

**УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ
ОДСЕК ЗА ГЕОДЕЗИЈУ И ГЕОИНФОРМАТИКУ**

Јован М. Поповић дипл. инж. геод.

**ПРИМЕНА АКТИВНЕ ГЕОДЕТСКЕ РЕФЕРЕНТНЕ
ОСНОВЕ СРБИЈЕ У ПРЕМЕРУ НЕПОКРЕТНОСТИ**

**- Магистарска теза -
рад има 108 страна**

Београд 2009.

Ментори: проф. др Иван Р. Алексић дипл. инж. геод.
проф. др Бранко Божић дипл. инж. геод.

Датум одбране: _____

РЕЗИМЕ

Предмет овог рада представљају могућности и проблеми примене Активне геодетске референтне основе Србије (АГРОС) при позиционирању тачака пасивне геодетске основе и тачака детаља премера непокретности. АГРОС омогућује рутинско позиционирање тачака пасивне геодетске основе и тачака детаља у реалном времену и центиметарског нивоа тачности. Ови подаци односе се на геодетски референтни систем реализован станицама АГРОС (геоцентрични). И поред извесних ограничења, економичност оваквог приступа у великом броју случајева надмашује традиционалне терестричке технике засноване на мерењима хоризонталних праваца (углова), дужина и зенитних углова (висинских разлика).

Као основни проблем, који још увек није решен на задовољавајући начин, препозната је интеграција овако добијених података премера непокретности са постојећим подацима прикупљеним кроз дуги временски период коришћењем терестричких техника и израженим у Државном координатном систему Републике Србије (негеоцентричном). Уобичајени начин трансформације између геоцентричног и негеоцентричног геодетског референтног система (тродимензионална седмопараметарска трансформација сличности) може се успешно применити само на ограниченим подручјима због присуства дисторзија (изобличења) у просторним подацима премера непокретности израженим у Државном координатном систему.

Да би се развио модел трансформације просторних података премера непокретности, добијених применом АГРОС, у Државни координатни систем који би обухватио комплетну државну територију, уочене дисторзије просторних података морају се на одговарајући начин моделирати и отклонити. У оквиру тезе истражене су могућности два приступа при моделирању дисторзија просторних података:

1. Подела подручја трансформације на коначне елементе и
2. Примена колокације по методи најмањих квадрата.

Развој модела трансформације података премера непокретности добијених применом АГРОС у Државни координатни систем, применом обадва наведена поступка, извршен је на основу скупа од 4401 тачке премера непокретности (узорка просторних података) за које је координате у геоцентричном геодетском референтном систему одредио Републички геодетски завод Србије. Иако је густина расположивог узорка (приближно 1 тачка на 25 km²) недовољна, на основу добијених резултата може се закључити да је применом ових поступака могуће добити довољно тачан и поуздан модел трансформације података премера непокретности добијених применом АГРОС у Државни координатни систем.

ABSTRACT

The subject of this thesis are possibilities and problems concerning the application of Active geodetic reference frame of Serbia (AGROS) in passive geodetic reference and detail points of cadastre surveying positioning. AGROS provides routinely, real-time and centimeter level accuracy positioning of geodetic reference and detail points in cadastre surveying process. Points positions obtained using Active geodetic reference frame refers to geocentric reference system realized by Active geodetic reference frame stations (geocentric). Nevertheless of some restrictions, it may be said that this way of points positioning in cadastre surveying process, in large number of situations, is more efficient compared to traditional terrestrial techniques based on measurement of horizontal directions (angles), distances and zenith angles (height differences).

The integration of cadastre surveying data acquired accordingly into cadastre surveying data collected over long period and referred to State coordinate system of Serbia (non-geocentric) is recognized as the major issue which is not satisfactory solved yet. The usual method of transformation between geocentric and non-geocentric geodetic reference systems (three dimensional similarity transformation) may be successfully applied only to relative small areas because distortions (misshapes) of cadastre surveying data referred to State coordinate system of Serbia.

To develop the transformation model of the cadastre surveying data, obtained using AGROS, into State coordinate system of Serbia for whole state territory, it is necessary to properly model and renounce noticed distortions of cadastre surveying data. Within the scope of this thesis, capabilities of two methods to modeling distortions of cadastre surveying data are investigated:

1. Partition of transformation area to finite elements and
2. Application of Least squares Collocation method.

The development of transformation model for cadastre surveying data obtained using AGROS to State coordinate system, by both methods, is performed using set of 4401 cadastre surveying points (spatial data sample) for which the coordinates in geocentric reference system are determined by Governmental geodetic authority of Serbia. Despite of fact that density of available sample was insufficient (approximately one point per 25 squared kilometers), the results realized shows that it is possible to develop sufficiently accurate and reliable transformation model of cadastre surveying data obtained by using AGROS to State coordinate system of Serbia, using any of two methods.

ПРЕДГОВОР

Премер непокретности у Републици Србији као и у другим европским државама кроз дуги временски период вршен је искључиво терестричким мерним техникама. Развој техника позиционирања терестричких тачака применом глобалних навигационих сателитских система (Global Navigation Satellite Systems, GNSS) условио је њихову интензивну употребу у решавању различитих геодетских задатака као и потпуно нови вид геодетске основе која се обично дефинише као сервис сателитског позиционирања или активна геодетска референтна основа. Активна геодетска референтна основа Србије (АГРОС), реализована у периоду од 2003. до 2005. године, омогућује рутинско позиционирање тачака геодетске основе и тачака детаља премера непокретности у реалном времену.

Овај рад представља покушај да се, на конзистентан начин, реши питање интеграције података премера непокретности добијених применом АГРОС са подацима премера непокретности добијеним терестричким техникама. Рад је организован у шест поглавља.

У уводном (првом) поглављу објашњени су основни појмови, дат је кратак историјски приказ развоја премера непокретности у Србији и дефинисан предмет рада са основним циљевима и приказом стања истраживања у овој области.

У другом поглављу приказани су основни принципи позиционирања терестричких тачака применом глобалних навигационих сателитских система (Global Navigation Satellite Systems, GNSS), са посебним освртом на геодетске референтне системе установљене за ову намену и реализацију оваквих система у Србији. Дат је такође приказ перманентних GNSS мрежа на глобалном континенталном нивоу као и кратак приказ структуре и сервиса позиционирања Активне геодетске референтне основе Србије (АГРОС).

У трећем поглављу приказане су трансформације између различитих типова координата у оквиру истог геодетског референтног система као и најчешће коришћен модел датумске трансформације између геоцентричног и негеоцентричног геодетског референтног система (тродимензионална трансформација сличности). Такође, приказана је основна идеја моделирања дисторзија (изобличења) просторних података изражених у геодетском референтном систему реализованом терестричким техникама (модел трансформационог грида).

Четврто поглавље садржи приказ и математичке моделе за два најчешће примењивана поступка при моделирању дисторзија просторних података:

1. Подела подручја трансформације на коначне елементе и
2. Примена колокације по методи најмањих квадрата.

У петом поглављу извршен је развој модела трансформације података премера непокретности добијених применом АГРОС и изражених у Међународном терестричком референтном систему (International Terrestrial Reference System, ITRS) у Државни координатни систем Републике Србије (ДКС). Модел трансформације развијен је на основу скупа од 4401 тачке премера непокретности са координатама познатим у обадва геодетска референтна система (узорка просторних података). Моделирање дисторзија података премера непокретности извршено је применом обадва поступка описаним у четвртном поглављу и извршена је компаративна анализа добијених резултата.

Сумарни преглед добијених резултата, основни закључци као и могући правци даљих истраживања приказани су у поглављу 6.

ПРИЗНАЊА

Захваљујем се менторима проф. др Ивану Алексићу и проф. др Бранку Божићу на помоћи и сугестијама током израде овог рада као пажљивом прегледу рукописа и учињеним примедбама. Захвалност такође дугујем доц. др Олегу Одаловићу на дугогодишњој сарадњи, дискусијама и сугестијама у разматрању питања која су директни предмет овог рада као и помоћи у прибављању релевантне литературе.

Експериментална истраживања спроведена су на основу података које је кроз дуги временски период прикупио Сектор за основне геодетске радове Републичког геодетског завода Србије. Захваљујем се помоћнику директора Републичког геодетског завода Владимиру Миленковићу дипл. инж. геод. на уступљеним подацима. Признање свакако заслужују и чланови теренских екипа овог сектора за савесно извршена мерења и квалитетне резултате без којих овај рад не би био могућ.

Београд, 2009.

Јован М. Поповић

САДРЖАЈ

1. УВОД	1
1.1. Уводни појмови.....	1
1.2. Историјски развој премера непокретности у Србији	5
1.3. Тачност и поузданост података премера непокретности	14
1.4. Предмет, циљ и стање истраживања	16
2. ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ ПОЗИЦИОНИРАЊА ТЕРЕСТРИЧКИХ ТАЧАКА ПРИМЕНОМ АКТИВНЕ ГЕОДЕТСКЕ РЕФЕРЕНТНЕ ОСНОВЕ	19
2.1. Конвенционални терестрички референтни системи	19
2.1.1. Међународни терестрички референтни систем	19
2.1.2. Светски геодетски систем 1984	22
2.1.3. Параметри земље 1990	22
2.1.4. Европски терестрички референтни систем	23
2.2. Перманентне GNSS мреже	24
2.2.1. Међународна GNSS служба	24
2.2.2. EUREF перманентна мрежа	25
2.3. Реализација ITRS у Србији	27
2.3.1. EUREF кампања Балкан 1998	27
2.3.2. Државна референтна мрежа Републике Србије	29
2.4. Мрежно GNSS позиционирање у реалном времену	30
2.5. Структура и сервиси позиционирања Активне геодетске референтне основе Србије (АГРОС)	36
3. ТРАНСФОРМАЦИЈЕ КООРДИНАТА И ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ДАТУМА	39
3.1. Трансформације координата	39
3.1.1. Descartes-ове координате и елипсоидне координате	39
3.1.2. Елипсоидне координате и раванске координате.....	40
3.2. Тродимензионална трансформација сличности	44
3.3. Концепт грид трансформације	53

4. МОДЕЛИРАЊЕ ДИСТОРЗИЈА ПРОСТОРНИХ ПОДАТАКА	57
4.1. Подела подручја трансформације на коначне елементе	57
4.2. Колокација по методи најмањих квадрата	64
4.2.1. Математички модел колокације по методи најмањих квадрата	64
4.2.2. Стохастички процеси и коваријационе функције	69
4.2.3. Примена колокације на моделирање дисторзија просторних података	73
5. МОДЕЛ ТРАНСФОРМАЦИОНОГ ГРИДА ЗА ТЕРИТОРИЈУ СРБИЈЕ.....	77
5.1. Анализа узорка просторних података и избор интервала грида	77
5.2. Оцена вредности дисторзија у тачакама грида поделом подручја трансформације на коначне елементе	84
5.3. Оцена вредности дисторзија у тачакама грида применом колокације по методи најмањих квадрата	91
5.4. Компаративна анализа резултата грид трансформације	97
5. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА	101
ЛИТЕРАТУРА.....	103

СПИСАК СЛИКА

Слика 1.1.	Схематски приказ коришћења геореференцираних података (Riecken 2000)	2
Слика 1.2.	Болокдијаграм процеса премера непокретности	3
Слика 1.3.	План Београда из 1688. године	7
Слика 1.4.	План Београда из 1867. године	9
Слика 1.5.	Фрагмент скице премера села Мужља (општина Зрењанин), (1909. година)	10
Слика 1.6.	Скица тахиметријског снимања у размери 1:2500	12
Слика 1.7.	Катастарски план у размери 1:1000 израђен на бази аерофотограметријског снимања	14
Слика 2.1.	Конвенционални терестрички референтни систем	20
Слика 2.2.	IGS опајачка мрежа (извор http://igsceb.jpl.nasa.gov/)	25
Слика 2.3.	Европска перманентна мрежа (European Permanent Network, EPN, (извор http://www.epncb.oma.be/)	26
Слика 2.4.	Диспозиција тачака EUREF кампање Балкан '98 (Altiner и др 1999)	27
Слика 2.5.	Државна референтна мрежа Републике Србије (SREF)	29
Слика 2.6.	Начин стабилизације тачака државне референтне мреже	30
Слика 2.7.	Позиционирање у мрежи референтних станица	33
Слика 2.8.	Токови података при мрежном RTK позиционирању	34
Слика 2.9.	Блок схема начина обраде података при мрежном RTK позиционирању	35
Слика 2.10.	Диспозиција перманентних станица АГРОС	37
Слика 3.1.	Descartes-ове координате и елипсоидне координате	39
Слика 3.2.	Упоредни приказ деформација дужина за Gauss-Krüger-ову и UTM пројекцију	44
Слика 3.3.	Тродимензионална трансформација сличности	45
Слика 3.4.	Интерполација вредности дисторзија између тачака грида	54
Слика 3.5.	Однос између интервала грида и тачности интерполације	55
Слика 4.1.	Пример поделе подручја трансформације на коначне елементе	58
Слика 4.2.	Релативни односи коначних елемената после примене засебних параметара трансформације $\mathbf{x}^{(i)}$ по елементима	59

Слика 4.3.	Релативни односи коначних елемената после примене услова континуитета	60
Слика 4.4.	Графичка интерпретација процеса колокације по методи најмањих квадрата	65
Слика 4.5.	Параметри коваријационе функције (<i>Moritz 1980</i>)	73
Слика 5.1.	Просторни распоред тачака узорка.....	78
Слика 5.2.	Просторни распоред и вектори одступања тачака узорка искључених из анализе	80
Слика 5.3.	Просторни распоред тачака разређеног узорка	81
Слика 5.4.	Просторни распоред тачака за тестирање перформанси грида	82
Слика 5.5.	Блокдијаграм процеса оцене вредности дисторзија просторних података у тачкама правилног грида поделом подручја трансформације на коначне елементе	85
Слика 5.6.	Принцип формирања коначних елемената	86
Слика 5.7.	Подела подручја трансформације на коначне елементе	87
Слика 5.8.	Вектори дисторзија просторних података оцењени поделом подручја трансформације на коначне елементе	89
Слика 5.9.	Хистограми фреквенција одступања на тачкама за тестирање перформанси грида изведеног поделом подручја трансформације на коначне елементе	91
Слика 5.10.	Блокдијаграм поступка оцене вредности дисторзија просторних података применом колокације по методи најмањих квадрата	92
Слика 5.11.	Графички приказ функција коваријанси по компонентама положаја	94
Слика 5.12.	Вектори дисторзија просторних података оцењени применом колокације по методи најмањих квадрата	95
Слика 5.13.	Хистограми фреквенција одступања на тачкама за тестирање перформанси грида изведеног применом колокације по методи најмањих квадрата	97

СПИСАК ТАБЕЛА

Табела 1.1.	Захтевана тачност позиција тачака детаља премера непокретности (<i>Републички геодетски завод, 1996б</i>)	15
Табела 2.1.	Параметри елипсоида GRS80, WGS84 и ПЗ90	21
Табела 2.2.	Трансформациони параметри између ITRF96 и ETRS89 (<i>Altiner и др 1999</i>)	28

Табела 3.1.	Параметри полонома за рачунање дужине лука меридијана (GRS80, WGS84 и Bessel-ов елипсоид)	43
Табела 3.2.	Коефицијенти полинома билинеарне интерполације	54
Табела 5.1.	Оцене параметара тродимензионалне трансформације сличности ..	83
Табела 5.2.	Карактеристичне вредности за резидуале на идентичним тачкама, после тродимензионалне трансформације сличности за целокупно подручје	84
Табела 5.3.	Карактеристичне вредности за резидуале на идентичним тачкама, после трансформације сличности по елементима	88
Табела 5.4.	Карактеристичне вредности за ефекат услова континуитета на тачкама чворовима	88
Табела 5.5.	Карактеристичне вредности за резидуале на идентичним тачкама, после примене услова континуитета	88
Табела 5.6.	Карактеристичне вредности за векторе дисторзија просторних података у тачкама грида изведеног поделом подручја трансформације на коначне елементе	89
Табела 5.7.	Показатељи перформанси грида оцењеног на основу поделе подручја трансформације на коначне елементе	90
Табела 5.8.	Параметри аналитичких коваријационих функција по компонентама положаја (B, L)	92
Табела 5.9.	Карактеристичне вредности за репродуктивност података (резидуале) у идентичним тачкама узорка просторних података код примене колокације по методи најмањих квадрата	93
Табела 5.10.	Карактеристичне вредности за векторе дисторзија просторних података у тачкама грида изведеног применом колокације по методи најмањих квадрата	93
Табела 5.11.	Карактеристичне вредности експерименталних стандардних девијација предикција дисторзија просторних података у тачкама правилног грида	96
Табела 5.12.	Показатељи перформанси грида оцењеног применом колокације по методи најмањих квадрата	96
Табела 5.13.	Показатељи сагласности оцена дисторзија просторних података у тачкама грида	98

СПИСАК СКРАЋЕНИЦА

АГРОС	– Активна Геодетска Референтна Основа Србије,
ДКС	– Државни Координатни Систем
ЕОД	– ЕлектроОптички Дальномер
ГЛОНАСС	– ГЛОбальная Навигационная Спутниковая Система
ПЗ90	– Параметри Земљи 1990,
ТМ1	– Тригонометријска Мрежа првог реда 1,
НВТ1	– Нивелман Високе Тачности 1,
ВКГ	– Bundesamt für Kartographie und Geodäsie,
CERCO	– Comité Européen des Responsables de la Cartographie Officielle,
CODE	– Center for Orbit Determination in Europe
CTRS	– Conventional Terrestrial Reference System
DGPS	– Differential GPS,
DIM	– Distance – based linear Interpolation Method,
DoD	– US Department of Defence,
DORIS	– Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite,
EC	– European Commission,
EPN	– European Permanent GNSS Network
EUREF	– EUropean REference Frame,
ETRF89	– European Terrestrial Reference Frame 1989,
ETRS89	– European Terrestrial Reference System 1989,
FEM	– Finite Elements Method,
GIS	– GeoInformation Systems
GNSS	– Global Navigation Satellite Systems,
GPRS	– General Packet Radio Service,
GRS80	– Geodetic Reference System 1980,
GPS	– Global Positioning System,

GSM	– <u>G</u> lobal <u>S</u> ystem for <u>M</u> obile communications
IAG	– <u>I</u> nternational <u>A</u> ssociation of <u>G</u> eodesy
IAU	– <u>I</u> nternational <u>A</u> stronomical <u>U</u> nion
IGS	– <u>I</u> nternational <u>G</u> NSS <u>S</u> ervice
IUGG	– <u>I</u> nternational <u>U</u> nion of <u>G</u> eodesy and <u>G</u> eophysics,
IERS	– <u>I</u> nternational <u>E</u> arth <u>R</u> otation <u>S</u> ervice,
IGS	– <u>I</u> nternational <u>G</u> NSS <u>S</u> ervice,
IGEX	– <u>I</u> nternational <u>G</u> LONASS <u>E</u> Xperiment
ITRF	– <u>I</u> nternational <u>T</u> errestrial <u>R</u> eference <u>F</u> rame,
ITRS	– <u>I</u> nternational <u>T</u> errestrial <u>R</u> eference <u>S</u> ystem,
LCM	– <u>L</u> inear <u>C</u> ombination <u>M</u> odel,
LSC	– <u>L</u> east– <u>S</u> quares <u>C</u> ollocation,
LIM	– <u>L</u> inear <u>I</u> nterpolation <u>M</u> ethod,
LLR	– <u>L</u> unar <u>L</u> aser <u>R</u> anging,
LSM	– <u>L</u> ow–order <u>S</u> urface <u>M</u> odel,
NAVSTAR	– <u>N</u> avigation <u>S</u> ystem with <u>T</u> iming <u>A</u> nd <u>R</u> anging,
NIMA	– <u>U</u> S <u>N</u> ational <u>I</u> magery and <u>M</u> apping <u>A</u> gency,
PP	– <u>P</u> recise <u>P</u> ositioning,
RTCM	– the Radio Technical Commission for Maritime Services,
RTK	– <u>R</u> eal <u>T</u> ime <u>K</u> inematic,
SLR	– <u>S</u> atellite <u>L</u> aser <u>R</u> anging,
UHF	– <u>U</u> ltra <u>H</u> igh <u>F</u> requency
UTM	– <u>U</u> niversal <u>T</u> ransverse <u>M</u> ercator,
VHF	– <u>V</u> ery <u>H</u> igh <u>F</u> requency
VLBI	– <u>V</u> ery <u>L</u> ong <u>B</u> ase <u>I</u> nterferometry,
VRS	– <u>V</u> irtual <u>R</u> eference <u>S</u> tation,
WGS84	– <u>W</u> ord <u>G</u> eodetic <u>S</u> ystem 1984,

1. УВОД

1.1. Уводни појмови

Геоинформације (просторни подаци који описују појаве на земљиној површи) имају велики значај у укупном разумевању у савременим информационо и комуникационо оријентисаним друштвима. Резултати истраживања спроведених у Савезној Републици Немачкој (*Riecken* 2000) говоре да се око 80% свих одлука у јавном сектору доноси коришћењем геореференцираних података. Имајући у виду све већу заступљеност рачунарске технологије у свим сегментима савременог друштва, подразумева се расположивост геоинформација у дигиталној форми. Према томе, расположивост дигиталних геореференцираних података има све већу важност. Најважније примене оваквих података огледају се у управљању коришћења земљишта, саобраћају, екологији, телекомуникацијама, јавној безбедности, урбаном и регионалном планирању, одбрани, геологији као и многим другим сегментима савременог друштва. Схематски приказ значаја и коришћења геореференцираних података дат је на слици 1.1.

Основни извор ових података представља премер државне територије. Према општој дефиницији, премер представља математичку науку која се бави одређивањем и графичком презентацијом облика, величине и позиција (граница) појава на површи Земље или испод ње за различите контролне потребе, што значи за регулацију земљишта као и граница изграђених објеката, односно за проверу димензија објеката у градњи.

У зависности од намене података премера могу се разликовати различити типови премера. Премер који се врши за искључиво административне примене (регистрација власништва над непокретностима као и убирање пореза), односно регистрацију коришћења земљишта дефинише се као **катастарски премер**. За овај тип премера карактеристично је да се прикупљају само подаци од непосредног административног значаја. То су границе поседа (катастарских парцела), границе начина коришћења поседа (границе култура), подаци о изграђеним објектима као и подаци (индикације) о власнику односно поседнику. Такође, неопходна је само хоризонтална представа терена.

Да би се подаци премера могли користити и за друге намене (на пример просторно планирање или као подлоге за пројектовање грађевинских објеката), поред ових података неопходни су подаци и о другим топографским садржајима (на пример вертикална представа терена). Овакав премер назива се **топографски премер**. Када се, из разлога рационалности, сви ови подаци прикупљају одједном говори се о **катастарско-топографском премеру**.



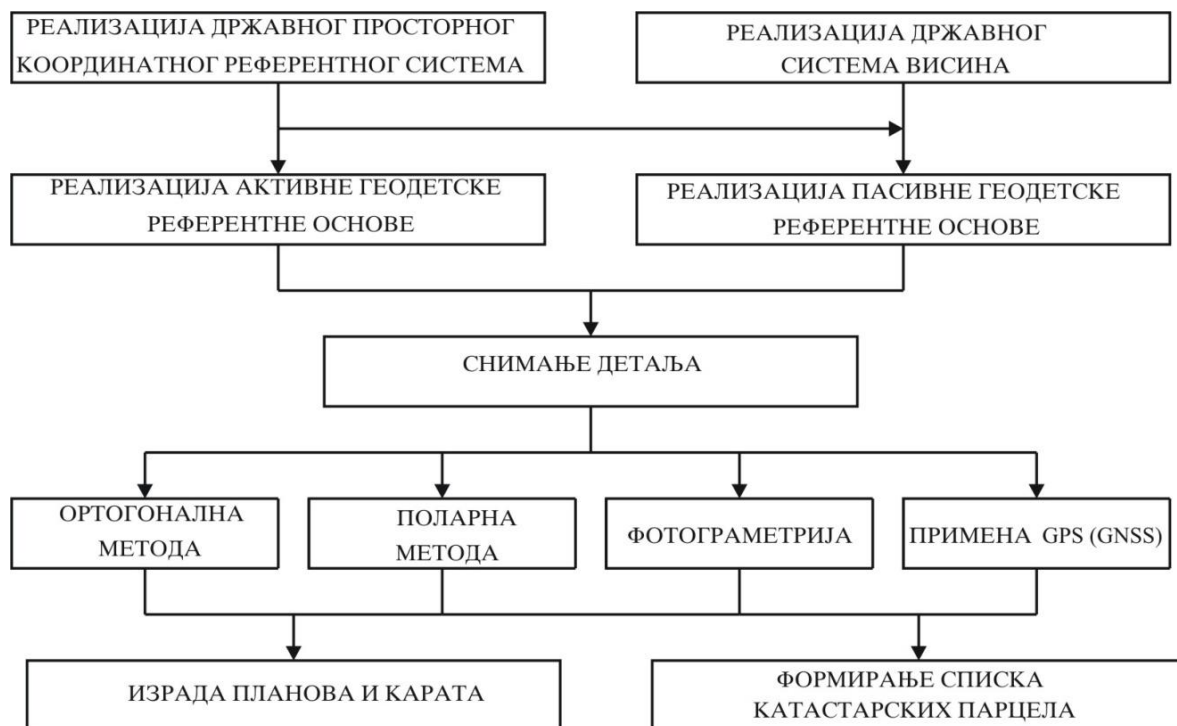
Слика 1.1. Схематски приказ коришћења геореференцираних података
(*Riecken 2000*)

Премер непокретности у Републици Србији, према важећој законској регулативи, поред података неопходних за израду катастра непокретности предвиђа и прикупљање топографских података па се он може сматрати катастарско-топографским премером. Како се ради о послу који се врши на целокупној државној територији а организованом и вођеном од стране државе, често је у употреби и термин **државни премер**.

Овако дефинисан премер непокретности на целој државној територији представља комплексан и перманентан процес који се генерално може поделити у три фазе (слика 1.2):

- основни геодетски радови;
- снимање детаља;
- израда планова и карата као и евентуалних текстуалних регистара, односно формирање база података о просторним објектима.

Иако представљају базу премера непокретности, основни геодетски радови имају шири научни и практични значај па се често разматрају издвојено од осталих фаза премера. Из тог разлога ови радови нису у овом раду детаљније разматрани него је само наглашен њихов значај и улога у премеру непокретности. Основни геодетски радови подразумевају дефиницију и реализацију **геодетског референтног система**,



Слика 1.2. Блокдијаграм процеса премера непокретности

чиме се гарантује геодетска конзистентност свих активности премера непокретности у оквиру добро познатог координатног система. Резултат ових радова представља скуп погодно распоређених хоризонталних и вертикалних контролних тачака на читавој територији државе (**геодетски референтни оквир**). Основни геодетски радови изводе се на државном нивоу а препоручује се (*United Nations – Economic Commission for Europe 1996*) да национални (државни) геодетски референтни оквир буде повезан са глобалним геодетским референтним оквиром. За реализацију премера непокретности у Србији у употреби су:

- хоризонтални (дводимензионални) геодетски референтни систем (Државни координатни систем, ДКС) у равни конформне Gauss-Krüger-ове пројекције Bessel-овог елипсоида, реализован Тригонометријском мрежом првог реда (*Машановић и др. 1996, Делчев 2001*) и
- вертикални (једнодимензионални) геодетски референтни систем (систем висина) реализован првим Нивелманом високе тачности (*Машановић и др. 1996*).

Поред ових система, у којима се изражавају хоризонталне и вертикалне позиције тачака премера непокретности у Републици Србији, постоји реализација система висина другим Нивелманом високе тачности (*Машановић и др. 1996*) и висине репера из ове мреже се користе као основа за одређивање нове референтне површи висина (геоида) (*Одаловић 2005*).

У оквиру мерне кампање Балкан '98 (*Altiner и др. 1999*), на подручју Републике Србије одређене су просторне геоцентричне координате (X, Y, Z) за седам тачака Европске референтне мреже (European Reference Frame, EUREF) у Међународном

терестричком референтом систему (International Terrestrial Reference System, ITRS). Ослоном на ове тачке, у периоду 1997. – 2003. реализована је Државна референтна мрежа Републике Србије (*Благојевић 2003*), која се састоји од укупно 838 тачака правилно распоређених на територији Србије (изузимајући територију Косова и Метохије због политичких разлога) на међусобном растојању од приближно 10 km. Ова мрежа служи као основа за примену система за глобално позиционирање (Global Navigation Satellite Systems, GNSS) у премери непокретности.

Геодетски референтни оквир, као реализација усвојеног геодетског референтног система састоји се само од минималног броја тачака у зависности од технологије коришћене за његову реализацију (терестричке или сателитске технике позиционирања). Прогушћење геодетског референтног оквира има задатак да омогући економично позиционирање било које терестричке тачке на државној територији и назива се **геодетска референтна основа**. Тако се скуп трајно стабилизаних тачака са познатим координатама у усвојеном референтном систему и погодно распоређених по целој државној територији назива **пасивна геодетска референтна основа** премера непокретности. За разлику од пасивне геодетске референтне основе у новије време уведен је и појам **активне геодетске референтне основе**, која подразумева примену сателитских система за глобално позиционирање.

У периоду од 2002. до 2005. године (*Одаловић и Алексић 2004*) реализована је Активна геодетска референтна основа Србије (АГРОС). АГРОС чине 31 тачка, са прецизно одређеним тродимензионалним геоцентричним координатама, правилно распоређене по територији Србије, на међусобним растојањима од око 70 km, на којима се врши перманентно опажање сателита система за глобално позиционирање Navigation System with Timing and Ranging (NAVSTAR) Global Positioning System (GPS). Подаци опажања са ових станица омогућавају прецизно позиционирање терестричких тачака на територији Србије, у реалном времену или накнадном обрадом података, што омогућава широку примену АГРОС у премери непокретности.

Да би се простор могао одговарајуће приказати на плану (карти), неопходно је појаве у простору дискретизовати коначним бројем тачака (тачака детаља). Одређивање позиција тачака детаља у усвојеном државном геодетском референтном систему као и прикупљање других података о непокретностима (графичких, описних) назива се **снимање детаља**.

Снимање детаља терестричким техникама (ортогонална и поларна метода снимања) захтева веома густу пасивну геодетску основу због неопходности да се свака тачка детаља догледа са барем једном тачком геодетске основе. Ово се такође односи и на примену аерофотограметрије уколико се при одређивању елемената спољашње оријентације фотоснимка не користе системи за глобално позиционирање. Према томе, тачке премера непокретности могу се генерално поделити на:

- тачке геодетске основе за снимање детаља и

- тачке детаља.

Геодетску основу за снимање детаља у Републици Србији према Инструкцији за израду и одржавање геодетске основе за снимање детаља (*Републички геодетски завод 1996а*) чине:

- референтне тачке,
- тигонometriјске тачке свих редова,
- полигонске тачке,
- оријентационе тачке и
- линијске тачке.

Тачке детаља (*Републички геодетски завод 1996б*) деле се на:

- граничне тачке парцела које се стабилизују трајним белегама и
- остале тачке детаља које нису трајно стабилизоване.

Примена Активне геодетске референтне основе Србије (АГРОС) у премеру непокретности заступљена је при:

- одређивању позиција тачака пасивне геодетске основе за снимање детаља (референтних тачака, полигонских тачака и оријентационих тачака при фотограметријском снимању) и
- непосредно позиционирање тачака детаља коришћењем GNSS пријемника.

1.2. Историјски развој премера непокретности у Србији

Потреба човека за премеравањем земљишта стара је колико и сама институција располагања (својине) над земљиштем. Већ у време старог Египта постојала је потреба за обнављањем граница власништва, после плављења реке Нил. За ове потребе коришћени су примитивни инструменти и прибор. Касније, Грци и Римљани премеравали су своја насеља заједно са сеоским атарима.

Међутим, за време настанка геодетског премера у савременом смислу те речи, може се сматрати период ренесансе у XV и XVI веку. То је период проналазака оптичких инструмената (Kerler, 1571-1630), као и предузимања мерења ради одређивања димензија Земље коришћењем триангулационих мерења (Snellius, 1580-1626). Велики подстицај развоју премера дали су проналасци у овој области у смислу конструкције нових инструмената и проналаска нових рачунских метода (Descartes, 1596-1650, Newton, 1642-1727, Leibnitz, 1646-1716). Ови проналасци омогућили су извршење масовних премеравања за војне и фискалне потребе.

Премеравања већих подручја изводили су француски геодети Cassini (1625-1712) и Picard (1620-1682), који су мерили унутрашње углове у серији међусобно повезаних троуглова у комбинацији са мерењем база за одређивање координата тачака (градусна мерења). Техника триангулације касније је коришћена као основни начин

за одређивање прецизних координата референтних тачака у оквирима континенталних простора.

Као прекретница у развоју премера може се означити дефинисање катастарске парцеле у Француској у првој половини XIX века. Подаци премера се од тада превасходно везују за катастарску парцелу, односно имају за циљ да пруже што потпуније податке о катастарским парцелама у геодетском, правном и фискалном смислу.

Кроз сав досадашњи период развоја цивилизације, стално се увећавала потреба за подацима премера за различите примене, па су се сходно томе стално развијали нови инструменти и методе прикупљања и презентације података. Важни преломни моменти у развоју премера у Србији, као и у великом броју других европских земаља били су (*Гостовић, 1995*):

- усвајање Gauss-Krüger-ове пројекције 1924. године,
- реализација државног хоризонталног референтног система развијањем Тригонометријске мреже првог реда (ТМ1) односно вертикалног референтног система развијањем првог Нивелмана високе тачности (НВТ1),
- примена строгих метода изравнања резултата мерења у мрежама геодетске основе премера,
- прелазак са графичких на нумеричке методе снимања,
- примена фотограметријске методе снимања,

као и најновија достигнућа:

- развој електрооптичких даљиномера (ЕОД),
- развој рачунарске технологије и
- развој савремених сателитских система за глобално позиционирање (GNSS).

Због историјског наслеђа постоје разлике у развоју премера на територијама Србије које су некада биле под аустроугарском и оних које су биле под турском влашћу. У складу с тим разликујемо развој премера на територији Војводине и у осталим деловима Србије.

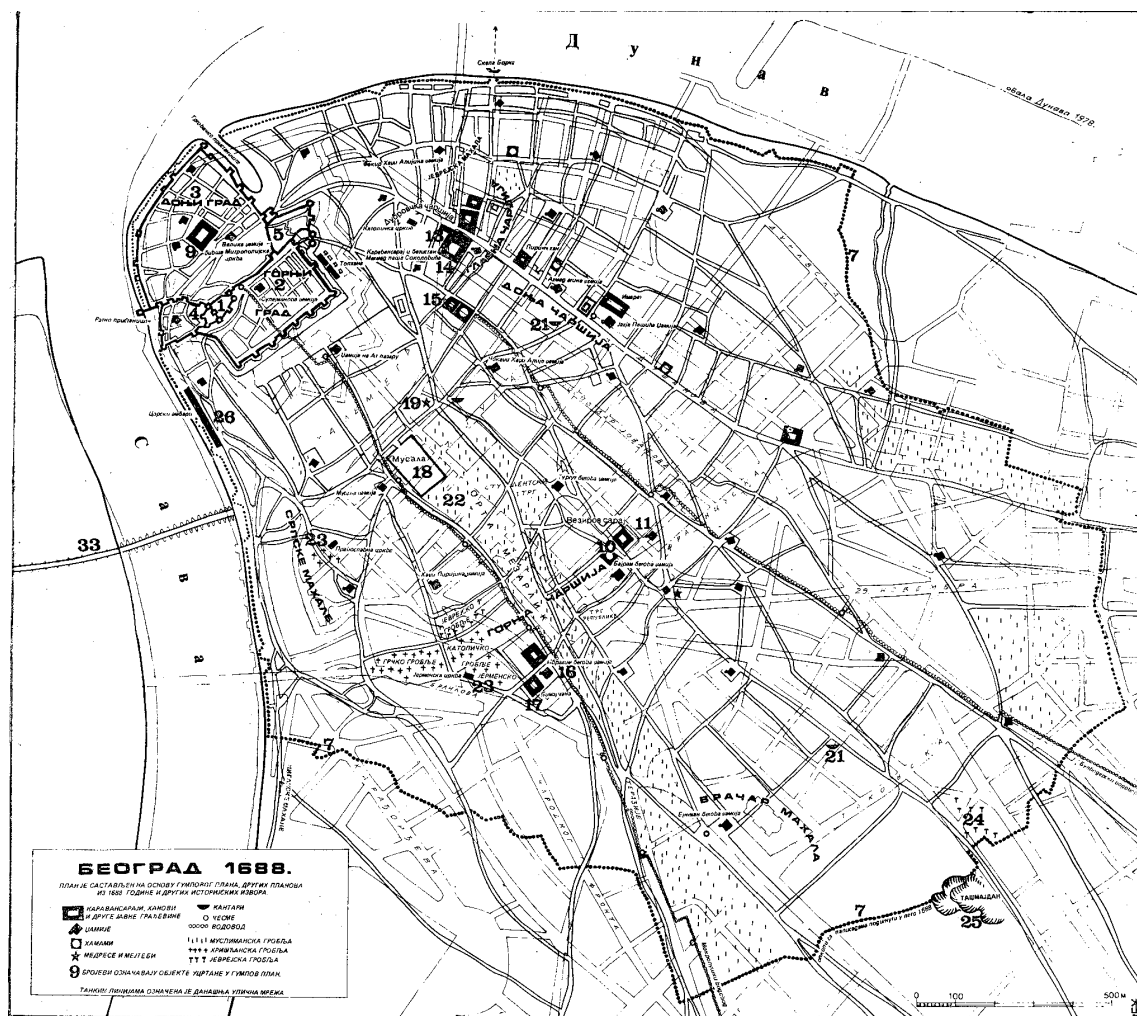
Први документи у којима су забележени подаци о земљишту на територији Србије, (*Републичка геодетска управа СР Србије, 1987*), датирају из периода средњевековне српске државе. Ови документи су у ствари манастирске повеље на којима нема нумеричких података али садрже описне податке који се односе на решавање имовинско-правних односа везаних за земљиште. Најстарија сачувана повеља је из 1220. године и налази се у манастиру Жичи крај Краљева.

Први познати докуменат о премеру земљишта, на српском језику је такозвана "Призренска тапија", сачињена у време владавине цара Душана (1346-1355) у којој су уписани бројчани подаци о поседима појединаца и представља сведочанство да се у то време вршило премеравање и опис земљишта за потребе утврђивања обавеза

у односу на земљиште и уређивање својинских и других права на њега. Такође је Душановим закоником из 1349. године, поред приватноправних односа био регулисан и начин опорезивања земљишта, на основу пописа земљишта.

Са нестанком средњовековне српске државе, нестали су и њени закони. Турци за време своје владавине нису оставили било какав траг о активностима на премеравању земљишта. Изузетак чини Београд из периода када је прелазео из турске власти у аустроугарску и обратно за који постоји један војни "кроки" из 1688. године (слика 1.3). Касније је урађено неколико смањених верзија "крокија" у виду плана.

У другој половини XVII века урађен је "план старог Београда" а за време Турака до офанзиве принца Евгенија 1717. године, израђен је "план Београда". Затим помињу се планови Београда из 1719. и 1722. године. Овакав план затечен је приликом ослобођења једног дела града 1806. као и коначног ослобођења од Турака 1867. године. У овом периоду настала је и карта Србије коју је израдио Сава Текелија а штампана је 1805. године.



Слика 1.3. План Београда из 1688. године

У току процеса и непосредно после ослобођења територије централне Србије од турске владавине долази до интензивног развоја градова, при чему се појављује потреба за планском изградњом а самим тим и за пословима регулације и премера нових насеља. У то време предузимају се и прва премеравања Београда заснована на графичкој триангулацији. Премер је рађен у размери 1:2000, методом геодетског стола и обухватао је само улице и контуре блокова као и значајније зграде. На основу ових података израђен је 1867. године и план Београда у размери 1:3000, (слика 1.4).

За почетак организованих активности на премеру у тадашњој Србији може се узети 1837. година, када је на познатој "Спасовској скупштини" Кнез Милош Обреновић покренуо питање премера и класирања земљишта.

Године 1884. донет је закон о непосредним порезима који је предвиђао пописивање земљишта према категорији и бонитету. На основу тог закона извршен је попис целокупног земљишта према категорији и бонитету на основу података које су појединци усмено пријављивали. Ови подаци послужили су за састављање књига по управним општинама и поседовним листовима за сваког појединца. Међутим, оваква евиденција брзо се показала неефикасном највише због тога што су појединци пријављивали мање, па су из године у годину подаци из ових књига постајали све нереалнији.

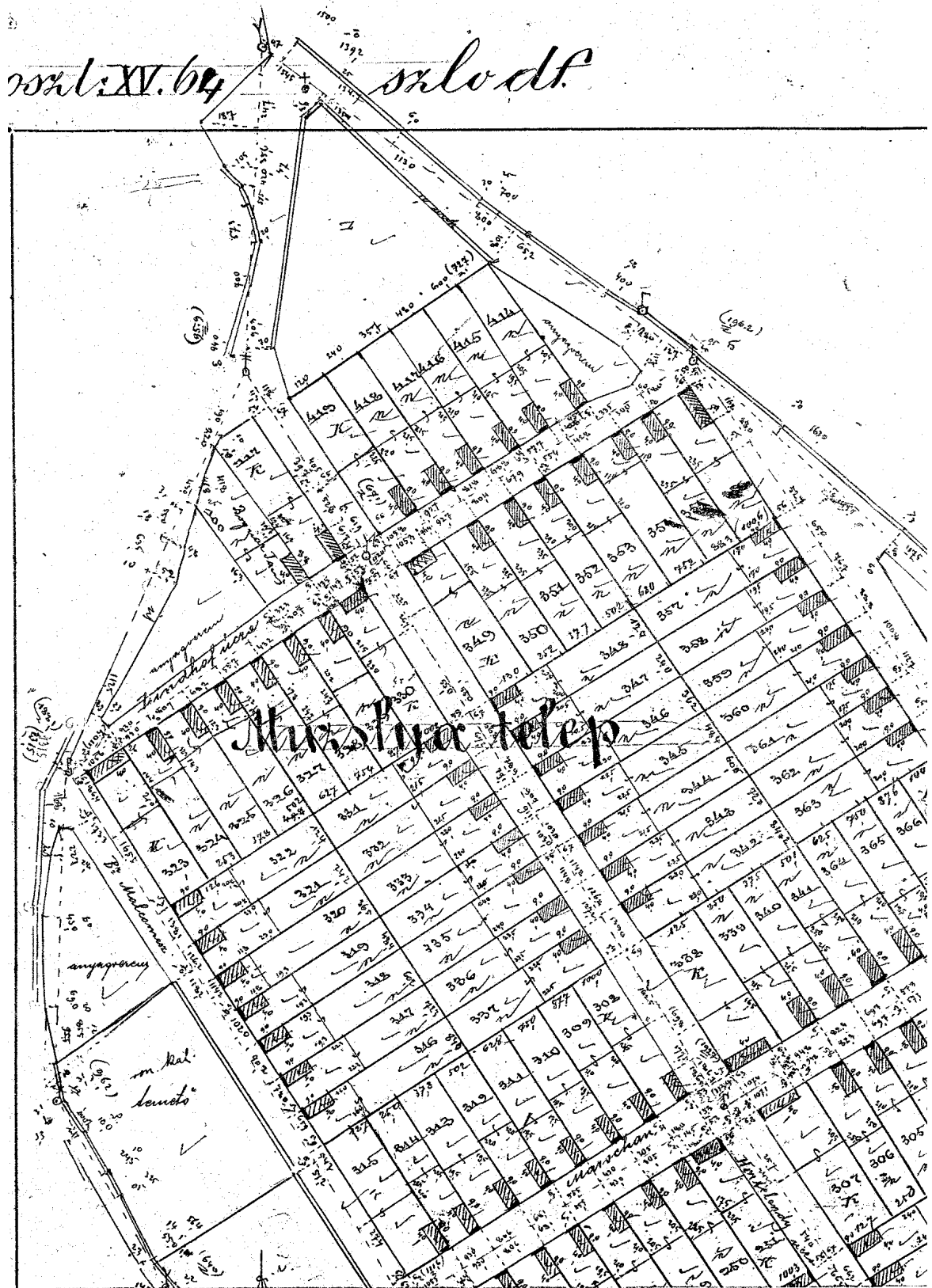
Овакво стање као и нарастајуће потребе за техничком изградњом довело је до одлуке да се приступи изради савременог детаљног премера. Тако је 1889. допуњен закон о непосредним порезима са одредбама које предвиђа извршење катастарског премера. Првом катастарском премеравању у унутрашњости Србије приступило се 1890. према прописима Пруског катастарског правилника. Због великих финансијских издатака премер је обустављен 1894. Подаци овог премера изгубљени су за време првог светског рата.

Година 1900. може се сматрати преломном у развоју премера у Србији. Наиме прешло се са графичке на нумеричку триангулацију (нумерички начин одређивања позиција тригонометријских тачака). Међутим, период од 1900. до почетка балканских и првог светског рата углавном је посвећена основним геодетским



Слика 1.4. План Београда из 1867. године

радовима, општедржавног и регионалног значаја, тако да је активности у детаљном премеру било само на подручју Београда и приликом развоја других насеља на територији Србије. Такође у току рата није било организованих активности на овом послу. Организованије активности на пословима катастарско-топографског премера сачекаће ослобођење и стварање југословенске државе.



Слика 1.5. Фрагмент скице премера села Мужља (општина Зрењанин),
(1909. година)

На територији Војводине, премер једног дела територије у току XVIII века извршила је војна топографска служба Аустроугарске монархије. Међутим,

организоване активности на премеру за израду катастра земљишта започеле су 1853. године графичком методом, у стереографској пројекцији и ослањањем на државни координатни систем (т. зв. Будимпештански и Ивањички у једном делу Срема) а комплетан премер завршен је 1880. године са плановима у размери 1:2880 (слика 1.5).

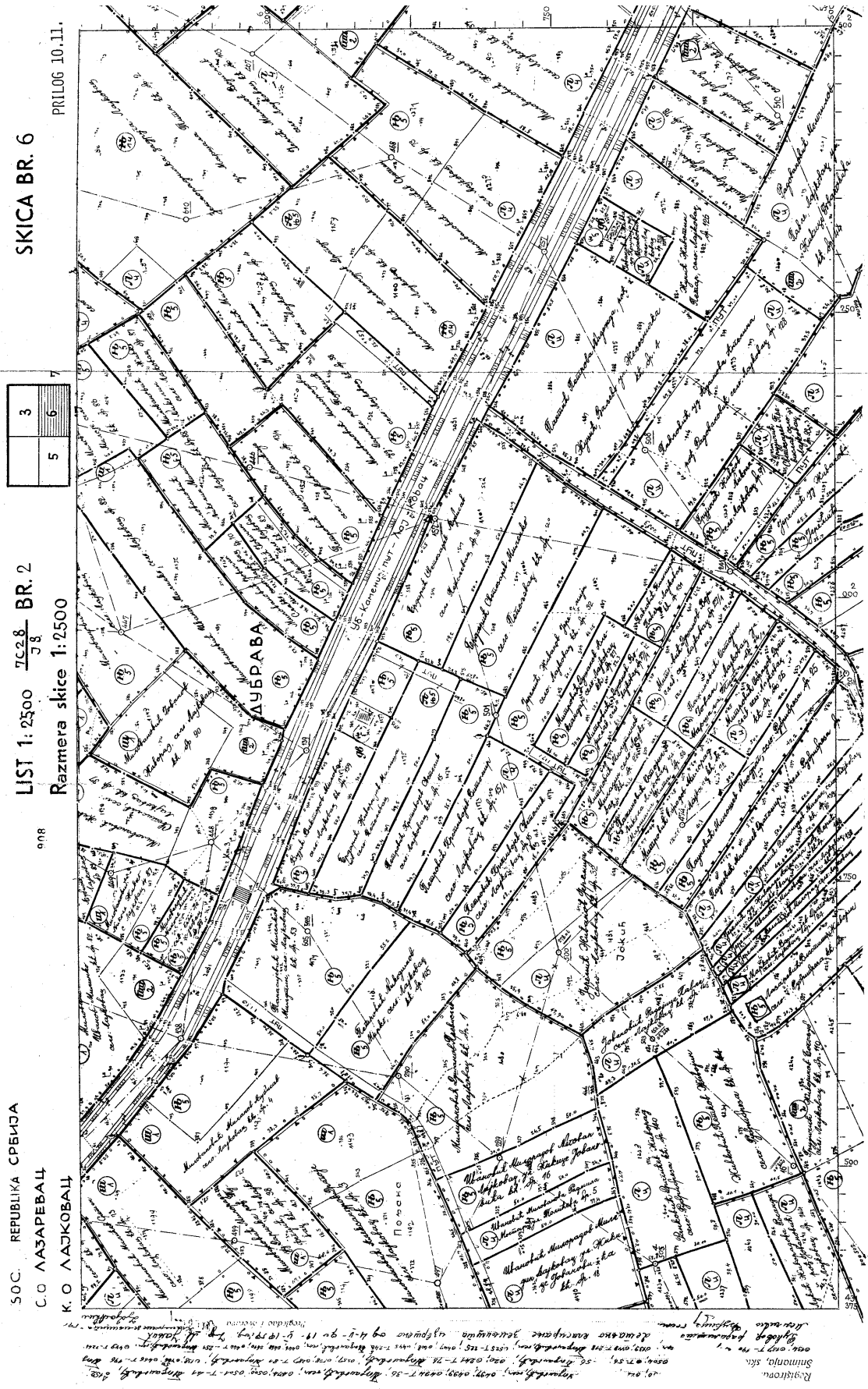
У периоду 1921-1925 извршен је детаљни премер неколико срезова: Мачванског (Богатић), Тамнавског (Уб), Посавског (Обреновац), Рамског (Велико Градиште) и делимично Подунавског среза (Смедерево). У овом периоду извршен је и премер града Смедерева. Премер из овог доба карактерисали су многи проблеми који су проистицали из: недостатка стручног искуства, слабе организације и недостатка прописа. Тако су снимања вршена различитим методама, већ према образовању и претходном искуству стручњака који су вршили премер.

Стручњаци из Русије (емигрантски геодетски и топографски официри) снимања су вршили графички, стручњаци који су из Босне и Хрватске премештени у Србију, снимања су вршили ортогонално а стручњаци школовани на Средњој техничкој школи у Београду (Геометарски одсек), снимања су вршили поларном методом (тахиметријски). Усвајање Gauss-Krüger-ове пројекције 1924. године дало је велики подстицај унапређењу основних геодетских радова, чиме су створени услови за доношење прописа по којима ће се вршити премер на непремереним деловима Србије.

Године 1929. (10. јануара) донет је Закон о катастру земљишта а на основу овог закона донети су технички правилници о катастарском премеру и то: I део - триангулација, II део - полигонска мрежа, III део - снимање детаља, IV део - нивелман, V део - израда катастарских планова и рачунање површина. Доношењем ових правилника почиње систематски и организован државни премер у Србији.

Године 1930. извршено је прво пробно фотограметријско снимање за потребе катастра земљишта под руководством проф. Милана Дражића. Међутим из разних непредвиђених разлога ово је остао само покушај па је ново пробно снимање извршено тек 1939. године у општини Младо Нагоричино на површини од око 5000 хектара. С обзиром на добијене повољне резултате Дирекција катастра и државних добара одлучила је да се набави извештај број инструмената за реституцију али због почетка Другог светског рата до ове набавке није дошло.

Период од 1931. до 1941. представља у области премера непокретности веома плодно раздобље, како на пољу основних геодетских радова тако у пословима детаљног катастарског премера. У том периоду извршен је детаљни премер 60 градова у Србији, међу којима је и Београд, као и премер ван насељених подручја у укупној површини од преко 3600000 хектара. Премер је вршен, за то време, најсавременијим нумеричким методама, ортогоналном за градска подручја и поларном за ванградска подручја и сматран је једним од најбољих премера у

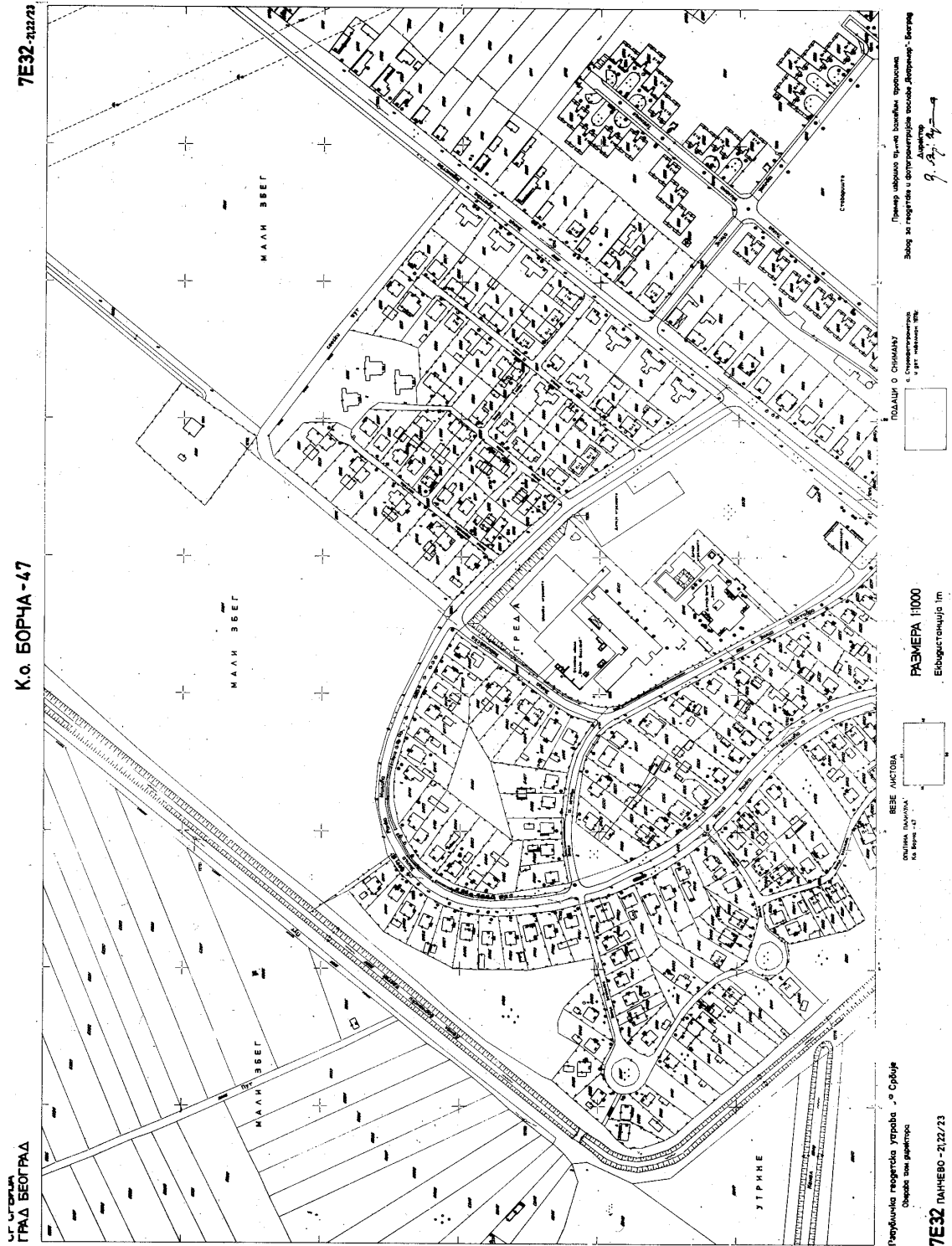


Европи (слика 1.6). Једина замерка која се може ставити овом премеру је недостатак висинске представе, пошто су његови подаци били намењени искључиво за потребе израде катастра земљишта. Додуше, величине неопходне за рачунање висина тачака детаља приликом снимања су мерене али висине тачака детаља нису израчунате и катастарски планови из овог периода не садрже висинску представу.

У првим годинама после другог светског рата већина геодетских стручњака ангажована је на пословима опсежних својинских промена које је наметнуло стварање социјалистичке државе, као и на пословима обнове ратом разорених грађевинских објеката и експлоатацији рудних богатстава. У овом периоду, како због малобројности стручног геодетског кадра тако и због чињенице да институцији својине у овом периоду није придаван велики значај, није било организованих активности на премеру земљишта за потребе катастра као ни активности на одржавању већ извршеног премера. Предност је имало премеравање за потребе експропријације за изградњу разних инжењерских објеката.

Овакво стање донекле се променило 1952. године, када је Законом о друштвеном доприносу и порезима одређено да се опорезивање прихода од пољопривреде врши по катастру. Овакво решење имало је за последицу поновно приступање организованим радовима на детаљном премеру. Снимање је у почетку вршено класичним методама (ортогоналном и поларном) у размери 1:2500 за ванградске рејоне и 1:500 и 1:1000 за изграђене површине. Од 1960. године за премер већих површина користи се искључиво аерофотограметријска метода снимања (слика 1.7) уз паралелно коришћење класичних метода при допуни фотограметријског премера као и при одржавању постојећег премера.

Што се покривености Србије премером непокретности тиче могло би се рећи да је та покривеност готово стопроцентна. Велики допринос оваквом стању дали су и радови на комасацији земљишта (посебно у Војводини). Осим што је велики део државе покривен премером, треба истаћи да је више од 50% премера "млађе" од 60 година као и да је већи део премера израђен нумеричким методама. На основу ових показатеља може се закључити да Србија има веома квалитетан премер као мало која земља у Европи. На жалост, ако се посматра тренутно стање премера у погледу ажурности у односу на стање на терену и стања геодетске основе добија се сасвим другачији утисак. Наиме геодетска основа је застарела и нехомогена, десиле су се велике промене које нису регистроване. Овај заостатак, са традиционалном технологијом, веома је тешко надокнадити.



Слика 1.7. Катастарски план у размери 1:1000 израђен на бази аерофотограмметријског снимања

1.3. Тачност и поузданост података премера непокретности

Под тачношћу података премера непокретности углавном се подразумева тачност метричких података, односно тачност позиција тачака детаља. Ова тачност дуго година била је лимитирана расположивом технологијом односно методама за

масовно прикупљање просторних података. Због тога досадашњим прописима о катастарско-топографском премеру (премеру непокретности) захтевана тачност углавном није дефинисана на овај начин већ је имплицитно била дата прописивањем методологије којом се, на одређеном простору, премер имао обавити. Тако је за урбана подручја углавном бивала предвиђена ортогонална метода снимања детаља или ређе прецизна тахиметрија које су давале позициону тачност тачака детаља центиметарског нивоа, док је за ванградске рејоне предвиђана оптичка тахиметрија којом је остваривана за ред величине нижа тачност (дециметарског нивоа). На исти начин је дефинисан и квалитет неопходне геодетске основе за снимање детаља. Ова основа је успостављана неопходним линеарним и угловним мерењима, тако да су прописиване методе мерења у мрежама као и карактеристике геодетских мрежа у погледу геометрије.

Овај концепт у многоме је промењен појавом и брзим развојем фотограметрије као алтернативе "класичним" методама снимања, где је поред поштовања правилничких прописа морало бити примењено пројектовање радова за сваки појединачан случај уз поштовање одговарајућих стандарда. Такође, у савременим условима постоји могућност избора између више савремених технологија и поступака при извршењу премера непокретности па је процес пројектовања неопходан ради постизања жељених резултата уз најмање могуће трошкове.

Најновијим прописима о прикупљању података о непокретностима у Републици Србији захтеви тачности података премера прецизније су дефинисани (*Републички геодетски завод, 1996б*). Позициона тачност тачака детаља, у зависности од њиховог карактера и размере снимања детаља дата је у табели 1.1.

Табела 1.1. Захтевана тачност позиција тачака детаља премера непокретности (*Републички геодетски завод, 1996б*)

Размера плана	1:500	1:1000	1:2000	1:2500	1:5000
Стандард положаја граничних тачака парцела [m]	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
Стандард положаја осталих тачака детаља [m]	0.08	0.15	0.20	0.25	0.30
Стандард висина тачака детаља [m]	0.05	0.10	0.15	0.18	0.30
Еквидистанција изохипса [m]	0.5	1.0	2.0	2.5	5.0

Поузданост података премера подразумева степен поверења у сваки појединачни податак односно његову контролу. Наиме, при концепту премера и катастра непокретности као евиденција од потпуног јавног поверења неопходан је што већи степен поузданости добијених податка, што подразумева извршење контролних мерења за све правно релевантне податке премера непокретности. Тако се, за одређене категорије горе наведених тачака детаља (граничне тачке парцела и изграђених објеката), предвиђају контролна мерења (хоризонталне дужине – фронтови између суседних тачака).

Пројектовање радова на премеру непокретности подразумева дефинисање геодетске основе за снимање детаља, избор методе позиционирања и прописивање методологије прикупљања података као и начин интеграције прикупљених података у постојеће базе података премера и катастра непокретности. Велику улогу у свим овим поступцима има економски фактор односно цене коштања ових радова по фазама све до њихове презентације. У савременим условима, питање финансирања постало је централно обзиром на немогућност државе, па ма колико богата она била, да финансира све активности на прикупљању података и одржавања премера и катастра непокретности. У основи, може се усвојити приступ да је држава (сви порески обвезници равноправно) инвеститор иницијалне фазе, односно успостављања премера непокретности на државној територији, док одржавање финансирају корисници податка премера и катастра непокретности, односно странке које изазову промене у односу на иницијално стање.

1.4. Предмет, циљ и стање истраживања

Коришћење активне геодетске основе у циљу позиционирања тачака премера непокретности заступљено је уназад неколико година и још увек је предмет истраживања у смислу разраде теренских процедура као и повезивања добијених података са подацима премера непокретности прикупљеним раније и израженим у Државном координатном систему (локалном). Активна геодетска референтна основа Србије (АГРОС) комплетирана је 2005. године и пружа корисницима три основна сервиса за позиционирање терестричких тачака (*Одаловић и Алексић 2004*):

1. АГРОС RTK омогућује позиционирање терестричких тачака у реалном времену применом кинематичког GPS позиционирања са тачношћу 0.02 – 0.03 m. Примена овог сервиса огледа се у непосредном позиционирању тачака детаља премера непокретности као и позиционирању тачака пасивне геодетске основе за снимање детаља.
2. АГРОС DGPS омогућује позиционирање терестричких тачака у реалном времену применом диференцијалног GPS позиционирања са тачношћу 0.5 – 3.0 m. Овај сервис намењен је углавном негеодетским корисницима.
3. АГРОС PP намењен је за прецизно позиционирање тачака пасивне геодетске основе (референтних тачака) или за позиционирање контролних тачака при пројектовању и реализацији инжењерских објеката.

Економичност позиционирања тачака пасивне геодетске основе и тачака детаља премера непокретности коришћењем активне геодетске референтне основе, у великом броју случајева, надмашује терестричке технике као и примену класичног релативног кинематичког GNSS позиционирања. Резултати премера непокретности добијени применом АГРОС односе се на тродимензионални координатни систем реализован перманентним станицама (геоцентрични).

Проблем повезивања (трансформације) добијених података са подацима премера непокретности израженим у Државном координатном систему (ДКС) тренутно се решава парцијалним рачунањем параметара трансформације за сваки појединачни пројекат или катастарску административну јединицу, што има за последицу умањење економичности примене система за глобално позиционирање у процесу прикупљања података премера непокретности као и геодетске конзистентности добијених података. Поред тога, све већа примена метода позиционирања терестричких тачака применом GNSS доводи до потребе замене постојећег Државног координатног система и трансформације постојећих података премера непокретности у нови GNSS конзистентан систем заснованом на ITRS. Према томе, развој јединственог модела трансформације просторних података између Државног координатног система и система у којем је реализована АГРОС постала је ургентна потреба.

Предмет истраживања ове тезе јесте развој националног модела трансформације података премера непокретности добијених применом АГРОС у Државни координатни систем који би био јединствен за целу државну територију и обезбедио:

- ефикасно и једноставно добијање позиција тачака геодетске основе и тачака детаља у Државном координатном систему (ДКС) и
- трансформацију постојећих података премера непокретности у ново усвојени геодетски референтни систем реализован применом GNSS.

Национални модел трансформације података премера непокретности између геоцентричног геодетског референтног система и националног негеоцентричног геодетског референтног система реализованог терестричким техникама позиционирања треба да задовољи следеће критеријуме (*Collier u др.* 1998):

1. **Једноставност**, да би се омогућило широко разумевање и примена од стране корисника,
2. **Ефикасност**, да би се минимизирало време и ресурси потребни за рачунање,
3. **Јединственост**, да би позицији сваке тачке у једном систему кореспондирала само једна вредност координата у другом систему и
4. **Тачност**, да би се добили најбољи могући резултати трансформације на основу расположивог узорка просторних података.

Истраживање је ограничено на решавање дводимензионалног (положајног) проблема, због немогућности да се на јединствен начин моделира однос између система висина које су у употреби за премер непокретности и елипсоидних висина добијених применом GNSS. Наиме, велики број тачака узорка просторних података на основу којег је истраживање извршено није имао познате висине у официјелном систему висина премера непокретности. За решавање овог проблема на кредибилан начин неопходно је прикупити већи број података и вероватно извршити додатна

одређивања да би се официјелни систем висина (висине у употреби) одређеније дефинисао.

Уобичајени поступци датумске трансформације, као што је н. пр. седмопараметарска трансформација сличности, не даје задовољавајућу тачност за већа подручја због неизбежних присуства дисторзија (изобличења) у геодетском референтном оквиру реализованом терестричким техникама (*Collier и др.* 1998, *Jäger и др.* 2003) узрокованих у првом реду слабом условљеношћу геодетских мрежа реализованих терестричким техникама. Међутим, ове дисторзије могу се, применом одговарајућих поступака, на одговарајући начин моделирати и отклонити. Поступци за моделирање и отклањање дисторзија просторних података укључују:

- вишеструку регресију (*Applebaum* 1982),
- моделирање површи минималне закривљености (*Briggs* 1974, *Dewhurst* 1990),
- колокацију по методи најмањих квадрата (*Mikhail* 1976, *Moritz* 1980, *Михаиловић* 1984, *Марковић* 1990, *Collier* 2002) и
- моделирање дисторзија просторних података поделом подручја трансформације на коначне елементе (*Jäger и др.* 2003).

Имајући у виду да дисторзије просторних података могу бити веома комплексне и веома променљиве, јасно је да прва два модела не могу пружити највећу тачност при њиховом моделирању и отклањању. Следећи искуства при решавању овог проблема у неким развијеним земљама (Немачка, Шпанија, Аустралија), у овом раду истражене су могућности моделирања дисторзија просторних података изражених у Државном координатном систему поделом подручја трансформације на коначне елементе као и колокацијом по методи најмањих квадрата.

2. ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ ПОЗИЦИОНИРАЊА ТЕРЕСТРИЧКИХ ТАЧАКА ПРИМЕНОМ АКТИВНЕ ГЕОДЕТСКЕ РЕФЕРЕНТНЕ ОСНОВЕ

2.1. Конвенционални терестрички референтни системи

Позиционирање терестричких тачака применом GNSS захтева јединствен глобални геодетски датум базиран на Конвенционалном терестричком референтном систему (Conventional Terrestrial Reference System, CTRS). CTRS је геоцентричан и дефинисан је средњим положајем земљиног северног пола у периоду 1900. – 1905. година и геодетском дужином 0° у меридијанској равни Гриничке опсерваторије (слика 2.1). CTRS је фиксиран за земљино тело тако да се креће и ротира заједно са Земљом.

Три релевантна вида CTRS су (*Bruyninx* 2002):

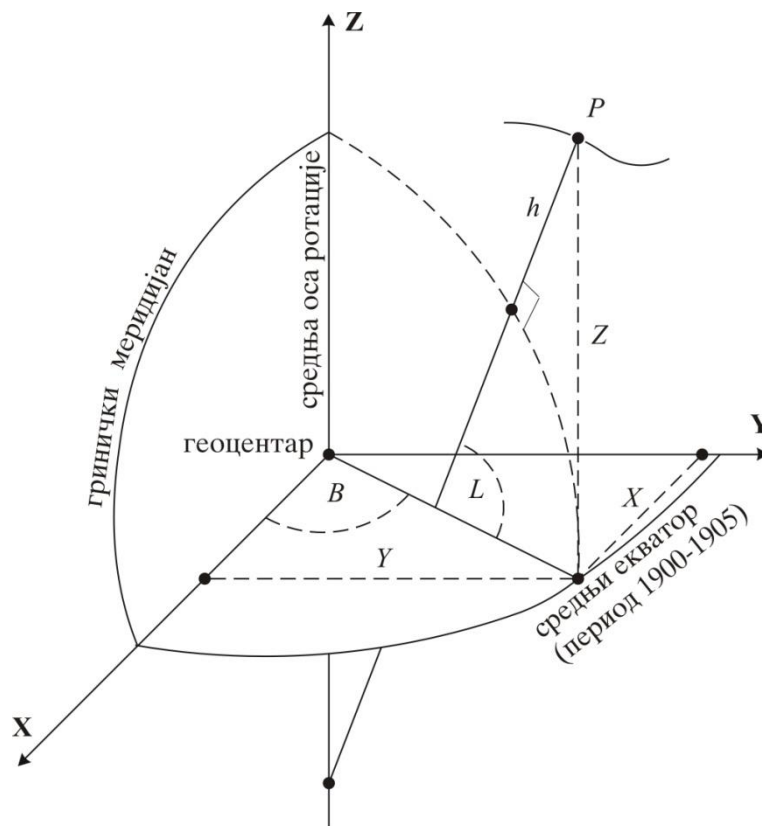
1. Међународни терестрички референтни систем (International Terrestrial Reference System, ITRS), установљен од стране Међународне службе за земљину ротацију (International Earth Rotation Service, IERS);
2. Светски геодетски систем 1984 (World Geodetic System 1984, WGS84) установљен за потребе Глобалног позиционог система (Global Positioning System, GPS) од стране Америчке агенције за картографију (US National Imagery and Mapping Agency, NIMA) и Министарства одбране САД (US Department of Defence, DoD) и
3. Параметри земље 90 (Параметри Земљи 1990, ПЗ90), установљен за потребе система за глобално позиционирање Руске федерације, ГЛОНАСС.

2.1.1. Међународни терестрички референтни систем

Међународна астрономска унија (International Astronomical Union, IAU) и Међународна унија за геодезију и геофизику (International Union of Geodesy and Geophysics, IUGG) успоставиле су 1987. године Међународну службу за земљину ротацију (International Earth Rotation Service, IERS). Један од примарних циљева IERS је да установи, реализује и одржава Међународни терестрички референтни систем (International Terrestrial Reference System, ITRS). Основне карактеристике ITRS су:

- координатни почетак коинцидира са центром масе Земље, заједно са океанима и атмосфером,
- оријентација фундаменталне равни коинцидира са средњим положајем екватора за период 1900. – 1905. година и

2. Основни принципи позиционирања терестричких тачака применом Активне геодетске референтне основе



Слика 2.1. Конвенционални терестрички референтни систем

- основни правац дефинисан је пресеком меридијанске равни Гриничке опсерваторије и екваторијалне равни.

Тачке на физичкој површи Земље дефинисане су Descartes-овим координатама (X, Y, Z) . Да би се позиције тачака на физичкој површи земље могле изразити и елипсоидним (геодетским) координатама (геодетска дужина B , геодетска ширина L и елипсоидна висина h), оваквом систему придружује се обртни елипсоид за центром у координатном почетку. Референтни елипсоид придружен ITRS дефинисан је Геодетским референтним системом 1980 (Geodetic Reference System 1980, GRS80) са параметрима датим у табели 2.1, (Moritz 1992).

У пракси, ITRS је реализован Међународним терестричким референтним оквиром (International Terrestrial Reference Frame, ITRF). ITRF се састоји од скупа терестричких станица са координатама $X(t), Y(t), Z(t)$ и брзинама $V_X(t), V_Y(t), V_Z(t)$ где параметар t представља епоху одређивања. Ове тачке одређене су различитим космичким техникама (Bruyninx 2002), као што су:

- Very Long Base Interferometry (VLBI),
- Lunar Laser Ranging (LLR),
- Global Navigation Satellite Systems (у овом тренутку GPS и ГЛОНАСС системи),
- Satellite Laser Ranging (SLR) и

– Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite (DORIS).

Табела 2.1: Параметри елипсоида GRS80, WGS84 и ПЗ90

Параметар	Опис	GRS80	WGS84	ПЗ90
a	Велика полуоса	6378137 m	6378137 m	6378136 m
f	Сплљоштеност	$3.35281068118 \cdot 10^{-3}$	$3.35281066475 \cdot 10^{-3}$	$3.35280374302 \cdot 10^{-3}$
ω_z	Угловна брзина ротације земље	$7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$	$7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$	$7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$
GM	Земљина гравитациона константа	$3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	$3986004.418 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	$3986004.4 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
$b = a - fa$	Мала полуоса	6356752.3141 m	6356752.3142 m	6356751.3617 m
$e^2 = 2f - f^2$	Први нумерички ексцентрицитет	$6.69438002290 \cdot 10^{-3}$	$6.69437999013 \cdot 10^{-3}$	$6.694366193 \cdot 10^{-3}$
$e'^2 = \frac{2f - f^2}{(1 - f)^2}$	Други нумерички ексцентрицитет	$673949677548 \cdot 10^{-3}$	$6.73949674226 \cdot 10^{-3}$	$6.73948275864 \cdot 10^{-3}$

Постоји више реализација ITRF са називима ITRF88, ITRF89, . . . , ITRF2005, респективно. Свака од њих представља унапређење у односу на претходну у смислу броја укључених станица и периода опажања са циљем добијања поузданих вредности координата и брзина тачака.

Брзине терестричких тачака $\mathbf{V}(t)$ описују ефекте померања земљине коре. Уколико су познате координате тачке у епохи t_0 ,

$$\mathbf{X}(t_0) = \{X(t_0), Y(t_0), Z(t_0)\} \quad (2.1)$$

и њена брзина

$$\mathbf{V}(t_0) = \{V_x(t_0), V_y(t_0), V_z(t_0)\}, \quad (2.2)$$

координате тачке у епохи опажања t могу се израчунати по формули:

$$\mathbf{X}(t) = \{X(t), Y(t), Z(t)\} = \mathbf{X}(t_0) + \mathbf{V}(t_0) (t - t_0) \quad (2.3)$$

ITRF2005 реализован је 2006. године и састоји се од преко 500 тачака распоређених широм света од којих више од 100 на европском континенту. Између различитих реализација ITRFу могућа је седмопараметарска трансформација сличности

$$\mathbf{X}_{уу2} = \mathbf{X}_{уу1} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & -R_z & R_y \\ R_z & D & -R_x \\ -R_y & R_x & D \end{bmatrix} \mathbf{X}_{уу1} \quad (2.4)$$

2. Основни принципи позиционирања терестричких тачака применом Активне геодетске референтне основе

где су:

- T_x, T_y, T_z , параметри translације по кореспондентним координатним осама,
- R_x, R_y, R_z , параметри ротације око кореспондентних координатних оса и
- D параметар размере.

Ови параметри (од којих неки могу бити једнаки нули) доступни су код IERS.

2.1.2. Светски геодетски систем 1984

Светски геодетски систем 84 (World Geodetic System 84, WGS84) успостављен је од стране Америчке агенције за картографију (US National Imagery and Mapping Agency, NIMA) и Министарства одбране (US Department of Defence, DoD). Иницијална реализација WGS84 заснивала се искључиво на опажањима вештачких земљиних сателита система TRANSIT и њена тачност била је на нивоу од око 2 m.

Током времена квалитет реализације WGS84 је унапређиван. Прво усаглашавање између WGS84 и ITRS извршено је 1993. године, када је комплетна WGS84 мрежа прерачуната у односу на 8 GPS станица са фиксираним ITRF91 координатама (*Swift* 1994). Ова реализација позната је као WGS84 (G730) и сагласна је са ITRF92 на нивоу од 10 cm (*Malys u Slater* 1994).

Следеће усаглашавање координата станица GPS контролног сегмента извршено је 1996. године. Ова реализација означава се као WGS84 (G873) и показује сагласност са ITRF94 на нивоу бољем од 2 cm (*Malys u др* 1997). Ово има за последицу да се за већину практичних примена може сматрати да нема разлике између WGS84 и ITRS.

Најновије усаглашавање извршено је 2001. године (*Merrigan u др.* 2002) и носи ознаку WGS84 (G1150). Резултати усаглашавања показали су да WGS84 (G1150) практично коинцидира са ITRF 2000.

Параметри WGS84 обртног елипсоида (*United States National Imagery and Mapping Agency, NIMA, 1997*) дате су такође у табели 2.1. Из табеле 2.1 види се да су параметри GRS80 и WGS84 елипсоида веома слични и разлике се јављају само на милиметарском нивоу.

2.1.3. Параметри земље 1990

Параметри Земље 90 (Параметри Земљи 1990, ПЗ90) установљен је од стране владе Руске федерације (*Бойков и др* 1993) и користи се као номинални систем за потребе система за глобално позиционирање ГЛОНАСС (Глобална навигациона спутникова система).

Реализован је опажањима ГЕО–ИК геодетских сателита на 26 терестричких станица укључујући њихово фотографисање са звезданим небом у позадини, доплерска мерења, ласерска мерења дужина до сателита и сателитску алтиметрију. Одређивање такође укључује ласерско мерење дужина до ГЛОНАСС и ЕТАЛОН

(ЭТАЛОН) сателита. Подскуп ових станица користи се за емитовање ПЗ90 ГЛОНАСС сателитских орбита. Параметри система ПЗ90 приказани су у табели 2.1. Кроз различите опажање кампање (н. пр. IGEX–98) између референтних система ПЗ90 и WGS84 одређени су прецизни параметри тродимензионалне трансформације сличности, тако да је могуће користити податке опажања ГЛОНАСС сателита заједно са GPS сателитима и циљу прецизног позиционирања терестричких тачака (*Boucher и Altamimi 2001*).

2.1.4. Европски терестрички референтни систем

Основни недостатак глобалних геодетских референтних система (ITRS и WGS84) лежи у чињеници да, због померања тектонских плоча земљине коре, координате тачака имају променљиве вредности у времену (на територији већег дела Европе ове промене су реда 2 cm по години). Ова временска еволуција чини глобалне геоцентричне координате неподесним за практичне примене у геодетском премеру и изради планова и карата. Да би се овај проблем решио, IAG (International Association of Geodesy) и CERCO (Comité Européen des responsables de la Cartographie Officielle) одлучили су 1987. године да установе и реализују нови Европски геодетски референтни оквир (European Geodetic Reference Frame) заснован на GPS опажањима. Овај референтни оквир је континенталног нивоа и намена му је да послужи као основа за јединствене дигиталне базе података планова и карата широм Европе, односно да обједини националне референтне системе за геодетски премер, израду планова и карата, геоинформационе системе (Geoinformation Systems, GIS) и навигацију у Европи (*RETrig 1988*).

IAG подкомисије EUREF и CERCO сложили су се да нови Европски терестрички референтни систем 89 (European Terrestrial Reference System 1989, ETRS89) буде заснован на ITRF. Одабрано је 37 Европских SLR и VLBI станица чије су координате у епохи 1989.0 дефинисале прву реализацију ETRS89, названу ETRF89 (European Terrestrial Reference Frame 1989). Да би се избегле варијације координата у времену, одлучено је да ETRS89 ротира заједно са стабилним делом европске тектонске плоче тако да релативни односи између станица остану константни, што је од велике важности у практичним применама (*EUREF 1990*).

Од тог времена сукцесивне реализације ETRS89 израчунаване су из кореспондентних ITRF_{уу} реализација једноставном трансформацијом позиција тачака на позицију Европске тектонске плоче у епоху 1989.0. Ове ETRS89 реализације носе називе ETRF90, ETRF91, . . . , ETRF2000. Основне ITRF_{уу} станице усвајане су аутоматски за основне ETRF_{уу} станице. Систему ETRS89 придружен је GRS80 обртни елипсоид (табела 2.1).

Узимајући у обзир да се ETRF89 састојао од само 37 “основних” станица EUREF је одлучила да ETRF89 треба прогустити кроз GPS мерне кампање ограниченог времена трајања. Ове мерне кампање, типичног времена трајања од две недеље,

2. Основни принципи позиционирања терестричких тачака применом Активне геодетске референтне основе

континуирано се спроводе од 1989. године и укључиле су велики број станица широм европског континента.

Новембра 1999. године Европска комисија (European Commission, EC) је организовала саветовање “Spatial Reference Workshop” у Marne-La-Vallée (Француска). Основна тема скупа била је да се испитају могућности и питања везана за Европски референтни систем за просторне информације. Неке од основних одлука скупа биле су следеће препоруке за Европску комисију:

- да усвоји ETRS89 као геодетски датум за своје сопствене геореференциране податке и
- да промовише шире коришћење ETRS89 у свим државама чланицама Европске уније.

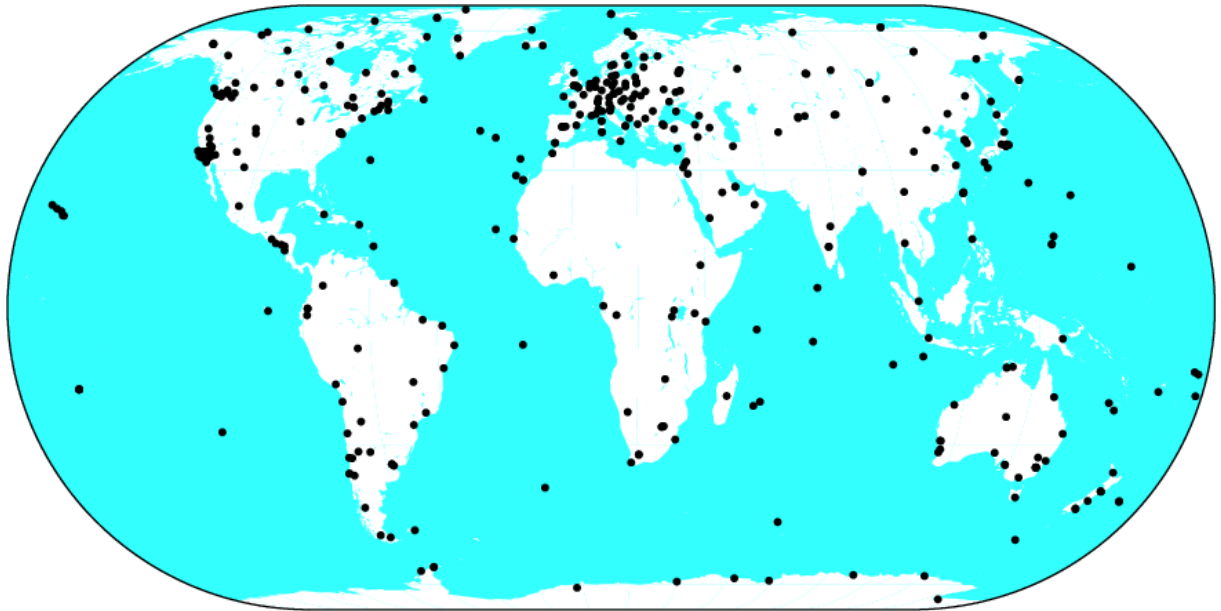
Ове препоруке значе да је ETRS89 постао “де факто” стандард Европске уније и да је развој модела трансформације између националних референтних система и ETRS89 постао ургентна потреба.

2.2. Перманентне GNSS мреже

Као што је раније речено, реализација ITRS делимично је заснована на GNSS опажањима. У ову сврху користе се перманентне GNSS опажачке станице широм света. Ове станице део су глобалне или регионалних GNSS мрежа.

2.2.1. Међународна GNSS служба

Међународна научна заједница учинила је од 1991. године значајан напор у промовисању међународних стандарда које се тичу прикупљања и анализе GNSS опажања. Овај напор има за резултат формирање Међународне GNSS службе (International GNSS Service, IGS, раније, International GPS Service). IGS је оперативан у пуном капацитету од 1994. године, под окриљем IUGG. Основни задатак IGS је да учини доступним неопходне податке за високотачне геодетске и геофизичке примене коришћењем GNSS. У овом тренутку IGS обухвата глобално распоређене перманентне станице (слика 2.2) и анализационе центре на којима се врше опажања и обрада података GPS односно GPS и ГЛОНАСС система, са планом да укључи и будуће видове GNSS.



Слика 2.2. IGS опажачка мрежа (извор <http://igs.cb.jpl.nasa.gov/>)

IGS је базиран на добровољном доприносу организација широм света и његови основни производи су:

- подаци опажања са IGS опажачких станица,
- високотачне позиције и брзине IGS станица,
- прецизне сателитске орбите и
- параметри ротације Земље: кретање полова и дужина дана.

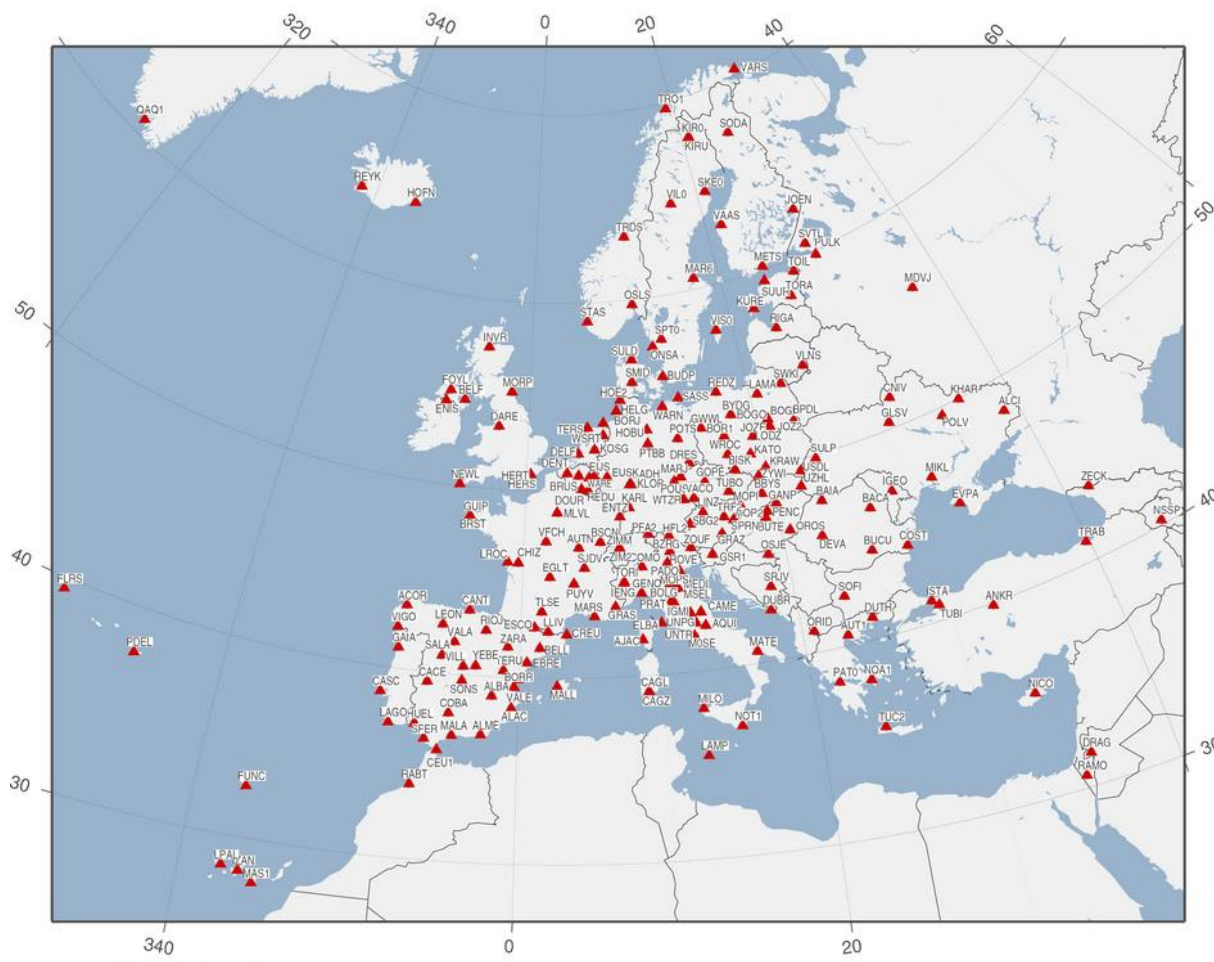
Од 1991. године резултати за позиције IGS станица укључени су у ITRS реализације. Према томе, све IGS станице су истовремено и “примарне” ITRFuу референтне станице.

2.2.2. EUREF перманентна мрежа

Године 1995. EUREF подкомисија закључила је да растући број перманентних GNSS станица широм Европе може бити искоришћен за побољшање IERS решења. Резултат је да је велики број ових станица уврштен у “примарне” ITRFuу и “примарне” ETRFuу станице. Јасно је да тачност “примарних” референтних станица чије су координате засноване на перманентним GNSS опажањима надилази тачност EUREF станица базираних на опажањима коначног времена трајања. Уз сагласност IGS, EUREF подкомисија је установила Европску перманентну GNSS мрежу (European Permanent GNSS Network, EPN) која се састоји од следећих компоненти:

- перманентне GNSS станице,
- локални центри за прикупљање података,

2. Основни принципи позиционирања терестричких тачака применом Активне геодетске референтне основе



Слика 2.3. Европска перманентна мрежа (European Permanent Network, EPN, извор <http://www.epncb.oma.be/>)

- регионални центри за прикупљање података,
- локални центри за анализу података,
- регионални центри за анализу података и
- координационог центра мреже.

У овом тренутку EPN чини више од 130 GNSS перманентних станица (слика 2.3). Да би биле уврштене у EPN, перманентне станице морају испунити строге EUREF спецификације у погледу квалитета података, континуитета и поузданости података, стабилизације GNSS антене и доступности документације.

GNSS подаци прикупљају се на дневној бази у локалним центрима за прикупљање података и шаљу у регионалне центре за прикупљање података. Локални анализациони центри врше рутинску обраду свих GNSS података. Резултати процесирања показују високотачну и конзистентну мрежу (± 3 mm по хоризонталној компоненти и ± 6 mm по компоненти елипсоидне висине).

Од 1997. године EPN доставља решења за координате и брзине тачака IERS у циљу доприноса ITRFuу реализацијама. Као резултат, EPN станице укључене су у ITRF97, ITRF2000 и ITRF2005 и формирају европски део “примарних” ITRS референтних

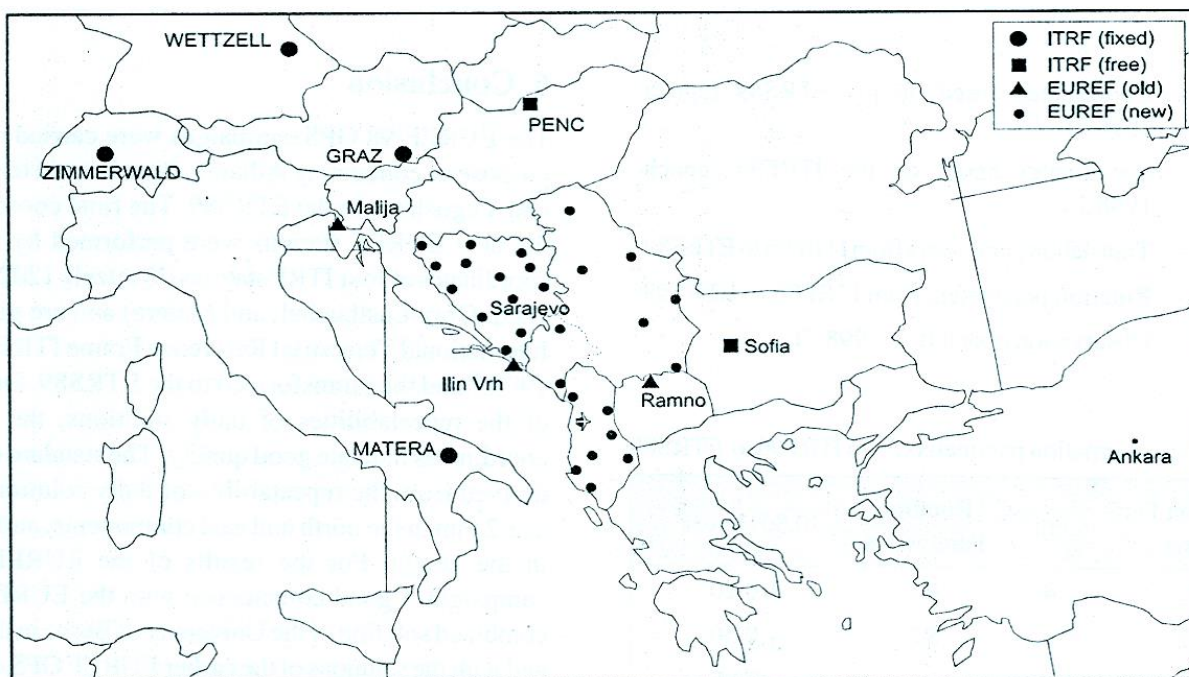
станица. Такође, урачунавањем ротације европске тектонске плоче од 1989. године, EPN станице формирају “примарну” ETRS89 мрежу.

2.3. Реализација ITRS у Србији

2.3.1. EUREF кампања Балкан 1998

Године 1998. реализована је EUREF мерна кампања Балкан '98. У мерну кампању укључено је (*Altiner и др 1999*) 6 перманентних EPN станица са координатама датим у систему ITRF96, три пасивне тачке одређене у претходним EUREF кампањама (на територији Словеније, Хрватске и Македоније) као и 29 нових EUREF станица (слика 2.4) на територији Албаније, Босне и Херцеговине, Црне Горе и Србије (бивше Савезне Републике Југославије). Од нових EUREF тачака, на територији Србије налази се 7 тачака (при чему је једна тачка у пограничном подручју Србије и Црне Горе) и у административном смислу носе назив YUREF тачке. За YUREF тачке изабрано је седам тачака Тригонометријске мреже 1. реда.

Мерења су извршена у периоду 04. – 09. септембар 1998. године GPS опажањима на свим станицама у 5 мерних сесија, трајања од по 24 сата уз коришћење двофреквентних GPS пријемника са интервалом регистрације података од 15 секунди и граничним елевационим углом од 15°. Обрада података и извршена је од стране Државне управе за картографију и геодезију Савезне републике Немачке



Слика 2.4. Диспозиција тачака EUREF кампање Балкан '98 (*Altiner и др 1999*)

2. Основни принципи позиционирања терестричких тачака применом Активне геодетске референтне основе

(Bundesamt für Kartographie und Geodäsie, BKG) у Франкфурту на Мајни, уз коришћење прецизних CODE (Center for Orbit Determination in Europe) сателитских ефемерида и софтвера за обраду GPS података Bernese 4.0.

Датум мреже дефинисан је EPN станицама Wettzell-1202 (Немачка), Matera (Италија), Graz-Lustbuehel (Аустрија) и Zimmerwald (Швајцарска) у систему ITRF96, епоха 98.7. Резултат рачунања биле су координате новоодређених тачака у систему ITRF96, епоха 98.7. Експерименталне стандардне девијације координата тачака одређених у оквиру кампање биле су реда 2 mm за хоризонталну компоненту и 6.5 mm за елипсоидну висину.

Трансформација координата из система ITRF96, епоха 98.7 у ETRS89 извршена је по формули (Altiner и др 1999)

$$\mathbf{X}_E(t_c) = \mathbf{X}_{yy}(t_c) + \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 0 & -R_X \\ -R_Y & R_X & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{yy}(t_c) (t_c - 1989.0) \quad (2.5)$$

где су:

$\mathbf{X}_E(t_c)$ – координате тачака у ETRS89 (епоха 1998.7),

$\mathbf{X}_{yy}(t_c)$ – координате тачака у ITRF96 (епоха 1998.7),

T_X, T_Y, T_Z – параметри translације,

R_X, R_Y, R_Z – параметри ротације и

$t_c = 1998.7$ – епоха опажања,

где су трансформациони параметри дати у Табели 2.2.

Табела 2.2. Трансформациони параметри између ITRF96 и ETRS89
(Altiner и др 1999)

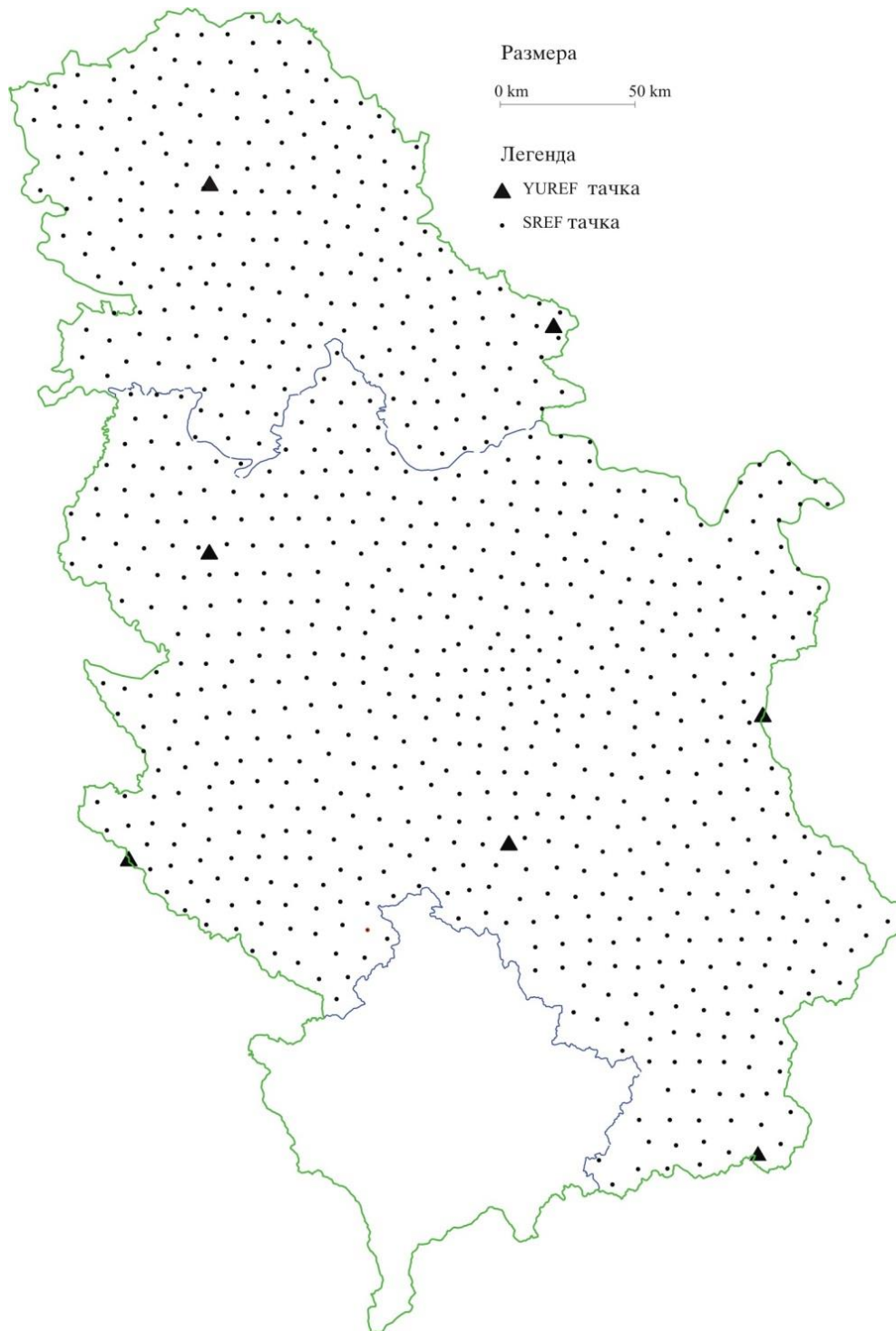
Параметри translације	cm	Параметри ротације	0.001"/година
T_X	+ 4.1	R_X	+ 0.20
T_Y	+ 4.1	R_Y	+ 0.50
T_Z	- 4.9	R_Z	- 0.65

У EUREF кампању Балкан 98 такође су укључене перманентне GNSS станице Ренс (Мађарска) и Софија (Бугарска) које су део EUREF недељних решења израчунатих на Универзитету у Берну (Швајцарска) као и пасивне EUREF станице Малија (Словенија), Илин Врх (Хрватска) и Рамно (Македонија). Ове станице укључене су као слободне и служиле су за упоређење резултата са ранијим одређивањима у систему ITRF96, епоха 98.7 (EUREF перманентне станице) односно у систему ETRS89, епоха 98.7 (раније одређене пасивне станице).

Због непостојања одговарајућих споразума резултати (координате новоодређених тачака у систему ETRS89) нису публиковани.

2.3.2. Државна референтна мрежа Републике Србије

Државна референтна мрежа републике Србије (слика 2.5) реализована је у периоду од 1997. до 2003. године. Мрежу чини укупно 838 трајно стабилованих тачака



Слика 2.5. Државна референтна мрежа Републике Србије (SREF)

2. Основни принципи позиционирања терестричких тачака применом Активне геодетске референтне основе

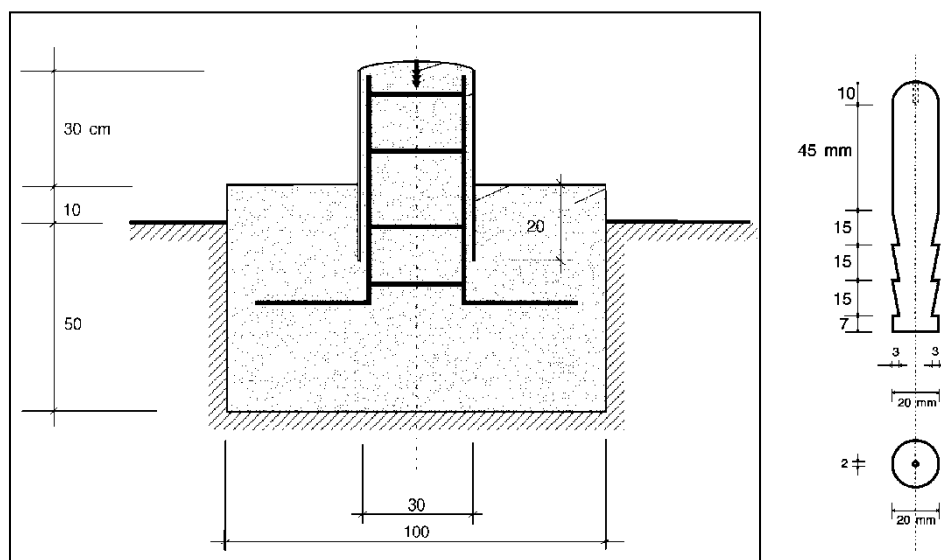
(Благојевић 2003) правилно распоређених по територији државе (изузимајући покрајину Косово и Метохију из политичких разлога). Уобичајен начин стабилизације тачака приказан је на Слици 2.6.

Мрежа је одређена на основу GPS релативних статичких опажања, коришћењем двофреквентних GPS пријемника. Одређено је укупно 1662 независна GPS вектора на бази мерних сесија у трајању 60 – 120 минута, при чему је уобичајено време трајања GPS мерне сесије било 90 минута. Геометрија мреже GPS вектора дефинисана је као систем затворених полигона, по правилу облика четвороугла, димензија око 10 km, формираних између суседних (најближих) тачака.

Рачунање координата тачака државне референтне мреже Републике Србије извршено је на основу изравнања резултата мерења GPS вектора по начину посредних мерења уз фиксирање координата 7 YUREF тачака у систему ITRF96, епоха 98.7.

На основу оцене тачности непознатих параметара из изравнања добијене су просечне вредности експерименталних стандардних девијација координата новоодређених тачака од 6 mm по компоненти хоризонталног положаја и 10 mm по компоненти елипсоидне висине.

Ова мрежа у званичној је употреби од 2003. године за решавање проблема позиционирања у премеру непокретности и инжењерским применама.



Слика 2.6. Начин стабилизације тачака државне референтне мреже

2.4. Мрежно GNSS позиционирање у реалном времену

Позиционирање у реалном времену, центиметарског нивоа тачности, базирано на GNSS опажањима развијено је средином 1990.-их и обично се назива RTK (Real Time Kinematic) позиционирање. Оно укључује референтни GNSS пријемник (пријемник чија је антена центрисана на тачки са познатим координатама) који резултате опажања GNSS сателита или корекције опажања континуирано шаље до

корисничког пријемника путем неке врсте комуникационе везе (н. пр. VHF или UHF радио везе односно путем мреже мобилне телефоније). Обрада података у корисничком пријемнику подразумева решавање неодређености диференцираних фазних GNSS опажања (фазне неодређености) и оцену компоненти базног вектора у односу на референтни GNSS пријемник.

Један значајан недостатак оваквог приступа је да максимално растојање између референтног и корисничког пријемника не може бити веће од 10 до 20 km да би се неодређености фазних псеудодужина могле решити брзо и поуздано. Ово ограничење проузроковано је систематским утицајима зависним од растојања као што су грешке сателитских орбита, јоносферско и тропосферско кашњење GNSS сигнала (јоносферска и тропосферска рефракција). Ови утицаји могу се, међутим, прецизно моделирати коришћењем мреже GNSS референтних станица које окружују позицију корисничког пријемника. У овом случају говори се о мрежној (мултибазној) техници RTK позиционирања.

Развој RTK позиционирања у претходном периоду резултирао је успостављањем сервиса RTK позиционирања (активне геодетске референтне основе) који континуирано снабдевају референтним GNSS подацима све кориснике на подручју које активна геодетска референтна основа покрива. У циљу успостављања оваквог сервиса на ширем подручју (подручју целе државе) потребно је поставити и одржавати велики број перманентних референтних станица. Развој технике мултибазног (мрежног) RTK позиционирања омогућио је значајно редуковање овог броја (Wanninger 2004) са око 30 перманентних GNSS станица на 10000 km² у случају RTK позиционирања у односу на појединачну референтну станицу на 5 до 10 перманентних GNSS станица на 10000 km² у случају мрежног RTK позиционирања. Обрада података у процесу мрежног RTK позиционирања састоји се од три одвојене фазе (слика 2.7).

Прва фаза подразумева решавање фазних неодређености на референтним станицама. Само опажања са фиксираним неодређеностима могу бити коришћена за прецизно моделирање утицаја зависних од растојања. Велика растојања између референтних станица (50 до 100 km па и више) и захтев да се неодређености фиксирају у реалном времену чине овај корак главним изазовом у процесу мрежног RTK позиционирања. Олакшавајућа околност у овом случају је да су координате референтних станица прецизно познате. Све потешкоће узроковане су грешкама опажања па се морају користити све а priori информације које могу редуковати ове утицаје (Wanninger 2004):

- прогнозиране IGS сателитске ефемериде,
- јоносферске и тропосферске корекције засноване на текућим резултатима обраде података у мрежи,
- корекције за вишеструке путање GNSS сигнала изведене из претходне обраде података у мрежи и

2. Основни принципи позиционирања терестричких тачака применом Активне геодетске референтне основе

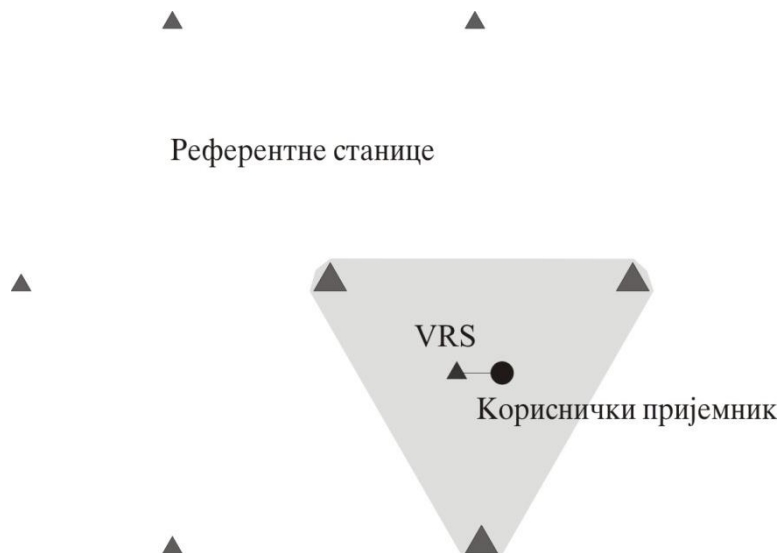
- корекције фазног центра антене на основу калибрације GNSS антена.

У другој фази оцењују се коефицијенти корекционог модела. За моделирање (или интерполацију) утицаја зависних од растојања између тачака у мрежи и корисничког пријемника развијено је неколико техника (*Dai и др. 2001, Fotopoulos и Cannon 2001*) као што су:

- метод линеарне интерполације (Linear Interpolation Method, LIM), (*Wanninger. 1995*),
- модел линеарних комбинација (Linear Combination Model, LCM), (*Han и Rizos 1996, 1997*),
- метод линеарне интерполације на бази растојања (Distance – based linear Interpolation Method, DIM), (*Gao и др. 1997, Gao и Li 1998*),
- модел полинома нижег степена (Low–order Surface Model, LSM), (*Wübbena и др. 1996, Fotopoulos и Cannon 2000*),
- колокација по методи најмањих квадрата (Least–Squares Collocation, LSC), (*Raquet и Lachapelle 2001*).

Јоносферски утицаји и утицаји грешака сателитских ефемерида морају се моделирати посебно за сваки сателит. Тропосферски утицаји могу се, међутим, оцењивати по станицама. Добро је одвојити дисперзивне (јоносферски утицаји) од недисперзивних утицаја (тропосферски утицаји и грешке сателитских ефемерида, који се некада називају и “геометријски”), пошто јоносферски утицају показују много веће краткoпериодичне варијације у односу на остале утицаје зависне од растојања. Према томе, јоносферске корекције морају бити ажуриране (достављене корисницима) много чешће, обично сваких 10 секунди, док корекције за остале утицаје могу бити ажуриране сваких 60 секунди. Поред тога, у циљу коректног моделирања локалних утицаја јоносферске рефракције, подручје моделирања треба да буде мало т.ј. модел јоносферских корекција може се базирати на опажањима са само три најближе референтне GNSS станице које окружују позицију корисничког пријемника. Са друге стране квалитет модела геометријских утицаја бољи је када се користи већи број референтних GNSS станица (слика 2.7).

У трећој фази израчунава се оптималан скуп референтних опажања на основу опажања изабране **базне референтне станице** (на пример оне која је најближа позицији корисничког пријемника) као и прецизан модел корекција за утицаје зависне од растојања. На основу корекционог модела и хоризонталних координатних разлика између базне референтне станице и апроксимативне позиције корисничког пријемника референтна опажања се виртуално померају на



Слика 2.7. Позиционирање у мрежи референтних станица

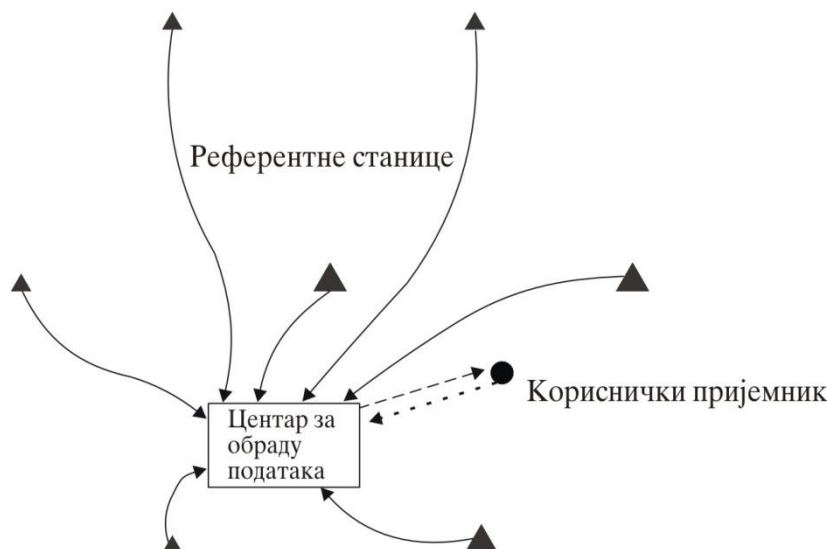
позицију блиску позицији корисничког пријемника. Ово резултира опажањима у односу на виртуелну референтну станицу (Virtual Reference Station, VRS), која се користе да би кориснички пријемник прецизно одредио своју позицију процесирањем (обработом података) за кратку базну линију у односу на VRS (слика 2.7).

Постојећи RTK мрежни позициони сервиси садрже један или више центара за обраду података где се подаци опажања са перманентних референтних станица прикупљају и обрађују (слика 2.8). Обрада података састоји се најмање од решавања фазних неодређености опажања у GNSS мрежи у реалном времену. Овај поступак тече упоредо са ригорозном контролом квалитета података. Поред тога, на основу прикупљених података, контролише се просторна стабилност антена референтних станица. Даљи кораци у обради података могу се вршити у центру за обраду података или у самом корисничком пријемнику у зависности од изабране комуникационе везе и формата података које GNSS мрежа шаље корисницима.

Слика 2.9. приказује четири могућа начина како информације RTK мреже могу бити достављене кориснику. Ови приступи разликују се у смислу где се одређене фазе обраде података врше, у центру за обраду података или их врши сам корисник. Ово утиче на садржај и формат поруке са подацима која се шаље кориснику а такође и на селекцију погодне комуникационе везе. Поступци (В) и (Г) практично се користе у постојећим RTK мрежама док је поступак (Б) у фази испитивања.

(А) Опажања неколико референтних станица: Кориснички пријемник добија податке GNSS опажања са неколико референтних станица које окружују његову позицију у RTCM ([The Radio Technical Commission for Maritime Services](#)) формату (RTCM 2001). По решавању неодређености фазних података мреже, кориснички пријемник је у могућности да израчуна мрежне корекције или чак VRS опажања за

2. Основни принципи позиционирања терестричких тачака применом Активне геодетске референтне основе



Слика 2.8. Токови података при мрежном RTK позиционирању

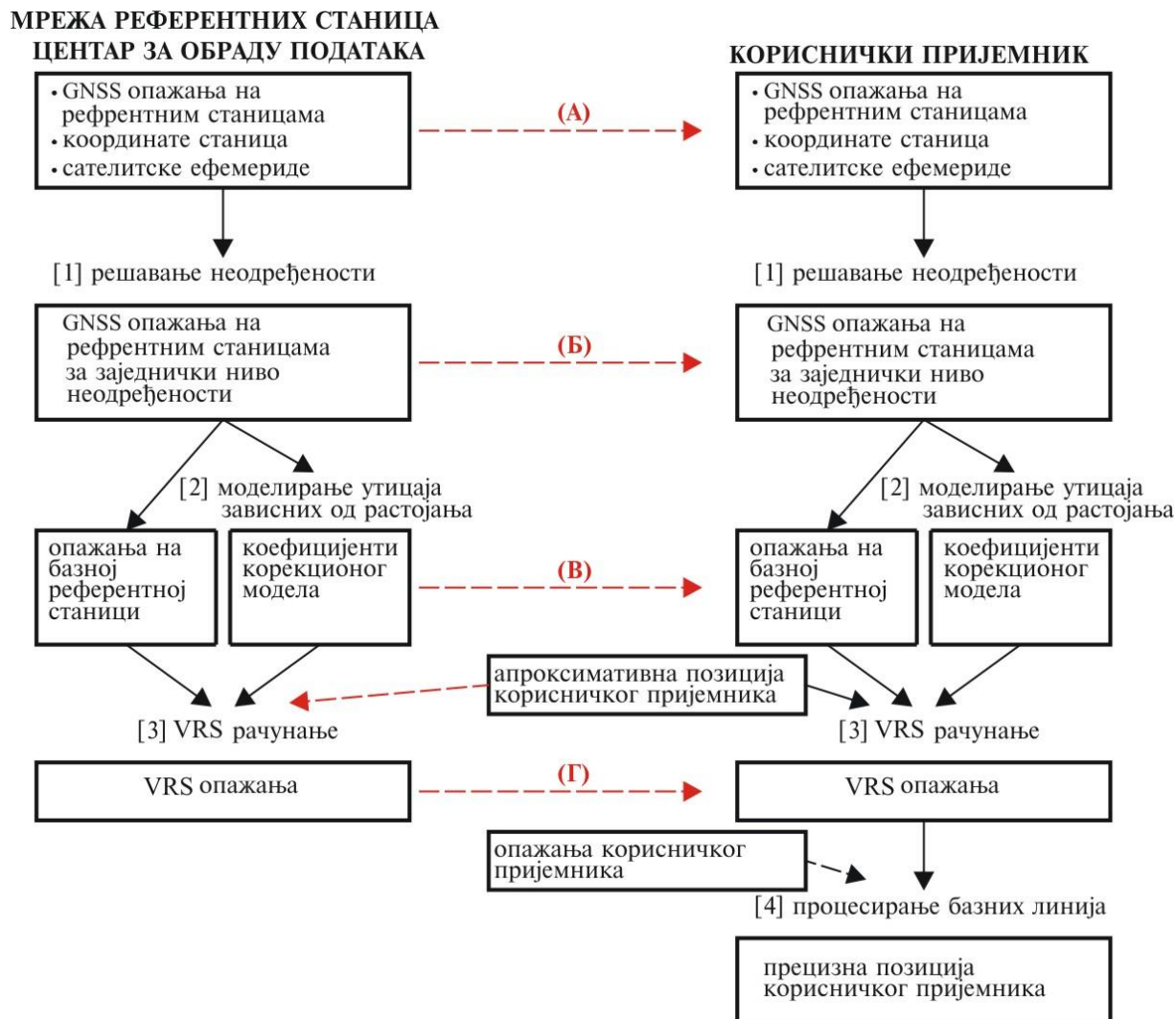
сопствену апроксимативну позицију. Основни недостатак овог приступа односи се на решавање неодређености фазних мерења у мрежи које обично захтева иницијализацију у трајању од неколико минута.

(Б) **Опажања у мрежи на јединственом нивоу фазних неодређености:** RTK мрежа доставља кориснику GNSS опажања базне референтне станице и разлике опажања између додатних референтних станица и базне референтне станице, које се односе на јединствени ниво фазних неодређености.

Кориснички пријемник врши интерполацију и према томе добија мрежне корекције као и важне информације о њиховом квалитету. Кориснички пријемник је онда у стању да израчуна VRS опажања и сопствену позицију обрадом података за кратку базну линију. Неопходан формат података је RTCM верзија 3.1 (*Euler 2005, RTCM 2006*).

(В) **Коефицијенти корекционог модела:** Емитовање GNSS опажања базне референтне станице и коефицијената корекционог модела за утицаје зависне од растојања. Кориснички пријемник примењује корекционе моделе на податке опажања базне референтне станице по аргументу координатних разлика између сопствене апроксимативне позиције и позиције базне референтне станице и, према томе, добија VRS опажања за сопствену позицију. Неопходан формат података још увек није стандардизован, иако постоји споразум произвођача опреме о RTCM верзија 2.3 формату, порука 59 која садржи овакве информације (*Wübbena u Bagge 2002*).

(Г) **Опажања виртуелне референтне станице (VRS):** Корисник шаље своју апроксимативну позицију у центар за обраду података и као одговор добија VRS опажања (RTCM верзије 2.1–2.3 или 3.0–3.1, (*RTCM 2001, 2006*) које затим користи



Слика 2.9. Блок схема начина обраде података при мрежном RTK позиционирању за обраду података кратке базне линије. Ово је, у овом тренутку, најраширенији поступак мрежног RTK позиционирања из разлога што не захтева специјализовани софтвер за кориснички пријемник. Недостатак овог приступа је што, генерално, нема информација о квалитету интерполационог поступка и према томе о квалитету VRS опажања. Поред тога, овај метод захтева двосмерну комуникацију између центра за обраду података и корисничког пријемника.

Мрежно RTK позиционирање у реалном времену пружа много поузданије информације у односу на RTK позиционирање са само једном референтном станицом. Још један важан нуспродукт мреже перманентних станица је праћење деформација релативних односа референтних станица из података GNSS опажања као и праћење јоносферских и тропосферских утицаја.

Уназад неколико година развијена је прва генерација мрежних RTK сервиса и практично успостављена у многим државама. Ови сервиси показали су практичну вредност и користе се од стране широког спектра корисника. Мрежно RTK

позиционирање наметнуло се као основни метод прецизног позиционирања у реалном времену применом GNSS.

2.5. Структура и сервиси позиционирања Активне геодетске референтне основе Србије (АГРОС)

Основна циљ успостављања активне геодетске референтне основе је омогућавање приближно тренутног (у реалном времену) позиционирања терестричких тачака, центиметарског нивоа тачности, коришћењем само једног GNSS пријемника. Активна геодетска референтна основа подразумева скуп правилно распоређених референтних станица, са прецизно одређеним координатама у конвенционалном терестричком референтном систему, на којима се континуирано врше GNSS опажања (перманентне GNSS станице). Подаци GNSS опажања континуирано се прослеђују у један или више центара где се подаци обрађују и креирају одговарајући сервиси позиционирања за различите класе корисника. Према томе, активна геодетска референтна основа подразумева три основна сегмента:

- перманентне GNSS станице,
- комуникациони сегмент и
- центар за обраду података.

Активна геодетска референтна основа Србије (АГРОС) успостављена је у периоду од 2003. до 2005. године. АГРОС се састоји од укупно 31 перманентне GNSS станице (слика 2.8). Карактеристичне вредности за удаљеност између суседних (најближих) перманентних GNSS станица АГРОС су следећи:

- минимално: $d_{\min} = 28.3 \text{ km}$,
- максимално: $d_{\max} = 67.7 \text{ km}$ и
- просечно: $d_{\text{сред}} = 46.3 \text{ km}$.

Донекле неравномеран распоред перманентних GNSS станица условљен је доступношћу телекомуникационе инфраструктуре као и фактора економичности у погледу инсталације и одржавања опреме (расположивости погодних просторија и квалификованог персонала). У том смислу перманентне GNSS станице инсталиране су углавном при локалним службама за катастар непокретности Републичког геодетског завода Србије. Ипак, може се рећи да диспозиција перманентних GNSS станица АГРОС омогућава квалитетно покривање предвиђеним сервисима GNSS позиционирања преко 90% државне територије (са изузетком покрајине Косово и Метохија).

Координате референтних станица одређене су на основу GPS опажања на фреквенцијама L1 и L2 са интервалом регистрације 15 секунди. За одређивање



Слика 2.10. Диспозиција перманентних станица АГРОС

вектора између перманентних референтних станица коришћени су блокови GPS опажања на перманентних станицама у трајању од 24 часа из периода 05.12. – 09.12.2005. године. На основу ових опажања одређено је укупно 76 независних GPS вектора између суседних перманентних станица АГРОС.

Мрежа перманентних станица АГРОС повезана је са тачкама YUREF одређивањем шест GPS вектора између тачака YUREF и најближих перманентних станица. Ови вектори одређени су на основу GPS опажања на фреквенцијама L1 и L2 у трајању од приближно 3 часа са интервалом регистрације 15 секунди. Изравнањем овако формиране GPS мреже, уз фиксирање координата тачака YUREF, добијене су координате перманентних станица у систему ITRF98.7 са стандардним

2. Основни принципи позиционирања терестричких тачака применом Активне геодетске референтне основе

девијацијама од 0.29 – 0.42 cm по компоненти положаја и 0.35 – 0.81 cm по компоненти елипсоидне висине.

Комуникација између перманентних станица и Центра за обраду података врши се путем мреже фиксне телефоније док се комуникација између корисника и Центра за обраду података врши путем мреже мобилне телефоније (GSM или GPRS технологија) у случају GNSS позиционирања у реалном времену односно путем интернета у случају достављања или преузимања података за накнадну обраду.

Активна геодетска референтна основа Србије у комерцијалној је употреби од краја 2005. године и корисницима обезбеђује три основна сервиса GNSS позиционирања описана у поглављу 1.

Сервис АГРОС RTK могућ је у три режима рада:

1. RTK позиционирање у односу на најближу перманентну станицу АГРОС са којом кориснички пријемник директно комуницира и преузима податке неопходне за стандардно позиционирање у реалном времену у RTCM формату;
2. Преузимање мрежних корекција најмање шест најближих перманентних станица (сервис RTCM3Net) при чему се интерполација и израчунавање VRS опажања врши кориснички пријемник;
3. Преузимање VRS опажања за апроксимативну позицију корисничког пријемника.

Тачност GNSS позиционирања применом сервиса АГРОС RTK у границама је од 2 cm до 3 cm при чему треба рећи да, код стандардног RTK позиционирања у односу на најближу перманентну станицу, она зависи од растојања између перманентне станице и корисничког пријемника.

Сервис АГРОС PP односи се на накнадну обраду статичких GNSS опажања и такође је могућ у више режима рада:

1. Аутоматска обрада у Центру за обраду података при чему корисник прослеђује своје податке опажања а као одговор добија извештај о обради који укључује податке са најмање 5 најближих перманентних станица;
2. Аутоматско преузимање података за обраду (т.з.в iGATE протокол) при чему обраду врши корисник и
3. Преузимање података GNSS опажања са перманентних станица у периоду опажања по избору корисника.

Овај сервис намењен је за позиционирање тачака пасивне геодетске основе премера непокретности или контролних тачака у инжењерским применама.

3. ТРАНСФОРМАЦИЈЕ КООРДИНАТА И ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ДАТУМА

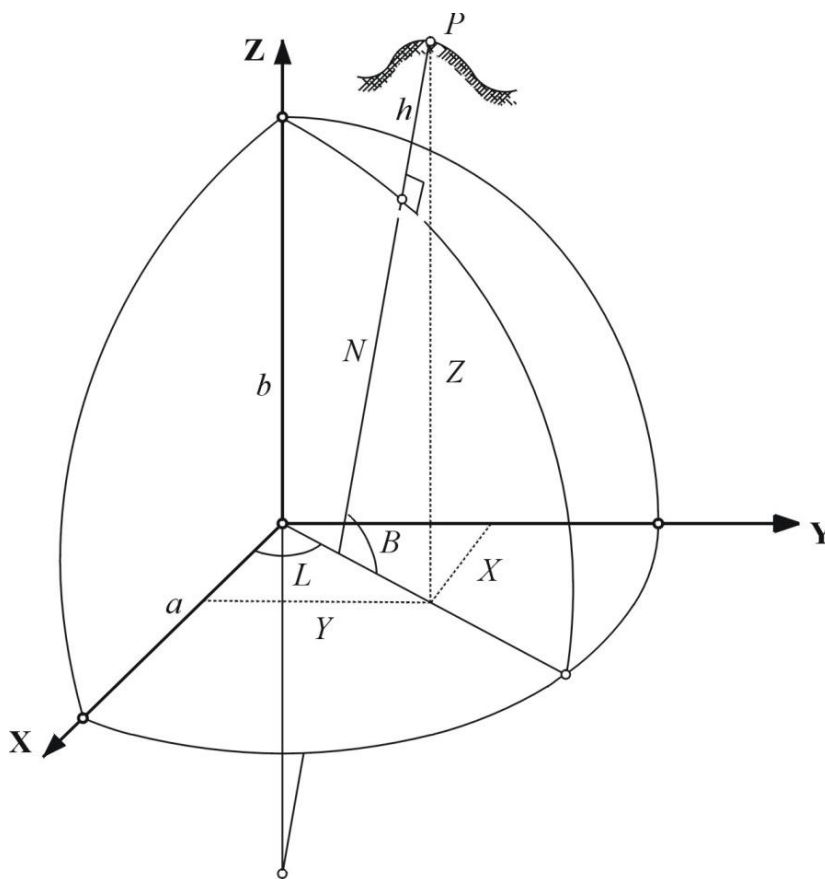
Једна терестричка тачка може бити репрезентована различитим типовима координата у оквиру истог геодетског референтног система. Резултат позиционирања терестричких тачака применом GNSS су геоцентричне координате (X, Y, Z) . Поред ових координата, од значаја за примене у премеру непокретности су још и геодетске (криволинијске) координате, геодетска ширина B , геодетска дужина L и елипсоидна висина h , као и координате у равни Gauss-Krüger-ове пројекције

(y, x) у којој су презентирани подаци премера непокретности у облику планова или карата.

3.1. Трансформације координата

3.1.1. Descartes-ове координате и елипсоидне координате

Ако се усвоји обртни елипсоид са центром у координатном почетку Descartes-овог координатног система (слика 3.1), са параметрима описаним у табели 2.1, онда се поред Descartes-ових (правоуглих) координата (X, Y, Z) , тачка такође може одредити и елипсоидним (геодетским) координатама (B, L, h) .



Слика 3.1. Descartes-ове координате и елипсоидне координате

3. Трансформације координата и трансформације датума

Трансформација из елипсоидних координата (B, L, h) у Descartes-ове координате (X, Y, Z) може се извести једначинама (Heiskanen и Moritz 1967):

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos B \cos L \\ Y &= (N + h) \cos B \sin L \\ Z &= [(1 - e^2) N + h] \sin B \end{aligned} \quad (3.1)$$

где је N радијус кривине у првом вертикалу који се може израчунати из релације

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (3.2)$$

Инверзна трансформација Descartes-ових координата (X, Y, Z) у елипсоидне координате (B, L, h) обично се врши итеративно, мада постоје и директни поступци. Ова трансформација може се извести по следећем алгоритму (Hirvonen и Moritz 1963):

$$\begin{aligned} B &= \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \frac{[N(B) + h(B)]}{(1 - e^2)N(B) + h(B)} \\ L &= \arctan \frac{Y}{X} + (-1/2 \operatorname{sgn} Y - 1/2 \operatorname{sgn} Y \operatorname{sgn} X + 1) \pi \\ h &= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B} - N(B) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Треба напоменути да скуп елипсоидних координата (B, L, h) не покрива комплетну површ Земље због поларног сингуларитета ових координата.

3.1.2. Елипсоидне координате и раванске координате

Овде се разматрају само тачке на елипсоиду, што значи да су од интереса само геодетска ширина B и дужина L . Циљ је пројектовати тачку на елипсоиду са координатама (B, L) у тачку у равни, односно картографској пројекцији, са координатама (y, x) . Уопштена формулација за жељену картографску пројекцију може се представити изразима:

$$\begin{aligned} y &= f_y(B, L; a, e^2) \\ x &= f_x(B, L; a, e^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

где су a и e^2 вредности велике полуосе и првог нумеричког ексцентрицитета обртног елипсоида.

У геодетским применама употребљавају се конформне пројекције. Конформност значи да угао на елипсоиду остаје непромењен после пројектирања у раван. Прецизније, угао између две геодетске линије на елипсоиду остаје непромењен ако

се те две геодетске линије конформно пресликају у пројекцију. Недостатак је што геодетске линије на елипсоиду пресликане у пројекцију нису, у принципу, више геодетске (т. ј. праве линије) него закривљене линије.

Gauss-Krüger-ова пројекција меридијанских зона

Gauss-Krüger-ова пројекција меридијанских зона представља попречну цилиндричну пројекцију код које се уске меридијанске зоне елипсоида пресликавају на раван при чему је (Живковић 1972):

- елипсоид подељен у 120 зона од по 3° по геодетској дужини, где је централни меридијан у средини сваке зоне,
- централни меридијан пресликан у раван без деформације размере и представља x осу дводимензионалног Descartes-овог координатног система и
- пројекција еkvатора представља y осу дводимензионалног Descartes-овог координатног система.

За Gauss-Krüger-ову пројекцију меридијанских зона, пресликавање тачке са геодетским координатама (B, L) на елипсоиду у тачку са координатама (y, x) у равни дата је развојем у ред (Живковић 1972):

$$\begin{aligned}
 x &= f_x(B, L; a, e^2) = \\
 &= S(B) + \frac{Nl^2}{2} \sin B \cos B + \frac{Nl^4}{24} \sin B \cos^3 B (5 - \tan^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \\
 &+ \frac{Nl^6}{720} \sin B \cos^5 B (61 - 58 \tan^2 B + \tan^4 B + 270\eta^2 - 330\eta^2 \tan^2 B) + \\
 &+ \frac{Nl^8}{40320} \sin B \cos^7 B (1385 - 3111 \tan^2 B + 543 \tan^4 B - \tan^6 B) + \dots, \\
 y &= f_y(B, L; a, e^2) = \tag{3.5} \\
 &= Nl \cos B + \frac{Nl^3}{6} \cos^3 B (1 - \tan^2 B + \eta^2) + \\
 &+ \frac{Nl^5}{120} \cos^5 B (5 - 18 \tan^2 B + \tan^4 B + 14\eta^2 - 58\eta^2 \tan^2 B) + \\
 &+ \frac{Nl^7}{5040} \cos^7 B (61 - 479 \tan^2 B + 179 \tan^4 B - \tan^6 B) + \dots,
 \end{aligned}$$

где су

$$N \quad - \quad \text{радијус кривине у првом вертикалу дат изразом (3.2),}$$

3. Трансформације координата и трансформације датума

$l = L - L_0$ – разлика у геодетској дужини разматране тачке и централног меридијана одговарајуће зоне,

$\eta^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos B$ – помоћна вредност.

Дужина лука меридијана $S(B)$ може се израчунати из израза,

$$S(B) = a(1 - e^2) \left(a_0 B - \frac{a_2}{2} \sin 2B + \frac{a_4}{4} \sin 4B - \frac{a_6}{6} \sin 6B + \frac{a_8}{8} \sin 8B - \dots \right) \quad (3.6)$$

где су

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 \\ a_2 &= \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 \\ a_4 &= \frac{15}{64}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 \\ a_6 &= \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 \\ a_8 &= \frac{315}{16384}e^8 \end{aligned} \quad (3.7)$$

У табели 3.1 приказани су параметри (3.7) за GRS80, WGS84 и Bessel-ов елипсоид. Територија Србије обухваћена је координатним зонама број 6 и 7 са геодетским дужинама централних меридијана 18 и 21 степен, респективно. Због равномернијег распореда деформација дужина у оквиру координатне зоне на координате (y, x) примењен је коефицијент размере 0.9999.

Инверзна трансформација координата (y, x) у равни Gauss-Krüger-ове пројекције у геодетске координате (B, L) на елипсоиду може се извести једначинама (Живковић 1972):

Табела 3.1. Параметри полинома за рачунање дужине лука меридијана (GRS80, WGS84 и Bessel-ов елипсоид)

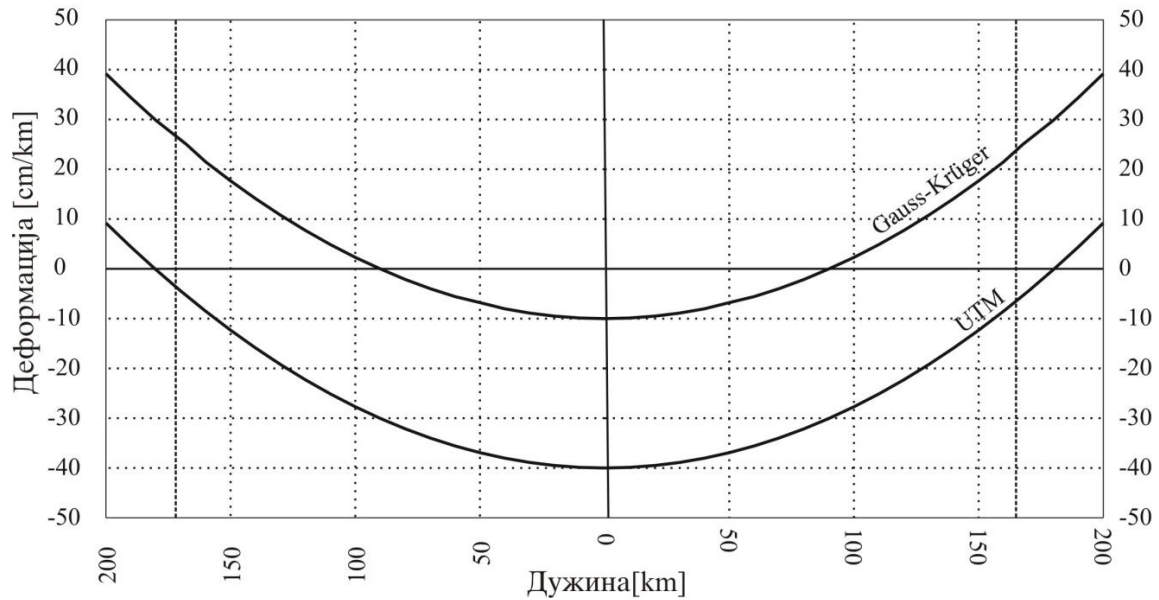
Параметар	Елипсоид		
	GRS80	WGS84	Bessel
a	6378137.000	6378137.000	6377397.155
e^2	$6.69438002290 \cdot 10^{-3}$	$6.69437999013 \cdot 10^{-3}$	$6.67437220624 \cdot 10^{-3}$
a_0	1.0050525018	1.0050525018	1.0050373060
a_2	$5.0631086 \cdot 10^{-03}$	$5.0631086 \cdot 10^{-03}$	$5.0478492 \cdot 10^{-03}$
a_4	$1.06276 \cdot 10^{-05}$	$1.06276 \cdot 10^{-05}$	$1.05638 \cdot 10^{-05}$
a_6	$2.082 \cdot 10^{-08}$	$2.082 \cdot 10^{-08}$	$2.063 \cdot 10^{-08}$
a_8	$3.9 \cdot 10^{-11}$	$3.9 \cdot 10^{-11}$	$3.9 \cdot 10^{-11}$

$$\begin{aligned}
 B = f_B(y, x; a, e^2) = & B_f - \frac{\tan B_f}{2N_f^2} (1 + \eta_f^2) y^2 + \\
 & + \frac{\tan B_f}{24N_f^4} (5 + 3 \tan^2 B_f + 6\eta_f^2 - 6\eta_f^2 \tan^2 B_f - 3\eta_f^4 - 9\eta_f^4 \tan^2 B_f) y^4 - \\
 & - \frac{\tan B_f}{720N_f^6} (61 + 90 \tan^2 B_f + 45 \tan^4 B_f + 107\eta_f^2 - 162\eta_f^2 \tan^2 B_f - 45\eta_f^2 \tan^4 B_f) y^6 + \\
 & + \frac{\tan B_f}{40320N_f^8} (1385 + 3633 \tan^2 B_f + 4095 \tan^4 B_f + 1575 \tan^6 B_f) y^8 - \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L = f_L(y, x; a, e^2) = & L_0 + \frac{1}{N_f \cos B_f} y - \frac{1}{6N_f^3 \cos B_f} (1 + 2 \tan^2 B_f + \eta_f^2) y^3 + \quad (3.8) \\
 & + \frac{1}{120N_f^5 \cos B_f} (5 + 28 \tan^2 B_f + 24 \tan^4 B_f + 6\eta_f^2 + 8 \tan^2 B_f \eta_f^2) y^5 - \\
 & - \frac{1}{5040N_f^7 \cos B_f} (61 + 662 \tan^2 B_f - 1320 \tan^4 B_f - 720 \tan^6 B_f) y^7 + \dots
 \end{aligned}$$

Вредност B_f представља геодетску дужину тачке која се добија у пресеку централног меридијана и паралеле са y осом повученом кроз разматрану тачку и може се добити итеративним поступком из следећег израза (Leick 2004)

$$B_f = \frac{x}{aa_0(1-e^2)} + \frac{1}{a_0} \left(\frac{a_2}{2} \sin 2B_f - \frac{a_4}{4} \sin 4B_f + \frac{a_6}{6} \sin 6B_f - \frac{a_8}{8} \sin 8B_f \right). \quad (3.9)$$



Слика 3.2. Упоредни приказ деформација дужина за Gauss-Krüger-ову и UTM пројекцију

Универзална попречна Mercator-ова (Universal Traverse Mercator, UTM) пројекција

UTM пројекција (*Hoffman-Wellenhof* и др. 2000) представља модификацију Gauss-Krüger-ове пројекције, где је:

- елипсоид подељен на 60 зона, свака ширине 6 степени по геодетској дужини и
- на конформне координате у равни пројекције примењен фактор размере 0.9996 у циљу избегавања великих деформација на крајевима зоне.

Нумерација зона почиње са М1 за централни меридијан $L_0 = 177^\circ \text{ W}$ (W – западно од Гринича). Према томе, целокупна територија Србије обухваћена је зоном са централним меридијаном $L_0 = 21^\circ \text{ E}$ (E – источно од Гринича) и ознаком М34. Изрази за пресликавање идентични су изразима за Gauss-Krüger-ову пројекцију. Упоредни приказ деформација дужина за Gauss-Krüger-ову и UTM пројекцију, за геодетску ширину $B = 44^\circ$, на територији Србије приказан је на слици 3.2., где су дужине дате западно и источно од централног меридијана са геодетском дужином $L_0 = 21^\circ \text{ E}$.

3.2. Тродимензионална трансформација сличности

Геодетски датум дефинише везу између глобалног и локалног тродимензионалног Descartes-овог координатног система. Према томе, датумска трансформација један координатни систем одређеног типа трансформише у други координатни систем истог типа. Терестрички систем (локални) користи локални најбоље подешен елипсоид, као што је Bessel-ов елипсоид у Србији и многим деловима Европе.

Локални елипсоид се повезује са негеоцентричним Descartes-овим координатним системом, где координатни почетак коинцидира са центром елипсоида.

Нека (X_L, Y_L, Z_L) , (B_L, L_L, H_L) репрезентују Descartes-ове и елипсоидне координате, респективно, у локалном геодетском референтном систему и нека (X_G, Y_G, Z_G) , (B_G, L_G, h_G) репрезентују Descartes-ове и елипсоидне координате, респективно, у глобалном геодетском референтном систему. Уобичајен начин трансформације координата из глобалног у локални геодетски датум је тродимензионална трансформација сличности, мада је могуће користити и другачије поступке. Модел тродимензионалне трансформације сличности (слика 3.3) из глобалног геодетског референтног система у локални дат је изразима

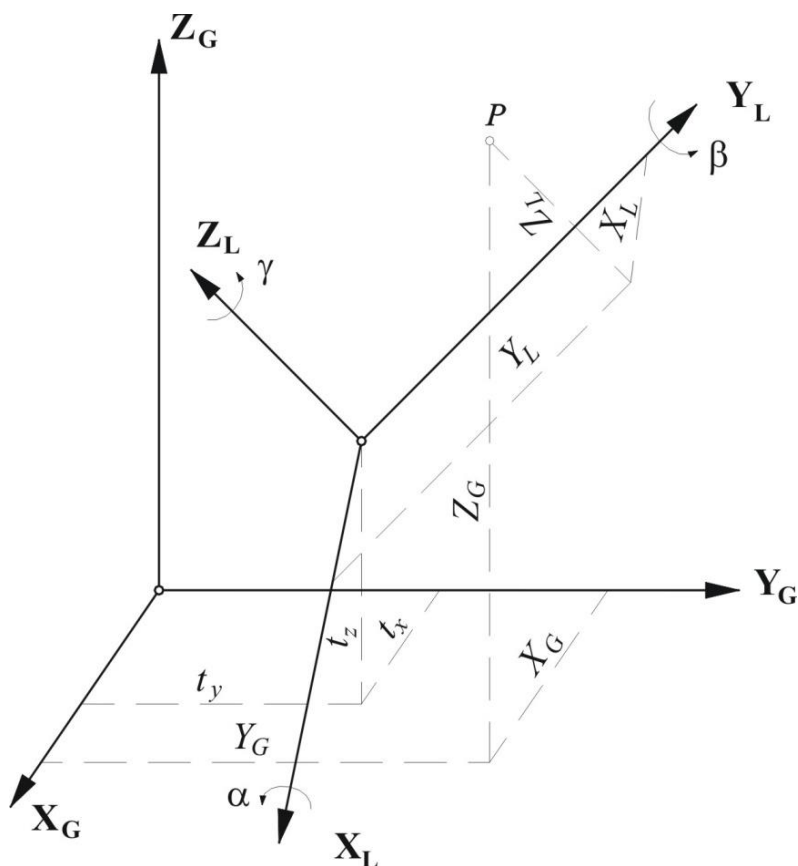
$$\begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} = (1+s)\mathbf{R} \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

где су:

t_x, t_y, t_z - параметри транслације дуж координатних оса $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$, респективно,

s - параметар размере и

\mathbf{R} - матрица ротације око координатних оса.



Слика 3.3. Тродимензионална трансформација сличности

3. Трансформације координата и трансформације датума

Извођење ових формула приказано је у *Soler 1976, Leick u van Gelder 1975* и *Grafarend, Knickmeyer u Schaffrin 1982*.

Матрица ротације \mathbf{R} је ортогонална матрица која садржи три сукцесивне ротације око сваке од координатних оса

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3\{\gamma\} \mathbf{R}_2\{\beta\} \mathbf{R}_1\{\alpha\}, \quad (3.11)$$

где су

$$\mathbf{R}_1\{\alpha\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_2\{\beta\} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \text{ и} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{R}_3\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

односно

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

За случај трансформације између глобалног и Државног координатног система премера непокретности у Србији (локалног) углови ротације α , β и γ су мали (реда величине неколико лучних секунди), па се матрица ротације \mathbf{R} може написати у поједностављеном облику

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Имајући у виду да је параметар размере s такође мала величина (реда 10^{-5}), израз (3.10) са довољном тачношћу може се написати као

$$\begin{bmatrix} X_L - X_G \\ Y_L - Y_G \\ Z_L - Z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_G & Y_G & X_G \\ 0 & 1 & 0 & Z_G & 0 & -X_G & Y_G \\ 0 & 0 & 1 & -Y_G & X_G & 0 & Z_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ s \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

односно, у матричном облику

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.16)$$

где је \mathbf{l} , n – димензионални вектор резултата мерења, \mathbf{A} , $n \times 7$, матрица једначина везе и \mathbf{x} вектор непознатих параметара. Да би се оценили параметри трансформације неопходно је најмање три идентичне тачке. У пракси је број идентичних тачака обично већи па се параметри трансформације одређују кроз изравнање по методи најмањих квадрата. Према томе, оцене параметара трансформације могу се добити као

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \\ \hat{s} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l}, \quad (3.17)$$

при чему се подразумева да је матрица тежина резултата мерења јединична матрица ($\mathbf{P}_{X_L, Y_L, Z_L} = \mathbf{I}$). Коваријациона матрица непознатих параметара добија се из израза

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = s_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}, \quad (3.18)$$

где је s_0^2 експериментална референтна варијанса

$$s_0^2 = \frac{(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})}{n - 7}. \quad (3.19)$$

Ако се уместо Descartes-ових координата (X_L, Y_L, Z_L) и (X_G, Y_G, Z_G) користе одговарајуће елипсоидне координате (B_L, L_L, H_L) и (B_G, L_G, h_G), поред седам

3. Трансформације координата и трансформације датума

параметара трансформације сличности неопходно је урачунати и разлику између параметара глобалног и локалног елипсоида. Нека су:

a_G, e_G^2 – велика полуоса и први нумерички ексцентрицитет глобалног елипсоида
и
 a_L, e_L^2 – велика полуоса и први нумерички ексцентрицитет локалног елипсоида.

Разлике параметара глобалног и локалног елипсоида тада су

$$\begin{aligned} \delta a &= a_G - a_L \quad \text{и} \\ \delta e^2 &= e_G^2 - e_L^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

За формулисање модела тродимензионалне трансформације сличности изражене у елипсоидним координатама, потребно је извршити развој у Taylor-ов полином првог степена, локалних елипсоидних координата у односу на параметре датума за транслацију, ротацију и размеру као и промену велике полуосе δa и квадрата првог нумеричког ексцентрицитета δe^2

$$\begin{aligned} B_L &= B_G + \frac{\partial B_L}{\partial t_x} t_x + \frac{\partial B_L}{\partial t_y} t_y + \frac{\partial B_L}{\partial t_z} t_z + \frac{\partial B_L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial B_L}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial B_L}{\partial \gamma} \gamma + \\ &+ \frac{\partial B_L}{\partial s} s + \frac{\partial B_L}{\partial a_G} \delta a + \frac{\partial B_L}{\partial e_G^2} \delta e^2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} L_L &= L_G + \frac{\partial L_L}{\partial t_x} t_x + \frac{\partial L_L}{\partial t_y} t_y + \frac{\partial L_L}{\partial t_z} t_z + \frac{\partial L_L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial L_L}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial L_L}{\partial \gamma} \gamma + \\ &+ \frac{\partial L_L}{\partial s} s + \frac{\partial L_L}{\partial a_G} \delta a + \frac{\partial L_L}{\partial e_G^2} \delta e^2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} h_L &= h_G + \frac{\partial h_L}{\partial t_x} t_x + \frac{\partial h_L}{\partial t_y} t_y + \frac{\partial h_L}{\partial t_z} t_z + \frac{\partial h_L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial h_L}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial h_L}{\partial \gamma} \gamma + \\ &+ \frac{\partial h_L}{\partial s} s + \frac{\partial h_L}{\partial a} \delta a + \frac{\partial h_L}{\partial e_G^2} \delta e^2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

у околини вредности

$$t_x = t_y = t_z = \alpha = \beta = \gamma = s = 0, \quad a_G = a_L, \quad e_G^2 = e_L^2.$$

У матричном облику систем линеарних једначина (3.21) до (3.23) може се написати као

$$\mathbf{l} = \mathbf{Ax} + (\text{чланови вишег реда}). \quad (3.24)$$

Увођењем $[B_L - B_G, L_L - L_G, h_L - h_G]$ као вектора резултата мерења \mathbf{l} и $[t_x, t_y, t_z, \alpha, \beta, \gamma, s, \delta a, \delta e^2]$ као непознатог вектора \mathbf{x} може се писати

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} B_L - B_G \\ L_L - L_G \\ h_L - h_G \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ s \\ \delta a \\ \delta e^2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + (\text{чланови вишег реда}), \quad (3.25)$$

где је

$$\mathbf{A} := \left[\frac{\partial(B_L, L_L, h_L)}{\partial(t_x, t_y, t_z, \alpha, \beta, \gamma, s, a_G, e_G^2)} \right]_{\text{Taylor}} \quad (3.26)$$

Матрица \mathbf{A} може се израчунати као производ (Okeke 1998)

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1 = \left[\frac{\partial(B_L, L_L, h_L)}{\partial(X_L, Y_L, Z_L)} \right]_{\text{Taylor}} \left[\frac{\partial(X_L, Y_L, Z_L)}{\partial(t_x, t_y, t_z, \alpha, \beta, \gamma, s, a_G, e_G^2)} \right]_{\text{Taylor}}. \quad (3.27)$$

Компликована матрица диференцијала $[\partial(B_L, L_L, h_L)/\partial(X_L, Y_L, Z_L)]$ израчунава се из њене једноставне инверзије $[\partial(X_L, Y_L, Z_L)/\partial(B_L, L_L, h_L)]$, односно

$$\mathbf{J}_2 := (\mathbf{J}_1)^{-1} = \left[\frac{\partial(X_L, Y_L, Z_L)}{\partial(B_L, L_L, h_L)} \right]^{-1} = \left[\frac{\partial(B_L, L_L, h_L)}{\partial(X_L, Y_L, Z_L)} \right]. \quad (3.28)$$

На основу израза (3.1) може се добити

$$\mathbf{J}^2 = \left[\frac{\partial(X_L, Y_L, Z_L)}{\partial(B_L, L_L, h_L)} \right] = \begin{bmatrix} -(M_L + h_L) \sin B_L \cos L_L & -(N_L + h_L) \cos B_L \sin L_L & \cos B_L \cos L_L \\ -(M_L + h_L) \sin B_L \sin L_L & (N_L + h_L) \cos B_L \cos L_L & \cos B_L \sin L_L \\ (M_L + h_L) \cos B_L & 0 & \sin B_L \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

односно

$$\mathbf{J}_2 = (\mathbf{J}^2)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin B_L \cos L_L}{M_L + h_L} & -\frac{\sin L_L \sin B_L}{M_L + h_L} & \frac{\cos B_L}{M_L + h_L} \\ \frac{\sin L_L}{(N_L + h_L) \cos B_L} & \frac{\cos L_L}{(N_L + h_L) \cos B_L} & 0 \\ \cos B_L \cos L_L & \cos B_L \sin L_L & \sin B_L \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

где су

$$N_L = \frac{a_L}{\sqrt{1 - e_L^2 \sin^2 B_L}} \quad \text{и} \quad (3.31)$$

$$M_L = \frac{a_L (1 - e_L^2)}{\sqrt{(1 - e_L^2 \sin^2 B_L)^3}}. \quad (3.32)$$

За матрицу \mathbf{J}_1 , коришћењем (3.15) и (3.1) може се добити

$$\mathbf{J}_1 := \left[\frac{\partial(X_L, Y_L, Z_L)}{\partial(t_x, t_y, t_z, \alpha, \beta, \gamma, s, a_G, e_G^2)} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_G & Y_G & X_G & \frac{N_G \cos B_G \cos L_G}{a_G} & \frac{M_G \cos B_G \sin^2 B_G \cos L_G}{2(1 - e_G^2)} \\ 0 & 1 & 0 & Z_G & 0 & -X_G & Y_G & \frac{N_G \cos B_G \sin L_G}{a_G} & \frac{M_G \cos B_G \sin^2 B_G \sin L_G}{2(1 - e_G^2)} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_G & X_G & 0 & Z_G & \frac{N_G \sin B_G (1 - e_G^2)}{a_G} & \frac{M_G \sin^3 B_G - 2N_G \sin B_G}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Коначно, матрица \mathbf{A} дата у функцији глобалних геодетских координата (B_G, L_G, h_G) , има облик

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix}
 -\frac{\sin B_G \cos L_G}{M_G + h_G} & -\frac{\sin L_G}{(N_G + h_G) \cos B_G} & \cos B_G \cos L_G \\
 -\frac{\sin B_G \sin L_G}{M_G + h_G} & \frac{\cos L_G}{(N_G + h_G) \cos B_G} & \cos B_G \sin L_G \\
 \frac{\cos B_G}{M_G + h_G} & 0 & \sin B_G \\
 \hline
 \frac{N_G^2(e_G^2 - 1) - M_G h_G}{M_G(M_G + h_G)} \sin L_G & \frac{(1 - e_G^2)N_G + h_G}{(N_G + h_G) \cos B_G} \sin B_G \cos L_G & -N_G e_G^2 \sin B_G \cos B_G \sin L_G \\
 \frac{N_G^2(1 - e_G^2) + M_G h_G}{M_G(M_G + h_G)} \cos L_G & \frac{(1 - e_G^2)N_G + h_G}{(N_G + h_G) \cos B_G} \sin B_G \sin L_G & N_G e_G^2 \sin B_G \cos B_G \cos L_G \\
 0 & -1 & 0 \\
 \hline
 -\frac{e_G^2 N_G \sin B_G \cos B_G}{M_G + h_G} & 0 & h_G + N_G(1 - e_G^2 \sin^2 B_G) \\
 \hline
 -\frac{e_G^2 N_G \sin B_G \cos B_G}{a_G(M_G + h_G)} & 0 & a_G / N_G \\
 \hline
 -\frac{[e_G^2 M_G \sin^2 B_G + 2(1 - e_G^2)N_G] \sin B_G \cos B_G}{2(M_G + h_G)(1 - e_G^2)} & 0 & \frac{\sin^2 B_G [e_G^2 M_G \cos^2 B_G + (2N_G - M_G)(e_G^2 - 1)]}{2(1 - e_G^2)}
 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

где су

$$N_G = \frac{a_G}{\sqrt{1 - e_G^2 \sin^2 B_G}} \quad \text{и} \quad (3.35)$$

$$M_G = \frac{a_G(1 - e_G^2)}{\sqrt{(1 - e_G^2 \sin^2 B_G)^3}}. \quad (3.36)$$

За сваку тачку, ако је матрица тежина у моделу Descartes-ових координата јединична матрица, односно, ако је

$$\mathbf{P}_{x_L, y_L, z_L} = \mathbf{I}, \quad (3.37)$$

одговарајућа матрица, тежина у моделу елипсоидних координата $\mathbf{P}_{B_L, L_L, h_L}$ гласи (Okeke 1998)

$$\mathbf{P}_{B_L, L_L, h_L} = \begin{bmatrix} (M_G + h_G)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (N_G + h_G)^2 \cos^2 B_G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Оцене параметара трансформације могу се добити као

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \\ \hat{s} \\ \hat{\delta a} \\ \hat{\delta e}^2 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}. \quad (3.39)$$

Коваријациона матрица оцена непознатих параметара добија се из израза

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = s_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}, \quad (3.40)$$

где је s_0^2 експериментална референтна варијанса

$$s_0^2 = \frac{(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})}{n - 9}. \quad (3.41)$$

Параметри δa и δe^2 , уколико нису познати, могу се оценити кроз изравнање по методи најмањих квадрата, или могу бити укључени као познате константе при чему се оцењује само седам параметара трансформације сличности.

Предност модела трансформације израженог у елипсоидним координатама огледа се у томе што не морају бити познате елипсоидне висине свих идентичних тачака у локалном геодетском референтном систему.

Проблем се, на овај начин, може решити и ако уопште нису познате елипсоидне висине идентичних тачака у локалном референтном систему. У овом случају, трећа врста матрице \mathbf{A} (3.34) једноставно се изоставља, при чему седма и осма колона матрице \mathbf{A} постају линеарно зависне. То значи да се у случају оцене седам параметара трансформације сличности само на основу положајних координата (B_G, L_G) и (B_L, L_L) морају познавати параметри глобалног и локалног елипсоида. Такође, у овом случају неопходне су најмање четири идентичне тачке да би се могло оценити седам параметара тродимензионалне трансформације сличности. Поред тога, параметри трансформације оцењени само на основу положајних

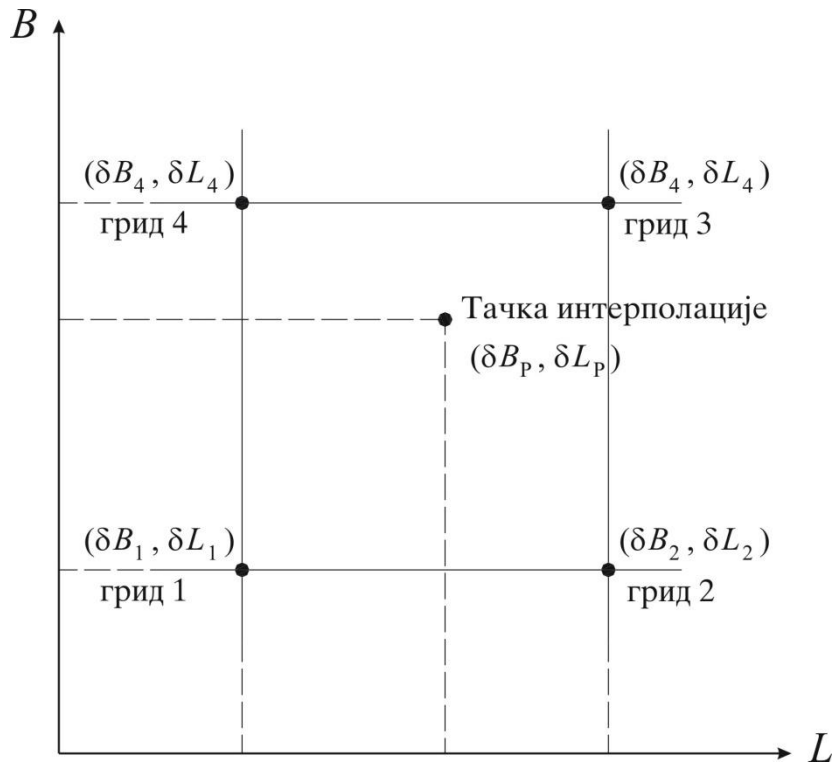
координата (B_G, L_G) и (B_L, L_L) за идентичне тачке не могу бити коришћени за трансформацију елипсоидних висина.

3.3. Концепт грид трансформације

Основни критеријум код избора модела трансформације просторних података између глобалног и локалног геодетског референтног система јесте да се очува тачност и поузданост изворних података. Овај критеријум може се остварити коришћењем конформне трансформације. У премеру непокретности, за трансформацију просторних података прикупљених применом GNSS (Активне геодетске референтне основе) најчешће се користи седмопараметарска трансформација сличности описана у одељку 3.2. Модели конформне трансформације транслирају, ротирају и уразмеравају просторне податке али облик остаје очуван (нема промене у просторној тачности).

Проблем трансформације просторних података из глобалног геодетског референтног система у локални (или обрнуто) постаје много сложенији ако постоји присуство дисторзија (изобличења) просторних података изражених у локалном геодетском референтном систему. Разлог за појаву ових дисторзија, у првом реду, је слаба условљеност геодетског референтног оквира реализованог терестричким техникама (*Jäger и др.* 2003). Као резултат јавља се велика зависност релативне тачности просторног положаја тачака изражених у локалном геодетском референтном систему од растојања између тачака. У овом случају неопходно је истражити могућности да се неке (или све) ове дисторзије значајно умање (или потпуно отклоне) кроз процес трансформације. При томе је неопходно задовољити све критеријуме које модел трансформације мора да испуни и који су описани у поглављу 1 (једноставност, ефикасност, јединственост и тачност).

Критеријуми једноставности, ефикасности и јединствености односе се на то како су подаци неопходни за трансформацију доступни и подесни за кориснике. Неопходно је да корисници могу лако и једноставно применити резултате модела трансформације који је иначе веома комплексан и да при томе добију тачне и јединствене резултате. Искуства при решавању овог проблема у Сједињеним америчким државама, Канади Аустралији и другим земљама показала су да се критеријуми једноставности, ефикасности и јединствености модела трансформације најлакше постижу оцењивањем (предикцијом) вредности дисторзија просторних података у тачкама правилног грида са одговарајуће изабраним интервалом (кораком), на основу познатих вредности дисторзија у идентичним тачкама оцењеним у поступку трансформације сличности.



Слика 3.4. Интерполација вредности дисторзија између тачака грида

Слика 3.4 илуструје како се подаци о дисторзијама у тачкама грида могу користити за израчунавање вредности дисторзије у било којој тачки. Непознате вредности дисторзија δB_P , δL_P у тачки P , могу се израчунати коришћењем познатих вредности дисторзија у суседним тачкама правилног грида, коришћењем једначина билинеарне интерполације (Moritz u Sünkel 1978):

$$\begin{aligned} \delta B_P &= a_{0B} + a_{1B} X + a_{2B} Y + a_{3B} X Y, \\ \delta L_P &= a_{0L} + a_{1L} X + a_{2L} Y + a_{3L} X Y \end{aligned} \quad (3.42)$$

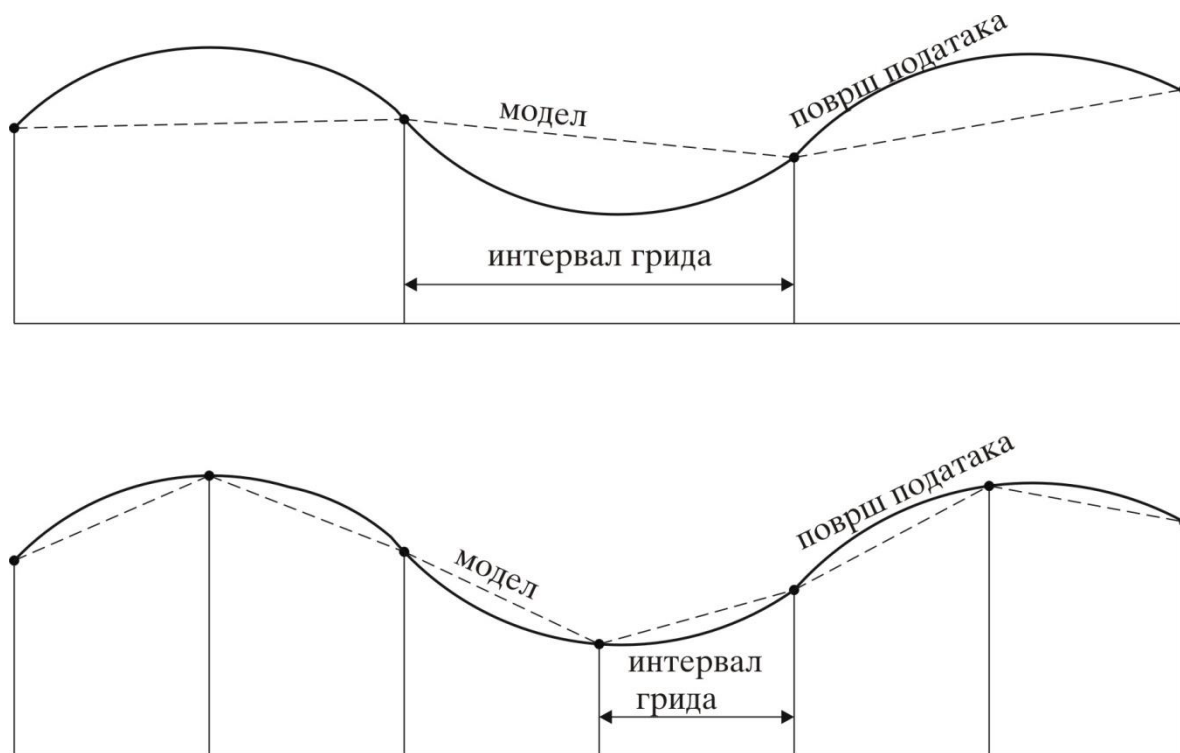
где су коефицијенти полинома (3.42) дати у табели 3.2, док вредности аргумената X и Y износе

$$\begin{aligned} X &= \frac{L_P - L_1}{L_2 - L_1}, \\ Y &= \frac{B_P - B_1}{B_4 - B_1}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Табела 3.2. Коефицијенти полинома билинеарне интерполације

компонента	a_0	a_1	a_2	a_3
B	δB_1	$\delta B_2 - \delta B_1$	$\delta B_4 - \delta B_1$	$\delta B_1 + \delta B_3 - \delta B_2 - \delta B_4$
L	δL_1	$\delta L_2 - \delta L_1$	$\delta L_4 - \delta L_1$	$\delta L_1 + \delta L_3 - \delta L_2 - \delta L_4$

Критеријум тачности односи се на избор модела за оцењивање (предикцију) вредности деформација у тачкама грида и на избор корака (интервала) грида.



Слика 3.5. Однос између интервала грида и тачности интерполације

У погледу модела за предикцију вредности дисторзија просторних података, у овом раду, истражене су могућности поделе подручја трансформације на коначне елементе и примена колокације по методи најмањих квадрата.

Избор интервала грида у функцији је густине узорка просторних података као и природе њихових дисторзија. Мањи интервал грида значи мању грешку билинеарне интерполације (слика 3.5) али и већи број тачака за предикцију дисторзија просторних података, односно поступак интерполације дисторзија просторних података у непознатим тачкама. Дефинитиван избор интервала грида мора се, према томе, извршити на основу тестирања перформанси грид трансформације, односно на основу познавања вредности грешака грид трансформације у идентичним тачкама или тачкама специјално одређеним у циљу оцене квалитета грид трансформације.

4. МОДЕЛИРАЊЕ ДИСТОРЗИЈА ПРОСТОРНИХ ПОДАТАКА

4.1. Подела подручја трансформације на коначне елементе

Овај приступ базиран је на методу коначних елемената (Finite Elements Method, FEM). Метод коначних елемената представља нумеричку технику за решавање парцијалних диференцијалних и интегралних једначина. Иако се приступи примене метода коначних елемената у различитим областима међусобно разликују, могу се препознати основне фазе (*Felippa 2004*):

1. Подела домена (подручја) решавања на дискретне под-домене који се обично називају елементи (дискретизација);
2. Решавање проблема по појединачним елементима (анализа) и
3. Услови континуитета између суседних елемената (уједињење, синтеза).

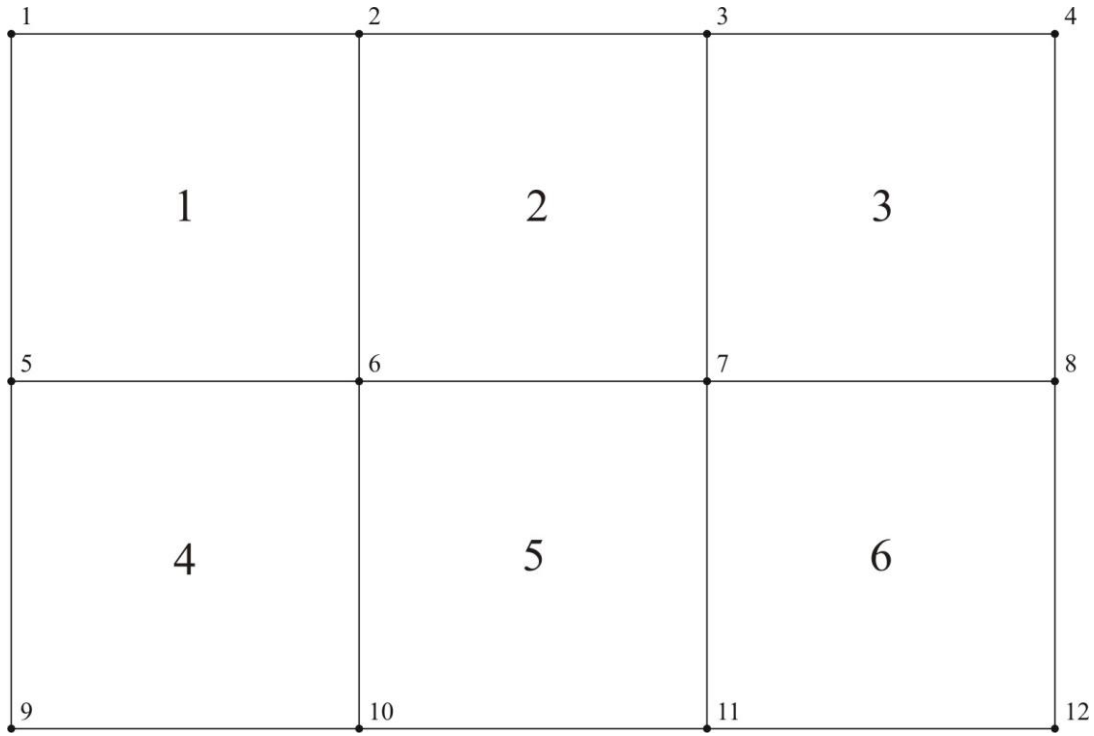
Уколико се усвоји претпоставка да су дисторзије просторних података дугопериодичног карактера, може се сматрати да оне имају минималан утицај на релативне односе између блиских тачака узорка просторних података. Према томе, уколико се целокупно подручје трансформације подели на произвољан број довољно малих под-подручја (коначних елемената), утицај дисторзија просторних података у оквиру једног елемента може се занемарити. Форма појединачних елемената може бити различита у зависности од природе проблема који се разматра од чега зависи и методологија за постизање услова континуитета између суседних елемената.

Нека је, на пример, подручје трансформације подељено (дисктеризовано) на n_e елемената облика четвороугла (слика 4.1). Граничне тачке које формирају појединачне елементе називају се тачке чворови. Према томе, свака од n_e тачака чворова може учествовати у формирању најмање једног а највише четири коначна елемента.

На основу скупова геодетских координата у глобалном геодетском референтном систему ($B_{GRS}, L_{GRS}, h_{GRS}$) и Државном координатном систему ($B_{DKS}, L_{DKS}, h_{DKS}$), за $n_i^{(i)}$ ($n_i^{(i)} \geq 3$) идентичних тачака у оквиру i – тог елемента ($i = 1, 2, \dots, n_e$), могуће је добити оцену параметара тродимензионалне трансформације сличности $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$, применом модела (3.39)

$$\hat{\mathbf{x}}^{(i)} = - \left\{ \left[\mathbf{A}^{(i)} \right]^T \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{A}^{(i)} \right\}^{-1} \left[\mathbf{A}^{(i)} \right]^T \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{l}^{(i)} \quad , \quad (4.1)$$

са кореспондентном коваријационом матрицом



Слика 4.1. Пример поделе подручја трансформације на коначне елементе

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(i)} = (s_0^{(i)})^2 \left[(\mathbf{A}^{(i)})^T \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{A}^{(i)} \right]^{-1}, \quad (4.2)$$

где је $s_0^{(i)}$ експериментална референтна варијанса за i – ти елеменат

$$(s_0^{(i)})^2 = \frac{(\mathbf{l}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}^{(i)})^T \mathbf{P}^{(i)} (\mathbf{l}^{(i)} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^{(i)})}{3n_i^{(i)} - 7}, \quad (4.3)$$

при чему се подразумева да су, за свих $n_i^{(i)}$ идентичних тачака, поред положајних геодетских координата у Државном координатном систему $(B_j^{(i)})_{DKS}$, $(L_j^{(i)})_{DKS}$, познате и елипсоидне висине $(h_j^{(i)})_{DKS}$, $(j = 1, 2, \dots, n_i^{(i)})$. Ово је могуће, обзиром да је, при разматрању само положајног проблема, довољно познавати апроксимативне вредности елипсоидних висина $(h_j^{(i)})_{DKS}$. Такође, параметри глобалног елипсоида GRS80 као и локалног Bessel–овог елипсоида су познати, тако да разлике параметара елипсоида у процесу тродимензионалне трансформације сличности није потребно оцењивати.

Применом параметара тродимензионалне трансформације сличности $\mathbf{x}^{(i)}$ добијају се вредности оцењених (трансформисаних) координата свих тачака у оквиру i – тог елемента $(\hat{B}_j^{(i)})_{DKS}$, $(\hat{L}_j^{(i)})_{DKS}$. Оцена тачности (коваријациона матрица) ових координата може се добити из израза

$$\mathbf{K}_{\hat{B}, \hat{L}}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(i)} (\mathbf{A}^{(i)})^T. \quad (4.4)$$

Уколико су подручја коначних елемената довољно мала онда се резидуали (одступања)

$$v_{B_j}^{(i)} = (B_j^{(i)})_{DKS} - (\hat{B}_j^{(i)})_{DKS}$$

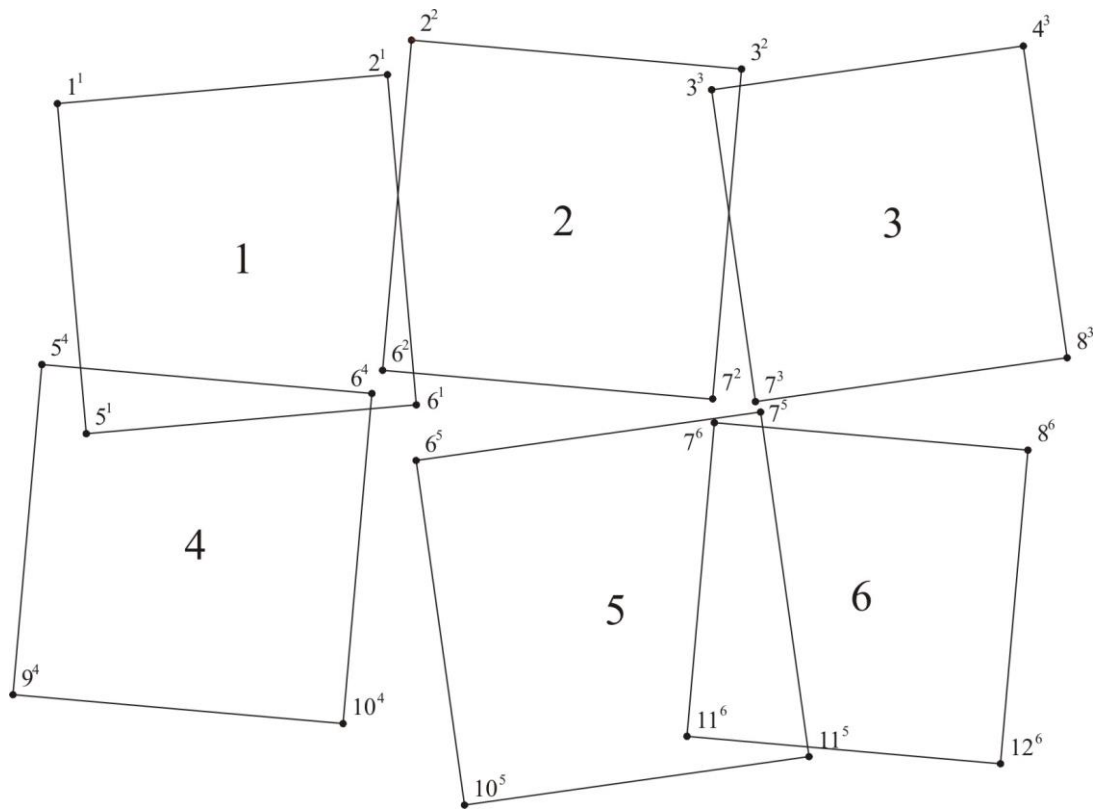
$$v_{L_j}^{(i)} = (L_j^{(i)})_{DKS} - (\hat{L}_j^{(i)})_{DKS}, \quad i = 1, 2, \dots, n_e, \quad j = 1, 2, \dots, n_t^{(i)}, \quad (4.5)$$

на $n_t^{(i)}$ идентичних тачака i – тог елемента могу сматрати чисто случајним величинама, односно подразумева се да су она резултат искључиво присуства случајних грешака у координатама тачака узорка просторних података.

Примена засебних параметара тродимензионалне трансформације сличности за сваки елемент $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n_e$) доводи до вишезначних решења за позиције тачака чворова, односно за сваку од n_c тачака чворова, добија се онолико решења колико и елемената у чијем формирању појединачна тачка чвор учествује (слика 4.2.). У циљу постизања континуитета између суседних елемената, за дефинитивне (јединствене) вредности координата k – те тачке чвора може се тада усвојити

$$\tilde{B}_{DKS_k} = \frac{\sum_{l=1}^{n_{e_k}} \hat{B}_{DKS_k}^{(l)}}{n_{e_k}}$$

$$\tilde{L}_{DKS_k} = \frac{\sum_{l=1}^{n_{e_k}} \hat{L}_{DKS_k}^{(l)}}{n_{e_k}}, \quad k = 1, \dots, n_c. \quad (4.6)$$



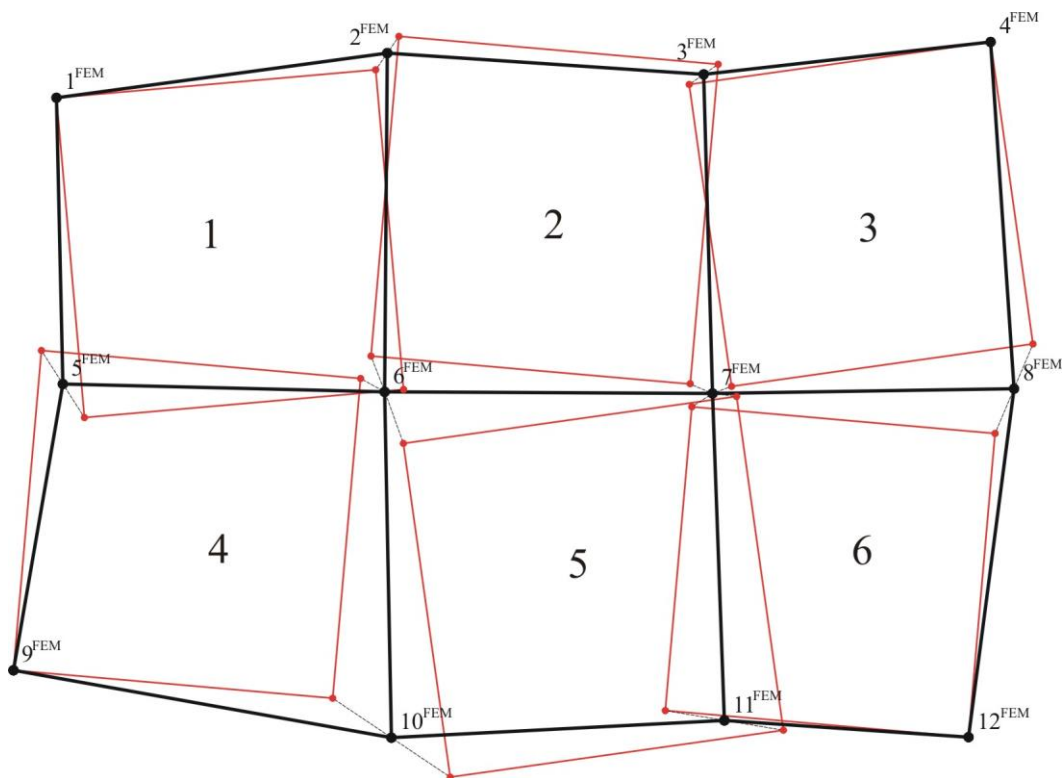
Слика 4.2. Релативни односи коначних елемената после примене засебних параметара трансформације $\mathbf{x}^{(i)}$ по елементима

где n_{e_k} може бити минимално један а максимално четири, у зависности од броја коначних елемената у чијем формирању свака појединачна тачка чвор учествује.

Услови континуитета подразумевају да се на сваки елеменат i примени додатна дводимензионална трансформација тако да све тачке чворови које формирају i – ти елеменат добију вредности (4.6) као и да све тачке на граничним линијама суседних елемената, после трансформације, имају јединствене вредности (слика 4.3). Због једноставнијег математичког модела ова трансформација обично се врши у неком од система координата у равни. У овом раду коришћене су координате тачака у равни Gauss-Krüger-ове пројекције.

За сваку тачку чвор k применом пројекцијских израза (3.5) могу се добити вредности

$$\begin{aligned} \hat{y}_{DKS_k}^{(l)} &= f_y(\hat{B}_{DKS_k}^{(l)}, \hat{L}_{DKS_k}^{(l)}) \\ \hat{x}_{DKS_k}^{(l)} &= f_x(\hat{B}_{DKS_k}^{(l)}, \hat{L}_{DKS_k}^{(l)}), \quad l = 1, \dots, n_{e_k} \\ \tilde{y}_{DKS_k} &= f_y(\tilde{B}_{DKS_k}, \tilde{L}_{DKS_k}) \\ \tilde{x}_{DKS_k} &= f_x(\tilde{B}_{DKS_k}, \tilde{L}_{DKS_k}), \quad k = 1, \dots, n_c \end{aligned} \quad (4.7)$$



Слика 4.3. Релативни односи коначних елемената после примене услова континуитета

За сваки елемент i ($i=1, 2, \dots, n_e$) на располагању ће бити координате четири тачке чвора добијене применом параметара тродимензионалне трансформације сличности по елементима $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ (4.1), као и изразима (4.7).

$$\hat{y}_{DKS_1}^{(i)}, \hat{x}_{DKS_1}^{(i)}, \hat{y}_{DKS_2}^{(i)}, \hat{x}_{DKS_2}^{(i)}, \hat{y}_{DKS_3}^{(i)}, \hat{x}_{DKS_3}^{(i)}, \hat{y}_{DKS_4}^{(i)}, \hat{x}_{DKS_4}^{(i)},$$

као и кореспондентне вредности добијене осредњавањем (4.6) и изразима (4.7)

$$\tilde{y}_{DKS_1}^i, \tilde{x}_{DKS_1}^i, \tilde{y}_{DKS_2}^i, \tilde{x}_{DKS_2}^i, \tilde{y}_{DKS_3}^i, \tilde{x}_{DKS_3}^i, \tilde{y}_{DKS_4}^i, \tilde{x}_{DKS_4}^i.$$

На ове скупове координата може се применити дводимензионална пројективна трансформација између координата тачака чворова карактеристичних за i – ти елемент и њихових вредности добијених осредњавањем између суседних елемената. За сваку од четири тачке чвора, које формирају i – ти елемент, могу се написати по две једначине пројективне трансформације

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{DKS_m}^i &= \frac{a_1 \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} + a_2 \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} + a_3}{c_1 \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} + c_2 \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} + 1} \\ \tilde{x}_{DKS_m}^i &= \frac{b_1 \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} + b_2 \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} + b_3}{c_1 \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} + c_2 \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} + 1}, \quad m = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (4.8)$$

односно

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{DKS_m}^i &= \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} a_1^i + \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} a_2^i + a_3^i - \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_m}^i c_1^i - \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_m}^i c_2^i \\ \tilde{x}_{DKS_m}^i &= \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} b_1^i + \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} b_2^i + b_3^i - \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_m}^i c_1^i - \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_m}^i c_2^i, \quad m = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (4.9)$$

У матричној форми систем једначина (4.9) може се написати као

$$\mathbf{y}^i = \mathbf{B}^i \mathbf{p}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n_e, \quad (4.10)$$

где су

$$\mathbf{y}^i = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{DKS_1}^i \\ \tilde{x}_{DKS_1}^i \\ \tilde{y}_{DKS_2}^i \\ \tilde{x}_{DKS_2}^i \\ \tilde{y}_{DKS_3}^i \\ \tilde{x}_{DKS_3}^i \\ \tilde{y}_{DKS_4}^i \\ \tilde{x}_{DKS_4}^i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^i = \begin{bmatrix} \hat{y}_{DKS_1}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_1}^{(i)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\hat{y}_{DKS_1}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_1}^i & -\hat{x}_{DKS_1}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_1}^i \\ 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{DKS_1}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_1}^{(i)} & 1 & -\hat{y}_{DKS_1}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_1}^i & -\hat{x}_{DKS_1}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_1}^i \\ \hat{y}_{DKS_2}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_2}^{(i)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\hat{y}_{DKS_2}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_2}^i & -\hat{x}_{DKS_2}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_2}^i \\ 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{DKS_2}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_2}^{(i)} & 1 & -\hat{y}_{DKS_2}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_2}^i & -\hat{x}_{DKS_2}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_2}^i \\ \hat{y}_{DKS_3}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_3}^{(i)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\hat{y}_{DKS_3}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_3}^i & -\hat{x}_{DKS_3}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_3}^i \\ 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{DKS_3}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_3}^{(i)} & 1 & -\hat{y}_{DKS_3}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_3}^i & -\hat{x}_{DKS_3}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_3}^i \\ \hat{y}_{DKS_4}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_4}^{(i)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\hat{y}_{DKS_4}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_4}^i & -\hat{x}_{DKS_4}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_4}^i \\ 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{DKS_4}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_4}^{(i)} & 1 & -\hat{y}_{DKS_4}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_4}^i & -\hat{x}_{DKS_4}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_4}^i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}^i = \begin{bmatrix} a_1^i \\ a_2^i \\ a_3^i \\ b_1^i \\ b_2^i \\ b_3^i \\ c_1^i \\ c_2^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n_e. \quad (4.11)$$

Према томе, на основу израза (4.10) могуће је израчунати осам параметара пројективне трансформације за сваки елемент i . Трансформисане вредности координата идентичних тачака узорка просторних података могу се онда израчунати по следећем алгоритму:

1. Примена параметара тродимензионалне трансформације сличности на геодетске координате идентичних тачака у глобалном геодетском референтном систему (B_{GRS}, L_{GRS}) за елемент у којем је тачка садржана. Као резултат, добијају се вредности координата идентичних тачака на основу трансформације сличности ($\hat{B}_{DKS}, \hat{L}_{DKS}$);
2. Рачунање вредности координата идентичних тачака у равни Gauss-Krüger–ове пројекције ($\hat{y}_{DKS}, \hat{x}_{DKS}$), на основу вредности ($\hat{B}_{DKS}, \hat{L}_{DKS}$) изразима (3.5);
3. Примена параметара пројективне трансформације на координате идентичних тачака у равни Gauss-Krüger–ове пројекције ($\hat{y}_{DKS}, \hat{x}_{DKS}$), за елемент у којем је тачка садржана, изразима (4.8). Као резултат, добијају се трансформисане вредности координата идентичних тачака у равни Gauss-Krüger–ове пројекције ($\tilde{y}_{DKS}, \tilde{x}_{DKS}$);

4. Рачунање трансформисаних вредности положајних геодетских координата идентичних тачака $(\tilde{B}_{DKS}, \tilde{L}_{DKS})$ на основу вредности $(\tilde{y}_{DKS}, \tilde{x}_{DKS})$ изразима (3.8).

Вредности трансформисаних координата идентичних тачака (тачака узорка просторних података) $(\tilde{B}_{DKS}, \tilde{L}_{DKS})$, добијене на овај начин, ослобођене су утицаја дисторзија просторних података у мери у којој је валидна полазна претпоставка да је утицај дисторзија просторних података у оквиру једног елемента занемарљив.

Оцена тачности трансформисаних вредности геодетских координата тачака просторног узорка (идентичних тачака) може се извршити на основу израза (4.4). Наиме, обзиром да су промене положајних геодетских координата $(\tilde{B}_{DKS}, \tilde{L}_{DKS})$ у односу на вредности добијене трансформацијом сличности $(\hat{B}_{DKS}, \hat{L}_{DKS})$ релативно мале (обично реда неколико центиметара), применом закона о распрострањању варијанси на изразе (4.8) може се закључити да су њихове варијансе (стандардне девијације) приближно једнаке, односно

$$\sigma_{\tilde{B}, \tilde{L}}^i \approx \sigma_{\hat{B}, \hat{L}}^i. \quad (4.12)$$

Ипак, објективнија слика о тачности ових координата (*Jäger и др.* 2003) може се добити на основу упоређења са познатим вредностима (B_{DKS}, L_{DKS}) , односно “репродуктивних вредности”

$$\begin{aligned} \tilde{v}_B &= B_{DKS} - \tilde{B}_{DKS}, \\ \tilde{v}_L &= L_{DKS} - \tilde{L}_{DKS}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Просечне вредности експерименталних стандардних девијација положајних координата $\tilde{B}_{DKS}, \tilde{L}_{DKS}$ за целокупно подручје трансформације могу се тада добити из израза

$$\begin{aligned} s_{\tilde{B}} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [(B_{DKS})_i - (\tilde{B}_{DKS})_i]^2}{n}}, \\ s_{\tilde{L}} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [(L_{DKS})_i - (\tilde{L}_{DKS})_i]^2}{n}}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

обзиром да су једино на целом подручју трансформације вредности (4.13) центриране величине.

4.2. Колокација по методи најмањих квадрата

Појам “колокација” познат је од 1934. године из рада познатог совјетског математичара Л. В. Канторович-а (*Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных*, Докл. АН СССР. – 1934. – Т. 2, № 9. – С. 532 – 536) и широко се користи у савременој примењеној математици када је реч о решавању диференцијалних и интегралних једначина.

У геодезији примена колокације датира од 1967. године, у области физичке геодезије при решавању проблема интерполације аномалија силе земљине теже. Први рад из области теорије одређивања гравитационог поља на основу различитих података, применом колокације по методи најмањих квадрата приказао је дански геодета *Torben Krarup* 1969. године. Детаљан приказ примене колокације по методи најмањих квадрата у области физичке геодезије дат је у (*Moritz*, 1980). У области трансформације координата, фотограметрије и картографије колокација по методи најмањих квадрата примењује се од 1970. године (*Kraus*, 1970).

4.2.1. Математички модел колокације по методи најмањих квадрата

Резидуали резултата мерења, добијени на основу изравнања по методи најмањих квадрата, могу се репрезентовати двома случајним компонентама, сигналом \mathbf{t} и шумом \mathbf{n} (*Moritz* 1980). Термини “сигнал” и “шум” потичу из области телекомуникационог инжењеринга, где се статистичка предикција широко користи. Према томе, једнодимензионални линеарни (или линеаризовани) стандардни модел опажања може се написати у проширеној форми

$$\mathbf{l} = \mathbf{Ax} + \mathbf{t} + \mathbf{n}. \quad (4.15)$$

где су

\mathbf{l} – q димензионални вектор резултата мерења (опажања),

\mathbf{A} – $q \times p$ матрица система линеарних (или линеаризованих) једначина везе између мерених величина и непознатих параметара,

\mathbf{x} – p димензионални вектор непознатих параметара,

\mathbf{t} – q димензионални вектор измерених (одређених) вредности сигнала и

\mathbf{n} – q димензионални вектор вредности шума у резултатима мерења.

Члан \mathbf{Ax} представља систематски део процеса односно тренд (слика 4.4). Подразумева се да је $q > p$ и да матрица \mathbf{A} има потпуни ранг.

Вредности \mathbf{t} и \mathbf{n} су центриране односно задовољавају изразе



Слика 4.4. Графичка интерпретација процеса колокације по методи најмањих квадрата

$$E[\mathbf{n}] = \mathbf{0} \text{ и}$$

$$M[\mathbf{t}] = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

где је $E[\cdot]$ оператор математичког очекивања у смислу теорије вероватноће а $M[\cdot]$ оператор просторног осредњавања (кореспондентан математичком очекивању).

За случај $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, израз (4.15) постаје

$$\mathbf{l} = \mathbf{Ax} + \mathbf{n}, \quad (4.17)$$

што одговара линеарној форми једначина опажања у стандардном изравњању по методи најмањих квадрата. У контексту изравњања по методи најмањих квадрата, израз (4.15) садржи члан \mathbf{t} , назван вектор сигнала, који се (формално) третира као случајна величина.

Центрирани m димензионални вектор сигнала \mathbf{s} , који се оцењује, има облик

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

где је \mathbf{u} , $m - q$ димензионални вектор вредности сигнала у неизмереним (непознатим) тачкама. Обично је $m > q$, мада може бити и $m = q$.

Такође, важи претпоставка да су сигнали \mathbf{s} стохастички независни од грешака опажања \mathbf{n} као и да су обадве стохастичке компоненте, сигнал и шум, независни од параметара \mathbf{x} .

Релације између вектора \mathbf{s} и \mathbf{t} дате су одговарајућим коваријационим матрицама:

$$\mathbf{K}_{ss} = M[\mathbf{s} \mathbf{s}^T] \quad (4.19)$$

$$\mathbf{K}_{st} = M[\mathbf{s} \mathbf{t}^T] \quad (4.20)$$

$$\mathbf{K}_{tt} = M[\mathbf{t} \mathbf{t}^T]. \quad (4.21)$$

Такође, коваријациона матрица грешака мерења (шумова) је

$$\mathbf{K}_{nn} = E[\mathbf{n} \mathbf{n}^T]. \quad (4.22)$$

Подразумева се да су \mathbf{K}_{tt} и \mathbf{K}_{nn} познате и позитивно дефинитне матрице. Имајући у виду израз (4.18) може се писати

$$\mathbf{K}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu} \\ \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Добро познати услов минимума суме квадрата поправака за модел (4.17) гласи

$$\mathbf{n}^T \mathbf{K}_{nn}^{-1} \mathbf{n} = \text{minimum}. \quad (4.24)$$

Све вредности које се третирају као случајне величине могу се комбиновати у једном $m + q$ димензионалном вектору

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_m \quad n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_q]^T. \quad (4.25)$$

Овај вектор такође садржи сигнале t , ако се подразумева да је $m \geq q$ и да је првих q компоненти вектора \mathbf{s} идентично компонентама вектора \mathbf{t} . Коваријациона матрица вектора \mathbf{v} има форму

$$\mathbf{K}_{vv} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Недијагонални елементи блокматрице \mathbf{K}_{vv} једнаки су нули у складу са претпоставком да су сигнал и шум некорелисани.

Одговарајућа генерализација за (4.24) онда је

$$\mathbf{v}^T \mathbf{K}_{vv}^{-1} \mathbf{v} = \text{minimum}, \quad (4.27)$$

што применом (4.25) и (4.26) постаје

$$\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{s} + \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{nn}^{-1} \mathbf{n} = \text{minimum}. \quad (4.28)$$

Овај принцип минимума за колокацију по методи најмањих квадрата користи се за извођење оптималних оцена за векторе \mathbf{x} и \mathbf{s} . Проблем минимума (4.28) решава се уз услов (4.15), који се може преформулисати као

$$\mathbf{l} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{U} \mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (4.29)$$

где је

$$\mathbf{U} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]. \quad (4.30)$$

Матрица \mathbf{I} у (4.30) је јединична матрица димензија $q \times q$, док је $\mathbf{0}$ нула матрица димензија $q \times (m - q)$. Имајући у виду (4.18) јасно је да је

$$\mathbf{U} \mathbf{s} = \mathbf{t}. \quad (4.31)$$

Проблем минимума (4.28) решава се коришћењем Lagrange-ових мултипликатора који формирају q димензионални вектор \mathbf{k} . Потребно је наћи апсолутни минимум функције

$$F(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{nn}^{-1} \mathbf{n} - \mathbf{k}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{U} \mathbf{s} + \mathbf{n} - \mathbf{l}). \quad (4.32)$$

Из услова минимума функције (4.32)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial F(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{0} \text{ и} \\ \frac{\partial F(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.33)$$

следи систем једначина

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{s} - \mathbf{k}^T \mathbf{U} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{nn}^{-1} \mathbf{n} - \mathbf{k}^T &= \mathbf{0} \text{ и} \\ \mathbf{k}^T \mathbf{A} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

из којег произилазе решења по методи најмањих квадрата за векторе непознатих параметара $\hat{\mathbf{x}}$, сигнала $\hat{\mathbf{s}}$ и шумова $\hat{\mathbf{n}}$

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T (\mathbf{K}_{tt} + \mathbf{K}_{nn})^{-1} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{K}_{tt} + \mathbf{K}_{nn})^{-1} \mathbf{l} \quad (4.35)$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{K}_{st} (\mathbf{K}_{tt} + \mathbf{K}_{nn})^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}) \text{ и} \quad (4.36)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{K}_{nn} (\mathbf{K}_{tt} + \mathbf{K}_{nn})^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}). \quad (4.37)$$

Имајући у виду изразе (4.18) и (4.30) следи

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{tt} &= \mathbf{U} \mathbf{K}_{ss} \mathbf{U}^T \text{ и} \\ \mathbf{K}_{st} &= \mathbf{K}_{ss} \mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} \\ \mathbf{K}_{ut} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

па се могу се добити изрази за оцене вредности сигнала у измереним тачкама $\hat{\mathbf{t}}$ и неизмереним (непознатим) тачкама $\hat{\mathbf{u}}$

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{K}_{tt} (\mathbf{K}_{tt} + \mathbf{K}_{nn})^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}) \text{ и} \quad (4.39)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_{ut} (\mathbf{K}_{tt} + \mathbf{K}_{nn})^{-1} (\mathbf{1} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.40)$$

Применом закона о распрострањању коваријанси на основу (4.35) – (4.37) и (4.39) – (4.40) може се добити

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})^{-1}, \text{ где је } \mathbf{C} = \mathbf{K}_{tt} + \mathbf{K}_{nn}, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}} = \mathbf{K}_{nn} \mathbf{M} \mathbf{K}_{nn}, \text{ где је } \mathbf{M} = \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \text{ и} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}} = \mathbf{K}_{ss} \mathbf{M} \mathbf{K}_{ss}, \quad (4.43)$$

одакле следи

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{t}}\hat{\mathbf{t}}} = \mathbf{K}_{tt} \mathbf{M} \mathbf{K}_{tt} \text{ и} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}} = \mathbf{K}_{ut} \mathbf{M} \mathbf{K}_{tt}. \quad (4.45)$$

Решења (4.35) до (4.37) имају следеће особине (*Moritz* 1980):

1. Резултати су независни од броја оцењених сигнала;
2. Мерене као и оцењиване вредности могу бити различитог типа ако су познате релације између коваријационих матрица;
3. Метод је инваријантан на линеарне трансформације улазних података или резултата и
4. Решење је оптимално, односно даје најтачније резултате на бази улазних података.

У случају када је $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, односно када нема систематских параметара или када су они познати, израз (4.36) постаје

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{K}_{st} (\mathbf{K}_{tt} + \mathbf{K}_{nn})^{-1} \mathbf{1}, \quad (4.46)$$

што представља фундаменталну формулу за колокацију по методи најмањих квадрата при присуству шума, где $\mathbf{1}$ мора бити центрирана вредност

$$\mathbf{M}[\mathbf{1}] = \mathbf{0}. \quad (4.47)$$

У случају када \mathbf{x} није једнако нули али је познато, неопходно је урачунати члан $\mathbf{A}\mathbf{x}$ (отклонити тренд) у циљу добијања "центрираног" вектора опажања $\mathbf{1}$. За $\mathbf{s} = \mathbf{t}$ добија се

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{K}_{tt} (\mathbf{K}_{tt} + \mathbf{K}_{nn})^{-1} \mathbf{1}. \quad (4.48)$$

Овај израз даје оптималну оцену компоненте сигнала у вектору опажања $\mathbf{1}$ где је шум што је могуће више филтриран. Према томе, израз (4.48) представља филтрирање резултата опажања $\mathbf{1}$.

Израз (4.48) може се решити по $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{l} = \mathbf{K}_{tt}(\mathbf{K}_{tt} + \mathbf{K}_{nn})^{-1} \hat{\mathbf{t}}. \quad (4.49)$$

Ако се ово решење за \mathbf{l} замени у (4.46) добија се израз за предикцију нових сигнала на основу филтрираних опажања (4.49)

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{K}_{st} \mathbf{K}_{tt}^{-1} \hat{\mathbf{t}}. \quad (4.50)$$

Према томе, колокација по методи најмањих квадрата у присуству случајних грешака може се извршити у два корака:

1. Филтрирање података према формулама (4.48) и
2. Предикција вредности сигнала у непознатим тачкама, на основу филтрираних података, применом формуле (4.50).

У случају када је $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, што значи да резултати мерења не садрже случајне грешке, матрица \mathbf{K}_{nn} такође је једнака нули па, консеквентно, изрази (4.35) и (4.36) постају

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \mathbf{K}_{tt}^{-1} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_{tt}^{-1} \mathbf{l} \quad (4.51)$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{K}_{st} \mathbf{K}_{tt}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}) \quad (4.52)$$

што представља оригиналну идеју колокације по методи најмањих квадрата.

4.2.2. Стохастички процеси и коваријационе функције

Стохастички процес је (Vermeer 2007) стохастичка променљива чији је домен функција простора. Стохастичка променљива \underline{x} је средство за продукцију реализација x_1, x_2, \dots, x_n , које стохастички процес \underline{x} добија експерименталним путем. Свака вредност реализације процеса има одређену вероватноћу појављивања.

Стохастички функција $\underline{x}(t), t \in T$ је стохастичка променљива чије су реализације нестохастичке функције $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Аргумент t обично је време али такође може бити, на пример, позиција (B, L) на површи Земље.

Математичко очекивање стохастичке функције $\underline{x}(t)$ је нестохастичка функција $E_x(t)$

$$E_x(t) = E[\underline{x}(t)], \quad (4.53)$$

што се такође назива осредњавање над скупом опажања. У суштини, математичко очекивање стохастичке функције је осредњена функција око које се све могуће реализације датог стохастичког процеса групишу.

Варијанса стохастичке функције $\underline{x}(t)$ је нестохастичка функција $D_x(t)$

$$D_x(t) = D[\underline{x}(t)] = E\{[\underline{x}(t) - E_x(t)]^2\}. \quad (4.54)$$

Стандардна девијација стохастичке функције $\underline{x}(t)$ је нестохастичка функција $\sigma_x(t)$

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \quad (4.55)$$

Коваријациона функција стохастичког процеса (функције) $\underline{x}(t)$ је нестохастичка функција два аргумента

$$K_x(t_1, t_2) = E\{[\underline{x}(t_1) - E_x(t_1)] [\underline{x}(t_2) - E_x(t_2)]\}, \quad (4.56)$$

која је за сваки пар вредности t_1, t_2 једнака корелационом моменту кореспондентних вредности стохастичке функције. Према томе ако су парови $\underline{x}(t_1)$ и $\underline{x}(t_2)$ некорелисани, биће $K_x(t_1, t_2) = 0$ и обрнуто. За $t_1 = t_2 \equiv t$, коваријациона функција постаје варијанса

$$K_x(t, t) = D_x(t) = D[\underline{x}(t)]. \quad (4.57)$$

Када разлика $t_2 - t_1$ тежи бесконачности онда вредност $K_x(t_1, t_2)$ тежи нули. Основне особине коваријационе функције су

- а) $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$,
- б) $|K_x(t_1, t_2)| \leq \sigma_x(t_1) \sigma_x(t_2)$, (4.58)
- в) $K_x(t_1, t_2) = K_{x+f}(t_2, t_1)$, где је $f = f(t)$ нестохастичка функција,
- г) $K_y(t_1, t_2) = f(t_1) f(t_2) K_x(t_2, t_1)$, $\underline{y}(t) = f(t) \underline{x}(t)$.

Корелациона функција $R_x(t_1, t_2)$ стохастичке функције $\underline{x}(t)$ дефинише се као

$$R(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_x(t_2)}. \quad (4.59)$$

Стохастички процес је некорелисан ако је $K_x(t_1, t_2) = 0$, за свако $t_1 \neq t_2$.

За два стохастичка процеса $\underline{x}(t)$ и $\underline{y}(t)$ може се дефинисати унакрсна коваријациона функција као нестохастичка функција два аргумента $K_{xy}(t_1, t_2)$ која је за све вредности t_1 и t_2 једнака корелационом моменту кореспондентних вредности стохастичких функција $\underline{x}(t_1)$ и $\underline{y}(t_2)$

$$K_{xy}(t_1, t_2) = E\{[\underline{x}(t_1) - E_x(t_1)] [\underline{y}(t_2) - E_y(t_2)]\}. \quad (4.60)$$

По аналогiji са унакрсном коваријационом функцијом дефинише се унакрсна корелациона функција

$$R(t_1, t_2) = \frac{K_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_y(t_2)}. \quad (4.61)$$

Два стохастичка процеса $\underline{x}(t)$ и $\underline{y}(t)$ су ортогонална ако је за свако t_1 и t_2

$$E[\underline{x}(t_1) \underline{y}(t_2)] \equiv 0. \quad (4.62)$$

Вредности коваријанси одређене на основу (4.56), на основу скупа реализација случајног процеса $\underline{x}(t)$ представљају дискретне вредности емпиријске функције

коваријанси коју би било могуће одредити уколико би се израчунале емпиријске коваријансе у свакој тачки простора T . При практичним радовима одређени скуп дискретних вредности коваријанси најчешће се и назива емпиријском функцијом коваријанси а њихов граф представља граф емпиријске функције коваријанси.

Како није могуће добити вредности коваријационе функције у свакој тачки простора (епохи времена) емпиријским путем, у практичним применама уводе се аналитички облици коваријационих функција дефинисаних и непрекидних на целом подручју T ($t \in T$). Поред дефинисаности и непрекидности аналитичке функције морају испуњавати и низ услова који следе из саме дефиниције просторних коваријационих функција:

- функције морају бити реалне функције чије су променљиве такође из скупа реалних бројева,
- хармонијске у свим тачкама дефинисаности, односно истовремено хармонијске за пар тачака t_1 и t_2 ;
- хомогено–изотропне у простору дефинисаности,
- конвергентне,
- позитивно дефинитне

и такође оне функције које у простору дефинисаности представљају "најбољу" апроксимацију емпиријских функција коваријанси.

Коваријационе функције зависе од параметра ρ који обично представља растојање (дужину). Неки облици коваријационих функција који се користе при оптимизацији другог реда дводимензионалних геодетских мрежа или у случају моделирања дисторзија просторних података су следећи:

$$K(\rho) = K_0 e^{-\frac{\rho}{r}} \quad \text{– Експоненцијална (Shaw 1969),}$$

$$K(\rho) = K_0 e^{-\left(\frac{\rho}{r}\right)^2} \quad \text{– Gauss-ова (Grafarend 1976),}$$

$$K(\rho) = K_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2} \quad \text{– Hirvonen-ова (Hirvonen 1962),} \quad (4.63)$$

$$K(\rho) = K_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \right] e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r}\right)^2} \quad \text{– Reilly-ева (Reilly 1979),}$$

где је ρ ($= t_1 - t_2$) растојање (дужина). Основне особине функција (4.63) су

$$\begin{aligned}
 \text{а) } K(-\rho) &= K(\rho), \\
 \text{б) } |K(\rho)| &\leq K(0), \\
 \text{в) } |K(0)| &= \sigma_K^2 > 0 \text{ и} \\
 \text{г) } \lim_{\rho \rightarrow \infty} K(\rho) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Нормализацијом кореспондентне коваријационе функције добија се корелациона функција

$$R(\rho) = \frac{K(\rho)}{K(0)}. \tag{4.65}$$

Основни параметри коваријационе функције (слика 4.5) су (Moritz 1980):

- варијанса K_0 ,
- корелациона дужина ξ , и
- параметар закривљености χ .

Варијанса K_0 је вредност функције $K(\rho)$ за $\rho = 0$:

$$K_0 = K(0), \tag{4.66}$$

Корелациона дужина ξ (слика 4.5) је вредност аргумента коваријационе функције за који вредност $K(\rho)$ опадне на половину вредности за је $\rho = 0$.

$$K(\xi) = \frac{1}{2} K_0. \tag{4.67}$$

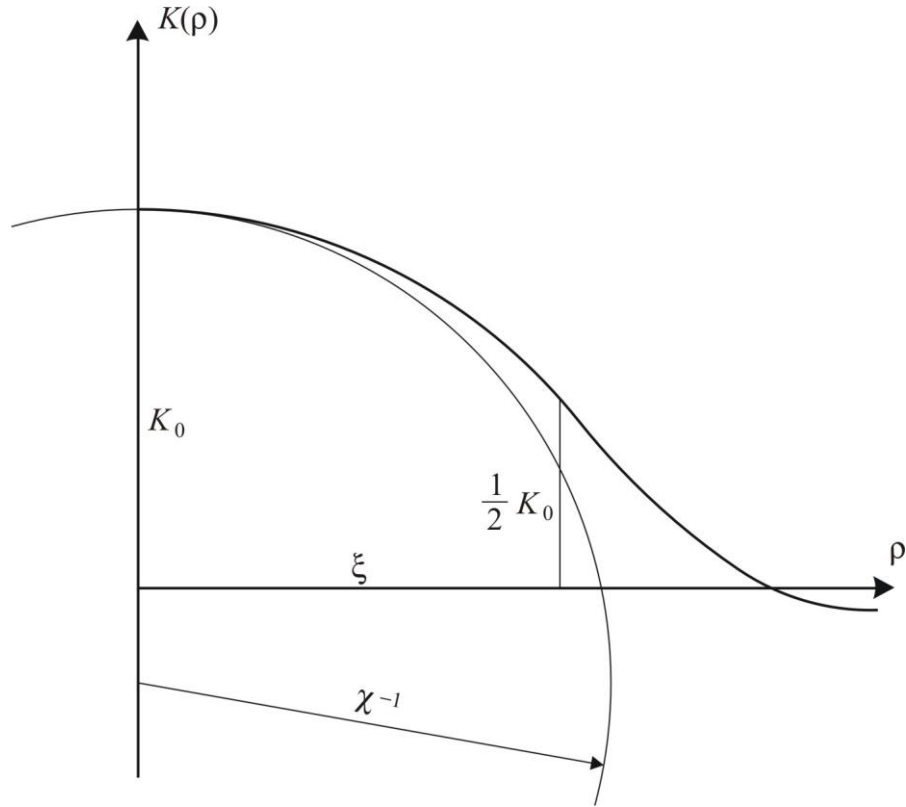
Релација између карактеристичне дужине r из (4.63) и корелационе дужине ξ дата је изразом

$$r = \frac{\xi}{\alpha} \quad (\alpha > 0) \tag{4.68}$$

За функцију Нирвопен-а (4.63), на основу (4.67) и (4.68) произилази да је $\alpha = 1$.

Параметар закривљености χ је бездимензионална величина која описује понашање коваријационе функције на кратким растојањима. Параметар је дефинисан добро познатим изразом

$$\chi = \frac{d^2 K(\rho)}{d\rho^2} \left[1 + \left(\frac{dK}{d\rho} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}. \tag{4.69}$$



Слика 4.5. Параметри коваријационе функције (Moritz 1980)

Обзиром да је, за $\rho = 0$, $\frac{dK}{d\rho} = 0$ следи да је

$$\chi = \left[\frac{d^2 K(\rho)}{d\rho^2} \right]_0. \quad (4.70)$$

4.2.3. Примена кококације на моделирање дисторзија просторних података

Уколико се на основу скупова координата ($B_{GRS}, L_{GRS}, h_{GRS}$) у глобалном геодетском референтном систему и ($B_{DKS}, L_{DKS}, h_{DKS}$) у Државном координатном систему, за n идентичних тачака узорка просторних података, применом модела (3.39), оцене параметри трансформације сличности $\hat{\mathbf{x}}$, онда се могу формирати вектори разлика

$$\mathbf{l}_B = \begin{bmatrix} l_B^1 \\ l_B^2 \\ \vdots \\ l_B^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{DKS}^1 - \hat{B}_{DKS}^1 \\ B_{DKS}^2 - \hat{B}_{DKS}^2 \\ \vdots \\ B_{DKS}^n - \hat{B}_{DKS}^n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{l}_L = \begin{bmatrix} l_L^1 \\ l_L^2 \\ \vdots \\ l_L^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{DKS}^1 - \hat{L}_{DKS}^1 \\ L_{DKS}^2 - \hat{L}_{DKS}^2 \\ \vdots \\ L_{DKS}^n - \hat{L}_{DKS}^n \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Вектори \mathbf{l}_B и \mathbf{l}_L задовољавају једнакост (4.47), односно

$$M[\mathbf{l}_B] = M[\mathbf{l}_L] = \mathbf{0}. \quad (4.72)$$

Према томе, може се рећи да је применом оцењених параметара трансформације сличности $\hat{\mathbf{x}}$ на геодетске координате у глобалном геодетском референтном систему (B_{GRS} , L_{GRS} , h_{GRS}) тачака узорка просторних података отклоњен тренд, односно може се писати

$$\mathbf{l}_B = \mathbf{t}_B + \mathbf{n}_B,$$

$$\mathbf{l}_L = \mathbf{t}_L + \mathbf{n}_L. \quad (4.73)$$

Уколико се занемари међусобна корелација вектора \mathbf{l}_B и \mathbf{l}_L , проблем оцене вредности сигнала (дисторзија просторних података) може се раздвојити на два дела односно дисторзије просторних података могу се оцењивати засебно за сваку компоненту положаја. Процес оцене дисторзија просторних података применом колокације по методи најмањих квадрата тада се одвија у следећим корацима:

1. Израчунавање измерених (одређених) дисторзија просторних података у идентичним тачкама применом израза (4.71);
2. Одређивање криве (графа) емпиријских коваријанси одвојено за сваку компоненту положаја;
3. Избор аналитичког облика коваријационе функције, при чему се могу изабрати различите функције за поједине компоненте положаја;
4. Оцена параметара аналитичких коваријационих функција на основу вредности емпиријских коваријанси;
5. Оцена нивоа шума у подацима мерења (одређивања) дисторзија просторних података;
6. Рачунање елемената коваријационих матрица \mathbf{K}_{tt} и \mathbf{K}_{mm} за сваку компоненту положаја на основу аналитичке коваријационе функције и оцењеног нивоа шума;
7. Оцена вредности сигнала у идентичним тачкама (филтрирање) изразом (4.48);
8. Оцена вредности сигнала у непознатим тачкама (предикција), на основу филтрираних података, изразом (4.50) и

9. Оцена тачности добијених резултата.

Крива емпиријских коваријанси дефинисана је дискретним вредностима оцењеним у правилним размацима по аргументу растојања (дужине). Према томе, да би се оцениле дискретне вредности криве емпиријских коваријанси, подаци морају бити регуларизовани, т.ј. класификовани у оквиру правилних интервала по аргументу растојања између тачка узорка просторних података. Треба напоменути да колокација по методи најмањих квадрата подразумева ергодичност и изотропију података. Ергодичност (*Kwon и др. 2005*) значи да осредњавање по вероватноћи може бити замењено просторним осредњавањем за сваку реализацију процеса, док изотропија подразумева коваријациону функцију која је независна од правца т.ј. која зависи само од растојања ρ између две случајне променљиве

$$K\{x(t), x(t+h)\} = K\{\|h\|\} = K\{\rho\} \quad (4.74)$$

где је $x(t)$ стохастички процес у некој локацији (епохи) t , а $\rho = \|h\|$, растојање између два процеса.

Ако за интервал одређивања дискретних вредности емпиријских коваријанси означи са $\Delta\rho$ онда је потребно одредити вредности емпиријских коваријанси по аргументима

$$\rho_i = i \Delta\rho, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Максимална вредност за растојање ρ_n у овом случају одговара дијаметру подручја трансформације. У практичним применама ово растојање је мање, односно са рачунањем емпиријских коваријанси престаје се онда када се закључи да њихове вредности почињу да осцилују око нуле. Вредности емпиријских коваријанси за аргумент растојања $\rho = \rho_0 = 0$ може се добити из израза

$$K_B(0) = \frac{\sum_{i=1}^n (t_B^i)^2}{n}, \quad (4.75)$$

$$K_L(0) = \frac{\sum_{i=1}^n (t_L^i)^2}{n}. \quad (4.76)$$

Да би се израчунале вредности емпиријских коваријанси по аргументу ρ_i потребно је резултате мерења класификовати унутар интервала $\rho_i - \varepsilon \leq \rho < \rho_i + \varepsilon$. Избор вредности ε детеминисан је густином узорка при чему мора бити

$$\varepsilon \leq \frac{\Delta\rho}{2}. \quad (4.77)$$

Вредности емпиријских коваријанси за аргумент ρ_i тада следи из израза

$$K_B(\rho_i) = \frac{\sum_{j,k=1}^{n_i} t_B^j t_B^k}{n_i}, \quad (4.78)$$

$$K_L(\rho_i) = \frac{\sum_{j,k=1}^{n_i} I_L^j I_L^k}{n_i}, \quad (4.79)$$

где је n_i број парова тачака узорка просторних података за које је $\rho_i - \varepsilon \leq \rho_{jk} < \rho_i + \varepsilon$.

За аналитичку коваријациону функцију бира се нека из класе функција са особинама (4.64). Конкретан избор аналитичке коваријационе функције следи из теоријских претпоставки о понашању случајног процеса или се на основу криве емпиријских коваријанси бира онај облик функције који ће најбоље описати понашање случајног процеса. Параметри аналитичке коваријационе функције могу се одредити на основу вредности емпиријских коваријанси при чему се за вредност темена криве аналитичких коваријанси усвајају вредности (4.75) и (4.76).

Матрица \mathbf{K}_{mn} представља коваријациону матрицу резултата мерења дисторзија просторних података. Уколико се таквом матрицом не располаже, ниво шума у подацима мерења (одређивања) дисторзија просторних података може се одредити на основу упоређења података између парова блиских тачака, односно тачака између којих је растојање ρ довољно мало да се ефекти дисторзија просторних података могу занемарити. За ниво шума тада се усваја јединствена вредност варијансе шума K_n , па следи да је

$$\mathbf{K}_{mn} = K_n \mathbf{I}, \quad (4.80)$$

где је \mathbf{I} јединична матрица.

5. МОДЕЛ ТРАНСФОРМАЦИОНОГ ГРИДА ЗА ТЕРИТОРИЈУ СРБИЈЕ

Развој модела положајног трансформационог грида, за потребе трансформације података премера непокретности добијених коришћењем АГРОС, у Државни координатни систем, за целокупну државну територију, представља комплексан процес који мора да укључи велики број тачака премера непокретности (узорак). Процес развоја трансформационог грида може се описати следећим фазама:

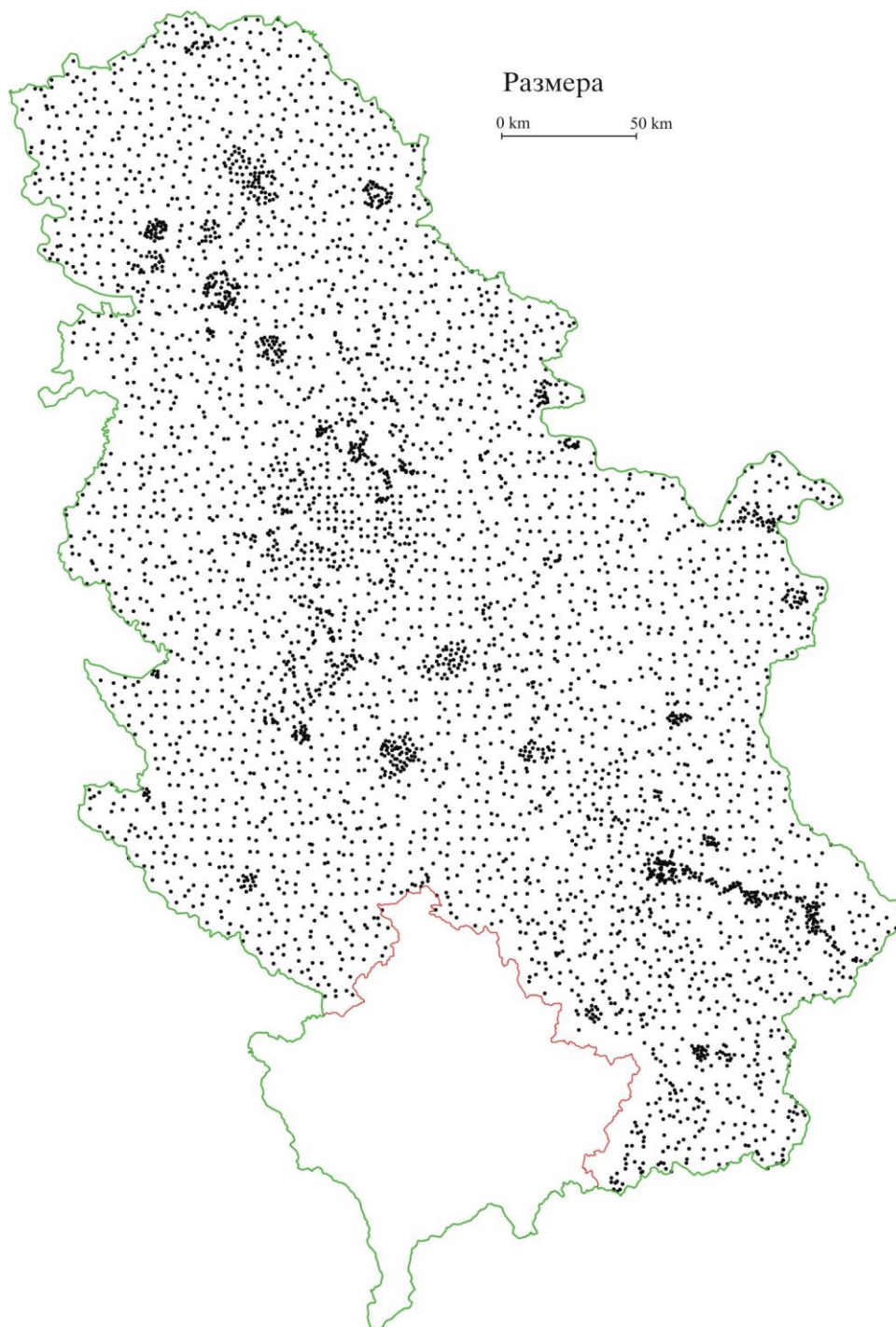
1. Примена седмопараметарске трансформације сличности на комплетан узорак просторних података;
2. Упоредњење конформно трансформисаних координата са датим вредностима да би се израчунале вредности дисторзија просторних података у свакој тачки узорка;
3. Идентификација и искључивање “неконформних” тачака т.ј. тачака на којима се дисторзије значајно разликују у односу на генерални тренд суседних (најближих) тачака;
4. Разређивање, да би се добио што равномернији просторни распоред тачака узорка;
5. Оцена вредности дисторзија просторних података у тачкама правилног грида неким од изабраних поступака, на основу изабраног (разређеног) узорка;
6. Тестирање перформанси добијеног грида.

5.1. Анализа узорка просторних података и избор интервала грида

Узорак просторних података представља скуп тачака премера непокретности за које су познате координате и висине у Државном координатном систему Републике Србије као и координате истих тачака у систему ITRS. За експериментални део ове тезе употребљен је скуп од 4401 тачке геодетске основе премера непокретности, за које је правоугле геоцентричне координате (X, Y, Z) у систему ITRS одредио Сектор за основне геодетске радове Републичког геодетског завода Србије. Координате ових тачака, у систему ITRS, одређиване су применом релативног статичког GPS позиционирања ослоном на тачке Државне референтне мреже (SREF) или позиционирањем у односу на Активну геодетску референтну основу Србије (АГРОС), применом сервиса позиционирања АГРОС RTK. Према томе, реч је о координатама у систему ITRF, епоха 1998.7. Имајући у виду начин одређивања ових координата, може се закључити да је њихова просторна тачност у систему ITRF епоха 1998.7, центиметарског нивоа. У Државном координатном систему познате су положајне координате (B_{DKS}, L_{DKS}) и висине H за 3815 тачака док су

преосталих 586 тачака познате само положајне координате (B_{DKS} , L_{DKS}). Просторни распоред тачака узорка приказан је на слици 5.1.

Анализа хомогености (конформности) одступања по компонентама положаја (B , L) на идентичним тачкама извршена је поделом подручја трансформације на правилне елементе димензија $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$ и рачунањем параметара тродимензионалне трансформације сличности засебно за сваки елемент. Тачке у оквиру сваког елемента третиране су засебно, при чему се подразумевало да су одступања (резидуали) на идентичним тачкама v_B , v_L у оквиру елемента чисто случајног



Слика 5.1. Просторни распоред тачака узорка

карактера, односно присуство дисторзија просторних података је занемарено. На основу ових одступања израчунате су експерименталне стандардне девијације одступања по компонентама положаја (B, L)

$$s_B = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_{B_i}^2}{n}} \text{ и}$$
$$s_L = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_{L_i}^2}{n}} \quad (5.1)$$

где је n укупан број тачака узорка, као и експериментална стандардна девијација за положајно одступање

$$s_P = \sqrt{s_B^2 + s_L^2} . \quad (5.2)$$

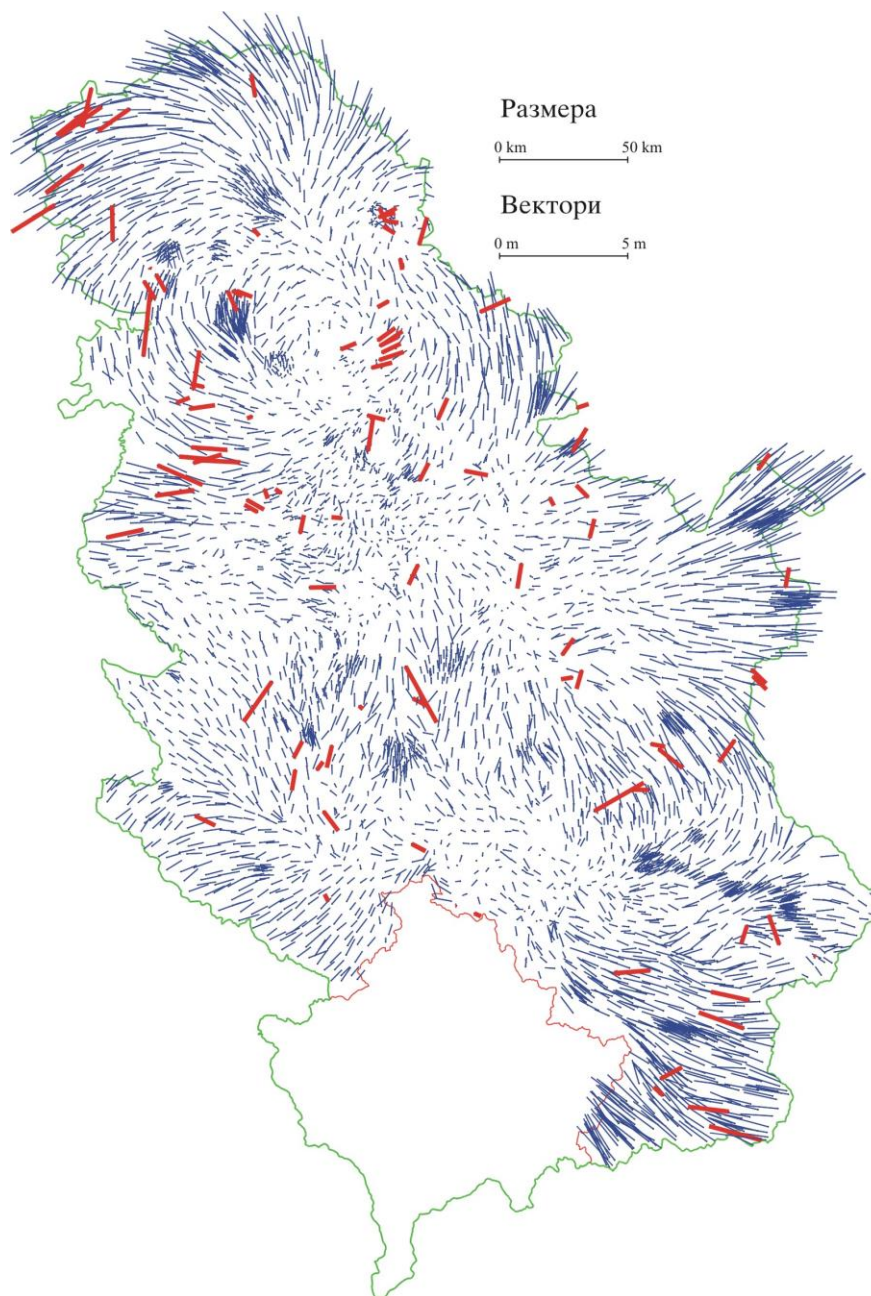
Критеријуми конформности за сваку појединачну тачку узорка могу се поставити на два начина:

1. По правцу и интензитету вектора одступања или
2. Само по интензитету вектора одступања.

У првом случају, као вредности чија се сагласност проверава служе одступања трансформисаних вредности координата по компонентама положаја v_B, v_L и свака тачка за коју било која компонента положаја не задовољава услове конформности мора бити искључена из анализе. У другом случају као критеријум служи интензитет вектора одступања

$$v_P = \sqrt{v_B^2 + v_L^2} . \quad (5.3)$$

Не улазећи у анализу који је од ова два приступа исправнији, свакако се може рећи да је први приступ ригорознији и изискује елиминацију већег броја тачака узорка. Покушај да се овакав приступ примени на расположиви узорак доводио је по нарушавања геометрије узорка, односно појаве великих празнина на територијама где је узорак релативно редак. Такође, на тим подручјима није било могуће са сигурношћу закључивати да ли неконформност настаје због евентуалног присуства грубих грешака у резултатима мерења или је последица дисторзија просторних података. Како је у овом раду основни циљ био да се испита расположиви узорак као целина, уз искључивање што мањег броја тачака, примењен је други приступ па су из даље анализе искључене тачке за које положајно одступање (5.3) прелазило троструку вредност експерименталне стандардне девијације положајног одступања (5.2).



Слика 5.2. Просторни распоред и вектори одступања тачака узорка искључених из анализе

На овај начин из анализе је искључено укупно 99 тачака, што представља 2.2 % од укупног броја тачака узорка. Просторни распоред, као и вектори одступања на тачкама искљученим из даље анализе узорка приказан је на слици 5.2.

Вредности експерименталних стандардних девијација по компонентама положаја (B , L) добијене на овај начин, после искључења “неконформних” тачака износе

$$\begin{aligned} s_B &= 0.093 \text{ m и} \\ s_L &= 0.095 \text{ m,} \end{aligned} \tag{5.4}$$

односно експериментална положајна стандардна девијација

$$s_p = 0.133 \text{ m.} \quad (5.5)$$

Према томе, из анализе су искључене све тачке са положајним одступањем у оквиру елемента већим од 0.399 m.

За преосталих 4302 тачке извршено је разређивање, да би се добио што је могуће равномернији просторни распоред тачака узорка за оцену трансформационог грида. За генерални критеријум разређивања усвојено је да минимално растојање између суседних (најближих) тачака не буде мање од 3000 m. Од овог правила одступано је једино у циљу оптималног избора тачака чворова код поделе подручја трансформације на коначне елементе. На овај начин за развој трансформационог



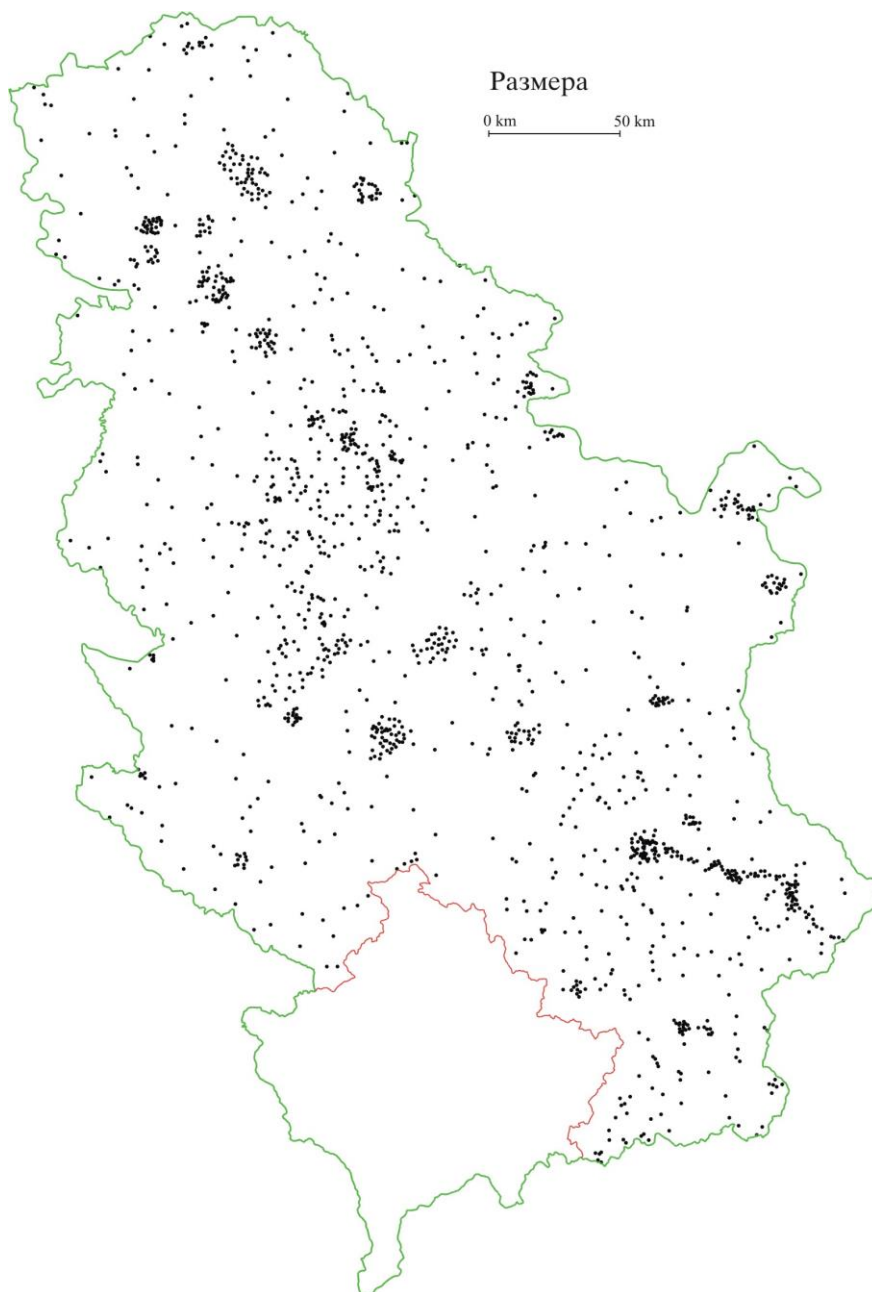
Слика 5.3. Просторни распоред тачака разређеног узорка

5. Модел трансформационог грида за територију Србије

грида усвојено је 2821 тачака што, у просеку, износи приближно једна тачка на 25 km^2 . Просторни распоред ових тачака приказан је на слици 5.3.

Карактеристичне вредности за растојање d између суседних (најближих) тачака изабраног (разређеног) узорка су следеће:

- минимална: $d_{min} = 1198 \text{ m}$,
- максимална: $d_{max} = 10601 \text{ m}$ и
- просечна: $d_{сред} = 3943 \text{ m}$.



Слика 5.4. Просторни распоред тачака за тестирање перформанси грида

Према томе, са становишта премера непокретности овај узорак свакако се може сматрати ретким узорком. Поред тога, показатељи о међусобном растојању између суседних (најближих) тачака узорка говоре о томе да и поред разређивања није било могуће постићи довољну хомогеност распореда тачака узорка просторних података.

Преостале 1481 тачка, које нису ни на који начин учествовале у оцењивању трансформационог грида (осим при оцењивању криве емпиријских коваријанси при колокацији по методи најмањих квадрата), искоришћене су за тестирање резултата грид трансформације. Просторни распоред ових тачака приказан је на слици 5.4.

На основу два скупа координата тачака, за 2821 усвојену тачку узорка, извршена је оцена седам параметара тродимензионалне трансформације сличности између система ITRF, епоха 1998.7 и Државног координатног система применом модела (3.39), при чему су висине тачака узорка у Државном координатном систему третиране као елипсоидне висине за елипсоид Bessel-a. Ефекти ове апроксимације (*Schmitt и др.* 1991) на вредности трансформисаних положајних координата \hat{B}_{DKS} , \hat{L}_{DKS} минимални су за подручја трансформације ограниченог обима (радијуса до неколико десетина километара). За целокупну државну територију ови ефекти нису занемарљиви али се могу отклонити применом колокације по методи најмањих квадрата као и поделом подручја трансформације на коначне елементе. Оцене параметара тродимензионалне трансформације сличности и њихове стандардне девијације приказане су у табели 5.1.

Табела 5.1. Оцене параметара тродимензионалне трансформације сличности

параметар	вредност	стандардна девијација
транслација по X оси	-577.9977 m	0.7700 m
транслација по Y оси	-164.3288 m	0.8044 m
транслација по Z оси	-390.0708 m	0.6181 m
ротација око X осе	4.934965''	0.019803''
ротација око Y осе	-0.969487''	0.027152''
ротација око Z осе	-12.989505''	0.023938''
размера	-7.949520 mm/km	0.071827 mm/km

Карактеристичне вредности за резидуале (измерених вредности дисторзија) на идентичним тачкама по компонентама положаја (B , L) приказане су у табели 5.2.

Табела 5.2. Карактеристичне вредности за резидуале на идентичним тачкама, после тродимензионалне трансформације сличности за целокупно подручје

геодетска ширина B			геодетска дужина L			положај	
$v_{B_{\min}}$ [m]	$v_{B_{\max}}$ [m]	s_B [m]	$v_{L_{\min}}$ [m]	$v_{L_{\max}}$ [m]	s_L [m]	$v_{P_{\max}}$ [m]	s_P [m]
-1.613	1.126	0.419	-1.955	1.999	0.551	2.389	0.692

За вредности интервала (корака) грида усвојене су вредности 5.4 лучне минуте по геодетској ширини B и 7.4 лучне минуте по геодетској дужини L што, на територији Србије, приближно одговара растеру од $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$. Овакав избор са једне стране условљен је густином расположивог узорка а са друге стране је резултат потребе да грешка примене билинеарне интерполације (3.42) у оквиру једног елемента грида буде довољно мала.

Оцена дисторзија просторних података у тачкама правилног грида извршена је:

1. Поделом подручја трансформације на коначне елементе и
2. Применом колокације по методи најмањих квадрата.

Оба поступка примењена су на идентичан (разређени) узорак просторних података и тестирана истим скупом тачака (које у оцени вредности дисторзија у тачкама грида нису учествовале) како би резултати били међусобно упоредиви.

5.2. Оцена вредности дисторзија у тачкама грида поделом подручја трансформације на коначне елементе

Блокдијаграм процеса оцене вредности дисторзија просторних података у тачкама правилног грида поделом подручја трансформације на коначне елементе приказан је на слици 5.5. Подела подручја трансформације на коначне елементе извршена се према следећим принципима:

1. Елементи треба да буду четвороуглови што је могуће правилнијег облика и приближно једнаке површине;
2. Сваки елемент треба да садржи минимално 4 тачке узорка за оцену параметара тродимензионалне трансформације сличности;
3. Површина појединачног елемента треба да буде што мања како би апроксимација дисторзија просторних података била што вернија;

Граничне тачке елемената (чворови) могу бити изабране на два начина, односно као:

1. Тачке са произвољним позицијама или
2. Тачке узорка просторних података.

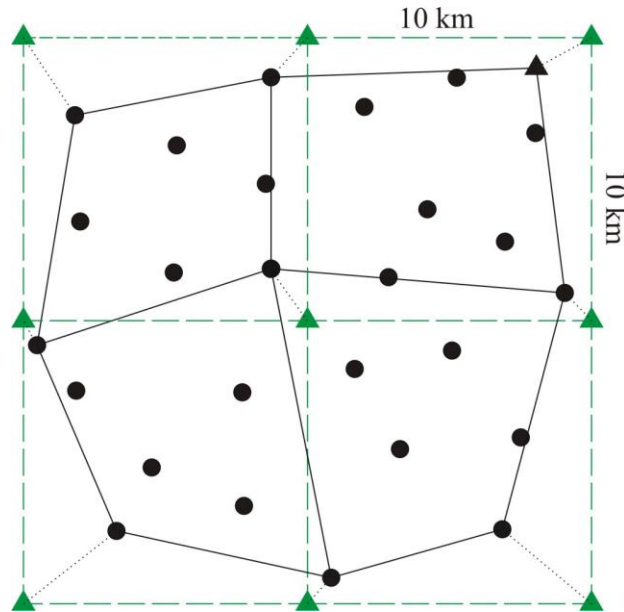


Слика 5.5. Блокдијаграм процеса оцене вредности дисторзија просторних података у тачкама правилног грида поделом подручја трансформације на коначне елементе

Предност првог начина огледа се у томе што, у том случају, елементи могу бити правилне и међусобно једнаке фигуре. Недостатак оваквог приступа је што тачке чворови не могу бити укључене у рачунање параметара трансформације за сваки појединачни елеменат, односно при рачунању трансформисаних вредности њихових координата оне се морају третирати као непознате тачке.

Како се тачке чворови у оквиру сваког елемента налазе изван подручја обухваћеног идентичним тачкама, на основу којих су оцењени параметри трансформације сличности, то се трансформисане вредности њихових координата добијају екстраполацијом па у случају када је растојање од подручја обухваћеног идентичним тачкама до тачке чвора значајно, трансформисане вредности координата тачака чворова могу бити донекле непредвидиве.

Принцип поделе подручја трансформације на коначне елементе, примењен у овом раду, приказан је на слици 5.6. Као основна схема по којој је подела извршена коришћена је подела подручја трансформације на коначне елементе димензија $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$. За тачке чворове усвајане су тачке узорка просторних података најближе пројектованој позицији чвора у свим случајевима када су чворови учествовали у формирању више од једног елемента. Једино у ситуацијама када је



Слика 5.6. Принцип формирања коначних елемената

тачка чвор учествовала у формирању само једног елемента (у граничним подручјима) њена позиција је, из практичних разлога и само у неколико случајева, бирана тако да елемент обухвати све идентичне тачке узорка као и тачке за тестирање узорка а да при том елемент задржи облик што правилнијег четвороугла.

На овај начин, обезбеђено је да свака тачка чвор учествује у оцењивању параметара трансформације сличности, за све елементе у чијем формирању учествује, чиме се умањује ефекат услова континуитета између суседних елемената. Отежавајућа околност код оваквог приступа је да свака тачка чвор мора да испуни задате критеријуме конформности у свим елементима у чијем формирању учествује, што је на подручјима где је узорак просторних података релативно редак понекад било тешко постићи.

Овако изведена поделе подручја трансформације на коначне елементе приказана је на слици 5.7. Подручје трансформације подељено је на 763 коначна елемента са следећим општим карактеристикама:

- минимална површина елемента: $P_{max} = 19 \text{ km}^2$,
- максимална површина елемента: $P_{min} = 204 \text{ km}^2$,
- просечна површина елемента: $P_{sred} = 99 \text{ km}^2$,
- минималан број тачака узорка у оквиру елемента: $n_{min} = 4$,
- максималан број тачака узорка у оквиру елемента: $n_{max} = 12$,
- просечан број тачака узорка у оквиру елемента: $n_{сред} = 6.6$.



Слика 5.7. Подела подручја трансформације на коначне елементе

Релативно велика разлика између максималне и минималне површине елемента као и разлика у броју тачака у оквиру појединачних елемената резултат су неопходности прилагођавања поделе у граничним подручјима као и недовољне хомогености густине узорка.

После израчунавања параметара тродимензионалне трансформације сличности по елементима, за карактеристичне вредности резидуала на идентичним тачкама узорка добијене су вредности приказане у табели 5.3.

Табела 5.3. Карактеристичне вредности за резидуале на идентичним тачкама, после трансформације сличности по елементима

геодетска ширина B			геодетска дужина L			положај	
$v_{\tilde{B}_{\min}}$ [m]	$v_{\tilde{B}_{\max}}$ [m]	$s_{\tilde{B}}$ [m]	$v_{\tilde{L}_{\min}}$ [m]	$v_{\tilde{L}_{\max}}$ [m]	$s_{\tilde{L}}$ [m]	$v_{\tilde{p}_{\max}}$ [m]	$s_{\tilde{p}}$ [m]
-0.370	0.380	0.093	-0.378	0.393	0.095	0.414	0.133

Ефекат услова континуитета на тачкама чворовима може се сагледати из одступања трансформисаних вредности координата тачака чворова по појединачним елементима од осредњених вредности. Параметри који карактеришу овај ефекат приказани су у табели 5.4.

Табела 5.4. Карактеристичне вредности за ефекат услова континуитета на тачкама чворовима

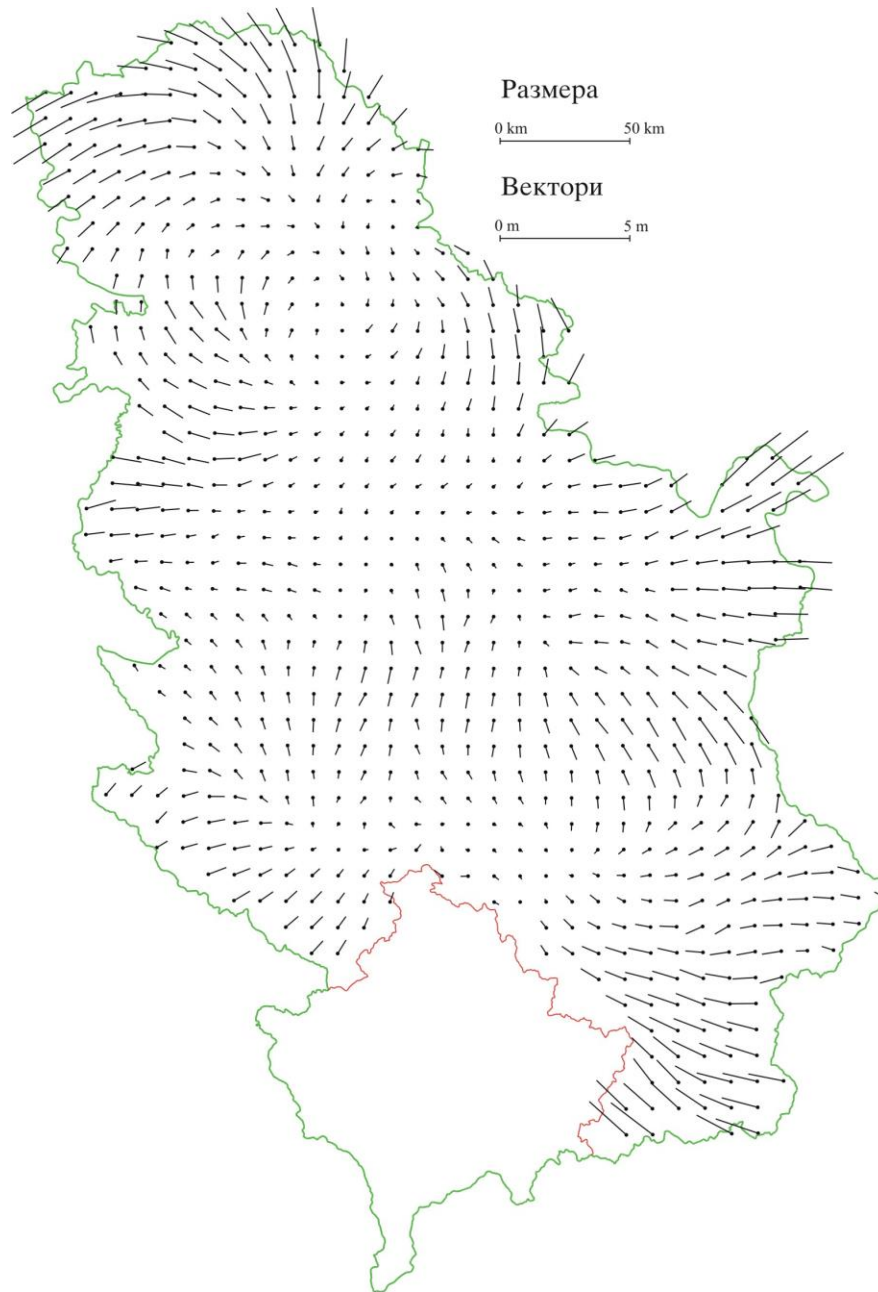
геодетска ширина B			геодетска дужина L			положај	
$\Delta_{\tilde{B}_{\min}}$ [m]	$\Delta_{\tilde{B}_{\max}}$ [m]	$\bar{s}_{\tilde{B}}$ [m]	$\Delta_{\tilde{L}_{\min}}$ [m]	$\Delta_{\tilde{L}_{\max}}$ [m]	$\bar{s}_{\tilde{L}}$ [m]	$\Delta_{\tilde{p}_{\max}}$ [m]	$\bar{s}_{\tilde{p}}$ [m]
-0.272	0.237	0.066	-0.256	0.266	0.066	0.321	0.093

После примене услова континуитета, за карактеристичне вредности резидуала на идентичним тачкама узорка добијене су вредности приказане у табели 5.5.

Табела 5.5. Карактеристичне вредности за резидуале на идентичним тачкама, после примене услова континуитета

геодетска ширина B			геодетска дужина L			положај	
$v_{\tilde{B}_{\min}}$ [m]	$v_{\tilde{B}_{\max}}$ [m]	$s_{\tilde{B}}$ [m]	$v_{\tilde{L}_{\min}}$ [m]	$v_{\tilde{L}_{\max}}$ [m]	$s_{\tilde{L}}$ [m]	$v_{\tilde{p}_{\max}}$ [m]	$s_{\tilde{p}}$ [m]
-0.399	0.421	0.085	-0.388	0.474	0.088	0.502	0.123

На основу оцена параметара трансформације сличности као и параметара пројективне трансформације (услова континуитета) по елементима израчунате су вредности положајних координата ($\tilde{B}_{DKS}, \tilde{L}_{DKS}$) у Државном координатном систему за 767 тачака правилног грида као и оцене за векторе дисторзија просторних података у тачкама правилног грида. Приказ вектора дисторзија просторних података у тачкама правилног грида дат је на слици 5.8. Карактеристичне вредности за оцене вектора дисторзија просторних података у тачкама правилног грида приказане су у табели 5.6.



Слика 5.8. Вектори дисторзија просторних података оцењени поделом подручја трансформације на коначне елементе

Табела 5.6. Карактеристичне вредности за векторе дисторзија просторних података у тачкама грида изведеног поделом подручја трансформације на коначне елементе

геодетска ширина B		геодетска дужина L		интензитет	
min [m]	max [m]	min [m]	max [m]	min [m]	max [m]
-0.988	1.445	-1.634	1.749	0.011	2.116

Тестирање перформанси грид трансформације изведене поделом подручја трансформације на коначне елементе извршено је рачунањем трансформисаних вредности положајних координата ($\tilde{B}_{DKS}, \tilde{L}_{DKS}$) за 1481 тачку (тачке које нису учествовале у оцењивању вектора дисторзија просторних података у тачкама грида). Процес рачунања трансформисаних координата за ове тачке је следећи:

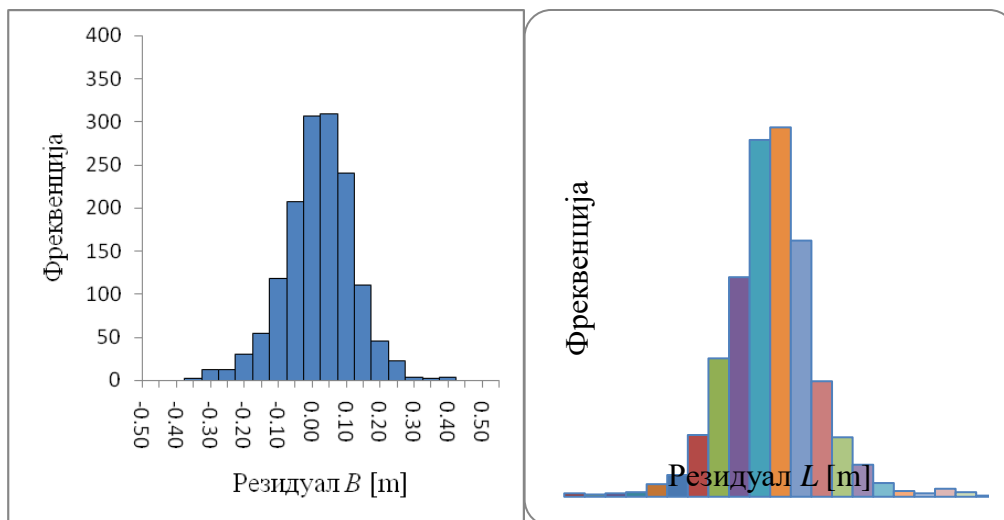
1. Примена параметара тродимензионалне трансформације сличности за целокупно подручје трансформације (табела 5.1) на геодетске координате у систему ITRS, (B_{ITRS}, L_{ITRS});
2. Примена билинеарне интерполације од четири суседне (најближе) тачке правилног грида у циљу израчунавања корекција за компоненте позиције и примена израчунате корекције на вредности трансформисаних координата.

Упоређење овако израчунатих координата тачака за тестирање перформанси грида са познатим вредностима даје одступања по компонентама положаја (B, L) као и положајна одступања на основу којих се могу изводити закључци о могућностима овако дизајнираног поступка трансформације координата између система ITRF епоха 98.7 и Државног координатног система Републике Србије. Показатељи за одступања (резидуале) по компонентама положаја B, L у односу на познате вредности, на тачкама за тестирање грида приказани су у табели 5.7.

Хистограми фреквенција одступања по компонентама положаја у односу на познате вредности (резидуала) приказане су на слици 5.9.

Табела 5.7. Показатељи перформанси грида оцењеног на основу поделе подручја трансформације на коначне елементе

	резидуали		
	B	L	положај [m]
max [m]	0.39 m	0.56 m	0.56 m
min [m]	-0.36 m	-0.49 m	
средина	0.00 m	0.00 m	0.12 m
стандардна девијација	0.10 m	0.11 m	0.15 m
≤ 0.05 m	41.9 %	43.1 %	20.1 %
≤ 0.10 m	72.0 %	71.2 %	50.5 %
≤ 0.15 m	87.3 %	86.0 %	73.3 %
≤ 0.20 m	94.1 %	93.2 %	85.7 %
≤ 0.25 m	97.5 %	96.3%	92.2 %
≤ 0.30 m	98.6 %	97.8 %	95.3%
Укупно тачака: 1481			



Слика 5.9. Хистограми фреквенција одступања на тачкама за тестирање перформанси грида изведеног поделом подручја трансформације на коначне елементе

5.3. Оцена вредности дисторзија у тачкама грида применом колокације по методи најмањих квадрата

Код примене колокације по методи најмањих квадрата, оцена (предикција) дисторзија просторних података у тачкама правилног грида врши се одвојено за сваку компоненту положаја B и L . Блокдијаграм процеса оцене вредности дисторзија просторних података у тачкама правилног грида применом колокације по методи најмањих квадрата приказан је на слици 5.10.

Први корак у оцени дисторзија просторних података применом колокације по методи најмањих квадрата је оцена криве емпиријских коваријанси на основу података мерења т.ј. разлика између положајних координата тачака узорка у Државном координатном систему и вредности координата истих тачака добијених на основу тродимензионалне трансформације сличности применом параметара из Табеле 5.1. Да би се добиле што веродостојније оцене за криве емпиријских коваријанси поред тачака разређеног узорка коришћени су и подаци на тачкама за тестирање грида.

Ширина интервала између дискретних вредности емпиријских коваријанси детерминисана је густином узорака па је усвојено да ширина интервала буде 3 km, што приближно одговара просечном растојању између тачака комплетног узорка просторних података.



Слика 5.10. Блокдијаграм поступка оцене вредности дисторзија просторних података применом колокације по методи најмањих квадрата

За израчунавање аналитичких коваријанси за обадве компоненте положаја (B , L) изабране су функције Нирвонен-а (4.63):

$$K_B(\rho) = \frac{K_{0B}}{1 + \frac{\rho^2}{d_{0B}^2}} \quad (5.7)$$

$$K_L(\rho) = \frac{K_{0L}}{1 + \frac{\rho^2}{d_{0L}^2}} \quad (5.8)$$

где су

K_{0B} , K_{0L} – емпиријске варијансе дисторзија просторних података по компонентама положаја B и L , респективно,

ρ – растојање (дужина),

d_{0B} , d_{0L} – карактеристична растојања (дужине), по компонентама положаја B и L , респективно, оцењене на основу вредности емпиријских коваријанси.

Параметри аналитичких коваријационих функција (5.7) и (5.8), за компоненте положаја (B , L) оцењене на основу емпиријских података приказане су у табели 5.8.

Табела 5.8. Параметри аналитичких коваријационих функција по компонентама положаја (B , L)

геодетска ширина B		геодетска дужина L	
K_{0B} [m ²]	d_{0B} [km]	K_{0L} [m ²]	d_{0L} [km]
0.1808	23.7	0.3016	32.6

Графички приказ крива емпиријских коваријанси по компонентама положаја (B , L) као и графици функција аналитичких коваријанси, добијени према (5.7) и (5.8), уз коришћење карактеристичних вредности из табеле 5.8. приказани су на слици 5.11.

Предикција вредности дисторзија просторних података у идентичним тачкама и тачкама правилног грида извршена је посебно за сваку компоненту положаја, применом колокације по методи најмањих квадрата са филтрацијом података. За ниво шума усвојене су вредности варијанси по компонентама положаја, добијене на основу анализе узорка

$$K_{n_B} = 0.0086 \text{ m}^2 \text{ и}$$

$$K_{n_L} = 0.0090 \text{ m}^2. \quad (5.9)$$

Карактеристичне вредности за репродуктивност података (резидуале) у идентичним тачкама узорка просторних података приказане су у табели 5.9.

Табела 5.9. Карактеристичне вредности за репродуктивност података (резидуале) у идентичним тачкама узорка просторних података код примене колокације по методи најмањих квадрата

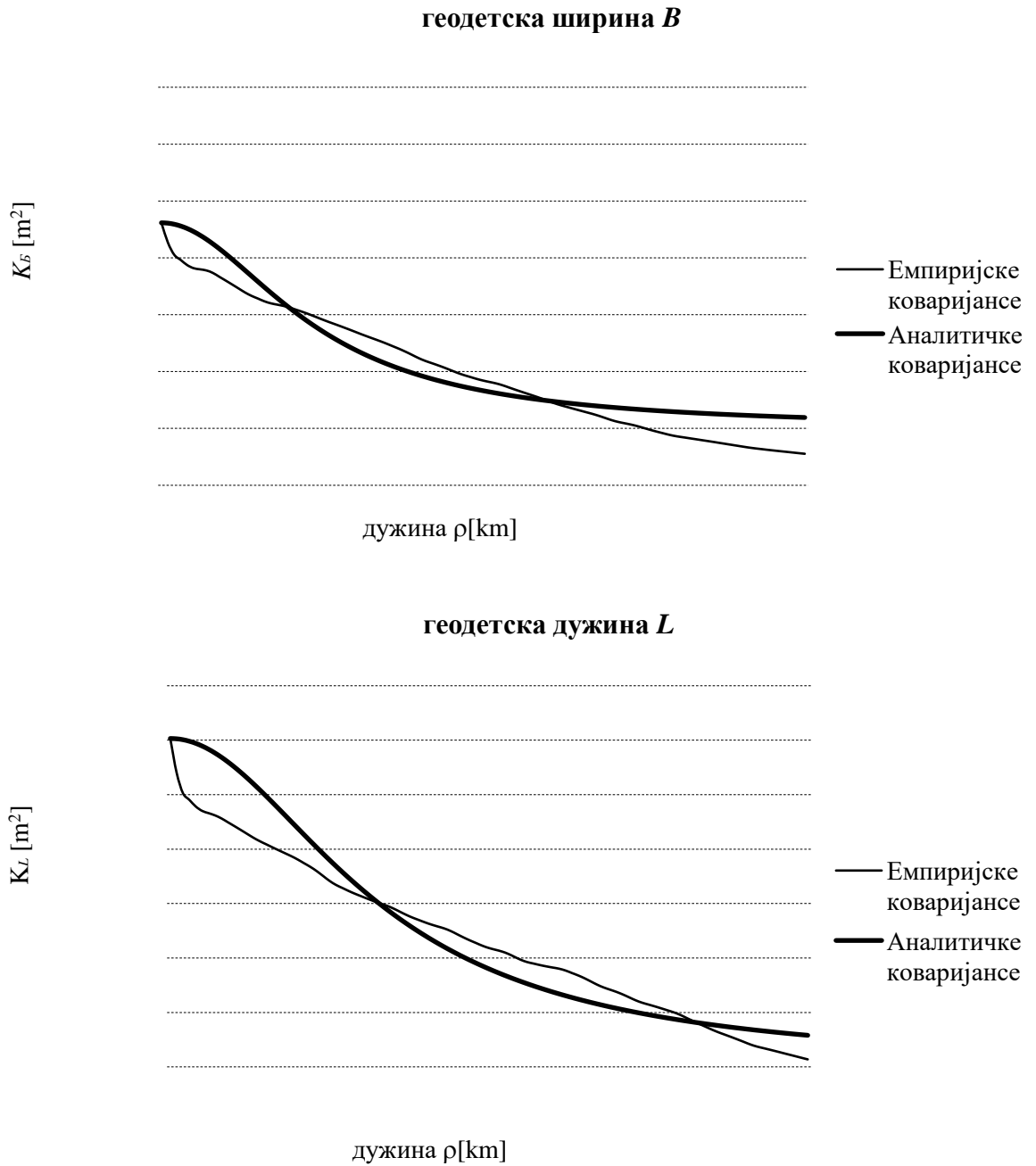
геодетска ширина B			геодетска дужина L			положај	
$v_{B_{\min}}$ [m]	$v_{B_{\max}}$ [m]	s_B [m]	$v_{L_{\min}}$ [m]	$v_{L_{\max}}$ [m]	s_L [m]	$v_{P_{\max}}$ [m]	s_P [m]
-0.112	0.117	0.027	-0.073	0.059	0.015	0.118	0.026

Приказ вектора дисторзија просторних података у тачкама правилног грида дат је на слици 5.12. Карактеристичне вредности за оцене вектора дисторзија просторних података у тачкама правилног грида добијених применом колокације по методи најмањих квадрата приказане су у табели 5.10.

Табела 5.10. Карактеристичне вредности за векторе дисторзија просторних података у тачкама грида изведеног применом колокације по методи најмањих квадрата

геодетска ширина B		геодетска дужина L		интензитет	
min [m]	max [m]	min [m]	max [m]	min [m]	max [m]
-0.963	1.464	-1.750	1.737	0.007	2.126

Приказ вектора дисторзија просторних података у тачкама правилног грида оцењени применом колокације по методи најмањих квадрата дат је на слици 5.12. Оцена тачности вредности дисторзија просторних података у свакој тачки грида може се извршити по формули (*Jenkins u Erickson 1996*):



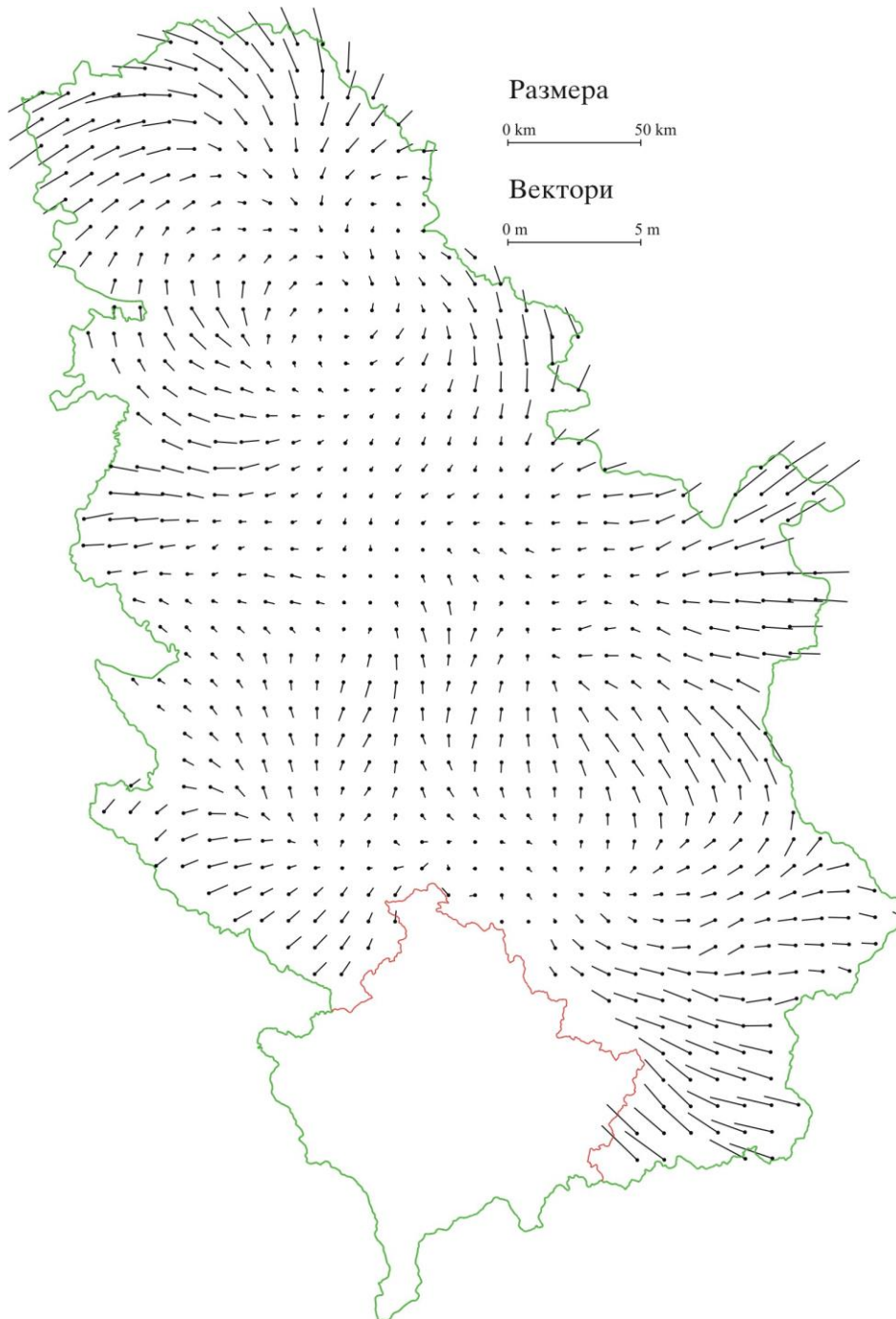
Слика 5.11. Графички приказ функција коваријансе по компонентама положаја

$$s_B = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_{B_i}^2 \sum_{i=1}^n (\delta_{B_i} - \bar{\delta}_B)^2}{\sum_{i=1}^n (w_{B_i})^2 (n-1)}},$$

$$s_L = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_{L_i}^2 \sum_{i=1}^n (\delta_{L_i} - \bar{\delta}_L)^2}{\sum_{i=1}^n (w_{L_i})^2 (n-1)}} \quad (5.10)$$

где су:

- $\bar{\delta}_B, \bar{\delta}_L$ – оцењене вредности дисторзија просторних података у тачки грида (применом колокације по методи најмањих квадрата),
- $\delta_{B_i}, \delta_{L_i}$ – познате (измерене) вредности дисторзија просторних података у свакој од идентичних тачака,
- w_{B_i}, w_{L_i} – тежине изведене на основу коваријационих функција и растојања између тачке грида и идентичне тачке i ,



Слика 5.12. Вектори дисторзија просторних података оцењени применом колокације по методи најмањих квадрата

5. Модел трансформационог грида за територију Србије

n – број идентичних тачака.

Карактеристичне вредности експерименталних стандардних девијација дисторзија просторних података у тачкама правилног грида, израчунате према (5.10), приказане су у табели 5.11.

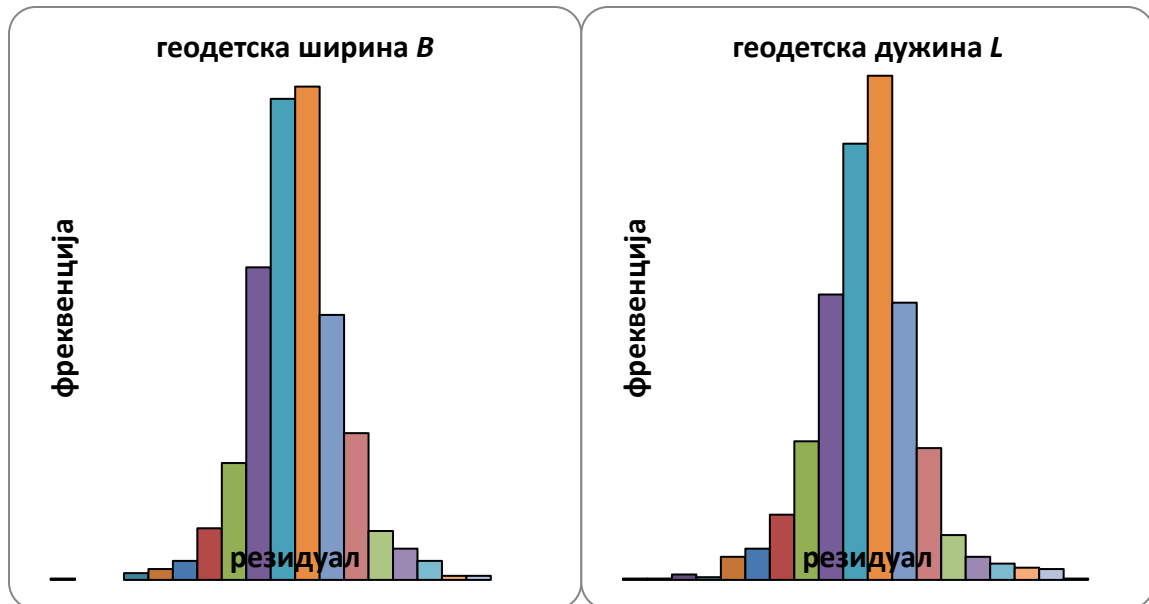
Табела 5.11. Карактеристичне вредности експерименталних стандардних девијација предикција дисторзија просторних података у тачкама правилног грида

	геодетска ширина B	геодетска дужина L	положај
min [m]	0.017	0.017	0.024
max [m]	0.104	0.119	0.129
просечно [m]	0.029	0.032	0.043

Рачунање трансформисаних вредности координата скупа тачака за тестирање перформанси грида извршено је по идентичном поступком као и у случају поделе подручја трансформације на коначне елементе. Показатељи за одступања (резидуале) по компонентама положаја B , L у односу на познате вредности, на тачкама за тестирање грида приказани су у табели 5.12.

Табела 5.12. Показатељи перформанси грида оцењеног применом колокације по методи најмањих квадрата

	резидуали		
	геодетска ширина B	геодетска дужина L	положај [m]
max [m]	0.39 m	0.40 m	0.50 m
min [m]	-0.47 m	-0.48 m	
средина	-0.00 m	-0.00 m	0.11 m
стандардна девијација	0.09 m	0.10 m	0.14 m
≤ 0.05 m	51.4 %	50.6 %	23.4 %
≤ 0.10 m	78.1 %	76.3 %	57.2 %
≤ 0.15 m	90.8 %	89.1 %	78.1 %
≤ 0.20 m	95.5 %	94.3 %	88.0 %
≤ 0.25 m	98.0 %	96.5 %	93.0 %
≤ 0.30 m	99.2 %	98.3 %	95.8 %
Укупно тачака: 1481			



Слика 5.13. Хистограми фреквенција одступања на тачкама за тестирање перформанси грида изведеног колокацијом по методи најмањих квадрата
Хистограми фреквенција одступања по компонентама положаја у односу на познате вредности (резидуала) приказане су на слици 5.13.

5.4. Компаративна анализа резултата грид трансформације

Резултати оцене вредности дисторзија просторних података у тачкама правилног грида као и резултати трансформације координата тачака премера непокретности применом грид трансформације могу се анализирати са више аспеката:

1. Репродуктивност података на тачкама узорка просторних података (идентичних тачака),
2. Сагласност оцена вредности дисторзија у тачкама грида и
3. Репродуктивност података на тачкама за тестирање перформанси грида.

Показатељи репродуктивности просторних података у тачкама узорка (идентичним тачкама) садржани су у табелама 5.5 и 5.9. Упоредње нивоа репродуктивности, на идентичним тачкама, између два поступка може се извршити тестирањем сагласности (једнакости по вероватноћи) кореспондентних експерименталних варијанси по компонентама положаја (тест Fisher–а):

$$F^B = \frac{(s_{\bar{B}})_{\text{кон.ел.}}^2}{(s_B)_{\text{кол.}}^2} = \frac{0.085^2}{0.027^2} = 9.94558 > 1.05656 = F_{0.95}^B(f_{\text{кон.ел.}}, f_{\text{кол.}}),$$

$$F^L = \frac{(s_{\bar{L}})_{\text{кон.ел.}}^2}{(s_L)_{\text{кол.}}^2} = \frac{0.088^2}{0.015^2} = 32.99093 > 1.05656 = F_{0.95}^L(f_{\text{кон.ел.}}, f_{\text{кол.}}) \quad (5.11)$$

где су

$$f_{\text{кон.ел.}} = 5010 \text{ и}$$

$$f_{\text{кол.}} = 2821,$$

бројеви степени слободе експерименталних варијанси добијених поделом подручја трансформације на коначне елементе и применом колокације по методи најмањих квадрата, респективно.

Према томе, може се закључити да је виши ниво репродуктивности постигнут код примене колокације по методи најмањих квадрата, што указује на то да поделом подручја трансформације на коначне елементе није постигнут задовољавајући квалитет апроксимације дисторзија просторних података, односно да би подручја обухваћена коначним елементима требала бити мања. Ово захтева већу густину узорка просторних података.

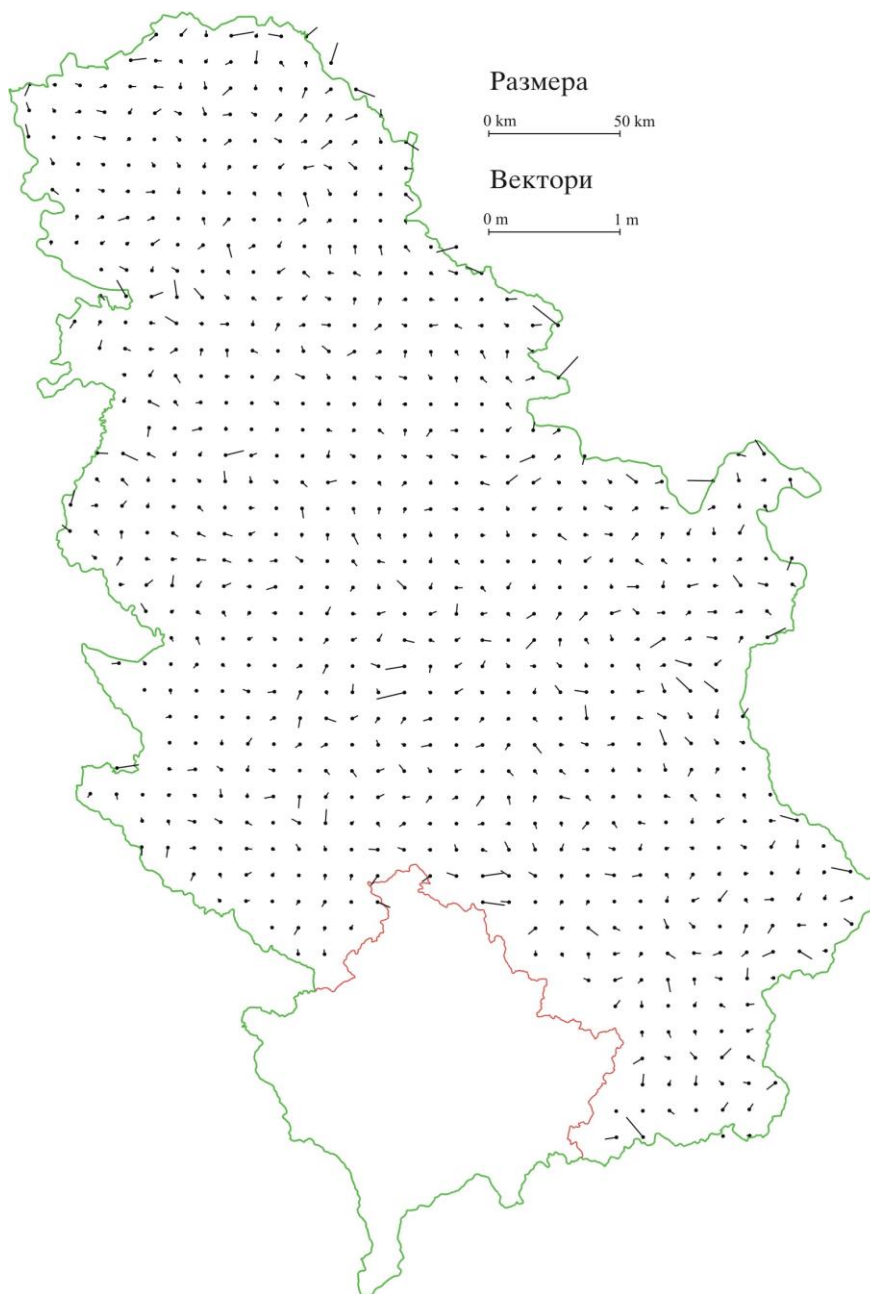
Показатељи сагласности за оцене дисторзија просторних података изведене поделом подручја трансформације на коначне елементе и применом колокације по методи најмањих квадрата приказани су у табели 5.13. Графички приказ ове сагласности дат је на слици 5.14.

Табела 5.13. Показатељи сагласности оцена дисторзија просторних података у тачкама грида

геодетска ширина B			геодетска дужина L			положај	
$\delta_{B_{\min}}$ [m]	$\delta_{B_{\max}}$ [m]	$\delta_{B_{\text{сред}}}$ [m]	$\delta_{L_{\min}}$ [m]	$\delta_{L_{\max}}$ [m]	$\delta_{L_{\text{сред}}}$ [m]	$\delta_{P_{\max}}$ [m]	$\delta_{P_{\text{сред}}}$ [m]
-0.099	0.161	0.001	-0.212	0.173	-0.003	0.245	0.046

Интензитети вектора дисторзија просторних података добијени различитим поступцима сагласни су у оквирима од 10 cm, за 95% тачака грида. Као што се са слике 5.14 може видети веће несагласности јављају се у граничним подручјима као и на подручјима где је узорак просторних података мање густине.

Репродуктивност података на тачкама за тестирање перформанси грид трансформације приказана је у табелама 5.7 и 5.12. Упоређење нивоа репродуктивности на тачкама за тестирање перформанси грида, између два поступка, може се извршити тестирањем сагласности (једнакости по вероватноћи) кореспондентних експерименталних варијанси по компонентама положаја (тест Fisher-a):



Слика 5.14. Вектори разлика оцена дисторзија просторних података

$$F^B = \frac{(s_{\tilde{B}})_{\text{кон.ел.}}^2}{(s_B)_{\text{кол.}}^2} = \frac{0.102^2}{0.094^2} = 1.18321 > 1.08930 = F_{0.95}^B(f_{\text{кон.ел.}}, f_{\text{кол.}}),$$

$$F^L = \frac{(s_{\tilde{L}})_{\text{кон.ел.}}^2}{(s_L)_{\text{кол.}}^2} = \frac{0.112^2}{0.103^2} = 1.19807 > 1.08930 = F_{0.95}^L(f_{\text{кон.ел.}}, f_{\text{кол.}}) \quad (5.12)$$

где су

$$f_{\text{кон.ел.}} = f_{\text{кол.}} = 1480,$$

бројеви степени слободe експерименталних варијанси добијених поделом подручја трансформације на коначне елементе и применом колокације по методи најмањих

квадрата, респективно. Може се рећи да је ниво репродуктивности података на тачкама за тестирање перформанси грид трансформације значајно виши код примене колокације по методи најмањих квадрата што такође указује на потребу да подручја коначних елемената буду мања односно узорак просторних података гушћи.

Обзиром да је скуп тачака за тестирање перформанси грид трансформације (слика 5.4.) неправилно распоређен (није добијен пројектовањем већ разређивањем већ постојећег узорка) не може се дати дефинитивна оцена о квалитету резултата грид трансформације. Ипак, имајући у виду захтевану положајну тачност података премера непокретности (табела 1.1) може се закључити да је применом обадва поступка могуће извести модел трансформације података премера непокретности добијених применом АГРОС у Државни координатни систем са задовољавајућом тачношћу на целокупној државној територији. Предуслов за то је свакако узорак просторних података премера непокретности довољне густине и веће хомогености (правилног просторног распореда).

Упоредњем трансформисаних вредности координата тачака за тестирање перформанси грид трансформације добијених из кореспондентних математичких модела и применом алгоритма грид трансформације (билинеарне интерполације (3.42)) добијена је максимална вредност грешке билинеарне интерполације, по положају, за оба поступка око 5 cm, што указује на потребу за мањим интервалом (кораком) грида.

6. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

У овом раду разматране су могућности и проблеми примене Активне геодетске референтне основе Србије (АГРОС) у премеру непокретности. Активна геодетска референтна основа Србије (сервис прецизног позиционирања применом GNSS) омогућује рутинско позиционирање у реалном времену тачака пасивне геодетске основе премера непокретности и тачака детаља, центиметарског нивоа тачности. Позиције тачака премера непокретности, добијене на овај начин, односе се на Међународни терестрички референтни систем (ITRS), односно ITRF епоха 1998.7. Као основни проблем, који још увек није решен на задовољавајући начин, препозната је интеграција овако добијених података премера непокретности са већ постојећим подацима одређеним у Државном координатном систему Републике Србије. Такође, Закон државном премеру и катастру (Републички геодетски завод, 2009) предвиђа увођење ETRS89 (заснованог на ITRS) као официјелног геодетског референтног система података државног премера (премера непокретности) у Републици Србији, што изискује потребу за трансформацијом постојећих података премера непокретности (државног премера) у новоусвојени геодетски референтни систем.

У раду су постављени критеријуми које национални модел трансформације података премера непокретности између Државног координатног система и система ITRF епоха 98.7 треба да задовољи и истражене могућности два различита приступа за развој оваквог модела:

1. Подела подручја трансформације на коначне елементе и
2. Примена колокације по методи најмањих квадрата.

Модел трансформације развијен је на основу узорка просторних података премера непокретности од укупно 4401 тачке за које је координате у систему ITRF епоха 98.7 одредио Сектор за основне геодетске радове Републичког геодетског завода. Моделом трансформације обухваћена је целокупна територија Србије са изузетком територије покрајине Косово и Метохија, због недостатка података. На основу анализе конформности два скупа координата тачака узорка просторних података из даље анализе искључено је укупно 99 тачака или око 2.2 % укупног броја тачака. Збор неравномерног распореда тачака узорка на државној територији, извршено је разређивање, тако да је за развој модела трансформације коришћена укупно 2821 тачака што, у просеку, износи приближно једна тачка на 25 km².

Дисторзије просторних података премера непокретности оцењене су у тачкама правилног грида са интервалом 5.4 лучне минуте по геодетској ширини В и 7.4 лучне минуте по геодетској дужини L што, на територији Србије, приближно одговара растеру од 10 km × 10 km. На основу компаративне анализе резултата,

добитијених различитим поступцима, може се закључити да је примењеним поступцима постигнут висок ниво сагласности оцена дисторзија просторних података у тачкама правилног грида, односно, за 95% тачака грида сагласност оцена дисторзија просторних података је испод 10 cm. Нешто веће разлике јавиле су се у граничним подручјима као и на подручјима на којима је узорак просторних података мање густине.

Тестирање резултата грид трансформације извршено је на основу података за 1481 тачку премера непокретности, које нису учествовале у развоју модела трансформације. На основу резултата тестирања може се закључити да за највећи део државне територије добијени резултати трансформације могу задовољити потребе трансформације података премера непокретности добијених применом АГРОС у Државни координатни систем. Ипак, да би развијени модел трансформације имао употребну вредност т. ј. да би гарантовао довољно тачан и поуздан процес трансформације између два референтна система неопходно је у развој модела трансформације укључити далеко већи број тачака премера непокретности.

Имајући у виду укупан број тачака премера непокретности по јединици површине, ван сваке сумње може се закључити да је густина расположивог узорка просторних података недовољна за развој довољно тачног и поузданог модела трансформације између Државног координатног система и система ITRF епоха 98.7. Ако се усвоји претпоставка да густина тачака геодетске основе и тачака детаља, у зависности од степена урбанизације, варира у границама од неколико стотина до неколико хиљада на 1 km², јасно је да расположиви узорак не може у потпуности да обухвати деформације (дисторзије) просторних података премера непокретности локалног карактера. Потребна густина тачака узорка за развој модела трансформације зависна је од степена урбанизације за конкретна подручја и не може се прописати јединствено за целокупну територију државе. Због тога је потребно размотрити развој хетерогеног грида, односно мањег интервала грида за урбанизована подручја односно подручја карактерисана великом густином тачака детаља и нешто ређе на подручјима где је неопходна нижа тачност трансформације. Имајући у виду карактеристике предложених поступака, развој модела трансформације не мора се вршити одједном за целокупну државну територију али се у сваком случају мора вршити на начин којим ће се задовољити постављени критеријуми као што су јединственост за целокупну државну територију као и довољна тачност и поузданост.

Што се минималне густине узорка просторних података тиче, најбоље је да се узорком обухвате све тачке геодетске основе за снимање детаља (у првом реду тригонометријске и полигонске тачке) па чак и изван број међних тачака уколико су стабилизване трајним белегама и могу се поуздано идентификовати.

ЛИТЕРАТУРА

- Благојевић Д. (2003): Нова државна референтна мрежа Републике Србије, Саветовање: Основни геодетски радови – стање и перспектива Аранђеловац 21. – 23. фебруар 2003. СД издање, Републички геодетски завод Београд.
- Бойков В.В., Галазин В.Ф, Каплан Б.Л., Максимов В. Г. Базлов Ю. А. (1993): Опыт создания геоцентрической системы координат ПЗ-90. Геодезия и картография, N11. С.17-21.
- Гостовић М. (1995): Ка новом катастру, Грађевински факултет, Београд.
- Делчев С. (2001): Постојећа државна тригонометријска мрежа СРЈ у светлу савремених захтева, Докторска дисертација, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Београд.
- Живковић А. (1972): Виша Геодезија. Издавачко предузеће Грађевинска књига, Београд. Марковић М. Д. (1990): Примена колокације при трансформацији координата. Магистарска теза, Грађевински факултет Београд.
- Машановић Н., Мркић Р., Миловановић С. В., Делчев С., Благојевић Д., Васиљев В., (1995): Геодетске Референтне Мреже СРЈ, Студија, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Институт за Геодезију, Београд.
- Михаиловић Д. (1984): Обухватање грешака геодетске основе код фотограметријског блок изравнања интерполацијом по методи најмањих квадрата. Магистарска теза, Грађевински факултет Београд.
- Одаловић О. (2005): Методологија одређивања геоида високе резолуци центиметарске тачности за територију Републике Србије. Грађевински факултет, Београд, докторска дисертација.
- Одаловић О., Алексић Р. И. (2004): Мрежа перманентних станица Републике Србије, Геодетска служба. 99 (2004) 5-10, Београд.
- Републичка геодетска управа СР Србије (1987): Геодетска делатност у Србији 1837-1947-1987. Београд
- Републички геодетски завод Р. Србије (1996а): Инструкција за израду и одржавање геодетске основе за снимање детаља, Београд.
- Републички геодетски завод Р. Србије (1996б): Инструкција за прикупљање података о непокретностима. Београд.
- Републички геодетски завод Р. Србије (2009): Закон о државном премеру и катастру. Београд.

- Applbaum L T (1982): Geodetic Datum Transformation by Multiple Regression Equations. Proceedings of the 3rd International Symposium on Satellite Doppler Positioning. New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico, pp. 207-223
- Altiner Y, Schlüter H, Seeger H (1999): Results of the Balkan '98 Campaigns in Albania, Bosnia and Herzegovina, and Yugoslavia, Report on the Symposium of the IAG Subcommission for Europe (EUREF) held in the Prague 2 – 5 June 1999, Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die internationale Erdmessung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Heft Nr. 60, pp. 105 – 113.
- Briggs I C (1974): Machine Contouring Using Minimum Curvature. *Geophysics* 39(1): 39-48.
- Boucher C, Altamimi Z (2001): ITRS, PZ-90 and WGS 84: current realizations and the related transformation parameters, *Journal of Geodesy* 75 (2001) (11), pp. 613–619.
- Bruyninx C (2002): Global and European Reference Systems: Theory and Practice, Symposium - Global Navigation Satellite Systems: a proven and evolving technology, Bruxelles, Belgium.
- Collier P A, Agreanu S V, Leahy J F (1998): Distortion Modelling and the Transition to GDA94, *The Australian Surveyor*, 43 (1), pp 29-40.
- Collier P A (2002): Development of Australia's GDA94 Transformation Grids. Consultant's Report to the Intergovernmental Committee on Surveying and Mapping, Department of Geomatics, The University of Melbourne.
- Dai L, Han S, Wang J, Rizos C (2001): A Study on GPS/GLONASS Multiple Reference Station Techniques for Precise Real-Time Carrier Phase-Based Positioning, School of Surveying & Spatial Information Systems, The University of New South Wales, Sydney, NSW 2052, Australia, ION GPS 2001.
- Dewhurst W T (1990): The Application of Minimum Curvature Derived Surfaces in the Transformation of Positional Data from the North American Datum of 1927 to the North American Datum of 1983. NOAA Technical Memorandum NOS-NGS-50, 30pp.
- Euler H J (2005): Reference Station Network Information Distribution. IAG Working Group 4.5.1: Network RTK.
- EUREF (1990): Resolution of the EUREF Symposium in Firenze, EUREF Publication, Ed. E. Gubler, K. Pöder, H. Hornik, Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, Germany, No. 1, pp. 94-95.
- Felippa C A (2004): Introduction to Finite Element Methods. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures. University of Colorado, USA.

- Fotopoulos G, Cannon M E (2000): Parametrization of carrier phase corrections biases on a regional network of reference stations.. 13th International Technical Meeting of the Satellite Div. of the U.S. Institute of Navigation, Salt Lake City, Utah, 19–22 September, 1093–11102.
- Fotopoulos G, Cannon M E (2001): An Overview of Multi-Reference Station Methods for Cm-Level Positioning, GPS Solutions, Vol. 4, No. 3, pp. 1-10.
- Gao Y, Li Z, McLellan J F (1997): Carrier phase based regional area differential GPS for decimeter–level positioning and navigation. 10th Int. Tech. Meeting of the Satellite Div. of the U.S. Institute of Navigation, Kansas City, Missouri, 17–20 September, 1305–1313.
- Gao Y, Li Z (1998): Ionosphere effect and modelling for regional area differential network. 11th Int. Tech. Meeting of the Satellite Div. of the U.S. Institute of Navigation, Nashville, Tennessee, 15–18 September, 91–97.
- Grafarend E W (1976): Geodetic applications of stochastic processes, Phys. Earth planet. Inter., 12, 151–179.
- Grafarend E W, Knickmeyer E H, Schaffrin B (1982): Geodätische Datumtransformationen. Zeitschrift für Vermessungswesen 107, 15-25.
- Han S, Rizos C (1996): GPS Network Design and error mitigation for real–time continuous array monitoring system, 9th Int. Tech. Meeting of the Satellite Div. of the U.S. Institute of Navigation, Kansas City, Missouri, 17–20 September, 1827–1836.
- Han S, Rizos C (1997): Instantaneous ambiguity resolution for medium–range GPS kinematic positioning using multiple reference stations, International Assotiation of Geodesy Symposia, Vol. 118, Advances in Positioning and Referencr Frames, Rio de Janeiro, Brasil, 283–288.
- Hirvonen R A (1962): On the statistical analysis of the gravity anomalies. Publ. Isostatic Inst. IAG.
- Hirvonen R A, Moritz H (1963): Practical computation of gravity at high altitudes. Report No. 27, Inst. Geod. Phot. Cart., Ohio State University.
- Heiskanen W A, Moritz H (1967): Physical Geodesy, Freeman, San Francisco, London.
- Hoffman-Wellenhof B, Lichtenegger H, Collins J (2000): Global Positioning System – Theory and Practice, fifth revised edition. Springer Verlag, Wien, New York.
- Jäger R, Kälber S, Schneid S, Villamajor L. G-A, Talens P G, Llorens L P (2003): Precise Plan Transformation of Classical National Networks to ITRF/ETRS89 and Precise Vertical Reference Surface Representation by Digital FEM Height Reference Surfaces (DFHRS). - Concepts, Databases, Present Developments and Realisation

- of a 5 cm DFHRS-Database for the District of Valencia, Spain. Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie (BKG), Band 33, EUREF-Mitteilungen Heft 13, Frankfurt.
- Junkins D, Erickson C (1996): Version 2 of the National Transformation Between NAD27 and NAD83 and Importance for GPS Positioning in Canada. Draft Report, Geodetic Survey Division, Geomatics Canada, 18pp.
- Kraus K (1970): Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie, ZfV 95, p. 387 – 390, Stuttgart 1970.
- Kwon H J, Bae T S, Choi Y S, Lee D C, Lee W Y (2005): Geodetic datum transformation to the global geocentric datum for seas and islands around Korea. Geosciences Journal, Vol. 9, No 4, p. 353–361.
- Leick A (2004): GPS Satellite Surveying, 3rd Edition. J. Wiley & Sons, New York.
- Leick A, van Gelder B H W (1975): Similarity transformations and geodetic network distortions based on Doppler satellite observations. The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Report 236, Columbus.
- Malys S, Slater J (1994): Maintenance and Enhancement of the World Geodetic System 1984; Proc. of the ION GPS-94, Salt Lake City, Utah, pp. 17-24.
- Malys S, Slater J, Smith R, Kunz L, Kenyon S (1997): Refinements of the World Geodetic System 1984; Proc. of the 10th ION Technical Meeting, Kansas City, Missouri.
- Merrigan M, Swift E, Wong R, Saffel, J (2002); A Refinement to the World Geodetic System 1984 Reference Frame; Proceedings of the ION-GPS-2002; Portland, Oregon; September 2002.
- Mikhail E M (1976): Observations and Least Squares. IEP – A Dun-Donnelley Publisher, New York, 497 pp.
- Moritz H Sünkel H (1978): Approximation Methods in Geodesy, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Mortiz H (1980): Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 500 pp. Mortiz H (1992): Geodetic Reference System 1980 (GRS80), Bulletin Géodésique, Volume 62 (2), 187-192.
- Okeke I F (1998): The Curvilinear Datum Transformation Model. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 481, München.
- Raquet J, Lachapelle G (2001): RTK Positioning with multiple reference stations, GPS World, 12(4), 48–53.

- Reilly W I (1979): Mapping the Local Geometry of the Earth's Gravity Field. Report No. 143, Geophysics division, Department of Scientific and Industrial Research, New Zealand. October 1979, 56 pp.
- RETrig (1988): Resolutions of the RETrig symposium in Lisabon, RETrig Publication, Ed. K. Poder, H. Hornik, No 18, pp 284-285.
- Riecken J (2000): The Spatial Information Management in the Cadastre and NSDI in North-Rhine Westphalia, Germany, FIG Com3 annual meeting and Workshop in Visions for the 21st Century" Athens, Greece, October 4-7, 2000
- RTCM (2001): RTCM Recommended Standards for Differential GNSS (Global Navigation Satellite Systems) Service, Version 2.3, RTCM Standard 10402.3. RTCM Webpage.
- RTCM (2006): RTCM Recommended Standards for Differential GNSS (Global Navigation Satellite Systems) Service, Version 3.1, RTCM Standard 10403.1. RTCM Webpage.
- Schmitt G, Illner M, Jäger R (1991): Transformationsprobleme. DVW-Landesverein Baden- Württemberg e. V.: Sonderheft: GPS und Integration von GPS in bestehende Netze, S. 125-142.
- Shaw Jr R W, Pynn R (1969): Optimized model potential: exchange and correlation corrections and calculation of magnesium phonon spectrum, J. Phys. C: Solid State Phys. **2** 2071-2088.
- Soler T (1976): On differential transformations between Cartesian and curvilinear (geodetic) coordinates. The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Report 236, Columbus.
- Swift E (1994): Improved WGS84 Coordinates for the DMA and Air Force Tracking Sites, Proc. of the ION GPS-94, Salt Lake City, Utah, pp. 285-292.
- United Nations – Economic Commission for Europe (1996): Land Administration Guidelines (With Special Reference to Countries in Transition, New York and Geneva.
- United States National Imagery and Mapping Agency, NIMA, (1997): Department of Defence World Geodetic System 1984, Technical Report, Third Edition, Washington, DC, USA.
- Vermeer M (2007): Advanced Adjustment Theory, Department of Geodesy, Helsinki University of Technology, Finland.
- Wanninger L (1995): Improved ambiguity resolution by regional differential modelling of the ionosphere. 8th Int. Tech. Meeting of the Satellite Div. of the U.S. Institute of Navigation, Palm Springs, California, 12–15 September, 55–62.

Wanninger L (2004): Introduction to Network RTK, IAG Working Group 4.5.1. Network RTK.

Wübbena G, Bagge A, Seeber G, Böder V, Hankemeier P, (1996): Reducing Distance Dependent Errors for Real-Time Precise DGPS Applications by Establishing Reference Stations Networks, 9th Int. Tech. Meeting of the Satellite Div. of the U.S. Institute of Navigation, Kansas City, Missouri, 17–20 September, 1827–1836.

Wübbena G, Bagge A (2002): RTCM Message Type 59 – FKP for transmission of FKP, Version 1.0, GEO++ White Paper 2002.01.