

GRAĐEVINSKI FAKULTET UNIVERZITETA U BEOGRADU  
KATEDRA ZA TEHNIČKU MEHANIKU I TEORIJU KONSTRUKCIJA

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING OF THE UNIVERSITY OF BELGRADE  
CHAIR FOR TECHNICAL MECHANICS AND THEORY OF STRUCTURES



**TEORIJA KONSTRUKCIJA**  
**MONOGRAFIJA**  
**POSVEĆENA USPOMENI NA POKOJNOG AKADEMIKA**  
**PROF. DR MILANA ĐURIĆA**

**THEORY OF STRUCTURES**  
**MONOGRAPH**  
**DEDICATED TO THE MEMORY OF LATE ACADEMICIAN**  
**PROFESSOR DR MILAN DJURIC**

**UREDNIK / EDITOR**  
**Đorđe Vuksanović**

**Beograd**  
**2008**

Izdavač/Publisher  
GRAĐEVINSKI FAKULTET UNIVERZITETA U BEOGRADU  
Katedra za Tehničku mehaniku i teoriju konstrukcija

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING OF THE UNIVERSITY OF BELGRADE  
Chair for Technical Mechanics and Theory of Structures

Za izdavača/For the Publisher

Dorđe Vuksanović  
Dekan Građevinskog fakulteta/Dean of the Faculty of Civil Engineering

Glavni i odgovorni urednik/ Editor in chief  
Dorđe Vuksanović

Redakcioni odbor/ Editorial Board

Branislav Ćorić  
Dorđe Vuksanović  
Branislav Pujević  
Mira Petronijević

Tehnička priprema/Technical preparation  
Stanko Ćorić

Štampa/Printing  
Dedrapalst, Beograd

Tiraž 500 primeraka  
Number of copies 500

ISBN 978-86-7518-074-6

**Dorđe VUKSANOVIĆ, Marina ČETKOVIĆ**

## KONAČNI ELEMENT VIŠESLOJNE LAMINATNE PLOČE

### *MULTILAYER PLATE FINITE ELEMENT*

**Dr Dorđe Vuksanović, dipl. građ. inž., redovni profesor Građevinskog Fakulteta u Beogradu.**

Rođen je 1951. godine. Diplomirao je 1974., magistrirao je 1980. i doktorirao je 1988. godine na Građevinskom fakultetu u Beogradu. Redovni profesor je na grupi predmeta Teorije konstrukcija. Od 1991. do 1996. godine bio je prodekan za nastavu, a od 2004. godine je dekan Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu. Dopisni član Akademije inženjerskih nauka Srbije je od 2004. godine.

**Mr Marina Četković, dipl. građ. inž., asistent Građevinskog Fakulteta u Beogradu.**

Rođena je 1974. godine. Diplomirala je 2000., i magistrirala je 2005. godine na Građevinskom fakultetu u Beogradu. Asistent je na grupi predmeta Teorije konstrukcija.

#### *Rezime*

U uslovima proizvodnje i eksploatacije kompozitni materijali su izloženi različitim oblicima oštećenja do kojih dolazi na lokalnom nivou, odnosno na nivou sloja. Kako su 2D modeli ploča u stanju da pruže samo odgovor na globalno ponašanje kompozitnih materijala, formulisana je nova grupa teorija zasnovana na 3D kinematici deformacije poprečnog preseka. Sa željom da smanji veliki računski obim posla, koji to zahteva uobičajeni 3D model teorije elastičnosti, ali i da u obzir uzmu specifičnosti anizotropne građe same ploče, Reddy je formulisao Opštu laminatnu teoriju ploča. U okviru pomenute teorije, polje pomeranja se pretpostavlja za svaki od slojeva po debljini, u obliku koji dopušta nezavisnu interpolaciju u ravni i po debljini ploče. Ovo se čini naročito značajnim pri formulisanoj konačnog elementa, koji će biti i prikazan u ovom radu. Naime, 2D mreža u ravni i 1D mreža po debljini mogu se nezavisno proglašavati bez potrebe za definisanjem 3D mreže konačnih elemenata. Osnovne jednačine konačnog elementa formulisane su po metodi deformacije, za slučaj statički opterećene ploče proizvoljne šeme laminacije. Dobijena rešenja pokazala su izuzetno slaganje sa tačnim rešenjem opšte laminatne teorije ploča.

#### *Summary*

Under the manufacturing and service conditions, laminated composites are exposed to various damage modes, on the local or ply level. As 2D plate models are capable only to determine global behaviour of laminated composites, new family of theories based on 3D kinematics is formulated. Wishing to develop model that will be computationally more efficient than conventional 3D elasticity model, and to include specific anisotropic plate constitution, Reddy formulated Generalized Laminated Plate Theory (GLPT). Within the mentioned theory, displacement field is defined at ply level, in the form which allow independent in plane and through the thickness interpolation. This seems to be the most significant in finite element formulation, to be presented in this paper. Namely, the in-plane 2D mesh and the transverse 1D mesh can be refined independently, without having to reconstruct a 3D finite element mesh. Basic element equations are derived using displacement-based finite element formulation, in the case of statically loaded generally laminated plate. The obtained results have shown excellent agreement with closed form solution of GLPT.

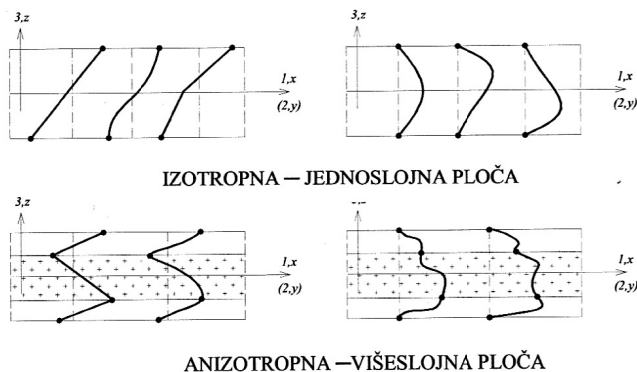
## 1. Uvod

Kompozitni materijali su zbog svojih izuzetnih fizičko-mehaničkih osobina našli široku

primenu u brodogradnji, avio i svemirskoj industriji, industriji sportske opreme. Kombinacijom dva ili više različitih materijala na makroskopskom nivou dobijen je čitav niza novih

materijala više ili manje izraženog anizotropnog ponašanja. Jednu široko primenjivanu grupu materijala čine i lamelirani vlaknasti kompoziti, pa će oni i biti predmet dalje analize.

Lamelirani vlaknasti kompoziti nastaju međusobnim spajanjem slojeva(lamina), čime se dobija ploča(laminat) željene debljine i karakteristika. Svaka od lamina sačinjena je od vlakana orijentisanih u određenom pravcu. Izborom orijentacije vlakana u susjednim laminama, laminat postaje sposoban da primi opterećenje proizvoljnog pravca, kakvo se najčešće i javlja u konstrukciji. Dakle, građu lameliranih kompozita odlikovaće promena fizičko mehaničkih karakteristika ne samo unutar lamine, već i po debljini laminata. Sa promenom materijalnih karakteristika slojeva, polje pomeranja  $(u_1, u_2, u_3)$  će po debljini laminata doživljavati naglu promenu nagiba, uz veoma izražene smičuće napone  $(\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_{zz})$ , kako je prikazano na slici 1. U zavisnosti od načina na koji se opisuju dva pomenuta polja pomeranja i napona, formulisani su i odgovarajući matematički modeli.



Slika 1. Polje pomeranja i smičućih napona po debljini ploče

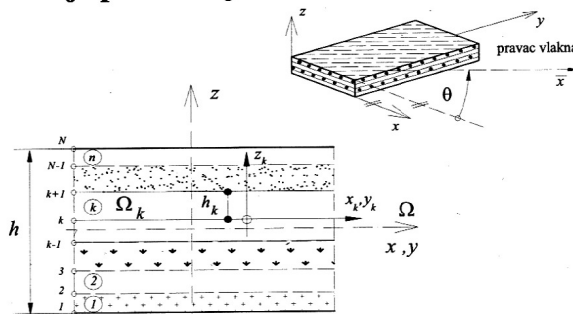
Danas su poznata dva modela za analizu ponašanja laminatnih ploča i to: modeli zasnovani na jednom ekvivalentnom sloju (Equivalent Single Layer Model) i slojeviti modeli ploča (Layer Wise Model). ESLM ploču posmatraju kao 2D telo, svodeći tako višeslojnu ploču na ploču sastavljenu iz jednog ekvivalentnog sloja. Na ovaj način deformacija ploče opisana je preko deformacije srednje ravni, dok je polje pomeranja po čitavoj debljini ploče opisano funkcijom određenog stepena. Stepem razvoja funkcije pomeranja po debljini posredno utiče i na tačnost procene smičućih napona u laminatu. S druge strane, LWM ploču posmatraju kao 3D telo time što za svaki od slojeva po debljini ploče definišu polje pomeranja. Na ovaj u obzir se uzima promena materijalnih karakteristika po debljini i dobija mnogo realnija slika krivljenja poprečnog preseka ploče. Takođe, LWM su sposobni da pruže i

realne vrednosti smičućih napona, tj onih koji će zadovoljiti 3D uslove ravnoteže laminata.

Slojeviti model ploče, prikazan u ovom radu, zasnovan je na opštoj laminatnoj teoriji ploča, koju je postavio Reddy. Osnovna odlika ovoga modela jeste da je polje pomeranja u ravni ploče  $(u_1, u_2)$  razvijeno po debljini svakog sloja primenom familije 1D Lagrange-ovih interpolacionih funkcija, dok je pomeranje  $u_3$  konstantno po debljini ploče. Ovakva razdvojena interpolacija polja pomeranja u ravni i po debljini čini pomenuti model efikasnijim i isto toliko tačnim u poređenju sa uobičajenim 3D modelom elastične teorije. Kako su polje pomeranja, iz uslova kompatibilnosti, i polje smičućih napona, iz 3D uslova ravnoteže, kontinualne funkcije, to one treba da zadovolje samo  $C^0$  kontinuitet po debljini laminata.

Rešenje pomenute teorije u zatvorenom obliku postoji samo za jednostavne oblike ploča, uslove oslanjanja, kao i šeme laminacije, pa će u ovom radu, u cilju opštosti, biti formulisani konačni element ploče. Polazeći od pretpostavljenog polja pomeranja, linearnih veza deformacija i pomeranja, i konstitutivnih jednačina laminata, primenom principa o minimumu potencijalne energije biće formulisani konačni element ploče sa m čvorova i n slojeva. Cilj je da se utvrdi pouzdanost predloženog konačnog elementa, za slučaj statički opterećene ploče.

## 2. Polje pomeranja



Slika 2. Višeslojna kompozitna ploča

Analizirana je laminatna ploča sastavljena od n ortotropnih slojeva. Broj k označava redni broj sloja, počevši od donje površine ploče. Globalni koordinatni sistem  $(x, y, z)$  je usvojen u srednjoj ravni, dok je lokalni koordinatni sistem  $(x_k, y_k, z_k)$  usvojen na donjoj površini svakog od slojeva. Debljina ploče je h, dok je  $h_k$  debljina sloja k. Komponente pomeranja  $(u_1, u_2, u_3)$  u tački  $(x, y, z)$  pretpostavljamo u obliku:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + U(x, y, z) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + V(x, y, z) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

gde su  $(u, v, w)$  komponente pomeranja tačke  $(x, y, 0)$  u srednjoj ravni ploče, a  $U, V$  su funkcije definisane kao:

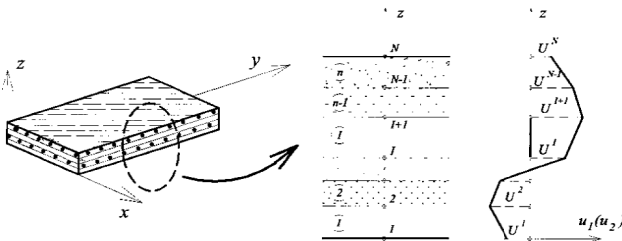
$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \sum_{I=1}^N U^I(x, y) \cdot \Phi^I(z) \\ V(x, y, z) &= \sum_{I=1}^N V^I(x, y) \cdot \Phi^I(z) \end{aligned} \quad (2)$$

gde su  $U^I, V^I$  komponente pomeranja u I-toj ravni ploče, a  $\Phi^I(z)$  je 1D Lagrange-ova interpolaciona funkcija (linearna, kvadratna ili kubna). Na dalje ćemo usvojiti linearnu interpolaciju polja pomeranja po debljini ploče, pa će odgovarajuće interpolacione funkcije biti oblika:

$$\begin{aligned} \Phi^I(z) &= \Psi_I^{(I)}(z) \quad z_I \leq z \leq z_2 \\ \Phi^I(z) &= \begin{cases} \Psi_2^{(I-1)}(z) & z_{I-1} \leq z \leq z_I \\ \Psi_I^{(I)}(z) & z_I \leq z \leq z_{I+1} \end{cases} \quad (I = 2, 3, \dots, N-1) \\ \Phi^N(z) &= \Psi_I^{(N)}(z) \quad z_{N-1} \leq z \leq z_N \end{aligned} \quad (3)$$

gde je:

$$\Psi_1^{(k)} = 1 - \frac{\bar{z}}{h_k} \quad \Psi_2^{(k)} = \frac{\bar{z}}{h_k} \quad 0 \leq \bar{z} \leq h_k$$



Slika 3. Polje pomeranja po debljini ploče

### 3. Konstitutivne jednačine laminata

Neka su rezultante napona definisane sledećim izrazima:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} N^I_{xx} \\ N^I_{yy} \\ N^I_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \Phi^I dz \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} Q^I_x \\ Q^I_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \frac{d\Phi^I}{dz} dz \end{aligned} \quad (4)$$

Konstitutivne jednačine za ceo laminat glase:

$$\{\mathbf{N}^0\} = [\mathbf{A}]\{\boldsymbol{\epsilon}^0\} + \sum_{I=1}^N [\mathbf{B}^I]\{\boldsymbol{\epsilon}^I\} \quad (5)$$

$$\{\mathbf{N}^I\} = [\mathbf{B}^I]\{\boldsymbol{\epsilon}^0\} + \sum_{J=1}^N [\mathbf{D}^{IJ}]\{\boldsymbol{\epsilon}^J\} \quad (6)$$

vektor sila u srednjoj ravni ploče:

$$\{\mathbf{N}^0\} = \{N_{xx} \ N_{yy} \ N_{xy} \ Q_x \ Q_y\}^T \quad (7)$$

vektor sila u I-toj ravni ploče:

$$\{\mathbf{N}^I\} = \{N^I_{xx} \ N^I_{yy} \ N^I_{xy} \ Q^I_x \ Q^I_y\}^T \quad (8)$$

vektor deformacija u srednjoj ravni ploče:

$$\{\boldsymbol{\epsilon}^0\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \ \frac{\partial v}{\partial y} \ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \ \frac{\partial w}{\partial x} \ \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T \quad (9)$$

vektor deformacija u I-toj ravni ploče:

$$\{\boldsymbol{\epsilon}^I\} = \left\{ \frac{\partial U^I}{\partial x} \ \frac{\partial V^I}{\partial y} \ \frac{\partial U^I}{\partial y} + \frac{\partial V^I}{\partial x} \ U^I \ V^I \right\}^T \quad (10)$$

Konstitutivne matrice glase:

$$[\mathbf{A}] = [A_{pq}] = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{pq}^{(k)}] dz, \quad p, q = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$[\mathbf{B}] = [B^I_{pq}] = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{pq}^{(k)}] \Phi^I dz, \quad p, q = 1, 2, 3$$

$$[\mathbf{B}] = [\bar{B}^I_{pq}] = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{pq}^{(k)}] \frac{d\Phi^I}{dz} dz, \quad p, q = 4, 5 \quad (11)$$

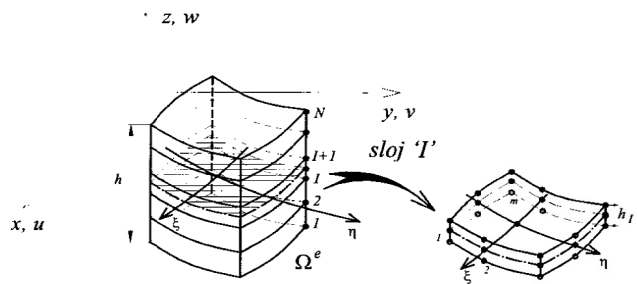
$$[\mathbf{D}] = [D^{IJ}_{pq}] = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{pq}^{(k)}] \Phi^J \Phi^I dz, \quad p, q = 1, 2, 3$$

$$[\mathbf{D}] = [\bar{D}^{IJ}_{pq}] = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{pq}^{(k)}] \frac{d\Phi^J}{dz} \frac{d\Phi^I}{dz} dz, \quad p, q = 4, 5$$

Uslov ravnoteže dobijen iz principa virtualnih pomeranja iskazan je sledećom jednačinom:

$$0 = \int_{\Omega} \left( \{\delta \boldsymbol{\epsilon}^0\}^T \{\mathbf{N}^0\} + \{\delta \boldsymbol{\epsilon}^I\}^T \{\mathbf{N}^I\} - q \delta w \right) dA \quad (12)$$

### 4. Model konačnog elementa



Slika 4. Konačni element ploče sa  $m$  čvorova i  $n$  slojeva

Konačni element ploče sastoji se iz srednje ravni ploče i ravni u čvorovima  $I = 1, N$  po debljini ploče. Za osnovne nepoznate u čvorovima usvojene su komponente pomeranja  $(u, v, w)$  u srednjoj ravni i komponente pomeranja  $(U^I, V^I)$  u I-toj ravni ploče. Dakle, od osnovnih nepoznatih se zahteva da ispune samo  $C^0$  kontinuitet na granicama susednih elementa.

### 4.1. Polje pomeranja

Polje generalisanih pomeranja u funkciji osnovnih nepoznatih u čvorovima konačnog elementa  $\Omega^e$  sa  $m$  čvorova i  $n$  slojeva prikazanog na slici 3, može se prikazati na sledeći način:

— za srednju ravan ploče:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m u_j \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m v_j \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m w_j \Psi_j \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^m [\Psi_j]^e \{d_j\}^e \quad (13)$$

— za I-tu ravan po debljini ploče:

$$\begin{Bmatrix} U^I \\ V^I \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m U_j^I \Psi_j \\ \sum_{j=1}^m V_j^I \Psi_j \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^m [\bar{\Psi}_j]^e \{d_j^I\}^e \quad (14)$$

gde su:

$\{d_j\}^e = \{u_j^e \ v_j^e \ w_j^e\}^T$  vektor pomeranja koji odgovara čvoru  $j$  elementa  $\Omega^e$  u srednjoj ravni ploče

$\{d_j^I\}^e = \{U_j^I \ V_j^I\}^T$  vektor pomeranja koji odgovara čvoru  $j$  elementa  $\Omega^e$  u I-toj ravni ploče

$\Psi_j^e$  interpolacione funkcije u čvoru  $j$ , elementa  $\Omega^e$

$$[\Psi_j]^e = \begin{bmatrix} \Psi_j^e(x_j^e, y_j^e) & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_j^e(x_j^e, y_j^e) & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_j^e(x_j^e, y_j^e) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$[\bar{\Psi}_j]^e = \begin{bmatrix} \Psi_j^e(x_j^e, y_j^e) & 0 \\ 0 & \Psi_j^e(x_j^e, y_j^e) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Konačni element	Interpolacione funkcije		
	$\Psi_1^e = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$\Psi_2^e = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	
	$\Psi_3^e = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$\Psi_4^e = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	
	$\Psi_1^e = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta)$	$\Psi_2^e = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2)$	$\Psi_3^e = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta)$
	$\Psi_4^e = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta)$	$\Psi_5^e = (1 - \xi^2)\eta(1 - \eta^2)$	$\Psi_6^e = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta)$
	$\Psi_7^e = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta)$	$\Psi_8^e = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2)$	$\Psi_9^e = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta)$

Tabela 1. 2D Lagrange-ove linearne i kvadratne interpolacione funkcije

### 4.2. Polje deformacija

Za pretpostavljene linearne veze deformacija i pomeranja imaćemo:

— za srednju ravan ploče:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_b \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{bj} \\ \mathbf{H}_{sj} \end{bmatrix} \{d_j\}^e = \sum_{j=1}^m [\mathbf{H}_j] \{d_j\}^e \quad (17)$$

— za I-tu ravan po debljini ploče:

$$\{\epsilon^I\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_b^I \\ \epsilon_s^I \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{bj} \\ \bar{\mathbf{H}}_{sj} \end{bmatrix} \{d_j^I\}^e \quad (18)$$

gde su:

$$[\mathbf{H}_{bj}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad [\bar{\mathbf{H}}_{bj}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{H}_{sj}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad [\bar{\mathbf{H}}_{sj}] = \begin{bmatrix} \Psi_j^e & 0 \\ 0 & \Psi_j^e \end{bmatrix} \quad (19)$$

### 4.3 Uslovne jednačine

Ako pretpostavimo da su  $\{\delta d\} \neq 0, \{\delta d^I\} \neq 0$ , iz jednačine (12) možemo dobiti model konačnog elementa zasnovan na opštoj laminatnoj teoriji ploča u sledećem obliku:

$$[\mathbf{K}]^e \{\Delta\}^e = \{\mathbf{f}\}^e \quad (20)$$

matrica krutosti elementa  $\Omega^e$  glasi:

$$[\mathbf{K}]^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} [\mathbf{H}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{H}] & \sum_{I=1}^N [\mathbf{H}]^T [\mathbf{B}^I] [\bar{\mathbf{H}}] \\ \sum_{I=1}^N [\bar{\mathbf{H}}]^T [\mathbf{B}^I] [\mathbf{H}] & \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N [\bar{\mathbf{H}}]^T [\mathbf{D}^{IJ}] [\bar{\mathbf{H}}] \end{bmatrix} d\Omega^e \quad (21)$$

vektor čvornih sila elementa  $\Omega^e$  glasi:

$$\{\mathbf{f}\}^e = \int_{\Omega^e} [\Psi]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{Bmatrix} d\Omega^e, \quad (22)$$

vektor pomeranja čvornih tačaka elementa  $\Omega^e$  glasi:

$$\{\Delta\}^e = \left\{ \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \sum_{I=1}^N \{d^I\} \end{Bmatrix} \right\}^e. \quad (23)$$

### 4.4. Polje napona konačnog elementa

Polje napona u ravni  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})$  za sloj  $k$  dobijamo iz konstitutivnih jednačina sloja. Sa obzirom da su globalne interpolacione funkcije  $\Phi^I$  za sloj  $k$  definisane preko lokalnih interpolacionih funkcija  $\Psi_j^{(k)}$  i  $\Psi_2^{(k)}$ , to možemo govoriti o naponima u ravni za gornju i donju tačku sloja  $k$ :

$$\{\sigma_b\}_D^{(k)e} = [Q_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m [H_{b_j}] \{d_j\}^e + [Q_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\bar{H}_{b_j}] \{d_j^I\}^e$$

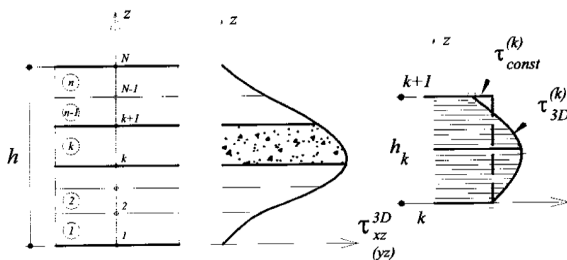
$$\{\sigma_b\}_F^{(k)e} = [Q_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m [H_{b_j}] \{d_j\}^e + [Q_b]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\bar{H}_{b_j}] \{d_j^{I+1}\}^e \quad (24)$$

Kada je reč o smičućim naponima ( $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ ), sračunatim iz konstitutivnih jednačina, oni će predstavljati prosečne smičuće napone za sloj  $k$ :

$$\{\sigma_s\}_{const}^{(k)e} = [Q_s]^{(k)} \sum_{j=1}^m [H_{s_j}] \{d_j\}^e + [Q_s]^{(k)} \sum_{j=1}^m [\bar{H}_{s_j}] \left( \{d_j^{I+1}\}^e - \{d_j^I\}^e \right) / h_k \quad (25)$$

Gore prikazani naponi (25) ne zadovoljavaju granične uslove na gornjoj i donjoj površini ploče, niti uslove ravnoteže međulaminarnih napona. Do tačnih vrednosti smičućih napona, koji će zadovoljiti pomenute uslove dolazimo pretpostavljajući zakon promene smičućih napona ( $\tau_{xz}^{(k)}, \tau_{yz}^{(k)}$ ) u svakom od slojeva po debljini ploče.

Ako usvojimo da se smičući naponi unutar sloja menjaju po kvadratnoj paraboli, za  $n$  slojeva imaćemo  $3n$  nepoznatih koeficijenata, do kojih dolazimo iz sledećih  $3n$  jednačina:



Slika 5. Smičući naponi koji zadovoljavaju 3D uslove ravnoteže

- (1) Dve jednačine dobijamo iz uslova da smičući naponi postanu jednaki nula na donjoj i gornjoj površini ploče:

$$\tau^{(l)}(\bar{z} = 0) = \tau^{(n)}(\bar{z} = h_n) \quad (26)_1$$

- (2) Zadovoljenjem uslova kontinuiteta međulaminarnih napona dobijamo još  $n-1$  jednačinu:

$$\tau^{(k-1)}(\bar{z} = h_{k-1}) = \tau^{(k)}(\bar{z} = 0), \quad (26)_2$$

- (3) Pretpostavljajući da su prosečni naponi unutar sloja jednaki smičućim naponima sračunatim iz konstitutivnih jednačina dobijamo  $n$  jednačina:

$$\frac{1}{h_k} \int_0^{h_k} \tau^{(k)}(\bar{z}) d\bar{z} = \tau_{const}^{(k)} \quad (26)_3$$

- (4) Sračunavajući skok na granici susednih slojeva, uz zadovoljenje 3D uslova ravnoteže dobijamo  $n-1$  jednačinu:

$$\frac{\partial \tau^{(k-1)}(\bar{z} = h_{k-1})}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \tau^{(k)}(\bar{z} = 0)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \tau_{3D}^{(k-1)}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{3D}^{(k)}}{\partial z} \quad (26)_4$$

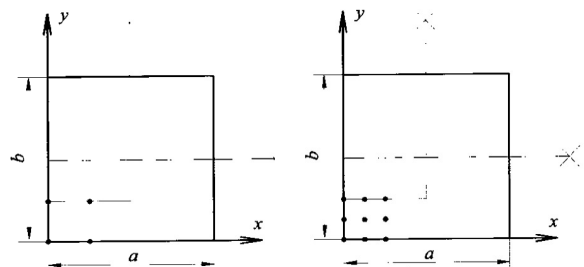
### 5. Numerički primeri

U nastavku će biti prikazani rezultati analize kvadratne ( $a/b=1$ ) troslojne i četvoroslojne laminatne ploče, šema laminacije  $0^0/90^0/0^0$  i  $0^0/90^0/0^0/90^0$ , opterećenih jednako podeljenim opterećenjem, čiji su slojevi sačinjeni od materijala sledećih karakteristika:

$$E_1 / E_2 = 25, \quad G_{12} / E_2 = G_{13} / E_2 = 0.5,$$

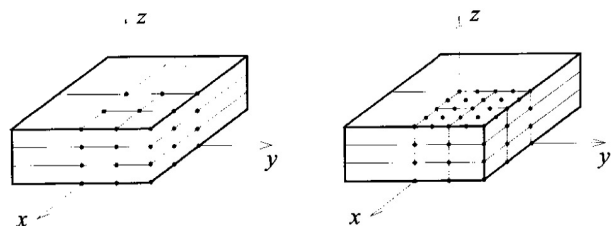
$$G_{23} / E_2 = 0.2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

Interpolacija polja pomeranja u ravni ploče ostvarena je linearnim i kvadratnim 2D Lagrangeovim konačnim elementom sa četiri i devet čvorova. Posmatrana je  $1/4$  ploče sa mrežama konačnih elemenata u ravni:  $4 \times 4$ ,  $6 \times 6$  i  $8 \times 8$ , za element sa četiri i mrežom  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  i  $4 \times 4$ , za element sa devet čvorova, kao i odnosom  $a/h=2$  (kraće strane prema debljini ploče).



MKE\_4

MKE\_9



Slika 6. Mreža konačnih elemenata slobodno oslonjene laminatne ploče

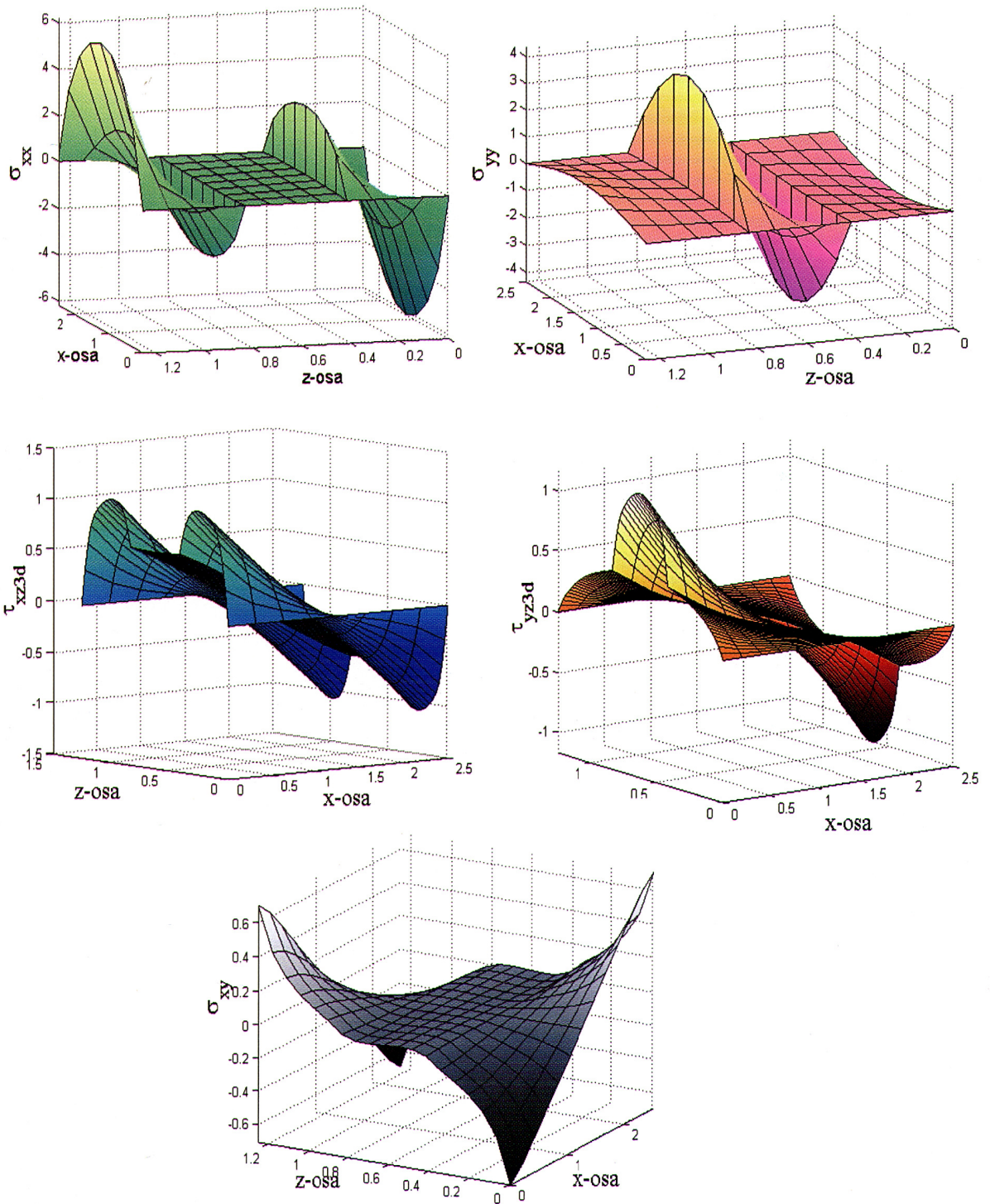
a/h	tačka	MKE_4 4 x 4	MKE_4 6 x 6	MKE_4 8 x 8	Analitičko rešenje	MKE_9 2 x 2	MKE_9 3 x 3	MKE_9 4 x 4	Analitičko rešenje
$\sigma_{xx}$									
2	1 <sup>G</sup>	-4.7978	-4.8732	-4.8993	-4.8373	-4.9800	-4.9512	-4.9427	-4.9054
	2 <sup>D</sup>	3.3365	3.3802	3.3952	3.3519	3.44876	3.4271	3.4210	3.3964
	2 <sup>G</sup>	0.09675	0.09787	0.09825	0.09703	0.09974	0.09912	0.09894	0.09825
	3 <sup>D</sup>	-0.09675	-0.09787	-0.09825	-0.09703	-0.09974	-0.09912	-0.09894	-0.09825
	3 <sup>G</sup>	-3.3365	-3.3802	-3.3952	-3.3519	-3.44876	-3.4271	-3.4210	-3.3964
	4 <sup>D</sup>	4.7978	4.8732	4.8993	4.8373	4.9800	4.9512	4.9427	4.9054
$\sigma_{yy}$									
2	1 <sup>G</sup>	-0.6398	-0.6459	-0.6480	-0.6396	-0.6549	-0.6517	-0.6511	-0.6475
	2 <sup>D</sup>	-0.1192	-0.1214	-0.1221	-0.1205	-0.1243	-0.12356	-0.1233	-0.1223
	2 <sup>G</sup>	-3.7903	-3.8550	-3.8774	-3.8255	-3.9452	-3.9207	-3.9137	-3.8829
	3 <sup>D</sup>	3.7903	3.8550	3.8774	3.8255	3.9452	3.9207	3.9137	3.8829
	3 <sup>G</sup>	0.1192	0.1214	0.1221	0.1205	0.1243	0.1236	0.1233	0.1223
	4 <sup>D</sup>	0.6398	0.6459	0.6480	0.6396	0.6549	0.6517	0.6511	0.6475
$\tau_{xy}$									
2	1 <sup>G</sup>	0.4826	0.5099	0.5218	0.5013	0.5290	0.537674	0.5405	0.5280
	2 <sup>D</sup>	0.001652	-0.0002598	-0.001370	0.0009281	0	-0.002236	-0.003149	-0.002052
	2 <sup>G</sup>	0.001652	-0.0002598	-0.001370	0.0009281	0	-0.002236	-0.003149	-0.002052
	3 <sup>D</sup>	-0.001652	0.0002598	0.001370	-0.0009281	0	0.002236	0.003149	0.002052
	3 <sup>G</sup>	-0.001652	0.0002598	0.001370	-0.0009281	0	0.002236	0.003149	0.0020516
	4 <sup>D</sup>	-0.4826	-0.5099	-0.5218	-0.5013	-0.5290	-0.537674	-0.5405	-0.5280

a/h	sloj	tačka	$\tau_{xz}^{3D}$				$\tau_{yz}^{3D}$			
			MKE_9 2 x 2	MKE_9 3 x 3	MKE_9 4 x 4	Analitičko rešenje	MKE_9 2 x 2	MKE_9 3 x 3	MKE_9 4 x 4	Analitičko rešenje
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
		2	0.719232	0.748648	0.763926	0.748799	0.162406	0.177273	0.184954	0.187025
		3	1.07055	1.10814	1.12738	1.09753	0.303796	0.323567	0.333565	0.326583
		4	1.05397	1.07848	1.09037	1.04618	0.424172	0.438881	0.445833	0.418675
		5	0.669472	0.659669	0.652897	0.59477	0.523533	0.523216	0.521759	0.463301
	2	1	0.669472	0.659669	0.652897	0.59477	0.523533	0.523216	0.521759	0.463301
		2	0.569895	0.583472	0.590201	0.58255	0.961782	1.00211	1.02153	0.986492
		3	0.536703	0.558074	0.569302	0.578477	1.10787	1.16175	1.18811	1.16089
		4	0.569895	0.583472	0.590201	0.58255	0.961782	1.00211	1.02153	0.986492
		5	0.669472	0.659669	0.652897	0.59477	0.523533	0.523216	0.521759	0.463301
	3	1	0.669472	0.659669	0.652897	0.59477	0.523533	0.523216	0.521759	0.463301
		2	1.05397	1.07848	1.09037	1.04618	0.424172	0.438881	0.445833	0.418675
		3	1.07055	1.10814	1.12738	1.09753	0.303796	0.323567	0.333565	0.326583
		4	0.719232	0.748648	0.763926	0.748799	0.162406	0.177273	0.184954	0.187025
		5	0	0	0	0	0	0	0	0

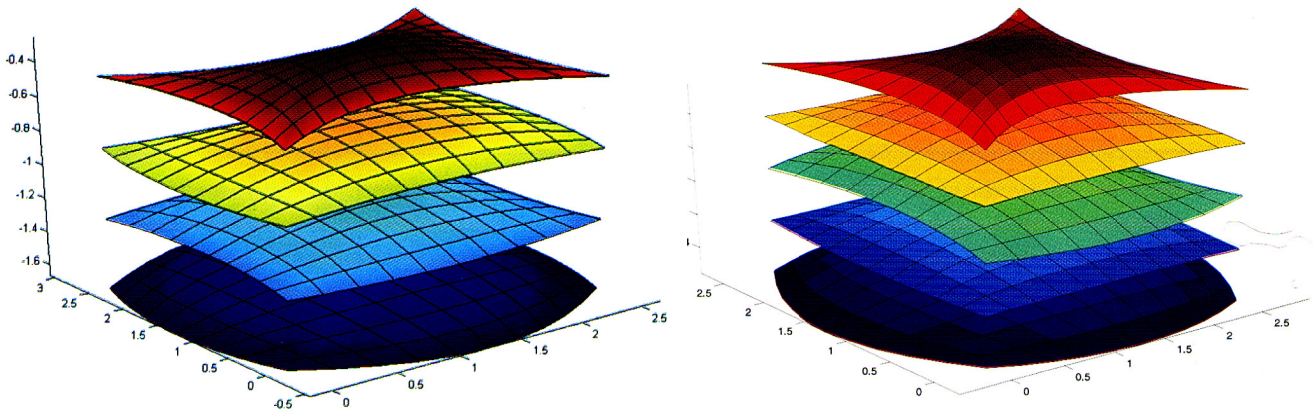
a/h	tačka	MKE_4 4 x 4	MKE_4 6 x 6	MKE_4 8 x 8	MKE_9 2 x 2	MKE_9 3 x 3	MKE_9 4 x 4	Analitičko rešenje
$u$								
2	1	0.1641	0.1649	0.1652	0.1655	0.1655	0.1655	0.1655
	2	-0.1202	-0.1206	-0.1208	-0.1211	-0.1210	-0.1210	-0.1210
	3	0.1202	0.1206	0.1208	0.1211	0.1210	0.1210	0.1210
	4	-0.1641	-0.1649	-0.1652	-0.1655	-0.1655	-0.1655	-0.1655
$v$								
2	1	0.5632	0.5668	0.5680	0.5699	0.5697	0.5697	0.5697
	2	0.1347	0.1355	0.1357	0.1361	0.1361	0.1361	0.1361
	3	-0.1347	-0.1355	-0.1357	-0.1361	-0.1361	-0.1361	-0.1361
	4	-0.5632	-0.5668	-0.5680	-0.5699	-0.5697	-0.5697	-0.5697

Tabela 2. Polja napona i pomeranja troslojne kvadratne laminatne ploče 0/90/0 (a/h=2) za konačni elemente sa četiri (MKE\_4) i devet (MKE\_9) čvorova

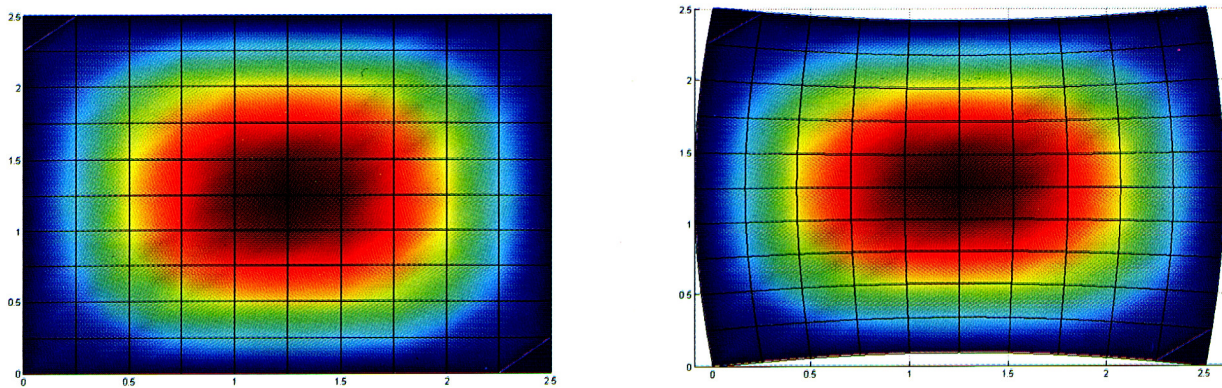




Slika 7. Polje napona u  $(x, z)$  ravni troslojne laminatne ploče 0/90/0



Slika 8. Deformisane površi troslojne 0/90/0 i četvoroslojne 0/90/0/90 laminatne ploče (3D)



Slika 9. Deformisane srednje ravni troslojne 0/90/0 i četvoroslojne 0/90/0/90 laminatne ploče (2D)

## 6. Zaključak

Za konačni element ploče formulisan u ovom radu možemo zaključiti sledeće:

- (1) Rešenja za polja pomeranja i napona konačnog elementa sa četiri i devet čvorova, konvergiraju ka tačnom rešenju opšte laminatne teorije ploča. Naravno, s obzirom na viši nivo interpolacije konvergencija je brža za element sa devet, u odnosu na element sa četiri čvora.
- (2) Usled poprečnog opterećenja u srednjoj ravni ploče antimetrične šeme laminacije dolazi do složenog naprezanja, tj kombinacije savijanja i naprezanja u ravni. Razlog za to svakako leži u anizotropnoj prirodi laminatne ploče.
- (3) Kvadratni Lagrange-ov konačni element je u stanju da tačnu procenu smičućih napona po debljini ploče. Reč je o naponima koji istovremeno zadovoljavaju granične uslove po naponima na donjoj i gornjoj površini ploče, konstitutivne jednačine lamine, međulaminarni kontinuitet i 3D uslove ravnoteže laminata.

## 7. LITERATURA

- [1] Reddy, J. N., A plate bending element based on a generalized laminated plate theory, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, vol. **28**, 2275-2292, 1989
- [2] Vuksanović, Đ., Linear Analysis Of Composite Plates Using Single Layer Higher-Order Discrete Models, *Composite Structures*, **48**, 205-211, 2000
- [3] Četković, M., Vuksanović, Đ., Closed Form Solution Using A Generalized Laminate Plate Theory, *Zbornik radova Građevinskog fakulteta u Subotici-14*, 2005
- [4] Reddy, J. N., *Mechanics Of Laminated Composite Plates*, CRC Press, 1996
- [5] Ochoa, O. O., Reddy, J. N., *Finite Element Analysis Of Composite Laminates*, Kluwer, 1992
- [6] Vuksanović, Đ., Pujević, B., *Teorija savijanja ploča - Numeričke metode i računarski programi*, Nauka, Beograd, 1994
- [7] Četković, M., *Primena metode konačnih elemenata na opštu teoriju laminatnih ploča*, *Magistarska Teza*, Građevinski fakultet, Beograd, 2005