ZITET U BEOGADU
VINSKI FAKULTET

Ponašanje betona u oblasti granične ravnoteže

disertacija MILORADA IVKOVIĆA
odbranjena 11. decembra 1962. godine
na Građevinskom fakultetu,

pred Komisijom koju su sačinjavali:
1. ing Đorđe Lazarević, red. prof. Građ. fakulteta
2. dr Milan Đurić red. prof. Građ. fakulteta
3. dr Dragoš Radenković vanr. prof. Građ. fakulteta

BEOGRAD 1965.

UNIVERZITET U BEOGADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ponašanje betona u oblasti granične ravnoteže

disertacija MILORADA IVKOVIĆA
odbranjena 11. decembra 1962. godine
na Građevinskom fakultetu,

pred Komisijom koju su sačinjavali:

1. ing Đorđe Lazarević, red. prof. Grad. fakulteta
2. dr Milan Đurić red. prof. Grad. fakulteta
3. dr Dragoš Radenković vanr. prof. Grad. fakulteta

BEOGRAD 1965.

S A D R Ž A J

1. Uvod

1. 1. NEKE OPŠTE NAPOMENE O REOLOGIJI BETONA

1. 1. 1. OSNOVNA PITANJA MIKRO I MIKROREOLOGIJE BETONA

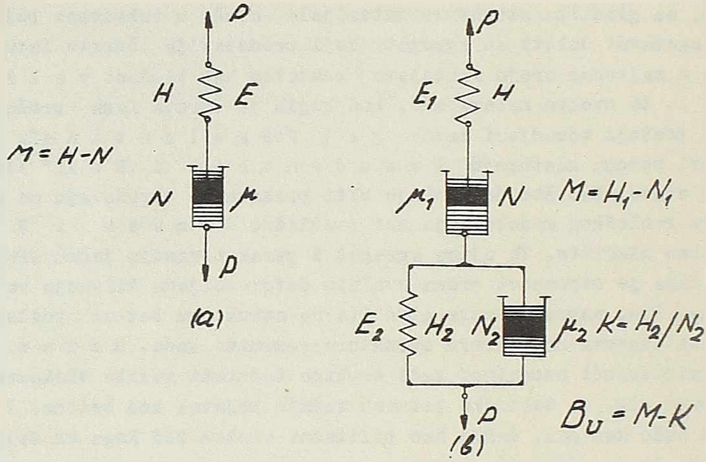
Beton, sa gledišta strukture materijala, spada u takozvane polifazne sisteme. Njegovi sastavni delovi su agregat, koji predstavlja čvrstu fazu i cementna kaša koja se u najvećem broju slučajeva posmatra kao tečnost v e l i k e v i s k o z n o s t i. Za ovakve materijale, kod kojih je čvrsta faza prožeta tečnošću, u reologiji postoji odredjeni naziv g e l /od g e l a n t i n e/. Takvo gledište o strukturi betona zastupaju F r e u d e n t h a l i R o ll[x] /11-14/. Posledica ovakvog stava, kao što će docnije biti prikazano, odražavaju se na kompoziciju i strukturu reološkog modela koji oni predlažu. H a n s e n i N i e l s e n zastupaju suprotno gledište. Po njima agregat i pesak obrazuju jednu zrnastu nekoherentnu masu, čija je otpornost prema stalnim deformacijama klizanja rezultat trenja izmedju zrna. Dva, napred izneta gledišta na strukturu betona posledica su u stvari različitih stavova na prirodu strukture cementne kaše. R e i n e r i neki drugi autori, pripisujući cementnoj kaši osobine tečnosti velike viskoznosti, pokušali su da objasne niz, za tehničku primenu važnih pojava, kod betona. P o w er posmatra cementnu kašu kao gel, dakle kao polifazni sistem kod koga su delići cementnog tela - čvrsta faza- odvojeni slojevima apsorbovane vode - tečna faza. G r u demo /11-15/, T a y l o r /11-15/ i niz drugih autora smatra da cementnu kašu treba posmatrati kao čvrstu fazu mikrokristalne strukture, dok se voda javlja delimično kao hemijski vezana, a delimično apsorbovana po površinama kristalne faze ili kao ispuna pora.

1. 1. 2. REOLOŠKI MODEL

Pitanja mikro i makro strukture betona izneta u kratkim crtama imaju za cilj, prvo, da ukažu na savremena shvatanja o strukturi betona i, drugo, da lakše omoguće krajnji cilj reološke analize - formulisanje tačnih veza izmedju napona i deformacija.

Veliko bogatstvo eksperimentalnih podataka i iskustva pokazuje da beton u napregnutom stanju ima tri osnovna tipa deformacija: e l a s t i č n e, v i s k o z n o t e č e n j e, kao kod idealnog fluida i p l a s t i č n e deformacije kao posledica distorzije. Kada će koji tip deformacije nastupiti ne zavisi samo od veličine primenjenog opterećenja, već i od brzine nanošenja opterećenja odnosno od vremenskog perioda trajanja opterećenja. U novije vreme ima čitav niz pokušaja stvaranja takozvanih reoloških modela kojima je cilj formulisanje veza izmedju napona i deformacija za sve moguće slučajeve naponskog života betona. Većina predlog u tom pravcu imaju zajedničko to, da polaze od osnovnih idealnih materijala, odnosno od njihovih mehaničkih analogona, i vezivanjem ovih u niz ili u p a r a l e l u izgradjuju mehanički - makroreološki model betona.

U nizu pokušaja najpre se pošlo od Maxwel-ovog materijala, čija je strukturna formula M = H-N; dakle Hooke-ov materijal i Newton-ov viskozni fluid vezani u niz. Shematski prikaz Maxwel-ovog modela dat je na sl. 1.1a.



Sl. 1.1

Kao što se vidi, M-materijal ima osobine fluida. On je u prvom redu korišćen da opiše takozvano naponsko stinjavanje / creep/ betona u procesu opterećivanja. Viskozna deformacija postignuta u odredjenom vremenskom periodu ostaje kao t r a j n a . Ovaj model, dakle, može dobro da posluži za opisivanje stanja deformacija u konstrukcijama kod kojih se značajni naponi pojavljuju od stalnog tereta postignutog u relativno kratkom vremenskom periodu. Proces rasterećenja, tj. vraćanje samo elastične deformacije koji ovaj model prikazuje, nije u stanju da kompleksno obuhvati rezidijalne deformacije betona koje bi bile u saglasnosti sa ogledima.

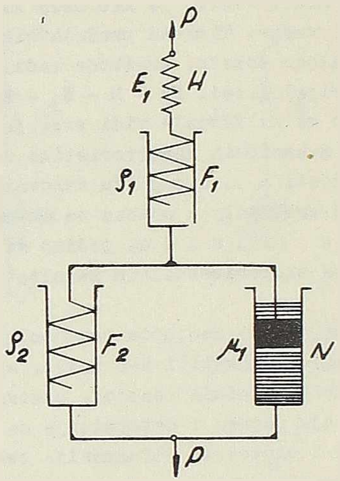
Kelvin- Voigt-ov materijal, čija je strukturna formula K= H/N ; dakle , Hook-ov i Newton-ov materijal vezani u paralelu, ima osobinu č v r s t o - v i s k o z n o g materijala. U procesu opterećenja za odredjeni vremenski interval postiže se pored elastične i viskozna deformacija. Rasterećenjem i elastična i viskozna deformacija se potpuno gube. Sam za sebe ovaj model takodje ne bi bio u stanju da potpuno opiše naponsko stinjavanje betona u funkciji vremena, jer kao što je poznato, rezidijalne deformacije betona su delom povratne a delom trajne.

Znatno veće mogućnosti za tačnije opisivanje ponašanja betona pod opterećenjem i rasterećenjem u funkciji vremena daje B u r g e r s - ov materijal. On se sastoji od M i K -materijala vezanih medjusobno u niz ,tako da njegova reološka formula glasi Bu= M-K=/H_1-N_1/-/H_2/N_2/. Na slici 1.1b prikazan je mehanički analogan za Bu-materijal.Gledano u celini Bu-materijal zadržava osobine fluida.Povezivanje M u K -materijal u niz pružaju se veće mogućnosti za tačnije opisivanje stanja deformacija, kako u procesu opterećenja tako i u procesu rasterećenja. M- materijal omogućava u procesu rasterećenja ocenjivanje trajne a K-materijal povratne deformacije betona.

Ovako konstruisan model služio je kao baza za čitav niz reoloških modela betona, predloženih u novije vreme. Tipičan predstavnik ove grupe predloga je Freudenthal-Roll-ov model. U daljem tekstu, kratkoće radi, obeležavaćemo ga sa Fr. Reološka formula za Fr-materijal glasi: Fr = M - K_1 - K_2 - K_3 = /H_1-N_1/-/H_2/N_2/ - - /H_3/N_3/ - /H_4/N_4/. Kao što se iz formule vidi ovde je M-materijal vezan u n i z sa tri K-modela, različitih mehaničkih karakteristika za module elastičnosti opruge E i koeficijenata viskoznosti μ . U pogledu osnovnih karakteristika kod Fr-materijala nije se ništa bitno promenulo u odnosu na Bu-materijal. On i dalje zadržava osobine v i s k o z n o g f l u i d a. jedino se povećanjem broja konstanti omogućava bolja saglasnost sa eksperimentalnim rezultatima, naročito u procesu rasterećenja.

Svi napred izloženi modeli medjutim potpuno negiraju postojanje plastičnih deformacija.Ovo bi se moglo prihvatiti kao takvo, ako se teži da opiše ponašanje betona u oblasti takozvanih " radnih" napona, odnosno ako se hoće da pridje zadatku formulisanja veza izmedju napona i deformacija sa ograničenim ciljem. Uzimanjem u obzir samo elastičnih i viskoznih deformacija ovakvi modeli mogu uglavnom da posluže za opisivanje naponskog stinjavanja betona / creep/.Zanemarivanje plastičnih deformacija u oblasti " radnih " napona, dobija medjutim značaj i onda ako se teži formulisanju analitički što prostijih veza. O vezama izmedju napona i deformacija u oblasti loma i samom lomu betona ovi modeli nisu u stanju da pruže bilo kakvu sliku u prvom redu zbog potpunog negiranja postojanja plastičnih deformacija.

Kao napore za otklanjanje pomenutih nedostataka, treba ceniti i pokušaj Torroja-Paez-a i Nielsen-a da konstruišu takve reološke modele koji bi pored, elastičnih i viskoznih deformacija, uvele u veze izmedju napona i deformacija i plastične deformacije. Za tako što bilo je potrebno uvesti nekakav mehanički analogan koji bi po svom mehanizmu pokazivao kroz proces opterećenja i docnije u fazi loma trajne nepovratne deformacije koje su posledica, medjumolekularnog klizanja. Pokazalo se da takve uslove dosta dobro ispunjava takozvani " F R I C T I O N A L" element koji se sastoji od dva elementa vezanih medjusobno silama trenja. Na sk. 1. prikazana je shema TP /Torroja-Paez/-materijala. Strukturna formula TP materijala glasi: TP = /H - F_1/ - /F_2/N /. Kao što se sa skice vidi takozvani " frictional " element F sastoji se od opruge koja se kreće u cilindru tarući se o njegove zidove U odnosu na napred pomenute elemente iz kojih su sastavljeni reološki modeli, F element je u stanju da prikaže plastične deformacije još od samog početka napregnutog stanja. Sami za sebe H i F_1 element mogu sasvim uspešno da opišu veze izmedju napona i deformacije pri kratkotrajnom procesu opterećenja. Šta više, kada primenjena sila savlada trenje izmedju opruge i cilindra, deformacija raste bez poveća nja sile. Ovo stanje deformacije odgovara lomu, a primenjena sila graničnom opterećenju. Elementi F_2 i N vezani u paralelu vrlo dobro opisuju pojave koje se javljaju kada aplicirano opterećenje traje duže vremena. Za razliku od K-modela, koji se pri rasterećenju ponaša potpuno elastično, ubacivanje elementa F_2 / opruge sa trenjem/, umesto potpuno slobodne opruge, može se potpuno verno prikazati, iskustvom i eksperimentima opažen, reverzibilni deo viskozne deformacije neelastičnog karaktera.



Sl. 1.2

Po suštini isti predlog za reološki model betona predložio je na poslednjem sastanku R I L E M - a u / 11-15 / Nielsen.

Iz ovog kratkog pregleda vidi se da je najuspešnija mehanička analogija sa stvarnim ponašanjem betona kroz čitavo njegovo deformaciono područje TP- model. Njime se najpotpunije, kako u procesu opterećenja, tako i u procesu rasterećenja, na najbolji način prikazuju sva tri osnovna tipa deformacija. Sem toga, u fazi graničnog stanja model uspešno prikazuje jednu od bitnih osobina ponašanja materijala - deformacija raste bez priraštaja opterećenja.

1. 2. PONAŠANJE BETONA U OBLASTI GRANIČNOG STANJA

1. 2. 1. FIZIČKI USLOVI

Pod pojmom graničnog stanja- loma betona podrazumeva se krajnje faza ove pojave.Manje više sve postojeće teorije oslanjaju se na takozvani kriterijum loma. Kada se ovakav kriterijum ostvari, materijal, ili posmatrano telo, gubi predvidjenu formu i nije dalje sposobno da vrši onu funkciju koja mu je namenjena,dakle propada.

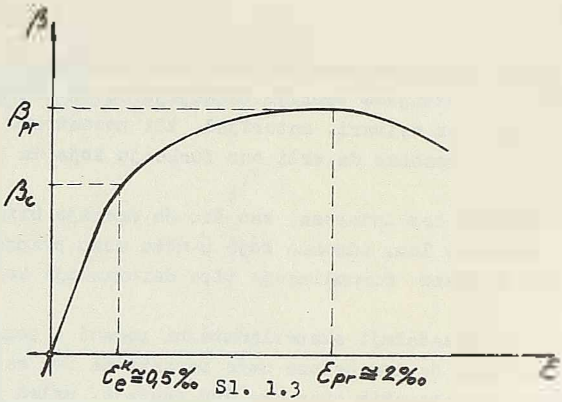
Nije medjutim bez interesa, kao što će docnije biti prikazano, proučavanje pojava koje predhode lom, odnosno koje u neku ruku pripremaju lom.Naročito je važno proučavanje i jasno formulisanje tipa deformacija koje se javljaju u fazi loma.

Iskustvo i dosadašnji eksperimentalni podaci o ponašanju betona u oblasti loma, jasno ukazuju da lom betona može nastati na dva načina. Pod odredjenim uslovima i odredjenim naponskim stanjima lom nastaje, usled prekoračenja čvrstoće pri zatezanju, tada se kaže da se lom dešava usled " kidanja" /cepanja/; ili lom nastaje usled klizanja po ravnima u kojima je smičući napon dostigao odredjenu vrednost; kada se kaže da je lom nastao usled smicanja.

Dugo vremena smatralo se da za beton važi takozvani kriterijum " suvog " loma, koji je predložio i analitički formulisao za materijale sa različitom otpornošću na pritisak i zatezanje O. M o h r /11-1; 11-2 /. Tek docnije ozbiljnije, proučavanje čvrstoće na zatezanje i uticaja napona zatezanja na lom, pokazali su da lom betona u uslovima složenog naponskog stanja može nastati i od prekoračenja čvrstoće na zatezanje.

U početnom stadijumu na ovoj problematici,kod vecine ogleda sa složenim naponskim stanjima, mereno je granično opterećenje koje uzorak dovodi u lom. Iz tih podataka i makroskopsog praćenja figure loma isvodili su se zaključci o kriterijumu loma. Mnogo više svetla u pitanje graničnog stanja unelo je praćenje deformacija u ovom stadijumu. Još su C o q u o t / 11-9 / i B r i c e /11-10/ 1934. i 1935. konstatovali u uslovima složenog naprezanja pred lomom epruvete jake plastične deformacije. One su naročito jako bile izražene u uslovima višeosnog pritiska. L' H e r m i t e / 11-16 /, H. C o w a n / 11-17/, S a l i g e r /1-13/,A M e h m e l / 11-18/, i čitav niz drugih autora konstatuju pri svojim ogledima istu činjenicu. Još više od obične konstatacije, treba zapaziti da se izražena plastična deformacija javlja pri dostizanju graničnog opterećenja i da se razvija bez njegovog znatnijeg priraštaja do potpunog propadanja materijala.

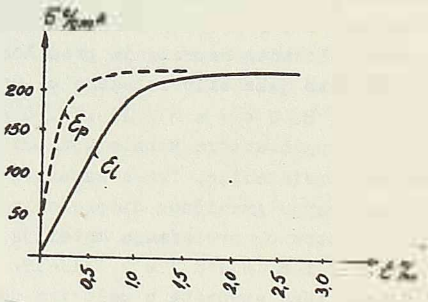
H. C o w a n /11-17 / i H. H a d l e y /11-19/ su u svojim radovima, proučavajući deformacije prizmatične epruvete u uslovima jednoosnog pritiska i kratkotrajnog opterećenja / sl.1.3 /, zabeležili plastičnu deformaciju koja je naročito izražena kada se predje granica β_k . U dijagramu na sl.1.3 prikazan je opšti tok jednoosne deformacije $\sigma = f(\varepsilon)$; u njemu je deformacija prikazana u pogodno izabranoj razmeri. Odnos kvazi-elastične deformacije ε_{el} prema plastičnoj ε_{pl} ostao je medjutim pravi. Granica β_k , iza koje se pojavljuje izražena plastična deformacija, označava početak pojave mikroporemećaja kontinuiteta, i makroskopski posmatrano ukazuje na plastičnu deformaciju.



Sl. 1.3

B r a n d t z a e g / 11-20/ je isto tako vršio iscrpne oglede u tom pravcu. Pored deformacije u pravcu sile merene su i deformacije u poprečnom pravcu. Još tada je opaženo da se, kratko vreme pre dostizanja maksimalnog opterećenja, P o i s o n o v broj smanjuje ispod 2. Logična posledica ovog podatka je da se u domenu izražene plastične deformacije povećava z a p r e m i n a t e l a. Na sl.1.4 prikazane su naporedo podužna i poprečna deformacija u uslovima jednoosnog stanja napona za beton srednjeg kvaliteta. I ovde se kao i kod H. C o w a n - a i H. H a d l e y - a / sl.1.3/ jasno uočava u oblasti graničnih opterečenja izraže a plastična deformacija.

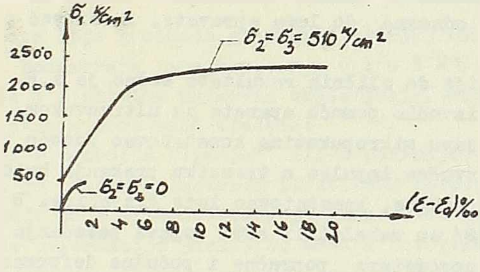
U uslovima složenih naprezanja, kako pri homogenim tako i pri nehomogenim naponskim stanjima, opaža se izražena plastična deformacija u znatno većem obimu.



Sl.1.4

Rošova ispitivanja na prizmama od cementnog maltera prikazuju da deformacije u uslovima troosne kompresije dostižu skoro desetostruku veličinu deformacija, merene u pravcu većeg glavnog napona, od one koja se ostvaruje u uslovima jednoosnog stanja. Na sl.1.5 prikazana je zavisnost $[\sigma_1 > \varepsilon - \varepsilon_0]$, kada je $\sigma_2 = \sigma_3$ =510 kg/cm^2, a za jednoosna čvrstoću od β_{pr} = 340 kg/cm^2, čiji je dijagram takodje dat na slici. Iz dijagrama se jasno vidi da se maksimalno opterećenje dostiže relativno brzo, već kada deformacija dostigne 5% . Dalje, materijal " t e č e " bez praktičnog prirasta opterećenja do loma. ε_0 je početna deformacija ostvarena pod hidrostatičkim opterećenjem $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ = 510 kg/cm^2.

Do istih zaključaka o ponašanju materijala u oblasti graničnih opterećenja dolazi se kada se analiziraju ogledi C a q u o t - B r i c e i B r a n d t za e g - a, vršeni na uzorcima cilindričnog oblika sa spiralnom armaturom. Podužna deformacija i kod ovih ogleda dostiže mnogostruku veličinu deformacije ostvarene pri jednoosnom stanju. Za razliku od Rošovih ogleda ovde $\sigma_2 = \sigma_3$ nije dato unapred kao spoljno opterećenje, već se odredjuje iz deformacija spiralne armature. Pri dostizanju graničnog opterećenja, u uslovima kada se javlja plastično t e č e n j e materijala, poprečna deformacija dostiže veličinu skoro jednaku podužnim deformacijama. Sem ovoga, jasno se uočavaju na spoljnim stranama ugleda klizne ravni odnosno ravni loma, što znači da se lom u ovakvom stanju napona dešava usled smicanja.



Sl. 1.5

U ogledima S c h r e y e r - a /11-21/ na kockama, i čitavom nizu ogleda na nearmiranim i armiranim gredama opterećenim čistim savijanjem slične pojave se zapažaju i u uslovima loma. S a l i g e r /11-22/ je zabeležio u trenutku dostizanja čvrstoće prizme kod armiranih greda opterećenih na savijanje deformaciju i od 10% , sto predstavlja više nego petostruku vrednost deformacije dobijene pri aksijalnom naprezanju prizmatičnog ugleda.

S e h r e y e r meri ispitivajući deformacije kocki i to podužnu deformaciju do 6,3% što opet pokazuje, iako naponsko stanje kocke u oblasti loma u celini ostaje nepoznato, izraženu plastičnu deformaciju.

Nije svakako bez realne podloge i činjenica, da su Ruski zvanični propisi usvojili raspored napona pritiska kod armiranih elemenata opterećenih momentom savijanja, kao kod idealnog plastičnog materijala, i ovakav računski model služi odlično kod granične teorije ploča i ljuski, dakle u uslovima ravnog i prostornog stanja napona.

Makroskopski gledano, svi napred izneti podaci o deformacijama u oblasti graničnih opterećenja, ne ulazeći u suštinu samih procesa nastajanja deformacija i njihova objašnjenja, ukazuju na izraženu plastičnu deformaciju, za razliku od plastičnih deformacija koje se defektno javljaju još od početka napregnutog stanja. Moglo bi se reči da materijal u oblasti graničnog opterećenja počinje da t e č e, tj. plastična deformacija raste praktično bez priraštaja opterećenja. Pojava izražene plastične deformacije praćena je, kao što smo videli, i padom Poisson-ovog broja ispod 2 / $\nu < 0,5$ /. Ovo opet znači da materijal u oblasti " tečenja" povećava zapreminu.

Novija ispitivanja u ovoj oblasti, kao i primena novih metoda ispitivanja, bacila su još više svetla na ponašanje betona u oblasti graničnih opterećenja. Sem toga, ona su potvrdila još od M ö r s c h - a i C a q u o t - B r i c e - a zapaženu pojavu loma usled " kidanja" / cepanja/, i znatno doprinela uopšte uzev formiranju pravilnijeg stava u pogledu kriterijuma loma.

Proučavajući lom prizmatičnog uzorka pod podeljenim jednoosnim opterećenjem 1950. O. J a B e r g /11-24 / je opazio pod mikroskopom i pomoću mikrofotografije, pojavu mikropukotina pod dejstvom sile β_t koja je manja od β_{pr}. Dostizanje granice β_t karakterisano je pojavom Poisson-ovog koeficijenta ν = 0. 5. Kada naponi porastu preko β_t podužna deformacija naglo raste, dok je ν <0,5, sve do dostizanja β_{pr} odnosno do loma epruvete. Znači već od β_t ,zapremina tela se povećava.

Nešto docnije do sličnih rezultata došao je i R. J o n e s 1952./1-26/ koji je ispitivanje izvodio pomoću aparata sa ultrazvukom. 1955. R. L' H e r m i t e /11-27 / je pojavu mikropukotina konstatovao pomoću jednog akustičnog aparata, koji je beležio zvučne impulse u trenutku prskanja betona.H. R ü s c h /1959/ je, primenjujući obe metode, konstatovao iste činjenice. B l a k e y i F. B e r e s f o r d /11-28/ su zabeležili iste pojave povećanja zapremine u oblasti loma mereći, pomoću tenzometara poprečne i podužne deformacije.

Analiza mikropojava konstatovana ovako široko u novije vreme doprinosi racionalnijem objašnjenju procesa nastajanja izražene plastične deformacije u oblasti graničnog stanja. Plastična deformacija metala, kao što je poznato, proističe iz pojave mikroporemećaja kontinuiteta, koji je opet posledica napona smicanja Osobina mikropukotina kod metala je njihova sposobnost da se ponovo zatvore.Dimenzije mikropukotina su reda mikrona i delova mikrona. Plastične deformacije betona u oblasti graničnog stanja takodje proističu iz pojave mikroporemećaja kontinuiteta; medjutim, one nemaju sposobnost da se ponovo zatvore.Njihova pojava praćena je, kao što smo napred rekli, Pionsson-ovim koeficijentom ν =0,50 - dakle povećanjem zapremine, što nije slučaj kod metala. U literaturi vrlo često plastične deformacije metala označavaju se kao plastične deformacije " prve vrste" dok se plastične deformacije betona označavaju kao plastične deformacije " druge vrste" Mišljenje da plastične deformacije betona u oblasti graničnog stanja treba razlikovati od plastičnih deformacija metala podražavaju L' Hermite , H. Cowar,A. Mehmel i B e r g , ali samo za stanja koja karakterišu lom usled " kidanja"/cepanja/. za stanja takozvanog " krtog" loma. Plastične deformacije " druge vrste ".

dakle, javljaju se u svim onim slučajevima kada postoji mogućnost da naponi zateza nja dostignu svoju graničnu vrednost. Medjutim, za stanje napona pritiska, kada se naponi zatezanja ne javljaju, menja se u znatnoj meri proces obrazovanja plastičnih deformacija. Onda, kao što znamo, granično stanje nastaje kada smičući naponi dostignu svoju graničnu vrednost, a plastične deformacije su posledica molekularnih klizanja. Za ova stanja, odnosno u ovom području ne može da bude govora o plas tičnim deformacijama " druge vrste". O. J a B e r g , za područje otpornosti kada su glavni naponi pritisci, u svojoj vrlo produbljenoj studiji o fizičkim pojavama otpornosti betona / 11-25/ kaže:
U uslovima kada su u pitanju pritisci, moguće je dostići uslove " p l a s t i č - n o s t i " / plastično stanje " prve vrste" /.

Ogledi, dakle, nedvosmisleno pokazuju da o jedinstvenom kriterijumu loma za beton ne može biti govora. Moramo se pomiriti sa činjenicom da se područje loma betona mora podeliti u dva dela: na područje usled " kidanja" i na područje usled " smicanja". Pitanje granice koja deli ova dva područja proučavao je L'H e r m i - t e / 11-29/ i to uglavnom samo kvalitativno. G.A. G e n i e v /11-30/ je, pak , dao analitički izraz za granicu koja deli ova dva područja čvrstoće, a koja je u prvoj aproksimaciji funkcija osnovnih otpornosti na pritisak i zatezanje pri jednoosnom homogenom stanju napona. Ovo pitanje biće tretirano mnogo šire u sledećem odeljku.

Ako se pojave koje prethode graničnom stanju, odnosno pojave koje u neku ruku pripremaju lom, posmatraju m a k r o r e o l o š k i, tj. ako se ne ulazi u suštinu samih procesa i u detalje njihovih objašnjenja, onda se o ponašanju betona u oblasti graničnih stanja može reći sledeće:

- Bilo da se radi o području kidanja" ili o području " smicanja", pojava graničnog stanja, je praćena izraženom plastičnom deformacijom, koja je naročito naglašena kada je u pitanju područje loma usled smicanja.
- Da se plastična deformacija praktično odvija bez priraštaja opterećenja i
- da je granično stanje, od prve pojave izražene plastične deformacije, praćeno povećanjem zapremine.

1. 2. 2. DOSADASNJI PREDLOZI ZA USLOV LOMA — USLOV PLASTIČNOSTI BETONA

O. M o h r /11-1/ je još 1900. formulisao uslov loma za materijale sa nejednakom otpornošću na pritisak i zatezanje. U koordinatnom sistemu τ_n, σ_n, granična kriva je prava koja sa τ — osovinom zaklapa ugao φ i tangira naponske krugove jednoosne čvrstoće na pritisak i zatezanje. Sam. O. Mohr je ograničio do - men važnosti ovako formulisanog uslova loma. Za sva naponska stanja, kod kojih gla vni naponi ne premašaju znatno vrednost čvrstoće pri jednoosnom pritisku i zatezanju, može se ovako konstruisana prava smatrati kao granična kriva. Čini se da Mohr i nije imao nameru da da opšti uslov loma za beton. Njegov cilj je bio da odredi medjusobni odnos osnovnih mehaničkih karakteristika betona, u prvom redu izmedju takozvane čvrstoće na smicanje i čvrstoće na pritisak i zatezanje. Kada se Mohr-ov uslov napiše u obliku

$$\tau_n = \left(\frac{[illegible]}{\beta_{pr} - \beta_z} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\beta_{pr}} \ [illegible] \quad \text{ili} \quad [illegible] \quad \text{gde je} \quad [illegible] \qquad /1.1/$$

i ako je β_{pr} jednoosna čvrstoća na pritisak a β_z jednoosna čvrstoća na zatezanje, onda se za $\sigma_n = 0$ dobija $[illegible] = \frac{1}{2}\sqrt{\mu}\,\sigma_p$. Ugao φ koji granična kriva gradi sa σ_n – osovinom dobija se iz jednačine /1.1/

$$[illegible]\ \mathrm{tg}\ [illegible] \quad \text{ili} \quad \varphi = \mathrm{arc}\ [illegible] \qquad /1.2/$$

Ovaj ugao trebalo bi da u neku ruku izražava ugao unutrašnjeg trenja materijala Kao što vidimo Mohr-ov uslov loma obuhvata sasvim mali domen u području čvrstoće betona i znatno podcenjuje njegovu otpornost za smicanje.

Prve oglede za složena naponska stanja vršio je na betonskim prizmama francuski inžinjer C o n s i d e r e / 11-12 / još 1903.g. Ovi ogledi imali su u prvom planu cilj da prouče povećanu nosivost spiralama utegnut armirano betonski stub. Na bazama prizmi pritisak je izvodjen pomoću hidrauličnih presa, dok je na bočnim stranama opterećenje nanošeno pomoću tečnosti pod pritiskom. Ogledi su vršeni na betonima relativno niske jednoosne čvrstoće. Ona se je kretala od 52kg/ /cm^2 do 170 kg/cm^2, a bočni pritisci od 0 do 150 kg/cm^2. Na osnovu rezultata ovih ogleda Considere je predložio analitički uslov loma u obliku:

$$F = \sigma_1 + a\sigma_3 + b\beta_{pr} = 0 \qquad /1.3/$$

gde su σ_1 i σ_3 algebarski najveći i najmanji napon. Za koeficijente a i b Considere uzima 4,8 i 1,5. U dijagramu napona $\sigma_1 - \sigma_3$ ovo je prava koja za $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ tj. za jednoosno stanje napona daje $\sigma_1 = 1{,}5\,\sigma_p$, što je protivurečno osnovnoj pred postavci. Saglasnost koju Considere dobija izmedju ogleda na prizmama i rezultata loma na spiralama utegnutim stubovima, kada postoje relativno mali bočni pritisci $\sigma_2 = \sigma_3 = 0{,}2\,\sigma_p$ govori samo to da ovako predložen uslov loma aproksimira dobro samo malu zonu područja čvrstoće betona. Kao što je napred rečeno, za limitan slučaj on daje grešku od 50%.

M e s n a g e r /11-12/ je pokušao da ispravi nedostatke u Considere-ovom predlogu. On je na osnovu Considere-ovih ogleda predložio za graničnu krivu jednačinu oblika

$$F = \sigma_1 + \beta_{pr} + f_1(\sigma_3) = 0 \qquad /1.4/$$

Kao što se iz obrazca vidi, za $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ dobija se $\sigma_1 = -\beta_{pr}$. Ako se za f_1 uzme neka monotono opadajuća funkcija sa porastom σ_3, moglo bi se postići bolja aproksimacije za dvo i troosno stanje napona tj. kada je $\sigma_2 = \sigma_3 \geq 0$. Nažalost, Mesnager nije dao bliže podatke o funkciji f_1 kada je u pitanju beton.

Ono što je zajedničko za oba predloga, i što je istovremeno njihov najveći nedostatak, pored toga što pokrivaju samo mali deo područja čvrstoće betona, jeste to što o području čvrstoće kada je $[illegible]$ zatezanje ne govore ništa, ili govore na neubedljiv način. Eksperimenti koje je Considere vršio, i koji su bili podloga za ova dva predloga, nisu ni ispitivana stanja kada su jedan ili oba glav na napona zatezanja. Onda je razumljivo što u tom domenu ovi predlozi odkazuju.

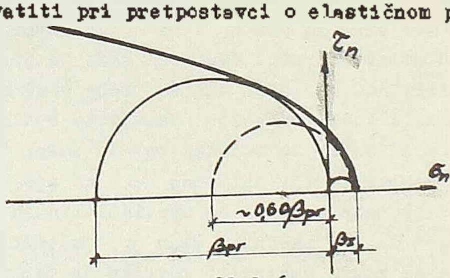
Mohr-ova hipoteza, kao i ogledi Considere-a, tačnije rečeno predlozi Considere-a i Mesinager-a, negiraju uticaj srednjeg glavnog napona na obrazovanje plastičnog stanja; na granično stanje utiču samo algebarski najveći i najmanji glavni napon.

U ogledima koje su vršili K a r m a n /11-12/ B o c k e r /11-12/1911 i 1917 g., kao i u ogledima koje je 10 godina docnije vršio R o š /11-3/ /takozvani ciriški ogledi/, pokazuje se medjutim, da na granično stanje ima uticaja i srednji glavni napon. Ovaj uticaj je opažen pri dvoosnom stanju napona tj. kada je $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 = 0$. Ako se rezultati Rošovih ispitivanja prikažu u dijagramu $\sigma_1 - \sigma_3$, i spoje u jednu liniju rezultati kada je $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \neq 0$ i $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 \neq 0$ onda se za prvi slučaj dobija funkcija koja za $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ daje $\sigma_1 = \beta_{pr}$. U drugom slučaju za $\sigma_3 = 0$ dobija se $\sigma_1 = \sigma_2 = 2\beta_{pr}$. Ova vrednost nije eksperimentalno odredjena, već se lako može odrediti ekstrapolacijom iz dijagrama. Srednji glavni napon, dakle, po ovom nije bez uticaja na granično stanje. Slične rezultate dobio je Roš vršeći ispitivanja sa istim ciljem na mermerima i drugim nemetalima. Sem ovih eksperimentalnih podataka i njihove diskusije, nije poznato da je još Roš predlagao i neki analitički izraz za krivu. Područje kada je neki od glavnih napona zatezanje, koliko je nama poznato, nisu ispitivana.

Skoro u isto vreme kada je Roš, godine 1928, američki istraživači F. Richart, A Brandtzaeg i Brown, vršili su oglede sa složenim naponskim stanjima u cilju definisanja graničnog stanja. Ogledi su izvodjeni na cilindričnim uzorcima. U pravcu osovine cilindra sila je saopštavana preko krutog klipa. Bočni pritisci izazvani su uljem pod pritiskom. Da ulje ne bi prodiralo u uzorak, isti su za vreme izvršenja ogleda oblagani tankim mesinganim listićima. Na uzorcima ø 10/20 cm. ispitivano je troosno i jednoosno stanje napona. Za dvoosno stanje napona upotrebljavani su uzorci ø 10/55 cm., a postizano je samo bočnim pritiscima. Sasvim slično kao kod Roša, za stanja $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 = 0$. tj. kada se preko klipa ne aplicira nikakva sila, dobija se rezultat $\sigma_1 = \sigma_2 = -2\beta_{pr}$. Troosni ogledi su izvodjeni za sledeća naponska stanja $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ i $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$, odnosno kada je pritisak veći u pravcu osovine cilindra od bočnog pritiska i obratno. Kada se rezultati ogleda prikažu u dijagramu σ_1, σ_3, onda se može, kako je to Craemer /1-5/ učinio, granična kriva zameniti pravom do vrednosti $\sigma_3 = -3\beta_{pr}$; dalje, za veće vrednosti σ_3, pokazuje se isto ono što je dobio i Considere, opada priraštaj σ_1 tj. granična linija naginje se sve više ka osi σ_3. Od samih autora analitički izraz za graničnu krivu nije predložen. Područje čvrstoće kada je jedan ili oba glavna napona zatezanje, nije ispitivano. Kod ovih ogleda treba skrenuti pažnju na uslove ispitivanja i s tim u vezi i interpretaciju rezultata dobijenih ispitivanjem Prisustvo mesinganog omotača za vreme izvodjenja ogleda unosi takozvane " ivične smetnje" u naponsko stanje po periferiji cilindra. Ako se još uzme u obzir i trenje po osnovama uzorka, ostaje malo nade da su ova ispitivanja vršena u uslovima homogenog naponskog stanja. " Ivična smetnja" čija je posledica tangencijalne sile duž omotača uzorka, nije se mogla otkloniti povećanjem napona u pravcu osovine cilindra, da bi se tangencijalne sile savladale, jer te sile stvarno utiču na ost areno naponsko stanje uzorka sve do graničnog stanja.

E. M ö r s c h /11-5/ je prvi 1930.g. izvodio oglede kada je jedan od glavnih napona zatezanje. Konstrukcija uzorka i način opterećenja pokazuju jedan duhovit način da se dodje do složenog, istina nehomogenog naponskog stanja. Ispitivani uzorci imali su jednoaksijalnu čvrstoću na pritisak, dobijenu na prizmama, koja se kretala od 300 do 500 kg/cm^2. Prema Mörsch-ovom objašnjenju lom uzorka nastupao je usled prekoračenja napona zatezanja. Kako naponi pritiska ostaju relativno niski u odnosu na jednoaksijalnu čvrstoću na pritisak, može se pretpostaviti - bez velike greške pravolinijska raspodela normalnih napona po preseku. Pretpostavljajući još elastično ponašanje materijala do loma mogli su se sračunati glavni napon i njihovi pravci u svakoj tački uzorka. Za ovako usvojen računski model, Mörsch tvrdi da su se pravci prslina dobro poklapali sa pravcem glavnih napona pritisaka. Računske vrednosti glavnih napona zatezanja odgovarale su dosta dobro jednoaksijalnoj čvrstoći na zatezanje, dobijene na dugim prizmama. Za graničnu krivu nije dat analitički izraz. Ona se medjutim može lako konstruisati /Craemer 1-5/ tako da dodiruje krug jednoosovinske čvrstoće na pritisak i zatezanje, kada se granična kriva prikazuje u koordinatnom sistemu σ_n, τ_n. Mörsch-ova zasluga i značaj njegovih ogleda ne ogledaju se u tome što je prvi proučavao područje čvrstoće kada su glavni naponi zatezanje i što je broj graničnih krivih povećao za jedan, već u tome što je prvi osetio i analitički definisao područje čvrstoće kada se lom dešava k i d a n j e m /cepanjem/. Naime, granična kriva prikazana na sl.1-6 u temenoj tački ima krug krivine, u stvari naponski krug koji je odredjen sa $\sigma_2 = \beta_z$ a $\sigma_1 \cong 0,$[illegible]

Znači da unutar ovog područja, ravan u kojoj se dogadja lom zaklapa ugao je dnak 90^o sa pravcem algebarski većeg glavnog napona, odnosno poklapa se sa pravcem algebarski manjeg napona. Dakle, lom ne nastupa usled prekoračenja mogućeg napona smicanja, jer u glavnim ravnima njih nema po definiciji, već usled dostizanja odnosno prekoračenja graničnog napona zatezanja. Interpretacija rezultata ispitivanja na bazi hipoteze o elastičnom ponašanju materijala do loma je glavni nedostatak u kvantitativnoj analizi ovih eksperimentalnih podataka. Ispitivanje graničnih stanja u uslovima nehomogenih naponskih stanja imaju već od niza autora zapažen nedostatak da su u takvim uslovima plastične zone tj. zone u kojima je dostignuto granično stanje, opkoljene zonama gde je materijal manje napregnut, odn. gde još nije dostignuto granično stanje. Za puno " plastificiranje" tj. za dostizanje graničnog stanja treba dodati opterećenje. To povećanje opterećenja nije se nikako moglo pravilno obuhvatiti pri pretpostavci o elastičnom ponašanju materijala do loma



Sl.1-6

Godine 1935. A. L e o n /11-31/ je predložio analitički izraz za granič nu krivu u koordinatnom sistemu τ_n, σ_n oblika

$$F = \tau_n^2 + a\sigma_n - b^2 = 0, \qquad /1.6./$$

Konstante a i b autor odredjuje iz uslova $\sigma_n = 0$, $\tau_n = \beta_s$ i za $\tau_n = 0$ $\sigma_n = \beta_z$, tj. da se presečna tačka krive i σ_n -osovina nalazi na odstojanju β_z od koordinatnog početka , i da se presečna tačka sa τ_n -osovinom nalazi na odstojanju β_s /čvrstoća na smicanje / od koordinatnog početka. Ako se iz ovako postavljenih uslova odrede konstante a i b, jednačina /1.6/ dobija oblik

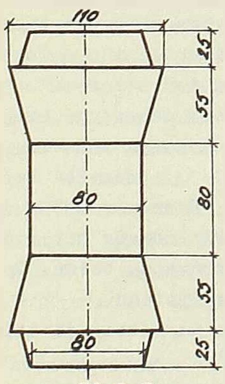
[illegible] /1.6a/

Dakle, radi se o kvadratnoj paraboli, čije su konstante odredjene tako da se ne govori ništa o jednoaksijalnoj čvrstoći na pritisak.

Skoro istovremeno sa A. Leon-om, 1934. i 1935.g. poznati francuski istraživači akad. A. C a q u o t i B r i c e /11-9 i 11-10/ su izvršili čitav niz ogleda u svrhu dobijanja granične krive, odnosno karakteristične krive /courbe intrinseque/ za beton. To su do tada najkompletnije i najracionalnije postavljeni ogledi. Logična posledica ovoga bio je analitički izraz za graničnu krivu koju je predložio Caquot.

$$F = \tau_n^3 - \mu^* (\beta_z' - \sigma_n)^2 = 0 \qquad /1.7/$$

U jednačini /1.7/, koja u koordinatnom sistemu predstavlja kubnu parabolu, β_z' - je triksijalna čvrstoća na zatezanje. Ona u većini slučajeva malo odstupa od jednoaksijalne čvrstoće. Koeficijent μ^* ima dimenziju napona i zavisi direktno od β_{pr}, a indirektno od β_z . Chalos /11-11/, jedan od učenika prof. Caquot-a,dao je nešto docnije, raspon u kome se kreće vrednost za μ^* . Za betone sa relativno malom čvrstoćom na zatezanje tj. kada je $\beta_z = 0{,}05\,\beta_{pr}$, $\mu^* = 1{,}20\,\beta_{pr}$ a za betone sa većom čvrstoćom na zatezanje, tj. kada je $\beta_z = 0{,}20\,\beta_{pr}$, $\mu^* = 0{,}38\,\beta_{pr}$. Ovim je obuhvaćen praktično najveći broj slučajeva koji se mogu javiti u praksi.Francuski ogledi izvodjeni su na uzorku koji je prikazan na sl.1.7. Bočni pritisci su izvodjeni po-



Sl.1.7

moću tečnosti. Da tečnost ne bi prodirala u betone, uzorak je za vreme ogleda oblagan kaučukom. Starost uzorka u fazi ispitivanja iznosila je 10 meseci. Čvrstoća betona išla je do 430 kg/cm^2. Izabrani oblik uzorka i način izvodjenja opterećenja, dozvoljavao je da se ispitaju sledeća naponska stanja: jednoaksijalno na pritisak i zatezanje, čisto smicanje, triaksijalno stanje kada je jedan glavni napon /u pravcu osovine cilindra/ zatezanje i triaksijalno stanje napona pritiska. Glavni naponi za stanje čistog smicanja iznosili su od $\sigma_3 = +29{,}4$ kg/cm^2 i $\sigma_1 = -33{,}0$ kg/cm^2. do $\sigma_3 = +33{,}8$ i $\sigma_1 = -38{,}0$ kg/cm^2. Ugao koji je ravan loma zaklapa sa ravni glavnog napona zatezanja iznosio je za ovo naponsko stanje 90°. Isti ugao ravni loma, dobijao se sve dotle, dok su se naponi kretali u granicama [illegible] $= 16{,}6$ do $\sigma_3 = 30$ kg/cm^2 i [illegible] $= -104$ do [illegible] $= 280$ kg/cm^2. Vidi se, dakle, da su i "francuski ogledi" konstatovali na sličan način kao i Mörsch, područje čvrstoće kada se lom dešava usled kidanja".

Sem ovih ogleda na uzorku koji je prikazan na sl. 1.7 ispitivano je i stanje napona spiralama utegnutog betona; pri ovim ogledima naponi u pravcu osovine uzorka išli su i do 2000kg/cm^2. Pod ovim naponima srednji deo uzorka bio je jako deformisan. Na spoljnoj strani bila su golim okom vidljive i jasno izražene linije loma. Skraćenje u pravcu osovine uzorka iznosilo je pred lom 10 do 11 mm, a poprečna deformacija i do 7 mm. Ugao ravni loma sa algebarski većim naponom iznosila je 29° do 30°.

Ovim ogledima, gledanim u celini, ne može se poreći ni duhovitost ni kompletnost. Naročito su značajni podaci ogleda koji govore o području čvrstoće na zatezanje. U upredjenju sa Mörsch-ovim podacima " francuski" predlog nešto opreznije ocenjuje područje čvrstoće usled " kidanja" betona. Karakteru naponskog stanja u smislu homogenosti, u uzorcima na kojima su izvodjeni ogledi, jedva da se mogu staviti zamerke. Dalje za područje čvrstoće kada se granično stanje postiže dostizanjem graničnih vrednosti napona smicanja, ovi ogledi daju niz važnih podataka. Interesantna je, medjutim, činjenica da Caquot i Brice nisu zapazili uticaj srednjeg glavnog napona na formiranje graničnog stanja.

Čitavih 15 godina docnije /1949/, javlja se ponovo sa radovima u ovoj oblasti prof. R o š. U studiji objavljenoj zajedno sa E i c h i n g e r -om /11- 3 / obradjuju se potanja granične krive za k r t e materijale. Ovde Roš preporučuje kao graničnu krivu jednu neprekidnu liniju u koordinatnom sistemu τ_n, σ_n - simetričnom u odnosu na σ_n -osovinu i " otvorenu" u područje napona pritiska. Temenu tačku - odnosno presek sa [illegible] osom odredjuje krug jednoosne čvrstoće na pritisak.

Koristeći se napred pomenutim radovima Roša i Eichiger-a, Gehler-a/11-4/ i ranije pomenutog A. Leon-a /11-31/, nemački inžinjer S c h ü t t u svojoj disertaciji / Fakultat für Bauveser, Hannower/1953. objasnio je pojavu i pravce prelina kod visokih armirano- betonskih nosača opterečenih silama u svojoj ravni, pomoću nešto modificirane granične krive za beton. On je uzeo Leon-ov predlog- parabolu drugog stepena u koordinatnom sistemu [illegible] - kao graničnu krivu. Teme parabole dodiruje krug jednoosne čvrstoće na zatezanje i istovremeno - naponski krug čistog smicanja, za stanje napona [illegible] $\sigma_3 = -\beta'$. Kako je za analitičko odredjivanje i parabole drugog reda simetrične u odnosu na σ_n -osovinu potrebno i dovoljno dva uslova, to se drugi uslov uzima na taj način što se još i krug jednoosne čvrstoće na pritisak i granična kriva dodiruju. β_z se kod ovakog načina predstavljanja mora odrediti iz ogleda na torziju napregnutog dugog cilindričnog štapa. Kade se na Schütt-ovom načinu prikazivanja granične krive može staviti dosta sasvim umesnih prigovora, ostaje kao činjenica, da mu je ona dobro poslužila za objasnjenje pojava i pravce prslina pri lomu nosača koji su se nalazili pri uslovima složenog naponskog stanja.

U Francuskoj literaturi novijeg datuma pojavilo se nekoliko članaka koji razmatraju pitanja graničnog stanja za beton. Od značajnih su članak V a l l e t t e - a /11-32/, i već napred pomenut rad L' Hermite-a /11-29/. Pored niza podataka naročito o ponešanju betona u graničnom stanju i vrlo lepih zapažanja o fizičkim uslovima loma interesantan je predlog L' Hermite-a za " karakterističnu krivu" U tom predlogu ona treba da se sastoji od dve prave- u koordinatnom sistemu $\tau_n\ \sigma_n$ - povezane krugom. Na ovaj način područje čvrstoće betona se deli u tri oblasti: oblast kada se lom dešava usled cidanja / prava/, prelazna zona /krug/ i oblast loma usled smicanja / prava/. Precizne kvantitativne podatke za granice ovih oblasti L' Hermite nije dao.

B r i c e /11-33/ se javio ponovo 1956. sa novom teorijom loma,koja, po njegovim navodima, treba da ima univerzalni karakter- da obuhvati sva tela i sva moguća naponska stanja. Brice je svoju teoriju nazvao " Teorija zpremine kritične dilatacije". Kao uzrok loma navodi se dilatacija " istezanja".Treba zamisliti oko neke tačke u telu, koja se nalazi u neutralnom stanju- nenapregnuto stanje- loptu čiji je poluprečnik 1. U napregnutom stanju obrazovaće se od posmatrane lopte elipsoid deformacije. Kada zapremina onih delova elipsoida koji se nalaze spolja u odnosu na loptu, dakle onih delova elipsoida koji imaju veću vrednost od 1, dostigne odredjena vrednost- nastupa lom tela. Analitički uslov loma se može i kod ove teorije, prelazeći sa glavnih dilatacija na glavne napone, izarziti u obliku $f(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)=0$ Brice je proveravao svoju teoriju preko niza ogleda koje je vršio sam i uporedjenjem rezultata ogleda drugih autora. Na mnogo mesta i za dosta veliki broj materijala saglasnost teorije sa ogledima je zadovoljavajuća.Nažalost ogledi na betonu nisu vršeni u tom stepenu da bi se mogao doneti neki precizniji sud.Ipak od interesa je u ovoj hronološkoj analizi pomenuti zaključak Brice-a o tome kako se njegova teorija nadovezuje na teoriju " karakteristične krive".On tvrdi da postoji izvesna površina ili zona u dijagramu $\tau_n\ \sigma_n$ - kroz koju prolaze naponski krugovi koji predstavljaju sva moguća naponska stanja.Opšti izgled ove zone, bolje rečeno oblik upućuje na to da je karakteristična kriva neka srednja trasa "karakteristične zone Dakle, " karakteristična kriva" u neku ruku shematizuje zonu jednom jedinom krivomlinijom. Iz ovoga izlazi da Brice-ova teorija, i ako polazi sa sasvim drugih fizičkih osnova nije, bar makroskopski gledano, sasvim u suprotnosti sa klasičnim prikazivanjem graničnog stanja pomoću " karakteristične krive".

U novijoj sovjetskoj literaturi pitanjima graničnog stanja posvećena je duža pažnja. Godine 1948. S. M. F a j n b e r g /11-34/ je prvi postavio teoriske osnove metode za proučavanje konstrukcija u u s l o v i m a g r a n i č n e r a v n o t e ž e. Prof. G v o z d j e v / 11-35/ je 1949. dao jednu metodu za analizi ranje graničnih stanja betonskih konstrukcija u uslovima složenog naponskog stanja Interesantno je da Gvozdjev koeficijent efikasnosti bočnog pritiska za troosno sta nje napona računa na bazi analize naponskog stanja u uslovima graničnog plastičnog tečenja betona koji ispunjava cevi tankih zidova pod jednoosnim i unutrašnjim pritiskom. Ova metoda još je i danas u važnosti u zvaničnim normama za proučavanje u Sovjetskom Savezu. Široku generalizaciju Mohr-ove teorije 1954 g. predložio je M. M. F i l o m e n k o - B a r o d i č /11-96/. Dostizanje graničnog stanja izra u-nava se na osnovu jedne funkcije $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=0$ koja u prostoru napona $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ predstav lja tzv. graničnu površinu. Moguće je lako, polazeći od jednačine Filomenka- Borodiča izvesti uslove plastičnosti koji predlažu M i s e s - H e n k y i druge uslo ve plastičnosti.

B r e s l e r i K. R i s t e r /11-37/ su 1955. predložili uslov loma

$$F = \tau_0 + \xi J_1 + \eta = 0 \qquad /1.8/$$

gde je τ_0 - oktaedarski napon smicanja, J_1 prva invarijanta tenzora napona, a ξ i η konstante. Ako se oktaedarski napon smicanja izrazi pomoću drugog momenta devijatora tenzora napona, onda se za f može napisati:

$$f = \sqrt{T_2} + \sqrt{\tfrac{3}{2}}(\xi J_1 + \eta) = 0 \qquad /1.8a/$$

Konstante ξ i η se u ovom slučaju odredjuju eksperimentalnim putem na bazi rezultata dobijenih ogledima vršenim na šupljim cilindrima od betona koji su opterećeni s raznim kombinacijama torzije i pritiska. Dakle u uslovima dvoosnog stanja napona. U prostoru napona $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jednačina /1.8 d/ predstavlja konus čija osa, takozvana hidrostatička osa, zaklapa jednake uglove sa kordinatnim osama. Moguće je da ova -tav oblik granične površine i može da bude dobra analitička generalizacija ponašanja materijala u domenu malih napona. U oblasti kada su glavni naponi pritisci nije ni malo ubedljiv.

Interesantno je medjutim da su iste godine 1955. F. B l a k e y i F. B e a f o r t /11-28/ predložili u suštini isti uslov plastičnosti, koji se od jednačine /1.8/ razlikuje u odredjivanju samo eksperimentalnih konstanti.

Poslednjih godina skoro u isto vreme pojavila su se u sovjetskoj literaturi dva predloga za uslov loma betona koji se po suštini dosta razlikuju. Najpre 958. g. pojavio se G. A. G e n i e v /11-30/ sa analitičkim predlogom, a nešto ocnije, 1959 g. O. B e r g /11-25/ je izneo svoj predlog polazeći od fizičkih u lova loma. Ova pojava je odraz dveju tendencija koje se odavno ispoljavaju u tre iranju pitanja graničnog stanja betona. Naime, jedna tendencija je stvaranje jed e opšte matematičke teorije graničnog stanja- na osnovu rezultata ogleda u makro kopskom posmatranju pojava u uslovima loma, čiji je tipičan predstavnik Geniev, druga čiji je predstavnik Berg - analitička generalizacija rezultata ispitiva - ja fizičkih pojava u materijalu u uslovima graničnog stanja.

O. B e r g široko proučavajući fizičke pojave u graničnom stanju, a na očito u oblasti loma usled "kidanja" /cepanja/ dolazi do zaključka da energija oja se troši da bi došlo do loma po obrazovanju mikropukotina je jednaka energi- potrebnoj da se savlada otpornost na zatezanje u celom telu. Drugim rečima ako kod jednoaksijalnog opterećenja uzorka primeni bočni pritisak čija je vrednost jednaka β_z , onda će energije potrebne za obrazovanje mikropukotina biti apsorbova ne energijom sila nastalih usled napona pritiska $\sigma_2 = \sigma_2 = +\beta_z$ .Ako je vrednost zamiš ljenog bočnog pritiska veća od [illegible] vrednost čvrstoće raste srazmerno vrednošću $n_h = \frac{[illegible]}{\beta_z}$. Sledeći ovakvo gledište Berg u p r v o j a p r o k s i m a c i j i pred laže sledeći uslov loma:

$$F = \frac{\sigma_1}{\beta_{pr}} + \left(1 + k\frac{\sigma_3}{\beta_z}\right) = 0 \qquad /1.9/$$

gde je $k = 1 - \frac{[illegible]}{[illegible]}$, $s'\beta_z$ napon pri jednoosnom ogledu kada nastaju mikropukotine, odnosno izražena plastična deformacija. Vrednost koeficijenata k kreće se po Sovjetskim normama u granicama 0,5 - 0,26, kada se β_{pr} kreće od 80-420 kg/cm^2. U koordinatnom sistemu σ_1, σ_3, jednačina /1.9/ predstavlja familiju pravih.Ako se σ_1/β_{pr} zameni takozvanim srednjim ukupnim naponom /B.B.Novažilov,1952 PMM/, onda se jednačina /1.9/ može zameniti sledećom opštijom, koja važi za sva moguća naponska stanja

$$F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} + \beta_{pr}\left(1 + k\frac{\sigma_3}{\beta_z}\right) = 0 \qquad /1.9a/$$

Pri čemu treba pretpostaviti $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ naravno algebarski.Lako je utvrditi da jednačina /1.9a/ predstavlja u prostoru napona $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ obrtni dvograni h i p e r b o l o i d. Osa rotacije je koordinatna osovina σ_3 . Isto tako odmah se vidi da Bergov predlog u svom opštem obliku nije invarijanta stanja napona, jer dostizanje graničnog stanja zavisi direktno od σ_3 .Za ravno stanje napona tj. kada je σ_3 = 0, dobija se uslov

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \beta_{pr}^2 \qquad /1.9b/$$

što u koordinatnom sistemu σ_1, σ_2 predstavlja krug sa centrom u koordinatnom početku, i poluprečnikom β_{pr} .Jednačinu /1.9b/ Berg uzima u obzir samo za slučaj $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$ tj. kada su glavni naponi pritisci.Znači, računa se samo na četvrtinu kruga u području pritisaka.Ovakav rezultat je u suprotnosti sa svim dosadašnjim ogledima dvoosnog stanja kada su glavni naponi pritisci. Ako se uzme, na primer, da je $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$ dobija se rezultat $\sigma_1 = \sigma_2 = -[illegible]$ što se za skoro tri puta razlikuje od rezultata ogleda /11-3,11-20/, gde je dobijeno [illegible] U uslovima dvoosovinskog stanja napona kada jedan od glavnih napona zatezanje,tj. kada je $\sigma_2 = 0$ Berg analizira sledeću jednačinu, koje se neposredno dobija iz /1.9a/

$$\frac{\sigma_1^2}{\beta_{pr}} + \frac{\sigma_3^2}{\beta_{pr}} = -1 + K\frac{\sigma_3}{\beta_z} \qquad /1.9c/$$

Jednačina /1.9c/ u ravni $(\sigma_1; \sigma_3)$ predstavlja familiju hiperbola.Medjutim, kako je njena važnost ograničena samo na deo u četvrtom kvadrantu ravni $(\sigma_1; \sigma_3)$ to Berg zanemaruje član $\frac{\sigma_3^2}{\beta_{pr}}$ u odnosu na $\frac{\sigma_1^2}{\beta_{pr}}$ kao mali, i dobija familiju pravih linija. Znatno bolje slaganje sa eksperimentalnim rezultatima u ovom području, i samo u ovom području, je razumljivo, jer se u polaznim pretpostavkama kod izgradjivanja ovog predloga i pošlo od analitičkog formulisanja uslova " kidanja" /cepanje/ Ova kratka analiza dovoljno pokazuje na kakve se teškoće nailazi pri pokušajima analitičke generalizacije fizičkih uslova loma.

G. A. G e n i e v /11-30/ je 1958 g., uzimajući u obzir rezultate brojnih ogleda, kao i čisto analitičke predloge, predložio u prostoru napona [illegible] σ_2, σ_3 graničnu površinu oblika [illegible] = 0. Uopštena Mohr-ova hipoteza predstavlje u prostoru napona konusnu površinu čija osovina, takozvana hidrostatička $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$, zaklapa jednake uglove sa koordinatnom osovinom. Teme konusa seče onda hidrostatičku osu u tački sa koordinatama $H = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\mu}{1 - [illegible]} \beta_{pr}$. Specijalan slučaj Mohr-ove teorije - teorije Coulomb-a, takodje uopštena, predstavlja u prostoru napona neravnogranu šestostranu piramidu. Osa piramide data je takodje jednačinom $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Vrh piramide seče hidrostatičku osovinu u istoj tački kao i konus. Koordinate vrha kod konusa i piramide treba da predstavljaju granične napone u uslovima troosovinskog zatezanja. Jednačina piramide glasi:

$$F = \frac{[illegible]}{\beta_{pr}} + \frac{[illegible]}{\beta_z} [illegible] = 0 \qquad /1.10/$$

za i =1,2,3, j=1,2,3 i i≠ j

Za granična stanja kada se lom dešava usled " kidanja", Geniev smatra da je u prvoj aproksimaciji bolje uzeti, da se ovakva stanja definišu uzimajući za napone zatezanja neku graničnu veličinu, nego što bi u takvom slučaju odgovarala teorija najveće dilatacije, ili uvodjenje nekih zamišljenih fiktivnih napona /11-25/ Prema tome u prvoj aproksimaciji granično stanje usled kidanja može se izraziti sa sledećom jednačinom,

$$F = \sigma_i - \beta_z = 0 \qquad /1.11/$$

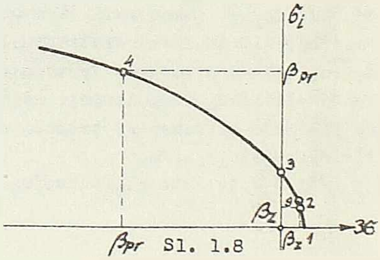
za i = 1,2,3

u kojoj β_z - predstavlja granično zatezanje pri kidanju i uopšte govoreći ispunjava uslov $\beta_z < \frac{\mu}{1-\mu} \beta_{pr}$. Jednačina /1.11/ predstavlja u prostoru napona tri ravni, paralelne koordinatnim ravnima koje se seku u tački sa koordinatama $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \beta_z$

Analizirajući napred iznete granične površine i vodeći računa o rezultatima brojnih ogleda, Geniev je pronašao da za opisivanje graničnog stanja betona, gledano u celini, najbolje odgovara granična površina u obliku rotacionog paraboloida sa osom rotacije koja zaklapa jednake uglove sa koordinatnim osovinama. Jednačina paraboloida glasi:

$$F = \sigma_i^2 + 3\sigma (\beta_{pr} - \beta_z) - \beta_{pr} [illegible] = 0 \qquad /1.12/$$

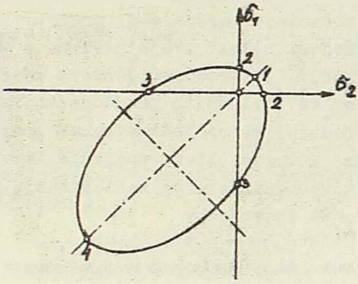
gde je $\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)}$, takozvani intenzitet napona, a $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ srednji normalni napon. Na sl. 1.8 prikazana je jednačina /1.12/ u koordinatnom sistemu $(\sigma_i, 3\sigma)$. Tačka 1 predstavlja teme parabole. Koordinate tačke 1 predstavljaju granične napone zatezanja pri troosnom zatezanju. $H = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{[illegible]}{3(1 - [illegible])} \beta_{pr}$



Sl. 1.8

Tačka 2 odgovara slučaju jednoosnog zatezanja. Naime za $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ $\sigma_1 = \beta_z$ $3\sigma = \beta_z$ $\sigma_1 = \beta_z$
Na isti način lako je pronaći koordinate tačke 4 koja treba da odgovara slučaju jednoosnog pritiska $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = -\beta_{pr}$, $3\sigma_1 = -\beta_{pr}$ $\sigma_1 = \beta_{pr}$. Tačka 3 predstavlja slučaj čisto smicanja kada je $\sigma_1 = -\sigma_2 = \beta_s, \sigma_3 = 0$ onda se dobija. $3\sigma = 0, \sigma_1 = \sqrt{\mu}\,\beta_{pr} = \beta_s\sqrt{3}$ odnosno $\beta_s = \sqrt{\frac{\mu}{3}}\,\beta_{pr}$
gde je β_s čvrstoća pri čistom smicanju.

U slučaju ravnog stanja napona, kada je $\sigma_3 = 0$, dobija se u ravni σ_1, σ_2 elipsa čija duža osovina zaklapa ugao od 45° sa koordinatnim osovinama. Na sl.1.9. prikazana je granična kriva za ravno stanje napona sa svojim karakterističnim tačkama.



Sl. 1.9

Jednačina za ravno stanje napona može se napisati u sledećem obliku:

$$f = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + (\beta_{pr} - \beta_z)(\sigma_1 + \sigma_2) - \beta_{pr}\beta_z = 0 \qquad /1.13/$$

Tačke 2 i 3 odgovaraju, kako se sa slike odmah vidi, jednoosnom zatezanju odnosno pritisku. U tačkama 1 i 4 nalaze se vrednosti graničnih napona za slučaj $\sigma_1 = \sigma_2 = \beta_o$.
Iz /1.13/ lako se dolazi do $\beta_o = -[\sqrt{1 - \mu + \mu^2} \pm (1 - \mu)]\beta_{pr}$ gde se gornji znak odnosi na tačku 4 a donji na 1.

Ako se za $\mu = \frac{\beta_z}{\beta_{pr}}$ uzme kao verovatna srednja vrednost 0,1, dobija se za tačku /4/, $\beta_o = -1.65\beta_{pr}$ a za tačku /1/ $\beta_o = +0{,}05\beta_{pr}$. Kao što vidimo vrednost graničnih napona u tački 4 vrlo dobro odgovara rezultatima ogleda /11-2 i 11- 20/ / vidi str. 27 /. Isto tako i smanjenje graničnog napona zatezanja u uslovima dvoosovinskog naponskog stanja, što pokazuje rezultat dobijen za tačku 1, sl.1.9 , kao i rezultat dobijen na sl. 1.8, za stanje troosnog zatezanja,kako Geniev tvrdi, ima svoj fizički smisao.Sa sl.1.9 može se, medjutim, lako uočiti da u uslovima naprezanja kada je jedan glavni napon pritisak, a drugi zatezanje /granična kriva izmedju tačaka 2 i 3/, granični naponi zatezanja premašuju vrednost β_z. Ovaj podatak do danas nije našao potvrdu u ogledima.

Od značaja je i način kako Geniev nalazi granicu koja deli područje čvrstoće kada se lom dešava usled smicanja po ravnima klizanja od područja kada lom nastaje kidanjem. Ovo treba istaći i zato što je to, koliko je nama poznato, prvi pokušaj da se i kvantitativno nadje granica ova dva područja. Predlažući jedinstvenu graničnu površinu za čitavo područje čvrstoće betona /rotacioni paraboloid /, Geniev smatra da se kao prva aproksimacija za linije koja deli dva područja čvrstoće mogu uzeti krive /elipse/ koje se dobijaju presekom paraboloida i ravni

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\mu}{3(1-\mu)}\beta_{pr}$$

koje prolaze kroz njegovu temenu tačku. Datom analizom ovih krivih koje se u prostoru napona date jednačinom

$$f=0 \quad \sigma_1 = \frac{\mu}{3(1-\mu)}\beta_{pr} \text{ i } f=0 \quad \sigma_2 = \frac{\mu}{3(1-\mu)}\beta_{pr} \text{ i } f=0 \quad \sigma_3 = \frac{\mu}{3(1-\mu)}\beta_{pr}$$

može se pokazati da je i pri većim naponima pritiska od β_{pr} moguće postići lom usled kidanja. Ovaj podatak takodje nije bar do sada našao potvrdu u ogledima.

Za područje čvrstoće kada su glavni naponi pritisci, tj. u uslovima triaksijalnih stanja pritisaka, rotacioni paraboloid, predstavlja vrlo dobru aproksimaciju stvarnog graničnog stanja i nalazi svoju potvrdu u eksperimentima /v.st. /

U ovom uvodnom izlaganju, na predlogu Genieva zadržalo se nešto duže, u prvom redu zato što je to jedan od poslednjih predloga kojima se kroz literaturu, raspolagalo, drugo što je to pokušaj da se jedinstvenom graničnom površinom matematički relativno prostog oblika pokrije čitavo područje čvrstoće betona, i treće što i kvalitativno i kvantitativno pokušava da reši pitanje granice dva područja čvrstoće betona kroz oglede jasno izdvojena.

1. 2. 3. VEZE IZMEDJU NAPONA I DEFORMACIJA U OBLASTI GRANIČNOG STANJA NAPREZANJA

Veliki broj, naročito starijih istraživača, pri proučavanju graničnog stanja za beton, ograničavala se u svojim ogledima na merenje maksimalnog graničnog opterećenja pod koji uzorak dolazi u oblast izražene plastične deformacije. Tek u novije vreme relativno mali broj autora merio je u toj oblasti i deformacije. Ta merenja odnosila su se na registrovanje podužne i poprečne deformacije, tj. na utvrdjivanje Poisson-ovog koeficijenta; na utvrdjivanje granice kada se pojavljuje izražena plastična deformacija; na kvantitativno uporedjenje veličine plastične deformacije postignute pri jednoosnom stanju u odnosu na istu u uslovima složenog naprezanja; na registrovanje promene zapremine tela u uslovima izražene plastične deformacije. Dakle, sva ova ispitivanja išla su više za tim da kvalitativno opišu plastičnu deformaciju, da objasne njen mehanizam i uzroke njenog nastajanja, nego što su išla da kvalitativno i analitički formulišu veze izmedju napona i deformacija u oblasti graničnog stanja.

Medjutim, za rešavanje brojnih zadataka koje iz oblasti graničnog stanja u svakodnevnom životu nameće inžinjerska praksa, potrebno je, pored što tačnijeg, poznavanja granične površine $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ /površine plastičnosti/, poznavati i što tačnije formulisati veze izmedju napona i deformacije. Tek ako se imaju veze izmedju napona i deformacije koje stvarno održavaju ponašanje materijala u ovoj oblasti, može se prići rešavanju praktičnih zadataka sa nadom da se dobije i realan, rezultat. Pokušaji da se granični zadaci u uslovima loma betona rešavanju pripisivanjem betonu elastična svojstva do loma mora se prema današnjem stanju stvari u ovoj oblasti oceniti kao grubo pogrešni.

U takvoj situaciji treba onda naročito ceniti pokušaj, napred pomenutog, ruskog istraživača Geniev-a /11-30/, da, svojim analitičkim predlogom za veze izme dju napona i deformacija u oblasti izražene plastične deformacije, popuni jednu ve liku prazninu.

Ako se uzme u obzir da u oblasti graničnog stanja betona ima izraženu pl astičnu deformaciju koja se razvija bez praktičnog priraštaja opterećenja i da se zapremina tela u tom stadijumu povećava, - Geniev smatra da pod izvesnim uslovima, uzimajući plastični potencijal, koji je u opštem slučaju neka funkcija devijatorske komponente tenzora napona $X_p(s_{ij}) = 0$ jednak uslovu plastičnosti $f(\sigma_{ij}) = 0$, mogu se dosta verno stvarnom ponašanju materijala u ovoj oblasti ispisati veze izmedju napona i deformacija.

Dakle, za $X_p = f$ može pisati

$$e_{xx} = c\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \quad i \quad e_{yy} = c\frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad i \quad e_{zz} = c\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}$$

$$e_{xy} = c\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \quad i \quad e_{yz} = c\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \quad i \quad e_{zx} = c\frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} \qquad /1.14/$$

Funkcija f, data u jednacini /1.13/ po glavnim naponima, može se lako ispisati kao funkcija komponentalnih napona,

$$f = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) +$$
$$+ (\beta_{pr} - \beta_r)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \beta_{pr} \cdot [illegible] = 0 \qquad /1.15/$$

Na osnovu jednačina /1.14/ i /1.15/ komponentalne deformacije izgledaju

$$e_{xx} = 2c[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) + \frac{1}{2}(\beta_{pr} - \beta_r)]; \qquad e_{xy} = 6c\tau_{xy},$$

$$e_{yy} = 2c[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) + \frac{1}{2}(\beta_{pr} - \beta_r)]; \qquad e_{yz} = 6c\tau_{yz},$$

$$e_{zz} = 2c[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\beta_{pr} - \beta_r)]; \qquad e_{zx} = 6c\tau_{zx}, \qquad /1.16/$$

gde je c faktor proporcionalnosti, čija je dimenzija cm^2/kg.Ako se na osnovu /1.16 sračuna kubna dilatacija dobija se izraz:

$$e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 3c(\beta_{pr} - \beta_r) > 0 \qquad /1.17/$$

Iz /1.17/ se vidi da je pozitivno, što praktično znači da je plastična deformaci ja u uslovima graničnog stanja praćena povećanjem zapremine.Pretpostavka g = f , dobro dakle odgovara bar što se tiče povećanja zapremine u uslovima izražene plastične deformacije, rezultatima ogleda. Treba primetiti da Geniev uzima za plastično područje veze izmedju napona i deformacije umesto veza izmedju napona i brzine deformacije. Ovakav tretman uprošćuje znatno rešenja graničnih zadataka, iako stro go uzev, nije korektan kada su u pitanju materijali koji poseduju osobinu savršene plastičnosti /1-1/ i / 1-10/. Detaljniji kritički osvrt na usvajanje ovakvih veza vidi na str. 22

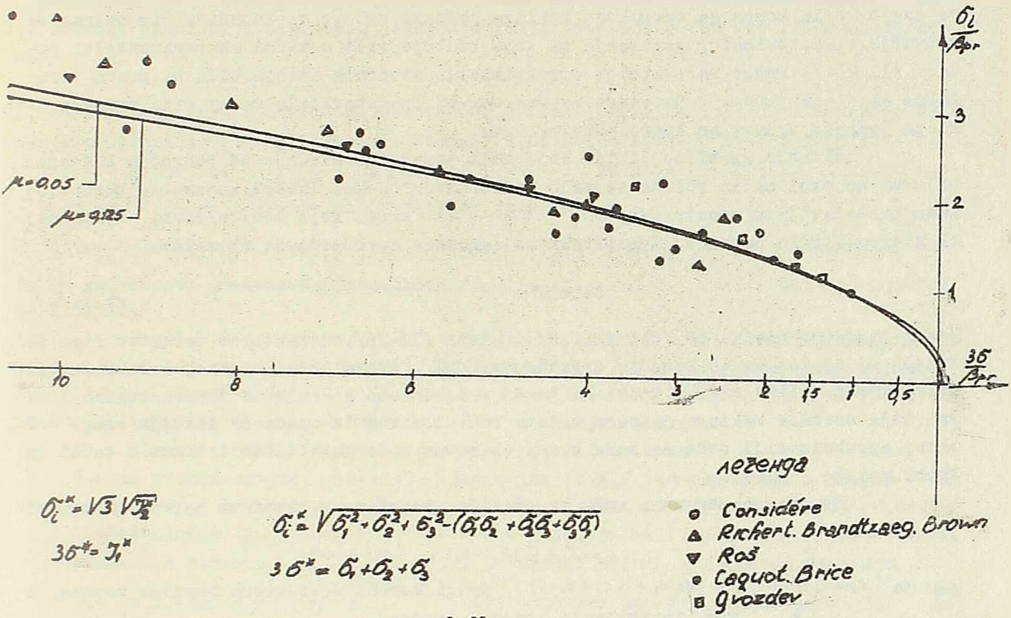
2. Osnovne jednačine graničnog stanja

2. 1. GRANIČNA POVRŠINA — USLOV PLASTIČNOSTI

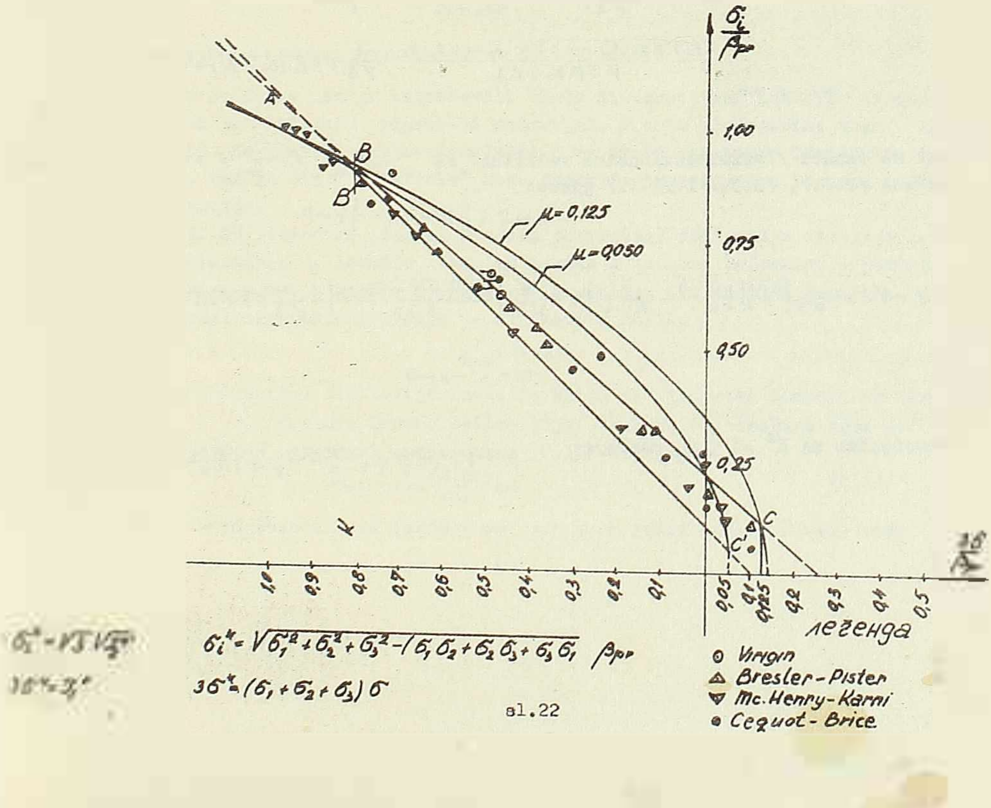
Iz razmatranja u prethodnom poglavlju, izlazi da se betonu u oblasti graničnog stanja mogu, ako se gleda na pojave makroskopski, odnosno ako se ostane na pozicijama " fenomenološke makroreologije" / M. Reiner 1-9/, pripisati osobine plastičnog materijala. Dakle, za sva naponska stanja koja ispunjavaju uslov plastičnosti $f(\sigma_{ij})=0$ materijal trpi trajnu plastičnu deformaciju. U daljem procesu idealizacije, u stadijumu graničnog stanja, može se beton smatrati i kao savršeno-plastičan, što znači da, ako je ispunjen uslov $f(\sigma_{ij})=0$ važi istovremeno i $df(\sigma_{ij})=0$ dakle materijal ne pruža otpor plastičnoj deformaciji. U procesu opterećenja kao i rasterećenja, ako se uzmu u obzir samo kratkotrajna opterećenja odnosno rasterećenja, mogu se elastične, a pogotovu viskozne deformacije / $t \to 0$ /, zanemariti, i usvojiti u oblasti graničnog stanja takozvana plastično-kruta šema. Dakle, kada je $df(\sigma_{ij})<0$ materijal se ponaša kao krut.

Brojni rezultati ogleda sa složenim naponskim stanjima, a naročito ogledi u kojima su proučavani uticaji glavnih napona zatezanja, nedvosmisleno pokazuju da su za granično stanje naprezanja betona karakteristična dva stanja- stanje smicanja, kada se plastična deformacija postiže klizanjem po ravnima u kojima su, smičući naponi dostigli graničnu vrednost i - stanje "kidanja" kada se plastična deformacija javlja usled postepenog cepanja materijala. Pokušaji, da se u ovakvoj situaciji usvoji jedinstvena površina plastičnosti /G.A. Geniev 11-30/, koja bi se jednim matematičkim zakonom obuhvatila ova dva, i po fizičkim uzrocima različita stanja, nisu dala željeni rezultat. I ako se predlog /11-30/ može oceniti kao najkompleksniji u tom pravcu, ostaje kao činjenica da se sa njim ne aproksimira u dovoljno dobroj meri područje kidanja. Na slikama 10 i 11, u koordinatnom sistemu $(\sigma_1 ; 3\sigma)$, prikazani su rezultati ogleda na složenim naponskim stanjima, raznih autora / 11-12 , 11-20 , 11-3 , 11-9 , 11-30, 11-38, 11-39, 11-37/, u svrhu bližeg definisanja granične površine. Punim linijama izvučen je predlog Geniev-a / 11-30/ za vrednosti μ = 0,05 -0,125, što dobro obuhvata područje u kome se kreću praktične vrednosti odnosa čvrstoća pri jednoosnom stanju zatezanja odnosno pritiska. Na sl.2.1 prikazano je uglavnom područje pritisaka, dok sl.2.2. u nešto krupnijoj , razmeri, obuhvata područje kada su glavni naponi i zatezanje. Rotacioni paraboloid, kao što se sl. 2.1. vidi, predstavlja vrlo dobru aproksimaciju rezultata dobijenih ogledima. U području kada se pojavljuju naponi zatezanja ovaj predlog, kako se sa sl. 2.2 vidi, podbacuje naime, rezultati ogleda grupišu se znatno ispod teoriskih vrednosti. Ovde se vidi da rezultati ogleda potvrdjuju već ranije konstatovan " nedostatak paraboloida" da u području kada je jedan glavni napon pritisak a ostali - zatezanje, granične vrednosti zatezanja mogu prevazići jednoosnu otpornost zatezanje. Ogledi, medjutim, pokazuju da i u takvim uslovima vrednosti napona zatezanja, još uvek ostaju ispod β_z .

Znatno bolja aproksimacija eksperimentalnih rezultata u području kidanja dobila bi se ako bi, srednji normalni napon ili prva invarijanta tenzora napona 3σ


σi/βpr
3σ/βpr
μ=0,05
μ=0,125
10
8
6
4
3
2
1,5
1
0,5
легенда
Considére
Richert. Brandtzaeg. Brown
Roš
Cequot. Brice
Gvozdev
σi* = √3 √J2*
3σ* = J1*
σi* = √(σ1² + σ2² + σ3² − (σ1σ2 + σ2σ3 + σ3σ1))
3σ* = σ1 + σ2 + σ3

sl.21


σi/βpr
3σ/βpr
1,00
0,75
0,50
0,25
B
B'
C
C'
μ=0,125
μ=0,050
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,05
0,1
0,125
0,2
0,3
0,4
0,5
легенда
Virgin
Bresler-Pister
Mc.Henry-Karni
Cequot-Brice
σi* = √3 √J2*
3σ* = J1*
σi* = √(σ1² + σ2² + σ3² − (σ1σ2 + σ2σ3 + σ3σ1)) βpr
3σ* = (σ1 + σ2 + σ3) σ

sl.22

bila linearna funkcija "intenziteta" napona σ_i; što znači da bi u koordinatnom sistemu $(3\sigma; \sigma_i)$ granična površina bila predstavljena pravom linijom. U prostoru napona ona bi bila konus sa osom koja zaklapa jednake uglove sa koordinatnim osama. Za područje višeosovinskog zatezanja za koje postoje vrlo oskudni eksperimentalni podaci /11-25 /, mnogo verovatnija aproksimacija stvarnih stanja bila bi prava paralelna sa σ-osovinom. U prostoru napona ona bi predstavljala ravan čija normala zaklapa jednake uglove sa koordinatnim osama.

Pitanje granične linije koja deli područje smicanja od područja kidanja, bilo bi na ovaj način rešeno na vrlo jednostavan način. Presek konusa sa paraboloidom predstavlja u prostoru napona $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ krug, koji leži u ravni normalnoj na hidrostatičku osovinu. Kvantitativno, granica se odredjuje iz uslova

$$3\sigma^* = J_1^* = K^* \qquad /2.1./$$

gde K^* može da varira od /0,5 do 1,0/. Ogledi /11-25/, elementarno iskustvo nisu pokazali da se lom usled kidanja dogadja za $K^* > 1$. Prema tome, u prvoj aproksimaciji može se bez velike greške uzeti da je $K^* = 1$ odnosno $K^* = \beta_{pr}$. Presek konusa i ravni čija normala zaklapa jednake uglove sa koordinatnim osama je takodje krug. U prvoj aproksimaciji ovde se može uzeti da ravan seče paraboloid i konus u tački sa koordinatama $3\sigma^* = \mu$, $\sigma^* = \mu$.

Sa ovim napomenama može se granična površina u prostoru napona prikazati jednačinom

$$f_s = J_2 + \frac{1}{3}(\beta_{pr} - \beta_z)J_1 - \frac{1}{3}\beta_{pr}\cdot\beta_z = 0 \qquad /2.2./$$

gde je $J_2 = \frac{1}{3}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$, drugi moment devijatora tenzora napona, a $J_1 = 3\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ prva invarijanta tenzora napona,

$$f_t = \sqrt{J_2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{K\beta_{pr}(\beta_{pr} - \beta_z) + \beta_z\beta_{pr}} - \beta_z}{K\beta_{pr} + \beta_z}\right]J_1 + \frac{K\beta_{pr}\sqrt{K\beta_{pr}(\beta_{pr} - \beta_z) + \beta_z\beta_{pr}} - K\beta_{pr}\beta_z}{\sqrt{3}(K\beta_{pr} + \beta_z)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{K\beta_{pr}(\beta_{pr} - \beta_z) + \beta_z\beta_{pr}} = 0 \qquad /2.3./$$

$$f_k = J_1 - \beta_z = 0 \qquad /2.4./$$

Ako se označi / bezdimenzionalna veličina/ sa $J_2^* = \frac{J_2}{\beta_{pr}^2}$, $J_1^* = \frac{J_1}{\beta_{pr}}$ i $\mu = \frac{\beta_z}{\beta_{pr}}$ onda jednačina /2.2./, /2.3./ i /2.4./ glase:

$$f_s = J_2^* + \frac{1}{3}(1-\mu)J_1^* - \frac{1}{3}\mu = 0 \qquad /2.5./$$

$$f_t = \sqrt{J_2^*} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{K+\mu(1-K)}}{K+\mu} - \frac{\mu}{K+\mu}\right]J_1^* + \frac{\mu}{\sqrt{3}}\left[\frac{K\sqrt{K+\mu(1-K)} - K\mu}{K+\mu}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{K+\mu(1-K)} = 0 \qquad /2.6./$$

$$f_k = J_1^* - \mu = 0 \qquad /2.7./$$

Specijalno za $K^* = 1$, f_t postaje:

$$f_t = \sqrt{J_2^*} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1-\mu}{1+\mu}J_1^* - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\mu}{1+\mu} = 0 \qquad /2.8./$$

Jednačina /2.5./, /2.6./ ili /2.8./ predstavljaju, rotacioni paraboloid i konus sa zajedničkom osom rotacije koja zaklapa jednake uglove sa koordinatnim osama i koja je normala ravni koju prikazuje jednačina /2.7./.Jednačina ove ose /hidrostatičke-ose/ glasi:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \qquad /2.9./$$

Domen važnosti paraboloida, odnosno konusa a time i granice koja deli područje smicanja od područja kidanja lako se dobija rešenjem jednačina /2.5./ i /2.8./.

Jednačina $J_1 = J_2' + \frac{1}{3}(1-\mu) J_1 - \frac{1}{3}\mu = 0$ kada je [illegible] $(1-\mu) + \frac{1}{3}\mu = \frac{1}{3}$ [illegible] definiše područje smicanja; dok jednačine $J_1 - \sqrt{J_2'} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-\mu}{1+\mu} J_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\mu}{1+\mu} = 0$ kada je $J_1 < -K^{*} - 1$ i $J_1 < \mu$ odnosno [illegible] $< \frac{1}{3}$ i [illegible] $J_1 = J_1^{*} - \mu = 0$ čije su koordinate preseka sa jednačinom /2.8./ $J_1^{*} = \mu$ i [illegible] definišu područje kidanja.

Na sl.2.2 od tačke /B, B '/ odnosno od tačke A u levo, važi jednačina/2.5/ / paraboloid/- izmedju tačaka /A/ odnosno/BB'/ i /CC'/ važi jednačina /2.8/i od /CC'/ do preseka sa osovinom [illegible] važi jednačina /2.7./.Znači, levo od /BB'/ odnosno /A/ područje smicanja- desno od /BB'/ područje kidanja.

Karakteristične tačke na površini plastičnosti su:

1.- za stanje napona [illegible] jednačine /2.5./ kao i jednačina /2.8./ za slučaj da je K^{x} = 1 daju $\sigma_1' = -1\mu - \beta_{pr}$; tačka /A/ i $\sigma_1' = \mu = -\beta_z$; tačka /C,C'/.

2.- za slučaj $\sigma' = -$ [illegible] i $\sigma_3^{*} = 0$ dobija se iz jednačine /2.8./ pošto ona važi u tom domenu, [illegible] $= \frac{2\mu}{\sqrt{3(1+\mu)}}$ tj. otpornost betona pri čistom smicanju.

3.- za slučaj $\sigma_1^{*} = \sigma_2^{*} = \sigma_3^{*} = \beta_0$ koji odgovara preseku jednačina /2.7./ sa osovinom $3\sigma/\beta_{pr}$ ili troosnoj otpornosti zatezanja, dobija se $\beta_1^{*} = \frac{\mu}{3}$

2. 2. VEZE IZMEĐU NAPONA I BRZINA DEFORMACIJA

Poznato je da se nemogu uspostaviti čisto linearne veze izmedju napona, i deformacija kada je u pitanju plastični materijal. U ovim slučajevima veze su kavzi linearne, tj. ne postoji proposcionalnost na pravu konstantu izmedju napona i deformacije, već su ove " konstante" neke funkcije invarijanata tenzora napona odnosno deformacija.

Polazeći od jednačine stanja, uvodeći potencijal disipacije energije/1-1 ,1-10/ kao i pretpostavku da izmedju tenzora napona i tenzora deformacije postoji izotropna veza, veze izmedju napona i brzina deformacija, ako se radi kratkoće pisanja upoterbi tenzorska notacija, mogu se napisati u obliku

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial X_p(s_{ij})}{\partial s_{ij}} \qquad /2.10/$$

gde je $X_p(s_{ij})$ - potencijal disipacije /neka funkcija devijatorske komponente tenzora napona s_{ij} a $\dot{\varepsilon}_{ij}$ tenzora brzine deformacije/.Kada se u jednačinu koja definiše savršeno plastičan materijal unese izraz /2.10/ dobijamo:

$$[illegible] \frac{\partial X_p(s_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} [illegible] \qquad /2.11/$$

[illegible] jednačina je u saglasnosti sa jednačinom $d f(\sigma_{ij}) = 0$ /vidi str. 22 /,samo onda ako je potencijal disipacije do na konstantan faktor 2λ jednak uslovu plastičnosti $f(\sigma_{ij}) = 0$. Dakle, može se pisati da je $\dot{X}_p(s_{ij}) = 2\lambda f(\sigma_{ij})$ pa se najopštija veza izmedju tenzora napona i tenzora brzine deformacije za savršeno plastičan materijal dobija konačno u obliku:

$$\dot{e}_{ij} = 2\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \qquad /2.12/$$

Ako se pretpostavi da za čitavo granično stanje betona važi hipoteza istaknuta napred, o savršenom plastičnom ponašanju, onda za uslove plastičnosti /2.4 i /2.6/, veze izmedju tenzora napona i tenzora brzine deformacije /2.10/ izgledaju

$$\dot{e}_{ij} = 2\lambda_r \left[\frac{1-\mu}{3} \sigma_{ij} + s_{ij} \right] \qquad /2.13/$$

$$\dot{e}_{ij} = 2\lambda_v \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-\mu}{1+\mu} \sigma_{ij} + \frac{s_{ij}}{2 (J_2')^{1/2}} \right] \qquad /2.14/$$

$$\dot{e}_{ij} = 2\lambda_k \delta_{ij} \qquad /2.15/$$

gde je λ_r, λ_v i $\lambda_k > 0$ uvek pozitivan skalar- u opštem slučaju neka funkcija koordinata - a δ_{ij} /Kronecker-ov simbol/ - za $i \neq j$ jednak nuli a za $i = j$ ravan jedinici.

Napisane u razvijenom obliku brzine komponentalnih deformacija dobijaju sledeći oblik:

$$\dot{e}_x = 2\lambda_r \left\{ \frac{1-\mu}{3} + \frac{2}{3} \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right] \right\}; \qquad \dot{\gamma}_{xy} = 4\lambda_r \tau_{xy};$$

$$\dot{e}_y = 2\lambda_r \left\{ \frac{1-\mu}{3} + \frac{2}{3} \left[\sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) \right] \right\}; \qquad \dot{\gamma}_{yz} = 4\lambda_r \tau_{yz} \qquad /2.16/$$

$$\dot{e}_z = 2\lambda_r \left\{ \frac{1-\mu}{3} + \frac{2}{3} \left[\sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right] \right\}; \qquad \dot{\gamma}_{zx} = 4\lambda_r \tau_{zx}$$

koje odgovaraju jednačini /2.13/, jednačine

$$\dot{e}_x = 2\lambda_v \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{\left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right]}{3 (J_2')^{1/2}} \right\} \qquad \dot{\gamma}_{xy} = 2\lambda_v \frac{\tau_{xy}}{(J_2')^{1/2}}$$

$$\dot{e}_y = 2\lambda_v \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{\left[\sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) \right]}{3 (J_2')^{1/2}} \right\} \qquad \dot{\gamma}_{yz} = 2\lambda_v \frac{\tau_{yz}}{(J_2')^{1/2}} \qquad /2.17/$$

$$\dot{e}_z = 2\lambda_v \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{\left[\sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right]}{3 (J_2')^{1/2}} \right\} \qquad \dot{\gamma}_{zx} = 2\lambda_v \frac{\tau_{zx}}{(J_2')^{1/2}}$$

koje odgovaraju jednačini /2.14/ i jednačine

$$\dot{e}_x = 2\lambda_k \qquad \dot{e}_y = 2\lambda_k \qquad \dot{e}_z = 2\lambda_k \qquad \dot{\gamma}_{xy} = 0 \qquad \dot{\gamma}_{yz} = 0 \qquad \dot{\gamma}_{zx} = 0 \qquad /2.18/$$

koje odgovaraju jednačinama /2.15/.

Na osnovu izraza /2.13/, /2.14/ i /2.15/ može se lako sračunati kubne dilatacije za pojedina područja na sledeći način:

$$\dot{e}_r = \dot{e}_x + \dot{e}_y + \dot{e}_z = 2\lambda_r (1-\mu) \geq 0 \qquad \dot{e}_v = 2\lambda_v \sqrt{3} \frac{1-\mu}{1+\mu} \geq 0 \qquad \dot{e}_k = 6\lambda_k > 0 \qquad /2.19/$$

Kao što se iz /2.19/ vidi, u graničnom stanju plastična deformacija je praćena povećanjem zapremine, s obzirom da je $e > 0$, kako u području smicanja tako i u području kidanja.

Da bi se pokazalo da su veze tenzora napona i tenzora brzina deformacija zaista kvazi linearne a i zbog docnijeg izlaganja, potrebno je sračunati faktore λ_1, λ_2, λ_3. Pomoću /2.13/, /2.14/ i /2.15/ može se lako dobiti:

$$\frac{1}{2}\dot{e}_1\,\dot{e}_1 = 4\lambda_1^2\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2 + J_2\right] \qquad \frac{1}{2}\dot{e}_2\,\dot{e}_2 = 2\lambda_2^2\left[\frac{1}{2} + \frac{(1-\mu)^2}{(1+\mu)^2}\right] \qquad \frac{1}{2}\dot{e}_3\,\dot{e}_3 = 6\lambda_3^2 \qquad /2.20/$$

a odavde

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\frac{(J_2')^{1/2}}{\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2 + J_2\right]^{1/2}} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(J_2')^{1/2}}{\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2\right]^{1/2}} \qquad \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(J_2')^{1/2} \qquad /2.21/$$

gde je J_2' – drugi moment tenzora brzine deformacija.

2. 3. GRANIČNA POVRŠINA – USLOV PLASTIČNOSTI ZA RAVNO STANJE NAPONA I DEFORMACIJA

2. 3. 1. RAVNO STANJE NAPONA

U slučaju ravnog stanja napona je, kao što je poznato $\sigma_3 = \sigma_z = 0$ i $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Zbog toga je $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$. Drugi moment devijatora i prva invarijanta tenzora napona uzimajući u obzir gornje vrednosti glase: $J_2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)\cdot\frac{1}{3}$ $\quad J_1 = \sigma_1 + \sigma_2$

Sa ovim, uslovi plastičnosti /2.5/, /2.7/ i /2.8/ dobijaju oblik

$$f_1 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 + (1-\mu)(\sigma_1+\sigma_2) - \mu = 0 \qquad /2.22/$$

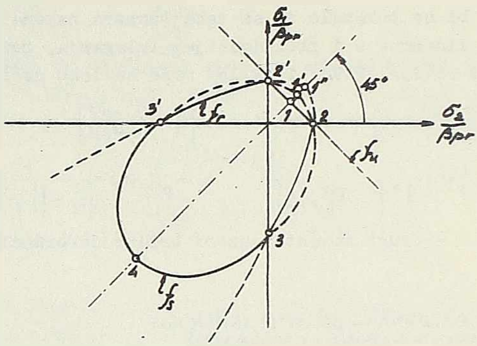
$$f_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} + \frac{1-\mu}{1+\mu}(\sigma_1+\sigma_2) - \frac{2\mu}{1+\mu} = 0 \qquad /2.23/$$

$$f_3 = \sigma_1 + \sigma_2 - \mu = 0 \qquad /2.24/$$

Može se lako pokazati da je jednačina /2.22/ u koordinatnom sistemu $(\sigma_1 ; \sigma_2)$ predstavlja elipsu, čija je duža osivina nagnuta pod 45° prema koordinatnim osovinama, dok jednačina /2.23/ predstavlja hiperbolu sa istom osovinom. Jednačina /2.24/ prikazuje pravu koja je normalna na osovinu elipse odnosno konusa.

Na sl. 2.3 prikazane su ove krive sa obeleženim karakterističnim tačkama Punim linijama izvučene su važeće linije. Tačke /1/, /1'/, /1" / i /4/ predstavljaju slučaj kada je $\sigma_1 = \sigma_2 = \beta_0$. Za tačku /1/ koja označava presek jed./2.24 sa hidrostatičkom osovinom $\beta_0 = \frac{\mu}{2}$; u tački /1'/ nalazi se teme elipse i $\beta_0' = -(1-\mu) + \sqrt{1-\mu+\mu^2}$; tačka /1" / označava teme hiperbole i $\beta_0'' = \frac{2\mu}{3-\mu}$, dok za tačku /4/ $\beta_0 = -(1-\mu) - \sqrt{1-\mu+\mu^2}$ Tačka /2/, /2'/ i /3/ /3'/ otsecaju na koordinatnim osovinama veličine jednake jednoosnim otpornostima na zatezanje odnosno pritisak. Deo krive obeležen tačkama /3/, /4/ i /3'/ predstavlja područje smicanja dok ostali deo, puno izvučen, predstavlja područje kidanja.

Jednačine /2.22/ i /2.24/ i /2.23/ vrlo često se prikazuju i u koordinat nom sistemu $[\tau_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2),\ p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)]$ gde je τ_m maksimalni napon smicanja a p- srenji normalni napon,koji pruža veće mogućnosti za dalju analizu.



Sl.2.3

U novom koordinatnom sistemu jed. /2.22/ glasi,

$$f_r = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + (1-\mu)\right]^2 - \frac{1}{3}(1-\mu)^2 - \frac{\mu}{3} = 0 \qquad /2.25/$$

jednačina /2.23/

$$f_s = \frac{\left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{2ab}{4a^2 - 1}\right]^2}{\frac{\mu}{(4a^2-1)^2}} - \frac{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2}{\frac{\mu}{3(4a^2-1)}} - 1 = 0 \qquad /2.26/$$

gde je $a = \frac{1-\mu}{1+\mu}$ a $b = \frac{2\mu}{1+\mu}$ i jednačina /2.24/

$$f_u = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\mu}{2} = 0 \qquad /2.27/$$

U novom koordinatnom sistemu jednačine /2.25/ i /2.26/ predstavljaju elipsu odnosno hiperbolu što se iz samih jednačina neposredno vidi.Jednačina /2.27/ pak prikazuje pravu liniju paralelnu τ_m – osovini na odstojanju $\frac{\mu}{2}$ od nje. Na sl. 2.4 , prikazane su ove krive. Punim linijama ate su važeće linije. Tačke /1/,/1'/,/1" / i /4/ predstavljaju i ovde slučaj kada je $\sigma_1 = \sigma_2 = \beta_s$. Pošto je u tom slučaju $\tau_m = 0$, vrednost za p su iste kao i u odgovarajućim tačkama u prethodnom slučaju Koordinate tačaka /2/, /2'/ i /3/,/3'/ dobijaju se lako , ako se naizmenično stavi / $\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = 0$/, odnosno $(\sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = \mu)$, onda p i τ_m imaju vrednost $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ za tačke /3/ i /3'/ i $\left(\frac{\mu}{2}, \pm\frac{\mu}{2}\right)$ za tačke /2/ i /2'/. Deo krive između tačaka /3/, /4/ i /3'/ predstavljaju slično kao i u prethodnom slučaju područje smicanja, dok ostali puni izvučeni deo područje kidanja.

2. 3. 2 RAVNO STANJE DEFORMACIJA

U slučaju ravnog stanja deformacija, kao što je poznato, može se s[illegible] $\dots = \gamma_{31} = 0$. Zbog toga iz jednačina /2.16/,/2.17/ i /2.18/ uzsatopn di

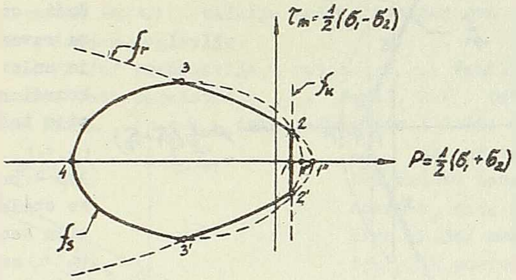
$$\sigma_3^s=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)-\frac{1-\mu}{2} \qquad /2.28/$$

$$\tau^s_{xz}=\tau^s_{yz}=0$$

$$\sigma_3^r=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)-\sqrt{3}\,\frac{1-\mu}{1+\mu}(J_2)^{1/2} \qquad /2.29/$$

$$\tau^r_{xz}=\tau^r_{yz}=0$$

$$\sigma_3^k=\tau^k_{xz}=\tau^k_{yz}=0 \qquad /2.30/$$



Sl. 2.4

Sa vrednostima /2.28/,/2.29/ i /2.30/ mogu se lako sračunati invarijante J_2 i J_1 za pojedine delove granične površine.

$$J_2^s=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+\frac{1}{12}(1-\mu)^2 \quad \text{i} \quad J_1^s=\frac{3}{2}(\sigma_1+\sigma_2)-\frac{1}{2}(1-\mu)^2$$ sa podacima iz /2.28/

$$J_2^r=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\frac{1}{1-3\alpha^2} \quad \text{i} \quad J_1^r=\frac{3}{2}(\sigma_1+\sigma_2)-\frac{3\alpha}{(1-\alpha^2)^{1/2}}\,\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$ sa podacima iz /2.29/, i konačno

$$J_2^k=0 \qquad J_1^k=2\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)$$ za podatke iz /2.30/.

Uslovi plastičnosti /2.5/, /2.8/ i /2.7/ za koordinatni sistem $(\tau_m;\,p)$ izgledaju onda:

$$f_s=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+(1-\mu)\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\frac{1}{12}(1-\mu)^2-\frac{\mu}{3}=0 \qquad /2.31/$$

$$f_r=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)+\frac{3\alpha}{(1-3\alpha^2)^{1/2}}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\frac{K_1}{(1-3\alpha^2)^{1/2}}=0 \qquad /2.32/$$

i

$$f_k=2\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\mu=0 \qquad /2.33/$$

gde je $\alpha=\frac{1-\mu}{\sqrt{3}(1+\mu)}$ i $K_1=\frac{2\mu}{\sqrt{3}(1+\mu)}$

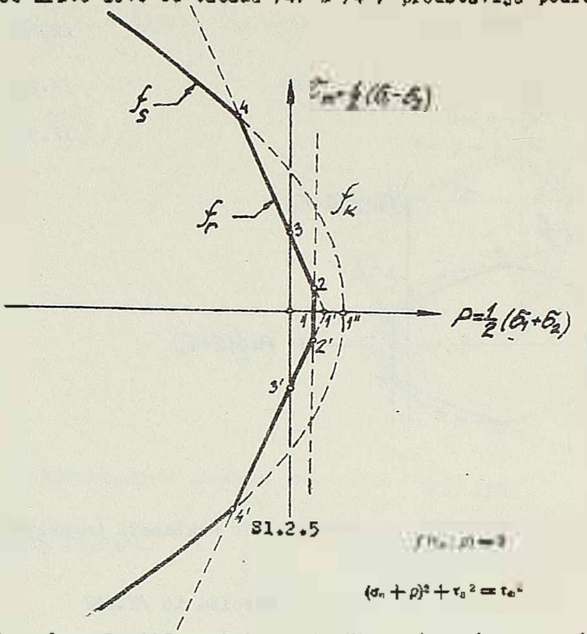
Lako se iz samih jednačina vidi da one u koordinatnom sistemu $(\tau_m;\,p)$ predstavljaju parabolu drugog reda / 2.31./, par pravih linija /2.32/ i pravu paralelnu τ_m osovini na rastojanju $p=\frac{1}{2}\mu$ od nje /2.33/. Na sl.2.5 prikazane su ove krive. Punom linijom izvučen je važeći deo. Karakteristične tačke, označene brojevima, na sl. 2.5 imaju sledeće koordinate:

tačka (1): $\left[p=\frac{\mu}{2};\,\tau_m=0\right]$ tačka (1'): $\left[p=\frac{2\mu}{3(1-\mu)};\,\tau_m=0\right]$ tačka (1"): $\left[p=\frac{(1+\mu)^2}{12(1-\mu)},\,\tau_m=0\right]$

tačka (2): $\left[p=\frac{\mu}{2};\,\tau_m=\pm\sqrt{\frac{\mu}{3}}\left[1-\frac{3}{4}(1-\mu)\right]\right]$ tačka (3): $\left[p=0;\,\tau_m=\pm\sqrt{\frac{\mu}{3}}\right]$

tačka (4) $\left[p=\frac{\text{[illegible]}}{3(1-\mu)};\,\tau_m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{\mu}+\frac{1-\mu}{2}\right]\right]$

Deo krive levo od tačaka /4/ i /4'/ predstavlja područje smicanja a deo krive preko tačaka /1/,/2/,/3/ do /4/ područje kidanja.



Sl.2.5

Često je potrebno prikazati uslov plastičnosti u koordinatnom sistemu (σ_n, τ_n) - gde su τ_n i σ_n totalni smičući odnosno normalni naponi za ravan sa normalom n. Kada je uslov plastičnosti dat u - koordinatnom sistemu (τ_m, p) nije teško preći na sistem - (τ_n, σ_n) /v.Hill M.T.P. str 336 - prevod na ruskom/.Ako, se obeleži uslov plastičnosti u koordinatnom sistemu $(\sigma_n ; \tau_n)$ sa $\varphi(\sigma_n ; \tau_n) = 0$, onda se veze izmedju koordinata odredjuju iz sledeća tri uslova:

$$f(\tau_m ; p) = 0 \qquad \frac{\sigma_n + p}{\tau_n} = -\frac{\frac{\partial f_s}{\partial p}}{\frac{\partial f_s}{\partial \tau_m}}$$

$$(\sigma_n + p)^2 + \tau_n{}^2 = \tau_m{}^2 \qquad /2.34/$$

Za uslov plastičnosti dat jednačinom /2.31/ uslovi /2.34/ izgledaju :

$$f_s = \tau_m{}^2 + (1 + \mu)[\ldots] - \frac{1}{12}(1 - \mu)^2 - \frac{\mu}{3} = 0$$

ako je $p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ $\quad \frac{\sigma_n + p}{\tau_n} = -\frac{(1 - \mu)}{2\tau_m}$

odnosno $\sigma_n + p = -(1 - \mu)^{1/2}$ ili $p = -\frac{1 - \mu}{2} - \sigma_n$

$$\tau_m{}^2 = \tau_n{}^2 + \frac{1}{[illegible]}(1 - \mu)^2 \qquad /2.35/$$

Zamenom izraza /2.35/ u uslov plastičnosti dobija se

$$\varphi_s(\tau_n ; \sigma_n) = \tau_n^2 + (1 - \mu)\,\sigma_n - \frac{1}{3}(1 - \mu + \mu^2) = 0 \qquad /2.36/$$

Ako se isti postupak primeni i za uslov plastičnosti dat jednačinom /2.32/ dobija se

$$\varphi_r = [illegible] + \frac{3\alpha}{(1 - 12\alpha^2)^{1/2}}\,\sigma_n - \frac{k}{(1 - 12\alpha^2)^{1/2}} = 0 \qquad /2.37/$$

Zamenom $\alpha = [illegible]\,(1 + \mu)$ i $k = \frac{[illegible]}{\sqrt{2}\,(1 + \mu)}$ u uslov /2.37/ dobija se povoljniji oblik za analizu.

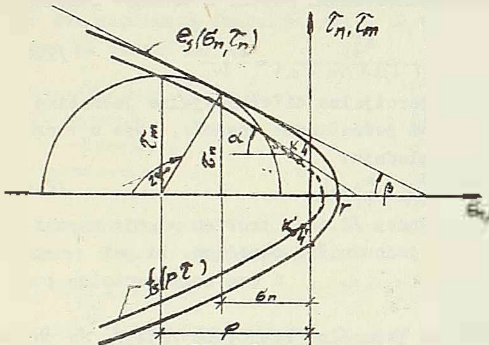
$$\varphi_r = \tau_n + \frac{\sqrt{3}\,(1 - \mu)}{[(1 + \mu)^2 - 4(1 - \mu)^2]^{1/2}}\,\sigma_n - \frac{2\mu}{\sqrt{3}\,[(1 + \mu)^2 - 4(1 - \mu)^2]^{1/2}} = 0 \qquad /2.37a/$$

Jednačina /2.37a/ predstavlja u ravni familiju pravih linija za razne vrednosti parametra μ . Medjutim, postoje izvesne vrednosti parametra μ za koje ova jednačina ne postoji u realnoj oblasti. Naime ako se stavi $(1 + \mu)^2 - 4(1 - \mu)^2 \gtrless 0$

dobija se da familija pravih postoji samo onda ako je $\mu > 0{,}45$. Kako se praktično moguće vrednosti za μ, u ovom slučaju, kreću od 0,05 do 0,20, to znači da se uslov /2.37/ odnosno /2.37a/ ne može prikazati u realnoj oblasti za koordinatni sistem (σ_n,τ_n). Istim putem se može pokazati da se i uslov /2.33/ ne može prikazati u ravni $(\sigma_n;\tau_n)$. Znači za čitavo područje kidanja uslov plastičnosti nema svoj analitički izraz u koordinatnom sistemu $(\sigma_n;\tau_n)$.

Na pitanje, da se uslovi plastičnosti koji definišu područje kidanja ne mogu preslikati u ravan $(\sigma_n;\tau_n)$ tačnije rečeno, značaj ove činjenice, biće znatno šire razmatran u idućem poglavlju.

Jednačina /2.36/ predstavlja u ravni (σ_n,τ_n) familiju parabola drugog stepena za razne vrednosti parametra μ. Na sl. 2.6 prikazana je ova kriva, i naporedo sa njom kriva $(\rho;\tau_m)$, data jednačinom / 2.31/ u koordinatnom sistemu



Sl.2.6

Ako se sa α i β označe nagibni uglovi tangenata na krive f_s odnosno e_s onda se pomoću treće jednačine /2.34/ može pokazati da između njih postoji sledeća trigonometrijska veza:

$$\sin\beta = \operatorname{tg}\alpha \qquad /2.38/$$

Odavde pak, izlazi da se kriva f_s može preslikati u krivu e_s sve dotle dok je $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$. U slučaju krive /2.31/ i /2.36/ granična tačka /k/ koja ispunjava uslov /2.38/ ima koordinate

$$[illegible] \qquad /2.39/$$

Tačci /k/ na krivoj f_s odgovara pod ovim uslovima temena tačka /r/ na krivoj e_s, čije su koordinate

$$\sigma_n^{(r)} = \frac{1}{3}\,\frac{1-\mu+\mu^2}{1-\mu} \qquad \tau_n^{(r)} = 0 \qquad /2.40/$$

Upoređujući koordinate tačke /4/ / vidi sl.2.5 /, sa koordinatama tačke /k/ odmah se vidi da je $\rho^{(k)} < \rho^{(4)}$ i $\tau_m^{(k)} > \tau_m^{(4)}$, što znači da deo krive f_s levo od tačke /4/ koji definiše područje smicanje u celini može prikazati u koordinatnom sistemu (σ_n,τ_n) Znači da parabola drugog stepena, data jednačinom /2.36/, u celini prikazuje područje smicanja u uslovima ravne deformacije.

2.4. OSNOVNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE GRANIČNOG STANJA ZA RAVNO STANJE NAPONA I RAVNU DEFORMACIJU

2.4.1. OSNOVNE JEDNAČINE ZA RAVNO STANJE NAPONA

U području smicanja, za ravno stanje napona uslov plastičnosti dat je jednačinom /2.25/. Ako se glavni naponi izraze pomoću komponentalnih uslova plastičnosti dobija oblik

$$\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2+\frac{1}{3}\left[(1-\mu)+\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\right]^2-\frac{1}{3}(1-\mu+\mu^2)=0 \qquad /2.41/$$

Brzina komponentalnih deformacija različite od nule na osnovu /2.16/ u slučaju ravnog stanja napona su:

$$\dot{\varepsilon}_x=2\lambda_s\left[\frac{1-\mu}{3}+\frac{2}{3}\sigma_x-\frac{1}{3}\sigma_y\right] \quad \dot{\varepsilon}_y=2\lambda_s\left[\frac{1-\mu}{3}+\frac{2}{3}\sigma_y-\frac{1}{3}\sigma_x\right] \quad \dot{\varepsilon}_z=2\lambda_s\left[\frac{1-\mu}{3}-\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y)\right] \quad \dot{\gamma}_{xy}=\ldots$$

Ako se pretpostavi da je deformacija mala onda veze izmedju brzina komponentalnih. pomeranja i brzine deformacije izgledaju za ovaj slučaj:

$$\dot{\varepsilon}_x=\frac{\partial\dot{u}}{\partial x} \qquad \dot{\varepsilon}_y=\frac{\partial\dot{v}}{\partial y} \qquad \dot{\gamma}_{xy}=\frac{\partial\dot{u}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{v}}{\partial x} \qquad /2.43/$$

Pomoću jednačina /2.43/, eliminacijom faktora proporcionalnosti iz jednačina/2.42/, može se lako doći do veze izmedju komponentalnih napona i brzina komponentalnih pomeranja u obliku

$$\frac{3\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}}{(1-\mu)+(2\sigma_x-\sigma_y)}=\frac{3\frac{\partial\dot{v}}{\partial y}}{(1-\mu)+(2\sigma_y-\sigma_x)}=\frac{\frac{\partial\dot{u}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{v}}{\partial x}}{4\tau_{xy}} \qquad /2.44/$$

Izraz /2.44/ daje u stvari dve nezavisne parcijalne diferencijalne jednačine , po brzinama komponentalnih pomeranja $\dot{u}$ i $\dot{v}$. Sa jednačinama ravnoteže, koje u ovom slučaju, ako se zanemare zapreminske sile, izgledaju:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\,; \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \qquad /2.45/$$

uslovom plastičnosti /2.41/ i dvema jednačinama /2.44/, problem stanja napona i brzina deformacija za ravno stanje napona je jednoznačno odredjen. Za pet nepoznatih funkcija - tri komponentalna napona $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, i dva komponentalna pomeranja $\dot{u}$ i $\dot{v}$ - postoji pet jednačina.

Može se, medjutim, lako uočiti da jednačine ravnoteže /2.45/ sa uslovom plastičnosti /2.41/ predstavljaju sistem od tri jednačine u kojima figurišu samo tri nepoznata komponentalna napona. U koliko bi kod nekog problema i granični uslovi bili dati samo po naponima onda bi se problem sveo na integraciju jednačina - /2.45/ uz ispunjenje uslova plastičnosti s tim što bi komponentalni naponi imali , odgovarajuće vrednosti na konturi, unapred propisane. Ovako formulisan zadatak mogli bi pod izvesnim uslovima nazvati " statički odredjen zadatak datog stanja". Kod većine problema kod inžinjerske prakse, medjutim, granični uslovi nisu dati samo - naponima, već se može desiti da je na izvesnim delovima konture propisan raspored, brzina deformacija, ili su pak propisani takozvani mešoviti granični uslovi,tj. na izvesnim delovima zadati su naprimer unapred po jedna komponenta vektora spoljnog, opterećenja i vektora brzine. U ovakvim slučajevima polje napona sračunato kao statički odredjen zadatak" ne mora u principu da zadovolji granične uslove po brzinama deformacija na konturi.

Razmotriće se, najpre, slučaj " statički odredjenog stanja". Ako se uvede parametar može se pisati

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=K'\sin\omega \qquad (1-\mu)+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=\sqrt{3}\,K'\cos\omega \qquad /2.46/$$

gde je $K'=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1-\mu+\mu^2\right]^{1/2}$. Pomoću jednačina /2.46/ mogu se komponentalni naponi lako izraziti kao funkcije parametra ω i ugla ψ koji glavni napon σ_1 zaklapa sa pozitivnim pravcem x-osovine

$$\tau_{xy} = K' \sin\omega \sin 2\varphi \qquad /2.47/$$

Nije teško utvrditi da ovako izraženi komponentalni naponi identički zadovoljavaju uslov plastičnosti /2.41/. Unošenjem jednačina /2.47/ u uslove ravnoteže /2.45/, posle kraćeg računa dolazi se do sistema od dve parcijalne diferencijalne jednačine, sa promenljivim koeficijentima sledećeg oblika:

$$(-\sqrt{3}\sin\omega + \cos\omega\cos 2\varphi)\frac{\partial\omega}{\partial x} - 2\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial y} + 2\sin\omega\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

$$(-\sqrt{3}\sin\omega - \cos\omega\cos 2\varphi)\frac{\partial\omega}{\partial y} + 2\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \cos\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x} + 2\sin\omega\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \qquad /2.48/$$

Kao što se vidi, problem je sveden na integraciju sistema jednačina /2.48/ u kojima figurišu dve nepoznate funkcije $\omega(x,y)$ i $\varphi(x,y)$

Ako se označi sa

$$\begin{aligned} P &= -(\sqrt{3}\sin\omega + \cos\omega\cos 2\varphi & P' &= \cos\omega\sin 2\varphi \\ Q &= \cos\omega\sin 2\varphi & Q' &= -(\sqrt{3}\sin\omega + \cos\omega\cos 2\varphi) \\ R &= -2\sin\omega\sin 2\varphi & R' &= 2\sin\omega\cos 2\varphi \\ S &= 2\sin\omega\cos 2\varphi & S' &= 2\sin\omega\sin 2\varphi \end{aligned} \qquad /2.49/$$

i neka je duž neke krive "C" ω i φ dato tako da su u svakoj tački te krive poznati njihovi totalni diferencijali

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy \qquad d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \qquad /2.50/$$

mogu se parcijalni izvodi funkcija ω i φ jednoznačno odrediti kada je determinanta sistema jednačina /2.48/ i /2.50/,

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \\ P & Q & R & S \\ P' & Q' & R' & S' \end{vmatrix} = 0 \qquad /2.51/$$

Razvijanjem determinante lako se dolazi do karakteristične jednačine datog sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina. Naime, ako se označi sa

$$a = \frac{\begin{vmatrix} Q & R \\ Q' & R' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P & S \\ P' & S' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R & P \\ R' & P' \end{vmatrix}} \quad \text{i} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} S & Q \\ S' & Q' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R & P \\ R' & P' \end{vmatrix}}$$

dolazi se do jednačine oblika

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a\left(\frac{dy}{dx}\right) + b = 0 \qquad /2.52/$$

Za vrednosti funkcije P, Q, R itd. date izrazima /2.49/, jednačina /2.51/ dobija oblik

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2\sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi}{\sqrt{3}\sin\cos 2\varphi - \cos\omega}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi + \cos\omega}{2\sqrt{3}\sin^2\omega\cos 2\varphi - \cos\omega} = 0 \qquad /2.52a/$$

Koreni ove jednačine su onda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi \pm \sqrt{3 - 4\cos^2\omega}}{\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi - \cos\omega} \qquad /2.53/$$

Kao što se vidi, jednačina /2.52a/ ima dva realna korena sve dotle dok je $\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq \frac{5\pi}{6}$ Za ove vrednosti osnovni sistem jednačina /2.48/ je h i p r b o l i č n o g t i p a. Kada je $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{6}$ ili $\frac{5\pi}{6} \leq \omega < \pi$ jednačina /2.52a/ ima dva kompleksna korena. Za ove vrednosti ω, osnovni sistem jednačina /2.48/ je e l i p t i č n o g t i p a / 1-1/. Kada je u pitanju sistem jednačina hiperboličnog tipa onda, kaoš što je poznato, kroz svaku tačku oblsti prolaze dve familije krivih linija, takozvanih " karakteristika", koje se seku medjusobno pod odredjenim uglom. Realni koreni jednačine /2.53/ predstavljaju u stvari diferencijalne jednačine ovih karakteristika. Ako se uvede nova promenljiva

$$2\psi = \pi - \arccos\frac{\operatorname{ctg}\omega}{\sqrt{3}} \qquad /2.54/$$

onda se i diferencijalne jednačine /2.53/ znatno uprošćuju i postaju

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi \pm \psi) \qquad /2.55/$$

Iz jednačine /2.55/ se sada lako vidi i geometrijsko značenje ugla ψ. Naime, karakteristike, čitajući jednačinu /2.55/, zaklapaju sa pozitivnim pravcem x-ose naizmenično uglove $\varphi \pm \psi$. Ako je φ ugao, koji glavni napon σ_1 zaklapa sa x-osovinom, onda su karakteristike u odnosu na pravac glavnog napona nagnute pod uglom od $\pm\psi$, što opet znači da one izmedju sebe zaklapaju ugao 2ψ, koji je za razne tačke x, u ravni u opštem slučaju različit.

Da bi se pronašla relacije izmedju nezavisno promeljivih ω i φ duž karakteristika, potrebno je sračunati iz jednačina /2.50/ i /2.48/ totalne diferencijale ovih funkcija. Lakše će se doći do rezultata ako se uvede nova promenljiva $f(\omega)$ kao funkcija od ω /1-2/ u obliku

$$f(\omega) = -\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{3-4\cos^2\omega}}{\sin\omega}\,d\omega \qquad /2.56/$$

posle kraćeg računa, unoseći u jednačine /2.48/ izraze za totalne diferencijale funkcije $f(\omega)$ i φ koji sada imaju oblik

$$df(\omega) = \frac{\partial f}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

i sa oznakama iz /2.49/, dobija se

$$df(\omega) = \frac{\frac{\partial f}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}\left[P'(Q-P\frac{dy}{dx}) - R(Q'-P'\frac{dy}{dx})\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\left[P'(S-R\frac{dy}{dx}) - R(S'-R'\frac{dy}{dx})\right]}{PR'-RP'}$$

$$d\varphi = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}\left[P(Q'-P'\frac{dy}{dx}) - R(Q-P\frac{dy}{dx})\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[P(S'-R'\frac{dy}{dx}) - P(S-R\frac{dy}{dx})\right]}{PR'-RP'}$$

/2.57/

Ako se u izraze /2.57/ unese prva vrednost za dy/dx iz jednačine /2.53/ i odgovarajuće vrednosti funkcija P,Q, R itd. što znači da se traži veza izmedju nezavisno - promenljivih duž prve familije karakteristika, onda se posle sabiranja ovih jednačina i kraćeg računa dolazi do izraza

$$df(\omega) + d\varphi = 0 \qquad \text{ili} \qquad f(\omega) + \varphi = \text{const.} \qquad /2.58/$$

Istim postupkom duž druge familije karakteristika dobija se

$$df(\omega) - d\varphi = 0 \qquad \text{ili} \qquad f(\omega) - \varphi = \text{const.} \qquad /2.59/$$

Problem je dakle sveden na odredjivanje karakteristika datog sistema diferencijalnih jednačina a pomoću jednačina /2.58/ i /2.59/ i samih nezavisno promenljivih , funkcija ψ odnosno ω i φ.

Jednačinama /2.55/, /2.58/ i /2.59/ može se dati i drugi oblik kada se predje na parameterski oblik jednačina karakteristika. Ako se označi sa $\alpha = \alpha(x,y)$ i $\beta = \beta(x,y)$ parametarski oblik jednačina karakteristika i ako su $\psi = \psi(\alpha,\beta)$ i $\varphi = \varphi(\alpha,\beta)$ dati duž jedne krive, recimo α = const., tako da su $\frac{\partial\psi}{\partial\beta}$ i $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$ duž te krive poznati, onda se sistem jednačina /2.48/ sa ranije usvojenim oznakama može napisati u sledećem obliku:

$$\left(P\frac{\partial\alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \left(R\frac{\partial\alpha}{\partial x} + S\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \qquad \left(P'\frac{\partial\alpha}{\partial x} + Q'\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\left(R'\frac{\partial\alpha}{\partial x} + S'\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$$

Izvodi $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$ i $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$ odredjuju se onda jednoznačno ako je determinanta sistema - jednaka nuli.

$$\begin{vmatrix} P\frac{\partial\alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial\alpha}{\partial y} & R\frac{\partial\alpha}{\partial x} + S\frac{\partial\alpha}{\partial y} \\ P'\frac{\partial\alpha}{\partial x} + Q'\frac{\partial\alpha}{\partial y} & R'\frac{\partial\alpha}{\partial x} + S'\frac{\partial\alpha}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

Razvijanjem determinante i unošenjem vrednosti za P,Q,R itd. lako se dolazi do jednačine

$$\left(\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}}\right) - a\left(\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}}\right) + b = 0$$

Koeficijenti a i b imaju ovde iste vrednosti kao u /2.52/. Rešenjem ove jednačine dolazi se do diferencijalne jednačine oblika:

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha} = \mathrm{tg}(\varphi - \psi)\frac{\partial x}{\partial\alpha} \quad ; \quad \psi - \varphi = \eta(\beta) \qquad /2.60/$$

Na sličan način može se pokazati da, ako je data $\psi = \psi(\alpha,\beta)$ i $\varphi = \varphi(\alpha,\beta)$ duž krive, β = const., onda su i $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$ odnosno $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$ duž te krive poznati, analognim postupkom dolazi se do jednačine oblika:

$$\frac{\partial y}{\partial\beta} = \mathrm{tg}(\varphi + \psi)\frac{\partial x}{\partial\beta} \quad ; \quad \psi + \varphi = \xi(\alpha) \qquad /2.61/$$

Problem je sada sveden na rešenje sistema jednačina /2.60/ i /2.61/, s tim što su uvedene nove promenljive $\eta(\beta)$ i $\xi(\alpha)$.

U jednačinama /2.60/ i /2.61/ α i β su uzeti proizvoljno odnosno, izbor parametara u tim jednačinama je slobodan. Može se dakle, umesto α i β uzeti kao parametri $\eta(\beta)$ i $\xi(\alpha)$, kao što su to već uradili H. Geiringer i W. Prager proučavajući jednačine " statički odredjenog stanja" za Mises-ov materijal. Sa ovim jednačinama /2.60/ i /2.61/ dobijaju konačan oblik

$$\frac{\partial y}{\partial\eta} = \mathrm{tg}(\varphi + \psi)\frac{\partial x}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial\xi} = \mathrm{tg}(\varphi - \psi)\frac{\partial x}{\partial\xi} \qquad /2.62/$$

Da rešenje sistema jednačina predstavlja takodje jedno rešenje sistema jednačina /2.48/ potrebno je i dovoljno da funkcionalna determinanta nije identički jednaka nuli.

$$\Delta = \frac{D(x,y)}{D(\eta,\xi)} = \frac{\sin 2\varphi}{\cos(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\eta} \neq 0$$

Da se ovo dokaže mora se prvo u jednačinama /2.60/ i /2.61/ zameniti ψ i φ sa ξ i η. Posle kraćeg računa dolazi se do izraza

$$A_1 = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \mathrm{tg}(\varphi+\psi)\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0 \quad ; \quad A_2 = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \mathrm{tg}(\varphi-\psi)\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$$

U ovim izrazima potrebno je još izvršiti zamenu promenljvih tako da su x i y zavisno, a η i ξ nezavisno promenljive. Pomoću poznatih obrazaca za zamenu promenljivih dobija se

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial \eta};\ \frac{\partial \xi}{\partial y}=-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial y};\ \frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial \xi};\ \frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

a time gornji izrazi prelaze u

$$\Delta A_1=\frac{\partial y}{\partial \eta}-\operatorname{tg}(\varphi+\psi)\frac{\partial x}{\partial \eta};\quad \Delta A_2=\frac{\partial y}{\partial \xi}-\operatorname{tg}(\varphi-\psi)\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

Pošto je po definiciji $A_1=A_2=0$ a $\Delta \neq 0$, time je pokazano da rešenje jednačine (2.62) stvarno predstavljaju jedno rešenje jednačina (2.48).

Dakle, integracijom jednačina (2.62), polazeći od graničnih uslova zadatih po naponima, mogu se konstruisati **p o l j e n a p o n a** za neki zadati problem ravnog stanja napona.

Da bi se konstruisalo polje brzina pomeranja potrebno je razmotriti sistem jednačina (2.44).

Ako se u jednačinama (2.44) izvrši zamena komponentalnih napona pomoću izraza (2.47) dolazi se brzo do jednačina

$$\frac{3\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{3}\cos\omega+3\sin\omega\cos 2\varphi}=\frac{3\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{3}\cos\omega-3\sin\omega\cos 2\varphi}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}}{4\sin\omega\sin 2\varphi} \qquad (2.63)$$

odnosno:

$$12\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial u}{\partial y}+\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right](\sqrt{3}\cos\omega+3\sin\omega\cos 2\varphi)=0$$
$$12\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial v}{\partial y}+\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right](\sqrt{3}\cos\omega-3\sin\omega\cos 2\varphi)=0 \qquad (2.64)$$

Za sistem jednačine (2.64) može se identičnom analizom koja je već učinjena, pri proučavanju sistema parcijalnih jednačina (2.48) dokazati da i za ovaj sistem u ravni (x,y) postoje dve familije krivih linija - karakteristika- koje se seku pod odredjenim uglom i čija diferencijalna jednačina glasi:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi\pm\sqrt{3-4\cos^2\omega}}{\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi-\cos\omega}$$

odnosno sa istom smenom kao u (2.54)

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}(\varphi\pm\psi)$$

Dakle, karakteristike sistema jednačina (2.48) i karakteristike sistema (2.63) se poklapaju.

Da bi se odredile veze izmedju brzina pomeranja duž karakteristika, potrebno je najpre naći zavisnost izmedju komponenata brzine u pravcu tangenata na karakteristike i komponenata u pravcu koordinatnih osovina. Ako se sa v obeleži totalna brzina pomeranja neke tačke M, a sa v_α i v_β komponente brzine pomeranja u pravcu tangenata, na karakteristike (α) i (β) dobija se, kako se sa sl. 2.7 vidi

$$V_\alpha=U\cos(\varphi-\psi)+V\sin(\varphi-\psi)$$
$$V_\beta=U\cos(\varphi+\psi)+V\sin(\varphi+\psi) \qquad (2.65)$$

ili

$$U=\frac{V_\alpha\sin(\varphi+\psi)-V_\beta\sin(\varphi-\psi)}{\sin 2\psi}$$
$$V=\frac{V_\alpha\cos(\varphi+\psi)-V_\beta\cos(\varphi+\psi)}{\sin 2\psi} \qquad (2.66)$$

Na sl. 2.7 (α) karakteristika zaklapa sa pozitivnim pravcem x-a ugao ($\varphi-\psi$), i duž nje je $\mathcal{T}+\varphi=\xi$, dok (β) zaklapa ugao ($\varphi+\psi$) i duž nje je $\mathcal{T}-\psi=\eta$.

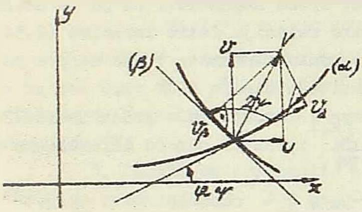
Ako se u izraz za $\dot{\varepsilon}_x$ dat jednačinom (2.42) unesu vrednosti komponentalnih, napona datih jednačinama (2.47) dobija se lako:

$$\dot{\varepsilon}_x = 2\lambda_s K'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\omega + \sin\omega\cos 2\varphi\right) \tag{2.67}$$

pomoću veze (2.54) može se izraz (2.67) napisati i u obliku:

$$\dot{\varepsilon}_x = 2\lambda_s K'\sin\omega(\cos 2\varphi - \cos 2\psi) \tag{2.68}$$

Koji je pogodniji za analizu. Ako se predje na pokretni koordinatni sistem i x-osovina, uzme tako da je uvek tangencijalna na jednu od karakteristika tj. kada se može pisati $\varphi = -\psi$, jednačina (2.68) daje neposredno $\dot{\varepsilon}_x = 0$. To znači da je brzina dilatacije $\dot{\varepsilon}_x$ duž karakteristika jednaka nuli. Ova činjenica se može dobro iskoristiti za odredjivanje diferencijalnih jednačina polja brzina pomeranja. Dakle, ako je



$$\dot{\varepsilon}_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{za\ \varphi = \pm\psi} = 0$$

onda se pomoću prve jednačine (2.66) stavljajući, uzastopno $\varphi = -\psi$ odnosno $\varphi = +\psi$ dolazi do jednačina oblika:

Sl.2.7

$$\begin{aligned} \partial V_\alpha + \left[V_\alpha \operatorname{ctg} 2\psi - V_\beta \frac{1}{\sin 2\psi}\right]\partial\varphi &= 0 \qquad za\ \varphi = \psi \\ \partial V_\beta - \left[V_\beta \operatorname{ctg} 2\psi - V_\alpha \frac{1}{\sin 2\psi}\right]\partial\varphi &= 0 \qquad za\ \varphi = -\psi \end{aligned} \tag{2.69}$$

Prva od jednačina (2.69) daje veze izmedju brzina duž karakteristike (α) a druga duž (β). Detaljnijom analizom može se pokazati da su jednačine (2.69) analogne odgovarajućim Giiringer-ovim za Mises-ov materijal i Chield-ovom za Coulomb-Mohr-ov materijal. Na osnovu ovih jednačina mogu se svakom polju karakteristika integracijom istih naći odgovarajuće polje brzina pomeranja.

Dakle, problem odredjivanja stanja napona i brzina deformacija za ravno stanje napona u p o d r u č j u   s m i c a n j a svodi se na integraciju jednačina (2.48) odnosno (2.62), dakle na odredjivanje polja napona koje zadovoljava granične uslove, postavljenog problema na konturi po naponima. Na osnovu polja napona, odnosno njegovog, polja karakteristika može se integracijom jednačina (2.69) naći odgovarajuće polje brzina pomeranja. Teško da će se ovakvim postupkom doći do tačnog rešenja zadatka pogotovo onda, kada su granični uslovi na konturi dati i po brzinama pomeranja. Kod velike većine, problema, medjutim, polju napona nemože se asocirati polje brzina pomeranja koje ispunjava zadate uslove po brzinama na konturi. U ovakvim slučajevima prirodno je da može od koristi da bude samo polje napona, dok odgovarajuće polje brzina pomeranja može da posluži samo kao dokaz da li su uslovi po brzinama na konturi zadovoljeni.

Iako je u principu moguće, da se polje napona odredi analitičkim putem, primenjujući Riemann-ov metod numeričke integracije parcijalnih jednačina hiperboličnog tipa, mnogo je jednostavnije, kako je to već primetio Hill (1-1), da se primeni metod numeričke integracije, rešavajući jednačine (2.48) i (2.69) metodom konačnih razlika. Zamašnost posla, dugi i jako komplikovani analitički izrazi, pogotovo nemaju smisla kada su, dati takozvani mešoviti granični uslovi i kada se unapred nezna sigurno da li polje karakteristika dobijeno integracijom jednačina (2.48) zadovoljava uslove po brzinama pomeranja na konturi.

Pošto se u daljem radu koristi metod numeričke integracije biće u kratkim crta ma izložen ovaj postupak primenjen na jednačine

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = tg(\chi + \varphi)\frac{\partial x}{\partial \eta} \quad i \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = tg(\chi - \varphi)\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

gde je

$$\xi = \chi + \varphi \qquad i \qquad \eta = \chi - \varphi$$

Ako se u nekom polju karakteristika označi sa $K=0,1,2,\ldots$ tačke karakteristike (α) i sa $l = 0,1,2,\ldots$ tačke karakteristika (β), onda se za tačku $\xi = \xi_k$ i $\eta = \eta_l$ vrednosti za χ, φ, x i y mogu obeležiti sa $\chi_{k,l}$, $\varphi_{k,l}$, $x_{k,l}$ i $y_{k,l}$. Neka se u tačkama $(k-1,l)$ i $(k,l-1)$ mreža poznate vrednosti $\chi_{k-1,l}$, $\varphi_{k-1,l}$, $x_{k,l-1}$ i $x_{k,l-1}$ odnosno vrednosti $\chi_{k,l-1}$, $\varphi_{k,l-1}$, $y_{k,l-1}$ i $x_{k,l-1}$. Treba odrediti vrednosti $\chi_{k,l-1}$, $\varphi_{k,l}$, $x_{k,l}$ i $y_{k,l}$ u tački mreže K, polazeći od gornjih vrednosti za iste promenljive u tačkama $(k, l-1)$ i $(k-1,l)$ kao poznatim. Treba napomenuti da je za uslov plastičnosti (2.25) χ i φ vezano medjusobno preko relacija datim izrazima (2.54) i (2.56). Dakle, kada je vektor spoljnog opterećenja na konturi poznat treba najpre pomoću jednačina (2.47) odrediti ω a zatim pomoću (2.54) i (2.56) χ i ψ.

Za približno odredjivanje veličina $x_{k,l}$ i $y_{k,l}$ moraju se u jednačinama (2.62) parcijalni diferencijali $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ i $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ kao i $\frac{\partial x}{\partial \eta}$ i $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ izraziti pomoću diferencnih količina sledećeg oblika:

$$\frac{x_{k,l} - x_{k-1,l}}{\Delta \xi} \quad i \quad \frac{y_{k,l} - y_{k-1,l}}{\Delta \xi} \quad \text{odnosno}$$

$$\frac{x_{k,l} - x_{k,l-1}}{\Delta \eta} \quad i \quad \frac{y_{k,l-1} - y_{k,l-1}}{\Delta \eta}$$

Ako se ovi izrazi stave u jednačine (2.26) dobijaju se dve linearne jednačine po $x_{k,l}$ i $y_{k,l}$ oblika,

$$\begin{aligned} y_{k,l} - y_{k,l-1} &= (x_{kl} - x_{k,l-1})\, tg(\varphi_{k,l-1} + \psi_{k,l-1}) \\ y_{k,l} - y_{k-1,l} &= (x_{k,l} - x_{k-1,l})\, tg(\varphi_{k-1,l} - \psi_{k-1,l}) \end{aligned} \tag{2.70}$$

Rešavanjem jednačina (2.70) po $x_{k,l}$, $y_{k,l}$ dobijaju se rekurzivni obrasci iz kojih se neposredno odredjuju vrednosti za $x_{k,l}$ i $y_{k,l}$ u obliku:

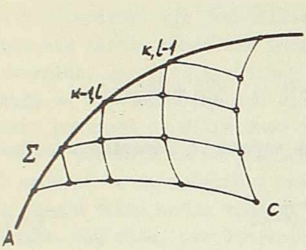
$$\begin{aligned} x_{k,l} &= \frac{y_{k-1,l} - y_{k,l-1} + x_{k,l-1}\, tg(\varphi_{k,l-1} + \psi_{k,l-1}) - x_{k-1,l}\, tg(\varphi_{k-1,l} - \psi_{k-1,l})}{tg(\varphi_{k,l-1} + \psi_{k,l-1}) - tg(\varphi_{k-1,l} - \psi_{k-1,l})} \\ y_{k,l} &= y_{k-1,l} + (x_{k,l} - x_{k-1,l})\, tg(\varphi_{k-1,l} - \psi_{k-1,l}) \end{aligned} \tag{2.71}$$

Ovakvim postupkom odnosno ovim stupnjem tačnosti zadovoljava se veliki broj autora naročito ruske škole. U mnogobrojnim radovima Sokolovskog (1-2) za rešenje različitih problema primenjivan je napred opisan postupak.

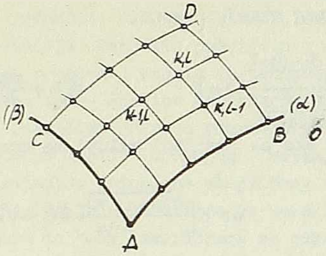
Prilikom konstrukcije polja napona odnosno polja karakteristika mogu nastupiti sledeći granični zadaci:

1. Zadati su vektor spoljnog opterećenja ili naponi duž luka AB neke krive Σ koja nije karakteristika. U pojedinim tačkama krive moguće je dakle sračunati vrednosti χ, φ i ψ kao i početne vrednosti x-a i y-a za usvojen koordinatni sistem. Polazeći od ovih vrednosti mreža karakteristika u krivolinijskom trouglu ABC jednoznačno je odredjena ka o što se lako i neposredno vidi sa sl. 2.8.

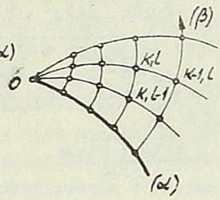
2. Zadate su vrednosti χ, φ i ψ duž dveju karakteristika koje se seku. Kao što se na slici 2.9 vidi, mreža karakteristika je ovim jednoznačno odredjena u krivolinijskom četvorouglu ABCD.



Sl.2.8



Sl.2.9



Sl.10

U ovaj granični zadatak spada i slučaj kada u naponskom polju postoji singularna tačka O iz koje polazi više karakteristika a vrednosti f , φ i ψ su duž jedne od tih karakteristika poznate. Na sl. 2.10 prikazan je deo polja napona u okolini singularne tačke O.

3. Zadate su vrednosti f , φ i ψ duž jedene karakteristike, a osim toga poznate su vrednosti φ duž neke krive Σ , obične konture, koja nije karakteristika. U ovom slučaju vrednosti za f i ψ u pojedinim tačkama polja napona odredjuju se postupno, polazeći duž jedne od karakteristika od poznatih vrednosti u susednim tačkama mreže Šematski prikaz ovog graničnog zadatka dat je na sl. 2.11.

Sl. 2.11

Kada je poznato polje napona, može se onda lako na osnovu njega odrediti odgovarajuće polje brzina pomeranja, pri čemu se prirodno mora poći od zadatih vrednosti brzina pomeranja duž konture. Diferencijalne jednačine (2.69) moraju se prethodno napisati u diferencnom obliku:

$$\frac{v_\alpha^{k,l}-v_\alpha^{k,l-1}}{\psi_{k,l}-\psi_{k,l-1}}=-\frac{v_\alpha^{k,l}+v_\alpha^{k,l-1}}{2}\,\mathrm{ctg}(\psi_{k,l}+\psi_{k,l-1})+\frac{v_\beta^{k,l}+v_\beta^{k,l-1}}{2}\,\frac{1}{\sin(\psi_{k,l}+\psi_{k,l-1})} \qquad (2.72)$$

$$\frac{v_\beta^{k,l}-v_\beta^{k-1,l}}{\psi_{k,l}-\psi_{k-1,l}}=\frac{v_\alpha^{k,l}+v_\alpha^{k-1,l}}{2}\,\frac{1}{\sin(\psi_{k,l}+\psi_{k-1,l})}-\frac{v_\beta^{k,l}+v_\beta^{k-1,l}}{2}\,\mathrm{ctg}(\psi_{k,l}+\psi_{k-1,l})$$

Vrednosti $V_\alpha^{k,l}$ i $V_\beta^{k,l}$ mogu se iz gornjih jednačina odrediti neposredno, jer su sve ostale vrednosti iz polja napona poznate. Granični zadaci koji su napred proučeni za polje napona rešavaju se na sasvim sličan način. U obzir dolaze sledeći granični zadaci po brzinama pomeranja pri konstrukciji polja brzina:

1. Obe komponente vektora brzine pomeranja zada te su duž neke krive (obično konture) koja nije karakteristika.

2. Date su normalne komponente brzina pomeranja duž dveju karakteristika koje se seku.

3. Duž jedne karakteristike zadata je normalna komponenta brzine, dok je duž neke krive koja se sa njom seče a koja nije karakteristika propisana veza $f(v_\alpha , v_\beta)=0$.

Kako je napred već rečeno, područje k i d a n j a u uslovima ravnog stanja napona karakteriše uslov plastičnosti (2.23) kada je $K^{\varkappa} \neq 1$. Najpre će se proučiti statički odredjen zadatak ravnog stanja napona.

Jednačine

$$f = \frac{\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{2ab}{4a^2-1}\right)^2}{\frac{b^2}{(4a^2-1)^2}} + \frac{\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2}{\frac{b^2}{3(4a^2-1)}} - 1 = 0 \qquad \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0\ , \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{2.73}$$

definišu naponsko polje ako su granični uslovi na konturi zadati po naponima u jednačinama (2.73) je

$$a = \frac{\sqrt{K+\mu(1-K)}-\mu}{K+\mu} \qquad b = K\left[\frac{\sqrt{K+\mu(1-K)}-\mu}{K+\mu}\right] - \sqrt{K+\mu(1-K)} \tag{2.74}$$

Ako se uslov plastičnosti (2.73) napiše u parametarskom obliku tako da se za parametar uzme ugao 2ω onda jednačine (2.73) prelazi u jednačine,

$$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - S = q\,\frac{1}{\cos 2\omega} \qquad \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = r\,tg\,2\omega \tag{2.75}$$

gde je

$$S = \frac{2ab}{4a^2-1}\ ; \quad q = \frac{b}{4a^2-1} \quad i \quad r = \frac{b}{\sqrt{3}(4a^2-1)^{1/2}}$$

Komponentalni naponi, pomoću poznatih veza,

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2) \pm \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\cos 2\varphi \qquad \tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\sin 2\varphi$$

gde je φ ugao koji glavni napon σ_1 zaklapa sa pozitivnim pravcem x-osovine, koristeći izraze (2.75) dobijaju sledeći oblik:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = q\,\frac{1}{\cos 2\omega} \pm r\,tg\,2\omega\cdot\cos 2\varphi + S \qquad \tau_{xy} = r\,tg\,2\omega\cdot\sin 2\omega \tag{2.76}$$

Diferencijalne jednačine za konstrukciju polja napona u području kidanje dobijaju se onda lako ako se izrazi (2.76) unesu u jednačine ravnoteže (2.73)

$$\begin{gathered}\frac{q\sin 2\omega + r\cos 2\varphi}{\cos 2\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial x} + r\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial y} - r\sin 2\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \\ r\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{q\sin 2\omega - r\cos 2\varphi}{\cos 2\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial y} + r\sin 2\omega\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \\ + r\sin 2\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0\end{gathered} \tag{2.77}$$

Karakteristična jednačina za sistem parcijalnih jednačina (2.77) slično onome, kako je već uradjeno za jednačine (2.48) dobija se u obliku,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2q\sin 2\omega\sin 2\varphi}{r+q\sin 2\omega\cos 2\varphi}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{r - q\sin 2\omega\cos 2\varphi}{r + q\sin 2\omega\cos 2\varphi} = 0 \tag{2.78}$$

Koreni jednačine (2.78) izgledaju:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{q\sin 2\omega\sin 2\varphi \pm \sqrt{q^2\sin^2 2\omega - r^2}}{r + q\sin 2\omega\cos 2\varphi} \tag{2.79}$$

Vidi se lako da jednačina (2.78) ima dva realna korena sve dokle je $\omega > \frac{1}{2}\arcsin(\pm \frac{r}{q})$. Za ove vrednosti ω sistem jednačina (2.77) je hiperboličnog tipa. Kada je $\omega < \frac{1}{2}\arcsin(\pm \frac{r}{q})$ sistem je eliptičnog tipa. Ako je medjutim, $\omega = \frac{1}{2}\arcsin(\pm \frac{r}{q})$, jednačine pripadaju paraboličnom tipu.

Kada je u pitanju sistem jednačina hiperboličnog tipa onda kroz svaku tačku oblasti prolaze dve familije krivih linija takozvanih "karaketristika" koje se medjusobno seku pod odredjenim uglom. Može se lako pokazati, kao što je to već primetio Sokolevski (1-2), da se karakteristike poklapaju sa linijama klizanje, što bi značilo da hiperbo [illegible] [illegible] jednačina karakteriše granično stanje klizanja po ravnima u kojima su smičući naponi postigli odredjenu graničnu vrednost. Za područje smicanja, dakle, karakterističan je hiperbolički tip jednačina. Za jednačine eliptičnog tipa, medjutim, nije do danas poznata slična mehanička interpretacija. Ovaj tip parcijalnih jednačina poslužio , je u mehanici, za rešenje velikog broja problema, važnih za tehničku praksu, naročito onda kada su u pitanju idealno elastična tela. Analiza karakteristične jednačine (2.78) medjutim, pokazuje da eliptičnom tipu jednačine pripada područje gde ogledi (v.sl.2.2 , 2.3 i 2.4) pokazuju da se granično stanje dostiže kidanjem (cepanjem).Takav podatak , navodi onda na to da mehaničku interpretaciju jednačina eliptičnog tipa u uslovima graničnog stanja treba možda tražiti u opisivanju pojava koje su karakteristične za područje kidanja. Još više, ova činjenica može da bude iskorišćena za odredjivanje teorijske, granice koja odvaja područje kidanja od područja smicanja.

Napred je već rečeno, da granicu koja odvaja područje smicanja od područja kidanja definiše presek paraboloida i konusa ili što je isto, u slučaju ravnog stanja napona, presek elipse (2.25) i hiperbole (2.73). Koordinate preseka su u tom slučaju funkcije parametara K i μ .

Razmatranjem jednačine (2.75) može se kriterijum, kada je sistem jednačina (2.77) hiperboličan odnosno eliptičan, izvesti i na drugi način. Naime, ako se formira prvi izvod krive date jednačinom (2.75)

$$\frac{\frac{d\tau_m}{d\omega}}{\frac{dp}{d\omega}} = \frac{d\tau_m}{dp} = \frac{r}{q}\,\frac{1}{\sin 2\omega}$$

i uzme za ugao 45° odnosno 135° koji tangenta na ovu krivu zaklapa sa p osovinom dobija se neposredno,

$$\sin 2\omega = \mp \frac{r}{q} \qquad \text{ili} \qquad \sin 2\omega = \mp \frac{\sqrt{[illegible]^2 - 1}}{\sqrt{5}} \qquad (2.80)$$

Znači, kada je ugao koji tangenta zaklapa sa pozitivnom p-osovinom,manji od 45° ili veći od 135° sistem jednačina (2.77) je hiperboličan, i kriva data jednačinom - (2.75) se može prikazati u realnoj oblasti za [illegible] (τ_n ,σ_n) vidi str.31 uslov (2.38) , odnosno, kada je ugao veći od 45° ili manji [illegible] sistem jednačina je eliptičan i ne može se prikazati u realnoj oblasti za [illegible].

Da jednačina (2.75), zajedno sa jednačinama ravnoteže pripadne eliptičnom tipu jednačina, potrebno i dovoljno da asimptote hiperbole zaklapaju ugao 45° odnosno 135 sa pozitivnom p-osovinom.Na osnovu ovoga može se pisati

$$\mathrm{tg}\,[illegible] = \frac{[illegible]}{\sqrt{5}}$$

jer su r i q poluose hiperbole. Stavljajući za tg =1 tj. posmatrajući granu hiperbole koja se razvija u području pritiska dobija se, $K^2 + K(5\mu - 1) + 4\mu^2 - \mu = 0$, odnosno za K vrednosti

$$K_{1,2} = \frac{-(4\mu - 1)}{[illegible]\mu}$$

Koordinate preseka hiperbole i elipse, tj. vrednosti p i τ_m tačke koja odvaja područje, smicanja od područja kidanja. Koristeći prvu vrednost za K iz (2.81), dobijaju sledeće, vrednosti,

$$p = -\frac{1}{[illegible]}(1 - 4\mu) \quad , \quad \tau_m = \pm \frac{1}{[illegible]}([illegible] - [illegible]\mu)^{1/2} \qquad (2.82)$$

Može se lako videti da koordinate tačke na elipsi (2.25) koja odvaja područje hiperboličnog od područja eliptičnog tipa (2.53) pada iza tačke čije su koordinate date u (dr).

što znači da ova dva kriterijuma nisu u koliziji.

Sa ovim napomenama, zadatak odredjivanja polja napona za slučaj ravnog stanja napona svodi se u području smicanja na integraciju jednačine (2.48) odnosno (2.62) uz uslov da je

$$p < -\frac{1}{2}(1-4\mu) \quad ; \quad \tau_m \geq \frac{1}{2}(3-8\mu)^{1/2}$$

i u području kidanja na integraciju jednačine (2.77) uz uslov

$$p > -\frac{1}{2}(1-4\mu) \quad ; \quad \tau_m < \frac{1}{2}(3-8\mu)^{1/2}$$

Ovako odredjena granica koja deli područje kidanja od područja smicanja nije u suprotnosti sa rezultatima ogleda što se lako može videti i iz sl. 2.2 i 2.4.

2.4.2 Osnovne jednačine ravnog stanja deformaci

Na osnovu razmatranja u poglavlju 2.3.2. uslov plastičnosti za slučaj ravnog stanja deformacija dat je jednačinama (2.31.),(2.32) i (2.33). Iz diskusije na str. 58 i 59. vidi se da jednačina (2.36) u celini prikazuje područje smicanja u slučaju ravne deformacije.

Brzine komponentalnih deformacija različitih od nule na osnovu (2.16) i uzimajući u obzir (2.28) izgledaju

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= 2\lambda_s\left[\frac{1-\mu}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right] \\ \dot{\varepsilon}_y &= 2\lambda_s\left[\frac{1-\mu}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\right] \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 4\lambda_s\tau_{xy} \end{aligned} \tag{2.83}$$

Sa istom pretpostavkom o veličini deformacije kao kod ravnog stanja napona veze izmedju komponentalnih brzina pomeranja i komponentalnih napona se dobijaju u obliku

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{(1-\mu)+(\sigma_x-\sigma_y)} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{(1-\mu)+(\sigma_y-\sigma_x)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}}{4\tau_{xy}} \tag{2.84}$$

Dakle slično kao kod ravnog stanja napona jednačine (2.84) od kojih su dve nezavisne, sa uslovom plastičnosti (2.31) ili (2.36), uslovom (2.28) i jednačinama ravnoteže (2.45), predstavljaju potrebne i dovoljne uslove za jednoznačno odredjivanje stanja napona i brzina deformacija u uslovima ravne deformacije. Za šest nepoznatih funkcija – četiri komponentalna napona σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, i dva komponentalna pomeranja $\dot{u}$ i $\dot{v}$ – postoji i napred nabrojenih šest uslova.

Jednačine ravnoteže, uslov plastičnosti i uslov (2.28) medjutim, sami za sebe i u slučaju ravne deformacije definišu takozvani "statički odredjen zadatak". Ako su granični uslovi na konturi zadati po naponima ove jednačine [illegible] definišu polje napona.

Najpre će se razmatriti slučaj " statički odredjenog stanja". Ako se podje od uslova plastičnosti koji je dat u ravni (σ_n, τ_n) u obliku,

$$\Phi = \tau_n - f(\sigma_n) = 0$$

i uvede parametar 2ψ, čije se geometrijsko značenje vidi sa sl.2.7, odnosno koji vezuje σ_n i τ_n preko relacije

$$\frac{d\tau_n}{d\sigma_n} = \text{ctg}2\psi \tag{2.85}$$

mogu σ_n i τ_n s obzirom na značenje ugla 2ψ napisati u obliku,

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \sigma_n + \tau_n \frac{\cos 2\psi \pm \cos 2\varphi}{\sin 2\psi}$$

$$\tau_{xy} = \tau_n \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\psi}$$

(2.86)

Unoseći jednačine (2.86) u uslov ravnoteže i uvodeći novu promenljivu f koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu (Mandel 1-1),

$$2df = \frac{d\sigma_n}{\tau_n} - \ldots \qquad (2.87)$$

posle kraćeg računa, dolazi se do osnovnog sistema jednačina polja napona u obliku,

$$(1+\cos 2\psi \cos 2\varphi)\frac{\partial f}{\partial x} + \cos 2\psi \sin 2\varphi \frac{\partial f}{\partial y} - \sin 2\psi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\sin 2\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos 2\varphi\right) = 0$$

$$\cos 2\psi \sin 2\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + (1-\cos 2\psi \cos 2\varphi)\frac{\partial f}{\partial y} + \sin 2\psi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos 2\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\sin 2\varphi\right) = 0 \qquad (2.88)$$

Ako se obeleži se,

$P = 1 + \cos 2\psi \cos 2\varphi$, $Q = \cos 2\psi \sin 2\varphi$, $R = -\sin 2\psi \sin 2\varphi$, $S = +\sin 2\psi \cos 2\varphi$

i sa

$P' = \cos 2\psi \sin 2\varphi$ $\quad Q' = 1 - \cos 2\psi \cos \varphi$, $R' = \sin 2\psi \cos 2\varphi$, $S' = \sin 2\psi \sin 2\varphi$

i sračunaju koeficijenti karakteristične jedna čine a i b slično onome kako je već ura radjeno u slučaju ravnog stanja napona, dobiće se karakteristična jednačina u sledećem obliku

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi + \cos 2\psi}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\cos 2\varphi - \cos 2\psi}{\cos 2\varphi + \cos 2\psi} = 0 \qquad (2.89)$$

Jednačina (2.89) ima dva različita realna korena

$$\frac{dy}{dx} = tg(\varphi \pm \psi) \qquad (2.90)$$

što znači da sistem jednačina (2.88) pripada hiperboličnom tipu jednačina za svaku vrednost parametra ψ.

Ako se u izraze (2.87) unesu vrednosti ..., naizmenično, prva i druga vrednost prvog izvoda karakteristike (2.90), posle kraćeg računa dobiće, se veze izmedju promenljivih f i φ duž prve odnosno druge familije karakteristika u obliku

$$f \pm \varphi = \text{const.} \qquad (2.91)$$

Problem je, dakle, i za ravno stanje deformacija sveden na odredjivanje karakteristika datog sistema diferencijalnih jednačina a ... jednačina (2.91) i ... nezavisno promenljivih funkcija f i φ.

Slično kao kod ravnog stanja napona jednačinama (2.90) i (2.91) može se dati i drukčiji oblik, koji je povoljniji naročito za numeričku integraciju, ako se predje na parametarski oblik jednačina karakteristika. Naime ako se stavi

$$f + \varphi = \xi \qquad f - \varphi = \eta$$

posle kraćeg računa stići će se do jednačina

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = tg(\varphi - \psi)\frac{\partial x}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta} = tg(\varphi + \psi)\frac{\partial x}{\partial \eta} \qquad (2.92)$$

koje su po spoljnom obliku identične jednačinama (2.62).

Za uslov plastičnosti dat jednačinom,

$$e_s = \tau_n^2 + (1-\mu)\sigma_n - \frac{1}{3}(1-\mu+\mu^2) = 0$$

$$\operatorname{ctg} 2\Psi = \frac{d\tau_n}{d\sigma_n} = -\frac{(1-\mu)}{2\left[\frac{1}{3}(1-\mu+\mu^2) - (1-\mu)\sigma_n\right]^{1/2}}$$

dok se, τ_n i σ_n dobijaju u obliku

$$\tau_n = -\frac{1-\mu}{2}\operatorname{tg} 2\Psi \qquad \sigma_n = \frac{1}{3}\frac{1-\mu+\mu^2}{1-\mu} - \frac{1-\mu}{4}\operatorname{tg}^2 2\Psi \qquad (2.93)$$

Sa vrednosti iz (2.93), komponentalni naponi dati su sledećim izrazima:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}\,\frac{1-\mu+\mu^2}{1-\mu} - \frac{1-\mu}{2}\operatorname{tg} 2\Psi\left(\frac{\operatorname{tg} 2\Psi}{2} + \frac{\cos 2\Psi \pm \cos 2\varphi}{\sin 2\Psi}\right)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1-\mu}{2}\,\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\Psi} \qquad (2.94)$$

Kada je uslov plastičnosti zadat, može se lako izračunati funkciju f pomoću diferencijalne jednačine (2.87) $2d(f+\varphi) = \frac{d\sigma_n}{\tau_n}$ pomoću (2.93) dobija se, $2d(f+\Psi) = d(\operatorname{tg}2\Psi)$ i konačno

$$f = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\Psi - \Psi \qquad (2.95)$$

Sa ovako sračunatom vrednošću za lako se odredjuju ξ i η

$$\xi = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\Psi - \Psi + \varphi$$

$$\eta = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\Psi - \Psi - \varphi \qquad (2.96)$$

Dakle, integracijom jednačina (2.62), polazeći od graničnih uslova zadatih po naponima, mogu se konstruisati p o l j a n a p o n a za neki zadati problem ravne deformacije.

Da bi konstruisalo polje brzina pomeranja potrebno je razmotriti sistem jednačina (2.84). Pomoću izraza (2.83) i (2.94) brzine komponentalnih deformacija dobija se u obliku

$$\dot{\varepsilon}_x = \lambda_s(1-\mu)\left(1-\frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\Psi}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_y = \lambda_s(1-\mu)\left(1+\frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\Psi}\right) \qquad (2.97)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = -2\lambda_s(1-\mu)\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\Psi}$$

Sada jednačine (2.84) izgledaju:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\cos 2\Psi - \cos 2\varphi} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\cos 2\Psi + \cos 2\varphi} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}{2\sin 2\varphi} \qquad (2.98)$$

ili

$$\frac{2\sin 2\varphi}{\cos 2\Psi - \cos 2\varphi}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (2.99)$$

$$\frac{2\sin 2\varphi}{\cos 2\Psi + \cos 2\varphi}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

I za ovaj sistem jednačina može se lako pokazati da karakteristična jednačina ima dva različita realna korena oblika,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi \pm \Psi)$$

odakle se može zaključiti, da se i u uslovima ravne deformacije karakteristike polja napona (2.90) i polja brzina pomeranja poklapaju.

Može se isto tako lako pokazati, da se veze izmedju brzina pomeranja duž karakteristika dobijaju na isti način i u istom obliku kao i u slučaju ravnog stanja napona. Dakle, jednačina (2.65), (2.66) i (2.69) važe u celini i za slučaj ravne deformacije.

Prema tome, zadatak odredjivanja stanja napona i brzina pomeranja za slučaj ravne deformacije u području smicanja doveden je kao što se vidi, do po obliku istih diferencijalnih jednačina. Zato sve napomene učinjene u vezi rešavanja različitih graničnih zadataka za slučaj ravnog stanja napona važe i u ovom slučaju u celini. Isto tako, obrasci za numeričku integraciju diferencijalnih jednačina polja napona i polja brzina pomeranja koji su izvedeni za slučaj ravnog stanja napona, važe i za ravnu deformaciju.

Kako je napred već rečeno, područje k i d a n j a u uslovima ravne deformacije karakterisano je uslovom plastičnosti (2.32) i (2.33) odnosno (2.37). Iz analize na str. i se vidi, da se uslov (2.37) ne može prikazati u realnoj oblasti (σ_n, τ_n) kada je $K^x = 1$. Pogotovo se to nemože uraditi ako je $K^x = (1-4 [illegible])$, kako je dato obrascem (2.81), kao i kod ravnog stanja napona, područje kidanja karakterisano sistemom jednačina eliptičnog tipa.

Ako se uvede nova promenljiva ω tako da je

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = g\omega$$
$$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \frac{f}{g} - [illegible] \qquad (2.100)$$

uslov plastičnosti (2.32) je zadovoljen, kada je $g = \frac{3\alpha}{(1-3\alpha^2)^{1/2}}$ a $f = \frac{K_1}{[illegible]}$. Komponentalni naponi su onda

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \frac{f}{g} - \omega(1 \mp g\cos 2\varphi)$$
$$\tau_{xy} = g\omega \sin 2\varphi \qquad (2.101)$$

Unoseći izraze (2.101) u jednačine ravnoteže dolazi se, posle kraćeg računa, do osnovnog sistema diferencijalnih jednačina naponskog polja za područje kidanja u uslovima ravne deformacije u obliku

$$(g\cos 2\varphi - 1)\frac{\partial\omega}{\partial x} + g\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial y} - 2g\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2g\omega\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$
$$g\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x} - (1+g\cos 2\varphi)\frac{\partial\omega}{\partial y} + 2g\omega\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2g\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \qquad (2.102)$$

Ako se obeleži sa:

$P = g\cos 2\varphi - 1$, $Q = g\sin 2\varphi$, $R = -2g\sin 2\varphi$, $S = 2g\omega \cos 2\varphi$

$P' = g\sin 2\varphi$ $Q' = -(1+g\cos 2\varphi)$, $R' = 2g\omega\cos 2\varphi$, $S' = 2g\omega\sin 2\varphi$

i sračunaju koeficijenti karakteristične jednačine a i b, slično onome kako je već urađeno za jednačine (2.48), dobija se

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi - g}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\cos 2\varphi + g}{\cos 2\varphi - g} = 0 \qquad (2.103)$$

čiji su koreni,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2\varphi \pm \sqrt{1-g^2}}{\cos 2\varphi - g} \qquad (2.104)$$

Ako je $1-g^2 = \frac{1-12\alpha^2}{1-3\alpha^2} > 0$ postoje dva realna različita korena i sistem jednačina (2.102) je hiperboličan. Ako je, međutim, $1-g^2 = \frac{1-12\alpha^2}{1-3\alpha^2} > 0$ postoje dva kompleksna korena, i sistem jednačina je eliptičan. Može se, međutim, lako pokazati da su koreni, kompleksni za sve vrednosti koeficijenta μ koje su u slučaju betona praktično moguće, ako se u gornje izraze unese vrednost za $K^x = 1$ dobija oblik,

$$1-g^2 = \frac{(1+\mu)^2 - 4(1-\mu)^2}{(1+\mu)^2 - 4(1-\mu)^2} < 0$$

tako da je uslov ispunjen za sve vrednosti μ manje od 0,33 i veće od 0. Iz ovoga se da zaključiti da je sistem jednačina (2.102) eliptičnog tipa za sve vrednosti koeficijent μ koje se u praksi mogu javiti.

Ako je K 1 onda je (vidi jed.(2.6))

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ \text{[illegible]}\ \right]$$

Uzimajući za K prvu vrednost iz (2.81) i analizirajući uslov plastičnosti (2.32) može se pokazati da, s obzirom da je za taj slučaj $\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, vrednost imenitelja $(1-3\mathcal{L}^2)$ postaje nula, što znači da uslov (2.32) degeneriše u pravu paralelnu τ_m -osovini. Dakle, prelazi u uslov (2.33).

Znači sve dokle se vrednost za K kreće između jedinice i $(1-4\mu)$, za odredjivanje polja napona u području kidanja uz odgovarajuće granične uslove, merodavan je sistem jednačina (2.102), koji je, kao što je pokazano za ove vrednosti K eliptičan. Za $K<(1-4\ )$ uslov plastičnosti (2.32) prelazi u uslov (2.33).

Može se isto tako lako pokazati da uslov (2.33) sa jednačinama ravnoteže definiše sistem parcijalnih jednačina, koji takodje pri ada eliptičnom tipu. Ako se uslov plastičnosti (2.33) napiše u sledećem obliku,

$$f_r = \sigma_x + \sigma_y - \mu = 0$$

i ako se uvede takozvana naponska funkcija ϕ, tako da komponentalni naponi u obliku,

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \tag{2.105}$$

jednoznačno zadovoljavaju uslove ravnoteže, može se stavljajući izraze (2.105) u uslov plastičnosti (2.33), doći do diferencijalne jednačine problema u obliku,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\mu \tag{2.106}$$

Ovo je, kao što se vidi, Laplasova jednačina za koju je poznato da je eliptičnog tipa.

Dakle, u uslovima ravne deformacije, zadatak odredjivanja stanja napona i deformacija svodi se u području smicanja, uz odgovarajuće granične uslove, na integraciju jednačina (2.92), za polje napona i jednačine oblika (2.69) za polje brzina pomeranja. U području kidanja, ako je $(1-4\mu) < K < 1$, zadatak određivanja polja napona svodi, se na integraciju jednačina (2.102), sve dok je $p>$ [illegible] i τ_m [illegible] $+ \frac{1-\mu}{2}$) Jednačine (2.106) postaju merodavne za konstrukciju polja napona ako je $K<(1-4\mu)$, $p =$ [illegible] i $0<\tau_m<\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\mu} + \frac{1-\mu}{2}\right)$.

2. 5. POVRŠINE DISKONTINUITETA U POLJU NAPONA I POLJU BRZINE DEFORMACIJA

2. 5. 1. POVRŠINA DISKONTINUITETA U POLJU NAPONA

Poznato je (1-3 i 1-11) da se u polju napona mogu dva područja, u kojima je stanje napona različito, vezati pomoću površine diskontinuiteta ne rešavajući uslove ravnoteže čitavog polja. Potrebno je i dovoljno da s je dne i druge strane duž površine diskontinuiteta budu jednaki normalni i tangencijalni naponi.

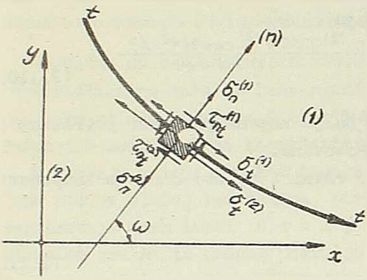
Na sl. 2.12, sa (1) i (2) obeležena su dva područja jednog polja napona povezana površinom diskontinuiteta. Normala na površinu upravna je na z-osovinu i zaklapa ugao ω sa pozitivnim pravcem x-osovine. Na površini diskontinuiteta uočen je elementarni delić i obeleženi naponi koji na njega deluju.

Sa skice se vidi da je u graničnom stanju moguće vezati dva područja jednog naponskog polja površinom diskontinuiteta ako je

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(1)} \qquad \tau_{nt}^{(1)} = \tau_{nt}^{(2)} \tag{2.107}$$

dok je $\sigma_t^{(1)} \neq \sigma_t^{(2)}$, dakle menja se preko površine diskontinuiteta na diskontinualan način

Prirodno je da pošto se radi o graničnom stanju, stanje napona u području (1) i (2) mora istovremeno da ne narušava uslov plastičnosti tj. mora biti $f(\sigma_{ij}) \leqslant 0$.

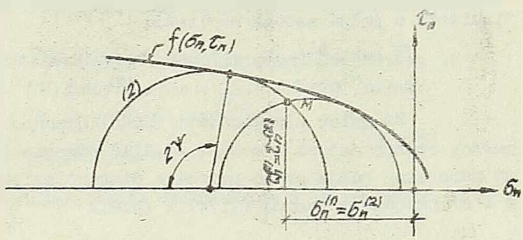


Sl. 2.12

Vrlo dobra predstava o mogućnosti vezivanja dva područja polja napona razdvojena površinom diskontinuiteta dobija se u koordinatnom sistemu (σ_n, τ_n) pomoću Mohr-ovih krugova napona. Potrebno i dovoljno će biti, da se dva kruga napona seku u jednoj tački, što znači da za odredjenu ravan imaju σ_n i τ_n jednako i da obe istovremeno ne seku krivu $e(\sigma_n, \tau_n)=0$, dakle, ne narušavaju uslov plastičnosti. Geometrijska predstava mogućnosti diskontinuiteta u uslovima graničnog stanja jasna je sa sl. 2.13.

Može se lako pokazati, kao što je to već učinio Sokolovski (1-2), da površina diskontinuiteta u polju napona ne sme da bude karakteristika odnosno površina klizanja, niti anvelopa karakteristika odnosno anvelopa površina klizanja.

Da bi se ispisali analitički izrazi za uslove duž površine diskontinuiteta zgodno je poći od izraza (2.86) gde su komponentalni naponi izraženi pomoću τ_n, σ_n, ψ, φ i koji istovremeno zadovoljavaju uslov plastičnosti oblika $e(\sigma_n, \tau_n)=0$. Ovde τ_n i σ_n označavaju normalnu i tangencijalnu komponentu totalnog napona za ravan čija normala zaklapa ugao $\frac{\pi}{2} - \psi$ sa pozitivnim pravcem x-osovine. Naponske komponente σ_n, σ_t i τ_{nt} mogu se lako izraziti pomoću komponentalnih napona σ_x, σ_y i τ_{xy} rotacijom koordinatnog sistema (x,y) u sistem (t,n) za ugao α (v. sl. 2.14) u obliku



Sl. 2.13

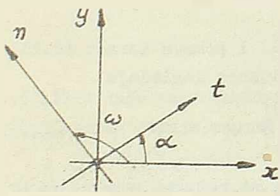
$$\left.\begin{matrix}\sigma_t \\ \sigma_n\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) \pm \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\alpha \pm \tau_{xy}\sin 2\alpha \tag{2.108}$$

$$\tau_{nt} = -\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

Iz obrazca (2.86) lako se mogu izraziti poluzbir i polurazlika komponentalnih napona na sledeći način:

$$\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) = \sigma_n' + \tau_n' \frac{\cos 2\psi}{\sin 2\psi}$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y) = \tau_n' \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}$$



Sl. 2.14

Unoseći ove izraze u (2.108) dobijaju se, posle kraćeg računa, konačni izrazi za komponentalne napone a za rotirani koordinatni sistem

$$\left.\begin{matrix}\sigma_t \\ \sigma_n\end{matrix}\right\} = \sigma_n + \tau_n \frac{\cos 2\psi \pm \cos 2(\psi-\alpha)}{\sin 2\psi} \tag{2.109}$$

$$\tau_{nt} = \tau_n' \frac{\sin 2(\psi+\alpha)}{\sin 2\psi}$$

Ako t osovina leži u površini diskontinuiteta a n je normala te površine, onda komponentalni naponi u (2.109) deluju duž površine diskontinuiteta.

Uslovi, da bi dva područja polja napona bila povezana površinom diskontinuiteta za uslov plastičnosti oblika $e(\sigma_n, \tau_n) = 0$ izgledaju

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} + \tau_n^{(1)} \frac{\cos 2\psi^{(1)} - \cos 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L})}{\sin 2\psi^{(1)}} &= \sigma_n^{(2)} + \tau_n^{(2)} \frac{\cos 2\psi^{(2)} - \cos 2(\psi^{(2)} - \mathcal{L})}{\sin 2\psi^{(2)}} \\ \tau_n^{(1)} \frac{\sin 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L})}{\sin 2\psi^{(1)}} &= \tau_n^{(2)} \frac{\sin 2(\psi^{(2)} - \mathcal{L})}{\sin 2\psi^{(2)}} \end{aligned} \qquad (2.110)$$

gde indeksi (1) i (2) označavaju dva razna područja polja napona povezana površinom čija normala zaklapa ugao ω sa pozitivnim pravcem x-osovine.

Ako je, medjutim, uslov plastičnosti dat u ravni (p, τ_m) onda se komponentalni napon za koordinate (t,n) dobijaju u obliku,

$$\begin{aligned} \left.\begin{matrix}\sigma_t \\ \sigma_n\end{matrix}\right\} &= p \pm \tau_m \cos 2(\psi - \mathcal{L}) \\ \tau_{nt} &= \tau_m \sin 2(\psi - \mathcal{L}) \end{aligned} \qquad (2.111)$$

tako da uslovi duž površine diskontinuiteta za uslov plastičnosti oblika $f(p, \tau_m) = 0$ izgledaju,

$$\begin{aligned} p^{(1)} - \tau_m^{(1)} \cos 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L}) &= p^{(2)} \cos 2(\psi^{(2)} - \mathcal{L}) \\ \tau_m^{(1)} \sin 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L}) &= \tau_m^{(2)} \sin 2(\psi^{(2)} - \mathcal{L}) \end{aligned} \qquad (2.112)$$

Za uslov plastičnosti (2.25) odnosno (2.46) za ravno stanje napona u području smicanja na osnovu jednačine (2.111) i (2.112) može se za uslove duž površine diskontinuiteta u polju napona napisati:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos \omega^{(1)} - \sin \omega^{(1)} \cos 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L}) &= \sqrt{3} \cos \omega^{(2)} - \sin \omega^{(2)} \cos 2(\psi^{(2)} - \mathcal{L}) \\ \sin \omega^{(1)} \sin 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L}) &= \sin \omega^{(2)} \sin 2(\psi^{(2)} - \mathcal{L}) \end{aligned} \qquad (2.113)$$

Za uslov plastičnosti (2.26) odnosno (2.75), a za područje kidanja u uslovima ravnog stanja napona pomoću (2.111) odnosno (2.112), uslovi za povezivanje dva područja naponskog polja preko površine diskontinuiteta glase, uzimajući u obzir vrednosti q, r i s sračunate pomoću (2.74) i (2.81)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos 2\omega^{(1)}} - \operatorname{tg} 2\omega^{(1)} \cos 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L}) &= \frac{1}{\cos 2\omega^{(2)}} - \operatorname{tg} 2\omega^{(2)} \cos 2(\psi^{(2)} - \mathcal{L}) \\ \operatorname{tg} 2\omega^{(1)} \sin 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L}) &= \operatorname{tg} 2\omega^{(2)} \sin 2(\psi^{(2)} - \mathcal{L}) \end{aligned} \qquad (2.114)$$

Za uslov plastičnosti (2.31) odnosno (2.36) a pomoću (2.93) i (2.110) mogu se lako ispisati uslovi duž površine diskontinuiteta za ravnu deformaciju u području smicanja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 2\psi^{(1)} + \frac{\cos 2\psi^{(1)} - \cos 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L})}{\cos 2\psi^{(1)}} &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 2\psi^{(2)} \frac{\cos 2\psi^{(1)} - \cos 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L})}{\cos 2\psi^{(2)}} \\ \frac{\sin 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L})}{\cos 2\psi^{(1)}} &= \frac{\sin 2(\psi^{(2)} - \mathcal{L})}{\cos 2\psi^{(2)}} \end{aligned} \qquad (2.115)$$

Za uslov plastičnosti (2.32), (2.37) ili (2.100) i pomoću izraza (2.111) i (2.112) uslovi duž površine diskontinuiteta za područje kidanja izgledaju

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} [1 + g \cos 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L})] &= \omega^{(2)} [1 + g \cos 2(\psi^{(2)} - \mathcal{L})] \\ \omega^{(1)} \sin 2(\psi^{(1)} - \mathcal{L}) &= \omega^{(2)} \sin 2(\psi^{(2)} - \mathcal{L}) \end{aligned} \qquad (2.116)$$

Može se lako pokazati, kao što su to već uradili za Huber-Mises-ov uslov plastičnosti Winzer i Carrier, da, ako su površine diskontinuiteta ravni i ako povezuju polja napona sa konstantnim stanjem napona, onda se u jednoj tački oblasti moraju seći , n a j m a n j e četiri površine diskontinuiteta.

2.5.2. POVRŠINE DISKONTINUITETA U POLJU BRZINA DEFORMACIJA formacija

Suprotno od zaključka, izvedenog u poglavlju 2.5.1 da karakteristika ili anvelopa karakteristika ne može da bude površina diskontinuiteta, kod polja brzina deformacija može se dokazati da površina diskontinuiteta koja odvaja dva područja jednog polja brzina deformacija mora da bude karakteristika odnosno anvelopa karakteristika (1-2).

U slučaju materijala kod kojega je plastična deformacija praćena povećanjem zapremine kao što je slučaj kod betona, površina diskontinuiteta koja odvaja dva područja, brzina deformacija mora imati d e b l j i n u , odnosno mora biti sloj, koji će omogućiti kontinualan prelaz iz jednog područja brzina na drugo. Iako diskontinuitet u tangencijalnim brzinama duž površine diskontinuiteta mora biti praćen pri prelazu iz jednog područja u drugo, diskontinuitetom u normalnoj komponenti totalne brzine deformacija, to je postojanje sloja za kontinualan prelaz neminovno.

Ako se posmatra srednja površina ovakvog sloja i uvede pokretni koordinatni sistem tako da x-osovina ima pravac tangente a y-osovina pravac normale na srednju površinu onda $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial x}$ mora biti zanemarljivo mala u odnosu na $\frac{\partial u}{\partial y}$. Odavde sledi da je $\dot{\varepsilon}_x$ malo u odnosu na $\dot{\gamma}_{xy}$. Ako se pažljivo pogledaju veze izmedju napona i brzina deformacija videće se lako, da su napred pomenuti uslovi ispunjeni, kad je površina diskontinuiteta karakteristika.

U uslovima ravnog stanja napona pomoću (2.42) i (2.47) komponentalne brzine deformacija imaju oblik,

$$\dot{\varepsilon}_x = 2\lambda_s K' \sin\omega(\cos 2\varphi - \cos 2\psi), \qquad \dot{\varepsilon}_z = 2\lambda_s[1-\mu+2K'\sin\omega\cos 2\psi],$$
$$\dot{\varepsilon}_y = -2\lambda_s K' \sin\omega(\cos 2\varphi + \cos 2\psi), \qquad \dot{\gamma}_{xy} = 4\lambda_s K' \sin\omega \sin 2\varphi \tag{2.117}$$

Stavljajući $\varphi = \pm\psi$, dobiće se za komponentalne brzine deformacija u (x,y) ravni

$$\dot{\varepsilon}_x = 0$$
$$\dot{\varepsilon}_y = 4\lambda_s K' \sin\omega \cos 2\psi,$$
$$\dot{\gamma}_{xy} = \pm 4\lambda_s K' \sin\omega \sin 2\psi. \tag{2.118}$$

Ako se predpostavi da je debljina prenosnog sloja mala tako da se može smatrati da je deformacija homogena, može se pisati;

$$t\dot{\gamma}_{xy} = \delta u \quad \text{zbog} \frac{\partial v}{\partial x} \cong 0 \quad ; \quad t\dot{\varepsilon}_y = \delta v$$

gde je t- debljina prenosnog sloja a δu i δv promena tangencijalne i normalne komponente brzine pomeranja duž površine diskontinuiteta, dobiće se eliminacijom t iz gornji izraza,

$$\delta v = \frac{\dot{\varepsilon}_y}{\dot{\gamma}_{xy}} \delta u \tag{2.119}$$

Jednačina (2.119) daje vezu izmedju promena brzina pomeranja duž površina diskontinuiteta. Za slučaj ravnog stanja napona pomoću jednačina (2.118) dobija se konačno

$$\delta v = \mp \operatorname{ctg} 2\psi \, \delta u \tag{2.120}$$

U uslovima ravne deformacije stavljajući u jednačine (2.97) $\varphi = \pm\psi$ dobija se

$$\dot{\varepsilon}_x = 0$$
$$\dot{\varepsilon}_y = 2\lambda_s(1-\mu)$$
$$\dot{\gamma}_{xy} = -2\lambda_s(1-\mu)\operatorname{tg}2\psi \qquad (2.121)$$

Pomoću jednačina (2.121) i (2.119) dobiće se i veze izmedju promena tangencijalne i normalne komponente totalne brzine pomeranja tačke duž površine diskontinuiteta u uslovima ravne deformacije, istog oblika kao i za ravno stanje napona.

$$\dot{\sigma}_{\psi} = \mp \operatorname{ctg}2\psi\dot{\sigma}_{\nu}$$

gde je u oba slučaja 2ψ ugao koji medjusobno zaklapaju karakteristike.

2. 6. METODA GRANIČNOG STANJA RAVNOTEŽE

U poglavlju 2.4.1 i 2.4.2 već je rečeno, da se primenom metode karakteristika, zadatak odredjivanja stanja napona i deformacija u uslovima graničnog stanja ne može rešiti kompleksno. Zadatak se može rešavati tom metodom samo parcijalno. Da bi se neki problem, smatrao rešenim, treba odrediti takvo polje napona kome će odgovarati polje brzina pomeranja tako, da su uslovi po brzinama pomeranja na konturi zadovoljeni. Samo u retkim slučajevima biće moguće ovim putem naći tačno rešenje postavljenog graničnog zadatka. Sa inžinjerske tačke gledišta, medjutim, kod većine problema graničnog stanja od interesa je odrediti granično opterećenje p_i iako nije poznato tačno rešenje graničnog zadatka tj. iako stvarni raspored napona σ_{ij} i brzina deformacije $\dot{\varepsilon}_{ij}$ nije poznat. Primenom metode g r a n i č n o g s t a n j a r a v n o t e ž e može se veličina graničnog opterećenja odrediti približno, ali za tehničke svrhe dovoljno tačno.

Ne upuštajući se u izvodjenje, ovde će biti navedeni osnovni stavovi ove metode na osnovu koje se odredjuje gornja i donja granica za kritično opterećenje. U tu svrhu neophodne su definicije polja napona ili s t a t i č k i m o g u ć e g p o l j a n a p o n a i k i n e m a t i č k i m o g u ć e g p o l j a brzina pomeranja

Za jedno polje napona kaže se da je statički moguće ako:

a) zadovoljava uslove ravnoteže u svim tačkama tela,

b) zadovoljava granične uslove po naponima na onom delu granice gde su oni propisani, i

c) ako pri tome ni u jednoj tački tela nije narušen uslov plastičnosti, tj. ako je svuda: $f(\sigma_{ij}) \leq 0$

Za jedno polje brzine pomeranja kaže se da je kinematički moguće ako:

a) zadovoljava uslove po brzinama pomeranja na svim delovima konture gde su one propisana,

b) zadovoljava uslov da je kubna dilatacija $e > 0$ tj. da ona nije negativna ni u jednoj tački posmatranog tela, i

c) da je red spoljnih sila duž konture pozitivan.

Iznete definicije postavljaju tačno uslove pod kojima treba tražiti statički i kinematički moguća polja napona odnosno brzina deformacija. Dobro je primetiti da statičko i kinematičko polje nemoraju uopšte odgovarati jedno drugom. Sa napred iznetim definicijama važe sledeći stavovi:

1) Rad u jedinici vremena koji vrše stvarne spoljne sile na zadate brzine na konturi nije manji od rada koji daje proizvoljno statički moguće polje napona na ove brzine.

Neka su p_{ni} komponente vektora spoljnog opterećenja na konturi. Na delu konture, na kome su propisane brzine, spoljno opterećenje nije unapred dato, već ga treba pronaći iz uslova zadataka. Ako se sa p_{ni}^{x} označe komponente vektora spoljnog opterećenja, na onom delu konture koji se dobija konstrukcijom nekog proizvoljnog statički mogućeg po lja napona onda stav istaknut napred dobija sledeći analitički izraz:

$$\oint p_{ni} \dot{v}_i d\Sigma_d \geq \oint \overset{*}{p}_{ni} \dot{v}_i d\Sigma d \tag{2.122}$$

gde je Σd deo konture duž koje vektor spoljnog opterećenja nije unapred dat.

2.) Rad u jedinici vremena, koji vrše sve spoljne sile za brzine proizvoljnog kinematički mogućeg polja nije veći od rada unutrašnjih sila koje odgovaraju ovim brzinama.

Neka su v_i^x komponente vektora brzine pomeranja u nekom proizvoljnom kinematički mogućem polju, kome odgovara polje brzina deformacija $\dot{\varepsilon}_{ij}$. Rad unutrašnjih sila se onda može napisati u sledećem obliku:

$$\int \overset{*}{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dv$$

gde je $\overset{*}{\sigma}_{ij}$ polje napona koje po zadatim vezama izmedju napona i brzine deformacija odgovara polju brzina deformacija $\dot{\varepsilon}_{ij}$, i koji u opštem slučaju nemora da zadovoljava uslove ravnoteže. Sa ovim napomenama uvodeći rad zapreminskih i površinskih sila stav istaknut, pod 2. dobija sledeći analitički izraz:

$$\oint p_{ni} \dot{v}_i d\Sigma_v \leq \int \overset{*}{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dv - \int x_i \dot{v}_i dv - \oint p_{ni} \dot{v}_i d\Sigma p + \sum \oint c \dot{\sigma} \dot{u} dl \tag{2.123}$$

gde je Σ_v - deo konture na kome su zadate brzine pomeranja, x_i zapreminske sile; $\dot{\sigma} u$ je promena ili razlika u tangencijalnim brzinama duž površine diskontinuiteta koja odvaja dva područja izabranog polja brzina deformacije. Poslednji član na desnoj strani jednačine (2.123), onda predstavlja sumu radova unutrašnjih sila duž svih površina diskontinuiteta koje se u posmatranom polju brzina deformacija pojavljuju(1-3).

Na osnovu jednačina (2.122) i (2.123) dobijaju se poznati stavovi graničnih teorema:

a) Granično opterećenje koje odgovara proizvoljnom statički mogućem polju ne može biti veće od stvarnog graničnog opterećenja, i

b) vrednost izraza na desnoj strani jednačine (2.123), koji odgovaraju proizvoljnom kinematički mogućem polju, ne može biti manje od stvarnog graničnog opterećenja.

Obrascima (2.122) i (2.123) date su donja i gornja granica graničnog opterećenja, koje se dobijaju, kao što se vidi, iz jednog proizvoljnog statički mogućeg polja, napona i jednog proizvoljnog kinematički mogućeg polja brzina deformacije. Pri tome, kao što je naglašeno, se ne zahteva, da ova dva polja odgovaraju jedno drugom. Pogodnim izborom mogućih polja napona i brzina deformacija može se postići da ove dve granice budu dovoljno blizu jedna drugoj, pa se na taj način veličina opterećenja može odrediti sa potrebnom tačnošću.

Za uslov plastičnosti dat jednačinom (2.2) odnosno (2.5) može se lako sračunati rad na plastičnom deformisanju jedinice zapremine tela koja se nalazi u graničnom stanju. Ako se podje od, $D = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$, onda se na osnovu (2.12) može pisati, $D = \sigma_{ij} \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ a sa $\sigma_{ij} = S_{ij} + I_{1/3} \sigma_{ij}$ i pomoću (2.13) i prve jednačine (2.20) lako se dobija,

$$D = \frac{\frac{1}{3}\lambda + J_2}{\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^2 + J_2\right]^{1/2}} \left(\dot{I}_2'\right)^{1/2} \tag{2.124}$$

Za uslov plastičnosti (2.6) rad jedinice zapremine tela, ako se prethodno sračuna faktor proporcionalnosti λ_r polazeći od

$$\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{?}{?}\lambda^2\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{K+\mu(1-K)}-\mu}{K+\mu}\right)^2\right]$$

odnosno

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(\dot{I}_2)^{1/2}}{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{K+\mu(1-K)}-\mu}{K+\mu}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{2.125}$$

dobija se za specifičan rad konačno izraz,

$$D_r=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\sqrt{K+\mu(1-K)}-K\frac{\sqrt{K+\mu(1-K)}-\mu}{K+\mu}\right]\frac{(\dot{I}_2)^{1/2}}{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{K+\mu(1-K)}-\mu}{K+\mu}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{2.126}$$

gde je $\quad \dot{I}_2=\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}=\dot{\varepsilon}_x^2+\dot{\varepsilon}_y^2+\dot{\varepsilon}_z^2+\frac{1}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2+\dot{\gamma}_{yz}^2+\dot{\gamma}_{zx}^2)$

Pomoću izraza (2.124) i (2.126) mogu se lako izvesti i obrasci za specifični rad na plastičnom deformisanju tela u specijalnim slučajevima ravnog stanja napona i ravne deformacije kada se izvrši zamena odgovarajućih komponentalnih napona odnosno komponentalnih brzina deformacija, ako se posmatraju samo specijalni slučajevi ravnog stanja napona i ravna deformacija, za uslove plastičnosti (2.25) odnosno (2.37) izvede se takodje lako polazeći od

$$D_r=\tau_n\dot{\delta}_u+\sigma_n\dot{\delta}_v \tag{2.127}$$

gde su τ_n i σ_n tangencijalna i normalne komponenta totalnog napona duž površine diskontinuiteta a $\dot{\delta}_u$ i $\dot{\delta}_v$, promene odnosno razlike u tangencijalnoj odnosno normalnoj komponenti totalne brzine duž iste površine.

Radi lakšeg izvodjenja izraza za specifičan rad u uslovima ravnog stanja napona najpre treba izvršiti transformaciju uslova plastičnosti (2.25) u ravan (τ_n,σ_n). Pomoću obrazaca (2.34) lako se dolazi do

$$\tau_n^2+\frac{1}{4}\left[\sigma_n+(1-\mu)\right]^2-K'^2=0 \tag{2.128}$$

gde je $K'^2=\frac{1}{3}(1-\mu+\mu^2)$.

Uvodjenjem parametra 2ψ mogu se τ_n i σ_n izraziti pomoću 2ψ tako da je uslov (2.128) identički zadovoljen.

$$\tau_n=\frac{K'\,tg\,2\psi}{(tg^2 2\psi+4)^{1/2}}\,,\qquad \sigma_n=\frac{4K'}{(tg^2 2\psi+4)^{1/2}}-(1-\mu) \tag{2.129}$$

Ako se izrazi (2.129) unesu u (2.127) i uzme u obzir veza izmedju promena u komponentalnim brzinama pomeranja duž površine diskontinuiteta (2.120), posle kraćeg računa doći će se do izraza za specifični rad duž površine diskontinuiteta u obliku,

$$D_l=-\left[K'(1+4\,ctg^2 2\psi)^{1/2}+(1-\mu)\,ctg\,2\psi\right]\dot{\delta}_u \tag{2.130}$$

Za ravnu deformaciju komponente totalnog napona duž površine diskontinuiteta, glase

$$\tau_n=-\frac{1-\mu}{2}\,tg\,2\psi$$

$$\sigma_n=\frac{1}{3}\,\frac{1-\mu+\mu^2}{1-\mu}-\frac{1-\mu}{4}\,tg^2\,2\psi$$

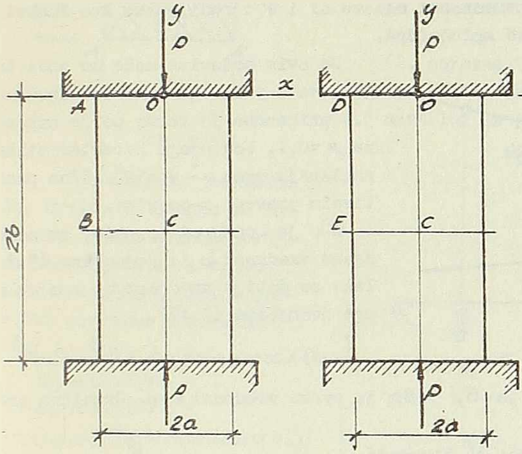
Uzimajući u obzir (2.120) lako se dolazi do izraza za specifični rad duž površina diskontinuiteta u konačnom obliku,

$$D_l=-\left[\frac{1-\mu}{4}\,tg\,2\psi+\frac{1}{3}\,\frac{1-\mu+\mu^2}{1-\mu}\,ctg\,2\psi\right]\dot{\delta}_u \tag{2.131}$$

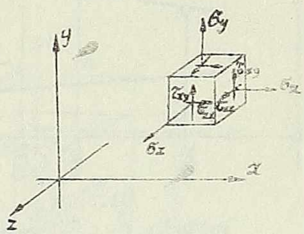
3. Rešenja nekih graničnih zadataka

3.1. DUG PRIZMATIČNI UZORAK OPTEREĆEN PO OSNOVAMA

U ovom odeljku posmatraće se prizmatični uzorak sa kvadratnim poprečnim presekom, stranica 2a dok je odnos visine prema stranici poprečnog preseka veći od 1. Dakle, posmatra se uzorak kod koga je $\frac{b}{a} > 1$. Spoljno opterećenje dejstvuje u pravcu visine uzorka i izvode se pomoću čeličnih ploča vrlo velike krutosti. Osnove uzorka preko kojih se prenosi spoljno opterećenje nisu specijalno obradjivane tako da izmedju čeličnih ploča i uzorka postoje smičuće sile. Na sl. 3.1 pokazana je shema uzorka i položaj usvojenog koordinatnog sistema.



Sl. 3.1



Sl. 3.2

Pošto postoji simetrija u odnosu na sve tri koordinatne osovine kako uzorka, tako i opterećenja, dovoljno će biti posmatrati stanje napona samo u jednom kvadrantu. Ranije je već usvojena pretpostavka da je $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Na sl. 3.2 data je i konvencija o znaku komponentalnih napona. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Granični uslovi dati su na sledeći način: duž stranica koje su paralelne koordinatnim ravnima (y,x) i (y,z), vektor spoljnog opterećenja je nula, tako da duž tih stranica važi $\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Na ovim stranicama granični uslovi dati su dakle, samo po naponima. Na osnovama uzorka koje su paralelne koordinatnoj ravni (x,z), granični uslovi dati su po deformacijama. Sva tri komponentalna pomeranja su u opštem slučaju različita od nule. Duž čitave površine osnove, medjutim, mora vertikalno pomeranje da bude u svim tačkama jednako. Znači da se osnova uzorka u uslovima graničnog stanja kreću konstantnom vertikalnom brzinom.

Polje karakteristika, polazeći od graničnih uslova na bočnim stranama, može se za ovaj slučaj lako odrediti ako se stavi $\sigma_x = \sigma_z = 0$ i $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$. Iz uslova da su smičući naponi jednaki nuli iz treće jednačine (2.47) dobija se $\varphi = 0$. Pošto je $\sigma_y < 0$ tj. priti -

sak , algebarski veći glavni napon, kada su smičući naponi jednaki nuli, tako da se glavni naponi poklapaju sa koordinatnim osovinama, je onda odnosno . To znači da će karakteristike zaklapati ugao $\pm\psi$ sa pozitivnim pravcem x-osovine.

Stavljajući, $\sigma_y = \sqrt{3}\,K'\cos\omega + K'\sin\omega - (1-\mu) = 0$

lako se dolazi do kvadratne jednačine oblika,

$$\sin^2\omega - \frac{1-\mu}{\sqrt{3}K'}\sin\omega + \left(\frac{1-\mu}{2K'}\right)^2 - \frac{3}{4} = 0 \qquad (3.1)$$

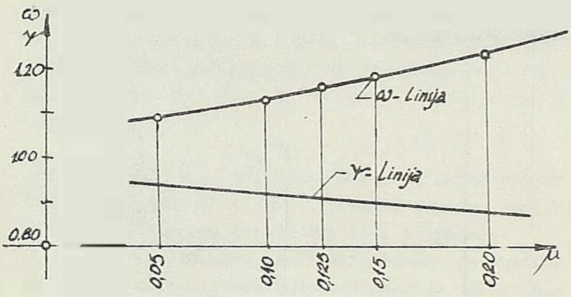
čiji su koreni:

$$\sin\omega = \frac{(1-\mu) \pm \sqrt{3}\,\sqrt{4K'^2-(1-\mu)^2}}{4K'} \qquad (3.2)$$

gde je $K' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-\mu+\mu^2)^{1/2}$.

Pomoću veze, $2\psi = \pi - \arccos\frac{\sin\omega}{\sqrt{2}}$, lako se odredjuje ugao ψ, koji karakteristike zaklapaju sa pozitivnim pravcem x-osovine.

Na dijagramu sl. 3.3 date su vrednosti uglova ω i ψ u radijanima kao funkcija μ-a za veličine koje su praktično moguće kod betona.



Sl. 3.3

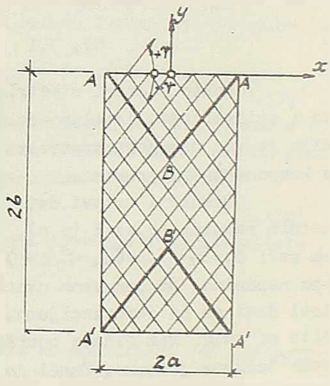
Sa ovim podacima može se onda konstruisati polje karakteristika. Na sl. 3.4 prikazano je takvo polje napona, za $\mu = 0{,}1$. Kod njega karakteristike, zaklapaju ugao $\pm\psi = 52^0\,45'$ sa pozitivnim pravcem x-osovine.

Ako je μ unapred poznato, za odredjenu vrednost ω iz jednačine (3.2) lako se dobija vrednost σ_y pomoću druge jednačine (2.47),

$$\sigma_y = \sqrt{3}\,K\cos\omega_o - K'\sin\omega_o - (1-\mu)$$

Pošto je $\sigma_y = \sigma_y/\beta_{pr}$ izlazi da je $\sigma_y = \beta_{pr}$ za svaku vrednost μ-a. Granična vrednost sile iznosi $P_{cr} = 4a^2$.

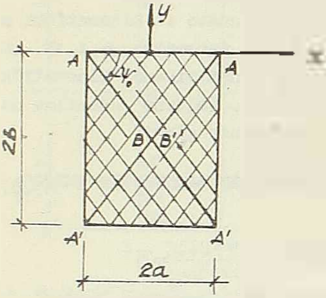
U polju napona na sl. 3.4 jače su izvučene karakteristike AB i AB' koje polaze od ivice osnove i seku se u osovini uzorka. Sve dotle dokle se tačke B i B' ne poklope, tj. dokle se ne može povući karakteristika iz tačke A tako da pogodi tačku A', polje napona će se nalaziti u stanju jednoosnog pritiska. Naime, polje napona biće predstavljeno poljem pravih karakteristika po čitavom telu, koje se seku pod uglom 2ψ. Kao limit slučaj, dokle se u telu javlja jednoosno stanje napona, može se označiti onaj, kod koga se tačke, B i B' poklapaju na osovini uzorka. Ovaj podatak može, se iskoristiti da se odredi granična vrednost odnosno a/b (stranica osnove prema visini) tako da za sve uzorke kod kojih je odnos a/b manji od graničnog, uzorak se nalazi u jednoosnom stanju napona. Na sl. 3.5, pokazano je jedno takvo granično polje napona iz koga se neposredno vidi da mora biti,



Sl. 3.4

$$\xi = \frac{a}{b} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\psi_o} \qquad (3.3)$$

Za vrednosti μ-a, a sa njima i odgovarajuće vrednosti ψ_o, koje praktično kod betona dolaze u praksi, granični odnos ξ se kreće u granicama od 1/1,364 do 1/1,224, kada se μ kreće od μ =0,05 do μ = 0,20. Dakle, sa sigurnošću se može reći da već odnos 1/1,40 osigurava jednoaksijalno stanje u uzorku.

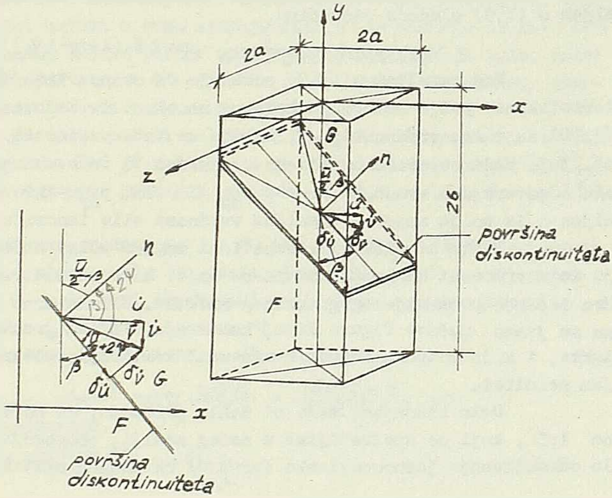


Sl. 3.5

Polje brzina deformacija može se za ovaj slučaj konstruisati polazeći od zadatih uslova po brzinama na konturi. Pretpostaviće se da normala na površinu diskontinuiteta odvaja dva područja od kojih jedno, na sl. 3.6 obeleženo sa F, ostaje u miru, a drugo se, obeleženo sa G, kreće konstantnom brzinom V=L. Dalje, uzeće se da je komponenta totalne brzine u pravcu Z-osovine jednaka nuli tako da je V=1 deluje u ravni (x,y). U odeljku, (2. obrazac 2.119) pokazano je da, promena totalne brzine duž površine diskontinuiteta zaklapa normalom na površini ugao 2ψ.

Za usvojenu jediničnu totalnu brzinu V=1, mogu se lako odrediti njene komponente u pravcu koordinata u i v, kao i normalna i tangencijalna komponenta duž površine diskontinuiteta δ_U i δ_V.

$$\delta_U = \sin 2\psi$$
$$\delta_V = \cos 2\psi$$
$$U = \cos(\bar{U} - 2\psi - \beta) = -\cos(2\psi + \beta) \tag{3.4}$$
$$V = \sin(\bar{U} - 2\psi - \beta) = \sin(2\psi + \beta)$$



Sl. 3. 6

Sa podacima iz (3.4), može se sračunati rad spoljnih i unutrašnjih sila na brzine deformacija kinetički mogućeg polja datog na sl. 3.6. Rad spoljnih sila, s obzirom da je p_{nx}=0 i V = sin(2ψ+β) jednako u svim tačkama osnove uzorka jer se deo G kreće kao kruto telo, iznosi,

$$\int p_{ny}\, V dF = p_{ny} \cdot \sin(2\psi+\beta) \cdot 4a^2 \tag{3.5}$$

Rad unutrašnjih sila, ako se zanemare zapreminske sile, svešće se na sračunavanje rada duž površine diskontinuiteta, jer je s obzirom da je G kruto telo $\int \varepsilon_{ij}\, \delta_{ij} dv = 0$ =0.

Pomoću jednačina (2.123 i 2.130) može se pisati:

$$D_\ell = \phi c \delta u dt = -\left[K'(1+4\operatorname{ctg}^2 2\psi)^{1/2} + (1-\mu)\operatorname{ctg} 2\psi\right] \sin 2\psi \frac{4a^2}{\sin\beta} \tag{3.6}$$

Izjednačavanjem izraza (3.5) i (3.6) odnosno, stavljajući da je rad spoljnih sila jednak radu unutrašnjih sila dobija se jednačina za odredjivanje graničnog opterećenja koje uzorak dovodi u stanje loma, u obliku

$$p_{ny}^{*} = -\left[K\left(1+4\operatorname{ctg}^2 2\psi\right)^{1/2} + (1-\mu)\operatorname{ctg} 2\psi\right]\frac{\sin 2\psi}{\sin(2\psi+\beta)\sin\beta} \qquad (3.7)$$

Iz izraza (3.7) se vidi da granično opterećenje sračunato iz kinematički mogućeg polja, koji inače deluje na osnovama uzorka, zavisi od dva parametra β i ψ . Da bi se odredile minimalne vrednosti kritičnog opterećenja ovako konstruisanog kinematičkog , polja biće potrebno potražiti ekstremum funkcije $p_{ny} = f(\psi, \beta)$. Uslovne jednačine za odredjivanje vrednosti ψ_o i β_o kada je funkcija p_{ny} u ekstremumu glasi

$$\frac{\partial p_{ny}^{*}}{\partial \beta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial p_{ny}^{*}}{\partial \psi} = 0 \qquad (3.8)$$

Prva jednačina (3.8) daje:

$$\frac{dp_{ny}}{d\beta} = \left[K\left(1+4\operatorname{ctg}^2 2\psi\right)^{1/2} + (1-\mu)\operatorname{ctg} 2\psi\right]\frac{\sin 2\psi \sin 2(\psi+\beta_o)}{\sin^2(2\psi+\beta)\sin^2\beta_o} = 0$$

Ako se pretpostavi da je ψ različito od o i $\frac{\pi}{2}$ onda uslovna jednačina za β glasi:

$$\sin 2(\psi + \beta_o) = 0 \quad \text{ili} \quad \beta_o = \frac{\pi}{2} - \psi \qquad (3.9)$$

Druga jednačina (3.8) daće posle kraćeg računa, uzimajući u obzir rezultat dobijen u (3.9) sledeću jednačinu,

$$[illegible] \qquad (3.10)$$

Već rezultat u (3.9) pokazuje da se površina diskontinuiteta poklapa sa karakteristikama polja napona prikazanog na sl. 3.4. Rešavanjem trigonometrijske jednačine, (3.10) za razne vrednosti μ-a, dobiće se iste vrednosti koje su pokazane na dijagramu , sl. 3.3. Kada se ovako odredjene vrednosti ψ_o unesu u jednačinu (3.7) , dobiće se za svaku odgovarajuću vrednost μ-a , $p_{ny}^{*} = 1$ ili $p_{ny} = \beta_{pr}$, dakle isti rezultat koji je dobijen i iz polja napona. Granična vrednost sile iznosiće i ovde $P_{cr} = \beta_{pr} 4a^2$.

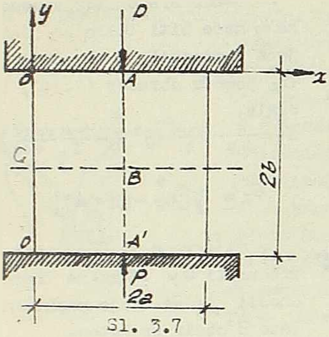
Pošto statički i kinematički moguće polje napona odnosno brzina deformacija daju istu vrednost za kritično opterećenje. Može se smatrati da ovo rešenje predstavlja tačno rešenje postavljenog graničnog zadatka. Elementarno iskustvo i brojni ogledi na kojima se jasno uočava figura loma, kao krajnja slika graničnog stanja dugog prizmatičnog uzorka, i koja potpuno odgovara kinematičkom polju, potvrdjuju ovaj teorijskim putem dobijen rezultat.

Ovim rešenjem, bilo bi dakle pokazano, da normi prizmatičan uzorak odnosa strana 1:3 , koji se upotrebljava u našoj zemlji, obezbedjuje sa velikom sigurnošću, pravilo odredjivanja jednoosovinske čvrstoće betona na pritisak.

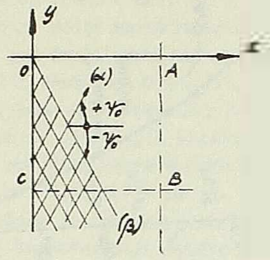
3. 2. DUG PRIZMATIČNI UZORAK OPTEREĆEN PO DUŽOJ STRANI

U ovom odeljku posmatraće se granično stanje dugog prizmatičnog uzorka kvadratnog poprečnog preseka, koji je opterečen po svojoj dužoj strani. Opterećenje se izvodi, kao i kod prethodnog slučaja, pomoću čeličnih ploča vrlo velike krutosti. Pri tome će se posmatrati stanje napona i brzine deformacija srednjeg poprečnog preseka za koji se može smatrati da se nalazi u uslovima ravne deformacije. Na sl. 3.7 pokazana je šema uzorka i položaj usvojenog koordinatnog sistema.

Pošto postoji simetrija i uzorka i opterećenja dovoljno je posmatrati stanje napona i brzina deformacija samo u jednom kvadrantu.



Sl. 3.7



Sl. 3.8

3.2.1 Rešenje pomoću metode karakteristika

3.2.1.1 Polje napona

Najpre će se razmotriti rešenje gore opisanog graničnog zadatka, primenjujući metodu karakteristika tj. odrediće se stanje napona i brzina deformacija numeričkom integracijom jednačina (2.92). Granični uslovi u ovom slučaju dati su na sledeći način: duž stranice OC, dakle na bočnim stranama uzorka vektor spoljnjeg opterećenja je nula, znači duž OC mora biti $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, dok duž strane OA potrebno je da brzina vertikalnog pomeranja v bude konstantna tj. jednaka u svim tačkama stranice OA.

Konstrukciju polja napona treba početi od strane OC, pošto su granični uslovi, duž te stranice dati samo po naponima. Već je rešeno, da je u okolini konture Oc $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, što znači da treba u tom području prvi granični zadatak - (vidi odeljak 2. str 38) odrediti σ_y^* i σ_z^*.

Iz uslova $\tau_{xy}=0$ izlazi neposredno, da je φ ili 0 ili $\frac{\pi}{2}$. Pošto u ovom području σ_y^* mora da bude pritisak (negativan), što znači algebarski veći glavni napon, biće σ_x. Kako je po definiciji ψ ugao koji algebarski veći glavni napon zaklapa sa pozitivnim pravcem x-osovine, to za ovaj slučaj odgovara ψ =0.

Iz uslova $\sigma_x = 0$ (prva jednačina 2.94) i za $\psi = 0$ sledi,

$$\frac{K}{1-\mu} - \frac{1-\mu}{2}\,tg2\psi\frac{tg2\psi_0}{2} + \frac{\cos2\psi_0+1}{\sin2\psi_0} = 0$$

ili nešto u pogodnije obliku za rešavanje,

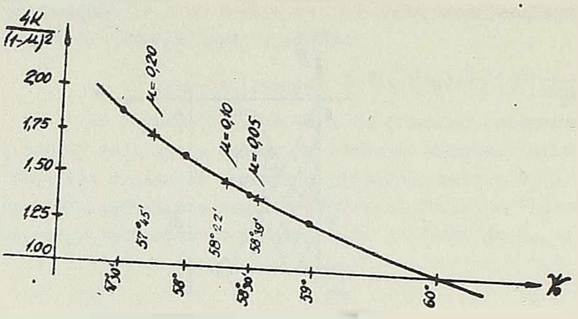
$$tg^2 2\psi_0 + 2\frac{\cos2\psi_0+1}{\cos2\psi_0} = \frac{4K}{(1-\mu)^2} \qquad (3.11)$$

gde je $K = \frac{1}{4}(1-\mu+\mu^2)$.

Trigonometrijska jednačina (3.11) pruže mogućnost da se odredi ψ_0. Sa ovim bi bilo odredjeno i polje karakteristike u okolini konture OC. Ako prema konvenciji usvojenoj ranije, (α) i (β) karakteristike zaklapaju ugao $\mp\psi_0$ sa pravcem algebarski većeg glavnog napona, onda polje karakteristika u okolini konture OC izgleda kako je prikazano na sl. 3.8.

Znači dobija se polje pravih karakteristika koje medjusobom zaklapaju ugao $2\psi_0$. Kao što se sa sl. 3.8 vidi, polje je zatvoreno konturom OCO' i karakteristikama (β) i (α), koje polaze od O i O'.

Na dijagramu sl. 3.9 date su vrednosti ψ_0 kao funkcija μ-a za veličine koje praktično dolaze u obzir za beton.



Sl. 3.9

Sa ovako sračunatim vrednostima za ψ_0 neće biti teško za odgovarajuće vrednosti μ-a dobiti σ_y^* i σ_z^* pomoću obrasca (2.94), (2.23) dakle,

$$\sigma_y^* = \frac{K}{1-\mu} \cdot \frac{1-\mu}{4} tg^2 \psi_0 - \frac{1-\mu}{2} \frac{\cos 2\psi_0 - 1}{\cos 2\psi_0} \qquad (3.12)$$

i

$$\sigma_z^* = \frac{1}{2}\left[\sigma_y^* - (1-\mu)\right]$$

Na dijagramu sl. 3.10 date su vrednosti σ_y^* i σ_z^* za razne vrednosti μ-a koje praktično dolaze u obzir za beton.

Sa ovim je stanje napona u oblasti uz konturu OCC' odredjeno. S obzirom da je polje napona u ovoj oblasti prikazano sistemom pravih karakteristika, dakle u svakoj tački oblasti $\psi = \psi_0$, to je stanje napona konstantno.

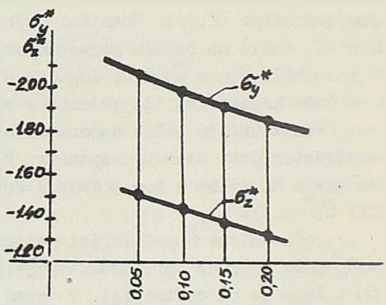
Da bi se moglo konstruisati polje napona dalje, potrebno je odrediti jednačinu karakteristike (β) koja polazi iz tačke 0, kao i vrednosti f, ξ i η za čitavu oblast.

S obzirom na ranije usvojenu konvenciju i jednačine (2,90) može se pisati

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = tg(\varphi - \psi_0)$$

gde su sa $\bar{y}$ i $\bar{x}$ označene bezdimenzione veličine $\bar{y} = \frac{y}{b}$ i $\bar{x} = \frac{x}{a}$, koje će se u daljem radu upotrebljavati za konkretan slučaj. Obzirom da je φ =0 jednačina karakteristike se dobija u obliku

$$\bar{y} = -tg\psi_0 \bar{x} + C_1$$



Sl. 3.10

Kako je, medjutim, za $\bar{x} = \bar{y} = 0$ istovremeno i C_1 jednako nula, konačno se dobija

$$\bar{y} = -tg\psi_0 \bar{x} \qquad (3.13)$$

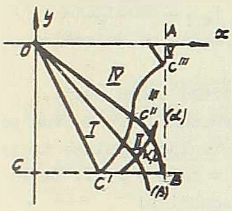
Vrednosti f, ξ i η za ψ_0 sračunavaju se za ovu oblast lako iz obrazaca $f_0 = \frac{1}{2} tg2\psi_0 - \psi_0$, $\xi_0 = \eta_0 = f_0$.

U daljem radu biće sprovedena [illegible] integracija za uzorak sa odnosom strana [illegible]
$\psi_0 = 58^0 22'$, $\varphi = 0$, $f_0 = -2,0114$, $\xi_0 = \eta_0 = -2,0114$, $\bar{y} = -1,$[illegible]

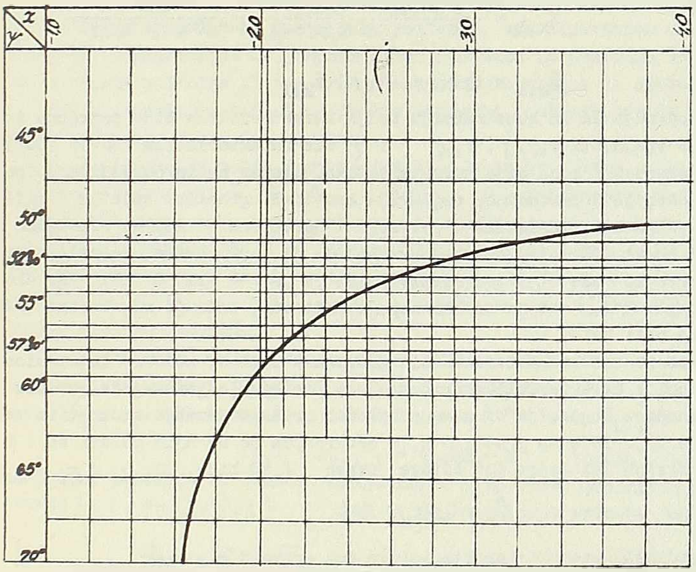
Radi lakšeg izlaganja, na sl. 3.11 biće prikazana celokupna [illegible] polja napona u jednom kvadrantu sa usvojenim načinom obeležavanja pojedinih područja [illegible] preseka karakteristika.

Isto tako, na dijagramu sl. 3.12 prikazana je funkcija $f = \frac{1}{2} tg2\psi - \psi$ za sve vrednosti ψ-a koje su praktično moguće pri daljoj konstrukciji polja napona

U sektoru OC'C", koje je na sl. 3.11 označeno kao područje I, može se konstruisati polje karakteristika pošto su vrednosti $\bar{u}$, $\bar{v}$, f, ξ i η poznate duž (β) karakteristike OC, iz prethodnog razmatranja. Pri tome očigledno je da tačka O mora da bude singularna. Ovakav način odredjivanja polja karakteristika je u prethodnom poglavlju označen kao drugi granični zadatak. Treba odmah napomenuti, da položaj karakteristika OC", neće moći da bude odredjen direktno, samo konstrukcijom polja karakteristika u području I. Krajnji položaj ove karakteristike zavisi medjutim, od krajnjeg položaja karakteristike C"B: završne karakteristike u području II, koje je na sl. 3.11 označeno kao sektor C'C" B. Sa slike je takodje jasno da β karakteristika C"B kao završna karakteristika područja II mora pogadjati tačku B koja se nalazi u preseku osovine simetrije uzorka. Neće se moći odrediti krajnji položaj karakteristika OC" i C"B direktno ni onda, kada bi se konstrukcija polja počela od tačke B. Za tako što bi bilo potrebno da je polje karakteristika u području II već poznato. Dakle, nema mnogo nade da će se stići do rešenja direktnim putem. Najlakše će se, medjutim, doći do rezultata ako se polje karakteristika u području I i II konstruiše tako, da završna karakteristika padne iza tačke B, desno od osovine simetrije. Onda će biti lako moguće, interpolacijom izmedju dvaju susednih karakteristika, odrediti karakteristiku koja zatvara područje I i II.



Sl. 3.11



Sl. 3.12

U području I, sve (β) karakteristike polaze iz singularne tačke O. S obzirom da je dužina OC′ $\xi_o = \eta_o = f_o$ = const, moraju sve (β) karakteristike u ovom području biti prave linije, tj. duž njih mora biti $\xi_1 = \xi_o$ = -2,0114 za čitavo područje. Ako se duž karakteristike OC′ usvoji pet tačaka, uključujući singularnu tačku, i uzme ψ, tako da je $\Delta\psi = 4°$ razlika izmedju susednih (β) karakteristika koje polaze iz tačke O, onda se lako mogu sračunati vrednosti, $\eta_{K,\ell} = \xi_{K-1,\ell} - 2\psi_{K,\ell}$ i $f_{K,\ell} = \frac{\xi_{K,\ell} + \eta_{K,\ell}}{2}$
Kada se ima sračunata vrednost za $f_{K,\ell}$ onda se rešavanjem transcendentne jednačine,

$$f_{K,\ell} = \frac{1}{2}\,tg\,2\psi_{K,\ell} - \psi_{K,\ell}$$

čiji je grafik dat na dijagramu 3.12, odredjuje vrednost $\psi_{K,\ell}$ za svaku tačku mreže.

Ostaje još da se odrede koordinate preseka pojedinih karakteristika u ovom području. Kao što je već rečeno, sve (β) karakteristike su prave linije i polaze iz tačke O. Za jednačinu (β) karakteristike se onda može pisati $\bar{y} = tg(\varphi - \psi)\,\bar{x}$. Za ( ), karakteristike važi s obzirom na (2.92) sledeća diferencijalna jednačina:

$$\frac{dy}{d\eta} = tg(\varphi - \psi)\frac{dx}{d\eta} \tag{3.14}$$

ili ako se umesto parametra η (vidi str.) uzme parametar φ imajući u vidu relaciju, $\varphi = (\xi - \eta)/2$ i da je u ovom slučaju ξ = const, može se diferencijalnoj jednačini (3.14 dati sledeći oblik,

$$\frac{dy}{d\varphi} = tg(\varphi + \psi)\frac{dx}{d\varphi} \tag{3.15}$$

Prelazeći na konačne razlike (diference) za jednačinu (3.15) se može napisati,

$$\bar{y}_{k,1} - \bar{y}_{k-1,1} = tg(\varphi_{K-1,\ell} + \psi_{K-1,\ell})(\bar{x}_{k,1} - \bar{x}_{k-1,1})$$

Uzimajući u obzir veze izmedju $\bar{x}_{k,1}$ i $\bar{y}_{k,1}$ duž karakteristika (β) konačno za koordinate presečnih tačaka u području I dobija,

$$\bar{x}_{k,1} = \frac{-\bar{y}_{k-1,1} + \bar{x}_{k-1,1}\,tg(\varphi_{K-1,\ell} + \psi_{K-1,\ell})}{tg(\varphi_{K,\ell-1} - \psi_{K,\ell-1}) - tg(\varphi_{K-1,\ell} + \psi_{K-1,\ell})} \tag{3.16}$$

$$\bar{y}_{k,1} = tg(\varphi_{K,\ell-1} - \psi_{K,\ell-1}) \cdot \bar{x}_{k,1}$$

U području II za konstrukciju polja karakteristika biće potrebno i dovoljno, ako su poznate vrednosti x,y, f, ψ, η i ξ duž karakteristika (α) (CC") i ako je, dato , duž prave C′B koja nije karakteristika. Ovakav način odredjivanja polja karakteristika označen je u prethodnom poglavlju kao treći granični zadatak (vidi str.39). Konstrukcijom polja karakteristika u području I odredjenu su napred odredjene veličine duž C′C". Duž prave C′B može se lako pokazati da je φ =0. Naime, iz uslova simetrije mora duž ove prave da bude $\bar{\tau}_{xy}$=0. Odatle sledi da je φ ili 0 ili $\frac{\pi}{2}$. Ako se pretpostavi da je $(\bar{\sigma}_y) > (\bar{\sigma}_x)$ i da su oba napona pritisci, onda je algebarski veći napon σ_x. Znači φ mora biti nula.

Polazeći od ovako definisanih graničnih uslova, može se konstruisati u navedenom području polje karakteristika primenjujući striktno odgovarajuće obrasce koji su izvedeni u prethodnom poglavlju uz samo neophodno prilagodjavanje konkretnim uslovima. Tako za tačke mreže koje leže na pravoj C′B, s obzirom da se na njih dolazi sa (β) karakteristika iz područja I i da je duž čitave prave φ =0 biće, $\xi_{K,\ell} = \eta_{K,\ell-1}$ i dalje je zbog φ = 0

$$f_{K,\ell} = \xi_{K\ell} = \eta_{K,\ell} \tag{3.17}$$

Koordinate preseka karakteristika duž prave C′B glase:

$$\bar{y}_{K,\ell} = -1{,}0 \qquad \bar{x}_{K,\ell} = \bar{x}_{K,\ell-1} + \frac{\bar{y}_{K,\ell} - \bar{y}_{K,\ell-1}}{tg(\varphi_{K,\ell-1} - \psi_{K,\ell-1})}$$

$$\bar{x}_{k,l} = \bar{x}_{k,l} + \frac{\bar{y}_{k,l} - \bar{y}_{k,l-1}}{tg(\varphi_{k,\ell-1} - \psi_{k,\ell-1})} \tag{3.18}$$

Za tačke unutar područja II, medjutim, važiće

$$\xi_{k,\ell} = \xi_{k-1,\ell} \qquad \eta_{k,\ell} = \eta_{k,\ell-1} \tag{3.19}$$

a pomoću ovoga i

$$f_{k,\ell} = \frac{\xi_{k-1,\ell} + \eta_{k,\ell-1}}{2} \qquad \psi_{k,\ell} = \frac{\xi_{k-1,\ell} - \eta_{k,\ell-1}}{2} \tag{3.20}$$

Koordinate preseka karakteristika za neku proizvoljnu tačku unutar područja mogu se napisati u sledećem obliku,

$$\bar{x}_{k,l} = \frac{\bar{y}_{k,l-1} - \bar{y}_{k-1,l} + \bar{x}_{k-1,l}\, tg(\varphi_{k-1,\ell} + \psi_{k-1,\ell}) - \bar{x}_{k,l-1}\, tg(\varphi_{k,\ell-1} - \psi_{k,\ell-1})}{tg(\varphi_{k-1,\ell} + \psi_{k-1,\ell}) - tg(\varphi_{k,\ell-1} - \psi_{k,\ell-1})} \tag{3.21}$$

$$\bar{y}_{k,l} = y_{k-1,l} + (x_{k,l} - x_{k-1,l})\, tg(\varphi_{k-1,\ell} - \psi_{k-1,\ell}) \tag{3.21}$$

Ako se hoće da iskoristi polje napona samo za odredjivanje ukupne kritične sile koja dovodi uzorak u granično stanje, onda bi se konstrukcijom polja karakteristika, za područje I i II dobio dovoljan broj podataka. Potrebno bi bilo samo sračunati i integrisati σ_y^* napone duž prave CB, pa bi se dobila sila koja zbog simetrije mora da odgovara spoljnoj kritičnoj sili P_{cr} koja deluje na konturi OA. Medjutim, ako polje napona treba da pokaže raspored napona u čitavom telu, da odgovori na pitanje, koje su veličine i kakav je raspored smičućih napona po konturi OA, a pogotovo onda, ako se hoće da konstruiše odgovarajuće polje deformacije, da bi se eventualno konstatovalo, da li su ispunjeni propisani uslovi po brzinama deformacije na konturi, moraće se konstruisati polje karakteristika i za područja III i IV. Konstrukcija kompletnog polja može da pruži koristan, podatak o tačnosti primenjenog numeričkog postupka, uporedjivanjem ukupne sile duž konture OA, dobijene integracijom σ_y^* napona preko podataka iz područja IV, i ukupne sile dobijene iz podataka područja II i područja konstantnih napona uz slobodnu ivicu uzorka. Sem toga, ovo bi morala da bude i neophodna računska kontrola, da li je, uopšte numerički postupak kao takav sproveden korektno.

Za konstrukciju polja karakteristika u području III biće potrebno slično kao kod područja II, poznavati $\bar{x}$, $\bar{y}$, ψ, f, η i ξ duž karakteristike C"B i veličinu, ψ duž prave BC", koja nije karakteristika. Konstrukcijom polja karakteristika u području II, napred navedene veličine su poznate. Isto kao kod područja II, može se dokazati, da duž osovine simetrije i u ovom slučaju mora da bude $\varphi = 0$. Pošto su granični uslovi isti kao kod područja II, odredjivanje polja karakteristika u području II predstavlja, takodje, treći granični zadatak.

Za tačke mreže koje leže na pravoj C′"B, a obzirom da se na njih dolazi pomoću ($\mathcal{L}$) karakteristika važiće, $\xi_{k,\ell} = \xi_{k-1,\ell}$ i dalje zbog $\varphi = 0$ $f_{k,\ell} = \eta_{k,\ell} = \xi_{k,\ell}$.
Koordinata $\bar{y}_{k,l}$ preseka karakteristika duž prave C′"B, zbog $\bar{x}_{k,l}$=const.=1,02 glasi

$$\bar{y}_{k,l} = \bar{y}_{k-1,l} + (1{,}02 - \bar{x}_{k-1,l})\, tg(\varphi_{k-1,\ell} + \psi_{k-1,\ell}) \tag{3.2.}$$

Za tačke unutar područja II važiće, medjutim, u potpunosti jednačine (3.19) i (3.20) za odredjivanje $\xi_{k,\ell}$, $\eta_{k,\ell}$, $f_{k,\ell}$ i dok će za koordinate preseka jednačine glasiti;

$$\bar{Y}_{k,\ell} = \frac{\bar{y}_{k,\ell+1} - \bar{y}_{k-1,\ell} + \bar{x}_{k-1,\ell}\, tg(\varphi_{k-1,\ell} + \psi_{k-1,\ell}) - \bar{x}_{k,\ell+1}\, tg(\varphi_{k,\ell+1} - \psi_{k,\ell+1})}{tg(\varphi_{k-1,\ell} + \psi_{k-1,\ell}) - tg(\varphi_{k,\ell+1} - \psi_{k,\ell+1})} \tag{3.23}$$

$$\overline{y}_{k,l} = \overline{y}_{k-1,l} - (\overline{x}_{k,l} - \overline{x}_{k-1,l})\,tg(\varphi_{k-1,l} + \psi_{k-1,l})$$

Polje karakteristika u području II [illegible] se lako konstruisati pomoću prvog graničnog zadatka. Naime duž karakteristika CC" i C" C'", koje se seku u tački [illegible], poznate su vrednosti $\overline{x}$, $\overline{y}$, ψ, f, η i ξ, za pojedine tačke mreže iz konstrukcije polja I i III. Ovo područje, kako se sa sl. [illegible] vidi, preseca kontura OA. Nije bilo moguće unapred odrediti tačke mreže pojedinih karakteristika tako da njihovi preseci padnu na konturu. Na sl. 3.13 označeni sa [illegible], c [illegible], preseci pojedinih karakteristike područja IV sa konturom OA, dobijeni su produženom konstrukcijom polja karakteristika izvan konture. Veličine $\overline{x}$, $\overline{y}$, ψ, f, η i ξ su ovde odredjene interpolacijom izmedju vrednosti u tačkama ispod i iznad konture OA.

U svim tačkama mreže, za odredjivanje veličina ψ, f, η i ξ važi će u potpunosti obrasci (3.19) i (3.20). Za koordinate tačaka, medjutim, mogu se upotrebiti obrasci (3.21).

Za područje V, koje je zatvoreno konturom OA, vertikalnom osovinom simetrije i (β) karakteristikom, može se lako pokazati da u njemu vlada konstantno stanje napona. S obzirom da završna karakteristika (β) zaklapa sa pozitivnim pravcem x-osovine isti ugao ($-\psi_o$) kao i karakteristika područja uz bočnu konturu OC (vidi sl. 3.3). Ako se tome doda, da zbog simetrije mora da bude $\varphi = 0$, onda se može zaključiti s obzirom na jednacinu (3.1[illegible]) da u području V mora postojati isto naponsko stanje kao i u trouglu OCC'. U ovom području, dakle karakteristike su prave.

U tablici i na str. 63 prikazani su numerički podaci potrebni za detaljnu konstrukciju polja napona kod koga je $\mu = 0{,}1$ a odnos strana a/b=1. Tablica sadrži podatke za koordinate pojedinih tačaka mreže, kao i neophodne podatke ψ i φ za efektivno sračunavanje napona. Jače izvučenim linijama uokvireni su podaci za pojedina područja polja.

Samo polje karakteristika pokazano je na sl. 3.13. Jače izvučenim linijama naznačene su karakteristike koje odvajaju pojedina područja polja. Sem toga na istoj slici, dati su dijagrami napona σ_x^*, σ_y^*, i τ_{xy}^* duž konture OA i osovina simetrije CB i BA. Sa slike 3.13 se takodje vidi da karakteristika C"B odnosno (β) karakteristika (3.4 – (3.7) ne pogadja tačno tačku B već preseca horizontalnu osovinu simetrije sa koordinatom x=+1,02. Zbog relativno male greške, nije interpolacijom konstruisana nova završna, karakteristika- već je neophodna redukcija izvršena u dijagramima napona.

Efektivno sračunavanje napona za tačke koje padaju na konturu OA i osovine simetrije CB i BA izvršeno je pomoću obrazaca,

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x^*\\ \sigma_y^*\end{matrix}\right\} = \frac{K}{4\mu} - \frac{1-\mu}{4}\,tg^{-1}2\psi \mp \left(1 \pm \frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi}\right)$$

$$\tau_{xy}^* = -\frac{1+\mu}{4}\,\frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi}\,, \quad \sigma_z^* = \frac{1}{2}\left[\sigma_x^* + \sigma_y^* - (1-\mu)\right]$$

gde je $\mu = 0{,}1$, $K = 0{,}303$. U tabeli 2. složene su vrednosti napona za napred pomenute tačke pomoću kojih su konstruisani i odgovarajući dijagrami na sl. 3.13.

Granična sila ili granično opterećenje koje uzorak dovodi u stanje loma, može se sada sračunati vrlo prosto, integracijom napona σ_y duž konture OA ili duž horizontalne osovine simetrije CB na jedinicu dužine uzorka. U oba slučaja biće

$$P_{cr} = 2\int \sigma_y\,dx$$

Ako se u konkretnom slučaju primeni metoda numeričke integracije (pravilo trapeza), dobija se za $P_{cr} = 4{,}5\,\beta p_r$, ako se integrišu naponi za ivicu $\overline{y} = 0$, a $P_{cr} = 4{,}50\,\beta p_r$ za integraciju duž $\overline{y} = -1{,}0$. Uz ove dve cifre može se oceniti i tačnost primenjenog numeričkog postupka. U konkretnom slučaju razlika je manja od 1,5%.

Tabela 1

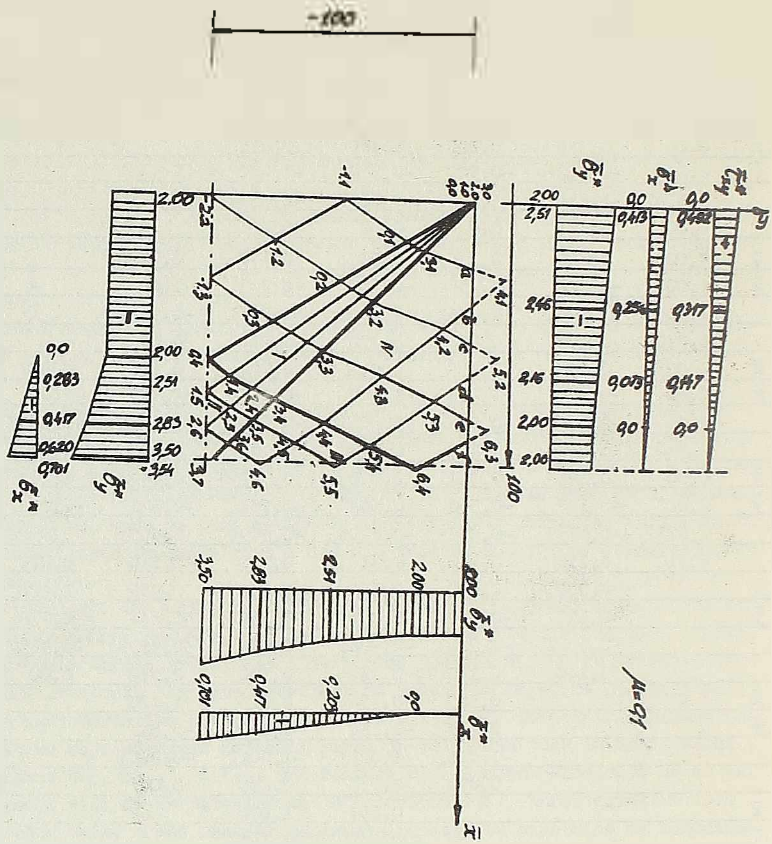
	$\bar{x}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			
	$\bar{y}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			
		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			
		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			
1	$\bar{x}$	0,00	0,168	0,335	0,502	0,670	0,737		
	$\bar{y}$	0,00	-0,226	-0,456	-0,683	-0,[illegible]	-1,00		
		-1,0061	-1,0061	-1,0061	-1,0061	-1,0061	-0,9861		
		0,070	0,070	0,070	0,070	0,070	0,00		
2	$\bar{x}$	0,00	0,168	0,335	0,542	0,721	0,800	0,877	
	$\bar{y}$	0,00	-0,226	-0,456	-0,612	-0,815	-0,901	-1,00	
		-0,9861	-0,9861	-0,9861	-0,9861	-0,9861	-0,9759	-0,9757	
		0,140	0,140	0,140	0,140	0,140	0,070	II 0,00	
3	$\bar{x}$	0,00	0,191	0,381	0,572	0,762	0,852	[illegible]	1,020
	$\bar{y}$	0,00	-0,183	-0,366	-0,549	-0,732	-0,811	-0,[illegible]	-1,00
		-0,9759	-0,9759	-0,9759	-0,9759	-0,9759	0,9657	[illegible]	-0,9469
		0,210	0,210	0,210	0,210	0,210	0,140	0,070	0,00
4	$\bar{x}$		0,302	0,480	0,661	0,843	0,935	1,020	
	$\bar{y}$		0,137	-0,112	-0,370	-0,552	[illegible]	-0,778	
			-0,9861	-0,9861	-0,9861	-0,9861	-0,9759	II -0,9657	
			0,140	0,140 I7	0,140	0,140	0,070	0,00	
5	$\bar{x}$			0,583	0,756	0,922	1,020		
	$\bar{y}$			0,104	-0,131	-0,360	-0,511		
				-1,0061	-1,0061	-1,0061	-0,9861		
				0,070	0,070	0,070	0,00		
6	$\bar{x}$				0,864	1,020			
	$\bar{y}$				0,06[illegible]	-0,11[illegible]			
					1,[illegible]	-1,0157			
					0,00	0,00			

= 0,10 $b/a = 1$

Tabela 2

	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}
0.4	0,00	-?,00	-1,450	0,00
1,5	-0,203	-2,507	-1,805	0,00
2,6	-0,417	-2,825	-2,071	0,00
3,7	-0,701	-3,542	-2,571	0,00
4,6	-0,417	[illegible]	-2,071	0,00
5,5	-0,203	-2,507	-1,805	0,00
6,4	0,00	[illegible]	-1,450	0,00
3,0	-0,413	[illegible]	-1,963	0,492
4,1 b	[illegible]	[illegible]	-1,[illegible]	0,317
5,2 (£	[illegible]	-[illegible]	-1,567	0,147
6,3 (?)	0,00	-1,[illegible]	-1,450	0,00

[illegible] porec [illegible] tačnosti računa u ce[illegible], pokazuje da je izabrana gustina mreže karakteristika za ovakvu vrstu računa dobra.



Sl. 3.13

Radi uporedjenja sa eksperimentalnim rezultatima, biće medjutim, interesantno pokazati srednji- prosečan napon pod kojim uzorak dolezi u stanje loma. Na jedinicu dubine on iznosi u ovom slučaju $\sigma_{cr} = P_{cr} = 2,285\beta p_r$.

3.2.1.2 Polje brzina deformacija

Napred je već rečeno da duž konture Oa mora vertikalna komponenta totalne brzine $\dot{v}$ da bude konstantna tj. jednaka u svim tačkama konture. Na ostalim delovima konture nisu unapred propisani bilokakvi uslovi po brzinama deformacija.

U odeljku 2.4.1 pokazano je kako se konstruiše polje brzina deformacija kada je polje karakteristika odnosno polje napona odredjeno. U konkretnom slučaju, biće potrebno, koristeći podatke za φ i ψ u pojedinim tačkama na mreži iz polja napona, odrediti $\dot{v}_\alpha$ i $\dot{v}_\beta$ za svaku tačku mreže primenjujući diferencnu jednačinu (2.72). U opš -

tem slučaju zadatak će se svesti na rešavanje sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznate. Kada su vrednosti $\dot{v}_{\alpha}$ i $\dot{v}_{\beta}$ odredjene onda se pomoću jednačina (2.66) mogu odrediti i komponentalne brzine pomeranja za odgovarajuće tačke mreže.

Pošto će se i u ovom slučaju konstruisati polje brzina deformacija samo za jedan kvadrant mora se voditi računa o uslovima simetrije tj. mora duž vertikalne osovine, AB komponentalna brzina pomeranja u pravcu x-osovine $\dot{u}$ biti nula i na isti način, komponentalna brzina pomeranja u pravcu y-osovine $\dot{v}$, duž horizontalne osovine simetrije CB, takodje biti nula. Sem, toga u tački B mora istovremeno da bude i vertikalna i horizontalna komponenta totalne brzine pomeranja nula.

Sa ovako definisanim početnim uslovima, može se prići konstruisanju polja brzina deformacija polazeći od konture OA gde se brzine pomeranja zadate.

Ako se vertikalna brzina duž OA uzme kao jedinična, dakle $\dot{v} = -1,0$, i pretpostavi linearna promena horizontalne komponente totalne brzine duž OA u obliku,

$$\dot{u} = K\dot{v}(x-1,00) = K(x-1,00) \qquad (3.24)$$

gde je K-konstanta koja će biti odredjena iz uslova koji važe za tačku B, moći će se uz pomoć jednačina (2.66) i (2.72) odrediti $\dot{v}_{\alpha}$, [illegible] $\dot{u}$ i $\dot{v}$ za pojedine tačke mreže u području IV. Pri tome će sve one biti funkcije konstante K. Za tačke (b),(d) i (f) u kojima α (β) karakteristike područja IV seku konturu OA, moći će se neposredno odrediti, $\dot{v}_{\alpha}$, $\dot{v}_{\beta}$ jer su kao što se na sl.3.13 vidi, te karakteristike prave linije. Za tačke (a), (c) i (e) medjutim, biće potrebno prvo interpolacijom izmedju susednih tačaka odrediti φ i ψ pa tek onda sračunati vrednosti za $\dot{v}_{\alpha}$ i $\dot{v}_{\beta}$. U tabeli 3 date su vrednosti brzina, pomeranja tačaka mreže za područje IV.

U području III, zbog uslova $\dot{u} = 0$, mora za tačke duž osovine OA biti $\dot{v}_{\alpha}^{1,1} = -\dot{v}^{k1}$

Pošto su iz područja IV poznate vrednosti za $\dot{v}_{\alpha}$ i $\dot{v}_{\beta}$ duž karakteristike (6,4) (3,4), a duž osovine simetrije C"B koja nije karakteristika, važi veza izmedju $\dot{v}_{\alpha}$ i $\dot{v}_{\beta}$ data unapred, mogu se na osnovu trećeg graničnog zadatka (v. str. 40) dobiti vrednosti $\dot{v}_{\alpha}$ i $\dot{v}_{\beta}$ za tačke mreže u području III. U tabeli 4 date su ove vrednosti kao funkcije K - konstante. Iz uslova da u tački B mora da bude u=v=0 iz jednačine (2.66) izlazi da zbog ovoga mora biti $\dot{v}_{\alpha} = \dot{v}_{\beta} = 0$. Kako je $\dot{v}_{\alpha}^{7,3} = \dot{v}^{7,3} = 0,83? - 0,751K = 0$ izlazi da je K = 1,11? .

Tabela 3

	$\dot{v}_{\alpha}$	$\dot{v}_{\beta}$
a	−0,515 K + 0,7250	−0,304 K − 0,9137
b	−0,310 K + 0,7490	−0,266 K − 0,9026
c	−0,2920 K + 0,7781	−0,2105K − 0,8917
d	−0,2025 K + 0,8056	−0,1675K − 0,8718
e	−0,0935 K + 0,8350	−0,0861K − 0,8627
f	−0,0474 K + 0,8514	−0,0474K − 0,8514
3,1	−0,7203 K + 0,6936	−0,2505K − 0,9652
4,2	−0,4100 K + 0,7490	−0,1798K − 0,9478
5,3	−0,2025 K + 0,8056	−0,0706K − 0,9239
6,4	−0,0474 K + 0,8514	−0,0474K − 0,8514
3,2	−0,7203 K + 0,6936	−0,1262K − 0,9993
4,3	−0,410 K + 0,7490	−0,0399K − 0,9801
5,4	−0,2025 K + 0,8056	0,0628K − 0,9129
3,3	−0,7203 K + 0,6936	0,0137K − 1,0316
4,4	−0,2065 K + 0,8445	0,2065K − 0,8445
3,4	−0,7203 K + 0,6936	0,1472K − 1,0204
3,0	−0,7203 K + 0,6936	−0,3760K − 0,9266

Tabela 4

	$\dot v_\alpha$	$\dot v_\beta$
5,5	−0,2065K + 0,8445	0,2065K − 0,8445
4,5	−0,4100K + 0,7870	0,2230K − 0,8810
3,5	−0,7170K + 0,7460	0,2560K − 0,9040
4,6	−0,4220K + 0,8300	0,4220K − 0,8300
3,6	−0,7230K + 0,7920	0,4550K − 0,8700
3,7	−0,7510K + 0,8370	0,7510K − 0,8370

Sa ovako sračunatom vrednošću za K mogu se brzine pomeranja duž karakteristika u području IV i III sračunati u konačnom obliku. U tabeli 5 date su ove vrednosti.

Tabela 5

	$\dot v_\alpha$	$\dot v_\beta$	$\dot u$	[illegible]
6	0,1510	−1,2523	−0,832	[illegible]
[illegible]	[illegible]	−1,1986	−0,688	−1,000
[illegible]	0,4530	−1,1270	−0,5170	[illegible]
[illegible]	0,[illegible]00	−1,0590	−0,3810	[illegible]
6	0,7310	−0,9580	−0,1890	[illegible]
[illegible]	[illegible]	−0,9040	−0,1050	[illegible]
[illegible]	−0,1100	−1,3450	−1,1120	−1,00
3,1	[illegible]	−1,2440	−1,0400	−0,919[illegible]
4,2	0,2930	−1,1480	−0,6830	[illegible]
[illegible]	0,5810	−1,0030	−0,3250	[illegible]9610
6,4	[illegible]	−0,7990	0	[illegible]9380
[illegible]	−0,1100	−1,1400	−0,9620	[illegible],8370
[illegible]	0,2930	−1,0250	−0,6000	[illegible]500
5,4	0,5810	[illegible]	−0,1850	[illegible]
5,3	−0,1100	−1,0160	−0,8670	−0,7410
4,4	0,2930	0,3650	−0,4700	−0,7350
3,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5,5	0,6150	−0,6150	0	[illegible]
4,5	0,2310	−0,6330	−0,3210	[illegible]
3,5	−0,0540	−0,6190	−0,5370	−0,4220
3,6	0,3610	−0,3610	0	−0,4360
[illegible],6	−0,0130	−0,3640	−0,4530	−0,2000
[illegible]	0	0	0	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	−0,4[illegible]	−0,6550	−0,9650	[illegible]040
[illegible],6	[illegible]	−0,3890	[illegible]	0
[illegible]	−0,7690	−0,9840	−1,6280	−0,2420
1,5	0,7180	−0,7180	−1,3000	0
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0
[illegible],3	−0,5130	−1,0710	−1,3720	[illegible]
1,3	−0,7690	−1,1550	−1,7610	−0,3530
[illegible],3	−1,090	−1,2700	−2,2420	−0,1055
2,2	−0,5130	−1,1980	−1,4770	−0,6230
1,2	−0,[illegible]690	−1,2890	−1,9000	−0,4420
[illegible],2	−1,0900	−1,4080	−2,3790	[illegible]
[illegible],1	−0,5130	−1,3070	−1,5640	−0,7000
1,1	−0,7690	−1,4050	−2,0030	−0,5190
[illegible],1	−1,0900	−1,5300	−2,4950	[illegible]
[illegible],0	−0,5130	−1,4100	−1,6470	−0,7730
[illegible],0	−0,7690	−1,5000	−2,0890	[illegible]
[illegible]	−1,0900	−1,6250	−2,5900	−0,3140
[illegible]1	−1,2700	−1,5300	−2,6700	−0,1530
−1,2	−1,2700	−1,4080	−2,5500	−0,0810
−1,3	−1,2700	−1,2700	−2,4200	0
[illegible],2	−1,5300	−1,5300	−2,920	0

Polje brzina pomeranja u području II može se lako konstruisati, s obzirom da su konstrukcijom polja brzina pomeranja u području III poznate vrednosti $\dot v_\alpha$ i $\dot v_\beta$ duž karakteristika (5,4)- (3,7) i da za sve tačke duž prave C'B, koja nije karakteristika, zbog [illegible]ije mora biti $\dot v = 0$, odakle sledi veza $\dot v_\beta = \dot v_\alpha$. Dakle, i za područje II važi će

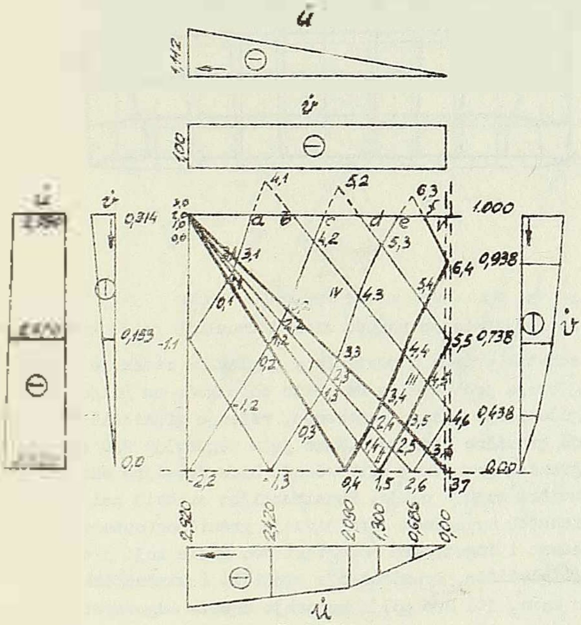
...i granični zadatak. ...rički podaci za brzine u pojedinim tačkama ovog područja ...ene su takodje u tabeli 5.

Za područje I važiće drugi granični zadatak. Naime, iz konstrukcije polja brzina pomeranja za područje IV poznate su brzine pomeranja tačaka duž karakteristika (3,0 – 3,4). Iz područja II poznate su vrednosti $\dot{v}_\alpha$ i $\dot{v}_\beta$ duž karakteristike (3,4)-(0,4). Dakle, u pitanju su dve karakteristike koje se seku u jednoj tački a duž kojih su poznate, vrednosti $\dot{v}_\alpha$ i $\dot{v}_\beta$. Numerički podaci za brzine pomeranja u ovom području dati su takodje na tabeli 5.

U polju pravih karakteristika za trougao OCC', s obzirom da su vrednosti za $\dot{v}_\alpha$ i $\dot{v}_\beta$ poznate iz konstrukcije polja brzina pomeranja za područje I, i da duž horizontalne osovine simetrije mora da bude $\dot{v} = 0$, dakle sledi $\dot{v}_\alpha = \dot{v}_\beta$, za konstrukciju polja brzina pomeranja važiće treći granični zadatak kao i u slučaju područja II i III. Numeričke vrednosti za ovo područje nalaze se takodje u tabeli 5.

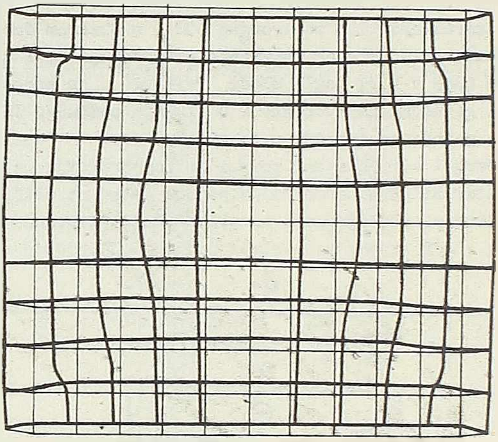
Sa ovim su sračunati svi potrebni podaci za konstrukciju polja brzina pomeranja na osnovu polja karakteristika odnosno polja napona datog na sl.3.13.

Na sl. 3.14 prikazani su dijagrami komponentalnih pomeranja $\dot{u}$ i $\dot{v}$ duž slobodne ivice OC i konture CA, kao i duž osovina simetrije AD i OD. Odavde se vidi, da pošto



Sl.3.14

su postavljeni granični uslovi po brzinama pomeranja na konturi ispunjeni, polju napona datom na slici 3.13 se može asocirati polje brzina pomeranja koje je za dati granični zadatak kinematički moguće. Iz ovoga se dakle, može zaključiti, da polje karakteristika dobijamo numeričkom integracijom jednačina (2.5?) pretpostavlja tačno rešenje zadatka za postavljene granične uslove. Na sl. 3.15 prikazana je distorzija kvadratne mreže, uočene na uzorku pre nanošenja opterećenja. Brzine pomeranja pojedinih tačaka mreže, pretstavljeni u ovoj šemi kao vektori položaja, ne predstavljaju apsolutne veličine. To su u stvari brzine pomeranja u nekom trenutku t_s kada je neograničeno plastično tečenje već nastupilo.



Sl. 3.15

3.2.2 P r i m e n a m 3.2.2. PRIMENA METODE GRANIČNE RAVNOTEŽE e t o d e

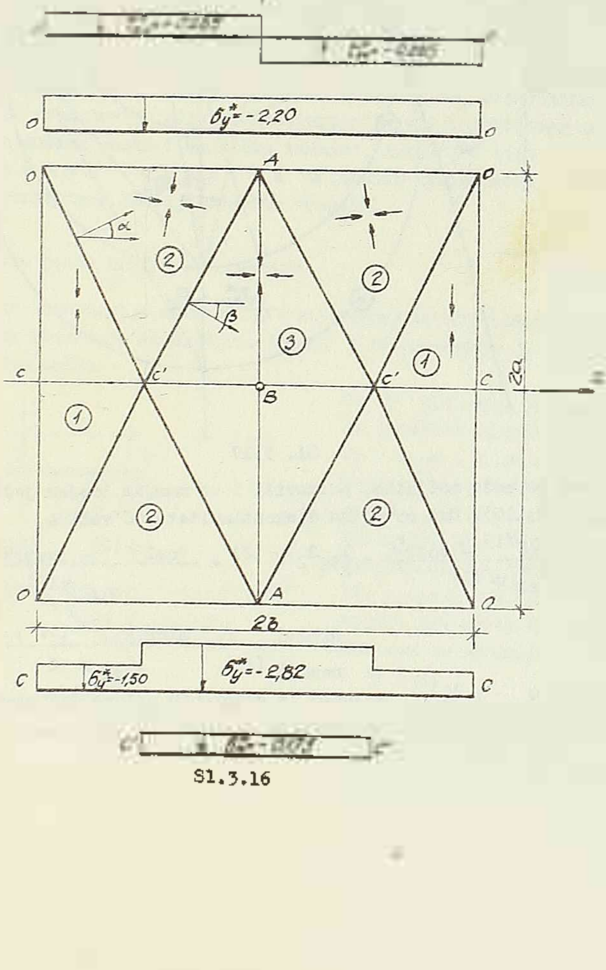
3.2.2.1 Polje napona konstruisano pomoću diskontinualnih polja konstantnih napona

Granični zadatak opisan u prethodnom poglavlju rešen je pomoću metode karakteristika. Kod velikog broja problema, a naročito onda kada se polju napona ne može asocirati kinematički moguće polje brzina pomeranja, rešenje graničnih zadataka moraće se tražiti u primeni metode granične ravnoteže. Kako je u poglavlju 2.6 već rečeno za određjivanje gornje i donje granice graničnog opterećenja biće dovoljno ako se konstruiše po jedno statički i kinematički moguće polje. Konstrukcijom ovakvih polja, pored toga što se , rešava postavljeni zadatak u pogledu određjivanja graničnog opterećenja, znatno se skraćuje i izbegava glomazan i dugotrajan numerički deo posla koji prati metodu karakteristika. Sa tehničke tačke gledišta, konstrukcija statički i kinematički mogućih polja ima svoje opravdanje i u tome, što ova polja nemoraju uopšte odgovarati jedno drugom. Potrebće biti samo, da granične sile sračunate iz ovih polja budu dovoljno bliske jedna drugoj.

U ovom poglavlju biće dato statički moguće polje napona za granični zadatak postavljen u poglavlju 3.2.1.1. Polje napona biće konstruisano povezivanjem područja konstantnih napona preko površina diskontinuiteta.

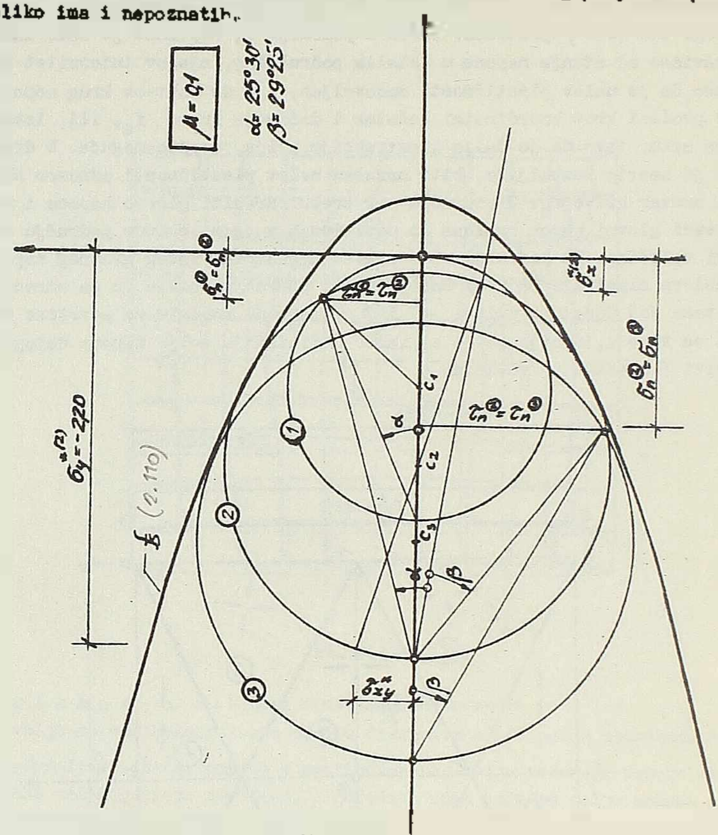
Na sl. 3.16 pokazano je jedno statički moguće polje napona koje je sastavlje no od tri različita područja konstantnih napona povezana površinama diskontinuiteta OC' i C'A. Polje je konstruisano za μ =0,1.

U području 1, uz slobodnu ivicu biće u ravni (x,y) različit od nule samo σ_y - napon. S obzirom da je τ_{xy} = σ_x =0 u čitavom području. Algebarski veći glavni napon je σ_x zbog toga što je σ_y pritisak. Znači u području 1, nepoznat je samo intenzitet napona σ_y. Nezavisno od stanja napona u ostalim područjima, njegov intenzitet se može odrediti, ili tako da je uslov plastičnosti zadovoljen, tj. da Mohr-ov krug napona u dijagramu (σ_n, τ_n) prolazi kroz koordinatni početak i dodiruje krivu f_s, ili, izabrati ga kao početni parametar tako da je dalja konstrukcija polja, uopšte moguća. U drugom slučaju, ne sme, što je sasvim razumljivo, biti narušen uslov plastičnosti odnosno Mohr-ov krug mora ležati unutar krive f_s. U području 2 treba odrediti glavne napone i ugao φ koji algebarski veći glavni napon zaklapa sa pozitivnom x-osom. U ovom području dakle, treba odrediti tri veličine. Za područje 3 pravac algebarski većeg glavnog napona je poznat jer je iz uslova simetrije τ_{xy} =0. Znači u ovom području ostaje da se odrede dve veličine. Ako se tome još dodaju i uglovi α i β koje čine normale na površine diskontinuiteta OC' i C'A sa x-osom, dobija se da za tačno definisanje polja napona datog na sl. 3.16, treba odrediti 7 nepoznatih veličina.



Sl.3.16

Za odredjivanje ovih veličina, stoje na raspoloženju 4 analitička uslova duž površina diskontinuiteta OC'i C'A tipa (2.110); dve jednačine ravnoteže i trigonometrijska veza izmedju uglova α i β, koja zavisi od tipa izabranog polja. Ukupno dakle 7, jednačina koliko ima i nepoznatih.



Sl. 3.17

Zadatak se može medjutim, postaviti i sa manjim brojem jednačina ako se podje od jednačina tipa (2.115). Duž površina diskontinuiteta OC' važiće,

$$\frac{1}{2}tg^2 2\psi_o^{(1)} + \frac{\cos 2\psi_o^{(1)} - \cos 2\alpha}{\cos 2\psi^{(1)}} = \frac{1}{2}tg^2 2\psi^{(2)} + \frac{\cos 2\psi^{(2)} - \cos 2(\varphi^{(2)} - \alpha)}{\cos 2\psi^{(2)}} \qquad (3.25)$$

i

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\psi_o^{(1)}} = \frac{\sin 2(\varphi^{(2)} - \alpha)}{\cos 2\psi^{(2)}}$$

s obzirom da je $\varphi^{(1)}=0$ i $\psi_o^{(1)}$ poznato iz graničnih uslova duž slobodne ivice OC. Duž površine diskontinuiteta C'A mogu se ispisati sledeće dve jednačine,

(3.26)

$$\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 2\psi_o^{(1)} + \frac{\cos 2\psi_o^{(1)} - \cos 2\alpha}{\cos 2\psi^{(1)}} = \mathrm{tg}^2 2\psi^{(1)} + \frac{\cos 2\psi^{(2)} - \cos 2(\psi^{(2)} - \alpha)}{\cos 2\psi^{(2)}} \quad ;$$

$$-\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\psi_o^{(1)}} = -\frac{\sin 2(\psi^{(2)} - \alpha)}{\cos 2\psi 2}$$

uzimajući u obzir da je u području 3 $\psi^{(3)} = 0$, zbog simetrije. Pošto se ovde radi o uzorku sa odnosom strana a/b=1, a tačka C se mora naleziti na osi simetrije CC , biće

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = 1 \tag{3.27}$$

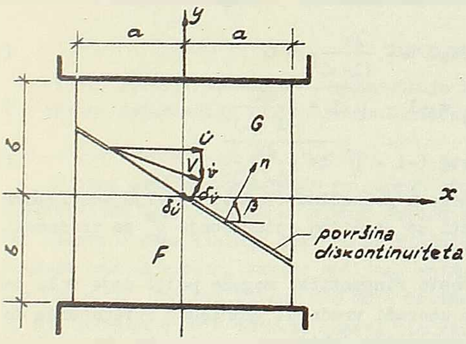
Ako se uzmu u obzir jednačine (2.94), pet napred ispisanih jednačina sa pet nepoznatih , $\psi^{(1)}$, $\psi^{(1)}$, $\psi^{(1)}$, α i β jednoznačno definišu polje napona dato na slici 3.16 pod uslovom da je $\psi_o^{(1)}$ već poznato.

Rešavanje ovog sistema trigonometrijskih jednačina predstavlja, gotovo nerešiv zadatak. Praktično medjutim,mogu se prve vrednosti nepoznatih naći grafičkim postupkom, koji je prikazan na sl. 3.17. Korekcija vrednosti nepoznatih, dobijenih grafičkim putem, pomoću jednačina (3.25), (3.26) i (3.27).

Na sl. 3.17 se vidi da stanje napona u području 1 ne narušava uslov plastičnosti, tj. Mohr-ov krug leži unutar krive f_β, dok je optimalna vrednost $\sigma y^{(1)}$- napona za polje ovakvog tipa - 1,50 βpp. U području 2 i 3 medjutim, stanje napona ispunjevaju uslov plastičnosti, dakle predstavljaju područja takozvane " pune plastičnosti" (1 - 3) Na sl. 3.16 date su vrednosti komponentalnih napona za sva tri područja, dok su vrednosti za α i β date na sl. 3.17. Granična vrednost σy napona duž konture OAO iznosi -2,20 βpp. Prosečan napon dobijen metodom karakteristika iznosi σy =-2,285 βpp (v.str)
Razlika dakle, iznosi manje od 4%. Ovakav rezultat pokazuje da, diskontinualno polje napona dato na sl. 3.16 predstavlju odličnu aproksimaciju polja dobijenog metodom karakteristika. S obzirom na dužinu posla i tehničku tačnost, imajući u vidu da se na ovaj način odredjuje samo d o n j a g r a n i c a kritičnog opterećenje, metoda diskontinualnih napona ima u konkretnom slučaju odsutnu vrenost.

3.2.2.2 Diskontinualno polje brzina deformacije

Polje brzina deformacije može se za ovaj slučaj konstruisati polazeći od zadatih uslova po brzinama pomeranja na konturi. Na sl. 3.18 prikazana je šema jednog prostog kinematički mogućeg polja.



Sl. 3.18

Sa β obeležen je ugao koji normala na površinu diskontinuiteta zaklapa, sa x-osom i koja deli uzorak u dve područja, od kojih je jedno obeleženo sa F, ostaje u miru, dok se drugo obeleženo sa G kreće konstantnom totalnom brzinom V=1. U odeljku 2 (2.119) pokazano je da promena totalne , brzine duž površine diskontinuiteta, zaklapa sa normalom na površinu uglo 2ψ .

Za usvojenu totalnu brzinu V=1,mogu se onda lako odrediti i njene komponente u pravcu koordinata ($\dot{u}$ i $\dot{v}$), kao normalna i tangencijalna kompone nta duž površine diskontinuiteta ($\delta\dot{u}$ i $\delta\dot{v}$)

$$\delta\dot{u} = \sin 2\Psi \quad , \quad \delta\dot{v} = \cos 2\Psi \quad , \quad \dot{u} = -\cos(2\Psi + \beta), \quad \dot{v} = \sin(2\Psi + \beta) \qquad (3.28)$$

Sa podacima iz (3.28) može se lako sračunati rad spoljnih i unutrašnjih sila, na brzine deformacije kinematički mogućeg polja datog na sl. 3.18. Rad spoljnih sila, pošto je u konkretnom slučaju $p_{nx} = 0$ a $\dot{v} = \sin(2\Psi + \beta)$ - jednako u svim tačkama osnove uzorka jer se deo G kreće kao kruto telo iznosi

$$\int p^x_{ny} \dot{v}\, dF = p^x_{ny} \sin(2\Psi + \beta)\, 4ab \qquad (3.29)$$

Rad unutrašnjih sila, ako se izostave iz razmatranja zapreminske sile, i s obzirom da je deo G kruto telo, svešće se samo na sračunavanje rada duž površine diskontinuiteta. Pomoću jednačina (2.123) i (2.131), u konkretnom slučaju biće $\int \dot{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij}\, dV = 0$ kao i $\oint p_{ni} \dot{v}_i\, d\Sigma_p = 0$ jer je $\dot{v}_1^x$ duž konture jednako nuli, pa se može pisati

$$\dot{D}_1 = \oint c\, \delta\dot{u}\, dl = -\left(\frac{1-\mu}{4} tg2\Psi + \frac{K}{1-\mu} ctg2\Psi \right) \sin 2\Psi \frac{4ab}{\sin\beta} \qquad (3.30)$$

Izjednačenjem izraza (3.29) i (3.30), odnosno stavljajući da je rad spoljnih sila jednak radu unutrašnjih sila, dobija se jednačina za odredjivanje graničnog opterećenja, koje uzorak dovodi u stanje loma u obliku,

$$p^x_{ny} = -\left(\frac{1-\mu}{4} tg2\Psi + \frac{K}{1-\mu} ctg2\Psi \right) \frac{\sin 2\Psi}{\sin(2\Psi + \beta)\sin\beta} \qquad (3.31)$$

Slično kao i kod izraza (3.7), iz (3.31) se vidi, da granično opterećenje sračunato iz kinematički mogućeg polja, zavisi od parametra β i Ψ. Da bi se odredila minimalna vrednost kritičkog opterećenja za ovako konstruisano kinematičko polje, biće potrebno kao i za (3.7) odrediti ekstremum funkcije $p^x_{ny} = f(\Psi, \beta)$ uslovne jednačine i ovde glase:

$$\frac{\partial \dot{p}_{ny}}{\partial \beta} = 0 \qquad \frac{\partial \dot{p}_{ny}}{\partial \Psi} = 0 \qquad (3.32)$$

Prva jednačina (3.32) daje isto rešenje kao i jednačina (3.9). Naime, $\beta = \frac{\pi}{2} - \Psi$. Ovakav rezultat je razumljiv jer se radi o kinematičkom polju brzina istog tipa. Medjutim jasno je sa sl. 3.18, da ako je u pitanju uzorak kod koga je odnos strana a/b=1, kao što je ovde slučaj, takav položaj nije istovremeno i kinematički moguć. U konkretnom slučaju, najmanja vrednost ugla β_o, odnosno vrednost za koju će se dobiti najmanje vrednost graničnog opterećenja, iznosi $\beta_o = \frac{\pi}{4}$. Sa ovom vrednošću i drugim uslovom za ekstremum, (3.32) lako se dolazi do jednačine

$$tg^2 2\Psi_o + 2tg2\Psi_o - \frac{4K}{(1-\mu)^2} = 0 \qquad (3.33)$$

čiji su koreni,

$$(tg2\Psi_o)_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{4K}{(1-\mu)^2}} \qquad (3.34)$$

odnosno

$$\Psi_o = \frac{1}{2} arctg\left(-1 - \sqrt{1 + \frac{4K}{(1-\mu)^2}}\right) \qquad (3.34a)$$

Kako se ovako odredjena vrednost za Ψ_o unese u jednačinu (3.31), stavljajući istovremeno $\beta_o = \frac{\pi}{4}$, dobiće se minimalne vrednosti za granično opterećenje p^x_{ny} za vrednosti μ-a koje praktično dolaze u obzir za beton.

Iz tabele se vidi, da ovako prosto kinematički moguće polje daje vrlo dobre vrednosti za granično opterećenje. Ako se uporedi vrednost graničnog opterećenja dobijena iz kinematičkog polja za $\mu = 0,1$, sa vrednošću dobijenom metodom karakteristika, dakle tačnom vrednošću ($p^x_{ny} = -2,285$), dobiće se odstupanje manje od 2%.

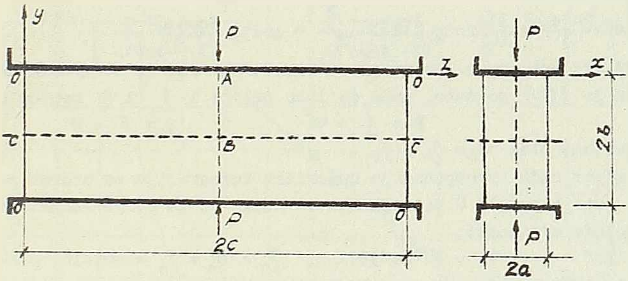
Tabela 6

μ	β_0	$2\psi_0$	$tg2\psi_0$	$ctg2\psi_0$	$sin2\psi_0$	$sin(2\psi+\beta)$	p_{xy}^{x}
0,05	45^0	$111^0\ 25'$	-2,550	-0,392	0,931	0,400	-2,42
0,10	45^0	$111^0\ 10'$	-2,578	-0,388	0,933	0,404	-2,32
0,20	45^0	$110^0\ 40'$	-2,655	-0,377	0,936	0,396	-2,21

Uporedjujući odgovarajuće vrednosti graničnog opterećenja iz kinematički mogućeg polja,, brzina deformacije, kao g o r n j o m g r a n i c o m, sa vrednostima dobijenim preko statički mogućih polja napona, kao d o n j o m g r a n i c o m , razlika u ovom slučaju ne iznosi više od 6% ($p_{xy}^{st} = -2,20$ i $p_{xy}^{x} = -2,32$). Tačno rešenje zadatka pada, kao što se vidi, izmedju ovih vrednosti.

3.3. DUG PRIZMATIČNI UZORAK OPTEREĆEN PO DUŽOJ STRANI (RAVNO STANJE NAPONA)

U ovom odeljku posmatraćemo granično stanje dugog prizmatičnog uzorka pravougaonog poprečnog preseka, koji je opterećen po svojoj dužoj strani. U dužem pravcu odnos strana je 1:3. Uzorak se opterećuje pomoću čeličnih ploča vrlo velike krutosti. Pri tome će se posmatrati stanje napona i brzina deformacija u dužem pravcu, zanemarujući uticaj, σ_z - na pona dakle, dakle, posmatraće se ravno stanje na pona. Na sl. 3.19 prikazana je šema uzorka, način opterećenja i položaj usvojenog koordinatnog sistema.



Sl. 3.19

Pošto postoji simetrija i opterećenja i uzorka dovoljno je posmatrati stanje napona i brzina deformacije samo u jednom kvadrantu.

3.3.1. REŠENJE POMOĆU METODE KARAKTERISTIKA

U ovom odeljku razmatraće se napred opisan granični zadatak primenjujući metodu karakteristika tj. odrediće se stanje napona numeričkom integracijom jednačina (2.62 Granični uslovi u ovom slučaju dati su na sledeći način: duž stranice OCO, ili na bočnim stranama uzorka uopšte, vektor spoljnog opterećenja je nula, znači duž OCO mora biti $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, dok duž strane OAO mora brzina vertikalnog pomeranja $\bar{v}$ da bude konstantna, tj. jednaka u svim tačkama osnove uzorka.

Slično kao kod slučaja datog u 3.2.1.1 iz uslova $\tau_{xy} = 0$, izlazi da u području uz slobodnu konturu mora biti $\psi = 0$.

[illegible] $\tau_z = 0$ i za $\varphi = 0$, (vidi jednačine 2.47, gde umesto σ_x treba staviti σ_z, jer se posmatra ravan y,z), dolazi se do jednačine pomoću koje se može odrediti ω_o.

$$\sqrt{3}\cos\omega_o + \sin\omega_o = \frac{1-\mu}{K'} \qquad \text{ili}$$

$$\sin^2\omega_o - \frac{1-\mu}{2K'}\sin\omega_o + \left(\frac{1-\mu}{2K'}\right)^2 - \frac{3}{4} = 0 \qquad (3.35)$$

gde je $K' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-\mu+\mu^2)^{1/2}$

Kada je poznato ω_o, može se pomoću jednačine,

$$2\psi_o = \overline{U} - \arccos\frac{ctg\,\omega_o}{\sqrt{3}} \qquad (3.35a)$$

odrediti ψ_o. Sa ovim bi bilo odredjeno i polje karakteristika u okolini konture OCO.U ovom polju, karakteristike su prave linije, koje se seku pod uglom $2\psi_o$, slično odgovarajućem polju u slučaju 3.2.1.1.

Da bi se moglo konstruisati polje napona odnosno karakteristika dalje, potrebno je odrediti jednačinu karakteristika (β), koja polazi iz tačke O, kao i vrednosti f, ξ i η za čitavu oblast. Jednačina karakteristike za ovaj slučaj glasi:

$$\bar{y} = -tg2\psi_o\,\bar{z} \qquad (3.36)$$

gde je $\bar{y} = y/b$ i $\bar{z} = z/c$.

Vrednost $f(\omega)$ sračunaće se lako pomoću jednačine (2.56), koja u razvijenom obliku glasi

$$f\omega = -\frac{1}{2}\int_{\overline{U}/6}^{\omega}\frac{\sqrt{3-4\cos^2\omega}}{\sin\omega}\,d\omega$$

odnosno

$$f\omega = \frac{\overline{U}}{4} - \arcsin\frac{2\cos\omega}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\left[arctg\frac{4\cos\omega+3}{\sqrt{3-4\cos^2\omega}} + arctg\frac{4\cos\omega-3}{\sqrt{3-4\cos^2\omega}}\right] \qquad (3.37)$$

Grafički prikaz $f(\omega)$ za razne vrednosti ω dat je na grafikonu sl. 3.20.

Kada je $f(\omega)$ poznato, onda se lako nalazi i ξ i η pomoću obrazaca,

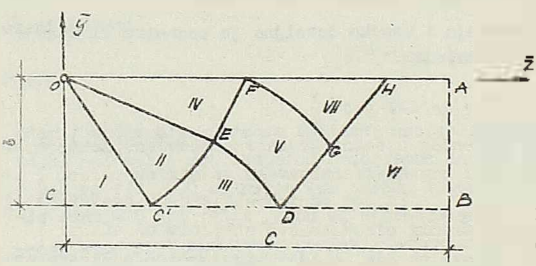
$$\xi = f + \varphi \qquad \text{i} \qquad \eta = f - \varphi$$

Za konkretan slučaj biće $\eta_o = \xi_o = f_c$.

U daljem redu sprovedena je numerička integracija za uzorak sa odnosom strana, $b/c = 1/3$ i za $\mu = 0,1$. U tom slučaju se dobijaju za polje karakteristika uz slobodnu konturu sledeće vrednosti:

$\omega_o = 65^0\,12'10''$, $\psi_o = 52^0 44'35''$, $\xi_o = \eta_o = f_o = -0,416$, $\bar{y} = -1,3147\,\bar{z}$.

Radi lakšeg izlaganja, na sl. 3.21 prikazana je celokupna šema polja u jednom kvadrantu, sa usvojenim načinom obeležavanja pojedinih područja polja i tačaka preseka karakteristika.

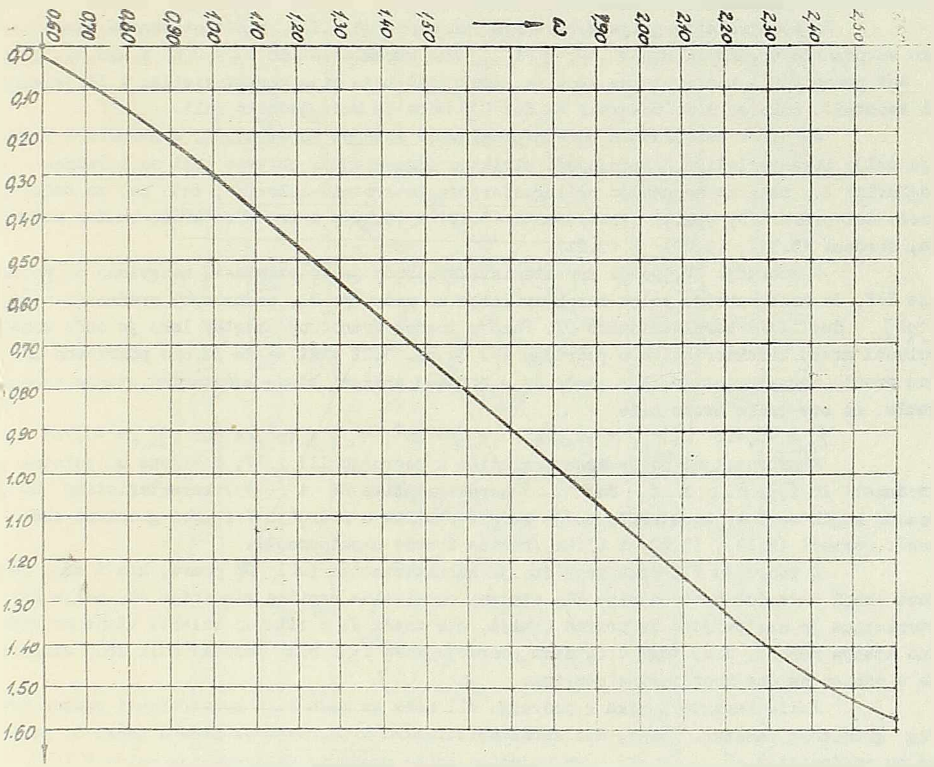


Sl.3.21

U sektoru OC'E,koji je na sl.3.21 označen kao područje II, može se konstruisati polje karakteristika pošto su vrednosti $\bar{z}, \bar{y}, f, \xi$ i η poznate duž karakteristika OC iz prethodnog razmatranja. Pri tome je očigledno da tačka O mora da bude singularna (II granični zadatak).

Položaj karakteristike OB, u ovom slučaju, odredjen je veličinom sila trenja izmedju kruto koje se prenosi opterećenje na uzorak, i površina uzorka OA. Veličina ovih sila kreće se od nule do neke granične vrednosti, koja je funkcija stanja obradjenosti napred pomenutih površina. U konkretnom slučaju usvojen je koeficijent trenja $tg\sigma = 0{,}365$ što odgovara uglu od približno 20^{o}. Ovakav podatak se može smatrati kao gornja granica za veličinu sila trenja, ako je površina preko koje se prenosi opterećenje obradjena do na stepen obrade od dva trougla, a površina uzorka onako kako je izašla iz čeličnog kalupa.

Sa ova ko definisanim koeficijentom trenja, ustvari, propisana je veza izmedju normalne i tangencijalne komponente vektora spoljnog opterećenja na delu kontureO...



Sl.3.20

Za konkretan slučaj ovo se može smatrati, propisan- dat unapred, uslov po naponima na delu konture gde je inače granični uslov dat samo po brzinama pomerenja.

U području II sve (β) karakteristike polaze iz singularne tačke O. S obzirom da je duž OC; $\xi_o = \eta_o = f_o$ = const., moraju u ovom području sve (β) karakteristike, biti prava linija, tj. duž njih mora biti ξ_o =-0,416 za čitavo područje. Ako se duž karakteristika OC usvoji pet tačaka uključujući singularnu tačku i uzme ψ tako da je $\Delta\psi = 5^o$ razlika izmedju susednih (β) karakteristika, koje polaze iz tačke O, onda se lako mogu sračunati vrednosti $\eta_{k,l}$ i $f_{k,l}$ za svaku tačku mreže, slično kao kod slučaja 3.2.1.1.

$$\eta_{k,l} = \xi_{k-1,l} - 2\psi_{k,l} \quad \text{i} \quad f_{k,l} = \frac{\xi_{k,l} + \eta_{k,l}}{2}$$

Kada se ima sračunata vrednost za $f_{k,l}$ onda se pomoću grafikona datog na sl.320 odmah dobija $\omega_{k,l}$ i dalje, iz obrasca (3.35a) i odgovarajuća vrednost $\psi_{k,l}$.

Koordinate preseka pojedinih tačaka mreže u ovom području odredjuju se onda pomoću istih jednačina (3.16) kao i u sl. 3.2.1.1.

Za konstrukciju polja karakteristika u području III, biće potrebno i dovoljno, ako su poznate vrednosti $\bar{z}, \bar{y}, f, \psi, \eta$ i ξ duž karakteristike (α) C'E, i ako je dato duž prave C'D (horizontalne osovine simetrije) koja nije karakteristika (III granični zadatak). Lako se može pokazati da duž C'D mora da bude jednako nuli.

Sa ovako definisanim početnim uslovima može se konstruisati u navedenom području polje karakteristika primenjujući striktno odgovarajuće obrasce koji su izvedeni u poglavlju 2., samo uz neophodno prilagodjavanje konkretnim uslovima, zato će, za tačke, mreže duž prave C'D, važiti u potpunosti (3.17) i (3.18), a za tačke mreže unutar područja, obrasci (3.19), (3.20) i (3.21).

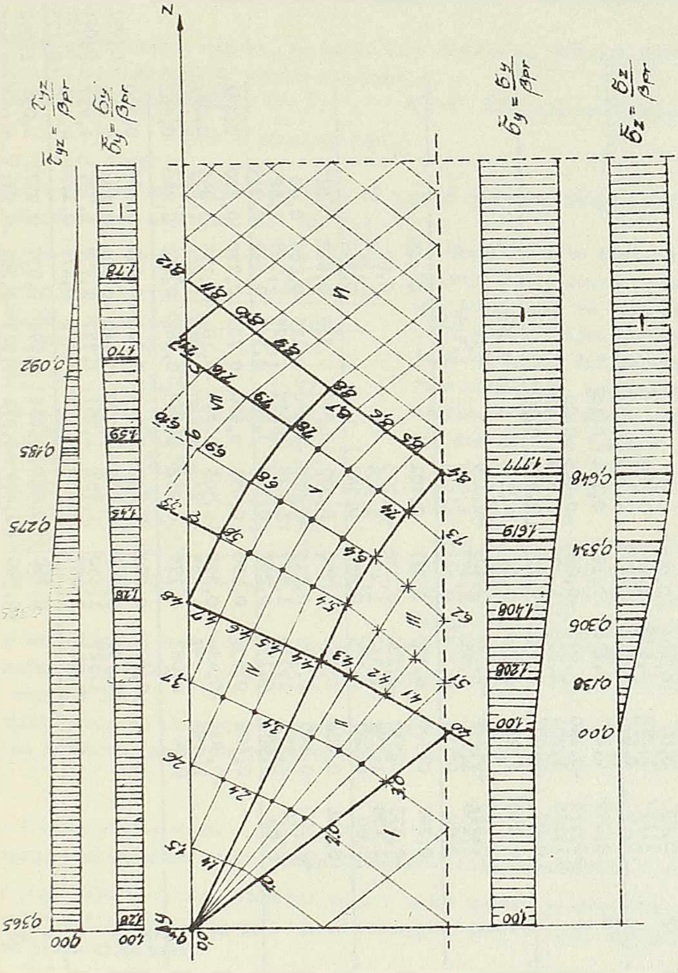
U području IV, polje karakteristika moguće je konstruisati nezavisno od područja III. Iz konstrukcije polja karakteristika za područje II, poznate su vrednosti $\bar{z}, \bar{y}$, f, η, ξ duž (β) karakteristike OF. Pomoću trećeg graničnog zadatka lako je onda konstruisati mrežu karakteristika u području IV. Sa sl. 3.22 vidi se da je ono pokriveno mrežom pravih karakteristika, što znači da u čitavoj oblasti vlada konstantno stanje napona Dakle, za sve tačke mreže biće

$$\xi_{k,l} = -0,416 \ , \eta_{k,l} = -1,114 \ , \omega_{k,l} = 20^o, \ \psi_{k,l} = 45^o\,44'30'' \ , f_{k,l} = -0,765$$

Konstrukcijom polja karakteristika u području III i IV, dobijene su početne, vrednosti za $\bar{z}, \bar{y}, f, \eta$ i ξ duž (α) karakteristika EF i (β) karakteristike EL, pomoću kojih se lako konstruiše polje karakteristika u području V (prvi granični zadatak). Obrasci (3.19), (3.20) i (3.21) važiće i ovde u potpunosti.

U području VI, zbog toga što je karakteristika (α) DE prava, kao i zbog uslova koji važe duž horizontalne BD, odnosno vertikalne osovine simetrije AB, polje karakteristika je sastavljeno iz pravih linija, što znači da u čitavoj oblasti vlada konstantno stanje napona. Sem, toga u čitavom području mora τ_{yz} biti jednako nuli zbog simetrije u odnosu na obe koordinatne osovine.

Polje karakteristika u području VII može se sada lako konstruisati pomoću prvog graničnog zadatka. Naime, duž karakteristike FG i GH, koje se seku u tački G, poznate su vrednosti $\bar{z}, \bar{y}$, f, η i ξ za pojedine tačke mreže iz konstrukcije polja V i VI. Ovo područje, kako se sa sl. 3.21 vidi, preseca konture FH. Nije bilo moguće, odrediti unapred tačke mreže pojedinih karakteristika tako da njihovi preseci padnu na konturu. Na sl. 3.22, obeleženi su sa a,b i c preseci pojedinih karakteristika područja VII sa konturom FH, dobijeni su produženom konstrukcijom polja karakteristika izvan konture. Veličine $\bar{z}, \bar{y}$, f, ξ i su onda odredjene interpolacijom izmedju vrednosti u tačkama ispod i iznad konture OA. U svim tačkama mreže, za odredjivanje veličina f, ψ, ω, φ i ξ, važiće inače u potpunosti obrasci (3.19) i (3.20). Za koordinate preseka medjutim, mogu se i ovde upotrebiti obrasci (3.21).



Sl. 3.22

Tabela 7

1 k		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	$\bar{x}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
	$\bar{y}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00								
		1,138	1,239	1,330	1,437	1,525								
		0,00	0,087	0,175	0,262	0,349								
1	$\bar{x}$	0,095	0,107	0,116	0,126	0,134	0,163							
	$\bar{y}$	-0,125	-0,110	-(,096	-0,080	-0,065	0,00							
		1,138	1,239	1,338	1,437	1,525	1,525							
		0,00	0,087	0,175	0,262	0,349	0,349							
2	$\bar{x}$	0,190	0,213	0,232	0,252	0,268		0,326						
	$\bar{y}$	-0,250	-0,220	-0,191	-0,159	-0,129		0,00						
		1,138	1,239	1,330	1,437	1,525		1,525						
		0,00	0,087	0,175	0,262	0,349		0,349						
3	$\bar{x}$	0,286	0,320	0,349	0,377	0,401			0,448					
	$\bar{y}$	-0,375	-0,330	-0,286	-0,238	-0,193			0,00					
		1,138	1,239	1,330	1,437	1,525			1,525					
		0,00	0,087	0,175	0,262	0,349			0,349					
4	$\bar{x}$	0,381	0,426	0,464	0,500	0,531	0,560	0,589	0,618	0,647				
	$\bar{y}$	-0,500	-0,440	-0,382	-0,315	-0,256	-0,190	-0,125	-0,060	0,00				
		1,138	1,239	1,330	1,437	1,525	1,525	1,525	1,525	1,525				
		0,00	0,087	0,175	0,262	0,349	0,349	0,349	0,349	0,349				
5	$\bar{x}$		0,485	0,535	0,590	0,635	0,670	0,705	0,738	0,770	0,834			
	$\bar{y}$		-0,500	-0,440	-0,372	-0,306	-0,243	-0,181	-0,118	-0,059	0,062			
			1,330	1,437	1,525	1,650	1,650	1,650	1,650	1,650	1,650			
			0,00	0,087	0,175	0,262	0,262	0,262	0,262	0,262	0,262			
6	$\bar{x}$			0,601	0,669	0,725	0,764	0,802	0,841	0,877	0,940	0,994		
	$\bar{y}$			-0,500	-0,429	-0,361	-0,300	-0,240	-0,181	-0,124	-0,022	0,066		
				1,525	1,650	1,757	1,757	1,757	1,757	1,757	1,757	1,757		
				0,00	0,087	0,175	0,175	0,175	0,175	0,175	0,175	0,175		
7	$\bar{x}$				0,750	0,812	0,854	0,895	0,937	0,977	1,036	1,090	1,140	
	$\bar{y}$				-0,500	-0,429	-0,371	-0,317	-0,259	-0,203	-0,018	-0,036	0,030	
					1,757	1,870	1,870	1,870	1,870	1,870	1,870	1,870	1,870	
					0,00	0,087	0,087	0,087	0,087	0,087	0,087	0,087	0,087	
8	$\bar{x}$					0,883	0,925	0,967	1,010	1,052	1,107	1,163	1,218	1,274
	$\bar{y}$					-0,500	-0,442	-0,389	-0,332	-0,278	-0,209	-0,139	-0,070	0,00
						1,968	1,968	1,968	1,968	1,968	1,968	1,968	1,968	1,968
						0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

U tablici 6, dati su svi numerički podaci potrebni za detaljnu konstrukciju polja napona, kod koga je μ = 0,1 a odnos strana b/c = 1/3. Tablica sadrži koordinate pojedinih tačaka mreže, kao i φ i ω koji su potrebni za efektivno sračunavanje napona. Jače izvučenim linijama uokvireni su podaci za pojedina područja polja.

Samo polje karakteristika pokazano je na sl.3.22. Jače izvučenim linijama naznačene su karakteristike, koje odvajaju pojedina područja polja. Sem toga, na istoj slici dati su i dijagrami napona σ_z^*, σ_y i τ_{yz} duž konture OFHA i horizontalne osovine simetrije CC'DE.

Efektivno sračunavanje napona, za tačke koje padaju na konturi OFHA i horizontalnu osovinu simetrije, izvršeno je pomoću obrazaca,

$$\sigma_z^* = K'(\sqrt{3}\cos\omega_{k,\ell} + \sin\omega_{k,\ell}\cos 2\varphi_{k,\ell}) - (1-\mu) \quad , \quad \sigma_y^* = K'(\sqrt{3}\cos\omega_{k\ell} - \sin\omega_{k\ell}\cos 2\varphi_{k\ell}) - (1-\mu)$$

$$\tau_{yz}^* = K'\sin\omega_{k,\ell}\sin 2\varphi_{k,\ell}$$

gde je za μ = 0,1 K' = 0,552.

U tabeli 8 složene su vrednosti napona za napred pomenute tačke pomoću kojih su i konstruisani odgovarajući dijagrami na sl. 3.22.

Tabela 8

	σ_z	σ_y	τ_{yz}
4,0	0,00	-1,000	0,00
5,1	-0,138	-1,208	0,00
6,2	-0,305	-1,406	0,00
7,3	-0,534	-1,619	0,00
8,4	-0,648	-1,777	0,00
0,4 -4,8	-0,434	-1,279	0,365
a	-0,500	-1,452	0,275
b	-0,569	-1,585	0,185
c	-0,663	-1,700	0,092
8,12	-0,648	-1,777	0,00

Graničnu silu ili granično opterećenje koje, uzorak dovodi u stanje loma, može se sada sračunati prosto, integracijom napona σ_y duž konture OFHA, ili duž horizontalne osovine simetrije, na jedinicu dubine, uzorka. U oba slučaja biće slično, kao kod slučaja 3.2.1.1.

$$p_{sr} = 2\int_0^1 \sigma_y^* \, dz$$

Ako se u konkretnom slučaju primeni metod numeričke integracije, dobija se za p_{cr}=4,376 β_{pr} ako se integrišu naponi duž konture OFHA, a p_{cr} =4,384 β_{pr} za integraciju duž CC'DB. Uporedjenjem ovih dveju sifara, može se oceniti tačnost primenjenog numeričkog postupka. U konkretnom slučaju tačnost je vrlo velika, i razlika nije veća od 2% .

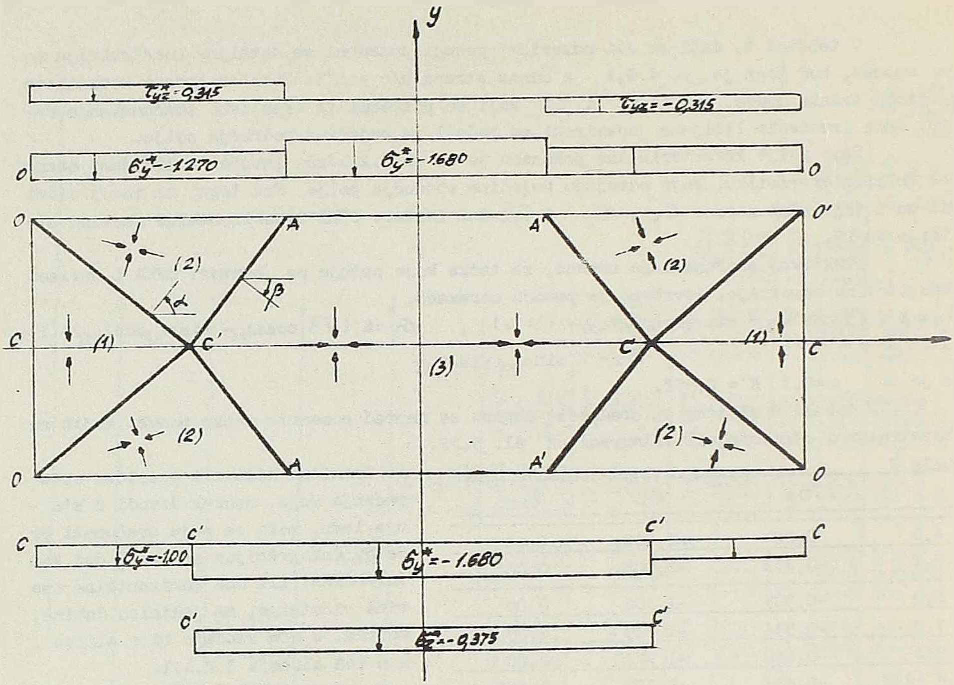
Radi uporedjenja sa eksperimentalnim rezultatima, biće interesantno sračunati, srednji- takozvani prosečni napon. Na jedinicu dubine on za ovaj slučaj iznosi $\sigma_{cp}=p_{cr}/3 = 1,46\,\beta_{pr}$.

3.3 3.3.2. METODE GRANIČNE RAVNOTEŽE a n i č n e r a v n o t e ž e

3.3.2.1 Polje napona konstruisano pomoću diskontinualnih polja konstantnih napona.

U ovom poglavlju biće dato statički moguće polje napona za granični zadatak formulisan u poglavlju 3.3.1. Polje napona biće konstruisano povezivanjem područja konstantnih napona preko diskontinuiteta.

Na sl. 3.23 pokazano je jedno statički moguće polje, sastavljeno od tri različita područja konstantnih napona, povezana površinama diskontinuiteta OC'i C'A. Polje je konstruisano za μ = 0,10.



Sl. 3.23

U području 1, uz slobodnu ivicu OCC biće u ravni (z,y), različit od nule samo σ_y^* napon, s obzirom da mora biti $\tau_{yz}^* = \sigma_z^* = 0$ u čitavom području. Algeberski veći gla vni napon biće onda σ_z, jer σ_y^* može biti u ovom slučaju samo pritisak. To znači da je u području (1) nepoznat samo intenzitet σ_y^* napona. Nezavisno od stanja, napona u osta lim područjima, njegov intenzitet se može odrediti tako, da je uslov plastičnosti zadovoljen tj. Mohr-ov krug napona u dijagramu (σ_n, τ_n) prolazi kroz koordinatni početak i dodiruje krivu plastičnosti f_3 (sl.3.24). U području (2) treba odrediti glavne napone i ugao $\varphi^{(2)}$, koji algebraski veći glavni napon zaklapa sa pozitivnim pravcem x-ose. U ovom području dakle, slično kao i u slučaju 3.2.2.1, treba odrediti tri nepoznate veličine. Za područje (3), pravac glavnog napona je poznat, jer je iz uslova simetrije $\tau_{yz}^* = 0$. Znači u ovom području ostaje da se odrede dve veličine. Ako se tome dodaju uglovi α i β koji zaklapaju normale na površinu diskontinuiteta OC' i C'A sa z-osovinom, dobija se, da za tačno definisanje polja napona datog na sl.3.23, treba odrediti 7 nepoznatih veličina.

Broj nepoznatih se može, medjutim, smanjiti na 5, ako se podje od jednačina , tipa (2.113). Duž površine diskontinuiteta OC' važiće,

$$\sqrt{3}\cos\omega_o^{(1)} - \sin\omega_o^{(1)}\cos 2\alpha = \sqrt{3}\cos\omega^{(2)} - \sin\omega^{(2)}\cos 2(\varphi^{(2)} - \alpha),$$

$$- \sin \omega_o^{(1)} \sin 2\alpha = \sin \omega^{(2)} \sin 2\,(\varphi^{(2)} - \alpha) \qquad (3.38)$$

pošto je $\varphi^{(1)} = 0$, a ω_o^1 je pozna to iz graničnog uslova duž konture OCO. Duž površine, diskontinuiteta C'A mogu se ispisati sledeće dve jednačine,

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos \omega^{(2)} - \sin \omega^{(2)} \cos 2(\varphi^{(2)} - \beta) &= \sqrt{3}\cos \omega^{(3)} - \sin \omega^{(3)} \cos 2\beta \\ \sin \omega^{(2)} \sin 2\,(\varphi^{(2)} - \beta) &= - \sin \omega^{(3)} \sin 2\beta \end{aligned} \qquad (3.29)$$

uzimajući u obzir da je u području (3) $\varphi^{(3)} = 0$, zbog simetrije odnosno zbog $\tau_{yz} = 0$. Iz uslova ravnoteže u pravcu y-ose, dobija se peta jednačina koja vezuje nepoznate veličine

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(\sqrt{3}\cos \omega^{(2)} - \sin \omega^{(2)} \cos 2\varphi^{(2)}) = \operatorname{tg}\alpha(\sqrt{3}\cos \omega_o^{(1)} - \sin \omega_o^{(1)}) + \operatorname{tg}\beta(\sqrt{3}\cos \omega^{(3)} - \sin \omega^{(3)}) \qquad (3.40)$$

Ako se uzmu u obzir jednačine (2.47), pet napred ispisanih jednačina sa pet nepoznatih, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$, $\varphi^{(2)}$, α i β jednoznačno definišu polje napona dato na sl.3.23, pod uslovom da je $\omega_o^{(1)}$ već poznato.

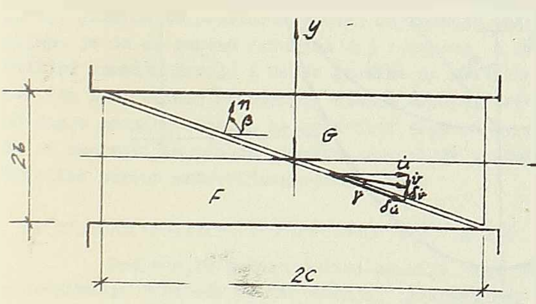
Isto kao kod slučaja 3.2.2.1, rešavanje ovog sistema trigonometrijskih jednačina direktnim putem, predstavlja gotovo nerešiv zadatak. Praktično medjutim, mogu se prve vrednosti nepoznatih naći grafičkim postupkom, koji je prikazan na sl.3.24. Korekcija vrednosti nepoznatih, dobijenih grafičkim putem, postiže se dalje probanjem, pomoću jednačina (3.38), (3.39) i (3.40).

Sa sl. 3.24 se vidi, da je ovde dobijeno rešenje takozvane " pune plastičnosti što znači da na ponaka stanja u sva tri područja ispunjavaju uslov plastičnosti tj. sva tri Mohr-ova kruga dodiruju krivu f_s.

Na sl. 3.23 date su vrednosti komponentalnih napona za sva tri područja, dok su vrednosti za α i β date na sl. 3.24. Granična srednja vrednost σ_y-napona duž konture OAAO iznosi za ovaj slučaj $\sigma_{cr} = -1{,}41\beta_{pf}$. Prosečan srednji napon dobijen metodom karakteristika u prethodnom poglavlju iznosi $\sigma_{cr} = -1{,}46\beta_{pf}$. Razlika iznosi manje od 4%. Ovakav rezultat pokazuje da dikontinualno polje napona, predstavlja i u ovom slučaju vrlo dobru aproksimaciju polja dobijenog metodom karakteristika.

3.3.2.2. Diskontinualno polje brzina deformacije

Polazeći od zadatih uslova po brzinama deformacija na konturi, može se i u ovom slučaju, konstruisati kinematički mogućno polje brzina deformacija.



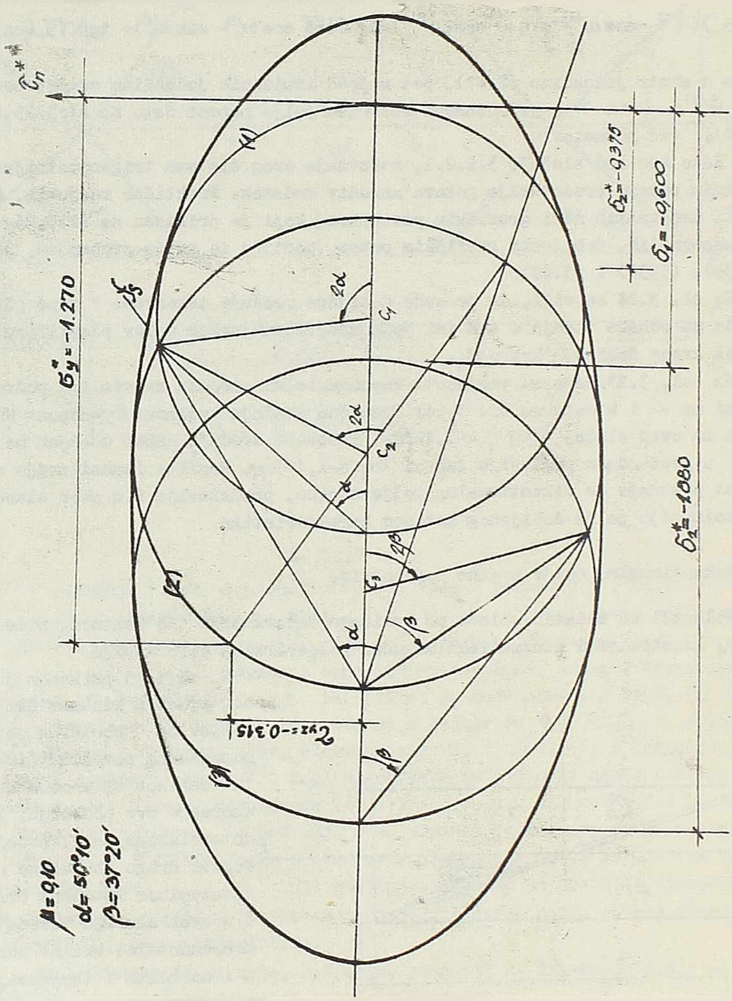
Sl.3.25

Na sl.3.25 prikazan je šema jednog prostog kinematički mogućeg polja. Sa obeležen je ugao, koji normala na površinu diskontinuitete zaklapa sa z-osom i koja deli uzorak u dva područja, od kojih, o no obeleženo sa F, ostaje u miru dok se drugo obeleženo sa G kreće konstantnom totalnom brzinom V=1. I u ovom slučaju važiće (2.119). Komponentalne brzine pomeranja kao i normalna i tangencijalna komponenta totalne brzine duž površine diskontinuitete, iste su kao i u slučaju 3.1 (3.4).

Sličnom analizom kao u slučaju 3.1, lako se dolazi do izraza za kritično opterećenje u obliku

$$p^{x}_{ny} = \left[K'(tg^{2} 2\Psi + 4)^{1/2} - (1-\mu) \right] \frac{\cos 2\Psi}{\sin(2\Psi + \beta)\sin\beta} \qquad (3.41)$$

Da bi se odredila minimalna vrednost graničnog opterećenja postupiće se i ovde na isti način kao i za (3.7).



Sl. 3.24

Prvi uslov ekstremuma (3.8) daće rešenje $\beta_o = \frac{\pi}{2} - \psi$. Takvo rešenje i za uzorak za posmatrani odnos strana ne daje kinematički moguće polje. U konkretnom slučaju, vrednost ugla β koja daje najmanju vrednost graničnog opterećenja iznosi β_o=arctg c/b . Sa ovom vrednošću i drugim uslovom za ekstremum funkcije $p_{ny}^{x} = f(\beta, \psi)$, dolazi se do jednačine

$$\left[- \frac{4K'}{(tg^2 2\psi + 4)^{1/2}} + (1-\mu)\right] + \left[K'(tg^2 2\psi + 4)^{1/2} - (1-\mu)\right]\frac{\cos 2\psi \sin\beta_o}{\sin(2\psi + \beta_o)} = 0 \qquad (3.42)$$

Može se lako pokazati da koreni jednačine (3.42), ne daju kinematički mogućno, polje brzina deformacije, za uzorak ovakvog odnosa strana. Vrednost ψ_o za koju se dobija najmanja vrednost funkcije p_{ny} i za koju je kinematičko polje brzina pomeranja još m o g u ć n o, iznosi kod ovog slučaja $\psi_o = \frac{\pi}{4}$.

Ako se izraz (3.41) napiše u nešto drukčijem obliku koji je povoljniji za dalju analizu, dobiće se

$$\left[p_{ny}^{x} = - \left[K'(\sin^2 2\psi_o + 4\cos^2 2\psi_o)^{1/2} - (1-\mu)\cos 2\psi_o\right] \frac{1}{\sin(2\psi_o + \beta_o)\sin\beta_o}\right.$$

stavljajući $\psi_o = \frac{\pi}{4}$, konačno izraz

$$\min p_{ny}^{x} = - \frac{2K'}{\sin 2\beta_o} \qquad (3.43)$$

U tabeli 9 složene su vrednosti funkcije p_{ny}^{x} za razne vrednosti μ-e koje prektično dolaze u obzir za beton.

Iz tabele se vidi da ovakvo kinematički mogućno polje daje dosta visoke vrednosti za granično opterećenje. Ako se uporede vrednosti graničnog opterećenja dobijena metodom karakteristika za μ = 0,10(p_{ny} = -1,46 β_{pp}) kao gornjom granicom, i vrednosti dobijenom iz kinematički kogućnog polja brzina pomeranja, kao gornjom granicom, dobiće se odstupanje u odnosu na donju granicu, od 25,5% ili 20,4% u odnosu na gornju granicu.

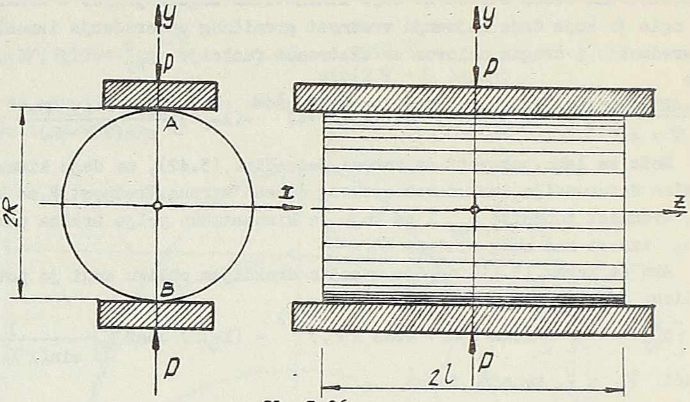
Tabela 9

μ	β_o	ψ_o	$\sin 2\beta_o$	K'	p_{ny}	
0,05	71°30'	45°	0,6018	0,562	-1,86	
0,10	71°30'	45°	0,6018	0,552	-1,83	β_{oo}
0,125	71°30'	45°	0,6018	0,545	-1,81	
0,20	71°30'	45°	0,6018	0,529	-1,76	

Ako se uzme u obzir, medjutim, da bi polje napona kao statički moguće, moglo da posluži kao aproksimativno rešenje za donju granicu kad uzorak koji ima i znatnu debljinu, odnosno kod koga je, dimenzija a veća, a polje brzina deformacija kao kinematički mogućno polje brzina za gornju granicu za prostoran slučaj naprezanja onda razlika od 25% ne izgleda velika. Razumljivo je da se zanemarivanjem σ_x -napona u ovakvim slučajevima i mora doći do većih razlika izmedju gornje i donje granice za kritično opterećenje. Medjutim, isto tako je jasno, da i za slučaj prostornog stanja napona, tačno rešenje zadatka ne može biti manje, od donje granice odnosno ne može biti veće od gornje granice. U svetlu ovih činjenica može se smatrati da metoda granične ravnoteže (limite analysis) i ovde daje pravilan i sa tehničke strane zadovoljavajući odgovor.

3.4. CILINDAR OPTEREĆEN DUŽ IZVODNICE , n d u ž i z v o d n i c e

Poslednjih godina u nizu zemalja, kao Braziliji, Japanu, Francuskoj itd., za odredjivanje čvrstoće pri zatezanju, upotrebljava se uzorak u obliku dugačkog cilindra, koji je pritisnut dvema krutim čeličnim pločama po naspramnim izvodnicama. Oblik i način opterećenja prikazan je na sl.3.26.



Sl. 3.26

Još je 1930.g. (Ingenieur-Archiv.1930).E.Kohl, predpostavljajući elastične osobine materijala, dao stanje na pona u ovako opterećenom uzorku; isključujući singularnu tačku u A i B, gde se za elastično rešenje pojavljuje beskonačno veliki naponi, najveći glavni napon zatezanja nalazi se u preseku za x=0. Na jedinicu dužine cilindra glavni napon zatezanja u pomenutom preseku ima vrednost

$$\sigma_z' = \frac{P}{\pi R} \tag{3.44}$$

gde je R poluprečnik cilindra.

Pretpostavljajući elastične osobine materijala sve do loma uzorka, većina istraživača koristi obrazac (3.44) za odredjivanje čvrstoće pri zatezanju.

L'Hermite (II-29), razmatrajući ova pitanja, dolazi do zaključka, da postoji razlika izmedju jednoosne čvrstoće pri zatezanju i napona zatezanja koji dovode napred, opisan uzorak u granično stanje. Izjednačujući dilatacije pri prostom jednoosnom zatezanju i dilatacije za x=y=0 kod ovog uzorka, on dobija odnos

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi R}(1 + \mu)\ (1 + 2\mu) \tag{3.45}$$

ili

$$\sigma_z = \sigma_z'\ (1 + \mu)\ \ (1 + 2\mu) \tag{3.45a}$$

Ako se uzme za $\mu = \frac{1}{5}$, onda se odnos čvrstoće pri jednoosnom zatezanju i čvrstoće pri " cepanju", kako L'Hermite zove ovu otpornost materijala, dobija

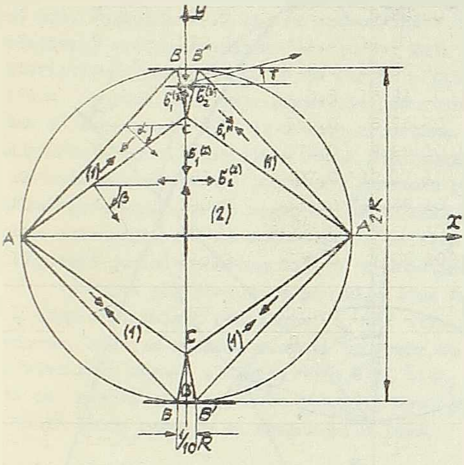
$$\sigma_z = 1{,}68\,\sigma_z' \tag{3.45b}$$

Kao što je napred rečeno, do ovakvog odnosa, došlo se grubom idealizacijom pojava pri lomu uzorka. Interesantno je da L'Hermite, u ovom razmatranju uzima za Poisson-ov koeficijent $\mu = \frac{1}{5}$, ia ko je sam utvrdio primenjujući akustičnu metodu, da u oblasti graničnog stanja on povećava vrednost čak i preko $\mu = \frac{1}{2}$ (II-16).

Napred je već rečeno, da je svrha ovog ogleda odredjivanje jednoosne čvrstoće, betona pri zatezanju. Praktično izvršenje ogleda vrši se na taj način, što se inače linijsko opterećenje nikad ne realizuje, već se dobija podeljeno opterećenje preko jednog, podmetača na približno 1/20 prečnika cilindra.

Granični uslovi kod ovako formulisanog graničnog zadatka su sledeći: duž cele, konture, vektor spoljnog opterećenja je nula, sem na delu (1/20 prečnika cilindra) gde deluje opterećenje.

Na sl. 3.27, prikazano je jedno statički moguće polje napona. Granični uslov, da je duž konture vektor spoljnog opterećenja nula, ostvaren je tako što je već duž lini je AB on jednak nuli. Polje se sastoji od tri različita područja konstantnih napona koja su povezana površinama diskontinuiteta AB, BC i CA. Na sl. 3.27 prikazano je polje napona pod pretpostavkom ravne deformacije.



Sl. 3.27

U području (1), uz slobodnu konturu, vlada jednoosno stanje napona. Pravac , glavnog napona poklapa se sa pravom AB Ostaje dakle kao nepoznat njegov inten zitet. U području (2) i (3), zbog si- trije uzorka i opterećenja, pravci gl- vnih napona su poznati. Ostaju nepoznate samo njihove veličine. Sa dva nepoznata ugla β i γ , koji normale na linije diskontinuiteta AC i BC zaklapa ju sa pozitivnim pravcem x-osovine, br oj nepoznatih iznosi sedam. Nepoznate, su dakle, $\sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)}, \sigma_2^{(2)}, \sigma_1^{(3)}, \sigma_2^{(3)}, \alpha$ i β .

Duž AB važiće, s obzirom na jednačine (2.112)

$$
\begin{aligned}
0 &= \sigma_1^{(1)} - \sigma_1^{(1)} \cos 2(\varphi^{(1)} - \alpha) \\
0 &= \sigma_1^{(1)} \sin 2 (\varphi^{(1)} - \alpha)
\end{aligned}
\qquad (3.46)
$$

Druga jednačina (3.46) daje neposredno $\varphi^{(1)} = \alpha$, što je već napred zaključeno. Duž površine diskontinuiteta AC se može pisati,

$$
\begin{aligned}
\sigma_1^{(1)}[1 - \cos 2(\alpha - \beta)] &= \sigma_1^{(2)} + \sigma_2^{(2)} - (\sigma_1^{(2)} - \sigma_2^{(2)}) \cos 2\beta \\
\sigma_1^{(1)} \sin 2(\alpha - \beta) &= -(\sigma_1^{(2)} - \sigma_2^{(2)}) \sin 2\beta
\end{aligned}
\qquad (3.47)
$$

Duž CB va žiće, medjutim,

$$
\begin{aligned}
\sigma_1^{(1)}[1 - \cos 2(\alpha - \gamma)] &= \sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} - (\sigma_1^{(3)} - \sigma_2^{(3)}) \cos 2\gamma \\
\sigma_1^{(1)} \sin 2(\alpha - \gamma) &= -(\sigma_1^{(3)} - \sigma_2^{(3)}) \sin 2\gamma
\end{aligned}
\qquad (3.48)
$$

Geometrijska veza izmedju β i γ jasna je sa sl. 3.27 i glasi

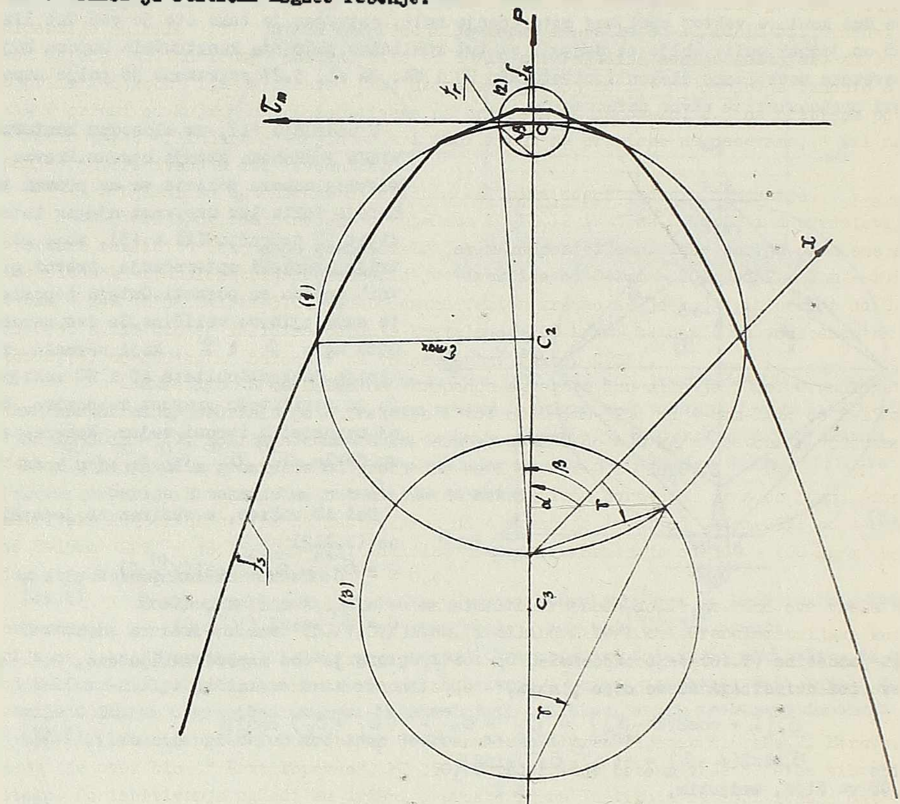
$$
\frac{1}{20} \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta = 1 \qquad (3.49)
$$

Uslov ravnoteže u y-pravcu glasiće,

$$
\frac{1}{20} \sigma_1^{(3)} = \sigma_1^{(2)} \qquad (3.50)
$$

Jednačine (3.46), (3.47), (3.48), (3.49) i (3.50) definišu statički moguće polje napona dato na sl. 3.27. Sličnim postupkom kao i u slučajevima 3.2.2.1 i 3.3.2.1 , mogu se dosta brzo odrediti nepoznate veličine.

Sa sl. 3.28 se vidi, da stanje napona u području (3) ne zadovoljava uslov pla stičnosti tj. Mohr-ov krug leži unutar krivih f_r i f_s. U području (1) i (2) medjutim,postignuto je stanje tzv. pune plastičnosti. Ova kvo rešenje je razumljivo jer je uzrok loma napon zatezanja u području (2). Polja pune plastičnosti u sve tri područja ne daju u ovom sluča ju statički moguće rešenje.



$\mu = 0,1$

α	43°30'
β	48°10'
γ	-25°30'
$\sigma_1^{(1)}$	-2,00
$\sigma_1^{(2)}$	-0,156
$\sigma_2^{(2)}$	+0,154
$\sigma_1^{(3)}$	-3,015
$\sigma_2^{(3)}$	-1,420

Sl. 3.28

Na sl. 3.28 date su vrednosti nepoznatih β, γ kao i galvnih napona za sva tri područja, kada je μ = 0,10. Iz priložene tabele se vidi da kritična vrednost σ_y napona, koji je u ovom slučaju jednak $\sigma_1^{(3)}$, iznosi $-3{,}015\ \beta\rho r$. Sila koja uzorak dovodi u stanje loma jednaka je onda,

$$p = -3{,}015\ \frac{R\,l}{3}\ \beta\rho r \tag{3.51}$$

gde je R-poluprečnik, a l polovina dužine cilindra.

Iz tabele na sl. 3.28 vidi se da glavni napon zatezanja u području (2) iznosi $\sigma_1^{(2)} = +0{,}154\ \beta\rho r$. Dakle, njegova vrednost premašuje znatno čvrstoću pri jednoosnom zatezanju. Pogrešno bi bilo, iz ovako konstruisanog polja napona izvoditi zaključak o kvantitativnoj vrednosti napona zatezanja, koji posmatrani uzorak dovodi u stanje loma. Karakteristično je medjutim, to da ako je u pitanju polje napona, dakle d o n j a g r a n i c a napona zatezanja premašuje jednoosnu čvrstoću zatezanja. Ovakav podatak nije našao do sada svoju potvrdu u eksperimentima. Uslov plastičnosti (2.16) i (2.17) medjutim pokazuje da su u uslovima ravne deformacije, za područje kidanja mogući i veći naponi zatezanja nego što je jednoosna čvrstoća pri zatezanju. Jasno je da se iz ovako konstruisanog rešenja ne bi mogao izvoditi zaključak, pa čak ni o kvantitativnoj vrednosti napona zatezanja, već se sigurnošću može samo ocenjivati i uporedjivati ukupna sila loma sa odgovarajućim eksperimentalnim vrednostima.

Dobra saglasnost ukupne sile loma dobijene preko polja napona datog na sl. 3.27 i eksperimentalnih rezultata (vidi str. 97.) pokazuju da ovakvo rešenje ima svoju vrednost. Može se svakako staviti prigovor da ono nerešava u celini ni veličinu ni raspored stvarnih napona u uzorku. Mnogo bi bilo, medjutim, od ovako uprošćenog rešenja tražiti da rešava odjednom sva pitanja. Dovoljno je svakako što na ovaj način dobija jedno dosta dobro rešenje za ukupnu silu loma.

4. Rezultati eksperimentalnih ispitivanja

U odeljku 3 prikazano je rešenje graničnih zadataka za: dug prizmatičan uzorak opterećen osnovama (str. 53.), dug prizmatičan uzorak opterećen po dužoj strani (str. 5_.) u uslovima ravne deformacije, dug prizmatičan uzorak opterećen po dužoj strani (str. 75.) u uslovima ravnog stanja napona, kao i statičko polje za cilinder opterećen duž izvodnice (str. 83.) u uslovima ravne deformacije. U ovom odeljku biće prikazani rezultati ogleda vršeni u cilju proveravanja rezultata dobijenih teorijskim putem za napred pomenute slučajeve graničnih zadataka.

Eksperimenti vršeni u ovom redu nisu imali za cilj da za odredjene oblike i veličine uzorka, u funkciji od brojnih parametara od kojih zavisi kvalitet betona odrede striktno brojne vrednosti za silu loma. Više se težilo ka tome da se kroz oblik i način opterećenja stvore što približniji uslovi teorijskim uslovima istaknutim u odeljku 3. Kroz ove oglede težilo se ka tome da se eliminiše bar jedan od krupnih faktora, koji bi mogao imati uticaja na veličinu sile loma, tj. vodilo se računa o jednoosovinskoj čvrstoći betona, što praktično znači da je za sve oblike uzorka, koji su eksperimentalno tretirani posmatrane razne marke betona. Pored toga u interpretaciji rezultata ogleda težilo se ka tome da se uzimaju u obzir samo oni rezultati za koje se bilo merenjem dilatacija, bilo makroskopskim osmatranjem figure loma moglo utvrditi centričnost apliciranog opterećenja. Takvom selekcijom rezultata brojnih uzoraka, kako po obliku, tako i po veličini eliminisan je uglavnom faktor velike disperzije rezultata.

4.1. OPIS UGLEDA I NAČIN ISPITIVANJA

Pojedine serije uzoraka sastojale su se uvek od dugih prizmi, kod kojih je odnos strana 1:3, kocki i cilindra, kod kojih je odnos prečnika i visina cilindra 1:1. Kod prizama, koje su uvek ispitivane na pritisak po osnovama i na pritisak po dužoj strani, dimenzije su bile 7,07/7,07/21 cm. Dimenzije kocki iznosile su 10/10/10 cm. Dimenzije, kod ugleda cilindričnog oblika bile su 10/10 cm. Pojedine serije sastojale su se iz : 6 prizmi, 6 kocki i 6 cilindara. Broj uzoraka u jednoj seriji najmanje je iznosio 6 kocki, 6 prizmi od kojih su tri ispitivane na pritisak na osnovama, a 3 na pritisak po dužim stranama, i 6 cilindara od kojih su tri ispitivani na pritisak na osnovama, a tri na cepanje, opterećivanjem duž izvodnica.

Ugledi su betonirani u čeličnim kalupima odgovarajućih dimenzija.

Serije ugleda označene u tabelama 10,11,12 i 13 sa C, S, B i A predstavljaju, u stvari različite betone po granulometrijskim kompozicijama. Tako serija označena sa C ima sledeću granulometrijsku kompoziciju: frakcije od 0-2mm - 20%; od 2 - 4mm - 19%; od 4-8mm - 24% i od 8-15mm-37%. Vodocementni faktor kretao se je kod ovih serija od 0,75, do 0,36 s tim što se količina cementa kretala od 200 kg/m^3 betona (za vodocementni faktor 0,75) do 450 kg/m^3 betona (za vodocementni faktor 0,36).

Kod serija S maksimalne krupnoća agregata iznosila je 30mm. Granulometrijska kompozicija sadržala je 4 frakcija i to: od 0-4mm-32%; od 4-8mm-14%; od 8-15mm-20% i od 15-30mm -34%. Količina cementa kretala se od 250 do 400 kg/m^3 betona a vodocementni faktor u nešto užim granicama od prethodne serije, od 0,6 do 0,45.

Serije B takodje su betonirane sa maksimalnom čvrstoćom zrna do 30mm. Granulometrijska kompozicija bila je sastavljena od 4 frakcije i to: od 0-4mm-25%; od 4-8mm-14% od 8-15mm -22% i od 15-30mm-39%. Količina cementa iznosula je od 300 - 400 kg/m^3 betona dok je vodocementni faktor bio 0,55 - 0,4.

I konačno, serije A imale su maksimalnu krupnoću do 15 mm. Kod ove vrste betona radjene su samo prizme 7,07/7,07/21 cm. i cilindri 10/10cm. Granulometrijska kompozicija se takodje sastojala od 4 frakcije i to: od 0-2mm-36%;od2-4mm-16%; od 4-8mm -21% i od 8-15 mm-27%. Količina cementa iznosila je 450kg/m^3, a vodocementni faktor kod sve tri serije 0,38.

Za sve uglede upotrebljen je granulisan i pran šljunak iz reke V. Morave. Cement je uvek bio " Novi Popovac", PC 350. Ugradjivanje betona vršeno je na vibracionom stolu. Do ispitivanja ugledi su držani u prostorijama Instituta za ispitivanje materijala pri Gradjevinskom fakultetu uz propisanu negu po PTP 3. Temperatura prostorija iznosila je 20° C sa malim varijacijama u toku zime i leta.

Ispitivanje ugleda vršeno je na Amslerovim presama kapaciteta 60 i 300t. Površine na kojima je nanošeno opterećenje nisu pre ispitivanja specijalno obradjivane. Brzina nanošenja opterećenja iznosila je približno 1kg/cm^2 na sekundu. Sila loma registrovana je na priključnom manometru uz presu.

4.2. REZULTATI ISPITIVANJA

Rezultati ispitivanja ugleda pojedinih serija sredjeni su tabelarno u tabelama 10,11,12 i 13. Grafički prikaz dat je na dijagramima na slikama 4.1, 4.2, 4.3, i 4.4. U tabeli 10 i na sl. 4.1 prikazane su vrednosti čvrstoće kocke u zavisnosti od jednoosne, čvrstoće na pritisak. Naporedo sa podacima koje daju Sovjetski propisi prikazane su i statističke krive i to: pravolinijski trend (I-14) u koji su uračunate sve tačke odn.sve serije naznačene u ta beli 10, i parabolični trend (parabola II stepena) koji je odre - djen odbacivanjem serije - tačaka S_4, S_7, S_8 i S_{10}.

U cilju dobijanja što tačnijih podataka, odnosno što tačnijeg definisanja kvaliteta betona (jednoosovinske čvrstoće na pritisak), sredjeni su i podaci čvrstoće cilindra 10/10 opterećenih u pravcu osovine čilindra. U tabeli 11 nalaze se podaci za seri je C i S, čvrstoće cilindra u funkciji od jednoosne čvrstoće na pritisak. Grafički pri kaz dat je na dijagramu - sl. 4.2. I u ovom slučaju tačke (serije) grupisale su se oko pravca, tako da se primenjujući teoriju da kva drat odstupanja bude minimalan mogao odrediti pravolinijski trend. Uporedjenjem dijagrama tačnije rečeno uporedjenjem odnosa pr izma- kocka, prizma - cilindar može se uspostaviti odnos čvrstoća cilindar - kocka. Za ispitive ne uzorke srednja vrednost ovog odnosa kreće se oko 0,9 što se nalazi u području onih podataka koji se već nalaze u literaturi.

U tabeli 12 i na dijagramu sl. 4.3 prikazani su ekspirimentalni podaci za lom dugog prizmatičnog uzorka opterećenog po dužoj strani. Kod ovog ogleda korišćeni su podaci serija C, S i B. Grupisanje ekspirimentalnih rezultata, od kojih svaka tačka u dijagramu predstavlja jednu seriju od najmanje tri ugleda odnosno njihovu aritmetičku sredinu, dozvoljavala je da se kao statističke - srednje vrednosti izaberu prave linije. Konstante pravca za koordinatni sistem (β_{PP}, β_{PP}) odredjene su i ovde pomoću teorije " najmanjeg kvadrata".Naporedo sa ovom statističkom krivom, na dijagramu su prikazane te orijska reš enja za ovako definisan granični zadatak.

Sa sl. 4.3 se jasno vidi da za ugled sa usvojenim odnosom strana, teorijsko tre tiranje u uslovima ravne deformacije nije dovelo do željenog rezultata. Prosečna vred - nost kritičnog napona dobijenog pod uslovima ra vne deformacije znatno premašuje vredno sti dobijene ogledima. Verovatno je, da se u srednjem preseku i za preseke dovoljno dale ko od kra jeva uzorka, ostvaruje naponsko stanje odredjeno u 3.2.1.1 (str. 64) tj. da se vrednost kritičnog napona kreće oko vrednosti $\sigma_{cr}=-2,285\,\beta_{PP}$ za $\mu=0,10$.Medjutim, za preseke blizu krajeva uzorka kao i same krajeve sigurno je da je vrednost kritičnog napona znatno manja. Čak šta više na osnovama uzorka mora vektor apoljnog opterećenja biti nula. Što znači da se u područjima uz osnove može pojaviti σ_y -napon najviše jednak β_{PP}dok σ_z mora biti nula, što kod ravne deformacije kao što je poznato, nije slučaj.Dakle,može se reči da granični uslovi po na ponima na konturi u uslovima ravne deformacije za ovakav uzorak nisu ispunjeni.

Od rešenja datog u 3.2.2 (str. 68) moglo bi se kao približno rešenje koristiti g o r n j a g r a n i c a 3.2.2.2 (str.71), kao jedno kinematički moguće polje kod koga su uslovi po brzinama deformacija na konturi ispunjeni. Medjutim,kako se sa dijagrama sl. 4.3 vidi ovakve rešenja daje vrlo visoku vrednost $\sigma_{cr}=-2,32\,\beta_{PP}$, za $\mu=0,1$ (v. tabelu 6) u odnosu na ekspirimentima dobijene vrednosti.

Mnogo bolja saglasnost za eksperimentalnim rezultatima dobija se, medjutim pomoću teorijskog rešenja datog u 3.3. S obzirom da se rešenje dato u 3.3.1 ili 3.3.2.1 može u ovom slučaju smatrati kao jedno statički moguće polje napona, jer su granični uslovi po napon a na konturi ispunjeni, predstavljaće ono dakle, donju granicu za kritično opterećenje. Gornja granica odnosno kinematički moguće polje brzina pomeranja sračun o, je u 3.3.2.2. Sa sl. 4.3. se vidi da eksperimentalni podaci vrlo dobro grupišu izmedju , ovih dvaju granica. Kao srednje statističke vrednosti eksperimentalnih podataka na dijagramu su prikezane dve krive. Kod krive (1) konstante pravca a i b odredjene su iz uslova da kvadrat odstupanja bude u minimumu. Kao što se vidi, prava ne prolazi kroz početak Kriva (2) medjutim, prolazi kroz koordinatni početak, " a" je koeficijent pravca odredjen po teoriji minimuma kvadrata odstupanja. Obe linije padaju izmedju teorijskim putem odredjenih granica. Vrednosti koeficijenata a′i b′kao i same jednačine date su na dijagramu sl. 4.3.

Razlike izmedju donje i gornje granice s jedne strane i statističkih krivih sa donjom odnosno gornjom granicom sa druge strane moraju u ovom slučaju biti ocenjeni kao zadovoljavajući. Ako se uzme u obzir da je kod statičkog polja (donja granica, zanemaren uticaj σ_x - napona (normalni napon u pravcu kraće strane uzorka), onda razlika , izmedju krive (2) i donje granice od 8,5% treba da sa tehničke tačke gledišta predstavlja dobro rešenje. Nešto veća razlika izmedju statističke vrednosti i gornje granice (oko 14%) mora se takodje ocenjivati kroz prizmu uprošćenog rešenja za kinematički moguće polje brzina deformacije od rešenja prikazanog u 3.2.2.2.

U tabeli 13 i na dijagramu sl. 4.4 prikazani su eksperimentalni podaci za lom cilindričnog uzorka opterećenog silama duž izvodnica. Kod ovog ogleda korišćeni su podaci serije C, S i A. Eksperimentalni podaci i u ovom slučaju dozvoljavali su da se kao statistička kriva izabere prava linija. Konstante pravca a" i b" njihove brojne vrednosti, kao i same jednačine, date su uz tabelu 13 i na dijagramu sl. 4.4. Slično kao kod prethodnog sluča ja , kriva (1) ne prolazi kroz koordinatni početak. Kod krive (2) medjutim , b" =0, dok je koeficijent pravca a" odredjen iz uslova da kvadrat odstupanja bude u minimumu. Naporedo sa ovim krivama, prikazana je i teorijska kriva sračunata u 3.4. Za μ = 0,10 i za uzorak dimenzija 2R=10cm i 21 = 10 cm., pomoću jednačine (3.51), lako se dobija kritična vrednost sile loma $p_{cr} = 3{,}015 \cdot 5^2 \beta_{pp} = 15{,}08\beta_{pp}$. Pošto rešenje (3.51) predstavlja jedno statički moguće polje, dakle, d o n j u g r a n i c u, a gornja granica nije za ovaj slučaj ni konstruisana, ostaje da se uporede rezultati dobijeni u (3.51) sa podacima koje daju statističke krive. Uzimajući podatke za krivu (2), razliku izmedju statističkog i teorijskog podatka iznosi manje od 2%. Ovakav rezultat svakako pokazuje da je donja granica odredjena sa vrlo visokom tačnošću. Činjenica, da za ovaj slučaj nije konstruisano rešenje za gornju granicu, ne može nikako umanjiti vrednost prikazanog rešenja ako se ima u vidu da eksperimentalni podaci u konkretnom slučaju služe kao reper i u neku ruku igraju ulogu gornje granice.

Tabela 10

Redni broj	Oznaka serije	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	Napomena
0	1	2	3	4	5	6
1	C_2	175,0	245,0	4,29 10^4	3,06 10^4	
2	C_3	157,0	220,0	3,45 10^4	2,46 10^4	
3	C_4	218,0	310,0	6,76 10^4	4,75 10^4	
4	[illegible]	264,0	377,0	9,95 10^4	6,97 10^4	
5	[illegible]	250,0	355,0	8,88 10^4	6,25 10^4	
6	S_1	196,5	293,0	5,86 10^4	3,86 10^4	
7	[illegible]	272,0	411,0	11,18 10^4	7,40 10^4	
8	S_3	280,0	412,0	11,54 10^4	7,84 10^4	
9	[illegible]	300,0	463,5	13,91 10^4	9,00 10^4	
10	S_5	240,0	365,0	8,76 10^4	5,76 10^4	
11	S_6	250,0	371,0	9,28 10^4	6,25 10^4	
12	S_7	285,0	427,0	12,17 10^4	8,12 10^4	
13	S_8	190,0	334,0	6,35 10^4	3,61 10^4	
14	[illegible]	190,0	[illegible]	5,58 10^4	3,61 10^4	
15	S_{10}	210,0	336,0	7,06 10^4	4,41 10^4	
15		3477,5	5216,0	125,02 10^4	83,36 10^4	
n		$\sum_1^n x_i$	$\sum_1^n y_i$	$\sum_1^n x_i y_i$	$\sum_1^n x_i^2$	

Pravoliniski trend

$y = ax + b$

$a = 1,477$

$b = 5,461$

$y =$

$x =$

$\beta_K = 1,477\,\beta_{PP} + 5,461$

Parabolični trend:

$\beta_K = -49,70 + 1,96\,\beta_{PP} - 0,00104\,\beta_{PP}^2$

Tabela 11

Redni broj	Oznaka serije	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	Napomena
0	1	2	3	4	5	6
1	[illegible]	175,0	238,0	4,17 10^4	3,06 10^4	
2	[illegible]	157,0	177,0	2,78 10^4	2,46 10^4	
3	[illegible]	218,0	235,0	5,12 10^4	4,75 10^4	
4	[illegible]	264,0	345,0	9,11 10^4	6,70 10^4	
5	[illegible]	250,0	288,0	7,20 10^4	6,25 10^4	
6	[illegible]	196,5	279,0	5,48 10^4	3,86 10^4	
7	[illegible]	272,0	347,0	9,44 10^4	7,40 10^4	
8	[illegible]	280,0	394,0	11,03 10^4	7,84 10^4	
9	[illegible]	300,0	436,0	13,08 10^4	9,00 10^4	
10	[illegible]	240,0	307,0	7,37 10^4	5,76 10^4	
11	[illegible]	250,0	324,0	8,10 10^4	6,25 10^4	
12	[illegible]	285,0	390,0	11,12 10^4	8,12 10^4	
13	[illegible]	190,0	260,0	4,94 10^4	3,61 10^4	
14	[illegible]	190,0	293,0	5,57 10^4	3,61 10^4	
15	[illegible]	210,0	320,0	6,72 10^4	4,41 10^4	
15		3477,5	4633,0	111,23 10^4	83,08 10^4	
n		$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i y_i$	$\sum x_i^2$	

Pravolinijski trend:

$y = ax + b$

$y_i = \beta c$

$x_i = \beta_{PP}$

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

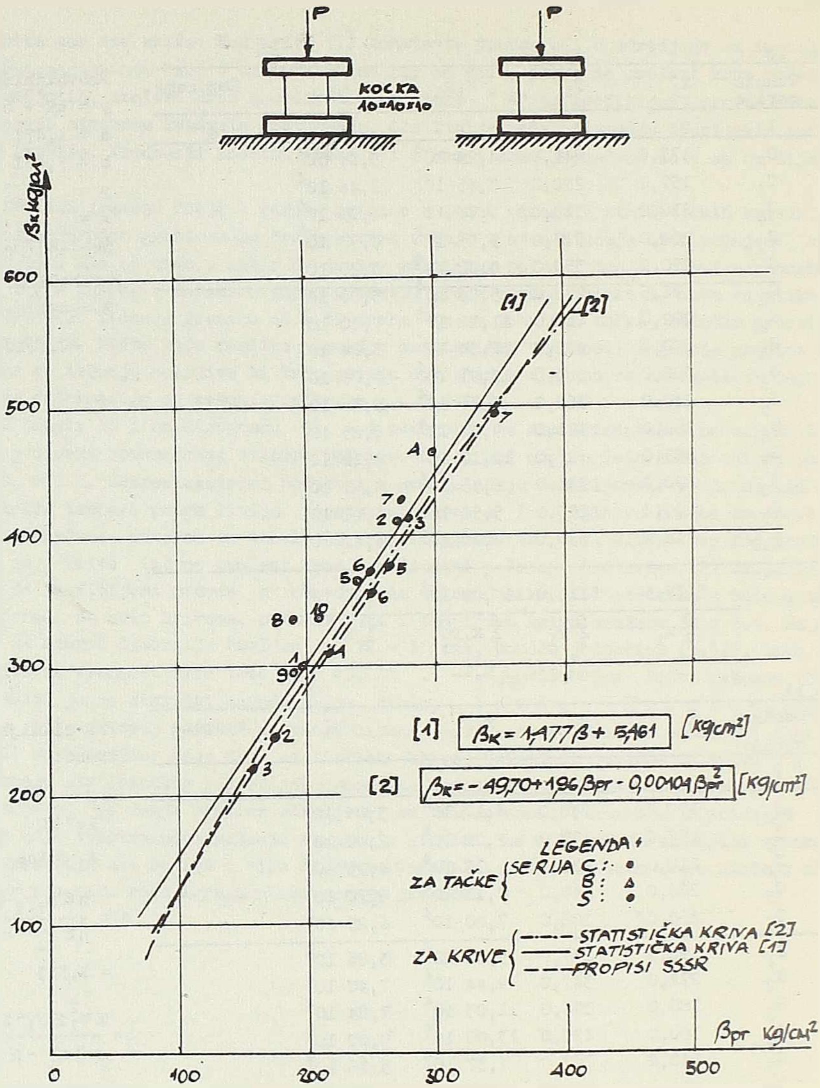
$= 1,553$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

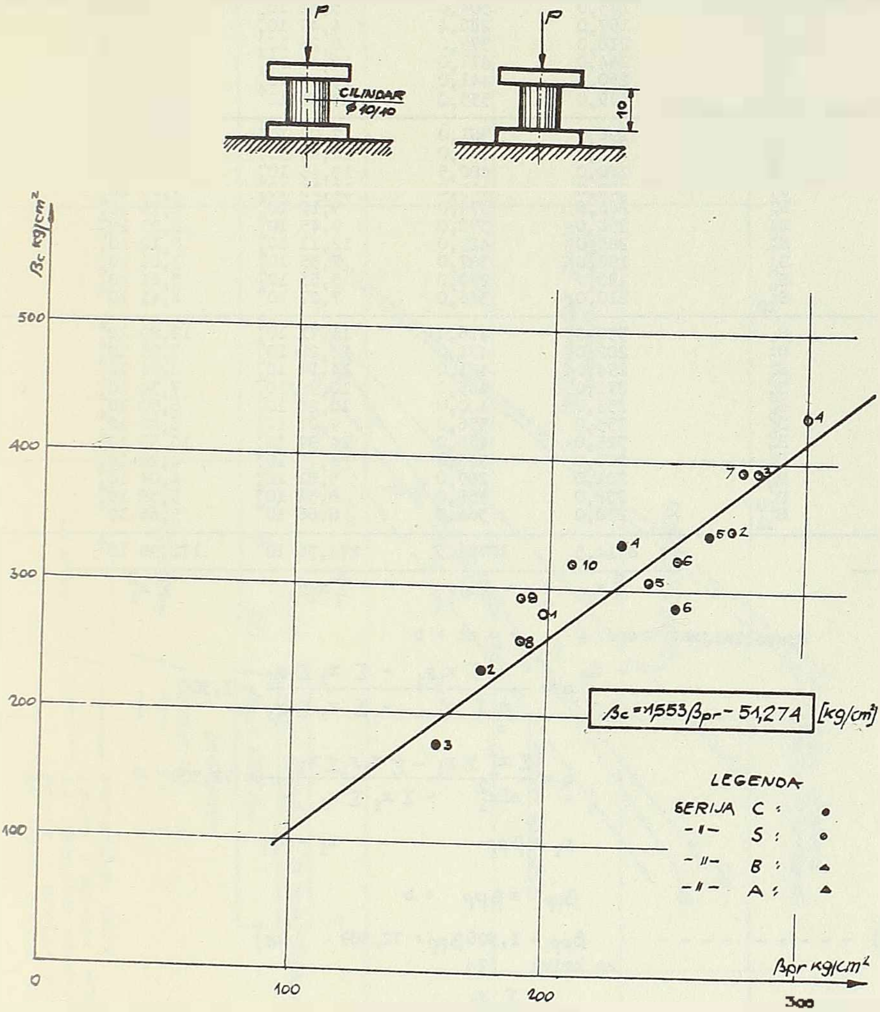
$= -51,274$

$\beta c = a\,\beta_{PP} + b$

$\beta c = 1,553\,\beta_{PP} - 51,274$


P
P
KOCKA
10x10x10
β_K kg/cm²
600
500
400
300
200
100
0
100
200
300
400
500
β_{pr} kg/cm²
[1]
[2]
[1] $\beta_K = 1{,}477\beta + 5{,}461$ [kg/cm²]
[2] $\beta_K = -49{,}70 + 1{,}96\beta_{pr} - 0{,}00104\beta_{pr}^2$ [kg/cm²]
LEGENDA:
ZA TAČKE
SERIJA C: •
B: Δ
S: •
ZA KRIVE
STATISTIČKA KRIVA [2]
STATISTIČKA KRIVA [1]
PROPISI SSSR

Sl. 4.1


P
P
CILINDAR
ø 10/10
10
βc kg/cm²
500
400
300
200
100
0
100
200
300
βpr kg/cm²
βc = 1,553 βpr − 51,274 [kg/cm²]
LEGENDA
SERIJA C :
−I− S :
−II− B :
−II− A :

Sl. 4.2

Tabela 12

Redni broj	Oznaka serije	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	Napomena
0	1	2	3	4	5	
1	[illegible]	175,0	304,0	5,32 10^4	3,06 10^4	
2	[illegible]	157,0	286,4	4,49 10^4	2,46 10^4	
3	[illegible]	218,0	379,0	8,26 10^4	4,75 10^4	
4	[illegible]	264,0	471,0	12,43 10^4	6,70 10^4	
5	[illegible]	250,0	441,0	11,03 10^4	6,25 10^4	
6	[illegible]	349,0	555,0	19,37 10^4	12,18 10^4	
7	S_1	196,5	361,0	7,09 10^4	3,86 10^4	
8	S_2	272,0	450,0	12,24 10^4	7,40 10^4	
9	S_3	280,0	480,5	13,45 10^4	7,84 10^4	
10	S_4	300,0	405,0	12,15 10^4	9,00 10^4	
11	S_5	240,0	379,0	9,10 10^4	5,76 10^4	
12	S_6	250,0	378,0	9,45 10^4	6,25 10^4	
13	S_7	285,0	425,0	12,11 10^4	8,12 10^4	
14	S_8	190,0	387,0	7,35 10^4	3,61 10^4	
15	S_9	190,0	290,0	5,51 10^4	3,61 10^4	
16	S_{10}	210,0	346,0	7,27 10^4	4,41 10^4	
17	B_1	330,0	476,0	15,71 10^4	10,89 10^4	
18	B_2	282,0	471,0	13,28 10^4	7,95 10^4	
19	B_3	294,0	481,0	14,14 10^4	8,64 10^4	
20	B_4	271,0	405,0	10,98 10^4	7,34 10^4	
21	B_5	255,0	400,0	10,20 10^4	6,50 10^4	
22	B_6	253,0	356,0	9,01 10^4	6,40 10^4	
23	B_7	325,0	458,0	14,89 10^4	10,56 10^4	
24	B_8	207,0	326,0	6,75 10^4	4,28 10^4	
25	B_9	201,0	289,0	5,81 10^4	4,04 10^4	
26	B_{10}	232,0	358,0	8,31 10^4	5,38 10^4	
27	B_{11}	238,0	364,0	8,66 10^4	5,66 10^4	
27		6714,5	10721,5	274,36 10^4	172,90 10^4	
n		$\sum_1^n x_i$	$\sum_1^n y_i$	$\sum_1^n x_i y_i$	$\sum_1^n x_i^2$	

Pravolinijaki trend: $y = ax + b$

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum y_i} = 1{,}306$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} = 72{,}309$$

$y_i = \beta\rho\rho \qquad x_i = \beta\rho\rho$

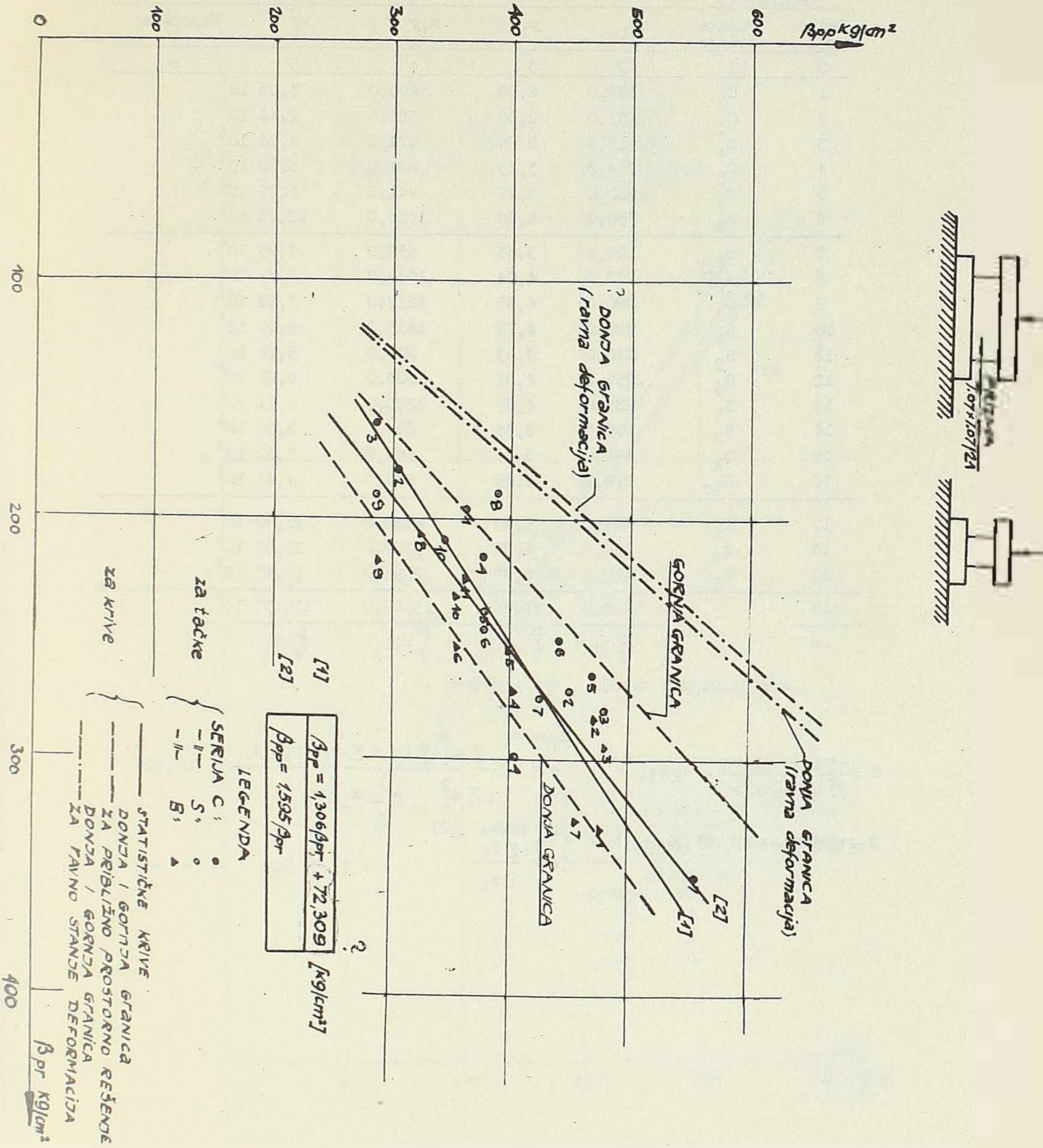
$\beta\rho\rho = a\,\beta\rho\rho + b$

(1) - - - - - - - - - $\beta\rho\rho = 1{,}306\,\beta\rho\rho + 72{,}309$ (kg)

za krivu (2)

$$a = \frac{\sum y_i}{\sum x_i} = 1{,}595$$

(2) - - - - - - - - $\beta\rho\rho = 1{,}595\,\beta\rho\rho$


βpp kg/cm²
600
500
400
300
200
100
0
100
200
300
400
βpr kg/cm²
DONJA GRANICA (ravna deformacija)
GORNJA GRANICA
DONJA GRANICA
[1]
[2]
βpp = 1,306 βpr + 72,309 [kg/cm²]
βpp = 1,595 βpr
LEGENDA
za tačke
SERIJA C
S
B
za krive
STATISTIČKE KRIVE
DONJA I GORNJA GRANICA ZA PRIBLIŽNO PROSTORNO REŠENJE
DONJA I GORNJA GRANICA ZA RAVNO STANJE DEFORMACIJA

Sl. 4.3

Tabela 13

Redni broj	Oznaka serije	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	Napomena
0	1	2	3	4	5	6
1	C_2	175,0	2,82	495,0	3,06 10^4	
2	C_3	157,0	2,08	326,0	2,46 10^4	
3	C_4	218,0	2,85	621,0	4,76 10^4	
4	C_5	264,0	3,13	821,0	6,90 10^4	
5	C_6	250,0	3,77	941,0	6,25 10^4	
6	C_7	350,0	5,60	1960,0	12,25 10^4	
7	S_1	196,5	3,33	652,0	3,85 10^4	
8	S_2	272,0	4,04	1049,0	7,38 10^4	
9	S_3	280,0	4,33	1212,0	7,82 10^4	
10	S_4	300,0	4,78	1415,0	9,00 10^4	
11	S_5	240,0	3,63	870,0	5,76 10^4	
12	S_6	250,0	4,07	1020,0	6,25 10^4	
13	S_7	285,0	4,37	1245,0	8,11 10^4	
14	S_8	190,0	3,35	635,0	3,60 10^4	
15	S_9	190,0	3,66	694,0	3,60 10^4	
16	S_{10}	210,0	3,95	830,0	4,41 10^4	
17	A_1	467,0	5,73	2680,0	21,80 10^4	
18	A_2	470,0	6,85	3220,0	22,09 10^4	
19	A_3	417,0	6,92	2895,0	17,42 10^4	
19		5180,5	79,26	23577,0	156,57 10^4	
n		$\sum_1^n x_i$	$\sum_1^n y_i$	$\sum_1^n x_i y_i$	$\sum_1^n x_i^2$	

Pravolinijski trend: $P = a\,\beta\rho\rho + b$

$P = y_i$

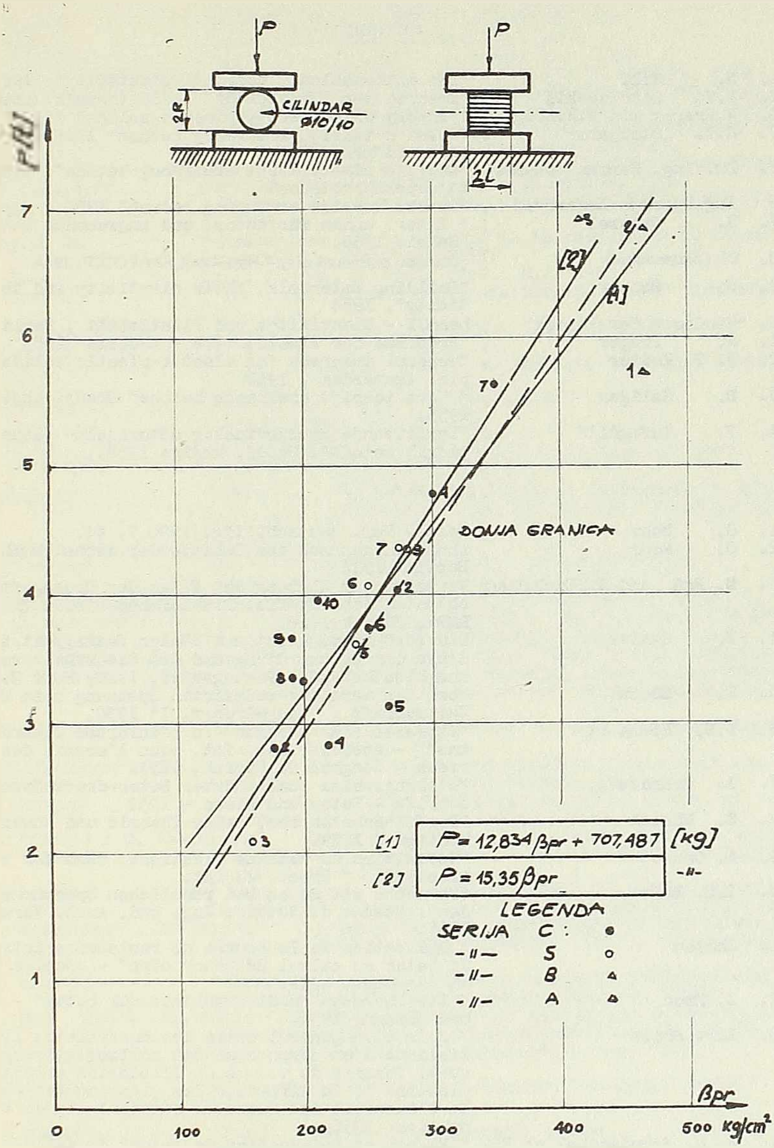
$\beta\rho\rho = x_i$

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} = 12{,}834 \qquad b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \; y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} = 707{,}487$$

$P = 12{,}834\,\beta\rho\rho + 707{,}487$ (Kg) (1)

za krivu (2)

$$a = \frac{\sum y_i}{\sum x_i} \qquad P = 15{,}35\,\beta\rho\rho \quad - - - \quad 2$$


P
CILINDAR
Ø10/10
2R
2L
P(t)
[2]
[1]
DONJA GRANICA
[1] P= 12,834 βpr + 707,487 [kg]
[2] P = 15,35 βpr -ll-
LEGENDA
SERIJA C
-ll- S
-ll- B
-ll- A
βpr
0
100
200
300
400
500 kg/cm²
1
2
3
4
5
6
7

Sl. 4.4

Literatura

I KNJIGE

1. R. Hill, "The mathematical Theory of plasticity" 1950.
2. V.V. Sokolovskij, "Theorie der Plasticität" ,1955 (nemački prevod)
3. W.Prager and P.H.Hodge, " Theory of perfectly plastic solids" 1951.
4. J.V. Stoljarov, " Uvod u teoriju armiranog betona" 1948 (srpskohrvatski prevod).
5. Dr. Ing. Herman Craemer, "teorija plasticiteta armiranog betona", 1949.(na srpskohrvatskom)
6 Ing.Djordje Lazarević, "Osnovi teorije armiranog betona" 1950
7. H. Craemel, " Inter. union für theor. und angewandte Mechanik Madrid 1955.
8. В.В.Соколовский, „Статика сыпучей сред" Изд.Акад.наук СССР 1954.
9. M. Reiner, "Building materials, their elasticity and inelasticity", 1954
10. "Handbuch der Physik", bandVI - Elastizität und Plastizität , Berlin 1954
11. W. Prager, "Probleme der Plastizitäts - theorie" 1955
12. W. T. Koiter, "General theorems for elastic-plastic solids" H.N. p.c. Amsterdam , 1960
13. R. Saliger, " Nova teorija armiranog betona" Gradj. knjiga 1953.
14. V. Tufegdžić, "Ispitivanje gradjevinskog materijala- elementi statičkih metoda". Gradj. knjiga 1958.

II ČLANCI

1. O. Mohr, Zeits. Ver. deutsch. Ing. 1900 T. 44.
2. O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiste der techn. Mechanik, Berlin ,1914
3. M. Roš und A. Eichinger Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr" ,Nichtmetalische Stoffe. Diskusionsbericht. Nr.28 der EMPA, Zürich 1928.
4. W. Gehler Die Würflfestigkeint und Säulen festigkeit als Grundlage der Betonprüfung und die Sicherheit von Beton und Eisenbeton" , Bauingenier, 1928, Heft 9.
5. E. Mösch Über den Wert der reduzirten Spannung beim Beton " Zeitschrift , " Ing-Archiv. I" 1930.
6. F.E. Richa rt "Stresses and Strains in reinforced Concrete columns" - Associa tion int. pour l'essais des mate - rieux - Congres de Zürich, 1931.
7. A. Brandzaeg, "Wirkungsweise umschnürter Beton-druckkörper", Zeitschrift - Beton und Eisen - 1932
8. E. Mörsch "Der Eisenbeton bau, seine Theorie und Anwendung" - Stuttgart 1929.
9. A. Caquot "Definition du domaine elastique, dans les corps isotropies". " Proct. 4. int.
10. L.P. Brice "Versuche mit Beton bei räumlichen Spannungszustän - den". Ztschr d. österr. Ing. und. Arch. Vereins. 87 1935.
11. Chalos " Aplication de la courbe de resistence intrinseque du beton au calcul du beton arme" - Annales des pont et chausses. 1935.
12. E. Brod " Die Mohrsche Umhüllungslinie für beton" - Beton u- und Eisen, 1936.
13. L.P. Brice " Rela tion general entre les contraintes limites elastique d'un corps sous des sollicitations quelcouques. Theorie du volume de dilatation critique.Determination de la direction des glissements" - Annales de l'institut technique du batiment et des traveaux publics. 1956.
14. A. M. Freudenthel et F. Roll, " Fluage et deformation de retour du beton a des taux de compression eleves" Bulletin. RILEM No 3 July 1959.
15. K, E. C. Nielsen "Causes physiques et chimiques de la resistance et de la deformation du beton" - RILEM. Bulletin No 9 1960

16. L'Hermite "What do we know about the plastic deformation and creep of concrete? " Bulletin RILEM No 1 1959.
17. H. Cowan - " Engineering" vol. 171. N. 4518, 1952
18. A. Mehmel " Beton und Stahlbetonbau" N.5. 1956
19. H. Hadley " Civil Engineering" - vol. 20. N.4, 1950
20. Richart, Brandtzaeg and Brown , - Univers. of Illinois Bull. 190,IV, 1929
21. C. Schreyer " Elasticität und Festigkeit des Betons auf Grund von Wü rfelversuchen und relativen Spannungen. B.u.E.32.1933.
22. R. Saliger "Versuche an Säulen mit hochwertiger Stahlbewehrung" Mit t. d. osterr. Eisenbeton-ausschusses.13.1933.
23. Berg. O .Ja A.F. Lipatoff "Poroceedings of All-union research Insitutive of Trans- port Construction, USSR, vol. 19 Moskow, 1956.
24. Berg. O. Ja " Papers of Academy of Sciences of the USSR" - vol.70.N. 4. 1950.
25. Berg. O Ja " Reeherches sur la theorie de la resistance du beton" . Congres SID. Rotterdam 1959.
26. [illegible] Jones Brit. Journal of appl. phys., N.7. 1952
27. [illegible] " Que savons - nous sur la rupture du beton" Traveaux pu blic. 1954.
28. F. Blakey and F. Beresford " Tensile strains in concrete" Melbrune, 1955
29. L'Hermite " Idees actuelles sur la technologie au beton" Paris, 1955.
30. Г.А.Генueb, "К Вопросу об условии прочности бетона" ЦНИИСК, Москва 1958.
31. A. Leon Beton und Eisen - 1935. Heft 8
32. R. Valle tée " Le cisaillement et la glissement n'existent pas" - Le genie civil 1953. CXXX, N.3.
33. L.P.Brice " Etude des conditions de formation de fissure de glis- sement et de decohesion dans les solides" Traveaux 1954 No. 236.
34. S.M. Feinberg . P.M.M. T. XII 1948
35. А.А. Гвоздев "Расчет несущеи способности конструкции по методу предельного равновесия" Госстойиздат 1949.
36. Philomenko -Borodisch M.M. - Engineers collection - USSR vol.19, 1954.
37. B. Bresler and K. Pister - Proc. Amer. Soc. of Civil Ing. Vol. 81.N.674 1955
38. K.P. Verigin "Concrete and reinforced concrete" USSR.N.2, 1956
39. D. Mc. Henry and J. Karni. " Journ. of Amer. Concr. Inst."- vol.29.N.10.1958
40. D.C. Drucker, W. Prager and H.J. Greenberg " Extended limit desing theorems for continuous media" - Quart.of applied matematics - , 1952.
41. R.T. Shild "Mixed boundary value problems in soil mechanics" Quart. of applied mathem. 1952.
42. D.C. Drucker, and W. Prager " Soil mechanics and plastics analisis of limit design" - Quart. of applied mathem. 1952.
43. W. Prager " On conjugate States of plabe strain" - Journ. of the mechanics and physics of solids - 1956.
44. M. Ivković i D. Radenković " Jedna primena ekspirimentalnih principa teorije plastičnosti u geomehanici" - SAN. Z. Instit. " Ing. Ja- roslav Černi" 1956.
45. M. Ivković " Neka pitanja osnovnih mehaničkih karkteristika betona Saopštenja Hidroteh. Instit. " Ing. Jaroslav Černi"1957
46. D. Radenković i M. Ivković " O primeni teorije plastičnosti na odredjivanje nosivosti tla" Glas SAN CCXXXVII - Odelj. teh. nauka 4 . 1957.
47. M. Ivković " Ponašanje betona u oblasti izraženih plastičnih defor- macija " Izveštaj Gradj. komore. Beograd, 1958.
48. M. Roš und A. Eichinger " Die Bruchgefahr fester Körper bei ruhender- stati scher Beanspruchung" - Diskussionsbericht Nr.172,1949.
49. К.В Риппенеит, Извест. Акад. Наук СССР. Одель.техн. наук октовар 1950.
50. В.В. Соколовский, "О приближенном приеме в статике сыпучеи сред". П.М.М.Т XIV. 246. 1952.
51. Г.С. Шапиро, "Упруго - пластической равновеси клина..." ПММТ XVI. 1952.
52 С.М. Феинберг, "Принцип предельнои напраженности" П.М.М.Т. XII. 1948.
53. В.В.Соколовский "О формах устоичивих полусводов и сводов" П.М.М.Т. XX 1956
54. К.Н. Шевченко, "Плоска упруго - пластическа деформация цилиндра" П.М.М.Т. XVI 1. 1952.