JEDAN MOGUĆI NAČIN REŠAVANJA GEOMETRIJSKI NELINEARNIH ZADATAKA

ONE POSSIBLE WAY OF GEOMETRICAL NONLINEAR TASKS SOLUTION

UDK: 513.001.5
Originalni naučni rad

Docent dr Gligor RADENKOVIĆ, dipl. inž. građ.

REZIME

Usvajanjem Lagrangeovog konvektivno koordinatnog sistema komponente tenzora konačne deformacije izražene su kao poluzbir infinitezimalnih deformacija početnog i deformisanog referentnog položaja. Imajući ovo na umu i jednačinu momentog balansa energije, ukupno rešenje geometrijski nelinearnog zadatka dobijamo kao poluzbir linearnih rešenja iz oba referentna položaja.

***Ključne reči**: konvektivna koordinata, tenzor deformacije, geometrijska nelinearnost, konačni element.*

SUMMARY

Assuming convected coordinate frame, strain components are expressed as a average value of a infinitesimal deformations of the underformd and deformed configurations. From the equilibrium momentum balance equation, using standard finite element procedure, the geometrical nonlinear solution is obtained as a average sum of the linear solutions of the original and finite configurations.

***Key words**: convected coordinate, strain tensor, geometrical nonlinearity, finite element.*

UVOD

Materijalnom koordinatom X^i, čija je vrednost nepromenljiva, opisan je samo početni, nedeformisani, položaj materijalnog tela. Stoga proces deformisanja materijalnog kontinuuma opisuje se prostornom x^i koordinatom s obzirom da se njene vrednosti menjaju u svakom vremenskom trenutku, odnosno

$$x^i = x^i (X^i, t)$$

Kako je brojna vrednost prostorne koordinate, u odnosu na neki apsolutni sistem koordinata, jednaka zbiru vrednosti materijalne koordinate i odgovarajućeg pomeranja

$$x^i = X^i + V^i$$

osnovni tenzori mehanike kontinuuma, tenzor deformacije i tenzor napona, mogu se izraziti u odnosu na oba sistema koordinata. Jasno je onda da se komponente ovih tenzora u odnosu na dva različita referentna položaja (početni i konačni) međusobno razlikuju.

Ako koordinatni sistem x^i izaberemo tako da on ne zavisi eksplicitno od vremena [1, 4], odnosno ako prostornoj koordinati u svakom vremenskom trenutku pripišemo materijalni karakter, onda je reč o takozvanom Lagrangeovom konvektivnom koordinatnom sistemu ili sistemu materijalnih linija.

U odnosu na takav sistem koordinata komponente Lagrangeovog tenzora deformacije i u materijalnom ε_{ij} i u prostornom ξ_{ij} međusobno su jednake [2,3], odnosno

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji} + e_i^m e_{mj} = \frac{1}{2}(\eta_{ij} + \eta_{ji} + \eta_i^m \eta_{mj}) = \xi_{ij} \qquad (1)$$

gde su

$$e_i^m = V^m|_i \quad \eta_i^m = \upsilon^m|_i$$

gradijenti pomeranja *a* V^i i υ^i komponente pomeranja u odnosu na bazne trijedre početnog i trenutnog položaja.

Komponente Lagrangeovog tenzora deformacije, uzimajući u obzir zavisnost gradijenata pomeranja različitih konfiguracija, odnosno

$$e_{ij} = \eta_{mj}(\delta_j^m - \eta_i^m)$$

možemo napisati i u formi

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + \eta_{ji}) \qquad (2)$$

odakle možemo videti da one predstavljaju poluzbir gradijenata pomeranja različitih konfiguracija.

POSTAVKA GEOMETRIJSKI NELINEARNOG ZADATKA

Imajući na umu simetričnost ε_{ij} tenzora prethodni izraz možemo transformisati i na sledeći oblik

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(e_{ij} + \eta_{ji}) + \frac{1}{2}(e_{ji} + \eta_{ji})\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[(e_{ij} + e_{ji}) + (\eta_{ij} + \eta_{ji})\right] \qquad (3)$$

odakle sledi

Adresa autora: Građevinski fakultet, 11000 Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(E_{ij} + \text{э}_{ij}) \tag{4}$$

gde su:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) \text{ i } \text{э}_{ij} = \frac{1}{2}(\eta_{ij} + \eta_{ji}) \tag{5}$$

tenzori infinitezimalnih deformacija, merenih u odnosu na početni i trenutni položaj.

Na osnovu prethodnih izraza možemo videti da je razlika infinitezimalnih deformacija iz dva različita referentna položaja jednaka

$$2R_{ij} = \text{э}_{ij} - E_{ij} = e_{mi}e^{m}_{.j} = \eta_{mi}\eta^{m}_{.j} \tag{6}$$

odakle sledi jednakost nelinearnih članova po apsolutnoj vrednosti u tenzoru deformacije definisanog izrazima (1). Na taj način komponente ε_{ij} možemo napisati i kao

$$\varepsilon_{ij} = E_{ij} + R_{ij} = \text{э}_{ij} - R_{ij} \tag{7}$$

Za našu dalju analizu od značaja je relacija (4), odakle se može konstatovati da rešenje geometrijskih nelinearnog zadatka predstavlja superpoziciju linearnih rešenja sa faktorom 1/2 u odnosu na dva limitna referentna položaja. Poznavanjem početne geometrije strukture kao i opterećenja poznato je i nulto linearno rešenje P_0, dok drugo linearno rešenje P_τ sadrži u sebi nepoznatu metriku deformisanog položaja. U odnosu na ukupnu Lagrangeovu deformaciju rešenja P_0 ima fiksni karakter dok s druge strane rešenje P_τ zahteva iterativni ciklus u cilju iznalaženja tačne deformisane geometrije. Imajući na umu prethodne konstatacije geometrijski nelinearan problem u sistemu materijalnih linija transformisan je na problem nalaženja metrike konačnog deformisanog položaja, za razliku od istovetnog zadatka prezentiranog u odnosu na prostorni sistem koordinata čija je nelinearnost posledica nelinearnih deformacija kinematičkih relacija.

S obzirom da su э_{ij} linearne komponente rešenja $P\tau$ ne predstavlja ništa drugo do linearne uslove ravnoteže ispisani na deformisanom elementu čime ono u potpunosti postaje ekvivalentno rešenju tzv. teorije drugog reda. Formalno ovo možemo napisati i kao

$$P = \frac{1}{2}(P_0 + P_\tau) = \frac{1}{2}(P_0 + P_{2r}) \tag{8}$$

Metod konačnih elemenata pri ovakvom algoritmu u osnovi zahteva dva kompleta čvornih nepoznatih: jedan referisan u odnosu na nulte (rešenje P_0) dok je drugi u odnosu na nepoznate deformisane bazne vektore, P_τ. Ovaj problem eliminiše se transformacijom jednih pomeranja na druge. S obzirom da su deformacije э_{ij} nepoznate veličine a samim tim i vektor pomeranja $\vec{\upsilon}$ pogodnije je u svakom iterativnom ciklusu vektor $\vec{V}$ prevesti na sistem trenutnog baznog trijedra $\vec{g}_i$.

TRANSFORMACIJA VEKTORA POMERANJA POČETNE KONFIGURACIJE NA DEFORMISANI POLOŽAJ

U slučaju konačnog elementa ljuske vektor čvornih nepoznatih sadrži tri komponente pomeranja i dve komponentalne rotacije, odnosno

$$\mathbf{V}^{T} = [V^1, V^2, V^3, \theta_1, \theta_2]$$

$$\mathbf{v}^{T} = [\upsilon^1, \upsilon^2, \upsilon^3, \varphi_1, \varphi_2]$$

S obzirom da je ukupni vektor pomeranja nezavistan od koordinatnog sistema, odnosno

$$\vec{\upsilon} = V^m \vec{G}_m = \upsilon^k \vec{g}_k$$

sledi da su pomeranja V^m jednaka

$$V^m = (\delta^m_k + e^m_{.k})\,\upsilon^k \tag{9}$$

dok iz uslova $\theta_\alpha \vec{G}^\alpha = \varphi\,\beta\,\vec{g}^\beta$ nalazimo da su rotacije θ_α izražene preko odgovarajućih vrednosti φ_β na sledeći način

$$\theta_\alpha = (\delta^\beta_\alpha - \eta^\beta_{.\alpha})\,\varphi_\beta \tag{10}$$

Prethodne relacije možemo prikazati i u matričnoj formi kao

$$\mathbf{V - Tv} \tag{11}$$

pri čemu je matrica transformacije **T** oblika

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_V & \\ & \mathbf{T}_\theta \end{bmatrix} \tag{12}$$

sa submatricama $\mathbf{T}_V$ i $\mathbf{T}\theta$ čiji su elementi jednaki

$$\mathbf{T}_V = \begin{bmatrix} 1 + e^1_{.1} & e^1_{.2} & e^1_{.3} \\ e^2_{.1} & 1 + e^2_{.2} & e^2_{.3} \\ e^3_{.1} & e^3_{.2} & 1 + e^3_{.3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} 1 - \eta^1_{.1} & -\eta^1_{.2} \\ -\eta^2_{.1} & 1 - \eta^2_{.2} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Unutrašnji virtualni rad zasnovan na principu virtualnih pomeranja predstavljen je kao

$$R_i = \int_V s^{ij}\delta\varepsilon_{ji} dV = \frac{1}{2}\int_V s^{ij}(\delta E_{ji} + \delta\text{э}_{ji})dV \tag{14}$$

gde je s^{ij} Piola–Kirchhoff tenzor napona druge vrste, odnosno

$$s^{ij} = D^{ijkl}\,\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}D^{ijkl}(E_{kl} + \text{э}_{kl}) \tag{15}$$

odakle sledi da je

$$R_i \frac{1}{4}\int_V D^{ijkl}(E_{kl} + \text{э}_{kl})(\delta E_{ji} + \delta\text{э}_{ji})dV \tag{16}$$

Korišćenjem matrične notacije prethodni izraz napisaćemo u obliku

$$R_i = \frac{1}{4} \int_V (\mathbf{E} + \text{э})^T \, \mathbf{D} \, (\delta\mathbf{E} + \delta\text{э}) \, dV \tag{17}$$

gde su:

$$\mathbf{E}^T = [E_{11}, E_{22}, E_{12}] \quad \text{i} \quad \text{э}^T = [\text{э}_{11}, \text{э}_{22}, \text{э}_{12}]$$

vektori linearnih deformacija nultih i trenutnih položaja, respektivno za slučaj dvodimenzionalnog stanja deformacija.

Standardnom procedurom metode konačnih elemenata [3,5], uvođenjem transformacionih matrica deformacije, linearni vektori **E** i э izraženi su u funkciji od osnovnih čvornih nepoznatih, tj.

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}_L \, \mathbf{V} = \mathbf{B}_L \, \mathbf{T}\mathbf{v} \; \text{э} = \beta_L \mathbf{v} \tag{18}$$

Zamenom ovih relacija u jednačinu (17) rezultira efektivna krutost konačnog elementa, odnosno

$$k_{EF} = \frac{1}{4} (\mathbf{T}^T \, \mathbf{K}_{L0} \, \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \, \mathbf{K}_{L0_\tau} + \mathbf{K}_{L\tau 0} \, \mathbf{T} + \mathbf{K}_{L\tau}) \tag{19}$$

pri čemu su uvedene sledeće oznake

$$\mathbf{K}_{L0} = \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L \, dV$$

$$\mathbf{K}_{L0\tau} = \int_V \mathbf{B}_L^T \overline{\mathbf{D}} \beta_L \, dV = \mathbf{K}_{\mathbf{L}\tau 0}^T$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{L}\tau} = \int_V \beta_L^T \, \overline{\mathbf{D}} B_L \, dV \qquad \overline{\mathbf{D}} = \sqrt{\frac{G}{g}} \, \mathbf{D} \tag{20}$$

Iz izraza (19) jasno je da efektivna matrica egzistira kao superpozicija linearnih krutosti konačnog elementa (2). Indeksi 0 i τ označavaju konfiguraciju, odnosno bazne vektore u odnosu na koje su referisane. Matricama $\mathbf{K}_{L0}$ i $\mathbf{K}_{L\tau}$ defnisane su linearne krutosti početne i deformisane geometrije konačnog elementa. Elementi mešovitih matrica $\mathbf{K}_{\mathrm{L}0\tau}$ i $\mathbf{K}_{\mathrm{L}\tau 0}$ mereni su u odnosu na oba bazna trijedra $\vec{G}_i$ i $\vec{g}_i$.

Na osnovu izraza (14) – (20) lako možemo uočiti bitnu razliku ovako postavljenog geometriski nelinearnog zadatka i istog problema u sistemu prostornih koordinata. Naime, obe inkrementalne formulacije u sistemu prostornih koordinata, Totalni i Updated Lagrangian, zahtevaju linearizaciju jednačine momentnog balansa u odnosu na komponente i tenzora deformacije i tenzora napona, što ovde nije slučaj.

Jednačina (14) možemo preurediti i u formi

$$R_i = \frac{1}{2} \left[\int_V s^{ij} \delta E_{ji} dV + \int_\upsilon t^{ij} \, \delta \text{э}_{ji} d\upsilon \right] \tag{21}$$

gde su t^{ij} komponente Cauchyjevog tenzora napona i jednake su

$$t^{ij} = \sqrt{\frac{G}{g}} \, s^{ij} \qquad d\upsilon = \sqrt{\frac{g}{G}} \, dV$$

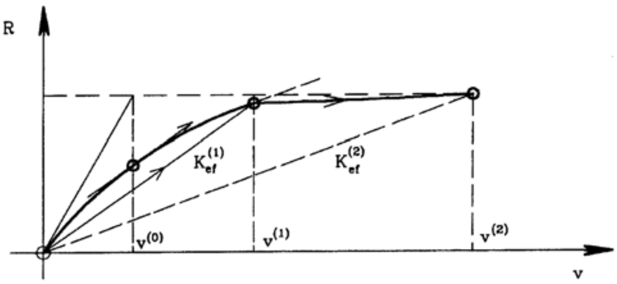
Ako s^{ij} i t^{ij} komponente tenzora napona u jednačini (21) sračunamo samo iz infinitezimalne deformacije, što odgovara linearizaciji samo tenzora napona, onda konačno rešenje problema svodimo na poluzbir linearnih rešenja početnog i deformisanog položaja.

Ovakav algoritam za razliku od Totalne i Updated Lagrangeove formulacije podrazumeva nanošenje celokupnog opterećenja u jednom koraku i svodi se na rešavanje sistema linearnih jednačina oblika

$$\mathbf{k}_{EF} \, \mathbf{v} = \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{k}_{EF}^{-1} \quad \mathbf{r} \tag{22}$$

gde su **v** i **r** vektori ukupnih čvornih pomeranja i zadatih spoljašnjih sila. S obzirom na postojanje samo jednog inkrementa ovakav postupak trebalo bi da dovede do značajno efikasnijih rešenja geometrijski nelinearnog zadatka u odnosu na standardne procedure. U nultoj iteraciji sve linearne krutosti (20) međusobno su jednake, dok je matrica transformacije ekvivalentna jediničnoj matrici **T = I**, što ima za posledicu da je efektivna krutost $\mathbf{k}_{EF}$ jednaka matrici $\mathbf{K}_{L0}$.

Vezano za ovaj postupak pogodnije je korišćenje termina aproksimacije na mesto reči iteracija. Zapravo konačno pomeranje deformisane strukture ne nalazimo superpozicijom inkrementalnog i iterativnog pomeranja, već ga dobijamo kao linearno rešenje za dovoljno tačno utvrđenu geometriju na osnovu nekoliko prethodnih pokušaja (slika 1).



Slika 1

Inverzijom matrice **T** (12), odnosno

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}^{-1} \, \mathbf{V} = \mathbf{t}\mathbf{V} \tag{23}$$

efektivnu matricu krutosti (19) možemo redefinisati i u odnosu na bazne trijedre originalne geometrije.

$$\mathbf{K}_{EF} = \frac{1}{4} (\mathbf{K}_{L0} + \mathbf{K}_{L0\tau}\mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{L\tau 0} + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{L\tau}\mathbf{t}) \tag{24}$$

rešavajući pri tome sistem linearnih jednačina, tj.

$$\mathbf{K}_{\mathrm{EF}} \, \mathbf{V} = \mathbf{R} \tag{25}$$

gde je **R** vektor spoljašnjih čvornih sila, invarijantnih u odnosu proces defomisanja.

Treba napomenuti da je pri varijaciji izraza (17) u oba slučaja (19) i (24) matrica transformacije **T** tretirana kao konstanta usvajanjem vrednosti iz prethodno razmatrane aproksimacije. Takođe možemo primetiti da su tangencijalne krutosti (19) i (24) međusobno vezane kao

$$\mathbf{k}_{EF} = \mathbf{T}^T \, \mathbf{K}_{EF} \, \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{K}_{EF} = \mathbf{t}^T \, \mathbf{k}_{EF} \, \mathbf{t} \tag{26}$$

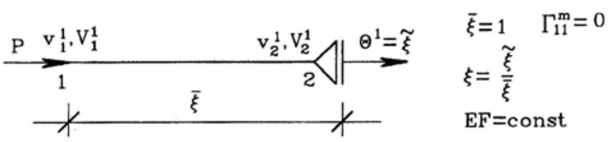
čineći tako u osnovi istu matricu krutosti koja se može transformisati sa jednog baznog trijedra na drugi.

BROJNI PRIMER

Na kraju ovog rada opisani algoritam ilustrovaćemo jednostavnim primerom aksijalno prisutnog, odnosno zategnutog štapa. Pravolinijski štap dužine $2L$ opterećen koncentrisanim aksijalnim silama na krajevima, prikazan na slici 2, modelisan je sa dva linijska konačna elementa dužine L, sa usvojenom linearnom promenom podužnih pomeranja unutar elementa, odnosno

$$V^1 = (1-\xi)V_1^1 + \xi V_2^1 \qquad \upsilon^1 = (1-\xi)\,\upsilon_1^1 + \xi\upsilon_2^1$$

Radi jednostavnosti a s obzirom na simetriju za analizu dovoljan je samo jedan element (slika 2). Imajući na umu konvektivni karakter koordinate θ^1 $(\bar{\xi})$, dužina $\bar{\xi}$ i posle deformacije ostaje nepromenjena. Kako je element prav i u deformisanom položaju svi Christoffelovi simboli ostaju jednaki nuli, $\Gamma_{11}^{*m} = 0$.



Slika 2

Na osnovu izraza (4) podužnu deformaciju ε_{11} izrazićemo kao

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\,(E_{11} + \text{э}_{11})$$

gde su:

$$E_{11} = e_{11} = V_{1|1} = V^1|_1 = V^1_{,1}$$

$$\text{э}_{11} = \eta_{11} = \upsilon_1\|_1 = g_{11}\,\upsilon^1_{,1} \tag{27}$$

odnosno vektori transformacije linearnih deformacija (18)

$$\mathbf{B}_L = \frac{1}{L}\,[-1{,}1] \qquad \beta_L = \frac{1}{L} g_{11}\,[-1{,}1] = g_{11}\mathbf{B}_L \tag{28}$$

Komponenta pomeranja υ^1 transformisana je na pomeranje V^1 početne geometrije

$$\upsilon^1 = \frac{1}{1+e^1_{.1}}\,V^1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\,V^1 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \tag{29}$$

Korišćenjem prethodnih izraza, linearne krutosti (20) nalazimo kao

$$\mathbf{K}_{L0} = \frac{EF}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{L0\tau} = g_{11}\,\mathbf{K}_{L0} = \mathbf{K}_{L\tau 0} \quad K_{L\tau} = g_{11}^2\mathbf{K}_{L0} \tag{30}$$

odakle sledi da je tangencijalna matrica krutosti (23) jednaka

$$\mathbf{K}_{EF} = \frac{1}{4}\frac{EF}{L}\,(1+\sqrt{g_{11}})^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

U konkretnom slučaju s obzirom da je $V_2^1 = 0$, veličina $\sqrt{g_{11}}$ jednaka $\sqrt{g_{11}} = 1 - V_1^1 / L$ pa se može konstatovati da je za slučaj pritiska $V_1^1 > 0$ što ima za posledicu razmekšavanje tangencijalne krutosti čime se dobijaju pomeranja veća od linearnog rešenja. U uslovima zatezanja $V_1^1 < 0$, odnosno $\mathbf{K}_{EF} > \mathbf{K}_{L0}$ odakle sledi da je nelinearno rešenje manje od linearnog.

LITERATURA

[1] Stojanović, R.: Uvod u nelinearnu mehaniku kontinuuma, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1965.

[2] Green, E.A., Adkins, J.E., Large: Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics, Clarendon Press, Oxford, 1960.

[3] Vukelić, S., Radenković, G.: Tanke elastične ljuske: Teorija i specijalna poglavlja, Gros knjiga, Beograd, 1995.

[4] Mićanović, M.: Primenjena mehanika kontinuuma, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[5] Zienkiewicz, C.O.: The Finite Element Method, Third ed., McGraw–Hill, London, 1977.