Georgije Hajdin

MEHANIKA FLUIDA

knjiga prva

OSNOVE

šesto izmenjeno i dopunjeno izdanje

Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet

2021.

Georgije Hajdin
MEHANIKA FLUIDA
knjiga prva OSNOVE
šesto izmenjeno i dopunjeno izdanje

Recenzenti: Prof. dr Miodrag Jovanović, prof. dr Marko Ivetić i van. prof. dr Nenad Jaćimović

Udžbenik je odobren za štampu odlukom Naučno–nastavnog veća Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, na sednici održanoj 21. oktobra 2021. godine.

Izdavač: Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

Glavni i odgovorni urednik: Prof. dr Vladan Kuzmanović, dekan

Tehnički urednik: Radomir Kapor

Crteži: Dr Radomir Kapor prema crtežima Vladimira Jankovića.

Unos teksta: Dr Radomir Kapor, dr Miodrag Jovanović i dr Dragutin Pavlović.

URL: `https://grafar.grf.bg.ac.rs/handle/123456789/2419`

ISBN 978-86-7518-108-8

SADRŽAJ

Deo treći:
Osnovne jednačine: jednačine nepromenljivosti mase, količine kretanja i održanja energije **81**

Deo četvrti:
Veze između napona i deformacija i jednačine koje su posledice tih veza **129**

Deo peti:
O turbulenciji **161**

Deo šesti:
Dimenzionalna razmatranja i sličnost strujanja **219**

Indeks pojmova **269**

PREDGOVOR

Više od deset godina posle smrti prof. Georgija Hajdina (1925-2011), pred čitaocima je šesto izdanje ove knjige. U njemu su, na osnovu petog fototipskog izdanja, otklonjene uočene štamparske greške u tekstu i crtežima i unete dopune koje je za života napisao autor. Ovo izdanje knjige u digitalnom obliku može se slobodno preuzeti sa internet strane Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu (URL vidi na strani ii). Za ovakav način izdavanja dobijena je saglasnost sina autora, nosioca autorskog prava dr Maneta Hajdina, na čemu mu se u ime čitalaca Građevinski fakultet srdačno zahvaljuje.

U pripremi šestog izdanja ponovo je otkucan tekst i crteži su ponovo nacrtani. U ovom obimnom poslu učestvovali su autor predgovora, Miodrag Jovanović i Dragutin Pavlović.

„MEHANIKA FLUIDA – knjiga prva – OSNOVE" predstavlja prvi i uvodni deo, u seriji prof. Georgija Hajdina, koje sačinjavaju još i „MEHANIKA FLUIDA – knjiga druga – UVOĐENJE U HIDRAULIKU" i „MEHANIKA FLUIDA – knjiga treća – DODATNA POGLAVLJA".

Novembar 2021. god. Radomir Kapor

PREDGOVOR PETOM IZDANJU

Ovo je peto izdanje ove knjige. Prethodila su četiri, sa ukupno 4500 primeraka, pa će sa ovim petim, u 500 primeraka, broj biti zaokružen, na 5000. Ono je potpuno identično sa četvrtim, uz sledeću napomenu: Istovremeno sa ovim izdanjem pojavljuje se prvi put Drugi deo „Mehanika fluida", nazvan „Uvođenje u hidrauliku", pa je ova knjiga postala Prvi deo sa naslovom „Osnove".

U nastavku se daje Predgovor četvrtom izdanju, da bi se dobio uvid u okolnosti koje su pratatile prva četiri izdanja.

Februar 2002. god. Georgije Hajdin

PREDGOVOR ČETVRTOM IZDANJU

Prva dva izdanja ove knjige (1977. i 1980. godine) – svako u 1000 primeraka, izdao je Građevinski fakultet u Beogradu, kao skripta za svoje studente. Ta dva izdanja bila su istovetna.

Treće izdanje povereno je izdavačkom preduzeću „Građevinska knjiga" sa namerom da knjiga dobije dobru tehničku obradu i da šire prodre do mogućih korisnika, a ne samo do studenata Građevinskog fakulteta, što je i mogla da uradi ugledna izdavačka kuća za tehničku, prvenstveno građevinsku literaturu, a sa razgranatom mrežom prodaje. Te namere su i ostvarene, jer je „Građevinska knjiga" izdala knjigu 1983. godine, u zaista pohvalnoj obradi, a u 2000 primeraka, što je rasprodato za 5 godina. Za to izdanje, u odnosu na prva dva, obavljena su brojna doterivanja i dopisivanja, nema poglavlja u kome nije bilo prepravljanja.

Bilo je u pripremi i novo izdanje „Građevinske knjige", i učinjene su sve pripreme, ali se odugovlačilo sa izdavanjem, a na kraju se i odustalo, jer smanjena teritorija prodaje (ranije je bila cela bivša Jugoslavija) i sve niža kupovna moć ne samo studenata nego i stručnjaka, pa čak i preduzeća i ustanova, nisu obećavale zadovoljavajuću prodaju.

Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, uz finansijsku podršku Instituta za hidrotehniku fakulteta, odlučio je da uprkos navedenim nepovoljnim okolnostima, ipak, barem u 500 primeraka, omogući ovo izdanje. Ono je istovetno sa izdanjem „Građevinske knjige", samo uz otklanjanje nekih sitnijih štamparskih grešaka.

Za ovo izdanje, kao i za ranija tri, korišćeni su crteži koje je izradio Vladimir Janković, iz Instituta za hidrotehniku Građevinskog fakulteta. Smatram da je on znatno doprineo kvalitetu knjige, ne samo zbog njegove profesionalne savesti, nego i zbog našeg dugogodišnjeg prijateljstva.

Zahvalnost dugujem i mr Dubravki Pokrajac, asistentu Građevinskog fakulteta, čija je pomoć u doterivanju trećeg izdanja (koje je objavila „Građevinska knjiga") bila dragocena, kao i dr Aniti Stojimirović (ranije Špoljarić), docentu Građevinskog fakulteta, čijim je predanim nastojanjem došlo do pojave ovog četvrtog izdanja.

Novembar 1992. god. Georgije Hajdin

SPISAK OZNAKA

Navode se one oznake koje se koriste u više poglavlja, a nije se smatralo za potrebno da se navode i oznake upotrebljene samo jednom prilikom, jer je neposredno protumačeno šta označavaju. Uz oznaku je stavljen i broj izraza (jednačine) gde se uvodi u razmatranje.

x_i	koordinatne osovine,
A	površina,
V	zapremina,
M	masa,
t	vreme,
Y	veličina vezana za tačku (opšta oznaka), (14–1)
$\mathrm{D}/\mathrm{D}t$	materijalni izvod, (21–3)
δ_{ij}	simbol operator, (15–2)
ε_{ijk}	simbol operator, (15–3)
u_i	brzina, (21–1)
σ_{ij}	napon (početak Poglavlja 25)
σ_{ij}^{d}	devijatorski deo napona, (26–1)
p	pritisak (sferni deo napona), (26–2)
ω_{ij}	brzina deformacija, (24–13)
ω_{ij}^{d}	devijatorski deo brzine deformacija, (24–19)
Q	proticaj, (23–2)
f_i	zapreminska sila po jedinici mase, (28–1)
Z	visinski položaj (kota), (28–4)
g_i	gravitaciono ubrzanje, (28–6)
ρ	gustina, (18–1)
μ	koeficijent viskoznosti, (41–4)
E	modul stišljivosti, (42–1)
δ	kapilarna konstanta, (62–4)
Θ	temperatura, (34–9)
C	specifična toplota, (34–9)
c^p	specifična toplota pri konstantnom pritisku, (42–19)

λ	koeficijent provođenja toplote, (34–16)
R	gasna konstanta, (42–7)
k	adijabatski koeficijent, (42–14)
Re	Rejnoldsov broj, (62–1)
Fr	Frudov broj, (62–3)
Ma	Mahov broj, (62–19)
Ca	Košijev broj, (62–2)
We	Veberov broj, (62–4)
Ec	Ekertov broj, (62–22)
Pe	Pekleov broj, (62–23)
Nu	Nusletov broj, (62–29)

deo prvi

PREDMET, NAČIN I USLOVI PROUČAVANJA

11
PREDMET RAZMATRANJA

„Mehanika” se bavi kretanjem materijalnih tela, pa je „mehanika fluida” njen deo čiji je predmet kretanje fluida. Kako se pod pojmom „fluid” može shvatiti ono što teče, ili struji, „mehanika fluida” se može slobodno prevesti i kao „nauka o tečenju” ili „nauka o strujanju”. Ne treba unapred i strogo odvojiti fluide od „nefluida”, jer dok se ne uvidi o kakvoj se pojavi radi, ili kakav se zadatak rešava, ne može nešto ni da se uključi ni da se isključi iz predmeta proučavanja; predmet „mehanike fluida” postaju svi materijali koji teku, ili struje, ili kada miruju, jer su sprečeni da poteku.

Za sada se može prihvatiti ovakvo uvodno objašnjenje uz napomenu da je nezahvalno unapred definisati predmet proučavanja. Smotrenije bi bilo reći:

Kroz izlaganja će se postaviti uslovi i pretpostavke i na osnovu njih izvoditi zaključci, i ono na šta se to može odnositi – to su fluidi, odnosno to je strujanje fluida.

12
OSNOVNE I IZVEDENE VELIČINE, DIMENZIONALNI SISTEMI

Pod pojmom „*veličina*" u fizici, pa i u mehanici kao njenom delu, podrazumeva se ono što se meri, upravo ono što se može izmeriti. *Merljivost* je ona *bitna osobina veličine* koja je i definiše. U svakom pojedinačnom slučaju veličina ima određenu *vrednost*. Mogućnost izražavanja rezultata merenja zahteva ustanovljenje dimenzionalnog sistema i njegovih jedinica.

Na primer, brzina je veličina. U određenom slučaju neka je njena vrednost 25 cm s^{-1}. To je moguće izraziti pošto je utvrđen sistem i jedinice (1 cm, 1 s).

Izvesne veličine se uzmu kao *osnovne*, dok su ostale *izvedene* iz osnovnih. Osnovne veličine su međusobno nezavisne i neuporedive i njih treba tako izabrati da se preko njih može izraziti i izmeriti sve ono što razmatrana problematika nameće.

Mehanika u svoja proučavanja uključuje *geometriju*, čija znanja omogućavaju da se tačno odrede svi prostorni elementi: zapremine, površine, dužine, uglovi, itd. To je neophodno, jer se kretanje, što je predmet mehanike, obavlja *u prostoru*. Sve geometrijske veličine izvedene su na neki način od *dužine* kao osnovne veličine pa su im dimenzije: dužina na kvadrat za površinu, dužina na kub za zapreminu itd.

Kretanje se ne može opisati samo kroz prostor, nego se mora utvrđivati i *vreme* za koje je određena promena nastala, pa se vreme može uzeti kao druga osnovna veličina. Sada se može izvesti niz veličina – na primer: brzina (deljenjem dužine i vremena).

Kretanje opisano kroz prostor i vreme odnosi se na određeno materijalno telo, čije protivljenje promeni u kretanju izražava *masa*. Tako je masa treća osnovna veličina u proučavanju u mehanici. Po načelima klasične mehanike, masa jednog određenog tela je konstanta. Savremena fizika je prevazišla ovakvo shvatanje i smatra masu određenog tela kao promenljivu, ali se praktične posledice toga mogu oceniti tek sa brzinom kretanja reda vrednosti brzine svetlosti, pa se i danas u praktičnim proučavanjima u mehanici, gde su tako velike brzine isključene, postupa *sa masom kao nepromenljivom* veličinom.

Izloženo ukazuje da mehanici odgovara *dimenzionalni sistem: dužina, vreme* i *masa.* On prosto proizilazi iz definicije mehanike kao proučavanja kretanja materijalnih tela kroz prostor i vreme. Te *osnovne veličine ulaze u danas propisani međunarodni dimenzionalni sistem*, u koga pored navedenih, ulaze i osnovne veličine za izražavanje toplotnih, svetlosnih i električnih pojava.

Usvajajući osnovne veličine, odnosno dimenzionalni sistem dužina, vreme, masa, tj. $[L, T, M]$, svaka se mehanička veličina može napisati sa:

$$[Y] = [L^a\, T^b\, M^c] \tag{12–1}$$

Ovo nije jednačina u pravom smislu reči, nego je samo *dimenzionalni izraz* i ukazuje kako je veličina Y izvedena, a time je potpuno određena osobina veličine, jer se vidi šta izražava. Na primer, deljenjem mase sa zapreminom (dužinom na kub), dobija se gustina, pa je za nju $a = -3$, $c = 1$, dok je $b = 0$, jer vreme ne učestvuje u njenom izvođenju.

Pisanje „dimenzionalnih izraza" ili „dimenzionalnih obrazaca" obavlja se na razne načine – ovde će se prihvatiti pisanje u ugaonim zagradama, kao što je već učinjeno u (12–1).

Vrednost veličine se izražava ovako

$$Y = N_Y\, L_o^a\, T_o^b\, M_o^c \tag{12–2}$$

Ovo je prava jednačina, a za pisanje vrednosti trebalo je prethodno usvojiti jedinice sistema L_o, T_o i M_o i onda *vrednost izražava merni broj* označen sa N_Y.

Jedinice propisanog sistema su: $L_o = \mathrm{m}$ (metar), $T_o = \mathrm{s}$ (sekund), $M_o = \mathrm{kg}$ (kilogram).

* * *

Korisno je odmah utvrditi da je dimenzionalni sistem posledica izabranih osnovnih veličina, da je on stvar dogovora, jer se može napraviti i nešto drukčiji izbor, umesto dogovorenog. Propisani dimenzionalni sistem ne znači stoga neminovnost, nego unošenje reda, radi lakšeg sporazumevanja, jer ono što je neminovno (što ne može biti drugačije) ne treba ni propisivati.

U mehanici je određen broj osnovnih veličina – *tri*, jer se radi o prostoru, vremenu i materijalnosti, o tri međusobno nezavisne i neuporedive stvari. Međutim, osnovne veličine nisu predodređene u toj meri da nikakvog izbora nema – naprotiv mogu se birati, samo se mora ispuniti uslov da se preko njih mogu izraziti svi elementi prostora, vremena i materijalnosti. Na primer, osnovna veličina može biti sila, ali je onda izvedena veličina masa, uz pretpostavku da se zadrže dužina i vreme. Prethodno je, kao primer, uzeto namerno, jer sistem (dužina, vreme, sila) je tzv. „tehnički dimenzionalni sistem”, koji se doskora ravnopravno primenjivao sa sistemom (dužina, vreme, masa), jer je za dobar deo tehničke prakse veoma pogodan. Sila se nije ni „snagom propisa” mogla svesti na izvedenu veličinu koja mora da ima izvedenu jedinicu $(M_o\, L_o\, T_o^2)$. To bi zaista bilo neprikladno, na primer, za zadatak iz statike, gde bi se sila mogla odrediti uz upotrebu i jedinice za vreme, iako se vremenom ništa ne menja. Uostalom, sila je morala dobiti svoju jedinicu (N – njutn), da se ne bi morala svuda izražavati u $(\mathrm{kg\, m\, s^{-2}})$.

Izbor jedinica sistema takođe je stvar dogovora – u zadacima se vrednosti tako pišu da merni brojevi ne budu suviše veliki, ni suviše maleni. Pored metra (m) može se vrednost izraziti i sa 1000 m = km, ili 0,001 m = 1 mm. Treba zapaziti da čak ni osnovna propisana jedinica novog sistema za masu nije gram (g) nego kilogram (kg), tj. 1000 g. U razmatranjima, koja slede kroz niz narednih poglavlja, unosiće se izvesna sloboda oko objašnjavanja dimenzija, jer će se tako ukazivati na suštinu stvari. Kod gustine će se reći da je to masa podeljena sa zapreminom, kod napona da je to sila podeljena sa površinom (ili sila po jedinici površine), a biće pogodna za razmatranje – na primer – veličina „rad u jedinici vremena i po jedinici zapremine” itd.

U prilog razloga za slobodniji pristup i slobodnije shvatanje dimenzija navodi se primena metoda nazvanog „dimenzionalna analiza”, koja je u suštini to što naziv kaže – to je analiza dimenzija. Njena svrha je doprinos razjašnjavanju mogućih međusobnih veza razmatranih veličina, jer te veze moraju biti u skladu sa dimenzijama tih veličina. U takvoj analizi baš se koristi sloboda izbora dimenzionalnog sistema i jedinica, neke od samih razmatranih veličina uzmu se za osnovne i za jedinice, a onda se preko njih izražavaju ostale. Kasnije, u Poglavlju 61, ukazaće se na obimnu primenu te metode u „mehanici fluida".

Da se prethodno ne bi pogrešno shvatilo kao nastojanje za „unošenje nereda", treba primetiti da se zakonski propisi moraju poštovati onoliko koliko zahtevaju, a to znači sledeće:

Propisa se treba strogo pridržavati samo pri izražavanju vrednosti veličina u određenom pojedinačnom primeru. Tu merni broj (numerička vrednost) mora da bude uz zakonom propisane jedinice (m, s, kg), ali treba dodati da su dozvoljene i druge jedinice (N, Pa, W, J i druge) i da se mogu upotrebljavati i 10^n puta veće ili manje jedinice od navedenih (a za eksponent n se može uzeti 1, 2, 3, 6, 9, 12, 15 i 18, sa „+" ili „–" znakom).

* * *

Strujanje fluida povezano je sa toplotnim uticajima i tako se „mehanika fluida" preplIće sa „termodinamikom". One se razdvajaju, jer je u prvoj primarna svrha proučavanja kretanje fluida, a u toplotne promene se ulazi samo sa stanovišta njihovih uticaja na kretanje fluida, dok je u drugoj („termodinamici") kretanje fluida samo sredstvo za prenošenje toplote, koje je težište proučavanja. Međutim, baš ovakvo razdvajanje govori o povezanosti, upravo o učešću toplotnih uticaja u strujanju fluida, koji se u pretežnom delu zadatka i mogu izbeći, jer nisu bitni, ali bi ponegde takvo nastojanje bilo neopravdano.

Mehanika i toplotni uticaji povezuju se preko energije, jer se mehanička energija i toplota – kao istorodne veličine – mogu međusobno upoređivati. Za to je dovoljan sistem od *četiri osnovne veličine:* tri već objašnjene (dužina, vreme i masa) i četvrta – *temperatura* – oznaka Θ.

13
FLUID JE NEPREKIDNA, HOMOGENA I IZOTROPNA SREDINA. FLUIDNI DELIĆ.

Sva proučavanja zasnivaće se na prepostavkama da je fluid *neprekidna*, *homogena* i *izotropna* sredina. Ovo znači da fluid potpuno, neprekidno, ispunjava prostor koji zauzima, da u svim tačkama zauzetog prostora ima iste osobine (homogen je) i da se one podjednako ispoljavaju u svim pravcima (izotropan je). Prema tome, u izvođenju zakonitosti, i u primeni istih, pojmovi „tačka" i „pravac" su *proizvoljni* – to je „*bilo koja tačka*", odnosno „*bilo koji pravac*". Usled neprekidnosti, koju u svakoj tački zauzetog prostora ima fluida, on se tu ponaša kao i svuda, i neće praviti izuzetak za uticaje ni u jednom pravcu.

* * *

U proučavanjima neprekidnih sredina kao najsitniji deo posmatranog materijala uzima se ono što se naziva „delić" – ovde će to biti *fluidni delić*.

Fluidni delić je *neizmerno malena masa fluida* (koja se izražava beskonačno malenom veličinom), potpuno je ispunjen materijalom istih osobina kao i konačna masa čiji je sastavni deo, kreće se po zakonima po kojima se kreću tela, a veze između njega (delića) i okolnog fluida su načelno iste kao između dve konačne mase.

Treba naglasiti da se oblik i zapremina uočenog delića mogu menjati kroz vreme, ali da mu se masa ne menja – shodno, u prethodnom poglavlju, prihvaćenom stavu o nepromenljivosti mase.

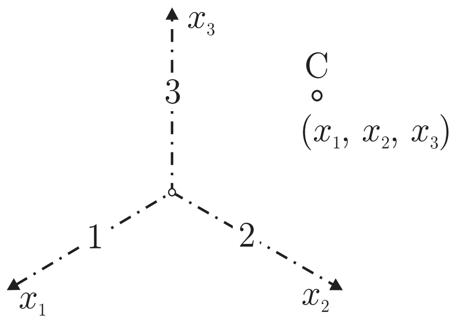
14
VELIČINA KAO FUNKCIJA POLOŽAJA I VREMENA I NJENO INTEGRISANJE PO ZAPREMINI I POVRŠINI

Veličina Y može da se izrazi kao *funkcija položaja* i *vremena*:

$$\boxed{Y = Y(x_1, x_2, x_3, t),} \tag{14–1}$$

pa se Y odnosi na *delić* koji se u tački $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ nalazi u trenutku t.

Za određivanje položaja tačke služe koordinatne osovine x_1, x_2, x_3, ili skraćeno obeležene sa 1, 2 i 3 (slika 14–1).



Slika 14–1 Koordinatne osovine i položaj tačke.

Veličina Y, napisana sa (14–1), se može nazvati „funkcijom polja”, jer se pod pojmom „polje” shvata prostor gde se određuje funkcija polja. Kod strujanja se govori o „strujnom polju”. Vezivanje funkcije za polje omogućeno je neprekidnošću fluida, jer se u svakoj tački polja nalazi delić pa se veličina, koja je fizički vezana za delić, može vezivati za tačku.

Veličine vezane za linije, površine i zapremine dobijaju se odgovarajućim integrisanjem. Na primer, integrisanjem istovremenih napona po određenoj površini dobija se sila na tu površinu. Ili, integrisanje gustine po zapremini daje masu.

Sem veličina vezanih za tačku, koje su uopšteno označene sa Y, u razmatranje će ulaziti i veličine Y_V i Y_A vezane za konačnu zapreminu V, ili konačnu površinu A, i one se dobijaju integrisanjem veličine Y, po zapremini, ili površini:

$$Y_V = \int_V Y \, \mathrm{d}V, \tag{14–2}$$

$$Y_A = \int_A Y \, \mathrm{d}A. \tag{14–3}$$

Može se poći od veličine za konačnu zapreminu, ili površinu, pa se onda ona raspoređuje po polju i tako se, diferenciranjem, dolazi do veličine za tačku.

*   *   *

Proučavanje jednog strujnog polja ima za cilj određivanje vrednosti za sve veličine Y koje se istražuju, i to po celom strujnom polju i u svim vremenskim trenucima. Ako se to postigne, onda je strujanje proučeno. Tada su poznate i veličine koje se odnose na linije, površine i zapremine.

Posmatranjem jednog, proizvoljnog delića utvrđuju se zakonitosti njegovog ponašanja pod delujućim uticajima. To su *jednačine za elementarnu masu*, diferencijalne jednačine *primenljive u proizvoljnoj tački u proizvoljnom trenutku*, čije integrisanje (po prostoru i vremenu), treba da dovede do poznavanja rasporeda vrednosti tih veličina u prostoru i vremenu – upravo do poznavanja funkcija tipa (14–1) za sve veličine za koje se to zahteva. U praktičnim slučajevima takva potpuna rešenja nisu obično moguća i treba se zadovoljiti sa onim što se može postići, pa makar i uz pojednostavljenje zadatka. Međutim, ovde se ne raspravlja o rešivosti, ili nerešivosti jednačina, nego se tvrdi da postoje funkcije tipa (14–1), bez obzira da li postoji, ili ne, mogućnost da se analitičkim putem dođe do njihovog izraza. I još se tvrdi da bi njihovo poznavanje značilo rešenje problema. Skreće se pažnja da pored *analitičkog* metoda (ispisivanje jednačina i traženje rešenja) postoji i *eksperimentalni* gde se na fizički ostvarenom strujnom polju merenjem dolazi do vrednosti veličina, upravo do rasporeda vrednosti po prostoru i vremenu, što načelno znače veze (14–1). Uzgred rečeno, prilikom sprovođenja analitičkog metoda *savetno je češće pomisliti kako bi se izmerilo ono* *što se ispisuje.* I na kraju, za svako analitičko rešenje mora postojati mogućnost eksperimentalne provere.

U nizu praktičnih zadataka zadovoljavajuće rešenje je ono koje daje vrednosti onih veličina koje se odnose na konačnu masu, smeštenu u određenu zapreminu, ograničenu odgovarajućom zatvorenom površinom. Ovde se nastoji da se što je moguće manje ulazi u raspored vrednosti veličina unutar mase, od tačke do tačke, a da se najkraćim putem dođe do pokazatelja koji se odnose na celu zapreminu i njenu graničnu površinu. Na primer, površinska sila na konačnu masu je određena samo naponima po graničnoj površini, a nije nužno ulaziti u analizu naponskog stanja unutar mase. Za opisanu svrhu posmatranja zbirnih uticaja na *masu kao celinu*, ispisuju se *jednačine za konačnu masu* u vidu zapreminskih i površinskih integrala, primenljive na *proizvoljnu zapreminu u proizvoljnom trenutku* (upravo na onu zapreminu koju posmatrana masa u posmatranom trenutku zauzima).

U izlaganjima osnovnih jednačina „mehanike fluida” – u poglavljima 31. do 34 – postupiće se prema prethodnim navodima: biće izvedene jednačine za elementarnu i konačnu masu, primenljive u tački, odnosno na konačnu zapreminu.

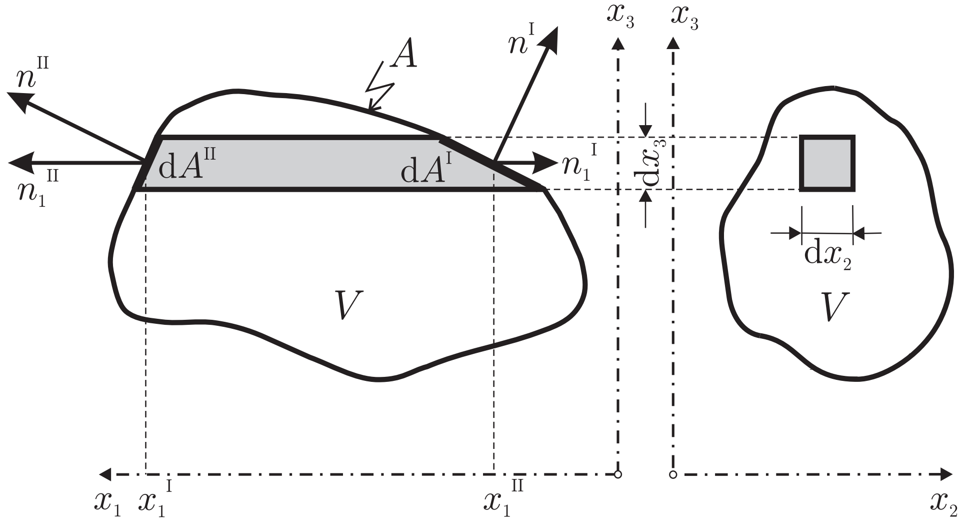
* * *

Iz izraza za elementarnu masu može se preći na izraz za konačnu masu jednostavnim integrisanjem po zapremini – dobiće se zapreminski integral. To važi za sve izraze, ali se oni uticaji koji su određeni samo njihovim rasporedom po graničnoj površini mogu, pored zapreminskog, predstaviti i površinskim integralom. Odatle mora postojati veza između zapreminskog i površinskog integrala, koja će biti prikazana u nastavku.

Zapremina V je ograničena zatvorenom površinom A (slika 14–2), u određenom trenutku, napisan je sledeći zapreminski integral, koji se odnosi na celu posmatranu zapreminu, a definiše veličinu I kao:

$$I = \int_V \frac{\partial Y}{\partial x_1} \,\mathrm{d}V. \tag{14–4}$$

Od zapremine V uzeće se jedan „štapić”, preseka $\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$, koji se u pravcu 1 pruža kroz celu zapreminu, tj. od x_1^{I} do x_1^{II} (prikazano slikom),



Slika 14–2 Uz objašnjenje pretvaranja zapreminskog integrala u površinski. Prikazani su preseci zapremine V omeđene površinom A, sa naznačavanjem elemenata zapremine – štapića preseka $\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$.

i izraziće se „štapiću" pripadajući deo integrala. Taj elementarni deo iznosi:

$$\delta I = \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \int_{x_1^{\mathrm{I}}}^{x_1^{\mathrm{II}}} \frac{\partial Y}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,(Y^{\mathrm{II}} - Y^{\mathrm{I}}), \tag{14–5}$$

gde su Y^{I} i Y^{II} vrednosti na graničnim površinama štapića, koje su ujedno i deo granične površine A, cele zapremine V. Navedene granične površine $\mathrm{d}A^{\mathrm{I}}$ i $\mathrm{d}A^{\mathrm{II}}$ imaju zajedničku projekciju $\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$ (normalnu na prvac 1), koja se može izraziti sa:

$$\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}A^{\mathrm{I}}\,(-n_1^{\mathrm{I}}), \tag{14–6}$$

ili

$$\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}A^{\mathrm{II}}\,(n_1^{\mathrm{II}}). \tag{14–7}$$

Ovim je u izvođenje uveden n_i = *jedinični vektor (ort) spoljne normale* (spoljna normala u svakoj tački granične površine leži u pravcu normale na površinu, a usmerena je od razmatrane površine napolje – izvan zapremine V).

Komponenta vektora n_i u pravcu osovine 1 je n_1, pa je n_1 kosinus ugla između osovine 1 i normale. Stoga se $\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$, kao projekcija površinica $\mathrm{d}A^{\mathrm{I}}$ i $\mathrm{d}A^{\mathrm{II}}$ na ravan normalnu na osovinu 1, može izraziti kako je napisano sa (14–6) i (14–7). Ove dve jednačine iskorišćene su za smenu u (14–5) daju:

$$\delta I = \mathrm{d}A^{\mathrm{I}}\, n_1^{\mathrm{I}}\, Y^{\mathrm{I}} + \mathrm{d}A^{\mathrm{II}}\, n_1^{\mathrm{II}}\, Y^{\mathrm{II}}\,. \tag{14–8}$$

Kako je ovim obuhvaćeno sve ono od granične površine A što pripada posmatranom „štapiću”, može se napisati:

$$\delta I = Y\, n_1\, \mathrm{d}A\,, \tag{14–9}$$

što se, nadalje može integrisati po celoj površini A, a tada će štapićima biti obuhvaćena cela zapremina V, odnosno tako dobijeni površinski integral izražava isto što i zapreminski (14–4), što dovodi do sledećeg izjednačenja:

$$I = \int_A Y\, n_1\, \mathrm{d}A = \int_V \frac{\partial Y}{\partial x_1}\, \mathrm{d}V\,. \tag{14–10}$$

Ovo izjednačavanje površinskog i zapreminskog integrala poznato je pod imenom „Gausova teorema” (Gauss).

Uz prethodna izlaganja korisno je da se napomene sledeće. Površinski i zapreminski integrali napisani su malopre, a pisaće se tako i redovno nadalje, sa jednim znakom integrisanja, uz oznaku A, odnosno V. Taj način pisanja se često upotrebljava, pored razume se, pisanja površinskog integrala sa dva znaka integrisanja, a zapreminskog sa tri, što je duže, ali ispunjava zahteve za zadovoljavanjem formalne strogosti. Treba još dodati da će se u narednim izlaganjima često koristiti površinski i zapreminski integrali, kao i prethodni obrazac za preobraćanje površinskog integrala u zapreminiski (ili zapreminskog u površinski). Ti integrali su određeni integrali, jer se, u svakom određenom slučaju, odnose na određenu zapreminu, ograničenu svojom određenom površinom. Stoga se ponegde uz znak integrala ne piše jednostavno A, odnosno V, jer su to opšte oznake za površinu i zapreminu, nego se uzmu druge oznake za njihove određene iznose. Na primer, određena površina označava se dodavanjem nekog indeksa u A – na primer neka se označi sa A_c – ili se uzme druga oznaka – na primer Ω. To onda znači da se sve elementarne površinice, koje ulaze u određeni integral (svaka od njih je dA) čine određeni iznos A_c (ili Ω). Isto se primenjuje i za određenu zapreminu. Način pisanja, koji je primenjen malo pre i koji će se primenjivati i nadalje, bez obzira na moguće primedbe sa formalne strane, ne može izazvati zabunu, jer će se površinski i zapreminski integral odnositi uvek na određenu zapreminu V, koju ograničava zatvorena površina A.

15
SKALARNE, VEKTORSKE I TENZORSKE VELIČINE I NJIHOVO OBELEŽAVANJE

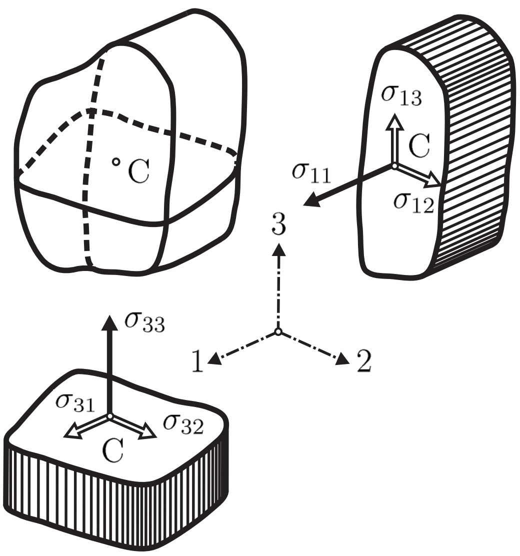
Veličine mogu da budu skalarne, vektorske ili tenzorske.

Gustina ρ, ili temperatura Θ, delića određene su samo jednim podatkom. Ili, obavljen rad na nekoj konačnoj masi kroz određeno vreme izražava se samo jednim podatkom. To su primeri za skalarne veličine ili *skalare*.

Brzina delića određena je, međutim, sa tri podatka: u_1, u_2 i u_3 (to su komponente brzine u pravcima 1, 2 i 3). Takođe i sila na neku masu mora da se odredi sa tri komponente F_1, F_2 i F_3. Ovo su vektorske veličine ili *vektori*. Vektor je posve razumljivo i vektor položaja, čije su komponente x_1, x_2 i x_3 (slika 14–1).

Ima veličina za koje *nisu dovoljna ni tri podatka*. Takav je, na primer, napon. U datom trenutku i za datu tačku napon se može određivati samo za određenu presečnu ravan, jer on i izražava vezu između zamišljenih presečnih delova tela.

Za već određenu ravan, napon je određen sa tri podatka, jer je napon sila (a sila je vektor) po jedinici površine. Kako se može postaviti bezbroj ravni kroz tačku za koju se određuje naponsko stanje, napon bi, na prvi pogled, bio neodređen, jer bi trebalo beskonačno mnogo podataka, ali to nije tako, jer čim se napon odredi za tri ravni, za svaku narednu već je određen preko napona za tri međusobno ortogonalne ravni usvojenog koordinatnog sistema. Ovo se za sada može prihvatiti, a kasnije – Poglavlje 25 – biće o ovome još reči. Prihvatanje prethodnog znači da je napon određen sa 9 podataka (za tri ravni, a za svaku sa tri podatka). Na slici 15–1 prikazan je, između ostalog, napon za ravan normalnu na pravac 3, a on je određen sa tri podatka σ_{31}, σ_{32} i σ_{33}, gde prvi indeks znači ravan, a drugi pravac delovanja. Rezultanta ta tri napona je vektor i on označava silu po jedinici površine, kojom odsečeni deo tela deluje na preostali. Kroz istu tačku C mogu se položiti ravni normalne na pravce 1 i 2, pa će se dobiti 9 podataka, (na slici je to pokazano i za ravan normalnu na osovinu 1). Jasno je da za izražavanje



Slika 15–2 Napon u tački C za određenu presečnu ravan određen je sa tri podatka – prikazano za ravni normalne na osovine 1 i 3.

brzine u toj istoj tački ne treba zamišljati nikakvo sečenje tela, pa je ona određena sa tri podatka (za tri pravca), dok za gustinu nema ni pravca delovanja, pa je dovoljan jedan podatak.

* * *

Prethodno objašnjeno napisaće se u produžetku pregledno, uz uopštavanja: jedna od osovina, bilo koja, biće označena sa „i" (x_i), a druga „j", odnosno treća „k".

Skalar je veličina „nultog" reda, određena sa $3^0 = 1$ podatkom i piše se običnom oznakom bez indeksa (broj indeksa = nula). Na primer $\rho =$ gustina.

Vektor je veličina „prvog reda", određena sa $3^1 = 3$ podatka i uz oznaku ima jedan indeks. Za primer će se uzeti brzina sa komponentama:

$$u_1, \ u_2, \ u_3, \quad \text{ili uopšteno} \quad u_i \, ,$$

gde je $i = 1$, 2 ili 3, tj. pravac „i" je bilo koji od koordinatnih pravaca, ali to mogu biti i „j" ili „k", pa se može napisati u_j ili u_k, jer svaki od indeksa može da ima vrednosti 1, 2 ili 3.

Tenzor je veličina „drugog reda” i određen je sa $3^2 = 9$ podataka i njegova oznaka nosi dva indeksa. Na primer, napon se može uopšteno napisati sa: σ_{ij} napon za ravan normalnu na pravac „i”, a deluje u pravcu „j”.

Ovde svaki od indeksa može da bude 1, 2 ili 3, pa σ_{ij} (ili σ_{ji}, ili $\sigma_{jk} \ldots$) predstavlja zajednički izraz za 9 podataka.

Produžavanjem navedenog niza mogu se zamisliti i veličine za koje je potrebno još više podataka – na primer $3^3 = 27$. Međutim, u narednim razmatranjima neće se sretati takve veličine.

* * *

Uz navedeni način pisanja treba uvesti i neke dogovore – konvencije.

Prvo, ako se u jednom monomu isti indeks udvostruči, to predstavlja trinom, jer sa za udvostručeni indeks uslovljava da se odnosi na sva tri koordinatna pravca, u svakom članu trinoma na po jedan. Na primer:

$$a_i \frac{\partial b}{\partial x_i} \text{ ne znači } a_1 \frac{\partial b}{\partial x_1}, \text{ ili } a_2 \frac{\partial b}{\partial x_2}, \text{ ili } a_3 \frac{\partial b}{\partial x_2}, \text{ nego je:}$$

$$a_i \frac{\partial b}{\partial x_i} = a_1 \frac{\partial b}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial b}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial b}{\partial x_3}\,. \tag{15–1}$$

Drugo, uvode se dva simbola sa uslovnim vrednostima. To su:

I. Simbol δ_{ij}, koji predstavlja:

$$\left.\begin{array}{lll} \delta_{ij} = 1 & \text{za} & i = j, \\ \delta_{ij} = 0 & \text{za} & i \neq j. \end{array}\right\} \tag{15–2}$$

II. Simbol ε_{ijk}, koji predstavlja:

$$\left.\begin{array}{lrl} \varepsilon_{ijk} = & 1 & \text{ako je sređeno redom, tj. } 1\ 2\ 3 \\ & & \text{ili } 2\ 3\ 1 \text{ ili } 3\ 1\ 2, \\ \varepsilon_{ijk} = & -1 & \text{ako je sređeno obrnutim redom, tj. } 3\ 2\ 1 \\ & & \text{ili } 1\ 3\ 2 \text{ ili } 2\ 1\ 3, \\ \varepsilon_{ijk} = & 0 & \text{ako se bilo koji indeks pojavljuje} \\ & & \text{dva ili tri puta.} \end{array}\right\} \tag{15–3}$$

* * *

Primeri za upotrebu navedenih simbola su *skalarni* i *vektorski proizvod dva vektora* a_i i b_i, jer:

$$\begin{array}{ll} \delta_{ij}\, a_i\, b_j & \text{označava } \textit{skalarni proizvod,} \\ \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j & \text{označava } \textit{vektorski proizvod.} \end{array}$$

Kod skalarnog proizvoda vektora pojavljuje se proizvod komponenata u istom pravcu, pa treba isključiti proizvode pri $i \neq j$, a to će uraditi simbol δ_{ij}, jer je:

$$\delta_{ij}\, a_i\, b_j = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3\,. \tag{15–4}$$

Iako bi početni izraz usled udvostručenja oba indeksa (što znači ponavljanje po oba) značio 9 članova, ostaju samo tri gde je indeks isti, tj. napisani članovi (u kojima je izostavljeno δ_{11}, odnosno δ_{22}, odnosno δ_{33}, jer su oni jedinice), dok svi ostali članovi otpadaju (tamo je $\delta_{ij} = 0$, zbog $i \neq j$).

Izraz (15–4) je zaista skalarni proizvod vektora, a on se nadalje može napisati:

$$a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 = a_i\, b_i\,. \tag{15–5}$$

(*skalarni proizvod vektora*)

Jasno je da se može napisati i kao $a_j\, b_j$, odnosno $a_k\, b_k$, jer i to se razvija u levu stranu napisanog izraza.

Udvostručeni indeks ne odnosi se ni na jedan pravac posebno (nema usmerenosti). Stoga se udvostručeni indeks naziva „*nemi*", jer „ništa ne kazuje". Izraz (15–5) je skalar, a takođe i (15–1). Kod leve strane (15–4) su dva udvostručena indeksa, što znači da su oba „nemi", pa je rezultat skalar.

Kod vektorskih proizvoda, nagoveštenih malo pre sa $\varepsilon_{ijk}\, a_i b_j$, usmerenost daje „$k$", jer su ostala dva indeksa „nema". Vektorski proizvod iz a_i i b_j je vektor C_k, čije su komponente:

$$\left.\begin{array}{lcl} C_3 & = & a_1\, b_2 - a_2\, b_1, \\ C_2 & = & a_3\, b_1 - a_1\, b_3, \\ C_1 & = & a_2\, b_3 - a_3\, b_2. \end{array}\right\} \tag{15–6}$$

što se može uopšteno napisati sa:

$$C_k = \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j \quad (\textit{vektorski proizvod vektora}), \tag{15–7}$$

jer se korišćenjem uslova napisanih pod (15–3) iz (15–7) dobija (15–6).

* * *

Sa uvedenim označavanjem napisaće se uobičajeni izvodi iz vektorskog računa:

Gradijent skalara e je vektor f_i

$$f_i = \frac{\partial e}{\partial x_i} . \tag{15–8}$$

Komponente gradijenta su:

$$f_1 = \frac{\partial e}{\partial x_1} , \qquad f_2 = \frac{\partial e}{\partial x_2} , \qquad f_3 = \frac{\partial e}{\partial x_3} .$$

Divergencija vektora a_i je skalar h izražen sa:

$$h = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} . \tag{15–9}$$

I ovde je indeks „i” „nem”, jer je udvostručen.

Rotor vektora a_j je vektor C_k prema sledećem:

$$C_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} , \tag{15–10}$$

pa su komponente:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} , \\ C_2 &= \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} , \\ C_3 &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} . \end{aligned}\right\} \tag{15–11}$$

* * *

Izvod tenzora (napona σ_{ij}) po koordinatnom pravcu „i” daje:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_3} . \tag{15–12}$$

Pravac delovanja daje indeks „j", jer „i" je ovde „nemi" indeks, po njemu se obavilo ponavljanje. Na primer, za $j=2$ dobija se:

$$\frac{\partial\,\sigma_{i2}}{\partial\,x_i} = \frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x_1} + \frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,x_2} + \frac{\partial\,\sigma_{32}}{\partial\,x_3}\,. \tag{15–13}$$

Kasnije će se videti da (15–12) predstavlja silu po jedinici zapremine usled delovanja napona u pravcu „j".

Može se (15–12) skalarno pomnožiti sa u_j = brzina, pa će se dobiti skalar (rad u jedinici vremena, po jedinici zapremine, jer se brzinom množi sila po jedinici zapremine) koji će biti napisan sa oba nema indeksa, a značiće 9 članova:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}\,u_j \;&= \frac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\,x_1}\,u_1 + \frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x_1}\,u_2 + \frac{\partial\,\sigma_{13}}{\partial\,x_1}\,u_3 + \\ &+ \frac{\partial\,\sigma_{21}}{\partial\,x_2}\,u_1 + \frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,x_2}\,u_2 + \frac{\partial\,\sigma_{23}}{\partial\,x_2}\,u_3 + \\ &+ \frac{\partial\,\sigma_{31}}{\partial\,x_3}\,u_1 + \frac{\partial\,\sigma_{32}}{\partial\,x_3}\,u_2 + \frac{\partial\,\sigma_{33}}{\partial\,x_3}\,u_3\,.\end{aligned}\right\} \tag{15–14}$$

* * *

Na kraju treba da se naglasi da veličina Y u simbolički napisanoj vezi (14–1), o kojoj se raspravlja tokom proteklog poglavlja (14), može da bude skalarna, ili vektorska, ili tenzorska, iako je tamo pisana bez ikakvog indeksa. Takođe i stav o pretvaranju zapreminskog integrala u površinski, ili obrnuto, dat sa (14–10), važi za sve veličine. Taj izraz se može uopštavati – umesto x_1 i n_1 će se staviti x_i, odnosno n_i, jer važi za proizvoljan pravac.

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int_V \frac{\partial\,Y}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V = \int_A Y\,n_i\,\mathrm{d}A, \\ \text{Izjednačenje zapreminskog} \\ \text{i površinskog integrala.}\end{array}} \tag{15–15}$$

Ako je Y skalar, radi se o integrisanju gradijenta i integral je vektor, usmerava ga „i". Ako je $Y = a_i$ = vektor, integriše se $\partial a_i/\partial x_i$ (tj. divergencija) i integral je skalar. Može se staviti $Y = \varepsilon_{ijk}\,u_j$ pa će se integrisati rotor vektora u_j, a površinski integral će biti sastavljen od vektorskih proizvoda n_i i u_j po elementarnim površinama. Treba dodati da izraz (15–15) važi i kada je $Y = \sigma_{ij}$ tj. tenzorska veličina, što će se kasnije, kod napona, koristiti i na drugi način dokazati.

16
POČETNI I GRANIČNI USLOVI

Proučavanju strujanja ne može se pristupiti ako se ne poznaje *stanje u početnom trenutku* – određenje tog stanja sadrže *početni* (ili *inicijalni*) uslovi.

Oblast koja se proučava ima svoje granice kroz koje se nameću *granični* (ili *konturni*) uslovi, koji se moraju poznavati da bi se moglo proučavati šta se zbiva unutar granica.

Sa matematičkog stanovišta, ako se ne daje fizičko tumačenje na šta se izraz (jednačina) odnosi, nije ni važno šta uslovi na granicama znače, bitno je samo da ih je dovoljno da se može doći do rešenja za pojedinačni slučaj. Stoga se može naići i na vezivanje pojma „početni" ne samo za vremenski početak, nego i za neki početak u prostoru (za tačku ili površinu, na primer), a opet „granični uslov" ne mora biti namenjen prostornom ograničenju. Uostalom, nazivi su stvar dogovora, a bitno je da se shvati da se zadatak iz strujanja može rešavati samo uz poznato početno stanje (u početnom vremenskom trenutku) i uz određene uslove na prostornim granicama zadatka.

Primer veoma prostog graničnog uslova je delovanje atmosferskog pritisak na slobodnu površinu vode. Drugi, takođe veoma prost, granični uslov je na čvrstoj granici (zid cevi, površina čvrstog tela u fluidnoj struji i sl.), jer je ona ujedno i granična površina strujanja na kojoj fluid ima relativnu brzinu, u odnosu na nju, jednaku nuli, jer fluid prijanja uz čvrstu granicu. Ako granica miruje, brzina fluida na njoj je nula.

Početni i granični uslovi objasniće se nadalje na jednom praktičnom zadatku – određivanju dubina u kanalu, koje se menjaju duž kanala i kroz vreme. Da bi se moglo pristupiti rešavanju tog zadatka moraju da budu u početnom trenutku (od koga počinje proučavanje) poznate dubine, brzine i druge veličine merodavne za rešavanje zadatka. To su početni uslovi, od kojih zavisi rešenje zadatka – drugačiji početni uslovi, drugačije i rešenje. Sem toga, moraju biti poznati svi geometrijski podaci o kanalu (poprečni preseci i njihov položaj), gde se uključuje i poznavanje hrapavosti obloge. Drugim rečima, treba da bude poznata granična površina strujanja – i to ulazi u granične uslove. U njih ulazi i uslovljavanje stanja na uzvodnoj i nizvodnoj granici kanala: mora se znati proticaj koji dolazi, odnosno odlazi, kao i uzvodni i nizvodni nivo, a ovo je zavisno od uzvodnih i nizvodnih uslova koji se nameću kanalu. To mogu da budu, na primer, posledice stepena otvorenosti uređaja koji propuštaju ili ispuštaju vodu. Jasno je da se ovi uzvodni i nizvodni uslovi mogu da menjaju kroz vreme. Iste diferencijalne jednačine za strujanje u kanalu dovode do pojedinih rešenja zavisnih od svih navedenih uslova.

U prethodnim izlaganjima – Poglavlje 14, rečeno je da se za proizvoljnu tačku (upravo za elementarnu masu) uspostavljaju diferencijalne jednačine. Njihovo integrisanje je nemoguće bez utvrđenih početnih i graničnih uslova. Ti uslovi unose ono posebno što nameće pojedinačni primer, po tome se on razlikuje od drugih primena iste jednačine.

Ako se izučavaju uticaji na konačnu masu, kao celinu, što je takođe navedeno kao uobičajena metoda, dobar deo posla je baš u utvrđivanju stanja na graničnoj površini posmatrane mase.

Složenošću graničnih uslova objašnjava se da se raspolaže samo sa rešenjima za proste, odnosno uprošćene slučajeve.

Kod preduzimanja eksperimentalnih istraživanja granični uslovi se obezbeđuju, odnosno podešavaju, a kod iznošenja rezultata moraju se tačno izraziti. Kako je mogućnost promene graničnih uslova beskonačna, eksperimentalna rešenja opšteg značaja se svode na veoma proste granične uslove – na primer, daju se otpori tela koja se prosto geometrijski opisuju, i to u fluidnoj struji koja je određena samo jednim podatkom za brzinu, jer je struja zanemarljivo odstupila od paralelne, pravolinijske struje, sa svuda istom brzinom, koja je poremećena isključivo telom čiji se otpor određuje.

Teškoće koje nameću granični i početni uslovi prisiljavaju na izgradnju posebnog modela za pojedinačni zadatak, gde se tačno modelišu njegovi početni i granični uslovi. Modeli mogu da budu fizički, sa strujanjem fluida, ili matematički, gde se unose svi uslovi i parametri datoga problema i sa njima se rešavaju diferencijalne jednačine približno, numeričkim metodama, jer obično za njih nema tačnih rešenja.

17
USTALJENO I NEUSTALJENO STRUJANJE. PROSTORNI, RAVANSKI I LINIJSKI ZADACI.

Strujanje je *ustaljeno (permanentno) ako je jednako u svim vremenskim trenucima* (kakvo je u jednom trenutku, takvo je stalno). Za tu nepromenljivost kroz vreme pogodan je naziv „ustaljenost”. Vrednost neke veličine (brzine, pritiska, ili bilo koje) menja se od tačke do tačke, tj. po prostoru, ali se u istoj tački ne menja kroz vreme. Lokalnih promena, promena u mestu, nema.

Ustaljenost se može izraziti izostavljenjem vremena u vezi (14–1), pa je Y samo funkcija položaja, tj. :

$$\boxed{\begin{array}{c} Y = Y(x_1, x_2, x_3) \quad \text{tj.} \quad \dfrac{\partial Y}{\partial t} = 0 \\ \text{uslov ustaljenosti.} \end{array}} \tag{17–1}$$

Jasno je, ali nije beskorisno naglasiti da prethodno (17–1) mora da važi za *bilo koju veličinu* i *bilo koju tačku.* Ako to u potpunosti nije ispunjeno, strujanje je *neustaljeno.*

Uslov ustaljenosti, čim je ispunjen za sve veličine u svim tačkama, ispunjen je i za veličine za konačne zapremine i površine, napisane sa (14–2) i (14–3) – naime ispunjavanje (17–1) dovodi do:

$$\frac{\partial Y_V}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{\partial Y_A}{\partial t} = 0\,. \tag{17–2}$$

* * *

Opisana nepromenljivost kroz vreme kod ustaljenog tečenja ne znači da jedan delić ne menja vrednosti za brzinu, pritisak i drugo. U svom kretanju on ih menja, jer menja položaj. Međutim, svi delići koji prolaze kroz jednu određenu tačku prihvataju u njoj one vrednosti koje u toj tački ustaljeno vladaju.

Lako je shvatljivo, i bez velikog truda za objašnjavanje, da je ustaljeno strujanje znatno lakše za proučavanje (od neustaljenog), jer rešenje važi za sve vremenske trenutke. Kod ustaljenog strujanja govoriti o početnim uslovima kao o početku rešavanja zadatka je neumesno, jer tačno određenje „početnih" uslova je ujedno i rešenje zadatka. Uslovi na granicama kod ustaljenog strujanja ne menjaju se kroz vreme, što opet olakšava rešavanje zadatka.

Teškoće koje nameće neustaljenost u rešavanju praktičnih zadataka izbegavaju se rešenjem zadataka za ustaljeno strujanje, ako se tako mogu da zadovolje praktične potrebe. Na primer, stanje za jedan kratak period ustaljenosti sa maksimalnim predviđenim proticajem nameće rešenje odgovarajućeg objekta – provodnika, jer manji proticaji i neustaljena stanja pre i posle postizanja maksimalnog proticaja nisu merodavni za projektovanje objekta. Negde je moguće jedan neprekidan proces sa sporim promenama kroz vreme rastaviti na niz perioda sa ustaljenim prosečnim vrednostima za pojedine periode. Ako se neustaljenost ispoljava samo kroz neznatno oscilovanje (pulziranje) vrednosti veličina oko prosečnih konstantnih, lokalnih vrednosti, i ako se proučavanje ograniči na ove prosečne vrednosti, strujanje se proučava kao ustaljeno.

Međutim, u svim zadacima gde bi nastojanja za uprošćavanjem, sa svrhom da bi se strujanje proučavalo kao ustaljeno, dovodila do znatnijih netačnosti u zaključcima koji se izvlače iz proučavanja, strujanje se mora proučavati kao neustaljeno.

* * *

Neki zadaci se mogu uprostiti ako se rešavaju kao ravanski ili linijski. Iako je strujno polje uvek deo prostora, pa su svi zadaci strujanja po svojoj suštini prostorni, ali se u izvesnim slučajevima mogu rešavati u jednoj ravni ili duž jedne linije.

Ravanski zadatak dovoljno je razmatrati samo u jednoj ravni, jer se pretpostavlja da je stanje u svim ravnima paralelnim sa ravni proučavanja potpuno isto. Za ravanski zadatak, za razliku od *prostornog* izostaje u (14–1) jedna od kooordinata, jer je nepotrebna, pa se može, umesto tamošnjeg opšteg izraza, napisati:

$$\text{Za ravanski zadatak} \quad Y = Y(x_1, x_2, t). \tag{17–3}$$

Ako je ravanski zadatak i sa uslovljenom ustaljenošću, stvar je još prostija:

$$Y = Y(x_1, x_2). \tag{17–4}$$

Mogu se proučavati promene veličina samo duž jedne linije. To je *linijski zadatak.* Rastojanja duž te linije obeležiće se prosto, sa x, pa se sada istražuju funkcije:

Za linijski zadatak $\qquad Y = Y(x, t), \qquad$ (17–5)

što za ustaljeno
strujanje daje $\qquad Y = Y(x). \qquad$ (17–6)

Na linijske zadatke u praktičnim razmatranjima svode se i zadaci gde se, strogo uzevši, ne radi o strujanju duž jedne linije. Naime, kod izučavanja provodnika fluida – cevi i kanala – koji se pružaju oko jedne linije (osovine provodnika) određuju se funkcije tipa (17–5), odnosno (17–6), a one se vežu za poprečni presek na položaju x (a te veličine su i neke vrste proseka za ceo poprečni presek).

18
STIŠLJIV I NESTIŠLJIV FLUID

Deljenjem mase M sa zapreminom V koju masa zauzima dobija se *prosečna gustina*:

$$\rho_{\text{prosečno}} = \frac{M}{V}. \tag{18–1}$$

Gustina u tački dobija se deljenjem manje izdvojene mase ΔM sa pripadajućom joj zapreminom ΔV, u čijem se središtu nalazi tačka, uz proces smanjivanja zapremine, sve do prelaska u neizmerno malenu zapreminu $\mathrm{d}V$, tj. :

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}V}. \tag{18–2}$$

Gustina u tački istražuje se kao funkcija položaja i vremena, tj. kao jedna od veza (14–1):

$$\rho = \rho\,(x_1, x_2, x_3, t). \tag{18–3}$$

Može se pretpostaviti i opravdano prihvatiti u rešavanju niza praktičnih zadataka da je:

$$\boxed{\begin{array}{c} \rho = \text{Const.} \\ \text{Fluid \textit{konstantne gustine} ili} \\ \text{\textit{nestišljiv} fluid.} \end{array}} \tag{18–4}$$

To je fluid kod koga se gustina ne menja ni po vremenu, ni od tačke do tačke. Ista masa uvek i svuda zauzima istu zapreminu, koja se ne menja bez obzira na vladajući pritisak, jer je fluid, kako sam naziv kaže, *nestišljiv*.

Pretpostavka o nestišljivosti, strogo uzevši, je neostvarljiva, jer nema materijala koji je potpuno nestišljiv. Stoga je treba shvatiti uslovnom, da se može prihvatiti ako ima beznačajan uticaj na rešenje zadatka. Upravo i treba je tada prihvatiti, jer se zadaci sa nestišljivim fluidom znatno lakše rešavaju. Naglašava se da ne treba deliti fluide kako su jedni uvek i svuda nestišljivi, a drugi stišljivi, nego treba deliti zadatke. U jednom zadatku gustina se može smatrati konstantnom, a u drugom zadatku sa istim fluidom se to ne može, jer su praktične posledice prihvatanja konstantnosti gustine u prvom zadatku zanemarljive, a u drugom nisu. Bez dubljeg razmatranja vazduh bi se ubrojao u stišljive fluide. Međutim, zadaci iz opterećenja vetrom građevinskih konstrukcija, kao i zadaci sa otporima letilica čija brzina ne prelazi otprilike četvrtinu brzine zvuka, rešavaju se uzimanjem konstantne gustine. Iako se voda redovno razmatra sa konstantnom gustinom, ima izuzetnih zadataka sa tečenjem vode, gde se mora voditi računa o njenoj stišljivosti – to su zadaci iz tzv. „vodnog udara” pri naglој promeni proticaja u cevima, koji dovodi do nagle promene pritiska pri čemu na posledice te pojave bitno utiče baš stišljivost vode.

* * *

Korisno je da se razjasni razlika između pojmova „homogen” i „nestišljiv”, upravo da se naglasi kako se ti pojmovi shvataju u mehanici fluida. Homogen, kako je objašnjeno u Poglavlju 13, znači istovetne osobine fluida u svim tačkama prostora, a to treba protumačiti tako da isti uzroci svuda i uvek izazivaju iste posledice. Ako je gustina jednog fluida pri istom pritisku i istoj temperaturi svuda i uvek ista, onda je fluid homogen, jer ima svuda iste osobine, ali to dozvoljava različitu gustinu po prostoru. Dakle, „homogen” nije obavezno i „nestišljiv”, tj. „fluid konstantne gustine”.

deo drugi

OBJAŠNJENJE OSNOVNIH POJMOVA

21
BRZINA. TRAJEKTORIJA. MATERIJALNI IZVOD. UBRZANJE.

Iz položaja x_i proizvoljnim elementarnim priraštajem $\mathrm{d}x_i$ prelazi se na bliski položaj $x_i + \mathrm{d}x_i$. Ako se to pomeranje ne obavlja proizvoljno, nego se uslovljava da ono bude sa delićem, i da bi se baš to naglasilo, odgovarajuće elementarno pomeranje delića će se označiti sa $\mathrm{D}x_i$ – vidi sliku 21–1. To pomeranje obavilo se za odgovarajuće vreme $\mathrm{D}t$ (veliko slovo D opet ukazuje na priraštaj vezan za delić), pa je:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Brzina delića}\\[1em] u_i = \dfrac{\mathrm{D}x_i}{\mathrm{D}t}\,,\end{array}} \tag{21–1}$$

jer je brzina pomeranje u jedinici vremena.

Trajektorija ili *putanja delića* je *geometrijsko mesto tačaka kroz koje delić prolazi u svome kretanju kroz prostor.* Slikovito se može reći da ,,delić opisuje svoju trajektoriju".

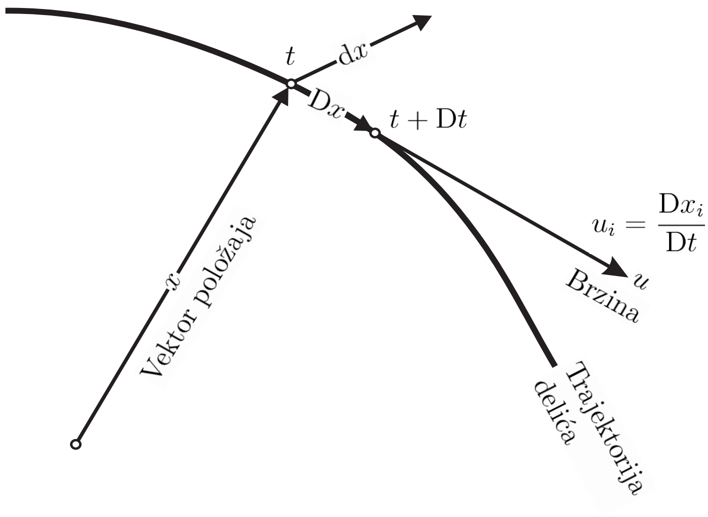
* * *

Izvod po vremenu funkcije $Y = Y(x_1, x_2, x_3, t)$, koja predstavlja neku od veličina koje se razmatraju, izražen je sa:

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial Y}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial Y}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}. \tag{21–2}$$

Ovde je iskorišćen dogovor o udvostručenom indeksu, objašnjen ranije – izraz (15–1).

Ako se uslovi da se priraštaj veličine veže za *fluidni delić*, priraštaji $\mathrm{d}x_i$ i $\mathrm{d}t$ ne mogu da budu međusobno nezavisni, jer se radi o elementu



Slika 21–1 Trajektorija delića.

trajektorije za odgovarajući priraštaj vremena, pa je njihov odnos određen brzinom u_i. Da se i ovde posebno naglasi da se izvod po vremenu odnosi na delić upotrebiće se velika slova D, a izvodu će se i dati naziv koji ukazuje da je vezan za *delić*, odnosno za *materiju*. To je:

Materijalni izvod

$$\frac{\mathrm{D}Y}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial Y}{\partial t} + u_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} \tag{21–3}$$

$$\underbrace{\text{lokalna} + \text{konvektivna}}_{\text{komponenta.}}$$

Ovaj izvod se naziva i „izvod po trajektoriji”, jer ukazuje na promenu duž trajektorije.

Materijalni izvod označava brzinu priraštaja (ili priraštaj u jedinici vremena) veličine Y koju poseduje delić. Na primer, ako Y označava gustinu (ili pritisak, ili brzinu, ili ...), $\mathrm{D}Y/\mathrm{D}t$ označava priraštaj, u jedinici vremena, gustine (ili pritiska, ili brzine, ili ...) *delića*.

Prvi napisani deo ($\partial Y/\partial t$) materijalnog izvoda je njegova *lokalna* komponenta, a drugi ($u_i\, \partial Y/\partial x_i$) je *konvektivna* komponenta. Nazivi dolaze od toga što se promena u deliću svodi na lokalnu promenu (promenu u mestu) ako nema strujanja, ako je brzina delića nula. Ako je pak strujanje ustaljeno, lokalna komponenta je nula, a promena nastaje samo usled promene položaja delića, usled strujanja („konvekcije") – odatle i naziv „konvektivna komponenta".

* * *

Kao prvi primer za materijalni izvod može se uzeti brzina – *brzina delića je materijalni izvod položaja delića.* Drugi primer je sledeći:

Ubrzanje delića je materijalni izvod brzine, jer predstavlja „brzinu kojom se menja brzina delića". Drugim rečima, ubrzanje je *priraštaj brzine u jedinici vremena.* Smenom $Y = u_j$ u (21–3) može se napisati:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,. \\ \text{Ubrzanje delića} = \underbrace{\text{lokalno} + \text{konvektivno}}_{\text{ubrzanje}}\end{gathered}} \tag{21–4}$$

Za pravac 2 ($j = 2$) iz prethodno napisanog dobija se komponenta ubrzanja:

$$\frac{\mathrm{D}u_2}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \tag{21–5}$$

Ubrzanje je vektor i konvektivnom ubrzanju pravac daje „j", dok je „i" „nemi indeks", po njemu se ponavlja, kao što se vidi pri prelasku iz (21–4) u (21–5). Posve je razumljivo da se umesto (21–4) isto može napisati i sa:

$$\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{21–6}$$

ali sada pravac „i" usmerava.

Masa delića $\rho\,\mathrm{d}V$ (gustina $\cdot$ zapremina) se pretpostavlja konstantnom pa se može napisati sledeća jednačina:

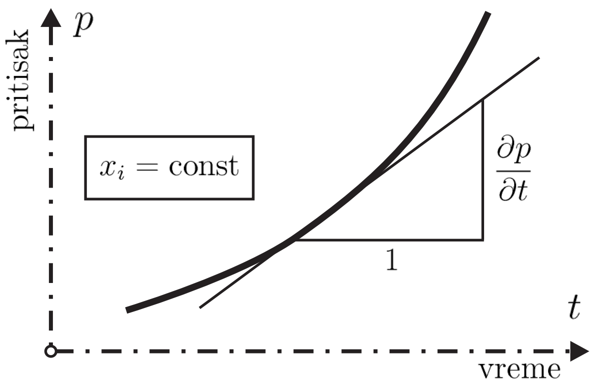
$$\underbrace{\rho\,\mathrm{d}V\,\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t}}_{\text{masa}\cdot\text{ubrzanje}} = \underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\overbrace{(\rho\,\mathrm{d}V\,u_j)}^{(\text{masa}\cdot\text{brzina})}}_{\substack{\text{materijalni izvod}\\ \text{količine kretanja}\\ \text{delića}}} \tag{21–7}$$

jer se konstanta ($\rho\,\mathrm{d}V = \mathrm{const}$) može uvući u diferenciranje. Pod pojmom „*količina kretanja*" podrazumeva se *proizvod iz mase i brzine.*

* * *

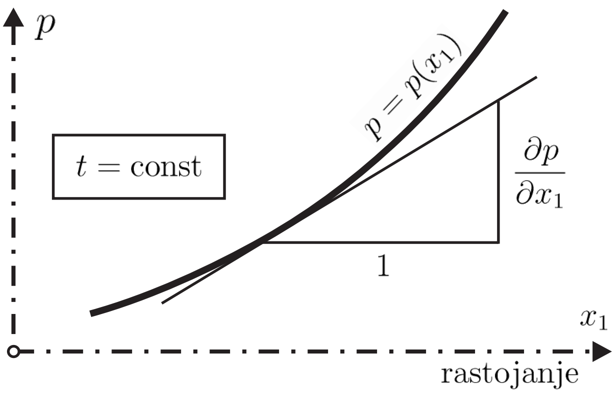
Istraživanju neke funkcije $Y = Y(x_1, x_2, x_3, t)$ prilazi se po nekom redu, sistematično. Mogu se određivati, računati ili izmeriti, vrednosti veličine u jednoj tački, a tokom vremena, što bi se moglo prikazati grafički – slika 21–2. Uzet je za primer i ovde, i na naredne dve slike, pritisak, ali se, posve razumljivo mogla uzeti bilo koja veličina $Y = Y(x_1, x_2, x_3, t)$. Ako se isto uradi u nizu tačaka i za sve veličine koje se istražuju može se dobiti utisak o stanju u celom strujnom polju, a tokom vremena.

Može se postupiti i na drugi način – određuje se, ili se meri, istovremeno stanje (u jednom trenutku), a po celom polju, pa se prave



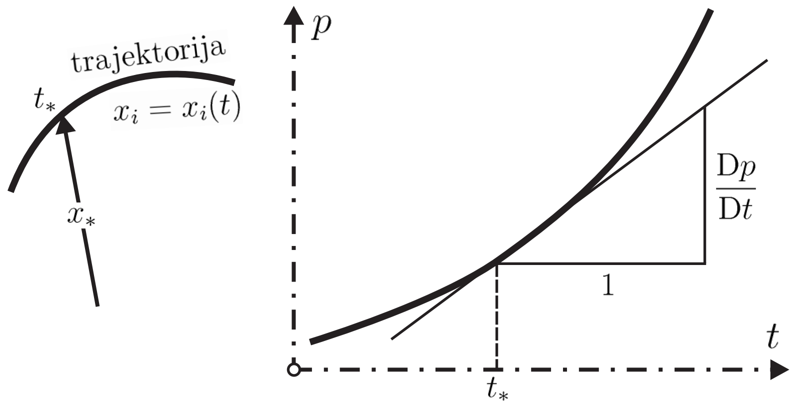
Slika 21–2 Pritisak kroz vreme u jednoj tački.

prikazi za pojedine vremenske trenutke. Iz većeg broja takvih prikaza za razne vremenske trenutke može se opet steći utisak o zbivanjima kroz vreme po strujnom polju. Slika 21–3 daje prikaz istovremenog pritiska (u jednom trenutku) duž jedne prave, paralelne sa osovinom 1.



Slika 21–3 Istovremeni pritisak duž prave, paralelne sa osovinom x_1.

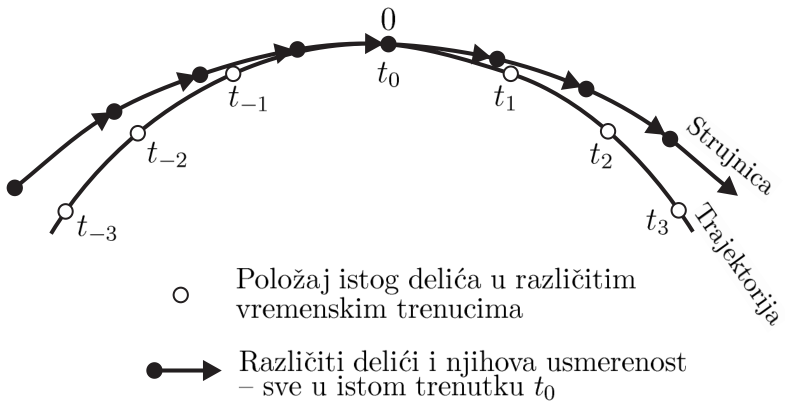
Treći način je praćenje delića. Iz promena veličina za niz delića, može se opet steći opšta slika o strujanju kroz prostor i vreme. Na slici 21–4 nagib tangente prikazane linije je materijalni izvod, dok je na slici 21–2 parcijalni izvod po vremenu, a na slici 21–3 parcijalni izvod po x_1.



Slika 21–4 Pritisak na delić kroz vreme.

22
STRUJNICA I EMISIONA LINIJA I UPOREĐENJE OVIH LINIJA SA TRAJEKTORIJOM

Trajektorija je već razjašnjena, ona je vezana za *fluidni delić*, jer je to njegova putanja i da bi se preko niza trajektorija došlo do nekakvog uvida u strujanje treba da se posmatra kroz izvestan vremenski period. Da bi se dobila slika o strujanju u jednom određenom vremenskom trenutku uvode se druge vrste linija – strujnice. *Strujnica* se definiše na ovaj način: To je linija koja se odnosi *na određeni vremenski trenutak, a u svakoj tački ima tangentu u pravcu brzine* u toj tački – bitna karakteristika strujnica je *istovremenost.* Obe linije (trajektorija i strujnica) imaju tangente u pravcu brzine, ali se kod trajektorije tangente odnose na brzine istoga delića u različitim vremenskim trenucima, dok se kod strujnice odnose na istovremene brzine različitih delića. Slika 22–1 je data radi razjašnjenja prethodnog. Kroz tačku 0 prolaze obe linije i imaju zajedničku tangentu, koja leži u pravcu brzine delića, čija



Slika 22–1 Strujnica (kroz tačku „0" u trenutku t_0) i trajektorija (delića koji je u trenutku t_0 bio u tački „0").

se trajektorija prikazuje, i koji je tu u trenutku t_0, na koji se odnosi strujnica. Nacrtane linije se razilaze, jer delić kroz vreme sledi svoj put, koji nije vezan za strujnu sliku jednog vremenskog trenutka, dok opet istovremenu usmerenost ne može nametati jedan delić. Kada delić iz 0 stigne u njoj blisku tačku, tada je već trenutak $t_0 + \mathrm{d}t$, pa ne važi više strujnica iz trenutka t_0, jer je pravac brzine drugačiji, pa se trajektorija i strujnica raziđu, kako i prikazuje slika 22–1. Kroz tačku 0 u drugom vremenskom trenutku prolaziće drugačija trajektorija (drugoga delića) i drugačija strujnica (za drugi trenutak) i one će se razlikovati od nacrtanih.

Jednačina strujnice se može napisati u opštem obliku sa:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{u_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{u_2} = \frac{\mathrm{d}x_3}{u_3} \tag{22–1}$$

i to važi za $t = \mathrm{const}$, (za trenutak na koji se odnosi strujnica), a njen prolazak kroz zahtevanu tačku se podešava odgovarajućim graničnim uslovom.

Jednačina (22–1) proizilazi iz uslova da su u istom pravcu elemenat strujnice $\mathrm{d}x_j$ i brzina u_i, što znači da je njihov vektorski proizvod jednak nuli:

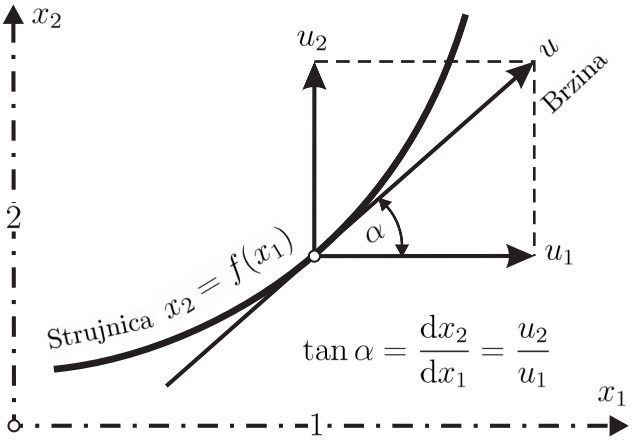
$$\varepsilon_{ijk}\, u_i\, \mathrm{d}x_j = 0\,.$$

Tri komponente ovog vektora mogu se napisati po ugledu na to kako su u (15–6) ispisane komponente od (15–7).

Na slici 22–2 prikazana je, primera radi, strujnica za ravansko strujanje – u ravni (1, 2), tj. uz uslov $\mathrm{d}x_3 = 0$, i uviđa se da se može izraziti jednačinom (22–1).

Diferencijalna jednačina trajektorije je izraz za brzinu delića (21–1), iz nje se poznavanjem brzine delića može doći do položaja delića x_i u zavisnosti od vremena t.

Element strujnice može se učiniti vidljivim ako se u strujno polje unese tanak štapić (što tanji to bolje, jer će tako zanemarljivo remetiti strujanje) i na njemu zastavica, ili kratak končić, ili neki drugi lako pokretljivi pokazatelj, njega će strujanje postavljati prema momentalnom pravcu brzine u tački postavljanja. Niz takvih pokazatelja snimljenih istovremeno pružaju mogućnost da se odrede strujnice. Ubacivanjem nekog svetlog praha, koji je pogodan za fotografisanje, mogu

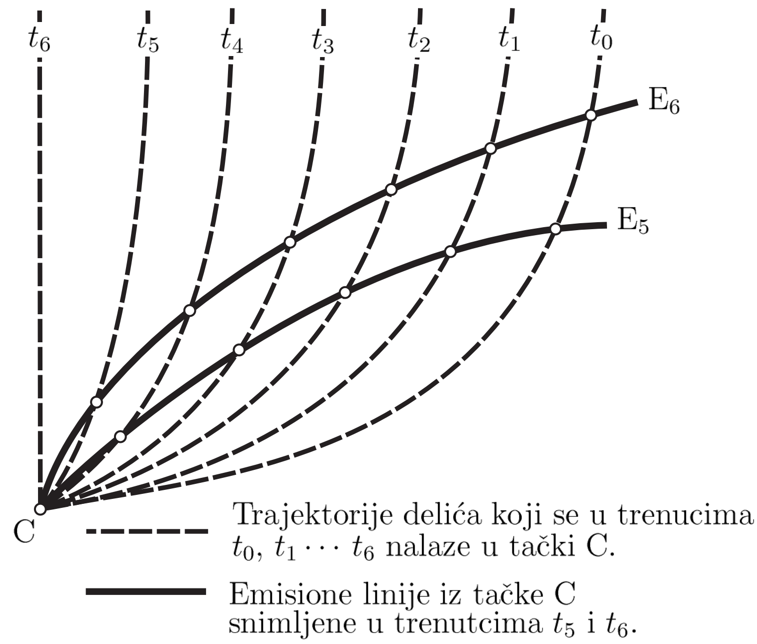


Slika 22–2 Objašnjenje diferencijalne jednačine strujnice za ravansko strujanje $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1 = u_2/u_1$.

se kratkim trajanjem snimanja (kratkom eksponažom) dobiti elementi istovremenih strujnica za trenutak snimanja. Kratko snimanje je potrebno da bi svaki delić ubačenog praha ostavio kratak trag kao nagoveštaj kuda je u trenutku snimanja bio upravljen. Ako se pak žele snimiti trajektorije, snimanje treba da traje dugo, da bi se za svaki obeleženi svetleći delić snimio njegov trag, a to je trajektorija.

* * *

Svi delići koji su prošli kroz istu tačku leže na liniji koja se zove „*emisiona*" ili „*emanaciona linija*". Nazivima se ukazuje da je ta linija emitovana (odašiljana, ispuštana) ili da izlazi (emanacija se može prevesti kao „izlaženje"), a zaista, linija izlazi (biva odašiljana) iz tačke na koju se odnosi. Emisiona linija se prikazuje za neki određeni trenutak i tada delići koji su svojevremeno prošli kroz određenu tačku leže na toj emisionoj liniji. Za neki naredni trenutak emisiona linija za istu tačku drugačije će izgledati. Slika 22–3 poslužiće da se razjasni emisiona linija i uoči da to nije trajektorija. Može se dobiti cela familija emisionih linija polazećih iz iste tačke – svaka za pojedini trenutak snimanja. Bitna je za emisionu liniju *njena povezanost sa jednom određenom tačkom*, kao što je za trajektoriju bitna povezanost sa delićem.



Slika 22–3 Emisione linije i trajektorije.

Opšti izraz za trajektoriju je:

$$x_i = x_i \left[t, (x_i^0, t_0)\right]. \tag{22–2}$$

jer je položaj x_i delića funkcija vremena t, ali se prethodno mora utvrditi delić, a to je delić koji je u trenutku t_0 bio na položaju x_i^0. Prema tome veličine x_i^0, t_0 imaju parametarski karakter, jer su za jednu trajektoriju konstante, i stoga su i simbolično izdvojene u izrazu (22–2).

Za emisionu liniju parametarski karakter imaju položaj x_i^{C} tačke „C”, na koju se linija odnosi, kao i vreme t_s snimanja linije. Za jednu liniju promenljiva x_i jednaka je položaju delića, koja zavisi od vremena t_{C} kada je taj delić prošao kroz „C”. Opšti izraz za emisionu liniju simbolično se može napisati sa:

$$x_i = x_i \left[t_{\mathrm{C}}, (x_i^{\mathrm{C}}, t_s)\right]. \tag{22–3}$$

* * *

Kod ustaljenog strujanja delić se pomeri u susednu tačku i tamo se njegova trajektorija usmerava kao i svih delića prošlih tuda pre njega, i tako se pomera od tačke do tačke sledeći put prethodnih delića, pa je trajektorija svih delića koji su prošli kroz jednu tačku ista, a to je onda i emisiona linija. Na slici 22–1, je pokazana zajednička tangenta strujnice i trajektorije kroz istu tačku i objašnjen je i razlog razilaženja, koji kod ustaljenog strujanja otpada, jer delić kada dođe u susednu tačku upravlja se kao delić koji je pre njega tu bio.

Prethodno dovodi do zaključka da su kod ustaljenog strujanja trajektorije, strujnice i emisione linije – *iste linije*. Kroz jednu tačku prolazi jedna tokom vremena nepromenljiva linija koja je ujedno i strujnica i trajektorija, i emisiona linija.

Strujnica, trajektorija i emisiona linija može da bude ista linija iako je strujanje neustaljeno ali uz uslov da se neustaljenost iskazuje samo kroz promenu vrednosti brzina, ali da pravci ostaju isti. Tada se u jednoj tački pravac brzine kroz vreme ne menja, a ovaj uslov važi za sve tačke. Ustaljena je, dakle, strujna slika, ali se kroz vreme vrednost brzine u pojedinoj tački povećava ili smanjuje.

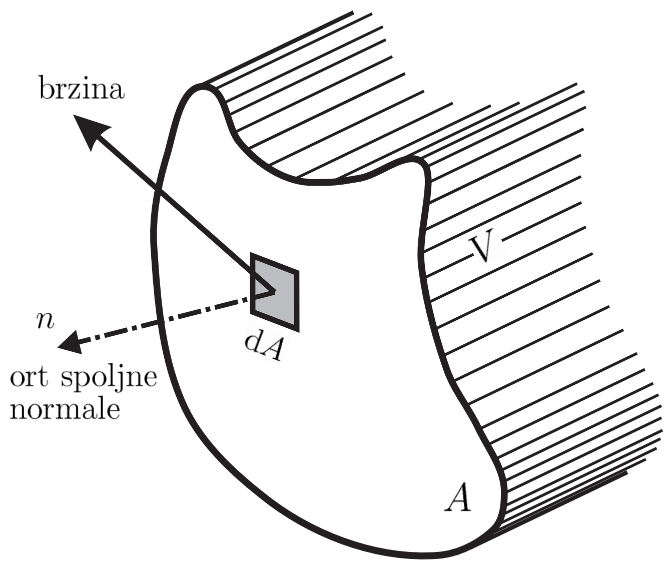
23
PROTICAJ

Iz zapremine V kroz elementarnu površinu $\mathrm{d}A$ – slika 23–1 – protiče:

$$\text{elementarni proticaj} \qquad \mathrm{d}Q = n_i\, u_i\, \mathrm{d}A\,, \tag{23–1}$$

gde je $n_i\, u_i = n_1\, u_1 + n_2\, u_2 + n_3\, u_3 =$ skalarni proizvod orta spoljne normale i brzine. Pisanje skalarnog proizvoda razmatrano je ranije – izraz (15–5).

Proticaj je protekla zapremina fluida u jedinici vremena, ili *proizvod iz površine proticanja i brzine fluida* (tačnije rečeno: komponente brzine u pravcu normalnom na površinu). Skalarni proizvod $n_i\, u_i$ ima pozitivnu vrednost ($n_i\, u_i > 0$) ako fluid ističe iz naznačene zapremine V (tada je ugao između brzine i orta spoljne normale manji od 90°), dok ima negativnu vrednost kada fluid utiče u naznačenu zapreminu.



Slika 23–1 Elementarni proticaj $\mathrm{d}Q$ kroz deo površine $\mathrm{d}A$ iznosi $n_i\, u_i\, \mathrm{d}A$.

Proticaj kroz površinu dobiće se integrisanjem (23–1) po površini:

$$\boxed{\text{proticaj} \qquad Q = \int_A n_i \, u_i \, \mathrm{d}A.} \tag{23–2}$$

Pored naziva „*proticaj*" upotrebljava se i naziv „*protok*".

Pojam *proticaj*, bez ikakvih dodatnih objašnjenja, odnosiće se na proticaj zapremine fluida, na *zapreminu fluida proteklu u jedinici vremena*. Proticaj, uz dodatno naznačivanje, može se proširiti na proticaj mase, energije, količine kretanja i dr, upravo na sve što protiče sa zapreminom. Tako je:

$$\text{proticaj mase} \qquad Q_\rho = \int_A \rho \, n_i \, u_i \, \mathrm{d}A, \tag{23–3}$$

jer se množenjem elementarnog proticaja (23–1) sa gustinom ρ dobija elementarni proticaj mase $= \rho \, n_i \, u_i \, \mathrm{d}A = \mathrm{d}Q_\rho$, a njegovo integrisanje daje (23–3).

Uopštavanjem, ako se sa φ označi iznos neke veličine po jedinici zapremine, proticaj te veličine će biti:

$$Q_\varphi = \int_A \varphi \, n_i \, u_i \, \mathrm{d}A. \tag{23–4}$$

Za φ se može reći da je funkcija položaja i vremena:

$$\varphi = \varphi \, (x_1, x_2, x_3, t) \, .$$

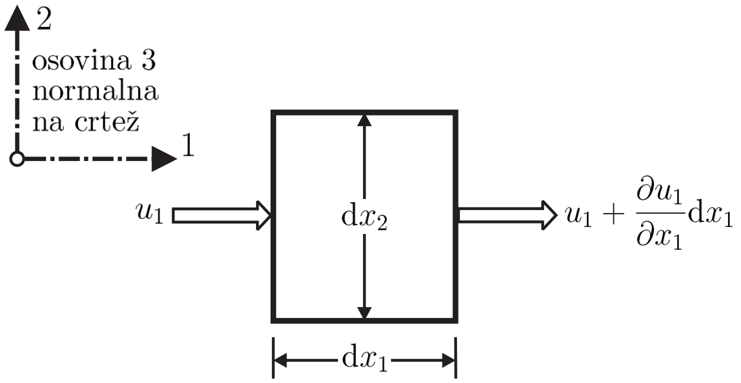
U izlaganja je uvedena, izrazom (14–1), oznaka Y za bilo kakvu veličinu kao funkciju položaja i vremena, a za ovde uvedeni φ se smatra da predstavlja iznos neke veličine po jedinici zapremine.

Na primer, ako je $\varphi = \rho =$ gustina, (23–4) predstavlja proticaj mase, što je već napisano kod (23–3). Kad je φ energija po jedinici zapremine, Q_φ će biti proticaj energije.

φ može da bude vektorska ili tenzorska veličina, a ne samo skalarna, jer φ treba, isto kao Y, shvatiti kao uopšteno označavanje.

Ako je $\varphi = \rho \, u_i =$ gustina $\cdot$ brzina, izraz (23–4) će predstavljati proticaj količine kretanja.

Nadalje se razmatra određena konačna zapremina V ograničena zatvorenom površinom A. Proticaj kroz graničnu površinu se izražava na isti način kao kroz svaku površinu – sa (23–2).



Slika 23–2 Prosečna ulazna i izlazna brzina kroz površinice $\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$ paralelopipeda (normalne na osovinu „1”).

Do proticaja kroz graničnu površinu A može se doći i posmatranjem elementarnih zapremina koje čine zapreminu V. Jednu od tih elementarnih zapremina predstavlja paralelopiped zapremine $\mathrm{d}V$, a proticaj kroz njegove granične povišinice, položene normalno na osovinu 1, može se napisati na osnovu ispisanog na slici 23–2. Tamo su ispisane prosečne brzine za navedene površinice, a one su merodavne za određivanje proticaja, a on je (izlaz – ulaz) zapremine fluida u jedinici vremena:

$$\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 - u_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 =$$
$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}V,$$

jer je $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$ elementarna zapremina.

Proticaj kroz celokupnu površinu, koja ograničava paralelopiped zapremine $\mathrm{d}V$, se dobija ako se prethodnom dodaju i proticaji za ostala dva para graničnih površinica (normalnih na pravce „1” i „2”). Lako se zaključuje da se dobija:

$$\mathrm{d}Q = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}V = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V. \qquad (23\text{–}5)$$

Ovo je „izdašnost elementarne zapremine”, jer toliko iz nje u jedinici vremena izađe više zapremine fluida nego što uđe.

$\partial u_i/\partial x_i$ = *divergencija vektora* u_i, a „divergencija" znači razilaženje – ovde razilaženje izlaza i ulaza.

Za nestišljiv fluid može se napisati:

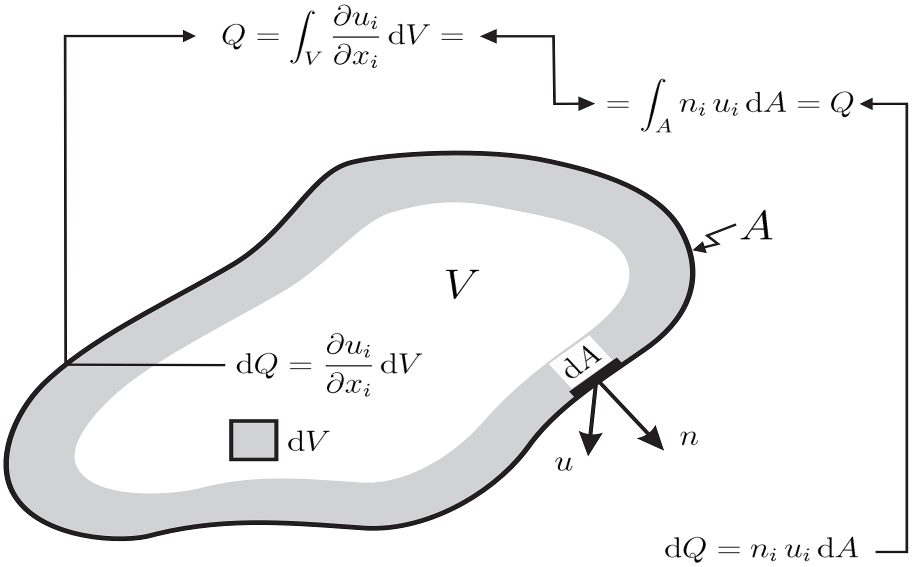
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{23–6}$$

jer usled neprekidnosti fluida može više (ili manje) izaći, nego što uđe, samo ako se fluid unutar zapremine razređuje (odnosno sabija).

Ako se saberu proticaji za sve elementarne zapremine, integrisanjem iz (23–5) dobiće se:

$$Q = \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V, \tag{23–7}$$

koji se odnosi na celokupnu zapreminu V – vidi sliku 23–3.



Slika 23–3 Zapreminu V omeđava površina A kroz koju protiče proticaj Q (izražen površinskim i zapreminskim integralom).

Proticaj koji iz jednog paralelopipeda izađe i uđe u susedne (ili iz susednih uđe u posmatrani) ulazi u gornji integral jedanput za posmatrani paralelopiped, a drugi put za susedne, i to jedanput kao pozitivan, a drugi put kao negativan. Na taj način integral ustvari čini samo proticaj kroz graničnu površinu A zapremine V (slika 23–3), a on je jednak, kako je izraženo (23–2):

$$Q = \int_A n_i\, u_i\, \mathrm{d}A.$$

Ovaj integral mora da bude jednak sa (23–7) pa se može napisati:

$$\boxed{Q = \int_A n_i\, u_i\, \mathrm{d}A = \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\, \mathrm{d}V.} \tag{23–8}$$

Shodno napisanom pod (23–6), integral (23–8) za nestišljiv fluid je jednak nuli, što znači da *proticaj nestišljivog fluida kroz zatvorenu površinu je jednak nuli*, tj. *ulaz je jednak izlazu*.

Na isti način se može izvesti za proticanje veličine, koja po jedinici zapremine iznosi φ, a to je napisano površinskim integralom (23–4).

$$Q = \int_A \varphi\, n_i\, u_i\, \mathrm{d}A = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\, u_i)\, \mathrm{d}V. \tag{23–9}$$

Iz (23–2) moglo se neposredno napisati (23–8) korišćenjem opšte veze između površinskog i zapreminskog integrala, date sa (15–15) jednostavnim stavljanjem $Y = u_i$, što znači da je moglo otpasti celokupno izvođenje koje je dovelo do (23–7). Međutim, sprovedenim postupkom dokazan je na drugi način, stav o pretvaranju površinskog integrala u zapreminski (ako je Y vektorska veličina), jer se umesto brzine mogao posmatrati bilo koji vektor, i sa njim razmatrati odgovarajući fizički proces. Takođe se korišćenjem opšteg izraza (15–15), a sa $Y = \varphi\, u_i$ moglo iz (23–4) odmah napisati (23–9).

24
BRZINA DEFORMACIJA

Reč „*deformacija*” doslovno se može protumačiti kao promena oblika – „forme”. U izučavanju neprekidnih sredina *pod pojmom deformacije podrazumeva se promena zapremine i promena oblika.* Tako taj pojam treba prihvatiti i u narednim izlaganjima.

U teoriji elastičnosti razmatraju se deformacije elastičnog tela upoređivanjem prvobitnog i defomisanog stanja, a pri tome se ne ulazi u vremenski tok deformisanja. U mehanici fluida razmatraju se *brzine deformacija*, što znači brzine kojima se obavlja izdužavanje, odnosno brzine promene uglova.

Deformacije se obavljaju pod dejstvom napona i postoji međusobna veza između napona i deformacija, odnosno njihovih brzina. Pretpostavlja se srazmernost napona i deformacija kod elastičnih tela, a srazmernost između napona i brzina deformacija kod fluida – odatle i navedena proučavanja deformacija, odnosno njihovih brzina. Treba dodati da se za različite materijale uspostavljaju različite veze (ne samo srazmernost) između napona i deformacija, kao i napona i brzine deformacija, već i složene zavisnosti napona i od deformacija i od brzina deformacija.

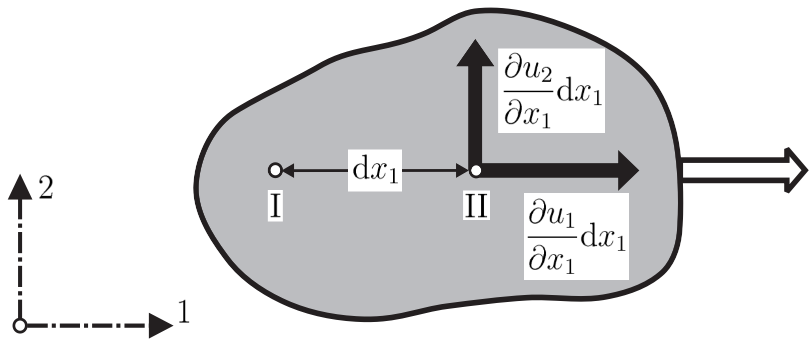
* * *

Na slici 24–1 prikazan je delić koji se kreće i razmatra se relativna brzina tačke II u odnosu na tačku I, u pravcu ose „1” (obe tačke pripadaju deliću) – ona se može prikazati sa tri komponente:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1, \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1. \tag{24–1}$$

Da bi crtež bio prostiji, dat je presek delića u ravni („1”, „2”) pa je sa crteža izostala treća od upisanih komponenti, a to neće smetati razmatranju.

Brzina tačke I je data sa u_1, u_2, u_3. Navedene relativne brzine pokazuju koliko je brzina u II veća od one u I, pa se stoga mogu shvatiti



Slika 24–1 Fluidni delić i upisane relativne brzine tačke II, u odnosu na tačku I, poslužiće za opisivanje deformisanja fluida.

kao brzine kojima se menja međusobni položaj tačaka i tako ukazuju na deformisanje.

Prva brzina u (24–1) označava brzinu izdužavanja delića u pravcu „1". Izdužavanja nema kada je ona jednaka nuli, tada je brzina u_1 u tačkama I i II ista. Treba uočiti da brzina izdužavanja $(\partial u_1/\partial x_1)\mathrm{d}x_1$ zavisi od $\mathrm{d}x_1$, upravo je srazmerna sa $\mathrm{d}x_1$, a to rastojanje se uzima proizvoljno, dok deformisanje treba izraziti nezavisno od izbora toga rastojanja. To će se dobiti deljenjem brzine izdužavanja sa rastojanjem na kojem se javlja. Tako se dobija:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \begin{array}{c}\text{brzina izduživanja po jedinici dužine,}\\ \text{ili brzina dilatacije u pravcu 1.}\end{array} \tag{24–2}$$

Iako „*dilatacija*" znači izduživanje, u teoriji elastičnosti se pod tim pojmom podrazumeva *relativno izduženje*, upravo izduženje po jedinici dužine. U tom smislu treba prihvatiti i navedenu „*brzinu dilatacije*".

Druga relativna brzina u (24–1) ne ukazuje na izdužavanje rastojanja između posmatranih tačaka, nego na obrtanje II oko I. Ona je brzina po obimu, pa se ugaona brzina dobija deljenjem nje sa odgovarajućim poluprečnikom, koji iznosi $\mathrm{d}x_1$. Tako se dobija:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \begin{array}{c}\text{ugaona brzina kojom se}\\ \text{duž I–II obrće u ravni („1", „2").}\end{array} \tag{24–3}$$

Na isti način iz treće relativne brzine u (24–1) dobila bi se odgovarajuća ugaona brzina $\partial u_3/\partial x_1$.

Tačka II je postavljena tako da se u početku deformisanja nalazi sa tačkom I na pravcu paralelnom sa osovinom „1”. Može se postaviti na bilo kom pravcu, pa se može dobiti beskrajno mnogo podataka o brzinama dilatacije i o ugaonim brzinama. Umesno je stoga pitanje da li se deformacija može opisati sa konačnim brojem podataka. Malo kasnije će se objasniti da su dovoljna tri položaja tačke II – koji sa tačkom I leže na pravcima koordinatnih osovina, a na rastojanjima $\mathrm{d}x_1$ (već razmotreno), $\mathrm{d}x_2$ i $\mathrm{d}x_3$. Na isti način, kao sto su se malo pre dobila tri parcijalna izvoda (od tri brzine, ali svi po x_1), za druga dva položaja tačke II dobili bi se izvodi po x_2, odnosno x_3. Sve skupljeno moglo bi se uopšteno napisati da brzine deformacija predstavljaju:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} i = j & \text{brzine dilatacije,} \\ i \neq j & \text{ugaone brzine.} \end{matrix} \tag{24–4}$$

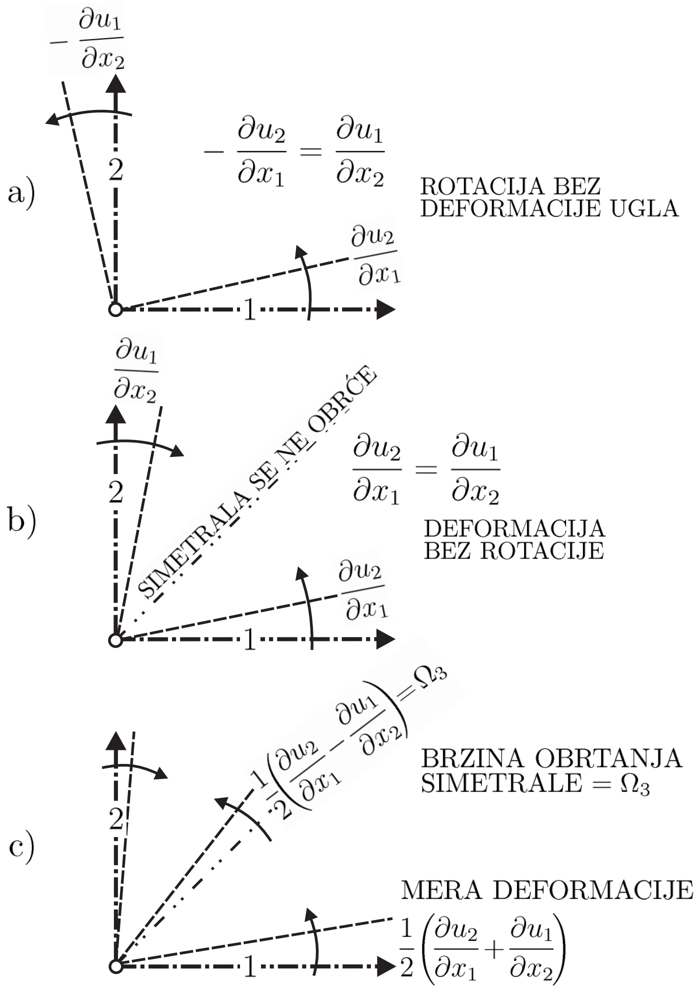
Napisano znači 9 podataka o brzinama deformacija, što znači da se radi o tenzorskoj veličini. Brzina je određena sa tri podatka (komponenta brzine u nekom četvrtom pravcu je određena sa komponentama u tri koordinatna pravca), a ista stvar je i sa položajem, pa je i parcijalni izvod u proizvoljnom pravcu od komponente brzine u bilo kom pravcu određen ako se znaju parcijalni izvodi tri komponente brzine po tri koordinatna pravca, upravo ako se znaju svi izvodi dati pod (24–4). Brzine deformacija su uvek parcijalni izvodi brzina po koordinatama pa se zaključuje da (24–4) potpuno određuju deformaciju.

* * *

Na slici 24–2 posmatra se promena ugla između osovina („1”, „2”) i može se zapaziti da se taj ugao neće menjati – slučaj „a)” na slici, ako je:

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \tag{24–5}$$

jer se tada delić u ravni („1”, „2”) obrće bez promene ugla (kao kruto telo) i navodi na zaključak da ugaone brzine – date sa (24–4), pri $i \neq j$ – ako se posmatraju pojedinačno, mogu da ukazuju na deformaciju, koje u stvari nema, jer treba posmatrati istovremeno parove tih izvoda, kao što je učinjeno na slici 24–2.



Slika 24–2 Rotacija i deformacija ugla.

Na istoj slici razmatra se i slučaj „b)" kada se delić deformiše simetrično u odnosu na prvobitnu simetralu – upravo ona se ne obrće. Tada je:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \tag{24–6}$$

Prvi slučaj a) može se nazvati „čista rotacija", a drugi b), „čista deformacija", dok se u opštem slučaju (koga prikazuje c) na istoj slici) delić i obrće i deformiše i tada se kao mera rotacije može uzeti obrtna brzina simetrale:

$$\Omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right). \tag{24–7}$$

Ovo je komponenta polovine rotora brzine, jer se uopšteno može napisati:

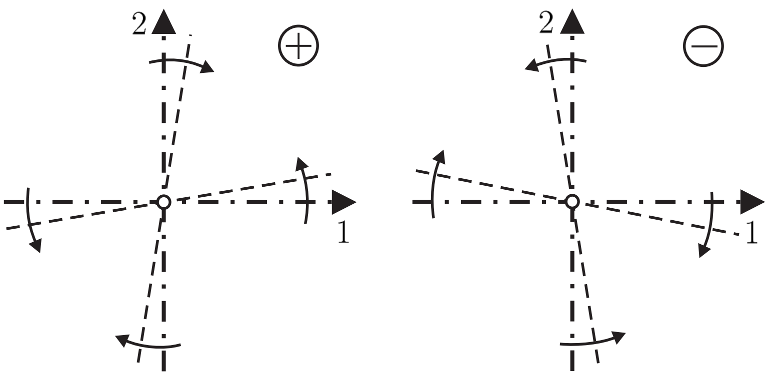
$$\Omega_k = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{24–8}$$

Vektor Ω_k je polovina rotora vektora u_j, kako je to već pokazano – jednačine (15–11) i (15–10), uz napomenu da je prihvaćena uobičajena konvencija da su pozitivna obrtanja suprotna od obrtanja kazaljke na satu.

Za meru deformacije uzeće se prosek iz brzina kojima se sklapaju koordinatne osovine, pa se dobija:

$$\text{Brzina klizanja u ravni („1", „2") je} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right). \tag{24–9}$$

Izvodi brzina u (24–9) su pozitivni kada smanjuju ugao – što se vidi na slici 24–2 – pa ovo ukazuje da je klizanje pozitivno ako smanjuje ugao, ali to opet važi samo za prvi i treći kvadrant koordinatne ravni, jer će se ugao istovremeno povećavati u drugom i četvrtom kvadrantu – slika 24–3. Na ovoj slici su pregledno prikazana „pozitivna" i „negativna" klizanja.



Slika 24–3 Pozitivna (+) i negativna (–) klizanja.

Izraz (24–9) se može uopštiti, pa se može napisati:

$$\text{Brzina klizanja} \qquad \omega_{ij} = \omega_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad i \neq j. \tag{24–10}$$

Postoje tri podatka za brzine klizanja, u svakoj od tri ravni po jedan, što se ispoljava u jednakosti komponenata tenzora $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ (tenzor je simetričan). Tako se, odstranjivanjem rotacije, deformacije uglova određuju sa 3, umesto ranijih 6 podataka.

Prethodno razdvajanje na rotaciju i deformaciju može se dobiti ako se dve ugaone brzine $\partial u_1/\partial x_2$ i $\partial u_2/\partial x_1$ napišu na sledeći način:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right), \tag{24–11}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right). \tag{24–12}$$

Ovime su dve veličine (leve strane prethodnih jednačina) zamenjene dvema drugačijim (izrazi u zagradama na desnoj strani). Jedna od tih zamena, upravo druga, je baš brzina rotacije i ona izdvaja ono što ne ulazi u deformaciju, pa se izostavlja i ostaje samo prva, a time broj razmatranih veličina prepolovljava.

* * *

I brzina dilatacije ($\partial u_1/\partial x_1$, $\partial u_2/\partial x_2$ i $\partial u_3/\partial x_3$) se može uklopiti u napisani izraz za klizanje (samo ako se stavi $i = j$), pa se može napisati opšti izraz:

brzina deformacija

$$\boxed{\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} i = j & \text{brzina dilatacije,} \\ i \neq j & \text{brzina klizanja.} \end{matrix}} \tag{24–13}$$

Deformacija se razdvaja na *promenu zapremine* (*sferni deo*) i *promenu oblika* (*devijatorski deo*). Prvi deo naziva se „sferni", jer se radi o ravnomernim izduživanjima ili skraćivanjima u svim pravcima, što znači da lopta (sfera) deformisanjem ostaje lopta ako je deformacija isključivo „sferna”. Drugi deo znači preobličavanje menjanjem odnosa dužina (neravnomerno izduživanje ili skraćenje, u različitim pravcima) i menjanjem uglova – reč „devijacija” znači skretanje.

* * *

Zbirom brzina dilatacije u tri koordinatna pravca dobija se:

Brzina zapreminske dilatacije
(sferni deo brzina deformacije)

$$\omega_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \tag{24–14}$$

Ako su strane jednog paralelopipeda l_1, l_2 i l_3, koje posle deformisanja postaju $l_1 + \delta\, l_1$, $l_2 + \delta\, l_2$ i $l_3 + \delta\, l_3$, odnos povećanja zapremine prema prvobitnoj zapremini, tj. zapreminska dilatacija, iznosi:

$$\frac{(l_1 + \delta\, l_1)(l_2 + \delta\, l_2)(l_3 + \delta\, l_3) - l_1\, l_2\, l_3}{l_1\, l_2\, l_3} = \frac{\delta l_1}{l_1} + \frac{\delta l_2}{l_2} + \frac{\delta l_3}{l_3},$$

što se dobilo zanemarenjem neizmerno malih veličina višeg reda (proizvoda elementarnih produženja). Napisano ukazuje da zbir dilatacija u tri pravca čini zapreminsku dilataciju. Isto, razume se, važi i za brzine zapreminskih dilatacija – to je opravdanje za napisano sa (24–14).

Brzina zapreminske dilatacije je količnik između brzine kojom se menja zapremina delića i same zapremine, a brzina promene zapremine delića se izražava materijalnim izvodom, pa se može napisati:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}V}. \tag{24–15}$$

Kod nestišljivog fluida se ne menja zapremina delića, pa je:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

što je već zaključeno i ranije – izraz (23–6), na osnovu tamošnjih razmatranja o proticanju.

*   *   *

Brzine dilatacije, pored promene zapremine, utiču i na promenu oblika, pa treba obaviti njihovu podelu na sferni i devijatorski deo. Na sferni deo dilatacije u jednom pravcu pripada po jedna trećina zapreminske dilatacije, što se može iskazati:

$$\omega_{11}^{\mathrm{sf}} = \omega_{22}^{\mathrm{sf}} = \omega_{33}^{\mathrm{sf}} = \frac{1}{3}\,\omega_{ii} = \frac{1}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \tag{24–16}$$

Gornji indeks „sf" ukazuje da se radi o sfernom delu, a indeks „d" označava devijatorski deo, koji čini preostali deo dilatacije – na primer za pravac 1:

$$\omega_{11}^{\mathrm{d}} = \omega_{11} - \omega_{11}^{\mathrm{sf}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \tag{24–17}$$

a ovo znači razliku između izduženja u jednom pravcu i prosečnog izduženja za sva tri pravca, i na taj način pokazuje neravnomernost izduživanja u različitim pravcima, a to baš pokazuje promenu oblika. Izraz (24–17) prikazuje odstupanje od proseka pa tri takva odstupanja (za tri pravca) ne mogu sva biti pozitivna (ili sva tri negativna), a ovo znaci da devijatorski delovi dilatacije ako u jednom pravcu produžavaju, moraju u drugom pravcu skupljati delić i baš tako menjaju oblik.

Neće biti promene oblika usled dilatacije, ako je $\omega_{11}^{\mathrm{d}} = \omega_{22}^{\mathrm{d}} = \omega_{33}^{\mathrm{d}} = 0$, jer tada je:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{1}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Isto znači ravnomerno izduženje, ili skraćivanje, u sva tri pravca. Ovo je, posve razumljivo, moguće samo kod stišljivog fluida.

Ako nema promene zapremine (a to je uvek kod nestišljivog fluida) brzine dilatacije imaju samo devijatorski deo. Brzine klizanja ulaze u devijatorski deo, jer promena uglova je očevidno promena oblika.

Izraz (24–13) za nerazdvojene brzine deformacija može se prikazati kao zbir sfernog i devijatorskog dela:

$$\omega_{ij} = \omega_{ij}^{\mathrm{sf}} + \omega_{ij}^{\mathrm{d}}\,.$$

Sferni deo je izražen sa (24–16), a javlja se samo pri $i=j$, dok je jednak nuli pri $i \neq j$, pa će se za izražavanje koristiti δ_{ij} – vidi uslov (15–2):

$$\omega_{ij} = \delta_{ij}\,\frac{1}{3}\,\omega^{\mathrm{sf}}_{kk} + \omega^{\mathrm{d}}_{ij}. \tag{24–18}$$

Ako se prethodno izrazi preko (24–13) i (24–16) dobiće se, na kraju:

Devijatorski deo brzina deformacija
(promena oblika)

$$\boxed{\omega^{\mathrm{d}}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - \delta_{ij}\,\frac{1}{3}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}.} \tag{24–19}$$

Na slici 24–4 pregledno su prikazane brzine deformacije, sa razdvajanjem na sferni i devijatorski deo. Prikazano je samo ω_{11}, ω_{22} i $\omega_{12} = \omega_{21}$, ali i sa takvim uprošćavanjem prikaz ispunjava svoju svrhu, a crtež je prost i pregledan.

* * *

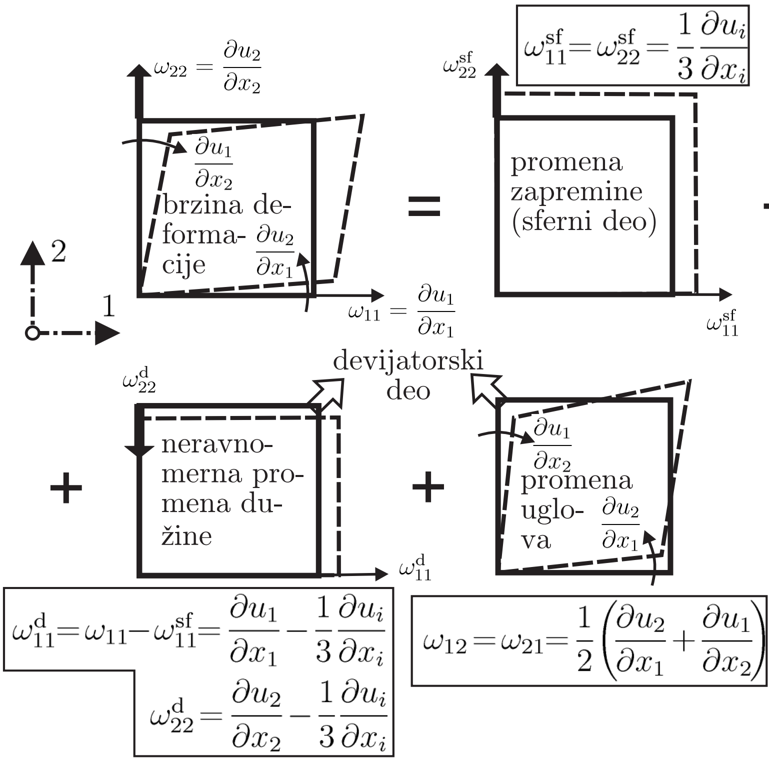
Prethodnim izlaganjima opisane su brzine deformacija, uz korišćenje koordinatnog sistema sa osovinama 1, 2, 3, ili uopšteno i, j, k. Rečeno je da je dovoljno odrediti brzine deformacija u jednom sistemu (za tri osovine), jer su brzine deformacija za bilo koji drugi sistem poznate, ako su poznate za jedan. Neka koordinatni sistem sa osovinama 1, 2, 3, ili uopšteno i, j, k, rotiranjem postaje sistem sa osovinama $1'$, $2'$, $3'$, odnosno i', j', k'. Lako se pokazuje da su brzine deformacija u drugom sistemu zavisne od onih u prvom. Na primer, brzina $u_{2'}$, u drugom sistemu zavisi od brzina u prvom:

$$u_{2'} = u_1\,l_{12'} + u_2\,l_{22'} + u_3\,l_{32'} = u_i\,l_{i2'}\,. \tag{24–20}$$

U prvom članu brzina u_1 se množi sa $l_{12'}$, gde $l_{12'}$ označava kosinus ugla između osovina 1 i $2'$. Ostale dve komponente brzine se množe odgovarajućim kosinusima. Uopšte uzevši, l označava kosinus ugla između osovina označenih u njegovom indeksu.

Iz (24–20) može se uopšteno napisati:

$$u_{i'} = u_i\,l_{ii'}\,, \tag{24–21}$$



Slika 24–4 Podela brzina deformacija na sferni i devijatorski deo (radi prostijeg prikazivanja uzeto je samo ω_{11}, ω_{12} i $\omega_{12}=\omega_{21}$).

što diferenciranjem po $x_{j'}$ daje:

$$\frac{\partial u_{i'}}{\partial x_{j'}}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_{j'}}\,l_{ii'}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,l_{jj'}\,l_{ii'}\,. \tag{24–22}$$

Ovo pokazuje da su parcijalni izvodi brzina u novom sistemu $(1', 2', 3')$ potpuno određeni odgovarajućim izvodima u starom $(1, 2, 3)$, a brzine deformacija nisu ništa drugo nego ti izvodi (ili zbirovi tih izvoda), pa je pokazano ono što je nameravano, a to je da brzine deformacija određene za jedan proizvoljni koordinatni sistem potpuno određuju deformaciju.

Iznos za zapreminsku dilataciju u određenoj tački ne sme da zavisi od orijentacije koordinatnog sistema, jer ona izražava samo promenu zapremine delića, a pri tome ne iskazuje kakvom se promenom oblika (u kojim pravcima) to postiže. Zapreminska dilatacija je stoga skalarna veličina – na to ukazuje i izraz za nju ($\partial u_i/\partial x_i$) za koji se kaže da je „invarijanta" (ne menja se rotiranjem koordinatnog sistema). Brzina zapreminske dilatacije dobija se na levoj strani izraza (24–22), ako se u tom izrazu zameni j' u i' (tada će se na levoj strani dobiti udvostručeni indeks i to će predstavljati trinom koji izražava brzinu zapreminske dilatacije). Dobija se:

$$\frac{\partial u_{i'}}{\partial x_{i'}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, l_{ji'}\, l_{ii'}\,. \tag{24–23}$$

Svi sabirci na desnoj strani kod kojih je $i \neq j$ otpadaju. To će se pokazati samo za jedan od njih – na primer, za onaj koji daje $\partial u_2/\partial x_3$. Odgovarajući sabirak je:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\,(l_{31'}\, l_{21'} + l_{32'}\, l_{22'} + l_{33'}\, l_{23'})\ . \tag{24–24}$$

U zagradi je zbir proizvoda kosinusa uglova (između osovina upisanih u odgovarajući indeks) i može se dokazati da je zbir jednak nuli.

Sabirci gde je $i = j$ ne otpadaju – za jedan od njih, na primer onaj koji daje $\partial u_2/\partial x_2$, dobija se:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\left(l_{21'}^2 + l_{22'}^2 + l_{23'}^2\right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\,. \tag{24–25}$$

Ovde zbir kvadrata kosinusa u zagradi daje jedinicu.

Prema tome izraz (24–23) se svodi na:

$$\frac{\partial u_{i'}}{\partial x_{i'}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,, \tag{24–26}$$

što znači da je brzina zapreminske dilatacije ista bez obzira na orijentaciju koordinatnog sistema.

Zaključci o proizvodima kosinusa uglova koji ulaze u (24–23), mogu se svesti na:

$$l_{ji'}\, l_{ii'} = \delta_{ij}\,, \tag{24–27}$$

jer se o vrednosti upisanog u zagradi u (24–24) zaključilo da je nula, a to je pri $i \neq j$, dok se za upisano u zagradi u (24–25) zaključilo da je jedinica, a to je pri $i = j$.

Prema tome, (24–23) se može napisati i sa:

$$\frac{\partial u_{i'}}{\partial x_{j'}} = \delta_{ij}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,.$$

25
NAPONI. POVRŠINSKE SILE

Napon je već pomenut, u Poglavlju 15, kao primer za tenzorsku veličinu, jer je objašnjeno da ima tri komponente za jednu presečnu ravan (slika 15–1), a da ga treba odrediti za tri ravni. Malo kasnije će se i pokazati da je zaista dovoljno odrediti napone za tri ravni, jer se napon za bilo koju ravan može izraziti preko napona za tri međusobno upravne ravni. Ranije je i objašnjeno označavanje:

> napon σ_{ij}, za ravan normalnu na pravac i,
> j je pravac delovanja sile.

Napon je sila po jedinici površine i treba ga istraživati po celoj presečnoj površini. Na elementarnom delu te površine $\mathrm{d}A_i$ (normalna je na pravac „i”) deluje elementarna sila proizvoljnog pravca $\mathrm{d}P_j$, i napon je onda $\sigma_{ij} = \mathrm{d}P_j/\mathrm{d}A_i$. Naponi se dele:

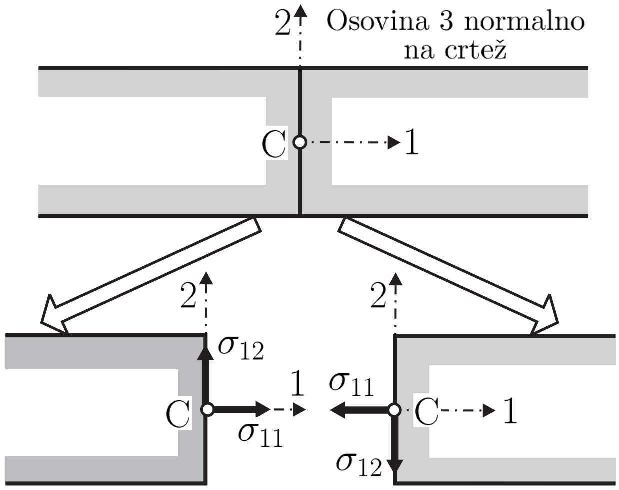
$i = j$ (isti indeksi) napon je *normalan* (usmeren normalno na ravan) – primer σ_{11}, σ_{33} na ranijoj slici 15–1.

$i \neq j$ (različiti indeksi) napon je *tangencijalan* ili *smičući* (leži u ravni) – vidi opet sliku 15–1.

Prema načelu „akcija je jednaka reakciji” desni deo deluje na levi, slika 25–1, istom silom kojom levi deluje na desni, samo što su sile suprotno usmerene. Odatle se uvodi konvencija o znaku napona:

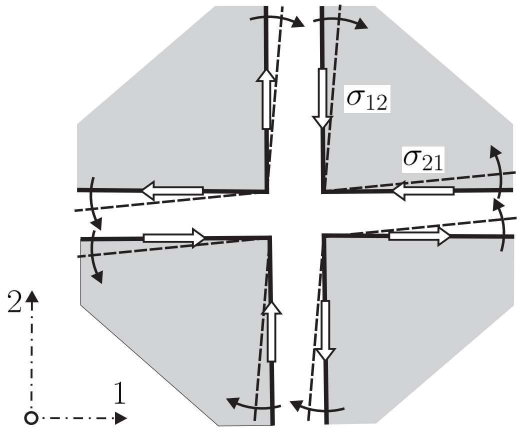
Pozitivni naponi deluju u pozitivnim smerovima koordinatnih osovina, kada se spoljna normala (za masu na koju napon deluje) poklapa sa pozitivnim smerom koordinatne osovine.

Iz prethodnog proizilazi da su normalni naponi pozitivni kad zatežu – tada su i dilatacije pozitivne – a negativni su kad pritiskaju. Pozitivnom tangencijalnom naponu će odgovarati pozitivno klizanje (a ovo



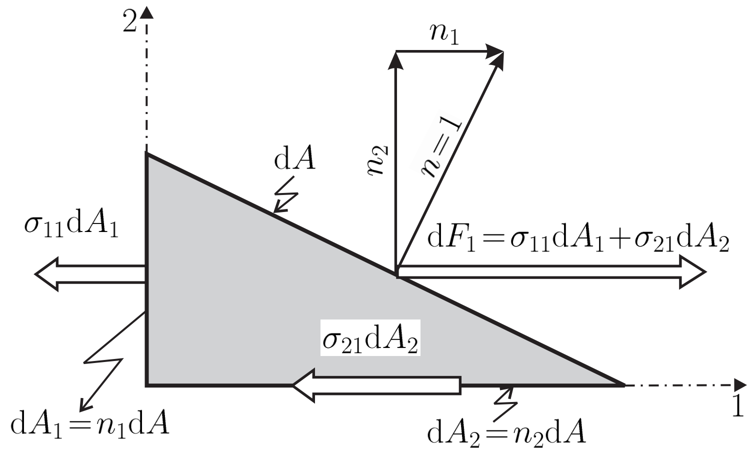
Slika 25–1 Pozitivni smerovi napona (oni se podudaraju sa pozitivnim smerovima koordinatnih osovina ako je spoljna normala u pozitivnom smeru odgovarajuće koordinatne osovine – dole, levo).

je, kako je objašnjeno u prethodnom Poglavlju 14, pozitivno ako se u prvom i trećem kvadrantu ugao smanjuje, a u drugom i četvrtom povećava). Na slici 25–2 prikazani su naponi i njima odgovarajuća klizanja i vidi se da je saglasno sa navedenim.



Slika 25–2 Pozitivnim naponima odgovaraju pozitivna klizanja (uporedi sa sl. 24–3 i 25–1).

Slika 25–3 poslužiće da se pokaže da je elementarna površinska sila na površinicu $\mathrm{d}A$, proizvoljno postavljenu, poznata ako se znaju naponi za tri koordinatne ravni. Upravo pokazaće se ono što je najavljeno.



Slika 25–3 Komponenta elementarne površinske sile $\mathrm{d}F_1$ na površinicu $\mathrm{d}A$.

Radi lakšeg prikazivanja uzet je ravanski zadatak tako da sve površinice sa slike 25–3 imaju istu širinu pružanja – normalno na crtež. Sila $\mathrm{d}F_1$ na $\mathrm{d}A$ biće jednaka:

$$\mathrm{d}F_1 = \sigma_{11}\,\mathrm{d}A_1 + \sigma_{21}\,\mathrm{d}A_2\,,$$

što je prikazano na slici. Tamo je i upisano da su $\mathrm{d}A_1$ i $\mathrm{d}A_2$ projekcije od $\mathrm{d}A$, što se izražava sa:

$$\mathrm{d}A_1 = n_1\,\mathrm{d}A\,, \qquad \mathrm{d}A_2 = n_2\,\mathrm{d}A\,,$$

pa se može napisati:

$$\mathrm{d}F_1 = \sigma_{11}\,n_1\,\mathrm{d}A + \sigma_{21}\,n_2\,\mathrm{d}A\,.$$

n_1 i n_2 su komponente orta spoljne normale – vidi sliku 25–3.

Za prostorni zadatak u $\mathrm{d}F_1$ dodalo bi se još $\sigma_{31}\,\mathrm{d}A_3 = \sigma_{31}\,n_3\,\mathrm{d}A$. Isti postupak se može sprovesti i za komponente $\mathrm{d}F_2$ i $\mathrm{d}F_3$, pa se na kraju može uopšteno napisati:

$$\mathrm{d}F_j = \sigma_{ij}\,n_i\,\mathrm{d}A\,. \qquad (25\text{–}1)$$

Poznavanjem ove sile može se dobiti napon za ravan u kojoj leži $\mathrm{d}A$ za svaki željeni pravac, što znači da je *naponsko stanje poznato i za bilo kako postavljenu četvrtu ravan ako je poznato za tri.*

Izvođenjem prethodnoga prećutno se prešlo preko ostalih delujućih sila na posmatrano telo – one su zanemarene. To je i opravdano, jer se površinske sile pojavljuju u vidu $\sigma_{ij}\, n_i\, \mathrm{d}A$ (konačna vrednost · elementarna površina), dok bi se ostale sile pojavile u vidu proizvoda (konačna vrednost · elementarna zapremina), a onda su zaista zanemarljive, jer je elementarna zapremina, u odnosu na elementarnu površinu, beskonačno malena veličina višega reda. Te preostale sile su zapreminske (o kojima će biti reči u Poglavlju 28) ili „inercijalne", kojima se formalno mogu izraziti promene u kretanju, a i one su srazmerne zapremini.

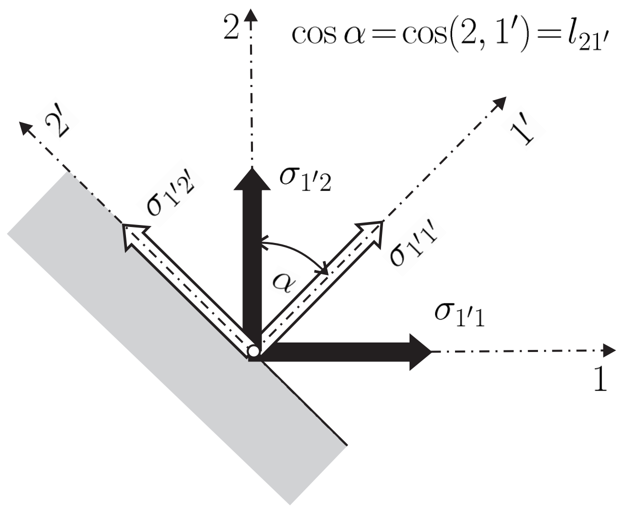
Prethodno izloženo navodi na zaključak da su stavovi o međusobnim odnosima napona potpuno isti za sve neprekidne sredine bez obzira na delujuće zapreminske sile i bez obzira kako se te sredine kreću (ili se ne kreću). Međutim, treba naglasiti da prethodno važi samo tamo gde se u izrazima za elementarne sile pojavljuju naponi kao konačne veličine, a ne i tamo gde se pojavljuju elementarni priraštaji napona, jer će se tamo pojaviti elementarna zapremina – na primer, kasniji izraz (25–11) za silu koja će se kasnije, kao ravnopravan član sa elementarnim zapreminskim silama, pojaviti u razmatranjima.

Od stavova o međusobnim odnosima napona, koji su, kako je rečeno, zajednički svim neprekidnim sredinama, pokazaće se najpre veza naponskog stanja u novom sistemu $(1', 2', 3')$, sa naponskim stanjem u starom sistemu $(1, 2, 3)$ – a potom će se dati tri stava (*I, II, III*) potrebna za naredna izlaganja.

Na slici 25–4 prikazane su po dve osovine novog $(1', 2')$ i starog sistema (1, 2). Pravac normale sa slike 25–3 neka sada bude osovina 1, i ranije n_i postaje sada $l_{i1'}$, jer se sada pojavljuju tri nove osovine ($1'$, $2'$, $3'$), a ne samo jedna, pa je potreban dvojni indeks, i on će uvek da znači kosinus ugla između tako obeleženih osovina – na slici 25–4, to je prikazano, primera radi, za $l_{21'}$. Takav način obeležavanja kosinusa ugla između osovina već je korišćen u prethodnom Poglavlju 24, počevši od jednačine (24–20).

Sa ovakvim označavanjem iz jednačine (25–1) se dobija:

$$\frac{\mathrm{d}F_j}{\mathrm{d}A} = \sigma_{ij}\, l_{i1'} = \sigma_{1'j}\,, \tag{25–2}$$



Slika 25–4 Veza napona u novom i starom koordinatnom sistemu.

jer je to napon za ravan normalnu na $1'$, a u starom pravcu j – na slici 25–4 prikazani tu $\sigma_{1'1}$ i $\sigma_{1'2}$. Još treba dodati $\sigma_{1'3}$, pa je napon $\sigma_{1'j}$ za ravan $1'$ određen. On se može razložiti na komponente u pravcima novog sistema. Na primer, $\sigma_{1'2'}$ će se dobiti jednostavnim projektovanjem sva tri napona koji čine $\sigma_{1'j}$, sa pravca j na pravac $2'$:

$$\sigma_{1'2'} = \sigma_{1'j}\, l_{j2'}\,.$$

Smenom, prema (25–2), dobija se:

$$\sigma_{1'2'} = \sigma_{ij}\, l_{i1'}\, l_{j2'}\,.$$

Prethodni izraz može se uopštiti. Bilo koji napon u novom sistemu može se izraziti na osnovu napona u starom sistemu i kosinusa uglova između osovina starog i novog sistema. Može se napisati:

$$\sigma_{i'j'} = \sigma_{ij}\, l_{ii'}\, l_{jj'}\,. \tag{25–3}$$

To je na drugi način iskazano suštinski isto što je rečeno iza jednačine (25–1), koja je uostalom i bila osnova za izvođenje prethodnoga.

Jednačina (25–3) podseća na jednačinu (24–22), gde se brzina deformacija u novom koordinatnom sistemu izražava na osnovu brzina deformacija u starom („novi" se i tamo dobija rotacijom osovina „starog" sistema). U oba slučaja – za napone u (25–3), i za deformaciju u (24-22) – pojavljuje se množenje veličine starog sistema sa $l_{jj'}\ l_{ii'}$, pa se dobija veličina u novom.

Sada će se navesti najavljena tri stava, potrebna u narednim izlaganjima.

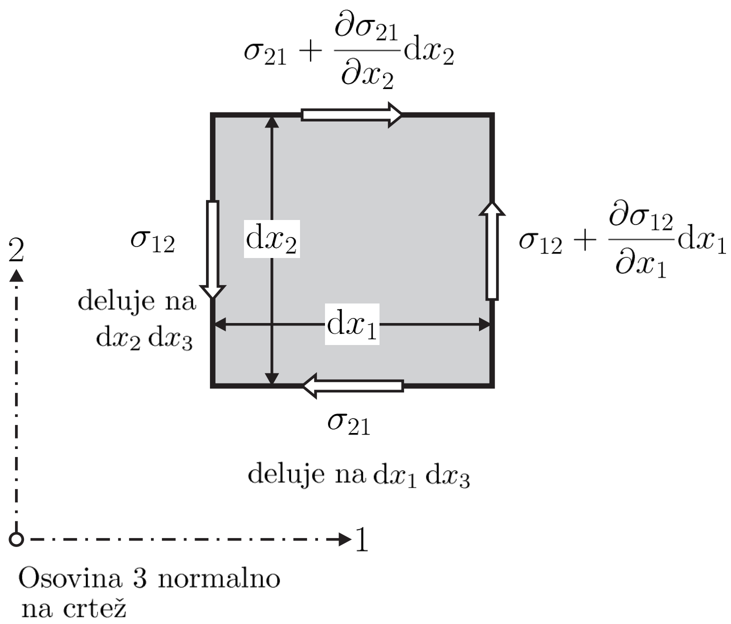
*   *   *

I. Spregnuti (ili konjugovani) naponi su međusobno jednaki

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}\,, \tag{25–4}$$

čime se, usled ove simetrije tenzora, broj podataka o naponu sa 9 svodi na 6 (isto kao i kod deformacija).

(25–4) se za σ_{12} i σ_{21} dokazuje uz pomoć slike 25–5, gde su upisani prosečni naponi za odgovarajuće površinice međusobno udaljene za $\mathrm{d}x_1$, odnosno $\mathrm{d}x_2$, pa se stoga ostvaruju upisani priraštaji napona.



Slika 25–5 Spregnuti (ili konjugovani) naponi su međusobno jednaki.

Upisani priraštaji:

$$\frac{\partial\,\sigma_{21}}{\partial\,x_2}\,\mathrm{d}x_2 \quad \text{i} \quad \frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x_1}\,\mathrm{d}x_1$$

daju momenat zanemarljivo malen u odnosu na momente samih napona, koji daju:

$$\underbrace{\sigma_{12}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3}_{\text{sila}}\cdot\underbrace{\mathrm{d}x_1}_{\text{krak}} = \underbrace{\sigma_{21}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_3}_{\text{sila}}\cdot\underbrace{\mathrm{d}x_2}_{\text{krak}}\,,$$

tj.

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}\,.$$

II. Prosečna vrednost normalnih napona (trećina zbira tri normalna napona) je jedna od „invarijanti naponskog stanja", tj. *ne menja se ako se koordinatni sistem rotira.*

Treba dokazati da je:

$$\frac{1}{3}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right) = \frac{1}{3}\left(\sigma_{1'1'}+\sigma_{2'2'}+\sigma_{3'3'}\right)\,,$$

ili

$$\sigma_{ii} = \sigma_{i'i'}\,. \tag{25–5}$$

U (25–3) staviće se $j' = i'$ i zbog udvostručenja indeksa dobiće se odmah zbir tri normalna napona u novom sistemu:

$$\sigma_{i'i'} = \sigma_{ij}\,l_{ii'}\,l_{ji'}\,. \tag{25–6}$$

Malo pre je skrenuta pažnja na sličnost izraza (24–22) i (25–3). Isto se može zaključiti i upoređenjem (25–6) i (24–23). Ako bi se razvijao (25–6) na isti način kao ranije (24–23), gde se došlo do (24–26), onda bi se došlo do (25–5) čime je i dokazano da je prosečna vrednost normalnih napona jedna od „invarijanti naponskog stanja".

III. Ako ne deluju tangencijalni naponi normalni napon je u jednoj tački za sve pravce isti.

Dokaz će se obaviti upoređenjem izraza za $\sigma_{1'1}$ dobijenih na dva načina. Iz (25–2), sa $j = 1$, uzima se samo σ_{11} (jer su ostali naponi tangencijalni) i dobija se:

$$\sigma_{1'1} = \sigma_{11}\,l_{11'}\,. \tag{25–7}$$

Ako nema tangencijalnih napona, na ravan normalnu na $1'$ deluje samo $\sigma_{1'1'}$, a njegova je komponenta za stari pravac 1:

$$\sigma_{1'1} = \sigma_{1'1'}\, l_{11'}\,. \tag{25–8}$$

Iz (25–7) i (25–8) dobija se:

$$\sigma_{1'1'} = \sigma_{11}\,. \tag{25–9}$$

* * *

U nastavku će se razmatrati površinske sile, i to najpre na elementarnu, a potom na konačnu masu. Na elementarnu masu zapremine $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$ (paralelopiped) od napona σ_{12} deluje sila (vidi sliku 25–5):

$$\begin{aligned} -\sigma_{12}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \\ = \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}\,\mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{25–10}$$

U pravcu 2 deluju još i naponi σ_{22} i σ_{32}, pa bi sila u tom pravcu na paralelopiped zapremine $\mathrm{d}V$ iznosila:

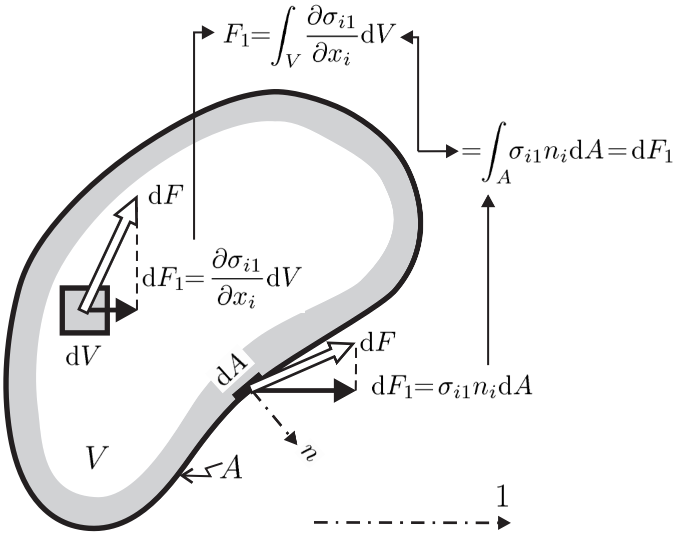
$$\left(\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x_1} + \frac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\,x_2} + \frac{\partial\,\sigma_{32}}{\partial\,x_3}\right)\mathrm{d}V = \frac{\partial\,\sigma_{i2}}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V.$$

Može se uopštiti, pa se dobija:

Na elementarnu zapreminu $\mathrm{d}V$ deluje rezultanta površinskih sila

$$\mathrm{d}F_j = \frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V. \tag{25–11}$$

Površinska sila na masu u zapremini V, koju ograničava zatvorena površina A (slika 25–6), dobija se integrisanjem po zapremini prethodno napisanog izraza (25–11), ili integrisanjem po površini A izraza (25–1),



Slika 25–6 Površinska sila na masu u zapremini V, ograničenoj zatvorenom površinom A, izražena zapreminskim i površinskim integralom.

koji izražava silu na elementarnu bilo kako položenu površinu. Tako se dobija ista sila izražena zapreminskim i površinskim integralom:

Površinska sila na zapreminu V
omeđanu površinom A

$$F_j = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \mathrm{d}V = \int_A \sigma_{ij} n_i \mathrm{d}A. \tag{25–12}$$

Da bi se izrazila površinska sila na masu koja zauzima zapreminu V, ograničenu zatvorenom površinom A, potrebno je poznavanje napona samo po graničnoj površini, a ne i unutar zapremine, jer se dejstvo svih napona, izuzev onih po graničnoj površini, međusobno potire.

Izraz (25–12) uklapa se u opšti izraz (15–15) za pretvaranje zapreminskog integrala u površinski – treba samo staviti $Y = \sigma_{ij}$. Pošto je (25–12) izvedeno i bez korišćenja (15–15), ovo je dokaz za tamo nagovešteno, da Y u (15–15) može da bude i tenzorska veličina.

26
PODELA NAPONA NA SFERNI I DEVIJATORSKI DEO. IDEALNI FLUID.

Deformisanje obavljaju naponi, pa se oni dele prema odgovarajućim deformacijama: u sferni deo naponskog stanja ulazi ono što teži da promeni zapreminu, a u devijatorski deo ono što menja oblik.

Prosečni normalni napon $1/3\,\sigma_{ii}$, za koga je dokazano da je u datoj tački nezavisan od izbora pravaca koordinatnih osovina, napreže ravnomerno u svim pravcima i tako ne menja oblik, nego samo zapreminu, pa, kako je to kod deformacija objašnjeno, „sfera ostaje sfera". Stoga navedeni *prosečni normalni napon čini sferni deo naponskog stanja.* Uz ovo treba dodati da je promena zapremine delića moguća samo kod stišljivog fluida, jer delić nestišljivog fluida ne menja zapreminu bez obzira kakvom je naponskom stanju izložen – upravo zbog toga je i nestišljiv.

Preostali deo normalnih napona čine odstupanja od navedenog proseka, a ta odstupanja su međusobno različita, čak i po znaku – ne mogu biti sva tri pozitivna, ili sva tri negativna, jer je njihov zbir, kao zbir odstupanja, jednak nuli. Stoga ona razvlače delić u jednom pravcu, skraćuju u drugom, pa tako menjaju oblik. U promenu oblika, sem navedene promene dužina, ulazi i promena uglova (klizanja), a to obavljaju tangencijalni naponi. U *devijatorski deo naponskog stanja*, shodno izloženom, *ulaze tangencijalni naponi i odstupanja normalnih napona od njihove prosečne vrednosti.*

Prethodno obrazloženje daje sledeću podelu:

$$\boxed{\begin{array}{c} \sigma_{ij} = \dfrac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk} + \sigma^{\mathrm{d}}_{ij}, \\[2mm] \begin{array}{ccccc} \text{napon} & = & \text{sferni} & + & \text{devijatorski} \\ & & \text{deo} & & \text{deo.} \end{array} \end{array}} \qquad (26\text{–}1)$$

Napisana jednačina zaista iskazuje ono što je prethodno protumačeno. Devijatorski deo označava se gornjim indeksom „d" – kako je postupljeno i kod deformacija. Kod tangencijalnih napona ceo napon ulazi u devijatorski deo, jer je tada $\delta_{ij}=0$, zbog $i\neq j$ – vidi (15–2) – dok je kod normalnog napona $\delta_{ij}=1$, jer je tada $i=j$, pa se normalni napon raspodeljuje na sferni deo (prosečni normalni napon) i devijatorski deo (odstupanje pojedinih napona od prosečnog).

Podela napona izložena je tako da se jasno uvidi da *svaki napon σ_{ij} ima odgovarajuću deformaciju ω_{ij} koju on obavlja*, pa je i jednačina (26–1) napisana da bude slična sa odgovarajućom za deformacije (24–18). I, na slici 26–1, pregled napona je dat tako da se odmah uočava veza napona i odgovarajućih deformacija sa slike 24–4.

U proučavanju fluida umesto navedenog proseka upotrebljava se njegova vrednost sa promenjenim znakom – to je:

$$p = -\,\frac{1}{3}\,\sigma_{ii} = -\,\frac{1}{3}\,(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\,, \tag{26–2}$$

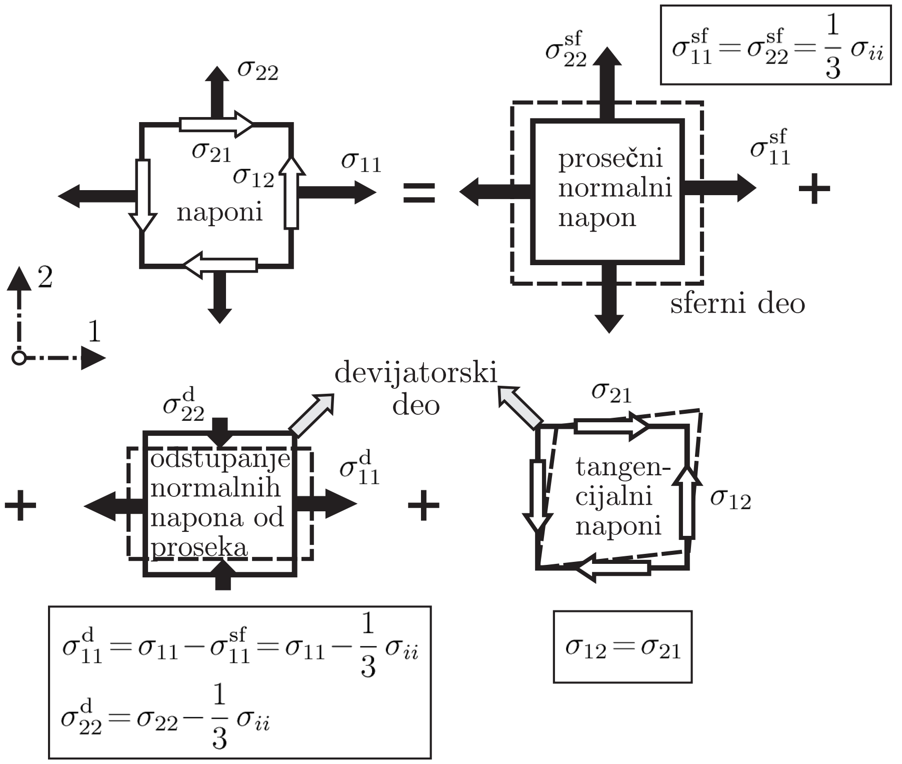
pritisak = negativna prosečna vrednost normalnih napona.

Ovo se uvodi iz razloga što se u fluidu ne javljaju zatezanja, nego samo pritisci, pa je prirodnije, a i pogodnije, raditi u primeni sa pozitivnim, nego sa negativnim vrednostima. Mogla se uvesti i obrnuta konvencija o smerovima pozitivnih napona, što se ponegde i radi, ali to ne bi bilo preporučljivo, jer se treba držati konvencije koja se redovno primenjuje kao zajednička za sve neprekidne sredine.

Sa izmenom (26–2) u (26–1) podela napona se piše:

$$\sigma_{ij} = -\,\delta_{ij}\,p + \sigma_{ij}^{\mathrm{d}}\,, \tag{26–3}$$

napon = sferni deo + devijatorski deo.



Slika 26–1 Podela napona na sferni i devijatorski deo.
– Radi prostijeg prikazivanja uzeto je samo σ_{11}, σ_{22} i $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.
– Treba uporediti sa slikom 24–4, gde su prikazane odgovarajuće brzine deformacija.

Sila od delovanja napona na elementarnu zapreminu dV, data sa (25–11), deli se na sferni i devijatorski deo zamenom:

$$\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i} = -\,\delta_{ij}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,x_i} + \frac{\partial\,\sigma_{ij}^{\mathrm{d}}}{\partial\,x_i}. \tag{26–4}$$

To je vektor kome „j” daje pravac, pa se prvi član preobličava prema sledećem:

$$\delta_{ij}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,x_i} = \frac{\partial\,p}{\partial\,x_j}\,, \tag{26–5}$$

jer leva strana, usled udvostručenog „i” znači formalno tri člana, ali od njih preostaje samo jedan, i to onaj kad je δ_{ij} jednak jedinici, a to je kada je $i = j$. Na primer, za $j = 2$, dobija se:

$$\delta_{12}\,\frac{\partial\, p}{\partial\, x_1} + \delta_{22}\,\frac{\partial\, p}{\partial\, x_2} + \delta_{32}\,\frac{\partial\, p}{\partial\, x_3} = \frac{\partial\, p}{\partial\, x_3}\,.$$

(26–5) iskorišćeno za izmenu (26–4) daje:

$$\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\, x_i} = -\,\frac{\partial\, p}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\,\sigma^{\mathrm{d}}_{ij}}{\partial\, x_i}, \tag{26–6}$$

pa se, na kraju (25–11) može napisati razdvojeno:

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\, x_i}\,\mathrm{d}V = \left(-\,\dfrac{\partial\, p}{\partial\, x_j}\right)\mathrm{d}V + \dfrac{\partial\,\sigma^{\mathrm{d}}_{ij}}{\partial\, x_i}\,\mathrm{d}V\,, \\ \qquad\qquad\qquad \begin{array}{c}\text{sferni}\\ \text{deo}\end{array} + \begin{array}{c}\text{devijatorski}\\ \text{deo}\end{array} \\ \\ \text{Rezultanta površinskih sila} \\ \text{na elementarnu zapreminu } \mathrm{d}V. \end{array}} \tag{26–7}$$

* * *

Površinska sila na konačnu masu u zapremini V, omeđenoj površinom A, koja je napisana sa (25–12), može se podeliti na sferni i devijatorski deo. Za devijatorski deo prepisaće se raniji izraz uz naznačavanje indeksom „d", dok će se za sferni deo integrisati prvi deo iz (26–7), pa će se zapreminski integral pretvoriti u površinski. Za silu od sfernog dela uzeće se oznaka P (sila od pritiska p):

$$\boxed{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\text{Površinska sila na zapreminu } V\text{, ograničenu}} \\ \multicolumn{2}{c}{\text{površinom } A\text{, data sa (25–12), deli se na:}} \\ \begin{array}{c}\text{sferni}\\ \text{deo}\end{array} & P = \displaystyle\int_V -\,\frac{\partial\, p}{\partial\, x_j}\,\mathrm{d}V = \int_A -\,p\,n_j\,\mathrm{d}A, \\ \begin{array}{c}\text{devijatorski}\\ \text{deo}\end{array} & F^{\mathrm{d}}_j = \displaystyle\int_V -\,\frac{\partial\,\sigma^{\mathrm{d}}_{ij}}{\partial\, x_i}\,\mathrm{d}V = \int_A \sigma^{\mathrm{d}}_{ij}\,n_i\,\mathrm{d}A. \end{array}} \tag{26–8}$$

Kako je $\partial p/\partial x_i = \operatorname{grad} p$, gornji integral je integrisanje gradijenta, o čemu je bilo reči iza opšteg izraza (15–15) – tamo treba jednostavno staviti $Y = p$. Za drugi integral zamena je $Y = \sigma_{ij}^{\mathrm{d}}$, kao što je kod (25–12) bila $Y = \sigma_{ij}$.

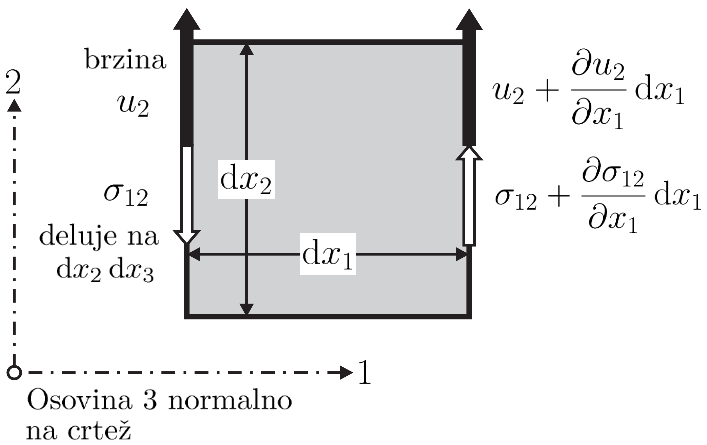
*   *   *

Za fluid kod koga ne deluju tangencijalni naponi, otpada ceo devijatorski deo napona, jer su tada normalni naponi u svim pravcima isti. Ovo proizilazi iz trećeg stava (*III*) o međusobnim odnosima napona, koji je dokazan u prethodnom, (25-om) poglavlju. Fluid koji se tako idealizuje da mu se pripisuje da u njemu *nema tangencijalnih napona*, pa onda *deluju samo pritisci* (samo sferni deo), naziva se *idealan* (savršen) *fluid*. Sa ovakvim uprošćavanjem stvarnog stanja može se u izvesnim zadacima doći do rešenja koja se mogu i sa praktične strane prihvatiti. U praktičnim razmatranjima primenjuje se i metoda rešavanja zadatka pod pretpostavkom idealnog fluida, ali se rezultati popravljaju da se prilagode stvarnim uslovima, a to se radi na osnovu stečenog i sređenog iskustva.

27
MOTORNI I DEFORMACIONI RAD POVRŠINSKIH SILA

Rad je skalarni proizvod iz sile i pomeranja pod dejstvom sile, a rad u jedinici vremena (snaga) je onda skalarni proizvod sile i brzine. Napon σ_{12} – slika 27–1 – deluje na površinici $\mathrm{d}x_2 \cdot \mathrm{d}x_3$ i obavlja rad sa brzinom u_2 tj. sa komponentom brzine u istom pravcu u kome deluje sila. Na slici su napisane prosečne vrednosti napona i brzine na odgovarajućim graničnim površinicama, čije je međusobno rastojanje $\mathrm{d}x_1$ – tako je postupljeno i ranije: kod brzine (slika 23–2) i kod napona (slika 25–5). Rad na zapremini $\mathrm{d}V$, u jedinici vremena, usled delovanja napona σ_{12} iznosi:

$$-\sigma_{12}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,u_2 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x_1}\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\left(u_2 + \frac{\partial\,u_2}{\partial\,x_1}\,\mathrm{d}x_1\right) =$$
$$= u_2\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x_1}\,\mathrm{d}V + \sigma_{12}\,\frac{\partial\,u_2}{\partial\,x_1}\,\mathrm{d}V + \frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x_1}\,\frac{\partial\,u_2}{\partial\,x_1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}V.$$



Slika 27–1 Rad na zapremini $\mathrm{d}V$, u jedinici vremena, usled delovanja napona σ_{12}.

Napisani *rad u jedinici vremena* može se nazvati i „*brzina odvijanja rada*".

U prethodnom je odmah obavljena zamena $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$.

Poslednji član je zanemarljiv u odnosu na prva dva (kao neizmerno malena veličina višega reda), pa se dobija:

$$\left(u_2\,\frac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\,x_1} + \sigma_{12}\,\frac{\partial\,u_2}{\partial\,x_1}\right)\mathrm{d}V = \frac{\partial}{\partial\,x_1}\,(\sigma_{12}\,u_2)\,\mathrm{d}V. \tag{27–1}$$

Isti postupak primenjen na sve komponente napona uz uopštavanje i svođenje rezultata na jedinicu zapremine (što se obavlja deljenjem sa zapreminom $\mathrm{d}V$) daje sledeće:

$$u_j\,\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i} + \sigma_{ij}\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i} = \frac{\partial}{\partial\,x_i}\,(\sigma_{ij}\,u_j)$$

motorni rad	+	deforma– cioni rad	=	ukupni rad

Rad površinskih sila u jedinici vremena i po jedinici zapremine. (27–2)

Podela rada na „motorni" i „deformacioni" opravdava se i objašnjava sledećim:

Množenjem sile $(\partial\sigma_{12}/\partial x_1)\,\mathrm{d}V$, dobijene ranije – izraz (25–10), sa brzinom u_3 dobija se prvi član u (27–1). Ili, iz uopštenog izraza (25–11) za silu, svođenjem na jedinicu zapremine, i množenjem sa odgovarajućom brzinom u_j, dobija se ono što je malo pre – u (27–2) nazvano „*motorni rad*". Do toga rada se, dakle, moglo doći množenjem sile i brzine, ali to nije celokupan rad površinskih sila, nego samo onaj njegov deo koji se troši na *pokretanje delića* (delić se kreće brzinom u_j). Odatle i naziv „*motorni*" – *koji pomera.* Drugi deo rada površinskih sila ne pomera delić, nego se *troši za deformaciju* delića – odatle i naziv „*deformacioni rad*".

Nagoveštava se da će se kasnije, pri razmatranju energetskih jednačina – Poglavlje 34 – pokazati da motorni rad ostaje u bilansu mehaničke energije, jer povećava ili smanjuje mehaničku (kinetičku) energiju, dok deformacioni rad prelazi u drugu vrstu energije – u toplotnu.

Napisano u (27–2) su skalari: oba indeksa su udvostručena, pa svaki napisani monom znači ustvari 9 sabiraka. Prilikom uvođenja označavanja – Poglavlje 15 – baš je motorni rad uzet kao pogodan primer – ranija jednačina (15–14), pa ga sada ponovo nema smisla ispisivati.

* * *

U nastavku će se pokazati da je deformacioni rad, po jedinici zapremine, proizvod iz napona i odgovarajuće brzine deformacije – takvih 9 proizvoda (svaki napon se množi sa brzinom deformacije koju on vrši) se saberu i to čini deformacioni rad izražen drugim sabirkom u (27–2). Ako se tamošnji uopšteni izraz za deformacioni rad primeni na par spregnutih tangencijalnih napona dobija se:

$$\sigma_{23}\,\frac{\partial\,u_3}{\partial\,x_2}+\sigma_{32}\,\frac{\partial\,u_2}{\partial\,x_3}=\sigma_{23}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,u_3}{\partial\,x_2}+\frac{\partial\,u_2}{\partial\,x_3}\right)+ \\ +\sigma_{32}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,u_2}{\partial\,x_3}+\frac{\partial\,u_3}{\partial\,x_2}\right),$$

jer su ovi naponi međusobno jednaki, pa to omogućava napisano prebacivanje izvoda brzina. Na taj način su se dobili proizvodi napona i odgovarajućih klizanja – uporedi sa izrazom (24–9) ili (24–10).

Za jedan od normalnih napona – na primer σ_{22} – odgovarajući deformacioni rad je:

$$\sigma_{22}\,\frac{\partial\,u_2}{\partial\,x_2},$$

a to je opet proizvod napona i odgovarajuće brzine deformacije (ovde brzine dilatacije).

Prema tome, može se uopštiti, pa se uz korišćenje izraza (24–13) za brzinu deformacije, može prikazati:

Deformacioni rad, po jedinici zapremine,
i u jedinici vremena

$$\sigma_{ij}\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}=\underbrace{\sigma_{ij}\,\omega_{ij}=\sigma_{ij}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_j}+\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\right)}_{\text{napon}\,\cdot\,\text{brzina deformacije}}. \qquad (27\text{–}3)$$

* * *

Rastavljanje deformacionog rada na sferni i devijatorski značiće podelu na *rad na promeni zapremine* i *rad na promeni oblika.* Celokupan rad tangencijalnih napona (na klizanju) ide u devijatorski deo, dok se rad normalnih napona deli. Uzeće se opet, primera radi, σ_{22}, čiji se deformacioni rad razdvaja na sferni i devijatorski deo prema razdvajanju napona, shodno (26–1) i (26–2):

$$\sigma_{22}\,\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \left(\frac{1}{3}\,\sigma_{kk} + \sigma_{22}^{\mathrm{d}}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\,p\,\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{22}^{\mathrm{d}}\,\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\,.$$

Odvojeno u sferni deo, od sva tri normalna napona čini:

Sferni deo deformacionog rada (rad na promeni zapremine) po jedinici zapremine, i u jedinici vremena $$-\,p\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\,p\,\omega_{ii}\,.$$	(27–4)

Opet se pojavljuje proizvod iz napona i brzine deformacije. Znak „–" ukazuje da se smanjenje zapremine odvija smerom delovanja pritiska (a povećanje suprotnim). Posve je razumljivo, a možda nije beskorisno ipak primetiti, da je ovaj sferni deo deformacionog rada kod nestišljivog fluida jednak nuli.

Od deformacionog rada normalnih napona u devijatorski deo ulazi:

$$\sigma_{11}^{\mathrm{d}}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{\mathrm{d}}\,\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{33}^{\mathrm{d}}\,\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\,,$$

čemu se može dodati:

$$-\left(\sigma_{11}^{\mathrm{d}} + \sigma_{22}^{\mathrm{d}} + \sigma_{33}^{\mathrm{d}}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = 0.$$

Ovo je jednako nuli, jer je prvi trinom, kao zbir odstupanja od proseka, jednak nuli (dok je drugi trinom nula samo kod nestišljivih fluida). Sabiranjem prethodna dva izraza dobija se opet proizvod napona i odgovarajućih brzina deformacija:

$$\sigma_{11}^{\mathrm{d}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{1}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)+\sigma_{22}^{\mathrm{d}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{1}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)+$$
$$+\sigma_{33}^{\mathrm{d}}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\frac{1}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$$

(uporedi sa slikama (26–1) i (24–4)).

Deformacioni rad tangencijalnih napona ulazi ceo u devijatorski deo, pa se uz korišćenje (24–19), može uopšteno napisati:

Devijatorski deo deformacionog rada (rad na promeni oblika) po jedinici zapremine i u jedinici vremena

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{d}}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=\sigma_{ij}^{\mathrm{d}}\,\omega_{ij}^{\mathrm{d}}=$$
$$=\sigma_{ij}^{\mathrm{d}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right]. \tag{27–5}$$

* * *

U produžetku će se ispisati izrazi za rad koji površinske sile obave na konačnoj masi u zapremini V, omeđenoj sa površinom A.

Množenjem desne strane jednačine (27–2) sa $\mathrm{d}V$ i integrisanjem po zapremini, uz pretvaranje zapreminskog integrala u površinski, dobija se:

Rad površinskih sila u jedinici vremena na zapremini V, omeđanoj površinom A

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ij}\,u_j\right)\mathrm{d}V=\int_A \sigma_{ij}\,u_j\,n_i\,\mathrm{d}A\,. \tag{27–6}$$

Ovde je primenjen stav (15–15) o preobraćanju zapreminskog integrala u površinski, uz stavljanje $Y=\sigma_{ij}\,u_j$. I bez primene tog stava došlo bi se do navedenog površinskog integrala, jer je rad, u jedinici vremena, na elementarni deo $\mathrm{d}A$ granične površine, jednak sili $\mathrm{d}F_j=\sigma_{ij}\,n_i\,\mathrm{d}A$

(vidi izraz 25–1) pomnoženoj sa brzinom u_j, što integrisanjem po celoj površini daje:

$$\int_A \sigma_{ij}\, u_j\, n_i\, \mathrm{d}A\,,$$

a to je i napisano u (27–6).

Navedeni rad u (27–6) se može rastaviti na motorni i deformacioni, koristeći izraz (27–2):

$$\boxed{\begin{aligned} &\underbrace{\int_A \sigma_{ij}\, u_j\, n_i\, \mathrm{d}A = \int_V \frac{\partial}{\partial\, x_i}(\sigma_{ij}\, u_j)\mathrm{d}V}_{\text{Ukupan rad prema (27–6)}} = \\ &\qquad = \int_V u_j\, \frac{\partial\, \sigma_{ij}}{\partial\, x_i}\, \mathrm{d}V + \int_V \sigma_{ij}\, \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\, \mathrm{d}V \\ &\qquad\qquad \begin{matrix}\text{motorni}\\ \text{rad}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{deformacioni}\\ \text{rad}\end{matrix} \\ &\qquad \text{(sve u jedinici vremena)} \\ &\text{na zapremini } V\text{, omeđanoj površinom } A. \end{aligned}} \tag{27–7}$$

Treba naglasiti da je samo *ukupan rad moguće izraziti i površinskim integralom* – dok je to *nemoguće za motorni i za deformacioni kada se posmatraju zasebno*, jer se kod njih parcijalni izvod množi sa veličinom van izvoda, pa se ne može primeniti stav o preobraćanju zapreminskog integrala u površinski. Iz prethodnog se zaključuje da se motorni rad, ili deformacioni, kada se posmatraju svaki zasebno, moraju proučavati po celoj zapremini (u svim tačkama) da bi se dobila zbirna vrednost za celu zapreminu. Međutim, za ukupan rad, bez podele na motorni i deformacioni, može se razmatranje ograničiti samo na graničnu površinu posmatrane zapremine.

U jednačini (27–7) može se obaviti podela rada na sferni i devijatorski deo, pa će se napisati izdvojeno rad za sferni deo, gde od napona ulazi samo $-\,p$.

Rad sfernog dela napona (pritiska), u jedinici vremena, na zapreminu V, omeđanu površinom A

$$\underbrace{\int_A -\,p\,u_j\,n_j\,\mathrm{d}A = \int_V \frac{\partial}{\partial\,x_j}(-\,p\,u_j)\,\mathrm{d}V}_{\text{ukupan rad pritiska}} = \tag{27–8}$$

$$= \int_V u_j\left(\frac{-\,\partial\,p}{\partial\,x_j}\right)\mathrm{d}V + \int_V -\,p\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_j}\,\mathrm{d}V$$

motorni rad pritiska + deformacioni rad pritiska.

Promene zapremine nema ako je fluid nestišljiv, pa je onda i deformacioni rad pritiska jednak nuli – upravo tada je motorni rad pritiska ujedno i ukupni rad pritiska.

Izdvojeni rad devijatorskog dela napona napisao bi se istim jednačinama kao i ukupni, sa (27–7), samo bi se uz napon svuda stavio gornji indeks „d”, što svuda ukazuje na devijatorski deo napona.

28
ZAPREMINSKE SILE

Sile koje se nazivaju „*zapreminske*" mogu se izraziti kao:

elementarna zapreminska sila (za elementarnu masu $\rho\,\mathrm{d}V$)	$f_i\,\rho\,\mathrm{d}V,$	(28–1)

zapreminska sila na konačnu masu u zapremini V	$\int_V f_i\,\rho\,\mathrm{d}V,$	(28–2)

f_i = sila po jedinici mase.	(28–3)

Napisani izrazi govore da se ustvari radi o sili vezanoj za masu, o srazmernosti te sile sa masom. Određenje te sile, sem rasporeda gustine, traži i poznavanje:

$$f_i = f_i\,(x_1, x_2, x_3, t)\,,$$

tj. poznavanje rasporeda faktora srazmernosti f_i po prostoru i vremenu.

Za delovanje sile, nazvane „zapreminska" dovoljno je postojanje mase na koju sila deluje i mase od koje potiče.

Prethodna objašnjenja navode na pomisao da bi od naziva „zapreminska sila" bio pogodniji nekakav drugi koji bi ukazivao da je to „*sila mase*" ili „*srazmerna masi*". Međutim, izraz „zapreminska sila" kod nas je uobičajen i prihvaćen i može se opravdati time što se sila izražava preko elementarne zapremine, odnosno zapreminskim integralom. Kod nestišljivog fluida, i uopšte kod svakog materijala sa konstantnom gustinom, sila i jeste srazmerna sa zapreminom.

Veličina f_i ima dimenziju ubrzanja i delić bi i imao baš takvo ubrzanje kada bi na njega delovala isključivo zapreminska sila. Na njega, međutim, deluju površinske sile, koje su sile „veze", među delićima, pa posmatrani delić ima ubrzanje koje proizilazi iz sadejstva zapreminskih i površinskih sila.

Od zapreminskih sila redovno deluje *težina*, koja se izražava sa:

$$f_i = g_i = \text{gravitaciono ubrzanje u pravcu osovine } x_i\,. \tag{28–4}$$

U praktičnim zadacima se uzima:

$$g_i = \text{const}\,. \tag{28–5}$$

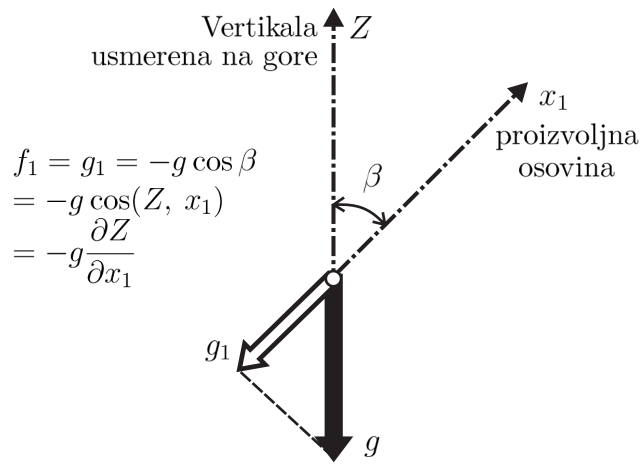
Od toga se izuzimaju samo takvi zadaci gde se obuhvataju i tako međusobno udaljeni položaji da razlika u gravitacionom ubrzanju nije zanemarljiva.

Sila težine se može izraziti i sa:

$$f_i = -\,g\,\frac{\partial\,Z}{\partial\,x_i} \tag{28–6}$$

gde je Z vertikalna osovina usmerena na gore, dok gravitaciono ubrzanje deluje na dole (odatle minus). $\partial Z/\partial x_i$ označava kosinus ugla koji zatvaraju osovina Z i proizvoljna osovina x_i. Na slici (28–1) to je prikazano za $i = 1$.

Zapreminska sila, u uobičajenim praktičnim zadacima, može da bude i inercijalna sila, koja se uzima u razmatranje kada se čvrste granice



Slika 28–1 Gravitaciono ubrzanje g i njegova projekcija g_1 na osovinu x_1.

strujnog područja kreću – na primer kreće se sud u kome je fluid, obrće se rotor pumpe, ili turbine – a strujanje se izučava relativno, u odnosu na granice. Tada se fluidu dodaje i zapreminska sila, po jedinici mase, $f_i = -\,\alpha_i$, gde je α_i ubrzanje koje ima posmatrana tačka usled kretanja granice.

* * *

Rad zapreminske sile, u jedinici vremena, na masu $\rho\,\mathrm{d}V$ je jednak sklaranom proizvodu sile $f_i\,\rho\,\mathrm{d}V$ i brzine u_i, pa je:

Rad zapreminske sile u jedinici vremena i po jedinici zapremine	$f_i\,\rho\,u_i\,.$

(28–7)

Ovde je celokupni rad „motorni”, jer zapreminska sila obavlja rad isključivo na pomeranju delića.

deo treći

OSNOVNE JEDNAČINE: JEDNAČINE NEPROMENLJIVOSTI MASE, KOLIČINE KRETANJA I ODRŽANJA ENERGIJE

31

PRIMENA NAČELA ODRŽANJA NA STRUJNO POLJE – OPŠTA RAZMATRANJA

Izvođenje, ispisivanje i tumačenje matematičkih izraza za tri zakona mehanike kada se primene na fluide, predmet su ovoga (trećeg) dela knjige, naslovljenog: „Osnovne jednačine". To su zakoni o održanju mase, količine kretanja i energije. Sva tri zakona poštuju „*načelo održanja*" koje ne dozvoljava nastajanje i nestajanje, nego samo prelazak određene veličine iz jednog vida u drugi.

Prvi navedeni zakon je o održanju ili *nepromenljivosti mase*, čije prihvatanje je već razjašnjeno u Poglavlju 12.

Količina kretanja (proizvod mase i brzine), prema drugom navedenom zakonu, održava se ako je sila ne prisili na promenu i tada je *priraštaj količine kretanja u jedinici vremena jednak delujućoj sili*. Taj zakon odreduje „silu kao uzrok promene kretanja".

Treći pomenuti zakon je zakon o održanju energije koji dozvoljava samo prelazak iz jedne vrste energije u drugu. U zadacima, problemima mehanike energija, kao sposobnost za obavljanje rada, dobija se radom.

U ovom poglavlju (31) razmatraće se ono što će moći da posluži kao zajedničko za razmatranje svih jednačina za navedene zakone, a svakom od njih će biti posvećeno po jedno od narednih poglavlja (32, 33. i 34).

* * *

Veličina Φ sadržana u zapremini V iznosi:

$$\Phi = \int_V \varphi \, \mathrm{d}V, \tag{31–1}$$

gde je φ iznos te veličine po jedinici zapremine, a to je funkcija položaja i vremena:

$$\varphi = \varphi\,(x_1, x_2, x_3, t)\,. \tag{31–2}$$

Zakonitosti u mehanici izražavaju promene vezane sa masom, pa će za to poslužiti materijalni izvod, za koji je u Poglavlju 21. naglašeno da je vezan za masu. Za uvedenu veličinu Φ taj izvod je:

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V(t)} \varphi \,\mathrm{d}V = \frac{1}{\mathrm{D}t}\left(\int_{V(t+\mathrm{D}t)} \varphi \,\mathrm{d}V - \int_{V(t)} \varphi \,\mathrm{d}V\right). \tag{31–3}$$

$V(t)$ i $V(t+\mathrm{D}t)$ su zapremine koje ista masa zauzima u trenutku t, odnosno $t+\mathrm{D}t$. Napisana razlika integrala podeljena je sa $\mathrm{D}t$ (sa vremenom u kome se ostvarila), i tako se dobio izvod $\mathrm{D}\Phi/\mathrm{D}t$, koji je materijalni (i piše se sa slovom D), jer se posmatra ista masa. Za svaki izvod, pa i za materijalni, podrazumeva se da je određen uz zamišljeno smanjivanje elementarih priraštaja (čiji je količnik) do beskonačno malenih vrednosti („teže ka nuli", kako se to kaže), pa se izvod odnosi na zapreminu $V(t)$.

Poštujući „načelo održanja" porastu velične Φ mora se naći uzrok. Neka to bude dejstvo neke druge veličine, koja po jedinici zapremine iznosi Ψ, i koja „proizvodi" navedeni porast. Ako velična Φ opada, onda ta druga veličina to „troši". I veličina Ψ je takođe (isto kao i φ) funkcija položaja i vremena. Neka se izravna $\mathrm{D}\Phi/\mathrm{D}t$, tj. priraštaj u jedinici vremena veličine Φ, sa dejstvom koje ga uzrokuje:

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V} \varphi \,\mathrm{d}V = \int_{V} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\varphi \,\mathrm{d}V) = \int_{V} \Psi \,\mathrm{d}V. \tag{31–4}$$

Pošto se pretpostavlja da je zapremina konačna, mogao se zameniti redosled diferenciranja i integrisanja.

U izrazu (31–3) uz integrale je pisano $V(t)$, odnosno $V(t+\mathrm{D}t)$. To je urađeno namerno da bi se razjasnio materijalni izvod za konačnu masu koja u trenutku t zauzima zapreminu $V(t)$. U prethodnom izrazu (31–4) pisano je jednostavno V, a tako će biti i nadalje, jer se samo po sebi podrazumeva da se izraz odnosi na bilo koji trenutak, upravo na bilo koju zapreminu – samo, razume se, u jednoj jednačini važi istovremenost za sve njene članove (ista zapremina za sve).

Da bi se jednačina (31–4) odmah približila primeni, koja će se sprovesti u narednim poglavljima, navodi se sledeće: Već ranije, iza jednačine (23–4), navedeni su neki primeri, gde se navodi na šta se može odnositi φ, koje izražava iznos neke veličine po jedinici zapremine. Ti isti primeri mogu poslužiti i ovde, ali će se navesti redosledom kojim su u početku ovog poglavlja navedena tri zakona mehanike, jer svakome odgovara određeno tumačenje za φ.

Prvo, ako je $\varphi = \rho$, tada je Φ masa, pa je $\Psi = 0$, jer „proizvodnje mase nema" – to je primena prethodnog na „zakon o održanju mase".

Drugo, ako je $\varphi = \rho\, u_j$, (u_j = brzina), Φ = količina kretanja, pa je prema zakonu o njoj, Ψ = sila po jedinici zapremine.

Treće, ako je φ = energija po jedinici zapremine, njena „proizvodnja" izražena sa Ψ može da potiče od dovođenja energije, preobraćanja druge vrste energije u posmatranu, ili od rada sila.

Materijalni izvod $\mathrm{D}\Phi/\mathrm{D}t$ razmatraće se nadalje sa svrhom njegovog preobličivanja u zbir lokalne i konvektivne komponente. Lokalna komponenta iznosi:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \varphi \,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}V, \tag{31–5}$$

jer se posmatraju lokalne promene po elementarnim zapreminama (ne prati se masa, nego se posmatra promena „u mestu"). Za jednu elementarnu zapreminu $\mathrm{d}V$ priraštaj za vreme $\mathrm{d}t$ iznosi:

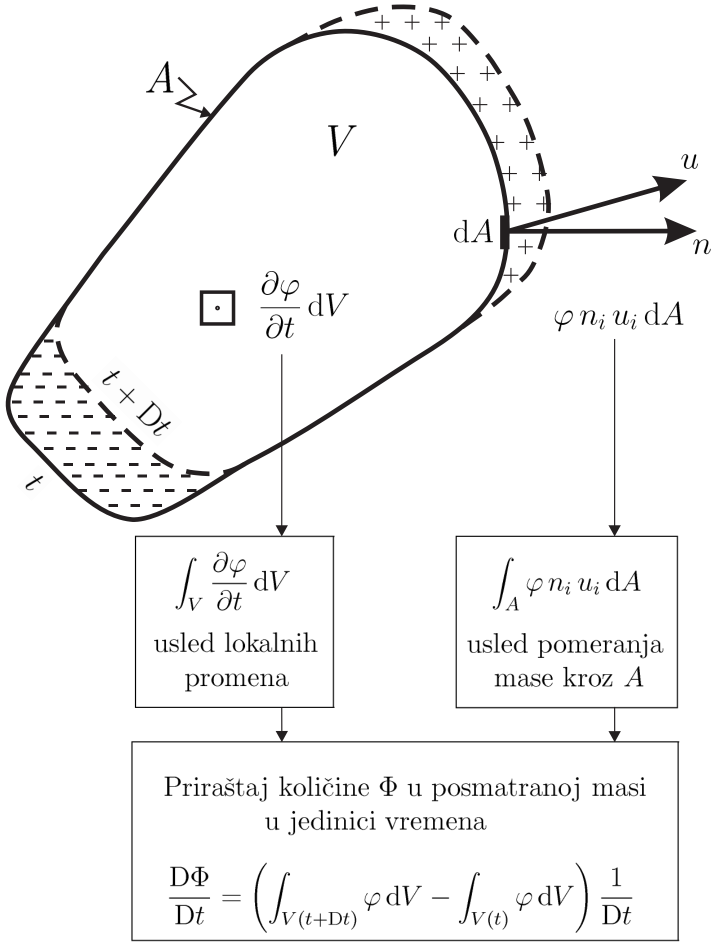
$$\frac{\partial\, \varphi}{\partial\, t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V. \tag{31–6}$$

Upotrebljeno φ je iznos neke veličine po jedinici zapremine, a zapremina $\mathrm{d}V$ je kroz vreme nepromenjena i stoga je van parcijalnog izvoda po vremenu.

Deljenjem sa $\mathrm{d}t$ i integrisanjem po zapremini, iz (31–6) dobija se (31–5), tj. $\partial\Phi/\partial t$. Integrisanje se obavlja po zapremini V u trenutku t, masa će tokom $\mathrm{d}t$ jedan elementarni deo te zapremine napustiti, a drugi osvojiti (slika 31–1), ali se time neizmerno malo menja vrednost integrala, jer je promena zapremine beskonačno malena u odnosu na zapreminu u trenutku t.

Konvektivnu komponentu određuje priraštaj usled promene položaja mase, a to je uz graničnu površinu A, uz nju masa osvaja ono što je označeno sa „+" na slici 31–1, a napušta označeno sa „–". Priraštaj zapremine (iste mase) u jedinici vremena je:

$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}t} = Q = \int_A n_i\, u_i\,\mathrm{d}A\,. \tag{31–7}$$



Slika 31–1 Uz objašnjenje materijalnog izvoda veličine Φ koja po jedinici zapremine iznosi φ.

To je proticaj kroz graničnu površinu – vidi izraz (23–8) – i to je ujedno i priraštaj zapremine posmatrane mase u jedinici vremena, kao posledica pomeranja granične površine. Od proticaja $\mathrm{d}Q$ uz deo $\mathrm{d}A$ površine A zavisi koliko će zapremine, uz $\mathrm{d}A$ masa osvojiti (odnosno napustiti), pošto $\mathrm{d}Q\,\mathrm{D}t = n_i\, u_i\, \mathrm{d}A\, \mathrm{D}t$ predstavlja priraštaj zapremine, za vreme $\mathrm{D}t$ (to je pozitivno, gde je $n_i\, u_i > 0$, i tu masa osvaja deo zapremine, a negativno je gde je $n_i\, u_i < 0$, i tu masa napušta deo zapremine). Integrisanjem $\mathrm{d}Q$ dobija se Q, i to je onda priraštaj, u jedinici vremena, zapremine koju posmatrana masa zauzima, a tako je prethodnim izrazom i napisano.

Kako veličina Φ, po jedinici zapremine iznosi φ, sa čime treba množiti svaki od sabiraka integrala (31–7), pa se dobija konvektivna komponenta materijalnog izvoda, u sledećem vidu:

$$Q_\varphi = \int_A \varphi \, n_i \, u_i \, \mathrm{d}A. \tag{31–8}$$

To je proticanje veličine Φ – jer je to shodno (23–9) – proticaj veličine koja po jedinici zapremine iznosi φ. On se odnosi na isti trenutak kao i (31–5), upravo na onaj trenutak za koji se određuje materijalni izvod, a tada površina A ograničava zapreminu V. Promena položaja iz koje je proizašlo (31–8) obavljena od trenutka t do $t + \mathrm{D}t$, a proticaj se odnosi na trenutak t, jer su kroz beskonačno kratko vreme i beskonačno malene promene veličina φ i u_i, koje ulaze u integral.

Zbir lokalne (31–5) i konvektivne (31–8) komponente daje materijalni izvod:

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} = \int_V \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} (\varphi \, \mathrm{d}V) = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, \mathrm{d}V + \int_A \varphi \, n_i \, u_i \, \mathrm{d}A. \tag{31–9}$$

Ovo će biti kasnije izvedeno i na drugi način; poći će se od materijalnog izvoda za elementarnu masu. Rezultat će, razume se, biti isti.

Iz (31–4) i (31–9) se može napisati:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, \mathrm{d}V & = & \displaystyle\int_A - \varphi \, n_i \, u_i \, \mathrm{d}A & + & \displaystyle\int_V \Psi \, \mathrm{d}V. \\ \text{(I)} & = & \text{(II)} & + & \text{(III)} \end{array} \tag{31–10}$$

U (II) usled znaka „–” je „negativno proticanje” pa tada označava (ulaz – izlaz), jer je kod proticanja izlaz pozitivan, a ulaz negativan.

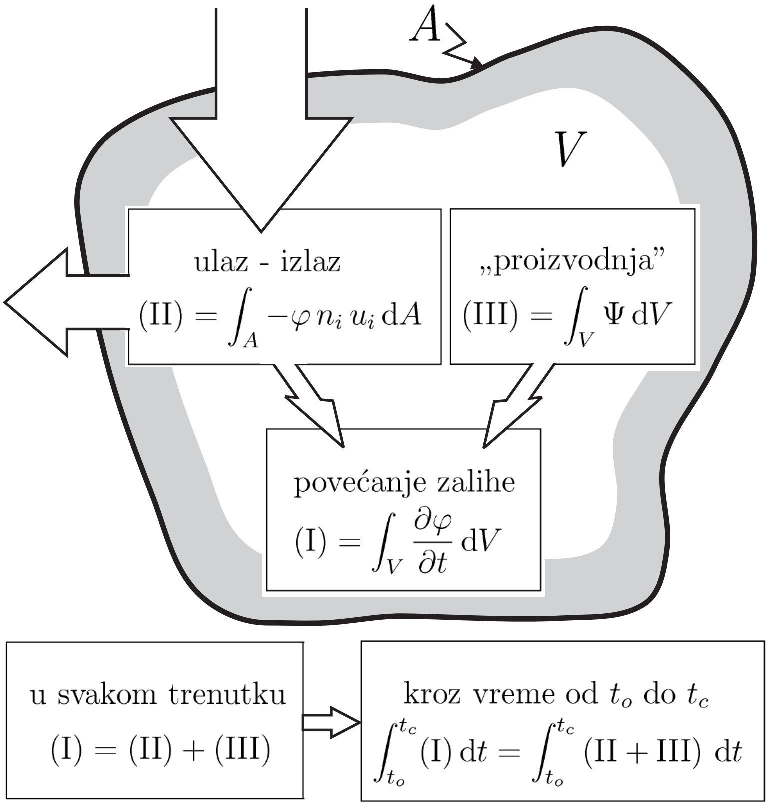
(I), (II) i (III), za određenu zapreminu menjaju se kroz vreme, one su funkcije vremena. Ako je strujanje ustaljeno (I) $= 0$, a (II) $= -$(III) $=$ Const.

Može se protumačiti da članovi (31–10) predstavljaju sledeće:

(I) je porast „zalihe” u zapremini V,
(II) je (ulaz – izlaz) kroz graničnu površinu A zapremine V,

(III) je „proizvodnja” u zapremini V,

pa jednačina kazuje: „Porast zalihe = ulaz – izlaz + proizvodnja” što čini „bilans” (a to se može prevesti kao „uravnoteženje” ili „izravnanje” – slika 31–2 šematski prikazuje prethodno objašnjeno uravnoteženje).



Slika 31–2 Šematski prikaz jednačina (31–9) i (31–10) koje uravnotežavaju promene u zapremini V, omeđanoj površinom A.

Jasno je da se svi članovi odnose na određeni vremenski trenutak i da se navedeno odnosi na jedinicu vremena – upravo to znači trenutne brzine porasta, i proizvodnje i trenutno proticanje. Međutim, ne mora se pratiti masa, nego se mogu izvesno vreme posmatrati zbivanja u istoj zapremini. I tada će se moći napraviti „bilans” za vreme od t_o do t_c, koji se prikazuje sa:

$$\int_{t_o}^{t_c} (\mathrm{I})\,\mathrm{d}t = \int_{t_o}^{t_c} [(\mathrm{II}) + (\mathrm{III})]\,\mathrm{d}t. \qquad (31\text{–}11)$$

* * *

Sve zakonitosti mehanike *suštinski su vezane za masu*, i stoga se mora pratiti masa i tako je prethodno postupljeno – razmatrao se materijalni izvod, koji izražava brzine priraštanja veličine vezane za masu. Materijalni izvod se može razdvojiti na parcijalni izvod po vremenu (koji je vezan za zapreminu) i na izraz za proticanje (a ovaj je vezan za površinu) – jednačina (31–9). Ovo znači da se praćenje mase kroz elementarno vreme svodi na posmatranje brzina promena unutar zapremine i proticanja kroz nepokretnu graničnu površinu te zapremine. Slikovito se može reći da se „kontrola" obavlja po graničnoj površini pa se ona može nazvati „*kontrolna površina*", a unutar nje se nalazi „*kontrolisana zapremina*", pa ovo omogućava da se podaci sa granične površine i oni iz zapremine unutar nje mogu izravnati – jednačina (31–10), odnosno (31–11).

U praktičnim zadacima izabere se *zapremina, određena svojom graničnom površinom*, pa se ona posmatra kroz vreme: utvrđuje se šta se u njoj zbiva tokom vremena – *zapremina je ista, a masa se menja*, a trenutni rezultati se odnose na masu koja je momentalno tu. To je uobičajena metoda, jer je pogodnija od praćenja iste mase. Ako je strujanje ustaljeno, jedna utvrđena zakonitost za jednu određenu zapreminu ne menja se vremenom, rešenje zadatka važi za sve vremenske trenutke, dok se masa na koju se to odnosi neprekidno menja.

* * *

U nastavku će se raspravljati jednačina za elementarnu zapreminu $\mathrm{d}V$ koja sadrži količinu $\mathrm{d}\Phi = \varphi\,\mathrm{d}V$. Diferenciranje (31–4) daje:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\Phi) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\varphi\,\mathrm{d}V) = \Psi\,\mathrm{d}V. \qquad (31\text{–}12)$$

Na navedeni materijalni izvod (srednji izraz) primeniće se pravilo o diferenciranju proizvoda – dobija se:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\varphi\,\mathrm{d}V)=\mathrm{d}V\,\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t}+\varphi\,\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(\mathrm{d}V)=\mathrm{d}V\left(\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t}+\varphi\,\frac{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}V}\right).\qquad(31\text{–}13)$$

Koristeći raniju jednačinu (24–15), drugi član u zagradi zamenjuje se, što dovodi do:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\varphi\,\mathrm{d}V)=\left(\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t}+\varphi\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V.\qquad(31\text{–}14)$$

Ovde treba uočiti da je:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\varphi\,\mathrm{d}V)=\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t}\,\mathrm{d}V$$

samo za nestišljiv fluid (kod koga je $\partial u_i/\partial x_i=0$).

U opštem slučaju (za stišljiv fluid), međutim, ostvaruje se:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\varphi\,\mathrm{d}V)\neq\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t}\,\mathrm{d}V,$$

jer se $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ odnosi na masu (na masu delića, koja se ne menja), ali se menja njena zapremina $\mathrm{d}V$, a to i pokazuje drugi član u zagradi na desnoj strani izraza (31–14).

Rastavljanjem materijalnog izvoda na njegove komponente, prema (21–3), izraz (31–14) se piše:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\varphi\,\mathrm{d}V)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u_i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\varphi\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V.$$

Poslednja dva člana mogu se sažeti u jedan – u izvod proizvoda – pa se, na kraju, dobija:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\varphi\,\mathrm{d}V)=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\,u_i)\right]\mathrm{d}V.\qquad(31\text{–}15)$$

Integrisanje ovog daje:

$$\begin{aligned}\int_V\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\varphi\,\mathrm{d}V)&=\int_V\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}V+\int_V\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\,u_i)\,\mathrm{d}V=\\&=\int_V\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}V+\int_A\varphi\,n_i\,u_i\,\mathrm{d}A,\qquad(31\text{–}16)\end{aligned}$$

gde je drugi integral iz zapreminskog preobraćen u površinski korišćenjem opšteg izraza (15–15) sa $Y = \varphi\, u_i$. To je već i urađeno kod proticanja – izraz (23–9). Jednačinom (31–16) postignuto je ono što je najavljeno: drugim putem se došlo do onoga što iskazuje (31–9).

Koristeći (31–14) ili (31–15) za smenjivinje materijalnog izvoda u (31–12), ta jednačina se može napisati kao:

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t} + \varphi\,\frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_i} = \Psi, \tag{31–17}$$

ili

$$\frac{\partial\,\varphi}{\partial\, t} = -\,\frac{\partial}{\partial\, x_i}\,(\varphi\, u_i) + \Psi. \tag{31–18}$$

Jednačina (31–18) predstavlja za elementarnu zapreminu dV isto što i jednačina(31–9) za konačnu zapreminu V. Kako je izraz (31–18) napisan da se odnosi na jedinicu zapremine, treba ga pomnožiti sa dV i onda leva strana znači lokalni priraštaj u jedinici vremena, a desna istovremeni (ulaz – izlaz) i „proizvodnju" – razume se sve u dV. Neposrednom integracijom jednačine (31–18), prethodno pomnožene sa dV, dobija se opet (31–9), samo bi prvi dobijeni integral na desnoj strani trebalo preobratiti u površinski.

Izrazi (31–12), (31–17) i (31–18) kasnije će se koristiti, a svi oni izražavaju isto. Jasno je da su sve te jednačine primenljive u bilo kojoj tački i bilo kome trenutku, i tada se odnose na onaj delić koji se tu i tada nalazi.

* * *

Na kraju treba naglasiti da je sve izloženo u ovom poglavlju bilo moguće zahvaljujući *neprekidnosti strujnog polja.* To je i omogućilo vezivanje jednačina za polje, upravo, vezivanje veličine za tačku, pa takva veličina izražava *lokalni iznos po jedinici zapremine* – to je, na primer, masa po jedinici zapremine – gustina, sila – ili energija, ili količina kretanja – po jedinici zapremine, itd. Ta veličina izražava *raspored po prostoru* i njenim integrisanjem se dobija veličina koja se odnosi na konačnu zapreminu u kojoj je obavljeno integrisanje. Prirodi neprekidnih sredina odgovaraju lokalne veličine vezane za tačku – one omogućavaju *istraživanje po celom polju.* Stoga se one i pojavljuju u jednačinama. Nadalje, treba u svakom trenutku iskazati momentalnu *brzinu odvijanja procesa* koja je posledica delujućih uticaja po polju i zato se u jednačinama pojavljuju veličine koje iskazuju *priraštaje u jedinici vremena.*

32
JEDNAČINA NEPROMENLJIVOSTI MASE

Jednačina koja se naziva *„jednačina nepromenljivosti mase"* (ili „jednačina održanja mase"), nosi ponegde naziv *„jednačina kontinuiteta"* (ili „neprekidnosti"). Dobija se neposrednom primenom stava o nepromenljivosti mase na neprekidne sredine, a ti su stavovi prihvaćeni u uvodnim razmatranjima – Poglavlja 12. i 13. Na osnovu stava o nepromenljivosti mase piše se:

$$\rho\,\mathrm{d}V = \text{masa delića} = \text{const},$$

pa se dolazi do izraza za materijalni izvod mase delića:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(\rho\,\mathrm{d}V) = 0, \tag{32–1}$$

ili za konačnu masu:

$$\int_V \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(\rho\,\mathrm{d}V) = 0. \tag{32–2}$$

Prethodno se može nazvati *jednačina nepromenljivosti mase*, a nadalje će se napisati u oblicima pogodnijim za primenu.

Sa (32–1) i (32–2) mogla bi se obaviti sva izvođenja iz prethodnog Poglavlja 31. Samo bi svuda trebalo staviti:

$$\varphi = \rho = \text{gustina}, \quad \text{tj.} \quad \Phi = \int_V \rho\,\mathrm{d}V = \text{masa}.$$

I nadalje, svuda – shodno (32–1) ili (32–2) – treba materijalni izvod izjednačiti sa nulom, što je isto i sa stavljanjem svuda:

$$\Psi = 0,$$

jer proizvodnje mase nema.

Takva izvođenja nema smisla ovde provoditi, jer se raspolaže onim do čega ona dovode. Jednačine (31–14) i (31–15), sa $\varphi = \rho$, i izjednačene sa nulom – što je isto kao i (31–17) i (31–18) sa $\Psi = 0$ – daju dva oblika jednačine nepromenljivosti mase, pogodna za primenu:

Jednačina nepromenljivosti mase, napisana za elementarnu masu, primenjiva u svakoj tački

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{32–3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\,(\rho\, u_i) = 0. \tag{32–4}$$

Jednačina (32–3) pokazuje da gustina delića raste (materijalni izvod gustine $\mathrm{D}\rho/\mathrm{D}t$ je pozitivan) ako se delić skuplja (brzina zapreminske dilatacije $\partial u_i/\partial x_i < 0$), i obrnuto, gustina će opadati ako se delić širi (ako mu se zapremina povećava). Kod nestišljivog fluida oba člana u (32–3) su jednaka nuli. Isto je i u (32–4).

Izjednačavanjem (31–9) sa nulom, uz $\varphi = \rho$, dobija se:

Jednačina nepromenljivosti neprekidne mase, u konačnoj zapremini V, ograničenoj površinom A (integralni oblik od 32–4)

$$\int_V \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(\rho\,\mathrm{d}V) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_A \rho\, n_i\, u_i\,\mathrm{d}A = 0. \tag{32–5}$$

Jasno je da se do (32–5) moglo doći i neposrednim integrisanjem (32–4) uz pretvaranje drugog integrala iz zapreminskog u površinski.

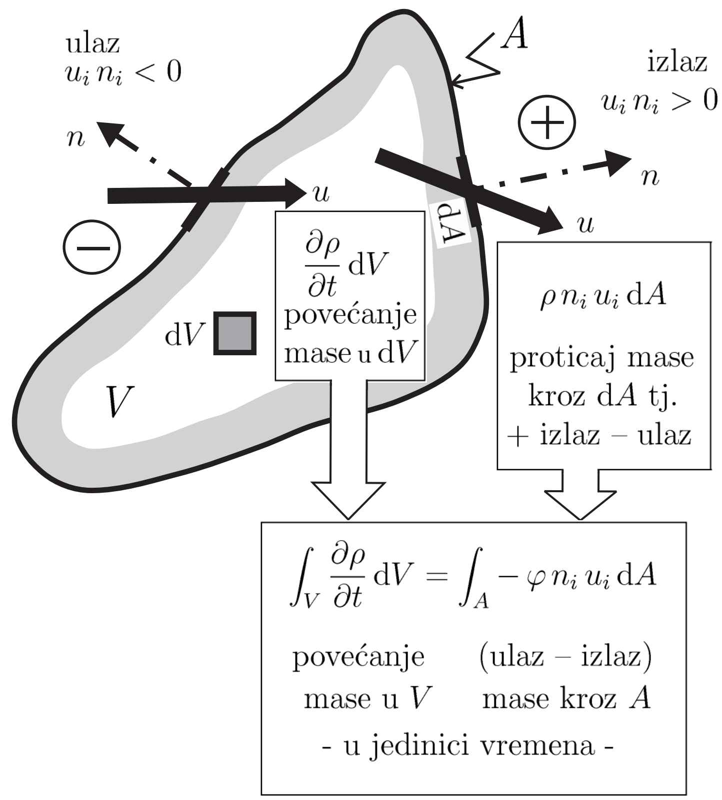
Prethodna jednačina može se napisati:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\int_A \rho\, n_i\, u_i\,\mathrm{d}A\,. \tag{32–6}$$

Ova se jednačina (32–6), u smislu tumačenja jednačine (31–10), može izreći kao: „Povećanje mase u zapremini jednako je ulazu umanjenom za izlaz mase kroz graničnu površinu”, što je i prikazano slikom 32–1, a što se može objasniti time da „masa ne može ni nastati ni nestati” – nema „proizvodnje”. Iz jednačine (32–6) mogu se izvući sledeći zaključci:

I. Ako je strujanje ustaljeno, leva strana (32–6) je jednaka nuli, a onda je i desna, koja predstavlja proticaj mase kroz graničnu površinu.

II. Za nestišljiv fluid, usled $\rho = \mathrm{const}$, dobija se da je uvek (bilo strujanje ustaljeno ili neustaljeno) proticaj kroz graničnu površinu jednak nuli, što je već zaključeno ranije, iza jednačine (23–8).



Slika 32–1 Prikaz jednačine (32–6). Porast mase u zapremini V jednak je ulazu umanjenom za izlaz kroz graničnu površinu A.

III. Prethodna dva zaključka ukazuju da leva i desna strana jednačine (32–6) nisu jednake nuli samo ako je fluid stišljiv, a strujanje neustaljeno, jer izlaz mase može da bude veći od istovremenog ulaza samo ako je u toku razređivanje fluida u zapremini (smanjenje mase), odnosno samo proces sabijanja fluida dovodi do istovremeno većeg ulaza od izlaza.

* * *

Na kraju, za nestišljiv fluid ($\rho = \text{const}$), napisaće se na osnovu (32–3) i (32–5):

Jednačina nepromenljivosti mase (32–3) i (32–5), pri $\rho = \text{const}$ (za nestišljiv fluid)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\,, \tag{32–7}$$

$$\int_A u_i\, n_i\, \mathrm{d}A = 0\,. \tag{32–8}$$

Prva jednačina već je napisana u Poglavlju 23, sa (23–6), a ono što izražava druga navedeno je iza jednačine (23–8).

* * *

Moglo se poći od opšte jednačine održanja (31–10), unoseći $\varphi = \rho$, $\Psi = 0$ i tako bi se napisalo (32–6), gde se preobraćanjem desne strane u zapreminski integral dobija:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\, u_i)\right] \mathrm{d}V = 0\,.$$

Integral mora da bude jednak nuli za proizvoljnu zapreminu V, a to znači da dodavanjem pojedinih sabiraka (za pojedine elementarne zapremine $\mathrm{d}V$) ostaje nula, pa je sabirak za svako $\mathrm{d}V$ jednak nuli, upravo izraz u ugaonoj zagradi jednak je nuli. To bi se napisalo sa (32–4). U ovom poglavlju (32) pošlo se od tačke, pa se išlo ka konačnoj zapremini. Bitno je da se početna jednačina napiše na osnovu aksiomatskog stava o održanju mase, a daljnji tok je samo onda preobličavanje i sprovođenje matematičkih operacija.

* * *

Neprekidnost fluidne sredine je dozvolila da se u prethodnom poglavlju (31) ispišu jednačine (31–12) do (31–17), koje važe za svaku tačku, jer svuda u strujnom polju ima fluida. Neprekidnost je dozvolila i prostorno integrisanje, što je dovelo do (31–9) i (31–10). Treba se podsetiti da je neprekidnost kao jedna od osnovnih pretpostavki uvedena u Poglavlju 13. da bi se odmah na početku Poglavlja 14. i izvukla prva i veoma važna posledica iz nje, a to je da se veličine mogu izražavati kao funkcija položaja i vremena – izraz (14–1). Isto je i sa veličinom φ – vidi (31–2), a to je baš i omogućilo izlaganje u prethodnom poglavlju (31), a ono nije podloga samo za izvođenje jednačina u ovom poglavlju (32), nego i u narednim. Dakle, pretpostavka o neprekidnosti fluida ne ogleda se isključivo u jednačinama (32–3), (32–4) i (32–5) u ovom poglavlju. Jedino, ako se neprekidnost ograniči i shvati samo kao neprekidnost mase, ove jednačine se mogu nazvati „jednačinama kontinuiteta” – što je u početku ovog poglavlja navedeno kao alternativan naziv. Međutim, za njih je bitno da *proizlaze neposredno iz stava o nepromenljivosti mase* – to je baš njihova osobenost – i stoga je taj naziv ovde prihvaćen i napisan uz jednačine (32–3), (32–4) i (32–5), a tako je poglavlje naslovljeno.

33
SILA KAO UZROK PROMENE KRETANJA: DINAMIČKA JEDNAČINA

Zakon *„priraštaj količine kretanja u jedinici vremena jednak je delujućoj sili”* primeniće se na elementarnu masu $\rho\,\mathrm{d}V$, sa time što se navedeni priraštaj količine kretanja izražava materijalnim izvodom, a sila prema (25–13) i (28–1):

$$\underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho\,\mathrm{d}V\,u_j)}_{\substack{\text{priraštaj količine}\\ \text{kretanja u jedinici}\\ \text{vremena}}} \quad = \quad \underbrace{f_j\,\rho\,\mathrm{d}V}_{\substack{\text{zapreminska}\\ \text{sila}}} \;+\; \underbrace{\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V.}_{\substack{\text{površinska}\\ \text{sila}}} \tag{33–1}$$

S obzirom da je elementarna masa $\rho\,\mathrm{d}V = \mathrm{Const}$, isto se može napisati:

$$\underbrace{\rho\,\mathrm{d}V}\;\underbrace{\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t}} = \underbrace{f_j\,\rho\,\mathrm{d}V + \frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V.} \tag{33–2}$$

$$\text{masa}\cdot\text{ubrzanje} = \qquad \text{s i l a}$$

U napisanim jednačinama, čiji su članovi vektori, usmerenost daje „j”.

Leve strane prethodnih jednačina izjednačene su međusobno ranije izrazom (21–7) gde je prvi put naveden pojam „količine kretanja”, dok je u istom Poglavlju 21. nešto ranije i uvedeno „ubrzanje” – izraz (21–4).

Jednačina (33–2) može se preobličiti deljenjem sa $\rho\,\mathrm{d}V$, razdvajanjem ubrzanja na lokalno i konvektivno, shodno (21–4), te razdvajanjem površinske sile na sferni i devijatorski deo, prema (26–7). Dobija se:

$$
\boxed{
\begin{array}{c}
\text{Dinamička jednačina za elemetarnu masu,}\\
\text{primenljiva u svakoj tački}\\[2ex]
\underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}_{\displaystyle\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t}} = f_j + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{\rho}\left(\frac{-\partial p}{\partial x_j}\right)}^{\text{sferni deo}} + \overbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}^{\mathrm{d}}}{\partial x_i}}^{\text{devijatorski deo}}}\\[2ex]
\text{ubrzanje} = \underbrace{\begin{array}{c}\text{zapre–}\\\text{minska}\\\text{sila}\end{array} + \begin{array}{c}\text{površinska}\\\text{sila}\end{array}}_{\text{po jedinici mase}}
\end{array}
}
\qquad (33\text{–}3)
$$

Napisaće se i razvijeni oblik prethodne jednačine, za jedan od pravaca uzeće se, primera radi, $j=2$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \\
&= f_2 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^{\mathrm{d}}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3}\right).
\end{aligned}
\qquad (33\text{–}4)
$$

U prethodnom Poglavlju 31. ukazalo se da se tamošnja uopštena razmatranja mogu primeniti na količinu kretanja (a to se sada razmatra), uz zamene:

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \rho\, u_j && = \text{gustina} \cdot \text{brzina, pa je}\\
\Phi &= \int_V \varphi\, \mathrm{d}V = \int_V \rho\, u_j\, \mathrm{d}V && = \text{količina kretanja i}\\
\Psi &= \rho\, f_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} && = \text{sila po jedinici zapremine.}
\end{aligned}
$$

Tako se i jednačina (33–1) može shvatiti kao poseban slučaj opšte jednačine (31–12) uz navedene zamene. Leva strana (33–1) može se razvijati na isti način kao što je to rađeno od (31–13) do (31–15), samo svuda treba staviti $\varphi = \rho\, u_j$, pa se dobija:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(\rho\, u_j\,\mathrm{d}V) = \left[\frac{\partial}{\partial\, t}\,(\rho\, u_j) + \frac{\partial}{\partial\, x_i}\,(\rho\, u_j\, u_i)\right]\mathrm{d}V\,.$$

Ova jednačina koristiće se za zamenu leve strane u (33–1), a potom će se (33–1) podeliti sa dV. Tako će se dobiti:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Drugi oblik dinamičke jednačine za tačku}\\ \dfrac{\partial}{\partial\, t}\,(\rho\, u_j) = -\,\dfrac{\partial}{\partial\, x_i}\,(\rho\, u_i\, u_j) + \rho\, f_j + \dfrac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\, x_i}.\end{array}} \qquad (33\text{–}5)$$

Ovo se moglo napisati neposredno iz (31–18), sa navedenim izrazima za φ i Ψ.

Množenjem (33–5) sa dV i integrisanjem po zapremini i sa preobraćanjem integrala prvog člana desne strane u površinski dolazi se do:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial\, t}\,(\rho\, u_j)\,\mathrm{d}V = -\int_A \rho\, u_j\, n_i\, u_i\,\mathrm{d}A + \int_V \rho\, f_j\,\mathrm{d}V + \int_V \frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\, x_i}\,\mathrm{d}V. \qquad (33\text{–}6)$$

Ova jednačina je primer primene uopštene jednačine (31–10) iz koje se mogla i dobiti jednostavnim stavljanjem odgovarajućeg za φ i Ψ, pa se može i tumačiti u tamo objašnjenom smislu. Još će se poslednji član u (33–6) zameniti površinskim integralom, shodno (25–14), i potom podeliti na sferni i devijatoreki deo, prema (26–8), pa se dobija (33–7):

Dinamička jednačina, za zapreminu V, ograničenu površinom A (integralni oblik za (33–5))

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, u_j)\,\mathrm{d}V = \int_A -u_j\,\rho\, n_i\, u_i\,\mathrm{d}A + \int_V f_j\,\rho\,\mathrm{d}V + \\ + \underbrace{\int_A -p\, n_j\,\mathrm{d}A + \int_A \sigma_{ij}^{\mathrm{d}}\, n_i\,\mathrm{d}A}_{\displaystyle\int_A \sigma_{ij}\, n_i\,\mathrm{d}A} \tag{33–7}$$

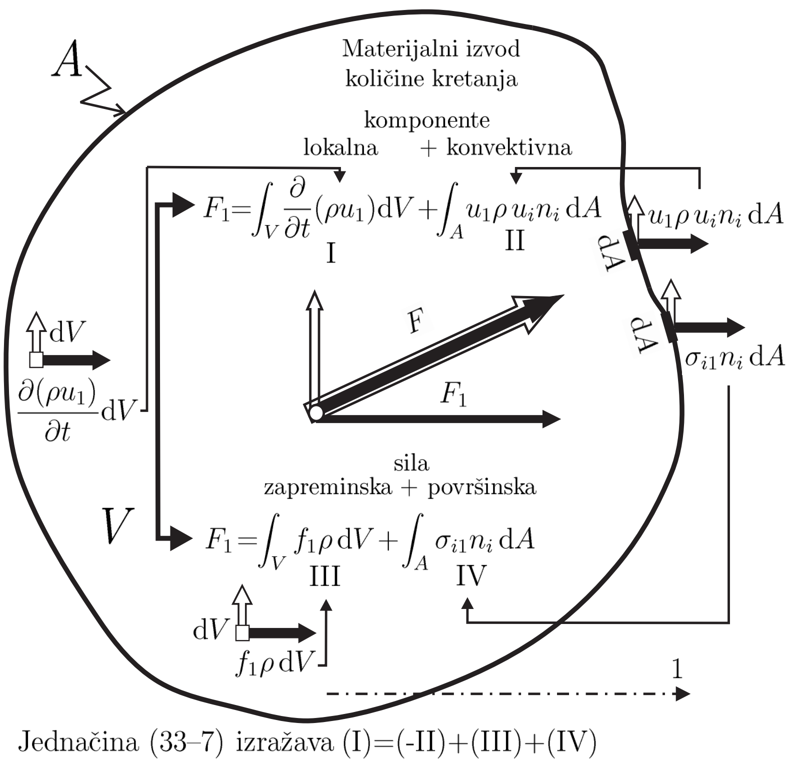
$$\underbrace{\begin{bmatrix}\text{priraštaj}\\ \text{količine}\\ \text{kretanja u } V\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{(ulaz − izlaz)}\\ \text{količine}\\ \text{kretanja kroz } A\end{bmatrix}}_{\text{u jedinici vremena}} + \begin{bmatrix}\text{zapre−}\\ \text{minska}\\ \text{sila}\end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix}\overbrace{\text{sferni + devijatorski}}^{\text{površinska sila}}\\ \text{deo} \qquad\qquad \text{deo}\end{bmatrix}$$

Izrazi za sile u (33–6) i (33–7) već su ranije ispisani u (25–14), (26–8) i (28–2), jer je već tamo obavljeno integrisanje kojim se došlo do sile na konačnu zapreminu V, omeđanu zatvorenom površinom A.

Na slici 33–1 dat je prikaz dinamičke jednačine za konačnu masu za uticaje u pravcu „1”.

* * *

Izlaganja u ovom poglavlju mogla su otpočeti ispisivanjem jednačine (33–6), na osnovu opšte jednačine (31–10), stavljanjem za φ i Ψ količine kretanja, odnosno sile, po jedinici zapremine. Diferenciranjem te jednačine, uz prethodno preobraćanje površinskih integrala u zapreminske, došlo bi se do (33–5), a ta jednačina, uz pomoć jednačine nepromenljivosti mase (32–4) dovela bi do (33–3) i na kraju do (33–1), a to je



Slika 33–1 Prikaz uticaja u pravcu „1" u dinamičkoj jednačini, za konačnu masu smeštenu u zapremini V, omeđanoj površinom A.

izraz od koga su izlaganja otpočela. Prema tome, dovoljno je prihvatiti aksiomatski samo jedan početni stav, a sve ostalo je preobličavanje, uz odgovarajuće matematske operacije. Tako je bilo i u Poglavlju 32.

* * *

U razmatranje se može uvesti „*inercijalna sila*":

$$\mathrm{d}I_j = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(\rho\, u_j\, \mathrm{d}V)\,, \tag{33–8}$$

ili, u konačnom obliku:

$$\begin{aligned} I_j &= -\int_V \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(\rho\, u_j\, \mathrm{d}V) = \\ &= -\int_V \frac{\partial}{\partial\, t}\,(\rho\, u_j)\, \mathrm{d}V - \int_A u_j\, \rho\, n_i\, u_i\, \mathrm{d}A, \end{aligned} \tag{33–9}$$

što znači da je:

(„inercijalna sila") $= -$(priraštaj količine kretanja u jedinici vremena).

Treba naglasiti da je tačniji produženi naziv „fiktivna inercijalna sila", jer to u stvari i nije sila, ali se sa njome može formalno postupati kao sa silom.

Jednačine (33–1), odnosno (33–7) mogu se pisati sa „inercijalnom silom" datom sa (33–8), odnosno (33–9), pa će biti iskazane kao „ravnoteža sila". Zbir svih sila, uključivši „inercijalnu", daje nulu, takođe daje nulu i zbir momenata sila. Upravo prihvatanjem „inercijalnih sila" zadatak dinamike formalno se svodi na zadatak statike. To je primena *načela D'Alambera* (D'ALEMBERT) na zadatke „mehanike fluida".

Uvođenjem „inercijalne sile" jednačina (33–6) može se napisati kao „ravnoteža sila":

$$\underbrace{\int_V -\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, u_j)\,\mathrm{d}V + \int_A -\rho\, u_j\, n_i\, u_i\,\mathrm{d}A +}_{\text{,,inercijalna sila"}} + \tag{33–10}$$

$$+\underbrace{\int_V f_j\,\rho\,\mathrm{d}V}_{\text{zapreminska sila}} + \underbrace{\int_A \sigma_{ij}\, n_i\,\mathrm{d}A}_{\text{površinska sila}} = 0. \tag{33–11}$$

$$+ \text{zapreminska sila} + \text{površinska sila} = 0$$

Jednačina pokazuje da, uz poznatu zapreminsku silu (ona je obično težina), površinska sila i „inercijalna sila" zavise jedna od druge (što proizilazi iz međusobne veze rasporeda brzina i napona) pa, uz zadatu jednu, jednačina određuje drugu. Na primer, poznavanjem „inercijalne sile" (što znači poznavanjem brzina), jednačina daje površinsku silu na celu graničnu površinu A, a može i na jedan deo te površine, ako je poznata (graničnim uslovima) sila na preostali deo površine.

Medutim, uravnoteženjem sila, dolazi se samo do vrednosti tražene sile i njenog pravca, a ne i do napadne tačke. Stoga treba primeniti i *jednačinu momenata*. Naime, za poznate sile zna se i momenat, a izjednačenje momenata svih sila daje momenat i za silu koja se traži, a to uz već određenu silu, daje njen krak, upravo napadnu tačku.

Jednačina momenata će se napisati prema sledećem: pojedina elementarna sila, za zapreminu dV, odnosno površinu dA, čiji je vektor položaja x_k, ima momenat (u odnosu na koordinatni početak), jednak vektorskom proizvodu te sile (koja ima j-pravac) i vektora x_k. Vektorski proizvod će stoga imati treći pravac „i", a dvostruki indeks koji se pojavljuje u izrazima za neke od sila, i koji je bio napisan sa „i" pisaće se sa „l" (to je svejedno, jer je indeks „nemi"). Vektorski proizvod će se pisati po ugledu na (15–7). Momenat pojedine od sila na zapreminu V, ograničenu površinom A, dobiće se integrisanjem momenata svih elementarnih sila, koje tu silu sačinjavaju. Na osnovu objašnjenog postupka dolazi se do *jednačine momenata sila*:

$$\int_V -\varepsilon_{jki}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\rho\,u_j)\,x_k\,\mathrm{d}V + \int_A -\varepsilon_{jki}\,\rho\,u_j\,u_l\,n_l\,x_k\,\mathrm{d}A + \\ + \int_V \varepsilon_{jki}\,\rho\,f_j\,x_k\,\mathrm{d}V + \int_A \varepsilon_{jki}\,\sigma_{lj}\,n_l\,x_k\,\mathrm{d}A = 0. \qquad (33\text{–}12)$$

* * *

Nije beskorisno naglasiti da su sve ispisane jednačine u ovom poglavlju (33) neposredne ili posredne posledice jednog jedinog zakona, koji se, kao početni (kao načelo), prihvata aksiomatski. To je u sprovedenom izvođenju izraz (33–1), ili (33–2), jer su oba suštinski isto, a samo su dva načina pisanja iste stvari. To se nadalje preobličavalo. Jednostavnim integrisanjem jednačine za elementarnu masu dobijena je jednačina za konačnu masu. Moglo se međutim početi od konačne mase pa na nju primeniti početni stav kao aksiom i onda diferenciranjem doći do jednačine za elementarnu masu. Dakle, postoji samo jedna zakonitost koja kaže da je sila uzrok promene u kretanju, a ona se može na razne načine pisati i preobličavati. Koristi se čitav niz raznih jednačina, daju im se razni nazivi, iskazuje se niz zakona, pa se može smetnuti sa uma da se radi o istoj stvari.

Taj jedini aksiom je Drugi Njutnov (NEWTON) zakon: „Promena kretanja srazmerna je delujućoj sili i obavlja se u pravcu sile". Ova „promena kretanja" (u originalu: „mutatio motus") je proizvod iz mase i ubrzanja ili izvod količine kretanja po vremenu (oboje je ista stvar za konstantnu masu), pa se taj zakon primenjen na elementarnu masu može napisati sa (33–1) ili (33–2). Prvi Njutnov zakon: „Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog pravolinjskog kretanja dok pod dejstvom sila ne bude prinuđeno da to stanje promeni" sadržan je u drugom, kao poseban slučaj, jer se iz Drugog zakona može zaključiti da kada nema sile (kada je jednaka nuli), nema ni promene brzine. Brzina je vektor, pa njena nepromenljivost znači pravolinijsko jednoliko tečenje ili mirovanje.

U svom delu „Matematski principi filozofije prirode" („Philosophiae Naturalis Principia Mathematica "), izdatom 1687. godine, svoje malopre pomenute zakone Njutn je nazvao „Zakoni kretanja" („Leges motus") i sa pravom im dao karakter aksioma („Axiomata"). Oni su temelj klasične dinamike. Osnovni je zadatak Dinamike istraživanje i utvrđivanje veze između kretanja i delujućih sila. Stoga su jednačine, koje su sve izrazi osnovnog zakona dinamike koji se može izreći: „sila je uzrok promeni u kretanju", i nazvane ovde „dinamičke" – u tom smislu je i dat naslov ovom poglavlju.

Uzgred da se pomene i Treći Njutnov zakon (o akciji i reakciji), koji je takođe korišćen u ranijim izlaganjima; kod površinskih sila slikom 25–1 se ukazalo da desni deo tela deluje na levi istom silom, a suprotno usmerenom, kojom levi deluje na desni, a kod zapreminske sila u Poglavlju 28. rečeno je da postoji međusobno dejstvo jedne mase na drugu.

* * *

U ovom (33) i prethodnom (32) poglavlju ispisano je veoma mnogo jednačina, ali u svakom poglavlju suštinski je data samo jedna jednačina, dok su ostale samo preobličavanje iste, odnosno rezultati njenog integrisanja ili diferenciranja. Raspolaže se stoga samo jednom skalarnom jednačinom („jednačina nepromenljivoati mase") i jednom vektorskom („dinamička jednačina"), pa se ova druga može napisati i kao 3 skalarne (za svaki pravac po jedna). Znači, raspolaže se sa svega 4 jednačine, a treba odrediti, u funkciji položaja i vremena, 10 veličina: gustinu, 3 komponente brzine i 6 komponenata napona (pretpostavlja se da su zapreminske sile poznate). Prema tome, ne raspolaže se dovoljnim brojem jednačina. Međutim, moraju postojati veze između napona i brzine deformacija i one se moraju istražiti – to će i biti urađeno u narednom (četvrtom) delu ove knjige. Kako su brzine deformacija parcijalni izvodi brzina, te veze će povezivati napone i brzine, upravo one veličine koje već ulaze u navedenih 10, pa će se tako dobiti nedostajući broj jednačina.

34
PRIMENA NAČELA O ODRŽANJU ENERGIJE: JEDNAČINA ENERGIJE

Množenjem jednačine (33–2) sa u_j dobijaju se na desnoj strani skalarni proizvodi između sile i brzine, a to je rad u jedinici vremena (jer se množi sila sa pomeranjem u jedinici vremena), a leva strana postaje:

$$\rho\,\mathrm{d}V\,\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t}\,u_j = \rho\,\mathrm{d}V\,\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{u_j\,u_j}{2}\right) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\rho\,\mathrm{d}V\,\frac{u_j\,u_j}{2}\right), \qquad (34\text{–}1)$$

jer se primenilo $\rho\,\mathrm{d}V = \mathrm{const}$, a pre toga obavljena je zamena:

$$u_j\,\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(u_j\,u_j)\,,$$

što zbog udvostručenog indeksa znači:

$$u_1\,\frac{\mathrm{D}u_1}{\mathrm{D}t} + u_2\,\frac{\mathrm{D}u_2}{\mathrm{D}t} + u_3\,\frac{\mathrm{D}u_3}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(u_1\,u_1 + u_2\,u_2 + u_3\,u_3)\,.$$

Koristeći (34–1) može se napisati rezultat najavljenog skalarnog množenja (sa u_j) jednačine (33–2) – dobija se sledeća skalarna jednačina:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\rho\,\mathrm{d}V\,\frac{u_j\,u_j}{2}\right)} = \underbrace{f_j\,\rho\,\mathrm{d}V\,u_j + \frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V\,u_j}\ . \qquad (34\text{–}2)$$

$$\underbrace{\begin{array}{c}\text{priraštaj}\\ \text{kinetičke}\\ \text{energije}\end{array} \qquad = \qquad \text{rad sila}}_{\text{u jedinici vremena}}$$

Leva strana je napisana kao priraštaj kinetičke energije delića u jedinici vremena (ili materijalni izvod kinetičke energije delića mase $\rho\,\mathrm{d}V$), jer desnu stranu čini rad sila na toj istoj masi, opet u jedinici vremena. Ovo proizlazi iz tumačenja da se rad ne obavlja uzaludno, nego se njime povećava kinetička energija, tj. energija u kretanju (usled posedovanja brzine), a energija je, po svojoj definiciji, sposobnost za obavljanje rada, i ta se sposobnost u tu svrhu i može iskoristiti. Dakle, stečeno radom može se iskoristiti za obavljanje rada – ovo je u skladu sa „načelom održanja". Može se napisati:

$$\begin{aligned} \rho\,\mathrm{d}V\,\frac{u_j\,u_j}{2} &= \text{kinetička energija mase } \rho\,\mathrm{d}V, \\ \frac{u_j\,u_j}{2} &= \text{kinetička energija po jedinici mase,} \\ u_j\,u_j = u_1\,u_1 + u_2\,u_2 + u_3\,u_3 &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u^2. \end{aligned}$$

Kinetička energija je skalarna veličina, a ovde se kvadrat brzine (u^2) prikazuje kao skalarni proizvod vektora u_j i u_j.

Treba naglasiti da (34–2) nije suštinski ništa novo u odnosu na dinamičku jednačinu (33–2), iz koje se dobila formalnim putem – jednostavnim množenjem sa brzinom. Stoga se i pojmovi „rad" i „kinetička energija" mogu shvatiti da je to ono što se dobilo množenjem, pa se onda tome daje tumačenje, kako je malo pre i učinjeno.

Napisano se odnosi na ono što je u (34–2) iskazano kao rad, ali to nije celokupan rad sila i stoga se napisano mora oceniti kao površan zaključak, na osnovu rezultata jednog formalnog postupka, bez ulaženja u celokupne energetske promene. Upoređenje poslednjeg člana u (34–2) sa jednačinom (27–2), ukazuje da je u (34–2) ušao samo „motorni" rad, a to je u skladu sa razmotrenim i nagoveštenim u Poglavlju 27. Na osnovu (27–2) može se napisati za drugi član na desnoj strani, u (34–2):

$$\begin{aligned} u_j\,\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V \;&= \frac{\partial}{\partial\,x_i}\,(\sigma_{ij}\,u_j)\,\mathrm{d}V \;-\; \sigma_{ij}\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V \\ &\underbrace{\text{motorni rad} = \text{ukupni rad} - \text{deformacioni rad}}_{\text{u jedinici vremena}} \end{aligned} \tag{34–3}$$

Deformacioni rad je mehaničkoj energiji oduzet, on prelazi u drugu vrstu energije – u toplotnu (toplota je energija). Stoga malopređašnje rasuđivanje treba ispraviti i reći da *priraštaj kinetičke energije čini rad sila umanjen za rad koji pređe u drugu vrstu energije*.

Posle ovoga objašnjenja, u (34–2) obaviće se zamena prema (34–3) i podeliće se sa $\rho\,\mathrm{d}V = \text{const}$, pa se dobija jednačina (34–4), u kojoj se materijalni izvod prikazuje i rastavljen na komponente, shodno (21–3).

Jednačina mehaničke energije za elemetarnu masu, primenjiva u svakoj tački

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_j\,u_j}{2}\right)+u_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_j\,u_j}{2}\right)}_{\downarrow}$$

$$[\text{ukupni rad}]-[\text{deformacioni rad}]$$

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,(u_j\,\sigma_{ij})-\frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}}_{\downarrow} \tag{34–4}$$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{u_j\,u_j}{2}\right)}_{\substack{\downarrow\\ \text{priraštaj}\\ \text{kinetičke}\\ \text{energije}}}=\underbrace{u_j\,f_j}_{\substack{\downarrow\\ \text{rad}\\ \text{zapreminskih}\\ \text{sila}}}\quad+\quad\underbrace{\frac{1}{\rho}\,u_j\,\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}}_{\substack{\downarrow\\ \text{motorni rad}\\ \text{površinskih}\\ \text{sila}}}\,.$$

- u jedinici vremena i po jedinici mase -

U Poglavlju 31. pokazalo se već da se celokupna tamošnja razmatranja mogu odnositi i na energetska razmatranja, samo se jednostavno stavi:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{2}\,\rho\,u_j\,u_j,\\ \Phi &= \int_V \frac{1}{2}\,\rho\,u_j\,u_j\,\mathrm{d}V,\\ \Psi &= \rho\,f_j\,u_j+\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}\,u_j,\end{aligned}$$

pa se na osnovu (31–18) piše:

Drugi oblik jednačine mehaničke energije za tačku

$$\frac{\partial}{\partial\,t}\left(\rho\,\frac{u_j\,u_j}{2}\right)=-\frac{\partial}{\partial\,x_i}\left(\rho\,\frac{u_j\,u_j}{2}\,u_i\right)+\rho\,f_j\,u_j+\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}\,u_j. \tag{34–5}$$

Jednačina (34–5) množena sa dV i potom integrisana, uz zamenu zapreminskog integrala površinskim, daje (34–6):

Jednačina mehaničke energije, za zapreminu V, ograničenu površinom A (integralni oblik od (34–5))

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\frac{u_j\,u_j}{2}\right)\mathrm{d}V = \int_A -\rho\,\frac{u_j\,u_j}{2} n_i\,u_i\,\mathrm{d}A + \\ + \int_V \rho\,f_j\,u_j\,\mathrm{d}V + \int_V u_j\,\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}\mathrm{d}V, \tag{34–6}$$

priraštaj kinetičke energije u V	=	(ulaz – izlaz) kinetičke energije kroz A	+	
	+	rad zapreminskih sila	+	motorni rad površinskih sila.

- sve u jedinici vremena -

Ova jednačina je poseban slučaj izraza (31–9) pa se iz njega može dobiti uz odgovarajuće i malo pre navedene zamene za φ i Ψ. Sva tamošnja uopštena razmatranja, koja su pratila (31–9), mogu se stoga primeniti i na (34–6), isto kao i na (32–6) i (33–7).

Poslednji integral u (34–6) je motorni rad površinskih sila, a on se može prikazati kao ukupan rad smanjen za deformacioni, što se, shodno (27–7), piše:

$$\int_V u_j\,\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V = \int_A \sigma_{ij}\,u_j\,n_i\,\mathrm{d}A - \int_V \sigma_{ij}\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V \tag{34–7}$$

i uz ovo se treba podsetiti ranije objašnjenog – iza navedene jednačine (27–7) – da je deformacioni rad, ili motorni rad, ako se posmatraju svaki zasebno, nemoguće izraziti površinskim integralom.

Radovi u (34–7) mogu se podeliti na sferni i devijatorski deo, kako je to objašnjeno na kraju Poglavlja 27.

I kod izvođenja jednačine za mehaničku energiju, isto kao i kod izvođenja prethodnih jednačina, koje se razmatraju u poglavljima 32. i 33 –

bitno je da se pođe od jednog početnog stava, i dođe do prve jednačine, a nadalje je sve samo preobličavanje.

Deformacioni rad se deli na sferni (kojim se menja zapremina) i devijatorski (kojim se menja oblik). Ta podela je već obavljena u Poglavlju 27 – može se na osnovu izraza (27–3), (27–4) i (27–5) napisati:

$$\sigma_{ij}\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i} = \sigma_{ij}\,\omega_{ij} = p\left(-\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_i}\right) + \sigma_{ij}^{\mathrm{d}}\,\omega_{ij}^{\mathrm{d}}\,. \tag{34–8}$$

Pritisak je uvek pozitivan (nema nikada zatezanja), pa je sferni deo rada pozitivan kada se zapremina smanjuje, kada je $(\partial u_i/\partial x_i) < 0$, jer tada pritisak deluje u smeru deformisanja (kako je već objašnjeno iza jednačine 27–4). Toplota se dobija sabijanjem (smanjivanjem zapremine), fluid se greje i tada je deformacioni rad pozitivan, u stvari pozitivno je ono što se u jednačini (34–3) oduzima i što će se preobratiti u toplotu. Kada se zapremina povećava, rad na njenom deformisanju je negativan (jer pritisak deluje suprotnim smerom od smera deformisanja) i sada se fluid hladi.

Dakle, kod sfernog dela deformacionog rada proces izmene energije se može obavljati u oba smera (povratan je) – iz mehaničke energije u toplotnu i obrnuto. Korisno je uz ovo podsetiti se da sferni deo deformacionog rada, pa i navedena obostrana izmena energije, postoje samo kod stišljivog fluida.

Za devijatorski deo deformacionog rada može se tvrditi da je uvek pozitivan, jer je proizvod napona σ_{ij}^{d} i njemu odgovarajuće brzine deformacije ω_{ij}^{d} uvek pozitivan ($\sigma_{ij}^{\mathrm{d}}\,\omega_{ij}^{\mathrm{d}} > 0$), jer pozitivnom naponu uvek odgovara pozitivna brzina deformacije (a negativnom negativna) što je objašnjeno i pregledno napisano na slici 25–2 (za tangencijalne napone), a za devijatorski deo normalnih napona vidljivo je upoređenjem slika 24–4 i 26–1.

Ovo znači da je rad na promeni oblika za mehaničku energiju nepovratan – tu se uvek trenjem stvara toplota. Stoga se taj rad (devijatorski deo deformacionog rada), sa stanovišta mehaničke energije jednostavno „otpisuje". On se naziva i „*izgubljen*", a taj izraz je pogodan, jer to ne znači „uništen". Ovo drugo bilo bi neprihvatljivo sa stanovišta održanja energije, dok „izgubljena" znači da je izašla iz uvida (iz „bilansa mehaničke energije"). Ovo gubljenje energije naziva se i „*disipacija*" energije, što doslovno znači „rasipanje", a to ima svoje opravdanje, jer se po celom strujnom polju mehanička energija gubi (rasipa se) prelaskom u drugu vrstu energije.

Veza izmedu mehaničke energije i toplote je neminovna, pa se toplotne pojave nameću proučavanjima u „mehanici fluida”. Toplotnim pojavama, kao svojim osnovnim zadatkom, bavi se „termodinamika”, koja se u praksi izdvaja od „mehanike fluida”.

U „mehanici fluida” nastoji se da se što manje ulazi u toplotne pojave – upravo samo onoliko koliko je neophodno sa stanovišta uticaja toplote na kretanje. Ako toplota dobijena deformacionim radom zanemarljivo menja temperaturu, „izgubljena energija” se jednostavno proceni i „otpiše” i ne razmatra se više. Tako se i radi u svim zadacima nestišjivog fluida gde nema namernog dovodenja ili odvodenja toplote, a zadaci grejanja i hlađenja ulaze u „termodinamiku”. Kod stišiljivog fluida, gde je izmena toplotne i mehaničke energije značajnija, ipak se pokušava sa rešavanjem zadataka bez promene temperature (izotermni procesi) ili se rešavaju uz pretpostavku da nema ni odvođenja ni dovođenja toplote. Ako se ne mogu takve pretpostavke prihvatiti, ulazi se u termodinamička razmatranja.

Sa druge strane, „termodinamiku” prvenstveno interesuju toplotne promene, pa se u strujanje (u mehaniku) ulazi kao u sredstvo za prenošenje toplote.

U nastavku u razmatranje ulazi *toplota (toplotna energija)* da se dobije uvid kuda je otišao deformacioni rad i da se napiše najpre jednačina toplote, a potom će se ta spojiti sa napisanom jednačinom za mehaničku energiju, i dobiće se jednačina celokupne energije – kao izraz zakona o održanju energije.

Najpre se moraju uvesti neki pojmovi o toploti da bi se iza toga razmatrale energetske promene.

Uvodi se:

Θ = temperatura,
C = *specifična toplota* (energija potrebna da se jedinica mase zagreje za jedinicu temperature) i
$C\,\Theta$ = toplota po jedinici mase.

Iznos toplote po jedinici zapremine je stoga:

$$\varphi = C\,\Theta\,\rho, \tag{34–9}$$

pa elementarna zapremina sadrži količinu toplote:

$$\mathrm{d}\Phi = \varphi\,\mathrm{d}V = C\,\Theta\,\rho\,\mathrm{d}V\;, \tag{34–10}$$

a konačna zapremina sadrži:

$$\Phi = \int_V C\,\Theta\,\rho\,\mathrm{d}V\,.$$

Toplota se prenosi dvojako. Prvo, toplotu u posmatranu zapreminu unose, i iz nje iznose, delići koji je poseduju, i drugo, toplota se može pronositi i bez kretanja delića, a usled razlike u temperaturi (i kada se masa ne kreće toplota se pronosi sa toplijeg mesta ka hladnijem). Za razliku od prvog načina koji se obavlja tečenjem mase, tj. *strujanjem (konvekcijom)*, drugi se obično naziva *provođenje (kondukcija)* i on je zavisan od provodljivosti sredine kroz koju se obavlja. Za provođenje se uvodi:

q_i = *energija koja se provodi u jedinici vremena i kroz jedinicu površine.*

Postoji analogija između brzina u_i i veličine q_i: prva pronosi zapreminu, a druga energiju, obe su vektori koji izražavaju prenos po jedinici površine i u jedinici vremena, pa se q_i može nazvati „brzina provođenja energije".

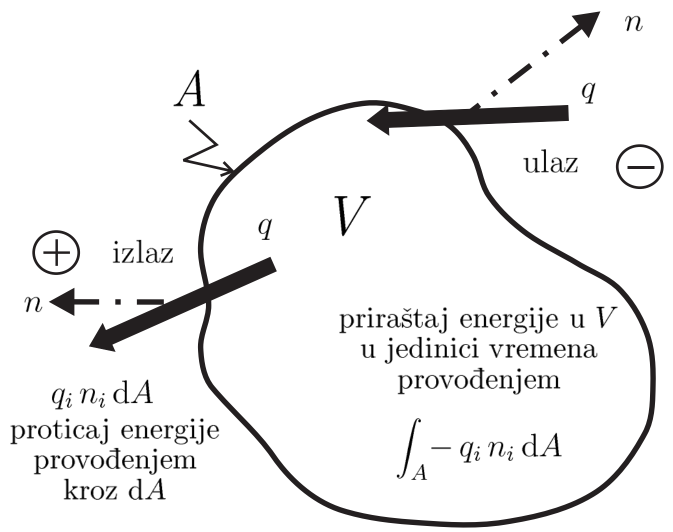
Zapremini V, ograničenoj površinom A, predata energija (zadržana) usled provođenja, u jedinici vremena, iznosi (slika 34–1):

$$\int_A - q_i\,n_i\,\mathrm{d}A = \int_V -\frac{\partial\,q_i}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V\;, \tag{34–11}$$

gde je znak „–" usled toga što je $q_i\,n_i > 0$ baš tamo gde fluid izlazi (isto je i kod proticaja, jer je n_i uvek ort spoljne normale). Izraz (34–11) je odmah preobraćen sa površinskog integrala u zapreminski – analogija sa (23–8) je očigledna, treba samo tamošnje u_i zameniti sa q_i i dobija se (34–11).

U elementarnoj zapremini $\mathrm{d}V$, shodno (34–11), priraštaj energije je:

$$\Psi_q\,\mathrm{d}V = \frac{\partial(-q_i)}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V, \tag{34–12}$$



Slika 34–1 Predata energija (zadržana) usled provođenja, u jedinici vremena, u zapremini V, ograničenoj površinom A.

što je napisano kao „proizvodnja” (Ψ i ovde označava „proizvodnju” po jedinici zapremine, a indeks q je dodat da se radi samo o onome što se dobija usled provođenja energije sa q_i).

Drugi deo proizvodnje ove „nemehaničke” energije je deformacioni rad, naveden u (34–3) kao oduzet mehaničkoj energiji – on se ovde prepisuje:

$$\Psi_\sigma\, \mathrm{d}V = \sigma_{ij}\, \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\, \mathrm{d}V, \tag{34–13}$$

pa zbir između (34–12) i (34–13), podeljen sa dV daje „proizvodnju” („izviranje”) energije po jedinici zapremine:

$$\Psi = \Psi_q + \Psi_\sigma = \frac{\partial(-q_i)}{\partial\, x_i} + \sigma_{ij}\, \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}. \tag{34–14}$$

Primena opšteg „načela održanja”, odnosno izraza (31–12), uz dΦ prema (34–10), a Ψ prema neposredno napisanom (34–14), daje izravnanje prirasta toplote sa onim što to uzrokuje:

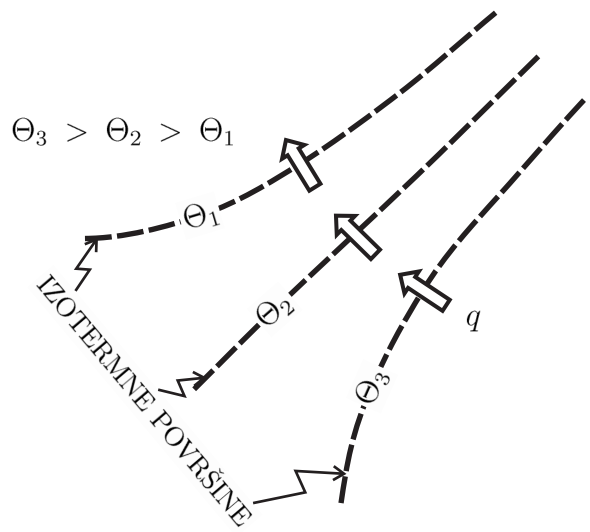
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\, (C\, \Theta\, \rho\, \mathrm{d}V) = \frac{\partial(-q_i)}{\partial\, x_i}\, \mathrm{d}V + \sigma_{ij}\, \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\, \mathrm{d}V. \tag{34–15}$$

q_i je nametnut rasporedom temperature Θ po prostoru – ostvaruje se:

$$q_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \Theta) \,. \tag{34–16}$$

λ je *koeficijent provodljivosti*, zavisan od materijala kroz koji se toplota provodi i za isti materijal u praktičnim primerima se uzima $\lambda = \text{const}$.

Jednačina (34–16) kazuje da je vektor q_i jednak negativnom gradijentu skalara $\lambda \Theta$, što znači da se toplota pronosi normalno na površine iste temperature (izotermne površine), i to smerom kojim temperatura opada – slika 34–2. Ovo važi ne samo za $\lambda \Theta = \text{const}$, nego dozvoljava da je λ funkcija od temperature, jer je tada $\lambda \Theta = \text{const}_1$, za $\Theta = \text{const}_2$.



Slika 34–2 Toplota se provodi normalno na površine iste temperature (od više ka nižoj).

Iz (34–16) se dobija:

$$\frac{\partial(-q_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial (\lambda \Theta)}{\partial x_i} \right] \quad \text{ili} \quad \frac{\partial^2 (\lambda \Theta)}{\partial x_i \, \partial x_i}. \tag{34–17}$$

Drugi izvod mora se napisati sa udvostručenim indeksom, jer je takva i leva strana (ona je divergencija), upravo mora se prikazati da znači ponavljanje, jer on znači:

$$\frac{\partial^2(\lambda\Theta)}{\partial x_i\,\partial x_i}=\frac{\partial^2(\lambda\Theta)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2(\lambda\Theta)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2(\lambda\Theta)}{\partial x_3^2}.$$

Jednačina (34–15) deli se sa $\rho\,\mathrm{d}V=\text{const}$, uz prethodnu zamenu prema (34–17) – dobija se:

Jednačina toplote za elementarnu masu,
primenjiva u svakoj tački

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(C\,\Theta) &= \frac{\partial}{\partial t}(C\,\Theta)+u_i\,\frac{\partial(C\,\Theta)}{\partial x_i}=\\ &=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2(\lambda\Theta)}{\partial x_i\,\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\end{aligned} \tag{34–18}$$

priraštaj toplote = dovedena toplota + dobijeno deformacionim radom.

- sve po jedinici mase i u jedinici vremena -

Ova jednačina je tako napisana da dozvoljava da specifična toplota C i koeficijent provodljivosti λ budu ne samo konstante, nego i funkcije od temperature Θ, iako se u praktičnoj primeni smatraju konstantama, jer su to približno.

Na isti način kao kod mehaničke energije, ili kod dinamičke jednačine, mogu se koristiti opšti izrazi iz Poglavlja 31. Tako se može i ovde napisati i drugi oblik za jednačinu za tačku, jednostavnim stavljanjem u (31–10) za φ i Ψ napisano sa (34–9) i (34–14), i uz zamenu (34–17). Tako se dobija:

Drugi oblik jednačine toplote za tačku

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,C\,\Theta)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\rho\,C\,\Theta\,u_i)+\frac{\partial^2(\lambda\Theta)}{\partial x_i\,\partial x_i}+\sigma_{ij}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{34–19}$$

Integrisanje (34-19) daje:

Jednačina toplote za konačnu zapreminu V, ograničenu površinom A

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(C\,\Theta\,\rho)\,\mathrm{d}V = \int_A -C\,\Theta\,\rho\,n_i\,u_i\,\mathrm{d}A + \int_A \frac{\partial(\lambda\,\Theta)}{\partial\,x_i} n_i\,\mathrm{d}A + \\ + \int_V \sigma_{ij}\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V\,, \tag{34–20}$$

priraštaj toplote u V	=	(ulaz – izlaz) toplote kroz A strujanjem mase + provodjenjem	+
	+	dobijeno deformacionim radom.	

- sve u jedinici vremena -

U ovoj jednačini uviđa se dvojako unošenje toplote u zapreminu.

* * *

Na posebnom pregledu napisana je *jednačina energije* – (34–21) – koja je *razdvojena na mehaničku energiju i toplotu* – upravo ovaj zajednički izraz napisan je sabiranjem (34–4) i (34–18). Zajednički izraz je i *izraz zakona održanja energije* jer kazuje: *Sav rad sila i predata energija čine priraštaj energije* (kinetičke + toplotne).

Isto je urađeno sa jednačinama (34–6) i (34–20), one su ujedinjene u zajednički izraz (34–22) – ispisan takođe na drugom posebnom pregledu.

Na kraju prethodnog (33) poglavlja govoreno je o nedostatku jednačina u odnosu na broj veličina koje treba istražiti i, sada, posle ovoga (34) poglavlja ne može se taj zaključak promeniti, jer jednačina mehaničke energije, kako je objašnjeno, ne donosi ništa suštinski novo (ona je dobijena množenjem dinamičke jednačine sa u_j). Jednačina toplote, odnosno jednačina celokupne energije, unose novu zakonitost, ali

Jednačina mehaničke energije (34–4)

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{u_j\,u_j}{2}\right) = f_j\,u_j + \overbrace{\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}\,u_j}^{\text{motorni rad}}$$

Jednačina energije za elementarnu masu

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\rho\,\frac{u_j\,u_j}{2} + C\,\Theta\right) = f_j\,u_j + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\sigma_{ij}\,u_j) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2\,(\lambda\,\Theta)}{\partial x_i\,\partial x_i} \tag{34–21}$$

$$\begin{bmatrix}\text{priraštaj}\\ \text{energije}\\ \text{(kinetička +}\\ \text{toplotna)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{rad}\\ \text{zap-}\\ \text{remin-}\\ \text{skih}\\ \text{sila}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{rad}\\ \text{povr-}\\ \text{šinskih}\\ \text{sila}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{predata}\\ \text{toplota}\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(C\,\Theta) = \underbrace{\frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}_{\substack{\text{deformacioni}\\ \text{rad}}} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2\,(\lambda\,\Theta)}{\partial x_i\,\partial x_i}$$

Jednačina toplote (34–18)

– sve je izraženo po jedinici mase i u jedinici vremena –

je ovo unošenje omogućeno i novom veličinom za istraživanje – temperaturom, pa ostaje i nadalje najavljeni zadatak: traženje veza između napona i deformacija – što će se raspravljati u Četvrtom delu – i time će se broj jednačina izravnati sa brojem veličina koje se određuju.

Jednačina mehaničke energije (34–6)		Jednačina toplote (34–20)
$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\, \frac{u_j\, u_j}{2}\right) \mathrm{d}V +$	$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(C\,\Theta + \frac{u_j\, u_j}{2}\right)\right] \mathrm{d}V =$ priraštaj energije u V	$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, C\,\Theta) \mathrm{d}V =$
$+\int_A \rho \frac{u_j\, u_j}{2} u_i\, n_i\, \mathrm{d}A =$	$=\int_A -\rho\left(C\,\Theta + \frac{u_j\, u_j}{2}\right) u_i\, n_i\, \mathrm{d}A +$ (ulaz – izlaz) energije unošenjem mase (konvekcijom)	$=\int_A -\rho C \Theta\, u_i\, n_i\, \mathrm{d}A +$
	$+\int_A \frac{\partial(\lambda\,\Theta)}{\partial x_i}\, n_i\, \mathrm{d}A +$ toplota unešena provođenjem (kondukcijom)	$+\int_A \frac{\partial(\lambda\,\Theta)}{\partial x_i}\, n_i\, \mathrm{d}A +$
$= \int_V f_j\, u_j\, \rho\, \mathrm{d}V +$	$+\int_V f_j\, u_j\, \rho\, \mathrm{d}V +$ rad zapreminskih sila	
$+\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}\, u_j\, \mathrm{d}V$ motorni rad	$+\int_A \sigma_{ij}\, n_i\, u_j\, \mathrm{d}A$ rad površinskih sila	$+\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\, \mathrm{d}V$ deformacioni rad

Jednačina energije za konačnu masu u zapremini V omeđanoj površinom A (34–22)

– sve je izraženo u jedinici vremena –

35

REŠENJE DINAMIČKE JEDNAČINE ZA NEKE JEDNOSTAVNE ZADATKE IDEALNOG NESTIŠLJIVOG FLUIDA

U prethodnim poglavljima zaključeno je da nema dovoljno jednačina za određivanje svih veličina koje se u njima nalaze. Ako se obave izvesna uprošćavanja smanjiće se broj veličina koje se određuju, pa će se njihov broj izravnati sa brojem raspoloživih jednačina.

Kao prvo, pretpostavlja se da je fluid *idealan*, pa shodno tumačenju tog pojma, prilikom njegovog uvođenja – pri kraju Poglavlja 26 – otpada devijatorski deo napona i jednačina (33–3) se skraćuje:

Dinamička jednačina za idealni fluid

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = f_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j}. \tag{35–1}$$

Ova jednačina se naziva *Ojlerova* (EULER).

Međutim, ni ova pretpostavka nije dovoljna da broj jednačina postane dovoljan. Uzeće se da je fluid *nestišljiv*, tj.

$$\rho = \text{const}\,. \tag{35–2}$$

Za ovako određenu poznatu gustinu, uz poznavanje zapreminske sile, broj veličina koje se odreduju je 4; to su: u_1, u_2, u_3, i p, a na raspolaganju stoje takođe 4 jednačine: 3 dinamičke tipa (35–1) i jednačina nepromenljivosti mase (32–7). Dakle, za *idealan nestišljiv fluid u potpunosti su određene zakonitosti*, jer se mogu napisati sve potrebne jednačine – time je stvorena i načelna mogućnost za rešavanje zadatka. Iako su prihvaćene pretpostavke znatno uprostile stvar, opet su tačna matematska rešenja (rešivim integralima) moguća samo uz daljno pojednostavljenje uslova – upravo samo za izvesne slučajeve, koji će se raspravljati u produžetku (I, II, III). Međutim, treba napomenuli da nemogućnost tačnog matematskog rešenja ne znači da se pojedinačni primer ne može uopšte rešiti, ako ima dovoljno jednačina i ako su granični i početni uslovi jasno određeni. To se može, iako možda sa teškoćama, približnim integrisanjem sa konačnim priraštajima.

Treća pretpostavka je: Od zapreminskih sila deluje samo *težina*, pa se, shodno (28–4), (28–5) i (28–6), piše:

$$f_i = g_i = \mathrm{Const}, \tag{35–3}$$

ili

$$f_i = -\, g_i \, \frac{\partial Z}{\partial x_i} \,. \tag{35–4}$$

Koristeći (35–4) i uvlačeći veličine p i g u diferenciranje jer su konstantne, izraz (35–1) se preobličava u:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g\, Z + \frac{p}{\rho} \right) . \tag{35–5}$$

Ovo je dinamička jednačina za *nestišljiv idealan fluid pod dejstvom težine* (od zapreminskih sila deluje samo težina). Ta jednačina se može integrisati samo za daljnja pojednostavljenja koja će se raspravljati u nastavku.

I. *Jednačina mirovanja*

Leva strana u (35–5) je nula, a integracijom desne strane se dobija:

Jednačina hidrostatike

$$g\, Z + \frac{p}{\rho} = \mathrm{const}\,. \tag{35–6}$$

Ona važi za *jednu celu neprekidnu zapreminu fluida*, jer je dobijena integrisanjem jednačine koja važi u proizvoljnoj tački. Konstanta se eliminiše sa:

$$p = p_\mathrm{o} \qquad \mathrm{za} \qquad Z = Z_\mathrm{o} \,, \tag{35–7}$$

pa jednačina kojom se određuje *pritisak p u bilo kojoj tački na visinskom položaju Z* glasi:

$$g\,(Z - Z_\mathrm{o}) + \frac{p - p_\mathrm{o}}{\rho} = 0\,. \tag{35–8}$$

Jednačina (35–6), odnosno (35–8), izražava da pritisak fluida konstantne gustine koji miruje pod dejstvom težine, zavisi isključivo od visinskog položaja (od kote) Z i da raste linearno sa opadanjem visine. Površine istog pritiska su horizontalne ravni, što se moglo zaključiti i iz (35–1) sa levom stranom jednakom nuli, jer $\partial p/\partial x_j$ gradijent pritiska, ima isti pravac i smer kao f_j, a ovde je $f_j = g_j$. Gradijent pritiska znači leži u vertikalnom pravcu, a to znači da su površine $p = \text{const}$ horizontalne, a kako je gradijent usmeren na dole, pritisak raste tim smerom.

Iz jednačine (35–1) koja izražava sile po jedinici mase, množenjem sa $\rho\,\mathrm{d}V$ i potom integrisanjem, dolazi se do sile za konačnu zapreminu V. Pri tome se leva strana izostavlja, jer se razmatra mirovanje, a na desnoj se stavlja $f_j = g_j$. Po obavljenom integrisanju, dobijeni integral za površinsku silu se preobrati iz zapreminskog u površinski integral. Tako se dobija:

Jednačina hidrostatičke ravnoteže,
za zapreminu V, ograničenu površinom A

$$g_j\,\rho\,V + \int_A -\,p\,n_j\,\mathrm{d}A = 0\,. \tag{35–9}$$

Do iste jednačine moglo se doći i neposredno iz dinamičke jednačine (33–7) u kojoj važe samo član sa zapreminskom silom (gde je $f_j = g_j$) i član sa pritiskom.

Za hidrostatiku, za mirovanje teških fluida (tečnosti), i ostvaruju se uzete pretpostavke o konstantnoj gustini i nedelovanju tangencijalnih napona, pa su prema tome jednačine primenljive bez ikakvih ograničenja. Izuzimaju se zadaci gde kapilarne pojave imaju uticaj na rešenje, jer kod tih zadataka površinski tangencijalni naponi nisu zanemarljivi – oni su baš bitni.

II. *Jednačina za jednu strujnicu ustaljenog strujanja*

Posmatraju se uticaji u pravcu brzine – taj pravac će se označiti jednostavno sa x i postavlja se u svaku tačku strujnice u pravcu tangente – u tom pravcu leži brzina u – to je „jedina komponenta" brzine. S obzirom da otpadaju dve komponente brzine, ubrzanje u posmatranom pravcu x se izražava sa:

$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\, u}{\partial\, t} + u\,\frac{\partial\, u}{\partial\, x} = \frac{\partial\, u}{\partial\, t} + \frac{\partial}{\partial\, x}\left(\frac{u^2}{2}\right), \tag{35–10}$$

pa će dinamička jednačina za taj pravac glasiti:

$$\frac{\partial\, u}{\partial\, t} + \frac{\partial}{\partial\, x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = f_x - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\, p}{\partial\, x}. \tag{35–11}$$

Vektor brzine leži u x pravcu (tako je uslovljeno) ali to ne znači da u tom pravcu leži i vektor ubrzanja. On će biti u tom pravcu samo za pravolinijsku trajektoriju, dok kod krivolinijske, ubrzanje i obavlja skretanje, pa mora postojati njegova komponenta i u pravcu normalnom na x. Medutim, u jednačinu (35–11) koja izražava uticaje u x-pravcu ulazi komponenta ubrzanja u tom pravcu, a to je (35–10), što je i ušlo u (35–11).

Jednačina (35–11) se može integrisati samo uz uslove ustaljenosti (otpada prvi član), te nestišljivosti, i uz poznatu zapreminsku silu (težina) – za te uslove jednačina postaje:

$$\frac{\partial}{\partial\, x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial\, x}\Big(g\, Z\Big) - \frac{\partial}{\partial\, x}\left(\frac{p}{\rho}\right), \tag{35–12}$$

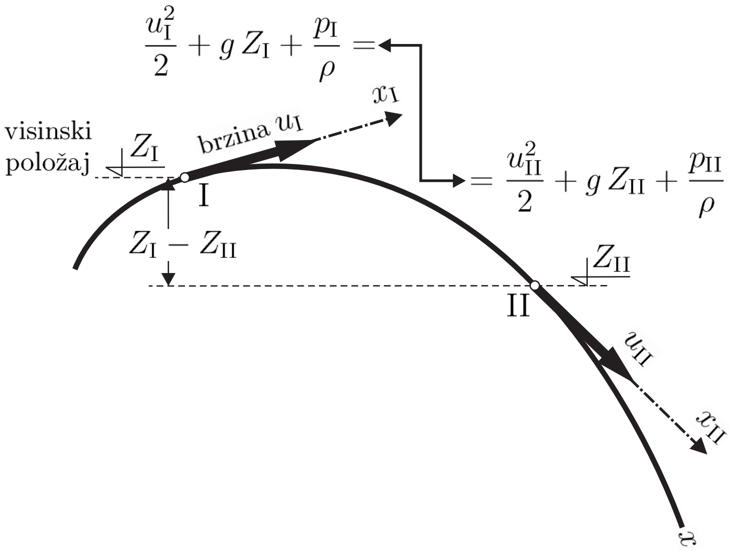
ili

$$\frac{\partial}{\partial\, x}\left(\frac{u^2}{2} + g\, Z + \frac{p}{\rho}\right) = 0.$$

Ovo važi za svaku tačku strujnice, a to znači za svaki njen elementarni deo dx, pa se integrisanje obavlja duž strujnice (x je rastojanje mereno duž strujnice (slika 35–1), jer se osovina x za svako dx postavlja u pravcu tangente). Integrisanje daje *Bernulijevu* (BERNOULLI) *jednačinu:*

Jednačina za jednu strujnicu ustaljenog strujanja pod dejstvom težine za nestišljiv i idealan fluid

$$\boxed{\frac{u^2}{2} + g\, Z + \frac{p}{\rho} = \text{const.}} \tag{35–13}$$



Slika 35–1 Strujnica idealnog nestišljivog fluida, sa ustaljenim brzinama u dve tačke i energijama po jedinici mase.

Nije beskorisno podsetiti se objašnjenog u Poglavlju 22. da je strujnica i trajektorija ista linija kada je strujanje ustaljeno – prema tome za (35–13) moglo se reći i da *„važi za jednu trajektoriju"*.

Veličine u (35–12) ili (35–13) su funkcije isključivo od x (od rastojanja po strujnici). Zadatak je, dakle, linijski i za ustaljeno strujanje, gde je svaka veličina Y funkcija samo od rastojanja po jednoj liniji, tj. $Y = Y(x)$, kako je to u Poglavlju 17, jednačinom (17–6), i izraženo.

Jednačina (35–11) predstavlja isto što i (35–1), upravo ubrzanje, odnosno sile po jedinici mase, pa se integrisanjem po x (po pomeranju) dobija kinetička energija, odnosno rad, po jedinici mase – a to predstavlja (35–13). Ona se može napisati i upoređivanjem vrednosti u dve proizvoljne tačke I i II iste strujnice (ili trajektorije). Tako se izbacuje konstanta i piše se:

$$\frac{u_{II}^2 - u_I^2}{2} + g\,(Z_{II} - Z_I) + \frac{p_{II} - p_I}{\rho} = 0,$$

ili

$$\frac{u_{\mathrm{II}}^2 - u_{\mathrm{I}}^2}{2} = g\,(Z_{\mathrm{I}} - Z_{\mathrm{II}}) + \frac{p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}}{\rho}. \tag{35–14}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} \text{priraštaj} & & \text{rad} & & \text{rad} \\ \text{kinetičke} & = & \text{sila} & + & \text{sila} \\ \text{energije} & & \text{težine} & & \text{pritiska} \end{array}}_{-\ \text{po jedinici mase}\ -}$$

Ako se jedinica mase spusti sa kote Z_{I} na Z_{II} (vidi sliku 35–1) obavljen je rad $g\,(Z_{\mathrm{I}} - Z_{\mathrm{II}})$ bez obzira kakav je oblik trajektorije. Sila po jedinici mase, data sa (35–4), pri elementarnom pomeranju obavi rad:

$$-g\,\frac{\partial Z}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i\,,$$

pa se od tačke $x_i = \mathrm{I}$ do tačke $x_i = \mathrm{II}$, čije su kote Z_{I} i Z_{II}, obavi rad:

$$-g\int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} \frac{\partial Z}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = g\,(Z_{\mathrm{I}} - Z_{\mathrm{II}})\,.$$

Ako se uvede pojam „potencijalna energija”, obavljeni rad je smanjenje potencijalne energije, jer se radom iskoristila ta mogućnost koju ta energija pruža. *Potencijalna energija, po jedinci mase, zbog toga što se masa nalazi na koti* Z, *iznosi* $g\,Z$, jer će se njeno svođenje na nulu moći obaviti samo kroz rad $g\,Z$, a to je spuštanjem mase sa Z na kotu $Z = 0$.

Rad sila pritiska, po jedinici mase, ako se pritisak spusti sa p_{I} na p_{II} iznosi:

$$\frac{p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}}{\rho},$$

pa je formalno isto kao i sa težinom. Stoga se i p/ρ *može shvatiti kao potencijalna energija po jedinici mase usled delovanja pritiska* p. Uz ovo treba dati objašnjenje da ova potencijalna energija nije suštinski potencijalna energija sadržana u pritisku kako se ona podrazumeva u „teoriji elastičnosti”. Tamo se tvrdi da pritisnuto telo sadrži potencijalnu energiju, koju će iskoristiti na širenje čim se pritisak smanji, dok kod nestišljivog fluida, kakav se ovde razmatra, delić uopšte ne menja zapreminu bez obzira na vrednost pritiska, koji, prema tome, uopšte ne obavlja deformacioni rad. Pritisak kod nestišljivog fluida može da obavlja samo motorni rad i na sposobnost za taj rad se i odnosi navedena „potencijalna energija”.

U smislu ovih objašnjenja o potencijalnoj energiji, jednačini (35–13) daće se i odgovarajuće tumačenje:

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{u^2}{2} + \left(g\,Z + \dfrac{p}{\rho} \right) = \text{const.} \\[2ex] \underbrace{\text{kinetička} \ + \ \text{potencijalna}}_{\substack{\text{ukupna energija} \\ \text{po jedinici mase} \\ \text{za nestišljiv i idealan fluid.}}} \end{array}} \tag{35–15}$$

Ovo je zakon o održanju energije i on se odnosi na mehaničku energiju, ali za idealan nestišljiv fluid, gde nema otuđenja rada u drugu vrstu energije, gde je deformacioni rad jednak nuli, pošto promena zapremine nema (nestišljiv fluid), a naponi koji menjaju oblik su izostavljeni kao zanemarljivi (idealan fluid).

Konstanta u (35–13) je ista za jednu strujnicu, a od strujnice do strujnice može i da se menja. To zavisi od graničnih uslova, pa oni mogu nametnuti i istu konstantu i za niz strujnica. Međutim, ista konstanta za celo strujno polje biće osigurana bezuslovno uz još jedan dodatni uslov, što se raspravlja u narednom slučaju (III).

U praktičnim razmatranjima (35–14) upotrebljava se ako je dejstvo devijatorskog dela napona zanemarljivo. Ako to nije, mora se o tome voditi računa – to će se napisati simbolično:

$$\frac{u_{\mathrm{II}}^2 - u_{\mathrm{I}}^2}{2} = g\,(Z_{\mathrm{I}} - Z_{\mathrm{II}}) + \frac{p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}}{\rho} + Mot\,^{\mathrm{d}}_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}}\,. \tag{35–16}$$

$Mot\,^{\mathrm{d}}_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}}$ je rad devijatorskog dela napona, po jedinici mase, od tačke I do tačke II strujnice (i stoga ga treba poznavati u svim tačkama) – to je *motorni rad.* On se može, kao i u ranijim izlaganjima iskazati i kao ukupan rad umanjen za deformacioni rad.

III. *Jednačina za ustaljeno nevrtložno strujno polje*

Za nestišljiv, idealan fluid i ustaljeno strujanje jednačina (35–13) važi samo za jednu strujnicu, ali ako se uslovi još i nevrtložnost (irotacionalnost) važiće za celo strujno polje. Taj uslov – prema (24–8) – glasi:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \tag{35–17}$$

U jednačini (35–5) otpada prvi član (jer se raspravlja ustaljeno strujanje) a u drugom se može, zahvaljujući (35–17), obaviti zamena da se pojavljuje izvod po „j" (kakav je i na desnoj strani), što će baš i omogućiti integrisanje. Sa ovim primedbama (35–5) daje:

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(g\,Z + \frac{p}{\rho}\right),$$

ili

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_i\,u_i}{2} + g\,Z + \frac{p}{\rho}\right) = 0. \tag{35–18}$$

Integrisanje će se sprovesti po pravcu „j" – upravo po bilo kome pravcu dobiće se isto, i važiće za celo strujno polje, a to je jednačina (35–12), jer je $u_i\,u_i = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u^2$. Ovime je dokazano što je nagovešteno. *Za celo nevrtložno strujno polje nestišljivog idealnog fluida važi:*

$$\frac{u^2}{2} + g\,Z + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \tag{35–19}$$

Sada se posmatra zapremina V, koju ograničava zatvorena površina A. Množenje (35–18) sa $\rho\,\mathrm{d}V$ i potom integrisanje daje:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\,\rho\left(\frac{u^2}{2} + g\,Z + \frac{p}{\rho}\right)\mathrm{d}V = 0,$$

jer je izraz u zagradi konstanta. Pretvaranjem ovoga integrala u površinski – shodno (15–15) – dobija se:

$$\int_A \rho\left(\frac{u^2}{2} + g\,Z + \frac{p}{\rho}\right) n_j\,\mathrm{d}A = 0. \tag{35–20}$$

Ovo je dinamička jednačina za konačnu masu, smeštenu u zapreminu V, ograničenu sa površinom A i sve je svedeno na površinski integral. Treba zapaziti da se i zapreminska sila može svesti na površinski integral kada je data sa (35–4), jer je:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(g\,Z)\,\mathrm{d}V = \int_A g\,Z\,n_j\,\mathrm{d}A\,. \tag{35–21}$$

I jednačina energije se može svesti na površinski integral, upravo na sledeću jednačinu proticanja:

$$\int_A \rho\left(\frac{u^2}{2} + g\,Z + \frac{p}{\rho}\right) n_j\,u_j\,\mathrm{d}A = 0, \tag{35–22}$$

koju je lako dokazati jer se svodi na:

$$\underbrace{\rho\left(\frac{u^2}{2} + g\,Z + \frac{p}{\rho}\right)}_{\text{Const.}}\underbrace{\int_A n_j\,u_j\,\mathrm{d}A}_{Q} = 0.$$

Q je proticaj kroz zatvorenu površinu koji mora da bude jednak nuli (jer se razmatra nestišljiv fluid).

Jednačina (35–22) se može iskazati: (ulaz – izlaz) energije (kinetička + potencijalna) kroz zatvorenu površinu jednak je nuli, jer se unutar površine mehanička energija ne stvara (rad je prelaz iz potencijalne u kinetičku, ili obrnuto), niti se otuđuje u drugu vrstu energije, a zbog ustaljenosti nema promene kroz vreme. Zahvaljujući pojednostavljenju uslova došlo se i do veoma jednostavne jednačine energije.

deo četvrti

VEZE IZMEĐU NAPONA I DEFORMACIJA I JEDNAČINE KOJE SU POSLEDICE TIH VEZA

41
VEZE IZMEĐU DEVIJATORSKOG DELA NAPONA I DEFORMACIJA ZA VISKOZNI FLUID

Na kraju Poglavlja 33. rečeno je da je broj dotle napisanih jednačina nedovoljan (manji od broja veličina koje se određuju), a taj zaključak ostao je i posle Poglavlja 34. Usput je nagovešteno da će se vezama između napona i deformacija dobiti nedostajući broj jednačina.

Za fluid konstantne (i poznate) gustine otpada istraživanje gustine po prostoru i vremenu. Otpada i istraživanje veze između napona i deformacija za sferni deo, jer nepromenljivost gustine znači i nepromenljivost zapremine delića (fluid je nestišljiv). Za nestišljiv fluid treba istraživati samo veze za devijatorski deo napona i deformacija – to je predmet ovog Poglavlja 41. Za stišljiv fluid, pored tih veza, treba istraživati veze i za sferni deo napona i deformacija, a to je namenjeno Poglavlju 42.

* * *

Posmatra se veoma prost slučaj strujanja nestišljivog fluida. Ono je ustaljeno, ravansko – u ravni (1, 2), pravolinijsko i paralelno – brzine su usmerene isključivo u pravcu „1”, slika 41–1. Može se napisati:

$$u_2 = u_3 = 0,$$

pa je:

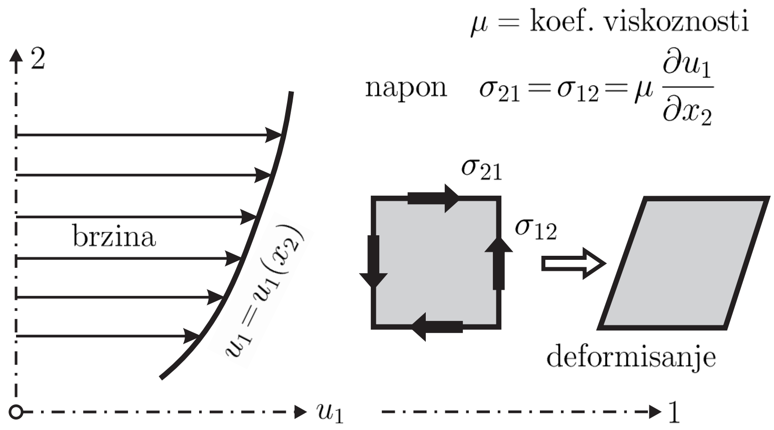
$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0.$$

Nestišljivost zahteva $\partial u_i / \partial x_i$ jednako nuli, pa je i

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0.$$

Iz ovoga sledi da je brzina funkcija isključivo od x_2, tj.

$$u_1 = u_1(x_2). \qquad (41–1)$$



Slika 41–1 Brzina strujanja i naponi za ravansko, paralelno, pravolinijsko strujanje viskoznog nestišljivog fluida.

U takvom strujanju od parcijalnih izvoda brzina po koordinatnim pravcima nije jednako nuli samo $\partial u_1/\partial x_2$, tj. od svih deformacija ostvaruje se samo klizanje ugla $(1,2)$, čija je brzina:

$$\omega_{12}=\omega_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, u_1}{\partial\, x_2}-\frac{\partial\, u_2}{\partial\, x_1}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial\, u_1}{\partial\, x_2}\,. \tag{41–2}$$

što je napisano prema (24–9), uz korišćenje uslova ovoga zadatka, koji zbog $u_2=0$, daje i $(\partial u_2/\partial x_1)=0$.

U pretpostavljenom strujnom polju, zbog navedenog stanja napona, od devijatorskog dela napona deluje samo:

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}\,, \tag{41–3}$$

jer se za druge napone ne ostvaruju odgovarajuće deformacije.

Za ovakvo strujanje navodi se pravilo da je napon trenja srazmeran (proporcionalan) izvodu brzine po pravcu normalnom na strujanje. Faktor srazmernosti je:

$$\mu = koeficijent\ \ viskoznosti,$$

pa se izrečeno pravilo može napisati sa:

$$\sigma_{21}=\mu\,\frac{\partial\, u_1}{\partial\, x_2}\,. \tag{41–4}$$

Da bi μ pomnožen sa brzinom deformacija dao napon mora da bude:

$$\textit{dimenzija koeficijenta viskoznosti} \;=\; \textit{napon} \cdot \textit{vreme}.$$

Viskoznost doslovno znači „lepljivost", a može se pobliže objasniti kao sposobnost *materijala da stvara trenje.* Zahvaljujući tome trenju na dodiru delića, brži delići povlače sporije, a sporiji koče brže.

Za isti materijal koeficijent viskoznosti zavisi od temperature, dok je njegova promena zanemarljiva pri promeni naponskog stanja.

Pravilo o srazmernosti napona trenja i izvoda brzine u pravcu normale na brzinu potiče još od Njutna, pa fluid koji to sledi naziva se *„njutnovski"*. Faktor srazmernosti je koeficijent viskoznosti, pa se takav fluid naziva i *viskozni fluid.*

Izraz (41–4) pokazuje da je napon trenja jednak nuli kada nema promene brzine u pravcu normale, pošto tada nema razloga za trenje, jer se dodiruju delići iste brzine. Sa druge strane, skokovitog porasta brzine ne može biti, jer bi to dalo beskonačno veliku vrednost napona. Trenje dozvoljava samo postepenu promenu brzine, jer viskoznost „lepi" deliće na dodiru. Za isti raspored brzina fluid veće viskoznosti („lepljiviji") zahteva veći napon od fluida manje viskoznosti.

Srazmernost izražena sa (41–4), kada se uporedi sa (41–2) i s obzirom na jednakost (41–3) spregnutih napona, daje:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\,\mu\,\omega_{12} = 2\,\mu\,\omega_{21}. \tag{41–5}$$

Ovo znači da je *napon srazmeran odgovarajućoj brzini deformacija.*

* * *

Nadalje će se pretpostaviti da srazmernost između σ_{12} i ω_{12}, data sa (41–5), za razmatrano veoma jednostavno strujanje ima opšte značenje i da važi za ceo devijatorski deo napona i deformacija, što znači da se može uopšteno napisati:

$$\boxed{\begin{array}{c} \sigma^{\mathrm{d}}_{ij} = 2\,\mu\,\omega^{\mathrm{d}}_{ij}\,, \\[6pt] \text{napon} = 2 \cdot \begin{array}{c}\text{koeficijent}\\ \text{viskoznosti}\end{array} \cdot \begin{array}{c}\text{brzina}\\ \text{deformacija.}\end{array} \\[6pt] \text{– za devijatorski deo napona –} \end{array}} \tag{41–6}$$

Jednačina (41–6) uz (24–19) daje:

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{d}} = \mu \left(\frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i} + \frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_j} \right) - \frac{2}{3}\, \mu\, \delta_{ij}\, \frac{\partial\, u_k}{\partial\, x_k}\,. \tag{41–7}$$

Ovo omogućava da se u dinamičkoj jednačini (33–3) ne pojavljuje σ_{ij}^{d}, jer je moguća zamena:

$$\frac{\partial\, \sigma_{ij}^{\mathrm{d}}}{\partial\, x_i} = \frac{\partial}{\partial\, x_i}\left(\mu\, \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial\, x_i}\left(\mu\, \frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_j}\right) - \frac{2}{3}\, \frac{\partial}{\partial\, x_i}\left(\mu\, \delta_{ij}\, \frac{\partial\, u_k}{\partial\, x_k}\right).$$

U drugom članu, desno od znaka jednakosti, zameniće se redosled diferenciranja. U trećem članu preobraća se izvod po „i" u izvod po „j" – isto je bilo i kod izraza (26–5). U istom članu ponavljanje po „k" napisaće se po „i". Ove zamene će spojiti drugi i treći član – dobija se:

$$\frac{\partial\, \sigma_{ij}^{\mathrm{d}}}{\partial\, x_i} = \frac{\partial}{\partial\, x_i}\left(\mu\, \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right) + \frac{1}{3}\, \frac{\partial}{\partial\, x_j}\left(\mu\, \frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_i}\right). \tag{41–8}$$

Prvi član, sa desne strane jednakosti, se može napisati i u sledećem vidu:

$$\mu\, \frac{\partial}{\partial\, x_i}\left(\frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right) = \mu\, \frac{\partial^2 u_j}{\partial\, x_i\, \partial\, x_i} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial\, x_1^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial\, x_2^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial\, x_3^2} \right). \tag{41–9}$$

Zamenom (41–8) u (33–3) dobija se:

Dinamička jednačina za viskozni fluid –
– „*Navie-Stoksova*" (NAVIER–STOKES)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial\, u_j}{\partial\, t} + u_i \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i} = f_j - \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial\, p}{\partial\, x_j} + \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial}{\partial\, x_i}\left(\mu\, \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right) + \\ + \frac{1}{3\,\rho}\, \frac{\partial}{\partial\, x_j}\left(\mu\, \frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_i}\right). \end{aligned}} \tag{41–10}$$

Kako je navedeno, vrednost μ se osetnije menja samo sa promenom temperature Θ, pa ako te promene imaju uticaja na rešenje, mora se uzeti:

$$\mu = \mu\,(\Theta).$$

U zadacima nestišljivog fluida, ako nisu termodinamičke prirode (nema znatnijeg dovođenja toplote u fluidnu sredinu, niti odvođenja), temperatura se neosetno menja (deformacioni rad trenja može da je promeni zanemarljivo), pa se sa opravdanjem uzima:

$$\mu = \mathrm{Const}\,.$$

Ovaj uslov, uz otpadanje poslednjeg člana (ako je fluid nestišljiv) uprošćava prethodnu jednačinu i svodi je na:

Navie-Stoksova jednačina za nestišljiv fluid

$$\boxed{\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = f_j - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).} \tag{41–11}$$

Za jedan od pravaca – uzeće se $j = 2$ – može se napisati:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \\ &= f_2 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right). \end{aligned} \tag{41–12}$$

Mogu se napisati tri ovakve jednačine, što sa jednačinom o nepromenljivosti mase podmiruje potreban broj jednačina, jer se određuju svega četiri veličine: tri komponente brzine i pritisak, dok su gustina i koeficijent viskoznosti konstante. Ovo znači da su *određene sve zakonitosti za nestišljiv fluid.*

Za stišljiv fluid preostaje istraživanje veze između sfernog dela napona i deformacija. To je veza između pritiska i gustine, jer gustina ukazuje na zapreminsku dilataciju. Međutim, u tu vezu se upliće i temperatura, pa stvar postaje složena. To je predmet narednog Poglavlja 42.

* * *

I dinamička jednačina (33–7), namenjena konačnoj zapremini može se napisati uz eliminaciju devijatorskog dela napona. Površinska sila na zapreminu V, usled delovanja devijatorskog dela prema (26–8) i (41–8), može se definisati:

$$\int_V \frac{\partial\,\sigma_{ij}^{\mathrm{d}}}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial}{\partial\,x_i}\left(\mu\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\right)\mathrm{d}V + \frac{1}{3}\int_V \frac{\partial}{\partial\,x_j}\left(\mu\,\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_i}\right)\mathrm{d}V.$$

Odnosno, pretvoreno u površinski integral:

$$\int_A \sigma_{ij}^{\mathrm{d}}\,n_i\,\mathrm{d}A = \int_A \mu\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\,n_i\,\mathrm{d}A + \frac{1}{3}\int_A \mu\,\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_i}\,n_j\,\mathrm{d}A, \qquad (41\text{–}13)$$

što omogućuje neposrednu zamenu u (33–7).

Za nestišljiv fluid i uz $\mu = \mathrm{const}$ izraz je znatno prostiji:

$$\int_A \sigma_{ij}^{\mathrm{d}}\,n_i\,\mathrm{d}A = \mu\int_A \frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\,n_i\,\mathrm{d}A.$$

* * *

Na osnovu (27–5) i (41–6) piše se:

Deformacioni rad devijatorskog dela napona
za viskozni fluid

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{d}}\,\omega_{ij}^{\mathrm{d}} = \sigma_{ij}^{\mathrm{d}}\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i} = \mu\,Y_{\mathrm{dis}}\,,$$

$$Y_{\mathrm{dis}} = 2\,\omega_{ij}^{\mathrm{d}}\,\omega_{ij}^{\mathrm{d}} \qquad (41\text{–}14)$$

ili $$Y_{\mathrm{dis}} = 2\,\omega_{ij}^{\mathrm{d}}\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\,,$$

po jedinici zapremine i u jedinici vremena.

Y_{dis} se naziva „*funkcija disipacije*” (*rasipanja*), jer se odnosi na „izgubljenu” ili „rasutu” energiju – taj naziv je već objašnjavan, u Poglavlju 34. Drugi oblik za Y_{dis} poslužiće u narednoj jednačini, a dobijen je takođe iz (27–5) i (41–6) – samo je uzet drugi način pisanja deformacionog devijatorskog rada (27–5). Koristeći (24–17) dobija se:

$$Y_{\mathrm{dis}} = 2\,\omega_{ij}^{\mathrm{d}}\,\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i} = \left(\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i} + \frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_j} - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\,\frac{\partial\,u_k}{\partial\,x_k}\right)\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}.$$

Rezultat množenja biće zbir članova, u svakome će se indeksi ponavljati – svi će biti „nemi” – što i mora da bude, jer se izražava skalar (rad).

Posle obavljenog množenja, razvijanja i sređivanja, rezultat se može prikazati sa:

$$\begin{aligned} Y_{\text{dis}} = 2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 . \end{aligned} \qquad (41\text{–}15)$$

Za nestišljiv fluid, zbog $\partial u_i/\partial x_i = 0$, otpada poslednji član, pa ostaje samo zbir niza kvadrata, pa se zaključuje da je $Y_{\text{dis}} > 0$, a onda je i $\mu Y_{\text{dis}} > 0$, a to, shodno izrazu (41–14), znači da je deformacioni rad devijatorskih napona pozitivan, a to nadalje kazuje da se tim radom (trenjem, posredstvom viskoznosti) dobija toplota.

I za stišljiv fluid $Y_{\text{dis}} > 0$, jer tri prva i poslednji član (41–15) sabrani daju:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] = \\ = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right] \geq 0 . \end{aligned}$$

Ovaj izraz je, dakle, pozitivan, a samo je izuzetno jednak nuli (kada je $\partial u_1/\partial x_1 = \partial u_2/\partial x_2 = \partial u_3/\partial x_3$). Za (41–15) ovome treba pridodati još tri srednja člana, koji su uvek pozitivni. Stoga je deformacioni rad devijatorskih napona pozitivan i kod nestišljivog fluida.

Deformacioni rad ulazi u jednačinu toplote (34–8), ili kao gubitak u jednačinu mehaničke energije (34–4), a može se napisati kao zbir sfernog i devijatorskog dela, koji su izraženi u (27–4) i (27–5), a potom zamenom sa (41–14) za devijatorski deo:

$$\frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{-p}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\sigma^{\text{d}}_{ij}\,\omega^{\text{d}}_{ij} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}Y_{\text{dis}} , \qquad (41\text{–}16)$$

čime je iz razmatranja eliminisan devijatorski deo napona.

*   *   *

Ranije, na kraju Poglavlja 26, uveden je pojam „idealan fluid" za koga je rečeno da u njemu ne deluju tangencijalni naponi, pa onda otpada ceo devijatorski deo, od naponskog stanja ostaje pritisak. *Sada se „idealnom fluidu" može dati naziv „neviskozan fluid"*, što je možda čak i pogodnije, jer je to fluid kod koga nema viskoznosti, „nema trenja". Kod njega je $\mu = 0$, pa onda osnovna jednačina o trenju (41–4) kaže da napona nema bez obzira koliko bilo klizanja. U dinamičkoj jednačini (41–10) otpada devijatorski deo napona (članovi u kojima se pojavljuje viskoznost), nema ni izgubljene energije – nema „disipacije".

*   *   *

U nastavku će se ukazati na mogućnosti uspostavljanja različitih veza između napona i deformacija. Uzeće se u razmatranje tečenje prema slici 41–1, koje je ranije razmatrano. Veza između σ_{21} $(= \sigma_{12})$ i odgovarajuće deformacije ne mora da bude linearna, nego neka druga funkcija:

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} = f\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),$$

sa time što je:

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} = 0 \quad \text{za} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$$

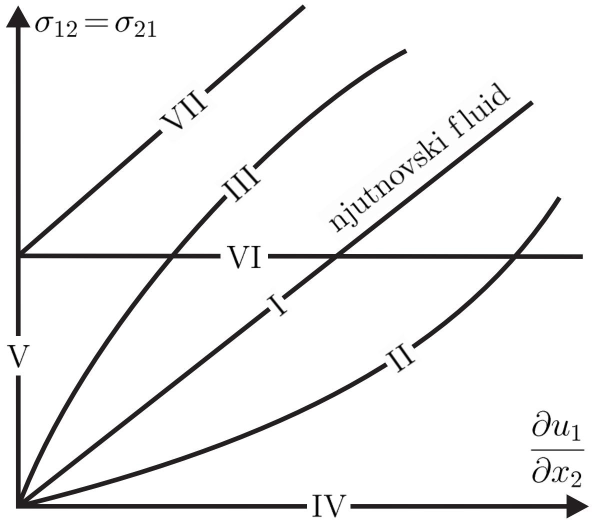
i ovo je fluid, ali „nenjutnovski".

Na slici 41–2 su načelno prikazane veze za „njutnovski" – linija (I), i za „nenjutnovski" fluid (II) i (III).

Nagib linije (I) određuje koeficijent viskoznosti i što je on manji, linija ima blaži nagib. Za $\mu = 0$ fluid je „neviskozan" ili „idealan" – to prikazuje apscisa, kojoj je data oznaka (IV).

Drugi graničan slučaj je „idealan solid" (idealno čvrsto telo) kod koga nikakav napon ne može proizvesti klizanje – to je linija (V) na slici – ustvari ordinatna osovina.

Linija (VI) odgovara materijalu koji se do neke vrednosti napona ponaša kao „idealan solid", ali napon ne prelazi tu graničnu vrednost



Slika 41–2 Veze između napona i brzina klizanja za strujanje sa slike 41–1. Njutnovski (I), nenjutnovski (II) i (III) i idealan fluid (IV). Idealno čvrsto (V), idealno plastično (VI) i viskoplastično (VII) telo.

kada počne tečenje, bez obzira na brzinu deformisanja. To je „idealno-plastični materijal”. Linija (VII) se odnosi na „visko-plastičan” materijal kod koga je brzina deformacija srazmerna višku napona iznad vrednosti do koje se ponašao kao „idealan solid”.

Može se pretpostaviti da je materijalni izvod napona srazmeran sa brzinom deformacije (napon brže raste ako se deformacija brže odvija). Za jednostavan slučaj koji je razmatran na slikama 41–1 i 41–2, navedena pretpostavka dovodi do:

$$\frac{\mathrm{D}\,\sigma_{12}}{\mathrm{D}\,t} = 2\,G\,\omega_{12} \tag{41–17}$$

Deformacija (uopšteno označena sa ε_{ij}) je bezdimenzionalna veličina koja izražava pomeranje ξ_i (a ne brzinu pomeranja), upravo ε_{ij} se izražava parcijalnim izvodima pomeranja:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\xi_j}{\partial\,x_i} + \frac{\partial\,\xi_i}{\partial\,x_j}\right),$$

$2\,G$ je faktor srazmernosti (iste dimenzije kao napon).

Brzina deformacija je materijalni izvod deformacija, pa je u ovom slučaju:

$$\omega_{12} = \frac{\mathrm{D}\,\varepsilon_{ij}}{\mathrm{D}\,t}. \tag{41–18}$$

Ovaj izraz i izraz za brzinu deformacija (24–13) razlikuju se samo u tome što su ovde pomeranja ξ_i, a tamo – u (24–13) – brzine u_i, jer se ovde izražavaju deformacije, a tamo brzine deformacija.

Za posmatrani slučaj, deformacija je:

$$klizanje = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\xi_2}{\partial\,x_1} + \frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,x_2}\right).$$

(41–17) i (41–18) daju:

$$\frac{\mathrm{D}\,\sigma_{12}}{\mathrm{D}\,t} = 2\,G\,\frac{\mathrm{D}\,\varepsilon_{12}}{\mathrm{D}\,t}, \tag{41–19}$$

što integrisano daje:

$$\sigma_{12} = 2\,G\,\varepsilon_{12}\,. \tag{41–20}$$

Integrisanje materijalnog izvoda znači praćenje delića, a obavljeno je pod pretpostavkom da veza važi za sve deliće, tj. za celo strujno polje i neprekidno, pa integrisanje za jedan delić u takvim okolnostima daje opšte važeće rešenje. Nadalje je pretpostavljeno da je:

$$\sigma_{12} = 0 \quad \text{za} \quad \varepsilon_{12} = 0$$
$$\text{i} \quad G = \text{Const}\,.$$

Jednačina (41–20) je veza iz „teorije elastičnosti”, gde je napon srazmeran deformaciji (klizanju), a ne brzini deformacije kao u (41–4). Ovde je faktor srazmemosti:

$$G = \text{modul klizanja} \qquad [\text{dimenzija kao napon}].$$

Veza (41–20) se uklapa u opštu zakonitost za elastično telo – tu su sve deformacije (sferne i devijatorske) srazmere odgovarajućim naponima. Pravilo o srazmerosti napona i deformacija dao je *Huk* (HOOKE) pa se materijal koji to sledi (a to je elastično telo) može da nazove „hukovski”.

Jednačina (41–17), ili (41–19), se odnosi na neko momentalno stanje u toku deformacija, ali ta prelazna stanja, i brzine deformisanja, ne moraju se određivati, jer je dovoljno odrediti krajnji rezultat procesa – samu deformaciju (kao upoređenje stanja pre i posle deformisanja) što daje (41–20).

*   *   *

Veze između napona i deformacija, ili brzina deformacija, mogu da budu veoma složene, jer napon može da zavisi delimično od deformacija, a delimično od brzina deformacija, a ono što nameće karakter veze može da važi samo u određenim granicama napona ili deformacija, veza može da se menja i pod drugim uticajima – na primer promenom temperature. Prethodna izlaganja treba stoga shvatiti kao želju da se bolje shvate veze za „njutnovski fluid", da se uoči da je to najjednostavnija veza (srazmernost) između napona i brzina deformacija. Razmatrati moguće veze između napona i deformacija nije moguće ukratko i usput – time se bavi posebna nauka nazvana „reologija". To doslovno znači „nauka o tečenju", pa bi to bio sinonim za „mehaniku fluida". Iz samoga naslova ne može se skoro nikada dati definicija – tačno određenje – onoga na šta se naslov odnosi, nego se uslovi (dogovori) šta će upućeni pod tim podrazumevati. Tako se i pod pojmom „reologija" shvata izučavanje veze između napona i deformacija, a to se može shvatiti da se razmatra kako će različiti materijali da „teku" kada budu na to prisiljeni. A i elastični materijal mora da „teče" od stanja pre do stanja posle deformacije.

42

IZRAŽAVANJE STIŠLJIVOSTI VEZAMA IZMEĐU PRITISKA, GUSTINE I TEMPERATURE

U prethodnom Poglavlju 41. pokazano je da je za devijatorski deo napon srazmeran brzini odgovarajuće deformacije kod viskoznog („njutnovskog") fluida, dok je srazmeran samoj deformaciji kod elastičnog („hukovskog") materijala. Kod drugoga srazmernost između napona i deformacija je opšte važeća – za sve deformacije, jer taj materijal „podjednako teško menja i oblik i zapreminu" – kako se uprošteno objašnjava šta je „čvrsto telo". Fluid sa *slabo izraženom stišljivošću* (to će se najpre raspravljati) može se shvatiti u smislu uobičajenog određenja za tečnosti: „veoma lako menja oblik, a veoma teško zapreminu". Ovakvo shvatanje dozvoljava da se za promenu zapremine slabo stišljivog fluida prihvate načelno iste zavisnosti kao za hukovski materijal, dok su za promenu oblika drukčije (to su one koje su izložene u prethodnom, 41. poglavlju).

Za promenu zapremine slabo stišljivog fluida, na osnovu prethodnog objašnjenja, može se napisati:

$$\frac{\mathrm{D}\,p}{\mathrm{D}\,t} = -\,E\,\frac{\mathrm{D}/\mathrm{D}\,t\,(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}V} = -\,E\,\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_i}.$$

Napisana srazmernost između materijalnih izvoda znači, shodno objašnjenom u prethodnom poglavlju, srazmernost i samih veličina (pritiska i zapreminske dilatacije), i time se izražava malo pre dato uvodno objašnjenje.

Znak „–" je zbog usmerenosti pritiska, jer njegovo povećanje dovodi do smanjenja zapremine.

Faktor srazmernosti je:

E = *modul stišljivosti* (dimenzije kao napon).

Materijalni izvod zapreminske dilatacije je ujedno i njena brzina, što je i izjednačeno sa (24–15), a iskorišćeno je u prethodnom izrazu, iz koga se piše sledeće:

$$-\frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_i} = \frac{1}{E}\,\frac{\mathrm{D}\, p}{\mathrm{D}\, t}\,. \tag{42–1}$$

Promena zapremine delića znači i promenu gustine, jer masa ostaje ista. Na tome se i zasniva jednačina nepromenljivosti mase, pa se na osnovu (32–3) prethodno napisani izraz (42–1) preobličava u:

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{D}\,\rho}{\mathrm{D}\, t} = \frac{1}{E}\,\frac{\mathrm{D}\, p}{\mathrm{D}\, t}\,. \tag{42–2}$$

Ova jednačina važi za sve deliće, pa će se integrisanjem dobiti svuda i uvek važeće rešenje (isto je bilo i kod (41-19)). Za integrisanje se pretpostavlja:

$$\begin{aligned} & E = \mathrm{Const} \\ \mathrm{i} \qquad & |\rho - \rho_0| \ll \rho_0\,, \end{aligned} \tag{42–3}$$

tj. da je promena gustine veoma malena u odnosu na početnu gustinu ρ_0, kojoj odgovara pritisak p_0, pa se (42–2) može integrisati kao da se priraštaj gustine obavlja pri konstantnoj gustini ρ_0. To je dozvoljeno zbog toga što se razmatra slabo izražena stišljivost, što isključuje velike promene gustine. Integrisanjem (42–2) pod navedenim pretpostavkama dobija se:

Veza između pritiska i gustine za slabo izraženu stišljivost i izotermno stanje

$$\frac{p - p_0}{E} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\,. \tag{42–4}$$

Uz ovu jednačinu, upravo uz početni izraz (42–1), mora se staviti ograničenje, jer prethodno važi ako se temperatura ne menja tj. ako je proces izoterman i tada se veza između sfernog dela napona i odgovarajuće deformacije može izraziti kao veza između pritiska i gustine. Uz ovo treba dodati da se pretežan deo zadatka pri slabo izraženoj stišljivosti može rešavati kao izoterman ako se fluidu ne dovodi (ili odvodi) toplota, jer izmena toplote deformacionim radom nije značajna. Ako se pak mora ulaziti u termodinamička razmatranja, postupa se prema sledećem:

Zapremina delića se menja ako se delić zagreje, a da se pri tome pritisak ne menja. Ako se menjaju i pritisak p i temperatura Θ, brzina zapreminske dilatacije će se umesto (42–1) izraziti sa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{E}\frac{\mathrm{D}\,p}{\mathrm{D}\,t} + \beta\,\frac{\mathrm{D}\,\Theta}{\mathrm{D}\,t}, \tag{42–5}$$

tj. uz uticaj pritiska dodaje se i uticaj temperature. Ovde je uveden:

$\beta =$ *koeficijent termičke zapreminske dilatacije.*

Analogno tome, $1/E$ bi se mogao nazvati „koeficijentom zapreminske dilatacije usled promene pritiska".

Istim postupkom, kao što se od (42–1) došlo do (42–4), sada se, uz $\beta = \mathrm{Const}$, dobija veza između pritiska, gustine i temperature:

Jednačina slabo izražene stišljivosti

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} = \frac{p-p_0}{E} = \beta\,(\Theta-\Theta_0). \tag{42–6}$$

* * *

Do sada se razmatrala slabo izražena stišljivost sa promenama gustine malenim u odnosu na gustinu, a u nastavku će se razmatrati izražena stišljivost gde je promena gustine reda vrednosti same gustine.

U zadacima sa gasovima gde stišljivost ima uticaja na rešenje primenjuje se:

Jednačina stanja
(jednačina za izraženu stišljivost)

$$\frac{p}{\rho} = R\,\Theta\,. \tag{42–7}$$

Ova veza između pritiska, gustine i temperature obično se naziva „*jednačina stanja*" pa je tako uz jednačinu i napisano.

R je *gasna konstanta* (za određeni gas ima konstantnu vrednost).

Temperatura Θ se meri od „apsolutne nule" *Kelvinove skale* (KELVIN), a pritisak je tzv. „apsolutni pritisak". Ovo nije beskorisno pomenuti, jer u svim prethodnim jednačinama uticaji se izražavaju priraštajima (ili razlikama) temperature, odnosne pritiska, pa se te razlike mogu izražavati u odnosu na proizvoljnu konstantu – na primer, u odnosu na temperaturu topljenja leda, odnosno na atmosferski pritisak, ili na početni pritisak i početnu temperaturu razmatranog procesa. Međutim, u (42–7) moraju se uzeti apsolutne vrednosti.

Zamenom ρ sa M/V (gde je M masa, V zapremina koju masa zauzima) u izrazu (42–7) dobija se:

$$p\,V = M\,R\,\Theta\,. \tag{42–8}$$

Za istu masu ($M =$ const) i isti gas ($R =$ const), iz (42–7), odnosno (42–8), mogu se pročitati sledeća tri pravila:

Prvo, za konstantnu temperaturu (izotermno stanje) pritisak je obrnuto srazmeran gustini (ili, proizvod pritiska i zapremine je konstantan).

Drugo, za konstantan pritisak gas se širi tako da je zapremina srazmerna sa temperaturom (ili, gustina je obrnuto srazmerna sa temperaturom).

Treće, za konstantnu gustinu (tj. konstantnu zapreminu) pritisak je srazmeran temperaturi.

Ova tri zakona eksperimentalno su potvrđena i nose imena svojih autora: Bojl (BOYLE) – Mariot (MARIOTTE), Gej-Lisak (GAY-LUSSAC) i Šarl (CHARLES), i njihov zajednički izraz je jednačina (42–7).

* * *

Sada će se uporediti jednačine (42–5) i (42–7) za izraženu i slabo izraženu stišljivost. Iz (42–7) se dobija:

$$\ln p - \ln \rho = \ln R + \ln \Theta\,,$$

što diferenciranjem daje za materijalne izvode:

$$-\frac{1}{p}\,\frac{\mathrm{D}\,p}{\mathrm{D}\,t}+\frac{1}{\Theta}\,\frac{\mathrm{D}\,\Theta}{\mathrm{D}\,t}=-\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{D}\,\rho}{\mathrm{D}\,t}=\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_i}\,.$$

U prethodnom je opet iskorišćena jednačina nepromenljivosti mase (32–3).

Ako se ovaj izraz uporedi sa (42–5) uviđa se sledeće:

Kod izražene stišljivosti moduo stišljivosti E predstavlja sam pritisak p, a koeficijent termičke dilatacije β zamenjuje recipročna vrednost temperature $1/\Theta$. Kod čvrstih tela i kod tečnosti, za jedan određeni materijal, E i $1/\beta$ se mogu smatrati konstantama, a vrednosti tih konstanti su primetno veće kod čvrstih tela nego kod tečnosti. Kod izražene stišljivosti (kod gasova), one nisu konstante, jer se, kako je malopre objašnjeno, E zamenjuje pritiskom, a $1/\beta$ temperaturom Θ, što znači da su vrednosti znatno niže od onih za tečnosti, a pogotovo od onih za čvrsta tela. Niske i promenljive vrednosti tih pokazatelja stišljivosti $(E, 1/\beta)$ i ukazuju da se radi o materijalu kod koga se stišljivost lako ispoljava.

* * *

Kao poseban slučaj (42–7) ispisuje se:

Veza između pritiska i gustine
za izotermni proces

$$\frac{p}{\rho}=R\,\Theta=\mathrm{Const}\,. \tag{42–9}$$

Kod izražene stišljivosti promena temperature usled deformacionog rada nije zanemarljiva kao u ranijim slučajevima (nestišljiv fluid ili slabo izražena stišjivost), pa se izoterman proces može ostvariti ako je proces spor da se toplota dobijena sabijanjem i oduzeta razređivanjem odvede, odnosno dovede, i tako se temperatura održava konstantnom. Spoljna sredina konstantne temperature potpomaže uslove za odvijanje izotermnog procesa.

Može se, međutim, pretpostaviti da se toplota ne provodi, tako da se temperatura menja zbog deformacionog rada. Nadalje će se razmatrati takav proces, a prihvatanje pretpostavke o neprovodljivosti toplote, kao dopunski uslov, može da eliminiše jednu veličinu iz razmatranja – podesiće se da to bude temperatura, pa će se dobiti opet nekakva veza između pritiska i gustine.

Jednačina toplote (34–18), uz zamenu za deformacioni rad prema (41–16), napisaće se:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\,(C\,\Theta) = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2(\lambda\,\Theta)}{\partial\,x_i\,\partial\,x_i} + \frac{p}{\rho}\,\frac{-\,\partial\,u_i}{\partial\,x_i} + \frac{\mu}{\rho}\,Y_{\mathrm{dis}}\,. \tag{42–10}$$

Korišćenjem (32-3) za zamenu u srednjem članu desne strane i smatrajući C i λ konstantama dolazi se do:

$$C\,\frac{\mathrm{D}\,\Theta}{\mathrm{D}\,t} = \frac{p}{\rho^2}\,\frac{\mathrm{D}\,\rho}{\mathrm{D}\,t} + \frac{\mu}{\rho}\,Y_{\mathrm{dis}} + \frac{\lambda}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\,x_i\,\partial\,x_i}\,. \tag{42–11}$$

Iz jednačine stanja (42–7) dobija se:

$$R\,\frac{\mathrm{D}\,\Theta}{\mathrm{D}\,t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\left(\frac{p}{\rho}\right) = p\left(\frac{-1}{\rho^2}\right)\frac{\mathrm{D}\,\rho}{\mathrm{D}\,t} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{D}\,p}{\mathrm{D}\,t}\,. \tag{42–12}$$

Prihvatanjem pretpostavke da se toplota ne provodi, promena temperature postaje isključivo posledica deformacionog rada, a uz to se smatra da je rad na promeni oblika zanemarljiv u odnosu na rad na promeni zapremine. Prethodno znači da se delić zagreje ili ohladi baš onoliko koliko mu toplote preda (ili oduzme) deformacioni rad na sabijanju (ili razređivanju). Učinjene pretpostavke dovode do izostavljanja dva poslednja člana u (42–11), pa se deljenjem jednačine (42–12) sa tako skraćenom jednačinom (42–11) dobija:

$$\frac{R}{C} = \frac{\mathrm{D}\,p/\mathrm{D}\,t}{p/\rho\ \mathrm{D}\,\rho/\mathrm{D}\,t} - 1,$$

ili

$$\frac{1}{p}\,\frac{\mathrm{D}\,p}{\mathrm{D}\,t} = \frac{C+R}{C}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{D}\,\rho}{\mathrm{D}\,t}\,,$$

što se integrisanjem svodi na:

$$\begin{aligned} \ln p &= \frac{C+R}{C}\,\ln\rho + \ln\mathrm{Const} \\ p &= \mathrm{Const}\,\rho^{(C+R)/C}. \end{aligned} \tag{42–13}$$

Obavljeno izvođenje je eliminisalo temperaturu, a to je bilo prethodno i najavljeno kao svrha razmatranja. Temperatura se ne pojavljuje u konačnom izrazu (42–13), mada nije konstantna, a dobila se veza između gustine i pritiska.

Proces koji odgovara učinjenim pretpostavkama naziva se „*adijabatski*". Ovo doslovno znači „neprolazan", a to i odgovara, jer se *uslovljava neprovođenje toplote*. Smatra se da je proces toliko brz da „nema vremena" za izmenu toplote po prostoru. Takođe, spoljna sredina ne utiče na fluid – proces je „zatvoren". Ako se ovo uporedi sa opisom izotermnog procesa, može se zaključiti da se stvarni procesi mogu približiti jednom ili drugom opisanom procesu, zavisno od uslova.

Druga učinjena pretpostavka – o izostavljanju devijatorskog dela deformacionog rada – odgovara „idealnom fluidu", ali se može prihvatiti, jer je ovaj rad obično znatno manjeg uticaja od sfernog dela. Sem toga, devijatorski deo daje toplotu trenjem, a to je pretežno uz čvrste granice fluidne struje, pa se dobrim delom preda granici i onda ne ulazi u energetski bilans fluida.

Adijabatskom procesu odgovara – vidi jednačinu (42–13) –

$$\textit{Adijabatski koeficijent} \qquad k = \frac{C+R}{C}\,, \tag{42–14}$$

jer se sa njime (42–13) piše jednostavno:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Veza između pritiska i gustine}\\ \text{za adijabatski proces}\\[6pt] \dfrac{p}{\rho^k} = \mathrm{Const}\,.\end{array}} \tag{42–15}$$

Adijabatski koeficijent k se može protumačiti i na način koji se u nastavku izlaže.

Sabiranje (42–11) i (42–12) daje:

$$(C+R)\frac{\mathrm{D}\,\Theta}{\mathrm{D}\,t} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{D}\,p}{\mathrm{D}\,t} + \frac{\mu}{\rho}\,Y_{\mathrm{dis}} + \frac{\lambda}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\,x_i\,\partial\,x_i}\,. \tag{42–16}$$

Uporediće se dva procesa:

I) pri konstantnoj gustini ($\rho = \text{Const}$);

II) pri konstantnom pritisku ($p = \text{Const}$).

Iz (42–11) uz uslov I, odnosno iz (42–16) uz uslov II, dobija se:

$$\text{I) pri } \rho = \text{Const} \qquad C\,\frac{\mathrm{D}\,\Theta}{\mathrm{D}\,t} = \frac{\mu}{\rho}\,Y_{\text{dis}} + \frac{\lambda}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\,x_i\,\partial\,x_i}\,, \tag{42–17}$$

$$\text{II) pri } p = \text{Const} \qquad (C+R)\,\frac{\mathrm{D}\,\Theta}{\mathrm{D}\,t} = \frac{\mu}{\rho}\,Y_{\text{dis}} + \frac{\lambda}{\rho}\,\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\,x_i\,\partial\,x_i}\,. \tag{42–18}$$

Jednačine (42–11) i (42–16) su dva vida „jednačina toplote" i uključuju sve uticaje merodavne za energetsko uravnoteženje – to isto, samo uz uslovljena upisana ograničenja, predstavljaju iz njih izvedene jednačine (42–17) i (42–18). Stoga (42–18) uključuje u svoju levu stranu i deformacioni rad na promeni zapremine, dok u (42–17) toga rada nema, jer se uslovljava $\rho = \text{Const}$. Desna strana prethodnih jednačina – (42–17) i (42–18) – označava toplotu koja se dobija trenjem (deformacionim radom na promeni oblika) i dovedenu toplotu – i to se u prvom slučaju *troši isključivo na grejanje* – specifična toplota je C (to je *specifična toplota u doslovnom, neuslovnom smislu reči*), dok se u drugom slučaju energija *troši na grejanje i za deformacioni rad na promeni zapremine* (na širenje), koji neminovno prati grejanje pri konstantnom pritisku. Stoga se tada grejanje može da obračuna zajedno sa tom neminovnošću, pa se $C + R$ može uslovno shvatiti kao „*specifična toplota*" uz dodatno naznačavanje „*pri konstantnom pritisku*".

Sa ovim objašnjenjem i prema (42–14) se određuje:

$$\textit{adijabatski koeficijent} = k = \frac{C+R}{C} =$$

$$= \frac{\textit{specifična toplota pri konstantnom pritisku}}{\textit{specifična toplota pri konstantnoj gustini}} = \frac{c^p}{C}\,. \tag{42–19}$$

* * *

Dinamička jednačina za idealan fluid ograničiće se na ustaljeno strujanje duž jedne strujnice, ali se sada neće, kao ranije (Poglavlje 35), zahtevati i nestišljivost. Sada se kao zadatak postavlja da se umesto tamošnje jednačine (35–13), ili (35–14), napiše odgovarajuća za stišljiv fluid. U jednačini (35–11) još nije bila uslovljena nestišljivost, pa i sada važi, a može se zanemariti težina, jer je od neznačajnog uticaja kod gasova, pa se piše za ustaljeno strujanje:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x}=0\,. \tag{42–20}$$

U drugom članu ρ nije konstanta, pa je integracija moguća ako je poznata veza između pritiska i gustine, i ako je ta veza takva da daje integrabilnu funkciju. Takve su veze za izotermni i adijabatski proces.

Za izotermni proces, na osnovu (42–9), uspostavlja se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)+R\,\Theta\,\frac{1}{p}\,\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)+R\,\Theta\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\ln p)=0.$$

Integrisanjem od tačke I do tačke II iste strujnice (a to je ujedno i trajektorija, jer je strujanje ustaljeno), dobija se:

Jednačina duž strujnice izotermnog strujanja idealnog stišljivog fluida

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{u_{\mathrm{II}}^2-u_{\mathrm{I}}^2}{2}+R\,\Theta\,\ln\frac{p_{\mathrm{II}}}{p_{\mathrm{I}}}=0\,,\\ &R\,\Theta=\frac{p_{\mathrm{I}}}{\rho_{\mathrm{I}}}=\frac{p_{\mathrm{II}}}{\rho_{\mathrm{II}}}=\mathrm{Const}\,.\end{aligned}} \tag{42–21}$$

Za adijabatski proces drugi član u (42–20) preobličava se prema (42–15):

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x}=\left(\frac{\mathrm{Const}}{p}\right)^{\frac{1}{k}}\frac{\partial p}{\partial x}=\mathrm{Const}^{\frac{1}{k}}\,\frac{k}{k-1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(p^{1-\frac{1}{k}}\right)\,. \tag{42–22}$$

U prethodnom izrazu Const je ona ista iz (42–15), tj.

$$\mathrm{Const}^{\frac{1}{k}}=\frac{p_{\mathrm{I}}^{\frac{1}{k}}}{\rho_{\mathrm{I}}}=\frac{p_{\mathrm{II}}^{\frac{1}{k}}}{\rho_{\mathrm{II}}}\,, \tag{42–23}$$

gde se I i II opet odnose na dve proizvoljne tačke strujnice. Integrisanjem (42–20) uz pomoć (42–22) i (42–23) dobija se:

Jednačina duž strujnice adijabatskog strujanja idealnog stišljivog fluida

$$\boxed{\frac{u_{\mathrm{II}}^2 - u_{\mathrm{I}}^2}{2} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_{\mathrm{I}}}{\rho_{\mathrm{I}}} - \frac{p_{\mathrm{II}}}{\rho_{\mathrm{II}}}\right).} \qquad (42\text{–}24)$$

Prilikom izvođenja koje je dovelo do (42–21), odnosno (42–24), pošlo se od pretpostavke da je težina zanemarljiva. Ako bi se ta pretpostavka odbacila, nikakvih teškoća ne bi bilo oko integrisanja – (42–21) i (42–24) bi imali dodatni član, isti kao odgovarajući član u (35–14), tj. $g(Z_{\mathrm{I}} - Z_{\mathrm{II}})$.

Iako je iz izlaganja jasno, nije na odmet skrenuti pažnju da su pritisci u jednačinama (42–21) i (42–24) apsolutni pritisci, jer te jednačine su izvedene koristeći zakone za izotermu i adijabatu, (42–9) odnosno (42–15), a ove opet potiču od jednačine stanja (42–7) izražene apsolutnim pritiskom. Međutim, u odgovarajućoj jednačini za strujnicu nestišljivog fluida (35–14) pritisak se može računati od proizvoljnog nultog pritiska, jer se tamo utvrđena zakonitost ispoljava kroz razliku pritisaka.

* * *

U prethodnom poglavlju iza jednačine (41–12) objašnjeno je da su za nestišljiv fluid utvrđene potrebne zakonitosti i broj jednačina se izjednačio sa brojem nepoznatih veličina, a ostavljeno je da se isto postigne i za stišljiv fluid, što je u ovom Poglavlju 42. i učinjeno, i što se lako uviđa iz izlaganja, koje sledi u nastavku.

Ako postoji veza između pritiska i gustine, u koju se ne upliće temperatura – na primer (42–4), ili (42–9), ili (42–13) – i ako je fluid idealan, na raspolaganju stoje *jednačina nepromenljivosti mase, tri dinamičke jednačine* (Ojlerove), zajednički napisane sa (35–1), *i kao peta – veza između pritiska i gustine*. Određuje se *pet* veličina: gustina, pritisak i 3 komponente brzine, pa su utvrđene sve potrebne zakonitosti.

Za viskozni fluid, umesto Ojlerovih, uzimaju se Navie-Stoksove jednačine – (41–10), sa čime je broj jednačina *isti* kao malo pre, a *isti* je i broj nepoznatih, ako se koeficijent viskoznosti μ može smatrati konstantom. Ovo, razume se, ako se ispiše neposredna veza između pritiska i gustine.

Ako se ne može izbeći uplitanje temperature u razmatranje, stvar je znatno složenija. Pored veze između pritiska, gustine i temperature – što će se izraziti jednačinom stanja – mora se uzeti i jednačina toplote – na primer (42–11) – čime će se dodavanjem jedne jednačine taman naknaditi uvođenje nove nepoznate (temperature). Pri ovome niz veličina se smatra konstantama: specifična toplota C, koeficijent provodljivosti λ, gasna konstanta R, koeficijent viskoznosti μ. Ako se te veličine menjaju u toj meri da se ne mogu smatrati konstantama (na primer koeficijent viskoznosti se može znatno promeniti za veće promene temperature), moraju se uspostaviti njihove veze sa veličinama već uzetim u razmatranje. Time se broj jednačina izjednačuje sa brojem veličina koje se istražuju kao funkcije položaja i vremena, što je prikazano preglednosti radi na Slici 42–1.

* * *

Od Poglavlja 31. pa dovde napori su bili usmereni na razjašnjavanje bitnih zakonitosti „mehanike fluida”, a ove zakonitosti se ispoljavaju kroz međusobne veze veličina. Te veze su ispisane nizom jednačina, i to je sa ovim poglavljem okončano. Prva pak poglavlja imala su za svrhu da se odrede i rastumače pojmovi, uslovi i metode proučavanja, što je omogućilo kasnije izražavanje zakonitosti jednačinama.

Bilo bi isuviše naivno očekivati da jednačine prosto i lako rešavaju svaki praktični zadatak. Pre svega, integrisanje jednačina i dobijanje opštih rešenja moguće je samo za veoma uprošćene uslove: u Poglavlju 35. navedeno je nekoliko rezultata integrisanja, a malo pre su ispisana rešenja (42–21) i (42–24). Rešavanje pojedinačnog zadatka, usled složenosti veza u jednačinama, a još više zbog graničnih i početnih uslova, ne može se, gotovo redovno, obaviti kroz tačno rešavanje integrala, a ponegde dolazi i do teškoća i u postupnom rešavanju numeričkim metodama. Rečeno ne znači da je primena jednačina neizvodljiva, želelo se reći da ona nije laka ni jednostavna. Niz zadataka se rešava pojednostavljenjima uslova i sa time se ide sve dotle dok se praktična primena zadovoljava približnim rešenjima. Nadalje, savremeni računari omogućavaju numeričko rešavanje sistema jednačina, uz veoma složene granične i početne uslove. Poznavanje jednačina je potrebno, iako se sa njima neće računati, ako se zadatak rešava na osnovu korišćenja eksperimentalnih rezultata, a ovi se mogu prenositi sa jednog slučaja na drugi, samo ako su jednačine istovetne. Može se zaključiti da će se naći način za rešenje nekog pojedinačnog zadatka, ali ako su razjašnjene zakonitosti koje za njega važe, tj. ako su poznate jednačine.

			Promenljive veličine					Raspoložive jednačine						
			ρ	u_j	p	σ_{ij}^{d}	Θ	Odr. mase	Dinamička	$p = p(\rho)$	$p = p(\rho, \Theta)$	$\sigma_{ij}^{\mathrm{d}} = f(u_j)$	toplote	Σ
Nestišljiv fluid (ρ=const)	idealan		-	3	1	-	-	1	3	-	-	-	-	4
	realan		-	3	1	5	-	1	3	-	-	5	-	9
Stišljiv fluid	idealan	$p = p(\rho)$	1	3	1	-	-	1	3	1	-	-	-	5
		$p = p(\rho, \Theta)$	1	3	1	-	1	1	3	-	1	-	1	6
	realan	$p = p(\rho)$	1	3	1	5	-	1	3	1	-	5	-	10
		$p = p(\rho, \Theta)$	1	3	1	5	1	1	3	-	1	5	1	11
								(32-3) ili (32-4) ili (32-5)	(33-3) ili (33-5) ili (33-7)	(42-2) ili (42-9) ili (42-15)	(42-6) ili (42-7)	(41-6) ili (41-7)	(34-18) ili (34-19) ili (34-20)	

Slika 42–1 Promenljive veličine i raspoložive jednačine.

Napomena: Navedeni broj promenljivih veličina napisan je pod pretpostavkom da su konstante: koeficijent μ u jednačini (41–7), E i β u (42–6), R u (42–7), C i λ u (34–18). Ako se vodi računa o promenljivosti pojedinih od tih koeficijenata, mora se napisati i jednačina koja tu promenljivost izražava u zavisnosti od jedne (ili više) napisanih veličina, pa se dobija još jedna jednačina, ali je i jedna promenljiva više, pa se opet broj promenljivih i broj jednačina izjednačuju.

43
BRZINA ZVUKA KAO POKAZATELJ STIŠLJIVOSTI

U mirnoj fluidnoj sredini stišljivog fluida desi se *maleni poremećaj* – na primer u jednoj tački malo se promeni (poveća ili smanji) pritisak, a to, prema utvrđenom u prethodnom odeljku, dovodi do promene gustine (takođe malene), a prema dinamičkim jednačinama razlika u pritisku između dve tačke postaje uzrok strujanju.

Razmatraće se *linijski zadatak i idealan fluid* – stoga se može primeniti jednačina (35–11). U njoj se može izostaviti zapreminska sila kao zanemarljiva kod stišljivog fluida, pa se piše:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = 0\,. \tag{43–1}$$

Naglašeno je da se zadatak ograničava na maleni poremećaj, a to dopušta da se srednji član u prethodnoj jednačini zanemari, jer će brzina biti veoma malena, što ne znači da je i izvod brzine (prvi član) zanemarljiv, jer se maleni priraštaj može da obavi za kratko vreme. Izostavljanjem navedenog člana, jednačina postaje:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = 0\,. \tag{43–2}$$

Zadatak će se nadalje ograničiti na dva slučaja:

I) Izvor poremećaja je u jednoj tački, poremećaj se širi podjednako u svim pravcima, tako da je strujanje simetrično u odnosu na tačku gde se poremećaj zbio. Sve veličine zavise samo od rastojanja x od te tačke i od vremena t. Zadatak je prema tome linijski i važi prethodna dinamička jednačina (43–1), odnosno (43–2).

II) Strujnice su sve prave linije, a međusobno paralelne, pa bi to praktično značilo prostiranje poremećaja kroz cev, gde se poremećaj desio u jednom poprečnom preseku cevi i gde su brzina, gustina i pritisak isti po poprečnom preseku. Rastojanje se meri duž cevi, a opet važi prethodna dinamička jednačina.

Jednačina nepromenljivosti mase nije ista za oba slučaja. Međutim, uz ograničenja koja nameće ovaj zadatak (uslovljavanje malenih brzina) uprošćena jednačina biće ista, što će se uvideti iz narednog izlaganja.

Za slučaj (I) proticaj mase kroz površinu lopte, koja je geometrijsko mesto tačaka na rastojanju x od tačke izvora poremećaja, iznosi:

$$Q_\rho = \rho\, 4\,\pi\, x^2\, u\,.$$

Gustina ρ i brzina u zavise samo od x (isti su po celoj površini lopte), jer se posmatra proticaj u jednom trenutku. Iz zapremine između dve koncentrične lopte, na rastojanju dx, u jedinici vremena, izlaz mase će biti veći od ulaza za:

$$\frac{\partial\, Q_\rho}{\partial\, x}\,\mathrm{d}\,x = 4\,\pi \frac{\partial}{\partial\, x}\left(\rho\, x^2\, u\right)\mathrm{d}\,x\,,$$

a to mora da bude jednako smanjenju mase unutar zapremine – opet u jedinici vremena:

$$-4\,\pi\, x^2\;\mathrm{d}x\;\frac{\partial\,\rho}{\partial\, t}\,.$$

Izjednačenje ova dva izraza, uz razvijanje parcijalnog izvoda proizvoda u prvom, daje:

$$x^2\;\frac{\partial\,\rho}{\partial\, t} + x^2\,\rho\;\frac{\partial\, u}{\partial\, x} + x^2\, u\;\frac{\partial\,\rho}{\partial\, x} + \rho\, u\, 2\, x = 0\,.$$

Poslednja dva člana su zanemarljiva u posmatranom zadatku, gde se uslovljavaju malene brzine, pa se dobija:

$$\frac{\partial\,\rho}{\partial\, t} + \rho\,\frac{\partial\, u}{\partial\, x} = 0\,. \qquad (43\text{–}3)$$

Za slučaj (II) sve brzine su upravljene u istom pravcu, pa se jednačina nepromenljivosti mase (32–4) svodi na:

$$\frac{\partial\,\rho}{\partial\, t} + u\,\frac{\partial\,\rho}{\partial\, x} + \rho\,\frac{\partial\, u}{\partial\, x} = 0\,.$$

Srednji član se izostavlja zbog uslovljenosti malenih brzina, pa se opet dobija (43–3).

Zadatak, upravo oba pretpostavljena zadatka, rešava sistem jednačina (43–2) i (43–3), ali uz daljna uprošćavanja, prema narednim objašnjenjima:

a) U drugom članu jednačine (43–2) može se obaviti zamena:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\,. \tag{43–4}$$

b) Uslov zadatka o malenom poremećaju dozvoljava da se napiše da je promena gustine $\rho - \rho_0$ u odnosu na neporemećenu gustinu ρ veoma malena:

$$|\rho - \rho_0| \ll \rho_0\,. \tag{43–5}$$

Kod slabo izražene stišljivosti ovo je važilo uvek i svuda i napisano je već kod (42–3): ovde, iako se radi o izraženoj stišljivosti, taj uslov izuzetno važi, jer se zadatak ograničava na veoma maleni poremećaj gustine.

c) Pretpostavka o malenom poremećaju omogućava da se izrazi:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \simeq \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_0 = \mathrm{Const} = a^2 \tag{43–6}$$

tj. izvod $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho$ se veoma malo menja, pa se može uzeti njegova vrednost u neporemećenom stanju, pri $p = p_0$ i $\rho = \rho_0$. To je vrednost označena sa a^2.

Konstanta a ima dimenziju brzine, odnosno izvod $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho$ je izražen sa kvadratom brzine, čime je uvek pozitivna, a to je načelno u redu, jer taj izvod je uvek pozitivan (porastu pritiska odgovara porast gustine, a opadanju pritiska opadanje gustine).

Može se odmah nagovestiti da će se kasnije pokazati da je *a brzina prostiranja* (propagacije) *poremećaja* ili *brzina talasa*. U jednoj tački promeni se pritisak (a sa njime i gustina), a isto se dešava u drugoj tački nešto kasnije, pa se može sračunati brzina kojom je taj poremećaj stigao iz prve tačke u drugu – to je brzina prostiranja, brzina talasa koji nosi poremećaj. Tom brzinom se ne kreće delić, pa je jasana razlika između brzine prostiranja i brzine u uobičajenom smislu reći (brzine strujanja), koja izražava kretanje mase (kretanje delića).

Uprošćavanja koja su dovela do izraza (43–4), (43–5) i (43–6) posledica su osnovne pretpostavke o malenom poremećaju koji znači da se gustina i pritisak malo menjaju, i da su moguće samo veoma malene brzine strujanja. Stoga se uzima $p \simeq \rho_0 = \mathrm{Const}$ i $u \simeq 0$, ali treba naglasiti da izvodi tih veličina nisu nula. Naprotiv, oni imaju znatne vrednosti, iako su promene veličina malene, ali se dešavaju kroz kratko vreme i na kratkom rastojanju. Ti izvodi i preostaju u jednačinama; oni izražavaju što je u pojavi bitno, iz čega će i proizaći da je brzina prostiranja talasa veoma velika, iako se radi o malenim brzinama delića. Može se razjasniti i opravdanost pretpostavke o idealnom fluidu, što znači izostavljanje devijatorskog dela napona – razlog je isti kao i za izostavljanje članova u jednačinama: malene brzine.

Jednačine (43–2) i (43–3) će se znatno uprostiti korišćenjem (43–4) do (43–6) – one se svode na:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0\,, \tag{43–7}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \tag{43–8}$$

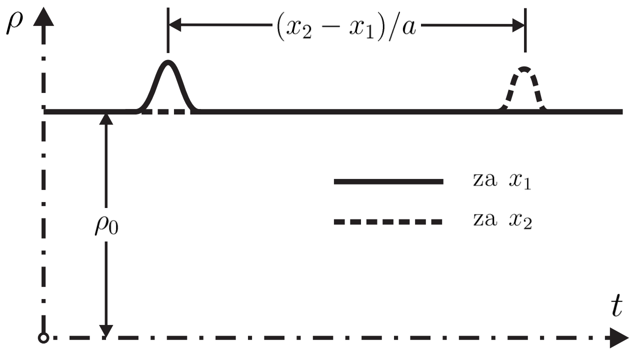
Diferenciranjem prve jednačine po x, a druge po t, uz istovremeno deljenje druge sa ρ_0, i potom oduzimanjem druge od prve, prethodni sistem (43–7) i (43–8) dovodi do parcijalne diferencijalne jednačine drugoga reda, u kojoj se pojavljuje samo ρ, dok je brzina odstranjena:

$$-\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0\,. \tag{43–9}$$

Opšte rešenje ove jednačine je:

$$\rho = \Psi_{\mathrm{I}}\,(x + a\,t) + \Psi_{\mathrm{II}}\,(x - a\,t) \tag{43–10}$$

gde su Ψ_{I} i Ψ_{II} nekakve funkcije, zavisne od početnih i graničnih uslova, koje predstavljaju dva suprotno usmerena talasa. Radi lakšeg objašnjavanja neka se uzme slučaj kada deluje samo prvi talas, pa će ρ imati istu vrednost za posmatrača koji će biti na mestu x u trenutku t, pri



Slika 43–1 Brzina a prostiranja poremećaja prikazana preko zavisnosti gustine ρ od vremena t, za položaje x_1 i x_2.

čemu je $x = a\,t$, a ovo znači da se taj posmatrač kreće brzinom a. Ovo ukazuje da je *brzina prostiranja talasa* jednaka a, što je i najavljeno. Slučaj jednog usamljenog talasa koji se prostire samo u jednom smeru prikazuje slika 43–1. Odbijanje i vraćanje talasa i njihova složenost (mnogo poremećaja čine jedan složeni) dovode i do složenih rešenja, ali je bitno da se uvek radi o navedenoj brzini prostiranja elementarnog poremećaja.

Pošto se zvuk pronosi talasima malih poremećaja gustine i pritiska može se na osnovu (43–6) napisati:

$$\boxed{\text{Brzina zvuka} \qquad a = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,\rho}}\,.} \tag{43–11}$$

Za veze između pritiska i gustine, date sa (42–15), odnosno (42–9), brzina zvuka je:

$$\text{adijabatski proces} \qquad a = \sqrt{k\,\frac{p}{\rho}} = \sqrt{k\,R\,\Theta}\,, \tag{43–12}$$

$$\text{izotermni proces} \qquad a = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{R\,\Theta} = \text{Const}\,. \tag{43–13}$$

Brzina zvuka za slabo izraženu stišljivost dobija se korišćenjem (42–4) i (43–11). Uzeta je izotermna zakonitost, jer kod malenih brzina deformacioni rad daje zanemarljivu toplotu. Dobija se:

$$a = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,. \tag{43–14}$$

Izvođenje je obavljeno uz zanemarenje težine, pa se može postaviti pitanje primenljivosti dobijenog na tečnosti, kojima je namenjen poslednji izraz (43–14). Uvođenjem težine jednačina (43–1) dobija dopunski član $f_x = -g\,\partial Z/\partial x = \mathrm{Const.}$ On je konstanta, jer se posmatra pravolinijska strujnica. Jednačina se kasnije diferencira, a sa njome i navedeni član, ali on diferenciranjem daje nulu i tako bi krajnja jednačina opet bila (43–7), upravo (43–9), što znači da rešenje brzine prostiranja ostaje isto i kada se uključi težina.

Brzina prostiranja talasa je drukčiji način *prikazivanja stišljivosti* materijala, kroz nju se povezuju pritisak i gustina i tako je suštinski treba i shvatiti. U tome smislu je i dat naslov ovom 43. poglavlju.

Odnos između brzina strujanja i zvuka je bezdimenzionalna veličina:

Mahov (MACH) broj

$$Ma = \frac{u}{a} = \frac{\text{brzina strujanja}}{\text{brzina zvuka}}\,. \tag{43–15}$$

Ovaj odnos na prvi pogled izgleda kao odnos dve brzine; i tako površno posmatran on bi bio kinematička veličina. Suštinski on je pokazatelj stišljivosti, jer iskazuje zavisnost pritiska od gustine. (43–15), uz zamene prema (43–13) ili (43–12) daje:

za izotermno strujanje $$Ma = \frac{u}{\sqrt{p\,/\,\rho}}\,, \tag{43–16}$$

za adijabatsko strujanje $$Ma = \frac{u}{\sqrt{(k\,p)\,/\,\rho}}\,, \tag{43–17}$$

dok bi se za slabo izraženu stišljivost dobilo:

$$Ma = \frac{u}{\sqrt{E\,/\,\rho}}\,,$$

što se obično izražava kvadratom prethodnoga, a to je:

$$\boxed{\text{Košijev (CAUCHY) broj} \qquad Ca = \frac{\rho\, u^2}{E}.} \tag{43–18}$$

* * *

Mahov broj može da posluži za podobno izražavanje odnosa pritisaka, gustine, ili temperature za dve tačke strujnice, koji proizlaze iz dinamičke jednačine za adijabatsko strujanje, jer se (42–24) može preobličiti u:

$$1 + \frac{k-1}{k}\,\frac{\rho_{\rm I}}{p_{\rm I}}\,\frac{u_{\rm I}^2}{2} = \frac{\rho_{\rm I}}{p_{\rm I}}\,\frac{p_{\rm II}}{\rho_{\rm II}}\left(1 + \frac{k-1}{k}\,\frac{\rho_{\rm II}}{p_{\rm II}}\,\frac{u_{\rm II}^2}{2}\right).$$

Korišćenjem (43–17) uvode se $Ma_{\rm I}$ i $Ma_{\rm II}$ (Mahovi brojevi za tačke I i II strujnice) što dovodi do:

$$1 + \frac{k-1}{2}\,Ma_{\rm I}^2 = \frac{\rho_{\rm I}}{p_{\rm I}}\,\frac{p_{\rm II}}{\rho_{\rm II}}\left(1 + \frac{k-1}{2}\,Ma_{\rm II}^2\right). \tag{43–19}$$

Na osnovu zakonitosti za adijabatu (42–15) može se napisati:

$$\frac{\rho_{\rm I}}{\rho_{\rm II}}\,\frac{p_{\rm II}}{p_{\rm I}} = \left(\frac{p_{\rm I}}{p_{\rm II}}\right)^{1/k}\frac{p_{\rm II}}{p_{\rm I}} = \frac{\rho_{\rm I}}{\rho_{\rm II}}\left(\frac{\rho_{\rm II}}{\rho_{\rm I}}\right)^{k},$$

a na osnovu jednačine stanja (42–7) prethodni izraz je jednak i $\Theta_{\rm II}/\Theta_{\rm I}$, dok je na osnovu (43–12) jednak $(a_{\rm II}/a_{\rm I})^2$, pa (43–19) dovodi do:

$$\frac{1 + \frac{k-1}{2}\,Ma_{\rm I}^2}{1 + \frac{k-1}{2}\,Ma_{\rm II}^2} = \left(\frac{a_{\rm II}}{a_{\rm I}}\right)^2 = \frac{\Theta_{\rm II}}{\Theta_{\rm I}} = \left(\frac{p_{\rm II}}{p_{\rm I}}\right)^{(k-1)/k} = \left(\frac{\rho_{\rm II}}{\rho_{\rm I}}\right)^{k-1}. \tag{43–20}$$

Ova jednačina izražava odnose za temperaturu, pritisak i gustinu u dve tačke – sve u zavisnosti od Mahovih brojeva.

deo peti
O TURBULENCIJI

51
LAMINARNO I TURBULENTNO STRUJANJE. OPIS TURBULENTNOG STRUJANJA.

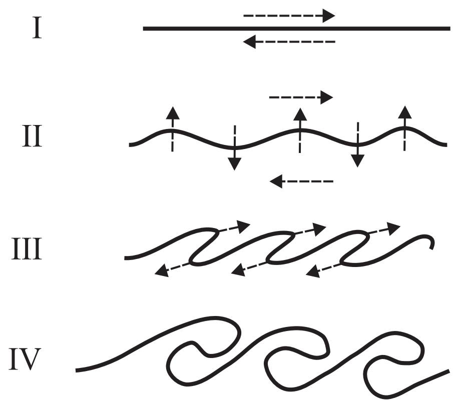
Osnovno značenje reči „lamina” je „tanka pločica”, a u proširenom smislu to može da bude „premaz”, pa i „sloj”. Pod pojmom „*laminarno strujanje*” podrazumeva se „*slojevito strujanje*”. U takvom strujanju nema međusobnog mešanja delića i jasno se odvajaju pojedine strujnice. Kao primer može se uzeti cilindrična cev kružnog poprečnog preseka, sa pravolinijskom osovinom. Ako je strujanje laminarno, sve strujnice i sve trajektorije su prave linije, paralelne sa osovinom cevi, a kao slojevi mogu se shvatiti kružni prstenovi neizmerno malene debljine. Sloj klizi preko sloja, a delići ne prelaze iz sloja u sloj.

Turbulentno strujanje daje sliku *uzburkanosti* i odatle i naziv – „turbulentus” – nemiran, uzburkan. Kod njega se delići međusobno mešaju. U prethodno navedenom primeru cevi, ako je strujanje turbulentno, delići se kreću i poprečno, jedni odlaze od zida ka osovini cevi, a drugi suprotnim smerom, i tako i nastaje njihovo međusobno mešanje. Trajektorije su zakrivljene linije, veoma nepravilnog oblika, međusobno isprepletane. Strujnice stvaraju vrlo zamršenu strujnu sliku, koja se menja od trenutka do trenutka.

Već i površno posmatranje strujanja vode i vazduha ukazuje da su im strujanja pretežno turbulentna. Čim je uočljivo tečenje vode, gotovo uvek se primećuje i uzburkanost u tečenju, ustvari ono što daje utisak tečenja je nemir turbulencije. Neprekidno menjanje strujne slike zahvaljujući kolebanjima u toku i privlači posmatrača, jer utisak nije monoton, nije jednolično dosadan. Kod vazduha je slična stvar, strujanje vetra je uvek uzburkano, što se slikovito izražava u slici dima, u podrhtavanju trave pokrenute vetrom, u vijorenju zastava i sl.

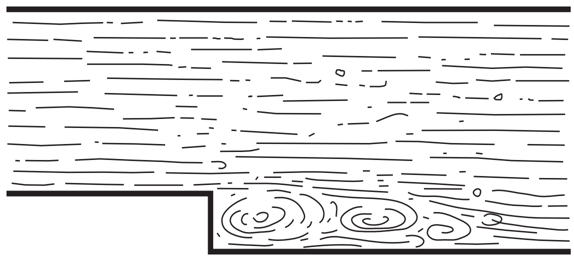
* * *

Laminarno strujanje održava se u nekom strujnom polju do izvesne vrednosti brzina, a povećanje brzina dovodi do rušenja slojevitosti i do turbulencije. Strujanje je laminarno, dok je viskoznost sposobna da deliće prisiljava da klize slojevito jedan preko drugog i brži trenjem povlače sporije, odnosno sporiji koče brže. Kada viskoznost postane nemoćna za to, nastojanje bržeg delića da povuče sporiji, odnosno odupiranje sporijeg, dovodi do njihovog međusobnog uvlačenja u vrtlog u kome je slojevitost teško održati, dolazi do mešanja delića, i to zahvata celo strujno polje; strujanje postaje turbulentno. Na slici 51–1 učinjen je pokušaj da se stekne utisak o ovoj pojavi. Prvi crtež prikazuje isto što i ranija slika 41–1, to je slojevito paralelno i pravolinijsko strujanje, gde na prikazanoj ravni deluju tangencijalni naponi viskoznog trenja, jer se brzina menja pravcem normalnim na ravan. Neka iz bilo kakvog razloga dođe do malenoga poremećaja koji zatalasa tu ravan (drugi crtež – II). Viskoznost, ako je sposobna, vratiće stanje u prvobitno neporemećeno. Ako ona nema toliko moći, jer je priraštaj brzine (u normalnom smeru) prenagao, ta talasasta površina se razvlači – (III), pa se zamotava (IV), i na kraju (V) obrazuju se vrtlozi koji onda putuju niz struju. Treba zapaziti da je međusobno prodiranje delića kroz vrhove talasa (u smerovima naznačenim na drugom crtežu) olakšano usled toga što se na ispupčenim mestima pritisak povećava, a na udubljenim smanjuje (usled dejstva centrifugalne sile), pa to potpomaže međusobno prodiranje.



Slika 51–1 Uvlačenje u vrtlog na dodiru slojeva različitih brzina.

Slika 51–2 prikazuje nastanak vrtloga u naglom proširenju provodnika. Strujnice ulazeći u proširenje ne mogu da prate čvrste granice, upravo struja se ne može naglo proširiti, nego prodire okružena fluidom koji bi mirovao u zaklonjenoj zoni, kada ga struja ne bi povlačila, a on se tome odupire i uvlači struju u vrtlog. Kod otvorenih tokova odomaćen je u narodu izraz „mrtva voda" za vodu koja u zaklonu miruje, bolje rečeno koja uvlači „živu vodu" u vrtlog.



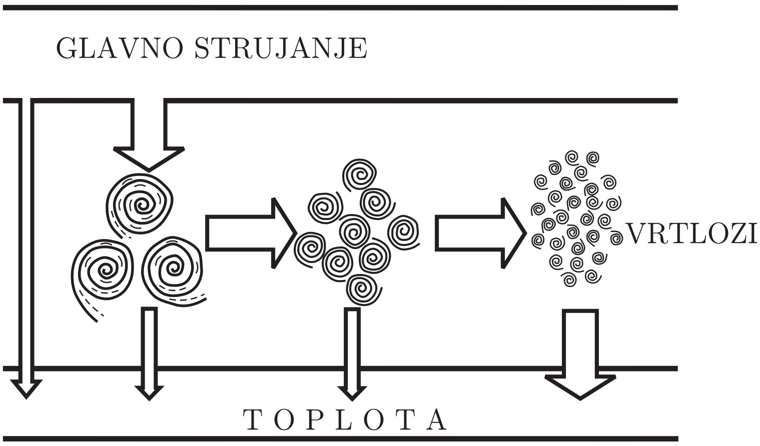
Slika 51–2 Primer nastajanja velikih vrtloga usled lokalnog uzroka.

Prikazani primer spada u pojam lokalnih stvaranja velikih vrtloga. U njima bi moglo doći do preobraćanja trenjem mehaničke energije u toplotu, čime bi se vrtlog „ugasio", ali samo ako je viskoznost jako izražena, a brzina obrtanja malena. Tada bi se pojava gubitka mehaničke energije završila u prvom vrtlogu – ali to je izuzetak. U pretežnom delu primera vrtlog se mora deliti na manje, a ovi još na manje, da bi se u najmanjima stvorila mogućnost da viskoznost bude kadra da im trenjem oduzme energiju i preobrati je u toplotu. Jasno je da jača viskoznost zahteva manje izdeljivanje, jer se pre stvore uslovi za navedeno preobraćanje. Proces putovanja, deljenja, smanjivanja, smirivanja i „izumiranja" vrtloga zahvata celu struju, ona je uzburkana, brzine se trenutno menjaju (fluktuiraju, pulziraju), a to je bitna karakteristika turbulentne struje.

Niz struju se stvaraju novi vrtlozi, jer, iako nema lokalnih naglih promena koje se nameću struji, vrtlozi će se stvarati i usled postojanja same čvrste granice. Čim postoji čvrsta granica, uz koju je brzina fluida jednaka nuli, mora postojati neravnomernost brzine i dodir bržih i sporijih delića, a to, kao što je rečeno, uzrokuje trenje i stvara mogućnost međusobnog uvlačenja u vrtlog. Kod jedne pravolinijski postavljene cevi konstantnog poprečnog preseka u svakom preseku nastaju vrtlozi, oni stvoreni ranije već su izdeljeni i smiruju se, nastali još ranije (još uzvodnije) već „izumiru", tako da kroz presek putuju različiti vrtlozi u jednom neprekidnom procesu koji statistički sređen pokazuje prosečnu ujednačenost kroz vreme i duž cevi ako su svi uslovi isti (proticaj se vremenski ne menja, hrapavost obloge je svuda ista). Ono što se u jednom preseku može primetiti tokom vremena, može se primetiti i u jednom trenutku kroz veću dužinu cevi, jer se radi o istim vrtlozima koji putuju niz struju. Ako u struji ima lokalnih promena, one dodaju svoje vrtloge i na dugačkom putu iza toga osećaju se njihovi tragovi.

Ne mora prisustvo čvrste granice da nametne neravnomernost brzine i kao posledicu toga turbulenciju (što je do sada bilo opisivano), jer neravnomernost brzine, a sa tim i turbulenciju, može da nametne i drugi uzrok – na primer ubrizgavanje mlaza fluida u mirnu fluidnu sredinu (ili sa drukčijom brzinom od brzine mlaza). Govori se o „turbulenciji usled uticaja granice" (ili zida) i o „slobodnoj turbulenciji" (u prostoru koji se može smatrati neograničenim, jer su mu čvrste granice daleko od oblasti proučavanja, pa su stoga neuticajne na pojavu). Vrtlozi uzimaju energiju iz struje, iz koje se odvajaju i ta energija je struji nepovratno oduzeta, jer iz većih vrtloga ta energija (mehanička) prelazi u manje, da bi se, kako je već rečeno, preobratila u toplotu. Nepovratnost mehaničke energije dozvoljava da se ta energija struji odmah „otpiše", da se odmah shvati kao „izgubijena", jer se pouzdano zna da se neće vratiti. To treba shvatiti kao „obračun bilansa", a treba imati u vidu da se u vrtlog odvaja mehanička energija i da će se ona kroz vrtloge prenositi i tek na kraju preobratiti u toplotu. Na slici 51–3 učinjen je pokušaj da se šematski prikaže prenos energije.

Na slici je napisano „glavno strujanje" – šta se pod tim podrazumeva protumačiće se tačno u narednom poglavlju (52). Za sada je dovoljno da se kaže da se kao „glavno" smatra ono što i jeste glavno (primarno) sa stanovišta prenošenja fluida, a to je kretanje niz struju, a da se kao „sporedno" (sekundarno) smatra ono što „glavno strujanje" prati, a ne upravlja fluid niz struju. Vrtlog kao celina se kreće pravcem niz struju (kaže se da ga ona „nosi") i to spada u „glavno strujanje", ali tu ne spada kretanje delića u vrtlogu drugim pravcima. Drugim rečima, od trenutne brzine u nekoj tački u „glavno strujanje" ulazi onaj deo brzine kojim se prenosi fluid niz struju, a preostali deo je „sporedno strujanje",



Slika 51–3 Šematski prikaz prenosa energije od većih u manje vrtloge.

to su fluktuacije brzine. Prema tome, nisu vrtlozi nešto prostorno odvojeno (razgraničeno) od onoga što se podrazumeva pod pojmom „glavno strujanje”. Sliku 51–3 treba shvatiti kao šematski prikaz kako se može obračunati trošenje energije u turbulentnom strujanju. Ono što vrtlozi uzmu, to služi da se vrtlozi stvore, a to se u njima onda delom utroši na trenje i tako preobraća u toplotu, a delom to oni „ostavljaju” manjim vrtlozima, u koje se „raspadnu” (i to će se, na kraju, preobratiti u toplotu). Vrtlozi „crpu” energiju iz „glavnog strujanja”, ona ih mora „pothranjivati” – to ona ne može „izbeći”, jer je turbulencija (i stvaranje vrtloga) neminovna pojava čim se laminarno strujanje ne može održati.

Dodaće se još i jedna napomena: pojavu vrtloga ne treba potpuno poistovetiti sa pojavom turbulencije, jer vrtlog može da bude laminaran, to je doduše izuzetno moguće kod neke lokalne promene, ali samo pri veoma malenim brzinama i izrazitoj viskoznosti. Slojevitost vrtloga se veoma lako ruši (lakše nego ravni slojevi), tako da je to baš podesno mesto da se delići zamešaju i da se stvori turbulencija.

* * *

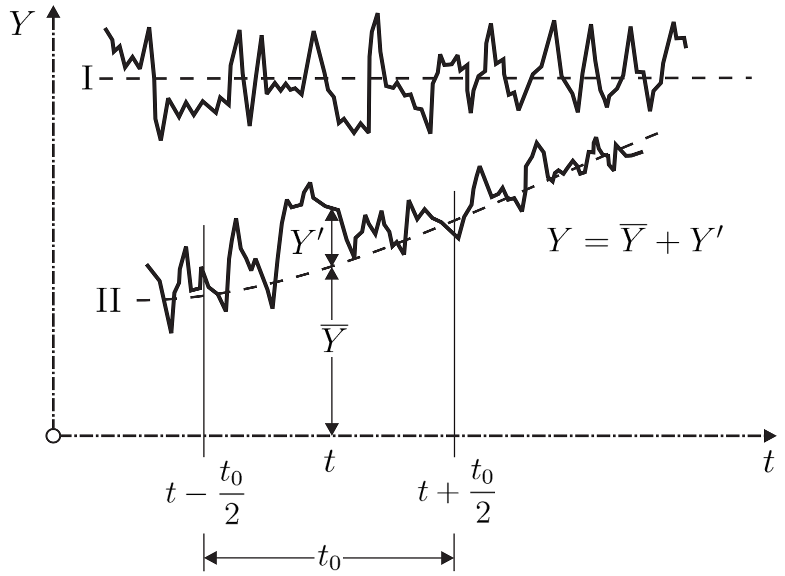
Turbulencija se može shvatiti kao težnja da se kroz vrtložno mešanje osrednjene brzine po prostoru izjednače, kao protivljenje neravnomernom rasporedu brzina koji strujanju nameću granice. Kroz turbulentno mešanje šire se po strujnom polju svi uticaji, pa se mešanjem doprinosi ne samo smanjenju neravnomernosti brzina, nego i svega što fluid nosi (mehanička energija, toplota, količina kretanja, koncentracija materije koju fluid nosi). Delići se kreću niz struju i poprečno, pri tome dodirom prenose uticaje i jedan drugom predaju ili oduzimaju ono što nose. Ova bitna karakteristika turbulencije potpomaže rasprostiranju uticaja i postaje vidljiva u sledećem primeru. U fluid se ubaci obojena koncentracija iste gustine i zanemarljive razlike u viskoznosti (tako neće remetiti strujanje). Ona neće ići niz struju u istoj zapremini, nego će usled turbulencije neki delići napredovati brže, neki sporije, i uz to će poprečno prodirati, i tako predavati boju drugim delićima. Obojeni „oblak" će ići niz struju, ali će se razvlačiti i širiti i pri tome postajati sve bleđi.

*   *   *

Uzburkanost turbulencije dovodi do *kolebanja* ili *fluktuiranja* (*pulziranja*) vrednosti veličina po prostoru i vremenu. Turbulencija se i opisuje kao nepravilan, haotičan raspored veličina po prostoru i vremenu, pa se fluktuiranje veličina posmatra kao slučajan proces. Prvo unošenje nekakvog reda u razmatranje je *razdvajanje sporednog* (fluktuiranja, kolebanja) *od glavnog* (od onoga oko čega se fluktuiranje obavlja). Na slici 51–4 prikazana je, u funkciji vremena veličina Y (bilo koja veličina) u jednoj tački, tj. posmatra se lokalna vrednost kroz vreme. Prvi grafikon (I) se odnosi na slučaj kada se vrednost Y u posmatranoj tački koleba (fluktuira, oscilira, pulzira) oko neke ustaljene vrednosti, dok grafikon (II) pokazuje da se, pored kolebanja, jasno uočava i porast vrednosti tokom vremena.

Razmatranje turbulentnog strujanja se olakšava ako se razdvoji:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} Y & = & \overline{Y} & + & Y' \\ \begin{array}{c}\text{trenutna}\\ \text{vrednost}\end{array} & = & \begin{array}{c}\text{osrednjena}\\ \text{vrednost}\end{array} & + & \begin{array}{c}\text{fluktuacija}\\ \text{(odstupanje).}\end{array} \end{array}} \qquad (51\text{–}1)$$



Slika 51–4 Lokalna vrednost u funkciji vremena. Fluktuacije se obavljaju oko vrednosti koja je ustaljena (I), odnosno koja se menja vremenom (II).

Osrednjena vrednost $\overline{Y}$ je lokalna ($x_i = \text{const}$), a može da zavisi od vremena t, i određena je sa:

$$\overline{Y} = \overline{Y}(t) = \frac{1}{t_0}\int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} \overline{Y}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{t_0}\int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} Y\,\mathrm{d}\,t \qquad (51\text{–}2)$$

dok je osrednjeno odstupanje nula (u tome je baš smisao osrednjavanja):

$$\overline{Y'} = \frac{1}{t_0}\int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} Y'\,\mathrm{d}\,t = 0\,. \qquad (51\text{–}3)$$

Prethodno je uzet naziv „osrednjena”, a moglo se uzeti i „srednja”, ili „prosečna”. Razlog za učinjeni izbor je izbegavanje zabune, jer će se „srednja” odnositi na prosečnu vrednost u poprečnom preseku struje – upravo tamo gde će se osrednjavanje obaviti po prostoru, dok će se „*osrednjena*” uvek odnositi na *osrednjavanje kroz vreme lokalne vrednosti*. Tako osrednjene vrednosti označavaće se sa crtom iznad (biće nadvučene) i crta će zahvatati jedno slovo ili ceo izraz, zavisno od toga šta se osrednjava. To je čest način za obeležavanje proseka.

Odstupanje od osrednjene vrednosti nazvano je „*fluktuacija*" i tako je upisano uz jednačinu (51–1). Obeležavaće se gornjim indeksom u vidu zapete, što je uobičajeno kod obeležavanja turbulentnih fluktuacija, a uopšte se primenjuje ako se želi zadržati ista oznaka, a posebno se naglašava. „Fluktuacija" znači menjanje, kolebanje, nestalnost, a može da znači i talasanje, i poslužila je i služiće i kao naziv za pojavu i kao mera odstupanja. Reč se u izlaganjima veže uvek za turbulenciju, pa se to ne mora posebno naglašavati.

Upotrebljava se i reč „turbulentna pulzacija" ili samo „*pulzacija*", što doslovno znači udaranje, otkucavanje, a turbulencija se ispoljava kroz naizmenično izmenjivanje pojačanih i oslabljenih brzina i pritisaka – fluid „pulzira" ako struji turbulentno, „pulziraju" veličine u strujanju.

Vrednost $\overline{Y}(t)$ ne sme da zavisi od trajanja osrednjavanja t_0 (to je trajanje opažanja koje je dovelo do osrednjene vrednosti), jer se mora dobiti ista vrednost za $\overline{Y}(t)$ ako se uzme drugo t_0 sa istim trenutkom t u njegovoj sredini.

Postavljen je uslov da osrednjena vrednost $\overline{Y}(t)$ ne sme da zavisi od trajanja osrednjavanja t_0. Ovaj uslov će biti ispunjen ako $\partial\overline{Y}(t)/\partial t$ zadržava istu vrednost za $t - t_0/2 < t < t + t_0/2$, tj. tokom osrednjavanja, što znači da se $\overline{Y}(t)$ može kroz naznačeno vreme grafički prikazati pravom linijom. Da je to tako, pokazuje se na sledeći način: diferenciranjem (51–2) po vremenu, uz zamenu redosleda diferenciranja i integrisanja, dobija se:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} = \frac{1}{t_0}\frac{\partial}{\partial t}\int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} \overline{Y}\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \frac{1}{t_0}\int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\overline{Y}(t+\frac{t_0}{2}) - \overline{Y}(t-\frac{t_0}{2})}{t_0}\,. \qquad (51–4)$$

Poslednje napisano neće se menjati, iako se menja t_0, ako su priraštaji za $\overline{Y}$ srazmerni sa t_0, a to je moguće ako je $\partial\overline{Y}/\partial t$ konstanta, a tako je i najavljeno.

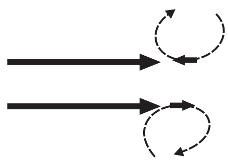
Ovo znači da t_0 ne sme da bude predugačko, jer unutar njega osrednjena vrednost ne sme da se toliko menja da se ne može ispuniti prethodni uslov. Sa druge strane, t_0 ne sme da bude ni prekratko, upravo mora da bude dovoljno dugo da se ispolje svi uticaji fluktuacije. Na prvi pogled izgleda nemoguće pomiriti dva suprotno usmerena zahteva, ali to je moguće, jer se radi o vremenskim intervalima različitog reda vrednosti. Periode turbulentnih fluktuacija se mere delovima sekunde, dok se osetne promene osrednjenih vrednosti dešavaju kroz neuporedivo duže vreme. Na slici 51–4 fluktuacije su ,,razvučene", odnosno ukupno vreme je ,,zgusnuto", jer bi u istoj vremenskoj razmeri to bilo moguće prikazati samo veoma dugačkim crtežom.

Ovo objašnjenje treba shvatiti da je bila preterana bojazan da se osrednjena vrednost $\overline{Y}$ može osetno promeniti kroz vreme posmatranja t_0 (a da ono bude dovoljno dugo da se ispolje sve osobenosti fluktuacija). Može se čak i razmatrani uslov smatrati nepotrebnim, jer će se u dovoljno dugačkom vremenu posmatranja t_0, osrednjena vrednost zanemarljivo promeniti, pa se može računati da je $\overline{Y} = \mathrm{Const}$ (tokom t_0), odnosno $\partial\overline{Y}/\partial t = 0$.

Raspravljeno se odnosi na slučaj (II) na slici 51–4. Za slučaj (I), gde se osrednjena vrednost ne menja kroz vreme, gde je $\overline{Y} = \mathrm{const}$, trajanje osrednjavanja može se produžavati proizvoljno – može se čak reći da što je t_0 duže, to je rezultat osrednjavanja pouzdaniji.

* * *

Na slici 51–5 učinjen je pokušaj da se prikaže da se putovanjem vrtloga stvara kolebanje brzine, jer se ona povremeno, i ponegde, poveća, da bi se kasnije, ili drugde, smanjila.



Slika 51–5 Vrtlog trenutno smanji, odnosno poveća brzinu.

Nepravilnosti, upravo fluktuacije lokalne brzine kroz vreme, prenose se po prostoru – ono što se sada dešava ovde, desilo se ranije negde uz struju, pa istovremeni pogled po prostoru ili lokalni kroz vreme imaju fluktuacije koje su u izvesnoj međusobnoj vezi, jer zahvataju vrtloge istih karakteristika. Grafikon istovremene brzine duž jedne prave sličan je onome za brzinu u jednoj tački, a kroz vreme. Kasnije, u narednom poglavlju – slika 52–1 – prikazuje se i istovremeni raspored brzina po poprečnom preseku struje i duž pravca osrednjenog strujanja, pored grafikona vremenskog toka lokalne brzine (u jednoj tački).

* * *

Merenje trenutnih vrednosti, čime su obuhvaćene i fluktuacije, moguće je samo savremenim elektronskim uređajima, jer oni mogu da prate turbulentna kolebanja (mogu da trenutno odgovaraju na pobudu), dok to ne mogu merni uređaji sazdani po zakonima mehanike, jer njihova inertnost ne može da odgovara na turbulentne fluktuacije koje se menjaju u delovima sekunde.

Jedan od uobičajenih načina merenja brzine je stavljanje elise u određenu tačku struje. Brzina obrtanja elise je zavisna od brzine strujanja i opažanjem prve poznata je druga. Elisa ne može da prati kolebanje brzine, ne može se dobiti uvid u vremenski tok brzine, ili bi možda pokazivala nekakva kolebanja, ali bi bila znatno neizraženija i znatno sporija od fluktuacija brzine. Pritisak se meri manometrom, ili visinom stuba tečnosti, a to ne može da pokaže trenutna i brza kolebanja. Opruga dinamometra namenjenog merenju sile ne može da oscilira tako brzo da prati fluktuiranje sile.

Pritisak na zid, uključivši i fluktuacije, može se meriti posrednim putem: pritisak deluje na veoma tanku membranu, ugrađenu u zid. Ugibi membrane trenutno prate fluktuacije pritiska, a tim se ugibima menja električni otpor membrane, i on se u stvari meri (njegova trenutna vrednost daje trenutnu vrednost pritiska, uz prethodno utvrđenu njihovu međusobnu vezu).

Trenutna brzina se obično meri tzv. „vrelom žicom", koja je veoma tanka (prečnik reda vrednosti – stoti deo milimetra), a duga oko milimetra i postavljena prema komponenti brzine koja se meri. Zahvaljujući ovakvoj „žičici", njeno kolebanje temperature pratiće kolebanje brzine (veća brzina, veće odnošenje toplote), a promena temperature se ispoljava promenom električnog otpora, pri čemu se jačina struje održava konstantnom. Ili, održava se konstantna temperatura žice, pa trenutna jačina struje znači ukazuje koliko se toplote trenutno odnosi od žice.

Ova dva primera data su samo da se pruži kratak i površan uvid u neke od mogućnosti merenja fluktuacija. Danas su ta merenja veoma razvijena, zahvaljujući razvijenoj elektronici, dobrim mernim instrumentima, te prihvatanju podataka sa merenja neposredno u računare koji ih obrađuju. Primećuje se da se kod fluktuacija (da bi se one obuhvatile) registruje i preko 1000 podataka u jednoj sekundi.

52
OSREDNJAVANJE UTICAJA I RAZDVAJANJE STRUJANJA. DEJSTVO FLUKTUACIJA NA GLAVNO STRUJANJE.

Iz razmatranja u prethodnom poglavlju (51) uvidelo se da sama pojava turbulencije nameće razdvajanje na osrednjene vrednosti i fluktuacije, i da je to veoma podobno i sa praktičnog stanovišta. Nadalje se može razmišljati i usmeriti nastojanja na određivanje osrednjenih vrednosti, da bi se o strujanju saznalo ono što se nameće kao glavno, a tek potom da se pokuša da se razjasne i fluktuacije. U nizu praktičnih zadataka to može da bude i dovoljno, jer u tim zadacima fluktuacije nemaju uticaj na tehnička rešenja koja će proizaći iz razmatranja strujanja. Niz merenja u eksperimentalnim radovima, i radi provere izgrađenih objekata, mogu da se zadovolje samo sa osrednjenim vrednostima.

Ako se zadatak ograniči na osrednjene vrednosti, moglo bi se pomisliti da to znači jednostavno izostavljanje fluktuacija. To nije tačno, jer fluktuacije utiču na osrednjene vrednosti. Razumno je, međutim, od fluktuacija uzeti samo onoliko koliko je neophodno, koliko se mora, da bi se došlo do osrednjenih vrednosti. To je načelo koje se primenjuje ako je cilj određivanje osrednjenih vrednosti.

Može se uvesti i pojam „*osrednjeno strujanje*" koje se može nazvati i „*glavno*" ili „primarno", a koje je opisano osrednjenim vrednostima, tj. određeno je posmatranjem tih vrednosti kroz prostor i vreme. Na taj način se *odvaja ono što je nazvano „glavno*" ili „primarno" od „dodatnog" ili „sekundarnog", tj. od *fluktuacija.* Razdvajanjem vrednosti veličina „razdvojilo se i strujanje", ali samo veštački, radi lakšeg proučavanja, jer se „razdvojilo" ono što je suštinski, u fizičkom smislu, nerazdvojivo, pošto je strujanje jedinstven proces.

U jednačinama kojima će biti povezane osrednjene vrednosti pojaviće se, kako je malo pre najavljeno, i od fluktuacija ono čime one utiču na osrednjene vrednosti, pa će ti članovi jednačina izražavati *uticaj fluktuacija na glavno strujanje.*

Određivanje osrednjenih vrednosti ne rešava svaki praktični zadatak i ulaženje u fluktuacije ne treba shvatiti samo kao „nužno zlo" koje se ne može zaobići kada se određuju osrednjene vrednosti, jer se u nekim zadacima moraju razmatrati fluktuacije zbog njih samih, upravo zato i što su one merodavne za rešenje zadatka.

Za određeni kanal (određeni poprečni presek, oblogu i pad dna), praktični zahtevi obično se svode na poznavanje dubine (osrednjene) i proticaja. Nadalje se može zahtevati kako promena kanala (promena preseka, obloge i pada) utiče na proticajne mogućnosti. Za sve ovo ne treba poznavati fluktuacije brzina i pritisaka na oblogu, jer nemaju praktični značaj. Međutim, ako u tom kanalu treba da se raširi (razblaži) ubačeni koncentrisani rastvor, i ako se ta pojava mora razjasniti (u tome je zadatak), onda se fluktuacije brzine ne mogu zaobići, jer će baš one rastvor i širiti u poprečnom pravcu (u tom pravcu osrednjene brzine nema). Da nije poprečnih fluktuacija ubačeni rastvor bi tekao izdvojen, a baš one ga mešaju i time razređuju.

Za drugi primer razjašnjavanja dovoljnosti ili nedovoljnosti rešenja zadatka samo sa osrednjenim vrednostima neka posluži opterećenje na telo uronjeno u fluidnu struju. U pretežnom broju slučajeva dovoljno je poznavanje osrednjenog opterećenja (koje daju osrednjeni pritisci), jer bi fluktuacije ukazale samo na malena trenutna kolebanja oko osrednjenih vrednosti, koja nisu merodavna po stabilnost tela. Međutim, u nekim slučajevima, i skromno osrednjeno opterećenje može da uzbudi telo na vibracije, koje mogu biti uzrok nestabilnosti, a njihov uzrok su – fluktuacije pritisaka, koje stoga moraju biti proučene.

Posle navođenja ovih primera, treba se vratiti na izlaganje pre njih, gde je prihvaćeno da se nastojanja usmere da se prvenstveno dođe do mogućnosti za određivanje osrednjenih vrednosti veličina. Veličine su povezane u jednačinama, sastavljenim od članova, od kojih svaki predstavlja nekakvu složenu veličinu koja izražava uticaj u tom članu upisanih veličina. Treba osrednjavati članove jednačine da se dobiju osrednjeni međusobni uticaji koje prikazuje jednačina, i to će prikazati zavisnosti za osrednjene vrednosti, a to je ono što se namerava postići. Da bi se to obavilo treba prethodno navesti neka pravila za osrednjavanje, što se čini odmah u produžetku.

* * *

Osrednjena vrednost zbira razdvaja se na zbir osrednjenih vrednosti:

$$\overline{Y_{\mathrm{I}} + Y_{\mathrm{II}}} = \overline{Y_{\mathrm{I}}} + \overline{Y_{\mathrm{II}}}\,. \tag{52–1}$$

Integral nije ništa drugo nego zbir neizmerno mnogo sabiraka, pa se može napisati:

$$\overline{\int_{x_1}^{x_2} Y\,\mathrm{d}x} = \int_{x_1}^{x_2} \overline{Y}\,\mathrm{d}x\,. \tag{52–2}$$

Isto je i za površinske i zapreminske integrale.

Proizvod dve trenutne vrednosti iznosi:

$$\begin{aligned} Y_{\mathrm{I}}\,Y_{\mathrm{II}} &= \Big(\overline{Y_{\mathrm{I}}} + Y_{\mathrm{II}}'\Big)\Big(\overline{Y_{\mathrm{II}}} + Y_{\mathrm{II}}'\Big) = \\ &= \overline{Y_{\mathrm{I}}}\,\overline{Y_{\mathrm{II}}} + Y_{\mathrm{I}}'\,Y_{\mathrm{II}}' + \overline{Y_{\mathrm{I}}}\,Y_{\mathrm{II}}' + Y_{\mathrm{I}}'\,\overline{Y_{\mathrm{II}}}\,. \end{aligned}$$

Osrednjena vrednost proizvoda dobiće se osrednjavanjem svih članova desne strane, uz napomenu da je osrednjena vrednost poslednja dva člana jednaka nuli, jer je (za pretposlednji član):

$$\overline{\overline{Y_{\mathrm{I}}}\,Y_{\mathrm{II}}'} = \frac{1}{t_0}\int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} \overline{Y_{\mathrm{I}}}\,{Y_{\mathrm{II}}}'\,\mathrm{d}t = \overline{Y_{\mathrm{I}}}\,\frac{1}{t_0}\int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} {Y_{\mathrm{II}}}'\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

pošto se izraz sveo na integral odstupanja, a on je nula. Treba se podsetiti ranijeg zaključka da se, tokom vremena t_0, $\overline{Y}$ zanemarljivo menja, pa se može smatrati konstantom. Pošto su dva poslednja člana nula, može se napisati:

$$\overline{Y_{\mathrm{I}}\;Y_{\mathrm{II}}} \;=\; \overline{Y_{\mathrm{I}}}\;\overline{Y_{\mathrm{II}}} \;+\; \overline{Y_{\mathrm{I}}'\;Y_{\mathrm{II}}'}\,. \tag{52–3}$$

Treba uočiti da osrednjena vrednost proizvoda nije proizvod osrednjenih vrednosti:

$$\overline{Y_{\mathrm{I}}\;Y_{\mathrm{II}}} \;\neq\; \overline{Y_{\mathrm{I}}}\;\overline{Y_{\mathrm{II}}}\,, \tag{52–4}$$

a osrednjena vrednost proizvoda odstupanja nije jednaka proizvodu osrednjenih odstupanja (ovaj drugi je nula):

$$\overline{Y_{\mathrm{I}}'\;Y_{\mathrm{II}}'} \;\neq\; \overline{Y_{\mathrm{I}}'}\;\overline{Y_{\mathrm{II}}'} = 0\,.$$

Osrednjena vrednost proizvoda tri veličine dobija se na isti način – ona je jednaka:

$$\overline{Y_{\mathrm{I}}\,Y_{\mathrm{II}}\,Y_{\mathrm{III}}} = \overline{Y_{\mathrm{I}}}\;\overline{Y_{\mathrm{II}}}\;\overline{Y_{\mathrm{III}}} + \overline{Y'_{\mathrm{I}}\,Y'_{\mathrm{II}}\,Y'_{\mathrm{III}}} + \\ + \overline{Y_{\mathrm{I}}}\;\overline{Y'_{\mathrm{II}}\,Y'_{\mathrm{III}}} + \overline{Y_{\mathrm{II}}}\;\overline{Y'_{\mathrm{I}}\,Y'_{\mathrm{III}}} + \overline{Y_{\mathrm{III}}}\;\overline{Y'_{\mathrm{I}}\,Y'_{\mathrm{II}}}\,, \qquad (52\text{–}5)$$

jer je:

$$\overline{Y'_{\mathrm{I}}\;\overline{Y_{\mathrm{II}}}\;\overline{Y_{\mathrm{III}}}} = \overline{Y'_{\mathrm{II}}\;\overline{Y_{\mathrm{I}}}\;\overline{Y_{\mathrm{III}}}} = \overline{Y'_{\mathrm{III}}\;\overline{Y_{\mathrm{I}}}\;\overline{Y_{\mathrm{II}}}} = 0\,.$$

Osrednjeni proizvod dve veličine (52–3) sveo se na dva sabirka (a dva su otpisana), za tri veličine (52–5) ima 5 sabiraka (3 su otpala). Lako je izreći pravilo: Osrednjeni proizvod od N veličina imaće $2^N - N$ sabiraka.

Uticaji koji se sabiraju ili izjednačuju obično su parcijalni izvodi (takvi su članovi jednačina), pa treba izraziti osrednjenu vrednost parcijalnog izvoda:

$$\overline{\frac{\partial\,Y}{\partial\,x}} = \frac{1}{t_0}\int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} \frac{\partial\,Y}{\partial\,x}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{1}{t_0}\int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} Y\,\mathrm{d}\,t\right) = \frac{\partial\,\overline{Y}}{\partial\,x}. \qquad (52\text{–}6)$$

Zamenjen je redosled diferenciranja i integrisanja, pa se diferencira osrednjena vrednost od Y. Ovo ukazuje da je za osrednjenu vrednost parcijalnog izvoda dovoljno obaviti samo diferenciranje osrednjene vrednosti.

Na isti način za drugi izvod se dobija:

$$\overline{\frac{\partial^2\,Y}{\partial\,x^2}} = \frac{\partial^2\,\overline{Y}}{\partial\,x^2}\,. \qquad (52\text{–}7)$$

Na neki izraz može se primeniti dva, ili više prethodnih pravila – na primer, primenom (52–6) i (52–3) dobija se:

$$\overline{\frac{\partial\,(Y_{\mathrm{I}}\,Y_{\mathrm{II}})}{\partial\,x}} = \frac{\partial}{\partial\,x}\,(\,\overline{Y_{\mathrm{I}}\,Y_{\mathrm{II}}}\,) = \frac{\partial}{\partial\,x}\,(\,\overline{Y_{\mathrm{I}}}\;\overline{Y_{\mathrm{II}}}\,) + \frac{\partial}{\partial\,x}\,(\,\overline{Y'_{\mathrm{I}}\,Y'_{\mathrm{II}}}\,)\,. \qquad (52\text{–}8)$$

Daljnje pravilo je:

$$\overline{Y_{\mathrm{I}}\,\frac{\partial\,Y_{\mathrm{II}}}{\partial\,x}} = \overline{Y_{\mathrm{I}}}\,\frac{\partial\,\overline{Y_{\mathrm{II}}}}{\partial\,x} + \overline{Y'_{\mathrm{I}}\,\frac{\partial\,Y'_{\mathrm{II}}}{\partial\,x}}\,. \qquad (52\text{–}9)$$

Napisani parcijalni izvod u (52–6) je izvod po bilo kojoj koordinatnoj osovini i za parcijalni izvod po vremenu važi isto pravilo, pošto se i ovde može zameniti red diferenciranja i integrisanja:

$$\overline{\frac{\partial Y}{\partial t}} = \frac{1}{t_0} \int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} \frac{\partial Y}{\partial t} \, \mathrm{d}\, t = \frac{1}{t_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} Y \, \mathrm{d}\, t = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial t}. \qquad (52\text{–}10)$$

* * *

Treba primetiti da je svako turbulentno strujanje neustaljeno, a samo laminamo tečenje može da bude ustaljeno. Međutim, zanemarenjem fluktuacija ono postaje ustaljeno, ako se za bilo koju veličinu i bilo koju tačku ostvaruje:

Uslov ustaljenosti osrednjenih vrednosti

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} = 0\,. \qquad (52\text{–}11)$$

Kod takvog strujanja, za bilo koju veličinu lokalna funkcija $\overline{Y(t)}$ je konstanta i ponaša se prema (I) na slici 51–4.

Ovakvo strujanje se proučava *kao ustaljeno*, ono je „kvazipermanentno” ili *uglavnom ustaljeno*, upravo kod njega se neustaljenost ispoljava isključivo kroz fluktuacije, *trenutne vrednosti osciliraju oko ustaljenih lokalnih vrednosti.* Prethodno govori da je zahvaljujući podeli na osrednjene vrednosti i fluktuacije proširen pojam ustaljenog strujanja.

Jednačina (52–11) kazuje da ustaljene osrednjene vrednosti znače i ustaljene sve osrednjene uticaje, uključivši i one od fluktuacija (osrednjene proizvode fluktuacija), pa im parcijalni izvodi po vremenu moraju da budu jednaki nuli.

Do saznanja o turbulentnim fluktuacijama i njihovim međusobnim vezama, i o zavisnostima sa osrednjenim strujanjem, može se doći i razmatranjem strujanja, gde je ispunjen prethodni uslov ustaljenosti. Time se znatno olakšavaju istraživanja i stoga se eksperimentalni radovi, i njihova tumačenja, odnose skoro uvek na strujanja uz ispunjavanje navedenog uslova.

* * *

Proticaj kroz površinu A, prema (23–2), uz razdvajanje na osrednjenu brzinu i fluktuaciju, iznosi:

$$Q = \int_A u_i \, n_i \, \mathrm{d}A = \int_A (\overline{u_i} + u_i') \, n_i \, \mathrm{d}A \, .$$

Osrednjavanje, shodno (52–2), daje:

$$\overline{Q} = \overline{\int_A u_i \, n_i \, \mathrm{d}A} = \int_A \overline{u_i} \, n_i \, \mathrm{d}A \, , \tag{52–12}$$

što znači da rezultat proticanja – zapremina koja kroz A protekne za neko vreme – zavisi isključivo od osrednjenih brzina.

Neka površina bude ravna i brzine normalne na nju – tada je proticaj:

$$\overline{Q} = \int_A \overline{u} \, \mathrm{d}A \, ,$$

što se može napisati i sa:

$$\overline{Q} = u_{\mathrm{sr}} \, A \, , \tag{52–13}$$

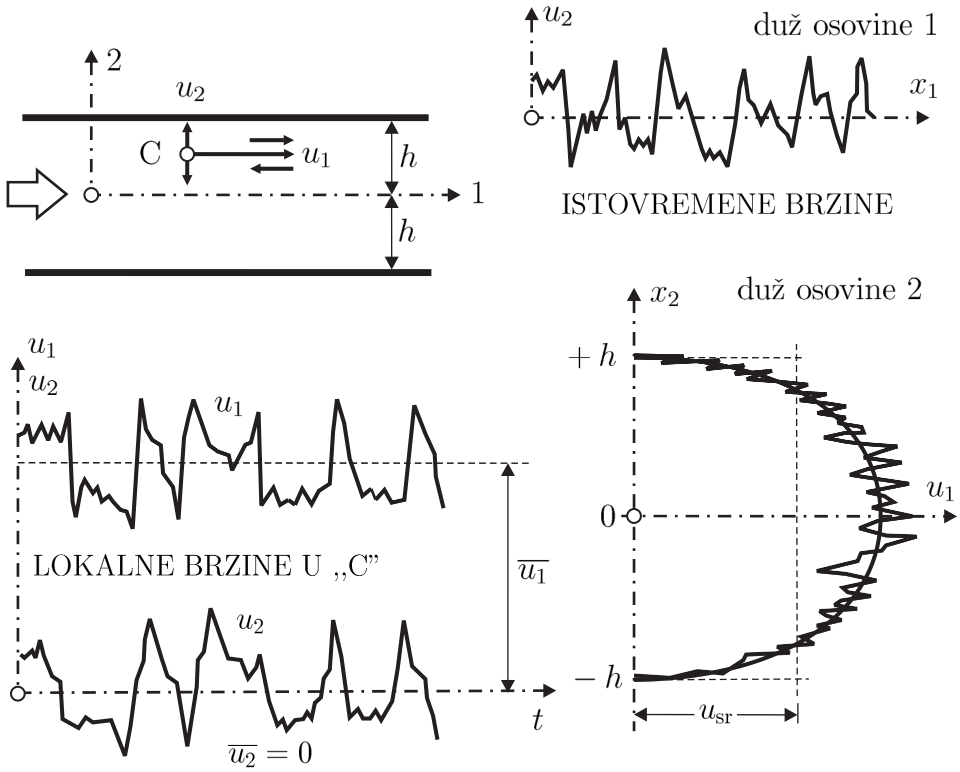
gde je:

$$u_{\mathrm{sr}} = \frac{1}{A} \int_A \overline{u} \; \mathrm{d}A \, , \tag{52–14}$$

tj. prosečna brzina po preseku. Ova brzina će se zvati *„srednja”* što je već najavljeno kada se u prethodnom Poglavlju 51. objašnjavalo da se radi izbegavanja zabune, naziv „osrednjeno” odnosi na „osrednjeno po vremenu”, dok će se *„srednja”* upotrebljavati za *„osrednjeno po preseku”*. Treba dodati da je „srednja brzina” prosek iz lokalnih po vremenu već osrednjenih brzina.

U produžetku se razmatra jedan jednostavan slučaj turbulentnog strujanja nestišljivog fluida, što će poslužiti radi razjašnjavanja još nekih praktičnih posledica osrednjavanja.

Strujanje između dve paralelne ploče, na rastojanju $2\,h$ – slika 52–1 – posmatra se kao ustaljeno, pravolinijsko, paralelno i ravansko. Sve brzine su upravljene u pravcu „1”. Ravan proučavanja je $(1, 2)$ i u svim međusobno paralelnim ravnima stanje je isto, što znači da su bočna ograničenja strujanju veoma daleko od proučavanog područja. Nadalje se pretpostavlja da nikakvih uticaja nema koji bi remetili istovetnost uslova duž struje, pa je raspored podužnih brzina u svim poprečnim



Slika 52–1 Brzine za ravansko strujanje između dve paralelne ploče.

presecima isti. Sve nabrojano moguće je ostvariti ako se shvati uslovno da važi za osrednjene brzine.

Ustaljenost se može obezbediti samo za osrednjene vrednosti i tako je treba shvatiti; upravo onako kako je i objašnjena ustaljenost za turbulentno strujanje. Pravolinijsko i paralelno je samo osrednjeno strujanje, osrednjena brzina je upravljena isključivo u pravcu „1", dok ima i poprečnih fluktuacija. Na strujanje u posmatranoj ravni nema osrednjenih uticaja u pravcu „3" (normalnom na nju), ali to ne znači da nema trenutnih fluktuacija u'_3. Duž prave paralelne sa osovinom „1" nema promena osrednjenih vrednosti brzina, jer je obezbeđena istovetnost strujanja, ali se duž nje menjaju istovremene vrednosti fluktuacija. Sve pobrojano može se napisati brzinama prema sledećem:

$$\overline{u_2} = \overline{u_3} = 0 \ , \qquad u_2 = u'_2 \ , \qquad u_3 = u'_3 \ ,$$

$$u_1 = \overline{u_1} + u_1' \,, \qquad \overline{u_1} = \overline{u_1}(x_2) \,,$$
$$\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial t} = 0 \,, \qquad \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} = \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} = 0 \,.$$

Uz ovo treba dodati da osrednjene vrednosti fluktuacionih uticaja slede pravilnosti o ravanskom zadatku i o jednolikosti u pravcu „1". Ostvaruje se, na primer:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\overline{u_i' \, u_j'}\right) = 0 \,, \qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overline{u_i' \, u_j'}\right) = 0 \,,$$

gde se prethodno odnosi na bilo koje osrednjene proizvode fluktuirajućih brzina.

Pošto se razmatra nestišljiv fluid, nepromenljivost mase nameće da proticaj Q kroz poprečni presek A (normalan na osovinu „1") mora da bude konstantan duž cele struje:

$$Q = \int_A u_1 \, \mathrm{d}A_1 = b \int_{-h}^{+h} u_1 \, \mathrm{d}x_2 =$$
$$= b \int_{-h}^{+h} (\overline{u_1} + u_1') \, \mathrm{d}x_2 = \mathrm{Const} \,. \tag{52–15}$$

Presek je srazmeran širini b pojasa uzetog u razmatranje. Trenutna brzina je razdvojena na osrednjenu i fluktuaciju. Prethodno se može napisati i kao:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{+h} (\overline{u_1} + u_1') \, \mathrm{d}x_2 = 0 \,, \tag{52–16}$$

što osrednjavanjem daje:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{+h} \overline{u_1} \, \mathrm{d}x_2 = 0 \,,$$

pa onda mora i preostali deo u (52–16) da bude jednak nuli:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{+h} u_1' \, \mathrm{d}x_2 = 0 \,.$$

Ovo pokazuje da se fluktuacioni istovremeni proticaj ne menja duž struje, a to znači da je njegovo kolebanje kroz vreme zajedničko za sve preseke. Takvu istovetnost ne može da napravi turbulencija, nego bi morao da postoji granični uslov, koji bi na početnom ili krajnjem preseku cevi to nametnuo. Stoga to treba isključiti i može se prihvatiti da se ostvaruje da je fluktuirajući proticaj u svakom trenutku nula, tj.:

$$\int_{-h}^{+h} u_1' \, \mathrm{d}x_2 = 0 \,. \tag{52–17}$$

Prethodno ukazuje da istovremeno na poprečnom preseku mora da bude i pozitivnih i negativnih fluktuirajućih brzina, a da je prosečna vrednost nula.

Na isti način bi se pokazalo da se na nekom dužem rastojanju L duž pravca 1 uspostavlja u svakom trenutku:

$$\int_{x_1}^{x_1+L} u_2' \, \mathrm{d}x_1 = 0 \,. \tag{52–18}$$

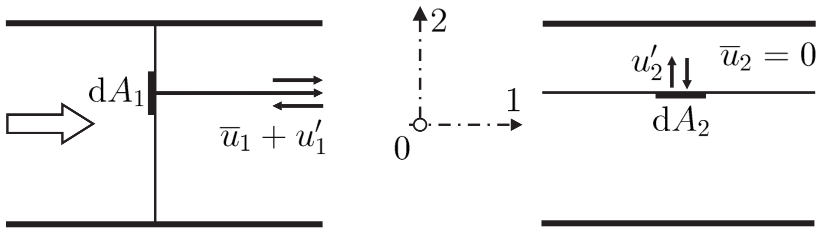
Ovo istovremeno izravnavanje brzina duž linija paralelnih sa osovinama 1 i 2 prikazano je na slici 52–1, gde su prikazana i lokalna kolebanja kroz vreme. Na slici je prikazana i srednja brzina:

$$u_{\mathrm{sr}} = \frac{1}{2\,h} \int_{-h}^{+h} \overline{u_1} \, \mathrm{d}x_2 \,. \tag{52–19}$$

* * *

U nastavku se razmatra uticaj turbulencije na pronošenje skalara – za primer će se uzeti pronošenje toplote, i to u razmatranom strujanju. Kroz elementarnu površinu $\mathrm{d}A_1$, postavljenu normalno na osovinu 1 (vidi sliku 52–2) protiče u jedinici vremena toplota:

$$C\,\rho\,\Theta\,u_1\,\mathrm{d}A_1 = C\,\rho\,(\,\overline{\Theta} + \Theta'\,)(\,\overline{u_1} + u_1')\,\mathrm{d}A_1 \,.$$



Slika 52–2 Prikaz uticaja turbulencije na pronos toplote u ravanskom strujanju između dve paralelne ploče.

Ovo je napisano na osnovu (23–4) sa $\varphi = C\rho\,\Theta$, (vidi 34–9), uz prilagođavanje površini koja je normalna na 1, uz uslov nestišljivosti.

Osrednjavanje prethodnog izraza uz svođenje na proticanje po jedinici površine daje:

$$\overline{C\,\rho\,\Theta\,u_1} = C\,\rho\,\overline{\Theta}\,\overline{u_1} + C\,\rho\,\overline{\Theta'\,u_1'}\,. \tag{52–20}$$

Za osrednjavanje korišćeno je pravilo (52–3).

Ranije je – Poglavlje 34 – razjašnjeno da se toplota širi i pored kretanja mase, provođenjem i to je razume se, van ovde napisanog. Ovde se oba napisana člana na desnoj strani (52–20) odnose na pronošenje strujanjem, i prvi predstavlja pronošenje osrednjenom brzinom (glavnim strujanjem) a drugi fluktuacijama.

Pronošenje toplote kroz površinicu dA_2 (slika 52–2) obavlja samo fluktuirajuća brzina pa se za proticaj toplote, kroz jedinicu površine, u pravcu 2, piše:

$$\overline{C\,\rho\,\Theta\,u_2} = C\,\rho\,\overline{\Theta'\,u_2'}\,. \tag{52–21}$$

Ovde se pronošenje obavlja samo fluktuirajućim brzinama, svi uticaji (pa i toplota) šire se i poprečno, kuda nije upravljena glavna struja. Kroz površinicu dA_2 nema osrednjenog proticaja zapremine, jer se kroz vreme izravna proticaj u jednom sa onim u drugom smeru ($\overline{u_2'} = 0$). Proticaja toplote, i kada se tok fluida posmatra osrednjeno, ima. Na primer, delići koji idu u jednom smeru topliji su, a u drugom hladniji – tada su Θ' i u_2' uvek istoga, ili uvek suprotnog znaka – pa $\overline{\Theta'\,u_2'}$ nije nula, a on ulazi u osrednjeni proticaj toplote. Ne mora da bude isključivo poklapanje, ili isključivo nepoklapanje po znaku u_2' i Θ', jer je dovoljno samo da se zbir pozitivnih i negativnih proizvoda međusobno ne potire, pa da osrednjeni proizvod ne bude nula. Upravo, on je jednak nuli samo izuzetno.

Delići se poprečno pomeraju, prodiru ka zidu, odnosno udaljuju se od njega, usput se kolebaju, menjajući usmerenja, sa sobom donose i dodirom predaju ili oduzimaju ono što nose (na primer, topliji greju hladnije) i to se njihovim mešanjem rasprostire. Da nema turbulencije sve bi se moglo pronositi samo niz struju. Treba se ponovo podsetiti da se toplota širi i bez pronošenja mase, a ovde se raspravlja o pronošenju toplote delićima (masom) i to fluktuirajućim brzinama.

Sem širenja uticaja u poprečnom pravcu, dolazi do „razvlačenja" uticaja u podužnom pravcu (u pravcu glavnog strujanja), jer se delići iz jedne celovite zapremine (toplije, na primer) razvuku i podužno, usled podužnih fluktuacija brzina ne napreduju svi delići zajedno.

Uzet je primer toplote, a mogla se uzeti i druga energija koju delići poseduju (kinetička ili potencijalna mehanička energija), ili količina kretanja, ili koncentracija rastvorene materije. Pojava turbulentnog širenja uticaja postaje uočljiva ako se posmatra obojeni rastvor, što je već i opisano u prethodnom Poglavlju 51, kao širenje, razvlačenje i izbleđivanje obojenog „oblaka”.

Reč „konvekcija” znači strujanje i označava pronošenja strujom (masom) i sve ovde opisano može se shvatiti kao konvekcija. Međutim, ta reč („konvekcija”) se namenjuje samo pronošenju osrednjenom brzinom, glavnom strujom, da bi se drugim nazivom izdvojilo ono što se pronosi fluktuacijama brzina.

Pronošenje usled fluktuacija brzina naziva se „turbulentna konvekcija” (jer se radi o konvekciji usled turbulencije), a upotrebljavaju se i nazivi: „konvektivna difuzija” ili „turbulentna difuzija” (reč „difuzija” znači širenje ili rasprostiranje, a pridevi ispred reči kazuju da se to obavlja strujanjem, odnosno turbulencijom). Svi ovi nazivi na neki način pokušavaju da ukažu da se pronošenje obavlja usled turbulencije (usled kolebanja brzina) i da to ima za posledicu rasprostiranje onoga što se pronosi. Mogu se, ako se dogovori, nazivi skratiti, pa se pod nazivom „*konvekcija*” podrazumeva pronošenje *osrednjenom brzinom*, a „*difuzija*” je pronošenje *fluktuirajućim brzinama*. Uostalom, nazivi sami po sebi, makoliko dugački bili, traže dopunsko objašnjenje, upravo u primeni imaju dogovoreno značenje.

* * *

Razmatranje pronošenja toplote obavljeno je uz uslov nestišljivosti. Za stišljiv fluid, umesto (52–20) dobija se mnogo složeniji izraz:

$$\overline{C\,\rho\,\Theta\,u_1} = C\,\overline{\rho}\,\overline{\Theta}\,\overline{u_1} + C\,\overline{\rho}\,\overline{\Theta'\,u_1'} + \\ + C\,\overline{u_1}\,\overline{\rho'\,\Theta'} + C\,\overline{\Theta}\,\overline{\rho'\,u_1'} + C\,\overline{\Theta'\,\rho'\,u_1'}\,. \tag{52–22}$$

Ovde je primenjeno pravilo osrednjavanja (52–5). Tri dodatna člana na (52–20) mogu se protumačiti na sledeći način. Treći član je pronošenje osrednjenom brzinom („konvekcija”) fluktuirajuće energije, dok je četvrti član „difuzija” energije usled fluktuiranja gustine i brzine. Peti član (poslednji) je verovatno zanemarljiv, u odnosu na ostale, jer je trostruki proizvod fluktuacije.

53
JEDNAČINE PRILAGOĐENE TURBULENTNOM STRUJANJU

Jednačina nepromenljivosti mase (32–4) napisaće se sa razdvajanjem na osrednjene veličine i na fluktuacije:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}+\rho')+\frac{\partial}{\partial x_i}[(\overline{\rho}+\rho')(\overline{u_i}+u_i)]\,. \tag{53–1}$$

Osrednjavanje jednačine znači osrednjavanje njenih članova:

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)}=0\,. \tag{53–2}$$

Prema pravilu (52–10) za prvi član, a prema (52–8) za drugi dobija se:

Jednačina nepromenljivosti mase za glavno strujanje

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho}\;\overline{u_i})+\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho' u_i'})=0\,. \tag{53–3}$$

Iz (53–3) množenjem sa dV i integrisanjem po zapremini, uz pretvaranje dva integrala iz zapreminskih u površinske, dobija se:

Integralni oblik od (53–3)

$$\int_V \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}\,\mathrm{d}V+\int_A \overline{\rho}\;\overline{u_i}\,n_i\,\mathrm{d}A+\int_A \overline{\rho' u_i'}\,n_i\,\mathrm{d}A=0\,. \tag{53–4}$$

Do ove jednačine moglo se doći neposrednim osrednjavanjem jednačine (32–5).

Ako je fluid *nestišljiv*, zbog $\rho = \text{Const}$ i $\rho' = 0$, jednačine (53–3) i (53–4) se svode na veoma proste izraze:

Jednačina nepromenljivosti mase
za glavno strujanje nestišljivog fluida

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0\,, \tag{53–5}$$

Integralni oblik od (53–5)

$$\int_A \overline{u_i}\, n_i \,\mathrm{d}A = 0\,. \tag{53–6}$$

Jednačine (53–5) i (53–6) su iste kao odgovarajuće sa trenutnim veličinama, (32–7) i (32–8), samo se trenutne veličine zamene osrednjenim; nema nikakvog uticaja fluktuacija na osrednjene vrednosti. Ovo se ovde ostvaruje, jer se ne pojavljuje proizvod veličina, nego samo usamljena, jedna veličina u_i, pa fluktuacije otpadaju u osrednjavanju. Već kod jednačina (53–3) i (53–4) na osrednjene vrednosti utiču fluktuacije.

* * *

Dinamička jednačina uzeće se u obliku (33–5) koji je pogodan za osrednjavanje, a iz nje se piše:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, u_j)} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\, u_i\, u_j)} = \overline{\rho\, f_j} + \overline{\frac{\partial\, \sigma_{ij}}{\partial x_i}}\,. \tag{53–7}$$

Na prvi član leve strane primeniće se (52–10), a potom (52–3), a na drugi (52–6) i (52–5), a na članove desne strane (52–3) na prvi i (52–6) na drugi. Dobija se:

Dinamička jednačina za glavno strujanje

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\ \overline{u_j}) + \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho' u_j'}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho}\ \overline{u_i}\ \overline{u_j}) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_j}\,\overline{\rho' u_i'} + \overline{u_i}\,\overline{\rho' u_j'} + \overline{\rho}\,\overline{u_i' u_j'} + \overline{\rho' u_i' u_j'}\right) = \\
&= \overline{\rho}\,\overline{f_j} + \overline{\rho' f_j'} + \frac{\partial \overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_i}.
\end{aligned}
\tag{53–8}
$$

Integrisanje (53–8), ili neposredno osrednjavanje (33–7), daju (53–9).

Integralni oblik od (53–8)

$$
\begin{aligned}
&\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\ \overline{u_j})\,\mathrm{d}V + \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho' u_j'})\,\mathrm{d}V = \\
&= \int_A -\overline{u_j}\,\overline{\rho}\,\overline{u_i}\,n_i\,\mathrm{d}A + \int_A -\Big(\overline{u_j}\,\overline{\rho' u_i'} + \\
&+ \overline{u_i}\,\overline{\rho' u_j'} + \overline{\rho}\,\overline{u_i' u_j'} + \overline{\rho' u_i' u_j'}\Big)\,n_i\,\mathrm{d}A + \\
&+ \int_V \overline{\rho}\,\overline{f_j}\,\mathrm{d}V + \int_V \overline{\rho' f_j'}\,\mathrm{d}V + \int_A \overline{\sigma_{ij}}\,n_i\,\mathrm{d}A\,.
\end{aligned}
\tag{53–9}
$$

Tumačenje napisano uz jednačinu (33–7) može se preneti i na njeno preuređenje (53–9), koje takođe na levoj strani izražava priraštaj količine kretanja u jedinici vremena u zapremini V, samo je to sada osrednjena vrednost. Desna strana je osrednjeno proticanje količine kretanja i osrednjene sile. Jednačina (53–8) se može shvatiti kao diferencijalni oblik od (53–9) pa izražava isto, ali za elementarnu zapreminu (i svedeno na jedinicu zapremine). Količina kretanja se izražava proizvodom brzine i gustine, a njeno proticanje trostrukim proizvodom $\rho\, u_i\, u_j$, pa je osrednjavanje dalo brojne proizvode fluktuacija, koji nameću prilično složen uticaj fluktuacija na osrednjene vrednosti.

Površinska sila u (53–8) i (53–9) izražava se prema (26–7) i (41–8), odnosno (41–13), što uz osrednjavanje daje:

$$\frac{\partial \overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\sigma_{ij}^{\mathrm{d}}}}{\partial x_i} = \\ = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i}\right), \qquad (53–10)$$

i

$$\int_A \overline{\sigma_{ij}}\, n_i \,\mathrm{d}A = -\int_A \overline{p}\, n_j \,\mathrm{d}A + \\ + \int_A \mu \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\, n_i \,\mathrm{d}A + \frac{1}{3}\int_A \mu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i}\, n_j \,\mathrm{d}A. \qquad (53–11)$$

Ako se dinamička jednačina ograniči na nestišljiv fluid ona će se znatno uprostiti, jer će od ukupno 7 proizvoda fluktuacija ostati samo jedan. Umesto (53–8) dobija se:

Dinamička jednačina za glavno strujanje nestišljivog fluida – *„Rejnoldsova jednačina"* *(REYNOLDS)*

$$\rho \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial t} + \rho \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} = \rho \overline{f_j} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \\ + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\overline{u_i' u_j'}\right)\rho. \qquad (53–12)$$

Napominje se da je iskorišćen izraz (53–10), uz izostavljanje poslednjeg člana (zbog nestišljivosti), i sa njim je izražena površinska sila iz (53–8). Nadalje, drugi član u (53–12) dobijen je iz odgovarajućeg u (53–8) smenom:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\, \overline{u_i}\, \overline{u_j}\right) = \rho\, \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i},$$

jer je $\rho = \mathrm{Const}$, a za nestišljiv fluid važi:

$$\overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0.$$

Navedene zamene su omogućile neposredno upoređenje Rejnoldsove jednačine i Navie-Stoksove jednačine za nestišljiv fluid (41–11). Treba naglasiti da jednačina (41–11) važi za bilo kakvo strujanje (i za laminarno, i za turbulentno), ali su u njoj, posve razumljivo, upisane trenutne vrednosti veličina. Ako se ta jednačina napiše sa osrednjenim vrednostima, umesto trenutnih, ona nije ispravna, ali je veoma korisno saznanje koliko se greši takvom zamenom, jer ta „greška" je uticaj fluktuacija na osrednjene veličine. Upoređenje (53–12) i (41–11), ako se druga navedena pomnoži sa ρ, pokazuje da se trenutne vrednosti mogu zameniti sa osrednjenima uz dodavanje samo jednog člana – to je poslednji napisani član u (53–12), koji je i jedini koji unosi fluktuacije. Dejstvo toga člana se može formalno prihvatiti kao dejstvo nekakvih zamišljenih „napona" kojima „fluktuacije deluju na glavno strujanje". Uvodi se pojam:

„Napon" turbulencije ili *„Rejnoldsov napon"*

$$\boxed{\sigma^{\mathrm{t}}_{ij} = -\,\rho\,\overline{u'_i\,u'_j}\,,} \tag{53–13}$$

pa je sila po jedinici zapremine od toga ,,napona":

$$\frac{\partial\,\sigma^{\mathrm{t}}_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(-\,\rho\,\overline{u'_i\,u'_j}\Big)\,, \tag{53–14}$$

a to je poslednji član u (53–12), upravo taj član nameće kako treba da izgleda „napon" koji se tako ispoljava.

Glavno strujanje se može razmatrati kao da u njemu sem pritiska i devijatorskog dela napona deluju i *„naponi turbulencije"*. Treba naglasiti da ti „naponi" nisu pravi naponi (nisu naponi u fizičkom smislu), jer oni ustvari predstavljaju proticanje količine kretanja (onaj deo njenih fluktuacija koji utiče na osrednjeno strujanje), stoga se i pisalo „napon" (u navodnicama), jer je tako prozvan, iako to zapravo nije. Ako se on prihvati kao napon, i ako se sa njim postupa kao sa naponom, dolaziće se do ispravnih rezultata, jer to obezbeđuje sama smena (53–14), pa stoga to formalno prihvatanje ima smisla i opravdanja, jer olakšava istraživanja. Sva pravila za napone važe i za „napone turbulencije" – na primer stav o jednakosti spregnutih napona:

$$\sigma^{\mathrm{t}}_{ij} = \sigma^{\mathrm{t}}_{ji}\,. \tag{53–15}$$

Nadalje „sila" na površinu A, koja omeđava V, može se napisati prema (25–12):

$$\int_V \frac{\partial \sigma^{\mathrm{t}}_{ij}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V = \int_A \sigma^{\mathrm{t}}_{ij}\, n_i\,\mathrm{d}A\,, \tag{53–16}$$

što znači:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\rho\,\overline{u'_i\,u'_j}\right)\,\mathrm{d}V = \int_A -\rho\,\overline{u'_i\,u'_j}\,n_i\,\mathrm{d}A\,. \tag{53–17}$$

Ova „sila" ulazi u jednačinu za konačnu zapreminu V. Na osnovu (53–9), uz uslov nestišljivosti i zamenu (53–11), dolazi se do (53–18). Do iste jednačine dolazi se i neposrednom integracijom (53–12).

Sila, data sa (53–17), predstavlja doprinos fluktuacija osrednjenoj inercijalnoj sili – ovo se može zaključiti osrednjavanjem (33–9), gde drugi deo pripada sili na graničnoj površini, i ona se formalno može prikazati kao „površinska sila", koja po jedinici površine daje „napon" $-\,\rho\,u_i\,u_j$. Osrednjavanjem toga napona dobija se $-\,\rho\,\overline{u_i}\,\overline{u_j}\;-\,\rho\,\overline{u'_i\,u'_j}$. Drugi deo je „napon turbulencije".

Integralni oblik od (53–12)

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\overline{u_j}\right)\mathrm{d}V = \int_A -\,\rho\,\overline{u_j}\,\overline{u_i}\,n_i\,\mathrm{d}A + \int_V \rho\,\overline{f_j}\,\mathrm{d}V + \\ + \int_A \overline{p}\,n_j\,\mathrm{d}A + \int_A \mu\,\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\,n_i\,\mathrm{d}A + \int_A -\,\rho\,\overline{u'_i\,u'_j}\,n_i\,\mathrm{d}A\,. \tag{53–18}$$

Jednačine za nestišljiv fluid su znatno prostije od onih za stišljiv. U nizu zadataka sa stišljivim fluidom može se dopustiti niz uprošćavanja.

Osrednjena vrednost proizvoda tri fluktuacije $\overline{\rho'\,u'_i\,u'_j}$ obično je zanemarljiva u odnosu na ostale članove sa kojima se u jednačinama (53–8) i (53–9) sabira, jer su oni proizvod dve fluktuacije.

Sem ovoga zanemarenja, izvesna strujanja dozvoljavaju još i sledeća. Ako je fluktuacija gustine znatno slabije izražena od fluktuacije brzine, $\overline{\rho'\,u'_i}\,\overline{u_j}$, (ili $\overline{\rho'\,u'_j}\,\overline{u'_i}$) je maleno u odnosu na $\overline{\rho}\,\overline{u'_i\,u'_j}$. Iz istog razloga može da bude zanemarljiv član $\partial\left(\overline{\rho'\,u'_j}\right)/\partial t$. Član $\overline{\rho'\,f'_j}$ se izostavlja u svim slučajevima gde f_j (zapreminska sila po jedinici mase) po svojoj prirodi ne može da fluktuira (a to je, pre svega, kod težine).

Sve navedeno, ako se može primeniti, dovodi do toga da od fluktuacija dolazi u obzir samo uticaj „napona" turbulencije, što znači da ima zadataka gde se stišljivost ispoljava samo kroz promenu gustine $\overline{\rho}$, kroz prostor i vreme ($\overline{\rho}$ nije konstanta) dok fluktuacija gustine neosetno utiče na glavno strujanje.

* * *

Jednačina mehaničke energije za glavno strujanje dobiće se množenjem jednačine (53–8) sa brzinom $\overline{u_j}$, i dobiće se brzina promene kinetičke energije izjednačene sa brzinom odvijanja rada – sve po jedinici zapremine.

Rezultat množenja sa $\overline{u_j}$, prvog člana iz (53–8), može se preobličiti prema sledećem:

$$\begin{aligned} \overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial t}(\,\overline{\rho}\,\overline{u_j}\,) &= \frac{\partial}{\partial t}(\,\overline{\rho}\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,) - \overline{\rho}\,\overline{u_j}\,\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\,\overline{\rho}\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,) - \overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial t}(\,\overline{\rho}\,\overline{u_j}\,) + \overline{u_j}\,\overline{u_j}\,\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}\,, \end{aligned}$$

iz čega se piše:

$$\overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial t}(\,\overline{\rho}\,\overline{u_j}\,) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}(\,\overline{\rho}\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,) + \frac{1}{2}\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}\,.$$

Na isti način će se postupiti sa trećim članom i prvim sabirkom (od četiri) u poslednjem članu leve strane (53–8). Sve sabrano daje:

$$\begin{aligned} &\overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial t}(\,\overline{\rho}\,\overline{u_j}\,) + \overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial x_i}(\,\overline{\rho}\,\overline{u_i}\,\overline{u_j}\,) + \overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial x_i}(\,\overline{\rho'\,u_i'}\,\overline{u_j}\,) = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}(\,\overline{\rho}\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}(\,\overline{\rho}\,\overline{u_i}\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}(\,\overline{\rho'\,u_i'}\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\left[\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\,\overline{\rho}\,\overline{u_i}\,) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\,\overline{\rho'\,u_i'}\,)\right]. \end{aligned}$$

Izraz u ugaonoj zagradi je jednak nuli – to kazuje jednačina nepromenljivosti mase (53–2), pa će se izostavljanjem toga obaviti zamena leve strane (to su članovi buduće jednačine energije).

Tako se množenjem (53–8) sa $\overline{u_j}$, uz navedene zamene, dobija jednačina mehaničke energije (53–19).

Jednačina mehaničke energije za glavno strujanje

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\,\overline{\rho}\;\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,) + \overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\,\overline{\rho'\,u_j'}\,) + \\
&+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\,\overline{\rho}\;\overline{u_i}\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\;\overline{\rho'\,u_i'}\,) + \\
&+\overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\,\overline{u_j}\;\overline{\rho'\,u_j'} + \overline{\rho}\;\overline{u_i'\,u_j'} + \overline{\rho'\,u_i'\,u_j'}\,) = \\
&= \overline{\rho}\;\overline{f_j}\;\overline{u_j} + \overline{\rho'\,f_j'}\;\overline{u_j} + \overline{u_j}\,\frac{\partial\,\overline{\sigma_{ij}}}{\partial\,x_i}\,.
\end{aligned} \tag{53–19}$$

Do drugačijeg izračunavanja mehaničke energije može se doći osrednjavanjem jednačine mehaničke energije (34–5), tj. obaviće se:

$$\begin{aligned}
&\overline{\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\,\rho\,u_j\,u_j)} + \overline{\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\,\rho\,u_i\,u_j\,u_j)} = \\
&\qquad = \overline{\rho\,f_j\,u_j} + \overline{u_j\,\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,x_i}}\,.
\end{aligned} \tag{53–20}$$

Prvi član je trostruki proizvod pa će se osrednjavanjem dobiti, prema (52–5), 5 sabiraka, ali su dva istovetna, jer je u proizvodu dva puta u_j, što znači da će se napisati 4 sabirka. Drugi član je čak četvorostruki proizvod, koji daje 12 sabiraka, od kojih 3 istovetna, pa će se pojaviti 9 različitih. Razvijanjem i sređivanjem (53–20) dobija se (53–21):

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\,\overline{\rho}\;\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\,(\,\overline{u_j}\,\overline{\rho'\,u_j'}\,)}_{\mathrm{II}} + \\
&+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\,\overline{u_j'\,u_j'} + \overline{\rho'\,u_j'\,u_j'}\right)}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,(\overline{\rho}\,\overline{u_i} + \overline{\rho'\,u_i'}\,)\right]}_{\mathrm{IV}} +
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{u_j}\,(\overline{\rho}\,\overline{u_i'\,u_j'}+\overline{u_i}\,\overline{\rho'\,u_j'}+\overline{\rho'\,u_i'\,u_j'}\,)\right]}_{\text{V}}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\,\overline{u_i}\,\overline{u_j'\,u_j'}+\overline{\rho}\,\overline{u_i'\,u_j'\,u_j'}+\overline{u_i}\,\overline{\rho'\,u_j'\,u_j'}+\overline{u_i'\,\rho'\,u_j'\,u_j'}\,\right)}_{\text{VI}}=$$

$$=\underbrace{\overline{f_j}\,\overline{\rho}\,\overline{u_j}+\overline{u_j}\,\overline{f_j{}'\,\rho'}}_{\text{VII}}+\underbrace{\overline{\rho}\,\overline{f_j{}'\,u_j'}+\overline{f_j}\,\overline{\rho'\,u_j'}+\overline{f_j{}'\,\rho'\,u_j'}+}_{\text{VIII}}$$

$$+\underbrace{\overline{u_j}\,\frac{\partial\,\overline{\sigma_{ij}}}{\partial\,x_i}}_{\text{IX}}+\underbrace{\overline{u_j'\,\frac{\partial\,\sigma_{ij}'}{\partial\,x_i}}}_{\text{X}} \quad (53\text{–}21)$$

Dobijene su dve jednačine za mehaničku energiju u kojima se pojavljuju veličine sa osrednjenim vrednostima, čijem su određivanju jednačine i namenjene. Za tu je namenu dovoljna samo prva jednačina (53–19), jer ona daje vezu između osrednjenih veličina uz zahvatanje uticaja fluktuacija samo onoliko koliko se mora da se do te veze dođe, pa odgovara izrazu namenjenom onome što se nazvalo „glavno strujanje”. Treba se podsetiti da je u Poglavlju 34. razjašnjeno da jednačina mehaničke energije nije suštinski ništa novo u odnosu na dinamičku jednačinu, jer se množenjem dinamičke sa brzinom dobija energetska jednačina, gde se, umesto količine kretanja i sila, suštinski ista stvar izražava kinetičkom energijom i radom sila. Tako je postupljeno i za dobijanje (53–19): osrednjena dinamička jednačina (53–8) pomnožena je sa osrednjenom brzinom.

Druga jednačina – (53–21) – dobijena je osrednjavanjem jednačine mehaničke energije (34–5) i ona osrednjava celokupnu mehaničku energiju, daje osrednjene sve uticaje, dok je prva jednačina (53–18) posledica postupka koji je najkraćim putem doveo do onoga što se zahtevalo. Obe jednačine su formalno ispravne, a malo pre je napomenuto da se jednačinom za mehaničku energiju ne donosi suštinski ništa novo u odnosu na dinamičku, pa ih obe treba prihvatiti kao rezultate dva postupka: prva je proizvod osrednjenog, dok je druga osrednjavanje pomnoženog. Pošto prva daje ono što se traži, a druga – kao znatno složenija – daje i više, razumno je to i iskoristiti.

Oduzimanjem jednačine (53–19), namenjene glavnom strujanju, od (53–21), koja izražava osrednjene uticaje celokupne energije, dobiće se jednačina koja će prikazivati preostalu energiju, koja nije ušla u glavno strujanje, pa onda ulazi u fluktuacije. Navedeno oduzimanje daje jednačina (53–22), a ono je bilo olakšano, jer je (53–21) bila, za to unapred sređena (i članovi obeleženi):

– (I), (IV), (VII) i (IX) pojavljuju se i u (53–21) i u (53–19) i stoga za (53–22) ne ostaje ništa;

– (II) i (V) su izvodi proizvoda od kojih se jedan deo nalazi u (53–19), pa drugi preostaje za (53–22) i

– (III), (VI), (VIII) i (X) ulaze u (53–22):

Jednačina mehaničke energije za fluktuacije

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\;\overline{u_j'\,u_j'}+\overline{\rho'\,u_j'\,u_j'}\right)+\overline{\rho'\,u_j'}\;\frac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial t}+\\
&+\frac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\;\overline{u_i'\,u_j'}+\overline{u_i}\;\overline{\rho'\,u_j'}+\overline{\rho'\,u_i'\,u_j'}\right)+\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\,\overline{u_i}\,\overline{u_j'\,u_j'}+\overline{\rho}\;\overline{u_i'\,u_j'\,u_j'}+\overline{u_i}\,\overline{\rho'\,u_j'\,u_j'}+\overline{u_i'\,\rho'\,u_j'\,u_j'}\right)=\\
&=\overline{f_j}\;\overline{\rho'\,u_j'}+\overline{\rho}\;\overline{f_j'\,u_j'}+\overline{\rho'\,f_j'\,u_j'}+\overline{u_j'\,\frac{\partial\,\sigma_{ij}'}{\partial\,x_i}}\,.
\end{aligned} \qquad (53\text{–}22)$$

Članovi koji u jednačinama (53–19) i (53–22) izražavaju rad površinskih sila mogu se, prema (26–7), (41–8) i (53–10), napisati samo sa osrednjenim, odnosno samo sa fluktuirajućim veličinama:

$$\begin{aligned}
&\overline{u_j}\,\frac{\partial\,\overline{\sigma_{ij}}}{\partial\,x_i}=\overline{u_j}\left(\frac{-\,\partial\,\overline{p}}{\partial\,x_j}\right)+\overline{u_j}\,\frac{\partial\,\overline{\sigma_{ij}^{\mathrm{d}}}}{\partial\,x_i}=\\
&=\overline{u_j}\left(\frac{-\,\partial\,\overline{p}}{\partial\,x_j}\right)+\overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial\,x_i}\left(\mu\,\frac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial\,x_i}\right)+\frac{1}{3}\,\overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial\,x_j}\left(\mu\,\frac{\partial\,\overline{u_i}}{\partial\,x_i}\right),
\end{aligned} \qquad (53\text{–}23)$$

$$
\overline{u'_j\,\frac{\partial\,\sigma'_{ij}}{\partial\,x_i}} = \overline{u'_j\left(\frac{-\,\partial\,p'}{\partial\,x_j}\right)} +
$$

$$
+\,\overline{u'_j\,\frac{\partial}{\partial\,x_i}\left(\mu\,\frac{\partial\,u'_j}{\partial\,x_i}\right)} + \frac{1}{3}\,\overline{u'_j\,\frac{\partial}{\partial\,x_j}\left(\mu\,\frac{\partial\,u'_i}{\partial\,x_i}\right)}\,. \tag{53–24}
$$

Smatra se da ne treba i dalje gomilati veoma dugačke i složene jednačine ako se one mogu lako ispisati na osnovu već napisanih, stoga su izostavljeni integralni oblici za jednačine (53–19) i (53–22).

Treba se osvrnuti na razmatranja iza jednačine (53–18), gde se navodi da je priroda mnogih zadataka takva da se stišljivost ispoljava kroz promenu osrednjene gustine, dok su fluktuacije gustine od zanemarljivog uticaja, a to znatno olakšava proučavanje.

*   *   *

Za *nestišljiv fluid* jednačine energije se znatno uprošćavaju – (53–19) se svodi na (53–25). Pri pisanju (53–25) razdvojen je napon na pritisak i devijatorski deo, pa je ovaj drugi izražen prema zakonitosti za viskozni fluid, upisani su i „naponi" turbulencije, što znači da je korišćeno (53–14), te (53–23), uz prihvatanje $\mu = \text{Const}$. Odmah iza (53–25) napisan je i njen integralni oblik (53–26).

Jednačina mehaničke energije
za glavno strujanje nestišljivog fluida

$$
\frac{1}{2}\,\rho\,\frac{\partial}{\partial\,t}\,(\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,) + \frac{1}{2}\,\rho\,\frac{\partial}{\partial\,x_i}\,(\,\overline{u_i}\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,) = \rho\,\overline{f_j}\,\overline{u_j} +
$$

$$
+\,\overline{u_j}\left(\frac{-\,\partial\,\overline{p}}{\partial\,x_j}\right) + \underbrace{\overline{u_j}\,\frac{\partial\,\overline{\sigma^{\mathrm{d}}_{ij}}}{\partial\,x_i}}_{\Downarrow\atop{\mu\,\overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial\,x_i}\left(\frac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial\,x_i}\right)}} + \underbrace{\overline{u_j}\,\frac{\partial\,\sigma^{\mathrm{t}}_{ij}}{\partial\,x_i}}_{\Downarrow\atop{\overline{u_j}\,\frac{\partial}{\partial\,x_i}\left(-\,\rho\,\overline{u'_i\,u'_j}\right)}}\,. \tag{53–25}
$$

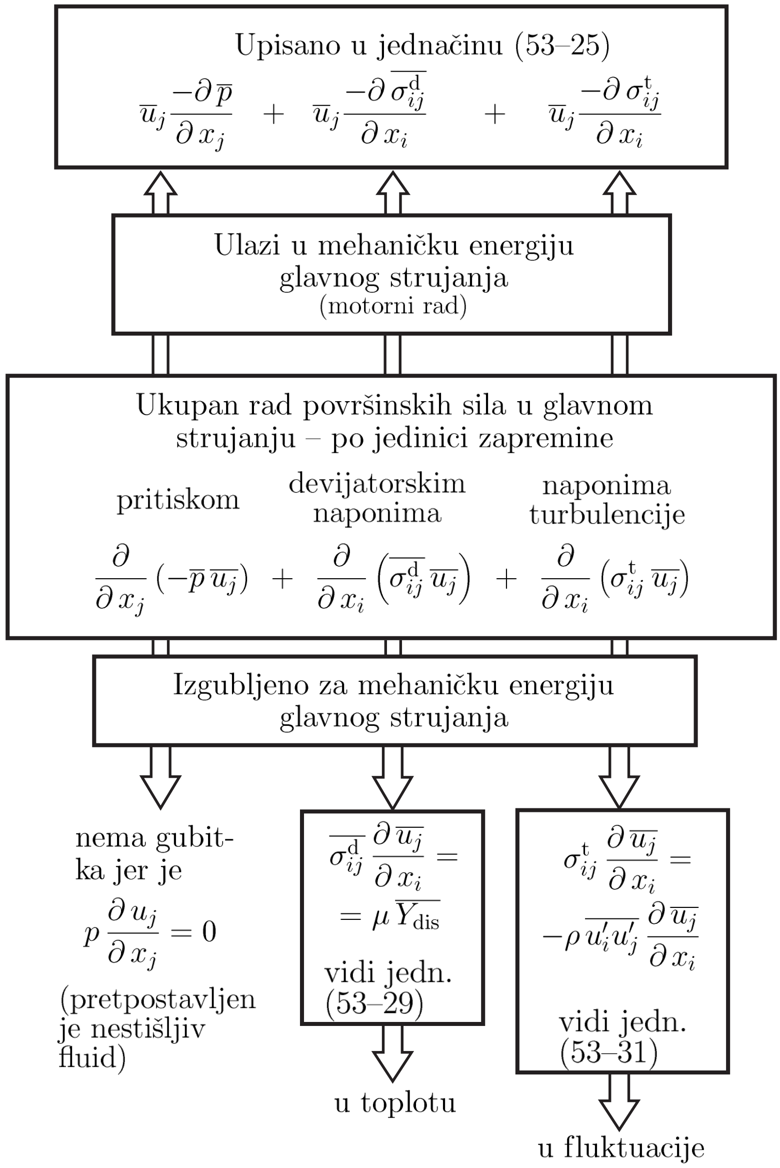
Integralni oblik od (53–25)

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\rho\int_V \frac{\partial}{\partial\, t}\,(\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,)\,\mathrm{d}V = \\
&\quad = -\frac{1}{2}\,\rho\int_A \overline{u_i}\,\overline{u_j}\,\overline{u_j}\,n_i\,\mathrm{d}A + \rho\int_V \overline{f_j}\,\overline{u_j}\,\mathrm{d}V + \\
&+\int_A -\overline{p}\,n_j\,\overline{u_j}\,\mathrm{d}A + \int_V \frac{\partial\,\overline{\sigma^{\mathrm{d}}_{ij}}}{\partial\, x_i}\,\overline{u_j}\,\mathrm{d}V + \int_V \frac{\partial\,\sigma^{\mathrm{t}}_{ij}}{\partial\, x_i}\,\overline{u_j}\,\mathrm{d}V\,.
\end{aligned}
}
\qquad (53\text{–}26)
$$

Jednačine (53–25) i (53–26) mogu se tumačiti na isti način kao (34–4) i (34–6) samo uz napomenu da se ovde radi o kinetičkoj energiji sa osrednjenim vrednostima i da se uticaj fluktuacija prikazuje „naponima” turbulencije. Treba se podsetiti da u jednačinu mehaničke energije ulazi samo motorni rad površinskih sila. I kod „napona” turbulencije može se napraviti izraz za motorni rad i on baš ulazi u jednačine. Motorni rad se, kako je ranije objašnjeno (Poglavlje 27), ne može izraziti površinskim integralom, izuzetno je to međutim moguće kod pritiska, jer taj rad je tu ujedno i ukupan rad, pošto deformacionog rada na promeni zapremine kod nestišljivog fluida nema.

Ukupan rad površinskih sila, i razvijanje njegovog učinka na ono što ostaje u okviru mehaničke energije (to je motorni rad) i na ono što se gubi, prikazano je kroz jednačinu (53–27), upravo kroz njeno pregledno pisanje. I „naponi” turbulencije ponašaju se kao i pravi naponi – uostalom sa takvom najavom su i uvedeni. Njihov „motorni rad” ostaje u mehaničkoj energiji glavnog strujanja (koje se razmatra), dok njihov „deformacioni rad” odlazi u fluktuacije (njime prelazi kinetička energija iz glavnog strujanja u fluktuacije).

Glavno strujanje gubi mehaničku energiju viskoznim trenjem (deformacionim radom devijatorskog dela napona) i kroz otuđenje energije u fluktuacije („deformacionim radom napona turbulencije”). Prvi gubitak mehaničke energije je dobitak za toplotu, a drugi ostaje mehanička energija, ali van glavnog strujanja, i pojavljuje se kao dobitak kod fluktuacija.



(53–27)

Deformacioni rad devijatorskog dela napona može se napisati na osnovu (41–14) i (41–15), i uz uslov nestišljivosti:

$$\overline{\sigma^{\mathrm{d}}_{ij}}\,\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} = \mu\,\overline{Y_{\mathrm{dis}}} = 2\,\mu\,\overline{\omega^{\mathrm{d}}_{ij}}\;\overline{\omega^{\mathrm{d}}_{ij}} = \mu\,Y_{\mathrm{dis}}(\,\overline{u_i}\,)\,, \qquad (53\text{–}28)$$

gde je:

$$Y_{\text{dis}}(\,\overline{u_i}\,) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial\,x_i} + \frac{\partial\,\overline{u_i}}{\partial\,x_j}\right)\left(\frac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial\,x_i} + \frac{\partial\,\overline{u_i}}{\partial\,x_j}\right), \tag{53–29}$$

ili:

$$Y_{\text{dis}}(\,\overline{u_i}\,) = 2\left(\frac{\partial\,\overline{u_1}}{\partial\,x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\,\overline{u_2}}{\partial\,x_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\,\overline{u_3}}{\partial\,x_3}\right)^2 +$$
$$+\left(\frac{\partial\,\overline{u_2}}{\partial\,x_1} + \frac{\partial\,\overline{u_1}}{\partial\,x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\overline{u_3}}{\partial\,x_2} + \frac{\partial\,\overline{u_2}}{\partial\,x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\overline{u_1}}{\partial\,x_3} + \frac{\partial\,\overline{u_3}}{\partial\,x_1}\right)^2 . \tag{53–30}$$

Y_{dis} je napisano tako da se ukazuje da se dobija isključivo sa osrednjenim brzinama, jer pravila osrednjavanja tako određuju.

Iz jednačine (53–22), uz uslov nestišljivosti i sa razdvajanjem površinskih sila na sferni i devijatorski deo, dobija se jednačina (53–31), a njen integralni oblik je (53–32).

Natpisi uz jednačinu (53–32) razjašnjavaju šta se pojedinim članovima izražava. Može se (53–32) uporediti sa (53–26), kao i sa (34–6), pa će se uvideti šta je ovde od posebnog značaja. Ovde, u (53–31) i (53–32), sve se odnosi na energiju, odnosno rad *fluktuacija*, a skreće se pažnja na poslednji član, koji se naziva „*produkcija*" turbulentne energije, koja se tu „proizvodi" oduzimanjem od glavnog strujanja – to je u (53–27) prikazano kao oduzeto („izgubljeno za mehaničku energiju glavnog strujanja") i upućeno ovamo – u fluktuacije. Nadalje, proticanje fluktuacione energije podeljeno je na „konvekciju" i „difuziju" – nazivi su objašnjeni ranije, pri kraju prethodnog Poglavlja 52.

Rad zapreminskih sila u (53–31) i (53–32) dolazi u obzir samo ako sila po jedinici mase f_j fluktuira, a to znači, ako pored težine, deluje i neka sila čija se vrednost (po jedinici mase) koleba.

Jednačina mehaničke energije fluktuacija
za nestišljiv fluid

$$\frac{1}{2}\,\rho\,\frac{\partial}{\partial\,t}\left(\overline{u'_j\,u'_j}\right) + \frac{1}{2}\,\rho\,\frac{\partial}{\partial\,x_i}\left(\overline{u_i}\;\overline{u'_j\,u'_j} + \overline{u'_i\,u'_j\,u'_j}\right) =$$
$$= \rho\,\overline{f'_j\,u'_j} + \overline{u'_j\,\frac{-\,\partial\,p'}{\partial\,x_j}} + \overline{u'_j\,\frac{\partial\,\sigma^{\mathrm{d}\,\prime}_{ij}}{\partial\,x_i}} + \left(-\,\rho\,\overline{u'_i\,u'_j}\right)\frac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial\,x_i}\,. \tag{53–31}$$

Integralni oblik od (53–31)

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{1}{2}\,\rho\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u'_j\,u'_j}\right)\mathrm{d}V}_{\substack{\text{Priraštaj kinetičke}\\ \text{energije fluktuacija u } V}} = \\
&= \underbrace{-\,\frac{1}{2}\,\rho\int_A \overbrace{\left(\overline{u_i}\;\overline{u'_j\,u'_j} + \overline{u'_i\,u'_j\,u'_j}\right)}^{\text{konvekcija} + \text{difuzija}}\mathrm{d}A}_{\substack{\text{(ulaz } - \text{ izlaz) kinetičke energije}\\ \text{fluktuacija kroz } A}} + \\
&+ \underbrace{\int_V \rho\,\overline{f'_j\,u'_j}\,\mathrm{d}V + \int_A -\overline{p\,u'_j}\,\mathrm{d}A + \int_V \overline{u'_j\,\frac{\partial\,\sigma^{\mathrm{d}\,\prime}_{ij}}{\partial\,x_i}}\,\mathrm{d}V}_{\text{rad fluktuirajućih sila}} + \\
&+ \underbrace{\int_V -\,\rho\,\overline{u'_i\,u'_j}\,\frac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}V}_{\text{„produkcija" (prešlo iz glavnog strujanja)}}\,.
\end{aligned}
\qquad (53\text{–}32)
$$

– sve u jedinici vremena –

U navedene jednačine ulazi rad površinskih sila, i to motorni rad. I ovde je, kao i uvek za nestišljiv fluid, motorni rad pritiska ujedno i ukupan rad:

$$\overline{u'_j\,\frac{\partial\,p'}{\partial\,x_j}} = \frac{\partial}{\partial\,x_j}\left(\overline{u'_j\,p'}\right),$$

što je i omogućilo u (53–32) izražavanje rada pritiska površinskim integralom.

U Poglavlju 35. objašnjeno je da se pritisak može posmatrati i kao potencijalna energija (po jedinici zapremine), pa je onda $p'\,u'_j\,n_j$ proticanje te energije fluktuirajućom brzinom („difuzija") kroz jedinicu površine. U jednačini (53–32) član:

$$\int_A -\overline{p'\,u'_j}\,n_j\,\mathrm{d}A$$

se može shvatiti kao obavljeni rad po površini (što povećava energiju unutar površine) ili kao ulazak energije.

Rad devijatorskog dela napona u fluktuacijama iznosi:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\sigma_{ij}^{\mathrm{d}\,\prime}\, u_j'}\right) \quad = \quad \overline{u_j'\,\frac{\partial\,\sigma_{ij}^{\mathrm{d}\,\prime}}{\partial\,x_i}} \quad + \quad \overline{\sigma_{ij}^{\mathrm{d}\,\prime}\,\frac{\partial\,u_j'}{\partial\,x_i}}\quad , \tag{53–33}$$

Ukupan rad (u jedinici vremena i po jedinici zapremine)	=	motorni rad $\Downarrow$ jednačina (53–31)	+	deformacioni rad $\Downarrow$ toplota.

Motorni rad u (53–33) treba izraziti preko zakonitosti za viskozni fluid. To je već urađeno, jer se iz (53–24) za nestišljiv fluid, uz $\mu =$ Const, dobija:

$$\overline{u_j'\,\frac{\partial\,\sigma_{ij}^{\mathrm{d}\,\prime}}{\partial\,x_i}} = \overline{\mu\,u_j'\,\frac{\partial}{\partial\,x_i}\left(\frac{\partial\,u_j'}{\partial\,x_i}\right)}\,. \tag{53–34}$$

Deformacioni rad u (53–33) dobija se na isti način kao što je dobijeno (53–29); ovde napisano osrednjavanje dovodi do izraza u kome se pojavljuju fluktuacione brzine:

$$\overline{\sigma_{ij}^{\mathrm{d}\,\prime}\,\frac{\partial\,u_j'}{\partial\,x_i}} = 2\,\overline{\mu\,\omega_{ij}^{\mathrm{d}\prime}\,\omega_{ij}^{\mathrm{d}\prime}} = \overline{\mu\,Y_{\mathrm{dis}}(\,u_i'\,)}\,. \tag{53–35}$$

U $Y_{\mathrm{dis}}(\,u_i'\,)$ ulaze samo fluktuacione brzine (to se želelo ukazati i označavanjem) – to je zbir kvadrata:

$$\begin{aligned}\overline{Y_{\mathrm{dis}}(\,u_i'\,)} = 2\,\overline{\left(\frac{\partial\,u_1'}{\partial\,x_1}\right)^2} + 2\,\overline{\left(\frac{\partial\,u_2'}{\partial\,x_2}\right)^2} + 2\,\overline{\left(\frac{\partial\,u_3'}{\partial\,x_3}\right)^2} + \\ + \overline{\left(\frac{\partial\,u_2'}{\partial\,x_1} + \frac{\partial\,u_1'}{\partial\,x_2}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial\,u_3'}{\partial\,x_2} + \frac{\partial\,u_2'}{\partial\,x_3}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial\,u_1'}{\partial\,x_3} + \frac{\partial\,u_3'}{\partial\,x_1}\right)^2}.\end{aligned} \tag{53–36}$$

Korisno je naglasiti da zbir (53–28) i (53–35) predstavlja disipaciju u celom strujanju (glavnom strujanju i fluktuacijama) i on je stoga „osrednjena vrednost funkcije disipacije”:

$$Y_{\mathrm{dis}}(\,\overline{u_i}\,) + \overline{Y_{\mathrm{dis}}(\,u_i'\,)} = \overline{Y_{\mathrm{dis}}}\,.$$

Zbir (53–28) i (53–35) predstavlja deformacioni rad devijatorskih napona, kojim se trenjem, posredstvom viskoznosti, mehanička energija pretvara u toplotu. To je stvarni gubitak mehaničke energije za strujanje, kao celinu (u glavnom strujanju i u fluktuacijama) – drugog gubitka i nema (jer se mora poštovati načelo održanja energije).

„Naponi" turbulencije imaju „posredničku ulogu" (između veštački odvojenog glavnog strujanja i fluktuacija) i njihov ukupan „rad" je ustvari promena kinetičke energije, a „deformacioni rad" tih „napona" je prelazak kinetičke energije iz glavnog strujanja u fluktuacije (što je za glavno strujanje „obračunski gubitak").

* * *

Jednačinama za glavno strujanje i tumačenjem veza između njega i fluktuacija preko „napona" turbulencije stvoreno je formalno „naponsko stanje" za glavno strujanje, koje obavlja i otuđenje energije iz toga strujanja. Kada se kod pretežnog dela nekoga turbulentnog strujnog polja (izuzev bliske granice) može da zanemari dejstvo pravih (viskoznih) napona u odnosu na „napone" turbulencije, govori se o *„razvijenoj turbulenciji"*, tada je *glavno strujanje pod pretežnim uticajem fluktuacija, uz zanemarljiv uticaj viskoznosti.* Kod niza zadataka oduzimanje energije glavnom strujanju uglavnom je prebacivanje mehaničke energije u vrtloge (kako je opisano u Poglavlju 51), a ta energija je nepovratno oduzeta (više neće biti vraćena glavnoj struji, nego će prelaziti iz vrtloga u manje vrtloge i na kraju se preobratiti u toplotu). Ta oduzeta energija zavisi od karakteristika prvostvorenih vrtloga, a ovi zavise od brzine glavnog strujanja i od graničnih uslova (ovi uslovi nameću struji neravnomernost brzina koja i dovodi do vrtloga), dok je viskoznost preslaba da utiče na iznos toga oduzimanja energije, ali će viskoznost morati da svu energiju oduzetu glavnom strujanju, preobrati u toplotu. Dakle viskoznost „dobija zadatak", a nemoćna je da utiče na obim toga zadatka. Međutim, uticaj viskoznosti je bitan za tok procesa u kome će se mehanička energija preobratiti u toplotu, od nje zavisi koliko će taj proces trajati, koliko dugo će se vrtlozi deliti, da bi one poslednje, najmanje vrtloge, viskoznost, trenjem, „ugasila". Jasno je da će taj proces biti kraći ako je fluid viskozniji.

Na osnovu navedenog može se reći da se energija oduzeta glavnom strujanju, kod razvijene turbulencije, može izraziti bez formalnog pojavljivanja viskoznosti, jer se tada izražava nepovratno oduzimanje mehaničke energije, a to se odmah i „otpisuje”, jer se zna da se ta energija više neće vratiti glavnom strujanju, nego će se kad-tad preobratiti u toplotu, ali se ne ulazi u razvoj procesa toga preobraćanja. Pretežan broj praktičnih zadataka zadovoljava se određivanjem iznosa izgubljene energije u glavnom strujanju, a ne zanima ih ceo proces kroz koji se to obavlja. Međutim, treba naglasiti da je zanemarenje uticaja viskoznosti omogućeno veštačkim izdvajanjem glavnog strujanja, i ako se razmatranja ograniče samo na glavno strujanje, a to se ne sme shvatiti kao suštinsko izostavljanje viskoznosti. Da nema viskoznosti, ne bi bilo trenja, pa ni međusobnog uticanja među delićima, te se ne bi mogla „zamešati” turbulencija. Preslaba viskoznost je dopustila pojavu turbulencije, koju ta ista viskoznost ipak „gasi” i ceo taj proces preobraćanja energije je pod presudnim dejstvom viskoznosti – pri jačoj viskoznosti taj proces je kraći i vrtlozi brže „izumiru”.

* * *

U produžetku će se napisati osrednjena jednačina toplote. Prepisuje se (34–19):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(C\rho\,\Theta\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i\,C\rho\,\Theta\right)=\frac{\partial^2\left(\lambda\,\Theta\right)}{\partial x_i\,\partial x_i}+\sigma_{ij}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (53\text{–}37)$$

Napisani izraz je pogodan za osrednjavanje, ali pre toga treba deformacioni rad (poslednji član) rastaviti na sferni i devijatorski deo; prvi je $-p\,\partial u_i/\partial x_i$. Osrednjavanje će se obaviti shodno već primenjivanim pravilima napisanim sa (52–3) do (52–10). Napominje se da drugi član daje 5 članova, koji su već pokazani izrazom (52–22). Pretpostaviće se da su C i λ konstante. Dobija se:

$$\begin{aligned}
C\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\,\overline{\Theta}\right)&+C\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho'\,\Theta'}\right)+C\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_i}\,\overline{\rho}\,\overline{\Theta}\right)+\\
&+C\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\,\overline{u_i'\,\Theta'}\right)+C\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_i}\,\overline{\rho'\,\Theta'}\right)+\\
&+C\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\Theta}\,\overline{\rho'\,u_i'}\right)+C\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho'\,u_i'\,\Theta'}\right)=\\
&=\lambda\,\frac{\partial^2\,\overline{\Theta}}{\partial x_i\,\partial x_i}+\left(-\,\overline{p}\right)\frac{\partial\,\overline{u_i}}{\partial x_i}+\left(\overline{-p'\,\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}}\right)+\\
&\qquad\qquad+\overline{\sigma^{\mathrm{d}}_{ij}}\,\frac{\partial\,\overline{u_j}}{\partial x_i}+\overline{\sigma^{\mathrm{d}'}_{ij}\,\frac{\partial\,u_j'}{\partial x_i}}
\end{aligned} \qquad (53\text{–}38)$$

Poslednja dva člana su toplota dobijena disipacijom, što je izgubljena mehanička energija – ranije data sa (53–28) i (53–35), što je ulazilo u jednačine (53–27) i (53–33). Članovi pre toga su deformacioni rad na promeni zapremine.

Može se napisana jednačina toplote napisati u integralnom obliku, za konačnu zapreminu, kao što je to ranije urađeno za neke jednačine. Može se napisati i zajednička jednačina energije (mehanička + toplotna). Svim tim nije neophodno proširivati izlaganje i gomilati jednačine, jer je to lako obaviti ako se zahteva.

Na kraju, može se dodati da se sve jednačine, ako je strujanje turbulentno, mogu osrednjavati. Na primer, *jednačina stanja* (42–7) *osrednjena* daje:

$$\overline{p} = \overline{R\,\rho\,\Theta} = R\left(\overline{\rho}\,\overline{\Theta} + \overline{\rho'\,\Theta'}\right) \tag{53–39}$$

* * *

Napisanim jednačinama postignuto je nameravano, one su omogućile znatno lakše istraživanje osrednjenih vrednosti, jer se od fluktuacija zahteva samo ono što se mora. Međutim, ne treba smetnuti sa uma da je to postignuto razdvajanjem trenutne vrednosti veličine na osrednjenu i fluktuaciju, čime se ustvari unose nove nepoznate. To se može objasniti i ovako: za osrednjene vrednosti ima dovoljno jednačina (pošto je broj jednačina izravnat sa brojem veličina koje se određuju), ali onda nema jednačina za određivanje fluktuacija. Nema raspoloživih jednačina ni za one fluktuirajuće veličine u prethodnim jednačinama namenjenim glavnom strujanju.

Jednačine koje su napisane u ranijim poglavljima izražavaju zakone mehanike, koji se prihvataju kao opšte važeći, jer njihovo prihvatanje ne dovodi do neslaganja sa onim što se dešava u bilo kome pojedinačnom procesu. Takva zakonitost se ne može postaviti za turbulenciju, fluktuacije se mogu objasniti samo kao „slučajne veličine”. I uslov za nastanak turbulencije (kada će laminarno tečenje preći u turbulentno) ne može se pouzdano iskazati jednom opšte važećom jednačinom. Za veoma proste granične uslove (na primer, tečenje u cevi) moguća je procena na osnovu niza eksperimentalnih rezultata koji se u potpunosti ne podudaraju, jer je veoma teško u potpunosti napraviti istovetne granične i početne uslove, a i neznatne razlike slučajnog karaktera mogu da imaju uticaja na pobuđivanje turbulencije. Iz tog razloga u Poglavlju 51. se i ostalo na opisu koji se sveo na to da kada viskoznost postane ,,preslaba", ili ,,nemoćna da održi slojevitost", onda nastaje turbulencija, a to svakako nije izražavanje zakonitosti.

Razjašnjavanju fluktuacija može se prići sa ciljem da se dođe do zakonitosti između njih i vrednosti osrednjenog strujanja, što zahteva onoliko jednačina koliko vrednosti fluktuacija se određuje. Želja da se dođe do „zakona turbulencije" dugo je opsedala istraživače i postoji čitav niz hipoteza u iznetom smislu. Na primer, za strujanje sa slike 41–1, ako je turbulentno, ali tako da u pravcu „1" ima osrednjenu brzinu i fluktuaciju ($u_1 = \overline{u_1} + u_1'$), dok u pravcu „2" ima isključivo fluktuaciju ($u_2 = u_2'$), može se za „napon turbulencije" pretpostaviti:

$$\sigma_{12}^{\mathrm{t}} = \sigma_{21}^{\mathrm{t}} = -\,\rho\,\overline{u_1'\,u_2'} = c\,\rho \left(\frac{\partial\,\overline{u_1}}{\partial\,x_2}\,x_2 \right)^2 .$$

Izraz je u dimenzionalnom skladu, c je bezdimenzionalna veličina za koju se pretpostavlja da je konstanta. Veći „napon" (tj. izraženije fluktuacije) je kada je veći porast brzine u pravcu normalnom na strujanje, što je načelno prihvatljivo, jer je mešanje veće ako se osrednjene brzine više razlikuju. Nadalje, ako je x_2 udaljenje od čvrste granice, može se očekivati da će mešanje biti jače ako je ta granica dalje. Jasno je da se ovakva hipoteza, ili neka druga, prihvataju pošto se eksperimentalno provere posledice koje one daju, upravo iz primećenih posledica tumače se moguće veze između turbulentnih fluktuacija i osrednjenog strujanja. Mana svih takvih hipoteza je u tome što su one pokušaj da se veoma prosto izraze posledice iz veoma složenog procesa, pa one odgovaraju nekim jednostavnim strujanjima, a nisu opšte važeće za turbulentna strujanja, mada se baš to pokušavalo. Takve okolnosti i objašnjavaju što takvih hipoteza ima nekoliko, međusobno različitih, a sve su objašnjive. U nizu praktičnih zadataka, tamo gde su ponikle i proveravane, navedene hipoteze mogu da korisno posluže.

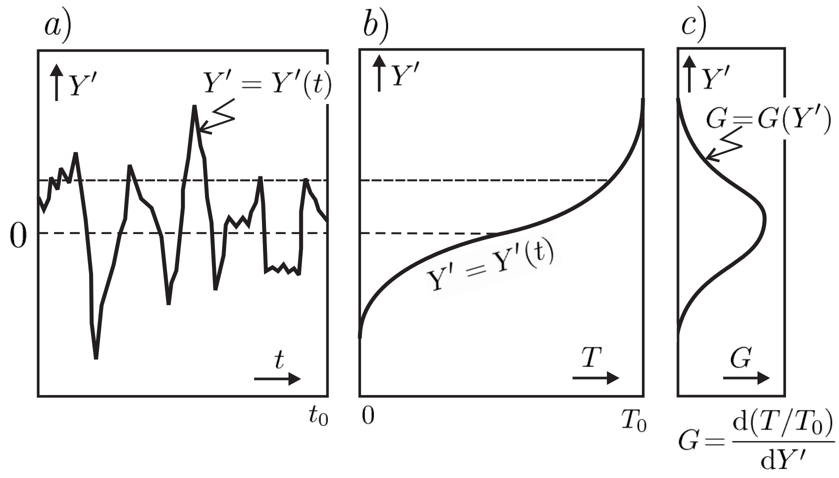
Zahvaljujući savremenim mernim uređajima koji omogućavaju merenje turbulentnih fluktuacija, može se neposredno izučavati turbulencija, a ne mora se o njoj zaključivati iz primećenih posledica (kako se radilo ranije kada su i nicale opisane hipoteze). Neposredno merenje, uz statističko prikazivanje opaženoga, je metod koji odgovara turbulenciji, jer su fluktuacije slučajne veličine, upravo uz glavno strujanje prateća turbulencija je slučajni proces, jer nema utvrđenih zakonitosti.

Celokupno naredno Poglavlje 54. posvećeno je statističkim pokazateljima turbulencije.

Treba, na kraju, primetiti da se pretežan deo praktičnih zadataka rešava ne ulazeći uopšte u procenu fluktuirajućih veličina, nego se jednostavno odredi koliki je zbirni uticaj fluktuacija na osrednjeno strujanje. Već je pomenut primer „izgubljene energije" koju struja preda fluktuacijama na nekoj dužini struje. Ona se proceni zbirno – za celu masu između dva poprečna preseka – i toliko se smanji energija glavnog strujanja, a to se radi na osnovu sređenog iskustva za određena jednostavna strujanja.

54
STATISTIČKI POKAZATELJI TURBULENCIJE

Na slici 54–1 prikazana je Y' fluktuacija neke od veličina, u funkciji vremena.



Slika 54–1 Prikaz fluktuacija: *a*) hronološkim – vremenskim redosledom, *b*) po trajanju (raspodeli) vrednosti manjih od Y', *c*) po gustini raspodele.

Grafikon *a*) $Y = Y'(t)$ dobijen je neposrednim merenjem, to je *vremenski redosled* kolebanja posmatrane veličine. Odnosi se na jednu tačku.

Grafikon *b*) dobijen je iz grafikona *a*), prema postupku koji se uviđa na samoj slici. Opet je Y' funkcija od vremena, ali sada označenog kao T, i ovo nije vreme t, mereno od početka osmatranja, nego T predstavlja *trajanje* u kome se ostvarilo Y' manje od neke određene vrednosti – na primer za trajanje T_1, ostvaruje se $Y' < Y_1'$, gde je $Y_1' = Y'(T_1)$. Ili, T_2–T_1

trajanje u kome se ostvaruje $Y_1' < Y' < Y_2'$. Uz trajanje se mora navesti i ukupno vreme posmatranja T_0, jer tek uz njega podatak o T ima smisla. Razložno je zbog toga uzimati relativno trajanje T/T_0, jer ono kazuje, na primer, da 20% od ukupnog vremena Y' ne prelazi $Y'(0{,}2)$. Jasno je da trajanje ne može pokazati kada se to unutar posmatranog intervala T_0 zbilo, niti u koliko navrata.

Ako se grafikon opažanja $Y' = Y'(t)$ shvati kao beskonačno mnogo podataka, svaki se odnosi na beskonačno kratko vreme, onda T/T_0 znači relativan broj podataka: obuhvaćeni do neke vrednosti u odnosu na sve. *Trajanje* znači ono što se u statistici zove *raspodela*, pa se *gustina raspodele*, grafikon c), izražava sa:

$$G = \frac{\mathrm{d}\,(T/T_0)}{\mathrm{d}\,Y'}\,, \tag{54–1}$$

i njen grafički prikaz sa osovinom Y' zatvara površinu jednaku jedinici, jer je:

$$\int_{Y'_{\min}}^{Y'_{\max}} G\,\mathrm{d}\,Y = \frac{T}{T_0}\,(Y'_{\max}) - \frac{T}{T_0}\,(Y'_{\min}) = 1\,. \tag{54–2}$$

Raspodela – kao što samo ime kaže – pokazuje kako su fluktuacije raspoređene. Vrednosti za $T/T_0 = 0{,}05$ (ili 0,01), odnosno 0,95 (ili 0,99) pokazuju unutar kojih granica se kreće pretežni deo fluktuacija, dok su izvan granica samo izrazito retke vrednosti. $Y'(0{,}5)$ je „medijana”, ona polovi raspodelu, i ako ne bude jednaka nuli, znači da pozitivne i negativne vrednosti ne traju podjednako, a to ukazuje da je raspodela „asimetrična”. Interesantna je vrednost Y' za maksimalnu gustinu raspodele, i ta vrednost je nula za simetričnu raspodelu.

Prethodno određivanje raspodele podrazumeva da je vreme trajanja opažanja t_0 dovoljno dugo da se ispolje sve fluktuacije. Podrazumeva se da je ustaljeno osrednjeno strujanje, ostvaruje se uslov (52–11), što znači da je početak $t = 0$ opažanja proizvoljan, i da se trajanje opažanja t_0 može proizvoljno produžavati, a pri tome se raspodela neće menjati. Ako osrednjeno strujanje nije ustaljeno, menjaju se uslovi za odvijanje turbulencije, pa se raspodela može da menja kroz vreme, odnosno raspodela pouzdano važi samo za period u kome je opažena. Navedeni *uslov o ustaljenosti osrednjenog strujanja važiće za sve pokazatelje turbulencije* koji će se u ovom poglavlju izložiti. Ranije je objašnjeno da se istraživanja turbulencije obavljaju uz ustaljenost osrednjenog strujanja, jer se i tada dolazi do saznanja o turbulentnim fluktuacijama, a uz neuporedivo lakše uslove ispitivanja.

Osrednjena vrednost, kao osrednjena vrednost odstupanja je nula, što se može napisati i na sledeći način:

$$\overline{Y'} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} Y'\,\mathrm{d}T = \int_0^1 Y'\,\mathrm{d}\Big(\frac{T}{T_0}\Big) = \int_{Y'_{\min}}^{Y'_{\max}} Y'\,G\,\mathrm{d}Y' = 0\,, \qquad (54\text{–}3)$$

jer se $\mathrm{d}(T/T_0)$ može zameniti prema (54–1).

Poslednje izražavanje u (54–3) grafički je određeno statičkim momentom površine ograničene sa $G=0$ i $G(Y')$, u odnosu na $Y'=0$, a to je statički momenat u odnosu na težišnu osovinu, koji mora da bude jednak nuli.

Pokazatelj „disperzije" (rasturanja, rasipanja) opaženih vrednosti je osrednjena vrednost kvadrata odstupanja, upravo $\overline{Y'^2}$ za koga se može napisati:

$$\overline{Y'^2} = \int_0^1 Y'^2\,\mathrm{d}\left(\frac{T}{T_0}\right) = \int_{Y'_{\min}}^{Y'_{\max}} Y'^2\,G\,\mathrm{d}Y'\,, \qquad (54\text{–}4)$$

što je predstavljeno „momentom inercije" površine ograničene sa $G(Y')$, a u odnosu na osovinu $Y'=0$. Momenat inercije je utoliko manji ukoliko je površina bolje skoncentrisana uz osovinu (a to znači ukoliko su manja odstupanja).

Obično se navodi kao pokazatelj odstupanja:

Srednje kvadratno odstupanje
ili *standardna devijacija*

$$\boxed{\sqrt{\overline{Y'^2}}\,.} \qquad (54\text{–}5)$$

Srednje kvadratno odstupanje brzine $\sqrt{\overline{u_i'^2}}$ kao pokazatelj kolebanja brzine može da izražava razvijenost ili jačinu („intenzitet") turbulencije, a veoma je pogodno da se izrazi u odnosu na neku karakterističnu osrednjenu brzinu $\overline{u_0}$ (na primer, u odnosu na srednju brzinu struje, ili brzinu kretanja tela kroz fluidnu sredinu, ili osrednjenu brzinu u tački za koju se izražava).

Tako se dobija:

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{Intenzitet turbulencije} \\ \dfrac{\sqrt{\overline{u_1'^2}}}{\overline{u_0}}\,, \qquad \dfrac{\sqrt{\overline{u_2'^2}}}{\overline{u_0}}\,, \qquad \dfrac{\sqrt{\overline{u_3'^2}}}{\overline{u_0}}\,. \end{array}} \tag{54–6}$$

Kinetička energija fluktuacija, po jedinici mase, izražena je umnoženjem gustine sa:

$$\frac{1}{2}\,\overline{u_i'\,u_i'} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}\right),$$

što je izraženo sa osrednjenim kvadratima odstupanja. Odnos kinetičke energije fluktuacija prema kinetičkoj energiji osrednjene brzine je:

Odnos kinetičkih energija fluktuacija
i osrednjenog strujanja

$$\frac{\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}}{\overline{u_0}^2}\,. \tag{54–7}$$

Kao intenzitet turbulencije navodi se i:

$$\frac{1}{\overline{u_0}}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}\right)}\,. \tag{54–8}$$

Pogodni su bezdimenzionalni pokazatelji:

Za *asimetriju raspodele*
$$\frac{\overline{Y'^3}}{\left(\overline{Y'^2}\right)^{3/2}}\,. \tag{54–9}$$

Za *spljoštenost raspodele*
$$\frac{\overline{Y'^4}}{\left(\overline{Y'^2}\right)^{2}}\,. \tag{54–10}$$

Navedeno je da se raspodela ne bi menjala ako bi se opažanja nastavila, odnosno da se može očekivati ista raspodela za neko ponovljeno strujanje pod istim uslovima (a za istu veličinu na istom mestu). Stoga se raspodeli daje karakter verovatnoće. Empirijska (opažena) raspodela, postaje raspodela verovatnoće. Tada se za raspodelu odnosno za njenu gustinu istražuje da li se mogu predstaviti nekom od matematskih zakonitosti za verovatnoću. Kod „turbulentnih" fluktuacija često se istraživači zadovolje *normalnom*, ili *Gausovom raspodelom* (GAUSS):

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\overline{Y'^2}}}\,\exp\left(-\,\frac{1}{2}\,\frac{Y'^2}{\overline{Y'^2}}\right). \tag{54–11}$$

* * *

Nadalje će se razmatrati veze između istovremenih vrednosti sa različitih mesta – to je korelacija (međusobni odnos) po prostoru. Na primer, povezuje se fluktuacija pritiska u dve tačke. U prvu se stavi koordinatni početak i vrednost u njoj se obeležava sa $p'(0)$, dok je u drugoj $p'(x_1, x_2, x_3)$. Odgovarajući *koeficijent korelacije* je:

$$K\,(x_1, x_2, x_3) = \frac{\overline{p'(0)\;p'(x_1, x_2, x_3)}}{\sqrt{\overline{p'^2(0)}}\;\sqrt{\overline{p'^2(x_1, x_2, x_3)}}}\,. \tag{54–12}$$

Osrednjeni proizvod u brojiocu se dobija kao svaka osrednjena vrednost:

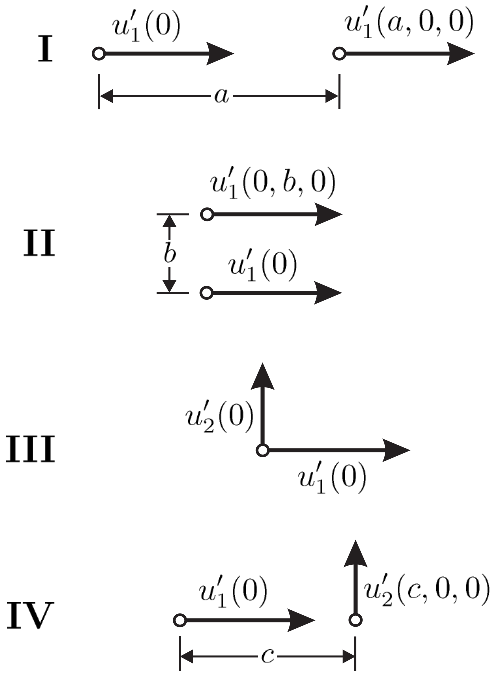
$$\overline{p'(0)\;p'(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} p'(0)\;p'(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}t\,.$$

Jednačina (54–12) je odnos između osrednjenog proizvoda istovremenih fluktuacija u dve tačke i proizvoda srednjih kvadratnih odstupanja za tačke posmatrane pojedinačno. Što se istovremene vrednosti bolje podudaraju, vrednost koeficijenta korelacije je bliža jedinici.

Na isti način se mogu dobiti koeficijenti korelacije za sve skalarne veličine. Kod vektora se mogu povezivati različite komponente u dve tačke. Na primer, za brzinu koeficijent korelacije je izražen prema sledećem:

$$K_{ij}\,(x_1, x_2, x_3) = \frac{\overline{u'_i(0)\;u'_j(x_1, x_2, x_3)}}{\sqrt{\overline{u'^2_i(0)}}\;\sqrt{\overline{u'^2_j(x_1, x_2, x_3)}}}\,. \tag{54–13}$$

Mogu da se povezuju dve iste komponente brzine ($i = j$) za par tačaka koje leže na podužnom (longitudinalnom) ili na poprečnom (lateralnom) pravcu – vidi I, odnosno II, na slici 54–2, gde bi opažanje dalo $K_{11}(a, 0, 0)$, odnosno $K_{11}(0, b, 0)$.



Slika 54–2 Primeri parova brzina za koje se može istraživati koeficijent korelacije.

Za različite komponente brzine ($i \neq j$) mogu se posmatrati dve tačke (IV na slici 54–2), ali i jedna (III), jer se ovde poklapanjem tačaka ne dobija jedinica za koeficijent korelacije – na primer $K_{12}(0) = K_{21}(0) \neq 1$. Ovo je razumljivo, jer $\overline{u_1' \, u_2'}$ nije isto što i $\sqrt{\overline{u_1'^2}} \cdot \sqrt{\overline{u_2'^2}}$, jer je prvo osrednjeni proizvod, a drugo izmnožena osrednjena veličina gde se u osrednjavanju svaka veličina posmatrala zasebno.

Praktična korist od istraživanja korelacija po prostoru je očigledna, jer i površan uvid nameće sledeća razmišljanja. Opterećenje zavisi od pritisaka na površinu, a fluktuacija izrazito poveća lokalni pritisak, ali to nije posvuda istovremeno, fluktuacije pritisaka u dve tačke, počevši od izvesnog rastojanja, nemaju nikakve veze (kada se posmatraju istovremeno), a to znači da ne treba računati sa istovremenošću ekstremnih pritisaka. Korelacije koje će proizaći iz razmatranja veza brzina sa slike 54–2 doprinose da se odgovori na pitanja: Kako se podužno pruža podudaranje fluktuacija brzina, na kojoj dužini se podudaraju smerovi poprečnih fluktuacija (a to rasvetljava difuziju – rasprostiranje uticaja turbulencije), kako se u istoj tački međusobno odnose dve komponente fluktuirajuće brzine (što određuje tangencijalne „napone" turbulencije), koliko blizu su tačke koje pretežni deo vremena zahvata isti vrtlog itd.

Mogu se istraživati koeficijenti korelacije i drugih veličina, a mogu se povezivati i dve različite veličine. U istoj tački – na primer – brzina sa temperaturom (ili sa pritiskom) čime će se uporediti osrednjeni proizvod $\overline{u'_j\,\Theta'}$ (ili $\overline{u'_i\,p'}$) sa odgovarajućim proizvodom srednjih kvadratnih odstupanja pojedinačnih veličina. Navedeni proizvodi ulaze u ranije razmatrane jednačine i pominjani su uz turbulentnu difuziju toplote ili turbulentni rad pritiska.

Izučavanje turbulencije zahteva i određivanje trostrukih proizvoda fluktuacije (oni takođe ulaze u napisane jednačine). Osrednjene vrednosti ovakvih proizvoda i srednja kvadratna odstupanja pojedinačnih veličina povezuje koeficijent trostruke korelacije, za koga se daje primer:

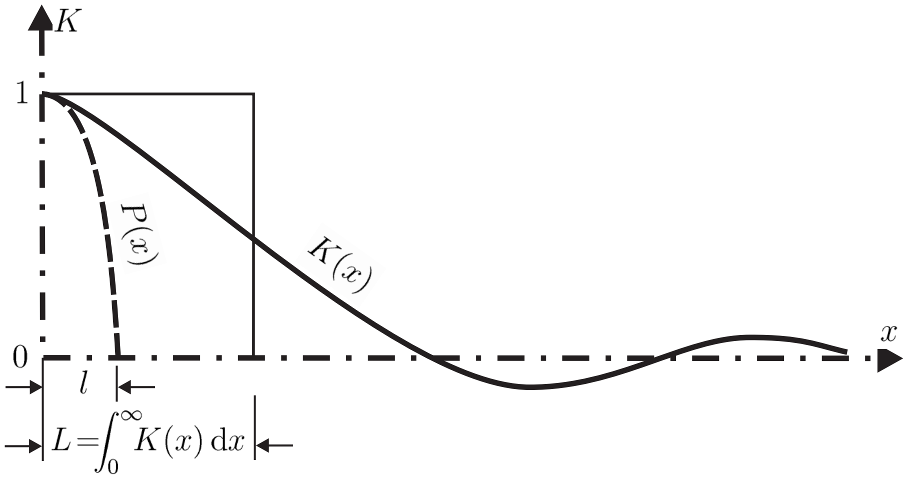
$$\frac{\overline{u'_1(0)\,u'_3(0)\,u'_2(x_1,x_2,x_3)}}{\sqrt{\overline{u'^2_1(0)}}\,\sqrt{\overline{u'^2_3(0)}}\,\sqrt{\overline{u'^2_2(x_1,x_2,x_3)}}} = K_{1\,3,\,2}\,(x_1,x_2,x_3)\,. \qquad (54\text{–}14)$$

gde indeksi 1 3 i 2 pokazuju da se odnosi na u_1 i u_3, u tački (0), i na u_2 u tački (x_1,x_2,x_3).

Koeficijent trostruke korelacije fluktuirajućih brzina $K_{1\,1,\,2}(0)$ povezuje u'^2_1 i u'_2 u istoj tački, odgovarajući osrednjeni proizvod $\overline{u'^2_1\,u'_2}$ je jedan od sabiraka za $\overline{u'_j\,u'_j\,u'_i}$, što ulazi u jednačine (53–31) i (53–32), u član koji unosi „difuziju kinetičke energije fluktuacije".

*   *   *

Na slici 54–3 prikazan je koeficijent korelacije K_{ij} za istu komponentu brzine $(i=j)$, a za dve tačke, od kojih je prva u položaju $x=0$ dok se druga nalazi na jednoj pravoj (na jednoj od osovina) i na rastojanju x od prve. Koeficijent korelacije je funkcija od x i to će se napisati jednostavno $K=K(x)$. Na isti način bi se dobio i $K=K(x)$



Slika 54–3 Zavisnost koeficijenta korelacije od rastojanja između tačaka.

za pritisak, ili bilo koju drugu veličinu, kada se ista veličina upoređuje u dve tačke na rastojanju x.

Koeficijent korelacije je približno jedinica za par tačaka čije se brzine zanemarljivo razlikuju. Prečnik vrtloga koji to dopušta mora da je znatno veći od rastojanja među tačkama, jer obe tačke treba da pripadaju nekoj malenoj zapremini, unutar koje je brzina skoro ista i njome se ta zapremina kreće unutar vrtloga. Za ovo rasuđivanje mogao je da posluži predstavnik najsitnijih vrtloga u posmatranoj tački.

U razmatranje se uvodi dužina l, čiji je kvadrat definisan preko recipročne vrednosti drugog izvoda funkcije $K(x)$, za $x = 0$, kao:

$$l^2 = \frac{-2}{\dfrac{\partial^2 K(0)}{\partial x^2}} \,. \tag{54–15}$$

Prethodni izraz je u dimenzionalnom skladu, jer su obe strane jednačine dužina na kvadrat. Kako se kriva $K(x)$ bolje (na dužem rastojanju) „priljubljuje" uz pravu $K = 1$ ukoliko $\partial^2 K/\partial x^2$ (za $x = 0$) ima manju vrednost, prethodni izraz, ili sama dužina l, može da posluži kao mera dokle $K(x)$ veoma malo odstupa od jedinice (dokle se brzine tačaka skoro podudaraju). Dužina l se stoga smatra kao pokazatelj prečnika najmanjih vrtloga, što ne znači da ona tačno (u doslovnom smislu reči) meri vrtlog, ali ona pokazuje da u dva slučaja, koji se upoređuju, manje l znači da su vrtlozi „usitnjeniji”. Duzina l može da posluži kao sredstvo sporazumevanja za upućene, koji raspolažu nizom njenih vrednosti, za različite tačke u različitim strujanjima.

Dužina l se može grafički prikazati – nju na apscisi odseca parabola $P(x)$, koja sa krivom $K(x)$ ima za $x = 0$ zajedničku vrednost, prvi i drugi izvod. Navedena parabola je polinom drugoga reda koji aproksimira $K(x)$ u blizini $x=0$; njen izraz je:

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{l^2}, \tag{54–16}$$

iz koga se vidi da ona ispunjava prethodno navedeno, jer je:

$$P = 0 \qquad \text{za} \quad x = l\,,$$

te

$$\frac{\partial^2 P(0)}{\partial x^2} = \frac{-2}{l^2}\,,$$

što upoređeno sa (54–15) pokazuje da su drugi izvodi od $P(x)$ i $K(x)$ za $x = 0$ isti.

Dužina l se naziva „mikroskala” ili „mikrorazmera” turbulencije, ili „skala disipacije”, a uz to se pominje i „mera najmanjih vrtloga”. Ovi nazivi se mogu dovesti u vezu sa razjašnjenim – radi se o dužini koja može da posluži za procenu sitnih vrtloga, a u njima, kako je u Poglavlju 51. objašnjeno, obavlja se pretežni deo disipacije (rasipanja mehaničke energije, upravo njenog prelaska u toplotu).

Od izvesnog rastojanja x između tačaka koeficijent korelacije $K(x)$ postaje blizak nuli, a to znači da nema međusobne veze između istovremenih brzina u tačkama. Od velikih vrtloga zavisi dokle će dopirati veza između brzina fluktuacija u dve tačke. Za ocenu toga dopiranja može da posluži dužina:

$$L = \int_0^\infty K(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{54–17}$$

Ova dužina se naziva „makroskala”, „makrorazmera” ili „integralna mera”, a uz nju se pominju „veliki vrtlozi”. Jasno je da se i ovde ne radi o „meri” za doslovno merenje vrtloga, nego opet o sredstvu sporazumevanja za upoređenje.

Vrednost za dužinu L je konačna, jer idući ka velikim vrednostima za x, kriva $K(x)$ se sve bolje priljubljuje uz apscisnu osovinu. Izuzetak bi bio potpuna periodična funkcija, jer se ona ponavlja neograničeni broj puta, tako da vrednost integrala:

$$\int_0^\infty K(x)\,\mathrm{d}x$$

u zavisnosti od x oscilira i ne teži nekoj određenoj vrednosti i kada x teži ka beskonačnosti. Taj slučaj se, međutim, isključuje, jer se potpuna i pravilna periodičnost sa pružanjem u beskonačnost ne može ostvariti u turbulenciji, koja se baš karakteriše nepravilnošću fluktuacije.

* * *

Autokorelacija se odnosi na međusobnu vezu iste veličine u istoj tački, a u dva vremenska trenutka. To je *korelacija po vremenu.* Za posmatranu veličinu, i u istoj tački, to je „veza same sa sobom", a na to upućuje i naziv. Koeficijent autokorelacije se može odrediti za neki određeni vremenski razmak (interval) τ, što znači da se traži veza između dve lokalne vrednosti iste veličine, a u dva vremenska trenutka od kojih je drugi za τ kasnije od prvog. Veličina Y' (bilo koja fluktuacija) opaža se neprekidno, pa se može dobiti veoma veliki broj parova $Y'(t)$ i $Y'(t+\tau)$, odnosno njihovih proizvoda, a osrednjena vrednost toga proizvoda ulazi u koeficijent koji se određuje za jednu određenu vrednost razmaka τ. Promenom razmaka τ menja se koeficijent autokorelacije – stoga je on za datu tačku funkcija od vremenskog razmaka τ pa se *koeficijent autokorelacije* izražava sa:

$$K(\tau) = \frac{\overline{Y'(t)\ Y'(t+\tau)}}{\overline{Y'^2}} \tag{54–18}$$

Jasno je da vreme opažanja mora da bude znatno duže od razmaka, jer se tako omogućava veliki broj podataka koji se malo pre pretpostavio.

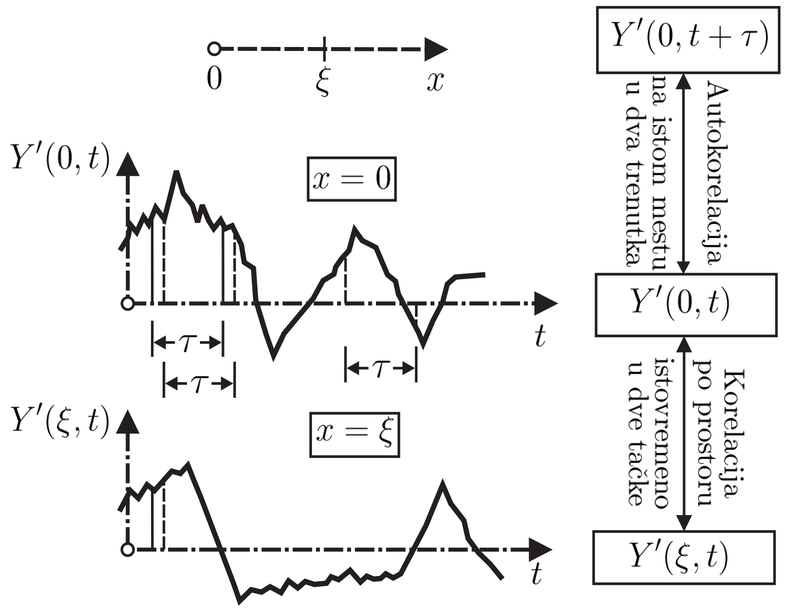
Grafički prikaz funkcije $K(\tau)$ bio bi načelno isti kao i prikaz $K(x)$ na slici 54–3; jednostavno bi se zamenilo x sa τ. Zamena l sa m, i L u M tj. daje – vidi izraze (54–15) i (54–17).

$$m^2 = \frac{-2}{\dfrac{\partial^2 K(0)}{\partial\,\tau^2}} \qquad\qquad M = \int_0^\infty K(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

a to su karakteristična „mikro” (m) i „makro” (M) „vremenske skale”, a one su u međusobnoj vezi sa dužinama l i L, jer što se dešava istovremeno duž struje, dešava se kroz vreme u istoj tački, jer struja nosi iste vrtloge, pa osrednjena brzina ulazi u vezu između karakterističnih dužina i vremena.

*   *   *

Na slici 54–4 pregledno su prikazane veze koje ulaze u korelaciju (po prostoru), odnosno u autokorelaciju (po vremenu).

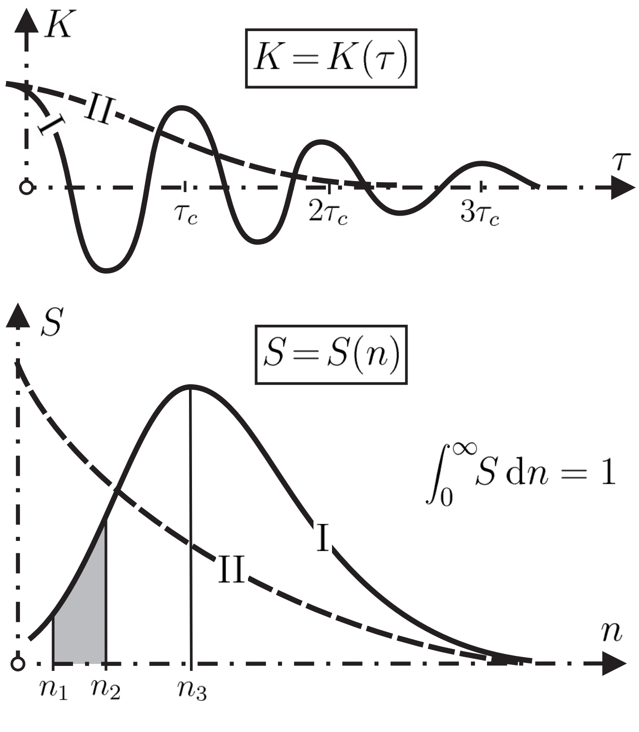


Slika 54–4 Uz objašnjenje korelacije.

Uz ovo treba dodati da se mogu istraživati i korelacije za različite tačke i za različito vreme, ali uz praćenje delića. To bi izražavalo „materijalni koeficijent korelacije”.

*   *   *

U turbulentnom strujanju, u opštoj nepravilnosti strujanja, može da bude uticaja koji unose periodičnost. Ako je perioda tog uticaja τ_c, on će nastojati da te vrednost fluktuacije brzine (pritiska ili druge) nakon vremena τ_c ponovo vrati na istu vrednost, ali se to neće postići, jer turbulencija svojom nepravilnošću to remeti, ali će se osećati izvesna periodičnost, koja će se ispoljavati i u koeficijentu autokorelacije. Iako je između $\tau = 0$ i $\tau = \tau_c$ prošao kroz nulu i kroz negativne vrednosti (gde se mogao približiti i vrednosti – 1), koeficijent autokorelacije ponovo poprima pozitivne vrednosti i za $\tau = \tau_c$ ima maksimum (linija (I) na slici 54–5). Funkcija $K(\tau)$ je smirujuća oscilacija, a to je znak da u turbulenciji ima i periodičnih uticaja koje turbulencija „guši". Na istoj slici linijom (II) prikazan je tok $K(\tau)$ za slučaj kada u strujanju nema uticaja periodičnosti. U produžetku će se periodičnost turbulencije iskazati u drugom obliku.



Slika 54–5 Koeficijent autokorelacije K u zavisnosti od vremenskog razmaka τ i spektralna gustina S, u zavisnosti od učestalosti n – sa (I) i (II) bez izražene periodičnosti u fluktuacijama.

Funkcija $K(\tau)$ razvija se u beskonačan Furijeov (FOURIER) red prema sledećem:

$$K(\tau) = \int_0^\infty S(n)\, \cos(2\pi\, n\, \tau)\, \mathrm{d}n\,, \tag{54–19}$$

gde je n učestalost (frekvencija).

Koeficijenti $S(n)$ uz odgovarajuće učestalosti zadovoljavaju „spektralnu" funkciju (funkciju „*spektralne gustine*"):

$$S(n) = 4\int_0^\infty K(\tau)\, \cos(2\pi\, n\, \tau)\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{54–20}$$

Izrazima (54–19) i (54–20) data je uzajamna veza između $K(\tau)$ i $S(n)$, jer se jedno dobija iz drugoga.

Stavljajući u (54–19) $\tau = 0$, mora se dobiti $K(0) = 1$, što znači da je:

$$\int_0^\infty S(n)\, \mathrm{d}n = 1\,, \tag{54–21}$$

tj. površina ispod grafičkog prikaza funkcije $S(n)$ je jednaka jedinici – slika 54–5 – i to je ceo „spektar", on prikazuje učešće svih učestalosti (svih „talasnih dužina") u razmatranoj fluktuaciji. Deo spektra, odvajanjem učestalosti između n_1 i n_2 prikazan je površinom:

$$\int_{n_1}^{n_2} S(n)\, \mathrm{d}n\,.$$

Upravo ona prikazuje zastupljenost odvojenih učestalosti u odnosu na celokupnost učestalosti (koja je, kako je rečeno, predstavljena jedinicom). $S(n)$ je stoga pregled obavljenog razvrstavanja učestalosti. Reč „spektar" se može prevesti kao pregled, a upotrebljava se i za pregled obavljenog razvrstavanja, pa je tako upotrebljena i ovde. Spektar je „gušći" ili „ređi" uz pojedine učestalosti zavisno od njihovog učešća, što baš prikazuje $S(n)$, pa se naziva „spektralna gustina" (uz ovo je prikladno podsetiti se „gustine raspodele" na slici 54–1, koja je razvrstala same vrednosti).

Periodičnost u fluktuaciji izraziće se kroz izrazitu gustinu, oko one učestalosti koja odgovara dominantnoj periodi.

Upoređenjem $K(\tau)$ i $S(n)$ – vidi sliku 54–5 (linija I) – pokazuje se da je $n_c = \tau_c^{-1}$.

Posmatra se strujanje u provodniku nekog poprečnog preseka, za koje se uslovljava da je: ustaljeno (sve osrednjene vrednosti su ustaljene) i jednoliko (u svim poprečnim presecima osrednjeno stanje je istovetno). Spektralna gustina obavljena za bilo koju veličinu i u bilo kojoj tački ukazivaće da nema dominantne periode – biće kao (II) na slici 54–5. Ako se, međutim, u strujanje unosi neki periodični lokalni uticaj (periodično unošenje većih vrtloga usled lokalnih promena u struji, unošenje tela koje oscilira i slično), taj uticaj će nametnuti dominantnu periodu. Turbulencija će svojim neredom taj uticaj slabiti i nizvodnije će biti sve manje tragova te periodičnosti.

Poznavanje spektralne gustine na nizu mesta može da mnogo doprinese razjašnjavanju strujanja, ona razvrstavanjem učestalosti razvrstava i vrtloge, ukazuje na razvoj nekih pojava kroz struju, a posebno upozorava na periodične uticaje, a oni su veoma važni sa praktičnog stanovišta, jer mogu da posluže kao pobuda za vibracije čvrstih granica struje (tela uronjena u struju, zidovi provodnika, zatvarači i drugo).

* * *

U Poglavlju 51. pomenuto je da se elektronskim uređajima mere fluktuirajuće veličine. Treba dodati da se dodatnim uređajima odmah dobijaju srednja kvadratna odstupanja, koeficijenti korelacije po prostoru (uključivši i trostruke), autokorelacione i funkcije spektralne gustine, kao i drugi pokazatelji.

Eksperimentalna istraživanja turbulencije uz statistička sređivanja i izražvanja preko prethodno opisanih, i iz njih izvedenih složenijih veličina, pokazatelja, koeficijenata i funkcija, doprinose da se zbivanja u turbulenciji razjasne i uticaji razmrse, jer su stvorena sredstva da „nered turbulencije" postane izraziv, da se slučajnosti opišu. Tako se mogu dobiti i odgovori na praktična pitanja ne samo o uticaju fluktuacije na osrednjene veličine, nego i onim fluktuacijama koje neposredno utiču na praktična rešenja (jer su merodavna za stabilnost objekta izloženih struji, za pronošenje turbulentnom difuzijom i za drugo). Istraživanja opšteg značaja pri raznim uslovima, kao i ispitivanja namenjena određenim pojedinačnim zadacima, daju saznanja o vrednostima izloženih statističkih pokazatelja turbulencije, ili nekih drugih, njima sličnih, pokazatelja.

deo šesti

DIMENZIONALNA RAZMATRANJA I SLIČNOST STRUJANJA

61
DIMENZIONALNA ANALIZA I SVRHA NJENE PRIMENE

Međusobno se mogu upoređivati, ili izjednačavati, samo veličine istih dimenzija. Svaka jednačina sastoji se iz istodimenzionalnaih članova, a svaki član je nekakva veličina složena iz veličina upisanih u njemu. U svakoj vezi između veličina odražavaju se njihove dimenzije, upravo nemoguće je zamišljati povezivanje veličina bez ikakvog uticaja njihovih dimenzija. Stoga se može rasuđivati na sledeći način.

U pojavu koja se izučava ulazi niz veličina i mora postojati njihova međusobna veza, koju treba istražiti. To istraživanje će se olakšati ako se obavi analiza dimenzija posmatranih veličina, jer će se u njihovoj vezi morati da odraze njihove dimenzije.

U tom smislu i sa takvom svrhom obavlja se postupak nazvan „dimenzionalna analiza”. Samo ime je u skladu sa objašnjenjem – to nije ništa drugo nego – *analiza dimenzija.*

Treba se podsetiti objašenjenja iz Poglavlja 12, gde je rečeno da je izbor dimenzionalnog sistema, upravo izbor osnovnih veličina, stvar dogovora ili propisa, a da su sve ostale veličine (i njihove dimenzije) izvedene iz osnovnih. Nadalje je rečeno da je broj osnovnih velična za datu problematiku određen – za mehaniku je taj broj tri (da se mogu izraziti prostor, vreme i materijalnost). Za statiku je dva (otpada vreme), dok je za termodinamiku četiri (dodaje se temperatura). Naglašeno je i da je sloboda izbora osnovnih veličina uslovljena samo time da se osnovnim veličinama mogu kao izvedene izraziti sve ostale – na primer za zadatak iz mehanike osnovne veličine ne mogu biti: dužina, vreme i brzina (jer je treća izvedena iz prve dve, a nedostaje mogućnost za izražavanje materijalnosti). Takođe ne mogu da budu: masa, gustina i dužina (nema vremena). Tamo je rečeno da je i izbor jedinica za izabrane osnovne veličine takođe stvar dogovora. I da se još doda da je tamo nagovešteno kasnije korišćenje iznetih stavova, a oni su stoga i ponovljeni ovde, jer se na njima zasniva dimenzionalna analiza.

Dimenzionalna analiza koristi slobodu izbora dimenzionalnog sistema. To je njeno bitno svojstvo. Za osnovne veličine biraju se one koje su ,,osnovne po prirodi problema". Redosled rasuđivanja nameće da su izvedene veličine one koje se istražuju i koje, na nekakav način, zavise od onih koje su uzete kao osnovne. Pošto je broj osnovnih veličina ograničen, uputno je za njih uzeti one od kojih se očekuje da imaju najmerodavniji uticaj na traženu veličinu. *Bez jasnog cilja i bez smišljenog odabiranja veličina, dimenzionalna analiza je čista formalnost.*

Lako je shvatiti da dimenzionalnih uslova ima onoliko koliko i osnovnih dimenzija, a svaki uslov smanjuje za jedan broj veličina koje se traže. Na osnovu toga prihvatljiva je teorema koja kaže da se *dimenzionalnom analizom problem sa „m" dimenzionalnih veličina svodi na „m – n" bezdimenzionalnih veličina, gde je „n" broj osnovnih veličina dotične problematike.* Bezdimenzionalne veličina su proizvodi, pa mogu da nose uobičajenu oznaku za proizvod Π – odatle i naziv „Π-teorema" („Pi teorema"). Drugi naziv je po autoru Bakingemu (BUCKINGHAM).

Smanjivanje veličina za broj osnovnih veličina može se protumačiti i time što su te veličine uzete za jedinice (u odabranom sistemu jedinice su vrednosti samih osnovnih veličina pojedinačnog zadatka).

* * *

Metoda dimenzonalne analize lako će se shvatiti iz sledećeg primera, kroz koji će se i potvrditi navedena teorema. Traži se sila otpora F, kružne ploče prečnika D, koja se kreće ustaljeno, brzinom U, u smeru normalnom na površinu ploče, kroz nestišljivu fluidnu, praktično neograničenu sredinu, gustine ρ (slika 61–1).

Sila otpora F svakako će zavisiti od D, U i ρ. Ona se može, u smislu prethodnih izlaganja shvatiti kao veličina koja se „izvodi" od D, U i ρ, koje se, onda, prihvataju kao osnovne. Ovo znači i usvajanje dimenzionalnog sistema: $[L, U, \rho]$, tj. dužina, brzina i gustina. Uzimanje mase ili sile kao osnovne veličine, kako se to čini u uobičajenim dimenzionalnim sistemima nije pogodno, jer se sila baš traži, a masa fluida koja dolazi u obzir je neodređena. Gustina će najpogodnije izraziti materijalnost. Uzimanje vremena – kao osnovne veličine – ne odgovara prirodi problema, jer se ovde vremenom ništa ne određuje, pošto je strujanje ustaljeno, dok uzimanje brzine odmah uključuje veličinu od koje, van svake sumnje, zavisi sila otpora. Jedino će se kao treća osnovna veličina zadržati dužina, čime se uvodi u razmatranje prečnik ploče. Izborom sistema izabrane su i jedinice; one su D, U, ρ, tj. jedinica za dužinu je prečnik ploče, za brzinu sama brzina strujanja, a za gustinu je gustina posmatranog fluida, i to baš one vrednosti koje su u pojedinačnom primeru koji će se rešavati.

Prema prethodnom, istraživaće se funkcija:

$$F = F(D, U, \rho)\,, \tag{61–1}$$

pa se može napisati, analogno sa dimenzionalnim obrascem (12–1):

$$[F] = [D^a \;\; U^b \;\; \rho^c]\,, \tag{61–2}$$

jer su sada osnovne veličine D, U, ρ.

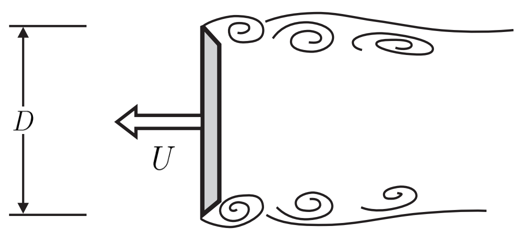
Nepoznati izložitelji a, b, c određuju se ispisivanjem prethodnog izraza prema nekom utvrđenom dimenzionalnom sistemu – uzeće se sistem: dužina (L), vreme (T), masa (M):

$$[M \;\; L \;\; T^{-2}\,] = [L]^a\,[L\,T^{-1}\,]^b\,[M\,L^{-3}\,]^c\,. \tag{61–3}$$

Dimenzija leve i desne strane ovoga izraza mora da bude ista, što sređivanjem po L, T i M daje:

$$\begin{array}{lrcl} [L] & 1 & = & a + b - 3c \\ [T] & -2 & = & -\,b \\ [M] & 1 & = & c\,. \end{array}$$

Rešenje napisanog sistema jednačina daje:



Slika 61–1 Strujanje oko kružne ploče, koja se brzinom U kreće kroz nestišljivu, neograničenu, fluidnu sredinu.

$$a = 2 \; , \quad b = 2 \; , \quad c = 1 \; .$$

Time su izložitelji u (61–1) određeni pa je:

$$[F] = [\, D^2 \;\; U^2 \;\; \rho \,] \; . \tag{61–4}$$

Sa napisanog dimenzionalnog obrasca prelazi se na jednačinu:

$$F = N_F \, D^2 \, U^2 \, \rho \; , \tag{61–5}$$

gde je N_F merni broj za F, dok su jedinice same vrednosti veličina D, U, ρ

$$N_F = \frac{F}{D^2 \, U^2 \, \rho} \; . \tag{61–6}$$

N_F je bezdimenzionalna veličina koja zamenjuje 4 veličine čija se međusobna veza istražuje.

Rezultat sprovedene dimenzionalne analize potpuno je u skladu sa navedenom teoremom, jer se razmatranje međusobnog odnosa 4 veličine u funkciji (61–1) svelo na jednu jedinu bezdimenzionalnu veličinu N_F. Problem je iz „mehanike”, gde je broj osnovnih veličina tri, a za toliko je i smanjen broj veličina prelaskom iz dimenzionalnih u bezdimenzionalne. Ovo smanjenje može se protumačiti i time što su vrednosti ρ, D i U sada postale jedinice sistema.

Postignuto dozvoljava sledeći praktični zaključak: bez obzira na vrednosti veličina D, U i ρ, sila otpora je izražena jednom vrednošću N_F, koja je *konstanta*, tj. jedan jedini broj je rešenje problema. Praktično protumačeno: *jedan jedini eksperiment* (sa jednim fluidom, jednom pločom i pri jednoj brzini) rešava zadatak za sve fluide, prečnike i brzine. Uz ovo treba staviti ograničenje: navedeno je tačno ako je gustina jedini predstavnik materijalnosti fluida koji utiče na otpor i ako je ploča oštroivična (kao na slici 61–1), tako da njena debljina ne utiče na otpor.

* * *

Umesto izraza (61–6) češće se piše:

$$\boxed{\text{Koeficijent sile} \qquad C_F = \frac{F}{A \, \frac{1}{2} \, \rho \, U^2} \; ,} \tag{61–7}$$

gde je C_F novi merni broj. Između C_F i ranijeg N_F postoji određeni odnos:

$$\frac{N_F}{C_F} = \frac{\pi}{8}\,, \tag{61–8}$$

jer je:

$$A = \frac{\pi\, D^2}{4} = \text{ površina ploče}, \tag{61–9}$$

a 1/2 je ubačeno u imenitelj izraza (61–7) da se dobije proizvod A i:

$$p_u = \frac{1}{2}\,\rho\, U^2\,, \tag{61–10}$$

koji je jednak povećanju pritiska kada se brzina U svede na nulu, shodno Bernulijevoj jednačini (35–14). Ovo se naziva „*dinamički pritisak*" ili „*zaustavni pritisak*". Imenitelj u (61–7) znači silu koja bi se dobila na površini A sa zaustavnim pritiskom po celoj ploči, pa je C_F odnos između stvarne sile i tako dobijene sile.

Sada će se zadatak proširiti na taj način što će se smatrati da na otpor utiče i viskoznost i da je ploča elipsa. Dve nove veličine su: koeficijent viskoznosti μ i drugi prečnik elipse (taj prečnik nosiće oznaku d). Funkcija koja simbolično predstavlja ovako prošireni problem je:

$$F = F(D, d, U, \rho, \mu)\,, \tag{61–11}$$

što znači međusobnu vezu 6 veličina:

$$f(F, D, d, U, \rho, \mu) = 0\,. \tag{61–12}$$

Zadržaće se iste osnovne veličine (D, U, ρ), preostale 3 su izvedene i svaka od njih izraziće se preko osnovnih. Za F je to urađeno i dobijeno je (61–6), tj. N_F. Na isti način dobijaju se bezdimenzionalne veličine za d i μ:

$$N_d = \frac{d}{D}\,, \qquad N_\mu = \frac{\mu}{D\, U\, \rho}\,.$$

N_F, N_d i N_μ su merni brojevi za F, d i μ u sistemu gde su jedinice D, U, ρ. To su bezdimenzionalni proizvodi dimenzionalnih veličina. Postupak dimenzionalne analize uvek dovodi do takvih proizvoda i oni se često obeležavaju sa Π i tako primena „Π teoreme" i biva izražena sa nizom brojeva: $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$, kao što je uz objašnjenje njenog naziva i nagovešteno.

Umesto funkcije (61–12) sa 6 dimenzionalnih veličina, proučava se funkcija sa $6 - 3 = 3$ bezdimenzionalne veličine:

$$f(N_F, N_d, N_\mu) = 0\,,$$

tj.

$$f\left(\frac{F}{D^2\,U^2\,\rho}, \frac{d}{D}, \frac{\mu}{D\,U\,\rho}\right) = 0\,, \tag{61–13}$$

što je opet u skladu sa teoremom dimenzionalne analize.

Do bezdimenzionalne veličine za μ, tj. do trećeg člana u prethodnom izrazu, došlo bi se na isti način kao što je objašnjeno za prvi izraz, odnosno postupkom koji je doveo do (61–4). Međutim, do bezdimenzionalne veličine za μ može se doći kraćim putem. Iza (41–4) navedeno je da je dimenzija za μ [napon · vreme]. Kako napon ima istu dimenziju kao i pritisak, a za ovu drugu može se pročitati iz (61–18) da je $[\,\rho, U^2\,]$, to treba još pomnožiti sa vremenom $[\,T\,]$, što se može zameniti sa $[L/U\,]$. Tako se dobija da je dimenzija za koeficijent viskoznosti, u sistemu $[L, U, \rho\,]$:

$$[\,\mu\,] = [\,L, U, \rho\,]\,, \tag{61–14}$$

a iz toga proizilazi ono što je napisano kao treći član u (61–13).

Pre proširenja problema zaključeno je da problem rešava određivanje jednog broja za što je dovoljan jedan eksperiment. Sada treba niz eksperimenata. Za nekoliko odnosa d/D po nekoliko eksperimenata sa menjanjem veličine $\mu/(D\,U\,\rho)$. Da bi se obuhvatio što veći raspon druge veličine, treba ispitivati pri većem domenu brzine i menjajući fluid (čime se menjaju μ i ρ). Problem je ipak sveden na zavisnost jedne veličine od svega dve, rezultati se mogu nacrtati na jednom crtežu – kao familija krivih linija, dok bez primene dimenzionalne analize jedna veličina zavisi od pet. Izloženi primer ukazuje na nužnost primene dimenzionalne analize ako se želi da se priđe smišljeno eksperimentalnom istraživanju opštih zakonitosti.

Smanjivanje broja veličina u razmatranju, što se postiže dimenzionalnom analizom, neće se praktično osetiti ako zadatak nema opšte značenje. Ako je svrha istraživanja pojava samo u jednom fluidu (jedna gustina), prednost mogućnosti korišćenja rezultata i na drugom fluidu nema praktičan značaj. Mogućnosti korišćenja rezultata istraživanja na svim geometrijski sličnim objektima postaju takođe nezanimljive ako se ne može očekivati više takvih objekata u primeni.

* * *

Može se istraživati raspored pritisaka po prednjoj, ili stražnjoj površini ploče što znači određivanje funkcije:

$$p = p\,[x_1,\, x_2, (\,D, d, U, \rho, \mu\,)]\ , \tag{61–15}$$

gde su x_1 i x_2 koordinate tačke na ploči, osovine „1" i „2" su duž prečnika elipse D, odnosno d.

Treba odrediti čitav niz funkcija $p = p\,(x_1, x_2)$ jer jedna važi za konstantne vrednosti D, d, U, ρ i μ (za jedan opit). Bezdimenzionalno izraženo prethodno postaje:

$$N_p = N_p \left[\frac{x_1}{D}, \frac{x_2}{D}, \left(\frac{d}{D}, \frac{\mu}{D\,U\,\rho} \right) \right], \tag{61–16}$$

gde je:

$$N_p = \frac{p}{\rho\,U^2}\,. \tag{61–17}$$

Njegova dvostruka vrednost je:

$$\boxed{\text{Koeficijent pritiska} \qquad C_p = \frac{p}{\dfrac{1}{2}\,\rho\,U^2}\,,} \tag{61–18}$$

pa se dobija odnos između pritiska i zaustavnog pritiska datog sa (61–10). Da bi se izrazio otpor, može se kao nulti pritisak u svakoj tački uzeti onaj koji vlada kada ploča miruje. Tada p znači dodatni pritisak koji stvara otpor.

Bezdimenzionalne veličine za određeni sistem mogu se preuređivati sa svrhom dobijanja pogodnijeg izraza koji se lakše tumači, tako je N_F zamenjeno sa C_F, a N_p sa C_p. Nadalje, mogu se bezdimenzionalne veličine međusobno povezivati, pa se iz dve dobije treća, a onda se jedna od prvobitne dve može izostaviti. Na primer, iz x_2/D i d/D, napisanih u (61–16), može se deljenjem dobiti x_2/d (ova se može smatrati pogodnijom za merenje duž prečnika d), a onda ispada x_2/D, tj. x_2/D se zamenjuje sa x_2/d.

* * *

Za osnovnu veličinu posle proširenja prethodnog primera može se odabrati μ umesto ρ i tada bi se dobile nešto drugačije bezdimenzionalne veličine, ali bi stvar ostala načeno ista – zadatak bi se od dimenzionalnih veličina sveo na bezdimenzionalne, uz dogovarajuće smanjenje. Novi bezdimenzionalni sistem za zadatak iz mehanike mora da pruži mogućnost istraživanja prostora, vremena i materijanosti, kako je to već objašnjeno, a to zadovoljavaju sistemi $[\,D, U, \rho\,]$ i $[\,D, U, \mu\,]$, ali ne bi zadovoljio sistem $[\,D, d, U\,]$ i pokušaj sa njim ne bi doveo do rezultata.

Može se matematski izraziti podobnost novoga sistema čije su osnovne veličine: $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ako se on uporedi sa osnovnim veličinama nekoga već proverenog sistema: $L_1, L_2, \ldots, L_n$, gde je n – broj osnovnih veličina.

Osnovna veličina novog sistema može se izraziti sledećim proizvodom u koji ulaze veličine proverenog sistema:

$$l_1 = L_1^{a_{11}} \cdot L_2^{a_{21}} \ldots = \prod_{i=1}^{i=n} L_i^{a_{i1}} \,,$$

ili uopšteno:

$$l_j = \prod_{i=1}^{i=n} L_i^{a_{ij}} \,. \tag{61–19}$$

Može se obrazovati matrica od izložitelja a_{ij}. Novi sistem se može prihvatiti ako je determinanta te matrice različita od nule, tj. ako je:

$$|a_{ij}| \neq 0 \,. \tag{61–20}$$

Za primenjeni sistem $[\,D, U, \rho\,]$ u odnosu na sistem: dužina, vreme, masa $[\,L, T, M\,]$, merodavna determinanta je:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} L & T & M \end{array} & \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \ldots\; D \\ \ldots\; U \\ \ldots\; \rho \end{array} \end{array}$$

i ona je zaista različita od nule.

Korisno je primetiti da se slučajne greške oko izbora dimenzionalnog sistema ubedljivo ispolje, jer analiza ne dovodi do rezultata.

62
OPISIVANJE STRUJANJA BEZDIMENZIONALNIM VELIČINAMA

Bezimenzionalne veličine mogu se obrazovati na razne načine ne samo zbog slobode u izboru dimenzionalnog sistema, nego i zbog toga što se dobijene veličine mogu dalje kombinovati. U mehaniku fluida uvedene su izvesne bezdimenzionalne veličine koje se redovno upotrebljavaju kao uobičajeno sredstvo sporazumevanja. Te veličine su bezdimenzionalne materijalne karakteristike. Naime, svaka materijalna ili fizička osobina fluida izražava se određenom veličinom: sama masa gustinom, viskoznost koeficijentom viskoznosti, stišljivost modulom elastičnosti itd. Bezdimenzionalno izražavanje tih materijalnih karakteristika u dimenzionalnom sistemu $[\,L, U, \rho\,]$, tj. dužina, brzina, gustina, dovodi do uobičajenih bezimenzionalnih veličina koje se nazivaju *„brojevi”*. Naziv je vrlo pogodan, jer se rečju „broj” ukazuje na bezdimenzionalni izraz. Svaki takav broj ima svoje ime, po jednom od poznatih istraživača u oblasti mehanike fluida.

Što se takvi uobičajeni „brojevi” dobijaju baš u sistemu $[\,L, U, \rho\,]$ može se opravdati pogodnošću toga sitema za probelmatiku mehanike fluida, što je već pokazano u prethodnom primeru.

* * *

Bezdimenzionalna veličina za koeficijent viskoznosti μ proizlazi iz (61–14), to je:

$$\boxed{\text{Rejnoldsov broj (REYNOLDS)} \qquad Re = \frac{\rho\, L\, U}{\mu}\,.} \tag{62–1}$$

Uticaj stišljivosti unosi se modulom stišljivosti E, koji ima istu dimenziju kao pritisak ($[\,\rho\, U^2\,]$). Tako se dobija bezdimenzionalna veličina:

$$\boxed{\text{Košijev broj (CAUCHY)} \qquad Ca = \frac{\rho\, U^2}{E}\,.} \tag{62–2}$$

Ovaj broj je već naveden – vidi (43–19).

Težina svake mase dobija se množenjem te mase sa gravitacionim ubrzanjem g. Iz toga sledi da je za izražavanje uticaja težine bitno gravitaciono ubrzanje. Bezdimenzionalna veličina za gravitaciono ubrzanje, u sistemu $[L, U, \rho]$ je $[\,g\,] = [L^{-1}, U^2, \rho^0\,]$, što se svodi na vezu g sa karakterističnom dužinom L i brzinom U na:

$$\boxed{\text{Frudov broj (FROUDE)} \qquad Fr = \frac{U^2}{g\,L}\,.} \tag{62–3}$$

NAPOMENA: U stručnoj anglo–američkoj literaturi za Fr-broj se uzima kvadratni koren iz navedenog, pa je tamo $Fr = U/\sqrt{g\,L}$.

Treba još dodati i fizičku osobinu fluida koja se meri veličinom nazvanom *„kapilarna konstanta"* ili *„koeficijent površinskog napona"* (daće joj se oznaka δ). Ova fizička osobina najbolje se pokazuje kod izdizanja (ili spuštanja) nivoa u kapilarnim cevčicama. Naime, ako je tečnost u mirovanju, nivo u cevčicama odstupa od onog koji daju zakoni hidrostatike i ovo odstupanje posledica je delovanja sila po obimu cevčice. Uvedena veličina, označena sa δ, je ta sila po jedinici dužine i njena vrednost zavisi od vrste tečnosti na koju deluje, i od materijala sa kojim se tečnost graniči. Navodi se, na primer, da „voda u dodiru sa vazduhom" ima određenu, približno konstantnu vrednosti veličine δ – i odatle i naziv „kapilarna konstanta". S obzirom na izloženo, može se napisati dimenzionalni izraz:

$$[\,\delta\,] = [F L^{-1}] = [\,\rho\,L\,U^2\,]$$

i odgovarajući broj:

$$\boxed{\text{Veberov broj (WEBER)} \qquad We = \frac{\rho\,L\,U^2}{\delta}\,.} \tag{62–4}$$

Za sve brojeve važi da su oni veći ako je manja vrednost veličine koja unosi uticaj viskoznosti, stišljivosti, gravitacije i površinskog napona. Stoga bi bilo prikladnije da se uzimaju recipročne vrednosti tih brojeva, ali ne treba o tome razmišljati, jer su napisani brojevi prihvaćeni svuda i svagda.

Uvođenje bezimenzionalnih veličina: *Re*, *Ca*, *Fr* i *We* umesto dimenzionalnih: ρ, μ, E, g i δ pokazuje da se broj veličina smanjio za jedan – sa pet na četiri. Ostale koristi od dimenzionalne analize pokazaće se pri analizi geometrijskih i vremenskih elemenata strujanja.

Za veličine dužinu L i brzinu U, u navedenim brojevima, obično se uzimaju karakteristična dužina i brzina u strujanju koje se razmatra. Tako se u strujanju u cevima uzimaju prečnik cevi D i brzina proticanja v, za kanal se uzimaju dubina h i brzina v, a pri proučavanju otpora broda uzimaju se dužina i brzina broda.

Treba nagalasiti da *navedeni brojevi postaju sredstvo sporazumevanja uz prethodno utvrđivanje šta se uzima za* L *i* U za dati zadatak, navođenje vrednosti brojeva bez toga je *besmisleno.*

* * *

U razmatranje, sem navedenih materijalnih karakteristika, ulaze i kinematičke karakteristike strujanja. Zadatak koji se rašava je geometrijski potpuno određen ovim dužinama:

$$L_0, L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$$

tj. sa $n+1$ dužina. Sve potrebne geometrijske veličine uvek će se moći izraziti kao neke kombinacije odgovarajućih dužina.

Prethodno svedeno na bezdimenzionalni oblik dovodi do n veličina (smanjene za jednu, jer je L_0 jedinica novog sistema):

$$\frac{L_1}{L_0}, \frac{L_2}{L_0}, \ldots, \frac{L_n}{L_0}\,. \tag{62–5}$$

Potpuno kinematičko određivanje postići će se sa nizom brzina, koje se opet svode na:

$$\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_0}, \ldots, \frac{u_n}{u_0} \tag{62–6}$$

tj. od $n+1$ prelazi se opet na n veličina.

Sve druge kinematičke veličine mogu se zameniti bezdimenzionalnim veličinama i pri tome nema smanjenja broja veličina, jer su prednosti dimenzionalne analize prethodnim iskorišćene.

Vremena koja ulaze u zadatak $t_1, t_2, \ldots, t_n$ mogu se zameniti sa:

$$\frac{t_1}{t_0}, \frac{t_2}{t_0}, \ldots, \frac{t_n}{t_0}\,, \tag{62–7}$$

gde je t_0 izabrano karakteritično vreme koje se povezuje sa L_0/u_0.

Proticaji dobijaju bezdimenzionalne zamene:

$$\frac{Q_1}{Q_0}, \frac{Q_2}{Q_0}, \dots \tag{62–8}$$

gde se izabrani karakteristični proticaj Q_0 kroz karakteristični presek mora prethodno povezati sa $u\, L_0^2$.

Zadatak mogu da uslovljavaju karakteristike materijala koji je u dodiru sa posmatranim fluidom. To mogu biti: gustina drugog materijala (koji fluid pronosi), viskoznost i gustina drugog fluida (koji se kreće zajedno sa posmatranim), elastičnost čvrstih kontura (koje se usled strujanja deformišu) itd. Ako se karakteristike fluida, koji se primarno proučava, označe bez indeksa, a one od drugih materijala, sa indeksima: $1, 2, \dots$, doći će se do bezdimenzionalnih veličina ovakvog tipa:

$$\frac{\rho_1}{\rho}, \frac{\rho_2}{\rho}, \frac{\mu_1}{\mu}, \frac{\mu_2}{\mu}, \dots, \frac{E_1}{E} \text{ itd.} \tag{62–9}$$

koje zamenjuju veličinu u imeniocu.

U uslove zadatka mogu da ulaze i zadati pritisci, ili sile, što se bezdimenzionalno izražava sa N_p i N_F, napisanim u prethodnom poglavlju sa (61–17) i (61–6). Svi drugi uslovi bi se na sličan način napisali bezdimenzionalno.

Izrazi, čiji su primeri (62–5) do (62–9), te niz njima sličnih bezdimenzionalnih veličina, čine „opis zadatka". Njima se obezbeđuju *osobenosti pojedinačnog zadatka*. U „opisima" se pojedinačni zadaci razlikuju međusobno. Ovaj opis nazvaće se *„konturni uslovi"* što bi doslovno značilo granični uslovi, a oni su ustvari granični i početni uslovi zajedno. Ovi drugi čine manji deo opisa, a kod ustaljenog strujanja (koje se najviše istražuje) ne učestvuju uopšte, a pored toga i oni su neko ograničavanje. Time se termin „konturni uslovi" može opravdati, a mnogim nazivima mogli bi staviti primedbe koje nemaju više značaja čim se naziv, uz odgovarajući dogovor, odomaći. Tako neka bude i ovde.

*   *   *

Istražuje se veličina Φ čija je bezdimenzionalna zamena C_Φ, a to je merni broj za Φ u sistemu gde su jedinice L_0, u_0, ρ. Umesto funkcije sa dimenzionalnim veličinama, dobija se skraćena funkcija sa bezdimenzionalnim veličinama, prema sledećm (ispadaju jedinice, a ostale veličine dobijaju bezdimenzionalne zamene):

$$\Phi = \Phi(L_0, u_0, \rho,\ \mu,\ E,\ \ g,\ \ \delta, \ldots, ko_I, ko_{II}, \ldots, ko_n) \tag{62–10}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$C_\Phi = \qquad C_\Phi(Re, Ca, Fr, We, \underbrace{Ko_I, Ko_{II}, \ldots, Ko_n}_{Ko}). \tag{62–11}$$

Sa $ko_i\ \ i = I, n$ su označene dimenzionalne veličine koje određuju „konturne uslove", a sa $Ko_i\ \ i = I, n$, njihove bezdimenzionalne zamene. To je „opis zadatka" u objašnjenom smislu.

Treba reći da ono što ulazi u „konturni uslov" može u nekom drugom zadatku da se baš traži, čime je ono što se u prvom zadatku tražilo prešlo u uslov.

I „konturni uslov" i veličine koje se istražuju, mogu da budu funkcije prostora i vremena i tada se bezdimenzionalno pišu:

$$N_Y = N_Y\left(\frac{x_1}{L_0}, \frac{x_2}{L_0}, \frac{x_3}{L_0}, \frac{t}{t_0}\right),$$

gde je t_0 povezano sa L_0/u_0, a N_Y je bezdimenzionalna zamena za Y – upravo za funkciju $Y = Y(x_1, x_2, x_3, t)$.

Za primer iz prethodnog poglavlja (61), rešenje je funkcija (61–14) koja se može napisati sa:

$$N_F = N_F\left(Re, \frac{d}{D}\right).$$

Na to se svela opšta funkcija (62–11), jer su konturni uslovi veoma prosti – bedimenzionalno su dati samo sa d/D, pošto je kinematička slika veoma prosta (određuju se dve dužine d i D i jedna brzina U), a od materijalnih karakteristika, sem gustine, ulazi samo viskoznost.

U navedenom primeru nema uticaj stišljivosti, težine i kapilarnosti (kasnije će se zadatak izmeniti da se pokaže kada bi one uticale). Međutim, zadatak je lako zamisliti sa složenijim konturnim uslovima, jer su uzeti zaista veoma prosti: na primer, može se menjati ugao nagiba ploče (razmatrano je jednoliko kretanje ploče normalnim pravcem na površinu ploče), može da se ploča kreće kroz ograničeni prostor, pa treba opisati udaljenost ploče od granica. Ako je ploča u struji, onda bi se morao razjasniti raspored brzina, uključujući i karakteristike turbulencije. Sve bi navedeno ušlo u „konturne uslove". Isuviše veliki „opis zadatka" (složeni „konturni uslovi" dati sa mnogo veličina, ili čak sa nizom funkcija), značio bi ogroman i nasavladiv obim istraživanja (jer sve veličine treba menjati), a to je nerazumno, jer dugačak „opis zadatka" upozorava da je on jedinstven, osoben, i da uopštavanje nema praktičnog smisla.

Takođe u rešenju zadatka može se zahtevati da se istraže brojne veličine i funkcije – pokazano je za silu i raspored pritiska kod razmatranog primera. Međutim, može se istraživati raspored brzina oko ploče, uključivši i turbulentne karakteristike.

* * *

Sem navedenih brojeva, i nekim drugim bezdimenzionalnim veličinama daje se naziv „broj" (čime se ukazuje da su bez dimenzija), a uz to im se dodaje i posebno ime (čime se pokazuje njihova osobenost). Tako se, na primer, C_p iz (61–18) naziva „Ojlerov broj" (EULER). Ili, bezdimenzionalna karakteristika $n\,L_0/u_0$, za učestalost n, naziva se „Struhalov broj" (STROUHAL) itd. Te, i njima slične veličine, ulaze u *Ko*, ili C_Φ, u opštem izrazu (62–11), jer su to uslovi zadatka ili njegovo rešenje. Treba razlikovati brojeve: *Re*, *Ca*, *Fr* i *We*, koji označavaju materijalne karakteristike fluida, od drugih bezdimenzionalnih veličina, koje u razmatranje uvode postavljeni uslovi ili svrha rešavanja zadatka.

* * *

Mogu se uvesti i kinematičke karakteristike:

Kinematički koeficijent viskoznosti $$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \qquad (62\text{–}12)$$

Brzina zvuka $$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (62\text{–}13)$$

Kinematički koeficijent površinskog napona $$\delta_k = \frac{\delta}{\rho}, \qquad (62\text{–}14)$$

pa su onda:

$$Re = \frac{L_0\,u_0}{\nu}\,, \tag{62–15}$$

$$Ca = \frac{u_0^2}{a^2}\,, \tag{62–16}$$

$$We = \frac{u_0^2\,L_0}{\delta_k}\,, \tag{62–17}$$

dok je Fr-broj već napisan (62–3) sa kinematičkom karakteristikom:

$$g = \frac{\gamma}{\rho}\,,$$

gde je γ specifična težina.

Uvođenjem kinematičkih karakteristika g, a i δ_k u opšti izraz (62–10) ne bi uopšte ulazila gustina, ali bi bilo sve izraženo u kinematičkim veličinama, pa se broj veličina, prelaskom na bezdimenzionalne, može smanjiti za svega dve – rezultat bi opet bio (62–11).

* * *

Radi razjašnjavanja praktične primene Re broja i Fr broja, mogu da budu od koristi napomene koje se nadalje iznose.

Re-broj kao pokazatelj uticaja viskoznosti u odnosu na uticaje gustine, može da posluži kao pokazatelj nastanka i razvijenosti turbulencije, jer su uticaji fluktuacija na glavno strujanje inercijalni (uticaji gustine), dok viskoznost gasi turbulenciju (što je Re veći, turbulencija je razvijenija, jer je μ u imenitelju Re-broja). Osrednjeno strujanje je pod uticajem „napona" turbulencije, iz njega se prebacuje kinetička energija u fluktuacije – navedeni naponi i energija zavise od gustine. Sve je ovo objašnjavano u Poglavlju 53, a tamo je navedeno da „razvijena turbulencija" može dovesti do stanja da je osrednjeno strujanje pod presudnim uticajem flukutacija, dok je dejstvo viskoznosti zanemarljivo.

Ako se (61–14) primeni na kružnu ploču, i uz zamenu (61–8), dobija se:

$$C_F = C_F(Re),$$

gde je C_F određeno sa (61–7). U ovom primeru ostvaruje se nagovešteno, jer je eksperimentalno utvrđeno da se za $Re > 1000$ ostvaruje:

$$C_F = \text{const} = 1{,}1 \ .$$

Ovome ne treba davati opšti značaj, nego prihvatiti kao primer gde osrednjena vrednost sile otpora (C_F se odnosi na osrednjenu silu) ne zavisi od viskoznosti kada Re pređe neku vrednost.

* * *

Fr-broj unosi težinu i moglo bi se površno rasuđivati da je on merodavan uvek kod teških fluida (tečnosti), a može se izostaviti kod gasova, ali takvo rasuđivanje nije tačno. I kod tečnosti ne treba uvek uzimati Fr-broj, a bitno za uzimanje ili neuzimanje je to da li težina stvara strujno polje ili ona deluje tako da se isto stanje dobija ako se ona zameni delovanjem pritiska (ona nije merodavna za obrazovanje strujanja). Na primer, oblika talasa oko plovećeg tela stvara težina, a oni utiču na otpor tela, pa on zavisi od Fr-broja. Ili, slobodnu površinu u otvorenom toku oblikuje težina, pa je za otvorene tokove (kanale) merodavan Fr-broj. Međutim, za potpuno uronjeno telo, strujna slika ne zavisi od težine, jer ne zavisi od pravca kretanja (isti je za horizontalan, kao i vertikalna pravac, mada težina deluje uvek vertikalno). Otpor je razlika između sile delovanja fluida na telo u kretanju i sile u mirovanju, a dok druga (potisak) izjednačava težinu fluida, dotle je sila koju uzrokuje kretanje nezavisna od težine, pa i od Fr-broja. Treba primetiti da se kao „potpuno uronjeno" telo smatra ono telo koje svojim kretanjem ne remeti slobodnu površinu vode. Tečenje pod pritiskom u istoj cevi za isti proticaj isto je bez obzira na njen nagib, tj. bez obzira na dejstvo težine, jer je svedeno koliko doprinosi težina, a koliko pritisak.

U dinamičkoj jednačini za nestišljiv fluid, sile težine i pritiska po jedinici mase, napisane su na desnoj strani jednačine (35–5):

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g\,Z + \frac{p}{\rho}\right) = -\frac{\partial\,\Gamma}{\partial x_i}\,. \qquad (62\text{–}18)$$

Fr-broj ne utiče na proces ako se može razmatrati ovde uvedena veličina (Γ) bez vođenja računa o njenoj podeli na gZ i p/ρ, tj. bez obzira na to koliko doprinosi težina, a koliko pritisak. Fr postaje merodavan za zbivanja na slobodnoj površini, jer se baš ona obrazuje pod dejstvom težine, dok je vrednost pritiska uslovljena (on je atmosferski).

Može se zaključiti da Fr dolazi u obzir kod razmatranja tečenja sa slobodnom površinom i otpora na njoj plovećih tela, dok on nema uticaja na tečenje pod pritiskom (gde granice strujnog polja ne obrazuje fluid), a tu ulaze i otpori potpuno uronjenih tela.

Fr-broj bi uticao na otpor ploče koja se ranija razmatrala, ako bi ona svojim kretanjem remetila površinu vode ili čak štrčala iz vode – tada bi se uzela u obzir dubina h, kojom bi se odredio položaj ploče u odnosu na mirnu površinu vode. U funkciji (61–14) pored tamo upisanih, sada bi ušli i:

$$\frac{h}{d} \quad \text{i} \quad Fr = \frac{u^2}{g\,D} \quad \text{ili} \quad \frac{u^2}{g\,h}.$$

Za ploču oko koje bi se obrazovala slobodna površina vode, jer štrči iz nje, pored navedenog, mogao bi da dođe u obzir i uticaj površinskog napona (naročito za malene brzine) – tada bi došao u obzir i Veberov broj We, izražen sa (62–4).

* * *

Do sada su razmatrane bezdimenzionalne karakteristike za nestišljiv fluid i fluid sa slabo izraženom stišljivošću i sve uz pretpostavku da su toplotne promene zanemaljive, što je i prihvatljivo, jer su one zaista zanemarljive ako ih uzrokuje samo deformacioni rad. Nadalje se raspravlja izrazita stišljivost.

Prema razjašnjenom u Pogavlju 42, može se izbeći razmatranje toplotnih pojava ako se proces može prihvatiti kao izotermni ili kao adijabatski. U Poglavlju 43 – izrazom (43–16) i nadalje sa (43–17) i (43–18) – već je uveden bezdimenzionalni pokazatelj stišljivosti, to je:

Mahov broj (MACH)

$$\text{izoterman proces:} \quad Ma = \frac{u_0}{\sqrt{p_0/\rho_0}}, \tag{62–19}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Mahov broj (MACH)}\\[2ex] \text{adijabatski proces: } Ma = \dfrac{u_0}{\sqrt{k\,p_0/\rho_0}}.\end{array}} \tag{62–20}$$

Ranije je objašnjeno da su Ca i Ma suštinski isto – pokazatelji stišljivosti: $\sqrt{Ca} = Ma$ ako se za modul stišljivosti uzme p_0, odnosno $k\,p_0$, umesto E.

Može se odrediti lokalni Ma-broj (sa brzinom, pritiskom i gustinom u tački na koju se broj odnosi), pa se mogu ti lokalni Ma-brojevi upoređivati, što je već urađeno – jednačina (43–21). Lokalni brojevi zavisni su od Ma-broja obrazovanog sa karakterističnim vrednostima prema (43–17), ili (43–18), koji je karakterističan za ceo zadatak i koji se može posebno označiti – na primer sa Ma_0, pa se uspostavljaju zavisnosti $Ma = Ma\,(Ma_0)$. Treba skrenuti pažnju da se kod stišljivog fluida mora uvesti karakteristična gustina ρ_0, kojoj odgovara pritisak p_0, dok se gustina (koja je promenljiva) izražava sa ρ/ρ_0.

I ostali, ranije uvedeni „brojevi”, mogu se obrazovati sa lokalnim ili trenutnim vrednostima dužina i brzina – na primer, za struju u kanalu pravougaonog poprečnog preseka uzme se dubina h i srednja brzina u_{sr} u preseku i obrazuje se Fr-broj za presek ($Fr = u_{\mathrm{sr}}^2/(gh)$), pa se njegova vrednost razmatra od preseka do preseka, dok bi karakterističan broj za ceo zadatak bio Fr_0, obrazovan sa karakterističnom dužinom i brzinom. Jasno je da se lokalni brojevi mogu izraziti preko odnosa karakterističnih dužina i brzina. Ili, drugi primer, Re-broj se može obrazovati za sve poprečne preseke jednog cevovoda kod koga se prečnik menja.

* * *

Ako se mora ulaziti u toplotne procese, onda se unose bezdimenzionalne karakteristike za specifičnu toplotu, za koeficijent provođenja i za koeficijent prelaza toplote. Ovaj poslednji do sada nije pominjan i objasniće se malo kasnije.

Kinetička energija po jedinici mase iznosi $u^2/2$, a toplota $C\,\Theta$, pa se može obrazovati bezdimenzionalna veličina:

$$N_C = \frac{u_0^2}{C\,\Theta_0}, \tag{62–21}$$

što je ustvari recipročna vrednost mernog broja za specifičnu toplotu C u sistemu gde su jedinice: L_0, u_0, ρ i Θ_0 (ranijem sistemu dodata je temperatura), a može se shvatiti i kao recipročna vrednost mernog broja za Θ_0 ako su jedinice: L_0, u_0, ρ i C. Umesto C može se uzeti c^p nazvana „specifična toplota pri konstantnom pritisku" – njihova međusobna veza $c^p = k\,C$ je upisana u (42–19). Tom zamenom se dobija:

$$\boxed{\text{Ekertov broj (ECKERT)} \qquad Ec = \frac{u_0^2}{c^p\,\Theta_0}.} \tag{62–22}$$

Karakteristična temperatura Θ_0 u nekim zadacima može da bude neka apsolutna temperatura, dok u drugim, može da bude i karakteristična temperaturna razlika. Ovo zavisi od toga da li se zakonitosti merodavne za posmatrani zadatak ispoljavaju kroz apsolutnu temperaturu, ili je bitna temperaturna razlika – na primer u jednačini stanja pojavljuje se apsolutna temperatura, dok se energija zagrejavanja izražava razlikom temperatura.

Iz jednačine (34–18) se može dobiti sledeći dimenzionalni izraz:

$$[\,C\,\Theta\,T^{-1}\,] = [\,\lambda\,\Theta\,L^{-2}\,\rho^{-1}\,],$$

pa je u dimenzionalnom skladu:

$$\left[\frac{\lambda}{C}\right] = [\,\rho\,L^2\,T^{-1}\,] = [\,\rho_0\,L_0\,u_0\,],$$

što dovodi do bezdimenzionalnog izraza koji povezuje dve fizičke karakteristike λ i C – a isto važi za λ i c^p – pa se dobija:

$$\boxed{\text{Pekleov broj (PÉCLET)} \qquad Pe = \frac{c^p\,\rho_0\,L_0\,u_0}{\lambda}.} \tag{62–23}$$

Ovo se može shvatiti kao recipročna vrednost mernog broja za koeficijent provođenja, ako su jedinice četiri vrednosti napisane u brojiocu.

Nailazi se i na Prantlov (PRANDTL) broj:

$$Pr = \frac{c^p\,\mu}{\lambda}. \tag{62–24}$$

Upoređenje prethodna dva broja pokazuje da je:

$$Pr = \frac{Pe}{Re}\,, \tag{62–25}$$

pa se navođenjem Pr, uz prisustvo Re, može izostaviti Pe.

Kroz graničnu površinu dva materijala obavlja se *prelaz toplote*. Na posmatrani fluid kroz elementarni deo granične površine, sa susednog materijala prelazi u jedinici vremena toplota:

$$q_i \, \mathrm{d}A = \alpha \, (\Theta_{\mathrm{II}} - \Theta_{\mathrm{I}}) \, \mathrm{d}A \, (-n_i)\,, \tag{62–26}$$

gde je: q_i – toplota prelaza u jedinici vremena kroz jedinicu površine u pravcu „i”, α – *koeficijent prelaza toplote*, a Θ_{I} i Θ_{II} su temperature posmatranog fluida i susednog materijala beskonačno blizu razdelne površine.

U jednačini (62–26) dimenzija za α treba da bude usklađena sa dimenzijama za q i Θ:

$$[\,\alpha\,] = [\,q\,\Theta^{-1}\,]\,. \tag{62–27}$$

Po jednačini pronošenja toplote (34–16) dimenzija za λ zahteva:

$$[\,\lambda\,] = [\,q\,L\,\Theta^{-1}\,]\,. \tag{62–28}$$

Upoređenje (62–27) i (62–28) daje bezdimenzionalnu karakteristiku koja pokazuje koeficijente prelaza i prevođenja – to je:

$$\boxed{\text{Nuseltov broj (NUSSELT)} \qquad Nu = \frac{\alpha\, L_0}{\lambda}.} \tag{62–29}$$

Brojevi Ec, Pe i Nu napisani su pod pretpostavkom konstantnosti specifične toplote, koeficjenta provođenja i prelaza. Ako se ove karakteristike menjaju, treba brojeve izraziti prema vrednostima c_0^p, λ_0 i h_0 koje važe za karakterističnu vrednost temperature Θ_0, pa se onda lokalna i trenutna vrednost izražavaju sa C/C_0, λ/λ_0 i α/α_0. Isto je i sa koeficijentom viskoznosti – i njega treba izražavati sa μ/μ_0, a μ_0 ulazi u brojeve Re i Pr.

Termodinamički zadaci zahtevaju i odgovarajući dodatak „konturnim uslovima” – njihov „opis” je složeniji, prikazivanje rezultata takođe je složenije nego kod zadataka koji se mogu posmatrati kao mehanički. Međutim, sve rečeno ranije može se proširiti i na ono što unosi toplota, rasuđivanja su načelno ista.

* * *

Za koeficijent termičke zapreminske dilatacije β, koji je uveden jednačinom (42–5), bezdimenzionalna karakteristika je:

$$\boxed{C_\beta = \beta\,\Theta_0\,.} \tag{62–30}$$

Iz izlaganja se uvidelo da se „bezdimenzionalni brojevi" mogu međusobno kombinovati što daje nove brojeve, pa se stari mogu izostaviti. Za neke praktične zadatke, preobličeni brojevi su pogodniji – tako su ustvari i nastali. Na primer, ponegde je pogodna „*viskogravitaciona karakteristika*" koja se dobija eliminisanjem brzine iz Fr i Re broja:

$$\frac{g\,L_0^3}{\nu^2} = \frac{Re^2}{Fr}\,. \tag{62–31}$$

Ovde se pojavljuju kinematske karakteristike težine ($g = \gamma/\rho$) i viskoznosti ($\nu = \mu/\rho$).

Množenjem (62–30) i (62–31) dobija se Grashofov (GRASHOF) broj:

$$Gr = \frac{\beta\,\Theta_0\,g\,L_0^3}{\nu^2}\,, \tag{62–32}$$

koje je pogodan za procese sa termičkim uzgonom – u slobodnoj atmosferi topliji (i zbog toga lakši) delići se dižu, savlađujući trenje koje je posledica viskoznosti. Radi se o malim promenama gustine (u odnosu na samu gustinu), pa se može uzeti veza između temperature i gustine, gde se stišljivost malo ispoljava i to pri istom pritisku, a to je veza (42–6). Uticaj toplote unosi onda koeficijent termičke zapreminske dilatacije β, čija je bezdimenzionalna zamena C_β, napisana sa (62–30). Prema tome, za navedeni proces od „brojeva" treba uzeti Fr, Re i C_β, a od njih se mogu praviti različite kombinacije – jedna od njih je sa (62–32) napisani Gr-broj.

63
MODELI, RAZMERE, USLOVI SLIČNOSTI

Model nekog objekta – ili, tačnije rečeno, *modelisanje nekog procesa* – mora ispunjavati uslov da su model i objekat međusobno *slični*, a *sličnost treba shvatiti kao mogućnost prenošenja procesa sa modela na objekat i obrnuto.* (Rezultati istraživanja i zaključci iz njih se prenose sa modela na objekat, dok se uslovi zadatka prenose sa objekta na model.)

U praktičnim razmatranjima pod pojmom „model" često se podrazumeva model nekog određenog, konkretnog objekta, tj. ne daje mu se opštije značenje. Međutim, kao model treba shvatiti sve ono što se proučava da bi se razultati proučavanja preneli na druge slične primere, a svaki od tih pojedinačnih primera je objekat dotičnog modela. Prema tome, model je i studija sa svrhom utvrđivanja neke zakonitosti, primenljive na neograničeni broj sličnih objekata. *Model je sve ono na čemu se procesi izučavaju, a objekat je sve ono na šta se rezultati sa modela prenose.*

Treba odmah naglasiti da će se ovde razmatrati *modelisanje strujanja strujanjem* – i da na modelu i na objektu struji fluid. Pod pojmom „model" se naime shvata i modelisanje jedne pojave drukčijom pojavom – na primer strujanje se modeliše električnim procesom. Čak se i matematičko izražavanje naziva „modelom" – kaže se *„matematski model".*

*　　*　　*

Razmera je odnos između vrednosti neke veličine na objektu i vrednosti odgovarajuće veličine na modelu. Za bilo koju veličinu X može se napisati:

$$\frac{X_{\text{ob}}}{X_{\text{mod}}} = X_* \,, \tag{63–1}$$

gde se indeksi „ob" i „mod" odnose na objekat, odnosno model, a zvezdicom je označena razmera za datu veličinu X. Ovaj način obeležavanja upotrebljavaće se tokom celog sledećeg izvođenja. Razmera se može shvatiti kao *odnos mernih brojeva za objekat i za model, uz iste* *jedinice* za oba mesta, ili pak kao *odnos jedinica za model i objekat, uz uslov da merni broj na oba mesta bude isti.* Razmera X_* za veličinu X mora biti ista za sve takve veličine bez obzira gde i kada se one pojavljivale na modelu i na objektu. Samo po sebi je jasno da bez toga ne bi bili ispunjeni uslovi za postizanje sličnosti.

Pravilo za međusobne odnose razmera za različite veličine lako se izvodi iz sledećeg rasuđivanja. Uzeće se za primer brzina u, odnosno njena razmera u_*, koja zavisi od razmera za dužinu i vreme (L_*, T_*), jer je:

$$u_* = \frac{u_{\mathrm{ob}}}{u_{\mathrm{mod}}} = \frac{L_{\mathrm{ob}}/T_{\mathrm{ob}}}{L_{\mathrm{mod}}/T_{\mathrm{mod}}} = \frac{L_*}{T_*} \,. \tag{63–2}$$

Sa druge strane, dimenzija za brzinu je:

$$[\, u\,] = \left[\, \frac{L}{T} \,\right] ,$$

pa se vidi da se *razmere odnose isto kao dimenzije.* Bilo koji drugi primer doveo bi do istog zaključka, pa navedeno ima opšte značenje.

Iz prethodnog sledi da međusobno nezavisnih razmera može da bude onoliko koliko ima međusobno nezavisnih dimenzija (koliko ima osnovnih veličina). Međutim, to ne znači da će se tolika sloboda izbora moći i ostvariti; nagoveštava se, a kasnije će se obrazložiti, da ispunjavanje uslova za postizanje sličnosti znatno sužava izbor razmera.

Zaključak da se razmere odnose kao i dimenzije dovodi dalje do veoma važnog praktičnog pravila: *Bezdimenzionalne veličine prenose se nepromenljive sa modela na objekat, tj. razmera za njih je jedinica.* Iz toga se izvode „*uslovi sličnosti*" (ili „zakoni" sličnosti), koji su u *istovetnosti svih napisanih bezdimenzionalnih veličina* u (62–11), što se može izraziti na sledeći način:

I) *Konturni uslovi, napisani bezdimenzonalno, moraju biti istovetni* (isti, što se obično piše oznakom *„idem"* = isto) na modelu i na objektu, što se piše:

$$\boxed{\quad Ko = idem \,. \quad} \tag{63–3}$$

„Idem" je pogodan termin, jer se njime označava *istovetnost*, odnosno *nepromenljivost pri prenošenju sa modela na objekat.* Pisanje sa „Const"

ne bi bilo adekvatno, jer se pod „*Ko*” mogu podrazumevati i funkcije koje menjaju vrednosti po prostoru i po vremenu, ali na *isti način* na modelu i u prirodi.

II) Ako su za procese, koji se proučavaju, sem inercijalnih uticaja (uticaja gustine), merodavni i uticaji viskoznosti, uslovi sličnosti zahtevaju *istovetnost* Rejnoldsovog broja na modelu i objektu (jer on u bezdimenzionalnom obliku predstavlja sadejstvo uticaja gustine i viskoznosti), tj.

$$Re = idem \qquad \text{tj.} \qquad Re_* = \frac{u_*\, L_*\, \rho_*}{\mu_*} = 1\,. \tag{63–4}$$

Na isti način može se dobiti uslov sličnosti za sadejstvo uticaja stišljivosti, kapilarnosti i gravitacije (svakog od njih sa uticajem gustine):

$$Ca = idem\,, \tag{63–5}$$
$$We = idem\,, \tag{63–6}$$
$$Fr = idem\,. \tag{63–7}$$

Za slučaj izražene stišljivosti (gasovi), Košijev broj se zamenjuje Mahovim brojem, tj. uslov je sada:

$$Ma = idem\,, \tag{63–8}$$

ali taj uslov nije dovoljan, jer se mora ući i u analizu energije (temperaturne uticaje) i tako doći do dopunskih uslova sličnosti. Međutim, ako se proces može proučavati kao izoterman, ne treba nikakvih daljnjih uslova, a za proces koje se može prihvatiti kao adijabatski, dovoljna je još i istovetnost adijabatskog koeficijenta:

$$k = idem\,. \tag{63–9}$$

Za termodinamičke procese dodatni uslovi sličnosti se svode na istovetnost brojeva koji unose specifičnu toplotu i koeficijent provođenja, tj. na:

$$Ec = idem\,, \tag{63–10}$$
$$Pe = idem\,, \tag{63–11}$$

a ako ima i prelaza toplote, dobija se i:

$$Nu = idem\,. \tag{63–12}$$

Sličnost je postignuta preko *istovetnih bezdimenzionalnih „konturnih uslova" i istovetnih „bezdimenzionalnih brojeva" kojima se izražavaju karakteristike materijala*, a koji su uvedeni u prethodnom Poglavlju 62. i odmah istaknuti uokvirivanjem izraza za njih. Ako se postigne navedena istovetnost, to obezbeđuje i istovetnost svih rezultata; oni ispisani bezdimenzionalno moći će se prenositi nepromenjeni sa modela na objekat.

Prethodno treba prihvatiti kao „*uslove sličnosti*" koje bi trebalo postići da se obezbedi sličnost, ali treba odmah reći da se svi uslovi ne mogu zadovoljiti, upravo *može se ispuniti istovetnost samo za neke od napisanih brojeva*, upravo zadovoljenje nekih sprečava da se isto postigne kod ostalih. Razumljiv je razlog za to. U modelisanju u mehanici bez ikakvih uslova sličnosti, tri su međusobno nezavisne razmere, pa se zadovoljenjem istovetnosti tri broja ne ostavlja više nikakva sloboda u izboru razmere – onda one sve moraju biti jedinica, tj. objekat i model su isto, a onda u stvari i nema modela. Nadalje, isti fluid na modelu i na objektu nameće ograničenje razmere, pa se već kod istovetnosti dva broja dolazi do nemogućnosti modelisanja. Menjanje fluida ne stvara opet neograničene mogućnosti. Ako je proces termodinamički, teškoće su još veće, jer se dodaje nekoliko novih uslova, a broj nezavisnih razmera se povećava za svega jednu. Pošto se praktičnim mogućnostima modelisanja želi posvetiti posebna pažnja, njima će biti posvećeno celo naredno Poglavlje 64. U nastavku raspraviće se sličnost sa jednog drugog stanovišta – neposrednim posmatranjem delujućih sila.

* * *

Uslov za postizanje dinamičke sličnosti može se izreći veoma kratko: zahteva se *ista razmera za sve sile*, a u sile se uključuje i tzv. „inercijalna sila", uvedena i razjašnjena pri kraju Poglavlja 33 – napisana je jednačinom (33–8). Tako je zadatak formalno sveden na statiku, upravo svodi se na „*ravnotežu sila*". Ako je postignuta razmera za sve sile, postignuta je i srazmernost momenata sila, jer srazmernost krakova obezbeđuje geometrijska sličnost.

Napisana „ravnoteža sila” za neku masu na modelu važi i za odgovarajuću na objektu, samo se svi članovi pomnože sa razmerom za sile. Zatvoreni poligon „ravnoteže sila” je isti za određenu masu na modelu i njoj odgovarajuću na objektu – to je isti crtež, a iz njega se čitaju sile i za objekat i za model, sa tim što su prve onoliko puta veće od drugih kolika je razmera za sile.

Prethodno nameće pitanje kako će se postići ista razmera za sve sile. Ako se rasuđuje sa eksperimentalnog stanovišta, sile će zavisiti od materijala koji se stavlja u model, odnosno od njegovih fizičkih osobina. Ovo nameće klasifikaciju sila: inercijalne, gravitacione, sile viskoznosti itd., što prevedeno u dimenzionalna razmatranja znači pisanje sila u dimenzionalnom sistemu: dužina, brzina i jedna od materijalnih karakteristika. Napisaće se takvi dimenzionalni izrazi i odmah zahtevane razmere, jer se razmere odnose isto kao i dimenzije. Tako se dobija:

$$[\,F_p\,] \;= [\,\rho\, L^2\, u^2\,] \qquad\qquad F_p^* = \rho_*\, L_*^2\, u_*^2\,, \qquad (63\text{–}13)$$

$$[\,F_\mu\,] \;= [\,\mu\, L\, u\,] \qquad\qquad F_\mu^* = \mu_*\, L_*\, u_*\,, \qquad (63\text{–}14)$$

$$[\,F_g\,] \;= [\,g\,\rho\, L^3\,] = [\,\gamma\, L^3\,] \qquad F_g^* = \gamma_*\, L_*^3\,. \qquad (63\text{–}15)$$

Na isti način napisali bi se izrazi i za sile stišljivosti i kapilarnosti.

Izjednačavanjem (63–13) i (63–14) dolazi se do uslova sličnosti pri sadejstvu inercijalnih sila i sila viskoznosti:

$$F_\rho^* = F_\mu^* \qquad \frac{F_\mu^*}{F_\rho^*} = 1 \qquad Re_* = 1\,.$$

tj. zahteva se istovetnost Re-broja.

Prethodno pokazuje da:

$$\frac{F_\rho}{F_\mu} = idem \quad \text{znači} \quad Re = idem\,. \qquad (63\text{–}16)$$

Istovetnost Re-broja dakle, znači isti odnos između inercijalnih sila i sila viskoznosti.

Izjednačavanje (63–13) sa (63–15) na isti način, dovodi do zaključka da:

$$\frac{F_\rho}{F_g} = idem \quad \text{znači} \quad Fr = idem\,. \qquad (63\text{–}17)$$

Moglo bi se isto sprovesti i za sile stišljivosti i kapilarnosti i zaključak bi bio da će se dobiti već poznati uslovi sličnosti izraženi kroz istovetnost onog broja koji unosi uticaje čija se sličnost želi, pored inercijalnih.

Jasno je da bez istovetnosti „konturnih uslova" nema sličnosti, pa bi se i ovde dodao još uslov (63–3), tj. $Ko = idem$.

Posmatranjem sličnosti sila nije se dobilo ništa načelno novo, a ništa se nije moglo ni očekivati, pošto dimenzionalno posmatranje sila ili njima odgovarajućih materijalnih karakteristika je ista stvar, jer su tim karakteristikama dimenzije tako nametnute da se preko njih i kinematičkih veličina dobiju naponi, odnosno sile. Međutim, iz prethodne analize sličnosti sila može se izvući zaključak da istovetnost nekog broja znači isti odnos odgovarajućih sila. Uz ovo treba skrenuti pažnju da se ponegde navodi: Rejnoldsov broj je odnos inercijalnih sila prema silama viskoznosti, što bi se moglo protumačiti kao odnos, u algebarskom smislu. Svakako da Re-broj to nije, jer je, pre svega, njegova vrednost *uslovna*, jer zavisi od izbora karakteristične dužine i brzine. Zatim, potpuno je *besmislen* pokušaj sporazumevanja preko Re-broja, za različite probleme. On je sredstvo za upoređenje samo pri istim konturnim uslovima, razume se, izraženim bezdimenzionalno. Re-broj se uspostavlja i sa njime se uspešno služi, a da se ne ulazi u određivanje odnosa sila, jer to i nije bitno za rešenje. I na kraju, odnos sila zavisi od mase na koju se sile odnose, pa bi se takvih odnosa moglo napraviti koliko se hoće, a Re-broj je opšta karakteristika datog problema. Može se reći da u strujanju kroz isti provodnik (ili oko istog tela), za niz opita sa različitim vrednostima Re-broja, pouzdano se tvrdi da je *odnos inercijalnih sila prema silama viskoznosti veći ako je Re-broj veći, ali se time ne određuje vrednost tog odnosa*. Može se reći i u duhu objašnjavanog u prethodnom Poglavlju 62: veći Re-broj, razvijenija turbulencija.

Rečeno o odnosu sila važi načelno i za ostale brojeve, samo što se umesto sila viskoznosti posmatraju sile stišljivosti (za Ca-broj), kapilarnosti (za We-broj) ili težine (za Fr-broj).

* * *

Umesto sličnosti sila može se posmatrati sličnost za razne vrste energije i za radove svih sila. Došlo bi se do sledećeg zaključka: ista razmera za kinetičku energiju i za radove pojedinih sila zahteva istovetnost do sada pominjanih brojeva (Re, Ca, We, Fr), dok ista razmera za kinetičku energiju i toplotu dovodi do zahteva za istovetnost Ec-broja, a ista razmera za energiju zagrevanja i provođenja do $Pe = idem$, odnosno, srazmernost energija provođenja i prelaza traži $Nu = idem$. Ovde bi se mogli izvesti zaključci da ti brojevi ukazuju na odnose energija.

* * *

Uslovi sličnosti mogu se utvrditi i iz jednačina ispisanih sa bezdimenzionalnim članovima – one moraju da budu identične za sve međusobno slične procese, oni su njihov zajednički „matematski model”.

Sve veličine se izražavaju bezdimenzionalno, u sistemu gde su jedinice L_0, u_0, ρ_0 i Θ_0, tj. primenjuje se već primenjivani sistem. Izbor ovih veličina na modelu je proizvoljan, a obavljen izbor obavezuje na odgovarajuće veličine na svim modelu sličnim objektima.

Bezdimenzionalne veličine su:

$$x_i^+ = \frac{x_i}{L_0}, \tag{63–18}$$

$$u_i^+ = \frac{u_i}{u_0}, \tag{63–19}$$

$$\rho^+ = \frac{\rho}{\rho_0}, \tag{63–20}$$

$$p^+ = \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, \tag{63–21}$$

$$t^+ = \frac{t\, u_0}{L_0}, \tag{63–22}$$

$$\Theta^+ = \frac{\Theta}{\Theta_0}. \tag{63–23}$$

Jednačina o nepromenljivosti mase ne daje nikakav uslov sličnosti, ona je uvek zadovoljena, jer se svaki proces „sam po sebi” zadovoljava čim se u njega stavi neprekidna masa. Dinamička jednačina kao izraz „ravnoteže sila”, ili prikazana grafički (zatvorenim poligonom sila) već je raspravljena. Sada će se raspraviti dinamička jednačina napisana u svom uobičajenom obliku – uzeće se jednačina (41–11) za nestišljiv fluid i pretpostaviće se da zapreminska sila ne deluje, ili da je svejedno da li deluje težina ili njoj odgovarajuća sila pritiska, pa se težina može izostaviti iz razmatranja. Tako će, shodno objašnjenom u prethodnom Poglavlju 62, biti odstranjen uticaj Fr-broja, odnosno posmatraće se proces gde on ne učestvuje. U jednačini (41–11) leva strana se može zameniti sa $\mathrm{D}u_j/\mathrm{D}t$.

Navedena jednačina, uz navedene uslove, i sa prethodno napisanim bezdimenzionalnim promenljivim veličinama glasi:

$$\frac{u_0^2}{L_0}\frac{\mathrm{D}\,u_j^+}{\mathrm{D}\,t^+} = -\,\frac{u_0^2}{L_0}\frac{1}{\rho^+}\frac{\partial\,p^+}{\partial\,x_j^+} + \frac{\mu\,u_0}{\rho_0\,L_0^2}\frac{1}{\rho^+}\frac{\partial}{\partial\,x_i^+}\left(\frac{\partial\,u_j^+}{\partial\,x_i^+}\right). \qquad (63\text{–}24)$$

Deljenjem sa u_0^2/L_0 prethodno se svodi na:

$$\frac{\mathrm{D}\,u_j^+}{\mathrm{D}\,t^+} = \frac{1}{\rho^+}\frac{\partial\,p^+}{\partial\,x_j^+} + \frac{1}{Re}\frac{1}{\rho^+}\frac{\partial}{\partial\,x_i^+}\left(\frac{\partial\,u_j^+}{\partial\,x_i^+}\right), \qquad (63\text{–}25)$$

gde je:

$$Re = \frac{L_0\,u_0\,\mu}{\rho_0}.$$

U jednačini su svi članovi bezdimenzionalni i važiće za sve međusobno slične procese ako je jednačina za sve ista, a to je moguće ako je:

$$Re = idem\ .$$

Rečeno je da uticaj Fr-broja znači uticaj težine tako da nije zamenjiva sa odgovarajućim dejstvom pritiska, a to znači da se u dinamičkoj jednačini mora pojaviti i član (vidi jednačinu (28–6)):

$$f_j = -\,g\,\frac{\partial\,Z}{\partial\,x_j} = -\,g\,\frac{\partial\,Z^+}{\partial\,x_j^+}\,, \qquad (63\text{–}26)$$

gde je Z vertikalna osovina, usmerena na gore, a Z^+ njen bezdimenzionalni izraz ($Z^+ = Z/L_0$). Kasnije se jednačina (63–24) deli sa u_0^2/L_0, pa bi se delio i prethodni član, što bi dalo:

$$\frac{g\,L_0}{u_0^2} = \frac{1}{Fr} = idem\,,$$

a to se i moralo dobiti.

Uslov $We = idem$ proizašao bi iz stavljanja kapilarnih sila u dinamičku jednačinu.

Prethodnim su iscrpljeni uslovi sličnosti proizašli iz jednačina za nestišljiv fluid. Ne treba zaboraviti da svaku diferencijalnu jednačinu prate pri rešavanju određenog zadatka njegovi granični i početni uslovi, iz kojih se dobija uslov sličnosti:

$$Ko = idem\,.$$

Za stišljiv fluid odgovarajuća dinamička jednačina (41–10) ne bi dala nikakav novi uslov sličnosti. Ako je proces takve prirode da se temperatura značajno menja, koeficijent viskoznosti neće biti konstanta, pa se nameće i zahtev za sličnost koeficijenta viskoznosti, tj. $\mu/\mu_0 = idem$, gde je μ_0 koeficijent pri određenoj temperaturi i μ_0 ulazi u Re-broj.

Uslove sličnosti usled stišljivosti daju jednačine koje izražavaju stišljivost. Najpre će se razmotriti one jednačine gde ne ulazi temperatura.

Jednačina (42–4) sa bezdimenzionalnim veličinama ρ^+ i p^+ glasi:

$$\frac{\rho_0\, u_0^2}{E}\left(p^+ - p_0^+\right) = \rho^+ - 1\,, \tag{63–27}$$

što dovodi do:

$$\frac{\rho_0\, u_0^2}{E} = Ca = idem\,.$$

Iz (43–11) na isti način se dobija:

$$a^+\, a_0 = u_0 \sqrt{\frac{\mathrm{d}\, p^+}{\mathrm{d}\, \rho^+}}\,, \qquad a^+ = \frac{a}{a_0}\,, \tag{63–28}$$

ovo dovodi do:

$$\frac{a_0}{u_0} = Ma = idem\,.$$

Za adijabatski proces treba dodati i $k = idem$.

*   *   *

Jednačina toplote (42–10) može se preinačiti u:

$$\frac{C\,\Theta_0\, u_0}{L_0}\,\frac{\mathrm{D}\,\Theta^+}{\mathrm{D}\, t^+} = \frac{\lambda\,\Theta_0}{\rho_0\, L_0^2\, \rho^+}\,\frac{\partial^2\left(\lambda\,\Theta^+\right)}{\partial\, x_i^+\,\partial\, x_i^+} + {} + \frac{u_0^3}{L_0}\,\frac{p^+}{\rho^+}\left(-\frac{\partial\, u_i^+}{\partial\, x_i^+}\right) + \frac{\mu\, u_0^2}{\rho_0\, L_0^2}\,\frac{Y_{\mathrm{dis}}^+}{\rho^+}\,. \tag{63–29}$$

Y^+_{dis} znači bezdimenzionalni izraz za Y_{dis}, dat sa (41–15) i vidi se da je dimenzija u_0^2/L_0^2.

Deljenjem (63–29) sa $C\,\Theta_0\,u_0/L_0$, svi članovi postaju bezdimenzionalni, pa postizanje sličnosti zahteva sledeće:

$$\frac{\lambda}{C\,\rho_0\,u_0\,L_0} = idem \qquad \text{tj.} \qquad \frac{k}{Pe} = idem\,, \tag{63–30}$$

$$\frac{u_0^2}{C\,\Theta_0} = idem \qquad \text{tj.} \qquad k\,Ec = idem\,, \tag{63–31}$$

$$\frac{\mu\,u_0}{\rho_0\,L_0\,c\,\Theta_0} = idem \qquad \text{tj.} \qquad k\,\frac{Ec}{Re} = idem\,, \tag{63–32}$$

jer je u prethodnom korišćeno $k = c^p/C$, te izrazi (62–22) i (62–23), te (62–1).

Jednačina stanja (42–7), napisana sa p^+, ρ^+ i Θ^+, prema (63–20), (63–21) i (63–23) dovodi do:

$$\frac{u_0^2}{R\,\Theta_0} = \frac{k}{k-1}\,\frac{u_0^2}{c^p\,\Theta_0} = \frac{k}{k-1}\,Ec = idem\,, \tag{63–33}$$

jer je iz (42–19) uočljiva međusobna veza izmedju R i c^p prema sledećem:

$$\frac{R}{C} = k-1\,, \qquad \frac{R}{c^p} = \frac{k-1}{k}\,. \tag{63–34}$$

Uslovi (63–30) do (63–33) pokazuju da se uslovi sličnosti proizašli iz jednačina toplote i stanja, svode na istovetnost poznatih bezdimenzionalnih veličina: Re, Pe, Ec i k. Treba odmah reći da pojedini uslovi otpadaju ako se u određenom zadatku ne ispoljavaju odgovarajući uticaji.

Ako je fluid nestišljiv, otpadaju (63–31) i (63–33), a C i c^p je isto, pa se uslovi sličnosti svode na: $Pe = idem$, $Ec/Re = idem$. Ako je uz to toplota dobijena deformacionim radom na promeni oblika (viskoznim trenjem) beznačajna, ostaje samo $Pe = idem$.

Ako je fluid stišljiv, a proces se može smatrati adijabatskim, otpada provođenje toplote, a zanemaruje se njeno dobijanje viskoznim trenjem, tj. otpadaju (63–30) i (63–32). Iz (63–33), korišćenjem jednačine stanja, dobija se:

$$\frac{u_0^2}{\dfrac{p_0}{\rho_0}} = k\,\frac{u_0^2}{k\,\dfrac{p_0}{\rho_0}} = k\,Ma^2\,,$$

dok se (63–31), uz (63–33), može zameniti sa $k = idem$, pa su uslovi:

$$Ma^2 = idem\,, \qquad\qquad k = idem\,.$$

što je već ranije na drugi način pokazano.

Istovetnost bezdimenzionalne karkateristike date sa (62–30), tj.

$$\beta\,\Theta_0 = idem$$

dobila bi se, pored $Ca = idem$, iz jednačine (42–6).

Uslov $Nu = idem$ proizašao bi iz stavljanja prelaza toplote u bilans energije, jer Nu, dat sa (62–29), izražava sadejstvo prelaza i provođenja toplote.

Ako se materijalne karakteristike ne mogu smatrati konstantama, onda se kao uslovi sličnosti postavljaju:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = idem, \qquad \frac{C}{C_0} = idem, \qquad \frac{\lambda}{\lambda_0} = idem, \qquad \text{itd.}$$

gde su μ_0, C_0 i λ_0 vrednosti vezane za određene uslove (za temperaturu Θ_0) i one ulaze u karakteristične brojeve: Re, Ec, Pe itd., a promenljive vrednosti se izražavaju u odnosu na njih i te bezdimenzionalne veličine takođe su iste na modelu i objektu, ako je postignuta odgovarajuća sličnost.

Na kraju, korisno je ponoviti da neminovni uslov sličnosti:

$$Ko = idem\,,$$

proizilazi iz saznanja da je primena jednačina nezamisliva bez prethodno utvrđenih graničnih i početnih uslova, koji, ispisani bezdimenzionalno, čine ono što se simbolično označava sa Ko.

Moglo bi se na kraju primetiti da je izvođenje uslova sličnosti iz ispisanih jednačina bilo izlišno, jer su se dobili već poznati uslovi, upravo, dobilo se ono što se i moralo dobiti. Primedba je umesna pošto su se ustvari jednačine dimenzionalno sređivale, upravo dimenzionalno su se sređivali njihovi članovi, a unapred su izabrane jedinice (u_0, L_0, ρ_0 i Θ_0) pa su se morale dobiti bezdimenzionalne veličine gde ulaze karakteristike μ, g, E, C, $\lambda, \ldots$ i navedene jedinice, a to su „brojevi" uvedeni u prethodnom poglavlju (upravo dobila se njihova istovetnost kao uslov sličnosti). Ponegde su se ti brojevi međusobno kombinovali da se baš dobije ono što je ranije pokazano kao uslov sličnosti. Ovakvo izlaganje o izvođenju uslova sličnost treba shvatiti kao prihvatanje drugog polazišta za razmatranje sličnosti, a onda prvi način izgleda nepotreban. Ipak treba primetiti da se suštinski, izloženi postupci razlikuju, jer izvođenje uslova sličnosti bez jednačina dovodi do modela strujanja bez matematskog posredovanja (bez jednačina – one se ne moraju ni poznavati), dok izvlačenje sličnosti iz jednačina znači traženje pogodnog primera za eksperimentalna istraživanja, a za koga važe iste jednačine kao za zadatak koji treba rešiti, a same jednačine ne mogu dovesti do rešenja.

Uz ovo treba dodati da se prave modeli strujanja i prema jednačinama koje važe za uprošćene uslove i koje su približni izrazi i tada se ustvari modeliše jednačina. To može dovesti i do modela koji nisu ni geometrijski slični – „distordovani", što znači „izobličeni" modeli – ali su baš oni praktično veoma pogodni – na primer, model dugačkog kanalskog toka sa rastojanjima duž kanala skraćenim u odnosu na dubine (jedna razmera za dužine, a druga za dubinu), što dozvoljava jednačina napisana za linijski zadatak.

I na kraju, jedna pojava može se modelisati pojavom druge vrste ako važi ista jednačina, tj. posredovanjem matematskog modela. Jednačina se može ispisati bezdimenzionalno i onda se karakteristične bezdimenzionalne veličine prenose sa jedne pojave na drugu. Na primer, modeliše se provođenje toplote provođenjem električne struje, ili obrnuto. Jednačina (34–16) provođenja toplote napisana bezdimenzionalno:

$$\frac{q_i}{q_0} = \frac{\lambda\,\Theta_0}{q_0\,L_0}\;\frac{\partial\,(-\,\Theta/\Theta_0)}{\partial\,(x_i/L_0)}$$

može da znači i provođenje struje, a onda su q_i jačina struje, Θ napon, λ koeficijent provodljivosti struje. Bezdimenzionalna veličina:

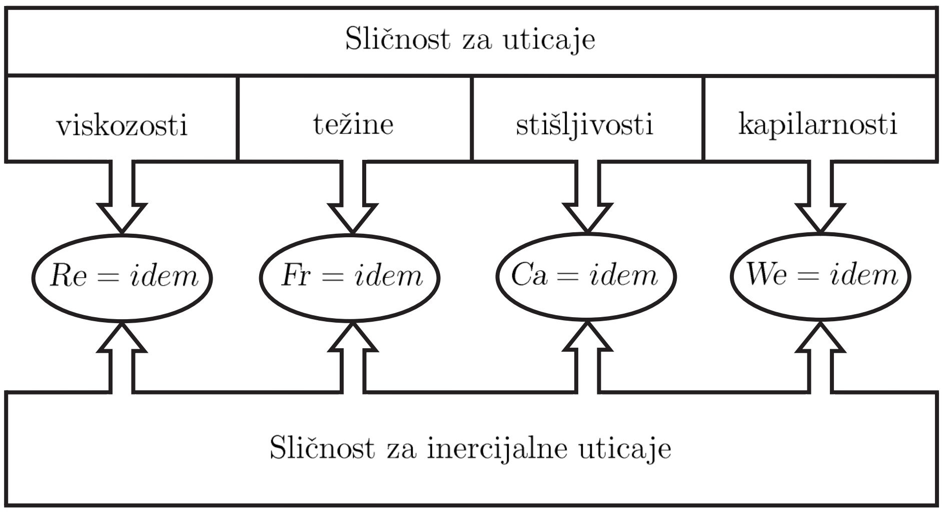
$$\frac{\lambda\,\Theta_0}{q_0\,L_0}$$

je ista (= *idem*) na električnom modelu i na objektu sa provođenjem toplote. Ili obrnuto, nepromenljiva je prilikom prenosa sa procesa gde se provodi toplota na proces električnog strujanja.

64
PRAKTIČNE MOGUĆNOSTI MODELISANJA

Pretpostaviće se najprostiji slučaj: proces je mehaničke prirode (bez uticaja toplote), a od materijalnih osobina fluida na zbivanja utiče samo gustina. Sada se mogu odabrati tri međusobno nezavisne razmere za tri izabrane osnovne veličine. Razmere za ostale veličine biće posledica tri usvojene razmere i od toga kako se te veličine izvode od osnovnih. Uzeće se za osnovne razmere: L_*, u_* i ρ_*, tj. za dužinu, brzinu i gustinu, jer je to u skladu sa dimenzionalnim sistemom koji je prihvaćen kao najpogodniji. Zaista, sa praktičnog stanovišta to je i pogodno, jer L_* ukazuje na geometrijsku razmeru, ρ_* na materijale u modelu i objektu, a u_* na odnose brzina, što je najizrazitiji pokazatelj kretanja i proticanja. Ostvarenje modela je vrlo lako, jer se tri razmere, koje najizrazitije pokazuju odnose model – objekat, izaberu kako je najprihvatljivije i može se dobiti model željenih dimenzija, sa prihvatljivim brzinama i proticajima, a može se za model uzeti proizvoljan fluid. Ovaj slučaj nazvaće se „*sličnost samo za inercijalne uticaje*".

Ali, takvi procesi su vrlo retki, jer, sem gustine, na strujanje utiču još neke od osobina fluida: viskoznost, stišljivost i druge. Prema tome, mora se zadovoljiti još neki od uslova datih od (63–4) nadalje, odnosno svaka materijalna karakteristika, ako se želi sličnost za odgovarajuće uticaje, traži zadovoljenje po jednog uslova. Na taj način se mogućnosti za izbor razmere smanjuju, što je već razjašnjeno prethodnom, 63. poglavlju. Ako se geometrijska razmera podešava po želji sa tendencijom da model ne bude prevelik, postizanje željene razmere za L_* je još jedan uslov. Fluid na modelu i fluid na objektu imaju posve određene materijalne karakteristike, što nameće razmere za njih. Često je na modelu i objektu isti fluid – na primer: voda u hidrauličkim, vazduh u aerotehničkim modelima. Sve ovo otežava izbor razmera i stoga se obično podesi sličnost *samo za jedan* od uslova, datih od (63–4) do (63–7), što znači zadovoljenje sličnosti za *sadejstvo gustine i još jedne materijalne karakteristike* i tada se govori o *delimičnoj* ili *parcijalnoj* *sličnosti*, kojoj se daje naziv „*Rejnoldsova*" ili „*Košijeva*" ili „*Frudova*" ili „*Veberova*" sličnost – ovo je i šematski prikazano na slici 64–1. Samo u izuzetnim slučajevima moguće je zadovoljiti dve delimične sličnosti, dok se tri mogu zadovoljiti samo modelom iste veličine kao i sam objekat. Ovaj nagoveštaj potkrepiće se narednim izlaganjima namenjenim mogućnostima modelisanja jednog objekta, ali će se zaključci prenositi i na modeliranje čija je svrha opšte rešenje primenjeno na nizu zadataka. Napominje se da će se izlaganja odnositi na procese iz mehanike, a da se isti načelni zaključci mogu preneti i na termodinamičke modele.



Slika 64–1 Uz objašnjenje uslova za delimične sličnosti.

* * *

Frudova sličnost postiže se veoma lako. Treba zadovoljiti odgovarajući uslov (63–7):

$$Fr = idem \quad \text{tj.} \quad Fr_* = 1$$

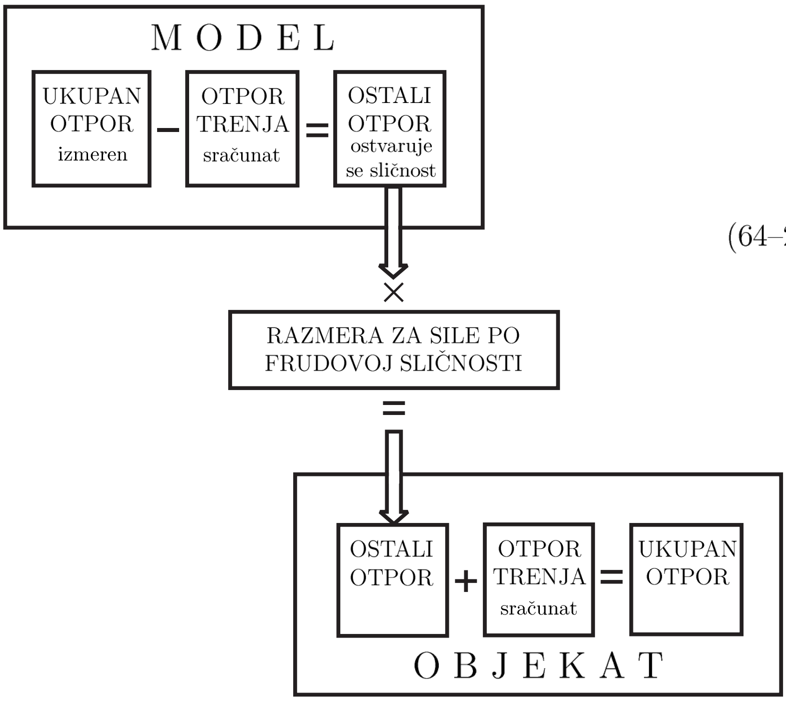
što se na osnovu (63–3) dalje piše:

$$\frac{u_*^2}{g_*\, L_*} = 1 \quad \text{ili} \quad u_*^2 = L_* \tag{64–1}$$

pošto je $g_* = 1$, jer je gravitaciono ubrzanje isto i na modelu i na objektu.

Vidi se da je moguće izabrati pogodnu razmeru L_* za dužinu i da je razmera za brzinu u_* kvadratni koren iz razmere za dužinu, što je prihvatljivo, jer modelu geometrijski manjem od objekta odgovara i manja brzina (ili proticaj) od odgovarajućih na objektu. Treba zapaziti da se menjanjem tečnosti na modelu ne dobija ništa, a to je i logično, jer je uvek obezbeđena srazmernost gravitacionih i inercijalnih uticaja, pošto je nemoguće promeniti gravitaciono ubrzanje.

Frudova sličnost primenjuje se gotovo redovno kod modelisanja hidrotehničkih objekata i brodova. Ona obezbeđuje sličnost za gravitacione i inercijalne uticaje. Ako su oni dominantni, a ostali uticaji zanemarljivi za rezultate istraživanja, mogu se rezultati prenositi sa modela na objekat, što znači da je delimična sličnost dovoljna da se dobije zadovoljavajuće rešenje za određenu praktičnu svrhu. Iskustva iz niza eksperimentalnih studija, uz menjanje uticaja, kao i upoređenja modela i po njemu sagrađenih objekata, daju saznanja o tome u kojim se uslovima nešto može, a u kojim ne može zanemariti. Nepostizanje sličnosti za druge uticaje (pre svega za viskoznost) može ograničiti svrhu modelisanja na dobijanje približnih procena, ili čak samo na mogućnost da se oceni koje je od alternativnih rešenja bolje (a i to je neki put dovoljno). Već od prvih objašnjenja sličnosti za otpore brodova, koja potiče od Fruda (po kome je kasnije nazvan Fr-broj), otpor broda se deli na deo za koji važi sličnost i na deo za koji ne važi (ovaj drugi deo je trenje) – vidi jednačinu (64–2), šematski prikazanu na slici(64–2). Ovo veštačko razdvajanje otpora pretpostavlja da otpor trenja određuje brzina broda, površina u dodiru sa vodom, njena hrapavost i viskoznost, a bez obzira na oblik broda (na oblik te površine koja stvara trenje). Oblik broda nameće talase oko broda i vrtložni trag iza njega iz čega proističe deo otpora za koji važi Frudova sličnost. Ovakva pretpostavka i dozvoljava da se otpor trenja računa i sabira sa „preostalim otporom". Međutim, toj pretpostavci se mogu staviti zamerke, jer ona veštački razdvaja jedinstveni proces, pošto su navedena dva dela otpora pod međusobnim uticajem i otpor trenja ne može biti potpuno nezavisan od rasporeda brzine oko broda, a ovaj raspored nije isti ako je oblik broda drugačiji. Ta suštinska zamerka nema praktičnog značaja ako se usvajanjem pretpostavke dobija rezultat prihvatljiv za upotrebu. Posledice pretpostavke mogu se utvrditi eksperimentalno: opiti se obavljaju sa



(64–2)

Slika 64–2 Šematski prikaz određivanja otpora objekta uz pomoć modela, jednačinom (64–2).

različitim oblicima i različitim hrapavostima, pa i sa otporom trenja ravne tanke ploče (gde nema drugog otpora sem trenja), meri se otpor sagrađenog broda i upoređuje sa modelom.

Izloženo nije imalo isključivo svrhu da se prikažu teškoće koje prate praktično korišćenje Frudove sličnosti – želelo se da se ukaže na metode koje se sreću kod svake delimične sličnosti, baš zbog toga što je delimična, dok potpunu sličnost nije moguće postići. Dovijanja zbog delimične sličnosti mogu da budu i u sledećem smislu: umesto modelisanja pojedinosti, gde se ne može ostvariti sličnost, može se strujanju veštački nametnuti uticaj koji bi ta pojedinost uzrokovala, a taj se uticaj iz drugog izvora zna: bila je posebno ispitivana na modelu krupnije razmere, gde se postigla sličnost, ili se o tom uticaju zna sa drugih modela ili iz opštih saznanja o toj pojavi. Ima i modela koji se stvaraju podešavajući da se dobije ono što se zbilo u prirodi, pa onda služe za procenu onoga što se može dogoditi uz očekivanu okolnost.

*   *   *

Jasno je da Frudovu sličnost treba primenjivati samo ako je uticaj težine merodavan za obrazovanje strujanja. Treba se podsetiti obrazloženja o uticanju, odnosno neuticanju, Fr-broja koja su data u Poglavlju 62 – neuticanje Fr-broja znači nepotrebnu Frudovu sličnost. Najbolji pokazatelj nepotrebnosti Frudove sličnosti je mogućnost da se model orijentiše proizvoljno u odnosu na vertikalu (bez obzira kako je to na objektu), a to je moguće kod modelisanja tečenja pod pritiskom, ili otpora potpuno uronjenog tela u fluid, a očigledno je da nije moguće kod tečenja u otvorenim kanalima, ili kod otpora plovećih tela.

* * *

Rejnoldsova sličnost ne obezbeđuje se lako, jer za nju, na osnovu (62–1) i (63–4), se piše:

$$\rho_* \, u_* \, L_* = \mu_* \, . \tag{64–3}$$

Za isti fluid ($\mu_* = \rho_* = 1$) dobija se:

$$L_* \, u_* = 1 \, , \tag{64–4}$$

što, kada se razjasni, pokazuje sledeće: model manji od objekta zahteva veću brzinu od objekta, ili manja brzina na modelu zahteva da on bude veći od objekta. Dalje, iz (63–14) zaključilo bi se da je potrebna ista sila na modelu i na objektu. Razume se da ovo, sa praktičnog stanovišta, gotovo nikad nije prihvatljivo.

Može se pokušati sa upotrebom drugog fluida na modelu. Treba razjasniti da će se pod pojmom „isti fluid" podrazumevati fluid istih materijalnih karakteristika, dok fluid postaje „drugi" čim mu se neka karakteristika promeni. Zašećerena voda je viskoznija od obične i nizom koncentracija postiže se i niz „različitih fluida". Ili, gustina vazduha na izvesnom mestu na modelu i njemu odgovarajućem objektu, mora biti jednaka ako se radi o „istom fluidu". Ako je pak na modelu svuda srazmerno uvećana (ili smanjena) u odnosu na objekat, onda je na modelu „drugi" fluid.

Jednačina (64–3) ukazuje da se:

$$\text{pri} \qquad \frac{\mu_*}{\rho_*} > 1 \qquad \text{dobija} \qquad u_* \, L_* = \frac{(u\,L)_{\text{ob}}}{(u\,L)_{\text{mod}}} > 1 \, . \tag{64–5}$$

Opravdano je nastojanje da ovaj izraz bude što je moguće veći od jedinice, jer to omogućava smanjenje modela i smanjenje brzine. Međutim, napisani uslov za to moguće je ostvariti ako se modeliše sa što manje viskoznom, a što težom tečnošću. Tako je moguće modelisati vodom procese sa objekta gde teče nafta, mašinsko ulje, ili neka jako viskozna tečnost. Obrnuto nije moguće. Ili, može se ostvariti modelisanjem živom nekih procesa sa vodom. Sve te mogućnosti prilično su ograničene, jer je teško levu stranu prvog izraza jako povećati.

Kod modelisanja vazdušnih strujanja stavljanjem na modelu vazduha pod veći pritisak od odgovarajućeg na objektu, znači i veću gustinu na modelu, pa je moguće postići vrednost za μ_*/ρ_* toliko koliko je $1/\rho_*$, jer se koeficijent viskoznosti vazduha skoro i ne menja sa promenom gustine (tj. $\mu_* \approx 1$). Iako se zadrži ista brzina na modelu i objektu ($u_* \approx 1$), na ovaj način se geometrijska razmera može smanjiti samo onoliko puta koliko se poveća gustina. Takvi modeli su pod izvanredno visokim pritiskom i takve instalacije dozvoljavaju sebi samo vrlo retki eksperimentalni zavodi.

Teškoće oko postizanja Rejnoldsove sličnosti ukazuju na praktičnu važnost ranije napomene da se u razvijenoj turbulenciji kod nekih zadataka može očekivati da je osrednjeno strujanje pod presudnim uticajem fluktuacija. Ovo bi značilo da se u takvim uslovima može dobiti bezdimenzionalna osrednjena vrednost ista na modelu i objektu iako nije postignuta Rejnoldsova sličnost. Primer za to je dat u Pogljavlju 62; koeficijent otpora ploče ne zavisi od Re kada Re pređe 1000, već tada je turbulencija „dovoljno" razvijena – dovoljno da C_F ne zavisi od Re.

Jasno je da prethodno opisano „postizanje sličnosti" treba shvatiti uslovno – postignuto za određenu svrhu zadatka i za određenu oblast Re-brojeva. Kod istog zadatka ne može se postići sličnost za sve brzine i sve fluide. A i tamo gde se postigne za određene vrednosti, ne važi za ceo proces odumiranja vrtloga gde presudan uticaj ima viskoznost – ne mogu se na modelu najmanji vrtlozi toliko usitniti koliko traži razmera, ali se postiže sličnost za pretežan deo prvostvorenih vrtloga koji i utiču na osrednjeno strujanje.

I ovde, kao i kod tumačenja primene svih stavova i izvedenih zakona, merodavna je svrha zadatka; za određenu svrhu zadatka (gde se traži, na primer, osrednjena sila otpora, proticaj i sl.), postignuta je sličnost, ali to ne znači da je postignuta i potpuna sličnost, da bi se, bez ikakve opreznosti sve moglo prenositi sa modela na objekat. Ova napomena, razume se, važi za sve delimične sličnosti.

* * *

Primer za Rejnoldsovu sličnost je prelazak iz laminarnog u turbulentno strujanje, koji nastaje kada uticaji viskoznosti postanu nesposobni da savladaju težnju inercijalnih uticaja da iz prve pobude razviju turbulenciju. Ovo je, dakle, pojava pod uticajima inercijalnim i viskoznosti i sličnost zahteva $Re = idem$ i određeni provodnik ($Ko = idem$) – u svim cevima kružnog preseka, prelazak iz laminarnog u turbulentni tok biće pri istoj vrednosti Re-broja, pri $Re = Re_{\mathrm{cr}}$ („kritična vrednost" Re_{cr} je odlučujuća; pri $Re < Re_{\mathrm{cr}}$ tečenje je laminarno).

Rejnolds je iz niza eksperimenata zaključio da se prelazak iz laminarnog u turbulentno strujanje obavlja pri:

$$\frac{\rho\, D\, u_{\mathrm{sr}}}{\mu} = \mathrm{Const}\,, \tag{64–6}$$

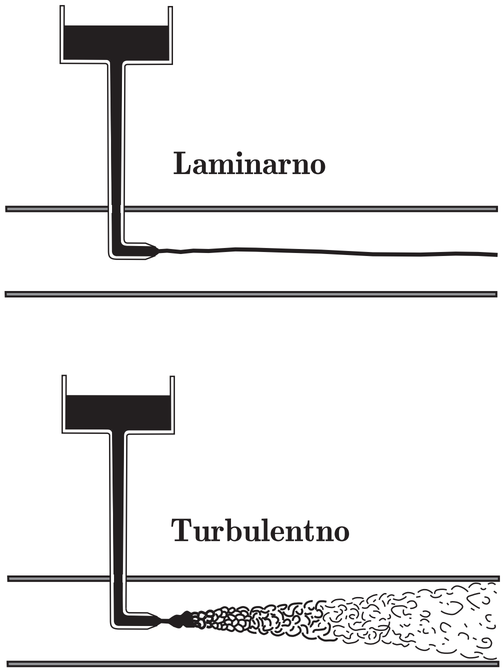
gde je srednja brzina $u_{\mathrm{sr}} = Q/A$, proticaj Q, a površina $A = \pi\, D^2/4$.

Bezdimenzionalna veličina kojom se prethodno izrazilo nazvaće se kasnije „Rejnoldsov broj", a tome broju dalo se mnogo šire značenje (opšte značenje pokazatelja odnosa viskoznih i inercijalnih uticaja, kako se to uviđa iz izlaganja u prethodnim poglavljima 62. i 63) .

Rejnoldsov eksperiment je veoma prost – slika 64–2. U tečnu struju u cevi ubrizgava se tanka „nit" obojene tečnosti, koja ostaje prava linija ako nema mešanja delića – ako je strujanje laminarno. Ako je pak strujanje turbulentno, nit se zatalasa, iskida i usled mešanja boja se razredi po celoj struji. Navedena konstanta u (64–6), prema eksperimentima Rejnoldsa i niza drugih istraživača, kreće se od 2000 do 2500, pa se može napisati:

$$Re_{\mathrm{cr}} = \left(\frac{\rho\, D\, u_{\mathrm{sr}}}{\mu}\right)_{\mathrm{cr}} = 2000 \quad \text{do} \quad 2500\,. \tag{64–7}$$

Karakteristična brzina i dužina su u_{sr} i D, tj. srednja brzina u preseku i prečnik cevi.



Slika 64–3 Rejnoldsov eksperiment.

Navode se i opiti gde se laminarno strujanje održavalo i pri znatno većim vrednostima Re-broja – čak i preko 20000.

Zašto kritična vrednost $Re_{\rm cr}$ nije ista kod svih istraživača, iako bi trebalo da bude konstanta ako su za pojavu merodavni samo inercijalni i uticaji viskoznosti, ako su konturni uslovi svuda isti? Iako je svuda kružna cev, potpuna podudarnost uslova ne može se postići, a začetak turbulencije mogu da pospeše različite okolnosti: potresanje same cevi, nepogodni uslovi za ulazak struje u cev, gde se lako odvaja granična strujnica i začne vrtlog, naglo povećanje proticaja i slično. Ako se uslovi za začinjanje turbulencije teže stvaraju, laminarno strujanje dobija veću mogućnost da se zadrži i za veće vrednosti Re-broja. Može se desiti da se jednostavnim potresanjem cevi, ili unošenjem uzroka za mali poremećaj u struji, strujanje preobrati iz laminarnog u turbulentno, a da se prestankom tog uzroka neće vratiti u laminarno. Nadalje, pri postepenom i veoma blagom povećanju proticanja granica laminarnog tečenja je pri većem Re-broju (pri većem proticaju u istoj cevi i istom fluidu), od onoga gde prestaje turbulentno strujanje pri smanjenju proticaja. Postoji ceo raspon Re-brojeva gde se pod povoljnim uslovima može održati laminarno strujanje, ali nije obezbeđeno, jer se za isti Re-broj turbulentno strujanje održava ako je već stvoreno. Može se, međutim, pouzdano tvrditi da se za vrednosti Re-broja ispod 2000 sigurno ostvaruje laminarno tečenje.

Na razmatranu pojavu prelaska iz laminarnog u turbulentno strujanje ne utiče težina – stoga se ne zahteva istovetnost Fr-broja. Isti eksperiment je rađen sa vertikalno, koso i horizontalno položenom cevi i razlike u rezultatu nema (ako je ubrizgana tečnost iste gustine), a to je znak da težina ne utiče. Može se navesti praktična napomena da neuticanje Fr-broja znači da je postavljanje modela proizvoljno u odnosu na vertikalu.

* * *

Mahova sličnost zahteva:

$$Ma = idem \qquad \text{tj.} \qquad u_* = a_* \,, \tag{64–8}$$

ili istu razmeru za brzinu strujanja u i brzinu zvuka a. Najčešći praktični problemi su sa vazduhom u modelu i na objektu. Ako se pogleda jednačina (43–12) vidi se da se za isti fluid brzina zvuka menja samo sa temperaturom, ali se u domenu uobičajenih temperatura ne može mnogo promeniti. To praktično znači: $a_* = 1$ i shodno (64–8), $u_* = 1$. Dakle, brzine na modelu i objektu su jednake i osnovna teškoća je baš u ostvarenju velikih brzina na modelu. Međutim, nema ograničenja za geometrijsku sličnost i model se može proizvoljno smanjiti ako se, sem Mahove sličnosti, drugo ništa ne zahteva.

Menjanjem fluida ne menja se bitno stvar, jer se iz (43–12) vidi da se brzina zvuka linearno menja sa $\sqrt{k\,R\,\Theta}$, a sva tri činioca proizvoda ne mogu se toliko promeniti da bi se dobila osetna promena za a.

Košijeva sličnost je takođe sličnost za sadejstvo inercijalnih i sila stišljivosti, samo što izražavanje preko modula stišljivosti E ukazuje da se radi o slabo izraženoj stišljivosti. I ovde je isti fluid na modelu i objektu doveo do istih brzina, jer se iz (63–5) i (62–2) dobija:

$$\frac{E_*}{\rho_*} = u_*^2 \,. \tag{64–9}$$

Menjanjem tečnosti ne može se mnogo promeniti vrednost leve strane, tako da su brzine praktično iste na modelu i objektu.

Uz ovu sličnost treba napomenuti da procesi kod kojih stišljivost tečnosti utiče zanemarljivo obično dovode i do potrebe za razmatranjem pojava elastičnosti u granicama (zidovi cevi, zatvarači i sl.), jer ugibanje granica utiče na strujanje, upravo postoji međusoban uticaj granica i fluida. Elastične granice sa postignutom sličnošću za ugibanje su konturni uslov za model strujanja. Međutim, može se reći da je strujanje konturni uslov (opterećenje) za granice (za model elastičnog tela).

$* \quad * \quad *$

Prethodnim tekstom analizirane su najčešće primenjivane delimične sličnosti i vidi se da se sličnost samo za inercijalne uticaje ostvaruje bez ikakvih ograničenja, da se Frudova sličnost ostvaruje bez ikakvih teškoća, da za ostvarenje Mahove sličnosti jedinu teškoću predstavlja postizanje velikih brzina na modelu, a da se Rejnoldsova sličnost teško ostvaruje. Ako se Rejnoldsova sličnost ne postigne, nastoji se da se barem odstupanja između modela i objekta ublaže i zbog toga se nastoji da razlika između Rejnoldsovih brojeva na objektu i modelu bude što manja. To se postiže, ako se kod sličnosti za inercijalne uticaje, ili Frudove, ili Mahove sličnosti, ne naprave isuviše mali modeli, tj. ne uzima se L_* jako veliko.

Sada će se pokazati kakve teškoće mogu nastati kada se želi postići dve ili više delimičnih sličnosti istovremeno. To će se učiniti na dva primera da bi se potvrdila data pretpostavka da već dve parcijalne sličnosti zahtevaju promenu fluida na modelu, a da je nemoguće modelisanje tri i više delimičnih sličnosti.

Zadovoljenje *Frudove* i *Rejnoldsove sličnosti* na jednom modelu traži ispunjavanje uslova (64–1) i (64–3), što daje:

$$L_* = u_*^2 = \left(\frac{\mu_*}{\rho_*}\right)^{2/3}. \qquad (64\text{–}10)$$

Istim fluidom ($\mu_* = \rho_* = 1$) to je moguće samo uz $L_* = u_* = 1$, odnosno na modelu koji je sam objekat, tj. modelisanje nije moguće.

Menjanje fluida potpomaže ispunjavanje navedenog uslova (64–10) i to je moguće samo u izuzetnim slučajevima i ne može dobiti veliko smanjenje. Uostalom, već je zadovoljenje same Rejnoldsove sličnosti povezano sa teškoćama, a one su sada još veće. Ranije uzeti primeri dovode do sledećeg: modelisanje jako viskozne nafte vodom (μ_*/ρ_* do 30) dovodi do $L_* \approx 10$, a modelisanje hidrauličkog procesa živom, do $L_* \approx 4$.

Zadovoljenje *Frudove, Rejnoldsove* i *Košijeve sličnosti* znači ispunjavanje uslova (64–10) i još uslov Košijeve sličnosti (64–9), tj.

$$L_* = u_*^2 = \left(\frac{\mu_*}{\rho_*}\right)^{2/3} = \frac{E_*}{\rho_*}\,, \tag{64–11}$$

a to neminovno dovodi do razmera ravnih jedinici, jer bi se sve moglo zadovoljiti samo koincidencijom, tj. izuzetnim i neverovatnim slučajem da se tri materijalne karkateristike fluida sa modela i objekta baš tako odnose da se dobije (64–11), sa $L_* \neq 1$. Stoga se može tvrditi da je prethodno moguće zadovoljiti samo pri:

$$\rho_* = \mu_* = E_* = u_* = L_* = 1\,.$$

Dalje, ne treba praviti kombinacije za zadovoljenje uslova za više delimičnih sličnosti jer se može zaključiti da su mogućnosti za postizanje sličnosti, pod uslovom da model ne bude geometrijski jednak sa objektom, sledeće:

I. *Jednu delimičnu sličnost* (sličnost za inercijalne i još jedne uticaje) moguće je postići istim fluidom na modelu i objektu.

II. *Dve delimične sličnosti* (sličnost za inercijalne i još dve kategorije uticaja) nije moguće postići istim fluidom, nego se na modelu mora uzeti drugi fluid.

III. *Za tri delimične sličnosti* jedino je objekat sam sebi model.

Uz ovo treba dodati da su ovo teorijske mogućnosti koje je kod nekih sličnosti lako ostvariti, ali su kod nekih praktično neprihvatljive – o tome se stekao uvid u prethodnim razmatranjima.

Istovetnost konturnih uslova na modelu i objektu može takođe da se ostvaruje uz teškoće, pa čak i da se ne mogu postići. Primer za nepostizanje sličnosti može da bude hrapavost čvrstih granica koja se na modelu ne može napraviti uz tačno geometrijsko smanjivanje svih izbočina i udubljenja. Teškoće nastaju ako su konturni uslovi isuviše složeni pa ih je veoma teško u potpunosti modelirati – i tu dolazi do izražaja nastojanje da se modeliše ono što je merodavno.

*   *   *

Razumljivo je nastojanje da se dobije što veće smanjenje modela u odnosu na veliki objekat koji se modeliše, pa su umesna prethodna izlaganja kojima se pokušala objasniti ostvarljivost toga nastojanja. Prethodno se, međutim, može tumačiti i kao razmatranje slobode izbora razmera za dužine i brzine, što se ne mora odnositi samo na model pojedinačnog objekta, nego i na model sa svrhom dobijanja saznanja primenljivih na nizu zadataka, na svim međusobno sličnim objektima. Nastojanje za širi izbor razmera znači širu oblast primene modelom istražene opšte zakonitosti. Na primer, ako se istražuje strujanje u krivini cevi, razumljiva je težnja da se dobije zakonitost primenljiva od cevi prečnika jednog santimetra do tunela sa prečnikom od nekoliko metara, sa velikim rasponom brzina i za različite fluide, upravo nastoji se da se to postigne ako ne sa jednim, onda sa što je moguće manjim brojem modela.

Međutim, izložene teškoće oko postizanja sličnosti navode na zaključak da za modelisanje sa svrhom dobijanja opšte zakonitosti primenjive na neograničeni broj objekata ima praktične mogućnosti tamo gde je dovoljna delimična sličnost i gde konturni uslovi nisu jako složeni, a ovo znači da funkcija (62–11) nema mnogo članova. Ovim je rečeno ono što je već navedeno u Poglavlju 62, u tumačenju navedene funkcije – tamo je rečeno da složeni konturni uslovi (ili isuviše dugačak „opis zadatka”) dovodi do nerazumno ogromnog obima eksperimentalnog istraživanja.

Iz tih razloga od eksperimentalnog proučavanja sa svrhom dobijanja opštih rešenja mogu se očekivati rešenja za pojave određene sa malo veličina – odatle u „praktičnoj mehanici fluida” (hidraulici, primenjenoj aeromehanici) ima niz rešenja za prostije slučajeve strujanja: strujanje u cevima i kanalima, isticanje iz suda, strujanje oko tela prostog geometrijskog oblika itd. Zadatak sa složenim konturnim uslovima mora se rešavati individualno – modelom napravljenim za određeni objekat, što je i opravdano. Ranije je objašnjeno da složenost uslova obično znači i posebnost zadatka, pa opštije rešenje nema ni smisla ako nema širu primenu. Međutim, i sa modelom jednog objekta ima teškoća, pa se i tu podešava sličnost prema merodavnim uslovima. Odstupanja između modela i objekta zbog nepostignute sličnosti, ako treba, procenjuju se, pa se rezultati popravljaju. Tu procenu omogućavaju saznanja iz upoređenja rezultata dobijenih na već sagrađenim objektima i njihovim modelima. Može se dodati i nagovešteno pri kraju prethodnog poglavlja

(63) – praksa je nekada prisiljena da se zadovoljava i modelima bez potpune geometrijske sličnosti.

*   *   *

Na kraju, treba reći da se rezultati istraživanja na već sagrađenim objektima i njihovim modelima prikazuju „matematskim modelom" koji je „model" i modela strujanja i svih njemu sličnih objekata. To je, na primer, grafikon koji prikazuje međusobne opažene veze bezdimenzionalnih veličina ili obrazac („formula"). Prostiji „matematski model" je posledica pretpostavljenog prostijeg „fizičkog modela", pa se sa nastojanjem za uopštavanjem može ići dokle je to opravdano, a uz naglašavanje granice važenja „modela". Analiza sličnosti mora da služi i za analizu i za kritički pristup ogromnom broju empirijskih obrazaca („formula") i grafikona koji se obilato nude za primenu. Iz grafikona ili formule treba da bude vidljivo kakva je delimična sličnost primenjena, kakvi su konturni uslovi zastupljeni i koja je oblast pouzdanog važenja – ovo, međutim, nije uočljivo kod niza „preporučivanih" formula.

*   *   *

Ako se mehanički proces ne može modelisati bez sličnosti za toplotne uticaje – uslove sličnosti je još teže zadovoljiti, teškoće se povećavaju. Izlaz se traži opet u delimičnoj sličnosti, u prilagođavanju sličnosti svrsi zadatka, u očekivanju rešenja za uprošćene konturne uslove, u ograničenju zahteva za oblast važenja rešenja itd. Rasuđivanja su, dakle, načelno ista kao i izložena za modelisanje procesa iz mehanike. Mogu se navesti, samo radi kratkog uvida, neke napomene oko postizanja istovetnosti brojeva koji unose toplotne uticaje.

Sličnost za istovetnost Pe-broja datog sa (62–23), dovodi do istih teškoća kao i Rejnoldsova sličnost, jer za iste materijalne karakteristike zahteva se $u_* L_* = 1$, a promena materijala ne otvara šire mogućnosti izbora razmera. Istovetnost Ec-broja datog sa (62–22), zahteva razmeru za temperaturu $\Theta_* = u_*^2/C_*$, što dozvoljava da se izabere pogodna razmera za Θ, ako je merodavna temperaturna razlika, ali stvara teškoće ako je merodavna apsolutna temperatura, jer se ova ne može smanjiti za nekoliko puta, koliko bi to zahtevao povoljan izbor za u_*.

Indeks pojmova