \cdot \dot{q}^* \cdot \dot{q}^* \end{aligned} \quad (10)$$

gde su svi izvodi određeni na  $\varepsilon, q$ . Promene u  $\varepsilon + \dot{\varepsilon}^*$  mogu se posmatrati kao varijacije u  $\dot{\varepsilon}^*$ , gde je  $\dot{\varepsilon}^* = \varepsilon_{,u}(\delta u)$  prva promena u (nelinearnom) operatoru za deformaciju-pomeranje  $\varepsilon(u)$  u odnosu na  $u$ . Sledeće veličine su uvedene da bi se jednačina (10) pojednostavila:

$$T(\sigma, q) = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial \sigma}, U(\sigma, q) = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial q}, V(\sigma, q) = \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial q} \quad (11)$$

gde je  $T$  simetrični tenzor četvrtog stepena,  $U$  je simetrični tenzor drugog stepena a  $V$  je scalar. Sada, jednačina (10) ima sledeći oblik:

$$f = f + Q : (L : \dot{\varepsilon}^*) + R \cdot \dot{q}^* + 1/2 \cdot T : (L : \dot{\varepsilon}^*) : (L : \dot{\varepsilon}^*) + U : (L : \dot{\varepsilon}^*) \cdot \dot{q}^* + 1/2 \cdot V \cdot \dot{q}^* \cdot \dot{q}^* \quad (12)$$

Treći član u jednačini (12) se zove drugi osnovni kvadratni oblik površi tečenja.

### 3. ODREĐIVANJE KRITIČNE TAČKE

U analizi stabilnosti deformacije, određivanje kritične tačke je centralni problem.  $T, U, V$ , izrazi određeni relacijama (11), su koeficijenti druge osnovne kvadratne forme površi tečenja  $f = f(\sigma, q)$ . Izraz za normalnu krivinu posmatrane površi, možemo napisati u sledećem obliku:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{T : (L : \dot{\varepsilon}^*) : (L : \dot{\varepsilon}^*) + 2U : (L : \dot{\varepsilon}^*) \cdot \dot{q}^* + V \cdot \dot{q}^* \cdot \dot{q}^*}{\left[ Q : (L : \dot{\varepsilon}^*) + R \cdot \dot{q}^* \right]^2} \quad (13)$$

Znak normalne krivine zavisi samo od znaka brojioca izraza na desnoj strani gornje jednačine. U proučavanju znaka normalne krivine, prema tome, mogu nastupiti tri slučaja:

$$1. \quad \delta = U^2 - T \cdot V < 0. \quad (14)$$

Imenilac izraza na desnoj strani uvek je pozitivna veličina, jer predstavlja kvadrat. Tada je brojilac potpuni kvadrat i ne menja znak, tj. krivina opet ostaje stalnog znaka u svim pravcima, ali postoji jedan pravac u kome je krivina jednaka nuli. Ovakve tačke površine zovu se eliptične, a za površinu se kaže da u takvoj tački ima eliptičnu krivinu. Znak krive je uvek pozitivan i prema koeficijentu  $T$ .

$$2. \quad \delta = U^2 - T \cdot V = 0. \quad (15)$$

Brojilac ne menja znak i krivina normalnih preseka u svim pravcima ima isti znak, izuzev u tački gde je nula. Takve tačke površine zovu se paraboličke tačke.

$$3. \quad \delta = U^2 - T \cdot V > 0. \quad (16)$$

Brojilac menja znak, tj. u posmatranoj tački postoje glavne normale suprotnih smerova za normalne preseke raznih pravaca. Normalna krivina u istoj tački može u tom slučaju za razne pravce biti pozitivna i negativna, a postoje dva pravca u kojima je krivina nula. Takva tačka površi zove se hiperbolička, a površina u toj tački ima hiperboličku krivinu.

Zadatak stabilnosti je definisan preko oblasti dopustivih deformacija posmatranog elasto-plastičnog materijala. Sračunavanje diskretnih tačaka ravnotežne krive zajedno sa odgovarajućim vrednostima  $\delta$ , definisane gornjim izrazima, nailazimo i na tačku u kojoj dolazi do promene znaka ove veličine. Pri vrednosti funkcije  $\delta > 0$  relacija postaje i potreban i dovoljan uslov za stabilnost ravnotežnog položaja posmatranog sistema za vreme opterećenja.



#### 4. PRIMERI ZA ILUSTRACIJU

U ovom radu razmatrane su različite naponske putanje u trijaksijalnom opitu, za slučaj primene konstitutivnih jednačina HISS modela [14], za granularni materijal. Invarijante napona su uvedene prema sledećim izrazima (naponi i deformacije su pozitivni u kompresiji):

$$I_1 = \sigma_{kk}, I_{2d} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, I_{3d} = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \quad (17)$$

gde je  $I_1$  prva invarijanta napona a  $I_{2d}$  i  $I_{3d}$  su druga i treća invarijanta devijatora napona. U praktičnim proračunima često se primenjuje invarijanta koja se naziva oktaedarski smičući napon  $\tau_{oct}$  i dat je izrazom:  $\tau_{oct}^2 = 2/3 \cdot I_{2d}$ . Funkcija tečenja opšteg tipa [14],  $f$ , za asocijativnu plastičnost sa izotropnim ojačanjem je oblika:

$$f = p_a^{-2} I_{2d} - F_b \cdot F_s = 0 \quad (18a)$$

gde je

$$F_b = -\alpha \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^n + \gamma \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^2, F_s = (1 - \beta S_r)^m \quad (18b)$$

$S_r$  je odnos napona dat u obliku  $S_r = 3\sqrt{3}/2 I_{2d}^{-3/2} I_{3d}$ ,  $\alpha$  je funkcija ojačanja,  $\gamma$  i  $\beta$  su parametri materijala, a  $p_a$  je atmosferski pritisak.  $F_b$  je osnovna funkcija koja prikazuje oblik funkcije tečenja u prostoru  $I_1 - \sqrt{I_{2d}}$ , a  $F_s$  je funkcija oblika u oktaedarskoj ravni. Funkcija ojačanja je data izrazom

$$\alpha = a_1 \xi^{-\eta} \quad (19)$$

gde su  $a_1$  i  $\eta$  materijalni parametri za model izotropnog ojačanja,  $\xi$  je putanja plastične deformacije. Ukupna efektivna plastična deformacija,  $\xi$ , je definisana preko promene

$$\xi = \sqrt{p \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p} \quad (20)$$

gde se  $m = -0.5$  uzima za većinu (geotehničkih) materijala. Ovaj model uključuje osam materijalnih konstanti od kojih su dve elastične. Iz relacije (18) eksplicitni izraz za gradijent funkcije tečenja se dobija diferenciranjem kao što sledi

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = p_a^{-1} F_s \left[ n \alpha \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^{n-1} - 2\gamma \left( \frac{I_1}{p_a} \right) \right] \delta_{ij} + \left( p_a^{-2} - 3/2 m F_s^{\frac{m-1}{m}} F_b S_r I_{2d}^{-1} \right) S_{ij} + m F_s^{\frac{m-1}{m}} F_b A_{ij} \quad (21a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = -a_1 \eta \xi^{-(\eta+1)} \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^n F_s \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} &= p_a^{-2} F_s \left[ n(n-1) \alpha \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] \delta_{ij} \delta_{kl} + \\ &+ p_a^{-1} m F_s^{\frac{m-1}{m}} \left[ n \alpha \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^{n-1} - 2\gamma \left( \frac{I_1}{p_a} \right) \right] \cdot \left[ \frac{3}{2} S_r I_{2d}^{-1} (\delta_{ij} S_{kl} + S_{ij} \delta_{kl}) - (\delta_{ij} A_{kl} + A_{ij} \delta_{kl}) \right] + \\ &+ \frac{3}{4} m F_s^{\frac{m-1}{m}} F_b I_{2d}^{-1} \left\{ S_r I_{2d}^{-1} \left[ 5 - 3(m-1) F_s^{-\frac{1}{m}} S_r \right] S_{ij} S_{kl} + 2 \left( F_s^{-\frac{1}{m}} S_r - 1 \right) (S_{ij} A_{kl} + A_{ij} S_{kl}) \right\} - \\ &- m(m-1) F_s^{\frac{m-2}{m}} F_b A_{ij} A_{kl} + \left( p_a^{-2} - \frac{3}{2} m F_s^{\frac{m-1}{m}} F_b S_r I_{2d}^{-1} \right) \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \\ &+ \frac{3\sqrt{3}}{2} m F_s^{\frac{m-1}{m}} F_b \beta I_{2d}^{-\frac{3}{2}} \left[ \delta_{ik} S_{jl} + S_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} (S_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ij} S_{kl}) \right] \end{aligned} \quad (21c)$$

**Tabela I. Parametri za HISS model**

$E [MPa]$	$\nu$	$\beta$	$\gamma$	$n$	$a_1$	$\eta$	$m$
103.8	0.29	0.442	0.089	3	0.00018	0.85	-0.5

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \sigma_{ij}} = -a_1 \eta \xi^{-(\eta+1)} \left[ p_a^{-1} n \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^{n-1} F_s \delta_{ij} + \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^n m F_s \frac{m-1}{m} \left( \frac{3}{2} S_r I_{2d}^{-1} S_{ij} - A_{ij} \right) \right] \quad (21d)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = a_1 \eta (\eta+1) \xi^{-(\eta+2)} \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^n F_s, \quad A_{ij} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \beta I_{2d}^{-\frac{3}{2}} \left( S_{ik} S_{kj} - \frac{2}{3} I_{2d} \delta_{ij} \right) \quad (21f)$$

Ako sa  $\sigma_{xx}$  označimo aksijalni napon a sa  $\sigma_{yy}$  i  $\sigma_{zz}$  bočne napone onda ćemo odgovarajuće veze izraziti prema ovim oznakama. Materijal je prvo opterećen hidrostatičkim pritiskom od  $\sigma_0 = 90 [kPa]$ , pri atmosferskom pritisku  $p_a = 101 [kPa]$ . U ovom slučaju jednačina (15) postaje

$$\bar{\delta} = 2\gamma \left[ n^2 \frac{\eta}{\eta+1} + n(n-1) - 1 \right] \quad (22)$$

Materijalne konstante za pesak (Leighton Buzzard Sand) [19] su date u Tabeli I.

**Ilustracija # 1:** Konvencionalni trijaksijalni pritisak (CTC). Za stanje CTC komponentalni naponi i devijator napona su dati sledećim izrazima

$$\sigma^{CTC} = \begin{bmatrix} \sigma_0 + \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}, \quad S^{CTC} = \frac{\sigma_{xx}}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Uvodeći jednačinu (23) u (21) i zamenjujući u (15), dobija se sledeći izraz:

$$\delta = (1-2k)^2 n^2 \frac{p_a^{-2} a_1^2 \eta^2 \xi^{-2(\eta+1)}}{(1-\beta)} \left( \frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{2(n-1)} + \frac{p_a^{-2} a_1 \eta (\eta+1) \xi^{-(\eta+2)}}{(1-\beta)} \left( \frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^n \cdot \left\{ \left[ \frac{2\sqrt{1-\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left( \frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] - 4k \left[ -\frac{\sqrt{1-\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left( \frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] + 2k^2 \left[ \frac{\sqrt{1-\beta}}{3} + 2n(n-1) \alpha \left( \frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 4\gamma \right] \right\} \quad (24a)$$

gde je:

$$k = \frac{\left[ (c_1^2 + 1/3 c_1 - 2/9) - \nu c_2 \right] \cdot \left\{ \left[ 2c_1^2 + 2/3 \cdot c_1 + \frac{5-4\nu}{9(1+\nu)} \right] + (1-\nu) c_2 \right\}}{\left[ (c_1 + 2/3)^2 + c_2 \right] \cdot \left[ 2(c_1 - 1/3)^2 + (1-\nu) c_2 \right]} \quad (24b)$$

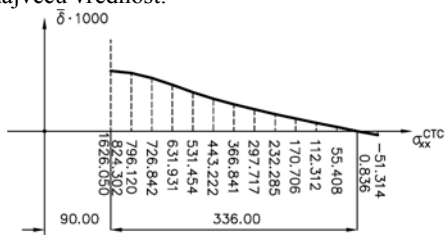
$$c_1 = \left( \frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}} + 1 \right) \left[ n \alpha \left( \frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \quad (24c)$$

$$c_2 = \frac{a_1 \eta p_a^2}{\xi^{(\eta+1)} E \sigma_{xx}} \left( \frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^n \cdot \sqrt{\left( \frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}} + 1 \right)^2 \left[ n \alpha \left( \frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right]^2 \frac{3}{(1-\beta)^3} + \frac{2}{3(1-\beta)}} \quad (24d)$$

Nakon nekoliko jednostavnih transformacija jednačina (24) se može prikazati u formi

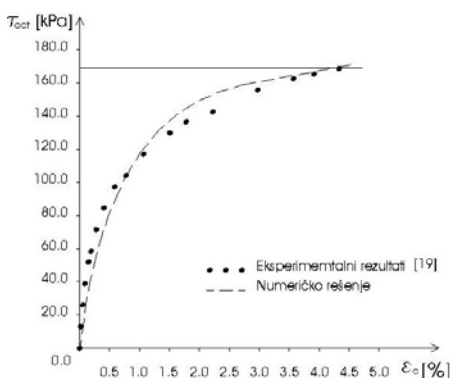
$$\bar{\delta} = \left[ n^2 \frac{\eta}{\eta+1} + n(n-1) \right] \alpha \left( \frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma + \left( \frac{1+k}{1-2k} \right)^2 \frac{2\sqrt{1-\beta}}{3} = 0 \quad (25)$$

Rešenje karakteristične jednačine stabilnosti (25) je prikazano na Slici 1. Najnepovoljnije ravni u pogledu kritičnog naponskog stanja biće one kod kojih ugao između totalnog napona i normale na ravan ima najveću vrednost.



Slika 1. Konvencionalna trijaksijalna kompresija - rešenje jednačine stabilnosti

Kao što se vidi sa dijagrama, nagib krive je negativan ali je vrednost  $\bar{\delta}$  pozitivna (uslov dat izrazom (16)) i postoji ravnomernost u opadanju u tom pravcu ka vrednosti gde je krivina jednaka nuli. U tački gde je  $\bar{\delta} = 0$  (15), ta tačka površine je nazvana parabolika. Na osnovu prikazanog dijagrama jasno se vidi da je kritična vrednost sračunata numeričkim postupkom  $\sigma_{xx}^{CTC} = 336$  [kPa]. Eksperimentalni podaci su prikazani na Slici 2. (na osnovu podataka objavljenih u Referenci 19).



Slika 2. Poređenje eksperimentalnih i numeričkih rezultata za CTC test.

Iz priloženih podataka se vidi da je kritična vrednost oktaedarskog napona smicanja  $\tau_{oct}^{CTC} = 168,90$  [kPa], odnosno, koristeći izraz (17a), može se odrediti vrednost kritičnog normalnog napona  $\sigma_{xx}^{CTC} = 358,30$  [kPa].

**Ilustracija # 2:** Test trijaksijalne ekstenzije (TE). Za stanje TE komponentalni naponi i devijator napona su dati sledećim izrazima

$$\sigma^{\text{TE}} = \begin{bmatrix} \sigma_0 - \sigma_{\text{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 + \sigma_{\text{xx}}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 + \sigma_{\text{xx}}/2 \end{bmatrix} \quad S^{\text{TE}} = \frac{\sigma_{\text{xx}}}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Uvođenjem jednačine (26) u (21) i zamenom u jednačinu (15), dobija se:

$$\delta = (1-2k)^2 n^2 \frac{p_a^{-2} a_1^2 \eta^2 \xi^{-2(\eta+1)}}{(1+\beta)} \left( \frac{3\sigma_0 - \sigma_{\text{xx}}}{p_a} \right)^{2(n-1)} + \frac{p_a^{-2} a_1 \eta (\eta+1) \xi^{-(\eta+2)}}{(1+\beta)} \left( \frac{3\sigma_0 - \sigma_{\text{xx}}}{p_a} \right)^n \cdot \left\{ \left[ \frac{2\sqrt{1+\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left( \frac{3\sigma_0 - \sigma_{\text{xx}}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] - 4k \left[ -\frac{\sqrt{1+\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left( \frac{3\sigma_0 - \sigma_{\text{xx}}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] + 2k^2 \left[ \frac{\sqrt{1+\beta}}{3} + 2n(n-1) \alpha \left( \frac{3\sigma_0 - \sigma_{\text{xx}}}{p_a} \right)^{n-2} - 4\gamma \right] \right\} \quad (27a)$$

gde je:

$$k = \frac{\left[ \left( c_1^2 - \frac{1}{3} c_1 - \frac{2}{9} \right) - v c_2 \right] \cdot \left\{ \left[ 2c_1^2 - \frac{2}{3} c_1 + \frac{5-4v}{9(1+v)} \right] + (1-v) c_2 \right\}}{\left[ \left( c_1 - \frac{2}{3} \right)^2 + c_2 \right] \cdot \left[ 2 \left( c_1 + \frac{1}{3} \right)^2 + (1-v) c_2 \right]} \quad (27b)$$

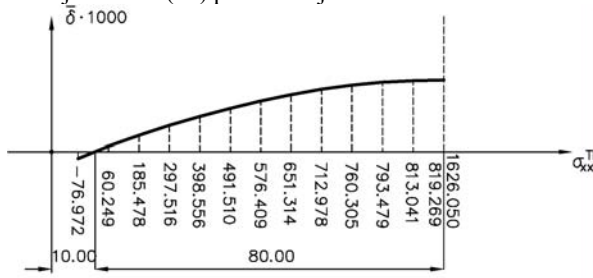
$$c_1 = \left( \frac{3\sigma_0}{\sigma_{\text{xx}}} - 1 \right) \left[ n \alpha \left( \frac{3\sigma_0 - \sigma_{\text{xx}}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \quad (27c)$$

$$c_2 = \frac{a_1 \eta p_a^2}{\xi^{(\eta+1)} E \sigma_{\text{xx}}} \left( \frac{3\sigma_0 - \sigma_{\text{xx}}}{p_a} \right)^n \cdot \sqrt{\left( \frac{3\sigma_0}{\sigma_{\text{xx}}} - 1 \right)^2 \left[ n \alpha \left( \frac{3\sigma_0 - \sigma_{\text{xx}}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right]^2 \frac{3}{(1+\beta)^3} + \frac{2}{3(1+\beta)}} \quad (27d)$$

Nakon nekoliko jednostavnih transformacija (28) se može napisati u formi:

$$\bar{\delta} = \left[ n^2 \frac{\eta}{\eta+1} + n(n-1) \right] \alpha \left( \frac{3\sigma_0 - \sigma_{\text{xx}}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma + \left( \frac{1+k}{1-2k} \right)^2 \frac{2\sqrt{1+\beta}}{3} = 0 \quad (28)$$

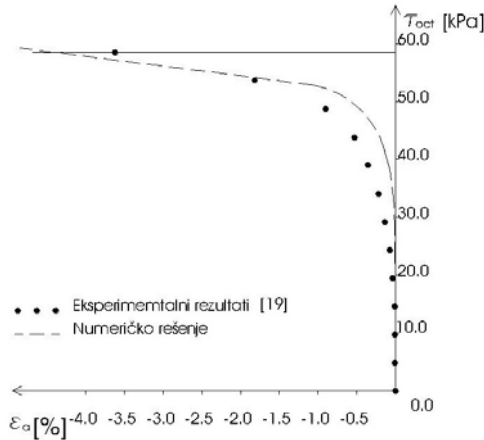
Rešenje karakteristične jednačine (28) prikazano je na Slici 3.



Slika 3. Primer trijaksijale ekstenzije - Rešenje jednačine stabilnosti.

Kao što se vidi sa dijagrama, nagib krive je pozitivan (uslov dat izrazom  $\delta = U^2 - T \cdot V > 0$ ). Na osnovu prikazanog dijagram se jasno vidi da je numerički sračunata kritična vrednost  $\sigma_{\text{xx}}^{\text{TE}} = 80$  [kPa]. Eksperimentalni podaci su prikazani na Slici 4. (na osnovu Refer. 19). Iz

priloženih podataka se vidi da je kritična vrednost oktaedarskog napona smicanja  $\tau_{oct}^{TE} = 58,54 \text{ [kPa]}$ , odnosno, korišćenjem izraza (17a), može se odrediti vrednost kritičnog normalnog napona  $\sigma_{xx}^{TE} = 82,80 \text{ [kPa]}$ .



Slika 4. Poređenje eksperimentalnih i numeričkih rezultata za TE test.

## 5. ANALIZA REZULTATA

Očigledno je da postoji dobro slaganje između rezultata dobijenih numeričkom analizom i eksperimentalnih rezultata. Razlika između predviđene vrednosti za TE test je samo 3.4 % dok je za CTC razlika 6.2 %. Prikazan numerički kriterijum za određivanje kritične tačke je pogodan sa stanovišta praktične primene za analizu stabilnosti deformacije geomehničkih materijala u zavisnosti od geometrije, graničnih uslova i karaktera opterećenja. Klasični rezultati prikazani u radovima Hill, Rudnicki i Rice [8-9] idu i korak dalje i definišu ugao linije nestabilnosti tečenja. Ugao linije nestabilnosti tečenja možda se može i zamisliti kao ugao analogan lokalizovanju plastične deformacije i pojavi vrata u testu zatezanja u metalnim uzorcima. Međutim, takva analogija primenjena na granularne materijale ne može se funkcionalno povezati sa uglom unutrašnjeg trenja u Mohr-Coulomb-ovom kriterijumu tečenja. U ovom radu ugao linije nestabilnosti tečenja, kao parameter od interesa, nije definisan.

## 6. ZAKLJUČAK

Analiza uslova stabilnosti za granularni material je prikazana. Rezultati dobijeni numeričkom analizom korišćenjem HISS konstitutivnog modela su upoređeni sa publikovanim dijagramima za pesak (Leighton Buzzard Sand) u eksperimentalnim uslovima trijaksijalne kompresije i zatezanja. Vrednosti za kritični napon u numeričkom testu su za 3-6 % niže u odnosu na odgovarajući eksperimentalni test. Nedovoljno široka primena HISS modela možda proističe iz potrebe za relativno velikim broj materijalnih parametara (osam) i njihova ograničena zastupljenost u literaturi.

## LITERATURA

- [1] Hill, R., *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford (1950)
- [2] Drucker, D.C., "Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity", *Quarterly of Applied Math.*, 7(4), pp 411-418 (1950)
- [3] Drucker, D.C., "A Definition of Stable Inelastic Material", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 26, pp 106-112 (1959)
- [4] Mroz, Z., "Nonassociated flow laws in plasticity", *J. de Mech.*, 2(1), pp 21-42 (1963)
- [5] Mandel, J., "Conditions de Stabilité et Postulat de Drucker", *Proc. IUTAM Symp. Rheology and Soil Mechanics*, Grenoble (Ed. Kravtchenko, J. and Sirieys, P.M.), pp 57-58, (1964)
- [6] Fung, Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice Hall, New Jersey (1965)
- [7] Rice, J.R., "Plasticity in Soil Mechanics", *Proceedings of the Symposium on the Role of Plasticity in Soil Mechanics* (Ed. A.C. Palmer), 263, Depart. of Engineering, University of Cambridge (1973)
- [8] Rudnicki, J.W., and Rice, J.R., "Conditions for the Localization of Deformation in Pressure-Sensitive Dilatant Materials", *J.Mech.Phys.Solids*, 23, pp 371-394 (1975)
- [9] Rice, J.R., "The Localization of Plastic Deformation", *Proc. 14th Int. Cong. Theoretical and Appl. Mech.*, Delft (Ed. W.T. Koiter), 1, pp 207-220, Delft, Amsterdam (1976).
- [10] Vardoulakis, I., "Shear band Inclination and Shear Modulus of Sand in Biaxial Tests", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 4(2), pp 103-121 (1980)
- [11] Lelović, S., "Konstitutivne jednačine za pesak i njihova primena pri numeričkoj analizi ponašanja trakastog temelja", Doktorska disertacija, *Građevinski Fakultet Univerziteta u Beogradu*, (2012)
- [12] Molenkamp, F., "Comparison of frictional material models with respect to shear band initiation", *Geotechnique*, 35, pp 127-143 (1985)
- [13] Dinkler, D., and Kröplin, B., "Global constraints applied to static instability analysis", *Third Int. Conf. Num. Methods for Non-linear Problems*, 1, pp 41-60, Dubrovnik (1986)
- [14] Desai, C.S., Somasundaram, S. and G. Frantziskonis, G. "A hierarchical approach for constitutive modeling of geological materials", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 10(3), pp 225-257, (1987)
- [15] Borst, de R., "Bifurcations in Finite Elements Models with a Non-associated Flow Law", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 12(1), pp 99-117 (1988)
- [16] Valanis, K.C., "Banding and Stability in Plastic Materials", *Acata Mechanica*, 79, pp 113-141 (1988)
- [17] Neilsen, M.K. and Schreyer H. L., "Bifurcations in elastic-plastic materials", *Int. J. Solids. Struct.*, 30, pp 521-544 (1993)
- [18] Tomita, Y., "Simulations of plastic instabilities in solid mechanics", *Appl. Mech. Rev.*, 47(6), pp 171-205 (1994)
- [19] Desai, C.S., "Notes for Advanced School-Numerical Methods in Geomechanics Including Modelling", Udine, Italy, July 10-14, (1989)