

## ТЕОРИЈА ШТАПА У SPLINE ПАРАМЕТАРСКОЈ КООРДИНАТИ – ДЕО I

Глигор Раденковић<sup>1</sup>

УДК: 624.071.32/.34:519.6

DOI: 10.14415/konferencijaGFS2014.054

**Резиме:** *Коришћењем обичног и рационалног базног spline-а (B) за описивање геометрије и кинематичког поља осе произвољног криволинијског штапа у Еуклидском E3 простору формулисани су изогеометријски Бернули-Ојлерови коначни елементи. Обзиром да је геометрија линијских структура егзактно представљена рационалним базним spline-ом и на границама елемената постигнут жељени континуитет (C>1), изогеометријски коначни елементи за генералисане координате садрже само померања контролних тачака а не и ротације. Матрица крутости и еквивалентне контролне силе изогеометријског Бернули-Ојлеровог коначног елемента штапа изведени су под претпоставком да су spline параметарска координата (оса штапа) и главне осе инерције попречног пресека конвективног карактера.*

**Кључне речи:** *Изогеометријски коначни елемент, рационални базни spline, Бернули-Ојлеров штап, конвективне координате*

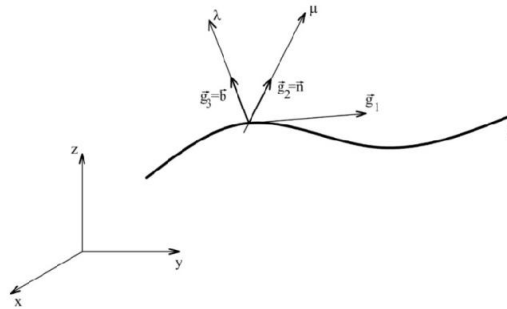
### 1. УВОД

Нека је геометрија осе штапа дата произвољном NURBS линијом, односно

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^N R_i(\xi) \vec{r}_i \quad (1)$$

при чему величине  $R_i(\xi)$  представљају базне функције NURBS-а а  $\vec{r}_i$  координате контролних тачака у односу на усвојени Декартов координатни систем [1,2]. Еуклидски тродимензионални простор  $E_3$  чија је једна координатна линија посматрана крива употпуњен је постављањем нормале и бинормале у свакој тачки криве, слика 1.

<sup>1</sup> Глигор Раденковић, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Булевар краља Александра 73, Република Србија



Слика 1. Оса штапа

## 2. МЕТРИКА ШТАПА

Са слике 1 је јасно да су координатне линије у правцу нормале и бинормале праволиниског карактера. Усвајање праволинијских координата  $\mu$  и  $\lambda$  није учињено ради једноставности већ из захтева техничке теорије штапа која претпоставља равне пресеке и после деформације. Квадрат дужине диференцијалног елемента линије одређен је као

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx^m)^2 \quad (2)$$

где је

$$dx^m = \frac{dx^m}{d\xi} d\xi = x_{,1}^m d\xi = \left( \sum_{l=1}^N R_{l,1}(\xi) x_l^m \right) d\xi \Rightarrow x_{,1}^m = \sum_{l=1}^N R_{l,1}(\xi) x_l^m \quad (3)$$

одакле следи да је

$$dx^m = \frac{dx^m}{d\xi} d\xi = x_{,1}^m d\xi = \left( \sum_{l=1}^N R_{l,1}(\xi) x_l^m \right) d\xi \Rightarrow x_{,1}^m = \sum_{l=1}^N R_{l,1}(\xi) x_l^m \quad (4)$$

На основу претходних израза за базне векторе у правцу  $\xi$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  координата добијамо:

$$\begin{aligned} \bar{g}_1 &= \frac{d\vec{r}}{d\xi} = \vec{t} \frac{ds}{d\xi} = \left( \sum_{l=1}^N R_{l,1}(\xi) x_l^m \right) \vec{t}_m = x_{,1}^m \vec{t}_m \\ \bar{g}_2 = \vec{n} &= \frac{1}{K} \vec{K} = \frac{1}{gK} \left( x_{,11}^m - \frac{1}{2} \frac{g_{,1}}{g} x_{,1}^m \right) \vec{t}_m = x_{,2}^m \vec{t}_m \\ \bar{g}_3 = \vec{b} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\bar{g}_1 \times \bar{g}_2) = \frac{1}{g\sqrt{g}K} x_{,1}^m x_{,11}^k e_{mkl} \vec{t}^l = x_{,3}^m \vec{t}_m \end{aligned} \quad (5)$$

при чему су уведене ознаке једнаке

$$\begin{aligned} x_{,2}^m &= \frac{1}{K} (x_{,11}^m - \Gamma_{11}^1 x_{,1}^m) \quad x_{,3}^m = \frac{1}{\sqrt{g}K} x_{k,1} x_{l,11} e^{klm} \\ \bar{K} &= gK = \frac{1}{K} x_{,11}^m (x_{m,11} - \Gamma_{11}^1 x_{,1}^m) = x_{,11}^m x_{m,2} \end{aligned} \quad (6)$$

где је  $K$  флексија (прва кривина) линије у природној координати  $s$  [4]. Из израза (5) следи да су метрички тензор и њему инверзни у произвољној тачки осе штапа једнаки

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1/g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Кристофелове симболе повезаности друге врсте за усвојени систем координата одређујемо на уобичајен начин [1,3] и добијамо следеће вредности

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{g} x_{,11}^m x_{m,1} = \frac{1}{2} \frac{g_{,1}}{g} \quad \Gamma_{11}^2 = gK = \bar{K} \quad \Gamma_{11}^3 = 0 \quad (8)$$

$$\Gamma_{21}^1 = -K \quad \Gamma_{21}^2 = 0 \quad \Gamma_{21}^3 = \sqrt{g} \tau = \bar{\tau} \quad \Gamma_{31}^1 = 0 \quad \Gamma_{31}^2 = -\bar{\tau} \quad \Gamma_{31}^3 = 0$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{g} \bar{K}^2} x_{,11}^k x_{,111}^m x_{,1}^n e_{kmn} = \frac{1}{\bar{K}} x_{m,3} x_{,111}^m \quad (9)$$

при чему ознака  $\tau$  у изразу (8)<sub>6</sub> представља торзију (другу кривину) линије у природној координати  $s$  [4]. Увођењем координатних линија  $\eta, \zeta$  у правцу главних оса инерције попречног пресека штапа, компоненте укупног вектора кривине у односу на  $\xi, \eta, \zeta$  координатни систем, у складу са Дарбуовим кососиметричним тензором другог реда изразићемо као

$$K^1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \tau \Rightarrow K_1 = \sqrt{G} \tau = \bar{\tau} \quad K^2 = K_2 = K \sin \theta \quad K^3 = K_3 = K \cos \theta \quad (10)$$

при чему  $\theta$  представља угао између главних оса инерције попречног пресека и нормале и бинормале линије. Вектор положаја произвољне тачке попречног пресека штапа одређен је као

$$\vec{r} = \bar{r} + \eta \vec{G}_2 + \zeta \vec{G}_3 \quad (11)$$

одакле следи да је базни вектор у правцу  $\xi$  координате једнак

$$\vec{G}_1 = G_0 \bar{G}_1 - \zeta K_1 \bar{G}_2 + \eta K_1 \bar{G}_3 \quad G_0 = 1 - \eta K_3 + \zeta K_2 \quad (12)$$

што има за последицу да систем координата  $\xi, \eta, \zeta$  није ортогоналан ван осе штапа. Увођењем  $\xi_\lambda$  координате [1] која задовољава услове у свакој тачки попречног пресека

$$\frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} = \frac{1}{G_0} \quad \frac{\partial \eta}{\partial \xi_\lambda} = \zeta K_1 \frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_\lambda} = -\eta K_1 \frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} \quad (13)$$

дефинишемо ортогонални систем координата  $\xi_\lambda, \eta, \zeta$  обзиром да је њен базни вектор

$$\vec{G}_\lambda = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_\lambda} = \bar{G}_1 \frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} + \bar{G}_2 \frac{\partial \eta}{\partial \xi_\lambda} + \bar{G}_3 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_\lambda} = \bar{G}_1 \quad (14)$$

### 3. ДЕФОРМАЦИЈА ОСЕ ШТАПА

Положај ма које тачке осе штапа после деформације изразићемо као

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \vec{u} \quad (15)$$

где је  $\vec{u}$  вектор померања чија је промена унутар елемента описана истим базним функцијама као и геометрија његове осе, тј.

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n R_i(\xi) \vec{u}_i = u_m^m \vec{i}_m = u_m \vec{i}^m \quad (16)$$

при чему су  $u^m = u_m$  његове компоненте мерене у односу на Декартове координате. Сагласно изразима (1) и (16) деформисана геометрија осе штапа дефинисана је следећим изразом

$$\vec{r}^* = \sum_{i=1}^n R_i(\xi) (\vec{r}_i + \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi) \vec{r}_i^* \quad (17)$$

одакле следи да је

$$\vec{G}_1^* = (x_{,1}^m + u_{,1}^m) \vec{i}_m = x_{,1}^{*m} i_m \quad \vec{G}_2^* = (x_{,2}^m + u_{,2}^m) \vec{i}_m = x_{,2}^{*m} i_m \quad \vec{G}_3^* = (x_{,3}^m + u_{,3}^m) \vec{i}_m = x_{,3}^{*m} i_m \quad (18)$$

$$x_{,2}^{*n} = \frac{1}{\bar{K}^*} (x_{,11}^{*n} - \Gamma_{11}^{*1} x_{,1}^{*n}) \quad x_{m,3}^* = \frac{1}{\sqrt{G^*}} x_{,1}^{*n} x_{,2}^{*k} e_{nkm} \quad (19)$$

Приписујући  $\xi, \eta, \zeta$  координатама конвективни карактер нормалну компоненту тензора деформације одредићемо као полуразлику компоненте метричког тензора  $G_{11}$  после и пре деформације, односно

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (G_{11}^* - G_{11}) = \frac{1}{2} (x_{,1}^m x_{m,1} + 2x_{,1}^m u_{m,1} + u_{,1}^m u_{m,1} - x_{,1}^m x_{m,1}) = x_{,1}^m u_{m,1} + \frac{1}{2} u_{,1}^m u_{m,1} \quad (20)$$

У складу са конвективним карактером  $\xi, \eta, \zeta$  координате вектор положаја тачке на произвољном одстојању од осе штапа у деформисаном положају написаћемо као

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \eta \vec{G}_2^* + \zeta \vec{G}_3^* \Rightarrow \vec{G}_1^* = (1 - \eta K_3^* + \zeta K_2^*) \vec{G}_1^* - \zeta K_1^* \vec{G}_2^* + \eta K_1^* \vec{G}_3^* \quad (21)$$

при чему су  $K^*, \tau^*$  и  $G^*$  флексија, торзија и детерминанта метричког тензора деформисане осе штапа, респективно. У једначинама (19) и (21) фигуришу тренутне вредности функција флексије  $\bar{K}^*$  и Кристофеловог симбола  $\Gamma_{11}^{*1}$  па се захтева и њихова линеаризација. Линеаризацију свих тренутних функција извршићемо Тајлоровим развојем у околини оригиналног положаја задржавајући при томе само линеарне чланове. Обзиром да је оригинални (почетни) положај линије познат, величине  $\bar{K}, \Gamma_{11}^1, x_{,2}^n, G$  у тренутним функцијама имају карактер константи док су променљиве померања и градијенти померања као и њихови изводи. Сагласно томе Тајлоров развој ма које тренутне функције има облик

$$F^* \approx (F^*)_{u^m=0} + \left( \frac{\partial F^*}{\partial u_{,i}^m} \right)_{u^m=0} \cdot u_{,i}^m = F + \left( \frac{\partial F^*}{\partial u_{,i}^m} \right)_{u^m=0} \cdot u_{,i}^m \quad (22)$$

Коришћењем претходног израза за линеаризоване вредности функција [1]

$G^*, \sqrt{G^*}, \Gamma_{11}^{*1}, \bar{K}^*, x_{m,2}^*, x_{m,3}^*$  добијамо

$$G^* = x_{,1}^{*m} x_{m,1}^* \approx G + 2x_{,1}^m u_{m,1} \quad \sqrt{G^*} = \sqrt{x_{,1}^{*m} x_{m,1}^*} \approx \sqrt{G} + \frac{1}{\sqrt{G}} x_{,1}^m u_{m,1}$$

$$\Gamma_{11}^{*1} \approx \Gamma_{11}^1 + b^m u_{m,1} + a^m u_{m,11} \quad \bar{K}^* \approx \bar{K} + x_{,2}^m (u_{m,11} - \Gamma_{11}^1 u_{m,1}) \quad (23)$$

$$x_{m,2}^* \approx x_{m,2} + A_m^n u_{n,11} - B_m^n u_{n,1} \quad x_{m,3}^* \approx x_{m,3} + C_{mn} u_{,11}^n - D_{mn} u_{,1}^n$$

$$a^m = \frac{x_{,1}^m}{G} \quad b^m = \frac{1}{G} (x_{,11}^m - 2\Gamma_{11}^1 x_{,1}^m) \quad (24)$$

$$A_m^n = \frac{1}{\bar{K}} (\delta_m^n - a^n x_{m,1} - x_{,2}^n x_{m,2}) \quad B_m^n = \frac{1}{\bar{K}} (b^n x_{m,1} + \delta_m^n \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 x_{,2}^n x_{m,2}) \quad (25)$$

$$C_{mn} = \frac{1}{\sqrt{G}} e_{rkm} x_{,1}^r A_n^k \quad D_{mn} = \frac{1}{\sqrt{G}} e_{rkm} x_{,1}^r B_n^k + \frac{1}{G} x_{m,3} x_{n,1} \quad (26)$$

Из израза (18) и (23) следи да су прираштаји компоненталних померања у правцу главних оса инерције једнаки

$$u_{m,2} = A_m^n u_{n,11} - B_m^n u_{n,1} \quad u_{m,3} = \left( \frac{1}{\sqrt{G}} e_{nkm} x_{,1}^n \right) u_{,2}^k - \left( \frac{1}{G} x_{r,3} x_{m,1} \right) u_{,1}^r \quad (27)$$

#### 4. ДЕФОРМАЦИЈА ПРОМЕНЕ КРИВИНЕ

Нормална компонента тензора деформације  $\varepsilon_{11}$  у произвољној тачки попречног пресека једнака је

$$\varepsilon_{11}(\eta, \zeta) = \frac{1}{2} (\bar{G}_{11}^* - \bar{G}_{11}) = \frac{1}{2} [(1 - \eta K_3^* + \zeta K_2^*)^2 G_{11}^* - (1 - \eta K_3 + \zeta K_2)^2 G_{11}] +$$

$$+ \frac{1}{2} (\eta^2 + \zeta^2) (K_1^{*2} - K_1^2) = \varepsilon_{11} - \eta (\bar{K}_3^* - \bar{K}_3) + \zeta (\bar{K}_2^* - \bar{K}_2) - \quad (28)$$

$$- \eta \zeta (\bar{K}_3^* K_2^* - \bar{K}_3 K_2) + \frac{1}{2} [\eta^2 (\bar{K}_3^* K_3^* - \bar{K}_3 K_3) + \zeta^2 (\bar{K}_2^* K_2^* - \bar{K}_2 K_2)] + \frac{1}{2} (\eta^2 + \zeta^2) (K_1^{*2} - K_1^2)$$

где је  $\bar{K}_2^* = G_{11}^* K_2^*$ ,  $\bar{K}_3^* = G_{11}^* K_3^*$ .

Занемарујући производе деформација као мале величине вишег реда, израз (28) постаје

$$\varepsilon_{11}(\eta, \zeta) = G_0 [(1 + \eta K_3 - \zeta K_2) \varepsilon_{11} - \eta \kappa_3 + \zeta \kappa_2] + (\eta^2 + \zeta^2) K_1 \kappa_1 \quad (29)$$

при чему

$$\kappa_2 = K_2^* - K_2 = -x_{,3}^m (u_{m,11} - \Gamma_{11}^1 u_{m,1}) \quad \kappa_3 = K_3^* - K_3 = x_{,2}^m (u_{m,11} - \Gamma_{11}^1 u_{m,1}) \quad (30)$$

представљају промене кривина осе штапа у локалним равнима савијања 13 и 12, респективно. Промену кривине торзије одредићемо као и деформације савијања линеаризацијом функције торзије  $\bar{\tau}$ , која је у тренутној конфигурацији дата аналогним изразом (9), тј.

$$\bar{\tau}^* = \frac{1}{\sqrt{G^* \bar{K}^{*2}}} x_{,11}^{*k} x_{,11}^{*m} x_{,1}^{*n} e_{kmn} \quad (31)$$

Из Тајлоровог развоја

$$\bar{\tau}^* \approx \bar{\tau} + T_3^m u_{m,111} - T_2^m u_{m,11} + T_1^m u_{m,1} \quad (32)$$

следи да је торзиона промена кривине једнака

$$\kappa_1 = T_3^m u_{m,111} - T_2^m u_{m,11} + T_1^m u_{m,1} \quad (33)$$

при чему уведене ознаке имају вредности

$$\begin{aligned} T_3^m &= \frac{1}{\bar{K}} x_{,3}^m & T_2^m &= \frac{1}{\bar{K}} \left[ (\Gamma_{11}^1 + \frac{\bar{K}_{,1}}{\bar{K}}) x_{,3}^m + \bar{\tau} x_{,2}^m \right] \\ T_1^m &= \frac{1}{\bar{K}} \left[ (\Gamma_{11}^1 \frac{\bar{K}_{,1}}{\bar{K}} - \Gamma_{11,1}^1 + K\bar{K}) x_{,3}^m + \Gamma_{11}^1 \bar{\tau} x_{,2}^m \right] \end{aligned} \quad (34)$$

## 5. ПРЕСЕЧНЕ СИЛЕ

Полазећи од напонско-деформацијске релације

$$\sigma^{ij} = 2\mu(G^{ik}G^{jl}\varepsilon_{kl} + \nu G^{ij}\varepsilon_1^1) \quad (35)$$

аксијалну силу штапа одредићемо изразом

$$R^1 = \int_A \sigma^{11} \sqrt{G} d\eta d\zeta = E(G^{11})^2 A_1 \varepsilon_{11} + E(G^{11})^2 \bar{I}_2 \kappa_2 - E(G^{11})^2 \bar{I}_3 \kappa_3 \quad (36)$$

Компоненте главног момента свих вектора напона унутар попречног пресека у односу на његово тежиште као редукционе тачке, односно

$$\bar{M} = \int_A \bar{\rho} \times \bar{\sigma}^1 \sqrt{G} d\eta d\zeta = \int_A \bar{\rho} \times \bar{\sigma}^1 \sqrt{G} d\eta d\zeta = M_i G^i \quad (\bar{\rho} = \eta \bar{G}_2 + \zeta \bar{G}_3) \quad (37)$$

4 имају вредности [1]

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu \sqrt{G^{11}} I_{11} \kappa_1 & M_2 &= E(G^{11})^{3/2} (I_{22} \varepsilon_{11} + I_{22} \kappa_2 - I_{23} \kappa_3) \\ M_3 &= E(G^{11})^{3/2} (-I_{33} \varepsilon_{11} - I_{32} \kappa_2 + I_{33} \kappa_3) \end{aligned} \quad (38)$$

5 при чему су геометријске карактеристике попречног пресека једнаке [1]

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_A \frac{1 + \eta K_3 - \zeta K_2}{G_0} \sqrt{G} d\eta d\zeta & I_2 &= \int_A \frac{(1 + \eta K_3 - \zeta K_2)}{G_0} \zeta \sqrt{G} d\eta d\zeta \\ I_3 &= \int_A \frac{(1 + \eta K_3 - \zeta K_2)}{G_0} \eta \sqrt{G} d\eta d\zeta & I_{22} &= \int_A \frac{\zeta^2}{G_0} \sqrt{G} d\eta d\zeta \\ I_{23} &= \int_A \frac{\eta \zeta}{G_0} \sqrt{G} d\eta d\zeta = I_{32} & I_{33} &= \int_A \frac{\eta^2}{G_0} \sqrt{G} d\eta d\zeta & I_{11} &= \int_A \frac{1}{G_0} (\eta^2 + \zeta^2) \sqrt{G} d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (39)$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Раденковић, Г.: *Изогеометријска теорија носача*, монографија у штампи, Београд, 2014.

- [2] Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Bazilevs, Y.: *Isogeometric Analysis, Toward Integration of CAD and FEA*, Wiley, 2009.
- [3] Јарић, Ј.: *Механика континуума*, Грађевинска књига, Београд, 1988.
- [4] Korn, G., Korn, T., *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, second enlarged and revised ed., McGraw-Hill Book Company, руски превод, Москва 1977.

## BEAM THEORY IN SPLINE PARAMETRIC COORDINATE – PART I

**Summary:** *For defining geometry and displacement of arbitrary curved beam in Euclidean  $E^3$  space, using simple and rational basis spline, Bernoulli-Euler beam finite element is defined. Because geometry of line structures is exactly presented with rational basis spline and wanted continuity at the common points between adjacent segments is achieved ( $C > 1$ ), the generalized coordinates for isogeometric finite element are only displacements of control points. The stiffness matrix and equivalent control forces of isogeometric Bernoulli-Euler beam elements are defined under assumption that spline parametric coordinate (beam axis) and principal moments of inertia of cross section have convective character.*

**Keywords:** *Isogeometric finite element, rational basis spline, Bernoulli-Euler beam element, convective coordinate*