



PD 16266



003109470

COBISS •

UNIVERSITET U BEOGRADU
INGENJERSKI FAKULTET

Dragan Č. Lukić

PRILOG METODAMA DEKUPISANJA NAPONSKOG STANJA
OKO ŠUPLJINE OBLIKA ORETNOG ELIPSOIDA PRIMENOM
ELIPTIČNIH KOORDINATA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Beograd, 1998. god.

PA 16266



Univerzitet u Beogradu
Građevinski fakultet

Dragan Č. Lukić

Prilog metodama definisanja naponskog stanja
oko šupljine oblika obrtnog elipsoida primenom
eliptičnih koordinata



- doktorska disertacija -

Beograd, 1998

УНИВЕРЗИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА
СВЕТОЗАР МАРКОВИЋ - БЕОГРАД
И. Бр. 109470

22221 D9



Predgovor

Pri izradi doktorske disertacije konsultovan je veći broj specijalista matematičke struke kao i specijalista odseka za mehaniku. Čini mi zadovoljstvo da im se zahvalim na korisnim diskusijama.

Posebno se zahvaljujem mentoru *prof.dr. Petru Anagnostiju* na podršci i podsticaju koje mi je pružio.

Prilog metodama definisanja naponskog stanja oko šupljine oblika obrtnog elipsoida primenom eliptičnih koordinata

Rezime

U radu se izlažu rezultati analize prostornih naponskih stanja u izotropnoj, homogenoj kvazielastičnoj stenskoj masi oko sferne šupljine, šupljine cilindričnog oblika i šupljine oblika obrtnog elipsoida.

Prvo poglavlje sadrži osnove za istraživanje prostornih problema teorije elastičnog ponašanja čvrstih tela.

U drugom poglavlju se prikazuju matematičke osnove za predmetno istraživanje, a treće i četvrto poglavlje su posvećena naponskim stanjima oko otvora oblika sfere odnosno cilindra, i kojima se prikazuju i analiziraju dosadašnja istraživanja.

U petom poglavlju se izlaže osnovni sadržaj teze i pri tome se polazi od osnovnih relacija teorije elastičnosti u eliptičnom sistemu koordinata. Rešenjem osnovne jednačine $\nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0$ dobija se naponsko stanje oko šupljine oblika izduženog elipsoida za granične uslove neopterećene i delimično opterećene konture, kao originalni doprinos autora ovom problemu.

U šestom poglavlju se prikazuje računaska implementacija izvedenog analitičkog rešenja. Prikazani su numerički primeri koji ilustruju primenu analitičkih postupaka i izvršeno je poređenje sa rezultatima koji su dostupni u literaturi.

Poslednje, sedmo poglavlje teze sadrži zaključna razmatranja.

ključne reči: kvazielastična stenska masa, eliptični sistem koordinata, prostorno naponsko stanje, šupljina, izduženi obrtni elipsoid

A Contribution to the methods of defining the state of stress around the cavity in the shape of an ellipsoid of revolution by application of elliptical coordinates

Summary

The thesis is presenting the results of the analysis of the state of stress in homogeneous quasi-elastic rock media around cavities in the shape of a sphere, cylinder and ellipsoid of revolution.

The first chapter reviews the basic relations of the three-dimensional problems of the elastic behaviour of solid deformable bodies.

The second chapter gives briefly the mathematical basis of the considered research, while the third and the fourth chapters treat the current state of the art related to the stress analysis of elastic media around the spherical and cylindrical cavities.

The fifth chapter represents the main consideration of the thesis. The starting point are the basic equations of the theory of elasticity presented in the elliptical coordinates. The main and original contribution of the author is the obtained solution of the basic equation $\nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0$ and the corresponding stress field around the cavity in the shape of elongated ellipsoid of revolution. The solution is obtained for the boundary conditions that correspond to the cases of unloaded and partially loaded cavity surface.

The sixth chapter is presenting the computer implementation of derived analytical solution. The numerical examples that illustrate the procedure are also given and are compared with some results that may be found in the literature.

The last, seventh chapter represents the concluding analysis and remarks.

Key words: theory of elasticity, elliptical coordinates, spatial stress field, cavity, elongated ellipsoid of revolution

Sadržaj

0.1	UVOD	1
1	PROSTORNI PROBLEMI TEORIJE ELASTIČNOSTI	7
1.1	Osnovne jednačine	8
1.2	Naponske funkcije	9
2	MATEMATIČKE OSNOVE ISTRAŽIVANJA	11
2.1	Eliptični koordinatni sistem	11
2.2	Harmonijske funkcije	18
2.3	Ležandrove funkcije	19
2.4	Razvijanje funkcije u red preko Ležandrovih polinoma	22
3	NAPONSKO STANJE - SFERNA ŠUPLJINA	23
3.1	Primarno naponsko stanje	24
3.2	Rešenje diferencijalne jednačine	26
3.3	Koordinate tenzora napona	27
3.4	Granični uslovi. Odredjivanje konstanti	28
4	NAPONSKO STANJE - CILINDRIČNI OTVOR	33
4.1	Primarno naponsko stanje	34
4.2	Izrazi za napone preko naponske funkcije	35
4.3	Rešenje diferencijalne jednačine	36
4.4	Granični uslovi. Odredjivanje konstanti	38
4.5	Koordinate tenzora napona	42
5	NAPONSKO STANJE - ELIPTIČNA ŠUPLJINA	43
5.1	Primarno naponsko stanje.	43
5.2	Izrazi za napone preko naponske funkcije	45
5.3	Diferencijalne jednačine u eliptičnom sistemu koordinata	46
5.4	Rešenje diferencijalne jednačine	46
5.5	Koordinate tenzora napona	49
5.6	Granični uslovi. Odredjivanje konstanti	55
5.7	Koordinate tenzora napona-aproksimativno rešenje	64

5.8	Analiza dobijenih rešenja	70
5.9	Faktor koncentracije napona	74
6	NUMERIČKA REALIZACIJA ANALIZE	76
6.1	Postupak određivanja napona	76
6.2	Numerički primeri	80
6.3	Analiza dobijenih rezultata	96
7	ZAKLJUČNA RAZMATRANJA	97
7.1	Ostvareni rezultati i zaključci	97
7.2	Oblasti praktične primene rada	98
7.3	Mogućnosti za dalja istraživanja	99
8	LITERATURA	101

PRILOZI

UVOD

Određivanje prostornog naponskog stanja u problemima koncentracije (bifurkacije) napona oko otvora u čvrstoj sredini (stenskoj masi) odavno je predmet izučavanja teorije elastičnosti čvrstih tela. Poznato je da teorija elastičnosti polazi od pretpostavke o neprekidnosti materije u nekoj prostornoj oblasti, dok je fizička činjenica da materija nije neprekidna, već da poseduje diskretnu strukturu, pa se može postaviti pitanje u kojim je slučajevima opravdano pretpostaviti da je materija neprekidna. Poremećaj kroz diskretnu strukturu, izazvan nekim spoljnim efektom, prenosi se u vidu talasnog kretanja, a u slučajevima kada su poremećaji takvi da dovode do talasnih kretanja sa velikim talasnim dužinama, pa jedna talasna dužina obuhvata veliki broj osnovnih čestica diskretne strukture, mogu se zanemariti rastojanja između tih čestica, tj. može se pretpostaviti da je materija neprekidna. U tom smislu i istraživanje na osnovu "teorije elastičnosti" u navedenoj sredini predstavlja prihvatljivu aproksimaciju realnosti. Problem koncentracije napona oko neopterećene ili sa unutrašnje strane opterećene šupljine (otvora) u stenskoj masi i do sada je rešavan usvajajući stensku masu kao izotropnu homogenu elastičnu sredinu pa sva merenja radnih stanja napona u čvrstim stenskim masama oko podzemnog iskopa koja se zasnivaju na principu "oslobađanja napona" koriste za interpretaciju analitička ili numerička rešenja za homogenu elastičnu izotropnu sredinu. Prema tome, teorijska istraživanja ovog problema u aproksimaciji se zasnivaju na postupcima koji tretiraju stensku masu kao elastičnu neprekidnu sredinu, odnosno kao granični problem mehanike neprekidne elastične sredine [27],[50],[56],[76].

Problem određivanja raspodele napona u okolini otvora, bilo da se radi o ravnoskom ili prostornom problemu, je jedan od najznačajnijih, kako sa teorijskog, tako i sa praktičnog stanovišta. Naime, ne postoji opšti oblik rešenja ovakvih problema iz koga se može, u nekom određenom slučaju, dobiti rešenje tog slučaja kao specijalan slučaj opšteg rešenja. Rešenje posebnih slučajeva zavisi od oblika otvora kao i od karaktera naprezanja u stenskoj masi, tako da svaki od njih zahteva posebnu analizu, a svaki poseban slučaj ima i svoj teorijski značaj. Dalje, u rešenju praktičnih zadataka (u podzemnim konstrukcijama, naprimer) tj. u fizičkoj realnosti (imajući u vidu da su neke osobine materijala samo aproksimacije realnih osobina), često se susrećemo sa različitim oblicima naprezanja materijalnih sredina (oblasti) koje sadrže otvore, tako da je određivanje raspodele napona u tim problemima čest praktičan problem. Pokazano je da u pojedinim slučajevima dolazi do poremećaja ravnotežnog naponskog stanja koje se manifestuje u povećanju tangentialnih napona na konturi otvora. Ovaj efekat povećanja tangentialnih napona naziva se koncentracija napona, a broj koji predstavlja količnik tangentialnog napona na površini otvora i normalnog napona kojim je izazvano ravnomerno naprezanje u tačkama dovoljno udaljenim od konture, naziva se faktor koncentracije napona.

Ravnomerno naprezanje beskonačne oblasti sa otvorom obično se modelira kao ravnomerno naprezanje silama konstantnog intenziteta koje deluju u tačkama dovoljno udaljenim od otvora. Pri tome se pretpostavlja da su dimenzije oblasti mnogo veće od dimenzija otvora.

Pri formiranju podzemnih konstrukcija, kao nezaobilazni problem u analizi stanja napona predstavlja rešavanje koncentracije napona oko otvora, pre i posle postavljanja podgradne konstrukcije.

Dosadašnja analitička istraživanja u ovoj oblasti su ograničena uglavnom na problem sferne šupljine i na problem beskonačno dugog cilindra, a pri određivanju naponskih stanja korišćene su krivolinijske koordinate cilindričnog i sfernog koordinatnog sistema. Analogno određivanje prostornog naponskog stanja oko eliptičnih otvora primenom eliptičnog koordinatnog sistema je relativno malo istraživano.

Pošto rešavanje graničnih zadataka u pojedinim ortogonalnim krivolinijskim koordinatama imaju metodološku sličnost pomenućemo najvažnije od njih. Prva istraživanja graničnih zadataka elastične sfere vezana su za radove G.Lame [1]. Rešenja su izražena pomoću trigonometrijskih i pridruženih Ležandrovih funkcija. Granični zadaci elastične sfere i polusfere razmatrani su od strane V.Tomsona [35], a rešenja su predstavljena preko sfernih funkcija Laplase. A.I.Lurje [35] je granične probleme elastične sfere pri zadatim pomeranjima i opterećenjima na površini sfere razmatrao pomoću funkcija Papkoviča. U svojim radovima isti autor je ove probleme rešavao primenom harmonijskih funkcija koje sadrže funkcije Ležandra. U svojim istraživanjima oblasti ograničenih dvema koncentričnim sferama E.Sternberg, R. Jubenks i M.Sadovski [62] granične probleme rešavaju primenom sfernog koordinatnog sistema. Rešenja su data u obliku beskonačnih redova koji sadrže polinome Ležandra. Kao jedan od prvih zadataka razmatrana je koncentracija napona oko sferne šupljine. U radu [16] dato je rešenje za koncentraciju napona oko sferne šupljine na osnovu navedenih istraživanja. Prva istraživanja koncentracije napona oko sferne šupljine vezana su i za radove R.Sausvela. Određivanje naponskih stanja oko sferne šupljine u beskonačnoj oblasti razmatrano je i od strane više autora: D.Kolins [1] određuje naponsko stanje oko sferne šupljine pri dejstvu sila u tačkama koje ne leže na konturi. U knjizi Veljković N.- Plavšić M. [70] prikazano je određivanje napona oko sferne šupljine koristeći Nojber - Papkovičevo rešenje. Istraživanja Tercagija i Riharta prikazana u monografiji [56] zasnivaju se na radovima Nojbera, Sternberga i Edvardsa [17],[47]. Međutim, postoje određivanja naponskog stanja oko sferne šupljine i novijeg datuma, tako Podiljčuk u svojoj monografiji [51] analizira naponsko stanje oko sferne šupljine metodom Bubnova-Galerkina koristeći rešenje koje je dato u obliku beskonačnih redova i Ležandrovih polinoma. Do rešenja u obliku beskonačnih redova u sličnom istraživanju došao je i Mc Clung [45].

Početak istraživanja naponskog stanja oko cilindričnog otvora datira od prvih radova Kirša koji je dao jedno od prvih rešenja koje se odnosi na dvodimenzionalni problem, a među prvim istraživanjima mogu se svrstati i radovi A.Vangerina

i V.A.Steklova [1] gde je razmatran opšti oblik rešenja. U radovima M.A.Šiffa i V.A.Steklova [1] zadatak se svodi na rešavanje specijalne transcendentne jednačine koja sadrži funkcije Besela, a u radu se koristi Furijeov metod razdvajanja promenljivih. Rešenje dobijene jednačine u izotropnoj sredini dato je u radu V.K. Prokopova [55]. U svojim istraživanjima A.I.Lurje [32] je određivanje naponskog stanja oko cilindričnog otvora razmatrao pri proizvoljnom opterećenju upravnom na površ cilindra. Rešenje naponskog stanja oko neopterećenog i delimično opterećenog cilindričnog otvora dato je u radu M.Ivkovića [25]. Određivanje naponskog stanja svodi se na iznalaženje naponske funkcije koja zadovoljava biharmonijsku diferencijalnu jednačinu $\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0$ za date granične uslove i rotaciono simetričan slučaj opterećenja. Pri rešenju problema opterećenje je prikazao u obliku Furijeovog integrala, a rešenja za koordinate tenzora napona svodi na izračunavanje određenog integrala u granicama $0 - \infty$. Isti zadatak rešen je od strane Bartona [14] s tim što su rešenja predstavljena u obliku beskonačnih redova. Podiljčuk je u monografiji [51] rešenje naponskog stanja oko cilindričnog otvora dao u obliku beskonačnih redova koji sadrže funkcije Besela. Iz ove oblasti istraživanja potrebno je istaći monografiju P.Jovanovića [26] kao i monografiju Riharta [56] gde su prikazana istraživanja naponskog stanja oko cilindričnog otvora različitih preseka (kružni, eliptični).

Određivanje naponskog stanja oko šupljine oblika elipsoida razmatrano je u radu G.S. Šapira [67], pri čemu se analizira naponsko stanje oko šupljine spljoštenog rotacionog elipsoida. U radovima [63] i [65] daju se rešenja naponskog stanja za neopterećenu šupljinu sa korišćenjem tri harmonijske funkcije. Podiljčuk u svojim istraživanjima [50],[51] daje rešenje u obliku beskonačnih redova po Ležandrovim polinomima, a pri formulisanju problema koristi projekcije vektora pomeranja i napona na ose Dekartovog koordinatnog sistema.

Imajući u vidu navedena istraživanja, može se zaključiti da je problem koncentracije napona oko neopterećene i sa unutrašnje strane delimično opterećene šupljine do sada rešen analitički samo za sfernu šupljinu i za beskonačno dug cilindar. Pitanje analitičkog rešenja za šupljinu oblika izduženog elipsoida, koji predstavlja opšti oblik šupljine u odnosu na sferu i beskonačan cilindar, ostalo je za sada otvoreno. Postoje samo delimična analogna istraživanja koja su ovde navedena i koja se odnose na pojedinačna rešenja za specifične konturne uslove. Ovakvo stanje dosadašnjih istraživanja stanja napona oko šupljine oblika izduženog obrtnog elipsoida daje za pravo da se pokuša naći analitičko rešenje ovog problema koje bi predstavljalo opšti oblik rešenja naponskog stanja oko šupljine oblika obrtnog izduženog elipsoida koje se uprošćava na stanje sferne simetrije za slučaj kada su sve ose elipsoida jednake, odnosno na stanje cilindrične simetrije u slučaju kada je rotaciona osa elipsoida znatno izduženija od ostale dve.

Rezultat takvog pokušaja je istraživanje sadržano u ovoj tezi. Prvi postavljen zadatak je iznalaženje analitičkog rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina navedenog problema za granične uslove neopterećene i parcijalno opterećene kon-

ture šupljine. U vezi sa tim, primenjen je pristup Bubnova-Galerkina sa uvođenjem graničnih uslova preko funkcija koje zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu i njihov razvoj u beskonačne redove po Ležandrovim polinomima. Sledeći korak je zasnovan na određivanju koordinata tenzora napona u sistemu eliptičnih koordinata preko naponskih funkcija.

Osnovni zadatak i krajnji cilj ovog istraživanja je prema tome dobijanje rešenja koordinata tenzora napona u analitičkom obliku i primena dobijenih rešenja za dobijanje koncentracije napona oko otvora oblika izduženog rotacionog elipsoida. Iznalaženjem navedenog analitičkog rešenja dobija se pored ostalog i mogućnost bolje verifikacije uslova diskretizacije za numerička rešenja u kojima se mogu obuhvatiti i drugi praktični problemi (anizotropija, nehomogenost stenske mase i dr). Od značaja je napomenuti i eventualnu primenu dobijenih rešenja u proučavanju ponašanja materijala sa mikro-defektima, jer ta proučavanja polaze od hipoteze o mikro-šupljinama oblika elipsoida pri razmatranjima problema bifurkacije napona u analizama preduslova pojave krtog loma.

U cilju celovitog sagledavanja postupka istraživanja, u prvom poglavlju ove teze prikazuju se osnove iz teorije elastičnosti vezano za rešenje prostornih problema. Detaljnije izvođenje osnovnih jednačina dato je radovima A.I.Lurja [35], Podiljčuka [52] i drugih autora. U ovom poglavlju ukratko se izlaže istorijat istraživanja naponskih funkcija, uz određivanje oblika naponske funkcije koji će se koristiti u daljem radu kao i diferencijalne jednačine koja se mora zadovoljiti.

Obzirom da se problem koji se razmatra odnosi na šupljinu oblika izduženog rotacionog elipsoida, u drugom poglavlju ove teze uvodi se eliptični sistem koordinata izduženog elipsoida i sve potrebne relacije. Ovo poglavlje sadrži definicije harmonijskih funkcija imajući u vidu da se problemi vezani za određivanje napona oko otvora rešavaju uvođenjem naponskih funkcija koje su harmonijske. Rešenja diferencijalnih jednačina sadrže u sebi Ležandrove funkcije pa se u nastavku izlažu osnovne definicije Ležandrovih funkcija. Detaljnije izvođenje i analiza date su u monografiji Hobsona [24]. Takođe, u velikom broju radova dato je izvođenje pojedinih rekurentnih formula. U okviru ovog rada su izvedene i potrebne dodatne rekurentne formule, a kao jedan od osnovnih problema koji se rešava u okviru ove teze je izbor i uvođenje pogodnih funkcija koje će definisati opterećenje na konturi šupljine kao graničnog uslova. U nastavku ovog poglavlja izlažu se osnovne relacije razvijanja tih funkcija u beskonačne redove po Ležandrovim polinomima.

Treće poglavlje sadrži postojeća istraživanja naponskog stanja oko sferne šupljine. Najpre se izlaže istorijat postojećih istraživanja [1]. Zatim, za jedno istraživanje detaljnije obrađeno u radovima [70] i [71] prikazuje se rešenje diferencijalnih jednačina i određivanje koordinata tenzora napona. Primarni naponi u stenskoj masi definišu se u sfernom koordinatnom sistemu. Kao originalan doprinos dosadašnjim

istraživanjima, a u okviru ove teze će se uvesti nove funkcije opterećenja kao granični uslovi.

U četvrtom poglavlju se izlažu postojeća istraživanja naponskog stanja oko cilindričnog otvora. Kao i u trećem poglavlju najpre se daje istorijat postojećih istraživanja [1]. Imajući u vidu da su ova istraživanja brojna, u okviru ove teze će se detaljnije analizirati jedno od rešenja dato u radu [25], i odrediće se rešenje diferencijalnih jednačina preko Beselovih funkcija i na osnovu toga koordinate tenzora napona. I ovde će biti analizirani granični uslovi u nešto izmenjenom obliku, prilagođeni kasnijim analognim analizama za eliptičnu šupljinu.

Izbor prikazanih istraživanja u okviru trećeg i četvrtog poglavlja koji se detaljnije obrađuje u okviru ove teze, izvršen je sa ciljem da se u uporednoj analizi dobijenih rezultata, kao i numeričkoj realizaciji analize dobiju uporedne vrednosti koncentracije napona oko šupljine, odnosno ovaj izbor je izvršen i u cilju analize i upoređenja sa dobijenim rešenjima naponskog stanja oko šupljine oblika elipsoida.

Peto poglavlje predstavlja osnovni sadržaj ove teze, tj. određivanje naponskog stanja oko šupljine izduženog obrtnog elipsoida. Najpre će se dati transformacija koordinatnog sistema i prikaz primarnih napona u eliptičnom sistemu koordinata. Po prvi put u ovom radu će se izvesti i koristiti relacije za napone preko naponskih funkcija u sistemu koordinata izduženog elipsoida. Zatim se daje opšti oblik diferencijalnih jednačina za rotaciono simetričan slučaj opterećenja. U ovom delu rada u celosti se ogleda i novi originalni pristup u rešavanju ovog problema. Naime, rešenje diferencijalne jednačine (biharmonijske) koju zadovoljavaju naponske funkcije traži se kao opšte rešenje u eliptičnom sistemu koordinata. Granične uslove, tj. funkcije napona na konturi šupljine elipsoida razvijaju se u beskonačne redove po trigonometrijskim funkcijama i Ležandrovim polinomima [73]. Obzirom na definisane granične uslove (konturne uslove), koji moraju biti zadovoljeni, formiraju se sistemi algebarskih jednačina za određivanje nepoznatih konstanti. Iz dobijenih sistema jednačina na osnovu graničnih uslova dobijaju se vrednosti za konstante koje figurišu u rešenju diferencijalnih jednačina. Ovak pristup rešavanja diferencijalnih jednačina se unekoliko razlikuje od analognih rešenja gde se konstante dobijaju direktno iz graničnih uslova. Ovde su granični uslovi definisani po koordinatama tenzora napona tj. kao rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina naponskih funkcija. Za određivanje nepoznatih konstanti, a time i koordinata tenzora napona, dobijaju se dva sistema beskonačnog broja jednačina sa beskonačno mnogo nepoznatih (istog broja u oba sistema).

U petom poglavlju prikazaće se paralelno rešenje naponskog stanja korišćenjem pridruženih i običnih ($m=0$) Ležandrovih funkcija. Rešenje sistema jednačina daje

se za obične Ležandrove funkcije, dok se za pridružene postavlja sistem, a rešenje ostavlja za dalja istraživanja. Ovo otvoreno pitanje rešenja sistema jednačina za pridružene Ležandrove funkcije vezano je i za simultana istraživanja u okviru matematičkih nauka.

Šesto poglavlje predstavlja numeričku realizaciju analize. Najpre će se izložiti algoritam za određivanje naponskog stanja oko sferne šupljine, cilindričnog otvora i šupljine izduženog elipsoida. Zatim će se definisati granični uslovi i svi parametri za dobijanje aproksimativnog rešenja (za određeni broj članova reda). Na osnovu algoritma uradiće se program za računar. U okviru ovog poglavlja prikazuju se numerički primeri određivanja naponskog stanja oko sferne šupljine, šupljine cilindričnog otvora i šupljine izduženog elipsoida. Izbor prikazanih primera izvršen je sa ciljem da se dobiju uporedne vrednosti koncentracije napona oko šupljine navedenih oblika. Izbor i prezentacija dobijenih rezultata značajna je za analizu uticaja promene geometrije šupljine i opterećenja na naponsko stanje oko šupljine.

Sedmo poglavlje sadrži zaključna razmatranja u pogledu ostvarenih rešenja, praktične primene rezultata ovog rada i predloge daljih istraživanja.

Imajući u vidu složenost i obimnost matematičkih izvođenja i transformacija, u Prilozima disertacije (I, II, III i IV) biće prikazana samo neka važnija izvođenja pojedinih izraza, dok se sva ostala izvođenja korišćena u radu nalaze kod autora u rukopisu.

Pojedine veličine i relacije istaknute su masnim slovima u cilju bolje preglednosti. Istaknute veličine ne predstavljaju uobičajene oznake za matrice i vektore.

Poglavlje 1

PROSTORNI PROBLEMI TEORIJE ELASTIČNOSTI

Prostorni problemi teorije elastičnosti zauzimaju značajno mesto u mehanici deformabilnih tela. Kao fundamentalna istraživanja opredeljuje ih činjenica da je istraživanje naponskog stanja uvek aktuelno pri rešenju mnogih tehničkih zadataka. Fundamentalnost i aktuelnost problema teorije elastičnosti, posebno u novije vreme, dolazi do izražaja i zbog razvoja računara, gde je moguće rešavanje i onih matematičkih zadataka koji su bez toga bili praktično nerešivi (veliki broj jednačina, komplikovanost izraza i dr.). U poslednje vreme publikovano je i više monografija posvećenih prostornim problemima teorije elastičnosti [51], što je i osnovni predmet ove disertacije. Metode istraživanja prostornih zadataka teorije elastičnosti zasni- vaju se na rešenjima jednačina ravnoteže pomoću harmonijskih i biharmonijskih funkcija. Takva rešenja predložena su još od strane Kelvina i Businesska. Opšte rešenje jednačine ravnoteže elastičnog izotropnog tela, koje sadrži tri biharmonijske skalarne funkcije dato je od strane Galerkina [35],[52]. P.F.Papkovič je ustanovio da je rešenje B.G.Galerkina opšte [53], i predložio novi oblik rešenja koji sadrži četiri harmonijske funkcije. Opšte rešenje P.F.Papkoviča [53] nezavisno je dobijeno od strane H.Neubera [47], a u radovima M.G.Slobodjanskog, R.Jubenksa i E.Stenberga razmatrana je mogućnost smanjenja broja potrebnih harmonijskih funkcija.

Pri rešavanju određenih vrsta zadataka u okviru graničnih problema teorije elastičnosti koristi se Furijeov metod razdvajanja promenljivih po kome se dobi- jena rešenja predstavljaju u obliku beskonačnih redova ili integrala, a rešavanje parcijalnih jednačina obično se svodi na rešavanje običnih diferencijalnih jednačina.



1.1 Osnovne jednačine

Jednačine ravnoteže po pomeranjima u slučaju izotropnog elastičnog tela bez uticaja zapreminskih sila imaju oblik:

$$(1 - 2\nu)\Delta\bar{u} + \text{grad div } \bar{u} = 0 \quad (1.1)$$

Opšte rešenje jednačine ravnoteže (1.1) može biti predstavljeno preko harmonijskih funkcija i dato je u istraživanjima velikog broja autora [70]. Papkovič-Nojberovo rešenje dato je u obliku:

$$2G\bar{u} = 4(1 - \nu)\vec{B} - \text{grad}(\vec{r}\vec{B} + B_0) \quad (1.2)$$

gde je:

\vec{B} -harmonijska vektor funkcija

B_0 -harmonijska skalarna funkcija [53]

ν - Poasonov koeficijent

Jednačine ravnoteže po naponima u statičkim uslovima imaju oblik:

$$\sigma_{,j}^{ij} = 0 \quad (1.3)$$

Koordinate tenzora napona koje zadovoljavaju jednačinu (1.3) moraju zadovoljavati i uslove kompatibilnosti. Kada se ovi uslovi izraze preko napona, uzimajući u obzir (1.3) dobijaju se Beltrami-Mičelove jednačine

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1 + \nu} I_{t,ij} = 0 \quad (1.4)$$

Granični uslovi za rešenje jednačine (1.1) i (1.3) daju se po pomeranjima, odnosno po naponima:

$$u_i = g_i(x^1, x^2, x^3); \quad \sigma_{(\bar{n})}^i = p_{(\bar{n})}^i \quad (1.5)$$

gde je: g_i -poznata funkcija pomeranja na konturi
 p^i -poznato opterećenje na konturi

1.2 Naponske funkcije

U istraživanju naponskih stanja oko otvora često se zanemaruje lokalni uticaj za-preminskih sila. Tada se jednačine ravnoteže mogu rešiti u opštem obliku uvođenjem funkcija položaja (koordinata). Ove funkcije nazivaju se naponske funkcije.

Maxwel je 1868 godine naponsko stanje izrazio preko tri naponske funkcije koje su povezane složenim sistemom diferencijalnih jednačina. Kasnije V.I.Blox [10] i A.Krutkov su Maxwlove funkcije napona predstavili u tenzorskom obliku.

Morera je opšte rešenje dao u drugom obliku 1899 godine [57], a Businessk je opšte rešenje izrazio preko tri biharmonijske funkcije koje se u slučaju simetrije svodi na dve. P.F.Papkovič je dao opšte rešenje jednačine ravnoteže izotropnog tela pomoću četiri harmonijske funkcije. Isto rešenje nezavisno je dato od strane Nojbera i Grodskog [53], a G.S.Šapiro [67] je prikazao funkciju napona iz rešenja Papkovič-Nojbera u krivolinijskom sistemu koordinata.

Broj harmonijskih funkcija kojima se definiše rešenje i mogućnost njihovog smanjenja analizirano je od strane velikog broja autora (P.F.Papkovič, R.Mindlin, D.I.Šerman, M.G. Slobodjanski, E.Sternberg [1]).

Uvođenje naponskih funkcija, njihov broj i oblik su stoga stalna tema istraživanja [22], [43]. Ovo se posebno odnosi na mogućnosti iznalaženja analitičkih rešenja zadataka za anizotropne sredine.

Polazeći od rešenja Papkovič-Nojbera u radu [48] data je analiza određivanja koordinata tenzora napona preko naponskih funkcija datih u obliku:

$$\Psi = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 \quad (1.6)$$

tj. kao zbir harmonijskih funkcija. Tada se problem određivanja naponskog stanja, uzimajući u obzir uslove kompaktilnosti, svodi na iznalaženje naponske funkcije Ψ koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0 \quad (1.7)$$

Naponska funkcija Ψ zadovoljava istu diferencijalnu jednačinu kao i Erijeva funkcija napona. Takođe, navedena naponska funkcija mora zadovoljavati i zadate granične uslove (1.5).

U slučaju zadatka sa rotaciono simetričnim opterećenjem naponska funkcija Ψ (1.6) se svodi na zbir dve harmonijske funkcije.

MATEMATIČKE OSNOVE ISTRAŽIVANJA

Prilikom istraživanja naponskog naprednog stanja u elastičnom telu je jedan od osnovnih problema istraživača problema teorije elastičnosti i rešenja ovog problema nastajanje i razvijanje postupaka teorije matematičke analize.

U ovom poglavlju koji se nalazi u ovoj disertaciji obradili su matematičke postupke koje koristi istraživači u istraživanju naponskog naprednog stanja u elastičnom telu. U ovom poglavlju su obradili i neke potrebne osnovne matematičke činjenice, a one su se te obradili, koristeći se razvijanjem, izabrali tako da mogu biti od koristi istraživačima ovog područja.

2.1 Eliptični koordinatni sistem

Uvede se kanonički eliptični koordinatni sistem (ξ, η) u odnosu na koji se može izvesti jedna od osnovnih jednačina ravnoteže i jednačina kontinuiteta. Odeljci koordinatnog sistema eliptični koordinatni sistem (ξ, η) koji se koristi u ovom poglavlju se generišu pomoću elipse i hiperbole, pri čemu se određuju i jednačina elipse i jednačina hiperbole i jednačina koordinatnog sistema (ξ, η) pomoću kanoničkog sistema.

Elipsa je koordinatni sistem (ξ, η) koji se određuje pomoću jednačina elipse i jednačina hiperbole. Za koordinatni sistem (ξ, η) se definiše proizvoljna funkcija $\Psi(\xi, \eta)$ koja zadovoljava jednačinu Laplasa.

$$\Delta \Psi = \Delta_{\xi} \Psi + \Delta_{\eta} \Psi = 0, \quad \Delta_{\xi} \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}, \quad \Delta_{\eta} \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}. \quad (2.1)$$

Elipsa je koordinatni sistem (ξ, η) koji se određuje pomoću jednačina elipse i jednačina hiperbole.

$$\xi = \frac{x}{a} \cos \eta, \quad \eta = \frac{y}{b} \sin \eta, \quad \xi = \frac{x}{a} \cos \eta, \quad \eta = \frac{y}{b} \sin \eta. \quad (2.2)$$

Poglavlje 2

MATEMATIČKE OSNOVE ISTRAŽIVANJA

Problem određivanja prostornog naponskog stanja u okolini otvora je jedan od matematički najsloženijih problema teorije elastičnosti i rešenje ovog problema uslovljeno je korišćenjem postupaka teorije matematičke analize.

Pošto se problem koji se razmatra u ovoj disertaciji odnosi na određivanje prostornog naponskog stanja u okolini otvora oblika izduženog elipsoida u ovom poglavlju se definišu pojedine potrebne oblasti matematičke analize, s tim da su te oblasti, kao i obim prikazivanja, izabrane tako da upotpune i omoguće bolje sagledavanje ovog istraživanja.

2.1 Eliptični koordinatni sistem

Uvođenje krivolinijskih sistema koordinata omogućava dobijanje povoljnijeg oblika izraza za uslovne jednačine ravnoteže i konturne uslove graničnog problema. Odabrani krivolinijski sistem eliptičnih koordinata omogućava saglasnost koordinatnih površi sa geometrijom površi otvora, a posebno je pogodan za direktno dobijanje napona u pravcima normale i tagente na familiji površi kojoj pripada i površina otvora tj. površina graničnog zadatka.

Razmatranje koordinatnih sistema polazi od definisanja položaja proizvoljne tačke u prostoru. Za koordinate tačke mogu se uzeti tri proizvoljne funkcije Dekartovih koordinata

$$q_1 = q_1(x, y, z); \quad q_2 = q_2(x, y, z); \quad q_3 = q_3(x, y, z), \quad (2.1)$$

Dekartove koordinate se mogu izraziti kao funkcije od q_1, q_2, q_3 u obliku:

$$x = f_1(q_1, q_2, q_3); \quad y = f_2(q_1, q_2, q_3); \quad z = f_3(q_1, q_2, q_3) \quad (2.2)$$



U navedenim relacijama (2.1) i (2.2) brojevi q_1, q_2, q_3 zovu se generalisane koordinate tačke u prostoru. U Dekartovom sistemu ti brojevi su bili x, y, z ; u sfernom r, φ, θ ; a u cilindričnom r, φ, z .

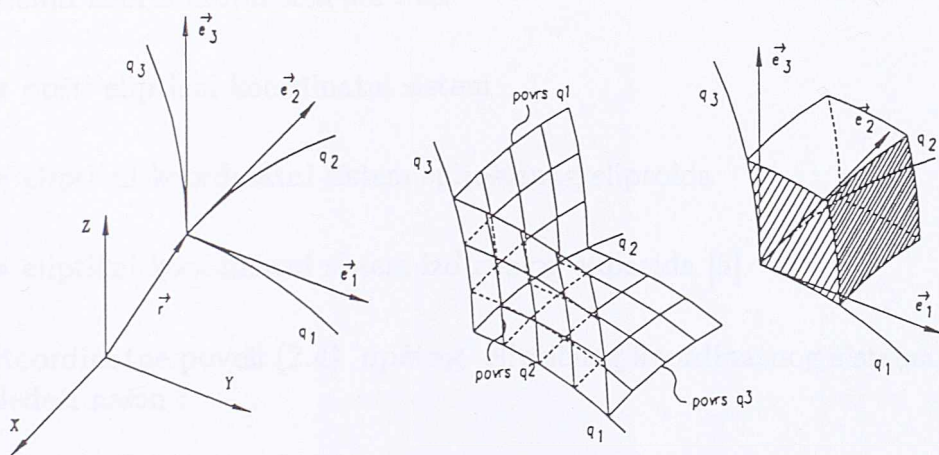
Ako se u relacijama (2.2) pretpostavi da je jedna koordinata konstantna, a da se druge dve proizvoljno menjaju tada relacije

$$x = f_1(c_1, q_2, q_3); \quad y = f_2(c_1, q_2, q_3); \quad z = f_3(c_1, q_2, q_3) \quad (2.3)$$

određuju površinu koja se može predstaviti u obliku

$$F_1(x, y, z) = c_1 \quad (2.4)$$

Na sličan način se dobijaju površine $F_2(x, y, z) = c_2$, $F_3(x, y, z) = c_3$ (Sl.1). Dobijene površine se nazivaju koordinatne površine, a preseči dveju koordinatnih površina određuju koordinatne linije. Tangente povučene na koordinatne linije predstavljaju koordinatne ose. Koordinatne linije su, u opštem slučaju, krive, to se sistem naziva krivolinijski sistem koordinata. Ako je trijedar tagenti (Sl.1) ortogonalan onda je i krivolinijski sistem ortogonalan.



Sl.1. Krivolinijski koordinatni sistem

Kako vektor položaja tačke zavisi od Dekartovih koordinata, to će zavistiti i od generalisanih koordinata:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = \vec{r}(q_1, q_2, q_3) \quad (2.5)$$

Ako su \vec{e}_i , ($i = 1, 2, 3$) ortovi krivolinijskih koordinatnih osa, tada između njih i ortova Dekartovog pravouglog sistema postoji sledeća zavisnost:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

Intenzitete parcijalnog izvoda (2.6) Lamé je označio sa H_i (u ovoj disertaciji označen sa h_i) u literaturi poznati kao Laméovi koeficijenti:

$$H_i (\equiv h_i) = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (2.7)$$

Laméovi koeficijenti predstavljaju intenzitet vektora \vec{r}

$$|\vec{r}_i| = H_i \quad (2.8)$$

Iz relacije (2.8) sledi:

$$\vec{r}_i = H_i \vec{e}_i \quad (2.9)$$

U matematičkoj teoriji krivolinijskih ortogonalnih sistema postoji više oblika eliptičnih koordinatnih sistema i to:

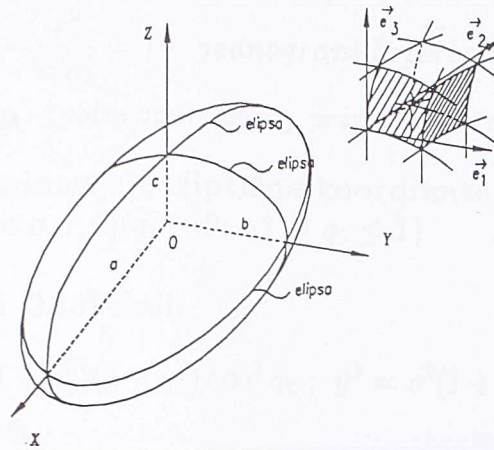
- opšti eliptični koordinatni sistem
- eliptični koordinatni sistem spljoštenog elipsoida
- eliptični koordinatni sistem izduženog elipsoida [5]

Koordinatne površi (2.4) opšteg eliptičnog koordinatnog sistema definisane su na sledeći način :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2 + q_1} + \frac{y^2}{b^2 + q_1} + \frac{z^2}{c^2 + q_1} &= 1 - \text{elipsoidi,} \\ \frac{x^2}{a^2 + q_2} + \frac{y^2}{b^2 + q_2} + \frac{z^2}{c^2 + q_2} &= 1 - \text{jednograni hiperboloidi,} \\ \frac{x^2}{a^2 + q_3} + \frac{y^2}{b^2 + q_3} + \frac{z^2}{c^2 + q_3} &= 1 - \text{dvograni hiperboloidi,} \end{aligned} \quad (2.10)$$

pri čemu q_1, q_2, q_3 predstavljaju opšte elipsoidalne koordinate (u literaturi poznate kao λ, μ, ν) ($q_1 > -c^2 > q_2 > -b^2 > q_3 > -a^2$) gde su: a, b, c poluose

elipsoida (Sl.2)



Sl.2. Opšti eliptični koordinatni sistem

Transformacija koordinata data je u obliku:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 + q_1)(a^2 + q_2)(a^2 + q_3)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ y^2 &= \frac{(b^2 + q_1)(b^2 + q_2)(b^2 + q_3)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \\ z^2 &= \frac{(c^2 + q_1)(c^2 + q_2)(c^2 + q_3)}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Lameovi koeficijenti za opšti eliptični koordinatni sistem dati su relacijama:

$$\begin{aligned} H_{q_1} &= \frac{(q_1 - q_2)(q_1 - q_3)}{4f(q_1)}; \quad H_{q_2} = \frac{(q_2 - q_3)(q_2 - q_1)}{4f(q_2)}; \\ H_{q_3} &= \frac{(q_3 - q_1)(q_3 - q_2)}{4f(q_3)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

gde je $f(q_i) = (a^2 + q_i)(b^2 + q_i)(c^2 + q_i)$

Eliptični koordinatni sistem spljoštenog elipsoida (Sl.3) može se izvesti iz opšteg eliptičnog sistema koordinata [35] ili na osnovu izloženog opšteg krivolinijskog sistema.

Koordinatne površi spljoštenog obrtnog elipsoida (2.4) definisane su na sledeći način :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{c^2(1 + q_1^2)} + \frac{z^2}{c^2 q_1^2} &= 1 - \text{obrtni elipsoid} \\ \frac{x^2 + y^2}{c^2(1 - q_2^2)} - \frac{z^2}{c^2 q_2^2} &= 1 - \text{jednograni hiperboloid} \\ y &= x \tan q_3 - \text{poluravan kojoj pripada obrtna osa } Oz \end{aligned} \quad (2.13)$$

pri čemu q_1, q_2, q_3 predstavljaju eliptične koordinate spljoštenog elipsoida (u literaturi poznate kao σ, τ, θ) ($q_1 \geq 0; -1 \leq q_2 \leq 1$)

Na osnovu (2.2) i (2.13) sledi:

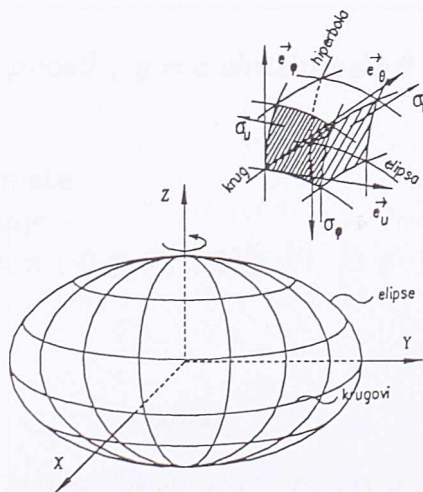
$$\begin{aligned} x^2 &= c^2(1 + q_1^2)(1 - q_2^2) \cos^2 q_3; \quad y^2 = c^2(1 + q_1^2)(1 - q_2^2) \sin^2 q_3; \\ z^1 &= c q_1 q_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ako se u relacije (2.14) uvede smena $q_1 = shu; q_2 = \cos \varphi; q_3 = \theta$ dobija se eliptični koordinatni sistem spljoštenog elipsoida u obliku:

$$x = c chu \sin \varphi \cos \theta, \quad y = c chu \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c shu \cos \varphi \quad (2.15)$$

Lameovi koeficijenti za eliptični koordinatni sistem spljoštenog elipsoida izvedeni na osnovu (2.7) imaju oblik:

$$H_u = H_\varphi = c \sqrt{sh^2 u + \cos^2 \varphi}, \quad H_\theta = c chu \sin \varphi \quad (2.16)$$



Sl.3. Eliptični koordinatni sistem spljoštenog elipsoida.

Problem razmatran u ovoj disertaciji je određivanje naponskog stanja oko šupljine izduženog elipsoida kao najprikladnijeg oblika šupljine koji najviše odgovara oblicima u kojima se formiraju iskopi u čvrstim stenskim masama, pa samim tim se razmatra u odgovarajućem eliptičnom koordinatnom sistemu izduženog elipsoida.

Eliptični koordinatni sistem izduženog elipsoida (Sl.4) može se izvesti iz opšteg eliptičnog sistema koordinata [35] ili na osnovu izloženog opšteg krivolinijskog sistema koordinata.

Koordinatne površi definisane relacijama (2.4) date su u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{c^2(q_1^2 - 1)} + \frac{z^2}{c^2q_1^2} &= 1 - \text{obrtni elipsoid} \\ \frac{x^2 + y^2}{c^2(q_2^2 - 1)} + \frac{z^2}{c^2q_2^2} &= 1 - \text{dvograni hiperboloid} \\ y &= x \tan q_3 - \text{poluravan kojoj pripada obrtna osa } Oz \end{aligned} \quad (2.17)$$

pri čemu q_1, q_2, q_3 predstavljaju eliptične koordinate izduženog elipsoida (u literaturi poznate kao σ, τ, θ) i ($q_1 \geq 1 \geq q_2 \geq -1$)

Na osnovu (2.2) i (2.17) sledi:

$$\begin{aligned} x^2 &= c^2(q_1^2 - 1)(1 - q_2^2) \cos^2 q_3 ; y^2 = c^2(q_1^2 - 1)(1 - q_2^2) \sin^2 q_3 \\ z^1 &= c q_1 q_2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Uvođenjem smene $q_1 = chu$; $q_2 = \cos\varphi$; $q_3 = \theta$ u relacije (2.18), dobija se eliptični koordinatni sistem izduženog elipsoida koji se definiše na sledeći način ;

$$x = c shu \sin\varphi \cos\theta, \quad y = c shu \sin\varphi \sin\theta, \quad z = c chu \cos\varphi \quad (2.19)$$

gde su:

u, φ, θ - eliptične koordinate

c - međufokusno rastojanje

($0 \leq u \leq \infty$; $0 < \varphi < \pi$; $0 \leq \theta < 2\pi$)

Jednačina

$$u = \text{const} \quad (2.20)$$

predstavlja familiju izduženog elipsoida (2.17) u obliku

$$\frac{x^2 + y^2}{sh^2u} + \frac{z^2}{ch^2u} = c^2 \quad (2.21)$$

Jednačina

$$\varphi = \text{const} \quad (2.22)$$

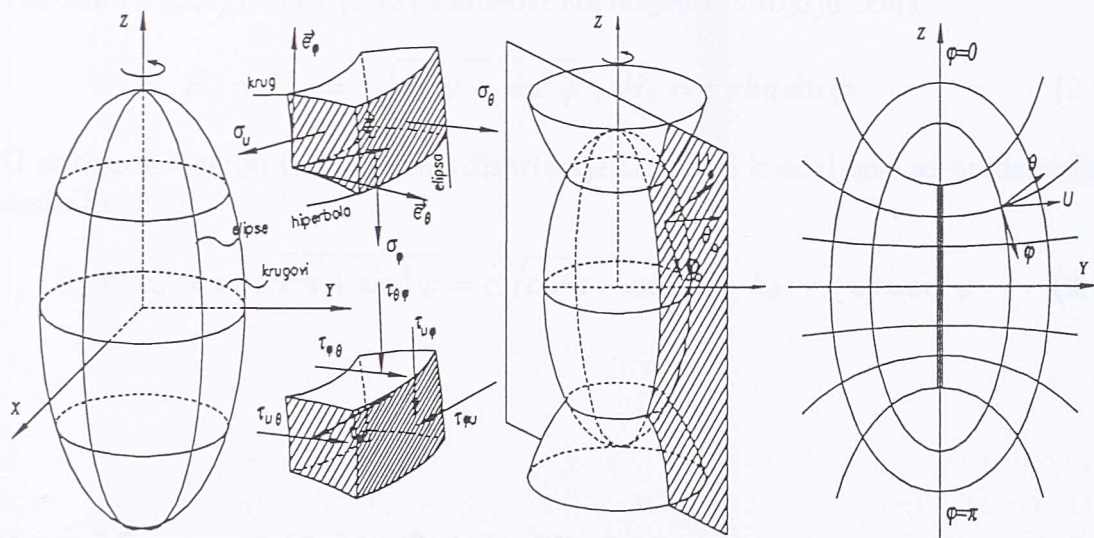
predstavlja familiju dvogranih rotacionih hiperboloida (2.17) u obliku

$$\frac{z^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{x^2 + y^2}{\sin^2 \varphi} = c \quad (2.23)$$

Jednačina

$$\theta = \text{const} \quad (2.24)$$

predstavlja poluravan (2.17) koja sadrži obrtnu osu Oz (Sl.4)



Sl.4. Eliptični koordinatni sistem izduženog elipsoida

Familije površi $u = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ i $\theta = \text{const}$ su međusobno ortogonalne .

U slučaju $\theta = \text{const}$, $u = \text{const}$ ugao φ je promenljiv i varira od 0 do π . Za vrednosti $\varphi = 0, \pi$ na konturi $u = u_0$ dobija se

$$a = c \operatorname{ch} u_0, \quad b = 0 \quad (2.25)$$

a za vrednost $\varphi = \frac{\pi}{2}$, na istoj konturi se dobija

$$b = c \operatorname{sh} u_0, \quad a = 0 \quad (2.26)$$

gde su a i b veća, odnosno manja poluosa elipse.

Kada je $\theta = \text{const}$, $c = \text{const}$ a $u \rightarrow 0$ tada eliptični cilindar degeneriše u nit dužine $2c$ tako da je

$$x = \pm c, y = 0 \quad (2.27)$$

Kada $c \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$, $\theta \neq \text{const}$ eliptične konture prelaze u sferne konture

$$c \operatorname{ch} u \rightarrow c \operatorname{sh} u \rightarrow R \quad (2.28)$$

gde je R poluprečnik sfere.

Na osnovu (2.6), (2.7) i (2.19) Lamoevi koeficijenti dobijaju oblik

$$H_u = H_\varphi = c\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 \varphi}, H_\theta = c \operatorname{sh} u \sin \varphi \quad (2.29)$$

U daljem izlaganju u okviru ove disertacije Lamoevi koeficijenti se predstavljaju na sledeći način:

$$h_u = h_\varphi = c\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 \varphi} = c\sqrt{\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 \varphi}, h_\theta = c \operatorname{sh} u \sin \varphi \quad (2.30)$$

2.2 Harmonijske funkcije

U rešavanju zadataka teorije elastičnosti uopšte, veliku ulogu imaju harmonijske funkcije, a posebno pri istraživanju naponskih stanja oko otvora pomoću naponskih funkcija, koje su definisane kao harmonijske [60]. Takođe, rešenja zadataka vezanih za tela ograničena sfernim površima nalaze se primenom sfernih harmonijskih naponskih funkcija. U poglavlju 1 ovog rada naglašena je ta uloga harmonijskih funkcija kod definisanja naponskih funkcija.

Harmonijska funkcija se definiše kao neprekidna funkcija koja ima neprekidne izvode prvog i drugog reda i koja zadovoljava Laplasovu diferencijalnu jednačinu.

U rešavanju zadataka teorije elastičnosti, a posebno određivanja naponskih stanja, najviše se koristi klasa harmonijskih funkcija u obliku homogenih algebarskih polinoma n -tog stepena. Ova klasa funkcija f_n definiše se na sledeći

način [39],[70],[73] :

$$f_n = \sum_{m+k+j=n}^{\infty} A_{mkj} x_1^m x_2^k x_3^j$$

$$\Delta f_n = 0 ; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$$

$$x^i F_{n,i} = n f_n \quad (2.31)$$

gde je Δ - operator Laplasa

Iz navedene klase funkcija algebarskih homogenih polinoma uvodeći koordinatne transformacije $x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \varphi$ dobijaju se homogeni harmonijski polinomi n -tog reda u obliku:

$$f_n = r^n \Phi_n(\varphi, \theta) \quad (2.32)$$

koji se koriste za formiranje naponske funkcije i omogućavaju postupkom razdvajanja promenljivih rešavanje diferencijalnih jednačina koje imaju za rešenja Ležandrove funkcije.

2.3 Ležandrove funkcije

Rešenje zadatka određivanja naponskog stanja oko sferne šupljine i šupljine oblika izduženog rotacionog elipsoida svodi se na određivanje naponskih funkcija koje zadovoljavaju osnovnu diferencijalnu jednačinu (1.7), a dobijaju se rešenja koja sadrže Ležandrove funkcije prve i druge vrste. Za analizirane probleme sa rotacionom simetrijom u odnosu na z osu navedena rešenja su definisana pomoću funkcija Ležandra prve vrste odnosno relacijama [51]:

$$P_n(\cos \varphi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \varphi)^n} (\cos^2 \varphi - 1)^n \quad (2.33)$$

$$P_n^m(\cos \varphi) = (-1)^m (1 - \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m P_n(\cos \varphi)}{d(\cos \varphi)^m} \quad (2.34)$$

i pomoću funkcija Ležandra druge vrste odnosno relacijama:

$$Q_n(chu) = \frac{1}{2} P_n(chu) \lg \frac{chu - 1}{chu + 1} + W_{n-1}(chu) \quad (2.35)$$

$$Q_n^m(chu) = (ch^2u - 1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m Q_n(chu)}{d(chu)^m} \quad (2.36)$$

gde je:

$$P_n(chu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(chu)^n} (ch^2u - 1)^n$$

$$W_{n-1}(chu) = \frac{2n-1}{1n} P_{n-1}(chu) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(chu) + \dots \quad (2.37)$$

pri čemu su izrazima (2.34) i (2.36) definisane pridružene Ležandrove funkcije prve odnosno druge vrste. Ležandrove funkcije prve vrste se veoma često koriste i zbog osobina ortogonalnosti. Takođe, pri istraživanju naponskog stanja oko otvora često se kao pogodnosti koriste ograničenost funkcija prve vrste i brza konvergencija ka nuli funkcija druge vrste sa udaljavanjem od otvora. Ove osobine omogućavaju lakšu kontrolu i praćenje konvergencije dobijenih rešenja. Na osnovu osobina Ležandrovih funkcija izvedene su rekurentne formule koje se koriste pri formiranju sistema jednačina i pojednostavljenju dobijenih izraza za koordinate tenzora napona. U radovima velikog broja autora [5],[12],[24],[66] izvedeno je više rekurentnih formula. Međutim, za potrebe rešenja zadatka ove disertacije, izvedene su i dodatne rekurentne formule koje se navode u ovom radu.

Rekurentne formule Ležandrovih funkcija prve vrste:

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi P_n' &= (n+1) \cos \varphi P_n - (n+1) P_{n+1} \\ \sin^2 \varphi P_{n+1}' &= (n+1) P_n - (n+1) \cos \varphi P_{n+1} \\ \sin^4 \varphi P_n'' &= (n+1) [(2 - (2+n) \sin^2 \varphi) P_n - 2 \cos \varphi P_{n+1}] \\ \sin^4 \varphi P_{n+1}'' &= (n+1) [2 \cos \varphi P_n - (n \sin^2 \varphi + 2) P_{n+1}] \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\sin \varphi P_n^{m+1} = -(n-m+1) P_{n+1}^m + (n+m+1) \cos \varphi P_n^m$$

$$\sin \varphi P_{n+1}^{m+1} = -(n-m+1) \cos \varphi P_{n+1}^m + (n+m+1) P_n^m$$

$$\begin{aligned}
\sin^2 \varphi P_n^{m+2} &= -2(m+1)(n-m+1) \cos \varphi P_{n+1}^m + \\
&\quad + (n+m+1)[2(m+1) - (m+n+2) \sin^2 \varphi] P_n^m \\
\sin^2 \varphi P_{n+1}^{m+2} &= 2(m+1)(n+m+1) \cos \varphi P_n^m - [2(m+1) \\
&\quad (n-m+1) + (n-m)(n-m+1) \sin^2 \varphi] P_{n+1}^m
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Rekurentne formule Ležandrovih funkcija druge vrste:

$$\begin{aligned}
sh^2 u Q_n' &= (n+1)(Q_{n+1} - chu Q_n) \\
sh^2 u Q_{n+1}' &= (n+1)(chu Q_{n+1} - Q_n) \\
sh^4 u Q_n'' &= (n+1)[(n+2)sh^2 u + 2] Q_n - 2chu Q_{n+1} \\
sh^4 u Q_{n+1}'' &= (n+1)[(nsh^2 u - 2) Q_{n+1} + 2chu Q_n]
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
shu Q_n^{m+1} &= (n-m+1) Q_{n+1}^m - (n+m+1) chu Q_n^m \\
shu Q_{n+1}^{m+1} &= (n-m+1) chu Q_{n+1}^m - (n+m+1) Q_n^m \\
sh^2 u Q_n^{m+2} &= (n+m+1)[2m+2 + (n+m+2)sh^2 u] Q_n^m - \\
&\quad - 2(m+1)(n-m+1) chu Q_{n+1}^m \\
sh^2 u Q_{n+1}^{m+2} &= 2(m+1)(n+m+1) chu Q_n^m + [(n-m) \\
&\quad (n-m+1)sh^2 u - (2m+2)(n-m+1)] Q_{n+1}^m
\end{aligned} \tag{2.41}$$

gde su uvedene oznake: $P_n(\cos \varphi) = P_n$; $P_n^m(\cos \varphi) = P_n^m$; $Q_n(chu) = Q_n \dots$

Pri formiranju sistema jednačina za određivanje nepoznatih koeficijenata iz graničnih uslova, korišćeni su izrazi F. Neumanna navedeni u radovima [40] i [67].

2.4 Razvijanje funkcije u red preko Ležandrovih polinoma

Ležandrove funkcije prve vrste u literaturi se često nazivaju Ležandrovi polinomi. Razvijanje funkcija u red po polinomima Ležandra posebno se koristi u rešenjima sistema jednačina koji je zadat tako da jedna strana sadrži Ležandrove polinome i data je u obliku reda, a druga strana je data u obliku funkcije koju čine Ležandrovi polinomi.

Razvijanje funkcije u red po trigonometrijskim funkcijama i Ležandrovim polinomima dato je u obliku:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n H_{nm} P_n^m(\cos \varphi) \cos m\theta \quad (2.42)$$

gde se koeficijenti H_{nm} određuju na osnovu izraza

$$H_{nm} = \frac{(n-m)!(2n+1)!}{(n+m)! 2\pi\lambda_m} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi f P_n^m(\cos \varphi) \cos m\theta \sin \varphi d\varphi \quad (2.43)$$

pri čemu je $\lambda_0 = 2$ ($m = 0$) i $\lambda_m = 1$ ($m \neq 0$), [73]

Ako je $m = 0$ dobija se

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} H_n P_n(\cos \varphi) \quad (2.44)$$

gde se koeficijenti H_n određuju na osnovu izraza

$$H_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (2.45)$$

U literaturi je poznato i razvijanje funkcije na sledeći način [70]:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} H_n P_n^{(1)}(\cos \varphi) \quad (2.46)$$

gde se koeficijent H_n određuje na osnovu izraza

$$H_n = \frac{(2n+1)(n-1)!}{2\pi(n+1)!} \int_0^\pi f P_n^{(1)}(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (2.47)$$

a. $P_n^{(1)}(\cos \varphi)$ je definisan na sledeći način

$$P_n^{(1)}(\cos \varphi) = \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \quad (2.48)$$

Poglavlje 3

NAPONSKO STANJE - SFERNA ŠUPLJINA

Ravnatežno stanje tela oblika sfere, a u okviru toga određivanje naponskog stanja za pojedine granične probleme, istražuje se dugi vremenski period.

Prva rešenja ravnoteže elastične sfere u sfernim koordinatama se nalaze u radovima G.Lame-a kada je razmotreno određivanje naponskog stanja pri dejstvu unutrašnjeg i spoljašnjeg ravnomernog opterećenja. Rešenje Lame-a dato je u obliku trigonometrijskih i pridruženih Ležandrovih funkcija.

U svojim memoarima V.Tomson razmatra ravnotežu sfere i polusfere. Rešenja graničnih zadataka predstavlja preko sfernih funkcija Laplasa [35], a izvodi ih korišćenjem tri harmonijske funkcije.

Deformacija nestišljive elastične sfere pri dejstvu čisto radijalnih napona datih na površini sfere razmatrana je u radu Kri-a (C.Chree) .

U radovima velikog broja autora: O.Tedone-a, C.Somoglijana, V.Ceruti-a, A.I.Lurje-a [35], E.Sternberga, F.Rozentalala [64] i drugih razmotreni su brojni granični problemi ravnoteže elastične sfere. Osnosimetrične zadatke vezane za elastičnu sferu razmatrao je A.I.Lurje u nekoliko svojih radova [35]. Problem ravnoteže sfere pri zadatim pomeranjima i opterećenjima datim na samoj površi sfere razmatran je primenom funkcija Papkoviča. Takođe, u pojedinim radovima isti problem se rešava primenom harmonijskih funkcija i Ležandrovih polinoma.

Osnosimetrični zadaci teorije elastičnosti, za oblast koju obrazuju dve koncentrične sfere razmatrani su u radovima E.Sternberga, R.Jubensa i M.Sadovskog [62]. Zadaci se razmatraju u sfernom sistemu koordinata, a rešenja su data u obliku beskonačnih redova koji sadrže polinome Ležandra. U tim radovima je posebno razmatrana koncentracija napona oko sferne šupljine [16].

Rešenja dobijena na osnovu analize oblasti koju obrazuju dve koncentrične sfere data su u radovima Lifšica [31] i monografiji [16] gde se koordinate tenzora napona

određuju na osnovu sledećih relacija:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_0 \frac{R^3}{r^3} - p_1 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right); \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta = p_0 \frac{R^3}{r^3} - p_1 \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right); \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi\theta} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

gde je :

R - poluprečnik sferne šupljine

p_0 -opterećenje na unutrašnjoj konturi šupljine

p_1 -opterećenje na beskonačnosti

Prva istraživanja koncentracije napona oko sferne šupljine vezana su i za radove R.Sausvela.

Određivanje naponskog stanja oko sferne šupljine u beskonačnoj oblasti razmatrano je u radovima više autora:

D.Kolins [1] naponsko stanje razmatra pri dejstvu sila u tačkama koje ne leže na konturi.

Tercagi i Rihart [56] radove zasnivaju na istraživanjima Nojbera [47] , Srenberga i Edvardsa [17] , a R.Kontxvel , J.Larmor svoja istraživanja koriste u geofizici.

Podiljčuk [51] svoje radove vezuje za istraživanje stenskih masa na velikim dubinama. Posebno je značajna analiza delovanja komprimovanog gasa u šupljinama i odgovarajući uticaj na naponsko stanje oko šupljine. Rešenja ovih zadataka data su u obliku beskonačnih redova i Ležandrovih polinoma.

Ešebli, Mura [41] u svojim radovima vezanim za istraživanje inkluzije , takođe razmatraju navedeni problem.

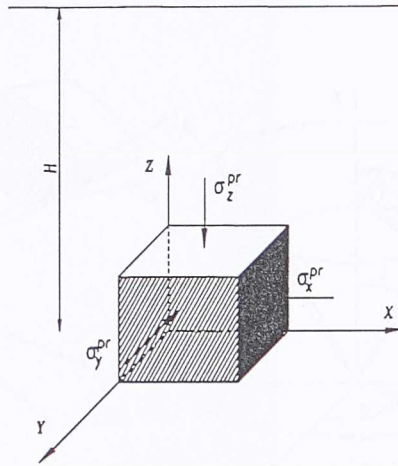
Od istraživanja novijeg datuma treba istaći rad Mc Clunga [45] u kome se rešenja izvode u obliku beskonačnih redova.

Određivanje naponskog stanja oko sferne šupljine , dato na osnovu Nojber-Papkovičevog rešenja, detaljnije je obrađeno u radovima N.Veljković.M.Plavšić [70] i [71]. Navedeno istraživanje se analizira i prikazuje i u okviru ove teze.

3.1 Primarno naponsko stanje

Istraživanja u ovoj tezi vezana su za stenski masiv kao sredine , u kojoj vlada naponsko stanje koje nazivamo primarno (*in situ*) . I kod određivanja naponskih stanja oko sferne šupljine u stenskom masivu, a obzirom, da gravitaciona naprezanja imaju dominantni uticaj, ova naprezanja se smatraju početnim-primarnim. Pošto gravitaciona naprezanja zavise kako od položaja posmatrane tačke tako i od svojstava stenske mase, uobičajeno je da se stenska masa aproksimira uz pomoć modela. U okviru ovog rada usvaja se elastični model stenske mase koja se smatra izotropnom,

homogenom i elastičnom, (Sl.5)



Sl.5 Šematski prikaz modela stenske mase

a za elastični model stenskog masiva koordinate tenzora napona u Dekartovom koordinatnom sistemu imaju oblik:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{pr} &= \gamma H ; \quad \sigma_x^{pr} = \sigma_y^{pr} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z^{pr} \\ \tau_{xy}^{pr} &= \tau_{yz}^{pr} = \tau_{xz}^{pr} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

gde je :

γ -zapreminska masa stene

ν -koeficijent Puasona

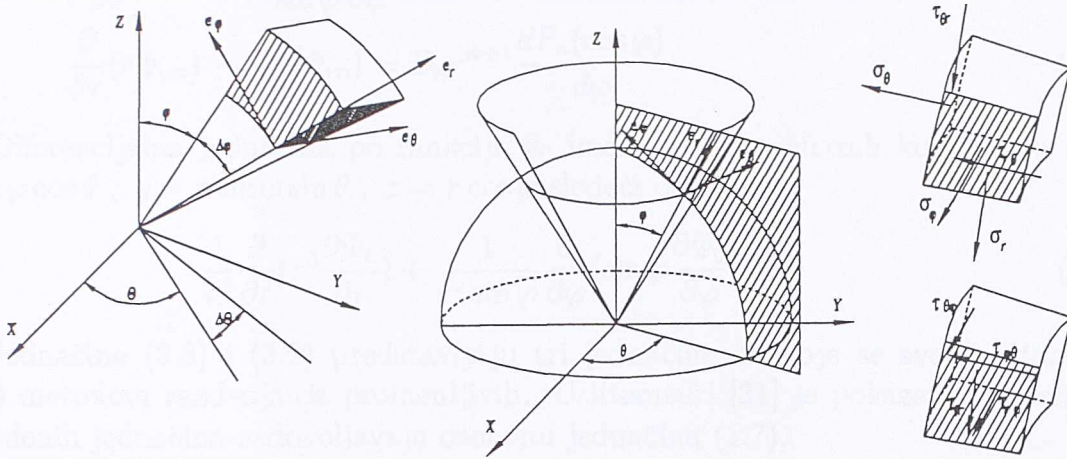
H -položaj tačke

Transformacijom koordinatnog sistema u sferni koordinatni sistem [57], koordinate tenzora napona (3.2) dobijaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{pr} &= \gamma(H - r \cos \varphi) \left[\frac{\nu}{1-\nu} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right]; \\ \sigma_\varphi^{pr} &= \gamma(H - r \cos \varphi) \left[\frac{\nu}{1-\nu} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right]; \\ \sigma_\theta^{pr} &= \gamma(H - r \cos \varphi) \frac{\nu}{1-\nu}; \\ \tau_{r\varphi}^{pr} &= \gamma(H - r \cos \varphi) \frac{2\nu - 1}{1-\nu} \sin \varphi \cos \varphi; \\ \tau_{r\theta}^{pr} &= \tau_{\varphi\theta}^{pr} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

gde su (r, φ, θ) koordinate sfernog koordinatnog sistema [69] (Sl.6), a koji je definisan relacijom :

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi \quad (3.4)$$



Sl.6. Sferni koordinatni sistem

3.2 Rešenje diferencijalne jednačine

Polazi se od sistema diferencijalnih jednačina po pomeranjima dobijenih iz jednačine ravnoteže (1.1) i u obliku

$$(1 - 2\nu)\nabla^2 u_i + [\text{grad div } u]_i = 0 \quad (3.5)$$

i traži rešenje na osnovu jednačine (1.2) u obliku

$$2Gu = \text{grad}(\Phi_0 + r\Phi) - 4(1 - \nu)\Phi \quad (3.6)$$

gde je:

Φ_0 -harmonijska skalarna funkcija

Φ - harmonijska vektor funkcija $\vec{\Phi}[\Phi_r, \Phi_\varphi]$

U sfernom koordinatnom sistemu u uslovima rotacione simetrije izrazi za pomeranja su dati relacijama:

$$\begin{aligned} u_r &= -4(1 - \nu)\Phi_r + \frac{\partial}{\partial r}(r\Phi_r + \Phi_0) \\ u_\varphi &= -4(1 - \nu)\Phi_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\Phi_r + \Phi_0) \\ u_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

gde su Φ_r i Φ_φ koordinate vektora Φ

Φ_r, Φ_φ i Φ_0 treba da zadovolje relacije

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Phi_{rn}) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \Phi_{\varphi n}) &= -(n+1) D_n r^{n+1} P_n(\cos \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi_{\varphi n}) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Phi_{rn}) &= D_n r^{n+1} \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Diferencijalna jednačina po funkciji Φ_0 ima u sistemu sfernih koordinata $x = r \sin \varphi \cos \theta$; $y = r \sin \varphi \sin \theta$; $z = r \cos \varphi$ sledeći oblik :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi}) = 0 \quad (3.9)$$

Jednačine (3.8) i (3.9) predstavljaju tri jednačine na koje se svodi jednačina (1.7) metodom razdvajanja promenljivih. U literaturi [31] je pokazano da rešenja navedenih jednačina zadovoljavaju osnovnu jednačinu (1.7).

Partikularna rešenja jednačina (3.8) i (3.9) data su u radu [71] u obliku:

$$\Phi_{rn} = -(n+1) a_n r^{n+1} P_n(\cos \varphi)$$

$$\Phi_{\varphi n} = a_n r^{n+1} \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi}$$

$$\Phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n P_n(\cos \varphi) \quad (3.10)$$

3.3 Koordinate tenzora napona

Partikularna rešenja diferencijalnih jednačina (3.10) uvrstimo u izraze za pomeranja (3.7) i koristeći oznake $c_n = a_{-(n+1)}$ i $d_n = b_{-(n+1)}$ [71] dobijaju se izrazi za pomeranja [70]. Iz dobijenih pomeranja, poznatim relacijama za određivanje tenzora deformacije i Hukovog zakona dobijaju se koordinate tenzora napona [71]:

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \frac{E}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n^2 + 3n - 2\nu) c_n r^{-n-1} - (n+1)(n+2) d_n r^{-n-3}] P_n(\cos \varphi) \\ \sigma_\varphi^* &= \frac{E}{1+\nu} \left(- \sum_{n=0}^{\infty} [n(n^2 - 2n - 1 + 2\nu) c_n r^{-n-1} - (n+1)^2 d_n r^{-n-3}] P_n(\cos \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} [(4 - n - 4\nu) c_n r^{-n-1} + d_n r^{-n-3}] \operatorname{ctg} \varphi \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^* &= \frac{E}{1+\nu} \left(\sum_{n=0}^{\infty} [-n(n+3-4n\nu-2\nu)c_n r^{-n-1} + (n+1)d_n r^{-n-3}] P_n(\cos\varphi) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} [(4-n-4\nu)c_n r^{-n-1} + d_n r^{-n-3}] \operatorname{ctg}\varphi \frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi} \right) \\
\tau_{r\varphi}^* &= \frac{E}{1+\nu} \sum_{n=1}^{\infty} -[(n^2-2+2\nu)c_n r^{-n-1} + (n+2)d_n r^{-n-3}] \frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi} \\
\tau_{r\theta}^* &= \tau_{\varphi\theta}^* = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Rešenja (3.11) su u obliku beskonačnih redova, koji sadrže Ležandrove polinome i konstante c_n i d_n koje se moraju odrediti iz graničnih uslova, a predstavljaju dodatne napone od uticaja sferne šupljine.

3.4 Granični uslovi . Određivanje konstanti

Nepoznate konstante c_n i d_n u jednačinama za određivanje napona (3.11) dobijaju se iz graničnih uslova zadatih po naponima (1.5). Pri razmatranju neopterećene sa unutrašnje strane sferne šupljine, tj. slobodne konture, granični uslovi se daju na sledeći način

$$\sigma_r = 0 ; \tau_{r\varphi} = 0 ; \text{ za } r = R \tag{3.12}$$

Analizom izraza (3.11) može se zaključiti da je

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ (r \gg R)}} \sigma_r^* = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ (r \gg R)}} \tau_{r\varphi}^* = 0 \tag{3.13}$$

Ukupni naponi, na osnovu (3.3), (3.11) i (3.13), oko sferne šupljine određuju se na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \sigma_r^* + \sigma_r^{pr} \\
\sigma_{\varphi} &= \sigma_{\varphi}^* + \sigma_{\varphi}^{pr} \\
\tau_{r\varphi} &= \tau_{r\varphi}^* + \tau_{r\varphi}^{pr} \\
\sigma_{\theta} &= \sigma_{\theta}^* + \sigma_{\theta}^{pr} \\
\tau_{r\theta} &= 0 ; \tau_{\varphi\theta} = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Primarni naponi u sfernom koordinatnom sistemu su dati izrazima (3.3).

Ako dobijena rešenja (3.14) uvrstimo u izraze za granične uslove (3.12) isti dobijaju sledeći oblik

$$\sigma_r^* = -\sigma_r^{pr} ; \tau_{r\varphi}^* = -\tau_{r\varphi}^{pr} ; \text{ za } r = R \tag{3.15}$$

Sistem jednačina (3.11), uzimajući u obzir granične uslove (3.15) rešava se uz prethodno razvijanje funkcija σ_r^{pr} i $\tau_{r\varphi}^{pr}$ u beskonačni red po Ležandrovim polinomima na osnovu relacija (2.44) i (2.46), odnosno

$$\begin{aligned}\sigma_r^{pr} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \varphi) \\ \tau_{r\varphi}^{pr} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi}\end{aligned}\quad (3.16)$$

Time bi obe strane jednačine (3.11) bile u obliku beskonačnih redova. Nepoznati koeficijenti razvoja, navedenih funkcija σ_r^{pr} i $\tau_{r\varphi}^{pr}$, određuju se na osnovu izraza (2.45) i (2.47). Dobijeni koeficijenti se obeležavaju sa A_n i B_n . Određivanje nepoznatih konstanti se svodi na rešenje sistema jednačina

$$\begin{aligned}A_n &= -\frac{E}{1+\nu} [n(n^2 + 3n - 2\nu)c_n R^{-n-1} - (n+1)(n+2)d_n R^{-n-3}] \\ B_n &= \frac{E}{1+\nu} [(n^2 - 2 + 2\nu)c_n R^{-n-1} + (n+2)d_n R^{-n-3}]\end{aligned}\quad (3.17)$$

gde je R - poluprečnik sferne šupljine

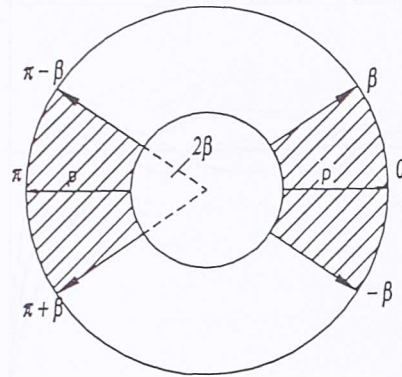
Sistem jednačina je potrebno posebno analizirati za $n = 0$ obzirom da članovi uz konstantu c_0 otpadaju. Prema tome za $n = 0$ određuje se samo konstanta d_0 . Određivanjem nepoznatih konstanti iz sistema (3.17) i na osnovu jednačina (3.11) i (3.14) određeno je u potpunosti naponsko stanje oko sferne šupljine, neopterećene sa unutrašnje strane.

Razmatranje naponskog stanja oko sferne šupljine, delimično opterećene rotacionim opterećenjem (osa rotacije Oz), je složeniji problem. Kao prvo pitanje postavlja se određivanje funkcije koja predstavlja opterećenje. U monografiji [27] Jaeger & Cook rotaciono simetrično opterećenje (Sl.7) dato je u obliku Furijeovog reda:

$$p(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi \quad (3.18)$$

gde su koeficijenti:

$$a_0 = \frac{2\beta p}{\pi}; \quad a_n = \frac{2p}{n\pi} [1 + (-1)^n] \sin n\beta \quad (3.19)$$



$$(\pi - \beta < \varphi < \pi + \beta)$$

$$(-\beta < \varphi < \beta)$$

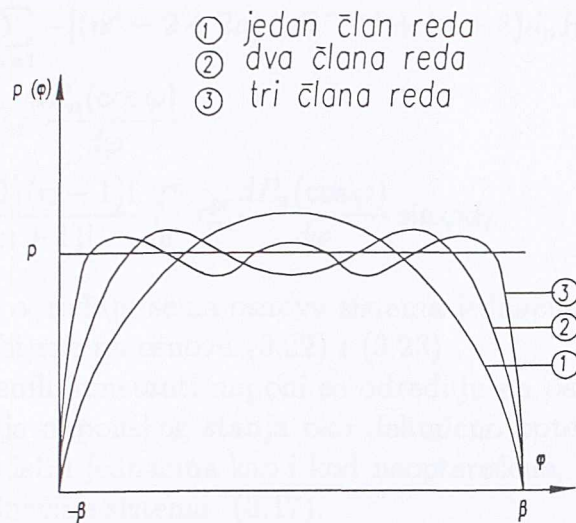
Sl.7. Rotaciono simetrično opterećenje

U ovom radu se predlaže predstavljanje funkcije rotacionog opterećenja (nezavisno od θ) u obliku beskonačnog reda na sledeći način:

$$p(\varphi) = p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)\pi} \sin \frac{(2j+1)\pi}{2\beta} (\beta - \varphi) \quad (3.20)$$

gde je β zadat ugao (Sl.7). Predložena funkcija opterećenja prikazana je grafički na (Sl.8) i definisana je kao jednoparametarska funkcija. Uvođenje funkcije opterećenja u navedenom obliku dato je uslovima rešenja diferencijalnih jednačina (1.7). Naime, rešenje jednačine je moguće ukoliko je funkcija opterećenja na konturi (kao graničan

uslov) neprekidna, nema skokovitih menjanja vrednosti.



Sl.8. Grafički prikaz funkcije opterećenja

Granični uslovi na opterećenom delu sferne šupljine ($r = R$) imaju oblik

$$\begin{aligned}\sigma_r^* &= -\sigma_r^{pr} - p(\varphi) \\ \tau_{r\varphi}^* &= -\tau_{r\varphi}^{pr}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Iz jednačine (3.21) uočava se da je do promene došlo samo u prvoj jednačini:

$$\begin{aligned}\sigma_r^*(\varphi) &= \frac{E}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n^2 + 3n - 2\nu)c_n R^{-n-1} - (n+1)(n+2)d_n R^{-n-3}] P_n(\cos \varphi) \\ &= -\sigma_r^{pr} - p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)\pi} \sin \frac{(2j+1)\pi}{2\beta} (\beta - \varphi)\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\sigma_r^*(\varphi) &= \frac{E}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n^2 + 3n - 2\nu)c_n R^{-n-1} - (n+1)(n+2)d_n R^{-n-3}] P_n(\cos \varphi) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \varphi)\end{aligned}$$

gde je

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi (\sigma_r^{pr} + p(\varphi)) P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (r = R) \quad (3.22)$$

Prema tome, u beskonačni red po polinomima Ležandra razvija se funkcija $\sigma_r^{pr} + p(\varphi)$ i dobija se izmenjen koeficijent A_n .

Druga jednačina ostaje nepromenjena.

$$\begin{aligned}\tau_{r\varphi}^*(\varphi) &= \frac{E}{1+\nu} \sum_{n=1}^{\infty} -[(n^2 - 2 + 2\nu)c_n R^{-n-1} + (n+2)d_n R^{-n-3}] \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} = \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \\ B_n &= \frac{(2n+1)(n-1)!}{2\pi(n+1)!} \int_0^\pi \tau_{r\varphi}^{pr} \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \sin \varphi d\varphi\end{aligned}\quad (3.23)$$

Nepoznate konstante određuju se na osnovu sistema jednačina (3.17) uzimajući koeficijente A_n i B_n dobijene na osnovu (3.22) i (3.23).

Na osnovu određenih konstanti naponi se određuju na osnovu jednačina (3.11) i (3.14). Određivanje naponskog stanja oko delimično opterećene sferne šupljine svodi se na rešavanje istih jednačina kao i kod neopterećene, uz neophodnu izmenu desne strane prve jednačine sistema (3.17).

Poglavlje 4

NAPONSKO STANJE - CILINDRIČNI OTVOR

Određivanje naponskog stanja oko otvora oblika cilindra nalazi se u istraživanjima više autora. Među prvim istraživanjima su radovi Kirša , gde se određivanje naponskog stanja vrši u dvodimenzionom prostoru .Dobijena rešenja se i danas primenjuju kod analize naponskog stanja pri izgradnji linijskih podzemnih objekata (tunela).

Savremeniji radovi rešavanja problema , vezanih za ravnotežu beskonačnog cilindra, vezani su za istraživanja A.Vangerina i V. Steklova [1] .U svojim radovima oni su razmatrali opšti oblik rešenja .

U radovima M.Šifa i V.Steklova, primenom metoda razdvajanja promenljivih, zadatak se svodi na rešavanje specijalne transcendentne jednačine koja sadrži funkciju Besela. Ove jednačine je detaljnije analizirao V.K.Prokopov [55] rešavajući taj zadatak u izotropnoj sredini .

Ovde treba posebno naglasiti i postojanje velikog broja radova koji razmatraju i konačan cilindar .

Klasičnim radovima koji se odnose na zadatke određivanja naponskog stanja u kružnom cilindru smatraju se radovi M.A.Šifa i G.M.Valova [74].

U radovima A.I.Lurje i V.K.Prokopov [32] rešenja osnosimetričnih zadataka , između ostalog i kružnog cilindra , razmatrana su pri dejstvu proizvoljnog rotacionog opterećenja. Naponsko stanje se definisalo rešenjem transcendentnih jednačina dobijenim Furijeovim metodom razdvajanja promenljivih.

Naponsko stanje oko cilindra kružnog preseka razmotreno je i u radovima M.Kregsa. Rešenja su dobijena pomoću integrala Furijeove transformacije . U svom radu [25] M. Ivković je dao rešenje u obliku integrala , a P.Z.Lifšic [31] , A.I.Lurje i M.Barton [14] daju rešenje istog problema u obliku beskonačnih redova.

Pri određivanju naponskog stanja pojedini autori polaze od naponskih funkcija, tako Šid u svojim radovima polazi od Erijeve funkcije napona , a Fener koristi jednostavniji oblik naponske funkcije po Feplu.

U monografiji [56] dato je istraživanje Tercagija i Rixarta koji naponsko stanje određuju za različite poprečne preseke cilindra . Među radovima iz ove oblasti potrebno je istaći i monografije P.Jovanovića [26] i Yu.N.Podiljčuka [51] . Podiljčuk rešenje daje u obliku beskonačnih redova koji sadrže Ležandrove funkcije .

U literaturi se veoma često može naći istraživanje naponskih stanja u oblasti koja je definisana između dve koncentrične cilindrične površi kružnog preseka . Naponsko stanje se analizira za slučaj rotacionog opterećenja na obe cilindrične površi . Na osnovu tih istraživanja određuje se i naponsko stanje oko cilindričnog otvora [16] . Koordinate tenzora napona određuju se na osnovu sledećih relacija:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -p_0 \frac{R^2}{r^2} - p_1 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) ; \sigma_\varphi = p_0 \frac{R^2}{r^2} - p_1 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) ; \\ \sigma_z &= -2\nu p_1 ; \tau_{rz} = \tau_{z\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0\end{aligned}\quad (4.1)$$

gde je :

R - poluprečnik cilindričnog otvora
 p_0 -opterećenje na unutrašnjoj konturi otvora
 p_1 -opterećenje na beskonačnosti

Za prikaz u okviru ove teze odabrano je određivanje naponskog stanja oko cilindričnog otvora, dato u radu [25] .

4.1 Primarno naponsko stanje

Za analizu primarnog naponskog stanja polazi se od usvojenog elastičnog modela (Sl.5) i definisanog tenzora napona (3.2) .

Transformacijom koordinatnog sistema u cilindrični koordinatni sistem [57] , koordinate primarnog tenzora napona (3.2) dobijaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{pr} &= \gamma(H-z) \frac{\nu}{1-\nu} \\ \sigma_\varphi^{pr} &= \gamma(H-z) \frac{\nu}{1-\nu} \\ \sigma_z^{pr} &= \gamma(H-z) \\ \tau_{rz}^{pr} &= \tau_{r\varphi}^{pr} = \tau_{z\varphi}^{pr} = 0\end{aligned}\quad (4.2)$$

gde je :

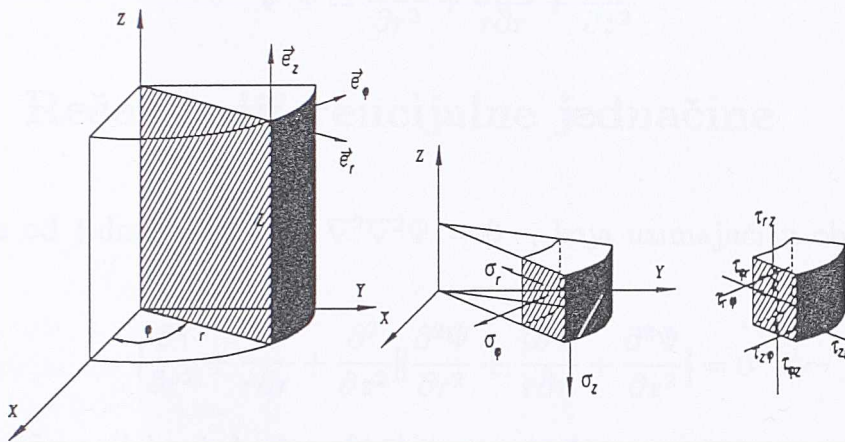
γ -zapreminska masa stene

ν -koeficijent Puasona

H -položaj tačke

(r, φ, z) - koordinate cilindričnog koordinatnog sistema (Sl.9) , koji je definisan relacijama:

$$x = r \cos \varphi , y = r \sin \varphi , z = z \quad (4.3)$$



Sl.9. Cilindrični koordinatni sistem

Na većim dubinama ($H \gg z$) raspodela napona može se razmatrati i prema hidrostatičkom modelu . U tom slučaju (Sl.5) je $\sigma_x^{pr} = \sigma_y^{pr} = \sigma_z^{pr} = \gamma H$. Transformacijom koordinatnog sistema dobija se tenzor napona u sledećem obliku:

$$\sigma_r^{pr} = \sigma_\varphi^{pr} = \sigma_z^{pr} = \gamma H , \tau_{r\varphi}^{pr} = \tau_{rz}^{pr} = \tau_{z\varphi}^{pr} = 0 \quad (4.4)$$

Hidrostatički model stenske mase posebno je pogodan za analizu horizontalnih beskonačnih cilindričnih otvora .

4.2 Izrazi za napone preko naponske funkcije

Određivanje naponskog stanja svodi se na iznalaženje naponske funkcije Ψ koja zadovoljava jednačinu (1.7) . Naponi izraženi preko naponske funkcije Ψ , prema

poznatim transformacijama , imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\sigma_r^* &= \frac{\partial}{\partial z}[\nu \nabla^2 \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}] ; \sigma_z^* = \frac{\partial}{\partial z}[(2 - \nu) \nabla^2 \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}] \\ \sigma_\varphi^* &= \frac{\partial}{\partial z}[\nu \nabla^2 \Psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}] ; \tau_{rz}^* = \frac{\partial}{\partial r}[(1 - \nu) \nabla^2 \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}]\end{aligned}\quad (4.5)$$

Izrazi (4.5) izvedeni su za rotaciono simetričan slučaj opterećenja (nezavisno od φ) , a u cilindričnom koordinatnom sistemu. Operator ∇^2 definisan je u sledećem obliku

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (4.6)$$

4.3 Rešenje diferencijalne jednačine

Polazi se od jednačine (1.7) , $\nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0$, koja uzimajući u obzir (4.6) dobija oblik:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (4.7)$$

Rešenje diferencijalne jednačine (4.7) pretpostavlja se u obliku:

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} f(kr) \sin kz \quad (4.8)$$

Unošenjem izraza (4.8) u jednačinu (4.7) dobija se

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{r dr} - k^2 \right] \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{df}{r dr} - k^2 f \right] = 0 \quad (4.9)$$

gde je diferencijalni operator oblika

$$(\nabla'^2) \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{r dr} - k^2 \quad (4.10)$$

Primenom operatora (4.10) na funkciju $f(kr)$ dobija se obična Beselova diferencijalna jednačina drugog reda , i to za slučaj $n = 0$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{df}{r dr} - k^2 f = 0 \quad (4.11)$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (4.11) je

$$f(kr) = A_1 J_0(kr) + B_1 K_0(kr) \quad (4.12)$$

gde su $J_0(kr)$ i $K_0(kr)$ Beselove funkcije nultog reda.

Koristeći rekurentne formule i veze između Beselovih funkcija i njihovog prvog izvoda [25], mogu se formirati izrazi za napone (4.5). U izrazima za napone pojavljuju se Beselove funkcije nultog i prvog reda. Njihovim ispitivanjem za $r \rightarrow \infty$ uočava se da iste ne mogu zadovoljiti postavljene granične uslove, jer je

$$\lim_{r \rightarrow \infty} J_n(kr) = \infty ; \lim_{r \rightarrow \infty} K_n(kr) = 0 \quad (4.13)$$

Uzimajući u obzir (4.13), dolazi se do zaključka da se od rešenja jednačina (4.12) može koristiti samo partikularni integral $B_1 K_0(kr)$.

Drugi partikularni integral se pretpostavlja u obliku $B_2 r K_1(kr)$ i primenom operatora (4.10) dobija se

$$\begin{aligned} \nabla^2 [B_2 r K_1(kr)] &= -2B_2 k K_0(kr) \\ \nabla^2 \nabla^2 (B_2 r K_1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Primenom operatora (4.10) na dobijeno rešenje dobija se nula što znači da je $B_2 r K_1(kr)$ partikularno rešenje diferencijalne jednačine (4.9).

Prema tome, rešenje se može pisati u obliku

$$f(kr) = B_1 K_0(kr) + B_2 r K_1(kr) \quad (4.15)$$

Iz (4.15), a uzimajući u obzir (4.8) dobija se rešenje jednačine (4.7) u obliku:

$$\Psi_{(r,z)} = \sum_{k=0}^{\infty} [B_1 K_0(kr) + B_2 r K_1(kr)] \sin kz \quad (4.16)$$

4.4 Granični uslovi . Određivanje konstanti

Na osnovu dobijenih rešenja (4.16) i jednačine (4.5) dobijaju se izrazi za dodatne napone izazvane uticajem cilindričnog otvora:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^* &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cos kz (K_0(kr)[B_2(1-2\nu) - kB_1] - K_1(kr)[(kr)B_2 + \frac{B_1}{r}]) \\
 \sigma_\varphi^* &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cos kz (B_2(1-2\nu)K_0(kr) + \frac{B_1}{r}K_1(kr)) \\
 \sigma_z^* &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cos kz (K_0(kr)[kB_1 - 2(2-\nu)B_2] + B_2krK_1(kr)) \\
 \tau_{rz}^* &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \sin kz (-B_2krK_0(kr) - [kB_1 - 2(1-\nu)B_2]K_1(kr)) \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Nepoznate konstante u jednačinama (4.17) dobijaju se iz graničnih uslova po naponima (1.5) .

Ako je površ cilindričnog otvora neopterećena sa unutrašnje strane važe sledeći granični uslovi:

$$\sigma_r = 0 \quad i \quad \tau_{rz} = 0 \quad (za \ r = R) \quad (4.18)$$

Ako u izrazima (4.17) $r \rightarrow \infty$ tada je

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r^* = \lim_{r \rightarrow \infty} \tau_{rz}^* = 0 \quad (4.19)$$

pa se ukupni naponi dobijaju (slično kao i kod istraživanja sfere) na sledeći način:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \sigma_r^* + \sigma_r^{pr} \\
 \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^* + \sigma_\varphi^{pr} \\
 \sigma_z &= \sigma_z^* + \sigma_z^{pr} \\
 \tau_{rz} &= \tau_{rz}^* + \tau_{rz}^{pr} \\
 \tau_{r\varphi} &= \tau_{z\varphi} = 0
 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ako dobijena rešenja (4.20) uvrstimo u izraze za granične uslove (4.18), za $r = R$, isti dobijaju sledeći oblik

$$\begin{aligned}\sigma_r^* &= -\sigma_r^{pr} \\ \tau_{rz}^* &= -\tau_{rz}^{pr}\end{aligned}\quad (4.21)$$

Iz uslova (4.2), (4.4) i (4.21) dobija se da je $\tau_{rz}^* = 0$, a samim tim i veza između konstanti B_1 i B_2 .

$$B_1 = B_2 \left[\frac{2(1-\nu)}{k} - r \frac{K_0(kr)}{K_1(kr)} \right]$$

odnosno

$$\tau_{rz} = -\tau_{rz}^{pr} = 0 \rightarrow B_1 = B_1[B_2] \quad (4.22)$$

Ako relacije (4.21) i (4.22) uvrstimo u jednačinu za određivanje napona σ_r^* (4.17)

$$\begin{aligned}\sigma_r^*(R, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cos kz (K_0(kR)[B_2(1-2\nu) - kB_1[B_2]] - \\ &- K_1(kR)[(kR)B_2 + \frac{B_1[B_2]}{R}]) = -\sigma_r^{pr} = -\gamma(H-z), \text{ (ili } -\gamma H)\end{aligned}\quad (4.23)$$

odnosno

$$\sigma_r^* = -\sigma_r^{pr} = -\gamma(H-z), \text{ (ili } = \gamma H) \rightarrow B_2[\gamma H, R] \text{ ili } B_2[\gamma(H-z), R] \quad (4.24)$$

dobija se konstanta B_2 .

Na osnovu određenih konstanti određujemo naponsko stanje na osnovu jednačina (4.17) i (4.20).

Naponsko stanje oko cilindričnog otvora, opterećenog rotaciono simetričnim opterećenjem sa unutrašnje strane kao delimičnim rotaciono simetričnim opterećenjem, razmatrano je u radovima više autora. I ovde se postavlja pitanje definisanja funkcije koja predstavlja rotaciono simetrično opterećenje.

U radu [25] opterećenje je prikazano Furijeovim integralom (za proizvoljno rotaciono simetrično opterećenje $p(z)$)

$$p\left(\frac{z}{R}\right) = \frac{2}{\pi R} \int_0^{\infty} \cos \frac{\alpha_1 z}{R} d\alpha_1 \int_0^{\infty} p \cos \frac{\alpha_1 z}{R} dz \quad (4.25)$$

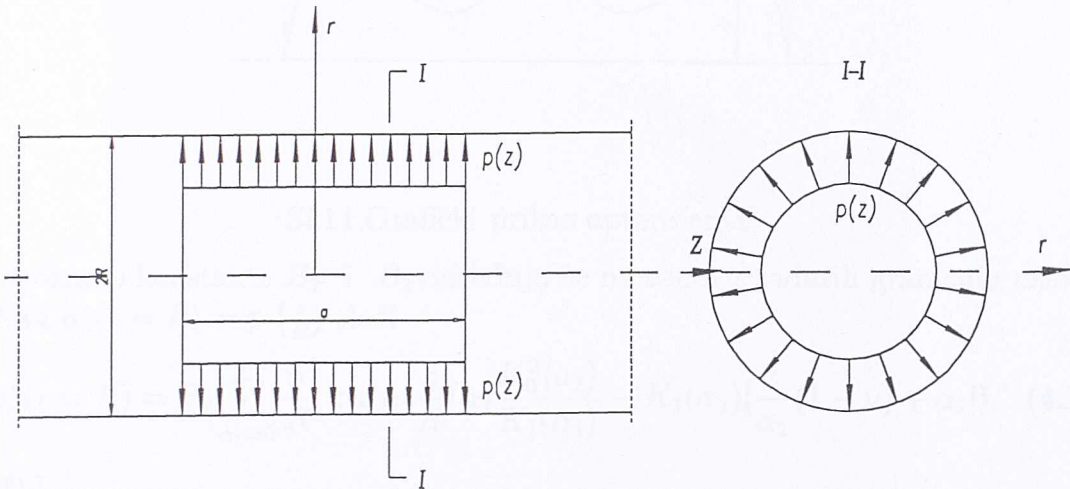
gde je:

R -poluprečnik cilindra

$$kz = \frac{\alpha_1}{R} z$$

Za slučaj delimičnog konstantnog opterećenja p na delu $-\frac{a}{2} \leq z \leq +\frac{a}{2}$ (Sl.10) opterećenje je dato u obliku Furije-ovog integrala

$$p\left(\frac{z}{R}\right) = \frac{2}{\pi R} \int_0^{\infty} \cos \frac{\alpha_1 z}{R} d\alpha_1 \int_0^{\frac{a}{2}} p \cos \frac{\alpha_1 z}{R} dz \quad (4.26)$$



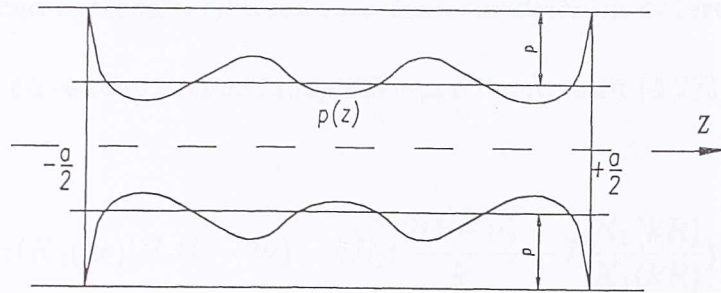
Sl.10. Delimično rotaciono opterećenje

U ovom radu se razmatra predstavljanje funkcije delimičnog rotacionog opterećenja preko beskonačnog reda.

$$p(z) = p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{a} (a-z); \quad 0 \leq z \leq a \quad (4.27)$$

4.5. Koordinatni tenzori napona

Grafički prikaz funkcije (4.27) Sl.11. analogan je sa prikazanim na Sl.8.



Sl.11. Grafički prikaz opterećenja.

Nepoznate konstante B_1 i B_2 određuju se na osnovu zadatih graničnih uslova. Iz uslova $\sigma_r^*(r = R) = p\left(\frac{z}{R}\right)$ sledi

$$\sigma_r^*(r = R) = B_2 \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^2}{R^2} \cos \alpha_1 \frac{z}{R} \left(\alpha_1 \frac{K_0^2(\alpha_1)}{K_1(\alpha_1)} - K_1(\alpha_1) \left[\frac{2}{\alpha_1} (1 - \nu) + \alpha_1 \right] \right) \quad (4.28)$$

odnosno

$$B_2 = \frac{\frac{2p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha_1} \sin \frac{\alpha_1 a}{2R} \cos \frac{\alpha_1 z}{R} d\alpha_1}{\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^2}{R^2} \cos \alpha_1 \frac{z}{R} \left(\alpha_1 \frac{K_0^2(\alpha_1)}{K_1(\alpha_1)} - K_1(\alpha_1) \left[\frac{2}{\alpha_1} (1 - \nu) + \alpha_1 \right] \right)} \quad (4.29)$$

Konstanta B_1 se određuje na osnovu relacije (4.22).

Za slučaj navedenog alternativnog rotacionog opterećenja na konačnoj dužini "a" (Sl.10) konstanta B_2 se određuje iz graničnog uslova na konturi

$$\sigma_r^* = -\sigma_r^{pr} - p(z) \quad (4.30)$$

Unoseći relacije (4.22) i (4.30) u jednačine (4.17) dobija se konstanta B_2 u obliku:

$$B_2 = - \frac{\sigma_r^{pr} + p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{a} (a-z)}{\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cos kz \left(kR \frac{K_0^2(kR)}{K_1(kR)} - K_1(kR) \left[\frac{2}{kR} (1 - \nu) + kR \right] \right)} \quad (4.31)$$

Na osnovu dobijenih konstanti B_1 i B_2 iz jednačina (4.17) i (4.20) određuju se naponi.

4.5 Koordinate tenzora napona

U radu [25] dati su izrazi za napone za potpuno opterećen cilindar rotacionim opterećenjem i za delimično opterećen cilindar istim opterećenjem. Za istraživanje u okviru ove teze, a imajući u vidu složenost dobijenih izraza za napone, prikazaće se naponi za delimično opterećen cilindar rotaciono simetričnim opterećenjem.

Izrazi za napone na osnovu rasmatranog rešenja u ovom radu (4.27),(4.30) imaju sledeći oblik :

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cos kz (K_0(kr) [B_2(1-2\nu) - kB_2(\frac{2(1-\nu)}{k} - R\frac{K_0(kR)}{K_1(kR)})] - \\ &\quad - K_1(kr) [(kr)B_2 + \frac{B_2}{r}(\frac{2(1-\nu)}{k} - R\frac{K_0(kR)}{K_1(kR)})]) \\ \sigma_\varphi^* &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cos kz (B_2(1-2\nu)K_0(kr) + \frac{B_2}{r}[\frac{2(1-\nu)}{k} - R\frac{K_0(kR)}{K_1(kR)}]K_1(kr)) \\ \sigma_z^* &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cos kz (K_0(kr) [kB_2(\frac{2(1-\nu)}{k} - R\frac{K_0(kR)}{K_1(kR)}) - 2(1-\nu)B_2] + \\ &\quad + krB_2K_1(kr)) \\ \tau_{rz}^* &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \sin kz (- (kr)B_2K_0(kr) - [kB_2(\frac{2(1-\nu)}{k} - R\frac{K_0(kR)}{K_1(kR)}) - \\ &\quad - 2(1-\nu)B_2]K_1(kr)) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Na osnovu dobijenih rešenja (4.32) i relacija (4.20) dobijaju se koordinate tenzora napona.

5.1 Primarno naponsko stanje

Poglavlje 5

NAPONSKO STANJE - ELIPTIČNA ŠUPLJINA

Posmatramo beskonačnu sredinu oslabljenu šupljinom oblika izduženog obrtnog elipsoida. U istraživanju se polazi od pretpostavke da je ta sredina izotropna i homogena. Sa teorijskog aspekta rešenje ovog problema može se razmatrati u različitim materijalima sa navedenim svojstvima i sa definisanim primarnim naponskim stanjem sredine. Rešenja se mogu koristiti u rešavanju različitih tehničkih zadataka. U ovom istraživanju akcenat je dat na stenski masiv sa definisanim primarnim naponskim stanjem.

Dosadašnja istraživanja, a što je pokazano i u prethodnim poglavljima, u potpunosti su definisala naponska stanja oko sferne šupljine i cilindričnog otvora. Navedena naponska stanja ustvari predstavljaju specijalne slučajeve naponskog stanja oko šupljine oblika obrtnog elipsoida. Naime, kada je jedna osa elipsoida znatno izduženija od ostale dve elipsoid se približava beskonačnom cilindru, a kada se poluose približavaju po veličini (2.28) elipsoid se približava obliku sfere.

Određivanje napona, oko delimično sa unutrašnje strane opterećene šupljine, ima poseban kako teorijski tako i praktičan značaj. Ovo se posebno odnosi na određivanje sekundarnog naponskog stanja pri sekvencijalnom građenju podzemnih građevina. Značajno je istaći da je u ovom radu usvojen oblik opterećenja koji može predstavljati model za delovanje podgradne konstrukcije. Sekundarno naponsko stanje, oko šupljine u eliptičnom koordinatnom sistemu, određuje se kao promena postojećeg primarnog naponskog stanja tj. u istom koordinatnom sistemu.

5.1 Primarno naponsko stanje.

Analiza primarnog naponskog stanja vrši se za usvojene modele stenske mase (Sl.5) i definisanih napona u Dekartovom koordinatnom sistemu (3.2) [Poglavlje 3]. U cilju

prikazivanja naponskog stanja u sistemu koordinata izduženog obrtnog elipsoida, potrebno je prvo izvršiti transformaciju koordinatnog sistema.

Polazi se od matrice jednačine transformacije

$$\bar{N} = A^T N A \quad (5.1)$$

gde su matrice \bar{N} , A i N definisane

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} \sigma_u^{pr} & \tau_{u\varphi}^{pr} & \tau_{u\theta}^{pr} \\ \tau_{\varphi u}^{pr} & \sigma_\varphi^{pr} & \tau_{\varphi\theta}^{pr} \\ \tau_{\theta u}^{pr} & \tau_{\theta\varphi}^{pr} & \sigma_\theta^{pr} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} \sigma_x^{pr} & \tau_{xy}^{pr} & \tau_{xz}^{pr} \\ \tau_{yx}^{pr} & \sigma_y^{pr} & \tau_{yz}^{pr} \\ \tau_{zx}^{pr} & \tau_{zy}^{pr} & \sigma_z^{pr} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \cos(x, u) & \cos(x, \varphi) & \cos(x, \theta) \\ \cos(y, u) & \cos(y, \varphi) & \cos(y, \theta) \\ \cos(z, u) & \cos(z, \varphi) & \cos(z, \theta) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Iz relacija (5.1) i (5.2), a uzimajući u obzir (3.2) dobija se:

$$\begin{aligned} \sigma_u^{pr} &= \sigma_x^{pr} \cos^2(x, u) + \sigma_y^{pr} \cos^2(y, u) + \sigma_z^{pr} \cos^2(z, u); \\ \sigma_\varphi^{pr} &= \sigma_x^{pr} \cos^2(x, \varphi) + \sigma_y^{pr} \cos^2(y, \varphi) + \sigma_z^{pr} \cos^2(z, \varphi); \\ \sigma_\theta^{pr} &= \sigma_x^{pr} \cos^2(x, \theta) + \sigma_y^{pr} \cos^2(y, \theta) + \sigma_z^{pr} \cos^2(z, \theta); \\ \tau_{u\varphi}^{pr} &= \sigma_x^{pr} \cos(x, u) \cos(x, \varphi) + \sigma_y^{pr} \cos(y, u) \cos(y, \varphi) + \sigma_z^{pr} \cos(z, u) \cos(z, \varphi); \\ \tau_{u\theta}^{pr} &= \sigma_x^{pr} \cos(x, u) \cos(x, \theta) + \sigma_y^{pr} \cos(y, u) \cos(y, \theta) + \sigma_z^{pr} \cos(z, u) \cos(z, \theta); \\ \tau_{\varphi\theta}^{pr} &= \sigma_x^{pr} \cos(x, \varphi) \cos(x, \theta) + \sigma_y^{pr} \cos(y, \varphi) \cos(y, \theta) + \sigma_z^{pr} \cos(z, \varphi) \cos(z, \theta) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Za elastični model stenske mase se usvaja:

$$\sigma_z^{pr} = \gamma(H - c chu \cos \varphi); \quad \sigma_x^{pr} = \sigma_y^{pr} = \frac{\nu}{1 - \nu} \gamma(H - c chu \cos \varphi) \quad (5.4)$$

Transformacijom (5.3) dobija se :

$$\begin{aligned} \sigma_u^{pr} &= \gamma(H - c chu \cos \varphi) \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \frac{ch^2 u \sin^2 \varphi}{ch^2 u - \cos^2 \varphi} + \frac{sh^2 u \cos^2 \varphi}{ch^2 u - \cos^2 \varphi} \right) \\ \sigma_\varphi^{pr} &= \gamma(H - c chu \cos \varphi) \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \frac{sh^2 u \cos^2 \varphi}{ch^2 u - \cos^2 \varphi} + \frac{ch^2 u \sin^2 \varphi}{ch^2 u - \cos^2 \varphi} \right) \\ \sigma_\theta^{pr} &= \gamma(H - c chu \cos \varphi) \frac{\nu}{1 - \nu} \\ \tau_{u\varphi}^{pr} &= \gamma(H - c chu \cos \varphi) \left(\frac{2\nu - 1}{1 - \nu} \frac{chu shu \cos \varphi \sin \varphi}{ch^2 u - \cos^2 \varphi} \right) \\ \tau_{u\theta}^{pr} &= \tau_{\varphi\theta}^{pr} = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

U analizi je moguće za relacije (5.4) usvojiti $\sigma_z^{pr} = \gamma H$; $\sigma_x^{pr} = \sigma_y^{pr} = \frac{\nu}{1 - \nu} \gamma H$ i dobiti izraze za napone (5.5) u jednostavnijem obliku.

Za hidrostatički model stenske mase se usvaja:

$$\sigma_z^{pr} = \sigma_y^{pr} = \sigma_x^{pr} = \gamma H \quad (5.6)$$

Ako se (5.6) uvrsti u (5.3) dobija se:

$$\sigma_u^{pr} = \sigma_\varphi^{pr} = \sigma_\theta^{pr} = \gamma H; \tau_{u\varphi}^{pr} = \tau_{u\theta}^{pr} = \tau_{\varphi\theta}^{pr} = 0 \quad (5.7)$$

5.2 Izrazi za napone preko naponske funkcije

Naponsko stanje oko šupljine oblika obrtnog izduženog elipsoida određuje se na osnovu rešenja jednačine (1.7) i definisanja oblika naponske funkcije Ψ [$\Psi = \Phi_0(u, \varphi) + c chu \cos \varphi \Phi_3(u, \varphi)$] (1.6) [Poglavlje 1]. Naponi izraženi preko naponske funkcije Ψ , za rotaciono simetričan slučaj opterećenja, u sistemu koordinata izduženog obrtnog elipsoida, imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \sigma_u^* &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} - \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\partial \Psi}{\partial u} chushu \right) + \frac{2\alpha}{h^2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} c shu \cos \varphi + g \bar{\Psi} \\ \sigma_\varphi^* &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} - \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} shuchu - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi \right) - \frac{2\alpha}{h^2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} c chu \sin \varphi + g \bar{\Psi} \\ \sigma_\theta^* &= -\frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial u} chu \right) + g \bar{\Psi} \\ \tau_{u\varphi}^* &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial \varphi} + \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} chushu + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \sin \varphi \cos \varphi \right) + \\ &\quad \frac{\alpha}{h^2} \left(-\frac{\partial \Phi_3}{\partial u} c chu \sin \varphi + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} c shu \cos \varphi \right) \\ \tau_{u\theta}^* &= \tau_{\varphi\theta}^* = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

gde je:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} &= \frac{2}{h^2} \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial u} c chu \cos \varphi - \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} c chu \sin \varphi \right) \\ h^2 &= c^2 (ch^2 u - \cos^2 \varphi) \\ \alpha &= 2 \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) \\ g &= \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Izvođenje izraza (5.8) i (5.9) za slučaj rotaciono simetričnog opterećenja (osa rotacije Oz) dato je u PRILOGU BR.I. Navedeni izrazi za napone prvi put su u ovom obliku izvedeni i nadalje se koriste u ovom radu.

5.3 Diferencijalne jednačine u eliptičnom sistemu koordinata

Oblik diferencijalne jednačine (1.7) koju moraju zadovoljavati biharmonijske naponske funkcije Nojber-Papkovića (1.6), zavisi od oblika Laplasovog operatora, u sistemu koordinata u odnosu na koji izražavamo naponske funkcije. U usvojenom sistemu koordinata izduženog obrtnog elipsoida Laplasov diferencijalni operator se javlja u obliku:

$$\nabla^2 = \left(\frac{1}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial chu} \left[(ch^2u - 1) \frac{\partial}{\partial chu} \right] + \frac{1}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \cos \varphi} \right. \\ \left. \left[(1 - \cos^2 \varphi) \frac{\partial}{\partial \cos \varphi} \right] + \frac{1}{(ch^2u - 1)(1 - \cos^2 \varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (5.10)$$

Uzimajući da je u slučaju rotaciono simetričnog opterećenja, opterećenje nezavisno od θ , dobija se sledeći oblik operatora :

$$\nabla^2 = \frac{1}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial chu} \left[(ch^2u - 1) \frac{\partial}{\partial chu} \right] + \\ + \frac{1}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \cos \varphi} \left[(1 - \cos^2 \varphi) \frac{\partial}{\partial \cos \varphi} \right] \quad (5.11)$$

Ako se (5.11) uvrsti u (1.7) dobija se :

$$\left[\frac{1}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial chu} (ch^2u - 1) \frac{\partial}{\partial chu} \right] + \frac{1}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \cos \varphi} \left[(1 - \cos^2 \varphi) \frac{\partial}{\partial \cos \varphi} \right] \left[\frac{1}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial chu} \left[(ch^2u - 1) \frac{\partial \Psi}{\partial chu} \right] + \right. \\ \left. \frac{1}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \cos \varphi} \left[(1 - \cos^2 \varphi) \frac{\partial \Psi}{\partial \cos \varphi} \right] \right] = 0 \quad (5.12)$$

Relacija (5.12) predstavlja oblik diferencijalne jednačine $\nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0$ u eliptičnom sistemu koordinata.

5.4 Rešenje diferencijalne jednačine

Posmatra se diferencijalna jednačina (1.7) u obliku (5.12). Jednačina se može transformisati u dve jednačine:

$$\nabla^2 A = 0 \quad (5.13)$$

$$\nabla^2 \Psi = A \quad (5.14)$$

Rešenje jednačine (5.13) metodom razdvajanja promenljivih traži se u obliku :

$$A = F(chu)\Phi(\cos \varphi) \quad (5.15)$$

Primenom poznatih matematičkih transformacija uz razdvajanje promenljivih dobijaju se sledeće jednačine po nezavisno promenljivim "u" i "φ":

$$\begin{aligned} [(1 - ch^2u)F'(chu)]' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1 - ch^2u}]F(chu) &= 0 \\ [(1 - \cos^2 \varphi)\Phi'(\cos \varphi)]' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \cos^2 \varphi}]\Phi(\cos \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Opšta rešenja jednačina (5.16) su poznata u obliku:

$$\begin{aligned} F_{nm}(chu) &= A_{nm}P_n^m(chu) + B_{nm}Q_n^m(chu) \\ \Phi_{nm}(\cos \varphi) &= C_{nm}P_n^m(\cos \varphi) + D_{nm}Q_n^m(\cos \varphi) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ako se (5.17) uvrsti u (5.15) dobija se rešenje:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm}P_n^m(chu) + B_{nm}Q_n^m(chu)][C_{nm}P_n^m(\cos \varphi) + D_{nm}Q_n^m(\cos \varphi)] \quad (5.18)$$

gde su:

$P_n^m(\cos \varphi), Q_n^m(chu)$ Ležandrovi polinomi i funkcije definisane (2.34) i (2.36)

a za $m = 0$

$P_n(\cos \varphi), Q_n(chu)$ Ležandrovi polinomi i funkcije definisane (2.33) i (2.35)

Da bi rešenje (5.18) bilo neprekidno mora biti $D_{nm} = 0$ pa se dobija sledeći oblik rešenja:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm}P_n^m(chu) + B_{nm}Q_n^m(chu)]C_{nm}P_n^m(\cos \varphi) \quad (5.19)$$

Iz graničnog uslova :

$$\lim_{chu \rightarrow \infty} P_n^m(chu) = \infty; \quad \lim_{chu \rightarrow \infty} Q_n^m(chu) = 0 \quad (5.20)$$

dolazi se do zaključka da je vrednost koeficijenta $A_{nm} = 0$ pa se rešenje jednačine (5.13) dobija u obliku

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [C_{nm}B_{nm}P_n^m(\cos \varphi)Q_n^m(chu)] \quad (5.21)$$

Zamenom $a_{nm} = C_{nm}B_{nm}$, dobija se rešenje jednačine (5.13) u konačnom obliku

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu)] \quad (5.22)$$

Ako se dobijeno rešenje (5.22) uvrsti u jednačinu (5.14):

$$\nabla^2 \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu)] \quad (5.23)$$

čije rešenje se traži u obliku:

$$\Psi = \Psi_h + \Psi_p \quad (5.24)$$

i na osnovu (5.24) se formiraju dve diferencijalne jednačine

-opšte rešenje

$$\nabla^2 \Psi_h = 0 \quad (5.25)$$

-partikularno rešenje

$$\nabla^2 \Psi_p = A \quad (5.26)$$

Pri tome se homogena jednačina (5.25) rešava analogno kao jednačina (5.13) i dobija se rešenje u obliku:

$$\Psi_h = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [b_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu)] \quad (5.27)$$

a partikularno rešenje se traži u obliku:

$$\Psi_p = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [e_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu)] \quad (5.28)$$

Primenom diferencijalnog operatora (5.11) na Ψ_p u izrazu (5.28) i izjednačavanjem leve strane jednačine (5.26) i desne strane jednačine (5.22) dobija se veza između koeficijenata a_{nm} i e_{nm} . Konačno rešenje jednačine (1.7) dobija se u obliku:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [b_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu)] + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [e_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu)] \quad (5.29)$$

odnosno

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [f_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu)] \quad (5.30)$$

gde je:

$$f_{nm} = b_{nm} + e_{nm},$$

a P_n^m i Q_n^m su prikazani u izrazima (2.34) i (2.36)

Nepoznati koeficijenti f_{nm} određuju se iz graničnih uslova zadatih po naponima (1.5) i izraženih preko naponskih funkcija (5.8).

Rešenje jednačine (1.7) za slučaj ($m=0$) dobija se iz (5.30) u obliku:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n P_n(\cos \varphi) Q_n(chu)] \quad (5.31)$$

5.5 Koordinate tenzora napona

Polazi se od definisane naponske funkcije za slučaj rotacionog simetričnog opterećenja (1.6) u obliku :

$$\Psi = \Phi_0 + z\Phi_3 \quad (5.32)$$

odnosno

$$\Psi = \Phi_0(u, \varphi) + c chu \cos \varphi \Phi_3(u, \varphi) \quad (5.33)$$

i rešenja diferencijalne jednačine (5.30) odnosno (5.31). Određivanje napona vrši se najpre iz opšteg rešenja diferencijalnih jednačina, a za slučaj rotaciono simetričnog opterećenja. Ako se u jednačini (5.32) naponske funkcije predstave u vidu beskonačnih dvostrukih redova, a uzimajući u obzir rešenje (5.30) dobija se:

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu) + \\ &+ c chu \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} P_{n+1}^m(\cos \varphi) Q_{n+1}^m(chu) \end{aligned} \quad (5.34)$$

gde su $\Phi_0(u, \varphi)$ i $\Phi_3(u, \varphi)$ harmonijske funkcije date u obliku redova

$$\begin{aligned} \Phi_0(u, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu) \\ \Phi_3(u, \varphi) &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} P_{n+1}^m(\cos \varphi) Q_{n+1}^m(chu) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Uvođeći oznake :

$P_n^m(\cos \varphi) = P_n^m$ i $Q_n^m(chu) = Q_n^m$ za pridružene Ležandrove funkcije i

$P_n^{(m)}(\cos \varphi) = P_n^{(m)}$ i $Q_n^{(m)}(chu) = Q_n^{(m)}$ za m-te izvode običnih Ležandrovih funkcija umnogome se skraćuju dobijeni izrazi. Uvođenjem relacije (5.34) u izraze

za određivanje napona (5.8) i korišćenjem navedenih oznaka dobijaju se izrazi za napone. Izvođenje izraza za napone dato je u PRILOGU BR II.

Koristeći rekurentne formule (2.39) i (2.41) naponi se dobijaju u sledećem obliku:

$$\sigma_u^* = \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [U_{nm}^1 A_{nm} P_n^m Q_n^m + U_{nm}^2 A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + U_{nm}^3 A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \\ + U_{nm}^4 C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + U_{nm}^5 C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + U_{nm}^6 C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m] \quad (5.36)$$

gde je :

$$U_{nm}^1 = \frac{1}{h^2 sh^2 u} (m(1 - mch^2 u) + (n + m + 1)[(2m + 1)ch^2 u - 2(m + 1) - \\ - (n + m + 2)sh^2 u] - (n + 1)sh^2 u) \\ U_{nm}^2 = \frac{chu}{h^2} (n - m + 1) \left(\frac{1}{sh^2 u} + \frac{c^2}{h^2} \right) \\ U_{nm}^3 = -\frac{c^2}{h^4} (n - m + 1) \cos \varphi \\ U_{nm}^4 = -\frac{c}{h^2} (n + m + 1) \cos \varphi \left[ch^2 u \left(\frac{1}{sh^2 u} + \frac{c^2}{h^2} \right) + \alpha \right] \\ U_{nm}^5 = \frac{c}{h^2} (n + m + 1) chu \left[\frac{c^2}{h^2} \cos^2 \varphi + 2 - \alpha \right] \\ U_{nm}^6 = \frac{c}{h^2} chu \cos \varphi \left[-2n - 3 - m(mch^2 u - 1) \frac{1}{sh^2 u} + \right. \\ \left. + (n - m + 1) \left[2(n + 1) \frac{1}{sh^2 u} - (2m + 1) \frac{ch^2 u}{sh^2 u} - (n - m) \right] + 2\alpha(n + 1) \right] \\ \left. + \frac{c^3}{h^4} \cos \varphi (shu \sin^2 \varphi + chu [sh^2 u - (n + 1)(\cos^2 \varphi - ch^2 u)]) \right] \quad (5.37)$$

$$\sigma_\varphi^* = \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\varphi_{nm}^1 A_{nm} P_n^m Q_n^m + \varphi_{nm}^2 A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \varphi_{nm}^3 A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\ + \varphi_{nm}^4 C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \varphi_{nm}^5 C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \varphi_{nm}^6 C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m] \quad (5.38)$$

gde je:

$$\varphi_{nm}^1 = \frac{1}{h^2 \sin^2 \varphi} (-m^2 \cos^2 \varphi + m + (n + m + 1)[(n - m + 1) \sin^2 \varphi - 1] \\ + (n + 1) \sin^2 \varphi) \\ \varphi_{nm}^2 = \frac{(n - m + 1)}{h^2} \cos \varphi \left[\frac{1}{\sin^2 \varphi} + \frac{c^2}{h^2} \right] \\ \varphi_{nm}^3 = -\frac{c^2}{h^4} (n - m + 1) chu$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{nm}^4 &= \frac{c}{h^2}(n+m+1)chu\left(\alpha - \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} - \frac{c^2}{h^2}\cos^2\varphi\right) \\
\varphi_{nm}^5 &= \frac{c}{h^2}(n+m+1)\cos\varphi\left(\frac{c^2}{h^2}ch^2u + \alpha - 2\right) \\
\varphi_{nm}^6 &= \frac{c}{h^2}chu\cos\varphi\left((n+1)(1-2\alpha) + \frac{1}{\sin^2\varphi}[m - m^2\cos^2\varphi + (n-m+1)\right. \\
&\quad \left.\times(n+m+2) - (n-m+1)(n+m+1)\cos^2\varphi\right] \quad (5.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\Theta_{nm}^1 A_{nm} P_n^m Q_n^m + \Theta_{nm}^2 A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \Theta_{nm}^3 A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
&\quad + \Theta_{nm}^4 C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \Theta_{nm}^5 C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \Theta_{nm}^6 C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m] \quad (5.40)
\end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
\Theta_{nm}^1 &= \frac{n+1}{h^2} \left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{ch^2u}{sh^2u} \right) \\
\Theta_{nm}^2 &= -\frac{1}{h^2} (n-m+1) \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \\
\Theta_{nm}^3 &= -\frac{1}{h^2} (n-m+1) \frac{chu}{sh^2u} \\
\Theta_{nm}^4 &= \frac{c}{h^2} (n+m+1) chu \left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} + 2 - \alpha \right) \\
\Theta_{nm}^5 &= \frac{c}{h^2} (n+m+1) \cos\varphi \left(\frac{ch^2u}{sh^2u} + \alpha - 2 \right) \\
\Theta_{nm}^6 &= -\frac{c}{h^2} (n+1) chu \cos\varphi \left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{ch^2u}{sh^2u} \right) \quad (5.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{u\varphi}^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [T_{nm}^1 A_{nm} P_n^m Q_n^m + T_{nm}^2 A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + T_{nm}^3 A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \\
&\quad + T_{nm}^4 A_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + T_{nm}^5 C_{nm} P_n^m Q_n^m + T_{nm}^6 C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
&\quad + T_{nm}^7 C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + T_{nm}^8 C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m] \quad (5.42)
\end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
T_{nm}^1 &= -\frac{(n+1)(n+2)}{h^2} \frac{chu\cos\varphi}{\sin\varphi shu} \\
T_{nm}^2 &= \frac{(n-m+1)\cos\varphi}{h^2} \frac{(n+1)}{shu} \left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{c^2}{h^2} \sin\varphi \right) \\
T_{nm}^3 &= \frac{(n-m+1)}{h^2} \frac{chu}{\sin\varphi} \left(\frac{(n+1)}{shu} + \frac{c^2}{h^2} shu \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{nm}^4 &= -\frac{1}{h^2}(n-m+1)^2 \frac{1}{\sin \varphi shu} \\
T_{nm}^5 &= -\frac{c}{h^2}(n+m+1)^2 \frac{\cos \varphi chu}{\sin \varphi shu} \\
T_{nm}^6 &= \frac{c}{h^2}(n+m+1) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} [shu(1-\alpha) + (n+1) \frac{ch^2u}{shu} - \frac{c^2}{h^2} ch^2u shu] \\
T_{nm}^7 &= \frac{c}{h^2}(n+m+1) \frac{chu}{shu} [(\alpha-1) \sin \varphi + (n+1) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - \frac{c^2}{h^2} \cos^2 \varphi \sin \varphi] \\
T_{nm}^8 &= \frac{c}{h^2} (shu \sin \varphi + \frac{ch^2u}{shu} [(n+1)(1-\alpha) \sin \varphi] + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} [(n+1)(\alpha-1)shu] \\
&\quad - \frac{ch^2u \cos^2 \varphi}{shu \sin \varphi} [m^2 + (n+m+1)(n-m+1)]) + \frac{c^3}{h^4} (ch^2u shu [(n+1) \\
&\quad \times \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - \sin \varphi] + \cos^2 \varphi \sin \varphi [shu + (n+1) \frac{ch^2u}{shu}]) \quad (5.43)
\end{aligned}$$

Ako se u relaciji (5.32) naponske funkcije predstave (za $m = 0$) u obliku (5.31) dobija se :

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n Q_n + c chu \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \quad (5.44)$$

gde su harmonijske funkcije date relacijama

$$\Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n Q_n; \quad \Phi_3 = \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q_{n+1}, \quad (5.45)$$

Ako se u izraze za određivanje napona preko naponskih funkcija (5.8) uvrsti relacija (5.44) dobijaju se naponi za slučaj ($m = 0$). Detaljno izvođenje izraza za napone dato je u PRILOGU BR II. Koristeći rekurentne formule (2.38) i (2.40) dobijaju se naponi u obliku:

$$\begin{aligned}
\sigma_u^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} [U_n^1 A_n P_n Q_n + U_n^2 A_n P_n Q_{n+1} + U_n^3 A_n P_{n+1} Q_n + \\
&\quad U_n^4 C_n P_{n+1} Q_n + U_n^5 C_n P_n Q_{n+1} + U_n^6 C_n P_{n+1} Q_{n+1}] \quad (5.46)
\end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
U_n^1 &= -\frac{(n+1)}{h^2 sh^2 u} [1 + (n+2)sh^2 u] \\
U_n^2 &= \frac{chu}{h^2} (n+1) \left(\frac{1}{sh^2 u} + \frac{c^2}{h^2} \right) \\
U_n^3 &= -\frac{c^2}{h^4} (n+1) \cos \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_n^4 &= -\frac{c}{h^2}(n+1)\cos\varphi\left[ch^2u\left(\frac{1}{sh^2u} + \frac{c^2}{h^2}\right) + \alpha\right] \\
U_n^5 &= \frac{c}{h^2}(n+1)chu\left[\frac{c^2}{h^2}\cos^2\varphi + 2 - \alpha\right] \\
U_n^6 &= \frac{c}{h^2}chu\cos\varphi(-2n-3+(n+1)\left[\frac{2}{sh^2u} - \frac{ch^2u}{sh^2u} - n + 2\alpha\right]) + \\
&\quad + \frac{c^3}{h^4}\cos\varphi(shu\sin^2\varphi + chu[sh^2u - (n+1)(\cos^2\varphi - ch^2u)]) \quad (5.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} [\varphi_n^1 A_n P_n Q_n + \varphi_n^2 A_n P_{n+1} Q_n + \varphi_n^3 A_n P_n Q_{n+1} + \\
&\quad + \varphi_n^4 C_n P_n Q_{n+1} + \varphi_n^5 C_n P_{n+1} Q_n + \varphi_n^6 C_n P_{n+1} Q_{n+1}] \quad (5.48)
\end{aligned}$$

gde je :

$$\begin{aligned}
\varphi_n^1 &= \frac{(n+1)}{h^2\sin^2\varphi}[(n+2)\sin^2\varphi - 1] \\
\varphi_n^2 &= \frac{(n+1)}{h^2}\cos\varphi\left[\frac{1}{\sin^2\varphi} + \frac{c^2}{h^2}\right] \\
\varphi_n^3 &= -\frac{c^2}{h^4}(n+1)chu \\
\varphi_n^4 &= \frac{(n+1)c}{h^2}chu\left(\alpha - \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} - \frac{c^2}{h^2}\cos^2\varphi\right) \\
\varphi_n^5 &= \frac{c}{h^2}(n+1)\cos\varphi\left(\frac{c^2}{h^2}ch^2u + \alpha - 2\right) \\
\varphi_n^6 &= \frac{c}{h^2}chu\cos\varphi\left((n+1)(1-2\alpha) + \frac{1}{\sin^2\varphi}[(n+1)(n+2) - \right. \\
&\quad \left. - (n+1)^2\cos^2\varphi]\right) \quad (5.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} [\Theta_n^1 A_n P_n Q_n + \Theta_n^2 A_n P_{n+1} Q_n + \Theta_n^3 A_n P_n Q_{n+1} + \\
&\quad + \Theta_n^4 C_n P_n Q_{n+1} + \Theta_n^5 C_n P_{n+1} Q_n + \Theta_n^6 C_n P_{n+1} Q_{n+1}] \quad (5.50)
\end{aligned}$$

gde je :

$$\begin{aligned}
\Theta_n^1 &= \frac{(n+1)}{h^2}\left[\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{ch^2u}{sh^2u}\right] \\
\Theta_n^2 &= -\frac{(n+1)\cos\varphi}{h^2\sin^2\varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_n^3 &= -\frac{(n+1) chu}{h^2 sh^2u} \\
\Theta_n^4 &= \frac{(n+1)c}{h^2} chu \left[\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + 2 - \alpha \right] \\
\Theta_n^5 &= \frac{(n+1)c}{h^2} \cos \varphi \left[\frac{ch^2u}{sh^2u} - 2 + \alpha \right] \\
\Theta_n^6 &= -\frac{c}{h^2} (n+1) chu \cos \varphi \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{ch^2u}{sh^2u} \right) \quad (5.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{u\varphi}^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} [T_n^1 A_n P_n Q_n + T_n^2 A_n P_n Q_{n+1} + T_n^3 A_n P_{n+1} Q_n + T_n^4 A_n P_{n+1} Q_{n+1} + \\
&\quad + T_n^5 C_n P_n Q_n + T_n^6 C_n P_n Q_{n+1} + T_n^7 C_n P_{n+1} Q_n + T_n^8 C_n P_{n+1} Q_{n+1}] \quad (5.52)
\end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
T_n^1 &= -\frac{(n+1)(n+2) chu \cos \varphi}{h^2 \sin \varphi shu} \\
T_n^2 &= \frac{(n+1) \cos \varphi}{h^2 shu} \left(\frac{(n+1)}{\sin \varphi} + \frac{c^2}{h^2} \sin \varphi \right) \\
T_n^3 &= \frac{(n+1) chu}{h^2 \sin \varphi} \left(\frac{(n+1)}{shu} + \frac{c^2}{h^2} shu \right) \\
T_n^4 &= -\frac{(n+1)^2}{h^2} \frac{1}{shu \sin \varphi} \\
T_n^5 &= -\frac{(n+1)^2 chu \cos \varphi}{h^2 shu \sin \varphi} \\
T_n^6 &= \frac{c}{h^2} (n+1) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} [(1-\alpha)shu + \\
&\quad + (n+1) \frac{ch^2u}{shu} - \frac{c^2}{h^2} ch^2u shu] \\
T_n^7 &= \frac{c}{h^2} (n+1) \frac{chu}{shu} [(\alpha-1) \sin \varphi + \\
&\quad + (n+1) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - \frac{c^2}{h^2} \cos^2 \varphi \sin \varphi] \\
T_n^8 &= \frac{c}{h^2} (shu \sin \varphi + \frac{ch^2u}{shu} [(n+1)(1-\alpha) \sin \varphi] + \\
&\quad + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} [(n+1)(\alpha-1)shu] - \frac{ch^2u \cos^2 \varphi}{shu \sin \varphi} (n+1)^2) + \\
&\quad + \frac{c^3}{h^4} (ch^2u shu [(n+1) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - \sin \varphi] + \\
&\quad + \cos^2 \varphi \sin \varphi [shu + (n+1) \frac{ch^2u}{shu}]) \quad (5.53)
\end{aligned}$$

$$\tau_{u\theta}^* = 0; \tau_{\varphi\theta}^* = 0 \quad (5.54)$$

Na osnovu dobijenih izraza (5.36)-(5.54) određeni su dodatni naponi izazvani uticajem eliptične šupljine. Udaljavajući se od konture uticaj šupljine se gubi pa je:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sigma_u^* = \lim_{u \rightarrow \infty} \sigma_\varphi^* = \lim_{u \rightarrow \infty} \sigma_\theta^* = \lim_{u \rightarrow \infty} \tau_{u\varphi}^* = 0 \quad (5.55)$$

na neopterećenoj konturi izduženog obrtnog elipsoida

$$\frac{x^2 + y^2}{shu} + \frac{z^2}{chu} = c^2$$

$$c = const \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq z \leq cchu_0 \quad (5.56)$$

Tada se ukupni naponi dobijaju na sledeći način:

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \sigma_u^* + \sigma_u^{pr} \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^* + \sigma_\varphi^{pr} \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta^* + \sigma_\theta^{pr} \\ \tau_{u\varphi} &= \tau_{u\varphi}^* + \tau_{u\varphi}^{pr} \\ \tau_{u\theta} &= \tau_{\varphi\theta} = 0 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Relacije (5.57) određuju naponsko stanje oko šupljine oblika obrtnog elipsoida. Nepoznate konstante određuju se na osnovu graničnih uslova.

5.6 Granični uslovi. Odredjivanje konstanti

Granični uslovi na površi (konturi) obrtnog elipsoida u ovom radu se zadaju po naponima (1.5). Pri razmatranju slobodne konture tj. neopterećene konture, granični uslovi se zadaju u obliku:

$$\sigma_u^{(u_0)} = 0; \tau_{u\varphi}^{(u_0)} = 0 \quad za \ u = u_0 \quad (5.58)$$

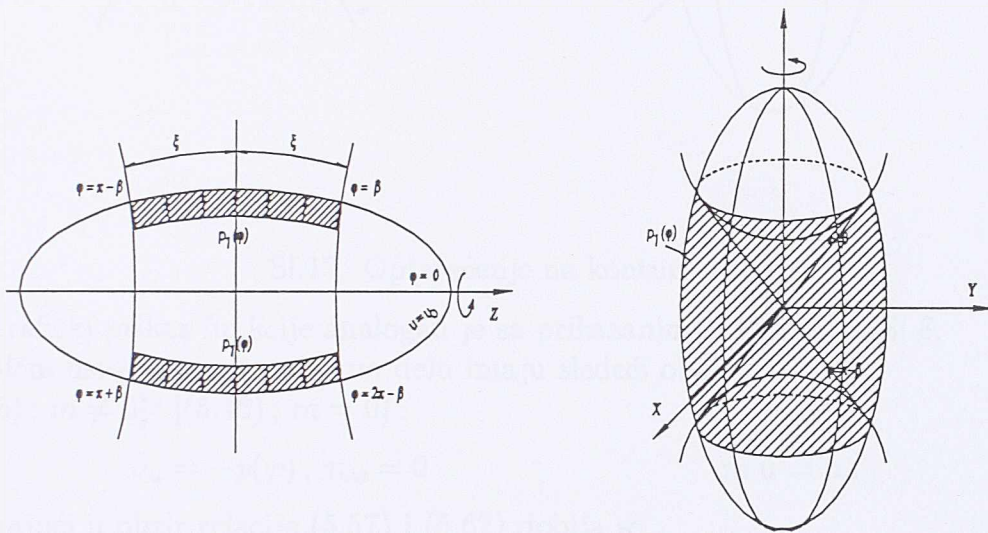
Iz izraza za napone (5.57) i graničnih uslova (5.58) sledi :

$$\sigma_u^* = -\sigma_u^{pr}; \tau_{u\varphi}^* = -\tau_{u\varphi}^{pr} \quad za \ u = u_0 \quad (5.59)$$

Određivanje graničnih uslova za delimično opterećenu konturu rotaciono simetričnim opterećenjem je složeniji problem. Osnovni zadatak je određivanje funkcije koja predstavlja unutrašnje opterećenje. Izbor navedene funkcije vezan je sa uslovima rešenja diferencijalne jednačine (1.7), tj. neprekidnosti opterećenja na konturi (bez skokovitih promena opterećenja). U ovom radu se razmatraju dva slučaja rotaciono simetričnog opterećenja konture eliptične šupljine (Sl.12 i Sl.13).

Funkcija koja predstavlja prvi slučaj opterećenja (Sl.12) definisana je na sledeći način:

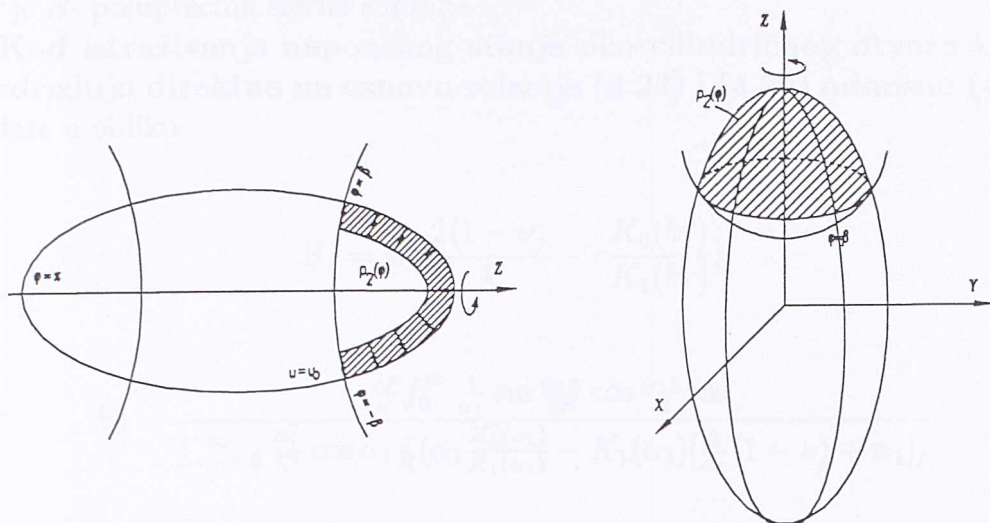
$$p_1(\varphi) = p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)\pi} \sin \frac{(2j+1)\pi}{\pi-2\beta} (\varphi - \beta); \beta \leq \varphi \leq \pi - \beta \quad (5.60)$$



Sl.12. Opterećenje na konturi $p_1(\varphi)$

Za drugi slučaj opterećenja (Sl.13) funkcija se daje u obliku :

$$p_2(\varphi) = p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)\pi} \sin \frac{(2j+1)\pi}{2\beta} (\varphi + \beta); -\beta \leq \varphi \leq \beta \quad (5.61)$$

Sl.13. Opterećenje na konturi $p_2(\varphi)$

Grafički prikaz funkcije analogan je sa prikazanim grafikom na Sl.8. Granični uslovi na opterećenom delu imaju sledeći oblik [(5.36); $m \neq 0$]; [(5.46); $m = 0$]:

$$\sigma_u = -p(\varphi); \tau_{u\varphi} = 0 \quad \text{za } u = u_0 \quad (5.62)$$

Uzimajući u obzir relacije (5.57) i (5.62) dobija se

$$\sigma_u^* = -\sigma_u^{pr} - p(\varphi); \tau_{u\varphi}^* = -\tau_{u\varphi}^{pr} \quad \text{za } u = u_0 \quad (5.63)$$

Ako se granični uslovi (5.59) i (5.63) za neopterećenu odnosno delimično opterećenu konturu uvrste u jednačine za određivanje napona (5.36) i (5.42) ili (5.46) i (5.52) dobijaju se dva uslovna sistema jednačina za određivanje nepoznatih konstanti A_{nm} i C_{nm} (odnosno za $m = 0$: A_n i C_n).

Nepoznate konstante u jednačinama za određivanje napona oko šupljine oblika sfere, cilindra i oblika izduženog elipsoida dobijaju se iz graničnih uslova na konturi šupljine. U nastavku se prvi put integralno prikazuju relacije za određivanje navedenih konstanti iz graničnih uslova za sfernu, cilindričnu i šupljinu oblika izduženog elipsoida.

Sistem jednačina za određivanje konstanti c_n i d_n (3.17), pri određivanju napona oko sferne šupljine, dat je u obliku:

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{E}{1+\nu} [n(n^2 + 3n - 2\nu)c_n R^{-n-1} - (n+1)(n+2)d_n R^{-n-3}] \\ B_n &= \frac{E}{1+\nu} [(n^2 - 2 + 2\nu)c_n R^{-n-1} + (n+2)d_n R^{-n-3}] \end{aligned} \quad (5.64)$$

gde je R - poluprečnik sferne šupljine

Kod istraživanja naponskog stanja oko cilindričnog otvora konstante se određuju direktno na osnovu relacija (4.22) i (4.29) odnosno (4.31) koje su date u obliku:

$$B_1 = B_2 \left[\frac{2(1-\nu)}{k} - r \frac{K_0(kr)}{K_1(kr)} \right]$$

$$B_2 = \frac{\frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_1} \sin \frac{\alpha_1 a}{2R} \cos \frac{\alpha_1 z}{R} d\alpha_1}{\sum_{\alpha_1=0}^\infty \frac{\alpha_1^2}{R^2} \cos \alpha_1 \frac{z}{R} \left(\alpha_1 \frac{K_0^2(\alpha_1)}{K_1(\alpha_1)} - K_1(\alpha_1) \left[\frac{2}{\alpha_1} (1-\nu) + \alpha_1 \right] \right)}$$

odnosno

$$B_2 = - \frac{\sigma_r^{pr} + p \sum_{n=0}^\infty \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{a} (a-z)}{\sum_{k=0}^\infty k^2 \cos kz \left(kR \frac{K_0^2(kR)}{K_1(kR)} - K_1(kR) \left[\frac{2}{kR} (1-\nu) + kR \right] \right)} \quad (5.65)$$

gde je:

R -poluprečnik cilindra

$kz = \frac{\alpha_1}{R} z$

Sistemi jednačina za opšti slučaj rotaciono simetričnog opterećenja šupljine izduženog elipsoida imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-1}^\infty \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} (A_{nm} [a_{n-m-2k-2}^1 P_{n-m-2k-2} + a_{n-m-2k}^2 P_{n-m-2k} \\ & + a_{n-m-2k+2}^3 P_{n-m-2k+2}] + C_{nm} [b_{n-m-2k-4}^1 P_{n-m-2k-4} + b_{n-m-2k-2}^2 P_{n-m-2k-2} \\ & + b_{n-m-2k}^3 P_{n-m-2k} + b_{n-m-2k+2}^4 P_{n-m-2k+2} + b_{n-m-2k+4}^5 P_{n-m-2k+4}]) = \\ & \sum_{n=-1}^\infty \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} (k_{nm} [q_{n-m-2k-4}^1 P_{n-m-2k-4} + q_{n-m-2k-2}^2 P_{n-m-2k-2} \\ & + q_{n-m-2k}^3 P_{n-m-2k} + q_{n-m-2k+2}^4 P_{n-m-2k+2} + q_{n-m-2k+4}^5 P_{n-m-2k+4}]) \quad (5.66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-1}^\infty \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} (A_{nm} [a_{n-m-2k-3}^4 P_{n-m-2k-3} + a_{n-m-2k-1}^5 P_{n-m-2k-1} \\ & + a_{n-m-2k+1}^6 P_{n-m-2k+1} + a_{n-m-2k+3}^7 P_{n-m-2k+3}] + C_{nm} [b_{n-m-2k-3}^6 P_{n-m-2k-3} \\ & + b_{n-m-2k-1}^7 P_{n-m-2k-1} + b_{n-m-2k+1}^8 P_{n-m-2k+1} + b_{n-m-2k+3}^9 P_{n-m-2k+3} \\ & + b_{n-m-2k+5}^{10} P_{n-m-2k+5}]) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} (l_{nm} [s_{n-m-2k-5}^1 P_{n-m-2k-5} + s_{n-m-2k-3}^2 P_{n-m-2k-3} \\
& + s_{n-m-2k-1}^3 P_{n-m-2k-1} + s_{n-m-2k+1}^4 P_{n-m-2k+1} \\
& + s_{n-m-2k+3}^5 P_{n-m-2k+3} + s_{n-m-2k+5}^6 P_{n-m-2k+5}]) \quad (5.67)
\end{aligned}$$

Koeficijenti uz nepoznate konstante se zbog složenosti i obimnosti ne prikazuju. Način dobijanja koeficijenata kao i formiranje sistema (5.66) daje se u PRILOGU BR. IV.

Za slučaj $m = 0$ dobijaju se sledeći sistemi :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-1}^{\infty} (A_n [a_{n-2}^1 P_{n-2} + a_n^2 P_n + a_{n+2}^3 P_{n+2}] + \\
& C_n [b_{n-4}^1 P_{n-4} + b_{n-2}^2 P_{n-2} + b_n^3 P_n + b_{n+2}^4 P_{n+2} + b_{n+4}^5 P_{n+4}]) = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} (k_n [q_{n-4}^1 P_{n-4} + q_{n-2}^2 P_{n-2} + q_n^3 P_n + q_{n+2}^4 P_{n+2} + q_{n+4}^5 P_{n+4}]) \quad (5.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-1}^{\infty} (A_n [a_{n-3}^4 P_{n-3} + a_{n-1}^5 P_{n-1} + a_{n+1}^6 P_{n+1} + a_{n+3}^7 P_{n+3}] + \\
& + C_n [b_{n-3}^6 P_{n-3} + b_{n-1}^7 P_{n-1} + b_{n+1}^8 P_{n+1} + b_{n+3}^9 P_{n+3} + b_{n+5}^{10} P_{n+5}]) = \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} (l_n [s_{n-5}^1 P_{n-5} + s_{n-3}^2 P_{n-3} + s_{n-1}^3 P_{n-1} + s_{n+1}^4 P_{n+1} + s_{n+3}^5 P_{n+3} + s_{n+5}^6 P_{n+5}]) \quad (5.69)
\end{aligned}$$

formiranje sistema jednačina (5.68) i (5.69) detaljno je obradjeno u PRILOGU BR. IV.

Koeficijenti uz nepoznate konstante u sistemima jednačina (5.68) i (5.69) daju se u obliku :

$$\begin{aligned}
a_{n-2}^1 &= \left(-\frac{2}{3}A_n^2 - \frac{2}{3}nA_n^4\right) \frac{3}{2} \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{2n-3}{2n+1} + A_n^4 n \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \frac{2n-3}{2n-1} \\
a_n^2 &= \left(A_n^0 + \frac{2}{3}A_n^2 - \frac{n}{3}A_n^4\right) + \left(-\frac{2}{3}A_n^2 - \frac{2}{3}nA_n^4\right) \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \frac{2n+1}{2n+3} + A_n^4 n \frac{a_{n-1}}{a_n} \\
a_{n+2}^3 &= \left(-\frac{2}{3}A_n^2 - \frac{2}{3}nA_n^4\right) \frac{3}{2} \frac{a_n}{a_{n+2}} \\
b_{n-4}^1 &= 0 \\
b_{n-2}^2 &= \left(-A_n^3 - A_n^9(n+1) + A_n^7(n+1)\right) \frac{a_{n-2}}{a_{n+1}} \frac{2n-3}{2n+3} \\
&+ \left(A_n^9(n+1) - A_n^7(n+1)\right) \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{2n-3}{2n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n^3 &= (A_n^9(n+1)\frac{1}{3} + A_n^5(n+1) + A_n^7(n+1)\frac{2}{3}) \\
&+ [A_n^1 + \frac{2}{5}A_n^3 - \frac{3}{5}A_n^9(n+1) - A_n^5(n+1) - \frac{2}{5}A_n^7(n+1)]\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{2n+1}{2n+3} \\
&+ [-\frac{3}{5}A_n^3 - \frac{3}{5}A_n^9(n+1) + \frac{3}{5}A_n^7(n+1)]\frac{a_{n-1}}{a_{n+2}}\frac{2n+1}{2n+5} \\
&+ [A_n^9(n+1)\frac{2}{3} - A_n^7(n+1)\frac{2}{3}]\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}\frac{2n+1}{2n+3} \\
b_{n+2}^4 &= [A_n^1 + \frac{2}{5}A_n^3 - A_n^5(n+1) - \frac{2}{5}A_n^7(n+1) - \frac{3}{5}A_n^9(n+1)]\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \\
&+ [-\frac{3}{5}A_n^3 + \frac{3}{5}A_n^7(n+1) - \frac{3}{5}A_n^9(n+1)]\frac{a_n}{a_{n+3}}\frac{2n+5}{2n+7} \\
&+ [-A_n^7(n+1) + A_n^9(n+1)]\frac{a_n}{a_{n+2}} \\
b_{n+4}^5 &= [-A_n^3 + A_n^7(n+1) - A_n^9(n+1)]\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}} \\
a_{n-3}^4 &= [B_n^2n - B_n^4]\frac{a_{n-3}}{a_n}\frac{2n-5}{2n+1} - B_n^2n\frac{a_{n-3}}{a_{n-1}}\frac{2n-5}{2n-1} \\
a_{n-1}^5 &= (B_n^0n + \frac{2}{3}B_n^2n) + (-B_n^0n - B_n^2n\frac{2}{5} + \frac{2}{5}B_n^4)\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{2n-1}{2n+1} \\
&+ (\frac{3}{5}B_n^2n - \frac{3}{5}B_n^4)\frac{a_{n-2}}{a_{n+1}}\frac{2n-1}{2n+3} - \frac{2}{3}B_n^2n\frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{2n-1}{2n+1} \\
a_{n+1}^6 &= (-B_n^0n - \frac{2}{5}B_n^2n + \frac{2}{5}B_n^4)\frac{a_n}{a_{n+1}} + (\frac{3}{5}B_n^2n - \frac{3}{5}B_n^4)\frac{a_{n-1}}{a_{n+2}}\frac{2n+3}{2n+5} \\
&- B_n^2n\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \\
a_{n+3}^7 &= (B_n^2n - B_n^4)\frac{a_n}{a_{n+3}} \\
b_{n-3}^6 &= [B_n^5 + B_n^7(n+1) - B_n^9]\frac{a_{n-3}}{a_{n+1}}\frac{2n-5}{2n+3} - B_n^7(n+1)\frac{a_{n-3}}{a_n}\frac{2n-5}{2n+1} \\
b_{n-1}^7 &= [-B_n^1 - B_n^3(n+1) - \frac{8}{7}B_n^5 - \frac{1}{7}B_n^7(n+1) + \frac{1}{7}B_n^9]\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}\frac{2n-1}{2n+3} \\
&+ [\frac{4}{7}B_n^5 + \frac{4}{7}B_n^7(n+1) - \frac{4}{7}B_n^9]\frac{a_{n-2}}{a_{n+2}}\frac{2n-1}{2n+5} + [B_n^3(n+1) + \\
&B_n^7(n+1)\frac{2}{5}]\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{2n-1}{2n+1} - \frac{3}{5}B_n^7(n+1)\frac{a_{n-2}}{a_{n+1}}\frac{2n-1}{2n+3} \\
b_{n+1}^8 &= (\frac{2}{3}B_n^1 - \frac{1}{3}B_n^3(n+1) + \frac{8}{15}B_n^5 - \frac{2}{15}B_n^7(n+1) + \frac{2}{15}B_n^9) \\
&+ [-\frac{2}{3}B_n^1 - \frac{2}{3}B_n^3(n+1) - \frac{16}{21}B_n^5 - \frac{2}{21}B_n^7(n+1) + \frac{2}{21}B_n^9]\frac{a_n}{a_{n+2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{2n+3}{2n+5} + \left[\frac{18}{35} B_n^5 + \frac{18}{35} B_n^7 (n+1) - \frac{18}{35} B_n^9 \right] \frac{a_{n-1}}{a_{n+3}} \frac{2n+3}{2n+7} \\
& + [B_n^3 (n+1) + B_n^7 (n+1)] \frac{2}{5} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{3}{5} B_n^7 (n+1) \frac{a_{n-1}}{a_{n+2}} \frac{2n+3}{2n+5} \\
b_{n+3}^9 &= [-B_n^1 - B_n^3 (n+1) - \frac{8}{7} B_n^5 - \frac{1}{7} B_n^7 (n+1) + \frac{1}{7} B_n^9] \frac{a_{n+1}}{a_{n+3}} + \\
& \left[\frac{4}{7} B_n^5 + \frac{4}{7} B_n^7 (n+1) - \frac{4}{7} B_n^9 \right] \frac{a_n}{a_{n+4}} \frac{2n+7}{2n+9} - B_n^7 (n+1) \frac{a_n}{a_{n+3}} \\
b_{n+5}^{10} &= (B_n^5 + B_n^7 (n+1) - B_n^9) \frac{a_{n+1}}{a_{n+5}} \tag{5.70}
\end{aligned}$$

gde je :

$$\begin{aligned}
A_n^0 &= 2c^2(n+1)chu_0 Q_{n+1} - c^2(n+1)[(n+2)sh^2u_0 + 2]Q_n \\
A_n^2 &= c^2 \frac{(n+1)}{sh^2u_0} [chu_0 Q_{n+1} - (nsh^2u_0 + ch^2u_0)Q_n] \\
A_n^4 &= c^2 Q_n \\
A_n^1 &= (n+1)c^3 [(sh^2u_0 chu_0(\alpha - n) + 2chu_0]Q_{n+1} - [\alpha sh^2u_0 + 2ch^2u_0]Q_n \\
A_n^3 &= (n+1)c^3 [(chu_0[(\alpha - n) + \frac{1}{sh^2u_0}(2 - ch^2u_0)]]Q_{n+1} - (\alpha + \frac{ch^2u_0}{sh^2u_0})Q_n \\
A_n^5 &= (2 - \alpha)c^3 sh^2u_0 chu_0 Q_{n+1} \\
A_n^7 &= (2 - \alpha)c^3 chu_0 Q_{n+1} \\
A_n^9 &= c^3 chu_0 Q_{n+1} \\
B_n^0 &= c^2 shu_0(n+1)Q_{n+1} - c^2 n shu_0 chu_0 Q_n \\
B_n^2 &= c^2 \frac{(n+1)}{shu_0} (Q_{n+1} - chu_0 Q_n) \\
B_n^4 &= c^2 \frac{(n+1)}{shu_0} (Q_{n+1} - chu_0 Q_n) \\
B_n^1 &= c^3 shu_0 [sh^2u_0 + ch^2u_0(n(1 - \alpha) - \alpha)]Q_{n+1} - c^3 shu_0 chu_0 (1 - \alpha)(n+1)Q_n \\
B_n^3 &= c^3 shu_0 [(1 - \alpha)sh^2u_0 + nch^2u_0]Q_{n+1} - c^3 shu_0 chu_0 (n+1)Q_n \\
B_n^5 &= c^3 [shu_0 + (1 - \alpha)(n+1) \frac{ch^2u_0}{shu_0}]Q_{n+1} - c^3 (1 - \alpha)(n+1) \frac{chu_0}{shu_0} Q_n \\
B_n^7 &= c^3 [(1 - \alpha)shu_0 + (n+1) \frac{ch^2u_0}{shu_0}]Q_{n+1} - c^3 (n+1) \frac{chu_0}{shu_0} Q_n \\
B_n^9 &= c^3 [shu_0 + (n+1) \frac{ch^2u_0}{shu_0}]Q_{n+1} - c^3 (n+1) \frac{chu_0}{shu_0} Q_n \tag{5.71}
\end{aligned}$$

U jednačinama (5.71): $Q_{n+1} = Q_{n+1}(chu_0)$, $Q_n = Q_n(chu_0)$. U sistemima jednačina

(5.68) i (5.69) pojavljuju se i sledeći koeficijenti:

$$\begin{aligned}
 q_{n-4}^1 &= c^4 \frac{a_{n-4} 2n-7}{a_n 2n+1} \\
 q_{n-2}^2 &= c^4 \left[\left(-2sh^2 u_0 - \frac{8}{7} \right) \frac{a_{n-2} 2n-3}{a_n 2n+1} + \frac{4 a_{n-3} 2n-3}{7 a_{n+1} 2n+3} \right] \\
 q_n^3 &= c^4 \left[\left(sh^4 u_0 + \frac{4}{3} sh^2 u_0 + \frac{8}{15} \right) + \left(-\frac{4}{3} sh^2 u_0 - \frac{16}{21} \right) \frac{a_{n-1} 2n+1}{a_{n+1} 2n+3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{18 a_{n-2} 2n+1}{35 a_{n+2} 2n+5} \right] \\
 q_{n+2}^4 &= c^4 \left[\left(-2sh^2 u_0 - \frac{8}{7} \right) \frac{a_n}{a_{n+2}} + \frac{4 a_{n-1} 2n+5}{7 a_{n+3} 2n+7} \right] \\
 q_{n+4}^5 &= c^4 \frac{a_n}{a_{n+4}} \\
 s_{n-5}^1 &= c^4 \frac{a_{n-5} 2n-9}{a_n 2n+1} \\
 s_{n-3}^2 &= c^4 \left[\left(\frac{10}{9} - 2ch^2 u_0 \right) \frac{a_{n-3} 2n-5}{a_n 2n+1} + \frac{5 a_{n-4} 2n-5}{9 a_{n+1} 2n+3} - \frac{a_{n-3} 2n-5}{a_{n+1} 2n+3} \right] \\
 s_{n-1}^3 &= c^4 \left[\left(ch^4 u_0 - \frac{6}{5} ch^2 u_0 + \frac{3}{7} \right) \frac{a_{n-1} 2n-1}{a_n 2n+1} + \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5} ch^2 u_0 \right) \frac{a_{n-2} 2n-1}{a_{n+1} 2n+3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{10 a_{n-3} 2n-1}{21 a_{n+2} 2n+5} + \left(2ch^2 u_0 - \frac{6}{7} \right) \frac{a_{n-1} 2n-1}{a_{n+1} 2n+3} - \frac{4 a_{n-2} 2n-1}{7 a_{n+2} 2n+5} \right] \\
 s_{n+1}^4 &= c^4 \left[\left(ch^4 u_0 - \frac{6}{5} ch^2 u_0 + \frac{3}{7} \right) \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5} ch^2 u_0 \right) \frac{a_{n-1} 2n+3}{a_{n+2} 2n+5} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{10 a_{n-2} 2n+3}{21 a_{n+3} 2n+7} + \left(-ch^4 u_0 + \frac{2}{3} ch^2 u_0 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{4}{3} ch^2 u_0 - \frac{4}{7} \right) \frac{a_n}{a_{n+2}} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{2n+3}{2n+5} - \frac{18 a_{n-1} 2n+3}{35 a_{n+3} 2n+7} \right] \\
 s_{n+3}^5 &= c^4 \left[\left(\frac{10}{9} - 2ch^2 u_0 \right) \frac{a_n}{a_{n+3}} + \frac{5 a_{n-1} 2n+7}{9 a_{n+4} 2n+9} + \left(2ch^2 u_0 - \frac{6}{7} \right) \frac{a_{n+1}}{a_{n+3}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4 a_n 2n+7}{7 a_{n+4} 2n+9} \right] \\
 s_{n+5}^6 &= c^4 \left[\frac{a_n}{a_{n+5}} - \frac{a_{n+1}}{a_{n+5}} \right] \tag{5.72}
 \end{aligned}$$

Koeficijenti k_n za $\sigma_u + p(\varphi)$ i l_n za $\tau_{u\varphi}$ koji se dobijaju razvijanjem funkcija primarnih napona i funkcija opterećenja (delimično opterećenje sa unutrašnje strane) obrađuju se detaljno u okviru PRILOGA BR.III. Ovde su izložena samo osnovna zapažanja značajna za analizu.

Razvijanjem graničnih uslova σ_u^P ; $\tau_{u\varphi}^P$; $p(\varphi)$ u redove po Ležandrovim polinomima dobijaju se poznati koeficijenti:

k_n - koeficijenti razvoja primarnih napona za σ_u^{pr} .

l_n - koeficijenti razvoja primarnih napona za $\tau_{u\varphi}^{pr}$.

k_n' - koeficijenti razvoja funkcije opterećenja (5.60) $p_1(\varphi)$; $\beta \leq \varphi \leq \pi - \beta$

k_n'' - koeficijenti razvoja funkcije opterećenja (5.61) $p_2(\varphi)$; $-\beta \leq \varphi \leq \beta$

Ako se sa k_n^i ($i=0,1,2$) obeleže koeficijenti u zavisnosti od slučaja opterećenja

k_n^0 - neopterećena kontura (granični uslov (5.59))

k_n^1 - slučaj opterećene konture (Sl.12.) $p_1(\varphi)$

k_n^2 - slučaj opterećene konture (Sl.13.) $p_2(\varphi)$

dobijaju se u sistemima jednačina (5.68) i (5.69) konstante A_n i C_n u zavisnosti koji se od koeficijenata uvrsti u sistem. Za delimično opterećenu konturu elipsoida, koeficijenti k_n^0 se koriste za deo neopterećene konture, a koeficijenti k_n^1 i k_n^2 za opterećeni deo konture u zavisnosti koje se opterećenje uzima u razmatranje.

Veza između prethodno navedenih koeficijenata je sledeća :

$$\begin{aligned} k_n^0 &= k_n \\ k_n^1 &= k_n + k_n' \\ k_n^2 &= k_n + k_n'' \end{aligned} \quad (5.73)$$

Iz navedene analize, nedvosmisleno sledi, da se promena graničnih uslova svodi na promenu koeficijenata razvoja. Određivanjem koeficijenata (5.70), (5.71) i (5.72) dobijaju se dva sistema jednačina sa beskonačno mnogo nepoznatih. Pri formiranju sistema, primenjen je takav metod da se navedeni sistemi mogu razdvojiti na sistem sa parnim i neparnim koeficijentima i svesti na rešavanje samo jednog sistema. Rešenje sistema svodi se na izjednačavanje koeficijenata uz Ležandrove polinome sa istim indeksima. Sistem jednačina (5.68) se može prikazati u obliku:

$$\begin{aligned} &A_n P_{n-2} a_{n-2}^1 + A_n P_n a_n^2 + A_n P_{n+2} a_{n+2}^3 + C_n P_{n-4} b_{n-4}^1 + \\ &C_n P_{n-2} b_{n-2}^2 + C_n P_n b_n^3 + C_n P_{n+2} b_{n+2}^4 + C_n P_{n+4} b_{n+4}^5 = \\ &q_{n-4}^1 P_{n-4} k_n + q_{n-2}^2 P_{n-2} k_n + q_n^3 P_n k_n + q_{n+2}^4 P_{n+2} k_n + q_{n+4}^5 P_{n+4} k_n \\ &(n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.74)$$

i ima rešenje pri

$$\begin{aligned} A_{2n-2} &= 0; \quad (n = 3, 4, 5, \dots) \\ A_{2n+1} &= C_{2n-1} = 0; \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.75)$$

Ako se (5.75) uvrsti u (5.68), odnosno (5.74) dobija se :

za $n = 2$

$$\begin{aligned}
 A_0 a_0^2 + A_2 a_0^1 + C_0 b_0^3 + C_2 b_0^2 &= k_0 q_0^3 + k_2 q_0^2 \\
 A_0 a_2^3 + A_2 a_2^2 + C_0 b_2^4 + C_2 b_2^3 &= k_0 q_2^4 + k_2 q_2^3 \\
 A_2 a_4^3 + C_0 b_4^5 + C_2 b_4^4 &= k_0 q_4^5 + k_2 q_4^4 \\
 C_2 b_6^5 &= k_2 q_6^5
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

za $n = 4$

$$\begin{aligned}
 A_0 a_0^2 + A_2 a_0^1 + C_0 b_0^3 + C_2 b_0^2 + C_4 b_0^1 &= k_0 q_0^3 + k_2 q_0^2 + k_4 q_0^1 \\
 A_0 a_2^3 + A_2 a_2^2 + C_0 b_2^4 + C_2 b_2^3 + C_4 b_2^2 &= k_0 q_2^4 + k_2 q_2^3 + k_4 q_2^2 \\
 A_2 a_4^3 + C_0 b_4^5 + C_2 b_4^4 + C_4 b_4^3 &= k_0 q_4^5 + k_2 q_4^4 + k_4 q_4^3 \\
 C_2 b_6^5 + C_4 b_6^4 &= k_2 q_6^5 + k_4 q_6^4 \\
 C_4 b_8^5 &= k_4 q_8^5
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

gde se k_n određuje u zavisnosti od usvojenog rotaciono simetričnog opterećenja na konturi, tj. $k_n = k_n^i$ ($i=0,1,2$).

Nastavljajući navedeni postupak dobijaju se sistemi jednačina za $n=6,8,10\dots$ Iz navedenih sistema, (5.76) i (5.77), može se zaključiti da se funkcije primarnih napona i opterećenja razvijaju do člana reda čiji je indeks koeficijenta k_n jednak indeksu uz konstantu C_n . Na osnovu toga se zaključuje da je $C_n \neq 0$. Pri razvoju funkcije u beskonačne redove po Ležandrovim polinomima, dobijaju se redovi sa opadajućim članovima.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0 \tag{5.78}$$

Imajući u vidu (5.78), može se zaključiti da pri razvoju funkcija postoji $m \geq n$ pri čemu je $k_m = 0$. U tom slučaju je $C_m = 0$, i za sve $j > m$ sistem postaje homogen tj. $C_j = 0$ ($j = m+1, m+2, \dots$). Znači sistem beskonačnog broja jednačina, sa beskonačnim brojem nepoznatih svodi se na rešenje sistema sa m nepoznatih veličina. U prilog ovoj analizi su i navedeni rezultati primera (PRILOG BR. III). Rešavanjem sistema jednačina dobijaju se konstante A_n i C_n koje zadovoljavaju oba sistema (5.68) i (5.69). Na osnovu dobijenih rešenja i relacija (5.46) - (5.54) i (5.57) dobijaju se koordinate tenzora napona, a samim tim je određeno naponsko stanje oko šupljine oblika izduženog obrtnog elipsoida.

5.7 Koordinate tenzora napona-aproksimativno rešenje

Iz izraza za određivanje dodatnih napona, izazvanih uticajem šupljine oblika izduženog obrtnog elipsoida, (5.46)-(5.52) i rešenja sistema algebarskih jednačina (5.68)-(5.69),

sledi, da su za dovoljno velike vrednosti n odgovarajući članovi u redovima, koji figurišu u navedenim izrazima za napone, zanemarljivo male veličine, odnosno, njihovi uticaji pri određivanju vrednosti napona mogu se zanemariti.

Neka su za neko $n > t$ odgovarajući članovi redova (5.46), (5.48), (5.50) i (5.52) dovoljno male veličine tako da ih možemo zanemariti. U tom slučaju, aproksimativno rešenje koje se prikazuje ($t=2$) direktna je posledica prethodnih razmatranja.

Sistem jednačina za određivanje konstanti A_n i C_n za $n=2$ ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} A_0^i a_0^2 + A_2^i a_0^1 + C_0^i b_0^3 + C_2^i b_0^2 &= k_0^i q_0^3 + k_2^i q_0^2; \\ A_0^i a_2^3 + A_2^i a_2^2 + C_0^i b_2^4 + C_2^i b_2^3 &= k_0^i q_2^4 + k_2^i q_2^3; \\ A_2^i a_4^3 + C_0^i b_4^5 + C_2^i b_4^4 &= k_0^i q_4^5 + k_2^i q_4^4; \\ C_2^i b_6^5 &= k_2^i q_6^5; \end{aligned} \quad (5.79)$$

gde indeks i zavisi od graničnih uslova i to:

$i = 0$ -neopterećena kontura

$i = 1$ -delimično opterećena kontura (prvi slučaj opterećenja prikazan na Sl.12.)

$i = 2$ -delimično opterećena kontura (drugi slučaj opterećenja prikazan na Sl.13.)

Nepoznati koeficijenti u sistemu (5.79) koristeći rekurentne formule (2.40) i relacije (5.70) određuju se na sledeći način:

$$\begin{aligned} a_0^1 &= \frac{2}{5} \frac{c^2}{sh^2 u_0} [(4sh^2 u_0 + 1)Q_2 - chu_0 Q_3]; \\ a_0^2 &= \frac{2}{3} \frac{c^2 chu_0}{sh^2 u_0} [(3sh^2 u_0 + 1)Q_1 - (3ch^3 u_0 - 2chu_0)Q_0]; \\ a_2^1 &= -\frac{20}{21} \frac{c^2}{sh^2 u_0} [chu_0 Q_5 - (6sh^2 u_0 + 1)Q_4]; \\ a_2^2 &= \frac{c^2 chu_0}{sh^2 u_0} \left(\frac{10}{7} + 6sh^2 u_0 \right) Q_3 - \frac{2}{7} \frac{c^2}{sh^2 u_0} (42sh^4 u_0 + 35sh^2 u_0 + 5)Q_2; \\ a_2^3 &= -\frac{2}{3} \frac{c^2}{sh^2 u_0} [chu_0 Q_1 - ch^2 u_0 Q_0]; \\ b_0^2 &= \frac{2}{35} \frac{c^3}{sh^2 u_0} (chu_0 [(\alpha - 5)sh^2 u_0 - 3]Q_3 + 3[(\alpha + 1)sh^2 u_0 + 1]Q_2); \\ b_0^3 &= c^3 chu_0 \left[\frac{1}{3} (4 - \alpha)sh^2 u_0 + \frac{1}{5} \left(\frac{26}{3} - 2\alpha \right) + \frac{2}{15sh^2 u_0} \right] Q_1 - \\ &\quad - c^3 \left[\frac{1}{3} (\alpha + 2)sh^2 u_0 + \frac{2}{15sh^2 u_0} + \frac{2}{5} \left(2 + \frac{\alpha}{3} \right) \right] Q_0; \\ b_2^4 &= c^3 chu_0 \left[\frac{4}{3} (\alpha - 1)sh^2 u_0 + \frac{2}{21sh^2 u_0} + \frac{6}{7}\alpha - \frac{4}{21} \right] Q_1 + \\ &\quad + c^3 \left[-\frac{2}{3} (\alpha + 2)sh^2 u_0 - \frac{2}{21sh^2 u_0} - \frac{2}{21}\alpha - \frac{10}{7} \right] Q_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_4^5 &= \frac{8}{35}c^3(chu_0[2(1-\alpha) - \frac{1}{sh^2u_0}]Q_1 + (\alpha + \frac{ch^2u_0}{sh^2u_0})Q_0); \\
a_4^3 &= 5c^2(chu_0(2 + \frac{38}{77sh^2u_0})Q_5 - (6sh^2u_0 + \frac{38}{77sh^2u_0} + \frac{340}{77})Q_4); \\
b_2^3 &= \frac{1}{7}c^3(chu_0[3(2-\alpha)(sh^2u_0 + 2) + 20 + \frac{2}{sh^2u_0}]Q_3 - \\
&\quad - [9sh^2u_0(\alpha + 2) + 2(\alpha + 10) + \frac{2}{sh^2u_0}]Q_2); \\
b_4^4 &= \frac{4}{7}c^3([\alpha - 2)(6sh^2u_0 + \frac{177}{55}) + \frac{39}{55sh^2u_0} + \frac{24}{5}]chu_0Q_3 - \\
&\quad - [3sh^2u_0(\alpha + 2) + \frac{39}{55}\alpha + \frac{39}{55sh^2u_0} + \frac{369}{55}]Q_2); \\
b_6^5 &= \frac{40}{77}c^3([2(2-\alpha) - \frac{1}{sh^2u_0}]chu_0Q_3 + (\alpha + \frac{ch^2u_0}{sh^2u_0})Q_2) \quad (5.80)
\end{aligned}$$

U relacijama (5.80): $Q_1 = Q_1(chu_0) \dots$ Koeficijenti k_0^i i k_2^i se potpuno definišu u okviru PRILOGA BR. III. Da ne bi bilo ponavljanja ovde se ne navode.

U sistemu jednačina (5.79) pojavljuju se i sledeći koeficijenti:

$$\begin{aligned}
q_0^3 &= (ch^4u_0 - \frac{2}{3}ch^2u_0 + \frac{1}{5})c^4; \\
q_0^2 &= (-\frac{4}{15}ch^2u_0 + \frac{4}{35})c^4; \\
q_2^4 &= (-\frac{4}{3}ch^2u_0 + \frac{4}{7})c^4; \\
q_2^3 &= (ch^4u_0 - \frac{22}{21}ch^2u_0 + \frac{3}{7})c^4; \\
q_4^5 &= \frac{8}{35}c^4; \\
q_4^4 &= (-\frac{24}{35}ch^2u_0 + \frac{136}{385})c^4; \\
q_6^5 &= \frac{8}{77}c^4 \quad (5.81)
\end{aligned}$$

Izrazi za dodatne napone izazvane uticajem eliptične šupljine oblika izduženog rotacionog elipsoida, uzimajući u obzir rešenje sistema (5.79), dobijaju oblik:

$$\begin{aligned}
\sigma_u^* &= A_0[U_0^1P_0Q_0 + U_0^2P_0Q_1 + U_0^3P_1Q_0] + \\
&\quad C_0[U_0^4P_1Q_0 + U_0^5P_0Q_1 + U_0^6P_1Q_1] + \\
&\quad A_2[U_2^1P_2Q_2 + U_2^2P_2Q_3 + U_2^3P_3Q_2] + \\
&\quad C_2[U_2^4P_3Q_2 + U_2^5P_2Q_3 + U_2^6P_3Q_3] \quad (5.82)
\end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
 U_0^1 &= -\frac{1}{h^2 sh^2 u} (1 + 2sh^2 u); \\
 U_0^2 &= \frac{chu}{h^2} \left(\frac{1}{sh^2 u} + \frac{c^2}{h^2} \right); \\
 U_0^3 &= -\frac{c^2}{h^4} \cos \varphi; \\
 U_0^4 &= -\frac{c}{h^2} \cos \varphi \left[ch^2 u \left(\frac{1}{sh^2 u} + \frac{c^2}{h^2} \right) + \alpha \right]; \\
 U_0^5 &= \frac{c}{h^2} chu \left[\frac{c^2}{h^2} \cos^2 \varphi + 2 - \alpha \right]; \\
 U_0^6 &= \frac{c}{h^2} chu \cos \varphi \left(-3 + \frac{2}{sh^2 u} - \frac{ch^2 u}{sh^2 u} + 2\alpha \right) + \\
 &\quad + \frac{c^3}{h^4} \cos \varphi [shu \sin^2 \varphi + chu(2sh^2 u + \sin^2 \varphi)]; \\
 U_2^1 &= -\frac{3}{h^2 sh^2 u} [1 + 4sh^2 u]; \\
 U_2^2 &= 3 \frac{chu}{h^2} \left(\frac{1}{sh^2 u} + \frac{c^2}{h^2} \right); \\
 U_2^3 &= -3 \frac{c^2}{h^4} \cos \varphi; \\
 U_2^4 &= -3 \frac{c}{h^2} \cos \varphi \left[ch^2 u \left(\frac{1}{sh^2 u} + \frac{c^2}{h^2} \right) + \alpha \right]; \\
 U_2^5 &= 3 \frac{c}{h^2} chu \left[\frac{c^2}{h^2} \cos^2 \varphi + 2 - \alpha \right]; \\
 U_2^6 &= \frac{c}{h^2} chu \cos \varphi \left[-7 + 3 \left(\frac{2}{sh^2 u} - \frac{ch^2 u}{sh^2 u} - 2 + 2\alpha \right) \right] + \\
 &\quad + \frac{c^3}{h^4} \cos \varphi (shu \sin^2 \varphi + chu[sh^2 u - 3(\cos^2 \varphi - ch^2 u)]) \quad (5.83)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_\varphi^* &= A_0 [\varphi_0^1 P_0 Q_0 + \varphi_0^2 P_1 Q_0 + \varphi_0^3 P_0 Q_1] + \\
 &\quad C_0 [\varphi_0^4 P_0 Q_1 + \varphi_0^5 P_1 Q_0 + \varphi_0^6 P_1 Q_1] + \\
 &\quad A_2 [\varphi_2^1 P_2 Q_2 + \varphi_2^2 P_3 Q_2 + \varphi_2^3 P_2 Q_3] + \\
 &\quad C_2 [\varphi_2^4 P_2 Q_3 + \varphi_2^5 P_3 Q_2 + \varphi_2^6 P_3 Q_3] \quad (5.84)
 \end{aligned}$$

gde je:

$$\varphi_0^1 = \frac{1}{h^2 \sin^2 \varphi} (2 \sin^2 \varphi - 1);$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0^2 &= \frac{1}{h^2} \cos \varphi \left[\frac{1}{\sin^2 \varphi} + \frac{c^2}{h^2} \right]; \\
\varphi_0^3 &= -\frac{c^2}{h^4} chu; \\
\varphi_0^4 &= \frac{c}{h^2} chu \left(\alpha - \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} - \frac{c^2}{h^2} \cos^2 \varphi \right); \\
\varphi_0^5 &= \frac{c}{h^2} \cos \varphi \left(\frac{c^2}{h^2} ch^2 u + \alpha - 2 \right); \\
\varphi_0^6 &= \frac{c}{h^2} chu \cos \varphi \left[1 - 2\alpha + \frac{1}{\sin^2 \varphi} (2 - \cos^2 \varphi) \right]; \\
\varphi_2^1 &= \frac{3}{h^2 \sin^2 \varphi} (4 \sin^2 \varphi - 1); \\
\varphi_2^2 &= \frac{3}{h^2} \cos \varphi \left[\frac{1}{\sin^2 \varphi} + \frac{c^2}{h^2} \right]; \\
\varphi_2^3 &= -3 \frac{c^2}{h^4} chu; \\
\varphi_2^4 &= \frac{3c}{h^2} chu \left(\alpha - \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} - \frac{c^2}{h^2} \cos^2 \varphi \right); \\
\varphi_2^5 &= \frac{3c}{h^2} \cos \varphi \left(\frac{c^2}{h^2} ch^2 u + \alpha - 2 \right); \\
\varphi_2^6 &= \frac{c}{h^2} chu \cos \varphi \left(3(1 - 2\alpha) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} [12 - 9 \cos^2 \varphi] \right) \quad (5.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta^* &= A_0 [\Theta_0^1 P_0 Q_0 + \Theta_0^2 P_1 Q_0 + \Theta_0^3 P_0 Q_1] + \\
&C_0 [\Theta_0^4 P_0 Q_1 + \Theta_0^5 P_1 Q_0 + \Theta_0^6 P_1 Q_1] + \\
&A_2 [\Theta_2^1 P_2 Q_2 + \Theta_2^2 P_3 Q_2 + \Theta_2^3 P_2 Q_3] + \\
&C_2 [\Theta_2^4 P_2 Q_3 + \Theta_2^5 P_3 Q_2 + \Theta_2^6 P_3 Q_3] \quad (5.86)
\end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
\Theta_0^1 &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{ch^2 u}{sh^2 u} \right); \\
\Theta_0^2 &= -\frac{1}{h^2} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}; \\
\Theta_0^3 &= -\frac{1}{h^2} \frac{chu}{sh^2 u}; \\
\Theta_0^4 &= \frac{c}{h^2} chu \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + 2 - \alpha \right); \\
\Theta_0^5 &= \frac{c}{h^2} \cos \varphi \left(\frac{ch^2 u}{sh^2 u} + \alpha - 2 \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_0^6 &= -\frac{c}{h^2} chu \cos \varphi \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{ch^2 u}{sh^2 u} \right); \\
\Theta_2^1 &= \frac{3}{h^2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{ch^2 u}{sh^2 u} \right); \\
\Theta_2^2 &= -\frac{3 \cos \varphi}{h^2 \sin^2 \varphi}; \\
\Theta_2^3 &= -3 \frac{c^2 chu}{h^4 sh^2 u}; \\
\Theta_2^4 &= \frac{3c}{h^2} chu \left(2 - \alpha + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right); \\
\Theta_2^5 &= \frac{3c}{h^2} \cos \varphi \left(\frac{ch^2 u}{sh^2 u} + \alpha - 2 \right); \\
\Theta_2^6 &= -\frac{3c}{h^2} chu \cos \varphi \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{ch^2 u}{sh^2 u} \right)
\end{aligned} \tag{5.87}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{u\varphi}^* &= A_0 [T_0^1 P_0 Q_0 + T_0^2 P_0 Q_1 + T_0^3 P_1 Q_0 + T_0^4 P_1 Q_1] + \\
&C_0 [T_0^5 P_0 Q_0 + T_0^6 P_0 Q_1 + T_0^7 P_1 Q_0 + T_0^8 P_1 Q_1] + \\
&A_2 [T_2^1 P_2 Q_2 + T_2^2 P_2 Q_3 + T_2^3 P_3 Q_2 + T_2^4 P_3 Q_3] + \\
&C_2 [T_2^5 P_2 Q_2 + T_2^6 P_2 Q_3 + T_2^7 P_3 Q_2 + T_2^8 P_3 Q_3]
\end{aligned} \tag{5.88}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
T_0^1 &= -\frac{2 chu \cos \varphi}{h^2 \sin \varphi shu}; \\
T_0^2 &= \frac{1 \cos \varphi}{h^2 shu} \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{c^2}{h^2} \sin \varphi \right); \\
T_0^3 &= \frac{1 chu}{h^2 \sin \varphi} \left(\frac{1}{shu} + \frac{c^2}{h^2} shu \right); \\
T_0^4 &= -\frac{1}{h^2 shu \sin \varphi}; \\
T_0^5 &= -\frac{1 chu \cos \varphi}{h^2 shu \sin \varphi}; \\
T_0^6 &= \frac{c \cos \varphi}{h^2 \sin \varphi} \left[(1 - \alpha) shu + \frac{ch^2 u}{shu} - \frac{c^2}{h^2} ch^2 u shu \right]; \\
T_0^7 &= \frac{c chu}{h^2 shu} \left[(\alpha - 1) \sin \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - \frac{c^2}{h^2} \cos^2 \varphi \sin \varphi \right]; \\
T_0^8 &= \frac{c}{h^2} \left(shu \sin \varphi + \frac{ch^2 u}{shu} (1 - \alpha) \sin \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} (\alpha - 1) shu - \frac{ch^2 u \cos^2 \varphi}{shu \sin \varphi} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c^3}{h^4} (ch^2u shu (\frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - \sin \varphi) + \cos^2 \varphi \sin \varphi (shu + \frac{ch^2u}{shu})); \\
T_2^1 &= -\frac{12 chu \cos \varphi}{h^2 \sin \varphi shu}; \\
T_2^2 &= \frac{3 \cos \varphi}{h^2 shu} (\frac{3}{\sin \varphi} + \frac{c^2}{h^2} \sin \varphi); \\
T_2^3 &= \frac{3 chu}{h^2 \sin \varphi} (\frac{3}{shu} + \frac{c^2}{h^2} shu); \\
T_2^4 &= -\frac{9}{h^2 shu \sin \varphi}; \\
T_2^5 &= -\frac{9 chu \cos \varphi}{h^2 shu \sin \varphi}; \\
T_2^6 &= \frac{3c \cos \varphi}{h^2 \sin \varphi} [(1 - \alpha)shu + 3\frac{ch^2u}{shu} - \frac{c^2}{h^2} ch^2u shu]; \\
T_2^7 &= \frac{3c chu}{h^2 shu} [(\alpha - 1) \sin \varphi + 3\frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - \frac{c^2}{h^2} \cos^2 \varphi \sin \varphi]; \\
T_2^8 &= \frac{c}{h^2} (shu \sin \varphi + \frac{ch^2u}{shu} 3(1 - \alpha) \sin \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} 3(\alpha - 1)shu - 9\frac{ch^2u \cos^2 \varphi}{shu \sin \varphi}) \\
& + \frac{c^3}{h^4} (ch^2u shu (3\frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - \sin \varphi) + \cos^2 \varphi \sin \varphi (shu + 3\frac{ch^2u}{shu})) \quad (5.89)
\end{aligned}$$

Ako se dobijeni izrazi za napone (5.82), (5.84), (5.86) i (5.88) uvrste u relacije (5.57) dobijaju se koordinate tenzora napona aproksimativnog rešenja $n=2$

5.8 Analiza dobijenih rešenja

Ako se analiza naponskog stanja oko šupljine oblika obrtnog izduženog elipsoida izvrši za naponsko stanje:

$$\sigma_u^{pr} = \sigma_\varphi^{pr} = \sigma_\theta^{pr} = \sigma; \quad \tau_{u\varphi}^{pr} = \tau_{u\theta}^{pr} = \tau_{\varphi\theta}^{pr} = 0 \quad (5.90)$$

(što bi odgovaralo naponskom stanju (5.7)), dobija se naponsko stanje u homogenom elastičnom materijalu ne vezujući se isključivo za probleme u stenskoj masi.

Na osnovu (5.90) i relacija (5.57) dobijaju se koordinate tenzora napona u obliku:

$$\begin{aligned}
\sigma_u &= \sigma_u^* + \sigma; \\
\sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^* + \sigma; \\
\sigma_\theta &= \sigma_\theta^* + \sigma; \\
\tau_{u\varphi} &= \tau_{u\varphi}^* \quad (5.91)
\end{aligned}$$

Za analizu se usvaja aproksimativno rešenje ($n=2$). Iz relacije (5.91), a uzimajući u obzir (5.82), (5.84), (5.86) i (5.88) dobija se:

$$\begin{aligned}\sigma_u = & A_0[U_0^1 P_0 Q_0 + U_0^2 P_0 Q_1 + U_0^3 P_1 Q_0] + \\ & C_0[U_0^4 P_1 Q_0 + U_0^5 P_0 Q_1 + U_0^6 P_1 Q_1] + \\ & A_2[U_2^1 P_2 Q_2 + U_2^2 P_2 Q_3 + U_2^3 P_3 Q_2] + \\ & C_2[U_2^4 P_3 Q_2 + U_2^5 P_2 Q_3 + U_2^6 P_3 Q_3] + \sigma\end{aligned}\quad (5.92)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi = & A_0[\varphi_0^1 P_0 Q_0 + \varphi_0^2 P_1 Q_0 + \varphi_0^3 P_0 Q_1] + \\ & C_0[\varphi_0^4 P_0 Q_1 + \varphi_0^5 P_1 Q_0 + \varphi_0^6 P_1 Q_1] + \\ & A_2[\varphi_2^1 P_2 Q_2 + \varphi_2^2 P_3 Q_2 + \varphi_2^3 P_2 Q_3] + \\ & C_2[\varphi_2^4 P_2 Q_3 + \varphi_2^5 P_3 Q_2 + \varphi_2^6 P_3 Q_3] + \sigma\end{aligned}\quad (5.93)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta = & A_0[\Theta_0^1 P_0 Q_0 + \Theta_0^2 P_1 Q_0 + \Theta_0^3 P_0 Q_1] + \\ & C_0[\Theta_0^4 P_0 Q_1 + \Theta_0^5 P_1 Q_0 + \Theta_0^6 P_1 Q_1] + \\ & A_2[\Theta_2^1 P_2 Q_2 + \Theta_2^2 P_3 Q_2 + \Theta_2^3 P_2 Q_3] + \\ & C_2[\Theta_2^4 P_2 Q_3 + \Theta_2^5 P_3 Q_2 + \Theta_2^6 P_3 Q_3] + \sigma\end{aligned}\quad (5.94)$$

$$\begin{aligned}\tau_{u\varphi} = & A_0[T_0^1 P_0 Q_0 + T_0^2 P_0 Q_1 + T_0^3 P_1 Q_0 + T_0^4 P_1 Q_1] + \\ & C_0[T_0^5 P_0 Q_0 + T_0^6 P_0 Q_1 + T_0^7 P_1 Q_0 + T_0^8 P_1 Q_1] + \\ & A_2[T_2^1 P_2 Q_2 + T_2^2 P_2 Q_3 + T_2^3 P_3 Q_2 + T_2^4 P_3 Q_3] + \\ & C_2[T_2^5 P_2 Q_2 + T_2^6 P_2 Q_3 + T_2^7 P_3 Q_2 + T_2^8 P_3 Q_3]\end{aligned}\quad (5.95)$$

Može se pokazati da se konstante mogu predstaviti u obliku (PRILOG BR. III):

$$\begin{aligned}A_0 &= \sigma \xi_0 ; A_2 = \sigma \xi_2 \\ C_0 &= \sigma \eta_0 ; C_2 = \sigma \eta_2\end{aligned}\quad (5.96)$$

gde su ξ_0 ; ξ_2 ; η_0 ; η_2 konstante.

Uzimajući u obzir relacije (5.96) dobijaju se naponi u obliku:

$$\begin{aligned}\sigma_u = & \sigma \left(1 + \left[-\frac{1}{h^2} \left(2 + \frac{1}{sh^2 u} \right) \xi_0 Q_0 + \frac{c^2}{h^4} chu \left(2 + \frac{\sin^2 \varphi}{sh^2 u} \right) \xi_0 Q_1 - \right. \right. \\ & \frac{c^2}{h^4} \cos^2 \varphi \xi_0 Q_0 - \frac{3}{h^2} \left(4 + \frac{1}{sh^2 u} \right) \xi_2 P_2 Q_2 + 3 \frac{c^2}{h^4} chu \left(2 + \frac{\sin^2 \varphi}{sh^2 u} \right) \xi_2 P_2 Q_3 \\ & \left. \left. - 3 \frac{c^2}{h^4} \cos \varphi \xi_2 P_3 Q_2 + \frac{c}{h^4} \cos^2 \varphi \left[-h^2 \left(\frac{ch^2 u}{sh^2 u} + \alpha \right) - c^2 ch^2 u \right] \eta_0 Q_0 + \right. \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{c^3}{h^4} chu \cos^2 \varphi [2(sh^2u + \sin^2 \varphi) + 1] - \frac{c}{h^2} chu [\cos^2 \varphi (2 - \alpha - \frac{1}{sh^2u}) \right. \\
& \left. - (2 - \alpha) \sin^2 \varphi] \right) \eta_0 Q_1 + \frac{3c}{h^4} \cos \varphi [-h^2 (\frac{ch^2u}{sh^2u} + \alpha) - \\
& c^2 ch^2u] \eta_2 P_3 Q_2 + \frac{3c^3}{h^4} chu [(2 - \alpha) ch^2u + (\alpha - 1) \cos^2 \varphi] \eta_2 P_2 Q_3 - \\
& \frac{3c}{h^2} chu \cos \varphi [4 - (2\alpha + \frac{1}{sh^2u})] \eta_2 P_3 Q_3) \quad (5.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi = & \sigma \left(1 + \left[\frac{1}{h^2} \left(2 - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) \xi_0 Q_0 + \frac{1}{h^4} \cos^2 \varphi \left[\frac{h^2}{\sin^2 \varphi} + c^2 \right] \xi_0 Q_0 - \right. \right. \\
& \frac{c^2}{h^4} chu \xi_0 Q_1 + \frac{3}{h^2} \left(4 - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) \xi_2 P_2 Q_2 + 3 \frac{1}{h^4} \cos \varphi \left[\frac{h^2}{\sin^2 \varphi} + c^2 \right] \xi_2 P_3 Q_2 - \\
& 3 \frac{c^2}{h^4} chu \xi_2 P_2 Q_3 + \frac{c}{h^4} chu \left[h^2 \left(\alpha - \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) - c^2 \cos^2 \varphi \right] \eta_0 Q_1 + \frac{c}{h^4} \cos^2 \varphi \\
& \times [c^2 ch^2u - h^2(2 - \alpha)] \eta_0 Q_0 + \frac{c}{h^2} chu \cos^2 \varphi \left[\left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} - 2\alpha + 2 \right) \eta_0 Q_1 + \right. \\
& \left. \frac{3c}{h^4} chu \left[h^2 \left(\alpha - \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) - c^2 \cos^2 \varphi \right] \eta_2 P_2 Q_3 + \right. \\
& \left. \frac{3c}{h^4} \cos \varphi [c^2 ch^2u - h^2(2 - \alpha)] \eta_2 P_3 Q_2 + \right. \\
& \left. \frac{3c}{h^2} chu \cos \varphi \left[\frac{1}{\sin^2 \varphi} - 2\alpha + 4 \right] \eta_2 P_3 Q_3 \right) \quad (5.98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta = & \sigma \left(1 + \left[\frac{1}{h^2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{ch^2u}{sh^2u} \right) \xi_0 Q_0 - \frac{1}{h^2} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \xi_0 Q_0 - \right. \right. \\
& \frac{1}{h^2} \frac{chu}{sh^2u} \xi_0 Q_1 + \frac{3}{h^2} \left[\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{ch^2u}{sh^2u} \right] \xi_2 P_2 Q_2 - \frac{3}{h^2} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \xi_2 P_3 Q_2 - \\
& \frac{3}{h^2} \frac{chu}{sh^2u} \xi_2 P_2 Q_3 + \frac{c}{h^2} chu \left[\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + (2 - \alpha) \right] \eta_0 Q_1 + \\
& \frac{c}{h^2} \cos^2 \varphi \left[\frac{ch^2u}{sh^2u} - (2 - \alpha) \right] \eta_0 Q_0 - \frac{c}{h^2} chu \cos^2 \varphi \left[\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{ch^2u}{sh^2u} \right] \eta_0 Q_1 + \\
& \frac{3c}{h^2} chu \left[\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + (2 - \alpha) \right] \eta_2 P_2 Q_3 + \frac{3c}{h^2} \cos \varphi \left[\frac{ch^2u}{sh^2u} - (2 - \alpha) \right] \eta_2 P_3 Q_2 - \\
& \left. \frac{3c}{h^2} chu \cos \varphi \left[\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{ch^2u}{sh^2u} \right] \eta_2 P_3 Q_3 \right) \quad (5.99)
\end{aligned}$$

$$\tau_{u\varphi} = \sigma \left(-\frac{2 \cos \varphi chu}{h^2 \sin \varphi shu} \xi_0 Q_0 + \frac{\cos \varphi}{h^4 \sin \varphi shu} (c^2 \sin^2 \varphi + h^2) \xi_0 Q_1 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{chu \cos \varphi}{h^4 shu \sin \varphi} (h^2 + c^2 sh^2 u) \xi_0 Q_0 - \frac{12chu \cos \varphi}{h^2 shu \sin \varphi} \xi_2 P_2 Q_2 + \\
& \frac{3 \cos \varphi}{h^4 shu \sin \varphi} (c^2 \sin^2 \varphi + 3h^2) \xi_2 P_2 Q_3 + \frac{3chu}{h^4 shu \sin \varphi} (3h^2 + c^2 sh^2 u) \\
& \times \xi_2 P_3 Q_2 - \frac{\cos \varphi}{h^2 shu \sin \varphi} \xi_0 Q_1 - \frac{9}{h^2 shu \sin \varphi} \xi_2 P_3 Q_3 - \\
& \frac{cchu \cos \varphi}{h^2 shu \sin \varphi} \eta_0 Q_0 + \frac{c \cos \varphi}{h^4 \sin \varphi} [h^2(1 - \alpha)shu + h^2 \frac{ch^2 u}{shu} - c^2 ch^2 u shu] \eta_0 Q_1 + \\
& \frac{cchu \cos \varphi}{h^4 shu} [h^2(\alpha - 1) \sin \varphi + \frac{h^2 \cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - c^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi] \eta_0 Q_0 + \\
& \frac{\cos \varphi}{h^2 shu \sin \varphi} [c(2\alpha - 2)ch^2 u \cos^2 \varphi + c(1 - \alpha)(\cos^2 \varphi + ch^2 u)] \eta_0 Q_1 - \\
& \frac{9cchu \cos \varphi}{h^2 shu \sin \varphi} \eta_2 P_2 Q_2 + \frac{3c \cos \varphi}{h^4 \sin \varphi} [h^2(1 - \alpha)shu + \frac{3h^2 ch^2 u}{shu} - c^2 ch^2 u shu] \eta_2 \\
& \times P_2 Q_3 + \frac{3cchu}{h^4 shu} [h^2(\alpha - 1) \sin \varphi + \frac{3h^2 \cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - c^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi] \eta_2 P_3 Q_2 + \\
& \frac{1}{h^2 shu \sin \varphi} [\cos^2 \varphi ch^2 u (2\alpha - 4)3c + 3c(1 - \alpha)(\cos^2 \varphi + ch^2 u)] \eta_2 P_3 Q_3
\end{aligned} \tag{5.100}$$

Iz navedenih izraza za napone σ_φ i σ_θ sledi:

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow 0} \sigma_\varphi &= \infty; \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \sigma_\varphi = \sigma \\
\lim_{u \rightarrow 0} \sigma_\theta &= \infty; \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \sigma_\theta = \sigma
\end{aligned} \tag{5.101}$$

Dobijeno rešenje je u saglasnosti sa rešenjem u literaturi za prslinu oblika elipsoida, tj kada se elipsoid degeneriše u tanku nit dužine $2c$ (Grifitova prslina).

Da bi se dobilo rešenje za prslinu u obliku koji se navodi u literaturi (oblik kružnog diska) [61] neophodno je istaći sledeće:

Iz prethodno navedene analize naponskog stanja sledi, da kada $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ dobija se izraz za napon σ_θ u obliku:

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta &= \sigma \left(1 + \left[\frac{1}{c^2 sh^2 u} \xi_0 Q_0 - \frac{1}{c^2 chu sh^2 u} \xi_0 Q_1 - \frac{3}{2c^2 sh^2 u} \xi_2 Q_2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{3}{c^2 chu sh^2 u} \xi_2 Q_3 + \frac{1}{cchu} (2 - \alpha) \eta_0 Q_1 - \frac{3}{2cchu} (2 - \alpha) \eta_2 Q_3 \right] \right) \tag{5.102}
\end{aligned}$$

Očigledno je da u graničnom procesu $u \rightarrow 0$, tj. kada kružni disk degeneriše u tačku, napon $\sigma_\theta \rightarrow \infty$. Međutim, na konturi kružnog diska kada je dato $u = u_0$ naponi imaju konačne vrednosti. Napred navedena zapažanja navode nas na ideju da rešenje prsline potražimo iz rešenja spljoštenog obrtnog elipsoida u obliku:

$$\sigma_\varphi = \sigma \frac{\omega}{2\Omega} [2(1 + \nu)\omega q^2 - q(2\nu\omega + 2\nu + 7\omega) + 1 + 4\omega + 2\nu] \tag{5.103}$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma \frac{1}{2\Omega} (\omega[2(1+\nu)\omega q^2 - q[\omega + 6 + 4\nu(2\omega - 1)] + 4\nu\omega + 3] + 2(1-\nu)) \quad (5.104)$$

gde je:

$$\begin{aligned} \Omega &= -(1+\nu)q^2\omega^2 + q[\omega^2 - 2(1-\nu)\omega] + \omega + 1 - \nu \\ q &= \frac{1}{\sqrt{\omega-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\omega-1}; \quad \text{za } \omega > 1 \\ q &= \frac{1}{\sqrt{\omega-1}} [\ln(1+\sqrt{1-\omega}) - \frac{1}{2}\ln\omega]; \quad \text{za } \omega < 1 \\ \omega &= \frac{ch^2u}{sh^2u} \quad [48] \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\cos \varphi = 0 \quad (\text{kružni disk poluprečnika } chu)$$

Kada se izvrši analiza dobijenih izraza za napone i uslova $u \rightarrow 0 \Rightarrow shu \rightarrow 0 \Rightarrow z = shu \cos \varphi \rightarrow 0$ (kružni disk) se sužava na disk poluprečnika $r = 1$ i dolazi se do sledećih zaključaka:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty}} \sigma_{\theta} &= \infty; & \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow 1}} \sigma_{\theta} &= \sigma \end{aligned} \quad (5.106)$$

Navedeno rešenje predstavlja traženo rešenje za prslinu predstavljenu u obliku kružnog diska poluprečnika $r = 1$.

5.9 Faktor koncentracije napona

U istraživanju naponskih stanja oko otvora, nezaobilazno pitanje koje je potrebno analizirati je određivanje faktora koncentracije napona. U okviru ove disertacije se određuje faktor koncentracije napona za rotaciono simetričan slučaj opterećenja.

Polazi se od naponskog stanja homogenog elastičnog materijala u obliku:

$$\sigma_z = \sigma; \quad \sigma_x = \sigma_y = 0; \quad \tau = 0 \quad (5.107)$$

Primenom transformacija (5.3) dobija se:

$$\sigma_u = \sigma \frac{sh^2u \cos^2 \varphi}{ch^2u - \cos^2 \varphi}; \quad \sigma_{\varphi} = \sigma \frac{ch^2u \sin^2 \varphi}{ch^2u - \cos^2 \varphi}; \quad \tau_{u\varphi} = -\sigma \frac{shu chu \cos \varphi \sin \varphi}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \quad (5.108)$$

Faktor koncentracije napona u tom slučaju (zatezanje u pravcu obrtne ose Oz) se određuje:

$$K = \frac{\sigma_{\varphi}^0}{\sigma} \quad (5.109)$$

gde je $\sigma_{\varphi}^0 = \sigma_{\varphi}(u_0, \frac{\pi}{2})$ odnosno

$$\sigma_{\varphi}^0 = \sigma \left(1 + \frac{1}{cch u_0} \left[\frac{\xi_0}{cch^2 u_0} + \frac{3\eta_2 Q_3}{2} \left(\frac{1}{cch^2 u_0} - \alpha \right) + \alpha \eta_0 Q_1 - \frac{9}{2cch u_0} \xi_2 Q_2 \right] \right) \quad (5.110)$$

Iz (5.110) se dobija:

$$K = 1 + \frac{1}{cch u_0} \left[\frac{\xi_0}{cch^2 u_0} + \frac{3\eta_2 Q_3}{2} \left(\frac{1}{cch^2 u_0} - \alpha \right) + \alpha \eta_0 Q_1 - \frac{9}{2cch u_0} \xi_2 Q_2 \right] \quad (5.111)$$

Kada u izrazu (5.111) $u_0 \rightarrow 0$ tada se faktor koncentracije dobija u obliku:

$$K = 1 + \frac{1}{2c^2} [2\xi_0 + 3\eta_2(1 - \alpha)Q_3 + 2\alpha\eta_0 Q_1 - 9\xi_2 Q_2] \quad (5.112)$$

Iz dobijenog se zaključuje da $K \rightarrow \infty$, samim tim i napon $\sigma_{\theta} \rightarrow \infty$.

Dalje, kada u (5.111) $u_0 \rightarrow \infty$ vrednost faktora koncentracije je $K=1$.

Poređenja dobijenih rezultata, sa rezultatima datim u literaturi, iziskivala bi dugu matematičku proceduru uslovljenu oblikom izraza za određivanje faktora koncentracije u datoj literaturi i ne prikazuju se u okviru ovog rada.

Poglavlje 6

NUMERIČKA REALIZACIJA ANALIZE

U okviru ovog poglavlja prikazuje se računaska implementacija izvedenog analitičkog rešenja određivanja naponskog stanja oko šupljine oblika sfere, beskonačnog kružnog cilindra i šupljine oblika izduženog obrtnog elipsoida za slučaj rotaciono simetričnog opterećenja, a u cilju zaokruženja celokupnog istraživanja.

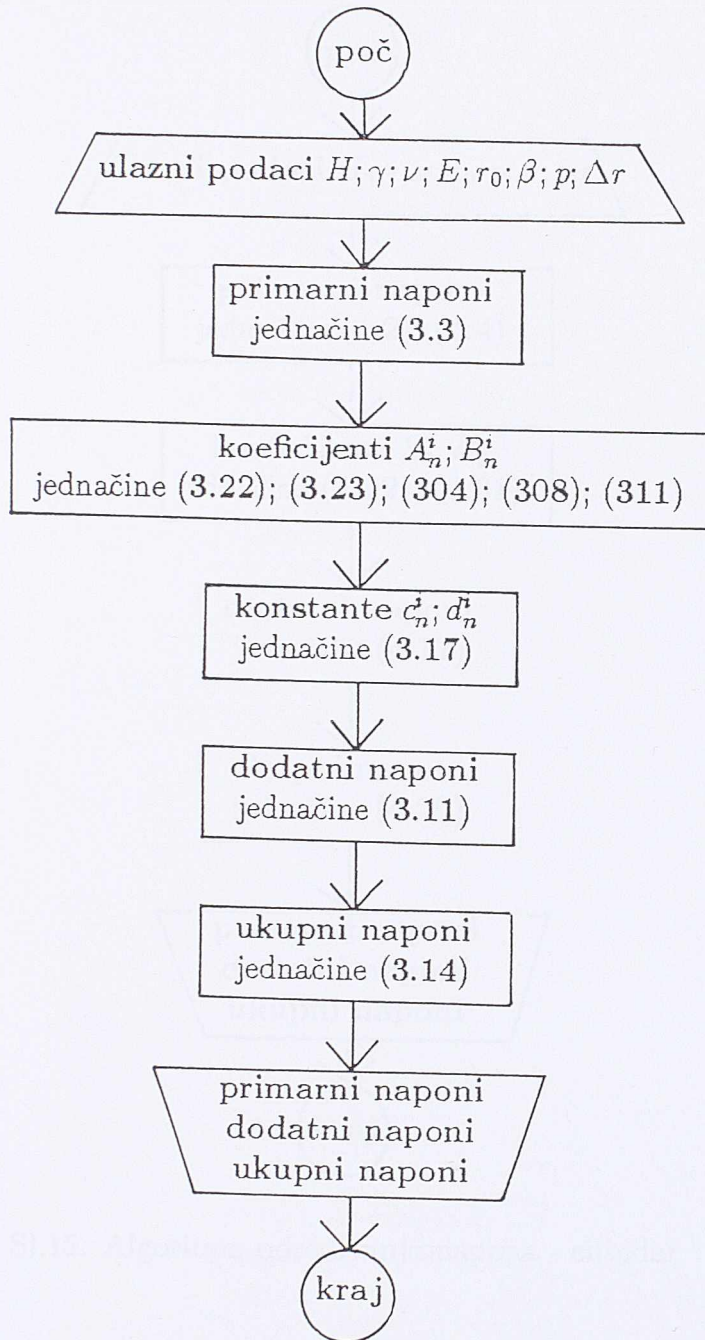
Najpre se prikazuju algoritmi za izradu programa na osnovu kojih se vidi koncepcija kako same izrade programa, tako i izračunavanja napona i prikazivanja rezultata. Zatim, prikazuju se numerički primeri koji ilustruju primenu analitičkih postupaka i dobijenih teorijskih rešenja.

6.1 Postupak određivanja napona

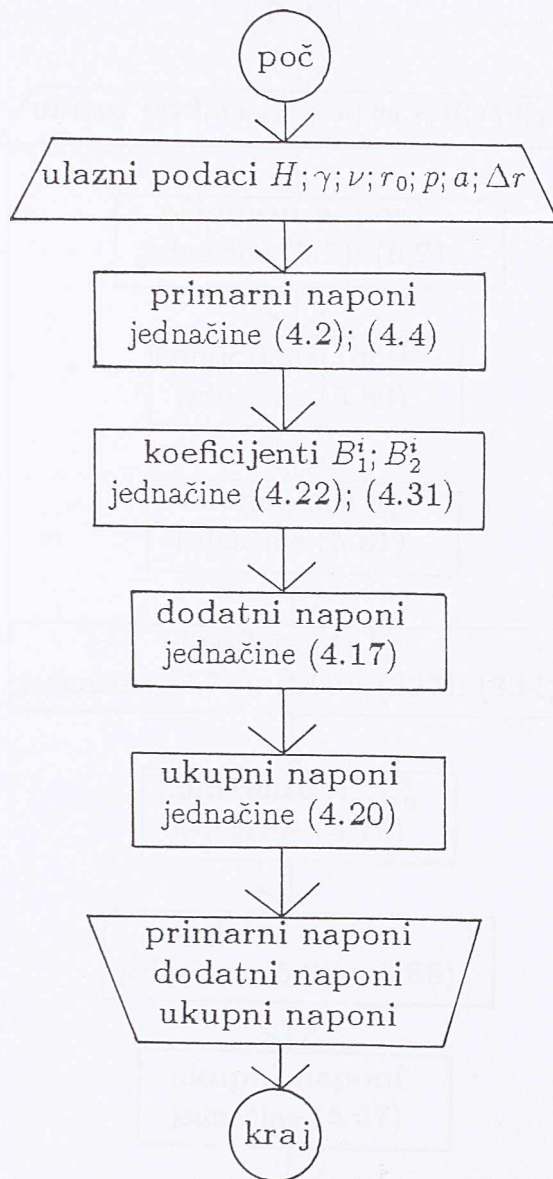
Izračunavanje napona oko sferne šupljine i cilindričnog otvora, na osnovu postojećih istraživanja, a koji se prikazuju u numeričkim primerima urađeno je korišćenjem programskog paketa Mathematica. Za proračun je usvojen elastični model stenske mase, s obzirom da je složeniji u odnosu na model sa hidrostatičkim stanjem primarnih napona. Takođe, usvojeno je i simetrično rotaciono opterećenje.

Izračunavanje napona oko eliptične šupljine urađeno je na osnovu posebno sačinjenog programa nazvanog Elipsoid. Program je napravljen u programskom jeziku C^{++} . Određivanja napona su urađena na osnovu relacija i izraza datih u tekstu teze, a što je simbolično prikazano na slikama 14 - 16. I ovom prilikom je za proračun usvojen elastični model stenske mase mada program sadrži i proračun za hidrostatički model stenske mase.

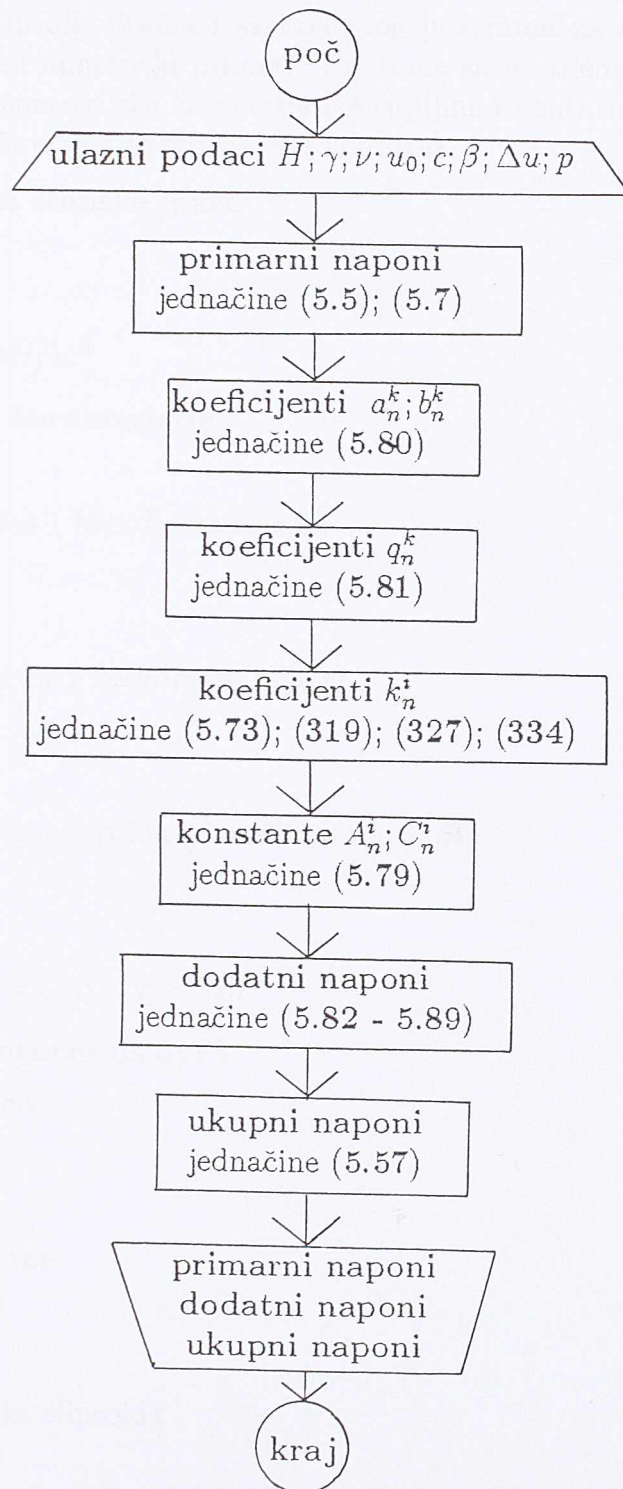
Geometrijske karakteristike sferne šupljine, cilindričnog otvora i šupljine oblika elipsoida u prikazanom primeru izabrane su tako da se mogu vršiti upoređenja dobijenih vrednosti pojedinih napona.



Sl.14. Algoritam određivanja napona - sfera



Sl.15. Algoritam određivanja napona - cilindar



Sl.16. Algoritam određivanja napona - elipsoid

6.2 Numerički primeri

Na osnovu prikazanih algoritama i sastavljenog programa za određivanje napona kao ilustracija dati su numerički primeri. Pri tome su usvojene sledeće karakteristike stenske mase, geometrijske karakteristike šupljine i konturni uslovi (slobodna i delimično sa unutrašnje strane opterećena kontura).

- karakteristike stenske mase

$$\gamma = 28 \text{ kN/m}^3$$

$$\nu = 0.3$$

$$E = 20 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

- geometrijske karakteristike

$$H = 100 \text{ m}$$

1. sferna šupljina (koordinate r, φ, θ)

$$r_0 = 2 \text{ m}$$

$$\Delta r = 0.2 \text{ m}$$

2. cilindrični otvor (koordinate r, φ, z)

$$r_0 = 2 \text{ m}$$

$$\Delta r = 0.2 \text{ m}$$

3. šupljina oblika elipsoida (koordinate u, φ, θ)

$$u_0 = 1.44 \text{ m}$$

$$\Delta u = 0.1 \text{ m}$$

$$c = 0.1 \text{ m}; \quad c = 1 \text{ m}; \quad c = 3 \text{ m}$$

- granični (konturni uslovi)

1. sferna šupljina

$$p = 300 \text{ kN/m}^2$$

$$\beta = \pi/4$$

2. cilindrični otvor

$$p = 300 \text{ kN/m}^2$$

$$a = 2 \text{ m}$$

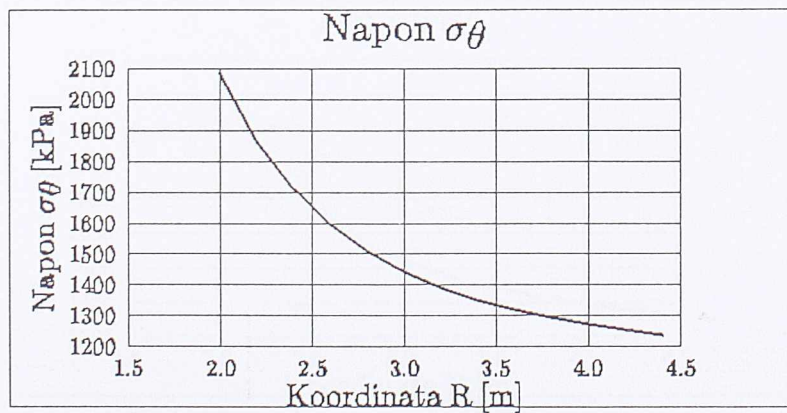
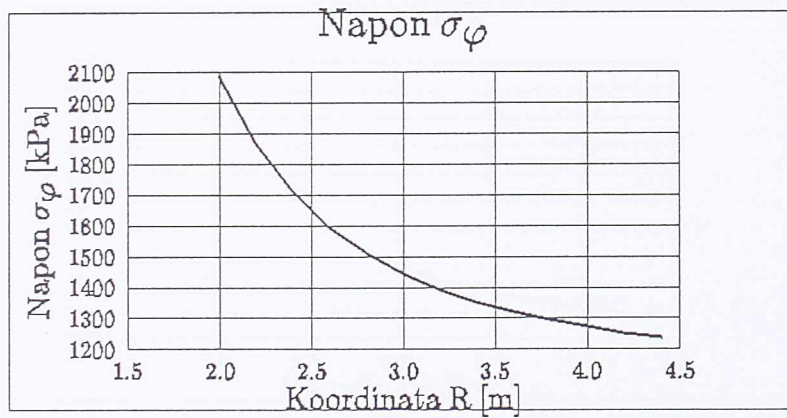
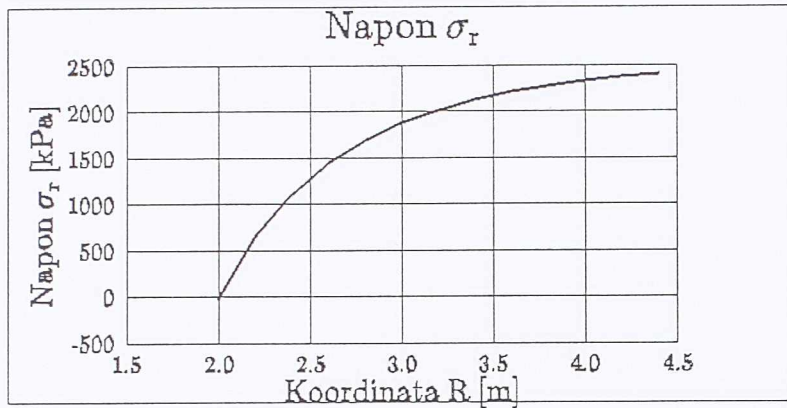
3. šupljina oblika elipsoida

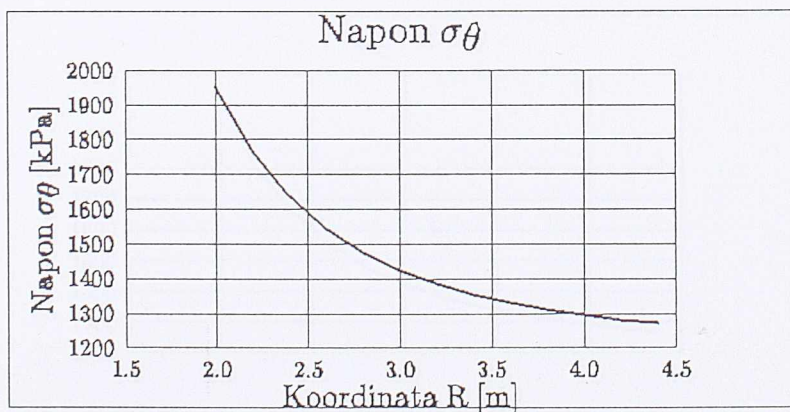
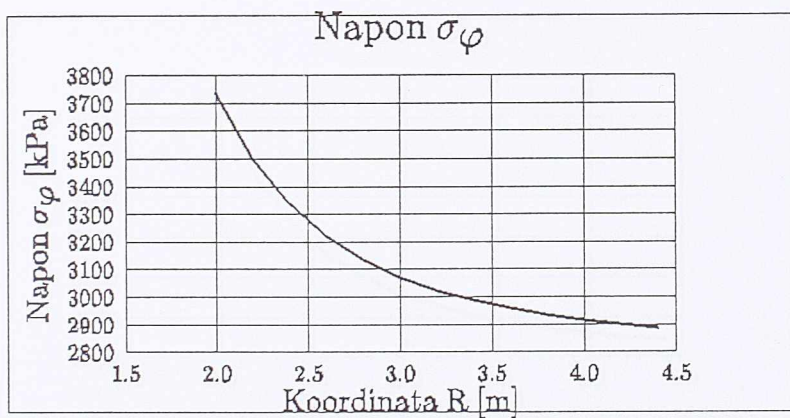
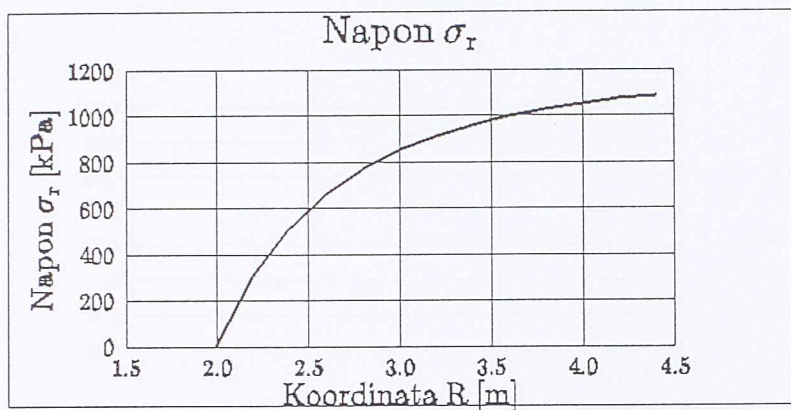
$$p = 300 \text{ kN/m}^2$$

$$\beta = \pi/4$$

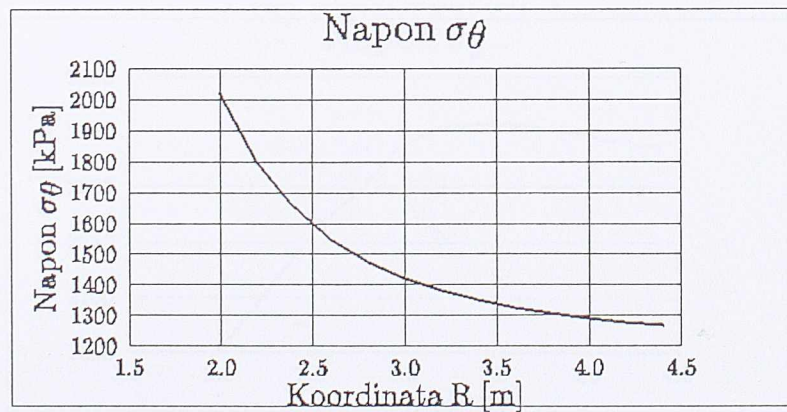
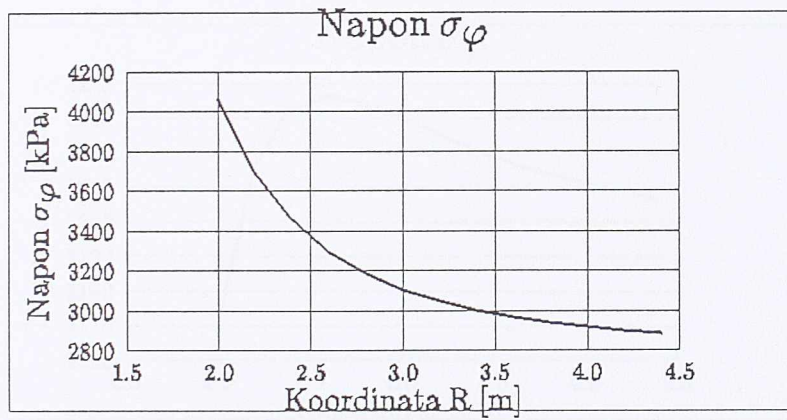
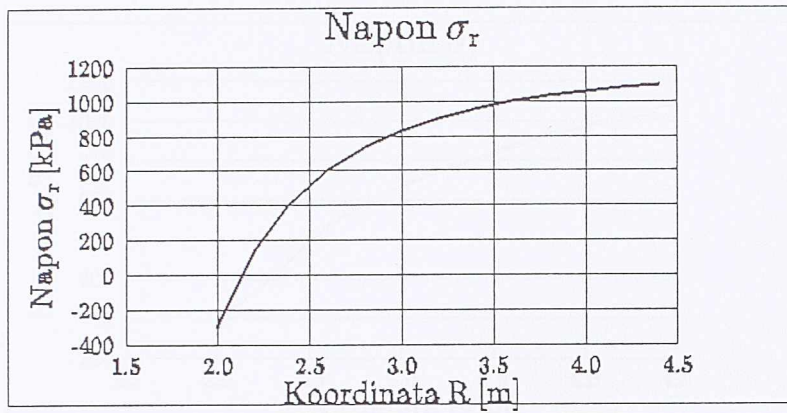
NAPONI - DIJAGRAMI

Sfera - slobodna kontura, $\varphi = 0$

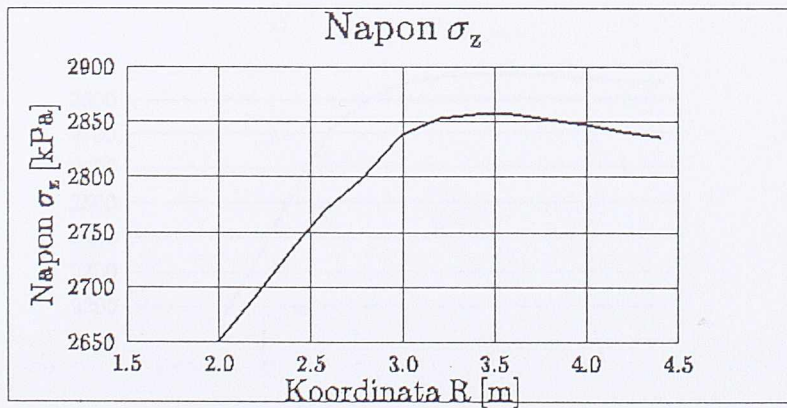
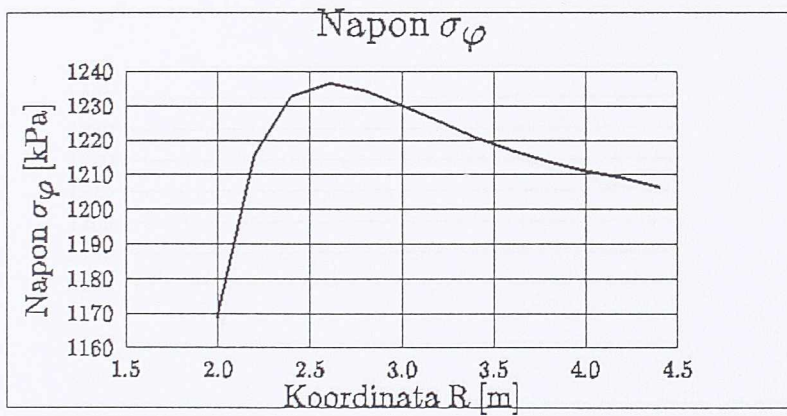
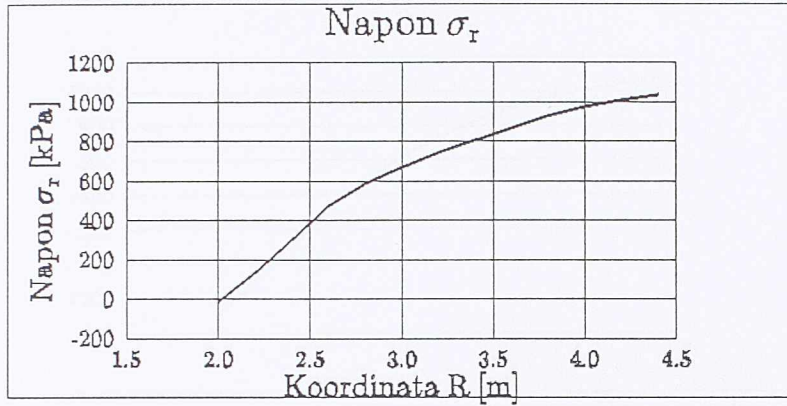


Sfera - slobodna kontura, $\varphi = \pi/2$ 

NAPONI - DIJAGRAMI

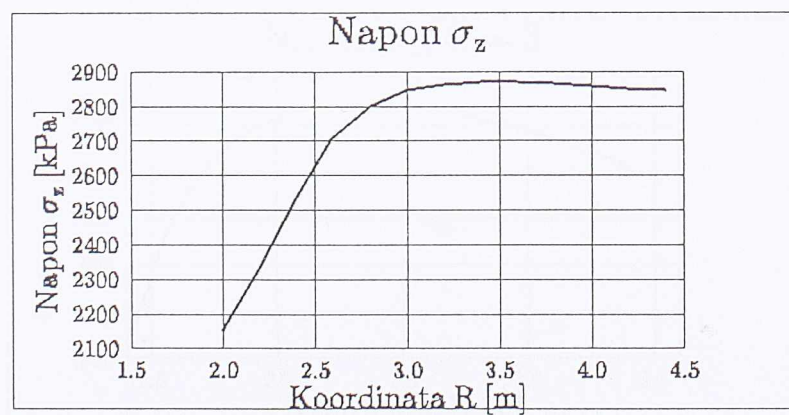
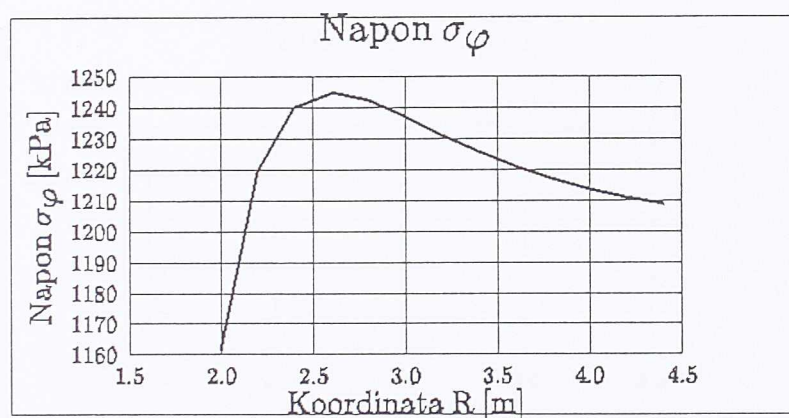
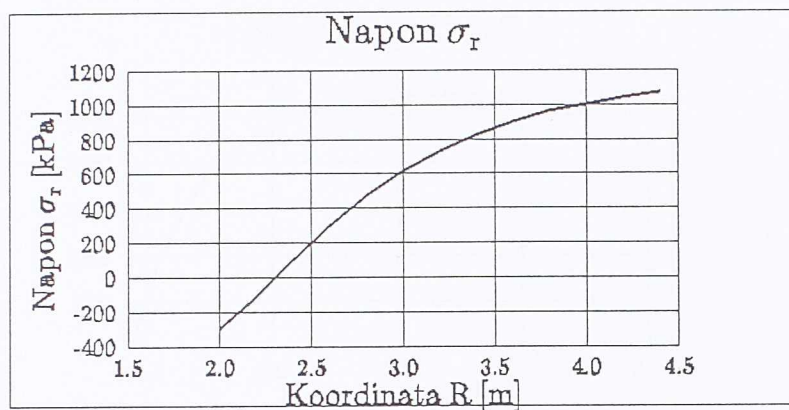
Sfera - opterećena kontura, $\varphi = \pi/2$ 

Cilindar - slobodna kontura

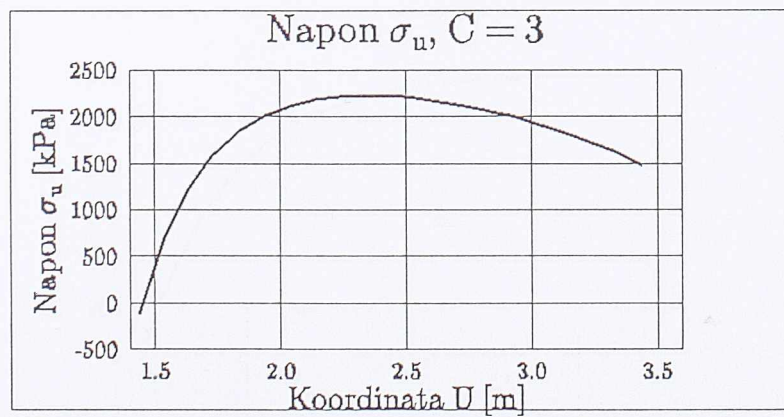
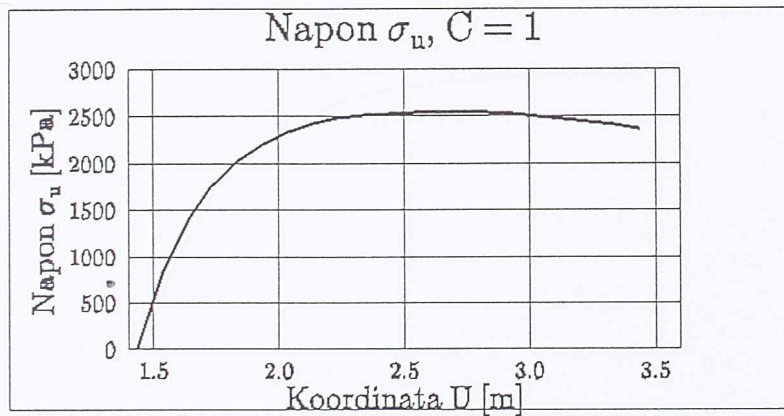
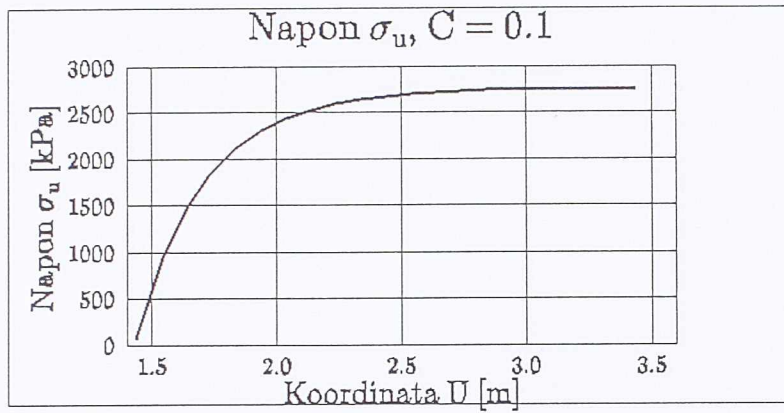


NAPONI - DIJAGRAMI

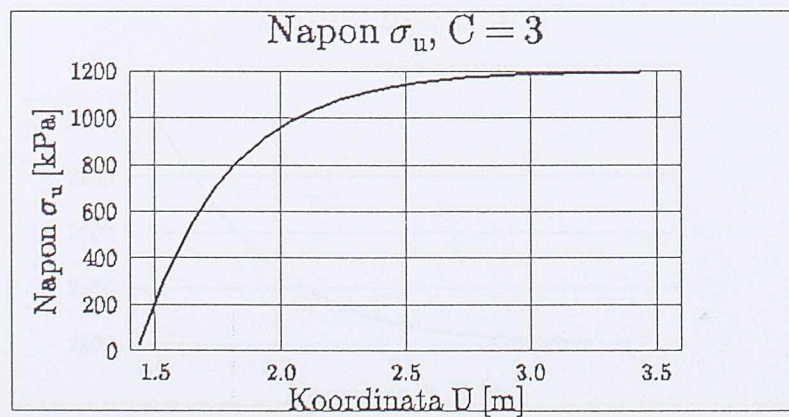
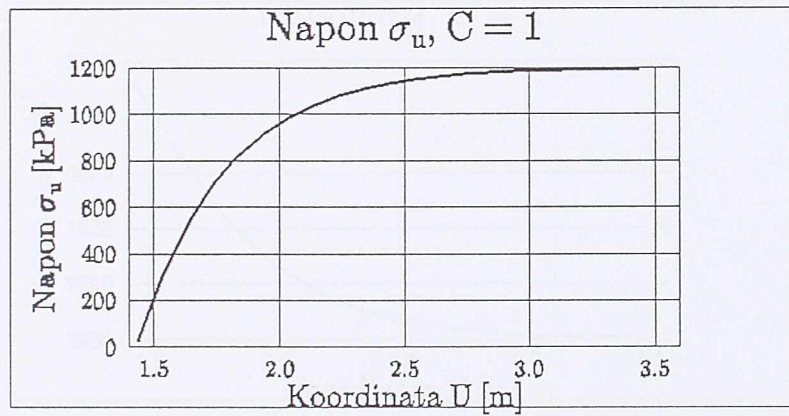
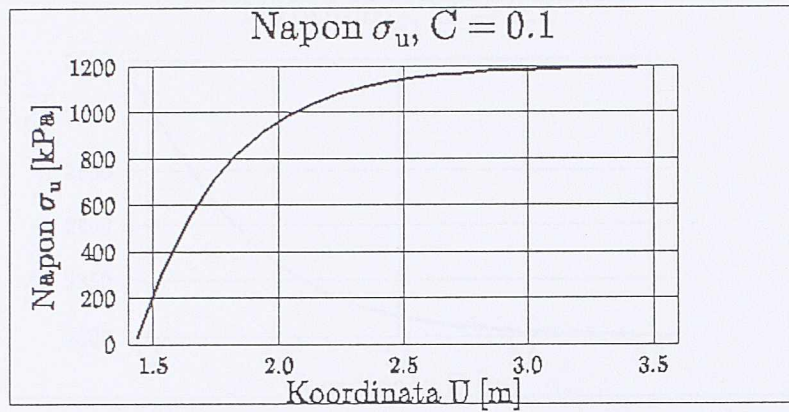
Cilindar - opterećena kontura



Elipsoid - slobodna kont. σ_u , $\varphi = 0$

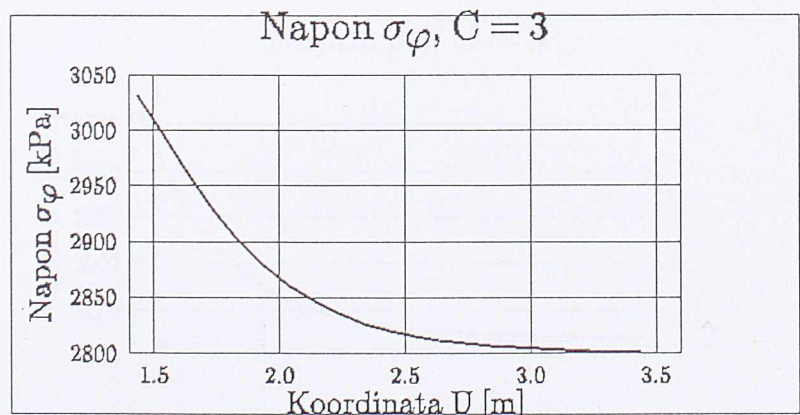
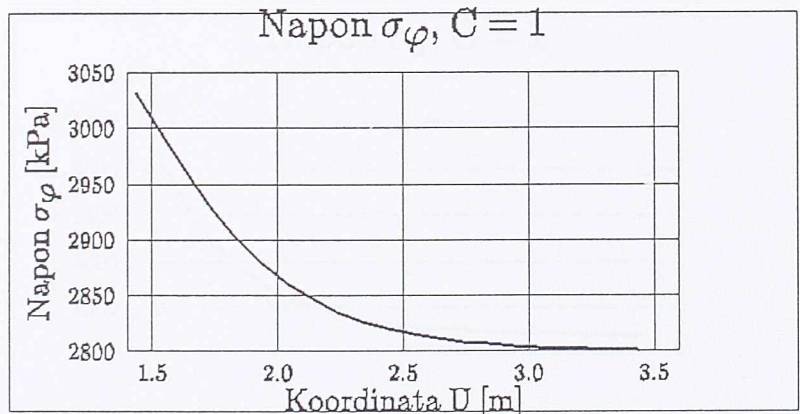
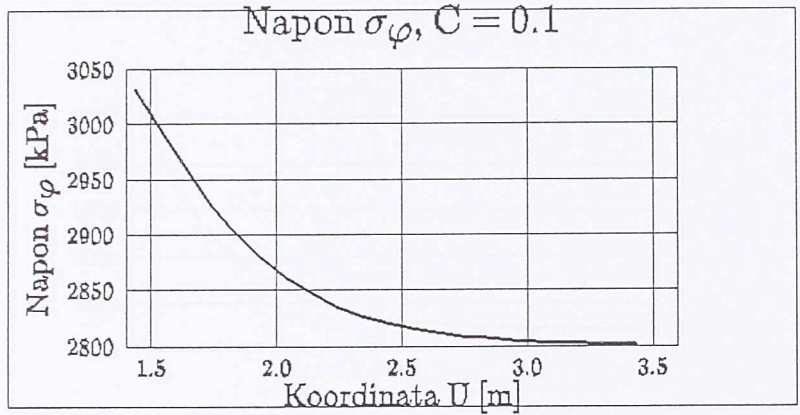


NAPONI - DIJAGRAMI

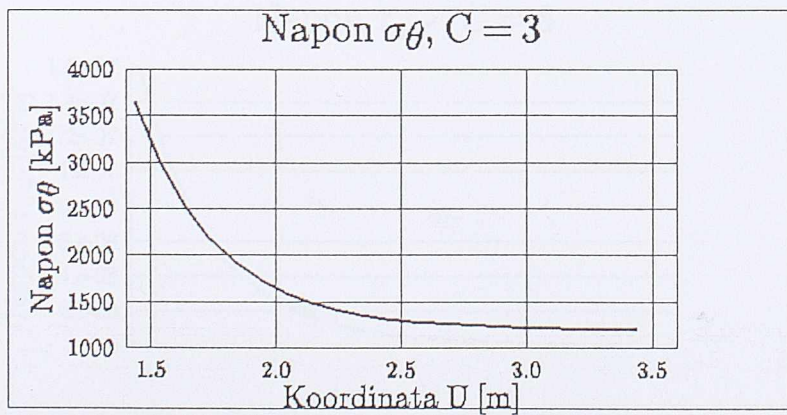
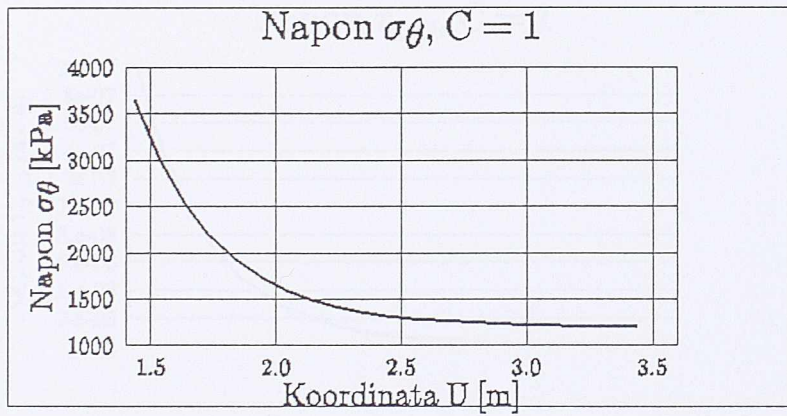
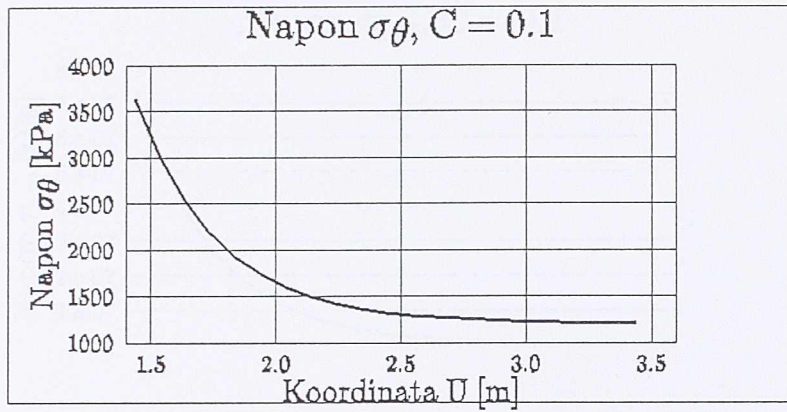
Elipsoid - slobodna kont. σ_u , $\varphi = \pi/2$ 

NAPONI - DIJAGRAMI

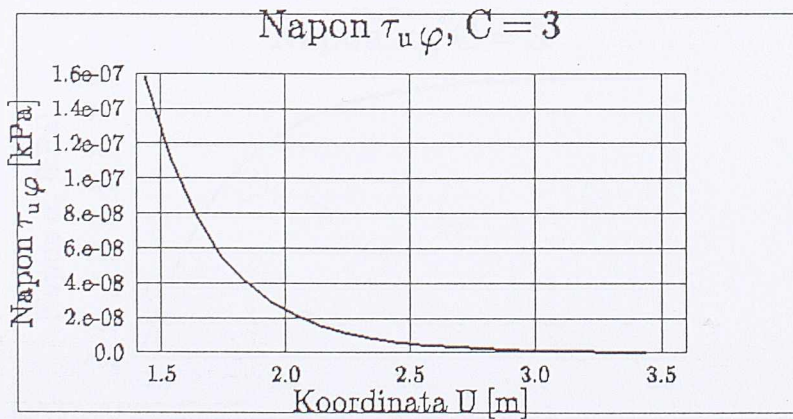
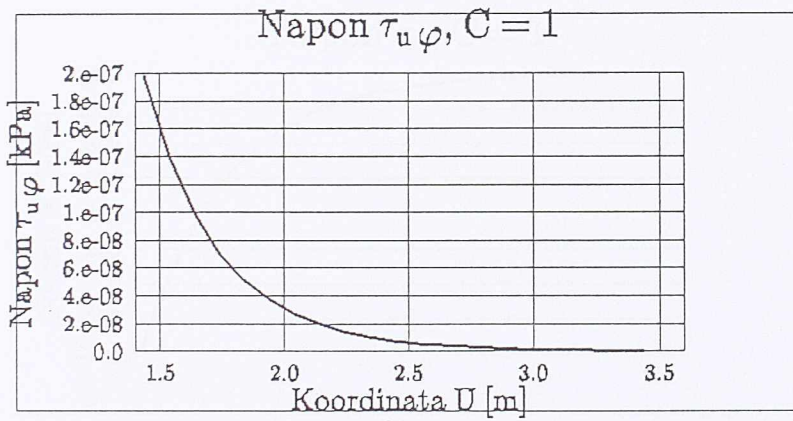
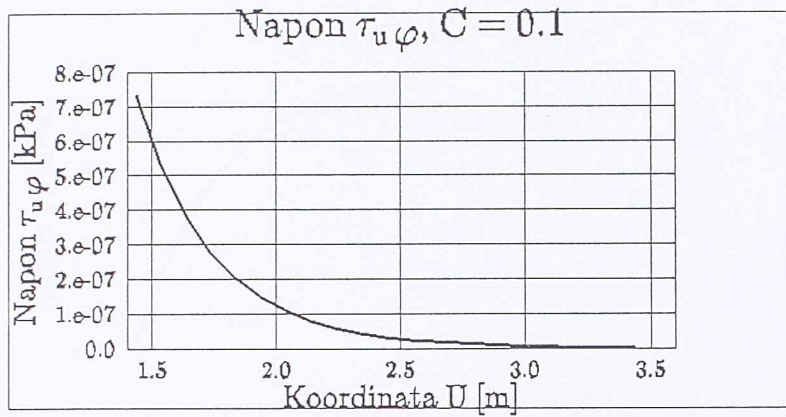
Elipsoid - slobodna kont. σ_φ $\varphi = \pi/2$



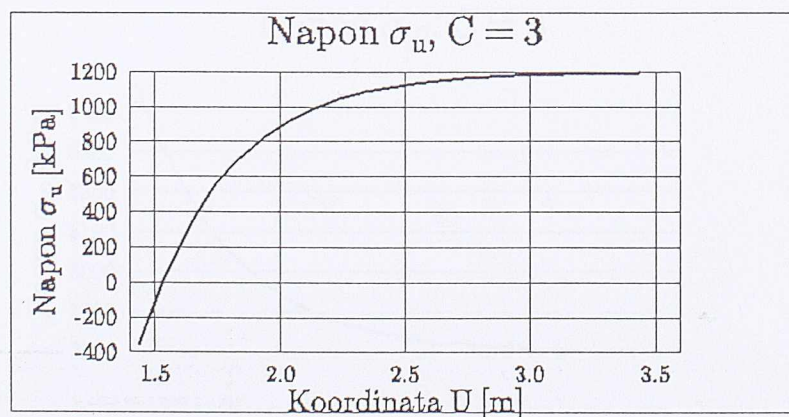
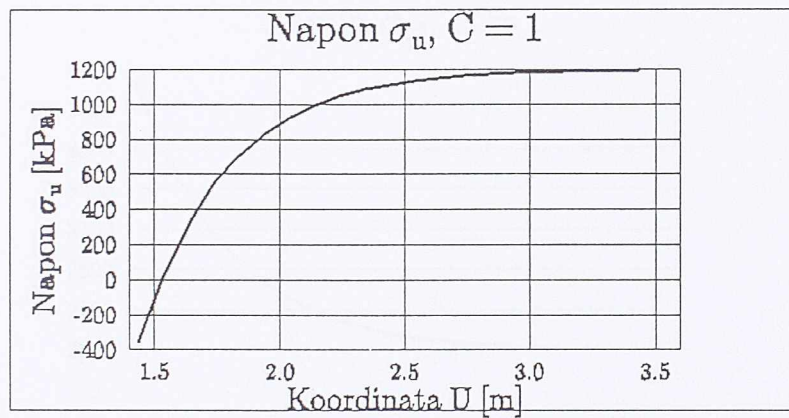
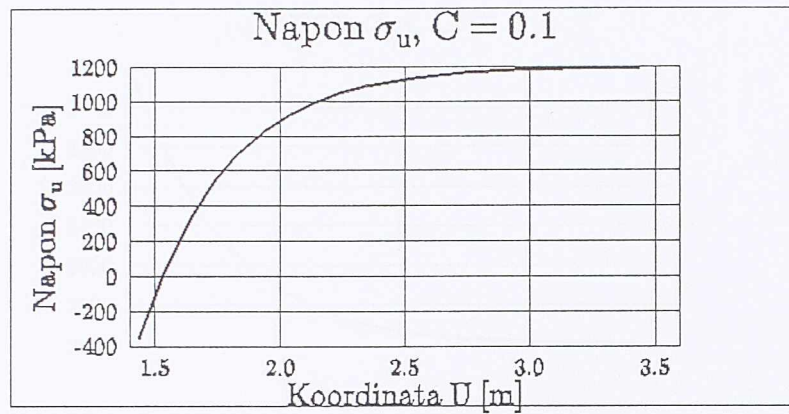
NAPONI - DIJAGRAMI

Elipsoid - slobodna kont. σ_θ $\varphi = \pi/2$ 

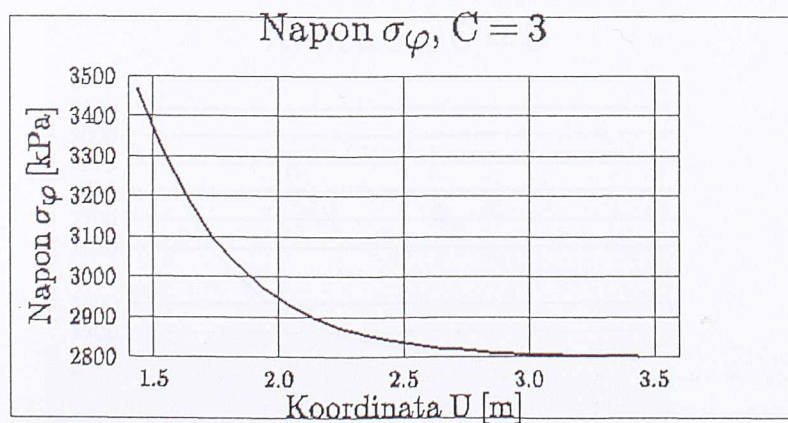
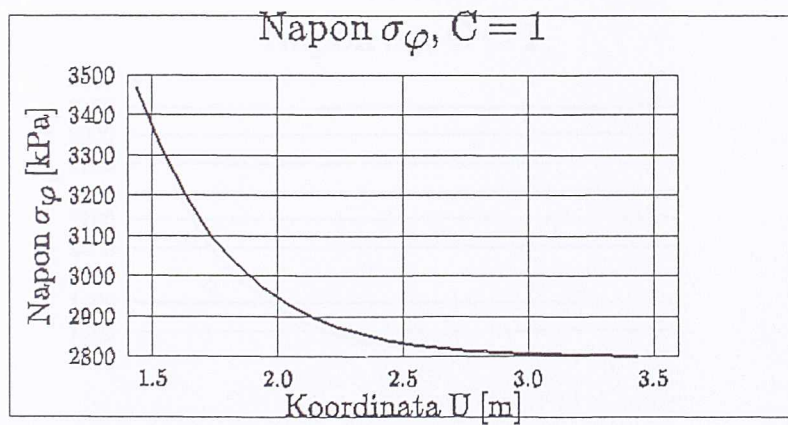
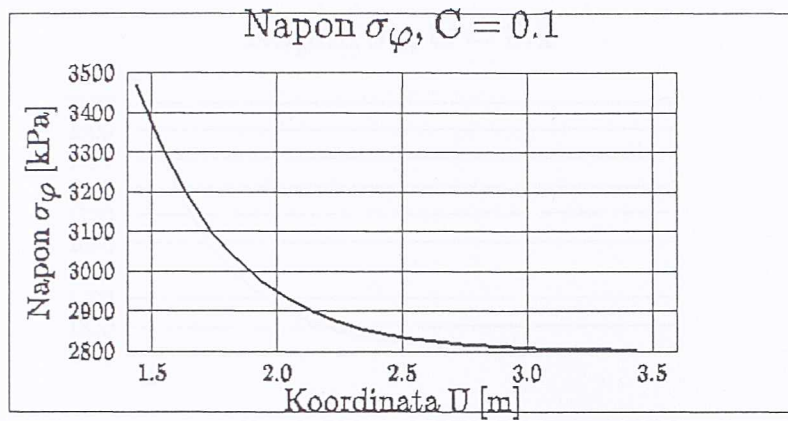
Elipsoid - slobodna kont. $\tau_{u\varphi}$ $\varphi = \pi/2$



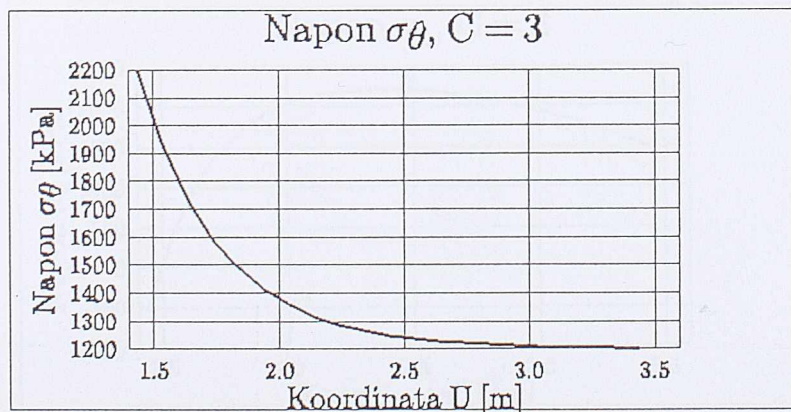
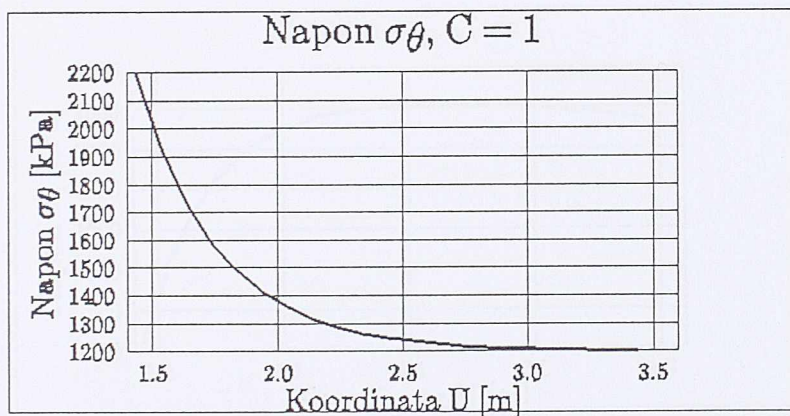
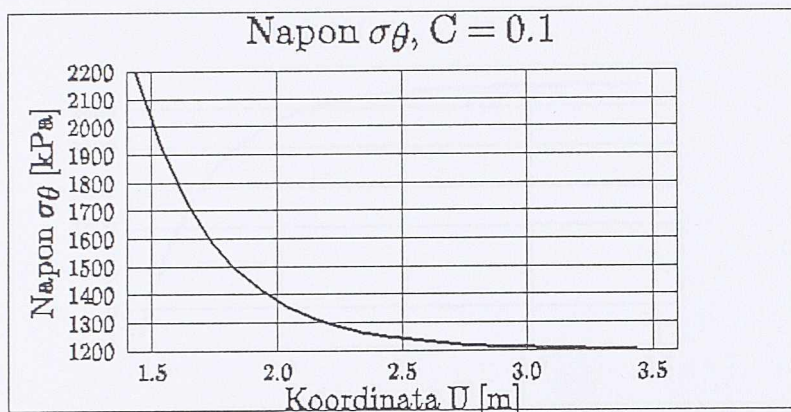
NAPONI - DIJAGRAMI

Elipsoid - opterećenje Tip 1: σ_u $\varphi = \pi/2$ 

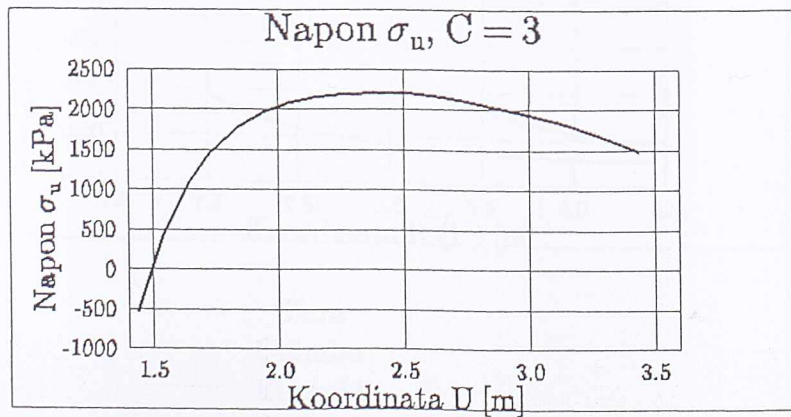
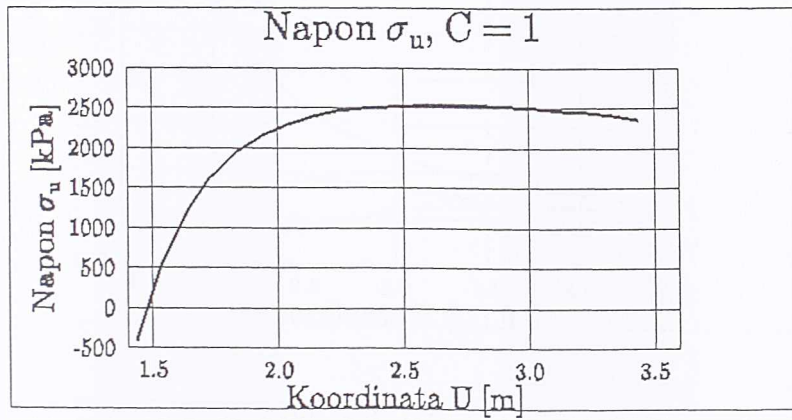
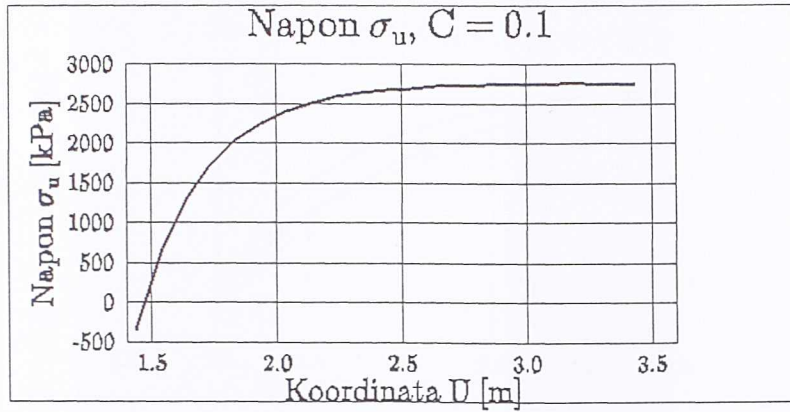
NAPONI - DIJAGRAMI

Elipsoid - opterećenje Tip 1: σ_φ $\varphi = \pi/2$ 

Elipsoid - opterećenje Tip 1: $\sigma_\theta \quad \varphi = \pi/2$



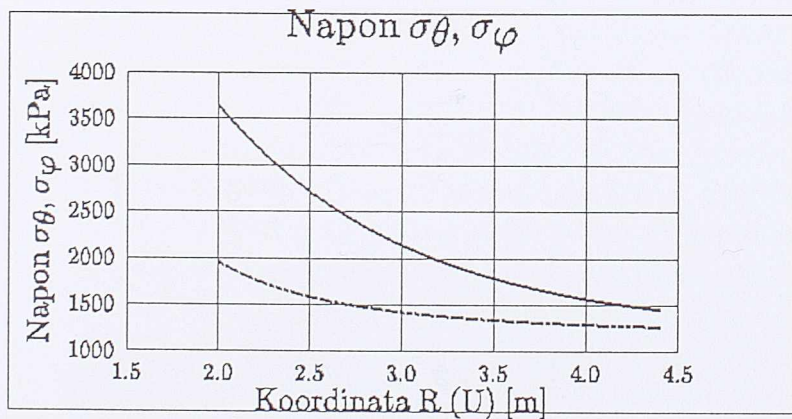
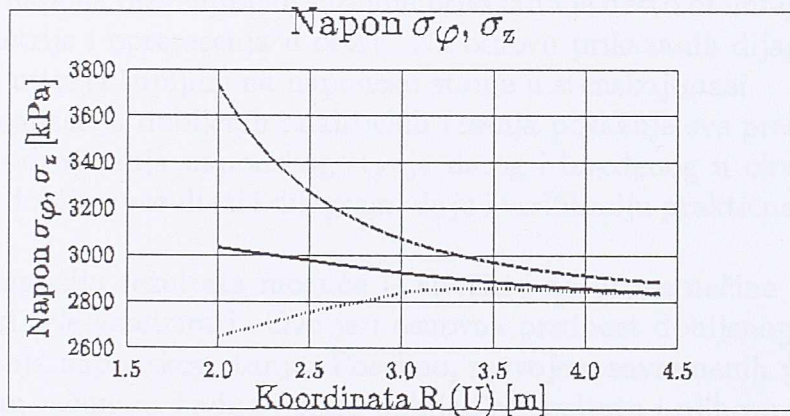
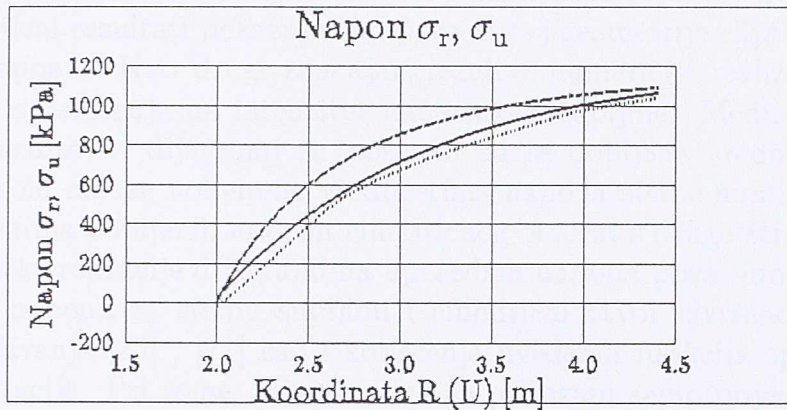
Elipsoid - opterećenje Tip 2: σ_u $\varphi=0$



NAPONI - DIJAGRAMI

Sfera, Cilindar, Elipsoid

Uporedni naponi, slobodna kontura $\varphi = \pi/2$



- Sfera
- Cilindar
- Elipsoid

6.3 Analiza dobijenih rezultata

Za prikaz i numeričku interpretaciju dobijenih analitičkih rešenja, posebno za izduženi obrtni elipsoid, odabran je numerički primer koji omogućuje da se na osnovu dobijenih dijagrama (kao prezentacije rezultata) može izvesti što više zaključaka. Ovakva prezentacija rezultata pokazuje mogućnost višestruke analize. Naime, dobijeni rezultati pokazuju kao prvo uticaj geometrije eliptične šupljine na intenzitet napona. Kao drugi značajan rezultat numeričke realizacije je uticaj unutrašnjeg opterećenja na intenzitet napona oko šupljine. Međutim, ono što je najvažnije, rezultati i dijagrami su pokazali da se dobijene vrednosti napona za izduženi elipsoid nalaze uokvirene vrednostima napona sferne šupljine sa jedne strane, i vrednostima dobijenih napona cilindričnog otvora, s druge strane, a što je u okviru numeričke realizacije dijagramima uporednih napona pokazano.

Određivanje napona za sfernu šupljinu i cilindrični otvor izvršeno na osnovu postojećih istraživanja [25], [71] kao i korišćenja uvedenih funkcija opterećenja u okviru ove disertacije. Pri tome, dijagramima su prikazani samo pojedini dobijeni rezultati u cilju uporedne analize.

Određivanje napona oko eliptične šupljine prikazano je nešto obimnije uzimajući i promene geometrije i opterećenja u obzir. Na osnovu prikazanih dijagrama može se odrediti zona uticaja šupljine na naponsko stanje u stenskoj masi.

Numerička realizacija dobijenih analitičkih rešenja pokazuje sve prednosti usvojenog postupka određivanja naponskog stanja datog i izvedenog u okviru ove disertacije. Takođe, dobijeni rezultati i dijagrami daju i verifikaciju praktičnog doprinosa ove disertacije.

Obim i prezentaciju rezultata moguće je izvršiti i na druge načine u zavisnosti koji se parametri žele analizirati. Ovo je i osnovna prednost dobijenog analitičkog rešenja određivanja naponskog stanja. Posebno, razvojem savremenih programskih paketa i razvojem računara brzina i obim dobijanja rezultata i njihove prezentacije ne predstavljaju problem.

Poglavlje 7

ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

7.1 Ostvareni rezultati i zaključci

Pri razmatranju određivanja naponskog stanja oko šupljine oblika sfere, cilindra i oblika izduženog obrtnog elipsoida u okviru ovog rada ostvareno je više značajnih doprinosa dosadašnjim istraživanjima.

Kao prvi rezultat ove disertacije i originalni doprinos dosadašnjim istraživanjima može se označiti uvođenje novih funkcija opterećenja na površini šupljina izraženih u obliku beskonačnog reda sinusnih funkcija, kao graničnih uslova, kod razmatranja naponskog stanja oko sferne šupljine i šupljine oblika cilindra. Uvođenje ovih funkcija opterećenja omogućava analitičko rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina, problema metodom Bubnova-Galerkina.

Dosadašnja istraživanja koncentracije napona oko neopterećene ili sa unutrašnje strane opterećene šupljine u stenskoj masi, ograničena su na analitička rešenja za sfernu šupljinu i za beskonačno dug cilindar u izotropnoj i homogenoj elastičnoj sredini. Kao logično proširenje na opštiji oblik problema i kao osnovni rezultat ove disertacije je određivanje analitičkog rešenja koncentracije napona oko šupljine oblika izduženog obrtnog elipsoida za šta je korišćen eliptični koordinatni sistem. Usvojeni oblik šupljine kao izduženi obrtni elipsoid najviše odgovara uobičajenim oblicima iskopa podzemnih konstrukcija, problem određivanja naponskog stanja rešavan je za konturne uslove koji odgovaraju slobodnoj i podgrađenoj konturi iskopa u stenskoj masi. U cilju rešenja tako postavljenog problema i dobijanja analitičkog rešenja po prvi put su u ovom radu izvedeni i prikazani izrazi za određivanje napona preko naponskih funkcija za izduženi obrtni elipsoid u prikladno odabranom koordinatnom sistemu. Uvođenje koordinatnog sistema koji najbolje odgovara analognom obliku šupljine omogućilo je bitno uprošćenje matematičkih izvođenja i konačnih izraza koji definišu analitičko rešenje. Kao doprinos i rezultat ove disertacije može se označiti i originalni pristup u rešavanju diferencijalnih biharmonijskih jednačina koje zadovoljavaju naponske funkcije, u eliptičnom sistemu koordinata. Pri raz-

matranju graničnih uslova i ovde su uvedene napred navedene funkcije opterećenja na slobodnoj konturi šupljine koje omogućavaju da se u cilju analitičkog rešavanja jednačina koristi razvijanje u beskonačne redove po trigonometrijskim funkcijama i Ležandrovim polinomima.

Dobijena analitička rešenja za određivanje napona oko šupljine oblika izduženog elipsoida samo naizgled deluju složena i komplikovana jer sadrže Ležandrove, trigonometrijske i hiperboličke funkcije. Međutim, ovde je potrebno istaći da su rešenja predstavljena preko ovih funkcija veoma zahvalna za primenu i analizu zbog brojnih pogodnih osobina navedenih funkcija.

U okviru disertacije je analizirana i mogućnost primene dobijenih rešenja u području mehanike krtog loma, a za analizu prslina. Konstatovano je da je dobijeno rešenje u saglasnosti sa rešenjem u literaturi za prslinu oblika elipsoida (Grifitova prslina) kada se elipsoid degeneriše u tanku nit. Takođe je pokazano da je rešenje za prslinu u obliku koji se navodi u literaturi (oblik kružnog diska), rešenje I.N.Sneddona [61], moguće jedino iz rešenja za spljošteni a ne izduženi obrtni elipsoid. Naime, u graničnom procesu degenerisanja elipsoida ($u \rightarrow 0$) spljošteni elipsoid se preko oblika sfere degeneriše u kružni disk. Nasuprot tome, izduženi elipsoid se degeneriše u sferni oblik u suprotnom graničnom procesu ($u \rightarrow \infty$), a u istom graničnom procesu ($u \rightarrow 0$) se degeneriše u tanku nit.

Rešenja dobijena u okviru ove disertacije mogu biti od značajne koristi kako u daljim istraživanjima sličnih graničnih problema, a takođe i pri rešavanju praktičnih problema određivanja naponskih stanja, što je u okviru numeričke implementacije pokazano.

U okviru numeričke realizacije analize urađen je programski paket za određivanje napona oko šupljine oblika elipsoida, a na osnovu toga prikazani su rezultati u vidu dijagrama. Rezultati potvrđuju dobijena rešenja za izduženi elipsoid. U poređnim dijagramima je pokazano da je rešenje za elipsoid opšte.

Posebno je potrebno istaći da je u disertaciji primenjen pristup analitičkih rešenja dobio potvrdu u najnovijim tendencijama analognih istraživanja tehničke mehanike (prof.M.Pavlović [49]), određivanja rešenja u opštim izrazima (parametarska analiza) primenom odgovarajućih matematičkih programa (ALTRAN, Mathematica i dr.) pomoću kojih se dobijaju rešenja graničnih problema u opštim oznakama (simbolička analiza konstrukcija).

7.2 Oblasti praktične primene rada

Određivanje napona oko neopterećene ili delimično sa unutrašnje strane opterećene šupljine ima poseban praktičan značaj pri razmatranju naponskih stanja u stenskoj masi oko iskopa za podzemne konstrukcije, a time i sagledavanja interakcije podzemne konstrukcije i stenske mase u trodimenzionalnim uslovima. Ovo

se posebno odnosi na određivanje sekundarnog naponskog stanja pri sekvencijalnom građenju podzemnih građevina. Na osnovu određenog naponskog stanja oko iskopa moguće je odrediti i deformacijsko stanje za navedene granične uslove, a što je posebno značajno kod dimenzionisanja podgradne konstrukcije. Predložen oblik opterećenja sa unutrašnje strane šupljine (kao graničnog uslova) daje široke mogućnosti simulacije reaktivnih opterećenja, odnosno vrste i krutosti podgrade.

Takođe, dobijena analitička rešenja mogu se koristiti i pri interpretaciji merenja radnih stanja napona u čvrstim stenskim masama oko podzemnog iskopa, a koja se zasnivaju na principu "oslobađanja napona".

Dobijena rešenja u okviru ove disertacije imaju i širi praktičan značaj (ne samo u podzemnim građevinama) u razmatranju uticaja šupljina u materijalu na naponska stanja (ponašanje materijala sa mikro-defektima) kao i kod raznih drugih istraživanja interakcijskih problema u stenskoj masi (nafte, komprimovanog gasa i dr.).

7.3 Mogućnosti za dalja istraživanja

U istraživanjima u okviru ove disertacije napravljen je novi korak u daljem izučavanju problema određivanja analitičkog rešenja naponskog stanja za šupljinu oblika obrtnog elipsoida koji predstavlja opšti oblik šupljine u odnosu na sferu i beskonačan cilindar. Ovakav pristup rešavanju stvara brojne mogućnosti daljeg istraživanja, jer su u okviru ovog rada naznačena, ali ne i do kraja rešena brojna razvojna sagledavanja ovog problema. Stoga, pravci daljeg istraživanja zasnovani na ovoj disertaciji bi se odnosili na:

- određivanje deformacijskog stanja i pomeranja konture šupljine na osnovu određenog naponskog stanja, a što je značajno za analizu interakcije stene u iskopu i podgrade;
- rešenja otvorenih pitanja (matematičkih problema) koja su navedena u radu, a njihovo rešavanje podrazumeva paralelno istraživanje i u okviru matematičkih nauka na području specifičnih sistema diferencijalnih i algebarskih jednačina.
- proširenje istraživanja za transverzalno izotropnu i anizotropnu stensku masu;
- proširenje istraživanja za razne vidove opterećenja sa unutrašnje strane šupljine;
- određivanje naponskih stanja oko šupljine u stenskoj masi u 3D problemima numeričkim metodama za konkretne probleme i upoređenje sa rezultatima u ovom radu;
- proširenje dobijenih rešenja u ovoj disertaciji primenom parametarske analize problema sa korišćenjem programa koji omogućavaju da se konstante u

rešenjima po metodi Bubnova-Galerkina definišu preko matrica čiji su članovi opšti izrazi (ALTRAN, Mathematica i dr.).

- primena analogne metodologije za analizu raznih oblika mikro fraktura i naponskog stanja u njihovoj okolini u problemima krtog loma.

Literatura

- [1] * Abusajan S.L., Alkanhor A. "Upravljanje materijalnim izlucima". *Mati.* 14, 143, 1969
- [2] * Abeyaratne R., Yang J.H. "Elastic plane strain problems near the tip of a mode I crack". *J. Elasticity* 11 (1982)
- [3] * Abdul J., Behar R. "Elasticity, stability and fracture". *Quart* 1980
- [4] * Akhmedov Yu. A. "Theory of elasticity". *Moskva* 1976
- [5] * Arnold G. "Mathematical methods for physicists". *New York* 1985
- [6] * Atarzi A., Hou B. "Stresses in a transversely isotropic slab having a spherical cavity". *J. Appl. Mechanics* (1973)
- [7] * Babic D.M., Kaptivic M.B. "Linearna elastičnost matematički aspekti". *Moskva* 1981
- [8] * Barber J.R. "Some mechanics of the curved bar problem in classical elasticity". *J. Elasticity* 16 (1981)
- [9] * Bilalović Z.T. "Rock mechanics design in mining and teaching". *Moskva* 1974
- [10] * Birić V.B. "Funkcij naprijepi v teoriji oprugova". *Mati. časopis* 1 (1970)
- [11] * Bliz E.L. "Ob odnom razložanju funkcij Bessela u red uz funkcij Legendre". *Pril. mat. i mek.* (1974)
- [12] * Bekman G., Erdelj A. "Ve iz raspona funkcij Bessela". *Moskva* 1994
- [13] * Brady B.H.G., Brown E.T. "Rock Mechanics - For Geologists". *Spring London* 1985
- [14] * Boggio M.V. "The Circular Cylinder With a Head of Uniform Pressure on a finite length of the surface". *J. Appl. Mechanics* (1911)

Literatura

- [1] * Abramjan B.L. Aleksandrov A. "Osesimetrične zadači teoriji uprugosti", Meh. tv. tela, Moskva 1966
- [2] ** Abeyaratne R. Yang J.S. "Localized shear discontinuities near the tip of a mode I crack", J. Elasticity 17 (1987)
- [3] ** Aldorf J. Exner K. *Mine openings: stability and support*, Oxford 1986
- [4] ** Amenzade Yu A. *Theory of elasticity*, Moskva 1976
- [5] * Arfken G. *Mathematical methods for physicists*, New York 1985
- [6] ** Atsumi A. Itou S. "Stresses in a Transversely Isotropic. Slab Having a Spherical Cavity", J. Appl. Mechanics (1973)
- [7] ** Babič B.M. Kapilevič M.B. *Linejnie uravnjenije matematičeskoj fiziki*, Moskva 1964
- [8] ** Barber J.R. "Some anomalies of the curved bar problem in classical elasticity", J. Elasticity 26 (1991)
- [9] ** Bienawski Z.T. *Rock mechanics design in mining and tunneling*, Boston 1984
- [10] * Blox V.I. "Funkciji naprjaženij v teoriji uprugosti", Prikl. mat. i meh. (1950)
- [11] ** Blox E.L. "Ob odnom razloženijsi funkciji Bessela v red po funkcijam Ležandra", Prikl. mat. i meh. (1954)
- [12] * Bejtmen G. Erdeji A. *Vysšie transcendentnye funkciji*, Vol 1, 2, 3 . Moskva 1966
- [13] ** Brady B.H.G. Brown E.T. *Rock Mechanics - For Underground Mining*, London 1985
- [14] * Barton M.V. "The Circular Cylinder With a Band of Uniform Pressure on a Finite Length of the Surface", J. Appl. Mechanics (1941)

- [15] ** Chen W.T. "A hyperboloidal notch in a transversely isotropic material under pure shear", J. Elasticity (1972)
- [16] * Eringen A.C. *Mechanics of continua*, New York 1967
- [17] * Edwards R.H. "Stress Concentrations Around Spheroidal Inclusions and Cavities", J. Appl. Mechanics (1951)
- [18] ** Eshelbi J.D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*, Birmingham 1957
- [19] ** Eubanks R.A. "Stress Concentration Due to a Hemispherical Pit at a Free Surface", J. Appl. Mechanics (1954)
- [20] ** Fihtengoljc G.M. *Kurs diferencialjnogo i integraljnogo isčislenija*, Moskva 1996
- [21] ** Fritz P. "An analytical solution for axisymmetric tunnel problems in elasto-viscoplastic media", Int. Journal No8 (1984)
- [22] * Fujita T., Tsuchida E., Nakahara I. "Asymmetric problem of a semi-infinite body having a hemispherical pit under uniaxial tension", J. Elasticity (1982)
- [23] ** Hedrih S.H. "Tensor male deformacije i tenzor rotacije u hiperboličko eliptično cilindričnom koordinatnom sistemu", Ohrid 1991
- [24] * Hobson E.W. *Spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge 1931
- [25] * Ivković M. "Deformacije cilindričnog otvora beskonačne dužine u beskonačnoj masi opterećenog rotaciono simetričnim opterećenjem na konačnoj dužini", Zbornik SANU 1954
- [26] * Jovanović P. *Projektovanje i proračun podgrade horizontalnih podzemnih prostorija* R.G.F. Beograd 1994
- [27] * Jaeger J.C. Cook N.G.W. *Fundamentals of Rock Mechanics*, London 1969
- [28] ** Korn. G. Korn T. *Mathematical handbook*, London 1968
- [29] ** Kuznjecov G.B. *Uprugost, vjaskouprugost i dliteljnaja pročnost cilindričkih i sferičeskih tel*, A.N. SSSR Moskva 1979
- [30] ** Kant R. Bogy D.B. "The Elastostatic Axisymmetric Problem of a Cracked Sphere Embedded in a Dissimilar Matrix", J. Appl. Mechanics (1980)
- [31] * Landau L.D. Lifšic E.M. *Teorija uprugosti*, Moskva 1987

- [32] * Lurie A.I. "Koncentracija naprjaženij v oblasti otverstija na poverhnosti krugovogo cilindra", Prikl. mat. i meh. (1946)
- [33] ** Lang T.A. Bishoff J.A. "Stability of reinforced rock structures", Cambridge 1984
- [34] ** Landanyi B. Gill D.E. "Tunnel lining design in a creeping rock", Cambridge 1984
- [35] * Lurie A.I. *Teorija uprugosti*, Moskva 1970
- [36] ** Love A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, New York 1926
- [37] ** Lomakin V.A. *Teorija uprugosti neodnorodnyh tel*, Moskva 1976
- [38] ** Mushelišvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadači matematičeskoj teoriji uprugosti*, Moskva 1966
- [39] * Mitrinović D.S. Kečkić J.D. *Jednačine matematičke fizike*, Beograd 1994
- [40] * Mitrinović D.S. *Specijalne funkcije*, Beograd 1990
- [41] * Mura T. *Micromechanics of defects in solids*, Evanston U.S.A. 1992
- [42] ** Minh N.D. Borest P. "Etude de la stabilite des cavites souterraines avec un modele de comportement elastoplastique radoucissant"
- [43] * Mura T. Kouris D., Tsuchida E. "The Hemispheroidal Inhomogeneity at the Free Surface of an Elastic Half Space", J.Appl. Mechanich (1989)
- [44] ** Mura T. Furuhashi R. "The Elastic Inclusion With a Sliding Interface", J.Appl. Mechanich (1984)
- [45] * Mc Clung H.B. "The elastic sphere under nonsymmetric loading", J. Elasticity (1989)
- [46] ** Narodeckij M.Z. "O naprjaženijah v neodnorodnom krugovom cilindre", Dok. A.N. SSSR. (1947)
- [47] * Neuber H. *Kerbspannungslehre*, Berlin 1937
- [48] * Neuber H. *Kerbspannungslehre*, Berlin 1958
- [49] * Pavlović M.N. Sapountzakis E.J. "Computers and Structures: Non-Numerical Applications", Computers & Structures (1986)

- [50] * Podiljčuk Yu.N. *Prostranstvenye zadači mehaniki gornyh porod*, Kiev , 1983
- [51] * Podiljčuk Yu.N. *Granične zadači statiki uprugih tel*, Kiev 1984
- [52] * Podiljčuk Yu.N. *Trehmernye zadači teoriji uprugosti*, Kiev 1979
- [53] * Papkovič P.F. "Ogvaženie obšega integrala osnovnyh uravnenij teoriji uprugosti čezvez garmoničeskie funkciji", *Izv. A.N. SSSR* (1932)
- [54] ** Piskunov N.S. *Diferencialnoe i integralnoe isčislenija*, Moskva 1968
- [55] * Prokopov, V.K. "Ravnovesie uprugovo osesimetrično nagruženogo tolstostennogo cilindre", *Prikl. mat. i meh.* (1949)
- [56] * Poulos H.G. Davis E.H. *Elastic solutions for soil and rock mechanics*, New York 1973
- [57] * Rašković D. *Teorija elastičnosti*, Beograd 1985
- [58] ** Ramaeckers C. "Stabilite dun tunnel ...", *Tunnels N^o 117.* (1993).
- [59] ** Savin G. N. "Koncentracija napraženij okolo krivolinejnyh otverstij v plastinah u oboločkah", Moskva 1962
- [60] * Sokolnikoff S. *Mathematical Theory of Elasticity*, New York 1956
- [61] * Sneddon I.N. Lowengrub M. *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, New York 1969
- [62] * Sternberg E. Sadowsky M.A. "On the Axisymmetric Problem of the Theory of Elasticity for an Infinite Region Conlaining Two Spherical Cavities", *J. Appl. Mechanich* (1952)
- [63] * Sadowsky M.A. Sternberg E. "Stress Concentration Around a Triahial Ellipsoidal Cavity", *J. Appl. Mechanich* (1949)
- [64] *Sternberg E., Rosenthal F. "The Elastic Sphere Under Concentrated Loads", *J. Appl. Mechanich* (1952)
- [65] * Sadowsky M.A. Sternberg E. "Stress Concentration Around an Ellipsoidal Cavity in an Infinite Body Under Arbitrary Plane Stress Perpendicular to the Ahis of Revolution of Cavity", *J. Appl. Mechanich* (1947)
- [66] * Suetkin P.K. *Klassičeskye ortogonaljnye mnogočleny*, Moskva 1976
- [67] * Šapiro G.S. "Osesimetrične deformaciji ellipsoida vrašenija", *Dokl. A.N. SSSR* (1947)

- [68] ** Tsuchiya T. "A design program for a tunnelling method using bolts and shotcrete", Cambridge 1984
- [69] * Timoshenko S. Goodier J.N. *Theory of elasticity*, New York 1951
- [70] * Veljković-Noerlović N. Plavšić M. *Teorija elastičnosti*, Beograd 1988
- [71] * Veljković-Noerlović N. *Uvod u termoelastičnost*, Beograd 1977
- [72] ** Vittke V. *Mehanika skaljnih porod*, Moskva 1990
- [73] * Vladimirov V.S. *Uravnenija matematičeskoj fiziki*, Moskva 1976
- [74] * Valov, G.M. "Ob Osesimetričnoj deformaciji splošnog krugovog cilindra konečnoj dliny" *Prikl. mat. i meh.* (1962)
- [75] ** Yin F. Fung Y.C. "Peristaltic Waves in Circular Cylindrical Tubes", *J. Appl. Mechanich* (1969)
- [76] * Witke W. *Rock Mechanics*, New York 1990
- [77] ** Watson G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge 1966

-osnovna literatura [] *

-opšta literatura [] **

ODREĐJIVANJE NAPONA PREKO NAPONSKIH FUNKCIJA U SISTEMU KOORDINATA IZDUŽENOG OBRTNOG ELIPSOIDA

U literaturi iz teorije elastičnosti i mehanike kontinuuma mogu se naći izrazi za napone izražene preko naponskih funkcija u krivolinijskom sistemu sa polarnim i meridijalnim koordinatama [57], [70] i dr. H. Neuber je u monografiji [47] izveo izraze za napone preko naponskih funkcija u koordinatnom sistemu elipsoidalnog elipsoida.

Rešavajući problem naponskog stanja oko šupljine oblika istuženog rotacionog elipsoida primenom elipsoidalnih koordinata, a za sferu rotaciono simetričnog opterećenja, posebno je određeno napona u odgovarajućem sistemu koordinata.

PRILOZI

Sistem koordinata izduženog elipsoida je definisano relacijama (2.13), a Lamovi koeficijenti (3.20) [Poglavje 2].

Polazi se od izračunavanja [47] i jednačina za određivanje napona preko naponskih funkcija u obliku:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{2a}{h_1^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \gamma \Phi_1 \quad (101)$$

$$\sigma_{\eta} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial \eta} + \frac{a}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \quad (102)$$

gde je:

$$a = 2(1 - \nu)$$

$$b = (1 - \frac{2}{3}\nu)$$

Određivanje izraza $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}$ i $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial \eta}$ vrši se na osnovu sledećih relacija:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v \partial v} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial u} \quad (103)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial \eta} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial u} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v \partial v} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial u} \quad (104)$$

ODREDJIVANJE NAPONA PREKO NAPONSKIH FUNKCIJA U SISTEMU KOORDINATA IZDUŽENOG OBRITNOG ELIPSOIDA

U literaturi iz teorije elastičnosti i mehanike kontinuuma mogu se naći izrazi za napone izražene preko naponskih funkcija u krivolinijskom sistemu za polarni i cilindrični koordinatni sistem [57], [70] i dr...H.Neuber je u monografiji [47] izveo izraze za napone preko naponskih funkcija u koordinatnom sistemu spljoštenog elipsoida.

Rešavajući problem naponskog stanja oko šupljine oblika izduženog rotacionog elipsoida primenom eliptičnih koordinata, a za slučaj rotaciono simetričnog opterećenja, potrebno je odrediti izraze za napone u odgovarajućem sistemu koordinata.

Sistem koordinata izduženog elipsoida definisan je relacijama (2.19) a Lamoevi koeficijenti (2.30) [Poglavlje 2].

Polazi se od istraživanja [47] i jednačina za određivanje napona preko naponskih funkcija u obliku:

$$\sigma_u^* = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n_u^2} + \frac{2\alpha}{h_u^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + g\bar{\Psi} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \tau_{u\varphi}^* = & -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n_u \partial n_\varphi} + \frac{\alpha}{h_u h_\varphi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \end{aligned} \quad (102)$$

gde je:

$$\alpha = 2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)$$

$$g = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Određivanje izraza $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n_u^2}$ i $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n_u \partial n_\varphi}$ vrši se na osnovu sledećih relacija:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n_u^2} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) + \frac{1}{h_u h_\varphi^2} \frac{\partial h_u}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{h_u h_\theta^2} \frac{\partial h_u}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (103)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n_u \partial n_\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial n_\varphi \partial n_u} = \frac{h_\varphi}{2h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_\varphi^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) + \frac{h_u}{2h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{h_u^2} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) \quad (104)$$

Naponska funkcija Ψ data je relacijom (1.6) [Poglavlje 1]

$$\Psi = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 \quad (105)$$

a $\bar{\Psi}$ se određuje na sledeći način:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} = & \frac{2}{h_u^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \\ & \frac{2}{h_\varphi^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) + \\ & \frac{2}{h_\theta^2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (106)$$

Ako se uvedu oznake : $h_u = h_\varphi = h$, tada se na osnovu (103) dobija

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n_u^2} = & \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) + \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h} \right) \right] + \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \left(-\frac{\frac{\partial h}{\partial u}}{h^2} \right) \frac{1}{h} \\ & + \frac{1}{h^3} \frac{c}{2} (sh^2 u + \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}-1} 2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} \\ & - \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{1}{h^3} \frac{c}{2} (sh^2 u + \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}-1} 2 shu chu + \frac{c^2}{h^4} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \sin \varphi \\ & \times \cos \varphi = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\partial \Psi}{\partial u} shu chu \right) \end{aligned} \quad (107)$$

Na osnovu (101) i (107) dobija se izraz za napon σ_u^* preko naponske funkcije Ψ .

$$\begin{aligned} \sigma_u^* = & -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} - \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\partial \Psi}{\partial u} shu chu \right) + \\ & \frac{2\alpha}{h^2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} c shu \cos \varphi + g \bar{\Psi} \end{aligned} \quad (108)$$

Zamenom indeksa iz (107) se dobija:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n_\varphi^2} = & \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial \Psi}{\partial u} = \\ & \frac{1}{h} \left[\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{h} \right) \right] + \frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial \Psi}{\partial u} = \\ & \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \varphi} h - \frac{\partial h}{\partial \varphi}}{h^2} \right] \frac{1}{h} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^3} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{c}{2} (sh^2 u + \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}-1} 2shu chu = \\ & \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} shu chu - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (109)$$

Na osnovu (101) i (109) dobija se izraz za napon σ_φ^* u obliku:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^* = & -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} - \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} shu chu - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi \right) - \\ & - \frac{2\alpha}{h^2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} c chu \sin \varphi + g \bar{\Psi} \end{aligned} \quad (110)$$

Ponavljanjem izvođenja i zamenom indeksa iz (107) se dobija:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n_\theta^2} = & \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{h_\theta h^2} \frac{\partial h_\theta}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \\ & \frac{1}{h_\theta h^2} \frac{\partial h_\theta}{\partial u} \frac{\partial \Psi}{\partial u} = \frac{1}{h_\theta} \left[\frac{1}{h_\theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{h_\theta} \right) \right] + \\ & \frac{1}{h_\theta h^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} c shu \cos \varphi + \frac{1}{h_\theta h^2} \frac{\partial \Psi}{\partial u} c chu \sin \varphi = \\ & \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{chu}{shu} \right) \end{aligned} \quad (111)$$

Na osnovu (101) i (111) dobija se izraz za napon σ_θ^* :

$$\sigma_\theta^* = -\frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{chu}{shu} \right) + g \bar{\Psi} \quad (112)$$

Iz relacije (104) sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n_u \partial n_\varphi} = & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial \varphi} \frac{1}{h^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h^2} \right) + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial \varphi} + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{h^2} \right) \right] \\ = & \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial \varphi} - \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} chu shu + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \sin \varphi \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (113)$$

Na osnovu (102) i (113) dobija se izraz za napon $\tau_{u\varphi}^*$

$$\begin{aligned} \tau_{u\varphi}^* = & -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial \varphi} + \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} chu shu + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \sin \varphi \cos \varphi \right) \\ & + \frac{\alpha}{h^2} \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} c shu \cos \varphi - \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} c chu \sin \varphi \right) \end{aligned} \quad (114)$$

$$\tau_{u\theta}^* = \tau_{\varphi\theta}^* = 0 \quad (115)$$

Za rotaciono simetričan slučaj opterećenja iz (106) se dobija da je:

$$\bar{\Psi} = \frac{2}{h^2} \left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial u} c sh u \cos \varphi - \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} c ch u \sin \varphi \right] \quad (116)$$

IZVODJENJE IZRAZA ZA NAPONE NA OSNOVU REŠENJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA ZA OBRтни ELIPSOID

1. Opšte rešenje za rotaciono simetrično opterećenje

Polazi se od definisanja naponske funkcije

$$\Psi = \Phi_0 + z\Phi_3 \quad (201)$$

i rešenja diferencijalne jednačine u obliku

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu) \quad (202)$$

Ako se harmonijske funkcije Φ_0 i Φ_3 prikažu u obliku reda:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu) \\ \Phi_3 &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} P_{n+1}^m(\cos \varphi) Q_{n+1}^m(chu) \end{aligned} \quad (203)$$

tada jednačina (201) dobija oblik:

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} P_n^m(\cos \varphi) Q_n^m(chu) + \\ &+ c chu \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} P_{n+1}^m(\cos \varphi) Q_{n+1}^m(chu) \end{aligned} \quad (204)$$

Radi skraćenja izraza uvodi se sledeće:

$P_n^m(\cos \varphi) = P_n^m$; $Q_n^m(chu) = Q_n^m$ - pridružene Ležandrove funkcije
 $P_n^{(m)}(\cos \varphi) = P_n^{(m)}$; $Q_n^{(m)}(chu) = Q_n^{(m)}$ - m-ti izvodi Ležandrovih funkcija

Na početku je potrebno definisati i izvesti određene izraze:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} P_n^m = \sin^{m-1} \varphi [m \cos \varphi P_n^{(m)} - \sin^2 \varphi P_n^{(m+1)}]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \varphi} P_{n+1}^m &= \sin^{m-1} \varphi [m \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} - \sin^2 \varphi P_{n+1}^{(m+1)}] \\
\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} P_n^m &= \sin^{m-2} \varphi [(m^2 \cos^2 \varphi - m) P_n^{(m)} - \\
&\quad (2m+1) \sin^2 \varphi \cos \varphi P_n^{(m+1)} + \sin^4 \varphi P_n^{(m+2)}] \\
\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} P_{n+1}^m &= \sin^{m-2} \varphi [(m^2 \cos^2 \varphi - m) P_{n+1}^{(m)} - \\
&\quad (2m+1) \sin^2 \varphi \cos \varphi P_{n+1}^{(m+1)} + \sin^4 \varphi P_{n+1}^{(m+2)}] \\
\frac{\partial}{\partial u} Q_n^m &= m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu shu Q_n^{(m)} + \\
&\quad (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} shu Q_n^{(m+1)} \\
\frac{\partial}{\partial u} Q_{n+1}^m &= m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu shu Q_{n+1}^{(m)} + \\
&\quad (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} shu Q_{n+1}^{(m+1)} \\
\frac{\partial^2}{\partial u^2} Q_n^m &= m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-4}{2}} sh^2 u [m ch^2 u - 1] Q_n^{(m)} + \\
&\quad (2m+1)(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu sh^2 u Q_n^{(m+1)} + \\
&\quad (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} sh^2 u Q_n^{(m+2)} \\
\frac{\partial^2}{\partial u^2} Q_{n+1}^m &= m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-4}{2}} sh^2 u [m ch^2 u - 1] Q_{n+1}^{(m)} + \\
&\quad (2m+1)(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu sh^2 u Q_{n+1}^{(m+1)} \\
&\quad + (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} sh^2 u Q_{n+1}^{(m+2)}
\end{aligned} \tag{205}$$

Iz (204) i (205) se dobija:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial u} &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} P_n^m [m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu shu Q_n^{(m)} + \\
&\quad (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} shu Q_n^{(m+1)}] + c shu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m \\
&\quad + c chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m [m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu shu Q_{n+1}^{(m)} \\
&\quad + (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} shu Q_{n+1}^{(m+1)}])
\end{aligned} \tag{206}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} Q_n^m [\sin^{m-1} \varphi (m \cos \varphi P_n^{(m)} - \\
&\quad \sin^2 \varphi P_n^{(m+1)})] - c chu \sin \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
&\quad c chu \cos \varphi C_{nm} Q_{n+1}^m [\sin^{m-1} \varphi (m \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
&\quad - \sin^2 \varphi P_{n+1}^{(m+1)})])
\end{aligned} \tag{207}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial u^2} = & \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} P_n^m [m \operatorname{sh}^2 u (ch^2 u - 1)^{\frac{m-4}{2}} \\
& \times (m ch^2 u - 1) Q_n^{(m)} + (2m+1)(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} \\
& \times chu \operatorname{sh}^2 u Q_n^{(m+1)} + \operatorname{sh}^2 u (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} Q_n^{(m+2)}] + \\
& c chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + 2c shu \cos \varphi C_{nm} \\
& \times P_{n+1}^m [m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu shu Q_{n+1}^{(m)} \\
& + (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} shu Q_{n+1}^{(m+1)}] + c chu \cos \varphi C_{nm} \\
& \times P_{n+1}^m [m \operatorname{sh}^2 u (ch^2 u - 1)^{\frac{m-4}{2}} (m ch^2 u - 1) Q_{n+1}^{(m)} + \\
& (2m+1)(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu \operatorname{sh}^2 u Q_{n+1}^{(m+1)} + \\
& (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{sh}^2 u Q_{n+1}^{(m+2)}]) \quad (208)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi^2} = & \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} Q_n^m \sin^{m-2} \varphi [(m^2 \cos^2 \varphi - m) \\
& \times P_n^{(m)} - (2m+1) \sin^2 \varphi \cos \varphi P_n^{(m+1)} + \\
& \sin^4 \varphi P_n^{(m+2)}] - c chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& 2c chu \sin \varphi C_{nm} Q_{n+1}^m \sin^{m-1} \varphi [m \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} - \\
& \sin^2 \varphi P_{n+1}^{(m+1)}] + c chu \cos \varphi C_{nm} Q_{n+1}^m \sin^{m-2} \varphi \\
& \times [m(m \cos^2 \varphi - 1) P_{n+1}^{(m)} - (2m+1) \cos \varphi \sin^2 \varphi \\
& P_{n+1}^{(m+1)} + \sin^4 \varphi P_{n+1}^{(m+2)}]) \quad (209)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial \varphi} = & \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} [\sin^{m-1} \varphi (m \cos \varphi P_n^{(m)} - \sin^2 \varphi \\
& \times P_n^{(m+1)})] [m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu shu Q_n^{(m)} \\
& + (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} shu Q_n^{(m+1)}] - c chu \sin \varphi \\
& \times C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m \\
& - c chu \sin \varphi C_{nm} P_{n+1}^m [m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} \\
& \times chu shu Q_{n+1}^{(m)} + (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} shu Q_{n+1}^{(m+1)}] + \\
& c shu \cos \varphi C_{nm} Q_{n+1}^m [\sin^{m-1} \varphi (m \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& - \sin^2 \varphi P_{n+1}^{(m+1)})] + c chu \cos \varphi C_{nm} \\
& \times [\sin^{m-1} \varphi (m \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} - \\
& \sin^2 \varphi P_{n+1}^{(m+1)})] [m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu shu Q_{n+1}^{(m)} \\
& + (ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} shu Q_{n+1}^{(m+1)}]) \quad (210)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = c shu \cos \varphi; \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -c chu \sin \varphi \quad (211)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} = & \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} P_{n+1}^m [(ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} shu Q_{n+1}^{(m+1)} + \\ & + m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu shu Q_{n+1}^{(m)}] \end{aligned} \quad (212)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} = & \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} Q_{n+1}^m [\sin^{m-1} \varphi (m \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} - \\ & - \sin^2 \varphi P_{n+1}^{(m+1)})] \end{aligned} \quad (213)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} = & \frac{2}{h^2} c chu \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} P_{n+1}^m [(ch^2 u - 1)^{\frac{m}{2}} \\ & \times shu Q_{n+1}^{(m+1)} + m(ch^2 u - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu shu Q_{n+1}^{(m)}] \\ & - \frac{2}{h^2} c chu \sin \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} Q_{n+1}^m \times \\ & [\sin^{m-1} \varphi (m \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} - \sin^2 \varphi P_{n+1}^{(m+1)})] \end{aligned} \quad (214)$$

Ako se definisani izrazi (206)-(214) uvrste u jednačine za određivanje napona preko naponskih funkcija

$$\begin{aligned} \sigma_u^* = & -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} - \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\partial \Psi}{\partial u} shu chu \right) + \\ & + \frac{2\alpha}{h^2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} c shu \cos \varphi + g \bar{\Psi} \\ \sigma_\varphi^* = & -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} - \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} shu chu - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi \right) - \\ & - \frac{2\alpha}{h^2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} c chu \sin \varphi + g \bar{\Psi} \\ \sigma_\theta^* = & -\frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial u} chu \right) + g \bar{\Psi} \\ \tau_{u\varphi}^* = & -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi \partial u} + \frac{c^2}{h^4} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} shu chu + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \sin \varphi \cos \varphi \right) + \\ & + \frac{\alpha}{h^2} \left(-\frac{\partial \Phi_3}{\partial u} c chu \sin \varphi + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} c shu \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (215)$$

dobijaju se izrazi za napone u obliku:

$$\begin{aligned}
\sigma_u^* = & \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n -\frac{1}{h^2} (A_{nm} P_n^m Q_n^m \frac{m}{sh^2 u} (m ch^2 u - 1) \\
& + A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m (2m+1)(n-m+1) \frac{chu}{sh^2 u} - \\
& A_{nm} P_n^m Q_n^m (2m+1)(n+m+1) \frac{ch^2 u}{sh^2 u} + \\
& A_{nm} P_n^m Q_n^m \frac{1}{sh^2 u} (n+m+1) \times \\
& [2m+2 + (n+m+2)sh^2 u] - \\
& A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m \frac{2}{sh^2 u} (m+1)(n-m+1) chu + \\
& c chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& 2c m chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& 2c(n-m+1) \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m chu - \\
& 2c(n+m+1) \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \\
& + c m (m ch^2 u - 1) chu \cos \varphi \frac{1}{sh^2 u} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& \frac{1}{sh^2 u} c (2m+1)(n-m+1) ch^3 u \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m \\
& - c (2m+1)(n+1+m) ch^2 u \cos \varphi \frac{1}{sh^2 u} C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m \\
& + 2c(m+1)(n+m+1) \frac{ch^2 u}{sh^2 u} \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \\
& c chu \cos \varphi \frac{1}{sh^2 u} [(n-m)(n-m+1)sh^2 u - \\
& (2m+2)(n-m+1)] C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{h^4} (m c^2 \cos^2 \varphi A_{nm} P_n^m Q_n^m + \\
& c^2 (n-m+1) \cos \varphi A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m - \\
& c^2 (n+1+m) \cos^2 \varphi A_{nm} P_n^m Q_n^m - \\
& c^3 shu \sin^2 \varphi \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& c^3 m chu \cos^3 \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& c^3 (n-m+1) chu \cos^3 \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& c^3 (n+1+m) chu \cos^2 \varphi C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m - \\
& c^2 m ch^2 u A_{nm} P_n^m Q_n^m - \\
& c^2 (n-m+1) chu A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c^2(n+m+1)ch^2uA_{nm}P_n^mQ_n^m - \\
& c^3sh^2uchu\cos\varphi C_{nm}P_{n+1}^mQ_{n+1}^m - \\
& c^3mch^3u\cos\varphi C_{nm}P_{n+1}^mQ_{n+1}^m - \\
& c^3(n-m+1)ch^3u\cos\varphi C_{nm}P_{n+1}^mQ_{n+1}^m + \\
& c^3(n+m+1)ch^2u\cos\varphi C_{nm}P_{n+1}^mQ_n^m + \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{h^2} (2\alpha cmchu\cos\varphi C_{nm}P_{n+1}^mQ_{n+1}^m + \\
& 2ac(n-m+1)chu\cos\varphi C_{nm}P_{n+1}^mQ_{n+1}^m - \\
& 2ac(n+1+m)\cos\varphi C_{nm}P_{n+1}^mQ_n^m - \\
& (2-\alpha)c(n+m+1)\cos\varphi C_{nm}P_{n+1}^mQ_n^m + \\
& (2-\alpha)c(n+m+1)chuC_{nm}P_n^mQ_{n+1}^m)
\end{aligned} \tag{216}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi}^* = & \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n -\frac{1}{h^2} \left(\frac{m(m\cos^2\varphi-1)}{\sin^2\varphi} A_{nm}P_n^mQ_n^m - \right. \\
& (2m+1)\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}(n+m+1)A_{nm}P_n^mQ_n^m + \\
& (2m+1)(n-m+1)A_{nm}P_{n+1}^mQ_n^m \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \\
& 2(m+1)(n-m+1)A_{nm}P_{n+1}^mQ_n^m \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \\
& (n+m+1)[2m+2-(n+m+2)\sin^2\varphi] \times \\
& \times \frac{1}{\sin^2\varphi} A_{nm}P_n^mQ_n^m - cchu\cos\varphi C_{nm}P_{n+1}^mQ_{n+1}^m - \\
& 2cmchu\cos\varphi C_{nm}P_{n+1}^mQ_{n+1}^m + \\
& 2c(n+m+1)chuC_{nm}P_n^mQ_{n+1}^m - \\
& 2c(n-m+1)chu\cos\varphi C_{nm}P_{n+1}^mQ_{n+1}^m + \\
& c(m^2\cos^2\varphi-m)chu\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} C_{nm}P_{n+1}^mQ_{n+1}^m - \\
& c(2m+1)(n+1+m)chu\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} C_{nm}P_n^mQ_{n+1}^m + \\
& c(2m+1)(n-m+1)\frac{\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi} chuC_{nm}P_{n+1}^mQ_{n+1}^m + \\
& 2c(m+1)(n+m+1)chu\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} C_{nm}P_n^mQ_{n+1}^m - \\
& c[2(m+1)(n-m+1)+(n-m)(n-m+1)\sin^2\varphi] \\
& \times chu\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} C_{nm}P_{n+1}^mQ_{n+1}^m) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{h^4} ((n-m+1)c^2 chu A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m - \\
& c^2(n+m+1)ch^2 u A_{nm} P_n^m Q_n^m + \\
& c^2 m ch^2 u A_{nm} P_n^m Q_n^m + \\
& c^3 sh^2 u chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& c^3(n-m+1)ch^3 u \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& c^3(n+m+1)ch^2 u \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \\
& c^3 m ch^3 u \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& c^2 m \cos \varphi A_{nm} P_n^m Q_n^m + \\
& c^2(n+m+1) \cos^2 \varphi A_{nm} P_n^m Q_n^m - \\
& c^2(n-m+1) \cos \varphi A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \\
& c^3 \sin^2 \varphi chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& c^3 m \cos^3 \varphi chu C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& c^3(n+m+1)chu \cos^2 \varphi C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m - \\
& c^3(n-m+1)chu \cos^3 \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m) - \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{h^2} ((2-\alpha)cm chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& (2-\alpha)c(n+m+1)chu C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
& (2-\alpha)c(n+1-m)chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m) - \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{h^2} (2\alpha cm chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& 2\alpha c(n+m+1)chu C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
& 2\alpha c(n-m+1)chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m) + \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{h^2} ((2-\alpha)c(n-m+1)chu \cos \varphi C_{nm} \\
& \times P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - (2-\alpha)c(n+m+1) \cos \varphi C_{nm} \times \\
& P_{n+1}^m Q_n^m + (2-\alpha)cm chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m)
\end{aligned} \tag{217}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n -\frac{1}{h^2} \left(\frac{m \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} A_{nm} P_n^m Q_n^m - \right. \\
& (n+m+1) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} A_{nm} P_n^m Q_n^m + \\
& (n-m+1) A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} - \\
& \left. c chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& cmchu \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& c(n+m+1) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} chu C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
& c(n-m+1) chu \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& (n-m+1) \frac{chu}{sh^2 u} A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m - \\
& (n+m+1) \frac{ch^2 u}{sh^2 u} A_{nm} P_n^m Q_n^m + \\
& m \frac{ch^2 u}{sh^2 u} A_{nm} P_n^m Q_n^m + \\
& cchu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& c(n-m+1) \frac{ch^3 u}{sh^2 u} \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& c(n+m+1) \frac{ch^2 u}{sh^2 u} \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \\
& cm \frac{ch^3 u}{shu} \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{h^2} ((2-\alpha)c(n-m+1)chu \cos \varphi C_{nm} \\
& \times P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - (2-\alpha)c(n+m+1) \cos \varphi C_{nm} \times \\
& P_{n+1}^m Q_n^m + (2-\alpha)cmchu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m) - \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{h^2} ((2-\alpha)cmchu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m \\
& - (2-\alpha)c(n+m+1)chu C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
& (2-\alpha)c(n-m+1)chu \cos \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m)
\end{aligned} \tag{218}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{u\varphi}^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n -\frac{1}{h^2} \left(\frac{m^2 chu \cos \varphi}{shu \sin \varphi} A_{nm} P_n^m Q_n^m - \right. \\
& m(n+m+1) \frac{\cos \varphi chu}{\sin \varphi shu} A_{nm} P_n^m Q_n^m + \\
& m(n-m+1) A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m \frac{chu}{\sin \varphi shu} + \\
& m(n-m+1) A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi shu} - \\
& \left. m(n+m+1) \frac{\cos \varphi chu}{\sin \varphi shu} A_{nm} P_n^m Q_n^m - \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n+m+1)(n-m+1) \frac{\cos \varphi}{shu \sin \varphi} A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
& (n-m+1)^2 \frac{1}{shu \sin \varphi} A_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& (n+m+1)^2 \frac{chu \cos \varphi}{\sin \varphi shu} A_{nm} P_n^m Q_n^m - \\
& (n+m+1)(n-m+1) \frac{chu}{shu \sin \varphi} A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m - \\
& cshu \sin \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& cm \sin \varphi \frac{ch^2 u}{shu} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& c(n+1-m) \sin \varphi \frac{ch^2 u}{shu} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& c(n+m+1) \frac{chu}{shu} \sin \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \\
& cmshu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& c(n+m+1)shu \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
& c(n-m+1)shu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& cm^2 \frac{ch^2 u \cos^2 \varphi}{shu \sin \varphi} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& cm(n+m+1) \frac{\cos \varphi ch^2 u}{\sin \varphi shu} C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
& cm(n-m+1) \frac{ch^2 u \cos^2 \varphi}{shu \sin \varphi} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& cm(n-m+1) \frac{ch^2 u \cos^2 \varphi}{shu \sin \varphi} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& cm(n+m+1) \frac{\cos^2 \varphi chu}{\sin \varphi shu} C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m - \\
& c(n+m+1)(n-m+1) \frac{\cos \varphi ch^2 u}{\sin \varphi shu} C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
& c(n-m+1)^2 \frac{\cos^2 \varphi ch^2 u}{\sin \varphi shu} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& c(n+m+1)^2 \frac{\cos \varphi chu}{\sin \varphi shu} C_{nm} P_n^m Q_n^m - \\
& c(n-m+1)(n+m+1) \frac{\cos^2 \varphi chu}{shu \sin \varphi} C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{h^4} (c^2 m ch u sh u \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} A_{nm} P_n^m Q_n^m - \\
& c^2 (n+m+1) ch u sh u \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} A_{nm} P_n^m Q_n^m + \\
& c^2 (n-m+1) ch u sh u \frac{1}{\sin \varphi} A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m - \\
& c^3 ch^2 u sh u \sin \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& c^3 m ch^2 u sh u \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& c^3 (n+m+1) ch^2 u sh u \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
& c^3 (n-m+1) ch^2 u sh u \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& c^2 (n-m+1) \sin \varphi \cos \varphi \frac{1}{sh u} A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m - \\
& c^2 (n+m+1) \sin \varphi \cos \varphi \frac{ch u}{sh u} A_{nm} P_n^m Q_n^m + \\
& c^2 m \sin \varphi \cos \varphi \frac{ch u}{sh u} A_{nm} P_n^m Q_n^m + \\
& c^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi sh u C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& c^3 (n-m+1) \cos^2 \varphi \sin \varphi \frac{ch^2 u}{sh u} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& c^3 (n+m+1) \frac{ch u}{sh u} \sin \varphi \cos^2 \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \\
& c^3 m \frac{ch^2 u}{sh u} \cos^2 \varphi \sin \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m) + \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{h^2} (-\alpha c (n-m+1) \frac{ch^2 u}{sh u} \sin \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m \\
& + \alpha c (n+m+1) \frac{ch u}{sh u} \sin \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m - \\
& \alpha c m \frac{ch^2 u}{sh u} \sin \varphi C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m + \\
& \alpha c m \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} sh u C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m - \\
& \alpha c (n+m+1) sh u \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\
& \alpha c (n-m+1) sh u \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m) \tag{219}
\end{aligned}$$

Izrazi za napone (216)-(219) dobijeni su korišćenjem rekurentnih formula (2.39)

i (2.41) [Poglavlje 2]. Sređivanjem dobijenih izraza dobija se:

$$\begin{aligned} \sigma_u^* = & \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [U_{nm}^1 A_{nm} P_n^m Q_n^m + U_{nm}^2 A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \\ & U_{nm}^3 A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + U_{nm}^4 C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \\ & U_{nm}^5 C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + U_{nm}^6 C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m] \end{aligned} \quad (220)$$

gde je:

$$\begin{aligned} U_{nm}^1 &= \frac{1}{h^2} (-(m^2 ch^2 u - m) \frac{1}{sh^2 u} + (2m+1)(n+m+1) \\ &\quad \times \frac{ch^2 u}{sh^2 u} - \frac{n+m+1}{sh^2 u} [2m+2 + (n+m+2)sh^2 u]) \\ &\quad - \frac{m c^2}{h^4} \cos^2 \varphi + \frac{c^2}{h^4} (n+m+1) \cos^2 \varphi + \\ &\quad \frac{c^2}{h^4} m ch^2 u - \frac{c^2}{h^4} (n+m+1) ch^2 u \\ U_{nm}^2 &= \frac{1}{h^2} (-(2m+1)(n-m+1) \frac{chu}{sh^2 u} + \\ &\quad 2(m+1)(n-m+1) \frac{chu}{sh^2 u}) + \frac{c^2}{h^4} (n-m+1) chu \\ U_{nm}^3 &= -\frac{c^2}{h^4} (n-m+1) \cos \varphi \\ U_{nm}^4 &= \frac{1}{h^2} (2c(n+m+1) \cos \varphi + \\ &\quad c(2m+1)(n+1+m) ch^2 u \cos \varphi \frac{1}{sh^2 u} - \\ &\quad 2c(m+1)(n+1+m) \frac{ch^2 u}{sh^2 u} \cos \varphi) - \\ &\quad \frac{c^3}{h^4} (n+m+1) ch^2 u \cos \varphi - \\ &\quad \frac{1}{h^2} 2\alpha c(n+1+m) \cos \varphi - \\ &\quad \frac{1}{h^2} (2-\alpha) c(n+1+m) \cos \varphi \\ U_{nm}^5 &= \frac{c^3}{h^4} (n+m+1) chu \cos^2 \varphi + \\ &\quad \frac{1}{h^2} (2-\alpha) c(n+m+1) chu \\ U_{nm}^6 &= \frac{1}{h^2} (-c chu \cos \varphi - 2m c chu \cos \varphi - 2c(n-m+1) \\ &\quad \times chu \cos \varphi - c(2m+1)(n-m+1) \frac{1}{sh^2 u} ch^3 u \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -cm(mch^2u - 1)\frac{1}{sh^2u}chu \cos \varphi - c\frac{1}{sh^2u}chu \cos \varphi \\
& [(n - m)(n - m + 1)sh^2u - 2(m + 1)(n - m + 1)] \\
& + 2\alpha cmchu \cos \varphi + 2\alpha c(n - m + 1)chu \cos \varphi + \\
& \frac{1}{h^4}(c^3shu \sin^2 \varphi \cos \varphi - c^3mchu \cos^3 \varphi - \\
& c^3(n - m + 1)chu \cos^3 \varphi + c^3sh^2u chu \cos \varphi + \\
& c^3mch^3u \cos \varphi + c^3(n - m + 1)ch^3u \cos \varphi)
\end{aligned} \tag{221}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi^* = & \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\varphi_{nm}^1 A_{nm} P_n^m Q_n^m + \varphi_{nm}^2 A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m \\
& + \varphi_{nm}^3 A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \varphi_{nm}^4 C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m \\
& + \varphi_{nm}^5 C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \varphi_{nm}^6 C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m]
\end{aligned} \tag{222}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
\varphi_{nm}^1 = & \frac{1}{h^2} \left(-\frac{m^2 \cos^2 \varphi - m}{\sin^2 \varphi} + (2m + 1) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} (n + m + 1) \right. \\
& \left. - (n + m + 1) [2(m + 1) - (n + m + 2) \sin^2 \varphi] \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) \\
& + \frac{c^2}{h^4} (n + m + 1) ch^2u - \frac{c^2}{h^4} m ch^2u + \\
& \frac{c^2}{h^4} m \cos^2 \varphi - \frac{c^2}{h^4} (n + m + 1) \cos^2 \varphi \\
\varphi_{nm}^2 = & \frac{1}{h^2} \left(-(2m + 1)(n - m + 1) \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \right. \\
& \left. 2(m + 1)(n - m + 1) \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) + \frac{c^2}{h^4} (n - m + 1) \cos \varphi \\
\varphi_{nm}^3 = & -\frac{c^2}{h^4} (n - m + 1) chu \\
\varphi_{nm}^4 = & \frac{1}{h^2} \left(-2c(n + m + 1) chu + \right. \\
& (2m + 1)(n + m + 1) c chu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} - \\
& 2c(m + 1)(n + m + 1) chu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \\
& 2\alpha c(n + m + 1) chu + (2 - \alpha)c(n + m + 1) chu) - \\
& \frac{c^3}{h^4} (n + m + 1) \cos^2 \varphi chu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{nm}^5 &= \frac{c^3}{h^4}(n+m+1)ch^2u \cos \varphi - \\
&\quad \frac{1}{h^2}(2-\alpha)c(n+m+1) \cos \varphi \\
\varphi_{nm}^6 &= \frac{1}{h^2}(cchu \cos \varphi + 2cmchu \cos \varphi + \\
&\quad 2c(n-m+1)chu \cos \varphi - \\
&\quad c(m^2 \cos^2 \varphi - m)chu \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} - \\
&\quad (2m+1)c(n-m+1)chu \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \\
&\quad c[2(m+1)(n-m+1) + \\
&\quad (n-m)(n-m+1) \sin^2 \varphi]chu \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} - \\
&\quad \frac{c^3}{h^4}sh^2u chu \cos \varphi - \frac{c^3}{h^4}(n-m+1)ch^3u \cos \varphi - \\
&\quad \frac{c^3}{h^4}mch^3u \cos \varphi - \frac{c^3}{h^4} \sin^2 \varphi \cos \varphi chu + \\
&\quad \frac{c^3}{h^4}m \cos^3 \varphi chu + \frac{c^3}{h^4}(n-m+1) \cos^3 \varphi chu - \\
&\quad \frac{1}{h^2}2\alpha cmchu \cos \varphi - \\
&\quad \frac{1}{h^2}2\alpha c(n-m+1)chu \cos \varphi
\end{aligned} \tag{223}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\Theta_{nm}^1 A_{nm} P_n^m Q_n^m + \Theta_{nm}^2 A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m \\
&\quad + \Theta_{nm}^3 A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m + \Theta_{nm}^4 C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m \\
&\quad + \Theta_{nm}^5 C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + \Theta_{nm}^6 C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m]
\end{aligned} \tag{224}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{nm}^1 &= \left(-m \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + (n+m+1) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \right. \\
&\quad \left. (n+m+1) \frac{ch^2u}{sh^2u} - m \frac{ch^2u}{sh^2u} \right) \frac{1}{h^2} \\
\Theta_{nm}^2 &= -(n-m+1) \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{1}{h^2} \\
\Theta_{nm}^3 &= -(n-m+1) \frac{chu}{sh^2u} \frac{1}{h^2} \\
\Theta_{nm}^4 &= (c(n+m+1)) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} chu +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c(2 - \alpha)(n + m + 1)chu) \frac{1}{h^2} \\
\Theta_{nm}^5 &= (c(n + m + 1) \frac{ch^2u}{sh^2u} \cos \varphi - \\
& (2 - \alpha)c(n + m + 1) \cos \varphi) \frac{1}{h^2} \\
\Theta_{nm}^6 &= (-mcchu \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} - c(n - m + 1) \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} chu - \\
& c(n - m + 1) \frac{ch^3u}{sh^2u} \cos \varphi - mc \frac{ch^3u}{sh^2u} \cos \varphi) \frac{1}{h^2} \tag{225}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{u\varphi}^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [T_{nm}^1 A_{nm} P_n^m Q_n^m + T_{nm}^2 A_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m \\
& + T_{nm}^3 A_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + T_{nm}^4 A_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m \\
& + T_{nm}^5 C_{nm} P_n^m Q_n^m + T_{nm}^6 C_{nm} P_n^m Q_{n+1}^m \\
& + T_{nm}^7 C_{nm} P_{n+1}^m Q_n^m + T_{nm}^8 C_{nm} P_{n+1}^m Q_{n+1}^m] \tag{226}
\end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
T_{nm}^1 &= \frac{1}{h^2} \left(-\frac{m^2 \cos \varphi chu}{\sin \varphi shu} + \right. \\
& m(n + m + 1) \frac{chu \cos \varphi}{shu \sin \varphi} + \\
& m(n + m + 1) \frac{\cos \varphi chu}{\sin \varphi shu} - \\
& \left. (n + m + 1)^2 \frac{\cos \varphi chu}{\sin \varphi shu} \right) + \\
& \frac{1}{h^4} \left(c^2 m chu shu \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \right. \\
& c^2 (n + m + 1) chu shu \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \\
& c^2 (n + m + 1) \sin \varphi \cos \varphi \frac{chu}{shu} + \\
& \left. c^2 m \sin \varphi \cos \varphi \frac{chu}{shu} \right) \\
T_{nm}^2 &= \frac{1}{h^2} \left(-m(n - m + 1) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{1}{shu} + \right. \\
& \left. (n + m + 1)(n - m + 1) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{1}{shu} \right) + \\
& \frac{c^2}{h^4} (n - m + 1) \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{shu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{nm}^3 &= \frac{1}{h^2}(-m(n-m+1))\frac{chu}{shu} \frac{1}{\sin \varphi} + \\
&\quad (n+m+1)(n-m+1)\frac{1}{\sin \varphi} \frac{chu}{shu} + \\
&\quad \frac{c^2}{h^4}(n-m+1)\frac{chu shu}{\sin \varphi} \\
T_{nm}^4 &= -\frac{1}{h^2}(n-m+1)^2 \frac{1}{\sin \varphi} \frac{1}{shu} \\
T_{nm}^5 &= -\frac{1}{h^2}c(n+m+1)^2 \frac{\cos \varphi chu}{\sin \varphi shu} \\
T_{nm}^6 &= \frac{1}{h^2}(c(n+m+1)shu \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \\
&\quad cm(n+m+1)\frac{\cos \varphi ch^2u}{\sin \varphi shu} + \\
&\quad c(n+1+m)(n-m+1)\frac{\cos \varphi ch^2u}{\sin \varphi shu} - \\
&\quad \alpha c(n+m+1)shu \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \\
&\quad \frac{c^3}{h^4}(n+m+1)ch^2u shu \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \\
T_{nm}^7 &= \frac{1}{h^2}(-c(n+m+1)\sin \varphi \frac{chu}{shu} + \\
&\quad cm(n+m+1)\frac{\cos^2 \varphi chu}{\sin \varphi shu} + \\
&\quad (n+m+1)(n-m+1)c \frac{chu \cos^2 \varphi}{shu \sin \varphi} + \\
&\quad \alpha c(n+m+1)\frac{chu}{shu} \sin \varphi - \\
&\quad \frac{c^3}{h^4}(n+m+1)\frac{chu}{shu} \cos^2 \varphi \sin \varphi \\
T_{nm}^8 &= \frac{1}{h^2}(cshu \sin \varphi + cm \sin \varphi \frac{ch^2u}{shu} + \\
&\quad c(n-m+1)\sin \varphi \frac{ch^2u}{shu} - cmshu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - \\
&\quad c(n-m+1)shu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - cm^2 \frac{ch^2u \cos^2 \varphi}{shu \sin \varphi} - \\
&\quad cm(n-m+1)\frac{ch^2u \cos^2 \varphi}{shu \sin \varphi} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& cm(n-m+1) \frac{ch^2u \cos^2 \varphi}{shu \sin \varphi} - \\
& c(n-m+1)^2 \frac{ch^2u \cos^2 \varphi}{\sin \varphi shu} - \\
& \alpha c(n-m+1) \frac{ch^2u}{shu} \sin \varphi - \\
& \alpha cm \frac{ch^2u}{shu} \sin \varphi + \alpha m shu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} + \\
& \alpha c(n-m+1) shu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} - \\
& \frac{c^3}{h^4} ch^2u shu \sin \varphi + \frac{c^3}{h^4} m ch^2u shu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} + \\
& \frac{c^3}{h^4} (n-m+1) ch^2u shu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} + \\
& \frac{c^3}{h^4} \sin \varphi \cos^2 \varphi shu + \\
& \frac{c^3}{h^4} (n-m+1) \frac{ch^2u}{shu} \cos^2 \varphi \sin \varphi + \\
& \frac{c^3}{h^4} m \frac{ch^2u}{shu} \cos^2 \varphi \sin \varphi
\end{aligned} \tag{227}$$

$$\tau_{u\theta}^* = 0 ; \tau_{\varphi\theta}^* = 0 \tag{228}$$

Koeficijenti(221),(223),(225) i (227) dati su u navedenom obliku da bi se moglo pratiti njihovo izvođenje iz prethodnih izraza. Može se izvršiti transformacija navedenih izraza i dobiti u jednostavnijem obliku. Da ne bi bilo ponavljanja istih izraza, u okviru osnovnog teksta disertacije daju se koeficijenti u transformisanom obliku. Dobijeni izrazi za napone predstavljaju dodatne napone izazvane uticajem šupljine. Određivanje ukupnih napona daje se u osnovnom tekstu disertacije.

2. Izvođenje izraza napona za slučaj $m=0$

Ako se u opštem rešenju koje je analizirano u prvom delu ovog priloga postavi uslov da je $m = 0$, rešenja se dobijaju preko običnih Ležandrovih funkcija.

Ako se naponska funkcija (201) prikaže uzimajući u obzir rešenje diferencijalne jednačine:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos \varphi) Q_n(chu) \tag{229}$$

dobija se sledeća jednačina:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n Q_n + c h u \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \quad (230)$$

Harmonijske funkcije Φ_0 i Φ_3 (1.6) na osnovu (230) dobijaju sledeći oblik:

$$\Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n Q_n; \quad \Phi_3 = \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \quad (231)$$

U cilju skraćivanja izraza uvodi se sledeće:

$$P_n(\cos \varphi) = P_n; \quad Q_n(chu) = Q_n \dots$$

Kao i kod opšteg rešenja i ovde je potrebno definisati i izvesti određene izraze:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial u} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n Q'_n shu + c shu \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\ &\quad + c h u \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q'_{n+1} shu \end{aligned} \quad (232)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n Q_n P'_n (-\sin \varphi) - c h u \sin \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\ &\quad - c h u \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P'_{n+1} \sin \varphi Q_{n+1} \end{aligned} \quad (233)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n [Q''_n sh^2 u + chu Q'_n] + \\ &\quad c h u \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\ &\quad + c shu \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q'_{n+1} shu \\ &\quad + c shu \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q'_{n+1} shu \\ &\quad + c h u \cos \varphi \left[\sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q''_{n+1} sh^2 u \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q'_{n+1} chu \right] \end{aligned} \quad (234)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n Q_n [\sin^2 \varphi P_n'' - \cos \varphi P_n'] \\
&\quad - c h u \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
&\quad - c h u \sin \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1}' (-\sin \varphi) Q_{n+1} \\
&\quad - c h u (-\sin \varphi) \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1}' \sin \varphi Q_{n+1} \\
&\quad - c h u \cos \varphi \left[\sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1}'' (-\sin \varphi) \sin \varphi Q_{n+1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1}' \cos \varphi Q_{n+1} \right] \tag{235}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial \varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n' (-\sin \varphi) Q_n' s h u \\
&\quad + c s h u (-\sin \varphi) \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
&\quad + c s h u \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1}' (-\sin \varphi) Q_{n+1} \\
&\quad + c h u (-\sin \varphi) \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q_{n+1}' s h u \\
&\quad - c h u \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1}' \sin \varphi Q_{n+1}' s h u \tag{236}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_3}{\partial u} &= \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1} Q_{n+1}' s h u; \\
\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} &= - \sum_{n=-1}^{\infty} C_n P_{n+1}' \sin \varphi Q_{n+1} \tag{237}
\end{aligned}$$

Ako se definisani izrazi (232)-(237) uvrste u jednačine za određivanje napona (215) dobijaju se naponi u obliku:

$$\begin{aligned}
\sigma_u^* &= -\frac{1}{h^2} \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{sh^2 u} [(n+1)sh^2 u + 1] A_n P_n Q_n \right. \\
&\quad \left. - \frac{(n+1)chu}{sh^2 u} A_n P_n Q_{n+1} + c h u \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2c \cos \varphi (n+1) chu C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& -2c(n+1) \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_n \\
& +c chu \cos \varphi \frac{n+1}{sh^2 u} (n sh^2 u - 2) C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +2c chu \cos \varphi \frac{n+1}{sh^2 u} chu C_n P_{n+1} Q_n \\
& +c ch^2 u \cos \varphi \frac{(n+1) chu}{sh^2 u} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& -c ch^2 u \cos \varphi \frac{n+1}{sh^2 u} C_n P_{n+1} Q_n \\
& -2\alpha c \cos \varphi (n+1) chu C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +2\alpha c \cos \varphi (n+1) C_n P_{n+1} Q_n \\
& -(2-\alpha) c \cos \varphi (n+1) chu C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +(2-\alpha) c \cos \varphi (n+1) C_n P_{n+1} Q_n \\
& -(2-\alpha) c chu (n+1) C_n Q_{n+1} P_n \\
& +(2-\alpha) c chu (n+1) \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +\frac{1}{h^4} \sum_{n=-1}^{\infty} (c^2 chu (n+1) A_n P_n Q_{n+1} \\
& -c^2 chu (n+1) chu A_n P_n Q_n \\
& +c^3 sh^2 u chu \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +c^3 ch^2 u \cos \varphi (n+1) chu C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& -c^3 ch^2 u \cos \varphi (n+1) C_n P_{n+1} Q_n \\
& +c^2 \cos^2 \varphi (n+1) A_n P_n Q_n \\
& -c^2 \cos \varphi (n+1) A_n P_{n+1} Q_n \\
& +c^3 chu \sin^2 \varphi \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +c^3 chu \cos^2 \varphi (n+1) C_n Q_{n+1} P_n \\
& -c^3 chu \cos^3 \varphi (n+1) C_n P_{n+1} Q_{n+1})
\end{aligned} \tag{238}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi}^* & = -\frac{1}{h^2} \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{\sin^2 \varphi} [1 - (n+1) \sin^2 \varphi] A_n P_n Q_n \right. \\
& \quad - \frac{(n+1) \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} A_n P_{n+1} Q_n \\
& \quad - c chu \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& \quad + c chu (n+1) C_n P_n Q_{n+1} \\
& \quad - c chu \cos \varphi (n+1) C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& \quad \left. + c chu (n+1) C_n P_n Q_{n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c chu \cos \varphi (n+1) C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& + 2c \cos^2 \varphi \frac{n+1}{\sin^2 \varphi} chu C_n P_n Q_{n+1} \\
& -c chu \cos \varphi \frac{n+1}{\sin^2 \varphi} (n \sin^2 \varphi + 2) C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& -c chu \cos^2 \varphi \frac{n+1}{\sin^2 \varphi} C_n P_n Q_{n+1} \\
& +c chu \cos^3 \varphi \frac{n+1}{\sin^2 \varphi} C_n Q_{n+1} P_{n+1} \\
& -\frac{1}{h^4} \sum_{n=-1}^{\infty} (c^2 chu (n+1) A_n P_n Q_{n+1} \\
& -c^2 ch^2 u (n+1) A_n P_n Q_n \\
& +c^3 sh^2 u chu \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +c^3 ch^3 u (n+1) \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& -c^3 ch^2 u \cos \varphi (n+1) C_n P_{n+1} Q_n \\
& +c^2 \cos^2 \varphi (n+1) A_n P_n Q_n \\
& -c^2 \cos \varphi (n+1) A_n P_{n+1} Q_n \\
& +c^3 chu \sin^2 \varphi \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +c^3 chu \cos^2 \varphi (n+1) C_n Q_{n+1} P_n \\
& -c^3 chu \cos^3 \varphi (n+1) C_n P_{n+1} Q_{n+1}) \\
& +\frac{1}{h^2} \sum_{n=-1}^{\infty} (2\alpha c chu (n+1) C_n P_n Q_{n+1} \\
& -2\alpha c chu (n+1) \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +(2-\alpha) c \cos \varphi chu (n+1) C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& -(2-\alpha) c \cos \varphi (n+1) C_n P_{n+1} Q_n \\
& +(2-\alpha) c chu (n+1) C_n P_n Q_{n+1} \\
& -(2-\alpha) c (n+1) chu \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1})
\end{aligned} \tag{239}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^* &= \frac{1}{h^2} \sum_{n=-1}^{\infty} \left((n+1) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} A_n P_n Q_n \right. \\
& \quad - \frac{(n+1) \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} A_n P_{n+1} Q_n \\
& \quad +c chu \cos \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& \quad \left. +c chu (n+1) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} C_n P_n Q_{n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -cchu(n+1)\frac{\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi}C_nP_{n+1}Q_{n+1} \\
& -\frac{chu}{sh^2u}(n+1)A_nP_nQ_{n+1} \\
& +\frac{ch^2u}{sh^2u}(n+1)A_nP_nQ_n \\
& -cchu\cos\varphi C_nP_{n+1}Q_{n+1} \\
& -cch^3u(n+1)\frac{\cos\varphi}{sh^2u}C_nP_{n+1}Q_{n+1} \\
& +cch^2u\frac{\cos\varphi}{sh^2u}(n+1)C_nP_{n+1}Q_n \\
& +(2-\alpha)c\cos\varphi(n+1)C_nP_{n+1}Q_n \\
& +(2-\alpha)(n+1)cchuC_nP_nQ_{n+1}
\end{aligned} \tag{240}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{u\varphi}^* &= \frac{1}{h^2} \sum_{n=-1}^{\infty} \left(-\alpha c \frac{ch^2u}{shu} (n+1) \sin\varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \right. \\
& + \alpha c \frac{chu}{shu} (n+1) \sin\varphi C_n P_{n+1} Q_n \\
& - \alpha c \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} (n+1) shu C_n P_n Q_{n+1} \\
& + \alpha c \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} (n+1) shu C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& - \frac{1}{h^2} \sum_{n=-1}^{\infty} \left(-\frac{(n+1)^2 \cos\varphi}{\sin\varphi shu} A_n P_n Q_{n+1} \right. \\
& + \frac{(n+1)^2}{shu \sin\varphi} A_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& + \frac{(n+1)^2 chu \cos\varphi}{shu \sin\varphi} A_n P_n Q_n \\
& - \frac{(n+1)^2 chu}{shu \sin\varphi} A_n P_{n+1} Q_n \\
& - c shu \sin\varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& - c \frac{shu \cos\varphi}{\sin\varphi} (n+1) C_n P_n Q_{n+1} \\
& + c shu (n+1) \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& - \frac{cch^2u \sin\varphi}{shu} (n+1) C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& \left. + c \frac{chu \sin\varphi}{shu} (n+1) C_n P_{n+1} Q_n \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -cch^2u \cos \varphi \frac{(n+1)^2}{shu \sin \varphi} C_n P_n Q_{n+1} \\
& +cch^2u \cos^2 \varphi \frac{(n+1)^2}{shu \sin \varphi} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +cchu \cos \varphi \frac{(n+1)^2}{shu \sin \varphi} C_n P_n Q_n \\
& -cchu \cos^2 \varphi \frac{(n+1)^2}{shu \sin \varphi} C_n P_{n+1} Q_n \\
& +\frac{1}{h^4} \sum_{n=-1}^{\infty} (-c^2chu shu \cos \varphi \frac{n+1}{\sin \varphi} A_n P_n Q_n \\
& +c^2chu shu \frac{n+1}{\sin \varphi} A_n P_{n+1} Q_n \\
& -c^3ch^2u shu \sin \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& -c^3ch^2u shu \cos \varphi \frac{n+1}{\sin \varphi} C_n P_n Q_{n+1} \\
& +c^3ch^2u shu \cos^2 \varphi \frac{n+1}{\sin \varphi} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +c^2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{n+1}{shu} A_n P_n Q_{n+1} \\
& -c^2chu \sin \varphi \cos \varphi \frac{n+1}{shu} A_n P_n Q_n \\
& +c^3shu \cos^2 \varphi \sin \varphi C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& +c^3ch^2u \cos^2 \varphi \sin \varphi \frac{n+1}{shu} C_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
& -c^3chu \cos^2 \varphi \sin \varphi \frac{n+1}{shu} C_n P_{n+1} Q_n) \tag{241}
\end{aligned}$$

Izrazi za napone (238)-(241) dobijeni su korišćenjem rekurentnih formula (2.38) i (2.40) [Poglavlje 2]. Grupisanjem članova beskonačnog reda dobijaju se sledeći oblici za napone:

$$\begin{aligned}
\sigma_u^* = & \sum_{n=-1}^{\infty} [U_n^1 A_n P_n Q_n + U_n^2 A_n P_n Q_{n+1} \\
& +U_n^3 A_n P_{n+1} Q_n + U_n^4 C_n P_{n+1} Q_n \\
& +U_n^5 C_n P_n Q_{n+1} + U_n^6 C_n P_{n+1} Q_{n+1}] \tag{242}
\end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
U_n^1 = & -\frac{1}{h^2} \frac{n+1}{sh^2u} [(n+1)sh^2u + 1] \\
& -\frac{c^2}{h^4} (n+1)ch^2u + \frac{c^2}{h^4} \cos^2 \varphi (n+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_n^2 &= \frac{1}{h^2} \frac{n+1}{sh^2u} chu + \frac{c^2}{h^4} (n+1) chu \\
U_n^3 &= -\frac{c^2}{h^4} (n+1) \cos \varphi \\
U_n^4 &= -\frac{1}{h^2} (-2c(n+1) \cos \varphi + cch^2u \cos \varphi \frac{n+1}{sh^2u} \\
&\quad + 2ac(n+1) \cos \varphi + (2-\alpha)c(n+1) \cos \varphi) \\
&\quad - \frac{c^3}{h^4} (n+1) ch^2u \cos \varphi \\
U_n^5 &= \frac{c^3}{h^4} (n+1) chu \cos^2 \varphi + \frac{1}{h^2} (2-\alpha)c(n+1) chu \\
U_n^6 &= -\frac{1}{h^2} (cchu \cos \varphi + 2cchu \cos \varphi (n+1) \\
&\quad + cchu \frac{n+1}{sh^2u} \cos \varphi (nsh^2u - 2) + c \frac{n+1}{sh^2u} ch^3u \cos \varphi \\
&\quad - 2ac(n+1) chu \cos \varphi) + \frac{1}{h^4} (c^3 sh^2u chu \cos \varphi \\
&\quad + c^3 (n+1) ch^3u \cos \varphi + c^3 chu \sin^2 \varphi \cos \varphi \\
&\quad - c^3 (n+1) chu \cos^3 \varphi)
\end{aligned} \tag{243}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} [\varphi_n^1 A_n P_n Q_n + \varphi_n^2 A_n P_{n+1} Q_n \\
&\quad + \varphi_n^3 A_n P_n Q_{n+1} + \varphi_n^4 C_n P_n Q_{n+1} \\
&\quad + \varphi_n^5 C_n P_{n+1} Q_n + \varphi_n^6 C_n P_{n+1} Q_{n+1}]
\end{aligned} \tag{244}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
\varphi_n^1 &= -\frac{1}{h^2} \frac{n+1}{\sin^2 \varphi} [1 - (n+1) \sin^2 \varphi] + \\
&\quad + \frac{c^2}{h^4} (n+1) ch^2u - \frac{c^2}{h^4} (n+1) \cos^2 \varphi \\
\varphi_n^2 &= \frac{1}{h^2} \frac{n+1}{\sin^2 \varphi} \cos \varphi + \frac{c^2}{h^4} (n+1) \cos \varphi \\
\varphi_n^3 &= -\frac{c^2}{h^4} (n+1) chu \\
\varphi_n^4 &= -\frac{1}{h^2} (2c(n+1) chu + cchu \cos^2 \varphi \frac{n+1}{\sin^2 \varphi}) \\
&\quad - \frac{c^3}{h^4} (n+1) chu \cos^2 \varphi + \frac{1}{h^2} (2ac(n+1) chu + \\
&\quad + (2-\alpha)c(n+1) chu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n^5 &= \frac{c^3}{h^4}(n+1)ch^2u \cos \varphi - \frac{1}{h^2}(2-\alpha)c(n+1) \cos \varphi \\
\varphi_n^6 &= \frac{1}{h^2}(cchu \cos \varphi + 2c(n+1)chu \cos \varphi \\
&\quad + cchu \cos \varphi \frac{n+1}{\sin^2 \varphi} (n \sin^2 \varphi + 2) - \\
&\quad cchu \frac{n+1}{\sin^2 \varphi} \cos^3 \varphi - 2\alpha c(n+1)chu \cos \varphi \\
&\quad - \frac{c^3}{h^4}sh^2u chu \cos \varphi - \frac{c^3}{h^4}(n+1)ch^3u \cos \varphi \\
&\quad - \frac{c^3}{h^4}chu \sin^2 \varphi \cos \varphi + \frac{c^3}{h^4}(n+1)chu \cos^3 \varphi
\end{aligned} \tag{245}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} [\Theta_n^1 A_n P_n Q_n + \Theta_n^2 A_n P_{n+1} Q_n \\
&\quad + \Theta_n^3 A_n P_n Q_{n+1} + \Theta_n^4 C_n P_n Q_{n+1} \\
&\quad + \Theta_n^5 C_n P_{n+1} Q_n + \Theta_n^6 C_n P_{n+1} Q_{n+1}]
\end{aligned} \tag{246}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
\Theta_n^1 &= \frac{1}{h^2}((n+1)\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + (n+1)\frac{ch^2u}{sh^2u}) \\
\Theta_n^2 &= -(n+1)\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{1}{h^2} \\
\Theta_n^3 &= -(n+1)\frac{chu}{sh^2u} \frac{1}{h^2} \\
\Theta_n^4 &= c(n+1)[\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + (2-\alpha)]chu \frac{1}{h^2} \\
\Theta_n^5 &= c(n+1)[\frac{ch^2u}{sh^2u} - (2-\alpha)] \cos \varphi \frac{1}{h^2} \\
\Theta_n^6 &= (-chu \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} - \frac{ch^3u}{sh^2u} \cos \varphi) \frac{c(n+1)}{h^2}
\end{aligned} \tag{247}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{u\varphi}^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} [T_n^1 A_n P_n Q_n + T_n^2 A_n P_n Q_{n+1} \\
&\quad + T_n^3 A_n P_{n+1} Q_n + T_n^4 A_n P_{n+1} Q_{n+1} \\
&\quad + T_n^5 C_n P_n Q_n + T_n^6 C_n P_n Q_{n+1} \\
&\quad + T_n^7 C_n P_{n+1} Q_n + T_n^8 C_n P_{n+1} Q_{n+1}]
\end{aligned} \tag{248}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
 T_n^1 &= -\frac{1}{h^2} \frac{(n+1)^2 chu \cos \varphi}{shu \sin \varphi} - \frac{c^2}{h^4} chu shu \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} (n+1) \\
 &\quad - \frac{c^2}{h^4} (n+1) \sin \varphi \cos \varphi \frac{chu}{shu} \\
 T_n^2 &= \frac{1}{h^2} \frac{(n+1)^2 \cos \varphi}{shu \sin \varphi} + \frac{c^2}{h^4} \sin \varphi \cos \varphi \frac{n+1}{shu} \\
 T_n^3 &= \frac{1}{h^2} \frac{(n+1)^2 chu}{shu \sin \varphi} + \frac{c^2}{h^4} chu shu \frac{n+1}{\sin \varphi} \\
 T_n^4 &= -\frac{1}{h^2} \frac{(n+1)^2}{shu \sin \varphi} \\
 T_n^5 &= -\frac{1}{h^2} (n+1)^2 \frac{chu \cos \varphi}{shu \sin \varphi} \\
 T_n^6 &= -\alpha c (n+1) \frac{1}{h^2} shu \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{1}{h^2} (-c(n+1)) \frac{shu \cos \varphi}{\sin \varphi} \\
 &\quad - c ch^2 u \cos \varphi \frac{(n+1)^2}{shu \sin \varphi} - \frac{c^3}{h^4} ch^2 u shu \cos \varphi \frac{n+1}{\sin \varphi} \\
 T_n^7 &= \alpha c (n+1) \frac{1}{h^2} \sin \varphi \frac{chu}{shu} - \frac{1}{h^2} (c(n+1)) \frac{chu \sin \varphi}{shu} \\
 &\quad - c chu \cos^2 \varphi \frac{(n+1)^2}{shu \sin \varphi} \\
 &\quad - \frac{c^3}{h^4} chu \frac{(n+1)}{shu} \cos^2 \varphi \sin \varphi \\
 T_n^8 &= \frac{1}{h^2} \left(-\alpha c \frac{ch^2 u}{shu} (n+1) \sin \varphi + \alpha c (n+1) shu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{h^2} (c shu \sin \varphi - c(n+1) shu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \right. \\
 &\quad \left. + c(n+1) \frac{ch^2 u}{shu} \sin \varphi - c ch^2 u \cos^2 \varphi \frac{(n+1)^2}{shu \sin \varphi} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{c^3}{h^4} (-shu ch^2 u \sin \varphi + ch^2 u shu \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} (n+1) \right. \\
 &\quad \left. + shu \sin \varphi \cos^2 \varphi + ch^2 u \cos^2 \varphi \sin \varphi \frac{n+1}{shu} \right) \quad (249)
 \end{aligned}$$

$$\tau_{u\theta}^* = 0 ; \tau_{\varphi\theta}^* = 0 \quad (250)$$

Dobijeni koeficijenti za određivanje napona daju se u jednostavnijem obliku u osnovnom tekstu disertacije.

RAZVIJANJE FUNKCIJE OPTEREĆENJA U RED PO LEŽANDROVIM POLINOMIMA. ODREDJIVANJE KOEFICIJENATA

Pri određivanju koordinata tenzora napona pojavljuje se beskonačan broj nepoznatih konstanti. Konstante se određuju na osnovu zadatih graničnih uslova, čime se dobijaju sistemi algebarskih jednačina. U cilju rešavanja sistema algebarskih jednačina potrebno je razvijanje funkcija u red po Ležandrovim polinomima. Razvijanje u navedeni red uslovljeno je načinom rešavanja algebarskih jednačina izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće Ležandrove polinome.

U red po Ležandrovim polinomima razvijaju se funkcije koje predstavljaju zadate granične uslove na površi šupljine. Granični uslovi dati su po naponima σ_u i $\tau_{u\varphi}$. Veličina navedenih napona na površi šupljine zavisi od postojećih primarnih napona i opterećenja sa unutrašnje strane šupljine.

U okviru disertacije razmatran je problem razvijanja funkcija kod određivanja naponskih stanja oko sferne šupljine i šupljine oblika izduženog obrtnog elipsoida. U ovom izlaganju istim redosledom se prikazuje i analizira razvijanje funkcija i određivanje koeficijenata.

1. Analiza razvoja funkcije i određivanje koeficijenata za sfernu šupljinu

Polazi se od definisanih relacija za razvijanje funkcije (2.44) i (2.46) i određivanje koeficijenata (2.45) i (2.47) [Poglavlje 2].

Primarni naponi u sfernom sistemu koordinata dati su relacijama (3.3) [Poglavlje 3] u obliku:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{pr} &= \gamma(H - r \cos \varphi) \left[\frac{\nu}{1 - \nu} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right] \\ \tau_{r\varphi}^{pr} &= \gamma(H - r \cos \varphi) \frac{2\nu - 1}{1 - \nu} \sin \varphi \cos \varphi\end{aligned}\quad (301)$$

Primenom (2.44) na relaciju (301) dobija se:

$$\sigma_r^{pr} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n \quad (302)$$

gde se koeficijenti A_n određuju (2.45):

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \sigma_r^{\nu} P_n \sin \varphi d\varphi \quad (303)$$

Ako se (301) uvrsti u (303):

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \gamma(H - r \cos \varphi) \left[\frac{\nu}{1-\nu} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right] \times P_n \sin \varphi d\varphi \quad (304)$$

Iz (304) integracijom se dobijaju koeficijenti:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{3} H \gamma \frac{1+\nu}{\nu-1} \\ A_1 &= \frac{1}{5} r \gamma \frac{3-\nu}{\nu-1} \\ A_2 &= \frac{2}{3} H \gamma \frac{2\nu-1}{\nu-1} \\ A_3 &= \dots \end{aligned} \quad (305)$$

Primenom (2.46) na relaciju (301):

$$\tau_{r\varphi}^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n^{(1)} \quad (306)$$

Iz (2.47) sledi:

$$B_n = \frac{(2n+1)(n-1)!}{2\pi(n+1)!} \int_0^\pi \tau_{r\varphi}^{\nu} P_n^{(1)} \sin \varphi d\varphi \quad (307)$$

Ako se (301) uvrsti u (307):

$$B_n = \frac{(2n+1)(n-1)!}{2\pi(n+1)!} \int_0^\pi \gamma(H - r \cos \varphi) \frac{2\nu-1}{1-\nu} \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi P_n^{(1)} d\varphi \quad (308)$$

gde je :

$$P_n^{(1)} = \frac{dP_n}{d\varphi}$$

Iz (308) integracijom se dobijaju koeficijenti

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{5} r \gamma \frac{1-2\nu}{\pi(\nu-1)} \\ B_2 &= -\frac{1}{3} \gamma H \frac{2\nu-1}{\pi(\nu-1)} \\ B_3 &= \dots \end{aligned} \quad (309)$$

Opterećenje sa unutrašnje strane sferne šupljine dato je relacijom (3.20) [Poglavlje 3]:

$$p(\varphi) = p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)\pi} \sin \frac{(2j+1)\pi}{2\beta} (\beta - \varphi) \quad (310)$$

Primenom (2.44) na (310) dobija se :

$$p(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n P_n$$

gde je

$$A'_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} p(\varphi) P_n \sin \varphi d\varphi \quad (311)$$

Red (310) može se razmatrati sa različitim brojem članova reda. Rešenje integrala (311) se ovde ne navodi, jer se integracija detaljno daje kod razmatranja elipsoida.

Ako se određeni koeficijenti (304), (308), i (311) uvrste u sistem (3.17) dobijaju se nepoznate konstante. Za neopterećenu konturu slobodni članovi sistema jednačina uz uvođenje oznaka postaju $A_n^0 = A_n$; $B_n^0 = B_n$. Za delimično opterećenu konturu, za deo opterećen sa unutrašnje strane opterećenjem $p(\varphi)$, slobodni članovi sistema jednačina (3.17) se određuju: $A_n^1 = A_n + A'_n$, $B_n^1 = B_n$. Iz navedenog se zaključuje da se promena graničnih uslova svodi na promenu koeficijenata razvoja tj. slobodnih članova sistema jednačina na osnovu kojih se određuju nepoznate konstante.

2. Analiza razvoja funkcije i određivanje koeficijenata za eliptičnu šupljinu

Polazi se od uslovnih sistema jednačina za određivanje nepoznatih konstanti

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-1}^{\infty} (A_n [a_{n-2}^1 P_{n-2} + a_n^2 P_n + a_{n+2}^3 P_{n+2}] + \\ & C_n [b_{n-4}^1 P_{n-4} + b_{n-2}^2 P_{n-2} + b_n^3 P_n + b_{n+2}^4 P_{n+2} + b_{n+4}^5 P_{n+4}]) = \\ & \sum_{n=0}^{\infty} (k_n [q_{n-4}^1 P_{n-4} + q_{n-2}^2 P_{n-2} + q_n^3 P_n + q_{n+2}^4 P_{n+2} + q_{n+4}^5 P_{n+4}]) \end{aligned} \quad (312)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-1}^{\infty} (A_n [a_{n-3}^4 P_{n-3} + a_{n-1}^5 P_{n-1} + a_{n+1}^6 P_{n+1} + a_{n+3}^7 P_{n+3}] + \\ & + C_n [b_{n-3}^6 P_{n-3} + b_{n-1}^7 P_{n-1} + b_{n+1}^8 P_{n+1} + b_{n+3}^9 P_{n+3} + b_{n+5}^{10} P_{n+5}]) = \\ & \sum_{n=-1}^{\infty} (l_n [s_{n-5}^1 P_{n-5} + s_{n-3}^2 P_{n-3} + s_{n-1}^3 P_{n-1} + s_{n+1}^4 P_{n+1} + s_{n+3}^5 P_{n+3} + s_{n+5}^6 P_{n+5}]) \end{aligned} \quad (313)$$

u kojima je za određivanje slobodnih članova neophodno razvijanje funkcija opterećenja u red po Ležandrovim polinomima, odnosno određivanje koeficijenata razvoja.

Primarni naponi u sistemu koordinata izduženog rotacionog elipsoida definisani su relacijama (5.5) za elastični model

$$\sigma_u^{\mathcal{P}} = \gamma(H - cchu \cos \varphi) \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \frac{ch^2u \sin^2 \varphi}{ch^2u - \cos^2 \varphi} + \frac{sh^2u \cos^2 \varphi}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \right) \quad (314)$$

$$\tau_{u\varphi}^{\mathcal{P}} = \gamma(H - cchu \cos \varphi) \left(\frac{2\nu - 1}{1 - \nu} \frac{chus \sin \varphi shu \cos \varphi}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \right) \quad (315)$$

i relacijama (5.7) za hidrostatički model

$$\sigma_u^{\mathcal{P}} = \gamma H = \sigma; \tau_{u\varphi}^{\mathcal{P}} = 0 \quad (316)$$

Primenom (2.44) na relaciju (314) dobija se:

$$\sigma_u^{\mathcal{P}} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n P_n \quad (317)$$

gde se koeficijent k_n određuje

$$k_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \sigma_u^{\mathcal{P}} P_n \sin \varphi d\varphi \quad (318)$$

Iz (314) i (318) sledi

$$k_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \gamma(H - cchu \cos \varphi) \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \frac{ch^2u \sin^2 \varphi}{ch^2u - \cos^2 \varphi} + \frac{sh^2u \cos^2 \varphi}{ch^2u - \cos^2 \varphi} \right) P_n \sin \varphi d\varphi \quad (319)$$

U sistemu jednačina (312) pojavljuju se samo koeficijenti sa parnim indeksima:

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{\gamma H}{\nu - 1} [ch^2u - 1 + \nu(1 - 2ch^2u)] \\ &\quad + \frac{\gamma chu}{4} \frac{2\nu - 1}{\nu - 1} (ch^2u - 1) \left[(H - cch^2u) \ln \frac{chu + 1}{chu - 1} \right. \\ &\quad \left. + (cch^2u + H) \ln \frac{chu + 1}{chu - 1} \right] \\ k_2 &= \frac{15\gamma H(1 - 2\nu)}{2(\nu - 1)} ch^2u(ch^2u - 1) \\ &\quad + \frac{5H\gamma chu(2\nu - 1)}{4(\nu - 1)} (1 - 4ch^2u + 3ch^4u) \ln \frac{chu + 1}{chu - 1} \\ k_4 &= \dots \end{aligned} \quad (320)$$

Primenom (2.46) na relaciju (315) dobija se

$$\tau_{u\varphi}^{P^*} = \sum_{n=0}^{\infty} l_n P_n^{(1)} \quad (321)$$

gde je:

$$l_n = \frac{(2n+1)(n-1)!}{2\pi(n+1)!} \int_0^\pi \tau_{u\varphi}^{P^*} P_n^{(1)} \sin \varphi d\varphi \quad (322)$$

Iz (315) i (322) sledi

$$l_n = \frac{(2n+1)(n-1)!}{2\pi(n+1)!} \int_0^\pi \gamma(H - cchu \cos \varphi) \frac{2\nu - 1}{1 - \nu} \times \frac{chu shu \sin \varphi \cos \varphi}{ch^2 u - \cos^2 \varphi} P_n^{(1)} \sin \varphi d\varphi \quad (323)$$

Zbog složenosti izraza, kao i činjenice da se primenjenim postupkom razdvajanja na parne i neparne koeficijente rešavanje sistema (312) i (313) svodi na rešavanje samo jednog sistema, a na osnovu dobijenih koeficijenata k_n , u okviru ovog rada se zadržava na ovom obimu prikaza određivanja koeficijenata l_n .

Pri razvoju primarnih napona za hidrostatički model (316) dobija samo $k_0 = \sigma$, a ostali koeficijenti su jednaki nuli.

Opterećenja sa unutrašnje strane šupljine elipsoida definisane su relacijama (5.60) i (5.61) u obliku:

$$p_1(\varphi) = p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)\pi} \sin \frac{(2j+1)\pi}{\pi - 2\beta} (\varphi - \beta) \quad (324)$$

$$p_2(\varphi) = p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)\pi} \sin \frac{(2j+1)\pi}{2\beta} (\varphi + \beta) \quad (325)$$

Primenom (2.44) na (324) dobija se

$$p_1(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} k'_{nt} P_n$$

gde je t broj članova reda (324)

Koeficijenti k'_{nt} se na osnovu (2.45) i (324) određuju:

$$k'_{nt} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi p_1(\varphi) P_n \sin \varphi d\varphi \quad (326)$$

odnosno

$$k'_{nt} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)\pi} \sin \frac{(2j+1)\pi}{\pi-2\beta} (\varphi - \beta) \times P_n \sin \varphi d\varphi \quad (327)$$

U zavisnosti od broja članova reda za određivanje $p_1(\varphi)$ određuju se koeficijenti k'_{nt} na sledeći način:

t=1

$$p_1(\varphi) = p \left[\frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{\pi-2\beta} (\varphi - \beta) \right] = \frac{4p}{\pi} \left[\varepsilon_0 \sin \frac{\pi\varphi}{\pi-2\beta} - \delta_0 \cos \frac{\pi\varphi}{\pi-2\beta} \right] \quad (328)$$

gde je: $\varepsilon_0 = \cos \frac{\pi\beta}{\pi-2\beta}$; $\delta_0 = \sin \frac{\pi\beta}{\pi-2\beta}$

$$\begin{aligned} k'_{01} &= \frac{p\varepsilon_0(2\beta-\pi)}{2\pi\beta} \sin \frac{2\pi\beta}{2\beta-\pi} \\ &\quad - \frac{p\varepsilon_0(\pi-2\beta)}{2\pi(\pi-\beta)} \sin \frac{2(\pi-\beta)\pi}{\pi-2\beta} \\ &\quad + \frac{p\delta_0(2\beta-\pi)}{2\pi\beta} \left(\cos \frac{2\pi\beta}{2\beta-\pi} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{p\delta_0(\pi-2\beta)}{2\pi(\pi-\beta)} \left(\cos \frac{2(\pi-\beta)\pi}{\pi-2\beta} - 1 \right) \\ k'_{21} &= \frac{15p\varepsilon_0(\pi-2\beta)}{16(\pi-3\beta)\pi} \sin \frac{2\pi(\pi-3\beta)}{\pi-2\beta} \\ &\quad - \frac{15p\varepsilon_0(\pi-2\beta)}{16\pi(2\pi-3\beta)} \sin \frac{2(2\pi-3\beta)\pi}{\pi-2\beta} \\ &\quad + \frac{15p\delta_0(\pi-2\beta)}{16\pi(\pi-3\beta)} \left(\cos \frac{2\pi(\pi-3\beta)}{\pi-2\beta} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{15p\delta_0(\pi-2\beta)}{16\pi(2\pi-3\beta)} \left(\cos \frac{2(2\pi-3\beta)\pi}{\pi-2\beta} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{5p\varepsilon_0(2\beta-\pi)}{16\pi\beta} \sin \frac{2\pi\beta}{2\beta-\pi} \\ &\quad + \frac{5p\varepsilon_0(\pi-2\beta)}{16\pi(\pi-\beta)} \sin \frac{2(\pi-\beta)\pi}{\pi-2\beta} \\ &\quad - \frac{5p\delta_0(2\beta-\pi)}{16\pi\beta} \left(\cos \frac{2\pi\beta}{2\beta-\pi} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$k'_{41} = \dots - \frac{5p\delta_0(\pi - 2\beta)}{16\pi(\pi - \beta)} \left(\cos \frac{2(\pi - \beta)\pi}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \quad (329)$$

t=2:

$$p_1(\varphi) = p \left[\frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{\pi - 2\beta} (\varphi - \beta) \right] + \frac{4}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{\pi - 2\beta} (\varphi - \beta) \quad (330)$$

Koristeći adicione formule i uvodeći sledeće oznake

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{3\pi\beta}{\pi - 2\beta} ; \quad \delta_1 = \sin \frac{3\pi\beta}{\pi - 2\beta}$$

dobijamo koeficijente:

$$\begin{aligned} k'_{02} &= \frac{p\varepsilon_0(\pi - 2\beta)}{2\pi\beta} \sin \frac{2\pi\beta}{\pi - 2\beta} \\ &\quad - \frac{p\varepsilon_0(\pi - 2\beta)}{2\pi(\pi - \beta)} \sin \frac{2\pi(\pi - \beta)}{\pi - 2\beta} \\ &\quad + \frac{p\delta_0(\pi - 2\beta)}{2\pi(\pi - \beta)} \left(\cos \frac{2\pi(\pi - \beta)}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{p\delta_0(\pi - 2\beta)}{2\pi\beta} \left(\cos \frac{2\pi\beta}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{p\varepsilon_1(\pi - 2\beta)}{6\pi(\pi + \beta)} \sin \frac{2\pi(\pi + \beta)}{\pi - 2\beta} \\ &\quad - \frac{p\varepsilon_1(\pi - 2\beta)}{6\pi(2\pi - \beta)} \sin \frac{2\pi(2\pi - \beta)}{\pi - 2\beta} \\ &\quad + \frac{p\delta_1(\pi - 2\beta)}{6\pi(2\pi - \beta)} \left(\cos \frac{2\pi(2\pi - \beta)}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{p\delta_1(\pi - 2\beta)}{6\pi(\pi + \beta)} \left(\cos \frac{2\pi(\pi + \beta)}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \\ k'_{22} &= \frac{15p\varepsilon_0(\pi - 2\beta)}{16\pi(3\beta - \pi)} \sin \frac{2\pi(3\beta - \pi)}{\pi - 2\beta} \\ &\quad - \frac{15p\varepsilon_0(\pi - 2\beta)}{16\pi(2\pi - 3\beta)} \sin \frac{2(2\pi - 3\beta)\pi}{\pi - 2\beta} \\ &\quad + \frac{15p\delta_0(\pi - 2\beta)}{16\pi(2\pi - 3\beta)} \left(\cos \frac{2\pi(2\pi - 3\beta)}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{15p\delta_0(\pi - 2\beta)}{16\pi(3\beta - \pi)} \left(\cos \frac{2(3\beta - \pi)\pi}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{5p\varepsilon_0(\pi - 2\beta)}{16\pi\beta} \sin \frac{2\pi\beta}{\pi - 2\beta} \\
& + \frac{5p\varepsilon_0(\pi - 2\beta)}{16\pi(\pi - \beta)} \sin \frac{2(\pi - \beta)\pi}{\pi - 2\beta} \\
& - \frac{5p\delta_0(\pi - 2\beta)}{16\pi(\pi - \beta)} \left(\cos \frac{2\pi(\pi - \beta)}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \\
& + \frac{5p\delta_0(\pi - 2\beta)}{16\pi\beta} \left(\cos \frac{2\pi\beta}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \\
& + \frac{5p\varepsilon_1(\pi - 2\beta)}{48\pi\beta} \sin \frac{6\pi\beta}{\pi - 2\beta} \\
& - \frac{5p\varepsilon_1(\pi - 2\beta)}{48\pi(\pi - \beta)} \sin \frac{6(\pi - \beta)\pi}{\pi - 2\beta} \\
& + \frac{5p\delta_1(\pi - 2\beta)}{48\pi(\pi - \beta)} \left(\cos \frac{6\pi(\pi - \beta)}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \\
& - \frac{5p\delta_1(\pi - 2\beta)}{48\pi\beta} \left(\cos \frac{6\pi\beta}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \\
& - \frac{5p\varepsilon_1(\pi - 2\beta)}{48\pi(\pi + \beta)} \sin \frac{2\pi(\pi + \beta)}{\pi - 2\beta} \\
& + \frac{5p\varepsilon_1(\pi - 2\beta)}{48\pi(2\pi - \beta)} \sin \frac{2(2\pi - \beta)\pi}{\pi - 2\beta} \\
& - \frac{5p\delta_1(\pi - 2\beta)}{48\pi(2\pi - \beta)} \left(\cos \frac{2\pi(2\pi - \beta)}{\pi - 2\beta} - 1 \right) \\
& + \frac{5p\delta_1(\pi - 2\beta)}{48\pi(\pi + \beta)} \left(\cos \frac{2\pi(\pi + \beta)}{\pi - 2\beta} - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$k'_{42} = \dots \quad (331)$$

Analognim postupkom određuju se koeficijenti za usvojen veći broj članova reda t . S druge strane, izložen je postupak dobijanja prva dva parna koeficijenta k'_{0t} i k'_{2t} dok se ostali koeficijenti k'_{4t} , k'_{6t} ... određuju analognim postupkom, a za usvojeno t .

Primenom (2.44) na (325) dobija se

$$p_2(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} k''_{nt} P_n \quad (332)$$

gde je t broj članova reda (325)

Koeficijenti k''_{nt} se na osnovu (2.45) i (332) određuju:

$$k''_{nt} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi p_2(\varphi) P_n \sin \varphi d\varphi \quad (333)$$

odnosno

$$k_{nt}^n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)\pi} \sin \frac{(2j+1)\pi}{2\beta} (\varphi + \beta) \times P_n \sin \varphi d\varphi \quad (334)$$

I ovde se koeficijenti k_{nt}^n određuju u zavisnosti od broja članova reda (325) :

t=1

$$p_2(\varphi) = p \frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi\varphi}{2\beta} \quad (335)$$

$$\begin{aligned} k_{01}^n &= -\frac{2p\beta}{\pi(2\beta - \pi)} \left(\cos \frac{\pi(2\beta - \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{2p\beta}{\pi(2\beta + \pi)} \left(\cos \frac{\pi(2\beta + \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ k_{21}^n &= -\frac{30p\beta}{8\pi(6\beta - \pi)} \left(\cos \frac{\pi(6\beta - \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{30p\beta}{8\pi(6\beta + \pi)} \left(\cos \frac{\pi(6\beta + \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{10p\beta}{8\pi(2\beta - \pi)} \left(\cos \frac{\pi(2\beta - \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{10p\beta}{8\pi(2\beta + \pi)} \left(\cos \frac{\pi(2\beta + \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ k_{41}^n &= -\frac{630p\beta}{128\pi(10\beta - \pi)} \left(\cos \frac{\pi(10\beta - \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{630p\beta}{128\pi(10\beta + \pi)} \left(\cos \frac{\pi(10\beta + \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{270p\beta}{128\pi(6\beta - \pi)} \left(\cos \frac{\pi(6\beta - \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{270p\beta}{128\pi(6\beta + \pi)} \left(\cos \frac{\pi(6\beta + \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{18p\beta}{64\pi(2\beta - \pi)} \left(\cos \frac{\pi(2\beta - \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{18p\beta}{64\pi(2\beta + \pi)} \left(\cos \frac{\pi(2\beta + \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\ k_{61}^n &= \frac{13}{1024} \left[\frac{-462p\beta}{\pi(14\beta - \pi)} \left(\cos \frac{\pi(14\beta - \pi)}{2\beta} - 1 \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{462p\beta}{\pi(14\beta + \pi)} \left(\cos \frac{\pi(14\beta + \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\
& + \frac{210p\beta}{\pi(10\beta - \pi)} \left(\cos \frac{\pi(10\beta - \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\
& + \frac{210p\beta}{\pi(10\beta + \pi)} \left(\cos \frac{\pi(10\beta + \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\
& + \frac{42p\beta}{\pi(6\beta - \pi)} \left(\cos \frac{\pi(6\beta - \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\
& + \frac{42p\beta}{\pi(6\beta + \pi)} \left(\cos \frac{\pi(6\beta + \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\
& + \frac{10p\beta}{\pi(2\beta - \pi)} \left(\cos \frac{\pi(2\beta - \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\
& + \frac{10p\beta}{\pi(2\beta + \pi)} \left(\cos \frac{\pi(2\beta + \pi)}{2\beta} - 1 \right) \\
k_{81}^n = & \dots
\end{aligned} \tag{336}$$

Koeficijenti k_{nt}^n za $t=2,3,4 \dots$ određuju se analogno.

Pri određivanju koeficijenata, prvi korak je usvajanje broja članova reda (324), odnosno (325). Sa usvojenim brojem članova reda t može se u relacijama (326) i (333) k'_{nt} i k''_{nt} zameniti sa k'_n i k''_n , a koeficijente odrediti u zavisnosti od t .

Ako se određeni koeficijenti (318), (322), (326) i (333) uvrste u sistem jednačina (312) dobijaju se nepoznate konstante. U navedenim sistemima jednačina koeficijenti k_n^i ($i=0,1,2$) definišu se na sledeći način:

$$k_n^0 = k_n - \text{neopterećena kontura}$$

$$k_n^1 = k_n + k'_n - \text{slučaj opterećenja sa unutrašnje strane šupljine opterećenjem tipa (324)(Sl.12.)}$$

$$k_n^2 = k_n + k''_n - \text{slučaj opterećenja sa unutrašnje strane šupljine opterećenjem tipa (325)(Sl.13.)}$$

U cilju razmatranja primene dobijenih rešenja u analizi prslina uvodi se naponsko primarno stanje u obliku :

$$\sigma_u^{pr} = \sigma_\varphi^{pr} = \sigma_\theta^{pr} = \sigma; \tau_{u\varphi}^{pr} = \tau_{\varphi\theta}^{pr} = \tau_{u\theta}^{pr} = 0 \tag{337}$$

Pri razvoju funkcije σ_u^{pr} (317) dobija se $k_0 = \sigma$ koji je jedini različit od nule. Ako se dobijeni koeficijent k_0 uvrsti u sistem jednačina (312) dolazi se do zaključka da se konstante mogu predstaviti u sledećem obliku:

$$A_n = \sigma \xi_n \quad C_n = \sigma \eta_n \tag{338}$$

Prethodno navedeni zaključci, način ovakvog predstavljanja dobijenih konstanti za određivanje napona, imaju široku primenu kod određivanja faktora koncentracije napona i drugim analizama naponskog stanja.

FORMIRANJE SISTEMA JEDNAČINA ZA ODREDJIVANJE KONSTANTI - OBRTNI IZDUŽENI ELIPSOID

Na početku je potrebno definisati određene relacije koje se koriste pri formiranju sistema jednačina:

Množenje polinoma Ležandra izvodi se na osnovu relacije F. Neumanna [67] u sledećem obliku:

$$P_n P_m = \sum_{k=0}^m \frac{a_{m-k} a_k a_{n-k}}{a_{n+m-k}} \left(\frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1} \right) P_{n+m-2k} \quad (401)$$

gde je:

$$a_m = \frac{(2m)!}{m! m! 2^m}$$

Isti autor definisao je određivanje m-tog izvoda Ležandrovog polinoma na sledeći način:

$$D^m P_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \binom{m+k-1}{m-1} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2m-2k+1)!!} \times \\ \times (2n-2m-4k+1) P_{n-m-2k} \quad (402)$$

ili u skraćenom obliku

$$D^m P_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} e_{nm} P_{n-m-2k} \quad (403)$$

gde je:

$$e_{nm} = \binom{m+k-1}{m-1} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2m-2k+1)!!} (2n-2m-4k+1) \quad (404)$$

1. Formiranje sistema jednačina -opšti slučaj

Naponska funkcija, na osnovu rešenja diferencijalne jednačine, data je u obliku (5.30) [Poglavlje 5]. Na osnovu relacija (5.8) i graničnih uslova po naponima (5.59) odnosno (5.63) dobijaju se dva sistema algebarskih jednačina sa beskonačno mnogo nepoznatih konstanti.

Polazi se od izraza za napon σ_u^* uzimajući pri tome da je $u = u_0$. Koristeći definiciju pridruženih Ležandrovih funkcija izraz za napon se prikazuje preko m -tih izvoda običnih Ležandrovih funkcija u obliku:

$$\begin{aligned}
\sigma_u^* = & -\frac{1}{h^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} \sin^m \varphi P_n^{(m)} [m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-4}{2}} \times \right. \\
& sh^2 u_0 (m ch^2 u_0 - 1) Q_n^{(m)} + (2m+1)(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} \times \\
& chu_0 sh^2 u_0 Q_n^{(m+1)} + (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} sh^2 u_0 Q_n^{(m+2)}] + c \times \\
& chu_0 \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} P_{n+1}^{(m)} \sin^m \varphi (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} Q_{n+1}^{(m)} \\
& + 2c shu_0 \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} P_{n+1}^{(m)} \sin^m \varphi [(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} \\
& shu_0 Q_{n+1}^{(m+1)} + m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 shu_0 Q_{n+1}^{(m)}] \\
& + c chu_0 \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} P_{n+1}^{(m)} \sin^m \varphi \\
& [m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-4}{2}} sh^2 u_0 (m ch^2 u_0 - 1) Q_{n+1}^{(m)} \\
& + (2m+1)(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 sh^2 u_0 Q_{n+1}^{(m+1)} \\
& + (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} sh^2 u_0 Q_{n+1}^{(m+2)}] \\
& - \frac{c^2}{h^4} (\sin \varphi \cos \varphi [\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} Q_n^{(m)} \\
& [\sin^{m-1} \varphi (m \cos \varphi P_n^{(m)} - \sin^2 \varphi P_n^{(m+1)})] - c chu_0 \\
& \sin \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m)} (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} Q_{n+1}^{(m)} \\
& + c chu_0 \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} [\sin^{m-1} \varphi (m \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& - \sin^2 \varphi P_{n+1}^{(m+1)})] (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} Q_{n+1}^{(m)}] \\
& - shu_0 chu_0 [\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} P_n^{(m)} \sin^m \varphi [(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} \\
& shu_0 Q_n^{(m+1)} + m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 shu_0 Q_n^{(m)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c shu_0 \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} P_{n+1}^{(m)} \sin^m \varphi (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} \\
& Q_{n+1}^{(m)} + c chu_0 \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} P_{n+1}^{(m)} \sin^m \varphi \\
& [((ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} shu_0 Q_{n+1}^{(m+1)} \\
& + m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 shu_0 Q_{n+1}^{(m)})] \\
& + \frac{2\alpha c}{h^2} shu_0 \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m)} [(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} \\
& shu_0 Q_{n+1}^{(m+1)} + m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 shu_0 Q_{n+1}^{(m)}] \\
& + (1 - \frac{\alpha}{2}) (\frac{2}{h^2} c shu_0 \cos \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& [(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} shu_0 Q_{n+1}^{(m+1)} \\
& + m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 shu_0 Q_{n+1}^{(m)}] \\
& - \frac{2}{h^2} c chu_0 \sin \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} Q_{n+1}^{(m)} \times \\
& [\sin^{n-1} \varphi (m \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} - \sin^2 \varphi P_{n+1}^{(m+1)})]
\end{aligned} \tag{405}$$

Množenjem obe strane sa h^4 i sređivanjem izraza dobija se:

$$\begin{aligned}
h^4 \sigma_u^* & = \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm}' sh^2 u_0 A_{nm} \sin^m \varphi P_n^{(m)} \\
& + A_{nm}' sh^2 u_0 C_{nm} \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} \sin^m \varphi \\
& + A_{nm}' A_{nm} \sin^2 \varphi \sin^m \varphi P_n^{(m)} \\
& + A_{nm}' \sin^2 \varphi C_{nm} \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} \sin^m \varphi \\
& + A_{nm}' \sin^m \varphi A_{nm} P_n^{(m)} \\
& - A_{nm}' \sin^m \varphi \sin^2 \varphi A_{nm} P_n^{(m)} - \\
& A_{nm}' \sin^m \varphi \cos \varphi \sin^2 \varphi A_{nm} P_n^{(m+1)} \\
& + A_{nm}' \sin^2 \varphi \cos \varphi C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& + A_{nm}' \sin^m \varphi C_{nm} m \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& - m A_{nm}' \sin^m \varphi C_{nm} \cos \varphi \sin^2 \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& - A_{nm}' \sin^m \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi C_{nm} P_{n+1}^{(m+1)} \\
& + A_{nm}' A_{nm} P_n^{(m)} \sin^m \varphi \\
& + A_{nm}' C_{nm} \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} \sin^m \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{nm}^{8'} C_{nm} \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} \sin^m \varphi \\
& + A_{nm}^{9'} sh^2 u_0 \cos \varphi C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& + A_{nm}^{9'} \cos \varphi \sin^2 \varphi C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& + A_{nm}^{10'} sh^2 u_0 \cos \varphi C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& + mA_{nm}^{11'} sh^2 u_0 C_{nm} \sin^m \varphi \cos \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& - A_{nm}^{11'} sh^2 u_0 C_{nm} \sin^m \varphi \sin^2 \varphi P_{n+1}^{(m+1)} \\
& + A_{nm}^{10'} \cos \varphi \sin^2 \varphi C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& + mA_{nm}^{11'} C_{nm} \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m)} \\
& - A_{nm}^{11'} C_{nm} \sin^m \varphi \sin^4 \varphi P_{n+1}^{(m+1)}
\end{aligned} \tag{406}$$

gde su uvedene oznake:

$$\begin{aligned}
A_{nm}^{0'} &= -c^2 [m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-4}{2}} sh^2 u_0 (m ch^2 u_0 - 1) Q_n^{(m)} \\
&+ (2m+1)(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 sh^2 u_0 Q_n^{(m+1)} \\
&+ (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} sh^2 u_0 Q_n^{(m+2)}] \\
A_{nm}^{1'} &= c^3 (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} Q_{n+1}^{(m)} \\
&+ 2c^3 shu_0 [(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} shu_0 Q_{n+1}^{(m+1)} \\
&+ m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 shu_0 Q_{n+1}^{(m)}] \\
&+ c^3 chu_0 [m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-4}{2}} shu_0 (m ch^2 u_0 - 1) Q_{n+1}^{(m)} \\
&+ (2m+1)(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 sh^2 u_0 Q_{n+1}^{(m+1)} \\
&+ (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} sh^2 u_0 Q_{n+1}^{(m+2)}] \\
A_{nm}^{3'} &= -c^2 (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} Q_n^{(m)} \\
A_{nm}^{4'} &= c^3 chu_0 (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} Q_{n+1}^{(m)} \\
A_{nm}^{5'} &= -c^3 chu_0 (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} Q_{n+1}^{(m)} \\
A_{nm}^{6'} &= c^2 chu_0 shu_0 [(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} shu_0 Q_n^{(m+1)} \\
&+ m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 shu_0 Q_n^{(m)}] \\
A_{nm}^{7'} &= c^3 sh^2 u_0 chu_0 (ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} Q_{n+1}^{(m)} \\
A_{nm}^{8'} &= c^3 shu_0 ch^2 u_0 [(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} shu_0 Q_{n+1}^{(m+1)} \\
&+ m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 shu_0 Q_{n+1}^{(m)}] \\
A_{nm}^{9'} &= 2\alpha c^3 shu_0 [(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} shu_0 Q_{n+1}^{(m+1)} \\
&+ m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} chu_0 shu_0 Q_{n+1}^{(m)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{nm}^{10'} &= (2 - \alpha)c^3 sh u_0 [(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} sh u_0 Q_{n+1}^{(m+1)} \\
&\quad + m(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m-2}{2}} ch u_0 sh u_0 Q_{n+1}^{(m)}] \\
A_{nm}^{11'} &= -(2 - \alpha)c^3 ch u_0 [(ch^2 u_0 - 1)^{\frac{m}{2}} Q_{n+1}^{(m)}]
\end{aligned} \tag{407}$$

Sređivanjem izraza (406) dobija se:

$$\begin{aligned}
h^4 \sigma_u^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm}^0 A_{nm} \sin^m \varphi P_n^{(m)} \\
&\quad + A_{nm}^2 A_{nm} \sin^m \varphi P_n^{(m)} \sin^2 \varphi \\
&\quad + A_{nm}^4 A_{nm} \sin^m \varphi P_n^{(m+1)} \sin^2 \varphi \cos \varphi \\
&\quad + A_{nm}^1 C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m)} \cos \varphi \\
&\quad + A_{nm}^3 C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m)} \cos \varphi \sin^2 \varphi \\
&\quad + A_{nm}^5 C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m+1)} \sin^2 \varphi \\
&\quad + A_{nm}^7 C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m+1)} \sin^4 \varphi \\
&\quad + A_{nm}^9 C_{nm} \sin^m \varphi P_{n+1}^{(m+1)} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)
\end{aligned} \tag{408}$$

gde su:

$$\begin{aligned}
A_{nm}^0 &= A_{nm}^{0'} sh^2 u_0 + A_{nm}^{3'} + A_{nm}^{6'} \\
A_{nm}^2 &= A_{nm}^{0'} - A_{nm}^{3'} \\
A_{nm}^4 &= -A_{nm}^{3'} \\
A_{nm}^1 &= A_{nm}^{1'} sh^2 u_0 + mA_{nm}^{5'} + A_{nm}^{7'} + A_{nm}^{8'} \\
&\quad + A_{nm}^{9'} sh^2 u_0 + A_{nm}^{10'} sh^2 u_0 + mA_{nm}^{11'} sh^2 u_0 \\
A_{nm}^3 &= A_{nm}^{1'} + A_{nm}^{4'} - mA_{nm}^{5'} + A_{nm}^{9'} + A_{nm}^{10'} + A_{nm}^{11'} \\
A_{nm}^5 &= -A_{nm}^{11'} sh^2 u_0 \\
A_{nm}^7 &= -A_{nm}^{11'} \\
A_{nm}^9 &= -A_{nm}^{5'}
\end{aligned} \tag{409}$$

Jednačina (408) preko pridruženih Ležandrovih funkcija ima oblik:

$$\begin{aligned}
h^4 \sigma_u^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm}^0 A_{nm} P_n^m + A_{nm}^2 A_{nm} P_n^m \sin^2 \varphi \\
&\quad + A_{nm}^4 A_{nm} P_n^{m+1} \sin \varphi \cos \varphi \\
&\quad + A_{nm}^1 C_{nm} P_{n+1}^m \cos \varphi \\
&\quad + A_{nm}^3 C_{nm} P_{n+1}^m \cos \varphi \sin^2 \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{nm}^5 C_{nm} P_{n+1}^{m+1} \sin \varphi \\
& + A_{nm}^7 C_{nm} P_{n+1}^{m+1} \sin^3 \varphi \\
& + A_{nm}^9 C_{nm} P_{n+1}^{m+1} \cos^2 \varphi \sin \varphi
\end{aligned} \tag{410}$$

Primenom rekurentnih formula (2.39) na (410) dobija se:

$$\begin{aligned}
h^4 \sigma_u^* = \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n & \left(A_{nm}^0 A_{nm} P_n^m + A_{nm}^2 A_{nm} P_n^m \sin^2 \varphi \right. \\
& - (n-m) A_{nm}^4 A_{nm} P_n^m \cos^2 \varphi \\
& + (n+m) A_{nm}^4 A_{nm} \cos \varphi P_{n-1}^m \\
& + A_{nm}^1 C_{nm} P_{n+1}^m \cos \varphi \\
& + A_{nm}^3 C_{nm} P_{n+1}^m \cos \varphi \sin^2 \varphi \\
& - A_{nm}^5 C_{nm} (n-m+1) P_{n+1}^m \cos \varphi \\
& + A_{nm}^5 C_{nm} (n+m+1) P_n^m \\
& - A_{nm}^7 C_{nm} \cos \varphi (n-m+1) P_{n+1}^m \sin^2 \varphi \\
& + A_{nm}^7 C_{nm} (n+m+1) P_n^m \sin^2 \varphi \\
& - A_{nm}^9 C_{nm} \cos^3 \varphi (n-m+1) P_{n+1}^m \\
& \left. + A_{nm}^9 C_{nm} \cos^2 \varphi (n+m+1) P_n^m \right)
\end{aligned} \tag{411}$$

Koristeći vezu između Ležandrovih polinoma i kosinusa (izraz se daje kasnije) dobija se:

$$\begin{aligned}
h^4 \sigma_u^* = \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n & (A_{nm} P_n^m P_0 [A_{nm}^0 + \frac{2}{3} A_{nm}^2 \\
& - \frac{1}{3} A_{nm}^4 (n-m)] + A_{nm} P_n^m P_2 [-A_{nm}^2 \frac{2}{3} \\
& - A_{nm}^4 (n-m) \frac{2}{3}] + A_{nm} P_{n-1}^m P_1 (n+m) A_{nm}^4 \\
& + C_{nm} P_{n+1}^m P_1 [A_{nm}^1 + A_{nm}^3 \frac{2}{5} \\
& - A_{nm}^5 (n-m+1) - \frac{2}{5} A_{nm}^7 (n-m+1) \\
& - A_{nm}^9 (n-m+1) \frac{3}{5}] + C_{nm} P_{n+1}^m P_3 [-A_{nm}^3 \frac{2}{5} \\
& + A_{nm}^7 (n-m+1) \frac{2}{5} - A_{nm}^9 (n-m+1) \frac{2}{5}] \\
& + C_{nm} P_n^m P_0 [A_{nm}^5 (n+m+1) \\
& + A_{nm}^7 (n+m+1) \frac{2}{3} + A_{nm}^9 (n+m+1) \frac{1}{3}] \\
& + C_{nm} P_n^m P_2 [-A_{nm}^7 (n+m+1) \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$+A_{nm}^9(n+m+1)\frac{2}{3}] \quad (412)$$

Uvodeći oznake:

$$\begin{aligned} V_{nm}^0 &= A_{nm}^0 + \frac{2}{3}A_{nm}^2 - \frac{1}{3}A_{nm}^4(n-m) \\ V_{nm}^2 &= -\frac{2}{3}A_{nm}^2 - \frac{2}{3}A_{nm}^4(n-m) \\ V_{nm}^1 &= A_{nm}^4(n+m) \\ H_{nm}^0 &= A_{nm}^5(n+m+1) + A_{nm}^7(n+m+1)\frac{2}{3} \\ &\quad + A_{nm}^9\frac{1}{3}(n+m+1) \\ H_{nm}^1 &= A_{nm}^1 + \frac{2}{5}A_{nm}^3 - A_{nm}^5(n+1-m) - \\ &\quad A_{nm}^7(n+1-m)\frac{2}{5} - A_{nm}^9\frac{3}{5}(n+1-m) \\ H_{nm}^2 &= -A_{nm}^7(n+1+m)\frac{2}{3} + A_{nm}^9\frac{2}{3}(n+1+m) \\ H_{nm}^3 &= -\frac{2}{5}A_{nm}^3 + A_{nm}^7(n+1-m)\frac{2}{5} \\ &\quad - A_{nm}^9\frac{2}{5}(n+1-m) \end{aligned} \quad (413)$$

Dobija se sistem:

$$\begin{aligned} h^4\sigma_u^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(A_{nm}P_n^m P_0 V_{nm}^0 + A_{nm}P_n^m P_2 V_{nm}^2 + \right. \\ &\quad A_{nm}P_{n-1}^m P_1 V_{nm}^1 + C_{nm}P_n^m P_0 H_{nm}^0 + \\ &\quad C_{nm}P_{n+1}^m P_1 H_{nm}^1 + C_{nm}P_n^m P_2 H_{nm}^2 + \\ &\quad \left. C_{nm}P_{n+1}^m P_3 H_{nm}^3 \right) \end{aligned} \quad (414)$$

Leva strana jednačine (414) daje se u obliku:

$$h^4\sigma_u^* = c^4(ch^2u - \cos^2\varphi)^2 \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m k_{nm} \quad (415)$$

Matematička literatura i činjenica da je opterećenje rotaciono simetrično (ne zavisi od θ) daje nam za pravo da napone prikažemo jednačinom (415). Matematički dokaz ovakvog razvoja funkcije je predmet matematičkih istraživanja, a zbog složenosti se ne prikazuje u okviru ove disertacije.

Ako se (415) uvrsti u (414) dobija se:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n & \left(A_{nm} P_n^m P_0 V_{nm}^0 + A_{nm} P_n^m P_2 V_{nm}^2 + \right. \\
 & A_{nm} P_{n-1}^m P_1 V_{nm}^1 + C_{nm} P_n^m P_0 H_{nm}^0 + \\
 & C_{nm} P_{n+1}^m P_1 H_{nm}^1 + C_{nm} P_n^m P_2 H_{nm}^2 + \\
 & \left. C_{nm} P_{n+1}^m P_3 H_{nm}^3 \right) = \\
 \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n & \left[P_n^m k_{nm} (ch^2 u - \cos^2 \varphi)^2 c^4 \right] \quad (416)
 \end{aligned}$$

Koristeći da je $P_n^m = \sin^m \varphi \frac{d^m}{d(\cos \varphi)^m} P_n(\cos \varphi) = \sin^m \varphi P_n^{(m)}$ i izjednačavanjem koeficijenata uz $\sin^m \varphi$ jednačina (416) se dobija u obliku:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n & \left(A_{nm} P_n^{(m)} P_0 V_{nm}^0 + A_{nm} P_n^{(m)} P_2 V_{nm}^2 + \right. \\
 & A_{nm} P_{n-1}^{(m)} P_1 V_{nm}^1 + C_{nm} P_n^{(m)} P_0 H_{nm}^0 + \\
 & C_{nm} P_{n+1}^{(m)} P_1 H_{nm}^1 + C_{nm} P_n^{(m)} P_2 H_{nm}^2 + \\
 & \left. C_{nm} P_{n+1}^{(m)} P_3 H_{nm}^3 \right) = \\
 \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n & \left[P_n^{(m)} k_{nm} (ch^2 u - \cos^2 \varphi)^2 c^4 \right] \quad (417)
 \end{aligned}$$

Koristeći relaciju (402) i oznake (404) dobija se jednačina (417) u obliku:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n & \left(A_{nm} V_{nm}^0 \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} e_{nm} P_{n-m-2k} P_0 + \right. \\
 & A_{nm} V_{nm}^2 \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} e_{nm} P_{n-m-2k} P_2 + \\
 & A_{nm} V_{nm}^1 \sum_{k=0}^{\frac{n-m-1}{2}} e_{n-1m} P_{n-1-m-2k} P_1 + \\
 & C_{nm} H_{nm}^0 \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} e_{nm} P_{n-m-2k} P_0 + \\
 & C_{nm} H_{nm}^2 \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} e_{nm} P_{n-m-2k} P_2 + \\
 & \left. C_{nm} H_{nm}^1 \sum_{k=0}^{\frac{n+1-m}{2}} e_{n+1m} P_{n+1-m-2k} P_1 + \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{nm} H_{nm}^3 \sum_{k=0}^{\frac{n+1-m}{2}} e_{n+1m} P_{n+1-m-2k} P_3) = \\
\sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n & \left[c^4 k_{nm} \left(ch^4 u_0 - \frac{2}{3} ch^2 u_0 + \frac{1}{5} \right) \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} e_{nm} P_{n-m-2k} P_0 \right. \\
& + \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{3} ch^2 u_0 \right) \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} e_{nm} P_{n-m-2k} P_2 \\
& \left. + \frac{8}{35} \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} e_{nm} P_{n-m-2k} P_4 \right] \tag{418}
\end{aligned}$$

Iz (418) primenom relacije (401) sledi:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} A_{nm} V_{nm}^0 e_{nm} P_{n-m-2k} \\
& + A_{nm} V_{nm}^2 e_{nm} \left[\frac{3}{2} \frac{a_{n-m-2k}}{a_{n-m-2k+2}} P_{n-m-2k+2} \right. \\
& + \frac{a_{n-m-2k-1}}{a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+3} P_{n-m-2k} + \\
& \left. \frac{3}{2} \frac{a_{n-m-2k-2}}{a_{n-m-2k}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k+1} P_{n-m-2k-2} \right] \\
& + C_{nm} H_{nm}^0 e_{nm} P_{n-m-2k} \\
& + C_{nm} H_{nm}^2 e_{nm} \left[\frac{3}{2} \frac{a_{n-m-2k}}{a_{n-m-2k+2}} P_{n-m-2k+2} \right. \\
& + \frac{a_{n-m-2k-1}}{a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+3} P_{n-m-2k} + \\
& \left. \frac{3}{2} \frac{a_{n-m-2k-2}}{a_{n-m-2k}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k+1} P_{n-m-2k-2} \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\frac{n-m-1}{2}} A_{nm} V_{nm}^1 e_{n-1m} \left[\frac{a_{n-m-2k-1}}{a_{n-m-2k}} P_{n-m-2k} + \right. \\
& \left. \frac{a_{n-m-2k-2}}{a_{n-m-2k-1}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k-1} P_{n-m-2k-2} \right] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\frac{n-m+1}{2}} C_{nm} H_{nm}^1 e_{n+1m} \left[\frac{a_{n-m-2k+1}}{a_{n-m-2k+2}} P_{n-m-2k+2} \right. \\
& + \frac{a_{n-m-2k}}{a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+3} P_{n-m-2k} \left. \right] \\
& + C_{nm} H_{nm}^3 e_{n+1m} \left[\frac{5}{2} \frac{a_{n-m-2k+1}}{a_{n-m-2k+4}} P_{n-m-2k+4} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \frac{a_{n-m-2k}}{a_{n-m-2k+3}} \frac{2n-2m-4k+5}{2n-2m-4k+7} P_{n-m-2k+2} \\
& + \frac{3}{2} \frac{a_{n-m-2k-1}}{a_{n-m-2k+2}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+5} P_{n-m-2k} \\
& + \frac{5}{2} \frac{a_{n-m-2k-2}}{a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k+3} P_{n-m-2k-2}] = \\
\sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n & \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} c^4 k_{nm} e_{nm} \left((ch^4 u_0 - \frac{2}{3} ch^2 u_0 + \frac{1}{5}) P_{n-m-2k} \right. \\
& + \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{3} ch^2 u_0 \right) \left[\frac{3}{2} \frac{a_{n-m-2k}}{a_{n-m-2k+2}} P_{n-m-2k+2} \right. \\
& + \frac{a_{n-m-2k-1}}{a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+3} P_{n-m-2k} \\
& + \left. \frac{3}{2} \frac{a_{n-m-2k-2}}{a_{n-m-2k}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k+1} P_{n-m-2k-2} \right] \\
& + \frac{8}{35} \left[\frac{35}{8} \frac{a_{n-m-2k}}{a_{n-m-2k+4}} P_{n-m-2k+4} \right. \\
& + \frac{5}{2} \frac{a_{n-m-2k-1}}{a_{n-m-2k+3}} \frac{2n-2m-4k+5}{2n-2m-4k+7} P_{n-m-2k+2} \\
& + \frac{9}{4} \frac{a_{n-m-2k-2}}{a_{n-m-2k+2}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+5} P_{n-m-2k} \\
& + \frac{5}{2} \frac{a_{n-m-2k-3}}{a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k+3} P_{n-m-2k-2} + \\
& \left. \frac{35}{8} \frac{a_{n-m-2k-4}}{a_{n-m-2k}} \frac{2n-2m-4k-7}{2n-2m-4k+1} P_{n-m-2k-4} \right] \quad (419)
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće Ležandrove polinome u jednačini (419) dobijaju se konstante A_{nm} i C_{nm} .

Na osnovu toga se dobija:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n & \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} (A_{nm} a_{n-m-2k-2}^1 P_{n-m-2k-2} \\
& + A_{nm} a_{n-m-2k}^2 P_{n-m-2k} \\
& + A_{nm} a_{n-m-2k+2}^3 P_{n-m-2k+2} \\
& + C_{nm} b_{n-m-2k-4}^1 P_{n-m-2k-4} \\
& + C_{nm} b_{n-m-2k-2}^2 P_{n-m-2k-2} \\
& + C_{nm} b_{n-m-2k}^3 P_{n-m-2k} \\
& + C_{nm} b_{n-m-2k+2}^4 P_{n-m-2k+2} \\
& + C_{nm} b_{n-m-2k+4}^5 P_{n-m-2k+4}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} k_{nm} (q_{n-m-2k-4}^1 P_{n-m-2k-4} \\
+ q_{n-m-2k-2}^2 P_{n-m-2k-2} \\
+ q_{n-m-2k}^3 P_{n-m-2k} \\
+ q_{n-m-2k+2}^4 P_{n-m-2k+2} \\
+ q_{n-m-2k+4}^5 P_{n-m-2k+4})
\end{aligned} \tag{420}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
a_{n-m-2k-2}^1 &= V_{nm}^2 e_{nm} \frac{3 a_{n-m-2k-2}}{2 a_{n-m-2k}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k+1} + \\
&\quad V_{nm}^1 e_{n-1m} \frac{a_{n-m-2k-2}}{a_{n-m-2k-1}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k-1} \\
a_{n-m-2k}^2 &= V_{nm}^2 e_{nm} \frac{a_{n-m-2k-1}}{a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+3} + \\
&\quad V_{nm}^1 e_{n-1m} \frac{a_{n-m-2k-1}}{a_{n-m-2k}} + V_{nm}^0 e_{nm} \\
a_{n-m-2k+2}^3 &= V_{nm}^2 e_{nm} \frac{3 a_{n-m-2k}}{2 a_{n-m-2k+2}} \\
b_{n-m-2k-4}^1 &= 0 \\
b_{n-m-2k-2}^2 &= H_{nm}^2 e_{nm} \frac{3 a_{n-m-2k-2}}{2 a_{n-m-2k}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k+1} + \\
&\quad H_{nm}^3 e_{n+1m} \frac{5 a_{n-m-2k-2}}{2 a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k+3} \\
b_{n-m-2k}^3 &= H_{nm}^0 e_{nm} + \\
&\quad H_{nm}^2 e_{nm} \frac{a_{n-m-2k-1}}{a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+3} + \\
&\quad H_{nm}^1 e_{n+1m} \frac{a_{n-m-2k}}{a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+3} + \\
&\quad H_{nm}^3 e_{n+1m} \frac{3 a_{n-m-2k-1}}{2 a_{n-m-2k+2}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+5} \\
b_{n-m-2k+2}^4 &= H_{nm}^2 e_{nm} \frac{3 a_{n-m-2k}}{2 a_{n-m-2k+2}} + \\
&\quad H_{nm}^1 e_{n+1m} \frac{a_{n-m-2k+1}}{a_{n-m-2k+2}} + \\
&\quad H_{nm}^3 e_{n+1m} \frac{3}{2} \frac{2n-2m-4k+5}{2n-2m-4k+7} \frac{a_{n-m-2k}}{a_{n-m-2k+3}} \\
b_{n-m-2k+4}^5 &= H_{nm}^3 e_{n+1m} \frac{5 a_{n-m-2k+1}}{2 a_{n-m-2k+4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{n-m-2k-4}^1 &= c^4 e_{nm} \frac{a_{n-m-2k-4}}{a_{n-m-2k}} \frac{2n-2m-4k-7}{2n-2m-4k+1} \\
q_{n-m-2k-2}^2 &= c^4 e_{nm} \left(\left(\frac{4}{7} - \frac{4}{3} ch^2 u_0 \right) \times \right. \\
&\quad \left. \frac{3 a_{n-m-2k-2}}{2 a_{n-m-2k}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k+1} + \right. \\
&\quad \left. \frac{4 a_{n-m-2k-3}}{7 a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k-3}{2n-2m-4k+3} \right) \\
q_{n-m-2k}^3 &= c^4 e_{nm} \left(\left(ch^2 u_0 - \frac{2}{3} ch^2 u_0 + \frac{1}{5} \right) + \right. \\
&\quad \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{3} ch^2 u_0 \right) \frac{a_{n-m-2k-1}}{a_{n-m-2k+1}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+3} + \\
&\quad \left. \frac{18 a_{n-m-2k-2}}{35 a_{n-m-2k+2}} \frac{2n-2m-4k+1}{2n-2m-4k+5} \right) \\
q_{n-m-2k+2}^4 &= c^4 e_{nm} \left(\left(\frac{4}{7} - \frac{4}{3} ch^2 u_0 \right) \frac{3 a_{n-m-2k}}{2 a_{n-m-2k+2}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{4 a_{n-m-2k-1}}{7 a_{n-m-2k+3}} \frac{2n-2m-4k+5}{2n-2m-4k+7} \right) \\
q_{n-m-2k+4}^5 &= c^4 e_{nm} \frac{a_{n-m-2k}}{a_{n-m-2k+4}} \tag{421}
\end{aligned}$$

U prethodnom izlaganju prikazan je postupak formiranja sistema jednačina i određivanje koeficijenata iz graničnog uslova za napone σ_u . Formiranje sistema jednačina i određivanje koeficijenata iz graničnog uslova za napone $\tau_{u\varphi}$ izvodi se analogno i dobija se sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} A_{nm} [a_{n-m-2k-3}^4 P_{n-m-2k-3} + \\
&\quad a_{n-m-2k-1}^5 P_{n-m-2k-1} + \\
&\quad a_{n-m-2k+1}^6 P_{n-m-2k+1} + \\
&\quad a_{n-m-2k+3}^7 P_{n-m-2k+3}] + \\
&\quad C_{nm} [b_{n-m-2k-3}^6 P_{n-m-2k-3} + \\
&\quad b_{n-m-2k-1}^7 P_{n-m-2k-1} + \\
&\quad b_{n-m-2k+1}^8 P_{n-m-2k+1} + \\
&\quad b_{n-m-2k+3}^9 P_{n-m-2k+3} + \\
&\quad b_{n-m-2k+5}^{10} P_{n-m-2k+5}] = \\
&\sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} l_{nm} (s_{n-m-2k-5}^1 P_{n-m-2k-5} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s_{n-m-2k-3}^2 P_{n-m-2k-3} + \\
& s_{n-m-2k-1}^3 P_{n-m-2k-1} + \\
& s_{n-m-2k+1}^4 P_{n-m-2k+1} + \\
& s_{n-m-2k+3}^5 P_{n-m-2k+3} + \\
& s_{n-m-2k+5}^6 P_{n-m-2k+5}
\end{aligned} \tag{422}$$

Formiranje sistema i određivanje koeficijenata se ne prikazuje. Imajući u vidu da se u disertaciji ne određuju rešenja sistema za opšti slučaj rotaciono simetričnog opterećenja, već samo za slučaj $m = 0$, smatram da je izloženo izvođenje dovoljno za prikazivanje problema. Za slučaj $m = 0$ daje se detaljno izvođenje formiranja sistema i određivanja koeficijenata.

2. Formiranje sistema jednačina za slučaj $m=0$

Polazi se od rešenja diferencijalne jednačine i relacije (5.31) [Poglavlje 5] kojom je određena naponska funkcija iz navedenog rešenja. Koristeći u ovom radu izvedene relacije za određivanje napona preko naponskih funkcija (5.8) i definisane granične uslove po naponima (5.59) odnosno (5.63), dobijaju se dva sistema algebarskih jednačina sa beskonačno mnogo nepoznatih konstanti.

Naponi, dobijeni iz relacija (5.8), se mogu predstaviti u obliku:

$$\begin{aligned}
h^4 \sigma_u^* &= -c^2 (sh^2 u_0 + \sin^2 \varphi) \times \\
& \left(\sum_{n=-1}^{\infty} A_n P_n [Q_n'' sh^2 u_0 + Q_n' chu_0] + \right. \\
& c chu_0 Q_{n+1} C_n P_{n+1} \cos \varphi + \\
& c sh^2 u_0 Q_{n+1}' C_n P_{n+1} \cos \varphi + \\
& c sh^2 u_0 Q_{n+1}' C_n P_{n+1} \cos \varphi + \\
& c sh^2 u_0 chu_0 Q_{n+1}'' C_n P_{n+1} \cos \varphi + \\
& \left. c ch^2 u_0 Q_{n+1}' C_n P_{n+1} \cos \varphi \right) + \\
& c^2 \sum_{n=-1}^{\infty} (sh^2 u_0 chu_0 Q_n' A_n P_n + \\
& c sh^2 u_0 chu_0 Q_{n+1} C_n P_{n+1} \cos \varphi + \\
& c sh^2 u_0 ch^2 u_0 Q_{n+1}' C_n P_{n+1} \cos \varphi + \\
& Q_n A_n P_n' \sin^2 \varphi \cos \varphi + \\
& c chu_0 Q_{n+1} C_n P_{n+1} \sin^2 \varphi \cos \varphi + \\
& c chu_0 Q_{n+1} C_n P_{n+1}' \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\alpha c^3 (sh^2 u_0 + \sin^2 \varphi) \times \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} sh^2 u_0 Q'_{n+1} C_n P_{n+1} \cos \varphi + \\
& (2 - \alpha) (sh^2 u_0 + \sin^2 \varphi) \times \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} (c^3 sh^2 u_0 Q'_{n+1} C_n P_{n+1} \cos \varphi + \\
& c^3 chu_0 Q_{n+1} C_n P'_{n+1} \sin^2 \varphi)
\end{aligned} \tag{423}$$

$$\begin{aligned}
h^4 \tau_{u\varphi}^* \sin \varphi &= \alpha c^2 \sin \varphi (sh^2 u_0 + \sin^2 \varphi) \times \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} (-c shu_0 chu_0 Q'_{n+1} C_n P_{n+1} \sin \varphi - \\
& c shu_0 Q_{n+1} C_n P'_{n+1} \sin \varphi \cos \varphi - \\
& c^2 \sin \varphi (sh^2 u_0 + \sin^2 \varphi) \times \\
& \sum_{n=-1}^{\infty} (-shu_0 Q'_n A_n P'_n \sin \varphi - \\
& c shu_0 Q_{n+1} C_n P_{n+1} \sin \varphi - \\
& c shu_0 Q_{n+1} C_n P'_{n+1} \cos \varphi \sin \varphi - \\
& c shu_0 chu_0 Q'_{n+1} C_n P_{n+1} \sin \varphi - \\
& c chu_0 Q'_{n+1} shu_0 C_n P'_{n+1} \cos \varphi \sin \varphi) + \\
& c^2 \sin \varphi \sum_{n=-1}^{\infty} (-chu_0 shu_0 Q_n A_n P'_n \sin \varphi - \\
& c ch^2 u_0 shu_0 Q_{n+1} C_n P_{n+1} \sin \varphi - \\
& c ch^2 u_0 shu_0 Q_{n+1} C_n P'_{n+1} \sin \varphi \cos \varphi + \\
& shu_0 Q'_n A_n P_n \sin \varphi \cos \varphi + \\
& c shu_0 Q_{n+1} C_n P_{n+1} \cos^2 \varphi \sin \varphi + \\
& c chu_0 shu_0 Q'_{n+1} C_n P_{n+1} \cos^2 \varphi \sin \varphi)
\end{aligned} \tag{424}$$

gde je: $u = u_0$

Ako se izvrši sređivanje dobijenih izraza i uvedu sledeće oznake:

$$\begin{aligned}
A_n^0 &= -sh^2 u_0 [Q''_n sh^2 u_0 + Q'_n chu_0] c^2 + \\
& c^2 sh^2 u_0 chu_0 Q'_n \\
A_n^1 &= -sh^2 u_0 chu_0 c^3 Q_{n+1} - sh^4 u_0 c^3 Q'_{n+1} - \\
& sh^4 u_0 c^3 Q'_{n+1} - sh^4 u_0 chu_0 c^3 Q''_{n+1} - \\
& ch^2 u_0 sh^2 u_0 c^3 Q'_{n+1} + c^3 sh^2 u_0 chu_0 Q_{n+1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c^3 sh^2 u_0 ch^2 u_0 Q'_{n+1} + 2\alpha c^3 sh^4 u_0 Q'_{n+1} + \\
& (2 - \alpha) c^3 sh^4 u_0 Q'_{n+1} \\
A_n^2 &= -[Q''_n sh^2 u_0 + Q'_n chu_0] c^2 \\
A_n^3 &= -c^3 chu_0 Q_{n+1} - c^3 sh^2 u_0 Q'_{n+1} - \\
& c^3 sh^2 u_0 Q'_{n+1} - c^3 sh^2 u_0 chu_0 Q''_{n+1} - \\
& c^3 ch^2 u_0 Q'_{n+1} + c^3 chu_0 Q_{n+1} + \\
& 2\alpha c^3 sh^2 u_0 Q'_{n+1} + (2 - \alpha) c^3 sh^2 u_0 Q'_{n+1} \\
A_n^4 &= c^2 Q_n \\
A_n^5 &= (2 - \alpha) c^3 sh^2 u_0 chu_0 Q_{n+1} \\
A_n^7 &= (2 - \alpha) c^3 chu_0 Q_{n+1} \\
A_n^9 &= c^3 chu_0 Q_{n+1} \\
B_n^0 &= sh^3 u_0 c^2 Q'_n - c^2 chu_0 shu_0 Q_n \\
B_n^2 &= shu_0 c^2 Q'_n \\
B_n^4 &= c^2 shu_0 Q'_n \\
B_n^1 &= -c^3 sh^3 u_0 chu_0 \alpha Q'_{n+1} + c^3 sh^3 u_0 Q_{n+1} + \\
& c^3 sh^3 u_0 chu_0 Q'_{n+1} - c^3 shu_0 ch^2 u_0 Q_{n+1} \\
B_n^3 &= -c^3 \alpha sh^3 u_0 Q_{n+1} + c^3 sh^3 u_0 Q_{n+1} - \\
& c^3 shu_0 ch^2 u_0 Q_{n+1} + c^3 sh^3 u_0 chu_0 Q'_{n+1} \\
B_n^5 &= -c^3 \alpha shu_0 chu_0 Q'_{n+1} + c^3 shu_0 Q_{n+1} + \\
& c^3 shu_0 chu_0 Q'_{n+1} \\
B_n^7 &= -c^3 \alpha shu_0 Q_{n+1} + c^3 shu_0 Q_{n+1} + \\
& c^3 shu_0 chu_0 Q'_{n+1} \\
B_n^9 &= c^3 shu_0 Q_{n+1} + c^3 shu_0 chu_0 Q'_{n+1}
\end{aligned} \tag{425}$$

dobijaju se jednačine u obliku :

$$\begin{aligned}
h^4 \sigma_u^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} A_n [A_n^0 P_n + A_n^2 P_n \sin^2 \varphi + \\
& A_n^4 P'_n \sin^2 \varphi \cos \varphi] + C_n [A_n^1 P_{n+1} \cos \varphi + \\
& A_n^3 P_{n+1} \cos \varphi \sin^2 \varphi + A_n^9 P'_{n+1} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
& + A_n^5 P'_{n+1} \sin^2 \varphi + A_n^7 P'_{n+1} \sin^4 \varphi]
\end{aligned} \tag{426}$$

$$\begin{aligned}
h^4 \sin \varphi \tau_{u\varphi}^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} A_n [B_n^0 P'_n \sin^2 \varphi + B_n^2 P'_n \sin^4 \varphi + \\
& B_n^4 P_n \sin^2 \varphi \cos \varphi] + C_n [B_n^1 P_{n+1} \sin^2 \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_n^3 P_{n+1}' \cos \varphi \sin^2 \varphi + B_n^5 P_{n+1} \sin^4 \varphi \\
& + B_n^7 P_{n+1}' \sin^4 \varphi \cos \varphi + B_n^9 P_{n+1} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi] \quad (427)
\end{aligned}$$

Iz teorije matematičke analize je poznato [5]

$$\begin{aligned}
\cos^{2r} &= \sum_{n=0}^r \frac{2^{2n} (4n+1) (2r)! (n+r)!}{(2r+2n+1)! (r-n)!} P_{2n} \\
\cos^{2r+1} &= \sum_{n=0}^r \frac{2^{2n+1} (4n+3) (2r+1)! (n+r+1)!}{(2r+2n+3)! (r-n)!} P_{2n+1} \quad (428)
\end{aligned}$$

pa se dobija

$$\begin{aligned}
\cos \varphi &= P_1 \\
\cos^2 \varphi &= \frac{1}{3} (P_0 + 2P_2) \\
\cos^3 \varphi &= \frac{1}{5} (3P_1 + 2P_3) \\
\cos^4 \varphi &= \frac{1}{5} P_0 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{8}{35} P_4 \\
\cos^5 \varphi &= \frac{3}{7} P_1 + \frac{4}{9} P_3 + \frac{8}{63} P_5 \quad (429)
\end{aligned}$$

Ako se primene dobijeni izrazi (429) i rekurentne formule (2.38) i (2.40) na jednačine (426) i (427) iste dobijaju sledeći oblik :

$$\begin{aligned}
h^4 \sigma_u^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} A_n (A_n^0 P_n + A_n^2 P_n \frac{2}{3} - A_n^2 P_n \frac{2}{3} P_2 \\
& - A_n^4 P_n \frac{n}{3} - A_n^4 P_n \frac{2}{3} n P_2 + A_n^4 n P_{n-1} P_1) \\
& + C_n (A_n^1 P_{n+1} P_1 + A_n^3 P_{n+1} P_1 \frac{2}{5} - A_n^3 P_{n+1} \frac{2}{5} P_3 \\
& - A_n^9 (n+1) P_{n+1} \frac{3}{5} P_1 - A_n^9 (n+1) P_{n+1} P_3 \frac{2}{5} \\
& + A_n^9 (n+1) P_n \frac{1}{3} + A_n^9 (n+1) P_n P_2 \frac{2}{3} \\
& - A_n^5 (n+1) P_{n+1} P_1 + A_n^5 (n+1) P_n \\
& - A_n^7 (n+1) P_{n+1} P_1 \frac{2}{5} + A_n^7 (n+1) P_{n+1} P_3 \frac{2}{5} \\
& + A_n^7 (n+1) P_n \frac{2}{3} - A_n^7 (n+1) P_n P_2 \frac{2}{3}) \quad (430)
\end{aligned}$$

$$h^4 \tau_{u\varphi}^* \sin \varphi = \sum_{n=-1}^{\infty} A_n (-B_n^0 n P_n P_1 + B_n^0 n P_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
& -B_n^2 n P_n P_1 \frac{2}{5} + B_n^2 P_n \frac{2}{5} n P_3 \\
& + B_n^2 n P_{n-1} \frac{2}{3} - B_n^2 n P_{n-1} P_2 \frac{2}{3} + \\
& B_n^4 P_n P_1 \frac{2}{5} - B_n^4 P_n \frac{2}{5} P_3) \\
& + C_n (B_n^1 \frac{2}{3} P_{n+1} - B_n^1 P_{n+1} P_2 \frac{2}{3} \\
& - B_n^3 (n+1) P_{n+1} \frac{1}{3} - B_n^3 (n+1) P_{n+1} P_2 \frac{2}{3} \\
& + B_n^3 (n+1) P_n P_1 + B_n^5 P_{n+1} \frac{8}{15} \\
& - \frac{16}{21} B_n^5 P_{n+1} P_2 + \frac{8}{35} B_n^5 P_{n+1} P_4 \\
& - B_n^7 (n+1) P_{n+1} \frac{2}{15} - B_n^7 (n+1) P_{n+1} P_2 \frac{2}{21} \\
& + B_n^7 (n+1) P_{n+1} P_4 \frac{8}{35} + B_n^7 (n+1) P_n P_1 \frac{2}{5} \\
& - B_n^7 (n+1) P_n P_3 \frac{2}{5} + B_n^9 P_{n+1} P_2 \frac{2}{21} \\
& + B_n^9 \frac{2}{15} P_{n+1} - B_n^9 \frac{8}{35} P_{n+1} P_4)
\end{aligned} \tag{431}$$

Primenom rekurentnih formula, koeficijenti (425) se prikazuju na sledeći način:

$$\begin{aligned}
A_n^0 &= 2c^2(n+1)chu_0 Q_{n+1} - \\
& c^2(n+1)[(n+2)sh^2u_0 + 2]Q_n \\
A_n^2 &= c^2 \frac{(n+1)}{sh^2u_0} [chu_0 Q_{n+1} - (nsh^2u_0 + ch^2u_0)Q_n] \\
A_n^4 &= c^2 Q_n \\
A_n^1 &= c^3(n+1)([sh^2u_0 chu_0(\alpha - n) + 2chu_0]Q_{n+1} \\
& - [\alpha sh^2u_0 + 2ch^2u_0]Q_n) \\
A_n^3 &= c^3(n+1)([chu_0[(\alpha - n) + \frac{1}{sh^2u_0}(2 - ch^2u_0)]]Q_{n+1} - \\
& (\alpha + \frac{ch^2u_0}{sh^2u_0})Q_n) \\
A_n^5 &= (2 - \alpha)c^3 sh^2u_0 chu_0 Q_{n+1} \\
A_n^7 &= (2 - \alpha)c^3 chu_0 Q_{n+1} \\
A_n^9 &= c^3 chu_0 Q_{n+1} \\
B_n^0 &= c^2(n+1)shu_0 Q_{n+1} - c^2 n shu_0 chu_0 Q_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n^2 &= c^2 \frac{(n+1)}{shu_0} (Q_{n+1} - chu_0 Q_n) \\
B_n^4 &= c^2 \frac{(n+1)}{shu_0} (Q_{n+1} - chu_0 Q_n) \\
B_n^1 &= c^3 shu_0 (sh^2 u_0 + ch^2 u_0 (n(1-\alpha) - \alpha)) Q_{n+1} \\
&\quad - c^3 shu_0 chu_0 (1-\alpha) (n+1) Q_n \\
B_n^3 &= c^3 shu_0 [(1-\alpha) sh^2 u_0 + n ch^2 u_0] Q_{n+1} \\
&\quad - c^3 (n+1) chu_0 shu_0 Q_n \\
B_n^5 &= c^3 (shu_0 + (1-\alpha)(n+1) \frac{ch^2 u_0}{shu_0}) Q_{n+1} \\
&\quad - c^3 (1-\alpha)(n+1) \frac{chu_0}{shu_0} Q_n \\
B_n^7 &= c^3 ((1-\alpha) shu_0 + (n+1) \frac{ch^2 u_0}{shu_0}) Q_{n+1} \\
&\quad - c^3 (n+1) \frac{chu_0}{shu_0} Q_n \\
B_n^9 &= c^3 (shu_0 + (n+1) \frac{ch^2 u_0}{shu_0}) Q_{n+1} \\
&\quad - c^3 (n+1) \frac{chu_0}{shu_0} Q_n
\end{aligned} \tag{432}$$

Na osnovu (401) se dobija :

$$\begin{aligned}
P_n P_0 &= P_n \\
P_n P_1 &= \frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{2n-1}{2n+1} P_{n-1} \\
P_n P_2 &= \frac{3a_n}{2a_{n+2}} P_{n+2} + \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \frac{2n+1}{2n+3} P_n \\
&\quad + \frac{3a_{n-2}}{2a_n} \frac{2n-3}{2n+1} P_{n-2} \\
P_n P_3 &= \frac{5a_n}{2a_{n+3}} P_{n+3} + \frac{3a_{n-1}}{2a_{n+2}} \frac{2n+3}{2n+5} P_{n+1} \\
&\quad + \frac{3a_{n-2}}{2a_{n+1}} \frac{2n-1}{2n+3} P_{n-1} + \frac{5a_{n-3}}{2a_n} \frac{2n-5}{2n+1} P_{n-3} \\
P_n P_4 &= \frac{35a_n}{8a_{n+4}} P_{n+4} + \frac{5a_{n-1}}{2a_{n+3}} \frac{2n+5}{2n+7} P_{n+2} \\
&\quad + \frac{9a_{n-2}}{4a_{n+2}} \frac{2n+1}{2n+5} P_n + \frac{5a_{n-3}}{2a_{n+1}} \frac{2n-3}{2n+3} P_{n-2} \\
&\quad + \frac{35a_{n-4}}{8a_n} \frac{2n-7}{2n+1} P_{n-4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n P_5 &= \frac{63a_n}{8a_{n+5}} P_{n+5} + \frac{35a_{n-1}}{8a_{n+4}} \frac{2n+7}{2n+9} P_{n+3} \\
&\quad + \frac{15a_{n-2}}{4a_{n+3}} \frac{2n+3}{2n+7} P_{n+1} + \frac{15a_{n-3}}{4a_{n+2}} \frac{2n-1}{2n+5} P_{n-1} \\
&\quad + \frac{35a_{n-4}}{8a_{n+1}} \frac{2n-5}{2n+3} P_{n-3} + \frac{63a_{n-5}}{8a_n} \frac{2n-9}{2n+1} P_{n-5} \\
P_{n+1} P_0 &= P_{n+1} \\
P_{n+1} P_1 &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} P_{n+2} + \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{2n+1}{2n+3} P_n \\
P_{n+1} P_2 &= \frac{3a_{n+1}}{2a_{n+3}} P_{n+3} + \frac{a_n}{a_{n+2}} \frac{2n+3}{2n+5} P_{n+1} \\
&\quad + \frac{3a_{n-1}}{2a_{n+1}} \frac{2n-1}{2n+3} P_{n-1} \\
P_{n+1} P_3 &= \frac{5a_{n+1}}{2a_{n+4}} P_{n+4} + \frac{3a_n}{2a_{n+3}} \frac{2n+5}{2n+7} P_{n+2} \\
&\quad + \frac{3a_{n-1}}{2a_{n+2}} \frac{2n+1}{2n+5} P_n + \frac{5a_{n-2}}{2a_{n+1}} \frac{2n-3}{2n+3} P_{n-2} \\
P_{n+1} P_4 &= \frac{35a_{n+1}}{8a_{n+5}} P_{n+5} + \frac{5a_n}{2a_{n+4}} \frac{2n+7}{2n+9} P_{n+3} \\
&\quad + \frac{9a_{n-1}}{4a_{n+3}} \frac{2n+3}{2n+7} P_{n+1} + \frac{5a_{n-2}}{2a_{n+2}} \frac{2n-1}{2n+5} P_{n-1} \\
&\quad + \frac{35a_{n-3}}{8a_{n+1}} \frac{2n-5}{2n+3} P_{n-3}
\end{aligned} \tag{433}$$

Ako se primeni (433) u jednačinama (430) i (431) dobija se:

$$\begin{aligned}
h^4 \sigma_u^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} A_n \left((A_n^0 + \frac{2}{3} A_n^2 - A_n^4 \frac{n}{3}) P_n + \right. \\
&\quad \left. (-A_n^2 \frac{2}{3} - A_n^4 \frac{2}{3} n) \left[\frac{3a_n}{2a_{n+2}} P_{n+2} + \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \frac{2n+1}{2n+3} P_n + \frac{3a_{n-2}}{2a_n} \frac{2n-3}{2n+1} P_{n-2} \right] + \right. \\
&\quad \left. A_n^4 n \left[\frac{a_{n-1}}{a_n} P_n + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \frac{2n-3}{2n-1} P_{n-2} \right] \right) + \\
&\quad C_n \left((A_n^9 (n+1) \frac{1}{3} + A_n^5 (n+1) + \right. \\
&\quad \left. A_n^7 (n+1) \frac{2}{3} \right) P_n + \left[A_n^1 + \frac{2}{5} A_n^3 - A_n^9 (n+1) \frac{3}{5} - \right. \\
&\quad \left. A_n^5 (n+1) - A_n^7 (n+1) \frac{2}{5} \right] \left[\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} P_{n+2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{2n+1}{2n+3} P_n] + (-A_n^3 \frac{2}{5} - A_n^9 (n+1) \frac{2}{5} + \\
& A_n^7 (n+1) \frac{2}{5}) [\frac{5a_{n+1}}{2a_{n+4}} P_{n+4} + \\
& \frac{3a_n}{2a_{n+3}} \frac{2n+5}{2n+7} P_{n+2} + \frac{3a_{n-1}}{2a_{n+2}} \frac{2n+1}{2n+5} P_n + \\
& \frac{5a_{n-2}}{2a_{n+1}} \frac{2n-3}{2n+3} P_{n-2}] + (A_n^9 (n+1) \frac{2}{3} - \\
& A_n^7 (n+1) \frac{2}{3}) [\frac{3a_n}{2a_{n+2}} P_{n+2} + \\
& \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \frac{2n+1}{2n+3} P_n + \frac{3a_{n-2}}{2a_n} \frac{2n-3}{2n+1} P_{n-2}] \quad (434)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^4 \tau_{u\varphi}^* \sin \varphi &= \sum_{n=-1}^{\infty} A_n ((B_n^0 n + B_n^2 n \frac{2}{3}) P_{n-1} \\
&+ (-B_n^0 n - B_n^2 n \frac{2}{5} + B_n^4 \frac{2}{5}) [\frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1} \\
&+ \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{2n-1}{2n+1} P_{n-1}] \\
&+ (B_n^2 n \frac{2}{5} - B_n^4 \frac{2}{5}) [\frac{5a_n}{2a_{n+3}} P_{n+3} \\
&+ \frac{3a_{n-1}}{2a_{n+2}} \frac{2n+3}{2n+5} P_{n+1} + \frac{3a_{n-2}}{2a_{n+1}} \frac{2n-1}{2n+3} P_{n-1} \\
&+ \frac{5a_{n-3}}{2a_n} \frac{2n-5}{2n+1} P_{n-3}] - \frac{2}{3} B_n^2 n [\frac{3a_{n-1}}{2a_{n+1}} P_{n+1} \\
&+ \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{2n-1}{2n+1} P_{n-1} + \frac{3a_{n-3}}{2a_{n-1}} \frac{2n-5}{2n-1} P_{n-3}]) + \\
&C_n ((\frac{2}{3} B_n^1 - \frac{1}{3} B_n^3 (n+1) + \frac{8}{15} B_n^5 - \\
&\frac{2}{15} B_n^7 (n+1) + \frac{2}{15} B_n^9) P_{n+1} + (-\frac{2}{3} B_n^1 - \\
&\frac{2}{3} B_n^3 (n+1) - \frac{16}{21} B_n^5 - \frac{2}{21} B_n^7 (n+1) + \\
&\frac{2}{21} B_n^9) [\frac{3a_{n+1}}{2a_{n+3}} P_{n+3} + \frac{a_n}{a_{n+2}} \frac{2n+3}{2n+5} P_{n+1} + \\
&\frac{3a_{n-1}}{2a_{n+1}} \frac{2n-1}{2n+3} P_{n-1}] + (B_n^5 \frac{8}{35} + \frac{8}{35} B_n^7 (n+1) \\
&- B_n^9 \frac{8}{35}) [\frac{35a_{n+1}}{8a_{n+5}} P_{n+5} + \frac{5a_n}{2a_{n+4}} \frac{2n+7}{2n+9} P_{n+3} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{9a_{n-1} 2n + 3}{4a_{n+3} 2n + 7} P_{n+1} + \frac{5a_{n-2} 2n - 1}{2a_{n+2} 2n + 5} P_{n-1} + \\
& \frac{35a_{n-3} 2n - 5}{8a_{n+1} 2n + 3} P_{n-3} + (B_n^3(n+1) + \\
& B_n^7(n+1) \frac{2}{5}) \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1} + \frac{a_{n-1} 2n - 1}{a_n 2n + 1} P_{n-1} \right] - \\
& \frac{2}{5} B_n^7(n+1) \left[\frac{5a_n}{2a_{n+3}} P_{n+3} + \frac{3a_{n-1} 2n + 3}{2a_{n+2} 2n + 5} P_{n+1} \right. \\
& \left. + \frac{3a_{n-2} 2n - 1}{2a_{n+1} 2n + 3} P_{n-1} + \frac{5a_{n-3} 2n - 5}{2a_n 2n + 1} P_{n-3} \right]
\end{aligned} \tag{435}$$

Grupisanjem članova u (434) i (435) sledi:

$$\begin{aligned}
h^4 \sigma_u^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} A_n \left(\left(-\frac{2}{3} A_n^2 - A_n^4 n \frac{2}{3} \right) \frac{3}{2} \frac{a_{n-2} 2n - 3}{a_n 2n + 1} + \right. \\
& A_n^4 n \frac{a_{n-2} 2n - 3}{a_{n-1} 2n - 1} \left. \right] P_{n-2} \\
& + \left[\left(A_n^0 + \frac{2}{3} A_n^2 - \frac{n}{3} A_n^4 \right) \right. \\
& + \left(-\frac{2}{3} A_n^2 - \frac{2}{3} n A_n^4 \right) \frac{a_{n-1} 2n + 1}{a_{n+1} 2n + 3} + A_n^4 n \frac{a_{n-1}}{a_n} \left. \right] P_n \\
& + \left[\left(-A_n^2 \frac{2}{3} - A_n^4 n \frac{2}{3} \right) \frac{3a_n}{2a_{n+2}} \right] P_{n+2} \\
& + C_n \left(\left(-A_n^3 \frac{2}{5} - A_n^9(n+1) \frac{2}{5} \right) \right. \\
& + A_n^7(n+1) \frac{2}{5} \frac{5a_{n-2} 2n - 3}{2a_{n+1} 2n + 3} + \\
& \left. \left(A_n^9(n+1) \frac{2}{3} - A_n^7(n+1) \frac{2}{3} \right) \frac{3a_{n-2} 2n - 3}{2a_n 2n + 1} \right] P_{n-2} \\
& + \left[\left(A_n^9(n+1) \frac{1}{3} + A_n^5(n+1) + A_n^7(n+1) \frac{2}{3} \right) \right. \\
& + \left(A_n^1 + A_n^3 \frac{2}{5} - A_n^9(n+1) \frac{3}{5} - A_n^5(n+1) \right. \\
& - \frac{2}{5} A_n^7(n+1) \left. \right) \frac{a_n 2n + 1}{a_{n+1} 2n + 3} + \left(-A_n^3 \frac{2}{5} \right. \\
& - A_n^9(n+1) \frac{2}{5} + A_n^7(n+1) \frac{2}{5} \left. \right) \frac{3a_{n-1} 2n + 1}{2a_{n+2} 2n + 5} \\
& \left. + \left(A_n^9(n+1) \frac{2}{3} - A_n^7(n+1) \frac{2}{3} \right) \frac{a_{n-1} 2n + 1}{a_{n+1} 2n + 3} \right] P_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [(A_n^1 + \frac{2}{5}A_n^3 - \frac{3}{5}A_n^9(n+1) - A_n^5(n+1) \\
& - \frac{2}{5}A_n^7(n+1))\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} + (-A_n^3\frac{2}{5} - \frac{2}{5}A_n^9(n+1) \\
& + \frac{2}{5}A_n^7(n+1))\frac{3a_n}{2a_{n+3}}\frac{2n+5}{2n+7} + (\frac{2}{3}A_n^9(n+1) - \\
& \frac{2}{3}A_n^7(n+1))\frac{3}{2}\frac{a_n}{a_{n+2}}]P_{n+2} + \\
& [(-\frac{2}{5}A_n^3 - \frac{2}{5}A_n^9(n+1) + \frac{2}{5}A_n^7(n+1))\frac{5a_{n+1}}{2a_{n+4}}]P_{n+4}
\end{aligned}$$

(436)

$$\begin{aligned}
h^4\tau_{u\varphi}^*\sin\varphi & = \sum_{n=-1}^{\infty} A_n \left(\left(\frac{2}{5}B_n^2n - B_n^4\frac{2}{5} \right) \frac{5}{2} \frac{a_{n-3}}{a_n} \frac{2n-5}{2n+1} \right. \\
& \left. - B_n^2n \frac{2}{3} \frac{3a_{n-3}}{2a_{n-1}} \frac{2n-5}{2n-1} \right] P_{n-3} \\
& + \left[(B_n^0n + \frac{2}{3}B_n^2n) + (-B_n^0n - \frac{2}{5}B_n^2n + \frac{2}{5}B_n^4) \right. \\
& \left. \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{2n-1}{2n+1} + (B_n^2n\frac{2}{5} - B_n^4\frac{2}{5}) \frac{3a_{n-2}}{2a_{n+1}} \frac{2n-1}{2n+3} \right. \\
& \left. - B_n^2n \frac{2}{3} \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{2n-1}{2n+1} \right] P_{n-1} \\
& + \left[(-B_n^0n - \frac{2}{5}B_n^2n + B_n^4\frac{2}{5}) \frac{a_n}{a_{n+1}} + (B_n^2n\frac{2}{5} - \right. \\
& \left. B_n^4\frac{2}{5}) \frac{3a_{n-1}}{2a_{n+2}} \frac{2n+3}{2n+5} - B_n^2n \frac{2}{3} \frac{3a_{n-1}}{2a_{n+1}} \right] P_{n+1} \\
& + \left[\left(\frac{2}{5}B_n^2n - B_n^4\frac{2}{5} \right) \frac{5a_n}{2a_{n+3}} \right] P_{n+3} \\
& + C_n \left(\left(B_n^5\frac{8}{35} + B_n^7(n+1) \frac{8}{35} - B_n^9\frac{8}{35} \right) \frac{35a_{n-3}}{8a_{n+1}} \right. \\
& \left. \frac{2n-5}{2n+3} - B_n^7(n+1) \frac{2}{5} \frac{5a_{n-3}}{2a_n} \frac{2n-5}{2n+1} \right] P_{n-3} \\
& + \left[(-B_n^1\frac{2}{3} - B_n^3(n+1) \frac{2}{3} - B_n^5\frac{16}{21} - \right. \\
& \left. B_n^7(n+1) \frac{2}{21} + B_n^9\frac{2}{21} \right) \frac{3a_{n-1}}{2a_{n+1}} \frac{2n-1}{2n+3} \\
& + (B_n^5\frac{8}{35} + B_n^7(n+1) \frac{8}{35} - B_n^9\frac{8}{35}) \frac{5a_{n-2}}{2a_{n+2}} \\
& \left. \frac{2n-1}{2n+5} + (B_n^3(n+1) + B_n^7(n+1) \frac{2}{5}) \frac{a_{n-1}}{a_n} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{2n-1}{2n+1} - B_n^7(n+1) \frac{2}{5} \frac{3a_{n-2}}{2a_{n+1}} \frac{2n-1}{2n+3} \right] P_{n-1} \\
& + \left[\left(\frac{2}{3} B_n^1 - B_n^3 \frac{1}{3}(n+1) + \frac{8}{15} B_n^5 - \frac{2}{15} B_n^7(n+1) \right. \right. \\
& + \frac{2}{15} B_n^9 \left. \right) + \left(-\frac{2}{3} B_n^1 - \frac{2}{3} B_n^3(n+1) - \frac{16}{21} B_n^5 \right. \\
& - \frac{2}{21} B_n^7(n+1) + \frac{2}{21} B_n^9 \left. \right) \frac{a_n}{a_{n+2}} \frac{2n+3}{2n+5} + \\
& \left(\frac{8}{35} B_n^5 + \frac{8}{35} B_n^7(n+1) - \frac{8}{35} B_n^9 \right) \frac{9a_{n-1}}{4a_{n+3}} \frac{2n+3}{2n+7} \\
& + \left(B_n^3(n+1) + B_n^7(n+1) \frac{2}{5} \right) \frac{a_n}{a_{n+1}} \\
& - \frac{2}{5} B_n^7(n+1) \frac{3a_{n-1}}{2a_{n+2}} \frac{2n+3}{2n+5} \left. \right] P_{n+1} \\
& + \left[\left(-B_n^1 \frac{2}{3} - \frac{2}{3} B_n^3(n+1) - \frac{16}{21} B_n^5 - \right. \right. \\
& \left. \frac{2}{21} B_n^7(n+1) + \frac{2}{21} B_n^9 \right) \frac{3a_{n+1}}{2a_{n+3}} + \left(\frac{8}{35} B_n^5 + \right. \\
& \left. \frac{8}{35} B_n^7(n+1) - \frac{8}{35} B_n^9 \right) \frac{5}{2} \frac{a_n}{a_{n+4}} \frac{2n+7}{2n+9} \\
& - \frac{2}{5} B_n^7(n+1) \frac{5}{2} \frac{a_n}{a_{n+3}} \left. \right] P_{n+3} + \\
& \left[\left(\frac{8}{35} B_n^5 + \frac{8}{35} B_n^7(n+1) - \frac{8}{35} B_n^9 \right) \frac{35}{8} \frac{a_{n+1}}{a_{n+5}} \right] P_{n+5}
\end{aligned} \tag{437}$$

Ako se uvedu sledeće oznake:

$$\begin{aligned}
a_{n-2}^1 &= \left(-\frac{2}{3} A_n^2 - \frac{2}{3} n A_n^4 \right) \frac{3}{2} \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{2n-3}{2n+1} \\
&+ A_n^4 n \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \frac{2n-3}{2n-1} \\
a_n^2 &= \left(A_n^0 + \frac{2}{3} A_n^2 - \frac{n}{3} A_n^4 \right) + \left(-\frac{2}{3} A_n^2 - \frac{2}{3} n A_n^4 \right) \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \times \\
&\frac{2n+1}{2n+3} + A_n^4 n \frac{a_{n-1}}{a_n} \\
a_{n+2}^3 &= \left(-\frac{2}{3} A_n^2 - \frac{2}{3} n A_n^4 \right) \frac{3}{2} \frac{a_n}{a_{n+2}} \\
b_{n-4}^1 &= 0 \\
b_{n-2}^2 &= \left(-\frac{2}{5} A_n^3 - \frac{2}{5} A_n^9(n+1) + \frac{2}{5} A_n^7(n+1) \right) \frac{5}{2} \frac{a_{n-2}}{a_{n+1}} \frac{2n-3}{2n+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (A_n^9(n+1) \frac{2}{3} - A_n^7(n+1) \frac{2}{3}) \frac{3}{2} \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{2n-3}{2n+1} \\
b_n^3 &= A_n^9(n+1) \frac{1}{3} + A_n^5(n+1) + A_n^7(n+1) \frac{2}{3} + \\
& [A_n^1 + \frac{2}{5} A_n^3 - \frac{3}{5} A_n^9(n+1) - A_n^5(n+1) - \frac{2}{5} A_n^7(n+1)] \\
& \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{2n+1}{2n+3} + [-\frac{2}{5} A_n^3 - \frac{2}{5} A_n^9(n+1) + \frac{2}{5} A_n^7(n+1)] \\
& \frac{3}{2} \frac{a_{n-1}}{a_{n+2}} \frac{2n+1}{2n+5} + [A_n^9(n+1) \frac{2}{3} - \\
& A_n^7(n+1) \frac{2}{3}] \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \frac{2n+1}{2n+3} \\
b_{n+2}^4 &= [A_n^1 + \frac{2}{5} A_n^3 - \frac{3}{5} A_n^9(n+1) - A_n^5(n+1) - \frac{2}{5} A_n^7(n+1)] \\
& \times \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} + [-\frac{2}{5} A_n^3 - \frac{2}{5} A_n^9(n+1) + \frac{2}{5} A_n^7(n+1)] \\
& \times \frac{3}{2} \frac{a_n}{a_{n+3}} \frac{2n+5}{2n+7} + [A_n^9(n+1) \frac{2}{3} - A_n^7(n+1) \frac{2}{3}] \frac{3}{2} \frac{a_n}{a_{n+2}} \\
b_{n+4}^5 &= [-\frac{2}{5} A_n^3 - \frac{2}{5} A_n^9(n+1) + \frac{2}{5} A_n^7(n+1)] \frac{5}{2} \frac{a_{n+1}}{a_{n+4}} \\
a_{n-3}^4 &= [B_n^2 n \frac{2}{5} - B_n^4 \frac{2}{5}] \frac{5}{2} \frac{a_{n-3}}{a_n} \frac{2n-5}{2n+1} - \\
& \frac{2}{3} B_n^2 n \frac{3}{2} \frac{a_{n-3}}{a_{n-1}} \frac{2n-5}{2n-1} \\
a_{n-1}^5 &= (B_n^0 n + \frac{2}{3} B_n^2 n) + (-B_n^0 n - B_n^2 n \frac{2}{5} + \\
& \frac{2}{5} B_n^4) \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{2n-1}{2n+1} + (B_n^2 n \frac{2}{5} - B_n^4 \frac{2}{5}) \frac{3}{2} \times \\
& \frac{a_{n-2}}{a_{n+1}} \frac{2n-1}{2n+3} - \frac{2}{3} B_n^2 n \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{2n-1}{2n+1} \\
a_{n+1}^6 &= [-B_n^0 n - B_n^2 n \frac{2}{5} + \frac{2}{5} B_n^4] \frac{a_n}{a_{n+1}} + \\
& (B_n^2 n \frac{2}{5} - B_n^4 \frac{2}{5}) \frac{3}{2} \frac{a_{n-1}}{a_{n+2}} \frac{2n+3}{2n+5} - \\
& \frac{2}{3} B_n^2 n \frac{3}{2} \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \\
a_{n+3}^7 &= [B_n^2 n \frac{2}{5} - B_n^4 \frac{2}{5}] \frac{5}{2} \frac{a_n}{a_{n+3}} \\
b_{n-3}^6 &= [\frac{8}{35} B_n^5 + \frac{8}{35} B_n^7(n+1) - \frac{8}{35} B_n^9] \frac{35}{8} \frac{a_{n-3}}{a_{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2n-5}{2n+3} - \frac{2}{5} B_n^7(n+1) \frac{5 a_{n-3} 2n-5}{2 a_n 2n+1} \\
b_{n-1}^7 &= \left[-B_n^1 \frac{2}{3} - \frac{2}{3} B_n^3(n+1) - \frac{16}{21} B_n^5 - \frac{2}{21} B_n^7(n+1) + \right. \\
& \frac{2}{21} B_n^9 \left. \right] \frac{3 a_{n-1} 2n-1}{2 a_{n+1} 2n+3} + \left[\frac{8}{35} B_n^5 + \frac{8}{35} B_n^7(n+1) \right. \\
& \left. - \frac{8}{35} B_n^9 \right] \frac{5 a_{n-2} 2n-1}{2 a_{n+2} 2n+5} + [B_n^3(n+1) + \\
& B_n^7(n+1) \frac{2}{5}] \frac{a_{n-1} 2n-1}{a_n 2n+1} - \\
& \frac{2}{5} B_n^7(n+1) \frac{3 a_{n-2} 2n-1}{2 a_{n+1} 2n+3} \\
b_{n+1}^8 &= \frac{2}{3} B_n^1 - \frac{1}{3} B_n^3(n+1) + \frac{8}{15} B_n^5 - \frac{2}{15} B_n^7(n+1) + \\
& \frac{2}{15} B_n^9 + \left[-B_n^1 \frac{2}{3} - \frac{2}{3} B_n^3(n+1) - \frac{16}{21} B_n^5 - \right. \\
& \left. \frac{2}{21} B_n^7(n+1) + \frac{2}{21} B_n^9 \right] \frac{a_n 2n+3}{a_{n+2} 2n+5} + \\
& \left[\frac{8}{35} B_n^5 + \frac{8}{35} B_n^7(n+1) - \frac{8}{35} B_n^9 \right] \times \\
& \frac{9 a_{n-1} 2n+3}{4 a_{n+3} 2n+7} + [B_n^3(n+1) + B_n^7(n+1) \frac{2}{5}] \times \\
& \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{2}{5} B_n^7(n+1) \frac{3 a_{n-1} 2n+3}{2 a_{n+2} 2n+5} \\
b_{n+3}^9 &= \left[-B_n^1 \frac{2}{3} - \frac{2}{3} B_n^3(n+1) - \frac{16}{21} B_n^5 - \right. \\
& \left. \frac{2}{21} B_n^7(n+1) + \frac{2}{21} B_n^9 \right] \frac{3 a_{n+1}}{2 a_{n+3}} \\
& + \left[\frac{8}{35} B_n^5 + \frac{8}{35} B_n^7(n+1) - \frac{8}{35} B_n^9 \right] \times \\
& \frac{5 a_n 2n+7}{2 a_{n+4} 2n+9} - \frac{2}{5} B_n^7(n+1) \frac{5 a_n}{2 a_{n+3}} \\
b_{n+5}^{10} &= \left[\frac{8}{35} B_n^5 + \frac{8}{35} B_n^7(n+1) - \frac{8}{35} B_n^9 \right] \frac{35 a_{n+1}}{8 a_{n+5}}
\end{aligned} \tag{438}$$

dobijaju se sistemi jednačina (436) i (437) u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}
h^4 \sigma_u^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} A_n [a_{n-2}^1 P_{n-2} + a_n^2 P_n + a_{n+2}^3 P_{n+2}] \\
&+ C_n [b_{n-4}^1 P_{n-4} + b_{n-2}^2 P_{n-2} + b_n^3 P_n \\
&+ b_{n+2}^4 P_{n+2} + b_{n+4}^5 P_{n+4}]
\end{aligned} \tag{439}$$

$$\begin{aligned}
 h^4 \sin \varphi \tau_{u\varphi}^* &= \sum_{n=-1}^{\infty} A_n [a_{n-3}^4 P_{n-3} + a_{n-1}^5 P_{n-1} + a_{n+1}^6 P_{n+1} \\
 &\quad + a_{n+3}^7 P_{n+3}] + C_n [b_{n-3}^6 P_{n-3} + b_{n-1}^7 P_{n-1} \\
 &\quad + b_{n+1}^8 P_{n+1} + b_{n+3}^9 P_{n+3} + b_{n+5}^{10} P_{n+5}]
 \end{aligned} \tag{440}$$

Primenom formula za razvijanje funkcija (2.44) , (2.45) dobija se :

$$h^4 \sigma_u^* = c^4 (sh^4 u_0 + 2sh^2 u_0 \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) \sum_{n=0}^{\infty} k_n P_n$$

odnosno:

$$\begin{aligned}
 h^4 \sigma_u^* &= c^4 \sum_{n=0}^{\infty} [sh^4 u_0 k_n P_n + 2sh^2 u_0 k_n (1 - \cos^2 \varphi) P_n \\
 &\quad + k_n (1 - \cos^2 \varphi) (1 - \cos^2 \varphi) P_n]
 \end{aligned} \tag{441}$$

Ako se primene relacije (429) i formule za množenje polinoma (433) na jednačinu (441) dobija se :

$$\begin{aligned}
 h^4 \sigma_u^* &= \sum_{n=0}^{\infty} c^4 \left((sh^4 u_0 k_n + \frac{4}{3} sh^2 u_0 k_n + \frac{8}{15}) P_n + \right. \\
 &\quad \left(-\frac{4}{3} sh^2 u_0 k_n - \frac{16}{21} k_n \right) \left[\frac{3}{2} \frac{a_n}{a_{n+2}} P_{n+2} + \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \frac{2n+1}{2n+3} P_n \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{2n-3}{2n+1} P_{n-2} \right] + \frac{8}{35} k_n \left[\frac{35}{8} \frac{a_n}{a_{n+4}} P_{n+4} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{5}{2} \frac{a_{n-1}}{a_{n+3}} \frac{2n+5}{2n+7} P_{n+2} + \frac{9}{4} \frac{a_{n-2}}{a_{n+2}} \frac{2n+1}{2n+5} P_n + \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{5}{2} \frac{a_{n-3}}{a_{n+1}} \frac{2n-3}{2n+3} P_{n-2} + \frac{35}{8} \frac{a_{n-4}}{a_n} \frac{2n-7}{2n+1} P_{n-4} \right] \right)
 \end{aligned} \tag{442}$$

Grupisanjem članova:

$$\begin{aligned}
 h^4 \sigma_u^* &= \sum_{n=0}^{\infty} k_n \left(c^4 \left[\frac{a_{n-4}}{a_n} \frac{2n-7}{2n+1} \right] P_{n-4} \right. \\
 &\quad \left. + c^4 \left[\left(-2sh^2 u_0 - \frac{8}{7} \right) \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{2n-3}{2n+1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{4}{7} \frac{a_{n-3}}{a_{n+1}} \frac{2n-3}{2n+3} \right] P_{n-2} \right. \\
 &\quad \left. + c^4 \left[\left(sh^4 u_0 + \frac{4}{3} sh^2 u_0 + \frac{8}{15} \right) + \left(-\frac{4}{3} sh^2 u_0 - \frac{16}{21} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \frac{2n+1}{2n+3} + \frac{18}{35} \frac{a_{n-2}}{a_{n+2}} \frac{2n+1}{2n+5} \right] P_n \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c^4\left[(-2sh^2u_0 - \frac{8}{7})\frac{a_n}{a_{n+2}} + \frac{4}{7}\frac{a_{n-1}}{a_{n+3}}\frac{2n+5}{2n+7}\right]P_{n+2} \\
& +c^4\left[\frac{a_n}{a_{n+4}}\right]P_{n+4}
\end{aligned} \tag{443}$$

Ako se uvedu oznake

$$\begin{aligned}
q_{n-4}^1 &= c^4\frac{a_{n-4}}{a_n}\frac{2n-7}{2n+1} \\
q_{n-2}^2 &= c^4\left[(-2sh^2u_0 - \frac{8}{7})\frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{2n-3}{2n+1} + \right. \\
& \quad \left. \frac{4}{7}\frac{a_{n-3}}{a_{n+1}}\frac{2n-3}{2n+3}\right] \\
q_n^3 &= c^4\left[(sh^4u_0 + \frac{4}{3}sh^2u_0 + \frac{8}{15}) + \right. \\
& \quad \left. (-\frac{4}{3}sh^2u_0 - \frac{16}{21})\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}\frac{2n+1}{2n+3} + \right. \\
& \quad \left. \frac{18}{35}\frac{a_{n-2}}{a_{n+2}}\frac{2n+1}{2n+5}\right] \\
q_{n+2}^4 &= c^4\left[(-2sh^2u_0 - \frac{8}{7})\frac{a_n}{a_{n+2}} + \frac{4}{7}\frac{a_{n-1}}{a_{n+3}}\frac{2n+5}{2n+7}\right] \\
q_{n+4}^5 &= c^4\frac{a_n}{a_{n+4}}
\end{aligned} \tag{444}$$

dobija se

$$\begin{aligned}
h^4\sigma_u^* &= \sum_{n=0}^{\infty} k_n [q_{n-4}^1 P_{n-4} + q_{n-2}^2 P_{n-2} + q_n^3 P_n + \\
& \quad q_{n+2}^4 P_{n+2} + q_{n+4}^5 P_{n+4}]
\end{aligned} \tag{445}$$

Primenom formule za razvijanje funkcija (2.46) i (2.47) dobija se:

$$\begin{aligned}
\tau_{u\varphi}^* h^4 \sin \varphi &= c^4 (ch^2 u_0 - \cos^2 \varphi)^2 \sin \varphi \sum_{n=0}^{\infty} l_n P_{n+1}^1 \\
&= c^4 (ch^2 u_0 - \cos^2 \varphi)^2 \sum_{n=0}^{\infty} l_n \sin^2 \varphi P_{n+1}'
\end{aligned} \tag{446}$$

jer je $P_{n+1}^1 = \sin \varphi P_{n+1}'$

Analognim postupkom kao za napon σ_u^* dobija se:

$$\tau_{u\varphi}^* h^4 \sin \varphi = c^4 \sum_{n=0}^{\infty} l_n \left(\frac{a_{n-5}}{a_n} \frac{2n-9}{2n+1} \right) P_{n-5}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(\frac{10}{9} - 2ch^2u_0 \right) \frac{a_{n-3} 2n - 5}{a_n 2n + 1} + \right. \\
& \left. \frac{5 a_{n-4} 2n - 5}{9 a_{n+1} 2n + 3} - \frac{a_{n-3} 2n - 5}{a_{n+1} 2n + 3} \right] P_{n-3} \\
& + \left[\left(ch^4u_0 - \frac{6}{5} ch^2u_0 + \frac{3}{7} \right) \frac{a_{n-1} 2n - 1}{a_n 2n + 1} + \right. \\
& \left. \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5} ch^2u_0 \right) \frac{a_{n-2} 2n - 1}{a_{n+1} 2n + 3} + \right. \\
& \left. \frac{10 a_{n-3} 2n - 1}{21 a_{n+2} 2n + 5} + \left(2ch^2u_0 - \frac{6}{7} \right) \times \right. \\
& \left. \frac{a_{n-1} 2n - 1}{a_{n+1} 2n + 3} - \frac{4 a_{n-2} 2n - 1}{7 a_{n+2} 2n + 5} \right] P_{n-1} \\
& + \left[\left(ch^4u_0 - \frac{6}{5} ch^2u_0 + \frac{3}{7} \right) \frac{a_n}{a_{n+1}} + \right. \\
& \left. \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5} ch^2u_0 \right) \frac{a_{n-1} 2n + 3}{a_{n+2} 2n + 5} + \frac{10 a_{n-2} 2n + 3}{21 a_{n+3} 2n + 7} + \right. \\
& \left. \left(-ch^4u_0 + \frac{2}{3} ch^2u_0 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{4}{3} ch^2u_0 - \frac{4}{7} \right) \times \right. \\
& \left. \frac{a_n 2n + 3}{a_{n+2} 2n + 5} - \frac{18 a_{n-1} 2n + 3}{35 a_{n+3} 2n + 7} \right] P_{n+1} \\
& + \left[\left(\frac{10}{9} - 2ch^2u_0 \right) \frac{a_n}{a_{n+3}} + \frac{5 a_{n-1} 2n + 7}{9 a_{n+4} 2n + 9} + \right. \\
& \left. \left(2ch^2u_0 - \frac{6}{7} \right) \frac{a_{n+1}}{a_{n+3}} - \frac{4 a_n 2n + 7}{7 a_{n+4} 2n + 9} \right] P_{n+3} \\
& + \left[\frac{a_n}{a_{n+5}} - \frac{a_{n+1}}{a_{n+5}} \right] P_{n+5}
\end{aligned} \tag{447}$$

Uvođenjem oznaka:

$$\begin{aligned}
s_{n-5}^1 &= \frac{a_{n-5} 2n - 9}{a_n 2n + 1} c^4 \\
s_{n-3}^2 &= \left[\left(\frac{10}{9} - 2ch^2u_0 \right) \frac{a_{n-3} 2n - 5}{a_n 2n + 1} + \right. \\
& \left. \frac{5 a_{n-4} 2n - 5}{9 a_{n+1} 2n + 3} - \frac{a_{n-3} 2n - 5}{a_{n+1} 2n + 3} \right] c^4 \\
s_{n-1}^3 &= \left[\left(ch^4u_0 - \frac{6}{5} ch^2u_0 + \frac{3}{7} \right) \frac{a_{n-1} 2n - 1}{a_n 2n + 1} + \right. \\
& \left. \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5} ch^2u_0 \right) \frac{a_{n-2} 2n - 1}{a_{n+1} 2n + 3} + \frac{10 a_{n-3} 2n - 1}{21 a_{n+2} 2n + 5} + \right. \\
& \left. \left(2ch^2u_0 - \frac{6}{7} \right) \frac{a_{n-1} 2n - 1}{a_{n+1} 2n + 3} - \frac{4 a_{n-2} 2n - 1}{7 a_{n+2} 2n + 5} \right] c^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{n+1}^4 &= \left[\left(ch^4 u_0 - \frac{6}{5} ch^2 u_0 + \frac{3}{7} \right) \frac{a_n}{a_{n+1}} + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5} ch^2 u_0 \right) \frac{a_{n-1} 2n+3}{a_{n+2} 2n+5} + \frac{10 a_{n-2} 2n+3}{21 a_{n+3} 2n+7} + \right. \\
&\quad \left. \left(-ch^4 u_0 + \frac{2}{3} ch^2 u_0 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{4}{3} ch^2 u_0 - \frac{4}{7} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \frac{a_n 2n+3}{a_{n+2} 2n+5} - \frac{18 a_{n-1} 2n+3}{35 a_{n+3} 2n+7} \right] c^4 \\
s_{n+3}^5 &= \left[\left(\frac{10}{9} - 2ch^2 u_0 \right) \frac{a_n}{a_{n+3}} + \frac{5 a_{n-1} 2n+7}{9 a_{n+4} 2n+9} + \right. \\
&\quad \left. \left(2ch^2 u_0 - \frac{6}{7} \right) \frac{a_{n+1}}{a_{n+3}} - \frac{4 a_n 2n+7}{7 a_{n+4} 2n+9} \right] c^4 \\
s_{n+5}^6 &= \left[\frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+5}} \right] c^4
\end{aligned} \tag{448}$$

dobija se:

$$\begin{aligned}
\tau_{u\varphi}^* h^4 \sin \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} l_n [s_{n-5}^1 P_{n-5} + s_{n-3}^2 P_{n-3} + s_{n-1}^3 P_{n-1} \\
&\quad + s_{n+1}^4 P_{n+1} + s_{n+3}^5 P_{n+3} + s_{n+5}^6 P_{n+5}]
\end{aligned} \tag{449}$$

Na osnovu dobijenih izraza dobijaju se sistemi jednačina u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-1}^{\infty} A_n [a_{n-2}^1 P_{n-2} + a_n^2 P_n + a_{n+2}^3 P_{n+2}] + \\
&\quad C_n [b_{n-4}^1 P_{n-4} + b_{n-2}^2 P_{n-2} + b_n^3 P_n + \\
&\quad b_{n+2}^4 P_{n+2} + b_{n+4}^5 P_{n+4}] = \\
&\sum_{n=0}^{\infty} k_n [q_{n-4}^1 P_{n-4} + q_{n-2}^2 P_{n-2} + q_n^3 P_n + \\
&\quad q_{n+2}^4 P_{n+2} + q_{n+4}^5 P_{n+4}]
\end{aligned} \tag{450}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-1}^{\infty} A_n [a_{n-3}^4 P_{n-3} + a_{n-1}^5 P_{n-1} + a_{n+1}^6 P_{n+1} + a_{n+3}^7 P_{n+3}] + \\
&\quad C_n [b_{n-3}^6 P_{n-3} + b_{n-1}^7 P_{n-1} + b_{n+1}^8 P_{n+1} + \\
&\quad b_{n+3}^9 P_{n+3} + b_{n+5}^0 P_{n+5}] = \\
&\sum_{n=0}^{\infty} l_n [s_{n-5}^1 P_{n-5} + s_{n-3}^2 P_{n-3} + s_{n-1}^3 P_{n-1} + \\
&\quad s_{n+1}^4 P_{n+1} + s_{n+3}^5 P_{n+3} + s_{n+5}^6 P_{n+5}]
\end{aligned} \tag{451}$$

Određivanje koeficijenata k_n i l_n obrađuje se u posebnom prilogu [PRILOG BR. III].

Rešavanjem navedenih sistema jednačina dobijaju se konstante A_n i C_n koje figurišu u izrazima za određivanje napona. Samim tim je rešen problem određivanja koordinata tenzora napona, odnosno naponsko stanje, oko šupljine oblika izduženog rotacionog elipsoida u eliptičnom koordinatnom sistemu, a za slučaj rotaciono simetričnog opterećenja.



