

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Будо Р. Зиндовић

**СТРУЈАЊЕ У СТЕПЕНАСТОМ БРЗОТОКУ  
СА ПОСТЕПЕНИМ СМАЊЕЊЕМ ШИРИНЕ КОРИТА**

докторска дисертација

Београд, 2017.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Budo R. Zindović

**FLOW IN THE GRADUALLY CONVERGING  
STEPPED SPILLWAY**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2017.

## Подаци о ментору и о члановима комисије

Ментор: Проф. др Љубодраг Савић,  
Универзитет у Београду - Грађевински факултет

Чланови комисије: Проф. др Љубодраг Савић,  
Универзитет у Београду - Грађевински факултет

Проф. др Радомир Капор,  
Универзитет у Београду - Грађевински факултет

Проф. др Душан Продановић,  
Универзитет у Београду - Грађевински факултет

Проф. др Никола Младеновић,  
Универзитет у Београду - Машински факултет

В. др Ненад Јаћимовић,  
Универзитет у Београду - Грађевински факултет

Датум одбране докторске дисертације: \_\_\_\_\_

*У знак сећања на моје родитеље.  
Мама, тата, успели смо!*

# Струјање у степенастом брзотоку са постепеним смањењем ширине корита

## Сажетак:

Степенасти брзотоци су популарна мера за дисипацију енергије преливене воде. Своју популарност дугују добрим дисипационим карактеристикама и нижом ценом изградње у односу на класичне брзотоке са глатним дном. Ефикасност дисипације енергије степенастог брзотока расте са повећањем његове ширине. У овој дисертацији анализирани су хидрауличке последице струјања у степенастом брзотоку са постепеним смањењем ширине канала. Истраживање је спроведено мерењима на два физичка модела и нумеричким симулацијама.

На физичким моделима испитан је утицај геометријских карактеристика брзотока (угао сужења брзотока, висина степеника) и хидрауличких параметара (проток) на хидродинамичке карактеристике. У близини зида јавили су се стојећи таласи, што је уочено по локалном повећању брзина и дубина а смањењу концентрације ваздуха. Резултати су указали да брзоток са сужењем канала има нешто лошије дисипационе карактеристике у поређењу са призматичним брзотоком једнаке ширине на узводном крају. То је уочено по локалном повећању енергетске коте у близини зида брзотока. Такође, резултати мерења су показали и да дисипација енергије опада са повећањем угла сужења канала. Резултати су показали да постојеће регресионе зависности не дају поуздану процену дубина воде уз зид. Израчунате вредности не само да су биле значајно веће од измерених већ су имале и различит тренд; на физичком моделу је уочена појава локалних минимума дубина док је регресионом зависношћу процењено стално повећање дубина у низводном смеру. Резултати мерења су указали да су сужењем брзотока нарушене и његове аерационе карактеристике; вредност фреквенције наиласка мехурића/капљица и специфичне површине контакта међу фазама су снижене у близини зида. Уочено је и да су аерационе карактеристике боље при мањим угловима сужења канала.

Резултати мерења су показали да је могуће унапредити постојеће методе мерења на хидрауличким моделима са аерисаним токовима. Развијен је поједностављени поступак за процену нагиба линије енергетске коте при струјању воде и ваздуха. Резултати мерења су такође показали је да сондама са три сензора проводности, могуће одредити и правац вектора брзине мешавине у равни паралелној псеудо-дну канала.

У прорачуну аерисаног тока, примењен је Ојлеровски вишефазни модел којим су засебно моделирани вода и ваздух. Примењени нумерички модел је у одређеној мери успео да репродукује измерено струјно поље. Најбоља слагања добијена су за

поље брзине за шта се претпоставља да је узрок постојање стојећег таласа. Нешто лошије слагање остварено је за дубине уз зид и концентрације ваздуха дуж брзотока, што се претпоставља да је узроковано недостатком модела аерације. Важна последица резултата нумеричког модела је да је преостала енергија на низводном крају брзотока већа од измерене и претпоставља се да ће резултати нумеричког модела бити на страни сигурности уколико се примене на пројектовање оваквих објеката.

**Кључне речи:** степенести брзоток, постепено сужење канала, стојећи талас, аерисани токови, вишефазна струјања, нумерички модел

**Научна област:** Грађевинарство

**Уже научне области:** механика флуида и хидраулика, рачунска хидраулика, мерења у хидротехници, хидраулика хидротехничких објеката

**УДК број:** 626/627:532(043.3)

# Flow in the Gradually Converging Stepped Spillway

## Abstract:

Stepped spillways are popular energy dissipators. Compared to classic smooth spillways, stepped spillways present a good balance between energy dissipation and low construction costs. Energy efficiency dissipation is proportional to spillway width. This dissertation deals with hydraulics of the gradually converging stepped spillways. The research included measurements on two scale-models and numerical simulations.

Research conducted on scale-models included the influence of geometry (chute convergence angle, step height) and flow-rate on the flow field in the chute. Standing waves emerged in the vicinity of side walls, they were observed by the local increase in depths and velocity magnitude, and the decrease in the air concentration. Results show that the converging stepped spillways have somewhat lower dissipation, compared to the prismatic ones of equal weir width. This was observed by the local increase in residual energy head inside the standing wave. Results also show that increase in convergence angle leads to decrease in energy dissipation. Results have shown that existins regression equations cannot provide good estimates for depths along the side-walls. Compared to the measured ones, calculated depths were higher and had different trend; measured values show local minima while computed values show constant increase in the downstream direction. Measurements show that convergence reduces the aeration; bubble/droplet frequency and specific area decrease close to the wall of a converging chute. Aeration inside the converging spillway is better for low convergence angles.

Results show viable improvements for flow field measurements in scale-models with aerated flows. This dissertation presents a simplified method for measuring slope of the energy grade line. Current results are promising and require further improvements. Results have also shown that probes with three conductivity sensors can be used to estimate velocity direction in a plane parallel to pseudo-bottom.

Eulerian multiphase model was used for simulating aerated flow in converging stepped slippway. Used numerical model had limited success in reproducing measured flow field. Best agreements was obtained for velocity magnitudes, which was attributed to the standing wave. Results show somewhat bad agreements for depths along the walls and air-concentration along the chute, which was attributed to the lack of air-entrainemnt model. The important consequence of the results is that the computed residual energy head was larger than measured and one can assume that the numerical models' results are one the safe side if applied for designing gradually converging stepped spillways.

**Key words:** stepped spillway, gradually converging chute, standing wave, aerated flows,

multiphase flows, numerical modelling

**Scientific field:** civil engineering

**Scientific subfield:** fluid mechanics and hydraulics, computational hydraulics, measurements in hydraulics, hydraulic structures

**UDC number:** 626/627:532(043.3)



# Захвалница

Неописиву захвалност дугујем мојим менторима, проф. др Љубодрагу Савићу и проф. др Радомиру Капору, на несебичној помоћи и подршци и током рада на дисертацији. Својим корисним саветима помогли су ми да лакше пронађем прави пут истраживања уз висок квалитет добијених резултата.

Велику захвалност дугујем и члановима комисије: проф. др Душану Продановићу, в. проф. др Ненаду Јаћимовићу и проф. др Николи Младеновићу на пажљивом читању текста дисертације и корисним сугестијама пружили другачији поглед на саму дисертацију. Својим саветима помогли су ми да квалитет текста дисертације подигнем на знатно виши ниво и постанем бољи истраживач и научник.

Захвалио бих се колегама из Завода за хидраулику Института за водопривреду “Јарослав Черни” из Београда, посебно Предрагу Војту на помоћи око реализације мерења, дела обраде података и избора мерне опреме; Срђану Остојићу и Јовану Велојићу на помоћи при мерењима; Новици Петровићу на саветима око модела и Драгиши Жугићу на указаној прилици да у њиховој институцији спроведем део мерења за потребе ове дисертације.

Желео бих да се захвалим и колегама са Хидраулике 1 и 2, пре свега доц. др Ањи Ранђеловић и асистентима Роберту Љубичићу и Милошу Милашиновићу на несебичној помоћи у школској 2016./2017. години, у супротном било би ми неопходно много више времена да своја истраживања приведем крају.

Велику захвалност дугујем и мојим колегама из Института за хидротехнику и водно-еколошко инжењерство, пре свега Андријани, Љиљи и Желку на њиховој подршци.

Захвалио бих се и члановима моје породице који су пратили мој научни развој од најранијег узраста, мојим сестрама Бојани и Марији.

На крају бих се захвалио и мојим двама дамама, супрузи Зорици и ћерки Софији на неизмерном стрпљењу, подршци и разумевању за све дане које сам проверо за рачунаром.

# Садржај

Захвалница	ix
Списак слика	xiii
Списак табела	xviii
Списак ознака	xix
Списак скраћеница	xxi
<b>1 Увод</b>	<b>1</b>
1.1 Предмет истраживања . . . . .	1
1.2 Циљ и задаци истраживања . . . . .	3
1.3 Методе истраживања . . . . .	4
1.4 Структура дисертације . . . . .	5
<b>2 Преглед литературе</b>	<b>7</b>
2.1 Степенасти брзотоци . . . . .	7
2.1.1 Само-аерација тока на степенастом брзотоку . . . . .	9
2.1.2 Преостала енергија флуидне струје . . . . .	14
2.2 Конвергентни брзотоци . . . . .	15
2.2.1 Конвергентни брзотоци са глатким дном . . . . .	16
2.2.2 Конвергентни степенасти брзотоци . . . . .	17
2.3 Мерење хидрауличких величина у вишефазним токовима . . . . .	19
2.3.1 Методе мерења у вишефазним струјањима . . . . .	19
2.3.2 Процена хидрауличких величина на основу мерења сензори- ма проводљивости . . . . .	21
2.4 Нумеричко моделирање течења на степенастим брзотоцима . . . . .	25
2.4.1 Приступу у моделирању вишефазних токова . . . . .	25
2.4.2 Моделирање турбуленције у вишефазним токовима . . . . .	27
2.4.3 Нумеричко моделирање вишефазног струјања на степенастим брзотоцима . . . . .	30
2.5 Недостаци претходних истраживања . . . . .	33
2.6 Циљ и задаци истраживања . . . . .	34

<b>3</b>	<b>Физички модели степенстих брзотока са постепеним сужењем корита</b>	<b>35</b>
3.1	Опис физичких модела . . . . .	35
3.1.1	Модел у хидрауличкој лабораторији Института “Јарослав Черни” . . . . .	36
3.1.2	Експериментална инсталација у хидрауличкој лабораторији Грађевинског факултета . . . . .	41
3.2	Методe мерења . . . . .	43
3.2.1	Мерење протока . . . . .	43
3.2.2	Мерење дубина . . . . .	43
3.2.3	Мерење у мешавини воде и ваздуха . . . . .	45
3.3	Обрада података мерења са сензора проводљивости . . . . .	47
3.3.1	Идентификација фазе . . . . .	48
3.3.2	Концентрација ваздуха . . . . .	50
3.3.3	Брзина течења мешавине . . . . .	51
3.3.4	Преостала енергија флуидне струје . . . . .	54
3.3.5	Турбулентне карактеристике аерисаног тока . . . . .	54
3.4	Резултати мерења на физичким моделима . . . . .	56
3.4.1	Модел ЈЧ . . . . .	57
3.4.2	Модел ГФ . . . . .	73
3.5	Дискусија резултата физичких модела . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Нумеричко моделирање струјања на степенастом брзотоку са постепеним сужењем</b>	<b>85</b>
4.1	Нумеричко моделирање вишефазног течења . . . . .	85
4.1.1	Једначине математичког модела . . . . .	85
4.1.2	Моделирање турбуленције . . . . .	87
4.1.3	Рачунски модел струјања на степенастом брзотоку . . . . .	89
4.2	Резултати нумеричког модела . . . . .	91
4.3	Дискусија резултата нумеричког модела . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Закључци и препоруке за даља истраживања</b>	<b>98</b>
5.1	Закључна разматрања . . . . .	98
5.2	Оцена испуњености циља и задатака истраживања . . . . .	100
5.3	Препоруке за будућа истраживања . . . . .	102
	<b>Литература</b>	<b>104</b>
	<b>Прилози</b>	<b>117</b>

---

<b>A</b>	<b>Модел ЈЧ</b>	<b>118</b>
A.1	Дубине уз зид брзотока . . . . .	118
A.2	Спектри тетива гасовите и течне фазе . . . . .	119
<b>Б</b>	<b>Хидрауличке карактеристике прелива модела ГФ</b>	<b>125</b>
Б.1	Крива протока двоструког Томсоновог прелива . . . . .	125
Б.2	Крива протока прелива практичног профила . . . . .	126
<b>В</b>	<b>Анализа осетљивости мерења сензорима проводљивости</b>	<b>130</b>
В.1	Утицај поступка идентификације фазе . . . . .	130
В.2	Анализа осетљивости мерења концентрације и брзине . . . . .	131
В.2.1	Утицај дужине узорковања . . . . .	131
В.2.2	Утицај учестаности узорковања . . . . .	132
В.2.3	Осетљивост мерења угла вектора брзине . . . . .	133
	<b>Биографија</b>	<b>137</b>

# Списак слика

1.1	Једна од најстаријих очуваних брана са степенастим брзотоком (Акарнанија, Грчка, око 1300. год. п.н.е.) . . . . .	2
1.2	Скица бране са степенастим брзотоком којем се ширина постепено смањује. . . . .	3
2.1	Режими струјања у степенастом брзотоку. Преузето из González (2005).	8
2.2	Номограм за процену режима струјања у степенастом брзотоку. Преузето из Simões, Schulz, Lobosco, Porto (2012). . . . .	9
2.3	Стварни изглед слободне површине, према Falvey (1980). . . . .	11
2.4	Концептуални опис вишефазних струјања на брзотоку (Falvey, 1980).	11
2.5	Распоред концентрације ваздуха, $C$ , брзине мешавине, $V$ , и фреквенције наиласка мехурића, $F$ , по дубини тока. Преузето из González (2005).	13
2.6	Стојећи таласи изазвани променом правца зидова у бурном току. Преузето из Irpen (1936). . . . .	16
2.7	Брана Оглас (Португал), изграђена 2006. године. Преузето из Matos, Meireles (2014). . . . .	19
3.1	Схематски приказ инсталације модела ЈЧ. . . . .	37
3.2	Модел ЈЧ, испитани углови зидова брзотока за висину степеника 22,5 mm.	39
3.3	Модел ЈЧ, упоредни приказ модела две размере за $\theta = 12^\circ$ . . . . .	39
3.4	Модел ЈЧ, пример распореда мерних тачака у попречном профилу $x/h_c = 10,6$ за $\theta = 12^\circ$ . . . . .	41
3.5	Схематски приказ инсталације модела ГФ. . . . .	42
3.6	Скица инсталације модела ГФ са прегледом карактеристичних димензија. . . . .	43
3.7	Аксометријски приказ инсталације модела ГФ. . . . .	44
3.8	Распоред мерних места модела ГФ. . . . .	45
3.9	Двоструки Томсонов прелив на мерном месту $M_1$ . . . . .	45
3.10	Ултразвучни протокомер Dynasonics TFXL на мерном месту $M_2$ . . . . .	46
3.11	Распоред профила за мерење дубина дуж зида брзотока на мерном месту $M_4$ . . . . .	46
3.12	Сонда са три сензора електро-проводности. Све димензије на цртежима (а) и (б) су у mm. . . . .	47
3.13	Систем за прикупљање података HBM QuantumX. . . . .	48
3.14	Пример снимљеног сигнала са три сензора. . . . .	49

3.15	Пример идентификације фазе превођењем снимљеног сигнала у бинарни запис. . . . .	50
3.16	Схема принципа мерења сензором проводности, примењеним у овој дисертацији. . . . .	51
3.17	Пример идеалне и реалне функције унакрсне корелације, према van der Welle (1985). . . . .	53
3.18	Схематски приказ сонде са три сензора електропроводности. . . . .	53
3.19	Пример функција унакрсне ( $f_{qw}$ ) и аутокорелације ( $f_{qq}$ ) са ознакама из једначине (3.12). . . . .	56
3.20	Утицај времена осредњавања на вредност измерене концентрације ваздуха. . . . .	57
3.21	Принцип формирања композитног графика за променљиву пром <sub>1</sub> . . . . .	58
3.22	Детаљ завршетка скале са бојама—пример горње граничне вредности. . . . .	58
3.23	Стојећи талас на моделу ЈЧ. . . . .	59
3.24	Скица флуидне струје у близини зида брзотока, према Zindovic, Vojt, Karor, Savic (2016). . . . .	59
3.25	Распоред дубина уз зид брзотока за $s = 22,5 \text{ mm}$ и $s = 45 \text{ mm}$ . . . . .	60
3.26	Модел ЈЧ, ширина стојећег таласа за $s = 22,5 \text{ mm}$ и $s = 45 \text{ mm}$ . . . . .	61
3.27	Распоред концентрације ваздуха дуж брзотока за $s = 22,5 \text{ mm}$ . Пуном црном линијом означен је распоред дубине $h_{90}$ , што је по конвенцији реконструкција слободне површине. . . . .	62
3.28	Распоред интензитета брзине дуж брзотока за $s = 22,5 \text{ mm}$ . . . . .	63
3.29	Распоред интензитета брзине дуж брзотока за $s = 45 \text{ mm}$ измерен Пито-статичком сондом. . . . .	64
3.30	Распоред енергетске коте дуж брзотока за $s = 22,5 \text{ mm}$ . . . . .	65
3.31	Регресионе криве за повећање коте преостале енергије за $s = 22,5 \text{ mm}$ . . . . .	65
3.32	Функција густине расподеле тетива гасовите фазе при $\bar{c}_a = 0,22$ . . . . .	66
3.33	Спектар тетива гасовите фазе при $\bar{c}_a = 0,22$ . . . . .	67
3.34	Распоред фреквенције наиласка гасовите фазе дуж брзотока за $s = 22,5 \text{ mm}$ . . . . .	67
3.35	Распоред специфичне површине контакта између фаза, дуж брзотока за $s = 22,5 \text{ mm}$ . . . . .	68
3.36	Распоред интензитета турбуленције дуж брзотока модела ЈЧ за $s = 22,5 \text{ mm}$ , према изразу (3.12). . . . .	69
3.37	Распоред израчунаог интензитета турбуленције дуж брзотока модела ЈЧ за $s = 22,5 \text{ mm}$ , према изразу (2.11). . . . .	70
3.38	Периодограми за модел ЈЧ. . . . .	70

3.39	Модел ЈЧ, квалитативно поређење модела две размере. . . . .	71
3.40	Квантитативно поређење концентрација ваздуха и релативне брзине мешавине, за модел две размере у профилу $x/L = 0,5$ . Индексом “ $ms$ ” означени су подаци за модел са малим степеницима, а са “ $vs$ ” резултати за модел са великим степеницима. . . . .	72
3.41	Распоред дубина дуж зида за $s = 45$ mm. . . . .	73
3.42	Распоред дубина дуж зида за $s = 90$ mm. . . . .	74
3.43	Распоред концентрације ваздуха за $s = 45$ mm. Пуном линијом је означена реконструисана слободна површина. . . . .	75
3.44	Распоред концентрације ваздуха за $s = 90$ mm. Пуном линијом је означена реконструисана слободна површина. . . . .	76
3.45	Распоред интензитета брзине за $s = 45$ mm. . . . .	76
3.46	Распоред интензитета брзине за $s = 90$ mm. . . . .	77
3.47	Распоред преостале енергетске висине за $s = 45$ mm. . . . .	78
3.48	Распоред преостале енергетске висине за $s = 90$ mm. . . . .	79
3.49	Распоред показатеља турбуленције за $s = 45$ mm. . . . .	79
3.50	Распоред показатеља турбуленције за $s = 90$ mm. . . . .	80
3.51	Распоред фреквенције наиласка мехурића/капљица за $s = 45$ mm. . .	80
3.52	Распоред фреквенције наиласка мехурића/капљица за $s = 90$ mm. . .	81
3.53	Распоред специфичне површине контакта међу фазама за $s = 45$ mm. . .	82
3.54	Распоред специфичне површине контакта међу фазама за $s = 90$ mm. . .	82
4.1	Основна мрежа коначних запремина за модел ЈЧ и детаља мреже брзотока. . . . .	89
4.2	Гушћа мрежа коначних запремина за модел ЈЧ након једног степена прогушћења, и детаљ мреже брзотока. . . . .	90
4.3	Називи граничних површина у нумеричким експериментима. . . . .	90
4.4	Израчунати и измерени распореди дубина воде уз зид брзотока на моделу ЈЧ. . . . .	92
4.5	Израчунати распоред концентрације ваздуха на моделу ЈЧ за $s = 22,5$ mm. Пуном линијом дата је реконструисана слободна површина воде. . . . .	93
4.6	Квантитативно поређење концентрација ваздуха и релативне брзине мешавине на физичком и на нумеричком моделу, за угао зида $\theta = 12^\circ$ , у профилу $x/h_c = 21$ . . . . .	93
4.7	Квантитативно поређење концентрација ваздуха и релативне брзине мешавине на физичком и на нумеричком моделу, за угао зида $\theta = 18^\circ 48'$ , у профилу $x/h_c = 21$ . . . . .	94

4.8	Квантитативно поређење концентрација ваздуха и релативне брзине мешавине на физичком и на нумеричком моделу, за угао зида $\theta = 22^\circ 36'$ , у профилу $x/h_c = 21$ . . . . .	94
4.9	Израчунати распоред концентрације ваздуха уз зид брзотока модела ЈЧ за $s = 22,5 \text{ mm}$ . . . . .	95
4.10	Израчунати распоред брзине мешавине на моделу ЈЧ за $s = 22,5 \text{ mm}$ . . . . .	96
4.11	Израчунат распоред струјница за модел ЈЧ у пресеку у осовини брзотока, за $s = 22,5 \text{ mm}$ . . . . .	96
A.1	Спектар тетива гасовите фазе модела ЈЧ за $\theta = 22^\circ 36'$ и степеник 39. . . . .	119
A.2	Спектар тетива течне фазе модела ЈЧ за $\theta = 22^\circ 36'$ и степеник 39. . . . .	119
A.3	Спектар тетива гасовите фазе модела ЈЧ за $\theta = 22^\circ 36'$ и степеник 52. . . . .	120
A.4	Спектар тетива течне фазе модела ЈЧ за $\theta = 22^\circ 36'$ и степеник 52. . . . .	120
A.5	Спектар тетива гасовите фазе модела ЈЧ за $\theta = 18^\circ 48'$ и степеник 39. . . . .	121
A.6	Спектар тетива течне фазе модела ЈЧ за $\theta = 18^\circ 48'$ и степеник 39. . . . .	121
A.7	Спектар тетива гасовите фазе модела ЈЧ за $\theta = 18^\circ 48'$ и степеник 52. . . . .	122
A.8	Спектар тетива течне фазе модела ЈЧ за $\theta = 18^\circ 48'$ и степеник 52. . . . .	122
A.9	Спектар тетива гасовите фазе модела ЈЧ за $\theta = 12^\circ$ и степеник 39. . . . .	123
A.10	Спектар тетива течне фазе модела ЈЧ за $\theta = 12^\circ$ и степеник 39. . . . .	123
A.11	Спектар тетива гасовите фазе модела ЈЧ за $\theta = 12^\circ$ и степеник 52. . . . .	124
A.12	Спектар тетива течне фазе модела ЈЧ за $\theta = 12^\circ$ и степеник 52. . . . .	124
B.1	Крива протока за двоструки Томсонов прелив у хидрауличкој лабораторији ГФ. . . . .	127
B.2	Слагање протока измерених ултразвучним протокомером ( $Q_{uzv}$ ) и Томсоновим преливом ( $Q_{Cone}$ ). . . . .	128
B.3	Крива протока за прелив практичног профила на стабилизационом резервоару модела ГФ. . . . .	129
B.4	Слагање протока измерених ултразвучним протокомером ( $Q_{uzv}$ ) и Томсоновим преливом ( $Q_{Tomson}$ ) са рачунским протоком преко прелива практичног профила. . . . .	129
B.1	Поређење функција густине расподеле тетива гасовите фазе за различите поступке нормализације сигнала на моделу ЈЧ. . . . .	131
B.2	Поређење функција густине расподеле тетива течне фазе за различите поступке нормализације сигнала на моделу ЈЧ. . . . .	132
B.3	Утицај дужине снимања на вредност концентрације ваздуха. . . . .	133
B.4	Утицај дужине снимања на вредност брзине струјања мешавине. . . . .	133
B.5	Утицај учестаности снимања на вредност концентрације ваздуха. . . . .	134



---

В.6	Утицај учестаности снимања на вредност брзине струјања мешавине.	134
В.7	Зависност измереног и задатог угла на моделу ГФ при протоку од $20 \text{ L s}^{-1}$ .	135
В.8	Зависност измереног и задатог угла на моделу ГФ при протоку од $40 \text{ L s}^{-1}$ .	136
В.9	Зависност измереног и задатог угла на моделу ГФ за оба протока.	136

# Списак табела

2.1	Преглед значајнијих истраживања струјања на хидротехничким објектима помоћу нумеричких модела вишефазних струјања. . . . .	32
3.1	Карактеристичне вредности Рејнолдсовог и Веберовог броја за модел ЈЧ, према Voes (2000). . . . .	38
3.2	Положај попречних профила на моделу ЈЧ, за мерење у аерисаном току. . . . .	40
3.3	Положај профила за мерење дубина дуж зида брзотока модела ЈЧ. . . . .	40
3.4	Режими течења на моделу степенастог брзотока - модел ГФ. . . . .	42
3.5	Процена губитака енергије помоћу спектра мехурића/капљица на моделу ЈЧ. . . . .	71
A.1	Дубине уз зид брзотока за $s = 45 \text{ mm}$ . . . . .	118
A.2	Дубине уз зид брзотока за $s = 22,5 \text{ mm}$ . . . . .	118
B.1	Подаци са мерења хидрауличких карактеристика прелива модела ГФ. . . . .	126
B.2	Подаци са мерења хидрауличких карактеристика прелива практичног профила – модел ГФ. . . . .	128
B.1	Резултати мерења угла вектора брзине на моделу ГФ. . . . .	135

# Списак ознака

## Латинични симболи:

- $a_a$  – специфична површина контакта између фаза [ $m^{-1}$ ]  
 $b_a$  – функција густине расподеле дужине тетива гасовите фазе [–]  
 $b_w$  – функција густине расподеле дужине тетива течне фазе [–]  
 $c_a$  – тренутна концентрација ваздуха [–]  
 $\bar{c}_a$  – временски осредњена концентрација ваздуха [–]  
 $\tilde{c}_a$  – временски и просторно осредњена концентрација ваздуха [–]  
 $C_D$  – коефицијент отпора облика [–]  
 $c_w$  – тренутна концентрација воде, једнака је  $1 - c_a$  [–]  
 $d$  – еквивалентни пречник мехура/капљице [m]  
 $D_H$  – пречник стабилног мехура (Hinze-ов пречник) [m]  
 $e_k$  – кинетичка енергија флуидне струје по јединици тежине [m]  
 $e_{res}$  – преостала механичка енергија воде у односу на псеудо-дно брзотока, по јединици тежине [m]  
 $e_{uf}$  – енергија флуидне струје у непоремећеном току, по јединици тежине [m]  
 $F_a$  – учестаност појаве гасовите фазе [Hz]  
 $f_{qq}$  – функција аутокорељације [–]  
 $f_{qw}$  – функција унакрсне корелације [–]  
 $F_r$  – Фрудов број [–]  
 $g$  – гравитационо убрзање [ $m s^{-2}$ ]  
 $h_{90}$  – дубина мешавине (дубина на којој је концентрација ваздуха 90 %) [m]  
 $h_c$  – критична дубина [m]  
 $H_{dam,u}$  – висинска разлика (висина бране) неопходна за успостављање једноликог течења [m]  
 $h_{uf}$  – дубина воде у непоремећеној зони [m]  
 $h_w$  – дубина чисте воде [m]  
 $h_{wall}$  – дубина воде уз зид брзотока [m]  
 $I_e$  – нагиб линије енергетске коте [–]  
 $k$  – кинетичка енергија турбуленције [ $J kg^{-1} s^{-1}$ ]  
 $l_a$  – дужина тетиве гасовите фазе [m]  
 $l_w$  – дужина тетиве течне фазе [m]  
 $N_a$  – укупан број јављања гасовите фазе за одређену дужину тетиве [–]  
 $N_D$  – функција спектра густине мехурића [ $m^{-4}$ ]  
 $N_{Da}$  – функција спектра густине гасовите фазе [ $m^{-2}$ ]  
 $N_{Dw}$  – функција спектра густине течне фазе [ $m^{-2}$ ]

- $N_w$  – укупан број јављања течне фазе за одређену дужину тетиве [–]  
 $p$  – притисак [Pa]  
 $P_G$  – индикатор функција фазе [–]  
 $Q$  – проток [ $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ]  
 $q$  – јединични проток (проток по јединици ширине) [ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]  
 $Re$  – Рејнолдсов број [–]  
 $s$  – висина степеника [m]  
 $t$  – време [s]  
 $T_u$  – интензитет турбуленције [–]  
 $T_u^{(e)}$  – процена интензитета турбуленције према [–]  
 $u$  – брзина [ $\text{m s}^{-1}$ ]  
 $u'$  – флукуација брзине [ $\text{m s}^{-1}$ ]  
 $u_m$  – брзина мешавине [ $\text{m s}^{-1}$ ]  
 $v_c$  – критична брзина [ $\text{m s}^{-1}$ ]  
 $w$  – ширина стојећег таласа [m]  
 $We$  – Веберов број [–]  
 $\mathbf{x}$  – вектор положаја тачке [m]

**Грчки симболи:**

- $\alpha$  – запреминска концентрација [–]  
 $\Delta$  – апсолутна грешка мерења [јединица величине на коју се односи]  
 $\delta$  – релативна грешка мерења [–]  
 $\varepsilon$  – дисипација турбулентне кинетичке енергије [ $\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$ ]  
 $\phi$  – угао који псеудо-дно заклапа са хоризонталном равни [°]  
 $\lambda$  – коефицијент трења по Дарси–Вајсбаху (Darcy–Weissbach) [–]  
 $\mu$  – динамичка вискозност [Pa s]  
 $\psi$  – угао хоризонталне пројекције праве у равни псеудо-дна а управне на раван зида [°]  
 $\psi_2$  – угао хоризонталне пројекције праве паралелне са псеудо-дном и равни зида [°]  
 $\rho$  – густина [ $\text{kg m}^{-3}$ ]  
 $\sigma$  – површински напон [ $\text{N m}^{-1}$ ]  
 $\tau$  – временски померај [s]  
 $\theta$  – угао зидова у основи мерен у односу на осовину брзотока [°]  
 $\vartheta$  – угао вектора брзине у односу на нормалу на подужну осу сонде [°]

# Списак скраћеница

- ADV – мерење брзине звуком применом Доплеровог ефекта (енг. acoustic Doppler velocimetry)
- BIV – мерење брзине праћењем мехурића (енг. bubble image velocimetry)
- DNS – директна нумеричка симулација турбуленције (енг. direct numerical simulation)
- LDA – мерење брзине ласером применом Доплеровог ефекта (енг. laser Doppler anemometry)
- LES – моделирање великих вртлога (енг. large-eddy simulation)
- PIV – мерење брзине праћењем честица (енг. particle image velocimetry)
- RCC – ваљани бетон (енг. roller-compacted concrete)
- RSM – моделирање транспорта Рејнолдсових напона (енг. Reynolds Stress Model)
- VoF – моделирање кретања слободне површине праћењем запремине флуида (енг. Volume-of-Fluid)

---

**Садржај**

1.1	Предмет истраживања . . . . .	1
1.2	Циљ и задаци истраживања . . . . .	3
1.3	Методе истраживања . . . . .	4
1.4	Структура дисертације . . . . .	5

---

**1.1 Предмет истраживања**

Брзоток је важан елеменат евакуационих објеката високих брана. Он спаја улазни део евакуатора (најчешће прелив) са излазним (најчешће умирујући базен или ски одскок). Брзоток је канал стрмог подужног нагиба и најчешће се пројектује на низводном лицу бетонских брана, односно у оквиру посебног објекта уз брану, или око ње (код насутих брана). Његова улога је да при наиласку поплаве, вишак воде из акумулације спроведе до излазног дела евакуатора без њеног преливања и прекомерног прскања. По конструкцији, брзотоци могу бити са глатким дном, са степеницама и комбиновани, што често зависи од врсте материјала од којег се изводе брана и евакуациони објекат (Савић, 2012).

Историјски, брзотоци се примењују више од 3500 година (Chanson, 1994, 2001b). У почетку, грађени су од истог материјала као и тело бране, а најчешће примењивани грађевински елементи били су велики камени блокови. Тадашња технологија условила је облик доње контуре брзотока у виду степеника (Слика 1.1), а извођење је трајало дуго уз значајан људски рад. У 19. а нарочито у 20. веку, применом неармираног и армираног бетона у грађевинарству, значајно је скраћено време изградње. Овакав начин грађења захтева једоставну и релативно јефтину оплату, што је условило да контуре бране и евакуатора буду глатке. Упркос све већој примени грађевинских машина (нарочито након 2. светског рата), људски рад је и даље врло заступљен у градњи брана од класичног хидротехничког бетона, што их често чини инфериорним у

односу на насуте бране. Осамдесетих година 20. века развијена је метода за разастирање бетона машинама за земљане радове, што је значајно снизило цену изградње. Овакав бетон назван је ваљани бетон (енг. roller-compacted concrete) или краће RCC и у односу на класичан садржи значајно мању количину цемента и воде. Уобичајено је да се уграђује у слојевима висине око 30 cm па се низводна косина бране изводи у облику степеница. Идеја пројектаната RCC брана је да низводно лице истовремено искористе за евакуацију великих вода што је обновило интересовање за степенасте брзотоке (Kuzmanovic, Savic, & Stefanakos, 2010).

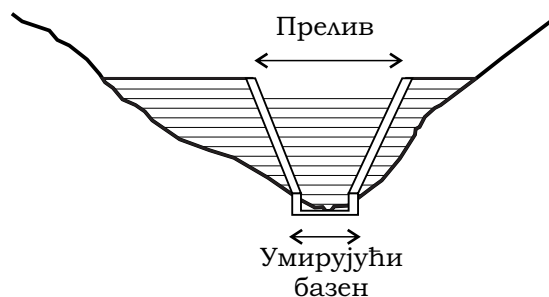


**Слика. 1.1:** Брана са степенастим брзотоком: Акарнанија, Грчка, око 1300. год. п.н.е., (Knauss, 1995).

Избор материјала и облика брзотока битно утиче на димензије, а самим тим и на цену целог евакуационог објекта. Са хидрауличког аспекта, важан податак за пројектовање је смањење енергетске коте дуж брзотока. Код класичних брзотока са глатким дном, захтев је да се вода са што мање поремећаја спроведе низводно, што резултује значајним брзинама и преосталом енергијом на њиховом низводном крају. Стога је неопходно предвидети посебан објекат за умирење тока, који је често значајних димензија, нарочито у случају високих брана. У том погледу, степенасте брзотоци су знатно повољнији—у зони степеника формира се рециркулационо струјање које додатно увећава губитак енергије, па је самим тим и умирујући базени мањи (Simões, Schulz, & De Melo Porto, 2010).

Ефикасност дисипације енергије дуж степенастог брзотока зависи од дубине тока; при истом протоку, код ширег брзотока је мања преостала енергија на низводном крају, односно на улазу у умирујући базен. Велику ширину брзотока обично је лако обезбедити у вишим зонама бране (што је повољно јер се добија мања висина преливног млаза, а тиме и мања висина бране). У нижим деловима, због облика до-

лине у попречном пресеку (Слика 1.2), велика ширина брзотока може увећати обим земљаних радова, и тиме додатно увећати трошкове. Стога је веома корисно да брзоток на низводном крају буде што је могуће ужи. Ова два опречна захтева могу се помирити уколико се ширина брзотока постепено смањује у низводном смеру.



**Слика. 1.2:** Скица бране са степенастим брзотоком којем се ширина постепено смањује. Шири брзоток у вишим деловима даје мању висину преливног млаза (а самим тим и мању висину бране), док у нижим деловима ужи брзоток даје мању ширину умирујућег базена и мањи обим земљаних радова.

Смањење ширине брзотока може имати неповољне хидрауличке ефекте. Будући да је струјање воде на брзотоку у бурном режиму, свака промена правца зида може изазвати стојеће таласе; јавља се локално повећање дубина воде које се простиру у низводном смеру. Ова појава изучавана је на глатким брзотоцима још у првој половини 20. века (Irpen, 1936; Irpen & Dawson, 1951), а тек недавно и на степенастим (Hunt, Kadavy, Abt, & Temple, 2008; Hunt, Temple, Abt, Kadavy, & Hanson, 2012; Wadhai, Ghare, Deshpande, & Vasudeo, 2015; Zindovic, Vojt, Kapor, & Savic, 2016). Стојећи таласи су важан проблем јер повећање дубина и концентрисање тока уз зидове брзотока може неповољно утицати на струјну слику у умирујућем базену.

## 1.2 Циљ и задаци истраживања

Пораст интересовања за примену степенастих брзотока, узрок је бројних студија у последњих 30 година. Резултати ових истраживања допринели су спознаји неких последица интеракције воде и ваздуха, помогли су развој препорука за пројектовање степенастих брзотока, као и услова за њихово успешно моделирање. Највећи проценат истраживања био је посвећен објектима са призматичним коритом. Нешто мањи број, бавио се конвергентним степенастим брзотоцима и то углавном за благо нагнуте степенасте брзотоке који су нашли примену у ојачавању насипа и насутих брана од ерозије изазване преливањем (енг. embankment dams), док за брзотоке бетонских



гравитационих брана не постоји одговарајуће литература. Будући да је висина разделних зидова брзотока изузетно важан податак, у свим студијама мерен је само распореда дубина дуж зидова.

Основна неодумица која се може јавити при пројектовању степенастог брзотока са постепеним сужавањем корита је да ли се и у којој мери мења ефикасност у односу на призматичне. Циљ ове дисертације је да покаже утицај смањења ширине брзотока на струјно поље, при великим подужним нагибима корита, карактеристичним за бетонске бране. Циљ ће се остварити испуњењем следећих задатака:

1. мерењима на физичким моделима испитати утицај смањења ширине корита на распоред брзина, дубина, концентрација ваздуха и преостале енергије дуж брзотока,
2. испитати могућност унапређења поступка обраде података добијених са физичких модела,
3. проверити могућност примене савремених рачунских алата за моделирање бурног вишефазног струјања у степенастим брзотоцима са постепеним сужењем корита.

Претпоставља се да ће резултати истраживања из ове дисертације бити корисни како будућим истраживачима, тако и пројектантима оваквих типова објеката.

### 1.3 Методе истраживања

Ефикасност дисипације енергије хидротехничких објеката готово искључиво се проверава на физичким моделима. Физички модели хидротехничких објеката углавном се изводе у Фрудовој сличности што значи да је исти режим струјања (буран, миран или критичан) и на прототипу и на моделу. Струјање на брзотоку је бурно а при великим брзинама течења воде јавља се њено интензивно мешање са ваздухом. Због постајања течног и гасовитог флуида у току, овакви проблеми се називају вишефазним (Breppen, 2005). Будући да је проблематика вишефазних струјања врло сложена, испитивања у оквиру ове дисертације спровешће се на физичким хидрауличким моделима.

За мерење у вишефазним струјањима може се применити неколико поступака. У најчешће коришћеним методама мери се електропроводност или интензитет рефлектоване светлости у флуидима код којих се ове две величине значајно разликују (Boes & Hager, 2003a; Chanson & Toombes, 2002c). Мањи број истраживача је применио и Пито-статичку сонду са повратним течењем (Matos, Frizell, André, & Frizell,

2002). Од свих набројаних, у овој дисертацији примењен је поступак којим се мери електропроводност мешавине. Разлог за то су повољне карактеристике ове методе у погледу робусности, тачности, техничке изводљивости и економске оправданости (детаљније у поглављу 2.3).

Развојем рачунарске технике, нумеричко моделирање је све више заступљено у хидротехници. Нумерички поступци за решавање једначина вишефазних струјања могу се сврстати у две групе: методе са дискретизацијом на рачунској мрежи (коначне разлике, коначне запремине, коначни елементи, метода Lattice–Boltzmann) или без рачунских мрежа (нпр. smoothed particle hydrodynamics). За потребе ове дисертације, изабрана је метода коначних запремина јер представља најбољи компромис између рачунске ефикасности, тачности и флексибилности описа домена струјања (детаљније у поглављу 2.4). Симулације струјања спроведене су у комерцијалном програмском пакету Ansys Fluent 14. Његове повољне карактеристике су: велики избор модела вишефазних струјања и турбуленције, аутоматско прилагођавање мреже ради повећања тачности прорачуна, као и расположиво програмско окружење за ограничену измену нумеричког модела.

## 1.4 Структура дисертације

Глава 1 садржи увод у проблематику истраживања која се обрађује у овој дисертацији, наведен је циљ истраживања и истраживачки задаци. На крају Главе, приказана је структура дисертације.

Глава 2 садржи преглед литературе, дат је критички осврт на досадашња истраживања и указано на недостатке у њима, детаљно су приказани су и циљ и задаци истраживања, и уведене хипотезе. Преглед литературе састоји се из четири целине: 1) призматични степенasti брзотоци, 2) брзотоци са постепеним сужењем корита, 3) преглед технике мерења и обраде података у вишефазним токовима, са посебним освртом на хидрауличке моделе, и 4) нумеричко моделирање течења вишефазних струјања.

У Глави 3 дати су основни геометријски подаци о физичким моделима, приказане су методе мерења брзине и концентрације ваздуха у аерисаном току, приказан је поступак обраде података којим се сирови запис преводи у хидрауличке величине као што су концентрација ваздуха, брзина мешавине, преостала енергетска кота, као и подаци о нивоу аерисаности мешавине (распоред фреквенције наиласка гасовите фазе и специфична површина контакта између фаза). У овој Глави приказани су и описани резултати мерења на физичким моделима, укључујући и податке о смањењу дисипационих карактеристика брзотока услед промене ширине канала. На крају

главе, дат је критички осврт на приказане резултате хидрауличких модела.

Глава 4 садржи податке о нумеричком моделу степенастог брзотока испитаног у Глави 3. У овом делу дате су основне једначине вишефазног и турбулентног струјања, приказани су задати гранични услови и параметри модела вишефазног струјања, приказани су резултати нумеричког модела и дато је њихово поређење са подацима измереним на физичком моделу. На крају главе, дат је критички осврт на приказане резултате нумеричког модела.

У Глави 5 приказани су закључци истраживања као и предности и недостаци истраживања приказаног у овој дисертацији. На крају Главе, дат је предлог могућих праваца за будућа истраживања.

## Преглед литературе

---

### Садржај

---

2.1	Степенасти брзотоци . . . . .	7
2.1.1	Само-аерација тока на степенастом брзотоку . . . . .	9
2.1.2	Преостала енергија флуидне струје . . . . .	14
2.2	Конвергентни брзотоци . . . . .	15
2.2.1	Конвергентни брзотоци са глатким дном . . . . .	16
2.2.2	Конвергентни степенести брзотоци . . . . .	17
2.3	Мерење хидрауличких величина у вишефазним токовима . . . . .	19
2.3.1	Методe мерења у вишефазним струјањима . . . . .	19
2.3.2	Процена хидрауличких величина на основу мерења сензорима прово- дљивости . . . . .	21
2.4	Нумеричко моделирање течења на степенастим брзотоцима . . . . .	25
2.4.1	Приступи у моделирању вишефазних токова . . . . .	25
2.4.2	Моделирање турбуленције у вишефазним токовима . . . . .	27
2.4.3	Нумеричко моделирање вишефазног струјања на степенастим брзо- тоцима . . . . .	30
2.5	Недостаци претходних истраживања . . . . .	33
2.6	Циљ и задаци истраживања . . . . .	34

---

### 2.1 Степенасти брзотоци

У претходних двадесет година, степенести брзотоци су били предмет опсежних истраживања. Своју популарност дугују доброј дисипацији енергије у односу на класичне брзотоке са глатким дном, што резултује значајним уштедама при изградњи умирујућег базена (Simões et al., 2010). Са развојем тзв. “ваљаног бетона” (енг. roller-compacted concrete, RCC) градња оваквих објеката постаје бржа и јефтинија. За изградњу се претежно користи механизација за земљане радове, бране се граде у слојевима висине око 30 cm, па се низводна косина бране изводи у облику степеника

(Kuzmanovic et al., 2010). Најчешћи захтев пројектаната је да се низводно лице бране истовремено искористи и за формирање брзотока, што смањује потребу за посебним објектом за евакуацију великих вода.

Са хидрауличног аспекта, струјање на степенастом брзотоку се у значајној мери разликује од струјања на глатком. Истраживачи су уочили три режима: скоковит, прелазни и клизећи ток (Boes & Hager, 2003a, 2003b; Chanson & Toombes, 2002a, 2004). Скоковит режим течења јавља се када је дебљина млаза на брзотоку значајно мања од висине степеника. Вода са узводног степеника пада у виду слапа на низводни и формира потпуни или непотпуни хидраулички скок (Слика 2.1а). Прелазни ток се јавља при дубинама које су упоредиве са висином степеника (Слика 2.1б). Клизећи ток се јавља при дубинама које су веће од висине степеника (Слика 2.1в). Млаз преко степеника тече као кохерентна целина, а у околини чела степеника остварује се рециркулационо струјање.



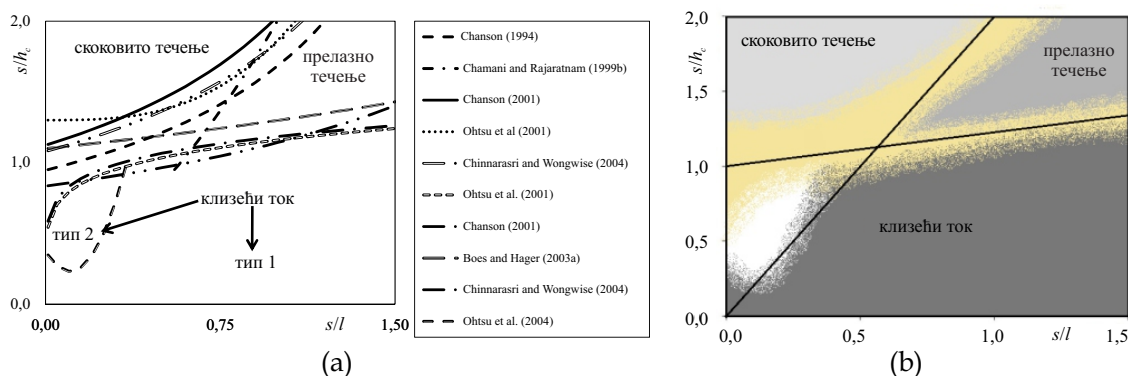
**Слика. 2.1:** Режимы струјања у степенастом брзотоку. Преузето из González (2005).

У погледу дисипације енергије, најефикаснији је скоковити режим. Да би се он остварио, неопходно је да специфични проток буде мали. Будући да је ширина брзотока ограничена расположивом ширином речне долине, у пројектантској пракси се овај режим избегава при рачунском протоку. Такође, уочено је да је струјање у скоковитом и прелазном режиму нестабилно, што може изазвати неповољне вибрације објекта (Chanson, 2001a). Зато треба тежити да се при рачунском протоку оствари клизећи ток (Chanson & Toombes, 2002a, 2004). Оствареност клизећег режима тече-

ња, може се проверити помоћу следеће емпиријске зависности (Boes & Hager, 2003a; Капор, 2015):

$$\frac{h_k^s}{s} = 0,91 - 0,14 \sin \phi, \quad (2.1)$$

где су:  $h_k^s$  – најмања критична дубина при којој се остварује клизећи ток,  $s$  – висина степеника и  $\phi$  – угао који псеудо-дно заклапа са хоризонталном равни. Осим израза (2.1), за прелиминарну процену режима струјања, може се користити номограм приказан на Слици 2.2.



**Слика. 2.2:** Номограм за процену режима струјања у степенастом брзотоку. Преузето из Simões, Schulz, Lobosco, Porto (2012).

### 2.1.1 Само-аерација тока на степенастом брзотоку

Вода на брзотоку струји великом брзином, услед чега долази до њене снажне интеракције са околним ваздухом. Ваздух бива увучен у ток у виду мехурова различите крупноће. Мехурићи у току су подвргнути цепању и спајању, а изражена турбуленција тежи да уравнотежи њихов распоред по дубини тока. Према Chanson (2013a), аерација може бити локализована (млаз који упада у воду, хидраулички скок, итд) или континуална дуж слободне површине (аерација дуж брзотока). Према Chanson (1994), за степенасте брзотоке са углом псеудо-дна<sup>{1}</sup> већим од 30° (1V:1,73H), ефекти увлачења ваздуха не смеју се занемарити при процени дисипационих карактеристика.

Место на којем почиње аерација тока није тачно утврђено, али је дато неколико могућих објашњења механизма настанка аерације. Према Falvey (1980), прву теорију само-аерације поставио је Lane 1939. године. По њему, гранични слој са прелива се развија у низводном смеру и постепено повећава своју дебљину. На месту на којем

<sup>{1}</sup> Псеудо-дно је површина која спаја врхове степеника.

гранични слој пресеца слободну површину, долази до великих деформација воденог огледала и увлачења ваздуха. Иако је ова теорија усвојена у великом броју чланака, неколико аутора ју је преиспитало и мерењима указало да аерација почиње нешто узводније од ове пресечне тачке, али да је то одступање са становишта практичне примене занемарљиво (Bung, 2011; Pfister & Hager, 2011; Hunt, Kadavy, & Hanson, 2014; Meireles, Renna, Matos, & Bombardelli, 2012). Са друге стране, Kobus је претпоставио да аерација тока настаје када је брзина струјања већа од  $0,8 \div 1,0 \text{ m s}^{-1}$  (Kobus, 1984, 1985, 1991). Претпостављајући да је главни узрок аерације турбуленција у близини слободне површине, Chanson је формулисао услов за настанак аерације преко флукуације брзине управне на слободну површину, тј.  $v' > 0,1 \div 0,3 \text{ m s}^{-1}$  (Chanson, 1992). У каснијим истраживањима, аутор је претпоставио да аерација тока настаје када је турбулентна кинетичка енергија већа од рада збира сила површинског напона и узгона мехурића (Chanson, 1993), што се може исказати у следећем облику:

$$v' > \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho_w d}} \text{ и } v' > u_r \cos \phi,$$

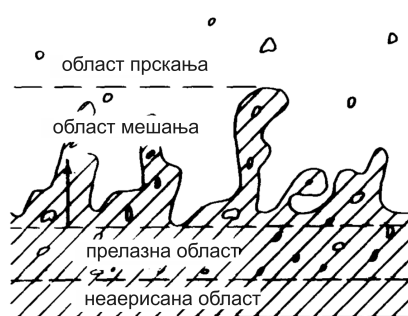
где су:  $v'$  – флукуација компоненте брзине управне на слободну површину,  $u_r$  – брзина испливавања репрезентативног мехурића пречника  $d$ ,  $\sigma$  – површински напон,  $\rho_w$  – густина воде,  $\phi$  – угао који псеудо-дно заклапа са хоризонталном равни. Иако услови Chanson-а најбоље осликавају сам процес аерације, они нису практични за инжењерску примену. Због тога, у пракси се користе једноставније формуле. Такав је израз Voes, Hager (2003b) према којем се растојање од круне прелива до места почетка аерације може проценити помоћу следећег израза:

$$L_i = \frac{5,9h_c^{6/5}}{(\sin \phi)^{7/5}s^{1/5}}, \quad (2.2)$$

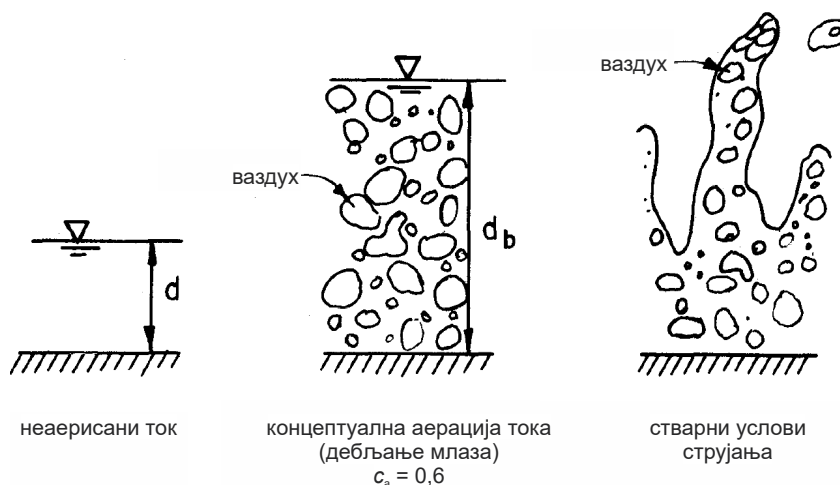
где су:  $L_i$  – растојање на којем почиње аерација (мерено од круне прелива),  $h_c$  – критична дубина,  $s$  – висина степеника и  $\phi$  – угао који псеудо-дно заклапа са хоризонталном равни. Према Wu, Zhang, Ma (2013), ова дужина код степенастог брзотока може бити и до 10 пута мања у односу на глатки брзоток идентичне ширине и нагиба дна.

Низводно од места почетка аерације долази до постепеног дебљања млаза воде, а ток при површини добија форму пене. Тачан положај слободне површине у аерисаном току тешко је одредити због великог броја контаката воде и ваздуха. Са гледишта интеракције воде и ваздуха, према Falvey (1980), уочавају се четири области (Слика 2.3):

1. горњи слој у којем преовлађују водене капи избачене из области мешања; капи воде могу достићи велике висине;
2. област мешања, одликује се површинским таласима различитих фреквенција и амплитуда. Ова област је изузетно важна јер у њој долази до увлачења ваздуха у ток, као и враћање ваздуха у атмосферу;
3. област мехурова је зона у коју не продиру површински таласи а ваздух у овој области је заробљен у виду мехурића;
4. област чисте воде, постоји само у деловима брзотока у којима није дошло до потпуног развијања аерације.



Слика. 2.3: Стварни изглед слободне површине, према Falvey (1980).



Слика. 2.4: Концептуални опис вишефазних струјања на брзотоку (Falvey, 1980): аерисани ток настаје дебљањем неаерисаног млаза, а слободна површина остаје глатка површ. Овај концепт одступа од стварних услова струјања јер аерација тока настаје значајним деформацијама слободне површине.

Горе наведени опис је непотребно сложен за инжењерску примену па је Falvey предложио значајно једноставнију схему (Слика 2.4). Увео је појам дебљања млаза



услед аерације при чему се дубине у таквом току повећавају пропорционално средњој концентрацији ваздуха. Овакав опис одступа од стварних услова струјања јер се слободна површина значајно деформише и није могуће одредити њен тачан положај. Крајем 20. века, када је омогућено поузданије мерење концентрације ваздуха, направљена је веза Falvey-евог концептуалног описа са стварним условима струјања. Falvey-ева аерисана дубина замењена је дужином при којој је концентрација ваздуха 90 %. Еквивалентна дубина чисте воде добија се када се из аерисаног тока “извуче” ваздух, а рачуна се према следећем изразу:

$$h_w = \int_0^{h_{90}} (1 - c_a) dz, \quad (2.3)$$

где су:  $z$  – координата управна на псеудо-дно и  $h_{90}$  – дубина мешавине (дубина на којој је концентрација ваздуха 90 %). Применом израза (2.3), просечна концентрација ваздуха може се проценити помоћу:

$$\tilde{c}_a = \frac{1}{h_{90}} \int_0^{h_{90}} c_a dz = 1 - \frac{h_w}{h_{90}}. \quad (2.4)$$

Процена концентрације ваздуха, а самим тим и аерисаних дубина, важан је податак за пројектовање разделних (бочних) зидова брзотока. При константном протоку воде, са порастом концентрације ваздуха дебљина млаза се повећава и неопходно је обезбедити већу висину зидова у односу на еквивалентни неаерисани ток. Распоред концентрације ваздуха по дубини, може се добити уопштавањем израза који је Wood (1984) извео за глатке брзотоке. Решавањем једначине турбулентне дифузије за транспорт мехурића ваздуха у правцу управном на псеудо-дно (Chanson & Toombes, 2002b; Chanson, 1999, 2013a), добија се:

$$c_a = 1 - \tan^2 \left( K' - \frac{z}{2D'h_{90}} \right), \quad (2.5)$$

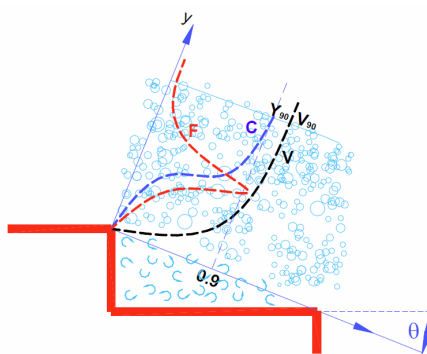
где су:  $K'$  и  $D'$  емпиријски параметри. Решење ове једначине, по свом облику, подсећа на теоријски распоред суспендованог наноса у отвореним токовима (Jovanović, 2008). Најважније ограничење за примену израза (2.5) је да се у току мора остварити потпуно мешање ваздуха по дубини и да су градијенти концентрације у подужном правцу занемарљиви. Ови услови могу бити остварени само при једноликом струјању.

Одговарајућа висинска разлика (висина бране) неопходна да би се остварило једнолико течење на стрмом степенастом брзотоку, може се проценити према следе-

ћем изразу (Boes & Hager, 2003a):

$$\frac{H_{dam,u}}{h_c} = 24(\sin \phi)^{2/3} \quad (2.6)$$

где су:  $H_{dam,u}$  – висинска разлика (висина бране) неопходна за успостављање једноликог течења и  $h_c$  – критична дубина. Концепт једноликог течења је опште прихваћен у пројектантској пракси, а развијен је за глатке брзотоке. Међутим, одређен број аутора довео је у питање његову применљивост на друге типове брзотока. Felder, Chanson (2009) су уочили да се већ код блаже нагнутих степенстих брзотока (угао псеудо-дна износио је  $21^\circ 48'$ , односно подужни нагиб дна  $1V:2,25H$ ) јавља периодична промена дубине мешавине са таласном дужином две дужине хипотенузе степеника. Као могуће узроке појаве наводе откидање вртлога у смичућем слоју низводно од степеника, као и међусобну интеракцију вртлога и њихову интерференцију са слободном површином.



**Слика. 2.5:** *Распоред концентрације ваздуха, C, брзине мешавине, V, и фреквенције наиласка мехурића, F, по дубини тока. Преузето из González (2005).*

Познавање распореда концентрације ваздуха важно је и са становишта заштите хидротехничких објеката од кавитације. Sánchez-Juny, Bladé, Dolz (2007) су измерили негативне притиске у околини средине чела игазишта степеника дуж брзотока и навели да постоји опасност од кавитације и степеника низводно од места почетка аерације. Са друге стране, Boes, Hager (2003b) сматрају да се са повећањем размере модела концентрација ваздуха у близини дна повећава, па је опасност од кавитације на прототипу мања него што се добија проценама на моделу. Према Frizell, Renna, Matos (2013), Pfister, Hager, Minor (2006a), Pfister, Hager (2011), најугроженији део је узводно од места почетка само-аерације и њега би требало штитити истим мерама као глатке брзотоке.

Осим са хидрауличног, интеракција воде и ваздуха је важна и са еколошког становишта. Baylar, Emiroglu, Bagatur (2006) су уочили сатурацију и суперсатурацију кисеоником у току низводно од степенстих брзотока и закључили да су овакви

објекти погодни за поправљање еколошког статуса водотока. Ова запажања потврђена су и у Toombes, Chanson (2005); аутори ову појаву објашњавају високим нивоом турбуленције која помаже мешању и обнови растворених гасова. Мерењима је показано и да су у односу на глатке, степенести брзотоци ефикаснији и до 9 пута у погледу обогаћивања воде кисеоником. Зато се у последњих десет година степенести брзотоци све више користе у системима за каналисање и третирање употребљених вода.

### 2.1.2 Преостала енергија флуидне струје

За оцену ефикасности брзотока у погледу дисипације енергије флуидне струје, као и пројектовање умирујућег базена, неопходно је познавати распоред преостале енергије дуж брзотока. Показано је да је ефикасност дисипације директно повезана са ефикасношћу аерације тока и да се најбољи ефекти постижу при скоковитом струјању (Baylar, Unsal, & Ozkan, 2011). Будући да се скоковити и прелазни режими струјања одликују нестабилностима које могу изазвати вибрације објекта, препоручено је да се избегавају при рачунском протоку (Chanson, 2001a; Chanson & Toombes, 2002a, 2004). Стога, највећи број истраживања је посвећен клизећем режиму течења (Boes, 2000; Boes & Hager, 2003a, 2003b; Bung, 2011; Bung & Valero, 2016; Chanson, 1993, 2004, 2006; Gonzalez, Takahashi, & Chanson, 2008; Takahashi & Ohtsu, 2012).

Губитак енергије дуж брзотока уско је повезан са отпорима при течењу. У клизећем режиму преовлађују отпори облика. Формирају се рецикулационе зоне у области испод псеудо-дна које “црпе” енергију главног струјања. Отпори зависе од геометрије брзотока (димензије степеника, подужни нагиб псеудо-дна, ширина брзотока) и хидрауличких величина (брзина струјања, концентрација ваздуха). Истраживачи се слажу да су степенести брзотоци ефикаснији дисипатори енергије у поређењу са класичним брзоточима са глатким дном (Frizell & Svoboda, 2012; Simões et al., 2010; Takahashi & Ohtsu, 2012). Према Takahashi, Ohtsu (2012), однос специфичних енергија глатког и степенастог брзотока се креће у границама  $e_{smooth}/e_{step} \approx 1,5 \div 5$ .

Како би што једноставније решили проблем отпора дуж брзотока, истраживачи су идеализовали флуидну струју на следећи начин: претпоставили су да је течење линијско, да се ток може поделити на главно струјање ограничено слободном површином и псеудо-дном и рецикулационо струјање у области ограниченој псеудо-дном и контуром степеника, да је губитак енергије равномерно расподељен дуж брзотока и да су отпори последица макро-храпавости чија висина зависи од висине степеника. На тај начин, увођењем еквивалентног Дарси-Вајсбаховог коефицијента, може се применити стандардна енергетска једначина што је довољно једноставно за инжењерску примену. На основу моделских испитивања, Simões et al. (2010) су показали

да се вредности Дарси-Вајсбаховог коефицијента за глатке брзотоке креће у границама  $0,01 \div 0,05$ , док је код степенастих у интервалу  $0,05 \div 0,3$ .

Ваздух има значајну улогу у процесу дисипације енергије. Chanson (2004) и Pfister, Hager (2011) су показали да су отпори струјању мањи за аерисани него за неаерисани ток. Према Chanson (2004), однос Дарси-Вајсбахових коефицијената за аерисани и неаерисани ток може се проценити помоћу следеће формуле:

$$\frac{\lambda_{aer}}{\lambda_w} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \tanh \left( 0,71 \frac{0,52 - \tilde{c}_a}{\tilde{c}_a (1 - \tilde{c}_a)} \right) \right]. \quad (2.7)$$

Геометрија степеника такође утиче на дисипацију енергије. Guenther, Felder, Chanson (2013) су испитали утицај допунских елемената у виду прагова на низводном крају степеника. Показали су да су класични степеници најповољнији у случају клизећег тока. Zare, Doering (2012) су показали да је заобљавањем врха степеника могуће повећати дисипацију енергије за око 3 %. Такође, при малим протоцима, аутори су уочили и одвајање млаза од степеника и значајно прскање (овај тип струјања назвали су shooting). Према Pfister, Hager, Minor (2006b), овакво прскање је опасно јер може изазвати ерозију објеката од насутог материјала, брзу појаву леда у зимском периоду, губитак значајних количина воде при јаком ветру и већу захтевану висину зидова. Овај проблем може се превазићи погодним обликовањем узводних степеника (постепеним повећањем висине степеника, убацивањем трапезних елемената на постојеће степенике), што може да резултује и бољим дисипационим карактеристикама брзотока.

Храпавост површине степеника такође утиче на дисипационе карактеристике брзотока. Код брзотока са храпавијим степеницима јављају се веће брзине и повећава се дужина неопходна за појаву аерације (Gonzalez et al., 2008). Овај феномен је могуће објаснити смањењем рецикулационе зоне и нивоа турбуленције у зони степеника, што резултује већом преосталом енергијом на низводном крају. Ова запажања значајна су за проверу дисипационих карактеристика брзотока са габионским и са оштећеним степеницима. Према Gonzalez-у, храпавост самих степеника нема значајнијег утицаја на концентрације ваздуха.

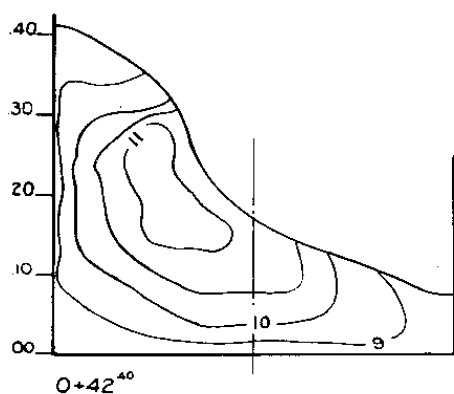
## 2.2 Конвергентни брзотоци

У односу на призматичне брзотоке, постепеним смањењем ширине корита бавио се значајно мањи број истраживача. Већином, истраживања су била усмерена на брзотоке са глатким дном, нарочито у првој половини 20. века. Са повећаним интересовањем за степенасте брзотоке крајем 20. века, неколико аутора је истраживало и

конвергентне степенасте брзотоке.

### 2.2.1 Конвергентни брзотоци са глатким дном

Промена правца зида у бурном току изазива стојеће таласе који се простиру низводно. Ову појаву први је забележио Ирпен (1936). У свом раду, бавио се бурним струјањем у каналима непроменљиве ширине са кривином у хоризонталној равни. Аутор је уочио повећање дубина уз спољашњи, а смањење дубина уз унутрашњи зид канала у кривини (Слика 2.6а). Такође, област највећих брзина помера се ка спољашњој страни кривине. У деоници низводно од кривине, уочио је наизменично померање врха таласа од једног до другог зида (Слика 2.6б). На основу резултата, предложио је једначине за прорачун угла таласа, највеће дубине и места (угла) на којем се она јавља. Са приложене фотографије, уочава се одсуство аерације тока. Међутим, аутор наводи да присуство ваздуха и/или суспендованог наноса не нарушава валидност изведених закључака. Ипак, ово тврђење треба узети са резервом јер га Ирпен није поткрепио доказима.



(а) Попречни пресек тока са распоредом дубина и брзина унутар стојећег таласа. (б) Поглед на кривину са низводне стране.

**Слика. 2.6:** Стојећи таласи изазвани променом правца зидова у бурном току. Прузето из Ирпен (1936).

Своја претходна истраживања, Ирпен је уопштио и применио на различитим облицима нагле промене геометрије канала (Irpen & Dawson, 1951). Истраживања су спроведена на хидрауличким физичким моделима у делимичној сличности (задовољена је Фрудова али не и Рејнолдсова и Веберова сличност). Неколико аутора покушало је да ово ограничење превазиђе заменом флуида (Gilmore, Plesset, & Crossley, 1950; Harleman & Irpen, 1950). Као моделски флуид користили су ваздух.

Потпуна аналогија гаса и воде је могућа само уколико је однос специфичних топлота 2, и при томе се не мења ентропија ваздуха. За реалне гасове, ово никада није испуњено: у случају воде, промена унутрашње енергије обавља се њеним превођењем у енергију турбулентних структура а затим у топлоту; код гасова, део енергије повећава његову ентропију док остатак утиче на динамичке карактеристике струјања. Због тога, губици енергије не могу бити у потпуној еквиваленцији, већ се мора применити погодна конверзија величина између воде и ваздуха (Harleman & Irpen, 1950). У чланку Gilmore et al. (1950), аутори су показали да се стрмије чело таласа може добити уколико се смањи ефекат дејства површинског напона, применом површински активних супстанци (аутори су користили лаурил изоквинолиниум бромид). Због великих ограничења и захтева у примени модела са измењеним флуидом, данас се најчешће користи исти флуид (вода) и на моделу и на објекту.

На основу резултата моделских испитивања, претпоставке које је увео Irpen проверене су у Vatinić (1968, 1976). Vatinić (1968) указује да подужни нагиб дна брзотока има утицаја на димензије косог таласа, али нису спроведена опсежнија испитивања како би се утврдио карактер ове зависности. Reinauer, Hager (1996, 1998) су испитивали мере за смањење косих таласа у брзотоцима нагиба  $0^\circ$ ,  $10^\circ$  и  $27^\circ 30'$  и дошли су до закључка да нагиб дна има мањи утицај на висину чела таласа ( $\pm 2\%$ ), али да значајно утиче на положај његовог фронта.

### 2.2.2 Конвергентни степенести брзотоци

Крајем 20. века, конвергентни степенести брзотоци постали су предмет интересовања неколицине истраживача, нарочито као мера за ојачање постојећих насипа. Овакви објекти се одликују малим подужним нагибом (угао је  $30^\circ$  и мањи). Карактеристика оваквих брзотока је да, због недовољне дужине, не мора доћи до потпуног мешања ваздуха по дубини тока (Hunt & Kadavy, 2009). Слично призматичним брзотоцима, и код конвергентних се јављају набори на слободној површини воде непосредно узводно од места почетка аерације (Hunt et al., 2014). Уочено је да се губитак енергије повећава линеарно од прелива до тачке почетка аерације (око 30% расположиве енергије узводно), а да се низводно мења приближно логаритамски (Hunt & Kadavy, 2009).

До сада најопштији израз за прорачун дубина дуж вертикалних зидова конвергентних степенестих брзотока, приказани су у Hunt et al. (2012). Применом једначине одржања количине кретања аутори су предложили зависност у следећем облику:

$$\frac{h_{wall}}{h_{uf}} = \sqrt{\frac{\cos \phi + 2F_r(\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \theta)}{\cos \psi \cos \psi_2 - \sin \psi}}. \quad (2.8)$$

где су:  $h_{wall}$  – дубина воде уз зид брзотока,  $h_{uf}$  – дубина воде у непо ремећеној зони,  $\phi$  – угао који псеудо-дно заклапа са хоризонталном равни,  $\theta$  – угао зидова у основи мерен у односу на осовину брзотока,  $\psi$  – угао хоризонталне пројекције праве у равни псеудо-дна а управне на раван зида и  $\psi_2$  – угао хоризонталне пројекције праве паралелне са псеудо-дном и равни зида. Поређењем са резултатима моделских испитивања из Hunt et al. (2008), аутори су предложили незнатно измењену једначину са укљученом емпиријском корекцијом:

$$\frac{h_{wall}}{h_{uf}} = \sqrt{\frac{\cos \phi + 2F_r(\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \theta)}{\cos \psi \cos \psi_2 - 0,46 \sin \psi (\tan \theta)^{1,47}}}. \quad (2.9)$$

Аутори су навели да би вредности добијене једначином (2.9) требало увећати како би се обухватио утицај увученог ваздуха. Највероватнији разлог за то је слаба аерација тока услед малих брзина (висина модела износила је око 43 cm), што може бити условљено капацитетом лабораторије у којој су спроведена испитивања.

Изведених конвергентних степенстих брзотока још увек је мало у свету. Један пример приказан је на Слици 2.7. До сада је објављен мали број истраживања за конвергентне степенсте брзотоке RCC брана. У чланку Hanna, Pugh (1997), аутори су испитали конвергентни степенсти брзоток модела бране Пилар у Сједињеним Америчким Државама. Размера хидрауличког модела износила је 1:40, нагиб дна 1V:0,8H и угао сужења зидова 16°. Из приказаних резултата, уочљиво је одсуство ваздуха у току и стојећим таласима у близини зидова што је индикатор малих дубина на моделу. Измерене дубине дуж зидова се постепено повећавају, осим у околини степеника 22 где се уочава локални минимум при свим протоцима. Притисци дуж брзотока имају таласаст облик а карактеристике (амплитуде и таласна дужина) се мењају са протоком. Robinson, Rice, Kadavy, Talbot (1998) су испитивања спровели на хидрауличком моделу нагиба дна 1V:0,7H, при угловима конвергенције 0°, 20°54' и 32°30'. Аутори су показали да се у односу на непо ремећени ток (угао конвергенције је 0°) дубине дуж зида повећавају са порастом угла конвергенције. Оба истраживања била су везана за конкретне пројекте и не дају увид у расподелу важних хидрауличких величина (брзина, концентрација ваздуха, преостала енергија) дуж брзотока као ни уопштене зависности које могу послужити за њихово пројектовање.

Wadhvani et al. (2015) су на брзотоку нагиба 1V:1H са углом конвергенције зидова од 45° уочили да је ток немирнији и да има више увученог ваздуха у односу на глатки. Поређењем измерених дубина уз зид брзотока са резултатима једначине (2.9), аутори су уочили одступања и до 50%. За разлику од Hanna, Pugh (1997), на приложеним фотографијама уочава се аерација тока, али не и стојећи таласи.



Слика. 2.7: Брана Оглас (Португал), изграђена 2006. године. Преузето из Matos, Meireles (2014).

## 2.3 Мерење хидруличких величина у вишефазним токовима

### 2.3.1 Методе мерења у вишефазним струјањима

Будући да на брзотоку струји мешавина воде и ваздуха и да је њихова међусобна интеракција важна, неопходно је применити поступак мерења којим се идентификује фаза флуида<sup>{2}</sup>. Методе мерења у вишефазним токовима<sup>{3}</sup> могу се сврстати у две групе (Vertola, 2003):

1. Неинвазивне методе, код којих сензор не ремети флуидну струју. У методе ове групе убрајају се: томографија ( $\gamma$ -, X-, неутронска, позитронска, ултразвучна, оптичка и магнетна), ADV, PIV, LDA. За примену ових метода пожељно је имати унапред познат попречни пресек и зато се највише користе у системима под притиском.
2. Инвазивне методе, код којих сензор убацујемо у флуидну струју. У њих се убрајају: Пито-Прантлова сонда (назива се још и Пито-статичка), сонде са сензорима од оптичких влакана, сензори електро-проводности, сензори са загрејаном траком, сензор са мрежом проводника.

Према литератури, у хидраулици отворених токова постоји само неколико при-

<sup>{2}</sup> Флуид се може бити у 2 агрегатна стања или фазе – течном или гасовитом. У овој дисертацији разматрају се само две фазе, вода и ваздух.

<sup>{3}</sup> Токови у којима се јавља струјање неколико фаза (најмање две), називају се вишефазним. У истраживањима приказаним у овој дисертацији, разматрају се само токови у којима струје и вода и ваздух.



мера мерења неинвазивним поступцима. PIV метода примењена је на неколико физичких модела степенастих брзотока, али је коришћена искључиво за неаерисани ток (Amador, Sánchez-Juny, & Dolz, 2006, 2009; De Carvalho & Amador, 2009). Последњих година, развија се верзија PIV методе прилагођена за аерисане токове, код које се као трасер користе сами мехурићи и названа је BIV (Lopes, Bung, Leandro, & Carvalho, 2015; Ryu, Chang, & Lim, 2005). Основни недостатак ове методе је тај што је њена примена ограничена на део тока у близини зида.

Историјски, од инвазивних метода најдуже се примењује Пито-статичка сонда за мерење динамичког притисака. Заједно са њом, користи се и сензор проводљивости за мерење концентрације на основу којих се рачуна брзина (Bombardelli, Meireles, & Matos, 2011; Frizell, 1990; Frizell, Ehler, & Mefford, 1994). Стандардна Пито сонда није предвиђена за мерење брзине у аерисаном току. Уласком мехурића ваздуха у цев, значајно се мења одзив инструмента и повећава неизвесност мерења (Cain, 1978). Решење овог проблема први је дао Випарели средином 20. века. Он је применио посебно конструисану апаратуру којом је истискивао увучени ваздух из Пито сонде (Viparelli, 1953). Касније, аутори су применили сличан принцип на Пито-статичку сонду (Frizell, 1990; Frizell et al., 1994). Најважнији недостатак методе је њена значајна осетљивост на промену динамичког притисака и/или концентрације. Matos et al. (2002) наводе да се овакви сензори могу применити за вредности концентрације ваздуха до 70 % али се, на основу њихових резултата, то не може закључити. Према Cain (1978), релативна грешка мерења брзине Пито-статичком сондом у вишефазном току износи:

$$\delta u = \frac{\Delta p}{\rho_w(1 - c_a)u^2} + \frac{\Delta c_a}{2(1 - c_a)},$$

где су:  $\delta u$  – релативна грешка мерења брзине,  $\Delta p$  – апсолутна грешка мерења притиска и  $\Delta c_a$  – апсолутна грешка мерења концентрације. Из наведеног израза следи да је грешка мерења брзине Пито-статичком сондом више од 2 пута већа при концентрацији  $c_a = 0,5$ , стога препоруке из Matos et al. (2002) треба узети са резервом.

Мерење брзине сензором са загрејаном траком (енг. hot-film) чешће се користи у машинству него у хидротехници. Hibiki, Hogsett, Ishii (1998) су поредили ову врсту сензора са сензорима проводљивости и указали да је неопходно користити нижу температуру грејања како би се избегло прегревање траке. То резултује мањим опсегом напона и има за последицу мању резолуцију мерења. Аутори наводе и да сензори са загрејаном траком дају задовољавајућу тачност при нижим вредностима концентрације ваздуха (мањим од 30 %), што у значајној мери ограничава њену примену за аерисане токове у хидротехници.

Према Chanson, Carosi (2007), инвазивни електро-проводни и сензори на бази оптичких влакана су најпоузданија и најекономичнија метода мерења на физичким моделима у случајевима када је  $c_a > 10 \div 15\%$  и  $c_w > 5 \div 10\%$ . Избор између ове две методе је техно-економска категорија.

Неколико аутора применило је сензоре на бази оптичких влакана за мерења у хидротехници (Boes & Hager, 2003b; Kramer, 2004; Kramer & Hager, 2005). Као индикатор, ови сензори користе разлику у индексу преламања светлости између фаза. Недостатаци оваквих сензора су: неопходност постојања каплера са фотодетектором (њиме се интензитет светлости преводи у напон) и захтевна израда врха и самог сензора, што у великој мери поскупљује мерни уређај.

Сензори проводљивости користе разлику у проводљивости струје између фаза (за воду је око 1000 већа него за ваздух). Сонда може имати један или више сензора, у зависности од величина које се мере (Ishii & Kim, 2001; Kim, Fu, Wang, & Ishii, 2000). Предност методе је робусност, упркос малим димензијама сензора. Недостатак је оксидација електрода у случају напајања једносмерном струјом. Према Chanson, Toombes (2002b) и Toombes (2002), овај недостатак једноставно се отклања применом наизменичне струје. Прва примена сензора проводљивости у хидротехници датира из прве половине 20. века (према Cain (1978)). Тада су се најчешће примењивали као пратећа опрема Пито-статичких сонди. Касније, показано је да се брзина струјања мешавине воде и ваздуха може успешно мерити помоћу сонде са два сензора проводљивости (Kipphan, 1977; Neal & Bankoff, 1963). У истраживању Cain (1978), овај приступ примењен је први пут на реалном објекту (брана Авијемор (енг. Aviemore) на Новом Зеланду). До данас, ова метода једна је од најчешће коришћених у испитивањима на хидрауличким моделима степенастих брзотока.

У будућности, очекује се развој и већа примена сензора са више врхова и комбинованих сензора: електро-проводни сензор са 4 врха (Ishii & Kim, 2001; Kim et al., 2000), Пито-Прантлова сонда са додатим електропроводним сензорима (Borges, Pereira, Matos, & Frizell, 2010), вишестепена електро-проводна сонда за једновремено мерење концентрације и температуре (Schleicher, Da Silva, & Hampel, 2008).

### **2.3.2 Процена хидрауличких величина на основу мерења сензорима проводљивости**

Сензори проводљивости електричне струје могу детектовати промену фазе у близини њеног врха. У зависности од броја сензора, величине које се могу мерити су (Cartellier & Achard, 1991; Chanson, 2002; Ishii & Kim, 2001):

- за сонду са једним сензором: концентрација ваздуха и кумулативно време за-

државања фаза,

- за сонду са два сензора: све као и за сензор са једним укључујући и интензитет вектора брзине мешавине, расподелу дужина тетива сваке фазе<sup>{4}</sup>, процену интензитета турбуленције, специфичну површину контакта између фаза,
- за три и више сензора, поред претходно набројаних величина, могу се проценити и правац вектора брзине и облик мехура.

Будући да примена већег броја сензора још увек у повоју, у мерењима на хидрауличким моделима коришћене су углавном сонде са једним и два сензора.

У поступку обраде, временски запис промене напона на сензорима преводи се у одговарајућу физичку величину. Из снимљеног сигнала могу се уочити нагли скокови напона при проласку врха сензора кроз контакт вода-ваздух. Детекцијом узастопних скокова може се проценити време проласка сваке фазе, које је једнозначно повезано са дужинама  $l_a$  и  $l_w$  (Слика 3.16). У идеалном случају, пролазак врха сензора кроз контакт између фаза доводи до нагле промене напона. У пракси, регистрована промена напона је постепена. Ово одступање је последица коначних димензија врха, времена одзива сензора и уређаја за прикупљање података као и квашења и сушења врха при проласку контакта између фаза (Chanson, 2002). Како би превазишли овај проблем, бројни истраживачи су покушали да у поступку обраде идентификују тренутак у којем сензор пробија контакт вода-ваздух. Као први и најједноставнији развијен је поступак са једним прагом напона, али његова вредност варира од аутора до аутора и то у широким границама (Cartellier, 1990; Cartellier & Achard, 1991). У истраживањима Chanson-а, указано је да се задовољавајућа тачност добија уколико је одсецање при напону који одговара 50 % опсега (Chanson, 2002; Chanson & Carosi, 2007). Осим овог, извесан број истраживача је применио и критеријуме са два прага: нижи напон за узлазну а виши за силазну грану регистрованих напона (van der Welle, 1985; Wu & Ishii, 1999; Zhai, Bian, Gao, & Jin, 2016). Према Cartellier (1990), Cartellier, Achard (1991), овај метод не даје значајније предности у односу на верзију са једним прагом. Kim et al. (2000) при обради сигнала користили су модификовану схему са два прага. Прво су применили путујућу медијану како би уклонили карактеристичне високе фреквенције електронске опреме. Како се вредности базних напона за воду и ваздух мењају у зависности од услова испитивања (температура ваздуха је најзначајнији параметар), због коначно малог времена пењања/спуштања сигнала при проласку контакта аутори су нормализовали регистровани напон према следећој

<sup>{4}</sup> појмови дужине тетиве фазе и њене функције густине расподеле, објашњени су у Глави 3.1 (поглавље 3.3, потпоглавље 3.3.1).

једначини:

$$V_{norm} = \frac{V - V_{min}}{V_{max} - V_{min}}. \quad (2.10)$$

Напоне  $V_{max}$  и  $V_{min}$  одредили су поделом опсега напона на четири дела и тражењем највероватније вредности напона у доњој ( $V_{min}$ ), односно горњој ( $V_{max}$ ) четвртини. Након нормализације, уклонили су преостали шум постављањем прага који је, за експерименталне услове аутора, износио  $\pm 0,05$  V односно око  $\pm 3\%$  опсега. Уколико сигнал континуирано расте/опада у више од 5 тачака изнад/испод прага шума, сматра се да је сензор пробио контакт између фаза. Након што је идентификован контакт између фаза, регистровани напон се преводи у бинарни сигнал на основу којег се добија временски осредњена концентрација ваздуха у тачки.

Брзина струјања мешавине може се проценити уколико сонда има више сензора на извесном међусобном одстојању (Ishii & Kim, 2001). Унакрсном корелацијом сигнала са најистуренијег и преосталих сензора, добија се кашњење сигнала између парова сензора. Према Jones, Delhaye (1976) и Serizawa (1974), на овај начин одређено је највероватније време кашњења регистрованих промена напона. За познато растојање између сензора, брзина струјања се добија као количник растојања и временског кашњења (van der Welle, 1985; Zhai et al., 2016).

Осим за процену брзине течења, корелационе функције се могу применити и за процену турбулентних карактеристика флуидне струје. Jones, Delhaye (1976) наводе да дисперзија амплитуде корелационе функције сигнала два сензора представља меру флукуације брзине. Претпостављајући да је наилазак мехурића случајни процес на који утичу само адвективна дисперзија мехурића и флукуација брзине мешавине, Chanson, Toombes (2001) су извели израз за процену интензитета турбуленције  $T_u^{(e)}$  (једначина (3.12)). Према Chanson (2013b), највећи нивои турбуленције на призматичним степенастим брзотоцима, опажени су у опсегу концентрација (0,3 ÷ 0,7). Према Felder (2013) и Toombes (2002),  $T_u^{(e)}$  утиче и на степен аерисаности тока, и може се описати следећом зависношћу:

$$T_u^{(e)} = 0,25 + a \left( \frac{F_a h_c}{v_c} \right)^b, \quad (2.11)$$

где су:  $h_c$  – критична дубина,  $v_c$  – критична брзина и  $F_a$  – учестаност појаве гасовите фазе. Вредност коефицијената  $a$  кретала се у границама од 0,035 (Toombes, 2002) до 0,139 (Felder, 2013), а вредност експонента  $b$  у границама од 0,539 (Felder, 2013) до 1,2 (Toombes, 2002). Израз (3.12) значајан је и зато што се  $T_u$  може проценити помоћу лакше мерљиве величине  $F_a$ .

Од турбулентних карактеристика, значајан је и податак о дисипацији турбулентне кинетичке енергије  $\varepsilon$ . Према Falvey (1980), на основу овог податка може се проценити нагиб линије енергије. У вишефазном току,  $\varepsilon$  се израчунава за познат пречник стабилног мехурића у датим хидродинамичким условима. Hinze (1955) је дао предлог израза за процену овог пречника, у којем је повезао физичке особине флуида и дисипацију турбулентне кинетичке енергије. Пошто су константе у изразу Hinze-а са великом неизвесношћу, истраживањима спроведеним крајем 20. и почетком 21. века утврђене су нове вредности ових коефицијената (Deane & Stokes, 2002; Garrett, Li, & Farmer, 2000). Исправност Hinze-ове теорије испитали су Deane и Stokes анализирајући спектар пречника мехурића при преламању таласа у лабораторијским условима и у природи (Deane & Stokes, 2002). Они су функцију спектра густине мехурића  $N_D$  проценили на следећи начин:

$$N_D(d) = \frac{N}{\Delta d}, \quad (2.12)$$

где су:  $N_D$  – функција спектра густине мехурића,  $d$  – пречник мехурића,  $N$  – укупан број мехурића пречника  $d$  по јединици запремине, а  $\Delta d$  – прираштај пречника. Deane, Stokes (2002) су показали да пречник  $D_H$  дели спектар густине пречника мехурића  $N_D$  на две области: за пречнике мање од  $D_H$  важи степени распоред полу-пречника са експонентом  $-3/2$ , док за веће он износи  $-10/3$ . На основу резултата мерења, Deane и Stokes су предложили и израз за процену пречника  $D_H$  у следећој форми:

$$D_H = \left( 2 \frac{\rho_w}{\sigma W_{e_c}} \right)^{-3/5} \varepsilon^{-2/5}, \quad (2.13)$$

где су:  $D_H$  – пречник стабилног мехура (Hinze-ов пречник),  $\varepsilon$  – брзина дисипације турбулентне кинетичке енергије,  $\sigma$  – површински напон,  $W_{e_c}$  – Вебер-ов број критичан са становишта раскидања мехурића. Вредност  $W_{e_c}$  је у границама  $3 \div 4,7$ . Hinze-ов израз у изворном облику добија се за  $W_{e_c} = 1,17$  (Hinze, 1955).

Важан податак у вишефазним струјањима је и специфична површина контакта између фаза. Ова величина представља површину контакта по јединици запремине мешавине и она је функција концентрације ваздуха, брзине мешавине, пречника и фреквенције наилазка мехурића/капљице а може се проценити мерењем расподеле дужина тетива гасовите фазе. Према Chanson (2002), токови мешавине воде и ваздуха имају велики потенцијал за поправљање квалитета воде услед велике специфичне површине контакта. Мерењем ове величине може се проценити ефикасност аерације на датом објекту (Toombes & Chanson, 2005).

Da Silva (2008) и Costigan, Whalley (1997) су показали да функција расподеле дужина тетива за сваку фазу може дати увид у режим струјања у вишефазном току. Ово је нарочито важно у случају струјања са слободном површином јер сензором проводљивости није могуће тачно утврдити да ли је детектован пролазак мехурића/капљице или таласа (Falvey, 1980; Felder, 2013; González, 2005). Chanson, Toombes (2002c) и Toombes (2002) су показали да постоји једнозначна веза функције расподеле дужина тетива и концентрације ваздуха.

## 2.4 Нумеричко моделирање течења на степенастим брзотоцима

Као што је напоменуто у потпоглављу 2.3, на брзотоку струји мешавина воде и ваздуха. Због тога је неопходно применити рачунски модел којим се може симулирати присуство неколико фаза у току, као и њихова међусобна интеракција. Овакви модели су значајно сложенији него што је случај са једнофазним течењем.

### 2.4.1 Приступи у моделирању вишефазних токова

Основне једначине струјања у механици флуида, могу се формирати применом Ојлеровог или Лагранжовог приступа (Срнојевић, 2014; Prodanović, 2012). Према Ојлеру, флуид се сматра непрекидном средином (односно континуумом) и математички модел се формулише за непокретну контролну запремину. Са друге стране, према Лагранжовом приступу флуид се сматра скупом независних флуидних делића у међусобној интеракцији а једначине се изводе за покретну контролну запремину која је везана за произвољан флуидни делић.

Стандардни модели вишефазних струјања развијени су за проблеме са једном доминантном фазом (у даљем тексту: носећа фаза/носећи флуид) а остале су у дисперзији. У зависности од изабраног начина за описивање фаза, разликују се следећи модели (Balachandar & Eaton, 2010; Bhajantri, Eldho, & Deolalikar, 2007; Sijerčić, 1998; Subramaniam, 2013):

1. Моделирање свих фаза применом Ојлеровог приступа (Ојлер-Ојлер). У зависности начина моделирања интеракције између фаза, развијени су:
  - Модел “једног флуида” (енг. one-fluid approach). мешавина се посматра као један флуид, као у случају једнофазног тока код којег се густина мења у зависности од концентрације дисперзне фазе. Овај модел се примењује у случају кад су честице дисперзне фазе врло мале и не утичу на

струјно поље. Једначине модела се састоје од једначина одржања масе и количине кретања за мешавину и допунске транспортне једначине за концентрацију дисперзне фазе. Све фазе имају исту брзину и притисак.

- Обе фазе се посматрају као два засебна флуида (енг. two-fluid approach). У односу на претходни модел, текући садржи и једначине одржања масе и количине кретања за све фазе као и одговарајуће изворне чланове којима се може моделирати размена масе и количине кретања између фаза. У зависности од тога да ли се моделира и мешање између фаза, разликује се неколико подмодела. Уколико нема мешања између фаза, односно уколико је карактеристична дужина вишефазног тока (нпр. пречник мехура) значајно већа од димензије коначне запремине, може се користити Volume-of-Fluid (скраћено VoF) метода (Hirt & Nichols, 1981). Уколико је величина дисперзне фазе мања од величине контролне запремине, могу се применити модел мешавине (енг. mixture model) и Ојлеровски вишефазни модел (енг. Eulerian multiphase model). Разлика између ова два модела је да се код првог уводи модел релативне брзине између фаза (“ANSYS FLUENT Theory Guide”, 2011). Модел мешавине се добија од модела “једног флуида” када се додају чланови интеракције између фаза (Oweis et al., 2006), док се код Ојлеровског модела решавају једначине одржања за сваку фазу понаособ. Основна предност модела “два флуида” је примена истог рачунског алгорита за све фазе, што значајно скраћује време развоја модела. Са друге стране, неопходно је обратити нарочиту пажњу на модел интеракције (Oweis et al., 2006). То се најчешће спроводи дефинисањем флуксева дисперзне фазе, по аналогији са дисперзионим флуксом носећег флуида, што према Sijerčić (1998) нема поуздану физичку основу.

2. Ојлер-Лагранжов приступ подразумева се носећи флуид моделира Ојлеровим приступом док се кретање честица дисперзне фазе описује Лагранжовим (Subramaniam, 2013). У зависности од начина интеракције носећег флуида и честица дисперзне фазе, разлику се 1-, 2- и 4-струко спрезање утицаја. Ојлер-Лагранжов приступ се примењује за ниске вредности концентрације дисперзне фазе. Према Sijerčić (1998), овај приступ у моделирању има предност у односу на Ојлер-Ојлер у значајно мањем ангажовању рачунарске меморије, одсуство нумеричке дифузије при моделирању струјања дисперзне фазе као и једноставније имплементирање модела кретања честица различите величине. Са друге стране, за комплексне области струјања и високе вредности концентрације дисперзне фазе неопходно је задати велики број честица како би се са поузданошћу реконструисао њихов распоред. Тада се значајно повећавају

захтеви за рачунарским ресурсима, па су све мање атрактивни у поређењу са Ојлер-Ојлер моделима.

3. Моделирање обе фазе у виду скупа честица/флуидних делића. Овај поступак је нарочито популаран у последњих неколико година. Разлог за то је пораст интересовања за моделе који не користе рачунску мрежу (енг. mesh-free models), што је омогућено развојем рачунара и специјализованог хардвера (у првом реду графичких картица) којима се време прорачуна значајно скраћује. Типичан представних ове групе су модели засновани на SPH методи (Chen et al., 2015; Wang et al., 2016; Zhang, Sun, & Ming, 2015; Zhang & Deng, 2015). У наредном периоду очекује се њихова већа примена у области вишефазних струјања у хидротехници (Khanpour, Zarrati, Kolahdoozan, Shakibaeinia, & Jafarinik, 2016; Росић, 2016).
4. Директном симулацијом (енг. fully resolved approach) могуће је моделирати струјање врло ситних честица чије су димензије веће од најмањих вртлога (Колмогоровљева мера), што код претходних приступа није случај. Будући да је овај поступак захтеван у погледу расположивих рачунарских ресурса, примењује се само у истраживањима домена малих димензија.

#### 2.4.2 Моделирање турбуленције у вишефазним токовима

Турбуленција је сложен и још увек неразјашњен проблем у науци и техници. У поређењу са једнофазним, турбуленција вишефазних струјања је сложенија и још увек недовољно изучена. Стога су модели турбуленције вишефазних струјања засновани на моделима за једнофазне токове. Према Vaidheeswaran, Hibiki (2017), за моделирање турбуленције у вишефазним струјањима најчешће се примењују:

1. модели са једначинама осредњеним по времену (називају се још и Рејнолдсове једначине):
  - модели са две транспортне једначине, у првом реду  $k$ - $\epsilon$  (стандардни, RNG и realizable) и  $k$ - $\omega$  (стандардни и SST),
  - модели транспорта Рејнолдсових напона (енг. Reynolds stress model),
2. модели са једначинама осредњеним по простору тзв. LES – моделирање великих вртлога (енг. large-eddy simulation),
3. DNS – директна нумеричка симулација турбуленције (енг. direct numerical simulation).



До данас, најчешће коришћени модели турбуленције код једнофазних струјања су модели са две транспортне једначине. Њихове највеће предности су релативна једноставност и мања рачунска захтевност у поређењу са осталим моделима. Основне једначине  $k-\varepsilon$  модела вишефазних токова изведене су у Elghobashi, Abou-Arab (1983). Kataoka, Serizawa (1989) су приказали један од могућих начина побољшања првобитног модела увођењем специфичне површине контакта између фаза. У намери да се побољшају перформансе модела при симулацији рециркулационих струјања, развијене су RNG и realizable верзије  $k-\varepsilon$  модела (Karadimou, Papadopoulos, & Markatos, 2017; Pouryoussefi & Zhang, 2015). Поред наведених, за токове са рециркулацијом користе се стандардни и SST  $k-\omega$  модели (Amoudry, 2014; Bellakhal, Chahed, & Masbernat, 2004; Jha & Bombardelli, 2009).

У погледу моделирања турбулентних вишефазних токова, за двофазно струјање примењују се модификоване верзије стандардног  $k-\varepsilon$  модела турбуленције. Разлог за то су релативна поузданост и мали захтеви у погледу захтеваних рачунарских ресурса и нумеричке стабилности. У првим моделима, турбуленција је често повезивана са турбуленцијом носећег флуида (што се претпоставља да је доминантна фаза) док дисперзна фаза мења турбулентне карактеристике носећег флуида. Овај приступ је коректан само у случајевима великих концентрација дисперзне фазе. Gosman, Lekakou, Politis, Issa, Looney (1992) је увео параметар који је назвао коефицијент одзива и он представља однос флукуација дисперзне и носеће фазе и показао да се он може применити и за веће концентрације дисперзне фазе.

Поред модела са две транспортне једначине, развијени су и модели којима се директно рачуна транспорт Рејнолдсових турбулентних напона (de Bertodano, Lee, Lahey, & Drew, 1990). Развијене су Gibson-Lauder (GL), Naot-Rodi (NR), Launder-Reece-Rodi (LRR) и Speziale-Sarkar-Gatski (SSG) варијанте модела (Cokljat, Slack, Vasquez, Bakker, & Montante, 2006; Colombo & Fairweather, 2015; Jha & Bombardelli, 2009). Предност наведених модела је нешто боља реконструкција поља брзине и распореда концентрације дисперзне фазе. Разлог за то је што се код ових модела напушта концепт турбулентне вискозности и директно се моделирају Рејнолдсови напони. Услед тога, њима се може симулирати неизотропна турбуленција. Са друге стране, комплексност модела се значајно повећава јер је неопходно решити додатних 6 једначина (Speziale, Abid, & Durbin, 1994).

Сви претходни модели користе приступ осредњавања по времену раздвајајући променљиве у струјном пољу на средње вредности и флукуације. Други приступ у моделирању турбуленције је подела једначина струјања просторним филтром на део који се моделира (енг. sub-grid scale) и на део који се добија решавањем једначина (енг. resolved scale). Разлог за овај приступ је чињеница да велики вртлози зависе

од облика струјног поља а да са смањењем њихових димензија, карактер вртлога постаје унивезалнији па се могу математички моделирати (Rodi, Constantinescu, & Stoesser, 2013). Предност овог приступа у односу на претходне је што се прогушћавањем рачунске мреже смањује величина вртлога коју је неопходно моделирати. Са друге стране, за примену је неопходно користити густу мрежу, нарочито у близини чврсте границе што значајно повећава неопходне рачунарске ресурсе (Rodi et al., 2013). Такође, избор погодне величине просторног филтра је значајан проблем код формулације модела вишефазних токова (Bestion, 2014; Fox, 2012; Lakehal, Smith, & Milelli, 2002).

Директна симулација подразумева да се не уводе засебни модели већ се турбуленција добија директно, решавањем Navier-Stokes-ових једначина. Иако је овај приступ врло привлачан због одсуства модела турбуленције, његова примена је ограничена. Највећи проблеми за ширу примену је што овакве симулације захтевају врло фину дискретизацију и што се могу симулирати домени величине неколико центиметара. Као последица, овакви модели захтевају изузетно велики број рачунских тачака, због чега је неопходна употреба супер-рачунара.

При моделирању вишефазних турбулентних токова, основни проблем је моделирање утицаја дисперзне фазе на турбуленцију носећег флуида. Код Ојлер-Лагранж модела, турбуленција се рачуна само за носећи флуид а утицај дисперзне фазе додаје у једначине модела турбуленције у виду изворских чланова (Colombo & Fairweather, 2015). У случају Ојлер-Ојлер модела мешавине, турбуленција се рачуна за мешавину а затим се преводи у турбуленцију носеће и дисперзне фазе помоћу коефицијента одзива (Behzadi, Issa, & Rusche, 2004; Gosman et al., 1992; Rusche, 2002). Образложење за овај приступ је да мешавине са концентрацијом дисперзне фазе већ од 6% имају константну вредност коефицијента преноса и да се турбуленција може рачунати само за мешавину (Gosman et al., 1992). Код модела са транспортом Рејнолдсових напона, међусобни утицај фаза моделира се допунском везом притиска и брзине деформације (Beishuizen, Naud, & Roekaerts, 2007) или корелацијом флукуација притиска и флукуације брзине (Mimouni, Guingo, Lavieville, & Mérioux, 2017; Mimouni, Laviéville, Seiler, & Ruyer, 2011). LES модели захтевају додавање посебних чланова услед филтрирања контактних сила међу фазама. Према (Aniszewski, Bogusławski, Marek, & Tyliczszak, 2012), у изворне чланове спадају сила површинског напона (енг. sub-grid surface tension force) и тензор преноса масе (енг. sub-grid mass transfer tensor). Утицај ових чланова на резултате још увек није познат, што се истражује детаљним симулацијама помоћу DNS-а. Стога, LES вишефазни модели су још увек у почетној фази развоја и тренутно нису погодни за ширу примену (Aniszewski et al., 2012; Beishuizen et al., 2007).

### 2.4.3 Нумеричко моделирање вишефазног струјања на степенастим брзотоцима

Нумерички модели вишефазних струјања су најпре развијани за потребе пројектовања термо- и нуклеарних електрана (Sijerčić, 1998). Временом, са већом доступношћу рачунарске технике, овакви модели су почели да се примењују и у хидротехници. Највише су заступљени у моделирању морфодинамичких процеса (Jha & Bombardelli, 2009), струјању подземних вода (Jaćimović, 2007) и транспорта гасова у акумулацијама (Jaćimović, 2007; Jacimovic, Hosoda, Ho-Dong, & Ivetic, 2016). Нумерички модели нису широко примењивани при пројектовању брана са брзотоком већ су, због високог ризика по животе људи, хидрауличке карактеристике провераване искључиво помоћу физичких модела (Willey, Ewing, & Lesleighter, 2012). У последњих петнаест година, приметан је пораст броја истраживања везаних за примену рачунских модела код хидротехничких објекта (Cheng, Luo, Zhao, & Li, 2004; Cheng, Chen, & Luo, 2006; Husain, Muhammed, Karunarathna, & Reeve, 2014).

Особеност струјања код хидротехничких грађевина је интензивно увлачење ваздуха које се јавља при великој брзини течења воде (ова појава назива се још и самоаерација). Стога, не могу се применити стандардни методи прорачуна, већ се ток мора посматрати као вишефазни. За нумеричко решавање једначина струјања аерисаних токова, могу се користити метода коначних запремина, коначних елемената и поступци који не користе рачунске мреже. Од свих метода, најчешће је примењивана метода коначних запремина. Неколико истраживача је користило и методу коначних елемената, али су се бавили неаерисаним током (Cheng et al., 2004; Kirkgoz, Akoz, & Oner, 2009). Последњих година, све су популарније методе које не користе рачунску мрежу (енг. mesh-free). Husain et al. (2014), Khanpour et al. (2016), Wan, Li, Gualtieri, Yang, Feng (2017) су применили SPH методу на моделирање вишефазног струјања на хидротехничким објектима, али се може приметити да је неопходан велики број честица воде и ваздуха како би аерација тока била задовољавајуће моделирана. Будући да је метод коначних запремина најзаступљенији поступак, у наставку се даје преглед истраживања у којима је коришћен.

У Табели 2.1 дат је приказ неких истраживања струјања на хидротехничким објектима применом нумеричких модела. Уочава се да је највећи број аутора користио VoF модел вишефазног струјања а одређен број је и поредио са моделима мешавине и Ојлеровским вишефазним моделом (детаљније о вишефазним моделима је приказано у потпоглављу 2.4.1 – Приступу у моделирању вишефазних токова). Највећи број аутора препоручује примену модела мешавине за нумеричко моделирање аерисаних токова. Иако је RNG  $k-\epsilon$  модел турбуленције најчешће примењиван, мањи број аутора је упоредио његове перформансе са другим варијантама турбулентних

модела. Nikseresht, Talebbeydokhti, Rezaei (2013) су поредили најчешће коришћене варијанте  $k-\varepsilon$ ,  $k-\omega$  и RSM модела и препоручили примену VoF+RSM али њихови резултати указују да је неизвесност резултата у оквиру једног модела турбуленције упоредива са неизвесношћу која настаје променом варијанте турбулентног модела. Осим тога, уочава се да су сви аутори користили мрежу од 1 mm и крупнију, али нису детаљније анализирали утицај густине мреже. Овај проблем је нарочито важан за VoF модел јер он не може да симулира струјање фазе у дисперзији (“ANSYS FLUENT Theory Guide”, 2011). Такође, код VoF методе је неопходна и фина дискретизација, нарочито у близини контакта воде и ваздуха. Са друге стране, модели мешавине могу да симулирају и дисперзну фазу и за очекивати је да се њима боље реконструише процес само-аерације, чак и при грубљој просторној дискретизацији.

**Табела 2.1:** Преглед значајнијих истраживања струјања на хидротехничким објектима помоћу нумеричких модела. У колони “Изабрани модел” је информација о примењеном моделу вишефазног струјања и турбуленције.  $\Delta L$  је карактеристична димензија контролне запремине.

Истраживање	Изабрани модел	$\Delta L$	Хидраулички проблем
Bayon, Valero, García-Bartual, Vallés-Morán, López-Jiménez (2016)	VoF + RNG k- $\epsilon$	3 mm	аерисани ток, хидраулички скок
Bhajantri, Eldho, Deolalikar (2006)	једнофазни + нема података	око 6 cm <sup>(a)</sup>	неаерисани ток, глатки брзоток
Bhajantri, Eldho, Deolalikar (2007)	једнофазни + нема података	око 5 cm <sup>(a)</sup>	неаерисани ток, глатки брзоток
Carvalho, Martins (2009)	VoF+RNG k- $\epsilon$	7,5 mm ÷ 10 mm	аерисани ток, степенести брзоток
Chen, Dai, Liu (2002)	VoF+RNG k- $\epsilon$	око 5 mm <sup>(a)</sup>	аерисани ток, степенести брзоток
Chen, Zhang, Xu, Wang (2010)	VoF+RNG k- $\epsilon$ Mixture+RNG k- $\epsilon$ <sup>(*)</sup>	нема података	аерисани ток, умирујући базен
Eghbalzadeh, Javan (2012)	VoF+RNG k- $\epsilon$	око 5 mm <sup>(a)</sup>	аерисани ток, степенести брзоток
Kositittiwong (2012)	Mixture+RNG k- $\epsilon$ <sup>(*)</sup> VoF+RNG k- $\epsilon$ <sup>(*)</sup> Mixture+RNG k- $\epsilon$	2 cm ÷ 10 cm	аерисани ток, степенести брзоток
Li, Zhang, Xu (2017)	Mixture+realizable k- $\epsilon$	1 mm ÷ 5 mm	аерисани ток, степенести брзоток
Nikseresht, Talebbeydokhti, Rezaei (2013)	VoF+RST Mixture+k- $\epsilon$ (std., RNG, realiz.) <sup>(*)</sup> Mixture+k- $\omega$ (std., SST) <sup>(*)</sup> Mixture+RSM (LPS, QPS, stress- $\omega$ ) <sup>(*)</sup>	око 1 cm <sup>(a)</sup>	аерисани ток, степенести брзоток
Tabbara, Chatila, Awwad (2005)	деформабилна мрежа+ std. k- $\epsilon$	око 2 mm <sup>(a)</sup>	аерисани ток, глатки брзоток
Zhan, Zhang, Gong (2016)	VoF+LES <sup>(*)</sup> Mixture+LES <sup>(*)</sup> Eulerian+RNG k- $\epsilon$	око 5 mm <sup>(a)</sup>	аерисани ток, степенести брзоток

<sup>(a)</sup> Није експлицитно наведено већ је ово процена на основу мреже приказане у чланку.

<sup>(\*)</sup> Препоручена комбинација вишефазног и турбулентног модела од стране аутора истраживања.

## 2.5 Недостаци претходних истраживања

Велики број истраживача дао је значајан допринос у проучавању призматичних степенастих брзотока. Највише истраживања спроведено је на физичким моделима, док су у мањем броју коришћени и нумерички модели. Са друге стране, знатно је мањи број истраживања везаних за степенасте брзотоке са постепеним сужењем. Ова истраживања углавном су била везана за конкретне пројекте, чији је циљ био само димензионисање разделних зидова брзотока. Будући да не постоје препоруке за пројектовање оваквих објеката, пројектанту брзотока са сужењем корита намећу се следећа питања:

- Да ли је постепеним сужењем корита степенастог брзотока смањена његова способност дисипације енергије? Ако јесте, колико то смањење износи у односу на призматични степенаста брзоток при истој ширини прелива?
- Да ли нумерички модели вишефазних струјања могу да замене физичке моделе за моделирање струјног поља у степенастом брзотоку са постепеним сужењем корита?

Прегледом литературе указано је да је фонд расположивих података за овај тип брзотока изузетно ограничен због чега се често избегавају, упркос потенцијалним техно-економским погодностима. Досадашња истраживања су се углавном бавила благо нагнутим степенастим брзотоцима за потребе ојачавања насипа. Такође, у испитивањима углавном није посвећивана пажња аерацији тока што у значајној мери умањује општост објављених резултата. Из тог разлога, неопходно је спровести ново истраживање које би покушало да одговори на горе наведена питања.

У новом истраживању, корисне смернице могу се наћи у литератури. Нпр. о стојећим таласима значајно је истраживање Irpen (1936); о моделирању аерисаних токова призматичних степенастих брзотока, корисни су чланци: Voes (2000), Voes, Hager (2003b), Chanson (1993), Pfister, Chanson (2014); о моделирању степенастих брзотока са постепеним сужењем корисно је истраживање објављено у Hunt et al. (2012).

## 2.6 Циљ и задаци истраживања

Прегледом литературе, уочава се да струјање у степенастом брзотоку са постепеним сужењем корита недовољно истражено. Циљ ове дисертације је да покаже утицај смањења ширине брзотока на струјно поље, при великим подужним нагибима корита, карактеристичним за бетонске бране. Овај циљ може се остварити испуњењем задатака и провером хипотеза које се наводе у наставку:

1. Истраживања на физичким моделима имају задатак да дају увид у хидрауличке последице постепеног сужења корита степенастог брзотока. Стога, уводе се следеће претпоставке:
  - дубине дуж зидова брзотока повећавају се у низводном смеру,
  - постепеним смањењем ширине брзотока погоршавају се његове дисипационе карактеристике,
  - сужењем корита брзотока погоршавају се његове аерационе карактеристике,
  - промена размере физичког модела утиче на резултате слично као код призматичних брзотока.
2. Мерење на физичким моделима спровешће се сензорима проводљивости. За њихову примену, претпоставља се да се:
  - осим стандардних величина које се могу проценити сондама са два сензора, сондом са три сензора може проценити и правац вектора брзине флуидне струје,
  - унапређењем поступка обраде података може пружити увид у нова сазнања битна за хидротехничку струку.
3. Нумеричко моделирање има задатак да укаже на применљивост оваквих модела за пројектовање степенастих брзотока са постепеним сужењем корита. Претпоставља се да се:
  - нумеричким моделом вишефазног струјања може успешно реконструирати струјно поље у близини зида степенастог брзотока.

# Физички модели степенастих брзотока са постепеним сужењем корита

---

## Садржај

3.1	Опис физичких модела . . . . .	35
3.1.1	Модел у хидрауличкој лабораторији Института “Јарослав Черни” . . . . .	36
3.1.2	Експериментална инсталација у хидрауличкој лабораторији Грађевинског факултета . . . . .	41
3.2	Методе мерења . . . . .	43
3.2.1	Мерење протока . . . . .	43
3.2.2	Мерење дубина . . . . .	43
3.2.3	Мерење у мешавини воде и ваздуха . . . . .	45
3.3	Обрада података мерења са сензора проводљивости . . . . .	47
3.3.1	Идентификација фазе . . . . .	48
3.3.2	Концентрација ваздуха . . . . .	50
3.3.3	Брзина течења мешавине . . . . .	51
3.3.4	Преостала енергија флуидне струје . . . . .	54
3.3.5	Турбулентне карактеристике аерисаног тока . . . . .	54
3.4	Резултати мерења на физичким моделима . . . . .	56
3.4.1	Модел ЈЧ . . . . .	57
3.4.2	Модел ГФ . . . . .	73
3.5	Дискусија резултата физичких модела . . . . .	83

---

## 3.1 Опис физичких модела

Брз напредак рачунарске технике у претходних 30 година, довео је до повећаног интересовања за примену математичких модела у пројектовању хидротехничких објеката.



ката. У хидротехничкој пракси, они се најчешће примењују у почетним фазама пројектовања. Код објеката велике важности и високог ризика по здравље и животе људи, пројетковано решење се често проверава помоћу физичког модела. Иако интересовање за физичке моделе опада, њихов значај је и даље велики јер могу да дају увид у феномене који се, за сада, не могу успешно симулирати рачунским путем.

За потребе ове дисертације, истраживања су спроведена на два физичка модела: модели су израђени у хидрауличким лабораторијама Института за водопривреду “Јарослав Черни” и Института за хидротехнику и водно еколошко инжењерство Грађевинског факултета Универзитета у Београду. Такође, примењен је и нумерички модел за симулацију струјања на прво поменутом физичком моделу.

### 3.1.1 Модел у хидрауличкој лабораторији Института “Јарослав Черни”

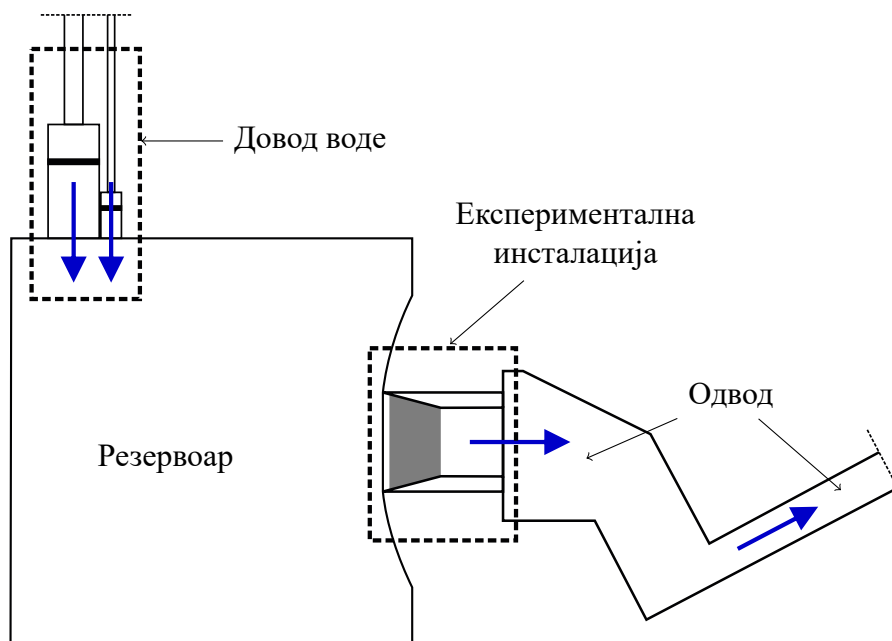
Схема инсталације у хидрауличкој лабораторији Института за водопривреду “Јарослав Черни” (у даљем тексту: модел ЈЧ)<sup>{1}</sup>, приказана је на Слици 3.1. Инсталација се састоји од узводног резервоара, прелива са степенастим брзотоком, умирујућег базена и канала за одвод (Слика 3.1а). Узводни резервоар се снабдева водом помоћу две цеви опремљене регулационим вентилима и коморама за мерење протока. Резервоар је довољно велике запремине (око 200 m<sup>3</sup>) и може се сматрати да се ниво воде у њему не мења при малим осцилацијама протока.

Вода из узводног резервоара истиче преко прелива практичног профила и доспева у експерименталну инсталацију. Након проласка кроз умирујући базен, сва вода се одводи низводним каналом према пумпама за рецикулацију.

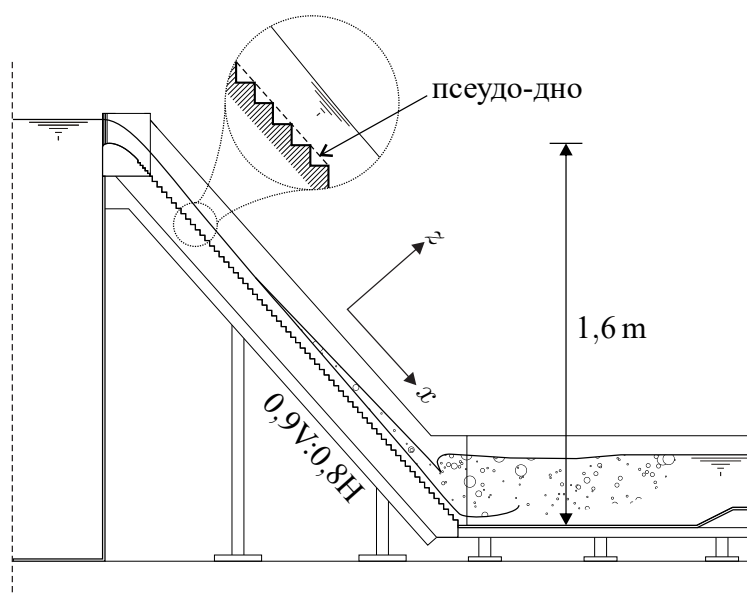
Прелив са степенастим брзотоком налазио се на зиду резервоара (Слика 3.1б). Ширина прелива износила је 2 m са круном на коти 1,8 m (мерено у односу на под лабораторије), односно 1,6 m од дна умирујућег базена. Угао псеудо-дна брзотока износио је  $\phi \approx 48^\circ 24'$ , што одговара нагибу дна 1V:0,89H. За потребе ове дисертације, испитане су две висине степеника:

- модел са степеницима висине 22,5 mm (Слика 3.2). Ширина прелива износила је 2 m, а угао сужења брзотока  $\theta$  износио је  $12^\circ$ ,  $18^\circ 48'$  и  $22^\circ 36'$ . Проток на инсталацији износио је  $130 \text{ L s}^{-1}$ .
- модел са степеницима висине 45 mm. Ширина прелива смањена је на 1 m, а угао сужења брзотока  $\theta$  износио је  $12^\circ$  и  $18^\circ 48'$ . Проток на инсталацији износио је око  $184 \text{ L s}^{-1}$ .

<sup>{1}</sup> Део истраживања из дисертације, спроведен је на измењеном моделу бране Бузина (Starinac, 2013; Starinac et al., 2014).



(а) Схема инсталације. Плавим стрелицама приказан је ток воде кроз инсталацију.



(б) Подужни пресек кроз брзоток и умирујући базен. На скици је приказан и усвојени десни координатни систем:  $x$ -оса је паралелна псеудо-дну и управна на подужну осу степеника,  $y$ -оса је паралелна псеудо-дну и у правцу подужне осе степеника, а  $z$ -оса је управна на псеудо-дно.

Слика. 3.1: Схематски приказ инсталације модела ЈЧ.

При проучавању обе варијанте, усвојени су углови сужења брзотока при којима неће доћи до суперпозиције стојећих таласа. Зато је сужење брзотока изведено само са једне стране променом правца десног зида.

Основни недостатак модела у Фрудовој сличности је неизвесност мешања воде и ваздуха. Да би ефекти размере били прихватљиво мали, неопходно је задовољити следеће услове (Voes, 2000):

$$R_e = \frac{\rho_w u h_w}{\mu_w} \geq 1 \cdot 10^5 \text{ и } W_e = \frac{u}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_w s / \sin \phi}}} \geq 100, \quad (3.1)$$

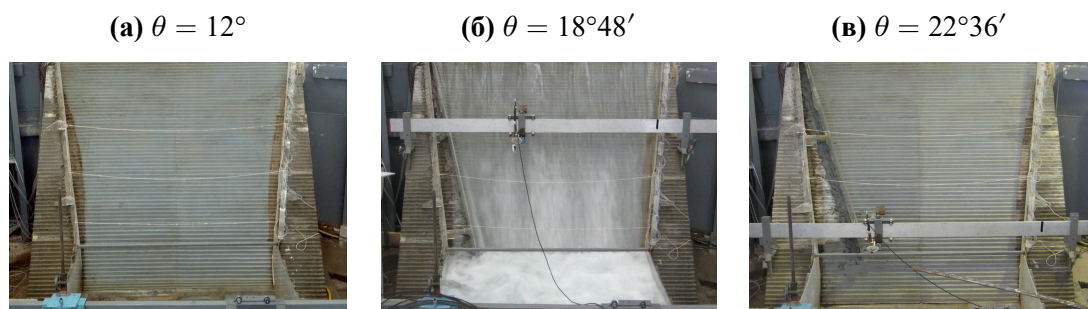
где су:  $R_e$  – Рејнолдсов број,  $\rho_w$  – густина воде,  $\mu_w$  – динамичка вискозност воде,  $W_e$  – Веберов број,  $\sigma$  – површински напон, и  $\phi$  – угао који псеудо-дно заклапа са хоризонталном равни.

Карактеристичне вредности Рејнолдсовог и Веберовог броја за стојећи талас и за непоремећени ток, приказане су у Табели 3.1. Према подацима, оба модела делимично задовољавају услове (3.1) за непоремећени ток. Унутар стојећег таласа, вредности бројева  $R_e$  и  $W_e$  су значајно веће, и оба услова су строго задовољена само за модел са већим степеницима. Иако услов по  $W_e$  није задовољен за модел са нижим степеницима, вредности су довољно блиске граничним. Voes (2000) наводи да за моделе који не задовољавају наведене услове, концентрација ваздуха биће потцењена а брзина мешавине и преостала енергина биће на страни сигурности када се његови резултати преведу на прототип.

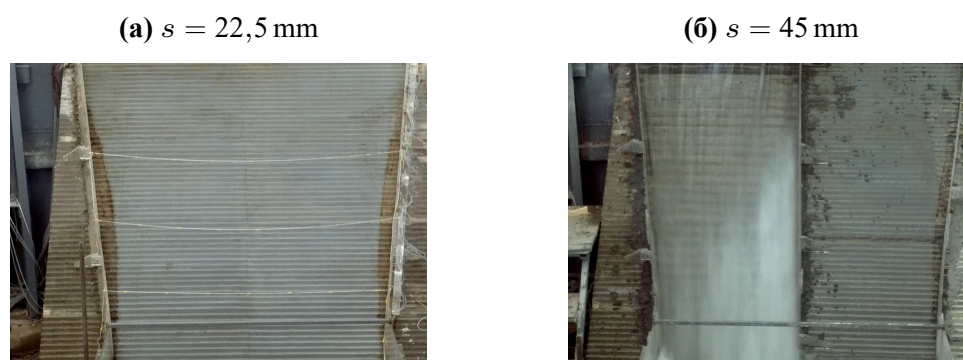
**Табела 3.1:** Карактеристичне вредности Рејнолдсовог и Веберовог броја за модел ЈЧ, према Voes (2000).

$s$ [mm]	непоремећени ток		стојећи талас	
	$R_e$ [–]	$W_e$ [–]	$R_e$ [–]	$W_e$ [–]
22,5	$1 \cdot 10^5$	41	$2,1 \cdot 10^5$	71
45	$2,8 \cdot 10^5$	81	$4,7 \cdot 10^5$	122

Будући да на моделу ЈЧ нису у потпуности задовољени услови (3.1), корисно је проценити одступање при преносу резултата са модела на прототип. Геометријске карактеристике модела са степеницима висине 45 mm изабране су у намери да се испита утицај промене размере за дужине код модела у Фрудовој сличности. Тако је изабран 2 пута виши степеник, али је то захтевало испитивања на 2 пута вишем моделу са двоструко широм преливном ивицом и скоро 5,66 пута већим протоком. Како сви захтеви нису могли бити задовољени, усвојено је компромисно решење: моделиран је узводни део брзотока уз десни зид. Ширина овог сегмента на узводном крају износила је 1 m, а висина је била као код модела са мањим степеницима (Слика 3.3).



**Слика. 3.2:** Модел ЈЧ, испитани углови зидова брзотока за висину степеника 22,5 mm.



**Слика. 3.3:** Модел ЈЧ, упоредни приказ модела две размере за  $\theta = 12^\circ$ . Модел на фотографији (а) је израђен у пуној висини и ширини. Због ограничења у капацитету лабораторије, израђен је део модела у двоструко већој размери за дужине (Слика б) и то узводни део брзотока уз десни зид.

### Мерна места на моделу ЈЧ

Мерења у мешавини воде, спроведена су у попречним профилима изнад степеника 26, 39 и 52 за  $s = 22,5 \text{ mm}$ , односно 13, 19 и 26 за  $s = 45 \text{ mm}$ . Мерене тачке биле су на међусобном растојању  $\Delta y = 10 \text{ mm}$  дуж степеника и  $\Delta z = 5 \text{ mm}$  у правцу управном на псеудо-дно за модел са малим степеницима (Слика 3.4а), односно 10 mm у оба правца за модел са великим степеницима (Слика 3.4б). Мерењима је обухваћена област у близини зида брзотока чија је ширина варијала: почињала је на 10 mm од зида и завршавала се у непоремећеној зони. Висина је такође варијала (Слика 3.4); најниже тачке изабране су на 5 mm од псеудо-дна а мерено је дуж сваке вертикале све док се не задовољи следећи услов:  $\bar{c}_a > 0,90 \div 0,95$ .

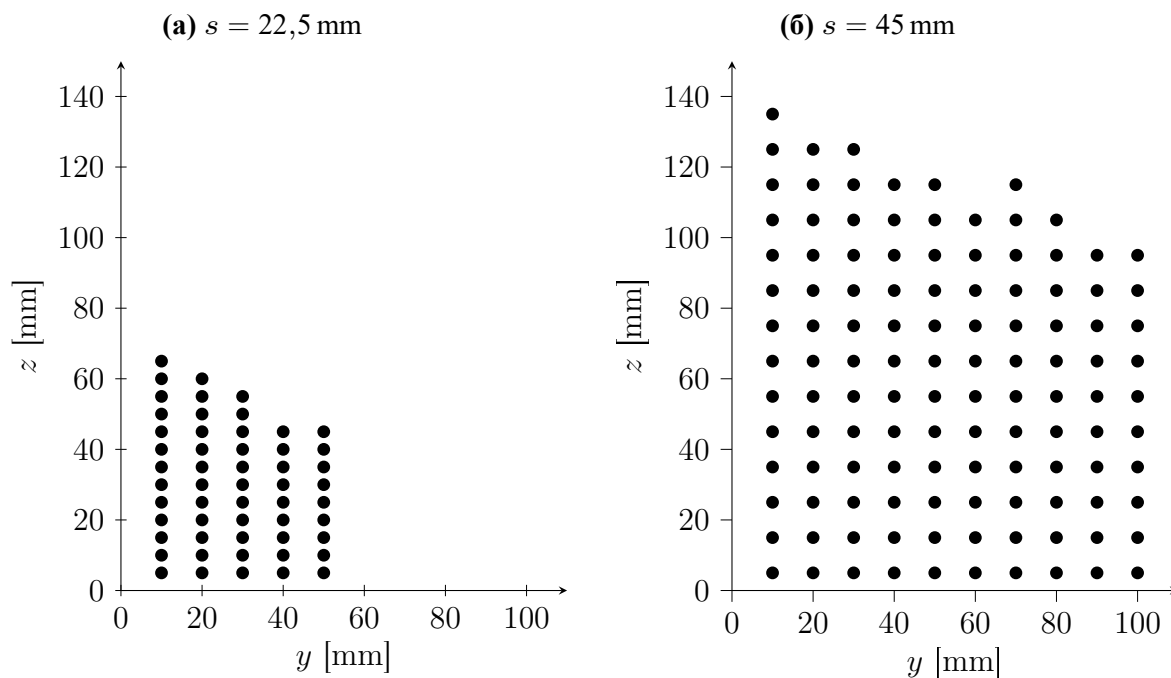
Дуж зида брзотока, дубине мерене су у 10 профила. Сваки профил био је постављен изнад врха степеника и управан на псеудо дно. Изабрани профили као и њихово релативно растојање од прелива, приказани су у Табели 3.3.

**Табела 3.2:** Положај попречних профила на моделу ЈЧ, за мерење у аерисаном току.

$s$ [m]	степеник	$x/L$ [-]	$x/h_c$ [-]
45	13	0,25	5,4
	19	0,375	7,8
	26	0,5	10,6
22,5	26	0,5	10,6
	39	0,75	15,8
	52	1	21

**Табела 3.3:** Положај профила за мерење дубина дуж зида брзотока модела ЈЧ.

$s = 45$ mm		$s = 22,5$ mm	
степеник	$x/h_c$ [-]	степеник	$x/h_c$ [-]
6	2,7	13	5,4
8	3,5	17	7,0
11	4,6	22	9,0
13	5,4	26	10,6
15	6,2	30	12,2
17	7,0	35	14,2
19	7,8	39	15,8
21	8,6	43	17,4
24	9,8	47	19
26	10,6	52	21



**Слика. 3.4:** Модел ЈЧ, пример распореда мерних тачака у попречном профилу  $x/h_c = 10,6$  за  $\theta = 12^\circ$ .

### 3.1.2 Експериментална инсталација у хидрауличкој лабораторији Грађевинског факултета

Схема инсталације у хидрауличкој лабораторији Института за хидротехнику и водно еколошко инжењерство Грађевинског факултета Универзитета у Београду (у даљем тексту: модел ГФ), приказана је на Слици 3.5 а њен аксонометријски приказ на Слици 3.7. Проток на улазу у узводни резервоар регулише се помоћу затварача постављеног на доводу. Узводни резервоар састоји се од две коморе између којих је двоструки троугани (Томсонов) прелив (Слика 3.9). Вода се из узводне коморе прелива и умирује у низводној. Важно је напоменути да је ниво воде у комори за умирење испод доње ивице Томсонових прелива, па је преливање непотопљено. Умирена вода се као експерименталној инсталацији одводи цевоводом пречника 300 mm и дужине 4 m.

Експериментална инсталација састоји се од стабилизационог резервоара, прелива, степенастог брзотока, умирујућег базена и одводног канала (Слика 3.6). Стабилизациони резервоар је димензија  $2\text{ m} \times 1,25\text{ m} \times 2\text{ m}$ . У резервоар је постављена и решетка за умирење тока, како би се умањили негативни ефекти наглог ширења млаза при изласку из доводне цеви. Вода из резервоара истиче преко прелива практичног профила ширине 1 m. Прелив је пројектован на проток од  $100\text{ L s}^{-1}$ .

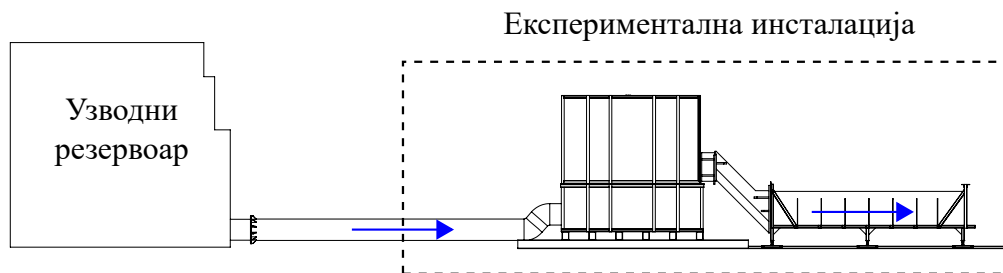
Преливена вода доспева у степенести брзоток у којем су спроведена мерења. Основна ширина брзотока била је идентична ширини прелива и износила је 1 m. На

низводном крају, брзоток је спојен са умирујућим базеном ширине 1 m. Испитане су две висине степеника брзотока: 4,5 cm и 9 cm. За обе висине степеника, испитани су следећи углови сужења брзотока  $\theta$ : 0°, 5°, 10° и 15°. Свака од варијанти геометрије брзотока испитана је при протоку од  $20 \text{ L s}^{-1}$ ,  $40 \text{ L s}^{-1}$  и  $60 \text{ L s}^{-1}$  што је резултовало са 24 експеримента. Режији течења при изабраним протоцима за све експерименте, процењени су помоћу номограма са Слике 2.2 и приказани су Табели 3.4.

**Табела 3.4:** Режији течења на моделу степенастог брзотока - модел ГФ

$s$ [mm]	$q$ [ $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ ]	$h_c$ [m]	$s/h_c$ [—]	режим течења
45	0,02	0,034	1,307	прелазни/клизећи
	0,04	0,055	0,824	клизећи
	0,06	0,072	0,628	клизећи
90	0,02	0,034	2,615	скоковити
	0,04	0,055	1,647	прелазни
	0,06	0,072	1,257	прелазни/клизећи

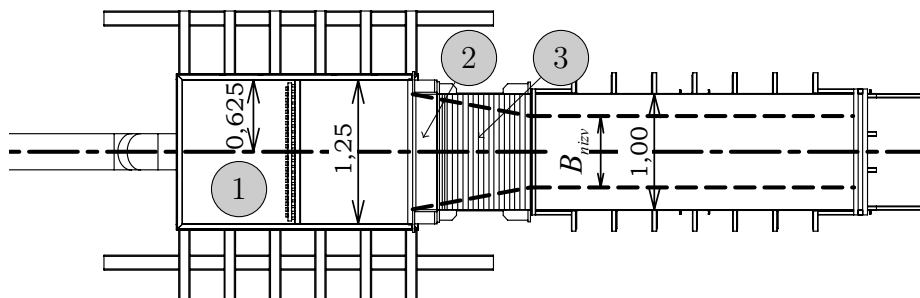
Умирујући базен на низводном крају експерименталне инсталације направљен је са помичним зидовима како би се његова ширина прилагодила брзотоку. Мерењима у оквиру ове дисертације није обухваћен умирујући базен, већ је он предмет засебних истраживања (Миловановић, у изради). Након проласка кроз умирујући базен, вода се одводи према систему за рецикулацију.



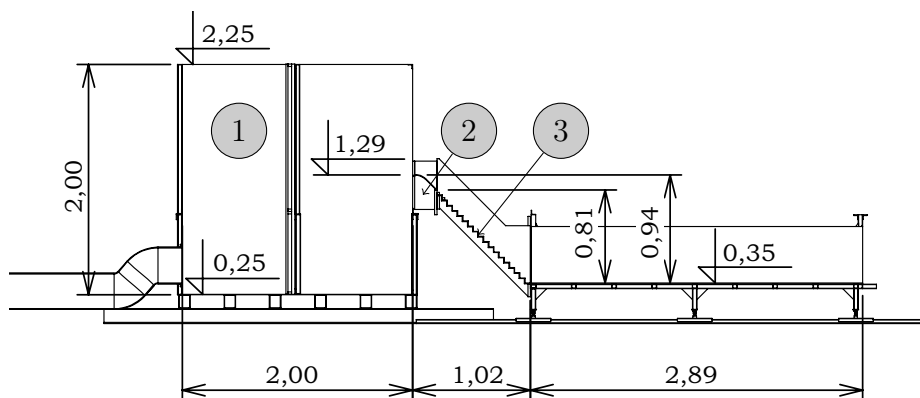
**Слика. 3.5:** Схематски приказ инсталације модела ГФ. Плавом стрелицом означен је ток воде кроз инсталацију.

### Мерна места на моделу ГФ

На Слици 3.8 илустрован је распоред мерних места на инсталацији модела ГФ. Мерно место  $M_1$  обухватало је узводни резервоар,  $M_2$  је било дуж цевовода који спаја узводни и стабилизациони резервоар,  $M_3$  – стабилизациони резервоар и  $M_4$  – степени брзоток.



(а) Основа. Испрекиданом линијом илустрован је начин сужења брзотока и умирујућег базена.



(б) Подужни пресек.

**Слика 3.6:** Скица инсталације модела ГФ са прегледом карактеристичних димензија. Све дужине су у метрима. Ознаке на цртежу: 1 – стабилизациони резервоар, 2 – прелив практичног профила, 3 – брзоток.

## 3.2 Методе мерења

### 3.2.1 Мерење протока

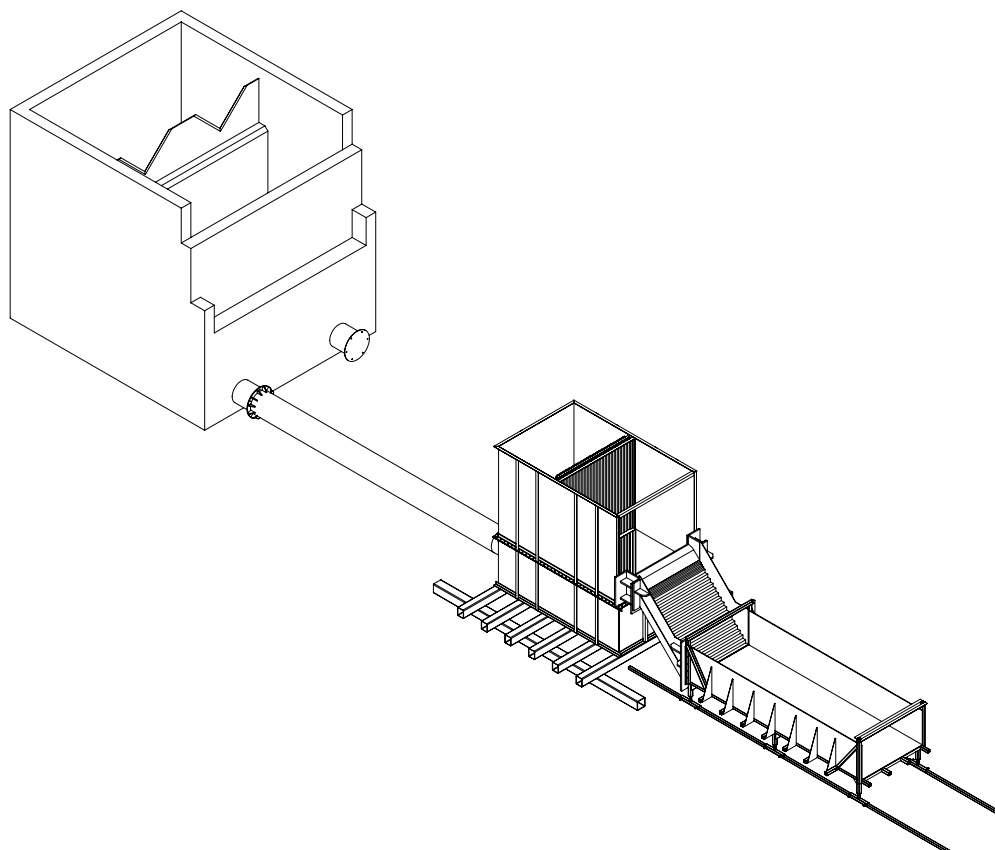
На моделу ЈЧ, проток је мерен помоћу Базеновог прелива. Процењена неизвесност мерења протока износила је око 2 %.

На моделу ГФ, проток је мерен на два места  $M_1$  и  $M_2$  (Слика 3.8). На месту  $M_1$ , проток је мерен помоћу двоструког Томсоновог прелива а ниво у њему је читаван помоћу мерне игле. На мерном месту  $M_2$  постављено је ултразвучно мерило протока Dupasonics TFXL (Слика 3.10). Процењена неизвесност мерења протока на моделу ГФ износила је око 2 % за протоке веће од  $10 \text{ L s}^{-1}$ .

### 3.2.2 Мерење дубина

Ниво воде у стабилизационом резервоару модела ГФ, мерен је на позицији  $M_3$  (Слика 3.8). За ово мерење коришћен је пијезометар од стаклене цеви постављен на ле-

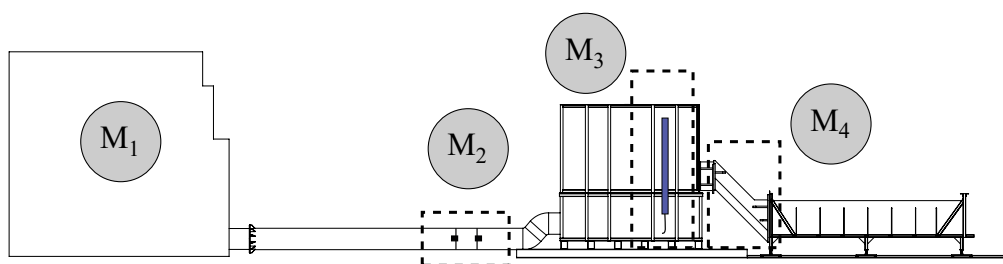




Слика. 3.7: Аксонометријски приказ инсталације модела ГФ.

њир и доњим крајем био је повезан на зид резервоара помоћу савитљивог црева. Неизвесност мерења нивоа процењена је на 2 mm. Нивои у стабилизационом резервоару коришћени су у мерењима као контролни податак. За потребе будућих мерења, спроведена су и хидрауличких карактеристика прелива током пробних испитивања (детаљније у Додатку Б.2). Коефицијент протока за прелив практичног профила на излазу из стабилизационог резервоара процењен је на  $C_{p,R} = 0,485$ .

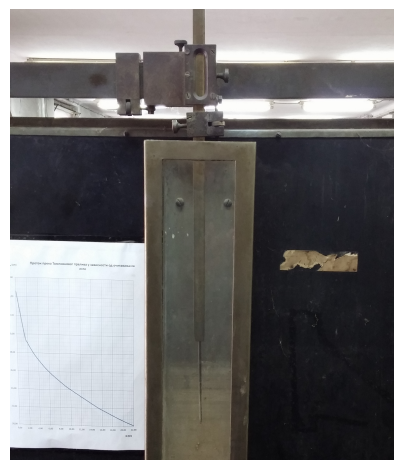
Дубина воде дуж зида брзотока модела ЈЧ, мерена је у 10 профила а њихов положај дат је у Табели 3.3. На моделу ГФ, дубина воде уз зид мерена је у 8 профила. Први профил постављен је на низводном крају прелива (тј. на месту где почиње брзоток). Остали попречни профили постављени су на једнаком међусобном растојању тако да је вертикално растојање корена мерних лењира износило приближно 9 cm (Слика 3.11). Пошто је површина воде била врло немирна, неизвесност мерења дубина у брзотоку процењена је на 5 mm.



**Слика. 3.8:** Распоред мерних места модела ГФ:  $M_1$  – узводни резервоар,  $M_2$  – цевовод,  $M_3$  – стабилизациони резервоар,  $M_4$  – степенести брзоток.



**(а)** двоструки Томсонов прелив – поглед са низводне стране



**(б)** комора са апаратуром за мерење нивоа узводно од прелива

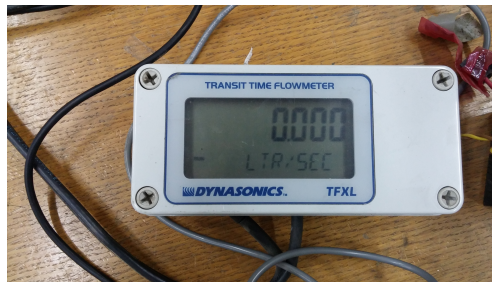
**Слика. 3.9:** Двоструки Томсонов прелив на мерном месту  $M_1$ .

### 3.2.3 Мерење у мешавини воде и ваздуха

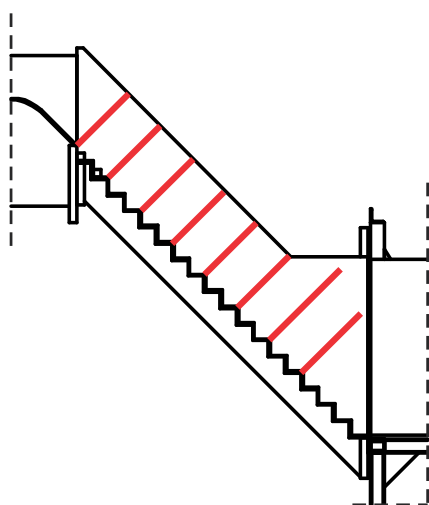
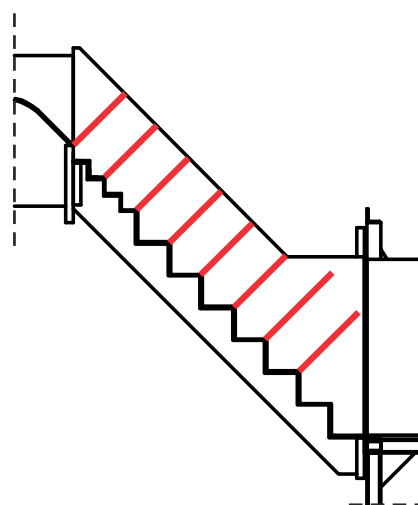
За мерење већине хидрауличких параметара струјања, у овој дисертацији коришћена је сонда приказана на Слици 3.12. Сонда је имала три сензора чије осовине не припадају истој равни (Слика 3.12а). Један од сензора је значајно дужи од осталих (Слика 3.12б). Сваки сензор се састојао од две електроде раздвојене изолационим премазом (видети детаљ на Слици 3.12б). Сензором се мери електропроводност флуида у контакту са врхом и неопходно је да она буде значајно већа за један од флуида. За случај мешавине воде и ваздуха овај услов је испуњен, јер однос електропроводности воде и ваздуха износи око 1000. Сваки сензор је био прикључен на систем за прикупљање података НВМ QuantumX (Слика 3.13) којим је могуће истовремено снимање на четири канала брзином од 19 200 Hz. Пример сигнала, снимљеног током једног опита, приказан је на Слици 3.14. Од овако добијеног сигнала није



(a) Сензори ултразвучног протокомера.

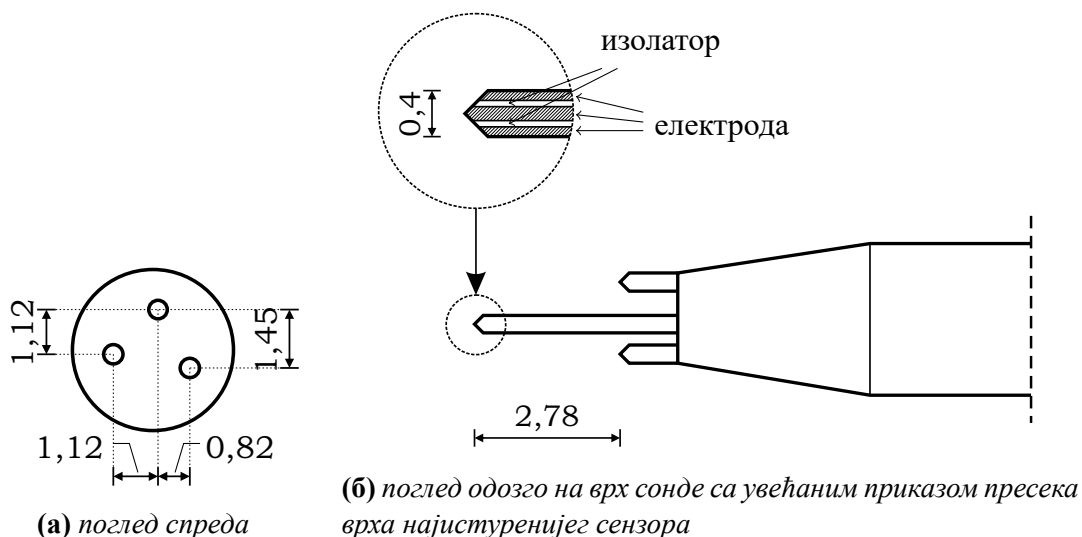


(b) Систем за прикупљање података.

Слика. 3.10: Ултразвучни протокомер Dynasonics TFXL на мерном месту  $M_2$ .(a)  $s = 45 \text{ mm}$ (b)  $s = 90 \text{ mm}$ Слика. 3.11: Распоред профила за мерење дубина дуж зида брзотока на мерном месту  $M_4$ . Изабрани профили означени су црвеним линијама.

могуће директно проценити хидрауличке величине (концентрација ваздуха, брзина, интензитет турбуленције, ...), па је неопходно приступити његовој обради. Детаљи поступка обраде сигнала приказани су у потпоглављу 3.3 – Обрада података мерења са сензора проводљивости.

Према González (2005) и Toombes (2002), при мерењу и анализи података требало би имати у виду да овим сензорима није могуће одредити да ли је у питању мехур/капљица, или талас на слободној површини (Слика 3.16). Због тога, оваквим сензорима мерења се спроводе док временски осредњена концентрација не пређе унапред задату граничну вредност. При истраживањима на призматичним степенастим брзотоцима, аутори су усвајали граничну вредност у интервалу  $\bar{c}_a = 0,9 \div 0,95$  (Voes, 2000; Voes & Hager, 2003a, 2003b). У овој дисертацији мерења су спроведена у свакој вертикали све док је  $\bar{c}_a \leq 0,95$ .



(в) фотографија сонде

**Слика. 3.12:** Сонда са три сензора електро-проводности. Све димензије на цртежима (а) и (б) су у mm.

У аерисаном току модела ЈЧ, мерено је у профилима означеним у Табели 3.2. Код модела ГФ, сва мерења у аерисаном току спроведена су у профилима изнад степеника 10 ( $s = 90 \text{ mm}$ ), односно 16 ( $s = 45 \text{ mm}$ ).

### 3.3 Обрада података мерења са сензора проводљивости

Процена хидродинамичких величина у вишефазном току, може се поделити у два корака:

1. идентификација фазе превођењем сировог сигнала у бинарни облик,



**Слика. 3.13:** Систем за прикупљање података НВМ QuantumX. Фотографија је преузета са интернет адресе: <https://www.hbm.com/en/2134/quantumx-mx440b-4-channel-universal-amplifier/>.

2. прорачун хидродинамичких величина помоћу сигнала добијеног у претходном кораку.

### 3.3.1 Идентификација фазе

Као што је раније напоменуто, разлика у проводљивости електричне струје између воде и ваздуха је значајна. Урањањем сензора у воду, региструје се неколико пута виши напон него када је он у ваздуху. Ако је такав сензор уроњен у аерисани ток, у датој тачки региструје се напон у који зависи од фазе која у том тренутку пролази поред његовог врха. Пример временског записа напона приказан је на Слици 3.14. Први задатак који се намеће је да из снимљеног временског записа напона разлучимо фазу која је у одређеном тренутку прошла поред врха сензора. Будући да се у једној тачки простора у једном тренутку може наћи само једна материја, уводи се индикатор функција фазе у следећем облику:

$$P_G(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \text{за ваздух} \\ 0, & \text{за воду} \end{cases} \quad (3.2)$$

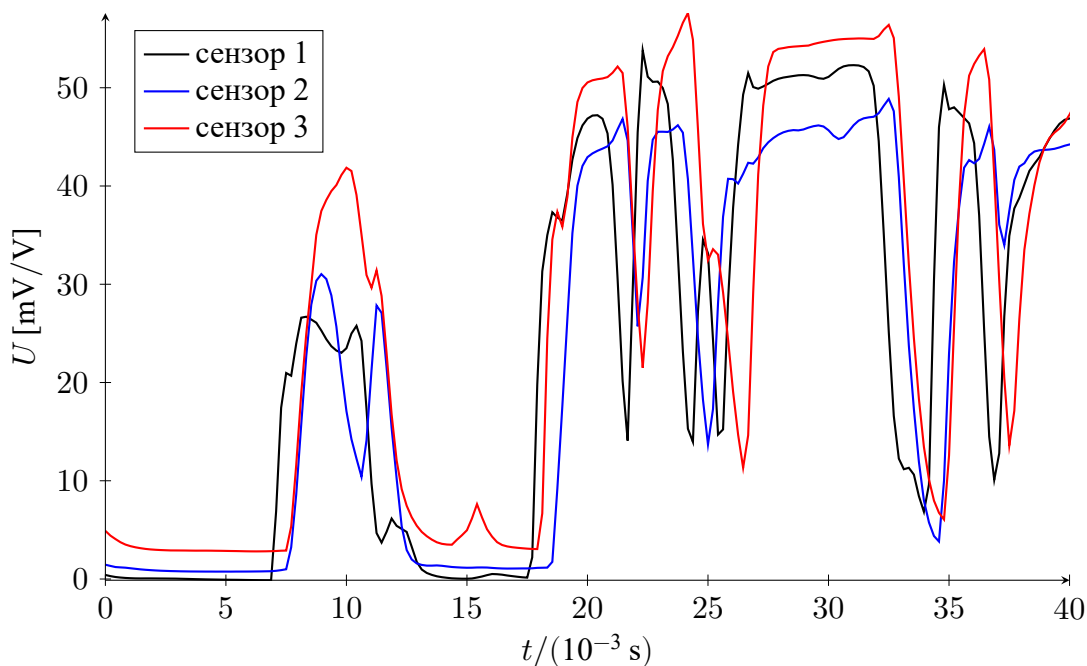
где су:  $P_G$  – индикатор функција фазе,  $t$  – време и  $\mathbf{x}$  – вектор положаја тачке.

У идеалном случају, промена напона биће нагла и временска промена функције  $P_G$  добија се из сировог записа када се вишим напонима додели вредност 0 а нижим вредност 1. У пракси, проласком врха кроз контакт воде и ваздуха напон се не мења нагло већ је та промена постепена (Chanson, 2002; van der Welle, 1985). Због тога није једноставно одредити тренутак у којем врх пробија контакт међу фазама. Број-

ни аутори су дали предлог решења овог проблема, а у овој дисертацији примењен је исти поступак као у Felder (2013), González (2005) и Toombes (2002). Целокупна процедура се састоји од следећих корака:

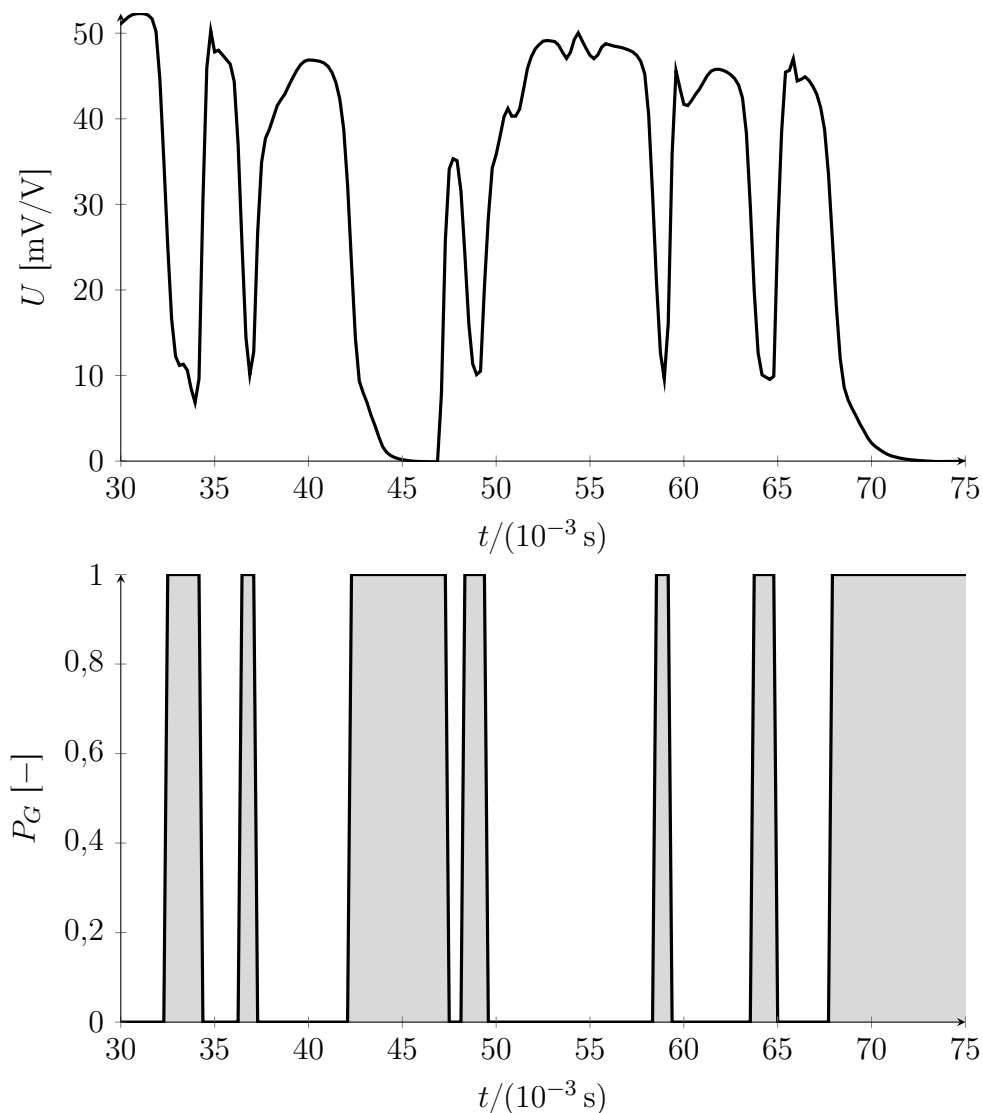
- усвоји се праг који је једнак средњој вредности напона за потпуно сув ( $V_{min}$ ) и потпуно поквашен сензор ( $V_{max}$ ),
- тачкама за које је напон испод прага додели се вредност  $P_G = 1$ , а осталима  $P_G = 0$ .

У литератури, овај поступак се назива још и превођење сигнала у бинарни облик (Zhai et al., 2016). Примена горе наведеног поступка, илустрована је на Слици 3.15. У овој дисертацији испитан је и поступак описан у Kim et al. (2000), а резултати поређења са претходно описаним поступком приказани су у Додатку В.1.



Слика. 3.14: Пример снимљеног сигнала са три сензора.

Са Слике В.1, уочавају се интервали у којима функција  $P_G$  има константну вредност. Сваки интервал представља време неопходно врху сензора да прође кроз једну од фаза у току, па се може поистоветити са одговарајућим растојањем између два узастопна контакта међу фазама (Слика 3.16): дужини  $l_a$  одговара пролазак гасовите, док  $l_w$  одговара пролазак течне фазе. Како је мала вероватноћа да врх сензора пробије мехур или капљицу дуж пречника (а такође се јављају и таласи на површини воде), ове величине се у литератури називају дужина тетиве гасовите, односно течне фазе. Често је погодно формирати и функцију заступљености одређеног интервала



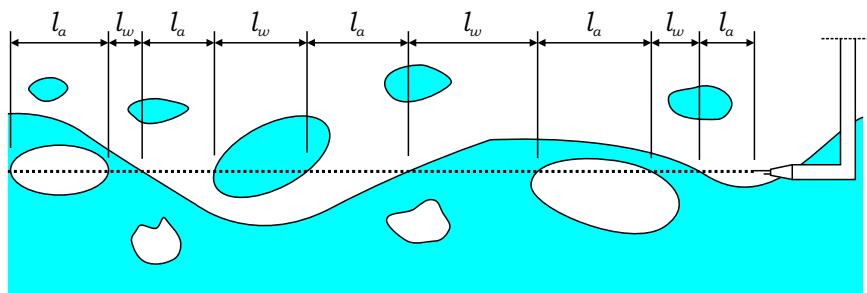
**Слика. 3.15:** Пример идентификације фазе превођењем снимљеног сигнала у бинар-ни запис.

дужина  $l_a$  и  $l_w$  у виду одговарајуће густине расподеле  $b_a$  и  $b_w$ . Пример расподеле  $b_a$ , илустрован је на Слици 3.32.

### 3.3.2 Концентрација ваздуха

За познату функцију  $P_G(\mathbf{x}, t)$ , концентрација ваздуха добија се њеном интеграцијом по времену:

$$\bar{c}_a(\mathbf{x}, T) = \frac{1}{T} \int_0^T P_G(\mathbf{x}, t) dt, \quad (3.3)$$



**Слика. 3.16:** *Схема принципа мерења сензором проводљивости, примењеним у овој дисертацији.*

где су:  $\bar{c}_a$  – временски осредњена концентрација ваздуха и  $T$  – време осредњавања. У случају да је време  $T$  довољно дуго,  $\bar{c}_a$  је функција само положаја (Bertola, 2003). Резултати анализе осетљивости  $\bar{c}_a$  на промену времена осредњавања, илустровани су на Сlici 3.20, а детаљни подаци приказани су у Додатку В.2. На основу резултата, изабран је период осредњавања за прорачун концентрације од 120 s.

### 3.3.3 Брзина течења мешавине

Брзина течења мешавине воде и ваздуха може се проценити под претпоставком да је она иста као брзина кретања контакта између фаза. Ако се за два сензора на међусобном растојању  $\Delta L$  уоче времена нагле промене функције  $P_G$  за произвољан мехур/кап, њихова разлика је време путовања контакта (у даљем тексту, ова променљива означена је са  $\Delta t$ ). Брзина струјања  $u_m$  појединачног мехура/капи процењује се помоћу следећег израза:

$$u_m = \frac{\Delta L}{\Delta t}. \quad (3.4)$$

Да би изложени поступак дао добре резултате, неопходно је испунити следеће услове:

- нема интеракције између мехурића/капљица,
- сви сензори морају пробити сваки мехур/капљицу дуж осовине,
- димензије мехурића/капљица остају непромењене након проласка врха сензора кроз њих,
- узводни сензори не смеју реметити струјно поље и утицати на низводне.



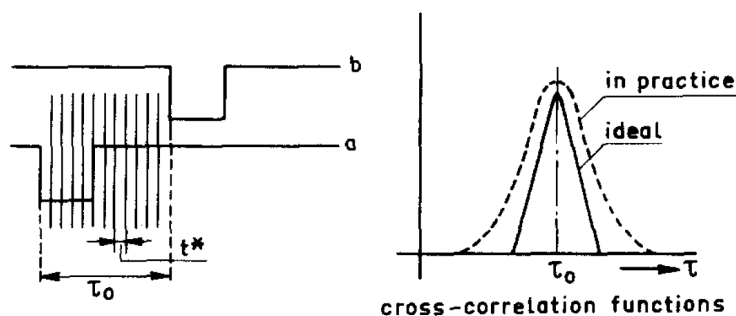
У теорији, овим поступком се добијају сигнали правоугаоног облика између којих је јасно уочљиво временско кашњење. У пракси, не морају сви услови бити задовољени (често није задовољен ни један од њих). Из тог разлога, сигнали регистровани на свим сензорима (а самим тим и њихове бинарне представе) нису исти по облику (види Сliku 3.14). Разлози одступања могу бити следећи: сви сензори не морају детектовати сваки мехур/капљицу, сви сензори не могу пробити сваки мехур/кап дуж осовине, узводни сензори могу утицати на низводне деформисањем или чак раскидањем мехурића/капљица на мање. Зато је процена брзине струјања праћењем појединачних мехурића/капљица неопуздана и за њен прорачун је неопходно користити друге поступке.

Уколико се претпостави да је наилазак мехурића/капљица стохастички процес, функцијом унакрсне корелације добија се највероватније време путовања између парова сензора. Функција унакрсне корелације два сигнала  $q$  и  $w$  дефинисана је следећом једначином (Smith, 1997; Prandoni & Vetterli, 2008; Box, Jenkins, & Reinsel, 2008):

$$f_{qw}(\mathbf{x}, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(q(\mathbf{x}, t) - \bar{q})(w(\mathbf{x} + \Delta L, t + \tau) - \bar{w})}{\sigma_q \sigma_w} dt, \quad (3.5)$$

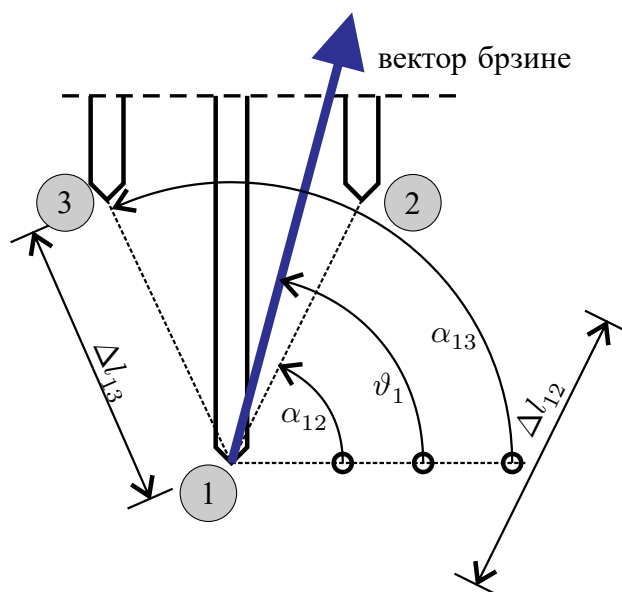
при чему су:  $\mathbf{x}$  – координата врха најистуренијег сензора,  $\Delta L$  – растојање између врхова сензора,  $\tau$  – временски померај а  $\sigma_q$  и  $\sigma_w$  – стандардне девијације сигнала  $q$  и  $w$ . За усамљени мехур/кап, функција унакрсне корелације је троугаоног облика (Слика 3.17). Код реалног сигнала, због великог броја мехурића/капи функција добија звонасти облик. Типичан облик функције унакрсне корелације за истраживања из ове дисертације, приказан је на Слици 3.19. Највероватније време путовања добија се за највећу вредност функције  $f_{qw}$ . Ако се израз (3.5) примени на само један сигнал, добија се аутокорелациона функција (у наставку је обележена са  $f_{qq}$ ).

Претходно описани поступак коришћен је у ранијим истраживањима на призматичним степенастим брзотоцима. Код ових мерења примењене су сонде са два сензора, што је захтевало да сонде буду паралелне са током да би се добили резултати прихватљиве тачности. Код конвергентних брзотока овај услов је тешко остварити, нарочито у близини зида где се очекује појава вртлога. Из наведеног разлога, у овој дисертацији примењена је сонда са три сензора којом се могу одредити интензитет и правац вектора брзине и при наструјавању под углом у односу на њену подужну осу. Нека су растојања између најистуренијег и осталих сензора означена са  $\Delta l_{12}$  и  $\Delta l_{13}$  (видети Сliku 3.18), а одговарајуће временско кашњење између њих са  $\Delta t_{12}$  и  $\Delta t_{13}$ . Ако се претпостави да је поље брзине локално хомогено, угао и интензитет вектора брзине могу се одредити из троугла формираног врховима трију



**Слика. 3.17:** Пример идеалне и реалне функције унакрсне корелације, према *van der Welle (1985)*. Уколико сензори “a” и “b” детектују исти мехур/кап и добијене функције  $P_G$  су исте ширине базе, функција унакрсне корелације је троугаоног облика. За реалан сигнал са много мехурића/капи, функција унакрсне корелације се деформише и поприма звонасти облик.

сензора. Ако се издвоји угао код сензора 1 и уведу помоћне променљиве  $a_1$ ,  $b_1$  и  $c_1$  према изразима (3.6)–(3.8), интензитет вектора брзине  $v_1$  и угао  $\vartheta_1$  који заклапа са нормалном на подужну осу сонде, могу се срачунати помоћу једначина (3.9) и (3.10).



**Слика. 3.18:** Схематски приказ сонде са три сензора електропроводности. Бројем 1 означен је најистуренији сензор, а бројевима 2 и 3 остала два. На цртежу су приказане и величине из једначина (3.10) и (3.9).

$$a_1 = (\Delta l_{12} \Delta t_{13})^2 + (\Delta l_{13} \Delta t_{12})^2 - 2 \Delta l_{12} \Delta l_{13} \Delta t_{12} \Delta t_{13} \cos(\alpha_{13} - \alpha_{12}) \quad (3.6)$$

$$b_1 = \Delta l_{12} \Delta l_{13} \sin(\alpha_{13} - \alpha_{12}) (\Delta t_{12} \Delta l_{13} \cos(\alpha_{13}) - \Delta t_{13} \Delta l_{12} \cos(\alpha_{12})) \quad (3.7)$$

$$c_1 = \Delta l_{12} \Delta l_{13} \sin(\alpha_{13} - \alpha_{12}) (\Delta t_{13} \Delta l_{12} \sin(\alpha_{12}) - \Delta t_{12} \Delta l_{13} \sin(\alpha_{13})) \quad (3.8)$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}}{a_1}. \quad (3.9)$$

$$\vartheta_1 = \arctan\left(\frac{c_1}{b_1}\right). \quad (3.10)$$

Према Brandt, Thakur, Tynan (2016), најбоља процена добија се када се поступак примени на сва три угла троугла, а за коначан резултат усвоји њихова средња вредност. У овој дисертацији коришћена је ова препорука, а резултати анализе осетљивости уређаја на промену угла струјања, приказани су у Додатку В.2.3.

### 3.3.4 Преостала енергија флуидне струје

Са хидрауличког становишта, важан податак за оцену ефикасности степенастог брзотока представља преостала енергија флуидне струје. Најчешће се изражава по јединици тежине воде тј. у метрима воденог стуба; за познато поље брзине мешавине и концентрације ваздуха, може се израчунати помоћу следећег израза (Zindovic et al., 2016):

$$e_{res} = h_w \cos(\phi) + e_k = h_w \cos(\phi) + \frac{1}{h_{90}} \int_0^{h_{90}} (1 - \bar{c}_a) \frac{u_m^2}{2g} dz, \quad (3.11)$$

где су:  $e_{res}$  – преостала механичка енергија воде у односу на псеудо-дно брзотока, по јединици тежине,  $h_w$  – дубина чисте воде,  $\phi$  – угао који псеудо-дно заклапа са хоризонталном равни,  $e_k$  – кинетичка енергија флуидне струје по јединици тежине,  $u_m$  – брзина мешавине и  $h_{90}$  – дубина мешавине (дубина на којој је концентрација ваздуха 90 %).

### 3.3.5 Турбулентне карактеристике аерисаног тока

Осим за процену брзине течења, корелационе функције се могу применити и за процену турбулентних карактеристика флуидне струје. Према Jones, Delhaye (1976) и

Kirphan (1977), дисперзија амплитуде корелационе функције може дати увид у интензитет турбуленције. Ако се претпостави да је наилазак мехурића/капи случајни процес на који утиче само адвективна дисперзија мехурића и флукуација брзине мешавине, интензитет турбуленције може се проценити према следећем изразу (Chanson & Carosi, 2007; Chanson & Toombes, 2001, 2002a):

$$T_u = \frac{\sqrt{u'u'}}{\bar{u}} \approx T_u^{(e)} = 0,851 \frac{\sqrt{\Delta_T^2 - \Delta_t^2}}{T}. \quad (3.12)$$

У изразу (3.12), величине  $\Delta_T$ ,  $\Delta_t$  и  $T$  описују деформацију амплитуде функције унакрсне корелације у односу на аутокорелациону функцију. Ове величине приказане су на Слици 3.19. Chanson (2002) наводи да апроксимативни израз не треба дословно схватити као интензитет турбуленције већ као њен индикатор.

Осим  $T_u^{(e)}$ , значајан је и податак о дисипацији турбулентне кинетичке енергије  $\varepsilon$ . Познајући овај податак, може се проценити и нагиб линије енергетске коте према следећем изразу (Falvey, 1980):

$$\varepsilon = gu_m I_e, \quad (3.13)$$

где је  $I_e$  – нагиб линије енергетске коте. У вишефазним токовима,  $\varepsilon$  може се проценити помоћу функције густине спектра мехурића/капљица у облику који су предложили Deane, Stokes (2002) (једначина (2.12)). Будући да се сондом описаном у делу 3.2.3 може добити распоред тетива фаза дуж једног правца (1D), информација о пречнику мехурића/капљица и њиховом запреминском распореду је изгубљена. Зато је у овој дисертацији сматрано да је функција  $N_D$  пропорционална функцији  $N_{Da}$ :

$$N_D(l_a) \propto N_{Da}(l_a) = \frac{N_a}{l_a^2}. \quad (3.14)$$

Сличан израз може се написати и за течну фазу:

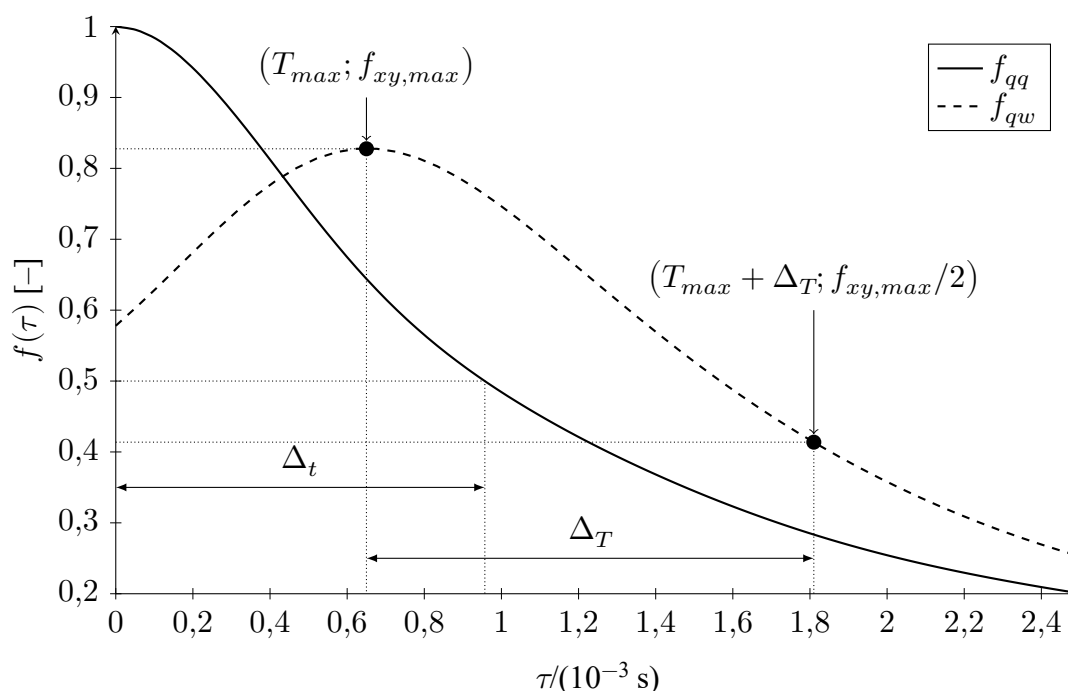
$$N_{Dw}(l_w) = \frac{N_w}{l_w^2}. \quad (3.15)$$

У изразима (3.14) и (3.15) коришћене су следеће ознаке:  $N_a$  и  $N_w$  – укупан број јављања гасовите односно течне фазе за коју је дужина тетиве једнака  $l_a$ , односно  $l_w$ . Ако се функције  $N_{Da}$  и  $N_{Dw}$  апроксимирају двома степененим функцијама, у њиховом пресеку добија се пречник стабилног мехура, односно капљице. За познато

$D_H$ , вредност  $\varepsilon$  за гасовиту фазу процењује се помоћу следећег израза:

$$D_H = \left( 2 \frac{\rho_w}{\sigma W_{e_c}} \right)^{-3/5} \varepsilon^{-2/5}, \quad (3.16)$$

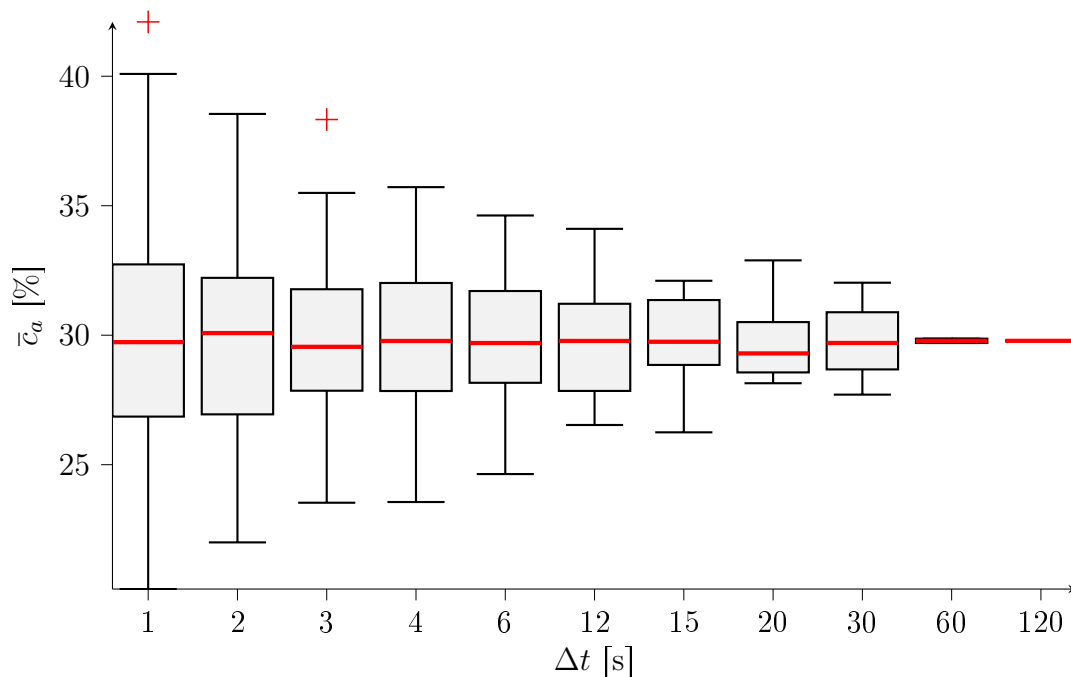
где су:  $D_H$  – пречник стабилног мехура (Hinze-ов пречник),  $\varepsilon$  – брзина дисипације турбулентне кинетичке енергије,  $\sigma$  – површински напон,  $W_{e_c}$  – Вебер-ов број критичан са становишта цепања мехурића. Вредност  $W_{e_c}$  је у границама  $3 \div 4,7$ . Аутори израза (3.16) користили су вредност 4,7 па је та вредност усвојена и у овој дисертацији.



**Слика 3.19:** Пример функција унакрсне ( $f_{qw}$ ) и аутокорељације ( $f_{qq}$ ) са ознакама из једначине (3.12).

### 3.4 Резултати мерења на физичким моделима

У овом делу приказани су резултати истраживања применом методологије описаном у поглављу 3.1 – Опис физичких модела. За приказ резултата модела ЈЧ и ГФ, усвојен је десни координатни систем илустрован на Слици 3.16. Осим стандардних начина приказа (табеле, линијски графици, расуте тачке), резултати у профилима дуж брзотока биће приказани и у виду композитног графика илустрованог на Слици 3.21. Овакав начин погодан је за приказ распореда хидрауличких величина које



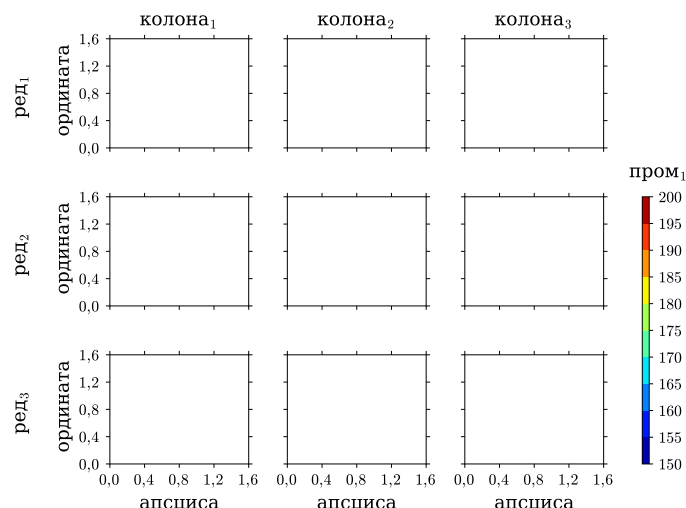
**Слика. 3.20:** Утицај времена осредњавања на вредност измерене концентрације ваздуха.

зависе од неколико независних променљивих (у конкретном случају 4). Опсег хидрауличке величине, приказује се на скали са бојама у десном делу графика и исти је за све графике. За приказ ће бити примењене две врсте оваквих скала (Слика 3.22):

- скала са тупим крајем (Слика 3.22а) предвиђена је за величине чије вредности имају јасну границу, као нпр. концентрација ваздуха се може кретати само у интервалу  $[0; 100 \text{ \%}]$ ;
- скала са троугаоним крајем (Слика 3.22б) предвиђена је за променљиве које немају јасну горњу или доњу граничну вредност. Оваквом ознаком указује се да променљива на графику може имати и вредности изван скале.

### 3.4.1 Модел ЈЧ

Током мерења, на брзотоку модела опажене су две области струјања: ток облика конуса у близини зида чија се ширина повећавала у низводном смеру, и ток изван ове области где је вода струјала управно на подужну осу степеника (Слика 3.23). Сличне форме уочио је и Ирпен у својим истраживањима Ирпен (1936) и стога се у даљем тексту користи исти термини за ове две појаве: стојећи талас (ток у непосредној близини зида) и непоремећени ток. За разлику од Ирпен-ових истраживања, на моделу ЈЧ



**Слика. 3.21:** Принцип формирања композитног графика за променљиву  $\text{пром}_1$ . Графици су разврстани у редове и колоне матрице према параметрима ред и колона. Опсег вредности променљиве  $\text{пром}_1$ , дат је на скали са бојама у десном делу графика.

- (а)  $\text{пром}_1$  не може имати вредност изнад границе      (б)  $\text{пром}_1$  може имати вредност изнад границе



**Слика. 3.22:** Детаљ завршетка скале са бојама—пример горње граничне вредности.

се јавила и знатна аерација тока. Са Сlike 3.23а уочава се и аерација стојећег таласа. Стога, узимајући у обзир и ваздух, издвајају се четири области струјања (Слика 3.24): неаерисани и аерисани део за стојећи талас и за непоремећени ток.

### Дубине уз зид брзотока

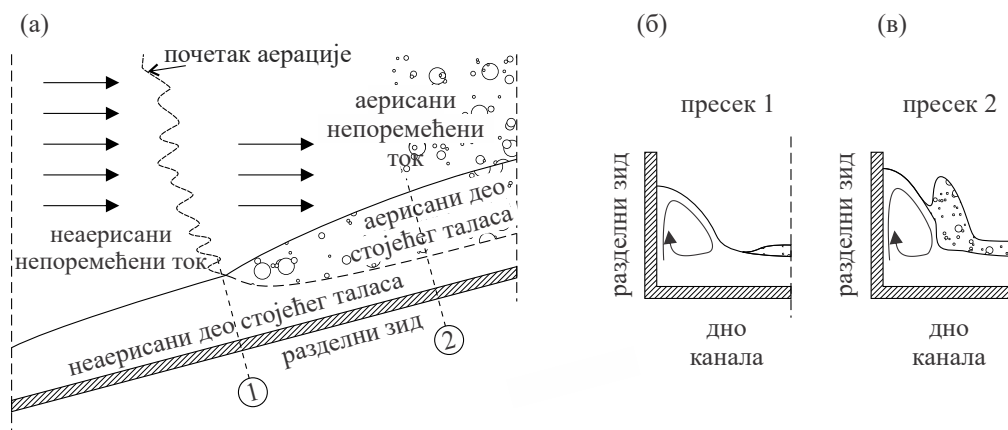
На Слици 3.25 приказан је распоред дубина дуж тока уз зид брзотока ( $h_{wall}$ ), а нумеричке вредности дате су у Прилогу А.1, у Табелама А.1 и А.2. Код модела са степеницима висине 45 mm, дубине се повећавају у низводном смеру. За брзоток са нижим степеницима тренд је другачији и јављају се локални екстреми дубина дуж зида. За најмањи угао сужења, највећа дубина је близу низводног краја ( $x/h_c \approx 16$ ). Са повећањем угла зида ( $\theta = 18^\circ 48'$ ), дубине дуж брзотока се повећавају а њихове највеће вредности се померају ка преливу (околина тачке  $x/h_c \approx 11$ ). За највећи угао  $\theta$ , јавља се и секундарни максимум у близини низводног краја брзотока.



(а) поглед у низводном смеру, десни зид

(б) поглед са стране, леви зид, преузето из Karor et al. (2014)

Слика. 3.23: Стојећи талас на моделу ЈЧ.

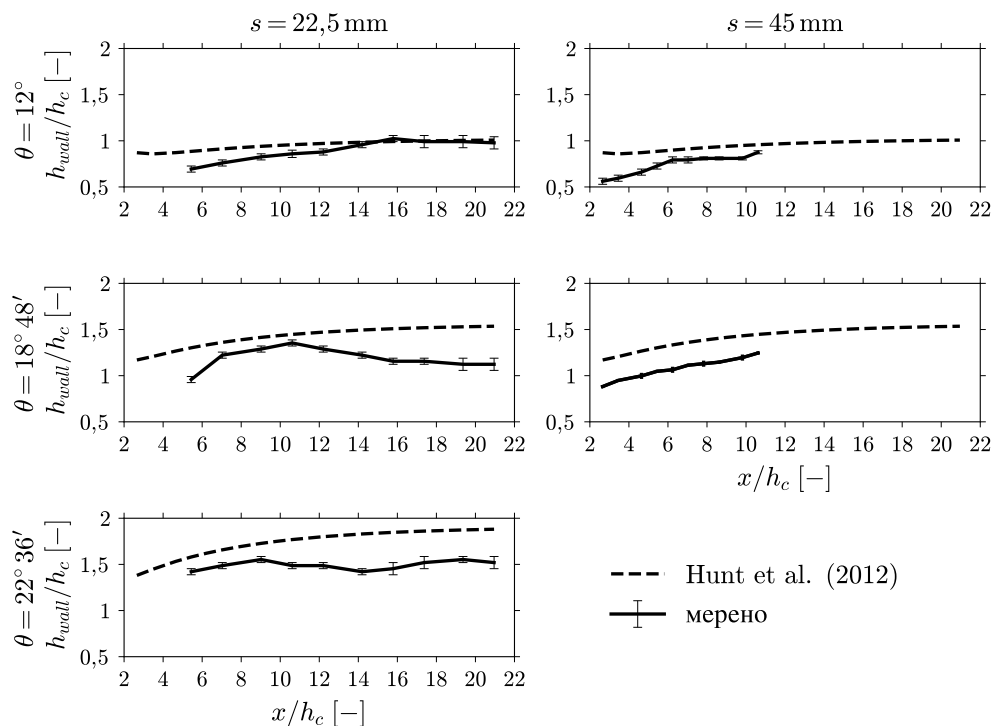


Слика. 3.24: Скица флуидне струје у близини зида брзотока, према Zindovic, Vojt, Karor, Savic (2016).

Поред резултата мерења, приказано је и решење Hunt et al. (2012) (једначина 2.8). Уочава се да распоред дубина према једначини Hunt et al. (2012) добро описује тренд измерених дубина само при крају брзотока ( $x/h_c \geq 16$ ) за најмањи угао сужења ( $\theta = 12^\circ$ ) и висину степеника 22,5 mm. У осталим случајевима, једначином 2.8



добијају се веће вредности а најбоља слагања су за  $x/h_c \in [7, 11]$ . Разлика између мерених и израчунатих дубина креће се од 7% (за  $x/h_c \in [7, 11]$ ) до око 35% (за  $x/h_c \leq 7$  и  $x/h_c \geq 11$ ).



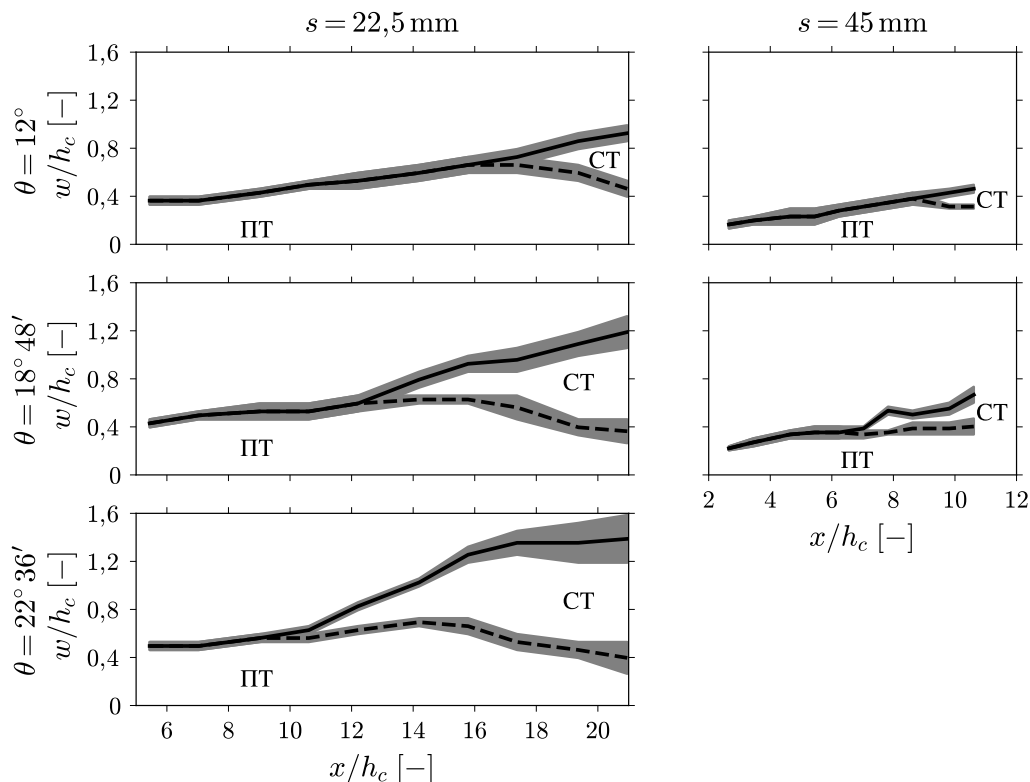
Слика. 3.25: Распоред дубина уз зид брзотока за  $s = 22,5 \text{ mm}$  и  $s = 45 \text{ mm}$ .

### Ширина стојећег таласа

На Слици 3.26 приказане су измерене ширине стојећег таласа,  $w$ . За све резултате заједничко је повећање ширине у низводном смеру. Ово повећање између крајева брзотока износило је од око 2,5 (за  $\theta = 12^\circ$ ) до око 4 пута (за  $\theta = 22^\circ 36'$ ). Такође, резултати показују и да је ширина стојећег таласа (и неаерисаног дела као и укупна ширина) већа уколико је брзоток ужи.

Према резултатима, ширина неаерисаног дела се повећава до тачке аерације а низводно од ње се сужава. Једини изузетак је експеримент за модел висине степеника  $45 \text{ mm}$  и угао  $\theta = 18^\circ 48'$  за који је добијена приближно константна ширина низводно од координате  $x/h_c \approx 5$ . За модел са мањим степеницима, резултати показују да је измерена ширина неаерисаног дела таласа у најузводнијем и најнизводнијем профилу приближно иста и да се незнатно повећава са порастом угла  $\theta$ .

Са Сlike 3.26, уочава се да се ширина аерисаног дела повећава у низводном смеру и да она расте са повећањем угла зида. Низводно од тачке аерације, на дужи-



**Слика. 3.26:** Модел ЈЧ, ширина стојећег таласа за  $s = 22,5 \text{ mm}$  и  $s = 45 \text{ mm}$ . Пуним линијом представљена је граница између непоремећене зоне и стојећег таласа, испрекиданом линијом представљена је граница између неаерисаног и аерисаног дела стојећег таласа.

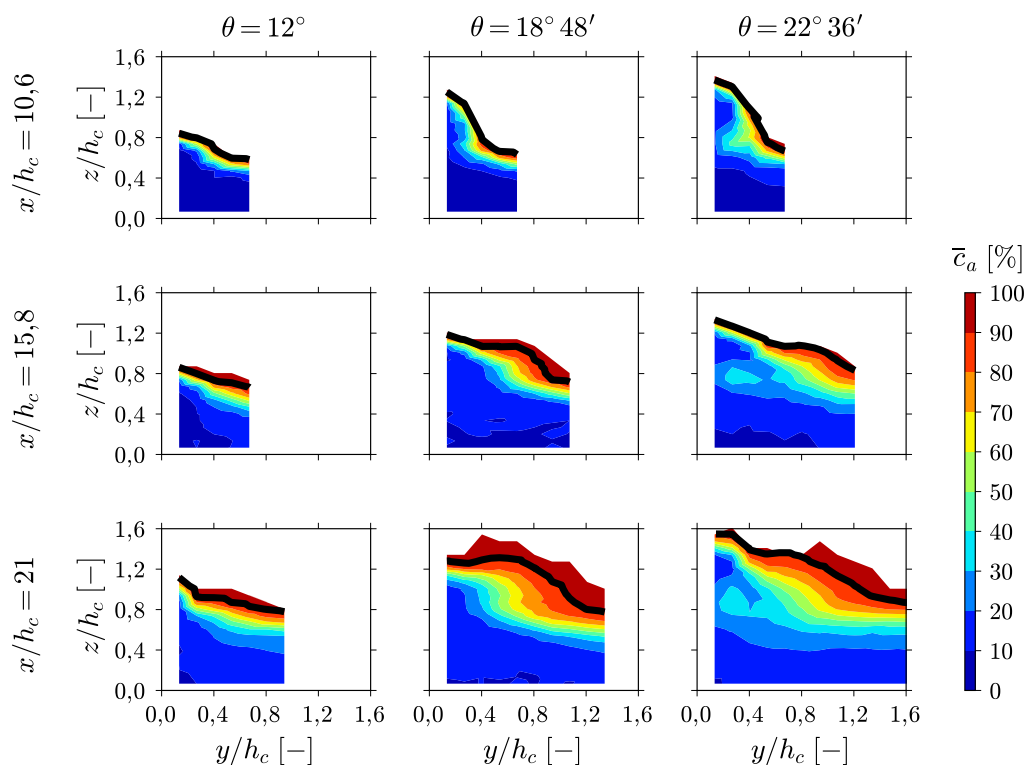
ни до око  $9h_c$ , ширина секундарног таласа се нагло повећава а на већој удљености градијент ове промене је мањи.

Резултати указују да почетак аерације стојећег таласа зависи од угла зида и размере модела. За веће вредности угла  $\theta$ , почетак аерације стојећег таласа је ближи преливу. Ова појава је уочљива за оба модела. Са повећањем размере, аерација стојећег таласа почиње узводније и јавља се на око 2 пута мањем растојању од прелива (што је слично односу размера за дужине између два модела). При промени размере модела, постигнуто је задовољавајуће слагање резултата, највеће одступање измерених ширина износило је око 15 %.

### Концентрација ваздуха

На Слици 3.27 приказан је распоред концентрације ваздуха у пресецима дуж брзотока а у области стојећег таласа. Резултати показују да је највећи градијент концентрације ваздуха у близини слободне површине и да опада са приближавањем псеудо-дну. У непосредној околини зида преовлађују ниске вредности концентрација (до 20 %) а најмање вредности су измерене у близини дна уз зид. Са повећањем

координате  $y/h_c$  (тј. у вертикалама ближе осовини тока) висина области ниских концентрација се смањује. У већини опита, на десном крају се уочава да су изолиније концентрација приближно паралелне са псеудо-дном канала, што је индикатор да је мерењима обухваћена и област струјања изван стојећег таласа (односно непоремећени ток).



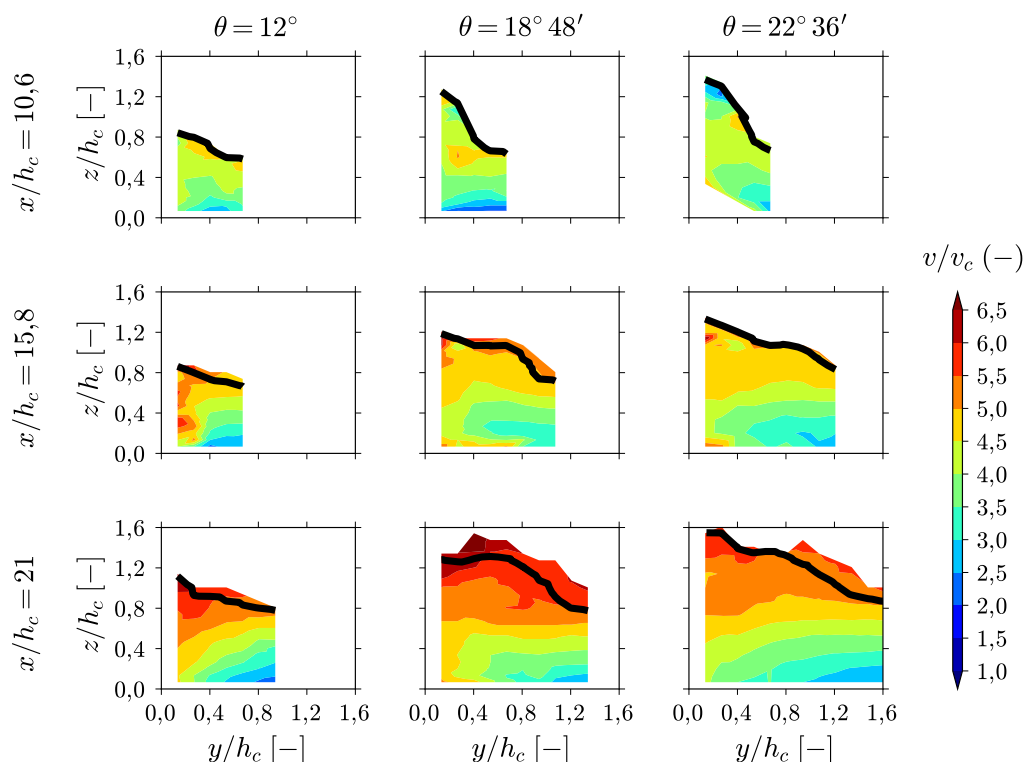
**Слика. 3.27:** Распоред концентрације ваздуха дуж брзотока за  $s = 22,5$  mm. Пуном црном линијом означен је распоред дубине  $h_{90}$ , што је по конвенцији реконструкција слободне површине.

### Брзина мешавине

Распоред интензитета брзине мешавине у пресецима дуж брзотока у зони стојећег таласа, приказан је на Слици 3.28. Уочава се да су највеће брзине у близини слободне површине. Најмање брзине измерене су изван стојећег таласа, у близини дна. Са повећањем координате  $y/h_c$  (удаљавањем од зида), уочава се да су изолиније брзина приближно паралелне што је, слично концентрацијама, индикатор области непоремећеног струјања. Примећује се и да су за исто  $z/h_c$ , у поређењу са непоремећеним струјањем, брзине у близини зида веће и до 100 %.

Будући да су у горњим деловима брзотока ( $x/h_c = 10,6$ ) брзине мерене сензорима проводљивости оптерећене великом неизвесношћу (услед мале концентрације ваздуха и малог броја мехурића), резултати су допуњени на основу резултата мерења

брзина Пито-статичком сондом приказаним на Слици 3.29.

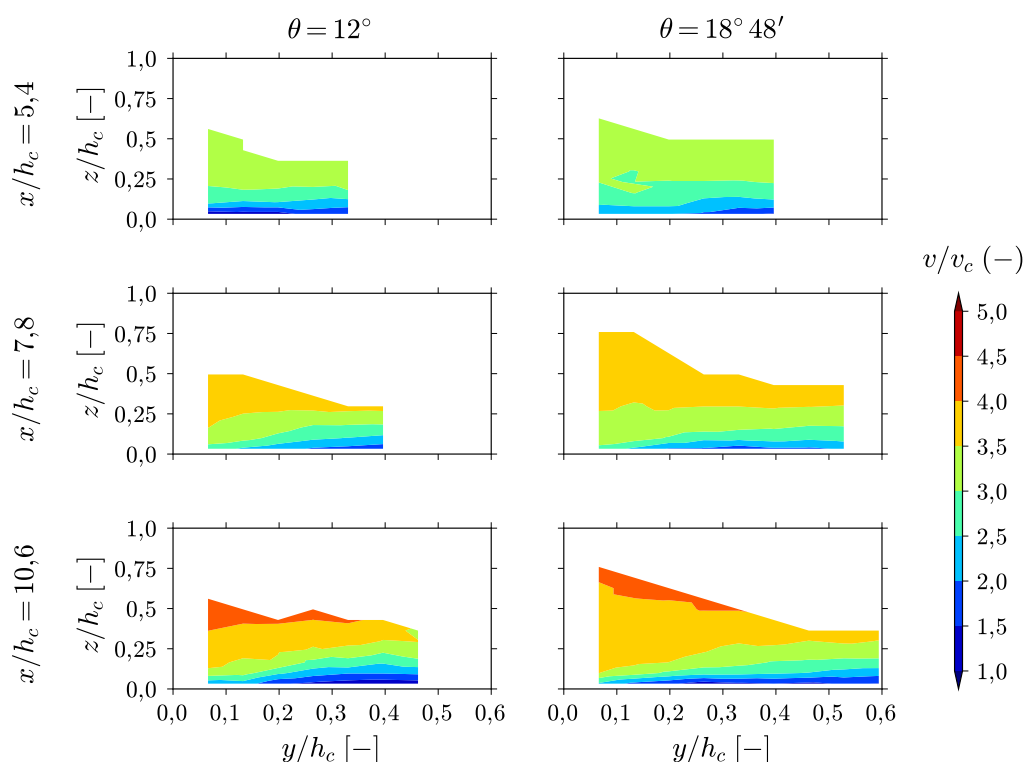


Слика. 3.28: Распоред интензитета брзине дуж брзотока за  $s = 22,5 \text{ mm}$ .

### Преостала енергија флуидне струје

Распоред енергетске коте у пресеку вишефазне струје, срачунат према изразу (3.11), приказан је на Слици 3.30. Уочава се да је највећи удео у енергетској коти има  $e_k$  (више од 90 %) док је утицај дубине струјања ( $h_w \cos(\phi)$ ) значајно мањи (испод 10 %). Уочава се и да су највеће коте у близини зида брзотока и да се постепено смањују са удаљењем од њега. Енергетска кота је већа у близини зида него у непоремећеној струји од 60 % (за  $x/h_c = 10,6$ ) до 160 % (за  $x/h_c = 21$ ). Примећује се и да се  $e_{res}$  у близини зида не мења много са променом угла зида, а да битно зависи од положаја пресека дуж брзотока. Са друге стране, градијент  $e_{res}$  линије се значајно мења са променом угла  $\theta$ ; најстрмији нагиб је за  $\theta = 12^\circ$ , а најблажи је за  $\theta = 22^\circ 36'$ .

Једначином (3.17) дата је регресиона зависност којом се описује осредњено повећање енергетске коте услед сужења брзотока. Графичка представа ове зависности, заједно са резултатима мерења, приказана је на Слици 3.31. Уочава се да је тренд зависности задовољавајући за пресеке  $x/h_c = 15,8$  и  $x/h_c = 21$ , док за пресек



**Слика. 3.29:** Распоред интензитета брзине дуж фронта за  $s = 45$  mm измерен Пито-статичком сондом.

$x/h_c = 10,6$  није постигнуто задовољавајуће слагање.

$$\frac{\delta e_{res}}{e_{uf}} = a \left( e^{b\theta\pi/180^\circ} - 1 \right) \quad (3.17)$$

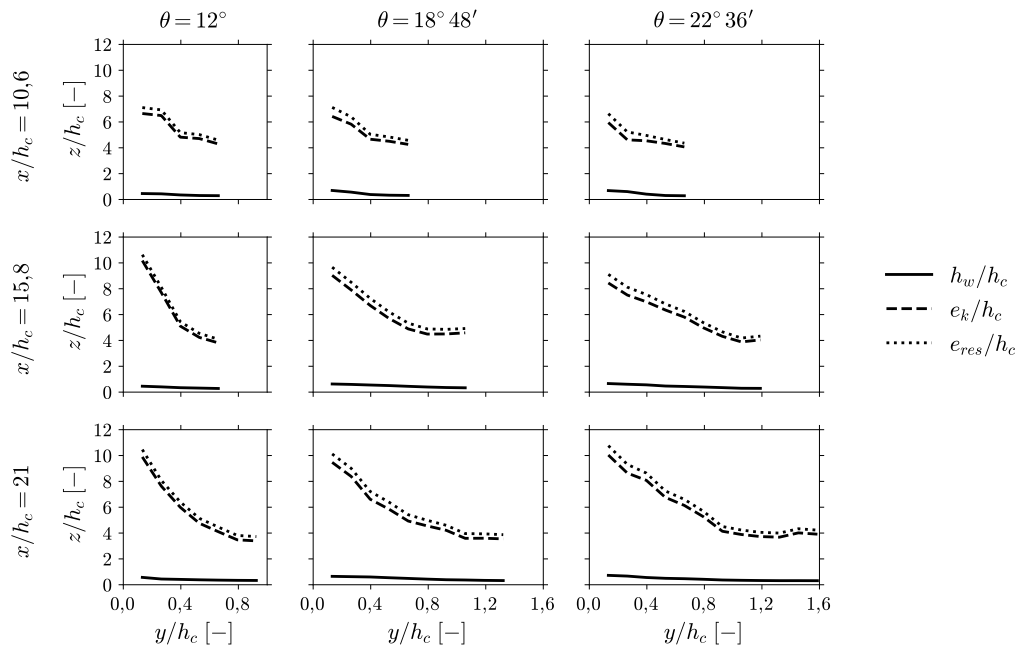
$$a = 44 \cdot 10^4 \left( \frac{x}{h_c} \right)^{5,237} \quad (3.18)$$

$$b = 3,7 \cdot 10^{-16} e^{-1,837x/h_c} \quad (3.19)$$

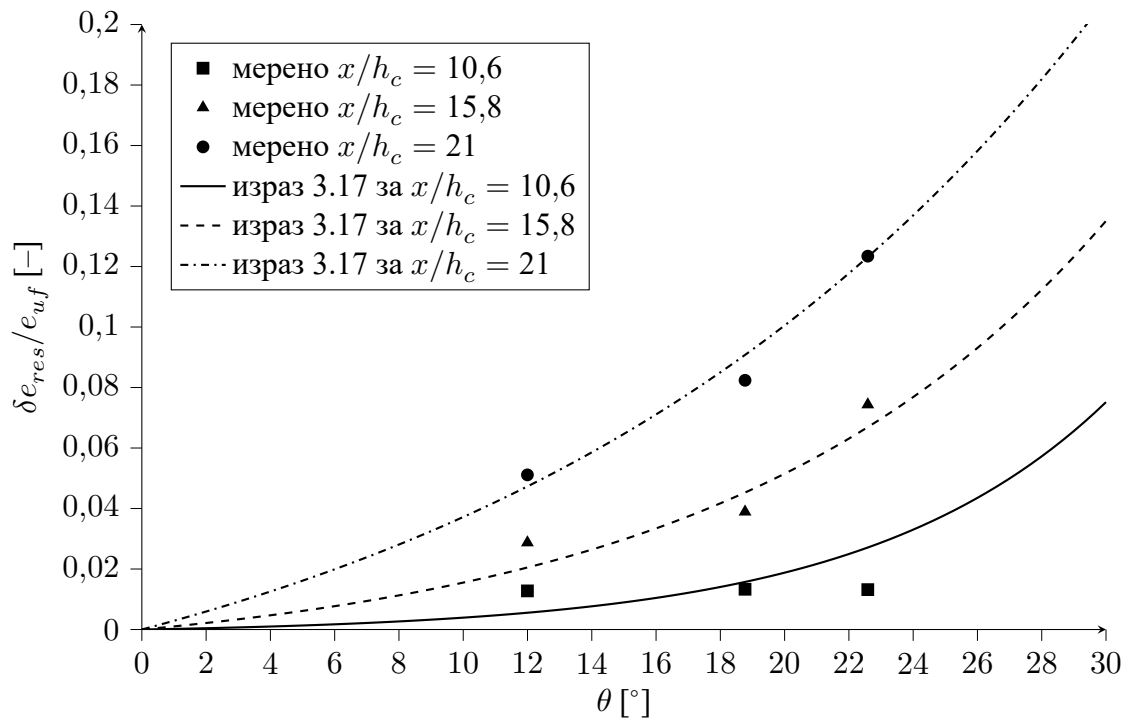
где је:  $e_{uf}$  – енергија флуидне струје у непоремећеном току, по јединици тежине;  $\delta e_{res}$  – повећање коте преостале енергије, у односу на  $e_{uf}$ ; а  $a$  и  $b$  – параметри регресионе зависности (3.17).

### Карактеристике двофазног струјања

На Слици 3.32 приказана је типична емпиријска функција густине расподеле тетива гасовите фазе. Запажа се да је навећи проценат (око 52 %) мањи од 2,5 mm а да на најситније (мање од 1,5 mm) отпада око 23 %. У Додатку В.1, приказано је поређење



Слика. 3.30: Распоред енергетске коте дуж брзотока за  $s = 22,5$  mm.



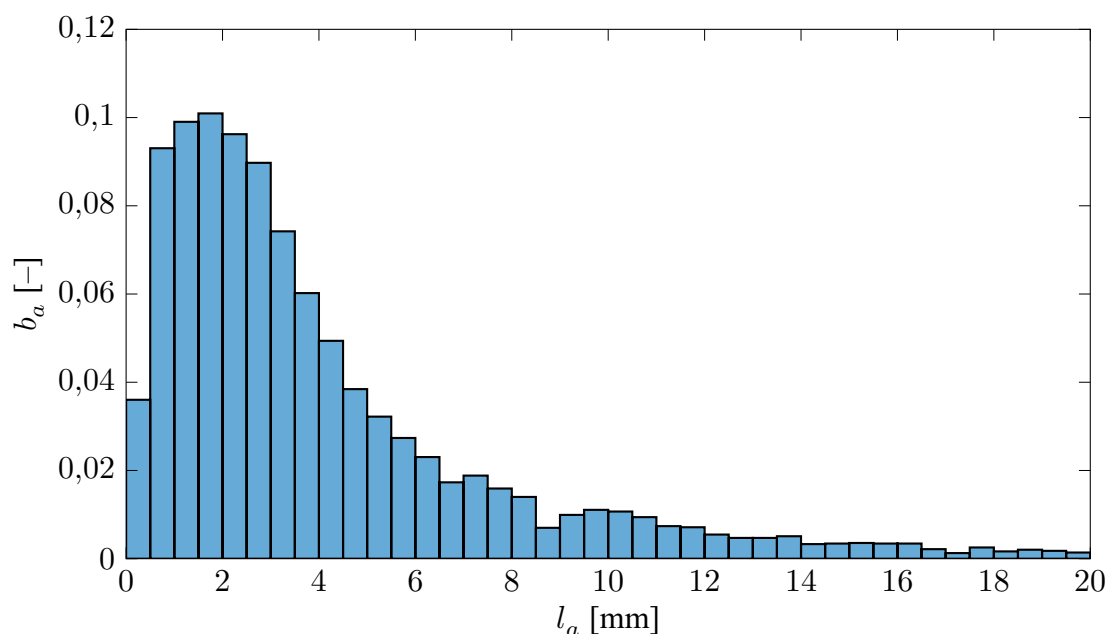
Слика. 3.31: Регресионе криве за повећање коте преостале енергије за  $s = 22,5$  mm.

поступка прилагођавања сигнала и његов утицај на облик расподеле функције  $b_a$  и  $b_w$ . Уочава се да поступак са једним прагом (према Toombes (2002)) даје правилнији распоред и да нису одбачени мехурићи и капљице ситнији од 1 mm. Због тога су све

анализе спроведене поступком са једним прагом. Расподеле  $b_a$  и  $b_w$  значајне су за процену репрезентативног пречника мехурића у нумеричком моделу (Глава 4).

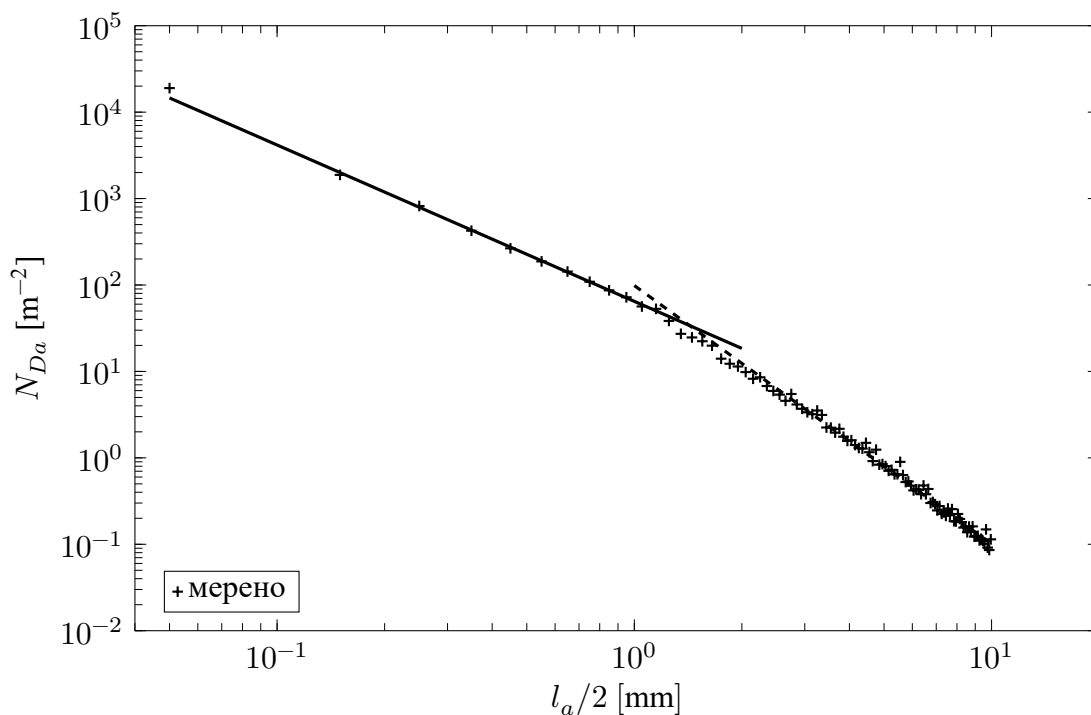
Резултати мерења густине расподеле тетива гасовите фазе у пресецима дуж брзотока модела ЈЧ, приказани су у Прилогу А.2. У погледу спектра густине расподеле тетива гасовите фазе (Слика 3.33) уочава се добро слагање са емпиријско-теоријском билинеарном расподелом. Одступања су најмања у интервалу дужина тетива [0,5 mm; 10 mm]. Велика одступања се уочавају за изузетно мале дужине тетива (мање од 0,2 mm), као и за вредности у околини пресечне тачке билинеарне зависности. Са приложеног графика, процењена вредност Hinze-овог полупречника износи око 1,5 mm.

Процењене вредности Hinze-овог полупречника добијених помоћу ових дијаграма, приказане су у Табели 3.5. Осим њих, дате су и процењене вредности нагиба линије енергије за обе фазе, помоћу измерене преостале енергетске коте дат једначином (3.11), и изразом (3.13). Примећује се да су вредности добијене поступком (Deane & Stokes, 2002) мање од нагиба добијених помоћу енергетских кота. Ово одступање је у интервалу [2,15; 3,82], а просечно одступање је износило око 2,88.

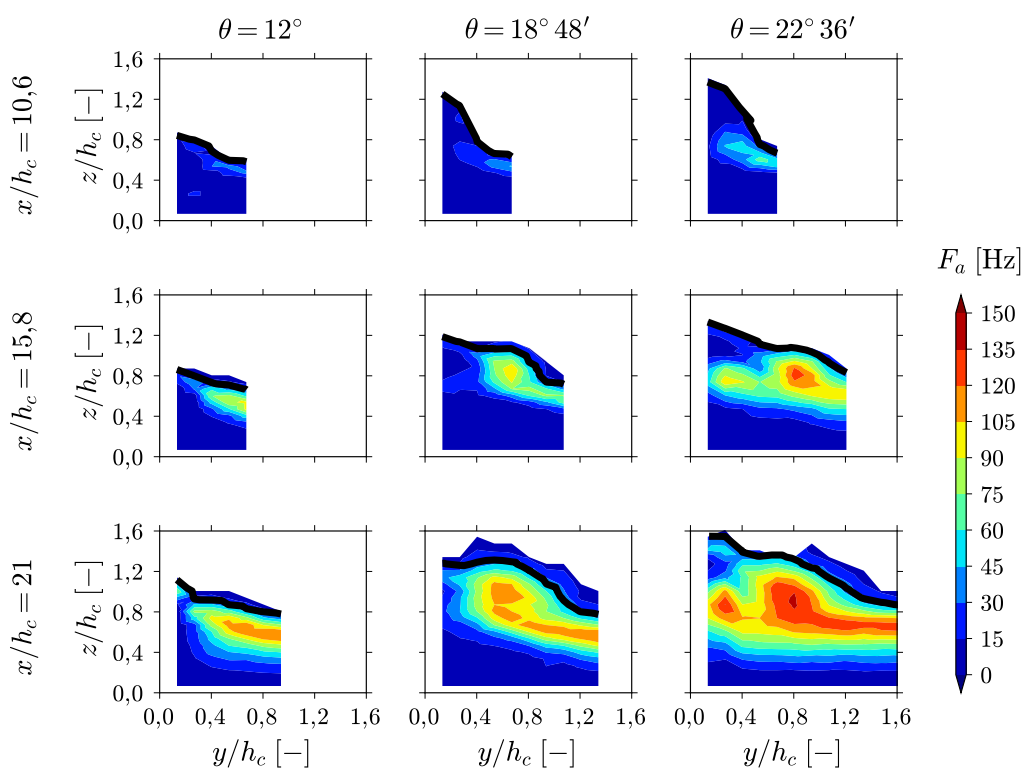


Слика. 3.32: Функција густине расподеле тетива гасовите фазе при  $\bar{c}_a = 0,22$ .

У погледу фреквенције наиласка гасовите фазе (Слика 3.34), уочава се да су најмање вредности у близини псеудо–дна: за горње делове брзотока  $z/h_c < 0,45$  док су за доње делове  $z/h_c < 0,25$ . Примећује се и да се са повећањем угла  $\theta$ , област високих вредности помера од непо ремећеног тока ка зиду брзотока. За константан угао зида, вредности функције  $F_a$  се повећавају у низводном смеру.



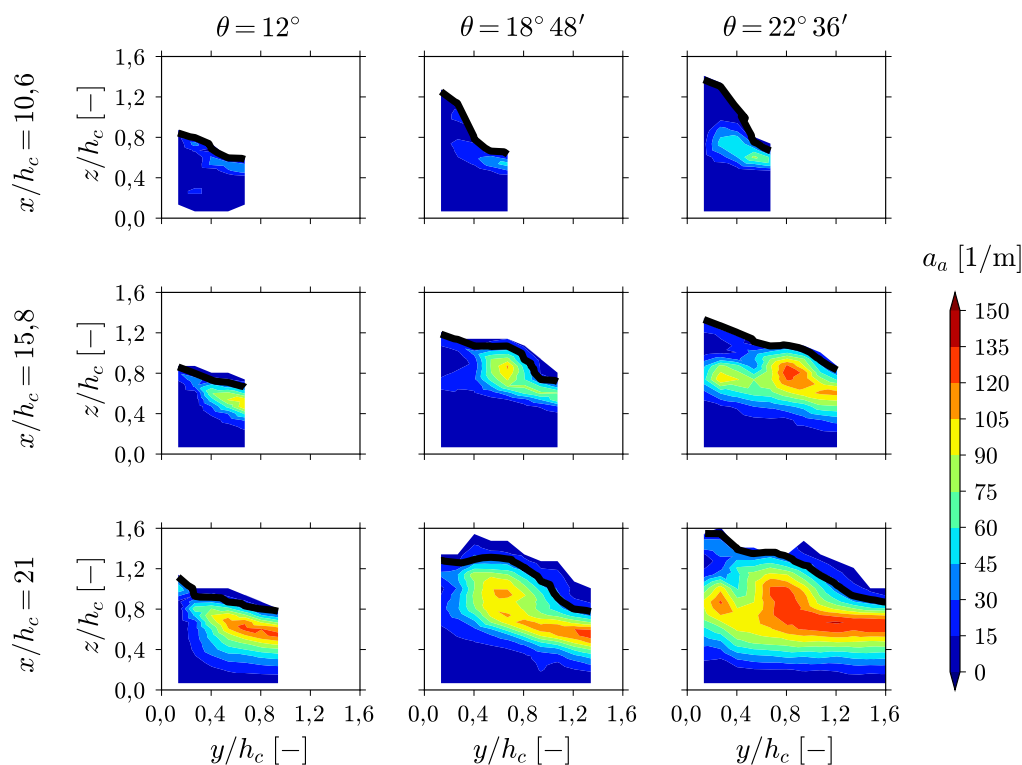
Слика. 3.33: Спектар тетива гасовите фазе при  $\bar{c}_a = 0,22$ .



Слика. 3.34: Распоред фреквенције наиласка гасовите фазе дуж брзотока за  $s = 22,5$  mm.



Распоред специфичне површине контакта између фаза  $a_a$ , приказан је на Слици 3.35. Уочава се сличност распореда функција  $a_a$  и  $F_a$ .

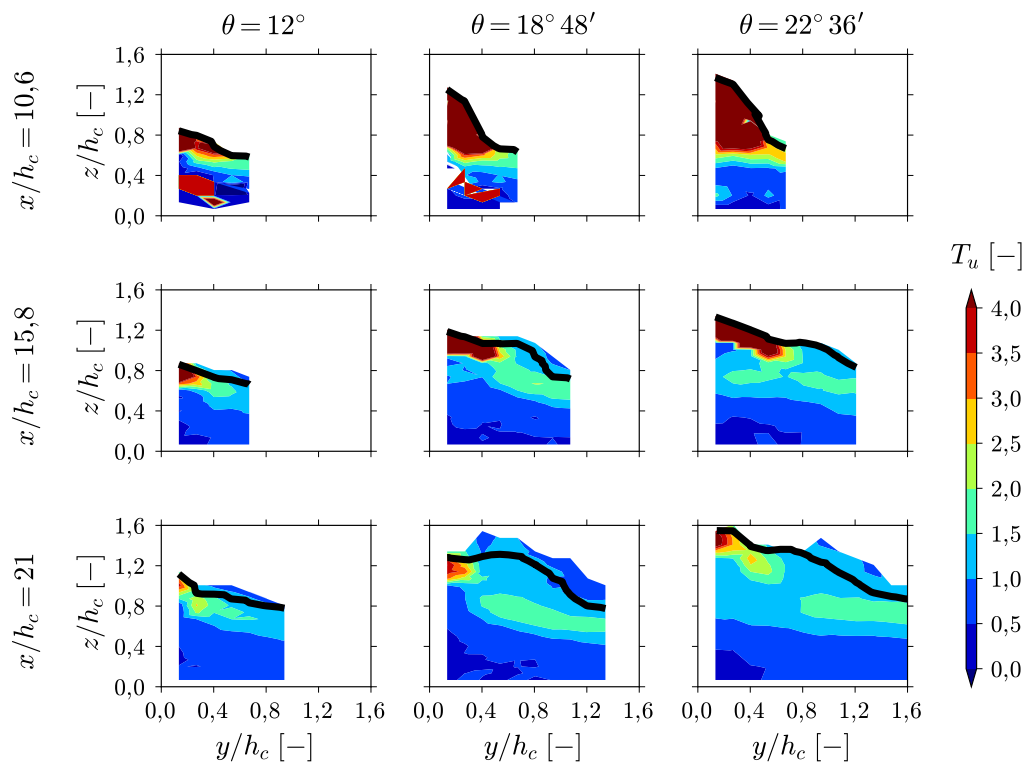


**Слика. 3.35:** Распоред специфичне површине контакта између фаза, дуж брзотока за  $s = 22,5 \text{ mm}$ .

Распоред интензитета турбуленције, процењеног према изразу (3.12), приказан је на Слици 3.36. Уочава се да су највеће вредности у горњим деловима брзотока ( $x/h_c = 10,6$ ) и то у горњем делу стојећег таласа ( $z/h_c > 0,7$ ) док је у нижим уочљиво неправилан. У доњим деловима брзотока, област високих вредности функције  $T_u$  је значајно мања и ограничена на део слободне површине у близини зида. Вредности функције  $T_u$  у стојећем таласу у близини зида су од 1,5 до 4 пута мање него у непо ремећеном току.

На Слици 3.37 приказан је распоред функције  $T_u$  процењен према изразу (2.11). Распоред функције  $T_u$  је сличан функцији  $F_a$ , али се не јављају области екстремних вредности у близини уреза слободне површине.

Једна занимљивост може се запазити анализом сигнала напона у фреквентном домену. На Слици 3.38 приказани су типични периодограми добијени стандардним и Welch-овим поступком. Оба периодограма су формирана за непо ремећени ток од целокупног записа са најистуренијег сензора. Стандардни периодограм показује велико расипање, нарочито за фреквенције веће од 100 Hz. Зато се стандардни периодограм не примењује за велики број података. Насупрот њему, Welch-ов периодо-



**Слика. 3.36:** Распоред интензитета турбуленције дуж брзотока модела ЈЧ за  $s = 22,5 \text{ mm}$ , према изразу (3.12).

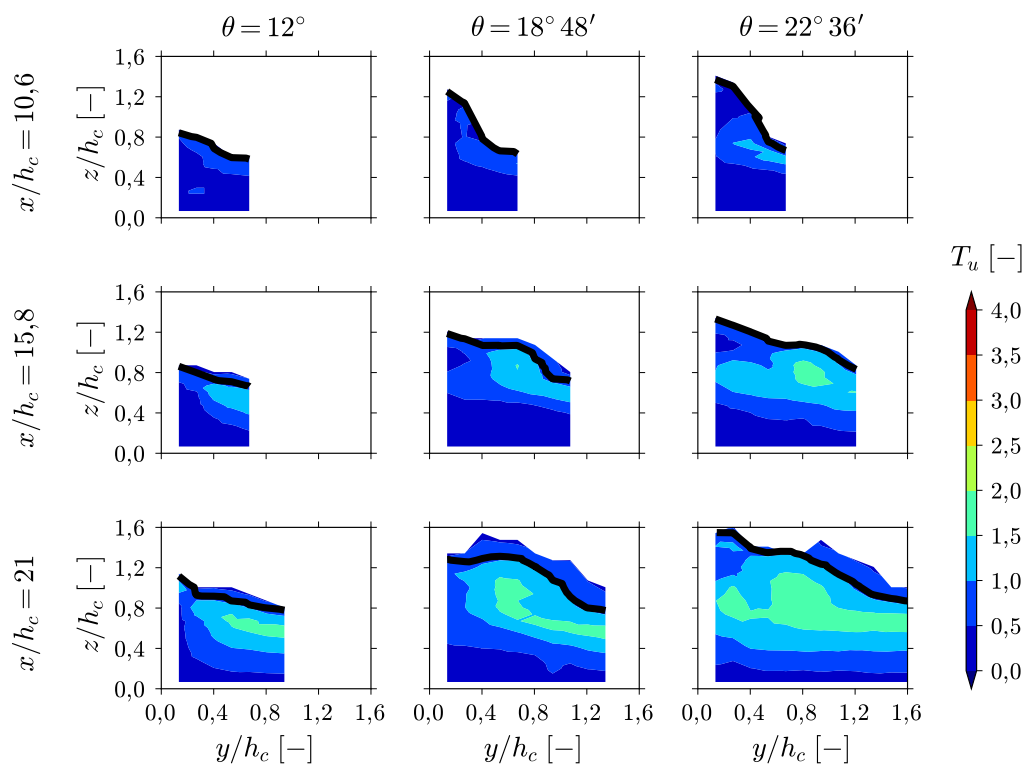
грам има знатно мање “подрхтавање”. Може се приметити и да за довољно велике фреквенције, Welch-ов периодограм тежи правој нагиба  $-5/3$  на графику у  $\log\log$ -размери.

### Поређење два модела у Фрудовој сличности

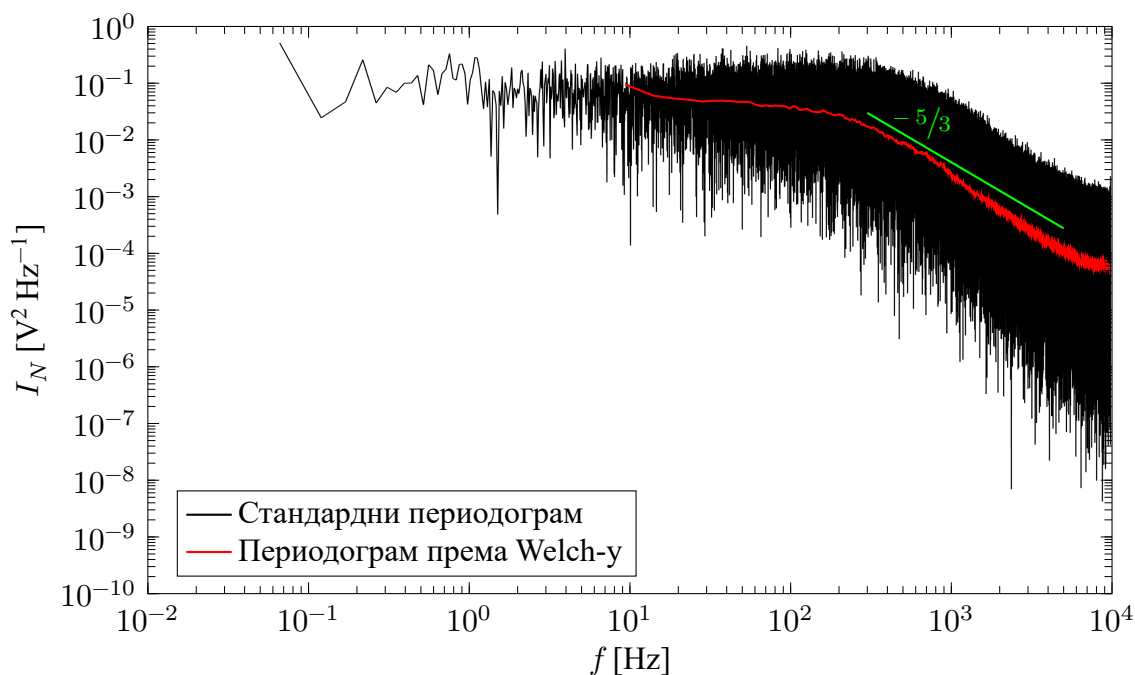
Поређењем дубина на Слици 3.25 уочава се и да је њихово слагање међу моделима две размере задовољавајуће; одступања средњих вредности измерених дубина су између 4 % (за  $\theta = 12^\circ$ ) и 10 % (за  $\theta = 18^\circ 48'$ ).

На Слици 3.39 приказани су распореди концентрација ваздуха за обе висине степеника у профилу  $x/h_c = 10,6$ . Квалитативно, облик слободне површине је врло сличан а одступања релативне дубине мешавине ( $h_{90}/h_c$ ) су у границама од 2 % до 10 %. На Слици 3.40 дати су квантитативни показатељи поређења концентрација и брзина мешавине. Уочава се да највећи број вредности концентрација има апсолутно одступање до 10 % а нешто мањи до 20 %. Примећује се и да су тачке за концентрације до 50 % груписане изнад бисектрисе дијаграма, док су за веће концентрације оне углавном испод бисектрисе.

У погледу слагања брзина (Слика 3.40), највећи број вредности има релативно одступање у границама до 10 %, док мањи број одступа до 15 %. Највећи број тачака



Слика. 3.37: Распоред израчунатог интензитета турбуленције дуж брзотока модела ЈЧ за  $s = 22,5 \text{ mm}$ , према изразу (2.11).

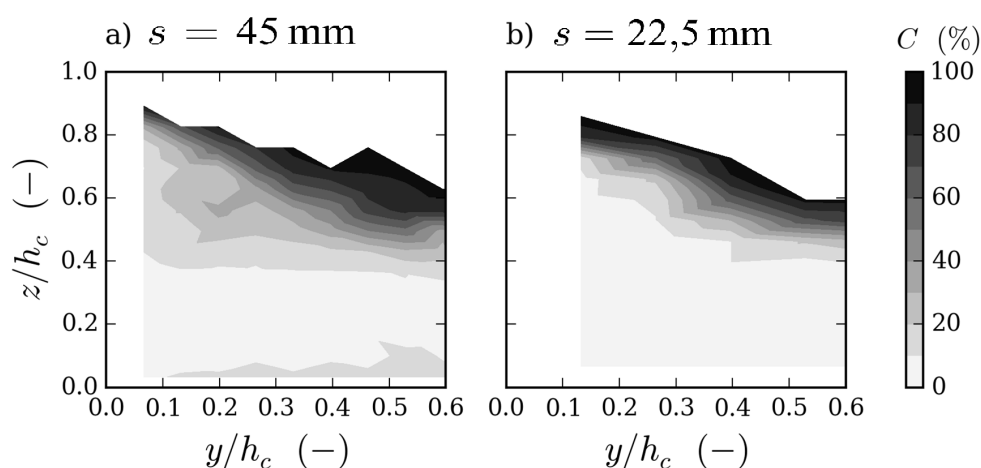


Слика. 3.38: Периодограми за модел ЈЧ.

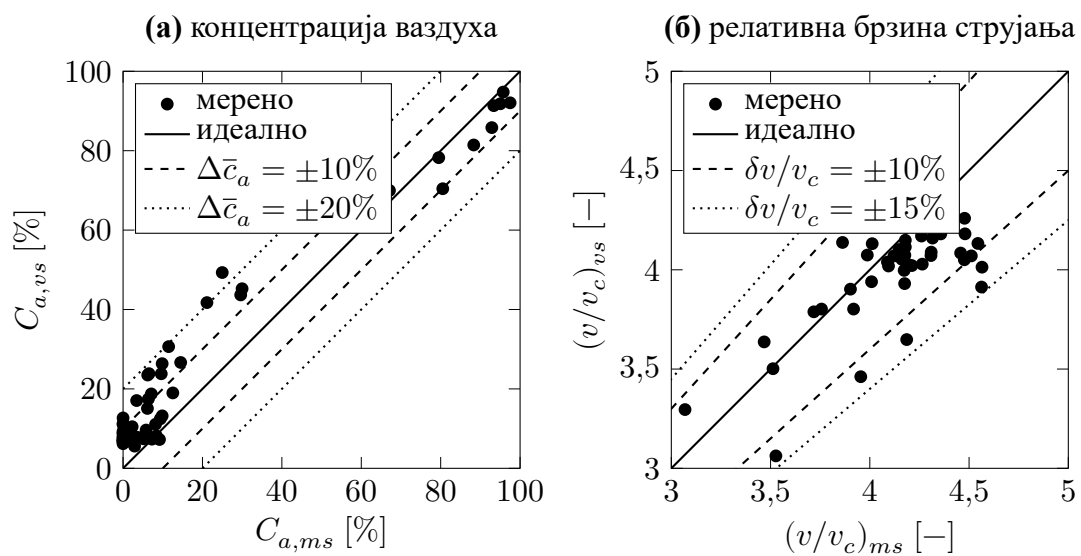
за брзине налази се испод бисектрисе док је нешто мањи број изнад.

**Табела 3.5:** Процена губитака енергије помоћу спектра мехурића/капљица на моделу ЈЧ. Величине приказане у табели су:  $u_{uf}$  – брзина мешавине у непо ремећеном току,  $I_e^M$  – нагиб линије енергетске коте процењен помоћу (3.11),  $D_H$  – Hinze-ов пречник,  $I_e^H$  – нагиб линије енергетске коте процењен помоћу израза (3.13),  $\overline{I_e^M/I_e^H}$  – вредност односа енергетских кота за мешавину.

$\theta$ [°]	$x/h_c$ [-]	$u_{uf}$ [m s <sup>-1</sup> ]	$I_e^M$ [-]	гасовита фаза			течна фаза			$\overline{I_e^M/I_e^H}$ [-]
				$D_H$ [mm]	$I_e^H$ [-]	$I_e^M/I_e^H$ [-]	$D_H$ [mm]	$I_e^H$ [-]	$I_e^M/I_e^H$ [-]	
22°36'	15,8	2,06	0,906	3,43	0,161	3,82	3,37	0,168	3,72	3,77
22°36'	21,0	1,42	0,679	3,05	0,313	2,17	3,03	0,318	2,14	2,15
18°48'	15,8	3,07	0,570	3,07	0,142	2,50	3,30	0,119	2,50	2,50
18°48'	21,0	1,42	0,940	3,05	0,314	3,00	2,96	0,337	2,79	2,89
12°	15,8	1,63	0,610	3,19	0,244	2,49	3,31	0,223	2,55	2,52
12°	21,0	1,72	0,846	3,11	0,247	3,42	3,07	0,255	3,32	3,37



**Слика 3.39:** Модел ЈЧ, квалитативно поређење модела две размере: распоред концентрације ваздуха у профилу  $x/h_c = 10,6$  за угао зида  $\theta = 12^\circ$ .

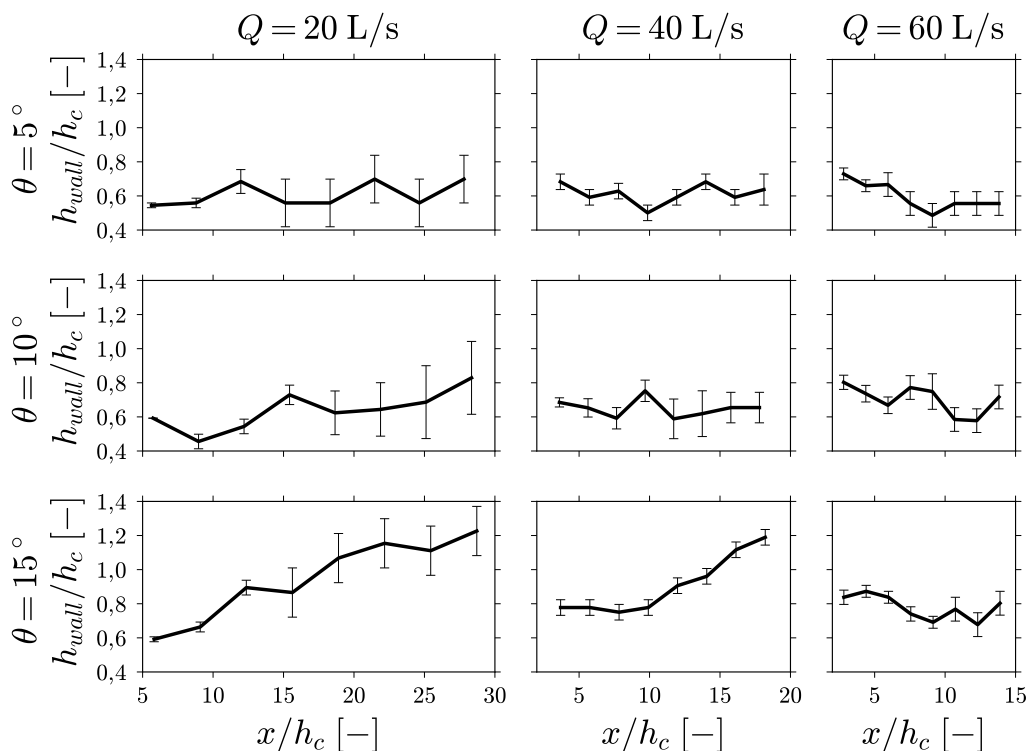


**Слика. 3.40:** Квантитативно поређење концентрација ваздуха и релативне брзине мешавине, за модел две размере у профилу  $x/L = 0,5$ . Индексом “ms” означени су подаци за модел са малим степеницима, а са “vs” резултати за модел са великим степеницима.

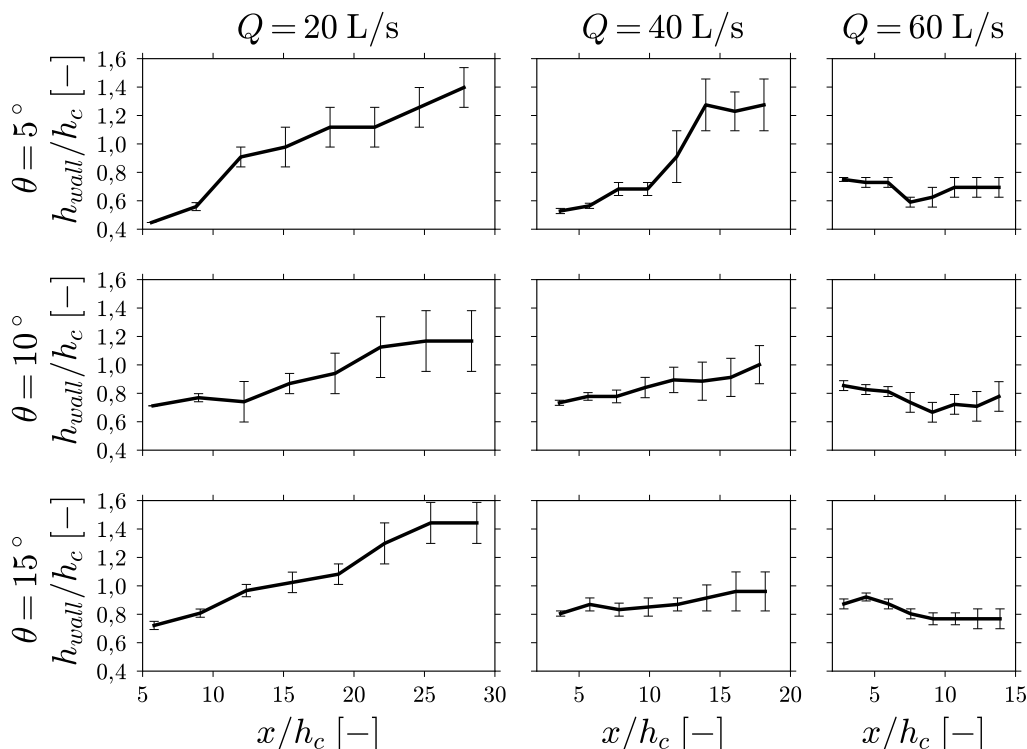
### 3.4.2 Модел ГФ

#### Дубине уз зид брзотока

На Сликама 3.41 и 3.42 приказани су распореди релативне дубине воде уз зид брзотока за обе разматране висине степеника (за оба модела). Уочава се да се за константан проток, дубина воде на узводном крају повећава са порастом угла сужења зида  $\theta$ . Са друге стране, дубина воде на низводном крају много зависи од висине степеника. Код модела са нижим степеницима дубина воде на низводном крају се повећава са порастом угла зида. Код модела са вишим степеницима интервали највећих и најмањих дубина у низводном профилу се у великој мери преклапају, и се може закључити да се низводна дубина не мења много са променом угла зида. Једини изузетак од овога јавио се код модела са већим степеницима при протоку од  $40 \text{ L s}^{-1}$  и  $\theta = 5^\circ$ . Однос дубина на узводном и низводном крају је  $\geq 1$  за протоке  $20 \text{ L s}^{-1}$  и  $40 \text{ L s}^{-1}$ . За највећи проток, уочен је обрнути тренд, и овај однос је увек био мањи од 1. Распоред дубина дуж брзотока није показао неку правилност. Код модела са нижим степеницима и углове зидова  $5^\circ$  и  $10^\circ$ , средње релативне дубине дуж брзотока се крећу у интервалу  $[0,4; 0,8]$  при свим протоцима. За највећи угао зида оба модела, ширина опсега релативних дубина је највећа при најмањем протоку. Са повећањем протока, интервал релативних дубина се сужава.



Слика. 3.41: Распоред дубина дуж зида за  $s = 45 \text{ mm}$ .



Слика. 3.42: Распоред дубина дуж зида за  $s = 90 \text{ mm}$ .

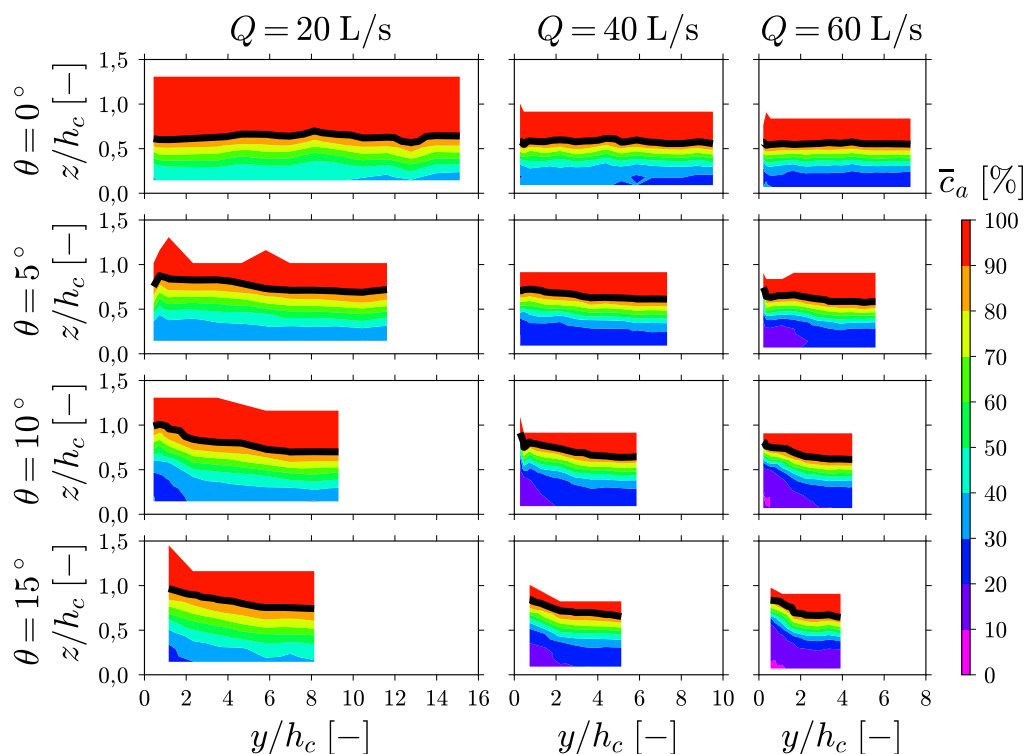
### Концентрација ваздуха

На Сликама 3.43 и 3.44, приказан је распоред концентрације ваздуха за обе висине степеника. Слично моделу ЈЧ, слободна површина је представљена помоћу дубина  $h_{90}$ . За модел са нижим степеницима, уочава се да се за константан угао  $\theta$ , опсег релативних дубина ( $h_{90}/h_c$ ) врло мало мења са променом протока. Са друге стране, модел са вишим степеницима показује да су највеће релативне дубине за најниже вредности протока. За обе висине степеника, примећује се да се релативна дубина у осовини брзотока (најдаље вертикале дуж осе  $y/h_c$ ) мало мења при константном протоку и да не зависи од угла зида. За разлику од модела ЈЧ, на моделу ГФ није јасно уочљив прелаз са стојећег таласа на непоремећени ток.

Изолиније концентрација прате облик слободне површине. За све експерименте уочљиво је да је највећи градијент концентрације у непосредној близини слободне површине. Са приближавањем дну, градијент и концентрације ваздуха се смањују. За обе висине степеника заједничко је смањење концентрације ваздуха у близини псеудо-дна са порастом протока. При константном протоку, уочава се да се са порастом угла зида јавља област ниских концентрација у близини дна уз зид.

Уколико упоредимо обе висине степеника, уочавамо да се код модела са вишим степеницима јављају веће дубине  $h_{90}$  и веће вредности концентрација. Ова одступања су највећа за најмањи проток ( $20 \text{ L s}^{-1}$ ). За највећи проток, ова одступања су

мала (дати оквирну вредност у процентима).



Слика. 3.43: Распоред концентрације ваздуха за  $s = 45$  mm. Пуном линијом је означена реконструисана слободна површина.

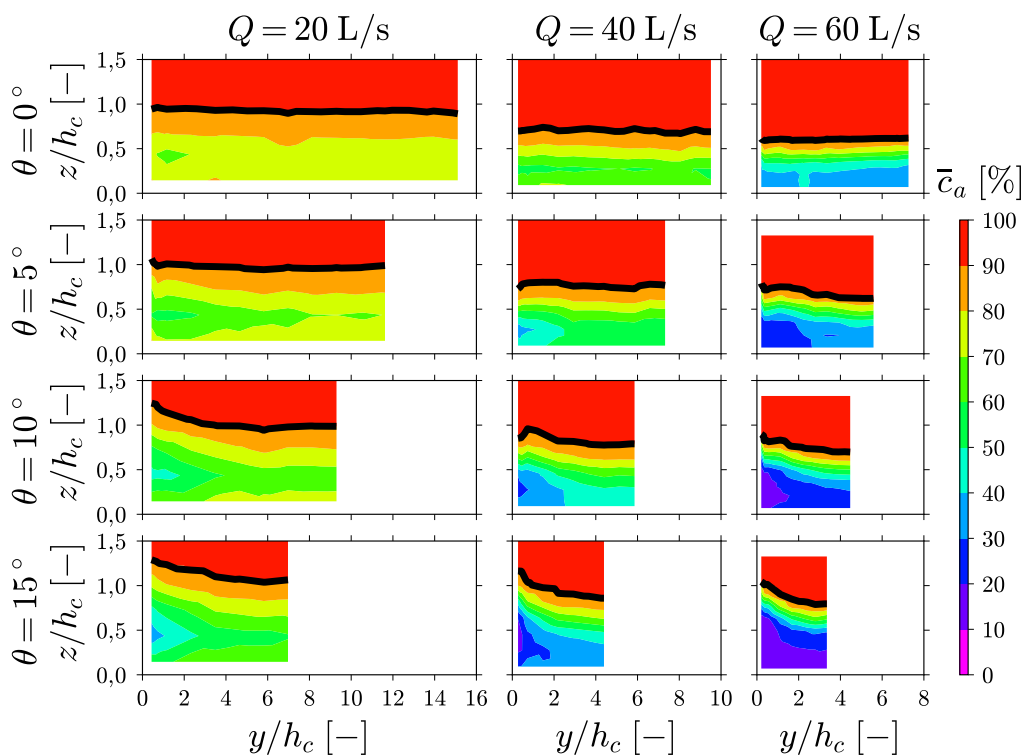
### Брзина мешавине

На Сликама 3.45 и 3.46 приказани су распореди релативне брзине мешавине за обе висине степеника. Уочава се да се опсег релативних брзина мења са променом протоком а да не зависи од угла зида. Са повећањем протока, екстремне вредности брзина се повећавају и област ниских вредности релативних брзина се помера ка слободној површини.

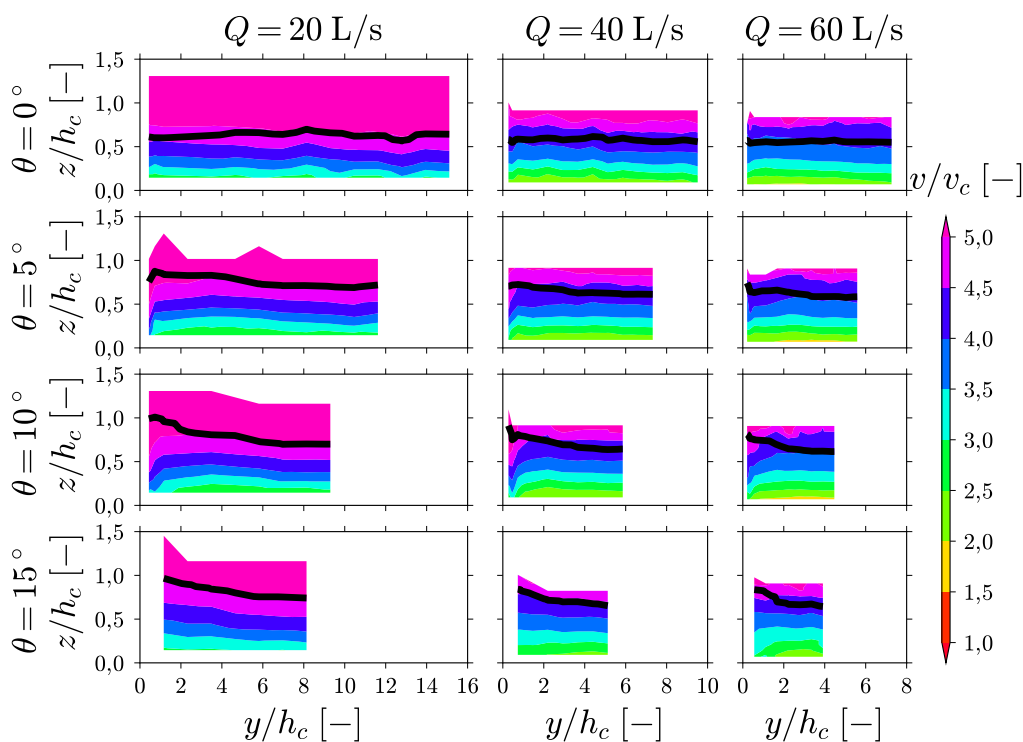
Са повећањем висине степеника модела, опсег релативних брзина се смањује (узрок овоме је повећање најмањих брзина). Ово је нарочито уочљиво при најмањем протоку.

За обе висине степеника карактеристично је и повећање релативних брзина у близини дна уз зид, за веће углове сужења брзотока. Са удаљењем од зида (односно повећањем координате  $y/h_c$ ), изоленије брзина постају приближно паралелне псеудо-дну.

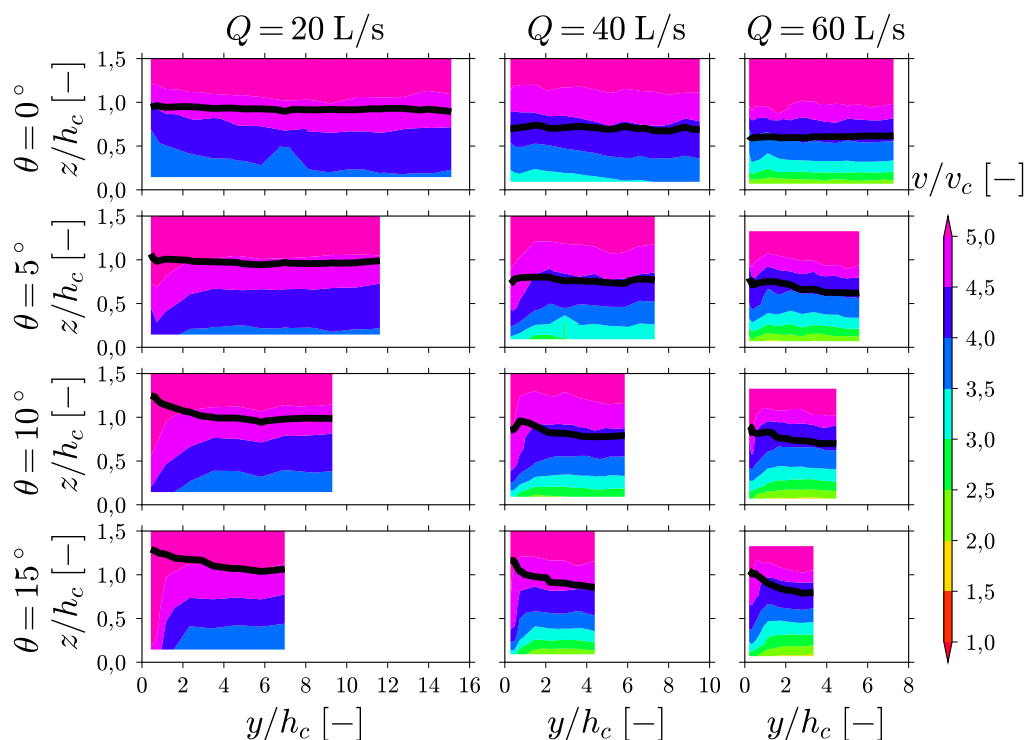




Слика. 3.44: Распоред концентрације ваздуха за  $s = 90$  mm. Пуном линијом је означена реконструисана слободна површина.



Слика. 3.45: Распоред интензитета брзине за  $s = 45$  mm.



Слика. 3.46: Распоред интензитета брзине за  $s = 90$  mm.

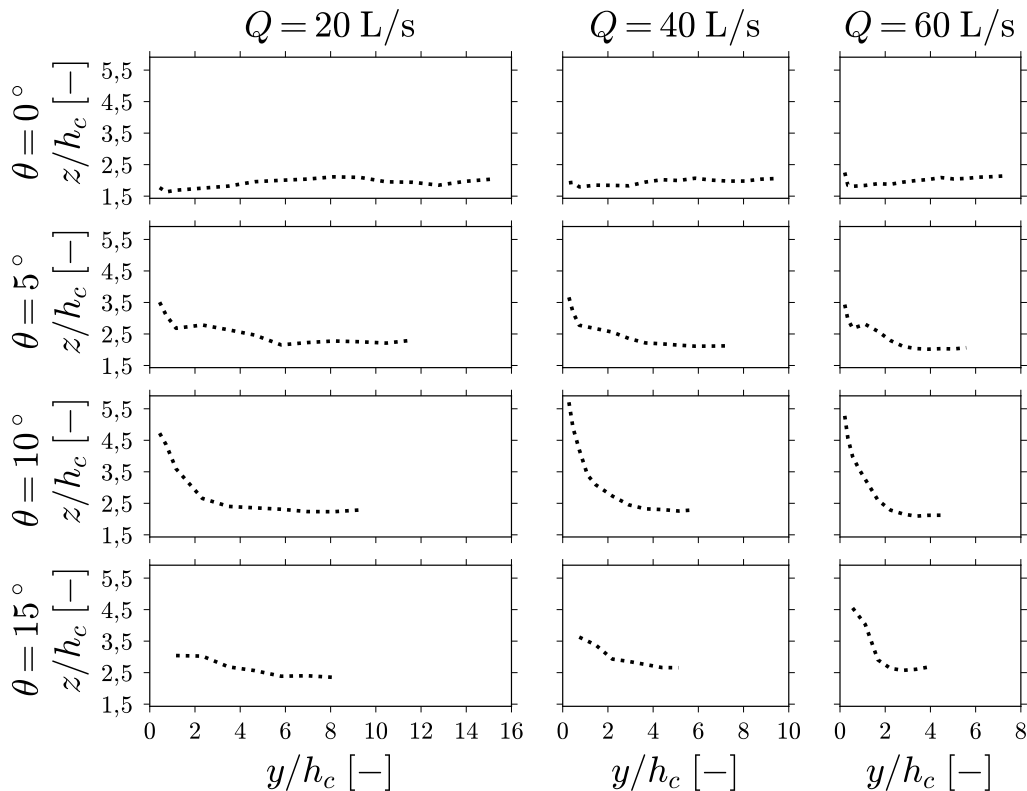
### Преостала енергија флуидне струје

Распоред релативних кота преостале енергије за обе висине степеника, приказан је на Сликама 3.47 и 3.48. За обе висине степеника уочава се да сужење брзотока повећава преосталу енергију у близини зида брзотока. Преостала енергија је највећа у близини зида. Са удаљењем од њега, енергија се смањује и достиже најнижу вредност у осовини тока (највеће вредности координате  $y/h_c$ ). Најниже вредности релативних енергетских кота крећу се у распону од 2 (мањи углови) до 2,5 (већи углови).

Распоред енергетских кота по ширини призматичног брзотока је приближно хоризонталан осим у близини зида где се примећује благо смањење. Са повећањем угла брзотока и при константном протоку, енергетске коте у близини зида се повећавају. За благо сужење брзотока ( $\theta < 10^\circ$ ), највеће енергетске коте се мало мењају са протоком. За веће углове ( $\theta \geq 10^\circ$ ), највеће преостале енергетске коте се повећавају са протоком.

### Карактеристике двофазног струјања

На Сликама 3.49 и 3.50 приказан је распоред показатеља интензитета турбуленције процењен помоћу израза (3.12). За модел са нижим степеницима уочава се да се највеће вредности јављају у уској области испод слободне површине. Највеће вредности јављају се на дубини од око  $(0,4 \div 0,8)h_c$  од псеудо-дна. Уочава се да је по-



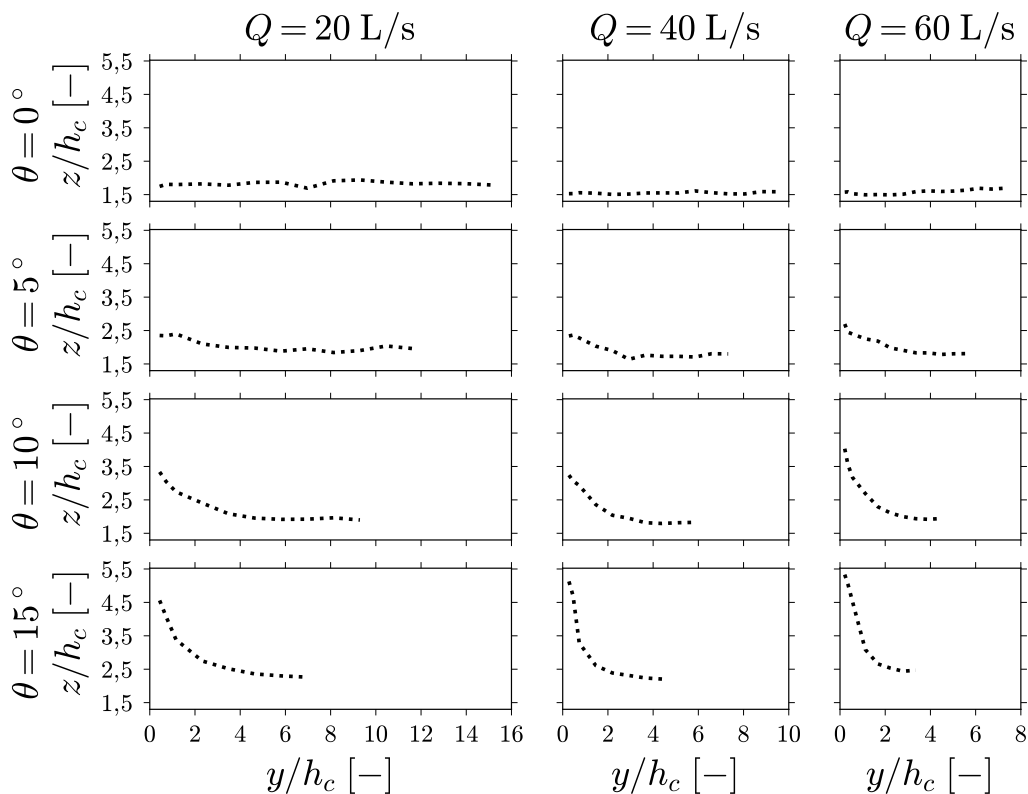
Слика. 3.47: Распоред преостале енергетске висине за  $s = 45$  mm.

казатељ турбуленције највећи при малим протоцима. У већини опита за модел са великим степеницима, добијен је приближно униформан распоред за  $T_u^{(e)}$ . Једини изузетак су опити при протоцима од  $40 \text{ L s}^{-1}$  и  $60 \text{ L s}^{-1}$  за угао  $15^\circ$ .

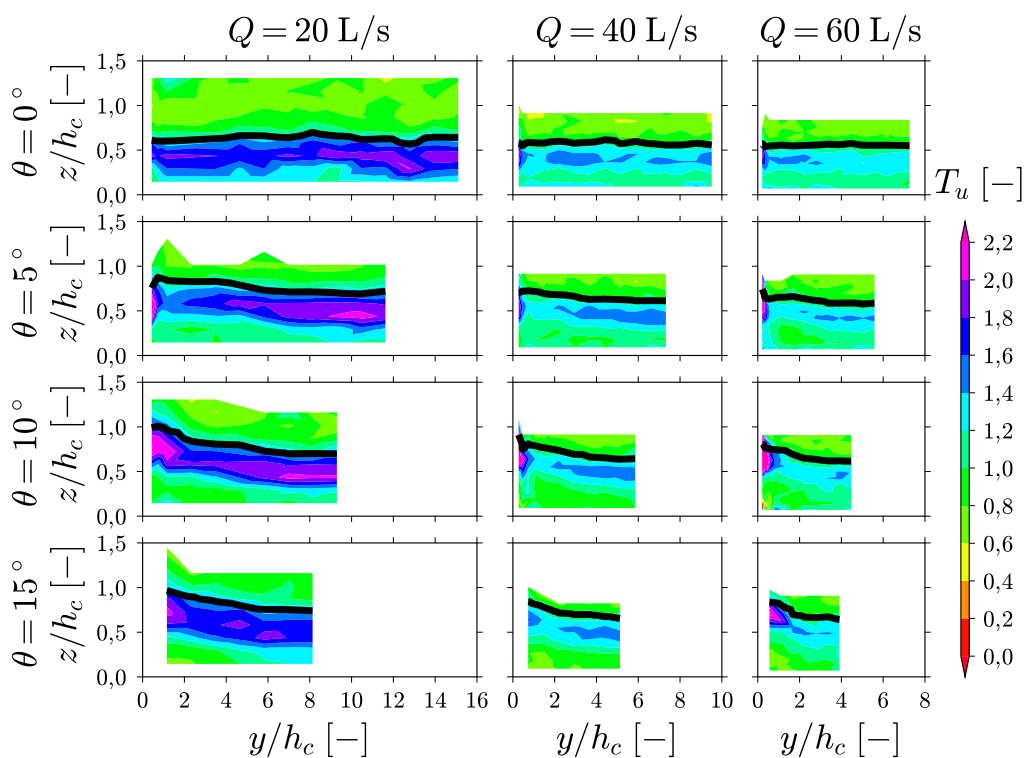
У једном пресеку, највећи интензитет турбуленције је у близини зида брзотока. Распоред показатеља  $T_u$  прати облик слободне површине. Са удаљењем од зида, изолиније функције  $T_u$  су приближно паралелне са псеудо-дном.

Фреквенција наиласка гасовите фазе, приказана је на Сликама 3.51 и 3.52. За најмањи проток, највеће вредности се јављају на дубини од око  $(0,4 \div 0,8)h_c$ . За константан угао брзотока, екстремне вредности функције  $F_a$  су мање при већим протоцима. При константном протоку, у близини дна уз зид јавља се област ниских вредности функције  $F_a$ . Димензије ове области расту са повећањем угла зида и она се шири ка осовини брзотока. Једини изузетак од горе наведених описа је брзоток са вишим степеницима при протоку од  $20 \text{ L s}^{-1}$ . У овом експерименту су се најмање вредности јавиле у призматичном каналу, док сужење брзотока доводи до концентрације високих вредности функције  $F_a$  у близини зида. Ово се може оправдати тиме што овом експерименту одговара скоковити ток.

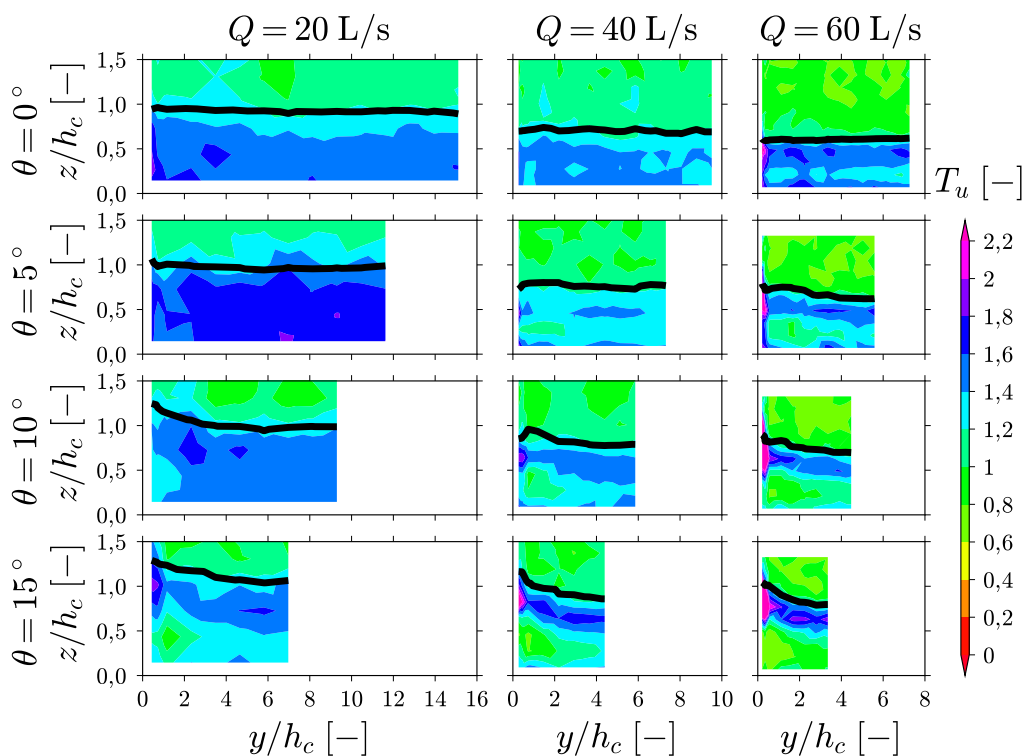
Распоред специфичне површине контакта између фаза приказан је на Сликама 3.53 и 3.54. Тренд овог показатеља сличан је тренду величине  $F_a$ . За призматичан



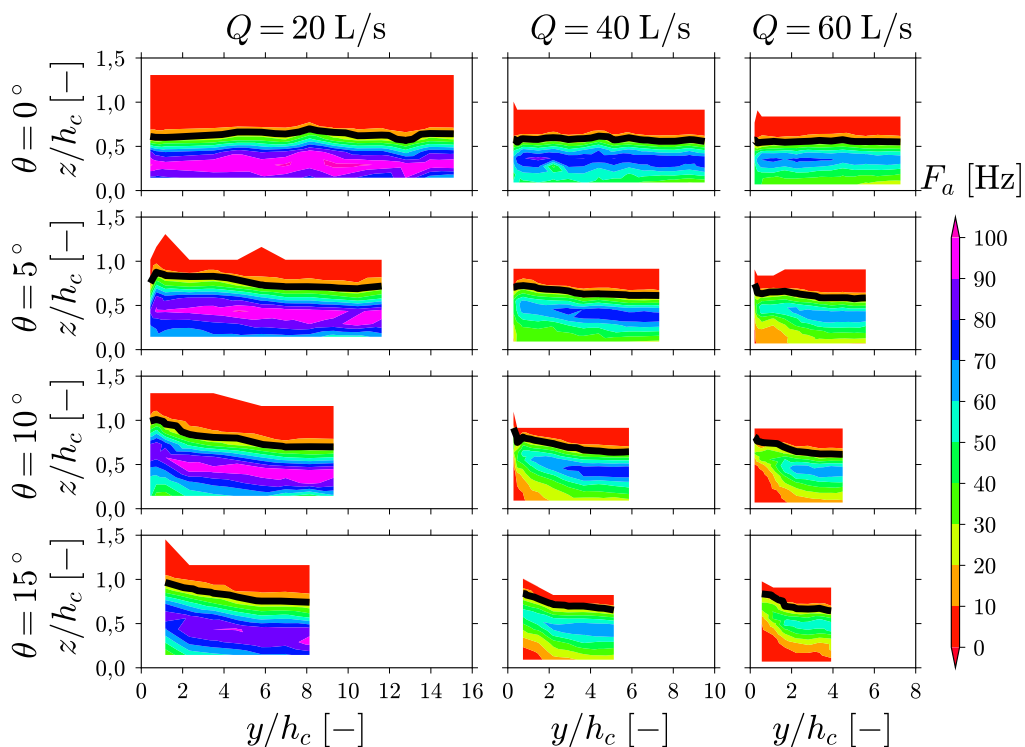
Слика. 3.48: Распоред преостале енергетске висине за  $s = 90$  mm.



Слика. 3.49: Распоред показатеља турбуленције за  $s = 45$  mm.

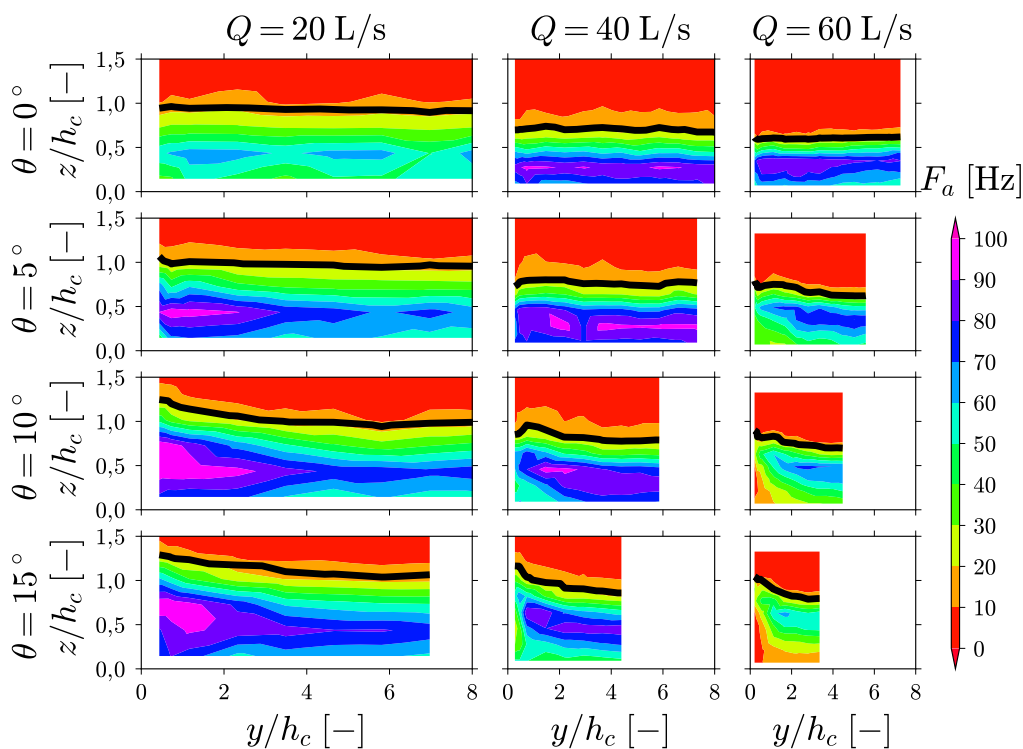


Слика. 3.50: Распоред показатеља турбуленције за  $s = 90$  mm.



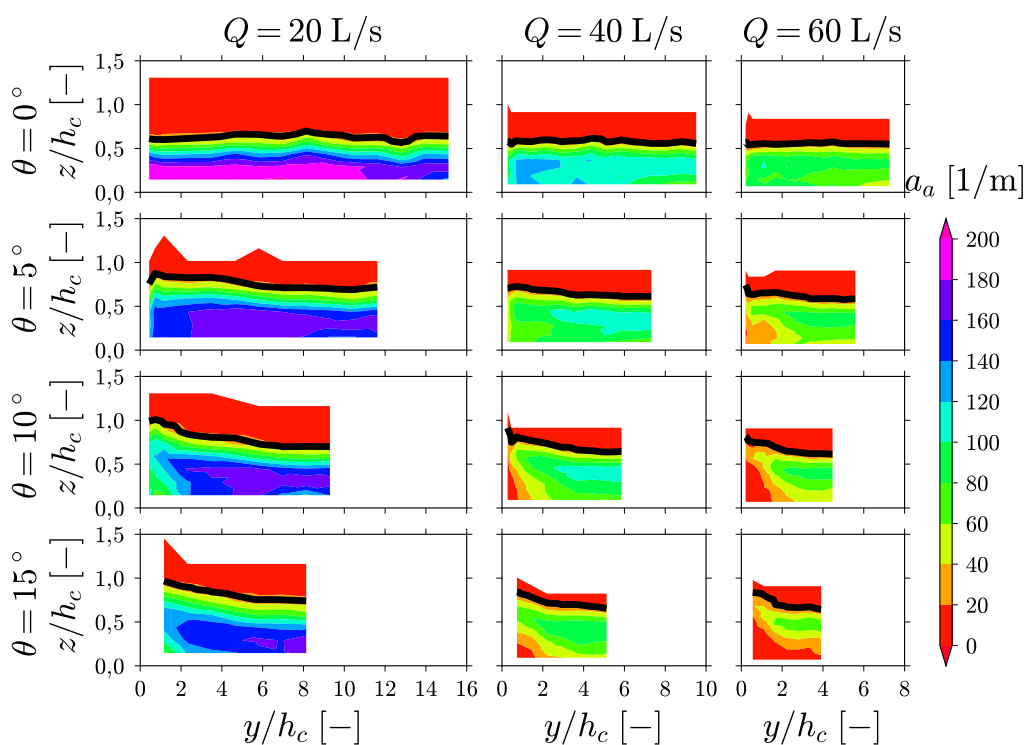
Слика. 3.51: Распоред фреквенције наилаaska мехурића/капљица за  $s = 45$  mm.

брзоток, највеће вредности су у близини зида и оне се смањују према осовини брзотока. За константан проток, са повећањем угла зида, област високих вредности

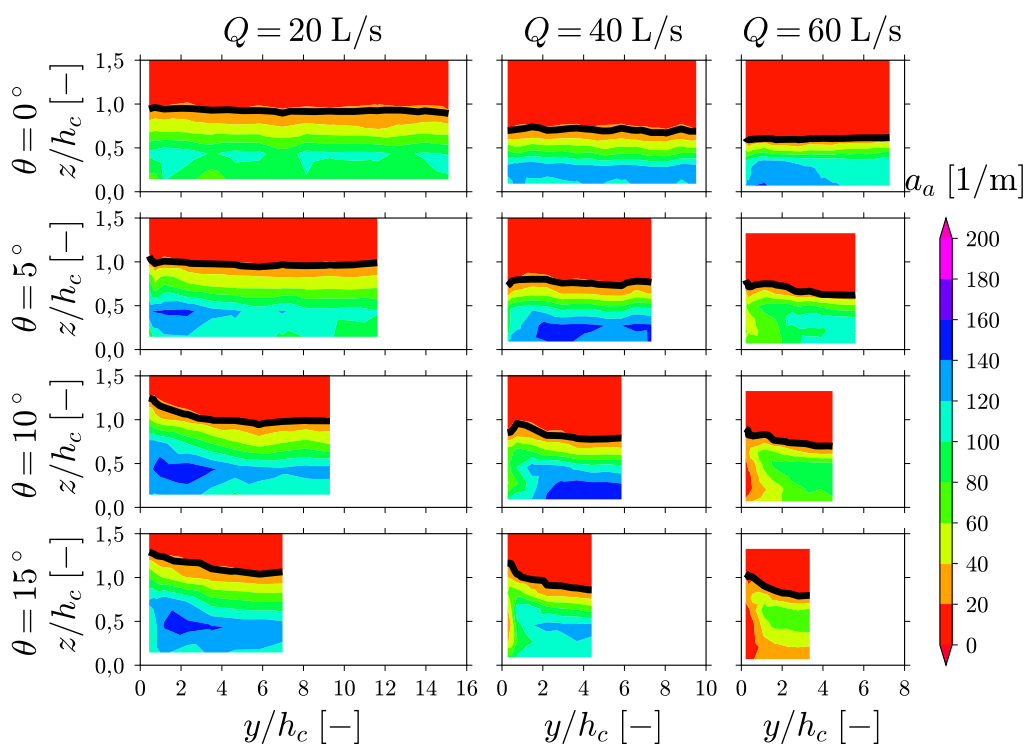


Слика. 3.52: Распоред фреквенције наиласка мехурића/капљица за  $s = 90 \text{ mm}$ .

специфичне површине контакта између фаза ( $a_a \geq 100$ ) помера се навише и делом прати слободну површину. Такође, област ниских вредности функције  $a_a$  налази се у близини дна уз зид. Вредности унутар ове области се смањују а њене димензије повећавају при већим протоцима. За модел са вишим степеницима, при протоку од  $20 \text{ L s}^{-1}$  добијени су мало другачији резултати: област највећих вредности се јавила у близини зида и њене димензије начелно расту са повећањем угла зида. Слично као за функцију  $F_a$ , и ово се може оправдати тиме што овом експерименту одговара скоковити ток.



Слика. 3.53: Распоред специфичне површине контакта међу фазама за  $s = 45$  mm.



Слика. 3.54: Распоред специфичне површине контакта међу фазама за  $s = 90$  mm.

### 3.5 Дискусија резултата физичких модела

Резултати указују да сужење канала утиче на струјну слику у брзотоку формирањем стојећих таласа. Промене су највеће у непосредној близини зида и постепено се смањују са удаљењем од њега. На довољној удаљености, утицај зида постаје занемарљив и ток се понаша као да је корито призматично. Узрок је хеликоидно струјање које настаје при наиласку тока на зид под углом. Ово запажање је у сагласности са истраживањима за благо нагнуте степенасте (Hunt et al., 2008; Hunt et al., 2012), као и за глатке брзотоке Irpen (1936). Механизам стварања стојећег таласа је сличан код глатког и степенастог брзотока; свака промена правца контуре изазива хеликоидно струјање, што код отворених токова резултује локалним повећањем нивоа воде (Irpen & Dawson, 1951). Разлика у односу на претходна истраживања је што су мерења спроведена за стрми степенести брзоток у значајно аерисаној флуидној струји.

Дубине воде уз зид показују да не постоји једнозначна веза дубине, угла зида и протока већ да се дуж зида може јавити неколико локалних екстремума. Тренд дубина је сличан резултатима Wadhai et al. (2015). Са друге стране, текући резултати одступају од емпиријских зависности развијених за благо нагнуте степенасте брзотоке. Разлози за то могу бити: већи угао псеудо-дна канала, виши модел и значајнија аерација тока у односу на истраживања Hunt et al. (2012).

Суужењем брзотока смањују се концентрације ваздуха у близини зида. Разлог за ову појаву може бити то да су дубине у стојећем таласу највеће уз зид и да се смањују са удаљењем од њега. Већим дубинама одговара већа сила потиска што може резултовати нижим концентрацијама ваздуха. Суужење брзотока доводи и до локалног повећања брзина. Непоремећени ток, који струји управно на подужну осу степеника, наилази на зид под углом. Оваква промена правца локално доводи до повећања брзине. Занимљиво је запажање да се највећа брзина мало мења са променом угла зида. Слични резултати до сада нису објављивани у литератури и стога је неопходно спровести допунска мерења како би се ово запажање и потврдило.

Важно је уочити правилност распореда специфичне енергије  $e_{res}$  у попречном профилу. Наиме, највеће вредности су у непосредној близини зида, постепено се смањују са удаљењем од њега и, на довољној удаљености, теже приближно константној вредности. Овакав распоред  $e_{res}$  можемо објаснити чињеницом да су у близини конвергентног зида мање концентрације ваздуха а веће брзине, што је у складу са изразом (3.11). Уз то, према Voes, Nager (2003a), Chanson (1993, 1994), већим дубинама одговарају мањи отпори струјања, па је и преостала енергија већа. Будући да у литератури нема резултата мерења преостале енергије у степенастом брзотоку са постепеним сужењем корита, неопходно је спровести додатна истраживања. Ови резултати имају важну последицу; постепеним сужењем корита се нарушавају ди-



сипационе карактеристике брзотока (у поређењу са призматичним) а ефикасност се смањује са повећањем угла сужења зидова.

Резултати показују и да сужење корита погоршава аерационе карактеристике брзотока, али да је неповољан утицај ограничен на непоредну близину зида. Разлоге за добијене резултате није тешко објаснити. Будући да су дубине у стојећем таласу веће него у непоремећеном току, и да већа дубина резултује већом силом потиска (пропорционална је са  $\rho gh_w$ ), према Chanson (1999), Toombes, Chanson (2005) и Chanson (1992), већа сила потиска доводи до значајније деаерације тока. У литератури, до момента писања ове дисертације, нису објављени резултати мерења аерационих карактеристика за непризматичне степенасте брзотоке и стога је неопходно спровести допунска истраживања којима би се потврдили добијени резултати.

Резултати мерења показују да распоред интензитета тубуленције у попречном профилу прати облик слободне површине и да су највеће вредности на око 75-80 %  $h_{90}$  од псеудо-дна. Ово запажање је у складу да мерењима у призматичним степенастим брзотоцима (Chanson, 2002; Chanson & Toombes, 2002b; Chanson & Carosi, 2007; Toombes & Chanson, 2005). Будући да је ово прво истраживање на непризматичним степенастим брзотоцима у којем је мерен овај показатељ, неопходно је спровести додатна мерења како би се наведени тренд потврдио.

На моделу ЈЧ је указано да повећање размере даје нешто мање брзине и значајно аерисанији ток. Ово запажање је сагласно са резултатима за призматичне степенасте брзотоке приказаним у Voes (2000) и Voes, Nager (2003b). Будући да су слагања резултата добра, то може имати за последицу да су и остали закључци везани за брзине и аерацију слични, па би на прототипу требало очекивати мању преосталу енергију него на моделу.

Резултати показују и да је могуће проценити нагиб линије енергетске коте за непоремећену струју помоћу спектра тетива гасовите фазе и да се ова зависност у  $\log \log$ -размери може описати помоћу две праве линије. Ово запажање је у сагласности са истраживањима Deane, Stokes (2002). У односу на њихова истраживања, израз за процену нагиба линије енергије је неопходно прилагодити. Разлог за то може бити што у текућем истраживању нису били на располагању просторни распореди пречника мехурића већ само њихових тетива и то дуж једног правца. Без обзира на разлике и неопходне допуне, резултати су показали завидну поновљивост, што је охрабрујуће са становишта будућих истраживања.

Ограничења истраживања приказаних у овој дисертацији се свде на то да је висина модела била релативно мала, што је условљено капацитетом лабораторијских инсталација. Стога ће бити неопходно спровести додатна истраживања на крупнијим моделима како би се резултати из ове дисертације потврдили и допунили.

# Нумеричко моделирање струјања на степенастом брзотоку са постепеним сужењем

## Садржај

4.1	Нумеричко моделирање вишефазног течења . . . . .	85
4.1.1	Једначине математичког модела . . . . .	85
4.1.2	Моделирање турбуленције . . . . .	87
4.1.3	Рачунски модел струјања на степенастом брзотоку . . . . .	89
4.2	Резултати нумеричког модела . . . . .	91
4.3	Дискусија резултата нумеричког модела . . . . .	95

## 4.1 Нумеричко моделирање вишефазног течења

### 4.1.1 Једначине математичког модела

При извођењу једначина математичког модела вишефазног струјања, полази се од Navier–Stokes-ових једначина за сваки флуид. Уколико се са  $q$  означи било која фаза у току (може бити вода или ваздух), временски осредњене једначине струјања за сваку фазу гласе<sup>{1}</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_q \rho_q u_{qj}) = I_q \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q u_{qi}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_q \rho_q u_{qj} u_{qi}) = \alpha_q \rho_q g_i - \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}^D}{\partial x_j} \right) + F_{qi} \quad (4.2)$$

<sup>{1}</sup>При извођењу једначина овој Глави, концентрација фазе ће се означавати са  $\alpha$ . За приказ резултата на којима је концентрација ваздуха, користиће се постојећа ознака  $\bar{c}_a$ .

Једначине (4.1) и (4.2) чине тзв. Ојлеровски вишефазни модел (погледати поглавље 2.4). У претходним изразима, уведене су следеће ознаке:  $\rho_q$  – густина фазе  $q$ ,  $\alpha_q$  – концентрација фазе  $q$  уз услов да је  $\sum_q \alpha_q = 1$ ,  $u_{qi}$  – компонента брзине фазе  $q$  у правцу осе  $x_i$ ,  $I_q$  – масени проток по јединици запремине којим се описује допринос фази  $q$  од осталих фаза (за струјање на брзотоку његов утицај је мали па се најчешће занемарује),  $p$  – притисак,  $g_i$  – компонента гравитационог убрзања у правцу осе  $x_i$ ,  $\sigma_{ij}^D$  – девијаторски део тензора напона,  $F_{qi}$  – члан који потиче од међусобног дејства фазе  $q$  и осталих фаза. Девијаторски део тензора напона обухвата вискозне и “Рејнолдсове” смичуће напоне:

$$\sigma_{ij}^D = 2\mu_{qe}S_{qij} - \frac{2}{3}\rho_q k_q \delta_{ij}, \quad (4.3)$$

где су:  $\mu_{qe}$  – ефективна вискозност фазе  $q$  (једнака је збиру стварне и “турбулентне” вискозности фазе  $q$ ,  $\mu_{qe} = \mu_q + \mu_{qT}$ ),  $S_{qij}$  – тензор брзине деформације фазе  $q$  чије су компоненте:  $S_{qij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{qi}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{qj}}{\partial x_i} \right)$ ,  $\delta_{ij}$  – Конекеров симбол и  $k_q$  – кинетичка енергија турбуленције (једначине за прорачун овог члана, описане су у потпоглављу 4.1.2).

Члан  $F_{qi}$  обухвата силе интеракције између фаза, силу отпора облика, узгон и силу виртуелне масе (Chuang & Hibiki, 2017; Colombo & Fairweather, 2015; Jacimovic et al., 2016; Vaidheeswaran & Hibiki, 2017):

$$F_{qi} = R_{qi} + F_{li} + F_{vm_i},$$

где су:  $R_{qi}$  – сила услед интеракције између фаза,  $F_{li}$  – узгон и  $F_{vm_i}$  – сила виртуелне масе.

Сила интеракције између фаза, рачуна се према:

$$R_{qi} = \sum_{p=1}^N K_{pq} u_{pqi},$$

где је  $K_{pq}$  – коефицијент размене количине кретања између фаза;  $u_{pqi}$  – компонента релативне брзине у правцу осе  $x_i$ , између фаза  $p$  и  $q$ . Коефицијент  $K_{pq}$  рачунат је помоћу следеће формуле:

$$K_{pq} = \frac{3}{4} \frac{\mu_{pq} \alpha_p \alpha_q}{d_{pq}^2} \mathbf{Re} C_D,$$

где су:  $\mu_{pq} = \alpha_p \mu_p + \alpha_q \mu_q$ ,  $\rho_{pq} = \alpha_p \rho_p + \alpha_q \rho_q$  и  $d_{pq} = \frac{1}{2} (d_p + d_q)$ ,  $\mathbf{Re}$  – Рејнолдсов број за парове фаза  $p$  и  $q$ , а  $C_D$  – коефицијент отпора облика. Рејнолдсов број за

парове фаза  $p$  и  $q$ , рачунат је према следећем изразу:

$$R_e = \frac{\rho_{pq} |u_{pq}| d_{pq}}{\mu_{pq}} \quad (4.4)$$

Коефицијент отпора облика рачунат је према изразу Schiller-а и Naumann-а (“ANSYS FLUENT Theory Guide”, 2011):

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{R_e} (1 + 0,15R_e^{0,687}), & R_e \leq 1000, \\ 0,44, & R_e \geq 1000. \end{cases} \quad (4.5)$$

За дефинисање сила  $F_{l_i}$  и  $F_{vm_i}$ , неопходно је да се једна фаза означи као носећа,  $c$ , а фазе у дисперзији са  $p$ . Ако се разлика брзина носеће  $c$  и дисперзне фазе  $p$  означи са  $u_{cpi} = u_{ci} - u_{pi}$ , преостале компоненте силе  $F_{q_i}$ , могу се израчунати помоћу следећих израза:

- сила узгона:

$$F_{lp_i} = -F_{lc_i} = C_l \alpha_c \rho_c u_{cpi} \times (\nabla \times u_{cpi}),$$

где су:  $F_{lp_i}$  и  $F_{lc_i}$  – силе узгона за дисперзну и за носећу фазу, а  $C_l$  – коефицијент узгона. У овој дисертацији, усвојена вредност овог коефицијента износила је  $C_l = 0,5$ .

- сила виртуелне масе:

$$F_{vmp_i} = -F_{vmc_i} = \frac{1}{2} \alpha_p \rho_c \left( \frac{Du_{ci}}{Dt} - \frac{Du_{pi}}{Dt} \right),$$

при чему су  $F_{vmp_i}$  и  $F_{vmc_i}$  силе виртуелне масе за дисперзну и за носећу фазу, а  $\frac{D}{Dt}$  означава оператор материјалног извода.

### 4.1.2 Моделирање турбуленције

У претходном потпоглављу указано је да временски осредњене једначине одржања количине кретања (4.2) садрже додатне чланове којима се описује турбуленција. Моделирање турбуленције вишефазних струјања се у великој мери ослања на постојеће моделе за једнофазне токове. Слично основним једначинама, и модели турбуленције се могу написати за сваку фазу у току или за мешавину. У овој дисертацији коришћен је realizable  $k$ - $\varepsilon$  модел за сваку фазу засебно. Разлог за његову примену је добра реконструкција струјног поља са рецикулацијом и повећањем притиска у низводном смеру, уз високу рачунску ефикасност (Pope, 2000; Wilcox, 2006). Ове појаве могу

се очекивати у зони степеника испод псеудо-дна (рециркулација) и зида брзотока (обрнути градијент притиска, тј. пораст дубине услед сужења канала).

У односу на једнофазна струјања, транспортне једначине модела турбуленције за вишефазни ток садрже допунски члан продукције турбулентне кинетичке енергије услед присуства дисперзне фазе. Једначине realizable k- $\varepsilon$  модела за произвољну фазу  $q$  гласе (“ANSYS FLUENT Theory Guide”, 2011):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q k_q) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_q \rho_q k_q u_{qi}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_q \left( \mu_q + \frac{\mu_{t,q}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_q}{\partial x_i} \right) + (\alpha_q G_{k,q} - \alpha_q \rho_q \varepsilon_q) + P_{k,q}, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q \varepsilon_q) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_q \rho_q \varepsilon_q u_{qi}) = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_q \frac{\mu_{t,q}}{\sigma_k} \frac{\partial \varepsilon_q}{\partial x_i} \right) + \alpha_q \rho_q C_1 S_q \varepsilon_q \\ & - \alpha_q \rho_q C_2 \frac{\varepsilon_q^2}{k_q + \sqrt{\varepsilon_q \frac{\mu_q}{\rho_q}}}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где су:  $k_q$  – кинетичка енергија турбуленције фазе  $q$ ,  $\varepsilon_q$  – брзина дисипације кинетичке енергије турбуленције фазе  $q$ ,  $\mu_q$  – вискозност фазе  $q$ ,  $\mu_{t,q}$  – турбулентна вискозност фазе  $q$ ,  $G_{k,q}$  – продукција кинетичке енергије турбуленције (као код једнофазног тока),  $S_q$  – интензитет брзине деформације ( $S_q = \sqrt{\sum_i \sum_j S_{qij}^2}$ ). Члан  $P_{k,q}$  представља продукцију кинетичке енергије турбуленције услед присуства осталих фаза, а  $C_1$  и  $C_2$  су помоћне функције модела (“ANSYS FLUENT Theory Guide”, 2011).

За изабрани модел турбуленције неопходно је увести допунске функције којима се описује утицај чврсте границе. Оне су добијене полу-емпиријским разматрањима једноставних случајева струјања и омогућавају обухватање утицаја граничног слоја и при грубљој просторној дискретизацији. Применом овог поступка значајно се скраћује време прорачуна, а једначине коришћене у дисертацији су доступне у расположивој литератури (“ANSYS FLUENT Theory Guide”, 2011).

За турбулентно вишефазно струјање, у једначине одржања количине кретања (4.2) додаје се још једна сила која настаје интеракцијом турбуленције и дисперзне фазе у струји. Она се најчешће додаје члану  $F_{t_i}$ . Према Simonin-у и Viollet-у, она се може израчунати помоћу следећег израза (“ANSYS FLUENT Theory Guide”, 2011):

$$F_{t_i} = K_{pq} \left( \frac{D_p}{\sigma_{pq} \alpha_p} \nabla \alpha_p - \frac{D_q}{\sigma_{pq} \alpha_q} \nabla \alpha_q \right).$$

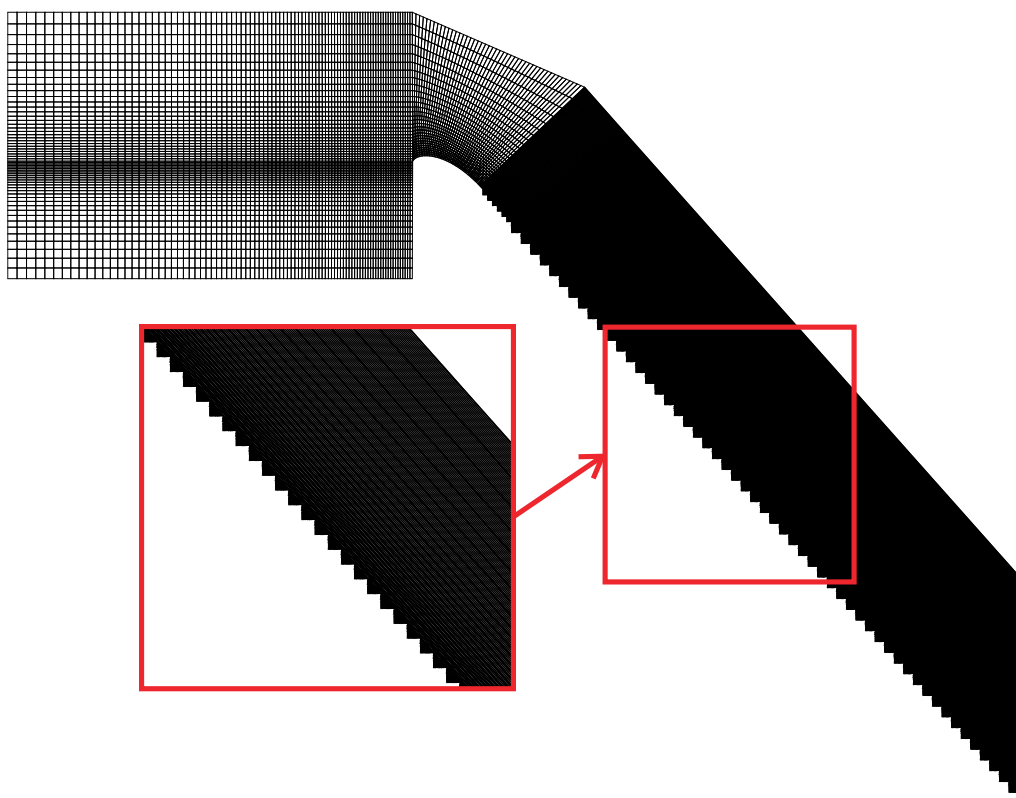
У претходном изразу, коришћене су следеће ознаке:  $F_{t_i}$  – сила услед турбуленције између фаза,  $D_p$  и  $D_q$  – коефицијенти турбулентне дисперзије фаза  $p$  и  $q$ , а  $\sigma_{pq}$  – дисперзиони Prandtl-ов број (усвојена вредност овог параметра износила је 0,75).

Коефицијенти турбулентне дисперзије рачунају се за познат распоред турбулентне кинетичке енергије,  $k$ . Детаљи поступка, приказани су у “ANSYS FLUENT Theory Guide” (2011).

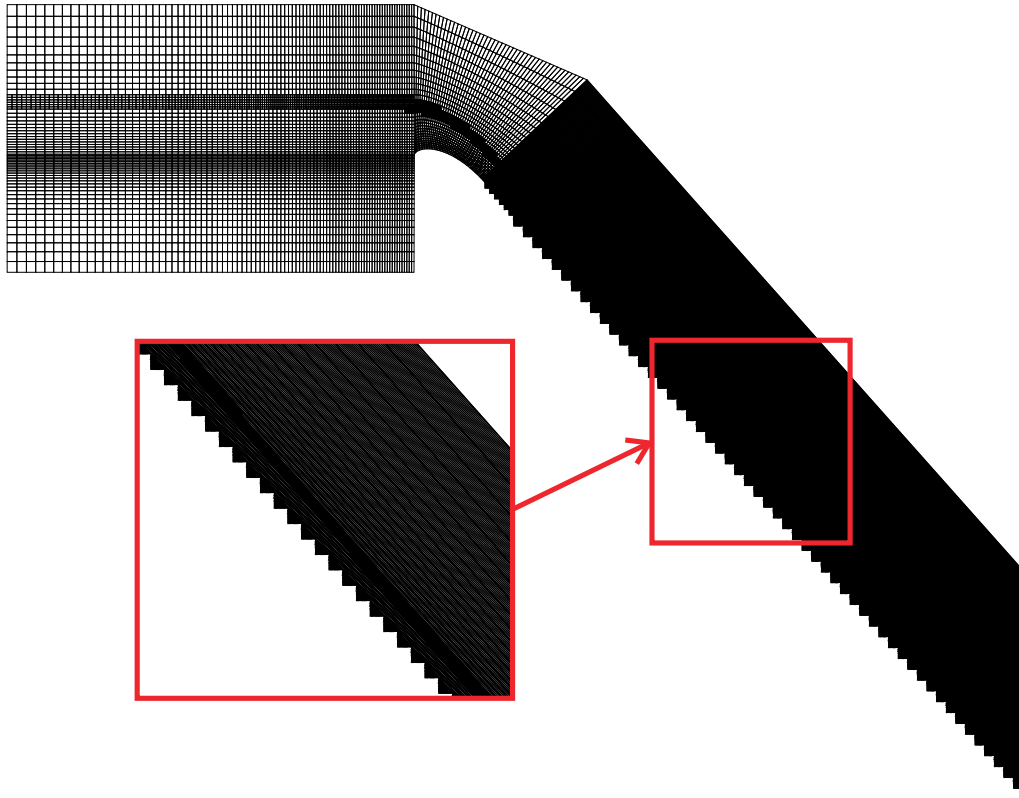
### 4.1.3 Рачунски модел струјања на степенастом брзотоку

У овој дисертацији, једначине вишефазног струјања дискретизоване су методом коначних запремина. Овај поступак је имплементиран у комерцијалном софтверском пакету Ansys Fluent (“ANSYS FLUENT Theory Guide”, 2011).

Нумеричким моделом симулирано је струјање на моделу ЈЧ, при чему је разматрана само десна половина брзотока. На Слици 4.1 приказана је почетна мрежа за модел са степеницима висине 22,5 mm и угао зида  $\theta = 12^\circ$ . Карактеристична димензија коначних запремина у близини степеника је око 1,5 mm. Током прорачуна, мрежа је аутоматски прогушћена у области високих вредности градијената густине мешавине и брзине. Пример прогушћења за високу вредност градијента густине, приказан је на Слици 4.2. Уочава се да је мрежа прогушћена у близини слободне површине јер је на контакту воде и ваздуха висока вредност градијента густине.

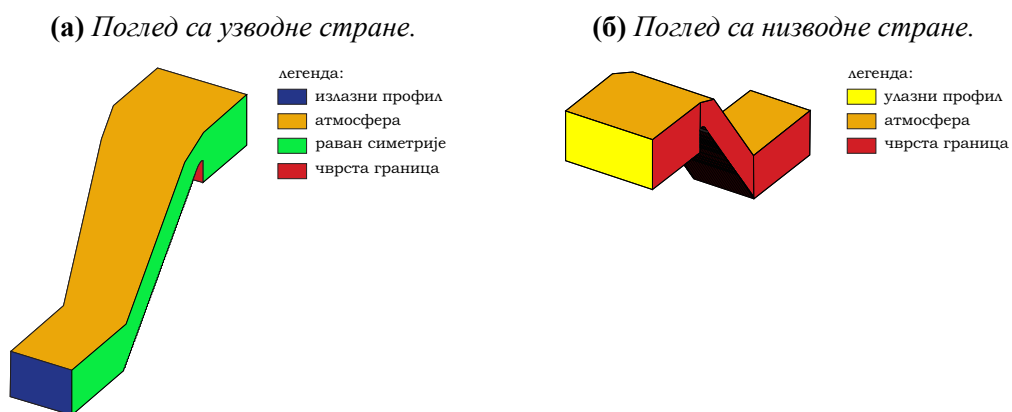


**Слика. 4.1:** Основна мрежа коначних запремина за модел ЈЧ и детаља мреже брзотока.



Слика. 4.2: Гушћа мрежа коначних запремина за модел ЈЧ након једног степена прогибења, и детаљ мреже брзотока.

За решавање система једначина, неопходно је задати и услове на граничним површинама модела. На Слици 4.3 приказани су називи граничних површина.



Слика. 4.3: Називи граничних површина у нумеричким експериментима.

Задати гранични услови су:

1. Улазни профил:

- ниво воде: 10 центиметара изнад круне прелива

- масени проток воде:  $\dot{m}_w = 65 \text{ kg s}^{-1}$  и масени проток ваздуха  $\dot{m}_a = 44 \text{ g s}^{-1}$
  - распоред брзине воде је логаритамски а у ваздуху је константан
  - модел турбуленције:  $k = 0,1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  и  $\varepsilon = 0,1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$  за обе фазе
2. Излазни профил: слободно истицање
  3. Раван симетрије: услов симетрије свих променљивих
  4. Чврста граница: задата је функција зида а храпавост је задата  $k_s = 0,1 \text{ mm}$
  5. Атмосфера:
    - промена брзине у правцу нормале на површ је једнака нули
    - притисак дуж ове површине једнак атмосферском
    - модел турбуленције: промена  $k$  и  $\varepsilon$  у правцу нормале на површ је једнака нули

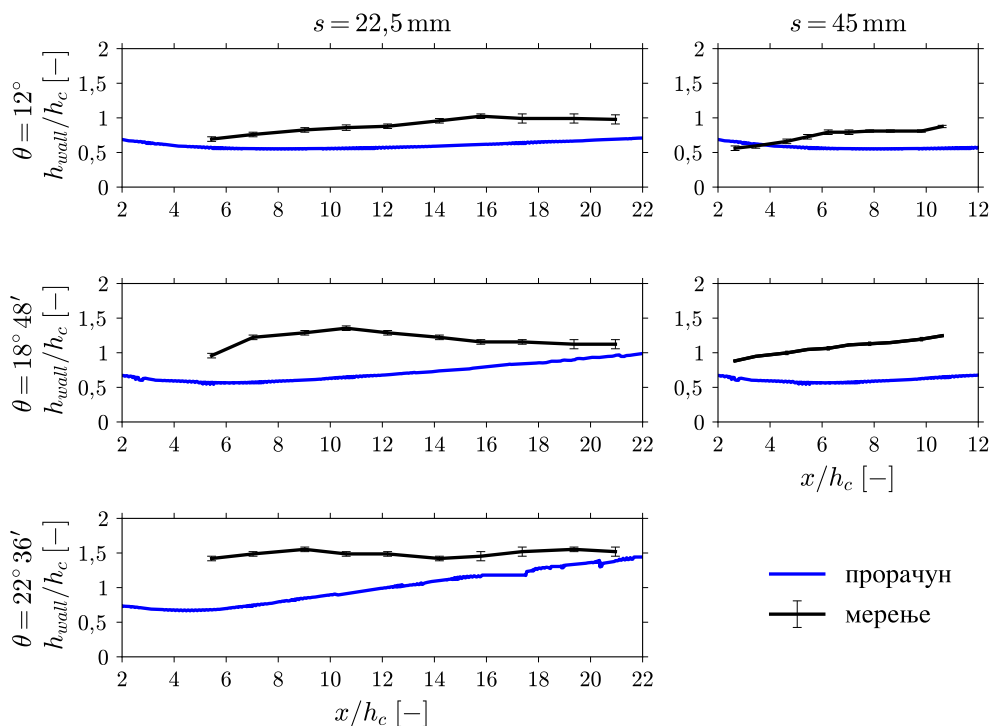
За процену репрезентативних пречника мехурића и капљица, неопходних за моделирање чланова у једначинама (4.2), коришћени су резултати модела ЈЧ (Слике 3.32, В.1 и В.2). Усвојен репрезентативни пречник мехурића износио је  $d_a = 1,5 \text{ mm}$  а капљица  $d_w = 1 \text{ mm}$ .

## 4.2 Резултати нумеричког модела

На Слици 4.4 дат је упоредни приказ измерених и израчунатих дубина уз зид брзотока. Сви израчунати распореди показују сличан тренд; дубине воде низводно од прелива се прво смањују и достижу најмању вредност на дужини од око  $4h_c$  (за угао  $\theta = 22^\circ 36'$ ) до  $10h_c$  (за угао  $\theta = 12^\circ$ ). Низводно од минимума дубине се повећавају, а нагиб линије слободне површине се повећава са порастом вредности угла зида. Примећује се да је за најмањи угао зида ( $\theta = 12^\circ$ ), слагање задовољавајуће у узводним деловима брзотока ( $h_{wall}/h_c \leq 10$ ), док је за веће углове добро слагање остварено у низводним деловима брзотока ( $h_{wall}/h_c > 16$ ).

На Слици 4.5 приказани су израчунати распореди концентрације ваздуха у попречним профилима дуж брзотока за модел ЈЧ са ниским степеницима. У сваком попречном пресеку приказана је и реконструкција слободне површине воде. Уочава се и да је мешање воде и ваздуха испод слободне површине знатно мање изражено него на физичком моделу. Највећи градијенти концентрације су у близини слободне





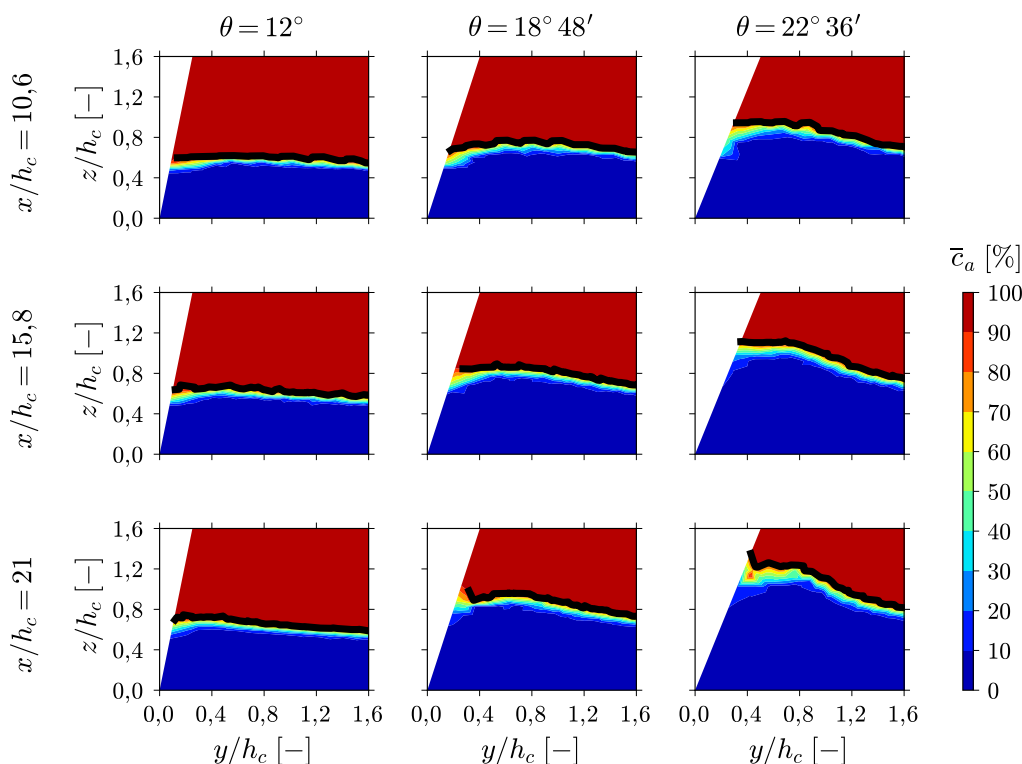
**Слика. 4.4:** Израчунати и измерени распореди дубина воде уз зид брзотока на моделу ЈЧ.

површине и ограничени су на дубину од  $(0,1 \div 0,2)h_c$ . Испод ове области, концентрације ваздуха су занемарљиво мале.

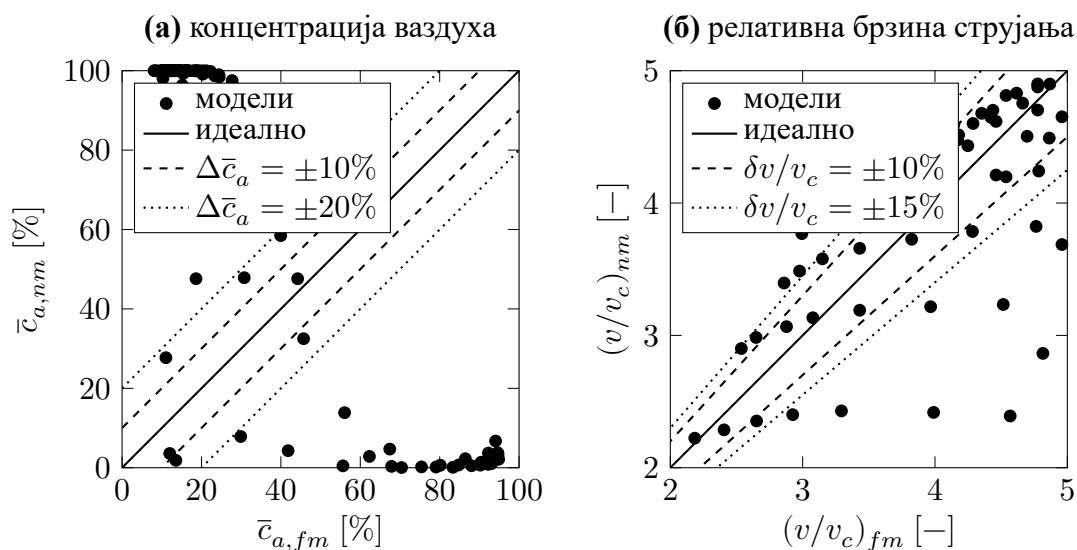
Са Слике 4.5 уочава се и да је прорачуном добијен стојећи талас у близини зида брзотока. За разлику од измереног (Слика 3.27), највеће рачунске дубине су на извесној удаљености од зида брзотока. Ова удаљеност се кретала у интервалу  $[0,4h_c, 0,8h_c]$  од места уреза слободне површине. Сам стојећи талас је најбоље уочљив за највећи угао сужења брзотока.

На Сликама 4.6а, 4.7а и 4.8а дато је квантитативно поређење резултата прорачунатих концентрација са измереним. Резултати показују да је највећи број тачака у области ниских концентрација (до 50 %) изнад бисектрисе првог квадранта, што наводи на закључак да је нумеричким моделом прецењена количина увученог ваздуха. У области виших концентрација (већих од 70 %), тренд је другачији и највећи број израчунатих вредности је мањи него на физичком моделу.

На Слици 4.9 приказан је распоред концентрације ваздуха дуж зида брзотока. Уочава се да је област високих градијената концентрације ограничена на уску област у близини слободне површине. Померањем ка низводном крају (са повећањем координате  $x/h_c$ ), ова област се шири према псеудо-дну (према координати  $y/h_c = 0$ ). Ширина ове области се повећава са порастом вредности угла зида, што може бити

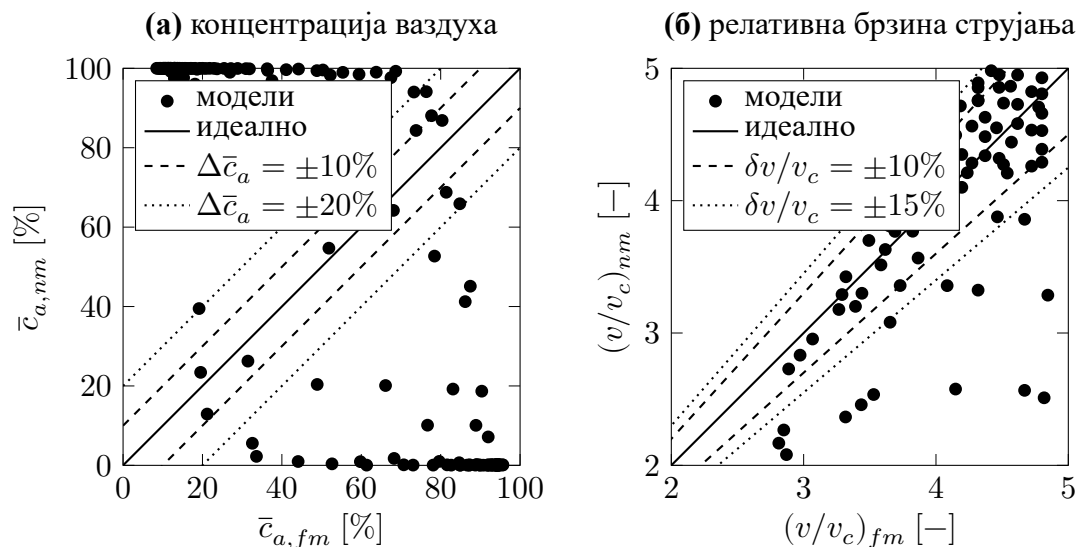


Слика. 4.5: Израчунати распоред концентрације ваздуха на моделу ЈЧ за  $s = 22,5 \text{ mm}$ . Пуном линијом дата је реконструисана слободна површина воде.

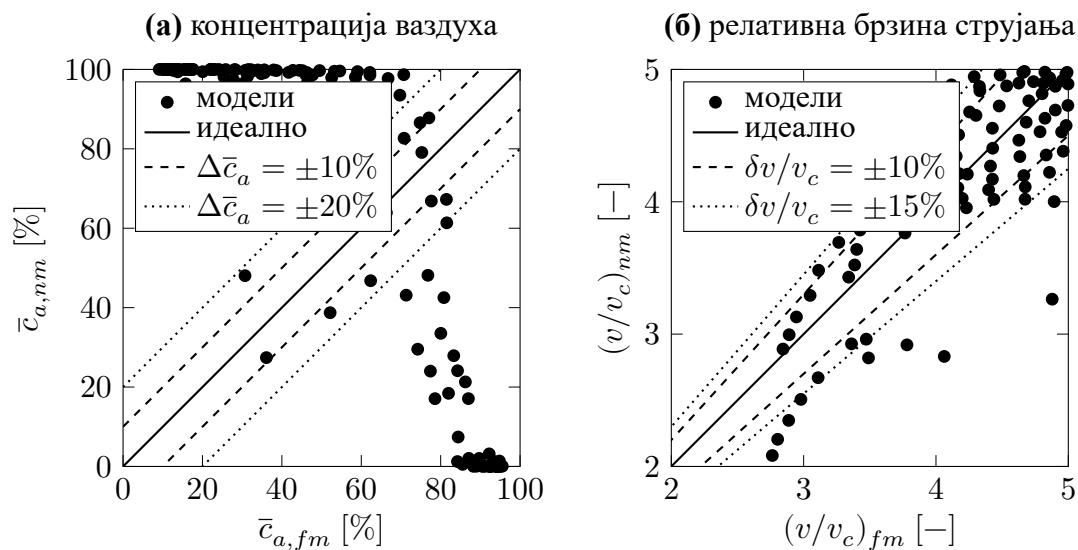


Слика. 4.6: Квантитативно поређење концентрација ваздуха и релативне брзине мешавине на физичком и на нумеричком моделу, за угао зида  $\theta = 12^\circ$ , у профилу  $x/h_c = 21$ . Индексом “fm” означени су резултати физичког модела, а са “nm” резултати нумеричког модела.

последича већег интензитета мешања воде и ваздуха. Ова појава уочена је и на физичком моделу али је, за разлику од њега, код нумеричког модела мешање ограничене



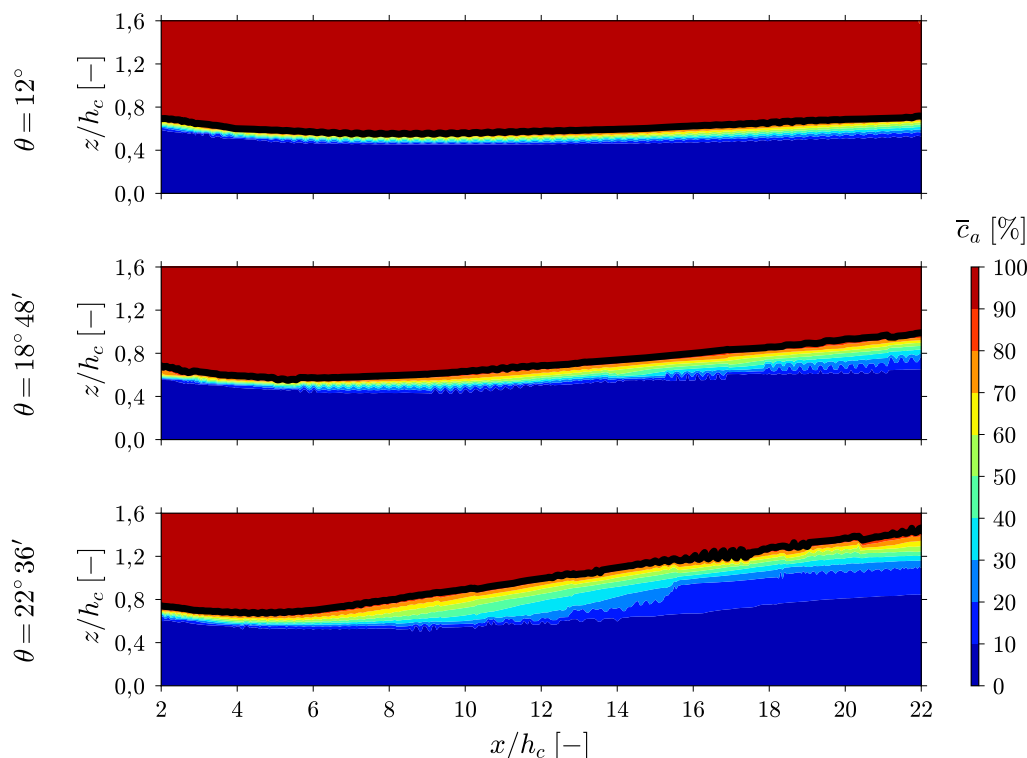
**Слика. 4.7:** Квантитативно поређење концентрација ваздуха и релативне брзине мешавине на физичком и на нумеричком моделу, за угао зида  $\theta = 18^\circ 48'$ , у профилу  $x/h_c = 21$ . Индексом "fm" означени су резултати физичког модела, а са "nm" резултати нумеричког модела.



**Слика. 4.8:** Квантитативно поређење концентрација ваздуха и релативне брзине мешавине на физичком и на нумеричком моделу, за угао зида  $\theta = 22^\circ 36'$ , у профилу  $x/h_c = 21$ . Индексом "fm" означени су резултати физичког модела, а са "nm" резултати нумеричког модела.

но на уску област у близини слободне површине (упоредити распоред концентрације ваздуха у попречним пресецима на Сликама 3.27 и 4.5).

На Слици 4.10 приказани су израчунати распореди брзина мешавине дуж брзотока за модел ЈЧ са ниским степеницима. Уочава се да су највеће брзине у близини контакта зида и слободне површине. Са удаљењем од зида, брзине мешавине



**Слика. 4.9:** Израчунати распоред концентрације ваздуха уз зид брзотока модела ЈЧ за  $s = 22,5$  mm. Пуном линијом приказан је распоред дубине  $h_{90}$ .

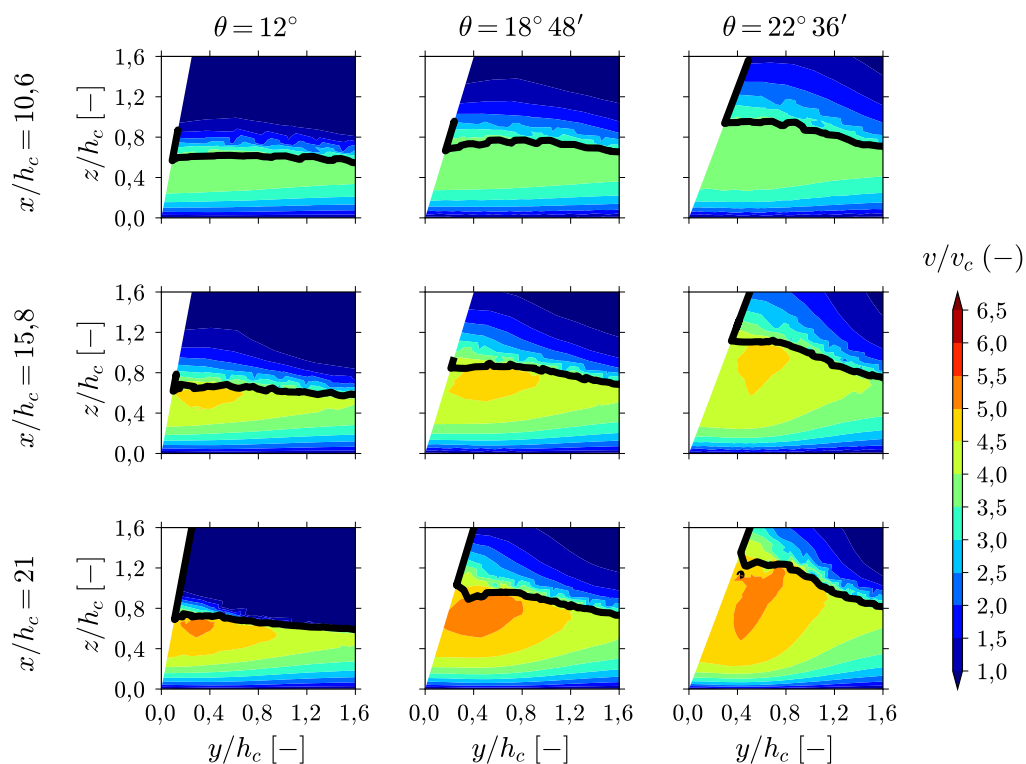
се смањују и теже вредностима за непоремећени ток. Дужина неопходна да се достигне непоремећени ток, већа је код нумеричког него физичког модела (упоредити резултате на Сликама 3.28 и 4.10).

На Сликама 4.6б, 4.7б и 4.8б дато је квантитативно поређење резултата прорачунатих брзина са измереним. Примећује се да је највећи број тачака у области у којој су релативна одступања до  $\pm 10\%$ . Овакво слагање је постигнуто за цео опсег измерених брзина.

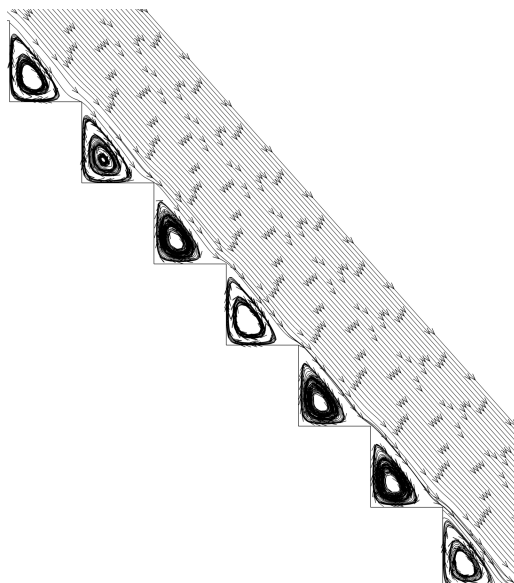
На Слици 4.11, приказан је распоред струјница за израчунато струјно поље. Може се уочити да је нумеричким моделом добијено рециркулационо струјање у области испод псеудо-дна код сваког степеника.

### 4.3 Дискусија резултата нумеричког модела

Резултати показују да се нумеричким моделом није у потпуности постигнуто слагање измереног и израчунатог струјног поља на степенастом брзотоку са постепеним сужењем корита. Ово се најбоље уочава по значајно нижим вредностима концентрација ваздуха. Веће вредности концентрације ваздуха су ограничене на уску област у близини слободне површине. Резултати показују да су израчунате концентрације у



Слика. 4.10: Израчунати распоред брзине мешавине на моделу ЈЧ за  $s = 22,5$  mm.



Слика. 4.11: Израчунат распоред струјница за модел ЈЧ у пресеку у осовини брзо-тока, за  $s = 22,5$  mm. Струјнице су приказане испод слободне површине аерисаног тока.

близини псеудо-дна значајно мање од измерених. Разлог за ову појаву је недовољан интензитет мешања ваздуха у нумеричком моделу, па је аерација тока ограничена на област у близини слободне површине. Према Meireles, Bombardelli, Matos (2014), ова

појава може се превазићи уколико се у основним једначинама вишефазног струјања дода члан којим се експлицитно моделира процес аерације.

Дубине воде дуж брзотока нису у потпуности добро израчунате. То се најбоље уочава по дубинама уз зид брзотока, које су нешто мање од измерених. Узрок може бити недовољна концентрација ваздуха у току, услед чега не долази до дебљања флуидне струје. Са друге стране, тренд распореда дубина је сличан измереном, а разлике у односу на мерења су мање од 25 % у низводним деловима брзотока ( $x/h_c > 16$ ). Ово је значајно запажање јер, иако дубине нису добро израчунате у узводним деловима брзотока, повољни резултати у низводним деловима дају могућност задовољавајуће тачности процене дубина за потребе пројектовања умирујућих базена. До момента писања ове дисертације, није било сличних истраживања којима би се потврдили или оповргнули добијени резултати. Позитивно је и то што су израчунате дубине ближе измереним за низводне делове брзотока него што се добило применом постојећих емпиријских зависности за благе степенасте брзотоке (Hunt et al., 2012). Занимљиво је запазити и да је нумерички модел успео да квалитативно реконструирше облик стојећег таласа.

Слагање измерених и израчунатих брзина је задовољавајуће, тако да релативна одступања у највећем броју тачака не прелазе 15 %. Уочава се и да је област високих вредности интензитета брзине у близини уреза слободне површине, што је уочено и на физичком моделу. Такође, израчунате вредности максималне брзине сличне су измереним (разлика је износила до 15 %). Нумеричким моделом добијена је и зона рецикулације у области испод псеудо-дна, код сваког степеника. Ова појава уочена је и на физичким моделима (Boes, 2000; Chanson & Toombes, 2002b; Kapor et al., 2014) тако да су резултати прорачуна струјног поља охрабрујући. Овако добро слагање поља брзине може се објаснити чињеницом да стојећи талас настаје и у одсуству аерације, као и да су брзине у неаерисаном упоредиве са брзинама у одговарајућем таласу аерисаног тока. Важна последица је да, према једначини за преосталу енергију, ово резултује већом преосталом енергијом на низводном крају брзотока, па су резултати нумеричких модела на страни сигурности ако се користе за пројектовање умирујућих базена.

Пре шире примене нумеричких модела за пројектовање хидротехничких објеката, неопходне су допунске провере на физичким моделима са већом висином и већим степеницима, као и унапређење рачунског модела додавањем члана којим би се боље моделирао процес аерације.

# Закључци и препоруке за даља истраживања

---

## Садржај

5.1	Закључна разматрања . . . . .	98
5.2	Оцена испуњености циља и задатака истраживања . . . . .	100
5.3	Препоруке за будућа истраживања . . . . .	102

---

## 5.1 Закључна разматрања

Предмет истраживања ове дисертације били су стрми степенести брзотоци са постепеним сужењем корита, а циљ дисертације је било изучавање хидрауличких последица сужења корита. Истраживања су спроведена на два хидрауличка модела а проверна је и могућност примене нумеричког модела Ansys Fluent. На основу резултата истраживања приказаних у овој дисертацији, могу се извући следећи закључци:

1. Флуидна струја у степенастом брзотоку са постепеним сужењем корита, може се раздвојити на део у којем постоји утицај зида (стојећи талас) и део изван утицаја (непоремећена зона). Непоремећена зона се може уочити по распореду изолинија мерених величина приближно паралелним псеудо-дну. Стојећи талас се јасно уочава по наглом повећању дубина и неправилном распореду мерених величина. Интензитет поремећаја расте са углом сужења.
2. Сужење брзотока доводи до локалног повећања дубина и брзина и смањења концентрације ваздуха унутар стојећег таласа.
3. Постепено сужење корита погоршава дисипационе карактеристике степенастог брзотока. Разлог за то може бити локално повећање преостале енергије унутар стојећег таласа, што је последица претходног закључка.

4. Распоред дубина воде у близини зида је сложен, а постојеће емпиријске зависности морају бити прилагођене стрмим степенастим брзотоцима, како би се са задовољавајућом тачношћу могле применити у пракси.
5. Постепено сужење корита погоршава аерационе карактеристике степенастог брзотока. Разлог за то може бити повећање дубина воде унутар стојећег таласа, што доводи до веће силе потиска и слабијег мешања ваздуха по дубини тока. Овај аспект је значајан јер се степенести брзотоци све више примењују и у канализацији.
6. Физички модели показују да изабрана размера утиче на резултате и да је њен утицај сличан као за призматичне степенасте брзотоке. Ако се димензије модела повећају, брзине се смањују а концентрација ваздуха у пресеку се повећавају услед интензивнијег мешања. Ово може бити значајно јер, слично призматичним брзотоцима, преостала енергија на оваквим моделима ће бити већа него на прототипу. То значи да су резултати модела на страни сигурности ако се користе за пројектовање умирујућих базена. Са друге стране, дубине ће бити потцењене па је неопходно применити погодне вредности коефицијената сигурности при пројектовању зидова брзотока.
7. Резултати показују и да је могуће проценити нагиб линије енергетске коте за непоремећену струју помоћу спектра тетива гасовите фазе. Да би поступак био применљив, израз за процену нагиба линије енергије је неопходно кориговати. Разлог за ово може бити у томе што у текућем истраживању није био на располагању просторни распоред пречника мехурића, већ само њихових тетива и то дуж једног правца. Без обзира на ове разлике и неопходне допуне, резултати показују завидну поновљивост, што је охрабрујуће са становишта будућих истраживања.
8. Примењени нумерички пакет је у ограниченој мери успео да оствари слагање измереног и израчунатог струјног поља. Слагање измереног и израчунатог поља брзина је задовољавајуће, док распореди израчунатих концентрација ваздуха и дубине воде одступају од измерених. Највероватнији узрок одступања је недовољан интензитет аерације у нумеричком моделу, што би требало превазићи допунским прилагођавањем модела за потребе струјања на степенастом брзотоку.



## 5.2 Оцена испуњености циља и задатака истраживања

1. задатак: Испитати хидрауличке последице постепеног сужења корита степеног брзотока са стрмим подужним нагибом.

- Претпостављено је да се дубине мешавине дуж зидова брзотока повећавају у низводном смеру.

Ова хипотеза није потврђена мерењима на физичким моделима. Резултати мерења су показали да је ова претпоставка тачна само за горњу половину брзотока (видети стр. 58) и при мањим протоцима (видети стр. 73). У општем случају, распоред је нелинеаран и може се јавити један или више локалних екстрема дубине.

- Претпостављено је да се постепеним смањењем ширине брзотока погоршавају његове дисипационе карактеристике.

Ова хипотеза је потврђена мерењима на физичким моделима. Резултати мерења су показали да се специфична енергија флуидне струје повећава у близини зида брзотока који се сужава. Смањење дисипационих способности брзотока уочено је при промени угла зида за константан проток (видети стр. 63) као и при константном углу за различите протоке (видети стр. 77).

- Претпостављено је да се постепеним сужењем корита брзотока погоршавају његове аерационе карактеристике.

Ова хипотеза углавном је потврђена мерењима на физичким моделима. Резултати мерења су показали да се специфична површина контакта смањује у близини дна уз зид брзотока и да је ово смањење израженије при већим вредностима угла зида, али само при клизећем и прелазном режиму струјања (видети стр. 64 и 77). За скоковити режим ова хипотеза није потврђена.

- Претпостављено је да промена размере за дужине физичког модела утиче на резултате, слично као код призматичних брзотока.

Ова хипотеза потврђена је мерењима на физичком моделу ЈЧ. Резултати су показали да су вредности концентрација ваздуха потцењене, а да су брзине прецењене (видети стр. 69). Такође, будући да је коришћен ограничени број модела, неопходно би било спровести допунска мерења на моделима различитих размера за дужине како би ова претпоставка била у потпуности потврђена.

2. задатак: Мерења на физичким моделима спровешће се применом сензора проводљивости. За њихово коришћење, претпоставља се да се:

- Претпостављено је да се, осим стандардних величина које се могу проценити сондама са два сензора, сондом са три сензора може проценити и правац вектора брзине флуидне струје.

Ова претпоставка је потврђена мерењима на моделу ГФ (стр. 133). Резултати указују да је линеарност приказаног поступка задовољавајућа. Такође, било би неопходно спровести допунска мерења при различитим вредностима концентрације ваздуха и брзине мешавине, како би се постављена хипотеза у потпуности потврдила.

- Претпостављено је да се унапређењем поступка обраде података може пружити увид у нове податке битне за хидротехничку струку.

Ова претпоставка је потврђена мерењима на физичким моделима. На моделима су процењене њихове аерационе карактеристике, нивои турбуленције, турбулентне карактеристике вишефазног струјања, као и нагиб линије енергетске коте. Ова последња величина је нарочито важна, јер се изложеним поступком може значајно убрзати процена дисипационих способности брзотока на физичким моделима (стр. 64).

3. задатак: Проверити применљивост нумеричких модела вишефазних струјања за пројектовање степенстих брзотока са постепеним сужењем корита.

- Претпостављено је да се нумеричким моделом вишефазног струјања може успешно израчунати струјно поље у близини зида степенстог брзотока.

Ова претпоставка је делимично потврђена нумеричким симулацијама. Резултати су показали да је нумеричким моделом добијен стојећи талас у близини зида брзотока са сужењем корита, али су његове димензије битно другачије од измерених (стр. 91). Добијене су мање дубине воде уз зид брзотока, ниже вредности концентрација ваздуха, али је опсег брзина близак измереним. Ова хипотеза захтева додатне провере са нумеричким моделима различитог нивоа детаљности, како би се добио потпунији увид у могућност њихове практичне примене.

## 5.3 Препоруке за будућа истраживања

При решавању задатака постављених у оквиру ове дисертације, отворила су се нова питања на које је неопходно дати одговоре у будућим истраживањима.

- Проверити дисипационе карактеристике степенстих брзотока са постепеним сужењем корита на моделима веће висине, са вишим степеницима, како би се потврдила/оповргнула општост изведених закључака и предложених емпиријских зависности.

Основни недостатак текућих истраживања је ограничен избор конфигурације физичких модела. У првом реду, неопходно је проверити резултате истраживања на моделима виће висине, јер су мање висине испитаних модела биле условљене капацитетом лабораторија у којима су спроведени опити. Осим тога, корисно је испитати и друге нагибе песудо-дна и геометрије степеника.

- Унапредити и уопштити поједностављени поступак за процену нагиба линије енергетске коте.

Поступак за процену нагиба линије енергије је показао завидну поновљивост резултата. Ипак, опсег експеримената је релативно мали и неопходно је проверити вредности предложених корекционих фактора. Такође, неопходно је испитати могућност примене овог поступка на аерисане токове других типова хидротехничких објеката (брзотоци са глатким дном, аератори, итд.).

- Унапређење нумеричког моделирања (постојећи и нови модели).

Унапређење постојећих нумеричких модела може се остварити имплементирањем допунских чланова којима би се коректно моделирао интензитет аерације на степенстим брзотоцима. Такође, неопходно је проверити и да ли ће кориговани нумерички модел дати довољно добре резултате не само на моделу, него и на прототипу. Осим постојећих, будућа истраживања могу се усмерити и на развој нових метода прорачуна и/или математичких модела. Овде се у првом реду мисли на примену метода које не захтевају рачунску мрежу (mesh-free методе) и модела који потичу из динамике гасова (Lattice-Boltzmann метода). У овој дисертацији је примењен *realizable  $k - \epsilon$*  модел турбуленције. У будућности, истраживања се могу усмерити и на избор одговарајућег модела за овакве типове струјања, у првом реду модела којима се симулирају велики вртлози (*large-eddy*).

- Повећати ниво детаљности при нумеричком моделирању.

Величина прорачунске мреже нумеричких модела у овој дисертацији ограничена је расположивим рачунарским ресурсима. Познато је да резултати прорачуна

зависе од просторно-временске дискретизације, па је неопходно испитати утицај нивоа детаљности на резултате прорачуна.

- На основу резултата досадашњих истраживања, као и напред наведених будућих истраживања на физичким моделима веће размере и побољшаним нумеричким моделима, развити поступке за процену линије нивоа, односно висине разделних зидова степенстих брзотока са постепеним сужењем корита.

# Литература

- Amador, A., Sánchez-Juny, M., & Dolz, J. (2006). Characterization of the Nonaerated Flow Region in a Stepped Spillway by PIV. *Journal of Fluids Engineering*, 128, 1266–1273.
- Amador, A., Sánchez-Juny, M., & Dolz, J. (2009). Developing Flow Region and Pressure Fluctuations on Steeply Sloping Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 135(12), 1092–1100.
- Amoudry, L. O. (2014). Extension of  $k-\omega$  turbulence closure to two-phase sediment transport modelling: Application to oscillatory sheet flows. *Advances in Water Resources*, 72, 110–121.
- Aniszewski, W., Bogusławski, A., Marek, M., & Tyliczszak, A. (2012). A new approach to sub-grid surface tension for LES of two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 231(21), 7368–7397.
- ANSYS FLUENT Theory Guide*. (2011). Canonsburg, Pennsylvania: ANSYS Inc.
- Balachandar, S. & Eaton, J. K. (2010). Turbulent Dispersed Multiphase Flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42(1), 111–133.
- Batinić, B. (1968). *Kosi stojeći talasi* (Magistarski rad, Građevinski fakultet, Beograd).
- Batinić, B. (1976). *Stojeći talasi izazvani krivinama pri burnom tečenju u kanalima* (Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd).
- Baylar, A., Emiroglu, M. E., & Bagatur, T. (2006). An experimental investigation of aeration performance in stepped spillways. *Water and Environment Journal*, 20(1), 35–42.
- Baylar, A., Unsal, M., & Ozkan, F. (2011). The Effect of Flow Patterns and Energy Dissipation over Stepped Chutes on Aeration Efficiency. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 15(8), 1329–1334.
- Bayon, A., Valero, D., García-Bartual, R., Vallés-Morán, F. J., & López-Jiménez, P. A. (2016). Performance assessment of OpenFOAM and FLOW-3D in the numerical modeling of a low Reynolds number hydraulic jump. *Environmental Modelling & Software*, 80, 322–335.
- Behzadi, A., Issa, R., & Rusche, H. (2004). Modelling of dispersed bubble and droplet flow at high phase fractions. *Chemical Engineering Science*, 59(4), 759–770.
- Beishuizen, N. A., Naud, B., & Roekaerts, D. (2007). Evaluation of a Modified Reynolds Stress Model for Turbulent Dispersed Two-Phase Flows Including Two-Way Coupling. *Flow, Turbulence and Combustion*, 79(3), 321–341.

- Bellakhal, G., Chahed, J., & Masbernat, L. (2004). K-Omega turbulence model for bubbly flows. In *Proceedings of the 5th International Conference on Multiphase Flow*. Yokohama, Japan.
- Bertola, V. (2003). Two-Phase Flow Measurement Techniques. In V. Bertola (Ed.), *Modelling and Experimentation in Two-Phase Flow* (Chap. 6, pp. 281–324). CISM International Centre for Mechanical Sciences Courses and Lectures No. 450. Vienna: Springer-Verlag GmbH.
- Bestion, D. (2014). The difficult challenge of a two-phase CFD modelling for all flow regimes. *Nuclear Engineering and Design*, 279, 116–125.
- Bhajantri, M. R., Eldho, T. I., & Deolalikar, P. B. (2007). Modeling hydrodynamic flow over spillway using weakly compressible flow equations. *Journal of Hydraulic Research*, 45(6), 844–852.
- Bhajantri, M., Eldho, T., & Deolalikar, P. (2006). Hydrodynamic modelling of flow over a spillway using a two-dimensional finite volume-based numerical model. *Sadhana*, 31(6), 743–754.
- Boes, R. M. (2000). Scale effects in modelling two-phase stepped spillway flow. In H. E. Minor & W. H. Hager (Eds.), *Hydraulics of Stepped Spillways* (pp. 53–60). Balkema, Rotterdam.
- Boes, R. M. & Hager, W. H. (2003a). Hydraulic Design of Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(9), 671–679.
- Boes, R. M. & Hager, W. H. (2003b). Two-Phase Flow Characteristics of Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(9), 661–670.
- Bombardelli, F. A., Meireles, I. O. d. C., & Matos, J. d. S. G. (2011). Laboratory measurements and multi-block numerical simulations of the mean flow and turbulence in the non-aerated skimming flow region of steep stepped spillways. *Environmental Fluid Mechanics*, 11(3), 263–288.
- Borges, J. E., Pereira, N. H. C., Matos, J., & Frizell, K. H. (2010). Performance of a combined three-hole conductivity probe for void fraction and velocity measurement in air–water flows. *Experiments in Fluids*, 48(1), 17–31.
- Box, G. P. E., Jenkins, G., & Reinsel, G. C. (2008). *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (4th ed.). John Wiley & Sons Inc.
- Brandt, C., Thakur, S. C., & Tynan, G. R. (2016). Investigating flow patterns and related dynamics in multi-instability turbulent plasmas using a three-point cross-phase time delay estimation velocimetry scheme. *Physics of Plasmas*, 23(4), 042304.
- Brennen, C. E. (2005). *Fundamentals of Multiphase Flows*. Cambridge University Press.
- Bung, D. B. (2011). Developing flow in skimming flow regime on embankment stepped spillways. *Journal of Hydraulic Research*, 49(5), 639–648.

- Bung, D. B. & Valero, D. (2016). Optical flow estimation in aerated flows. *Journal of Hydraulic Research*, 54(5), 575–580.
- Cain, P. (1978). *Measurements within self-aerated flow on a large spillway* (Doctoral dissertation, University of Canterbury, New Zealand).
- Cartellier, A. (1990). Optical probes for local void fraction measurements: Characterization of performance. *Review of Scientific Instruments*, 61(2), 874–886.
- Cartellier, A. & Achard, J.-L. (1991). Local phase detection probes in fluid/fluid two-phase flows. *Review of Scientific Instruments*, 62(2), 279–303.
- Carvalho, R. F. & Martins, R. (2009). Stepped Spillway with Hydraulic Jumps: Application of a Numerical Model to a Scale Model of a Conceptual Prototype. *Journal of Hydraulic Engineering*, 135(7), 615–619.
- Chanson, H. (1992). *Air Entrainment in Chutes and Spillways* (tech. rep. No. CE133). Department of Civil Engineering, University of Queensland, Australia.
- Chanson, H. (1993). Stepped spillway flows and air entrainment. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 20(3), 422–435.
- Chanson, H. (1994). Hydraulics of skimming flows over stepped channels and spillways. *Journal of Hydraulic Research*, 32(3), 445–460.
- Chanson, H. (1999). *Air-water bubbly flows: theory and applications* (Doctor of Engineering Thesis, University of Queensland).
- Chanson, H. (2001a). A Transition Flow Regime on Stepped Spillways: The Facts. In *Proceedings of the 29th IAHR Congress* (pp. 490–498). Beijing, China: Tsinghua University Press.
- Chanson, H. (2001b). Historical Development of Stepped Cascades for Dissipation of Hydraulic Energy. *Transactions of the Newcomen Society*, 72(2), 295–318.
- Chanson, H. (2002). Air-Water Flow Measurements with Intrusive, Phase-Detection Probes: Can We Improve Their Interpretation? *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(3), 252–255.
- Chanson, H. (2004). Drag reduction in skimming flow on stepped spillways by aeration. *Journal of Hydraulic Research*, 42(3), 316–322.
- Chanson, H. (2006). Hydraulics of skimming flows on stepped chutes: The effects of in-flow conditions? *Journal of Hydraulic Research*, 44(1), 51–60.
- Chanson, H. (2013a). Advective Diffusion of Air Bubbles in Turbulent Water Flows. In C. Gualtieri & D. T. Mihailovic (Eds.), *Fluid Mechanics of Environmental Interfaces* (2nd ed., Chap. 7, pp. 181–219). Leiden, Netherlands: Taylor & Francis.
- Chanson, H. (2013b). Hydraulics of aerated flows: qui pro quo? *Journal of Hydraulic Research*, 51(3), 223–243.

- Chanson, H. & Carosi, G. (2007). Turbulent time and length scale measurements in high-velocity open channel flows. *Experiments in Fluids*, 42(3), 385–401.
- Chanson, H. & Toombes, L. (2001). *Experimental Investigations of Air Entrainment in Transition and Skimming Flows down a Stepped Chute Application to Embankment Overflow Stepped Spillways* (tech. rep. No. CE158).
- Chanson, H. & Toombes, L. (2002a). Air–water flows down stepped chutes: turbulence and flow structure observations. *International Journal of Multiphase Flow*, 28(11), 1737–1761.
- Chanson, H. & Toombes, L. (2002b). Experimental investigations of air entrainment in transition and skimming flows down a stepped chute. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 29(1), 145–156.
- Chanson, H. & Toombes, L. (2002c). Experimental Study of Gas-Liquid Interfacial Properties in a Stepped Cascade Flow. *Environmental Fluid Mechanics*, 1(3), 241–263.
- Chanson, H. & Toombes, L. (2004). Hydraulics of stepped chutes: The transition flow. *Journal of Hydraulic Research*, 42(1), 43–54.
- Chen, J.-g., Zhang, J.-m., Xu, W.-l., & Wang, Y.-r. (2010). Numerical simulation of the energy dissipation characteristics in stilling basin of multi-horizontal submerged jets. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 22(5), 732–741.
- Chen, Q., Dai, G., & Liu, H. (2002). Volume of Fluid Model for Turbulence Numerical Simulation of Stepped Spillway Overflow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(7), 683–688.
- Chen, Z., Zong, Z., Liu, M., Zou, L., Li, H., & Shu, C. (2015). An SPH model for multiphase flows with complex interfaces and large density differences. *Journal of Computational Physics*, 283, 169–188.
- Cheng, X., Chen, Y., & Luo, L. (2006). Numerical simulation of air-water two-phase flow over stepped spillways. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 49(6), 674–684.
- Cheng, X., Luo, L., Zhao, W., & Li, R. (2004). Two-phase flow simulation of aeration on stepped spillway. *Progress in Natural Science*, 14(7), 626–630.
- Chuang, T.-J. & Hibiki, T. (2017). Interfacial forces used in two-phase flow numerical simulation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 113, 741–754.
- Cokljat, D., Slack, M., Vasquez, S., Bakker, A., & Montante, G. (2006). Reynolds-Stress Model for Eulerian multiphase. *Progress in Computational Fluid Dynamics, An International Journal*, 6(1/2/3), 168.
- Colombo, M. & Fairweather, M. (2015). Multiphase turbulence in bubbly flows: RANS simulations. *International Journal of Multiphase Flow*, 77, 222–243.



- Cone, V. M. (1916). Flow through weir notches with thin edges and full contractions. *Journal of Agricultural Research*, 5(23), 1051–1111.
- Costigan, G. & Whalley, P. (1997). Slug flow regime identification from dynamic void fraction measurements in vertical air-water flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 23(2), 263–282.
- Crnojević, C. (2014). *Mehanika fluida*. Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Da Silva, M. J. (2008). *Impedance Sensors for Fast Multiphase Flow Measurement and Imaging* (Ph.D. Technischen Universität Dresden).
- De Carvalho, R. F. & Amador, A. (2009). Physical And Numerical Investigation of the Skimming Flow Over a Stepped Spillway. In C. Zhang & H. Tang (Eds.), *Advances in Water Resources and Hydraulic Engineering: Proceedings of 16th IAHR-APD Congress and 3rd Symposium of IAHR-ISHS* (pp. 1767–1772). Springer.
- de Bertodano, M. L., Lee, S.-J., Lahey, R. T., & Drew, D. A. (1990). The Prediction of Two-Phase Turbulence and Phase Distribution Phenomena Using a Reynolds Stress Model. *Journal of Fluids Engineering*, 112(1), 107.
- Deane, G. B. & Stokes, M. D. (2002). Scale dependence of bubble creation mechanisms in breaking waves. *Nature*, 418(6900), 839–844.
- Eghbalzadeh, A. & Javan, M. (2012). Comparison of Mixture and VOF Models for Numerical Simulation of Air-entrainment in Skimming Flow over Stepped Spillways. *Procedia Engineering*, 28, 657–660.
- Elghobashi, S. E. & Abou-Arab, T. W. (1983). A two-equation turbulence model for two-phase flows. *Physics of Fluids*, 26(4), 931.
- Falvey, H. T. (1980). *Air-Water Hydraulic Flow in Structures* (tech. rep. No. Engineering Monograph No. 41). United States Department of the Interior - Water, Power Resources Service Engineering, and Research Center. Denver, Colorado.
- Felder, S. (2013). *Air-Water Flow Properties on Stepped Spillways for Embankment Dams: Aeration, Energy Dissipation and Turbulence on Uniform, Non-Uniform and Pooled Stepped Chutes* (Ph.D. University of Queensland, Brisbane, Australia).
- Felder, S. & Chanson, H. (2009). Energy dissipation, flow resistance and gas-liquid interfacial area in skimming flows on moderate-slope stepped spillways. *Environmental Fluid Mechanics*, 9(4), 427–441.
- Fox, R. O. (2012). Large-Eddy-Simulation Tools for Multiphase Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44(1), 47–76.
- Frizell, K. H., Ehler, D. G., & Mefford, B. W. (1994). Developing Air Concentration and Velocity Probes for Measuring Highly-Aerated, High-Velocity Flow. In C. A. Pugh (Ed.), *Fundamentals and Advancements in Hydraulic Measurements and Experi-*

- mentation (pp. viii, 546). American Society of Civil Engineers. Buffalo, New York, United States: American Society of Civil Engineers.
- Frizell, K. H. (1990). Hydraulic model study of McClure Dam existing and proposed RCC stepped spillways.
- Frizell, K. W., Renna, F. M., & Matos, J. (2013). Cavitation Potential of Flow on Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 139(6), 630–636.
- Frizell, K. W. & Svoboda, C. D. (2012). *Performance of Type III Stilling Basins – Stepped Spillway Studies* (tech. rep. No. HL-2012-02). United States Department of the Interior - Bureau of Reclamation. Denver, Colorado.
- Garrett, C., Li, M., & Farmer, D. (2000). The Connection between Bubble Size Spectra and Energy Dissipation Rates in the Upper Ocean. *Journal of Physical Oceanography*, 30, 2163–2171.
- Gilmore, F. R., Plesset, M. S., & Crossley, H. E. (1950). The analogy between hydraulic jumps in liquids and shock waves in gases. *Journal of Applied Physics*, 21(3), 243–249.
- González, C. A. (2005). *An Experimental Study of Free-surface Aeration on Embankment Stepped Chutes* (Doctoral dissertation, The University of Queensland).
- Gonzalez, C. A., Takahashi, M., & Chanson, H. (2008). An experimental study of effects of step roughness in skimming flows on stepped chutes. *Journal of Hydraulic Research*, 46(sup1), 24–35.
- Gosman, A. D., Lekakou, C., Politis, S., Issa, R. I., & Looney, M. K. (1992). Multidimensional modeling of turbulent two-phase flows in stirred vessels. *AIChE Journal*, 38(12), 1946–1956.
- Guenther, P., Felder, S., & Chanson, H. (2013). Flow aeration, cavity processes and energy dissipation on flat and pooled stepped spillways for embankments. *Environmental Fluid Mechanics*, 13(5), 503–525.
- Hanna, L. J. & Pugh, C. A. (1997). *Hydraulic model study of Pilar Dam* (tech. rep. No. PAP-752).
- Harleman, D. R. & Ippen, A. T. (1950). *Studies on the Validity of Hydraulic Analogy to Supersonic Flow* (tech. rep. No. 5985). United States Air Force. Dayton, Ohio.
- Hibiki, T., Hogsett, S., & Ishii, M. (1998). Local measurement of interfacial area, interfacial velocity and liquid turbulence in two-phase flow. *Nuclear Engineering and Design*, 184(2-3), 287–304.
- Hinze, J. O. (1955). Fundamentals of the Hydrodynamic Mechanism of Splitting in Dispersion Processes. *AIChE Journal*, 1(3), 289–295.
- Hirt, C. & Nichols, B. (1981). Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1), 201–225.

- Hunt, S. L. & Kadavy, K. C. (2009). The Effect of Step Height on Energy Dissipation in Stepped Spillways. In *World Environmental and Water Resources Congress 2009* (Vol. 39, 4, pp. 1–11). Reston, VA: American Society of Civil Engineers.
- Hunt, S. L., Kadavy, K. C., Abt, S. R., & Temple, D. M. (2008). Impact of Converging Chute Walls for Roller Compacted Concrete Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134(7), 1000–1003.
- Hunt, S. L., Kadavy, K. C., & Hanson, G. J. (2014). Simplistic Design Methods for Moderate-Sloped Stepped Chutes. *Journal of Hydraulic Engineering*, 140(12), 04014062.
- Hunt, S. L., Temple, D. M., Abt, S. R., Kadavy, K. C., & Hanson, G. (2012). Converging Stepped Spillways: Simplified Momentum Analysis Approach. *Journal of Hydraulic Engineering*, 138(9), 796–802.
- Husain, S. M., Muhammed, J. R., Karunarathna, H. U., & Reeve, D. E. (2014). Investigation of pressure variations over stepped spillways using smooth particle hydrodynamics. *Advances in Water Resources*, 66, 52–69.
- Ippen, A. T. (1936). *An analytical and experimental study of high velocity flow in curved sections of open channels* (Doctoral dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, California).
- Ippen, A. T. & Dawson, J. H. (1951). Design of Channel Contractions. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 326–346.
- Ishii, M. & Kim, S. (2001). Micro four-sensor probe measurement of interfacial area transport for bubbly flow in round pipes. *Nuclear Engineering and Design*, 205(1-2), 123–131.
- Jaćimović, N. (2007). *Numerical Modeling of Multiphase Flows in Porous Media and Its Application in Hydraulic Engineering* (Doctoral dissertation, Kyoto University).
- Jacimovic, N., Hosoda, T., Ho-Dong, P., & Ivetic, M. (2016). Numerical modeling of hypolimnetic oxygenation by electrolysis of water. *Thermal Science*, 16(00), 190–190.
- Jha, S. K. & Bombardelli, F. A. (2009). Two-phase modeling of turbulence in dilute sediment-laden, open-channel flows. *Environmental Fluid Mechanics*, 9(2), 237–266.
- Jones, O. C. & Delhaye, J.-M. (1976). Transient and statistical measurement techniques for two-phase flows: A critical review. *International Journal of Multiphase Flow*, 3(2), 89–116.
- Jovanović, M. (2008). *Regulacija reka – rečna hidraulika i morfologija* (drugo izdanje). Građevinski fakultet, Beograd.
- Kapor, R., Savić, Lj., Zindović, B., Žugić, D., Starinac, D., & Vojt, P. (2014). Hidraulička analiza strujanja na stepenastom brzotoku. *Građevinski kalendar*, 46, 70–127.

- Karadimou, D., Papadopoulos, P., & Markatos, N. (2017). Mathematical modelling and numerical simulation of two-phase gas-liquid flows in stirred-tank reactors. *Journal of King Saud University - Science*.
- Kataoka, I. & Serizawa, A. (1989). Basic equations of turbulence in gas-liquid two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 15(5), 843–855.
- Khanpour, M., Zarrati, A. R., Kolahdoozan, M., Shakibaeinia, A., & Jafarinik, S. (2016). Numerical modeling of free surface flow in hydraulic structures using Smoothed Particle Hydrodynamics. *Applied Mathematical Modelling*, 40(23-24), 9821–9834.
- Kim, S., Fu, X., Wang, X., & Ishii, M. (2000). Development of the miniaturized four-sensor conductivity probe and the signal processing scheme. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43(22), 4101–4118.
- Kipphan, H. (1977). Bestimmung von Transportkenngrößen bei Mehrphasenströmungen mit Hilfe der Korrelationsmeßtechnik. *Chemie Ingenieur Technik*, 49(9), 695–707.
- Kirkgoz, M. S., Akoz, M. S., & Oner, A. A. (2009). Numerical modeling of flow over a chute spillway. *Journal of Hydraulic Research*, 47(6), 790–797.
- Knauss, J. (1995). ΤΗΣ ΓΡΙΑΣ ΤΟ ΠΗΔΗΜΑ, der “Altweibersprung die rätselhafte alte Talsperre in der Glosses-Schlucht bei Alyzeia in Akarnanien. *Archäologischer Anzeiger*, 5, 138–162.
- Kobus, H. E. (1984). Local Air Entrainment and Detrainment. In H. E. Kobus (Ed.), *Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures: Esslingen am Neckar, Germany, September 3-6, 1984* (Chap. 4, pp. 1–10). Stuttgart, Germany: Institut für Wasserbau, Universität Stuttgart.
- Kobus, H. E. (1985). *An Introduction to Air-Water Flows in Hydraulics*. Institut für Wasserbau, Universität Stuttgart. Stuttgart, Germany.
- Kobus, H. E. (1991). Introduction to air-water flows. In I. R. Wood (Ed.), *Air Entrainment in Free-surface Flow* (Chap. 1, pp. 1–28). IAHR Hydraulic Structures Design Manual (Book 4). CRC Press.
- Kositgittiwong, D. (2012). *Validation of Numerical Model of the Flow Behaviour through Smooth and Stepped Spillways using Large-scale Physical Model* (Doctoral dissertation, King Mongkut’s University of Technology Thonburi).
- Kramer, K. (2004). *Development of Aerated Chute Flow* (Doctoral dissertation, Eidgenössischen Technischen Hochschule (ETH) Zürich).
- Kramer, K. & Hager, W. H. (2005). Air transport in chute flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 31(10-11), 1181–1197.
- Kuzmanovic, V., Savic, Lj., & Stefanakos, J. (2010). Long-term thermal two- and three-dimensional analysis of roller compacted concrete dams supported by monitoring verification. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 37(4), 600–610.

- Lakehal, D., Smith, B. L., & Milelli, M. (2002). Large-eddy simulation of bubbly turbulent shear flows. *Journal of Turbulence*, 3, N25.
- Li, S., Zhang, J., & Xu, W. (2017). Numerical investigation of air–water flow properties over steep flat and pooled stepped spillways. *Journal of Hydraulic Research*, 1686(September), 1–14.
- Lopes, P., Bung, D. B., Leandro, J., & Carvalho, R. F. (2015). The effect of cross-waves in physical stepped spillway models. *36th IAHR World Congress 2015*, (1), 1–9.
- Matos, J. d. S. G. & Meireles, I. O. d. C. (2014). Hydraulics of stepped weirs and dam spillways: engineering challenges, labyrinths of research. In *Hydraulic structures and society - Engineering challenges and extremes* (pp. 1–30).
- Matos, J., Frizell, K. H., André, S., & Frizell, K. W. (2002). On the Performance of Velocity Measurement Techniques in Air-Water Flows. In *Hydraulic Measurements and Experimental Methods 2002* (pp. 1–11). Reston, VA: American Society of Civil Engineers.
- Meireles, I. O. d. C., Bombardelli, F. A., & Matos, J. d. S. G. (2014). Air entrainment onset in skimming flows on steep stepped spillways: an analysis. *Journal of Hydraulic Research*, 52(3), 375–385.
- Meireles, I., Renna, F., Matos, J., & Bombardelli, F. (2012). Skimming, Nonaerated Flow on Stepped Spillways over Roller Compacted Concrete Dams. *Journal of Hydraulic Engineering*, 138(10), 870–877.
- Миловановић, Б. (у изради). *Хидродинамички утицаји на евакуационе објекте хидротехничких грађевина* (докторска дисертација, Универзитет у Београду - Грађевински факултет).
- Mimouni, S., Laviéville, J., Seiler, N., & Ruyer, P. (2011). Combined evaluation of second order turbulence model and polydispersion model for two-phase boiling flow and application to fuel assembly analysis. *Nuclear Engineering and Design*, 241(11), 4523–4536.
- Mimouni, S., Guingo, M., Lavieville, J., & Mérioux, N. (2017). Combined evaluation of bubble dynamics, polydispersion model and turbulence modeling for adiabatic two-phase flow. *Nuclear Engineering and Design*, 321, 57–68.
- Neal, L. G. & Bankoff, S. G. (1963). A high resolution resistivity probe for determination of local void properties in gas-liquid flow. *AIChE Journal*, 9(4), 490–494.
- Nikseresht, A. H., Talebbeydokhti, N., & Rezaei, M. J. (2013). Numerical simulation of two-phase flow on step-pool spillways. *Scientia Iranica*, 20(2), 222–230.
- Oweis, G., Ceccio, S., Matsumoto, Y., Tropea, C., Roisman, I., Tsuji, Y., ... Mashayek, F. (2006). Multiphase Interactions. In C. T. Crowe (Ed.), *Multiphase Flow Handbook*

- (Chap. 12, pp. 1–134). Mechanical and Aerospace Engineering Series (Book 27). CRC Press.
- Pfister, M. & Chanson, H. (2014). Two-phase air-water flows: Scale effects in physical modeling. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 26(2), 291–298.
- Pfister, M. & Hager, W. H. (2011). Self-entrainment of air on stepped spillways. *International Journal of Multiphase Flow*, 37(2), 99–107.
- Pfister, M., Hager, W. H., & Minor, H.-E. (2006a). Bottom Aeration of Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(8), 850–853.
- Pfister, M., Hager, W. H., & Minor, H.-E. (2006b). Stepped chutes: Pre-aeration and spray reduction. *International Journal of Multiphase Flow*, 32(2), 269–284.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- Pouryoussefi, S. & Zhang, Y. (2015). Identification of two-phase water-air flow patterns in a vertical pipe using fuzzy logic and genetic algorithm. *Applied Thermal Engineering*, 85, 195–206.
- Prandoni, P. & Vetterli, M. (2008). *Signal processing for communications*. EPFL Press.
- Prodanović, D. (2012). *Mehanika fluida za studente Građevinskog fakulteta*.
- Reinauer, R. & Hager, W. H. (1996). Shockwave in air-water flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(6), 1255–1263.
- Reinauer, R. & Hager, W. H. (1998). Supercritical Flow in Chute Contraction. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(1), 55–64.
- Robinson, K. M., Rice, C. E., Kadavy, K. C., & Talbot, J. R. (1998). Energy losses on a roller compacted concrete stepped spillway. In S. R. Abt, J. Young-Pezeshk, & C. C. Watson (Eds.), *International Conference on Water Resources Engineering '98*. Memphis, Tennessee, United States of America: American Society of Civil Engineers.
- Rodi, W., Constantinescu, G., & Stoesser, T. (2013). *Large-Eddy Simulation in Hydraulics*. Taylor & Francis Ltd.
- Росић, Н. (2016). *Нумеричко моделирање отворених токова засновано на праћењу флуидних делића* (докторска дисертација, Универзитет у Београду - Грађевински факултет).
- Rusche, H. (2002). *Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions* (Doctoral dissertation, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London).
- Руц, Y., Chang, K.-A., & Lim, H.-J. (2005). Use of bubble image velocimetry for measurement of plunging wave impinging on structure and associated greenwater. *Measurement Science and Technology*, 16(10), 1945–1953.

- Sánchez-Juny, M., Bladé, E., & Dolz, J. (2007). Pressures on a stepped spillway. *Journal of Hydraulic Research*, 45(4), 505–511.
- Савић, Љ. (2012). *Увод у хидротехничке грађевине* (2. издање). Београд: Грађевински факултет.
- Schleicher, E., Da Silva, M. J., & Hampel, U. (2008). Enhanced Local Void and Temperature Measurements for Highly Transient Multiphase Flows. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 57(2), 401–405.
- Serizawa, A. (1974). *Fluid-Dynamic Characteristics of Two-Phase Flow* (Doctoral dissertation, Kyoto University).
- Shen, J. (1981). *Discharge Characteristics of Triangular-notch Thin-plate Weirs* (tech. rep. No. 1617-B). United States Geological Survey.
- Sijerčić, M. (1998). *Matematičko modeliranje kompleksnih turbulentnih transportnih procesa*. Jugoslovensko društvo termičara i Institut za nuklearne nauke "Vinča".
- Simões, A. L. A., Schulz, H. E., & De Melo Porto, R. (2010). Stepped and smooth spillways: resistance effects on stilling basin lengths. *Journal of Hydraulic Research*, 48(3), 329–337.
- Simões, A. L. A., Schulz, H. E., Lobosco, R. J., & Porto, R. D. M. (2012). Stepped Spillways: Theoretical, Experimental and Numerical Studies. In H. E. Schulz, A. L. A. Simões, & R. J. Lobosco (Eds.), *Hydrodynamics - Natural Water Bodies* (Chap. 12, pp. 237–262). InTech.
- Smith, S. W. (1997). *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. San Diego, California: California Technical Publishing.
- Speziale, C. G., Abid, R., & Durbin, P. A. (1994). On the realizability of reynolds stress turbulence closures. *Journal of Scientific Computing*, 9(4), 369–403.
- Starinac, D. (2013). *Hidraulička modelska ispitivanja brane Buzina: Konačan izveštaj* (Izveštaj No. 1203). Institut za vodoprivredu "Jaroslav Černi".
- Starinac, D., Vojt, P., Damnjanović, M., Žugić, D., Savić, Lj., Kapor, R., ... Glišić, R. (2014). Scale Modeling of the Bouzina Dam Flood Mitigation Structures. *Water Research and Management*, 4(1), 31–42.
- Subramaniam, S. (2013). Lagrangian-Eulerian methods for multiphase flows. *Progress in Energy and Combustion Science*, 39(2-3), 215–245.
- Tabbara, M., Chatila, J., & Awwad, R. (2005). Computational simulation of flow over stepped spillways. *Computers & Structures*, 83(27), 2215–2224.
- Takahashi, M. & Ohtsu, I. (2012). Aerated flow characteristics of skimming flow over stepped chutes. *Journal of Hydraulic Research*, 50(4), 427–434.
- Toombes, L. (2002). *Experimental Study of Air-Water Flow Properties on Low-Gradient Stepped Cascades* (Doctoral dissertation, University of Queensland).

- Toombes, L. & Chanson, H. (2005). Air–Water Mass Transfer on a Stepped Waterway. *Journal of Environmental Engineering*, 131(10), 1377–1386.
- Vaidheeswaran, A. & Hibiki, T. (2017). Bubble-induced turbulence modeling for vertical bubbly flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 115, 741–752.
- van der Welle, R. (1985). Void fraction, bubble velocity and bubble size in two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 11(3), 317–345.
- Viparelli, M. (1953). The flow in the flume with 1:1 slope. In *Proceedings of Minnesota International Hydraulics Convention* (pp. 415–423). Minneapolis, Minnesota.
- Wadhai, P., Ghare, A., Deshpande, N., & Vasudeo, A. (2015). Comparative analysis for estimation of the height of training wall of convergent stepped spillway. *International Journal of Engineering & Technology*, 4(2), 294.
- Wan, H., Li, R., Gualtieri, C., Yang, H., & Feng, J. (2017). Numerical Simulation of Hydrodynamics and Reaeration over a Stepped Spillway by the SPH Method. *Water*, 9(8), 565.
- Wang, Z.-B., Chen, R., Wang, H., Liao, Q., Zhu, X., & Li, S.-Z. (2016). An overview of smoothed particle hydrodynamics for simulating multiphase flow. *Applied Mathematical Modelling*, 40(23-24), 9625–9655.
- Wilcox, D. C. (2006). *Turbulence Modeling for CFD* (3rd ed.). D C W Industries.
- Willey, J., Ewing, T., & Lesleighter, E. (2012). Complementary Use Of Physical And Numerical Modelling Techniques In Spillway Design Refinement. In *Proceedings of the 24th ICOLD Congress*, June 6, 2012. Kyoto, Japan.
- Wood, I. R. (1984). Air entrainment in high speed flows. In H. E. Kobus (Ed.), *Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures: Esslingen am Neckar, Germany, September 3-6, 1984* (Chap. 4, pp. 1–7). Stuttgart, Germany: Institut für Wasserbau, Universität Stuttgart.
- Wu, J.-h., Zhang, B., & Ma, F. (2013). Inception point of air entrainment over stepped spillways. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 25(1), 91–96.
- Wu, Q. & Ishii, M. (1999). Sensitivity study on double-sensor conductivity probe for the measurement of interfacial area concentration in bubbly flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 25(1), 155–173.
- Zare, H. & Doering, J. (2012). Effect of rounding edges of stepped spillways on the flow characteristics. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 39(2), 140–153.
- Zhai, L.-S., Bian, P., Gao, Z.-K., & Jin, N.-D. (2016). The measurement of local flow parameters for gas–liquid two-phase bubbly flows using a dual-sensor probe array. *Chemical Engineering Science*, 144, 346–363.



- Zhan, J., Zhang, J., & Gong, Y. (2016). Numerical investigation of air-entrainment in skimming flow over stepped spillways. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 6(3), 139–142.
- Zhang, A., Sun, P., & Ming, F. (2015). An SPH modeling of bubble rising and coalescing in three dimensions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 294, 189–209.
- Zhang, M. & Deng, X.-L. (2015). A sharp interface method for SPH. *Journal of Computational Physics*, 302, 469–484.
- Zindovic, B., Vojt, P., Kapor, R., & Savic, Lj. (2016). Converging stepped spillway flow. *Journal of Hydraulic Research*, 54(6), 699–707.
- Капор, Р. (2015). *Хидраулика* (3. издање). Београд: Грађевински факултет.

# Прилози

## Модел ЈЧ

### А.1 Дубине уз зид брзотока

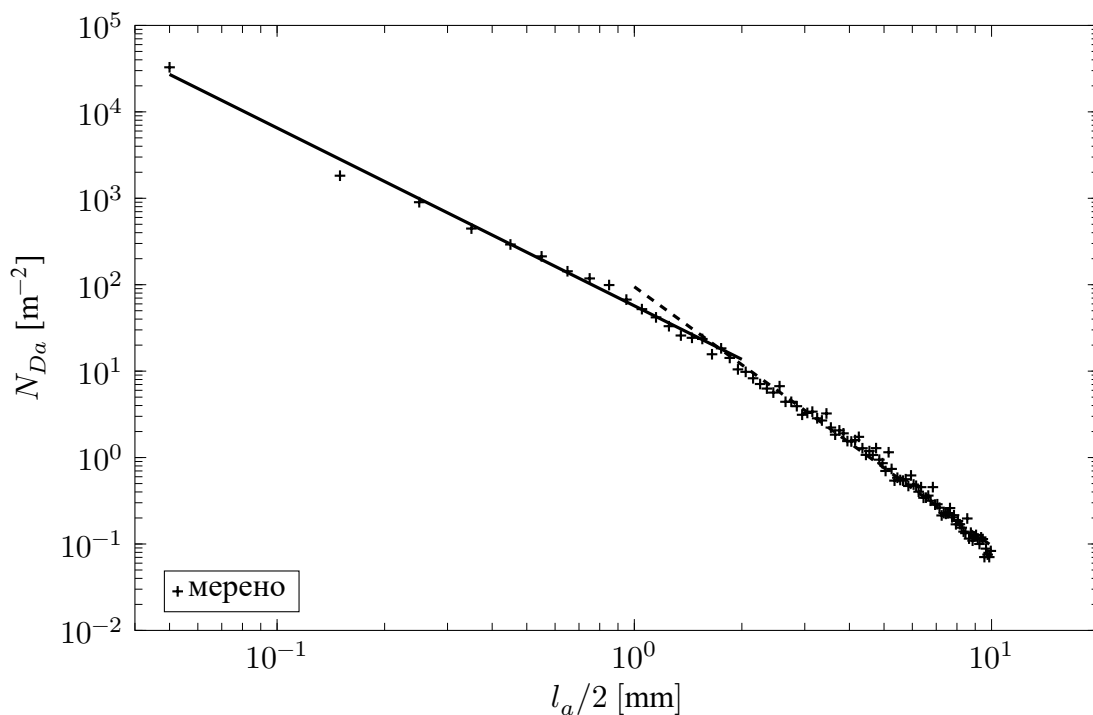
Табела А.1: Дубине уз зид брзотока за  $s = 45 \text{ mm}$ .

$x/h_c$	$\theta = 18^\circ 48'$			$\theta = 12^\circ$		
	$h_{min}/h_c$	$\bar{h}/h_c$	$h_{max}/h_c$	$h_{min}/h_c$	$\bar{h}/h_c$	$h_{max}/h_c$
2,66	0,866	0,882	0,899	0,529	0,562	0,595
3,45	0,932	0,948	0,965	0,562	0,595	0,628
4,64	0,965	0,998	1,031	0,628	0,661	0,694
5,44	1,031	1,047	1,064	0,698	0,725	0,752
6,24	1,031	1,064	1,097	0,739	0,779	0,819
7,03	1,097	1,113	1,130	0,739	0,779	0,819
7,83	1,097	1,130	1,163	0,779	0,799	0,819
8,62	1,130	1,146	1,163	0,779	0,799	0,819
9,82	1,163	1,196	1,229	0,779	0,799	0,819
10,61	1,229	1,245	1,262	0,859	0,875	0,892

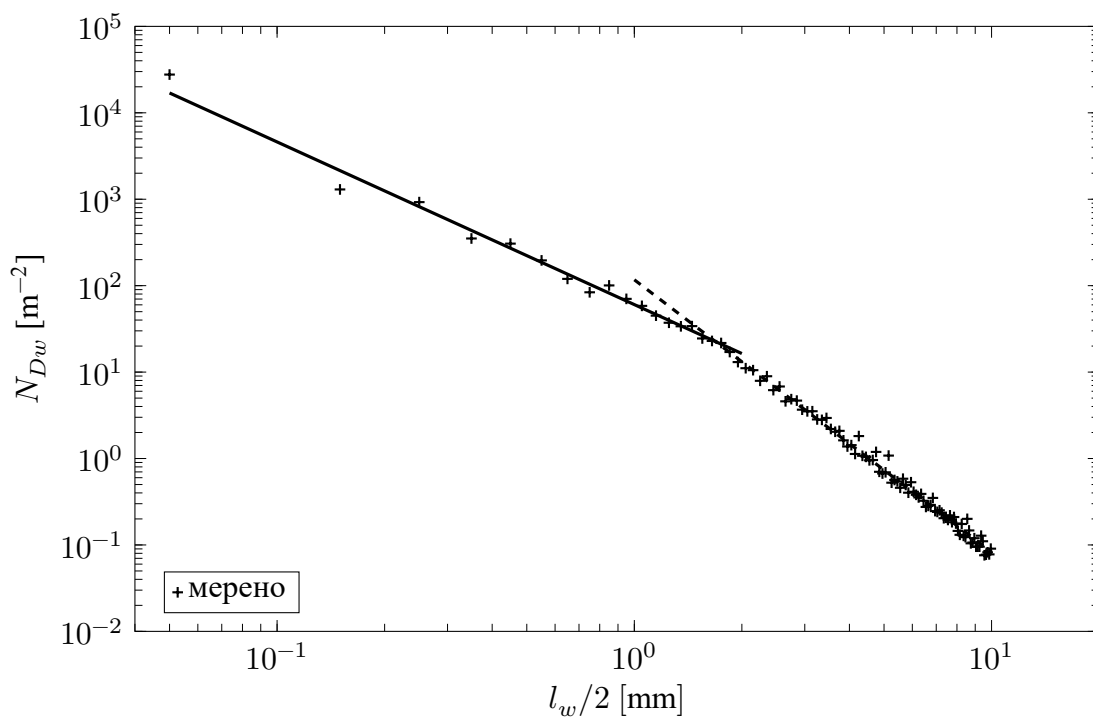
Табела А.2: Дубине уз зид брзотока за  $s = 22,5 \text{ mm}$ .

$x/h_c$	$\theta = 22^\circ 36'$			$\theta = 18^\circ 48'$			$\theta = 12^\circ$		
	$h_{min}/h_c$	$\bar{h}/h_c$	$h_{max}/h_c$	$h_{min}/h_c$	$\bar{h}/h_c$	$h_{max}/h_c$	$h_{min}/h_c$	$\bar{h}/h_c$	$h_{max}/h_c$
5,44	1,388	1,421	1,454	0,925	0,958	0,991	0,661	0,694	0,727
7,03	1,454	1,487	1,520	1,189	1,222	1,255	0,727	0,760	0,793
9,02	1,520	1,553	1,586	1,255	1,288	1,321	0,793	0,826	0,859
10,61	1,454	1,487	1,520	1,321	1,355	1,388	0,819	0,859	0,899
12,20	1,454	1,487	1,520	1,255	1,288	1,321	0,846	0,879	0,912
14,19	1,388	1,421	1,454	1,189	1,222	1,255	0,925	0,958	0,991
15,78	1,388	1,454	1,520	1,123	1,156	1,189	0,991	1,024	1,057
17,37	1,454	1,520	1,586	1,123	1,156	1,189	0,925	0,991	1,057
19,36	1,520	1,553	1,586	1,057	1,123	1,189	0,925	0,991	1,057
20,96	1,454	1,520	1,586	1,057	1,123	1,189	0,912	0,978	1,044

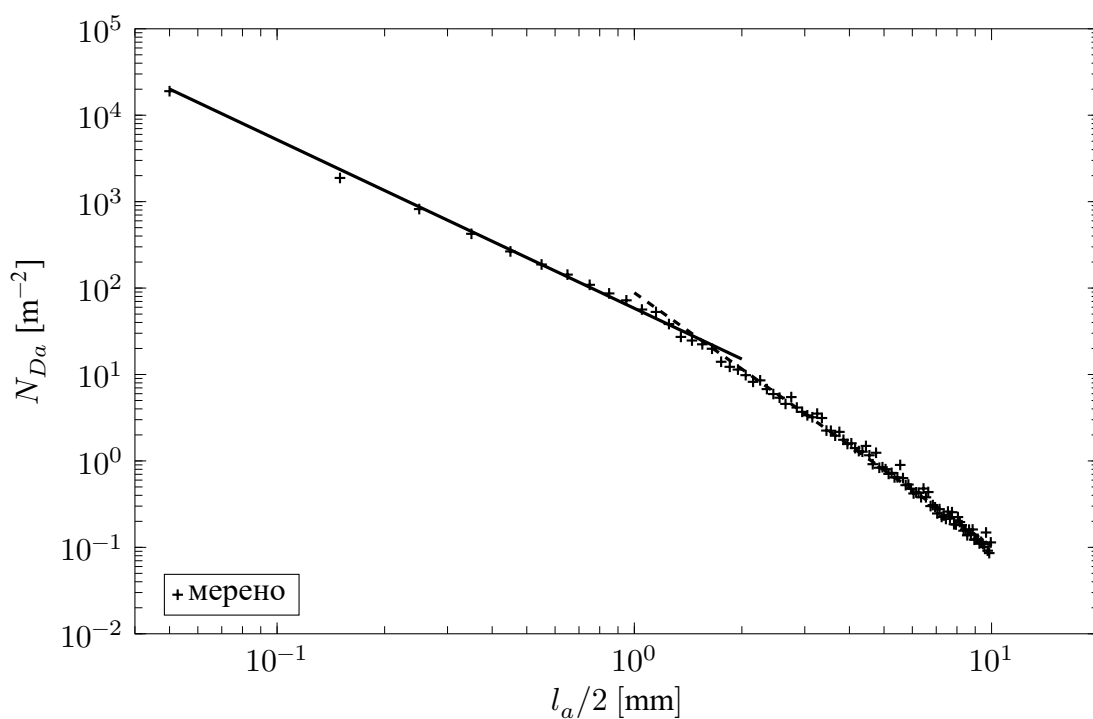
## А.2 Спектри тетива гасовите и течне фазе



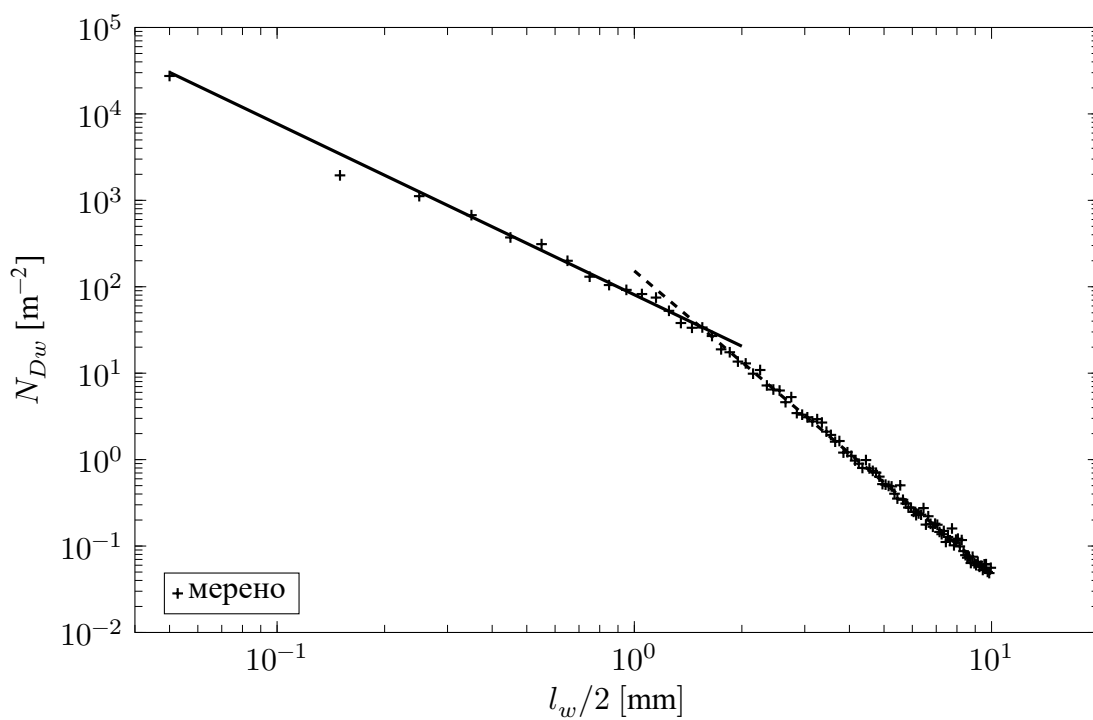
Слика. А.1: Спектар тетива гасовите фазе модела ЈЧ за  $\theta = 22^\circ 36'$  и степеник 39.



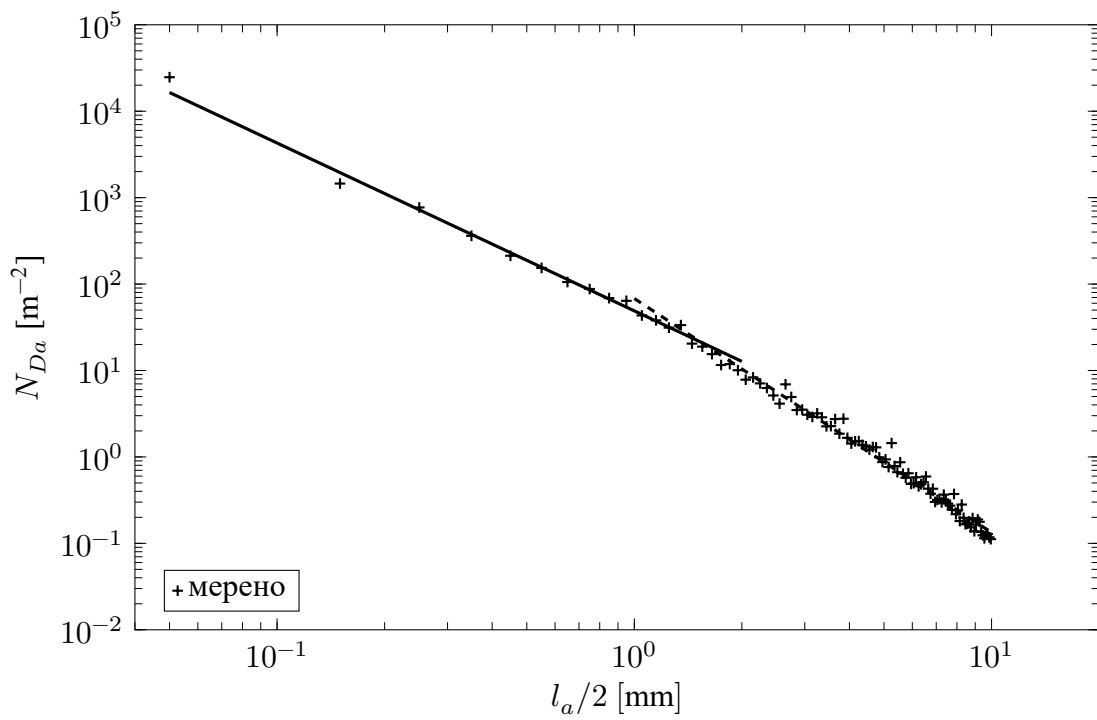
Слика. А.2: Спектар тетива течне фазе модела ЈЧ за  $\theta = 22^\circ 36'$  и степеник 39.



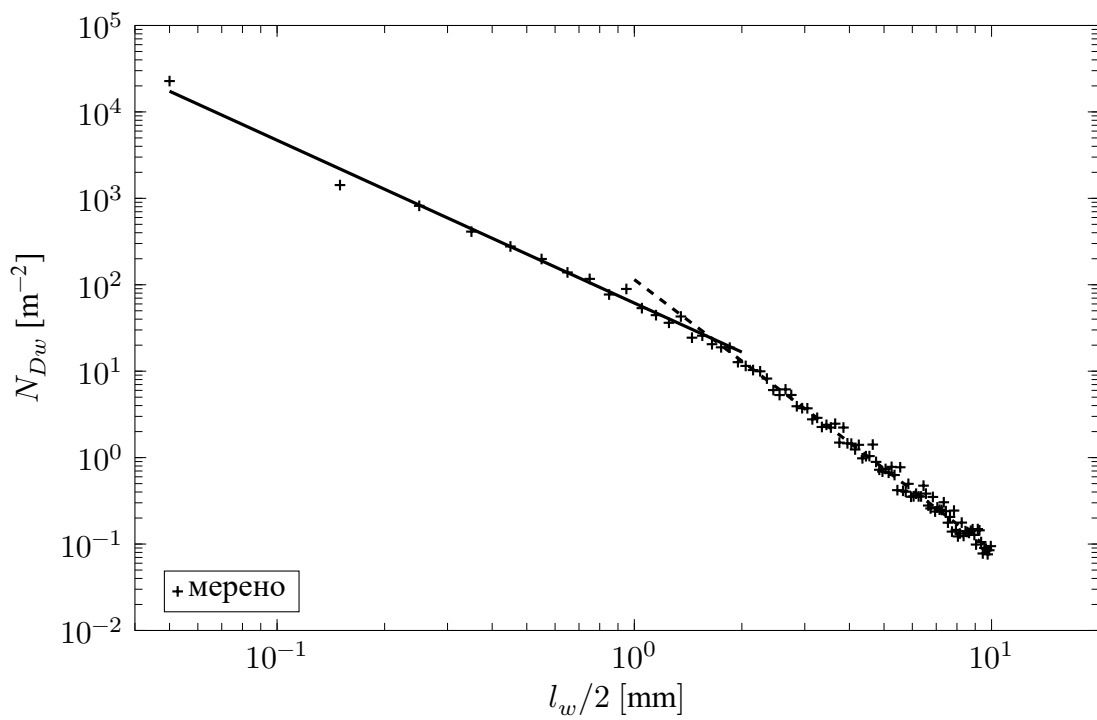
Слика. А.3: Спектар тетива гасовите фазе модела ЈЧ за  $\theta = 22^\circ 36'$  и степеник 52.



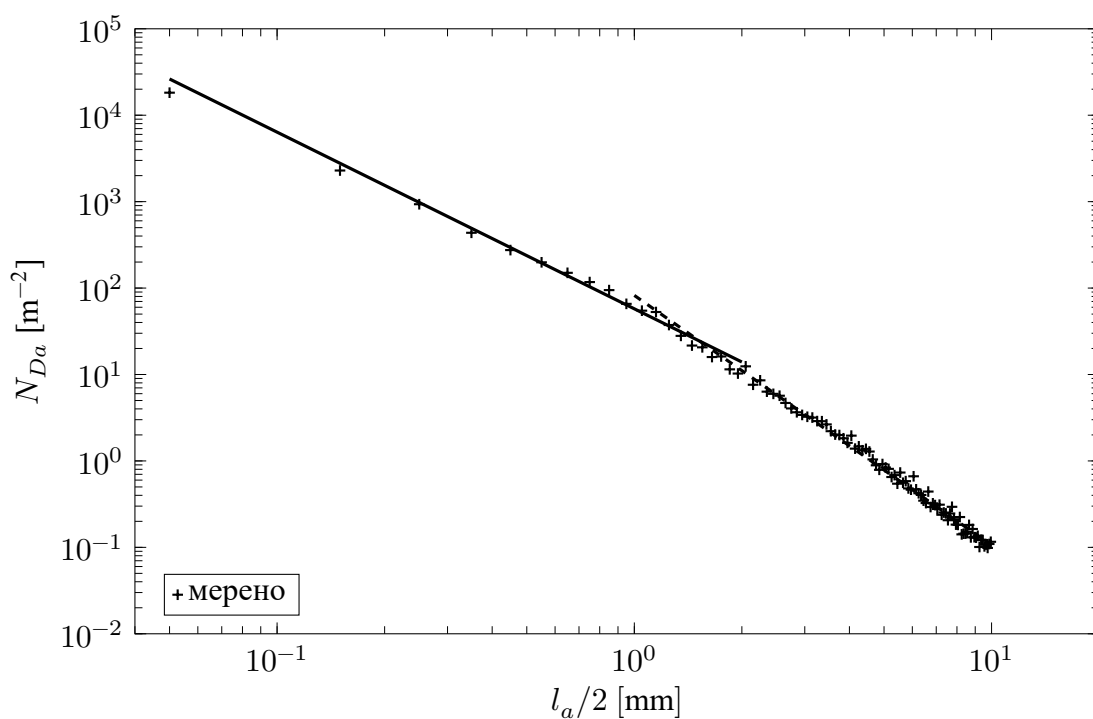
Слика. А.4: Спектар тетива течне фазе модела ЈЧ за  $\theta = 22^\circ 36'$  и степеник 52.



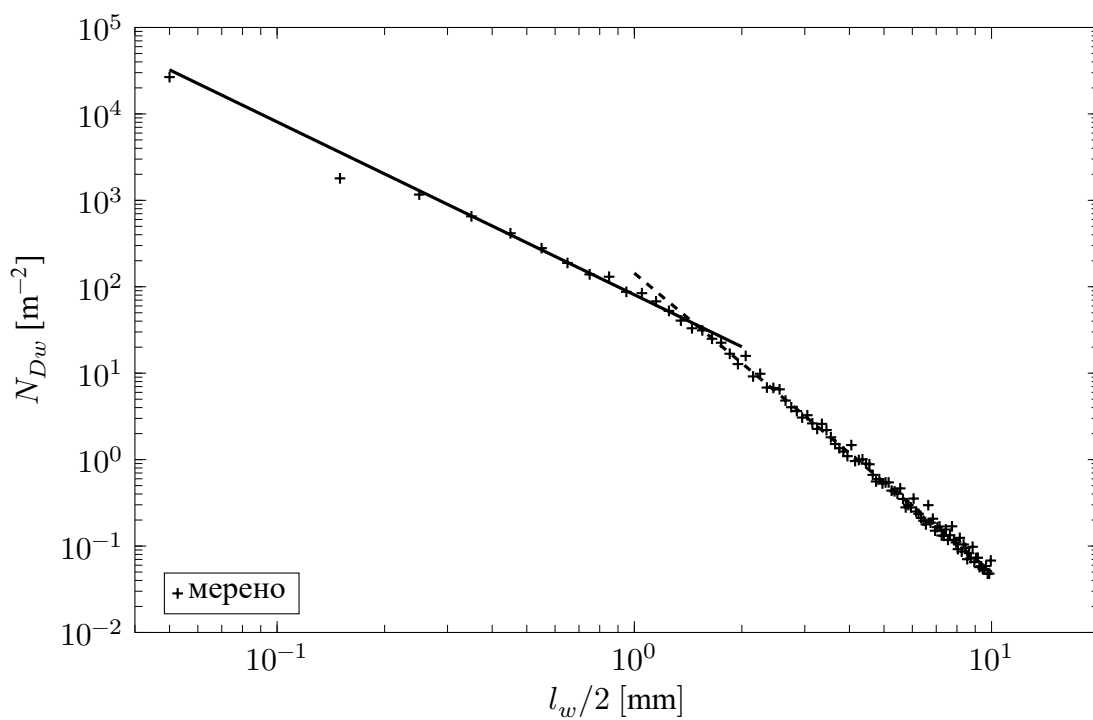
Слика. А.5: Спектар тети́ва гасовите фазе модела ЈЧ за  $\theta = 18^\circ 48'$  и степеник 39.



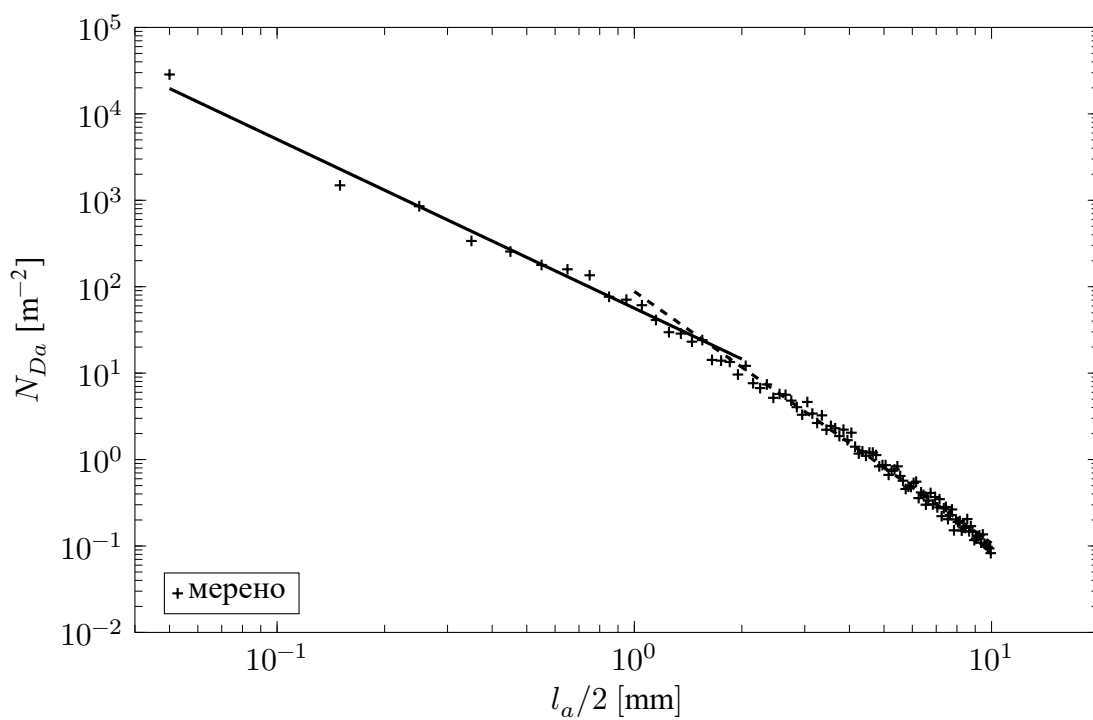
Слика. А.6: Спектар тети́ва течне фазе модела ЈЧ за  $\theta = 18^\circ 48'$  и степеник 39.



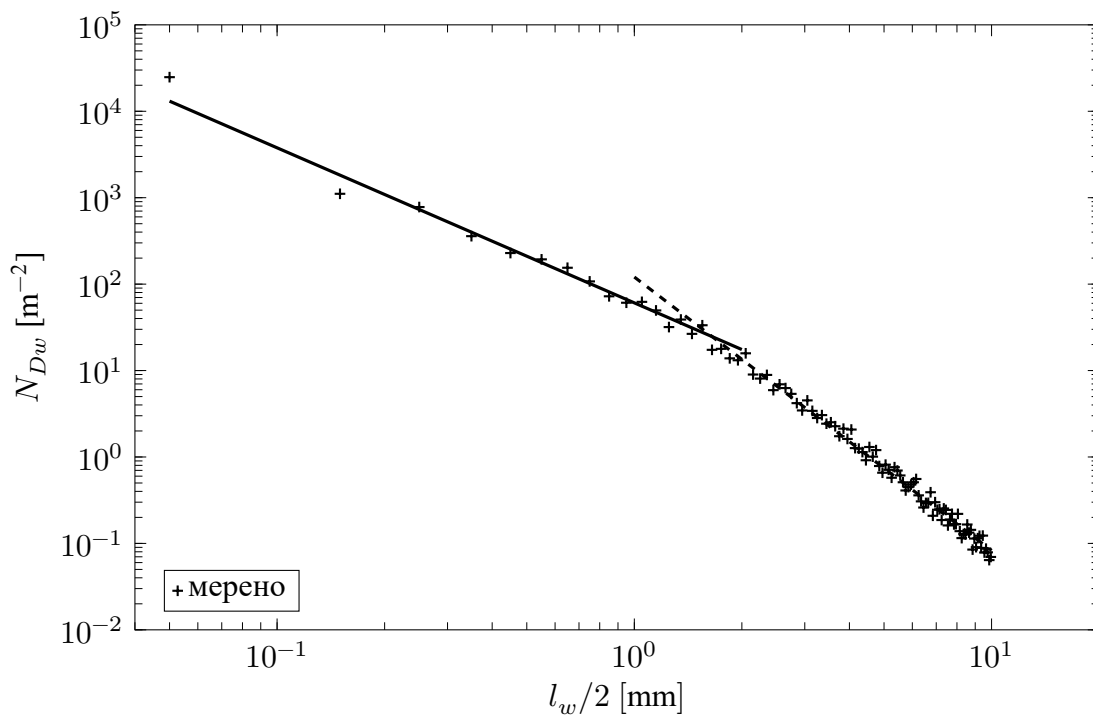
Слика. А.7: Спектар тетива гасовите фазе модела ЈЧ за  $\theta = 18^\circ 48'$  и степеник 52.



Слика. А.8: Спектар тетива течне фазе модела ЈЧ за  $\theta = 18^\circ 48'$  и степеник 52.

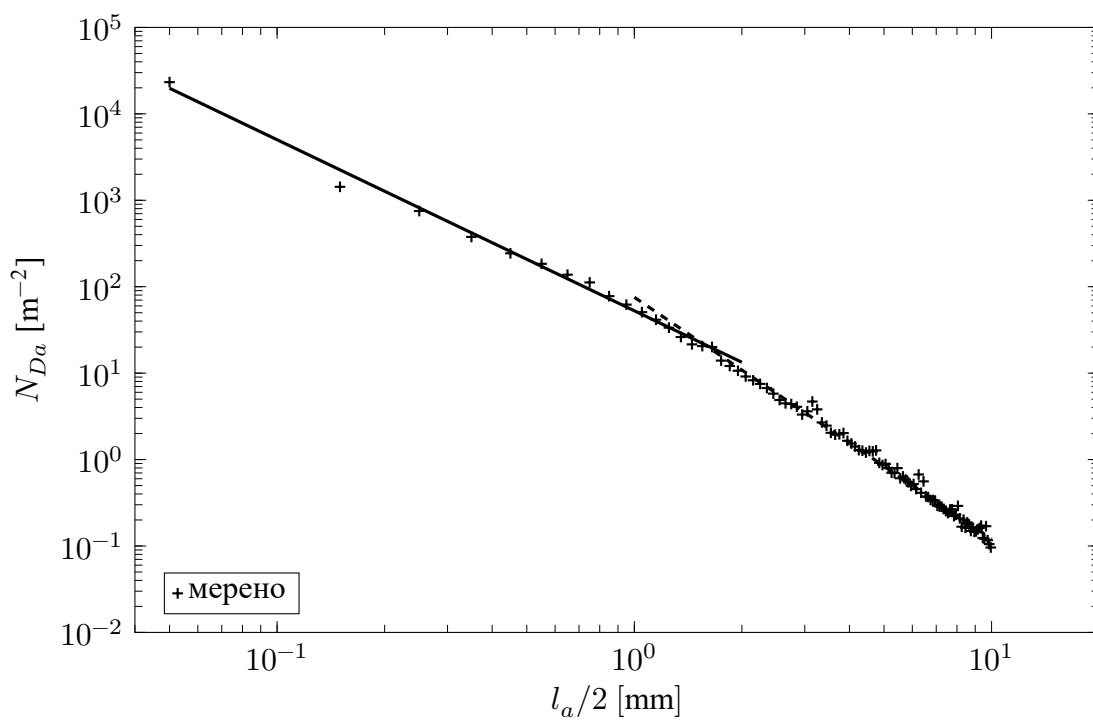


Слика. А.9: Спектар тетива гасовите фазе модела ЈЧ за  $\theta = 12^\circ$  и степеник 39.

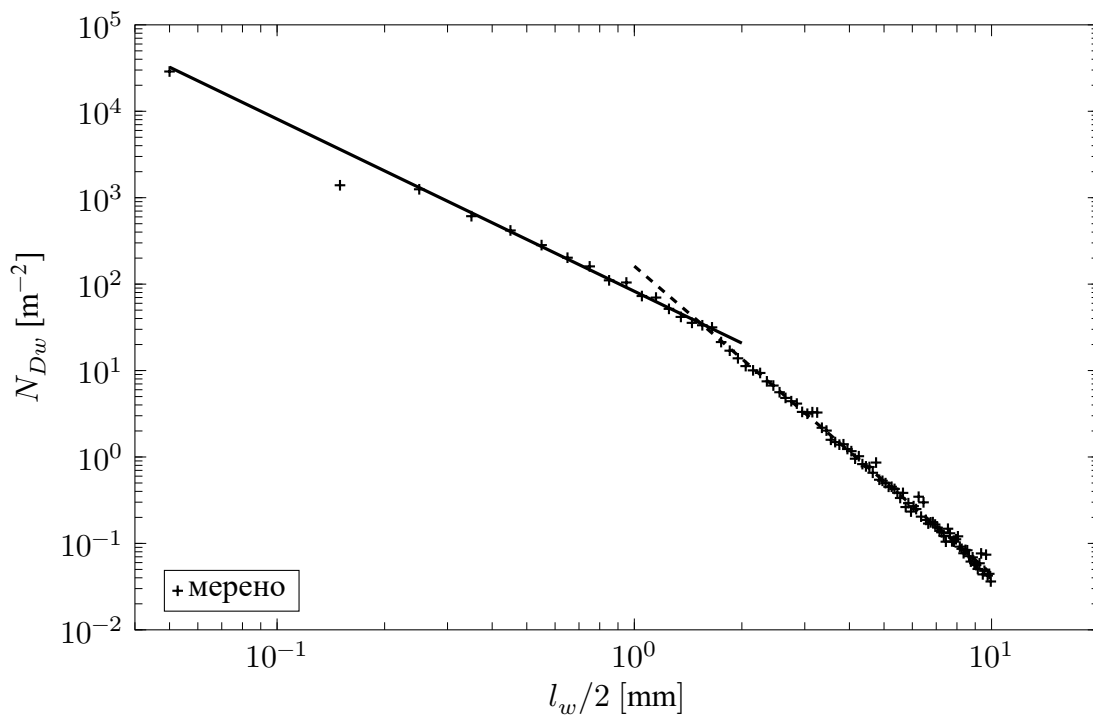


Слика. А.10: Спектар тетива течне фазе модела ЈЧ за  $\theta = 12^\circ$  и степеник 39.





Слика. А.11: Спектар тетива гасовите фазе модела ЈЧ за  $\theta = 12^\circ$  и степеник 52.



Слика. А.12: Спектар тетива течне фазе модела ЈЧ за  $\theta = 12^\circ$  и степеник 52.

# Хидрауличке карактеристике прелива модела ГФ

---

## Б.1 Крива протока двоструког Томсоновог прелива

На Слици 3.9 приказан је двоструки Томсонов прелив у хидрауличкој лабораторији Грађевинског факултета. У претходним истраживањима, за прорачун протока на овом објекту, коришћена је формула Cone-а (једначина Б.1) за свако поље а укупан проток се добија њиховим сабирањем. Будући да објекат не задовољава препоруке за у погледу геометријских карактеристика резервоара (Cone, 1916; Shen, 1981), и да до момената писања ове дисертације није постојао документ којим се потврђује или оповргава исправност овакве методологије, у оквиру припремних мерења спроведена је и провера криве протока.

Хидрауличке карактеристике прелива проверене су поређењем протока за двоструки Томсонов прелив са протоком измереним помоћу улатрзвучног протокомера Dynasonics TFXL постављеним на одводу из низводне коморе прелива (Слика 3.8). Провера је спроведена до највећег протока у истраживањима у оквиру ове дисертације, који је износио око  $60 \text{ L s}^{-1}$ . Стога је неопходно проверити хидрауличке карактеристике и за протоке веће од наведеног.

У овом делу су приказане криве протока за модел ГФ. За прорачун протока на троугаоном преливу, примењена је формула Cone-а (Cone, 1916; Shen, 1981):

$$Q = 0,303\sqrt{2gh_p^{2,48}} \quad (\text{Б.1})$$

Два Томсонова прелива имају различите коте врха и висина преливног млаза

**Табела Б.1:** Подаци са мерења хидрауличких карактеристика прелива модела ГФ.

$Z_T$ [cm]	$h_{T_1}$ [cm]	$h_{T_2}$ [cm]	$Z_{Kriger}$ [cm]	$h_p$ [cm]	$Q_{uzv}$ [L s <sup>-1</sup> ]	$Q_{Cone}$ [L s <sup>-1</sup> ]
39,05	5,31	5,52	81,55	1,25	1,50	1,94
38,08	6,28	6,49	81,20	1,60	2,90	2,92
36,70	7,66	7,87	80,80	2,00	4,65	4,75
35,61	8,75	8,96	80,30	2,50	6,35	6,58
34,59	9,77	9,98	79,90	2,90	8,10	8,62
33,52	10,84	11,05	79,45	3,35	10,35	11,12
32,14	12,22	12,43	78,75	4,05	14,75	14,93
31,30	13,06	13,27	78,30	4,50	17,80	17,58
30,31	14,05	14,26	77,85	4,95	20,80	21,04
28,91	15,45	15,66	77,10	5,70	26,15	26,59
27,82	16,54	16,75	76,45	6,35	31,50	31,45
26,85	17,51	17,72	75,85	6,95	36,30	36,19
25,83	18,53	18,74	75,30	7,50	41,50	41,61
25,14	19,22	19,43	74,85	7,95	46,70	45,54
24,27	20,09	20,30	74,25	8,55	51,45	50,79
23,26	21,10	21,31	73,65	9,15	56,95	57,33
22,37	21,99	22,20	73,00	9,80	63,10	63,48

се рачуна засебно за свако поље:

$$h_{T_1} = 0,4436 - Z_T,$$

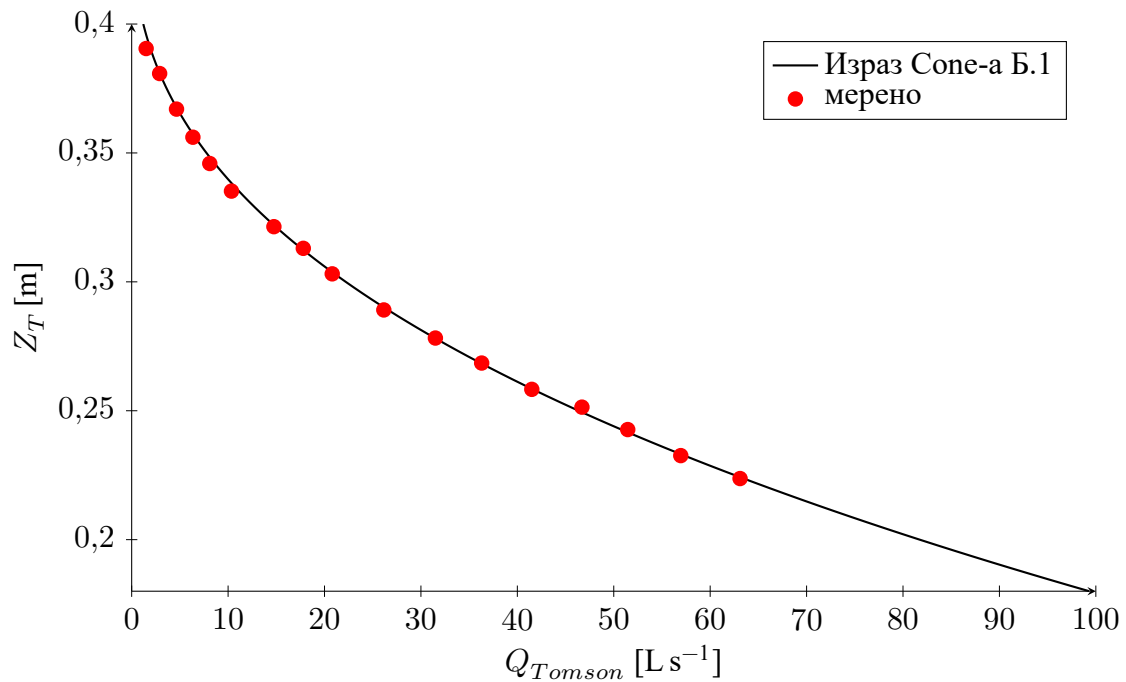
$$h_{T_2} = 0,4457 - Z_T,$$

где су:  $h_{T_1}$  и  $h_{T_2}$  висине преливног млаза за свако поље а  $Z_T$  – читање на мерној игли у [m].

## Б.2 Крива протока прелива практичног профила

На излазу из стабилизационог резервоара, вода се прелива преко прелива практичног профила (Слика 3.8). Како се и он може користити за мерење и контролу протока, спроведена су мерења како би се утврдили његове хидрауличке карактеристике. Резултати мерења приказани су у Табели Б.1.

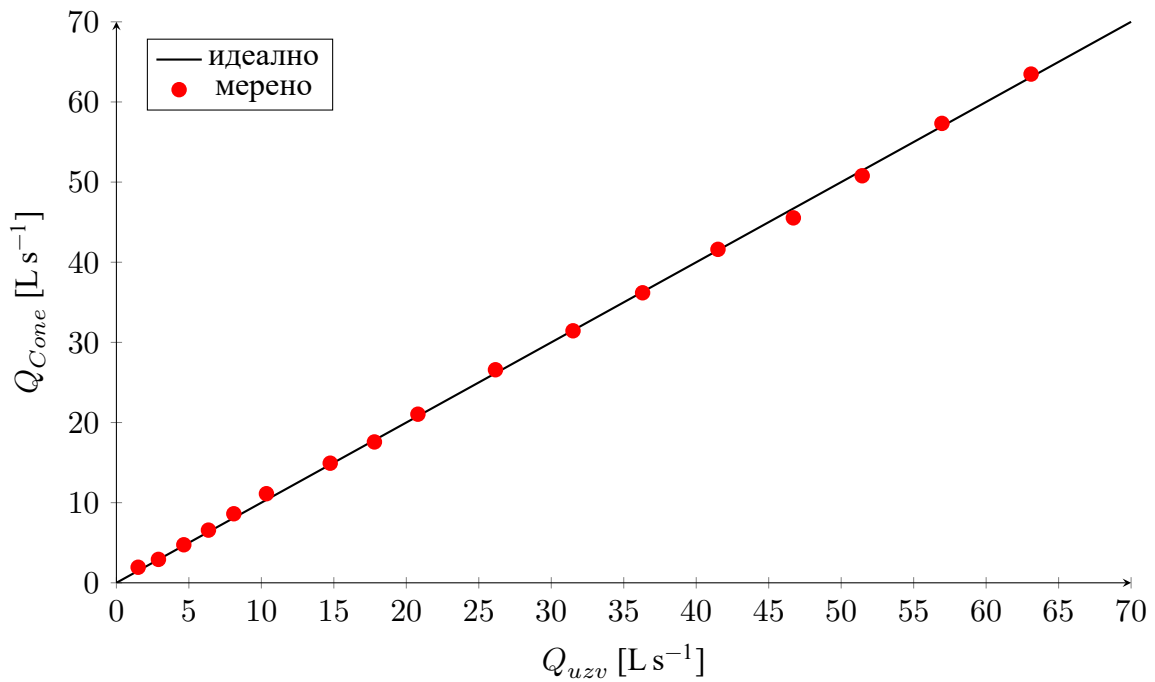
$$h_p = 0,828 \text{ m} - Z_{Kriger}.$$



**Слика. Б.1:** Крива протока за двоструки Томсонов прелив у хидрауличкој лабораторији ГФ.

$$Q_K = C_p * B_p * \sqrt{2 g h_p^3} \quad (\text{Б.2})$$

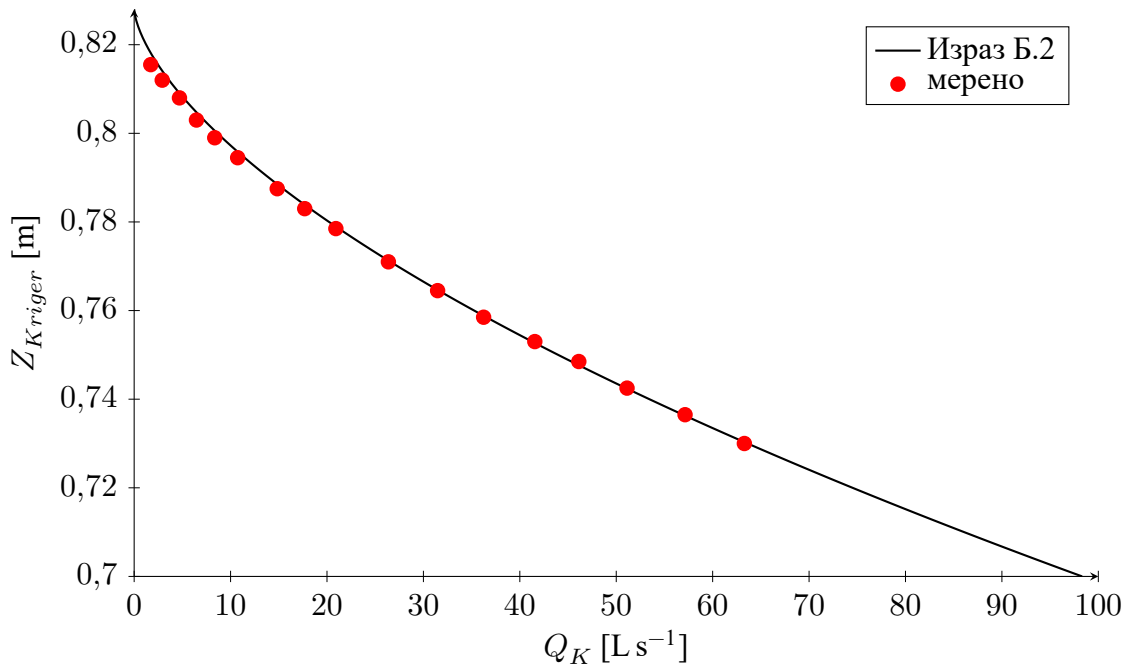
Пошто је облик прелива одређен за рачунски проток од  $100 \text{ L s}^{-1}$ , за протоке мање од овог неопходно је кориговати коефицијент преливања  $C_p$  према изразу (8.21а) из Савић (2012). На основу резултата из Табеле Б.1, утврђена је оптимална вредност коефицијента преливања при рачунском протоку  $C_{p,R} = 0,485$ , што је блиско вредности из литературе 0,496.



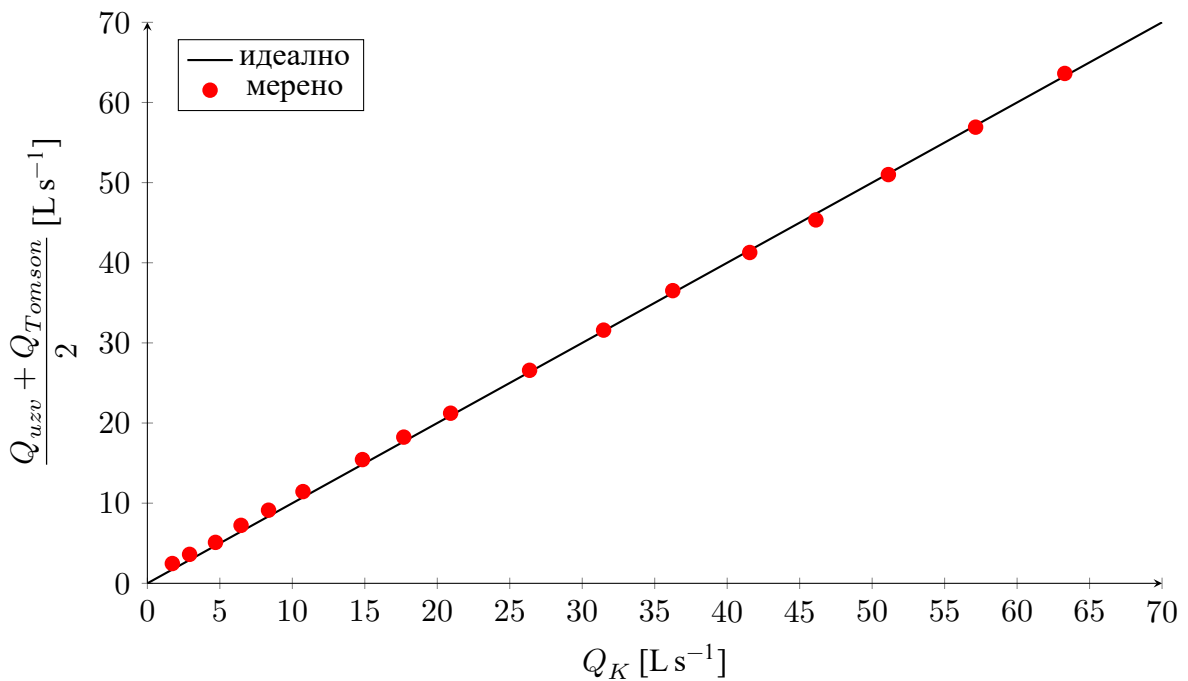
**Слика. Б.2:** Слагање протока измерених ултразвучним протокомером ( $Q_{uzv}$ ) и Томсоновим преливом ( $Q_{Cone}$ ).

**Табела Б.2:** Подаци са мерења хидрауличких карактеристика прелива практичног профила – модел ГФ.

$Z_{Kriger}$ [cm]	$h_p$ [cm]	$Q_K$ [ $L s^{-1}$ ]
81,55	1,25	2,47
81,20	1,60	3,62
80,80	2,00	5,11
80,30	2,50	7,23
79,90	2,90	9,13
79,45	3,35	11,45
78,75	4,05	15,44
78,30	4,50	18,25
77,85	4,95	21,23
77,10	5,70	26,58
76,45	6,35	31,59
75,85	6,95	36,52
75,30	7,50	41,28
74,85	7,95	45,35
74,25	8,55	51,00
73,65	9,15	56,92
73,00	9,80	63,62



Слика. Б.3: Крива протока за прелив практичног профила на стабилизационом резервоару модела ГФ.



Слика. Б.4: Слагање протока измерених ултразвучним протокомером ( $Q_{uzv}$ ) и Томсоновим преливом ( $Q_{Tomson}$ ) са рачунским протоком преко прелива практичног профила.

## Анализа осетљивости мерења сензорима проводљивости

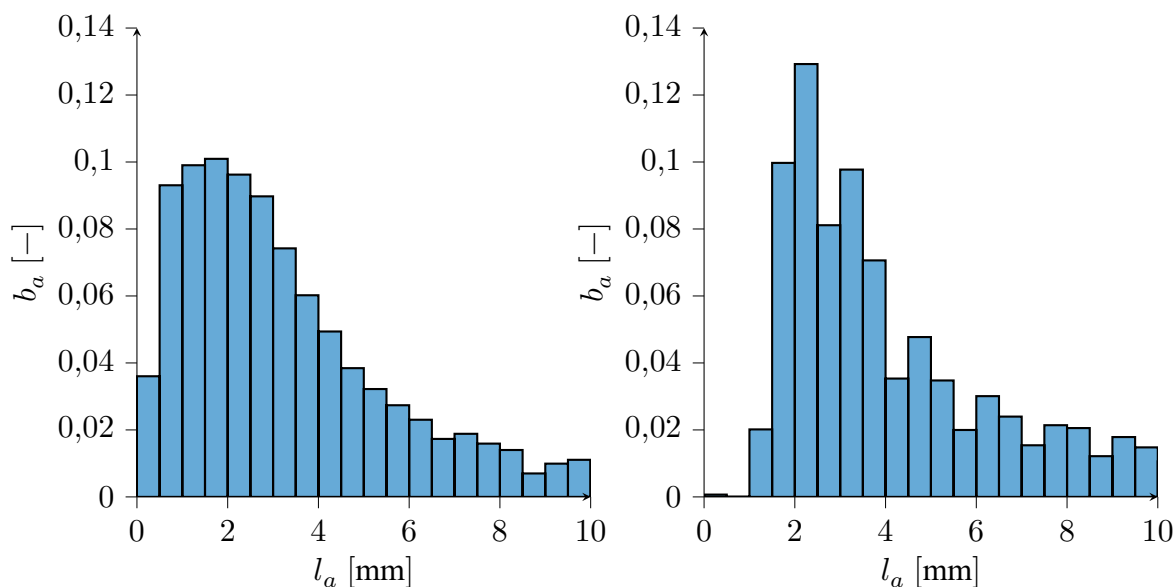
---

У овом Прилогу даје се преглед резултата анализе осетљивости неких величина измерених сензорима проводљивости.

### **В.1 Утицај поступка идентификације фазе**

У литератури која се бави обрадом података мерења у вишефазним токовима, посебно место припада избору методе идентификације фазе у току. У Глави 2 – Преглед литературе, указано је на неколико поступака обраде сигнала. На Слици В.1, приказана је функција густине расподеле тетива регистроване гасовите фазе за поступак са једним прагом (Felder, 2013; Toombes, 2002) и градијентни поступак са два прага (Kim et al., 2000). Иако на први поглед изгледају слично, уочава се да градијентним поступком нису у већој мери регистроване тетиве краће од 1,5 mm. Оба поступка дају сличан опсег најзаступљенијих дужина тетива (око 2 mm) али њихов број значајно варира међу методама. Поредићи резултате са Слике В.1 са резултатима из доступне литературе, може се закључити да су резултати са Слике В.1а у већој мери слични резултатима из Felder (2013) и Toombes (2002).

Слични закључци могу се извући и за функцију густине расподеле течне фазе (Слика В.2). Осим што се облици функција значајно разликују, поступак са два прага је указао да је највећа заступљеност течне фазе у интервалу [2,5 cm; 6 cm], што је у супротности са ранијим истраживањима на призматичним степенастим брзотоцима, у првом реду Felder (2013), González (2005) и Toombes (2002)



(а) према Toombes (2002), Felder (2013)      (б) према Kim, Fu, Wang, Ishii (2000)

**Слика. В.1:** Поређење функција густине расподеле тетива гасовите фазе за различите поступке нормализације сигнала на моделу ЈЧ:  $s = 2,25$  cm,  $\theta = 12^\circ$ . На дијаграмима су дате расподеле за тачку удаљену 10 cm од зида и 3 cm од псеудо-дна канала.

## В.2 Анализа осетљивости мерења концентрације и брзине

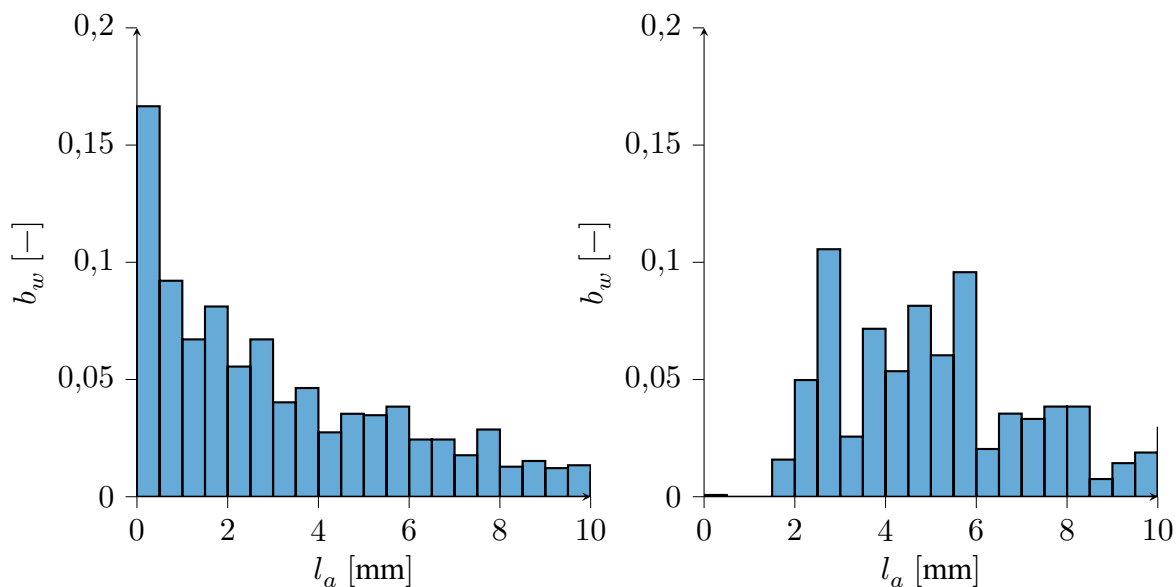
У овом делу ће бити приказани резултати анализе осетљивости измерених концентрација и брзине. Резултати су приказани помоћу кутијастих дијаграма (eng. box and whiskers). Црвеном бојом означене су медијане, горњи крај горњег репа је 95 % квантил, доњи крај горњег репа је 75 % квантил, горњи крај доњег репа је 25 % квантил, доњи крај доњег репа је 5 % квантил. Крстићима су приказани подаци који су ван интервала [5 %, 95 %]. Напомена: подаци на  $x$ -оси нису нацртани у линеарној размери!

### В.2.1 Утицај дужине узорковања

На Слици В.3 приказане су расподеле концентрација за различите дужине узорковања. Сви резултати су добијени од једног мереног низа дужине 120 s поделом на поднизове изабраних дужина (1 s, 2 s, ...), потом је за сваки подниз прорачуната концентрација и брзина и затим направљена емпиријска расподела.

Са Слике В.3 уочава се велико расипање резултата за мале дужине низова (око





(а) према Toombes (2002), Felder (2013)      (б) према Kim, Fu, Wang, Ishii (2000)

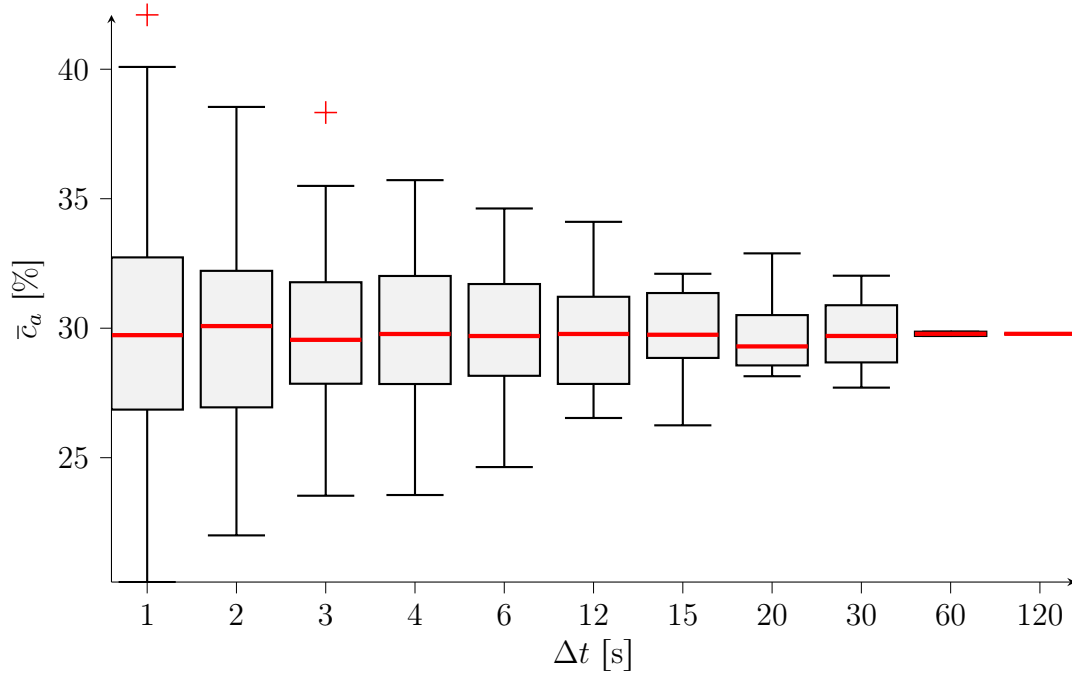
**Слика. В.2:** *Поређење функција густине расподеле тетива течне фазе за различите поступке нормализације сигнала на моделу ЈЧ:  $s = 2,25$  cm,  $\theta = 12^\circ$ . На дијаграмима си дате расподеле за тачку удаљену 10 cm од зида и 6,5 cm од псеудо-дна канала.*

20 % за  $\Delta t = 1$  s), а са повећањем дужине ово расипање се умањује. Занимљиво је уочити да медијане варирају у врло уским границама и да износи мање од 1 %. Из наведеног разлога, концентрација ће се рачунати помоћу целог низа.

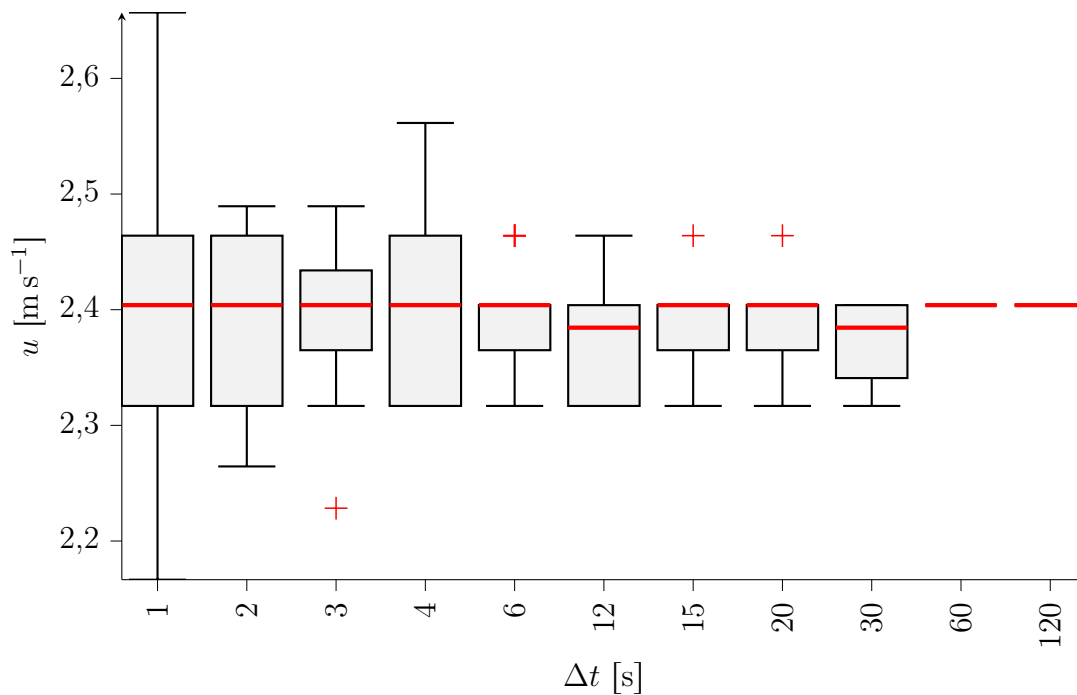
Слично концентрацији ваздуха, слични су закључци и за брзину мешавине (Слика В.4): одступања од медијане су највећа за мале дужине снимања па ће се прорачун брзине мешавине спровести за цео низ.

### В.2.2 Утицај учестаности узорковања

На Сликама В.5 и В.6. Резултати су приказани на исти начин као резултати у Додатку В.2.1. Поднизови су формирани од снимљеног низа узимањем сваког  $n$ -тог члана, па је фреквенција узорка из подниза  $f_s/n$ , где је  $f_s$ —учестаност снимања. Примећује се да је осетљивост измерене концентрације концентрације мала, док за брзину струјања то није случај. Брзина много варира за мале фреквенције (мање од 5 kHz) и није препоручљиво мерити овако ниским фреквенцијама. При фреквенцијама већим од 5 kHz, одступање износи око 6 %.



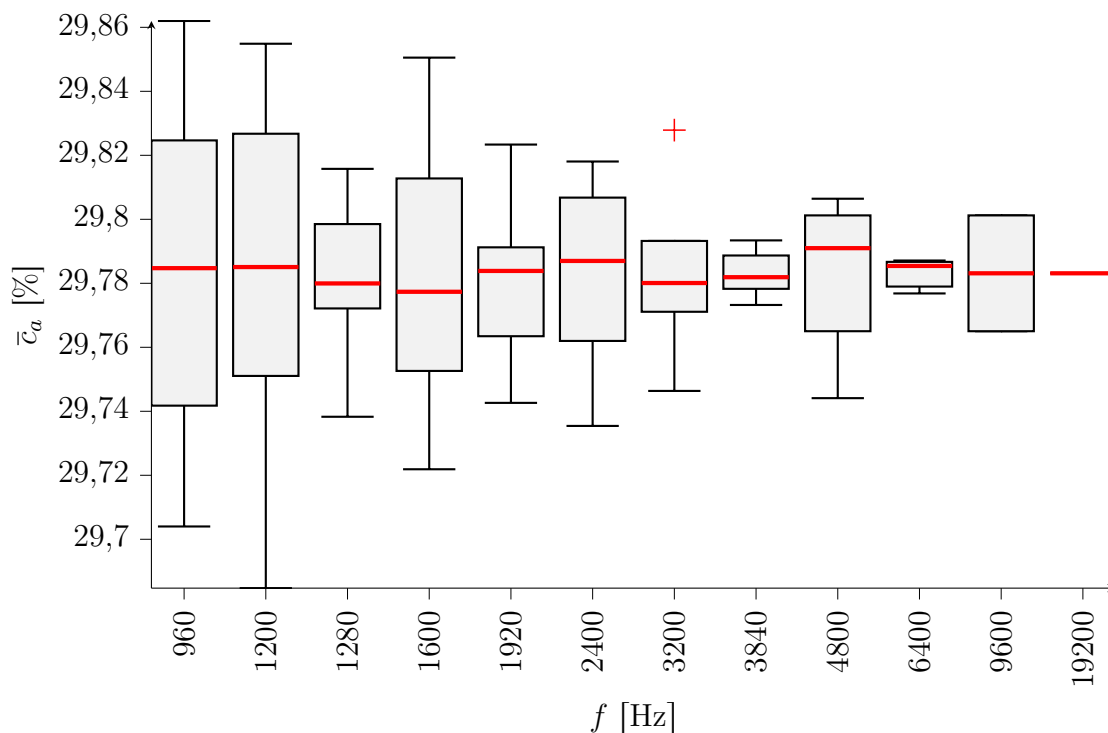
Слика. В.3: Утицај дужине снимања на вредност концентрације ваздуха.



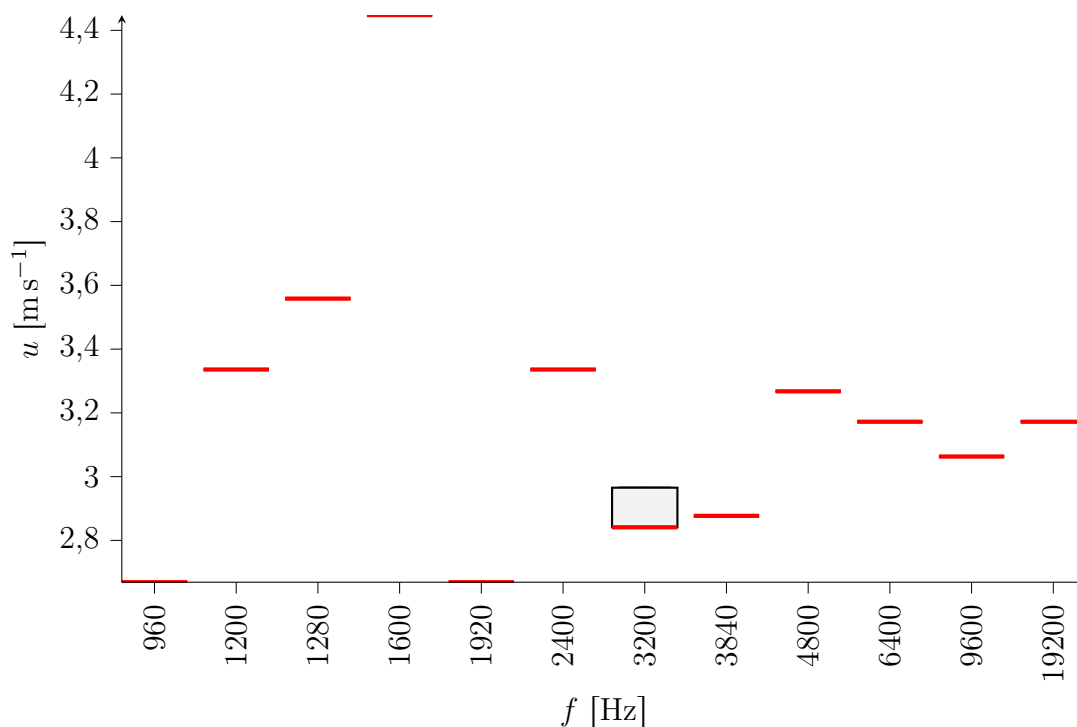
Слика. В.4: Утицај дужине снимања на вредност брзине струјања мешавине.

### В.2.3 Осетљивост мерења угла вектора брзине

Анализа осетљивости мерења интензитета брзине резистивним сензором коришћеним у овој дисертацији, спроведена је за потребе пројекта бране са степенастим брзотоком у Институту за водопривреду "Јарослав Черни"(Starinaс, 2013). У истра-



Слика. В.5: Утицај учестаности снимања на вредност концентрације ваздуха.



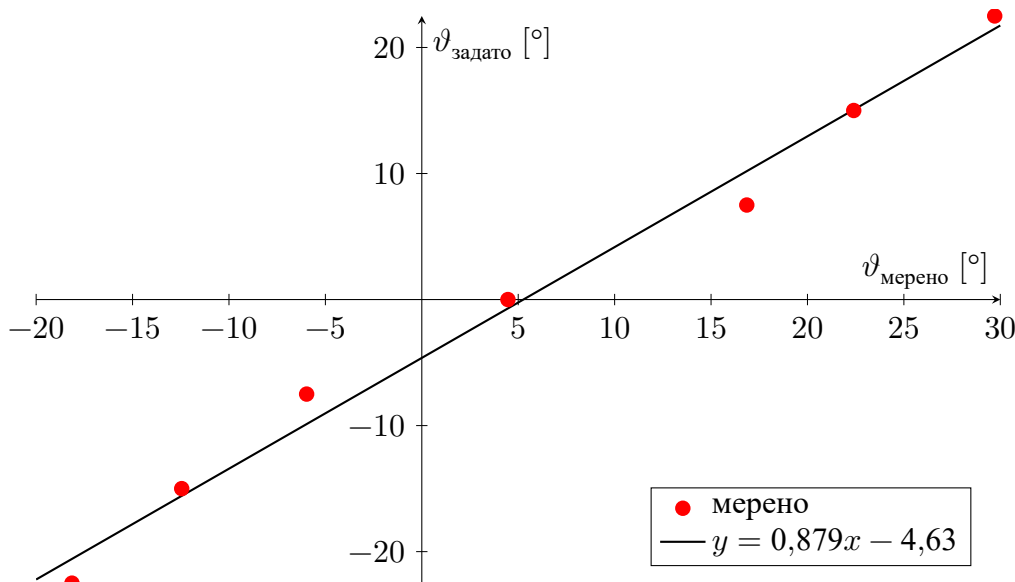
Слика. В.6: Утицај учестаности снимања на вредност брзине струјања мешавине.

живањима у оквиру ове дисертације, учињен је напор да се провери и осетљивост методе на угао струјања. За ову проверу, спроведена су два опита, при  $20 \text{ L s}^{-1}$  и при

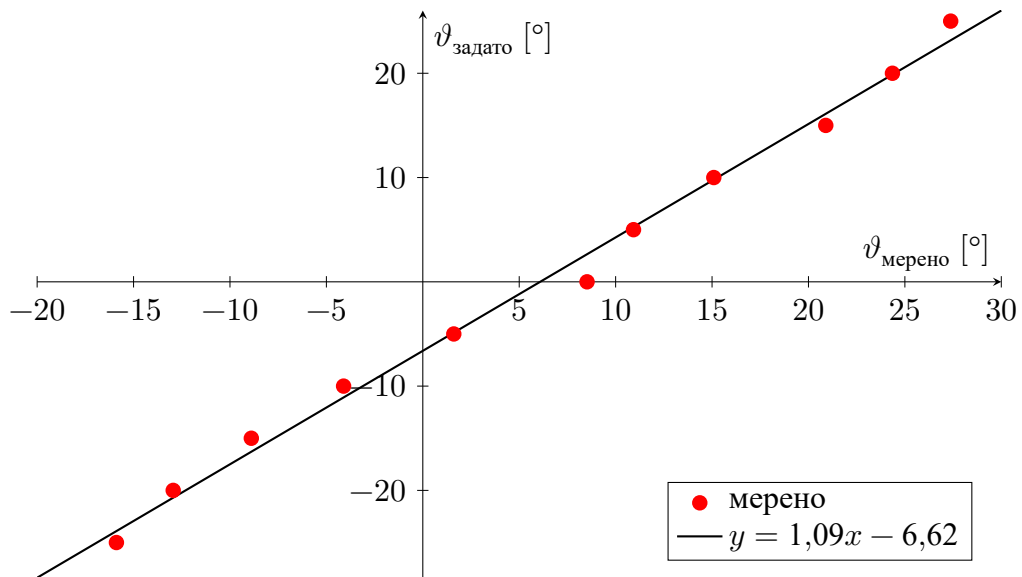
**Табела В.1:** Резултати мерења угла вектора брзине на моделу ГФ.

$Q = 20 \text{ L s}^{-1}$		$Q = 40 \text{ L s}^{-1}$	
$\vartheta_{\text{задато}} [^\circ]$	$\vartheta_{\text{мерено}} [^\circ]$	$\vartheta_{\text{задато}} [^\circ]$	$\vartheta_{\text{мерено}} [^\circ]$
-22,5	-18,14	-25	-15,89
-15	-12,45	-20	-12,94
-7,5	-5,97	-15	-8,89
0	4,47	-10	-4,11
7,5	16,85	-5	1,61
15	22,40	0	8,52
22,5	29,71	5	10,93
		10	15,09
		15	20,90
		20	24,36
		25	27,38

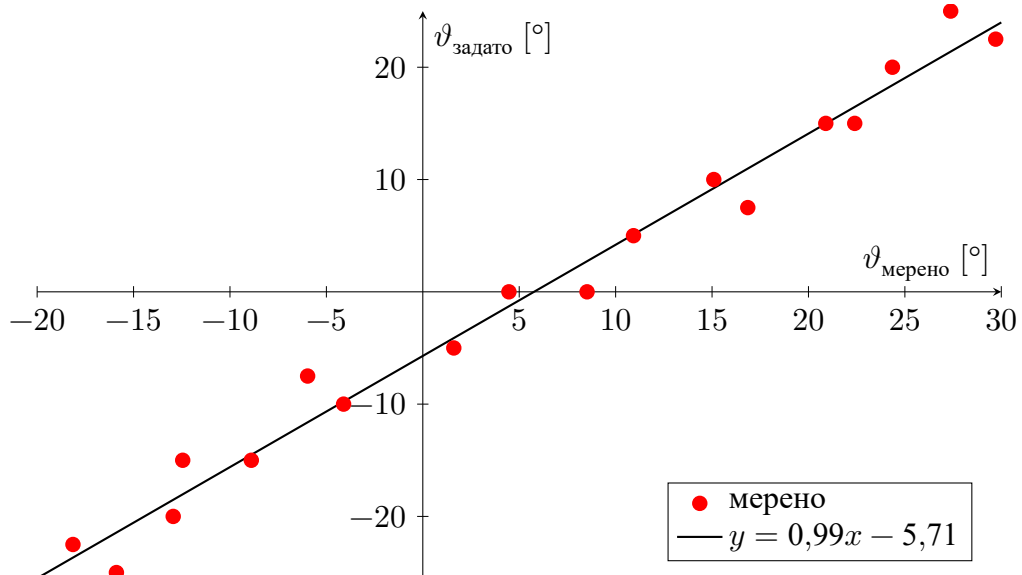
$40 \text{ L s}^{-1}$ . Резултати мерења, приказани су у Табели В.1. На Сликама В.7, В.8 и В.9 приказани су резултати апроксимације резултата мерења за сваки експеримент понаособ, као и за оба експеримента интегрално. Примећује се да се резултати у оба експеримента могу са задовољавајућом тачношћу апроксимирати правим линијама и да су одступања мала. такође, уочљиво је да је за оба мерења, нагиб праве приближно једнак 1 што је добар индикатор линеарности уређаја за мерење. Сва три резултата указују да постоји одступање мерене и задате нуле, што може бити последица грешака у мерењу димензија самог сензора.



**Слика. В.7:** Зависност измереног и задатог угла на моделу ГФ при протоку од  $20 \text{ L s}^{-1}$ .



Слика. В.8: Зависност измереног и задатог угла на моделу ГФ при протоку од  $40 \text{ L s}^{-1}$ .



Слика. В.9: Зависност измереног и задатог угла на моделу ГФ за оба протока.

# Биографија

Будо Зиндовић рођен је 27. септембра 1981. године у Београду. Основну и средњу школу завршио је у Београду. Основне студије на Грађевинском факултету Универзитета у Београду, уписао је 2000. године. Добитник је стипендије Краљевине Норвешке за остварен успех током студирања. Дипломирао је 2005. године као студент генерације на Одсеку за хидротехнику и водно-еколошко инжењерство са просечном оценом 9,24. Дипломски рад под називом “Моделирање струјања у заливу реке Саве применом модела раванског течења” из предмета Регулација река, оцењен је највишом оценом и награђен од стране Привредне коморе града Београда. На докторским студијама на Грађевинском факултету Универзитета у Београду, положио је све програмом предвиђене испите са просечном оценом 10.

На Грађевинском факултету запослен је од 2005. године као асистент на групи предмета Механика нестишљивог флуида и хидраулика и учествује у настави на основним и на мастер академским студијама. Учествовао је у изради документације и у реализацији међународних академских специјалистичких студија из области вода и еколошког инжењерства: EDUCATE! – Water Resources and Environmental Management, које су одржане заједно са универзитетима у Атини, Љубљани и Букурешту. У оквиру ових студија био је ангажован на предметима Stormwater Management, Integrated Flood Risk Assessment и Integrated Water Resource Management. Сарађивао је и у припреми књига: „Хидраулика“ проф. Радомира Капора (прво издање 2007. године, друго издање 2011. године и треће издање 2015. године) и „Механика флуида – књига трећа – Додатна поглавља“ проф. Георгија Хајдина (издање 2009. год.).

Члан је Српског друштва за хидрауличка истраживања (СДХИ) и Међународног друштва за хидро-еколошка истраживања (IAHR).

Ожењен је и отац је једног детета. Говори, чита и пише на српском и на енглеском језику.

## Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Будо Зиндовић

Број индекса 921/07

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Струјање у степенастом брзотоку са постепеним смањењем ширине корита

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

**Потпис аутора**

У Београду, 11.12.2017.

\_\_\_\_\_

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Будо Зиндовић

Број индекса 921/07

Студијски програм Грађевинарство

Наслов рада Струјање у степенастом брзотоку са постепеним смањењем ширине корита

Ментор проф. Др Љубодраг Савић, дипл. грађ. инж.

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис аутора**

У Београду, 11.12.2017.

---



## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

---

Струјање у степенастом брзотоку са постепеним смањењем ширине корита

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

**3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)**

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.  
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

**Потпис аутора**

У Београду, 11.12.2017.

---

1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.