



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ - ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ  
UNIVERSITY OF BELGRADE - FACULTY OF CIVIL ENGINEERING



УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ - ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ  
UNIVERSITY OF MONTENEGRO - FACULTY OF CIVIL ENGINEERING



АКАДЕМИЈА ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА СРБИЈЕ  
ACADEMY OF ENGINEERING SCIENCES OF SERBIA

# ТЕОРИЈА ГРАЂЕВИНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА

*Монографија посвећена успомени на  
професора Миодрага Секуловића*

# THEORY OF CIVIL ENGINEERING STRUCTURES

*Monograph dedicated to the memory of  
Professor Miodrag Sekulović*

Уредници / Editors

Проф. др Живојин Прашчевић

Проф. др Раденко Пејовић

В. проф. др Ратко Салатић

В. проф. др Марија Нефовска-Даниловић

Београд, 2019.

Издавачи / Publishers

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ - ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ  
UNIVERSITY OF BELGRADE - FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ - ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ  
UNIVERSITY OF MONTENEGRO - FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

АКАДЕМИЈА ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА СРБИЈЕ  
ACADEMY OF ENGINEERING SCIENCES OF SERBIA

За издавача / For the publisher

Проф. др Владан Кузмановић

Проф. др Марина Ракочевић

Проф. др Бранко Ковачевић

Уредници / Editors

Проф. др Живојин Прашчевић

Проф. др Раденко Пејовић

В. проф. др Ратко Салатић

В. проф. др Марија Нефовска-Даниловић

Рецензенти / Reviewers

Проф. др Ђорђе Лађиновић

Проф. др Александар Прокић

Техничка припрема / Technical preparation

В. проф. др Марија Нефовска-Даниловић

Доц. др Мирослав Марјановић

Емилија Дамњановић

Марија Милојевић

Дизајн корица / Cover design

Доц. др Мирослав Марјановић

Штампа / Printing

Бирограф, Земун

Тираж 300 примерака

Number of copies 300

ISBN 978-86-7518-208-5

**Марина ЂЕТКОВИЋ**

## **НЕЛИНЕАРНА АНАЛИЗА КОМПОЗИТНИХ ПЛОЧА ПРИМЕНОМ КОНАЧНОГ ЕЛЕМЕНТА КОНТИНУУМА**

### **NONLINEAR ANALYSIS OF COMPOSITE PLATES USING CONTINUUM FINITE ELEMENT**

**др Марина Ђетковић, дипл. грађ. инж.  
ванредни професор Грађевинског факултета Универзитета у Београду**

Рођена је 1974. Године у Београду. Дипломирала је 2000, магистрала 2005. и докторира 2011. године на Грађевинском факултету Универзитета у Београду. Ванредни је професор на групи предмета Теорије конструкција. Поља научног рада: нелинеарна анализа, композитне плоче, МКЕ.

#### *Резиме*

У раду је по први пут у литератури формулисан геометријски нелинеаран коначни елемент плоче заснован на тоталној Lagrange-овој формулацији. Користећи слојевиту теорију плоча Reddy-а, нелинеарне Green-Lagrange-ове везе деформација и померања (у von Karman-овом смислу) и линеарно еластичне ортотропне карактеристике за сваки слој, 3Д једначине еластичности су редуковане на 2Д проблем и добијена је нелинеарна интегрална форма. Пошто је спроведена линеаризација на нелинеарној интегралној форми, а потом и дискретизација, добијена је тангентна матрица крутости коначног елемента и то са мање математичких операција, у поређењу са оном добијеном у случају ламинатног коначног елемента из литературе. Симетрична тангентна матрица крутости, заједно са вектором унутрашњих чворних сила, примењени су у Newton Raphson-овој методи за решавање нелинеарних инкременталних једначина равнотеже. За решење по МКЕ написан је оригинални програм у MATLAB програмском језику. Програмом су анализирани плоче различитих механичких карактеристика, односно изотропне, ортотропне и ламинатне (cross ply и angle ply), различитих дебљина, различитих граничних услова и различитих режима оптерећења/растерећења. Добијена решења су упоређена са решењима из литературе и изведени су закључци.

Кључне речи: геометријски нелинеарна анализа, композитне плоче, коначни елемент континуума

#### *Summary*

In this paper the geometrically nonlinear plate finite element model, hitherto not reported in the literature, is developed using the total Lagrange formulation. With the layer wise displacement field of Reddy [1], nonlinear Green-Lagrange small strain large displacements relations (in the von Karman sense) and linear elastic orthotropic material properties for each lamina, the 3D elasticity equations are reduced to 2D problem and the nonlinear equilibrium integral form is obtained. By performing the linearization on nonlinear integral form and then the discretization on linearized integral form, tangent stiffness matrix is obtained with less manipulation and in more consistent form, compared to the one obtained using laminated element approach from literature [8]. Symmetric tangent stiffness matrixes, together with internal force vector are then utilized in Newton Raphson's method for the numerical solution of nonlinear incremental finite element equilibrium equations. The originally coded MATLAB computer program for the finite element solution is used to verify the accuracy of the numerical model, by calculating nonlinear response of plates with different mechanical properties, which are isotropic, orthotropic and anisotropic (cross ply and angle ply), different plate thickness, different boundary conditions and different load direction (unloading/loading). The obtained results are compared with available results from the literature and the linear solutions from the author's previous papers.

Keywords: geometrically nonlinear analysis, composite plates, continuum finite element

## 1. УВОД

Конструкције сачињене од плочастих композитних материјала нашле су широку примену у бродоградњи, авио и аутомобилској индустрији, али и од недавно и у грађевинарству. Композитне плоче примењују се: 1) за ојачање и санацију постојећих конструкција од бетона, челика и дрвета, 2) у облику отворених и затворених, танкозидних и пуних профила главних носећих елемената у мостоградњи и зградарству, 3) као самостални главни мостовски носачи и 4) у конструкцијама димњака индустријских постројења, силоса, резервоара, цевовода, али и великих подних и кровних површина. Особине које су издвојиле композитне материјале у односу на традиционалне инжењерске материјале, као што су бетон и челик, су релативно мали однос тежине према чврстоћи и тежине према крутости [2], већи избор пројектних параметара на који се може утицати при добијању конструкцијски оптималног решења, висока отпорност на спољашње утицаје корозије, температуре и влажности, као и еколошка оправданост, у смислу коришћења обновљивих материјала и мањег утрошка енергије. Све наведене особине су омогућиле значајно смањење удела сопствене тежине у укупном оптерећењу конструкције, а тиме и повећале отпорност на прихватање сеизмичких утицаја, прихватање додатног саобраћајног оптерећења, редуковање трошкова фундација, олакшане трошкове транспорта и монтаже, уз истовремено смањење трошкова поправки и одржавања. Смањење сопствене тежине, иако је, са једне стране, уклонило ограничења у погледу виткости и дебљине елемента, односно омогућило добијање изузетно танких плочастих елемената, са друге стране их је учинило осетљивим на велика померања [3, 4]. У таквим случајевима, геометрија конструкције се у току деформације мења, па је неопходно применити геометријски нелинеарну анализу. Геометријски нелинеарна анализа неопходна је и за добијање одговора несиметричних ламината, код којих још у фази малих померања долази до спрезања мембранског напрезања и савијања.

Из механике континуума познато је да математички модел плоче у себи може садржати два облика нелинеарности: материјалну нелинеарност и геометријску нелинеарност [5, 6]. Када је реч о геометријској нелинеарности, она може подразумевати геометријски нелинеаран модел са малим деформацијама и великим померањима (von Karman-ова) и геометријски нелинеаран модел са великим деформацијама. У првом слу-

чају, геометрија плоче пре деформације остаје непромењена и након деформације, међутим, конструкција је изложена великим померањима и услови равнотеже се успостављају на тој помереној, заротираној конфигурацији. У другом случају геометрија плоче се мења у току деформације и равнотежа се успоставља на деформисаној конфигурацији. У оба случаја, услови равнотеже су нелинеарни.

У жељи да се формулише математички модел који ће бити у стању да у себи садржи неку од два поменута облика геометријске нелинеарности, у литератури се помињу два приступа. Први је заснован на теорији плоча, а други је заснован на механици континуума [7]. У првом приступу, 3Д једначине теорије еластичности редуковане су на 2Д једначине уводећи одређене кинематичке претпоставке и хомогенизацију по дебљини плоче. Поменути приступом могуће је у обзир узети само први облик нелинеарности или велика померања и мале деформације. Одговарајући нумерички модел назива се ламинатни коначни елемент. Другим приступом, као општијим, заснованим на 3Д механици континуума, могуће је у обзир узети оба облика нелинеарности, дакле велика померања и велике деформације. Одговарајући нумерички модел назива се коначни елемент континуума. Из литературе се може видети да до данас није пријављена формулација геометријски нелинеарног коначног елемента плоче као континуума заснованог на слојевитој теорији плоча. Наиме, формулисан је ламинатни коначни елемент плоче заснован на слојевитој теорији плоча [8], као и коначни елементи континуума плоча и љуски засновани на теоријама плоча вишег реда ESL [9–17]. Два су основна разлога која су утицала да се по први пут у литератури у овом раду формулише коначни елемент плоче заснован на механици континуума. Први је био да се дефинише општи нумерички модел способан да у себи садржи различите нивое нелинеарности, и други, да се дефинише нумерички ефикаснији метод одређивања тангентне матрице крутости, од оног који је дат за ламинатни коначни елемент из литературе.

Након што је аутор потврдио ефикасност коначног елемента композитне плоче у области нелинеарне анализе савијања, извијања и сопствених вибрација у термомеханичком окружењу [18–22], у овом раду ће се формулисати геометријски нелинеаран коначни елемент континуума. 3Д једначине еластичности редуковаће се на 2Д проблем применом кинематичких претпоставки слојевите теорије плоча коју је предложио Reddy [1]. Користећи претпостављено по-

ље померања, нелинеарне Green-Lagrange-ове везе деформација и померања и линеарне ортотропне карактеристике материјала, основне једначине проблема или слаба форма добиће се из принципа виртуалних померања, заснованог на тоталној Lagrange-овој формулацији. Слаба форма нелинеарних интегралних једначина равнотеже ће се прво линеаризовати, а потом и дискретизовати применом изопараметарске формулације коначног елемента. Нелинеарне инкременталне једначине равнотеже ће се решавати применом Newton Raphson-ове нумеричке методе. Применом оригиналног рачунарског програма написаног у MATLAB програмском језику, анализираће се изотропне, ортотропне и композитне плоче различите дебљине, различитих шема ламинације, различитих граничних услова, као и при различитим режимима оптерећења (оптерећење/растерећење). Тачност добијених нумеричких решења биће потврђена поређењем са расположивим решењима из литературе и биће изведени одговарајући закључци.

## 2. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ

### 2.1. Претпоставке и геометрија плоче

Посматра се ламинатна композитна плоча састављена од  $n$  ортотропних слојева. Претпоставља се да су: 1) слојеви идеално спојени, 2) материјал слоја линеарно еластичан и ортотропан, 3) деформације мале, а померања велика у вон Карман-овом смислу, 4) линијски елемент плоче управан на средњу раван не мења дужину.

### 2.2. Поље померања

Поље померања у слојевитој теорији плоча [1] претпостављено је тако да су померања у равни  $(u, v)$  део по део линеарна по дебљини док је попречно померање  $w$  константно по дебљини плоче, Слика 1:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + \sum_{I=1}^{N+1} U^I(x, y) \cdot \Phi^I(z) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + \sum_{I=1}^{N+1} V^I(x, y) \cdot \Phi^I(z) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

### 2.3. Поље деформација

Green Lagrange-ов тензор деформација може се изразити користећи нелинеарне вон Карман-ове везе деформација и померања:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{I=1}^{N+1} \frac{\partial U^I}{\partial x} \Phi^I + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \sum_{I=1}^{N+1} \frac{\partial V^I}{\partial y} \Phi^I + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \sum_{I=1}^{N+1} \left( \frac{\partial U^I}{\partial y} + \frac{\partial V^I}{\partial x} \right) \Phi^I + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \sum_{I=1}^{N+1} U^I \frac{d\Phi^I}{dz} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \sum_{I=1}^{N+1} V^I \frac{d\Phi^I}{dz} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.4. Конститутивне везе

За Хук-ов еластични материјал везе напона и деформација за  $k$ -ту ортотропну ламину гласе:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3)$$

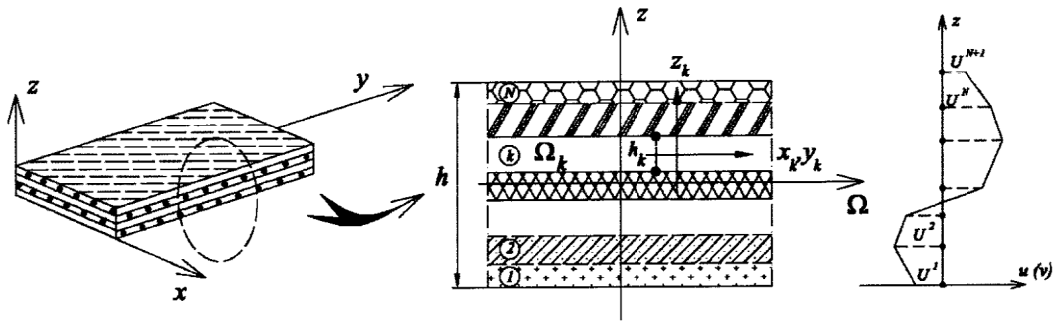
где су  $\sigma^{(k)} = \{ \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz} \}^{(k)T}$  и  $\varepsilon^{(k)} = \{ \varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz} \}^{(k)T}$  напони и деформације, а  $Q_{ij}^{(k)}$  су трансформисане еластичне константе за  $k$ -ту ортотропну ламину у глобалним координатама.

### 2.5. Услови равнотеже

У инкременталној формулацији континуума, геометрија конструкције се континуално мења и све величине се дефинишу у односу на непознату деформисану конфигурацију  $C_2$  [5]. Услови равнотеже се могу добити из принципа виртуалних померања (ПВП), односно услова да је збир виртуалних радова унутрашњих и спољашњих сила једнак нули:

$$\begin{aligned} \int_{z_V} \delta({}_2e) \cdot {}^2\sigma \cdot d^2V &= \\ \int_{z_V} \delta u \cdot {}^2f \cdot d^2V + \int_{z_S} \delta u \cdot {}^2t \cdot d^2S & \end{aligned} \quad (4)$$

Претходна једначина се не може директно решити, јер су све величине дате у односу на непознату конфигурацију  $C_2$ . Стога је потребно све



Слика 1. Поље померања по дебљини ламинатне композитне плоче

величине изразити у односу на претходну познату конфигурацију увођењем одговарајућих мера напона и деформација. Ако се почетна конфигурација  $C_0$  усвоји као референтна, у односу на коју се мере све величине, реч је о тоталној Lagrange-овој формулацији, па ће ПВП (4) имати следећи облик:

$$\int_{\Omega} \delta({}^2_0E) \cdot {}^2_0S \cdot d^0V = \int_{\Omega} \delta u \cdot {}^2_0f \cdot d^0V + \int_{\Omega} \delta u \cdot {}^2_0t \cdot d^0S \quad (5)$$

где је варијација Green Lagrange-овог тензора деформација  $\delta({}^2_0E)$ :

$$\delta({}^2_0E_{ij}) = \delta({}^1_0E_{ij} + {}^0\varepsilon_{ij}) = \delta({}^0\varepsilon_{ij}) + \delta({}^0\eta_{ij}) \quad (6)$$

Како је  $\delta({}^1_0E) = 0$ , јер није функција непознатих померања, варијација линеараног  $\delta({}^0\varepsilon_{ij})$  и варијација нелинеараног  $\delta({}^0\eta_{ij})$  дела Green Lagrange -овог инкременталног тензора деформација  $\delta({}^0\varepsilon_{ij})$  гласе:

$$\delta({}^0\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial {}^1_0u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial {}^1_0u_k}{\partial x_j} \right) \quad (7)$$

$$\delta({}^0\eta_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_j} \right) \quad (8)$$

Piola-Kirchhoff-ов тензор напона другог реда  ${}^2_0S$  у конфигурацији  $C_2$  дат је у функцији Piola-Kirchhoff-овог тензора напона другог реда  ${}^1_0S_{ij}$  у конфигурацији  $C_1$  и Kirchhoff-овог инкременталног тензора напона  ${}^0S_{ij}$ :

$${}^2_0S_{ij} = {}^1_0S_{ij} + {}^0S_{ij} \quad (9)$$

Заменом израза (6) за  $\delta({}^2_0E)$  и израза (9) за  ${}^2_0S$  у

израз (5), добија се:

$$\int_{\Omega} \delta({}^0\varepsilon_{ij}) \cdot {}^0S_{ij} \cdot d^0V + \int_{\Omega} \delta({}^0\eta_{ij}) \cdot {}^1_0S_{ij} \cdot d^0V = \delta({}^2_0R) - \delta({}^1_0R) \quad (10)$$

где виртуална енергија деформације тела у конфигурацији  $C_1$  гласи:

$$\delta({}^1_0R) = \int_{\Omega} \delta({}^0\varepsilon_{ij}) \cdot {}^1_0S_{ij} \cdot d^0V \quad (11)$$

док виртуални рад који учини спољашње оптерећење гласи:

$$\delta({}^2_0R) = \int_{\Omega} \delta u \cdot {}^2_0f \cdot d^0V + \int_{\Omega} \delta u \cdot {}^2_0t \cdot d^0S \quad (12)$$

где су  ${}^2_0f$  и  ${}^2_0t$  вектори запреминског и оптерећења на граници,  $\delta u$  је вектор виртуалног померања,  $d^0V$  и  $d^0S$  су запремина и површина које тело заузима у конфигурацији  $C_0$ .

Математички гледано, први члан израза (10) чини израз нелинеарним по инкрементима померања  $u_i$ , па да би се одредило његово приближно решење, потребно га је линеаризовати. То се чини тако што се претпоставља да су инкрементална померања  $u_i$  од конфигурације  $C_1$  до конфигурације  $C_2$  мала, односно да важи:

$${}^0S_{ij} \approx {}^0C_{ijkl} \cdot {}^0\varepsilon_{kl}, \quad \delta({}^0\varepsilon_{ij}) \approx \delta({}^0\varepsilon_{ij}) \quad (13)$$

Једначина (10) добија онда облик:

$$\int_{\Omega} \delta({}^0\varepsilon_{ij}) \cdot {}^0C_{ijkl} \cdot {}^0\varepsilon_{kl} \cdot d^0V + \int_{\Omega} \delta({}^0\eta_{ij}) \cdot {}^1_0S_{ij} \cdot d^0V = \delta({}^2_0R) - \delta({}^1_0R) \quad (14)$$

Једначина (14) је слаба форма која се даље користи за добијање модела нелинеарног коначног елемента заснованог на тоталној Lagrange-овој формулацији.

Укупни Piola-Kirchhoff-ов тензор напона  ${}^1_0S_{ij}$  може се добити из конститутивних једначина:

$${}^1_0\mathbf{S} = {}_0 C_{ijkl} \cdot {}^1_0\mathbf{E}_{kl} \quad (15)$$

где је  ${}^1_0E_{ij}$  Green Lagrange-ов тензор деформација дефинисан у изразу (2), а  ${}_0C_{ijkl}$  еластични тензор материјала.

### 3. КОНАЧНИ ЕЛЕМЕНТ

#### 3.1. Поље померања

Слојевити коначни елемент састоји се од средње равни и  $I=1, N+1$  равни по дебљини плоче, Слика 2. У сваком чвору усвојене су компоненте померања, и то  $(u, v, w)$  у чворовима у средњој равни и компоненте  $(U^I, V^I)$  у чворовима у  $I$ -тој равни. Генерализована померања унутар коначног елемента  $\Omega^e$  изражена су преко померања у чворовима елемента:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m u_j \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m v_j \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m w_j \Psi_j \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^m [\Psi_j]^e \{d_j\}^e$$

$$\begin{Bmatrix} U^I \\ V^I \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m U_j^I \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m V_j^I \Psi_j \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^m [\bar{\Psi}_j]^e \{d_j^I\}^e$$

(16)

где су:

$\{d_j\}^e = \{u_j^e \ v_j^e \ w_j^e\}^T$  и  $\{d_j^I\}^e = \{U_j^I \ V_j^I\}^T$  генерализовани вектори померања у средњој и  $I$ -тој равни, док су  $[\Psi_j]^e$  и  $[\bar{\Psi}_j]^e$  матрице интерполационих функција, датих у [22].

#### 3.2. Поље деформација

Када је познато поље померања, поље деформација унутар коначног елемента се може изразити преко померања у чворовима елемента, користећи везе деформација и померања (2)

$$\{\epsilon^0\} = \sum_{j=1}^m [\mathbf{H}_j] \{d_j\}^e, \{\epsilon^m\} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [\mathbf{H}_{NLj}] \{d_j\}^e$$

$$\{\epsilon^I\} = \sum_{j=1}^m [\bar{\mathbf{H}}_j] \{d_j^I\}^e \quad (17)$$

где су:

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} \end{bmatrix} \quad [\bar{\mathbf{H}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} \\ \Psi_j^e & 0 \\ 0 & \Psi_j^e \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{H}_{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

#### 3.3. Услови равнотеже

Дискретизација слабе форме (14), користећи претпостављено поље померања (16), уз примену фундаменталне леме варијационог рачуна, даће следећи нелинеарни инкрементални модел слојевитог коначног елемента тоталне Lagrange-ове формулације:

$$([\mathbf{K}_{NL}]^e + [\mathbf{K}_G]^e) \cdot \{\bar{d}\}^e = \{ {}^2_0\mathbf{R} \}^e - \{ {}^1_0\mathbf{R} \}^e \quad (19)$$

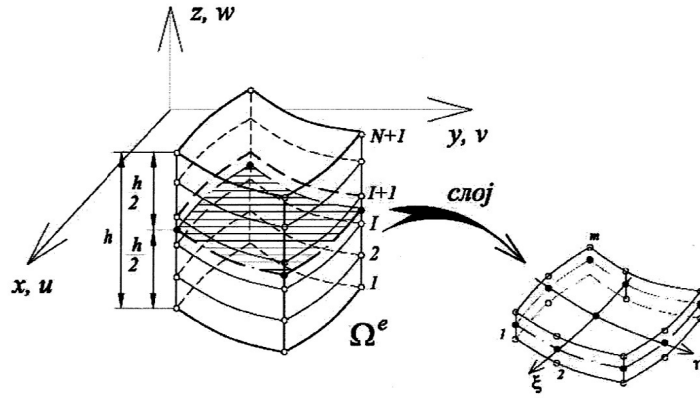
Матрица крутости коначног елемента  $\Omega^e$  гласи:

$$[\mathbf{K}_{NL}]^e = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}^{11}]^e & [\mathbf{K}^{12}]^e \\ [\mathbf{K}^{21}]^e & [\mathbf{K}^{22}]^e \end{bmatrix} \quad (20)$$

где је:

$$[\mathbf{K}^{12}]^e = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^e} \left( \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_i^e]^T \cdot [\mathbf{B}^I] \cdot [\bar{\mathbf{H}}_j^e] + \\ [\mathbf{H}_{iNL}^e]^T \cdot [\mathbf{B}^I] \cdot [\bar{\mathbf{H}}_j^e] \end{bmatrix} \right) d\Omega^e$$

$$[\mathbf{K}^{11}]^e = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^e} \left( \begin{bmatrix} [\mathbf{H}_i^e]^T \cdot [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{H}_j^e] + \\ [\mathbf{H}_i^e]^T \cdot [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{H}_{jNL}^e] + \\ [\mathbf{H}_{iNL}^e]^T \cdot [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{H}_j^e] + \\ [\mathbf{H}_{iNL}^e]^T \cdot [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{H}_{jNL}^e] \end{bmatrix} \right) d\Omega^e$$



Слика 2. Слојевити коначни елемент

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}^{21}]^e &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^e} \left( \begin{aligned} &[\bar{\mathbf{H}}_i^e]^T \cdot [\mathbf{B}^I] \cdot [\mathbf{H}_j^e] + \\ &[\bar{\mathbf{H}}_i^e]^T \cdot [\mathbf{B}^I] \cdot [\mathbf{H}_{jNL}^e] \end{aligned} \right) d\Omega^e \\
 [\mathbf{K}^{22}]^e &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{\Omega^e} [\bar{\mathbf{H}}_i^e]^T \cdot [\mathbf{D}^u] \cdot [\bar{\mathbf{H}}_j^e] d\Omega^e
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Геометријска матрица крутости коначног елемента  $\Omega^e$  гласи:

$$[\mathbf{K}_G]^e = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_G^{11}]^e & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}
 \tag{22}$$

где је:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}_G^{11}]^e &= \sum_{i=1}^m \int_{\Omega^e} [\mathbf{G}_i^e]^T \cdot [\mathbf{N}^0] \cdot [\mathbf{G}_i^e] d\Omega^e \\
 [\mathbf{G}_i^e] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial \Psi_i^e / \partial x \\ 0 & 0 & \partial \Psi_i^e / \partial y \end{bmatrix}, \\
 [\mathbf{N}^0] &= \begin{bmatrix} N_{xx}^0 & N_{xy}^0 \\ N_{xy}^0 & N_{yy}^0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Вектори унутрашњих и спољашњих сила коначног елемента  $\Omega^e$  гласе:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{R}^e = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega^e} [\tilde{\mathbf{H}}_i^e]^T \cdot \{ \tilde{\mathbf{N}} \} d^0 \Omega^e
 \tag{24}$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{R}^e = \sum_{i=1}^m \left( \int_{\Omega^e} [\Psi_i^e]^T \cdot \{ {}^1 \mathbf{f} \} d^0 \Omega^e + \int_{\Gamma^e} [\Psi_i^e]^T \cdot \{ {}^1 \mathbf{t} \} d^0 \Gamma^e \right)
 \tag{25}$$

где је вектор Kirchhoff-ових резултаната напона:

$$\{ \tilde{\mathbf{N}} \} = \begin{Bmatrix} \{ \mathbf{N}^{11} \} \\ \{ \tilde{\mathbf{N}}^{12} \} \end{Bmatrix}
 \tag{26}$$

односно субвектори:

$$\begin{aligned}
 \{ \mathbf{N}^{11} \} &= \{ N_{xx} \ N_{yy} \ N_{xy} \ N_{xz} \ N_{yz} \}^T = \\
 &[\mathbf{A}] \cdot (\{ \varepsilon^0 \} + \{ \varepsilon^m \}) + \sum_{l=1}^{N+1} [\mathbf{B}^l] \cdot \{ \varepsilon^l \}
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 \{ \mathbf{N}^{12} \} &= \{ N_{xx}^l \ N_{yy}^l \ N_{xy}^l \ N_{xz}^l \ N_{yz}^l \}^T \\
 &= [\mathbf{B}^l] \cdot (\{ \varepsilon^0 \} + \{ \varepsilon^m \}) + \sum_{j=1}^{N+1} [\mathbf{D}^j] \cdot \{ \varepsilon^j \}
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Конститутивне матрице  $[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{B}^l]$ ,  $[\mathbf{D}^j]$  дате су у [23], а матрица:

$$[\tilde{\mathbf{H}}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{H}] + [\mathbf{H}_{NL}] & 0 \\ 0 & [\bar{\mathbf{H}}] \end{bmatrix}
 \tag{29}$$

Матрица крутости (20) и геометријска матрица крутости (22) заједно означавају тангентну матрицу крутости,  $\{ \tilde{\mathbf{d}} \}^e$  је инкрементални вектор померања, а разлика између вектора у изразима (24), (25) са десне стране једначине (19) заједно означава инкременталну промену вектора оптерећења у току деформације. Инкременталне једначине коначног елемента (19), након повезивања у мрежу и наношења граничних услова, даље су решаване применом Newton Raphson-ове нумеричке методе [24, 25].

### 3.4. Поље напона

Са познатим пољем померања, поље напона се може срачунати из конститутивних једначина заједно са изразима за деформације (2), као:

$$\begin{aligned}
 \{ \sigma_b \}_{U}^{(k)e} &= [\mathbf{Q}_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m ( [\mathbf{H}_{b_j}] + [\mathbf{H}_{b_j}^{NL}] ) \{ \mathbf{d}_j \}^e \\
 &+ [\mathbf{Q}_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m [ \bar{\mathbf{H}}_{b_j} ] \{ \mathbf{d}_j \}^e
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \{\sigma_b\}_O^{(k)e} &= [\mathbf{Q}_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m \left( [\mathbf{H}_{b_j}] + [\mathbf{H}_{b_j}^{NL}] \right) \{\mathbf{d}_j\}^e \\ &+ [\mathbf{Q}_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\bar{\mathbf{H}}_{b_j}] \{\mathbf{d}_j^{I+1}\}^e \\ \{\sigma_s\}_{const}^{(k)e} &= [\mathbf{Q}_s]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\mathbf{H}_{s_j}] \{\mathbf{d}_j\}^e \\ &+ [\mathbf{Q}_s]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\bar{\mathbf{H}}_{s_j}] \left( \{\mathbf{d}_j^{I+1}\}^e - \{\mathbf{d}_j^I\}^e \right) / h_k \end{aligned} \quad (30)$$

где су  $\{\sigma_b\}_U^{(k)e}$  и  $\{\sigma_b\}_O^{(k)e}$  напони у равни  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})$  у горњој и доњој тачки  $k$ -тог слоја коначног елемента, а  $\{\sigma_s\}_{const}^{(k)e}$  је попречни смичући напони  $(\tau_{xz}, \tau_{yz})$   $k$ -тог слоја коначног елемента.

#### 4. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ

**Пример 4.1.** Нелинеарна природа одговора ламинатне плоче може се уочити посматрањем промене Young-овог модула еластичности  $E_x$ ,  $E_y$  и Poisson-овог коефицијента  $\nu_{xy}$  са променом оријентације влакана у два симетрична ламината. Наиме, реч је о симетричним ламинатама са полимерном (Т300/ 5206) и металном матрицом (SCS-6/Ti-15-3), и то са влакнима у једном смеру  $[\theta]_s$  и angle-ply ламинати  $[\pm\theta]_s$ . Са Сликe 3.1 уочава се да с обзиром на веће вредности инжењерских константи ламината са металном матрицом, вредности модула и Poisson-овог коефицијента ће бити веће, у односу на оне са полимерном матрицом. Када је реч о промени модула  $E_x$  са променом угла  $\theta$ , његове вредности су максималне за угао  $\theta=0^\circ$ , монотонно опадају до минималне вредности  $\theta \approx 50^\circ$ , да би за  $\theta=90^\circ$  постале једнаке  $E_y$ . Крива зависности попречног модула  $E_y$  са углом  $\theta$  идентична је оној за аксијални модул, само је фазно померена за  $90^\circ$ , Слика 3.2. На Слици 3.3 приказана је промена Poisson-овог коефицијента  $\nu_{xy}$  са променом угла  $\theta$ . Уочава се да Poisson-ов коефицијент за ламинат са полимерном матрицом (Т300/ 5206) расте од нулте вредности за  $\theta=0^\circ$  до максималне вредности за  $\theta \approx 22^\circ$ , односно за  $\theta \approx 38^\circ$  за ламинат са металном матрицом. Минималне вредности Poisson-овог коефицијента добијају се за  $\theta=90^\circ$  у оба случаја ламината. Коначно, уочава се да је опсег вредности у којима варира Poisson-ов коефицијент већи за ламинат са полимерном, у односу на ламинат са металном матрицом, што је и за очекивати с обзиром на већи ниво ортотропије.

У наставку ће за претходно формулисан геометријски нелинеаран коначни елемент плоче заснован на тоталној Lagrang-овој формулацији, бити приказани резултати оригиналног програма по методи коначних елемената написаног у MATLAB програмском језику. Матрица крутости и геометријска матрица крутости коначног елемента су срачунате применом 3x3 Gauss Legendre-ове интеграције за 2Д квадратни Lagrange-ов коначни елемент са девет чворова. Нелинеарне алгебарске једначине равнотеже су решаване применом Newton Raphson-ове итеративне нумеричке методе. Разматрани су следећи гранични услови на ивицама плоче [26]:

Слободно ослањање покретно (SS):

$$\begin{cases} x=0, a: & v_0 = w_0 = V^I = N_{xx} = N_{xx}^I = 0 \\ y=0, b: & u_0 = w_0 = U^I = N_{yy} = N_{yy}^I = 0 \end{cases} \quad I = 1, N+1$$

Слободно ослањање непокретно (НН):

$$\begin{cases} x=0, a: & u_0 = v_0 = w_0 = V^I = N_{xx}^I = 0 \\ y=0, b: & u_0 = v_0 = w_0 = U^I = N_{yy}^I = 0 \end{cases} \quad I = 1, N+1$$

Укљештење (CC):

$$\begin{cases} x=0, a: & u_0 = v_0 = w_0 = U^I = V^I = 0 \\ y=0, b: & u_0 = v_0 = w_0 = U^I = V^I = 0 \end{cases} \quad I = 1, N+1$$

Услови ослањања у оси симетрије за четвртину плоче:

За cross ply ламинате:

SS1:

$$\begin{cases} x=a/2: & u_0 = U^I = N_{yy} = N_{yy}^I = 0 \\ y=b/2: & v_0 = V^I = N_{xx} = N_{xx}^I = 0 \end{cases} \quad I = 1, N+1$$

За angle ply ламинате:

SS2:

$$\begin{cases} x=a/2: & v_0 = U^I = N_{xx} = N_{yy}^I = 0 \\ y=b/2: & u_0 = V^I = N_{yy} = N_{xx}^I = 0 \end{cases} \quad I = 1, N+1$$

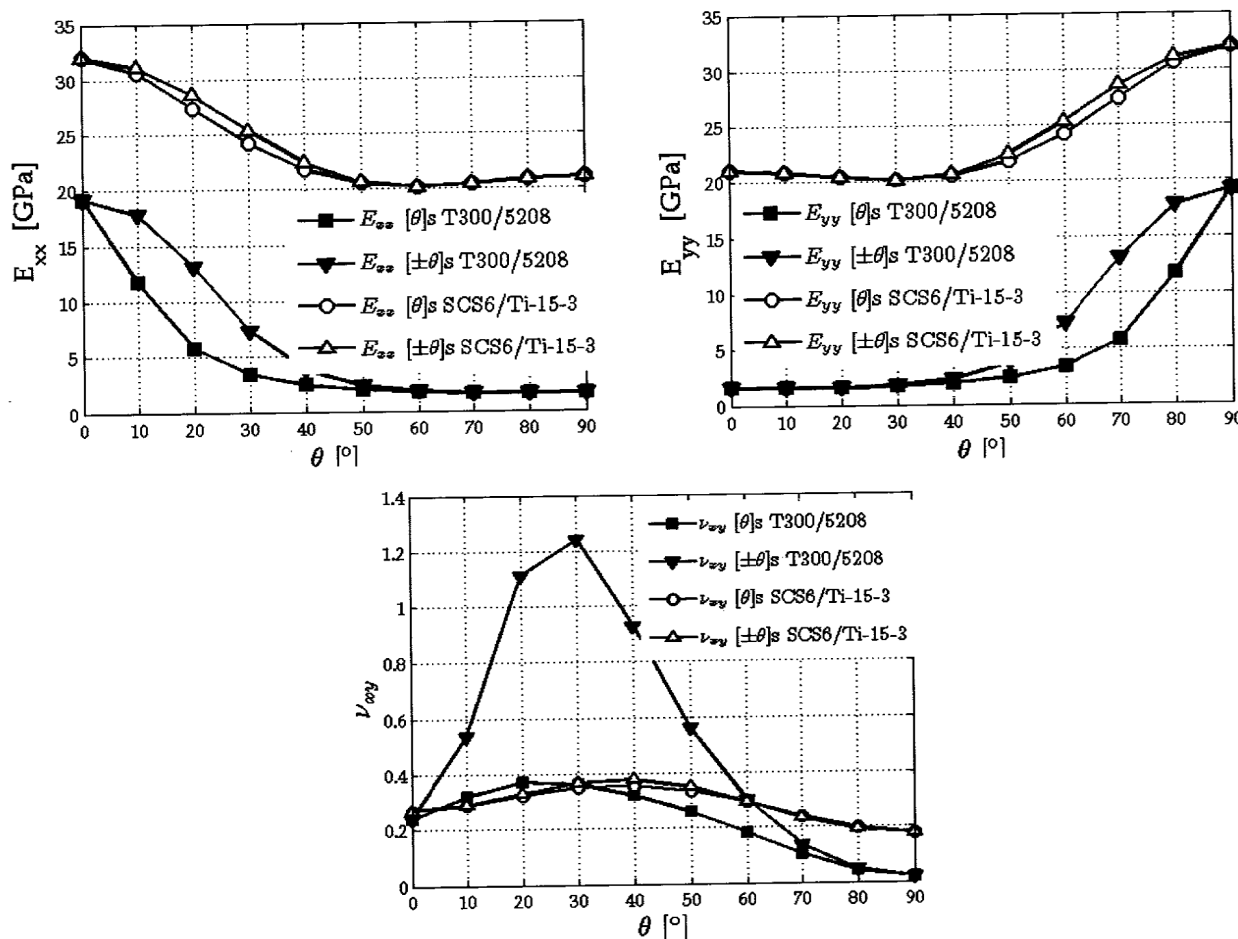
Тачност приказаног модела плоче биће потврђена са расположивим решењима из литературе.

**Пример 4.2.** Анализирано је нелинеарно савијање слободно ослоњене (SS1) изотропне плоче димензија  $a = b = 25.4 \text{ cm}$  и  $h = 2.54 \text{ cm}$  сачињене од материјала:

$$E = 53.78 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3$$

изложене једнакоподељеном попречном оптерећењу. Оптерећење је нането инкрементално:

$$\{\Delta P\} = \left\{ \begin{matrix} 6.25, 6.25, 12.5, 25.0, 25.0, 25.0, \\ 25.0, 25.0, 25.0, 25.0 \end{matrix} \right\} \cdot \bar{P}$$



Слика 3. Промена 1) Аксијалног модула, 2) попречног модула и 3) Poisson-овог коефицијента са оријентацијом угла влакана  $\theta$  за полимерну T300/5208 и металну матрицу SCS6-Ti-15-3

користећи параметар оптерећења  $\bar{P} = q_0 \cdot a^4 / (E_2 h^4)$ . Померања и напони су дати у следећем бездимензионалном облику:

$$\bar{w} = w_0 \cdot E_2 h^3 / (q_0 \cdot a^4), \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \cdot (a/h)^2 \cdot 1/E$$

Резултати мреже од 3x3 коначна елемента четвртине плоче предложеног слојевитог модела континуума упоређени су са резултатима мреже од 4x4 коначна елемента из литературе FSDT [7]. Уочава се блиско слагање предложеног модела са оним из литературе, како за поље померања, Слика 4, тако и за поље напона, Слика 5. Анализа је потврдила да у зависности од нивоа оптерећења, плоча пролази од стања чистог савијања при малим померањима  $w \leq 0.3 h$  па до фазе спрезања савијања и мембранског напрезања, при великим померањима. Наиме, за  $w \approx 0.5 h$  мембранске силе затезања дају плочи додатну носивост у супротстављању спољашњем оптерећењу, па су померања добијена применом нелинеарног модела мања у односу на линеаран модел плоче. Оваква појава се често назива очвршћавање плоче или релаксација напона.

Коначно, активирање мембранских сила затезања у композитним плочама је од значаја због њихових високих вредности затезних чврстоћа.

**Пример 4.3.** Анализирано је нелинеарно савијање слободно ослоњене (SS1) ортотропне плоче димензија  $a/h=10$  и  $a/h=100$  сачињене од материјала:

$$E_1 / E_2 = 25, G_{12} / E_2 = 0.5, G_{13} / E_2 = 0.5, G_{23} / E_2 = 0.2, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

изложене једнакоподељеном попречном оптерећењу. Оптерећење је нането инкрементално:

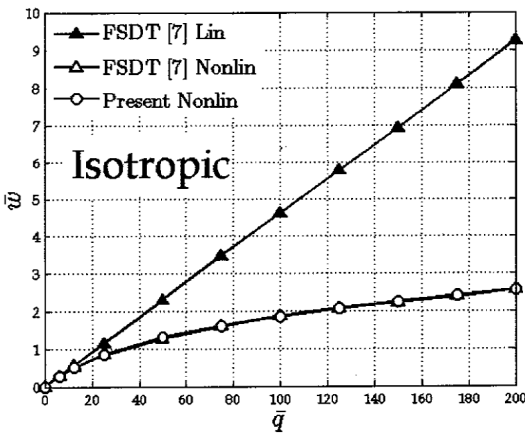
$$\{\Delta P\} = \left\{ \begin{matrix} 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, \\ 90, 100, 110, 120, 130, 140 \end{matrix} \right\} \cdot \bar{P}$$

Угиби и напони су дати у следећем бездимензионалном облику:

$$\bar{w} = w_0 \cdot E_2 h^3 / (q_0 \cdot a^4)$$

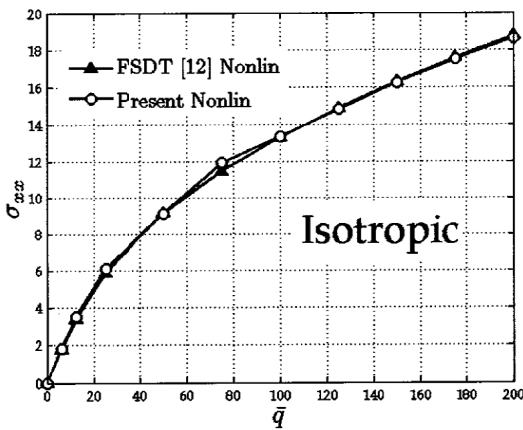
$$(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}) = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{E_2}$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{1}{E_2}$$



Слика 4. Угиб у функцији параметра оптерећења изотропне плоче

Резултати предложеног модела плоче упоређени су са решењима FSDT [7] из литературе и остварено је изузетно слагање, Табела 1, Слика 6.



Слика 5. Напон у функцији параметра оптерећења изотропне плоче

**Пример 4.4.** Анализирано је нелинеарно савијање слободно ослоњене (SS1) cross-ply 0/90 и angle-ply 45/−45 плоча димензија  $a=b=1000\text{ mm}$  и  $h=2\text{ mm}$  сачињених од материјала:

$$E_1 = 250\text{ GPa}, \quad E_2 = 20\text{ GPa},$$

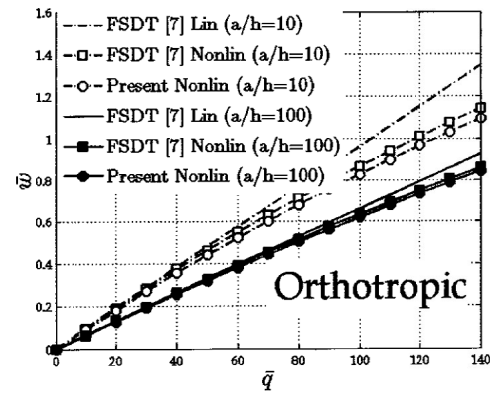
$$G_{12} = G_{13} = 10\text{ GPa}, \quad G_{23} = 4\text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

изложене једнакоподељеном попречном оптерећењу  $q = \lambda \cdot q_0$ ,  $q_0 = 100\text{ N/m}^2$ . Оптерећење  $q_0 = q(x, y)$  је нането инкрементално:

$$\{\Delta q\} = \begin{cases} 0.10, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10, 0.25, \\ 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25 \end{cases}$$

Посматрана је једна четвртина плоче и мрежа од 2x2 коначна елемента у равни. Решења предложеног нелинеарног модела, упоређена са решењима теорије плоче првог реда FSDT [8] указују да је остварено добро слагање, Слика 7.



Слика 6. Угиб у функцији параметра оптерећења изотропне плоче

**Пример 4.5.** Анализирано је нелинеарно савијање cross-ply 0/90 и angle-ply 45/−45 плоча димензија  $a/b=1$  и  $a/h=0.1$ , са три различита услова ослањања (SS, HH and CC) сачињених од материјала:

$$E_1 / E_2 = 40, G_{12} / E_2 = 0.6, G_{13} / E_2 = 0.6,$$

$$G_{23} / E_2 = 0.5, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

изложене једнакоподељеном попречном оптерећењу  $\bar{q} = q(x, y) \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^4 \cdot \frac{1}{E_2}$ . Оптерећење је нането инкрементално:

$$\{\Delta \bar{q}\} = \begin{cases} -100, -20, -20, -20, -20, \\ 40, 20, 20, 20, 20 \end{cases}$$

Померања и напони су дати у следећем бездимензионалном облику:

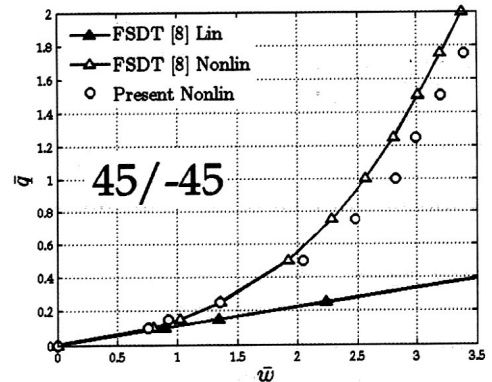
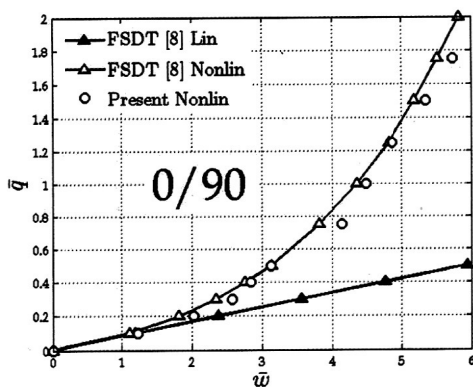
$$\bar{w}_{LIN} = w \times \frac{h^3 E_2}{a^4 q} \cdot 100$$

$$(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}) = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}) \times \left(\frac{a}{h}\right)^2 \cdot \frac{1}{E_2}$$

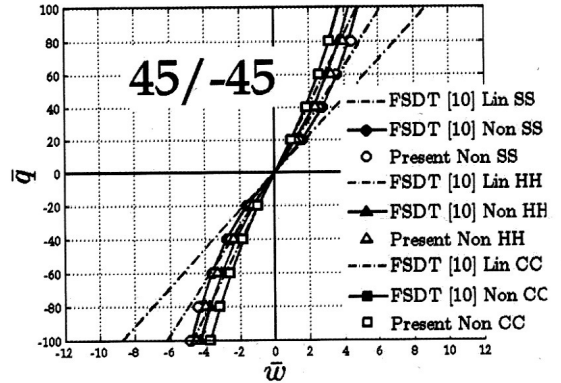
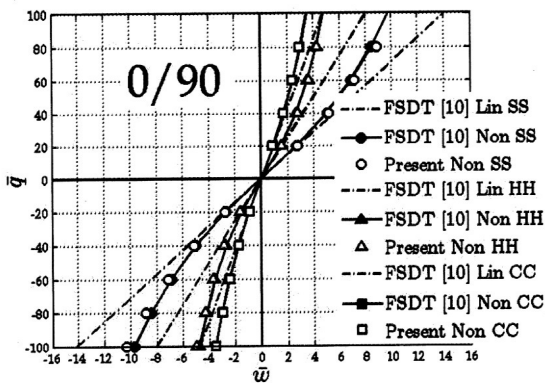
Резултати мреже од 2x2 коначна елемента четвртине плоче предложеног слојевитог модела континуума упоређени су са решењима мреже 8x8 коначних елемената теорије плоче првог реда FSDT [26], за три случаја граничних услова. Показано је да предложени модел има добро слагање резултата са FSDT [26] моделом из литературе, уз бржу конвергенцију решења, Слика 8. Такође, разлике између линеарног и нелинеарног решења су веће за флексибилне плоче, односно плоче са слободно ослоњеним (SS) ивицама, у поређењу са плочама са непокретним (HH) ослонцима и укљештеним (CC) ивицама. Анализа је потврдила став из литературе, да се при промени смера оптерећења/растерећења добија несиметрично поље напона, услед непоклапања неутралне и средње равни у ламинатним композитним плочама, Слика 9.

Табела 1. Напони у функцији параметра оптерећења слободно ослоњене ортогопне плоче

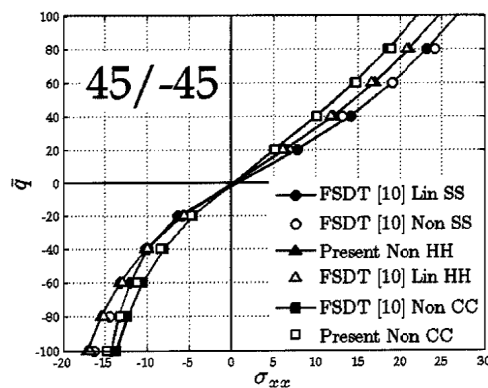
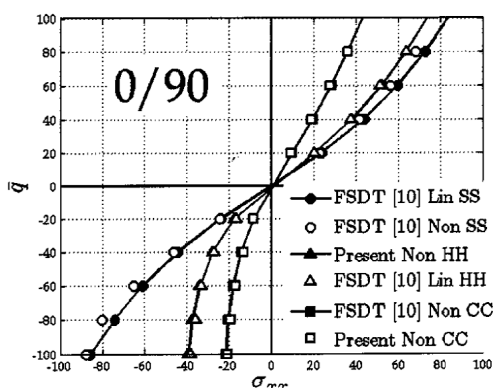
$\bar{P}$	Нелинеарна решења							
	$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{yy}$		$\bar{\sigma}_{xy}$		$\bar{\tau}_{xz}$	
	FSDT <sup>[7]</sup>	Present	FSDT <sup>[7]</sup>	Present	FSDT <sup>[7]</sup>	Present	FSDT <sup>[7]</sup>	Present
10	7.453	7.7843	0.3771	0.3581	0.4800	0.4755	0.0540	0.05152
20	14.852	15.4336	0.7827	0.7466	0.9845	1.0902	0.1077	0.1028
30	22.146	22.8972	1.2117	1.1605	1.5113	1.4801	0.1608	0.1534
40	29.291	30.1395	1.6590	1.5948	2.0583	2.0859	0.2130	0.2033
50	36.253	37.1112	2.1198	2.0427	2.6229	2.6925	0.2641	0.2523
60	43.010	43.8498	2.5900	2.5031	3.2026	3.0450	0.3139	0.3001
70	49.546	50.3274	3.0660	2.9715	3.7952	3.9478	0.3624	0.3467
80	55.856	56.5466	3.5450	3.4449	4.3985	4.4896	0.4096	0.3920
90	61.940	62.5144	4.0248	3.9213	5.0106	5.0883	0.4554	0.4361
100	67.802	68.2402	4.5037	4.3989	5.6300	5.7141	0.4998	0.4789
110	73.450	73.7364	4.9804	4.8764	6.2551	6.3526	0.5430	0.5204
120	78.893	79.0148	5.4540	5.3529	6.8849	6.9965	0.5849	0.5608
130	84.141	84.0879	5.9239	5.8278	7.5184	7.6427	0.6256	0.6000
140	89.205	88.9686	6.3894	6.3003	8.1548	8.2913	0.6653	0.63803



Слика 7. Угиб у функцији параметра оптерећења ламинатне плоче



Слика 8. Угиб у функцији параметра оптерећења ламинатне плоче



Слика 9. Напон у функцији параметра оптерећења ламинатне плоче

**Пример 4.6.** Анализирано је нелинеарно савијање слободно ослоњене (SS1) ламинатне плоче (0/45/-45/90)<sub>s</sub> димензија  $a/b=1$  и  $a/h=0.1$  сачињене од материјала:

$$E_1 / E_2 = 40, G_{12} / E_2 = 0.6, G_{13} / E_2 = 0.6, G_{23} / E_2 = 0.5, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

изложене једнакоподељеном попречном оптерећењу. Оптерећење је нането инкрементално:

$$\{\Delta q\} = \{50, 50, 50, 50, 50\} \cdot \bar{P}$$

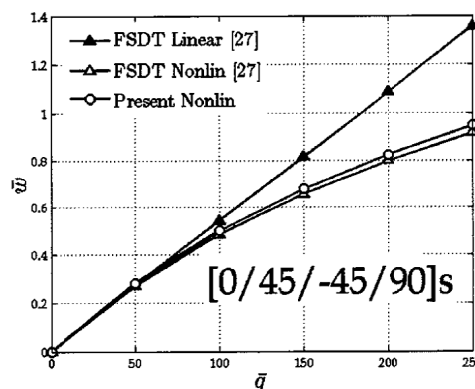
користећи параметар оптерећења:

$$\bar{P} = q_0 \cdot a^4 / (E_2 h^4)$$

Резултати мреже од 2x2 коначна елемента четвртине плоче предложеног слојевитог модела континуума упоређени су са решењима мреже 8x8 коначних елемената теорије плоча вишег реда HSDT [28]. Резултати линеарног и нелинеарног бездимензионалног угиба  $w/h$  у функцији параметра оптерећења приказани су на Слици 10. Показано је да се решења предложеног коначног елемента континуума блиско слажу са решењима коначног елемента из литературе, уз бржу конвергенцију решења.

### 5. ЗАКЉУЧАК

У раду је по први пут у литератури формулисан коначни елемент континуума заснован на геометријски нелинеарној (von Karman-овој) слојевитој теорији плоча [1] користећи тоталну Lagrange-ову формулацију. Тотална Lagrange-ова формулација омогућила је да се добије тангентна матрица крутости коначног елемента, која је рачунски погодна за директну примену у Newton Raphson-овој методи за решавање нелинеарног система инкременталних једначина равнотеже. Тачност формулисаног нумеричког модела потврђена је срачунавањем геометријски нелинеарног одговора плоча различитих меха-



Слика 10. Угиб у функцији параметра оптерећења ламинатне плоче

ничких карактеристика, односно изотропних, ортотропних и ламинатних (cross ply и angle ply), плоча различитих дебљина, различитих граничних услова и различитог режима оптерећења (растерећење/оптерећење). Без обзира на своју математички сложену формулацију, предложени модел је показао бржу конвергенцију решења у односу на моделе класичних теорија плоча CLPT, FDST и HSDT, уз значајно мањи нумерички обим у односу на 3Д модел теорије еластичности. Штавише, предложени модел нема проблеме *shear locking*-а, у односу на класичне 2Д-моделе плоча, или проблеме примене веома танких плочастих елемената, који се могу јавити применом 3Д коначних елемената. Анализа је показала да су одступања нелинеарног од линеарног решења већа за дебеле плоче, у поређењу са танким плочама. Такође, показало се да већ при малим нивоима оптерећења настају значајне разлике између линеарног и геометријски нелинеарног одговора плоче, као и да оне поред дебљине плоче, врсте материјала, шеме ламинације, зависе и од граничних услова. Наиме, анализа је показала да су разлике између нелинеарног и линеарног одговора веће за флексибилније плоче, какве су плоче са слободно ослоњеним (SS) ивицама, у поређењу са непокретним (НН) и укљештеним (CC) ивицама. Показало се и да смер оптерећења/растерећења нема утицаја на

поље померања, али има на поље напона. Коначно, коначни елемент континуума добијен применом тоталне Lagrange-ове формулације, полазећи од 3Д једначина механике континуума и уводећи одређене кинематичке претпоставке, дао је општи поступак којим је убудуће могуће укључити различите врсте и нивое нелинеарности.

## ЗАХВАЛНИЦА

Аутор се захваљује Министарству просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије на финансијској подршци у оквиру пројекта ТР 36048.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] J.N. Reddy, E.J. Barbero, J.L. Teply, A Plate Bending Element Based on a Generalized Laminated Plate Theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 1989, 2275-2292.
- [2] H. Altenbach, J. Altenbach, W. Kissing, *Mechanics of Composite Structural Elements*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [3] C. Polat, Z. Ulucan, Geometrically non-linear analysis of axisymmetric plates and shells. *International Journal of Science and Technology*, 2 (1), 2007, 33-40.
- [4] Y.X. Zhang, K.S. Kim, Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates by two new displacement-based quadrilateral plate elements. *Composite Structures*, 72, 2006, 301-310.
- [5] J.N. Reddy, *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge University Press, 2008.
- [6] L.E. Malvern, *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice Hall, 1969.
- [7] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates-theory and analysis*. CRC press, 2004.
- [8] E.J. Barbero, J.N. Reddy, Nonlinear analysis of composite laminates using a generalized laminated plate theory. *AIAA Journal*, 28 (11), 1990, 1987-1994.
- [9] R.A. Arciniega, J.N. Reddy, Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 (4-6), 2007, 1048-1073.
- [10] S.J. Lee, J.N. Reddy, F. Rostam-Abadi, Nonlinear finite element analysis of laminated composite shells with actuating layers. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43 (1), 2006, 1-21.
- [11] A. Laulusa, J.N. Reddy, On shear and extensional locking in nonlinear composite beams. *Engineering Structures*, 26 (2), 2004, 151-170.
- [12] N.S. Putcha, J.N. Reddy, A refined mixed shear flexible finite element for the nonlinear analysis of laminated plates. *Computers & Structures*, 22 (4), 1986, 529-538.
- [13] G.N. Praveen, J.N. Reddy, Nonlinear transient thermo elastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *Solids and Structures*, 35 (33), 1998, 4457-4476.
- [14] T. Kuppusamy, J.N. Reddy, A three-dimensional nonlinear analysis of cross-ply rectangular composite plates. *Computers & Structures*, 18 (2), 1984, 263-272.
- [15] J.N. Reddy, C.L. Haung, Nonlinear axisymmetric bending of annular plates with varying thickness. *International Journal of Solids and Structures*, 17 (8), 1981, 811-825.
- [16] J.N. Reddy, W.C. Chao, Non-linear bending of thick rectangular laminated composite plates. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 16 (3/4), 1981, 291-301.
- [17] J.N. Reddy, A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 20 (9-10), 1984, 881-896.
- [18] M. Četković, Thermal Buckling of Laminated Plates Using Layerwise Displacement Model. *Composite Structures*, 142, 2016, 238-253.
- [19] M. Četković, Thermo-Mechanical Bending of Laminated Composite and Sandwich Plates Using Layerwise Displacement Model. *Composite Structures*, 125, 2015, 388-399.
- [20] M. Četković, Đ. Vuksanović, Large Deflection Analysis of Laminated Composite Plates using Layerwise Displacement Model. *Structural Engineering and Mechanics*. 40 (2), 2011, 257-277.
- [21] M. Četković, Nonlinear Behavior of Laminated Composite Plates. In: PhD Thesis (in serbian), Faculty of Civil Engineering in Belgrade. Serbia, 2011.
- [22] M. Četković, Đ. Vuksanović, Bending, Free Vibrations and Buckling of Laminated Composite and Sandwich Plates Using a Layerwise Displacement Model. *Composite Structures*, 88 (2), 2009, 219-227.
- [23] M. Četković, Application of finite element method on generalized laminated plate theory. In: Master Thesis, in serbian, Faculty of Civil Engineering in Belgrade, Serbia, 2005.
- [24] K.J. Bathe, *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice Hall, 1996.
- [25] T.J.R. Hughes, *The finite element method*. Prentice Hall, 1987.
- [26] V.S. Thankam, G. Singh, G.V. Rao, A.K. Rath, Shear flexible element based on coupled displacement field for large deflection analysis of laminated plates. *Computers and Structures*, 81, 2003, 309-320.
- [27] J. Argyris, L. Tanek, Linear and geometrically nonlinear bending of isotropic and multilayered composite plates by the natural mode method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 113, 1994, 207-251.