

UNIVERZITET U BEOGRADU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Sanja D. Jocković

**FORMULACIJA I IMPLEMENTACIJA  
KONSTITUTIVNOG MODELA ZA  
PREKONSOLIDOVANE GLINE**

doktorska disertacija

Beograd, 2017

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Sanja D. Jocković

**FORMULATION AND IMPLEMENTATION  
OF CONSTITUTIVE MODEL FOR  
OVERCONSOLIDATED CLAYS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2017

Sanja D. Jocković

**FORMULACIJA I IMPLEMENTACIJA KONSTITUTIVNOG MODELA ZA  
PREKONSOLIDOVANE GLINE**

**Mentori:**

dr Mirjana Vukićević, vanredni profesor,  
Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

dr Miroslav Živković, redovni profesor,  
Univerzitet u Kragujevcu, Fakultet inženjerskih nauka

**Članovi komisije:**

dr Mirjana Vukićević, vanredni profesor,  
Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

dr Miroslav Živković, redovni profesor,  
Univerzitet u Kragujevcu, Fakultet inženjerskih nauka

dr Selimir Lelović, docent,  
Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

dr Boris Jeremić, redovni profesor,  
Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Davis

Datum odbrane

---

Doktorska disertacija je rezultat istraživanja koje sam sprovela na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Zahvaljujem se mentorima i članovima komisije koji su mi pružali stručne savete tokom izrade disertacije.

Zahvaljujem se kolegama sa Katedre za građevinsku geotehniku i iz Laboratorije za mehaniku tla, koji su svojom kolegijalnošću doprineli izradi disertacije u prijatnoj atmosferi.

Neprekidnu podršku tokom izrade disertacije pružala mi je porodica i zahvaljujem se Aleksi, Katarini i Đorđu za strpljenje i razumevanje.

*Doktorsku disertaciju posvećujem svojim roditeljima, kao zahvalnost za sve što su mi u životu pružili i što su bili oslonac u ključnim momentima izrade disertacije.*



# Rezime

Pouzdanost analiza geotehničkih problema numeričkim metodama kao što su metoda konačnih elemenata ili metoda konačnih razlika, u velikoj meri zavisi od mogućnosti konstitutivnog modela da adekvatno opiše mehaničko ponašanje tla. Razvoj naprednih, ali sa druge strane, za upotrebu dovoljno jednostavnih konstitutivnih modela za tlo je neophodan uslov za racionalno projektovanje geotehničkih konstrukcija. Imajući u vidu da je za praktičnu primenu konstitutivnih modela imperativ jednostavna formulacija i jasno fizičko značenje parametara modela, formiran je HASP (HARDening State Parameter) model za opisivanje mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina, koristeći teoriju kritičnog stanja i koncept granične površi. HASP model na jednostavan način prevazilazi mnoge nedostatke Modifikovanog Cam Clay modela, bez uvođenja dodatnih materijalnih parametara.

Formulacijom zakona ojačanja u funkciji parametra stanja i stepena prekonsolidacije, omogućeno je opisivanje brojnih elemenata mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina. U nedreniranim uslovima, model dobro opisuje generalnu formu putanje efektivnih napona u zavisnosti od stepena prekonsolidacije, kao i veličinu pornog pritiska. U dreniranim uslovima, model predviđa postepen prelaz iz kontrakcije u ekspanziju pre nego što je dostignuta vršna smičuća čvrstoća, kao i postepen prelaz iz ojačanja u omekšanje bez dodatnog matematičkog opisivanja. Naponska tačka se uvek nalazi na površi tečenja i na taj način je omogućeno elasto-plastično ponašanje još u ranim fazama opterećivanja. Za normalno konsolidovane gline, HASP model prelazi u Modifikovani Cam Clay model. Validacija modela je izvršena kroz poređenje sa publikovanim rezultatima dreniranih i nedreniranih opita triaksijalne kompresije i ekstenzije na širokom spektru prekonsolidovanih glina.

HASP model je implementiran u ABAQUS/Standard koristeći korisnički potprogram UMAT i Metodu vodećeg parametra za numeričku integraciju

konstitutivnih relacija modela. Kao vodeći parametar u algoritmu integracije usvojen je srednji efektivni napon. Mogućnosti HASP modela da adekvatno predvidi ponašanje prekonsolidovanih glina, ispitane su kroz analizu graničnog (konturnog) problema metodom konačnih elemenata. Razmatran je problem sleganja tla usled fazne izgradnje nasipa na površini prekonsolidovane gline, za različite stepene prekonsolidacije.

**Ključne reči:** Konstitutivni model, prekonsolidovane gline, parametar stanja, numerička integracija, Metoda vodećeg parametra

**Naučna oblast:** Građevinarstvo

**Uža naučna oblast:** Građevinska geotehnika

**UDK:** 624.13(043.3)

# Abstract

Accuracy and reliability of geotechnical analysis by numerical methods such as finite element method or finite difference method are significantly dependent on the ability of the constitutive model to describe the mechanical behavior of the soil in a proper manner. The development of advanced, but at the same time, for the use in engineering practise simple constitutive model for soil is essential for the rational design of the geotechnical structures. Bearing in mind that simple expressions and clear physical meaning of the model parameters are an imperative for practical application of constitutive models, the Hardening State Parameter model (HASP) for describing mechanical behaviour of overconsolidated clays is developed on the basis of the critical state theory and within the concept of bounding surface plasticity. The HASP model overcomes many deficiencies of the Modified Cam Clay model and at the same time it retains the same simplicity and the same set of parameters.

With the state parameter and the degree of overconsolidation as the state variables a novel form of the hardening rule was proposed and it is possible to describe a number of elements of the mechanical behavior of overconsolidated clays. In undrained conditions, the general form of the effective stress paths depending on the overconsolidation ratio is well predicted, as well as pore water pressure. In drained conditions, HASP model predicts the smooth transition from contractive to dilatant behaviour before the peak strength is reached and a smooth transition from hardening to softening, without mathematical description. The yield surface always passes through the current stress point thus enabling elastoplastic behaviour even in early stages of loading. For normally consolidated clays the HASP model transforms into the Modified Cam Clay model. Validation was done against published results of drained and undrained tests in triaxial compression and extension, on the samples with various overconsolidation ratios.

HASP model was implemented in ABAQUS/Standard using the user subroutine UMAT and the Governing Parameter Method for the numerical integration of the constitutive relations. Mean effective stress was adopted for the governing parameter. Possibilities of the HASP model to adequately predict the behavior of overconsolidated clays have been tested through the analysis of a boundary value problem by the finite element method. The problem of the clay settlements due to phased construction of the embankment on the clay surface was analysed, assuming different overconsolidation ratios.

**Keywords:** Constitutive model, overconsolidated clays, state parameter, numerical integration, Governing Parameter Method

**Scientific field:** Civil engineering

**Scientific subfield:** Geotechnical engineering

**UDC:** 624.13(043.3)

# Sadržaj

<b>Popis slika</b> .....	i
<b>Popis tabela</b> .....	v
<b>Popis simbola</b> .....	vi
<b>1. Uvodna razmatranja</b> .....	1
1.1 Zadaci i ciljevi istraživanja .....	2
1.2 Organizacija disertacije .....	2
<b>2. Teorijske osnove</b> .....	5
2.1 Uvod .....	5
2.2 Mehanika kontinuuma .....	6
2.2.1 Naponi .....	7
2.2.2 Deformacije .....	10
2.3 Elasto-plastično ponašanje tla .....	12
2.3.1 Linearna elastičnost .....	13
2.3.2 Nelinearna elastičnost .....	14
2.3.3 Plastičnost: Površ tečenja .....	14
2.3.4 Plastičnost: Zakon tečenja .....	15
2.3.5 Plastičnost: Zakon ojačanja .....	16
2.4 Princip efektivnih napona .....	17
2.5 Koncept kritičnog stanja .....	18
2.6 Naponsko-deformacijsko ponašanje prekonsolidovanih glina .....	21
2.7 Konstitutivno modeliranje prekonsolidovanih glina .....	26

<b>3. Formulacija konstitutivnog modela za prekonsolidovane gline</b> .....	29
3.1 Uvod .....	29
3.2 Generalne plastične naponsko-deformacijske relacije.....	30
3.3 Generalne naponsko-deformacijske relacije Modifikovanog Cam Clay (MCC) modela .....	31
3.4 Formulacija HASP konstitutivnog modela .....	37
3.4.1 Zakon ojačanja za površ tečenja .....	39
3.4.2 Koncept parametra stanja.....	42
3.4.3 Parametar stanja za imaginarnu tačku $\bar{\psi}$ .....	45
3.4.4 Stepen prekonsolidacije.....	47
3.4.5 Parametar stanja i ponašanje prekonsolidovanih glina .....	49
3.4.6 Koeficijent ojačanja $\omega$ .....	52
3.5 Karakteristike HASP modela u dreniranim uslovima .....	53
3.6 Karakteristike HASP modela u nedreniranim uslovima .....	57
3.7 Parametri HASP modela.....	60
<b>4. Numerička integracija HASP modela</b> .....	64
4.1 Uvod .....	64
4.2 Metod konačnih elemenata.....	64
4.3 Integracija konstitutivnih jednačina .....	68
4.3.1 Eksplicitne metode integracije .....	68
4.3.2 Implicitne metode integracije.....	69
4.4 Metoda vodećeg parametra GPM.....	70
4.4.1 Izbor vodećeg parametra.....	73
4.5 Relacije HASP modela u konfiguraciji $t+\Delta t$ .....	74
4.6 Postupak numeričke integracije HASP modela .....	79
4.6.1 Poznate veličine na početku inkrementa .....	79

4.6.2	Vodeći parametar ${}^{t+\Delta t}p'$ .....	81
4.6.3	Proračunski koraci za poznati vodeći parametar ${}^{t+\Delta t}p'$ .....	82
4.6.4	Konstitutivna matrica .....	84
4.7	Postupak numeričke integracije MCC modela.....	84
4.7.1	Poznate veličine na početku inkrementa .....	84
4.7.2	Elastično predviđanje .....	85
4.7.3	Vodeći parametar ${}^{t+\Delta t}p'$ .....	85
4.7.4	Proračunski koraci za poznati vodeći parametar ${}^{t+\Delta t}p'$ .....	85
<b>5.</b>	<b>Validacija i implementacija HASP modela .....</b>	<b>91</b>
5.1	Uvod .....	91
5.2	Validacija HASP modela .....	91
5.2.1	Materijali korišćeni za validaciju.....	92
5.2.2	CU triaksijalni opiti, Cardiff Kaolin glina, Banerjee & Stipho (1979) ....	95
5.2.3	CU triaksijalni opiti, London glina, Gasparre (2005).....	104
5.2.4	CU triaksijalni opiti, Hong Kong (marine) glina, Zhu & Yin (2000) ....	110
5.2.5	CD triaksijalni opiti, Kaolin glina, Biarez & Hicher (1994).....	113
5.2.6	CD triaksijalni opiti, Bangkok (stiff) glina, Hassan (1976).....	118
5.2.7	Drenirani $p'=\text{const}$ test, Fujinomori glina, Nakai & Hinokio (2004)...	124
5.2.8	Izotropna konsolidacija.....	126
5.3	Implementacija HASP modela.....	127
5.3.1	Model triaksijalnog opita u ABAQUS-u .....	128
5.3.2	Verifikacija postupka numeričke integracije GPM.....	130
5.4	Primer primene HASP modela – Konsolidacija sloja gline .....	141
5.4.1	Materijali.....	142
5.4.2	Mreža konačnih elemenata.....	143
5.4.3	Granični uslovi i opterećenje.....	143
5.4.4	Rezultati .....	144
5.4.5	Poređenje sa MCC modelom.....	155

<b>6. Zaključci i preporuke za dalja istraživanja.....</b>	<b>164</b>
6.1 Zaključna razmatranja.....	164
6.1.1 Formulacija konstitutivnog modela .....	164
6.1.2 Validacija konstitutivnog modela.....	165
6.1.3 Algoritam za numeričku integraciju konstitutivnih relacija.....	167
6.1.4 Verifikacija postupka implementacije modela.....	167
6.1.5 Primena konstitutivnog modela u analizi graničnog (konturnog) problema metodom konačnih elemenata.....	168
6.2 Preporuke za dalja istraživanja.....	169

<b>Literatura.....</b>	<b>170</b>
------------------------	------------

## **Prilog 1**

UMAT for ABAQUS – Fortan code for HASP model.....	178
UMAT for ABAQUS – Fortan code for MCC model .....	187



# Popis slika

<b>Slika 2.1</b>	Interpretacija invarijanti u prostoru glavnih napona.....	9
<b>Slika 2.2</b>	Kriva tečenja u $p'-q$ ravni .....	15
<b>Slika 2.3.</b>	a) Putanje napona u CU i CD opitu b) Linija kritičnog stanja u $p'-v$ ravni .....	19
<b>Slika 2.4.</b>	Izotropna kompresija.....	20
<b>Slika 2.5</b>	Površ graničnog stanja u $p'-q-e$ prostoru .....	20
<b>Slika 2.6</b>	Površ graničnog stanja u $p'-q$ ravni.....	21
<b>Slika 2.7</b>	Karakteristično ponašanje prekonsolidovane gline u dreniranim uslovima.....	22
<b>Slika 2.8</b>	Faze deformisanja prekonsolidovane gline u dreniranim uslovima.....	23
<b>Slika 2.9</b>	Putanje napona u dreniranim i nedreniranim uslovima .....	24
<b>Slika 2.10</b>	Ponašanje prekonsolidovane gline u nedreniranim uslovima sa lokalnim dreniranjem vode .....	25
<b>Slika 2.11</b>	Koncept granične površi.....	27
<b>Slika 3.1</b>	Kriva tečenja MCC modela u $p'-q$ ravni.....	32
<b>Slika 3.2</b>	Karakteristike MCC modela .....	34
<b>Slika 3.3</b>	Predviđanje MCC modela, drenirani CD opit.....	36
<b>Slika 3.4</b>	Predviđanje MCC modela, nedrenirani CU opit.....	36
<b>Slika 3.5</b>	Koncept granične površi .....	38
<b>Slika 3.6</b>	Maksimalni gradijent promene zapremine.....	41
<b>Slika 3.7</b>	a) Parametar stanja b) Promena specifične zapremine tla c) Putanje efektivnih napona u nedreniranim uslovima d) Naponsko-deformacijske krive .....	42
<b>Slika 3.8</b>	Parametar stanja .....	44
<b>Slika 3.9</b>	Granična površ i parametar stanja .....	45
<b>Slika 3.10</b>	Odnos veličina u kompresionoj ravni.....	47
<b>Slika 3.11</b>	Karakteristična stanja peska, Verdugo & Ishihara (1996) .....	50
<b>Slika 3.12</b>	Promena zapremine pri maksimalnoj vrednosti devijatora napona, Parry (1958).....	52
<b>Slika 3.13</b>	Drenirani uslovi, inicijalno stanje $\eta < M$ .....	54
<b>Slika 3.14</b>	Drenirani uslovi, prvo karakteristično stanje .....	55
<b>Slika 3.15</b>	Drenirani uslovi, faze 3, 4 i 5.....	56
<b>Slika 3.16</b>	Drenirani uslovi, kritično stanje.....	56
<b>Slika 3.17</b>	Promena parametara stanja u dreniranim uslovima .....	57

<b>Slika 3.18</b>	Putanja efektivnih napona u nedreniranim uslovima.....	59
<b>Slika 3.19</b>	Promena parametara stanja u nedreniranim uslovima .....	60
<b>Slika 3.20</b>	Promena zapremine uzorka normalno konsolidovane gline pri izotropnoj kompresiji .....	61
<b>Slika 3.21</b>	Promene zapremine pri izotropnoj kompresiji i u edometarskom opitu . .....	62
<b>Slika 4.1</b>	Inkrement opterećenja u nelinearnoj analizi.....	66
<b>Slika 4.2</b>	Newton-Raphson-ov iterativni postupak.....	67
<b>Slika 4.3</b>	Nelinearne relacije u metodi konačnih elemenata .....	67
<b>Slika 4.4</b>	Dijagram toka u GPM .....	71
<b>Slika 4.5</b>	Metoda povratnog preslikavanja (naponski prostor) .....	73
<b>Slika 5.1</b>	Putanje totalnih napona .....	92
<b>Slika 5.2</b>	Simulacija CU opita i eksperimentalni rezultati, naponsko-deformacijske krive za sve stepene prekonsolidacije, Cardiff glina.....	97
<b>Slika 5.3</b>	Simulacija CU opita i eksperimentalni rezultati, porni pritisak za sve stepene prekonsolidacije, Cardiff glina.....	99
<b>Slika 5.4</b>	Simulacija CU opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati, a) naponsko–deformacijske krive b) porni pritisak, Cardiff glina .....	100
<b>Slika 5.5</b>	Simulacija CU opita HASP modelom, a) putanje efektivnih napona b) normalizovane putanje efektivnih napona, Cardiff glina .....	101
<b>Slika 5.6</b>	Simulacija CU opita HASP modelom, promena parametara stanja $\Psi$ i $\bar{\Psi}$ , a) triaksijalna kompresija b) triaksijalna ekstenzija, Cardiff glina.....	102
<b>Slika 5.7</b>	Simulacija CU opita HASP modelom, promena naponskog odnosa a) triaksijalna kompresija b) triaksijalna ekstenzija, Cardiff glina ....	103
<b>Slika 5.8</b>	Simulacija CU opita i eksperimentalni rezultati, naponsko–deformacijske krive za sve stepene prekonsolidacije, London glina ..	105
<b>Slika 5.9</b>	Simulacija CU opita i eksperimentalni rezultati, porni pritisak za sve stepene prekonsolidacije, London glina.....	106
<b>Slika 5.10</b>	Simulacija CU opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati, a) naponsko–deformacijske krive b) porni pritisak, London glina .....	107
<b>Slika 5.11</b>	Simulacija CU opita HASP modelom, a) putanje efektivnih napona b) normalizovane putanje efektivnih napona, London glina.....	108
<b>Slika 5.12</b>	Simulacija CU opita HASP modelom, promena parametara stanja $\Psi$ i $\bar{\Psi}$ London glina.....	109
<b>Slika 5.13</b>	Simulacija CU opita HASP modelom, promena naponskog odnosa, London glina.....	109
<b>Slika 5.14</b>	Simulacija CU opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati, a) naponsko–deformacijske krive b) porni pritisak, Hong Kong glina.....	111

---

<b>Slika 5.15</b>	Simulacija CU opita HASP modelom, a) putanje efektivnih napona b) normalizovane putanje efektivnih napona, Hong Kong glina.....	111
<b>Slika 5.16</b>	Simulacija CU opita HASP modelom, promena parametara stanja $\Psi$ i $\bar{\Psi}$ Hong Kong glina.....	112
<b>Slika 5.17</b>	Simulacija CD opita i eksperimentalni rezultati, naponsko- deformacijske krive za sve stepene prekonsolidacije, Kaolin glina.....	114
<b>Slika 5.18</b>	Simulacija CD opita i eksperimentalni rezultati, promena zapreminske deformacije za sve stepene prekonsolidacije, Kaolin glina.....	115
<b>Slika 5.19</b>	Simulacija CD opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati, a) naponsko-deformacijske krive b) zapreminske deformacije, Kaolin glina .....	116
<b>Slika 5.20</b>	Simulacija CD opita HASP modelom, promena parametara stanja $\Psi$ i $\bar{\Psi}$ , Kaolin glina.....	117
<b>Slika 5.21</b>	Simulacija CD opita HASP modelom, promena naponskog odnosa, Kaolin glina .....	117
<b>Slika 5.22</b>	Simulacija CD opita i eksperimentalni rezultati, naponsko- deformacijske krive za sve stepene prekonsolidacije, Bangkok glina	120
<b>Slika 5.23</b>	Simulacija CD opita i eksperimentalni rezultati, promena zapreminske deformacije za sve stepene prekonsolidacije, Bangkok glina .....	121
<b>Slika 5.24</b>	Simulacija CD opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati, a) naponsko-deformacijske krive b) zapreminske deformacije, Bangkok glina .....	122
<b>Slika 5.25</b>	Simulacija CD opita HASP modelom, promena parametara stanja $\Psi$ i $\bar{\Psi}$ , Bangkok glina .....	123
<b>Slika 5.26</b>	Simulacija CD opita HASP modelom, promena naponskog odnosa, Bangkok glina .....	123
<b>Slika 5.27</b>	Simulacija opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati - kompresija, a) naponsko-deformacijske krive b) zapreminske deformacije, Fujinomori glina .....	125
<b>Slika 5.28</b>	Simulacija opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati- ekstenzija, a) naponsko-deformacijske krive b) zapreminske deformacije, Fujinomori glina .....	126
<b>Slika 5.29</b>	Predviđanje izotropne konsolidacije HASP modelom .....	127
<b>Slika 5.30</b>	Osnosimetrična mreža konačnih elemenata (jedan element) .....	128
<b>Slika 5.31</b>	Poređenje rezultata CU opita, MCC model (Abaqus) i implementirani MCC model (GPM), a) naponsko-deformacijske krive b) promena pornog pritiska, Cardiff glina.....	131
<b>Slika 5.32</b>	Poređenje rezultata CU opita, MCC model (Abaqus) i implementirani MCC model (GPM), a) naponsko-deformacijske krive b) promena pornog pritiska, London glina .....	132

---

<b>Slika 5.33</b>	Poređenje rezultata CD opita, MCC model (Abaqus) i implementirani MCC model (GPM), a) naponsko-deformacijske krive b) promena zapremine, Kaolin glina .....	133
<b>Slika 5.34</b>	Poređenje rezultata CD opita, MCC model (Abaqus) i implementirani MCC model (GPM), a) naponsko-deformacijske krive b) promena zapremine, Bangkok glina.....	134
<b>Slika 5.35</b>	Poređenje rezultata CU opita, HASP model (EIPN, Excel) i implementirani HASP model (GPM), a) naponsko-deformacijske krive b) promena pornog pritiska, Cardiff glina .....	137
<b>Slika 5.36</b>	Poređenje rezultata CU opita, HASP model (EIPN, Excel) i implementirani HASP model (GPM), a) naponsko-deformacijske krive b) promena pornog pritiska, London glina .....	138
<b>Slika 5.37</b>	Poređenje rezultata CD opita, HASP model (EIPN, Excel) i implementirani HASP model (GPM), a) naponsko-deformacijske krive b) promena zapremine, Kaolin glina .....	139
<b>Slika 5.38</b>	Poređenje rezultata CD opita, HASP model (EIPN, Excel) i implementirani HASP model (GPM), a) naponsko-deformacijske krive b) promena zapremine, Bangkok glina.....	140
<b>Slika 5.39</b>	Model sa mrežom konačnih elemenata za numeričku analizu.....	141
<b>Slika 5.40</b>	Sleganje gline ispod centra nasipa tokom vremena, OCR=5 .....	145
<b>Slika 5.41</b>	Razvoj pornog natpritiska u sredini sloja gline ispod centra nasipa, OCR=5 .....	145
<b>Slika 5.42</b>	Sleganje sloja gline za različite stepene prekonsolidacije a) 206 dana b) 30 dana .....	146
<b>Slika 5.43</b>	Zavisnost veličine sleganja od stepena prekonsolidacije .....	147
<b>Slika 5.44</b>	Razvoj pornog natpritiska tokom vremena, HASP model, OCR=5 .....	149
<b>Slika 5.45</b>	Promena koeficijenta poroznosti tokom vremena, HASP model, OCR=5.. .....	150
<b>Slika 5.46</b>	Rezultujuće pomeranje tokom vremena, HASP model, OCR=5.....	152
<b>Slika 5.47</b>	Vertikalno pomeranje tokom vremena, HASP model, OCR=5 .....	153
<b>Slika 5.48</b>	Razvoj smičućih deformacija tokom vremena, HASP model, OCR=5..	154
<b>Slika 5.49</b>	Zavisnost veličine sleganja od stepena prekonsolidacije, HASP model i MCC model .....	155
<b>Slika 5.50</b>	Razvoj pornog natpritiska tokom vremena, MCC model, OCR=5 .....	158
<b>Slika 5.51</b>	Promena koeficijenta poroznosti tokom vremena, MCC model, OCR=5.... .....	159
<b>Slika 5.52</b>	Rezultujuće pomeranje tokom vremena, MCC model, OCR=5.....	161
<b>Slika 5.53</b>	Vertikalno pomeranje tokom vremena, MCC model, OCR=5.....	162
<b>Slika 5.54</b>	Razvoj smičućih deformacija tokom vremena, MCC model, OCR=5 ....	163

# Popis tabela

<b>Tabela 4.1</b> Algoritam za proračun napona i funkcije tečenja u konfiguraciji $t+\Delta t$ za poznati vodeći parametar ${}^{t+\Delta t}p'$ .....	88
<b>Tabela 4.2</b> Algoritam za numeričku integraciju HASP modela.....	89
<b>Tabela 4.3</b> Algoritam za numeričku integraciju MCC modela.....	90
<b>Tabela 5.1</b> Parametri MCC i HASP modela .....	93
<b>Tabela 5.2</b> Inicijalni uslovi za simulaciju triaksijalnih opita .....	94
<b>Tabela 5.3</b> CPU vremena (user time), MCC model .....	130
<b>Tabela 5.4</b> Parametri nasipa.....	142
<b>Tabela 5.5</b> Parametri HASP modela.....	142
<b>Tabela 5.6</b> Konzistentne jedinice.....	142
<b>Tabela 5.7</b> Inicijalni uslovi.....	143

# Popis simbola

CSL	linija kritičnog stanja
$C_c$	indeks stišljivosti
$C_R$	indeks rekompresije
$d$	dilatancija
$d_{max}$	dilatancija pri vršnoj čvrstoći
$D^{ep}$	elasto-plastična matrica
$e$	koeficijent poroznosti
$e_0$	inicijalni koeficijent poroznosti
$E$	modul elastičnosti
$f$	funkcija tečenja
$G$	modul smicanja
$G_s$	specifična težina tla
$g$	funkcija plastičnog potencijala
$H$	plastični modul
ICL	linija izotropne konsolidacije
$I_p$	indeks plastičnosti
$J_2$	druga invarijanta devijatorskog dela tenzora napona
$K$	zapreminski modul
$k_0$	koeficijent pritiska tla u stanju mirovanja
$M$	nagib linije kritičnog stanja u $p'-q$ ravni
$M_f$	maksimalni naponski odnos
$N$	specifična zapremina normalno konsolidovanog tla pri $p'=1$ kPa
OCR	stepen prekonsolidacije definisan preko vertikalnih efektivnih napona
$p'$	srednji efektivni napon
$\bar{p}'$	srednji efektivni napon na graničnoj površi
$p'_0$	parametar ojačanja površi tečenja
$\bar{p}'_0$	parametar ojačanja granične površi
$q$	devijatorski napon

---

$\bar{q}$	devijatorski napon na graničnoj površi
$R_t$	izotropni stepen prekonsolidacije za trenutnu naponsku tačku
$\bar{R}_t$	izotropni stepen prekonsolidacije za imaginarnu naponsku tačku
$R$	stepen prekonsolidacije
$S_{ij}$	devijatorski deo tenzora napona
URL	linija bubrenja
$u$	porni pritisak
$v$	specifična zapremina
$v_0$	inicijalna specifična zapremina
$\bar{v}$	specifična zapremina za imaginarnu naponsku tačku
$\alpha$	eksponent u izrazu za putanju efektivnih napona u nedreniranim uslovima
$\Gamma$	specifična zapremina tla pri $p'=1$ kPa na liniji kritičnog stanja
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenzor deformacija
$\varepsilon_v$	volumetrijska (zapreminska) deformacija
$\varepsilon_q$	smičuća (distorzijska) deformacija
$\varepsilon^e$	elastična komponenta deformacije
$\varepsilon^p$	plastična komponenta deformacije
$d\varepsilon_v^p$	priraštaj plastičnih zapreminskih deformacija
$d\varepsilon_q^p$	priraštaj plastičnih smičućih deformacija
$\eta$	naponski odnos
$\theta$	Lode-ov ugao
$\kappa$	nagib linije bubrenja (rasterećenja)
$\lambda$	nagib linije kritičnog stanja i linije izotropne konsolidacije
$\mu$	Poisson-ov koeficijent
$\xi$	parametar koji kontroliše uticaj plastičnih smičućih deformacija na zakon ojačanja
$\boldsymbol{\sigma}$	tenzor napona
$\phi'_{cv}$	ugao smičuće čvrstoće pri konstantnoj zapremini
$\chi$	skalarni multiplikator
$\Psi$	parametar stanja za trenutnu naponsku tačku
$\bar{\Psi}$	parametar stanja za imaginarnu naponsku tačku
$\omega$	koeficijent ojačanja

---

# POGLAVLJE 1

## 1. Uvodna razmatranja

Osnovni zadaci u geotehničkom inženjerstvu su adekvatno predviđanje pomeranja u tlu, proračun nosivosti tla i stabilnosti geotehničkih konstrukcija. Primena analitičkih metoda kod rešavanja ovih zadataka je ograničena na neke veoma jednostavne probleme. Varijacije u geometriji, graničnim uslovima i opterećenjima zahtevaju primenu numeričkih metoda (metoda konačnih elemenata, metoda konačnih razlika), koje mogu da obuhvate veliki broj elemenata realnog ponašanja tla i konstrukcija, kao i njihovu interakciju. Veliki napredak u razvoju savremenog numeričkog modeliranja postignut je neprekidnim usavršavanjem terenskog i laboratorijskog ispitivanja tla, kao i formulacijom i korišćenjem naprednih konstitutivnih modela za tlo. Razvoj naprednih, ali sa druge strane, za upotrebu dovoljno jednostavnih konstitutivnih modela za tlo je neophodan uslov za racionalno projektovanje geotehničkih konstrukcija. Međutim, opisati naponsko-deformacijsko ponašanje tla kao nehomogenog i anizotropnog materijala, koji se plastično deformiše od ranih stadijuma opterećivanja, predstavlja izazov sa kojim se geotehnika intenzivno suočava poslednjih decenija. Nije moguće opisati ponašanje svih vrsta tla pri različitim stanjima i uslovima opterećivanja pomoću jednog konstitutivnog modela. Brojni konstitutivni modeli razvijeni do danas se uz određen nivo aproksimacija primenjuju za različite probleme u geotehnici. Osnovni imperativ je postići dobar balans između sofisticiranosti i jednostavnosti, sa materijalnim parametrima koji imaju jasno fizičko značenje i koji mogu da se odrede iz konvencionalnih laboratorijskih opita.

Značajan deo u oblasti konstitutivnog modeliranja tla predstavlja opisivanje naponsko-deformacijskih relacija prekonsolidovanih glina. U prirodi su retke normalno konsolidovane gline, što nameće potrebu da se intenzivno razvijaju



konstitutivni modeli koji će opisivati mehaničko ponašanje normalno konsolidovanih i prekonsolidovanih glina. Prekonsolidovane gline su u prošlosti bile opterećene vertikalnim efektivnim naponom koji je veći od tekuće veličine vertikalnog efektivnog napona. U poređenju sa normalno konsolidovanim glinama, imaju manji koeficijent poroznosti i veću smičuću čvrstoću. U prirodi su najčešće ispucale, što dovodi do nehomogenog polja deformacija. Iz tog razloga ispoljavaju najsloženiji oblik ponašanja tla pri lomu koji podrazumeva povećanje smičućeg napona do maksimalne veličine, a zatim opadanje smičućeg napona pri daljem deformisanju do konstantne veličine (krto-plastični lom). Na ponašanje prekonsolidovanih glina značajno utiče prethodna istorija napona i deformacija.

## 1.1 Zadaci i ciljevi istraživanja

Zadatak doktorske disertacije je formulisanje elasto-plastičnog konstitutivnog modela za opisivanje naponsko-deformacijskih relacija normalno konsolidovanih i prekonsolidovanih glina pri monotonom opterećenju u okviru koncepta kritičnog stanja. Cilj je da se adekvatno opiše elasto-plastično ponašanje prekonsolidovanih glina od ranih stadijuma opterećivanja pa sve do loma, u dreniranim i nedreniranim uslovima, koristeći samo parametre sa jasnim fizičkim značenjem. Takođe, potrebno je formulisati numeričku proceduru za integraciju napona, što će omogućiti da se model implementira u program za analizu geotehničkih problema metodom konačnih elemenata.

## 1.2 Organizacija disertacije

Sadržaj doktorske disertacije je izložen u šest poglavlja. Nakon uvodnog razmatranja koje je prikazano u Poglavlju 1 sledi:

**Poglavlje 2.** U ovom poglavlju su date teorijske osnove na kojima se zasniva istraživanje u doktorskoj disertaciji. Nakon prikaza jednačina mehanike kontinuuma koje se koriste za formulaciju konstitutivnog modela i numeričke procedure za integraciju napona, dati su osnovni elementi kojima se opisuje elasto-

plastično ponašanje tla. Sledi opšti prikaz koncepta kritičnog stanja u okviru kog je formulisan novi konstitutivni model. Na kraju poglavlja, prikazane su karakteristike naponsko-deformacijskog ponašanja prekonsolidovanih glina, kao i istorijski pregled postojećih konstitutivnih modela za prekonsolidovane gline.

**Poglavlje 3.** U poglavlju 3 su nakon prikaza generalnih plastičnih naponsko-deformacijskih relacija za modele kritičnog stanja, izvedene relacije Modifikovanog Cam Clay modela. Na tim osnovama formulisan je novi HASP konstitutivni model za prekonsolidovane gline, koristeći koncept granične površi. U relacije modela uveden je parametar stanja koji kombinuje uticaj normalnih napona i zbijenosti tla. Formulisan je novi izraz za parametar ojačanja koji omogućava da se adekvatno opišu karakteristike mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina. Karakteristike HASP modela u dreniranim i nedreniranim uslovima opterećivanja su prikazane kroz nekoliko faza deformisanja, koje su eksperimentalno identifikovane.

**Poglavlje 4.** U poglavlju 4 je prikazan algoritam za numeričku integraciju konstitutivnih relacija HASP modela. Algoritam predstavlja neophodan uslov za implementaciju modela u softverski paket za analizu geotehničkih problema metodom konačnih elemenata. Korišćena je implicitna Metoda vodećeg parametra za integraciju napona.

**Poglavlje 5.** U ovom poglavlju je izvršena validacija HASP modela, poređenjem sa rezultatima eksperimentalnih istraživanja. Mogućnosti HASP modela su demonstrirane kroz sposobnost modela da adekvatno opiše naponsko-deformacijsko ponašanje, promenu zapremine u dreniranim uslovima i pornog pritiska u nedreniranim uslovima zasićenih prekonsolidovanih glina, izloženih različitim putanjama napona. S obzirom da je HASP model formiran sa ciljem da se otklone osnovni nedostaci Modifikovanog Cam Clay modela prilikom opisivanja mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina, u svakoj validaciji, izvršeno je i poređenje sa predviđanjem Modifikovanog Cam Clay modela. HASP model je implementiran u ABAQUS/Standard koristeći korisnički potprogram UMAT i numeričku proceduru za integraciju napona prikazanu u Poglavlju 4. Izvršena je

verifikacija implementacije, poređenjem sa rezultatima Euler-ovog postupka numeričke integracije deformacija duž poznate putanje napona. U nastavku je prikazana primena konstitutivnog HASP modela u analizi graničnog (konturnog) problema metodom konačnih elemenata. Razmatran je problem sleganja tla usled fazne izgradnje nasipa na površini prekonsolidovane gline.

**Poglavlje 6.** U završnom poglavlju je dat rezime istraživanja sa proisteklim zaključcima. Navedene su preporuke za dalja istraživanja.

# POGLAVLJE 2

## Teorijske osnove

### 2.1 Uvod

Intenzivnim razvojem numeričkih metoda, kao što su metoda konačnih elemenata i metoda konačnih razlika, moguće je analizirati i predviđati ponašanja kompleksnih geotehničkih konstrukcija, pri različitim stanjima i uslovima opterećivanja. Međutim, pouzdanost takvih analiza u velikoj meri zavisi od mogućnosti konstitutivnih materijalnih modela da adekvatno opišu naponsko-deformacijsko ponašanje različitih materijala (tlo, beton, čelik). Konstitutivni model povezuje promenu stanja deformacija u elementu materijala sa promenom napona. Sa matematičke i mehaničke tačke gledišta, tlo je materijal sa najkompleksnijim naponsko-deformacijskim relacijama. Pre svega zato što je tlo višefazni materijal (čvrsta zrna i voda i vazduh u porama tla), granularni materijal (sastoji se od mineralnih zrna različitih oblika i veličine), nehomogen materijal i anizotropan materijal (u različitim pravcima ima različita svojstva), a takođe i varijabilan i nepouzdan materijal. Opisivanje mehaničkog ponašanja tla je veoma kompleksno zbog sledećih karakteristika, (Puzrin, 2012):

- 1) Elastična oblast je veoma mala
- 2) Odnos napona i deformacija je izrazito nelinearan i u području veoma malih deformacija
- 3) Odnos napona i deformacija je izrazito nelinearan pri inicijalnom opterećivanju, rasterećivanju i ponovnom opterećivanju
- 4) Ponašanje tla zavisi od istorije opterećivanja

- 5) Tlo ispoljava osobinu koja se naziva ojačanje tj. sa porastom plastičnih deformacija javlja se i porast smičuće čvrstoće tla
- 6) Tvrdo i zbijeno tlo teži da povećava zapreminu (dilatancija) tokom dreniranog smicanja (osobina koju nemaju elastični materijali)
- 7) Nakon dostizanja vršne smičuće čvrstoće kod tvrdog i zbijenog tla dolazi do smanjenja nivoa napona (omekšanje)
- 8) Ponašanje tla zavisi od brzine nanošenja smičućih deformacija
- 9) Ponašanje tla zavisi od vremena – puzanje i relaksacija napona

Uzimajući u obzir složenost problema, praktično je nemoguće formirati konstitutivni model koji će obuhvatiti sve prethodno navedene karakteristike tla. Svaki konstitutivni model mora zadovoljiti tri kriterijuma i to: teoretski, eksperimentalni i numerički (Chen, 1985). Prvi kriterijum je konzistentnost sa osnovnim principima mehanike kontinuuma. Drugi, eksperimentalni, podrazumeva da se što realnije opiše ponašanje tla na osnovu terenskih i laboratorijskih ispitivanja. Treći kriterijum se odnosi na dovoljnu jednostavnost primene modela u programima za numeričku analizu konstrukcija, odnosno dovoljnu jednostavnost implementacije konstitutivnog modela u softverski paket.

Najjednostavniji su elastični modeli, koji zahtevaju najmanje parametara za opisivanje naponsko-deformacijskog ponašanja tla, ali sa druge strane ne obuhvataju ključne karakteristike ponašanja realnog tla. Stvarno ponašanje tla je mnogo složenije i zahteva složenije konstitutivne relacije, kao što su elasto-plastični modeli sa ojačanjem sa jednom ili više površi tečenja, koji se mnogo bolje slažu sa eksperimentalnim rezultatima.

## 2.2 Mehanika kontinuuma

Konstitutivno modeliranje tla zahteva set matematičkih jednačina baziranih na osnovnim principima mehanike kontinuuma. U skladu sa konvencijom o znaku koja važi u mehanici tla, naponi pritiska će se smatrati pozitivnim.

### 2.2.1 Naponi

Za poznavanje stanja napona u jednoj tački tela izloženog dejstvu spoljnjih sila potrebno je poznavati napone u tri međusobno upravne ravni. Tako se može odrediti ukupni napon u proizvoljnoj ravni koja prolazi kroz zadatu tačku deformisanog tela. Devet komponentalnih napona (tri normalna i šest smičućih) koji se javljaju u pomenutim ravnima određuju naponsko stanje u posmatranoj materijalnoj tački. Skup komponenata napona predstavlja se tenzorom napona (tenzor drugog reda):

$$\sigma_{ij} = \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Iz uslova konjugovanosti smičućih napona sledi da je tenzor napona simetričan, što znači da se može pisati kao vektor:

$$\sigma_{ij} = \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31})^T \quad (2.2)$$

Postoje ravni u kojima se ne javljaju smičući naponi. Te ravni se nazivaju glavne ravni, a normalni naponi za te ravni su glavni naponi. Tenzor napona se tada može predstaviti kao:

$$\sigma_{ij} = \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Glavni naponi su svojstvene vrednosti tenzora napona (2.1) i mogu se odrediti iz karakteristične jednačine:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.4)$$

Koeficijenti karakteristične jednačine se nazivaju naponske invarijante  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  i definisane su kao:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.5)$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \quad (2.6)$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.7)$$

Tenzor napona se može razložiti na sferni i devijatorski deo. Sferni deo je dat izrazom:

$$\sigma_{ij}^p = \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \quad (2.8)$$

Devijatorski deo tenzora napona se može predstaviti:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \quad (2.9)$$

gde je  $\delta_{ij}$  Kronecker-ov delta simbol za koji važi da je  $\delta_{ij} = 1$  za  $i=j$  i  $\delta_{ij} = 0$  za  $i \neq j$ .

Po istom principu kao za tenzor ukupnih napona možemo dobiti invarijante devijatorskog dela napona:

$$J_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0 \quad (2.10)$$

$$J_2 = S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11} - S_{12}^2 - S_{23}^2 - S_{31}^2 \quad (2.11)$$

$$J_3 = \det(\mathbf{S}) \quad (2.12)$$

Invarijanta  $J_2$  je naročito značajna za opisivanje naponsko-deformacijskih relacija za tlo i može se izraziti i u sledećem obliku:

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (2.13)$$

ili:

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 - (\sigma_{33} - \sigma_{31})^2 \right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \quad (2.14)$$

U mehanici tla, za opis naponskog stanja pogodno je koristiti invarijante:

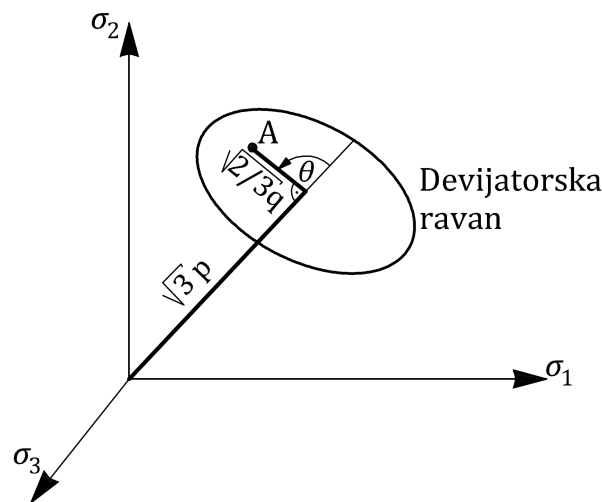
$$p = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad (2.15)$$

$$q = \sqrt{3J_2} \quad (2.16)$$

gde se  $p$  naziva srednji napon, a  $q$  devijatorski napon. Za specijalno stanje triaksijalne kompresije, gde je  $\sigma_2 = \sigma_3$  i stanje triaksijalne ekstenzije, gde je  $\sigma_1 = \sigma_2$  izraz za devijatorski napon postaje:

$$q = |\sigma_1 - \sigma_3| \quad (2.17)$$

Na Slici 2.1 prikazana je interpretacija datih invarijanti u prostoru glavnih napona. Srednji napon  $p$  je direktno povezan sa rastojanjem devijatorske ravni u kojoj leži naponska tačka od koordinatnog početka. Devijatorski napon  $q$  je direktno povezan sa normalnim rastojanjem između naponske tačke i prostorne dijagonale.



**Slika 2.1** Interpretacija invarijanti u prostoru glavnih napona

Za kompletno definisanje položaja naponske tačke koristeći invarijante, potrebno je uključiti i treću invarijantu devijatorskog dela napona i to kroz Lode-ov ugao  $\theta$  u sledećem obliku:

$$\theta = -\frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right) \quad (2.18)$$

Vrednost Lode-ovog ugla se kreće u granicama  $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ . Vrednost  $\theta = 30^\circ$  odgovara stanju triaksijalne kompresije, dok vrednost Lode-ovog ugla  $\theta = -30^\circ$  odgovara stanju triaksijalne ekstenzije.



### 2.2.2 Deformacije

U skladu sa prethodnim prikazom naponskog stanja, mogu se opisivati i deformacijska stanja. Tenzor deformacija je:

$$\varepsilon_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

dok je vektor deformacija:

$$\varepsilon_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{31})^T \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon} = \left( \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \frac{1}{2}\gamma_{12} \quad \frac{1}{2}\gamma_{23} \quad \frac{1}{2}\gamma_{31} \right)^T \quad (2.21)$$

Koeficijenti karakteristične jednačine, odnosno deformacijske invarijante  $I_{\varepsilon 1}$ ,  $I_{\varepsilon 2}$ ,  $I_{\varepsilon 3}$  definisane su kao:

$$I_{\varepsilon 1} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (2.22)$$

$$I_{\varepsilon 2} = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2 \quad (2.23)$$

$$I_{\varepsilon 3} = \det(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.24)$$

Tenzor deformacija se može predstaviti i kao zbir sfernog i devijatorskog dela:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}\varepsilon_v\delta_{ij} + \varepsilon'_{ij} \quad (2.25)$$

i invarijante devijatorskog dela deformacija su:

$$I'_{\varepsilon 1} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{33} \quad (2.26)$$

$$I'_{\varepsilon 2} = \varepsilon'_{11}\varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{22}\varepsilon'_{33} + \varepsilon'_{33}\varepsilon'_{11} - \varepsilon'^2_{12} - \varepsilon'^2_{23} - \varepsilon'^2_{31} = \frac{1}{2}\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij} \quad (2.27)$$

$$I'_{\varepsilon 3} = \det(\boldsymbol{\varepsilon}') \quad (2.28)$$

Deformacija u tlu se može podeliti na deformaciju promene zapremine (volumetrijska deformacija) i deformaciju promene oblika (distorzijska deformacija), što se opisuje odgovarajućim invarijantama deformacija:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = I_{\varepsilon 1} \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_q = 2\sqrt{\frac{1}{3}I'_{\varepsilon 2}} = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}} \quad (2.30)$$

Odnosno:

$$\varepsilon_q = \sqrt{\frac{2}{3}\left[\left(\varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_v}{3}\right)^2 + \left(\varepsilon_{22} - \frac{\varepsilon_v}{3}\right)^2 + \left(\varepsilon_{33} - \frac{\varepsilon_v}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2)\right]} \quad (2.31)$$

Invarijanta (2.29) predstavlja meru promene zapremine koja je proporcionalna volumetrijskoj ili sfernoj komponenti deformacije, a (2.30), odnosno (2.31) opisuje meru distorzije.

Volumetrijske deformacije  $\varepsilon_v$  imaju važnu ulogu pri opisivanju ponašanja tla i promena volumetrijske deformacije se može izraziti kao:

$$\Delta\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} \quad (2.32)$$

gde je  $\Delta V$  promena zapremine, a  $V$  zapremina elementa tla. Ako zapreminu zasićenog tla predstavimo kao zbir zapremine vode  $V_w$  i zapremine čvrstih čestica  $V_s$  i pretpostavimo da su voda i zrna tla praktično nestišljivi, onda sledi da je:

$$\Delta V = \Delta V_w \quad (2.33)$$

Dalje možemo pisati izraz za promenu koeficijenta poroznosti:

$$\Delta e = \frac{\Delta V}{V_s} \quad (2.34)$$

Tako da je :

$$\Delta V = V_s \Delta e \quad (2.35)$$

Izraz za promenu volumetrijske deformacije postaje:

$$\Delta\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_s \Delta e}{V_s + V_w} \quad (2.36)$$

Odnosno:

$$\Delta\varepsilon_v = \frac{\Delta e}{1+e} \quad (2.37)$$

Pogodno je uvesti pokazatelj pod nazivom specifična zapremina  $v$ , koji se definiše kao zapremina elementa tla koji sadrži jedinicu zapremine čvrstih čestica tako da je:

$$v = 1 + e \quad (2.38)$$

Promena volumetrijske deformacije se sada može izraziti u sledećem obliku:

$$\Delta\varepsilon_v = \frac{\Delta v}{v} \quad (2.39)$$

### 2.3 Elasto-plastično ponašanje tla

Naponsko-deformacijsko ponašanje tla se generalno može podeliti u dve kategorije: elastično i elasto-plastično ponašanje tla. Pri vrlo malim deformacijama, manjim od  $10^{-5}$ , najčešće se smatra da je ponašanje tla elastično. Za deformaciju smicanja u rasponu od  $10^{-4}$  do  $10^{-2}$ , pojavljuju se i plastične deformacije. Kod većih deformacija, tlo dolazi u stanje loma. Složenost ponašanja tla raste sa porastom deformacije smicanja, a samim tim postaje složeniji i matematički opis tog ponašanja.

Za male deformacije važi aditivna dekompozicija deformacija, odnosno ukupna deformacija se sastoji od dve komponente: elastične komponente usled deformacija pojedinačnih zrna i plastične deformacije usled klizanja na kontaktima između zrna. Nepovratne deformacije nastaju usled promene konfiguracije zrna koja čine skelet tla. Aditivna dekompozicija deformacija je tako:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.40)$$

Elastične deformacije su najčešće definisane Hooke-ovim zakonom i zavise od nivoa napona, dok su plastične deformacije u direktnoj vezi sa istorijom napona i deformacija i nisu jedinstvene. Kompletno ponašanje elasto-plastičnog materijala je definisano:

- 1) Elastičnim karakteristikama materijala

- 2) Jednačinom površi popuštanja (uslov tečenja)
- 3) Zakonom tečenja
- 4) Zakonom ojačanja

### 2.3.1 Linearna elastičnost

Linearnu elastičnost karakterišu povratne deformacije, nezavisnost od putanje napona i deformacija, nezavisnost od brzine deformisanja i nema disipacije mehaničke energije. Veza između napona i deformacija se može predstaviti kao:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.41)$$

gde je  $D_{ijkl}$  elastična konstitutivna matrica. Za izotropnu elastičnost, matrica je simetrična  $6 \times 6$  sa 21 nezavisnih komponentata. Za formiranje elastične konstitutivne matrice potrebna su samo dva parametra Young-ov modul  $E$  i Poisson-ov koeficijent  $\mu$ , ili za tlo prikladniji parametri, zapreminski modul  $K$  i modul smicanja  $G$ :

$$\sigma_{ij} = K \varepsilon_v \delta_{ij} + 2G \varepsilon'_{ij} \quad (2.42)$$

gde su:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (2.43)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (2.44)$$

tako da imamo da je:

$$p = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} 3K \varepsilon_v + \frac{2}{3} G \varepsilon'_{ii} = K \varepsilon_v \quad (2.45)$$

$$S_{ij} = K \varepsilon_v \delta_{ij} + 2G \varepsilon'_{ij} - p \delta_{ij} = 2G \varepsilon'_{ij} \quad (2.46)$$

$$q = 3G \varepsilon_q \quad (2.47)$$

Iz prethodnih izraza možemo zaključiti da usled promene srednjeg napona dolazi samo do promene zapremine i nema distorzije. Sa druge strane promena smičućih

napona ne izaziva promenu zapremine. Bitno je naglasiti da opisano ponašanje ne odgovara ponašanju tla. U tlu se sa promenom smičućih deformacija javljaju i zapreminske deformacije, što ponašanje tla čini relativno komplikovanim za tačnije matematičko opisivanje. To je naročito izraženo kod zbijenih i prekonsolidovanih vrsta tla, gde su efekti dilatancije značajni. Jedan od takvih primera je opit direktnog smicanja.

Zahvaljujući jednostavnosti, linearno elastični konstitutivni modeli su našli široku primenu u konvencionalnoj mehanici tla. Međutim, linearni izotropni elastični modeli ne opisuju ključne karakteristike ponašanja tla, naročito za područje srednjih i velikih deformacija. Opisivanje anizotropne elastičnosti ne utiče značajno na rezultat, osim što povećava broj parametara za opis naponsko-deformacijskih relacija (Potts, 2002).

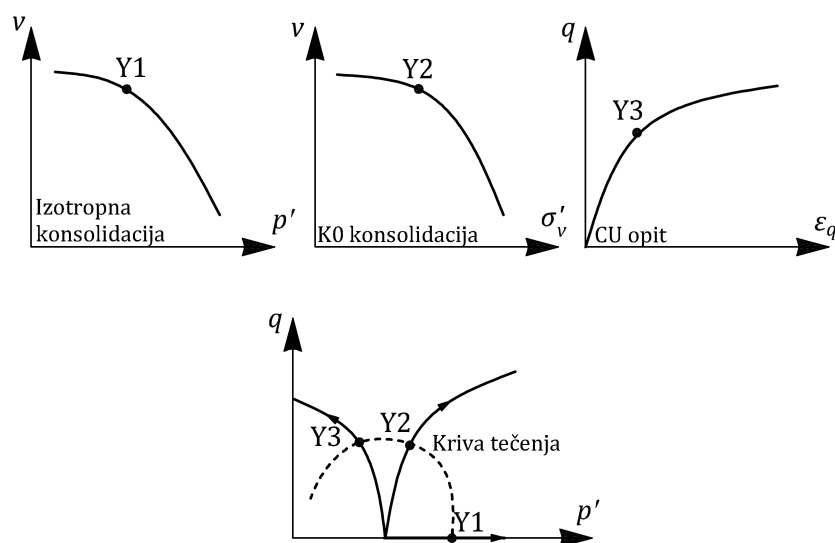
### 2.3.2 Nelinearna elastičnost

Nelinearna elastičnost je svakako prvi korak ka unapređenju prethodno opisanog modela. Materijalni parametri zavise od nivoa napona i/ili deformacija. Najčešće korišćeni model ovog tipa je hiperbolički model (Kondner, 1963), gde modul smicanja opada od inicijalne vrednosti  $G_0$  do nule pri lomu. Zatim, u literaturi su (Potts & Zdravković, 1999) opisani i bilinearan model,  $K-G$  model, modeli koji uzimaju u obzir krutost tla pri malim deformacijama. Nelinearni elastični modeli mogu da simuliraju ponašanje tla pri monotonom opterećenju, dok pri cikličnim i dinamičkim opterećenjima nisu zadovoljeni osnovni zakoni termodinamike.

### 2.3.3 Plastičnost: Površ tečenja

Ako se pretpostavi da se tlo ponaša elastično samo do određene veličine napona, može se u trodimenzionom naponsko–deformacionom prostoru definisati površ popuštanja ili površ tečenja. Na Slici 2.2 su prikazani rezultati tri opita na uzorcima od istog materijala, i to: izotropna konsolidacija (tačka popuštanja  $Y_1$ ), edometarski opit (tačka popuštanja  $Y_2$ ) i triaksijalni CU opit (tačka popuštanja  $Y_3$ ). Ako se pri različitim putanjama napona obeleže tačke u kojima dolazi do promene nagiba na

krivoj napon-deformacija, može se konstruisati kriva popuštanja (tečenja) u naponskoj  $p'$ - $q$  ravni za ispitivano tlo.



**Slika 2.2** Kriva tečenja u  $p'$ - $q$  ravni

Površ tečenja (popuštanja), odnosno uslov tečenja je funkcija naponskog stanja i parametra  $k$  koji kontrolise veličinu površi i naziva se još i parametar ojačanja:

$$f = f(\sigma, k) \quad (2.48)$$

Unutar površi tečenja  $f < 0$ , deformacije su čisto elastične. Ako putanja napona dodje do površi tečenja  $f = 0$ , element tla počinje da trpi plastične deformacije. Površ tečenja, u naponskom prostoru, predstavlja oblast mogućih naponskih stanja, tako da stanje  $f > 0$  nije moguće.

### 2.3.4 Plastičnost: Zakon tečenja

Generalni okvir u kome se formiraju elasto-plastični modeli podrazumeva definisanje površi tečenja (2.48) koja ograničava naponsko područje u kome se materijal ponaša elastično i definisanje površi plastičnog potencijala:

$$g = g(\sigma, l) \quad (2.49)$$

koja kontrolise mehanizam plastičnog deformisanja kada se naponska tačka nalazi na površi tečenja. Mehanizam plastičnog deformisanja (zakon tečenja) se opisuje

odnosom priraštaja plastičnih zapreminskih i priraštaja plastičnih smičućih deformacija  $d\varepsilon_v^p/d\varepsilon_q^p$  i vektor priraštaja plastičnih deformacija je uvek upravan na površ plastičnog potencijala. Plastične deformacije definisane su sledećim izrazom:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\chi \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.50)$$

gde je  $d\chi$  skalarni multiplikator koji definiše magnitudu plastičnih deformacija.

Odnos priraštaja plastičnih deformacija predstavlja gradijent promene zapremine materijala i naziva se dilatancija materijala. Dilatancija je tendicija tla da menja zapreminu tokom smicanja i predstavlja fundamentalni aspekt ponašanja tla koji se mora adekvatno opisati konstitutivnim relacijama. Gradijent vektora priraštaja plastičnih deformacije zavisi samo od vektora  $\sigma$  i unutrašnjih varijabli, a ne zavisi od promene napona koja uzrokuje ovu plastičnu deformaciju. Ovakvo ponašanje materijala je u suprotnosti sa izotropnim elastičnim ponašanjem, gde gradijent vektora priraštaja deformacija zavisi od gradijenta promene napona, odnosno važi zakon kolinearnosti.

U slučaju da se površ plastičnog potencijala i površ tečenja poklapaju  $g=f$ , za materijal važi pridruženi zakon tečenja i vektor priraštaja plastičnih deformacija je upravan i na površ tečenja – asocijativni zakon tečenja. U suprotnom imamo neasocijativni zakon tečenja. Asocijativni zakon tečenja generalno važi za metale, dok se frikcionni materijali ne uklapaju dobro u ovaj koncept, pre svega zato što može značajno da preceni vrednost zapreminskih deformacija. Razlike između realnog ponašanja tla i predviđanja modela sa asocijativnim zakonom tečenja su veće za materijale sa velikim vrednostima ugla smičuće čvrstoće, odnosno za krupnozrne materijale. Sa druge strane, istraživanja pokazuju (Lade, 2005) da se za sitnozrne materijale, pre svega gline, ovaj koncept može uspešno koristiti u konstitutivnom modeliranju.

### 2.3.5 Plastičnost: Zakon ojačanja

Od početka tečenja do loma, tlo trpi plastične deformacije. Ojačanje tla (*soil hardening*) je kapacitet tla da se sa porastom plastičnih deformacija javlja porast i

smičuće čvrstoće tla. Zakon ojačanja predstavlja kriterijum za nastavak tečenja nakon što je dostignuta granica tečenja i povezuje veličinu plastične deformacije sa veličinom priraštaja napona kada materijal prolazi po površi tečenja i materijal očvršćava. Takođe, zakon ojačanja povezuje plastične deformacije sa parametrom ojačanja. U slučaju da se površ tečenja pri ojačanju širi u svim pravcima i pri tom zadržava svoj početni oblik imamo *izotropno ojačanje* materijala. *Kinematičko ojačanje* pretpostavlja translaciju ili rotaciju površi tečenja uz zadržavanje prvobitnog oblika. Tokom plastičnog tečenja, uvek mora biti ispunjen uslov:

$$f = 0 \quad (2.51)$$

Odnosno:

$$df = \left( \frac{df}{d\sigma_{ij}} \right)^T d\sigma_{ij} + \frac{df}{dk} dk = 0 \quad (2.52)$$

Prethodni izraz predstavlja uslov konzistencije plastičnog tečenja, odnosno naponska tačka uvek ostaje na površi tečenja tokom plastičnog deformisanja.

## 2.4 Princip efektivnih napona

Princip efektivnih napona je formulisao Terzaghi (1936) i predstavlja najvažniji fundamentalni princip mehanike tla. Važi za zasićeno tlo i sastoji se od dva osnovna stava:

- 1) Efektivni normalni napon  $\sigma'$  jednak je razlici totalnog normalnog napona  $\sigma$  i pornog pritiska  $u$ :

$$\sigma' = \sigma - u \quad (2.53)$$

- 2) Svi merljivi efekti promene napona, kao što su promena zapremine, promena oblika i promena smičuće čvrstoće zavise isključivo od efektivnih napona.

S obzirom da dva osnovna oblika ponašanja tla od interesa za prenošenje opterećenja i napona, čvrstoća i stišljivost, zavise od efektivnih normalnih napona, najveći broj konstitutivnih modela se zasniva na ovom principu i relacije modela su izražene preko efektivnih napona.



## 2.5 Koncept kritičnog stanja

Širok okvir za opisivanje naponsko-deformacijskih relacija za tlo pruža koncept kritičnog stanja. Nastao je pedesetih godina prošlog veka na Univerzitetu u Cambridge-u po idejama Roscoe-a i saradnika (Roscoe i dr. 1958, Roscoe i dr. 1963, Schofield & Wroth 1968). Stanje tla se opisuje u trodimenzionalnom  $p'$ - $q$ - $e$  prostoru, gde je  $p'$  srednji efektivni napon,  $q$  devijatorski napon i  $e$  koeficijent poroznosti tla. Kritično stanje tla predstavlja stanje savršene plastičnosti, pri kome se plastične deformacije smicanja odvijaju bez promene efektivnih napona i bez promene zapremine:

$$\frac{\partial p'}{\partial \varepsilon_q} = \frac{\partial q}{\partial \varepsilon_q} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon_q} = 0 \quad (2.54)$$

Ovaj pristup se veoma uspešno koristio za opisivanje ponašanja mekih glina, ali se može koristiti i za formulisanje kompleksnih konstitutivnih modela, koji bi adekvatno opisivali mnoge elemente ponašanja svih vrsta tla pri različitim stanjima i uslovima opterećivanja.

Eksperimentalno je utvrđeno da će se za niz uzoraka tla ispitanih u nedreniranom CU i dreniranom CD opitu triaksijalne kompresije do loma, dobiti niz putanja napona, koje se završavaju na jednoj liniji za obe vrste opita. Ta linija se naziva linija kritičnog stanja (*Critical State Line*) CSL, Slika 2.3. Kritično stanje je dostignuto pri naponskom odnosu:

$$\frac{q_{cs}}{p'_{cs}} = \eta_{cs} = M \quad (2.55)$$

koji definiše nagib linije kritičnog stanja,  $M$ , u  $p'$ - $q$  dijagramu.

Koristeći rezultate izotropne kompresije pri opterećenju i rasterećenju uzorka, u polulogaritamskom dijagramu  $\ln p' - v$ , Slika 2.4, linija kritičnog stanja se opisuje jednačinom:

$$v = \Gamma - \lambda \ln p' \quad (2.56)$$

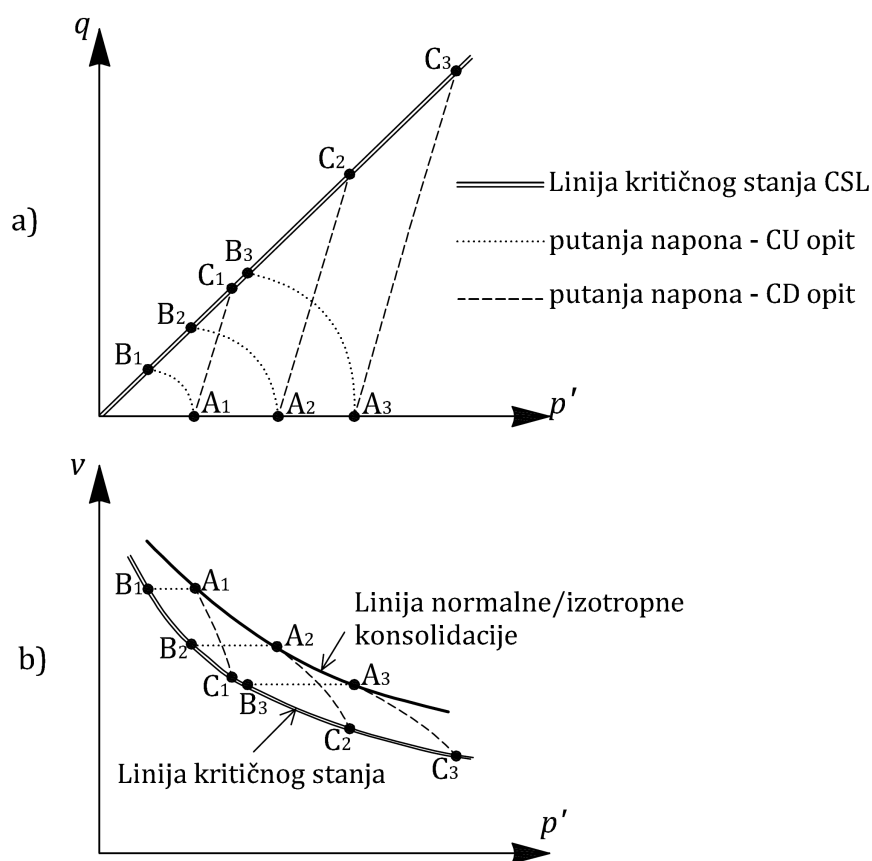
gde je  $\Gamma$  specifična zapremina tla pri  $p'=1$  kPa na liniji kritičnog stanja, Slika 2.4.

Parametar  $\Gamma$  određuje položaj linije kritičnog stanja u  $\ln p' - v$  ravni. Parametar  $\lambda$  predstavlja nagib linije kritičnog stanja i linije izotropne konsolidacije (*Isotropic Compression Line*) ICL. Parametar  $\kappa$  predstavlja nagib linije bubrenja (rasterećenja). Jednačina linije izotropne konsolidacije je:

$$v = N - \lambda \ln p' \quad (2.57)$$

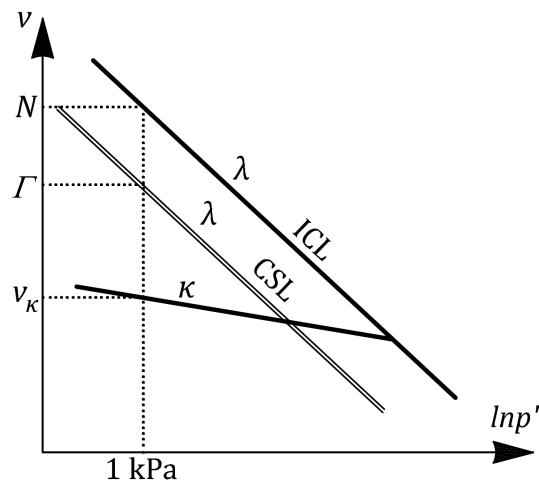
dok je jednačina linije bubrenja data kao:

$$v = v_{\kappa} - \kappa \ln p' \quad (2.58)$$



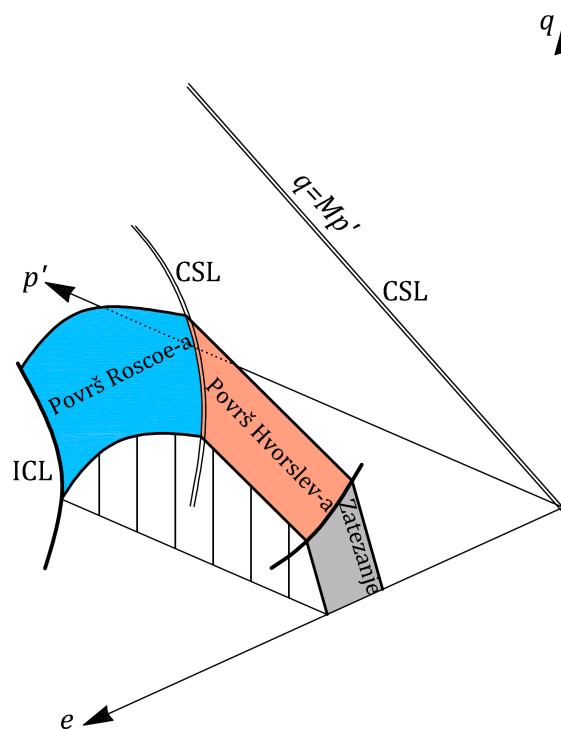
**Slika 2.3.** a) Putanje napona u CU i CD opitu b) Linija kritičnog stanja u  $p'-v$  ravni

Parametar  $N$  je specifična zapremina normalno konsolidovanog tla pri  $p'=1$  kPa, dok je  $v_{\kappa}$  specifična zapremina prekonsolidovanog uzorka za  $p'=1$  kPa. Veličine  $N$ ,  $\Gamma$ ,  $\lambda$  i  $\kappa$  su konstante za dato tlo i eksperimentalno se određuju.



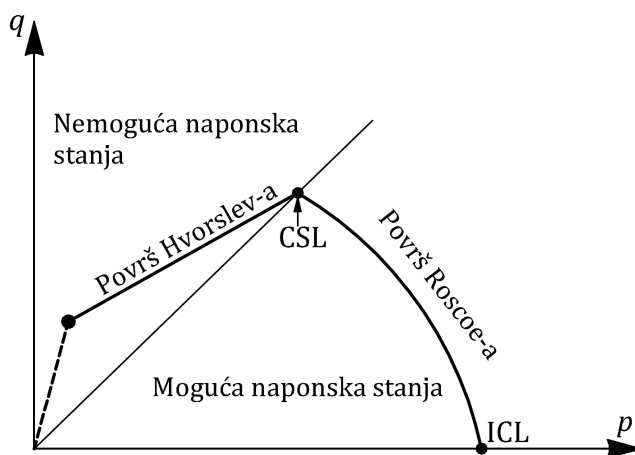
**Slika 2.4.** Izotropna kompresija

Površ graničnog stanja, Slika 2.5, ograničava prostor mogućih stanja napona i specifičnih zapremina i prostire se od linije izotropne/normalne konsolidacije, preko površi Roscoe-a do linije kritičnog stanja, zatim preko površi Hvorslev-a do ose.



**Slika 2.5** Površ graničnog stanja u  $p'-q-e$  prostoru

Za stanja napona ispod površi graničnog stanja deformacije su elastične, dok plastične deformacije nastaju kada putanja napona dodirne površ graničnog stanja. To znači da je površ graničnog stanja istovremeno i površ tečenja. Na Slici 2.6 dat je prikaz površi graničnog stanja u  $p'-q$  ravni:



Slika 2.6 Površ graničnog stanja u  $p'-q$  ravni

## 2.6 Naponsko-deformacijsko ponašanje prekonsolidovanih glina

Prekonsolidovana tla su u prošlosti bila opterećena vertikalnim efektivnim naponom koji je veći od tekuće veličine vertikalnog efektivnog napona. Prekonsolidacija tla je najčešće rezultat različitih geoloških procesa:

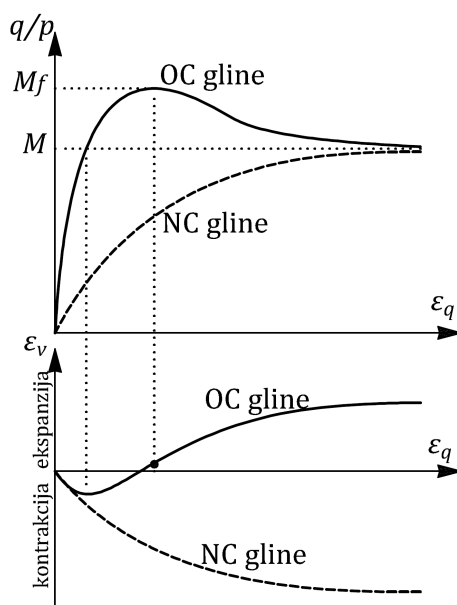
- erozija – odnošenje površinskog sloja tla i topljenje ledenog pokrivača predstavlja rasterećenje za donje slojeve
- starenje glina (*aging*) – glina je izložena konstantnom efektivnom naponu duže vreme (sto ili više godina). Takva glina se naziva normalno konsolidovana vremešna glina koja je vremenom stekla odlike karakteristične za ponašanje prekonsolidovane gline
- stalne promene nivoa podzemne vode – isušivanje površinskih slojeva tla.

Sa druge strane, prekonsolidacija može biti posledica izvođenja različitih građevinskih radova na tlu i u tlu. Fazna izgradnja objekata kao što su potporne konstrukcije i tuneli utiče na stalnu promenu putanje efektivnih napona. U prirodi su retke gline za koje važi da je stepen prekonsolidacije  $OCR=1$ , što nameće

potrebu da se intenzivno razvijaju konstitutivni modeli koji će opisivati naponsko-deformacijska stanja normalno konsolidovanih i prekonsolidovanih glina.

Prekonsolidovane gline, u poređenju sa normalno konsolidovanim glinama imaju manji koeficijent poroznosti i veću smičuću čvrstoću. Ponašanje prekonsolidovanih glina pod opterećenjem zavisi od prethodne istorije napona i deformacija, od srednjeg napona, kao i od stepena prekonsolidacije. Atkinson & Sallfors (1991) navode da prethodna istorija opterećivanja (*recent stress history*) podrazumeva uticaj prethodne putanje napona i vreme provedeno pod konstantnim efektivnim naponom pre nego što je došlo do promene napona. Naponsko-deformacijski odgovor prekonsolidovanih glina zavisi od prethodne istorije opterećivanja samo do određenog nivoa napona, tako da sa daljim opterećivanjem, tlo gubi memoriju o prethodnoj putanji napona.

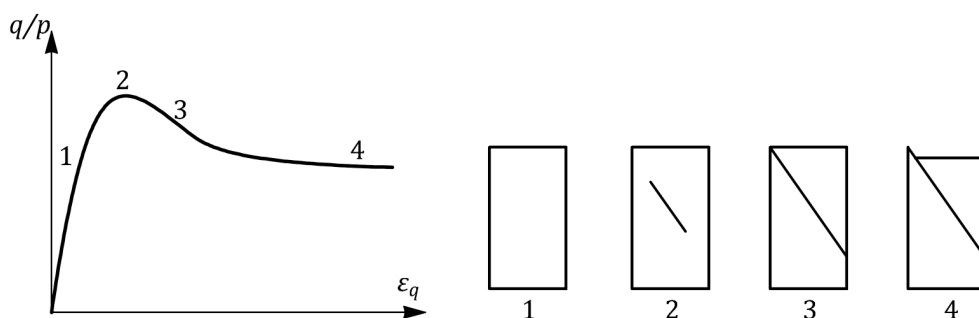
U dreniranim uslovima, prekonsolidovane gline ispoljavaju krto-plastični lom koji podrazumeva povećanje smičućeg napona do maksimalne veličine (vršna smičuća čvrstoća), a zatim opadanje smičućeg napona (omekšanje) pri daljem deformisanju do konstantne veličine. Posle početnog smanjivanja, zapremina uzorka ima tendenciju povećanja pre loma, Slika 2.7.



**Slika 2.7** Karakteristično ponašanje prekonsolidovane gline u dreniranim uslovima

Krto plastično ponašanje u nižem području normalnih napona se može uočiti kod većine tvrdih prekonsolidovanih sitnozrnih materijala kao i kod dobro zbijenih krupnozrnih materijala. To je najsloženiji oblik ponašanja tla pri lomu (Maksimović, 1989).

Na Slici 2.8 su šematski prikazane četiri faze deformisanja prekonsolidovane gline u dreniranim uslovima, koje su eksperimentalno identifikovane. Tokom faze 1, uzorak se deformiše uniformno. Nakon početne kompresije, dolazi do povećanja zapremine uzorka sa smičućim deformisanjem – dilatancija (osobina koju nemaju elastični materijali). Neposredno pre dostizanja vršne čvrstoće, počinje faza 2 koja označava početak pojave lokalizovane deformacije, odnosno pojave “lokalne zone klizanja/smicanja” (*shear band*). Pri dostizanju vršne čvrstoće uočava se maksimalni gradijent promene zapremine. Ukupna merena volumetrijska deformacija uzorka pri lomu ne mora odgovarati promeni zapremine u lokalnoj zoni klizanja (Maksimović, 2014). Pri daljem deformisanju, u fazi 3, lokalna zona klizanja se povećava do formiranja jasno uočljive površi klizanja i dolazi do smanjenja smičućeg otpora – omekšanje. U fazi 4, nakon savladavanja efekata dilatancije, pločaste čestice postepeno menjaju orijentaciju i postrojavaju se paralelno ravni loma što dovodi do pojave rezidualne čvrstoće.

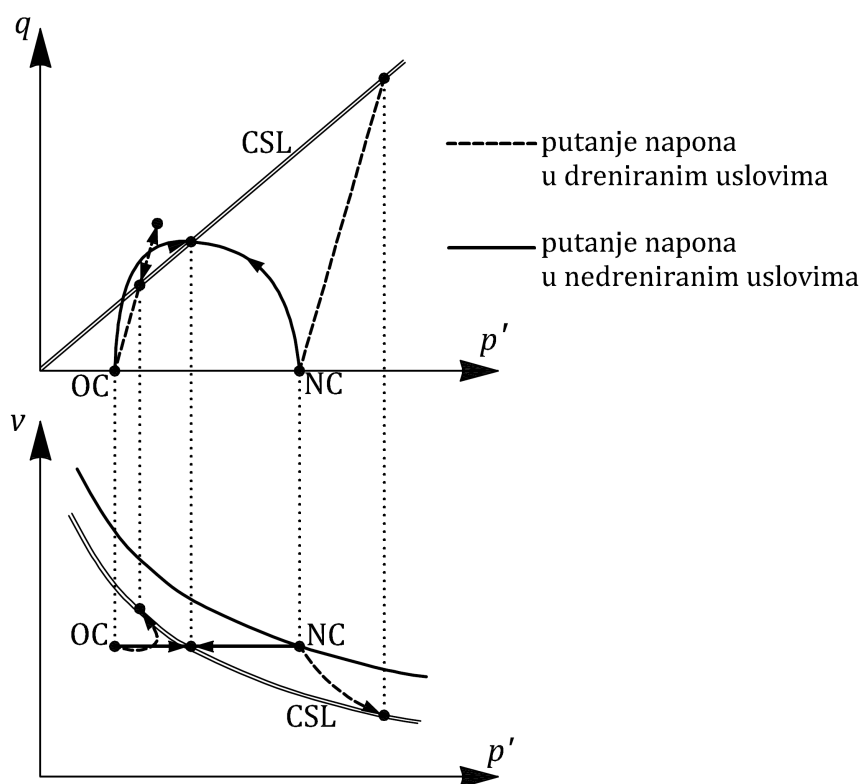


**Slika 2.8** Faze deformisanja prekonsolidovane gline u dreniranim uslovima

U nedreniranim uslovima, kada je sprečena promena zapremine tla, generišu se porni pritisci koji zavise od prirode tla i putanje napona. Kod normalno konsolidovane gline koja ima tendenciju smanjenja zapremine pri smicanju, generiše se pozitivni porni pritisak koji se povećava sve do loma. Kod prekonsolidovane gline porni pritisak prvo raste, a zatim opada. Što je veći stepen

prekonsolidacije to je veće smanjenje pornog pritiska. Kod jako prekonsolidovanih glina porni pritisak pri lomu može biti i negativan. Kada je porni pritisak negativan, nedrenirana čvrstoća je veća od drenirane. U nedreniranim uslovima do loma dolazi pri većim vrednostima smičućih deformacija.

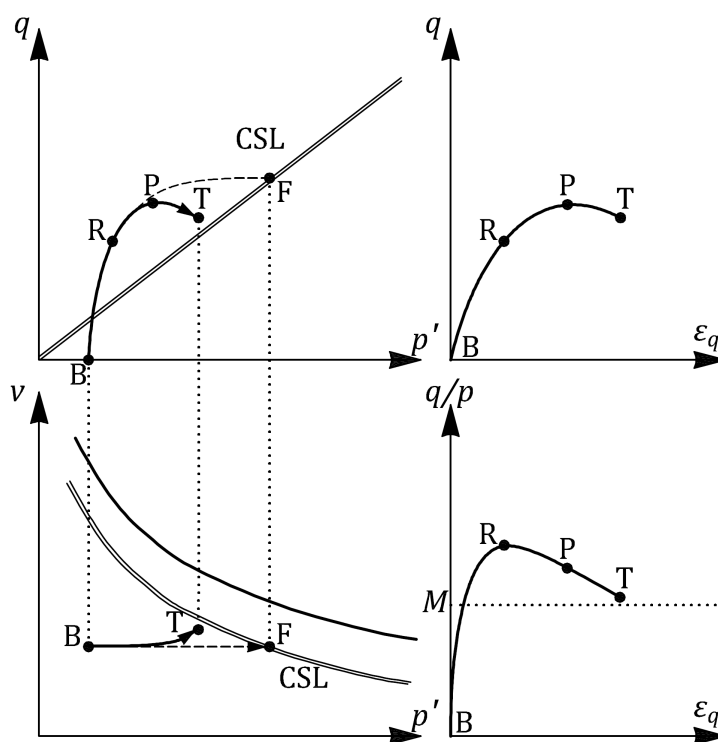
Karakteristične putanje napona u dreniranim i nedreniranim uslovima za normalno konsolidovane i prekonsolidovane gline u naponskoj i kompresionoj ravni su prikazane na Slici 2.9. Eksperimentalno je utvrđeno da se za normalno konsolidovane gline putanje napona završavaju na liniji kritičnog stanja CSL, dok za prekonsolidovane gline putanje napona dodiruju površ Hvorsleva i zatim se vraćaju do linije kritičnog stanja.



**Slika 2.9** Putanje napona u dreniranim i nedreniranim uslovima

Jako prekonsolidovane gline u prirodi su najčešće ispucale. Prilikom uzimanja uzoraka i rasterećenja ove prsline se u izvesnoj meri otvaraju. Ako se takav uzorak ispita u nedreniranom opitu, formiraju se lokalne zone smicanja što dovodi do lokalnog dreniranja vode i lokalne promene vlažnosti i pornog pritiska. Dolazi do

omekšanja i pada čvrstoće. Slika 2.10 ilustruje ponašanje prekonsolidovane gline u nedreniranom opitu triaksijalne kompresije kada je došlo do male promene zapremine usled pojave lokalne zone smicanja. U takvim uslovima se može uočiti vršna čvrstoća i pad čvrstoće, što se ne registruje pri potpuno nedreniranim uslovima kada nema promene zapremine.



**Slika 2.10** Ponašanje prekonsolidovane gline u nedreniranim uslovima sa lokalnim dreniranjem vode

Poznato je da nedrenirana čvrstoća gline  $s_u$  zavisi od vlažnosti, veličine uzorka koji se ispituje, od istorije napona, od brzine smicanja, kao i od pojave lokalnih zona smicanja. Ispitivanjem u različitim laboratorijskim i terenskim opitima mogu se dobiti različite vrednosti nedrenirane čvrstoće. Iz tog razloga, nedrenirana čvrstoća nije fundamentalna karakteristika tla (Atkinson & Richardson, 1987).

U prirodi ne postoji trajno nedrenirana situacija, jer tokom vremena dolazi do konsolidacije pri opterećenju ili bubrenja pri rasterećenju i porni pritisci se izjednačavaju sa hidrostatičkim ili filtracionim uslovima podzemnih voda. Posle dovoljno dugog vremena postaje merodavna drenirana čvrstoća. Nedrenirana



čvrstoća se uglavnom primenjuje za analizu privremene stabilnosti mase tla, koja može, ali i ne mora biti kritična (Maksimović, 2014).

## 2.7 Konstitutivno modeliranje prekonsolidovanih glina

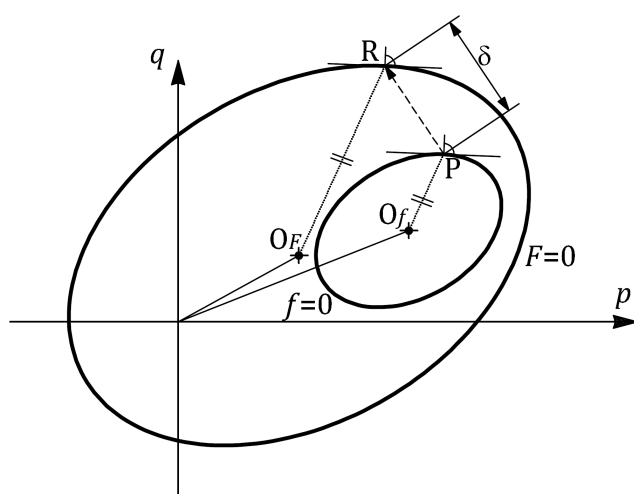
Razvoj konstitutivnih modela koji će na adekvatan način opisati ponašanje prekonsolidovanih glina u različitim naponsko-deformacijskim uslovima neophodan je za racionalno projektovanje geotehničkih konstrukcija. Veliki broj modela razvijen je koristeći koncept kritičnog stanja i relacije Modifikovanog Cam Clay (MCC) modela. MCC model je baziran na velikom broju eksperimentalnih ispitivanja na normalno konsolidovanim i lako prekonsolidovanim glinama, tako da se za takve materijale, pri monotonom opterećenju, može koristiti sa velikom pouzdanošću. Za prekonsolidovane gline, MCC model ne daje adekvatne rezultate i potrebne su izvesne modifikacije. S obzirom da se zasniva na klasičnoj teoriji plastičnosti (Hill, 1950), unutar površi tečenja MCC modela moguć je razvoj samo elastičnih deformacija. Međutim, eksperimentalno je utvrđeno je da se tlo ponaša elastično samo pri deformacijama manjim od  $10^{-5}$ , odnosno plastične deformacije se pojavljuju mnogo pre nego što naponska tačka dođe do površi tečenja. Nagli prelaz iz elastične u plastičnu oblast takođe nije u skladu sa eksperimentalnim podacima koji pokazuju postepeno smanjenje krutosti prilikom opterećivanja. Nedostatak MCC modela je i slabo predviđanje vršne čvrstoće, odnosno model predviđa veliki smičući napon pri lomu za prekonsolidovana tla.

Jednu od prvih modifikacija MCC modela, u cilju boljeg predviđanja ponašanja prekonsolidovanih glina izvršili su Zienkiewicz & Naylor (1973). U relacije konstitutivnog modela su uveli matematički opis površi Hvorslev-a, Slika 2.6. Eksperimentalno je utvrđeno da površ Hvorslev-a predstavlja anvelopu vršne čvrstoće. Na taj način se modifikuje granica mogućih naponskih stanja iznad linije kritičnog stanja i realnije opisuje veličina smičućeg napona pri lomu u dreniranim i nedreniranim uslovima (Houlsby i dr. 1982, Mita i dr. 2004, Yao i dr. 2009, Tsiamposi i dr. 2013, Schädlich & Schweiger 2014). Sa svakom izmenom MCC modela, kompleksnost modela je rasla, ali i tačnost predviđanja mehaničkog

ponašanja tla. Iako predviđanja naponsko-deformacijskih relacija koristeći MCC model ne odgovaraju ponašanju realnog tla, to je jedan od najzastupljenijih modela u inženjerskoj praksi zahvaljajući lakoj identifikaciji parametara modela, koji se mogu dobiti iz standardnih laboratorijskih opita.

Značajan napredak u konstitutivnom modeliranju je postignut razvojem koncepta sa više površi tečenja – *Multi Surface Plasticity* – MSP (Mroz 1967, Iwan 1967). Adekvatnije je opisan zakon ojačanja materijala, postepen prelaz iz elastične u plastičnu oblast, ponašanje prekonsolidovanog tla, kao i ponašanje tla pri cikličnom opterećenju. Predstavljao je generalni okvir u kome su mnogi istraživači razvili nove konstitutivne modele. Koncept granične površi – *Bounding Surface Plasticity* – BSP (Dafalias & Popov 1976, Dafalias & Herrmann 1980, 1982) je zasnovan na MSP teoriji i predstavljao je izvesno poboljšanje u smislu boljeg opisivanja postepenog prelaza iz elastične u plastičnu oblast. Obe teorije su izvorno bile razvijene za opisivanje plastičnosti metala, ali su ubrzo našle primenu i u modeliranju geomaterijala (Prevost 1977, Mroz i dr. 1978, Dafalias & Herrmann 1980).

Osnovna ideja je da se umesto klasične površi tečenja kod Cam Clay modela koja ograničava elastični region  $f=0$ , definiše granična površ  $F=0$  unutar koje je dozvoljen razvoj plastične deformacije, Slika 2.11.



**Slika 2.11** Koncept granične površi

Svaka tačka koja predstavlja trenutno naponsko stanje (realna tačka P) unutar granične površi ima konjugovanu naponsku tačku (imaginarna tačka R) na graničnoj površi. Udaljenost između realne i imaginarne tačke  $\delta$  se koristi za određivanje modula plastičnosti, odnosno funkcije ojačanja. Za ovaj koncept važi da što je realna naponska tačka udaljenija od imaginarne na graničnoj površi, materijal ima veću krutost.

Prednost ovog koncepta je uzimanje u obzir prethodne istorije opterećivanja, a samim tim i realnije opisivanje ponašanja prekonsolidovanog tla. Takođe je omogućena simulacija ponašanja tla pod cikličnim opterećenjem, jer površ tečenja koja ograničava elastični region može da se translatorno pomera unutar granične površi – kinematičko ojačanje.

Brojni konstitutivni modeli za prekonsolidovano tlo zasnovani su na MSP ili BSP konceptima: *Bubble model* – Al Tabbaa & Wood (1989), *MIT-E3* – Whittle & Kavvas (1994), *3 SKH model* – Stallebrass & Taylor (1997), Gajo & Wood (2001), *CASM model* – Yu (1998, 2006), Grammatikopoulou i dr. (2006), *Modified 3 SKH model* – McDowell & Hau (2003), *SANICLAY model* – Dafalias i dr. (2006), *UH-model* – Yao i dr. (2008, 2009).

Do danas još uvek nije razvijen konstitutivni model koji bi opisivao sve elemente realnog ponašanja tla. Pojedini napredni modeli tla mogu se vrlo pouzdano upotrebiti za opisivanje određene vrste tla. Osnovni problem je što takvi modeli zahtevaju određivanje velikog broja konstitutivnih konstanti koje nemaju jasno fizičko značenje. Što je više parametara uključeno u opisivanje naponsko-deformacijskih relacija, manja je pouzdanost modela. Iz tog razloga se još uvek ne koriste rutinski u analizi geotehničkih problema. Za praktičnu primenu konstitutivnih modela imperativ su jednostavna formulacija i jasno fizičko značenje parametara modela koji se mogu odrediti iz standardnih laboratorijskih opita.

# POGLAVLJE 3

## Formulacija konstitutivnog modela za prekonsolidovane gline

### 3.1 Uvod

S obzirom na kompleksno ponašanje prekonsolidovanih glina i na nehomogeno polje deformacija usled pojave lokalnih zona smicanja, konstitutivno modeliranje takvih materijala predstavlja u mehaničkom i matematičkom smislu složen zadatak. Sa druge strane, koristeći mehaniku kontinuuma i teoriju plastičnosti, uz određen nivo aproksimacija moguće je simulirati ključne karakteristike ponašanja prekonsolidovanih glina. Iako pojedini elasto-plastični modeli dobro opisuju naponsko-deformacijsko ponašanje prekonsolidovanog tla, osnovni nedostatak je uključivanje velikog broja konstitutivnih konstanti koje nemaju jasno fizičko značenje. Iz tog razloga se teži da se unapređenje konstitutivnog modela vrši kroz adekvatno definisanje parametara koji uvode stanje tla kao bitnu odrednicu njegovog mehaničkog ponašanja. Jedan od takvih parametara, koji se još uvek ne koristi dovoljno u konstitutivnom modeliranju, je parametar stanja (*state parameter*), opisan u ovom poglavlju.

Polazna tačka ka formulisanju novog konstitutivnog modela koji bi realnije opisivao mnoge elemente ponašanja prekonsolidovane gline pri različitim stanjima i uslovima opterećivanja je Modifikovani Cam Clay model. U okviru koncepta granične površi izvršena je modifikacija zakona ojačanja koristeći parametar stanja, čime je formulisan novi model nazvan **HASP** model – *HARDening State Parameter* model. U tekstu se pod terminom napon podrazumeva efektivni napon.

### 3.2 Generalne plastične naponsko-deformacijske relacije

Koristeći invarijante napona definisane u Poglavlju 2, površ tečenja koja ograničava region u kome se materijal ponaša elastično je izražena u obliku:

$$f(p', q, p'_0) = 0 \quad (3.1)$$

Površ plastičnog potencijala je izražena kao:

$$g(p', q, \zeta) = 0 \quad (3.2)$$

gde parametri  $p'_0$  i  $\zeta$  kontrolišu veličinu površi tečenja i plastičnog potencijala, respektivno. Priraštaj plastičnih deformacija se dobija iz uslova normalnosti na površ plastičnog potencijala:

$$d\varepsilon_v^p = d\chi \frac{\partial g}{\partial p'} \quad (3.3)$$

$$d\varepsilon_q^p = d\chi \frac{\partial g}{\partial q} \quad (3.4)$$

gde je  $d\chi$  skalarni multiplikator. Veličina površi tečenja se menja sa promenom plastičnih deformacija u skladu sa zakonom ojačanja:

$$dp'_0 = \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_v^p} d\varepsilon_v^p + \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_q^p} d\varepsilon_q^p \quad (3.5)$$

Diferencijalna forma površi tečenja (uslov konzistencije) je:

$$\frac{\partial f}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p'_0} dp'_0 = 0 \quad (3.6)$$

Kombinovanjem izraza (3.3) – (3.6), skalarni multiplikator se može izraziti kao:

$$d\chi = \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} dq\right)}{\frac{\partial f}{\partial p'_0} \left(\frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial g}{\partial p'} + \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_q^p} \frac{\partial g}{\partial q}\right)} \quad (3.7)$$

Zamenom izraza (3.7) u izraze (3.3) i (3.4) dobijamo generalne plastične naponsko-deformacijske veze.

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_v^p \\ d\varepsilon_q^p \end{Bmatrix} = \frac{-1}{\frac{\partial f}{\partial p'_0} \left( \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial g}{\partial p'} + \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_q^p} \frac{\partial g}{\partial q} \right)} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p'} \frac{\partial g}{\partial p'} & \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p'} \\ \frac{\partial f}{\partial p'} \frac{\partial g}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dp' \\ dq \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Ako je  $H$  plastični modul:

$$H = -\frac{\partial f}{\partial p'_0} \left( \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial g}{\partial p'} + \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_q^p} \frac{\partial g}{\partial q} \right) \quad (3.9)$$

Izrazi za plastične deformacije se mogu predstaviti kao:

$$d\varepsilon_v^p = \frac{1}{H} \left( \frac{\partial f}{\partial p'} \frac{\partial g}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p'} dq \right) \quad (3.10)$$

$$d\varepsilon_q^p = \frac{1}{H} \left( \frac{\partial f}{\partial p'} \frac{\partial g}{\partial q} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial q} dq \right) \quad (3.11)$$

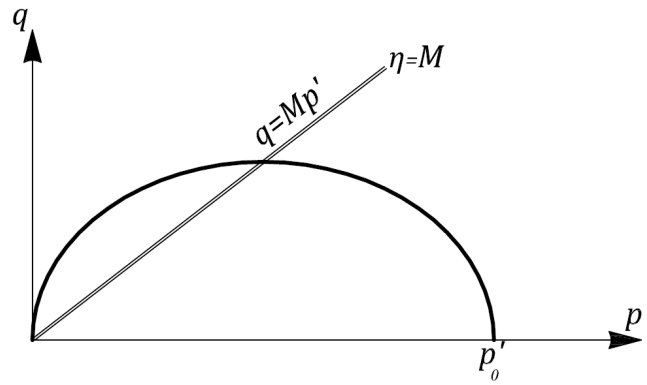
Za asocijativan zakon tečenja važi da je  $f=g$  i matrica fleksibilnosti je simetrična.

### 3.3 Generalne naponsko-deformacijske relacije Modifikovanog Cam Clay (MCC) modela

MCC model je formulisan u  $p'-q$  ravni i kriva tečenja je elipsa koja prolazi kroz koordinatni početak, Slika 3.1:

$$\frac{p'}{p'_0} = \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} \quad (3.12)$$

gde je  $M$  – nagib linije kritičnog stanja (CSL),  $p'_0$  – parametar ojačanja i  $\eta$  – naponski odnos  $q/p'$ .



**Slika 3.1** Kriva tečenja MCC modela u  $p'$ - $q$  ravni

Sa pojavom plastičnih deformacija, promena parametra ojačanja je povezana sa promenom efektivnih napona  $p'$  i  $q$ :

$$\frac{dp'}{p'} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} - \frac{dp'_0}{p'_0} = 0 \quad (3.13)$$

ili

$$\left( \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} \right) \frac{dp'}{p'} + \left( \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \frac{dq}{p'} - \frac{dp'_0}{p'_0} = 0 \quad (3.14)$$

Izrazi (3.13) i (3.14) su diferencijalna forma izraza (3.12). Ako se uporedi izraz za diferencijalnu formu površi tečenja (3.6) i izraz (3.14) imamo da je:

$$\frac{\partial f}{\partial p'} = \left( \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} \right) \frac{1}{p'} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \left( \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \frac{1}{p'} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p'_0} = -\frac{1}{p'_0} \quad (3.17)$$

Važi asocijativni zakon tečenja  $f=g$ , odnosno vektor priraštaja plastičnih deformacija je uvek upravan na površ tečenja:

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_q^p} = \frac{\partial f / \partial p'}{\partial f / \partial q} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad (3.18)$$

Površ se izotropno širi pri plastičnom deformisanju i zakon ojačanja zavisi samo od plastične zapreminske deformacije u obliku:

$$dp'_0 = \frac{v}{\lambda - \kappa} p'_0 d\varepsilon_v^p \quad (3.19)$$

Gde je  $v$  specifična zapremina,  $\lambda$  nagib linije izotropne konsolidacije (ICL), a  $\kappa$  nagib linije bubrenja (URL) u  $\ln p'$ - $v$  ravni. Izraz za plastični modul (3.9) se sada može napisati kao:

$$H = -\frac{\partial f}{\partial p'_0} \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial f}{\partial p'} \quad (3.20)$$

Odnosno:

$$H = \frac{v}{\lambda - \kappa} \frac{1}{p'} \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} \quad (3.21)$$

Kombinovanjem izraza (3.10), (3.11), (3.15), (3.16), (3.17) i (3.21), izrazi za plastične deformacije MCC modela postaju:

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{v} \frac{1}{p'} \left( \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} dp' + \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} dq \right) \quad (3.22)$$

$$d\varepsilon_q^p = \frac{\lambda - \kappa}{v} \frac{1}{p'} \left( \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} dp' + \frac{4\eta^2}{(M^2 + \eta^2)(M^2 - \eta^2)} dq \right) \quad (3.23)$$

Ako se elastične deformacije izraze kao:

$$d\varepsilon_v^e = \kappa \frac{dp'}{vp'} = \frac{1}{K} dp' \quad (3.24)$$

$$d\varepsilon_q^e = \frac{1}{3G} dq \quad (3.25)$$

gde je  $K$  zapreminski modul:

$$K = \frac{vp'}{\kappa} \quad (3.26)$$

a  $G$  modul smicanja:



$$G = \frac{3(1-2\mu)vp'}{2(1+\mu)\kappa} \quad (3.27)$$

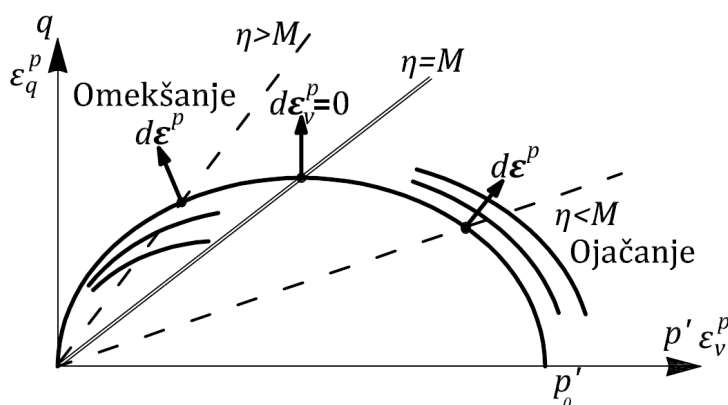
kompletne konstitutivne relacije MCC modela mogu se sada predstaviti kao:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{K} + \frac{\lambda - \kappa}{vp'} \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} & \frac{\lambda - \kappa}{vp'} \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \\ \frac{\lambda - \kappa}{vp'} \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} & \frac{1}{3G} + \frac{\lambda - \kappa}{vp'} \frac{4\eta^2}{(M^2 + \eta^2)(M^2 - \eta^2)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dp' \\ dq \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Za opis kompletne konstitutivne veze, koristeći MCC model za određeni tip tla, potrebno je pet parametara:

- 1)  $\lambda$  – nagib linije normalne konsolidacije u  $\ln p'$ - $v$  dijagramu
- 2)  $\kappa$  – nagib linije bubrenja  $\ln p'$ - $v$  dijagramu
- 3)  $M$  – nagib linije kritičnog stanja u  $p'$ - $q$  dijagramu
- 4)  $N$  – specifična zapremina normalno konsolidovanog tla pri  $p'=1$  kPa ili se može koristiti veličina  $\Gamma$  – specifična zapremina tla pri  $p'=1$  kPa na liniji kritičnog stanja
- 5)  $G$  – modul smicanja tla ili Poisson-ov koeficijent  $\mu$

Svi parametri se mogu odrediti iz konvencionalnog opita triaksijalne kompresije, opita direktnog smicanja i edometarskog opita, što je i osnovna prednost MCC modela. Mogu se uočiti sledeće karakteristike MCC modela u dreniranim uslovima, Slika 3.2:



**Slika 3.2** Karakteristike MCC modela

$$1) \quad \eta < M \Rightarrow d\varepsilon_v^p > 0 \Rightarrow dp'_0 > 0$$

U slučaju normalno konsolidovanog tla, dolazi do smanjenja zapremine (kontrakcija) i površ tečenja se širi. U slučaju prekonsolidovanog tla, predviđa se elastično ponašanje sve dok naponska tačka ne dođe do inicijalne površi tečenja ( $\eta = \eta_{max}$ ).

$$2) \quad \eta_{max} > \eta > M \Rightarrow d\varepsilon_v^p < 0 \Rightarrow dp'_0 < 0$$

Nakon dostizanja vršnog naponskog odnosa dolazi do povećanja zapremine (ekspanzija) i površ tečenja se skuplja;

$$3) \quad \eta = M \Rightarrow d\varepsilon_v^p = 0 \Rightarrow dp'_0 = 0$$

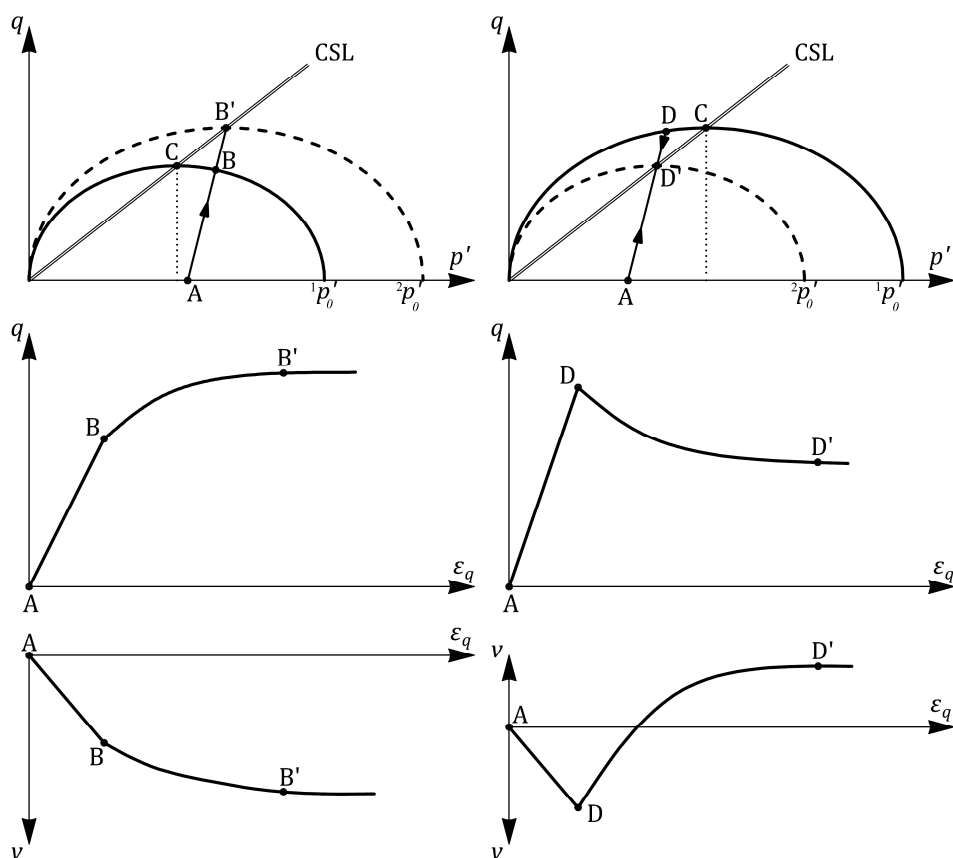
Kada je dostignuto kritično stanje (lom) nema promene zapremine.

Na Slici 3.3 je ilustrovano predviđanje MCC modela za lako prekonsolidovane gline  $OCR < 2$  i jako prekonsolidovane gline  $OCR > 2$  u dreniranom opitu triaksijalne kompresije. Veličinu inicijalne površi tečenja (označena punom linijom) definiše vrednost maksimalnog srednjeg napona  $p'_0$ . Unutar inicijalne površi, ponašanje tla je elastično, putanja A-B ( $OCR < 2$ ), odnosno putanja A-D ( $OCR > 2$ ). Kada naponska tačka dođe do površi tečenja pojavljuju se i plastične deformacije B-B' ( $OCR < 2$ ), odnosno putanja D-D' ( $OCR > 2$ ) sve do dostizanja kritičnog stanja.

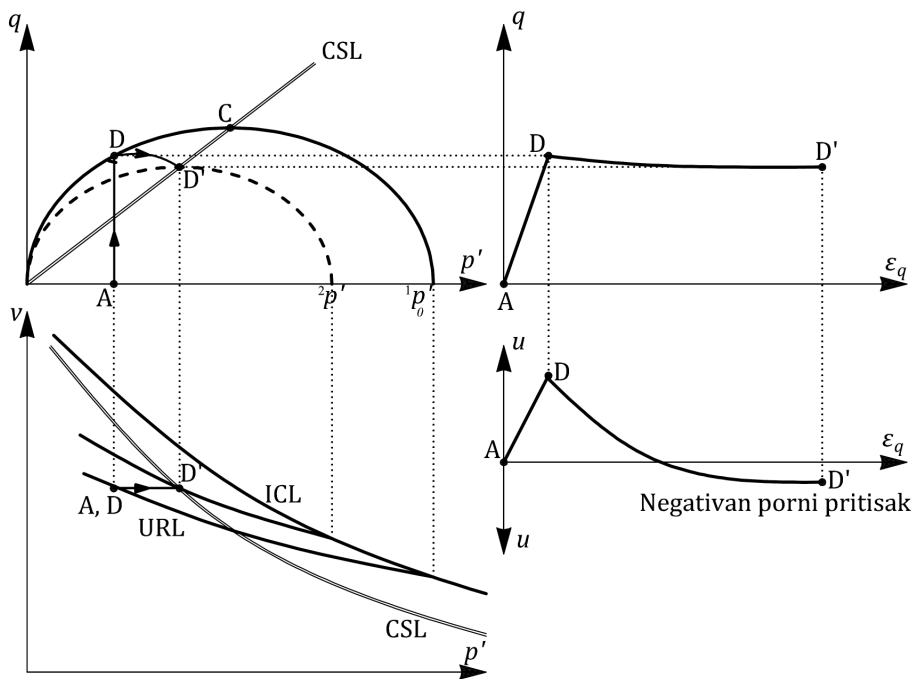
U nedreniranim uslovima, kada je sprečena promena zapremine  $d\varepsilon_v = 0$ , zbog pretpostavke o elastičnim deformacijama unutar inicijalne površi tečenja  $d\varepsilon_v^e = 0$  sledi da je:

$$d\varepsilon_v^e = -d\varepsilon_v^p = 0 \tag{3.29}$$

Iz jednačine (3.24) sledi da je  $dp' = 0$ , odnosno sve dok naponska tačka ne dođe do inicijalne površi tečenja nema promene srednjeg efektivnog napona, putanja napona je vertikalna A-D i razvija se pozitivan porni pritisak, Slika 3.4. Do dostizanja kritičnog stanja D-D', površ se skuplja, dolazi do omekšanja i do pojave negativnog priraštaja pornog pritiska.



Slika 3.3 Predviđanje MCC modela, drenirani CD opit



Slika 3.4 Predviđanje MCC modela, nedrenirani CU opit

Dok su za lako prekonsolidovane gline predviđanja relativno dobra, za jako prekonsolidovane gline se samo kvalitativno opisuje ponašanje tla, jer se predviđaju samo elastične deformacije sve do dostizanja vršne čvrstoće, kao i velika vrednost vršnog devijatora napona. Postoji nagli prelaz iz elastične u elasto-plastičnu oblast.

### 3.4 Formulacija HASP konstitutivnog modela

Osnovni principi na kojima se zasniva HASP konstitutivni model su:

- 1) Tlo je izotropno
- 2) Od samog početka opterećivanja, istovremeno sa razvojem elastičnih deformacija razvijaju se i plastične deformacije
- 3) Normalno konsolidovane do blago prekonsolidovane gline smanjuju zapreminu tokom smicanja u dreniranim uslovima i razvija se pozitivan priraštaj pornog pritiska u nedreniranim uslovima, dok jako prekonsolidovane gline teže da povećavaju zapreminu (dilatancija) tokom dreniranog smicanja i razvija se negativan priraštaj pornog pritiska u nedreniranim uslovima
- 4) U dreniranim uslovima prekonsolidovane gline pokazuju omekšanje nakon dostizanja vršne smičuće čvrstoće
- 5) U nedreniranim uslovima nema omekšanja
- 6) Parametar ojačanja u modelu zavisi od priraštaja plastičnih zapreminskih deformacija i priraštaja plastičnih smičućih deformacija
- 7) Za opis kompletne konstitutivne veze se koriste samo parametri Modifikovanog Cam Clay modela koji se mogu odrediti iz konvencionalnih laboratorijskih opita.

HASP model je formulisan u okviru koncepta granične površi (Dafalias & Herrmann, 1980) u  $p'-q$  ravni. Granična površ (*bounding surface*) je MCC površ čiju veličinu definiše vrednost maksimalnog srednjeg napona  $\bar{p}'_0$ , Slika 3.5. Ova površ se može nazvati i površ normalne konsolidacije:

$$\frac{\bar{p}'}{\bar{p}'_0} = \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} \quad (3.30)$$

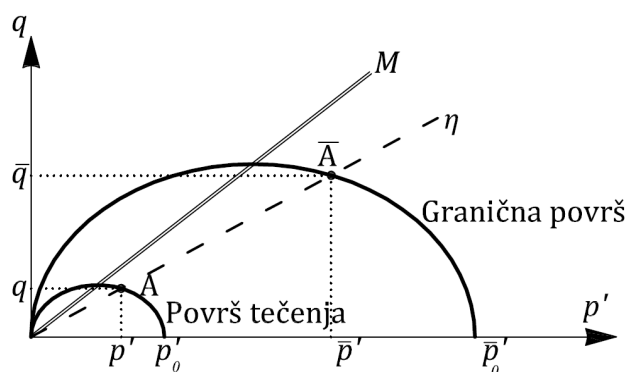
Tačka A ( $p'$ ,  $q$ ) koja predstavlja trenutno naponsko stanje se nalazi na unutrašnjoj površi tečenja (*loading surface*) čiju veličinu definiše vrednost srednjeg efektivnog napona  $p'_0$ :

$$\frac{p'}{p'_0} = \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} \quad (3.31)$$

Uzimajući u obzir pretpostavku modela da se plastične deformacije razvijaju od početka opterećivanja, tačka A se uvek nalazi na površi tečenja. Radijalno mapiranje podrazumeva da tački A odgovara imaginarna tačka  $\bar{A}(\bar{p}', \bar{q})$  na graničnoj površi, tako da je ispunjeno:

$$\eta = \frac{q}{p'} = \frac{\bar{q}}{\bar{p}'} \quad (3.32)$$

Važi asocijativni zakon tečenja, odnosno vektor priraštaja plastičnih deformacija je uvek upravan na površ tečenja.



**Slika 3.5** Koncept granične površi

Granična površ ima sve karakteristike MCC površi: za naponski odnos ispod linije kritičnog stanja dolazi do smanjenja zapremine i površ se širi, dok za naponski odnos iznad linije kritičnog stanja dolazi do povećanja zapremine i površ se skuplja. Sa druge strane, površ tečenja se širi (ojačanje) sve do dostizanja vršne

čvrstoće pri naponskom odnosu  $\eta=M_f$ , a zatim se skuplja (omekšanje) do dostizanja kritičnog stanja  $\eta=M$ .

### 3.4.1 Zakon ojačanja za površ tečenja

Zakon tečenja MCC modela zavisi samo od zapreminske plastične deformacije i pogodan je za normalno konsolidovana tla:

$$dp'_0 = \frac{v}{\lambda - \kappa} p'_0 d\varepsilon_v^p \quad (3.33)$$

Generalni zahtev za prekonsolidovana tla je prelaz iz kompresije u ekspanziju pre dostizanja vršne čvrstoće. Zakon ojačanja opisan izrazom (3.33) ne omogućava adekvatno opisivanje dilatancije i ojačanja. Da bi površ tečenja nastavila da se širi i za vrednosti naponskog odnosa  $M < \eta < M_f$ , potrebno je koristiti kombinovani zakon ojačanja i formulisati ga u funkciji i plastične smičuće deformacije (Nova & Wood 1979, Yao i dr. 2009) u obliku:

$$dp'_0 = \frac{v}{\lambda - \kappa} p'_0 (d\varepsilon_v^p + \xi d\varepsilon_q^p) \quad (3.34)$$

Gde je  $\xi$  parametar koji će biti kasnije formulisan, a  $p'_0$  parametar ojačanja MCC modela. Kombinovano ojačanje je ključno za modele kritičnog stanja. U skladu sa Drugim aksiomom teorije kritičnog stanja (Jefferies & Been, 2006), sa povećanjem smičućih deformacija stanje tla se približava kritičnom stanju i plastične smičuće deformacije moraju biti uvrštene u zakon ojačanja. Kombinovani zakon ojačanja utiče i na putanju napona koja prelazi CSL i dostiže se vršna čvrstoća u dreniranim uslovima. U nedreniranim uslovima, kombinovano ojačanje je ključno za predviđanje putanje efektivnih napona "S" oblika.

Ako je dilatancija odnos priraštaja zapreminske i smičuće komponente plastične deformacije:

$$d = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_q^p} \quad (3.35)$$

plastične smičuće deformacije se mogu izraziti kao:

$$d\varepsilon_q^p = \frac{d\varepsilon_v^p}{d} \quad (3.36)$$

i izraz za zakon ojačanja površi tečenja za prekonsolidovana tla je:

$$dp'_0 = \frac{v}{\lambda - \kappa} \bar{p}'_0 d\varepsilon_v^p \left( 1 + \frac{\xi}{d} \right) \quad (3.37)$$

Tokom procesa deformisanja, trenutni stepen prekonsolidacije se može definisati kao:

$$R = \frac{\bar{p}'}{p'} = \frac{\bar{q}}{q} = \frac{\bar{p}'_0}{p'_0} \quad (3.38)$$

Zakon ojačanja površi tečenja tako postaje:

$$dp'_0 = \frac{v}{\lambda - \kappa} p'_0 d\varepsilon_v^p \left( 1 + \frac{\xi}{d} \right) R \quad (3.39)$$

Odnosno:

$$dp'_0 = \frac{v}{\lambda - \kappa} p'_0 d\varepsilon_v^p \omega \quad (3.40)$$

gde je  $\omega$  "koeficijent ojačanja" (*hardening coefficient*):

$$\omega = \left( 1 + \frac{\xi}{d} \right) R \quad (3.41)$$

Na osnovu izraza (3.9) i (3.21), plastični modul je sada:

$$H = \frac{v}{\lambda - \kappa} \frac{1}{p'} \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} \omega \quad (3.42)$$

a izrazi za plastične deformacije su:

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{v} \frac{1}{p'} \frac{1}{\omega} \left( \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} dp' + \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} dq \right) \quad (3.43)$$

$$d\varepsilon_q^p = \frac{\lambda - \kappa}{v} \frac{1}{p'} \frac{1}{\omega} \left( \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} dp' + \frac{4\eta^2}{(M^2 + \eta^2)(M^2 - \eta^2)} dq \right) \quad (3.44)$$

Kompletne konstitutivne relacije HASP modela mogu se sada predstaviti kao:

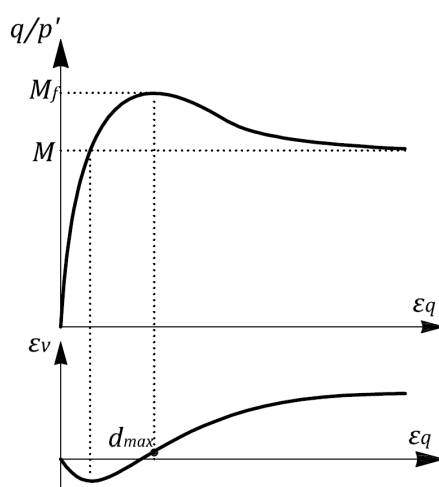
$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_q \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{K} + \frac{\lambda - \kappa}{vp'} \frac{1}{\omega} \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} & \frac{\lambda - \kappa}{vp'} \frac{1}{\omega} \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \\ \frac{\lambda - \kappa}{vp'} \frac{1}{\omega} \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} & \frac{1}{3G} + \frac{\lambda - \kappa}{vp'} \frac{1}{\omega} \frac{4\eta^2}{(M^2 + \eta^2)(M^2 - \eta^2)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} dp' \\ dq \end{array} \right\} \quad (3.45)$$

Posmatrajući izraze (3.43) i (3.44) može se uočiti da je koeficijent ojačanja  $\omega$  ujedno i koeficijent redukcije plastičnih deformacija, tako da se adekvatnom formulacijom koeficijenta ojačanja mogu značajno redukovati plastične deformacije prekonsolidovane gline u početnoj fazi opterećivanja, kada MCC model predviđa samo elastične deformacije. Na taj način je moguće pretpostaviti da tlo od samog početka opterećivanja trpi i plastične deformacije koje su tada veoma male. Kako se u procesu deformisanja polako gubi i stepen prekonsolidacije tla, tako se i koeficijent  $\omega$  smanjuje i plastične deformacije postaju dominantne.

Pri dostizanju vršne čvrstoće (prelaz iz ojačanja u omekšanje) važi da je  $dp'_0 = 0$  i uočava se maksimalni gradijent promene zapremine – maksimalna dilatancija, Slika 3.6. Na osnovu izraza (3.40) može se zaključiti da je tada  $\omega = 0$  i da važi relacija:

$$\xi = -d_{max} \quad (3.46)$$

Sledi da parametar  $\xi$  predstavlja maksimalnu vrednost dilatancije pri lomu u dreniranim uslovima (Nova, 2006).

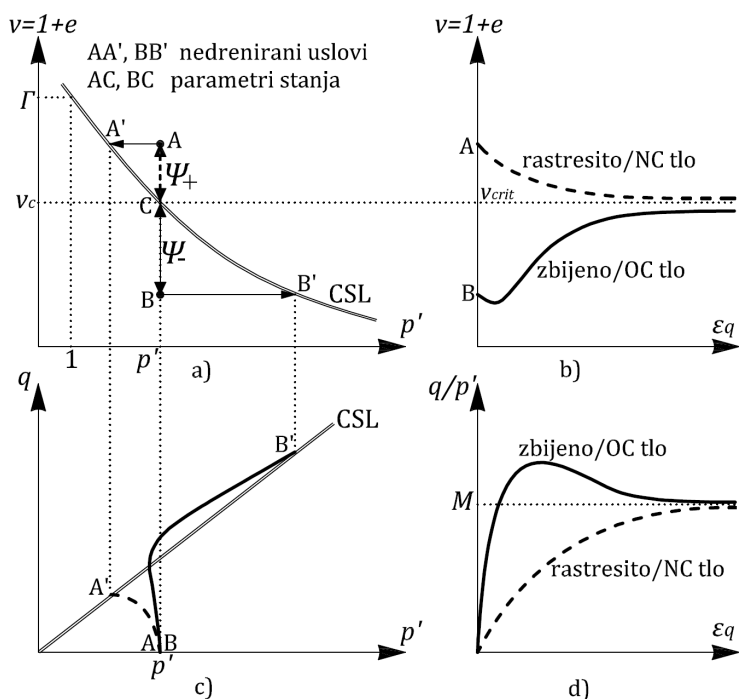


**Slika 3.6** Maksimalni gradijent promene zapremine



### 3.4.2 Koncept parametra stanja

Koncept parametra stanja je prvenstveno uveden za opisivanje ponašanja granularnih krupnozrnih vrsta tla. Stanje krupnozrnih materijala se najčešće predstavljalo zapreminskom težinom i relativnom zbijenošću. Međutim, navedeni pokazatelji nisu dovoljni da opišu mehaničko ponašanje granularnih krupnozrnih materijala. Veličina srednjeg efektivnog napona  $p'$  značajno utiče na ponašanje tla, tako da se krupnozrno tlo za dati koeficijent poroznosti pri velikoj vrednosti srednjeg efektivnog napona ponaša kao rastresit, dok se za manje vrednosti srednjeg efektivnog napona taj isti materijal ponaša kao zbijen. To znači da je pored koeficijenta poroznosti za karakterizaciju krupnozrnog tla neophodna i veličina srednjeg efektivnog napona. Umesto koeficijenta poroznosti predloženo je korišćenje parametra stanja kao fundamentalne promenljive. Koncept parametra stanja prvi su predstavili Been i Jefferies (1985) za opisivanje ponašanja peska. Parametar stanja predstavlja razliku između trenutne specifične zapremine  $v$  (ili koeficijenta poroznosti  $e$ ) i specifične zapremine  $v_c$  (ili koeficijenta poroznosti  $e_c$ ) na liniji referentnog stanja pri istom srednjem efektivnom naponu, A-C i B-C na Slici 3.7a.



**Slika 3.7** a) Parametar stanja b) Promena specifične zapremine tla c) Putanje efektivnih napona u nedreniranim uslovima d) Naponsko-deformacijske krive

Ovakav koncept podrazumeva da postoji referentno stanje (*steady state condition*) koje treba da ima jedinstvenu strukturu. Za konstitutivne modele definisane u okviru teorije kritičnog stanja, referentno stanje je upravo kritično stanje, kada se smičuće deformacije razvijaju bez promene zapremine i efektivnog napona. Takođe, mora biti ispunjen uslov da je linija kritičnog stanja CSL u  $v$ - $p'$  ravni jedinstvena. Tako se parametar stanja može izraziti kao:

$$\Psi = v - v_c \quad (3.47)$$

Parametar stanja je najčešće uključen u konstitutivne relacije krupnozrnog tla (peska): *Nor-Sand* model (Jefferies, 1993), *Severn-Trent sand* model (Gajo & Wood, 1999), model koji su razvili Li & Dafalias (2000). Može se donekle uspostaviti analogija između ponašanja zbijenih granularnih materijala i ponašanja prekonsolidovane gline, odnosno između zbijenosti i stepena prekonsolidacije. Prekonsolidovane gline će se ponašati kao normalno konsolidovane za dovoljno velike vrednosti efektivnog napona. S obzirom da se kod gline može lakše utvrditi položaj linije kritičnog stanja u odnosu na pesak (potrebno je pesak ispitati pri veoma velikim vrednostima efektivnih napona da bi se locirala linija kritičnog stanja), nameće se zaključak da se parametar stanja može koristiti i za opisivanje konstitutivnih relacija prekonsolidovanih gline. Jedan od takvih modela koji se može koristiti za opisivanje mehaničkog ponašanja gline i peska razvio je Yu (1998) – CASM (Clay And Sand Model).

Za inicijalnu vrednost parametra stanja veću od nule, karakterističnu za rastresita i normalno konsolidovana tla, tačka A na Slici 3.7a, zapremina tla se smanjuje (kontrakcija) sve do dostizanja kritičnog stanja, Slika 3.7b. Dolazi do plastičnog smičućeg loma bez pojave vršne vrednosti, Slika 3.7d. Ako je inicijalna vrednost parametra stanja manja od nule, kao što je slučaj sa zbijenim i prekonsolidovanim tlom, tačka B na Slici 3.7a, tlo će nakon početne kompresije težiti da povećava zapreminu, Slika 3.7b. Tlo ispoljava krto plastični lom koji podrazumeva povećanje smičućeg napona do maksimalne veličine (vršna smičuća čvrstoća), a zatim opadanje smičućeg napona (omekšanje) pri daljem deformisanju do konstantne

veliĉine, Slika 3.7d. U nedreniranim uslovima karakteristiĉne putanje efektivnih napona prikazane su na Slici 3.7c.

Ako posmatramo kompresionu  $\ln p'$ - $v$  ravan, sa Slike 3.8 slede relacije:

$$\Gamma - v = \Psi + x \quad (3.48)$$

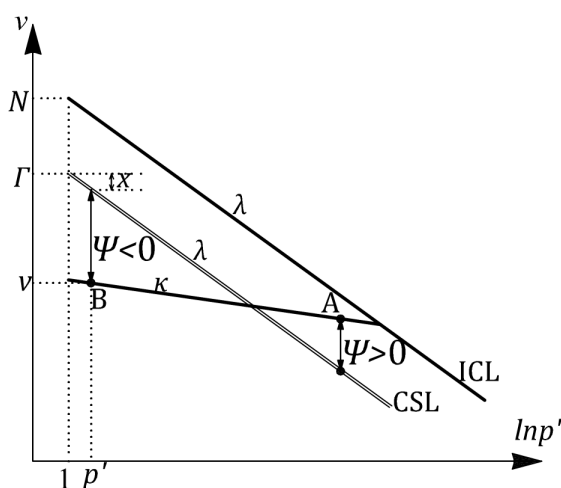
$$\frac{x}{\ln p' - \ln 1} = \lambda \quad (3.49)$$

odnosno:

$$x = \lambda \ln p' \quad (3.50)$$

i konaĉno parametar stanja se moĝe izraziti kao:

$$\Psi = v + \lambda \ln p' - \Gamma \quad (3.51)$$



**Slika 3.8** Parametar stanja

Parametar stanja je negativan za jako prekonsolidovane gline i zbijene peskove  $\Psi < 0$  (taĉka B), dok je za lako prekonsolidovane i normalno konsolidovane gline i rastresite peskove pozitivan  $\Psi > 0$  (taĉka A). Kada naponska taĉka doĝe do linije kritiĉnog stanja  $\Psi = 0$ .

U nastavku ĉe biti prikazane relacije koje povezuju parametar stanja sa stepenom prekonsolidacije, kao i izraz za parametar stanja imaginarne taĉke na graniĉnoj površi HASP modela.

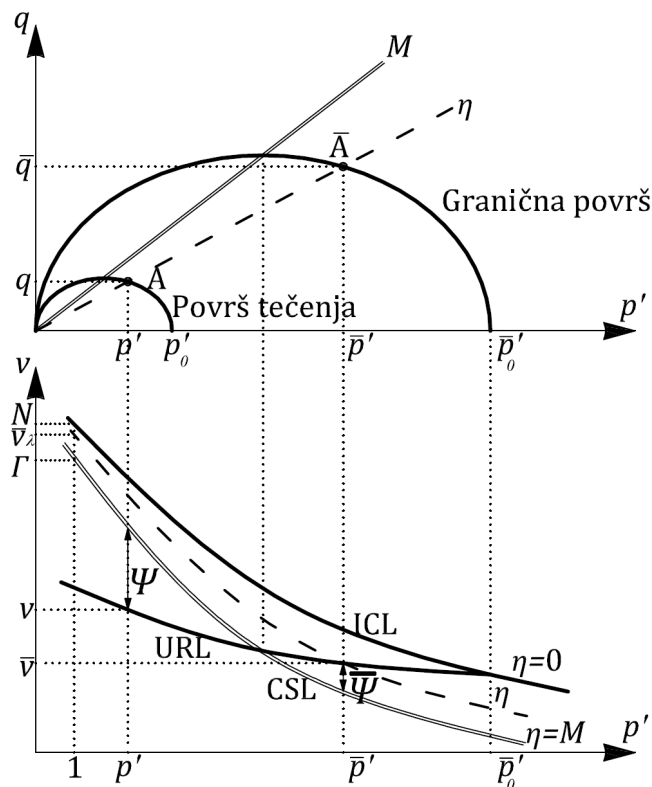
### 3.4.3 Parametar stanja za imaginarnu tačku $\bar{\Psi}$

Za naponski odnos  $\eta=q/p'$ , u kompresionoj ravni  $\ln p'-v$  važi (Slika 3.9):

$$\bar{v}_\lambda = \bar{v} + \lambda \ln \bar{p}' \tag{3.52}$$

Za izotropnu konsolidaciju važi:

$$\eta = 0 \quad \bar{v}_\lambda = N \tag{3.53}$$



Slika 3.9 Gračna površ i parametar stanja

dok je za kritično stanje:

$$\eta = M \quad \bar{v}_\lambda = \Gamma \tag{3.54}$$

Sa slike 3.9 sledi da je specifična zapremina za tačku  $\bar{A}$ :

$$\bar{v} = N - \lambda \ln \bar{p}'_0 + \kappa \ln \left( \frac{\bar{p}'_0}{\bar{p}'} \right) \tag{3.55}$$

Ubacivanjem izraza (3.55) u izraz (3.52) dobijamo:

$$\bar{v}_\lambda = N - \lambda \ln \bar{p}'_0 + \kappa \ln \left( \frac{\bar{p}'_0}{\bar{p}'} \right) + \lambda \ln \bar{p}' \quad (3.56)$$

ili:

$$\bar{v}_\lambda = N - (\lambda - \kappa) \ln \left( \frac{\bar{p}'_0}{\bar{p}'} \right) \quad (3.57)$$

Ako se izraz (3.30) za graničnu površ uvrsti u jednačinu (3.57):

$$\bar{v}_\lambda = N - (\lambda - \kappa) \ln \left( \frac{M^2 + \eta^2}{M^2} \right) \quad (3.58)$$

Nakon sređivanja imamo da je:

$$\eta^2 = M^2 \exp \left( \frac{N - \bar{v}_\lambda}{\lambda - \kappa} \right) - M^2 \quad (3.59)$$

Za MCC model važi da je:

$$N = \Gamma + (\lambda - \kappa) \ln 2 \quad (3.60)$$

i zamenom izraza (3.60) i izraza (3.52) u izraz (3.59) dobijamo:

$$\eta^2 = M^2 \exp \left( \frac{(\lambda - \kappa) \ln 2 - (\bar{v} + \lambda \ln \bar{p}' - \Gamma)}{\lambda - \kappa} \right) - M^2 \quad (3.61)$$

ili preko parametra stanja (3.51):

$$\eta^2 = M^2 \exp \left( \frac{(\lambda - \kappa) \ln 2 - \bar{\Psi}}{\lambda - \kappa} \right) - M^2 \quad (3.62)$$

Konačno izraz za parametar stanja imaginarne tačke na graničnoj površi je:

$$\bar{\Psi} = (\lambda - \kappa) \ln \left( \frac{2M^2}{M^2 + \eta^2} \right) \quad (3.63)$$

Važe relacije:

$$\eta < M \quad \bar{\Psi} > 0 \quad (3.64)$$

$$\eta > M \quad \bar{\Psi} < 0 \quad (3.65)$$

### 3.4.4 Stepen prekonsolidacije

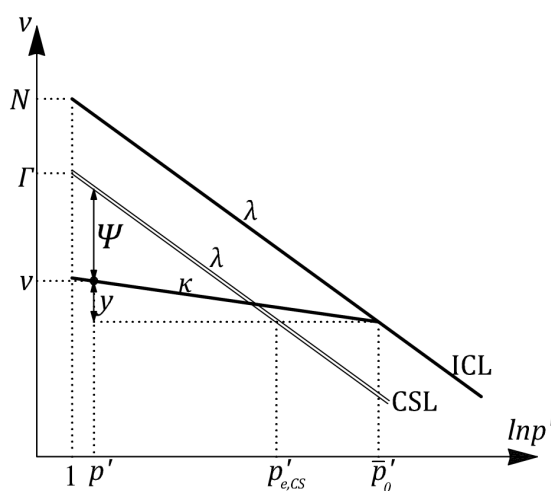
Izotropni stepen prekonsolidacije predstavlja odnos maksimalnog srednjeg efektivnog napona  $\bar{p}'_0$  i tekuće vrednosti srednjeg efektivnog napona  $p'$ :

$$R_i = \frac{\bar{p}'_0}{p'} \quad (3.66)$$

Stepen prekonsolidacije  $OCR$  je izražen preko vertikalnog efektivnog napona:

$$OCR = \frac{\sigma'_{v,max}}{\sigma'_v} \quad (3.67)$$

i samo za  $OCR=1$  važi da je  $R=1$ . Za prekonsolidovane gline ovako definisani stepeni prekonsolidacije su različite brojne vrednosti.



**Slika 3.10** Odnos veličina u kompresionoj ravni

Srednji efektivni napon  $p'_{e,CS}$  na liniji kritičnog stanja koji odgovara naponu  $\bar{p}'_0$  je (Slika 3.10):

$$p'_{e,CS} = \frac{\bar{p}'_0}{2^\Lambda} \quad (3.68)$$

gde je:

$$\Lambda = \frac{\lambda - \kappa}{\lambda} \quad (3.69)$$

Sa Slike 3.10 se može uočiti da je:

$$\frac{y + \Psi}{\ln p'_{e,CS} - \ln p'} = \lambda \quad (3.70)$$

Zamenom izraza (3.68) u prethodni izraz dobijamo:

$$y + \Psi = \lambda \ln \left( \frac{\bar{p}'_0}{p'} \frac{1}{2^\Lambda} \right) \quad (3.71)$$

$$\ln \left( \frac{\bar{p}'_0}{p'} \right) = \frac{\lambda}{\kappa - \lambda} \ln \frac{1}{2^\Lambda} - \frac{\Psi}{\kappa - \lambda} \quad (3.72)$$

odnosno:

$$\ln R_i = \frac{\lambda}{\lambda - \kappa} \ln 2^\Lambda + \frac{\Psi}{\lambda - \kappa} \quad (3.73)$$

$$R_i = \exp(\ln 2) \exp \left( \frac{\Psi}{\lambda - \kappa} \right) \quad (3.74)$$

U prethodnom izrazu se mora voditi računa da parametar stanja ima negativnu vrednost za tačku ispod linije kritičnog stanja, tako da je konačan izraz za izotropni stepen prekonsolidacije:

$$R_i = 2 \exp \left( \frac{-\Psi}{\lambda - \kappa} \right) \quad (3.75)$$

Na sličan način se može pokazati da za imaginarnu tačku na graničnoj površi takođe važi relacija:

$$\bar{R}_i = 2 \exp \left( \frac{-\bar{\Psi}}{\lambda - \kappa} \right) \quad (3.76)$$

odnosno:

$$\bar{R}_i = \frac{\bar{p}'_0}{p'} \quad (3.77)$$

U toku procesa deformisanja stepen prekonsolidacije se smanjuje i pri dovoljno velikim deformacijama polako gubi. Ako se stepen prekonsolidacije definiše kao odnos:

$$R = \frac{\bar{p}'}{p'} = \frac{\bar{q}}{q} \quad (3.78)$$

može se predstaviti i preko parametra stanja u sledećem obliku:

$$R = \frac{R_i}{\bar{R}_i} = \frac{\exp\left(\frac{-\Psi}{\lambda - \kappa}\right)}{\exp\left(\frac{-\bar{\Psi}}{\lambda - \kappa}\right)} \quad (3.79)$$

I konačno:

$$R = \exp\left(\frac{\bar{\Psi} - \Psi}{\lambda - \kappa}\right) \quad (3.80)$$

### 3.4.5 Parametar stanja i ponašanje prekonsolidovanih glina

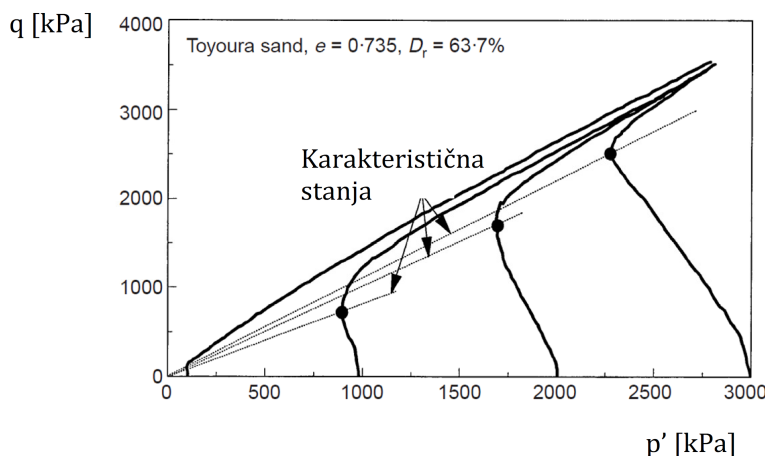
Kao što je već navedeno, ranija istraživanja su bila uglavnom usmerena na uspostavljanje veze između parametra stanja i ponašanja peska, odnosno između parametra stanja i dilatancije. Dilatancija je tendencija tla da menja zapreminu tokom smicanja i predstavlja fundamentalni aspekt ponašanja tla koji se mora adekvatno opisati konstitutivnim relacijama. U velikom broju konstitutivnih modela kritičnog stanja dilatancija je funkcija samo naponskog odnosa  $\eta = q/p'$  (*stress-dilatancy relation*), tako da se zakon tečenja može izraziti kao:

$$d = d(\eta, C) \quad (3.81)$$

gde  $C$  predstavlja set konstitutivnih konstanti. Za sitnozrna tla (gline i prašine)  $d$  je funkcija udaljenja trenutnog naponskog odnosa  $\eta$  od naponskog odnosa pri kritičnom stanju  $\eta = M$  i u dobroj meri se slaže sa eksperimentalnim rezultatima. Za  $\eta < M$  dolazi do kompresije, odnosno za  $\eta > M$  dolazi do ekspanzije tla. Eksperimentalna istraživanja sprovedena na pesku nisu u skladu sa prethodnim tvrdnjama. Utvrđeno je da se kod zbijenog peska promena ponašanja iz kontrakcije u ekspanziju dešava pre nego što naponski odnos  $\eta$  dostigne veličinu  $M$ . Prelaz iz



kontrakcije u ekspanziju je označen kao karakteristično stanje (*phase transformation*). Za zbijene uzorke pri manjim vrednostima normalnih napona karakteristično stanje je više udaljeno od linije kritičnog stanja, Slika 3.11.



**Slika 3.11** Karakteristična stanja peska, Verdugo & Ishihara (1996)

U skladu sa uočenim ponašanjem peska, Wood i dr. (1994), Manzari & Dafalias (1997) i Li & Dafalias (2000) navode da je za kompletan opis dilatancije u zakon tečenja potrebno uvrstiti i parametar stanja  $\Psi$ , odnosno:

$$d = d(\eta, \Psi, C) \quad (3.82)$$

Predložen je zakon tečenja u sledećem obliku (*state dependent dilatancy*):

$$d = \frac{d_0}{M} (M_f - \eta) \quad (3.83)$$

gde je  $d_0$  pozitivna konstanta, a parametar  $M_f$  funkcija parametra stanja:

$$M_f = M + m\Psi \quad \text{Wood i dr. (1994), Manzari \& Dafalias (1997)} \quad (3.84)$$

$$M_f = M \exp(m\Psi) \quad \text{Li \& Dafalias (2000)} \quad (3.85)$$

U izrazima (3.84) i (3.85)  $m$  je pozitivna konstanta. Kada je dostignuto kritično stanje važi da je  $\Psi=0$ ,  $M_f=M$  i  $d=0$ . I u ovom slučaju je dilatancija funkcija udaljenja trenutnog naponskog odnosa  $\eta$  od referentnog naponskog odnosa, ali se referentni naponski odnos menja u zavisnosti od veličine parametra stanja. Ako je inicijalna vrednost parametra stanja  $\Psi_0 < 0$ , pesak će imati vršnu čvrstoću jer je  $M_f > M$ ,

odnosno ako je inicijalna vrednost parametra stanja  $\Psi_0 > 0$ , naponski odnos teži ka liniji kritičnog stanja, jer se parametar stanja smanjuje sve do  $\Psi = 0$  na liniji kritičnog stanja.

Na osnovu velikog broja triaksijalnih testova na pesku Been & Jefferies (1985) su uspostavili vezu između inicijalnog parametra stanja i maksimalne vrednosti dilatancije (kada je dostignuta vršna čvrstoća), u sledećem obliku:

$$d_{max} = -\chi \cdot \Psi_0 \quad (3.86)$$

odnosno, maksimalna dilatancija je linearna funkcija inicijalnog parametra stanja, gde se parametar  $\chi$  kreće u granicama 3–5.

Pored ispitivanja na pesku, Been & Jefferies (1985) su uradili veliki broj triaksijalnih testova i na prekonsolidovanoj glini i utvrđeno je da se može uspostaviti slična linearna zavisnost, izraz (3.86), gde se parametar  $\chi$  kreće u granicama 3.5–4.5.

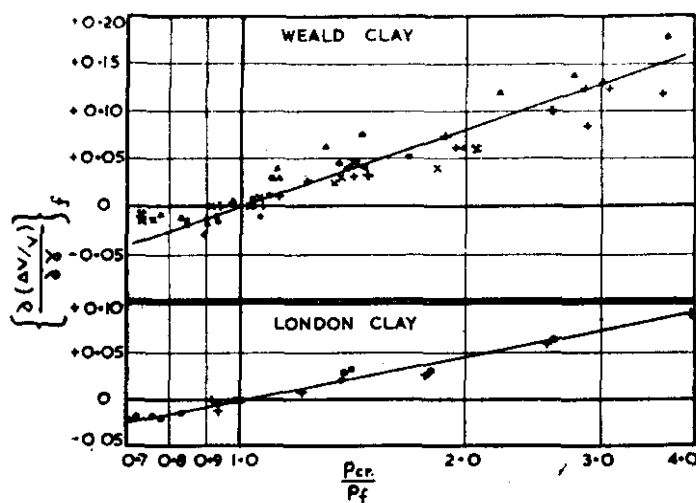
Parry je 1958. godine uradio seriju dreniranih triaksijalnih testova na Weald glini i London glini, Slika 3.12. Vrednosti promene zapremine pri maksimalnoj vrednosti devijatora napona su predstavljene u zavisnosti od odnosa  $p'_{cr} / p'_f$  (srednji efektivni napon na liniji kritičnog stanja koji odgovara specifičnoj zapremini pri vršnoj čvrstoći prema srednjem efektivnom naponu pri lomu). Na polulogaritamskom dijagramu jasno se može uočiti skoro linearna zavisnost između dilatancije pri vršnoj čvrstoći i prikazanog odnosa, tj.:

$$\left\{ \frac{\partial(\Delta v/v)}{\partial \gamma} \right\}_f = k_1 \ln \left( \frac{p'_{cr}}{p'_f} \right) \quad (3.87)$$

gde je  $k_1$  konstanta. Može se jednostavno pokazati da se odnos  $p'_{cr} / p'_f$  može izraziti kao funkcija parametra stanja u  $\ln p' - v$  ravni, odnosno:

$$\Psi = \lambda \ln \left( \frac{p'_{cr}}{p'_f} \right) \quad (3.88)$$

iz čega sledi da je parametar stanja linearno proporcionalan dilatanciji pri vršnoj čvrstoći u dreniranim uslovima.



Slika 3.12 Promena zapremine pri maksimalnoj vrednosti devijatora napona, Parry (1958)

### 3.4.6 Koeficijent ojačanja $\omega$

Prethodna razmatranja, data u tački 3.4.5 su poslužila da se formira teorijsko-metodološki okvir za formulaciju koeficijenta ojačanja koji će omogućiti opisivanje ojačanja, vršne čvrstoće i omekšanja prekonsolidovane gline, uz pojavu plastičnih deformacija od početka deformisanja. U izrazu za koeficijent ojačanja (3.41) je potrebno definisati odnos  $\xi/d$ . Yu (1998) je parametar  $\xi$  označio kao konstantu modela. Međutim, ako se parametar  $\xi$  posmatra u kontekstu jednačine (3.39), predstavlja maksimalnu vrednost dilatancije pri lomu (vršna čvrstoća) u dreniranim uslovima. U skladu sa jednačinom (3.75) na polulogaritamskom dijagramu, postoji linearna zavisnost između parametra stanja i izotropnog stepena prekonsolidacije, što dalje znači da postoji linearna zavisnost između  $d_{max}$  i stepena prekonsolidacije. Na osnovu ovih zaključaka i uzimajući u obzir izraz (3.80) za stepen prekonsolidacije, pretpostavljeno je da je apsolutna vrednost dilatancije u direktnoj zavisnosti od  $\bar{\Psi} - \Psi$ .

Za naponska stanja ispod CSL dilatancija  $d$  je pozitivna (kompresija), dok je negativna za naponska stanja iznad CSL (ekspanzija). Kada je naponska tačka na CSL dilatancija  $d=0$ . To znači da se dilatancija menja na sličan način kao parametar stanja za imaginarnu tačku na graničnoj površi  $\bar{\Psi}$ , Slika 3.17.

Razmatrajući prethodno navedene relacije i s obzirom da dilatancija utiče na ponašanje tla duž čitave putanje napona sve do loma, predložen je izraz za koeficijent ojačanja u sledećem obliku:

$$\omega = \left( 1 + \frac{\bar{\psi} - \psi}{\bar{\psi}} \right) R \quad (3.89)$$

Deo izraza (3.89) u zagradi određuje znak koeficijenta ojačanja i zajedno sa stepenom prekonsolidacije određuje magnitudu koeficijenta ojačanja, a samim tim i veličinu plastičnih deformacija u skladu sa izrazima (3.43) i (3.44). Za normalno konsolidovane gline važi da je  $\psi = \bar{\psi}$  i koeficijent ojačanja je  $\omega = 1$ . HASP model tada automatski prelazi u MCC model.

### 3.5 Karakteristike HASP modela u dreniranim uslovima

Karakteristike HASP modela u dreniranim uslovima će biti prikazane kroz nekoliko faza deformisanja koje su eksperimentalno identifikovane:

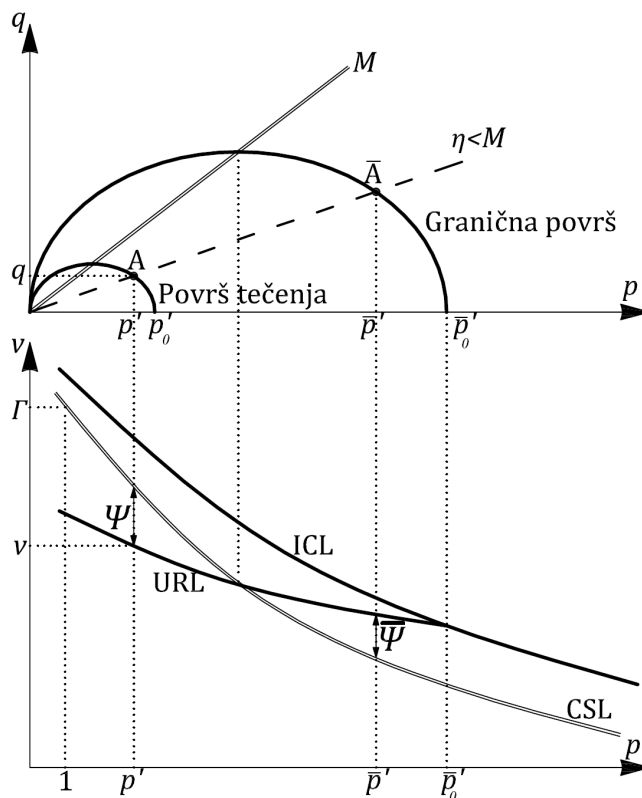
$$1) \quad \eta < M, \quad \psi < 0, \quad \bar{\psi} > 0, \quad \omega > 0$$

Na početku opterećivanja koeficijent ojačanja ima pozitivnu vrednost. Što je veći stepen prekonsolidacije i naponska tačka udaljenija od CSL, to je i početni koeficijent ojačanja veći. Kako se naponski odnos približava CSL, smanjuje se vrednost  $\bar{\psi}$ , što ima za posledicu povećanje koeficijenta ojačanja sve do dostizanja prvog karakterističnog stanja ( $\eta = M$ ). S obzirom da je koeficijent ojačanja ujedno i koeficijent redukcije plastičnih deformacija, plastične deformacije su u ovoj fazi manje od elastičnih deformacija. Dolazi do kompresije  $d\varepsilon_v > 0$  i površ tečenja i granična površ se šire (ojačanje), Slika 3.13.

$$2) \quad \eta = M, \quad \psi < 0, \quad \bar{\psi} = 0, \quad \omega \rightarrow \infty$$

Kada je dostignuto *prvo karakteristično stanje* i parametar stanja  $\bar{\psi} = 0$ , Slika 3.14, koeficijent ojačanja teži beskonačnosti i  $d\varepsilon_v^p = 0$ . Dok MCC model predviđa za  $\eta = M$  beskonačne vrednosti smičućih deformacija, u HASP

modelu je omogućen kontinuitet i dalji rast smičućih deformacija upravo zahvaljujući velikoj vrednosti koeficijenta ojačanja.



Slika 3.13 Drenirani uslovi, inicijalno stanje  $\eta < M$

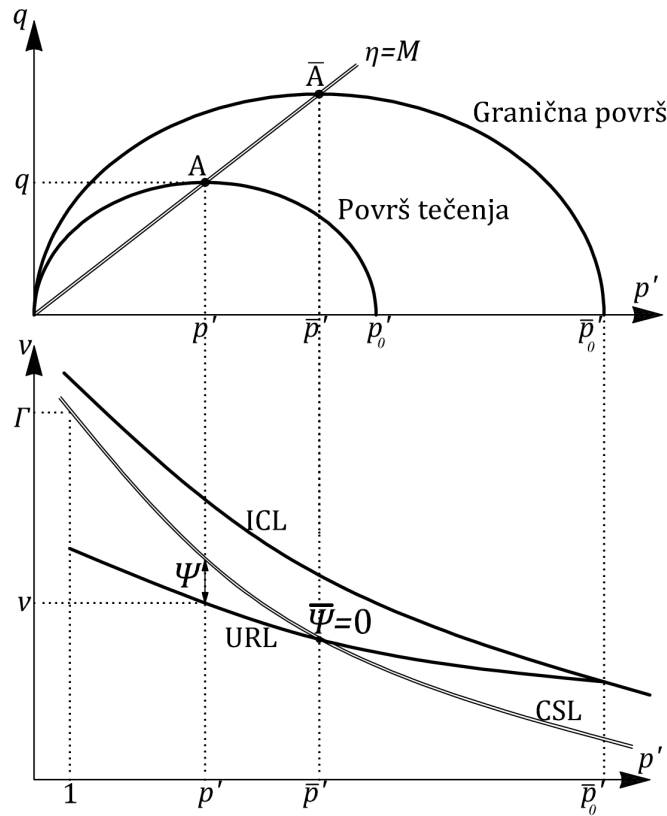
$$3) \quad \eta > M, \quad \Psi < 0, \quad \bar{\Psi} < 0, \quad \omega < 0$$

Za naponski odnos iznad CSL imaginarna naponska tačka  $\bar{A}$  u kompresionoj ravni prelazi ispod linije kritičnog stanja i koeficijent ojačanja je negativan, Slika 3.15. Dolazi do ekspanzije  $d\varepsilon_v < 0$ . Zahvaljujući negativnoj vrednosti koeficijenta ojačanja razvijaju se pozitivne smičuće deformacije. Površ tečenja nastavlja da se širi, dok se granična površ za vrednost naponskog odnosa  $\eta > M$  skuplja.

$$4) \quad \bar{\Psi} - \Psi = -\bar{\Psi}, \quad \omega = 0, \quad \eta = M_f$$

Kada se u procesu deformisanja za vrednost  $\eta > M$ , površ tečenja i granična površ približe dovoljno tako da je ispunjen uslov  $\bar{\Psi} - \Psi = -\bar{\Psi}$ , koeficijent

ojačanja je nula, Slika 3.15. Takvo stanje je označeno kao *drugo karakteristično stanje* i predstavlja prelaz iz ojačanja u omekšanje. Naponski odnos je vršni naponski odnos  $\eta = M_f$ , jer površ tečenja prestaje da se širi  $dp'_0 = 0$ .



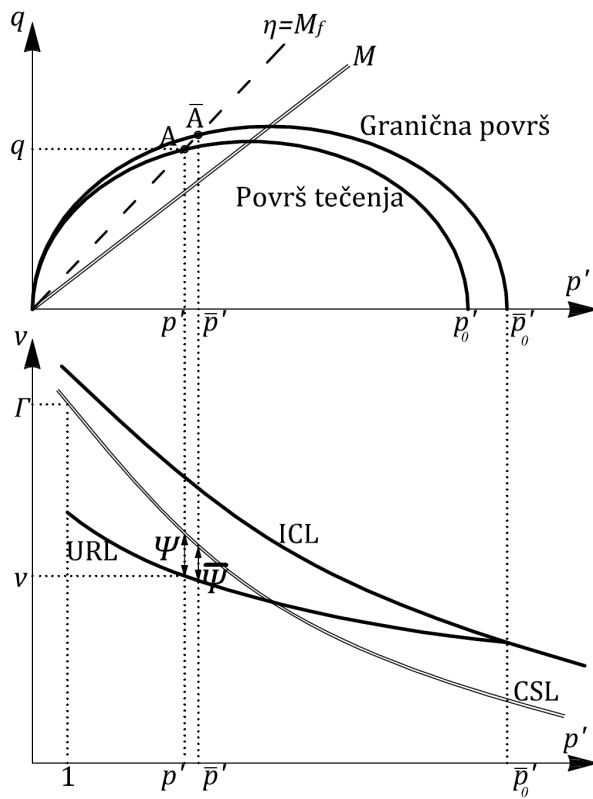
**Slika 3.14** Drenirani uslovi, prvo karakteristično stanje

$$5) \quad M_f > \eta > M, \quad \Psi < 0, \quad \bar{\Psi} < 0, \quad -1 < (\bar{\Psi} - \Psi) / \bar{\Psi} < 0, \quad \omega > 0$$

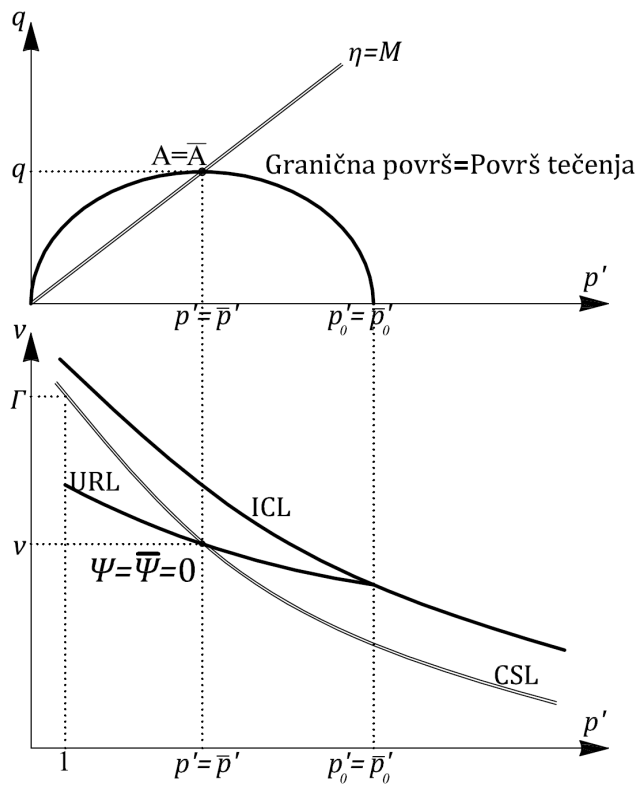
Pri daljem deformisanju, površ tečenja i granična površ se približavaju i tada je  $\bar{\Psi} - \Psi < -\bar{\Psi}$ . Koeficijent ojačanja ima pozitivnu vrednost. Da bi smičuće deformacije imale pozitivan priraštaj potrebno je da bude ispunjen uslov  $dp' < 0$  i  $dq < 0$ , odnosno dolazi do omekšanja. Površ tečenja i granična površ se skupljaju.

$$6) \quad \eta = M, \quad \Psi = 0, \quad \bar{\Psi} = 0, \quad R = 1, \quad \omega = 1$$

Površ tečenja i granična površ se skupljaju sve do dostizanja kritičnog stanja (loma). Koeficijent ojačanja je jednak jedinici i potpuno se gubi stepen prekonsolidacije  $R=1$ , Slika 3.16.



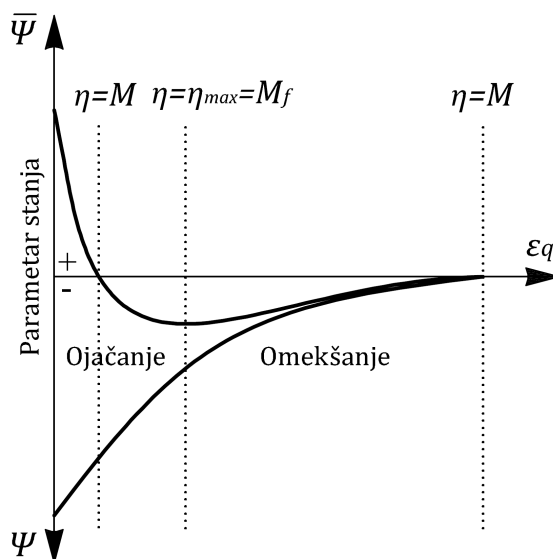
Slika 3.15 Drenirani uslovi, faze 3, 4 i 5



Slika 3.16 Drenirani uslovi, kritično stanje

Za lako prekonsolidovane gline  $OCR < 2$ , za koje važi da je  $\Psi > 0$  i  $\bar{\Psi} > 0$ , koeficijent ojačanja ima uvek pozitivnu vrednost  $\omega > 1$  koja se sa deformisanjem smanjuje sve do  $\omega = 1$  za  $\eta = M$ .

Promena parametara stanja  $\Psi$  i  $\bar{\Psi}$  u dreniranim uslovima sa promenom smičućih deformacija je prikazana na Slici 3.17.



Slika 3.17 Promena parametara stanja u dreniranim uslovima

### 3.6 Karakteristike HASP modela u nedreniranim uslovima

U nedreniranim uslovima kad nema promene zapremine važi:

$$d\varepsilon_v^e + d\varepsilon_v^p = 0 \quad (3.90)$$

Ako se u prethodni izraz uvrste izrazi (3.24) i (3.40) dobijamo:

$$\frac{\kappa}{v} \frac{dp'}{p'} + \frac{\lambda - \kappa}{v} \frac{dp'_0}{p'_0} \frac{1}{\omega} = 0 \quad (3.91)$$

odnosno:

$$\frac{dp'}{p'} = - \frac{\lambda - \kappa}{\kappa} \frac{dp'_0}{p'_0} \frac{1}{\omega} \quad (3.92)$$

Izraz za diferencijalnu formu površi tečenja (3.13) se može u obliku:



$$\frac{dp'_0}{p'_0} = \frac{dp'}{p'} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \quad (3.93)$$

uvrstiti u jednačinu (3.92):

$$\frac{dp'}{p'} = -\frac{\lambda - \kappa}{\kappa} \left( \frac{dp'}{p'} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \frac{1}{\omega} \quad (3.94)$$

i nakon sređivanja imamo:

$$\frac{dp'}{p'} = -\frac{\lambda - \kappa}{\omega\kappa + (\lambda - \kappa)} \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} d\eta \quad (3.95)$$

Nakon integracije izraz (3.95) postaje:

$$\ln \frac{p'_i}{p'} = \frac{\lambda - \kappa}{\omega\kappa + (\lambda - \kappa)} \ln \left( \frac{M^2 + \eta^2}{M^2 + \eta_i^2} \right) \quad (3.96)$$

odnosno:

$$\frac{p'_i}{p'} = \left( \frac{M^2 + \eta^2}{M^2 + \eta_i^2} \right)^\alpha \quad (3.97)$$

gde je:

$$\alpha = \frac{\lambda - \kappa}{\omega\kappa + (\lambda - \kappa)} \quad (3.98)$$

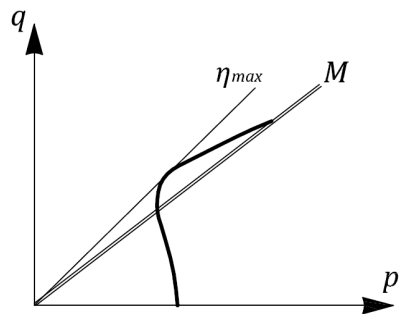
Izraz (3.97) predstavlja putanju efektivnih napona u nedreniranim uslovima, dok su  $p'_i$  i  $\eta_i$  inicijalne vrednosti srednjeg efektivnog napona i naponskog odnosa. S obzirom da se u HASP modelu plastične deformacije razvijaju od početka opterećivanja, tj. unutar granične površi, ovde ne važe razmatranja izneta u poglavlju 3.3, tj. putanja napona nije vertikalna i  $dp \neq 0$ .

Za prekonsolidovane gline, mogu se uočiti sledeće karakteristike HASP modela u nedreniranim uslovima:

$$1) \quad \eta < M, \quad \Psi < 0, \quad \bar{\Psi} > 0, \quad \omega > 0, \quad \alpha > 0, \quad d\eta > 0$$

Koeficijent ojačanja ima pozitivnu vrednost za  $\eta < M$  i prema izrazu (3.92) dobijamo da je tada  $dp' < 0$  i parametar stanja  $\Psi$  se u ovoj fazi blago smanjuje.

To znači da se putanja napona približava liniji kritičnog stanja sa desne strane, Slika 3.18. Međutim koeficijent ojačanja za  $\eta < M$  ima najveće vrednosti i promene srednjeg efektivnog napona su tada veoma male. Što je stepen prekonsolidacije veći, manji je otklon putanje napona. Takođe je  $d\varepsilon_v^p > 0$ , odnosno  $d\varepsilon_v^e < 0$ , površ tečenja i granična površ se šire.



**Slika 3.18** Putanja efektivnih napona u nedreniranim uslovima

$$2) \quad \eta = M, \quad \Psi < 0, \quad \bar{\Psi} = 0, \quad \omega \rightarrow \infty, \quad \alpha = 0, \quad d\eta > 0$$

Kada je dostignuto prvo karakteristično stanje, parametar stanja  $\bar{\Psi} = 0$ , Slika 3.19, koeficijent ojačanja teži beskonačnosti i  $d\varepsilon_v^p = 0$ . Samim tim je i  $d\varepsilon_v^e = 0$  i onda važi da je  $dp' = 0$ . Putanja napona menja smer.

$$3) \quad \eta > M, \quad \Psi < 0, \quad \bar{\Psi} < 0, \quad \omega < 0, \quad \alpha < 0, \quad d\eta > 0$$

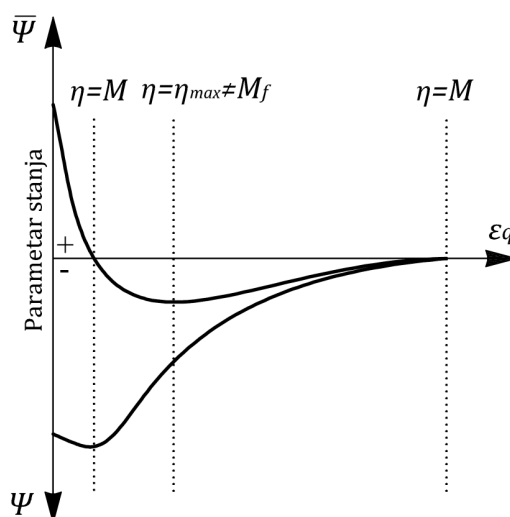
Kada naponski odnos prođe CSL, koeficijent ojačanja je negativan i  $d\varepsilon_v^p < 0$ ,  $d\varepsilon_v^e > 0$  i sledi da je  $dp' > 0$ . Putanja napona se približava CSL sa leve strane. Kako se za  $\eta > M$  koeficijent ojačanja povećava, to će za vrednost:

$$\omega = \frac{\kappa - \lambda}{\kappa} \tag{3.99}$$

imenilac u izrazu (3.98) biti nula, a parametar  $\alpha$  će imati beskonačnu vrednost. Iz izraza (3.95) sledi da je tada  $d\eta = 0$ , odnosno dostignut je vršni naponski odnos  $\eta_{max}$ . Vršni naponski odnos ne odgovara maksimalnoj vrednosti devijatora napona, kao u dreniranim uslovima. Površ tečenja se širi, dok se granična površ skuplja.

$$4) \quad \eta \rightarrow M, \quad \Psi < 0, \quad \bar{\Psi} < 0, \quad \omega < 0, \quad \alpha > 0, \quad d\eta < 0$$

Pri daljem deformisanju  $\alpha > 0$  i naponski odnos  $\eta$  se smanjuje, tj.  $d\eta < 0$  sve dok ne dođe do linije kritičnog stanja  $\eta = M$ . Tada je  $\Psi = 0$  i  $\bar{\Psi} = 0$  i beleži se maksimalna vrednost devijatora napona.



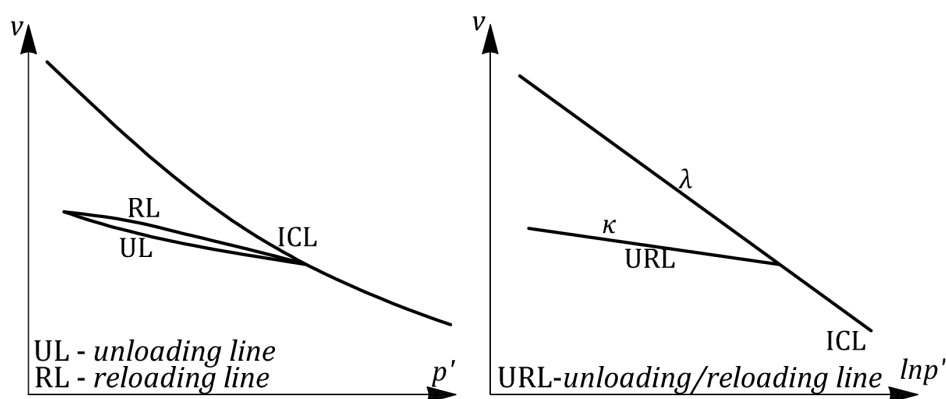
Slika 3.19 Promena parametara stanja u nedreniranim uslovima

### 3.7 Parametri HASP modela

Kao što je ranije navedeno HASP model zahteva, kao i MCC model, pet parametara za opis kompletne konstitutivne veze za određeni tip tla:  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $M$ ,  $\Gamma$  ili  $N$ ,  $G$  ili  $\mu$ . Svi parametri se mogu odrediti iz konvencionalnih laboratorijskih opita (triaksijalni opit, edometarski opit, opit direktnog smicanja).

#### Parametri $\lambda$ , $\kappa$ i $\Gamma$

Promena zapremine uzorka normalno konsolidovane gline pri izotropnoj kompresiji u triaksijalnom opitu prikazana je dijagramima  $p'-v$  i  $\ln p'-v$  na Slici 3.20. Rezultati se obično prikazuju koristeći invarijantu napona u razmeri prirodnog logaritma. Da bi se konstruisao jednostavan model ponašanja tla, zanemaruje se histerezis u "elastičnom" području, tako da se promena zapremine može idealizovati pravim linijama (linijama bubrenja).



**Slika 3.20** Promena zapremine uzorka normalno konsolidovane gline pri izotropnoj kompresiji

Parametar  $\lambda$  predstavlja nagib linije normalne konsolidacije u uslovima izotropne kompresije u  $\ln p'$ - $v$  dijagramu, dok parametar  $\kappa$  predstavlja nagib linija bubrenja u uslovima izotropne kompresije u  $\ln p'$ - $v$  dijagramu. Parametar  $N$  je specifična zapremina normalno konsolidovanog tla pri  $p'=1$  kPa u uslovima izotropne kompresije. Umesto parametra  $N$  u HASP modelu je prikladnije koristiti parametar  $\Gamma$  koji predstavlja specifičnu zapremina tla pri  $p'=1$  kPa na liniji kritičnog stanja, jer je parametar stanja definisan u zavisnosti od parametra  $\Gamma$ . U HASP modelu važi relacija:

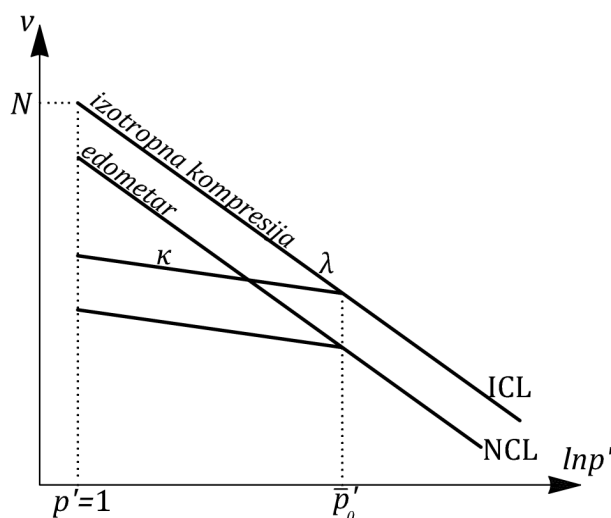
$$\Gamma = N - (\lambda - \kappa) \ln 2 \quad (3.100)\text{bis}$$

Opisane parametre je moguće odrediti i iz rezultata edometarskog opita. Ispitivanja su pokazala da je linija normalne konsolidacije u uslovima jednodimenzione konsolidacije paralelna sa linijom normalne konsolidacije u uslovima izotropne kompresije i sa linijom kritičnog stanja u  $\ln p'$ - $v$  dijagramu. Isto važi i za linije bubrenja, Slika 3.21. Može se uspostaviti jednoznačna veza parametra  $\lambda$  sa indeksom stišljivosti koja glasi:

$$\lambda \cong \frac{C_c}{2.3} \quad (3.101)$$

Takođe, parametar  $\kappa$  se može proceniti na osnovu indeksa rekompresije u obliku:

$$\kappa \cong \frac{C_R}{2.3} \quad (3.102)$$



**Slika 3.21** Promene zapremine pri izotropnoj kompresiji  
i u edometarskom opitu

U literaturi se mogu naći i brojne empirijske relacije koje povezuju parametre  $\lambda$  i  $\Gamma$  sa pokazateljima plastičnosti gline. Nastale su uglavnom na osnovu ispitivanja na prerađenim uzorcima:

$$\lambda \cong 0.585I_p \quad \text{Schofield \& Wroth (1968)} \quad (3.103)$$

$$\lambda \cong 0.92(I_p - 0.09) \quad \text{Schofield \& Wroth (1968)} \quad (3.104)$$

$$\lambda \cong 0.3(w_l - 0.1) \quad \text{Terzaghi \& Peck (1948)} \quad (3.105)$$

$$C_c \cong I_p G_s / 200 \quad \text{Atkinson (1993)} \quad (3.106)$$

$$\Gamma \cong 1.25 + 4.27I_p \quad \text{Schofield \& Wroth (1968)} \quad (3.107)$$

$$\Gamma \cong 1 + G_s (w_l + 0.3I_p) \quad \text{Wood (1990)} \quad (3.108)$$

gde su:  $I_p$  - indeks plastičnosti,  $w_l$  - granica tečenja,  $G_s$  - specifična težina tla.

### Parametri $M$ i $\mu$

Parametar  $M$  predstavlja nagib linije kritičnog stanja u  $p'$ - $q$  dijagramu. U uslovima standardnih triaksijalnih ispitivanja ili koristeći opit direktnog smicanja,

parametar  $M$  se može se proceniti na osnovu ugla smičuće čvrstoće pri konstantnoj zapremini  $\varphi'_{cv}$  kao:

$$M_c = \frac{6 \sin \varphi'_{cv}}{3 - \sin \varphi'_{cv}} \quad \text{za kompresiju} \quad (3.109)$$

$$M_e = \frac{6 \sin \varphi'_{cv}}{3 + \sin \varphi'_{cv}} \quad \text{za ekstenziju} \quad (3.110)$$

Elastično ponašanje je u HASP modelu predstavljeno pretpostavljajući konstantnu vrednost Poisson-ovog koeficijenta  $\mu$  i modul smicanja  $G$  se tako može dobiti na osnovu izraza:

$$G = \frac{3(1-2\mu) vp'}{2(1+\mu) \kappa} \quad (3.111)\text{bis}$$

# POGLAVLJE 4

## Numerička integracija HASP modela

### 4.1 Uvod

Da bi se nelinearni materijalni model koristio u analizi graničnih (konturnih) problema (*boundary value problem*), potrebna je implementacija materijalnog modela u softverski paket. Implementacija podrazumeva formulaciju numeričke procedure za integraciju napona za dati inkrement deformacije. Numerički postupak mora biti stabilan i dovoljno tačan, jer od postupka integracije konstitutivnih jednačina zavisi tačnost rešenja razmatranog graničnog problema.

Najveći broj komercijalnih i nekomercijalnih softverskih paketa za nelinearnu analizu je razvijen na bazi metode konačnih elemenata. Metod konačnih elemenata se zasniva na fizičkoj diskretizaciji razmatranog domena (globalnog sistema  $\Omega$ ) na poddomene (konačne elemente) koji su povezani u konačnom broju tačaka (čvorovi). Stanje u svakom konačnom elementu se opisuje pomoću interpolacionih funkcija i konačnog broja parametara u čvorovima koji predstavljaju osnovne nepoznate veličine. Osnovne jednačine kojima se opisuje stanje u elementima i pomoću kojih se formuliše čitav problem su obične algebarske.

### 4.2 Metod konačnih elemenata

Odgovor globalnog sistema na spoljašnje opterećenje  $f$  se može predstaviti kao suma odgovora svakog konačnog elementa u sledećem obliku:

$$\sum_{\text{elements}} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \mathbf{f} \quad (4.1)$$

gde je  $\mathbf{B}$  matrica gradijenata i predstavlja vezu između deformacija elementa i pomeranja u čvorovima elementa, a  $\boldsymbol{\sigma}$  naponi u elementu. Postupak je iterativan i ponavlja se sve dok se ne uspostavi ravnoteža između unutrašnjih sila  $\mathbf{q}$  i spoljašnjih sila  $\mathbf{f}$ . Relacija između unutrašnjih i spoljašnjih sila se može predstaviti u funkciji pomeranja kroz sistem nelinearnih jednačina:

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad (4.2)$$

Odnosno:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.3)$$

Gde je  $\mathbf{K}$  globalna matrica krutosti:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B} d\Omega \quad (4.4)$$

U izrazu (4.4)  $\mathbf{D}^{ep}$  predstavlja elasto-plastičnu konstitutivnu matricu. Nelinearnost konstitutivnih relacija uslovljava da se osnovne jednačine metode konačnih elemenata razmatraju u inkrementalnoj formi, u sledećem obliku:

$$\mathbf{K}^i \Delta \mathbf{u}^i = \Delta \mathbf{f}^i \quad (4.5)$$

gde je  $\mathbf{K}^i$  inkrementalna globalna matrica krutosti, a  $\Delta \mathbf{u}^i$  vektor inkrementalnih čvornih pomeranja za inkrement  $i$ . Opterećenje na posmatrano telo se ne nanosi odjednom, već postepeno u inkrementima, što bi značilo da je odgovor sistema i funkcija vremena. Međutim, u statičkoj nelinearnoj analizi kakva se razmatra u disertaciji, vreme služi samo da prikaže različite konfiguracije tela pri delovanju opterećenja, tako da vremenski interval (korak)  $\Delta t$  predstavlja inkrement opterećenja  $\Delta f$ . Inkrementalna globalna matrica krutosti zavisi od trenutnog naponskog stanja i nivoa deformacija, tako da nije konstantna, već varira u okviru inkrementa. Za svaki inkrement mora biti ispunjen uslov ravnoteže (4.2). Relacija (4.5) se može pisati i u sledećem obliku:

$$\mathbf{K}_t^i \Delta \mathbf{u}^i = \Delta \mathbf{f}^i \quad (4.6)$$

gde je  $\mathbf{K}_t^i$  tangenta matrica krutosti, tj. linearizovana matrica krutosti, Slika 4.1.



Analiza počinje apliciranjem inkrementa opterećenja  $\Delta f$  i proračunom inkrementa pomeranja na osnovu izraza (4.6). Priraštaj deformacija u elementu se može dobiti kao:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \quad (4.7)$$

dok se priraštaj napona računa iz konstitutivnih relacija za određenu vrstu tla:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \int_0^{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{D}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.8)$$

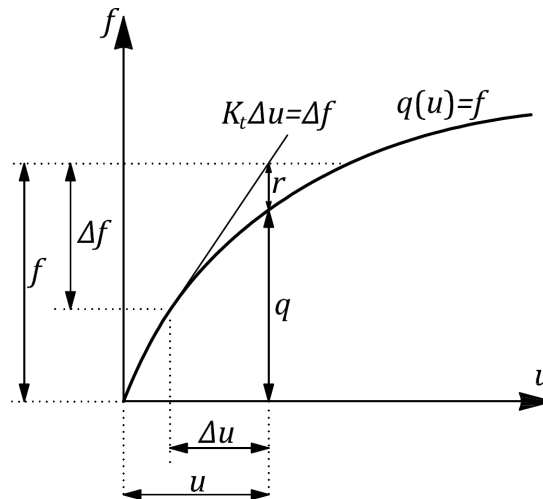
Na osnovu dobijenog naponskog stanja na kraju inkrementa, računa se vektor unutrašnjih čvornih sila:

$$\mathbf{q} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (4.9)$$

koji mora biti u ravnoteži sa vektorom spoljašnjih sila  $\mathbf{f}$ , odnosno ostatak (*residual*), Slika 4.1:

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathbf{f} < tol \quad (4.10)$$

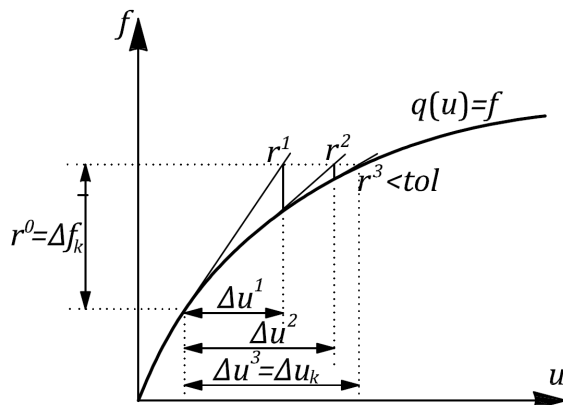
mora biti manji od neke unapred zadate veličine.



**Slika 4.1** Inkrement opterećenja u nelinearnoj analizi

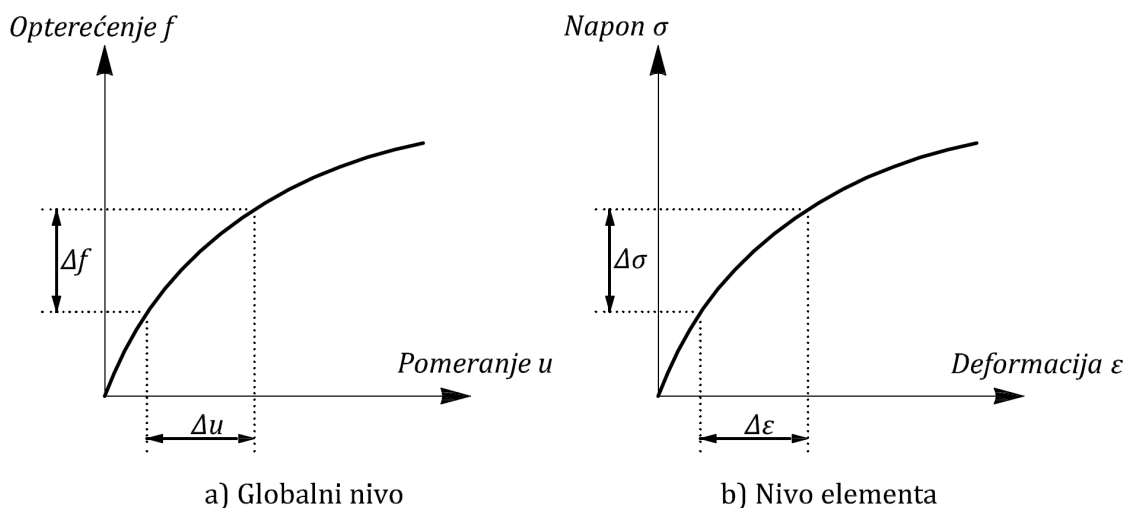
Ako to nije slučaj, onda se vrednost ostatka aplicira kao novi inkrement opterećenja sve dok uslov (4.10) ne bude ispunjen, Slika 4.2. Ovaj postupak se

naziva NEWTON-RAPHSON-ov iterativni postupak i predstavlja iterativnu proceduru za jedan inkrement opterećenja na *globalnom nivou*.



**Slika 4.2** Newton-Raphson-ov iterativni postupak

S obzirom da elasto-plastična matrica  $D^{ep}$  u izrazu (4.8) zavisi od trenutnog naponskog stanja, iterativnim postupkom na *nivou elementa (materijalni nivo)* dolazimo do naponskog stanja na kraju inkrementa. Takav postupak se naziva integracija konstitutivnih relacija ili *stress point algorithm*.



**Slika 4.3** Nelinearne relacije u metodi konačnih elemenata

Na osnovu navedenog, vidimo da se tokom nelinearne analize nekog graničnog (konturnog) problema koristeći elasto-plastični konstitutivni model, nelinearnost

pojavlja se na dva različita nivoa. Na nivou elementa, rešavajući nelinearne naponsko-deformacijske jednačine, naponi u tačkama integracije moraju biti izračunati na osnovu priraštaja deformacija dobijenih iz čvornih pomeranja, Slika 4.3b. Na globalnom (strukturnom nivou), nelinearne relacije opterećenje-pomeranje moraju biti rešene koristeći date granične uslove, Slika 4.3a.

### 4.3 Integracija konstitutivnih jednačina

Na osnovu dobijenog priraštaja deformacija  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  za jedan inkrement opterećenja potrebno je odrediti priraštaj napona  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  rešavajući jednačinu:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep}(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.11)$$

odnosno:

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}_j}^{\boldsymbol{\sigma}_j + \Delta \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} = \Delta \boldsymbol{\sigma} = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}_j}^{\boldsymbol{\varepsilon}_j + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{D}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.12)$$

Gde indeks  $j$  označava inicijalno stanje. Metode integracije konstitutivnih jednačina se generalno mogu podeliti u dve kategorije, implicitne i eksplicitne. Numerička procedura za integraciju napona mora biti efikasna, jer se proračuni ponavljaju za svaku tačku integracije i u velikoj meri utiču na tačnost i brzinu proračuna.

#### 4.3.1 Eksplicitne metode integracije

U eksplicitnim metodama integracije do priraštaja napona dolazimo koristeći poznato naponsko stanje na početku inkrementa, u konfiguraciji  $t$ . U literaturi se mogu naći eksplicitne metode integracije koje su razvili Nayak & Zienkiewicz, (1972), Owen & Hinton (1980), Wissman & Hauck (1983), Ortiz & Popov (1985), Sloan (1987), Sloan i dr. (2002), Sheng i dr. (2003), Solowski & Gallipoli (2010). S obzirom da elasto-plastična matrica zavisi od trenutnog naponskog stanja, najjednostavnija aproksimacija izraza (4.12) je:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}_j)\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.13)$$

Novo naponsko stanje je onda:

$$\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}_j + \Delta\boldsymbol{\sigma} \quad (4.14)$$

Priraštaj deformacije se može podeliti na  $N$  subinkremenata:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{N} \quad (4.15)$$

Tako da imamo:

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}_j)\delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}_j + \delta\boldsymbol{\sigma} \quad (4.17)$$

Što je veći broj subinkremenata, tačnost eksplicitne metode je veća. Osnovni nedostatak eksplicitne metode je što se greška akumulira u svakom narednom koraku i ako subinkrementi nisu dovoljno mali, odstupanja od tačnog rešenja mogu biti značajna. Sa druge strane, veliki broj subinkremenata povećava računarsko vreme.

### 4.3.2 Implicitne metode integracije

U implicitnim metodama integracije do priraštaja napona dolazimo koristeći poznate veličine na kraju inkrementa, u konfiguraciji  $t+\Delta t$ . Razvoj implicitnih metoda počinje sa Wilkins-om (1964). Procedura se generalno sastoji od dva koraka: a) proračun elastičnog rešenja za dati inkrement (elastično predviđanje) i b) povratak na površ tečenja (plastični korektor). Ovaj pristup su kasnije koristili i razvijali brojni autori i tako je nastala klasa procedura integracije koja se naziva povratno preslikavanje, Ortiz i dr. (1983), Simo & Taylor (1985), Ortiz & Simo (1986), Borja & Lee (1990), Borja (1991), Simo & Hughes (1998), Hickman & Gutierrez (2005). Implicitnu šemu integracije koja se naziva Metoda vodećeg parametra (*Governing Parameter Method*) GPM, razvijali su Kojić i Bathe (Kojić & Bathe 1987a, 1987b; Kojić 1993; Kojić i dr. 1994; Kojić i dr. 1995a, 1995b, 1995c, 1996a, 1996b, 2000, 2002a, 2002b; Kojić & Bathe 2003). Predstavlja generalizaciju *radial return* metode koju je predstavio Wilkins (1964). Osnovni princip je da se sve nepoznate veličine izraze u funkciji jednog parametra (vodeći parametar) i

problem se svodi na rešavanje jedne nelinearne jednačine po nepoznatom vodećem parametru.

#### 4.4 Metoda vodećeg parametra GPM

Polazi se od pretpostavke da je naponsko-deformacijsko stanje u materijalnoj tački na početku inkrementa, u trenutku  $t$ , poznato. Poznate veličine su:

$${}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\boldsymbol{\varepsilon}, {}^t\boldsymbol{\varepsilon}^p, {}^t\boldsymbol{\beta}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.18)$$

gde su  ${}^t\boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^t\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  ${}^t\boldsymbol{\varepsilon}^p$  naponi, ukupne deformacije i plastične deformacije u konfiguraciji  $t$ ,  ${}^t\boldsymbol{\beta}$  skup unutrašnjih promenljivih koje opisuju istoriju plastičnih deformacija u zavisnosti od tipa konstitutivnog modela i  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}$  predstavlja ukupne deformacije u konfiguraciji  $t+\Delta t$ . Zadatak numeričke integracije je da se odrede naponi  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$ , plastične deformacije  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^p$  i skup unutrašnjih promenljivih  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\beta}$  u konfiguraciji  $t+\Delta t$ . Osnovni koraci u implicitnoj metodi GPM su:

1. Izraziti sve nepoznate promenljive u funkciji jednog parametra  $p$  – vodeći parametar
2. Formirati vodeću funkciju  $f(p)$  i naći nulu funkcije. Rešenje predstavlja vrednost vodećeg parametra u konfiguraciji  $t+\Delta t$ . Vodeća funkcija  $f(p)$  je najčešće funkcija tečenja
3. Izračunati sve nepoznate promenljive koristeći vrednost vodećeg parametra u konfiguraciji  $t+\Delta t$

Proračunski koraci su sumirani na Slici 4.4.

Pored proračuna napona u konfiguraciji  $t+\Delta t$ , potrebno je odrediti tangentnu konstitutivnu matricu  $\mathbf{D}^{ep}$  koja figuriše u izrazu (4.4), konzistentnu sa algoritmom integracije napona:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{ep} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.19)$$

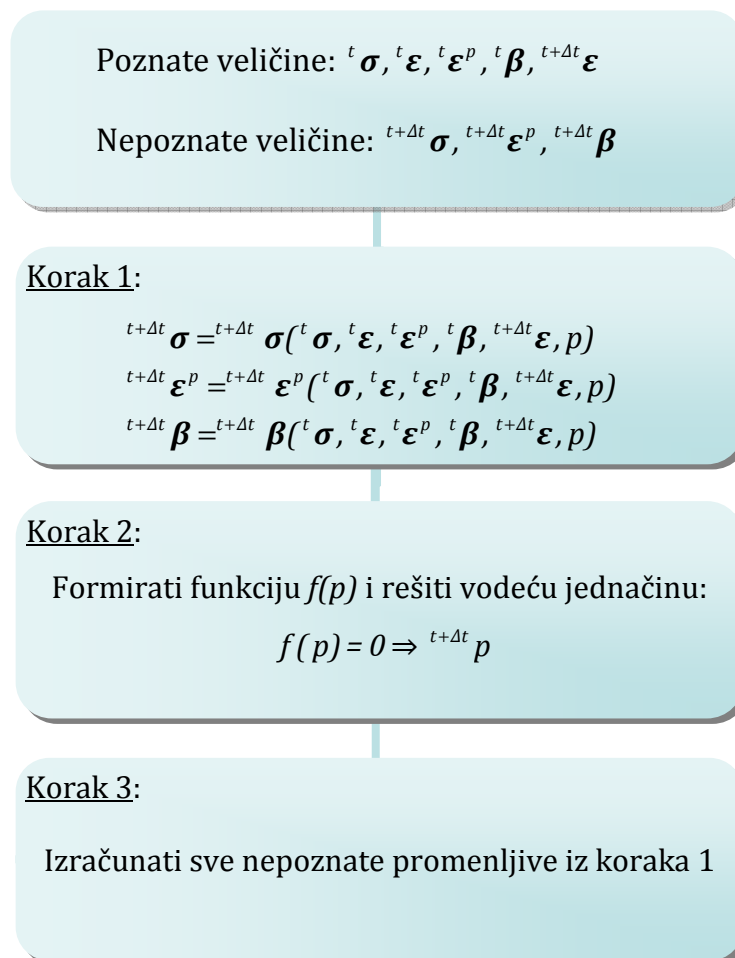
Ako se uzme u obzir da je napon  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$  funkcija  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}$  i  ${}^{t+\Delta t}p$ , sa vodećim parametrom koji je takođe funkcija  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}$ , možemo da izračunamo komponente elasto-plastične matrice (4.19) na sledeći način:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{ep} = \left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{p=\text{const}} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{t+\Delta t}p} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}p}{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.20)$$

Izvodi vodećeg parametra po deformacijama mogu se dobiti vodeći računa da vodeća jednačina  $f(p) = 0$  mora biti zadovoljena u svakom trenutku, dakle  $df = 0$  :

$${}^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p} + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}{\partial p} + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\partial {}^{t+\Delta t}p}{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}} + \left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t}f}{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{p=\text{const}} = 0 \quad (4.21)$$

Iz prethodne jednačine se mogu odrediti izvodi  $\partial {}^{t+\Delta t}p / \partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}$ .



Slika 4.4 Dijagram toka u GPM

Vodeća funkcija  $f(p)$  je najčešće funkcija tečenja, koja se u konfiguraciji  $t+\Delta t$  može pisati u sledećoj formi:

$${}^{t+\Delta t}f_y({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\beta}) = {}^{t+\Delta t}f_y({}^{t+\Delta t}q, {}^{t+\Delta t}p', {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\beta}) = 0 \quad (4.22)$$

gde je  $p'$  srednji efektivni napon, a  $q$  devijatorski napon. GPM koristi koncept povratnog preslikavanja, gde se u prvoj iteraciji pretpostavlja da su deformacije elastične, tako da imamo:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e ({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} - {}^t\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (4.23)$$

gde je  $\mathbf{D}^e$  elastična konstitutivna matrica,  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^e$  vektor elastičnih deformacija na kraju inkrementa (pod pretpostavkom da nema plastičnog tečenja). Funkcija tečenja je tada:

$${}^{t+\Delta t}f_y^e = {}^{t+\Delta t}f_y({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^e, {}^t\boldsymbol{\beta}) \quad (4.24)$$

Ako je:

$${}^{t+\Delta t}f_y^e \leq {}^t f_y \quad (4.25)$$

deformacije u razmatranom inkrementu su elastične i  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^e$  su konačni naponi u konfiguraciji  $t+\Delta t$ . Ako je:

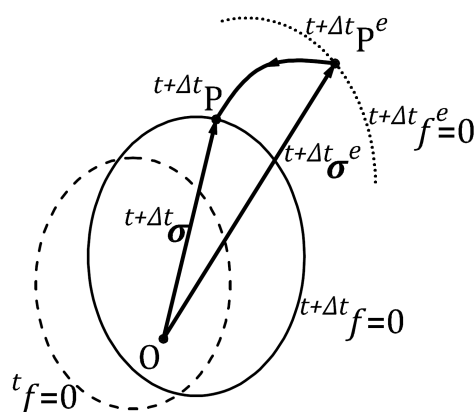
$${}^{t+\Delta t}f_y^e > {}^t f_y \quad (4.26)$$

došlo je do plastičnog deformisanja i u daljem postupku integracije konačni naponi su:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^e - \mathbf{D}^e \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4.27)$$

i moraju zadovoljiti uslov tečenja (4.22). Potrebno je korigovati elastično rešenje  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^e$  koje odgovara tački  ${}^{t+\Delta t}P^e$  na Slici 4.5 tako da bude zadovoljen uslov (4.22) što odgovara tački  ${}^{t+\Delta t}P$  na površi tečenja  ${}^{t+\Delta t}f_y = 0$ . Ova procedura se naziva povratno preslikavanje (*return mapping*) ili metoda elastičnog predviđanja (*elastic predictor – plastic corrector method*).

Metoda vodećeg parametra se pokazala kao vrlo efektivna metoda za numeričku integraciju konstitutivnih modela. Prvu primenu je imala u teoriji plastičnosti za metale, ali je kasnije uspešno proširena i na konstitutivne modele za tlo. U nastavku će biti prikazana numerička integracija HASP modela koristeći GPM.



**Slika 4.5** Metoda povratnog preslikavanja (naponski prostor)

#### 4.4.1 Izbor vodećeg parametra

Ključni korak u GPM je izbor vodećeg parametra. Kompletan algoritam GPM gde je kao vodeći parametar usvojen priraštaj plastične zapreminske deformacije se može naći u referenci Kojić & Bathe (2003). Prikazana je procedura za integraciju napona za Drucker-Prager-ov materijalni model, kao i za Modifikovani Cam Clay materijalni model. Sve relevantne veličine u navedenim modelima se mogu izraziti preko priraštaja plastične zapreminske deformacije. Za navedeni vodeći parametar, funkcija tečenja je monotona opadajuća funkcija. Ova osobina je veoma bitna za brzo i efikasno nalaženje nule funkcije, što omogućava da postupak integracije bude stabilan i robustan. U radu Vukićević & Rakić (2010) je kao vodeći parametar za Modifikovani Cam Clay (MCC) model usvojen srednji efektivni napon, kao znatno pogodnija veličina za integraciju, sa jasnim fizičkim značenjem.

U disertaciji je za HASP model takođe usvojen *srednji efektivni napon*  $p'$  kao vodeći parametar. Osnovni razlog izbora ovog vodećeg parametra je što je priraštaj plastične zapreminske deformacije često teško predvideti, naročito kod ponašanja



tvrdih prekonsolidovanih glina kod kojih su efekti dilatancije veoma izraženi. Sa druge strane, granice mogućih naponskih stanja su uvek poznate u svakom inkrementu opterećenja i sve relevantne veličine HASP modela se mogu izraziti u funkciji srednjeg efektivnog napona.

#### 4.5 Relacije HASP modela u konfiguraciji $t+\Delta t$

U skladu sa standardnom  $\alpha$  metodom, integral neke funkcije  $f(t)$  u intervalu  $\Delta t$  se može aproksimirati:

$$\int_t^{t+\Delta t} f(t)dt = \left[ (1-\alpha)^t f + \alpha^{t+\Delta t} f \right] \Delta t \quad (4.28)$$

gde je:

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.29)$$

integracioni parametar. Vrednost  $\alpha=0$  odgovara Euler-ovoj integraciji unapred (eksplicitna), dok vrednost  $\alpha=1$  odgovara Euler-ovoj integraciji unazad (implicitna). Za  $\alpha=0.5$  dobijamo trapezno pravilo. U implicitnoj GPM važi da je  $\alpha=1$  i možemo usvojiti sledeću aproksimaciju za inkrement plastičnih deformacija:

$$\Delta \varepsilon^p = \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\chi \right) dt = \Delta \chi \frac{\partial^{t+\Delta t} f}{\partial^{t+\Delta t} \sigma} \quad (4.30)$$

Gde je  $\Delta \chi$  pozitivan skalar (skalarni multiplikator) koji odgovara intervalu  $\Delta t$ . Ovo je jedna od osnovnih aproksimacija u algoritmu integracije. Iz uslova normalnosti možemo dobiti izraz za priraštaj plastičnih zapreminskih deformacija:

$$d\varepsilon_v^p = d\chi \frac{\partial f}{\partial p'} = d\chi (2p' - p'_0) \quad (4.31)$$

I na osnovu izraza (4.30) sledi da je:

$$\Delta \varepsilon_v^p = \Delta \chi \left( 2^{t+\Delta t} p' - 2^{t+\Delta t} p'_0 \right) \quad (4.32)$$

Odnosno:

$$\Delta\chi = \frac{\Delta\varepsilon_v^p}{2^{t+\Delta t} p' - {}^{t+\Delta t} p'_0} \quad (4.33)$$

Takođe, iz uslova normalnosti možemo dobiti izraz za priraštaj plastičnih smičućih deformacija:

$$d\varepsilon_q^p = d\chi \frac{\partial f}{\partial q} = d\chi \frac{2q}{M^2} \quad (4.34)$$

I na osnovu izraza (4.30) sledi da je:

$$\Delta\varepsilon_q^p = \Delta\chi \frac{2^{t+\Delta t} q}{M^2} \quad (4.35)$$

Uzimajući u obzir izraze (2.13), (2.16) i (2.30) imamo da je:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = 3\Delta\chi \frac{{}^{t+\Delta t} S_{ij}}{M^2} \quad (4.36)$$

### Koeficijent poroznosti ${}^{t+\Delta t} e$

U Poglavlju 2 je dat izraz (2.37) za priraštaj zapreminske deformacije u funkciji priraštaja koeficijenta poroznosti. Možemo ga pisati i u sledećem obliku:

$$d\varepsilon_v = -\frac{de}{1+e_0} \quad (4.37)$$

Ovde je uveden negativan predznak kako bi kompresija bila pozitivna. Ukupna zapreminska deformacija se može dobiti integracijom:

$$-\int_0^{t+\Delta t} d\varepsilon_v = \int_0^{t+\Delta t} \frac{de}{1+e_0} \quad (4.38)$$

$$-{}^{t+\Delta t} \varepsilon_v = \ln(1+{}^{t+\Delta t} e) - \ln(1+e_0) \quad (4.39)$$

$$-{}^{t+\Delta t} \varepsilon_v = \ln \frac{1+{}^{t+\Delta t} e}{1+e_0} \quad (4.40)$$

$$1+{}^{t+\Delta t} e = (1+e_0) \exp(-{}^{t+\Delta t} \varepsilon_v) \quad (4.41)$$

Iz prethodnog izraza možemo dobiti koeficijent poroznosti u konfiguraciji  $t+\Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t}e = (1 + e_0) \exp(-{}^{t+\Delta t}\varepsilon_v) - 1 \quad (4.42)$$

### Parametar ojačanja ${}^{t+\Delta t}p'_0$

Izraz za parametar ojačanja u konfiguraciji  $t+\Delta t$  možemo dobiti koristeći aditivnu dekompoziciju zapreminskih deformacija i izraze (3.24) i (3.40):

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^e + d\varepsilon_v^p \quad (4.43)$$

$$d\varepsilon_v = \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{dp'}{p'} + \frac{\lambda-\kappa}{1+e_0} \frac{dp'_0}{p'_0} \frac{1}{\omega} \quad (4.44)$$

Imajući u vidu izraze (4.37) i (4.44) možemo pisati:

$$-de = (1+e_0)d\varepsilon_v \quad (4.45)$$

$$-de = (1+e_0) \left( \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{dp'}{p'} + \frac{\lambda-\kappa}{1+e_0} \frac{dp'_0}{p'_0} \frac{1}{\omega} \right) \quad (4.46)$$

$$-de = \kappa \frac{dp'}{p'} + \frac{\lambda-\kappa}{\omega} \frac{dp'_0}{p'_0} \quad (4.47)$$

Integracijom u intervalu od  $t$  do  $t+\Delta t$  dobijamo:

$$\Delta e = \kappa \ln \left( \frac{{}^{t+\Delta t}p'}{{}^t p'} \right) + \frac{\lambda-\kappa}{\omega} \ln \left( \frac{{}^{t+\Delta t}p'_0}{{}^t p'_0} \right) \quad (4.48)$$

Iz prethodne jednačine se može izraziti parametar ojačanja:

$${}^{t+\Delta t}p'_0 = {}^t p'_0 \exp \left( \frac{\Delta e \omega}{\lambda-\kappa} - \frac{\kappa \omega}{\lambda-\kappa} \ln \left( \frac{{}^{t+\Delta t}p'}{{}^t p'} \right) \right) \quad (4.49)$$

Koristeći relaciju:

$$x^a = \exp(a \ln x) \quad (4.50)$$

izraz (4.49) se transformiše u sledeći oblik:

$${}^{t+\Delta t}p'_0 = {}^t p'_0 \exp\left(\frac{({}^t e - {}^{t+\Delta t} e)\omega}{\lambda - \kappa}\right) \left(\frac{{}^t p'}{{}^{t+\Delta t} p'}\right)^{\frac{\kappa\omega}{\lambda - \kappa}} \quad (4.51)$$

### Devijatorski deo tenzora napona ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$

Imajući u vidu izraz (4.36) sledi:

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \Delta\varepsilon'_{ij} \frac{M^2}{3\Delta\chi} = (\Delta\varepsilon'_{ij} - \Delta\varepsilon'^e_{ij}) \frac{M^2}{3\Delta\chi} \quad (4.52)$$

Na osnovu izraza (2.46), priraštaj elastičnih smičućih deformacija je:

$$\Delta\varepsilon'^e_{ij} = \frac{\Delta S_{ij}}{2^t G} \quad (4.53)$$

Gde je  ${}^t G$  modul smicanja u konfiguraciji  $t$ . Dalje možemo pisati:

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \Delta\varepsilon'_{ij} \frac{M^2}{3\Delta\chi} - \frac{\Delta S_{ij}}{2^t G} \frac{M^2}{3\Delta\chi} \quad (4.54)$$

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \Delta\varepsilon'_{ij} \frac{M^2}{3\Delta\chi} - \frac{{}^{t+\Delta t}S_{ij} - {}^t S_{ij}}{2^t G} \frac{M^2}{3\Delta\chi} \quad (4.55)$$

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} \left(1 + \frac{M^2}{2^t G 3\Delta\chi}\right) = \Delta\varepsilon'_{ij} \frac{M^2}{3\Delta\chi} + \frac{{}^t S_{ij}}{2^t G} \frac{M^2}{3\Delta\chi} \quad (4.56)$$

Nakon sređivanja prethodnog izraza dobijamo izraz za devijatorski deo tenzora napona u konfiguraciji  $t+\Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \frac{\Delta\varepsilon'_{ij} + \frac{{}^t S_{ij}}{2^t G}}{\frac{3\Delta\chi}{M^2} + \frac{1}{2^t G}} \quad (4.57)$$

### Dostignut naponski odnos $\eta=M$

U HASP modelu, ako je stepen prekonsolidacije veći od 2, naponski odnos  $\eta=M$  može predstavljati prvo karakteristično stanje  $\omega \rightarrow \infty$  (prelaz iz kontrakcije u ekspanziju) ili kritično stanje kada je parametar  $\omega=1$ . U oba slučaja važi da je:

$$2^{t+\Delta t} p' - {}^{t+\Delta t} p'_0 < TOL \quad (4.58)$$

Odnosno:

$$M^{t+\Delta t} p' = {}^{t+\Delta t} q \quad (4.59)$$

Priraštaj plastične zapreminske deformacije je jednak nuli i pozitivan skalar  $\Delta\chi$  mora biti izračunat koristeći plastičnu smičuću deformaciju. Iz izraza (4.35) i (4.59) sledi:

$${}^{t+\Delta t} q = \frac{M^2}{2\Delta\chi} \Delta\varepsilon_q^p = M^{t+\Delta t} p' \quad (4.60)$$

Odakle se može dobiti pozitivan skalar:

$$\Delta\chi = \frac{M\Delta\varepsilon_q^p}{2^{t+\Delta t} p'} \quad (4.61)$$

Koristeći aditivnu dekompoziciju deformacija dobijamo:

$$\Delta\varepsilon_q^p = \frac{\Delta\varepsilon_q - \Delta\varepsilon_q^e}{\omega} \quad (4.62)$$

$$\Delta\chi = \frac{M \left( \Delta\varepsilon_q - \frac{\Delta q}{3G} \right)}{2^{t+\Delta t} p'} \quad (4.63)$$

$$\Delta\chi = \frac{M}{2^{t+\Delta t} p' \omega} \left( \Delta\varepsilon_q - \frac{\Delta q}{3G} \right) \quad (4.64)$$

gde je:

$$\Delta q = {}^{t+\Delta t} q - {}^t q \quad (4.65)$$

Kada je dostignuto prvo karakteristično stanje za  $\eta=M$  (prelaz iz kontrakcije u ekspanziju), koeficijent ojačanja tada  $\omega \rightarrow \infty$ . Zbog stabilnosti numeričkog postupka integracije sasvim je prihvatljivo da se za koeficijent ojačanja usvoji dovoljno velika konačna vrednost. U disertaciji je usvojeno da je  $|\omega| \leq 1500$ .

## 4.6 Postupak numeričke integracije HASP modela

### 4.6.1 Poznate veličine na početku inkrementa

- Vektor napona u konfiguraciji  $t$   ${}^t\boldsymbol{\sigma}$ , invarijante napona i naponski odnos:

$${}^t\sigma_{ij} = {}^t\boldsymbol{\sigma} = \left( {}^t\sigma_{11} \quad {}^t\sigma_{22} \quad {}^t\sigma_{33} \quad {}^t\sigma_{12} \quad {}^t\sigma_{23} \quad {}^t\sigma_{31} \right)^T \quad (4.66)$$

$${}^t p' = \frac{{}^t\sigma_{11} + {}^t\sigma_{22} + {}^t\sigma_{33}}{3} \quad (4.67)$$

$${}^t q = \sqrt{3} {}^t J_2 \quad (4.68)$$

$${}^t \eta = \frac{{}^t q}{{}^t p'} \quad (4.69)$$

- Vektor deformacija u konfiguraciji  $t$   ${}^t\boldsymbol{\varepsilon}$  i invarijante deformacija:

$${}^t\varepsilon_{ij} = {}^t\boldsymbol{\varepsilon} = \left( {}^t\varepsilon_{11} \quad {}^t\varepsilon_{22} \quad {}^t\varepsilon_{33} \quad {}^t\varepsilon_{12} \quad {}^t\varepsilon_{23} \quad {}^t\varepsilon_{31} \right)^T \quad (4.70)$$

$${}^t\varepsilon_{ij} = {}^t\boldsymbol{\varepsilon} = \left( {}^t\varepsilon_{11} \quad {}^t\varepsilon_{22} \quad {}^t\varepsilon_{33} \quad \frac{1}{2} {}^t\gamma_{12} \quad \frac{1}{2} {}^t\gamma_{23} \quad \frac{1}{2} {}^t\gamma_{31} \right)^T \quad (4.71)$$

$${}^t\varepsilon_v = {}^t\varepsilon_{11} + {}^t\varepsilon_{22} + {}^t\varepsilon_{33} \quad (4.72)$$

$${}^t\varepsilon_q = 2\sqrt{\frac{1}{3} {}^t I'_{\varepsilon 2}} \quad (4.73)$$

- Vektor priraštaja deformacija  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  i invarijante deformacija:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \left( \Delta\varepsilon_{11} \quad \Delta\varepsilon_{22} \quad \Delta\varepsilon_{33} \quad \Delta\varepsilon_{12} \quad \Delta\varepsilon_{23} \quad \Delta\varepsilon_{31} \right)^T \quad (4.74)$$

$$\Delta\varepsilon_v = \Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22} + \Delta\varepsilon_{33} \quad (4.75)$$

$$\Delta\varepsilon_q = 2\sqrt{\frac{1}{3} \Delta I'_{\varepsilon 2}} \quad (4.76)$$

- Tenzor ukupnih deformacija  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}$  se može izračunati, kao i invarijante:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} = {}^t\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.77)$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_v = {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{11} + {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{22} + {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{33} \quad (4.78)$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_q = 2\sqrt{\frac{1}{3} {}^{t+\Delta t}I'_{\varepsilon 2}} \quad (4.79)$$

- Koeficijent poroznosti  $e$  i specifična zapremina  $v$  se mogu izračunati na osnovu poznatih zapreminskih deformacija u konfiguraciji  $t$  i  $t+\Delta t$ :

$${}^t e = (1 + e_0) \exp(-{}^t \varepsilon_v) - 1 \quad (4.80)$$

$${}^t v = 1 + {}^t e \quad (4.81)$$

$${}^{t+\Delta t} e = (1 + e_0) \exp(-{}^{t+\Delta t} \varepsilon_v) - 1 \quad (4.82)$$

$${}^{t+\Delta t} v = 1 + {}^{t+\Delta t} e \quad (4.83)$$

$$\Delta e = {}^t e - {}^{t+\Delta t} e \quad (4.84)$$

- Parametri stanja za trenutnu i imaginarnu naponsku tačku, stepen prekonsolidacije i koeficijent ojačanja  $\omega$  u konfiguraciji  $t$

$${}^t \Psi = {}^t v + \lambda \ln {}^t p' - \Gamma \quad (4.85)$$

$${}^t \bar{\Psi} = (\lambda - \kappa) \ln \left( \frac{2M^2}{M^2 + {}^t \eta^2} \right) \quad (4.86)$$

$${}^t R = \exp \left( \frac{{}^t \bar{\Psi} - {}^t \Psi}{\lambda - \kappa} \right) \quad (4.87)$$

$${}^t \omega = \left( 1 + \frac{{}^t \bar{\Psi} - {}^t \Psi}{{}^t \bar{\Psi}} \right) {}^t R \quad (4.88)$$

- Parametar ojačanja u konfiguraciji  $t$ :

$${}^t p'_0 = \frac{{}^t q^2}{M^2 {}^t p'} + {}^t p' \quad (4.89)$$

- Zapreminski modul  $K$ , modul elastičnosti  $E$  i modul smicanja  $G$

$${}^t K = \frac{1 + {}^t e}{{}^t p'} \kappa \quad (4.90)$$

$${}^tE = 3(1-2\nu){}^tK \quad (4.91)$$

$${}^tG = 3\frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)}{}^tK \quad (4.92)$$

- Elastična matrica

$$\mathbf{D}^e = \frac{{}^tE}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Ili:

$$\mathbf{D}^e = \begin{bmatrix} {}^tK + \frac{4}{3}{}^tG & {}^tK - \frac{2}{3}{}^tG & {}^tK - \frac{2}{3}{}^tG & 0 & 0 & 0 \\ {}^tK - \frac{2}{3}{}^tG & {}^tK + \frac{4}{3}{}^tG & {}^tK - \frac{2}{3}{}^tG & 0 & 0 & 0 \\ {}^tK - \frac{2}{3}{}^tG & {}^tK - \frac{2}{3}{}^tG & {}^tK + \frac{4}{3}{}^tG & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2{}^tG & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2{}^tG & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{}^tG \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

#### 4.6.2 Vodeći parametar ${}^{t+\Delta t}p'$

S obzirom da se prema HASP modelu naponska tačka uvek nalazi na površi tečenja i da nema elastične oblasti, u algoritmu integracije koji će biti prikazan nema elastičnog predviđanja i korekcije pri plastičnom deformisanju, kao što je opisano u Kojić & Bathe (2003). Za vrednost srednjeg efektivnog napona  ${}^{t+\Delta t}p'$  kao vodećeg parametra, treba da bude ispunjen uslov da je:

$${}^{t+\Delta t}f = \left| {}^{t+\Delta t}f({}^{t+\Delta t}p') \right| \leq \text{TOL} \quad (4.95)$$



tj.  ${}^{t+\Delta t}p'$  predstavlja nulu vodeće funkcije. Za nalaženje nule funkcije primenjena je metoda bisekcije, odnosno polovljenja intervala na kojem je funkcija monotona i suprotnog znaka. Interval srednjeg efektivnog napona koji ispunjava navedene uslove (*bracketing the root*) tražice se u okolini poznatog naponskog stanja  ${}^t p'$  i granice tog intervala su:

$${}^{t+\Delta t}p'_1 = C_1 {}^t p' \quad (4.96)$$

$${}^{t+\Delta t}p'_2 = C_2 {}^t p' \quad (4.97)$$

Gde konstanta  $C_1$  ima vrednost manju od jedinice, a konstanta  $C_2$  vrednost veću od jedinice. Inicijalne vrednosti konstanti su bliske jedinici. Za svaku granicu intervala potrebno je naći i vrednosti vodećih funkcija  ${}^{t+\Delta t}f_1$  i  ${}^{t+\Delta t}f_2$ . Da bi rešenje (nula funkcije) bilo u pretpostavljenom intervalu, potrebno je da bude ispunjen uslov:

$${}^{t+\Delta t}f_1 \cdot {}^{t+\Delta t}f_2 < 0 \quad (4.98)$$

Granice intervala se postepeno šire u malim inkrementima, sve dok ne bude ispunjen uslov (4.98). Kada su poznate granice intervala srednjeg efektivnog napona, metodom bisekcije se veoma brzo dolazi do tražene nule funkcije.

#### 4.6.3 Proračunski koraci za poznati vodeći parametar ${}^{t+\Delta t}p'$

- Parametar ojačanja

$${}^{t+\Delta t}p'_0 = {}^t p'_0 \exp\left(\frac{({}^t e - {}^{t+\Delta t} e) {}^t \omega}{\lambda - \kappa}\right) \left(\frac{{}^t p'}{{}^{t+\Delta t} p'}\right)^{\frac{\kappa {}^t \omega}{\lambda - \kappa}} \quad (4.99)\text{bis}$$

- Priraštaj plastične zapreminske deformacije

$$\Delta\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{t_v} \ln\left(\frac{{}^{t+\Delta t} p'_0}{{}^t p'_0}\right) \frac{1}{{}^t \omega} \quad (4.100)$$

- Skalarni multiplikator

$$\Delta\chi = \frac{\Delta\varepsilon_v^p}{2^{{}^{t+\Delta t} p'_0} - {}^{t+\Delta t} p'_0} \quad (4.101)\text{bis}$$

- Devijatorski deo tenzora napona u konfiguraciji  $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \frac{\Delta\varepsilon'_{ij} + \frac{{}^tS_{ij}}{2{}^tG}}{\frac{3\Delta\chi}{M^2} + \frac{1}{2{}^tG}} \quad (4.102)\text{bis}$$

- Devijatorski napon – invarijanta u konfiguraciji  $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}q = \sqrt{3{}^{t+\Delta t}J_2} \quad (4.103)$$

- Funkcija tečenja u konfiguraciji  $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}f = \frac{{}^{t+\Delta t}q^2}{M^2} + {}^{t+\Delta t}p'({}^{t+\Delta t}p' - {}^{t+\Delta t}p'_0) \quad (4.104)$$

- Priraštaj plastične smičuće deformacije

$$\Delta\varepsilon'_{ij}{}^p = 3\Delta\chi \frac{{}^{t+\Delta t}S_{ij}}{M^2} \quad (4.105)\text{bis}$$

- Ako je dostignut naponski odnos  $\eta=M$

$$2{}^{t+\Delta t}p' - {}^{t+\Delta t}p'_0 < TOL \quad (4.106)\text{bis}$$

$${}^{t+\Delta t}q = M{}^{t+\Delta t}p' \quad (4.107)\text{bis}$$

$$\Delta q = {}^{t+\Delta t}q - {}^tq \quad (4.108)\text{bis}$$

$$\Delta\varepsilon_q{}^p = \left( \Delta\varepsilon_q - \frac{\Delta q}{3{}^tG} \right) \frac{1}{{}^t\omega} \quad (4.109)$$

$$\Delta\chi = \frac{M\Delta\varepsilon_q{}^p}{2{}^{t+\Delta t}p'} \quad (4.110)\text{bis}$$

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \frac{\Delta\varepsilon'_{ij} + \frac{{}^tS_{ij}}{2{}^tG}}{\frac{3\Delta\chi}{M^2} + \frac{1}{2{}^tG}} \quad (4.111)\text{bis}$$

- Tenzor napona u konfiguraciji  $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} = {}^{t+\Delta t}p'\delta_{ij} + {}^{t+\Delta t}S_{ij} \quad (4.112)$$

#### 4.6.4 Konstitutivna matrica

U disertaciji je konstitutivna matrica predstavljena elastičnom matricom (4.93). Formiranje elasto-plastične matrice će biti deo budućeg istraživanja.

Implementacija HASP modela, koristeći navedeni algoritam numeričke integracije, izvršena je u program ABAQUS, što je detaljno opisano u Poglavlju 5.

### 4.7 Postupak numeričke integracije MCC modela

U ovoj tački je detaljno opisan postupak numeričke integracije MCC modela prema radu Vukićević & Rakić (2010) koji je u okviru disertacije takođe implementiran u ABAQUS. S obzirom da u ABAQUS-u već postoji MCC model, cilj implementacije MCC modela postupkom GPM je provera efikasnost predložene metode integracije. Postupak numeričke integracije MCC modela se ne razlikuje značajno od postupka integracije HASP modela. S obzirom da MCC model predviđa elastično ponašanje unutar površi tečenja, algoritam integracije sadrži elastično predviđanje i plastični korektor.

#### 4.7.1 Poznate veličine na početku inkrementa

- Vektor napona  ${}^t\sigma$ , invarijante napona  ${}^t p'$  i  ${}^t q$ , naponski odnos  ${}^t\eta$
- Vektor deformacija  ${}^t\epsilon$  i invarijante deformacija  ${}^t\epsilon_v$  i  ${}^t\epsilon_q$
- Vektor priraštaja deformacija  $\Delta\epsilon$  i odgovarajuće invarijante
- Vektor ukupnih deformacija  ${}^{t+\Delta t}\epsilon = {}^t\epsilon + \Delta\epsilon$
- Koeficijent poroznosti i specifična zapremina u konfiguracijama  $t$  i  $t+\Delta t$ :
- Parametar ojačanja koji definiše veličinu inicijalne površi tečenja unutar koje se predviđa elastično ponašanje je ulazni parametar  $p'_{0init}$
- Zapreminski modul  ${}^tK$ , modul elastičnosti  ${}^tE$  i modul smicanja  ${}^tG$
- Elastična matrica  $D^e$

### 4.7.2 Elastično predviđanje

- Elastično predviđanje i kontrola funkcije tečenja:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{trial} = \mathbf{D}^e {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.113)$$

$${}^{t+\Delta t}f^{trial} = {}^{t+\Delta t}f\left({}^{t+\Delta t}p'^{trial}, {}^{t+\Delta t}q^{trial}, p'_{0init}\right) \quad (4.114)$$

- Ako je  ${}^{t+\Delta t}f^{trial} \leq 0$  deformacije su elastične, a napon  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{trial}$  je traženi napon u konfiguraciji  $t+\Delta t$
- Ako je  ${}^{t+\Delta t}f^{trial} > 0$  došlo je do pojave plastičnih deformacija

### 4.7.3 Vodeći parametar ${}^{t+\Delta t}p'$

Kao i kod HASP modela za vrednost srednjeg efektivnog napona  ${}^{t+\Delta t}p'$  kao vodećeg parametra, treba da bude ispunjen uslov da je:

$${}^{t+\Delta t}f = \left| {}^{t+\Delta t}f\left({}^{t+\Delta t}p'\right) \right| \leq \text{TOL} \quad (4.115)$$

Interval srednjeg efektivnog napona može se tražiti u okolini poznatog naponskog stanja  ${}^t p'$  prema postupku koji je opisan u tački 4.6.2 ili se inicijalne granice tog intervala mogu postaviti kao:

$${}^{t+\Delta t}p'_1 = p'^{trial} \quad (4.116)$$

$${}^{t+\Delta t}p'_2 = C_1 p'^{trial} \quad (4.117)$$

gde konstanta  $C_1$  ima vrednost manju od jedinice. Granice intervala se postepeno šire u malim inkrementima, sve dok ne bude ispunjen uslov (4.98) i metodom bisekcije se dolazi do tražene nule funkcije.

### 4.7.4 Proračunski koraci za poznati vodeći parametar ${}^{t+\Delta t}p'$

- Parametar ojačanja

$${}^{t+\Delta t}p'_0 = {}^t p'_0 \exp\left(\frac{\left({}^t e - {}^{t+\Delta t} e\right)}{\lambda - \kappa}\right) \left(\frac{{}^t p'}{{}^{t+\Delta t} p'}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda - \kappa}} \quad (4.118)$$

- Priraštaj plastične zapreminske deformacije

$$\Delta \varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{t v} \ln \left( \frac{{}^{t+\Delta t} p'_0}{t p'_0} \right) \quad (4.119)$$

- Skalarni multiplikator

$$\Delta \chi = \frac{\Delta \varepsilon_v^p}{2^{{}^{t+\Delta t} p'_0} - {}^{t+\Delta t} p'_0} \quad (4.120)\text{bis}$$

- Tenzor devijatora napona u konfiguraciji  $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \frac{\Delta \varepsilon'_{ij} + \frac{{}^t S_{ij}}{2^t G}}{\frac{3\Delta \chi}{M^2} + \frac{1}{2^t G}} \quad (4.121)\text{bis}$$

- Devijatorski napon – invarijanta u konfiguraciji  $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t} q = \sqrt{3^{{}^{t+\Delta t} J_2}} \quad (4.122)\text{bis}$$

- Funkcija tečenja u konfiguraciji  $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t} f = \frac{{}^{t+\Delta t} q^2}{M^2} + {}^{t+\Delta t} p' \left( {}^{t+\Delta t} p' - {}^{t+\Delta t} p'_0 \right) \quad (4.123)\text{bis}$$

- Priraštaj plastične smičuće deformacije

$$\Delta \varepsilon'_{ij}{}^p = 3\Delta \chi \frac{{}^{t+\Delta t} S_{ij}}{M^2} \quad (4.124)\text{bis}$$

- Ako je dostignut naponski odnos  $\eta=M$

$$2^{{}^{t+\Delta t} p'_0} - {}^{t+\Delta t} p'_0 < TOL \quad (4.125)\text{bis}$$

$${}^{t+\Delta t} q = M^{{}^{t+\Delta t} p'_0} \quad (4.126)\text{bis}$$

$$\Delta q = {}^{t+\Delta t} q - {}^t q \quad (4.127)\text{bis}$$

$$\Delta \varepsilon_q^p = \left( \Delta \varepsilon_q - \frac{\Delta q}{3^t G} \right) \quad (4.128)$$

$$\Delta\chi = \frac{M\Delta\varepsilon_q^p}{2^{t+\Delta t} p'} \quad (4.129)\text{bis}$$

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \frac{\Delta\varepsilon'_{ij} + \frac{{}^tS_{ij}}{2^t G}}{\frac{3\Delta\chi}{M^2} + \frac{1}{2^t G}} \quad (4.130)\text{bis}$$

- Tenzor napona u konfiguraciji  $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} = {}^{t+\Delta t}p'\delta_{ij} + {}^{t+\Delta t}S_{ij} \quad (4.131)\text{bis}$$

Prethodni koraci u algoritmu numeričke integracije HASP modela sumirani su u Tabeli 4.1 i Tabeli 4.2. Algoritam prikazan u Tabeli 4.1 važi i za MCC model ako se za vrednost koeficijenta ojačanja usvoji vrednost  $\omega=1$ . U Tabeli 4.3 prikazani su koraci u algoritmu integracije MCC modela.

**Tabela 4.1** Algoritam za proračun napona i funkcije tečenja u konfiguraciji  $t+\Delta t$  za poznati vodeći parametar  ${}^{t+\Delta t}p'$

**Step 1. Parametar ojačanja:**

$${}^{t+\Delta t}p'_0 = {}^t p'_0 \exp\left(\frac{({}^t e - {}^{t+\Delta t} e) {}^t \omega}{\lambda - \kappa}\right) \left(\frac{{}^t p'}{{}^{t+\Delta t} p'}\right)^{\frac{\kappa {}^t \omega}{\lambda - \kappa}}$$

**Step 2. Skalarni multiplikator:**

Ako je  $|2^{t+\Delta t} p' - {}^{t+\Delta t} p'_0| < TOL$

$${}^{t+\Delta t} q = M {}^{t+\Delta t} p'$$

$$\Delta q = {}^{t+\Delta t} q - {}^t q$$

$$\Delta \varepsilon_q^p = \left( \Delta \varepsilon_q - \frac{\Delta q}{3 {}^t G} \right) \frac{1}{{}^t \omega}$$

$$\Delta \chi = \frac{M \Delta \varepsilon_q^p}{2^{t+\Delta t} p'}$$

Ako je  $|2^{t+\Delta t} p' - {}^{t+\Delta t} p'_0| > TOL$

$$\Delta \varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{{}^t v} \ln\left(\frac{{}^{t+\Delta t} p'_0}{{}^t p'_0}\right) \frac{1}{{}^t \omega}$$

$$\Delta \chi = \frac{\Delta \varepsilon_v^p}{2^{t+\Delta t} p' - {}^{t+\Delta t} p'_0}$$

**Step 3. Devijatorski deo tenzora napona:**

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \frac{\Delta \varepsilon'_{ij} + \frac{{}^t S_{ij}}{2 {}^t G}}{\frac{3 \Delta \chi}{M^2} + \frac{1}{2 {}^t G}}$$

**Step 4. Plastične smičuće deformacije:**

$$\Delta \varepsilon'_{ij}{}^p = 3 \Delta \chi \frac{{}^{t+\Delta t} S_{ij}}{M^2}$$

**Step 5. Funkcija tečenja:**

$${}^{t+\Delta t} f = \frac{{}^{t+\Delta t} q^2}{M^2} + {}^{t+\Delta t} p' \left( {}^{t+\Delta t} p' - {}^{t+\Delta t} p'_0 \right)$$

**Step 6. Tenzor napona:**

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = {}^{t+\Delta t} p' \delta_{ij} + {}^{t+\Delta t} S_{ij}$$

**Tabela 4.2** Algoritam za numeričku integraciju HASP modela

<b>Step 1.</b>	<p><b>Poznate veličine na početku inkrementa:</b></p> ${}^t\sigma, {}^t\varepsilon, {}^{t+\Delta t}\varepsilon, {}^te, {}^{t+\Delta t}e, D^e$ <p>i odgovarajuće invarijante napona i deformacija</p>
<b>Step 2.</b>	<p><b>Inicijalne granice intervala napona (<i>bracketing the root</i>):</b></p> $j=0$ ${}^{t+\Delta t}p_1^{\prime j} = C_1 {}^tp'$ ${}^{t+\Delta t}p_2^{\prime j} = C_2 {}^tp'$
<b>Step 3.</b>	<p><b>Koristeći algoritam prikazan u Tabeli 4.1 naći <math>{}^{t+\Delta t}f_1^j</math> i <math>{}^{t+\Delta t}f_2^j</math></b></p>
<b>Step 4.</b>	<p>Ako je <math>{}^{t+\Delta t}f_1^j \cdot {}^{t+\Delta t}f_2^j &gt; 0 \Rightarrow</math> nove granice intervala napona</p> ${}^{t+\Delta t}p_1^{\prime j+1} = C_1 {}^{t+\Delta t}p_1^{\prime j}, \quad {}^{t+\Delta t}p_2^{\prime j+1} = C_2 {}^{t+\Delta t}p_2^{\prime j}$ <p><math>j = j + 1</math> GOTO Step 3</p> <p>Ako je <math>{}^{t+\Delta t}f_1^j \cdot {}^{t+\Delta t}f_2^j &lt; 0</math> GOTO Step 5</p>
<b>Step 5.</b>	<p><b>Metoda bisekcije za nalaženje nule funkcije</b></p> ${}^{t+\Delta t}f = \left  {}^{t+\Delta t}f({}^{t+\Delta t}p') \right  \leq \text{TOL}$
<b>Step 6.</b>	<p><b>Za poznati vodeći parametar <math>{}^{t+\Delta t}p'</math>, koristeći algoritam prikazan u Tabeli 4.1 izračunati nepoznate veličine u konfiguraciji <math>t+\Delta t</math></b></p> ${}^{t+\Delta t}\sigma, {}^{t+\Delta t}\varepsilon^p$



**Tabela 4.3** Algoritam za numeričku integraciju MCC modela

<b>Step 1.</b>	<p><b>Poznate veličine na početku inkrementa:</b></p> ${}^t\sigma, {}^t\varepsilon, {}^{t+\Delta t}\varepsilon, {}^te, {}^{t+\Delta t}e, D^e, p'_{0init}$ <p>i odgovarajuće invarijante napona i deformacija</p>
<b>Step 2.</b>	<p><b>Elastično predviđanje i kontrola funkcije tečenja:</b></p> ${}^{t+\Delta t}\sigma^{trial} = D^e {}^{t+\Delta t}\varepsilon$ ${}^{t+\Delta t}f^{trial} = {}^{t+\Delta t}f\left({}^{t+\Delta t}p'^{trial}, {}^{t+\Delta t}q^{trial}, p'_{0init}\right)$ <p>Ako je <math>{}^{t+\Delta t}f^{trial} \leq 0</math> <math>{}^{t+\Delta t}\sigma^{trial} = {}^{t+\Delta t}\sigma</math> EXIT</p> <p>Ako je <math>{}^{t+\Delta t}f^{trial} &gt; 0</math> GOTO Step 3</p>
<b>Step 3.</b>	<p><b>Inicijalne granice intervala napona (<i>bracketing the root</i>):</b></p> $j=0$ ${}^{t+\Delta t}p_1'^j = p'^{trial}$ ${}^{t+\Delta t}p_2'^j = C_1 p'^{trial} \quad C_1 < 1$
<b>Step 4.</b>	<p><b>Koristeći algoritam prikazan u Tabeli 4.1 za <math>\omega=1</math> naći</b></p> ${}^{t+\Delta t}f_1^j \text{ i } {}^{t+\Delta t}f_2^j$
<b>Step 5.</b>	<p>Ako je <math>{}^{t+\Delta t}f_1^j \cdot {}^{t+\Delta t}f_2^j &gt; 0 \Rightarrow</math> nove granice intervala napona</p> ${}^{t+\Delta t}p_1'^{j+1} = C_1 {}^{t+\Delta t}p_1'^j, \quad {}^{t+\Delta t}p_2'^{j+1} = C_2 {}^{t+\Delta t}p_2'^j$ <p><math>j = j + 1</math> GOTO Step 4</p> <p>Ako je <math>{}^{t+\Delta t}f_1^j \cdot {}^{t+\Delta t}f_2^j &lt; 0</math> GOTO Step 6</p>
<b>Step 6.</b>	<p><b>Metoda bisekcije za nalaženje nule funkcije</b></p> ${}^{t+\Delta t}f = \left  {}^{t+\Delta t}f\left({}^{t+\Delta t}p'\right) \right  \leq \text{TOL}$
<b>Step 7.</b>	<p><b>Za poznati vodeći parametar <math>{}^{t+\Delta t}p'</math>, koristeći algoritam prikazan u Tabeli 4.1 za <math>\omega=1</math> izračunati nepoznate veličine u konfiguraciji <math>t+\Delta t</math></b></p> ${}^{t+\Delta t}\sigma, {}^{t+\Delta t}\varepsilon^p$

# POGLAVLJE 5

## Validacija i implementacija HASP modela

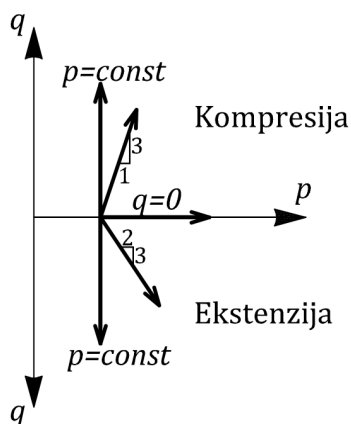
### 5.1 Uvod

U ovom poglavlju, mogućnosti HASP modela su demonstrirane kroz sposobnost modela da adekvatno opiše naponsko-deformacijsko ponašanje, promenu zapremine u dreniranim uslovima i pornog pritiska u nedreniranim uslovima zasićenih prekonsolidovanih glina, izloženih različitim putanjama napona. HASP model je implementiran u ABAQUS/Standard koristeći korisnički potprogram UMAT i numeričku proceduru za integraciju napona GPM prikazanu u Poglavlju 4. U nastavku je prikazana verifikacija postupka implementacije modela, kao i rezultati dobijeni iz numeričke analize metodom konačnih elemenata.

### 5.2 Validacija HASP modela

Validacija HASP modela izvršena je poređenjem rezultata simulacije laboratorijskih opita sa eksperimentalnim rezultatima iz literature sa različitim putanjama totalnih napona prikazanim na Slici 5.1. HASP model je formulisan da prevaziđe osnovne nedostatke MCC modela prilikom opisivanja konstitutivnih relacija prekonsolidovanih glina. Da bi se potvrdila efikasnost novog HASP modela, izvršeno je i poređenje sa predviđanjem MCC modela i značajan napredak je postignut u sledećim elementima:

1. Unutar površi tečenja MCC modela moguć je razvoj samo elastičnih deformacija. Međutim, ekperimentalno je utvrđeno da se plastične deformacije pojavljuju mnogo pre nego što naponska tačka dođe do površi tečenja. HASP model predviđa postepen razvoj plastičnih deformacija od samog početka deformisanja.
2. Nagli prelaz iz elastične u plastičnu oblast (MCC model) nije u skladu sa eksperimentalnim podacima koji pokazuju postepeno smanjenje krutosti prilikom opterećivanja, što se postiže HASP modelom.
3. HASP model predviđa postepen prelaz iz kompresije u ekspanziju pre nego što je dostignuta vršna smičuća čvrstoća, za razliku od MCC modela.
4. MCC model značajno precenjuje smičući napon pri lomu, kao i vrednost pornog pritiska za prekonsolidovana tla, dok se predviđanja HASP modela mnogo bolje slažu sa eksperimentalnim rezultatima.



**Slika 5.1** Putanje totalnih napona

### 5.2.1 Materijali korišćeni za validaciju

U postupku validacije izabrane su gline sa različitim stepenima prekonsolidacije, za koje u literaturi postoje dobro dokumentovana ispitivanja u triaksijalnom aparatu i za koje su već određeni parametri konstitutivnog MCC modela:

1. Cardiff Kaolin glina (prerađeni uzorci), Banerjee & Stipho (1979)
2. London glina (prerađeni uzorci), Gasparre (2005)
3. Hong Kong (marine) glina (prerađeni uzorci), Zhu & Yin (2000)
4. Kaolin (black) glina (prerađeni uzorci), Biarez & Hicher (1994)

5. Bangkok (stiff) glina (neporemećeni uzorci), Hassan (1976)
6. Fujinomori glina (prerađeni uzorci), Nakai & Hinokio (2004)

U Tabeli 5.1 prikazani su publikovani parametri MCC modela za prekonsolidovane gline. Navedeni parametri predstavljaju ujedno i parametre HASP modela.

**Tabela 5.1** Parametri MCC i HASP modela

	$\lambda$	$\kappa$	$M_c$	$M_e$	$\Gamma$	$\mu$
Cardiff glina	0.140	0.050	1.05	0.85	2.63	0.2
London glina	0.168	0.064	0.80	/	2.85	0.2
Hong Kong glina	0.200	0.044	1.26	1.26	2.5	0.2
Kaolin glina	0.230	0.030	0.81	/	3.44	0.2
Bangkok glina	0.100	0.020	1.13	/	2.85	0.2
Fujinomori glina	0.089	0.020	1.36	0.94	2.23	0.2

U Tabeli 5.1, parametri  $M_c$  i  $M_e$  predstavljaju nagib linije kritičnog stanja u naponskoj ravni u kompresiji i ekstenziji, respektivno.

Za simulaciju opita potrebno je definisati i inicijalne uslove za svaki opit i to početni koeficijent poroznosti (specifičnu zapreminu) i početni srednji efektivni napon. Vrednosti stepena prekonsolidacije sa inicijalnim uslovima za svaki opit dati su u Tabeli 5.2. Ako za navedene materijale u literaturi nije publikovan parametar koji definiše položaj linije kritičnog stanja u kompresionoj ravni  $\Gamma$  i početni koeficijent poroznosti  $e_0$ , vrednosti su usvojene tako da odgovaraju publikovanom stepenu prekonsolidacije u skladu sa jednačinama (3.51) i (3.80).

Cardiff glina, London glina i Hong Kong glina su ispitane u konsolidovano nedreniranom triaksijalnom opitu (CU), Kaolin glina i Bangkok glina su ispitane u konsolidovano dreniranom triaksijalnom opitu (CD), dok je Fujinomori glina ispitana u opitu sa konstantnim srednjim efektivnim naponom ( $p'=const$ ). Navedeni opiti su, koristeći relacije HASP i MCC modela prikazane u Poglavlju 3, simulirani u programu Excel koristeći Euler-ovu integraciju deformacija duž

poznate putanje napona. Proračunski koraci Euler-ove integracije deformacija duž poznate putanje napona prikazani su u tački 5.3.2.

**Tabela 5.2** Inicijalni uslovi za simulaciju triaksijalnih opita

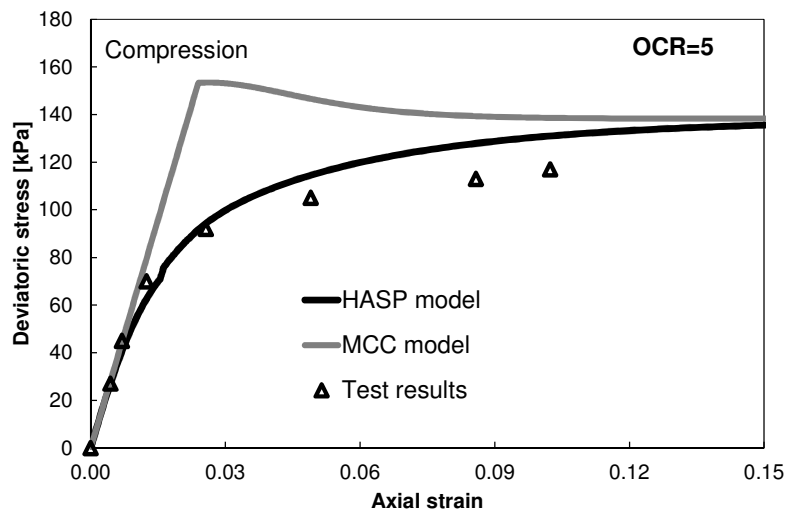
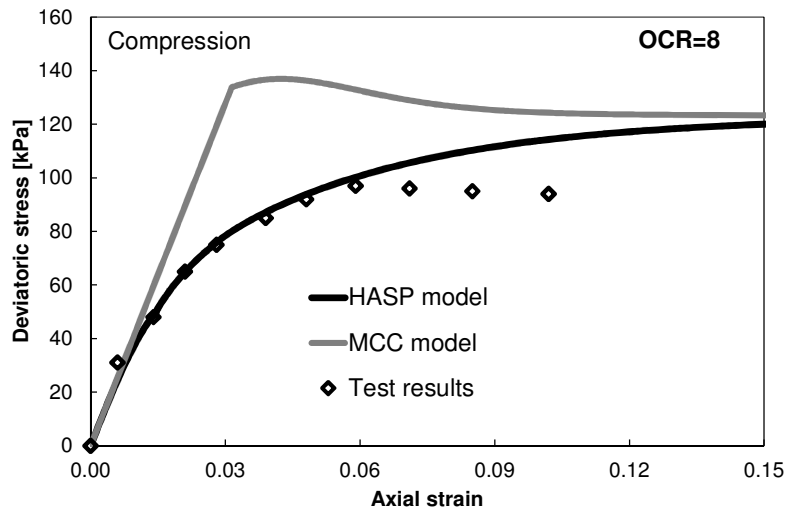
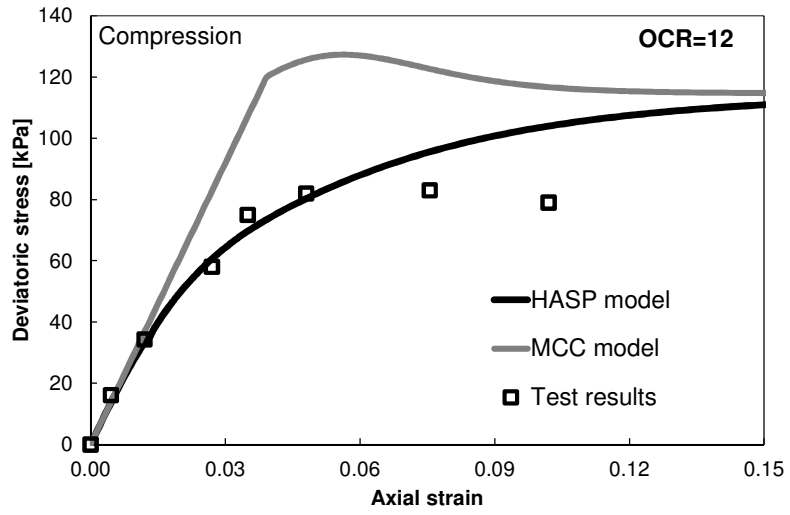
	<b>OCR</b>	<b><math>p'_{initial}</math> [kPa]</b>	<b><math>v_0</math></b>
<b>Cardiff glina</b> CU opit	<b>12</b>	34.5	1.973
	<b>8</b>	48.2	1.963
	<b>5</b>	73	1.947
	<b>2</b>	193	1.893
Kompresija	<b>10</b>	41.5	1.963
	<b>6</b>	92	1.895
<b>London glina</b> CU opit	<b>20</b>	30	2.040
	<b>2.25</b>	200	1.954
	<b>1</b>	317	1.952
<b>Hong Kong glina</b> CU opit	<b>8</b>	100	1.362
	<b>4</b>	100	1.470
Kompresija/Ekstenzija	<b>8</b>	100	2.09
	<b>4</b>	200	2.07
	<b>2</b>	400	2.05
	<b>1</b>	800	2.03
<b>Bangkok glina</b> CD opit	<b>24</b>	34	2.300
	<b>8</b>	103	2.275
	<b>2</b>	414	2.245
	<b>1.5</b>	552	2.240
<b>Fujinomori glina</b> <b><math>p' = \text{const}</math></b>	<b>8</b>	98	1.727
	<b>4</b>	196	1.713
	<b>2</b>	196	1.760
	<b>1</b>	196	1.810
Kompresija/Ekstenzija			

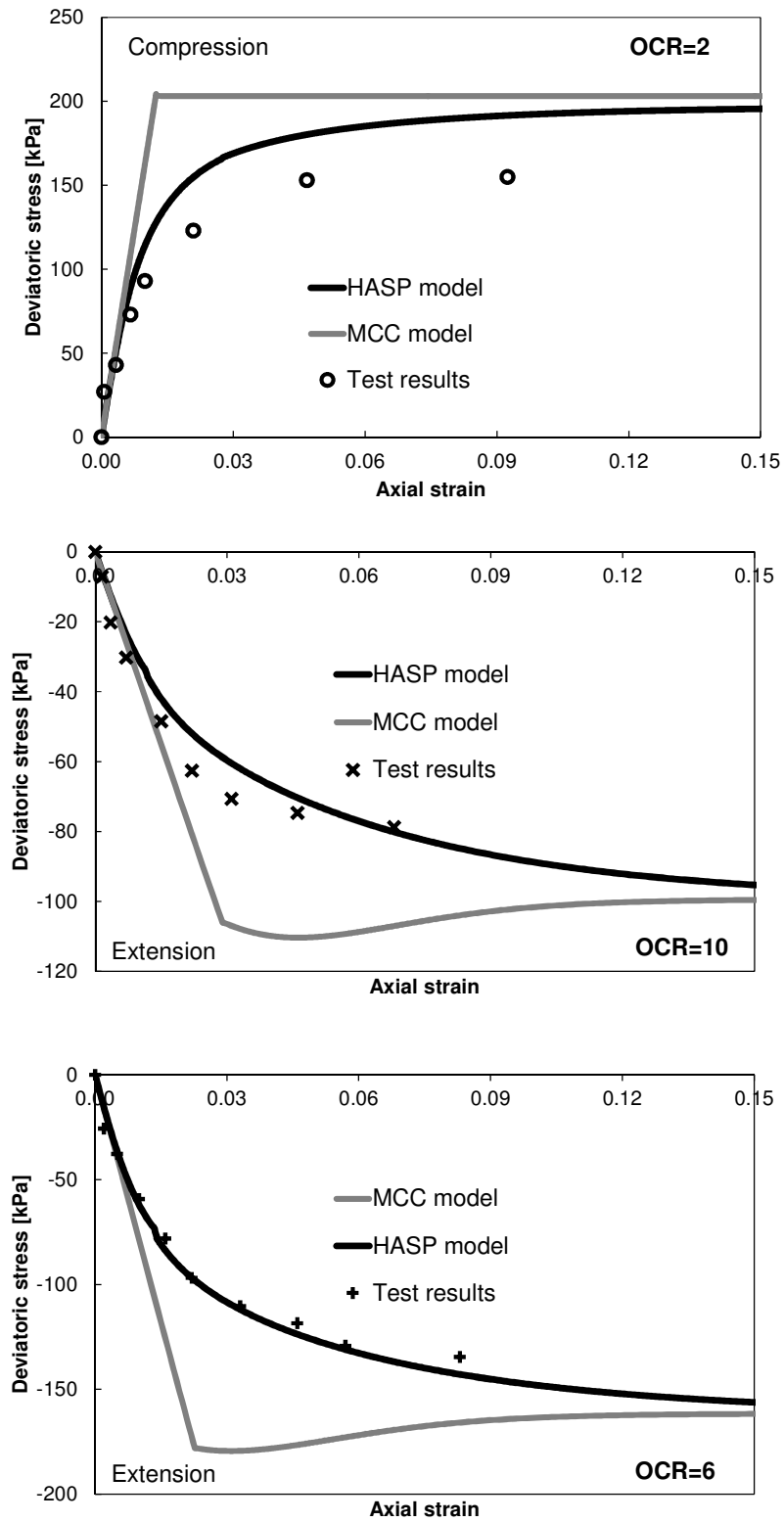
### 5.2.2 CU triaksijalni opiti, Cardiff Kaolin glina, Banerjee & Stipho (1979)

Prikazani su rezultati četiri nedrenirana opita triaksijalne kompresije na prerađenim uzorcima Cardiff Kaolin gline (LL=52%, PI=26%) sa stepenima prekonsolidacije 2, 5, 8, 12, kao i rezultati dva nedrenirana opita triaksijalne ekstenzije na prerađenim uzorcima sa stepenima prekonsolidacije 6 i 10. Detalji pripreme uzoraka su dati u Banerjee & Stipho (1978, 1979). Citirani autori su publikovali vrednosti materijalnih parametara  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $M_c$  and  $M_e$  prikazane u Tabeli 5.1, kao i približnu vrednost inicijalnog koeficijenta poroznosti od oko 0.95 za sve uzorke. Inicijalni uslovi prikazani su u Tabeli 5.2 za sve stepene prekonsolidacije.

Rezultati simulacije triaksijalnog opita koristeći HASP model i MCC model upoređeni su sa eksperimentalnim rezultatima na Slikama 5.2-5.4. Naponsko-deformacijske relacije dobijene HASP modelom pokazuju veoma dobro slaganje sa eksperimentalnim rezultatima, za sve stepene prekonsolidacije pri triaksijalnoj kompresiji i ekstenziji, Slika 5.4. Takođe, postoji dobro predviđanje generalne forme putanje efektivnih napona u nedreniranim uslovima u zavisnosti od stepena prekonsolidacije, koristeći HASP model, Slika 5.5a. Posledica toga je i veoma dobro predviđanje pornog pritiska. Putanje efektivnih napona za sve stepene prekonsolidacije normalizovane ekvivalentnim srednjim efektivnim naponom na liniji izotropne konsolidacije ICL ( $p'_e$ ) su prikazane na Slici 5.5b. Najveća odstupanja u odnosu na eksperimentalne rezultate uočavaju se pri stepenu prekonsolidacije 2, gde se dobija za oko 10-15% veći devijator napona. Promena parametra stanja za trenutnu naponsku tačku i imaginarnu naponsku tačku tokom procesa deformisanja prikazana je na Slici 5.6. Predviđa se da se kritično stanje dostiže pri smičućim deformacijama od oko 15%, Slika 5.7.

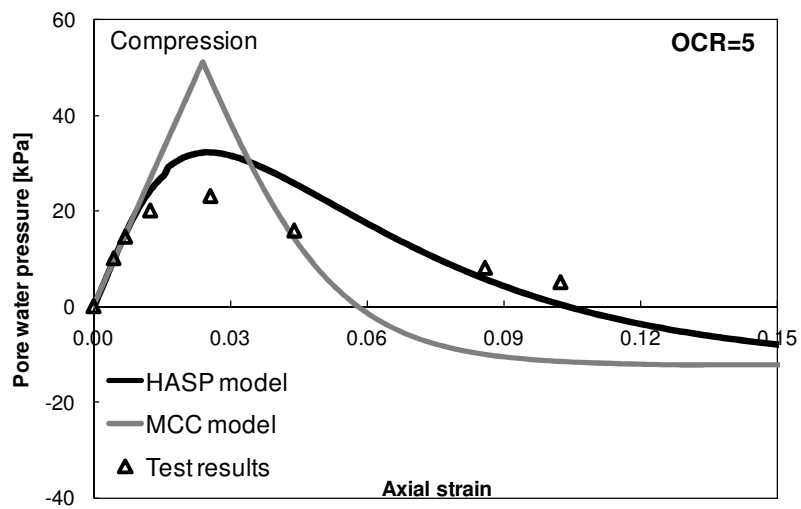
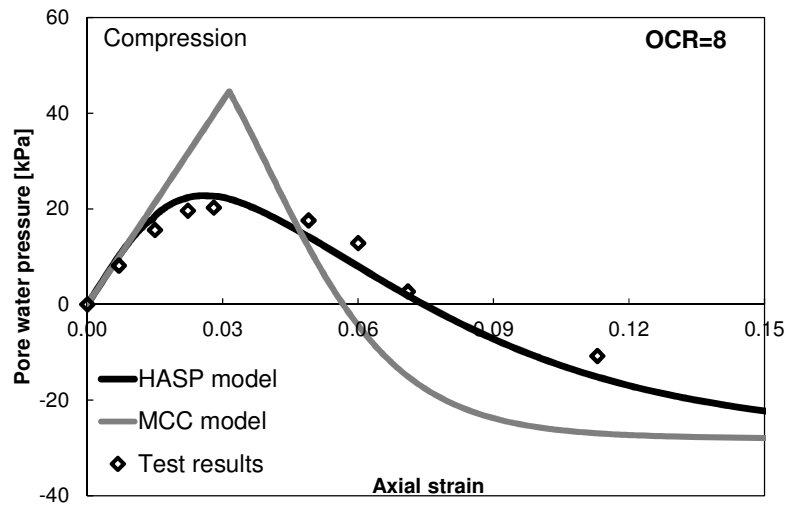
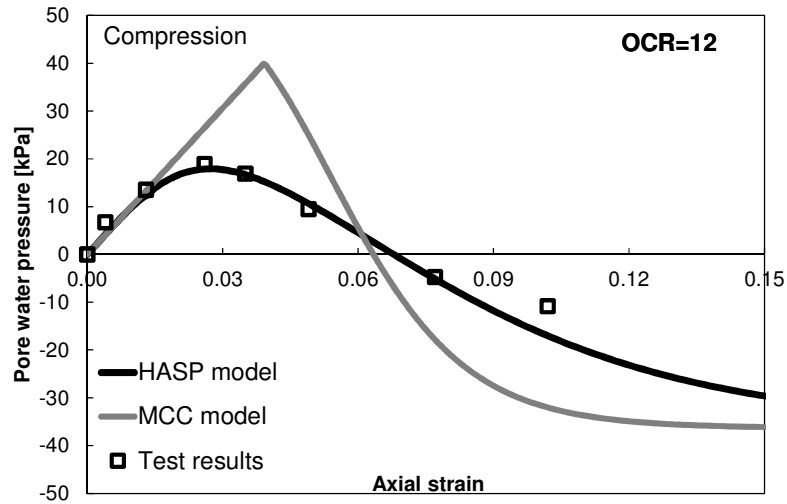
Može se uočiti da MCC model ne opisuje adekvatno ponašanje prekonsolidovane gline u nedreniranim uslovima. Vrednosti devijatora napona i pornog pritiska su znatno precenjene i odstupanja su veća što je veći stepen prekonsolidacije.

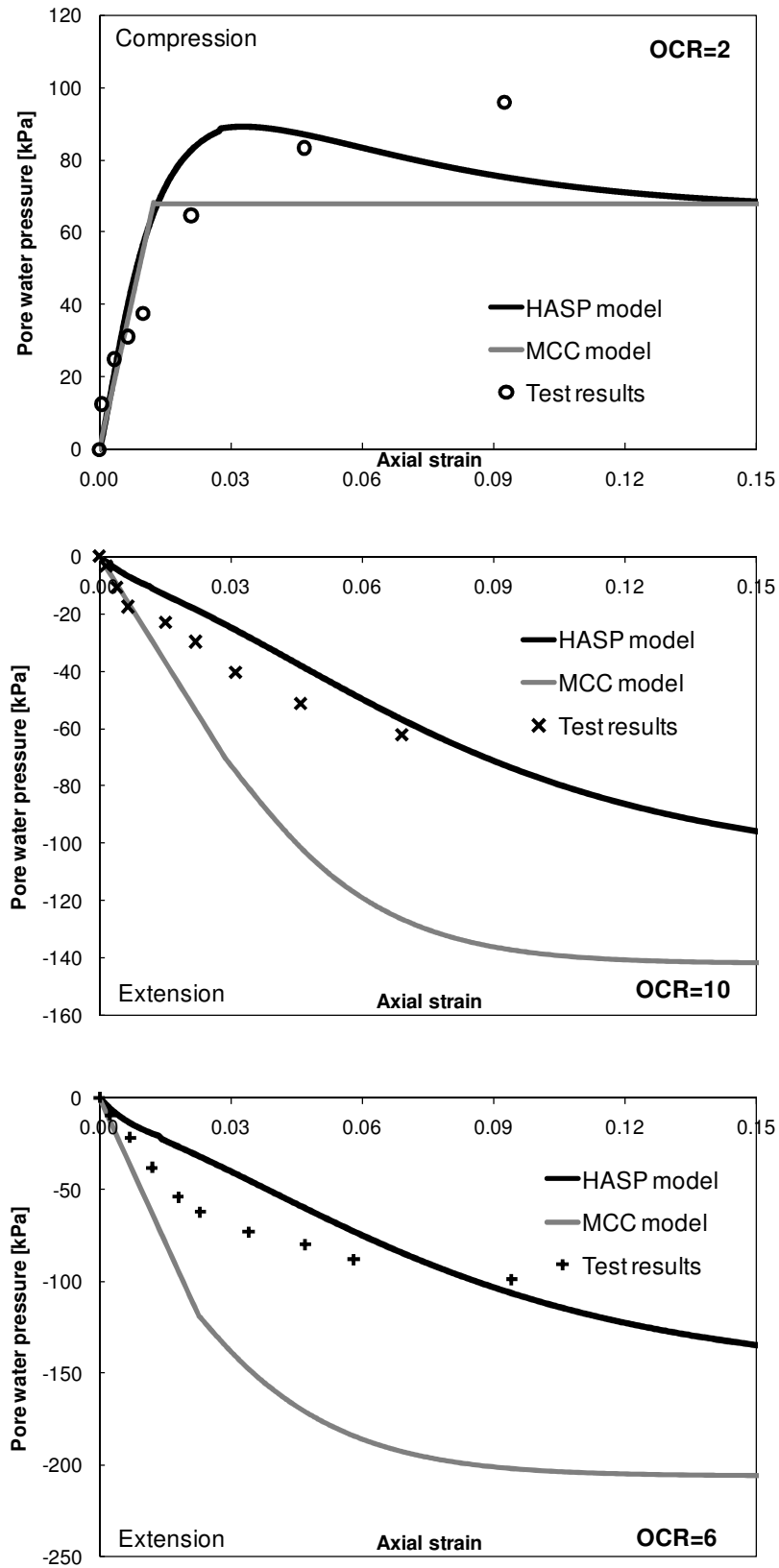




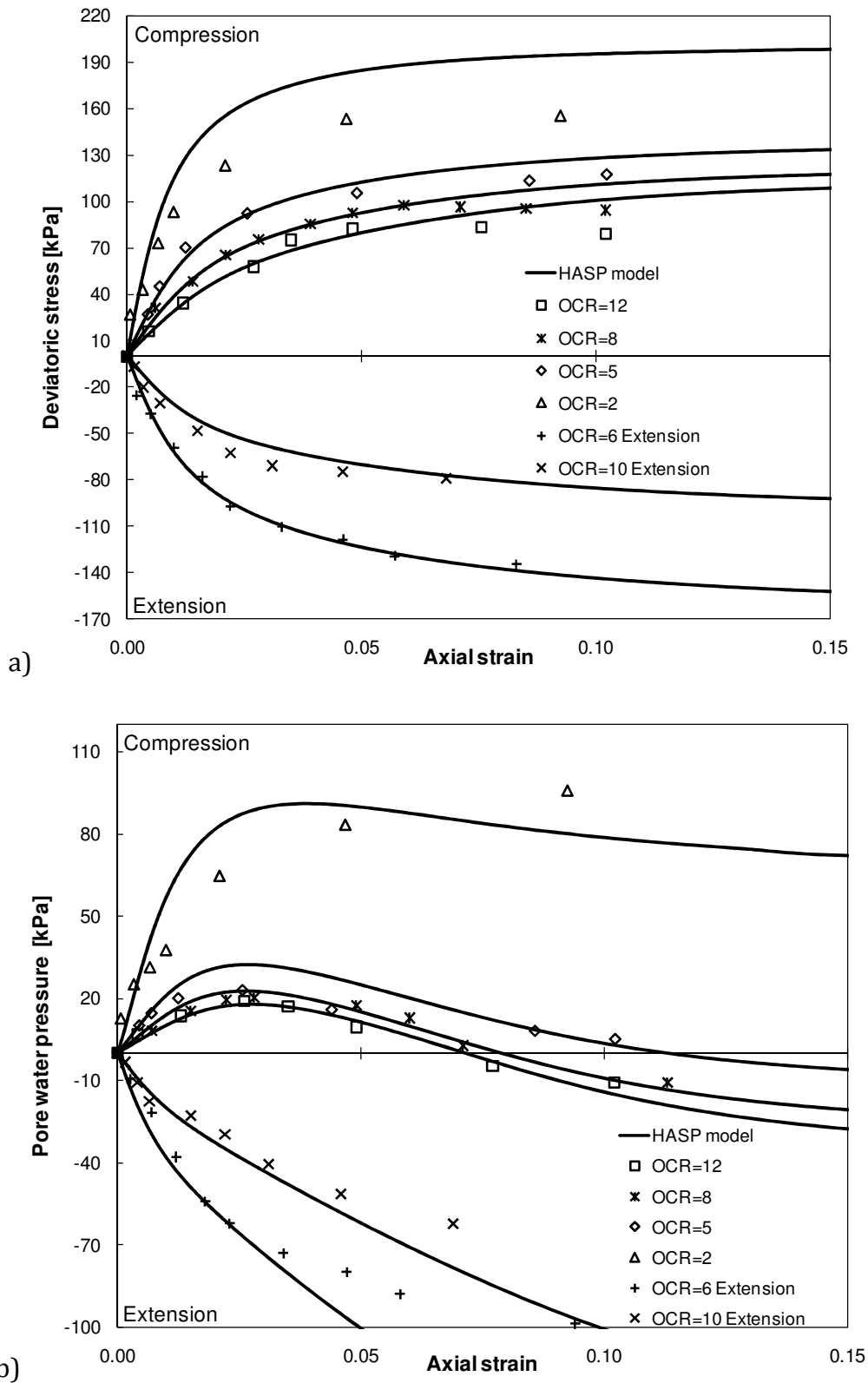
**Slika 5.2** Simulacija CU opita i eksperimentalni rezultati, naponsko–deformacijske krive za sve stepene prekonsolidacije, Cardiff glina



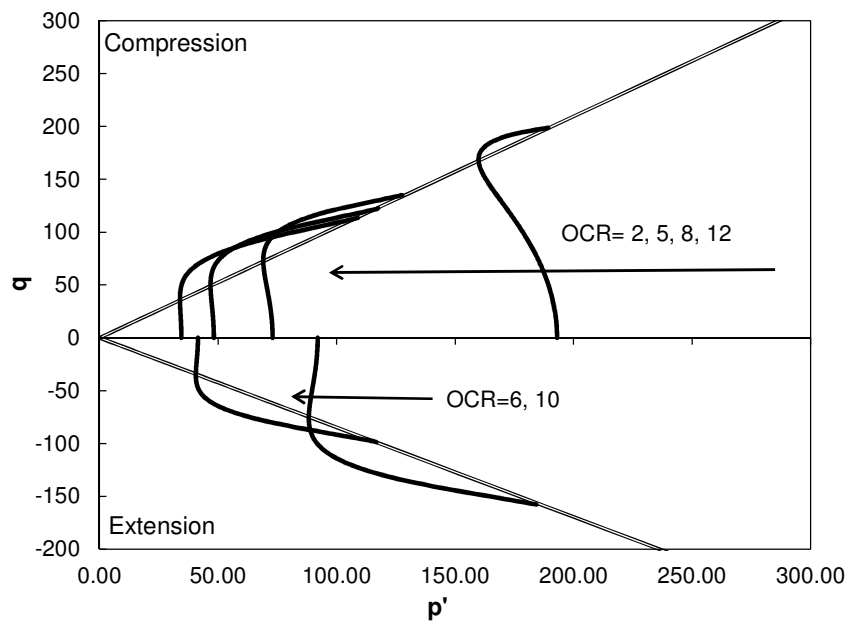




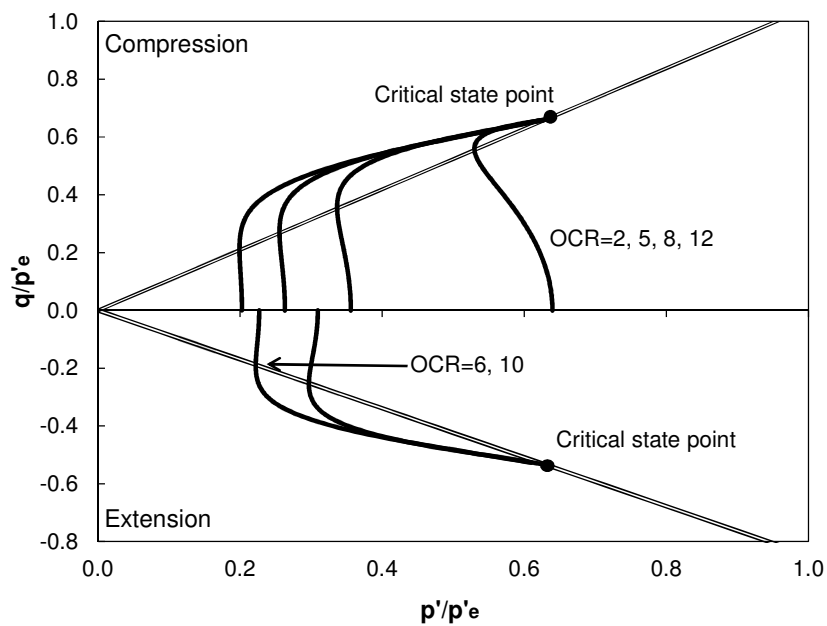
**Slika 5.3** Simulacija CU opita i eksperimentalni rezultati, porni pritisak za sve stepene prekonsolidacije, Cardiff glina



**Slika 5.4** Simulacija CU opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati, a) naponsko–deformacijske krive b) porni pritisak, Cardiff glina

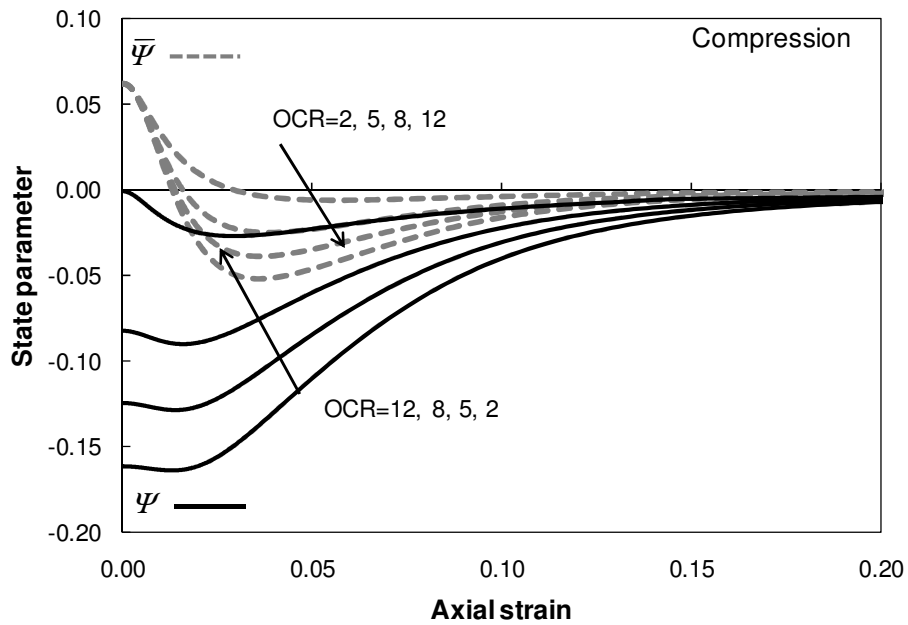


a)

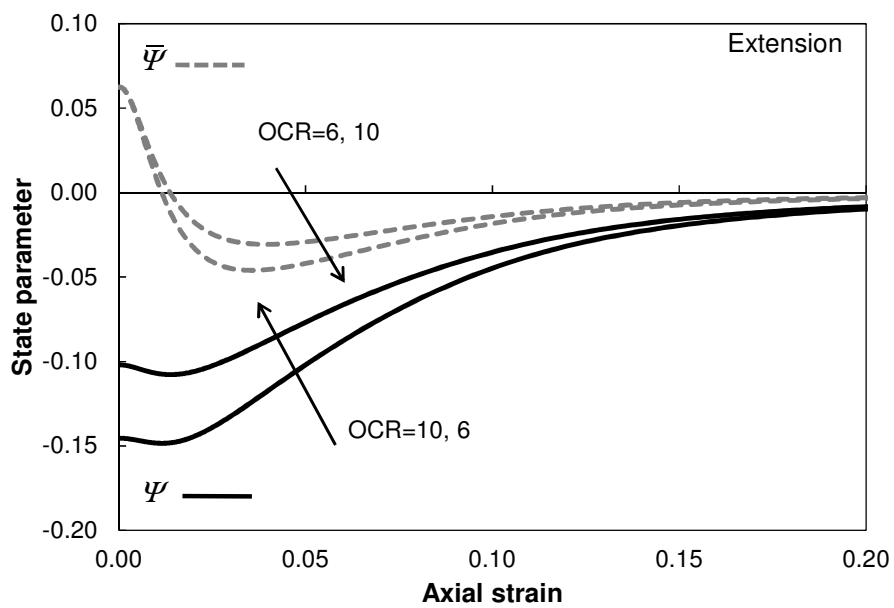


b)

**Slika 5.5** Simulacija CU opita HASP modelom, a) putanje efektivnih napona  
 b) normalizovane putanje efektivnih napona, Cardiff glina

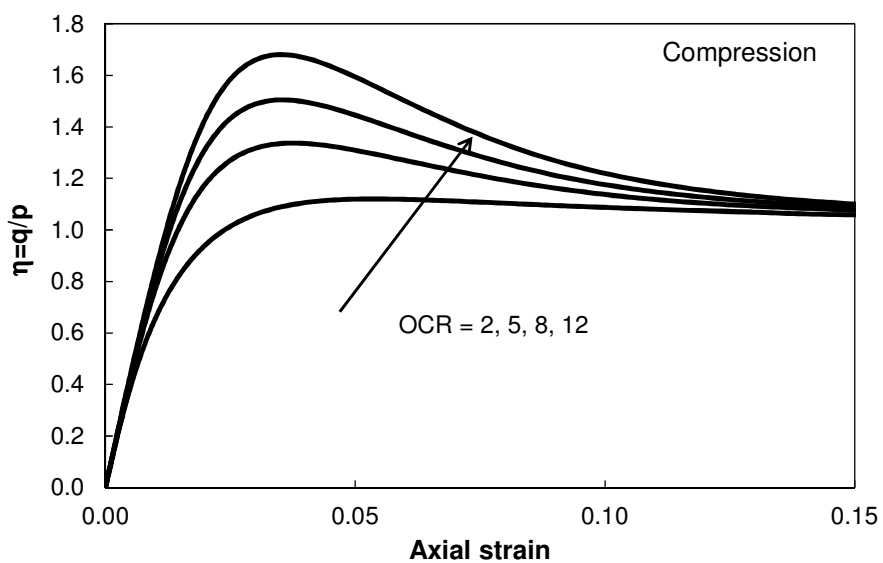


a)

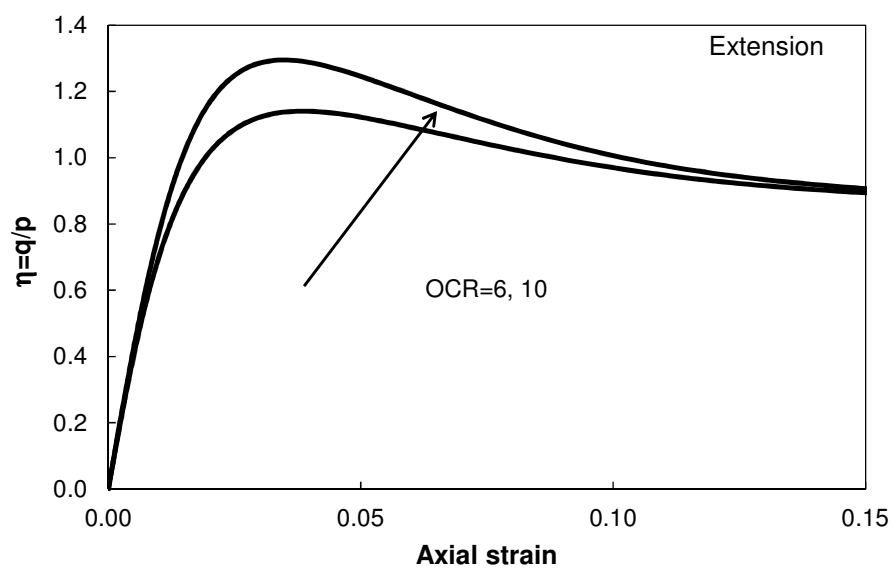


b)

**Slika 5.6** Simulacija CU opita HASP modelom, promena parametara stanja  $\Psi$  i  $\bar{\Psi}$   
 a) triaksijalna kompresija b) triaksijalna ekstenzija, Cardiff glina



a)



b)

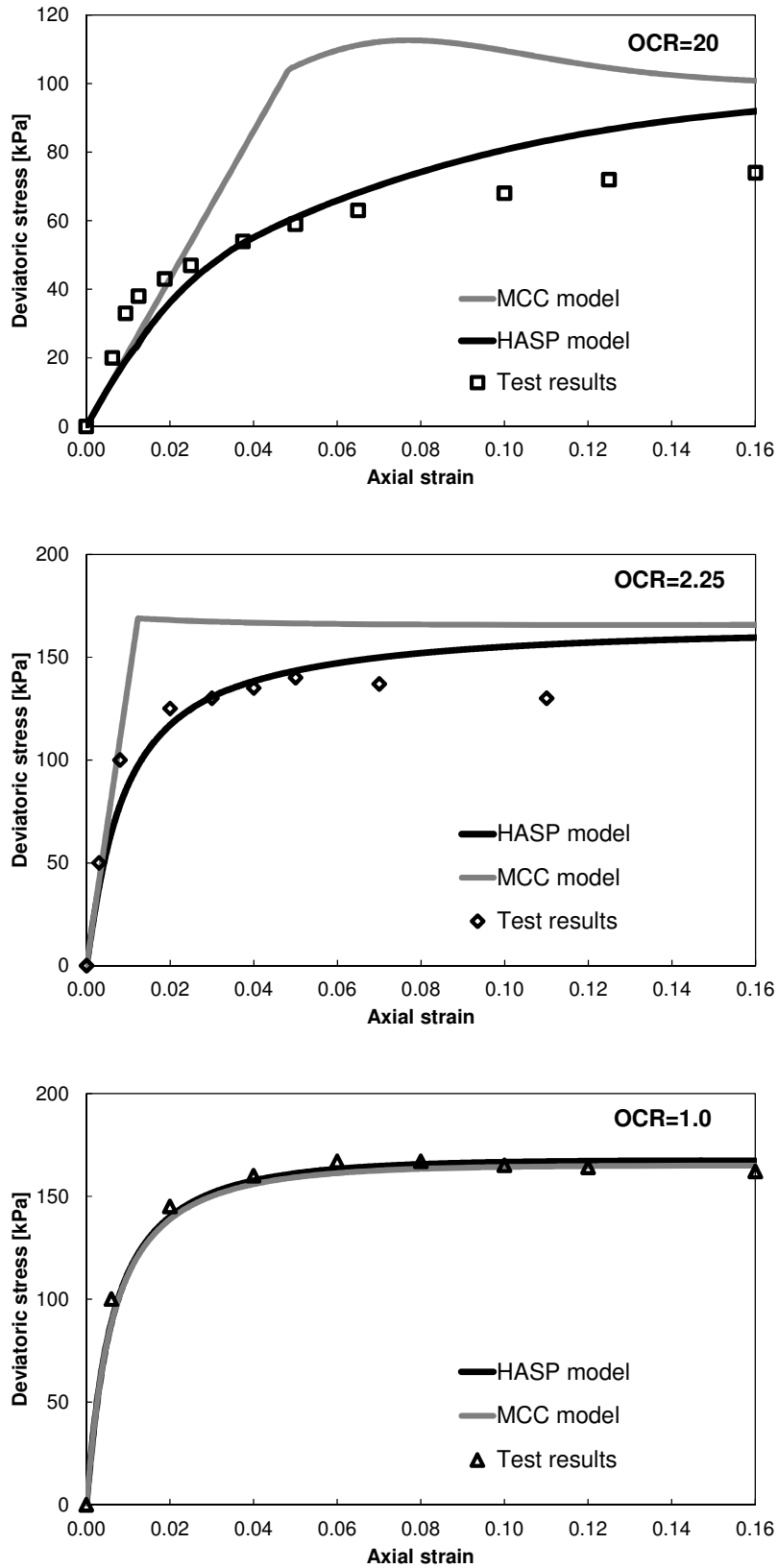
**Slika 5.7** Simulacija CU opita HASP modelom, promena naponskog odnosa  
a) triaksijalna kompresija b) triaksijalna ekstenzija, Cardiff glina

### 5.2.3 CU triaksijalni opiti, London glina, Gasparre (2005)

Rezultati ispitivanja London gline su preuzeti iz doktorske disertacije Apollonia Gasparre, Imperial College London (2005). Prerađeni uzorci London gline iz različitih litoloških sredina su ispitani u nedreniranom opitu triaksijalne kompresije. Uzorci su izotropno konsolidovani pod srednjim naponom  $\bar{p}'_0$  i zatim rasterećeni do vrednosti  $p'_{initial}$  pre faze smicanja. Za simulaciju opita su izabrani uzorci sa dubine 11-12 m, iz litološke sredine označene u disertaciji kao B2 (prašinate gline). Stepene prekonsolidacije su 20, 2.25 i 1. Karakteristike uzoraka i parametri modela prikazani su u Tabeli 5.1 i Tabeli 5.2, a rezultati simulacije na Slikama 5.8-5.13.

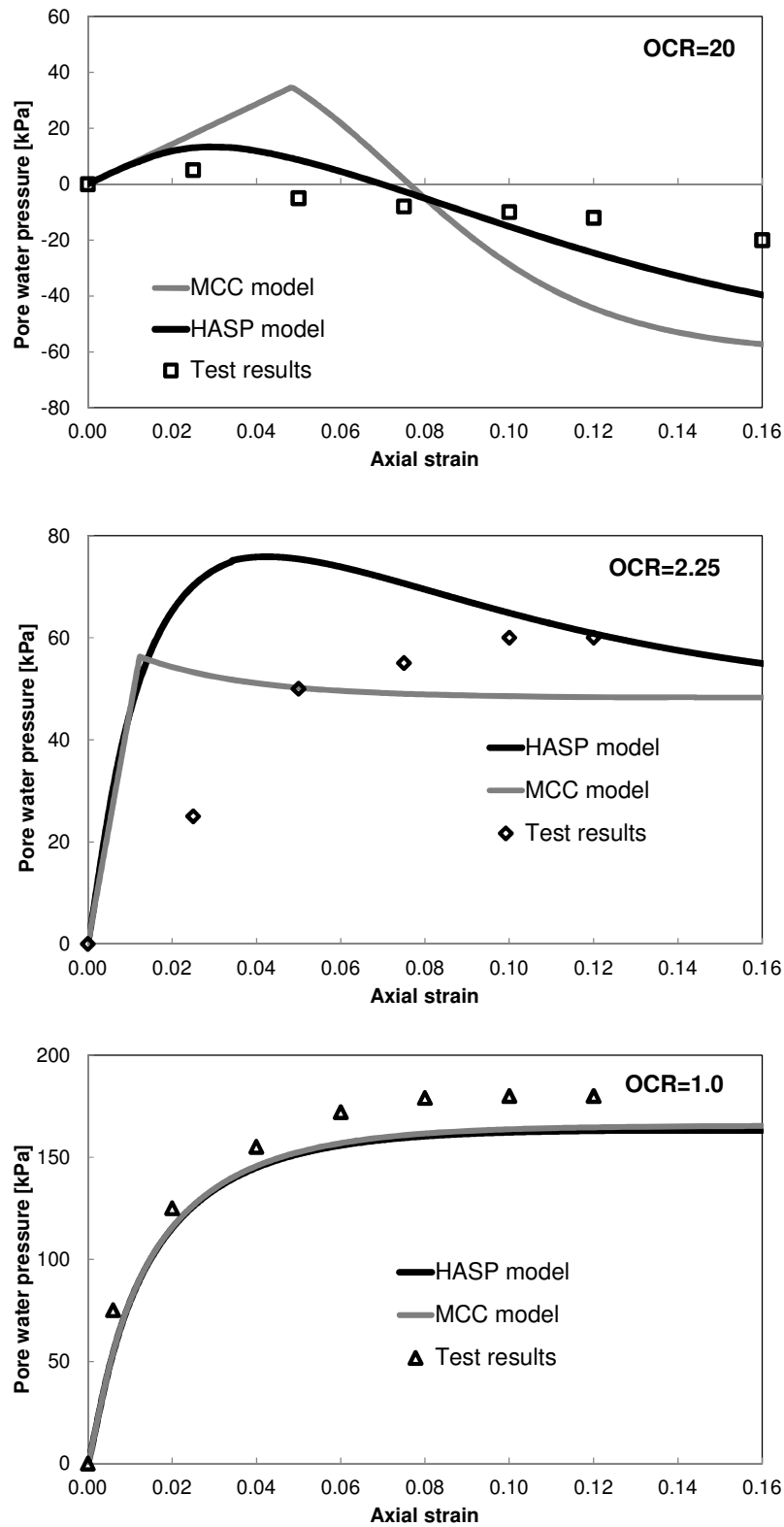
Uočava se veoma dobro slaganje rezultata dobijenih HASP modelom sa eksperimentalnim rezultatima za sve stepene prekonsolidacije. Za stepen prekonsolidacije 20 predviđa se nešto veća vrednost devijatora napona i pornog pritiska pri lomu, Slika 5.8. Predviđa se da se kritično stanje dostiže pri smičućim deformacijama od oko 20-25%, Slika 5.13.

Kao i u slučaju Cardiff gline, za veliki stepen prekonsolidacije, predviđanja MCC modela znatno odstupaju od eksperimentalnih rezultata, dok za normalno konsolidovane gline, MCC model, u koji se u tom slučaju transformiše i HASP model, dobro opisuje naponsko-deformacijske relacije i veličinu pornog pritiska.

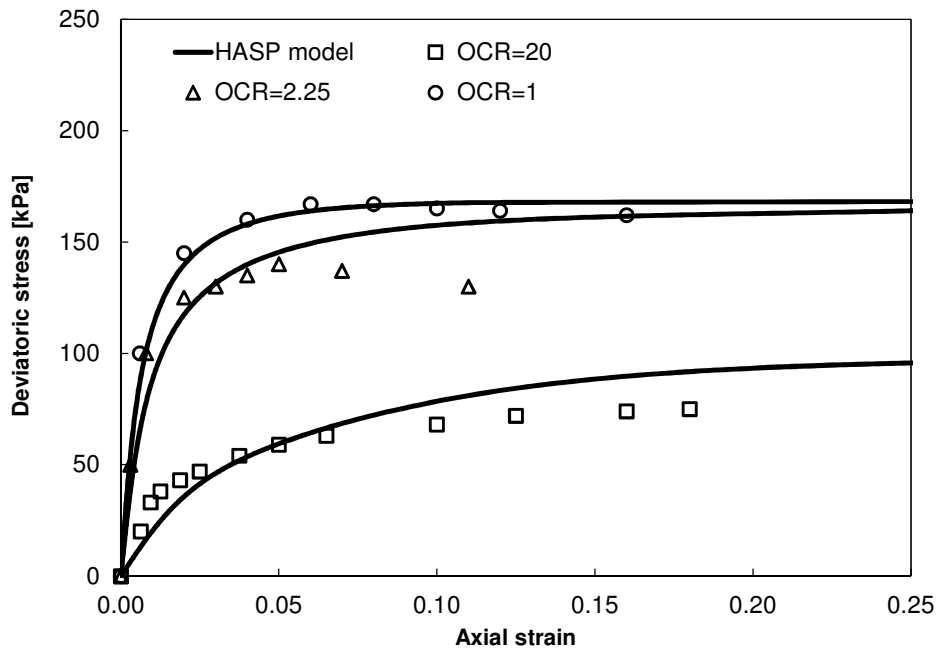


**Slika 5.8** Simulacija CU opita i eksperimentalni rezultati, naponsko–deformacijske krive za sve stepene prekonsolidacije, London glina

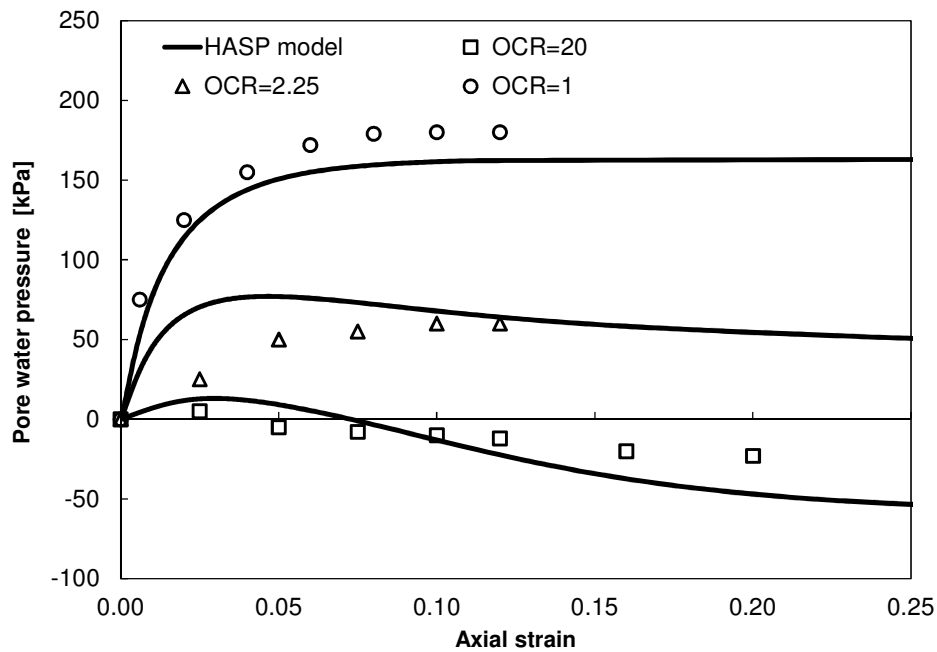




**Slika 5.9** Simulacija CU opita i eksperimentalni rezultati, porni pritisak za sve stepene prekonsolidacije, London glina

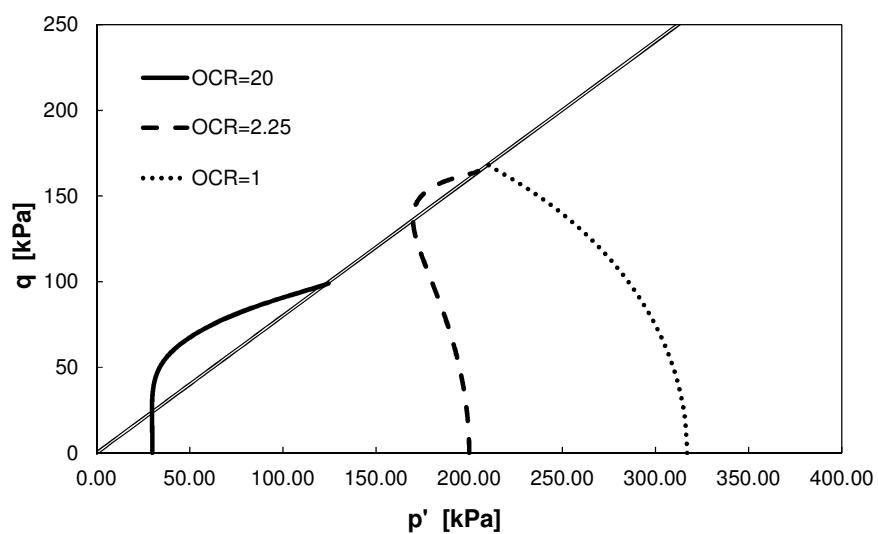


a)

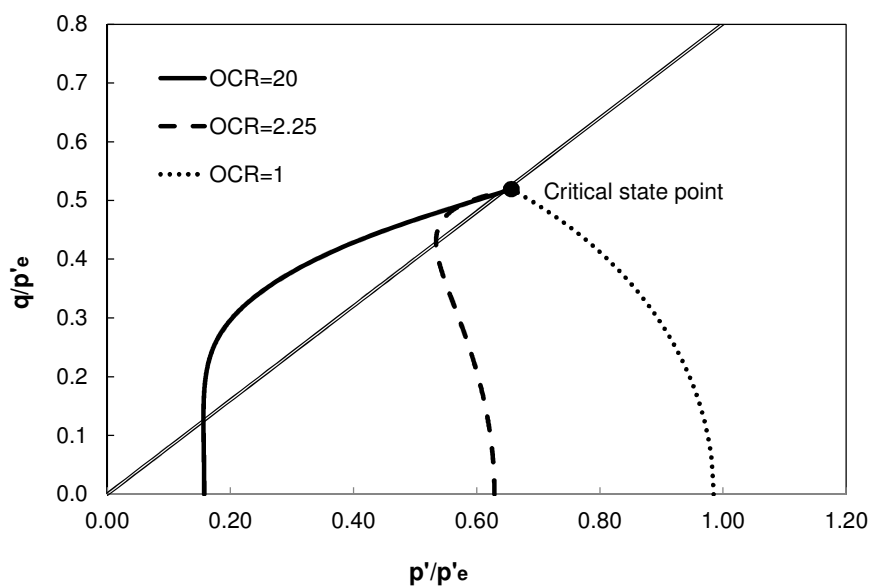


b)

**Slika 5.10** Simulacija CU opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati, a) naponsko–deformacijske krive b) porni pritisak, London glina

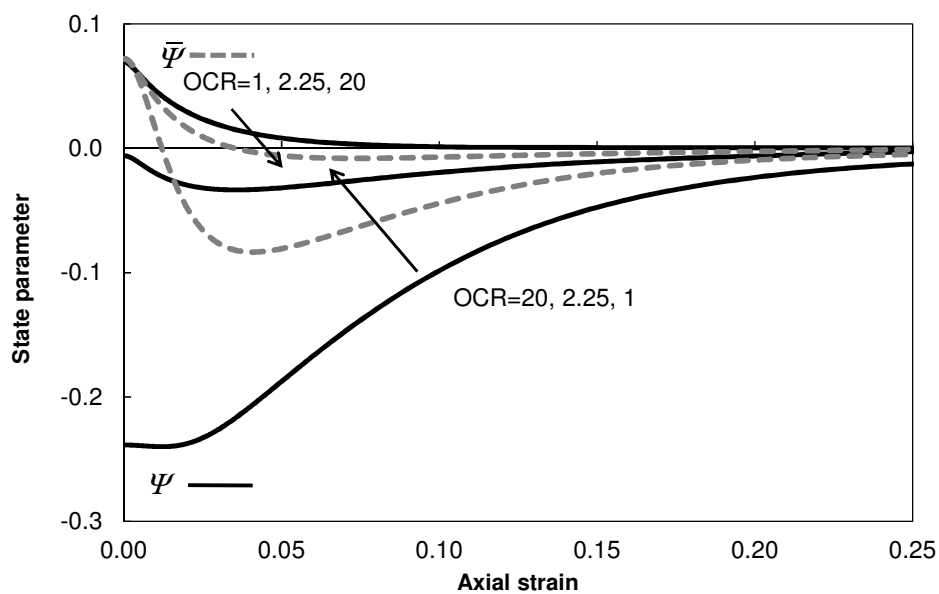


a)

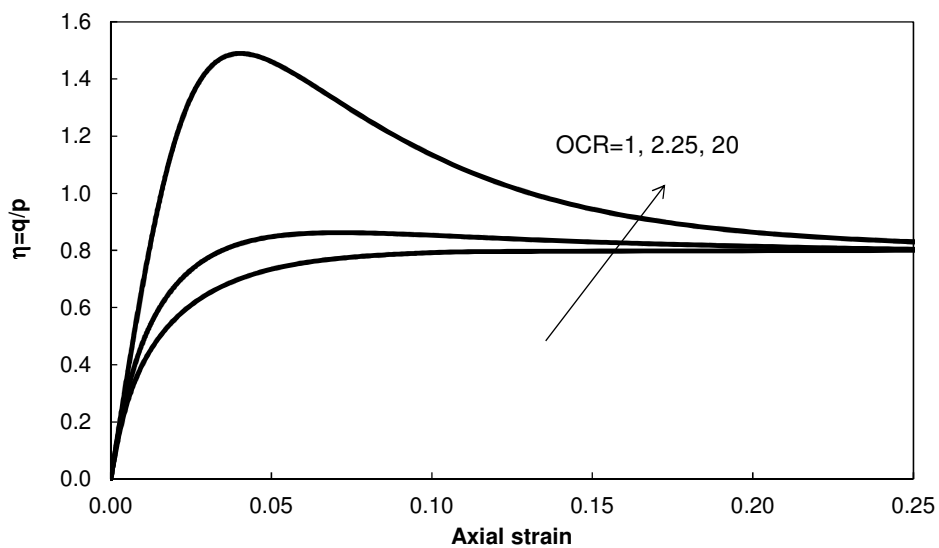


b)

**Slika 5.11** Simulacija CU opita HASP modelom, a) putanje efektivnih napona  
b) normalizovane putanje efektivnih napona, London glina



**Slika 5.12** Simulacija CU opita HASP modelom, promena parametara stanja  $\Psi$  i  $\bar{\Psi}$ , London glina

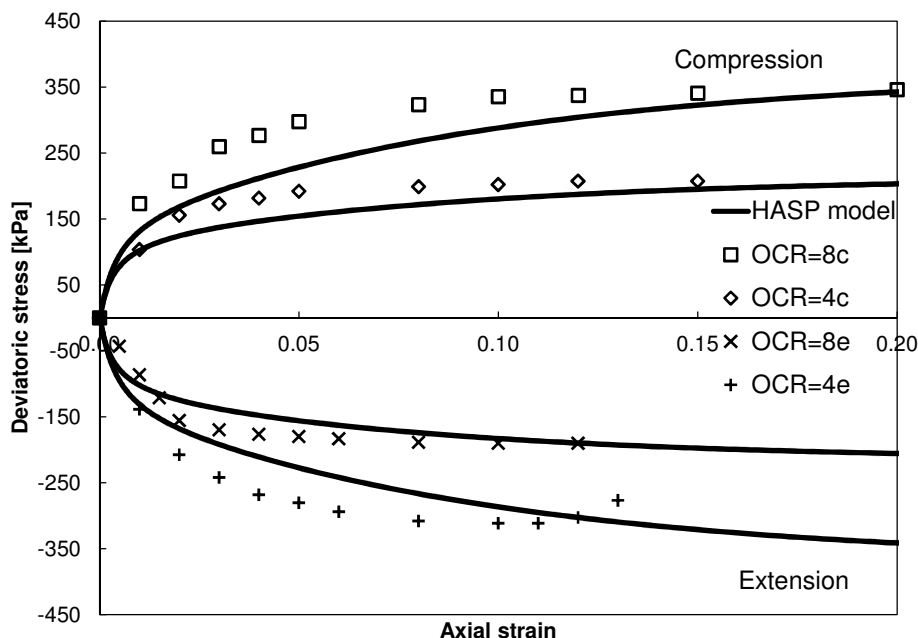


**Slika 5.13** Simulacija CU opita HASP modelom, promena naponskog odnosa, London glina

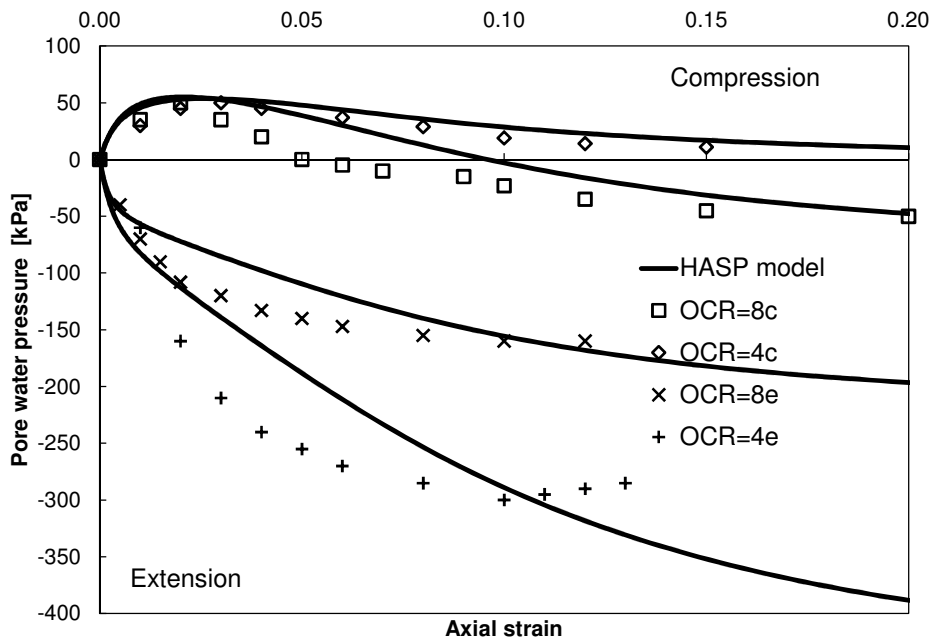
### 5.2.4 CU triaksijalni opiti, Hong Kong (marine) glina, Zhu & Yin (2000)

CU opite triaksijalne kompresije i ekstenzije na prerađenim uzorcima prekonsolidovane Hong Kong gline radili su Zhu & Yin (2000). Dva uzorka su izotropno konsolidovana pod srednjim naponom  $\bar{p}'_0=800$  kPa i dva uzorka pod srednjim naponom  $\bar{p}'_0=400$  kPa, a zatim je svaki uzorak rasterećen do vrednosti  $p'_{initial}=100$  kPa pre faze smicanja. Dva uzorka sa stepenima prekonsolidacije 8 i 4 su ispitana u CU opitu triaksijalne kompresije, dok su dva uzorka sa stepenima prekonsolidacije 8 i 4 ispitana u CU opitu triaksijalne ekstenzije. Karakteristike uzoraka i parametri HASP modela prikazani su u Tabeli 5.1 i Tabeli 5.2.

Rezultati simulacije i poređenje sa eksperimentalnim rezultatima prikazani su na Slikama 5.14-5.16. HASP model i u ovoj simulaciji pokazuje veoma dobro poklapanje sa eksperimentalnim rezultatima za oba stepena prekonsolidacije, za stanje triaksijalne kompresije i stanje triaksijalne ekstenzije.



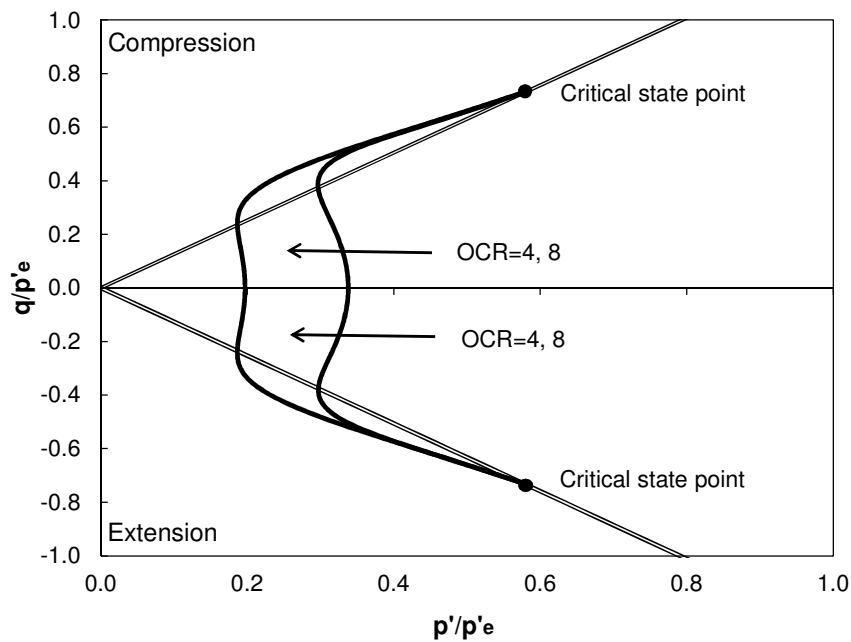
a)



b)

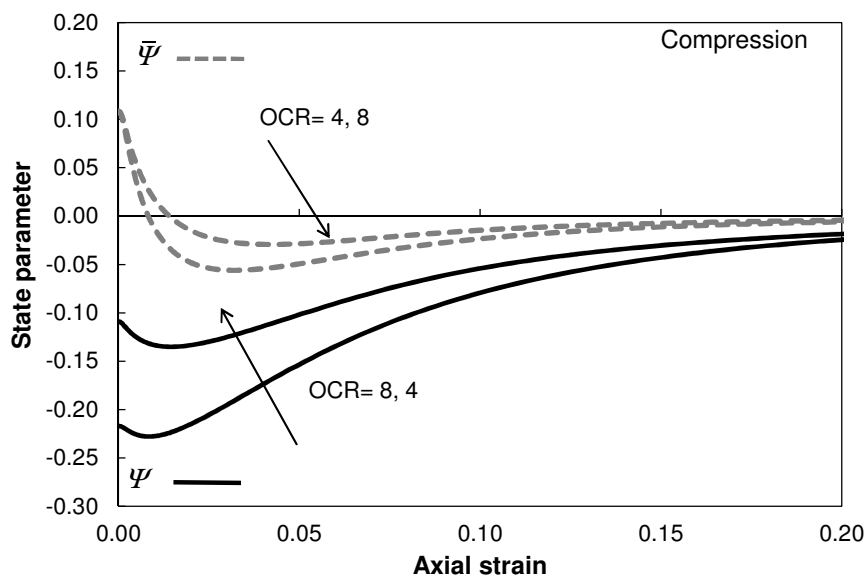
**Slika 5.14** Simulacija CU opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati,

a) naponsko–deformacijske krive b) porni pritisak, Hong Kong glina

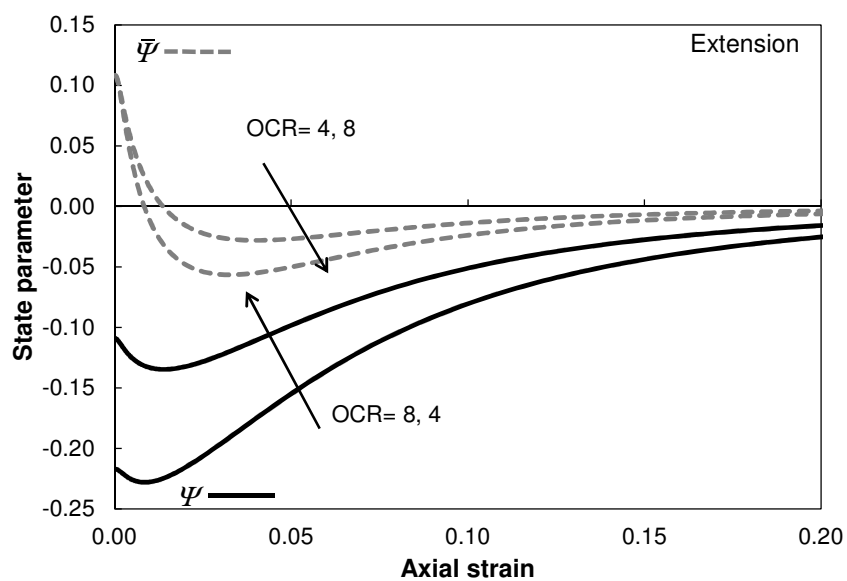


**Slika 5.15** Simulacija CU opita HASP modelom, a) putanje efektivnih napona

b) normalizovane putanje efektivnih napona, Hong Kong glina



a)



b)

**Slika 5.16** Simulacija CU opita HASP modelom, promena parametara stanja  $\Psi$  i  $\bar{\Psi}$   
Hong Kong glina

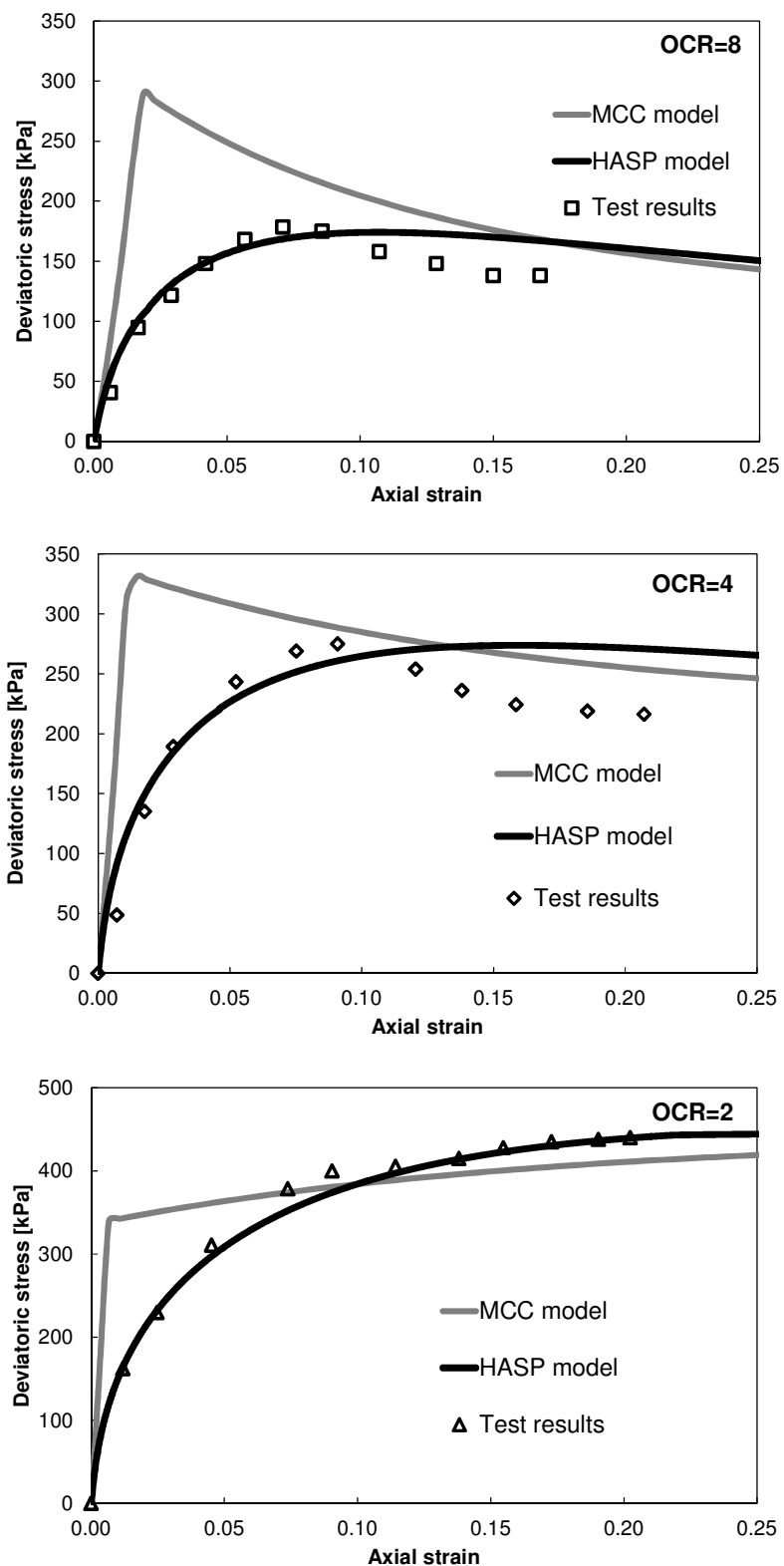
### 5.2.5 CD triaksijalni opiti, Kaolin glina, Biarez & Hicher (1994)

Opite triaksijalne kompresije na prerađenoj kaolinskoj glini radili su Zervoyannis i Bard, a rezultate opita su analizirali i publikovali Biarez & Hicher (1994). Uzorci su izotropno konsolidovani pod srednjim naponom  $\bar{p}'_0 = 800$  kPa i zatim rasterećeni do vrednosti  $p'_{initial} = 100, 200$  i  $400$  kPa pre faze smicanja u dreniranim uslovima. Stepene prekonsolidacije su 8, 4 i 2. Nagib linije kritičnog stanja je kalibrisan koristeći rezultate triaksijalnog opita na normalno konsolidovanoj glini. Parametri HASP modela i inicijalni uslovi prikazani su u Tabeli 5.1 i Tabeli 5.2, a rezultati simulacije na Slikama 5.17-5.21.

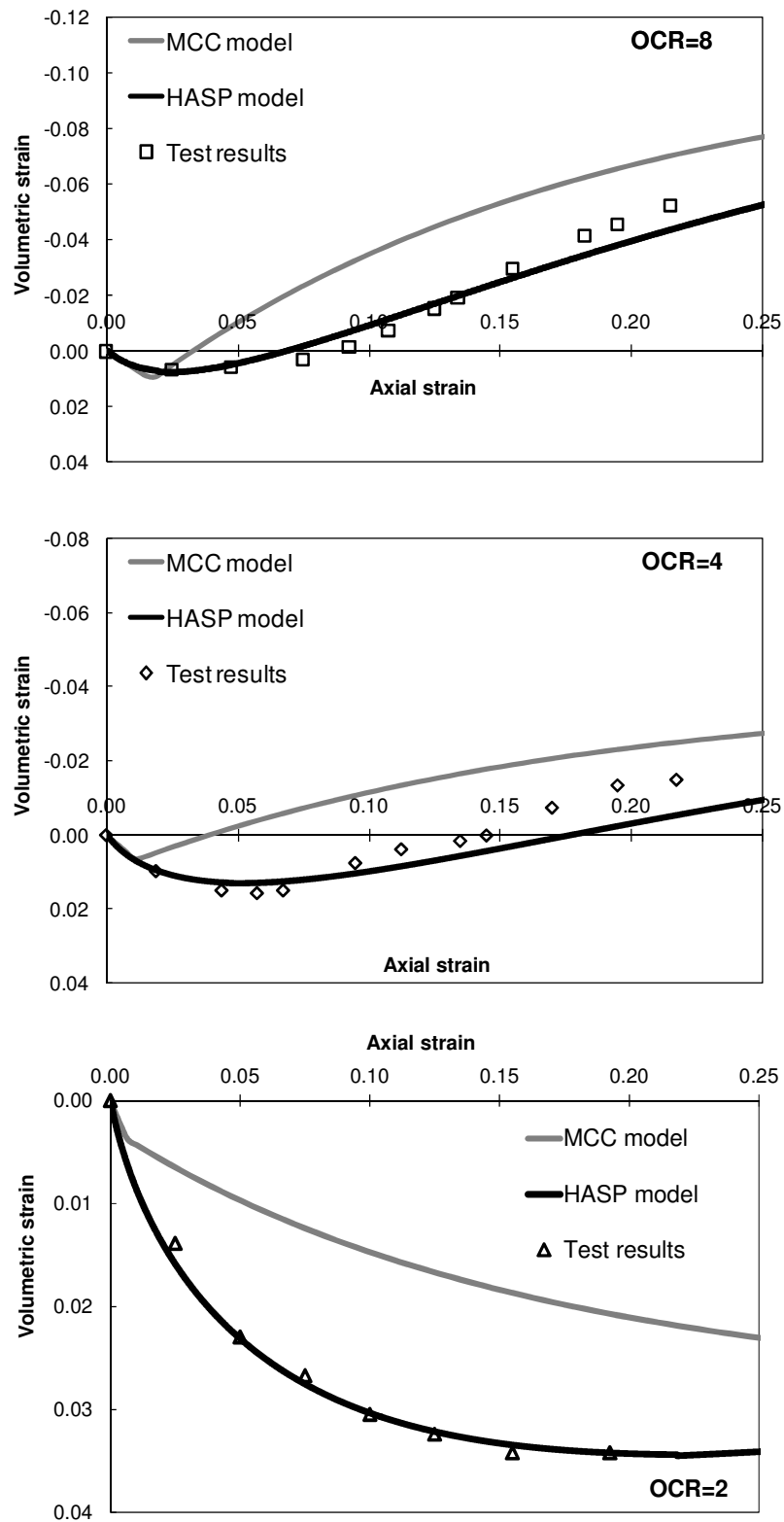
Ponašanje prekonsolidovanih glina tokom ojačanja u CD opitu je veoma dobro opisano HASP modelom. Za uzorke sa stepenima prekonsolidacije 8 i 4, HASP model predviđa pad čvrstoće – omekšanje pri deformacijama većim od oko 10%, Slika 5.17. Za jako prekonsolidovane uzorke ( $OCR=8, OCR=4$ ), nakon početne kompresije uzoraka dolazi do ekspanzije i povećanja zapremine, što je u skladu sa eksperimentalnim rezultatima i uočava se odlično predviđanje promene zapreminskih deformacija sa promenom smičućih deformacija, Slika 5.18. Osnovni nedostatak HASP modela u prikazanoj simulaciji je predviđanje nešto većih smičućih deformacija pri lomu. Kritično stanje se dostiže tek pri aksijalnim deformacijama koje iznose oko 35-40%, što nije u skladu sa publikovanim rezultatima.

Nedostaci MCC modela pri opisu mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina se mogu uočiti i u dreniranim uslovima. Vršna čvrstoća je precenjena i do dva puta.

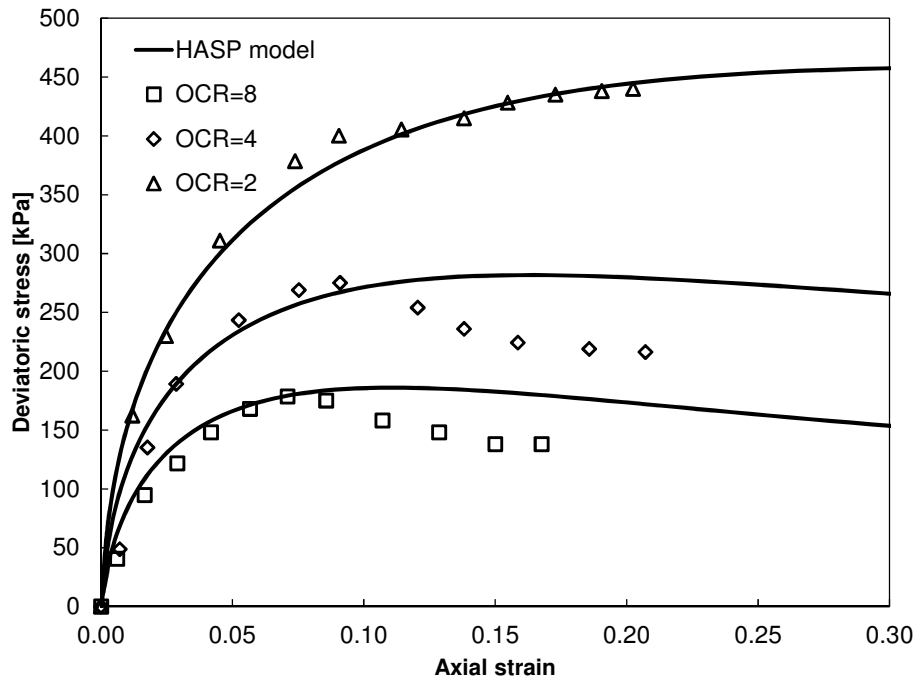




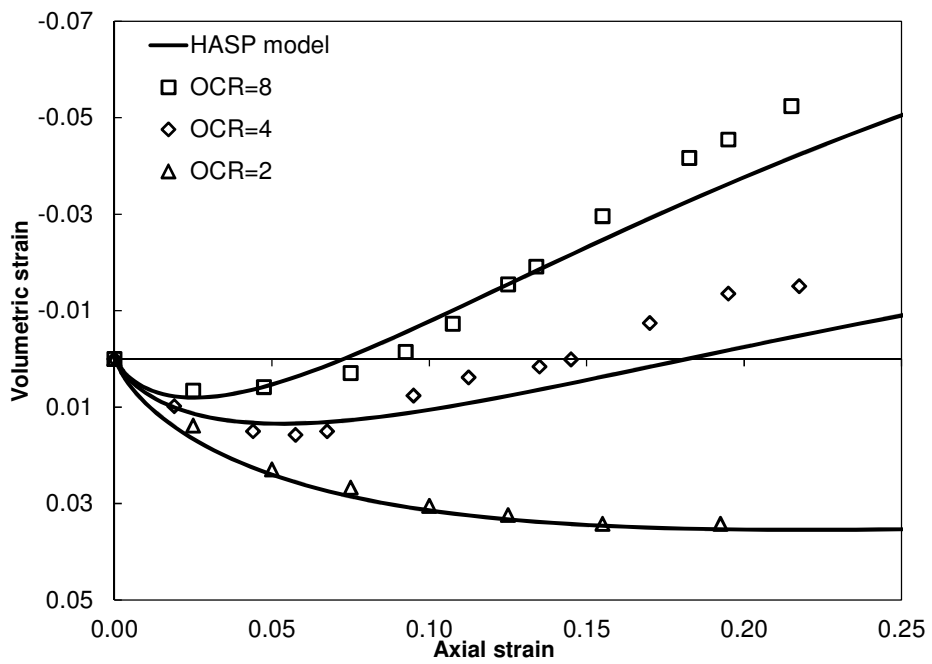
**Slika 5.17** Simulacija CD opita i eksperimentalni rezultati, naponsko-deformacijske krive za sve stepene prekonsolidacije, Kaolin glina



**Slika 5.18** Simulacija CD opita i eksperimentalni rezultati, promena zapreminske deformacije za sve stepene prekonsolidacije, Kaolin glina

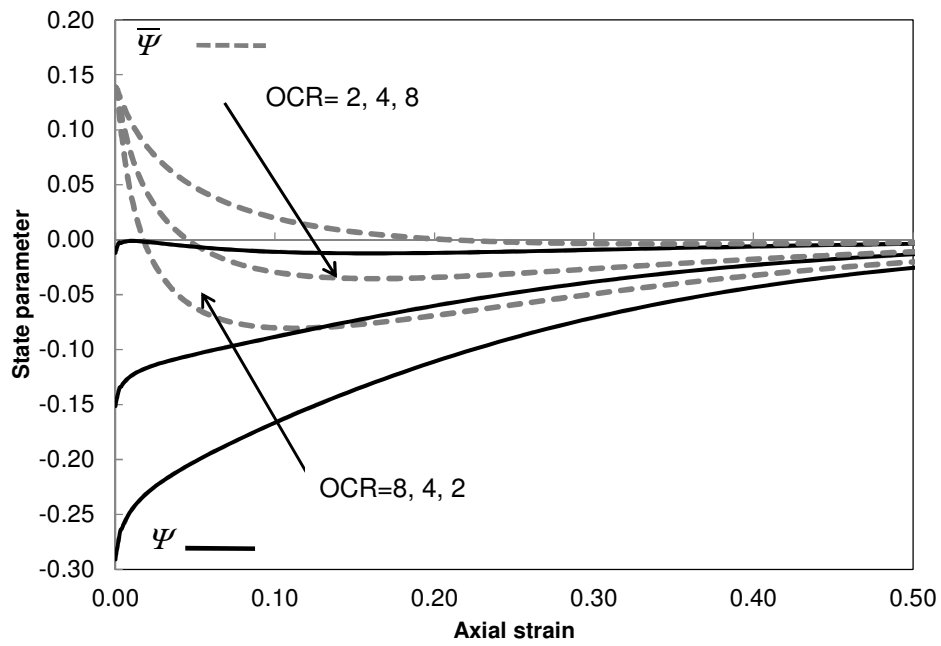


a)

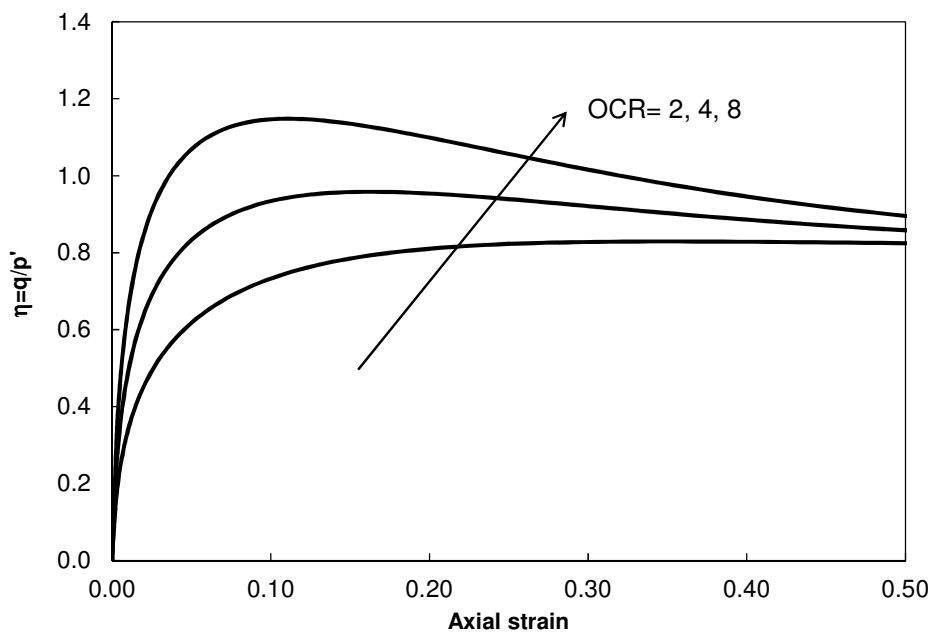


b)

**Slika 5.19** Simulacija CD opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati, a) naponsko–deformacijske krive b) zapreminske deformacije, Kaolin glina



**Slika 5.20** Simulacija CD opita HASP modelom, promena parametara stanja  $\Psi$  i  $\bar{\Psi}$   
Kaolin glina

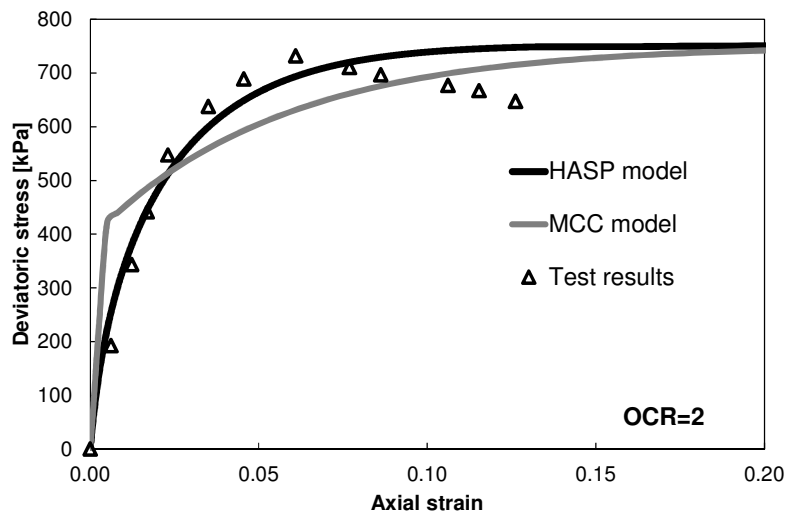
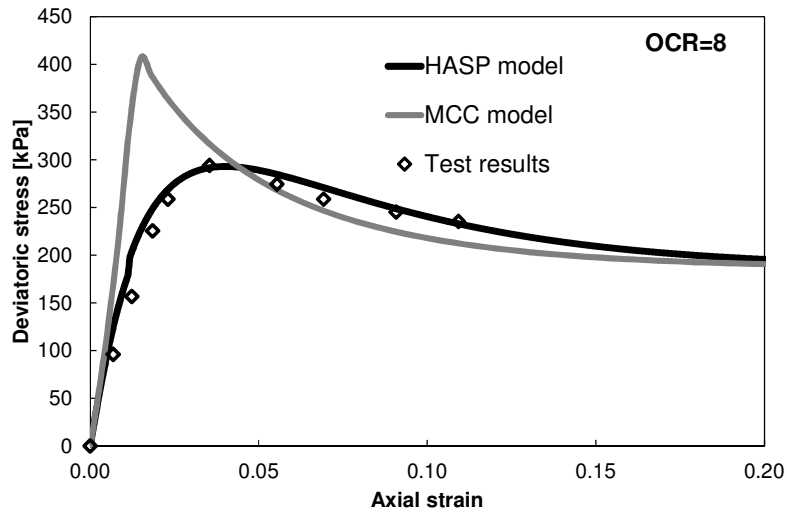
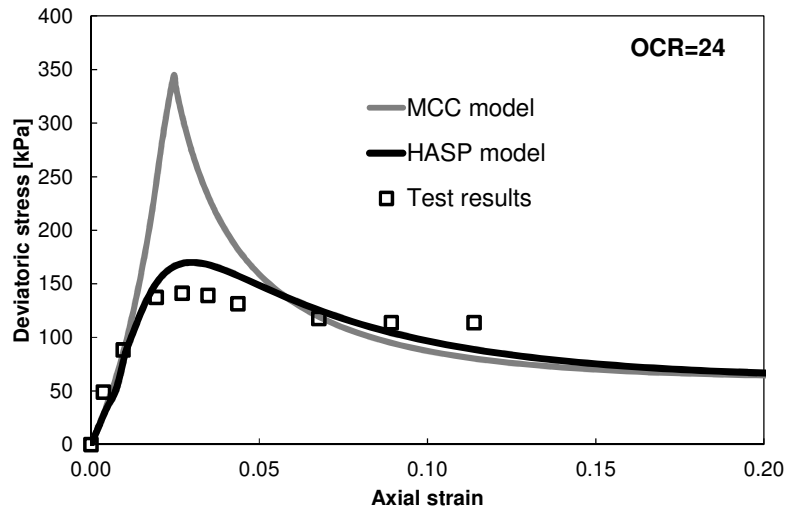


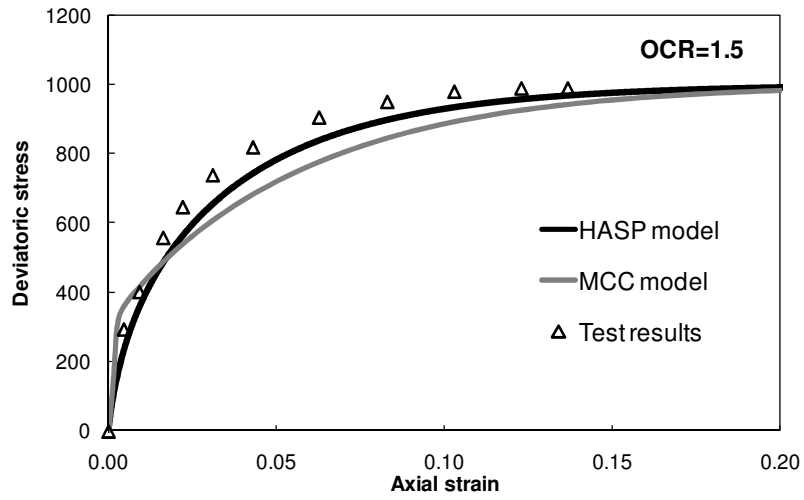
**Slika 5.21** Simulacija CD opita HASP modelom, promena naponskog odnosa,  
Kaolin glina

### 5.2.6 CD triaksijalni opiti, Bangkok (stiff) glina, Hassan (1976)

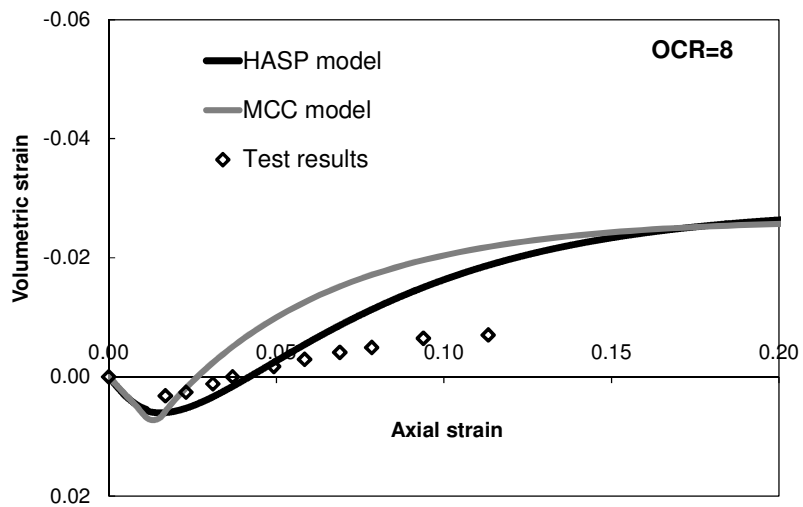
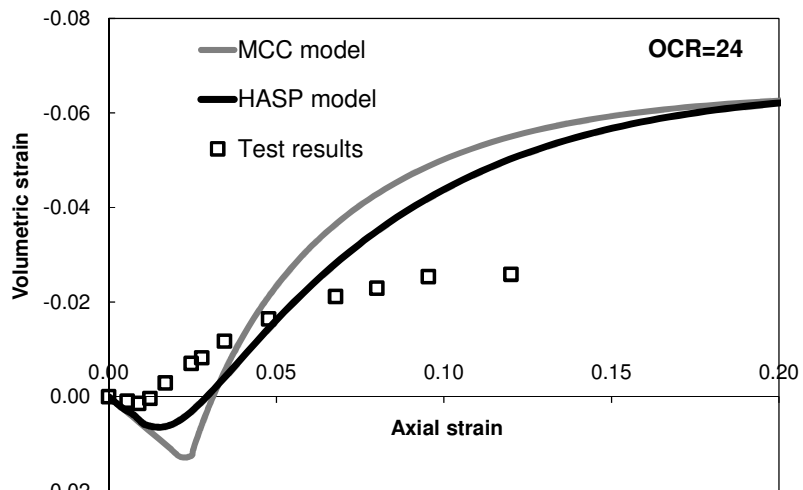
Seriju dreniranih opita triaksijalne kompresije na neporemećenim uzorcima tvrde Bangkok gline uradio je Hassan (1976) tokom izrade magistarske teze, a rezultati su reinterpetirani u Surarak i dr. (1994). Ispitani su neporemećeni uzorci sa dubine 17.4-18.0 m. Publikovane vrednosti efektivnog ugla smičuće čvrstoće i kohezije su  $\varphi' = 26.3^\circ$  i  $c' = 32.8$  kN/m<sup>2</sup>. Uzimajući u obzir relativno veliku vrednost prividne kohezije, kao i da je anvelopa loma za prekonsolidovane tvrde materijale zakrivljena (nelinearna anvelopa), usvojena je nešto veća vrednost efektivnog ugla smičuće čvrstoće pri konstantnoj zapremini  $\varphi_{cv}' = 28.5^\circ$ . Nagib linije kritičnog stanja je izračunat u skladu sa jednačinom (3.109) i iznosi  $M = 1.13$ . Publikovani su modifikovani kompresioni parametri, i to modifikovani indeks stišljivosti  $\lambda^*$  i modifikovani indeks bubrenja  $\kappa^*$  (nagibi linije izotropne konsolidacije i linije bubrenja podeljeni specifičnom zapreminom) i iznose  $\lambda^* = 0.032-0.049$  i  $\kappa^* = 0.007-0.012$ . Vrednosti kompresionih parametara usvojeni za simulaciju su prikazane u Tabeli 5.1. Srednji efektivni naponi (svestrani naponi)  $p'_{initial}$  i inicijalne vrednosti specifične zapremine pre faze smicanja su prikazani u Tabeli 5.2, a rezultati simulacije na Slikama 5.22-5.26.

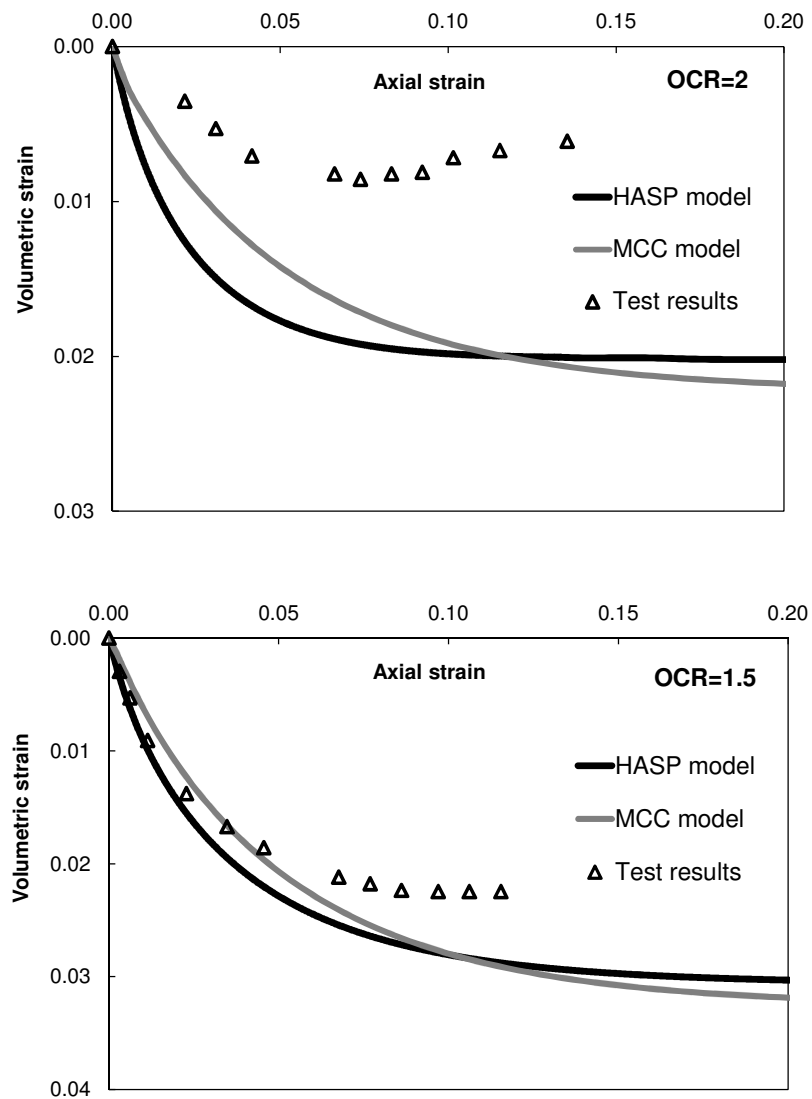
Za razliku od prethodnih simulacija gde je poređenje vršeno sa testovima na prerađenim uzorcima gline, za koje važi da postoji izvesna zakonitost u ponašanju pod opterećenjem, u ovom slučaju je dato poređenje sa rezultatima opita na neporemećenim uzorcima. Može se konstatovati da je slaganje sa eksperimentalnim rezultatima veoma dobro za naponsko – deformacijski odnos. Uočava se pad čvrstoće – omekšanje za uzorke koji su ispitani pod manjim svestranim naponom. Postoji dobro predviđanje aksijalne deformacije (3-4%) pri kojoj se postiže vršna smičuća čvrstoća. Veća odstupanja od eksperimentalnih rezultata zabeležena su kod promene zapreminskih deformacija sa promenom smičućih deformacija, naročito za uzorak ispitan pod svestranim naponom od 414 kPa. Takav rezultat nije neočekivan, s obzirom na nehomogeno polje deformacija, usled ispucalosti uzoraka prekonsolidovane gline uzetih sa velike dubine. Predviđa se da se kritično stanje dostiže pri smičućim deformacijama od oko 15-20%.





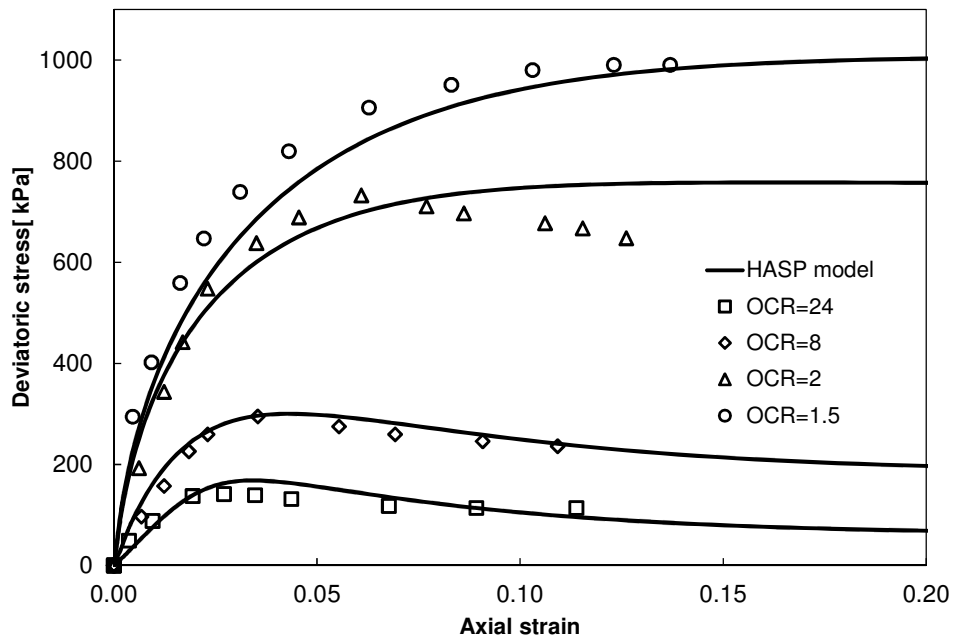
Slika 5.22 Simulacija CD opita i eksperimentalni rezultati, naponsko-deformacijske krive za sve stepene prekonsolidacije, Bangkok glina



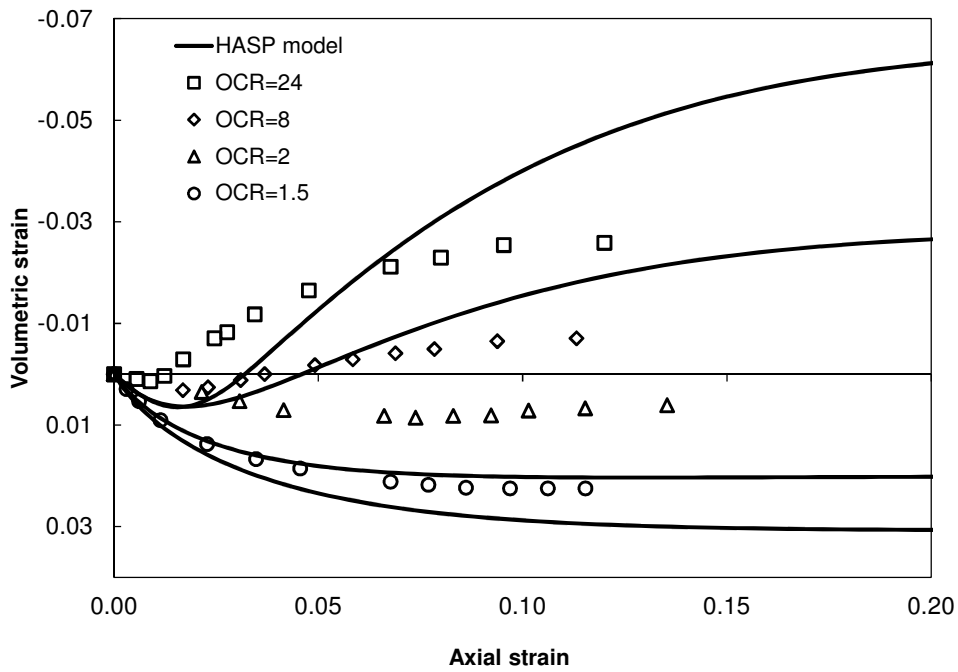


**Slika 5.23** Simulacija CD opita i eksperimentalni rezultati, promena zapreminske deformacije za sve stepene prekonsolidacije, Bangkok glina



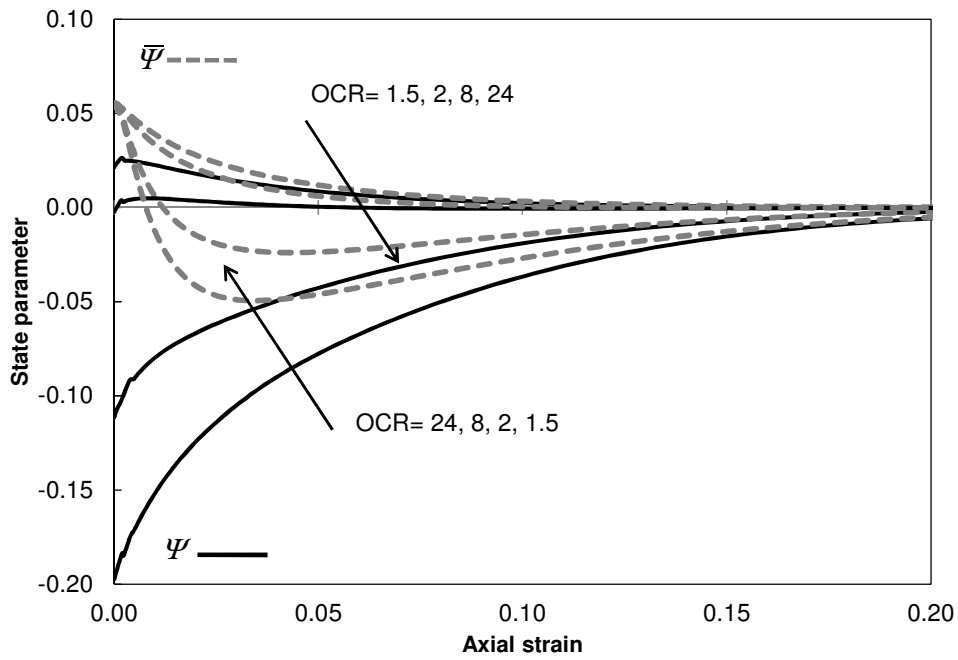


a)

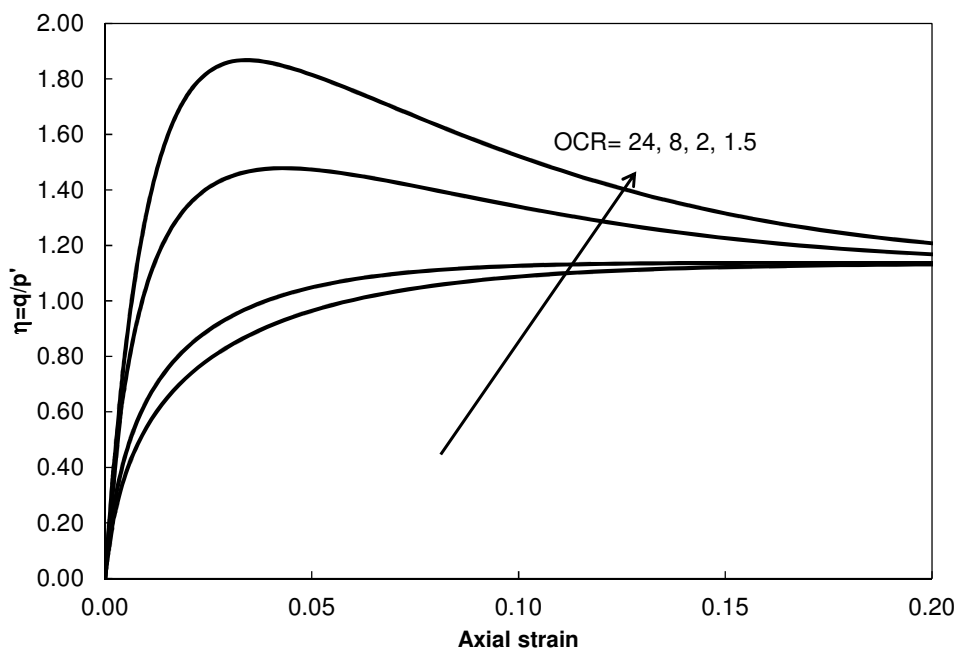


b)

**Slika 5.24** Simulacija CD opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati,  
 a) naponsko–deformacijske krive b) zapreminske deformacije,  
 Bangkok glina



**Slika 5.25** Simulacija CD opita HASP modelom, promena parametara stanja  $\Psi$  i  $\bar{\Psi}$   
Bangkok glina

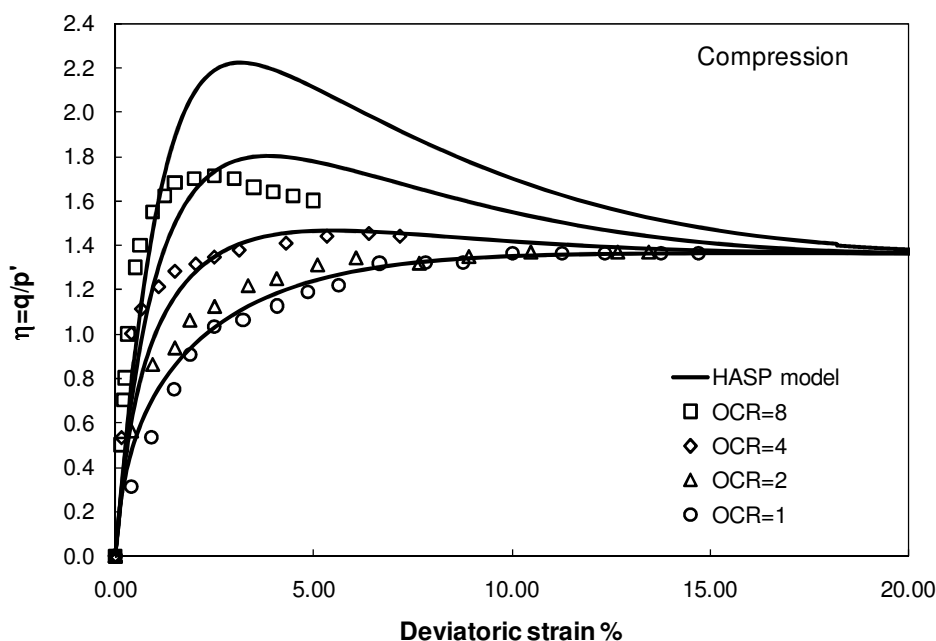


**Slika 5.26** Simulacija CD opita HASP modelom, promena naponskog odnosa,  
Bangkok glina

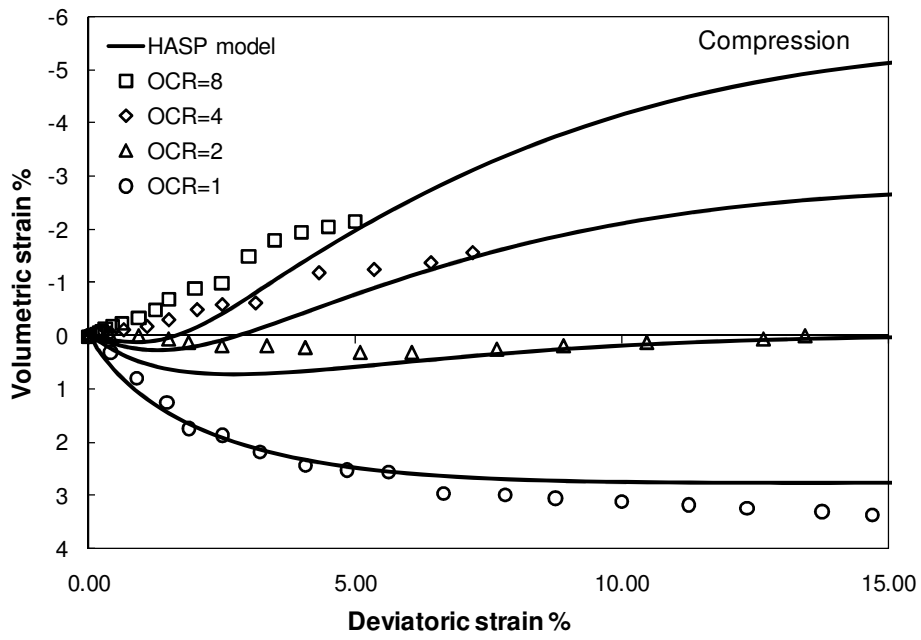
### 5.2.7 Drenirani $p'=\text{const}$ test, Fujinomori glina, Nakai & Hinokio (2004)

Rezultati serije dreniranih opita triaksijalne kompresije i ekstenzije sa konstantnim srednjim efektivnim naponom na prerađenoj Fujinomori glini, Nakai & Hinokio (2004), prikazani su na Slikama 5.27-5.28. Detalji pripreme uzoraka i postupka ispitivanja mogu se naći u Nakai & Matsuoka (1986). Stepni prekonsolidacije gline su 8, 4, 2 i 1. Uzorak sa stepenom prekonsolidacije 8 je ispitan pod srednjim efektivnim naponom od  $p'=98$  kPa, dok su ostali uzorci ispitani pod srednjim efektivnim naponom od  $p'=196$  kPa. Karakteristike uzoraka i parametri HASP modela prikazani su u Tabeli 5.1 i Tabeli 5.2.

HASP model predviđa veće vrednosti naponskog odnosa za jako prekonsolidovane uzorke, nego što je to eksperimentalno utvrđeno, naročito u opitima triaksijalne kompresije. Sa druge strane, dobijena su dobra poklapanja sa eksperimentalnim rezultatima kod predviđanja promene zapreminske deformacije u opitu triaksijalne kompresije, dok su u opitu triaksijalne ekstenzije uočena veća odstupanja.

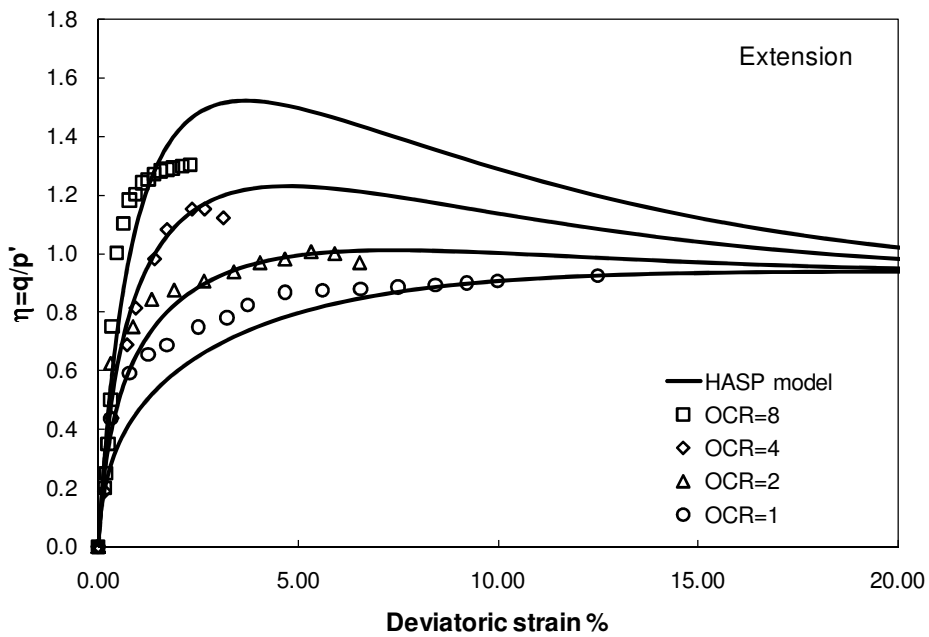


a)

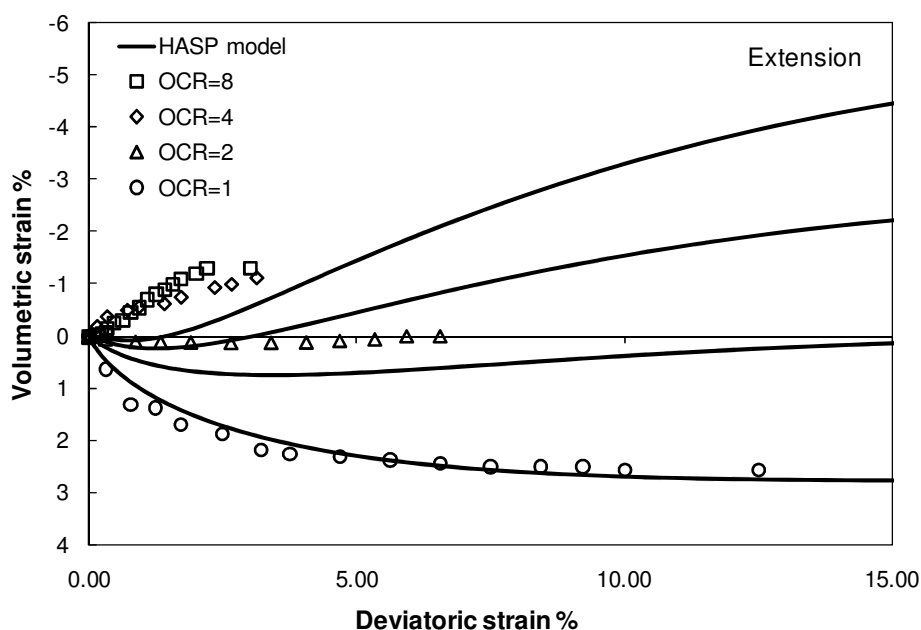


b)

**Slika 5.27** Simulacija opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati – kompresija, a) naponsko–deformacijske krive b) zapreminske deformacije, Fujinomori glina



a)

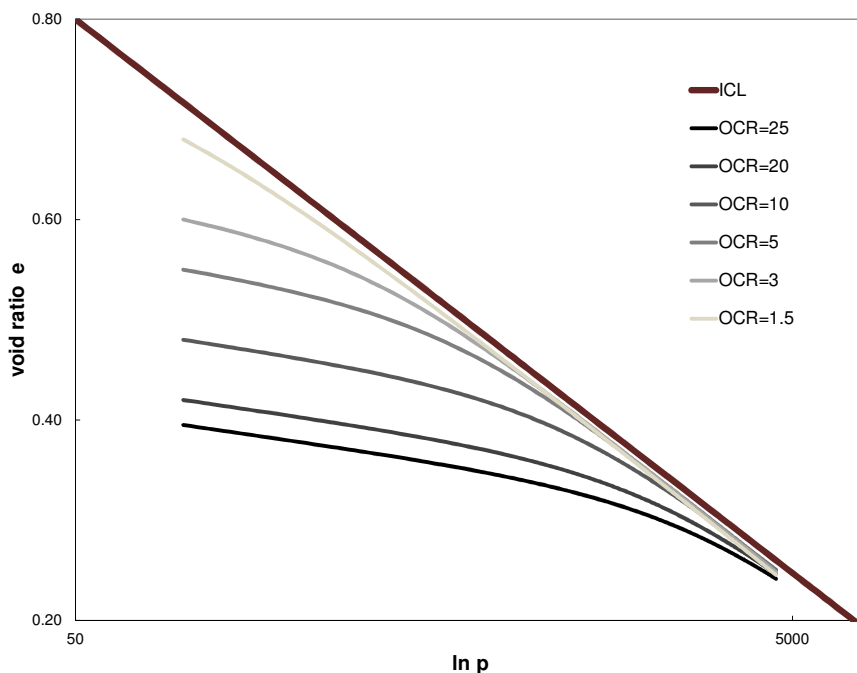


b)

**Slika 5.28** Simulacija opita HASP modelom i eksperimentalni rezultati–ekstenzija, a) naponsko–deformacijske krive b) zapreminske deformacije, Fujinomori glina

### 5.2.8 Izotropna konsolidacija

Predviđanje naponsko – deformacijskog ponašanja prekonsolidovanih glina u toku izotropne konsolidacije HASP modelom je prikazano na Slici 5.29. Za veliki stepen prekonsolidacije, zahvaljujući velikoj vrednosti koeficijenta ojačanja  $\omega$ , na početku opterećivanja su dominantne elastične deformacije i dolazi do manje promene koeficijenta poroznosti. Sa povećanjem srednjeg napona, smanjuje se stepen prekonsolidacije i kriva se približava liniji izotropne konsolidacije. Za veće vrednosti koeficijenta poroznosti, odnosno pri manjim vrednostima stepena prekonsolidacije uočava se veća promena koeficijenta poroznosti sa povećanjem srednjeg napona.



**Slika 5.29** Predviđanje izotropne konsolidacije HASP modelom

### 5.3 Implementacija HASP modela

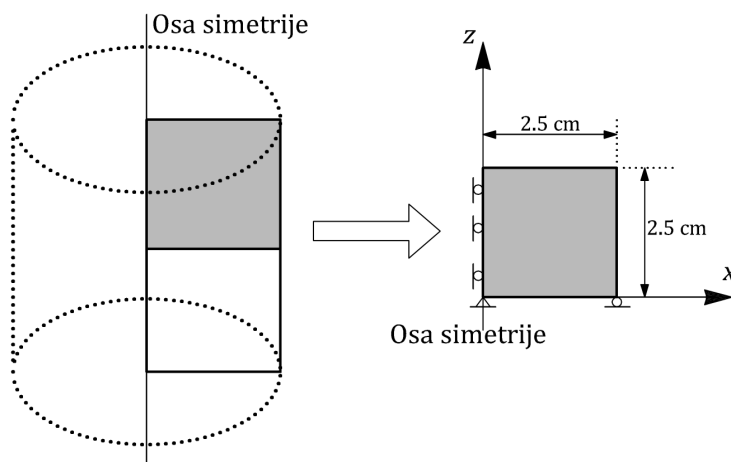
HASP model je implementiran u ABAQUS/Standard koristeći korisnički potprogram UMAT i numeričku proceduru za integraciju napona GPM prikazanu u Poglavlju 4. Komercijalni MKE softver ABAQUS predstavlja moćan alat za numeričku analizu rutinskih i sofisticiranih inženjerskih problema sa velikom bibliotekom materijalnih modela. Korisnički potprogram UMAT omogućava definisanje novog materijalnog mehaničkog ponašanja u ABAQUS-u, što značajno povećava atraktivnost softvera. Dve glavne funkcije UMAT-a su (i) da se na osnovu priraštaja deformacija dobiju naponi na kraju inkrementa; (ii) formulacija Jacobian matrice za formiranje globalne matrice krutosti u MKE. Potrebno je napomenuti da Jacobian matrica iz UMAT-a ne mora nužno da reflektuje stvarno materijalno ponašanje, jer Jacobian matrica utiče samo na broj iteracija (brzina konvergencije), a ne i na tačnost rešenja. Da bi se ispitala tačnost i efikasnost postupka implementacije, pored HASP modela, izvršena je i implementacija MCC modela u ABAQUS. Verifikacija razvijenog algoritma numeričke integracije je tako urađena na dva načina:

- 1) Poređenjem rezultata simulacije triaksijalnog opita metodom konačnih elemenata, i to koristeći MCC model već ugrađen u ABAQUS (*Critical state (clay) plasticity model*, Section 20.3.4, Abaqus Analysis User's Manual, 2011) i MCC model implementiran kroz UMAT (GPM metoda)
- 2) Poređenjem rezultata simulacije triaksijalnog opita metodom konačnih elemenata koristeći numeričku integraciju napona (GPM metoda implementirana u ABAQUS) i rezultata simulacije triaksijalnog opita koristeći Euler-ovu integraciju deformacija duž poznate putanje napona (postupak programiran u Excel-u), prema HASP modelu.

U Prilogu 1, prikazani su UMAT potprogrami za HASP model i MCC model, napisani Fortran programskim jezikom.

### 5.3.1 Model triaksijalnog opita u ABAQUS-u

Model triaksijalnog opita u ABAQUS-u je napravljen prema primeru datom u knjizi "*Applied Soil Mechanics with Abaqus Applications*", Sam Helwany. Korišćena je dvodimenzionalna osnosimetrična mreža sa samo jednim elementom, kao što je prikazano na Slici 5.30. Usled osne simetrije, dovoljno je analizirati samo deo uzorka, Slika 5.30b. Tip konačnog elementa za analizu je *pore fluid/stress eight-node axisymmetric quadrilateral element with biquadratic displacement, bilinear pore pressure and reduced integration*.



**Slika 5.30** Osnosimetrična mreža konačnih elemenata (jedan element)

Pri standardnim ispitivanjima, opterećenje se nanosi u dve faze (i) nanosi se svestrani (radijalni) pritisak  $\sigma_r = \sigma_3$ , koji ostaje konstantan za jedan uzorak tokom celog trajanja opita; (ii) povećava se aksijalni pritisak  $\sigma_a = \sigma_1$  do loma ili do deformacije od oko 20 %. Prema načinu ispitivanja u triaksijalnom aparatu se koriste tri standardna postupka koji se razlikuju po uslovima dreniranja u pojedinim fazama opterećivanja. U disertaciji će biti prikazani rezultati simulacije konsolidovanog dreniranog opita i konsolidovanog nedreniranog opita triaksijalne kompresije i ekstenzije

### **Konsolidovani drenirani triaksijalni opit (CD)**

Granični uslovi su prikazani na Slici 5.1b. Sa donje strane uzorka sprečena su vertikalna pomeranja ( $u_z = 0$ ). Leva strana uzorka je linija osne simetrije ( $u_x = 0$ ). Preko gornje površine uzorka se nanosi aksijalni pritisak kontrolisanom brzinom. Tokom nanošenja aksijalnog pritiska, omogućeno je dreniranje vode i preko gornje i preko donje površine uzorka.

Analiza je sprovedena u dve faze (koraka): faza konsolidacije i faza smicanja. U prvoj fazi opterećenje je naneto u jednom inkrementu sa omogućenim dreniranjem preko gornje površine. Nanet je svestrani pritisak preko gornje i desne površine uzorka. Tokom prve faze je aktivirana "geostatic" komanda kako bi naponsko polje u uzorku bilo u ravnoteži sa spoljašnjim opterećenjem i graničnim uslovima. Na taj način se uzorak dovodi u stanje *in-situ*, kada su naponi različiti od nule, dok su deformacije uzorka približno jednake nuli. Druga faza tokom simulacije traje  $10^9$  sekundi. Veoma sporo se nanosi aksijalno opterećenje, brzinom od  $5 \times 10^{-10}$  cm/s, da bi se porni pritisak održavao na nuli. Veličina inkrementa u ABAQUS-u se automatski definiše u zavisnosti od zadate veličine promene pornog pritiska u uzorku.

### **Konsolidovani nedrenirani triaksijalni opit (CU)**

Osnovne razlike kod CU opita u odnosu na CD opit su u drugoj fazi – fazi smicanja. Sprečeno je dreniranje vode preko gornje i donje površine uzorka i aksijalno opterećenje se nanosi mnogo brže nego u dreniranom opitu. Druga faza tokom



simulacije traje 100 sekundi, a aksijalno opterećenje se nanosi brzinom od  $1.27 \times 10^{-3}$  cm/s.

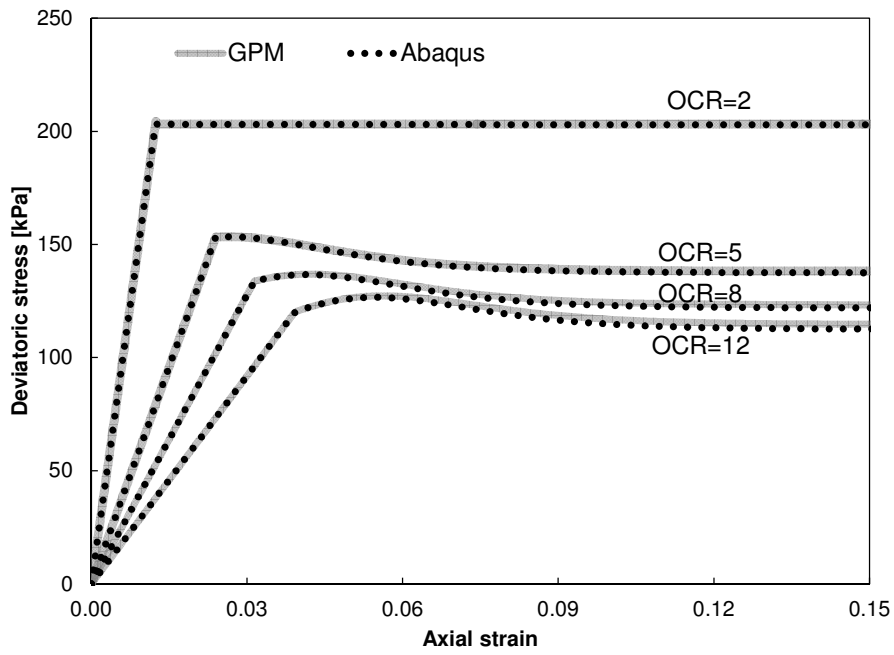
### 5.3.2 Verifikacija postupka numeričke integracije GPM

Za verifikaciju postupka numeričke integracije, izabrane su četiri prekonsolidovane gline sa materijalnim parametrima prikazanim u Tabeli 5.1 i to: Cardiff glina, London glina, Kaolin glina i Bangkok glina. Za oba načina verifikacije, prikazani su rezultati simulacije i to: naponsko – deformacijske krive, promena zapremine u dreniranom opitu triaksijalne kompresije i promena pornog pritiska u nedreniranom opitu triaksijalne kompresije.

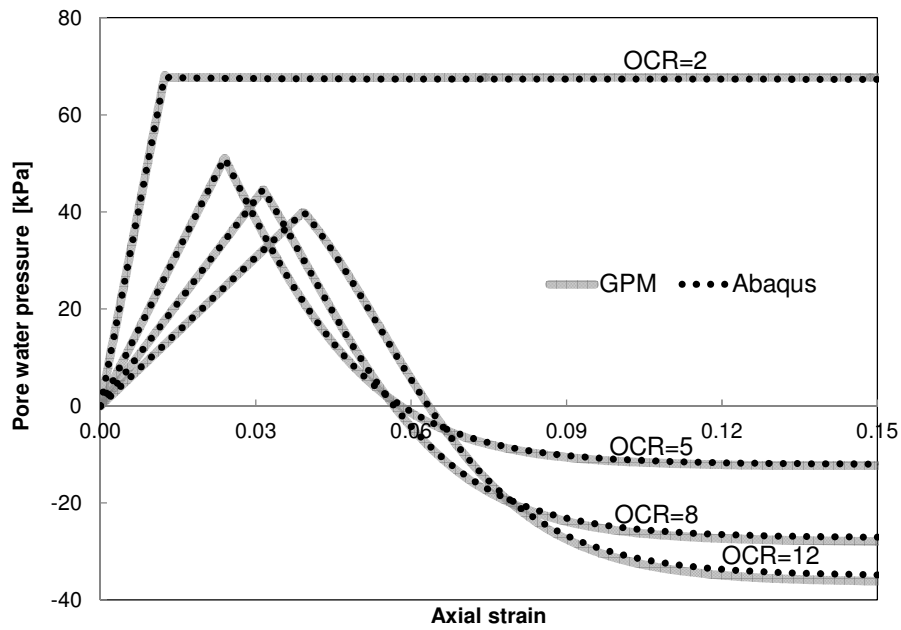
1) Rezultati simulacije serije triaksijalnih dreniranih u nedreniranih opita, koristeći ugrađen i implementiran MCC model, prikazani su na Slikama 5.31-5.34. Da bi se uporedila brzina konvergencije, u Tabeli 5.3 data su CPU (*user time*) računarska vremena za svaki simulirani opit. Potrebno je napomenuti da je u UMAT-u za MCC model, Jacobian matrica predstavljena elastičnom matricom. Za sve stepene prekonsolidacije i za obe vrste opita dobijeno je odlično poklapanje rezultata, što ukazuje na tačnost i efikasnost implicitne GPM metode.

**Tabela 5.3** CPU vremena (user time), MCC model

	OCR	CPU user time (ABAQUS)	CPU user time (UMAT GPM)
<b>Cardiff glina</b>	<b>12</b>	2.3	2.2
	<b>8</b>	2.3	2.3
	<b>5</b>	2.4	2.5
	<b>2</b>	1.3	1.2
<b>London glina</b>	<b>20</b>	2.5	2.3
	<b>2.25</b>	1.3	1.3
	<b>1</b>	3.8	3.8
	<b>CU opit</b>		
<b>Kaolin glina</b>	<b>8</b>	1.4	1.5
	<b>4</b>	1.3	1.4
	<b>2</b>	1.3	1.3
	<b>1</b>	1.2	1.5
<b>Bangkok glina</b>	<b>24</b>	1.2	2.4
	<b>8</b>	1.3	1.7
	<b>2</b>	1.6	1.6
	<b>1.5</b>	1.6	1.6
<b>CD opit</b>			



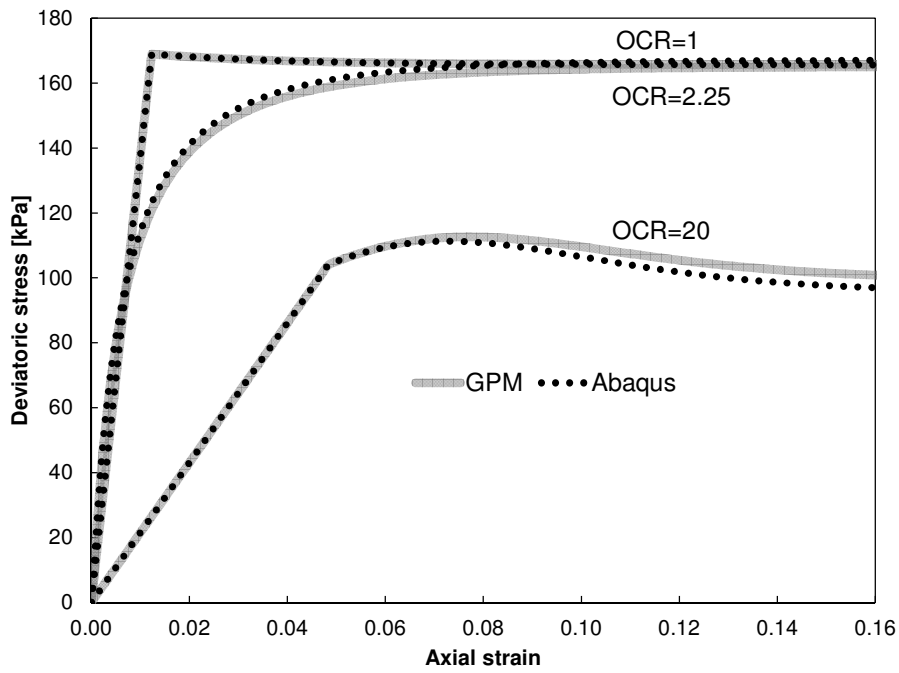
a)



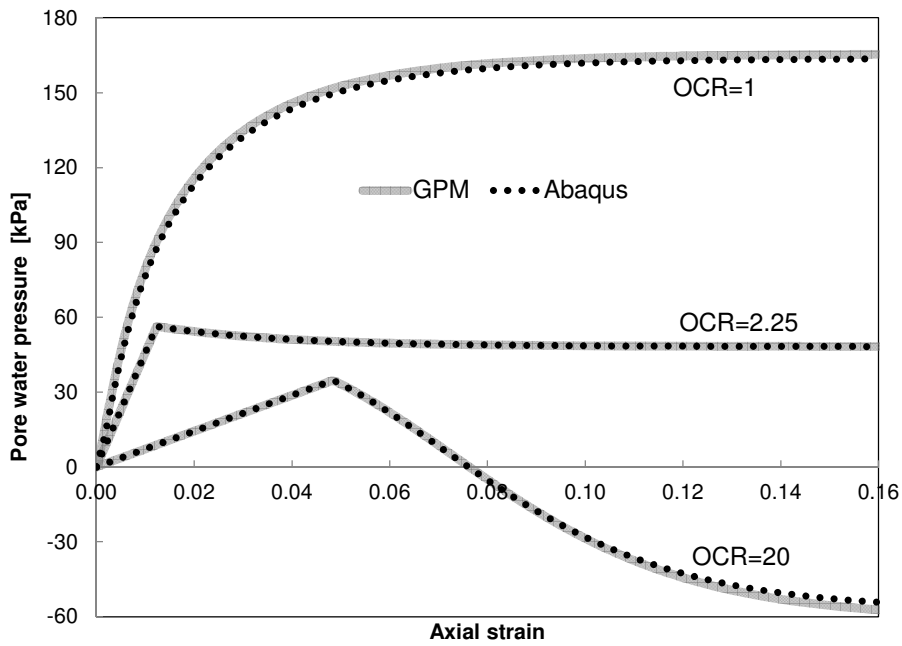
b)

**Slika 5.31** Poređenje rezultata CU opita, MCC model (Abaqus) i implementirani MCC model (GPM), Cardiff glina

a) naponsko-deformacijske krive b) promena pornog pritiska



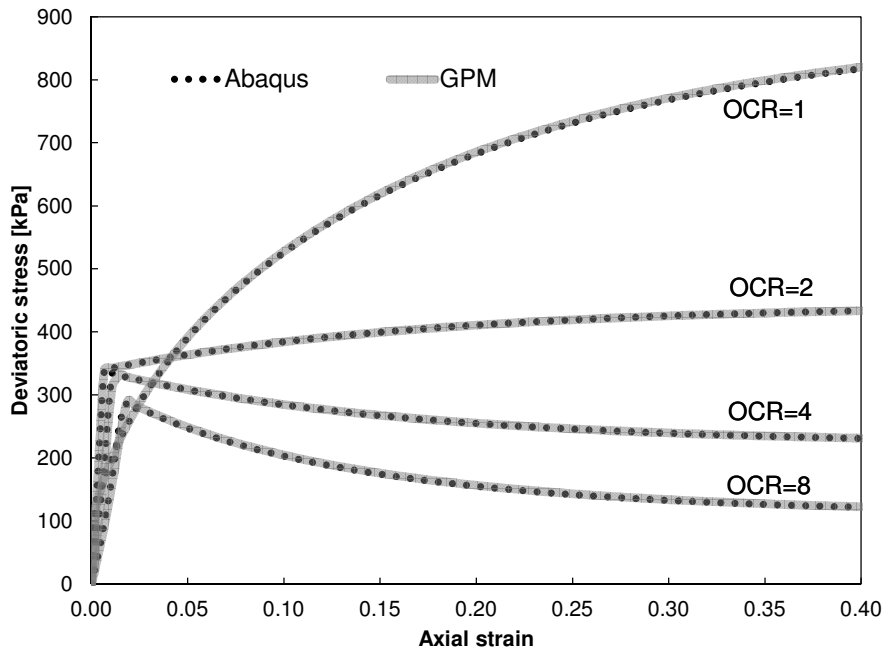
a)



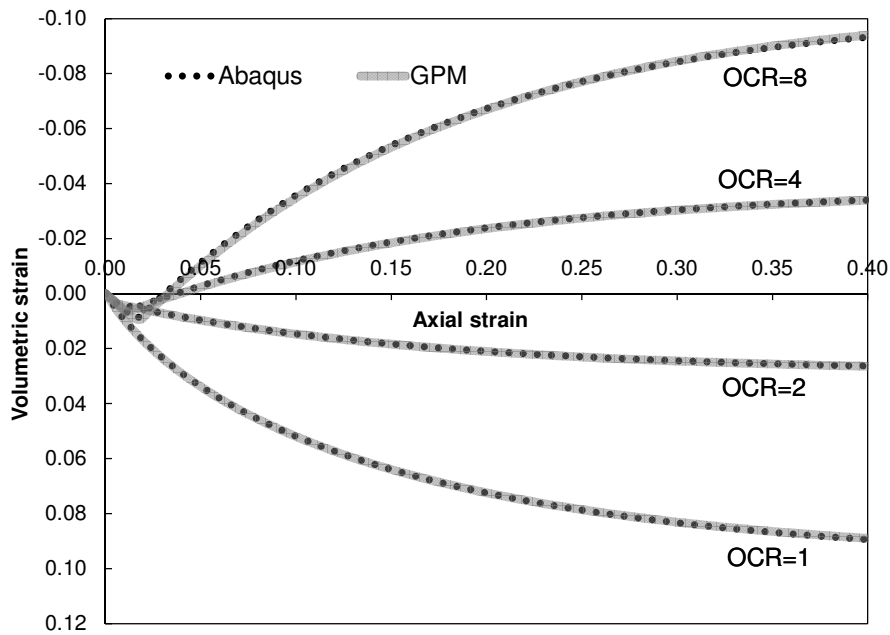
b)

**Slika 5.32** Poređenje rezultata CU opita, MCC model (Abaqus) i implementirani MCC model (GPM), London glina

a) naponsko-deformacijske krive b) promena pornog pritiska

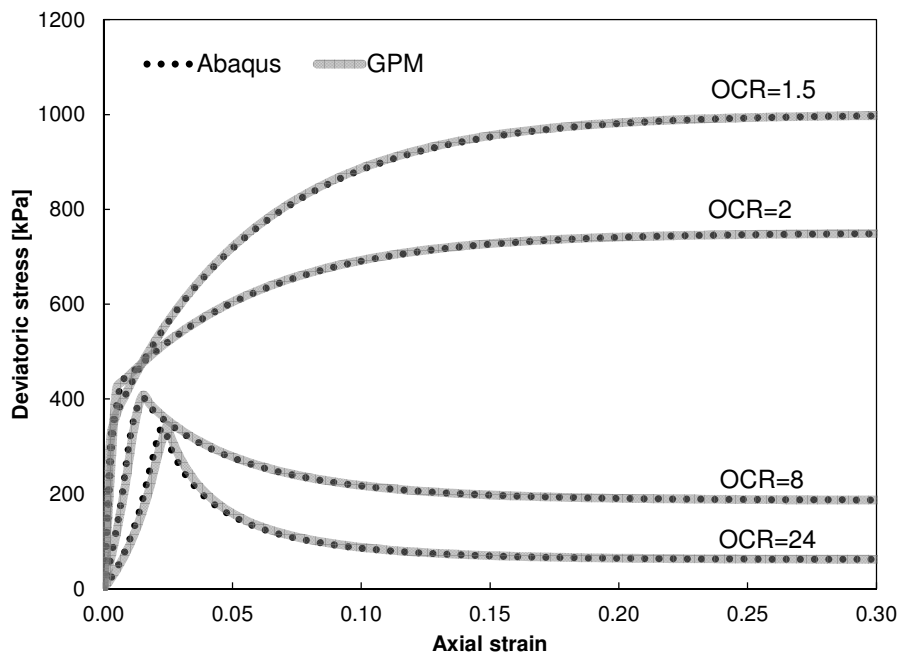


a)

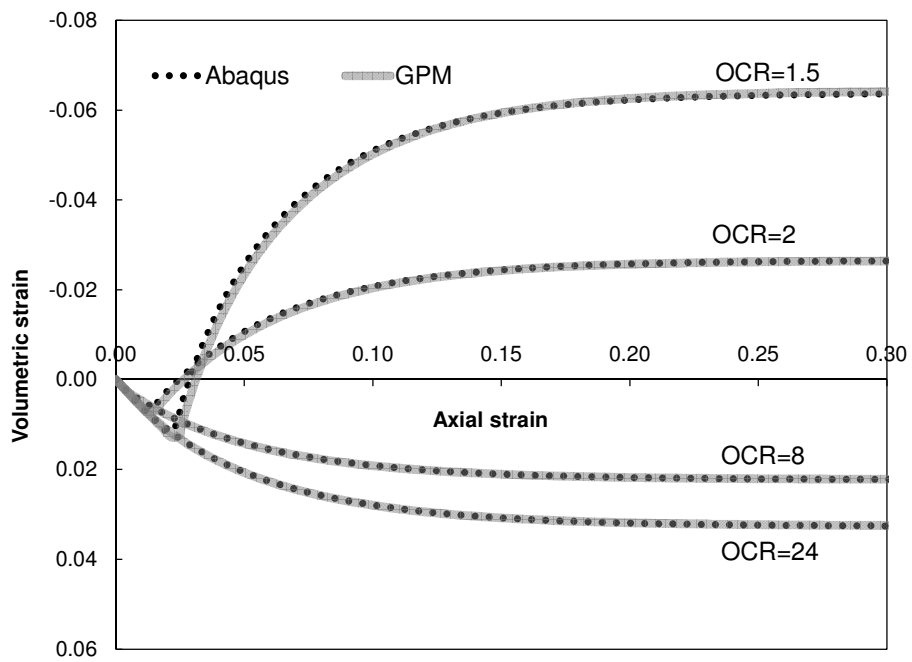


b)

**Slika 5.33** Poređenje rezultata CD optita, MCC model (Abaqus) i implementirani MCC model (GPM), Kaolin glina  
 a) naponsko-deformacijske krive b) promena zapremine



a)



b)

**Slika 5.34** Poređenje rezultata CD opita, MCC model (Abaqus) i implementirani MCC model (GPM), Bangkok glina  
 a) naponsko-deformacijske krive b) promena zapremine

2) Rezultati simulacije triaksijalnog opita koristeći materijalni model HASP su prikazani na slikama 5.35–5.38. Izvršeno je poređenje rezultata za dve šeme numeričke integracije, implicitna GPM metoda za integraciju napona i Euler-ova integracija deformacija duž poznate putanje napona (EIPN). Euler-ova integracija deformacija duž poznate putanje napona je programirana u programu Excel i u nastavku su prikazani proračunski koraci.

### **Euler-ova integracija deformacija duž poznate putanje napona – proračunski koraci za drenirani opit triaksijalne kompresije**

1. Stress path for triaxial drained conditions:  $\Delta q = 3\Delta p'$
2. Specify initial conditions:  $p'_{init}, q_{init}$
3. Specify increments:  $\Delta \varepsilon_q^p, \Delta p'_{initial}$
4. Plastic shear strain:  $\varepsilon_{q,i+1}^p = \varepsilon_{q,i}^p + \Delta \varepsilon_q^p$
5. Stress quantities:
 
$$p'_{i+1} = p'_i + \Delta p'$$

$$q_{i+1} = q_i + 3\Delta p'$$

$$\eta_{i+1} = q_{i+1} / p'_{i+1}$$
6. State parameters:
 
$$\Psi_{i+1} = v_i + \lambda \ln p'_{i+1} - \Gamma$$

$$\bar{\Psi}_{i+1} = (\lambda - \kappa) \ln(2M^2 / (M^2 + \eta_{i+1}^2))$$
7. Overconsolidation ratio:  $R_{i+1} = \exp((\bar{\Psi}_{i+1} - \Psi_{i+1}) / (\lambda - \kappa))$
8. Hardening coefficient:  $\omega_{i+1} = (1 + (\bar{\Psi}_{i+1} - \Psi_{i+1}) / \bar{\Psi}_{i+1}) R_{i+1}$
9. Volumetric strain quantities:
 
$$\varepsilon_{v,i+1}^e = \varepsilon_{v,i}^e + \kappa \Delta p' / (v_i p'_i)$$

$$\varepsilon_{v,i+1}^p = \varepsilon_{v,i}^p + \Delta \varepsilon_v^p \text{ from Eqn (3.43)}$$

$$\varepsilon_{v,i+1} = \varepsilon_{v,i+1}^e + \varepsilon_{v,i+1}^p$$

$$v_{i+1} = v_0 (1 - \varepsilon_{v,i+1})$$
10. Shear strain quantities:
 
$$\varepsilon_{q,i+1}^e = \varepsilon_{q,i}^e + \Delta q / (3G_{i+1}),$$

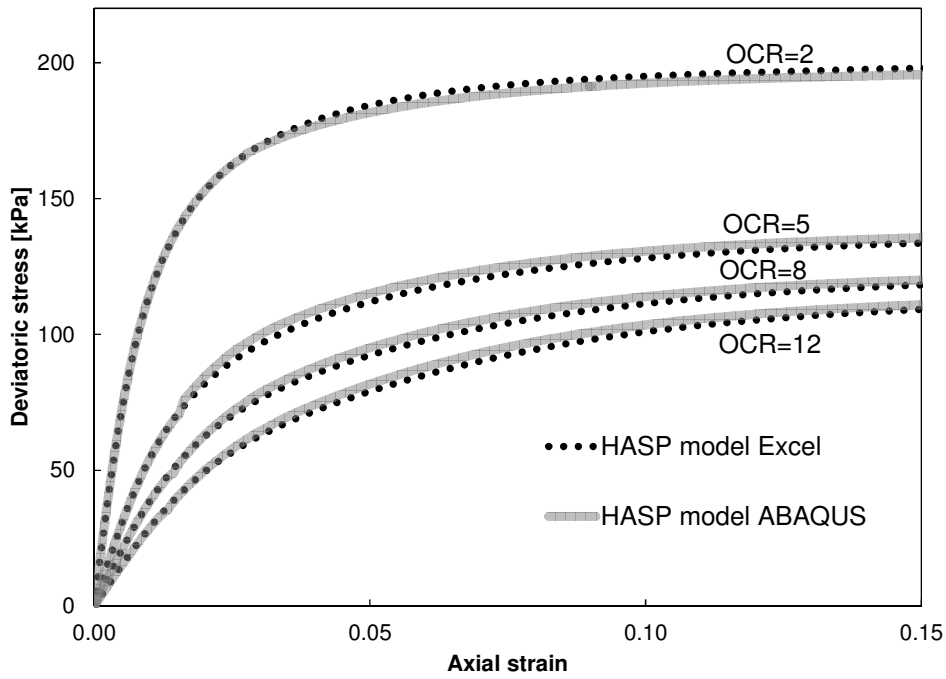
$$G_{i+1} \text{ from Eqn (3.27)}$$

$$\varepsilon_{q,i+1} = \varepsilon_{q,i+1}^e + \varepsilon_{q,i+1}^p$$
11. From Eqn (3.44) express the value of  $\Delta p'$  for the new step

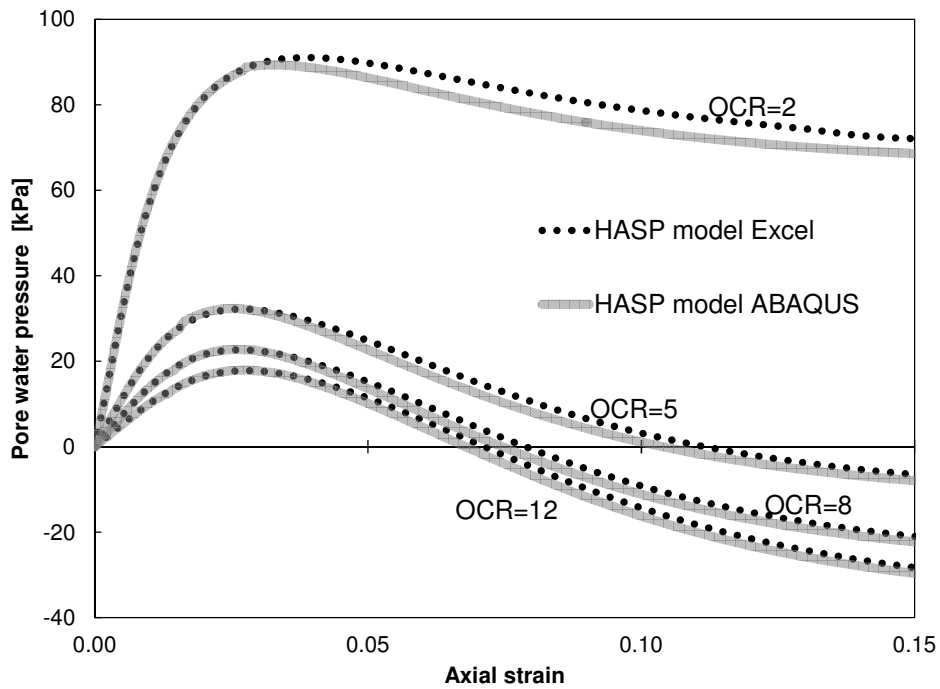
**Euler-ova integracija deformacija duž poznate putanje napona – proračunski koraci za nedrenirani opit triaksijalne kompresije**

1. Specify initial conditions:  $p'_{init}, q_{init}$
2. Specify increment:  $\Delta p'_{initial}$
3. Effective mean stress:  $p'_1 = p'_{init} - \Delta p'_{init}$   
 $p'_{i+1} = p'_i + \Delta p'$
4. State parameters:  $\Psi_{i+1} = v + \lambda \ln p'_{i+1} - \Gamma$   
 $\bar{\Psi}_{i+1} = (\lambda - \kappa) \ln(2M^2 / (M^2 + \eta_i^2))$
5. Overconsolidation ratio:  $R_{i+1} = \exp((\bar{\Psi}_{i+1} - \Psi_{i+1}) / (\lambda - \kappa))$
6. Hardening coefficient:  $\omega_{i+1} = (1 + (\bar{\Psi}_{i+1} - \Psi_{i+1}) / \bar{\Psi}_{i+1}) R_{i+1}$
7. Exponent in effective stress path expression:  
 $\alpha_{i+1} = (\lambda - \kappa) / (\omega_{i+1} \kappa + (\lambda - \kappa))$
8. Stress ratio:  $\eta_{i+1} = \text{sqrt}((p'_i / p'_{i+1})^{1/\alpha_i} (M^2 + \eta_i^2) - M^2)$
9. Deviatoric stress:  $q_{i+1} = p'_{i+1} \eta_{i+1}$
10. Volumetric strain quantities:  $\varepsilon_{v,i+1}^p = \varepsilon_{v,i}^p + \Delta \varepsilon_v^p$  from Eqn (3.43)  
 $\varepsilon_{v,i+1}^e = -\varepsilon_{v,i+1}^p$
11. Mean stress increment:  $\Delta p' = \Delta \varepsilon_v^e p'_i v / \kappa$
12. Shear strain quantities:  $\varepsilon_{q,i+1}^e = \varepsilon_{q,i}^e + \Delta q / (3G_{i+1})$   
 $\varepsilon_{q,i+1}^p = \varepsilon_{q,i}^p + \Delta \varepsilon_q^p$  from Eqn (3.44)  
 $\varepsilon_{q,i+1} = \varepsilon_{q,i+1}^e + \varepsilon_{q,i+1}^p$
13. Total mean stress:  $p_{i+1} = p_{init} + q_{i+1} / 3$
14. Pore pressure:  $u_{i+1} = p_{i+1} - p'_{i+1}$

Kao i u prethodnom načinu verifikacije implementacije, dobijeno je odlično poklapanje rezultata za obe vrste opita i za sve stepene prekonsolidacije.



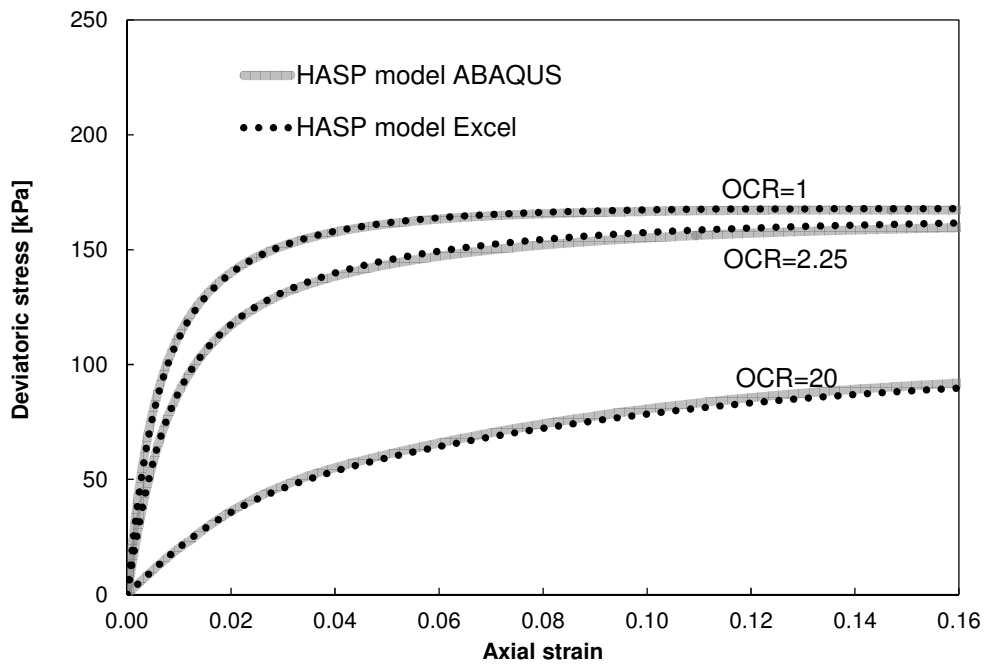
a)



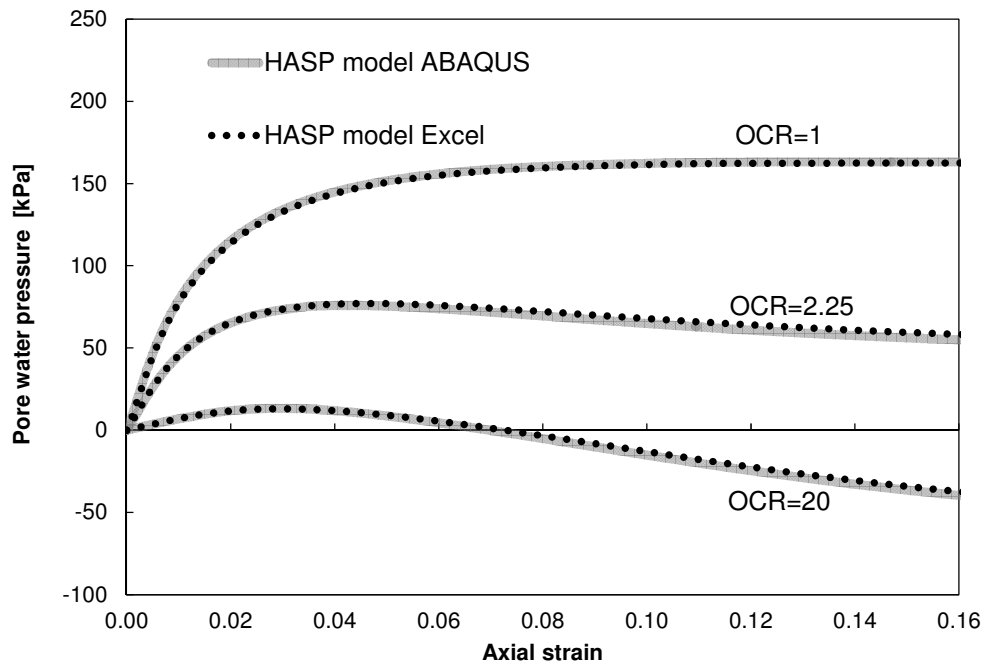
b)

**Slika 5.35** Poređenje rezultata CU opita, HASP model (EIPN, Excel) i implementirani HASP model (GPM), Cardiff glina  
 a) naponsko-deformacijske krive b) promena pornog pritiska



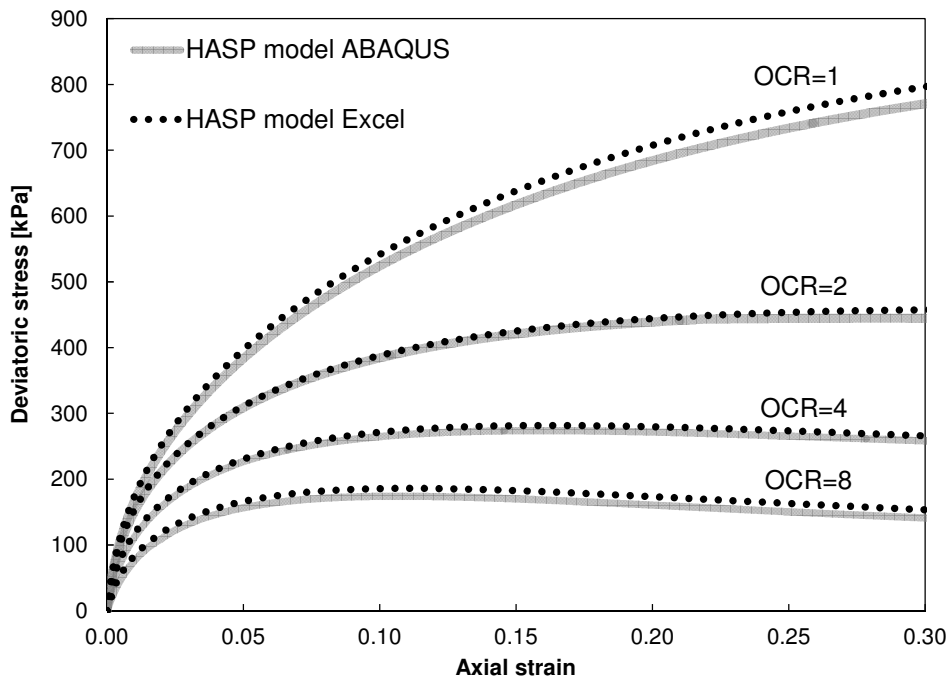


a)

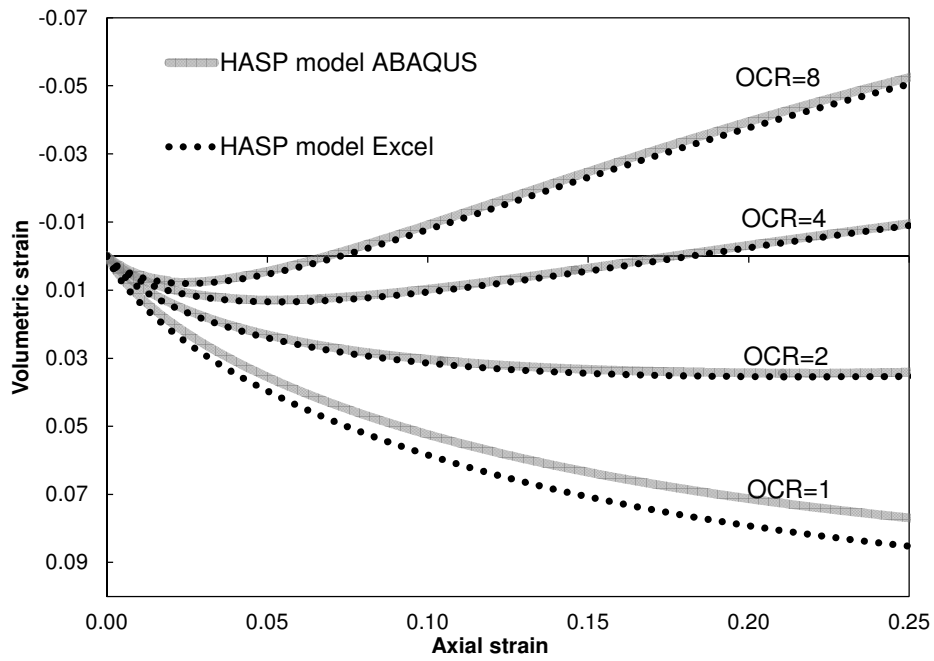


b)

**Slika 5.36** Poređenje rezultata CU opita, HASP model (EIPN, Excel) i implementirani HASP model (GPM), London glina  
 a) naponsko-deformacijske krive b) promena pornog pritiska

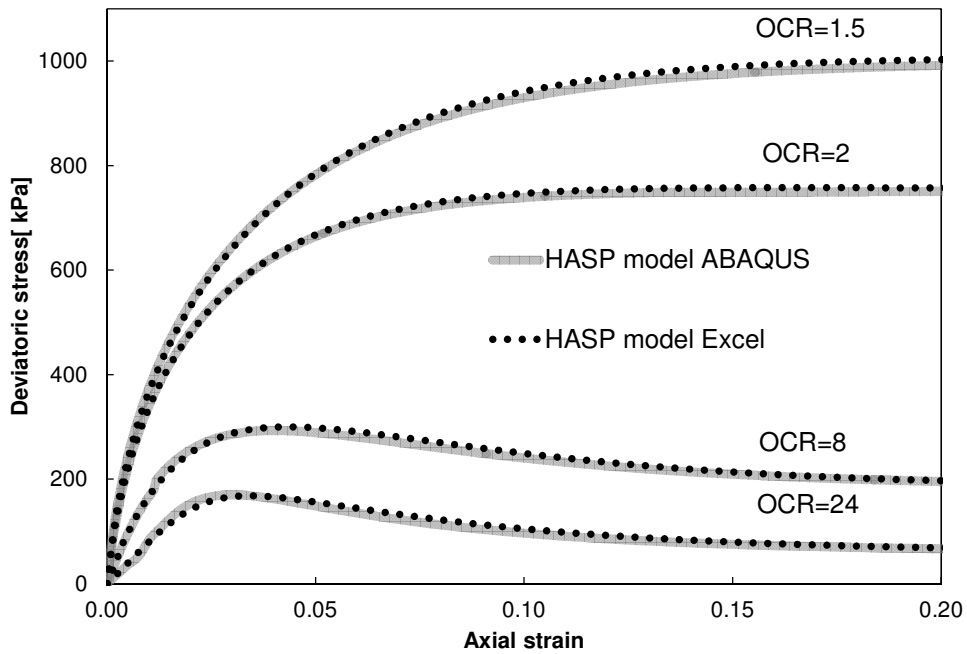


a)

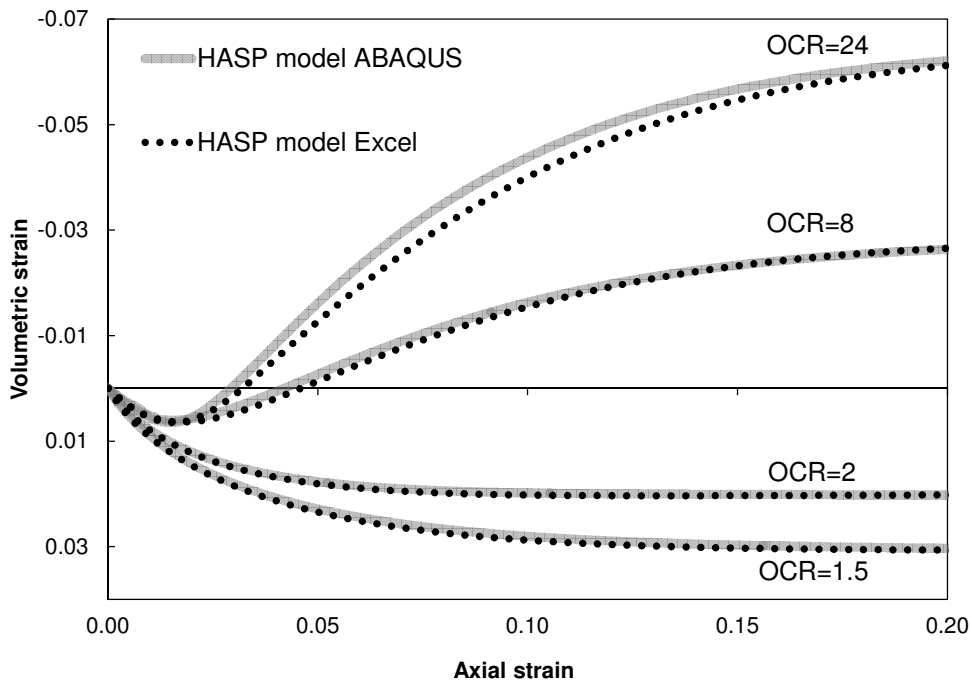


b)

**Slika 5.37** Poređenje rezultata CD opita, HASP model (EIPN, Excel) i implementirani HASP model (GPM), Kaolin glina  
 a) naponsko-deformacijske krive b) promena zapremine



a)

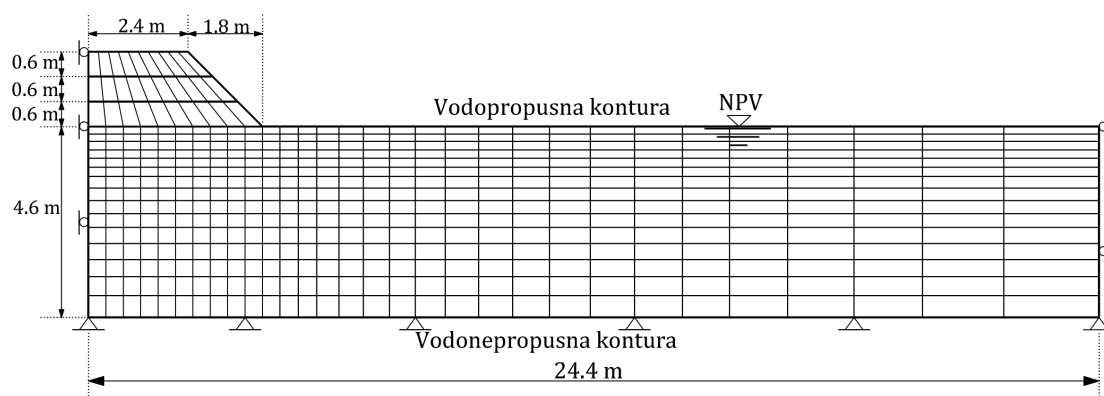


b)

**Slika 5.38** Poređenje rezultata CD opita, HASP model (EIPN, Excel) i implementirani HASP model (GPM), Bangkok glina  
 a) naponsko-deformacijske krive b) promena zapremine

## 5.4 Primer primene HASP modela – Konsolidacija sloja gline

U nastavku će biti prikazana primena konstitutivnog HASP modela u analizi graničnog (konturnog) problema metodom konačnih elemenata. Razmatraće se problem sleganja tla usled fazne izgradnje nasipa na površini terena (primer prikazan u knjizi "*Applied Soil Mechanics with Abaqus Applications*", Sam Helwany). Model se sastoji od sloja gline debljine 4.6 m koji leži na nepropusnoj i nestišljivoj podlozi. Nivo podzemne vode se nalazi na površini terena, kao što je prikazano na Slici 5.39. Nasip se gradi u tri jednaka sloja debljine 0.6 m. Ukupna visina nasipa iznosi 1.8 m. Konstrukcija nasipa se izvodi po fazama/slojevima i izgradnja jednog sloja traje dva dana, dok izgradnja čitavog nasipa traje šest dana. Potrebno je odrediti sleganje nasipa tokom vremena do potpune konsolidacije sloja gline ispod nasipa. U modelu, konsolidacija gline nakon izgradnje nasipa traje još 200 dana.



**Slika 5.39** Model sa mrežom konačnih elemenata za numeričku analizu

Prilikom analize konsolidacije zasićenog tla važi princip efektivnih napona: u porama tla je voda pod pritiskom – porni pritisak, koji prima deo ukupnih napona koji deluju na element tla, dok drugi deo prima skelet tla efektivnim naponima preko sila na kontaktima između zrna. Tlo je modelirano kao kontinuum i totalni napon u svakoj tački sastoji se od zbira efektivnog napona i pornog pritiska. Ako je zasićeno sitnozrno tlo izloženo promeni napona u kratkom vremenskom intervalu, dolazi do razvoja pornog natpritiska i do promene zapremine. Veličina promene zapremine je jednaka količini istisnute vode iz pora i zavisi od veličine nanetih

napona i kompresibilnosti skeleta tla. Tokom procesa konsolidacije dolazi do postepenog opadanja veličine pornog natpritiska i smanjivanja zapremine i samim tim povećanja efektivnih napona. Ispitana je mogućnosti HASP modela da tokom simulacije navedenog procesa predvidi promenu pornog natpritiska, kao i veličine vremenskog sleganja sloja gline.

#### 5.4.1 Materijali

Nasip se gradi od prašinastog peska i modeliran je linearno-elastičnim modelom. Parametri linearno-elastičnog modela (modul elastičnosti i Poisson-ov koeficijent), kao i ostale karakteristike materijala nasipa potrebne za proračun: zapreminska težina, koeficijent vodopropusnosti i koeficijent poroznosti su prikazani su u Tabeli 5.4.

**Tabela 5.4** Parametri nasipa

Linearno-elastični model		Karakteristike materijala nasipa		
$E$ [MPa]	$\mu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$k$ [m/s]	$e_0$
5	0.3	18.85	0.001	0.889

Sloj visoko plastične gline ispod nasipa je modeliran HASP modelom sa parametrima prikazanim u Tabeli 5.5.

**Tabela 5.5** Parametri HASP modela

$\lambda$	$\kappa$	$M$	$\Gamma$	$\mu$
0.174	0.026	1.5	3.87	0.28

Korišćen je sledeći sistem konzistentnih jedinica:

**Tabela 5.6** Konzistentne jedinice

Dužina	Sila	Napon	Vreme	$k$	$\gamma$
m	N	Pa	s	m/s	kg/m <sup>3</sup>

Analiza je rađena pri različitim inicijalnim uslovima prikazanim u Tabeli 5.7. Zapreminska težina za svaki koeficijent poroznosti sračunata je pod pretpostavkom da je tlo zasićeno i da specifična težina gline iznosi  $G_s=2.7$ . U skladu sa jednačinom (3.80) i pretpostavljenim koeficijentom bočnog pritiska  $k_0$  (Brooker & Ireland, 1965) u Tabeli 5.7 je data i približna vrednost stepena prekonsolidacije u sredini sloja gline. Potrebno je napomenuti da stepen prekonsolidacije nije konstantna vrednost za sloj, već se smanjuje sa dubinom. Prikazani su rezultati proračuna za različite stepene prekonsolidacije, od blago prekonsolidovane gline ( $OCR=2$ ), pa sve do jako prekonsolidovane gline ( $OCR=18$ ).

**Tabela 5.7** Inicijalni uslovi

$e_0$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	OCR	$k_0$
1.1	17.75	2	0.75
1.0	18.15	5	0.85
0.9	18.60	8	1.0
0.8	19.10	12	1.3
0.7	19.60	18	1.9

#### 5.4.2 Mreža konačnih elemenata

Dvodimenzionalna mreža konačnih elemenata prikazana je na Slici 5.39 i konstruisana je tako da omogući simulaciju fazne izgradnje nasipa. Model se sastoji od ukupno 480 elemenata. Tip elementa je CPE4P - *4-node plane strain quadrilateral, bilinear displacement, bilinear pore pressure*. Usled simetrije, razmatrana je samo polovina modela.

#### 5.4.3 Granični uslovi i opterećenje

Za analizu konsolidacije zasićene gline, dva tipa graničnih uslova moraju biti definisana: granični uslovi po pomeranjima i hidraulički granični uslovi. Granični uslovi po pomeranjima su prikazani na Slici 5.39. Sa donje strane modela sprečena su pomeranja u vertikalnom i horizontalnom pravcu ( $u_y=0$ ,  $u_x=0$ ). Takođe, u osi simetrije i duž desne ivice modela sprečena su pomeranja u horizontalnom pravcu

( $u_x=0$ ). Hidraulički uslovi podrazumevaju definisanje vodopropusnih kontura u modelu.

Analiza je sprovedena u pet proračunskih koraka. U prvom proračunskom koraku, nasip je uklonjen iz mreže konačnih elemenata. Sopstvena težina gline je modelirana kroz opciju "body-force". Gornja površina sloja gline je vodopropusna. Tokom ovog koraka je aktivirana "geostatic" komanda kako bi naponsko polje u sloju gline bilo u ravnoteži sa spoljašnjim opterećenjem i graničnim uslovima. Na taj način se sloj gline dovodi u stanje *in-situ*, kada su naponi (usled sopstvene težine) različiti od nule, dok su deformacije u sloju gline približno jednake nuli.

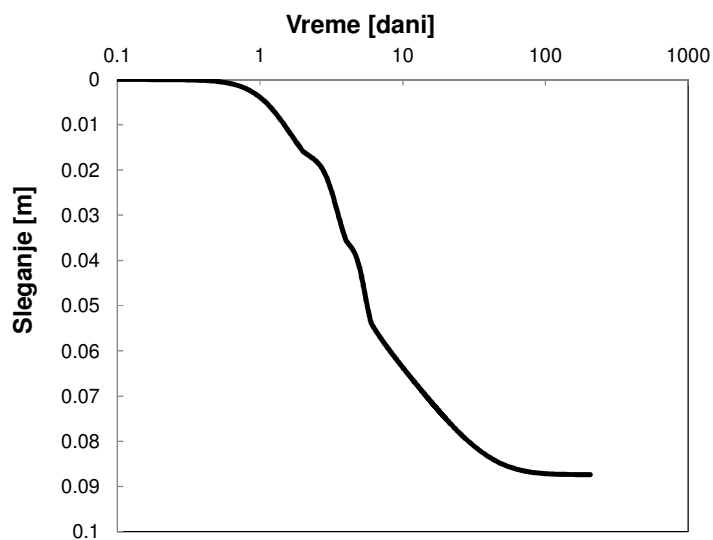
Drugi korak je izgradnja prvog sloja nasipa. Sopstvena težina prvog sloja je postepeno aplicirana koristeći "body-force" opciju tokom dva dana. Treći korak je izgradnja drugog sloja nasipa, dok je četvrti izgradnja trećeg sloja nasipa. Svaki naredni sloj je dodat na već deformisani prethodni sloj. Važe isti principi modeliranja kao i kod prvog sloja. Ukida se vodopropusna kontura između dva sloja, a omogućava se dreniranje vode preko površine slojeva.

Peti korak je konsolidacija gline i nasipa u trajanju od 200 dana.

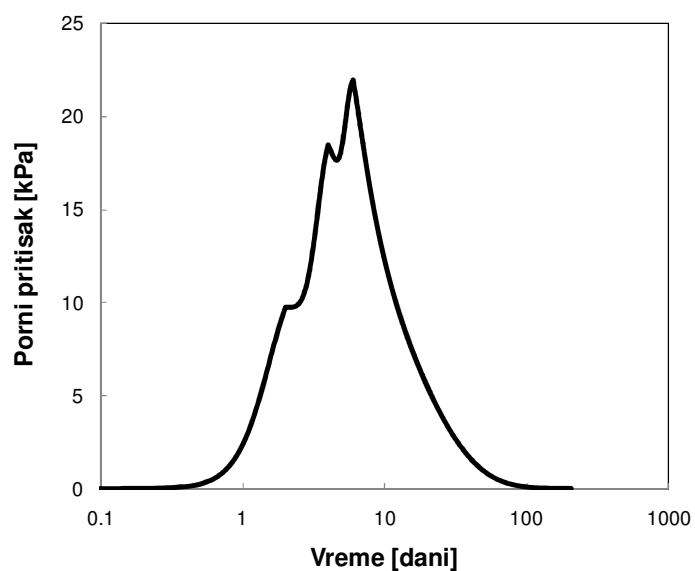
#### 5.4.4 Rezultati

Slika 5.40 pokazuje istoriju sleganja ispod centra nasipa (površina sloja gline), za stepen prekonsolidacije  $OCR=5$ , u polulogaritamskoj razmeri. Deformacije se najbrže razvijaju (najveći gradijent) tokom prvih 6 dana koliko traje izgradnja nasipa i do tada se desilo oko 50% od ukupnih sleganja. Za isti stepen prekonsolidacije, Slika 5.41 pokazuje istoriju razvoja pornog natpritiska u sredini sloja gline ispod centra nasipa. Porni natpritisk raste tokom izgradnje nasipa (6 dana) i tokom procesa konsolidacije dolazi do potpune disipacije pornog natpritiska. Na Slici 5.42a prikazana su sleganja sloja gline tokom 206 dana ispod centra nasipa za sve stepene prekonsolidacije. Najveća sleganja su, kao što se i očekuje, dobijena za blago prekonsolidovane gline, dok se sa porastom stepena prekonsolidacije smanjuju deformacije u tlu, a samim tim i sleganja su manja. Slika 5.42b pokazuje razvoj sleganja za prvih 30 dana. Zavisnost veličine sleganja sloja

gline od stepena prekonsolidacije, i to nakon 6 dana izgradnje nasipa i nakon 206 dana pri potpunoj disipaciji pornog natpritiska, data je na Slici 5.43.

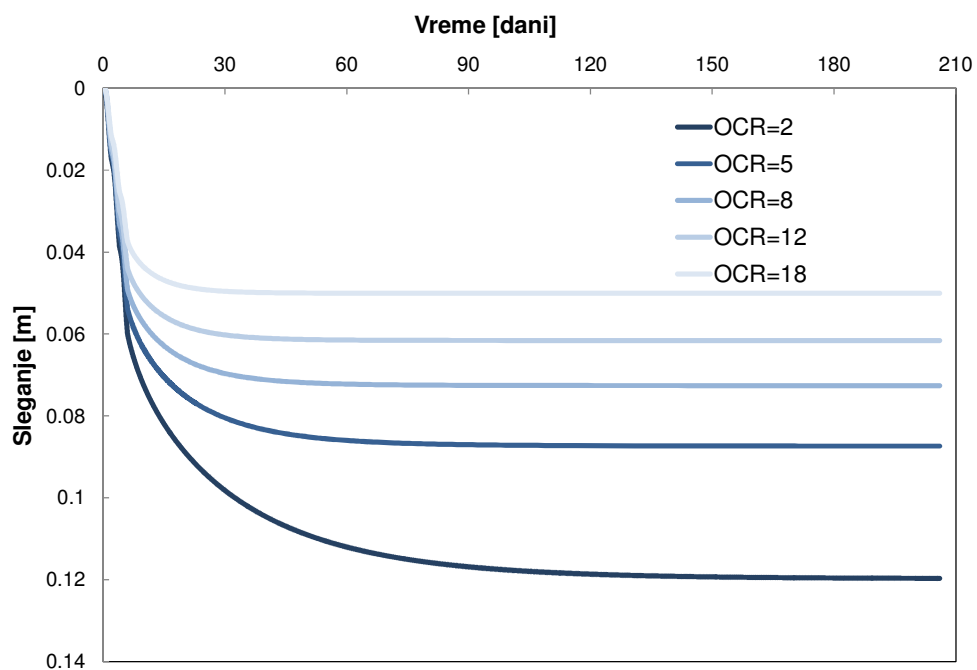


**Slika 5.40** Sleganje gline ispod centra nasipa tokom vremena, OCR=5

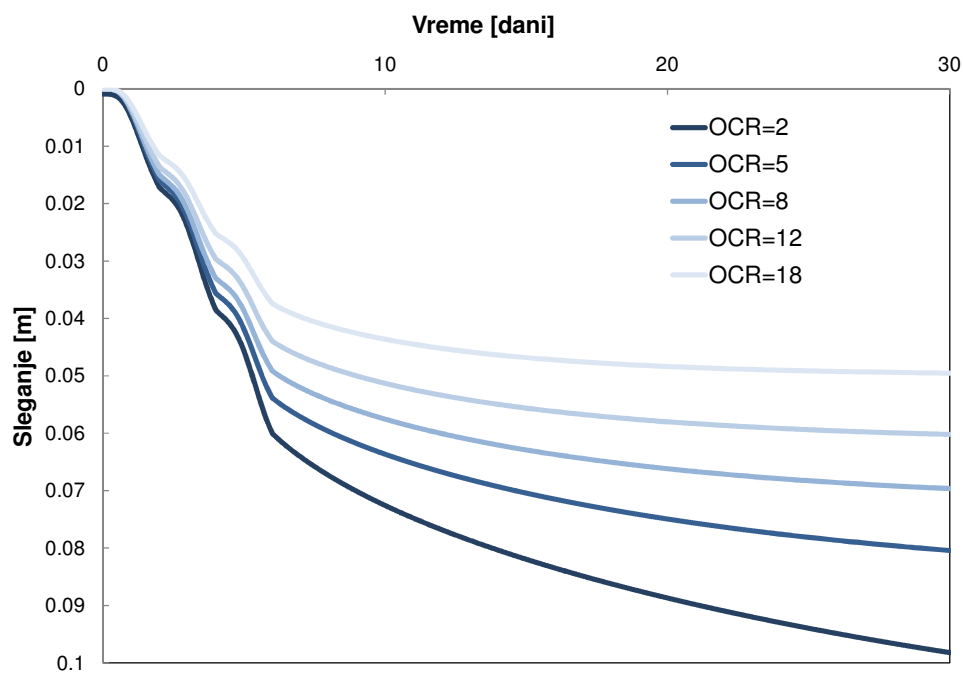


**Slika 5.41** Razvoj pornog natpritiska u sredini sloja gline ispod centra nasipa, OCR=5



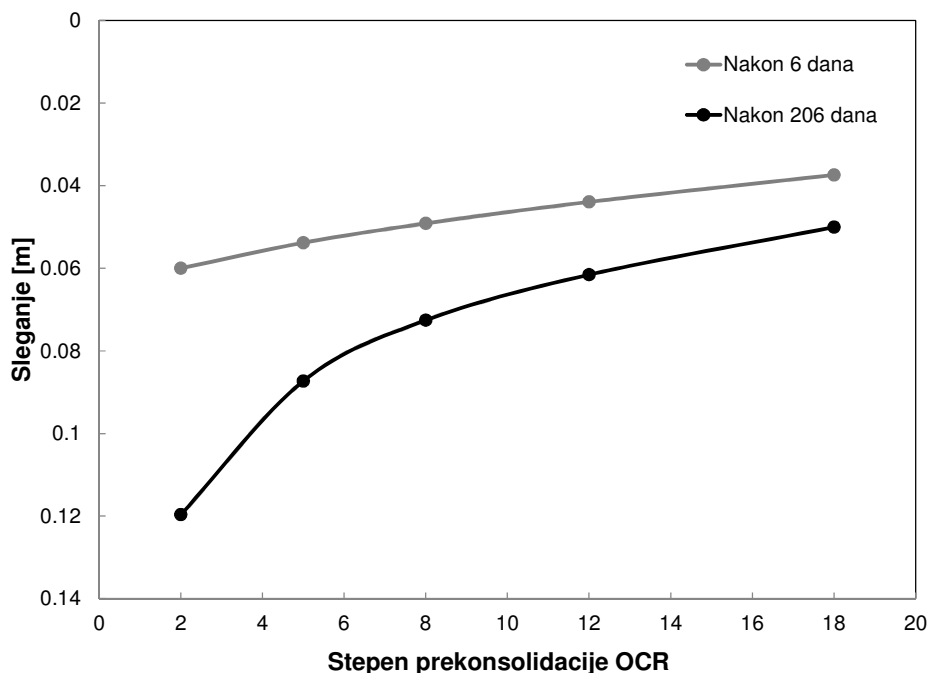


a)



b)

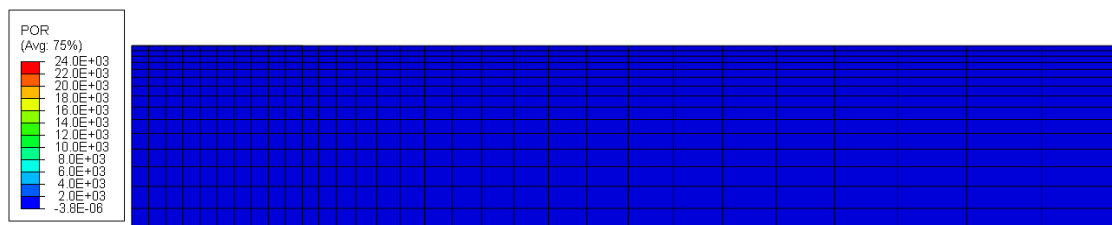
**Slika 5.42** Sleganje sloja gline za različite stepene prekonsolidacije  
a) 206 dana b) 30 dana



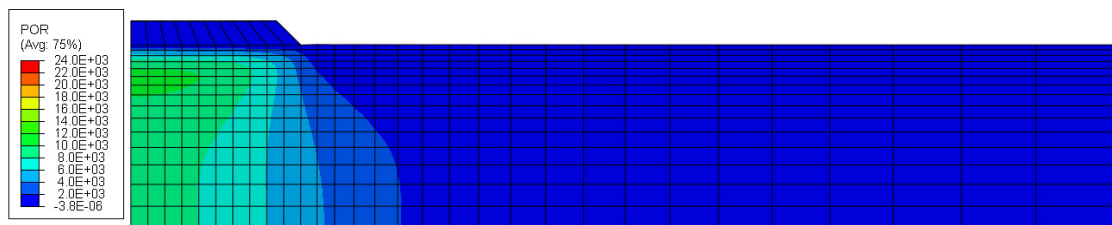
**Slika 5.43** Zavisnost veličine sleganja od stepena prekonsolidacije

Za stepen prekonsolidacije  $OCR=5$  su dalje date vremenske raspodele pornog natpritiska, koeficijenta poroznosti, smičućih deformacija, kao i sleganja u čitavom sloju gline. Na slici 5.44 prikazana je raspodela pornog natpritiska i disipacija tokom vremena. Usled brzog opterećivanja sloja zasićene gline male vodopropusnosti, ispod nasipa se odmah nakon nanošenja opterećenja razvija porni natpritisk. S obzirom da je omogućeno dreniranje vode samo preko gornje površine, do najbrže disipacije dolazi upravo na gornjoj površini sloja gline. Slika 5.45 pokazuje promenu koeficijenta poroznosti u čitavom modelu. Najveću kompresiju (smanjenje koeficijenta poroznosti) trpi deo sloja ispod opterećenja, kao i materijal nasipa, jer tokom vremena dolazi i do konsolidacije nasipa. U nožici kosine se tokom izgradnje nasipa može uočiti na malom području i ekspanzija (povećanje koeficijenta poroznosti). Analogno promeni koeficijenta poroznosti, najveće deformacije trpe gornji delovi sloja gline, Slika 5.46 (rezultujuće pomeranje) i Slika 5.47 (pomeranje u vertikalnom pravcu – sleganje). Na Slici 5.47 se može videti da dolazi do blagog izdizanja površine terena, neposredno pored nasipa. Na Slici 5.48 je prikazana raspodela smičućih deformacija, gde se može uočiti da se maksimalne vrednosti smičućih deformacija javljaju u nožici kosine

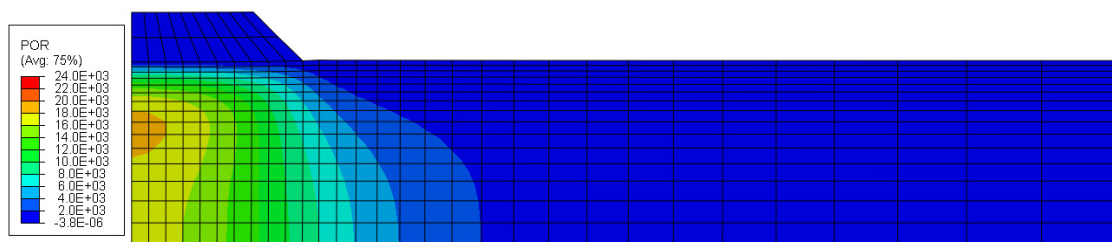
nasipa. Sličan obrazac promene pornog pritiska, koeficijenta poroznosti, sleganja i smičućih deformacija se javlja i u analizi sa ostalim stepenima prekonsolidacije prikazanim u Tabeli 5.7.



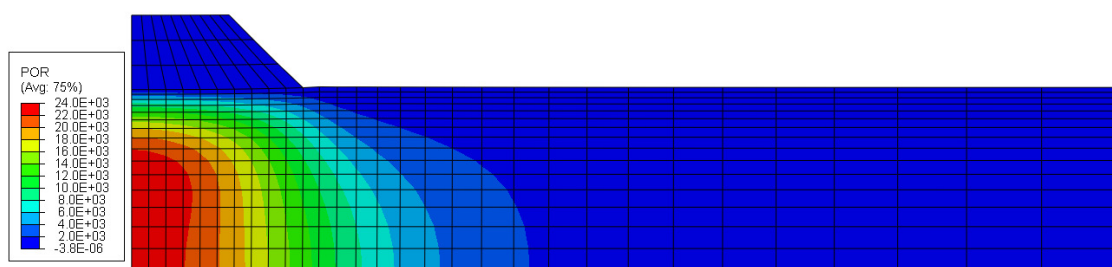
a) t=0



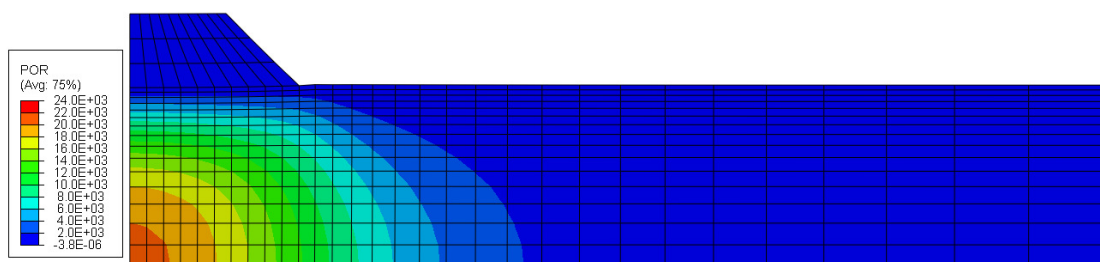
b) t=2 dana



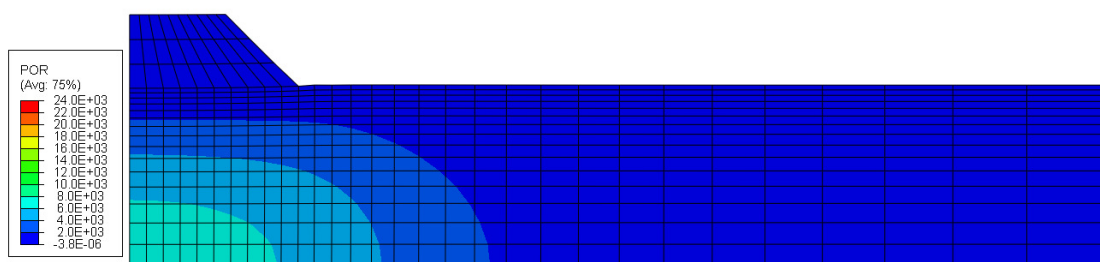
c) t=4 dana



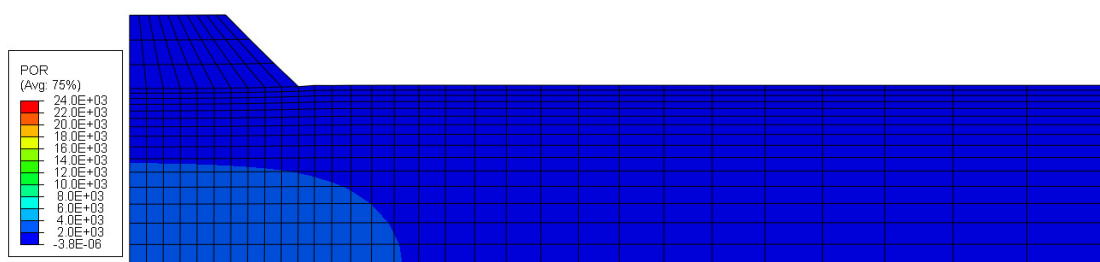
d) t=6 dana



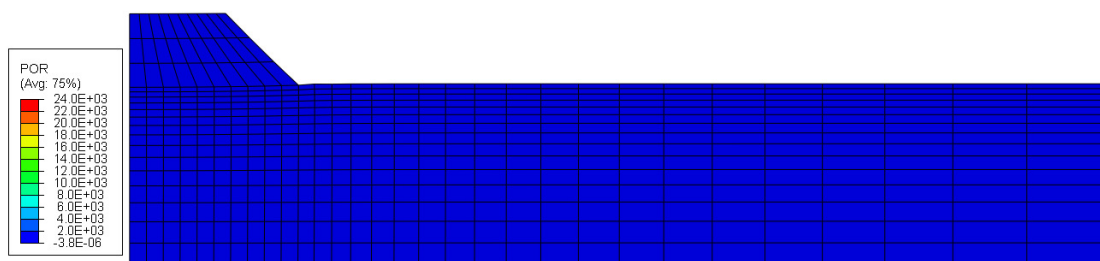
e) t=10 dana



f) t=30 dana

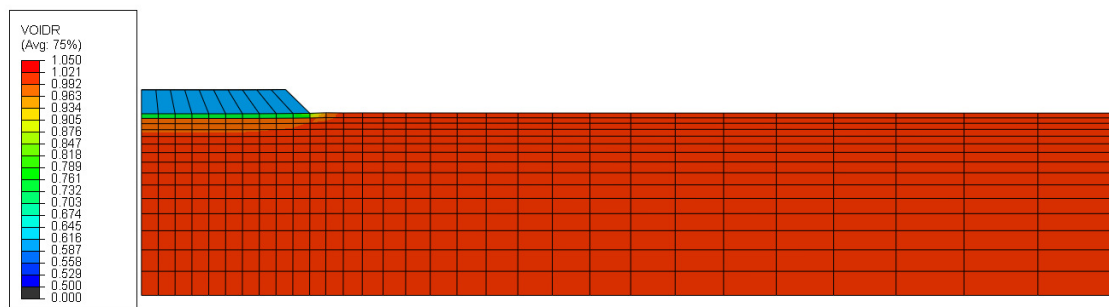


g) t=45 dana

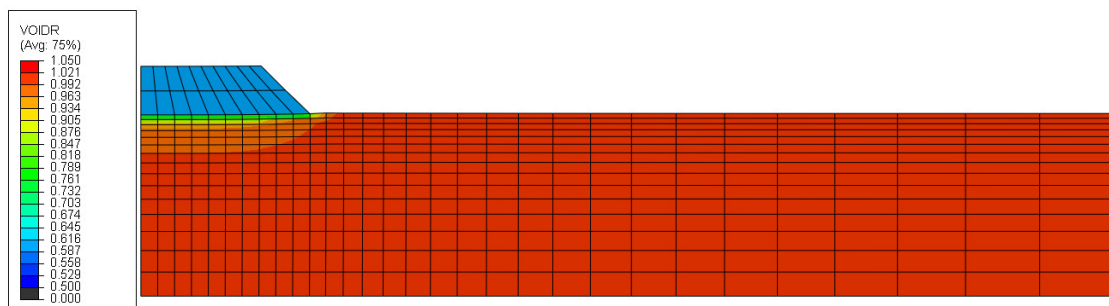


h) t=206 dana

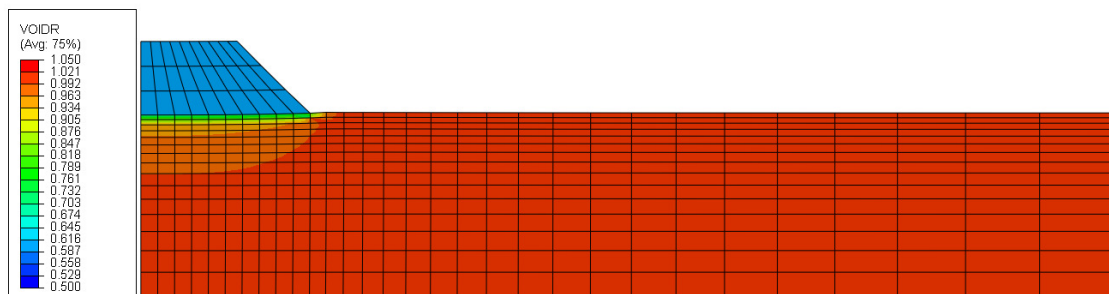
**Slika 5.44** Razvoj purnog natpritiska tokom vremena, HASP model, OCR=5



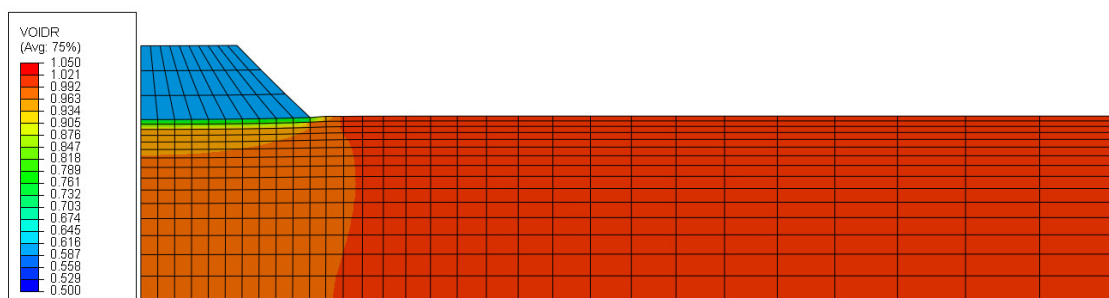
a) t=2 dana



b) t=4 dana

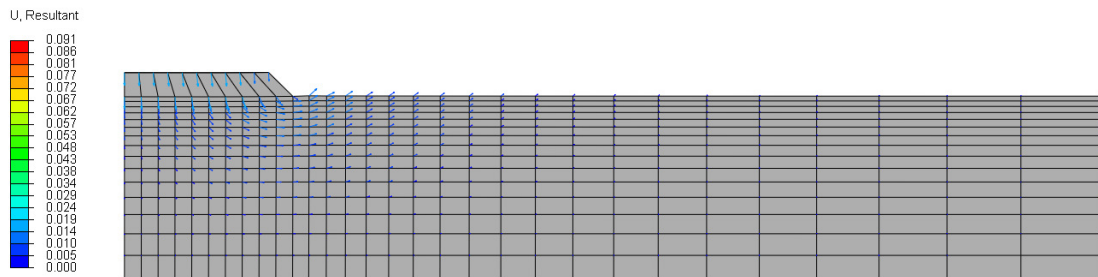
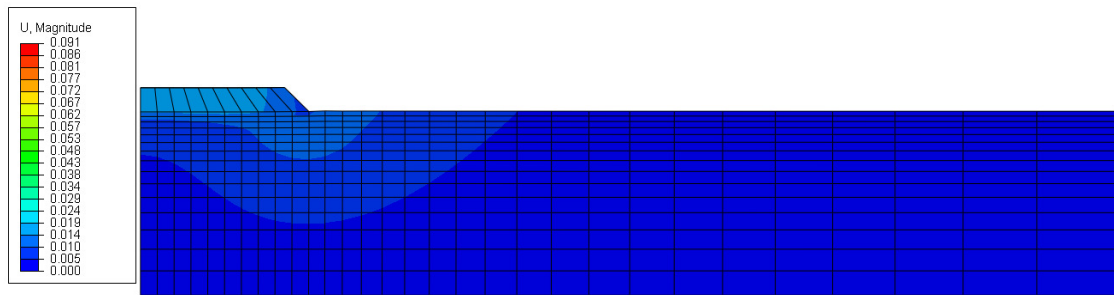


c) t=6 dana

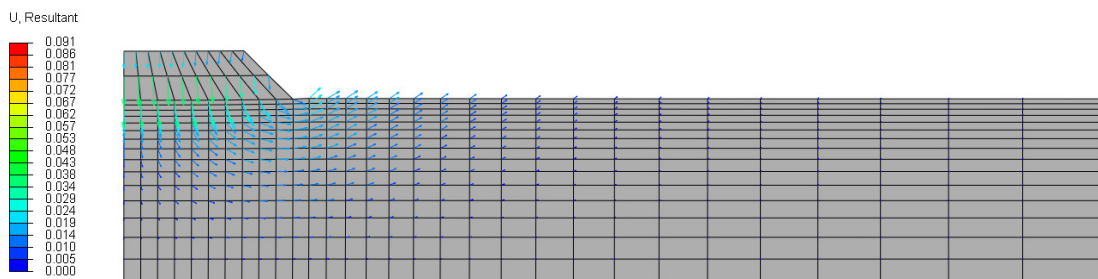
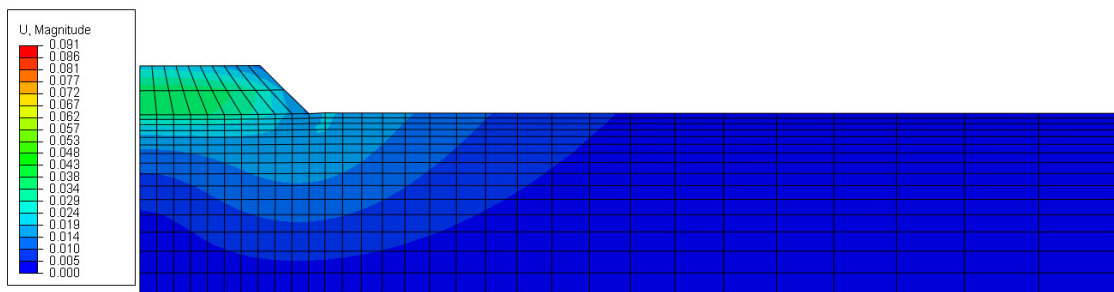


d) t=206 dana

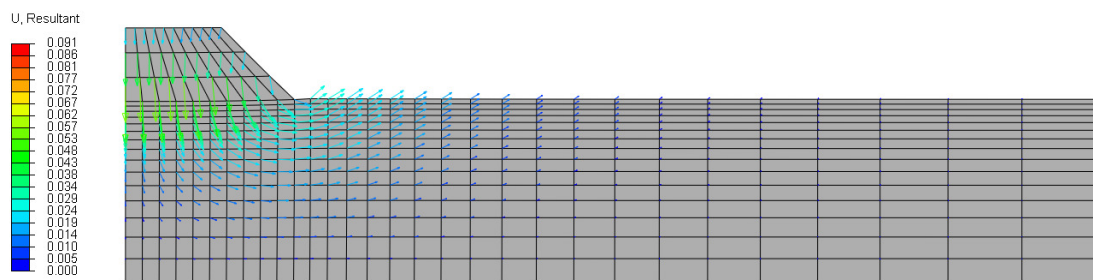
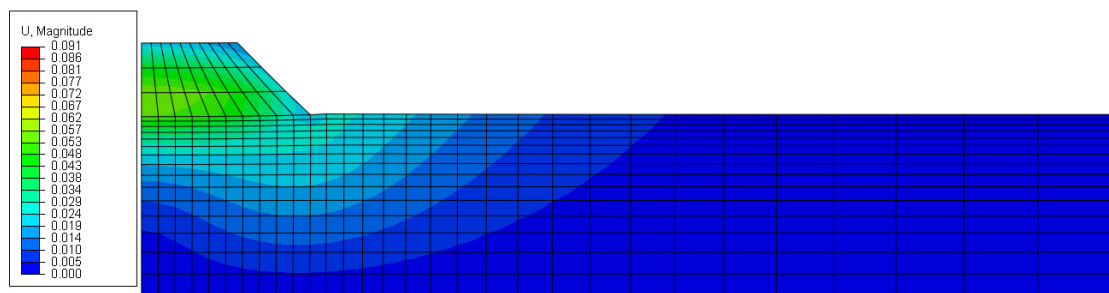
**Slika 5.45** Promena koeficijenta poroznosti tokom vremena, HASP model, OCR=5



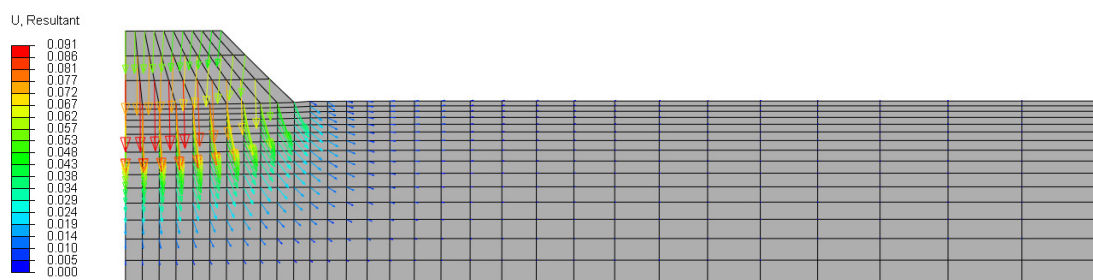
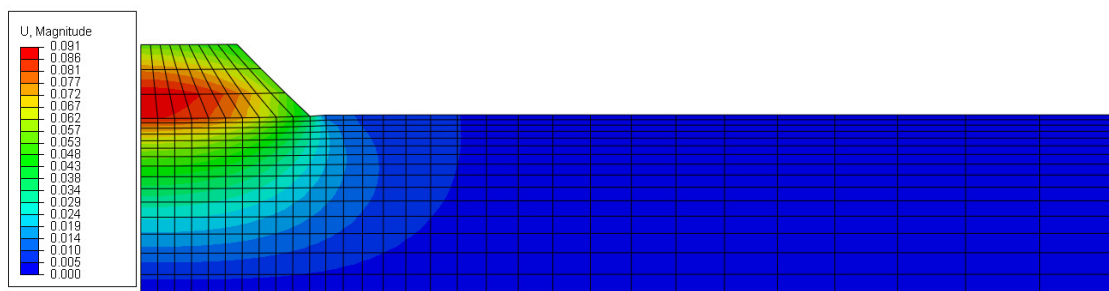
a) t=2 dana



b) t=4 dana

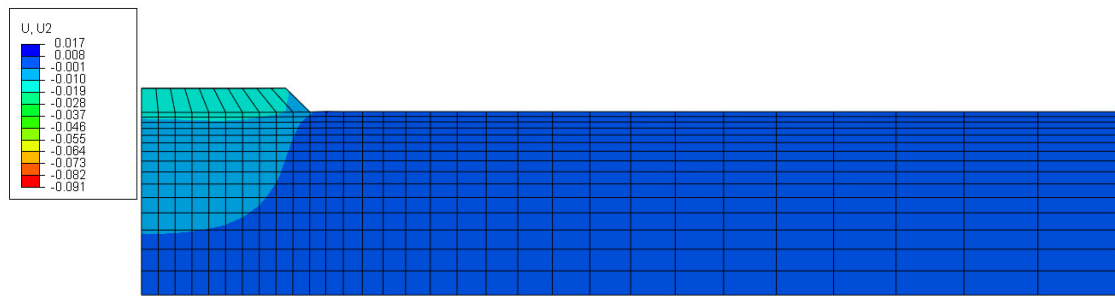


c) t=6 dana

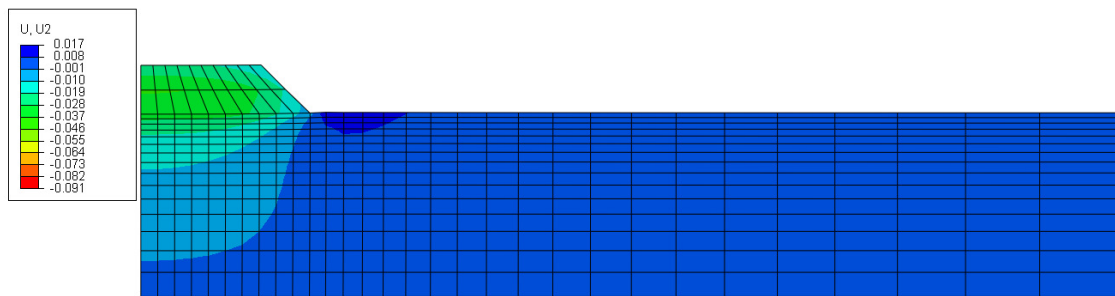


d) t=206 dana

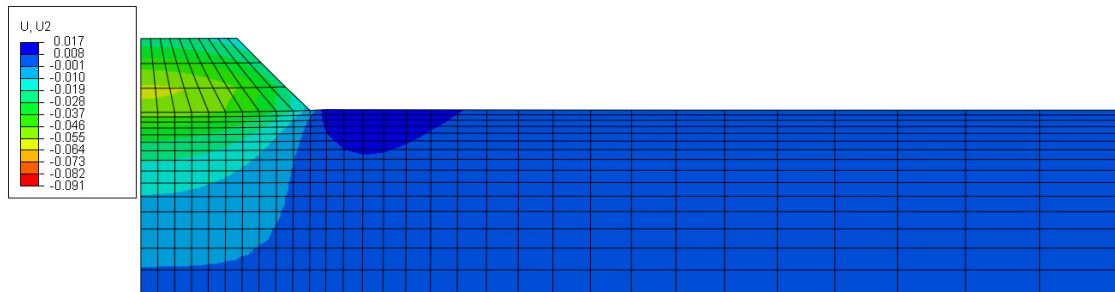
**Slika 5.46** Rezultujuće pomeranje tokom vremena, HASP model, OCR=5



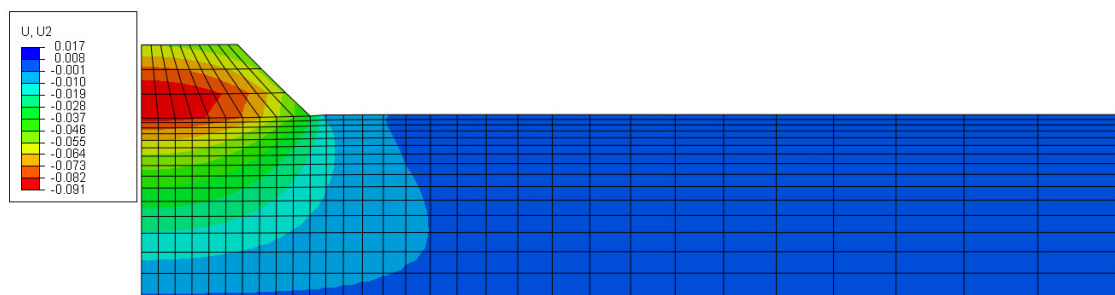
a) t=2 dana



b) t=4 dana



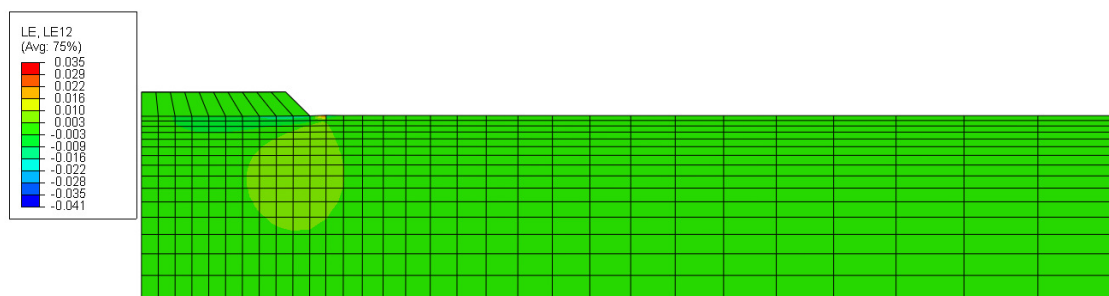
c) t=6 dana



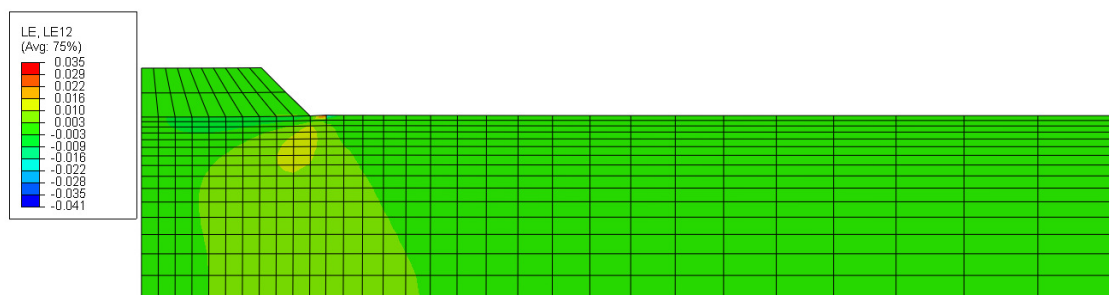
d) t=206 dana

**Slika 5.47** Vertikalno pomeranje (sleganje) tokom vremena, HASP model, OCR=5

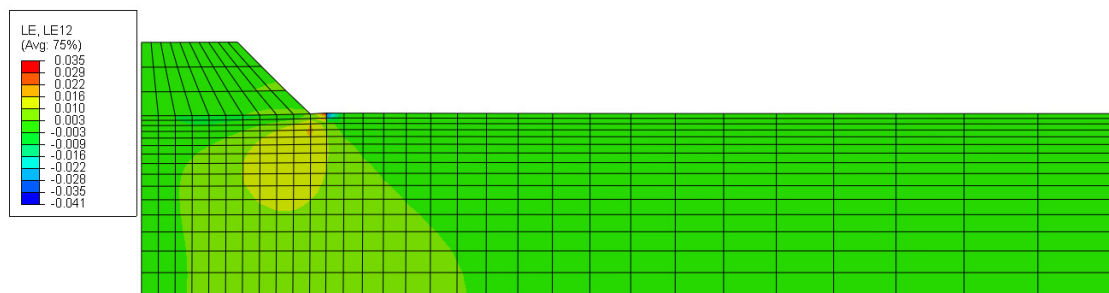




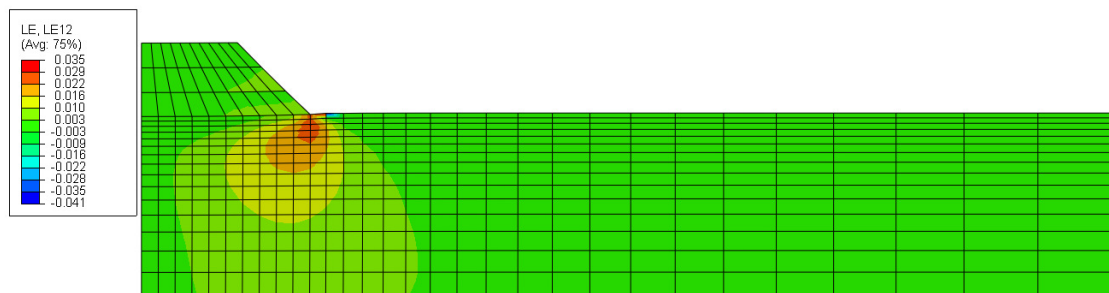
a) t=2 dana



b) t=4 dana



c) t=6 dana

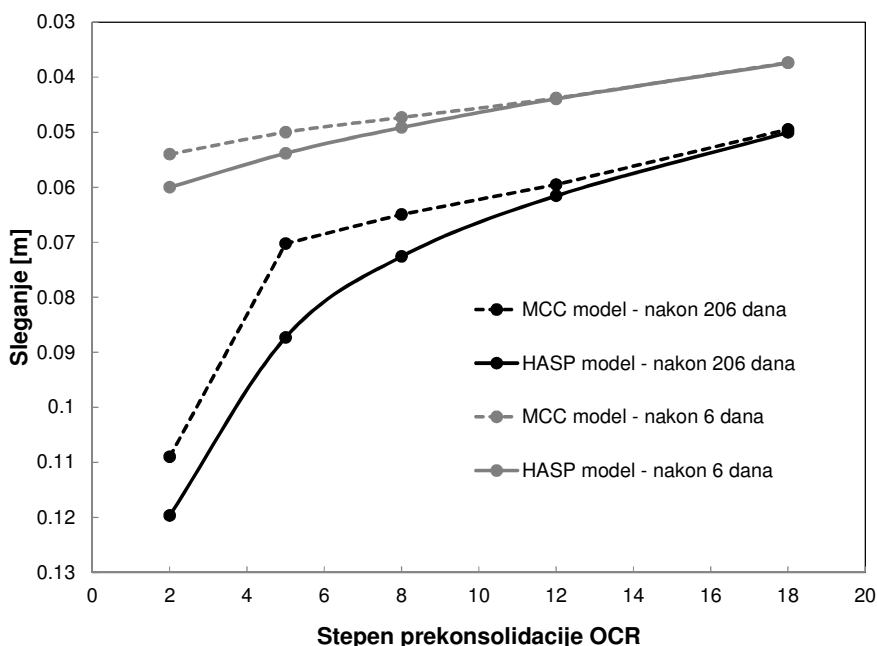


d) t=206 dana

**Slika 5.48** Razvoj smičućih deformacija tokom vremena, HASP model, OCR=5

### 5.4.5 Poređenje sa MCC modelom

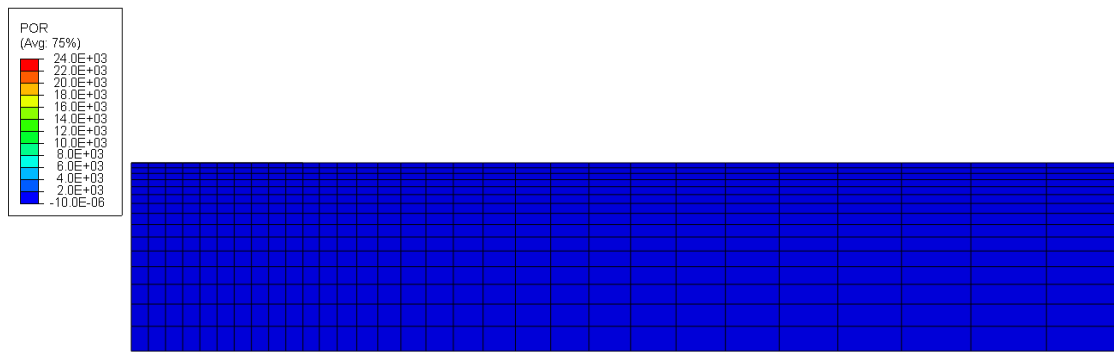
Identičan granični problem je analiziran i koristeći MCC model koji je ugrađen u ABAQUS. Rezultati analize za stepen prekonsolidacije  $OCR=5$  su prikazani na Slikama 5.50-5.54. Predviđa se slična promena pornog pritiska, koeficijenta poroznosti, sleganja i smičućih deformacija tokom vremena, dok je osnovna razlika u veličini zapreminskih i smičućih deformacija. Koristeći HASP model, generalno se dobijaju veće vrednosti deformacija u odnosu na MCC model. Takvi rezultati su očekivani, s obzirom da HASP model predviđa elasto-plastično ponašanje od samog početka procesa deformisanja, dok MCC model predviđa elastično ponašanje unutar inicijalne površi tečenja, koja je definisana veličinom stepena prekonsolidacije. Za veći stepen prekonsolidacije, veće je područje napona u kome MCC predviđa samo elastične deformacije.



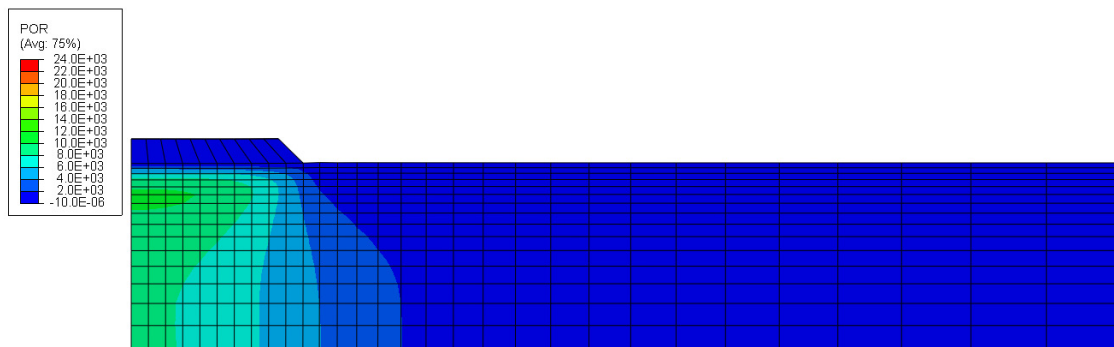
**Slika 5.49** Zavisnost veličine sleganja od stepena prekonsolidacije, HASP model i MCC model

Za veliki stepen prekonsolidacije (u datoj analizi  $OCR > 12$ ), predviđaju se slične vrednosti sleganja za oba modela, Slika 5.49. HASP model, zahvaljujući velikoj vrednosti koeficijenta ojačanja  $\omega$  za veliki stepen prekonsolidacije, predviđa male

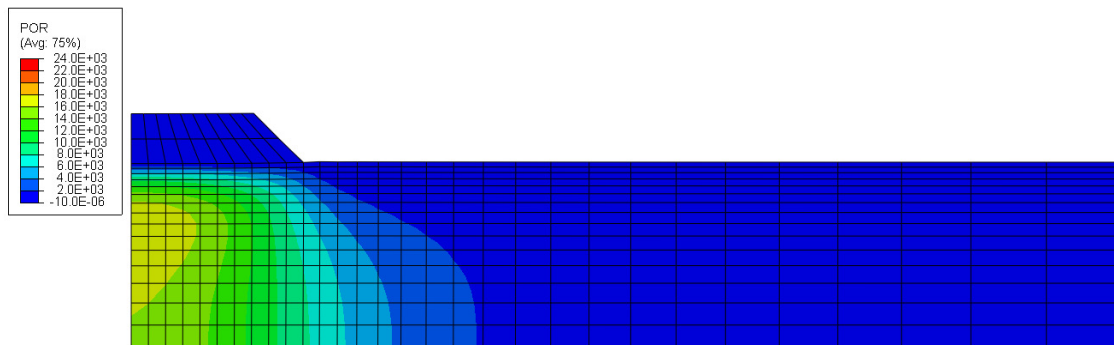
vrednosti plastičnih deformacija i ukupne vrednosti deformacija se ne razlikuju značajno od veličine elastičnih deformacija. Pri manjim vrednostima stepena prekonsolidacije, odstupanja u veličini deformacije su značajno veća. Dok materijal opisan MCC modelom ostaje u elastičnoj zoni za prikazana opterećenja i za manje vrednosti stepena prekonsolidacije, HASP model predviđa veće vrednosti plastičnih deformacija usled manje vrednosti koeficijenta ojačanja  $\omega$ . U prikazanoj analizi, razlike u sleganjima iznose i do 20-25%.



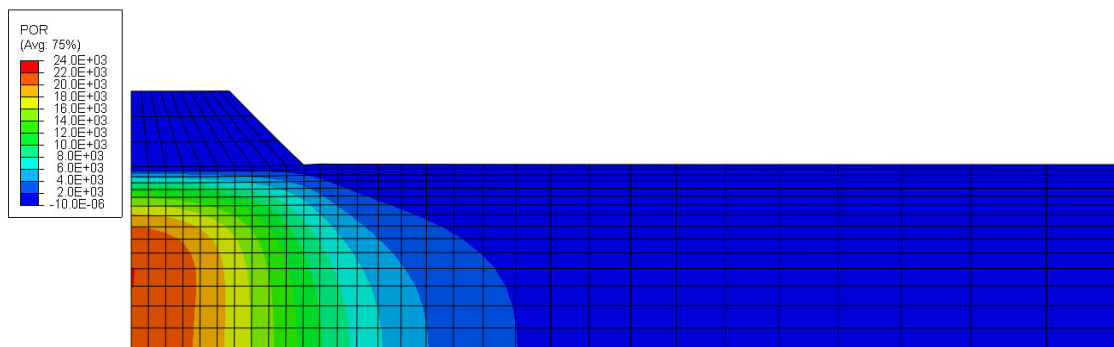
a) t=0 dana



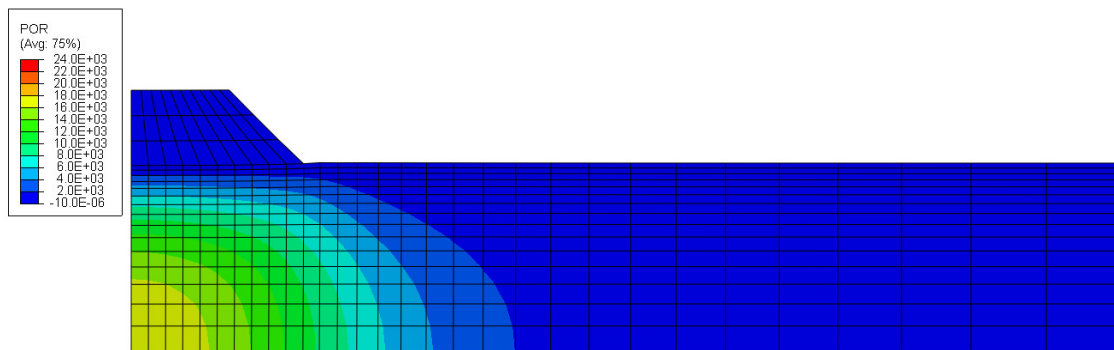
a) t=2 dana



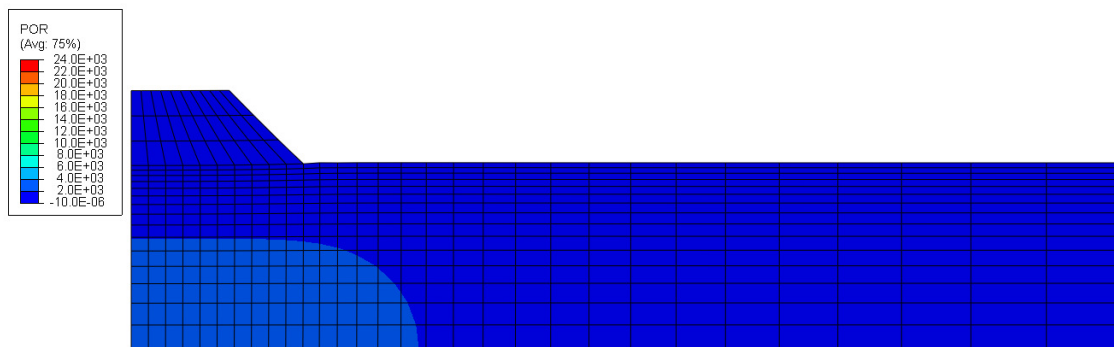
a) t=4 dana



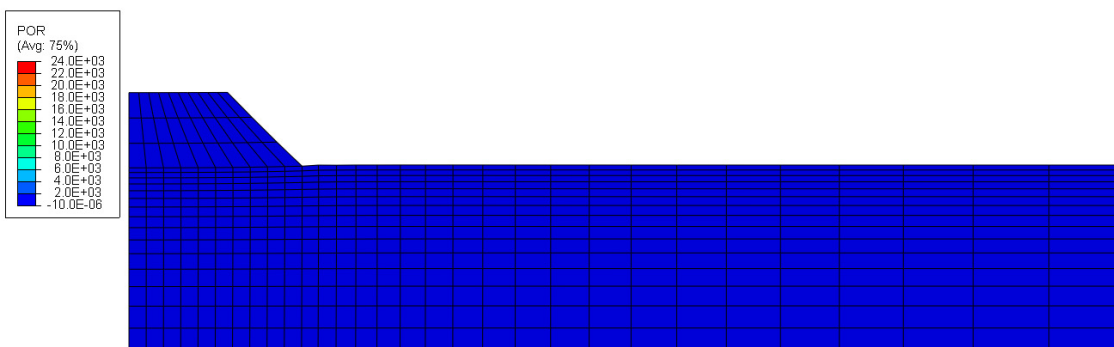
a) t=6 dana



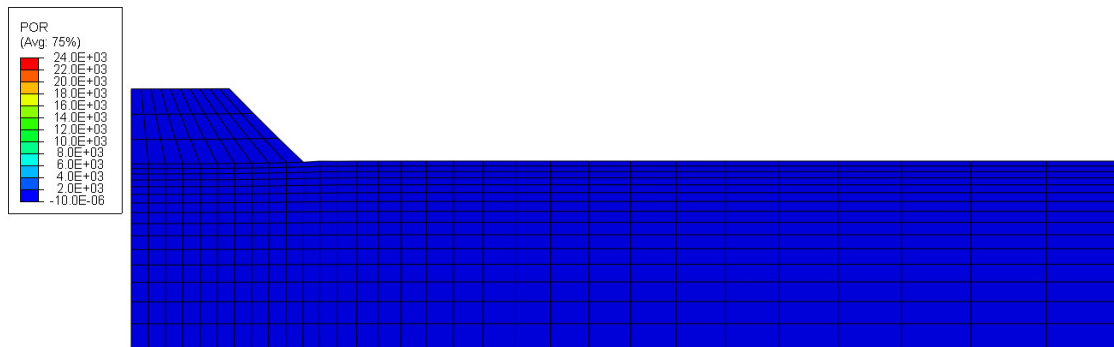
a) t=10 dana



b) t=30 dana

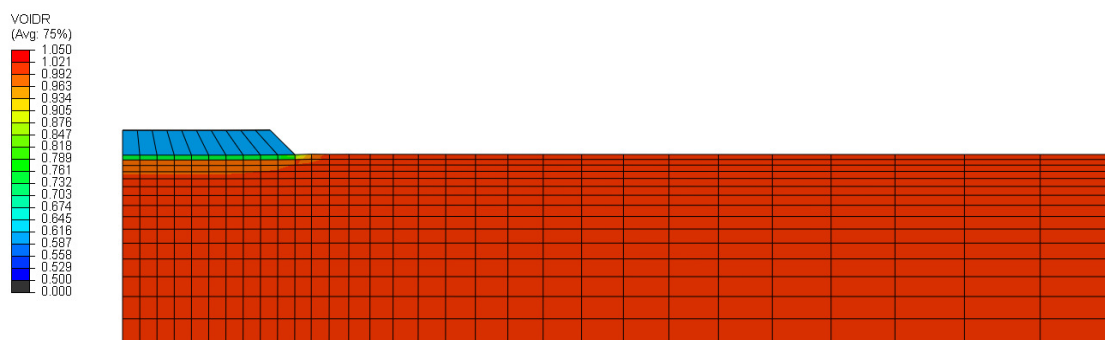


c) t=45 dana

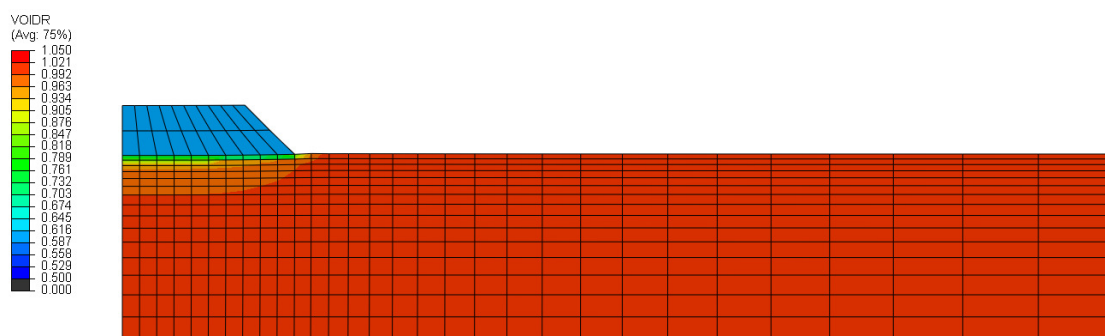


e) t=206 dana

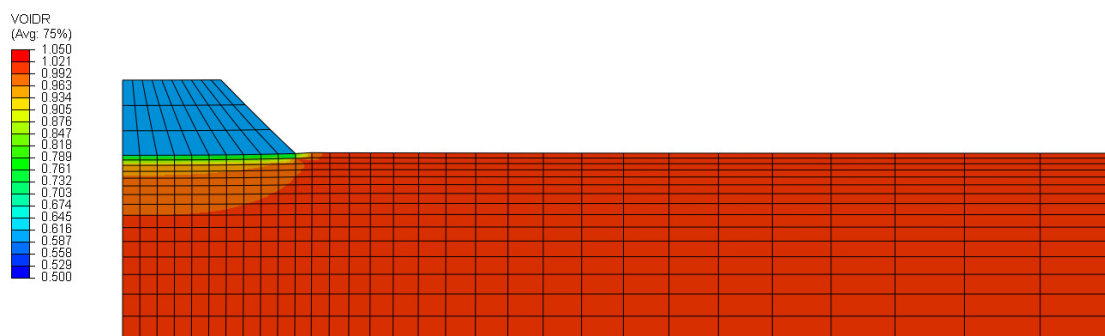
**Slika 5.50** Razvoj pornog natpritisaka tokom vremena, MCC model, OCR=5



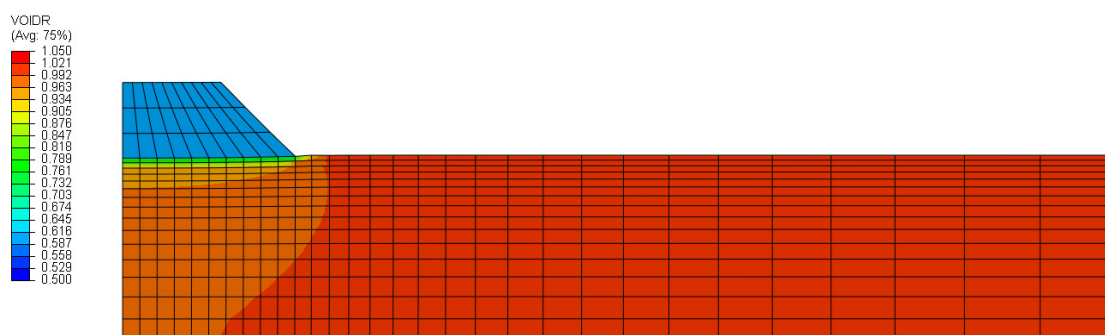
b) t=2 dana



c) t=4 dana

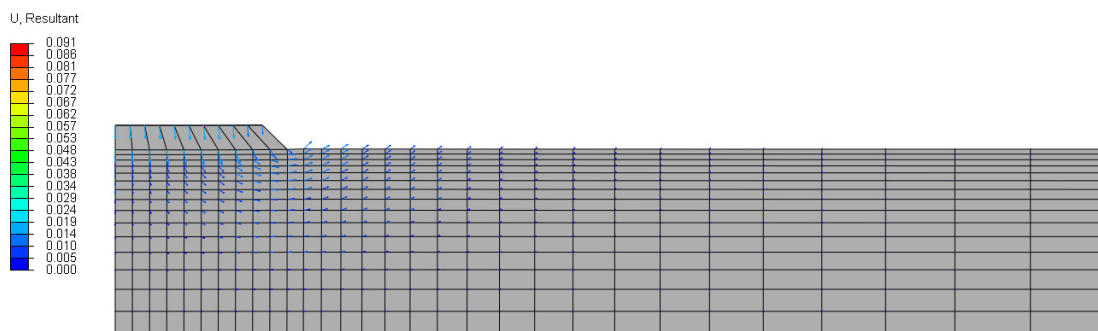
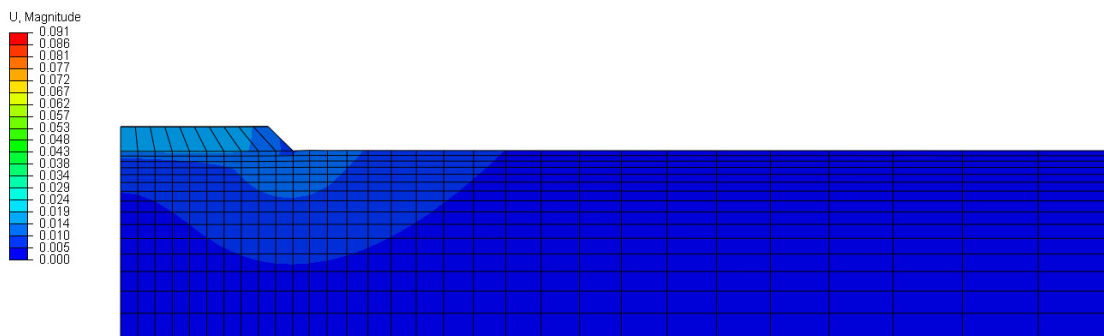


d) t=6 dana

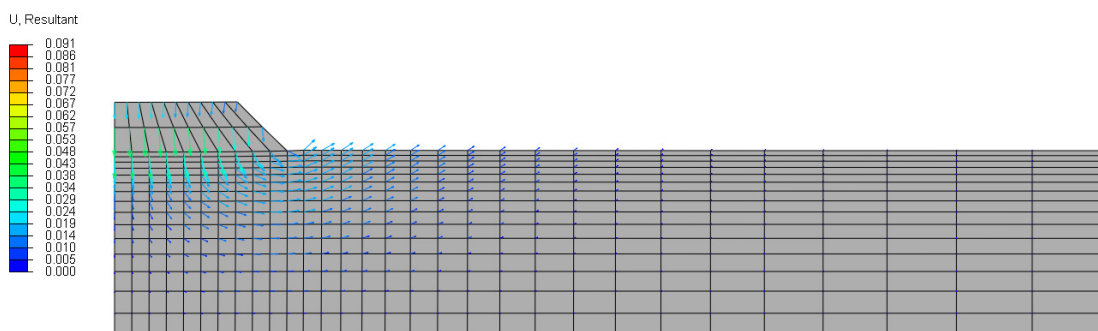
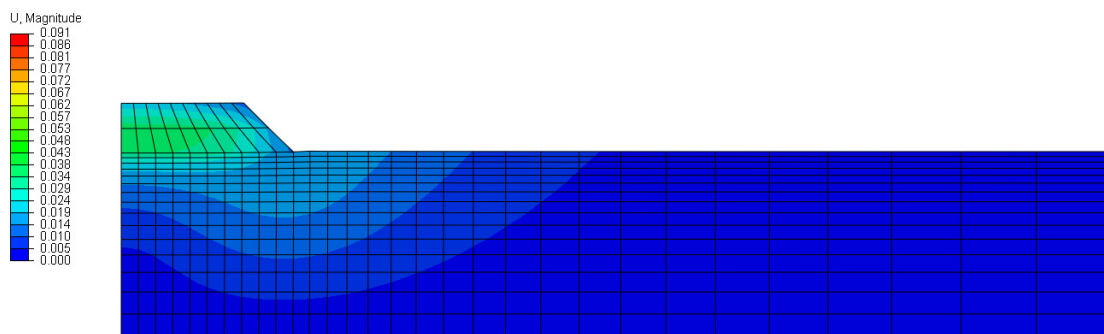


e) t=206 dana

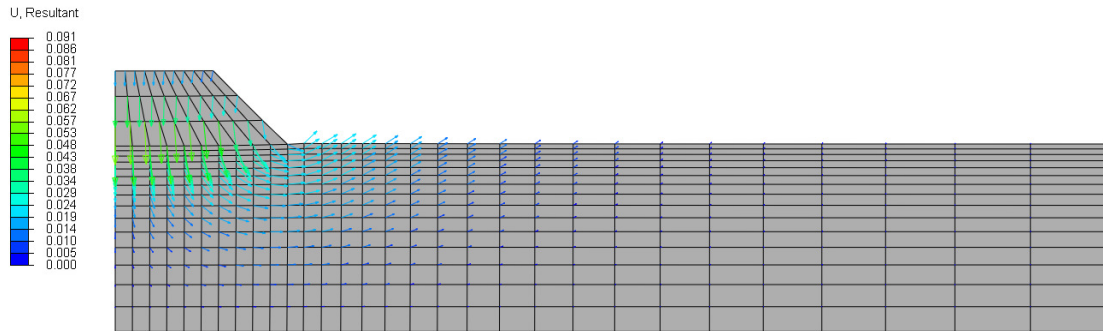
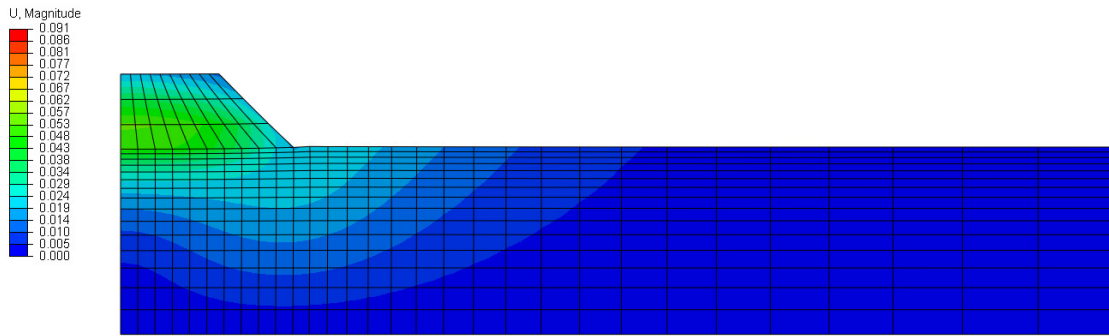
**Slika 5.51** Promena koeficijenta poroznosti tokom vremena, MCC model, OCR=5



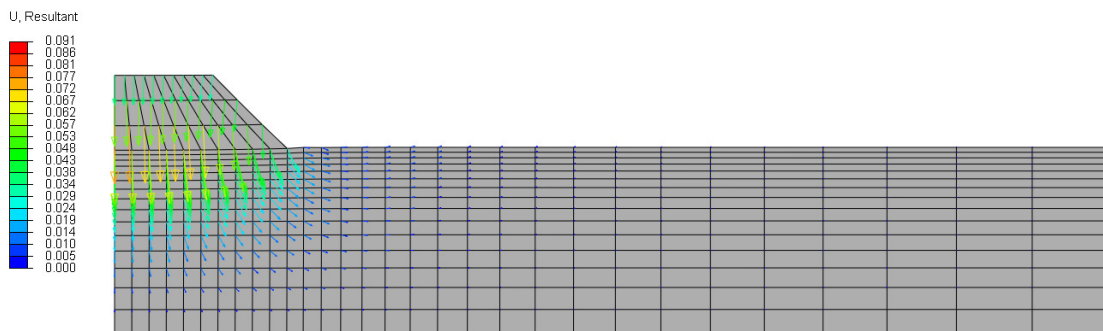
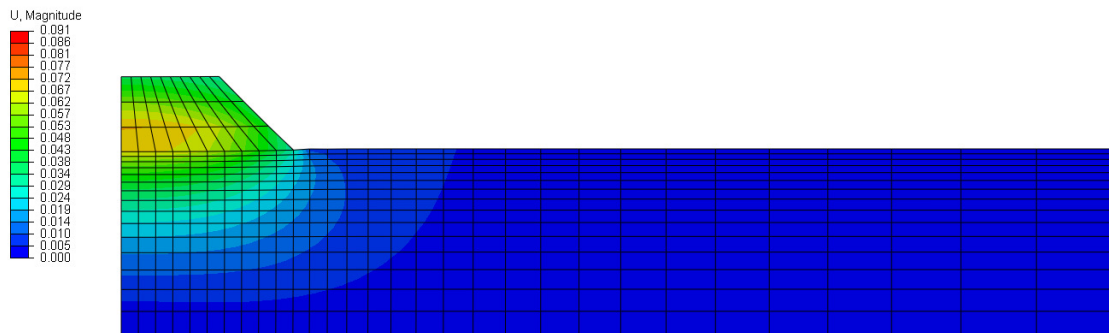
a) t=2 dana



b) t=4 dana



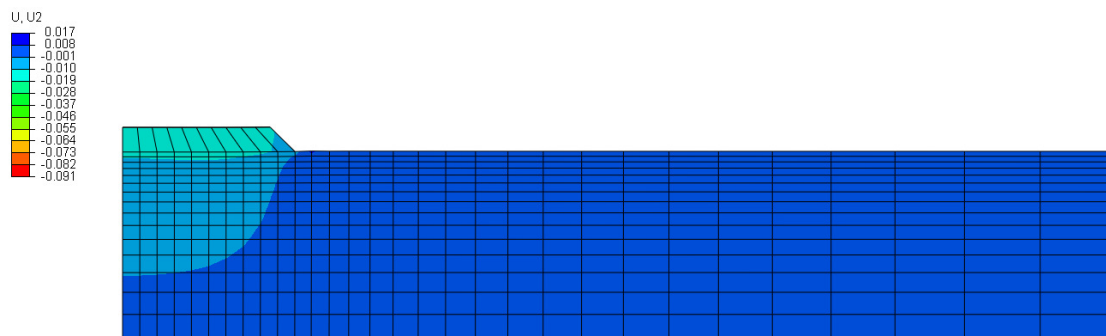
c) t=6 dana



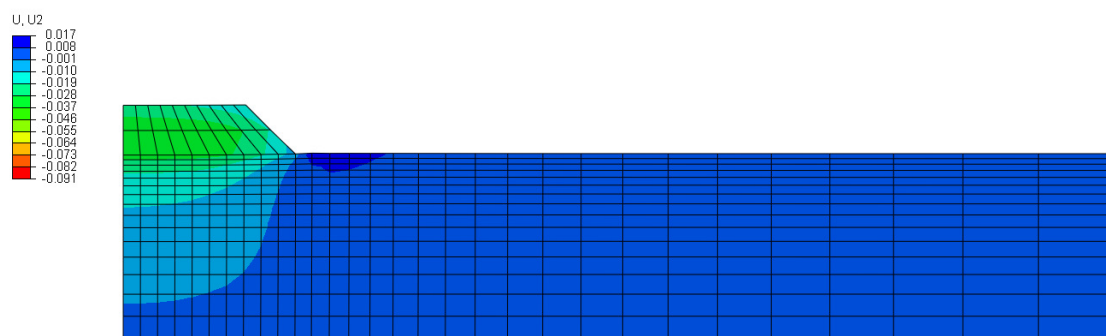
d) t=206 dana

**Slika 5.52** Rezultujuće pomeranje tokom vremena, MCC model, OCR=5

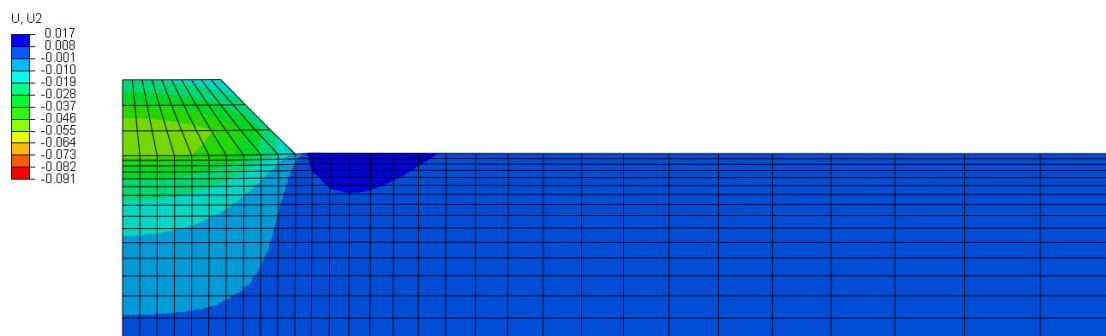




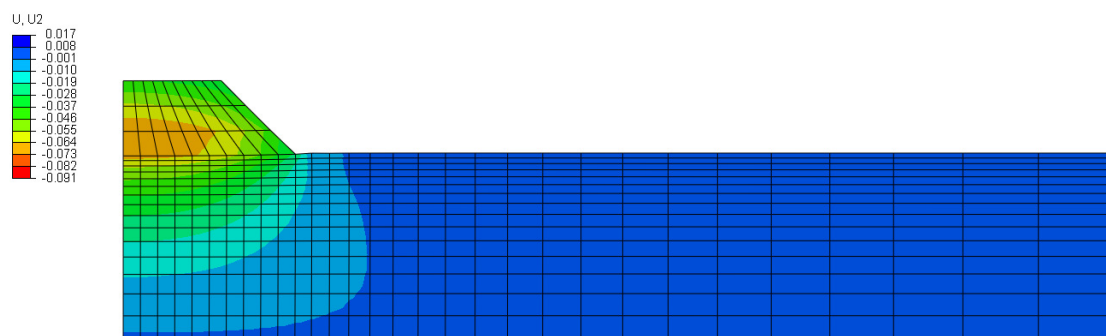
a) t=2 dana



b) t=4 dana

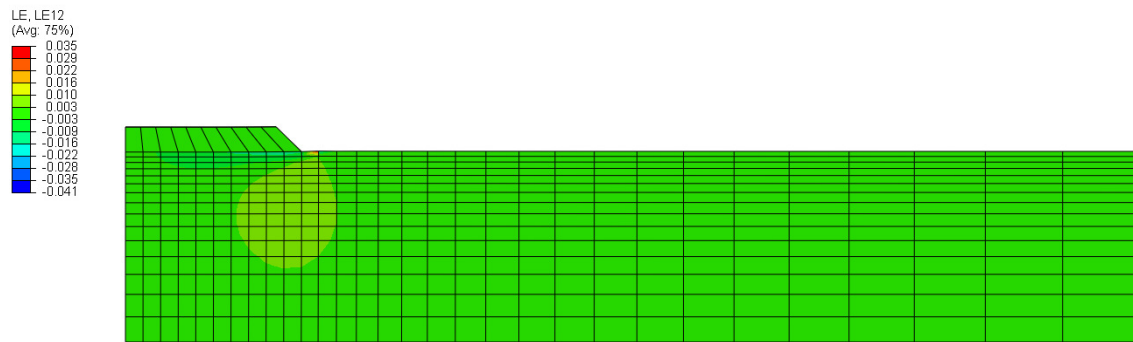


c) t=6 dana

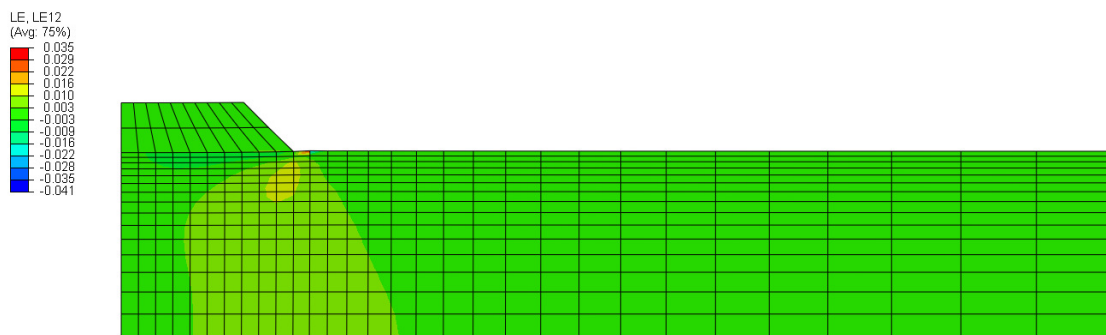


d) t=206 dana

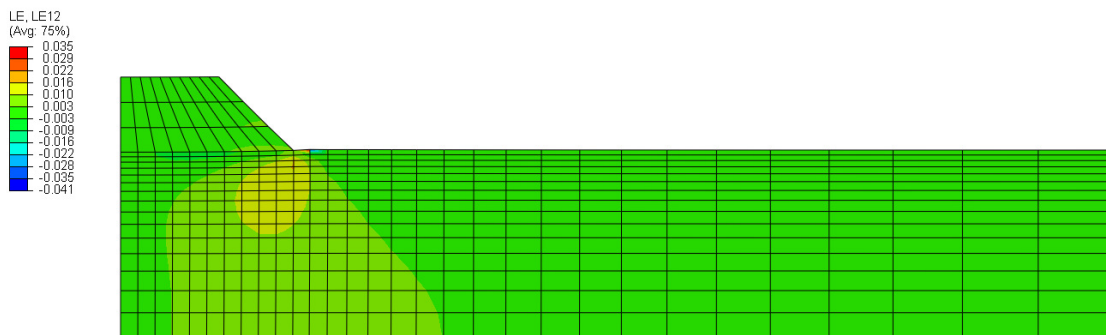
**Slika 5.53** Vertikalno pomeranje (sleganje) tokom vremena, MCC model, OCR=5



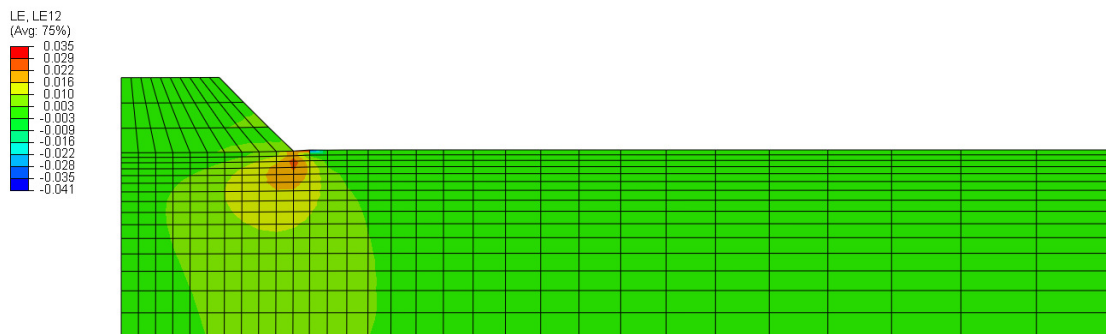
a) t=2 dana



b) t=4 dana



c) t=6 dana



d) t=206 dana

**Slika 5.54** Razvoj smičućih deformacija tokom vremena, MCC model, OCR=5

# POGLAVLJE 6

## Zaključci i preporuke za dalja istraživanja

### 6.1 Zaključna razmatranja

Istraživanje koje je predstavljeno u disertaciji realizovano je u nekoliko faza:

- 1) Formulisanje elasto-plastičnog konstitutivnog modela za opisivanje naponsko-deformacijskih relacija normalno konsolidovanih i prekonsolidovanih glina pri monotonom opterećenju u okviru koncepta kritičnog stanja.
- 2) Validacija formulisanog modela poređenjem sa rezultatima eksperimentalnih istraživanja.
- 3) Definisane algoritma za numeričku integraciju konstitutivnih relacija modela i implementacija modela u softverski paket ABAQUS koristeći korisnički potprogram UMAT.
- 4) Verifikacija postupka implementacije modela.
- 5) Primena konstitutivnog modela u analizi graničnog (konturnog) problema metodom konačnih elemenata.

#### 6.1.1 Formulacija konstitutivnog modela

HASP model, koji je formulisan koristeći teoriju kritičnog stanja i koncept granične površi, uspešno prevazilazi mnoge nedostatke MCC modela prilikom opisivanja mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina, a pri tome je zadržana jednostavnost MCC modela i isti broj parametara. Osnovna ideja je da se unapređenje konstitutivnog modela vrši kroz adekvatno definisanje parametara koji uvode stanje tla kao bitnu odrednicu njegovog mehaničkog ponašanja.

Parametar stanja koji kombinuje uticaj normalnih napona i zbijenosti, definisan u okviru teorije kritičnog stanja, je efektivan parametar u konstitutivnim relacijama tla i to pri opisivanju dilatancije i smičuće čvrstoće. Iako je koncept parametra stanja pre svega razvijen za opisivanje ponašanja peska, u disertaciji je pokazano da se može uspešno koristiti i u konstitutivnim relacijama sitnozrnog tla. Koristeći kombinovani zakon ojačanja (u funkciji plastične zapreminske i plastične smičuće deformacije), kao i eksperimentalno zasnovanu tvrdnju da postoji linearna veza između inicijalnog parametra stanja i maksimalne vrednosti dilatancije za prekonsolidovanu glinu, formulisan je koeficijent ojačanja koji kontroliše sve elemente ponašanja prekonsolidovane gline. Koeficijent ojačanja je istovremeno i koeficijent redukcije plastičnih deformacija, čime je omogućeno elasto-plastično ponašanje od samog početka deformisanja.

U dreniranim uslovima, model predviđa postepen prelaz iz kontrakcije u ekspanziju pre nego što je dostignuta vršna smičuća čvrstoća, kao i postepen prelaz iz ojačanja u omekšanje bez dodatnog matematičkog opisivanja. U nedreniranim uslovima, model predviđa putanju efektivnih napona "S" oblika, kao i negativan porni pritisak pri lomu za jako prekonsolidovane gline. Što je veća vrednost parametra stanja i veći stepen prekonsolidacije, veća je i vrednost koeficijenta ojačanja i model predviđa veću krutost tla. Za normalno konsolidovane gline, HASP model automatski prelazi u MCC model, jer je tada koeficijent ojačanja jednak jedinici.

### **6.1.2 Validacija konstitutivnog modela**

Validacija HASP modela je izvršena kroz poređenje sa publikovanim rezultatima dreniranih i nedreniranih opita triaksijalne kompresije i ekstenzije na širokom spektru prekonsolidovanih glina. Prikazani rezultati simulacije opita pri različitim putanjama totalnih napona, pokazuju veoma dobro slaganje sa eksperimentalnim rezultatima, za sve stepene prekonsolidacije.

U nedreniranim uslovima, postoji dobro predviđanje generalne forme putanje efektivnih napona u zavisnosti od stepena prekonsolidacije, a samim tim i dobro predviđanje pornog pritiska pri triaksijalnoj kompresiji i ekstenziji. Naponsko-

deformacijske relacije se takođe u velikoj meri poklapaju sa eksperimentalnim rezultatima. Maksimalna odstupanja u odnosu na eksperimentalne rezultate se kreću u granicama 10-15%.

U dreniranim uslovima, postoji odlično predviđanje ponašanja prekonsolidovanih glina tokom ojačanja. Bez uvođenja površi Hvorsleva, HASP model dobro opisuje vršnu čvrstoću u svim simulacijama, osim kod  $p'=\text{const}$  testa, gde model precenjuje vrednosti maksimalnog smičućeg napona za jako prekonsolidovane uzorke u opitima triaksijalne kompresije. Postepen prelaz iz ojačanja u omekšanje je uočen za stepene prekonsolidacije  $OCR > 2$ . Nakon dostizanja vršne čvrstoće, sa porastom smičućih deformacija dolazi do pada čvrstoće (omekšanje). Za Kaolin glinu, sa relativno velikom vrednošću kompresionog parametra  $\lambda$ , ne postoji jasno izražena vršna čvrstoća, dok se za veoma tvrde Bangkok i Fujinomori gline uočava vršna čvrstoća pri aksijalnoj deformaciji u intervalu 3-4%, nakon čega sledi pad čvrstoće do dostizanja kritičnog stanja. Za jako prekonsolidovane uzorke, nakon početne kompresije dolazi do ekspanzije i povećanja zapremine, što je u skladu sa eksperimentalnim rezultatima i uočava se odlično predviđanje promene zapreminskih deformacija sa promenom smičućih deformacija. Veća odstupanja od eksperimentalnih rezultata zabeležena su kod neporemećene tvrde Bangkok gline. Takav rezultat nije neočekivan, usled ispucalosti uzoraka prekonsolidovane gline uzetih sa velike dubine.

Nedostatak HASP modela je uočen kod pada čvrstoće, tj. omekšanja. Model tada predviđa velike inkremente plastičnih zapreminskih i smičućih deformacija, usled male vrednosti koeficijenta ojačanja. Kritično stanje je tako dostignuto pri većim vrednostima smičućih deformacija, nego što je to eksperimentalno utvrđeno. Ako se uzme u obzir da je fenomen omekšanja posledica reorganizacije zrna i/ili formiranja lokalnih zona smicanja u tlu, što dovodi do nehomogenog polja deformacija, može se smatrati da HASP model dovoljno tačno predviđa naponsko-deformacijsko ponašanje u tom domenu.

Da bi se potvrdila efikasnost novog HASP modela, izvršeno je i poređenje sa predviđanjem MCC modela i značajan napredak je postignut u sledećim elementima:

- 1) Unutar površi tečenja MCC modela moguć je razvoj samo elastičnih deformacija. HASP model predviđa postepen razvoj plastičnih deformacija od samog početka deformisanja, što je u skladu sa eksperimentalnim rezultatima.
- 2) Nagli prelaz iz elastične u plastičnu oblast (MCC model) nije u skladu sa eksperimentalnim podacima koji pokazuju postepeno smanjenje krutosti prilikom opterećivanja, što se postiže HASP modelom.
- 3) HASP model predviđa postepen prelaz iz kompresije u ekspanziju pre nego što je dostignuta vršna smičuća čvrstoća, za razliku od MCC modela.
- 4) MCC model značajno precenjuje vršni smičući napon, kao i vrednost pornog pritiska za prekonsolidovana tla, dok se predviđanja HASP modela značajno bolje slažu sa eksperimentalnim rezultatima.

### 6.1.3 Algoritam za numeričku integraciju konstitutivnih relacija

HASP model je implementiran u ABAQUS/Standard koristeći korisnički potprogram UMAT. Za numeričku integraciju konstitutivnih relacija modela u postupku implementacije korišćena je implicitna Metoda vodećeg parametra (GPM). Ključni korak u GPM je izbor vodećeg parametra. U disertaciji je usvojen *srednji efektivni napon*  $p'$  kao vodeći parametar, jer su granice mogućih naponskih stanja uvek poznate i sve relevantne veličine HASP modela se mogu izraziti u funkciji srednjeg efektivnog napona. Na taj način je lako formirana vodeća jednačina (uslov tečenja) čije rešenje predstavlja vrednost srednjeg efektivnog napona u konfiguraciji  $t+\Delta t$ .

### 6.1.4 Verifikacija postupka implementacije modela

Da bi se ispitala tačnost i efikasnost postupka implementacije, pored HASP modela, izvršena je i implementacija MCC modela u ABAQUS. Verifikacija razvijenog algoritma numeričke integracije je tako urađena na dva načina:

- 1) Poređenjem rezultata simulacije triaksijalnog opita metodom konačnih elemenata, i to koristeći MCC model već ugrađen u ABAQUS i MCC model implementiran kroz UMAT (GPM metoda)

- 2) Poređenjem rezultata simulacije triaksijalnog opita metodom konačnih elemenata koristeći numeričku integraciju napona (GPM metoda implementirana u ABAQUS) i rezultata simulacije triaksijalnog opita koristeći Euler-ovu integraciju deformacija duž poznate putanje napona (postupak programiran u Excel-u), prema HASP modelu.

Za oba načina verifikacije, prikazani su rezultati simulacije i to: naponsko-deformacijske krive, promena zapremine u dreniranom opitu triaksijalne kompresije i promena pornog pritiska u nedreniranom opitu triaksijalne kompresije. Za sve stepene prekonsolidacije i za obe vrste opita dobijeno je odlično poklapanje rezultata, što ukazuje na tačnost i efikasnost implicitne GPM metode.

#### **6.1.5 Primena konstitutivnog modela u analizi graničnog (konturnog) problema metodom konačnih elemenata**

Razmatran je problem sleganja tla usled fazne izgradnje nasipa na površini prekonsolidovane gline. Ispitana je mogućnosti HASP modela da tokom simulacije procesa konsolidacije predvidi promenu pornog natpritiska, kao i veličine vremenskog sleganja sloja gline. Analiza je rađena za različite stepene prekonsolidacije gline, od blago prekonsolidovane gline (OCR=2) do jako prekonsolidovane gline (OCR=5, 8, 12, 18). Usled brzog opterećivanja sloja zasićene gline male vodopropusnosti, HASP model predviđa pojavu pornog natpritiska, koji raste tokom izgradnje nasipa i u procesu konsolidacije dolazi do potpune disipacije pornog natpritiska. Deformacije se najbrže razvijaju tokom izgradnje nasipa i najveća sleganja su dobijena za blago prekonsolidovane gline, dok se sa porastom stepena prekonsolidacije smanjuju veličine deformacija u tlu, a samim tim i sleganja su manja.

Identičan granični problem je analiziran i koristeći MCC model. Osnovna razlika se dobija u veličini zapreminskih i smičućih deformacija. Koristeći HASP model, generalno se dobijaju veće vrednosti deformacija u odnosu na MCC model. Takvi rezultati su očekivani, s obzirom da HASP model predviđa elasto-plastično ponašanje od samog početka procesa deformisanja, dok MCC model predviđa elastično ponašanje unutar inicijalne površi tečenja, koja je definisana veličinom

stepena prekonsolidacije. Dok su za veliki stepen prekonsolidacije ( $OCR > 12$ ), sleganja približno ista (zahvaljujući velikoj vrednosti koeficijenta ojačanja  $\omega$ ), pri manjim vrednostima stepena prekonsolidacije, odstupanja u veličini deformacije su značajno veća i razlike u sleganjima iznose i do 20-25%.

Na osnovu prikazanih rezultata se može zaključiti da HASP model pruža dobar balans između sofisticiranosti i jednostavnosti i predstavlja dobar teoretski i metodološki okvir za opisivanje mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina pri monotonom opterećenju.

## 6.2 Preporuke za dalja istraživanja

S obzirom da pouzdanost analiza geotehničkih problema metodom konačnih elemenata u velikoj meri zavisi od mogućnosti konstitutivnog modela da adekvatno opiše mehaničko ponašanje tla, svaki napredak u oblasti konstitutivnog modeliranja tla ima suštinski značaj u geotehnici. Nastavak istraživanja koje je predstavljeno u disertaciji podrazumeva unapređenje predviđanja modela pri monotonom opterećenju, kao i primenu modela za različita stanja prekonsolidovanog tla i uslove opterećivanja i to:

- 1) Formiranje elasto-plastične matrice koja bi doprinela znatnom povećanju brzine konvergencije u globalnom Newton-Raphson-ovom iterativnom postupku.
- 2) Proširivanje relacija modela na globalni naponski prostor, uključivanjem treće invarijante (Lode-ov ugao), što bi omogućilo adekvatno definisanje površi tečenja u devijatorskoj ravni i značajno poboljšalo predviđanje modela u rešavanju ravanskih problema.
- 3) Proširivanje relacija modela za predviđanje mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina pri cikličnom opterećenju.
- 4) Proširivanje relacija modela za predviđanje mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih delimično zasićenih glina.



# LITERATURA

ABAQUS (2011). User manual Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.

Al-Tabbaa, A. & Wood, D.M. (1989). An experimentally based "bubble" model for clay. Numerical Models in Geomechanics NUMOG III (eds S Pietruszczak and GN Pande), Elsevier Applied Science; 91-99.

Atkinson, J.H. & Richardson, D. (1987). The effect of local drainage in shear zones on the undrained strength of overconsolidated clay. *Geotechnique* 37, Sept., 393-403.

Atkinson, J.H., Richardson, D., Stallebrass, S.E. (1990). Effect of recent stress history on the stiffness of overconsolidated soil. *Géotechnique* 40, No. 4, 531–540.

Atkinson, J.H. & Salfors, G. (1991). Experimental determination of stress–strain–time characteristics in laboratory and in situ tests. General report to Session 1. Proc. 10th Eur. Conf. Soil Mech. Found. Engng, Florence 3, 915–956.

Atkinson, J.H. (1993). *The mechanics of soils and foundations*. McGraw and Hill Book Company Ltd., England.

Atkinson, J.H. (2007). Peak strength of overconsolidated clays. *Geotechnique*, 57, No. 2: 127-135.

Banerjee, P.K. & Stipho, A.S. (1978). Associated and non-associated constitutive relations for undrained behaviour of isotropic soft clays. *Int J Numer Anal Methods Geomech*; 2:35–56. doi:10.1002/nag.1610020104.

Banerjee, P.K. & Stipho, A.S. (1979). Elastoplastic model for undrained behavior of heavily overconsolidated clays. *Int J Numer Anal Mech Geomech*; 3(1): 97-103.

Been, K. & Jefferies, M.G. (1985). A state parameter for sands. *Géotechnique*; 35(2): 99-112.

Biarez, J. & Hicher, P.Y. (1994). *Elementary Mechanics of Soil Behaviour. Saturated Remoulded Soils*. A. A. Balkema, Rotterdam.

Borja, R.I. & Lee, S.R. (1990). Cam clay plasticity, part I: Implicit integration of constitutive relations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 78, 49-72.

Borja R.I. (1991). Cam clay plasticity, part II: Implicit integration of constitutive equations based on nonlinear elastic stress prediction, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 88, 225-240.

Borja, R.I., Sama, K.M., Sanz, P.F. (2003). On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models. *Comput Methods Appl Mech Eng*; 192:1227–1258.

- Brooker, E.W. & Ireland, H.O. (1965). Earth pressures at rest related to stress history, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 2, No. 1, 1-15.
- Chen, W.F. (1985). *Soil plasticity : theory and implementation*. Amsterdam; New York, Elsevier.
- Dafalias, Y.F. & Popov, E.P. (1976). Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity. *J. of Applied Mechanics*, Vol. 98, 645 - 651.
- Dafalias, Y.F. & Herrmann, L.R. (1980). A bounding surface soil plasticity model. *Proc. Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading*, Vol. 1, Swansea, U.K.; 335-345.
- Dafalias, Y.F. & Herrmann, L.R. (1982). Bounding surface formulation of soil plasticity. *Soil Mechanics – Transient and Cyclic Loads*, eds. G. N. Pande, & O. C. Zienkiewicz, 253-282, John Wiley & Sons Ltd.
- Dafalias Y.F., Manzari M.T., Papadimitriou A.G. (2006). SANICLAY: simple anisotropic clay plasticity model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*; 30: 1231-1257. DOI: 10.1002/nag.524.
- Gajo, A. & Wood, D.M. (1999). Severn-Trent sand: a kinematic-hardening constitutive model: the q-p formulation. *Géotechnique*; 49:595-614. doi: 10.1680/geot.1999.49.5.595.
- Gajo, A. & Wood, D.M. (2001). A new approach to anisotropic, bounding surface plasticity: General formulation and simulations of natural and reconstituted clay behaviour. *Int J Numer Analyt Meth Geomech*; 25-3: 207-241.
- Gasparre, A. (2005). *Advanced Laboratory Characterisation of London Clay*. PhD Thesis, Imperial College London.
- Grammatikopoulou, A., Zdravkovic, L., Potts, D.M. (2006). General Formulation of Two Kinematic Hardening Constitutive Models with a Smooth Elastoplastic Transition. *Int J Geomech*; 6:291-302. doi:10.1061/(ASCE)1532-3641(2006)6:5(291).
- Hassan, Z. (1976). *Stress-strain behaviour and shear strength characteristics of stiff Bangkok Clays*. Master Thesis, Asian Institute of Technology, Thailand.
- Helwany, S. (2007). *Applied soil mechanics with ABAQUS applications*. John Willey & Sons, Canada.
- Hickman, R.J. & Gutierrez, M. (2005). An internally consistent integration method for critical state models. *Int J Numer Anal Methods Geomech*;29: 227-48.
- Hill, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, London.

- Houlsby, G.T., Wroth, C.P., Wood, D.M. (1982). Predictions of the results of laboratory tests on a clay using a critical state model. In Proc. int. workshop on constitutive behaviour of soils, Grenoble, Balkema (Rotterdam), 99-121.
- Iwan, W.D. (1967). On a class of models for the yield behaviour of continuous and composite systems. *Journal of Applied Mechanics*, ASME 34, 612–617.
- Jardine, R.J., Symes, M.J., Burland, J.B. (1984). The measurement of soil stiffness in the triaxial apparatus. *Géotechnique*; 34:323–40. doi: 10.1680/geot.1985.35. 3. 378.
- Jefferies, M.G. (1993). Nor-Sand: a simple critical state model for sand. *Géotechnique*; 43(1):91-103.
- Jefferies, M.G. & Shuttle, D.A. (2002). Dilatancy in general Cambridge-type models. *Géotechnique*; 52:625–37. doi:10.1680/geot.2002.52.9.625.
- Jefferies, M.G. & Been, K. (2006). *Soil Liquefaction: A critical state approach*. Taylor and Francis, Abingdon.
- Jocković, S. & Vukićević, M. (2016). Bounding surface model for overconsolidated clays with new state parameter formulation of hardening rule. *Comput Geotech* 2017; 83:16–29. doi:10.1016/j.compgeo.2016.10.013.
- Kojić, M. & Bathe K.J. (1987a). The effective-stress-function algorithm for thermo-elastoplasticity and creep, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 24, pp. 1509–1532.
- Kojić, M. & Bathe, K.J. (1987b). Thermo-elastic-plastic and creep analysis of shell structures, *Comp. Structures*, Vol. 26, No. 1/2, pp. 135–143.
- Kojić, M. (1993). Implicit stress integration for elastic-plastic deformation of von Mises material with mixed hardening, *Theoretical and Appl. Mech.*, Vol. 19, pp. 121–140.
- Kojić, M. (1993). A general Concept of Implicite Integration of Constitutive Relations for Inelastic Material Deformation, Center for Scientific of Serbian Academy of Sciences and Arts and University of Kragujevac.
- Kojić, M., Slavković, R., Grujić, N., Vukićević, M. (1994). Implicit stress integration algorithm for Modified Cam Clay material, *Teorijska i primenjena mehanika*, Vol 20, ISSN 1450-5584, 95-119.
- Kojić, M., Grujović, N., Slavković, R., Kojić, A. (1995a). Elastic-plastic orthotropic pipe deformation under external load and internal pressure, *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 12, pp. 2354–2358.
- Kojić, M., Živković, M., Kojić, A. (1995b). Elastic-plastic analysis of orthotropic multilayered beam, *Comp. Structures*, Vol. 57, pp. 205–211.

Kojić, M., Slavković, R., Grujović, N., Živković, M. (1995c). A solution procedure for large strain plasticity of the modified Cam-clay material, in: Theocaris, P. S., and Gdoutos, E. E., eds., Proc. 4th Greek National Congress on Mechanics, pp. 511–518.

Kojić, M. (1996a). The governing parameter method for implicit integration of viscoplastic constitutive relations for isotropic and orthotropic metals, *Computational Mechanics*, Vol. 19, 49–57.

Kojić, M., Grujović, N., Slavković, R., Živković, M. (1996b). A general orthotropic von Mises plasticity material model with mixed hardening: model definition and implicit stress integration procedure, *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, Vol. 63, pp. 376–382.

Kojić, M., Slavković, R., Grujović, N., Živković, M., Filipović, N. (2000). PAK – Finite Element Program for Structural Analysis, Heat Conduction, Fluid Mechanics, Coupled Problems, and Biomechanics, Faculty for Mech. Engng, Center for Sc. Research of Serbian Academy of Sc. and Univ. Kragujevac, Serbia.

Kojić, M. (2002a). Stress integration procedures for inelastic material models within the finite element method, *Appl. Mech. Reviews*, Vol. 55, No. 4, pp. 389–414.

Kojić, M., Vlastelica, I., Živković, M. (2002b). Implicit stress integration for large strain elastic-plastic deformation of metal and Gurson material model, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 53, pp. 2701–2720.

Kojić, M. & Bathe, K.J. (2003). *Inelastic Analysis of Solids and Structures*, Berlin, Springer-Verlag.

Kondner, R.L. (1963). Hyperbolic Stress–Strain Response: Cohesive Soils, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 89, No. SM1, 115–143.

Lade, P.V. (2005). Overview of Constitutive Models for Soils, *Geo frontiers conference; Soil constitutive models: evaluation, selection, and calibration: January 24-26, Austin, Texas.*

Li, X.S. & Dafalias, Y.F. (2000). Dilatancy for cohesionless soils. *Géotechnique*; 50:449–60. doi:10.1680/geot.2000.50.4.449.

Maksimović, M. (1989a). Nonlinear failure envelope for soils, *Journal of Geotechnical Engineering, American Society of Civil Eng.*, Vol.115 No.4 April, 581–586.

Maksimović, M. (1989b). Nonlinear failure envelope for coarse grained soils, *XII Int. Conf. SMFE, Rio de Janeiro*, Vol.1, 731–734.

Maksimović, M. (2014). *Mehanika tla. AGM knjiga, peto izdanje*. Beograd.

Manzari, M.T. & Dafalias, Y.F. (1997). A critical state two-surface plasticity model for sands. *Géotechnique*; 47:255–72. doi:10.1680/geot.1997.47.2.255.

- 
- McDowell, G.R. & Hau, K.W. (2003). A simple non-associated three-surface kinematic hardening model. *Géotechnique* 53, No. 4, 433–437.
- Mita, K.A., Dasari, G.R., Lo, K.W. (2004). Performance of a three-dimensional Hvorslev-Modified Cam clay model for overconsolidated clay. *ASCE, Int J Geomech*; 4(4): 296-309.
- Mróz, Z. (1967). On the description of anisotropic workhardening. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 15, 163–175.
- Mroz, Z., Norris, V.A., Zienkiewicz, O.C. (1978). An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading. *Int J Numer Anal Methods Geomech*; 2:203–221.
- Mroz, Z., Norris, V.A., Zienkiewicz, O.C. (1979). Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils. *Géotechnique*, 29, 1 - 34.
- Nakai, T. & Matsuoka, H. (1986). A generalized elastoplastic constitutive model for clay in threedimensional stresses. *Soils and Foundations*; 26(3): 81-98.
- Nakai, T. & Hinokio, M. (2004). A simple elastoplastic model for normally and overconsolidated soils with unified material parameters. *Soils and Foundations*; 44 No2:53–70.
- Nayak, G.C., & Zienkiewicz, O.C. (1972). Elastoplastic stress analysis: a generalization for various constitutive relations including strain softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5, 113-135.
- Nova, R. & Wood, D.M. (1979). A constitutive model for sand in triaxial compression. *Int J Numer Anal Methods Geomech*; 3: 255–278.
- Nova, R. (2006). Modelling of bonded soils with unstable structure. *International Workshop on Modern Trends in Geomechanics – Vienna Springer*.
- Ortiz, M., Pinsky, P.M., Taylor, R.L. (1983). Operator split methods for the numerical solution of the elasto-plastic dynamic problem, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 39, pp. 137–157.
- Ortiz, M. & Popov, E.P. (1985). Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:1561–1576.
- Ortiz, M. & Simo, J.C. (1986). An analysis of a new class of integration algorithms for elasto-plastic constitutive relations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 23, 353-366.
- Owen, D.R.J. & Hinton, E. (1980). *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Pineridge Press, Swansea, Wales, 594 p.
- Parry, R.H.G. (1958). Correspondence. *Géotechnique*; 8:183-186.

- 
- Potts, D.M. & Ganendra, D. (1994). An evaluation of substepping and implicit stress point algorithms, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* vol 119, 341-354.
- Potts, D.M. & Zdravkovic, L. (1999). *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Theory*, Thomas Telford, London.
- Potts, D.M. & Zdravkovic, L. (2001). *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Application*, Thomas Telford, London.
- Potts, D.M. (2002). *Guidelines for the use of advanced numerical analysis*, London, Publisher: Thomas Telford, ISBN: 9780727731258.
- Prévost, J. H. (1977). Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 1, 195–216.
- Puzrin, A. M. (2012). *Constitutive Modelling in Geomechanics*. doi:10.1007/978-3-642-27395-7.
- Roscoe, K.H., Schofield, A.N., Wroth, C.P. (1958). On the yielding of soils. *Géotechnique*, 8, 22 – 53.
- Roscoe, K.H. & Schofield, A.N. (1963). Mechanical behaviour of an idealized 'Wet Clay'. *Proc. of 2nd European Conference on Soil Mechanics*, Wiesbaden, 1, 47 - 54.
- Roscoe, K.H. & Burland, J.B. (1968). On the generalised stress-strain behaviour of 'wet' clay. In: Heyman J, Leckie FA, editors. *Engineering plasticity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press; 535–609.
- Rouainia, M. & Wood, D. M. (1998). A kinematic hardening model for structured clays. *The Geotechnics of Hard Soils-Soft Rocks*, Evangelista & Picarelli (eds), Rotterdam, 817 - 824.
- Schädlich, B. & Schweiger, H.F. (2014). Modelling the shear strength of overconsolidated clays with a Hvorslev surface. *Geotechnik*; 37:47–56. doi:10.1002/gete.201300016.
- Schofield, A.N. & Wroth C.P. (1968). *Critical state soil mechanics*, McGraw-Hill.
- Schofield, A.N. & Wroth, C.P. (1968). *Models and soil mechanics. Critical state soil mechanics*. McGraw-Hill, London, New York, 20 - 21.
- Sheng, D., Sloan, S.W., Hu, H.S. (2000). Aspects of finite element implementation of critical state models. *Comput Mech*; 26(2):185–96.
- Sheng, D.C., Sloan, S.W., Gens, A., Smith, D.W. (2003). Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part 1: Theory. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*; 27(9):745–765.
- Sheng, D.C., Smith, D.W., Sloan, S.W., Gens, A. (2003). Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part 2: Verification and Applications.

---

International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics; 27(9):767–790.

Simo, J.C. & Taylor, R.L. (1985). Consistent tangent operators for rate independent elasto-plasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 48, pp. 101–118.

Simo, J.C. & Taylor, R.L. (1986). A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol 22, 649-670.

Simo, J.C. & Hughes, T. (1998), *Computational inelasticity. Interdisciplinary applied mathematics series.* Springer.

Sloan, S.W. (1987). Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations. *Int J Numer Methods Eng*; 24: 893–911.

Sloan, S.W., Abbo, A.J., Sheng, D.C. (2002). Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control. *Engineering Computations* 2001; 18(1/2):121–54. Erratum: *Engineering Computations*, 19(5/6):594-594.

Sołowski, W.T. & Gallipoli, D. (2010). Explicit stress integration with error control for the Barcelona Basic Model. Part II: Algorithms efficiency and accuracy. *Computers & Geotechnics*; 37(1-2):68–81. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compgeo.2009.07.00>.

Stallebrass, S.E. & Taylor, R.N. (1997). The development of a constitutive model for the prediction of ground movements in overconsolidated clay. *Géotechnique*, 47, 235 - 253.

Surarak, C., Likitlersuang, S., Wanatowski, D., Balasubramaniam, A., Oh, E., Guan, H. (2012). Stiffness and strength parameters for hardening soil model of soft and stiff Bangkok Clays. *Soils and Foundations*; 52 (4): 682–697.

Tatsuoka, F. & Kohata, Y. (1995). Stiffness of hard soils and soft rocks in engineering applications. Keynote Lecture, *Proc. of Int. Symposium Pre-Failure Deformation of Geomaterials*, Balkema, Rotterdam, Volume 2, 947-1063.

Terzaghi, K. (1936). The shearing resistance of saturated soil and the angle between the planes of shear. 1st ICSMFE, Cambridge, MA. pp. 54-56.

Terzaghi, K. & Peck, R.B. (1948). *Soil Mechanics in Engineering Practice*, 1st Edition, John Wiley and Sons, New York.

Tsiampousi, A., Zdravković, L., Potts, D.M. (2013). A new Hvorslev surface for critical state type unsaturated and saturated constitutive models. *Comput Geotech*; 48:156–66. doi:10.1016/j.compgeo.2012.09.010.

Verdugo, R. & Ishihara, K. (1996). The steady state of sandy soils, *Soils and Foundations*, Vol. 36, No. 2, pp :81-91.

Vukićević, M. & Rakić, D. (2010). The mean stress as the governing parameter in the implicit GPM stress integration of modified Cam-Clay model, part II. In:

---

Proceedings of 1st International Conference on Information Technology in Geo-Engineering.

Vukićević, M. (2010). Governing parameter method for implicit stress integration of Modified Cam Clay model, using the mean stress as the governing parameter. XIV Danube – European Conference on Geotechnical Engineering, DECGE 2010, Bratislava, 274-275.

Whittle, A. & Kavvas, M., (1994). Formulation of MIT-E3 constitutive model for overconsolidated clays. *J. Geotech. Eng.* 120 (1), 173–198.

Wilkins, M. L. (1964). Calculation of elastic-plastic flow. *Methods of Computational Physics*. Academic Press, N. Y.; Vol 3.

Wissman, J.W. & Hauck, C. (1983). Efficient elasto-plastic finite element analysis with higher order stress point algorithms, *Comput. Struct.*, Vol. 17, 89-95.

Wood, D.M. (1990). *Soil behaviour and critical state soil mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wood, D.M., Belkher, K., Liu, D.F. (1994). Strain softening and state parameters for sand modelling. *Géotechnique*; 44(2):335-339.

Yao, Y.P., Sun, D.A., Matsuoka, H. (2008). A unified constitutive model for both clay and sand with hardening parameter independent on stress path. *Computers and Geotechnics*, 35(2), 210–222. doi:10.1016/j.compgeo.2007.04.003.

Yao, Y., Hou, W., Zhou, A. (2008). Constitutive model for overconsolidated clays. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 51(2), 179–191. doi:10.1007/s11431-008-0011-2.

Yao, Y.P., Hou, W., Zhou, A.N. (2009). UH model: three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays. *Géotechnique*; 59:451–69. doi:10.1680/geot.2007.00029.

Yu, H.S. (1998). CASM: A unified state parameter model for clay and sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22, No. 8: 621-653.

Yu, H.S. (2006). *Plasticity and geomechanics*. Springer, USA.

Zervoyannis, C. (1982). *Etude synthétique des propriétés mécaniques des argiles saturées et des sables sur chemin oedométrique et triaxial de révolution*. Thèse de doctorat Ecole Centrale Paris Chatenay-Malabry.

Zhu, J.G. & Yin, J.H. (2000). Strain-rate-dependent stress-strain behaviour of overconsolidated Hong Kong marine clay. *Can Geotech J*; 37:1271–82.

Zienkiewicz, O.C. & Naylor, D.J. (1973). *Finite element studies of soils and porous media*. Lecture, finite elements, Oden and de Arantes (eds), UAH Press; 459–493.



# PRILOG 1

## UMAT for ABAQUS – Fortran code for HASP model

```
*****
**          UMAT FOR ABAQUS/STANDARD – HASP MODEL          **
**                                                                 **
**          IMPLICIT INTEGRATION – GOVERNING PARAMETER METHOD    **
*****
**          USER SUBROUTINE          **
*****
C
C
SUBROUTINE UMAT (STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD,
1 RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT,
2 STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, CMNAME,
3 NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT,
4 CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL, NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C-----
C   UMAT variables and constants
C-----
C
CHARACTER*80 CMNAME
C
DIMENSION STRESS (NTENS), STATEV (NSTATV),
1 DDSDE (NTENS, NTENS), DDSDDT (NTENS), DRPLDE (NTENS),
2 STRAN (NTENS), DSTRAN (NTENS), TIME (2), PREDEF (1), DPRED (1),
3 PROPS (NPROPS), COORDS (3), DROT (3, 3), DFGRD0 (3, 3), DFGRD1 (3, 3)
C
C-----
C   NEW variables and constants
C-----
C
PARAMETER (ZERO=0.D0, ONE=1.D0, TWO=2.D0, THREE=3.D0,
1 TOLER=1.D-5, TOLER2=1.D-15,
2 C1=0.9999999D0, C2=1.000001D0)
C
DIMENSION T (NTENS), SPHS (NTENS), DEVS (NTENS), DEVStt (NTENS),
1 EPS (NTENS), DEPS (NTENS), EPSVolm (NTENS), EPSdev (NTENS),
2 DEPSvolm (NTENS), DEPSdev (NTENS), EPStt (NTENS), EPSvolmtt (NTENS),
3 EPSdevtt (NTENS), EPSP (NTENS), EPSPtt (NTENS), DEPSP (NTENS),
4 DEPSdevP (NTENS), STRANvolm (NTENS), STRANdev (NTENS)
C
DOUBLE PRECISION pt, qt, ptt, qtt, Trialp, Trialq, p0, p0t, p0tt,
1 p0tc, etat, ptt1, ptt2, p0tt1, p0tt2, qtt1, qtt2, delq
2 EPSvol, EPSvolm, DEPSvol, DEPSqP,
3 ezero, evoid, evoidt, evoidtt, devoid,
4 alambda, akappa, aM, aC, anu,
5 aKB, EMOD, G, POM1, POM2, DLam,
6 TrialFmc, Fmc1, Fmc2, Fmc,
7 PSIOC, PSINC, R, OMEGA, R1, R2
C
```

```

C-----
C   SPECIFY MATERIAL PROPERTIES
C-----
C
  alambda=PROPS(1)           ! 1 - Slope of compression line
  akappa=PROPS(2)           ! 2 - Slope of swelling line
  aM=PROPS(3)               ! 3 - Slope of critical state line
  ezero=PROPS(4)            ! 4 - Initial void ratio
  aC=PROPS(5)               ! 5 - Specific volume on CSL at p'=1kPa
  anu=PROPS(6)              ! 6 - Poisson's ratio
C
C-----
C   STATE VARIABLES
C-----
C
  evoid=STATEV(1)           !Void ratio
  p0=STATEV(2)              !Hardening parameter
  DO I=3, NTENS+2           !Plastic strains as state variables
    EPSP(I)=STATEV(I)
  ENDDO
C
C-----
C   TRANSFER STRESS AND STRAIN TO CONVENTIONAL DEFINITION IN SOIL
C   MECHANICS (COMPRESSION IS POSITIVE)
C-----
C
  DO N=1, NTENS
    STRESS(N) = -STRESS(N)
    STRAN(N)   = -STRAN(N)
    DSTRAN(N) = -DSTRAN(N)
  ENDDO
C
C-----
C   SPHERICAL AND DEVIATORIC STRESSES, STRAINS, VOID RATIO
C   in configuration t
C-----
C
  CALL KInitial(STRESS, T, DSTRAN, DEPS, STRAN, EPS, NTENS, NDI)
  CALL KSphDevS(SPHS, DEVS, STRESS, NTENS, NDI)
  CALL KVolDevSTRAN(EPSvol, EPSvolm, EPSdev, EPSq1, EPSq,
1     EPS, NTENS, NDI)
C
  evoidt=(ONE+ezero)*exp(-EPSvol)-ONE
C
C-----
C   SPHERICAL AND DEVIATORIC STRAINS and VOID RATIO
C   in configuration t+dt
C-----
C
  CALL KVolDevSTRAN(DEPSvol, DEPSvolm, DEPSdev, DEPSq1, DEPSq,
1     DEPS, NTENS, NDI)
  CALL KSUMVec(EPStt, EPS, DEPS, NTENS)
  CALL KVolDevSTRAN(EPSvoltt, EPSvolmтт, EPSdevтт, EPSq1тт, EPSqтт,
1     EPStt, NTENS, NDI)
C
  evoidтт=(ONE+ezero)*exp(-EPSvolтт)-ONE
C
  devoid=evoidt-evoidтт
C

```

```

C -----
C   STRESS INVARIANTS AND STRESS RATIO in configuration t
C -----
C
C   CALL SINV(T, pt, qt, NDI, NSHR)
C   p0tc=((qt**TWO)/(aM**TWO)*pt))+pt
C   etat=qt/pt
C
C -----
C   HASP parameter OMEGA
C -----
C
C   PSIOC=(ONE+evoidt)+alambda*log(pt)-aC
C   PSINC=(alambda-akappa)*log(TWO*aM**TWO/(aM**TWO+etat**TWO))
C   R1=TWO*exp(-PSIOC/(alambda-akappa))
C   R2=TWO*exp(-PSINC/(alambda-akappa))
C   R=exp((PSINC-PSIOC)/(alambda-akappa))
C   OMEGA=(ONE+((PSINC-PSIOC)/PSINC))*R
C   IF(OMEGA.gt.1500) THEN
C     OMEGA=1500
C   ENDIF
C   IF(OMEGA.lt.-1500) THEN
C     OMEGA=-1500
C   ENDIF
C
C -----
C   MATERIAL MODULUS
C -----
C
C   Bulk modulus - K
C   aKB=((ONE+evoidt)*pt)/(akappa)
C   IF(aKB<100.0d0) THEN
C     aKB=100.0d0
C   ENDIF
C
C   Young modulus - E
C   EMOD=THREE*aKB*(ONE-TWO*anu)
C
C   Shear modulus - G
C   G=THREE*(ONE-TWO*anu)/(TWO*(ONE+anu))*aKB
C
C -----
C   ELASTICITY MATRIX using E and Poisson's ratio
C -----
C
C   DO I=1,NTENS
C     DO J=1, NTENS
C       DDSDE(I,J)=0.0d0
C     ENDDO
C   ENDDO
C   DO K1=1,NDI
C     DO K2=1,NDI
C       DDSDE(K2,K1)=(EMOD*(anu))/((ONE+anu)*(ONE-TWO*anu))
C     ENDDO
C   DDSDE(K1,K1)=(EMOD*(ONE-anu))/((ONE+anu)*(ONE-TWO*anu))
C   ENDDO
C   DO K1=NDI+1,NTENS
C     DDSDE(K1,K1)=(EMOD)/(TWO*(ONE+anu))
C   ENDDO

```

```

C
C-----
C   TRIAL ELASTIC STEP
C-----
C
C   DO I=1, NTENS
C     DO J=1, NTENS
C       T(J)=T(J)+DDSDDE(J,I)*DSTRAN(I)
C     ENDDO
C   ENDDO
C
C   CALL SINV(T, Trialp, Trialq, NDI, NSHR)
C   p0t=p0tc
C   p0tt=p0t
C   IF ((time(1).eq.ZERO).and.(kstep.eq.ONE)) THEN
C     DO I=1,NTENS
C       EPSPt(I)=ZERO
C     ENDDO
C   ENDIF
C
C   Trial yield function F
C   TrialFmc=(Trialq**TWO)/(aM**TWO)+Trialp*(Trialp-p0tt)
C
C-----
C   BRACKETING THE ROOT
C-----
C
C   Initialization
C   IF ((time(1).eq.ONE).and.(kstep.eq.TWO)) THEN
C     ptt1=1.005D0*pt
C     ptt2=1.01D0*pt
C   ELSE
C     ptt1=Trialp
C     ptt2=C1*ptt1
C   ENDIF
C
C   Second option for initialization
C   ptt1=1.0005D0*pt
C   ptt2=1.001D0*pt
C
C   N=0
102 N=N+1
C
C   Hardening parameter
C   p0tt1=p0t*exp(devoid*OMEGA/(alambda-akappa))*
1 (pt/ptt1)**(akappa*OMEGA/(alambda-akappa))
C   IF (abs(TWO*ptt1-p0tt1).lt.TOLER2) THEN
C     qtt1=etat*ptt1
C     delq=abs(qtt-qt)
C     DEPSqP=DEPSq/OMEGA
C     DLam=aM*DEPSqP/(TWO*ptt1)
C   ELSE
C     DEPSvolP=(alambda-akappa)/(ONE+evoidt)*log(p0tt1/p0t)/OMEGA
C     DLam=DEPSvolP/(TWO*ptt1-p0tt1)
C   ENDIF
C
C   Deviatoric stress vector on the end of the increment
C   POM1=THREE*DLam/(aM**TWO)+ONE/(TWO*G)
C   POM2=ONE/(TWO*G)

```

```

DO I=1,NTENS
DEVStt(I)=(DEPSdev(I)+DEVS(I)*POM2)/POM1
ENDDO

C
C Stress vector on the end of the increment
DO I=1,NDI
T(I)=DEVStt(I)+ptt1
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
T(I)=DEVStt(I)
ENDDO

C
C Yield function 1
CALL SINV(T, ptt1, qtt1, NDI, NSHR)
Fmc1=(qtt1**TWO)/(aM**TWO)+ptt1*(ptt1-p0tt1)

C
C
C Hardening parameter
p0tt2=p0t*exp(devoid*OMEGA/(alambda-akappa))*
1(pt/ptt2)**(akappa*OMEGA/(alambda-akappa))
IF (abs(TWO*ptt2-p0tt2).lt.TOLER2) THEN
qtt2=etat*ptt2
delq=abs(qtt-qt)
DEPSqP=DEPSq/OMEGA
DLam=aM*DEPSqP/(TWO*ptt2)
ELSE
DEPSvolP=(alambda-akappa)/(ONE+evoidt)*log(p0tt2/p0t)/OMEGA
DLam=DEPSvolP/(TWO*ptt2-p0tt2)
ENDIF

C
C Deviatoric stress vector on the end of the increment
POM1=THREE*DLam/(aM**TWO)+ONE/(TWO*G)
POM2=ONE/(TWO*G)
DO I=1,NTENS
DEVStt(I)=(DEPSdev(I)+DEVS(I)*POM2)/POM1
ENDDO

C
C Stress vector on the end of the increment
DO I=1,NDI
T(I)=DEVStt(I)+ptt2
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
T(I)=DEVStt(I)
ENDDO

C
C Yield function 2
CALL SINV(T, ptt2, qtt2, NDI, NSHR)
Fmc2=(qtt2**TWO)/(aM**TWO)+ptt2*(ptt2-p0tt2)

C
C
C K=0
IF(Fmc1*Fmc2.GT.ZERO) THEN
ptt1=C2*ptt1
ptt2=C1*ptt2
ENDIF
IF(Fmc1*Fmc2.GT.ZERO) GOTO 102

C
C
C

```

```

C-----
C   BISECTION METHOD
C-----
C
120 K=K+1
    IF (K.gt.50) THEN
        GOTO 101
    ENDIF
    ptt=(ptt1+ptt2)/TWO
C
C   Hardening parameter
p0tt=p0t*exp(devoid*OMEGA/(alambda-akappa))*
1 (pt/ptt)**(akappa*OMEGA/(alambda-akappa))
    IF (abs(TWO*ptt-p0tt).lt.TOLER2) THEN
        qtt=etat*pt
        ptt=pt
        delq=abs(qtt-qt)
        DEPSqP=DEPSq/OMEGA
        DLam=aM*DEPSqP/(TWO*ptt)
    ELSE
        DEPSvolP=(alambda-akappa)/(ONE+evoidt)*log(p0tt/p0t)/OMEGA
        DLam=DEPSvolP/(TWO*ptt-p0tt)
    ENDIF
C
C   Deviatoric stress vector on the end of the increment
POM1=THREE*DLam/(aM**TWO)+ONE/(TWO*G)
POM2=ONE/(TWO*G)
DO I=1,NTENS
    DEVStt(I)=(DEPSdev(I)+DEVS(I)*POM2)/POM1
ENDDO
C
C   Stress vector on the end of the increment
DO I=1,NTENS
    T(I)=DEVStt(I)+ptt
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
    T(I)=DEVStt(I)
ENDDO
C
C   Yield function
CALL SINVT(T, ptt, qtt, NDI, NSHR)
Fmc=(qtt**TWO)/(aM**TWO)+ptt*(ptt-p0tt)
C
C
    IF(Fmc1*Fmc.lt.ZERO) THEN
        ptt2=ptt
        Fmc2=Fmc
    ELSE
        ptt1=ptt
        Fmc1=Fmc
    ENDIF
C
    IF (abs(Fmc).gt.TOLER) GOTO 120
C
C   Plastic shear strain increment
101 DO I=1,NTENS
    DEPSdevP(I)=THREE*DLam/aM**TWO*DEVStt(I)
ENDDO
C

```

```

C      Plastic strain increment
      DO I=1,NDI
        DEPSP(I)=DEPSdevP(I)+DEPSvolP
      ENDDO
      DO I=NDI+1,NTENS
        DEPSP(I)=DEPSdevP(I)
      ENDDO

C
C      Plastic strain vector in configuration t+dt
      DO I=1,NTENS
        EPSPtt(I)=EPSPtt(I)+DEPSP(I)
      ENDDO

C
C*****
C      UPDATES FOR NEXT STEP
C*****
C
      DO I=1,NTENS
        STRESS(I)=T(I)
      ENDDO

C
C      Update state variables
C
      evoid=evoidtt
      p0=p0tt
      STATEV(1)=evoid
      STATEV(2)=p0
      DO I=3, NTENS+2
        STATEV(I)=EPSPtt(I)
      ENDDO

C
C-----
C      TRANSFER STRESS AND STRAIN TO CONVENTIONAL DEFINITION IN SOIL
C      MECHANICS (COMPRESSION IS POSITIVE)
C-----
C
      DO N=1,NTENS
        STRESS(N) = -STRESS(N)
        STRAN(N)   = -STRAN(N)
        DSTRAN(N) = -DSTRAN(N)
      ENDDO

C
300 RETURN
END

C
*****
**                                UTILITY SUBROUTINES                                **
*****
C
C
      SUBROUTINE KInitial(STRESS, T, DSTRAN, DEPS, STRAN, EPS,
1NTENS, NDI)
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      DIMENSION T(NTENS), STRESS(NTENS), DSTRAN(NTENS), DEPS(NTENS),
1STRAN(NTENS), EPS(NTENS)
      DO I=1, NTENS
        T(I)=0.d0
      ENDDO
      DO I=1, NTENS

```

```

T(I)=STRESS(I)
ENDDO
DO I=1, NTENS
DEPS(I)=0.d0
ENDDO
DO I=1, NDI
DEPS(I)=DSTRAN(I)
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
DEPS(I)=DSTRAN(I)/TWO
ENDDO
DO I=1, NTENS
EPS(I)=0.d0
ENDDO
DO I=1, NDI
EPS(I)=STRAN(I)
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
EPS(I)=STRAN(I)/TWO
ENDDO
RETURN
END SUBROUTINE KInitial
C
C*****
C
SUBROUTINE KSphDevS(SPHS, DEVS, STRESS, NTENS, NDI)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
INTEGER NTENS, NDI
DIMENSION SPHS(NTENS), DEVS(NTENS), STRESS(NTENS)
p=(STRESS(1)+STRESS(2)+STRESS(3))/THREE
DO I=1, NDI
SPHS(I)=p
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
SPHS(I)=0.d0
ENDDO
DO I=1, NDI
DEVS(I)=STRESS(I)-p
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
DEVS(I)=STRESS(I)
ENDDO
RETURN
END SUBROUTINE KSphDevS
C
C*****
C
SUBROUTINE KVolDevSTRAN(STRANvol, STRANvolm, STRANdev, STRANq1,
1STRANq, STRAN, NTENS, NDI)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
INTEGER NTENS, NDI
DIMENSION STRANvolm(NTENS), STRANdev(NTENS), STRAN(NTENS)
STRANvol=0.d0
DO I=1, NDI
STRANvol=STRANvol+STRAN(I)
END DO
DO I=1, NDI
STRANvolm(I)=STRANvol/THREE
ENDDO

```



```

DO I=NDI+1, NTENS
STRANvolm(I)=0.d0
ENDDO
DO I=1, NDI
STRANdev(I)=STRAN(I)-STRANvol/THREE
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
STRANdev(I)=STRAN(I)
ENDDO
STRANq1=2*((STRAN(1)-STRAN(2))**2+(STRAN(2)-STRAN(3))**2+
1(STRAN(3)-STRAN(1))**2)
DO I=NDI+1, NTENS
STRANq1=STRANq1+12*STRAN(I)**2
ENDDO
STRANq=1/3*SQRT(STRANq1)
RETURN
END SUBROUTINE KVolDevSTRAN
C
C*****
C
SUBROUTINE KSUMVec(VecS, Vec1, Vec2, NTENS)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
INTEGER NTENS
DIMENSION VecS(NTENS), Vec1(NTENS), Vec2(NTENS)
DO I=1, NTENS
VecS(I)=Vec1(I)+Vec2(I)
ENDDO
RETURN
END SUBROUTINE KSUMVec
C
C*****
C
SUBROUTINE KDIFVec(VecD, Vec1, Vec2, NTENS)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
INTEGER NTENS
DIMENSION VecD(NTENS), Vec1(NTENS), Vec2(NTENS)
DO I=1, NTENS
VecD(I)=Vec1(I)-Vec2(I)
END DO
RETURN
END SUBROUTINE KDIFVec
C
C*****

```

## UMAT for ABAQUS – Fortran code for MCC model

```

*****
**          UMAT FOR ABAQUS/STANDARD – MCC MODEL          **
**                                                    **
**          IMPLICIT INTEGRATION – GOVERNING PARAMETER METHOD  **
*****
**          USER SUBROUTINE          **
*****
C
C
SUBROUTINE UMAT (STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD,
1  RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT,
2  STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, CMNAME,
3  NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT,
4  CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL, NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C -----
C  UMAT variables and constants
C -----
C
CHARACTER*80 CMNAME
C
DIMENSION STRESS (NTENS), STATEV (NSTATV),
1  DDSDE (NTENS, NTENS), DDSDDT (NTENS), DRPLDE (NTENS),
2  STRAN (NTENS), DSTRAN (NTENS), TIME (2), PREDEF (1), DPRED (1),
3  PROPS (NPROPS), COORDS (3), DROT (3, 3), DFGRD0 (3, 3), DFGRD1 (3, 3)
C
C -----
C  NEW variables and constants
C -----
C
PARAMETER (ZERO=0.D0, ONE=1.D0, TWO=2.D0, THREE=3.D0,
1  TOLER=1.D-5, TOLER2=1.D-20,
2  C1=0.9999D0, C2=1.0001D0)
C
C
DIMENSION T (NTENS), SPHS (NTENS), DEVS (NTENS), DEVStt (NTENS),
1  EPS (NTENS), DEPS (NTENS), EPSVolm (NTENS), EPSdev (NTENS),
2  DEPSvolm (NTENS), DEPSdev (NTENS), EPStt (NTENS), EPSvolmtt (NTENS),
3  EPSdevtt (NTENS), EPSP (NTENS), EPSptt (NTENS), DEPSP (NTENS),
4  DEPSdevP (NTENS), STRANvolm (NTENS), STRANdev (NTENS)
C
DOUBLE PRECISION pt, qt, ptt, qtt, Trialp, Trialq, p0, p0t, p0tt,
1  p0init, etat, ptt1, ptt2, p0tt1, p0tt2, qtt2, qtt2, delq
2  EPSvol, EPSvolm, DEPSvol, DEPSqP,
3  ezero, evoid, evoidt, evoidtt, evoid,
4  alambda, akappa, aM, aC, aN, anu,
5  aKB, EMOD, G, POM1, POM2, DLam,
6  TrialFmc, Fmc1, Fmc2, Fmc
C
C -----
C  SPECIFY MATERIAL PROPERTIES
C -----

```

```

C
  alambda=PROPS(1)      ! 1 - Slope of compression line
  akappa=PROPS(2)      ! 2 - Slope of swelling line
  aM=PROPS(3)          ! 3 - Slope of critical state line
  ezero=PROPS(4)       ! 4 - Initial void ratio
  p0init=PROPS(5)      ! 5 - Initial hardening parameter
  aC=PROPS(6)          ! 6 - Specific volume on CSL at p'=1kPa
  anu=PROPS(7)         ! 7 - Poisson's ratio

C
  aN=aC+(alambda-akappa)*log(TWO)! Specific volume on ICL at p'=1kPa
C
C -----
C  STATE VARIABLES
C -----
C
  evoid=STATEEV(1)      !Void ratio
  p0=STATEEV(2)         !Hardening parameter
  DO I=3, NTENS+2       !Plastic strains as state variable
  EPSP(I)=STATEEV(I)
  END DO

C
C -----
C  TRANSFER STRESS AND STRAIN TO CONVENTIONAL DEFINITION IN SOIL
C  MECHANICS (COMPRESSION IS POSITIVE)
C -----
C
  DO N=1, NTENS
  STRESS(N) = -STRESS(N)
  STRAN(N)   = -STRAN(N)
  DSTRAN(N) = -DSTRAN(N)
  ENDDO

C
C -----
C  SPHERICAL AND DEVIATORIC STRESSES, STRAINS, VOID RATIO
C  in configuration t
C -----
C
  CALL KInitial(STRESS, T, DSTRAN, DEPS, STRAN, EPS, NTENS, NDI)
  CALL KSpHDevS(SPHS, DEVS, STRESS, NTENS, NDI)
  CALL KVolDevSTRAN(EPSvol, EPSvolm, EPSdev, EPSq1, EPSq,
  1 EPS, NTENS, NDI)

C
  evoidt=(ONE+ezero)*exp(-EPSvol)-ONE

C
C -----
C  SPHERICAL AND DEVIATORIC STRAINS and VOID RATIO
C  in configuration t+dt
C -----
C
  CALL KVolDevSTRAN(DEPSvol, DEPSvolm, DEPSdev, DEPSq1, DEPSq,
  1 DEPS, NTENS, NDI)
  CALL KSUMVec(EPStt, EPS, DEPS, NTENS)
  CALL KVolDevSTRAN(EPSvoltt, EPSvolmтт, EPSdevтт, EPSq1тт, EPSqтт,
  1 EPStt, NTENS, NDI)

C
  evoidтт=(ONE+ezero)*exp(-EPSvolтт)-ONE

C
  devoid=evoidt-evoidтт

C

```

```

C-----
C   STRESS INVARIANTS AND STRESS RATIO in configuration t
C-----
C
C   CALL SINV(T, pt, qt, NDI, NSHR)
C   p0tnew=pt*exp((aN-(ONE+evoidt)-alambda*log(pt))/(alambda-akappa))
C   etat=qt/pt
C
C-----
C   MATERIAL MODULES
C-----
C
C   Bulk modulus - K
C   aKB=((ONE+evoidt)*pt)/(akappa)
C   IF (aKB<100.0d0) THEN
C   aKB=100.0d0
C   ENDIF
C
C   Young modulus - E
C   EMOD=THREE*aKB*(ONE-TWO*anu)
C
C   Shear modulus - G
C   G=THREE*(ONE-TWO*anu)/(TWO*(ONE+anu))*aKB
C
C-----
C   ELASTICITY MATRIX using E and Poisson's ratio
C-----
C
C   DO I=1,NTENS
C       DO J=1, NTENS
C           DDSDE(I,J)=0.0d0
C       END DO
C   END DO
C
C   DO K1=1,NDI
C       DO K2=1,NDI
C           DDSDE(K2,K1)=(EMOD*(anu))/((ONE+anu)*(ONE-TWO*anu))
C       END DO
C   DDSDE(K1,K1)=(EMOD*(ONE-anu))/((ONE+anu)*(ONE-TWO*anu))
C   END DO
C   DO K1=NDI+1,NTENS
C       DDSDE(K1,K1)=(EMOD)/(TWO*(ONE+anu))
C   END DO
C
C-----
C   TRIAL ELASTIC STEP
C-----
C
C   DO I=1, NTENS
C       DO J=1, NTENS
C           T(J)=T(J)+DDSDE(J,I)*DSTRAN(I)
C       END DO
C   END DO
C
C   CALL SINV(T, Trialp, Trialq, NDI, NSHR)
C
C   IF ((time(1).eq.ZERO).and.(kstep.eq.ONE)) THEN
C   p0t=p0init
C   else

```

```

p0t=STATEV(2)
endif
p0tt=p0t
C
C -----
C
IF ((time(1).eq.ZERO).and.(kstep.eq.ONE)) THEN
    DO I=1,NTENS
        EPSPt(I)=ZERO
    END DO
END IF
C
C Trial yield function F
C TrialFmc=(Trialq**TWO)/(aM**TWO)+Trialp*(Trialp-p0tt)
C
C -----
C CHECK YIELD FUNCTION F=0
C -----
C
IF (TrialFmc .le. TOLER) GOTO 200
IF (TrialFmc .gt. TOLER) GOTO 100
C
C *****
C PLASTIC DEFORMATION HAS OCCURRED
C *****
C
100 continue
    K=0
C
C -----
C BRACKETING THE ROOT
C -----
C
    ptt1=Trialp
    ptt2=C1*ptt1
C
    N=0
102 N=N+1
C
C Hardening parameter
    p0tt1=p0t*exp(devoid/(alambda-akappa))*
1 (pt/ptt1)**(akappa/(alambda-akappa))
IF (abs(TWO*ptt1-p0tt1).lt.TOLER2) THEN
    qtt1=etat*ptt1
    delq=abs(qtt-qt)
    DEPSqP=DEPSq
    DLam=aM*DEPSqP/(TWO*ptt1)
ELSE
    DEPSvolP=(alambda-akappa)/(ONE+evoidt)*log(p0tt1/p0t)
    DLam=DEPSvolP/(TWO*ptt1-p0tt1)
ENDIF
C
C Deviatoric stress vector on the end of the increment
    POM1=THREE*DLam/(aM**TWO)+ONE/(TWO*G)
    POM2=ONE/(TWO*G)
DO I=1,NTENS
    DEVStt(I)=(DEPSdev(I)+DEVS(I)*POM2)/POM1
ENDDO
C

```

```

C      Stress vector on the end of the increment
      DO I=1,NDI
      T(I)=DEVStt(I)+ptt1
      ENDDO
      DO I=NDI+1, NTENS
      T(I)=DEVStt(I)
      ENDDO

C
C      Yield function 1
      CALL SINV(T, ptt1, qtt1, NDI, NSHR)
      Fmc1=(qtt1**TWO)/(aM**TWO)+ptt1*(ptt1-p0tt1)

C
C
C      Hardening parameter
      p0tt2=p0t*exp(devoid/(alambda-akappa))*
1      (pt/ptt2)**(akappa/(alambda-akappa))
      IF (abs(TWO*ptt2-p0tt2).lt.TOLER2) THEN
      qtt2=etat*ptt2
      delq=abs(qtt-qt)
      DEPSqP=DEPSq
      DLam=aM*DEPSqP/(TWO*ptt2)
      ELSE
      DEPSvolP=(alambda-akappa)/(ONE+evoidt)*log(p0tt2/p0t)
      DLam=DEPSvolP/(TWO*ptt2-p0tt2)
      ENDF

C
C      Deviatoric stress vector on the end of the increment
      POM1=THREE*DLam/(aM**TWO)+ONE/(TWO*G)
      POM2=ONE/(TWO*G)
      DO I=1,NTENS
      DEVStt(I)=(DEPSdev(I)+DEVS(I)*POM2)/POM1
      ENDDO

C
C      Stress vector on the end of the increment
      DO I=1,NDI
      T(I)=DEVStt(I)+ptt2
      ENDDO
      DO I=NDI+1, NTENS
      T(I)=DEVStt(I)
      ENDDO

C
C      Yield function 2
      CALL SINV(T, ptt2, qtt2, NDI, NSHR)
      Fmc2=(qtt2**TWO)/(aM**TWO)+ptt2*(ptt2-p0tt2)

C
C
      K=0
      IF (Fmc1*Fmc2.GT.ZERO) THEN
      ptt1=C2*ptt1
      ptt2=C1*ptt2
      ENDF
      IF (Fmc1*Fmc2.GT.ZERO) GOTO 102

C
C-----
C      BISECTION METHOD
C-----
C
120 K=K+1
      IF (K.gt.50) THEN

```

```

      GOTO 101
      ENDIF
      ptt=(ptt1+ptt2)/TWO
C
C   Hardening parameter
      p0tt=p0t*exp(devoid/(alambda-akappa))*
1 (pt/ptt)**(akappa/(alambda-akappa))
      IF (abs(TWO*ptt-p0tt).lt.TOLER2) THEN
      qtt=etat*pt
      ptt=pt
      delq=abs(qtt-qt)
      DEPSqP=DEPSq
      DLam=aM*DEPSqP/(TWO*ptt)
      ELSE
      DEPSvolP=(alambda-akappa)/(ONE+evoidt)*log(p0tt/p0t)
      DLam=DEPSvolP/(TWO*ptt-p0tt)
      ENDIF
C
C   Deviatoric stress vector on the end of the increment
      POM1=THREE*DLam/(aM**TWO)+ONE/(TWO*G)
      POM2=ONE/(TWO*G)
      DO I=1,NTENS
      DEVStt(I)=(DEPSdev(I)+DEVS(I)*POM2)/POM1
      ENDDO
C
C   Stress vector on the end of the increment
      DO I=1,NTENS
      T(I)=DEVStt(I)+ptt
      ENDDO
      DO I=NDI+1, NTENS
      T(I)=DEVStt(I)
      ENDDO
C
C   Yield function
      CALL SINVT(T, ptt, qtt, NDI, NSHR)
      Fmc=(qtt**TWO)/(aM**TWO)+ptt*(ptt-p0tt)
C
C
      IF (Fmc1*Fmc.lt.ZERO) THEN
      ptt2=ptt
      Fmc2=Fmc
      ELSE
      ptt1=ptt
      Fmc1=Fmc
      ENDIF
C
      IF (abs(Fmc).gt.TOLER) GOTO 120
C
C   Plastic shear strain increment
101 DO I=1,NTENS
      DEPSdevP(I)=THREE*DLam/aM**TWO*DEVStt(I)
      ENDDO
C
C   Plastic strain increment
      DO I=1,NDI
      DEPSP(I)=DEPSdevP(I)+DEPSvolP
      ENDDO
      DO I=NDI+1,NTENS
      DEPSP(I)=DEPSdevP(I)

```

```

ENDDO
C
C   Plastic strain vector in configuration t+dt
DO I=1,NTENS
  EPSPtt(I)=EPSPtt(I)+DEPSP(I)
ENDDO
C
C*****
C   UPDATES FOR NEXT STEP
C*****
C
200 continue
C
DO I=1,NTENS
  STRESS(I)=T(I)
END DO
C
C   Update state variables
C
  evoid=evoidtt
  p0=p0tt
  STATEV(1)=evoid
  STATEV(2)=p0
DO I=3, NTENS+2
  STATEV(I)=EPSPtt(I)
END DO
C
C-----
C   TRANSFER STRESS AND STRAIN TO CONVENTIONAL DEFINITION IN SOIL
C   MECHANICS (COMPRESSION IS POSITIVE)
C-----
C
DO N=1,NTENS
  STRESS(N) = -STRESS(N)
  STRAN(N)   = -STRAN(N)
  DSTRAN(N) = -DSTRAN(N)
ENDDO
C
RETURN
END
C
*****
**                               UTILITY SUBROUTINES                               **
*****
C
C
SUBROUTINE KInitial(STRESS, T, DSTRAN, DEPS, STRAN, EPS,
1NTENS,NDI)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
DIMENSION T(NTENS), STRESS(NTENS), DSTRAN(NTENS), DEPS(NTENS),
1STRAN(NTENS), EPS(NTENS)
DO I=1, NTENS
  T(I)=0.d0
ENDDO
DO I=1, NTENS
  T(I)=STRESS(I)
ENDDO
DO I=1, NTENS
  DEPS(I)=0.d0

```



```

ENDDO
DO I=1, NDI
DEPS(I)=DSTRAN(I)
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
DEPS(I)=DSTRAN(I)/TWO
ENDDO
DO I=1, NTENS
EPS(I)=0.d0
ENDDO
DO I=1, NDI
EPS(I)=STRAN(I)
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
EPS(I)=STRAN(I)/TWO
ENDDO
RETURN
END SUBROUTINE KInitial
C
C*****
C
SUBROUTINE KSpHDevS(SPHS, DEVS, STRESS, NTENS, NDI)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
INTEGER NTENS, NDI
DIMENSION SPHS(NTENS), DEVS(NTENS), STRESS(NTENS)
p=(STRESS(1)+STRESS(2)+STRESS(3))/THREE
DO I=1, NDI
SPHS(I)=p
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
SPHS(I)=0.d0
ENDDO
DO I=1, NDI
DEVS(I)=STRESS(I)-p
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
DEVS(I)=STRESS(I)
ENDDO
RETURN
END SUBROUTINE KSpHDevS
C
C*****
C
SUBROUTINE KVolDevSTRAN(STRANvol, STRANvolm, STRANdev, STRANq1,
1STRANq, STRAN, NTENS, NDI)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
INTEGER NTENS, NDI
DIMENSION STRANvolm(NTENS), STRANdev(NTENS), STRAN(NTENS)
STRANvol=0.d0
DO I=1, NDI
STRANvol=STRANvol+STRAN(I)
END DO
DO I=1, NDI
STRANvolm(I)=STRANvol/THREE
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
STRANvolm(I)=0.d0
ENDDO
DO I=1, NDI

```

```

STRANdev(I)=STRAN(I)-STRANvol/THREE
ENDDO
DO I=NDI+1, NTENS
STRANdev(I)=STRAN(I)
ENDDO
STRANq1=2*((STRAN(1)-STRAN(2))**2+(STRAN(2)-STRAN(3))**2+
1(STRAN(3)-STRAN(1))**2)
DO I=NDI+1, NTENS
STRANq1=STRANq1+12*STRAN(I)**2
ENDDO
STRANq=1/3*SQRT(STRANq1)
RETURN
END SUBROUTINE KVolDevSTRAN

C
C*****
C
SUBROUTINE KSUMVec(VecS, Vec1, Vec2, NTENS)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
INTEGER NTENS
DIMENSION VecS(NTENS), Vec1(NTENS), Vec2(NTENS)
DO I=1, NTENS
VecS(I)=Vec1(I)+Vec2(I)
ENDDO
RETURN
END SUBROUTINE KSUMVec

C
C*****
C
SUBROUTINE KDIFVec(VecD, Vec1, Vec2, NTENS)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
INTEGER NTENS
DIMENSION VecD(NTENS), Vec1(NTENS), Vec2(NTENS)
DO I=1, NTENS
VecD(I)=Vec1(I)-Vec2(I)
END DO
RETURN
END SUBROUTINE KDIFVec

C
C*****

```

## DICTIONARY for Fortran code

NDI	Number of direct stress components
NSHR	Number of engineering shear stress components
NTENS NDI+NSHR	Size of the stress or strain component array
NSTATV	Number of solution-dependent state variables that are associated with material type
NPROPS	User-defined number of material constants associated with user material
PROPS(NPROPS)	User-specified array of material constants associated with user material
KSTEP	Step number
TIME(1)	Value of step time at the beginning of the current increment
STRESS(NTENS)	Stress array at the beginning of the increment
DDSDDE(NTENS,NTENS)	Jacobian matrix of the constitutive model
STATEV(NSTATV)	Array containing the solution-dependent state variables
STRAN(NTENS)	Array containing the total strains at the beginning of the increment
DSTRAN(NTENS)	Array of strain increments
T(NTENS)	Stress array in configuration t
SPHS(NTENS)	Mean stress array in configuration t
DEVS(NTENS)	Deviatoric stress array in configuration t
DEVStt(NTENS)	Deviatoric stress array in configuration t+ $\Delta t$
EPS(NTENS)	Total strain array in configuration t
DEPS(NTENS)	Array of strain increments
EPSdev(NTENS)	Deviatoric strain array in configuration t
DEPSdev(NTENS)	Deviatoric strain increments array
EPStt(NTENS)	Total strain array in configuration t+ $\Delta t$
EPSdevtt(NTENS)	Deviatoric strain array in configuration t+ $\Delta t$
EPSP(NTENS)	Plastic strain array in configuration t
EPSPtt(NTENS)	Plastic strain array in configuration t+ $\Delta t$
DEPSP(NTENS)	Plastic strain increments array
DEPSdevP(NTENS)	Plastic deviatoric strain increments array
DEPSvolP	Plastic volumetric strain increment
p <sub>t</sub> , p <sub>tt</sub>	Mean stresses in configurations t and t+ $\Delta t$
q <sub>t</sub> , q <sub>tt</sub>	Deviatoric stresses in configurations t and t+ $\Delta t$
Trialp, Trialq	Trial values of mean stress and deviatoric stress (elastic solution)

---

p0, pot, pott	Hardening parameter
p0c	Hardening parameter for current yield function
etat	Stress ratio in configuration t
EPSvol	Volumetric strain
DEPSvol	Volumetric strain increment
DEPSqP	Deviatoric plastic strain increment
ezero	Initial void ratio
evoidt, evoidtt	Void ratios in configurations t and t+ $\Delta$ t
devoid	Void ratio increment
alambda	Material parameter 1, Slope of ICL
akappa	Material parameter 2, Slope of URL
aM	Material parameter 3, Slope of CSL in p-q plane
aC	Material parameter 4, Specific volume for p'=1 kPa on CSL
anu	Material parameter 5, Poisson's ratio
aN	Specific volume for p'=1 kPa on ICL
Dlam	Positive constant in plastic strain equation
Fmc	Yield function
PSIOC	State parameter for current stress point
PSINC	State parameter for conjugate stress point
R	Overconsolidated ratio
OMEGA	Hardening coefficient
R1	Isotropic overconsolidated ratio for current stress point
R2	Isotropic overconsolidated ratio for conjugate stress point

## Biografija

Sanja Jocković rođena je 1978. godine u Kraljevu. Osnovnu školu i gimnaziju (prirodno-matematički smer) završila je u Smederevskoj Palanci. Nosilac je Vukove diplome u osnovnoj školi i gimnaziji. Diplomirala je na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu 2003. godine na smeru za konstrukcije. Tokom redovnih studija postigla je prosečnu ocenu 8.80, a diplomski rad iz Fundiranja odbranila je ocenom 10. Dobitnik je stipendije ambasade Kraljevine Norveške. Doktorske studije na Građevinskom fakultetu u Beogradu je upisala 2007. godine i položila sve ispite sa prosečnom ocenom 10.00. Radi na Građevinskom fakultetu u Beogradu kao asistent – student doktorskih studija na predmetima Mehanika tla i Geotehnika saobraćajnica.

Bavi se građevinskom geotehnikom. Uže područje naučno istraživačkog rada je teorijska i inženjerska mehanika tla, ispitivanje geomehaničkih karakteristika tla, kao i konstitutivno modeliranje tla. Učestvovala je u izradi velikog broja geotehničkih elaborata, projekata temeljnih konstrukcija i projekata sanacije temeljnih konstrukcija, kao i u izradi naučnih studija iz oblasti stabilizacije tla primenom industrijskih nusprodukata. Učestvovala je u tehnološkom projektu “Konstitutivno modeliranje kompleksa beogradskih glina sa implementacijom u inženjerskoj praksi” kao istraživač. Član je Srpskog i Međunarodnog društva (ISSMGE) za mehaniku tla i geotehničko inženjerstvo.

Na Katedri za građevinsku geotehniku obavlja funkciju sekretara Katedre, a u akreditovanoj Laboratoriji za mehaniku tla obavlja funkciju Lica odgovornog za kvalitet. Udata je i majka dvoje dece.

---

## Изјава о ауторству

Име и презиме аутора: Сања Д. Јоцковић

Број индекса: 909/07

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

#### **Формулација и имплементација конститутивног модела за преконсолидоване глине**

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

**Потпис аутора**

У Београду, 25.05.2017.

---

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Сања Д. Јоцковић

Број индекса: 909/07

Студијски програм: Грађевинарство

Наслов рада: **Формулација и имплементација конститутивног  
модела за преконсолидоване глине**

Ментори: др Мирјана Вукићевић, ванредни професор,  
Универзитет у Београду, Грађевински факултет

др Мирослав Живковић, редовни професор,  
Универзитет у Крагујевцу, Факултет инжењерских  
наука

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис аутора**

У Београду, 25.05.2017.

---

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

### **Формулација и имплементација конститутивног модела за преконсолидоване глине**

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

**Потпис аутора**

У Београду, 25.05.2017.

---



1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.