

Univerzitet u Beogradu
Građevinski fakultet

Mirjana Vukičević

PRIMENA ELASTOPLASTIČNIH MODELA ZA TLO
U PRORAČUNU FLEKSIBILNIH
POTPORNIH KONSTRUKCIJA

doktorska disertacija

Beograd, 2006.

PA 19478

UJ 55194585

UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Mirjana Ž. Vukićević

PRIMENA ELASTOPLASTIČNIH MODELA ZA TLO
U PRORAČUNU FLEKSIBILNIH
POTPORNIH KONSTRUKCIJA

doktorska disertacija

Beograd
2006. godina

УНИВЕРЗИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА
"СВЕТОЗАР М. ПЕТРОВИЋ" БЕОГРАД

4 2 2014 147532



UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

PRIMENA ELASTOPLASTIČNIH MODELA ZA TLO
U PRORAČUNU FLEKSIBILNIH
POTPORNIH KONSTRUKCIJA

doktorska disertacija

Kandidat: mr Mirjana Vukićević, dipl. građ. inž.

Mentor: prof. dr Miloš Lazović, dipl. građ. inž.

PRIMENA ELASTOPLASTIČNIH MODELA ZA TLO U PRORAČUNU FLEKSIBILNIH POTPORNIH KONSTRUKCIJA

Apstrakt

U disertaciji su analizirane metode proračuna fleksibilnih potpornih konstrukcija sa posebnim osvrtom na primenu elastoplastičnih modela za tlo sa aspekta implementacije modela u metodi konačnih elemenata.

Sa stanovišta proračuna, potporne konstrukcije spadaju u red najkompleksnijih geotehničkih konstrukcija. Sadejstvo konstrukcije i tla je takvo da je konstrukcija jednim delom opterećena pritiscima tla a drugim delom oslonjena na tlo koristeći njegovu otpornost. Deformacije konstrukcije i pomeranja tla značajno utiču na raspodelu pritisaka na konstrukciju.

Razvoj proračuna fleksibilnih potpornih konstrukcija se kreće od teorije graničnih pritisaka tla , preko primene teorije elastičnosti (metode reakcije tla) do teorije plastičnosti i primene elastoplastičnih modela za tlo.

Poslednja dva pristupa proračunu je omogućio razvoj računara i numeričkih metoda proračuna konstrukcija, posebno metoda konačnih elemenata.

Poseban problem u implementaciji elastoplastičnih modela za tlo u proračunu geotehničkih konstrukcija metodom konačnih elemenata predstavlja integracija konstitutivnih relacija modela. Važnost integracije konstitutivnih relacija proističe iz toga što su osnovne nepoznate promenljive u metodi konačnih elemenata deformacije, dok su u konstitutivnim jednačinama modela osnovne nezavisne promenljive naponi.

Postoji više numeričkih metoda za integraciju konstitutivnih relacije koje manje ili više uspešno rešavaju ovaj problem, kao što su metoda trapeznog pravila, metoda srednje tačke, opšta metoda povratnog preslikavanja i razni tipovi implicitnih metoda.

U disertaciji je razrađen algoritam implicitne integracije "vodećeg parametra" (GPM metod) za modifikovani Cam-Clay model i model sa graničnom površi (Mrozz, Norris i Zienkiewicz) kao i algoritam integracije po metodi povratnog preslikavanja za model sa graničnom površi. Oba modela su ugrađena u programski paket PAK za proračun konstrukcija metodom konačnih elemenata. U PAK-u je urađen primer fleksibilne potporne konstrukcije i izvršeno upoređenje dobijenih rezultata sa primerom iz literature.

Ključne reči: fleksibilni potporni zidovi, implicitna integracija, elastoplastični modeli za tlo

APPLICATION AN ELASTO-PLASTIC MODELS FOR SOILS IN THE ANALYSIS OF EARTH RETAINING STRUCTURES

Abstract

The subject of the thesis is the analysis of methods for designing flexible retaining structures and in particular the application of an elasto-plastic models for soils using finite element method.

In terms of analysis, the retaining structures are one of the most complex geotechnical structures. The interaction retaining structure – soil is reflected in the fact that the structure is both subject to the lateral pressures of the soil and is supported by its resistance. The deformations of the structure and soil displacement significantly influence the distribution of pressures onto the structure.

The developments in the analysis of the flexible retaining structures include the theory of the limit state soil mechanics, application of the theory of elasticity (subgrade reaction method), the theory of plasticity and the use of elastoplastic models for soils.

The latter two methods of analysis were made possible by the developments of computers and numerical methods of structural analysis, and in particular the use of the finite element method.

The particular problem with the implementation of the elasto-plastic model for soils in the analysis of geotechnical structures using finite element method is the integration of constitutive relations of the model. The importance of the integration of constitutive relations arises from the fact that basic unknowns in the finite element method are deformations, while stresses are the basic unknowns in the constitutive equations of the model.

There are a number of numerical methods for integration of constitutive relations that successfully deal with this problem, such as method of trapezoid rule, midpoint rule, return mapping algorithm and different implicit methods.

The thesis develops the algorithm of the implicit integration of the "governing parameter" (GPM method) for modified Cam-Clay model and bounding surface model (Mrozz, Norris and Zienkiewicz) as well as the return mapping algorithm for the bounding surface model. Both models have been incorporated into PAK finite element structural analysis software. An example of flexible retaining structure has been produced using PAK, and the results were compared with the other analysis method.

Keywords: flexible retaining walls, implicit integration, elasto-plastic model for soils

SADRŽAJ

1. OPŠTA RAZMATRANJA PRIMENE FLEKSIBILNIH POTPORNIH KONSTRUKCIJA	1
1.1. UVOD	1
1.2. TIPOVI FLEKSIBILNIH POTPORNIH KONSTRUKCIJA KOJI SE ČESTO KORISTE U PRAKSI	3
1.2.1. Priboji	3
1.2.2. Dijafragme	5
2. METODE PRORAČUNA FLEKSIBILNIH POTPORNIH KONSTRUKCIJA	8
2.1. UVOD	8
2.2. KLASIČNE METODE PRORAČUNA FLEKSIBILNIH POTPORNIH KONSTRUKCIJA	11
2.2.1. Razvoj teorije pritisaka tla	11
2.2.2. Proračun uklještenih potpornih zidova	19
2.2.3. Proračun ankerovanih potpornih zidova	20
2.2.4. Koeficijenti sigurnosti u proračunu potpornih konstrukcija metodama granične ravnoteže	25
2.3. METODA REAKCIJE TLA	30
3. ELASTO PLASTIČNI KONSTRUKTIVNI MODELI ZA TLO	39
3.1. OPŠTE RAZMATRANJE NAPONSKO - DEFORMACIJSKOG PONAŠANJA TLA	39
3.2. PREGLED RAZVOJA ELASTOPLASTIČNIH MODELA ZA TLO	43
3.3. CAM - CLAY MODEL (OSNOVNI I MODIFIKOVANI)	48
3.4. MODEL SA GRANIČNOM POVRŠI (Mrozz, Norris, Zienkiewicz)	55
3.5. MATERIJALNI MODEL ZA GRANULARNA TLA ("CAP MODEL")	61
3.6. ELASTO PLASTIČNI MODEL SA ANIZOTROPNIM OJAČANJEM ZA GLINE I PESKOVE (PROŠIREN SEKIGUCHI - OHTA MODEL)	64
3.7. "BUBLE" MODEL ZA GLINE	69
3.8. TERMOMEHANIČKA FORMULACIJA ELASTO-PLASTIČNIH MODELA	71
4. METODE INTEGRACIJE KONSTITUTIVNIH RELACIJA ZA REŠAVANJE MATERIJALNO NELINEARNIH PROBLEMA METODOM KONAČNIH ELEMENATA	76
4.1. UVOD	76
4.2. METODA GENERALIZOVANOG TRAPEZNOG PRAVILA	80
4.3. METODA GENERALIZOVANOG PRAVILA SREDNJE TAČKE	82
4.4. METODA POVRATNOG PRESLIKAVANJA	84
4.5. IMPLICITNE METODE	87

4.5.1. Metoda vodećeg parametra (GPM metoda)	87
5. INTEGRACIJA KONSTITUTIVNIH RELACIJA ZA MODIFIKOVANI CAM-CLAY MODEL I MODEL SA GRANIČNOM POVRŠI (MROZZ, NORRIS, ZIENKIEWICZ)	92
5.1. IMPLICITNA METODA VODEĆEG PARAMETRA (GPM METODA) ZA MODIFIKOVANI CAM-CLAY MODEL	92
5.2. INTEGRACIJA KONSTITUTIVNIH RELACIJA ZA MODEL SA GRANIČNOM POVRŠI (MROZZ, NORRIS I ZIENKIEWICZ)	99
5.2.1. Implicitna metoda vodećeg parametra (GPM)	99
5.2.2. Metoda povratnog preslikavanja	105
5.3. PRIMER PRORAČUNA POTPORNE KONSTRUKCIJE	107
ZAVRŠNI KOMENTARI I ZAKLJUČCI	112
Literatura	113

1. OPŠTA RAZMATRANJA PRIMENE FLEKSIBILNIH POTPORNIH KONSTRUKCIJA

1.1. UVOD

Potporne konstrukcije spadaju u posebnu grupu geotehničkih konstrukcija. Potporne konstrukcije su privremene ili trajne konstrukcije koje podupiru zemljanu masu ili stenu pod vertikalnim ili strmim zasekom, kao i nasuto tlo koji u predviđenoj geometriji ne mogu sami da održe zahtevanu stabilnost.

Potporne konstrukcije imaju široku primenu skoro u svim oblastima građevinarstva: u zgradarstvu kao privremene i trajne zaštitne konstrukcije temeljnih jama (naročito u gradskim sredinama); u oblasti puteva i železnica kao potporni zidovi kod zaseka, useka i nasipa; u mostogradnji kao zagatni zidovi ili priboji prilikom izvođenja temelja stubova, kao pristupne konstrukcije; pri sanaciji klizišta; u hidrotehnici kao kejski zidovi i td.

Potporne konstrukcije se mogu generalno podeliti u tri osnovna tipa (Eurocod 7-1, 2004):

Gravitacioni (masivni) potporni zidovi

To su masivni zidovi od kamena, opeke, nearmiranog ili armiranog betona koji imaju temeljnu stopu sa ili bez proširenja. Suština projektovanja ovakvih zidova je da sopstvena težina zida igra presudnu ulogu u obezbeđivanju stabilnosti tla iza zida. Odgovarajućom veličinom i oblikom poprečnog preseka može se angažovati i deo zemljane mase iza zida u povećanju stabilnosti.

Fleksibilni (ukopani) potporni zidovi

To su relativno tanki zidovi od čelika, armiranog betona ili drveta. Izvode se kao konzolni, ili sa podupiračima, razupiračima ili ankerima. Osnovni razlog ukopavanja potpornih zidova je da se mobiliše pasivni otpor tla i da se na taj način ostvari potrebna stabilnost tla koji se podupire. U tom slučaju se ukupna visina potporne konstrukcije znatno povećava, tako da se u samoj konstrukciji javljaju značajni momenti savijanja i transverzalne sile. Zbog toga se za takve potporne zidove koriste materijali koji imaju veliku nosivost na savijanje.



Kompozitne potporne konstrukcije

Ove vrste konstrukcija uključuju zidove konstruisane od elementa gornja dva navedena tipa zidova, kao i poseban tip kompozitnih konstrukcija od armiranog tla, geotekstila i cementiranog tla.

Tema doktorske disertacije je vezana za drugu grupu, fleksibilne (ukopane) potporne konstrukcije, pa će se u tački 1.2. dati kratak opis tipova fleksibilnih konstrukcija koji se često koriste u praksi.

1.2. TIPOVI FLEKSIBILNIH POTPORNIH KONSTRUKCIJA KOJI SE ČESTO KORISTE U PRAKSI

1.2.1. Priboji

Priboji su fleksibilne potporne konstrukcije koje se često koriste u nepovoljnim geotehničkim uslovima kao privremene ili trajne konstrukcije. Elementi priboja (talpe) se pobijaju u tlo, tako da se vrlo uspešno mogu koristiti i u uslovima visokog nivoa podzemne vode, kao zaštita temeljnih jama prilikom izvođenja konstrukcija u otvorenoj vodi (na pr. temelji rečnih stubova, kejski zidovi, molovi i td). Izvode se od različitih vrsta materijala:

- Čelični priboj

Najčešće se izvodi u uslovima iskopa u prisustvu vode gde treba obezbediti rad u suvom. Ovaj tip konstrukcije u tim slučajevima ima brojne prednosti: veliki izbor različitih oblika poprečnih preseka čime se dobija potrebna krutost na savijanje, ne javlja se izvijanje prilikom pobijanja, moguće su različite kombinacije za povećanje krutosti, relativno mala težina, mogućnost povećanja dužine, mogućnost izvlačenja talpi i ponovnog korišćenja kod privremenih konstrukcija i td.

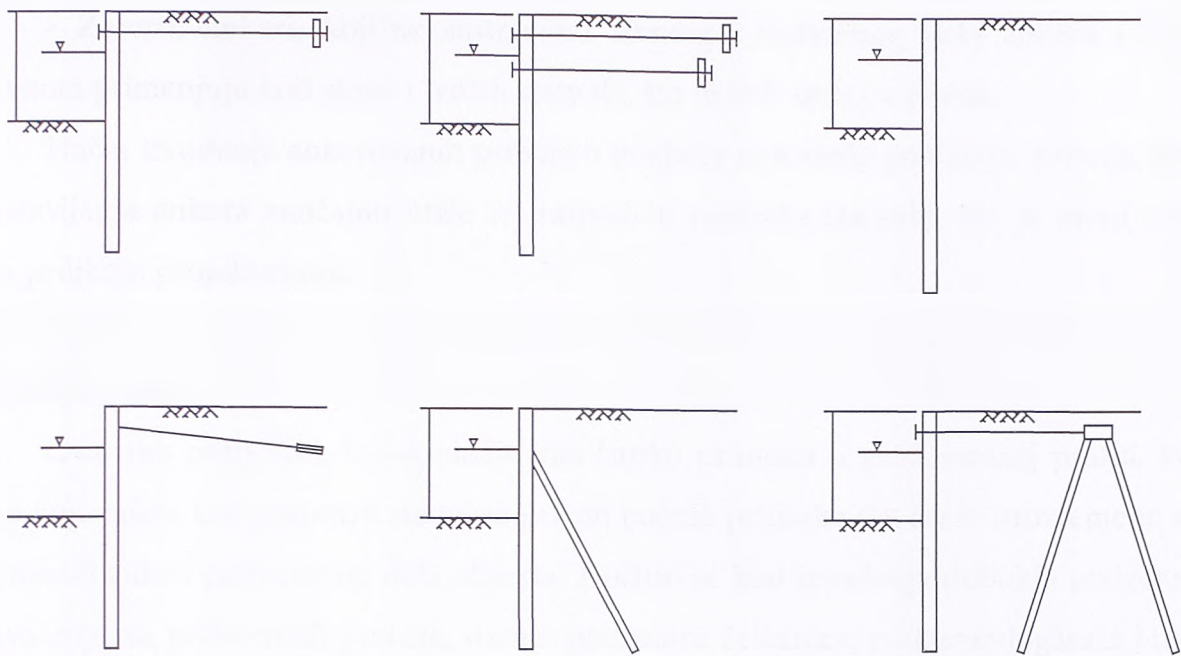
- Priboj od armiranobetonskih talpi

Koristi se za izvođenje trajnih konstrukcija. Mnogo se ređe koriste od čeličnih priboja jer u odnosu na njih imaju nedostatke, pre svega veliku težinu talpi i mnogo teže pobijanje. Izvode se i od prethodno napregnutog betona zbog eliminisanja prslina i zategnutih zona čime se smanjuje mogućnost korozije armature.

- Priboj od drvenih talpi

Koristi se retko u savremenoj praksi, kao privremena konstrukcija. Obično se izvode do dubine iskopa do 2-3m.

U zavisnosti od dubine iskopa, osobina tla, veličine i vrste opterećenja, materijala konstrukcije priboji se izvode kao konzole ili sa jednim ili više redova ankera. Nekoliko primera priboja različitih tipova dato je na sl. 1.1



Sl. 1.1 Različiti tipovi priboja

- *Konzolni tip priboja* je najjednostavniji za izvođenje.

Ovaj tip konstrukcije je ekonomičan za relativno male dubine iskopa do 5m. Sa povećanjem konzolne visine zida, osim što se povećava ukupna dužina priboja, potreban moment inercije poprečnog preseka rapidno raste, jer se moment savijanja povećava sa kubom konzolne visine.

Problem koji se javlja kod ovog tipa priboja su i velika bočna pomeranja.

Konzolni priboj je pogodniji za privremene konstrukcije.

- *Ankerovani tip priboja* se češće koristi za trajne konstrukcije, kao i za veće dubine iskopa. Ovi tipovi zidova se mogu izvesti i za visine iskopa do 20m u zavisnosti od uslova tla. Ankeri bitno utiču na smanjenje bočnih pomeranja, momenata savijanja i dubine ukopanja u odnosu na konzolne zidove.

Pored navedenih prednosti, kod ankerovanih priboja glavni problem predstavljaju ankeri kako u projektovanju tako i u izvođenju. U praksi postoje brojni primeri loše projektovanih i loše izvedenih ankera.

Ankeri se obično postavljaju blizu vrha zida (jedan ili više redova) i ima ih različitih tipova. Najčešće se koriste sledeći tipovi:

- Ankeri sa anker blokom (ili armirano betonskom gredom). Umesto anker bloka mogu se koristiti šipovi, vertikalne ploče od armiranog betona i td. Moraju se postavljati dovoljno daleko od zida da bi se izbeglo preklapanje zona pasivnog otpora tla ispred anker bloka i aktivnog pritiska iza zida.

- Zatezni ankeri, koji se sastoje od fiksnog i slobodnog dela ankera i koji se uglavnom primenjuju kod stena i tvrdih vrsta tla, što je ređi slučaj u praksi.

Način izvođenja ankerovanih priboja u pogledu redosleda pobijanja priboja, iskopa i postavljanja ankera značajno utiče na raspodelu pritisaka iza zida, što se mora uzeti u obzir prilikom projektovanja.

1.2.2. Dijafragme

Ovaj tip potpornih konstrukcija ima široku primenu u građevinskoj praksi. Pored uloge koje imaju kao potporni zidovi za prijem bočnih pritisaka tla, često istovremeno služe kao noseći zidovi podzemnog dela objekta. Koriste se kod izvođenja dubokih podzemnih delova objekta, podzemnih prolaza, stanica podzemne železnice, podzemnih garaža i td.

Iskustvo izvođenja dijafragmi u gradskim uslovima pokazuju da se mogu uspešno primeniti u uslovima ograničenog prostora kao i kad se radi o lošim geotehničkim uslovima.

U praksi se koriste različiti tipovi dijafragmi:

- betonirane na licu mesta
- od prefabrikovanih elamenata
- zidovi od bušenih šipova
- kompozitni zidovi

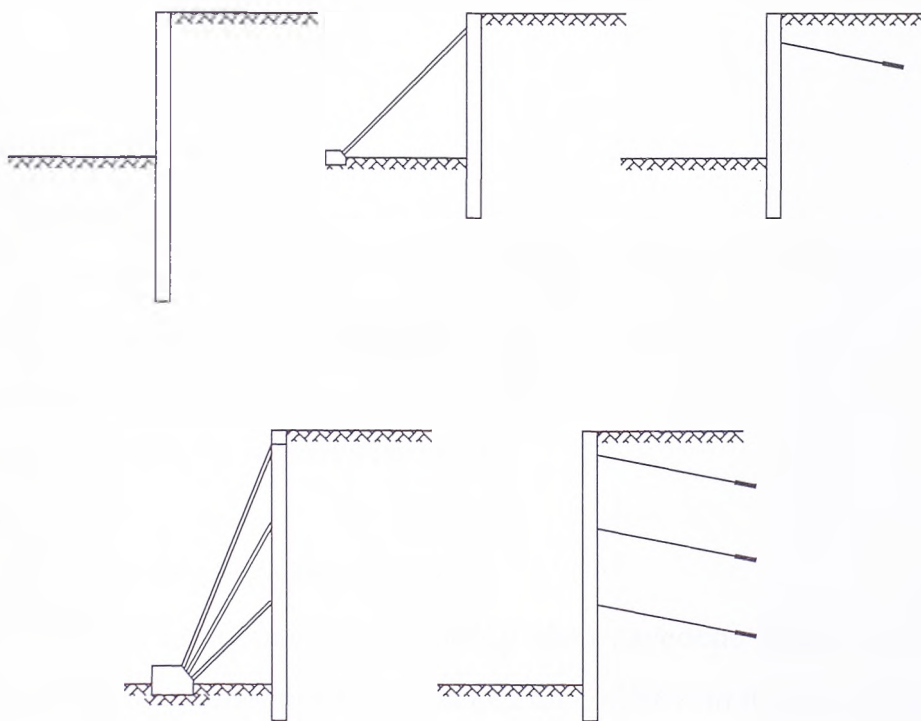
- *Dijafragme betonirane na licu mesta* se vrlo često koriste u praksi. Izvode se fazno u segmentima prema prethodno utvrđenom redosledu i na način koji obezbeđuje kontinuitet zida. U fazi iskopa se bočne strane iskopa obezbeđuju od zarušavanja korišćenjem isplake od bentonitske suspenzije. Da pri površini objekta ne bi došlo do obrušavanja tla obavezno se pre početka iskopa izvodi armirano betonska uvodnica.

- *Dijafragme od armirano betonskih prefabrikovanih elamenata* se ređe koriste je su pre svega ograničene težinom prefabrikovanih elemenata. Maksimalne dužine su reda veličine 15m.

- *Zidovi od bušenih šipova* imaju široku primenu zbog prednosti da se mogu izvoditi u skoro svim uslovima u tlu. Šipovi mogu biti na međusobnom osnom rastojanju većem od prečnika, mogu da se dodiruju ili preklapaju u zavisnosti od uslova u tlu, opterećenja i potrebe kontrole podzemne vode. Preko šipova se uglavnom izvodi naglavna greda zbog ravnomernog prenošenja opterećenja na šipove.

- *Kompozitni zidovi* su kombinacija konvencionalnih i drugih strukturnih elemenata. Mada su obično skuplji od standardnih zidova od dijafragmi, u nekim slučajevima mogu opravdati svoju primenu, na primer gde ograničeni prostor i vreme isključuju standardne postupke i elemente.

Dijafragme se mogu projektovati u obliku konzolnih zidova, sa podupiračima, razupiračima ili ankerovanjem zidova. Šematski prikaz nekih tipova dijafragmi je dat na sl. 1.2.



Sl. 1.2 Različiti tipovi dijafragmi ili zidova od bušenih šipova

Najjednostavniji za izvođenje je, svakako, konzolni tip dijafragme kojim se u isto vreme obezbeđuje maksimalno slobodan prostor u samom iskopu. Ograničenja ovog tipa se odnose na maksimalnu visinu branjenog iskopa koja je oko 10m, uslovljena rapidnim povećanjem momenta savijanja i dubinom ukopavanja za obezbeđenje dovoljnog pasivnog otpora tla, odnosno uklještenja. Konzolni zidovi od bušenih šipova se koriste do dubine iskopa do 5-6 m.

U slučaju dubljih iskopa i nepovoljnih uslova tla koriste se podupirači, razupirači ili ankeri kojima se redukuje dubina ukopavanja, bočna pomeranja i momenti savijanja. Upotrebom podupirača se smanjuje radni prostor u temeljnoj jami, ali se sa druge strane, obezbeđuje pouzdaniji potporni sistem.

Ima više načina podupiranja, odnosno razupiranja dijafragmi: podupiranja kosnicima, poprečnim dijagramama, bermama, betonskih tavanicama podzemnih etaža i td.

Ankerima se izbegava opstrukcija radnog prostora, ali zavisno od uslova u tlu može da se dobije mnogo deformabilniji potporni sistem. Osim toga tehnologija izvođenja ankera je znatno skuplja. U situacijama gde se koriste, ukoliko je potrebno, može se instalisati više redova ankera na različitim visinama.

Izbor načina podupiranja, ankerovanja ili razupiranja kao i redosled izvođenja konstrukcije bitno utiče na pomeranja i raspodelu pritisaka tla duž dijafragme.

Na izbor nekog od navedenih tipova potpornih konstrukcija utiču mnogi faktori kao što su:

- Dubina iskopa
- Geomehaničke osobine tla
- Hidrogeološki uslovi
- Blizina postojećih objekata
- Raspoloživ prostor za konstrukciju
- Iskustvo i lokalna praksa
- Raspoloživa oprema i tehnika izvođenja
- Cena

Neki od faktora su međusobno zavisni.

Optimalan izbor konstrukcije, uzimajući u obzir navedene faktore, zavisi od stepena pouzdanosti predviđanja ponašanja konstrukcije i tla u njihovom međusobnom sadejstvu.



2. METODE PRORAČUNA FLEKSIBILNIH POTPORNIH KONSTRUKCIJA

2.1. UVOD

Projektovanje potpornih konstrukcija zahteva poznavanje teorije mehanike tla, ponašanja konstrukcije, metoda izvođenja i ograničenja teorijskih rešenja kao i iskustvo.

Jedan od osnovnih uslova uspešnog projektovanja je uspešna identifikacija situacija i mehanizama koji mogu da se pojave u konstrukciji ili njenom delu a koji su kritični u odnosu na nosivost, upotrebljivost ili trajnost konstrukcije.

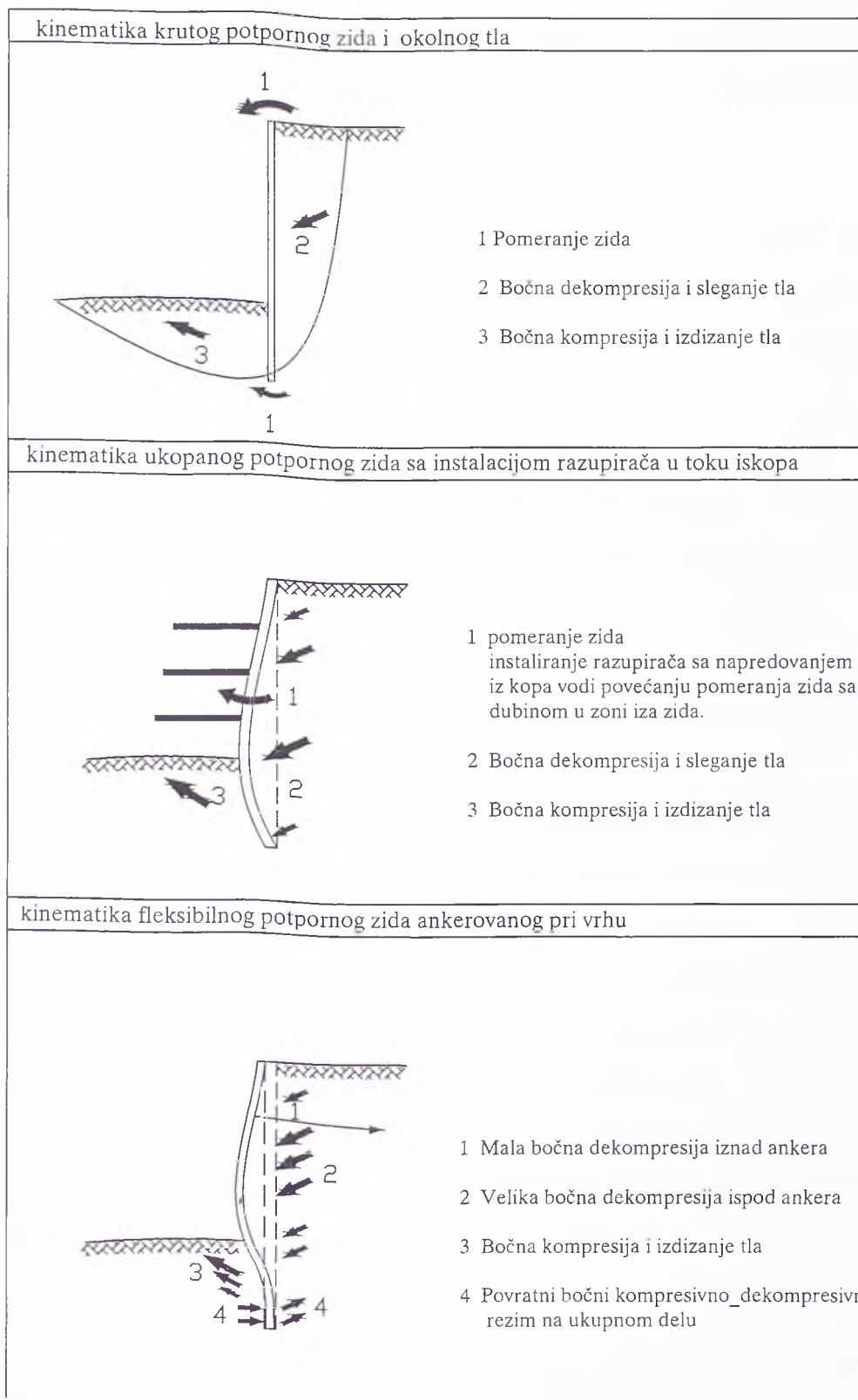
Fleksibilne potporne konstrukcije sa tog stanovišta spadaju u red najkompleksnijih geotehničkih konstrukcija.

Sadejstvo konstrukcije i tla je takvo da je konstrukcija jednim delom opterećena pritiscima tla a drugim delom oslonjena na tlo koristeći njegovu otpornost. Deformacije konstrukcije i pomeranja tla značajno utiču na raspodelu pritisaka na konstrukciju. Osim toga i metode izvođenja potporne konstrukcije mogu u velikoj meri uticati na raspodelu pritisaka.

Složenost analize ponašanja ovih konstrukcija se povećava ukoliko se u neposrednoj blizini nalaze postojeći objekti (što je čest slučaj u gradskim sredinama), jer postoji uticaj tih objekata na potpornu konstrukciju kao i uticaj sleganja tla iza konstrukcije na postojeće objekte.

Ključnu ulogu u analizi ponašanja potpornih konstrukcija ima ponašanje tla pa je pristup rešavanju ovog problema vezan za teorijski razvoj mehanike tla. Dominantna izgradnja masivnih, gravitacionih potpornih zidova sve do početka dvadesetog veka je potstakla razvoj teorije pritisaka tla a pre svega aktivnog pritiska tla na konstrukciju. Odgovori koji su dati u to vreme preko teorije graničnih pritisaka tla (Coulomb, Rankine, Boussinesq) su obezbeđivali zadovoljavajuće metode za rešavanje problema: gravitacioni potporni zidovi su krute konstrukcije koje generalno rotiraju usled dejstva bočnih pritisaka tla izazivajući bočnu dekompresiju tla i formiranje aktivne klizne ravni.

Na početku dvadesetog veka, razvoj fleksibilnih potpornih konstrukcija nameće nova pitanja vezana za interakciju konstrukcije i tla. Uvodi se pojam pasivnog otpora tla koji se javlja kao odgovor tla na ukopanom delu konstrukcije, odnosno u teorijsko razmatranje se uvodi kinematička rotacija zida oko vrha.



Sl. 2.1 Interakcija tla i potpornog zida

Sa pojavom fleksibilnih konstrukcija se dodaju nove forme interakcije onima koje su već poznate u slučaju gravitacionih zidova (sl. 2.1.).

Identifikacija novih aspekata interakcije tlo - potporni zid i pokušaj traženja rešenja na osnovu generalnih metoda, obeležavaju proces razvoja metoda za proračun fleksibilnih potpornih zidova.

Taj razvoj se kretao u četiri pravca:

- U početku, proračun se bazirao na tradicionalnoj teoriji vezanoj za potporne zidove koja je zasnovana u 19. - om veku. Ti radovi koriste postojeće teorije aktivnog i pasivnog pritiska dodajući statiku i otpornost materijala. To vodi razvoju tzv. "klasičnih" metoda.

- Drugi pravac vodi ka kombinaciji navedenih klasičnih metoda i teorije elastičnosti. Klasični pristup se kasnije povezo sa pristupom zasnovanim na konceptu teorije elastičnosti ili koeficijentu reakcije tla (koef. posteljice), koji se razvijao od kraja 19-og veka.

Neka ponuđenja rešenja teorije elastičnosti ostaju samo u domenu teorije do polovine 20-og veka, jer se mogućnost praktične primene u projektovanju javljaju tek sa pojavom računara 60-tih godina dvadesetog veka.

- Ograničenja samih teorijskih rešenja ali i ograničenost njihovog korišćenja su podstakla razvoj empirijskih metoda. One se razvijaju tokom celog prošlog veka i igraju ulogu u stvaranju referentnog okvira za praćenje ponašanja konstrukcije.

- Četvrti pravac u proračunu potpornih kao i drugih geotehničkih konstrukcija počinje da se zasniva sedamdesetih godina prošlog veka zahvaljujući razvoju numeričkih metoda, a pre svega metode konačnih elemenata i razvoju računara.

Prednosti koje su pružile numeričke metode uz podršku računara, omogućile su praktično korišćenje već postojećih rešenja teorije elastičnosti kao i razvoj mnogo složenijih konstitutivnih modela za tlo koji su nastali iz teorije plastičnosti.

2.2. KASIČNE METODE PRORAČUNA FLEKSIBILNIH POTPORNIH KONSTRUKCIJA

2.2.1. Razvoj teorije pritisaka tla

Kao što je navedeno, klasične metode proračuna se zasnivaju na teoriji zemljanih pritisaka čiji počeci datiraju još od kraja 18-og veka a koristi se u proračunima potpornih konstrukcija vrlo često i danas.

Coulomb je 1776. god. objavio rad koji sadrži dve ideje od fundamentalnog značaja u razvoju mehanike tla:

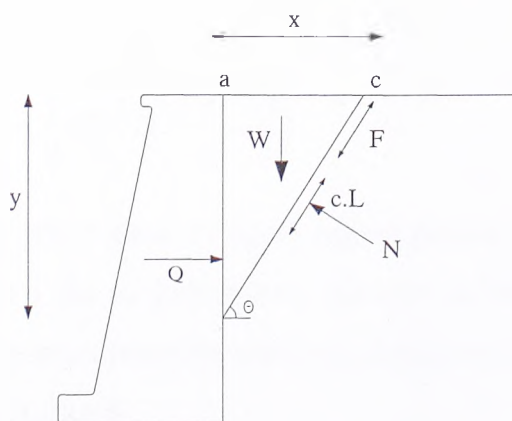
Prva ideja je bila vezana za smičuću otpornost materijala koju je podelio na dve komponente: koheziju (otpornost nezavisnu od ampiciranih sila i proporcionalnu površini smicanja) i trenje (proporcionalno silama pritiska na ravni loma).

$$\tau = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + c \quad (2.1a)$$

Taj koncept je ostao osnova teorije otpornosti tla i danas, s tim što se u originalnom Coulomb-ovom radu smičuća otpornost tla definiše preko totalnih napona, dok se danas, posle uvođenja principa efektivnih napona (Terzaghi, 1941) definiše preko efektivnih napona.

$$\tau' = \sigma'_n \operatorname{tg} \varphi + c \quad (2.1b)$$

Druga Coulomb-ova ideja se odnosi direktno na potporne konstrukcije razmatrajući krutu masu tla koja klizi po smičućoj površi iza krutog potpornog zida (sl. 2.2.).



Sl. 2.2 Geometrija za Coulomb-ovu analizu

Razmatrajući ravnotežu sila u pravcu ravni smicanja i upravno na nju, Coulomb je dobio izraze za silu Q koja deluje na zid. Nagib površi smicanja je dobio iz uslova da je sila Q maksimalna kad se iza zida formira klin.

Za granularno tlo ($C' = 0$)

$$N = W \cos \theta + Q \sin \theta \quad (2.2)$$

$$T = W \sin \theta - Q \cos \theta \quad (2.3)$$

Iz 2.2 i 2.3

$$\frac{T}{N} = \frac{W \sin \theta - Q \cos \theta}{W \sin \theta + Q \sin \theta} = \operatorname{tg} \varphi \quad (2.4)$$

Diferenciranjem po θ dobija se maksimalna veličina sile Q

Kako je:

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \operatorname{ctg} \theta \quad (2.5)$$

$$Q = \frac{1}{2} \gamma H^2 \operatorname{ctg} \theta \operatorname{tg}(\theta - \varphi) \quad (2.6)$$

$$\frac{\delta Q}{\delta \theta} = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left(\frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin^2(\theta - \varphi)} - \frac{\operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\cos^2 \theta} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Iz jednačine (2.7.) se dobija da je maksimalna sila Q_a za ugao θ

$$\theta = 45 + \frac{\varphi}{2} \quad (2.8)$$

i iznosi:

$$Q_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{1}{2} \gamma H^2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.9)$$

Coulomb je direktno izveo izraz za ugao nagiba površi smicanja iza zida i pokazao da to važi za nevezano kao i tlo sa kohezijom. Ako se za koherentno tlo postavi uslov ravnoteže sila koje deluju u pravcu površine smicanja dobija se da je:

$$Q_a = \frac{W[\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \varphi] - cL/\cos \theta}{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \varphi} \quad (2.10)$$

Iz uslova za maksimalnu silu Q_a , $\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0\right)$ dobija se ista veličina ugla θ kao u jednačini (2.8).

Zamenjujući ugao θ u jednačinu (2.8), i posle elementarnih matematičkih transformacija dobija se izraz za ukupnu silu koja deluje na zid:

$$Q_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - 2cH \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} \quad (2.11)$$

Diferencirajući prethodnu jednačinu po z dobija se izraz za promenu aktivnog pritiska tla sa dubinom z .

$$P_a = \frac{dQ}{dz} = \gamma \cdot z \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} - 2c \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} = \gamma \cdot z \cdot \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - 2c \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.12)$$

Coulomb je naglašavao da kritična površ smicanja ne mora biti ravna, ali da je iskustveno bliska ravni i da to može da bude dovoljno dobra aproksimacija.

Coulomb-ova analiza se može proširiti na predviđanje pasivnog pritiska i sila u slučaju pomeranja zida prema tlu. Na isti način, iz uslova ravnoteže sila, pretpostavljajući ravnu površ smicanja dobijaju se izrazi za ukupnu minimalnu pasivnu silu otpora tla iza zida i kritični ugao površi smicanja.

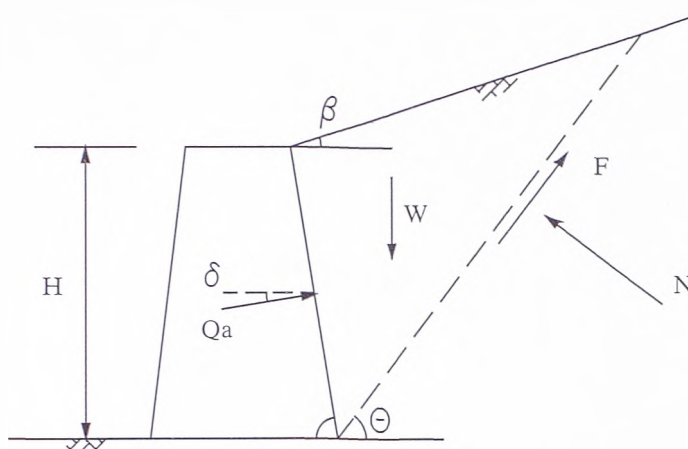
$$\theta = 45 - \frac{\varphi}{2} \quad (2.13)$$

$$Q_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + 2c \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} \quad (2.14)$$

Diferencirajući Q_p po z dobija se promena pasivnog pritiska tla sa dubinom.

$$P_p = \frac{dQ}{dz} = \gamma \cdot z \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + 2c \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} = \gamma \cdot z \cdot \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + 2c \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.15)$$

Kasnije je, početkom 19-og veka Coulomb-ov rad proširen (Mayniel, 1808) na najopštiji slučaj zida gde postoji trenje između zida i tla, a početkom 20-og veka (Müller-Breslau, 1906) i na slučaj zida iza koga je tlo pod kosinom (za nekoherentno tlo), sl. 2.3.



Sl. 2.3 Muller-Breslau-ovo rešenje za nevezano tlo

$$Q_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{f_1}{\sin \alpha \cos \delta} \quad (2.16)$$

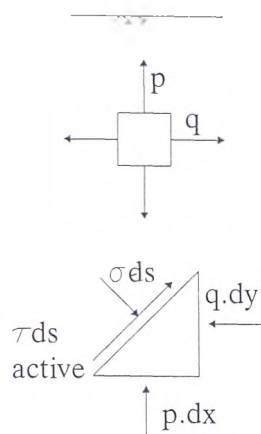
$$f_1 = \frac{\sin^2(\alpha + \varphi) \cos \delta}{\sin \alpha \sin(\alpha - \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\sin(\alpha - \delta) \sin(\alpha + \beta)}} \right]^2}$$

$$Q_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{f_2}{\sin \alpha \cos \delta} \quad (2.17)$$

$$f_2 = \frac{\sin^2(\alpha - \varphi) \cos \delta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \delta) \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi + \beta)}{\sin(\alpha + \delta) \sin(\alpha + \beta)}} \right]^2}$$

Rešenja dobijena Coulom-ovom teorijom su se zasnivala na totalnim naponima, na pretpostavci da je smičući klin tla krut i da je površ smicanja ravna.

Rankine (1857) je publikovao rad kojim je proširio teoriju pritisaka tla iza potpornih zidova, izvođenjem rešenja pod pretpostavkom da je u svakoj tački mase tla iza zida ispunjen uslov granične ravnoteže, sl. 2.4.



Sl. 2.4 Pritisци na element tla za Rankine-ovu analizu

Razmatrajući ravnotežu sila elementa tla dimenzija dx, dz uz uslov da je pri lomu

$$\frac{\tau}{\sigma'} = \text{tg}\varphi \tag{2.18}$$

dobio je rešenje

$$\sin \varphi = \frac{p - q_a}{p + q_a} \tag{2.19}$$

Definišući koeficijent aktivnog pritiska tla kao $K_a = \frac{q_a}{p}$ iz (2.19) se dobija

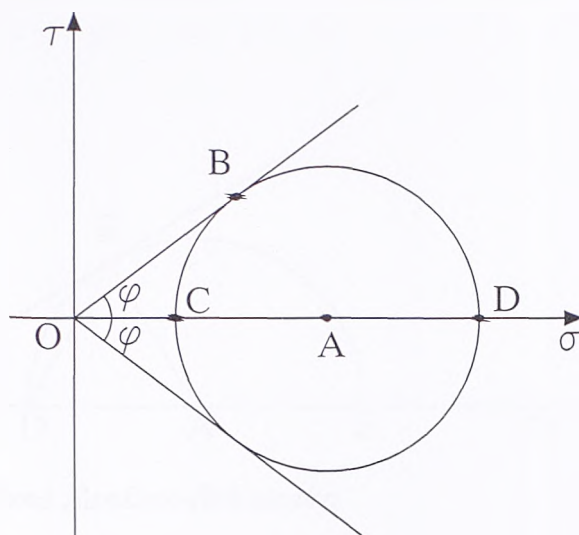
$$K_a = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \tag{2.20}$$

Ako se uzme u obzir da je $p = \gamma \cdot t$ i $q_a = K_a \cdot p$ integracijom pritisaka q_a do dubine $z=H$, dobija se isto rešenje za ukupnu aktivnu silu kao prema Coulomb-ovoj teoriji

$$Q_a = \int_{z=0}^{z=n} q_a dz = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \tag{2.21}$$

Uvođenjem Mohr-ovih krugova (1882) u grafičko predstavljanje naponsko deformacijskog stanja u tački dobijena je osnova za potpunije sagledavanje Rankine-ove teorije pritisaka tla.

Na sl. 2.5. je prikazan Mohr-ov krug za uslove aktivnog loma za nevezano tlo. Za taj uslov vertikalni napon (p) koji predstavlja težinu tla, ostaje nepromenjen dok se horizontalni napon redukuje dok se ne uspostavi granično stanje (Mohr-ov krug tangira Coulom-ovu pravu), $q = q_a$.



Sl. 2.5 Mohr-ov krug napona za stanje aktivnog loma

Iz ove analize se može videti da, prema Rankine-ovoj teoriji, naponi p i q_a predstavljaju glavne napone, što znači da se teorija može primeniti samo na glatke zidove gde nema trenja između zida i tla, jer su samo u tom slučaju vertikalni i horizontalni naponi ujedno i glavni naponi.

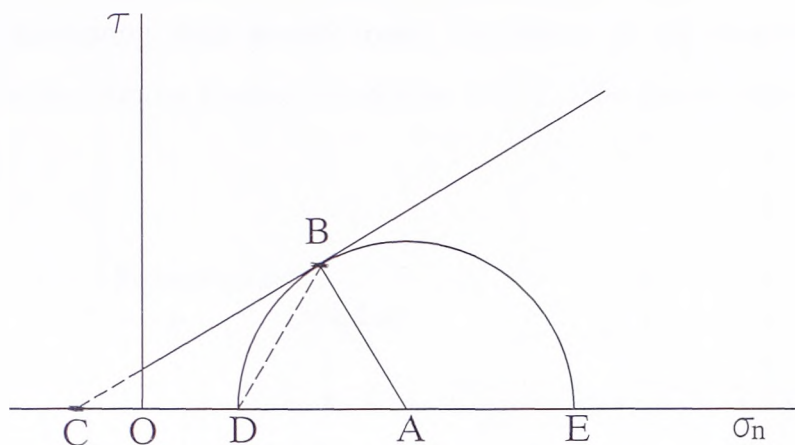
Bell (1915) je proširio Rankine-ovu teoriju na vezana tla, uvodeći i koheziju. Sproveo je veliki broj opita direktnog smicanja u nedreniranim uslovima na glinama i došao do izraza za smičuću otpornost

$$q_1 = k + p_n \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (2.22)$$

Ne ulazeći u izvođenje koja se relativno jednostavno mogu sprovesti (sl. 2.6), dobija se za aktivno stanje pritiska

$$q_a = K_a \cdot p - 2c\sqrt{K_a} \quad (2.23)$$

Bell je, takođe pokazao kao i Coulomb, da kohezija nema efekat na orijentaciju ravni loma.



Sl. 2.6 Aktivni lom prema Rankine-Bell analizi

Krajem osamnestog i prvom polovinom devetnestog veka težište teorije pritisaka tla na potporne zidove je bilo na definisanju aktivnih pritisaka. Međutim, sa pojavom ukopanih potpornih zidova otvorilo se pitanje proračuna pasivnog otpora tla. Najjednostavnije je bilo proširiti Coulom-ov metod za aktivne pritiske tla koristeći "zakon maksimuma i minimuma" i pretpostavke o ravnoj površi loma.

Međutim, hipoteza o ravnoj površi loma za proračun pasivnog pritiska ne samo da ne daje dovoljno dobru aproksimaciju, nego ne daje konzervativno rešenje. Pokazalo se da korišćenje izlomljenih linija, krugova, logaritamske spirale, i kombinacija ravnih površi u logaritamskih spirala obezbeđuje niži minimum otpora tla od pretpostavke o ravnoj površi loma. Metode proračuna pasivnog otpora tla se razvijaju u prvoj polovini 20-og veka, mada se baziraju i na radovima Boussinesq-a (1882) s kraja 19-og veka.

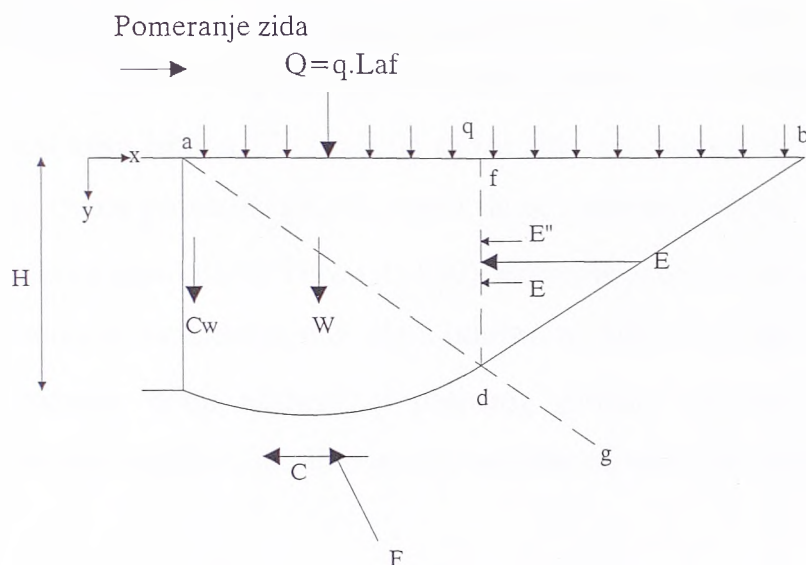
Caquot (1934) i Caquot i Kerisel (1948) su publikovali tablice aktivnih i pasivnih koeficijenata sračunatih koristeći Boussinesq-ova teorijska razmatranja sa proširenjem i na slučaj tla sa kohezijom. Rezultati njihovog rada se i danas široko koriste i sastavni su deo tehničkih pravilnika i priručnika iz ove oblasti u velikom broju zemalja.

Osnove metode Caquot-a i Kerisel-a su sledeće:

Tlo iza zida ima otpornost izraženu preko parametara ϕ i c , postoji athezija c_w i trenje između zida i tla izražena preko ugla trenja δ .

Na sl. 2.7 je prikazana pretpostavljena površ loma. Jedan deo površi loma je ravan (db), pod uglom $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$ prema horizontali i u toj oblasti je ispunjeno pasivno Rankine-ovo stanje. Ostali deo površi se predstavlja konkavnom zakrivljenom površi cd sa tangentom u tački d u pravcu db. Osnovna pretpostavka u ovom postupku se odnosi na

definisane zakrivljenog dela površi loma. Prvobitno je taj deo opisan logaritamskom spiralom, a kasnije i delom kružne cilindrične površi. Obe površi obezbeđuju aproksimaciju iste tačnosti.



Sl. 2.7 Zakrivljena površ loma za proračun rezultante pasivnog otpora tla

Kao nepoznate veličine se javljaju sila pasivnog otpora tla P_p koja deluje na zadnjoj strani zida (veličina i napadna linija) kao i sila F (veličina i napadna linija). Imajući u vidu tri uslova ravnoteže, za određivanje svih nepoznatih veličina uvodi se dodata aproksimacija koja se odnosi na način određivanja veličine P_p .

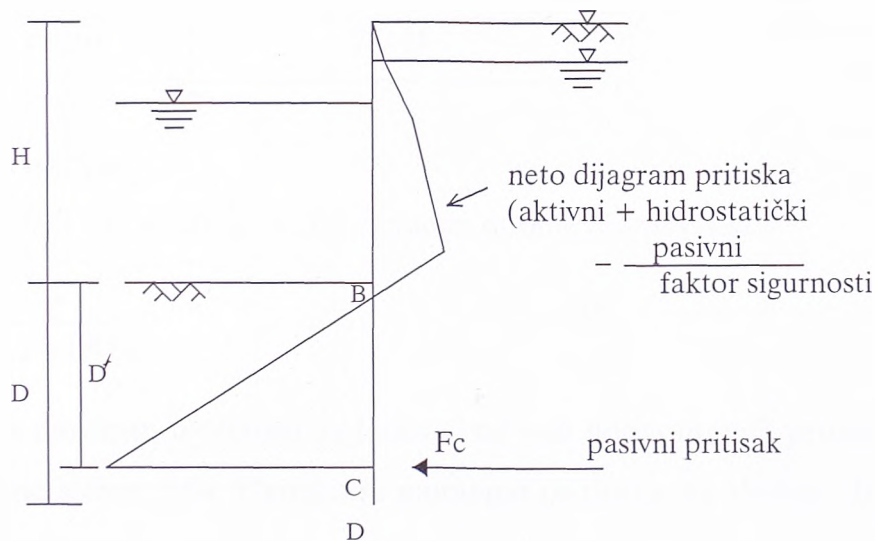
Primenjujući opisanu metodu Caquot i Kerisel (1948) su izdali tablice koeficijenata aktivnog (K_a) i pasivnog (K_p) pritiska tla za različite uslove unutrašnjeg trenja φ , uglova trenja između zida i tla δ i uglova nagiba tla iza zida β .

Sve prikazane metode proračuna pritisaka tla su zasnovane na uslovu granične ravnoteže, odnosno na ispunjenosti uslova za mobilisanje aktivnog pritiska i pasivnog otpora tla. One, međutim, ne razmatraju uticaj pomeranja zida na veličinu i raspodelu pritisaka tla i ne daju nikakvu indicaciju o ponašanju konstrukcije i tla u uslovima između graničnih stanja. Bez obzira na ove nedostatke, navedene metode proračuna pritisaka tla predstavljaju i danas široko primenjen standardni postupak u proračunu fleksibilnih potpornih konstrukcija. U sledećim tačkama 2.2.2 i 2.2.3. je dat proračun nekih tipova fleksibilnih potpornih konstrukcija zasnovanih na raspodeli pritisaka tla prema stanju granične ravnoteže.

2.2.2. Proračun uklještenih potpornih zidova

Postupak je zasnovan na Blum-ovoj metodi (1931) nepomerljivog oslonca tla kao njen specijalni slučaj. Blum-ova metoda je detaljnije izložena u tački (2.2.3.).

Prema ovoj metodi potporni zid se tretira kao kruta konstrukcija koja rotira oko neke tačke ispod kote iskopa. To znači da se iza zida, na jednom delu javlja pasivni otpor tla. Prema Blum-ovom postupku pasivni otpor tla se zamenjuje silom F_c koja deluje na zid na nekom rastojanju iznad donje ivice (sl. 2.10). Potrebna dubina ukopavanja zida se dobija iz jednačine ravnoteže momenata svih sila u odnosu na tačku C (napadna tačka sile F_c). U dijagram opterećenja, osim aktivnog i pasivnog pritiska tla ulazi i pritisak od vode (hidrostatički, hidrodinamički) ukoliko je nivo podzмене vode iznad kote iskopa.



Sl. 2.10 Pretpostavke za proračun konzolnog zida

Pasivni otpor tla se mora računati sa određenim koeficijentom sigurnosti jer njegova mobilizacija zavisi od ostvarenih deformacija konstrukcije i tla. Koeficijent sigurnosti se može uzeti u obzir na dva načina: direktno redukovanjem veličine efektivnih horizontalnih pritisaka sa pasivne strane ili povećanjem dubine ukopavanja zida ispod tačke koja se dobija iz uslova ravnoteže za $F_s = 1$. Za određivanje veličine koeficijenta sigurnosti postoji više predloga koji se mogu naći u različitim pravilnicima i radovima određenog broja autora (tačka 2.2.4.).

Kod indirektnog načina, povećanjem dubine ukopavanja, uobičajeno je povećanje dubine 20 ÷ 40% (Teng, 1962).

Postupak proračuna uklještenih potpornih zidova se sprovodi u nekoliko faza:

- a) Određivanje dijagrama bočnih pritisaka tla sa aktivne i pasivne strane
- b) Pretpostavljanje ukupne dužine ukopavanja potpornog zida. Dubina ukopavanja zavisi od vrste tla, odnosno njegovih geometrijskih osobina kao i od hidrogeoloških uslova.

Iz tabele 2.1. (Tang, 1962) mogu se dobiti preliminarne veličine ukopavanja za nevezana tla

Tabela 2.1

zbijenost tla	dubina ukopavanja D
zbijeno	0,75H
srednje zbijeno	1,0 H
rastresito	1,5 H
vrlo rastresito	2,0 H

gde je H visina iskopa.

Položaj tačke C se dobija redukovanjem dubine ukopavanja

$$D' = \frac{D}{(1,2 \div 1,4)} \quad (2.24)$$

c) Sračunaju se momenti u odnosu na tačku C od svih horizontalnih pritisaka koji deluju sa aktivne i pasivne strane zida. Ukoliko je momenat pritisaka sa aktivne strane veći, dubina ukopavanja je nedovoljna. Povećava se dubina ukopavanja i postupak se ponavlja dok se ne ispuni uslov ravnoteže momenata u tački C.

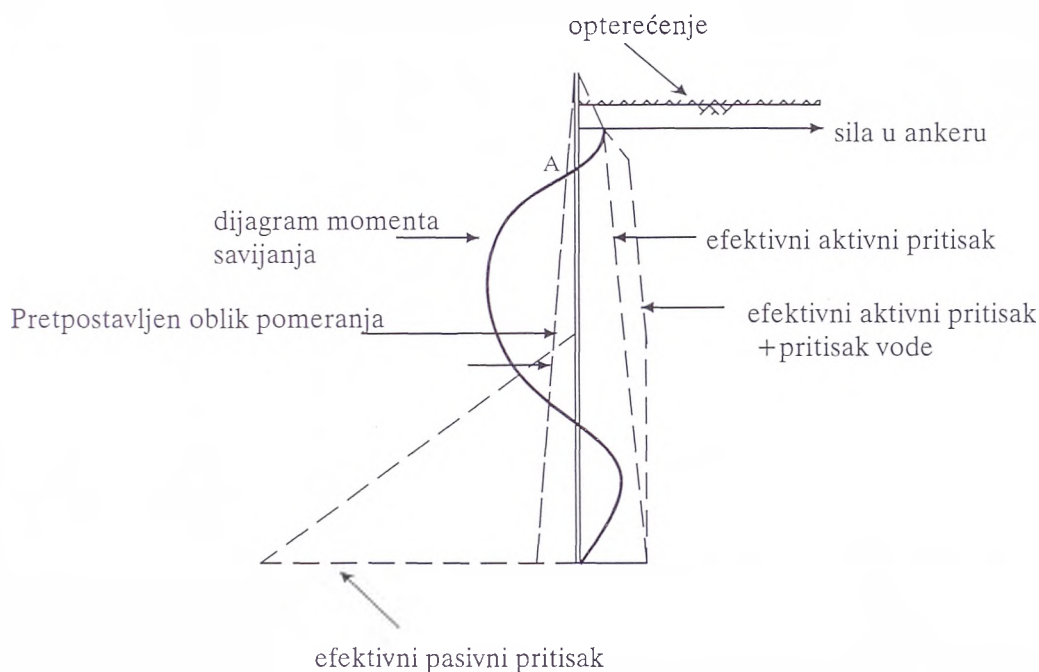
d) Prema određenoj visini zida i definisanom opterećenju računaju se statički uticaji i dimenzioniše potporna konstrukcija.

2.2.3. Proračun ankerovanih potpornih zidova

U proračunu ankerovanih potpornih zidova koriste se dve klasične metode: metoda slobodnog oslonca tla ("free support method") i metoda nepomerljivog oslonca tla ("fixed support method").

a) Metoda slobodnog oslonca tla

Ova metoda je najstarija i najkonzervativnija. Na slici 2.11 je dat šematski prikaz ankerovanog potpornog zida sa jednim redom ankera u nivou tačke A. Pretpostavlja se da je zid krut, da rotira oko tačke A, gde se nalazi oslonac obezbeđen nepomerljivim ankerima. Bez obzira na nepomerljivost ankera, pretpostavlja se da celom visinom zida sa zadnje strane deluje aktivni pritisak tla. Smatra se (Rowe, 1952) da je pomeranje dovoljno za mobilisanje aktivnog pritiska.



Sl. 2.11 Osnove metode slobodnog oslonca za ankerovani fleksibilni zid

Sa prednje strane zida ispod nivoa iskopa se pretpostavlja da deluje pasivni otpor tla. U proračunu potrebne dubine ukopavanja pasivni otpor tla se računa sa koeficijentom sigurnosti.

Dubina ukopavanja se računa iz uslova ravnoteže momenata u odnosu na nivo A gde deluju sile u ankerima. Ukoliko se raspodela pritisaka na potporni zid izrazi u funkciji dubine ukopavanja dobija se kubna jednačina oblika:

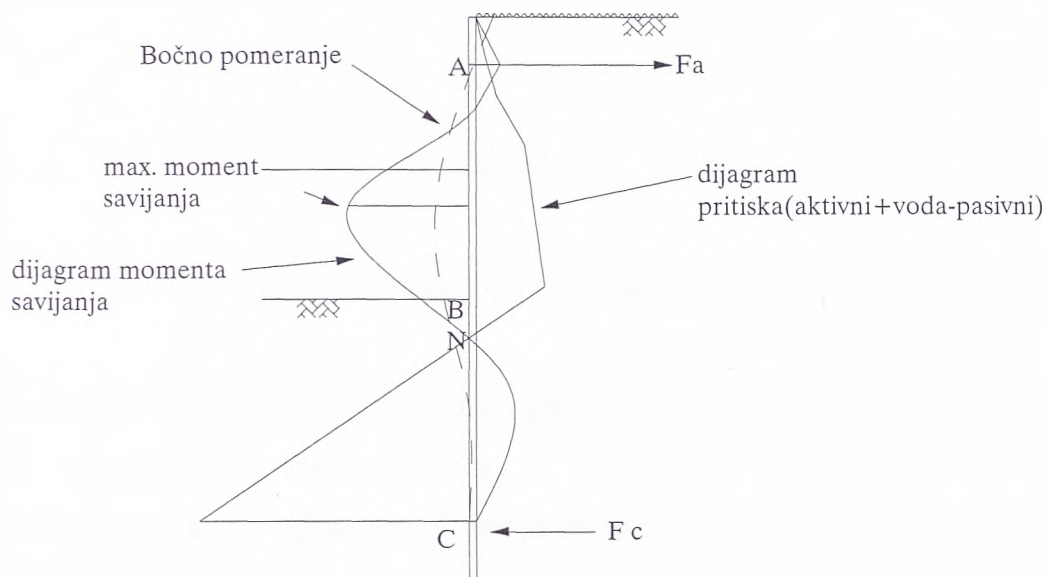
$$Ad^3 + Bd^2 + Cd + D = 0 \quad (2.25)$$

gde su: A, B, C i D numerički koeficijenti.

Iz uslova ravnoteže horizontalnih sila dobija se sila u ankerima čime su definisane sve statički nepoznate veličine i na osnovu čega se mogu odrediti statički uticaji za dimenzionisanje zida.

b) Metoda nepomerljivog oslonca tla

Prema ovoj metodi (Blum 1950) pretpostavlja se da je zid dovoljno ukopan u tlo da je najniži deo zida potpuno uklješten, odnosno nema pomeranja ni rotaciju. Na sl. 2.12. taj deo je ispod tačke C. Blum je ustanovio da se pritisci ispod tačke C mogu zameniti silom F_c bez velikog uticaja na tačnost postupka.



Sl. 2.12 Osnove metode fiksiranog oslonca tla za ankerovani fleksibilni zid

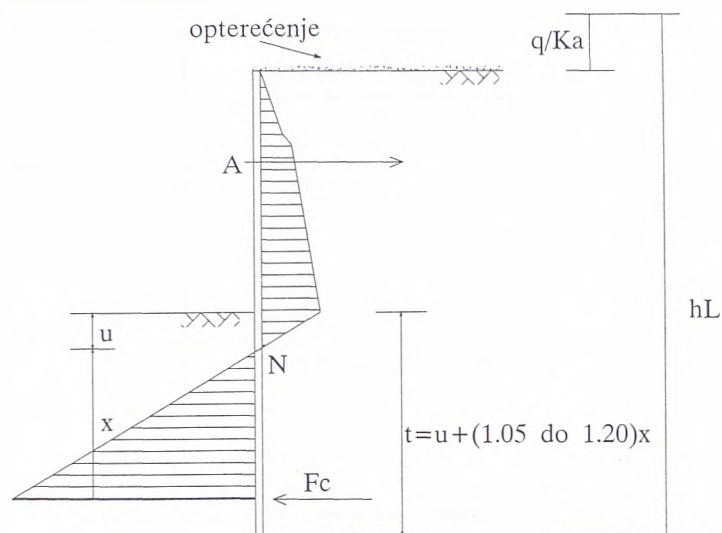
Rezultujući dijagram pritiska na sl. 2.12. je dobijen koristeći aktivan pritisak sa zadnje strane zida, puni pasivni pritisak prednje strane ispod nivoa iskopa kao i pritisak od vode (hidrostatički i hidrodinamički).

Opšta metoda koja se koristi prilikom proračuna je metoda elastične linije. Pretpostavlja se položaj tačke C i elastična linija koja u toj tački ima vertikalnu tangentu. Rešenje se dobija sukcesivnim proračunom statičkih uticaja i iz toga dijagram pomeranja. Pozicija tačke C se menja sve dok defleksija tačke A (položaj ankera) u odnosu na C ne bude jednaka nuli.

Iz toga se dobija potrebna dubina ukopavanja zida za koju je Blum predložio da bude:

$$t = u + (1,05 \div 1,2) \cdot x \quad (2.26)$$

gde su u i x definisani na sl. 2.13



Sl. 2.13 Odnos zahtevane dubine ukopavanja i položaja zamenjujuće sile F_c

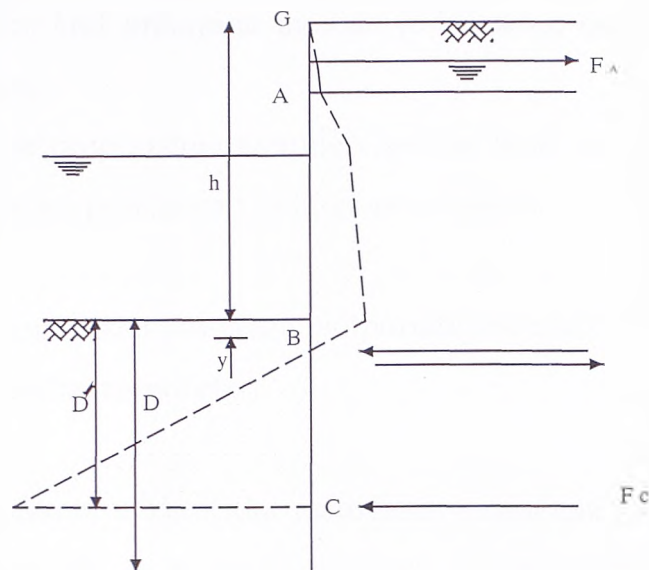
Mada se ovaj postupak mogao primeniti u praksi i pre pojave računara, zahtevao je dosta vremena. Umesto njega mnogo više su se koristili, uz određene pretpostavke, jednostavniji postupci koji su svi uglavnom varijacije Blum-ove metode ekvivalentne grede.

Uz iste pretpostavke kao kod metode elastične linije Blum je uspostavio odnos između slobodne visine zida h i položaja prevojne tačke y u dijagramu momenata savijanja (sl. 2.14.). Blum je dao odnos y/h u funkciju efektivnog ugla unutrašnjeg trenja (Tabela 2.2).

Tabela 2.2

Efektivni ugao φ'	y/h
20°	0,23
25°	0,15
30°	0,08
35°	0,03
40°	-0,007

Ukolio se zna položaj B u kojoj je momenat jednak nuli, rešavanje problema postaje jednostavno.



Sl. 2.14 Blum-ova metoda ekvivalentne grede

Procedura je sledeća:

a) Za gredu raspona GB, iz uslova ravnoteže momenata u odnosu na tačku B određuje se veličina sile u ankeru F_A , a uz uslova ravnoteže horizontalna sila u imaginarnom zglobu F_B .

b) Za gredu raspona BC, iz uslova ravnoteže momenata u odnosu na tačku C dobija se dužina BC. Pritisci ispod tačke C se zanemaruju.

c) Ukupna dubina ukopavanja može se dobiti povećanjem računске dubine D što daje faktor sigurnosti u odnosu na puni pasivni otpor tla (sl. 2.14).

$$D \approx 1,2D'$$

ili kao što je predložio Tschebotarioff (1973), (sl. 2.13)

$$t = u + x + \frac{F_c}{2\gamma h_L (K_p \cos \delta'_p - K_a \cos \delta'_a)} \quad (2.27)$$

gde su:

F_c - zamenjujuća sila u tački C

$\left. \begin{array}{l} K_p \cos \delta'_p \\ K_a \cos \delta'_a \end{array} \right\}$ komponente pritiska tla upravne na zid

h_L - visina zida do tačke C plus $q/K_a \cdot \gamma$ ukoliko postoji površinsko opterećenje.

Za homogeno tlo tačka B se aproksimativno nalazi u nivou gde je u rezultujućem dijagramu pritisaka tla pritisak jednak nuli.

Glavni problem kod prikazane metode je korektno određivanje položaja tačke B kada tlo nije homogeno.

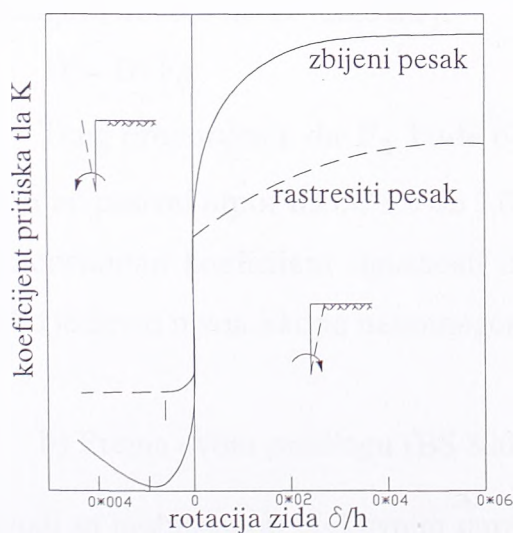
Za te uslove se preporučuje metoda elastične linije mada se u mnogim zemljama aproksimativno usvaja isti princip kao za homogene uslove.

2.2.4. Koeficijenti sigurnosti u proračunu potpornih konstrukcija metodama granične ravnoteže

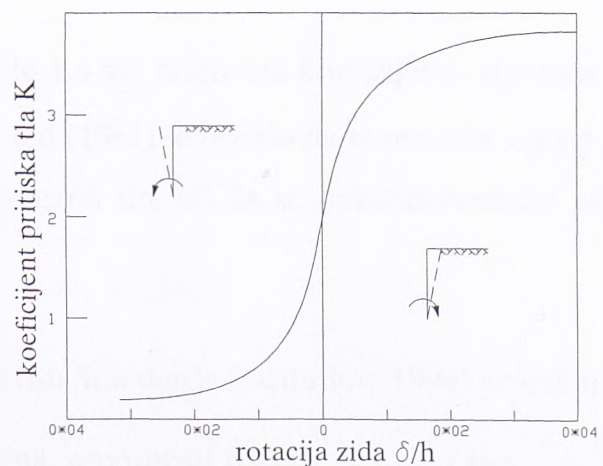
Kao što je opisano, u klasičnim metodama proračuna ukopanih potpornih zidova pritisci tla na konstrukciju se računaju iz uslova da se u zoni zida tlo nalazi u stanju plastične ravnoteže kao i da se mobiliše puna otpornost tla na kliznoj površi. Proračun se zasniva na ravnoteži sila ne uzimajući eksplicitno u račun deformacije tla i zida i njihov uticaj na veličinu i raspodelu pritisaka.

Eksperimentalni rezultati koje je objavio Terzaghi (1954) i koji su prikazani na sl. 2.15. imali su najviše uticaja na ocenu uslova pri kojima se dostižu granični pritisci. On je rotirao model zida u pesku različite zbijenosti i merio veličine rotacije potrebne za dostizanje aktivnog ili pasivnog stanja. Rezultati su pokazivali da je za postizanje aktivnog stanja potrebno vrlo malo pomeranje zida dok je za pasivni otpor tla potrebno mnogo veće.

Ti rezultati navode na zaključak da se u proračunu potpornih zidova može računati samo na deo pasivnog otpora tla, jer ukoliko se zid pomeri tako da je u ravnoteži sa aktivnim pritiskom to pomeranje će biti malo.



Sl. 2.15 Odnos pritiska tla i rotacije zida za norm. konsolidovani pesak (Terzaghi, 1953)



Sl. 2.16 Odnos pritiska tla i rotacije zida za prekonsolidovane gline (Potts, 1986)

Terzaghi-jevi rezultati su se odnosili na peskove različite zbijenosti sa inicijalnim koeficijentom $K_0 \approx 0,43$, odnosno na normalno konsolidovano tlo. Mnogo kasnije Potts i Fourie (1986, 1989) su objavili nekoliko članaka u kojima su, koristeći numeričke modele, analizirali ponašanje prekonsolidovanih glina. Ti rezultati prikazni na sl. 2.16. pokazuju da su u takvim uslovima veličine pomeranja potrebne za dostizanje aktivnog pritiska ili pasivnog otpora tla slične i u relativnom odnosu prema visini iskopa iznose $\delta/h \approx 0,04$.

Navedeni primeri, s jedne strane, jasno pokazuju potrebu da se u proračunu potpornih zidova metodom graničnog stanja definišu faktori sigurnosti u odnosu na uslove pri kojima se mobilise pasivni otpor tla, a s druge strane, postavlja se pitanje načina određivanja koeficijenta sigurnosti koji će biti dovoljno racionalan i konzistentan za različite uslove. To predstavlja značajan problem, tako da postoje brojne definicije faktora sigurnosti koje su predložili razni autori. One se mogu naći u raznim savremenim pravilnicima, uključujući i Evrocod 7, jer se u većini proračun ukopanih potpornih zidova bazira na metodi graničnih stanja.

Ovde će biti izloženo nekoliko različitih predloga za definisanje faktora sigurnosti:

a) Jedan od najjednostavnijih predloga za osiguravanje stabilnosti zida je da se sračunata dubina ukopavanja za granično stanje otpora tla ($F_p = 1,0$) poveća empirijskim faktorom F_d . Taj predlog su dali Teng (1962), Tschebotarioff (1973). Svi statički uticaji se računaju za dubinu ukopavanja D pri $F_p = 1,0$, a koeficijent sigurnosti se obezbeđuje povećanjem dubine na D' tako da je

$$D' = D \cdot F_d$$

Teng preporučuje da F_d bude od 1,2 do 1,4 što odgovara koeficijentu sigurnosti u odnosu na pasivni otpor tla od 1,5 do 2,0. Burland (1981) je ocenio da ta metoda uglavnom daje konstantan koeficijent sigurnosti za homogeno tlo, ali da se nekonzistentnost javlja ukoliko je ispod nivoa iskopa nehomogeno tlo.

b) Prema ovom predlogu (BS 8002 - British Standards Institution, 1994) proračun se sprovodi sa mobilisanim efektivnim parametrima, otpornosti tla φ_m' i C_m' ($\text{tg}\varphi_m' = \frac{\text{tg}\varphi}{F}$)

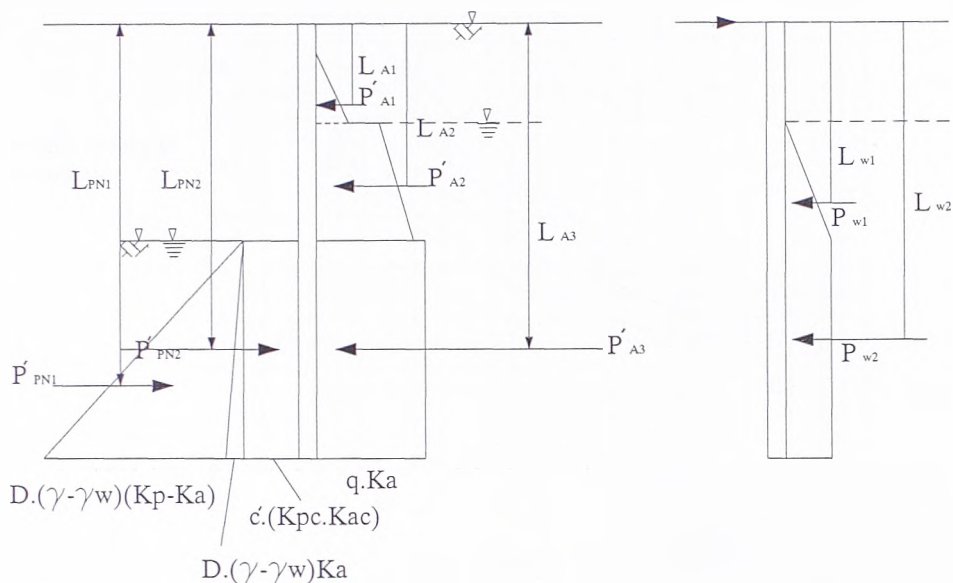
i $C_m' = \frac{C'}{F}$). Potts i Burland (1983) su predložili faktor sigurnosti $F=1,5$ za tla sa manjim uglom unutrašnjeg trenja, dok se za veće uglove može smanjiti.

Ovaj predlog ima logičan pristup u slučaju prekonsolidovanih glina, dok za normalno konsolidovana tla nema teorijsko opravdanje, osim u nameri da obezbedi pomeranja zida u dozvoljenim granicama.

c) Predlog koji se zasniva na Terzaghi-jevim eksperimentalnim rezultatima, prema kome se aktivni pritisak tla uzima u punom iznodu, dok se pasivni pritisak redukuje faktorom F_p . U standardima CP2 (Code of practice for earth retaining structures, British standards) se preporučuje da koeficijent F_p bude oko 2, dok se u Kanadskim propisima (Canadian Foundation Engineering Manual, 1992) kaže da F_p ne bi trebalo da bude manje od 1,5. Postoje mnoge kritike na račun ovako definisanog faktora sigurnosti koje se kreću od toga da je u određenim slučajevima vrlo konzervativno rešenje (Burland, 1984), do toga da se ne može na zadovoljavajući način primeniti na nedrenirane uslove (Burland, 1981)), što je slučaj kad je potporna konstrukcija privremenog karaktera.

d) Za zidove fiksirane pri vrhu (ankerima, podupiračima ili razupiračima) koristi se metod "neto" pritisaka ("Piling handbook", British Steel General Steels, 1988). "Neto" dijagram pritisaka se računa sa punim aktivnim i pasivnim pritiscima i dubina ukopavanja se računa iz uslova da moment oko fiksirane tačke pritisaka sa prednje strane zida bude jednak F_{np} puta momenat pritisaka sa zadnje strane zida. Metod može dati mnogo manji faktor sigurnosti nego što je metod redukovanih parametara otpornosti tla (Burland (1981)). Ovaj metod ne preporučuje CIRIA (Construction Industry Research and Information Association).

e) Predlog koji su dali Burland, Potts i Walsh (1981) se zasniva na redefinisaniu faktora sigurnosti. Prema toj definiciji faktor sigurnosti predstavlja odnos "momenta otpornosti" i "mobilizovanog momenta". "Momenat otpornosti" je momenat oko vrha zida od pasivnog pritiska ispod nivoa iskopa sračunatog sa koeficijentom $(K_p - K_a)$. "Mobilizovani momenat" se sastoji od momenta od aktivnog pritiska tla iznad nivoa iskopa i momenta od opterećenja ampiciranog od sopstvene težine tla na nivou iskopa. (sl. 2.17). Predloženi faktori sigurnosti F_p (Potts i Burland, 1983) su od 1,5 do 2,0.



Sl. 2.17 Dijagram pritiska za određivanje faktora sigurnosti (Burland, Potts, Walsh, 1981)

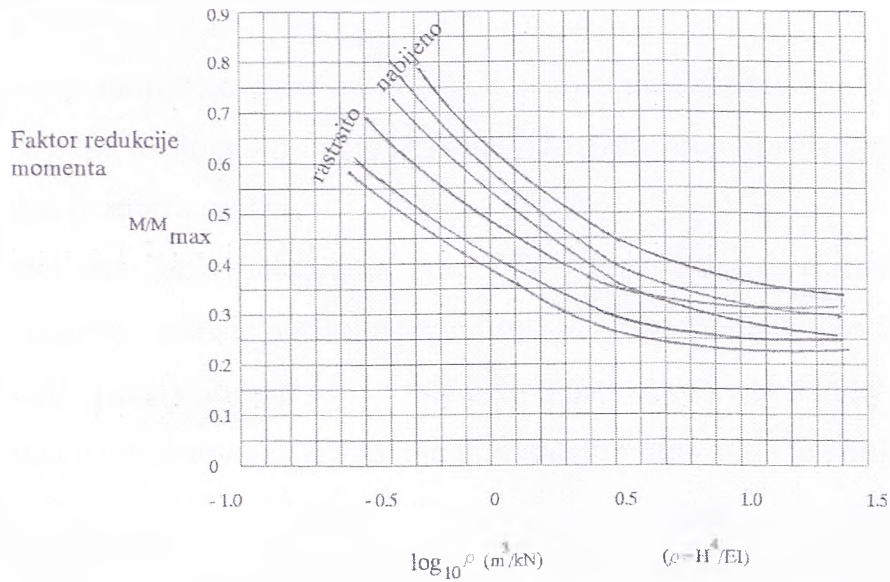
f) Bolton i dr (1990) uvode mobilisani faktor ϕ_{mob} , ili Cu_{mob} kojim bi se sprečilo dostizanje napona pri kojima se javljaju nedozvoljene deformacije. Metod zahteva kvalitetna modelska i laboratorijska ispitivanja odakle se može dobiti veza između deformacija i mobilisanog faktora. Ovaj metod se koristi u Britanskim standardima (BS 8002, 1994.). Ideja mobilisanog faktora je u ovom slučaju vezana za kontrolu deformacija, odnosno pomeranja zida.

Metode granične ravnoteže daju delimičan odgovor o ponašanju fleksibilnih potpornih konstrukcija, jer eksplicitno mogu odrediti samo njihovu nosivost. Glavni nedostatak ovih metoda je što ne uspostavljaju vezu između pomeranja zida i raspodele veličine pritiska tla, odnosno ne uzimaju u obzir ni fleksibilnost zida ni krutost tla.

Rowe (1952, 1957) je pokušao da prevaziđe taj nedostatak uvodeći redukcionni faktor za momente savijanja koji se dobijaju metodom granične ravnoteže, gde se pretpostavlja da je zid apsolutno krut. Razmatrao je vezu između defleksije zida i relativne krutosti zida i tla. Sproveo je modelska ispitivanja za različite vrste tla iz kojih je dobio

dijagrame veze između krutosti zida $\rho = \frac{H^4}{EJ}$ i redukcionnog faktora za momente M/M_{max}

za rastresita i zbijena tla za različite relativne dubine ukopavanja, što je dato na sl. 2.18.



Sl. 2.18 Faktori redukcije momenta (Rowe, 1952)

Prema njegovoj teoriji redukcioni faktori se mogu koristiti za bilo koji tip tla, ali je Skempton (1953), s obzirom da se radi o rezultatima modelskog ispitivanja, predložio da veličine redukcionih faktora koriguju:

- za peksove: koristiti 1/2 redukcije momenta prema Rowe-u
- za prašine: koristiti 1/4 redukcije momenta prema Rowe-u
- za gline: ne koristiti redukciju.

2.3. METODA REAKCIJE TLA

Primena teorije granične ravnoteže u proračunu fleksibilnih potpornih konstrukcija je metoda koja je analogno prenešena iz metode proračuna gravitacionih zidova gde za to postoji realna teorijska osnova.

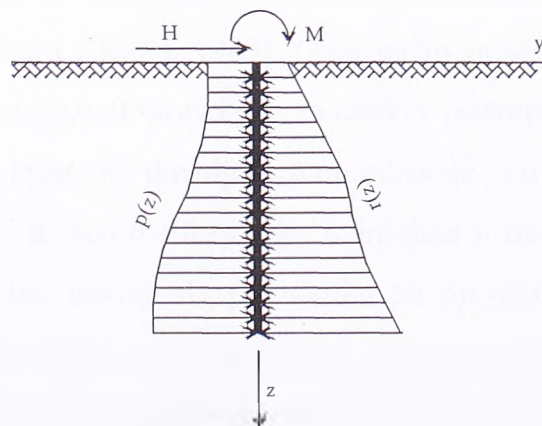
Model ponašanja fleksibilnih potpornih konstrukcija se u mnogome razlikuje od ponašanja gravitacionih zidova, tako da je uspostavljena analogija postupaka nastala više iz nemogućnosti praktične primene realnijih proračunskih modela, nego iz stvarnog nepoznavanja fenomenologije ponašanja fleksibilnih potpornih konstrukcija.

Fleksibilnost zida i krutost tla dobijaju na značaju u modeliranju ponašanja potpornih zidova 60-tih godina rošlog veka uvođenjem metode koja se naziva "metoda reakcije tla" ("subgrade reaction"). Prvobitno se koristila u proračunu temelja, ali se ubrzo njena primena prenela i na proračun potpornih zidova.

Sušтина ove metode, koja se može primeniti na svaku interakciju između čvrstog tela i mase tla, leži u tome da se uticaj tla na granici sa čvrstim telom zamenjuje reaktivnim opterećenjem, a da je to reaktivno opterećenje zavisno od pomeranja granice i da su pomeranja tla i tela na granici kompatibilna.

Ovakav pristup za fleksibilne potporne zidove rezultira diferencijalnom jednačinom elastične linije nosača izloženog savijanju pod pretpostavkom da se zid nalazi u uslovima ravanskog stanja deformacije

$$\frac{d^4 y}{dz^4} = \frac{P(z)}{D} - \frac{r(z)}{D} \quad D - \text{krutost nosača na savijanje} \quad (2.28)$$



Sl. 2.19 Modeliranje potpornog zida kao elastične grede

U diferencijalnoj jednačini (2.28) imamo dve nepoznate funkcije: funkciju elastične linije nosača $y(z)$ i zakon promene reaktivnog opterećenja $r(z)$. Problem se može rešiti samo ako se definiše veza između horizontalnog pomeranja tačaka kontaktne površi i reaktivnih pritisaka.

Još krajem 19-og veka Zimmerman (1988) je za proračun železničkih šina predložio da se za ponašanje tla uvede koeficijent krutosti tla na bazi Winkler-ove hipoteze prema kojoj je sleganje u svakoj tački kontaktne površi proporcionalno pritisku u toj tački. Ovo je omogućilo integraciju diferencijalne jednačine za neke jednostavnije probleme. Međutim, za većinu problema, ovaj postupak se nije mogao praktično primeniti. Tek sa razvojem računara i odgovarajućih numeričkih metoda radikalno se menja odnos prema metodi reakcije tla jer se omogućava njena praktična primena, a sa druge strane postaje moguće rešenje problema koji su mnogo kompleksniji od onih koji su prvobitno razmatrani.

Postoje dva načina numeričkog rešavanja ovako postavljenog problema: numeričkom integracijom diferencijalne jednačine elastične linije, ili metodom konačnih elemenata. Ovde će se analizirati način rešavanja metodom konačnih elemenata, jer se mnogo češće koristi u savremenj praksi.

U metodi reakcije tla primenom MKE postavljaju se dva osnovna pitanja:

- Kako definisati opterećenje koje deluje na konstrukciju
- Na koji način aproksimirati ponašanje tla na gatici sa konstrukcijom.

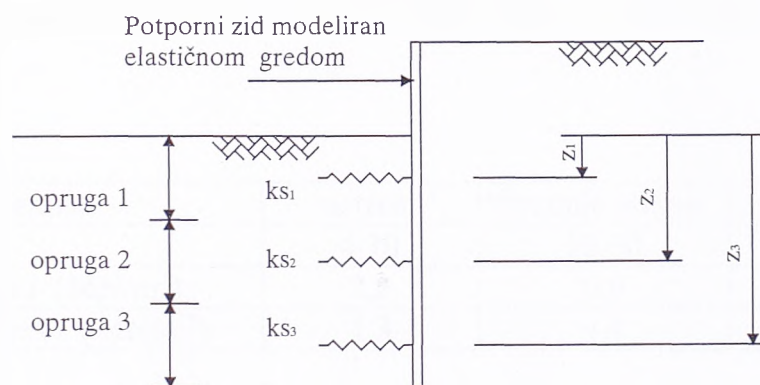
Generalno, postoje dva predložena načina za definisanje opterećenja na konstrukciju. Prema prvom i starijem načinu kao opterećenje se uzima aktivni pritisak tla sa zadnje strane zida, pretpostavljajući da se reaktivno opterećenje javlja samo na ukopanom delu (Turabi i Balla, 1968). Ovaj način predstavlja mali iskorak u odnosu na metodu granične ravnoteže. Opravdanje za ovakav pristup je u očekivanju da će pomeranja zida na delu iznad iskopa biti dovoljno za mobilisanje aktivnog pritiska. Na ukopanom delu se usvaja pritisak tla u stanju mirovanja, uzimajući u obzir promene vertikalnog napona koje se dešavaju usled iskopa. U priručniku za projektovanje potpornih zidova (Hong Kong, 1993) se ovako definisano opterećenje dozvoljava, ukoliko se pokaže da su računaska pomeranja zida dovoljna za mobilisanje aktivnog pritiska.

Prema drugom načinu, koji mnogo realnije prati promenu pritisaka tla, inicijalni naponi kao i neizbalansirane sile se računaju pod pretpostavkom da nema bočnih pomeranja. U fazi instaliranja konstrukcije, sa obe strane zida kao opterećenje deluje

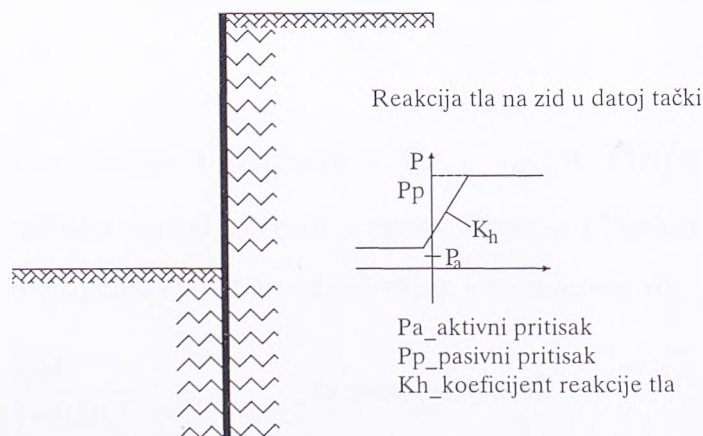
pritisak tla u stanju mirovanja. U fazama iskopa sa prednje strane zida dolazi do promene horizontalnih efektivnih napona zbog promene vertikalnog pritiska usled iskopa, što ima za rezultat neizbalansirano opterećenje koje izaziva savijanje zida.

Rešenje za aproksimaciju ponašanja tla na ganci sa konstrukcijom su tražena u domenu teorije elastičnosti sa više ili manje uprošćavanja.

U većini slučajeva tlo se zamenjuje sistemom nezavisnih linearnih elastičnih opruga (sl. 2.20 a i b). Na sl. (2.20 a) oprugama se zamenjuje ponašanje samo onog dela tla u koji je zid ukopan, dok se na sl. (2.20 b) tlo zamenjuje oprugama sa obe strane zida. Obično se pretpostavlja da važi Winkler-ova hipoteza o odnosu pritiska tla i pomeranja zida, što ovaj način čini jednostavnim za primenu. Način određivanja krutosti zamenjujućih opruga predstavlja važan element u definisanju interakcije konstrukcije tla. Postoji više predloga baziranih na teorijskim razmatranjima i empirijskim analizama, od kojih će neki biti prezentirani.



Sl 2.20a Model potpornog zida i tla (metoda reakcije tla)



Sl 2.20b Model potpornog zida i tla (metoda reakcije tla)

Terzaghi (1955) je imao značajan uticaj na definisanje koeficijenta reakcije tla, odnosno određivanja krutosti zamenjujućih opruga. On je predložio koeficijent koji se linearno menja sa dubinom za potporne zidove ukopane u pesak i konstantnu veličinu koeficijenta u slučaju tvrdih glina

$$K_h = n_h \frac{z}{d} \quad \text{za peskove} \quad (2.29)$$

$$K_h = K_{h1} \frac{1}{d} \quad \text{za tvrde gline}$$

gde je:

d - dubina ukopavanja

z - položaj opruge

n_h, K_{h1} - konstante.

Terzaghi je dao tabelarno veličine konstante n_h za peskove različite zbijenosti (Tab. 2.3). Iz velikog broja podataka dobijenih terenskim merenjem, mnogi autori su povratnom analizom dobili nekoliko puta veće vrednosti koeficijenta n_h . (Habibaghi Longer, 1984, Elson, 1984).

Tabela 2.3.

relativna zbijenost	rastresit	srednje zbijen	zbijen
SPT 'N'	4-10	10-30	30-50
n_h (suvi pesak) (MN/m ³)	2,2	6,6	17,6
n_h (vlažni pesak) (MN/m ³)	1,3	4,4	10,7

Elson je predložio da se Terzaghi-jeve vrednosti mogu računati kao donja granica a sledeći izraz kao gornja granica za peskove

$$n_h = 0,19D_n^{1,16} \quad (2.30)$$

gde je: D_n - relativna zbijenost izražena u %, a n_h u MN/m³. Bazirajući se na merenjima pasivnog pritiska na zid ukopan u pesak Rowe-a i Peaker-a (1965), Pun i Pang (1993) su izveli sledeći empirijski izraz za određivanje koeficijenta n_h

$$\frac{n_h}{K_p \cdot \gamma} = \frac{0,64}{(y'/d) + 0,017} \quad \text{za rastresit pesak}$$

$$\frac{n_h}{K_p \cdot \gamma} = \frac{1,09}{(y'/d) + 0,011} \quad \text{za zbijen pesak} \quad (2.31)$$

gde je

K_p - koeficijent pasivnog otpora tla

y' - bočna refleksija zida na sredini ukopanog dela

γ - zapreminska težina tla

d - dubina ukopavanja zida

Elson (1984) je predložio korelaciju između koeficijenta reakcije tla i Young-ovg modula E_s'

$$K_h = (0,8 \div 1,8)E_s' \quad (2.32)$$

Menard (1964) je na osnovu teorije elastičnosti i empirijskih korekcija definisao K_h

$$K_h = \frac{E_m}{\frac{\alpha a}{2} + 0,133(9a)^\alpha} \quad (2.33)$$

gde je:

E_m - modul elastičnosti dobijen opitom

α - reološki koeficijent koji zavisi od vrste tla

a - dubina ukopavanja zida

Osnovni nedostatak metode zamenjujućih opruga je što usvaja Winkler-ovu hipotezu o odnosu pritiska tla i pomeranja zida. Taj nedostatak se može prevazići modeliranjem tla kao elastičnog kontinuuma čija krutost u tačkama na granici zida i tla može da se odredi poznavajući deformacijske karakteristike tla kao što su modul elastičnosti E i Poisson-ov koeficijent.

Matrica krutosti tla se može odrediti na više načina.

Jedan od načina, koji se može koristiti u slučaju da je Young-ov modul elastičnosti konstantan po dubini, polazi od Mindlin-ovog rešenja (1936) za pomeranje tačaka homogenog, izotropnog i beskonačnog poluprostora usled dejstva horizontalne sile koja deluje u nekoj tački poluprostora.

Ovim rešenjem se može dobiti matrica fleksibilnosti, odnosno krutosti tla (Vaziri i dr., 1982, Pappin, 1985).

U slučaju promene Young-ovog modula po dubini može se primeniti sledeći način: metodom konačnih elemenata se numerički odredi matrica fleksibilnosti tla koja definiše veličine horizontalnih pomeranja čvornih tačaka na vertikalnoj slobodnoj površini usled jediničkog opterećenja u nekoj čvornoj tački. Iz matrice fleksibilnosti se inverzijom dobija matrica krutosti tla u čvornim tačkama na granici zida i tla.

Kao što se može zaključiti, ako se tlo tretira kao elastični kontinuum, zahteva se kompleksnija analiza, ali s druge strane realnije odražava sadejstvo konstrukcije i tla.

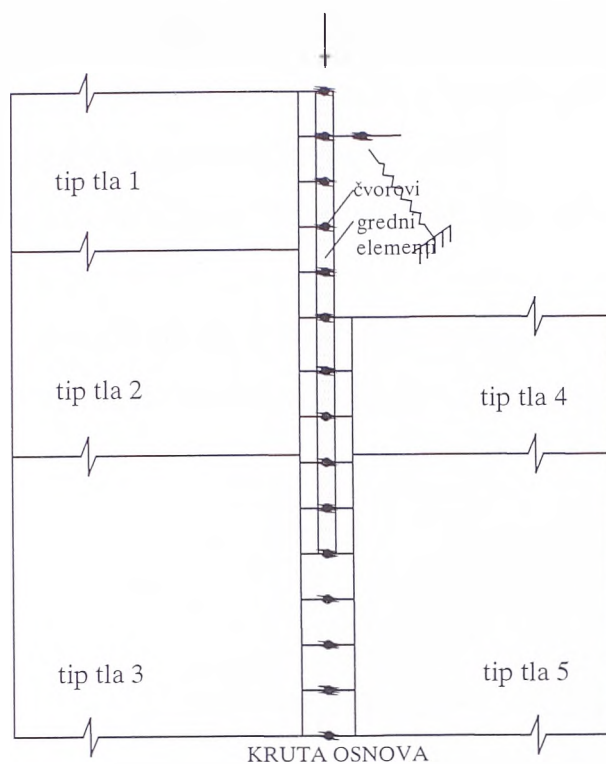
Kod metoda reakcije tla se primenjuje, generalno, teorija elastičnosti prema kojoj su krutosti tla konstante, odnosno ne menjaju se u funkciji pomeranja. To ima za posledicu da se proračunom mogu dobiti veličine pritiska koji deluju na konstrukciju koji su veći od pasivnog otpora tla i manji od aktivnog pritiska. Taj problem se prevazilazi tako što se u svakoj fazi proračuna kontrolišu pritisci sa "aktivne" i "pasivne" strane potpornog zida. Postoji više kriterijuma prema kojima se određuje kada su dostignuti uslovi graničnog stanja.

Radi ilustracije metode reakcije tla biće u kratkim crtama opisana metoda numeričke analize metodom konačnih elemenata za fleksibilne potporne zidove koju su razradili Pappin i dr. (1985) koja spada u jednu od najopširnijih iz ove grupe.

Elementi za ovu numeričku analizu su prikazani na sl. 2.21. Analiza se sprovodi u koracima koji odgovaraju predviđenim fazama iskopa i izvođenja konstrukcije. Usled promena koje se dešavaju u svakoj fazi sračunavaju se dodatna pomeranja, sile u elementima konstrukcije kao i napon u tlu i dodaju se postojećem stanju.

Zid je predstavljen serijom elastičnih grednih elemenata. Tlo je sa svake strane zida povezan sa zidom u čvornim tačkama, kao što je prikazano na sl. 2.21. Samo se horizontalne sile mogu prenositi sa tla na konstrukciju i te sile su u direktnom odnosu sa pritiscima tla na konstrukciju. Podupirači, razupirači ili ankeri se predstavljaju kao elastični oslonci odgovarajuće krutosti.

Analiza pretpostavlja naponsko deformacijske uslove ravanskog stanja deformacija.



Sl. 2.21 Model tla i zida za analizu MKE (Pappin, 1985)

Za svaku fazu izvođenja konstrukcije proračun se sprovodi u nekoliko koraka:

a) Inicijalni pritisci tla i neizbalansirane čvorne sile usled iskopa se računaju pretpostavljajući da nema pomeranja čvornih tačaka.

b) Formira se čvorna matrica krutosti tla sa obe strane zida i zajedno sa krutostima elemenata podupirača, razupirača ili ankera ukoliko postoje.

c) Računa se priraštaj horizontalnog pomeranja čvornih tačaka usvajajući linearno elastično ponašanje celog sistema.

d) Pritisak tla u svakoj čvornoj tački se računa dodajući promenu pritiska tla usled promene u datoj fazi na postojeće stanje.

e) Pritisci tla se upoređuju sa kriterijumima granične nosivosti tla. Ukoliko je u nekoj tački dostignut granični pritisak tla prema uspostavljenom kriterijumu, vrši se korekcija numeričkog modela tako što se u toj tački uspostavlja sila koja odgovara graničnom pritisku.

f) Sračunavaju se nove čvorne sile uz korekciju iz prethodne tačke.

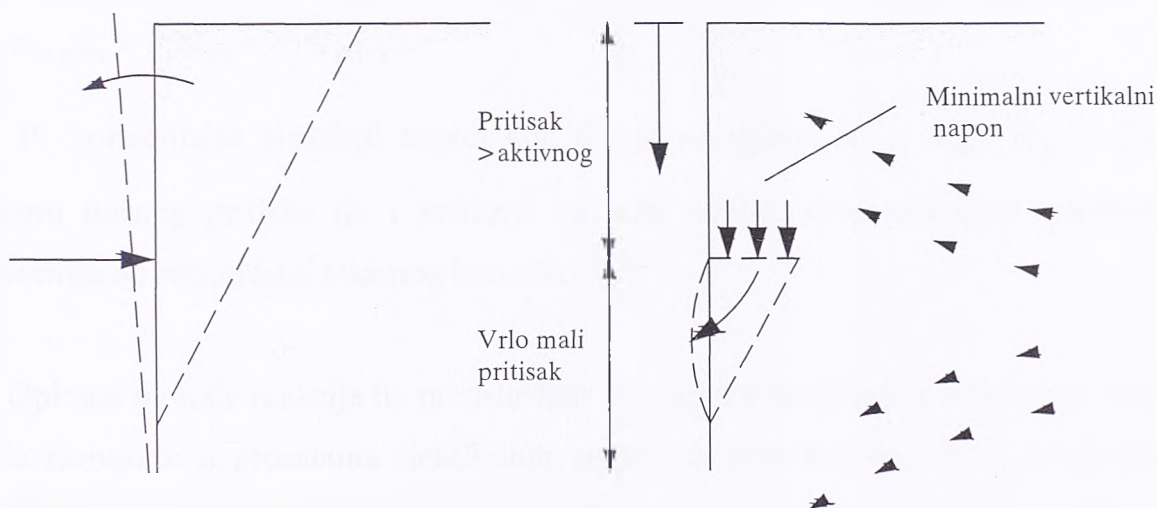
g) Postupak se ponavlja dok se ne postigne konvergencija.

h) Sračunavaju se ukupna pomeranja čvorova, pritisci tla kao i statički uticaji.

U ovom postupku se čvorne matrice krutosti tla određuju tako što se tlo sa obe strane zida zamenjuje elastičnim blokovima u okviru čega se razmatraju dve opcije u odnosu na promenu deformacijskih karakteristika tla po dubini:

Ako je Young-ov modul elastičnosti konstantan koriste se integrali Mindlin-ovih jednačina.

Ukoliko se modul elastičnosti menja sa dubinom, primenjuje se već opisan postupak sa određenim korekcijama za dobijanje simetrične matrice krutosti.



Sl. 2.22 Mehanizam za aktivni lom (Pappin, 1985)

Kriterijum za dostizanje graničnog pritiska tla se zasniva na mehanizmu prikazanom na sl. 2.22, tako da bude ispunjen uslov:

$$\int_{z_i}^{z_j} P_{az} dz \leq \int_{z_i}^{z_j} P dz \leq \int_{z_i}^{z_j} P_{pz} dz \quad (2.34)$$

gde je P_{az} na dubini z između z_i i z_j dat izrazom

$$P_{az} = K_a \left[\sigma'_{vi \min} + \int_{z_i}^z \gamma dz - u + u_i \right] - 2\sqrt{K_a} \cdot C + u \quad (2.35)$$

u prethodnom izrazu $\sigma'_{vi \min}$ je minimalni vertikalni efektivni pritisak koji se može javiti na dubini z_i .

Na sličan način kao za P_{az} , P_{pz} na dubini z se izražava

$$P_{pz} = K_p \left[\sigma'_{vi \max} + \int_{z_i}^z \gamma dz - u + u_j \right] + 2\sqrt{K_p} \cdot C + u \quad (2.36)$$

$\sigma'_{vi \max}$ je maksimalni vertikalni efektivni napon koji se može javiti na dubini z_i .

Minimalni i maksimalni vertikalni efektivni napon, ukoliko se zanemari trenje zida i tla, mogu se izraziti sledećim izrazima:

$$\sigma'_{vi \min} = P'_i K_{ai} - 2\sqrt{K_a} C_i$$

$$\sigma'_{vi \max} = P'_i K_{pi} + 2\sqrt{K_p} C_i$$

gde je P'_i horizontalni efektivni napon koji deluje na dubini z_i a K_{ai} , K_{pi} i C_i su koeficijenti bočnog pritiska tla i kohezija za istoj dubini. Ove jednačine obezbeđuju konzervativnu aproksimaciju lokalnog loma tla.

Opisane metode reakcije tla predstavljaju značajno poboljšanje u odnosu na metode granične ravnoteže u proračunu fleksibilnih potpornih konstrukcija, ali sa druge strane tretiraju tlo kao linearno elastičnu sredinu što ne odražava njegove realne osobine kao materijala. Imajući u vidu značajan uticaj ponašanja tla na veličinu i raspodelu pritisaka na ovu vrstu konstrukcija, primena elastoplastičnih modela za tlo omogućava realnije sagledavanje njihovog sadejstva. U sledećim poglavljima su opisani neki od elastoplastičnih modela kao i načini rešavanja problema vezanih za njihovu primenu u metodi konačnih elemenata.

3. ELASTO PLASTIČNI KONSTITUTIVNI MODELI ZA TLO

3.1. OPŠTE RAZMATRANJE NAPONSKO - DEFORMACIJSKOG PONAŠANJA TLA

Za razliku od drugih građevinskih materijala koji nastaju određenim tehnološkim procesima i kod kojih se mehaničke karakteristike mogu relativno lako odrediti, tlo predstavlja skup vrlo različitih materijala čije se karakteristike moraju na svakoj konkretnoj lokaciji meriti.

Međutim, bez obzira na postojanje različitih vrsta tla postoje karakteristike koje ih čine skupom sličnih materijala sa stanovišta naponsko - deformacijskog ponašanja. Na bazi obimnih eksperimentalnih ispitivanja i teorijskih razmatranja u domenu ponašanja različitih vrsta tla, izdovijeni su činiooci značajni za njihovo mehaničko ponašanje.

Prema strukturi, tlo je trofazna sredina sastavljena od čestica različite krupnoće koje čine granularni skelet tla i međugranularnog prostora - pora, koje mogu biti ispunjene vodom i vazduhom. Ukoliko su pore ispunjene samo vodom ili samo vazduhom, onda se radi o dvofaznoj sredini.

Porozni materijali u kojima su pore povezane dopuštaju kretanje fluida i gasa kroz strukturu. Usled dejstva spoljašnjih sila u fluidu (vodi) javlja se hidrostatički pritisak. Frikcioni porozni materijali kao što je tlo deformišu se pod uticajem samo onog dela napona koji se prenosi na čvrsti granularni deo strukture. On se definiše kao razlika totalnog napona i pornog pritiska

$$\sigma' = \sigma - a \cdot u \quad (3.1)$$

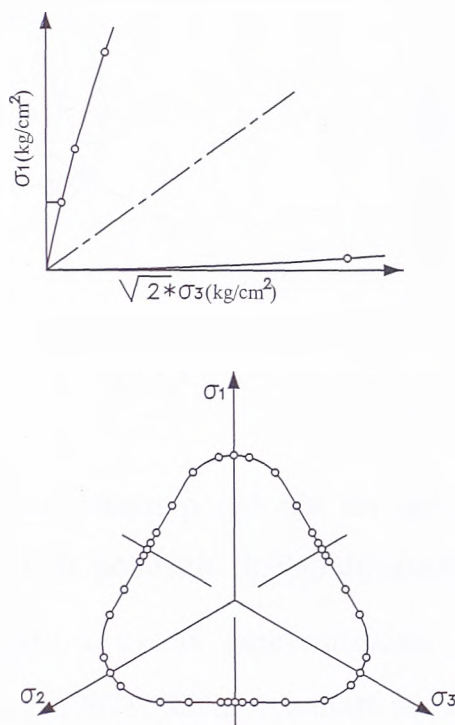
gde je a - faktor koji određuje relativni uticaj hidrostatičkog pornog pritiska. Za tlo, gde je kontaktna površina između čestica vrlo mala u odnosu na veličinu same čestice $a=1,0$. U mehanici tla princip efektivnih napona je prvo definisao Terzaghi (1943), a detaljnu analizu tog principa je dao Skempton (1961).

Treba podvući da su svi merljivi efekti mehaničkog ponašanja tla kao što su deformacije i lom tla posledica dejstva efektivnih, a ne totalnih napona.

Zbog svoje porozne strukture, tlo se ubraja u frikzione materijale kod kojih prisustvo pora u velikoj meri utiče na njihovo ponašanje. Na primer, necementirana suva tla mogu se zbijati do različitog stepena zbijenosti koji je u direktnoj funkciji poroznosti.

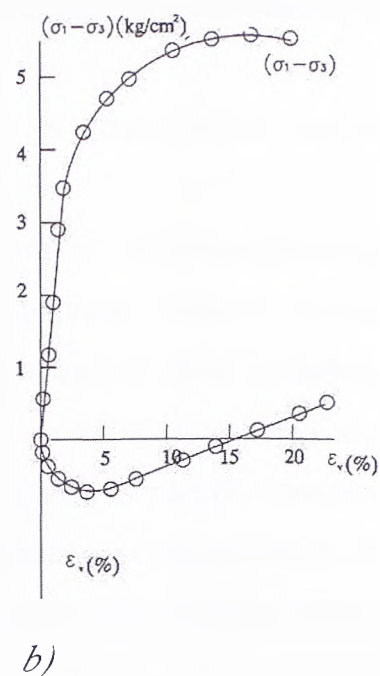
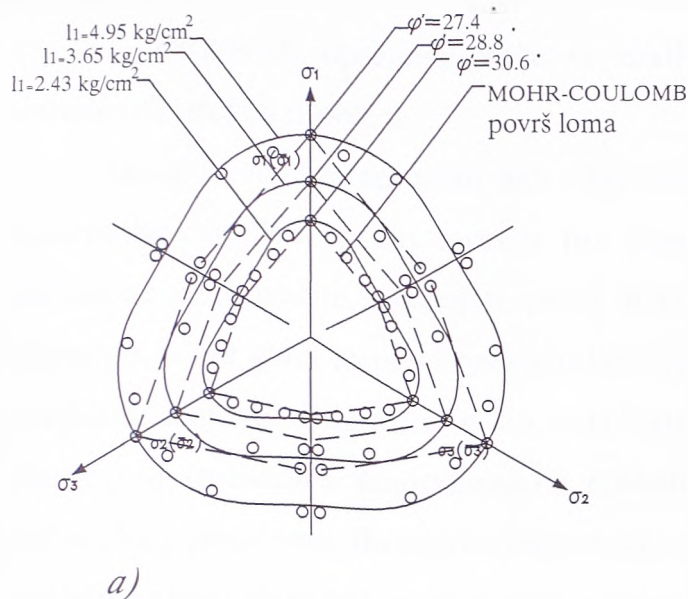
Generalno ponašanje tla se može zasnivati na zakonima ponašanja frikcionih materijala, ali uvek u zavisnosti od koeficijenta poroznosti.

Ako uzmemo pesak i glinu kao tipične predstavnike nevezanog, odnosno vezanog tla, kod peskova je za smičuću otpornost značajna inicijalna poroznost, a kod glina stepen prekonsolidacije, što je u oba slučaja u direktnoj vezi sa poroznošću. Sa povećanjem zbijenosti povećava se smičuća otpornost.



Sl. 3.1 a) i b)

Frikcioni materijali kao što je tlo imaju efektivnu koheziju. Dijagrami na sl. 3.1. dati u triaksijalnoj i oktaedarskoj ravni prikazuju eksperimentalne rezultate ispitivanja peska. Površ loma ukazuje da nema otpornosti pri stanju napona $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Materijali geološkog porekla sa efektivnom kohezijom imaju otpornost pri pritisku daleko veću nego pri zatezanju, zato što, kao i kod drugih frikcionih materijala, njihova otpornost na smicanje zavisi od normalnih napona na kontaktu između čestica tla. Iz toga sledi da se otpornost tla na smicanje povećava sa porastom srednjeg normalnog napona, što se može videti na sl. 3.2a gde su dati rezultati dobijeni iz CU kubičnog triaksijalnog opita normalno konsolidovane prerađene gline (Lade, 1978). Dat je presek u oktaedarskoj ravni za tri različita srednja normalna napona. Oblik preseka površi loma dobijen iz eksperimentalnih rezultata je trougao zaobljenih uglova i vrlo je karakterističan za ovu vrstu frikcionih materijala. Opis takve površi zahteva uključivanje treće invarijante tenzora napona.



Slika 3.2

U naponsko - deformacijskom ponašanju tla uočava se izrazito elasto plastično nelinearno ponašanje. Slika 3.2b. pokazuje tipičan dijagram devijatora napona $(\sigma_1 - \sigma_3)$ i aksijalne deformacije ϵ_1 kao i ϵ_1 sa zapreminskom deformacijom ϵ_v iz D opita triaksijalne kompresije (Lee, 1967). Slični rezultati se mogu dobiti iz opita za druge frikционе materijale. Odnos napon-deformacija je nelinearan. Zapreminska deformacija je inicijalno kompresija a dalje se može nastaviti ekspanzijom ili kompresijom.

Elastične i plastične deformacije se javljaju od početka opterećenja. Plastične deformacije su inicijalno manje od elastičnih, ali sa povećanjem priraštaja napona plastične deformacije dominiraju. Plastične zapreminske deformacije su posledica prisustva pora i zato tlo za razliku od, na pr. metala, ima značajne plastične promene zapremine. Imajući u vidu da lom u tlu nastaje usled smicanja priraštaj smičuće plastične deformacije raste sa povećanjem devijatora napona, dok se priraštaj zapreminske plastične deformacije smanjuje.

Prilikom smicanja zapremina tla može ostati konstantna ili se menjati u zavisnosti od koeficijenta poroznosti i pritiska.

Glavni uzrok dilatancije (promene zapremine pri smicanju) je u činjenici da individualna zrna tla moraju preći jedni preko drugih da bi se ostvarile smičuće deformacije i pri tome se rotiraju prilagođavajući se pravcu deformacije. Posle dostizanja određene

deformacije smicanje se nastavlja ali sada bez promene zapremine pri čemu se dostiže tzv. kritično stanje.

Iz navedenih opažanja može se zaključiti da je konstitutivno modeliranje tla matematički složen problem.

Da bi na adekvatan način dali odgovore o naponsko - deformacijskom ponašanju, konstitutivni modeli za tlo moraju pre svega da obuhvate sledeće: elasto plastične nelinearne deformacije, značajan uticaj inicijalne poroznosti (kod peskova, relativne zbijenosti, i kod glina stepena prekonsolidacije), uticaj srednjeg normalnog napona kao i devijatora napona. Odgovori su do sada uglavnom traženi u teoriji elastičnosti, teoriji plastičnosti (mehanika kontinuuma) i poslednjih godina u termomehanici. Sa aspekta mehaničkog ponašanja, tlu najviše odgovaraju elastoplastični konstitutivni modeli. Neki od značajnih elasto plastičnih modela su prikazani u 3.2.1 - 3.2.7.

3.2. PREGLED RAZVOJA ELASTOPLASTIČNIH MODELA ZA TLO

Iako ima vrlo kompleksnu strukturu na mikro planu, tlo se kao i mnogi drugi materijali može u makroskopsom ponašanju idealizovati kao kontinuum. Na makro planu, različiti fenomeni povezani sa diskretnim elementima tla kao što su zrna peska ili pločaste naelektrisane čestice gline, integrišu se i osrednjavaju na nivou homogenog modela kontinuuma. Uprkos velikim razlikama koje se javljaju u prirodi i strukturi materijala kao što su metali, polimeri, beton ili tlo postoji velika sličnost u opisivanju njihovog mehaničkog ponašanja. Pojmovi kao što su elastičnost, plastičnost, viskoznost, ojačanje (omekšanje), duktilnost i td. mogu se pripisati svim ovim materijalima, s tim što su, naravno različitog reda veličine. Zajednička osnova njihovog ponašanja omogućava da se umesto proučavanja diskretnih sistema svakog ponaosob, razmatraju kao kontinuumi i koriste koncepti mehanike kontinuuma, termodinamike ili reologije. Taj pristup je usvojen i u modernoj teoriji tla.

Konstitutivne jednačine se formulišu za materijalnu tačku u čijoj je okolini homogeno stanje napona i deformacije. Kao materijalni prototip za to se često uzima tlo čije se ponašanje ispituje u laboratorijskim triaksijalnim ili pravim kubičnim opitima. Prve pokušaje racionalizacije ponašanja tla na osnovu rezultata dobijenih triaksijalnim opitima je učinila grupa istraživača sa Kembridža, Roscoe, Schofield i Wroth (1958). Rad se uglavnom bazirao na ispitivanju glina, ali deo koncepta je našao primenu i za peskove. Razvoj "Cambridge" modela je uključivao teoriju kritičnog stanja, tako da je "Cam Clay" model (Schofield and Wroth, 1968, Roscoe and Burland, 1968) bio prvi i najjednostavniji moderni elasto-plastični konstitutivni model tla. Model je bio formulisan u p-q ravni, koristeći podatke iz standardnog triaksijalnog opita, gde je p - hidrostatička osa a q - devijatorska. Njihova generalizacija za prostorno naponsko stanje pretpostavlja da tečenje i uslovi loma u p-q ravni mogu da se rotiraju oko p ose, tako da to ima za rezultat površ loma prema proširenom Mises-ovom uslovu loma sa kapom koja je zatvara na hidrostatičkoj osi (Drucker, Gibson i Henkel, 1955). Konstitutivnim relacijama "Cambridge" modela se obuhvataju neki rezultati dobijeni triaksijalnim opitima kao što su:

- veza između zapreminske deformacije i hidrostatičkog opterećenja;
- veza između promene zapremine i promene smičućih napona;
- povećanje zapremine kod zbijenog tla a smanjenje kod rastresitog u toku smicanja.

Najveći nedostaci i ograničenja u odnosu na opaženo ponašanje različitih vrsta tla su:

- ne obuhvata strukturalnu i naponsko indukovanu anizotropiju;
- nije primenljiv za ciklična opterećenja jer ne predviđa ni kvalitativno nelinearni i histerezisni naponsko - deformacijski odgovor tla u uslovima rasterećenja - ponovnog opterećenja;
- ne reflektuje izraženu zavisnost dilatancije od odnosa efektivnih napona zapaženu najviše kod nevezanog tla (Rowe (1962)), mada se javlja i kod prekonsolidovanih glina;
- ne obuhvata viskozna svojstva tla.

Od 60-tih godina prošlog veka nastao je određeni broj - plastičnih modela na bazi Cam - Clay modela u pokušaju prevazilaženja njegovih ograničenja i nedostataka.

Najpopularniji i široko korišćeni modeli iz te grupe su modeli sa kapom (Roscoe i Burland (1968)), Di Maggio i Sandler (1971), Baladi (1979), bazirani na klastičnoj izotropnoj teoriji plastičnosti. Najčešća ograničenja modela sa kapom su:

- ne opisuju adekvatno naponski indukovanu anizotropiju
- ne mogu se koristiti u uslovima cikličnog opterećenja.

Slična ograničenja postoje i kod drugih elastoplastičnih modela zasnovanih na izotropnoj plastičnosti.

U većini modela pretpostavlja se da je ponašanje tla rotaciono simetrično u odnosu na hidrostatičku osu, što ne odgovara eksperimentalnim rezultatima naročito za peskove. Granične površi realno su mnogo bliže Mohr - Coulomb-im uslovima loma. Na prevazilaženju ovih nedostataka najviše su doprineli Lade (1977), Lade i Duncan (1975). Granična površ koja vrlo dobro aproksimira Mohr - Coulomb-ov uslov je prezentirana u radovima Matsuoka-e i Nakai-a (1974).

U pokušaju opisivanja evidentne anizotropije prirodno formiranog tla nastalo je nekoliko konstitutivnih anizotropnih modela. S obzirom da su takvi modeli matematički kompleksni, uglavnom se zasnivaju na asocijativnoj plastičnosti, iako tlo spada u frikcionu materijale kod kojih uslov normalnosti na površ tečenja nije ispunjen. Najveći broj anizotropnih modela predstavljeni su u p-q ravni distorziranom (nagnutom) elipsom u odnosu na p' osu (Dafalias (1986), Davis i Newton (1993) Sekiguchi i Ohta (1977)). Dodatno je u nekim od ovih modela razmatrana anizotropija pri smicanju u uslovima pritiska i zatezanja.

Možda bi se moglo argumentovati da su plastični modeli bazirani na zakonu izotropnog ojačanja adekvatni u situacijama u kojima se javlja samo opterećenje, međutim takvi uslovi se realno retko sreću u bilo kom opštem graničnom problemu.

Da bi se za ciklična opterećenja uveli efekti histerezisa u elastoplastične modela je uvedena kombinacija izotropnog i kinematičkog ojačanja. Važan teorijski doprinos tome dali su simultano Mrozz (1967) i Iwan (1967). Oni su pokazali da bi se ponašanje tla pri cikličnom opterećenju moglo predstaviti nizom površi tečenja smeštenih jedna u drugu u naponskom prostoru. Kasnije su se iz takvog koncepta razvili različiti modeli sa kombinacijom izotropnog i kinematičkog ojačanja: Mrozz (1980), Prevost (1978, 1982). Modifikacijom takvog pristupa nastali su modeli u kojima ponašanje tla zavisi od rastojanja površi tečenja i granične površi, gde se sama površ tečenja širi (skuplja) i pomera u naponskom prostoru ograničenom graničnom površi. Zienkiewicz, Mroz i Norris (1979, 1981) su dali generalizovani model zasnovan na konceptu granične površi koji je pogodan za opisivanje povratnog i cikličnog opterećenja.

Kao posebna klasa modela razvili su se tkz. deformacijski zavisni modeli. U takve modele spadaju "Bubble" (mehur) model za Londonske gline koja su predložili Al-Tabbaa i Wood (1989) kao i 3-SKH model koji je predložila Stallebrass (1990). Oni spadaju u modele sa više površi koji mogu imati izotropno i kinematičko ojačanje. Obično se sastoje od površi tečenja, površi istorije opterećenja koje su smeštene u standardnu modifikovanu Cam-Clay graničnu površ. Površ tečenja definiše oblast elastičnog ponašanja tla, dok površ istorije opterećenja definiše oblast zahtevanog opterećenja pre nego što tlo "zaboravi" recentnu naponsku istoriju. Model se ponaša kao modifikovani "Cam-Clay" model kada se naponsko stanje nalazi na graničnoj površi.

U deformacijski zavisne modele spada i elasto plastični "Brick" model Simpsona (1992) razvijen za ponašanje tvrdih, prekonsolidovanih glina. "Brick" model koristi fizičku analogiju sa čovekom koji šeta po sobi vukući za sobom određen broj cigala svaku na posebnom kanapu različite dužine. Posmatrani čovek predstavlja tačku u prostoru deformacija (soba) sa stranama koje predstavljaju zapreminsku i devijatorsku deformaciju. Svaka cigla predstavlja deo elementa, a njeno pomeranje plastičnu deformaciju indukovanu u elementu. Elastična deformacija je razlika između pomeranja čoveka i sume pomeranja svih cigala. Ukoliko se čovek kreće u jednom pravcu kontinualno i cigle će se kretati u istom pravcu. Ako se čovek okrene, inicijalno se cigle neće pomerati, ukoliko nastavi da se kreće prvo će se pokrenuti cigla na kraćem kanapu (dužina kanapa je proporcionalna

elastičnoj krutosti). Koristeći tu analogiju, modelirana je zavisnost krutosti tla od nivoa dostignutih deformacija.

U ovu grupu modela gde se krutost meri prema veličini dostignutih deformacija spada i MIT-E3 model Whittle-a (1993). Model ima tri komponente (i), elastoplastični model za normalno konsolidovanu glinu uključujući anizotropiju i deformacijsko ojačanje, (ii) nelinearnost u ponašanju pri malim deformacijama i histerezisni odgovor pri opterećenju - rasterećenju i (iii) graničnu plastičnu površ za anizotropno i od putanje napona zavisno ponašanje prekonsolidovanih glina. MIT-E3 model zahteva veliki broj parametara, od kojih neke nije jednostavno dobiti rutinskim geomehaničkim opitima, što mu ograničava primenu, tako da se uglavnom koristi u istraživačke svrhe.

Osim razvoja tradicionalne elastoplastične teorije u konstitutivnom modeliranju tla, u savremenom pristupu ovoj oblasti treba pomenuti i dve teorije: hiperplastičnosti i hipoplastičnosti.

Hiperplastičnost se u pristupu plastičnosti bazira na termomehničkim principima. Prvi originalni doprinos takvom pristupu je dao Ziegler (1977), a kasnije Holsby (1981, 1997), Collins (1997), Puzrin (2000, 2001). Prednost ovakvog pristupa je u tome da teoriji plastičnosti obezbeđuje potpunu konzistentnost tako što zadovoljava sve osnovne principe termodinamike, a sa druge strane ima vrlo blisku vezu sa konvencionalnom teorijom plastičnosti. U teoriji hiperplastičnosti, konstitutivno ponašanje disipativnog materijala može se kompletno definisati sa dve funkcije potencijala a to su funkcije slobodne energije i disipaciona funkcija. Ovaj aspekt sagledavanja ponašanja tla pokazuje da su klasične površi tečenja teorije plastičnosti, kao i zakoni ojačanja skriveni u dve skalarne funkcije potencijala.

Hipoplastični konstitutivni modeli (Wu i Kolymbas (1990, 1993)) su nastali iz novog pristupa konstitutivnog modeliranja granularnih sredina koristeći mehaniku kontinuuma. Cilj je opisati neelastične fenomene granularnih materijala bez korišćenja dodatnih pojmova uvedenih u elastoplastičnost kao što u površ tečenja, plastični potencijal i td. Hipoplastičnost predstavlja alternativu klasičnoj elasto-plastičnoj teoriji. Hipoplastični modeli koriste tzv. razvijene (inkrementalne jednačine u generalnoj formi

$$\dot{T} = h(\dot{T}, D, \dots) \quad (3.2)$$

gde je \dot{T} priraštaj Cauchy-ovog tenzora napona, a D priraštaj deformacije. Tenzorska funkcija h mora biti nelinearna u odnosu na D da bi opisala dispaciono ponašanje. Ukoliko

je $h(T,D)$ linearno u odnosu na D model je hipoelastičan, tako da se hipoplastičnost može razumeti kao generalizacija hipoelastičnosti.

U kratkom opisu razvoja konstitutivnih modela za tlo naznačeni su, uglavnom, samo modeli i autori koji su najviše doprineli razvoju ove oblasti. Ima mnogo modela koji su se razvili iz navedenih osnovnih koncepata a koji ovde nisu pomenuti jer predstavljaju njihove manje ili više uspešne varijacije.

Razvoj računarske tehnologije i numeričkih metoda omogućava primenu kompleksnih konstitutivnih modela, ali s druge strane kompleksni modeli zahtevaju veći broj ulaznih parametara, koji se obično ne mogu svi dobiti iz standardnih opita.

Uspešnost primene nekog konstitutivnog modela se zbog toga meri ne samo njegovim uspešnim predviđanjem ponašanja tla u različitim naponsko - deformacijskim uslovima, već i brojem parametara potrebnih za njegovo definisanje dobijenih iz rutinskih opita.

U ovom poglavlju su detaljnije opisani neki od pomenutih modela koji su tipični predstavnici određenog koncepta.

Posebno detaljno su opisana dva modela:

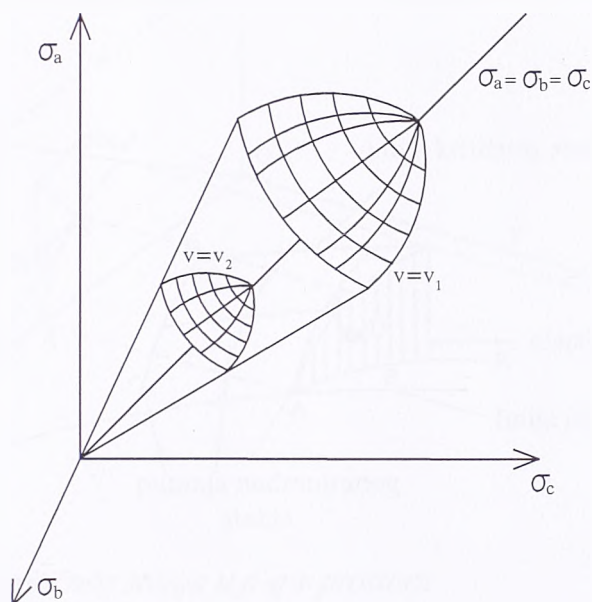
U tački (3.3) "Cam - Clay" model (osnovni i modifikovani)

U tački (3.4) - model sa graničnom površi (Mroz, Norris i Zienkiewicz (1981).

Ova dva modela su detaljno opisana jer je u 4.-om poglavlju za njih rađena numerička integracija konstitutivnih relacija.

3.3. CAM - CLAY MODEL (OSNOVNI I MODIFIKOVANI)

Sa aspekta teorije plastičnosti model spada u elasto - plastične modele sa deformacijskim izotropnim ojačanjem, što znači da je u prostoru glavnih napona osno simetričan u odnosu na hidrostatičku osu. Spada u modele s kapom gde je kapa površ tečenja koja se širi u naponskom prostoru u zavisnosti od dostignutih zapreminskih plastičnih deformacija (sl. 3.3.).



Sl. 3.3 Cam-Clay model u prostoru glavnih napona

Osnovne pretpostavke modela biće formulisane preko veličina koje se javljaju u originalnoj teoriji ponašanja tla u triaksijalnom opitu, a zatim preko generalisanih naponsko - deformacijskih invarijanti.

Osnovne pretpostavke modela:

a) Elastične deformacije je javljaju samo ako se naponsko-deformacijsko stanje tla nalazi ispod granične površi na tzv. "elastičnom zidu". Elastični zid u prostoru $P - q - v$ predstavlja otvorenu cilindričnu površ čije su izvodnice paralelene q osi, a ograničen je linijom bubrenja i linijom preseka sa površi tečenja (sl. 3.4).

b) Od elastičnih deformacija postoje samo zapreminske deformacije dok se distorzijske zanemaruju, što znači da se u odnosu na te deformacije materijal ponaša kruto plastično. To stvara izvesne teškoće kod numeričkog rešavanja problema, međutim, mogu se prevazići uzimajući u obzir da su elastične deformacije male u poređenju sa plastičnim.

Razmotrićemo sada šta se događa kada element gline iz stanja u tački x pređe u blisko stanje u tački y. Pri tome vrednost P_0 dobije priraštaj $P_0 + dP_0$. Drugim rečima, jednačina (3.10) će imati isti oblik ali drugu vrednost P_0 .

Generalno, za bilo koju liniju tečenja jednačina (3.10) se može izraziti u diferencijalnom obliku

$$\frac{dP}{P} + \frac{d\eta}{\psi + \eta} - \frac{dP_0}{P_0} = 0 \quad (3.11)$$

gde je dP_0 rastojanje dva sukcesivna elastična zida, u ovom slučaju $A_1F_1R_1$ i $A_2F_2R_2$. Pri promeni stanja iz bilo koje tačke elastičnog zida $A_1F_1R_1$ u bilo koju tačku zida $A_2F_2R_2$ plastična komponenta promene poroznosti, odnosno zapreminske deformacije, je ista

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_v - d\varepsilon_v^e = -\frac{dv - dv^e}{1 + e} = \frac{\lambda - k}{1 + e} \cdot \frac{dP_0}{P_0} \quad (3.12)$$

Odavde se može zaključiti da je promena P_0 mera promene plastične zapreminske deformacije i za ovaj model predstavlja parametar izotropnog deformacijskog ojačanja.

Iz jednačina (3.11) i (3.12) dobija se

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - k}{1 + e} \cdot \left[\frac{dP}{P} + \frac{d\eta}{\psi + \eta} \right] \quad (3.13)$$

Ukupna zapreminska deformacija je

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^p + d\varepsilon_v^e = \frac{\lambda}{1 + e} \cdot \left[\frac{dP}{P} + \left(1 - \frac{k}{\lambda}\right) \cdot \frac{d\eta}{\psi + \eta} \right] \quad (3.14)$$

Iz jednačine (3.3) zamenom $d\varepsilon_v^p$ iz (3.13) dobija se smičuća komponenta priraštaja plastične deformacije

$$d\varepsilon_s^p = d\varepsilon_s = \frac{\lambda - k}{1 + e} \left[\frac{dP}{P} + \frac{d\eta}{\psi + \eta} \right] \cdot \frac{1}{\psi} \quad (3.15)$$

Za osnovni Cam - Clay model Roscoe je odredio veličinu ψ kao funkciju od η polazeći od razmatranja rada unutrašnjih sila.

Pretpostavimo da se ukupna energija po jedinici zapremine dE koja se skeletu tla prenosi preko njegovih granica može podeliti na povratnu elastičnu energiju dU i disipacionu energiju dW :

$$dE = dU + dW \quad (3.16)$$

U skladu sa pretpostavkama Cam-Clay teorije za triaksijalne uslove kompresije povratna energija se troši za rad sile P na elastičnoj zapreminskoj deformaciji $d\varepsilon_v^e$, dok se disipacioni deo troši za rad sila P i q odgovarajućim plastičnim deformacijama $d\varepsilon_v^p$ i $d\varepsilon_s = d\varepsilon_s^p$.

$$dU = P \cdot d\varepsilon_v^e = \frac{k}{1+e} dP \quad (3.17)$$

$$dW = P \cdot d\varepsilon_v^p + q \cdot d\varepsilon_s^p \quad (3.18)$$

Rascoe je pretpostavio da se disipacioni deo energije, za svako stanje na graničnoj površi troši na frikcionni rad, odnosno

$$dW = M \cdot P \cdot d\varepsilon_s \quad (3.19)$$

$$M \cdot P \cdot d\varepsilon_s = P \cdot d\varepsilon_v^p + q \cdot d\varepsilon_s \quad (3.20)$$

Iz jednačine (3.20) dobija se izraz ψ

$$\frac{1}{\psi} = \frac{d\varepsilon_s}{d\varepsilon_v^p} = \frac{1}{M - \eta} \quad (3.21)$$

Zamenjujući ψ u jednačinama (3.13), (3.14) i (3.15) dobijaju se veze deformacionih i naponskih veličina za osnovni Cam - Clay model

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{1+e} \left[\frac{\lambda - k}{M} d\eta + \lambda \frac{dP}{P} \right] \quad (3.22)$$

$$d\varepsilon_s = d\varepsilon_s^p = \frac{\lambda - k}{1+e} \cdot \frac{P \cdot d\eta + M \cdot dP}{M \cdot P(M - \eta)} \quad (3.23)$$

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - k}{1+e} \left[\frac{dP}{P} + \frac{d\eta}{M} \right] \quad (3.24)$$

Jednačina linije tečenja zamenom u (3.10) postaje

$$\eta = M \cdot \ln \frac{P_0}{P}$$

Kasnije je Burland predložio modifikaciju vezanu za disipacionu energiju tako da je dobijen Modifikovani Cam-Clay model koji se u savremenoj literaturi više koristi jer se bolje slaže sa eksperimentalnim rezultatima.

Izraz za disipacionu energiju za Modifikovani model je dat jednačinom (3.25)

$$dW = P \cdot \sqrt{(d\varepsilon_v^p)^2 + (M \cdot d\varepsilon_s)^2} \quad (3.25)$$

Koristeći jednačinu (3.25) dobija se izraz za ψ

$$\frac{1}{\psi} = \frac{2 \cdot \eta}{M^2 - \eta^2} \quad (3.26)$$

Zamenjujući ψ u jednačinama (3.13), (3.14) i (3.15) dobijaju se veze deformacijskih i naponskih veličina za Modifikovani Cam-Clay model

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{1+e} \left[(\lambda - k) \cdot \frac{2 \cdot \eta \cdot d\eta}{M^2 + \eta^2} + \lambda \cdot \frac{dP}{P} \right] \quad (3.27)$$

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - k}{1+e} \left[\frac{2 \cdot \eta \cdot d\eta}{M^2 + \eta^2} + \frac{dP}{P} \right] \quad (3.27)$$

$$d\varepsilon_s = d\varepsilon_s^p = \frac{\lambda - k}{1+e} \cdot \frac{2 \cdot \eta}{M^2 - \eta^2} \left[\frac{2 \cdot \eta \cdot d\eta}{M^2 + \eta^2} + \frac{dP}{P} \right] \quad (3.29)$$

Jednačina linije tečenja zamenom u (3.10) postaje

$$\frac{P}{P_0} = \frac{M^2}{M^2 + \eta^2}, \quad (3.30)$$

odnosno u obliku uslova tečenja

$$f = P^2 - PP_0 + \frac{q^2}{M^2} = 0, \quad (3.31)$$

što u dijagramu q-P predstavlja elipsu prečnika P_0 .

U dosadašnjem izlaganju Cam - Clay teorije tretirani su rotaciono simetrični naponsko - deformacijski uslovi koji se javljaju u opitu triaksijalne kompresije. Roscoe i Burland su proširili primenu za uslove prostornog stanja napona i deformacija. Za

generalizovano naponsko stanje osnovne jednačine modifikovanog Cam-Clay modela su date u poglavlju 4.

Kao što se može uočiti ovaj model spada u troparametarske modele, gde su parametri M , λ i k . Za konkretan problem potreban je, pored poznatog početnog naponskog stanja, i inicijalni koeficijent poroznosti e_0 .

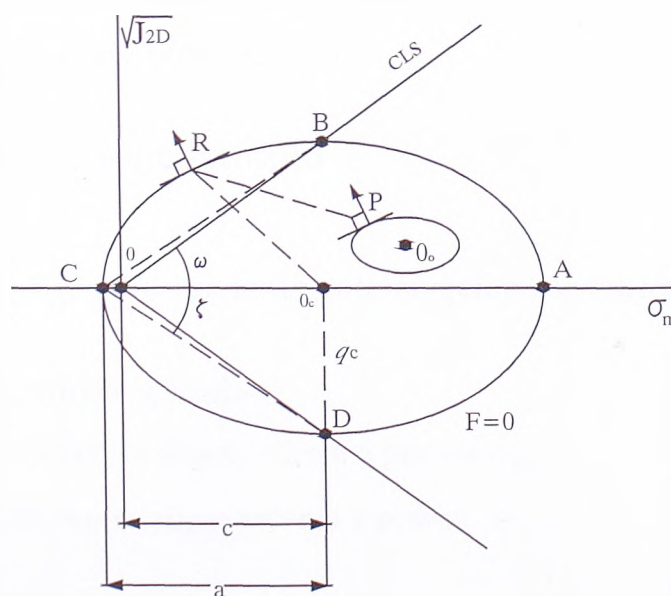
3.4. MODEL SA GRANIČNOM POVRŠI (Mrozz, Norris, Zienkiewicz)

Kao osnovni koncept za ovaj model je usvojn koncept kritičnog stanja (Roscoe i Burland, 1968) proširujući ga za opisivanje ponašanja tla i u uslovima cikličnog opterećenja pri čemu tlo (naročito gline) pokazuju histerezisno ponašanje.

Iz modela kritičnog stanja se zadržava konkolidaciona (granična) površ kojom se obuhvata efekat stepena konsolidacije. Konsolidaciona površ se menja sa promenom poroznosti, odnosno sa promenom plastične zapreminske deformacije preko koje se izražava izotropno ojačanje. Autori modela su uveli anizotropno ponašanje tla u funkciji inicijalne konsolidacije preko površi tečenja i kinematičkog ojačanja, tako da se model sastoji od dve površi.

U originalnom radu površi konsolidacije i tečenja su date za uslove rotaciono simetričnog naponskog stanja iz triaksijalnog opita, a ovde će biti predstavljene za generalizovano trodimenzionalno naponsko stanje.

Konsolidaciona površ u dijagramu $\sqrt{J_{2d}} - \sigma_m$ (gde je J_{2d} - druga invarijanta devijatorskog dela tenzora napona, σ_m srednji normalni napon) predstavlja elipsu čiji je veći poluprečnik uvek na σ_m - osi (sl. 3.6). Površ tečenja je takođe elipsa geometrijski slična sa konsolidacionom koja se može pomeriti unutar konsolidacione elipse.



Sl. 3.6 Model sa graničnom površI u p-q dijagramu

Model je zasnovan na sledećim pretpostavkama:

- Stepen konsolidacije reprezentuje konsolidaciona površ (granična površ) $F=0$ koja zavisi od poroznosti i reflektuje izotropne osobine materijala.
- Površ tečenja $f_0 = 0$ zatvara elastičnu oblast u naponskom prostoru i pomera se, širi ili skuplja unutar oblasti koju zatvara konsolidaciona površ.
- Moduli ojačanja tla se menjaju duž putanje napona od maksimalnih početnih vrednosti do minimalnih prilikom kontakta površi F i f_0 .
- Važi asocijativni zakon plastičnosti
- Viskozni efekti su zanemarljivi

Model obuhvata dva fenomena ponašanja tla: zavisnost od istorije konsolidacije i histerezisno ponašanje za napone manje od konsolidacionih napona.

Konsolidaciona površ je opisana u $q = \sqrt{J_{2d}} - \sigma_m$ ravni sledećom jednačinom

$$F = (\sigma_m - c)^2 + 3 \frac{q^2}{m^2} - a^2 = 0 \quad (3.32)$$

dok je površ tečenja f_0

$$f_0 = (\sigma_m - \alpha_m)^2 + 3 \frac{(q - \alpha_q)^2}{m^2} - a_0^2 = 0 \quad (3.33)$$

gde su:

a - poluprečnik elipse konsolidovane površi

a_0 - poluprečnik elipse površi tečenja

$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ - srednji normalni napon

$q = \sqrt{J_{2d}} = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}$ - druga invarijanta devijatorskog tenzora napona

m - nagib linije kritičnog stanja

α_m - koordinata centra elipse tečenja u pravcu σ_m

α_q - koordinata centra elipse tečenja u pravcu q

$c = a \cdot \frac{m}{n}$ $m = \operatorname{tg} \zeta$ $n = \operatorname{tg} \omega$ (vidi sl. 3.6)

U modelu se usvaja da je odnos poluprečnika a i a_0 konstantan

$$a = D \cdot a_0 \quad (3.34)$$

Koristeći asocijativni uslov plastičnosti, autori su uslov normalnosti redefinisali na sledeći način:

$$d\varepsilon_V^p = \frac{1}{K_p} \cdot n_p \cdot d\sigma_n \quad d\varepsilon_V^p = d\varepsilon_{ii}^p \quad (3.35a)$$

$$d\varepsilon_d^p = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{K_p} \cdot n_q \cdot d\sigma_n \quad d\varepsilon_q^p = \sqrt{\frac{1}{2} d\varepsilon_{ij}^{p'} d\varepsilon_{ij}^{p'}} \quad (3.35b)$$

gde je: $n_p = \frac{\sigma_m - \alpha_m}{G_f}$ $n_q = \frac{3(q - \alpha_q)}{m^2 \cdot G_f}$ (3.35c)

$$d\sigma_n = \frac{1}{G_f} \left[(\sigma_m - \alpha_m) \cdot d\sigma_m + \frac{3(q - \alpha_q)}{m^2} dq \right] \quad (3.35d)$$

$$G_f = \left[(\sigma_m - \alpha_m)^2 + \frac{3(q - \alpha_q)^2}{m^4} \right]^{1/2} \quad (3.35e)$$

Moduli ojačanja K_p koji se pojavljuju u jednačinama (3.35 a,b) predstavljaju odnos priraštaja napona u pravcu normale na površ tečenja i priraštaja plastičnih deformacija.

Zakoni kinematičnog i izotropnog ojačanja su formulisani na sledeći način:

Kinematičko ojačanje

Da bi se obezbedila kontinuiranost procesa deformacije unutar konsolidacione površi usvaja se postulat da se površi $f_0 = 0$ i $F=0$ ne seku. Ta pretpostavka se matematički može izraziti tako da svaka tačka P na površi tečenja ima konjugovanu tačku R na konsolidacionoj površi koje imaju isti pravac spoljašnje normale i da se površ tečenja pomera duž pravca koji spaja konjugovane tačke (Sl. 3.6). Iz tog uslova se u vektorskom obliku može napisati:

$$\frac{\sigma_p - \alpha}{a_0} = \frac{\sigma_r - \alpha_c}{a} \quad (3.36a)$$

odnosno

$$\sigma_R = \alpha_c + \frac{a}{a_0} (\sigma_P - \alpha) \quad (3.36b)$$

odatle je:

$$\beta = \overline{PR} = \sigma_R - \sigma_P = \frac{1}{a_0} [a_0 \alpha_c - a \alpha + \sigma_P (a - a_0)] \quad (3.37)$$

Ako se tačka P pomeri duž pravca β , i ako se uzme u obzir promena koordinata centra elipsa usled promene poluprečnika a i a_0 , kinematičko ojačanje se može izraziti promenom položaja centra elipse tečenja:

$$d\alpha = \beta d\mu + \frac{da - da_0}{a} (\sigma_P - \alpha) + d\alpha_c \quad (3.38)$$

gde je $d\mu$ skalar koji se određuje iz uslova konzistencije.

Promena koordinata centra elipse tečenja u $\sigma_m - q$ ravni je:

$$d\alpha_q = d\mu \left[-q + \frac{a}{a_0} (q - \alpha_q) \right] + \frac{da - da_0}{a_0} (q - \alpha_q) \quad (3.39a)$$

$$d\alpha_m = d\mu \left[c - \sigma_m + \frac{a}{a_0} (\sigma_m - \alpha_m) \right] + \frac{da - da_0}{a_0} (\sigma_m - \alpha_m) + da \frac{m}{n} \quad (3.39b)$$

Izotropno ojačanje

Širenje i skupljanje površi tečenja zavisi samo od promene zapreminske plastične deformacije, a izražava se promenom poluprečnika tečenja. Usvaja se isti koncept izotropnog ojačanja kao kod Cam-Clay modela, odnosno:

$$\frac{da}{a} = a_i \cdot \frac{1 + e_0}{\lambda - k} \cdot d\varepsilon_v^p \quad (3.40a)$$

S obzirom da je

$$a_0 = \frac{a}{D} \quad \Rightarrow \quad \frac{da_0}{a_0} = \frac{a_i}{D} \cdot \frac{1 + e_0}{\lambda - k} \cdot d\varepsilon_v^p \quad (3.40b)$$

Za kompletan opis modela potrebno je definisati zakon promene modula K_p . Pretpostavlja se da se K_p menja kontinualno od inicijalne veličine K_{p0} na površi tečenja

do K_{pr} na konsolidacionoj površi. Za proračun K_{pr} se razmatra konsolidacioni proces u kome su površi $f_0 = 0$ i $F=0$ u kontaktu. Pošto su plastične deformacije u pravcu normale na $F=0$ može se napisati

$$d\varepsilon_v^p = \frac{1}{K_{PR}} \cdot n_p \cdot d\sigma_n \quad d\varepsilon_q^p = \frac{1}{K_{PR}} \cdot n_q \cdot d\sigma_n \quad (3.41)$$

Modul K_{pr} se sračunava koristeći uslov konzistencije

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \cdot d\sigma_m + \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial a} \cdot da = 0 \quad (3.42)$$

Iz jednačine (3.41) i (3.42) uz uslov da je

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \cdot d\sigma_m + \frac{\partial F}{\partial q} dq = 2d\sigma_n \cdot G_F = -\frac{\partial F}{\partial a} \cdot da \quad (3.43)$$

dobija se da je

$$K_{PR} = \frac{\eta a'}{G_F^2} \left[\left(\sigma_m - a \cdot \frac{m}{n} \right) \frac{m}{n} + a \right] \left(\sigma_m - a \frac{m}{n} \right) \quad (3.44)$$

gde je:

$$\eta = \frac{1}{1+e}$$

$$a' = \frac{a}{\eta} \cdot \frac{1+e}{\lambda - k}$$

$$G_F = \left[(\sigma_m - c)^2 + \frac{3q^2}{m^4} \right]^{1/2}$$

Ne ulazeći u detaljno razmatranje polaznih eksperimentalnih osnova za određivanje interpolacione funkcije za zakon promene modula K_p , autori su predložili sledeći izraz smatrajući ga dovoljno dobrom aproksimacijom

$$K_p = K_{PR} + K_{P0} \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)^{\gamma+1} \quad (3.45)$$

gde je

$$\delta = \left[3 \left(\frac{q_R - q_P}{m} \right)^2 + (\sigma_{mR} - \sigma_{mP})^2 \right]^{1/2} \quad (3.46)$$

δ_0 - maksimalna vrednost δ

γ - broj eksperimentalno dobijen iz opita izotropne konsolidacije

Modul ojačanja se menja od inicijalne vrednosti $K = K_{P0}$ za $\delta = \delta_0$ do $K_P = K_{PR}$ za $\delta = 0$, kada je površ tečenja u kontaktu sa konsolidacionom površi.

Priraštaji elastičnih deformacija su dati sledećim izrazima:

$$d\varepsilon_d^e = \frac{dq}{2G_s} \quad (3.47a)$$

$$d\varepsilon_v^e = \frac{d\sigma_m}{K_s} \quad (3.47b)$$

$$K_s = \frac{(1+e)\sigma_m}{k} \quad (3.47c)$$

gde je G_s modul smicanja a K_s modul kompresije.

Model u odnosu na Cam - Clay model ima dva parametra više (γ i K_{P0}), međutim oba parametra se mogu dobiti iz standardnih triaksijalnih opita što ga sa tog stanovišta čini pogodnim za korišćenje u rešavanju geotehničkih problema.

3.5. MATERIJALNI MODEL ZA GRANULARNA TLA ("CAP MODEL")

Ovaj model su predložili Di Maggio i Sandler (1971) kao model koji može uspešno da opiše ponašanje granularnih materijala. Sastoji se iz dve površi tečenja koje se međusobno seku. Jedna površ je fiksirana u prostoru glavnih napona i to je površ koja definiše naponsko stanje pri lomu materijala. Ona se sastoji od dve Drucker-Prager-ove površi međusobno spojene prelaznom površi. Na slici (3.7) je prikazan model u ravni $I_1 - \sqrt{I_{2D}}$ gde je ova površ označena sa f_f .

Funkcija kojom je opisana površ loma data je sledećom jednačinom:

$$f_F = \sqrt{I_{2D}} - \alpha - \theta \cdot I_1 + \gamma \cdot e^{-\beta I_1} \quad (3.48)$$

I_1 i I_{2D} su prva invarijanta tenzora napona i druga invarijanta devijatorskog dela tenzora napona, a α , β , θ i γ su konstante i predstavljaju parametre materijala.

Druga površ popuštanja je "kapa" koja se širi u prostoru glavnih napona u funkciji akumuliranih plastičnih deformacija i to zapreminskih. Ovom površi se obuhvata osobina ojačanja tla što je kod predloženog modela izotropno ojačanje.

Funkcija površi kape data je sledećom jednačinom:

$$f_K(I_1, I_2, \varepsilon_v^p) = R^2 \cdot I_{2D} + (I_1 - C)^2 - R^2 \cdot b^2 = 0 \quad (3.49)$$

U ravni $I_1 - \sqrt{I_{2D}}$ jednačina (3.49) ima oblik elipse sa poluosama R i b .

Pretpostavljeni zakon ojačanja dat je u sledećem obliku:

$$x = -\frac{1}{D} \cdot \ln \left(1 - \frac{\varepsilon_v^p}{W} \right) + z \quad (3.50)$$

gde su:

x - vrednost I_1 u preseku kape i hidrostatičke ose

ε_v^p - zapreminska plastična deformacija koja odgovara tekućem x

D , z i W - parametri materijala.

Veličina D određuje brzinu promene zapreminske plastične deformacije, z određuje početne plastične zapreminske deformacije, a W ograničava maksimalnu plastičnu zapreminsku deformaciju koja smanjuje poroznost materijala na veličinu blizu nuli.

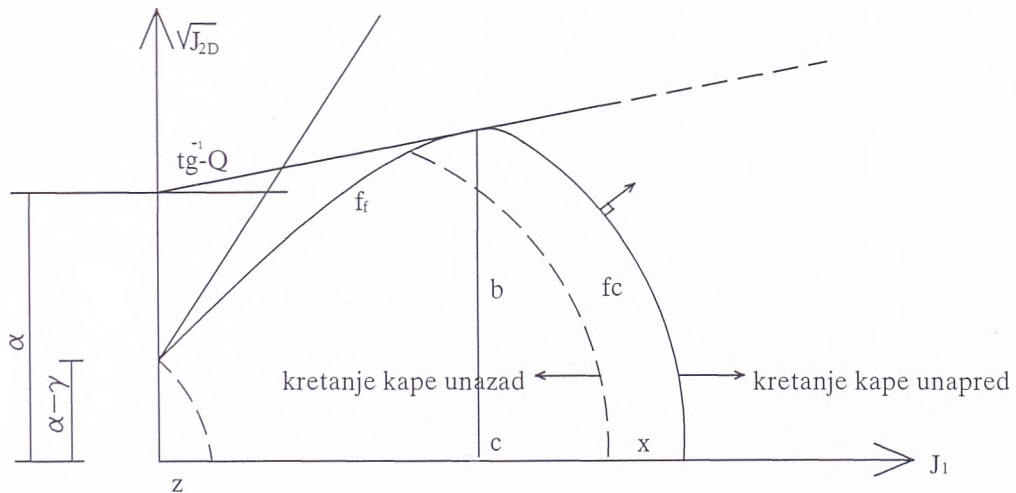
Model se ponaša elastično ukoliko je naponsko stanje unutar kape i površi loma. U elastičnom području ponašanje materijala je nelinearno. Modul smicanja i kompresije su funkcije naponskih invarijanti.

$$K = K(I_1, k) \quad (3.51)$$

$$G = G(\sqrt{I_{2D}}, k)$$

U elastičnoj oblasti hidrostatička komponenta napona izaziva samo zapreminske deformacije, a devijatorske komponente samo smičuće.

U elastoplastičnoj oblasti ako se naponsko stanje nalazi na površi "kape" javljaju se i elastične i plastične deformacije. Pošto se radi o asocijativnoj plastičnosti vektor priraštaja plastičnih deformacija je upravan na površ "kape" (slika 3.7). Pri tome se kapa pomera unapred, odnosno materijal se ojačava.



Sl. 3.7 Model sa kapom (Di Maggio i Sandler, 1971)

Ukoliko se naponsko stanje nalazi na površi loma dolazi do pojave plastičnih deformacija. U tom slučaju je zapreminska komponenta priraštaja plastičnih deformacija negativna, odnosno materijal povećava zapreminu pa se usled toga kapa pomera unazad. Ovim se obuhvata dilataciono svojstvo materijala. Pri kretanju kape unazad materijal se omekšava.

Kod ovog modela se uvodi ograničenje u odnosu na napon zatezanja po kome

$$T \leq I_1$$

gde je T maksimalno dozvoljeno hidrostatičko zatezanje.

Za male napone se može uvesti i tzv. mala kapa čiji je centar u koordinatnom početku.

Za kompletno definisanje modela potrebno je odrediti 10 parametara materijala koji se mogu dobiti laboratorijskim ili terenskim opitima. Model sa ovako definisanim površima popuštanja obuhvata i dilataciona svojstva materijala što ga čini pogodnim za primenu na tla kod kojih je to svojstvo izraženo.

3.6. ELASTO PLASTIČNI MODEL SA ANIZOTROPNIM OJAČANJEM ZA GLINE I PESKOVE (PROŠIREN SEKIGUCHI - OHTA MODEL)

Sekiguchi i Ohta (1977) su predložili model sa anizotropnim ojačanjem za gline koji predstavlja proširenje originalnog Cam-Clay modela za normalne K_0 konsolidovane gline. Kao kriterijum loma u modelu je korišćen prošireni Mises-ov kriterijum koji ne predviđa dobro ponašanje tla u trodimenzionalnom naponskom stanju.

Sun i Matsuoka (2004) su predložili sličan model u kome se umesto Mises-ovog koristi Matsuoka - Nakai (1974) kriterijum loma nazvan SMP kriterijum koji je jedan od najboljih kriterijuma za opisivanje loma tla usled smicanja u trodimenzionalnom naponskom prostoru. SMP kriterijum je uveden u Sekiguchi-Ohta model korišćenjem transformisanog tenzora napona, tako da SMP kriterijum u prostoru transformisanih glavnih napona predstavlja konus sa osom u pravcu prostorne dijagonale.

Osim toga, u proširenom modelu se redefiniše veza između napona i dilatancije, tako da se, uz kombinaciju sa SMP kriterijumom dobija jedinstveni elastoplastični model za gline i peskove koji može da opiše negativnu i pozitivnu dilatanciju tla sa početnom naponskom indukovanom anizotropijom.

Sekiguchi-Ohta model je nastao iz originalnog Cam-Clay modela uvodeći inicijalnu anizotropiju u proračun preko naponskog odnosa η^* umesto $\eta = q/p$, tako da se funkcija tečenja kao i naponskog potencijala izražavaju sledećom jednačinom:

$$f = g = \frac{\lambda - k}{1 + e_0} \left(\ln \frac{p}{p_0} + \frac{\eta^*}{M} \right) - \varepsilon_v^p = 0 \quad (3.52)$$

Oznake su iste kao kod Cam-Clay modela osim promenljive η^* , koja odražava inicijalnu anizotropiju

$$\eta^* = \sqrt{\frac{3}{2} (\eta_{ij} - \eta_{ij0}) (\eta_{ij} - \eta_{ij0})} \quad (3.53)$$

$$\eta_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - p\delta_{ij}}{p} \quad \eta_{ij0} = \frac{\sigma_{ij0} - p_0\delta_{ij}}{p_0}$$

σ_{ij0} je vrednost σ_{ij} na kraju anizotropne konsolidacije. Za $\sigma_{ij0} = 0$ (izotropna konsolidacija) model prelazi u Cam-Clay model. U predloženom proširenom Sekiguchi-Ohta modelu se redefiniše relacija napon-dilatancija uvođenjem veličine η_k .

Ako je

$$\eta_k = \frac{3}{2\eta^*} (\eta_{ij} - \eta_{ij0}) \cdot \eta_{ij} \quad (3.54)$$

onda se diferenciranjem jednačine (3.52) dobija da je

$$\eta_k = M - \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p} \quad (3.55)$$

gde je $d\varepsilon_d^p$ devijatorska komponenta plastične deformacije.

Izraz (3.55) predstavlja vezu napon - dilatancija koji je definisan na isti način kao kod Cam-Clay modela. Sa ovako definisanom veličinom η_k model može da opiše i negativnu dilatanciju.

Uvođenje SMP kriterijuma loma je uspešno sprovedeno transformacijom napona, tako da u transformisanom naponskom prostoru SMP kriterijum prelazi u prošireni Mises-ov kriterijum. SMP kriterijum se izražava jednačinom:

$$\frac{I_1 \cdot I_2}{I_3} = \text{const} \quad (3.56)$$

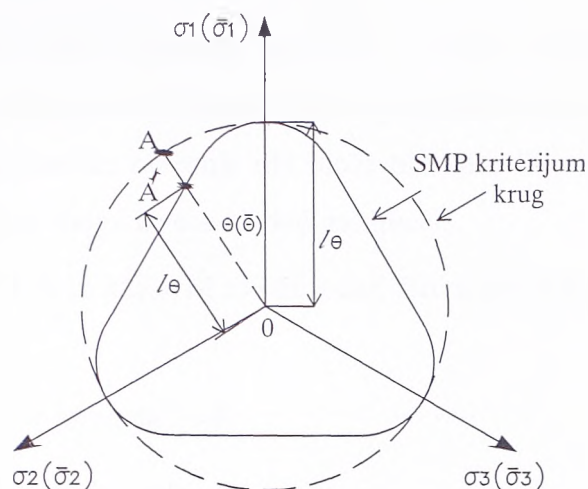
gde su I_1, I_2, I_3 prva, druga i treća invarijanta tenzora napona. Na sl. 3.9. je u π ravni punom linijom prikazana kriva SMP kriterijuma u naponskom prostoru $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, a isprekidanom linijom (krug) u transformisanom prostoru $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3)$.

Preslikavanje napona u naponski prostor se vrši na sledeći način:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = p\delta_{ij} + \frac{l_\theta}{\sqrt{S_{kl}S_{kl}}} \cdot S_{ij} \quad (3.57)$$

gde je S_{ij} devijatorska komponenta napna, a l_θ (sl. 3.9)

$$l_\theta = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{I_1}{3\sqrt{(I_1I_2 - I_3)(I_1I_2 - 9I_3)} - 1} \quad (3.58)$$



Sl. 3.9 SMP kriterijum u naponskom i transformisanom prostoru

Ukoliko se Sekiguchi-Ohta model definiše preko transformisanog napona $\tilde{\sigma}$, i uvede novi parametar ojačanja H umesto ε_v^p dobiće se funkcija tečenja i plastičnog potencijala

$$f = g = \frac{\lambda - k}{1 + e_0} \left(\ln \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0} + \frac{\tilde{\eta}^*}{M} \right) - H = 0 \quad (3.59)$$

U jednačini (3.59) M je odnos q/p pri karakterističnom stanju:

- za tla sa izraženim dilatacionim svojstvima (srednje zbijeni i zbijeni pesak) to je stanje kad je promena plastične zapreminske deformacije nula

- za tla koja se zbijaju (normalno konsolidovane gline) to je kritično stanje

Promenljiva $\tilde{\eta}^*$ se definiše na isti način kao kod Sekiguchi-Ohta modela

$$\tilde{\eta}^* = \sqrt{\frac{3}{2} (\tilde{\eta}_{ij} - \tilde{\eta}_{ij0}) (\tilde{\eta}_{ij} - \tilde{\eta}_{ij0})} \quad (3.60)$$

$$\tilde{\eta}_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{p} \delta_{ij}}{\tilde{p}}$$

Parametar ojačanja je u funkciji i zapreminske i devijatorske plastične deformacije

$$dH = \frac{M_f^4}{M_f^4} \frac{M_f^4 - \tilde{\eta}_k^4}{M^4 - \tilde{\eta}_k^4} \cdot d\varepsilon_v^p \quad \tilde{\eta}_k = \frac{3}{2\tilde{\eta}^*} (\tilde{\eta}_{ij} - \tilde{\eta}_{ij0}) \cdot \tilde{\eta}_{ij} \quad (3.61)$$

gde je M_f veličina q/p pri stanju loma ($\varepsilon_d^p \rightarrow \infty$) u naponskom stanju triaksijalne kompresije i pretpostavlja se da je konstanta zbog jednostavnosti i praktične primene.

Pošto je H parametar ojačanja dH može biti veće ili jednako nuli. Uzimajući to u obzir, iz izraza (3.61) se mogu izvesti sledeći zaključci:

- kad je $\tilde{\eta}_k = 0$ ili je $M_f = M \Rightarrow dH = d\varepsilon_v^p$ što se javlja kod Sekiguchi - Otha i Cam - Clay modela

- kad je $0 < \tilde{\eta}_k < M \Rightarrow d\varepsilon_v^p > 0$

- kad je $\tilde{\eta}_k = M \Rightarrow d\varepsilon_v^p = 0$

- kad je $M < \tilde{\eta}_k < M_f \Rightarrow d\varepsilon_v^p < 0$

Odavde se vidi da se modelom može opisati i pozitivna i negativna dilatancija.

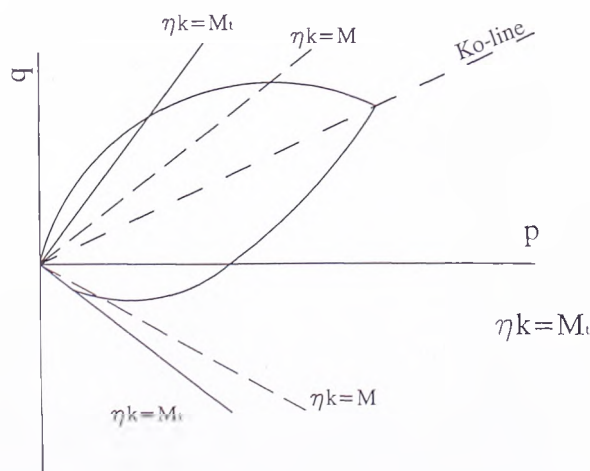
S obzirom da se u predloženom modelu usvaja asocijativna plastičnost u transformisanom naponskom prostoru priraštaji plastičnih deformacija su

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \quad (3.62)$$

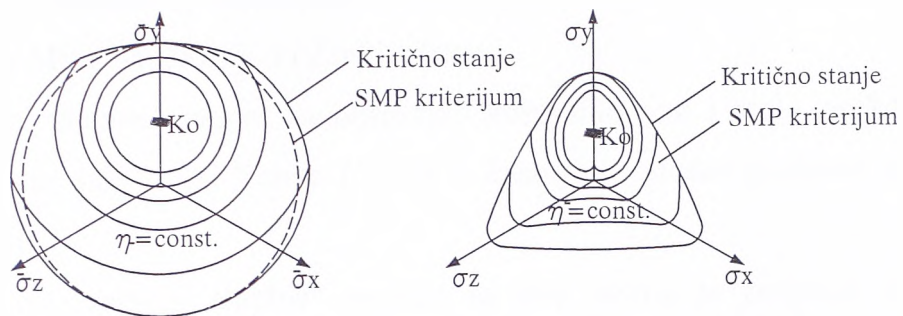
gde je λ konstanta koja se može odrediti iz uslova plastične konzistencije.

Na slici 3.10 su dati kriva tečenja predloženog modela u p - q ravni (3.10a), kao i u devijatorskim ravnima u prostoru transformisanih napona (3.10b) i stvarnih napona (3.10c).

Dobra osobina modela je što se sa povećanjem kompleksnosti uvodi samo jedan novi parametar (M_f) u odnosu na Cam-Clay model, koji se takođe može dobiti iz standardnog triaksijalnog opita.



Sl 3.10 a Krive tečenja u p - q ravni



b)

c)

Sl. 3.10 b i c Krive tečenja u prostoru transformisanih i stvarnih. napona

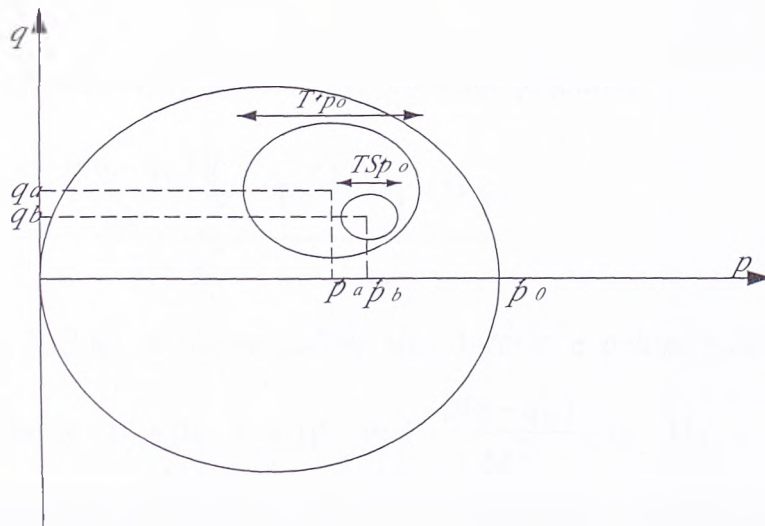
3.7 "BUBBLE" MODELI ZA GLINE

Ovi modeli su nastali proširenjem Cam-Clay modela na vrlo sličan način, prethodno izloženog modela Mrozz-a, Norris-a i Zinkiewicz-a.

Originalan "Bubble" model za normalno konsolidovane i malo prekonsolidovane gline sa dve površi dala je Al Tabba (1987), a kasnije je model proširen na tri površi, Stallebrass (1990).

Koncept originalnog "Bubble" modela sa dve površi je potpuno isti kao kod prethodnog opisanog modela Mrozza-a, Norrisa-a i Zinkiewicz-a. Jedina razlika koja se javlja je u različitom definisanju modula ojačanja, pa zbog toga taj model neće biti detaljnije opisan.

Biće prikazan "Bubble" model sa tri površi, jer se kod njega uvodi i površ pamćenja istorije opterećenja. Model je nazvan 3-SK4. Jednačine površi tečenja, istorije opterećenja i granične površi su respektivno date sledećim izrazima u p' - q dijagramu za rotaciono simetrične uslove (sl. 3.11):



Sl. 3.11 3-SK4 model u p - q dijagramu (Stallebrass, 1990)

$$(p' - p'_b)^2 + \frac{(q - q_b)^2}{M^2} = \frac{T^2 S^2 p_0'^2}{4} \quad (3.63)$$

$$(p' - p'_a)^2 + \frac{(q - q_a)^2}{M^2} = \frac{T^2 p_0'^2}{4} \quad (3.64)$$

$$\left(p' - \frac{p'_0}{2}\right)^2 + \frac{q^2}{M^2} = \frac{p_0'^2}{4} \quad (3.65)$$

Odnos veličina prečnika svih elipsi je konstantan, što znači da su veličine T i S konstante.

Elastične deformacije su usvojene kao kod Cam-Clay modela

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_v^e \\ d\varepsilon_q^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k/p & 0 \\ 0 & 1/3 G_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Veza priraštaja plastičnih deformacija i priraštaja napona data je na sličan način kao kod originalnog "Bubble" modela:

$$\begin{bmatrix} de_v^p \\ de_q^p \end{bmatrix} = \frac{\lambda^* - k^*}{\left[p'(p' - p_b) + \frac{q(q - q_b)}{M^2} \right] (p' - p_b') + H_1 + H_2} \cdot \begin{bmatrix} (p' - p_b')^2 & (p' - p_b') \frac{(q - q_b)}{M^2} \\ (p' - p_b') \frac{(q - q_b)}{M^2} & \frac{(q - q_b)^2}{M^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp' \\ dq \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Kao što se iz jednačine (3.67) vidi modul ojačanja je jednak

$$h = \frac{\left[p'(p' - p_b) + \frac{q(q - q_b)}{M^2} \right] (p' - p_b') + H_1 + H_2}{\lambda^* - k^*} \quad (3.68)$$

H_1 i H_2 su veličine kojima se onemogućava singularnost u nekim tačkama kinematičke površi, odnosno kada je $p' = p_b$ i $p'(p - p_b) + \frac{q(q - q_b)}{M^2} = 0$. H_1 i H_2 osiguravaju kontinuiranu promenu krutosti kada su površi u kontaktu. $H_2 = 0$ kada su površ tečenja i površ istorije opterećenja u kontaktu, a $H_1 = 0$ kada se sve tri površi dodiruju. Na taj način površ istorije opterećenja ograničava oblast u kojoj model "pamti" skorašnju istoriju opterećenja.

3.8. TERMOMEHANIČKA FORMULACIJA ELASTO-PLASTIČNIH MODELA

Najveći broj postojećih inženjerskih teorija o ponašanju tla su zasnovani na teroji elastičnosti ili teoriji plastičnosti. Konstitutivni modelu za tlo nastali iz teorije plastičnosti se uglavnom zasnivaju na određivanju površi tečenja, plastičnog potencijala i zakona ojačanja obezbeđujući modele koji dobro predviđaju naponsko - deformacijski odgovor i lom granularnih materijala u određenom broju standardnih laboratorijskih opita. Ti modeli retko imaju čvrsto fizičko tumačenje.

Nove ideje vezane za konstitutivno modeliranje tla se poslednjih godina zasnivaju na teoriji termomehanike kontinuuma.

Termomehanički pristup omogućava formiranje modela koji zadovoljavaju fundamentalne zakone termodinamike i mogu se fizički interpretirati preko akumulirane ("energy storage") energije i disipacije.

Posebno je važna razlika između brzine plastičnog rada i plastične disipacije, bliska veza između plastične deformacije i indukovane anizotropije kao i između disipacije i zakona tečenja.

Mada su temperaturne promene retko tretiraju u geotehničkim problemima, moderna teorija termomehanike se može primeniti u konstitutivnom modeliranju tla.

Ovde će biti ukratko predstavljena opšta teorija (Collins, Kolsby, 1999, Collins, 2005) u obliku pogodnom za primenu na tlo, pri čemu se naponi tretiraju kao efektivni naponi. Pretpostavlja se da je tlo kontinuum, zanemarujući granularnu strukturu.

Za izotermičke deformacije kod materijala čije je termičko ponašanje nezavisno od vremena, ponašanje je određeno dvema funkcijama. To su: funkcija slobodne energije Ψ (Nelmoltz) energije koja se "akumulira" (deponuje) i funkcija promene disipacije $\hat{\Phi}$, koja daje brzinu kojom se energija konvertuje nepovratno u toplotu. Obe funkcije se definišu po jedinici zapremine. Treba napomenuti da disipacija ne postoji kao funkcija stanja, postoji samo brzina disipacije pa se zato obeležava sa $\hat{\Phi}$ umesto sa Φ . Pretpostavljajući male deformacije, osnovna jednačina rada u diferencijalnom obliku (jednačina promene rada) može se napisati:

$$\sigma : \dot{\epsilon} = \dot{\Psi} + \hat{\Phi} \quad \hat{\Phi} \geq 0 \quad (3.78)$$

Slobodna energija je funkcija stanja, zavisna od seta promenljivih, za koje se pretpostavlja da definišu stanje elemenata kontinuuma tla. Veličina bilo koje takve

promenljive mora zavisiti samo od trenutnog stanja. Razlika njihovih veličina između dva stanja mora da bude nezavisna od puta kojim se prelazi iz jednog stanja u drugo. Tenzor ukupnih deformacija predstavlja takve promenljive.

Druge promenljive α^k $k = 1, 2, \dots, n$ definišu disipaciono ponašanje tla i mogu biti tenzorske ili skalarne veličine.

Kao što je pokazao Rice (1971), Collins (1997), funkcija slobodne energije je generalno funkcija istorije (vremenske promene) unutrašnjih promenljivih. Kod tla glavni parametar "istorije" opterećenja je pritisak prekonsolidacije p_c , kojim se obuhvata uticaj istorije opterećenja tla na njihove ponašanje.

Funkcija brzine disipacije takođe zavisi od parametara α^k , ali dodatno i od $\dot{\alpha}_k$, brzine promene disipacionih internih promenljivih. Ta funkcija ima dimenziju napon/vreme. Za metale dimenzija napona se obezbeđuje naponom tečenja, međutim parametar otpornosti za frikcion materijal je bezdimenzionalni ugao. Za takve materijale potrebno je uključiti neke komponente trenutnog napona, obično srednjeg normalnih napona, u izraz za promenu disipacione funkcije. Za tlo koje ispoljava plastično tečenje pod izotropnom kompresijom funkcija brzine disipacije takođe zavisi i od pritiska konsolidacije. Takvi materijali se nazivaju "kvazi frikcion".

Generalna termomehantička teorija pokazuje da su svi aspekti izotermičkog, konstitutivnog ponašanja takvih materijala (nezavisnih od vremena) definisani poznavanjem funkcijama $\Psi(e, \alpha^k)$ i $\hat{\Phi}(\sigma, \alpha^k, \dot{\alpha}_k)$. Ovde će se kratko formulisati osnove termomehantičkog pristupa.

Jednačina (3.78) se može napisati u sledećem obliku:

$$\sigma : \dot{e} = \frac{\partial \Psi}{\partial e} : \dot{e} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha^k} : \dot{\alpha}_k + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \dot{\alpha}_k} : \dot{\alpha}_k \quad (3.79)$$

gde smo koristili Euler-ovu teoremu za homogene funkcije. Iz (3.79) sledi:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial e} \quad - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \dot{\alpha}_k} \equiv q^k$$

$$\hat{\Phi} = q^k : \dot{\alpha}_k \quad (3.80)$$

U jednačini (3.80) tenzor q^k se zove tenzor disipacionih napona.

Da bi mogla da se razvije teorija površi tečenja u prostoru napona uobičajeno je invertovati prvu jednačinu u (3.80) uvodeći funkciju $G(\sigma, \alpha^k)$ gde je

$$G(\sigma, \alpha^k) = \sigma : e - \Psi(e, \alpha^k) \quad (3.81)$$

tako da je

$$e = \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad \text{i} \quad q^k = \frac{\partial G}{\partial \alpha^k} \quad (3.82)$$

Diferencirajući prvu jednačinu (3.82) dobija se

$$\dot{e} = \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma^2} : \dot{\sigma} + \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma \partial \alpha^k} : \dot{\alpha}^k$$

odnosno može se promena deformacije dekomponovati na elastičan i plastičan deo

$$\dot{e} = \dot{e}^e + \dot{e}^p$$

$$\text{gde je } \dot{e}^e = \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma^2} : \dot{\sigma} \quad \dot{e}^p = \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma \partial \alpha^k} : \dot{\alpha}^k \quad (3.83)$$

Važno je napomenuti da oba druga izvoda u (3.83) uključuju i napone i unutrašnje promenljive, odnosno da su elastične i plastične deformacije dobijene integracijom u zavisnosti od putanje napona. Elastične i plastične deformacije se zbog toga ne mogu uzeti kao promenljive stanja. Važan izuzetak je kad je elastični deo $\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma^2}$ nezavistan od disipacionih unutrašnjih promenljivih α^k . To važi za većinu metala, ali za tlo gde elastični moduli značajno zavise od plastične konsolidacione istorije, to nije slučaj. Za takve materijale konstitutivno ponašanje se ne može rigorozno formulirati preko elastičnih i plastičnih deformacija kontinuuma.

Iz jednačina (3.80), (3.82) i (3.83) se može videti da izraz za promenu plastičnog rada nije jednak promeni disipacije. Promena plastičnog rada je:

$$\dot{W}^p = \sigma : \dot{e}^p = \sigma : \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma \partial \alpha^k} : \dot{\alpha}^k = \sigma : \frac{\partial q^k}{\partial \sigma} \quad (3.84)$$

$$\text{dok je } \hat{\Phi} = q^k : \dot{\alpha}^k = \frac{\partial G}{\partial \alpha^k} : \dot{\alpha}^k$$

To je vrlo važan rezultat, pošto sve do sad postojeće teorije u mehanici tla ne prave razliku između promene plastičnog rada i plastične disipacije i implicitno ili eksplicitno pretpostavljaju da su te veličine jednake. Razlika između te dve veličine je promena deponovanog (sačuvanog) plastičnog rada. Fizički deponovani (sačuvan) plastični rad se javlja u formulaciji kontinuuma zbog prisustva "zaleđene elastične energije" na mikro planu. Takav plastični rad se može uvek očekivati kada je doformacija na mikroplanu nehomogena.

Izuzetak se javlja u slučaju kada je

$$q^k = \sigma : \frac{\partial q^k}{\partial \sigma} \quad \text{pa je} \quad \dot{W}P = \dot{\Phi} \quad (3.85)$$

To je tačno ukoliko je disipaciona funkcija $\dot{\Phi}$ homogena što je slučaj kod pravih frikcionih materijala. Kod pravih fikcionih materijala ne postoji deponovan plastični rad.

Pošto su dispacioni naponi jednaki izvodu dispacione funkcije $\dot{\Phi}$ po $\dot{\alpha}_k$, $\dot{\alpha}_k$ se može izraziti kao izvod dualne funkcije $\bar{F}(\sigma, \alpha^k, q^k)$ po q^k . Pošto je dualna funkcija homogena, ukoliko je $\dot{\alpha}_k \neq 0$ imamo

$$\bar{F}(\sigma, \alpha^k, q^k) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{\alpha}_k = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{F}(\sigma, \alpha^k, q^k)}{\partial q^k} \quad (3.86)$$

Ove jednačine definišu uslove tečenja i asocijativni zakon tečenja (zakon normalnosti), ali u prostoru distancionih napona (q^k prostoru), a ne u stvarnom naponskom prostoru. To je najznačajnii rezultat termomehaničke formulacije elasto plastične konstitutivnosti.

Treba napomenuti da je zavisnost funkcije tečenja od napona rezultat zavisnosti promene disipacione funkcije od napona, koja je potrebna za modeliranje ponašanja frikcionih materijala. Uslov tečenja i zakon tečenja u prostoru stvarnih napona se mogu izvesti eliminacijom disipacionih napona:

$$\bar{F}(\sigma, \alpha^k) \equiv \bar{F} \left[\sigma, \alpha^k, q^k = \frac{\partial \sigma(\sigma, \alpha^k)}{\partial \alpha^k} \right] \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma \alpha^k} : \frac{\partial \bar{F}}{\partial q^k} \quad (3.88)$$

Zakon tečenja za promenu plastičnih deformacija se dobija iz jednačina (3.83), (3.86), i (3.88).

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma} + \dot{\epsilon}^P \quad \text{gde je} \quad \dot{\epsilon}^P = -\dot{\lambda} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \sigma} \quad (3.89)$$

$\dot{\epsilon}^P$ je "dodatna brzina deformacija" koja postoji samo u slučaju kad materijal izražava frikciono ponašanje tako da brzina disipacije zavisi od tenzora normalnih napona. Taj dodatak je izvor neasocijativnog zakona tečenja. Ukoliko, kao što je često slučaj, disipacija zavisi samo od izotropnog dela tenzora napona, zakon tečenja će biti asocijativan u devijatorskoj ravni, ali neasocijativan u ravni izotropne kompresije.

Unutrašnje promeljive stanja termomehanike obezbeđuju uspešan način modeliranja ponašanja tla i granularnih sredina. Klasične teorije kao što je teorija kritičnog stanja mehanike tla, postaju specijalne klase ovih modela. Termomehanički pristup obezbeđuje novu proceduru zasnovanu na termo energetske principima. Poseban značaj ima koncept "deponovanog plastičnog rada" ("stored plastic work") ili "zamrznute elastične energije" ("frozen elastic energy") koja se javlja uvek kad je deformacija u mikro razmeri nehomogena.

Dominantna nehomogenost u granularnim materijalim proističe iz prisustva čvrstih ("lanci sila") i mekih formacija u rasporedu čestica tla.

4. METODE INTEGRACIJE KONSTITUTIVNIH RELACIJA ZA REŠAVANJE MATERIJALNO NELINEARNIH PROBLEMA METODOM KONAČNIH ELEMENATA

4.1. UVOD

Rešavanje nelinearnih problema metodom konačnih elemenata, bilo da se radi o geometrijskoj ili materijalnoj nelinearnosti, podrazumeva inkrementalan numerički postupak. U tom postupku se na osnovu poznatog stanja konfiguracije t određuje novo ravnotežno stanje $u + \Delta t$ linearizacijom osnovnih relacija oko poznatog stanja.

Rešenje se, u zavisnosti od vrste problema, može tražiti na više načina: inkrementalnim, iterativnim i inkrementalno iterativnim postupkom.

Kod materijalno nelinearnih problema se koriste inkrementalni i inkrementalno-iterativni postupci.

Inkrementalni postupak podrazumeva da se ukupno spoljašnje opterećenja podeli na određeni broj inkrementa. Pri tome se računa približno rešenje na kraju svakog inkrementa ($u + \Delta t$) preko poznatih veličina na kraju prethodnog inkrementa (stanja t). Tako dobijeno rešenje konvergira ka tačnom rešenju ukoliko se usvoji dovoljno mali inkrementi. Greška koja se u ovom postupku pojavljuje se akumulira i može se odrediti kontrolom uslova ravnoteže za svaki inkrement.

Kod inkrementalno-iterativnih metoda se za svaki inkrement primenjuje neki od iterativnih postupaka tako da se na kraju svakog inkrementa zadovoljavaju uslovi ravnoteže spoljašnjih i unutrašnjih sila. Pomenućemo neke od ovih metoda: Newton-Raphson-ova metoda, metoda konstantnog sfernog luka, i konstantnog inkrementa spoljašnjeg rada.

Bez obzira koja se od inkrementalno-iterativnih metoda koristi, polazi se od pretpostavke da je naponsko deformacijsko stanje u konfiguraciji t poznato, a da se traži rešenje $u + \Delta t$, tako da je ispunjen uslov ravnoteže

$${}^{t+\Delta t}F^S = {}^{t+\Delta t}F^u \quad (4.1)$$

gde je ${}^{t+\Delta t}F^S$ vektor spoljašnjih čvornih sila a ${}^{t+\Delta t}F^u$ vektor ekvivalentnih unutrašnjih sila.

U opštem slučaju unutrašnje sile ${}^{t+\Delta t}F^u$ su nelinearne funkcije pomeranja ${}^{t+\Delta t}u$. Linearizacijom jednačine (4.1) možemo napisati u obliku

$${}^tK\Delta u = {}^{t+\Delta t}F^S - {}^tF^u \quad (4.2)$$

gde je K^t matrica krutosti, a Δu vektor priraštaja čvornih pomeranja. Iz jednačine (4.2) koja predstavlja inkrementalnu jednačinu ravnoteže, može se direktno izvesti iterativna ravnotežna jednačina:

$${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)} \cdot \Delta u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}F^s - {}^{t+\Delta t}F^u(i-1) \quad (4.3)$$

U jednačini (4.3) ${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}$ i ${}^{t+\Delta t}F^u(i-1)$ odgovaraju poslednjoj poznatoj konfiguraciji, a $\Delta u^{(i)}$ je vektor priraštaja pomeranja u i-toj iteraciji.

Ukupni vektor pomeranja koji odgovara i-toj iteraciji je

$${}^{t+\Delta t}u^{(i)} = {}^t u + \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)} + \dots + \Delta u^{(i)} \quad (4.4)$$

Jednačina (4.3) se rešava iterativno dok priraštaj pomeranja $\Delta u^{(i)}$ ne bude manji od unapred zadate male veličine

$$\|\Delta u^{(i)}\| \leq \varepsilon_u \quad (4.5)$$

ili $({}^{t+\Delta t}F^s - {}^{t+\Delta t}F^u(i)) \cdot \Delta u^{(1)} \leq \varepsilon_e$

gde je ε_e tolerancija za neuravnoteženu energiju.

Matrica krutosti se može dobiti parcijalnim diferenciranjem jednačine (4.2) po pomeranjima

$${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)} = \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{u^{(i-1)}}^{t+\Delta t} \quad (4.6)$$

Vektor unutrašnjih čvornih sila sledi iz principa virtuelnog rada i može se odrediti na sledeći način:

$${}^{t+\Delta t}F^u(i-1) = \sum_e \int_{V^e} {}^{t+\Delta t}B^{T(i-1)} \cdot {}^{t+\Delta t}\sigma^{(i-1)} \cdot dV^e \quad (4.7)$$

gde se sumiranje vrši po konačnim elementima zapremine V^e . Matrica ${}^{t+\Delta t}B^{(i-1)}$ predstavlja vezu između deformacija elementa i čvornih pomeranja.

Iz jednačine (4.7) se može uočiti da je za određivanje unutrašnjih čvornih sila neophodno sračunati napon ${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i-1)}$, jer je u konfiguraciji ${}^{t+\Delta t}(i-1)$ poznat samo vektor ukupnih deformacija dobijen iz poznatih pomeranja.

Napon ${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i-1)}$ može se izraziti u obliku

$${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i-1)} = {}^t\sigma + \Delta\sigma^{(i-1)} \quad (4.8)$$

a priraštaj napona

$$\Delta\sigma^{(i-1)} = \int_{{}^t\varepsilon}^{{}^{t+\Delta t}\varepsilon} d\sigma \quad (4.9)$$

Veza priraštaja napona i priraštaja deformacije se uspostavlja preko konstitutivne matrice

$$d\sigma = C \cdot d\varepsilon \quad (4.10)$$

Zamenom 4.10 i 4.9 u 4.8 dobijamo

$${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i-1)} = {}^t\sigma + \int_{{}^t\varepsilon}^{{}^{t+\Delta t}\varepsilon} C \cdot d\varepsilon \quad (4.11)$$

U opštem slučaju je konstitutivna matrica C nelinearna funkcija napona i deformacija, tako da je integracija konstitutivnih relacija vrlo složen problem.

Kao što se vidi iz prethodnih jednačina integracija napona ima uticaj na tačnost proračuna, tangentne matrice krutosti kao i na tačnost rezultata u okviru primene određenog modela.

Tačnost proračuna tangentne matrice krutosti utiče na brzinu konvergencije rešenja, odnosno odražava se na utrošak rada računara ali ne utiče na tačnost rešenja.

Stepen tačnosti određivanja napona direktno utiče na tačnost rezultata iz čega proističe važnost pronalaženja što efikasnijih metoda za integraciju konstitutivnih relacija.

Sve metode integracije polaze od postulata i osnovnih jednačina opšte teorije plastičnosti:

a) Ukupne deformacije se mogu dekomponovati na elastični i plastični deo

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (4.12)$$

b) Konstitutivna veza između tenzora napona i tenzora elastičnih deformacija se izražava generalizovanim Hook-ovim zakonom

$$\sigma_{ij}(\varepsilon^e, q) = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}^e \quad (4.13)$$

c) Zakonom tečenja se uspostavlja veza između priraštaja plastičnih deformacija, napona u plastičnoj oblasti i unutrašnjih promenljivih

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}r(\sigma, q) \quad (4.14)$$

d) U opštem slučaju postoji skup zakona ojačanja

$$\dot{q} = \dot{\lambda}h(\sigma, q) \quad (4.15)$$

e) U toku procesa plastičnog tečenja mora biti zadovoljen uslov plastične konzistencije

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0 \quad (4.16)$$

Imajući u vidu da se u MKE matrice krutosti i unutrašnje sile određuju numeričkom integracijom po zapremini konačnih elemenata, što zahteva ogroman broj računskih operacija, metode integracije konstitutivnih relacija treba da ispune pre svega sledeće uslove:

- Pouzdanost postupka, što znači da se može primeniti u opštem slučaju u odnosu na uslove opterećenja i veličinu inkrementa opterećenja.

- Tačnost, o čijem značaju je prethodno bilo reči.

- Efikasnost, koja podrazumeva što manji broj računskih operacija i iteracija. Ovaj uslov gubi na značaju povećanjem brzine računara.

Istraživanja u ovoj oblasti su vrlo intezivna u poslednje dve decenije tako da je razvijeno nekoliko generalnih klasa algoritama za integraciju napona. U okviru svake klase su razvijeni posebni postupci za pojedine elasto plastične modele koji predstavljaju posebne slučajeve opšteg algoritma.

Ovde će biti opisano nekoliko klasa algoritama kojima se uspešno rešava problem integracije napona kod elasto-plastičnih modela, u smislu da zadovoljavaju tri osnovna zahteva:

- a) konzistentnost sa konstitutivnim relacijama, odnosno tačnost prvog reda
- b) numeričku stabilnost
- c) inkrementalni uslov plastične konzistencije.

4.2. METODA GENERALIZOVANOG TRAPEZNOG PRAVILA

Ova integraciona šema koju su predložili Ortiz i Popov (1985) predstavlja generalizaciju algoritma koji je dao Wilkins (1964) za Mises-ov model poznat kao radijalno povratno preslikavanje ("radial return") kao i algoritma za idealno elastoplastične modele (Simo i Taylor,1983) "closest point algorithm". Generalizacija je izvršena tako da se postupak može primeniti za neasocijativnu plastičnost i bilo koji zakon ojačanja.

Algoritam je dat na sledeći način:

$$\sigma_{n+1} = D : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (4.17a)$$

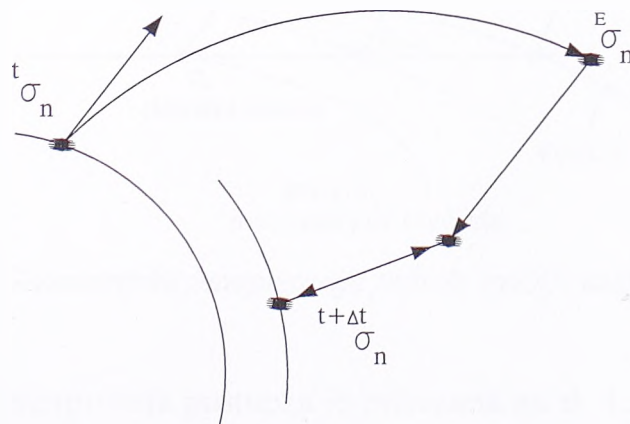
$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \lambda[(1 - \alpha)r_n + \alpha r_{n+1}] \quad (4.17b)$$

$$q_{n+1} = q_n + \lambda[(1 - \alpha)h_n + \alpha h_{n+1}] \quad (4.17c)$$

$$\Phi_{n+1} = 0 \quad (4.17d)$$

U jednačinama 4.17 (a-d) veličine ε_n , ε_n^p , σ_n su poznate veličine u konfiguraciji t_n , dok su ε_{n+1}^p , σ_{n+1} , q_{n+1} su nepoznate veličine u konfiguraciji t_{n+1} . Parametar λ se određuje iz inkrementalnog uslova plastične konsistencije.

Geometrijska interpretacija algoritma je data na sl. 4.1.



Sl. 4.1 Geometrijska interpretacija generalizovanog trapezoidnog pravila

4.3. METODA GENERALIZOVANOG PRAVILA SREDNJE TAČKE

Kao alternativnu familiju algoritama Ortiz i Popov (1985) su predložili postupak dobijen generalizacijom pravila srednje tačke na sledeći način:

$$\sigma_{n+1} = D : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (4.19a)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \lambda \cdot r_{n+\alpha} \quad (4.19b)$$

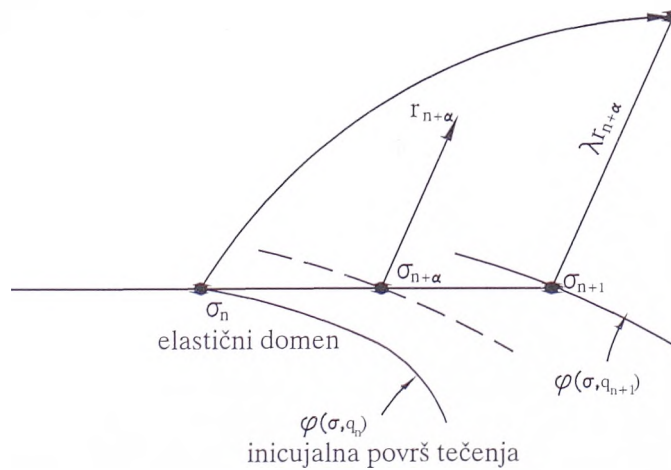
$$q_{n+1} = q_n + \lambda \cdot h_{n+\alpha} \quad (4.19c)$$

$$\Phi_{n+1} = 0 \quad (4.19d)$$

gde je:

$$\begin{aligned} r_{n+\alpha} &= r((1-\alpha)\sigma_n + \alpha \cdot \sigma_{n+1}^*, (1-\alpha)q_n + \alpha q_{n+1}) \\ h_{n+\alpha} &= h((1-\alpha)\sigma_n + \alpha \cdot \sigma_{n+1}^*, (1-\alpha)q_n + \alpha q_{n+1}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

U ovom slučaju jednačine 4.19 i 4.20 predstavljaju skup nelinearnih algebarskih jednačina iz kojih se računaju nepoznate σ_{n+1} , ε_{n+1}^p , q_{n+1} i λ .



Sl. 4.2. Geometrijska interpretacija pravila srednje tačke

Geometrijska interpretacija postupka je prikazana na sl. 4.2. Sa slike se može videti da algoritam generalizovanog pravila srednje tačke predstavlja povratno preslikavanje u kome se elastično predviđanje σ_{n+1}^* projektuje na površ tečenja u pravcu normale u srednjoj tački $(\sigma_{n+\alpha}, q_{n+\alpha})$.

Za prethodna dva opšta algoritma može se pokazati da imaju tačnost prvog reda za bilo koju veličinu α , a tačnost drugog reda za $\alpha = \frac{1}{2}$. Takođe je pokazano da su za $\alpha \geq \frac{1}{2}$ postupci stabilni bez obzira na oblik funkcije tečenja.

Tačnost prvog reda znači da se veličine $\sigma_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^p$ i q_{n+1} slažu sa svojim egzaktnim veličinama $\sigma(t_{n+1}), \varepsilon^p(t_{n+1}), q(t_{n+1})$ do izvoda drugog reda po h .

4.4. METODA POVRATNOG PRESLIKAVANJA

Bez obzira na prednosti u odnosu na ranije metode i značajno uopštavanje, prethodne dve metode imaju i ograničenja koja im otežavaju primenu kod složenih elastoplastičnih modela sa nelinearnim elastičnim ponašanjem, kompleksnim kriterijumima tečenja, zakonom tečenja i ojačanja. Kada se primenjuju na složenije modele ovi postupci vode ka sistemu nelinearnih jednačina čije rešenje Newton-Raphson - ovom metodom zahteva procenu gradijenta pravca plastičnog tečenja, plastičnih modula i elastičnog tenzora.

Opšti algoritam povratnog preslikavanja koji su prvi objavili Ortiz i Simo (1986), prevazilazi navedene nedostatke a s druge strane, zadovoljava sve kriterijume potrebne za prihvatljivost metode.

Koristeći osobinu aditivne dekompozicije elasto-plastičnih modela, osnovne jednačine koje opisuju model se mogu podeliti na dve grupe jednačina.

1) Prva grupa jednačina daje elastično predviđanje dok su plastične promenljive "zamrznute"

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p = d(t) \quad (4.20a)$$

$$\dot{\sigma} = D(\varepsilon^e) : \dot{\varepsilon} \quad (4.20b)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \quad (4.20c)$$

$$\dot{q} = 0 \quad (4.20d)$$

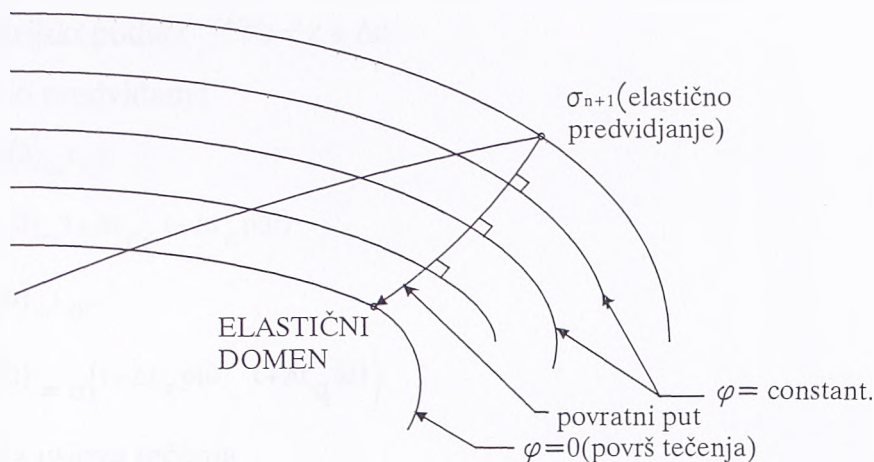
2) Druga grupa jednačina predstavlja relaksacione jednačine kojima se naponsko stanje dovodi na površ popuštanja

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p = 0 \quad (4.21a)$$

$$\dot{\sigma} = -D(\varepsilon^e) : \dot{\varepsilon}^p + B(\varepsilon^e) \cdot \dot{q} \quad (4.21b)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot r(\sigma, q) \quad (4.21c)$$

$$\dot{q} = \dot{\lambda} \cdot h(\sigma, q) \quad (4.21d)$$



Sl. 4.3 Geometrijska interpretacija metode povratnog preslikavanja za slučaj idealne plastičnosti

Proces relaksacije napona se sprovodi korak po korak. U svakoj iteraciji funkcija tečenja se linearizuje oko tekuće vrednosti promenljivih stanja ${}^{t+\Delta t}\sigma^i$, ${}^{t+\Delta t}q^i$, pa se dobija

$$\begin{aligned} \phi \cong & \phi\left({}^{t+\Delta t}\sigma^i, {}^{t+\Delta t}q^i\right) + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}\left({}^{t+\Delta t}\sigma^i, {}^{t+\Delta t}q^i\right) \cdot \left(\sigma - {}^{t+\Delta t}\sigma^i\right) + \\ & + \frac{\partial \phi}{\partial q}\left({}^{t+\Delta t}\sigma^i, {}^{t+\Delta t}q^i\right) \cdot \left(q - {}^{t+\Delta t}q^i\right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Osim toga, relaksacione jednačine se mogu diskretizovati na sledeći način:

$${}^{t+\Delta t}\sigma^{i+1} - {}^{t+\Delta t}\sigma^i = -\Delta\lambda \cdot \left[{}^{t+\Delta t}D^i; {}^{t+\Delta t}r^i - {}^{t+\Delta t}B^i; {}^{t+\Delta t}h^i \right] \quad (4.23a)$$

$${}^{t+\Delta t}q^{i+1} - {}^{t+\Delta t}q^i = -\Delta\lambda \cdot {}^{t+\Delta t}h^i \quad (4.23b)$$

Kombinovanjem jednačina (4.22) i (4.23) i postavljanjem uslova $\phi = 0$ dobija se izraz za $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda = \frac{{}^{t+\Delta t}\phi^i}{{}^{t+\Delta t}v^i; {}^{t+\Delta t}D^i; {}^{t+\Delta t}r^i - {}^{t+\Delta t}v^i; {}^{t+\Delta t}B^i; {}^{t+\Delta t}h^i - {}^{t+\Delta t}\xi^i; P^i; {}^{t+\Delta t}h^i} \quad (4.24)$$

gde su: $v = \frac{\partial G}{\partial \sigma}$; $\xi = \frac{\partial \phi}{\partial q}$ a G - funkcija plastičnog potencijala

Zamenjujući $\Delta\lambda$ u jednačinama (4.23) mogu se dobiti veličine ${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i+1)}$, ${}^{t+\Delta t}q^{(i+1)}$.

Iz ovih jednačina se može izvesti algoritam za određivanje naponskog stanja u konfiguraciji $t + \Delta t$

(1) geometrijski podaci ${}^{t+\Delta t}\varepsilon = {}^t\varepsilon + \Delta\varepsilon$

(2) elastično predviđanje

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon p(0) = {}^t\varepsilon p$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon e(0) = {}^{t+\Delta t}\varepsilon - {}^{t+\Delta t}\varepsilon p(0)$$

$${}^{t+\Delta t}q(0) = {}^tq$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma(0) = \sigma\left({}^{t+\Delta t}\varepsilon p(0), {}^{t+\Delta t}q(0)\right)$$

(3) kontrola uslova tečenja

$${}^{t+\Delta t}\phi(0) \leq 0?$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon p = {}^{t+\Delta t}\varepsilon(0), \quad {}^{t+\Delta t}\varepsilon e = {}^{t+\Delta t}\varepsilon e(0);$$

da:

$${}^{t+\Delta t}\sigma p = {}^{t+\Delta t}\sigma(0), \quad {}^{t+\Delta t}q e = {}^{t+\Delta t}q e(0); \quad \rightarrow \text{izlaz}$$

ne: $i = 0$

(4) plastična korekcija

$\Delta\lambda$ dato izrazom (4.24)

$${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i+1)} \text{ iz izraza (4.23.a)}$$

$${}^{t+\Delta t}q^{(i+1)} \text{ iz izraza (4.23.b)}$$

(5) kontrola konvergencije

$$\left| {}^{t+\Delta t}\phi^{(i+1)} \right| \leq \text{TOL}$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^{(i+1)}$$

da:

$${}^{t+\Delta t}q = {}^{t+\Delta t}q^{(i+1)}$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon e = {}^{t+\Delta t}\varepsilon e\left({}^{t+\Delta t}\sigma, {}^{t+\Delta t}q\right)$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon p = {}^{t+\Delta t}\varepsilon - {}^{t+\Delta t}\varepsilon e$$

ne: $i = i + 1$; GO TO 4

Korišćenjem ove metode urađena je integracija konstitutivnih relacija za model sa graničnom površi (Mrozz, Norris i Zienkiwicz) u poglavlju 5.

4.5. IMPLICITNE METODE

Integracija napona se zove implicitna ako se priraštaji plastičnih deformacija $\Delta \varepsilon_p$ i priraštaji unutrašnjih promeljivih Δq u jednom koraku izražavaju preko napona ${}^{t+\Delta t} \sigma$ na kraju koraka.

U poslednje dve decenije implicitne metode su se intezivno razvijale i teško je nabrojati sve reference i autore koji su se bavili implicitnom integracijom različitih modela. Pomenuću samo neke od autora: Borja (1990,1991), Ranaimia i Wood (2001), Potts (1994), Kojić (1992,1996).

Biće detaljno opisana implicitna metoda Kojića jer je integracija konstitutivnih relacija za odabrane elasto-plastične modele tla: modifikovani Cam-Clay model i model sa graničnom površi (Mrozz) upravo rađena prema tom algoritmu (poglavlje 5).

4.5.1. Metoda vodećeg parametra (GPM metoda)

Kojić (1996) je algoritam za integraciju nazvao metoda vodećeg parametra ("governing parameter method") i sa saradnicima razvio za više elastoplastičnih modela, između ostalih i za elastoplastične modele za tlo kao što je Cam-Clay modifikovan model (M. Kojić, M. Vukićević (1992, 1994)).

Ovaj algoritam integracije je nazvan "metoda vodećeg parametra" (GPM) zato što se problem integracije napona redukuje na rešenje jedne nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom.

Polazi se od pretpostavke kao i kod drugih metoda integracije da su sve relevantne unutrašnje promenljive modela kao i naponsko deformacijsko stanje u konfiguraciji "t" poznati dok su u konfiguraciji "t + Δt" poznate samo ukupne deformacije. Dakle, u nekoj tački numeričke integracije u tekućoj konfiguraciji imamo skup poznatih veličina: ${}^t \sigma, {}^t \varepsilon, {}^t \varepsilon_p, {}^t \beta, {}^{t+\Delta t} \varepsilon$ gde β predstavlja skup unutrašnjih promenljivih modela koje opisuju istoriju plastičnih deformacija u zavisnosti od tipa modela. Uključujući osnovne jednačine elastoplastičnog modela, osnovni koraci u ovom konceptu implicitne integracije napona su sledeće:

(1) Izraditi sve nepoznate promenljive na kraju koraka u funkciji vodećeg parametra p.

(2) Koristeći vodeću jednačinu na kraju koraka ${}^{t+\Delta t}f(p)=0$ odrediti vodeći parametar p .

(3) Sračunati nepoznate promenljive koristeći rešenje $p={}^{t+\Delta t}p$ iz vodeće jednačine.

Prethodni koraci su sumirani u tabeli:

Poznate veličine	
${}^t\sigma, {}^t\varepsilon, {}^t\varepsilon_p, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\varepsilon$	
Nepoznate veličine	
${}^{t+\Delta t}\sigma, {}^{t+\Delta t}\varepsilon_p, {}^{t+\Delta t}\beta$	
Korak 1	
${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma({}^t\sigma, {}^t\varepsilon_p, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\varepsilon, p)$	
${}^{t+\Delta t}\varepsilon = {}^{t+\Delta t}\varepsilon({}^t\sigma, {}^t\varepsilon_p, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\varepsilon, p)$	(a)
${}^{t+\Delta t}\beta = {}^{t+\Delta t}\beta({}^t\sigma, {}^t\varepsilon_p, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\varepsilon, p)$	
Korak 2.	
Naći rešenje funkcije ${}^{t+\Delta t}f(p)=0$	(b)
Korak 3.	
Na osnovu rešenja $p={}^{t+\Delta t}p$ odrediti promenljive (a)	

Pored proračuna napona, za određivanje tangentrne matrice krutosti, potrebno je sračunati tangentnu konstitutivnu matricu ${}^{t+\Delta t}C$ na kraju koraka. U skladu sa definicijom konstitutivne matrice i procedurom GPM metode, proračun se može sprovesti na sledeći način:

Prema definiciji:

$${}^{t+\Delta t}C = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma}{\partial {}^{t+\Delta t}\varepsilon} \quad (4.25)$$

U skladu sa GPM algoritam, gde je p vodeći parametar

$${}^{t+\Delta t}C = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma}{\partial {}^{t+\Delta t}p} \cdot \frac{\partial {}^{t+\Delta t}p}{\partial {}^{t+\Delta t}\varepsilon} \quad (4.26)$$

U jednačini 4.26 izvodi vodećeg parametra ${}^{t+\Delta t}p$ po deformacijama ${}^{t+\Delta t}\varepsilon$ mogu se dobiti diferencirajući obe strane vodeće jednačine $f(p)=0$

$$\left(\frac{\partial f^T}{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma} \cdot \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma}{\partial p} + \frac{\partial f^T}{\partial {}^{t+\Delta t}\varepsilon^p} \cdot \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\varepsilon}{\partial {}^{t+\Delta t}p} + \frac{\partial f^T}{\partial {}^{t+\Delta t}\beta} \cdot \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\beta}{\partial {}^{t+\Delta t}p} + \frac{\partial f}{\partial {}^{t+\Delta t}\varepsilon^p} \right) \cdot \frac{\partial {}^{t+\Delta t}p}{\partial {}^{t+\Delta t}\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial {}^{t+\Delta t}\varepsilon^p} = 0 \quad (4.27)$$

Jednačina (4.27) je matrična jednačina.

U proračunu metodom konačnih elemenata, diferencijali relevantnih promenljivih veličina se transformišu u konačne razlike (inkremente), tako ta se integral neke funkcije $f(t)$ u intervalu Δt može aproksimirati na sledeći način:

$$\int_t^{t+\Delta t} f(t) dt = \left[(1-\alpha) f_t + \alpha f_{t+\Delta t} \right] \cdot \Delta t \quad (4.28)$$

gde je: $0 \leq \alpha \leq 1$.

Kad je $\alpha = 0$ radi se o Euler-ovoj integraciji unapred, za $\alpha = 1$ Euler-ovoj integraciji unazad, a za $\alpha = 0,5$ dobija se trapezoidno pravilo. Usvajajući da je

$$\Delta \varepsilon^p = \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\lambda} \right) dt = \Delta \lambda \frac{\partial {}^{t+\Delta t}f}{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma} \quad (4.29)$$

u metodi GPM se koristi Eulero-ova integracija unazad . Osim toga, imajući u vidu da se mnogi modeli u teoriji plastičnosti opisuju preko naponskih invarijanti (posebno preko prve i druge devijatorske invarijante), u GPM metodi se generalno funkcija tečenja izražava preko srednjeg normalnog napona i devijatorskih napona.

$${}^{t+\Delta t}f_y \left({}^{t+\Delta t}\sigma, {}^{t+\Delta t}\beta \right) = {}^{t+\Delta t}f_y \left({}^{t+\Delta t}S, {}^{t+\Delta t}\sigma_m, {}^{t+\Delta t}\beta \right) = 0 \quad (4.30)$$

S obzirom da se u ovom radu vrši integracija napona za elasto plastične modele koji su nezavisni od vremena, korak Δt predstavlja inkrement opterećenja ΔP .

GPM metoda koristi koncept povratnog preslikavanja, u kome se u prvoj iteraciji računaju naponi za elastično stanje (tzv. elastično predviđanje).

$${}^{t+\Delta t}\sigma^E = C {}^{t+\Delta t}\varepsilon'' = C^E \left({}^{t+\Delta t}\varepsilon - {}^t\varepsilon^p \right) \quad (4.31)$$

gde je: ${}^{t+\Delta t}\varepsilon^E$ elastična deformacija na kraju koraka, pretpostavljajući da nema plastičnog tečenja.

Sa tako određenim naponima kontroliše se funkcija tečenja

$${}^{t+\Delta t}f^E = {}^{t+\Delta t}f({}^{t+\Delta t}\sigma^E, t\beta)$$

Ukoliko je

$${}^{t+\Delta t}f^E \leq {}^t f \quad (4.32)$$

deformacije su elastične i naponi ${}^{t+\Delta t}\sigma^E$ su konačni naponi u konfiguraciji $t + \Delta t$.

U suprotnom, javljaju se plastične deformacije i u postupku određivanja napona pri plastičnom tečenju koristi se relaksaciona jednačina koja proističe iz generalizovanog Hook-ovog zakona i aditivne dekompozicije deformacija

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^E - C \cdot \Delta\varepsilon^P \quad (4.33)$$

U proračunu napona moraju se zadovoljiti plastične naponsko deformacijske konstitutivne relacije kao i zakoni ojačanja.

Obično se zakon ojačanja predstavlja u sledećoj formi:

$$\underline{\partial\beta} = -d\lambda C^P \frac{\partial f}{\partial \beta} \quad (4.34)$$

ili u implicitnoj integraciji u vremenskom koraku

$$\underline{\Delta\beta} = -\Delta\lambda C^P \frac{\partial {}^{t+\Delta t}f}{\partial {}^{t+\Delta t}\beta} \quad (4.35)$$

gde je: C^P matrica plastičnih modula, koja se može usvojiti kao konstantna u jednom koraku.

Ako se uzme u obzir da je

$$\Delta\varepsilon^P = \Delta\lambda \cdot \frac{\partial {}^{t+\Delta t}f}{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\Delta\varepsilon^P}{\|{}^{t+\Delta t}f, \sigma\|} \quad (4.36)$$

Ukoliko se kao vodeći parametar usvoji $\Delta\varepsilon^P$, dobijamo jednačine koje daju generalnu iterativnu šemu implicitne integracije

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^E - \Delta\varepsilon^P C^E {}^{t+\Delta t}n \quad (4.37a)$$

$${}^{t+\Delta t}\beta = {}^t\beta - \Delta\varepsilon^P \hat{C}^P {}^{t+\Delta t}n_\beta \quad (4.37b)$$

$$\hat{C}^P = \frac{\|{}^{t+\Delta t}f, \beta\|}{\|{}^{t+\Delta t}f, \sigma\|} \cdot C^P \quad {}^{t+\Delta t}n_\beta = \frac{{}^{t+\Delta t}f, \beta}{\|{}^{t+\Delta t}f, \beta\|}$$

gde se usvaja početna vrednost za $\Delta\varepsilon_{(1)}^P$ i sračunavaju $\sigma^{(1)}$ i $\beta^{(1)}$ koristeći ${}^{t+\Delta t}n^{(0)} = {}^{t+\Delta t}n^E$ i ${}^{t+\Delta t}n_\beta^{(0)} = {}^{t+\Delta t}n_\beta^E$.

U poglavlju 5 je data detaljna šema implicitne integracije za dva elasto-plastična modela za tlo: za modifikovani Cam-Clay model i model sa graničnom površi (Mrozz, Norris i Zienkiewicz).

5. INTEGRACIJA KONSTITUTIVNIH RELACIJA ZA MODIFIKOVANI CAM-CLAY MODEL I MODEL SA GRANIČNOM POVRŠI (MROZZ, NORRIS, ZIENKIEWICZ)

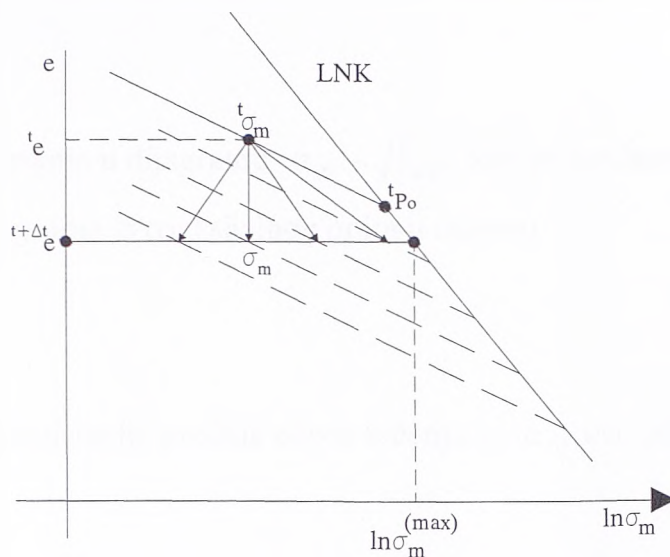
5.1. IMPLICITNA METODA VODEĆEG PARAMETRA (GPM METODA) ZA MODIFIKOVANI CAM-CLAY MODEL

U magistarskoj tezi "Neki aspekti primene Cam - Clay modela tla u rešavanju geotehničkih problema" (M.Vukićević,1990) dat je algoritam integracije modifikovanog Cam - Clay modela metodom implicitne integracije. Kao osnovni parametar preko koga se izražavaju sve relevantne veličine modela usvojen je priraštaj srednje plastične zapreminske deformacije $\Delta\varepsilon_m^p$.

U disertaciji je razrađen algoritam implicitne integracije vodećeg parametra tako što je kao osnovni parametar usvojen srednji normalni efektivni napon σ_m .

Ovako odabrani parametar ispunjava sve uslove za uspešnu primenu implicitne integracije kao i $\Delta\varepsilon_m^p$, ali ima i određenu prednost. Prednost je u tome što, osim potpuno jasnog fizičkog značenja, σ_m ima i potpuno definisan interval mogućih veličina u konfiguracij $t + \Delta t$.

Posmatrajmo liniju normalne izotropne konsolidacije (NKL) u ravni $e - \ln \sigma_m$, koja kod Cam-Clay modela u toj ravni deli oblast mogućeg i nemogućeg naponskog stanja (sl. 5.1). ${}^t\sigma_m$ je poznati napon u konfiguraciji t , a ${}^{t+\Delta t}e$ poznati koeficijent poroznosti u konfiguraciji $t + \Delta t$ koji se direktnom integracijom može sračunati preko ukupne zapreminske deformacije ${}^{t+\Delta t}\varepsilon_v$. Iz dijagrama se vidi da je interval mogućih veličina ${}^{t+\Delta t}\sigma_m$ od $\sigma_m = 1,0$ do veličina σ_m^{\max} koja se nalazi na LNK za $e = {}^{t+\Delta t}e$. Naravno, ovaj interval je vrlo širok, ali ovako definisan interval mogućih veličina ${}^{t+\Delta t}\sigma_m$ je od velike pomoći prilikom određivanja početne veličine vodećeg parametra u postupku implicitne integracije gde se ta veličina mora zadati na početku iterativnog procesa.



Sl. 5.1 Moguće veličine napona σ_m

Pre opisa algoritma implicitne GPM integracije biće date osnovne veličine i jednačine modifikovan Cam-Clay modela pogodne za primenu u MKE.

Osnovne naponsko deformacijske veličine koje se koriste u integraciji za prostorno naponsko stanje pri inkrementalnoj formulaciji su sledeće:

$$\Delta \varepsilon_v = \Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{xx} + \Delta \varepsilon_{yy} + \Delta \varepsilon_{zz} \quad (5.1)$$

$$\Delta \varepsilon'_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_{ij} \cdot \delta_{ij} \quad (5.2)$$

$$\Delta \varepsilon_q = \sqrt{\frac{1}{2} \Delta \varepsilon'_{ij} \cdot \Delta \varepsilon'_{ij}}$$

$$\Delta \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (5.3)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ij} \cdot \delta_{ij} \quad (5.4)$$

Jednačina funkcije tečenja, odnosno uslova tečenja:

$$f(\sigma_{ij}; p_0) = \sigma_m^2 - \sigma_m \cdot p_0 + \frac{q^2}{M_1^2} = 0 \quad (5.5)$$

$$q = \sqrt{J_{2D}}$$

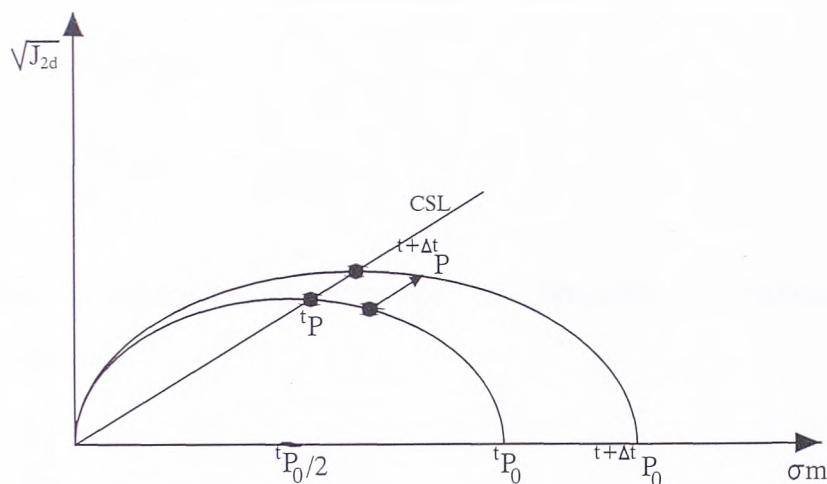
gde je J_{2D} druga invarijanta devijatorskog dela tenzora napona

$$J_{2D} = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{ij} \quad (5.6)$$

M_1 je nagib linije kritičnog stanja u dijagramu $\sigma_m - \sqrt{J_{2D}}$ koji je u odnosu na nagib linije kritičnog stanja M iz q-p dijagrama iz triaksijalnog opita u odnosu

$$M_1 = \frac{M}{\sqrt{3}} \quad (5.7)$$

p_0 je parametar ojačanja i predstavlja prečnik elipse tečenja na σ_m osi. (sl. 5.2)



Sl. 5.2 Modifikovani Cam-Clay model

Veza zapreminske elastične i plastične deformacije i srednjeg normalnog napona data je u inkrementalnom obliku:

$$\Delta \varepsilon_v^e = \frac{k}{1+e} \cdot \frac{\Delta \sigma_m}{\sigma_m} \quad (5.8)$$

$$\Delta \varepsilon_v^p = \frac{\lambda - k}{1+e} \cdot \frac{\Delta p_0}{p_0} \quad (5.9)$$

S druge strane, veza priraštaja plastičnih deformacija i napona može se izraziti korišćenjem jednačina teorije plastičnosti za asocijativni zakon tečenja

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.10)$$

Usvajajući kao osnovne deformacijske veličine ε_v i ε'_{ij} dobijamo da je

$$\Delta \varepsilon_v^p = \Delta \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \quad (5.11)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} = 2\sigma_m - p_0 \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_{ij}} = \frac{S_{ij}}{M_1^2} \quad (5.14)$$

Tako da jednačine (5.11) i (5.12) glase:

$$\Delta \varepsilon_v^p = \Delta \lambda (2\sigma_m - p_0) \quad (5.15)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \cdot \frac{S_{ij}}{M_1^2} \quad (5.16)$$

Elastične devijatorske deformacije su linearne u odnosu na devijatorske komponente napona

$$\Delta \varepsilon_{ij}^e = \frac{S_{ij}}{2G} \quad (5.17)$$

gde je G modul smicanja.

Diferencijalna veza zapreminske deformacije i koeficijenta poroznosti može se neposredno integraliti, tako da se za svaki korak za poznato ${}^{t+\Delta t} \varepsilon_v$ može eksplicitno dobiti ${}^{t+\Delta t} e$

$$d\varepsilon_v = -\frac{de}{1+e}$$

$$e = (1 + e_0) \cdot \exp(-\varepsilon_v) - 1 \quad (5.18)$$

Takođe se može uspostaviti eksplicitna veza između parametra ojačanja p_0 i srednjeg normalnog napona σ_m integracijom diferencijalne jednačine

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^p + d\varepsilon_v^e = \frac{\lambda - k}{1+e} \frac{dp_0}{p_0} + \frac{k}{1+e} \frac{d\sigma_m}{\sigma_m} \quad (5.19a)$$

odnosno

$$-de = (\lambda - k) \frac{dp_0}{p_0} + k \cdot \frac{d\sigma_m}{\sigma_m} \Rightarrow \quad (5.19b)$$

$$p_0 = \exp\left(\frac{e_0 - e}{\lambda - k}\right) \cdot \sigma_m^{\frac{-k}{\lambda - k}} \quad (5.20)$$

Kao što je prethodno navedeno, kao pogodna nezavisna veličina preko koje se mogu implicitno izraziti sve ostale nepoznate veličine modela usvojen je srednji normalni napon ${}^{t+\Delta t}\sigma_m$. Algoritam GPM implicitne integracije je sledeći:

a) Poznate veličine u konfiguraciji t i $t + \Delta t$

$${}^t\sigma_{ij}, {}^t\varepsilon_{ij}, {}^t\varepsilon_{ij}^p, {}^t p_0, {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}$$

$$b) \quad {}^{t+\Delta t}\varepsilon_v = {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ii} \quad \Delta\varepsilon_v = {}^{t+\Delta t}\varepsilon_v - {}^t\varepsilon_v \quad (5.21)$$

c) Elastično predviđanje

$${}^{t+\Delta t}\underline{\sigma}^E = C^E \cdot {}^{t+\Delta t}\underline{\varepsilon}^n = C^E \left({}^{t+\Delta t}\underline{\varepsilon} - {}^t\varepsilon^p \right) \quad (5.22)$$

d) Kontrola funkcije tečenja

$${}^{t+\Delta t}f^E = {}^{t+\Delta t}f\left({}^{t+\Delta t}\underline{\sigma}^E, {}^t p_0\right) \quad (5.23)$$

Ukoliko je

$${}^{t+\Delta t}f^E < 0$$

deformacije su elastične, a napon ${}^{t+\Delta t}\underline{\sigma}^E$ su naponi u konfiguraciji $t + \Delta t$

Za ovaj model tačke od a) do d) su date sledećim izrazima:

$$\Delta\varepsilon_v^e = \frac{k}{1+e} \cdot \frac{\Delta\sigma_m}{{}^{t+\Delta t}\sigma_m} = \Delta\varepsilon_v \Rightarrow \Delta\sigma_m^E = \frac{\Delta\varepsilon_v \cdot {}^t\sigma_m}{\frac{k}{1+e} - \Delta\varepsilon_v} \quad (5.24)$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m^E = {}^t\sigma_m + \Delta\sigma_m^E$$

$$\varepsilon'_{ij}{}^E = {}^{t+\Delta t}\varepsilon'_{ij} = \frac{{}^{t+\Delta t}S_{ij}{}^E}{2G} \Rightarrow {}^{t+\Delta t}S_{ij}{}^E = 2G \cdot {}^{t+\Delta t}\varepsilon'_{ij} \quad (5.25)$$

$${}^{t+\Delta t}q^E = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij}{}^E \cdot S_{ij}{}^E}$$

$$f = \left(\sigma_m^E, S_{ij}{}^E, {}^t p_0 \right) = \sigma_m^{E2} - \sigma_m^E {}^t p_0 + \frac{q^E{}^2}{M_1{}^2} \leq 0 \quad \text{elastično rešenje} \quad (5.26)$$

Ako je $f > 0$, javljaju se plastične deformacije i za određivanje napona koristi se iterativni postupak:

e) Za odabran vodeći parametar ${}^{t+\Delta t}\sigma_m^{(i)}$, sračuna se ${}^{t+\Delta t}p_0^{(i)}$

$${}^{t+\Delta t}p_0^{(i)} = \exp\left(\frac{e_0 - {}^{t+\Delta t}e}{\lambda - k}\right) \cdot \left({}^{t+\Delta t}\sigma_m^{(i)}\right)^{\frac{-k}{\lambda - k}} \quad (5.27)$$

f) Iz jednačine (5.9)

$$\Delta\varepsilon_v^p^{(i)} = \frac{\lambda - k}{1 + e} \cdot \frac{\Delta p_0^{(i)}}{{}^{t+\Delta t}p_0^{(i)}} \quad (5.28)$$

$$\Delta p_0^{(i)} = {}^{t+\Delta t}p_0^{(i)} - {}^{t+\Delta t}p_0^{(i-1)}$$

g) S obzirom da se $\Delta\varepsilon_v^p$ može izraziti kao

$$\Delta\varepsilon_v^p^{(i)} = \Delta\lambda^{(i)} \left(2 {}^{t+\Delta t}\sigma_m^{(i)} - {}^{t+\Delta t}p_0^{(i)} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda^{(i)} = \frac{\Delta\varepsilon_v^p^{(i)}}{2 {}^{t+\Delta t}\sigma_m^{(i)} - {}^{t+\Delta t}p_0^{(i)}} \quad (5.29)$$

h) Sa poznatom veličinom $\Delta\lambda^{(i)}$ dobija se

$$\Delta\varepsilon_q^p^{(i)} = 2\Delta\lambda^{(i)} \cdot \frac{{}^{t+\Delta t}q^{(i-1)}}{M_1^2} \quad \text{odnosno} \quad \Delta\varepsilon_{ij}^p{}^{(i)} = 2\Delta\lambda^{(i)} \cdot \frac{{}^{t+\Delta t}q^{(i-1)}}{M_1^2} \cdot {}^{t+\Delta t}S_{ij}^{(i-j)} \quad (5.30)$$

Naponi $q^{(i)}$ i $S_{ij}^{(i)}$ se mogu dobiti iz relaksacionih jednačina:

$${}^{t+\Delta t}q^{(i)} = {}^{t+\Delta t}q^{(i-1)} - \Delta\varepsilon_q^p{}^{(i)} \cdot 2G \quad {}^{t+\Delta t}S_{ij}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}S_{ij}^{(i-1)} - \Delta\varepsilon_{ij}^p{}^{(i)} \cdot 2G \quad (5.31)$$

i) Kontrola uslova tečenja

$$\left\| f\left({}^{t+\Delta t}\sigma_m^{(i)}, {}^{t+\Delta t}q^{(i)}, {}^{t+\Delta t}p_0^{(i)}\right) \right\| = \left\| {}^{t+\Delta t}\sigma_m^{(i)} - {}^{t+\Delta t}\sigma_m^{(i)} \cdot {}^{t+\Delta t}p_0^{(i)} + \frac{\left({}^{t+\Delta t}q^{(i)}\right)^2}{M_1^2} \right\| \leq \text{TOL}$$

(5.32)

Ukoliko nije ispunjen uslov (5.32) integracije se nastavljaju.

Pošto se za nultu integraciju usvaja ${}^{t+\Delta t}\sigma_m^{(0)} = \sigma_m^E$; ${}^{t+\Delta t}q^{(0)} = q^E$; $\Delta\varepsilon_v^{p(0)} = 0$ i ${}^{t+\Delta t}p_0^{(0)} = {}^t p_0$, plastične deformacije u $t + \Delta t$ su:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\varepsilon_v^p &= {}^t\varepsilon_v^p + \Delta\varepsilon_v^{p(1)} + \Delta\varepsilon_v^{p(2)} + \dots + \Delta\varepsilon_v^{p(i)} \\ {}^{t+\Delta t}\varepsilon_q^p &= {}^t\varepsilon_q^p + \Delta\varepsilon_q^{p(1)} + \Delta\varepsilon_q^{p(2)} + \dots + \Delta\varepsilon_q^{p(i)} \end{aligned} \quad (5.33)$$

S obzirom da je za traženje rešenja jednačine $f = 0$ bitno da funkcija bude monotona, može se pokazati da je funkcija $f(\sigma_m) = 0$ monotonno rastuća, što znači da iterativni postupak konvergira ka tačnom rešenju.

5.2. INTEGRACIJA KONSTITUTIVNIH RELACIJA ZA MODEL SA GRANIČNOM POVRŠI (MROZZ, NORRIS I ZIENKIEWICZ)

5.2.1. Implicitna metoda vodećeg parametra (GPM)

Za sprovođenje implicitnog algoritma GPM integracije, za ovaj model su usvojene osnovne naponske deformacijske veličine kao kod Cam - Clay modela

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_v &= \Delta\varepsilon_{ii} \\ \Delta\varepsilon'_{ij} &= \Delta\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\Delta\varepsilon_{ij} \cdot \delta_{ij} \\ \Delta\varepsilon_q &= \sqrt{\frac{1}{2}\Delta\varepsilon'_{ij} \cdot \Delta\varepsilon'_{ij}} \\ \Delta\sigma_m &= \frac{1}{3}\sigma_{ii}\end{aligned}\tag{5.34}$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ij} \cdot \delta_{ij}$$

$$q = \sqrt{2J_{2d}} = \sqrt{\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}}$$

Jednačina uslova tečenja definisana u je $\sigma_m - q$ ravni funkcijom

$$f = (\sigma_m - \alpha_m)^2 + \frac{3(q - \alpha_q)^2}{m^2} - a_0^2 = 0\tag{5.35}$$

S obzirom na to da model ima i izotropno i anizotropno ojačanje, a praktično jednu jednačinu iz koje može da se odredi parametar ojačanja (uslov plastične konzistencije ili uslov tečenja), autori su dali interpolacionu funkciju za modul ojačanja K_p . Na taj način su definisali odnos priraštaja napona u pravcu normale na površ tečenja i veličine priraštaja plastične deformacije. U inkrementalnoj formulaciji to su sledeće jednačine:

$$\Delta\varepsilon_v^p = \frac{1}{K_p}(\sigma_m - \alpha_m) \frac{(\sigma_m - \alpha_m)\Delta\sigma_m + \frac{3(q - \alpha_q)}{m^2} \cdot \Delta q}{(\sigma_m - \alpha_m)^2 + \frac{3(q - \alpha_q)^2}{m^4}}\tag{5.36a}$$

$$\Delta \varepsilon_q^p = \frac{1}{K_p} \frac{3(q - \alpha_q)}{m^2} \cdot \frac{(\sigma_m - \alpha_m) \Delta \sigma_m + \frac{3(q - \alpha_q)}{m^2} \cdot \Delta q}{(\sigma_m - \alpha_m)^2 + \frac{3(q - \alpha_q)^2}{m^4}} \quad (5.36b)$$

Modul ojačanja K_p se definiše interpolacionom funkcijom kako je dato u jednačini (3.45)

$$K_p = K_{PR} + K_{p0} \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)^{\gamma+1} \quad (5.37)$$

Izotropno jačanje je definisano promenom poluprečnika elipse tečenja kao i konsolidacione elipse, što u inkrementalnoj formulaciji daje jednačine:

$$\frac{\Delta a}{a} = a_i \cdot \frac{1 + e_0}{\lambda - k} \cdot \Delta \varepsilon_v^p \Rightarrow a = a_i \cdot \exp \left[\left(\frac{1 + e_0}{\lambda - k} \right) \cdot \varepsilon_v^p \right] \quad (5.38a)$$

odnosno, za $\frac{a}{a_0} = D$

$$\frac{\Delta a_0}{a_0} = \frac{a_i}{D} \cdot \frac{1 + e_0}{\lambda - k} \cdot \Delta \varepsilon_v^p \quad (5.38b)$$

Kinematičko ojačanje je dato pomeranjem centra elipse tečenja, što se u inkrementalnoj formi izražava na sledeći način:

$$\Delta \alpha_m = \Delta \mu \left[c - \sigma_m + \frac{a}{a_0} (\sigma_m - \alpha_m) \right] + \frac{\Delta a - \Delta a_0}{a_0} (\sigma_m - \alpha_m) + \Delta a \frac{n}{m} \quad (5.39a)$$

$$\Delta \alpha_q = \Delta \mu \left[-q + \frac{a}{a_0} (q - \alpha_q) \right] + \frac{\Delta a - \Delta a_0}{a_0} (q - \alpha_q) \quad (5.39b)$$

U jednačinama (5.39) $\Delta \mu$ je parametar koji treba odrediti i koji odražava veličinu kinematičkog ojačanja.

U implicitnoj integraciji GPM metodom usvojen je kao vodeći parametar upravo parametar $\Delta \mu$.

Ako uvažimo pretpostavku o aditivnoj dekompoziciji priraštaja deformacija mogu se uspostaviti sledeće relacije:

$$\Delta \varepsilon_v = \Delta \varepsilon_v^e + \Delta \varepsilon_v^p \quad (5.40a)$$

$$\Delta\varepsilon_q = \Delta\varepsilon_q^e + \Delta\varepsilon_q^p \quad (5.40b)$$

U jednačinama (5.40)

$$\Delta\varepsilon_v^p = \frac{\Delta\sigma_m}{K_s} \quad K_s = \frac{1+e}{k} \cdot \sigma_m \quad (5.41)$$

(usvojeno je da je $K_s = {}^t K_s$ konstantno u jednom koraku)

$$\Delta\varepsilon_q^p = \frac{\Delta q}{2G_s} \quad (5.42)$$

$\Delta\varepsilon_v^p$ i $\Delta\varepsilon_q^p$ su dati jednačinama (5.36).

Ako jednačinu (5.40a) pomnožimo sa K_s a (5.40b) sa $2G$ dobićemo:

$$\Delta\sigma_m^E = \Delta\sigma_m + \frac{K_s}{K_p} \cdot x \cdot \frac{x \cdot \Delta\sigma_m + \frac{3y}{m^2} \Delta q}{x^2 + \frac{3y^2}{m^2}} \quad (5.43a)$$

$$\Delta q^E = \Delta q + \frac{2G_s}{K_p} \cdot \frac{3y}{m^2} \cdot \frac{x \cdot \Delta\sigma_m + \frac{3y}{m^2} \Delta q}{x^2 + \frac{3y^2}{m^4}} \quad (5.43b)$$

gde je:

$$\Delta\sigma_m^E = \Delta\varepsilon_v \cdot K_s \quad \Delta\sigma_m = K_s \cdot \Delta\varepsilon_v^e$$

$$\Delta q^E = \Delta\varepsilon \cdot 2G_s \quad \Delta q = 2G_s \cdot \Delta\varepsilon_q^e$$

$$x = \sigma_m - \alpha_m$$

$$y = q - \alpha_q$$

$\Delta\sigma_m^E$ i Δq^E predstavljaju elastično predviđanje priraštaja napona u jednom koraku i poznate su veličine.

Ukoliko pretpostavimo da je poznat pravac normale na površ tečenja, jednačine (5.43) se svode na sistem od dve linearne jednačine po nepoznatim priraštajima napona $\Delta\sigma$ i Δq . Polazeći od toga, ove jednačine u algoritmu integracije GPM metodom predstavljaju iterativne jednačine, gde se u svakoj iteraciji menja pravac normale dok se ne ispuni uslov

tečenja ${}^{t+\Delta t}f = 0$. To znači da se priraštajni napona izražavaju preko pravca normale u konfiguraciji $t + \Delta t$, što je osnovna ideja implicitne metode .

U interativnom postupku, jednačine (5.43) u matricnoj formulaciji glase:

$$\begin{bmatrix} 1 + K_s {}^{(i-1)}g_1 \cdot {}^{(i-1)}x^2 & \frac{3K_s {}^{(i-1)}g_1 \cdot {}^{(i-1)}x {}^{(i-1)}y}{m^2} \\ \frac{6G_s {}^{(i-1)}g_1 \cdot {}^{(i-1)}x {}^{(i-1)}y}{m^2} & 1 + \frac{18G_s {}^{(i-1)}g_1 \cdot {}^{(i-1)}y^2}{m^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{(i)}\Delta\sigma_m \\ {}^{(i)}\Delta q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_m^E \\ \Delta q^E \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

gde je

$${}^{(i-1)}g_1 = \frac{1}{{}^{(i-1)}K_p \left({}^{(i-1)}x^2 + \frac{3 {}^{(i-1)}y^2}{m^4} \right)}$$

Na osnovu sračunatih veličina ${}^{(i)}\Delta\sigma_m$ i ${}^{(i)}\Delta q$, mogu se sračunati priraštaji plastičnih deformacija na osnovu jednačina (5.36).

$${}^{(i)}\Delta\varepsilon_v^p = {}^{(i-1)}g_1 {}^{(i-1)}x \left[{}^{(i-1)}x {}^{(i)}\Delta\sigma_m + \frac{3}{m^2} {}^{(i-1)}y \cdot {}^{(i)}\Delta q \right] \quad (5.45a)$$

$${}^{(i)}\Delta\varepsilon_q^p = {}^{(i-1)}g_1 \cdot \frac{3 {}^{(i-1)}y}{m^2} \left[{}^{(i-1)}x {}^{(i)}\Delta\sigma_m + \frac{3}{m^2} {}^{(i-1)}y \cdot {}^{(i)}\Delta q \right] \quad (5.45b)$$

kao i parametri izotropnog ojačanja a_0 i a

$${}^{(i)}a_0 = a_{0i} \exp \left[\frac{1 + e_0}{\lambda - k} \cdot \left({}^t\varepsilon_v^p + {}^{(i)}\Delta\varepsilon_v^p \right) \right] \quad (5.46a)$$

$${}^{(i)}a = D \cdot {}^{(i)}a_0 \quad (5.46b)$$

Promena koordinata centra elipse tečenja, koja je data jednačinama (5.39) u formi iterativnih jednačina glasi:

$$\begin{aligned} {}^{(i)}\Delta\alpha_m &= {}^{(i)}\alpha_m - {}^{(i-1)}\alpha_m = {}^{(i-1)}\beta_m \left({}^{(i)}\Delta\mu - {}^{(i-1)}\Delta\mu \right) + (D-1) \cdot \frac{{}^{(i)}\Delta a_0}{{}^{(i-1)}a_0} \cdot {}^{(i-1)}x + D \left({}^{(i)}\Delta a_0 \right) \rightarrow \\ {}^{(i)}\Delta\alpha_q &= {}^{(i)}\alpha_q - {}^{(i-1)}\alpha_q = {}^{(i-1)}\beta_q \left({}^{(i)}\Delta\mu - {}^{(i-1)}\Delta\mu \right) + (D-1) \cdot \frac{{}^{(i)}\Delta a_0}{{}^{(i-1)}a_0} \cdot {}^{(i-1)}y \end{aligned} \quad (5.47)$$

gde je:

$${}^{(i-1)}\beta_m = {}^{(i-1)}c - {}^{(i-1)}\sigma_m + D {}^{(i-1)}x$$

$${}^{(i-1)}\beta_q = -{}^{(i-1)}q + D {}^{(i-1)}y$$

$${}^{(i)}\Delta a_0 = {}^{(i)}a_0 - {}^{(i-1)}a_0$$

Posle određivanja ${}^{(i)}\Delta\alpha_m$ i ${}^{(i)}\Delta\alpha_q$, na kraju (i) - iteracije određuje se napon i kao i koordinate centra elipse tečenja:

$${}^{(i)}\sigma_m(t+\Delta t) = {}^{(i-1)}\sigma_m(t+\Delta t) - \left({}^{(i)}\Delta\varepsilon_v^p - {}^{(i-1)}\Delta\varepsilon_v^p \right) \cdot K_s \quad (5.48a)$$

$${}^{(i)}q(t+\Delta t) = {}^{(i-1)}q(t+\Delta t) - \left({}^{(i)}\Delta\varepsilon_q^p - {}^{(i-1)}\Delta\varepsilon_q^p \right) \cdot 2G \quad (5.48b)$$

$${}^{(i)}\alpha_q(t+\Delta t) = {}^{(i-1)}\alpha_q(t+\Delta t) + {}^{(i)}\Delta\alpha_q \quad (5.48c)$$

$${}^{(i)}\alpha_m(t+\Delta t) = {}^{(i-1)}\alpha_m(t+\Delta t) + {}^{(i)}\Delta\alpha_m \quad (5.48d)$$

$${}^{(i)}x(t+\Delta t) = {}^{(i)}\sigma_m(t+\Delta t) - {}^{(i)}\alpha_m(t+\Delta t) \quad (5.48e)$$

$${}^{(i)}y(t+\Delta t) = {}^{(i)}q(t+\Delta t) - {}^{(i)}\alpha_q(t+\Delta t) \quad (5.48f)$$

Na kraju se kontroliše jednačina funkcije tečenja

$$\left\| {}^{(i)}f(t+\Delta t) \right\| = \left\| \left[{}^{(i)}x(t+\Delta t) \right]^2 + \frac{3 \left[{}^{(i)}y(t+\Delta t) \right]^2}{m^2} - \left[{}^{(i)}a_0(t+\Delta t) \right]^2 \right\| \leq \text{TOL} \quad (5.49)$$

Ukoliko uslov (5.49) nije ispunjen, iteracije se nastavljaju. Kad se uslov ispuni računaju se konačne veličine komponentalnih napona:

$$\sigma_{ij}(t+\Delta t) = S_{ij}(t+\Delta t) + \frac{1}{3} \sigma_m(t+\Delta t) \cdot \delta_{ij} \quad (5.50)$$

gde se $S_{ij}(t+\Delta t)$ dobija iz jednačine

$$S_{ij}(t+\Delta t) = \frac{2G_s \Delta\varepsilon'_{ij} + S_{ij}(t)}{1 + 2G_s \frac{3\Delta\lambda}{m^2} \frac{y(t+\Delta t)}{q(t+\Delta t)}} \quad (5.51)$$

gde je

$$\Delta\lambda = 2g_1 \cdot \left(x(t+\Delta t) \cdot \Delta\sigma_m + \frac{3y(t+\Delta t)}{m^2} \cdot \Delta q \right)$$

Konačne komponente plastične deformacije se dobijaju iz sledećih izraza

$$\varepsilon_{ij}^{\prime P(t+\Delta t)} = \varepsilon_{ij}^{\prime P(t)} + \Delta\varepsilon_{ij}^{\prime P} \quad (5.52a)$$

$$\varepsilon_{\bar{v}}^P(t+\Delta t) = \varepsilon_{\bar{v}}^P(t) + \Delta\varepsilon_{\bar{v}}^P \quad (5.52b)$$

Za usvojeni vodeći parametar $\Delta\mu$ mora se zadati početna vrednost $\Delta\mu$.

Ukoliko usvojimo asgoritam povratnog preslikavanja, sa početnim nultim naponima iz elastičnog predviđanja, u tom slučaju su nulte relevantne veličine modela sledeće:

$${}^{(0)}\sigma_m(t+\Delta t) = \sigma_m^E = \sigma_m(t) + \Delta\sigma_m^E \quad (5.53a)$$

$${}^{(0)}q(t+\Delta t) = q^E = q(t) + \Delta q'^E \quad (5.53b)$$

$${}^{(0)}\Delta\varepsilon_{\bar{v}}^P = 0 \quad (5.53c)$$

$${}^{(0)}\Delta\mu = 0 \Rightarrow {}^{(0)}\alpha_m = \alpha_m(t) \quad {}^{(0)}\alpha_q = \alpha_q(t) \quad (5.53d)$$

Da bi se dobio početni gradijent za numeričko rešenje jednačine $f(\Delta\mu) = 0$, početna vrednost ${}^{(1)}\Delta\mu$ može se dobiti iz uslova plastične konzistencije

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \cdot \Delta\sigma_m + \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} \cdot \Delta\alpha_m + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \Delta q + \frac{\partial f}{\partial \alpha_q} \cdot \Delta\alpha_q + \frac{\partial f}{\partial a_0} \cdot \Delta a_0 = 0 \Rightarrow \quad (5.54a)$$

$$(\sigma_m - \alpha_m)(\Delta\sigma_m - \Delta\alpha_m) + \frac{3(q - \alpha_q)}{m^2}(\Delta q - \Delta\alpha_q) - a_0 \cdot \Delta a_0 = 0 \quad (5.54b)$$

gde se veličine $\Delta\sigma_m$, Δq i Δa_0 dobijaju iz Euler-ove integracije unapred prema poznatom stanju u konfiguraciji t .

Može se pokazati da je funkcija $f(\Delta\mu)$ monotono opadajuća što je bitno kod numeričkog traženja rešenja jednačine $f(\Delta\mu) = 0$.

5.2.2. Metoda povratnog preslikavanja

Za metodu povratnog preslikavanja važe sve jednačine za opisivanje modela u iterativnoj formulaciji date u 5.2.1. (jednačine od 5.34. do 5.46).

U iterativnom postupku povratnog preslikavanja, u svakoj iteraciji se linearizuje funkcija tečenja oko tekuće vrednosti promenljivih stanja ${}^{(i)}\sigma^{(t+\Delta t)}$ i ${}^{(i)}q^{(t+\Delta t)}$

$${}^{(i)}f^{(t+\Delta t)} = {}^{(i-1)}f^{(t+\Delta t)} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \cdot ({}^{(i)}\Delta\sigma_m - {}^{(i-1)}\Delta\alpha_m) + \frac{\partial f}{\partial q} ({}^{(i)}\Delta q - {}^{(i-1)}\Delta\alpha_q) - \frac{\partial f}{\partial a_0} {}^{(i)}\Delta a_0 = 0 \quad (5.55)$$

gde je:

$$\begin{aligned} {}^{(i)}\Delta\sigma_m &= {}^{(i)}\sigma_m - {}^{(i-1)}\sigma_m \\ {}^{(i)}\Delta q_m &= {}^{(i)}q_m - {}^{(i-1)}q_m \\ {}^{(i)}\Delta a_0 &= {}^{(i)}a_0 - {}^{(i-1)}a_0 \end{aligned} \quad (5.56a)$$

$$\begin{aligned} {}^{(i)}\Delta\alpha_m &= {}^{(i)}\alpha_m - {}^{(i-1)}\alpha_m = {}^{(i-1)}\beta_m \left({}^{(i)}\Delta\mu - {}^{(i-1)}\Delta\mu \right) + (D-1) \frac{{}^{(i)}\Delta a_0}{{}^{(i-1)}a_0} \cdot {}^{(i-1)}x + D \cdot {}^{(i)}\Delta a_0 \\ {}^{(i)}\Delta\alpha_q &= {}^{(i)}\alpha_q - {}^{(i-1)}\alpha_q = {}^{(i-1)}\beta_q \left({}^{(i)}\Delta\mu - {}^{(i-1)}\Delta\mu \right) + (D-1) \frac{{}^{(i)}\Delta a_0}{{}^{(i-1)}a_0} \cdot {}^{(i-1)}y \end{aligned} \quad (5.56b)$$

Ukoliko se izrazi za promenu koordinata centra elipse tečenja ${}^{(i)}\Delta\alpha_m$ i ${}^{(i)}\Delta\alpha_q$ ubace u jednačinu (5.55), može se dobiti iterativna jednačina po nepoznatom parametru ${}^{(i)}\Delta\mu$.

Sa sračunatim parametrom $\Delta\mu_i$ u i-toj iteraciji mogu se dobiti koordinate centra elipse tečenja kao i naponi na kraju i-te iteracije:

$${}^{(i)}\sigma_m^{(t+\Delta t)} = {}^{(i-1)}\sigma_m^{(t+\Delta t)} - \left({}^{(i)}\Delta\varepsilon_v^p - {}^{(i-1)}\Delta\varepsilon_v^p \right) \cdot K_s \quad (5.57a)$$

$${}^{(i)}q^{(t+\Delta t)} = {}^{(i-1)}q^{(t+\Delta t)} - \left({}^{(i)}\Delta\varepsilon_q^p - {}^{(i-1)}\Delta\varepsilon_q^p \right) \cdot 2G \quad (5.57b)$$

$${}^{(i)}\alpha_q^{(t+\Delta t)} = {}^{(i-1)}\alpha_q^{(t+\Delta t)} + {}^{(i)}\Delta\alpha_q \quad (5.57c)$$

$${}^{(i)}\alpha_m^{(t+\Delta t)} = {}^{(i-1)}\alpha_m^{(t+\Delta t)} + {}^{(i)}\Delta\alpha_m \quad (5.57d)$$

$${}^{(i)}x^{(t+\Delta t)} = {}^{(i)}\sigma_m^{(t+\Delta t)} - {}^{(i)}\alpha_m^{(t+\Delta t)} \quad (5.57e)$$

$${}^{(i)}y^{(t+\Delta t)} = {}^{(i)}q^{(t+\Delta t)} - {}^{(i)}\alpha_q^{(t+\Delta t)} \quad (5.57f)$$

Na kraju se kontroliše jednačina funkcije tečenja

$$\left\| {}^{(i)}f^{(t+\Delta t)} \right\| = \left\| \left[{}^{(i)}x^{(t+\Delta t)} \right]^2 + \frac{3 \left[{}^{(i)}y^{(t+\Delta t)} \right]^2}{m^2} - \left[{}^{(i)}a_0^{(t+\Delta t)} \right]^2 \right\| \leq \text{TOL} \quad 5.58)$$

Ukoliko uslov (5.58) nije ispunjen, iteracije se nastavljaju. Kad se uslov ispuni računaju se konačne veličine komponentalnih napona kao u 5.2.1.

Na osnovu opisanog algoritma GPM metode integracije, urađen je program za numeričku integraciju modela sa graničnom površi na FORTRAN programskom jeziku, koji je kao potprogram ugrađen u programski paket PAK grupe autora sa Mašinskog fakulteta u Kragujevcu na čelu sa profesorom Milošem Kojićem. Programski paket koristi metodu konačnih elemenata i razvijen je i za rešavanje materijalno nelinearnih problema.

Ovaj model programski još nije potpuno testiran, tako da se za sada ne može pouzdano koristiti.

Modifikovani Cam-Clay model, sa primenjenom GPM integracijom takođe je ugrađen u PAK i testiran je na mnogobrojnim primerima iz literature. On je korišćen kao model tla za primer proračuna jedne potporne konstrukcije metodom konačnih elemenata.

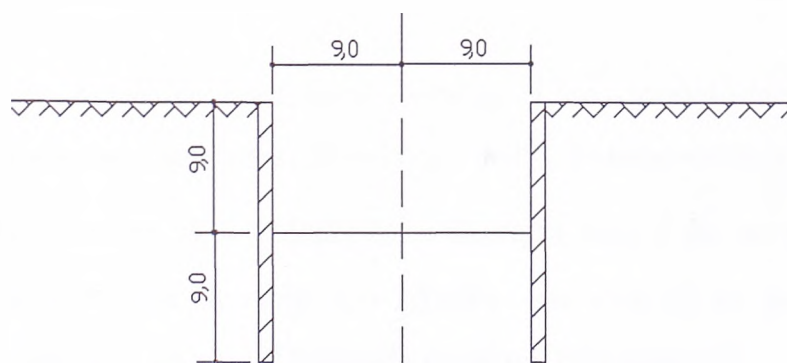
5.3 PRIMER PRORAČUNA POTPORNE KONSTRUKCIJE

Kao primer proračuna potporne konstrukcije metodom konačnih elemenata odabran je primer dat u članku Powrie-a i Li-a (1991) "*Finite element analyses of an in situ wall propped at formation level*", *Geotechnique 41, No 4*.

Primer je odabran zbog mogućnosti komparacije rezultata, jer autori u proračunu potporne konstrukcije koriste model za tlo koji je kombinacija originalnog Cam-Clay modela i površi Hvorslav-a, tako da se parametri tla dati u članku mogu direktno koristiti kod modifikovanog Cam-Clay modela.

U članku je opisana analiza rađena programom za konačne elemente CRISP (Britto i Gunn) za ispitivanje uticaja različitih faktora na ponašanje potpornog zida sa razupiračem.

Analizirana je potporna konstrukcija koja se sastoji od dva reda betonskih dijafragmi visine 18,0m, na međusobnom rastojanju 18,0m i dubinom iskopa 9,0m. Tlo u kome se izvode dijafragme je glina debljine sloja 40,0m iznad čvrste stene. Idealizovana geometrija je data na sl. 5.3



Sl 5.3 Skica potporne konstrukcije

Model tla korišćen u članku je originalni Cam-Clay model na "vlažnoj" strani i površ Hvorslav-a bez zatezanja na "suvoj" strani. Za model je usvojena asocijativna plastičnost.

Parametri tla su dati u tabeli 5.1.

Tabela 5.1

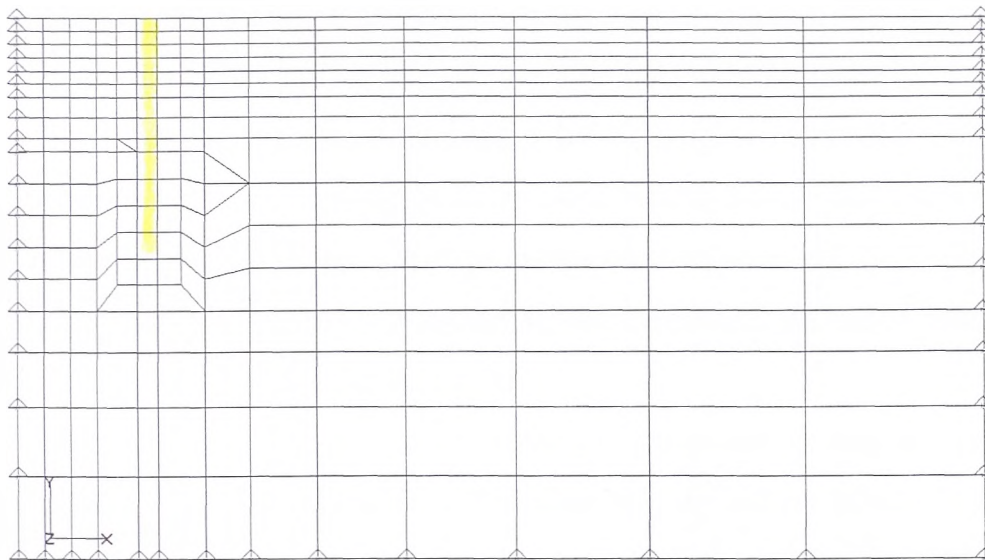
Parametri tla	
Nagib linije normalne konsolidacije	$\lambda = 0,155$
Nagib linije bubrenja	$k = 0,016$
Nagib linije kritičnog stanja	$M = 1,03$ ($\varphi = 26^\circ$)
Poisson-ov koeficijent	$\nu = 0,2$
Zapreminska težina tla	$\gamma = 22,0 \text{ kN/m}^3$
Zapreminska težina vode	$\gamma_w = 9,81 \text{ kN/m}^3$

Usvojena mreža konačnih elemenata i granični uslovi po pomeranjima su dati na sl. 5.5. U idealizovanoj geometriji problem je simetričan tako da je mreža konačnih elemenata formirana za simetričan problem. Proračun je rađen za uslove ravanskog stanja deformacije. Granični uslovi po pomeranjima su zadati na granici gline i čvrste stene, a po vertikali na oko 60,0m od položaja dijafragme.

Tlo i zid su modelirani, uglavnom, devetočvornim pravougaonim elementima.

Nivo podzemne vode je na 1,0m od površine terena i u svakoj fazi iskopa se crpi iz temeljne jame.

Zidovi su betonske dijafragme debljine 1,5m, modelirane kao elastični gredni elementi sa modulom elastičnosti $E_b = 17 \times 10^3 \text{ MPa}$, Poisson-ovim koeficijentom $\nu = 0,15$ zapreminskom težinom $\gamma_b = 22,0 \text{ kN/m}^3$. Kontakt zida i tla je modeliran kontaktnim elementima sa modulom smicanja $G = 7,5 \text{ MPa}$ sve dok se ne postigne kritično stanje ($\tau = \sigma_n \text{tg}\varphi$), posle čega se modul smicanja redukuje faktorom 100.



Sl 5.5 Mreža konačnih elemenata

Faze proračuna u analizi odgovaraju fazama izvođenja konstrukcije i napredovanju iskopa, osim faze izvođenja dijafragme koja nije obuhvaćena analizom.

Analiza obuhvata sledeće faze:

- a) Iskop 4,0m od površine terena uklanjanjem četiri prva reda elemenata
- b) Izvođenje krutog privremenog oslonca i iskop do kote -10,0m uklanjanjem sledećih pet redova elemenata
- c) Izvođenje betonske ploče debljine 1,0m na koti -10,0m i uklanjanje privremenog oslonca

U radu su dati sledeći rezultati:

- Dijagrami bočnih pritisaka tla sa obe strane dijafragme
- Dijagrami momenata savijanja duž dijafragme

Kao što je ranije navedeno, primer u disertaciji je rađen programom PAK, a odabrani model je modifikovani Cam-Clay model.

Zbog upoređivanja rezultata, odabrana je ista mreža konačnih elemenata sa istim graničnim uslovima i istim parametrima tla za modifikovani Cam-Clay model.

Uporedni rezultati su prikazani na slikama 5.6. i 5.7.

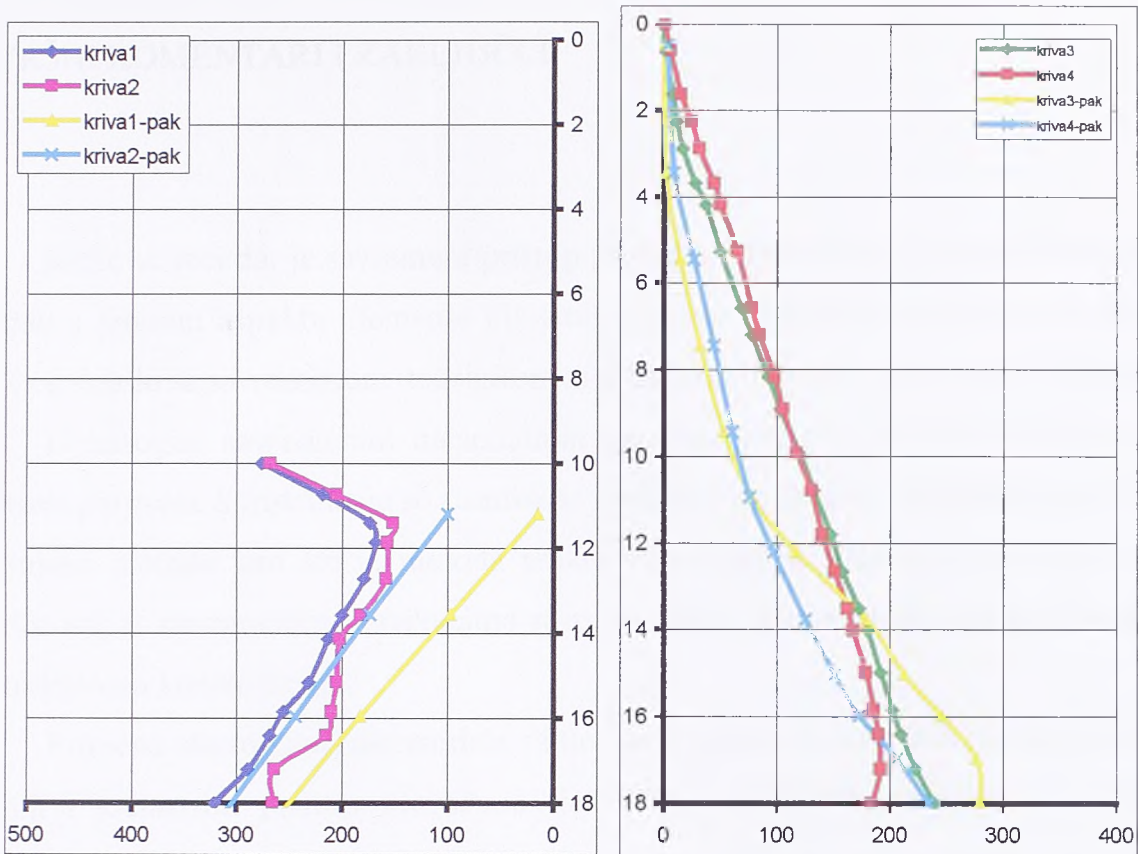
Na slici 5.6 dati su dijagrami bočnih pritisaka sa obe strane dijafragme za fazu iskopa do 10m uz prethodno postavljanje privremenog oslonca (krive 2 i 4) i za fazu postavljanja betonske ploče i uklanjanja privremenog oslonca (krive 1 i 3).

Na slici 5.7 su dati dijagrami momenata duž dijafragme za iste faze iskopa.

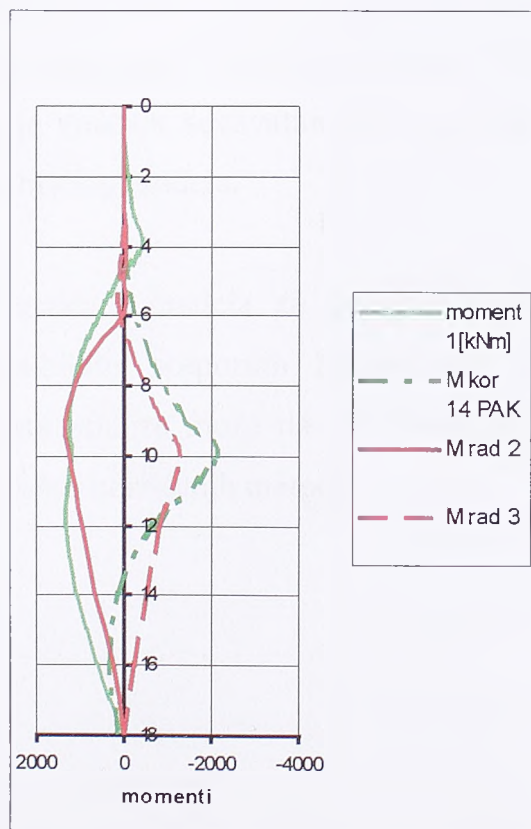
Sa uporednih dijagrama može se uočiti da se rezultati relativno dobro slažu.

U primeru nije navedeno koji je postupak korišćen pri rešavanju materijalno nelinearnog problema, samo inkrementalni ili inkrementalno iterativni postupak, tako da se sa tog aspekta rezultati ne mogu uporediti.

U PAK-u je primenjen inkrementalno iterativni postupak sa implicitnom integracijom napona Cam-Clay modela. Prosečan broj iteracija u koraku je 5 uz vrlo strog energetski kriterijum konvergencije sa tolerancijom 10^{-9} . Može se zaključiti da je sa primenjenom itegracijom broj iteracija minimalan, što povećava brzinu rada računara a u isto vreme obezbeđuje visoku tačnost rezultata.



Sl 5.6 Uporedni dijagrami bočnih pritisaka tla



Sl 5.7 Uporedni dijagrami momenata savijanja duž zida

ZAVRŠNI KOMENTARI I ZAKLJUČCI

Može se reći da je savremeni pristup proračuna fleksibilnih potpornih konstrukcija zadržao u jednom aspektu elemente klasičnih metoda proračuna, dok se sa druge strane razvija u skladu sa savremenom teorijskom mehanikom tla i razvojem numeričkih metoda.

U mnogim savremenim nacionalnim pravilnicima, pa i u EVROKOD-u, dokaz nosivosti potporne konstrukcije se zasniva na klasičnoj teoriji graničnih pritisaka tla. Novije savremene metode kao što je metoda reakcije tla, koje se uglavnom baziraju na teoriji elastičnosti, u savremenim pravilnicima se primenjuju u okviru dokaza graničnog stanja upotrebljivosti konstrukcije.

Primena elastoplastičnih modela za tlo i savremenih numeričkih metoda omogućava realniji i jedinstven pristup proračunu fleksibilnih potpornih konstrukcija i rešavanje složenih problema iz savremene građevinske prakse. Iako se radi o mnogo kompleksnijoj analizi koja zahteva primenu vrlo složenih računarskih programa, sve se češće koristi jer daje mogućnost projektantima da kod složenih konstrukcija prate ponašanje konstrukcije u svim fazama izvođenja što može imati velikog uticaja na dobijene rezultate. Kod ovakve vrste analize od velikog je značaja adekvatan izbor modela za tlo kao i broj i način dobijanja parametara odabranog modela.

Primena elastoplastičnih modela za tlo predstavlja značajan korak u analizi složenog ponašanja fleksibilnih potpornih konstrukcija. Osim praktične primene u projektovanju, ovakva vrsta analize može da se koristi za ocenu uslova primenljivosti drugih, jednostavnijih ali češće korišćenih metoda.

Literatura

- Al-Tabba A., Muir Wood D. (1989), An experimentally based "bubble" model for clay, Proceedings of Numer Model in Geomech. III, Elsevier, Rotterdam, 91-99.
- Baladi G.Y, Rohani B. (1979) Elastic - plastic model for saturated sand, Jour. Geotech. Engng Div, ASCE, 105 (674), 465-480.
- Bardet J.P. (1986), Modelling of sand behaviour with bounding surface plasticity, 2nd Int. Symp. on Numer. Models in Geomech., Ghent.
- Bell A.L., (1915) The lateral pressure and resistance of clay and supporting power of clay foundations, Min. Proc. ICE, 1991 (1), 233-272.
- Blum H. (1951) Einspannungsverhältnisse bei Bohlwerken, Berlin W. Erust&Sohu, 32
- Blum H., (1951), Beitrag zur Berechnung von Bohlwerken, Berlin, W. Erust&Sohu, 27.
- Bolton M.D., Powrie W., Symons I.F. (1990 a), The design of stiff in situ walls retaining over consolidated clay, part 1, short term behaviour, Ground Engineering, 32 (1), 34-39.
- Bolton M.D., Powrie W., Symons I.F. (1990 b), The design of stiff in situ walls retaining over consolidated clay, part 2, long term behaviour, Ground Engineering, 23 (1), 22-29.
- Borja R., Lee S. (1990), Cam-Clay plasticity, Par I: Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations, Comp. Meth. Appl. Mech. Engeng. vol. 78, 49-72.
- British Standards Institution (1994), Code of practice for earth retaining structure, BS 8002, London, UK.
- Burland J.B., Potts D.M., Walsh N.M. (1981), The overall stability of free and propped cantilever retaining walls, Ground Engineering, July, 28-38.
- Burland J.B., Vovrie A.B. (1985), The fasting of soils under conditions of passive stress relief, Geotechnique, 35, No 2, 193-198
- Canadian Foundation Engineering Manual, (1992), Canadian Geotechnical Society.
- Caquot A., Kerisel J. (1948), Tables de butee, de pousse et de force portante des fondations, Paris, Gautier - Villars.
- Clayton C.R., Milititsky J. (1986) Earth pressure and earth retaining structures, Surey University, Press, Glasgow and London.
- Collins I.F., Houlsby G.T (1997), Application of thermo mechanical principles to the modeling of geotechnical materials, Proceeding of Royal Society Se., A53, 1975-2001.
- Collins IF. (2002), A sistematic procedure for constructing critical state models int three dimensions, Int. J. Solid. Struc., vol, 4379-97.

Collins, I.F. (2005), Elastic plastic model for soils and sands, *Int. Jour. Mech. Scienc*, 47, 493-508.

Collins, I.F., Houlsby (1997), Application of thermomechanical principles to the modeling of geotechnical materials, *Proceeding of Royal Society of London*, 453, 1975-2001.

Cotecchia F., Chandler R. (2000), A general framework for mechanical behaviour of clays, *Geotechnique*, Vol 50, No 4, 431-447.

Crouch R., Wolf J., Dafalias Y. (1994), Unifield Critical - state Bounding Surface Plasticity Model for Soil, *Jour. of Engee. Mech.*, Vol 120 (11), 2251-2270.

Dafalias Y.F (1986), Bounding surface Plasticity: Mathematical Foundation and Hypo - plasticity, *Jour. Engng. Mech. ASCE*, Vol 112, No 9, 966-987.

Davis, M.C., Newton T.A. (1993), Critical state constitutive model for an isotropic soil; In "Predictive Soil Mechanics", Holsby and Schofield, 219-229, Thomas Telford, London.

Di Maggio F.L., Sandler I.S. (1971), Material models for granular Soils, *Jour. Engng ASCE*, 97, 935-950.

Drucker D.C., Gibson R.E., Henkel P.J. (1955), Solid Mechanics and Work - Hardening Theories of Plasticity, *Proceeding, ASCE*, vol 81, 1-14.

Einav I., Puzrin A., Houlsby G. (2003), Continuous Hiperplastic Models for Over consolidated Clays, *Math. an Computer Modeling*, 37, 515-523.

Elson W.K. (1984), Design of laterally - loaded piles, CIRIA Report, No 103, 86.

EUROCOD 7-1 (2004), Eurocode 7 Geotechnical Design, Part 1; General Rules

Gens A., Potts D.M. (1988), Critical state models in computational geomechanics, *Eng . Comp.*, vol 5, 178-197.

Habibaghi K., Langer J.A. (1984), Horizontal subgrade modulus of granular soils, *ASTM Spec. Tech. Publ. No 835*, American Soc. for Testing and materials, 21-34.

Hofstetter, G., Simo J.C., Taylor R.L., (1993), A modified cap model: closest point solution algorithms, *Comput. & Structure*, vol 48, 203-214.

Holsby, G.T., Puzrin AM, (2000), A thermo mechanical framework for constitutive models for rate - independent dissipative materials, *Int. Jour. Plasticity* 16, 1017-47.

Houlsby G.T. (1981), A study of plasticity theories and their applicability to soils, Ph. P. Thesis, University of Cambridge.

- Houlsby G.T., Puzzin A.M. (2000), A thermo mechanical framework for constitutive models of rate independent dissipative materials, *Inter. Jour. of Plasticity*, 16 (9), 1017-1047.
- Iwan W.D. (1967), On a Class of Models for the Yielding Behavior of Continuous and Composite System, *Jour. Appl. Mech.*, AIME, vol 34, 612-617.
- Khong C.D. (2004), Development and numerical evaluation of unified critical state models, PRD thesis, University of Nottingham.
- Kojić M., (1996), The governing parameter method for implicit integration of viscoplastic constitutive relations, *Comp. Mech.* vol 19, 49-57.
- Kojić M., Bathe K.J., (2004), *Inelastic Analysis of solids and structures*, Springer
- Kojić M., Slavković R., Grujović N., Vukićević M., (1994), Implicit stress integration algorithm for the modified Cam -Clay material, *Teorijska primena Mehanika*, vol 20, 95-118
- Kojić M., Vukićević M., (1992), In implicit procedure for stress integration in elastic - plastic deformation on the modified Cam-Clay model, *COMPLAST III*, Barcelona.
- Kolymbas D.K. (1991), An outline of hypoplasticity, *Applied Mechanics* 61, 143-151.
- Lade P., Kim M. (1995) Single hardening constitutive model for soil, rock and concrete, *Int. Jour. Solids Structures*, Vol 32 (Nu 14), 1963-1978.
- Lade P.V., (1977), Elastoplastic Stress - Strain Theory for Cohesionless Soils with Curved Yield Surface, *Int. Jour. Solids Struct.*, ASCE, Vol 13, 1019-1035.
- Lade P.V., Duncan J.M (1975), Elastoplastic Stress - Strain Theory for Cohesionless Soil, *Jour. Geotech. Engng Div.*, ASCE, Vol.101, 1037-1053
- Lade, P.V. (1988), Effects of Voids and Volume Changes on the Behaviour of Frictional Materials, *Inter Jrn. for Numerical and Analytical Math. in Geomechanics*, vol 12 (351-370).
- Lade, P.V. and Musante H.M. (1978), Three - Dimensional behaviour of remolded clay, *Jour. Geotech. Eng. Div. ASCE* 104, 193-209.
- Lee, K.L. and Seed H.B. (1967), Drained strength characteristics of sand, *Jour. Soil, Mech. Found. Div. ASCE*, 93, 117-141.
- Matsuoka H, Nakai T., (1974), Stress - deformation and strength characteristics of soil under three different principal stress, *Procee JSCE*, 232, 59-74.
- Mayhuel K., (1808), *Trate experimental, analitique et pratique de la pouss.*

- Mindlin R.D. (1936) Discussion: pressure distribution on retaining walls, in Proc. 1st In. Conf. Soil Mech. Found. Engen., vol 3, 155-156.
- Mozze Z. (1980), Hipoelasticity and Plasticiry Approaches to Constitutive Modelling of Inelastic Behavior of soilc, Int. Jour. Num. Analyt. Meth. Geom., vol 4, 45-66
- Mrozz Z. (1967), Ond Description of Anisotropic Worhardening, Jour. Mech. Phus. Solids, vol 15, 163-175.
- Mrozz Z., Norris, V.A, Zienkiewicz O.C. (1979), Application of on anistropic hardening model in the analysis of elasto - plastic deformation of soils, Geotechnique 29, No 1, 1-34.
- Mrozz Z., Norris, V.A, Zienkiewicz O.C. (1981), An an isotropic, critical state model for soils subject to cyclic loading, Geotechnique 31, Vol 4, 451-469.
- Müuller - Breslan N., (1906), Erddruck auf Stutzmauern, Alfred Kroner, Stuttgart.
- Ortiz M., Pandolfi A. (2004), A variation Cam Clay theory of plasticity, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Enging., 193, 2645-2666.
- Ortiz M., Popov E.P., (1985), Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, Int, Jour. Num. Meth. in Engin., vol 21, 1561-1576
- Ortiz M., Simo J.C., (1986), An analysis a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, Int. Jour. Num. Method in Engng., vol 23, 353-366.
- Osman A.S., Bolton M.D., (2004), A new design method for retaining walls in clay, Can. Geotech. J. vol. 41, 451-466.
- Pappin J.W., Simpson B., Felton F.J., Raison C. (1985), Numerical analysis of flexible retaining walls, Proc. Conf. Num. Meth. in Engen., Theory and Applications, Swan
- Potts D.M., (1992) The analysis of earth retaining structures, Proc. of the Conf. Retain. Struct., Londres, Tomas, Telford, 167-186
- Potts D.M., Fouire A.B., (1986), A numerical study of the effects of wall deformation on earth.
- Potts D.M., Fourie A.B. (1989), Comparation of finite element and limiting analyses for an embedded retaining wall, Geotechnique 39, No, 175-188.
- Potts D.M., Ganendra D. (1994), An evaluation of substepping and implicit stress point algorithms, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. vol 119, 341-354
- Powrie W. (1996) Limit equilibrium analysis of embedded retaining walls, Geotechnique, 46, no 4, 709-713.
- Powrie W., L.E.S. (1991), Finite element analyses on in sity wall proped at formation level, Geotecnique 40, No 4, 499-514.

- Prevost J., Popescu R (1996), Constitutive relations for soil materials, *El. Jour. Geot. Engineer.*, 96-09
- Prevost J.H. (1982), Two-surface vs. multi surface plasticity theories, *Int. Jour. Num. Anal. Meth. Geomech.* (6), 323-338
- Prevost J.H., (1978), Anisotropic Undrained Stress-Strain Behavior of Clays, *Jour. Geotech. Engng. Div. ASCE*, vol 104, NOG t8, 1075-1090.
- Pun W.K., Pang P.L.R. (1993) Horizontal Subgrade Reaction for Cantilevered Retaining wall Analysis, *Geo Report No 21*, Hong Kong, 49.
- Rankine W.J.M., (1857), On the stability of loose earth, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 147, 9-27.
- Ronainia M., Muier Wood D. (2000), A kinematics hardening constitutive model for natural clays with loss of structure, *Geotechnique*, Vol 50, No 2, 153-164.
- Ronamia M., Muir Wood D., (2001), Implicit numerical integration for kinematic hardening soil plasticity model, *Int. Jour. Numer. And. Meth. Geomech.* vol. 25, 1305-1325.
- Roscoe K.N., Burland J.B., (1968), On the Generalized Stress - Strain Behavior of Wet Clay, *Engineering Plasticity*, 535-609
- Roscoe, K.H, Schofield A.N., Wroth, DP (1958), On the Yielding of Soils, *Geotechnique*, Vol 9, 22-53.
- Rowe P. W (1957) Sheer pile walls in clay, *Proc. ICE* 7, 629-654
- Rowe P.W. (1952), Anchored sheer - pile walls, *Proc. ICE* 1, 27-70.
- Rowe P.W., (1962), The Stress - Dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact, *Proc. of Royal Society*, Vol A 269, 500-527
- Rowe P.W., Peaker K. (1965), Passive earth pressure measurement, *Geotechnique*, vol 15, 57-78.
- Schofield, A. N., Wroth DP, (1968) *Critical State Soil Mechanics*, Mc Graw - Hill, London.
- Sekiguchi H., Ohta H. (1977), Induced anisotropy and time dependency in clays, *Proc. int. Confer. Soil Mech. and Found. Engng.*, Tokyo, 229-238
- Simo J.C., Huges (1989), *Elastoplasticity and viscoplasticity, Computational aspect*, Stanfor University
- Simo J.C., Taylor R.L., (1985), Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, vol 48, 101-118
- Simo J.C., Taylor R.L., (1986), A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *Int. J. Num. Meth. Engng*, vol 22, 649-670.

- Simpson B. (1992), Retaining structures: displacement and design, *Geotechnique*, 42 (4), 541-576.
- Skempton A.W. (1953), Earth pressure, retaining walls, tunnels and structured excavations, In. Proc. 3 Int. Cont. Soil. Mech. Found. Engen.
- Skempton, A.W. (1961), Effective stress in soil, concrete and rocks, Conf. on Pore Pressure and Suction in Soils, London.
- Stallebrass S.E. (1990), Modelling the effect of recent stress history on the deformation of over consolidated soils, PhD. Thesis, The City University, London.
- Svedsen B., Hutter K., Laboui L. (1999), Constitutive models for granular materials including quasi-static frictional behaviour: Toward a thermodynamic theory of plasticity, *Continuum Mech. Thermo dyn.* No 4, 263-275.
- Tchebotarioff G.P., (1973), Foundation, Retaining and Earth structures, Mc-Graw-Hill, New York.
- Teng W.C., (1962) Foundation design, Prentice Hall, New Jersey.
- Terzaghi K. (1955), Evolution of coefficients of subgrade reaction, *Geotechnique*, 4, 297-326.
- Terzaghi K., (1943), Theoretical Soil Mechanics, John Wiley, New York.
- Terzaghi K., (1954) Anchored bulkheads, *Trans. ASCE* 119, 1243-1280.
- Terzaghi, K. (1943), Theoretical Soil Mechanics, John Wiley, New York.
- Tezaghi K. (1941), General Wedge theory of earth pressure, *Transp. ASCE* 106, 68-97.
- Turabi D.A., Balla A., (1968) Distribution of earth pressure on sheet-pile walls, *Proc ASCE, J. Soil. Mech, Found. and F-- Div. ,* vol. 94, 1271-1301.
- Vaziri N., Simpson B., Pappin J.W., Simpson L., (1982), Integrated forms of Mindlin's equations , *Geotechnique*, vol 32, No 3.
- Vukićević M. (1990), Neki aspekti primene Cam - Clay modela tla u rešavanju geotehničkih problema, Magistarski rad, Građ. fak. u Beogradu.
- Whitthe A.J. (1993), Evaluation on constitutive model for over consolidated clays, *Geotechnique*, 43 (2), 289-313
- Whittle A.J (1987), A constitutive model for over consolidated clays with application to the cyclic loading of friction piles, Sc. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Wilkins M.L., (1964), Calculation of elastic - plastic flow, *Method. Comp. Physics*, vol 3, New York.

Wu W., Baner E., Kolymbas D. (1996), Hypoplastic constitutive model with critical state for granular materials, Mech. of Materials, 23, 45-69.

Wu W., Kolymbas D. (1990), Numerical testing of the stability criterion for hypo plastic constitutive equations, Mech. Mater. 9, 245-253.

Ziegler, H (1983), An Introduction to Thermo mechanics, North Holland, Amsterdam.





РД 19478



300147532

COBISS •