

UNIVERZITET U BEOGRADU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Selimir V. Lelović

**KONSTITUTIVNE JEDNAČINE ZA
PESAK I NJIHOVA PRIMENA U
NUMERIČKOJ ANALIZI PONAŠANJA
TRAKASTOG TEMELJA**

doktorska disertacija

Beograd, 2012

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Selimir V. Lelović

**CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR SAND
AND THEIR APPLICATION IN
NUMERICAL ANALYSIS OF STRIP
FOUNDATION BEHAVIOR**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2012

Mentor

dr Miloš Lazović, vanredni profesor, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

Članovi komisije:

dr Miloš Lazović, vanredni profesor, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

dr Mirjana Vukićević, docent, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

dr Slobodan Ćorić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Rudarsko geološki fakultet

Datum odbrane:

Posvećeno uspomeni na profesore
Stevana Stevanovića i Savu Vukelića

SADRŽAJ

REZIME SUMMARY

1. UVOD	1
1.1 Uvodna razmatranja	1
1.2 Struktura rada	1
2. KONSTITUTIVNE RELACIJE	3
2.1. Uvod	3
2.2. Geometrija deformacije	4
2.2.1 Vektori deformacije i tenzori deformacije	5
2.2.2 Tenzori relativne deformacije	7
2.2.3 Prikaz tenzora deformacije preko gradijenata pomeranja	8
2.2.4 Glavne deformacije. Invarijante deformacije	10
2.3 Tenzor napona	11
2.3.1 Glavni naponi. Invarijante napona	12
2.3.2 Konvencija znaka	16
2.4. Veza između napona i deformacija	17
2.4.1 Elastični modeli	17
2.5. Plastičnost. Uslov tečenja	19
2.5.1 Osnovni pojmovi u matematičkoj teoriji plastičnosti	19
2.6 Elasto-plastični modeli za tlo	27
2.6.1 Mohr-Coulomb-ov uslov tečenja	27
2.6.2 Drucker-Prager-ov uslov tečenja	30
2.6.3 Kapa model	31
2.6.4 HISS model	33
3. INKREMENTALNA FORMULACIJA OSNOVNIH JEDNAČINA STATIČKE ANALIZE	35
3.1. Uvod	35
3.2 Formulisanje rešenja nelinearnih jednačina	37
3.2.1 Totalna Lagrange-ova formulacija	37
3.2.2 Korigovana Lagrange-ova formulacija	40
3.2.3 Linearizacija jednačina ravnoteže	40
3.3 Formulacija rešenja metodom konačnih elemenata	41
3.4 Numerička integracija konstitutivnih jednačina	46
3.4.1 Algoritam povratnog preslikavanja	47
4. NELINEARNI MOHR-COULOMB-OV MODEL	54
4.1 Uvod	54
4.2 Osnovne jednačine Mohr-Coulomb-ovog modela	55
4.3 Konstitutivne jednačine NMC modela	59
4.4 Verifikacija predloženog NMC modela	62
4.4.1 Opit direktnog smicanja - Zbijeni pesak	62
4.4.2 Londonska glina	63
4.4.3 Drobljeni antracit	64
4.4.4 Standardna triaksijalna kompresija (CTC)	65

5. PRORAČUN TRAKASTIH TEMELJA NA DEFORMABILNOJ PODLOZI	67
5.1 Uvod	67
5.2 Nosivost tla	67
5.2.1 Teorija nosivosti Terzaghi-a	68
5.3 Ilustracija primene MKE na konkretnim primerima	71
5.3.1 Kruta temeljna traka na pesku	72
5.3.2 Kruta temeljna traka na glini	81
6. KRITERIJUM STABILNOSTI ELASTO-PLASTIČNOG MATERIJALA	87
6.1 Uvod	87
6.2 Konstitutivne jednačine elasto-plastičnog materijala	88
6.3 Određivanje kritične tačke	90
6.4 Ilustracija predloženog postupka na konkretnom primeru	93
6.4.1 Test standardne triaksijalne kompresije (CTC)	95
6.4.2 Test redukovane triaksijalne ekstenzija (RTE)	97
6.4.3 Test standardne triaksijalne ekstenzije (CTE)	99
6.4.4 Test redukovane triaksijalne kompresije (RTC)	101
6.4.5 Test triaksijalne kompresije (TC)	103
6.4.6 Test triaksijalne ekstenzije (TE)	105
6.4.7 Test triaksijalnog prostog smicanja (SS)	107
7. ZAKLJUČNA RAZMATRANJA	109
LITERATURA	111

REZIME

Rešavanjem graničnih problema fundiranja i mehanike tla u građevinarstvu razvijen je veliki broj konstitutivnih modela i svaki je uspешan za određenu vrstu tla i za specifičnu putanju opterećenja. Zbog nehomogenosti i različitosti prirode tla, još uvek ne postoji generalni model koji uspешno opisuje ponašanje različitih vrsta tla pri proizvoljnim putanjama napona. Drugim rečima, još uvek ne postoji odgovarajući spoj matematičkih formulacija deformacije tla opisanih u mehanici kontinuuma i mehanici individualnih čestica.

U ovom radu su korišćeni osnovni principi nelinearne mehanike kontinuuma i matematičke teorije plastičnosti. Temeljna konstrukcija i tlo su diskretizovani konačnim elementima a konstitutivne jednačine su primenjene za rešavanje granične nosivosti trakastog temelja oslonjenog na deformabilni sloj peska. Tlo je opisano kao homogeno, izotropno i elastoplastično telo koje se monotono opterećuje u dreniranim uslovima.

Nelinearni Mohr-Coulombov (NMC) konstitutivni model je razvijen u cilju formulacije problema granične nosivosti i deformacije tla usled zadatog opterećenja. U radu je NMC model formulisan na osnovu četiri polazne pretpostavke:

1. Ugao smičuće otpornosti nelinearne anvelope loma ima hiperboličku zavisnost od normalnih napona (Maksimović, 1989.).
2. Ugao dilatancije se može odrediti kao odnos između ekvivalentne srednje zapreminske i ekvivalentne smičuće plastične deformacije.
3. Ugao dilatancije u linearnom modelu smičuće otpornosti jednak je maksimalnoj dilatanciji nelinearnog modela.
4. Bazni ugao nelinearne smičuće otpornosti se računa na osnovu aproksimacije da su tangentsna smičuća otpornost za nelinearni i smičuća otpornost linearnog konstitutivnog modela jednake u određenoj vrednosti normalnog napona.

Na osnovu NMC modela napravljen je računarski program da bi se analizirali različiti aspekti ponašanja trakastog temelja na deformabilnom sloju peska. Za verifikaciju predloženog modela korišćeni su rezultati laboratorijskih ispitivanja koji su publikovani u stručnoj literaturi.

Doktorska disertacija predstavlja nastavak istraživačkog rada prikazanog u magistarskom radu: "Primena Mohr-Coulomb-ovog modela za rešavanje nekih problema u geotehnici".

Ključne reči:

Tlo, pesak, ugao smičuće otpornosti, dilatancija, elastoplastičnost, Mohr-Coulomb, nelinearna anvelopa loma, metod konačnih elemenata, povratno preslikavanje, granična nosivost

NAUČNA OBLAST: GRAĐEVINARSTVO

UŽA NAUČNA OBLAST: GRAĐEVINSKA GEOTEHNIKA

UDK

SUMMARY

By solving boundary value problems in foundations and soil mechanics, a great number of constitutive models is developed in civil engineering each being successful for a certain kind of soil and for a specific path of loading. Due to inhomogeneous nature of different soils, there is no one general model to describe behavior of all kinds of soil and under all possible paths of loading. In other words, there is no accepted way to connect mathematical formulations of soil deformation by continuum mechanics and particle mechanics.

In presented work, basic principles of nonlinear continuum mechanics and mathematics of theory of plasticity were used. Base construction and soil were netted with finite elements while constitutive formulations were applied to strip foundation on deformable sand. Soil is described as homogeneous, isotropic, and elastoplastic body which is monotonically loaded in drained conditions.

Nonlinear Mohr-Coulomb (NMC) constitutive model is developed to describe soil deformation under applied load. In the PhD dissertation, NMC model is formulated based on four assumptions:

- 1. Angle of shearing resistance for nonlinear failure envelope has hyperbolic dependence on normal stresses (Maksimović, 1989).*
- 2. Dilatation angle may be looked as the ratio between equivalent mean volumetric and equivalent shear plastic deformation.*
- 3. In linear model, dilatation angle of shearing resistance is equal to the maximum dilatation angle in nonlinear model.*
- 4. Basic angle in nonlinear model is calculated based on approximation that tangents of shear resistance for linear and nonlinear models were equal at one specific point of normal stress.*

Based on described NMC model, a computer program is developed to look at different behavior of strip foundation on deformable layer of sand. To verify new model, comparison was done with results from laboratory testing published in literature.

PhD thesis is a continuation of investigation presented in MS thesis: "Application of Mohr-Coulomb model for solving certain problems in geo-technique".

Key words:

Soil, sand, angle of shear resistance, dilatation, elastoplastic, Mohr-Coulomb, nonlinear failure envelope, finite element method, return mapping, boundary loading

CIVIL ENGINEERING
GEOTECHNICAL ENGINEERING
UDC

1. UVOD

1.1 Uvodna razmatranja

U radu su analizirane konstitutivne jednačine za pesak sa posebnim osvrtom na njihovu primenu u numeričkoj analizi ponašanja trakastog temelja. Analiza je zasnovana na sledećim pretpostavkama: 1. mehaničko ponašanje krupnozrnog tla opisuje se korišćenjem modela homogenog, izotropnog i elasto-plastičnog tela; 2. razmatra se monotono opterećenje u dreniranim uslovima; i 3. temeljna konstrukcija i tlo se mogu na odgovarajući način diskretizovati konačnim elementima i numerički analizirati ponašanje trakastog temelja oslonjenog na deformabilni sloj peska.

Primena nelinearne teorije tamo gde zato ima opravdanje i tamo gde postoji razumevanje posledica ovakvog proračuna, je nesumnjivo na mestu. Najčešći matematički okvir je teorija plastičnosti, gde se razvoj obavlja na dva načina - sa jedne strane pokušava se definisati generalna granica tečenja u prostoru glavnih napona za razne materijale i razne režime opterećenja, dok se sa druge strane pokušava matematički korektno i efikasno odrediti priraštaj plastičnih deformacija i pripadajuće disipacije energije.

Do sada je predložen veliki broj konstitutivnih modela za tlo, ali još uvek ne postoji takav model koji uspešno opisuje ponašanje različitih vrsta tla pri proizvoljnim putanjama napona. Korišćenjem osnovnih principa nelinearne mehanike kontinuuma i matematičke teorije plastičnosti u radu je razvijen nelinearni Mohr-Coulombov (NMC) konstitutivni model u cilju opisivanja ponašanja tla. Postoji niz već prihvaćenih koraka prilikom testiranja konstitutivnog modela: matematička formulacija modela, nalaženje parametara koji definišu model (određuju se iz konvencionalnih opita), provera modela u laboratoriji za različite putanje napona i upoređivanje rezultata numeričke analize sa rezultatima merenja na terenu.

Granični problemi u matematičkoj teoriji plastičnosti metodološki se slično rešavaju kao i odgovarajući problemi linearne teorije elastičnosti. Osnovne jednačine MKE za probleme plastičnosti mogu da se izvedu na isti način kao i za probleme elastičnosti. Jedina razlika, kvalitativne prirode, je u tome što se u matrici krutosti konačnog elementa umesto elastične konstitutivne matrice veze pojavljuje tzv. trenutna elasto-plastična konstitutivna matrica. Pošto elementi ove matrice posredno, kao funkcije napona, zavise od pomeranja čvorova, sistem jednačina MKE u problemima matematičke teorije plastičnosti je nelinearan.

1.2 Struktura rada

Rad sadržajno obuhvata sedam poglavlja i jedan prilog. Posle uvodnih razmatranja i napomena u drugom poglavlju su obrađene konstitutivne relacije. U ovom poglavlju su date

teorijske postavke vezane geometriju deformacije i tenzor napona, kao i osnove matematičke teorije plastičnosti. U nastavku je dat prikaz nekih materijalnih modela koji se primenjuju u geotehnici.

U trećem poglavlju su date teorijske osnove inkrementalne formulacije osnovnih jednačina statičke analize. U nelinearnoj analizi konstrukcija, umesto generalisanih pomeranja, za osnovne parametre u čvorovima usvajaju se inkrementi pomeranja tako da se uobičajenom primenom MKE dobija inkrementalni oblik jednačina ravnoteže. Pretpostavljeno je da su inkrementi dovoljno mali, tako da se može izvršiti linearizacija problema za svaki inkrement opterećenja. Ako je statičko-deformacijsko stanje na početku inkrementa poznato, onda se iz uslova ravnoteže može odrediti stanje na kraju inkrementa. Polazeći od nedeformisane konfiguracije sukcesivno se određuju naponsko-deformacijska stanja na krajevima svih inkremenata. U zavisnosti od izbora referentne konfiguracije u odnosu na koju se prati inkrementalni postupak postoje dve formulacije: totalna Lagrange-ova i korigovana Lagrange-ova formulacija. U drugom delu ovog poglavlja prikazane su osnovne teorijske postavke algoritma povratnog preslikavanja za integraciju elasto-plastičnih konstitutivnih jednačina.

Četvrto poglavlje predstavlja centralnu temu rada. U okviru ovog poglavlja formulisan je NMC materijalni model u cilju opisivanja ponašanja tla. Definisani su parametri modela kao i procedura za njihovo određivanje, koristeći rezultate standardnih laboratorijskih opita. Rezultati sprovedenih proračuna su upoređeni sa merenim vrednostima tla u laboratorijskim opitima.

U petom poglavlju je izvršena verifikacija razvijenog NMC modela. Poglavlje je posvećeno praktičnim aspektima, sa prikazom dobijenih rezultata primenom matematičkog modela i numeričkog postupka u analizi napona i deformacija u tlu ispod trakastog temelja.

U šestom poglavlju je određeno kritično opterećenje HISS modela uz korišćenje inkrementalno iterativnog algoritma za različite putanje napona u standardnom triaksijalnom opitu. Predloženim postupkom je pokazano da je određivanje kritične tačke u analizi materijalne stabilnosti elasto-plastičnog materijala moguće svesti na određivanje onog stanja pri kome dolazi do promene znaka osnovnih kvantiteta metrike površi tečenja.

Sedmo poglavlje se odnosi na zaključne napomene. Ukratko je prikazana analiza relevantnih rezultata sa posebnim osvrtom na prednosti i mogućnosti razvijenog modela.

Na kraju, dat je i spisak literature koja se odnosi na razmatranu problematiku u ovom radu.

2. KONSTITUTIVNE RELACIJE

2.1. Uvod

Pri matematičkom modeliranju bilo koje fizičke pojave, uvek se kao osnovni problem nameće idealizacija tj. pronalaženje računskog modela koji na neki način odražava suštinu pojave, njen mehanizam i sve bitne uticaje, a pri tome je dovoljno jednostavan da omogućava rutinsku upotrebu u praktičnim proračunima. Osnovni principi (balansa mase, balansa količine kretanja i balansa momenta količine kretanja) važe za sve materijale, nezavisno od njihove strukture. Kako je skup nepoznatih veličina veći od broja jednačina koje slede iz ovih zakona, potrebno je uvesti dodatne jednačine da bi jednoznačno bilo određeno ponašanje materijala pri dejstvu spoljnih efekata, koji se matematički definišu kao granični i početni uslovi.

U cilju uzimanja u obzir strukture materijala koja karakteriše ponašanje materijala, neophodno je odrediti dodatne jednačine koje nazivamo konstitutivnim. Osobine materijala se uzimaju u obzir preko odgovarajućih konstitutivnih jednačina, za svaki materijal sa konstitutivnim promenljivim, ograničenim na domen njihove definisanosti koji je određen odgovarajućim fizičkim osobinama materijala.

Teorija konstitutivnih jednačina zasnovana je na odgovarajućim fizičkim zakonima. S obzirom da su materijali za koje se određuju konstitutivne jednačine predstavljeni svojim matematičkim modelima, konstitutivne jednačine definišu idealne materijale. Za razliku od gotovo svih drugih materijala koji se koriste u realnim konstrukcijama, osobine tla su promenjive, tako da se uglavnom moraju meriti za svaki slučaj posebno. Ponašanje u oblasti radnih napona je vrlo kompleksno: plastične deformacije se mogu teško zanemariti, u većini slučajeva su nehomogenost i anizotropija jako naglašene, a osim toga na karakter pojave bitno utiče niz prpratnih pojava, naročito prisustvo vode. Idealizovati ponašanje samog materijala u ovakvim slučajevima je izuzetno teško.

Kako je nemoguće potpuno obuhvatiti složenu fizičku pojavu, ona se pojednostavljuje, shematizuje uvođenjem određenih ograničenja i pretpostavki. Na taj način izvedeni obrazac – konstitutivna jednačina, po svojoj suštini, ne predstavlja ništa drugo nego simbolički izraz tih pretpostavki. Stoga je primena opravdana samo utoliko, ukoliko su pretpostavke ostvarene. Ova činjenica se ne sme nikad gubiti iz vida.

2.2. Geometrija deformacije

Radi potpunosti celokupnog izlaganja, u ovom odeljku se detaljnije definišu mehaničke veličine: tenzor deformacije, u vezi sa deformacijom, tenzor brzine deformacije i tenzor napona^[94].

Posmatramo model materijala u vidu neprekidne materijalne sredine koji zauzima određeni deo zapremine prostora ograničen konturnom površi. Takvu materijalnu sredinu nazivamo telo. Telo zamišljamo sastavljenim od beskonačno malih zapreminskih elemenata, raspoređenih neprekidno, pri čemu svakom zapreminskom elementu, koji čini okolinu posmatrane tačke tela, pripisujemo elementarnu količinu mase tela.

Položaj tako definisanih materijalnih tačaka u referentnoj konfiguraciji obeležavamo koordinatama tačaka tela sa X^K , ($K=1,2,3$), sa \bar{G}_K odgovarajuće bazne vektore, sa V zapreminu tela i sa A konturu tela u referentnoj konfiguraciji. U skladu sa tim sa dV obeležavamo elementarnu zapreminu i sa dA elementarnu površinu u okolini proizvoljne tačke posmatranog tela. Koordinate X^K nazivamo materijalne koordinate, jer su vezane za određene materijalne tačke tela i služe za njihovu identifikaciju, jer sve koordinantne linije u svakom trenutku vremena prolaze kroz jedne te iste tačke posmatranog tela. Sistem koordinata je vezan za telo i deformiše se zajedno sa njim. Važno svojstvo datog sistema krivolinijskih koordinata je to što se u njima koordinate proizvoljne tačke u nekom trenutku broičano izražavaju istim koordinatama kao u nedeformisanom stanju. Potrebno je odrediti pomeranja tačaka tela, kojima je zadat prvobitni oblik, uslovi oslanjanja i opterećenja. Pri tome treba odrediti i oblik onih delova površine koji ograničavaju telo, a kojima pomeranja nisu unapred zadata. Konturni uslovi zadaju se na granicama tela kojima oblik zavisi od osnovnih veličina. Prema tome, nameće se, kao najpogodnija matematička forma – krivolinijske koordinate x_i , jer će u njima jednačine konture posmatranog tela imati isti oblik kao i pre deformacije. Zamislimo u posmatranom telu neki skup tačaka koji leži na jednoj liniji (materijalno vlakno) ili na nekoj površi (materijalni sloj). Pri datoj deformaciji vlakno (ili sloj) neprekidno menja svoj oblik i položaj u prostoru. Za određivanje položaja vlakna (ili sloja), kao geometrijskih tačaka, služi nam "prostorni" sistem koordinata, u tom smislu što se određene koordinate ne vezuju za određene materijalne tačke, već za određene tačke prostora. Prostorni koordinantni sistem može biti sastavljen od istih Dekartovih ili krivolinskih koordinata kao i materijalni sistem, tako da u tom slučaju materijalne koordinate predstavljaju "početne vrednosti" prostornih koordinata, vezane za referentnu konfiguraciju. Prostorni

koordinantni sistem obeležavamo oznakom x^i , ($i=1,2,3$), sa \vec{g}_i odgovarajuće bazne vektore, sa v - zapreminu tela i sa a - konturu tela u trenutnoj konfiguraciji. U skladu sa tim sa dv obeležavamo elementarnu zapreminu i sa da - element površine tela. U toku procesa deformacije prostorne koordinate određene materijalne tačke tela predstavljaju funkciju vremena, tako da za određenu tačku tela, X^K , prostorne koordinate predstavljaju njene konačne jednačine kretanja:

$$x^i = x^i(X^K, t), (i, K = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

gde je t vreme. Jasno je da oblik konačnih jednačina kretanja materijalne tačke zavise od početnih uslova. Relacija inverzna jednačinama (2.1) pokazuje, koja je to tačka tela za određeni trenutak vremena " t " zauzima određeni položaj u prostoru. Jednačine (2.1) predstavljaju deformaciju kontinuumu. Deformacija može da se posmatra sa stanovišta materijalnih koordinata, tako i sa stanovišta prostornih koordinata, odakle sledi da moramo da uvedemo postojanje jednoznačne inverzne relacije oblika:

$$X^K = X^K(x^i, t), (i, K = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

Oba izraza za deformaciju moraju da zadovoljavaju aksiom neprekidnosti, tj. transformacije (2.1) i (2.2) su u celoj oblasti posmatranja jednoznačne i dopuštaju neprekidne izvode do svakog potrebnog reda. Pri opisivanju procesa deformacije u deformabilnoj sredini primenjuju se dva pristupa. Pristup kada se za nezavisne promenljive usvajaju koordinate materijalnih tačaka tela označava se kao materijalna deskripcija i po tom pristupu sve veličine se definišu u određenoj tački tela za određeni vremenski trenutak. Za razliku od ovog pristupa, prostorna deskripcija za nezavisno promenljive ima prostorne koordinate. Ovaj drugi pristup opisivanja procesa deformacije određuje sve veličine u određenom položaju tačke u prostoru u trenutku vremena.

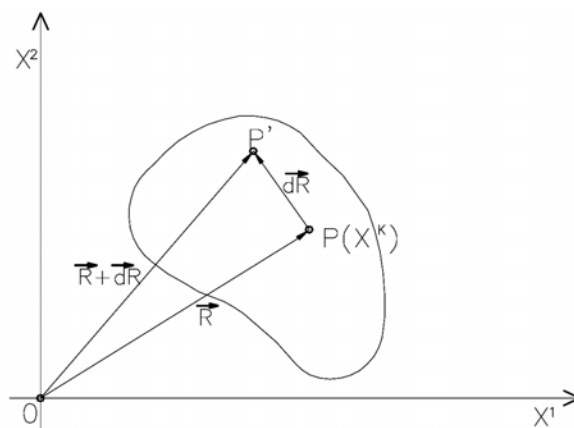
2.2.1 Vektori deformacije i tenzori deformacije

Ako se usvoji materijalna deskripcija (2.1), tada je:

$$dx^i = x^i_{,K} dX^K \quad (2.3)$$

gde se parcijalni izvodi $x^i_{,K}$ nazivaju materijalni gradijenti deformacije. Pri prostornoj deskripciji je:

$$dX^K = X^K_{,i} dx^i \quad (2.4)$$



Slika 2.1 Položaj beskonačno bliskog para tačaka u referentnoj konfiguraciji
Na taj način u materijalnoj deskripciji možemo napisati za elementarni vektor položaja:

$$\overline{dr} = x_{,K}^i \overline{g}_i dX^K \quad (2.5)$$

pri čemu veličine,

$$\overline{C}_K = x_{,K}^i \overline{g}_i \quad (2.6)$$

predstavljaju materijalne vektore deformacije, pomoću kojih je,

$$\overline{dr} = \overline{C}_K dX^K \quad (2.7)$$

Vektori deformacije \overline{C}_K zamenjuju bazne vektore pri prikazivanju elementarnog vektora deformisane konfiguracije u odnosu na materijalni sistem koordinata. U prostornoj deskripciji je:

$$\overline{c}_i = X_{,i}^K \overline{G}_K \quad (2.8)$$

sa kojima prikazujemo

$$d\overline{R} = \overline{c}_i dx^i \quad (2.9)$$

Gradijenti deformacije $x_{,K}^i$ se obično označava:

$$x_{,K}^i \equiv F_K^i \quad (2.10)$$

pri čemu je F tenzor gradijenta deformacije.

Pomoću tenzora deformacije izražava se kvadrat elementarnog rastojanja u okolini posmatrane tačke deformabilnog tela. Kvadrat rastojanja $(\overline{pp'})^2 = (\overline{dr})^2$ izračunavamo koristeći relacije (2.7) u obliku:

$$(\vec{d}\vec{r})^2 = (\vec{C}_K dX^K) \cdot (\vec{C}_L dX^L) = C_{KL} dX^K dX^L \quad (2.11)$$

gde tenzor,

$$C_{KL} = (x_{,K}^i \vec{g}_i) \cdot (x_{,L}^j \vec{g}_j) = g_{ij} x_{,K}^i x_{,L}^j \quad (2.12)$$

predstavlja materijalni tenzor deformacije ili Grinov tenzor deformacije. Međutim, posmatrajući element rastojanja u referentnoj konfiguraciji i izražavajući kvadrat tog rastojanja polazeći od izraza (2.9), nalazimo

$$(d\vec{R})^2 = (\vec{c}_i dx^i) (\vec{c}_j dx^j) = c_{ij} dx^i dx^j \quad (2.13)$$

gde tenzor,

$$c_{ij} = (X_{,i}^K \vec{G}_K) \cdot (X_{,j}^L \vec{G}_L) = G_{KL} X_{,i}^K X_{,j}^L \quad (2.14)$$

predstavlja prostorni tenzor deformacije ili Košijev tenzor deformacije. Polazeći od izraza (2.11) i (2.13) jasno je da su oba tenzora deformacije (2.12) i (2.14) simetrični i pozitivno definitni.

2.2.2 Tenzori relativne deformacije

Tenzori relativne deformacije u materijalnoj ili prostornoj deskripciji izražavaju razliku kvadrata dve beskonačno bliske tačke tela (ili tačaka u beskonačno bliskom prostornom položaju) u deformisanoj i u referentnoj konfiguraciji. Prema tome nalazimo:

$$(\vec{d}\vec{r})^2 - (d\vec{R})^2 = (C_{KL} - G_{KL}) dX^K dX^L \quad (2.15)$$

gde je:

$$2E_{KL} = C_{KL} - G_{KL} \quad (2.16)$$

Tenzor E_{KL} je materijalni ili Lagranžov tenzor relativne deformacije. Kada se C_{KL} izrazi preko (2.12), sledi:

$$E_{KL} = \frac{1}{2} (g_{ij} x_{,K}^i x_{,L}^j - G_{KL}) \quad (2.17)$$

Izražavajući razliku (2.15) u prostornoj deskripciji, nalazimo:

$$(\vec{d}\vec{r})^2 - (d\vec{R})^2 = (g_{ij} - c_{ij}) dx^i dx^j \quad (2.18)$$

gde je:

$$2e_{ij} = g_{ij} - c_{ij} \quad (2.19)$$

Tenzor e_{ij} je prostorni (Ojlerov) tenzor relativne deformacije. Kada se c_{ij} izrazi preko (2.14), sledi:

$$e_{ij} = 1/2(g_{ij} - G_{KL}x_{,i}^K x_{,j}^L) \quad (2.20)$$

Kako se izrazi (2.15) i (2.18) odnose na istu veličinu, to je moguće uspostaviti vezu između materijalnog i prostornog tenzora relativne deformacije.

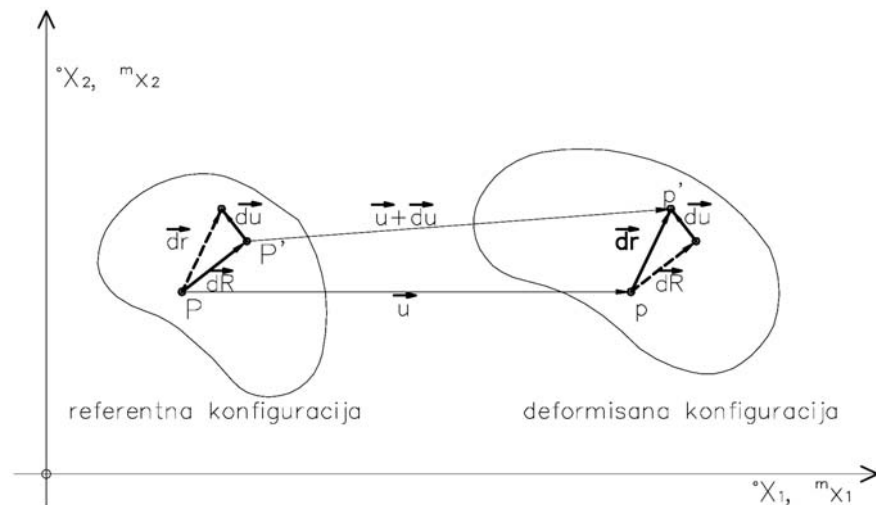
2.2.3 Prikaz tenzora deformacije preko gradijenata pomeranja

Na slici 2.2 je prikazan beskonačno blizak par tačaka P i P' odnosno p i p' (položaji tačaka P i P' u toku deformacije). Tačka P vrši pomeranje,

$$\vec{u} = \vec{u}(X^K, t) \quad (2.21)$$

dok je pomeranje tačke P':

$$\vec{u} = \vec{u}(X^K + dX^K, t) = \vec{u}(X^K, t) + d\vec{u} \quad (2.22)$$



Slika 2.2 Položaj beskonačno bliskog para tačaka u toku deformacije (N.Naerlović–Veljković, 1992)

Između vektora $d\vec{R}$, $d\vec{u}$ i $d\vec{r}$ postoji veza:

$$d\vec{r} = d\vec{R} + d\vec{u} \quad (2.23)$$

Vektor pomeranja u materijalnoj deskripciji predstavljamo koordinatama u^K a u prostornom sistemu koordinatama u^i , tako da je,

$$\vec{u} = u^K(X, t)\vec{G}_K, \text{ odnosno } \vec{u} = u^i(x, t)\vec{g}_i \quad (2.24)$$

pri čemu je prema izrazima za operator paralelnog pomeranja

$$u^i = g_i^K u^K, \text{ odnosno } u^K = g_i^K u^i \quad (2.25)$$

Priraštaj pomeranja može se prikazati u dve varijante, na osnovu obrasca (2.24):

$$d\bar{u} = u_{,M}^K \bar{G}_K dX^M, \text{ odnosno } d\bar{u} = u_{,j}^i \bar{g}_i dx^j \quad (2.26)$$

kao priraštaj pomeranja između dve tačke tela odnosno dve tačke prostora. U materijalnoj deskripciji vektorska jednačina (2.23) može biti predstavljena preko koordinata dX^K , vektora $d\bar{R}$ i izraza (2.5) za $d\bar{r}$:

$$\bar{G}_K dX^K + u_{,K}^M \bar{G}_M dX^K = \bar{C}_K dX^K \quad (2.27.1)$$

i odavde

$$\bar{C}_K = \bar{G}_K + u_{,K}^M \bar{G}_M = \bar{G}_M (\delta_K^M + u_{,K}^M) \quad (2.27.2)$$

gde je $u_{,K}^M$ kovarijantni parcijalni izvod vektora pomeranja. Na osnovu (2.27) i (2.16) dobija se:

$$E_{KL} = \frac{1}{2} \left[\bar{G}_K (\delta_K^M + u_{,K}^M) \cdot \bar{G}_L (\delta_L^N + u_{,L}^N) - G_{KL} \right] = \frac{1}{2} (u_{K,L} + u_{L,K} + u_{,K}^M u_{M,L}) \quad (2.28)$$

gde zarezi označavaju kovarijantne parcijalne izvode po materijalnim koordinatam. Linearan deo izraza (2.28) predstavlja tenzor infinitezimalne deformacije:

$$\tilde{E}_{KL} = \frac{1}{2} (u_{K,L} + u_{L,K}) = u_{K,L} \quad (2.29)$$

Na taj način je tačan izraz za tenzor deformacije dat u obliku:

$$E_{KL} = \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} u_{,K}^M u_{M,L} \quad (2.30)$$

Na sličan, u odnosu na prostorni koordinantni sistem nalazimo za Ojlerov tenzor deformacije sledeći izraz preko gradijenta pomeranja:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{,i}^m u_{m,j}) \quad (2.31)$$

Linearan deo izraza (2.31) predstavlja tenzor infinitezimalne deformacije, izražen preko prostornih koordinata:

$$\tilde{e}_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = u_{i,j} \quad (2.32)$$

Tenzor konačne (relativne) deformacije je dat izrazom:

$$e_{ij} = \tilde{e}_{ij} - \frac{1}{2} u_{,i}^m u_{m,j} \quad (2.33)$$

2.2.4 Glavne deformacije. Invarijante deformacije

Po definiciji, glavne deformacije su sopstvene vrednosti tenzora deformacije. Ose koje odgovaraju ovim deformacijama zovu se glavne ose, a ravni upravne na te ose su glavne ravni. Smičuće deformacije u glavnim ravnima su jednaki nuli. Komponente glavnih infinitezimalnih deformacija označićemo sa e_1 , e_2 i e_3 uz pretpostavku da je $e_1 \succ e_2 \succ e_3$. Komponente glavnih infinitezimalnih deformacija su koreni jednačine:

$$e^3 - I_e e^2 + II_e e - III_e = 0 \quad (2.34)$$

Ovde smo sa I_e , II_e , III_e označili invarijante tenzora deformacije, definisane sa:

$$I_e = e_1 + e_2 + e_3 = \sum e_{ii} \equiv e_{ii} = \text{tr}(\mathbf{e}) \quad (2.35)$$

$$II_e = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = \frac{1}{2} (e_{ii} e_{jj} - e_{ij} e_{ji}) \quad (2.36)$$

$$III_e = \det(\mathbf{e}_{kl}) = e_1 e_2 e_3 \quad (2.37)$$

Pri deformaciji tela dolazi do promene i njegove zapremine. Odnos te promene i prvobitne (nedeformisane) zapremine:

$$e_v = \Delta V / V = e_1 + e_2 + e_3 = I_e \quad (2.38)$$

zove se kubna dilatacija. Tenzor deformacije možemo da razložimo na dva dela:

$$\mathbf{e}_{kl} = e_0 \delta_{kl} + \mathbf{e}'_{kl} \quad (2.39)$$

gde je: $e_0 = I_e / 3 = 1/3 e_{kk}$ sferni deo tenzora deformacije,

δ_{kl} je Kronekerov (Cronecker) δ -symbol,

\mathbf{e}'_{kl} devijator tenzora deformacije.

Devijatorski deo odgovara klizanju za koje je kubna dilatacija jednaka nuli. Dakle, prva invarijanta devijatora tenzora deformacije (\mathbf{e}'_{kl}) je identički jednaka nuli. Druge dve invarijante devijatora deformacija mogu da se izraze preko glavnih deformacija u obliku:

$$II_{de} = \frac{1}{6} [(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2] = \frac{1}{2} [(e'_1)^2 + (e'_2)^2 + (e'_3)^2] \quad (2.40)$$

$$III_{de} = \det(\mathbf{e}'_{kl}) = e'_1 \cdot e'_2 \cdot e'_3 \quad (2.41)$$

Druga invarijante devijatora deformacija obuhvata uticaj smičuće deformacije, dok treća invarijante devijatora deformacija predstavlja pravac smičuće deformacije.

2.3 Tenzor napona

Naponsko stanje u tački tela je u potpunosti određeno sa poznavanjem vektora napona za tri nekomplanarne ravni, koje prolaze kroz tu tačku. Stanje napona je određeno poznavanjem devet podataka (tri projekcije tri vektora), koji predstavljaju koordinate tenzora napona. Ova činjenica znači da se sa poznavanjem ovih devet podataka može odrediti vektor napona $(t_{(\bar{n})})$ za bilo koju presečnu ravan, sa normalom \bar{n} , kroz tu tačku, tj.:

$$t_{(\bar{n})i} = t_{ij} \cdot n_j \quad (2.42)$$

gde je: t_{ij} tenzor napona, n_j kosinusi pravca normale \bar{n} , $t_{(\bar{n})i}$ vektor napona za presečnu ravan sa normalom \bar{n} . Napomenućemo da ćemo u daljim izlaganjima smatrati, osim kada naglasimo suprotno, da je tenzor napona simetričan, što sledi iz balansa momenta količine kretanja, u odsustvu naponskih spregova (tri skalarne jednačine). Prethodno definisan tenzor napona je Košijev (Cauchy) tenzor napona meren po jedinici površine deformisanog tela a referisan u sistemu baznih trijedara posle deformacije. Kako je početna konfiguracija tela poznata a samim tim poznate su i njegove granične površi, često je znatno pogodnije granične uslove izraziti u odnosu na ovaj referentni položaj. Iz tih razloga potrebno je definisati naponske veličine koje će biti merene po jedinici nedeformisane površi. Kada ovaj stav primenimo na Košijev napon dolazimo do pojma Piola-Kirhofovog (Piola-Kirchhoff) tenzora napona prve i druge vrste.

Prvi Piola-Kirhofov tenzor napona može se definisati preko Košijevog napona na sledeći način:

$$T^{kK} = J t^{kl} X_{,l}^K, t^{kl} = J^{-1} T^{kL} x_{,L}^l \quad (2.43)$$

Ovaj tenzor napona predstavlja napon u tački x , meren po jedinici površine u X . Prvi Piola-Kirhofov tenzor napona je vektor $T(X, t, N)$ koji je paralelan sa Košijevim vektorom napona $t(x, t, n)$, ali je mera sile po jedinici nedeformisane površine. Uslov prostorne paralelnosti se može matematički izraziti na sledeći način:

$$TdA = tda \quad (2.44)$$

Ovako definisan tenzor napona je nesimetričan pa samim tim i nepogodan za praktičnu primenu. Nedostatak se eliminiše formulacijom simetričnog Piola-Kirhofov tenzor napona druge vrste merenog u odnosu na nedeformisanu konfiguraciju, odnosno

$$S^{KL} = X_{,m}^K T^{mL} = J X_{,l}^K X_m^L t^{lm} \quad (2.45)$$

Kako je naprezanje karakteristika samo trenutne konfiguracije, odnosno deformisanog stanja, i imajući na umu da su vektori napona na stranama elementarnog tetraedra za slučaj oba Piolina napona mereni u odnosu na normale nedeformisane površi, oni samim tim nemaju jasno fizičko značenje i, u praktičnim računskim analizama, moraju se izračunavati Cauchy-evi naponi.

2.3.1 Glavni naponi. Invarijante napona

Služeći se analogijom možemo definisati i izvesti nekoliko pojmova koji su već dokazani u prethodnim razmatranjima o deformacijama. Tako se može dokazati da u svakoj tački tela posle deformacije postoje tri međusobno upravne ravni, za koje su svi smičući naponi jednaki nuli, dok normalni naponi poprimaju ekstremne vrednosti. Komponente glavnih napona (koje ćemo označavati sa $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ i uz pretpostavku da je $\sigma_1 \succ \sigma_2 \succ \sigma_3$) predstavljaju korene sekularne jednačine kao sopstvene veličine:

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (2.46)$$

ili u razvijenom obliku:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.47)$$

Ovde smo sa I_1, I_2, I_3 označili tri nezavisne invarijante tenzora napona, definisane sa:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sum \sigma_{ii} \equiv \sigma_{ii} = \text{tr} \sigma \quad (2.48)$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) \quad (2.49)$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (2.50)$$

Tenzor napona možemo da razložimo na dva dela:

$$\sigma_{ij} = p \delta_{ij} + S_{ij} \quad (2.51)$$

gde je: p sferni deo tenzora napona - koji se može izraziti kao $p = 1/3 J_1$,

δ_{kl} je Kronekerov δ -symbol i

S_{ij} devijatorski deo tenzora napona ili devijatorski tenzor napona.

Devijatorski deo tenzora napona određuje odstupanje, devijaciju, od sfernog stanja napona. Ovaj deo napona izaziva promenu oblika, na pr. sfera prelazi u elipsoid, kocka u paralelepiped. Karakteristika ovog tenzora je da je njegova prva invarijanta uvek jednaka nuli. Glavni pravci devijatorskog tenzora napona, analogno tenzoru napona, određuju iz sistema jednačina:

$$(S_{ij} - S\delta_{ij})n_j = 0 \quad (2.52)$$

Na isti način se može pokazati da je karakteristična jednačina devijatorskog tenzora napona oblika:

$$S^3 - I_{2d} \cdot S - I_{3d} = 0, I_{2d} = -I_{2d} \quad (2.53)$$

Ovde sa I_{2d} i I_{3d} označili drugu i treću invarijantu devijatorskog tenzora napona, koje mogu da se izraze preko glavnih devijatora napona u obliku:

$$I_{2d} = \frac{1}{2} [(S_1)^2 + (S_2)^2 + (S_3)^2] = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (2.54)$$

$$I_{3d} = \det(S_{ij}) = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \quad (2.55)$$

Karakteristična jednačina devijatorskog tenzora napona može se rešiti smenim

$$S = 2\sqrt{I_{2d}/3} \sin \theta \quad (2.56)$$

Kubna jednačina se tada svodi na oblik:

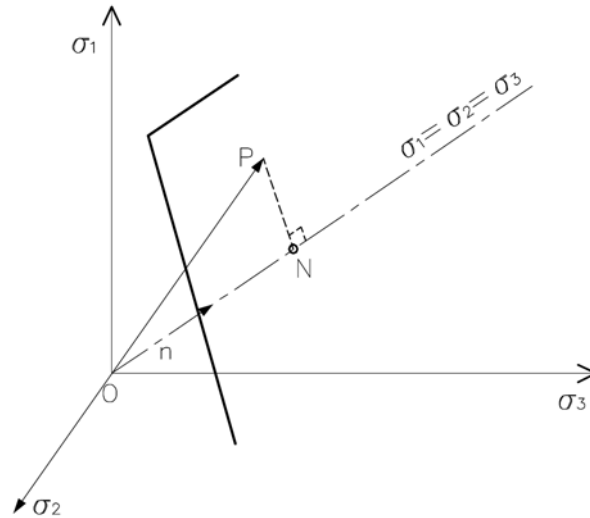
$$2(I_{2d}/3)^{3/2} (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) = I_{3d} \quad (2.57)$$

Koristeći trigonometrijsku identičnost: $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ izraz u zagradi je jednak $\sin 3\theta$, pa se prema tome dobija

$$\sin 3\theta = -3\sqrt{3}/2 \cdot I_{3d} \cdot I_{2d}^{-3/2} \quad (2.58)$$

Uobičajeno je da se kriterijum tečenja geometrijski interpretira kao površina u naponskom prostoru i da se označi kao površ tečenja. Pošto tenzor napona σ ima šest različitih komponenata, generalno posmatrano ovakav slikoviti prikaz bi zahtevao šestodimenzionalni prostor. Praktičniji pristup je korišćenje trodimenzionalnog prostora u

kojem su referentne koordinate glavni naponi. Naponski prostor se definiše kao prostor čije su koordinate vrednosti glavnih napona (u svim tačkama tela), tj. svakoj tački ovog prostora odgovora stanje napona u nekoj tački tela. Ovakav prostor je prikazan na slici 2.3.



Slika 2.3 Prostor glavnih napona

Hidrostatska osa (prostorna dijagonala) je linija koja pravi jednake uglove sa koordinatnim osama (u našem slučaju sa glavnim pravcima napona). Jedinični vektor n , duž hidrostatske ose, ima sledeće komponente:

$$n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \quad (2.59)$$

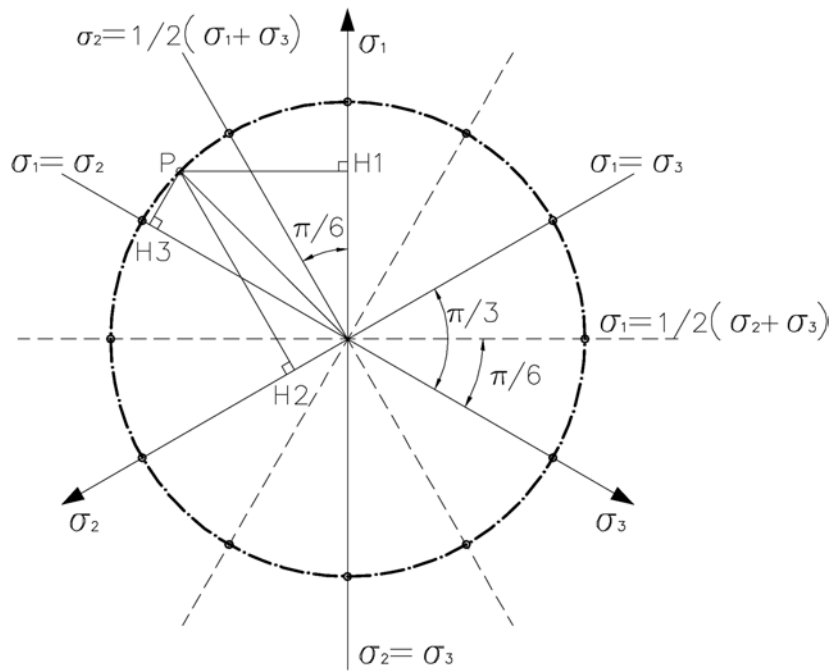
Bilo koja ravan normalna na hidrostatsku osu zove se devijatorska ili okatedarska ravan. Devijatorska ravan koja prolazi kroz koordinatni početak zove se π -ravan. Naponsko stanje može biti prikazano tačkom P sa koordinatama σ_1, σ_2 i σ_3 i vektorom OP . Vektor položaja neke tačke, može da se razloži na dve komponente:

$$OP = ON + NP \quad (2.60)$$

Gde je vektor ON duž prostorne dijagonale a vektor NP je u devijatorskoj ravni koja prolazi kroz tačke N i P .

$$|ON| = OP \cdot n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\} = \sqrt{3} \cdot p \quad (2.61)$$

gde je $p = 1/3 \cdot I_1$ srednji napon. Devijatorska ravan koja prolazi kroz tačku N je prikazana na slici 2.4.



Slika 2.4 Devijatorska ravan napona

Neka θ označava ugao meren od ose čistog klizanja $\sigma_2 = 1/2 \cdot \{\sigma_1 + \sigma_3\}$, kao što je prikazano na slici 2.4, onda je:

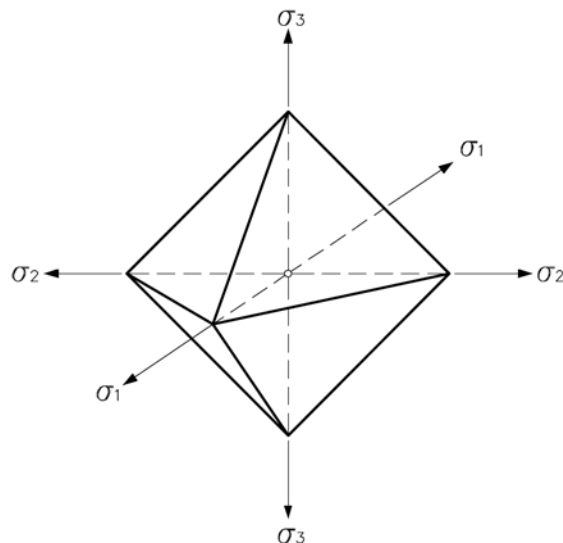
$$\sigma_1 = I_1/3 + 2/\sqrt{3} \cdot \sqrt{I_{2d}} \cdot \sin(\theta + 2\pi/3) \quad (2.62)$$

$$\sigma_2 = I_1/3 + 2/\sqrt{3} \cdot \sqrt{I_{2d}} \cdot \sin \theta \quad (2.63)$$

$$\sigma_3 = I_1/3 + 2/\sqrt{3} \cdot \sqrt{I_{2d}} \cdot \sin(\theta - 2\pi/3) \quad (2.64)$$

gde je $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$ i $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Oktaedarska ravan je ravan koja gradi jednake uglove sa koordinantnim osama.



Slika 2.5 Oktaedarske ravni (Y.C.Fung, 1965)

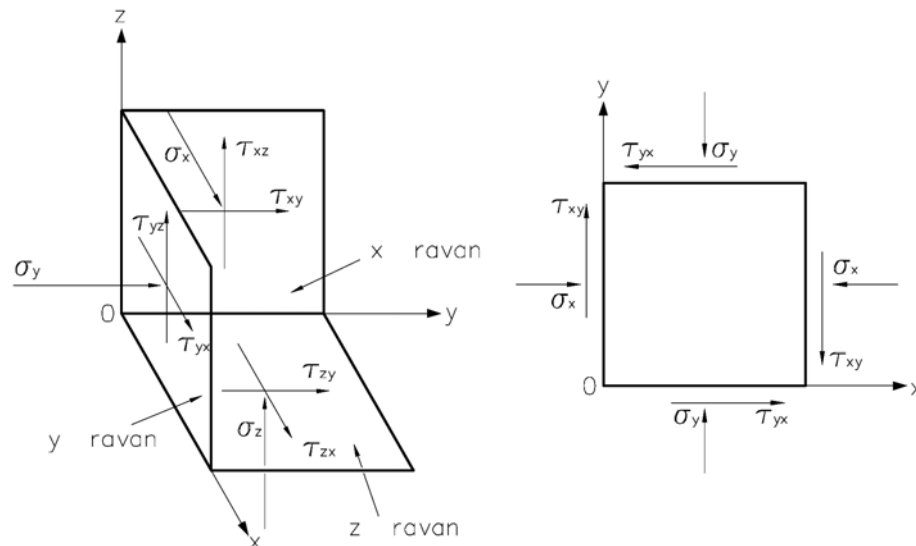
Napon smicanja u ovoj ravni naziva se oktaedarski napon i dat je izrazom

$$\tau_0 = 1/3 \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{2/3 \cdot I_{2d}} \quad (2.65)$$

2.3.2 Konvencija znaka

Za normalne komponente tenzora napona, s obzirom na njihovo dejstvo, koriste se i posebni nazivi i to: naponi pritiska, ako normalna komponenta deluje u suprotnom smeru od spoljne normale na površinski element, i suprotno njima naponi zatezanja.

U mehanici tla naponi pritiska su dominantni, pa je usvojena konvencija računanja napona prisaka kao pozitivnih i napona zatezanja kao negativnih normalnih napona. Za tenzor napona se koriste razna obeležavanja. Za Dekartov sistem u inženjerskoj praksi najčešći vid označavanja je: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{zx} i τ_{zy} za simetričan tenzor napona. Na slici 2.6 je prikazana interpretacija pozitivnih komponenti tenzora napona.



Slika 2.6 Obeležavanje i konvencija znaka komponentata napona (R.E.Goodman, 1980)

2.4. Veza između napona i deformacija

Konstatovali smo da su pri rešavanju praktičnih problema potrebne i dopunske jednačine, tj. veze između napona i deformacija. Proučavanje deformacija bilo je čisto geometrijsko: ispitujući promene oblika i zapremine tela nismo ulazili u njihovu zavisnost od spoljnih sila. Za uspostavljanje veza između deformacija i napona (a na taj način i između deformacija i spoljnih sila, jer je zavisnost između napona i spoljnih sila određena) treba da definišemo predmet našeg razmatranja, tj. realno telo, znači treba mu pripisati određene osobine. Te osobine moraju biti utvrđene neposrednim eksperimentima sa realnim telima. U tom slučaju će i zaključci koji proističu iz takve definicije moći da se primenjuju na realna tela. Zaključci i jednačine koje ćemo izvesti u daljim izlaganjima, mogu se primenjivati za realna tela ako se eksperimentalno utvrdi da imaju tu osobinu i samo u granicama u kojima je imaju. Za razliku od obrazaca matematike, koji operišu sa apstraktnim pojmovima, jednačine matematičke teorije plastičnosti postavljaju veze između stvarnih veličina: spoljnih sila, dimenzija tela i osobina materijala.

Obično se usvajaju tri osnovna modela materijala: elastičan, plastičan i viskozni i odgovarajuće njihove kombinacije. U daljem tekstu će se spominjati samo elastični i plastični modeli, s obzirom da su dovoljni za odgovarajuće opisivanje problematike koja je predmet ovog rada.

2.4.1 Elastični modeli

Engleski fizičar Robert Hooke je objavio 1678. god., kao rezultat svojih ogleda, da za mnoga realna tela, u izvesnim granicama, važi zakon proporcionalnosti između napona i deformacija. Hooke-ov zakon i iz njega izvedeni zaključci važe bez ograničenja samo za idealno elastično telo, koje u prirodi ne postoji. Međutim, njihova primena na realna tela, npr. tlo, je opravdana u oblastima u kojima naponi i deformacije ne prelaze određene vrednosti, koje se za pojedine materijale utvrđuju eksperimentom.

Koeficijenti elastičnosti, uopšte, zavise od položaja tačke u telu i od izabranih pravaca osa kroz tu tačku. Pri izvođenju konstitutivne jednačine linearno elastičnog modela najčešće se polazi od generalisanog Hooke-ovog zakona koji se može prikazati sledećim jednačinama:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (2.66)$$

ili inverzno

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (2.67)$$

gde su: σ_{ij} komponente tenzora napona, ε_{kl} komponente tenzora deformacija, C_{ijkl} komponente tenzora elastičnosti koje predstavljaju module krutosti materijala, D_{ijkl} komponente tenzora elastičnosti koje predstavljaju module fleksibilnosti materijala.

Sva dalja razmatranja, u primenama, biće ograničena pretpostavkom da je telo homogeno, što znači da su koeficijenti elastičnosti isti u svim tačkama. Može se dokazati da između tih 36 koeficijenata postoji 15 veza i na taj način smanjiti broj nezavisnih koeficijenata do 21. Ograničavamo se još i pretpostavkom da je telo izotropno-elastično, što znači da ima iste elastične osobine za sve pravce kroz datu tačku. Ta pretpostavka daje niz veza među koeficijentima koje, između ostalog, obuhvataju i 15 ranije spomenutih veza. Za elastične modele napon u svakoj čestici tela jednoznačno je određen deformacijom u posmatranom trenutku tj. nezavisan je od kretanja pre dolaska u tekuću konfiguraciju. Za analizu Hooke-ovog zakona pogodno je i tenzor infinitezimalne deformacije i tenzor napona razložiti na sferi i devijatorski deo u obliku, kako je već prikazano u izrazima (2.39) i (2.51):

$$\sigma_{kk} = 3K \cdot \varepsilon_{kk} \quad (2.68)$$

$$S_{ij} = 2G \cdot e_{ij} \quad (2.69)$$

gde je: K - moduo kompresije i G - moduo smicanja

Elastični izotropni model može biti predstavljen i preko Young-ovog modula i Poisson-ovog koeficijenta. Ove konstante se mogu dovesti u vezu sa K i G .

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad (2.70)$$

Može se dobiti i veza između konstanti K i G s jedne strane i konstanti E i ν sa druge strane, koristeći jednačinu (2.67), u sledećem obliku:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.71)$$

Iz predhodne jednačine može se dobiti tenzor izotropnih elastičnih konstanti u obliku:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma_{kk} \delta_{ij} = 2G e_{ij} + 3K \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = 2G (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) + K \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.72)$$

gde je :

$$C_{ijkl} = G (\delta_{ik} + \delta_{jk} + \delta_{il} + \delta_{jl}) + \left(K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (2.73)$$

pri čemu je

$$(\delta_{ik} + \delta_{jk} + \delta_{ik} + \delta_{il}) \varepsilon_{kl} = 2\varepsilon_{ij}, \quad \delta_{ik} \delta_{jk} \varepsilon_{kl} = \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (2.74)$$

Gornja jednačina je simetrična po indeksima $i-j$, $k-l$; i predstavlja najprostiji oblik veze između napona i deformacija u izotropnom elastičnom telu.

Prečutno se pretpostavlja da je sferni deo tenzora napona proporcionalan sfernom delu tenzora deformacije, a isto tako i devijatorski deo tenzora napona odgovarajućem delu tenzora deformacije. Moduo kompresije predstavlja količnik iz srednjeg normalnog napona i kubne dilatacije, drugim rečima daje meru kojom se izotropni materijal suprostavlja promeni zapremine. Moduo klizanja se javlja kao koeficijent proporcionalnosti između odgovarajućih devijatorskih komponenta napona i deformacija.

Govoriti o opravdanosti ili neopravdanosti primene ovog modela za proračun naponsko deformacijskog stanja u tlu nije suštinsko pitanje, već je to određivanje granica promene naponskog stanja kada je ova primena prihvatljiva [141].

2.5. Plastičnost. Uslov tečenja

2.5.1 Osnovni pojmovi u matematičkoj teoriji plastičnosti

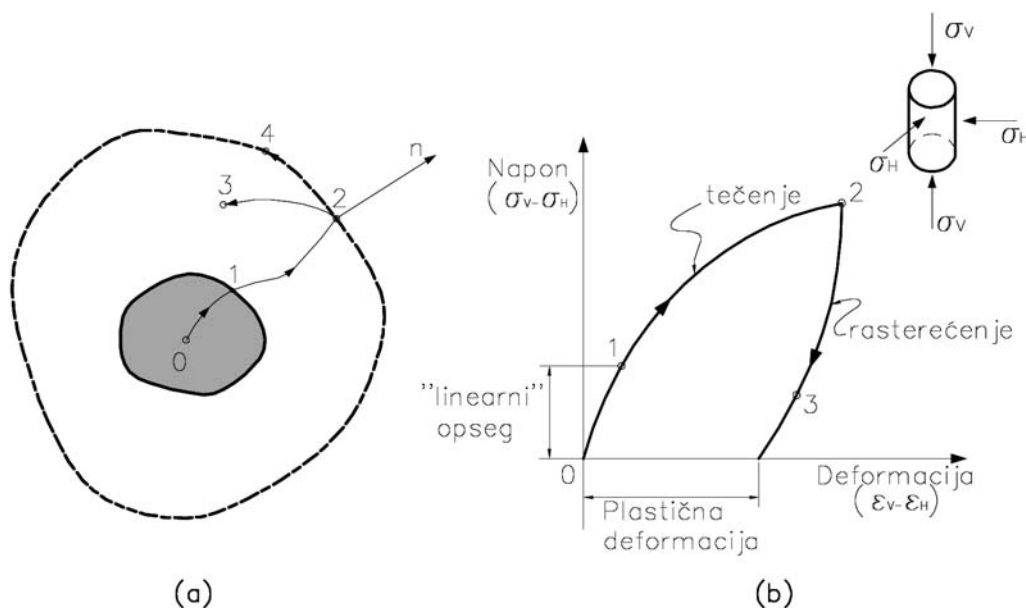
Kako se većina trodimenzionalnih teorija plastičnosti zasniva na uopštavanju jednodimenzionalne teorije, pa se pri razmatranju stanja napona i deformacija u plastično deformisanim delovima konstrukcije, polazi od idealizovanog dijagrama zavisnosti jednoosnog napreznja i deformacija.

Tipična kriva napon-deformacija dobijena u testu standardne triaksijalne kompresije je prikazana na slici 2.7.b. Opit triaksijalne kompresije se sprovodi na uzorku kod koga je visina jednaka dvostrukom prečniku, i kod koga je kontrolisan inkrementalni iznos aksijalnog pomeranja. Osim toga poznati su i granični uslovi po bočnim naponima, tokom trajanja čitavog opita, dok su nepoznate veličine devijator napona, kao i veličine bočnih pomeranja. Analizirajući pomenuti eksperiment može se uočiti sledeće ponašanje materijala uzorka:

elastičan opseg – koji predstavlja linearnu vezu između napona i deformacije, pri čemu se po prestanku dejstva (zadato pomeranje ili zadato opterećenje) uzorak vraća u prvobitno stanje;

plastičan opseg – slučaj gde postoje deformacije koje se ne vraćaju sa rasterećenjem uzorka.

Za materijal izložen spoljašnjim dejstvima (mehaničkim) kažemo da je trajno - plastično deformisan ako i posle prestanka spoljašnjeg dejstva ostaje promenjen oblik ili zapremina materijala u odnosu na neutralno stanje. Kako su komponente deformacije mehaničke veličine kojima opisujemo stanje, to znači da je u nekoj tački došlo do plastične deformacije ukoliko je, po prestanku dejstva uzroka deformisanja, bar jedna od komponenata deformacije različita od nule. Trajni deo deformacije zove plastična deformacija, a za odgovarajući uzorak kažemo da se u ovom opsegu ponaša plastično.



Slika 2.7 (a) Različite putanje napona na krivoj tečenja;
(b) Kriva napon – deformacija

Napon tečenja je definisan kao najveći napon koji se može postići pre nego što dođe do početne plastične deformacije. Ovakva definicija granice elastičnosti je više teoretski opis stanja jer se za realne materijale tačna vrednost napona tečenja veoma teško određuje eksperimentalnim putem. Ako su eksperimentalna posmatranja dovoljno precizna, onda se postavlja pitanje da li linearni region ili tačna vrednost napona tečenja uopšte i postoje za realni material (a naročito za peskove). Međutim, koncept tečenja ima centralnu ulogu u matematičkoj teoriji plastičnosti i standardno je usvojeno da se material idealizovano ponaša prvo u linearno-elastičnom regionu posle koga počinje plastično tečenje. Test jednoaksijalne kompresije se često koristi da se definišu neki aspekti ponašanja materijala, međutim taj test ne daje zadovoljavajuće odgovore za slučajeve višeosnog naponskog stanja u kome se najčešće nalazi temeljno tlo.

Postavljaju se sledeća praktična pitanja: Šta se dešava ako na element određenog materijala deluju nekoliko opterećenja u različitim pravcima? Koja kombinacija ovih opterećenja je merodavna i dovodi do pojave plastičnog tečenja? Kombinacija opterećenja

koja izaziva pojavu tečenja u materijalu naziva se kriterijum tečenja. U opštem slučaju, kriterijum tečenja trebalo bi da zavisi od dejstva primenjenog stanja napona i da odražava efekat prethodnih opterećenja na mikrostrukturu tog elementa.

Čestice granularnog skeleta tla se pod uticajem smičućih napona pomeraju jedna u odnosu na drugu. Ako su ovi naponi smicanja veći od otpornosti tla dolazi do klizanja između čestica, što uslovljava tečenje materijala.

Svesni činjenice da se ni u kom slučaju ne može izbeći idealizacija, usvajamo Hooke-ovu pretpostavku samo do izvesne granice i to do granice tečenja. Pod početkom tečenja podrazumeva se stanje pri kome je granica tečenja upravo dostignuta na jednom ili istovremeno na više mesta u tlu. Proširivanje procesa tečenja kroz konačno prostorno područje nastaje sa daljim povećanjem opterećenja, pri čemu prema usvojenoj idealizaciji deformacije postaju plastične i dobijaju veliki priraštaj. Ako je temelj preopterećen, ili ako tlo ima lošije osobine nego što je pretpostavljeno, tada se Hooke-ov zakon ne može primeniti u većim područjima jer je tlo isprožimano ravnima klizanja. Od izuzetnog značaja je proučavanje pojava koje predhode lomu tla, kao i praćenje tipa deformacije koje se javljaju u samoj fazi loma tla.

Pored konstitutivnih veza kojima se opisuje ponašanje materijala u domenu elastičnosti, odnosno do pojave plastičnih deformacija, za opisivanje elasto-plastičnog ponašanja materijala neophodno je poznavati: uslov tečenja, zakon tečenja i zakon ojačanja.

Zavisnost $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ predstavlja uslov koji mora zadovoljiti napon pritiska ili zatezanja da bi došlo do pojave, odnosno povećanja plastične deformacije; ovaj uslov je poznat kao uslov tečenja. On određuje stanje napona pri kome počinje plastično tečenje i definiše površinu u naponskom prostoru koja odvaja oblast elastičnog ponašanja od oblasti u kojoj naponi pored elastičnih izazivaju i plastične deformacije. Do sada je bilo reči o samo jednoosnom naprezanju pa se može konstatovati da se u toj oblasti relativno jednostavno može utvrditi uslov tečenja materijala. Međutim u opštem slučaju, troosnog naprezanja problem je veoma složen. Do sada su vršena mnogobrojna eksperimentalna i teorijska istraživanja, ali ona nisu rezultirala stvaranjem opšte teorije uslova tečenja, koji zapravo predstavlja jedno od centralnih pitanja teorije plastičnosti.

Ako sa q obeležimo unutrašnje promenjive vezane za strukturu materijala na makroskopskom nivou, koje se opisuju tenzorom drugog reda ε_{ij}^p i skalarom k , a Košijev napon σ (spoljašnja promenljiva), onda se kriterijum tečenja može izraziti matematički sa skalarnom funkcijom tečenja f :

$$f(\sigma, q) = 0 \quad (2.75)$$

gde je:

$$q = q[\varepsilon_{ij}^p] \quad (2.76)$$

Veličina q zavisi od komponenata plastične deformacije ε_{ij}^p i načina deformisanja materijala (istorije deformacije) u posmatranoj tački.

Pre dalje analize funkcije tečenja f , objasnimo ukratko pojam istorije deformacije materijala u posmatranoj tački. Naime, eksperimentima se može utvrditi da će povećanje komponenti plastične deformacije ε_{ij}^p , pri određenim vrednostima ε_{ij}^p nastupiti u opštem slučaju pri različitim veličinama σ_{ij} za dva različita načina deformisanja materijala u posmatranoj tački. Ovo znači da funkcija q ne zavisi samo od vrednosti ε_{ij}^p već se mora uvesti i parametar koji uzima u obzir način deformisanja. Prema Hill-u^[52] kao parametar se može koristiti rad plastičnog deformisanja po jedinici zapremine tela u posmatranoj tački ili ekvivalentna plastična deformacija.

Neke od osobina funkcije $f(\sigma_{ij}, q)$ najbolje se mogu utvrditi geometrijskim predstavljanjem ove funkcije u naponskom prostoru. Kako svakoj plastičnoj deformaciji predhodi elastična, funkcija f predstavlja krivu tečenja u naponskom prostoru koja okružuje koordinatni početak ($\sigma_{ij} = 0$) i elastičnu oblast, kako je prikazano na slici 2.7.a.

Na istoj slici je sa 1 označena kriva inicijalne plastične deformacije, koja odgovara tački 1 u dijagramu (σ, ε) pri jednoosnom naprezanju. Funkcija tečenja f se menja u opštem slučaju po obliku i veličini, usled ojačanja materijala.

U literaturi se funkcija f zove i funkcija opterećenja jer se njome mogu utvrditi i uslovi povećanja plastične deformacije (povećanje "opterećenja") u posmatranoj tački materijala, odnosno uslovi pri kojima do toga neće doći. Ako posmatramo promenu napona σ_{ij} u nekoj tački, menjaće se funkcija f , tako da se diferenciranjem po vremenu jednačine (2.75) dobija sledeći izraz:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial k} \cdot \dot{k} \quad (2.77)$$

Ukoliko je u nekom trenutku $\dot{f} < 0$ što znači da imamo "rasterećenje", na slici 2.7.a to bi odgovaralo putanji 2-3 u naponskom prostoru, odnosno liniji 2-3 u dijagramu (σ, ϵ) , pa nema povećanja plastične deformacije i ojačanja, na osnovu toga sledi da je:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} < 0 \quad (2.78)$$

kriterijum "rasterećenja". "Neutralno" opterećenje u nekoj tački postoji u slučaju kada pri promeni naponskog stanja ne dolazi do povećanja plastične deformacije ($\dot{\epsilon}_{ij}^p = 0, \dot{k} = 0$) i pri tom je $\dot{f} = 0$, odnosno:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (2.79)$$

"Neutralno" opterećenje odgovara putanji 2-4 čiji su elementarni delovi upravni na gradijent $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ površi f . Pri jednoosnom naprezanju „neutralno“ opterećenje se ne može definisati.

Konačno ukoliko je ispunjen uslov $\dot{f} > 0$, odnosno

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad (2.80)$$

imamo povećanje "opterećenja" u posmatranoj tački (putanje 1-2 na slikama 2.7.a i 2.7.b).

Zbog ojačanja materijala, kako je već predhodno rečeno, menja se u opštem slučaju i veličina i oblik površi $f = 0$. Može se pokazati, na osnovu fizičkog uslova da se pri plastičnoj deformaciji javlja gubitak mehaničke energije, da je površ $f = 0$ konveksna, posmatrano iz vrha pozitivne normale-usmerene u smeru povećanja f odnosno u smeru gradijenta $\partial f / \partial \sigma_{ij}$.

Za shvatanje pojma plastičnog materijala potrebno je imati na umu da se, za razliku od elastičnog tela, rad spoljašnjih sila utrošen na deformaciju ne može vratiti. Drugim rečima, rad koji se troši pri ciklusu opterećenje-rasterećenje ne može biti negativan (Drucker-ov postulat). Ovaj postulat uzima se često kao polazna tačka kod izvođenja veza između napona i brzina deformacija.

Energija koja se troši pri plastičnoj deformaciji svedena na jedinicu zapremine i vremena da je izrazom

$$d\dot{R} = \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (2.81)$$

pri čemu znak jednakosti važi za idealno plastičan materijal. Disipacija (rasipanje) energije data ovim izrazom može se shvatiti kao fizički zakon plastične deformacije. Može se pokazati da je tada, u skladu sa ovim, ispunjen i uslov tečenja

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (2.82)$$

Gornja jednačina ima sledeću geometrijsku interpretaciju: ako u naponskom prostoru shvatimo komponente σ_{ij} kao komponente nekog vektora u devetodimenzijalnom prostoru, vektor $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ i vektor brzine $\dot{\sigma}_{ij}$ napona su međusobno ortogonalni vektori. Isto tako, i uslov tečenja ima geometrijsku interpretaciju kao hiperpovršina. Vektor $\dot{\sigma}_{ij}$ mora biti tangencijalan na tu površinu jer je moguća samo ona promena u naponima koja zadovoljava uslov tečenja - drugim rečima, priraštaj vektora napona mora ležati u tangencijalnoj ravni. Ako je to tako onda je vektor $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ normalan na tu površinu. Dodajmo sada uslovu (2.81) još i postulat da priraštaj napona ne vrši nikakav rad na brzinama komponentalnih deformacija plastične deformacije. Ovaj postupak geometrijski interpretirano znači da je vektor $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ normalan na vektor $\dot{\sigma}_{ij}$ i shodno ranijoj činjenici sledi da su vektori $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ i $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ koaksijalni:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.83)$$

gde je λ skalarni koeficijent. Da je to pozitivan koeficijent možemo videti iz izraza (2.81)

$$\dot{R} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad (2.84)$$

Kako je σ_{ij} vektor koji se meri od početka koordinatnog sistema, a $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ ima pravac normale na površ koja je konveksna, mora da je :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad (2.85)$$

pa je λ pozitivno i zavisi od naponskog stanja, priraštaja napona, veličine plastične deformacije i istorije deformacije materijala u posmatranoj tački.

Treba primetiti da za sve materijale (na primer tlo) uvedeni fizički postulati nisu sasvim u skladu sa ponašanjem tih materijala, pa se smatra da ovo izjednačavanje nije sasvim opravdano. U slučaju da je uslov tečenja definisan sa više funkcija f_1, f_2, \dots, f_n tada je svaka od tih funkcija važeća za jednu određenu oblast naponskog prostora. Geometrijski

predstavljeno, pojedini delovi ove hiperpovršine se seku i na tim prodorima vektor nije jednoznačno određen. Tada se može prikazati kao linearna kombinacija vektora koji su normalni na pojedine delove površine:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda_k \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}}, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.86)$$

Pri tome je svaka od pojedinačnih površina tečenja konveksna. Ovde neće biti izlagano razmatranje singularnih tačaka, uslova tečenja sa prekidnim izvodima, a u vezi sa tim i zakona tečenja (videti npr. [15], [25], [57], [108]).

Za uspostavljanje veze između priraštaja plastičnih deformacija i priraštaja napona koristi se pretpostavka prema kojoj je inkrement plastičnih deformacija direktno proporcionalan gradijentu napona. Na taj način, opšti zakon tečenja može da se izvede iz plastičnog potencijala g , koji je između ostalog skalarna funkcija napona. Tada se inkrementi plastičnih deformacija dobijaju pomoću gradijenata plastičnog potencijala.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.87)$$

gde je $d\lambda$ koeficijent proporcionalnosti. Jednačinom (2.87) definisan je zakon tečenja. Zakonom tečenja uspostavlja se veza između pravca vektora plastičnih deformacija i funkcije plastičnog potencijala. Obično se uvodi princip normalnosti koji kaže da je inkrement plastične deformacije upravan na površ plastičnog potencijala, odnosno da leži duž pravca spoljašnje normale za ovu površ. U slučaju asocijativne plastičnosti funkcija plastičnog potencijala usvaja se u istom obliku kao funkcija tečenja, pa je inkrement plastične deformacije upravan na površ tečenja.

Zakon ojačanja poredi veličine inkrementa plastičnih deformacija sa veličinama inkremenata napona, pošto se stanje napona nalazi na površini tečenja. Ovim zakonom definiše se širenje ili skupljanje površi tečenja u zavisnosti od ukupnih plastičnih deformacija.

Do sada su vršena mnogobrojna eksperimentalna i teorijska istraživanja, ali ona nisu rezultirala stvaranjem opšte teorije uslova tečenja, koji zapravo predstavlja jedno od centralnih pitanja teorije plastičnosti. Interesantno je napomenuti da eksperimentalni rezultati pokazuju da se kod frikcionih materijala mogu primeniti i neasocijativni modeli, u kojima se kao plastični potencijal ne koristi funkcija tečenja, već druga funkcija napona.

Na teškoće u primeni asocijativne plastičnosti u rešavanju problema mehanike tla ukazao je Drucker^{[36], [38]}. Na osnovu rezultata velikog broja sprovedenih numeričkih analiza pojedini autori (Zienkiewicz^[148], Vermer^[163]) zaključuju da primena asocijativne plastičnosti

u modeliranju mehaničkog ponašanja frikcionih materijala ne daje rezultate koji odgovaraju ponašanju tog materijala u fizičkim eksperimentima. Prema njihovom mišljenju glavni razlog za navedeno odstupanje je pre svega u značajnom povećanju zapreminskih plastičnih deformacija, usled kojih primena asocijativne plastičnosti ne daje realne rezultate pri rešavanju određenih graničnih problema.

Ovakvo ponašanje tla prevashodno se nalazi u pojavi dilatancije. Pojava povećanja zapremine tla pri promeni smičućih napona, u mehanici tla se koristi izraz dilatancija, kojim se objašnjava uticaj uzglobljenja zrna na ukupnu smičuću otpornost. Dilatancija je skalarni pokazatelj strukturnih karakteristika određene vrste tla. Dilatanciju zbijenih peskova prvi je uočio Reynolds, 1885.god., koji je eksperimentalno pokazao da se zbijeni peskovi šire pri uticaju smičućih napona. Iz ovih eksperimenata nije proizišla nikakva praktična mera koja bi mogla da ukaže na vezu između dilatancije i smičuće otpornosti zrnastih materijala. Casagrande 1936.god., je pokazao zavisnost ugla smičuće otpornosti peskova u funkciji koeficijenta poroznosti i zapreminskih promena uzorka peska izloženog smicanju. Pokazao je da se zbijeni peskovi šire pri smicanju i pokazuju relativno velike vrednosti ugla smičuće otpornosti, dok se rastresiti peskovi tokom smicanja sabijaju pokazujući pri tome značajno manje vrednosti ugla smičuće otpornosti.

Efekti dilatancije su značajni u nižim područjima normalnih napona i postepeno nestaju sa porastom normalnih napona. Pri veoma visokim naponima, ponašanje većine frikcionih materijala zavisi od trenja koje je praćeno drobljenjem zrna. Za dovoljno visok nivo normalnih napona, efekti dilatancije se potpuno gube i materijal se plastično deformiše pri konstantnoj zapremini.

Radi definisanja kriterijuma koji bi jedinstveno kvantifikovao pojavu dilatancije u ovom radu se koristi parametar koji se, zbog praktične primene, najčešće koristi u literaturi i predstavlja tzv. ugao dilatancije

2.6 Elasto-plastični modeli za tlo

2.6.1 Mohr-Coulomb-ov uslov tečenja

Francuski vojni inženjer Coulomb (1773) je postavio hipotezu kojom definiše veličinu otpornosti tla na smicanje, pomoću poznatog izraza:

$$\tau_f = \sigma \tan \phi + c \quad (2.88)$$

gde su:

σ - normalni napon koji deluje u ravni napona τ_f

c - specifična kohezija

$\tan \phi$ - konstanta proporcionalnosti koja izražava linearnu zavisnost između normalnog napona σ i smičućeg napona τ_f .

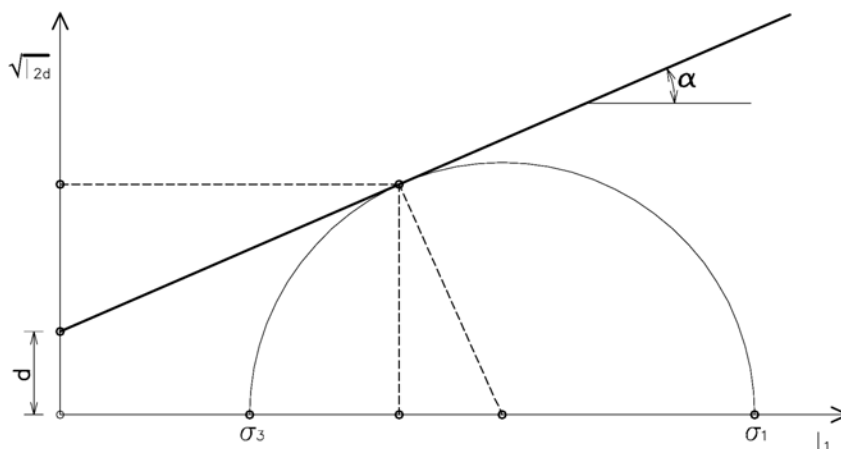
Sama formulacija izraza je posledica eksperimenata u kojima su smicani uzorci drveta i u kojima je pokazano da smičuća otpornost veze dva drvena elementa linearno zavisi od veličine normalnog napona. Njegovim radovima započelo je tumačenje graničnih stanja u tlu. Uglavnom je razmatrao problem pritiska na potporne konstrukcije, ali je analizirao i stabilnost bočnih strana iskopa u prirodno vlažnom koherentnom tlu, pri čemu je koristeći pretpostavku o ravnim površinama klizanja, odredio izraz za graničnu visinu vertikalnog zaseka.

Mohr (1882) je formulisao uslov loma za materijale sa nejednakom otpornošću na pritisak i zatezanje, izražen preko glavnih napona. Ograničio je domen važnosti ovako formulisanog uslova loma, tako da se ova linearna anvelopa posmatra kao granična kriva za naponska stanja pri jedosnom pritisku i zatezanju. Stiče se utisak da Mohr i nije imao nameru da uspostavi opšti uslov loma, već je pokušao da odredi međusobni odnos osnovnih mehaničkih karakteristika, i to pre svega između čvrstoće na smicanje i čvrstoće na pritisak. Mohr-ova hipoteza ne uzima uticaj srednjeg glavnog napona na formiranje uslova plastičnosti, tako da na granično stanje utiču samo algebarski najveći i najmanji napon. Mohr je relaciju (2.88) izrazio preko glavnih napona u sledećem obliku:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \cdot \tan \alpha - 2d = 0 \quad (2.89)$$

gde je:

$$d = c \cdot \cos \phi, \quad \tan \alpha = \sin \phi \quad (2.90)$$



Slika 2.8 Mohr–Coulomb–ov kriterijum tečenja

Empirijski Mohr-Coulomb-ov linearni kriterijum tečenja zadovoljavajuće opisuje stanje napona pri tečenju za određeni interval promene napona za sve vrste tla u konvencionalnoj mehanici tla.

Presek ovako definisane prave linije sa nulnim nivoom normalnih napona daje odsečak koji predstavlja komponentu smičuće čvrstoće koja ne obuhvata trenje. Ovaj parametar ima fizičkog smisla samo onda kad su čestice tla međusobno povezane značajnim silama, bez obzira na njihovu pravu prirodu; tada tlo ima koheziju.

Parametre smičuće otpornosti treba shvatiti kao empirijske veličine i oni zavise od pripreme samih uzoraka i vrste ispitivanja. Potrebno je primeniti ona ispitivanja koja najpribližnije simuliraju stanje napona i deformacija i njihove promene u posmatranom uzorku tla.

Linearna idealizacija, kod koje su kohezija i ugao smičuće čvrstoće nezavisni od nivoa napona, može se smatrati dobrom za rastresite peskove i normalne konsolidovane gline. Kod materijala koji pokazuju kruto ponašanje, tečenje se dešava progresivno, sa različitim stepenom angažovanja otpornosti u pojedinim tačkama same površi tečenja.

Eksperimentalno je utvrđeno da se gore navedena zakonitost može primeniti sa konstantnim vrednostima parametra otpornosti samo za određene promene normalnog napona. Odstupanje od linearne anvelope može biti izraženo u području malih napona, što je posebno važno kod ispitivanja pri kojima su naponi niski.

Izraze (2.62) i (2.64) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{J_{2d}} \cos \theta \quad (2.91)$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{1}{3} I_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_{2d}} \sin \theta \quad (2.92)$$

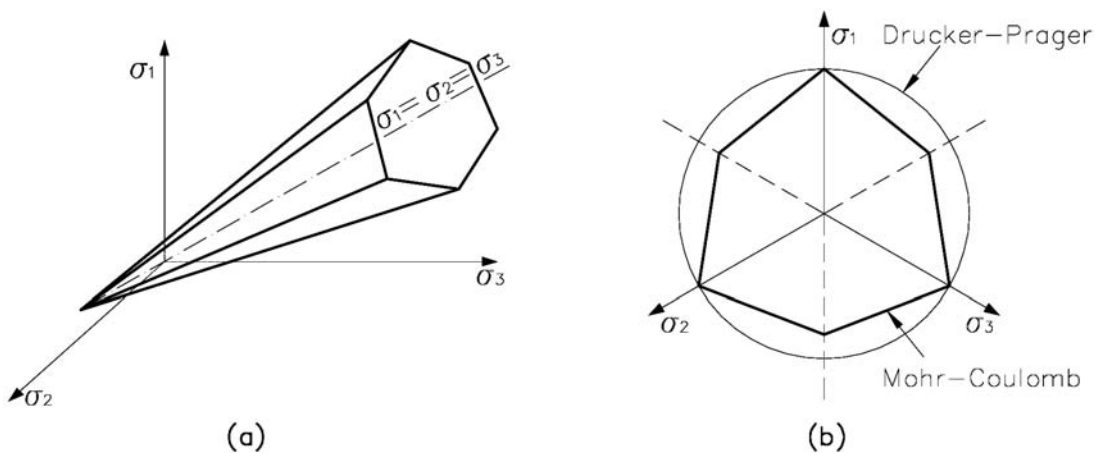
Ako u jednačinu (2.89) unesemo izraze (2.91) i (2.92), jednačinu (2.90) možemo, posle elementarnih transformacija, napisati u sledećem obliku:

$$f = \sqrt{J_{2d}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_{2d}} \sin \theta \sin \phi - \frac{I_1}{3} \sin \phi - c \cdot \cos \phi = 0 \quad (2.93.1)$$

gde je Lode-ov ugao:

$$\theta = -\frac{1}{3} \cdot \sin^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{I_{3d}}{I_{2d}^{3/2}} \right) \quad (2.93.2)$$

Ako se uzmu u obzir i druge dve kombinacije napona ($\sigma_2 > \sigma_1$ i $\sigma_3 > \sigma_1$) mogu se dobiti još dve relacije oblika (2.93). U trodimenzionalnom prostoru glavnih napona površ tečenja, koja se dobija kada se uzmu u obzir sve tri predhodne kombinacije, predstavlja nepravilnu šestostranu piramidu duž hidrostatičke ose čija je projekcija na ravan nepravilni šestougaonik (slika 2.9).



Slika 2.9 (a) Mohr–Coulomb–ova površ tečenja;
(b) Presek Mohr–Coulomb–ove i Drucker–Prager–ove površi tečenja i oktaedarske ravni

Ovakav oblik površi tečenja koji se u ovom slučaju javlja, a ne cilindrični, posledica je učešća sfernog dela tenzora napona u uslovu tečenja. Za vezano tlo, ako uticaj kohezije zamenimo uporednim normalnim naponom σ_c , jednačinu (2.93.1) za slučaj hidrostatičkog naponskog stanja ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), možemo napisati u sledećem obliku $\sigma_1 = \sigma_c = c \cdot \text{ctg} \phi$. Geometrijskom interpretacijom ovog izraza uočava se položaj vrha piramide na prostornoj dijagonali ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) a na odstojanju od koordinatnog početka koje je jednako uporednom normalnom naponu $\sigma_c = c \cdot \text{ctg} \phi$.

Vrednosti maksimalnog i minimalnog poluprečnika krugova koji prolaze kroz uglove piramide u π ravni jednake su:

$$\theta = -\frac{\pi}{6}, \quad R_{\max} = \sqrt{2J_{2d}} = \frac{2\sqrt{6} \cdot c \cdot \cos \phi}{3 - \sin \phi} \quad (2.94.1)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad R_{\min} = \sqrt{2J_{2d}} = \frac{2\sqrt{6} \cdot c \cdot \cos \phi}{3 + \sin \phi} \quad (2.94.2)$$

2.6.2 Drucker-Prager-ov uslov tečenja

Ovaj model je nastao aproksimacijom Mohr-Coulomb-ove površi tečenja sa glatkom površi i kao modifikacija dobro poznatog Von Mises-ovog materijalnog modela uključujući sfernu komponentu tenzora napona.

Drucker i Prager (1952) predložili su uslov tečenja u obliku:

$$f = \sqrt{I_{2d}} - \alpha I_1 - k = 0 \quad (2.95)$$

gde su:

- I_1 - prva invarijanta tenzora napona,
- I_{2d} - druga invarijanta devijatora tenzora napona,
- α, k - materijalne konstante.

Ukoliko je $\alpha = 0$ jednačina (2.95) prelazi u Von Mises-ov uslov tečenja. Konstante α i k mogu se odrediti u zavisnosti od kohezije c i ugla smičuće otpornosti ϕ pretpostavljajući da istovremeno Drucker-Prager-ov i Mohr-Coulomb-ov kriterijum tečenja daju identično granično opterećenje za date eksperimentalne uslove. Koristeći jednačine (2.94.1) i (2.95) zavisnost se može predstaviti, u triksijalnim uslovima za CTC test:

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (2.96.1)$$

$$k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} = \frac{c}{\tan \phi} \alpha \quad (2.96.2)$$

U uslovima ravanskog stanja deformacija ova veza se može prikazati u obliku:

$$\alpha = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad (2.97.1)$$

$$k = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad (2.97.2)$$

Ograničenja u praktičnim primenama Drucker-Prager-ovog modela su detaljno prikazana u radu [21].

2.6.3 Kapa model

DiMaggio i Sandler (1971) su formulisali elasto-plastičan model koji se sastoji od dve površi tečenja koje se seku. Jedna površ tečenja opisuje idealno elasto-plastično ponašanje, a druga površ tečenja - kapa obuhvata izotropno ojačanje materijala pri povećanju plastične deformacije. Familija površi tečenja formira "kape"^[21], pa otuda i ime modelu.

Modifikovanom Drucker-Pragerovom površi tečenja je fiksirana u prostoru glavnih napona i može se napisati u obliku

$$f_f = \sqrt{I_{2d}} + \gamma e^{-\beta I_1} - \theta I_1 - \alpha = 0 \quad (2.98)$$

gde je:

I_1 - prva invarijanta tenzora napona,

I_{2d} - druga invarijanta devijatora tenzora napona i

$\alpha, \beta, \gamma, \theta$ - materijalni parametri koji se eksperimentalno određuju.

Druga površ tečenja je kapa koja se širi u prostoru glavnih napona u funkciji zapreminskih plastičnih deformacija. Posmatramo slučaj kape prikazane sledećom jednačinom:

$$f_c = R^2 I_{2d} + (I_1 - C)^2 - R^2 B^2 = 0 \quad (2.99)$$

koja predstavlja elipsu sa poluosama $X - C$ i B . Parametar R predstavlja odnos između manje i veće poluose elipse, dok su C i X centar odnosno teme elipse na apcisonoj osi. Ojačanje materijala je definisano preko promene zapreminske plastične deformacije, u obliku:

$$X = -\frac{1}{D} \ln \left(1 - \frac{\varepsilon_v^p}{W} \right) + Z \quad (2.100)$$

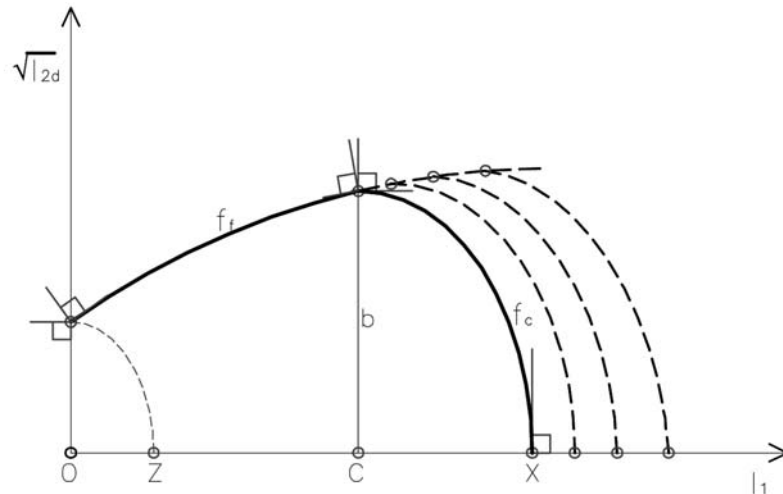
gde su:

X - vrednost I_1 u preseku kape i hidrostatičke ose,

ε_v^p - zapreminska plastična deformacija koja odgovara tekućem X i

D , Z i W - materijalni parametri modela.

Veličina D određuje brzinu promene zapreminske plastične deformacije, Z određuje početnu elipsu, a W predstavlja maksimalnu plastičnu zapreminsku deformaciju koja smanjuje poroznost materijala na početnu vrednost.



Slika 2.10 Funkcija tečenja modela "kapa" u $I_1-\sqrt{I_{2d}}$ prostoru

U elastičnoj oblasti model obuhvata ponašanje nelinearno elastičnog tela. U elasto-plastičnoj oblasti prirodu deformacija određuje eliptična kapa. Ako se tekuće naponsko stanje nalazi na površi kape u slučaju asocijativne plastičnosti vektor priraštaja plastičnih deformacija je upravan na eliptičnu površ tečenja. Zbog oblika kape, vektor priraštaja zapreminske plastične deformacije ima uvek pozitivnu komponentu u pravcu prve invarijante, pri čemu se kapa pomera unapred, odnosno materijal ojačava. U slučaju plastičnog deformisanja na graničnoj površi loma priraštaji zapreminskih plastičnih deformacija su negativni, odnosno sa razvojem dilatancije javlja se kontrakcija kape. Na taj način je kretanje kape određeno povećanjem ili smanjenjem zapreminske plastične deformacije.

Za domen koji obuhvata male napone se može uvesti i tzv. početna (inicijalna) kapa čiji je centar u koordinatnom početku. Za definisanje modela potrebno je odrediti deset materijalnih parametara: dva elastična (E, ν), četiri za graničnu površ tečenja ($\alpha, \beta, \gamma, \theta$) i na kraju još četiri konstante za eliptičnu kapu (D, Z, W i R).

Potrebno je napomenuti da se kod nelinearne elastičnosti broj elastičnih parametara povećava srazmerno usvojenom stepenu nelinearnosti. Svi materijalni parametri se mogu odrediti na osnovu standardnih laboratorijskih testova i numeričkih procedura [31].

2.6.4 HISS model

Desai ^[32], ^[33] je predložio hijerarhijski koncept definisanja materijalnih modela (HISS) u oblasti plastičnosti. Opšti oblik funkcije tečenja predstavljen je polinomom koji sadrži invarijante napona i devijatora napona. Funkcija tečenja menja oblik i veličinu u toku deformisanja, čime se obuhvata ojačanje ili omekšanje materijala.

U ovom radu razmatra se funkcija tečenja za izotropno ojačanje asocijativne plastičnosti:

$$f = p_a^{-2} I_{2d} - F_b \cdot F_s = 0 \quad (2.101.1)$$

gde je:

$$F_b = -\alpha \cdot (I_1/p_a)^n + \gamma \cdot (I_1/p_a)^2 \quad (2.101.2)$$

$$F_s = (1 - \beta \cdot S_r)^m \quad (2.101.3)$$

$$S_r = 3\sqrt{3}/2 \cdot I_{3d} \cdot I_{2d}^{-3/2} \quad (2.101.4)$$

α funkcija ojačanja,

n , γ , β i m materijalne konstante i

p_a atmosferski pritisak.

F_b je osnovna funkcija koja prikazuje oblik funkcije tečenja u $I_1 - \sqrt{I_{2d}}$ prostoru, F_s funkcija koja reprezentuje oblik u oktaedarskoj ravni.

Oblik funkcije ojačanja se definiše relacijom:

$$\alpha = a_1 / \xi^\eta \quad (2.102)$$

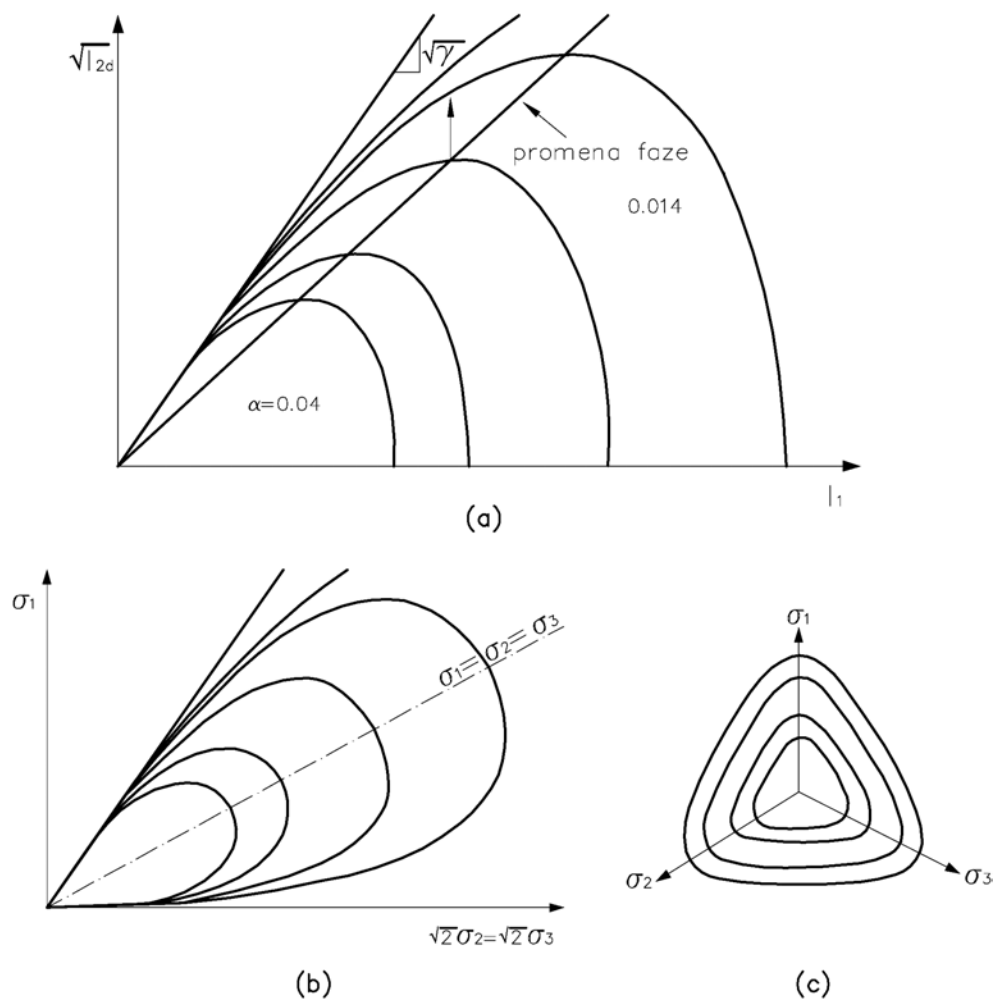
gde su:

a_1 i η materialne konstante kojima se opisuje ojačanje materijala i

ξ je ekvivalentna (efektivna) plastična deformacija.

Efektivna plastična deformacija definisana je relacijom:

$$\xi = \int (\mathbf{d}\epsilon_{ij}^p \mathbf{d}\epsilon_{ij}^p)^{1/2} \quad (2.103)$$



Slika 2.11 Funkcija tečenja HISS (C.S.Desai, 1986):
 (a) u prostoru $I_1 - \sqrt{I_{2d}}$; (b) u triksijalnoj ravni; (c) u devijatorskoj ravni

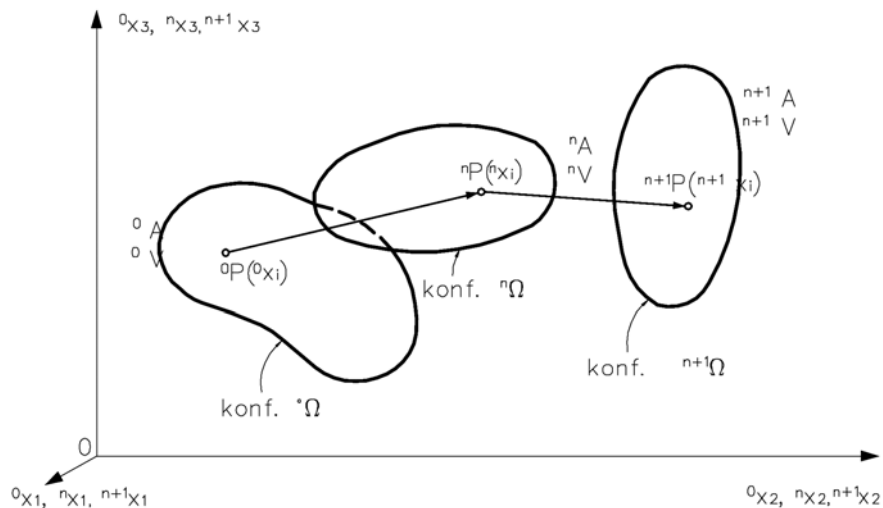
HISS uslov tečenja uspešno opisuje ponašanje frikcionih materijala za različite putanje napona. Prednost ovog modela, između ostalog, je što za razliku od većine kompleksnih elasto-plastičnih modela nema posebno definisanu graničnu površ loma.

3. INKREMENTALNA FORMULACIJA OSNOVNIH JEDNAČINA STATIČKE ANALIZE

3.1. Uvod

Kada je potrebno formirati matematički model posmatranog mehaničkog sistema u mehanici tla ne mogu se izbeći nelinearni problemi, što podrazumeva korišćenje formulacija nelinearne mehanike kontinuuma. Nelinearna mehanika kontinuuma nije dostigla stepen razvoja u kome se većina problema mogu svesti na diferencijalne jednačine za koje postoji razrađene metode integracije, za razliku od teorije elastičnosti koja je dostigla izvestan stepen matematičke potpunosti^[89].

Odeljci 3.1, 3.2 i 3.3 ovog poglavlja urađeni su prema monografiji[8]. Na slici 3.1 prikazane su tri konfiguracije proizvoljnog tela u toku deformacije: početna ${}^0\Omega$, tekuća ${}^n\Omega$ i naknadna konfiguracija ${}^{n+1}\Omega$. Predpostavljamo da je rešenje za kinematičke i statičke veličine za sve konfiguracije ${}^0\Omega$, ${}^1\Omega$, ${}^2\Omega$, ..., ${}^n\Omega$ poznato i da je potrebno odrediti rešenje za konfiguraciju ${}^{n+1}\Omega$.



Slika 3.1 Tri konfiguracije tela u toku deformacije

Koordinate proizvoljne tačke P tela u konfiguraciji ${}^0\Omega$ su ${}^0x_1, {}^0x_2$ i 0x_3 u ${}^n\Omega$ su ${}^nx_1, {}^nx_2$ i nx_3 i u ${}^{n+1}\Omega$ su ${}^{n+1}x_1, {}^{n+1}x_2$ i ${}^{n+1}x_3$. Na sličan način se obeležavaju i pomeranja, odnosno:

$$\left. \begin{aligned} {}^nx_i &= {}^0x_i + {}^nu_i \\ {}^{n+1}x_i &= {}^0x_i + {}^{n+1}u_i \end{aligned} \right\}, (i=1,2,3) \quad (3.1)$$

Nepoznate inkremente pomeranja od ${}^n\Omega$ do konfiguracije ${}^{n+1}\Omega$ mogu se obeležiti sa

$$\Delta u_i = {}^{n+1}u_i - {}^n u_i, (i = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

U toku deformacije tela, njegova površina, naponi i deformacije menjaju se kontinualno. Površinu tela ćemo obeležiti sa 0A , nA i ${}^{n+1}A$.

Pošto je konfiguracija ${}^{n+1}\Omega$ nepoznata, sve spoljašnje sile, napone i deformacije izrazićemo u odnosu na neku poznatu ravnotežnu konfiguraciju. Komponente površinskih sila po jedinici površine u konfiguraciji ${}^{n+1}\Omega$, ali merene u konfiguraciji ${}^n\Omega$, su ${}^{n+1}_n p_i$, ($i = 1, 2, 3$). Slično je i kod napona. Komponente Piola-Kirchoff-ovog tenzora napona druge vrste koje odgovaraju konfiguraciji ${}^{n+1}\Omega$, ali merene u konfiguraciji ${}^n\Omega$, obeležićemo sa ${}^{n+1}_n S_{ij}$. Ako se radi o veličini koja se posmatra u istoj konfiguraciji u kojoj se meri tada se levi donji indeks može izostaviti. To je slučaj kod Cauchy-jevog tenzora napona, tj. ${}^{n+1}\sigma = {}^{n+1}_n \sigma$. Komponente Cauchy-jevog infinitezimalnog tenzora deformacije koje odgovaraju konfiguraciji ${}^{n+1}\Omega$ obeležićemo sa ${}^{n+1}e_{ij}$. Komponente Green-Lagrange-ovog tenzora deformacije koje odgovaraju konfiguraciji ${}^{n+1}\Omega$ u odnosu na konfiguraciju ${}^n\Omega$ obeležićemo sa ${}^{n+1}_n \epsilon$. Referentne konfiguracije u odnosu na koje ćemo određivati veličine spoljnih sila Piola-Kirchoff-ovog tenzora napona druge vrste i Green-Lagrange-ovog tenzora deformacije će biti ${}^0\Omega$ i ${}^n\Omega$.

U formulaciji osnovnih jednačina ravnoteže pojaviće se i izvod pomeranja i koordinata. Prema usvojenoj notaciji zarezom ćemo označiti izvod po koordinati koja sledi iza nje, a levi donji indeks će označavati konfiguraciju u kojoj je posmatrana koordinata merena. U Lagrange-ovoj inkrementalnoj formulaciji ravnotežu tela u konfiguraciji $(n+1)$ izrazićemo korišćenjem principa virtuelnih pomeranja. Osnovna pretpostavka od koje se polazi pri definisanju ovoga principa je da on važi za konstrukciju u ravnoteži. Iskaz da je algebarski zbir radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila pri bilo kojim virtuelnim pomeranjima tačkaka tela jednak je nuli formuliše princip virtuelnih pomeranja. Pod pojmom virtuelna ili moguća pomeranja podrazumevamo beskonačno mala proizvoljna pomeranja koja su neprekidne i diferencijabilne funkcije koordinata tačkaka tela i jednaka su nuli u svim onim tačkama u kojima su konturni uslovi zadati po pomeranjima. Princip virtuelnih pomeranja, odnosno slaba forma jednačine momentnog balansa, zadovoljava diferencijalnu jednačinu problema (uslove ravnoteže tela), granične uslove koji predstavljaju poznata

pomeranja i zadate sile na granici razmatranog domena. Princip virtuelnih pomeranja za konfiguraciju ${}^{n+1}\Omega$ glasi:

$${}^{n+1}\delta R_u = {}^{n+1}\delta R_s \quad (3.3)$$

gde je: ${}^{n+1}\delta R_u$ - virtuelni rad unutrašnjih sila (rad stvarnih napona na virtuelnim deformacijama), a ${}^{n+1}\delta R_s$ - virtuelni rad spoljašnjih sila (rad zapreminskih i površinskih sila na virtuelnim pomeranjima),

$${}^{n+1}\delta R_u = \int_{{}^{n+1}V} {}^{n+1}\sigma_{ij} \delta {}^{n+1}e_{ij} \, dV \quad (3.4.1)$$

$${}^{n+1}\delta R_s = \int_{{}^{n+1}V} {}^{n+1}\rho \, {}^{n+1}f_i \delta {}^{n+1}u_i \, dV + \int_{{}^{n+1}A} {}^{n+1}p_i \delta {}^{n+1}u_i^s \, dA \quad (3.4.2)$$

$$\delta {}^{n+1}e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta {}^{n+1}u_i}{\partial {}^{n+1}x_j} + \frac{\partial \delta {}^{n+1}u_j}{\partial {}^{n+1}x_i} \right) = \frac{1}{2} \delta ({}^{n+1}u_{i,j} + {}^{n+1}u_{j,i}) \quad (3.4.3)$$

Primenom jednačine (3.3) dolazi se do jednačina ravnoteže. Rešenje jednačine (3.3) nije moguće dobiti direktno pošto je konfiguracija ${}^{n+1}\Omega$ nepoznata. Moguće je dobiti približno rešenje ako se sve promenljive izraze preko odgovarajućih veličina u nekoj predhodno izračunatoj ravnotežnoj konfiguraciji i izvrši linearizacija tako dobijene jednačine. Bilo koja već sračunata konfiguracija može se usvojiti kao referentna konfiguracija. U praktičnim primenama koriste se dve varijante Lagrange-ove inkrementalne formulacije: totalna Lagrange-ova formulacija i korigovana Lagrange-ova formulacija.

3.2 Formulisanje rešenja nelinearnih jednačina

3.2.1. Totalna Lagrange-ova formulacija

U totalnoj Lagrange-ovoj formulaciji za referentnu konfiguraciju usvajamo početnu konfiguraciju ${}^0\Omega$. Ako u (3.4.1) izrazimo ${}^{n+1}\delta R_u$ preko Piola-Kirchoff-ovog tenzora napona druge vrste i Green-Lagrange-ovog tenzora deformacije, koristeći relaciju (36) ispisanu za konfiguraciju ${}^{n+1}\Omega$:

$${}^{n+1}\delta R_u = \int_{{}^0V} {}^{n+1}S_{ij} \delta {}^{n+1}\epsilon_{ij} \, dV \quad (3.5)$$

Spoljne sile u izrazu (3.4.2) možemo napisati u obliku

$${}^{n+1}\rho \, {}^{n+1}\mathbf{f}_i \, dV = {}^0\rho \, {}^{n+1}\mathbf{f}_i \, {}^0dV \quad (3.6)$$

$${}^{n+1}\mathbf{p}_i \, dF = {}^{n+1}\mathbf{p}_i \, {}^0dA \quad (3.7)$$

gde je usvojena pretpostavka da veličine i pravci sila ${}^0\rho \, {}^{n+1}\mathbf{f}_i$ i ${}^{n+1}\mathbf{p}_i$ ne zavise od deformacije tela u konfiguraciji ${}^{n+1}\Omega$. Jednačine ravnoteže tela u konfiguraciju ${}^{n+1}\Omega$ u odnosu na ravnotežnu konfiguraciju ${}^0\Omega$ možemo napisati u obliku:

$$\int_{{}^0V} {}^{n+1}\mathbf{S}_{ij} \cdot \delta {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \cdot {}^0dV = {}^{n+1}\delta R_s \quad (3.8)$$

gde je na osnovu (3.4.2), (3.6) i (3.7)

$${}^{n+1}\delta R_s = \int_{{}^0V} {}^0\rho \, {}^{n+1}\mathbf{f}_i \delta {}^{n+1}\mathbf{u}_i \cdot {}^0dV + \int_{{}^0A} {}^{n+1}\mathbf{p}_i \delta {}^{n+1}\mathbf{u}_i^a \cdot {}^0dA \quad (3.9)$$

U jednačini (3.8) ${}^{n+1}\mathbf{S}_{ij}$ -Piola-Kirchoff-ov tenzor napona druge vrste u konfiguraciji ${}^{n+1}\Omega$, a merene u konfiguraciji ${}^0\Omega$ je

$${}^{n+1}\mathbf{S}_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^{n+1}\rho} \cdot {}^{n+1}\mathbf{x}_{i,k} \cdot {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_{kl} \cdot {}^{n+1}\mathbf{x}_{j,l} \quad (3.10)$$

a $\delta {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ varijaciona komponenta Green-Lagrange-ov tenzor deformacije u konfiguraciji ${}^{n+1}\Omega$, a merene u konfiguraciji ${}^0\Omega$

Tenzor deformacije koji je u saglasnosti sa Piola-Kirchoff-ovim tenzorom napona druge vrste je Green-Lagrange-ov tenzor deformacije. Varijacija Green-Lagrange-ov tenzor deformacije može se prikazati jednačinom:

$$\delta {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \delta \left({}^{n+1}\mathbf{u}_{i,j} + {}^{n+1}\mathbf{u}_{j,i} + {}^{n+1}\mathbf{u}_{k,i} \cdot {}^{n+1}\mathbf{u}_{k,j} \right) \quad (3.11)$$

Kao što je već rečeno, ako su nam poznate komponente Piola-Kirchoff-ovog tenzora napona druge vrste i pomeranja u konfiguraciji ${}^n\Omega$, možemo odgovarajuće veličine vezane za konfiguraciju ${}^{n+1}\Omega$ odrediti korišćenjem sledeće inkrementalne dekompozicije:

$${}^{n+1}\mathbf{S}_{ij} = {}^n\mathbf{S}_{ij} + \Delta\mathbf{S}_{ij} \quad (3.12.1)$$

$${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \quad (3.12.2)$$

$${}^{n+1}\mathbf{u}_i = {}^n\mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}_i \quad (3.12.3)$$

gde su: ΔS_{ij} i $\Delta \varepsilon_{ij}$ inkrementi Piola-Kirchoff-ovog tenzora napona druge vrste i Green-Lagrange-ovog tenzora deformacije koji se odnose na početnu konfiguraciju ${}^0\Omega$, a Δu_i je inkrement pomeranja. Polazeći od relacije kojom je izražen Green-Lagrange-ov tenzor deformacije preko pomeranja, uz vođenje računa o jednačini (3.12), dobija se:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = {}^{n+1}_0 \varepsilon_{ij} - {}^n_0 \varepsilon_{ij} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij} = & \frac{1}{2} \left[\left({}^{n+1}_0 u_{i,j} - {}^n_0 u_{i,j} \right) + \left({}^{n+1}_0 u_{j,i} - {}^n_0 u_{j,i} \right) + \left({}^{n+1}_0 u_{i,k} \cdot {}^{n+1}_0 u_{k,j} - {}^n_0 u_{i,k} \cdot {}^n_0 u_{k,j} \right) \right] = \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial {}^0 X_j} \left({}^{n+1} u_i - {}^n u_i \right) + \frac{\partial}{\partial {}^0 X_i} \left({}^{n+1} u_j - {}^n u_j \right) + \left({}^n_0 u_{i,k} + \Delta u_{k,i} \right) + \left({}^n_0 u_{j,k} + \Delta u_{k,j} \right) + {}^n_0 u_{i,k} \cdot {}^n_0 u_{k,j} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Odnosno;

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left({}_0 \Delta u_{i,j} + {}_0 \Delta u_{j,i} + {}^n_0 u_{i,k} \cdot {}_0 \Delta u_{k,j} + {}^n_0 u_{j,k} \cdot {}_0 \Delta u_{k,i} + {}_0 \Delta u_{i,k} \cdot {}_0 \Delta u_{k,j} \right) \quad (3.15)$$

Inkrement Green-Lagrange-ovog tenzora deformacije $\Delta \varepsilon_{ij}$ može se prikazati kao odgovarajući zbir linearnog i nelinearnog dela:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij} \quad (3.16)$$

gde su:

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left({}_0 \Delta u_{i,j} + {}_0 \Delta u_{j,i} + {}^n_0 u_{i,k} \cdot {}_0 \Delta u_{k,j} + {}^n_0 u_{j,k} \cdot {}_0 \Delta u_{k,i} \right) \quad (3.17)$$

$$\Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0 \Delta u_{i,k} \cdot {}_0 \Delta u_{k,j} \quad (3.18)$$

Iz jednačine (3.12.2) sledi:

$$\delta {}^{n+1}_0 \varepsilon_{ij} = \delta \left({}^n_0 \varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij} \right) = \delta \Delta \varepsilon_{ij} \quad (3.19)$$

pa korišćenjem gornje jednačine i jednačine (3.8) uslov ravnoteže možemo napisati u obliku:

$$\int_{{}^0 V} \Delta S_{ij} \cdot \delta \Delta \varepsilon_{ij} \cdot {}^0 dV = {}^{n+1} \delta R_s - \int_{{}^0 V} {}^n_0 S_{ij} \cdot \delta \Delta \varepsilon_{ij} \cdot {}^0 dV \quad (3.20)$$

veza između inkremenata napona i deformacija je oblika:

$$\Delta S_{ij} = {}^n_0 D_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (3.21)$$

pa smenom jednačine (3.21) u jednačini (3.20) dobijamo oblik:

$$\int_{^0V} {}^nD_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} \cdot \delta\Delta\varepsilon_{ij} \cdot {}^0dV + \int_{^0V} {}^nS_{ij} \cdot \delta\Delta\eta_{ij} \cdot {}^0dV = {}^{n+1}\delta R_s - \int_{^0V} {}^nS_{ij} \cdot \delta\Delta\varepsilon_{ij} \cdot {}^0dV \quad (3.22)$$

koji predstavlja nelinearnu jednačinu za određivanje inkrementa pomeranja Δu_i u totalnoj Lagrange-ovoj formulaciji.

3.2.2. Korigovana Lagrange-ova formulacija

Kod korigovane Lagrange-ove formulacije za referentnu konfiguraciju usvajamo tekuću konfiguraciju tela ${}^n\Omega$. Analogno predhodnom razmatranju, jednačina (3.3) dobija oblik:

$$\int_{^nV} {}^{n+1}S_{ij} \cdot \delta {}^{n+1}\varepsilon_{ij} \cdot {}^ndV = {}^{n+1}\delta R_s \quad (3.23)$$

${}^{n+1}S_{ij}$ -Piola-Kirchoff-ov tenzor napona druge vrste u konfig. ${}^{n+1}\Omega$, a merene u konfig. ${}^n\Omega$

${}^{n+1}\varepsilon_{ij}$ -Green-Lagrange-ov tenzor deformacije u konfiguraciji ${}^{n+1}\Omega$, a merene u konfig. ${}^n\Omega$

${}^{n+1}\delta R_s$ -rad spoljašnjih sila pri virtuelnim pomeranjima

Pretpostavljajući da je opterećenje nezavisno od deformacije tela, slično prethodnim razmatranjima, dobija se nelinearna jednačina za određivanje inkrementalnog pomeranja Δu_i u korigovanoj Lagrange-ovoj formulaciji u sledećem obliku:

$$\int_{^nV} {}^nD_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl} \cdot \delta {}^n\varepsilon_{ij} \cdot {}^ndV + \int_{^nV} {}^n\sigma_{ij} \cdot \delta {}^n\eta_{ij} \cdot {}^ndV = {}^{n+1}\delta R_s - \int_{^nV} {}^n\sigma_{ij} \cdot \delta\Delta\varepsilon_{ij} \cdot {}^ndV \quad (3.24)$$

3.2.3 Linearizacija jednačina ravnoteže

U inkrementalno iterativnim postupcima princip virtuelnih pomeranja je zadovoljen na kraju ili početku svakog inkrementa opterećenja što znači da je primenom ovih postupaka obezbeđena ravnoteža razmatranog mehaničkog sistema (tela) samo u diskretnim koracima nanošenja spoljnog opterećenja. Da bi se postigla zahtevana ravnoteža tela u pojedinim inkrementima razmatranog nelinearnog mehaničkog sistema neophodno je korišćenje odgovarajućih iterativnih postupaka. Poslužićemo se geometrijskom interpretacijom, tj. u prostoru nezavisnih parametara ravnotežna stanja sistema formiraju krivu, pa konvergencija rešenja direktno zavisi od usvojenog reda aproksimacije te krive. Postupkom linearizacije

uvodimo aproksimaciju razmatrane krive njenom tangentom. Linearizacijom principa virtuelnih pomeranja dolazi se do pojma neuravnoteženih sila koje deluju na posmatrani mehanički sistem kao i do pojma tangentne matrice krutosti sistema koja karakteriše odgovor sistema na neuravnoteženu pobudu. Jednačine ravnoteže (3.22) i (3.24) su nelinearne po inkrementima pomeranja. Linearizaciju možemo izvršiti usvajanjem sledeće aproksimacije:

$${}_0\Delta\epsilon_{ij} \approx {}_0\Delta e_{ij} \quad (3.25)$$

$$\Delta S_{ij} = {}_0D_{ijkl} \cdot {}_0\Delta\epsilon_{kl} \quad (3.26)$$

$$\delta\Delta\epsilon_{ij} \approx \delta_0\Delta e_{ij} \quad (3.27)$$

Ako u jednačini (3.22) unesemo odgovarajuće izraze možemo napisati sledeću jednačinu ravnoteže u totalnoj Lagrange-ovoj formulaciji:

$$\int_{{}_0V} {}^nD_{ijkl} \cdot {}_0\Delta e_{kl} \cdot \delta\Delta e_{ij} \cdot {}^0 dV + \int_{{}_0V} {}^nS_{ij} \cdot \delta_0\Delta\eta_{ij} \cdot {}^0 dV = {}^{n+1}\delta R_e - \int_{{}_0V} {}^nS_{ij} \cdot \delta_0\Delta e_{ij} \cdot {}^0 dV \quad (3.28)$$

Prema predhodno izvršenoj linearizaciji:

$$\Delta S_{ij} \approx {}^nD_{ijkl} \cdot \Delta e_{kl} \quad (3.29)$$

$$\delta\Delta\epsilon_{ij} \approx \delta\Delta e_{ij} \quad (3.30)$$

Jednačina ravnoteže u korigovanoj Lagrange-ovoj formulaciji (3.24) dobija sledeći oblik:

$$\int_{{}^nV} {}^nD_{ijkl} \cdot {}^n\Delta e_{kl} \cdot \delta_{{}^n}\Delta e_{ij} \cdot {}^n dV + \int_{{}^nV} {}^n\sigma_{ij} \cdot \delta_0\Delta\eta_{ij} \cdot {}^n dV + \int_{{}^nV} {}^n\sigma_{ij} \cdot \delta_{{}^n}\Delta e_{ij} \cdot {}^0 dV = {}^{n+1}\delta R_s \quad (3.31)$$

Jednačine (3.28) i (3.31) su linearne jednačine po inkrementalnim pomeranjima. Izraz (3.31) predstavlja linearizovani oblik priraštaja unutrašnjeg virtuelnog rada u odnosu na priraštaj prostornih pomeranja u datoj tački prostora. Na osnovu njega se određuje linearizovani priraštaj unutrašnje energije sistema u odnosu na komponente prostornog vektora pomeranja tačaka razmatranog sistema, a u odnosu na trenutnu konfiguraciju. Može se odrediti putanja kojom će se sistem kretati iz tekuće konfiguracije.

3.3 Formulacija rešenja metodom konačnih elemenata

Za rešavanje ovih jednačina primenićemo metodu konačnih elemenata. Usvajanjem izoparametarske diskretizacije, do odgovarajućih jednačina MKE dolazimo tako što koristimo iste interpolacione funkcije za koordinate i pomeranja unutar jednog konačnog elementa, kao što se to radi i standardnom procedurom u linearnoj analizi, tj.:

$${}^0x_i = \sum_{k=1}^N h_k \cdot {}^0x_{ik}; \quad {}^n x_i = \sum_{k=1}^N h_k \cdot {}^n x_{ik}; \quad {}^{n+1}x_i = \sum_{k=1}^N h_k \cdot {}^{n+1}x_{ik} \quad (3.32)$$

$${}^n u_i = \sum_{k=1}^N h_k \cdot {}^n u_{ik}; \quad \Delta u_i = \sum_{k=1}^N h_k \cdot \Delta u_{ik} \quad (3.33)$$

gde ${}^n x_{ik}$ je koordinata čvora k u pravcu i u konfiguraciji ${}^n \Omega$, ${}^n u_{ik}$ je pomeranje čvora k u pravcu i u konfiguraciji ${}^n \Omega$, Δu_{ik} je inkrement pomeranje čvora k u pravcu i u konfiguraciji ${}^n \Omega$, h_k je interpolaciona funkcija polja pomeranja unutar elementa konačne zapremine V i površi A koja se odnosi na čvor k , i N je ukupan broj čvorova u elementu. Interpolaciona funkcija h_k se definiše u sistemu prirodnih koordinata r_i ($i=1,2,3$) koje variraju u intervalu od -1 do 1. Interpolaciona funkcija h_k ima osobinu da je njena vrednost u sistemu prirodnih koordinata jednaka jedinici u čvoru k i jednaka nuli u svim ostalim čvorovima. Da bismo omogućili efikasniju transpoziciju predhodnih izraza u MKE, jednačinu (3.33) za razmatrani konačni element m možemo napisati u matričnom obliku:

$${}^n u = H \cdot {}^n u_m \quad (3.34.1)$$

$$\Delta u = H \cdot \Delta u_m \quad (3.34.2)$$

Iz jednačine (3.17) za linearni deo inkrementa Green-Lagrange-ovog tenzora deformacije u totalnoj Lagrange-ovoj formulaciji dobija se:

$$\Delta e = {}^n G \cdot {}_0 \Delta u_d \quad (3.35)$$

gde ${}^n G$ matrica gradijenata deformacije u konfiguraciji ${}^n \Omega$ a ${}_0 \Delta u_d$ vektor gradijenata pomeranja. Koristeći izraz (3.34.2) vektor ${}_0 \Delta u_d$ možemo prikazati pomoću pomeranja čvorova konačnog elementa:

$${}_0 \Delta u_d = {}_0 H_d \cdot \Delta u_m \quad (3.36)$$

gde je ${}_0H_d$ matrica izvoda interpolacionih funkcija po koordinatama 0x_i ($i=1,2,3$). Na osnovu izraza (3.35) i (3.36) linearni deo inkrementa Green-Lagrange-ovog tenzora deformacije je:

$$\Delta e = {}^nB \cdot \Delta u_m \quad (3.37)$$

gde je:

$${}^nB = {}^nG \cdot {}_0H_d \quad (3.38)$$

U matrici nG sadržani su gradijenati pomeranja u konfiguraciji ${}^n\Omega$ (${}^n u_{m,i}$) koji se mogu odrediti iz izraza (3.34.1) kao:

$${}^n u_d = {}_0H_d \cdot {}^n u_m \quad (3.39)$$

Za konačni element m može se napisati:

$${}_0D_{ijkl} \cdot \Delta e_{kl} \cdot \delta \Delta e_{ij} = \delta \Delta e^T \cdot {}_0D \cdot \Delta e = \delta \Delta u_m^T \cdot ({}^nB^T \cdot {}_0D \cdot {}^nB) \cdot \Delta u_m \quad (3.40)$$

odnosno:

$$\int_{{}_0V} {}_0D_{ijkl} \cdot \Delta e_{kl} \cdot \delta \Delta e_{ij} \cdot {}^0dV = \delta \Delta u_m^T \cdot ({}^nK_L \cdot \Delta u_m) \quad (3.41)$$

gde je nK_L linearna matrica krutosti za element m koja je data izrazom:

$${}^nK_L = \int_{{}_0V} ({}^nB^T \cdot {}_0D \cdot {}^nB) \cdot {}^0dV \quad (3.42)$$

gde je ${}_0D$ inkrementalna konstitutivna matrica u konfiguraciji ${}^n\Omega$ definisana u odnosu na u konfiguraciji ${}^0\Omega$. Analognim razmatranjem, imajući u vidu jednačinu (3.18), može se izraz za geometrijsku matricu krutosti elementa m napisati u obliku:

$${}^nK_G = \int_{{}_0V} {}_0H_d^T \cdot {}^nS \cdot {}_0H_d \cdot {}^0dV \quad (3.43)$$

Za razmatrani konačni element m može se izraziti i integral:

$$\int_{{}_0V} {}^nS_{ij} \cdot \delta \Delta e_{ij} \cdot {}^0dV = \int_{{}_0V} \delta \Delta e^T \cdot {}^nS \cdot {}^0dV = \int_{{}_0V} \delta \Delta u_m^T \cdot {}^nB^T \cdot {}^nS \cdot {}^0dV = \delta \Delta u_m^T \cdot {}^nF \quad (3.44)$$

gde je: nF vektor čvornih sila koje su ekvivalentne naponima u elementu m u konfig. ${}^n\Omega$, tj.:

$${}^n_0\mathbf{F} = \int_{{}^n_0V} {}^n_0\mathbf{B}^T \cdot {}^n_0\mathbf{S} \cdot {}^0dV \quad (3.45)$$

a ${}^n_0\mathbf{S}$ vektor Piola-Kirchoff-ovog tenzora napona druge vrste za element m u konfigur. ${}^n\Omega$.

Izraz ${}^{n+1}\delta\mathbf{R}_s$ za virtuelni rad spoljašnjih sila (rad zapreminskih i površinskih sila na virtuelnim pomeranjima),

$${}^{n+1}\delta\mathbf{R}_s = \int_{{}^0V} {}^0\rho \cdot {}^{n+1}f_i \delta^{n+1}u_i \cdot {}^0dV + \int_{{}^0A} {}^{n+1}p_i \delta^{n+1}u_i^a \cdot {}^0dA \quad (3.46)$$

Kako je prema (3.12.3) $\delta^{n+1}u_i = \delta({}^n u_i + \Delta u_i) = \delta\Delta u_i$ dobija se:

$${}^{n+1}\delta\mathbf{R}_s = \int_{{}^0V} {}^0\rho \cdot {}^{n+1}f_i \cdot \delta\Delta u_i \cdot {}^0dV + \int_{{}^0A} {}^{n+1}p_i \cdot \delta\Delta u_i^a \cdot {}^0dA \quad (3.47)$$

Matrični oblik ove jednačine, za razmatrani konačni element m , je:

$${}^{n+1}\delta\mathbf{R}_s = \int_{{}^0V} {}^0\rho \cdot \delta\Delta\mathbf{u}_m^T \cdot {}^{n+1}f \cdot {}^0dV + \int_{{}^0A} \delta\Delta\mathbf{u}_m^a \cdot {}^{n+1}p \cdot {}^0dA \quad (3.48)$$

ili korišćenjem izraza (3.34.2)

$${}^{n+1}\delta\mathbf{R}_s = \delta\Delta\mathbf{u}_m^T \cdot {}^{n+1}\mathbf{P} \quad (3.49)$$

gde je ${}^{n+1}\mathbf{P}$ vektor spoljnih sila koji odgovaraju elementu m u konfiguraciji ${}^{n+1}\Omega$ tj.

$${}^{n+1}\mathbf{P} = \int_{{}^0V} {}^0\rho \cdot \mathbf{H}^T \cdot {}^{n+1}f \cdot {}^0dV + \int_{{}^0A} \mathbf{H}^a \cdot {}^{n+1}p \cdot {}^0dA \quad (3.50)$$

Unošenjem jednačina (3.41), (3.45) i (3.50) u jednačinu ravnoteže (3.28) u totalnoj Lagrange-ovoj formulaciji, za element m dobija se:

$$\left({}^n_0\mathbf{K}_L + {}^n_0\mathbf{K}_G \right) \cdot \Delta\mathbf{u}_m = {}^{n+1}\mathbf{P} - {}^n_0\mathbf{F} \quad (3.51)$$

Slično totalnoj Lagrange-ovoj formulaciji možemo formulirati i rešenje jednačina (3.31) u korigovanoj Lagrange-ovoj formulaciji:

$$\left({}^n_n\mathbf{K}_L + {}^n_n\mathbf{K}_G \right) \cdot \Delta\mathbf{u}_m = {}^{n+1}\mathbf{P} - {}^n_n\mathbf{F} \quad (3.52)$$

gde su:

$${}^n_n\mathbf{K}_L = \int_{{}^n_nV} \left({}^n_n\mathbf{B}^T \cdot {}^n_n\mathbf{D} \cdot {}^n_n\mathbf{B} \right) \cdot {}^n_n dV \quad (3.53)$$

$${}^n K_G = \int_{{}^n V} {}^n H_d^T \cdot {}^n S \cdot {}^n H_d \cdot {}^n dV \quad (3.54)$$

$${}^n F = \int_{{}^n V} {}^n B^T \cdot {}^n S \cdot {}^n dV \quad (3.56)$$

dok za ${}^{n+1}P$ vektor spoljnih sila koji odgovaraju elementu m u konfiguraciji ${}^{n+1}\Omega$ važi izraz (3.50). Elementi matrica u izrazima (3.42) do (3.56) su funkcije prirodnih koordinata elemenata i da se odgovarajući integrali najčešće izračunavaju numeričkim putem koristeći se transformacijom Descartes-ovih koordinata u prirodne koordinate. Integral prikazan izrazom (3.42) može se napisati u obliku:

$${}^0 K_L = \int_{{}^0 V} ({}^0 B^T \cdot {}^0 D \cdot {}^0 B) \cdot {}^0 dV = \int_{{}^0 V} \chi(r_1, r_2, r_3) \cdot dr_1 \cdot dr_2 \cdot dr_3 \quad (3.57)$$

gde je:

$$\chi = {}^0 B^T \cdot {}^0 D \cdot {}^0 B \cdot \det({}^0 J) \quad (3.58)$$

a ${}^0 J$ matrica transformacije, ili Jakobijan, kojim je izražena veza

$$\left[\frac{\partial}{\partial r_i} \right] = {}^0 J \left[\frac{\partial}{\partial {}^0 x_i} \right], \quad {}^0 J = \left[\frac{\partial {}^0 x_j}{\partial r_i} \right] \quad (3.59)$$

Kao što je predhodno rečeno, problemi nelinearnosti (geometrijske i materijalne) mogu se posmatrati nezavisno. Kao i u linearnoj teoriji elastičnosti možemo pretpostaviti da su pomeranja i dilatacije male veličine tako da jednačinu ravnoteže možemo postaviti u odnosu na nedeformisanu konfiguraciju ukoliko su bitni samo efekti materijalne nelinearnosti. Jednačine (3.28) i (3.31) prelaze u jednu jednačinu, oblika:

$$\int_V D_{ijkl} \cdot \Delta e_{kl} \cdot \delta \Delta e_{ij} \cdot dV = {}^{n+1} \delta R_s - \int_V {}^n \sigma_{ij} \cdot \delta \Delta e_{ij} \cdot dV \quad (3.60)$$

Rešavanjem jednačine (3.28) sračunavamo priraštaj pomeranja na osnovu kojeg sračunavamo: pomeranja, dilatacije i napone u konfiguraciji $(n+1)$ koje ćemo označiti indeksom ⁽ⁱ⁾. Pošto smo izvršili linearizaciju jednačine ravnoteže, za pomeranja, deformacije i napone uzimamo približne vrednosti, pa je potrebno videti kolika je "neuravnoteženost opterećenja" između spoljašnjeg virtuelnog rada i virtuelnog rada sa sračunatim statičkim i kinematičkim veličinama u konfiguraciji $(n+1)$.

$$\Delta P = {}^{n+1}\delta R_e - \int_V {}^{n+1}\sigma_{ij}^{(i)} \cdot \delta \Delta {}^{n+1}e_{ij}^{(i)} \cdot dV \quad (3.61)$$

Da bi dalje redukovali neuravnoteženo opterećenje, potrebno je izvršiti još iteracija u okviru istog inkrementa opterećenja, dok ne dobijemo željenu tačnost po nekom unapred usvojenom kriterijumu konvergencije. Jednačina (3.60) prelazi u iterativnu jednačinu:

$$\int_V {}^n D_{ijkl} \cdot \Delta e_{kl}^{(m)} \cdot \delta \Delta e_{ij}^{(m)} \cdot dV = {}^{n+1}\delta R_e - \int_V {}^n \sigma_{ij}^{(m-1)} \cdot \delta \Delta e_{ij}^{(m-1)} \cdot dV \quad (3.62)$$

gde je priraštaj pomeranja određen jednačinom:

$${}^{n+1}u_i^{(m)} = {}^{n+1}u_i^{(m-1)} + \Delta u_i^{(m)} \quad (3.63)$$

Dobijeni sistem algebarskih jednačina rešavamo uobičajenom procedurom MKE.

Kao što je već naglašeno, inkrementalno iterativni postupci rešavanja zadovoljavaju uslove ravnoteže samo u diskretnim tačkama. Kada konstitutivne relacije propisuju inkrementalnu vezu između napona i deformacija neizbežno je da postupci rešavanja koji se baziraju na inkrementalno iterativnim postupcima dovode do određene greške u rešenju. Izvor greške se nalazi u netačnosti integracije zakona tečenja duž putanje nezavisno promenljivih parametara, koji određuje iznos plastične deformacije tokom inkrementa a koja postoji u bilo kom vremenski diskretnom postupku rešavanja. U vremenski diskretizovanim postupcima uvek se implicitno usvaja da je priraštaj nezavisnih parametara sistema tokom trajanja inkrementa linearan. Kada je ravnoteža sila zadovoljena na početku i na kraju inkrementa i u slučaju kada priraštaj plastične deformacije nije linearan, rešenje u posmatranom inkrementu neće biti identično onom koje bi se dobilo kada bi se ovaj inkrement podelio na više sabinkremenata.

3.4 Numerička integracija konstitutivnih jednačina

Na osnovu predhodnih razmatranja može se formulisati standardni Newton-Raphson-ov postupak za rešavanje nelinearnih problema^{[27], [53], [62], [139], [161], [164]} u kome se spoljašnje opterećenje ili zadato pomeranje nanosi u inkrementima. Do ravnoteže na kraju svakog od inkremenata dolazi se iterativnim postupkom, linearizacijom oko stanja koje odgovara predhodno uravnoteženom inkrementu spoljašnjeg opterećenja. U svakoj od iteracija pomeranja čvornih tačaka razmatranog tela izazivaju neuravnotežene čvorne sile, ${}^{n+1}R^{(i)}$, koje se određuje na osnovu izraza:

$${}^{n+1}\mathbf{R}^{(i)} = {}^{n+1}\mathbf{P} - \sum_{ielem=1}^{nelem} \int_V {}^{n+1}\mathbf{B}^{(i)T} {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_{ij}^0 dV = {}^{n+1}\mathbf{P} - \sum_{ielem=1}^{nelem} \sum_{igaus=1}^{ngaus} {}^{n+1}\mathbf{B}^{(i)T} {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_{ij}^0 dV \quad (3.64)$$

pri čemu indeks $(n+1)$ označava tekući increment, indeks (i) tekuću iteraciju u okviru inkrementa, a $nelem$ i $ngaus$ označavaju ukupan broj elemenata i Gausovih tačaka integracije po elementu. Vektor ${}^{n+1}\mathbf{P}$ označava vektor spoljašnjeg opterećenja na kraju $(n+1)$ inkrementa. Priraštaj čvornih pomeranja u okviru svake iteracije posmatranog inkrementa se određuje na osnovu rešenja sistema algebarskih jednačina

$${}^{n+1}\mathbf{K}_t^{(i)} \cdot \mathbf{u} = {}^{n+1}\mathbf{R}^{(i)} \quad (3.65)$$

pri čemu ${}^{n+1}\mathbf{K}_t^{(i)}$ predstavlja tangentnu matricu krutosti sistema koja se dobija kao zbir matrica krutosti pojedinačnih elemenata.

Tačnost rešenja sistema (3.64) u okviru unapred definisanog kriterijuma tačnosti, zavisi od postupka integracije konstitutivnih relacija u tzv. vremenskom koraku. Brzina konvergencije zavisi od načina računanja konstitutivne matrice. Kvadratna brzina konvergencije postiže se određivanjem tangentne konstitutivne matrice.

3.4.1 Algoritam povratnog preslikavanja^[99]

Problem sračunavanja napona na osnovu poznatih inkremenata deformacija svodi se na integraciju konstitutivnih jednačina elasto-plastičnog problema. Istraživanja u ovoj oblasti su vrlo intezivna, jer od načina rešavanja integracije konstitutivnih jednačina zavisi tačnost rešenja razmatranog graničnog problema^{[8], [28], [31], [42], [61], [100], [161]}.

Dalja razmatranja, u pogledu integracije konstitutivnih jednačina, prikazaćemo sa aspekta algoritma povratnog preslikavanja u plastičnosti.

Za analizu elastičnih deformacija, nezavisno od toga da li se one posmatraju u sklopu infinitezimalnih ili konačnih deformacija, u računskoj mehanici najčešće se usvaja da je elastični tenzor konstantan i izotropan u svakoj ravnotežnoj konfiguraciji. Kod rešavanja problema plastičnog deformisanja mehaničkog sistema kod koga su elastične deformacije relativno male u odnosu na odgovarajuće plastične deformacije, sasvim je svejedno na koji će način biti formulisan elastičan odgovor, pri čemu podrazumevamo korišćenje konstantnog tangencijalnog tenzora elastičnosti ili hiperelastičnog potencijala.

Analiza plastičnog ponašanja koja će biti sprovedena u okviru ovih razmatranja obuhvata matematički model materijala koga karakteriše povećanje elastičnog opsega u naponskom prostoru sa porastom plastične deformacije. Na taj način uvodi se familija površi tečenja kao funkcija napona i unutrašnjih promenljivih. Kao što je navedeno u predhodnom poglavlju, da bi se odredilo plastično deformisanje posmatranog tela potrebno je poznavati: zakon plastičnog tečenja, evolucionu jednačinu unutrašnjih promenljivih sistema i kriterijum opterećenja.

Konstitutivne jednačine elasto-plastičnog materijala za vremenski nezavisnu plastičnost mogu se prikazati u sledećem obliku:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (3.66.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon^e, q) \quad (3.66.2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Delta\lambda r_{ij}(\sigma, q) \quad (3.66.3)$$

$$\dot{q}_\alpha = \Delta\lambda \cdot h_\alpha(\sigma, q) \quad (3.66.4)$$

Zahteva se da naponi pri bilo kom iznosu plastičnih deformacija leže na tačno utvrđenoj površi $f = 0$, poznatoj kao površ plastičnog tečenja. Priraštaj efektivne plastične deformacije odredićemo sa predhodnim ograničenjem i ograničenjima koja predstavljaju kriterijum opterećenja i rasterećenja. Ovaj kriterijum u Kuhn–Tucker–ovoj formi^[99] sadrži sledeća ograničenja:

$$f(\sigma, q) \leq 0 \quad (3.67)$$

$$\Delta\lambda \geq 0 \quad (3.68)$$

$$f\Delta\lambda = 0 \quad (3.69)$$

podrazumevajući njihovo simultano zadovoljenje u bilo kom trenutku vremena.

Nejednakost (3.67) karakteriše elastični domen ponašanja materijala i usvaja se da je konveksnog oblika. Ova nejednakost može biti posmatrana i kao uslov da naponske veličine u odsustvu plastičnih deformacija ostanu unutar elastičnog domena. U toku procesa opterećenja uslovi (3.68) i (3.69) moraju biti simultano zadovoljeni.

Za $f < 0$ iz uslova (3.69) sledi da je $\Delta\lambda = 0$ što odgovara elastičnom ponašanju materijala. Plastično ponašanje materijala je određeno vrednošću $\Delta\lambda > 0$ odakle se iz uslova (3.69) zahteva zadovoljenje plastičnog kriterijuma $f = 0$.

Obzirom na aditivnu strukturu elasto-plastičnih konstitutivnih jednačina, algoritam povratnog preslikavanja se javlja kao vrlo prikladan postupak za njihovu integraciju. Ovaj algoritam integracije napona u koraku zadovoljava uslov plastične konsistentnosti u svakom inkrementu i pokazuje dobre karakteristike u pogledu stabilnosti (pouzdanosti) postupka integracije, efikasnosti i tačnosti dobijenih rešenja.

Njegova primena je uglavnom bila ograničena na jednostavne plastične modele sa konstantnim elastičnim modulom i linearnim zakonom ojačanja. Simo i Ortiz^[130] su usvojili sledeće pretpostavke:

- elastičan odgovor materijala zasnovan je na generalnom hiperelastičnom modelu sa nekonstantnim modulom;
- inkrementalne elastične konstitutivne relacije zamenjene su totalnim elastičnim relacijama čime je izbegnuta potreba za njihovom integracijom;
- Plastični model materijala predstavljen je neasocijativnim zakonom tečenja i proizvoljnim plastičnim kriterijumom.

U okviru ovog rada algoritam povratnog preslikavanja za integraciju napona je prikazan u materijalnoj deskripciji uvođenjem osnovnih naponskih i deformacijskih veličina modela merenih u odnosu na početnu konfiguraciju.

Konstitutivne jednačine, saglasno njihovoj aditivnosti, mogu se razdvojiti na elastičan i plastičan deo. Ako pretpostavimo da je ukupni odgovor materijala elastičan onda se odgovarajuće jednačine možemo napisati u sledećem obliku:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p = d(t) \quad (3.70.1)$$

$$\dot{\sigma} = D(\varepsilon^e) : \dot{\varepsilon} \quad (3.70.2)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \quad (3.70.3)$$

$$\dot{q} = 0 \quad (3.70.4)$$

Plastični deo odgovarajućih konstitutivnih jednačina, s obzirom na izraze (3.70.1 do 3.70.4), možemo izraziti u sledećem obliku:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p = 0 \quad (3.71.1)$$

$$\dot{\sigma} = -D(\varepsilon^e) : \dot{\varepsilon}^p \quad (3.71.2)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \Delta\lambda \cdot r(\sigma, q) \quad (3.71.3)$$

$$\dot{q} = \Delta\lambda \cdot h(\sigma, q) \quad (3.71.4)$$

U elastičnim jednačinama predviđanja "zamrznut" je plastični odgovor materijala, odnosno plastične deformacije i unutrašnje promenljive tretirane su kao konstantne vrednosti, što inicira da je elastična deformacija $\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_p$ poznata funkcija vremena. Proces plastične relaksacije definisan je jednačinama (3.71.1 do 3.71.4) i za njihovo rešavanje potrebno je uvesti iterativni ciklus koji se nastavlja do zadovoljenja uslova plastičnosti $f(\sigma, q) = 0$ u okviru unapred zadatog kriterijuma tačnosti.

Polazeći od razdvojenih elasto-plastičnih konstitutivnih relacija (3.70) i (3.71) algoritam za integraciju napona se može postaviti u pogodnoj formi za konkretnu praktičnu primenu. Dobra predikcija plastične deformacije je važna radi ubrzanja konvergencije iterativnog rešenja. U nedostatku bolje informacije najčešće se polazi od nulte vrednosti, koja odgovara elastičnom rešenju. Jednačinama (3.70) definisano je elastično predviđanje ponašanja materijala i tako dobijeno stanje može se usvojiti kao početni uslov za proces plastične relaksacije određen jednačinama (3.71). Za jednostavne materijalne modele povratni put, definisan relaksacionim jednačinama, može biti određen analitički.

Međutim, imajući u vidu činjenicu da je plastično ponašanje većine materijala definisano nelinearnim konstitutivnim jednačinama, analitička integracija relaksacionih jednačina je vrlo složena ili čak u opštem slučaju nije moguća pa smo prinuđeni na korišćenje nekog odgovarajućeg numeričkog postupka. Usvajanjem vremenski nezavisne plastičnosti, funkciju tečenja f možemo linearizovati u odnosu na zadnje sračunatu iteraciju na sledeći način:

$$f = f\left({}^{n+1}\sigma^{(i)}, {}^{n+1}q^{(i)}\right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\left({}^{n+1}\sigma^{(i)}, {}^{n+1}q^{(i)}\right) : \left(\sigma - {}^{n+1}\sigma^{(i)}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\left({}^{n+1}\sigma^{(i)}, {}^{n+1}q^{(i)}\right) : \left(q - {}^{n+1}q^{(i)}\right) \quad (3.72)$$

Diskretizacijom relaksacionih jednačina (3.71) konačnim priraštajima, odnosno:

$${}^{n+1}\sigma^{(i+1)} = {}^{n+1}\sigma^{(i)} - \Delta\lambda \cdot {}^{n+1}\mathbf{D}^{(i)} : {}^{n+1}\mathbf{r}^{(i)} \quad (3.73.1)$$

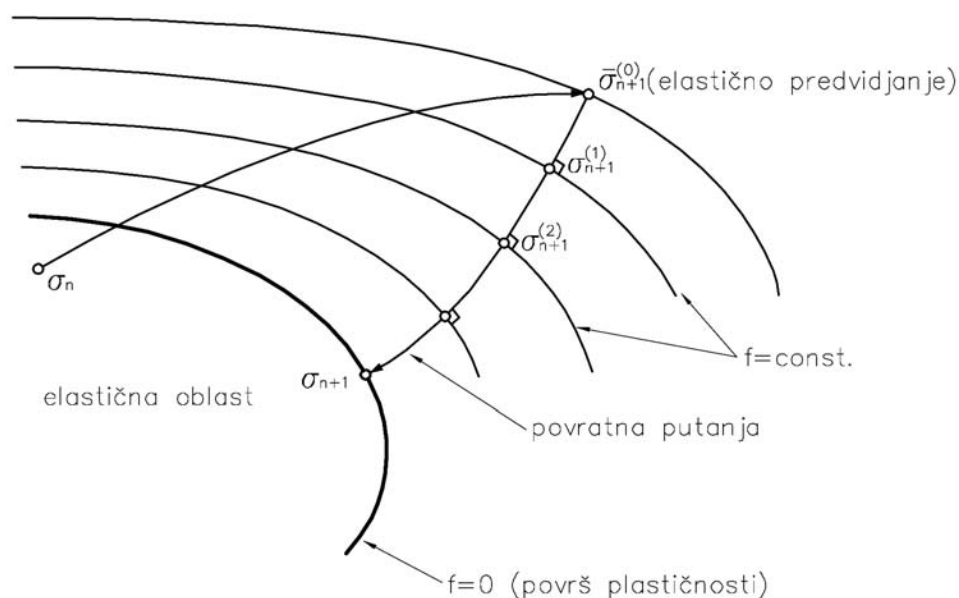
$${}^{n+1}\mathbf{q}^{(i+1)} = {}^{n+1}\mathbf{q}^{(i)} + \Delta\lambda \cdot {}^{n+1}\mathbf{h}^{(i)} \quad (3.73.2)$$

i njihovom zamenom u linearizovanu jednačinu (3.72), zahtevajući pri tome zadovoljenje plastičnog uslova, određen je priraštaj efektivne plastične deformacije:

$$\Delta\lambda = \frac{{}^{n+1}\mathbf{f}^{(i)}}{{}^{n+1}\mathbf{v}^{(i)} : {}^{n+1}\mathbf{D}^{(i)} : {}^{n+1}\mathbf{r}^{(i)} - {}^{n+1}\xi^{(i)} : {}^{n+1}\mathbf{h}^{(i)}} \quad (3.74)$$

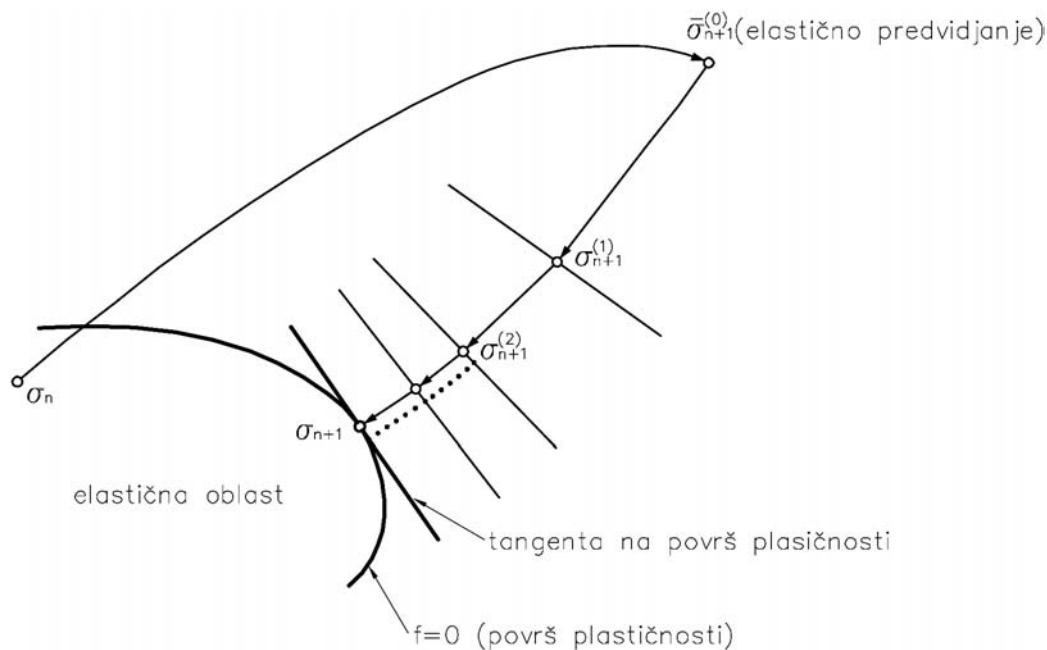
pri čemu vrednosti ${}^{n+1}\mathbf{v}^{(i)}$, ${}^{n+1}\mathbf{D}^{(i)}$, ${}^{n+1}\mathbf{r}^{(i)}$, ${}^{n+1}\xi^{(i)}$, ${}^{n+1}\mathbf{h}^{(i)}$ odgovaraju stanju određenom naponima ${}^{n+1}\sigma^{(i)}$ i unutrašnjim promenljivim ${}^{n+1}\mathbf{q}^{(i)}$. U jednačini (3.74) je: $v = \partial g / \partial \sigma$ parcijalni izvod funkcije plastičnog potencijala po naponima (g je funkcija plastičnog potencijala) i $\xi = \partial f / \partial \mathbf{q}$ parcijalni izvod funkcije tečenja po unutrašnjim promenljivim.

Numerički postupak, definisan jednačinama (3.73.1), (3.73.2) i (3.74) određuje povratni put napona preko diskretnih tačaka, dobijenih projekcijom predhodnog stanja (iteracije) na ravan $f=0$. Iterativni ciklus nastavljamo sve dok trag ravni određene linearizacijom plastične funkcije $f=0$ ne postane tangenta na plastičnu površ u okviru unapred zadatog kriterijuma tačnosti. Geometrijska interpretacija predloženog algoritma prikazana je na slici 3.2.



Slika 3.2 Geometrijska interpretacija za slučaj idealne elastoplastičnosti algoritma povratnog preslikavanja (M.Ortiz, J.C.Simo 1986.)

Značajno je napomenuti da je u slučaju asocijativne idealne elasto-plastičnosti povratni put napona od elastičnog predviđanja do plastične površi određen linijom ("steepest descent"). Pravac ove putanje u svakom trenutku određen je lokalnom metrikom definisane tangentnim elastičnim modulom (slika 3.3).



Slika 3.3 Numerička implementacija algoritma povratnog preslikavanja za slučaj idealne elastoplastičnosti prikazanog na slici 3.2 (M.Ortiz, J.C.Simo 1986.)

Konsistentnost ovog algoritma proističe iz metodologije razdvajanja elasto-plastičnog operatora koji obezbeđuje rezultujuće jednačine koje su u potpunosti saglasne sa konstitutivnim relacijama odgovarajuće konfiguracije. Njegova безусловna stabilnost je posledica odvojene безусловne stabilnosti elastičnog prediktora i plastičnih relaksacionih jednačina. Stabilnost elastičnog dela je očigledna, dok je безусловna stabilnost plastičnog dela omogućena time što su relaksacione jednačine disipativnog karaktera a odgovarajuće trajektorije obezbeđuju konveksnu plastičnu površ, odnosno plastični potencijal, odakle je definisan pravac plastičnog tečenja. Detaljni dokazi ovih tvrdnji prikazani su u radovima^[98] [99], [134], [135], kao i više detalja može se naći u referentnom radu [130].

Oblik i veličina konstitutivnog tenzora koji se primenjuje u numeričkoj integraciji jednačina zavisi od usvojenih konstitutivnih jednačina koji propisuju veze između priraštaja napona i pomeranja. Veličina elasto-plastičnog konstitutivnog tenzora može se odrediti na osnovu standardnih procedura u obliku:

$$D = {}^{n+1}D_e - \frac{({}^{n+1}D_e : {}^{n+1}\mathbf{r}) \otimes ({}^{n+1}D_e : {}^{n+1}\mathbf{v})}{{}^{n+1}\mathbf{v} : {}^{n+1}D_e : {}^{n+1}\mathbf{r} - {}^{n+1}\xi : {}^{n+1}\mathbf{h}} \quad (3.75)$$

gde je: ${}^{n+1}D_e$ elastični konstitutivni tenzor, ${}^{n+1}\mathbf{r}$ izvod funkcije tečenja po naponima, ${}^{n+1}\mathbf{v}$ gradijent plastičnog potencijala po naponima, ${}^{n+1}\xi$ gradijent površi tečenja po unutrašnjim promenljivim, ${}^{n+1}\mathbf{h}$ veličina koja propisuje funkciju ojačanja materijala.

Relacijom (3.75) definisan je konstitutivni tangenti modul u najopštijem obliku, pretpostavljajući pri tome proizvoljnu plastičnu površ tečenja, proizvoljan pravac plastičnog tečenja kao i zakon ojačanja. Može se uočiti da je njegova simetričnost obezbeđena ako je u datom algoritmu integracije pretpostavljena asocijativna plastičnost sa konstantnim modulima ojačanja.

Potrebno je napomenuti da se kontinualni (klasičan) tangencijalni operator^[134] razlikuje od takozvanog konsistentnog tangentnog operatora. Konsistentni tangenti operator direktno je zavistan od usvojenog algoritma za korekciju napona i on je usaglašen sa njim pa otuda i takav naziv. U prvom slučaju u okviru svakog koraka pravac plastičnog tečenja i moduli ojačanja su nam poznati i najčešće uzimaju konstantnu vrednost unutar celog inkrementa. Korekcija naponskih veličina implicitnim algoritmom koristi trenutne vrednosti pravca plastičnog tečenja, modula ojačanja i efektivne plastične deformacija, koje su nepoznate veličine jer i same zavise od trenutnog naponskog stanja, pa je samim tim jedan ovakav algoritam u svojoj osnovi iterativnog karaktera. Konsistentni tangenti operator ne utiče na tačnost konačnog rešenja ali omogućava kvadratnu konvergenciju Newton–Raphson – ovog postupka u rešavanju nelinearnih problema mehanike kontinuuma.

Kod rešavanja nelinearnih jednačina inkrementalno iterativnim metodama, potrebno je definisati neki pogodan kriterijum za završetak iterativnog procesa. Na kraju svake iteracije potrebno je proveriti da li rešenje konvergira u dozvoljenim granicama tolerancije ili iterativni proces divergira. U proračunima najčešće se usvajaju kriterijumi konvergencije po pomeranjima, po neuravnoteženim silama i po inkrementalnoj unutrašnjoj energiji.

4. NELINEARNI MOHR-COULOMB-OV MODEL

4.1 Uvod

Za razliku od gotovo svih drugih materijala koji se koriste u građevinskim konstrukcijama, kao što su beton ili opeka, osobine tla su promenljive, tako da se uglavnom moraju meriti za svaki slučaj posebno. Ponašanje tla u oblasti radnih napona je promenljivo sa izraženom anizotropijom na koju utiče niz propratnih pojava, naročito prisustvo vode. Pronalaženje računskog modela koji opisuje ponašanje tla u ovakvim slučajevima je izuzetno teško.

Mehanička svojstva realnog tla pokazuju kompleksnu funkcionalnu zavisnost napona i deformacija. Veoma je težak i skup zadatak da se kontrolišu mnoge promenljive koje su vezane za tlo ili za opremu testiranja, da bi se dobila reprezentativna kriva napon deformacija za realni geomaterijal korišćenjem standardnih eksperimentalnih metoda. Statistička raspodela eksperimentalnih rezultata može biti primerena i primenjena u opisivanju kompleksnih funkcionalnih zavisnosti napona i deformacija. U pojedinim slučajevima za neki specifični test, moguće je dobiti veoma blizak matematički opis kompleksnog ponašanja realnog materijala. U domenu niskih i srednjih napona se odvijaju mikromehanički procesi: preraspodela čestica, klizanje, značajna redukcija u poroznosti, itd. U ovom regionu parametri materijala kao što su sadržaj vlage, početna gustina uzorka, su veoma značajni u opisivanju konstitutivne veze za gline^[74] i peskove^[81].

Određivanje mehaničkih karakteristika tla se sastoji od uzimanja uzoraka, njihovog opterećivanja po unapred definisanim putanjama napona i merenja nastalih pomeranja. Eksperimentalni podaci različitih opita prikazani u literaturi za neke vrste peskova, glina^[12], šljunka^[56] i drugih geomaterijala^[18] koriste se za razvijanje matematičkih modela koji mogu opisati nelinerano ponašanje materijala. Pored jednostavnih naponskih putanja koje se karakterišu pravom linijom u sistemu glavnih napona, postoje i kompleksna opterećenja kod kojih se napon može menjati po krivoj liniji^[59]. Međutim, taj isti matematički model nije moguće primeniti u opisu ponašanja tog materijala pod drugim eksperimentalnim uslovima^[103].

Konstitutivne jednačine se razvijaju na osnovu empirijskih posmatanja odnosa napona i deformacija. Formiranje konstitutivnog modela obuhvata sledeće korake: matematička formulacija, definisanje materijalnih parametara, način određivanja materijalnih

parametara iz laboratorijskih opita, poređenje rezultata modela sa rezultatima merenja i verifikacija modela u primeni rešavanja praktičnih problema.

U radu je razvijen nelinearni Mohr-Coulombov konstitutivni model (u daljem tekstu NMC) u cilju opisivanja ponašanja tla. Model je formulisan na osnovu četiri polazne pretpostavke:

- Ugao smičuće otpornosti nelinearne anvelope loma (ϕ) ima hiperboličku zavisnost od normalnih napona;
- Ugao dilatancije (δ) se može odrediti kao odnos između ekvivalentne srednje zapreminske i ekvivalentne smičuće plastične deformacije;
- Ugao dilatancije u linearnom modelu smičuće otpornosti jednak je maksimalnoj dilatanciji nelinearnog modela $\Delta\phi$;
- Bazni ugao nelinearne smičuće otpornosti (ϕ_B) se računa na osnovu aproksimacije da su tangenta smičuća otpornost za nelinearni i smičuća otpornost linearnog konstitutivnog modela jednake u određenoj vrednosti normalnog napona (p_N).

Prikazani hiperbolički konstitutivni model je generalisan za trodimenzionalni prostor napona i deformacija. Prvo je izložen kratak opis osnova matematičke formulacije hiperboličkog konstitutivnog modela. Zatim su prikazani rezultati numeričkog modeliranja i provera modela kroz poređenje sa referentnim eksperimentalnim rezultatima u optima direktnog smicanja i triaksijalne kompresije.

4.2 Osnovne jednačine Mohr-Coulomb-ovog modela

Radi preglednosti izlaganja u ovom odeljku, ponovićemo jednačinu (2.93.1), za LMC kriterijum tečenja:

$$f = \sqrt{I_{2d}} \cdot \left(\cos\theta + \frac{\sin\theta \cdot \sin\phi}{\sqrt{3}} \right) - \frac{I_1}{3} \cdot \sin\phi - c \cdot \cos\phi = 0 \quad (4.1)$$

gde je:

$$\theta \text{ Lode-ov ugao i može se napisati u obliku } \theta = -\frac{1}{3} \cdot \sin^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot I_{3d} \cdot I_{2d}^{-3/2} \right),$$

I_1 je prva invarijanta tenzora napona,

I_{2d} i I_{3d} druga i treća invarijanta devijatorskog tenzora napona,
 c je kohezija i
 ϕ je ugao smičuće otpornosti.

Ugao smičuće otpornosti i kohezija određuju svojstvo materijala. LMC model zahteva poznavanje pet materijalnih konstanti. Tri parametra: kohezija c , ugao smičuće otpornosti ϕ i ugao dilatancije δ , opisuju plastično deformisanje modela dok druga dva parametra E i ν , opisuju elastično ponašanje materijala. U referentnom radu ^[109] može se naći diskusija o parametrima materijala, različitim modelima kao i odgovarajući primeri analize. Ako su primenjeni asocijativni uslovi matematičke teorije plastičnosti, onda se broj parametara redukuje na četiri jer je u tom slučaju $\delta = \phi$.

Odgovarajući izvod LMC funkcije tečenja po naponu, može se izračunati korišćenjem pravila izvoda složene funkcije, prema sledećem izrazu:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial I_{2d}} \cdot \frac{\partial I_{2d}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.2)$$

Prema tome, diferenciranjem funkcije tečenja (4.1), dobijaju se sledeće relacije:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{1}{3} \sin \phi \cdot \delta_{ij} + \frac{r_1(\theta, \phi)}{2\sqrt{I_{2d}}} \cdot S_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r_2(\theta, \phi) \cdot I_{2d}^{-1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot I_{3d} \cdot I_{2d}^{-3/2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot I_{3d} I_{2d}^{-1} \cdot S_{ij} - t_{ij}\right) \quad (4.3)$$

gde je

$$r_1(\theta, \phi) = \cos \theta + \frac{\sin \theta \cdot \sin \phi}{\sqrt{3}} \quad (4.4)$$

$$r_2(\theta, \phi) = \sin \theta + \frac{\cos \theta \cdot \sin \phi}{\sqrt{3}} \quad (4.5)$$

$$t_{ij} = S_{ik} S_{kj} - \frac{2}{3} I_{2d} \delta_{ij} \quad (4.6)$$

Da bi se kvantifikovao fenomen povećanja zapremine sa porastom smičuće deformacije, Taylor^[144] je uveo pojam ugao dilatancije δ . Kao što je već naglašeno, u ovom radu uvedena je pretpostavka da je ugao dilatancije definisan kao odnos između priraštaja ekvivalentne srednje zapreminske i priraštaja ekvivalentne smičuće plastične deformacije LMC. Ovo je osnovna pretpostavka u formulisanju NMC modela.

Ekvivalentna plastična deformacija $\bar{\epsilon}^P$ je definisana na osnovu priraštaja plastične deformacije $d\epsilon_{ij}^P$:

$$\bar{\epsilon}^P = \int \left(d\epsilon_{ij}^P \cdot d\epsilon_{ij}^P \right)^{1/2} \quad (4.7)$$

$\bar{\varepsilon}_v^p$ i $\bar{\varepsilon}_d^p$ su zapreminska i devijatorska komponenta ekvivalentne plastične deformacije $\bar{\varepsilon}^p$, definisane sledećim izrazom:

$$\bar{\varepsilon}_v^p = \int \frac{1}{\sqrt{3}} \left(d\varepsilon_{kk}^p \cdot d\varepsilon_{kk}^p \right)^{1/2} \quad (4.8)$$

$$\bar{\varepsilon}_d^p = \int \left(de_{ij}^p \cdot de_{ij}^p \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

gde je $d\varepsilon_{kk}^p$ inkrement zapreminske plastične deformacije i de_{ij}^p je increment devijatorske plastične deformacije. Odnos između ekvivalentne plastične deformacije $\bar{\varepsilon}^p$ i odgovarajuće zapreminske i devijatorske komponente $\bar{\varepsilon}_v^p$ i $\bar{\varepsilon}_d^p$ dat je izrazom

$$\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{(\bar{\varepsilon}_v^p)^2 + (\bar{\varepsilon}_d^p)^2} \quad (4.10)$$

U jednačinu (4.10) uvodimo parametar - ugao dilatancije δ

$$\bar{\varepsilon}^p = \bar{\varepsilon}_d^p \sqrt{\left(\frac{\bar{\varepsilon}_v^p}{\bar{\varepsilon}_d^p} \right)^2 + 1} = \bar{\varepsilon}_d^p \sqrt{(3 \cdot \sin \delta)^2 + 1} \quad (4.11)$$

Iz jednačine (4.11) parameter δ se može izraziti

$$\delta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{\bar{\varepsilon}_v^p}{\bar{\varepsilon}_d^p} \right)^2 - 1} \right) \quad (4.12)$$

Prema jednačinama (4.8) i (4.9), koristeći izraze (4.3), (4.4) i (4.5) odgovarajući priraštaji ekvivalentnih plastičnih deformacija su oblika:

$$d\bar{\varepsilon}_v^p = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(d\varepsilon_{kk}^p \cdot d\varepsilon_{kk}^p \right)^{1/2} = d\lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \phi \quad (4.13)$$

$$d\bar{\varepsilon}_d^p = \left(de_{ij}^p \cdot de_{ij}^p \right)^{1/2} = d\lambda \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi + \frac{(\sin \phi)^2}{6} \right)^{1/2} \quad (4.14)$$

Kao što je poznato, kod LMC odgovarajući priraštaji plastičnih deformacija su konstantni, pa se samim tim za triaksijalno stanje a na osnovu jednačine (4.11), odnos ukupne ekvivalentne srednje zapreminske plastične deformacije i ukupne ekvivalentne devijatorske plastične deformacije može se zameniti sa odgovarajućim priraštajima. Koristeći jednačine (4.12), (4.13), (4.14) za vrednost Lodeovog ugla $\theta = -\pi/6$ ugao dilatancije δ^{CTC} za triaksijalno stanje kompresije može se izraziti u funkciji ugla smičuće otpornosti:

$$\delta^{\text{CTC}} = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sin \phi}{\sqrt{3 - 3 \cdot \sin \phi + (\sin \phi)^2}} \right) \quad (4.15.1)$$

Ako u jednačine (4.12), (4.13), (4.14) unesemo vrednost za Lodeov ugao $\theta = \pi/6$ za stanje redukovane triaksijalne ekstenzije ugao dilatancije δ^{RTE} može se izraziti u funkciji ugla smičuće otpornosti:

$$\delta^{\text{RTE}} = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sin \phi}{\sqrt{3 + 3 \cdot \sin \phi + (\sin \phi)^2}} \right) \quad (4.15.2)$$

Na osnovu prethodno navedenih jednačina i za vrednost Lodeovog ugla $\theta = 0$ ugao dilatancije δ^{SS} za triaksijalni stanje prostog smicanja može se izraziti u obliku:

$$\delta^{\text{SS}} = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sin \phi}{\sqrt{3 + (\sin \phi)^2}} \right) \quad (4.15.3)$$

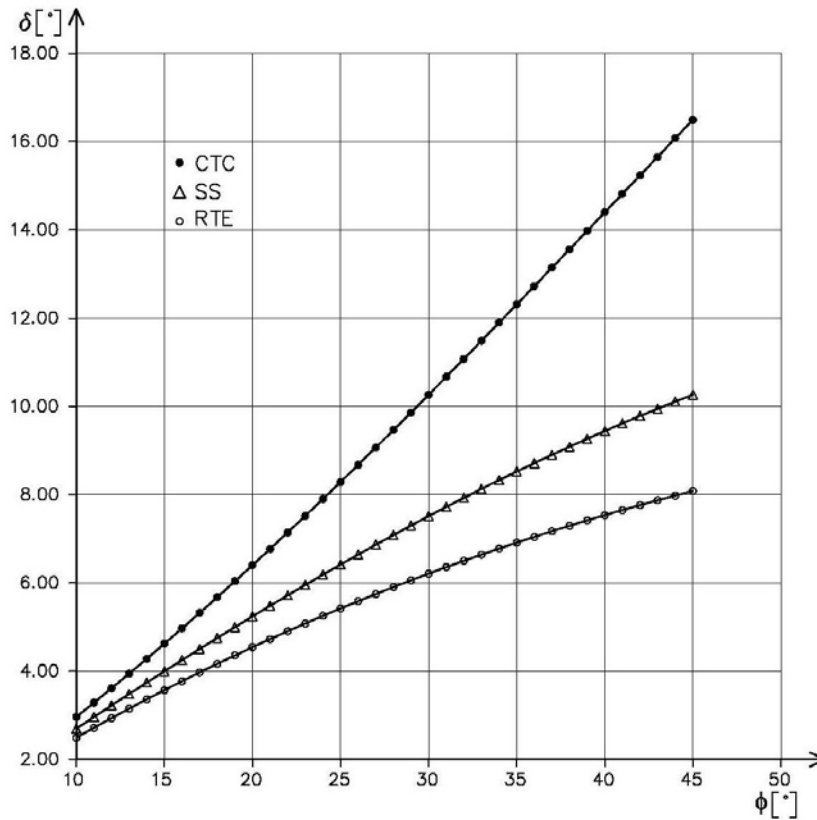
Ovako definisan ugao dilatancije sa poznatom vrednošću za ugao smičuće otpornosti LMC poslužio nam je da definisemo materijalne parametre NMC bazni ugao smičuće otpornosti ϕ_B , maksimalnu ugaonu razliku, $\Delta\phi$ i odgovarajući normalni napon p_N .

Za triaksijalne opite: standardne kompresije (CTC), redukovane ekstenzije (RTE), i prostog smicanja (SS) tabelarno je prikazan ugao dilatancije (δ) izračunat korišćenjem jednačina (4.15) na osnovu ugla smičuće otpornosti ϕ LMC za korak od pet stepeni.

$\phi^{[0]}$	δ^{CTC}	δ^{RTE}	δ^{SS}
10	2.962	2.940	2.695
15	4.624	3.568	3.995
20	6.402	4.543	5.240
25	8.287	5.421	6.416
30	10.263	6.209	7.513
35	12.311	6.911	8.522
40	14.399	7.534	9.440
45	16.492	8.082	10.263

Tabela 4.1 Ugao dilatancije u funkciji ugla smičuće otpornosti LMC

Na slici 4.1 je grafički prikazan ugao dilatancije u funkciji od ugla smičuće otpornosti LMC modela, za korak od jednog stepena, za prethodno navedene triaksijalne opite.



Slika 4.1 Ugao dilatancije u funkciji ugla smičuće otpornosti LMC

4.3 Konstitutivne jednačine NMC modela

Široko je korišćena hiperbolička funkcija za simulaciju naponsko deformacionih krivih u analizi konačnih elemenata, koju su formulisali Duncan i Cheng^[40], koristeći Kondner-ov^[63] dijagram napon –deformacija dobijen pri troosnom testu.

Maksimović^[80] predlaže izraz za nelinearnu anvelopu u obliku hiperboličke funkcije:

$$\varphi = \varphi_B + \frac{\Delta\varphi}{1 + I_1/3P_N} \quad (4.16)$$

gde je: φ_B bazni ugao; $\Delta\varphi$ maksimalna dilatancija; a P_N normalni napon pri kome maksimalna dilatancija dostiže polovinu svoje vrednosti.

Funkcija tečenja NMC modela je direktno izvedena iz LMC kriterijuma tečenja zamenom ugla smičuće otpornosti Maksimovićevom^{[75], [76]} funkcionalnom vezom (4.16), u jednačini (4.1) tako da se dobija sledeći izraz:

$$f = \sqrt{I_{2d}} \cdot \left(\cos \theta + \frac{\sin \theta \cdot \sin \varphi}{\sqrt{3}} \right) - \frac{I_1}{3} \cdot \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi = 0 \quad (4.17)$$

Shodno jednačini (4.2) odgovarajući parcijalni izvodi nelinearne funkcije tečenja (4.17) po naponima su:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = & \left[-\frac{1}{3} \sin \varphi - \left(\frac{I_1}{3} - \sqrt{\frac{I_{2d}}{3}} \cdot \sin \theta \right) \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial I_1} - c \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial I_1} \right] \delta_{ij} + \\ & + \frac{r_1(\theta)}{2\sqrt{I_{2d}}} \cdot S_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r_2(\theta) \cdot I_{2d}^{-1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot I_{3d} \cdot I_{2d}^{-3/2} \right)^2}} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot I_{3d} I_{2d}^{-1} \cdot S_{ij} - t_{ij} \right) \end{aligned} \quad (4.18.1)$$

gde je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I_1} = -\frac{\Delta \varphi}{3p_N (1 + I_1/3P_N)^2} \quad (4.18.2)$$

$$r_1(\theta, \varphi) = \cos \theta + \frac{\sin \theta \cdot \sin \varphi}{\sqrt{3}} \quad (4.18.3)$$

$$r_2(\theta, \varphi) = \sin \theta + \frac{\cos \theta \cdot \sin \varphi}{\sqrt{3}} \quad (4.18.4)$$

i

t_{ij} određen izrazom (4.6).

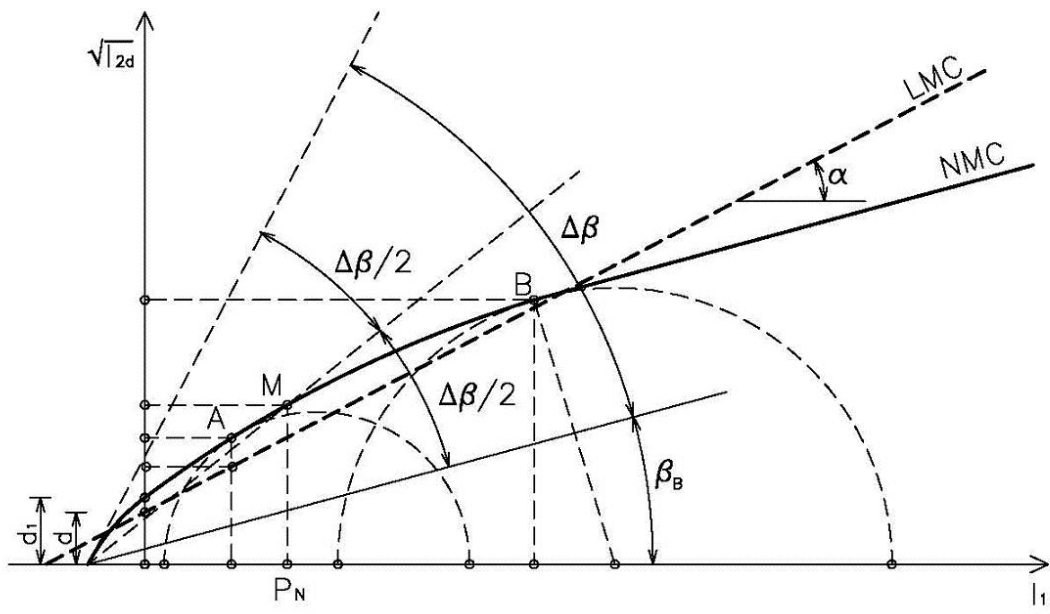
Za ravno stanje deformacije NMC uslov tečenja, izražen relacijom (4.17), možemo prikazati u sledećem obliku:

$$f = \sqrt{I_{2d}} - \frac{I_1}{3} \cdot \tan \beta - d_1 = 0 \quad (4.19.1)$$

gde je:

$$d_1 = c \cdot \cos \varphi, \quad \tan \beta = \sin \varphi \quad (4.19.2)$$

Geometrijska interpretacija parametra NMC modela za ravno stanje deformacije prikazana je na Slici 4.2. Prikazan bazni ugao β_B je konstantan u odnosu na normalni napon, ugao smičuće otpornosti β teži vrednosti β_B kada normalni napon teži beskonačnosti, za sve vrednosti normalnog napona bazni ugao β_B je manji ugao od ugla smičuće otpornosti α LMC predstavljenog jednačinama (2.89) i (2.90).



Slika 4.2 NMC u prostoru $I_1 - \sqrt{I_{2d}}$

Problemu integracije konstitutivnih relacija poklanja se posebna pažnja, jer od načina njegovog rešavanja zavisi uspešnost modeliranja ponašanja tla u plastičnom domenu deformisanja ^[62].

4.4 Verifikacija predloženog NMC modela

4.4.1 – Opit direktnog smicanja - Zbijeni pesak

Opit direktnog smicanja počinje tako što se prvo izvrši konsolidacija uzorka opterećenjem hidrostatičke kompresije. Nakon toga, uzorak se podvrgava direktnom smicanju tako što se promena dimenzije uzorka vrši i meri u odnosu na primenjenu tangencijalnu silu. Dobija se eksperimentalni dijagram ili tabela, tangencijalni napon u odnosu na deformaciju za jednu vrednost inicijalnog hidrostatičkog napona. Da bi se dobila standardna devijacija usled nehomogenosti materijala i promenljivih vezanih za eksperimentalni mehanizam, potrebno je ponoviti taj isti eksperiment. Nakon toga, povećava se vrednost hidrostatičke kompresije i procedura se ponavlja. Da bi se dobile tri eksperimentalne vrednosti tangencijalnog napona u zavisnosti od normalnog napona potrebno je najmanje šest uzoraka materijala. U literaturi je prava retkost naći rezultate ponovljenih eksperimenata. Zbog toga je važno imati mogućnost da se na gore opisani način dođe do parametara nelinearnog hiperboličkog modela.

Tabela 4.2 prikazuje rezultate merenja koje su Maksimović i Santrač^[79] naveli za opit direktnog smicanja materijal na uzorku zbijenog peska.

σ [kPa]	250.0	500.0	1000.0
τ [kPa]	219.0	403.5	740.0

Tabela 4.2 Rezultati merenja zbijenog peska

Rezultati proračuna parametara NMC modela se dobijaju postavljanjem tri linearne jednačine sa tri nepoznate: bazni ugao smičuće otpornosti φ_B , maksimalnu ugaonu razliku $\Delta\varphi$ i normalni napon p_N . Rešavanjem sistema linearnim jednačina dobijaju se: $\varphi_B = 31.4^\circ$, $\Delta\varphi = 14.2^\circ$, $p_N = 559.3 \text{ kN/m}^2$. Ovo su rezultati proračuna na osnovu eksperimentalno merenih podataka.

S druge strane, primenimo prikazani model na sledeći način: prvo fitujemo eksperimentalne podatke sa LMC i dobijemo vrednost ugla smičuće otpornosti $\phi = 35^\circ$. Iz Tabele 4.1 za odgovarajući ugao smičuće čvrstoće od 35° se dobija $\Delta\varphi = 12.3^\circ$ za CTC opit. Za vrednost normalnog napona $\sigma = 2p_N$ nalazi se vrednost baznog ugla od $\varphi_B = 30.9^\circ$.

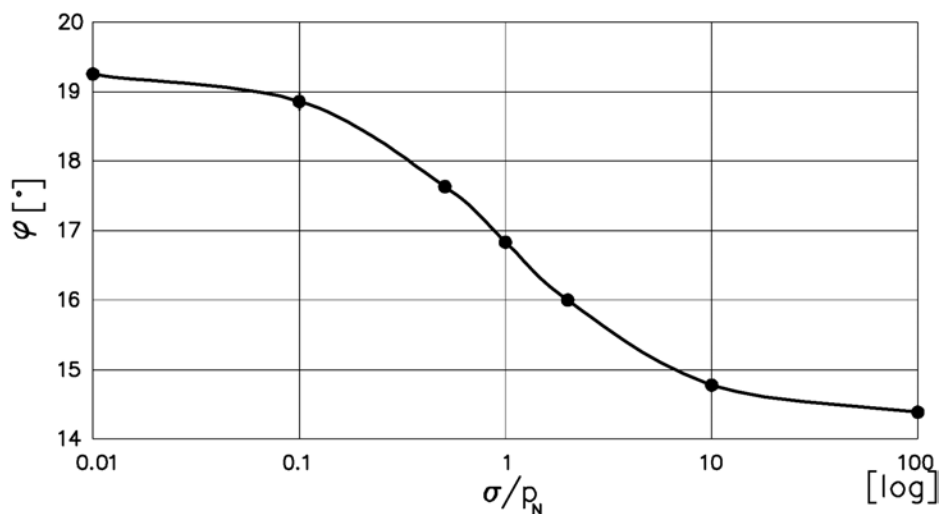
Ako uporedimo rezultate dobijene proračunom na osnovu eksperimentalnih podataka i na osnovu modela vidimo da se bazni ugao razlikuje za samo 0.5° a $\Delta\phi$ se razlikuje za 1.9° . Ovi rezultati ukazuju da predloženi model dobro opisuje ponašanje zbijenog peska.

Ovaj primer ukazuje na mogućnost da se iz LMC modela i na osnovu Tabele 4.1 dođe do materijalnih konstanti NMC modela u i slučaju kada ne posedujemo dovoljan broj eksperimentalnih podataka.

4.4.2 Londonska glina

Atkinson i Farrar^[3] su prikazali rezultate triaksijalnog ispitivanja uzoraka zbijene visokoplastične gline. U intervalu efektivnih napona od 150 do 300 kPa, anvelopa je prilično linearna i definisana sa parametrima $c = 25 \text{ kN/m}^2$ i $\phi = 16^\circ$. Na osnovu prikazanog modela iz Tabele 4.1 za ugao smičuće otpornosti $\phi = 16^\circ$ dilatancija je izračunata $\Delta\phi = 5^\circ$, a bazni ugao $\phi_B = 14.34^\circ$. Usvojena je računaska vrednost za materijalnu konstantu $P_N = 28,20 \text{ kN/m}^2$ na osnovu podataka prikazanih u knjizi [80] (slika 5.40 na strani 201).

Rezultati su normalizovani u odnosu na parametar p_N i prikazani na slici 4.3.1.



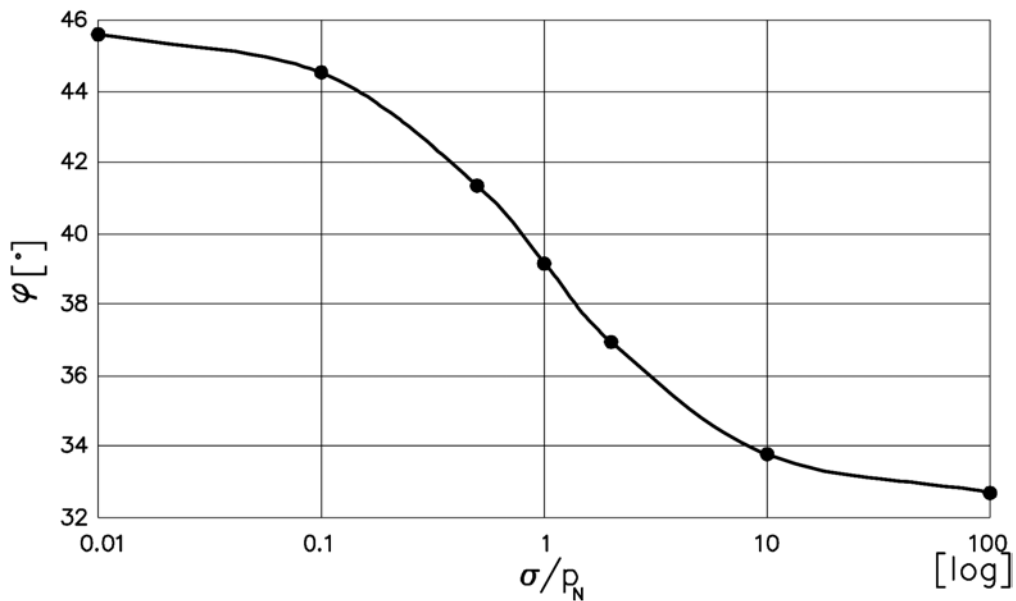
Slika 4.3.1 Ugao smičuće otpornosti nelinearnog modela u funkciji σ/p_N – Londonska glina

4.4.3 Drobljeni antracit

U knjizi [80] su prikazani rezultati merenja drobljenog uglja antracita (slika 5.43.a na strani 205). Ugao smičuće otpornosti LMC je $\phi = 37^\circ$. Dilatancija NMC modela jednaka je $\Delta\phi = 13.1^\circ$ (određena na osnovu slike 4.2 za CTC test). Odgovarajući bazni ugao NMC modela je $\phi_B = 32.6^\circ$.

Rezultati dobijeni za nelinearne parametre a na osnovu eksperimentalnih podataka su bazni ugao $\phi_B = 32.2^\circ$, dilatancija $\Delta\phi = 16.5^\circ$ i normalni napon $p_N = 104 \text{ kN/m}^2$.

Rezultati su normalizovani u odnosu na parametar p_N i prikazani na slici 4.3.2.



Slika 4.3.2 Ugao smičuće otpornosti nelinearnog modela u funkciji σ/p_N – Drobljeni antracit

Razlike između parametara dobijenih eksperimentalnim putem i na osnovu modela su sledeće: u baznom uglu je 0.4° a u parametru $\Delta\phi = 3.4^\circ$.

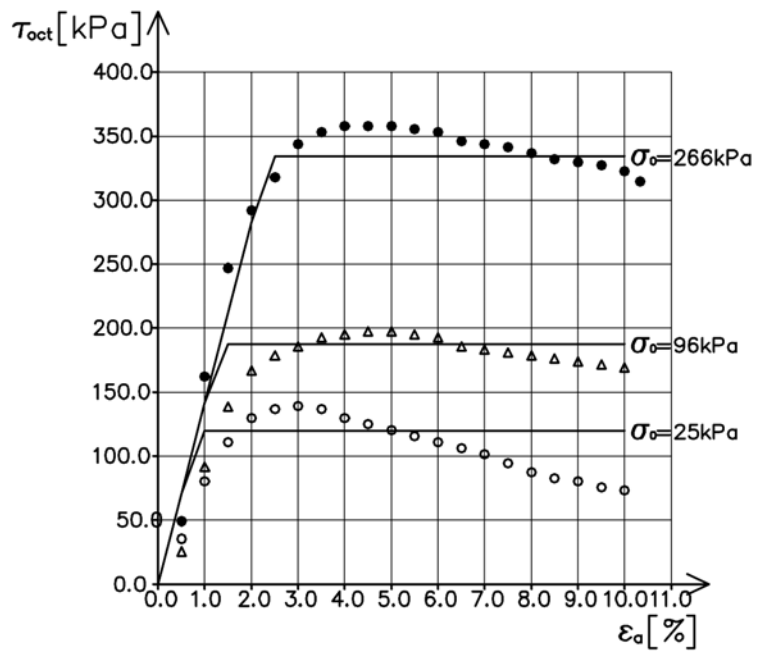
4.4.4 Standardna triaksijalna kompresija (CTC-test)

U testu standardne triaksijalne kompresije, uzorak materijala pripremljen u obliku cilindra je podvrgnut inicijalnom pritisku fluida $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$ (takozvani pritisak komore), a onda je vršeno povećanje normalnog napona σ_1 u aksijalnom pravcu. Test se obično vrši na nekoliko različitih nivoa početnih napona σ_0 . Usled nehomogenosti materijala i promenljivih vezanih za aparaturu, poželjno je ponoviti sva merenja kako bi se izračunale srednje vrednosti i standardna devijacija.

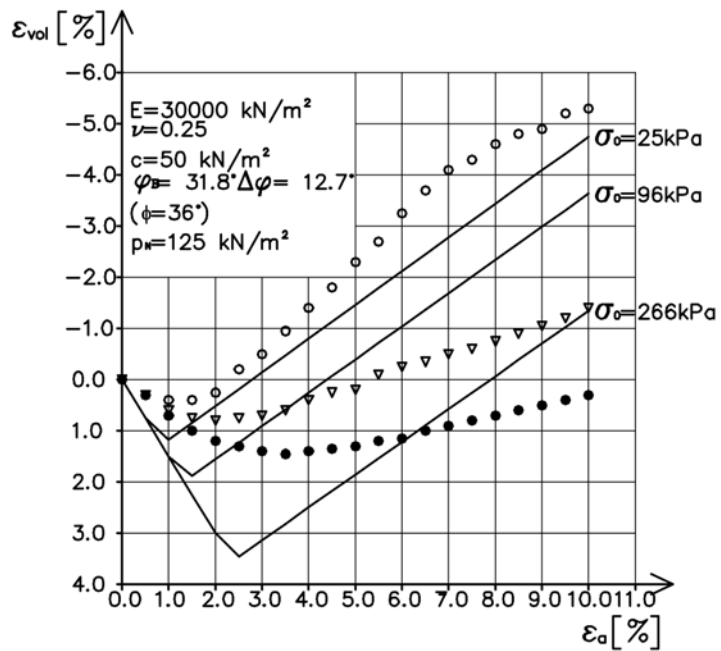
U ovom primeru navodimo rezultate modeliranja i eksperimentalnog ispitivanja "rockfill" materijala (zaglinjena drobina) za Roadford branu^[104]. Parametri materijala navedeni u pomenutoj referenci prikazani su na slici 4.4.2. Materijal je podvrgnut CTC opitu na sledećim vrednostima početnih napona: $\sigma_0 = 25 \text{ kN/m}^2$, 96 kN/m^2 i 266 kN/m^2 . Parametri NMC modela su određeni na bazi LMC za ugao smičuće otpornosti $\phi = 36^\circ$ i Tabele 4.1: bazni ugao $\phi_B = 31.8^\circ$, $\Delta\phi = 12.7^\circ$ i $p_N = 125 \text{ kN/m}^2$. U okviru ovog primera urađena je numerička analiza korišćenjem NMC modela zasnovanog na neasocijativnom uslovu tečenju. U funkciju plastičnog potencijala uključen je ugao dilatancije δ umesto ugla smičuće otpornosti ϕ .

Na slici 4.4.1 su prikazane krive zavisnosti oktaedarskog napona τ_{oct} od aksijalne deformacije ϵ_a . Eksperimentalni rezultati zaglinjene drobine su prikazani simbolima a odgovarajući rezultati numeričke analize su prikazani linijama. Poređenje napona pri kojima τ_{oct} dostiže maksimum za tri vrednosti početnih napona: $\sigma_0 = 25 \text{ kN/m}^2$, 96 kN/m^2 i 266 kN/m^2 , pokazuje dobro slaganje rezultata proračuna dobijenih primenom NMC modela sa odgovarajućim eksperimentalnim krivama.

Na slici 4.4.2 su prikazane krive zavisnosti zapreminske deformacije od aksijalne deformacije. Kao što se može videti sa dijagrama, u početku je nagib krive negativan jer dolazi do smanjenja zapremine materijala pod uticajem smičućih naprezanja. Negativni nagib je konstantan do određene vrednosti kada nagib postaje jednak nuli. U NMC modelu ta tačka odgovara naponu na kojem τ_{oct} dostiže maksimum (početak plastičnog deformisanja u modelu). Nakon minimuma, sa povećanjem priraštaja aksijalne deformacije dolazi do povećanja zapremine materijala. Na osnovu vrednosti prikazanih na slici 4.4.2 može se konstatovati zadovoljavajuće slaganje rezultata numeričkog modeliranja CTC opita sa odgovarajućim eksperimentalnim rezultatima.



Slika 4.4.1 Oktaedarski napon – aksijalna deformacija



Slika 4.4.2 Zapreminska deformacija – aksijalna deformacija

Slika 4.4. Poredjenje eksperimentalnih rezultata Roadford "rockfill" i rezultata NMC za CTC test

5. PRORAČUN TRAKASTIH TEMELJA NA DEFORMABILNOJ PODLOZI

5.1 Uvod

Temelj objekta je deo konstrukcije čija je namena da prenese i rasporedi opterećenje od objekta na tlo. Dimenzije i oblik temelja zavise od opterećenja koje se preko njega prenosi, konstrukcije objekta i potrebe da se opterećenje što ravnomernije prenese na tlo, koje je kao materijal manje otporno od materijala objekta. Dimenzije temelja zavise od osobina tla, vrste materijala temelja i veličine opterećenja koju temelj treba da prenese na tlo.

Temelji mogu biti kruti i deformabilni. U grupu krutih temelja spadaju temelji čije se deformacije pri njihovom proračunu mogu zanemariti. Zatezanja usled savijanja temelja su neznatna. Otpornost materijala na zatezanje je u tom slučaju dovoljna za obezbeđenje potrebne sigurnosti temelja. Izvode se od nearmiranog betona. U grupu deformabilnih temelja spadaju temelji čije se deformacije pri njihovom proračunu ne mogu zanemariti. U njima se usled savijanja, javljaju naponi zatezanja o kojima se mora voditi računa pri dimenzionisanju deformabilnih temelja. Izvode se od armiranog betona.

Trakasti temelji se po pravilu predviđaju ispod zidova. Ako je opterećenje po dužini zida konstantno, uslovi u svim poprečnim preseccima su isti, pa su dimenzije ovakvih temelja na celoj njegovoj dužini iste. Samo ako se menja opterećenje po dužini zida menjaće se i širina temeljne trake. Temeljno tlo se može nalaziti u uslovima ravanskog stanja deformacija ili u uslovima prostornog stanja stanja napona i deformacija. Ako se podloga nalazi u uslovima ravanskog stanja deformacija, ma koji element određene širine izdvojili iz temeljne trake i analizirali u poprečnom pravcu nalaziće se u svim preseccima u uslovima u kojima se nalazi i svaki drugi element te konstrukcije. Zato je za analizu dovoljno usvojiti i razmatrati samo jedan takav element. Ako je dužina temeljne konstrukcije veća od njene trostruke širine možemo smatrati da će se takva konstrukcija, na delu udaljenom za širinu temeljne konstrukcije od njenih krajeva nalaziti u uslovima ravanskog stanja deformacija. Elementi na krajevima nalaziće se u drugačijim uslovima. U svim drugim slučajevima imaćemo prostorno stanje napona i deformacija.

5.2 Nosivost tla

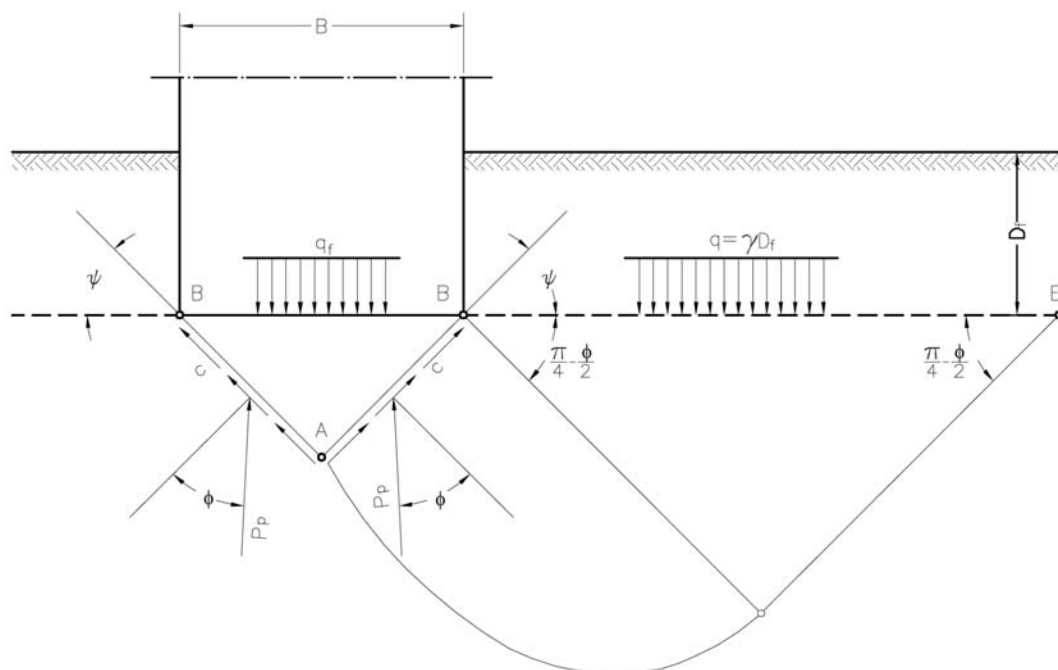
Maksimalni pritisak temelja na tlo pri kome dolazi do loma zove se granična nosivost tla ili granični pritisak na tlo. Radi ocene bezbednosti objekta, s obzirom na stabilnost tla ispod temelja, potrebno je da se odredi granični pritisak na tlo. Teorijske metode određivanja granične nosivosti tla bazirane su na pojednostavljenim pretpostavkama osobina tla i

raspodele pritiska tla. Bez obzira na ova pojednostavljena, poređenje teorijskih rezultata granične nosivosti tla i rezultata dobijenih na osnovu eksperimentalnih ispitivanja pokazuju relativno dobra slaganja. Greške izmedju teorijskih i eksperimentalnih ispitivanja nosivosti tla nisu mnogo veće od grešaka koje se javljaju pri određivanju stabilnosti konstrukcija od drugih građevinskih materijala.

5.2.1 Teorija nosivosti Terzaghi-a

Pretpostavku da se tlo ponaša kao idealno plastično telo Terzaghi je prihvatio i primenio uz to da je otpornost određena Coulomb-ovim uslovom loma. Terzaghijeva metoda za određivanje graničnog pritiska je tako postala osnova za proračine nosivosti tla metodom graničnog stanja plastične ravnoteže.

U klasičnoj mehanici tla trebalo je naći jednostavne metode za rešavanje nelinearnih graničnih problema, uz korišćenje osnovne pretpostavke da se tlo ponaša kao idealno plastično telo. Ovu pretpostavku prvi je uveo Prantl za metale, a Terzaghi je prihvatio i primenio na tlo čija je otpornost određena Coulomb-ovim uslovom loma. Metodu za određivanje graničnog pritiska na tlo Terzaghi je objavio 1943. god. i od tada ona je postala osnova za proračine nosivosti tla metodom graničnog stanja plastične ravnoteže.



Slika 5.1 Klizna površina ispod trakastog temelja sa spoljnim i unutrašnjim silama

Radi određivanja faktora nosivosti Terzaghi je uveo sledeće pretpostavke: Temelj je na kontaktu sa tlom hrapav, što znači da nema horizontalnih pomeranja tla u kontaktnoj površini i da se klin, formiran u tlu ispod temelja, može tretirati kao sastavni deo temelja; Uglovi između bočnih strana klina i horizontale ψ jednaki su uglu smičuće otpornosti tla ϕ ; Površine klizanja prostiru se do nivoa kontaktne površine, a uticaj tla iznad kontaktne površine se uzima da je ekvivalentan ravnomerno podeljenom pritisku od težine tla iznad kontaktne površine (slika 5.1). Opterećenje od trakastog temelja širine B prenosi se na tlo kao ravnomerno podeljeni pritisak, što znači da se uticaj krutosti temelja na raspodelu pritisaka u kontaktnoj površini zanemaruje. Ispod temelja se nalazi homogeno tlo čija je jedinična težina γ . Pri graničnom pritisku u tlu ispod temelja formira se klin. Opterećenje od temelja se prenosi preko ovog klina koji potiskuje tlo u stranu, formirajući sa obe strane oblasti u kojima su ispunjeni uslovi granične ravnoteže. Svaka od ovih oblasti sastoji se iz dva dela: zone radijalnih površi klizanja neposredno pored klina i zone ravnih površina klizanja koje se nalaze iza radijalnih. Pomeranju klina, pri graničnom pritisku na tlo, suprotstavljaju se otpori na bočnim stranama klina. Otpori se sastoje od otpora usled trenja i kohezije koja deluje duž ravn AB klina pri njegovom sleganju. Rezultanta otpora pri pasivnom stanju granične ravnoteže zaklapa ugao ϕ sa normalom na bočnu ravan AB klina. Uglovi između bočnih strana klina i horizontale jednaki su uglu ψ .

Izraz za granični pritisak na tlo, koji je predložio prof. K. Terzaghi, je oblika:

$$q_f = c \cdot N_c + q \cdot N_q + 1/2 \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \quad (5.1)$$

gde su: N_c, N_q i N_γ faktori nosivosti koji zavise od ugla smičuće otpornosti i pretpostavljenog oblika oblasti sa graničnim naponskim stanjem, $q = \gamma \cdot D_f$ pritisak od težine tla iznad ravni koja se nalazi u nivou kontaktne površi temelja. Faktori nosivosti su dobijeni iz izraza:

$$N_q = \frac{e^{(3\pi/2 - \phi) \cdot \tan \phi}}{2 \cdot \cos(\pi/4 + \phi/2)} \quad (5.2)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cdot \text{ctg} \phi \quad (5.3)$$

Za faktor nosivosti N_γ ne postoji rešenje u zatvorenom obliku jer on zavisi od geometrije pretpostavljenih oblasti u kojima su ispunjeni uslovi granične ravnoteže tla. Brinch Hansen je predložio rešenje za faktor nosivosti N_γ oblika:

$$N_\gamma = 1,8 \cdot (N_q - 1) \cdot \text{tg} \phi \quad (5.4)$$

Granični pritisak na tlo, kao što se vidi iz izraza (5.1), zavisi od ugla smičuće otpornosti tla ϕ , zapreminske težine tla γ , širine temelja B , kohezije c i pritiska od težine tla q iznad ravni koja se nalazi u nivou kontaktne površine. Na prvi član u izrazu za nosivost utiče, pored ugla smičuće otpornosti, i veličina kohezije. Ako je ugao smičuće otpornosti mali nosivost tla zavisi, uglavnom, od ovog člana. Na drugi član u izrazu (5.1) utiče, pored ugla smičuće otpornosti, i težina tla iznad kontaktne površine. Udeo ovog člana može biti veoma mali ako tlo ima mali ugao smičuće otpornosti. Treći član u izrazu (5.1) je proporcionalan jediničnoj težini tla koje se nalazi ispod temelja u oblastima sa graničnim naponskim stanjem. Terzaghi-evo rešenje pokazuje da u slučaju peska postoji nosivost i za temelje na samoj površini a što je saglasno sa fizičkom pojavom.

Određivanjem nosivosti tla ispod plitkih temelja metodom graničnog stanja plastične ravnoteže bavili su se mnogi autori, i svaki autor je u svoju metodu uveo neku od različitih pretpostavki o obliku klizne ravni i osobinama tla, da bi pojednostavio rešenje za granični pritisak na tlo. Iz tih razloga sračunate veličine graničnog opterećenja se međusobno razlikuju. Postoji više metoda za proračun nosivosti temelja prema stanju granične ravnoteže. Navešćemo samo neke autore tih metoda: Brinch-Hansen, Meyerhof, Berezantsev, Vesić, Sokolovski, Buisman, Schwedler, Skempton i drugi.

U cilju provere ponašanja trakastih temelja prema stanju granične ravnoteže urađen je veliki broj studija nosivosti tla metodom karakteristika. Ovom metodom rešavanje problema definisanih diferencijalnim jednačinama prvog i drugog reda svodi se na rešavanje obične diferencijalne jednačine jednim od numeričkih postupaka. Sokolovski (1960) je razmatrao čisto plastični problem tražeći rešenja po naponima, dok je određivanje deformacija i brzina deformisanja zanemario.

Metodom karakteristika rešeni su zadovoljavajuće mnogi za inženjersku praksu značajni granični zadaci. Međutim, potrebno je istaći da ta rešenja podrazumevaju idealnu plastičnost i da se proračun izvodi za neki unapred određeni – pretpostavljeni mehanizam - potencijalnu kliznu ravan. Ovo pretpostavlja da tlo u zoni loma ima nepromenjenu gustinu pre i posle loma, a da maksimalnu vrednost ugao smičuće otpornosti dostiže istovremeno u svim tačkama.

U realnim situacijama način i oblik (mehanizam) loma se znatno razlikuje od onog koji predviđaju konvencionalne metode proračuna. Nejednake specifične deformacije u zoni

smicanja dovode do mobilizacije smičuće otpornosti i loma duž linija loma – pravaca u različitim momentima. Sa porastom opterećenja, raste i neravnomernost specifičnih smičućih deformacija. Prema tome, lom nije do koga dolazi duž neke unapred utvrđene klizne površi – mehanizma već proces koji se progresivno razvija i širi u pravcima najmanjih otpora.

5.3 Ilustracija primene MKE na konkretnim primerima

Opisane teorijske postavke, kao i numeričke procedure koje su zasnovane na njima (poglavlja 2 i 3), primenjene su u ovom odeljku za ilustraciju proračuna trakastih temelja na deformabilnoj podlozi metodom konačnih elemenata. Odabrana su dva konkretna primera proračuna trakastih temelja na deformabilnoj podlozi koji ilustruju osnovne karakteristike prikazane metodologije.

Tlo je modelirano kao elasto-plastični kontinuum korišćenjem NMC modela uz uvođenje sledećih pretpostavki:

1. Raspodela pritisaka u kontaktnoj površini temeljne trake zavisi od njene krutosti;
2. Usvaja se da je elastični tenzor konstantan i izotropan u svakoj ravnotežnoj konfiguraciji za analizu elastičnih deformacija;
3. U svakoj tački kontaktne površine vertikalno pomeranje tačaka ose nosača jednako sleganju podloge u odgovarajućoj tački;
4. Kontaktna površina temelja je na površini tla. Uticaj dubine fundiranja se zamenjuje opterećenjem jednakim težini tla iznad kontaktne površi temelja, ravnomerno raspoređenim po celoj površini tla. Uticaj tla iznad kontaktne površine temelja zamenićemo sa ravnomerno podeljenim opterećenjem γD_f , gde je γ jedinična težina tla a D_f dubina fundiranja;
5. Vertikalni napon od sopstvene težine tla u horizontalnoj ravni koja se nalazi na dubini z jednak je:

$$\sigma_z = \gamma \cdot (D_f + z) \quad (5.5)$$

gde je z dubina posmatrane tačke ispod kontaktne površine temelja. Horizontalni napon od sopstvene težine tla, na dubini z ispod kontaktne površine temelja jednak je:

$$\sigma_y = k_0 \cdot \sigma_z \quad (5.6)$$

gde je k_0 koeficijent bočnog pritiska tla.

Primer 5.3.1 Kruta temeljna traka na pesku

Kao prvi primer proračuna trakastog temelja na deformabilnoj podlozi MKE odabran je primer prikazan u radu: J. T. Christian, A. J. Haggmann and W.A. Marr: "Incremental Plasticity Analysis of Frictional Soils", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 1, 343-375, (1977). Primer je odabran i zbog mogućnosti upoređenja rezultata sa rezultatima prikazanim u referentnom radu. Zbog činjenice da je ovo važna referenca navešću kratki rezime rada. Materijalni parametri prikazani u radu mogu se direktno koristiti kao ulazni parametri NMC modela, uključujući i određivanje odgovarajućih parametra smičuće otpornosti: bazni ugao $\phi_B = 26.6^\circ$, ugao dilatancije $\Delta\phi = 10.3^\circ$ i normalni napon $p_N = 500 \text{ kN/m}^2$ na osnovu ugla smičuće otpornosti $\phi = 30^\circ$ LMC (slika 4.2 - CTC test). Autori sa MIT-a su za proračun potporne konstrukcije i nosivosti trakastog temelja koristili Mohr-Coulomb-ov kriterijum loma primenom asocijativne i neasocijativne teorije plastičnosti. Utvrdili su veoma dobro slaganje između pritiska i otpora tla na osnovu rezultata dobijenih metodom graničnog stanja plastične ravnoteže i prikazanog numeričkog rešenja za proračun potporne konstrukcije. Međutim, kod proračuna nosivosti trakastog temelja na pesku konstatovali su odstupanje numeričkog rešenja u odnosu na rešenje nosivosti određeno metodom granične ravnoteže.

Prikazanom analizom obuhvatili su uticaj različitih faktora na proračun nosivosti trakastog temelja: broj konačnih elemenata u diskretizovanom modelu, veličinu inkrementa opterećenja (pomeranja) i različite polazne pretpostavke u numeričkom postupku za integraciju konstitutivnih relacija. Kao što je poznato, diskretizovanje, izbor oblika i broj konačnih elemenata zavise od prirode problema i zahtevane tačnosti rešenja. U razmatranom graničnom zadatku nosivosti i sleganja trakastog temelja zadato opterećenje i obuhvaćena geometrija zapremene tla ispod opterećenog temelja su simetrični tako da je mreža konačnih elemenata formirana za odgovarajući simetričan problem. Posmatrali su ravansku deformaciju u dreniranim uslovima. Zamenu poluprostora modelom određenih dimenzija izvršili su diskretizacijom domena ispod temelja mrežom konačnih elemenata do dubine $2B$ i širine $2,5B$, gde je B širina temeljne trake. Po bočnim konturama, sprečena su horizontalna a po osnovi i vertikalna i horizontalna pomeranja (fiksni oslonac). U radu je usvojen 2-D četvorougao izoparametarski konačni element. Uticaj broja konačnih elemenata na rešenje graničnog problema, analizirali su diskretizacijom na 30 i 96 elemenata. Zbog neznatnih razlika dobijenih na osnovu prikazanih rezultata proračuna autori su izveli zaključak da usvojeni broj konačnih elemenata ne utiče bitno na rešenje razmatranog graničnog problema.

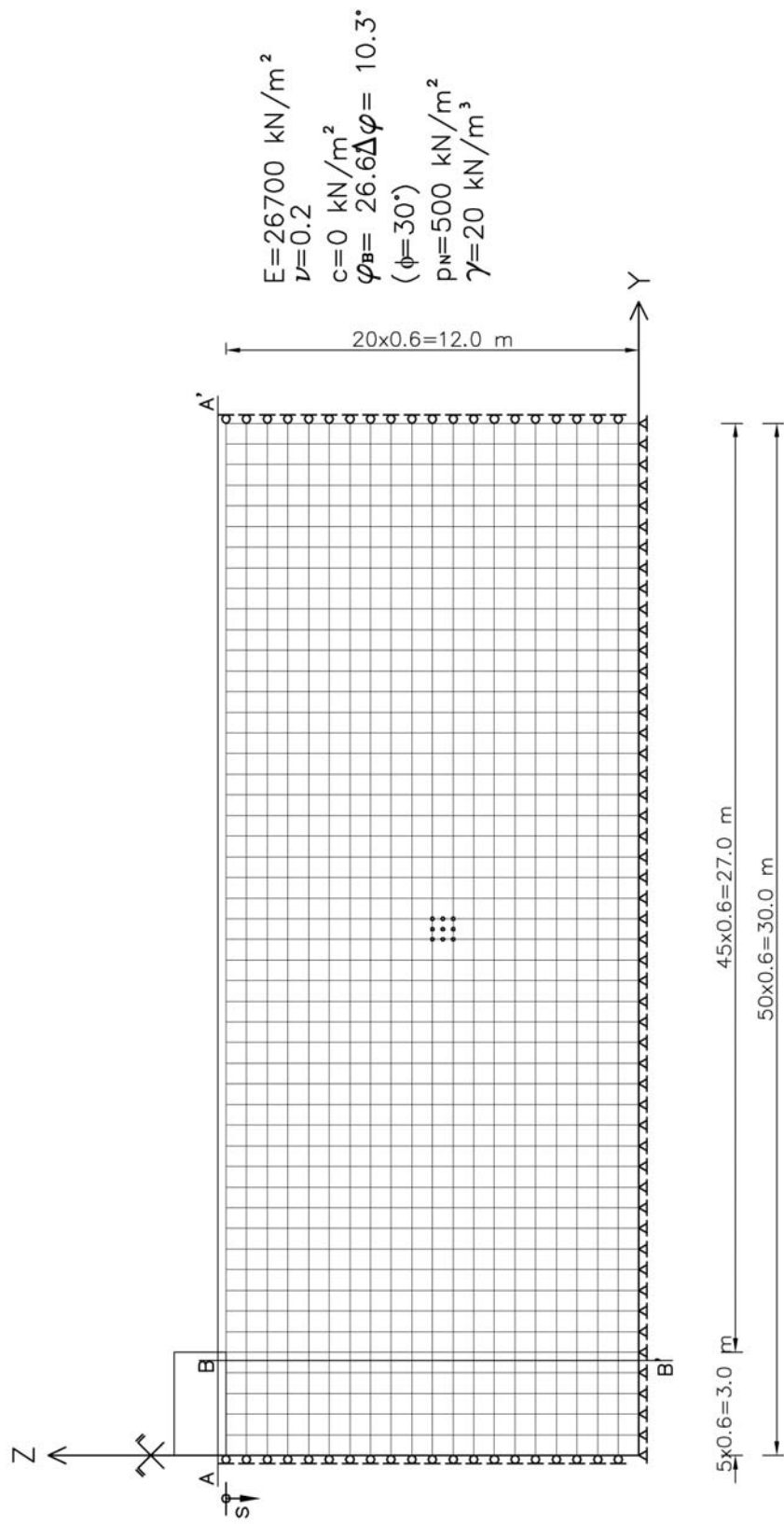
Što se tiče veličine inkrementa opterećenja, zadavali su inkrementalno pomeranje u iznosima od 0,005, 0,01 i 0,02 m. Broj iteracija u okviru inkrementu je bio najviše do dve iteracije što proizilazi iz vrlo tačnog i efikasnog postupka integracije napona. Autori su testirali tri numeričke sheme integracije napona. Prvi postupak je obuhvatao "korekciju" vektora napona na površ tečenja uz održavanje konstantnog srednjeg napona, drugi korekciju napona u pravcu normale na anvelopu loma i treći je obuhvatao "korekciju" napona uz konstantan vertikalni napon.

Radi diskretizacije domena ispod temeljne trake, u okviru ovog brojnog primera, usvojena je mreža konačnih elemenata dubine $2B=12,0$ m i širine $5B=30,0$ m, gde je $B=6,0$ m širina temeljne trake. Mreža konačnih elemenata, prikazana na slici 5.2, se sastoji od 1000 2-D 9-čvornih izoparametarskih elementa. Po bočnim konturama, sprečena su horizontalna a po osnovi i vertikalna i horizontalna pomeranja. Grafička interpretacija dobijenih rezultata numeričke analize urađena je na osnovu računskih uticaja u centru konačnih elemenata.

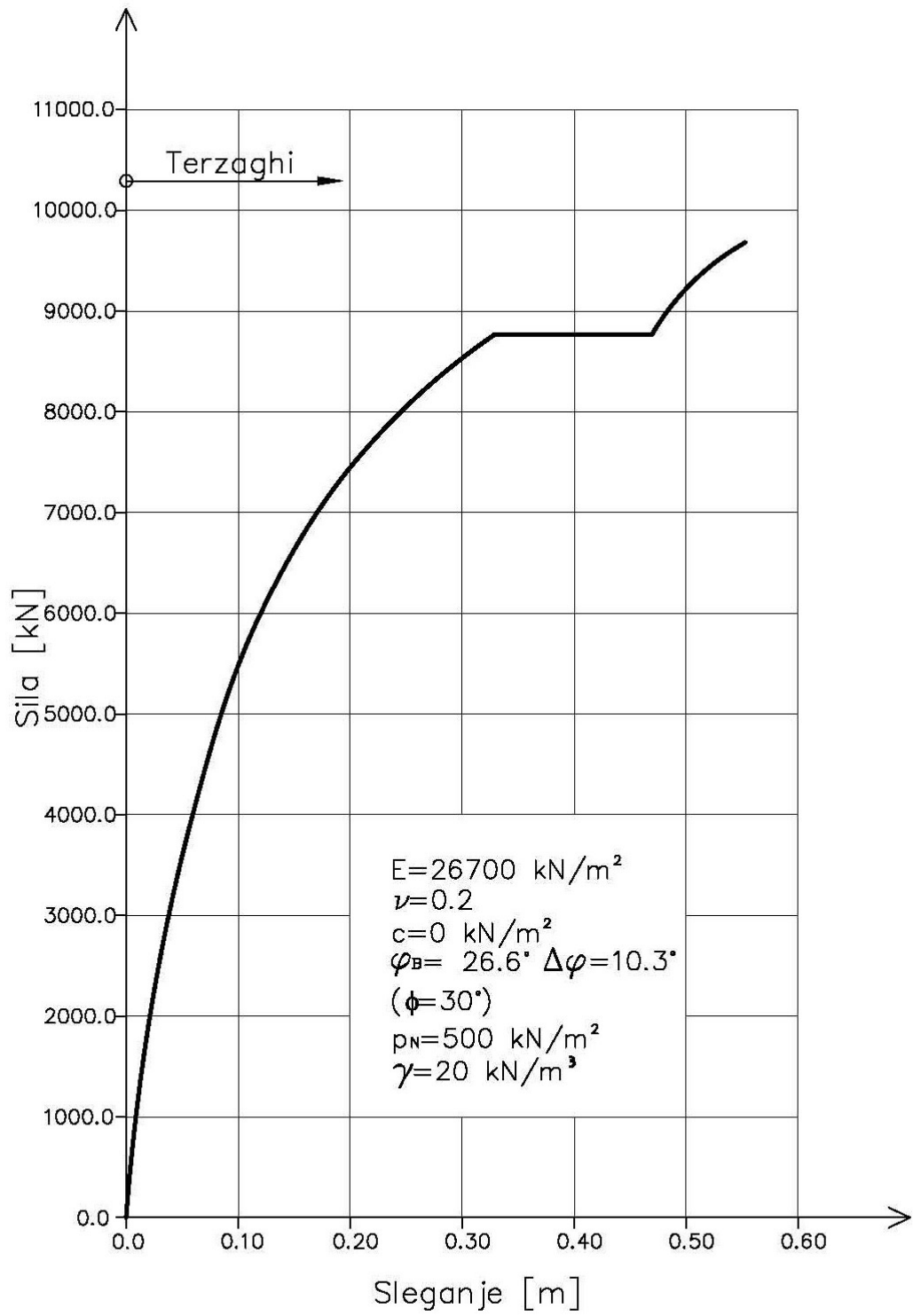
Slika 5.3 predstavlja krivu nosivosti tla koja prikazuje zavisnost između sleganja centrično opterećenog krutog temelja i sile.

Razvoj zona plastičnosti je prikazan na slikama 5.4.1 do 5.4.12 za inkrementalni priraštaj sleganja od 0,05 m. Prva zona plastifikacije se pojavljuje pored ivice temeljne trake pri neznatnom nivou sleganja. Analizom formiranja zona plastifikacije može se zaključiti da širenje, oblik i zone plastifikacije prate povećanje sleganja temeljne trake. Slika 5.5 prikazuje dijagrame sleganja slobodne površine a slika 5.6 dijagrame horizontalnih pomeranja duž ivice temelja, za različite nivoe mobilizacije nosivosti peska.

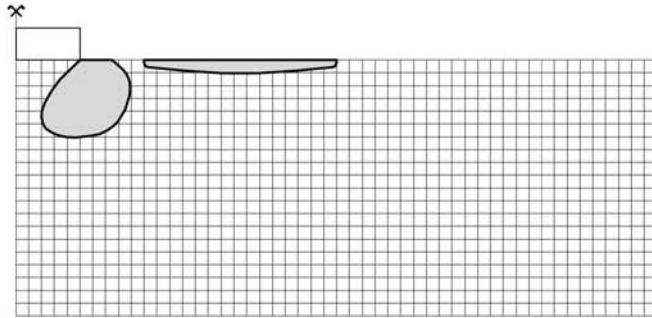
Na osnovu upoređenja numeričkog rešenja za graničnu silu $Q_f^{NMC} = 9862$ kN i Terzaghi-jevog rešenja metodom granične ravnoteže $Q_f^{Terzaghi} = 10296$ kN, može se konstatovati dobro sleganje. Potrebno je napomenuti da su numeričke vrednosti faktora nosivosti za određivanje granične sile po metodi graničnih stanja plastične ravnoteže određene prema knjizi Stevanović, S.: Fundiranje građevinskih objekata knjiga I, Izgradnja, Beograd, 1999. god., strana 91, tabela II.3. [141]



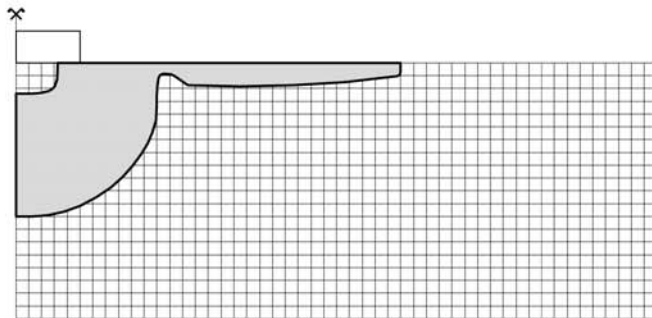
Slika 5.2 Mreža konačnih elemenata



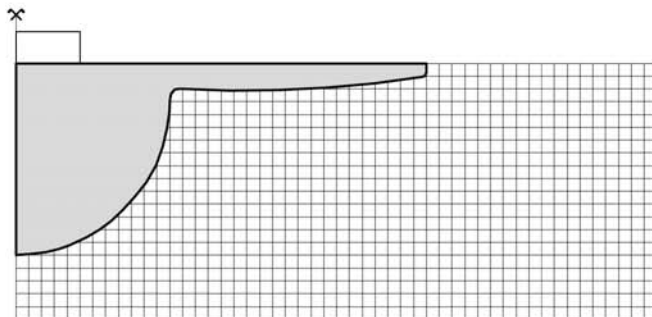
Slika 5.3 Dijagram sila – sleganje



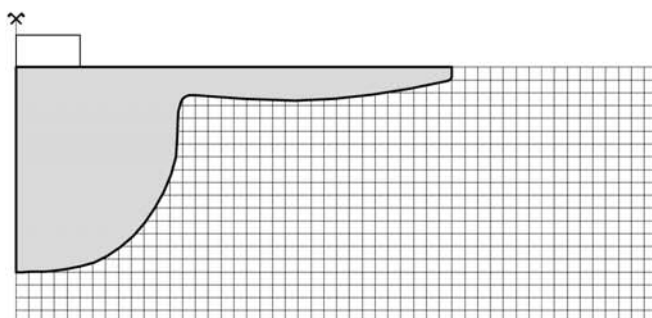
Slika 5.4.1 Zone plastičnosti $s=0.01$ m



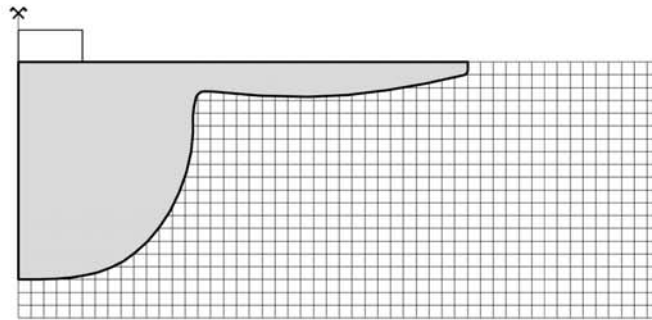
Slika 5.4.2 Zone plastičnosti $s=0.05$ m



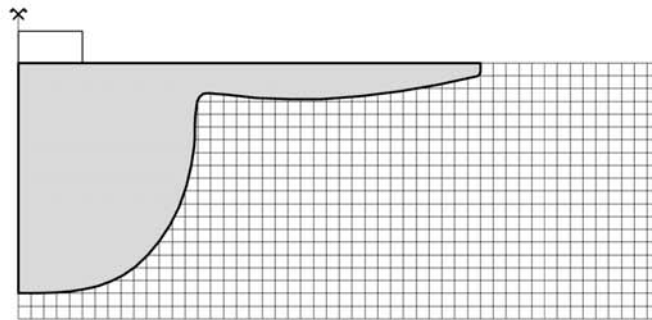
Slika 5.4.3 Zone plastičnosti $s=0.10$ m



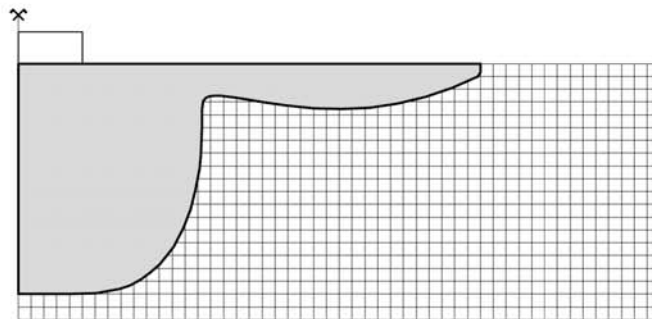
Slika 5.4.4 Zone plastičnosti $s=0.15$ m



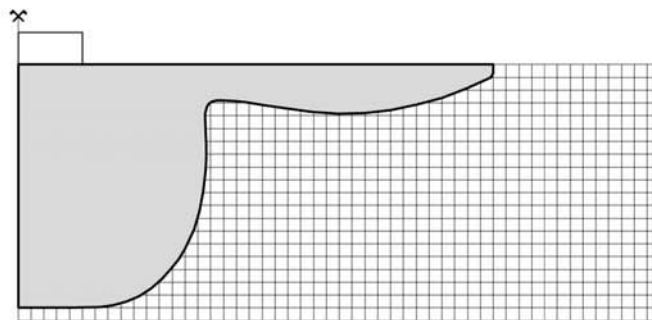
Slika 5.4.5 Zone plastičnosti $s=0.20$ m



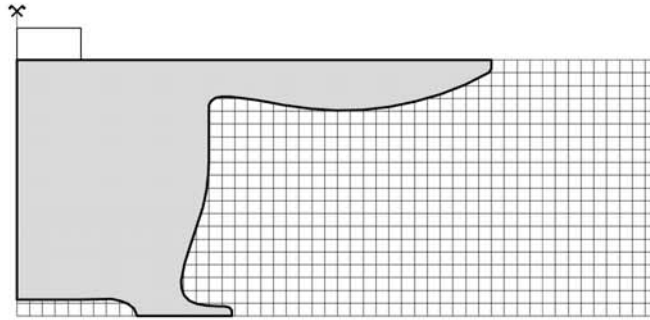
Slika 5.4.6 Zone plastičnosti $s=0.25$ m



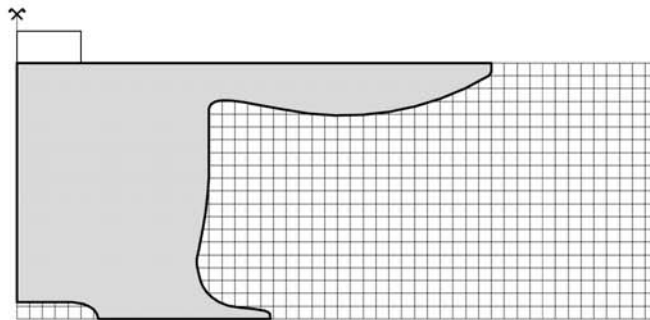
Slika 5.4.7 Zone plastičnosti $s=0.30$ m



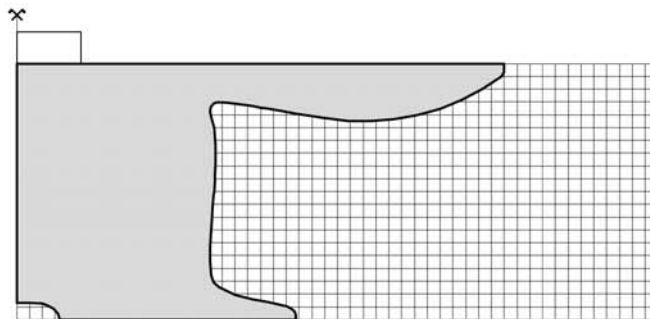
Slika 5.4.8 Zone plastičnosti $s=0.35$ m



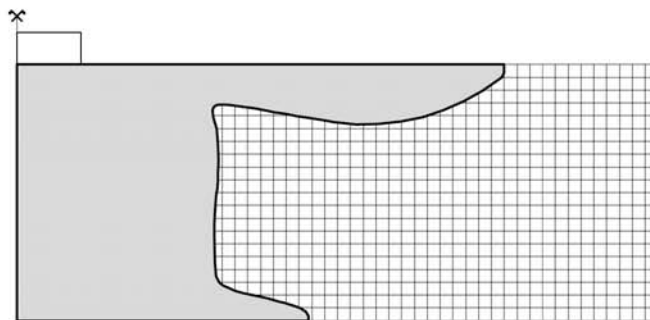
Slika 5.4.9 Zone plastičnosti $s=0.40$ m



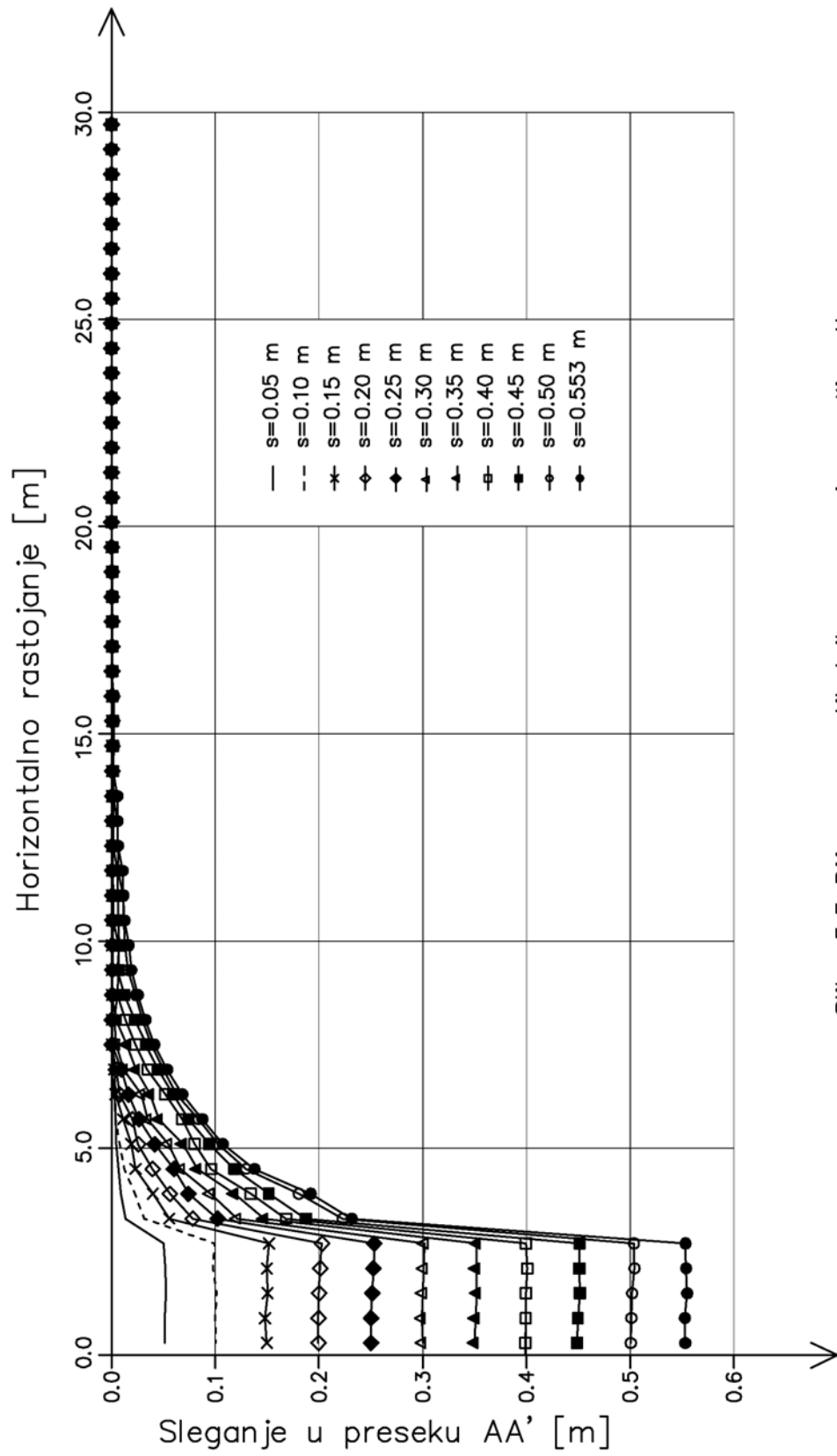
Slika 5.4.10 Zone plastičnosti $s=0.45$ m



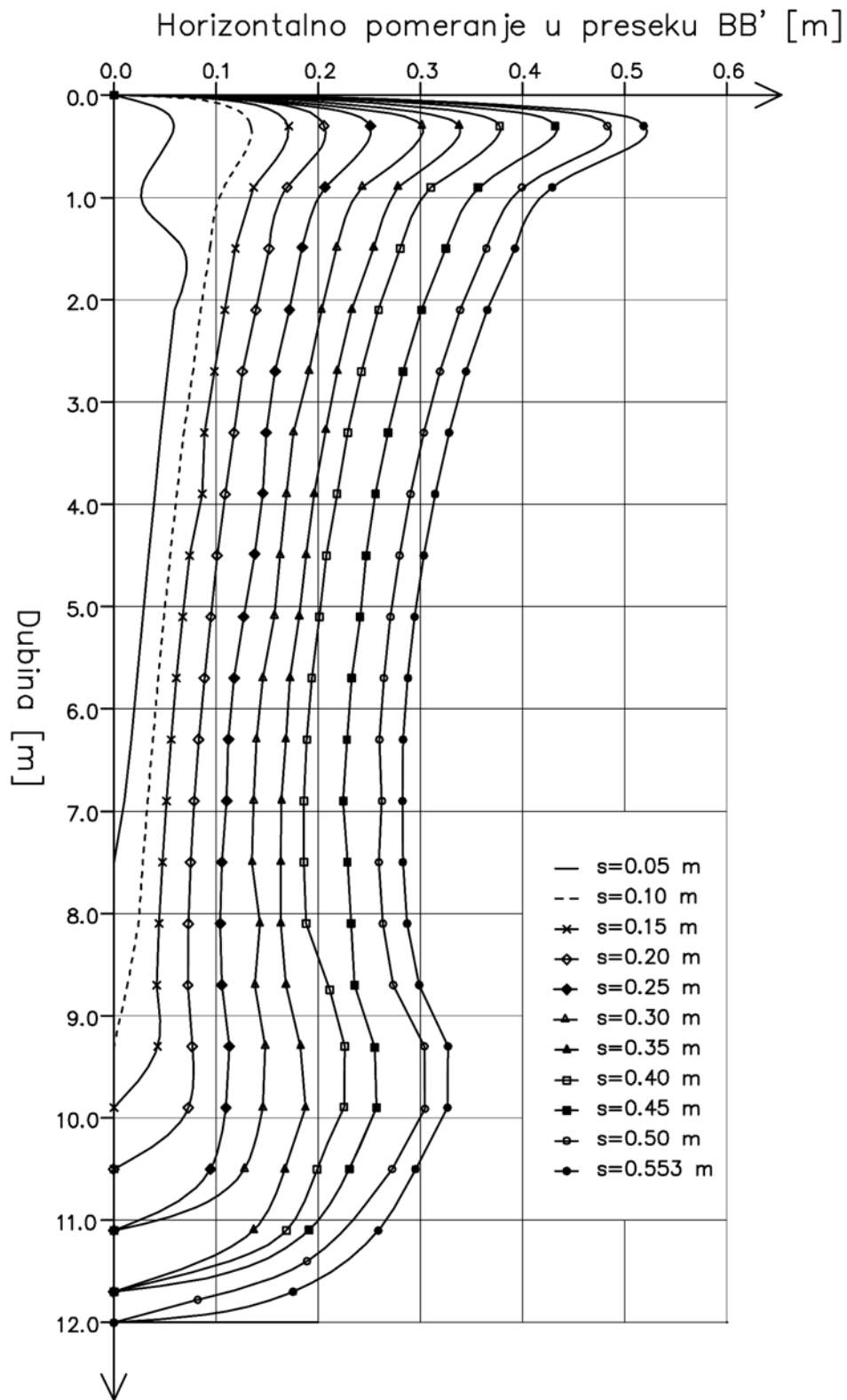
Slika 5.4.11 Zone plastičnosti $s=0.50$ m



Slika 5.4.12 Zone plastičnosti $s=0.553$ m



Slika 5.5 Dijagram vertikalnih pomeranja površine tla



Slika 5.6 Dijagram horizontalnih pomeranja na ivici temelja

Primer 5.3.2 Kruta temeljna traka na glini

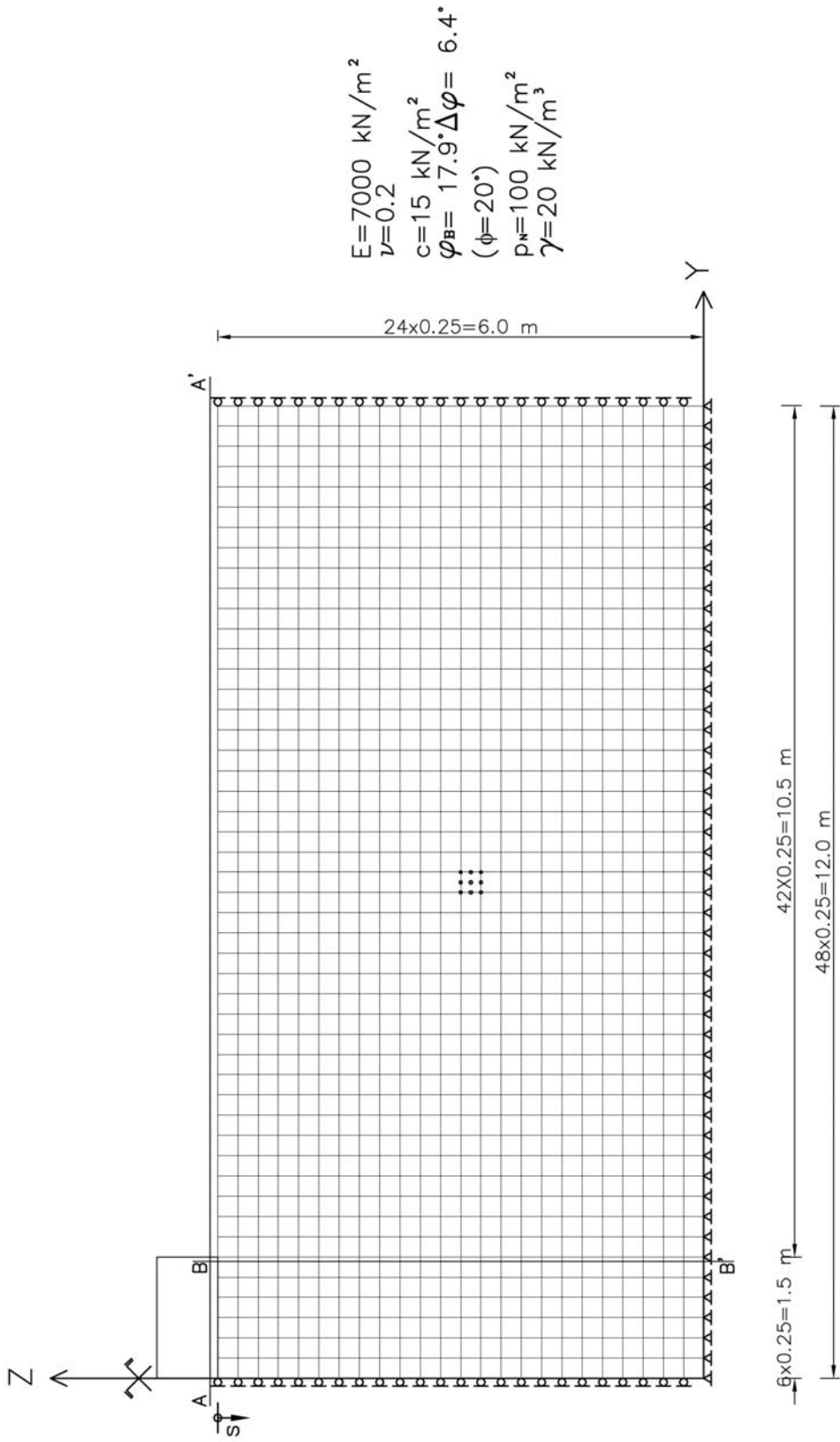
U okviru ovog primera za potrebe primene matematičkog modela i numeričkog postupka u analizi napona i deformacija razmatra se trakasti temelj na glini. Usvojene su računске vrednosti ugla smičuće otpornosti $\phi = 20^{\circ}$ i kohezije $c = 15,0 \text{ kN/m}^2$ prema podacima prikazanim u knjizi [87], strana 67, slika II.56. Na osnovu ugla smičuće otpornosti $\phi = 20^{\circ}$ LMC određeni su odgovarajući materijalni parametri NMC: bazni ugao $\phi_B = 17,9^{\circ}$, dilatancija $\Delta\phi = 6,4^{\circ}$ i normalni napon $p_N = 100 \text{ kN/m}^2$. Ostale materijalne konstante, potrebne za definisanje NMC modela, date su na slici 5.7.

Diskretizacija domena temeljnog tla izvršena je usvojanjem mreže konačnih elemenata do dubine $2B = 6,0 \text{ m}$ i širine $4B = 12,0 \text{ m}$, gde je $B = 3,0 \text{ m}$ širina temeljne trake. Mreža konačnih elemenata, prikazana na slici 5.7, sastavljena je od 1152 2-D 9-čvorna izoparametarska elementa. Po bočnim konturama, sprečena su horizontalna a po osnovi i vertikalna i horizontalna pomeranja.

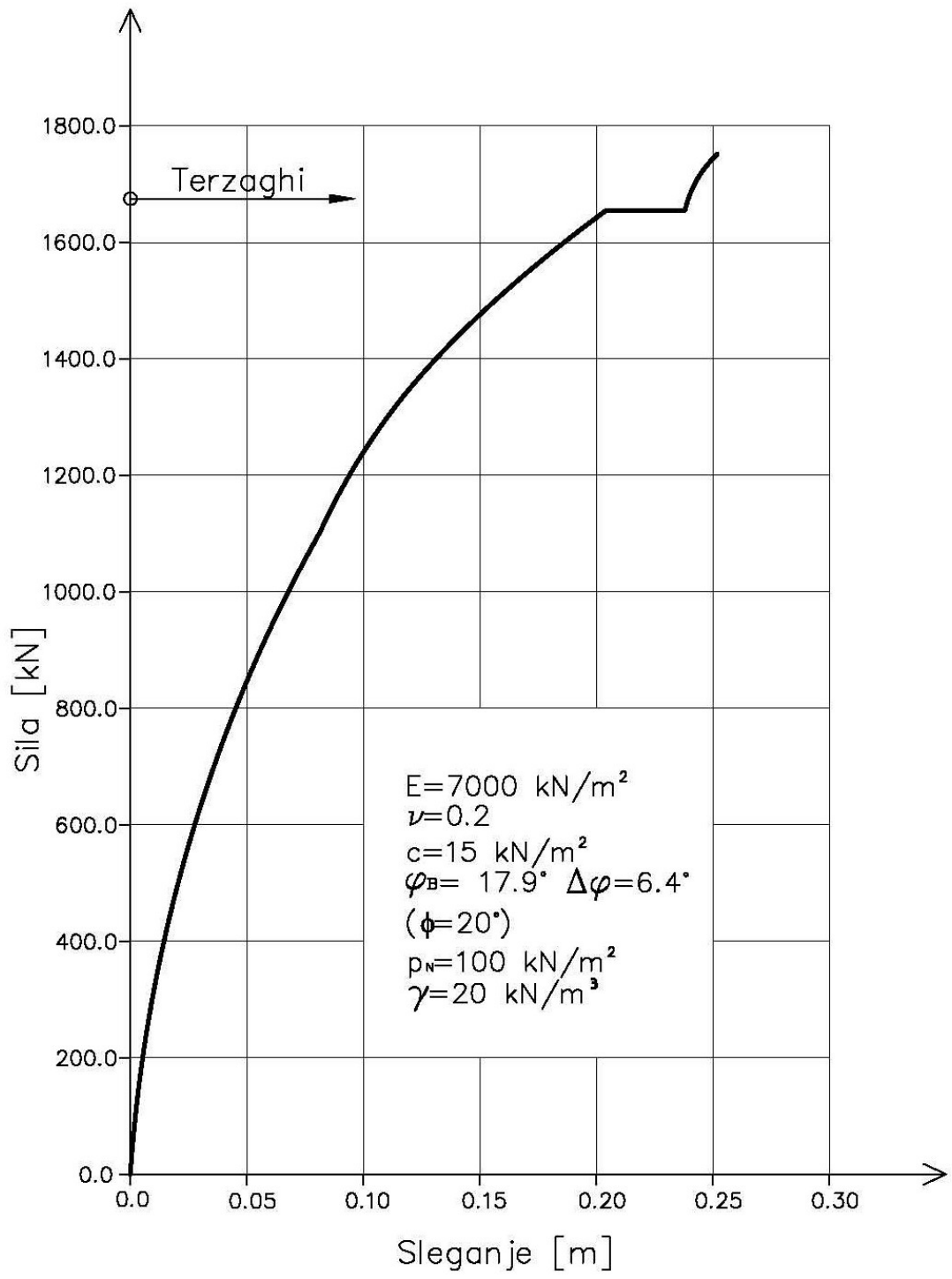
Slika 5.8 predstavlja krivu nosivosti tla koja prikazuje zavisnost između sleganja centrično opterećene krute temeljne trake i sile.

Razvoj zona plastičnosti je prikazan na slikama 5.9.1 do 5.9.8 za inkrementalni priraštaj sleganja od $0,035 \text{ m}$. Slika 5.10 prikazuje dijagrame sleganja slobodne površine a slika 5.11 dijagrame horizontalnih pomeranja duž ivice temelja, za različite nivoe mobilizacije nosivosti glinovitog tla.

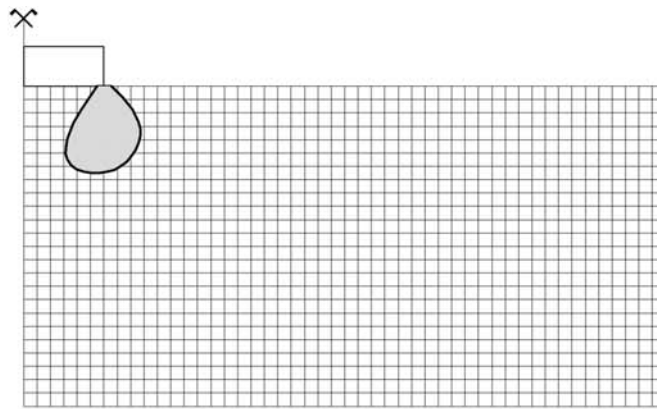
Na osnovu upoređenja numeričkog rešenja za graničnu silu $Q_f^{\text{NMC}} = 1752 \text{ kN}$ i Terzaghi-jevog rešenja metodom granične ravnoteže $Q_f^{\text{Terzaghi}} = 1674 \text{ kN}$, može se konstatovati veoma dobro sleganje.



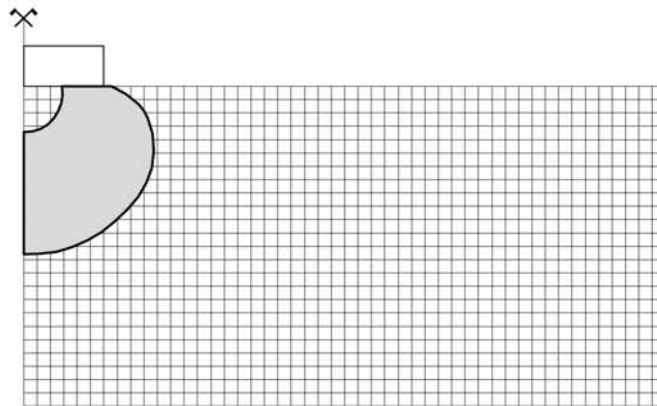
Slika 5.7 Mreža konačnih elemenata



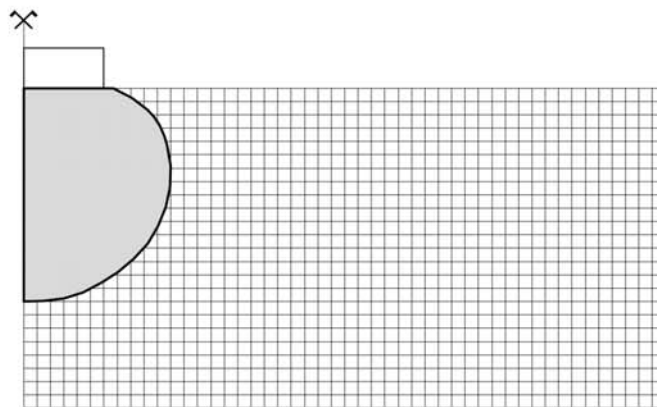
Slika 5.8 Dijagram sila – sleganje



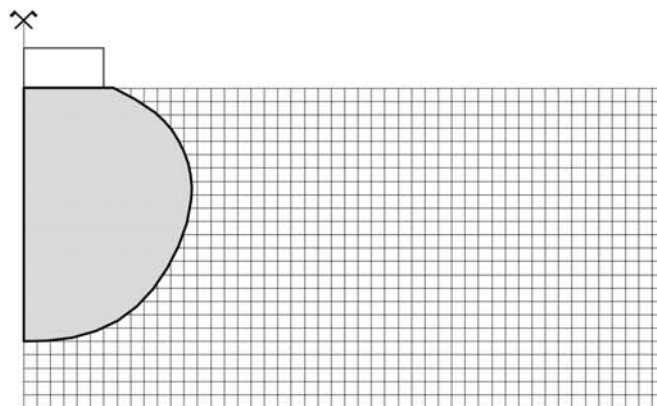
Slika 5.9.1 Zone plastičnosti $s=0.008$ m



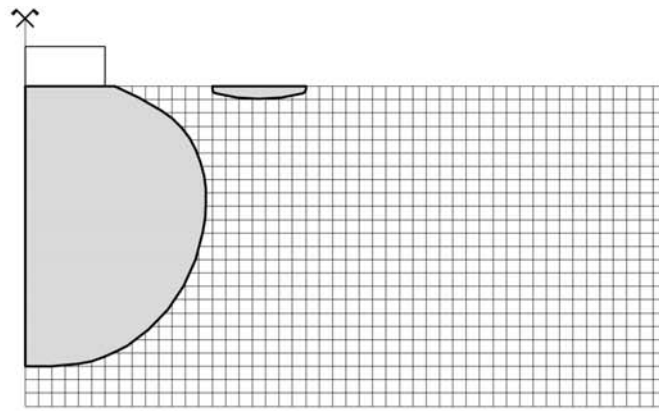
Slika 5.9.2 Zone plastičnosti $s=0.035$ m



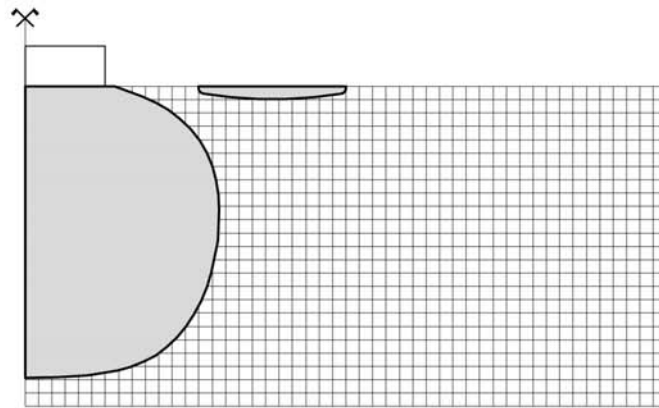
Slika 5.9.3 Zone plastičnosti $s=0.070$ m



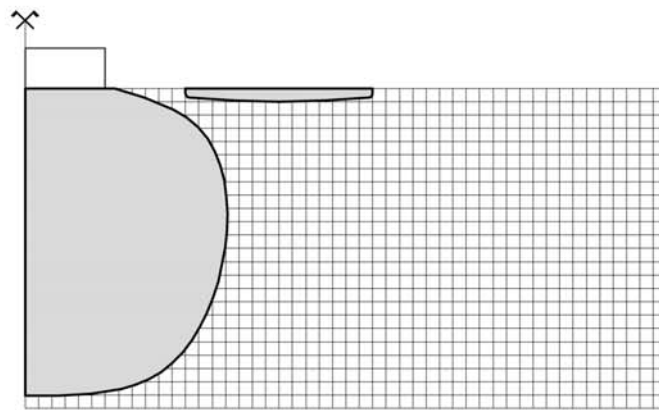
Slika 5.9.4 Zone plastičnosti $s=0.105$ m



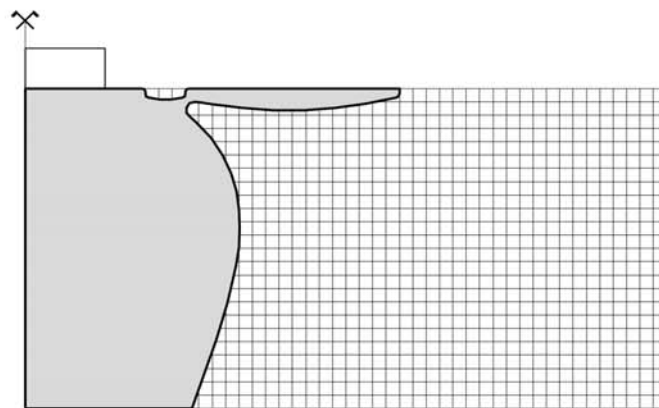
Slika 5.9.5 Zone plastičnosti $s=0.140$ m



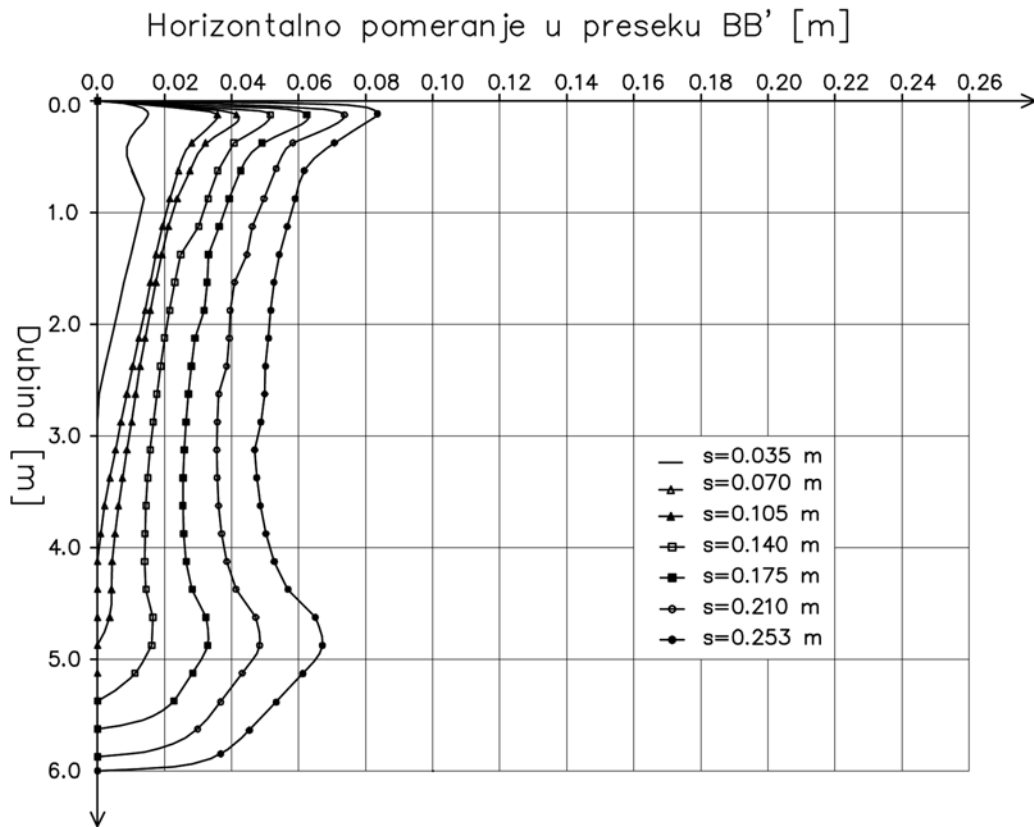
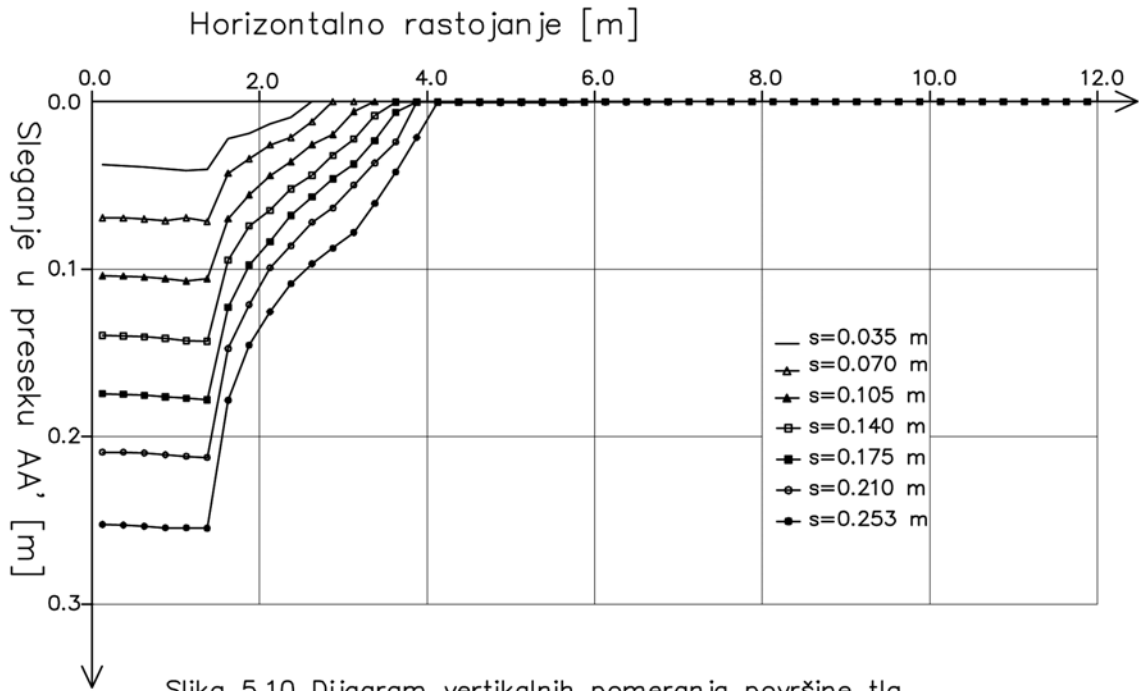
Slika 5.9.6 Zone plastičnosti $s=0.175$ m



Slika 5.9.7 Zone plastičnosti $s=0.210$ m



Slika 5.9.8 Zone plastičnosti $s=0.253$ m



6. KRITERIJUM STABILNOSTI ELASTO-PLASTIČNOG MATERIJALA

6.1 Uvod

Problem stabilnosti predstavlja matematički zadatak koji razmatra uslove pod kojima postoji ili ne postoji njegovo rešenje tj., svodi se na problem određivanja granične vrednosti. Analiza stabilnosti geomehaničkih materijala za tačno utvrđenu geometriju, granične uslove i karakter opterećenja zahteva određivanje intervala parametara opterećenja pri kojem naponsko deformacijske veličine imaju konačne vrednosti.

U ovom poglavlju je određeno kritično opterećenje posmatranog geomehaničkog materijala uz korišćenje inkrementalno iterativnog postupka za različite putanje napona. Kriva opterećenje deformacija sadrži prevojnu tačku iza koje neposredno dolazi do promene znaka krivine u odnosu na početni nedeformisani položaj. Određivanje kritične tačke moguće je svesti na određivanje onog stanja pri kome dolazi do promene znaka osnovnih kvantiteta metrike površi tečenja.

Sama reč stabilnost ima niz različitih značenja, zavisno od problema, stanja ili procesa na koji se odnosi. Velika pažnja se posvećuje fenomenu lokalizacije deformacije u granularnim materijalima kako sa eksperimentalne tako i sa analitičke tačke gledišta. Klasični rezultati za elasto-plastični kontinuum izraženi preko kritične vrednosti modula ojačanja i odgovarajuća orijentacija "shear banda" prikazani su u radovima Hill^[52], Rudnicki i Rice^[121] i Runesson^[122]. U radovima^{[114], [115]} definisani su statički i kinematički uslovi za formiranje shear band u granularnom materijalu. Prikazan je matematički precizan kriterijum za određivanje položaja kritične tačke izveden iz generalnog razmatranja svojstvenih vrednosti tangentne matrice krutosti. Ovako postavljen kriterijum za određivanje kritične tačke je vrlo pogodan sa stanovišta praktičnih primena, mada je potrebno naglasiti da ovako formulisani uslov ima karakter potrebnog ali ne i dovoljnog uslova. Ova metodologija je primenjena od strane velikog broja drugih autora na granularne materijale^{[15], [149]} sa tom razlikom što su koristili Mohr-Coulomb-ov kriterijum kao funkciju tečenja.

Od velikog praktičnog značaja je da se odredi da li će posmatrana plastična deformacija u trenutku kada je dostignuto ravnotežno stanje povećati svoju dužinu za konačan (mali) inkrement i prestati sa rastom (stabilan režim deformisanja) ili će nastaviti sa nekontrolisanim rastom dok ne dođe do velikih priraštaja posmatranih deformacija (nestabilan režim deformisanja). Prelaz fizičkog (mehaničkog) sistema iz stabilnog u nestabilan režim deformisanja često se naziva gubitak stabilnosti. Granica ovog prelaza poznata je kao kritično

stanje materijala a njemu odgovarajuće opterećenje je kritično opterećenje. Kritično opterećenje jeste granica grananja formi ravnoteže, kada se posle gubitka stabilnosti prvobitne forme ravnoteže pojavi nova forma kod koje malim priraštajima opterećenja odgovaraju veliki priraštaji odgovarajućih deformacija.

6.2 Konstitutivne jednačine elasto-plastičnog materijala

Obično se u teoriji plastičnosti zanemaruju uticaji brzine deformacije i temperaturnog polja. Tako dobijena teorija zove se izotermička teorija plastičnosti. Ograničićemo naša razmatranja na izotermički process ($T = \text{const.} > 0$). U odeljku 2.5 su prikazani osnovni pojmovi matematičke teorije plastičnosti i odeljku 3.4 data je numerička integracija konstitutivnih jednačina, a čije delove i osnovne veze, u cilju preglednosti i dalje analize, ponovo navodimo. Pomeranje tačke tela označićemo sa $u(x)$, gde su x pravougle Dekartove koordinate posmatrane tačke. Usvajajući pretpostavku o malim pomeranjima, tenzor deformacije se može napisati u obliku:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.1)$$

gde zarez označava parcijalni izvod po odgovarajućoj koordinati. Konstitutivne jednačine, matematičke plastičnosti izvedene su pod sledećim pretpostavkama: material posmatranog tela je izotropan, veza između napona i elastične deformacije je određena Hukovim zakonom i definisanju veze između priraštaja plastične deformacije i napona u plastičnoj oblasti. Na osnovu poslednje pretpostavke može se napisati sledeća relacija:

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda P(\sigma, q), \lambda > 0 \quad (6.2)$$

Trenutni process plastične deformacije zavisi od istorije plastične deformacije, koja se najčešće uzima u obzir preko efektivne plastične deformacije koja predstavlja dužinu puta u prostoru plastičnih deformacija. Bolja mera, posebno za opisivanje višeosnih deformacija, umesto skalara bila bi neki tenzor^[89]. Definišu se odgovarajuće veze za iznalaženje unutrašnjih (strukturnih) koordinata sa odgovarajućim koeficijentima koji karakterišu fizičke osobine posmatranog materijala. Brzina priraštaja q može se predstaviti nelinearnom funkcijom h koja je funkcija tenzora napona σ i odgovarajućih unutrašnjih koordinata q ,

$$\dot{q} = \lambda h(\sigma, q) \quad (6.3)$$

Za infinitezimalne deformacije možemo izraziti tenzor deformacije kao zbir tenzora elastičnih i plastičnih deformacija:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (6.4)$$

gde indeks e označava elastičan deo, i indeks p označava plastičnu promenu u polju deformacija kada se unutrašnja koordinata q promeni u $q + \dot{q}$. Neka Q označava izvod funkcije tečenja $f = f(\boldsymbol{\sigma}, q)$ po tenzoru napona i R odgovarajući izvod po unutrašnjoj koordinati q :

$$Q(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, R(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{\partial f}{\partial q} \quad (6.5)$$

Ako je P normala na funkciju tečenja i predstavlja pravac tečenja u pravcu odgovarajućeg napona $\boldsymbol{\sigma}$, onda uslov $P = Q$ ograničava analizu na pridruženi zakon tečenja, a ako je $P \neq Q$ onda je zakon tečenja neasocijativan. Ako funkciju tečenja f razvijemo u Tajlorov red, onda se Tajlorova formula za funkciju $f(\boldsymbol{\sigma}, q)$ može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} f = & f_{n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}) : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \frac{\partial f}{\partial q}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}) \cdot (q - q_{n+1}) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}) : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial q}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}) : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \cdot (q - q_{n+1}) + \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial q}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}) \cdot (q - q_{n+1})^2 \right] + O(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Za dovoljno male vrednosti λ , u okviru ovog razmatranja, smatramo da su kvadratni članovi dovoljni dok članovi višeg reda predstavljaju ostatak $O(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, q_{n+1})$ koji ćemo zanemariti. Uvodimo sledeće oznake:

$$T(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}}, U(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial q}, V(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial q} \quad (6.7)$$

gde je: T simetričan tenzor četvrtog reda, U simetričan tenzor drugog i V skalar. Jednačinu (6.6), s obzirom na uvedene oznake (6.7), možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} f = & f_{n+1} + Q_{n+1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + R_{n+1} \cdot (q - q_{n+1}) + \frac{1}{2} \left[T_{n+1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + \right. \\ & \left. + 2U_{n+1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \cdot (q - q_{n+1}) + V_{n+1} \cdot (q - q_{n+1})^2 \right] \end{aligned} \quad (6.8)$$

Pri prelasku sa jedne na njoj infinitezimalno blisku površ tečenja, iz jednačine (6.8) uz korišćenje izraza (6.2) i (6.3) možemo napisati sledeću kvadratnu jednačinu po priraštaju efektivne plastične deformacije λ :

$$f[\lambda] = a_1 \lambda^2 - a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (6.9)$$

gde su koeficijenti kvadratne jednačine a_1, a_2 i a_3 određeni prema sledećim izrazima:

$$2a_1 = b^2 \cdot T_{n+1} : (C : Q_{n+1}) : (C : Q_{n+1}) + 2b \cdot U_{n+1} : C : Q_{n+1} \cdot h_{n+1} - V_{n+1} \cdot h_{n+1}^2 \quad (6.10.1)$$

$$a_2 = b \cdot P_{n+1} : C : Q_{n+1} - R_{n+1} h_{n+1} \quad (6.10.2)$$

$$a_3 = f_{n+1} \quad (6.10.3)$$

gde je:

$$b = \frac{-R_{n+1} h_{n+1}}{P_{n+1} : C : Q_{n+1} - R_{n+1} h_{n+1}} \quad (6.10.4)$$

Postoje dva pozitivna korena diskretnog uslova konsistencije predstavljenog jednačinom (6.9), koja ćemo označiti λ_1 i λ_2 :

$$\lambda_1 = (a_2 - \sqrt{d}) / 2a_1 \quad (6.11.1)$$

odnosno

$$\lambda_2 = (a_2 + \sqrt{d}) / 2a_1 \quad (6.11.2)$$

gde je koeficijent d jednak:

$$d = (a_2)^2 - 4a_1 \cdot a_3 \quad (6.11.3)$$

Koeficijenti a_1, a_2 i a_3 imaju isto značenje kao i u prikazanim izrazima (6.10.1-6.10.4).

6.3 Određivanje kritične tačke

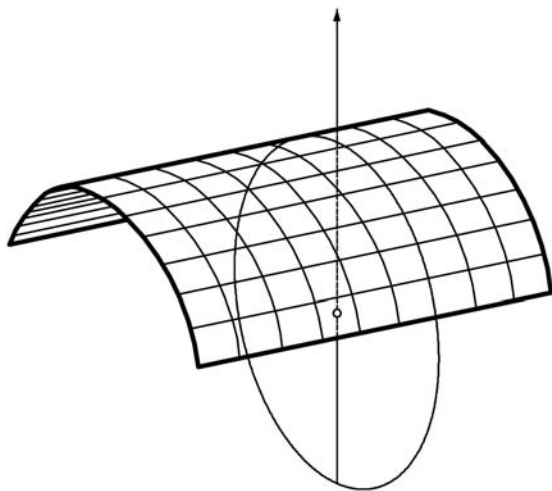
Izraz (6.10.1) može geometrijski da se interpretira kao druga osnovna kvadratna forma površi tečenja f . T, U, V , izrazi određeni relacijama (6.7), su koeficijenti druge osnovne kvadratne forme površi tečenja. Izraz za normalnu krivinu posmatrane površi, s obzirom na jednačine ((6.10.1-6.10.4), možemo napisati u sledećem obliku:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{b^2 \cdot T_{n+1} : (C : Q_{n+1}) : (C : Q_{n+1}) + 2b \cdot U_{n+1} : C : Q_{n+1} \cdot h_{n+1} - V_{n+1} \cdot h_{n+1}^2}{(b \cdot P_{n+1} : C : Q_{n+1} - R_{n+1} h_{n+1})^2} \quad (6.12)$$

odakle je jasno da znak normalne krivine zavisi samo od znaka brojioca izraza na desnoj strani gornje jednačine. U proučavanju znaka normalne krivine, prema tome, mogu nastupiti tri slučaja:

$$1. \quad \delta = U^2 + T \cdot V = 0. \quad (6.13.2)$$

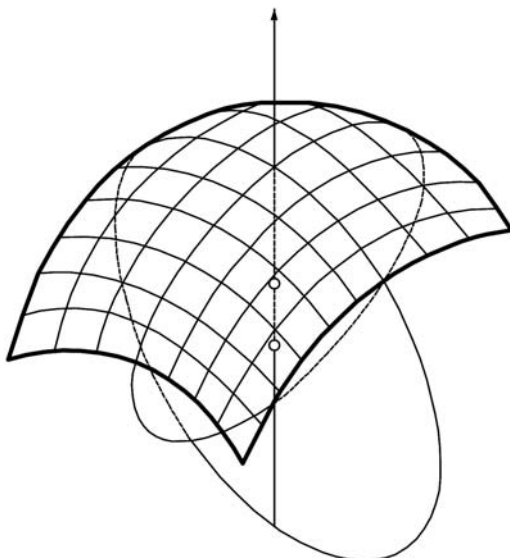
Imenilac izraza na desnoj strani uvek je pozitivna veličina, jer predstavlja kvadrat. Tada je brojilac potpuni kvadrat i ne menja znak, tj. krivina opet ostaje stalnog znaka u svim pravcima, ali postoji jedan pravac u kome je krivina jednaka nuli (Slika 6.1). Ovakve tačke površine zovu se paraboličke, a za površinu se kaže da u takvoj tački ima paraboličnu krivinu.



Slika 6.1 Geometrijska interpretacija – parabolička tačka

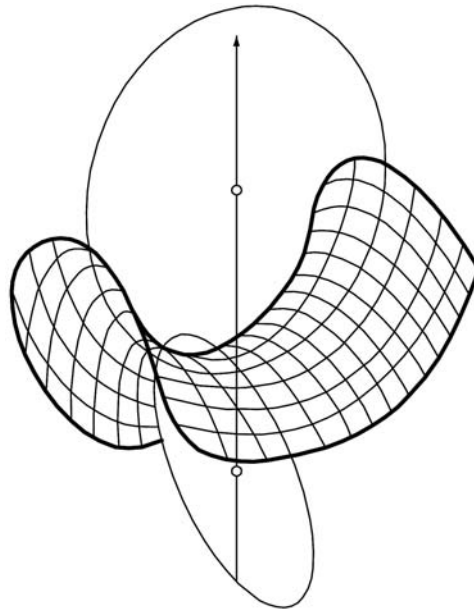
$$2. \quad \delta = U^2 + T \cdot V < 0. \quad (6.13.1)$$

U tom slučaju brojilac ne menja znak i krivina normalnih preseka u svim pravcima ima isti znak, odn., glavne normale normalnih preseka u svim pravcima kroz datu tačku imaju smer na istu stranu. Takve tačke površine zovu se eliptičke tačke. Za površinu se kaže da u takvoj tački ima eliptičnu krivinu (Slika 6.2). U takvim tačkama površine ne postoji nijedan pravac kome bi odgovarao normalni presek krivine nula. Znak krivine je stalno pozitivan ili stalno negativan prema znaku koeficijenta T .



Slika 6.2 Geometrijska interpretacija – eliptička tačka

$$3. \quad \delta = U^2 + T \cdot V > 0. \quad (6.13.3)$$



Slika 6.3 Geometrijska interpretacija – hiperbolička tačka

Brojilac menja znak, tj. u posmatranoj tački postoje glavne normale suprotnih smerova za normalne preseke raznih pravaca. Normalna krivina u istoj tački može u tom slučaju za razne pravce biti pozitivna i negativna, a postoje dva pravca u kojima je krivina nula (Slika 6.3). Takva tačka površi zovu se hiperbolička, a površina u toj tački ima hiperboličku krivinu. Sva ova razmatranja odnose se uvek na najbližu okolinu posmatrane tačke.

Važno je napomenuti da se na istoj površini, u opštem slučaju, mogu nalaziti krivine raznih vrsta. Klasifikacija tačaka jedne površi, odnosno utvrđivanje oblika površi u okolini posmatrane tačke, jasno ističe značaj i druge osnovne kvadratne forme površi.

Istaknimo još jedan konkretan geometrijski smisao druge osnovne kvadratne forme površi. Ona određuje meru odstupanja površi u okolini posmatrane tačke od njene tangentne ravni u toj tački. Kompletan nelinearan odgovor jednog elasto-plastičnog sistema formuliše njegovu ravnotežnu putanju, određujući pri tome i odgovarajuće singularne vrednosti. Zadatak stabilnosti je definisan preko oblasti dopustivih deformacija posmatranog elasto-plastičnog materijala. Sračunavanje diskretnih tačaka ravnotežne krive zajedno sa odgovarajućim vrednostima δ , definisane gornjim izrazima, nailazimo i na tačku u kojoj dolazi do promene znaka ove veličine. Sa numeričkog aspekta mogućnost poklapanja neke konfiguracije sa samom tačkom kritičnog stanja u okviru bilo kakvog algoritma gotovo je isključena. Pri vrednosti funkcije $\delta = 0$ izraz (6.11) daje $\lambda \rightarrow \infty$, pa relacija $2a_1 > 0$ postaje i potreban i dovoljan uslov za stabilnost ravnotežnog položaja posmatranog sistema za vreme opterećenja. Na ovaj način posmatranjem ravnotežne putanje sistema, odnosno analizom

njegovog ponašanja u okolini kritične tačke direktno se formulišu uslovi za egzistenciju granične tačke.

6.4 Ilustracija predloženog postupka na konkretnom primeru

U ovom brojnom primeru razmatrane su različite naponske putanje u triaksijalnom opitu, grafički predstavljene na slici 6.4., za slučaj primene konstitutivnih jednačina HISS modela, koji je opisan u odeljku 2.6.4.

Izvide funkcije tečenja, prikazane jednačinom 2.101, po odgovarajućim promenljivim možemo odrediti prema sledećim izrazima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= p_a^{-1} F_s \left[n \alpha \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^{n-1} - 2\gamma \left(\frac{I_1}{p_a} \right) \right] \delta_{ij} + \\ &+ \left(p_a^{-2} - \frac{3}{2} m F_s^{\frac{m-1}{m}} F_b S r I_{2d}^{-1} \right) S_{ij} + m F_s^{\frac{m-1}{m}} F_b A_{ij} \end{aligned} \quad (6.14.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = -a_1 \eta \xi^{-(\eta+1)} \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^n F_s \quad (6.14.2)$$

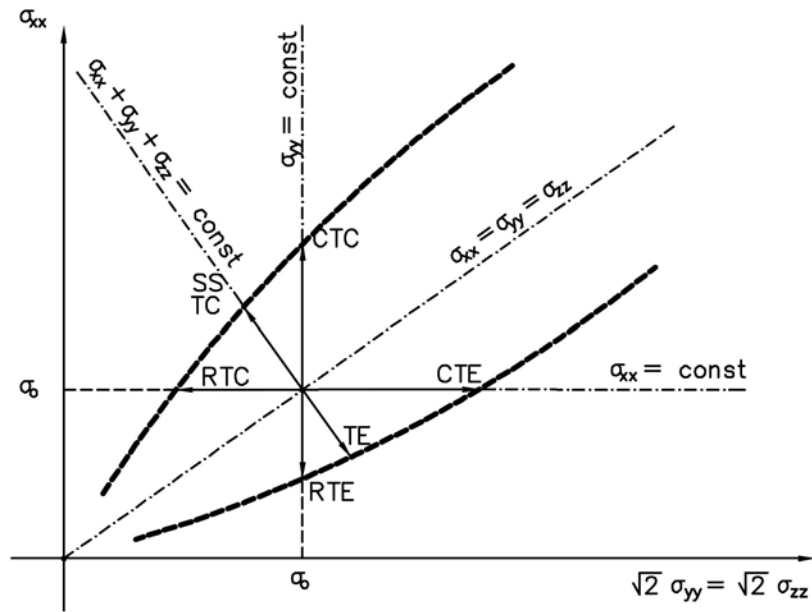
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} &= p_a^{-2} F_s \left[n(n-1) \alpha \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] \delta_{ij} \delta_{kl} + \\ &+ p_a^{-1} m F_s^{\frac{m-1}{m}} \left[n \alpha \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^{n-1} - 2\gamma \left(\frac{I_1}{p_a} \right) \right] \cdot \left[\frac{3}{2} S r I_{2d}^{-1} (\delta_{ij} S_{kl} + S_{ij} \delta_{kl}) - (\delta_{ij} A_{kl} + A_{ij} \delta_{kl}) \right] + \\ &+ \frac{3}{4} m F_s^{\frac{m-1}{m}} F_b I_{2d}^{-1} \left\{ S r I_{2d}^{-1} \left[5 - 3(m-1) F_s^{-\frac{1}{m}} S r \right] S_{ij} S_{kl} + 2 \left(F_s^{-\frac{1}{m}} S r - 1 \right) (S_{ij} A_{kl} + A_{ij} S_{kl}) \right\} - \\ &- m(m-1) F_s^{\frac{m-2}{m}} F_b A_{ij} A_{kl} + \left(p_a^{-2} - \frac{3}{2} m F_s^{\frac{m-1}{m}} F_b S r I_{2d}^{-1} \right) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) + \\ &+ \frac{3\sqrt{3}}{2} m F_s^{\frac{m-1}{m}} F_b \beta I_{2d}^{-\frac{3}{2}} \left[\delta_{ik} S_{jl} + S_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} (S_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ij} S_{kl}) \right] \end{aligned} \quad (6.14.3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \sigma_{ij}} = -a_1 \eta \xi^{-(\eta+1)} \left[p_a^{-1} n \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^{n-1} F_s \delta_{ij} + \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^n m F_s^{\frac{m-1}{m}} \left(\frac{3}{2} S r I_{2d}^{-1} S_{ij} - A_{ij} \right) \right] \quad (6.14.4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = a_1 \eta (\eta+1) \xi^{-(\eta+2)} \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^n F_s \quad (6.14.5)$$

gde je uvedena sledeća oznaka:

$$A_{ij} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \beta \cdot I_{2d}^{-\frac{3}{2}} \left(S_{ik} S_{kj} - \frac{2}{3} I_{2d} \delta_{ij} \right) \quad (6.14.6)$$



Slika 6.4 Putanje napona u triaksijalnoj ravni

Pretpostavićemo da nema drugih napona izuzev normalnih, tako da su normalni naponi u ovom slučaju i glavni naponi. Ako sa σ_{xx} označimo aksijalni napon a sa σ_{yy} i σ_{zz} bočne napone onda ćemo odgovarajuće veze izraziti prema ovim oznakama. Rešenje je dobijeno tako što je materijal prvo opterećen hidrostatičkim pritiskom od $\sigma_0 = 90[\text{kPa}]$, pri atmosferskom pritisku $p_a = 101[\text{kPa}]$.

U ovom slučaju odgovarajući izrazi (6.13 do 6.15) se svode na:

$$\bar{\delta} = 2\gamma \left[n^2 \frac{\eta}{\eta+1} + n(n-1) - 1 \right] \quad (6.15)$$

Asocijativni model je definisan sa sedam materijalnih konstanti, s tim da se može usvojiti konstantna vrednost za materijalni parametar $m = -0.5$ za većinu frikcionih materijala.

Materijalni konstante HISS modela koje se odnose na jednu vrstu peska (Leighton Buzzard sand^[32]) date su u tabeli 6.1.

E	ν	β	γ	n	al	η
103770.30	0.29	0.442	0.089	3	0.00018	0.85

Tabela 6.1 Materijalni parametri HISS modela

Više detalja o materijalnim parametrima i procedurama za njihovo određivanje može se naći u gore navedenoj Referenci.

6.4.1 Test standardne triaksijalne kompresije (CTC)

Za test standardne triaksijalne kompresije komponente tenzora napona i komponente devijatora tenzora napona mogu se matrično predstaviti u obliku:

$$\sigma^{\text{CTC}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_0 + \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (6.16.1)$$

$$S^{\text{CTC}} \Rightarrow \frac{\sigma_{xx}}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.16.2)$$

Ako u jednačinu (6.13) unesemo odgovarajuće izraze (6.14) za naponsko stanje definisano izrazom (6.16), jednačinu (6.13) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \delta = & (1-2k)^2 n^2 \frac{p_a^{-4} a_1^2 \eta^2 \xi^{-2(\eta+1)}}{(1-\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{2(n-1)} + \\ & + \frac{p_a^{-4} a_1 \eta (\eta+1) \xi^{-(\eta+2)}}{(1-\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^n \left\{ \left[\frac{2\sqrt{1-\beta}}{3} + n(n-1)\alpha \left(\frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] - \right. \\ & - 4k \left[-\frac{\sqrt{1-\beta}}{3} + n(n-1)\alpha \left(\frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] + \\ & \left. + 2k^2 \left[\frac{\sqrt{1-\beta}}{3} + 2n(n-1)\alpha \left(\frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 4\gamma \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.17.1)$$

u kojoj su uvedene sledeće oznake:

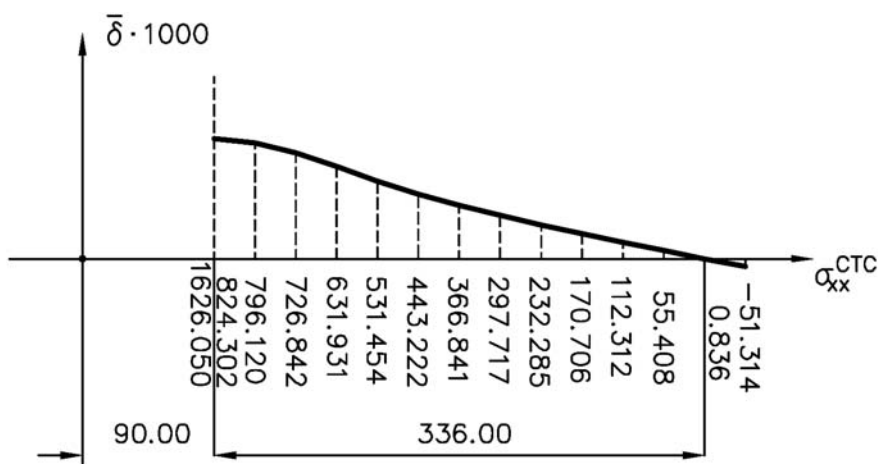
$$k = \frac{\left[\left(c_1^2 + \frac{1}{3}c_1 - \frac{2}{9} \right) - \nu c_2 \right] \left\{ \left[2c_1^2 + \frac{2}{3}c_1 + \frac{5-4\nu}{9(1+\nu)} \right] + (1-\nu)c_2 \right\}}{\left[\left(c_1 + \frac{2}{3} \right)^2 + c_2 \right] \left[2 \left(c_1 - \frac{1}{3} \right)^2 + (1-\nu)c_2 \right]} \quad (6.17.2)$$

$$c_1 = \left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}} + 1 \right) \left[n\alpha \left(\frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \quad (6.17.3)$$

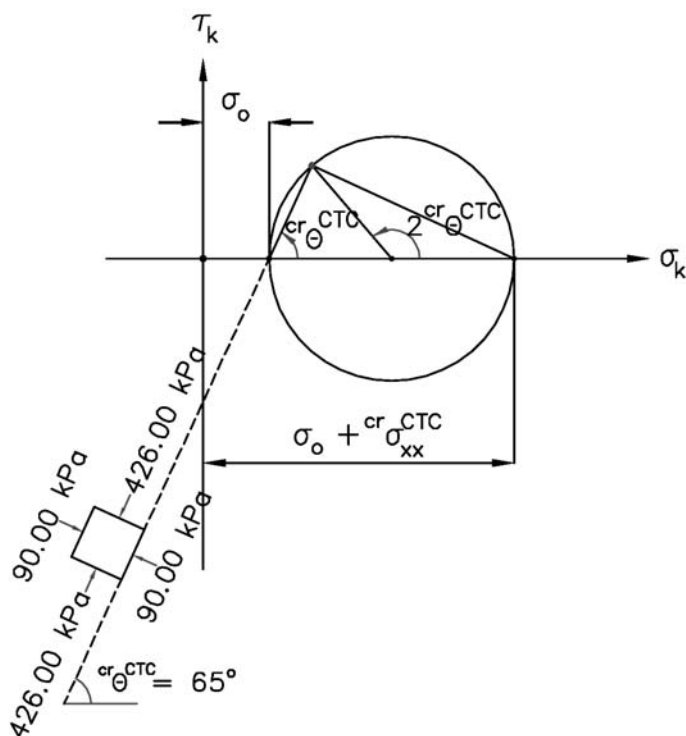
$$c_2 = \frac{a_1 \eta p_a^2}{\xi^{(\eta+1)} E \sigma_{xx}} \left(\frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^n \sqrt{\left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}} + 1 \right)^2 \left[n\alpha \left(\frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right]^2 \frac{3}{(1-\beta)^3} + \frac{2}{3(1-\beta)}} \quad (6.17.4)$$

Posle elementarnih transformacija jednačinu (6.17.1) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\bar{\delta} = \left[n^2 \frac{\eta}{\eta+1} + n(n-1) \right] \alpha \left(\frac{3\sigma_0 + \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma + \left(\frac{1+k}{1-2k} \right)^2 \frac{2\sqrt{1-\beta}}{3} = 0 \quad (6.18)$$



Slika 6.5.1 Rešenje jednačine stabilnosti za standardnu triaksijalnu kompresiju (CTC – test)



Slika 6.5.2 Mohr-ov krug napona za CTC test

Rešenje karakteristične jednačine stabilnosti (6.18) je prikazano na slici 6.5.1. Najnepovoljnije ravni u pogledu kritičnog naponskog stanja biće one kod kojih ugao između totalnog napona i normale na ravan ima najveću vrednost. Posmatramo ravan čija normala zaklapa ugao θ sa većim glavnim naponom. Sa slike 6.5.2 je:

$$cr \theta^{CTC} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{cr \sigma_{xx}^{CTC}}{2\sigma_0 + cr \sigma_{xx}^{CTC}} \quad (6.19)$$

6.4.2 Test redukovane triaksijalna ekstenzija (RTE)

Komponente tenzora napona i komponente devijatora tenzora napona za RTE test mogu se matricno predstaviti u obliku:

$$\sigma^{\text{RTE}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_0 - \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (6.20.1)$$

$$S^{\text{RTE}} \Rightarrow \frac{\sigma_{xx}}{3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.20.2)$$

Ako u jednačinu (6.13) unesemo odgovarajuće izraze (6.14) za naponsko stanje određeno izrazom (6.20), jednačinu (6.13) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \delta = & (1-2k)^2 n^2 \frac{p_a^{-4} a_1^2 \eta^2 \xi^{-2(n+1)}}{(1+\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0 - \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{2(n-1)} + \\ & + \frac{p_a^{-4} a_1 \eta (\eta+1) \xi^{-(n+2)}}{(1+\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0 - \sigma_{xx}}{p_a} \right)^n \left\{ \left[\frac{2\sqrt{1+\beta}}{3} + n(n-1)\alpha \left(\frac{3\sigma_0 - \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] - \right. \\ & \left. - 4k \left[-\frac{\sqrt{1+\beta}}{3} + n(n-1)\alpha \left(\frac{3\sigma_0 - \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] + 2k^2 \left[\frac{\sqrt{1+\beta}}{3} + 2n(n-1)\alpha \left(\frac{3\sigma_0 - \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 4\gamma \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.21.1)$$

gde su:

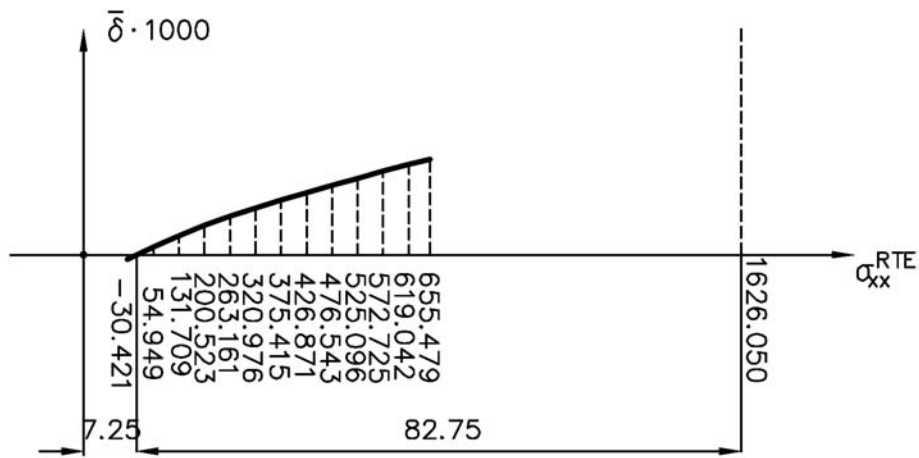
$$k = \frac{\left[\left(c_1^2 - \frac{1}{3}c_1 - \frac{2}{9} \right) - \nu c_2 \right] \left\{ \left[2c_1^2 - \frac{2}{3}c_1 + \frac{5-4\nu}{9(1+\nu)} \right] + (1-\nu)c_2 \right\}}{\left[\left(c_1 - \frac{2}{3} \right)^2 + c_2 \right] \left[2\left(c_1 + \frac{1}{3} \right)^2 + (1-\nu)c_2 \right]} \quad (6.21.2)$$

$$c_1 = \left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}} - 1 \right) \left[n\alpha \left(\frac{3\sigma_0 - \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \quad (6.21.3)$$

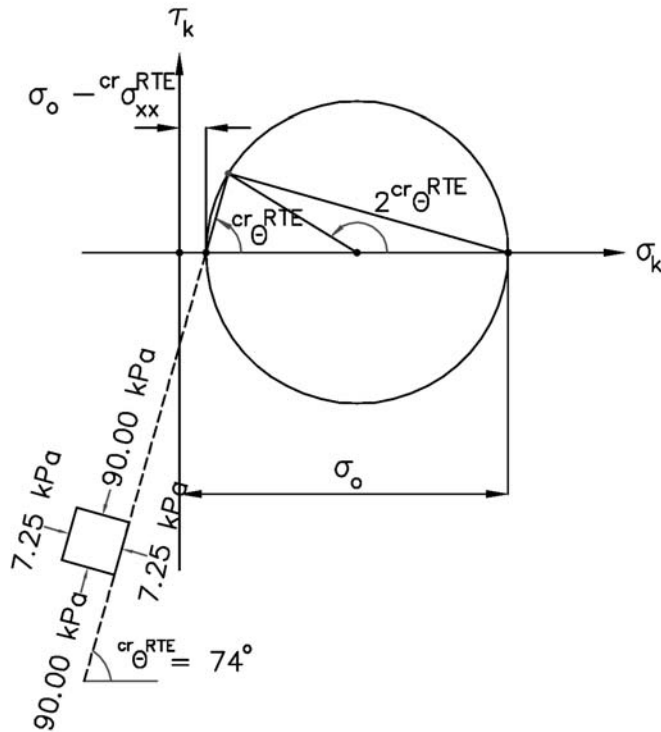
$$c_2 = \frac{a_1 \eta p_a^2}{\xi^{(n+1)} E \sigma_{xx}} \left(\frac{3\sigma_0 - \sigma_{xx}}{p_a} \right)^n \sqrt{\left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}} - 1 \right)^2 \left[n\alpha \left(\frac{3\sigma_0 - \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right]^2 \frac{3}{(1+\beta)^3} + \frac{2}{3(1+\beta)}} \quad (6.21.4)$$

Posle elementarnih transformacija jednačinu (6.21.1) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\bar{\delta} = \left[n^2 \frac{\eta}{\eta+1} + n(n-1) \right] \alpha \left(\frac{3\sigma_0 - \sigma_{xx}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma + \left(\frac{1+k}{1-2k} \right)^2 \frac{2\sqrt{1+\beta}}{3} = 0 \quad (6.22)$$



Slika 6.6.1 Rešenje jednačine stabilnosti za redukovanu triaksijalnu ekstenziju (RTE – test)



Slika 6.6.2 Mohr-ov krug napona za RTE test

Rešenje karakteristične jednačine stabilnosti (6.22) je prikazano na slici 6.6.1. Sa slike 6.6.2 vrednost kritičnog ugla θ je:

$${}^{cr}\theta^{RTE} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{{}^{cr}\sigma_{xx}^{RTE}}{2\sigma_0 - {}^{cr}\sigma_{xx}^{RTE}} \quad (6.23)$$

6.4.3 Test standardne triaksijalne ekstenzije (CTE)

Komponente tenzora napona i komponente devijatora tenzora napona za CTE test mogu se matrično predstaviti u obliku:

$$\sigma^{\text{CTE}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 + \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 + \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (6.24.1)$$

$$S^{\text{CTE}} \Rightarrow \frac{\sigma_{yy}}{3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.24.2)$$

Ako u jednačinu (6.13) unesemo odgovarajuće izraze (6.24) za naponsko stanje definisano izrazom (6.16), jednačinu (6.13) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \delta = & (1-2k)^2 n^2 \frac{p_a^{-4} a_1^2 \eta^2 \xi^{-2(\eta+1)}}{(1+\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0 + 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{2(n-1)} + \\ & + \frac{p_a^{-4} a_1 \eta (\eta+1) \xi^{-(\eta+2)}}{(1+\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0 + 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^n \left\{ \left[\frac{2\sqrt{1+\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0 + 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] - \right. \\ & \left. - 4k \left[-\frac{\sqrt{1+\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0 + 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] + 2k^2 \left[\frac{\sqrt{1+\beta}}{3} + 2n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0 + 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 4\gamma \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.24.1)$$

gde su:

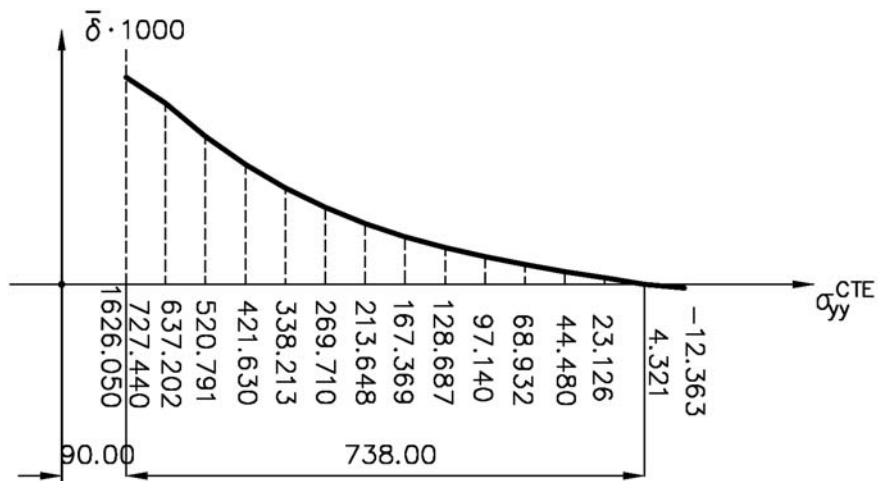
$$k = \frac{\left[2c_1^2 - \frac{2}{3}c_1 + \frac{5-4\nu}{9(1+\nu)} \right] + (1-\nu)c_2}{2 \left[\left(c_1^2 - \frac{1}{3}c_1 - \frac{2}{9} \right) - \nu c_2 \right]} \quad (6.24.2)$$

$$c_1 = \left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{yy}} + 2 \right) \left[n \alpha \left(\frac{3\sigma_0 + 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \quad (6.24.3)$$

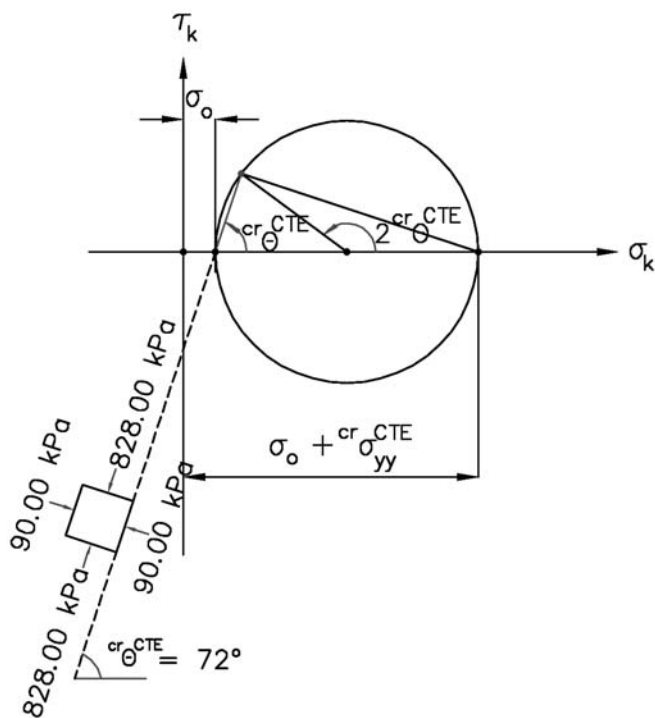
$$c_2 = \frac{a_1 \eta p_a^2}{\xi^{(\eta+1)} E \sigma_{yy}} \left(\frac{3\sigma_0 + 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^n \sqrt{\left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{yy}} + 2 \right)^2 \left[n \alpha \left(\frac{3\sigma_0 + 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right]^2 \frac{3}{(1+\beta)^3} + \frac{2}{3(1+\beta)}} \quad (6.24.4)$$

Posle elementarnih transformacija jednačinu (6.24.1) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\bar{\delta} = \left[n^2 \frac{\eta}{\eta+1} + n(n-1) \right] \alpha \left(\frac{3\sigma_0 + 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma + \left(\frac{1+k}{1-2k} \right)^2 \frac{2\sqrt{1+\beta}}{3} = 0 \quad (6.25)$$



Slika 6.7.1 Rešenje jednačine stabilnosti za standardnu triaksijalnu ekstenziju (CTE – test)



Slika 6.7.2 Mohr-ov krug napona za CTE test

Rešenje karakteristične jednačine stabilnosti (6.25) je prikazano na slici 6.7.1. Sa slike 6.7.2 vrednost kritičnog ugla θ je:

$${}^{cr}\theta^{CTE} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{{}^{cr}\sigma_{yy}^{CTE}}{2\sigma_0 + {}^{cr}\sigma_{yy}^{CTE}} \quad (6.26)$$

6.4.4 Test redukovane triaksijalne kompresije (RTC)

Za test redukovane triaksijalne kompresije komponente tenzora napona i komponente devijatora tenzora napona mogu se matrično predstaviti u obliku:

$$\sigma^{\text{RTC}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 - \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 - \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (6.27.1)$$

$$S^{\text{RTC}} \Rightarrow \frac{\sigma_{yy}}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.27.2)$$

Ako u jednačinu (6.13) unesemo odgovarajuće izraze (6.27) za naponsko stanje definisano izrazom (6.16), jednačinu (6.13) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \delta = & (1-2k)^2 n^2 \frac{p_a^{-4} a_1^2 \eta^2 \xi^{-2(\eta+1)}}{(1-\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0 - 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{2(n-1)} + \\ & + \frac{p_a^{-4} a_1 \eta (\eta+1) \xi^{-(\eta+2)}}{(1-\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0 - 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^n \left\{ \left[\frac{2\sqrt{1-\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0 - 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] - \right. \\ & \left. - 4k \left[-\frac{\sqrt{1-\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0 - 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] + 2k^2 \left[\frac{\sqrt{1-\beta}}{3} + 2n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0 - 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 4\gamma \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.28.1)$$

gde su:

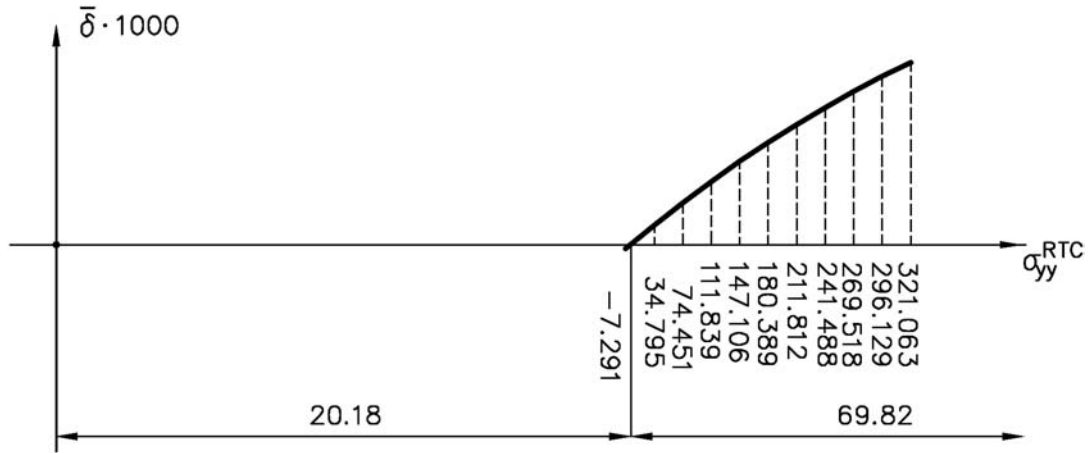
$$k = \frac{\left[2c_1^2 - \frac{2}{3}c_1 + \frac{5-4\nu}{9(1+\nu)} \right] + (1-\nu)c_2}{2 \left[\left(c_1^2 - \frac{1}{3}c_1 - \frac{2}{9} \right) - \nu c_2 \right]} \quad (6.28.2)$$

$$c_1 = \left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{yy}} - 2 \right) \left[n \alpha \left(\frac{3\sigma_0 - 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \quad (6.28.3)$$

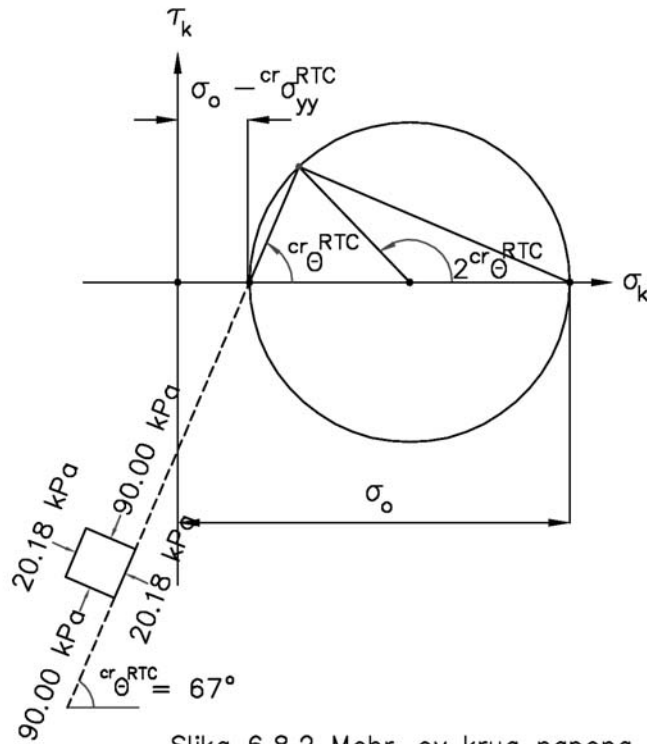
$$c_2 = \frac{a_1 \eta p_a^2}{\xi^{(\eta+1)} E \sigma_{yy}} \left(\frac{3\sigma_0 + \sigma_{yy}}{p_a} \right)^n \sqrt{\left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{yy}} - 2 \right)^2 \left[n \alpha \left(\frac{3\sigma_0 - 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right]^2 \frac{3}{(1-\beta)^3} + \frac{2}{3(1-\beta)}} \quad (6.28.4)$$

Posle elementarnih transformacija jednačinu (6.28.1) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\bar{\delta} = \left[n^2 \frac{\eta}{\eta+1} + n(n-1) \right] \alpha \left(\frac{3\sigma_0 - 2\sigma_{yy}}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma + \left(\frac{1+k}{1-2k} \right)^2 \frac{2\sqrt{1-\beta}}{3} = 0 \quad (6.29)$$



Slika 6.8.1 Rešenje jednačine stabilnosti za redukovanu triaksijalnu kompresiju (RTC – test)



Slika 6.8.2 Mohr–ov krug napona za RTC test

Rešenje karakteristične jednačine stabilnosti (6.29) je prikazano na slici 6.8.1. Sa slike 6.8.2 vrednost kritičnog ugla θ je:

$$\theta^{cr RTC} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sigma_{yy}^{cr RTC}}{2\sigma_o - \sigma_{yy}^{cr RTC}} \quad (6.30)$$

6.4.5 Test triaksijalne kompresije (TC)

Za test triaksijalne kompresije komponente tenzora napona i komponente devijatora tenzora napona mogu se matrično predstaviti u obliku:

$$\sigma^{\text{TC}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_0 + \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 - \frac{1}{2}\sigma_{xx} \end{bmatrix} \quad (6.31.1)$$

$$S^{\text{TC}} \Rightarrow \frac{\sigma_{xx}}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.31.2)$$

Ako u jednačinu (6.13) unesemo odgovarajuće izraze (6.14) za naponsko stanje definisano izrazom (6.31), jednačinu (6.13) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \delta = & (1-2k)^2 n^2 \frac{p_a^{-4} a_1^2 \eta^2 \xi^{-2(\eta+1)}}{(1-\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{2(n-1)} + \\ & + \frac{p_a^{-4} a_1 \eta (\eta+1) \xi^{-(\eta+2)}}{(1-\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^n \left\{ \left[\frac{2\sqrt{1-\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] - \right. \\ & \left. - 4k \left[-\frac{\sqrt{1-\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] + 2k^2 \left[\frac{\sqrt{1-\beta}}{3} + 2n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 4\gamma \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.32.1)$$

gde su:

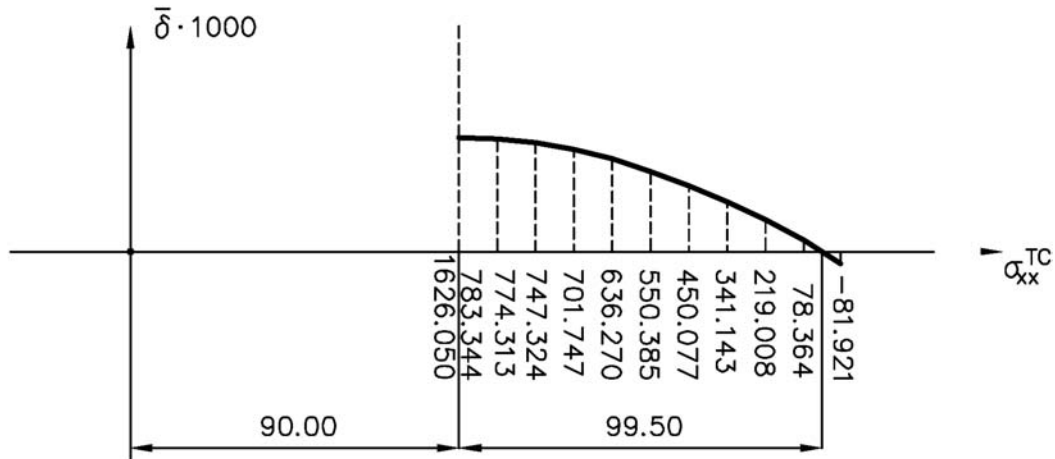
$$k = \frac{\left[\frac{3}{2}(2c_1 - 1) - (1+\nu)c_2 \right] \left[2c_1^2 + c_1 + \frac{5-4\nu}{4(1+\nu)} + (1-\nu)c_2 \right]}{\left[3(c_1 + 1) + 2(1+\nu)c_2 \right] \left[2c_1^2 - 2c_1 + \frac{1}{2} + (1-\nu)c_2 \right]} \quad (6.32.2)$$

$$c_1 = \frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}} \left[n \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \quad (6.32.3)$$

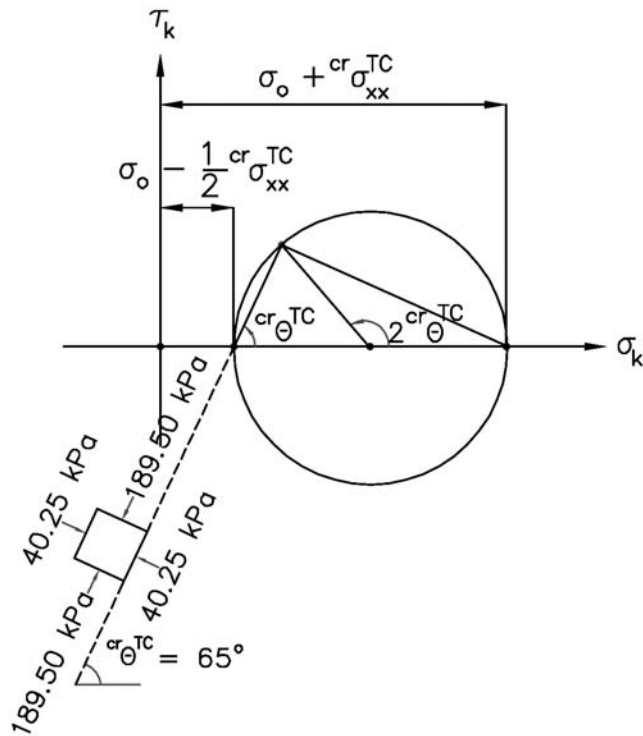
$$c_2 = \frac{a_1 \eta p_a^2}{\xi^{(\eta+1)} E \sigma_{xx}} \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^n \sqrt{\left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}} \right)^2 \left[n \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right]^2 \frac{3}{(1-\beta)^3} + \frac{3}{4(1-\beta)}} \quad (6.32.4)$$

Posle elementarnih transformacija jednačinu (6.32.1) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\bar{\delta} = \left[n^2 \frac{\eta}{\eta+1} + n(n-1) \right] \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma + \left(\frac{1+k}{1-2k} \right)^2 \frac{2\sqrt{1-\beta}}{3} = 0 \quad (6.33)$$



Slika 6.9.1 Rešenje jednačine stabilnosti za triaksijalnu kompresiju (TC – test)



Slika 6.9.2 Mohr–ov krug napona za TC test

Rešenje karakteristične jednačine stabilnosti (6.33) je prikazano na slici 6.9.1. Sa slike 6.9.2 vrednost kritičnog ugla θ je:

$${}^{cr}\theta^{TC} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{3 {}^{cr}\sigma_{xx}^{TC}}{4\sigma_0 + {}^{cr}\sigma_{xx}^{TC}} \quad (6.34)$$

6.4.6 Test triaksijalne ekstenzije (TE)

Za test triaksijalne ekstenzije komponente tenzora napona i komponente devijatora tenzora napona mogu se matrično predstaviti u obliku:

$$\sigma^{\text{TE}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_0 - \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 + \frac{1}{2}\sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 + \frac{1}{2}\sigma_{xx} \end{bmatrix} \quad (6.35.1)$$

$$S^{\text{TE}} \Rightarrow \frac{\sigma_{xx}}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.35.2)$$

Ako u jednačinu (6.13) unesemo odgovarajuće izraze (6.14) za naponsko stanje definisano izrazom (6.35), jednačinu (6.13) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \delta = & (1-2k)^2 n^2 \frac{p_a^{-4} a_1^2 \eta^2 \xi^{-2(n+1)}}{(1+\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{2(n-1)} + \\ & + \frac{p_a^{-4} a_1 \eta (\eta+1) \xi^{-(n+2)}}{(1+\beta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^n \left\{ \left[\frac{2\sqrt{1+\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] - \right. \\ & \left. - 4k \left[-\frac{\sqrt{1+\beta}}{3} + n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] + 2k^2 \left[\frac{\sqrt{1+\beta}}{3} + 2n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 4\gamma \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.36.1)$$

gde su:

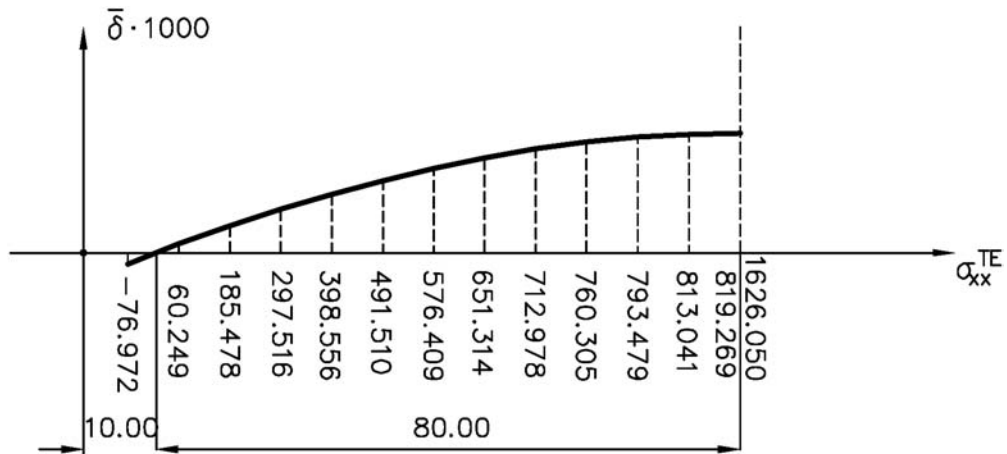
$$k = \frac{\left[\frac{3}{2}(2c_1 + 1) + (1+\nu)c_2 \right] \left[2c_1^2 - c_1 + \frac{5-4\nu}{4(1+\nu)} + (1-\nu)c_2 \right]}{\left[3(c_1 - 1) - 2(1+\nu)c_2 \right] \left[2c_1^2 + 2c_1 + \frac{1}{2} + (1-\nu)c_2 \right]} \quad (6.36.2)$$

$$c_1 = \frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}} \left[n\alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right] \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \quad (6.36.3)$$

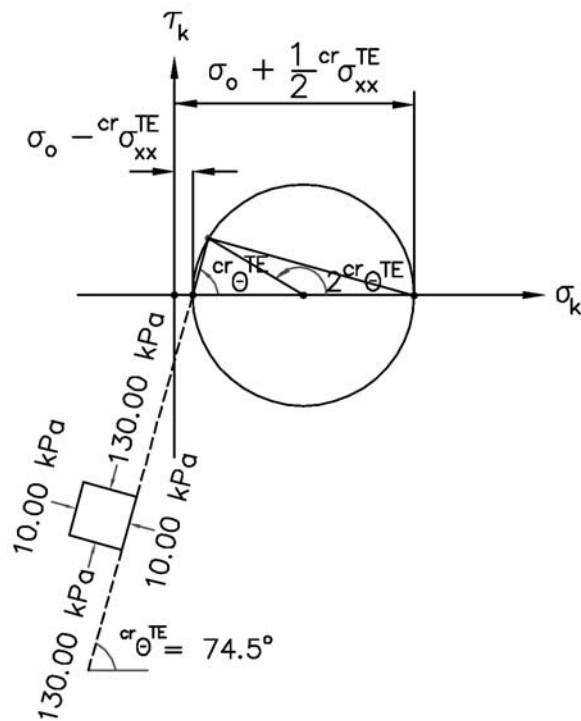
$$c_2 = \frac{a_1 \eta p_a^2}{\xi^{(n+1)} E \sigma_{xx}} \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^n \sqrt{\left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}} \right)^2 \left[n\alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma \right]^2 \frac{3}{(1+\beta)^3} + \frac{3}{4(1+\beta)}} \quad (6.36.4)$$

Posle elementarnih transformacija jednačinu (6.36.1) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\bar{\delta} = \left[n^2 \frac{\eta}{\eta+1} + n(n-1) \right] \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma + \left(\frac{1+k}{1-2k} \right)^2 \frac{2\sqrt{1+\beta}}{3} = 0 \quad (6.37)$$



Slika 6.10.1 Rešenje jednačine stabilnosti za triaksijalnu ekstenziju (TE – test)



Slika 6.10.2 Mohr–ov krug napona za TE test

Rešenje karakteristične jednačine stabilnosti (6.37) je prikazano na slici 6.10.1. Sa slike 6.10.2 vrednost kritičnog ugla θ je:

$$\theta^{\text{cr}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{3 \sigma_{xx}^{\text{TE}}}{4 \sigma_0 - \sigma_{xx}^{\text{TE}}} \quad (6.38)$$

6.4.7 Test triaksijalnog prostog smicanja (SS)

Za test prostog smicanja komponente tenzora napona i komponente devijatora tenzora napona mogu se matricno predstaviti u obliku:

$$\sigma^{SS} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_0 + \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 - \sigma_{xx} \end{bmatrix} \quad (6.39.1)$$

$$S^{SS} \Rightarrow \Delta\sigma_{xx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.39.2)$$

Ako u jednačinu (6.13) unesemo odgovarajuće izraze (6.14) za naponsko stanje definisano izrazom (6.39), jednačinu (6.13) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \delta = & (1+k-k_1)^2 n^2 p_a^{-4} a_1^2 \eta^2 \xi^{-2(\eta+1)} \left(\frac{3\sigma_0}{p_a}\right)^{2(n-1)} + \\ & + p_a^{-4} a_1 \eta (\eta+1) \xi^{-(\eta+2)} \left(\frac{3\sigma_0}{p_a}\right)^n \left\{ \left[\frac{2}{3} + n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a}\right)^{n-2} - 2\gamma \right] - \right. \\ & - (2k_1 - 2k + 2kk_1) \left[-\frac{1}{3} + n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a}\right)^{n-2} - 2\gamma \right] + \\ & \left. + (k^2 + k_1^2) 2 \left[\frac{\sqrt{1+\beta}}{3} + 2n(n-1) \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a}\right)^{n-2} - 4\gamma \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6.40.1)$$

gde su:

$$k = \frac{c_1^2 + c_1 + 2\frac{v}{1+v} + vc_2}{2c_1^2 - c_1 + \frac{1}{1+v} + (1-v)c_2} + k_3 \frac{c_1^2 - c_1 - 2\frac{v}{1+v} + vc_2}{2c_1^2 - c_1 + \frac{1}{1+v} + (1-v)c_2} \quad (6.40.2)$$

$$k_1 = -k_3 \frac{2c_1^2 + 2c_1 + \frac{1}{1+v} + (1-v)c_2}{2c_1^2 - c_1 + \frac{1}{1+v} + (1-v)c_2} \quad (6.40.3)$$

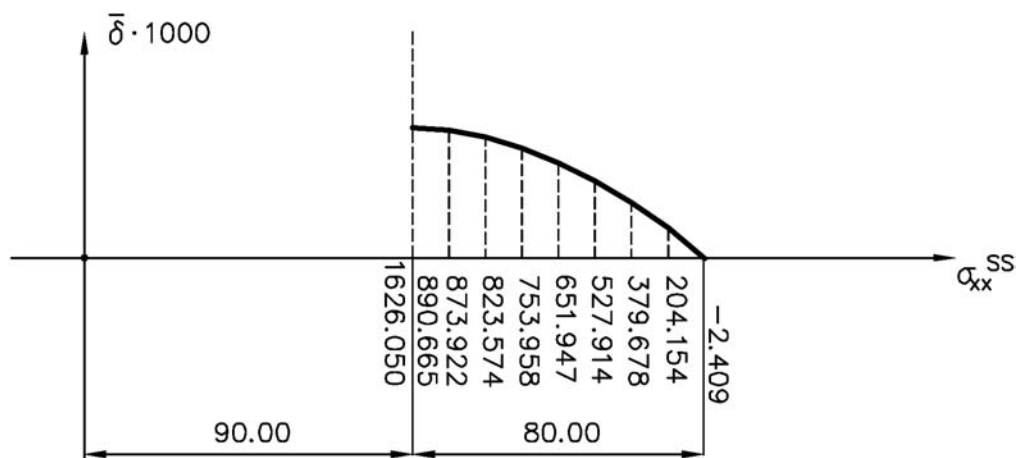
$$k_3 = \frac{2c_1^2(3-c_1) + 3(1+v)c_1^2c_2 - 2c_1(c_2 + \frac{2}{1+v}) + (1-v-2v^2)(c_2 + \frac{2}{1+v})^2}{6c_1^2(1+c_1) + (5+v)c_1^2c_2 + (c_2 + \frac{2}{1+v}) \left[2(1-2v)(1+c_1) + (1-3v)c_2 \right]} \quad (6.40.4)$$

$$c_1 = \frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}} \left[n\alpha \left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}}\right)^{n-2} - 2\gamma \right] \quad (6.40.5)$$

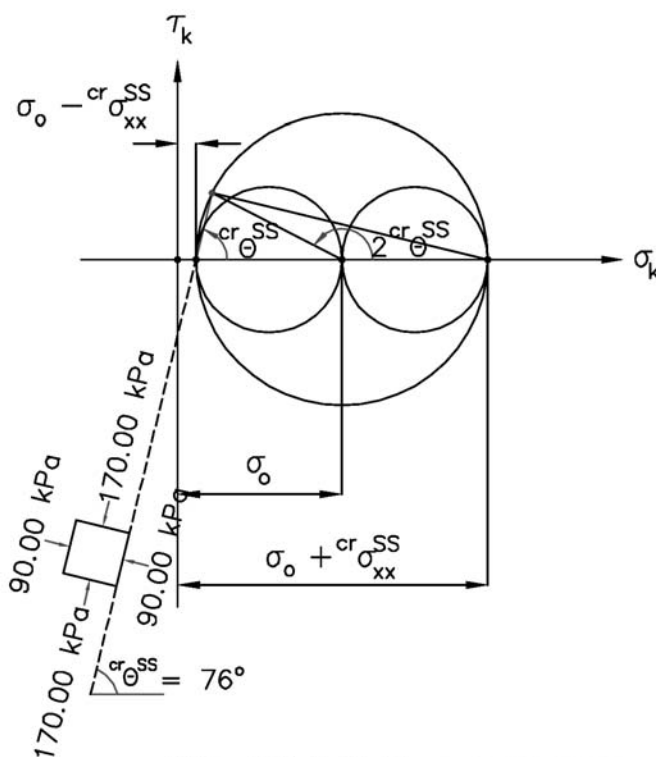
$$c_2 = \frac{a_1 \eta p_a^2}{\xi^{(\eta+1)} E \sigma_{xx}} \left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}}\right)^n \sqrt{3 \left(\frac{3\sigma_0}{\sigma_{xx}}\right)^2 \left[n\alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a}\right)^{n-2} - 2\gamma \right]^2 + 1} \quad (6.40.6)$$

Posle elementarnih transformacija jednačinu (6.40.1) možemo napisati u sledećem obliku:

$$\bar{\delta} = \left[n^2 \frac{\eta}{\eta+1} + n(n-1) \right] \alpha \left(\frac{3\sigma_0}{p_a} \right)^{n-2} - 2\gamma + \frac{2}{3} \left[1 - 3 \frac{k-k_1 - kk_1}{(1+k-k_1)^2} \right] = 0 \quad (6.41)$$



Slika 6.11.1 Rešenje jednačine stabilnosti za prosto smicanje (SS – test)



Slika 6.11.2 Mohr–ov krug napona za SS test

Rešenje karakteristične jednačine stabilnosti (6.41) je prikazano na slici 6.11.1. Sa slike 6.11.2 vrednost kritičnog ugla θ je:

$$cr \theta^{SS} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{cr \sigma_{xx}^{SS}}{\sigma_0} \quad (6.42)$$

7. ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

U radu je formulisan nelinearni Mohr-Coulombov konstitutivni model u cilju opisivanja ponašanja peska. U NMC modelu ugao smičuće otpornosti tla φ nije konstantan u odnosu na normalni napon, već ima hiperboličku funkcionalnu zavisnost. Za opisivanje elasto-plastičnog ponašanja tla, prema ovako definisanoj hiperboličkoj anvelopi loma, potrebno je odrediti šest parametara. Dva parametra opisuju elastične osobine tla: moduo elastičnosti tla E i Poisson-ov koeficijent tla ν , a četiri parametra definišu smičuću otpornost tla: kohezija c , bazni ugao φ_B , maksimalna dilatancija $\Delta\varphi$ i normalni napon p_N pri kome maksimalna dilatancija dostiže polovinu svoje vrednosti. NMC model ima mali broj parametara i relativno jednostavnu proceduru za njihovo određivanje. Na osnovu analize rezultata sprovedenih proračuna može se zaključiti da model pokazuje dobro slaganje sa referentnim rezultatima laboratorijskih ispitivanja tla koji su publikovani u stručnoj literaturi.

Konstitutivni NMC model je iskorišćen za formulisanje odgovarajućeg numeričkog modela, koji je zasnovan na linearizaciji principa virtuelnog rada u materijalnoj deskripciji. Celokupno izlaganje i rešavanje graničnog problema, koji predstavlja matematički model analizirane pojave, usmereno je ka primeni u MKE, mada predloženi NMC model i postupak integracije konstitutivnih jednačina mogu biti korišćeni i u drugim pristupima nelinearne analize.

Osnovne prednosti predloženog numeričkog modela nad metodama granične ravnoteže proračuna nosivosti temelja su:

- nisu potrebne pretpostavke za određeno stanje (geometriju) u toku procesa plastičnog deformisanja;
- konstitutivni NMC model uključuje i uticaj srednjeg glavnog napona;
- omogućava utvrđivanje zona progresivnog loma;
- homogenost je ograničena samo na Gausove integracione tačke;
- opterećenje se može dodavati postepeno tokom rešavanja nelinearnog problema.

Na osnovu analize rezultata sprovedenih proračuna, preko prikazanih dijagrama granične nosivosti i razvoja zona plastičnosti može se konstatovati da postoji kvalitativna i kvantitativna saglasnost sa odgovarajućim teorijskim rešenjima klasične mehanike tla. Mada je model prvenstveno razvijen za krupnozrne materijale, može se na isti način primeniti na sitnozrna tla u dreniranim uslovima kako je to i prikazano u primeru 5.3.2.

U šestom poglavlju je određeno kritično opterećenje HISS modela uz korišćenje inkrementalno iterativnog za rešavanje konstitutivnih jednačina. Predloženim postupkom je pokazano da je određivanje kritičnog opterećenja u analizi materijalne stabilnosti elasto-plastičnog modela moguće svesti na određivanje onog stanja pri kome dolazi do promene znaka osnovnih kvantiteta metrike površi tečenja. Upoređivanjem dobijenih numeričkih rezultata sa datim eksperimentalnim rezultatima standardnih triaksijalnih opita (CTC, TC, TE)^[32] jasno se uviđa dobra usaglašenost uspostavljenog kriterijuma sa prikazanim ponašanjem peska u triaksijalnom opitu. Na kraju, napomenimo da se predloženi postupak može dalje generalisati i na druge za inženjersku praksu interesantne materijalne modele, kao što su npr. modeli koji obuhvataju ciklično opterećenje materijala u nedreniranim uslovima, modeli anizotropne plastičnosti tla.

LITERATURA

1. Argyris, J.H., and Kelsey, S., "Energy Theorems and Structural Analyses", *Butterworth*, London. (1960)
2. Atkinson J.H. and Bransby P.L., "The mechanics of soils, An introduction to critical state soil mechanics", *McGraw-Hill*, London (1978)
3. Atkinson J.H. and Farrar D.M., "Stress path tests to measure soil strength parameters for shallow slips", *Proceedings of the 11th Int. Conf. SMFE*, San Francisco, Vol.2, 983-986, (1985)
4. Atkinson J.H., "The mechanics of soils and foundations", *McGraw-Hill Int.*, (1993)
5. Besseling J. F., "Non-linear analysis of structures by the finite element method as a supplement to linear analysis", *Compo Meth. Appl. Mech. Eng.*, 3, 173 - 194, (1974)
6. Barton N., "The shear strength of rock and rock joints", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.13, 255-279 (1977)
7. Barton N. and Kjaernsli B., "Shear strength of rockfill", *Journal of geotechnical engineering, ASCE*, Vol.107, No.GT7, 873-891 (1981)
8. Bathe K. J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs*, New Jersey, (1982)
9. Besseling J. F., "Non-linear analysis of structures by the finite element method as a supplement to linear analysis", *Compo Meth. Appl. Mech. Eng.*, 3, 173 - 194, (1974)
10. Bishop A.W. and Henkel D.J., "The measurements of soil properties in the triaxial test", *Edward Arnold*, London, (1962)
11. Bishop A.W, Webb D.L. and Lewin P.I., "Undisturbed samples of London clay from the Ashford Common shaft: Strength-effective stress relationship", *Geotechnique*, 15, No.1, 1-31, (1965)
12. Bićanić N. P., "Exact evaluation of contact stress state in computational elasto-plasticity", *Eng. Comput.*, 6, 67 - 73, (1989)
13. Bolton M.D., "The strength and dilatancy of sands", *Geotechnique*, 36, No.1, 1986, 65-78, (1986)
14. Bolton M.D. and Lau C.K., "Scale effects in the bearing capacity of granular soils", *XII ICSMFE*, Vol.2, Rio de Janeiro, 895-898, (1989)
15. Borst, de R., "Integration of plasticity equations for singular yield functions", *Computers and Structures*, Vol. 26, pp. 823 - 829, (1987)
16. Borst, de R., "Bifurcations in Finite Elements Models with a Non-associated Flow Law", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 12(1), 99-117, (1988)
17. D. Božinović, Geotehničke osobine terena u području Beograda koje izgrađuju koherentni gornjemiocenski sedimenti, *Izgradnja*, Beograd, (1979)
18. Charles J.A. & Watts K.S., "The influence of confining pressure on the shear strength of compacted rockfill", *Geotechnique*, 30 (4): 353-367, (1980)
19. Chen, W.F., "Limit analysis and soil plasticity", *Elsevier*, New York, (1975)
20. Christian J. T., A. J. Hagmann A. J. and Marr W.A: "Incremental Plasticity Analysis of Frictional Soils", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 1 343-375, (1977)
21. Christian J. T., and Desai C.S., "Constitutive Laws for Geologic Media", in Num. Meth. in Geotech. Engin., Christian J. T., and Desai C.S. (Eds.), *McGraw-Hill Book Company*, New York, Chap. 2, (1977)
22. Clough R.W., "The finite element in plane stress analysis", *Proceedings 2nd Conf. on Electronic Computation*, Pittsburg, (1960)
23. Coulomb C.A., "Essai sur une application des regles des maximis et minimis a quelques problemes de statique relatifs a l'architecture", *Mem. Acad. Roy. des Sciences*, Paris, 3, 343-382, (1776)
24. Cook R. D., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", *J.Wiley and Sons*, (1974)

25. Crisfield M. A., "Plasticity computations using the Mohr-Coulomb yield criterion", *Eng. Comput.* 16. 4., December (1987)
26. Crisfield M. A., "A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through", *Computers and Structures*, Vol. 13, pp. 55 - 62, (1981)
27. Crisfield M. A., "Finite elements and solution procedures for structural analysis", *Pineridge Press*, Swansea, U.K. (1986)
28. Crisfield M. A., "A faster modified Newton-Raphson iteration", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 20, 267 - 278, (1979)
29. Damjanić F. 8. Owen O. R. , "Implicit time integration of elasto-vicoplastic solids subject to the Mohr-Coulomb yield criterion", *Int. J.Numer. Methods Eng.*, Vol. 18, 1873 - 1881, (1982)
30. Desai C. S. & Abel J. F., "Introduction to the Finite Element Method", *Van Nostrand*, 1972.
31. Desai, C.S., and Siriwardine, H.J., "Constitutive laws for engineering materials", *Prentice Hall, Englewood-Cliffs*, New Jersey (1984)
32. Desai, C.S., "Notes for Advanced School-Numerical Methods in Geomechanics Including Modelling", Udine, Italy, July 10-14, (1989)
33. Desai, C.S, Somasundaram, S. and G. Frantziskonis, G., "A hierarchical approach for constitutive modeling of geological materials", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 10(3), 225-257, (1987)
34. Dinkler, D., and Kroplin, B., "Global constraints applied to static instability analysis", *Third Int. Conf. Numerical Methods for Non-linear Problems*, 1, 41-60, Dubrovnik (1986)
35. DiMaggio, F.L., and Sandler, I.S., "Material Models for Granular Soils", *J.Eng.Mech. Div., ASCE* ,97, 935-950, (1971)
36. Drucker, D.C. , "Some Implications of Work Hardening and Ideal Plasticity", *Quarterly of Applied Math.*, 7(4), 411-418, (1950)
37. Drucker, D.C. and Prager, W., "Soil Mechanics and Plastic Analysis of Limit Design", *Quart.Appl. Mathematics*,10,157-165(1952)
38. Drucker, D.C., "Stress-Strain Relations in the plastic Range of Metals-Experiments and Basic Concepts", *Rheology: Theory and Applications*,(Ed. F.R. Eirich), 1, 97-119, *Academic Press*, New York,(1956)
39. Drucker, D.C. , "A Definition of Stable Inelastic Material", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 26, 106-112(1959)
40. Duncan J.M. and Chang C.Y., "Nonlinear analysis of stress and strain in soils", *Journal of Soil Mech. and Found. Engineering, ASCE*, Vol. 96, No. SM5, 1629-1653, (1970)
41. Duncan J.M. and Buchigani A.L., "An engineering manual for settlement studies", *Geot. Eng. Report, Dept. of Civil Eng.*, Univ. of California at Berkeley, (1976)
42. Dunica Š., Kolundžija B., "Nelinearna analiza konstrukcija", Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, *Naučna knjiga*, Beograd, (1986)
43. Fritz P., Numerical solution of rheological problems in rock", *Proceedings Int. Symp. Numerical Models in Geomechanics*, Zurich, Sept., (1982)
44. Fung, Y.C., "Foundations of Solid Mechanics", *Prentice Hall, Englewood-Cliffs*, New Jersey(1965)
45. Green A.E. and Atkins J.E., "Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics", *Clarendon Press*, Oxford (1960)
46. Goodman R.E., "Introduction to Rock Mechanics", *John Wiley & Sons*, New York (1980)
47. Gurtin E.M., "An Introduction to Continuum Mechanics", *Academic Press*, New York (1981)
48. Haar M.E., "Foundations of theoretical soil mechanics", *McGraw-Hill*, New York, (1966)
49. Hajdin N., "Uvod u teoriju elastičnosti", *Predavanja na III stepenu studija na konstruktivnom odseku Građevinskog fakulteta u Beogradu*, Beograd, (1965)

50. Hajdin N., "Teorija površinskih nosača", Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, *Zavod za grafičku tehniku Tehnološko metalurškog fakulteta Beograd*, (1984)
51. Hansen J.B., "A general formula for bearing capacity", *Buletin No.11, Danish Technical Institute, Copenhagen*, (1961).
52. Hill K., "The mathematical theory of plasticity", *Oxford University Press, Oxford*. (1950)
53. Hinton E. & Owen D. R. J., "Finite Element Programming", *Academic Press, London*, (1977)
54. Hinton E. & Owen D. R. J., "An Introduction to Finite Element Computations", *Pineridge Press, Swansea* (1979)
55. Hoeg K., Christian J. T. and Whitman R.V., "Settlement of Strip Load on Elastic-Plastic Soil", *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol. 94, No. SM2, March., 431-445, (1968)
56. Hoek E. & Brown T.E., "Empirical strength criterion for rock masses"; *Inter. J. Geotech. Eng. Div., ASCE*, 106 (9): 1013, (1980)
57. Hofstetter, G., Simo J.C., Taylor R.L., "A modified cap model: closest point solution algorithms", *Comput. & Structure*, vol 48, 203-214, (1993)
58. Hughes, T.J.R., "Numerical implementation of constitutive models: Rate independent deviatoric plasticity", Workshop on Theor. Foundat. for large-scale Comput. of Nonlinear Material Behaviour, *North-Western University, Evanston, IL* (1983)
59. Качанов Л.М., "Основы теории пластичности", *М.Наука*, 420 с. (1969)
60. Kojić M., "Primenjena teorija plastičnosti", *Biro za građevinarstvo, Beograd* (1979)
61. Kojić, M., "A general concept of implicit integration of constitutive relations for inelastic material deformation", (in serbian), *Cen. for scien. research SANU, Kragujevac* (1993)
62. Kojić, M., Computational Procedures in Inelastic Analysis of Solids and Structures, *Center for Scientific Research of Serbian Academy of Science and Arts and University of Kragujevac, Kragujevac*, (1997)
63. Kondner R.L., "Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils", *Journal of SMFE, ASCE*, Vol.89, No.SM1, February, 115-143, (1963)
64. Kondner R.L. and Zelasko J.S., "A hyperbolic stress-strain formulation for sands", *2nd. Pan -American Conf., SMFE, Brasil*, (1963)
65. Krieg, R.D. and Krieg, D.B., "Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model", *ASME J. Pressure Vessel Tech.*, 99, 510-515 (1977)
66. Lade P., Kim M., "Single hardening constitutive model for soil, rock and concrete", *Int. Jour. Solids Structures*, Vol 32 (Nu 14), 1963-1978, (1995)
67. Lade P.V., "Elastoplastic Stress - Strain Theory for Cohesionless Soils with Curved Yield Surface", *Int. Jour. Solids Struct., ASCE*, Vol 13, 1019-1035, (1977)
68. Lade P.V., Duncan J.M, "Elastoplastic Stress - Strain Theory for Cohesionless Soil", *Jour. Geotech. Engng Div., ASCE*, Vol.101, 1037-1053, (1975)
69. Lade, P.V., "Effects of Voids and Volume Changes on the Behaviour of Frictional Materials", *Inter Journ. for Numerical and Analytical Math. in Geomechanics*, Vol 12 (351-370), (1988)
70. Lambe T.W. and Whitman,R.V., "Soil Mechanics", *John Wiley & Sons, New York*, (1969)
71. Lazović M., "Prilog nelinearnoj analizi aksijalno opterećenog šipa", Doktorska disertacija, *Građevinski Fakultet Univerziteta u Beogradu*, (1988)
72. Lazović M. i Vukićević M., "Konstitutivni modeli tla. I deo, Elastični modeli", *G.F., Beograd*, (1997).
73. Lelović S., "Primena Mohr-Coulomb-ovog modela za rešavanje nekih problema u geotehnici", Magistarski rad, *Građevinski Fakultet Univerzitet u Beogradu*, 1990
74. Lovel C.W. and J. M. Johnson J.M., "Shearing behavior of compacted clay after saturation" in the Laboratory Shear Strength of Soil, *ASTM Special Technical Publication 740*, Ed. R. N. Young and F. C. Townsend, Chicago IL, p. 277., (25 June 1980)

75. Maksimović M., "Nonlinear failure envelope for soils", *Journal of Geotechnical Engineering, American Society of Civil Eng.*, Vol.115 No.4 April, 581-586, (1989)
76. Maksimović M., "On the residual shearing strength of clays", *Geotechnique* 39, No.2, 347-351, (1989)
77. Maksimović M., "New description of the shear strength for rock joints", *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 25(4), Springer Verlag, 275-284, (1992)
78. Maksimović M., "The shear strength components of a rough rock joint", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Pergamon, Vol.33, No.8, 769-783, (1996)
79. Maksimović M. i Santrač, P., "Zbirka zadataka iz osnova mehanike tla", Peto izdanje, (2001)
80. Maksimović M., "Mehanika Tla" *AGM Books 4th Ed.* (in Serbian) p. 195., (2008)
81. Marachi N.D., Duncan J.M., Chan C.K. and Seed H.B., "Plane strain testing of sand" in the Laboratory Shear Strength of Soil, *ASTM Special Technical Publication 740*, Ed. R. N. Young and F. C. Townsend, Chicago IL, p. 294., (25 June 1980)
82. Marcal P. V. & King. I. P., "Elasto-plastic analysis of twodimensional stress sistem by the finite element method", *Int. J. Mech., Sci.*, 9, 143 - 155, 1967.
83. Marques J. M. M. C., "Stress computation in elastoplasticity", *Eng. Comput.*, 1, 42 - 51, (1989)
84. Meyerhof G.G., "Penetration tests and bearing capacity of cohesionless soils", *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol. 82, No. SM1, Jan., 1-19, (1956)
85. Meyerhof G.G., "Some recent research on the bearing capacity of foundations", *Canadian Geotechnical Journal*, No.1, 16-26, (1963)
86. Meyerhof G.G., "Shallow foundations", *Journal Soil Mechanics and Foundation Eng. ASCE*, Vol 91, No.SM2, 21-31, (1965)
87. Milović D., "Problemi fundiranja na lesnom tlu", *Vojvodanska akademija nauka*, Novi Sad, (1987)
88. Mitchell J.K., "Fundamentals of soil behaviour", *John Wiley & Sons*, (1976)
89. Mićunović M., "Primenjena mehanika kontinuuma", *Naučna knjiga*, Beograd (1980)
90. Mohr O., "Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik", 2nd Ed., W.Ernst. Berlin, (1914)
91. Mrozz Z., Norris, V.A, Zienkiewicz O.C., "Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto - plastic deformation of soils", *Geotechnique* 29, No 1, 1-34, (1979)
92. Nayak G. C. & Zienkiewicz, O. C., "Elasto-plastic Stress Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5, 113 - 135, (1972)
93. Nayak G. C. & Zienkiewicz, O. C. "Convenient forms of stress invariants for plasticity", *Proceedings Am. Soc. Civ. Eng. , Proc ASCE*, Vol. 98, 949-954, (1972)
94. Nearlović-Veljković N., "Pisana predavanja iz predmeta Mehanika kontinuuma", Poslediplomska nastava na konstruktivnom odseku Građevinskog fakulteta u Beogradu, (1986)
95. Nearlović-Veljković N., Plavšić M., "Teorija elastičnosti", *Naučna knjiga*, (1980)
96. Nonveiller E., "Mehanika tla i temeljenje", III izdanje, *Školska knjiga*, Zagreb, (1990)
97. Novožilov V.V., "Teorija uprugosti", *GIZ Sudprom*, Leningrad, (1958)
98. Ortiz, M., and Popov, E.P., "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 1561-1576 (1985)
99. Ortiz, M., and Simo, J.C., "An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, 353-366 (1986)
100. Owen D. R. J. & Hinton E., "Finite Elements in Plasticity", *Pineridge Press Ltd .*, U.K, (1980)
101. Paul B., "Modification of the Coulomb-Mohr theory of fracture", *Journal of Applied Mechanics*, 28, 256 - 268, (1961)

102. Pilkey W., Saczalski K. and Schaeffer H. (eds). "Structural Mechanics Computer Programs", *University Press of Virginia*, Charlottesville, (1974)
103. Potts D.M. and Zdravković L., "Finite Elements Analysis in Geotechnical Engineering - Theory", *Thomas Telford Publishing*, London, (1999)
104. Potts D.M. and Zdravković L., "Finite Elements Analysis in Geotechnical Engineering - Application", *Thomas Telford Publishing*, pp. 175-177, London, (1999).
105. Prandtl L., "Über die Härte plastischer Körper", *Nachr. d. Ges. d. Wiss.*, Göttingen, (1920)
106. Prevost, J.H., "Plasticity Theory for Soil Stress-Strain Behaviour", *Journal Engineering Mechanics Division, ASCE*, 104, 1117-1194 (1978)
107. Prevost J., Popescu R, "Constitutive relations for soil materials", *El. Jour. Geot. Engineer.*, 96-09, (1996)
108. Prevost J.H. "Two-surface vs. multi surface plasticity theories", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, (6), 323-338, (1982)
109. Prevost J.H., "Modeling the Behaviour of Geomaterials", in *Geotechnical Modeling and Applications*, Ed. Sayed B.S.M., *Gulf Publishing Co.*, 1987, p. 8-76, (1987)
110. Radenković D. i Ivković M., "O primeni teorije plastičnosti na određivanje nosivosti tla", *Sedmi skup odeljenja tehničkih nauka*, Beograd, 141-151, (1957)
111. Radenković G., "Konačne elastoplastične deformacije", *Građev. fakultet Univerziteta u Beogradu*, (1996)
112. Rankine W.J.M., "On the stability of loose earth", *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, 147, 1, 9-27, (1857)
113. Reissner H., "Zum Erddruckproblem", *Proceedings 1st Int. Congress for Applied Mechanics*, eds. Biezeno and Burgers, Delft, 295-311, (1924)
114. Rice, J.R., "The Localization of Plastic Deformation", *Proceedings 14th Int. Cong. Theoretical and Appl. Mech.*, Delft (Ed. W.T. Koiter), 1, 207-220, Delft, North-Holland, Amsterdam (1976).
115. Rice, J.R., "Plasticity in Soil Mechanics", *Proceedings of the Symposium on the Role of Plasticity in Soil Mechanics*, Ed. by A.C. Palmer, Depart. of Engineering, *University of Cambridge*, 263-280, (1973)
116. Roscoe K.H., Schofield A.N, & Wroth, C.P., "On the yielding of soils", *Geotechnique*, 8,1, 22-52, (1958)
117. Roscoe K.H. and Burland, J. B., "On the generalised stress-strain behaviour of an idealised wet clay", In Heineman & Leckie (eds.) *Engineering plasticity*, *Cambridge University Press*, 535-609, (1968)
118. Rowe P.W., "The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact", *Proceedings Roy. Soc. A*.269, (1962)
119. Rowe P.W., (1969). "The relation between the shear strength of sands in triaxial compression, plane strain and direct shear", *Geotechnique* 19, No.1, 75-86, (1969)
120. Rowe P.W., (1971). "Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil, Stress-strain behavior of soils", *Roscoe memorial symposium*, 143-194, (1971)
121. Rudnicki, J.W., and Rice, J.R., "Conditions for the Localization of Deformation in Pressure-Sensitive Dilatant Materials", *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 371-394 (1975)
122. Runesson, K., Ottosen, N.S., and Peric, D., "Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain", *Int. J. Plast.*, 7(1/2), 99-101, (1991)
123. Sandler, I.S., and Rubin, D., "An Algorithm and a modular subroutine for the cap model", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 3, 173-186, (1979)
124. Savić, Lj., "Contribution to the numerical investigation of some static problems of nonlinear structural behaviour", (in serbian), *Doct. Thesis, Civil Engineering Faculty, Univerzitet Beograd* (1990)
125. Schofield A.N. and Wroth, C.P., "Critical state soil mechanics", *McGraw-Hill Book Co.*, London, (1968)
126. Schreyer, H.L., Kulak, R.F. and Kramer, M.M., "Accurate numerical solution for elasto-plastic model", *Pressure Vessel Tech., ASME*, 101, 226-234 (1979)
127. Scott R.F., "Principles of soil mechanics", *Addison-Wesley Publ. Co.*, (1963)

- 128.Segerlind L. J., "Applied Finite Element Analysis", *John Wiley Sons* (1976)
- 129.Sekulović M., "Metod konačnih elemenata", *Gradevinska knjiga*, Beograd, (1984)
- 130.Simo, J.C., and Ortiz, M., "A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations", *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, 49, 221-245(1984)
- 131.Simo, J.C., and Govindjee, S., "Exact closed-form solution of the return mapping algorithm in plane stress elasto-viscoplasticity", *Eng.Comput.*, 5, 254-258 (1988)
- 132.Simo, J.C., Ju, J.W., Pister, K.S., and Taylor, R.L., "Assessment of Cap Model: Consistent Return Algorithms and Rate-Dependent Extension", *J.Eng.Mech., ASCE*, 114,191-218 (1988)
- 133.Simo, J.C.,Kennedy J.G., and Govindjee, S., "Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numer. algorithms", *Int. J.Numer. Methods Eng.*, 26, 2161-2186 (1988)
- 134.Simo J.C., Taylor R.L., "Consistent tangent operators for rate independent elasto-plasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, Vol 48, 101-118, (1985)
- 135.Simo J.C., Taylor R.L., "A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 22, 649-670, (1986)
- 136.Smith I.M., "Programing the Finite Element Method with aplications to geomechanics", *John Wiley & Sons International*, (1982)
- 137.Skempton A.W., "The bearing capacity of clays", *Proceedings Building Research Congress*, Vol.1,(1951)
- 138.Sokolovski V.V., "Statics of granular media", *Pergamon Press*, Oxford, (1965)
- 139.Spasojević A., "Analiza stacionarnog širenja sfernih i cilindričnih šupljina u krupnozrnom tlu", Doktorska disertacija, *Gradevinski Fakultet Univerziteta u Beogradu*, (1998)
- 140.Spenser, A.J.M., "Theory of Invariants", Continuum Physics, (Ed. A.C. Eringen), 1, 239-353, *Academic Press*, New York (1972)
- 141.Stevanović S., "Fundiranje građevinskih objekata", Knjiga I, *Gradevinski Fakultet u Beogradu, Izgradnja*, Beograd, (1999).
- 142.Stojadinović R., "Mehanika tla", *Naučna knjiga*, Beograd, (1986)
- 143.Stojanović R., "Uvod u Nelinearnu Mehaniku Kontinuumu", *Zavod za izdav. udžbenika SR Srbije*, (1965)
- 144.Taylor D.W., "Fundamentals of soil mechanics", *John Wiley and Sons*, New York, (1948)
- 145.Terzaghi K., "Theoretical soil mechanics", *John Wiley and Sons*, New York, (1943).
- 146.Terzaghi K. and Peck R.B., Soil mechanics in engineering practice", 2nd ed. *John Wiley and Sons*, New York, (1967)
- 147.Valanis, K.C., "Banding and Stability in Plastic Materials", *Acata Mechanica*, 79, 113-141, (1988)
- 148.Vermeer P.A., "A double hardening model for sand", *Geotechnique* 28 (4), 413-433, (1978) Vardoulakis I., "Shear band Inclination and Shear Modulus of Sand in Biaxial Tests," *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*,4,2,pp103-121,(1980)
- 149.Vesić A.S., "Bearing capacity of deep foundation in sand", National Academy of Sciences, National Research Council, *Highway Research Record*, 39, 112-153, (1963)
- 150.Vesić A.S., "Ultimate loads and settlements of deep foundations in sand", *Soil Mechanics Series No.5, Duke University*, (1984)
- 151.Vesić A.S. and Clough G.W., "Behaviour of granular materials under high stresses", *Proceedings ASCE*, 94, No.SM3, 661-688, (1968)
- 152.Vesić A.S., "Analysis of ultimate loads of shallow foundations", *Journal of Soil Mech and Found. Div. ASCE*, 99, No.SM1, 45-73, (1973)
- 153.Vesić A.S., "Bearing capacity of shallow foundations", Chapter 3 in Winterkorn,H.F and Fang, H.Y. ed., *Van Nostrand Reinhold*, New York, 121-147, (1984)
- 154.Vujičić Č., "Fundiranje 1", *Gradevinski fakultet Beograd, Naučna knjiga*, Beograd, (1984)

155. Vujić S., Berković M., Kuzmanović D., Milanović P., Sedmak A. i Mičić M., "Primena metode konačnih elemenata kod geostatičkih proračuna u rudarstvu", *Rudarsko–Geološki fakultet u Beogradu*, (1990)
156. Vukelić S., "Analiza mehaničkih stanja očvrstlog betona", Doktorska disertacija, *Građevinski Fakultet u Beogradu*, (1981)
157. Vukićević M., "Primena elastoplastičnih modela za tlo u proračunu fleksibilnih potpornih konstrukcija", Doktorska disertacija, *Građevinski Fakultet u Beogradu*, (2006)
158. Wilkins, M.L., "Calculation of elastic-plastic flow," *Methods of Computational Physics*, (Eds. B. Alder et al.), 3, *Academic Press*, (1964)
159. Wood D.M., "Soil behaviour and critical state soil mechanics", *Cambridge University Press.*, (1990)
160. Zienkiewicz O.C. and Naylor D.J., "The adaptation of critical state soil mechanics theory for use in finite elements", *Proceedings of the Roscoe Memorial Symposium*, Stress Strain Behaviour of Soils, Cambridge, 537-547, (1971)
161. Zienkiewicz O.C., "The finite element method in engineering mechanics", 2nd Ed, *John Wiley & Sons International*, (1972)
162. Zienkiewicz O. C. & Nayak G. C., "Note on the 'alpha' -constant stiffness method for analysis of non-linear problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4, 579 - 582, (1972)
163. Zienkiewicz O. C., Humpheson C. & Lewis K. W., "Associated and non-associated visco-plasticity in soil mechanics", *Geotechnique*, 25, 671 - 685, (1975)
164. Zienkiewicz O. C., Valliappan S. & King I. P. "Elasto-plastic solutions of engineering problems. Initial-stress, finite element approach", *Internat. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1, 75 – 100, (1969)
165. Čabarkapa Ž., "Koeficijent N_γ u teoriji nosivosti plitkih temelja na pesku", Magistarski rad, *Građevinski Fakultet Univerziteta u Beogradu*, Beograd, (1996)
166. Ćorić S., "Geostatički proračuni", *Rudarsko – Geološki fakultet Univerziteta u Beogradu*, Beograd, (2006)

Biografija

Selimir Lelović rođen je 2.10.1961. god. u Kraljevu. Osnovnu školu i Gimnaziju (prirodno-matematičkog smera) završio je u Kraljevu. Po završenoj službi u vojsci upisao se, na Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, školske 1981/82. god. Diplomirao je na Građevinskom fakultetu u Beogradu 15. septembra 1986. god., na Odseku za Konstrukcije (smer za betonske konstrukcije). Tokom redovnih studija postigao je srednju ocenu 8.19 (osam i 19/100) a diplomski zadatak iz predmeta Fundiranje odbranio je sa ocenom 10 (deset). Od 26.10.1986. god. do 2.02.1987. god. radio je u RO Izgradnja, OOUR Visokogradnja, SOUR Energoprojekt. Od 2.02.1987. god. do 15.01.1989. god. u RO Energodata, SOUR Energoprojekt. Na Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu prelazi 1989. god. u zvanju asistenta pripravnika na predmetu Fundiranje. Juna 1991. god. izabran je za asistenta na predmetu Fundiranje. Novembra 1986. god. upisao je poslediplomske studije na Građevinskom fakultetu u Beogradu, smer za Konstrukcije, Odsek za Tehničku mehaniku i teoriju konstrukcija. Ispite je položio, kao i sve obaveze predviđene programom za poslediplomske studije izvršio je 27.06.1989. god.. Poslediplomske studije završio je sa srednjom ocenom 9,70 (devet i 70/100), a magistarski rad sa temom "Primena Mohr-Coulomb-ovog modela za rešavanje nekih geotehničkih problema" odbranio je 4.02.1991. god. Položio je stručni ispit. U okviru stručne delatnosti bavi se projektima fundiranja inženjerskih objekata, projektovanjem zaštite temeljnih jama, sanacijama klizišta, projektima dinamički opterećenih temelja, različitim problemima geotehnike i numeričkim metodama u geotehici. Član je Društva za fundiranje i mehaniku tla Srbije, Međunarodnog društva za mehaniku tla i geotehniku (ISSMGE – International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering) i Društva građevinskih konstruktera Srbije. Član je republičke revizione komisije od 2000. godine. Obavlja funkciju sekretara Katedre za Građevinsku geotehniku na Građevinskom fakultetu.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а мр Селимир Леловић

број индекса _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

КОНСТИТУТИВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЗА ПЕСАК И ЊИХОВА ПРИМЕНА У
НУМЕРИЧКОЈ АНАЛИЗИ ПОНАШАЊА ТРАКАСТОГ ТЕМЕЉА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, _____

Селимир Леловић

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора мр Селимир Леловић

Број индекса _____

Студијски програм _____

Наслов рада КОНСТИТУТИВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЗА ПЕСАК И ЊИХОВА ПРИМЕНА
У НУМЕРИЧКОЈ АНАЛИЗИ ПОНАШАЊА ТРАКАСТОГ ТЕМЕЉА

Ментор др Милош Лазовић, ванредни професор

Потписани/а мр Селимир Леловић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, _____

Селимир Леловић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

КОНСТИТУТИВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЗА ПЕСАК И ЊИХОВА ПРИМЕНА У
НУМЕРИЧКОЈ АНАЛИЗИ ПОНАШАЊА ТРАКАСТОГ ТЕМЕЉА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, _____

Сергије Јерковић