

MODELIRANJE TEČENJA PREKO ŠIROKIH PRAGOVA U BURNOM REŽIMU

Mr Dejana ĐORĐEVIĆ, dipl. građ. inž.
Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu
E-mail: DEJANA@grf.bg.ac.yu

REZIME

U radu se najpre razmatraju problemi matematičkog i numeričkog modeliranja tečenja preko širokih pragova u burnom režimu. Ovi problemi su vezani za pojavu nagle lokalne promene dubine uzvodno od pragova (pojavu hidrauličkog skoka) i način proračuna unutrašnjeg graničnog uslova. Za numeričko modeliranje je izabrana eksplicitna računaska shema MacCormack. Ona pripada grupi Metoda konačnih razlika koje daju tzv. *slaba rešenja*. Nakon teorijskih razmatranja slede opis laboratorijske instalacije u kojoj je analizirano tečenje preko širokih pragova i prikaz uslova pod kojima su izvedeni eksperimenti. Rezultati eksperimentalnih merenja poslužili su za verifikaciju izabranog računskog modela. Numerički je simuliran jedan eksperiment. Dobijeni rezultati upoređeni su sa rezultatima merenja i dat je odgovarajući komentar.

Cljučne reči: široki prag, unutrašnji granični uslov, buran režim, hidraulički skok, slabo rešenje, laboratorijska merenja, numerička simulacija

1. UVOD

Tečenje preko širokih pragova u burnom režimu je, sa gledišta matematičkog i numeričkog modeliranja, interesantno iz nekoliko razloga. Prvi razlog je formiranje hidrauličkog skoka uzvodno od svakog praga. Drugi je činjenica da široki prag, koji se nalazi na početku ili kraju razmatrane deonice, u hidrauličkom smislu predstavlja "čist" granični uslov — veza između dubine na pragu i protoka je u ovom slučaju jasno definisana, tako da se merenjem dubine na pragu vrlo lako može odrediti nepoznata vrednost protoka. Treći razlog leži u činjenici

da se široki prag, koji se nalazi između najuzvodnijeg i najnižvodnijeg profila, mora tretirati kao unutrašnji granični uslov.

Hidraulički skok se, kao što je poznato, manifestuje kroz naglu lokalnu promenu dubine. To je, zapravo, vodeni valjak sa horizontalnom osom u kojem je, zbog izraženih vertikalnih ubrzanja i velike zakrivljenosti strujnica, narušen hidrostatički raspored pritiska po vertikali. U zoni hidrauličkog skoka, dakle, ne važe osnovne pretpostavke na kojima je baziran klasičan matematički model neustaljenog tečenja sa slobodnom površinom — model zasnovan na Saint-Venant-ovim (parcijalnim diferencijalnim) jednačinama. Imajući u vidu činjenicu da rešenje integralnih jednačina zavisi samo od konturnih uslova, a ne od toga šta se dešava unutar razmatrane kontrolne zapremine, hidraulički skok bi, strogo uzevši, trebalo modelirati korišćenjem integralnih jednačina. Međutim, Lax je još pedesetih godina ovoga veka pokazao da se za modeliranje naglo promenljivih tokova, kao što su hidraulički skok i talasi sa strmim čelom, mogu koristiti diferencijalne jednačine, ali samo pod uslovom da su te jednačine izvedene iz integralnih jednačina dobijenih primenom zakona održanja mase i količine kretanja. Rešenja tako izvedenih diferencijalnih jednačina ekvivalentna su rešenjima polaznih (integralnih) jednačina i nazivaju se "*slabim rešenjima*".

U ovom radu su za modeliranje tečenja preko širokih pragova u burnom režimu korišćene diferencijalne jednačine i računaska shema koja daje slaba rešenja. Reč je o eksplicitnoj računskoj shemi MacCormack. Ona pripada grupi Metoda konačnih razlika i ne zahteva uvođenje posebnog algoritma za otkrivanje položaja hidrauličkog skoka. Primenom sheme MacCormack osnovne jednačine se rešavaju u dve etape. Zahvaljujući tome, postiže se tačnost drugog reda u prostoru i vremenu.

Za potrebe verifikacije računске sheme MacCormack i analize unutrašnjeg graničnog uslova, u Hidrauličkoj laboratoriji Instituta za hidrotehniku Građevinskog fakulteta u Beogradu napravljen je fizički model koji se sastojao od tri široka praga pričvršćena za dno laboratorijskog kanala. U radu je numerički simuliran samo eksperiment u kojem je nagib dna bio veći od kritičnog, to jest eksperiment u kojem se ostvarivalo burno tečenje preko širokih pragova. Rezultati numeričke simulacije upoređeni su sa rezultatima merenja u laboratorijskom kanalu i dat je odgovarajući komentar.

2. MATEMATIČKI MODEL

Matematički model linijskog neustaljenog tečenja sa slobodnom površinom predstavljaju Saint-Venant-ove parcijalne diferencijalne jednačine. One su izvedene iz integralnih jednačina dobijenih primenom zakona održanja mase i količine kretanja na kontrolnu zapreminu smeštenu između dva proizvoljno izabrana poprečna preseka. Vektorski oblik Saint-Venant-ovih jednačina dat je sledećim izrazom:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{E}_x = \mathbf{S} \quad (1a)$$

gde je:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + g I_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) + g I_2 \end{bmatrix} \quad (1b)$$

Indeksi x i t u jednačini (1a) predstavljaju, redom, skraćene oznake za parcijalni izvod po vremenu i parcijalni izvod po prostoru. Površina poprečnog preseka A i protok Q su zavisno promenljive. Veličina označena sa I_1 predstavlja statički moment površine poprečnog preseka u odnosu na površinu vodenog ogledala, a veličina I_2 priraštaj statičkog momenta površine poprečnog preseka usled neprizmatičnosti korita. Za prizmatičan kanal pravougaonog poprečnog preseka $I_1 = 0.5Bh$ i $I_2 = 0$ (B je širina vodenog ogledala, a h dubina vode).

Nagib dna označen je sa S_0 :

$$S_0 = -\frac{dz_d}{dx} \quad (2)$$

gde je z_d kota dna, a nagib linije energije sa S_f . On je definisan Manning-ovom formulom:

$$S_f = \frac{n^2 Q |Q|}{A^2 R_H^3} \quad (3)$$

gde je n Manning-ov koeficijent, a R_H hidraulički radius.

¹U jednačinama koje predstavljaju matematičku formulaciju zakona održanja neke fizičke veličine (mase, količine kretanja, energije, entropije), napisanim u konzervativnom obliku, može se uočiti divergencija te veličine. Detaljnije videti u [6].

Saint-Venant-ove jednačine (1) napisane su u konzervativnom obliku¹. One obrazuju sistem nehomogenih, nelinearnih, parcijalnih diferencijalnih jednačina hiperboličkog tipa. Opisani matematički model predstavlja osnovu tzv. *direktnog pristupa* problemu modeliranja tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka i podrazumeva primenu metoda numeričke integracije koje daju slaba rešenja, tj. rešenja koja pokrivaju i oblast u kojoj su funkcije osnovnih veličina toka kontinualne i diferencijabilne i oblast u kojoj se javlja njihov diskontinuitet.

Pored ispisivanja jednačina (1), matematička formulacija razmatranog problema podrazumeva i definisanje početnih i graničnih uslova bez kojih bi rešavanje ovih jednačina bilo nemoguće. Početnim uslovima definiše se raspored dubina i protoka duž kanala u trenutku $t=0$. Promena zavisno promenljivih tokom vremena u najuzvodnijem i najnižvodnijem profilu definiše se spoljašnjim graničnim uslovima. Broj graničnih uslova koji se zadaju u graničnim profilima (najuzvodnijem i najnižvodnijem) zavisi od režima tečenja i dimenzionalnosti problema. Kod linijskog tečenja u burnom režimu u najuzvodnijem profilu treba zadati oba granična uslova ($h(t)$ i $Q(t)$). Definisanje graničnog uslova u najnižvodnijem profilu nije potrebno. Linijsko tečenje u mirnom režimu zahteva da se u najuzvodnijem i najnižvodnijem profilu zada po jedan granični uslov: $Q(t)$ ili $h(t)$ uz obavezno poznavanje hidrauličke zavisnosti $Q(h)$.

3. NUMERIČKI MODEL

Za numeričku integraciju sistema jednačina (1) primenjena je, kao što je već rečeno, eksplicitna računska shema MacCormack. Ona pripada grupi metoda konačnih razlika koje daju slaba rešenja. Metoda je prvobitno razvijena za rešavanje problema iz oblasti gasne dinamike, a krajem osamdesetih godina je počela da se primenjuje u hidraulici za proračun otvorenih tokova sa naglim lokalnim promenama dubine i protoka kao što su tokovi kod kojih se javlja hidraulički skok ili usamljeni talas sa strmim čelom. Dosadašnja iskustva različitih autora [4], [5], [6], [9], [10], [11], [12] i [13], su pokazala da je eksplicitna računska shema MacCormack veoma efikasna u rešavanju ovih problema. Pri rešavanju jednačina linijskog tečenja metoda daje identične rezultate kao modifikovana shema Lax-Wendroff-a.

Primenom sheme MacCormack osnovne jednačine se na svakom vremenskom nivou rešavaju u dve etape. U prvoj etapi – etapi "prediktor", predviđaju se vrednosti zavisno promenljivih na novom vremenskom nivou na

osnovu poznatih vrednosti sa prethodnog vremenskog nivoa. U drugoj etapi – etapi "korektor" koriguju se vrednosti iz prethodne etape. Nova vrednost se dobija osrednjavanjem vrednosti sa prethodnog vremenskog nivoa i korigovane vrednosti.

Jednačine numeričkog modela linijskog toka baziranog na shemi MacCormack glase:

– Etapa "prediktor" (početna vrednost)

$$U^P_i = U^k_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} \nabla_x E^k_i - \Delta t S^k_i \quad 2 \leq i \leq N \quad (4)$$

– Etapa "korektor" (korigovana vrednost)

$$U^C_i = U^P_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_x E^P_i - \Delta t S^P_i \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (5)$$

– Nova vrednost

$$U^{k+1}_i = \frac{1}{2} (U^k_i + U^C_i) \quad (6)$$

Indeks i u prethodnim jednačinama predstavlja redni broj profila, U^k je vektor zavisno promenljivih sa prethodnog vremenskog nivoa, U^P i U^C su odgovarajući vektori početnog i korigovanog rešenja sračunati u prediktor odnosno, korektor etapi, a U^{k+1} vektor rešenja na sledećem – $(k+1)$ -om vremenskom nivou.

Operatori prostorne diskretizacije iz jednačina (4) i (5) su jednostrani, što znači da predstavljaju ili razliku unazad ∇ ili razliku unapred Δ .

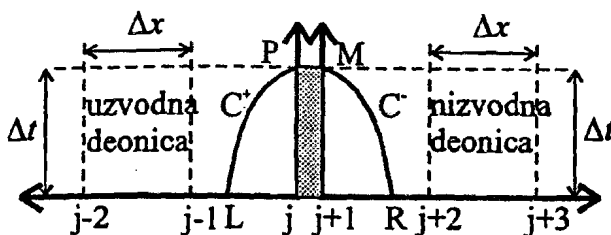
a) Razlike unazad:

$$\nabla_x E_i = E_i - E_{i-1} \quad (7)$$

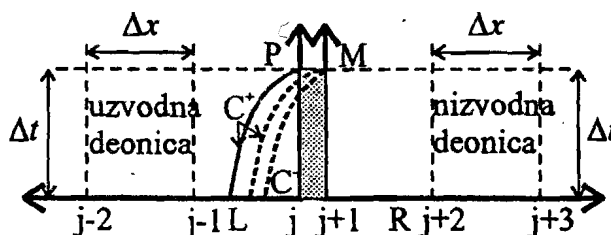
b) Razlike unapred:

$$\Delta_x E_i = E_{i+1} - E_i \quad (8)$$

U korektor etapi se uvek koristi operator suprotan onom koji je korišćen u prediktor etapi. Ovakvim etapnim rešavanjem zadatka i simetričnom izmenom operatora postiže se tačnost drugog reda u prostoru i vremenu. Redosled operatora konačnih razlika može se na svakom vremenskom nivou alternativno menjati. Kod linijskog tečenja na raspolaganju su dve opcije: na jednom, k -tom vremenskom nivou se u prediktor etapi koristi razlika unazad (∇), a u etapi korektor razlika unapred (Δ), dok se na narednom, $(k+1)$ -om vremenskom nivou u etapi prediktor koristi razlika unapred (Δ), a u etapi korektor, razlika unazad (∇). Ova ciklična izmena redosleda operatora omogućava da se, u slučaju jednovremene pojave oba režima tečenja, utvrdi smer iz kojeg pristiže informacija bez uvođenja dopunskih pretpostavki o smeru prostiranja uticaja, koje bi mogle dovesti do grubih grešaka. Zahvaljujući ovoj osobini, računaska shema MacCormack se može primeniti kada se režimi duž kanala naizmenično smenjuju (tečenje preko širokih pragova kada je nagib dna veći od kritičnog), kao i u slučajevima nastanka i prostiranja izolovanog talasa sa strmim čelom.



S1. 1. - Računske tačke za proračun unutrašnjeg graničnog uslova u mirnom režimu ($S_0 < S_{0,kr}$) (Metoda karakteristika)
Subcritical flow ($S_0 < S_{0,kr}$)- computational points for calculation of internal boundary condition (Method of Characteristics)



S1. 2. - Računske tačke za proračun unutrašnjeg graničnog uslova u burnom režimu ($S_0 > S_{0,kr}$) (Metoda karakteristika)
Supercritical flow ($S_0 > S_{0,kr}$)- computational points for calculation of internal boundary condition (Method of Characteristics)

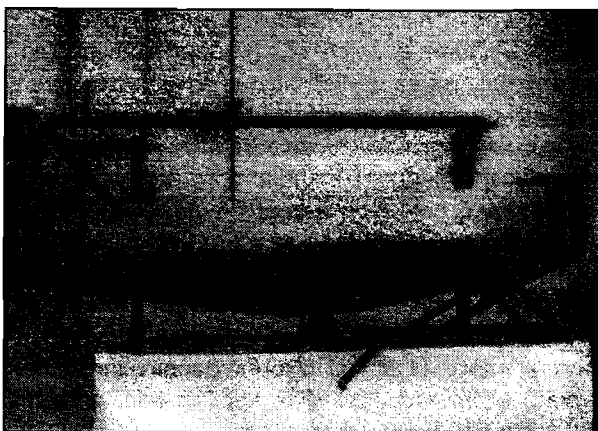
Granični uslovi. Već je rečeno da je prilikom modeliranja neke fizičke pojave ili procesa za valjano definisanje problema, pored ispisivanja jednačina matematičkog modela, neophodno zadati početne i granične uslove. Takođe je istaknuto da se u slučaju tečenja preko širokih pragova njihovim postavljanjem na početku i kraju razmatrane deonice obezbeđuje relativno jednostavno definisanje spoljašnjih graničnih uslova, jer se merenjem dubine na pragu, na osnovu poznate veze između dubine i protoka, može odrediti nepoznata vrednost proticaja. Međutim, kada se prag postavi između najuzvodnijeg i najnižvodnijeg profila, problem postaje složeniji. U tom slučaju prag se mora tretirati kao unutrašnji granični uslov. Unutrašnji granični uslov razmatra se isto kao i spoljašnji (kada u graničnim profilima – najuzvodnijem i najnižvodnijem, ne postoje pragovi), a to podrazumeva da se kraj uzvodne deonice tretira kao nizvodni, a početak nizvodne, kao uzvodni granični uslov (slika 1).

Proračun unutrašnjeg graničnog uslova zasniva se na primeni Metode karakteristika, zato što je to jedina metoda koja obezbeđuje pouzdan prenos informacija u razmatranu oblast strujanja (kroz najuzvodniji profil) i iz razmatrane oblasti (kroz najnižvodniji profil).

U slučaju kada je nagib dna veći od kritičnog (slika 2), neposredno uzvodno od praga se ostvaruje mirno tečenje. Tečenje nizvodno od praga je burno. Na kraju uzvodne deonice (u preseku P na uzvodnom kraju praga) treba, dakle, koristiti jednačinu pozitivne karakteristike sa odgovarajućim uslovom kompatibilnosti. U preseku M, na kraju praga, treba "zadati" obe zavisno promenljive — dubinu (h_M) i protok (Q_M). Pošto ukupno ima pet nepoznatih — dubine i protoci u prescima P i M (h_P , Q_P , h_M i Q_M) i položaj "baze" pozitivne karakteristike (tačka L), za njihovo određivanje je, pored jednačine pozitivne karakteristike i odgovarajućeg uslova kompatibilnosti, potrebno napisati još tri relacije. Dve, od potrebne tri veze, su jednačina održanja mase, prema kojoj protoci sa obe strane praga moraju biti isti, i energetska jednačina za preseke na pragu i uzvodno od praga. Pošto je tečenje nizvodno od praga burno, umesto treće relacije, u preseku M se zadaje dopunski granični uslov — na primer, kritična dubina. Iako se kritična dubina ne javlja u preseku na kraju praga, smatra se da se uvođenjem navedene pretpostavke bitno ne narušava kvalitet dobijenih rezultata.

4. EKSPERIMENTALNO ISPITIVANJE TEČENJA PREKO ŠIROKIH PRAGOVA

Detaljan opis laboratorijske instalacije na kojoj su vršena merenja za potrebe verifikacije računске sheme MacCormack i analize unutrašnjeg graničnog uslova može se naći u [5] i [7]. Ovde će se navesti samo njeni osnovni elementi. To su: uzvodni rezervoar, laboratorijski kanal promenljivog nagiba dna (slika 3), lenjir fiksiran iznad dna kanala sa memom iglom koja po njemu klizi (slika 3) i nizvodni rezervoar sa Thomson-ovim prelivom. Poprečni presek kanala je pravougaonog



S1. 3. - Laboratorijski kanal
Laboratory rig

²Uslov koji treba da bude ispunjen da bi se široki prag tretirao kao kratki objekat.

oblika, dimenzija $B \times h = 12 \text{ cm} \times 24.5 \text{ cm}$. Kanal je dugačak 240 cm. Za dno kanala pričvršćena su tri praga dužine (u pravcu toka) $L = 9 \text{ cm}$ i širine $B = 12 \text{ cm}$. Visine uzvodnog, srednjeg i nizvodnog praga su, redom: $P_u = 3.065 \text{ cm}$, $P_s = 2.998 \text{ cm}$ i $P_n = 3.033 \text{ cm}$. Rastojanje između pragova iznosi $L_{pu} = L_{pn} = 58.5 \text{ cm}$.

4.1 Uslovi pod kojima su izvedeni eksperimenti

Preliminarnim ispitivanjima je utvrđeno da je pri protocima iz intervala od 0.2 l/s do približno 1.0 l/s na opisanoj laboratorijskoj instalaciji, za svaki od pragova, zadovoljen uslov: $0.08 \leq h_1/L \leq 0.33^2$.

Merenja su bila podeljena u dve grupe. Eksperimenti prve grupe odnose se na ustaljeno, a eksperimenti druge grupe na neustaljeno tečenje. Za merenja u ustaljenom hidrauličkom režimu korišćene su merna igla na fiksnom lenjiru iznad dna kanala i merna igla na Thomson-ovom prelivu. Eksperimenti u neustaljenom hidrauličkom režimu zabeleženi su VHS video-kamerom čija je brzina snimanja 25 kvadrata u sekundi. U oba slučaja merenja su sprovedena za tri vrednosti nagiba dna: $S_0 = 7.84 \%$, $S_0 = 3.32 \%$ i $S_0 = 0.61 \%$. Ovi nagibi dna odgovaraju, redom: nepotopljenom prelivanju u burnom režimu, nepotopljenom prelivanju u mirnom režimu i potopljenom prelivanju. U ovom radu biće prikazani samo eksperimenti koji se odnose na tečenje u burnom režimu $S_0 = 7.84 \%$, jer tada uzvodno od pragova dolazi do formiranja hidrauličkog skoka. Rezultati ostalih eksperimenata mogu se naći u [5] i [7].

Ispitivanja ustaljenog tečenja preko širokih pragova sprovedena su za nekoliko vrednosti protoka iz opsega (0.2; 1.0) l/s. Sa promenom protoka menja se i položaj kritičnog preseka na pragu. Da bi se broj mogućih grešaka prilikom kasnijeg očitavanja video-snimaka smanjio, odlučeno je da se dubine na uzvodnom i nizvodnom pragu mere u fiksним prescima i da se, zatim, na osnovu tih podataka formiraju krive protoka koje će poslužiti za proračun graničnih uslova prilikom numeričke simulacije eksperimenata u neustaljenom režimu.

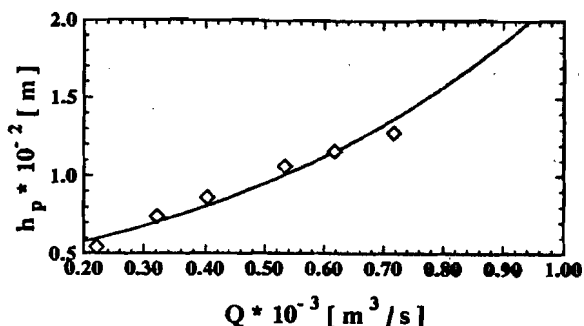
Na slikama 4 i 5 prikazane su krive protoka za uzvodni i nizvodni prag pri $S_0 = 7.84 \%$. Statistička analiza rezultata merenja je pokazala da se eksperimentalne vrednosti najbolje prilagođavaju stepenoj zavisnosti:

$$Q = a h_p^b \quad (9)$$

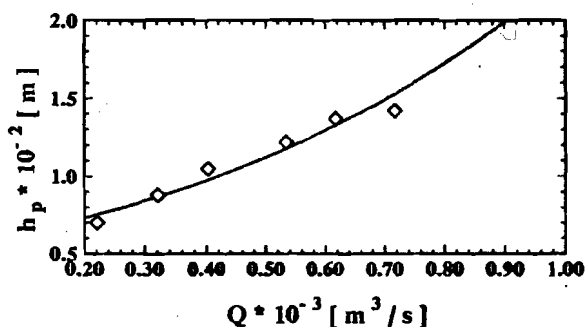
Vrednosti koeficijenata a i b , određene primenom metode najmanjih kvadrata, date su u Tabeli 1.

Tabela 1: Vrednosti koeficijenata iz (9) za $S_0 = 7.84 \%$

	a	b
uzvodni prag	0.3400	1.4160
nizvodni prag	0.7672	1.6497



S1. 4. - Kriva protoka za uzvodni prag pri $S_0 = 7.84\%$
Discharge curve at upstream broad-crested weir when $S_0 = 7.84\%$



S1. 5. - Kriva protoka za nizvodni prag pri $S_0 = 7.84\%$
Discharge curve at downstream broad-crested weir when $S_0 = 7.84\%$

Merenja u ustaljenom hidrauličkom režimu poslužila su i za određivanje ekvivalentne vrednosti Manning-ovog koeficijenta otpora (n). Pošto su dno kanala i zidovi izrađeni od različitih materijala (čelik i staklo), za određivanje tzv. kompozitne rapavosti primenjen je postupak kojeg su definisali Vannoni i Brooks [8]. Utvrđeno je da je vrednost ovog koeficijenta $n_q = n = 0.009 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$.

Prilikom ispitivanja u neustaljenom režimu protok je u svakom eksperimentu manevrom zatvarača na uzvodnom kraju kanala (slika 3) povećavan od neke (početne) vrednosti Q_p do neke (krajnje) vrednosti Q_k . Pri tom se vodilo računa da vrednosti Q_p i Q_k budu iz intervala $[0.2; 1.0] \text{ l/s}$. Na Thomson-ovom prelivu je tokom svakog eksperimenta, radi kontrole, meren nivo, tj. praćena je promena protoka. Na taj način je bilo moguće utvrditi kada je u kanalu ponovo uspostavljeno kvaziustaljeno tečenje.

Svi opiti iz druge grupe su, kao što je već pomenuto, zabeleženi video-kamerom. Očitavanja su izvršena pomoću sistema za analizu video-snimaka. Korišće-

³Primer je preuzet od Garcia-Navarro et al. [10]

⁴Iz elementarne hidraulike je poznato da dubina u kanalu teži normalnoj dubini kada je $h_k > h_n$ i kada je $S_0 > S_{0,kr}$

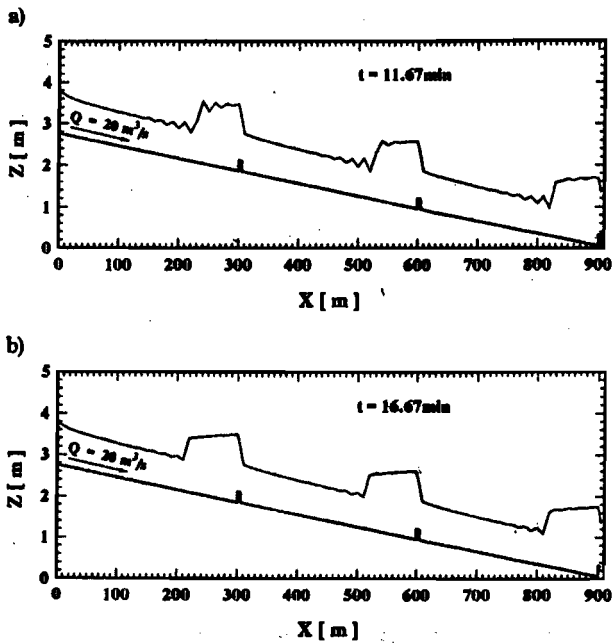
njem ovog uređaja određeni su nivogrami u presecima na uzvodnom i nizvodnom pragu (uzvodni i nizvodni granični uslov) i presecima između pragova. Podaci su očitavani sa prostornim korakom $\Delta x = 5 \text{ cm}$. Vremenski korak prilikom očitavanja iznosio je $\Delta t = 0.2 \text{ s}$ – očitavan je svaki peti kvadrat video-trake. Na osnovu zabeleženih nivograma rekonstruisani su položaji linije nivoa u različitim vremenskim trenucima.

5. NUMERIČKA SIMULACIJA TEČENJA PREKO ŠIROKIH PRAGOVA U BURNOM REŽIMU

Pre nego što se opišu uslovi pod kojima je izveden laboratorijski eksperiment i pre nego što se rezultati numeričke simulacije uporede sa rezultatima merenja u kanalu, ukazaće se na jedan problem. On će biti ilustrovan na hipotetičkom primeru ustaljenog tečenja preko tri široka praga u burnom režimu³. Sva tri praga su iste visine ($P = 0.25 \text{ m}$) i nalaze se na jednakom međusobnom rastojanju ($\Delta L = 300 \text{ m}$). Poprečni presek kanala je pravougaonog oblika širine 6 m . Nagib dna kanala je $S_0 = 0.3 \%$. U najzvodnijem profilu protok je konstantan i iznosi $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$, a dubina je jednaka kritičnoj dubini $h_k = 1.04 \text{ m}$. Početni uslov je: $Q(x, 0) = 20 \text{ m}^3/\text{s}$ i $h(x, 0) = 2 \text{ m}$. Ovakav granični uslov ne odgovara ustaljenom tečenju u kanalu pri $S_0 = 0.3 \%$ i $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$. Ukoliko je primenjena metoda konvergentna, posle određenog broja računskih koraka trebalo bi da se dobije rešenje kod kojeg se uzvodno od svakog praga formira hidraulički skok i kod kojeg dubina nizvodno od svakog praga teži normalnoj dubini $h_n = 0.76 \text{ m}$.

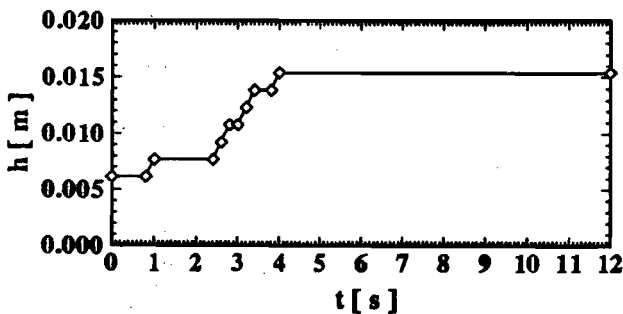
Razmatrana su dva slučaja. U prvom slučaju nije zadato nikakvo ograničenje u pogledu minimalne dozvoljene dubine ($h_{min} = 0$) [10]. Imajući u vidu elementarne principe hidraulike, po kojima dubina u burnom režimu pri $h_k > h_n$ ne može biti manja od normalne dubine, u drugom primeru je usvojeno da je $h_{min} = h_n = 0.76 \text{ m}$.

Na Slici 6 prikazane su linije nivoa koje odgovaraju ustaljenom tečenju preko širokih pragova u burnom režimu. Slika 6a odgovara prvom ($h_{min} = 0$), a slika 6b drugom primeru ($h_{min} = h_n = 0.76 \text{ m}$). Ukoliko se ne zada fizički realno ograničenje u pogledu minimalne dozvoljene dubine, u rešenju se ispred i iza skoka javljaju intenzivne oscilacije (Slika 6a) kada se dubina u kanalu približi normalnoj dubini. U slučaju kada je $h_{min} = h_n$ oscilacije ispred skoka još uvek su prisutne, ali su znatno manje izražene nego kada je $h_{min} = 0$. Oscilacije iza skoka su praktično zanemarljive.



Sl. 6. - Ustaljeno tečenje preko širokih pragova u burnom režimu; (a) $h_{min} = 0m$ [10], (b) $h_{min} = h_n = 0.76m$
Steady supercritical flow over a sequence of broad-crested weirs; (a) $h_{min} = 0m$ [10], (b) $h_{min} = h_n = 0.76m$

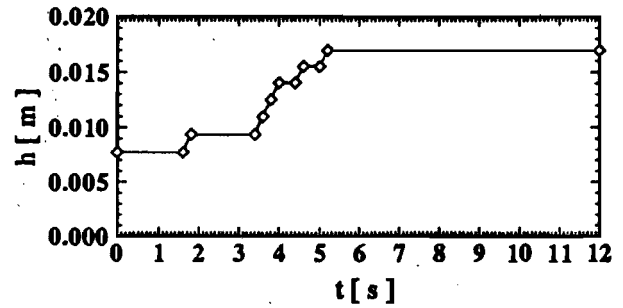
Na osnovu ovog primera može se zaključiti sledeće: da bi se pri simulaciji tečenja u burnom režimu ($h_k > h_n$ i $S_0 > S_{0,kr}$) dobili stabilni rezultati, neophodno je zadati fizički realno ograničenje u pogledu minimalne dozvoljene dubine, tj. zadati da je $h_{min} = h_n$.



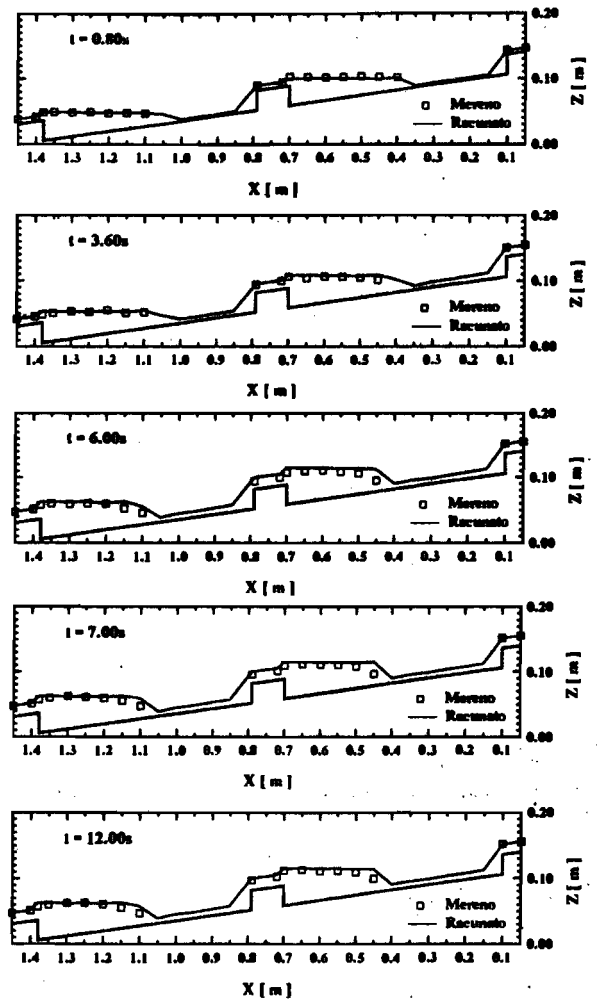
Sl. 7. - Uzvodni grani ni uslov - nivogram na uzvodnom pragu
Upstream boundary condition - stage-hydrograph at the upstream broad-crested weir

U nastavku će biti prikazani rezultati numeričke simulacije laboratorijskog eksperimenta u kojem je nagib dna iznosio $S_0 = 7.84\%$. Granični uslovi – nivogrami na uzvodnom i nizvodnom pragu – prikazani su na slikama 7 i 8. Minimalna dubina je tokom proračuna bila jednaka normalnoj dubini. Usvojeno je da se minimalna (nor-

malna) dubina menja u skladu sa promenom protoka na uzvodnom kraju kanala. Izmerene i sračunate linije nivoa za nekoliko karakterističnih vremenskih trenutaka date su na slici 9.



Sl. 8. - Nizvodni grani ni uslov - nivogram na nizvodnom pragu
Downstream boundary condition - stage-hydrograph at the downstream broad-crested weir



Sl. 9. - Izmerene i sračunate linije nivoa
Measured and computed water level profiles

Pre početka laboratorijskog eksperimenta i tokom prvih 0.8 s od početka pokretanja zatvarača na uzvodnom kraju kanala, tečenje u kanalu je još uvek ustaljeno. Kvantitativnim poređenjem sračunatih i izmerenih nivoa utvrđeno je da maksimalna razlika u ovom vremenskom intervalu ne prelazi 3.5 %. Tokom simulacije u neustaljenom hidrauličkom režimu ova razlika postepeno raste: u intervalu $t \in [0;3.6]$ s ona je još uvek manja od 10 %, a na kraju intervala $t \in [3.8;7.0]$ s iznosi 26.3 %. Sedam sekundi posle početka eksperimenta tečenje u kanalu postaje kvaziustaljeno. Sa dijagrama se vidi da su razlike između sračunatih i izmerenih nivoa najveće u preseccima u kojima se ostvaruje prelazak iz burnog u miran režim tečenja, tj. u preseccima u kojima se javlja hidraulički skok. Računske linije nivoa u mirnom režimu (uzvodno od pragova) ne odstupaju mnogo od izmerenih – greške u proceni dubine ne prelaze 6 %. Bez obzira što je pri protocima većim od približno 0.7 l/s greška u proceni dubine sa nizvodne strane hidrauličkog skoka relativno velika, dijagrami pokazuju da računski shema MacCormack pri svim protocima sa zadovoljavajućom tačnošću locira položaj skoka.

6. ZAKLJUČCI

Na kraju će se još jednom podvući dva najbitnija zaključka do kojih se došlo kvantitativnim poređenjem rezultata numeričke simulacije tečenja preko širokih pragova u burnom režimu sa rezultatima laboratorijskih merenja.

Prvo, primenom računski sheme MacCormack može se pouzdano odrediti položaj hidrauličkog skoka i drugo, sa zadovoljavajućom tačnošću može se sračunati linija nivoa u mirnom režimu uzvodno od praga.

Za simulaciju tečenja u burnom režimu ($h_k > h_n$ i $S_0 > S_{0,k}$) veoma je važan još jedan zaključak. On se odnosi na minimalnu dozvoljenu računsku dubinu, koja, u razmatranom slučaju, ne sme biti manja od normalne dubine, tj. ($h_{\min} = h_n$).

LITERATURA

- [1] Anderson, D.A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H.: *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1984.
- [2] Bhallamudi, S.M., Chaudhry, M.H.: *Computation of Flows in Open-Channel Transitions* Journal of Hydraulic Research, Vol. 30, No. 1, 1992.
- [3] Cunge, J.A., Holly, F.M., Verwey, A.: *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman Publishing Limited, London, 1980.
- [4] Đorđević, D.: *Primena eksplicitne računski sheme MacCormack za proračun linijskog neustaljenog tečenja u otvorenim tokovima u slučajevima pojave diskontinuiteta toka*, Seminarski rad iz Računski hidraulike, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Novembar, 1993.
- [5] Đorđević D.: *Analiza tečenja preko tri široka praga u prizmatičnom laboratorijskom kanalu*, Seminarski rad iz Hidraulike hidrotehničkih objekata, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Novembar, 1995.
- [6] Đorđević, D.: *Numeričko modeliranje tokova koje karakteriše nagla lokalna promena dubine i protoka*, Magistarska teza, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 1998.
- [7] Đorđević, D.: *Teorijsko i eksperimentalno određivanje koeficijenta protoka preko širokog praga u kanalu proizvoljnog nagiba dna*, Vodoprivreda, Br. 175-176, Beograd, 1998.
- [8] French, R.H.: *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1986.
- [9] Garcia, R., Kahawita, R.A.: *Numerical Solution of the St. Venant Equations With the MacCormack Finite-Difference Scheme*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, 1986.
- [10] Garcia-Navarro, P., Saviron, J.M.: *McCormack's Method for the Numerical Simulation of One-Dimensional Discontinuous Unsteady Open Channel Flow*, Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 30, No. 1, 1992.
- [11] Jovanović, M., Đorđević, D.: *Numerical Simulation of 2D Unsteady Open Channel Flows with the MacCormack Finite - Difference Scheme*, HYDROSOFT'94, Porto Carras, Greece, 1994.
- [12] Jovanović, M., Đorđević, D.: *Experimental Verification of the MacCormack Numerical Scheme*, Advances in Engineering Software, Vol.23, Elsevier Science Limited, 1995.
- [13] Jovanović, M.: *Osnove numeričkog modeliranja ravninskih otvorenih tokova*, Građevinski fakultet, Beograd, 1998.
- [14] Thandaveswara, B.S., Kumar, A.A.: *MacCormack Approach - A Case Study of Narmada River Floods*, Mathematical Modelling in Water Resources, ed. by Russell, I.F., Ewing, R.E., Brebbia, C., Gray, W.G., and Pinder, G.F., Vol. 2, Elsevier, 1992.

MODELLING OF SUPERCRITICAL FLOWS OVER A SEQUENCE OF BROAD-CRESTED WEIRS

by

Dejana ĐORĐEVIĆ, MSc.C.E
Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade
E-mail: DEJANA@grf.bg.ac.yu

Summary

The problems in mathematical and numerical modelling of supercritical flows over a sequence of broad-crested weirs are considered first. They arise both from the discontinuity in the water level profile upstream of the weir (i.e. presence of the hydraulic jump) and the treatment of the internal boundary condition. The MacCormack explicit computational scheme is used to model the flows under consideration. It may be classified into the group of Finite Difference Methods that provide for weak solutions. Theoretical considerations are followed by: description of a laboratory flume

in which the flows over the sequence of broad-crested weirs were analysed and the presentation of the conditions under which the experiments were performed. Results of measurement are used to verify the proposed numerical model. Only one experiment was simulated. Results of numerical simulation are compared to the results of measurement, and an appropriate comment is given.

Key words: Broad-Crested Weir, Internal Boundary Condition, Supercritical Flow, Hydraulic Jump, Weak Solution, Laboratory Measurements, Numerical Simulation

Redigovano 17.06.1999.