

## НЕИЗВЕСНОСТИ У КРИВАМА ПРОТОКА

Иван Станушић<sup>1</sup>  
Драгутин Павловић<sup>2</sup>  
Јасна Плавшић<sup>3</sup>

УДК: 532.57

DOI:10.14415/konferencijaGFS 2015.068

**Резиме:** *Криве протока представљају основно средство за трансформацију осматрања водостаја у протоке и следствено томе имају одлучујући значај за даље хидролошке, хидрауличке и хидротехничке анализе. Неизвесност садржана у кривама протока последица је вишеструких узрока – сложености природног процеса формирања отицаја, физике течења, начина одређивања и интерпретације. Даје се осврт на савремен приступ појму неизвесности у овој области кроз дефиниције и изразе за прорачун. Метода за оцену неизвесности код кривих протока по ISO стандарду биће приказана кроз њихову оцену на хидролошкој станици Бајина Башта – река Дрина.*

**Кључне речи:** *неизвесност, крива протока.*

### 1. УВОД

Анализа неизвесности је скуп метода којима се процењује интервал око мерене вредност или прорачунске вредности унутар које ће се стварна вредност наћи са одговарајућим нивоом поверења [1]. Неизвесност је последица разноврсности и сложености физичких појава, као и грешака у осматрању и моделирању.

Поред тога што хидролошки систем и процеси који се одвијају у њему, подлежу неизвесностима, моделирање, пројектовање, планирање и управљање у хидротехници и водопривреди често се спроводе без освртања на неизвесност процеса. За то постоје многобројни разлози [2]. Један је недостатак јасно дефинисане терминологије и одговарајућег систематског приступа процене неизвесности.

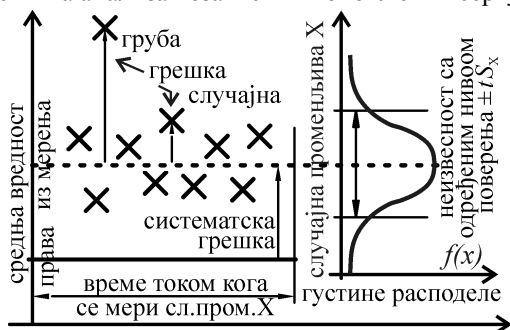
Први међународно признати скуп смерница за спровођење анализе неизвесности је “GUM - Guide to Expression of Uncertainty in Measurement” [1], под окриљем Међународне организација за стандарде (ISO). Засноване су на савременим достигнућима и принципима математичке статистике и дају општа правила за процену и приказ неизвесности у мерењима и мереним вредностима. GUM доноси нову терминологију и класификације, са базном идејом да се не прави разлика између компонената неизвесности без обзира да ли су случајне или систематске. Уводи се

<sup>1</sup> Иван Станушић, дипл.инж.грађ., студент мастер студија, Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Булевар краља Александра 73, Београд, Србија (УБ-ГФ), е-mail: [ivan@gmail.com](mailto:ivan@gmail.com)

<sup>2</sup> Доц.др. Драгутин Павловић, дипл.инж.грађ., УБ-ГФ, е-mail: [epavlovd@hikom.grf.bg.ac.rs](mailto:epavlovd@hikom.grf.bg.ac.rs)

<sup>3</sup> Доц.др. Јасна Плавшић, дипл.инж.грађ., УБ-ГФ, е-mail: [jplavsic@grf.bg.ac.rs](mailto:jplavsic@grf.bg.ac.rs)

нова класификација неизвесnosti – према начину процене (сл.1); Тип А – статистичка анализа независних поновљених серија осматрања, Тип Б – друге методе.



Слика 1. Основни појмови у разматрању неизвесности величине  $X$ .

Оба типа су заснована на расподели вероватноће, са стандардном девијацијом као мером. Тип А користи функцију расподеле вероватноће поновљених серија осматрања, тип Б претпостављену расподелу. Прави се разлика између грешке неизвесности. Грешка мерења је разлика мерене вредности и просечне вредности која замењује непознату праву вредност. Неизвесност је процена те грешке и расте с порастом исте. Ни права ни мерена вредност

нису познате због постојања случајних и систематских грешака.

Хидротехничке анализе полазе од протока добијених трансформацијом осматрања водостаја. Неизвесност у кривама протока последица је многих узрока – сложеног природног процеса формирања отицаја, физике течења, начина одређивања и интерпретације. Почетне неизвесности су од хидрометријских мерења, која се овде не разматрају (за ове неизвесности видети [3]). Текст који следи разрађује појам неизвесности и методе за њену оцену код кривих протока по ISO стандарду.

## 2. НЕИЗВЕСНОСТ – ДЕФИНИЦИЈЕ И ПРОРАЧУН

Циљ мерења је утврђивање мерне вредности неке физичке величине. Измерена вредност  $x$  је апроксимација праве (непознате) вредности  $X$ .

$$X = x \pm U \quad (1)$$

Оцену тачне вредности добијамо рачунањем неизвесности  $U$ , коју дефинишемо као интервал унутар којег ће се наћи тачна вредност са одређеним, изабраним, нивоом поверења  $\beta$  (уобичајено 90% или 95%). У већини случајева  $X$  се не мери директно, већ преко  $N$  других мерених величина, тј. компонената  $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)[1]$ .

$$X = f(Y) = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \quad (2)$$

Функционална веза  $f$  може бити експлицитна али и веома сложена – експериментална или се добија нумерички. Ова веза је битна јер све мерне величине доприносе целокупној неизвесности мерења. Компоненте могу бити добијене директно – из једног мерења или поновљених осматрања или индиректно – искуствено, из приручника односно стандардна. Процену величине  $X$ , коју означавамо са  $x$ , добијамо проценом вредности  $y(y_1, y_2, \dots, y_N)$  компонената  $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ :

$$x = f(y) = f(y_1, y_2, \dots, y_N) \quad (3)$$

Мера неизвесности појединачних компонената  $y_i$  је стандардна неизвесност  $u(y_i)$  и добијају се на основу расподеле вероватноће величина  $Y_i$ . За неизвесност типа А расподела је емпиријска, заснована на статистичкој анализи поновљених осматрања, једнака је стандардној девијацији. Код типа Б расподела је претпостављена па

се из ње рачуна  $u(y_i)$ . Неизвесност оцене резултата мерења  $x$  је комбинована стандардна неизвесност  $u_c(x)$ . Даље се користит ознака  $Y$  тј.  $y$ , било да је у питању само једна или више компонената које се директно мере ради одређивања  $X$ .

Дисперзију података хидролошких мерења око средње вредности меримо стандардном девијацијом  $S_X$ . Она је бројна мера неизвесности - компоненте неизвесности се изражавају преко стандардне девијације (или стандардна неизвесност односно стандардне грешке, што су синоними). Други показатељ неизвесности је стандардна девијација средине  $S_{\bar{X}}$  као оцена неизвесности срачунате аритметичке средине. Трећи показатељ неизвесности је стандардна грешка оцене  $S_e$  – корен средњег квадратног одступања мерених и одговарајућих вредности из регресионе зависности. Четврти показатељ неизвесности је  $S_{mr}$  стандардна грешка оцене регресије – очекиване криве, односно везе  $f$ . Следе изрази за прорачун ових величина:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1}}, \quad S_{\bar{X}} = \frac{S_X}{\sqrt{N}}, \quad (4), (5)$$

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - f(Y_{i,j=1,N}))^2}{N-k}}, \quad S_{mr} = S_e \sqrt{\frac{1}{N} - \frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (6), (7)$$

где су:  $N$  - број осматрања,  $S_X$  - стандардна девијација осматране величине,  $\bar{X}$  - аритметичка средина осматрања величине  $X$ ,  $S_{\bar{X}}$  - стандардна девијација средине,  $S_e$  стандардна грешка оцене  $X$ ,  $k$  – број параметара у регресији,  $S_{mr}$  – стандардна грешка регресије  $x=f(y_i, i=1, N)$ ,  $\bar{Y}$  - аритметичка средина осматрања величине  $Y_i$ . Израз (6) дефинише симетричне границе неизвесности са обе стране регресије. Границе по изразу (7) дефинишу две линије, несиметричне у односу на регресију, које су јој најближе у тачки где је  $Y_i = \bar{Y}$ .

Изабор ниво поверења  $\beta$  одређује фактор којим се регулише опсег који обухватају границе око регресије. Претпоставком нормалне расподеле одступања зависне променљиве  $X$  око регресије, стандардна грешка оцене  $S_e$  и стандардна грешка регресије  $S_{mr}$  множе се са  $t=t(\beta, \nu)$  вредношћу Студентове променљиве (где је  $\nu$  број степени слободе тј. броја променљивих осматрања). Тада добијамо редом неизвесност тачака мерења  $S_{e,t}$  и релативну случајну неизвесност регресије  $S_{mr,t}$ . За уобичајених  $\beta=95\%$  и  $N>20$  је  $t \approx 2$ , а опсег нива поверења је ширине двоструке стандардне грешке регресије ( $S_{mr,t} = \pm 2S_{mr}$ ).

### 3. НЕИЗВЕСНОСТ КРИВИХ ПРОТОКА

Уопштено, неизвесност кривих протока може се приписати разним потенцијалним неизвесностима услед [4]:

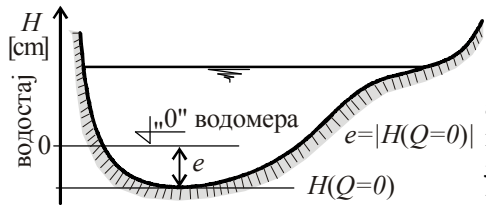
- (а) случајности природе процеса; обухвата ефекте промене геометрије тока, утицај наноса, турбуленост, утицај ветра, све процесе који утичу на ток, а се не мере,
- (б) неадекватног познавања физике процеса; то су лоше претпоставке при формулацији везе између протока и водостаја, занемаривање одређених фактора, и сл.,

(в) података; грешке у мерењу водостаја, протока, геометрије и других карактеристика токова, као и лоше записивање и очитавање података.

Зависности водостај-проток може се одредити регресионом анализом., најчешће у облику степене једначине:

$$Q_R = c (H - e)^\gamma \quad (8)$$

где су  $H$  - водостај,  $e$  - ефективни ниво у водотоку,  $(h-e)$  - ефективна дубина,  $\gamma$  - експонент,  $c$  - константа (слика 2). Логаритмовањем се једначина (1) линеаризује:



$$\ln(Q) = \ln(c) + \gamma \ln(H - e) \quad (9)$$

$$y = a + b x, \quad (10)$$

а методом најмањих квадрата добијају се коефицијенти степене везе (4). Величине  $x$  и  $y$  су редом логаритамски трансформисани протоци  $Q$  и ефективне дубине  $H-e$  из  $n$  хидрометријских мерења.

Слика 2. Величине у изразу (1).

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad SS_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \gamma = b = \left( \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} \right), \quad a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad c = 10^a. \quad (11)$$

Често се крива протока у  $\ln$ - $\ln$  размери може апроксимирати са више линеарних сегмената – сваки се засебно анализира, са својим вредностима коефицијената и по неизвесности. Пре одређивања везе (8) треба одредити ефективни ниво  $e$  у водотоку (слика 2). Иако  $e$  може одговарати реалном нивоу, може се схватити и као параметар. Некада се одређивао графички. Данас се применом рачунара бира тако да у регресионој зависности (9) или (10) буде најбоља корелациона веза преко максимизације вредности коефицијента линеарне корелације (тј. да  $r(e_{opt}) \rightarrow 1$ ):

$$\max r(e) \rightarrow e_{opt}, \quad r(e) = \frac{SS_{xy}(e)}{\sqrt{SS_x(e) SS_y(e)}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i(e) - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(e) - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (12)$$

По дефинисању криве протока може се приступити одређивању њене неизвесности. Рачуна се стандардна грешка оцене  $S_e$  - израз (13), на основу измерених протока  $Q_i = Q(H_i)$  и оних очитаних са криве протока  $Q_{R,i} = Q_R(H_i)$  за водостаје који одговарају мереним водостајима  $H_i$ :

$$S_e = \sqrt{(n-2)^{-1} \sum_{i=1}^n (\ln Q_i - \ln Q_{R,i})^2}. \quad (13)$$

Неизвесност протока око рачунске-регресионе криве протока за изабрани ниво поверења  $\beta$ , добија се производом  $S_e$  са одговарајућом Студентовим  $t_{(1-\beta)/2}$ . За  $\beta=95\%$  и број мерења  $n > 20$  је  $t=2$ . Неизвесност једног сегмента криве је (у %):

$$S_{et} = t S_e 100 \%. \quad (14)$$

Стандардна грешка осредњене криве  $S_{mr}$ , односно релативна случајна неизвесност  $S_{mr}$  (у %) се за неки водостај  $H_i$  преко ефективне дубине  $x_i = H_i - e$  рачуна као:

$$S_{mrt} = S_{mr} \times 100 = \pm t S_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \times 100, \quad x_i = \ln(H_i - e), \quad \bar{x} = \overline{\ln(H_i - e)} \quad (15)$$

Стандардна грешка оцене  $S_e$  има константну вредност, а стандардна грешка осредњене криве протока  $S_{mrt}$  рачуна се за сваку вредност ефективне дубине. У Декартовом систему крива протока је глатка крива линија, а симетричне границе из линеарне log-log везе постају асиметричне границе. Зато треба користити различите горње и доње границе неизвесности (редом  $S_{mrt}^g$  и  $S_{mrt}^d$ ) израчунате као:

$$S_{mrt}^g = 100(\exp(S_{mr}) - 1), \quad S_{mrt}^d = 100(1 - \exp(-S_{mr})), \quad S_{mr} = S_{mrt} / 100. \quad (16)$$

Прорачун протока  $Q_R$ , његове горње  $Q_{R,g}$  и доње  $Q_{R,d}$  границе по усвојеним параметрима неизвесности, по регресионој вези (1) изводи се редом по изразима:

$$Q_R = c(H - e)^\gamma, \quad Q_{R,g} = Q_R (1 + S_{mrt}^g / 100), \quad Q_{R,d} = Q_R (1 + S_{mrt}^d / 100). \quad (17)$$

По ISO стандарду [5], уколико се крива протока представља по сегментима, за сваки од њих треба имати најмање 20 извршених мерења, да би прорачун неизвесности био статистички прихватљив. Подразумева се да се претходно поменути процедура понавља за сваки сегмент криве протока.

#### 4. НЕИЗВЕСНОСТ КРИВЕ ПРОТОКА – БАЈИНА БАШТА, ДРИНА

Методологија прорачуна неизвесности кривих протока изведена је на подацима  $n=24$  хидрометријских мерења од 2011. до 2013. на х.с. Бајина Башта, река Дрина, слив Дунава (површина слива 14797 km<sup>2</sup>, удаљеност од ушћа 160 km, кота „0” лимниграфа 211.47 mnJm). Подаци су добијени љубазношћу РХМЗ Србије. Елементи утврђене регресионе зависности дати су у табели 1.

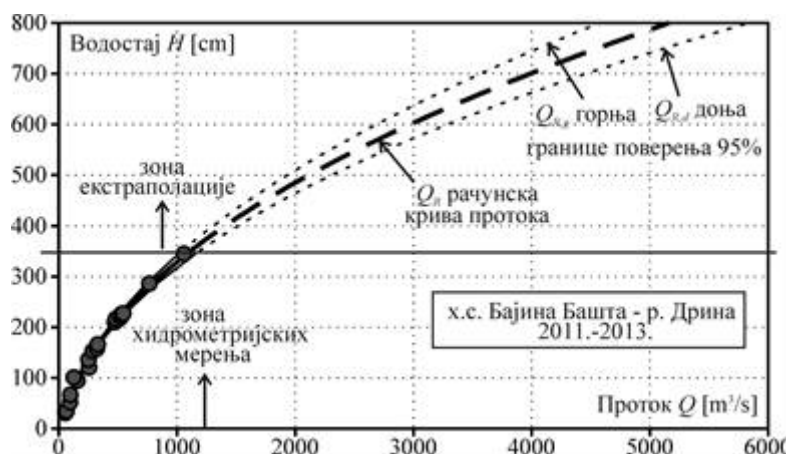
Табела 1. Елементи рачунске криве протока - Бајина Башта (Дрина).

$e$ [cm]	$r(e)$	$b=\beta$	$a$	$c$	$Se$	$Se(\gamma=95\%)$
-72	0.9959	2.1163	-5.7798	0.00309	0.08422	16.84%

Када се познато  $S_e$  употреби за прорачун  $S_{mrt}$ ,  $S_{mrt}^g$  и  $S_{mrt}^d$  за произвољни водостај (за  $\gamma=95\%$  и  $v=n-2=22$  следи  $t \approx 2$ ), добија се крива протока чија је неизвесност утврђена са доњом и горњом границом поверења од 95% (слика 3).

Може се закључити да је на приказаној кривој протока неизвесност мерена преко релативне случајне неизвесности  $S_{mrt}$  у опсегу од око 4% (у зони средине зоне хидрометријских мерења - зхм) до максималних 7% (на крајевима зхм). На крају при-

казане екстраполоване зоне  $S_{mrt}$  износи 13%. Ови бројеви су резултат прорачуна који због обима рада није могао бити приказан. Због релативно малог броја хидрометријских мерења (24) цела крива је јединствена иако је било основа да се представи са три сегмента.



Слика 3. Х.с.Бајина Башта, р. Дрина – крива протока са приказом неизвесности.

Искуство у примени препорука [1] је да се често морају правити компромиси који су резултат недовољног броја мерења. Онда се поставља и питање квалитета утврђене неизвесности, нарочито у зонама удаљене екстраполације. Међутим, и тако квантификована неизвесност омогућава да сагледамо последице употребе протока добијених преко кривих протока на хидротехничке анализе и прорачуне.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] JCGM 100:2008: *Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM 1995 with minor corrections)*, Joint Committee for Guides in Metrology, **2008**.
- [2] Di Baldassarre, G., Montanari, A.: Uncertainty in river discharge observation: a quantitative analysis, *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, **2009**, 13, 913-921, 913-921.
- [3] Herschy, R.W.: *Streamflow Measurement (third edition)*, Taylor & Francis, Oxon, OX14 4RN, UK, **2009**. 443-474.
- [4] Götzinger, J., Bárdossy, A.: Generic error model for calibration and uncertainty estimation of hydrological models, *Water Resour. Res.*, **44**, **2008**.
- [5] ISO 1100-2:2010-12, *Measurements of liquid flow in open channels - Part 2: Determination of the stage-discharge relationship*, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, **2010**. (last reviewed 2012). / у Србији важи SRPS ISO 1100-2:2005, у припреми prSRPS ISO 1100-2:2015 идентичан наводу.

## STAGE-DISCHARGE RELATIONSHIP UNCERTAINTIES

***Summary:** The stage-discharge relationships are the basic tool for transformation of observed water stages to streamflow discharges. As such, they have a key role in subsequent hydrological, hydraulic and water resources analyses. Uncertainties inherent in the stage-discharge relationships are the result of multiple causes; the complexity of the nature of catchment runoff, physics of water flow, its determination and interpretation. The contemporary approach to the uncertainty definition is given, through definitions of the terms and calculation formulas. The method for stage-discharge curve uncertainty assesment, based on the ISO standard is presented. Used data are from the gauging station Bajina Bašta (the Drina river).*

***Keywords:** uncertainty, stage-discharge.*