

## ТЕОРИЈА ШТАПА У SPLINE ПАРАМЕТАРСКОЈ КООРДИНАТИ – II ДЕО: ПРИМЕРИ

Глигор Раденковић<sup>1</sup>

Саша Ковачевић<sup>2</sup>

УДК: 624.071.32/.34:519.6

DOI: 10.14415/konferencijaGFS2014.056

**Резиме:** Бернули-Ојлерова и Тимошенкова теорија произвољног криволинијског штапа изведена је у систему NURBS параметарских координата и детаљно приказана у књизи [1]. Матрице крутости коначних елемената и целокупних структура испрограмиране су у софтверском пакету Mathematica. Формулисан је читав спектар изогеометријских Бернули-Ојлерових гредних елемената почев од континуитета  $C1$  па до произвољног континуитета  $Cp-1$ , где је  $p$  степен рационалне NURBS функције. Добијени резултати за одређен број примера који укључују тачност, конвергенцију и брзину конвергенције решења упоређени су са резултатима који следе из програмског пакета ABAQUS.

**Кључне речи:** Изогеометријски коначни елемент, NURBS, Бернули-Ојлеров гредни елемент, Тимошенков гредни елемент, континуитет, конвергенција, Wolfram Mathematica

### 1. УВОД

У складу са изведеном теоријом из првог дела рада формиран је рачунарски код за прорачун носача у spline параметарским координатама. Анализирана су два различита носача. Добијени резултати су поређени са комерцијалним софтвером ABAQUS 6.10. Бернули-Ојлерови гредни елементи моделирани су у ABAQUS-у користећи елементе B23 са два чвора и кубном интерполацијом.

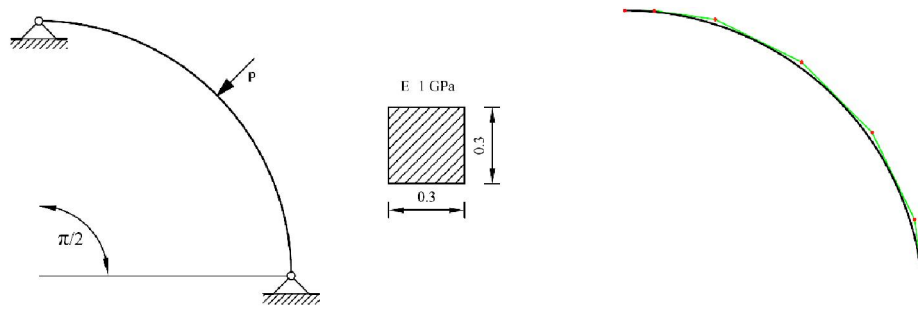
### 2. ПРИМЕР 1

Посматра се кружни штап полупречника  $r=2$  m статичког система и геометријских карактеристика приказаних као на слици 1. Такође, на слици 1 приказана је почетна геометрија и полигон контролних тачака за 5 кубних елемената континуитета  $C^2$  односно, са укупно 8 контролних тачака. Оригинална геометрија кружнице егзактно је представљена квадраним рационалним spline-ом (NURBS)

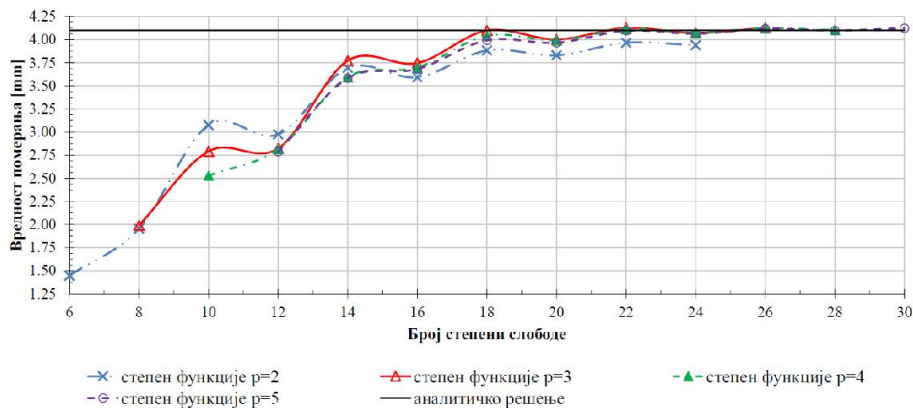
<sup>1</sup> Глигор Раденковић, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Булевар краља Александра 73, Република Србија

<sup>2</sup> Саша Ковачевић, Булевар Војводе Степе Степановића 124, Бања Лука, Република Српска, е – mail: [sasakovacevic988@gmail.com](mailto:sasakovacevic988@gmail.com)

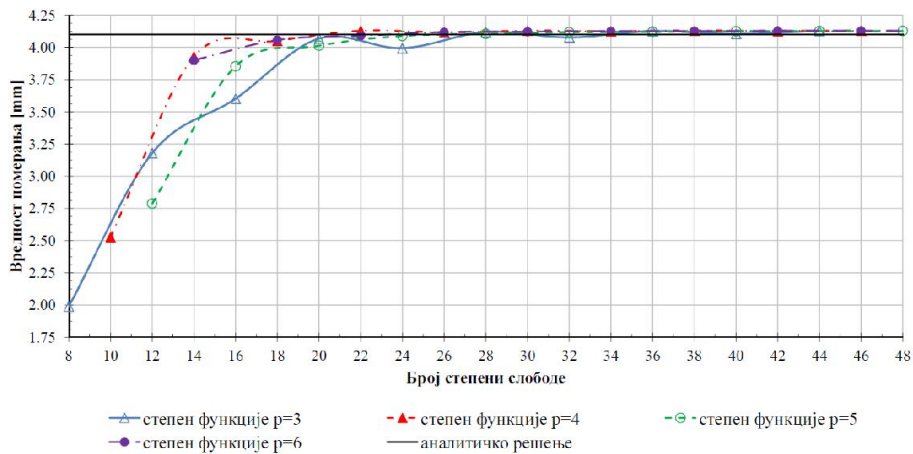
[1,2]. За вредност силе  $P=100$  kN посматрана је конвергенција вертикалног померања на месту силе. Резултати су упоређени аналитичким решењем и резултатима добијеним програмом ABAQUS. Аналитичко решење добијено је коришћењем теорије изведене за кружни штап у [3]. Конвергенција је приказана у зависности од броја степени слободе и различитих мултиплицирета, слика 2 и слика 3, као и по елементима у зависности од степена функције, слика 4.



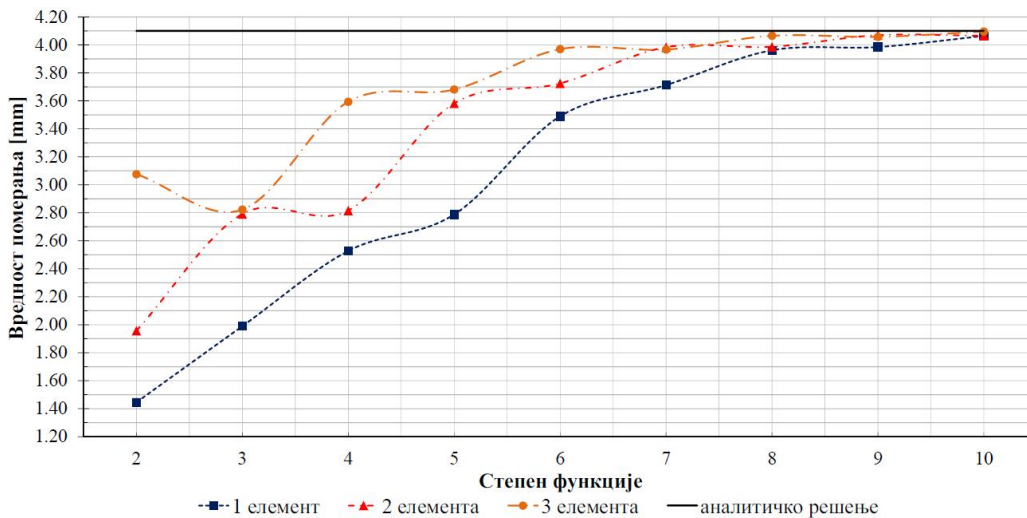
Слика 1. Почетна геометрија носача и полигон контролних тачака



Слика 2. Конвергенција померања за мултиплицирета  $j=1$

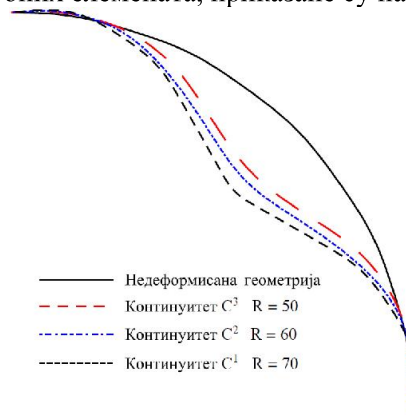


Слика 3. Конвергенција померања за мултиплицирета  $j=2$



Слика 4. Конвергенција померања по елементима

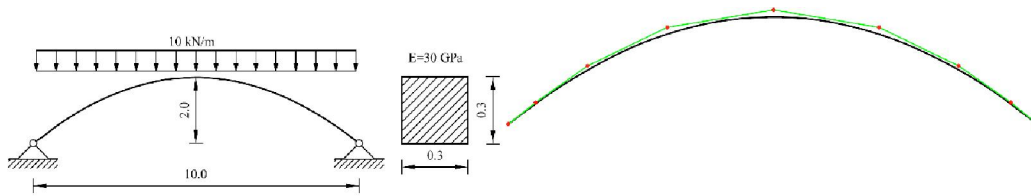
Недеформисана и деформисана геометрија са различитим континуитетима између елемената, за случај 5 кубних елемената, приказане су на слици 5.



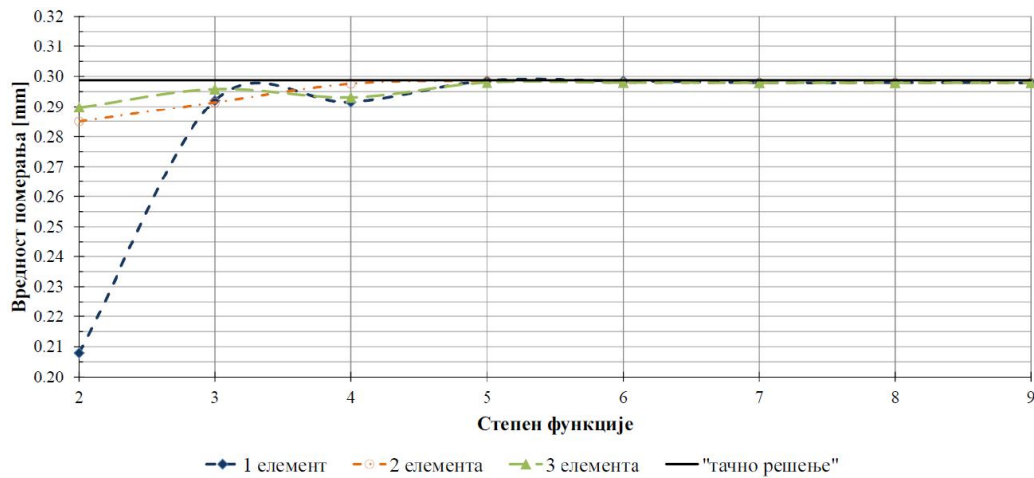
Слика 5. Недеформисана и деформисана геометрија

### 3. ПРИМЕР 2

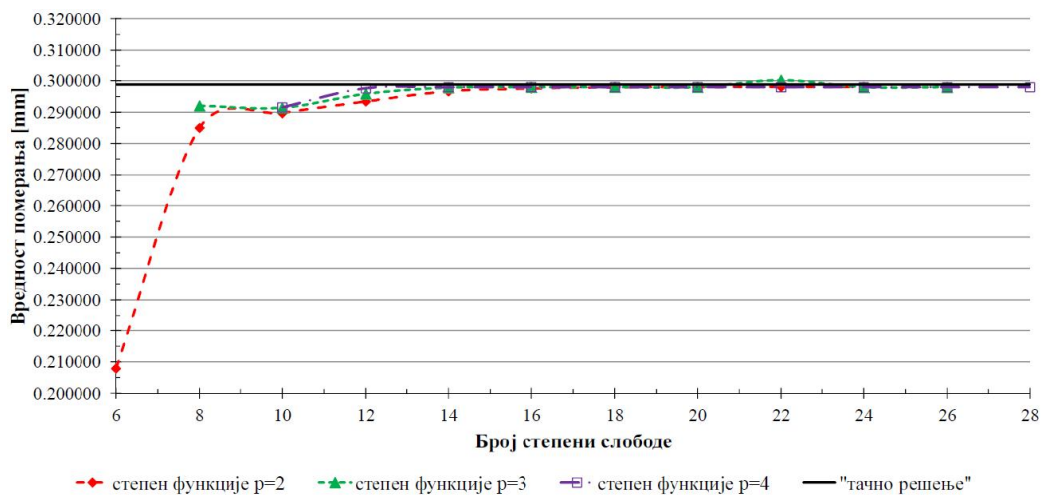
Анализира се квадратна парабола са стрелом  $f=2,0$  m и укупном дужином  $l=10$  m оптерећена гравитационим оптерећењем интензитета  $10$  kN/m. Геометријске карактеристике, почетна геометрија и полигон контролних тачака за 5 кварталних елемената континуитета  $C^3$  приказани су на слици 6. Конвергенције померања по елементима и по броју степени слободe за мултиплицитет  $j=1$  приказане су на слици 7 и 8.



Слика 6. Геометрија носача и полигон контролних сила



Слика 7. Конвергенција померања по елементима



Слика 8. Конвергенција померања за мултиплицитет  $j=1$

#### 4. ЗАКЉУЧАК

На основу претходних нумеричких примера може се приметити да се тачност решења достиже са мало степени слободе. У случају првог примера тачност решење се постиже са 22 степена слободе, за степене функције веће од 2, односно са свега 13 контролних тачака. Исто решење се постиже са 252 В23 коначна елемента у случају софтверског пакета ABAQUS. Такође, може се приметити да се тачност решења може постићи и са мање степени слободе смањивањем континуитета између елемената. Осим тога, пример 1 показује да се кружни штап може моделирати у spline параметарским координатама са свега једним елементом 10-им степеном функције и да се оствари тачно решење, док се у другом примеру решење постиже са једним елементом 5-им степеном функције.

Посматрајући графике конвергенција може се приметити да оба примера показују велике осцилације при конвергенцији резултата у случају малог броја степени слободе. На основу тога може се видети да за парне степене функције и непаран број елемената резултати расту док за паран број елемената опадају. И обрнуто за непарне степене функције.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Раденковић, Г.: *Изогеометријска теорија носача*, монографија у штампи, Београд, 2014.
- [2] Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Bazilevs, Y.: *Isogeometric Analysis, Toward Integration of CAD and FEA*, Wiley, 2009.
- [3] Раденковић, Г.: *Статика линијских носача*, Грађевинска књига, Београд, 2011.

### BEAM THEORY IN SPLINE PARAMETRIC COORDINATE – PART II : EXAMPLES

**Summary:** *The Bernoulli–Euler and Timoshenko’s theory of arbitrary curved beam is derived in the system of NURBS parametric coordinates and detailed in the book [1]. The stiffness matrix of finite elements and overall structure are programmed in the software package Mathematica. A range of isogeometric Bernoulli–Euler beam elements is formulated, starting with C1 up to arbitrarily continuity  $C_{p-1}$ , where  $p$  is the degree of rational NURBS function. The results obtained in a number of examples that include accuracy, convergence and convergence speed of solutions were compared with the results obtained from the software package ABAQUS.*

**Keywords:** *Isogeometric finite element, NURBS, Bernoulli–Euler beam element, Timoshenko’s beam element, continuity, convergence, Wolfram Mathematica.*