Timošenkov gredni element

Gligor Radenković[1]

UDK:519.61

***Rezime**: U radu je analiziran ravanski linijski element zasnovan na Timošenkovoj grednoj teoriji štapa.Korišćenjem hijerarhijskog pristupa i standardne procedure metode konačnih elemenata formulisane su matrice krutosti savijanja za slučaj linearne i konstantne deformacije smicanja duž štapa.*

***Ključne reči:** Timošenkova gredna teorija, konačni element, hijerarhijske funkcije oblika*

1. HIJERARHIJSKE FUNKCIJE OBLIKA, RELATIVNI PARAMETRI POMERANJA

U Timošenkovoj grednoj teoriji deformacija smicanja je konstantna unutar poprečnog preseka, ima karakter ugla obrtanja poprečnog preseka štapa i direktno je proporcionalna transverzalnoj sili, odnosno

$$\varphi_T = \frac{kT}{GF} \tag{1}$$

Konačni element štapa koji uključuje i deformaciju smicanja biće formulisan korišćenjem tzv. hijerarhijskih funkcija oblika. Ovakve funkcije za razliku od uobičajenih (totalnih) gradirane su po stepenu interpolacije, počev od linearnih pa na dalje i predstavljene su Legendreovim polinomima [2], [3].
Osnovne funkcije oblika su linerane (sl. 1a) i njima se vrši interpolacija ukupnih čvornih nepoznatih unutar konačnog elementa, tj.,

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l} \qquad N_2(x) = \frac{x}{l} \tag{2}$$

[1] Dr. Gligor radenković, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Bul. Kralja Aleksandra 73

Kvadratna interpolaciona funkcija (sl. 1b),

$$N_3(x) = 4\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) = 4N_2N_1(x) \tag{3}$$

opisuje promenu relativnog stepena slobode Δv_q čija je vrednost na sredini štapa jednaka jedinici a na krajevima jednaka nuli, sl. 2. Relativni stepen slobode nije ništa drugo do priraštaj parametra pomeranja tako da je ukupno pomeranje na sredini štapa jednako,

$$v\left(x=\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(v_i + v_k\right) + \Delta v_q \tag{4}$$

Kubnom funkcijom oblika,

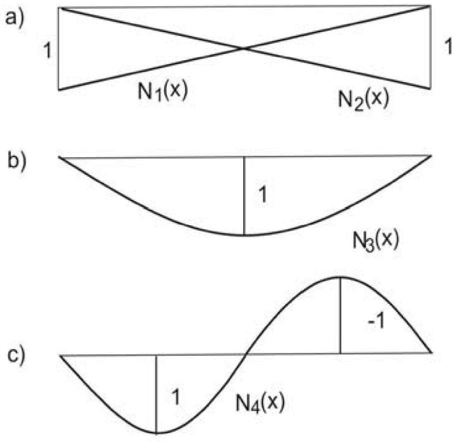
$$N_4(x) = \frac{32}{3}\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(1-2\frac{x}{l}\right) = \frac{8}{3}N_3(x)\left(1-2\frac{x}{l}\right) \tag{5}$$

podignut je nivo interpolacije još za jedan stepen i uveden relativni stepen slobode Δv_c koji predstavlja pozitivan priraštaj parametra pomeranja u preseku $x=l/4$, odnosno negativan priraštaj u preseku $x=3l/4$, sl. 1c. Shodno tome za ukupno pomeranje u presecima $x=l/4$ i $x=3l/$ dobija se,

$$v\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(3v_i + v_k\right) + \frac{3}{4}\Delta v_q + \Delta v_c \qquad v\left(3\frac{l}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(v_i + 3v_k\right) + \frac{3}{4}\Delta v_q - \Delta v_c \tag{6}$$

Saglasno izrazima (2), (3) i (5) ugib konačnog elementa štapa (sl. 2) određen je izrazom,

$$\begin{aligned} v &= N_1v_i + N_2v_k + N_3\Delta v_q + N_4\Delta v_c = \\ &= \left(1-\frac{x}{l}\right)v_i + \frac{x}{l}v_k + 4\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\Delta v_q + \frac{32}{3}\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(1-2\frac{x}{l}\right)\Delta v_c \end{aligned} \tag{7}$$

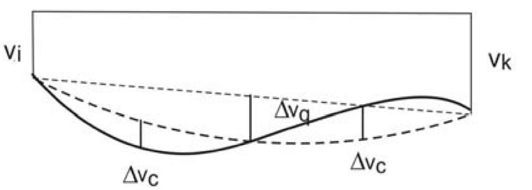


(Sl. 1)

Ugao obrtanja poprečnog preseka u Timošenkovoj teoriji štapa *β(x)* funkcija je ne samo ugiba već i deformacije smicanja, tj.,

$$\beta = \frac{dv}{dx} - \varphi_T = \varphi - \varphi_T \tag{8}$$

pa se s toga zahteva uvođenje nezavisnog interpolacionog polinoma kojim će biti opisana promena rotacija unutar konačnog elementa štapa.



(Sl. 2)

Pretpostavljajući kvadranu promenu ugla obrtanja, odnosno

$$\beta = N_1\beta_i + N_2\beta_k + N_3\Delta\beta_q = \left(1-\frac{x}{l}\right)\beta_i + \frac{x}{l}\beta_k + 4\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\Delta\beta_q \tag{9}$$

funkcija promene deformacije smicanja unutar konačnog elementa, saglasno izrazima (7) do (9), određena je kao,

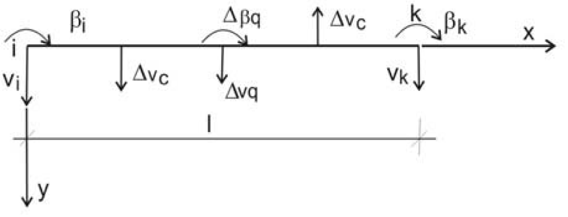
$$\varphi_T = \frac{dv}{dx} - \beta = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 \tag{10}$$

gde je

$$A_1 = \frac{1}{l}\left(v_k - v_i\right) - \beta_i + \frac{4}{l}\Delta v_q + \frac{32}{3l}\Delta v_c$$

$$A_2 = \frac{1}{l}\left(\beta_i - \beta_k\right) - \frac{4}{l}\Delta\beta_q - \frac{8}{l^2}\left(\Delta v_q + 8\Delta v_c\right) \qquad A_3 = \frac{4}{l^2}\Delta\beta_q + \frac{64}{l^3}\Delta v_c \tag{11}$$

Interpolacionim funkcijama (7) i (9) pretpostavljena je kubna promena ugiba v i kvadratna promena rotacije poprečnog preseka β kao i deformacije smicanja φ_T [1],[3]. Kao rezultat toga savijanje štapa koje uključuje i deformaciju smicanja opisano je sa sedam parametara pomeranja od koji su četiri totalnog a tri relativnog karaktera, sl.3, tj.,



(Sl. 3)

$$\mathbf{q}_s^T = \left[v_i, \beta_i, v_k, \beta_k, \Delta v_q, \Delta\beta_q, \Delta v_c\right]$$

Promena krivine u proizvoljnom preseku štapa određena je diferenciranjem interpolacionog polinoma ugla rotacije, odnosno

$$-\kappa = \frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{l}\left(\beta_k - \beta_i\right) + \frac{4}{l}\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)\Delta\beta_q \tag{12}$$

odakle sledi da je deformacija savijanja konačnog elementa štapa predstavljena linearnom funkcijom

2. MATRICA KRUTOSTI ŠTAPA SA LINEARNOM PROMENOM SMIČUĆE DEFORMACIJE

Uvažavajući činjenicu da je učešće deformacije savijanja u ukupnoj deformaciji štapa daleko značajnije u poređenju sa deformacijama smicanja jasno je onda da nema potrebe za višim stepenom funkcije klizanja φ_T (10) u odnosu na funkciju promene krivina κ (12). S toga, linearnom promenom smičuće deformacije unutar štapa *(A_3=0)* izvršena je eliminacija priraštaja ugiba Δv_c , tj.,

$$\Delta v_c = -\frac{l}{16}\Delta\beta_q \tag{13}$$

čime je broj stepeni slobode savijanja sa smičućom deformacijom konačnog elementa štapa sveden na šest.

Zamenom relacije (13) u jednačinu (7) funkcija promene ugiba izražena je kao,

$$v=\left(1-\frac{x}{l}\right)v_i+\frac{x}{l}v_k+4\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\Delta v_q-\frac{2}{3}x\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(1-2\frac{x}{l}\right)\Delta\beta_q \tag{14}$$

dok je deformacija klizanja jednaka,

$$\varphi_T=\frac{1}{l}\left(v_k-v_i\right)+\left(\frac{x}{l}-1\right)\beta_i-\frac{x}{l}\beta_k+\frac{4}{l}\left(1-2\frac{x}{l}\right)\Delta v_q \tag{15}$$

Obeležavanjem promene krivine κ i ugla k(lizanja φ_T vektorom deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}_s=\left[\kappa,\varphi_T\right]$ i matričnim zapisivanje jednačina (12) i (15), odnosno

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s=\mathbf{B}\,\mathbf{q}_s \qquad \mathbf{q}_s^T=\left[v_i,\beta_i,v_k,\beta_k,\Delta v_q,\Delta\beta_q\right] \tag{16}$$

definišemo matricu transformaciju deformacije, tj.,

$$\mathbf{B}_s^T=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_b^T\\ \mathbf{B}_c^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1/l & 0 & -1/l & 0 & 4\left(1-2x/l\right)/l\\ -1/l & x/l-1 & 1/l & -x/l & 4\left(1-2x/l\right)/l & 0\end{bmatrix} \tag{17}$$

pri čemu elementi prve vrste predstavljaju vektor transformacije deformacije savijanja $\mathbf{B}_b$ a elementi druge vrste vektor transformacije deformacije smicanja $\mathbf{B}_s$.

Jednačinu principa virtualnih pomeranja konačnog elementa štapa za slučaj savijanja koje uzima u obzir i uticaj transverzalnih sila na deformaciju štapa napisaćemo kao,

$$\int_0^l \mathbf{R}_s^T\delta\boldsymbol{\varepsilon}_s dx-\int_0^l \mathbf{P}_s^T\delta\mathbf{u}_s=0 \tag{18}$$

pri čemu

$$\mathbf{R}_s^T=\left[M,T\right] \qquad \mathbf{P}_s^T=\left[P_y,M\right] \quad \text{i} \quad \mathbf{u}_s^T=\left[v,\beta\right] \tag{19}$$

predstavljaju vektor presečnih sila, opterećenja i pomeranja respektivno.

Korišćenjem relacije,

$$\mathbf{R}_s=\mathbf{D}_s\left(\boldsymbol{\varepsilon}_s-\boldsymbol{\varepsilon}_{ts}\right) \tag{20}$$

gde je

$$\mathbf{D}_s=\begin{bmatrix}EI & \\ & GF/k\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{ts}^T=\left[\alpha_t\Delta t/h,\,0\right] \tag{21}$$

i standardne procedure metode konačnih elemenata [3],[4], jednačinu (18) prikazaćemo u diskretizovanoj formi kao,

$$\mathbf{K_s q_s}=\mathbf{Q_s} \tag{22}$$

$\mathbf{K}_s$ je matrica krutosti savijanja štapa koja uključuje i deformaciju smicanja, tj.,

$$\mathbf{K}_s=\int_0^l \mathbf{B}_s\mathbf{D}\,\mathbf{B}_s dx \tag{23}$$

dok je $\mathbf{Q}_s$ vektor ekvivalentnog opterećenja i jednak je

$$\mathbf{Q}_s = \int_0^l \mathbf{N}_s^T \mathbf{P}_s dx + \int_0^l \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \varepsilon_{ts} dx \tag{24}$$

Prvi član u izrazu (24) definiše ekvivalentne čvorne sile uled spoljašnjeg opterećenja a drugi član uled temperaturne razlike. $\mathbf{N}_s$ je matrica interpolacionih funkcija savijanja, odnosno,

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{N}_s \, \mathbf{q}_s \tag{25}$$

Integracijom izraza (23) dobija se matrica krutosti savijanja koja je u slučaju prizmatičnog štapa jednaka,

$$\mathbf{K}_s = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} \lambda & l\lambda/2 & -\lambda & l\lambda/2 & 0 & 0 \\ & 1+l^2\lambda/3 & -l\lambda/2 & -1+l^2\lambda/6 & -2l\lambda/3 & 0 \\ & & \lambda & -l\lambda/2 & 0 & 0 \\ & symetr. & & 1+l^2\lambda/3 & 2l\lambda/3 & 0 \\ & & & & 16\lambda/3 & 0 \\ & & & & & 16/3 \end{bmatrix} \quad \lambda = \frac{GF}{kEI} \tag{26}$$

Komponente vektora ekvivalentnog opterećenja određuju se na uobičajen način u skladu sa izrazom (24). Tako na primer u slučaju jednako podeljenog opterećenja vektor **Q** postaje

$$\mathbf{Q}^T = \frac{pl}{2}\left[1,\, 0,\, 1,\, 0,\, \frac{1}{3},\, 0\right]$$

dok je za slučaj koncentrisane sile i koncentrisanog momenta koji deluju na x_m odstojanju od kraja i jednak,

$$\mathbf{Q}^T = P_y\left[1-\frac{x_m}{l},\, 0,\, \frac{x_m}{l},\, 0,\, 4\frac{x_m}{l}\left(1-\frac{x_m}{l}\right),\, -\frac{2}{3}\frac{x_m}{l}\left(1-\frac{x_m}{l}\right)\left(1-2\frac{x_m}{l}\right)\right]$$

odnosno

$$\mathbf{Q}^T = M\left[0,\, 1-\frac{x_m}{l},\, 0,\, \frac{x_m}{l},\, 0,\, 4\frac{x_m}{l}\left(1-\frac{x_m}{l}\right)\right]$$

3. Matrica krutosti štapa sa konstantnim smicanjem duž štapa

Pri konstantnoj vrednosti smičuće deformacije unutar štapa i koeficijent A_2 u jednačini (48) jednak je nuli odakle se vrši eliminacija i relativnog ugiba na sredini štapa, odnosno

$$\Delta v_q = \frac{l}{8}\left(\beta_i - \beta_k\right) \tag{27}$$

Kao rezultat toga smičuća deformacija jednaka je,

$$\varphi_T = \frac{1}{l}\left(v_k - v_i\right) - \frac{1}{2}\left(\beta_i + \beta_k\right) - \frac{2}{3}\Delta\beta_q \tag{28}$$

dok je interpolacioni polinom ugiba v oblika,

$$v=\left(1-\frac{x}{l}\right)v_i+\frac{x}{l}v_k+\frac{1}{2}x\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(\beta_i-\beta_k\right)-\frac{2}{3}x\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(1-2\frac{x}{l}\right)\Delta\beta_q \tag{29}$$

Eliminacijom (27) broj stepeni slobode savijanja konačnog elementa štapa redukovan je na pet, tj., $\mathbf{q}_s^T=\left[v_i,\beta_i,v_k,\beta_k,\Delta\beta_q\right]$. Korišćenjem izraza (9), (28) i (29) matrica krutosti štapa kao i vektor ekvivalentnog opterećenja formulišu se na potpuno isti način kao i u slučaju elementa sa šest stepeni slobode pomeranja.

Priraštaj ugla obrtanja $\Delta\beta_q$, saglasno jednačini (28), izrazićemo kao,

$$\Delta\beta_q=\frac{3}{2l}\left(v_k-v_i\right)-\frac{3}{4}\left(\beta_i+\beta_k\right)-\frac{3}{2}\varphi_T \tag{30}$$

Zamenom vrednosti $\Delta\beta_q$ (30) u izraze (9) i (29) funkcije oblika za ugib i ugao obrtanja postaju

$$v=\left(1-3\frac{x^2}{l^2}+2\frac{x^3}{l^3}\right)v_i+\left(x-2\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2}\right)\beta_i+\left(3\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x^3}{l^3}\right)v_k+$$

$$+\left(-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2}\right)\beta_k+\left[x-3\frac{x^2}{l}+2\frac{x^3}{l^2}\right]\varphi_T$$

$$\beta=\frac{6}{l}\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{x}{l}\right)v_i+\frac{6}{l}\left(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right)v_k+\left(1-4\frac{x}{l}+3\frac{x^2}{l^2}\right)\beta_i+$$

$$+\left(-2\frac{x}{l}+3\frac{x^2}{l^2}\right)\beta_k-\left[6\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]\varphi_T \tag{32}$$

Analizom izraza (30) i (31) lako se uočava da interpolacioni polinomi ugiba i ugla rotacije zadovoljavaju uslov

$$\varphi(x)=\frac{dv(x)}{dx}=\beta(x)+\varphi_T \tag{33}$$

a što je u skladu sa pretpostavkom o konstantnoj smičućoj deformaciji duž elementa štapa. Drugim rečima razlika nagiba i ugla obrtanja u svim poprečnim presecima štapa ima nepromenljivu vrednost i jednaka je deformaciji klizanja φ_T. Takođe se može primetiti da su funkcije oblika uz ugibe i uglove obrtanja na krajevima štapa identične funkcijama oblika savijanja za slučaj Bernoulievog štapa, pa shodno tome možemo pisati da je,

$$v=N_{s1}v_i+N_{s2}\beta_i+N_{s3}v_k+N_{s4}\beta_k+\left[x-3\frac{x^2}{l}+2\frac{x^3}{l}\right]\varphi_T \tag{34}$$

odnosno

$$\beta=N'_{s1}v_i+N'_{s2}\beta_i+N'_{s3}v_k+N'_{s4}\beta_k+\left[6\frac{x}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right)\right]\varphi_T \tag{35}$$

Funkcije oblika (34) i (35) kao i interpolacije (9) i (29) takođe formulišu konačni element štapa sa konstantnom smičućom deformacijom i istim brojem stepeni slobode pomeranja, s tom razlikom što je relativni stepen slobode $\Delta\beta_q$ zamenjen deformacijom klizanja, tj. $\mathbf{q}_s^T = [v_i, \beta_i, v_k, \beta_k, \varphi_T]$. Jednačina (34) zadovoljava i konturne uslove na krajevima štapa po ugibima i nagibima, tj.,

$$x = 0 \begin{cases} v = v_i \\ dv/dx = \beta_i + \varphi_T \end{cases} \qquad x = l \begin{cases} v = v_k \\ dv/dx = \beta_k + \varphi_T \end{cases} \tag{36}$$

čime se pokazuje ispravnost interpolacionog polinoma ugiba u pogledu reprezentovanja Timošenkovog grednog elementa.

Parametar φ_T u jednačinama (34) i (35) eliminisaćemo iz statičko deformacijske analize štapa. Naime, na osnovu izraza (1) deformacija smicanja izražena je na sledeći način,

$$\varphi_T = \frac{kT}{GF} = \frac{k}{GF}\frac{dM}{dx} = -\frac{kEI}{GF}\frac{d^2\beta}{dx^2} \tag{37}$$

Dvostrukim diferenciranjem izraza (32), odnosno (35) ugao klizanja φ_T saglasno relaciji (37) određen je kao,

$$\varphi_T = \frac{\phi}{1+\phi}\left[\frac{1}{l}(v_k - v_i) - \frac{1}{2}(\beta_i + \beta_k)\right] \tag{38}$$

gde je

$$\phi = \frac{12kEI}{l^2 GF} \tag{39}$$

Relacijom (38) deformacija smicanja φ_T izražena je preko preostalih parametara pomeranja konačnog elementa čime je njegov broj stepeni slobode postao jednak broju stepeni slobode za slučaj Bernoulijevog štapa. Koeficijent ϕ (39) funkcija je geometrijskih i materijalnih karakteristika štapa, i zajedno sa transformacijom (38) unosi uticaj transverzalnih sila na deformaciju grede. Zamenom izraza (38) u jednačinu (34) ugib u proizvoljnom preseku Timošenkovog grednog elementa izrazićemo kao

$$v = \sum_{i=1}^{4} N_i(x) q_i = N_1 v_i + N_2 \beta_i + N_3 v_k + N_4 \beta_k \tag{40}$$

pri čemu su funkcije oblika $N_i(x)$ jednake

$$N_1(x)=\frac{1}{1+\phi}\left[1-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)^3+\phi\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]$$

$$N_2(x)=\frac{l}{1+\phi}\left[\frac{x}{l}-2\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{x}{l}\right)^3+\frac{\phi}{2}\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]$$

$$N_3(x)=\frac{1}{1+\phi}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2-2\left(\frac{x}{l}\right)^3+\phi\frac{x}{l}\right] \tag{41}$$

$$N_4(x)=\frac{l}{1+\phi}\left[-\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{x}{l}\right)^3+\frac{\phi}{2}\frac{x}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right)\right]$$

Na potpuno isti način određen je i interpolacioni polinom ugla obrtanja, tj.,

$$\beta=\sum_{i=1}^{4}N_{\beta i}q_i=N_{\beta_1}v_i+N_{\beta_2}\beta_i+N_{\beta_3}v_k+N_{\beta_4}\beta_k \tag{42}$$

gde su

$$N_{\beta_1}(x)=\frac{6}{l}\frac{1}{1+\phi}\frac{x}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right) \qquad N_{\beta_3}(x)=-N_{\beta_1}(x)$$

$$N_{\beta_2}(x)=\frac{1}{1+\phi}\left[1-4\frac{x}{l}+3\left(\frac{x}{l}\right)^2+\phi\left(1-\frac{x}{l}\right)\right] \tag{43}$$

$$N_{\beta_4}(x)=\frac{1}{1+\phi}\left[-2\frac{x}{l}+3\left(\frac{x}{l}\right)^2+\phi\left(\frac{x}{l}\right)\right]$$

pri čemu treba naglasiti da polinomi (40) i (42) a samim tim i funkcije oblika (41) i (43) nisu međusobno nezavisni već su spregnuti uslovom (33).

Kako je reč o konačnom elementu sa konstantnom deformacijom smicanja, negativna vrednost promene krivine $-\kappa$ u proizvoljnom preseku štapa jednaka je prvom izvodu ugla obrtanja ili drugom izvodu ugiba obzirom da je,

$$\frac{d\beta}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}-\varphi_T\right)=\frac{d^2v}{dx^2} \tag{44}$$

Shodno tome matrica transformacije deformacije savijanja i smicanja ima sledeće komponente,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\phi}\dfrac{6}{l^2}\left(1-2\dfrac{x}{l}\right) & \dfrac{1}{1+\phi}\dfrac{1}{l}\left(4-6\dfrac{x}{l}+\phi\right) & -\dfrac{1}{1+\phi}\dfrac{6}{l^2}\left(1-2\dfrac{x}{l}\right) & \dfrac{1}{1+\phi}\dfrac{1}{l}\left(2-6\dfrac{x}{l}-\phi\right) \\ -\dfrac{\phi}{1+\phi}\dfrac{1}{l} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\phi}{1+\phi} & \dfrac{\phi}{1+\phi}\dfrac{1}{l} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\phi}{1+\phi} \end{bmatrix} \qquad (45)$$

Koristeći standardnu proceduru metode konačnih elemenata zasnovane na principu virtualnih pomeranja za matricu krutosti savijanja prizmatičnog štapa koja uključuje i efekat smicanja dobija se

$$\mathbf{K}_s = \frac{EI}{(1+\phi)l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2(1+0.25\phi) & -6l & 2l^2(1-0.5\phi) \\ & symetr. & 12 & -6l \\ & & & 4l^2(1+0.25\phi) \end{bmatrix} \qquad (46)$$

LITERATURA

[1] B.F.de Veubeke,Displacementand Equilibrium Models in the Finite Element Method.Stress Analysis,145-197,New-York,1965

[2] M.Sekulović,Teorija linijskih nosača,Građevinska knjiga,Beograd,2006

[3] G.Radenkovic,Opšta nelinearna analiza ljuski zasnovana na trougaonom i generalnom četvorougaonom konačnom elementu,Doktorska disertacija,Građevinski Fakulet Univerziteta u Beogradu,1988

[4]M.A.Crisfield,Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis,Swansea,1986

TIMOSHENKO'S BEAM ELEMENT

Summary: *Two-dimesional beam finite element based on Timoshenko's beam theory is presented. Using hierarchycall approuch, bending and shear stiffness matrices with linear and constant shear drformation acros the lenght of the beam are formulated*

.

Key words: *Timoshenko's beam theory, finite element, hierarchycall shape functions*