Тестирање правости линијских објеката применом потпуног метода најмањих квадрата

ЈОВАН М. ПОПОВИЋ, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Београд
ИВАН Р. АЛЕКСИЋ, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Београд
БРАНКО С. БОЖИЋ, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Београд
БРАНКО Ђ. МИЛОВАНОВИЋ, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Београд
МИЉАНА С. ТОДОРОВИЋ ДРАКУЛ, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Београд

Прегледни рад
UDC: 528.181
519.23
DOI: 10.5937/tehnika1702187P

У раду је приказано адаптирање (фитовање) скупа тачака, са оцењеним дводимензионалним позицијама, на модел праве линије применом тежинског потпуног метода најмањих квадрата (Weighted Total Least Squares, WTLS). Приказан је такође и традиционални поступак решавања овог проблема применом итеративног алгоритма условног изравнања са параметрима, односно Gauss-Helmert-овог модела.

На примеру тестирања правости кранске шине, извршено је упоређивање ефикасности ова два алгоритма у погледу резултата оцењивања параметара изравнавајуће праве и брзине конвергенције ка финалном решењу.

Кључне речи: *Модели са грешкама променљивих, Потпуни метод најмањих квадрата, Gauss-Helmert-ов модел*

1. УВОД

Адаптирање (фитовање) модела линија и површи на скуп оцењених дводимензионалних или тродиманзионалних позиција тачака традиционално се врши применом условног изравнања са параметрима односно Gauss-Helmert-овог модела (Helmert, 1907). У новије време развијени су модели са неконстантном матрицом дизајна (Errors in Variablesmodels, EIV) чији се параметри оцењују применом потпуног метода најмањих квадрата (Golub и van Loan, 1980).

Године 1980. Golub G. H. и Loan, C. F. за оцену параметара у EIV моделима увели су термин потпуни метод најмањих квадрата (Total Least Squares, TLS), где се претпоставља да грешке резултата мерења l и чланова матрице модела A имају независне и идентичне расподеле. Модели који уводе ову претпоставку називају се класични EIV модели, а поступак оцене параметара модела класични (нетежински) TLS (Snow, 2012). Насупрот њима, модели који претпостављају различите и евентуално корелисане расподеле грешака резултата мерења l и чланова матрице модела A, дефинишу се као тежински EIV модели односно поступак оцене параметара модела као тежински TLS (Weigted Total Least Squares, WTLS).

Класични (нетежински) TLS проблем, који подразумева једнаке тежине резултата мерења и чланова матрице модела, обично има јединствено решење које се може наћи декомпозицијом проширене матрице модела на сингуларне вредности (Singular Value Decomposition, SVD) (н. пр. Golub и van Loan, 1980, Van Huffel и Vandewalle, 1991). Класични (нетежински) TLS као и неке могућности примене у решавању геодетских задатака приказане су у (Kupferer, 2005) где је решење дефинисано као апроксимација матрицом нижег ранга.

Адреда аутора: Јован Поповић, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Београд, Булевар краља Александра 73, e-mail: popovic@grf.bg.ac.rs

Рад примљен: 30.03.2017.

Рад прихваћен. 03.04.2017.

У последњих неколико година публикован је велики број истраживања у области TLS оцена у циљу решавања геодетских задатака, при чему се могу разликовати два основна приступа у решавању TLS проблема. Један приступ се заснива на декомпозицији проширене матрице модела на сигуларне вредности (Singular Value Decomposition, SVD, Teunissen, 1988, Felus, 2004, Kupferer, 2005, Akyilmaz, 2007, Schaffrin и Felus, 2008, Lampe, 2010). Други приступ подразумева третитање TLS као условљеног оптимизационог проблема минимизације коришћењем Euler-Lagrange-ове фукције циља уз различите нивое ограничења општости коваријационе матрице елемената проширене матрице модела (Felus and Burtch, 2009, Schaffrin и Felus, 2008, Schaffin и Wieser, 2008, Amiri-Simkooei и Jazaeri, 2012, Shen и др., 2011).

Најопштије решење које дозвољава корелацију између елемената матрице модела и вектора резултата мерења односно пуну симетричну позитивно дефинитну коваријациону матрицу проширене матрице модела приказао је у својој докторској дисертацији Fang, (2011). По форми идентичан алгоритам предложио је, у независном истраживању, Mahboub, (2012) са разликом што Mahboub-ов алгоритам не предвиђа корелацију између елемената матрице модела и вектора резултата мерења.

2. РЕШЕЊЕ ПРИМЕНОМ GAUSS-HELMERT-ОВОГ ИТЕРАТИВНОГ ПОСТУПКА

Gauss-Helmert-ов подразумева дефиницију везе између мерених величина и параметара модела у облику имплицитних функција везе (Helmert, 1907)

$$\mathbf{f}\left(\mathrm{E}(\mathbf{l}),\mathbf{x}\right)=\mathbf{0}, \quad \text{или} \quad \mathbf{f}\left(\mathbf{l}+\mathbf{v},\mathbf{x}^0+\Delta\mathbf{x}\right)=\mathbf{0}, \tag{1}$$

са стохастичким особинама вектора резултата мерења

$$\mathrm{D}(\mathbf{l})=\mathbf{K}_\mathbf{l}=\sigma_0^2\mathbf{Q}_\mathbf{l}. \tag{2}$$

Јакобијеве матрице (матрице модела) у односу на параметре модела и мерене величине могу се добити изразима

$$\mathbf{A}=\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}^\mathrm{T}}\right|_{\mathbf{l}_0,\mathbf{x}_0} \; и \; \mathbf{B}=\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{l}^\mathrm{T}}\right|_{\mathbf{l}_0,\mathbf{x}_0}, \tag{3}$$

где је $\mathbf{l}_0=\mathbf{l}-\underset{\sim}{\mathbf{0}}$ вектор иницијалних вредности мерених величина где $\underset{\sim}{\mathbf{0}}$ представља случајни нула вектор (вектор псеудо-опажања) са одговарајућим бројем чланова, према нотацији у Harville, (1977), чиме се вектору привремених вредности мерених величина $\mathbf{l}_0$ одузима особина случајности, тако да се може третирати као вектор константи.Матрица $\mathbf{A}\in\Re^{r\times u}$ има потпуни ранг колона (rank (**A**)=*u*)), док матрица $\mathbf{B}\in\Re^{r\times n}$ има потпуни ранг врста (rank (**B**)=**r**), где је *r* број условних једначина.

Модел се онда може написати као линеарни (линеаризовани) GHM

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0}, \quad \mathrm{E}(\mathbf{v})=\mathbf{0}, \quad \mathrm{D}(\mathbf{l})=\mathbf{K}_\mathbf{l}=\sigma_0^2\mathbf{Q}_\mathbf{l}, \tag{4}$$

где је $\mathbf{w=f(l,x_0)}$ са кофакторком матрицом $\mathbf{Q_W=BQB^T}$. Решење по методу најмањих квадрата произилази из минимизације Lagrange-ове функције циља (н. пр. Михаиловић и Алексић, 2008)

$$\Omega=\mathbf{v}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1}\mathbf{v}-2\mathbf{k}^\mathrm{T}\left(\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)\rightarrow\min, \tag{5}$$

где је **k** вектор Lagrange-ових мултипликатора. Из услова минимума функције Ω у односу на вектор поправака **v**, Lagrange-ових мултипликатора **k** и прираштаја параметара модела Δ**x** може се добити решење (Перовић, 2005)

$$\hat{\mathbf{k}}=-\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_\mathbf{l}\mathbf{B}^\mathrm{T}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}\right)=-\mathbf{Q}_\mathbf{w}^{-1}\left(\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}\right), \tag{6}$$

$$\Delta\hat{\mathbf{x}}=-\left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{w}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{w}^{-1}\mathbf{w} \; и \tag{7}$$

$$\hat{\mathbf{v}}=\mathbf{Q}_\mathbf{l}\mathbf{B}^\mathrm{T}\hat{\mathbf{k}}, \tag{8}$$

са кореспондентним кофакторским матрицама.

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}=\left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{w}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}, \tag{9}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}}=\mathbf{Q}_\mathbf{w}^{-1}-\mathbf{Q}_\mathbf{w}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{w}^{-1} \; и \tag{10}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}=\mathbf{Q}_\mathbf{l}\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}}\mathbf{B}\mathbf{Q}_\mathbf{l}. \tag{11}$$

Оцена референте стандардне девијације онда је

$$\hat{\sigma}_0^2=\hat{\mathbf{v}}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1}\hat{\mathbf{v}}\left(r-u\right)^{-1}. \tag{12}$$

Оцене параметара модела $\hat{\mathbf{x}}$ и вектора мерених величина $\hat{\mathbf{l}}=\mathbf{l}+\hat{\mathbf{v}}$ користе се као почетне вредности за налажење решења Gauss-Newton-овим итеративним поступком (Поповић, 2016), следећи правила које је дефинисао Pope, (1972):

$$\mathbf{x}_0^{(1)}=\hat{\mathbf{x}}-\underset{\sim}{\mathbf{0}}, \quad \mathbf{l}_0^{(1)}=\hat{\mathbf{l}}-\underset{\sim}{\mathbf{0}}, \tag{13}$$

односно у i -тој итерацији,

$$\mathbf{x}_0^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}^{(i-1)} - \underset{\sim}{\mathbf{0}},\quad \mathbf{l}_0^{(i)} = \hat{\mathbf{l}}^{(i-1)} - \underset{\sim}{\mathbf{0}}, \tag{14}$$

$$\mathbf{A}^{(i)} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{l}_0^{(i)},\mathbf{x}_0^{(i)}},\quad \mathbf{B}^{(i)} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{l}^{\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{l}_0^{(i)},\mathbf{x}_0^{(i)}} \text{ и} \tag{15}$$

$$\mathbf{w}^{(i)} = \mathbf{f}\left(\mathbf{l}_0^{(i)},\mathbf{x}_0^{(i)}\right) + \mathbf{B}^{(i)}\left(\mathbf{l} - \mathbf{l}_0^{(i)}\right). \tag{16}$$

Оцене параметара модела $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ и вредности мерених величина $\hat{\mathbf{l}}^{(i)}$ добијају се, у i -тој итерацији, као (Koch, 2014)

$$\hat{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{x}_0^{(i-1)} + \Delta\hat{\mathbf{x}}^{(i)}, \tag{17}$$

$$\hat{\mathbf{l}}^{(i)} = \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}}^{(i)}. \tag{18}$$

Критеријум за завршетак итеративног поступка може бити

$$\left|\hat{\mathbf{x}}^{(i)} - \mathbf{x}_0^{(i)}\right| < \varepsilon, \tag{19}$$

где је ε усвојена (довољно мала) вредност или ако су услови

$$\mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{l}}^{(i)},\hat{\mathbf{x}}^{(i)}\right) = \mathbf{0}, \tag{20}$$

испуњени са довољном тачношћу.

3. РЕШЕЊЕ ПРИМЕНОМ ПОТПУНОГ МЕТОДА НАЈМАЊИИХ КВАДРАТА

Решење нелинеарног проблема (1) подразумева да се једначине везе између мерених величина и параметара модела изразе у експлицитној форми

$$\begin{gathered} \mathrm{E}(\mathbf{l}) = \mathbf{f}'(\mathbf{l},\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \\ \textit{или} \\ \mathrm{E}(\mathbf{l}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}'(\mathbf{l},\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}). \end{gathered} \tag{21}$$

Јакобијева матрица модела (21) по параметрима модела сада има облик

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{l},\mathbf{x}_0}, \tag{22}$$

где су чланови матрице модела $\mathbf{A} \in \Re^{n\times u}$ функције резултата мерења $\mathbf{l}$ и према томе нису константе него случајне величине. Линеаризовани модел (21) сада се може написати у форми

$$\mathbf{l} + \mathbf{v}_{\mathbf{l}} = \left(\mathbf{A} + \mathbf{V}_{\mathbf{A}}\right)\mathbf{x}, \tag{23}$$

са стохастичким особинама поправака (резидуала)

$$\mathrm{E}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{\mathbf{A}}\\ \mathbf{v}_{\mathbf{l}}\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}\mathrm{vec}\,\mathbf{V}_{\mathbf{A}}\\ \mathbf{v}_{\mathbf{l}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} \text{ и}$$
$$\mathrm{D}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{\mathbf{A}}\\ \mathbf{v}_{\mathbf{l}}\end{bmatrix} = \sigma_0^2\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{\mathbf{AA}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{Al}}\\ \mathbf{Q}_{\mathbf{lA}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{ll}}\end{bmatrix} = \sigma_0^2\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}, \tag{24}$$

где оператор $\mathrm{vec}(\cdot)$ трансформише матрицу у вектор тако што ређа колоне матрице једну испод друге померајући их са лева на десно.

Решење потпуно тежинског TLS (Weighted Total Least Squares, WTLS), према традиционалном Euler-Lagrange-овом приступу произилази из минимизације функција циља

$$\Omega(\mathbf{v},\mathbf{k},\mathbf{x}) = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} - 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l} + \mathbf{V}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \mathbf{v}_{\mathbf{l}}\right], \tag{25}$$

где је $\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \left[\mathbf{v}_{\mathbf{A}}\quad \mathbf{v}_{\mathbf{l}}\right]$, па се могу добити решења

$$\hat{\mathbf{k}} = \left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\right), \tag{26}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}\\ \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}\end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}, \tag{27}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{T}\right)^{-1}\mathbf{A}\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{I}_u \otimes \hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{v}_{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{T}\right)^{-1}\mathbf{l}\right]. \tag{28}$$

где је

$$\hat{\mathbf{B}} = \left[\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n \quad -\mathbf{I}_n\right].$$

Решење се мора тражити кроз итеративни прцес (Fang, 2011):

1) $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{l}$,

$$\mathbf{x}^0 = \hat{\mathbf{x}}^0 - \underset{\sim}{\mathbf{0}}$$

2) $\hat{\mathbf{B}}^{i+1} = \left[\hat{\mathbf{x}}^{i\,\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n \quad -\mathbf{I}_n\right]$

$$\mathbf{k}^{i+1} = \left(\mathbf{B}^{i+1}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{B}^{i+1}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{i}\right) - \underset{\sim}{\mathbf{0}}$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}^{i+1} = \left[\mathbf{Q}_{\mathbf{AA}}\quad \mathbf{Q}_{\mathbf{Al}}\right]\left(\mathbf{B}^{i+1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{k}^{i+1}$$

$$\mathbf{v}^{i+1} = \hat{\mathbf{v}}^{i+1} - \underset{\sim}{\mathbf{0}} \text{ и } \mathbf{V}_{\mathbf{A}}^{i+1} = \mathrm{vec}_{n\times u}^{-1}\,\mathbf{v}_{\mathbf{A}}^{i+1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{i+1} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}^{i+1}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{B}^{i+1}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\left(\mathbf{I}_u \otimes \left(\mathbf{k}^{i+1}\right)^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{v}_{\mathbf{A}}^{i+1} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}^{i+1}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{B}^{i+1}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{l}\right)$$

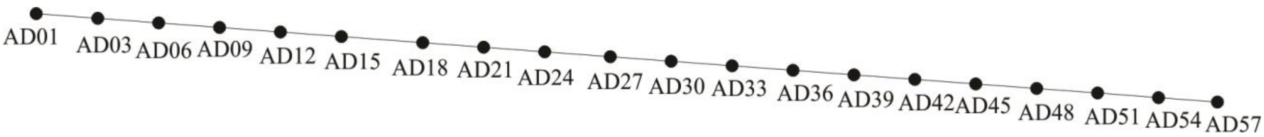
$$\mathbf{x}^{i+1} = \hat{\mathbf{x}}^{i+1} - \underset{\sim}{\mathbf{0}}$$

Процес се завршава ако је $\left\|\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^{i}\right\| < \varepsilon$, $\hat{\mathbf{x}} := \mathbf{x}^{i+1}$ иначе понављање корака 2

4. ЕКСПЕРИМЕНТ И АНАЛИЗА

Приказани модели примењени су на тестирање правости кранске стазе у Термоелектрани „Никола Тесла А“, где је кранска стаза дискретизована са 20 тачака (слика 1), чије су координате $\hat{y}$, $\hat{x}$ (табела 1) оцењене на основу резултата геодетских терестричких мерења са пуном коваријационом матрицом

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} & \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{y}} \\ \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{y}} & \mathbf{Q}_{\hat{y}\hat{y}} \end{bmatrix}$$ (Табела 2, 3 и 4).



Слика 1 - Дискретизација кранске стазе коначним бројем тачака

На основу оцена координата карактеристичних тачака (табела 1), применом описаних поступака оцењен је коефицијент правца за праву линију

$$y = a \cdot x \quad (29)$$

Табела 1. Координате карактеристичних тачака кранске стазе

T	$\hat{y}$	$\hat{x}$	T	$\hat{y}$	$\hat{x}$
AD001	-146.3485	-10.9638	AD030	9.5364	0.7262
AD003	-131.2460	-9.8198	AD033	24.4941	1.8377
AD006	-116.2920	-8.6959	AD036	39.4476	2.9544
AD009	-101.3333	-7.5713	AD039	54.4093	4.0654
AD012	-86.3932	-6.4540	AD042	69.3664	5.1799
AD015	-71.4231	-5.3384	AD045	84.3204	6.2917
AD018	-51.4625	-3.8443	AD048	99.2750	7.4034
AD021	-36.5078	-2.7178	AD051	114.2331	8.5165
AD024	-21.5165	-1.5900	AD054	129.1896	9.6645
AD027	-5.4057	-0.3909	AD057	143.6563	10.7473

Резултати оцена изравнавајуће праве приказани су у табели 2, одакле се може видети да су оба примењена итеративна процеса конвергирала ка истом решењу, у истом броју итерација иако су се по појединим итерацијама решења разликовала. За критеријум престанка итеративног процеса усвојено је

$$\left\| \mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^{i} \right\| < \varepsilon = 10^{-10}.$$

Табела 2. Оцене коефицијента правца изравнавајуће праве по итерацијама

Итерација	Коефицијент правца a	
	GHM	WTLS
1	13.3688467737	13.3688467737
2	13.3500918757	13.3502787696
3	13.3502550913	13.3502550940
4	13.3502550964	13.3502550964
5	13.3502550964	13.3502550964
$\hat{\sigma}_0$	0.015037992	0.015037992

5. ЗАКЉУЧЦИ

Потпуни метод најмањих квадрата (Total Least Squares) предмет је интензивних истраживања, на пољу математичког моделовања и оцене параметара математичких модела, у последњој деценији. Као резултат, произашао је велики број публикованих радова, како у виду чланака у престижним математичким и геодетским публикацијама, тако и у виду одбрањених докторских дисертација

У раду је примењен најопштији облик тежинског потпуног метода најмањих квадрата (Weighted Total Least Squares, WTLS), који подразумева не само пуне коваријационе матрице чланова матрице модела (Q_{AA}) и вектора резултата мерења (Q_{ll}), већ и њихову унакрсну коваријациону матрицу (Q_{Al}).

Истраживање је илустровано примером оцене коефицијента правца регресионе праве, где су резултати упоређени са решењем добијеним кроз итеративни Gauss-Helmert-ов поступак. Показано је да оба примењена поступка конвергирају ка истом решењу са сличним нумеричким перформансама при рачунању.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Golub G. H., van Loan C. F. An analysis of the total least squares problem. In: *Journalon Numerical Analysis* 17 (1980), S. 883–893, 1980.

[2] Snow K. *Topics in Total Least-Squares Adjustment within the Errors-In-Variables Model: Singular Cofactor Matrices and Prior Information*. PhD thesis, Report. No. 502, Div. of Geodetic Science, School of Earth Sciences, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, 2012.

[3] Van Huffel S, Vandervalle J. The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis. In: *Frontiers in Applied Mathematics* 9, 1991.

[4] Kupferer S.: *Anwendung der Total-Least-Squares-Technik bei geodätischen Problemstellungen*. Dissertation, Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Universität Karlsruhe (TH). ISSN 1612-9733, ISBN 3-937300- 67-8, 2005.

[5] Teunissen P. J. G. The non-linear 2D symmetric Helmert transformation: an exact non-linear least-squares solution. *Manuscripta Geodetica*, 62 (1):1-16, 1988.

[6] Felus F. Application of Total Least Squares for Spatial Point Process Analysis. *Journal of Surveying Engineering*, 130 (3):126-133, 2004.

[7] Akyilmaz O. Total least squares solution of coordinate transformation. *Survey Review*, 39 (303): 68-80, 2007.

[8] Schaffrin B., Felus Y. On the multivariate total least-squares approach to empirical coordinate transformations. Three algorithms. *Journal of Geodesy*, 82: 373-383, 2008.

[9] Lampe J. *Solving Regularized Total Least Squares Problems Based on Eigenproblems*. Dissertation, Technischen Universität Hamburg – Harburg, 2010.

[10] Felus F., Burtch R. On symmetrical three-dimensional datum conversion. *GPS Solutions*, 13 (1):65-74, 2009.

[11] Schaffrin B., Wieser A. On weighted total least-squares adjustment for linear regression. *Journal of Geodesy*, 82: 415-421.transformations. Three algorithms. Journal of Geodesy, 82: 373-383, 2008.

[12] Amiri-Simkooei A, Jazaeri S. Weighted total least squares formulated by standard least squares theory, *Journal of Geodetic Science*, 2 (2): 113-124, 2012.

[13] Shen Y. Li B. Chen Y. An iterative solution of weighted total least-squares adjustment, *Journal of Geodesy*, 85, 229-238, 2011.

[14] Fang X. *Weighted Total Least Squares Solutions for Applications in Geodesy*. PhD dissertation, Publ. No. 294, Dept. of Geodesy and Geoinformatics, Leibniz University Hannover, Germany, 2011.

[15] Mahboub V.: On weighted total least-squares for geodetic transformations. *Journal of Geodesy*, 86(5):359–367, 2012.

[16] Helmert F. R. *Adjustment Computations with the Least-Squares Method*, second ed., Teubner, Leipzig/Berlin, 1907.

[17] Harville D.: Maximum Likelihood approaches to variance component estimation and to related problems. *Journal of American Statistic Association*, 358, S. 320-338, 1977.

[18] Михаиловић К, Алексић И. *Концепти мрежа у геодетском премеру*. Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Београд, 2008.

[19] Perović G. *Least Squares (Monograph)*. Faculty of Civil Engineering, Universityof Belgrade, ISBN 86-907409-0-2, 2005.

[20] Поповић, J. *Потпунои метод најмањих квадрата у функцији решавања геодетских проблема*. Докторска дисертација, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, 2016.

[21] Pope A. Two approaches to nonlinear least squares adjustments. *Canadien Surveyer* 28(5): 663-669, 1972.

[22] Koch K. (2014): Robust estimations for the nonlinear Gauss Helmert model by the expectation maximization algorithm, *Journal of Geodesy* 88:263–271, DOI 10.1007/s00190-013-0681-9, 2014.

SUMMARY

TESTING STRAIGHTNESS OF LINE OBJECTS USING TOTAL LEAST SQUARES

The paper presents the adaptation (fitting) of a set of points, with an estimated two-dimensional positions, to the straight line model of the by the application of the Weighted Total Least Squares, WTLS. The traditional method to solve this problem by using an iterative algorithm of the conditional adjustment with the parameters (Gauss-Helmert's model) is also shown.

In the example of testing the straightness of the rail of the crane, a comparison of the efficiency of the two algorithms is performed by means of result of parameter estimation and to the the number of required iterations to final solution.

Key words: *Errors in Variables models, Weighted Total Least Squares, Gauss-Helmert’s model*