



PD 17099



003114540

COBISS •

Univerzitet u Beogradu  
Građevinski fakultet

Raiko M. Salafić

ANALIZA I KONTROLA PONAŠANJA  
ČELIČNIH RAMOVA PRI DEJSTVU  
ZEMLJOTRESA

Doktorska disertacija

Beograd, 2000. godina



11 202000



PH - 17055

UNIVERZITET U BEOGRADU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Ratko M. Salatić

ANALIZA I KONTROLA PONAŠANJA  
ČELIČNIH RAMOVA PRI DEJSTVU  
ZEMLJOTRESA

Doktorska disertacija

Beograd, 2000. godina

УНИВЕРЗИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА  
"СВЕТОЗАР МАРКОВИЋ" - БЕОГРАД  
91 Н. Бр. 114540



*Mentor:*                      Profesor dr Miodrag Sekulović  
Građevinski fakultet u Beogradu

*Članovi Komisije:*    1. \_\_\_\_\_  
   2. \_\_\_\_\_  
   3. \_\_\_\_\_  
   4. \_\_\_\_\_  
   5. \_\_\_\_\_

*Datum odbrane*  
*doktorske disertacije:* \_\_\_\_\_

*Datum promocije*  
*doktorske disertacije:* \_\_\_\_\_





# Analiza i kontrola ponašanja čeličnih ramova pri dejstvu zemljotresa

## Rezime

Predmet ove doktorske disertacije je seizmička materijalno-geometrijska nelinearna analiza čeličnih ramova sa polukrutim, ekscentričnim i viskoznim vezama greda-stub. U radu su uključene obe nelinearnosti, geometrijska nelinearnost strukture i materijalna nelinearnost veza, koje su razmatrane simultano. Fleksibilnost krajeva grede modelirana je pomoću rotacionih opruga na njenim krajevima sa nelinearnom relacijom moment-rotacija definisanom pomoću triparametarskog modela. Ekscentričnost veze predstavljena je kratkim beskonačno krutim elementima. Usvojeni numerički model grednog konačnog elementa ima isti broj stepeni slobode kao kod sistema sa krutim vezama u konvencionalnoj analizi ramova sa krutim vezama. Viskozno prigušenje u vezi proporcionalno je brzini promene ugla relativne rotacije modelirano je pomoću rotacionih viskoznih prigušivača. Za takav model grede izvedena je kompleksna fleksiona matrica krutosti elementa. Sprovedena je parametarska analiza da bi se utvrdio uticaj fleksibilnosti veze, ekscentričnosti veze, viskoznog prigušenja i teorije drugog reda na seizmički odgovor konstrukcije. Rezultati nekoliko primera proračuna prikazani su na ilustrativnim dijagramima i slikama.

U radu su takođe razmatrani sistemi za kontrolu ponašanja konstrukcije preko posebno dodatih konstruktivnih elemenata kao što su frikcionni spregovi i disipativne čvorne veze. Disipativne čvorne veze predložene su i prikazane kao jednostavan, jeftin i efikasan način zaštite konstrukcije od incidentnog dejstva zemljotresa. On se može ostvariti tehničkim modifikacijama postojećih veza greda-stub, kako bi se ostvario potreban nivo prigušenja. Kao rezultat predloženog računskog modela seizmičke analize i oblika kontrole ponašanja konstrukcije, napravljen je računarski program kojim je omogućena efikasna seizmička analiza i proračun čeličnih ramova.

**Ključne reči:** čelični ramovi, nelinearna dinamička analiza, polukrute ekscentrične veze, viskozno prigušenje, disipativne čvorne veze, frikcionni spregovi



# Analysis and Response Control of Steel Frames Subjected to Earthquakes

## Abstract

The subject of the thesis is seismic analysis of steel plane frames with nonlinear semi-rigid and eccentric beam-to-column connections. A numerical model that includes both nonlinear connection behaviour and geometric nonlinearity of the structure is developed. A flexible connection is modelled by rotational spring with nonlinear moment rotation relationship using threeparameter power model. The changes in element stiffness matrix introduced by eccentricity due to finite dimensions of beam-column assemblage. The presented numerical model of beam element has the same number of degrees of freedom as the corresponding model in the conventional analysis used for the frames with fully rigid connections. Viscous damping due to relative rotational velocity in connections is also introduced and modelled by attaching viscous rotational dashpots at beam ends. The flexural complex stiffness matrix for a beam element with semi-rigid connections and viscous rotational dashpots is evaluated. A parametric study has been performed in order to estimate the influence of connection flexibility, connection eccentricity, viscous damping and second order theory on steel frame seismic response. The results of several example calculations have been presented with illustrative diagrams and figures.

It is also considered two types of passive structure control systems: friction braces and dissipative joint connections. The dissipative joint connection passive control proposed and presented as very simply, inexpensive and efficient way to protect structures during strong earthquakes. This passive system control need only some modification in beam-to-column connection design in order to achieve predicted level of damping.

Based on theoretical problem formulation, a computer program is developed to increase efficiency of steel frames seismic analysis and design.

**Key words:** steel frames, nonlinear dynamic analysis, semi-rigid eccentric connections, viscous damping, dissipative joint connections, friction braces



*Mojím rodičům  
Milici i Mirku*



---

# Sadržaj

---

Sadržaj	1
Predgovor	3
1 Uvod	7
1.1 Seizmički proračun zgrada . . . . .	7
1.2 Kontrola ponašanja konstrukcije pri seizmičkom dejstvu . . . . .	9
1.3 Odgovor čeličnih zgrada na dejstvo zemljotresa . . . . .	10
1.4 Polazne pretpostavke analiza i proračuna . . . . .	13
2 Polukrute veze u čeličnim ramovskim konstrukcijama	17
2.1 Uvod . . . . .	17
2.2 Polukrute veze . . . . .	17
2.2.1 Modeliranje polukrute veze pri monotonom opterećenju . . . . .	18
2.2.2 Ponašanje polukrutih veza pri cikličnom opterećenju . . . . .	24
2.3 Ekscentričnost čeličnih veza . . . . .	28
3 Statička analiza rama sa polukrutim ekscentričnim vezama	31
3.1 Uvod . . . . .	31
3.2 Dvodimenzionalni konačni gredni element . . . . .	32
3.2.1 Uticaj polukrutih veza . . . . .	32
3.2.2 Uticaj ekscentričnih veza . . . . .	37
3.2.3 Uticaj polukrutih i ekscentričnih veza . . . . .	38
3.2.4 Matrica krutosti grede . . . . .	39
3.2.5 Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja . . . . .	44
3.3 Inkrementalno-iterativni postupak . . . . .	45
3.4 Primeri . . . . .	46
4 Dinamička analiza rama sa polukrutim, ekscentričnim i viskoznim vezama	55
4.1 Uvod . . . . .	55
4.2 Oscilacije neprigušenog sistema . . . . .	56
4.2.1 Matrica mase . . . . .	56
4.2.2 Jednačine kretanja . . . . .	58
4.3 Oscilacije prigušenog sistema . . . . .	62

4.3.1	Oblici prigušenja . . . . .	62
4.3.2	Konzistentna matrica prigušenja grednog elementa . . . . .	65
4.3.3	Proporcionalno prigušenje . . . . .	65
4.3.4	Neproporcionalno prigušenje . . . . .	67
4.3.5	Generalisani kvadratni problem svojstvenih vrednosti . . . . .	68
4.3.6	Matrica prigušenja grede sa polukrutim vezama . . . . .	70
4.4	Procena koeficijenta prigušenja u vezi . . . . .	73
4.5	Integracija jednačine kretanja . . . . .	74
4.5.1	Inkrementalna jednačina dinamičke ravnoteže . . . . .	75
4.5.2	Newmark-ov postupak konstantnog ubrzanja . . . . .	76
4.6	Polukruta veza pri dinamičkom opterećenju . . . . .	87
4.7	Uticaji teorije drugog reda . . . . .	90
4.7.1	Kombinacija statičkog i dinamičkog opterećenja . . . . .	95
4.7.2	Inkrementalna formulacija geometrijski nelinearne analize . . . . .	96
5	Kontrola ponašanja konstrukcija pri dejstvu zemljotresa . . . . .	105
5.1	Uvod . . . . .	105
5.2	Pasivna kontrola . . . . .	106
5.3	Aktivna kontrola . . . . .	107
5.4	Seizmička izolacija . . . . .	108
5.5	Frikcioni spregovi . . . . .	110
5.5.1	Numerički proračun ramova sa frikcionim spregovima . . . . .	113
5.6	Disipativne čvorne veze . . . . .	118
6	Računarski program SASF - Seismic Analysis of Steel Frames . . . . .	125
6.1	Uvod . . . . .	125
6.2	Osnovne karakteristike programa . . . . .	126
6.3	Ulazni podaci za program . . . . .	127
6.4	Primer . . . . .	130
7	Zaključak . . . . .	133
	Prilozi . . . . .	135
	A Oznake . . . . .	137
	B Pregled korišćenih matrica . . . . .	139



---

## Predgovor

---

U savremenom pristupu projektovanja i proračuna seizmički otpornih čeličnih zgrada zahteva se analiza na što realnijim računskim modelima, kao i kontrola ponašanja konstrukcija usled incidentnog seizmičkog opterećenja. Konvencionalne metode statičke i dinamičke analize okvirnih čeličnih konstrukcija zasnovane su na pretpostavci o idealnim čvornim vezama, tj, vezama koje su totalno krute ili idealno zglobne. Međutim, na osnovu mnogobrojnih ispitivanja zaključeno je da su veze realno polukrute, a da je veza momenat-rotacija na kraju linijskih elemenata nelinearna skoro u celom opsegu opterećenja generalno za sve tipove veza. Pored utvrđene fleksibilnosti veza, postoji i veća ili manja ekscentričnost veza, koja može izazvati značajnije promene uticaja u konstrukciji.

U okviru najnovijih zahteva u aseizmičkom proračunu, kontrole ponašanja konstrukcija, utvrđen je značaj projektovanja i ugradnje-posebnih konstruktivnih elemenata koji imaju bitnu ulogu u smanjenju ili potpunom eliminisanju oštećenja kako konstruktivnih tako i nekonstruktivnih elemenata konstrukcije. Ti elementi svoju ulogu uglavnom ostvaruju značajnom disipacijom energije koja je predata objektu sistemu pri seizmičkom opterećenju, i na taj način zaštićuju ostale elemente konstrukcije od oštećenja.

Predmet ove doktorske disertacije je seizmička materijalno-geometrijska nelinearna analiza čeličnih ramova sa polukrutim, ekscentričnim i viskoznim vezama greda-stub. Takođe su razmatrani sistemi za kontrolu ponašanja konstrukcije preko posebno dodatih konstruktivnih elemenata kao što su frikcioni spregovi i čvorne disipativne veze. Posebna pažnja posvećena je i efektima teorije drugog reda, koji mogu biti od presudnog značaja za fleksibilne konstrukcije kao što su čelični ramovski sistemi. Na taj način u radu su uključene obe nelinearnosti, geometrijska nelinearnost strukture i materijalna nelinearnost veza, koje su razmatrane simultano. Materijalna nelinearnost problema se pojavljuje samo u vezama linijskih elemenata, dok se svi ostali delovi sistema razmatraju u domenu elastičnog ponašanja, pa je na taj način ostvarena bitna racionalizacija i efikasnost proračuna, koji je kao takav primenljiv i u standardnim inženjerskim proračunima.

Kao rezultat predloženog računskog modela seizmičke analize i oblika kontrole ponašanja konstrukcije, napravljen je računarski program kojim je omogućen efikasan proračun i pomoću kojeg su sprovedene odgovarajuće parametarske analize.

## Kratak sadržaj rada

Rad se sastoji iz sedam poglavlja i dva priloga. U okviru tih poglavlja definisani su postupci, koji daju potpunu teorijsku osnovu za kvalitetnu savremenu seizmičku analizu čeličnih konstrukcija.

U prvom, uvodnom poglavlju, razmatrani su principi savremenih tendencija za projektovanje aseizmičkih objekata, sa posebnim osvrtom na čelične zgrade. Za najčešće primenjivane čelične konstruktivne sisteme objašnjen je mehanizam prijema seizmičke energije. Navedene su glavne polazne pretpostavke koje su bile osnov za predloženu seizmičku analizu ramovskih sistema. Na kraju poglavlja dat je kratak opis razvijenog računarskog programa koji je primenjivan u razmatranim proračunima.

U drugom poglavlju su prikazane dve veoma bitne osobine čeličnih veza greda-stub: fleksibilnost i ekscentričnost veza. Na osnovu brojnih eksperimentalnih istraživanja u dužem nizu godina razvijen je veći broj modela za proračun i analizu ramova sa polukrutim vezama. Dat je pregled najznačajnijih publikovanih modela za statičku i dinamičku analizu. Detaljnije su obrađeni usvojeni modeli za proračun, triparametarski model za statičku i model sa nezavisnim ojačanjem za dinamičku analizu. Na kraju poglavlja istaknut je značaj razmatranja ekscentriciteta kod čvornih veza.

Gredni konačni element sa polukrutim ekscentričnim vezama obrađen je u trećem poglavlju. Jednostavna formulacija elementa omogućava primenu u računarskim programima čiji je proračun zasnovan na Metodi konačnih elemenata. U okviru ovog poglavlja analizirano je ponašanje konstrukcije samo pod dejstvom statičkog opterećenja, pri čemu su uzeti uticaji i po teoriji drugog reda. Objasnjeno je inkrementalno iterativan postupak koji je primenjen u proračunu.

U četvrtom poglavlju opisana je primena prethodno definisanog konačnog elementa u dinamičkoj analizi. Efekti disipacije energije i prigušenja sistema u čvorovima obuhvaćeni su sa pretpostavljenim viskozim prigušenjem u samoj vezi greda-stub. Matematičkom formulacijom i fizičkom interpretacijom, obrađen je problem uvođenja ovog tipa prigušenja u proračun. Izvedena je konzistentna matrica masa za gredni element sa polukrutim vezama, kao i matrica prigušenja za pretpostavljeno viskozno prigušenje u vezama. Određenim postupkom sprovedena je procena vrednosti koeficijenta viskoznog prigušenja u vezi za određeno relativno prigušenje sistema.

Značaj primene teorije drugog reda u dinamičkom proračunu analiziran na ramovima sa različitim tipovima veza greda-stub. Zatim je obrađena strožija P-Delta analiza u kojoj se ne usvaja pretpostavka da su aksijalne sile u elementima konstantne za vreme dejstva zemljotresa. Na primeru jednog rama upoređeni su rezultati sa uobičajenom P-Delta analizom.

U petom poglavlju prikazani su osnovni principi kontrole ponašanja konstrukcije u cilju eliminisanja neprihvatljivog odgovora sistema pri dejstvu zemljotresa. Usvojena su dva sistema sa primenom pasivne kontrole konstrukcija. Prvi predstavljaju frikcionni spegovi koji se mogu primeniti u različitim tipovima konstrukcija. Formiran je konačni element za modeliranje uticaja ovih disipativnih spregova, a zatim je utvrđena njihova efikasnost u kontroli ponašanja sistema. Drugi sistem kontrole ostvaren je preko disipativnih čvornih veza modeliranim pomoću rotacionog viskoznog klipa na kraju grednih elemenata.

Seizmički proračun za ramove sa analiziranim sistemima kontrole sproveden je na primeru desetospratnog čeličnog rama sa polukrutim vezama.

Šesto poglavlje sadrži opis razvijenog računarskog programa za seizmičku analizu čeličnih ramova u ravni. Detaljno su prikazani potrebni ulazni podaci, kao i jedan ilustrativan primer.

U sedmom poglavlju izvedeni su zaključci rada i istraživanja.

U prvom prilogu, prilog A, prikazane su oznake koje su korišćene u radu. Oznake koje nisu navedene u dodatku objašnjene su na mestu na kome se prvi put pojavljuju u tekstu. U prilogu B dat je pregled matrica koje su korišćene u proračunu primenom Metode konačnih elemenata.

\* \* \*

Želim ovom prilikom da se zahvalim mentoru ove doktorske disertacije Prof. dr Miodragu Sekuloviću, na pomoći, podršci, konsultacijama i sugestijama koje mi je pružio u toku izrade rada.



# Uvod

---

## 1.1 Seizmički proračun zgrada

Aktuelnost konstantnog razvoja savremenog seizmičkog proračuna je uslovljena činjenicom da postoji stalna potreba izgradnje građevinskih objekata u brojnim trusnim područjima na Zemlji.

Metode dinamičke analize, bazirane na linearno elastičnim pretpostavkama, mogu se konvencionalno, ekonomično i jednostavno sprovesti, pri čemu se ti proračuni uobičajeno oslanjaju na veći koeficijent sigurnosti. Određivanje uticaja u elementima konstrukcija izloženih seizmičkim dejstvima pomoću linearne dinamičke analize, ne može dati zadovoljavajući odgovor na pitanje o stvarnom ponašanju konstrukcija izloženih dejstvu srednjih, a posebno jakih zemljotresa. U linearnoj teoriji pretpostavlja se da za vreme delovanja zemljotresa konstrukcija zadržava istu krutost i istu vrednost prigušenja. Ova pretpostavka je daleko od stvarnog ponašanja, jer je dobro poznato da se sa porastom intenziteta seizmičkih sila pojavljuju plastificirana područja, pa se krutost konstrukcije menja. Sa porastom napona i deformacija raste prigušenje, koje je u direktnoj vezi sa sposobnošću konstrukcije da apsorbuje seizmičku kinetičku energiju. Drugim rečima, ponašanje konstrukcija izloženih dejstvu srednjih i jakih zemljotresa je nelinearno, jer pomeranja i ostali uticaji u konstrukciji ne rastu proporcionalno sa porastom intenziteta seizmičkih sila.

Za racionalno projektovanje aseizmičkih objekata i određivanje realnog odgovora konstrukcije, važna je mogućnost kvalitativne i kvantitativne procene nelinearnog ponašanja sistema. Za razliku od linearne dinamičke analize, pomoću koje se dobijaju rezultati uz relativno mali trošak, nelinearna dinamička analiza, čak i u pojednostavljenom obliku, zahteva znatno veći utrošak vremena i novca. Nelinearnu analizu karakteriše veći broj ulaznih podataka, a takođe i manja numerička pouzdanost i tačnost ovih podataka. Na osnovu ovih karakteristika može se postaviti pitanje opravdanosti nelinearnog proračuna, jer se dobijena tačnost rezultata mora uzeti sa određenom rezervom. Ipak, i pored ovih osobina, nelinearna analiza ima sve značajniju primenu u praktičnim proračunima, jer za zemljotrese većeg intenziteta, jedino se na osnovu ove analize može dati odgovarajuća kvalitativna ocena ponašanja konstrukcije, a pitanje kvantitativne ocene ostaje još uvek predmet daljih proučavanja.

Nelinearni seizmički proračun razvijao se u dva pravca. Prvi pravac se zasnivao na teorijskim istraživanjima sa ciljem iznalaženja dovoljno pouzdanih, i po mogućnosti brzih i jeftinih računskih postupaka, za analizu konstrukcija sa nelinearnim ponašanjem. Sa druge strane, vršila su se intenzivna eksperimentalna istraživanja sa ciljem da se dobiju realni ulazni podaci za dalju numeričku analizu nelinearnog odgovora konstrukcije, kao i



da se provere rezultati već izvršenih numeričkih analiza.

Nelinearna seizmička analiza objekata je kompleksan i obiman problem. Sa ovom tematikom objavljen je velik broj eksperimentalnih i teorijskih radova, ali još uvek nije usvojen konačan model za proračun konstrukcija, pa je ova problematika ostala i dalje veoma aktuelna s obzirom na neophodnost projektovanja seizmički otpornih objekata. Iako nije usvojen i propisima definisan postupak nelinearnog seizmičkog proračuna, na osnovu dosadašnjeg iskustva u projektovanju seizmički otpornih zgrada i ponašanja objekata koje su pretrpele intenzivne zemljotrese, opšti principi i preporuke za projektovanje su relativno detaljno utvrđeni i prihvaćeni.

Najnoviji pristup u nelinearnoj dinamičkoj analizi je bitna racionalizacija proračuna. Problem nelinearnosti ponašanja konstrukcija je lokalizovan i sužen samo na pojedine elemente i delove sistema, dok se za preostale elemente smatra da je njihovo ponašanje u domenu elastičnosti. Ova pretpostavka je veoma blizu realnog ponašanja konstrukcija pri incidentnom dejstvu zemljotresa, jer na primer, kod ramovskih sistema samo se čvorovi, veze linijskih elemenata i specijalno projektovani disipativni elementi ponašaju nelinearno. Ovakav pristup je primenjen i u ovom radu.

Specifičnost jačih zemljotresa je izazivanje značajno većih uticaja u konstrukciji u odnosu na druga opterećenja i mala verovatnoća pojave u eksploatacionom veku konstrukcije. Te osobine zemljotresnih dejstava dovode do zaključka da je neekonomično projektovanje konstrukcija bez oštećenja. Za zemljotrese slabijeg intenziteta, čija je verovatnoća pojave za vreme predviđenog veka konstrukcije znatno veća, treba iz ekonomskih razloga izbeći neopravdane česte i skupe popravke i sanacije. Prilikom projektovanja zahteva se da se objekti ponašaju elastično u slučaju dejstva zemljotresa malog intenziteta, dok u slučaju delovanja zemljotresa srednjeg ili velikog intenziteta, da bi se sačuvao integritet i sigurnost konstrukcije i minimizirao rizik od velike ljudske i materijalne štete, mora se uzeti u obzir mogućnost nelinearnog ponašanja. Odnosno, analiza konstrukcija obavljena na osnovu pretpostavke o linearnoj elastičnosti ne može biti primenljiva kod jačih zemljotresa, gde je logično očekivati veća oštećenja, već se mora postaviti drugi računski model približniji stvarnosti.

Kod projektovanja objekata u zemljotresnom inženjerstvu zahteva se da konstrukcije poseduju sposobnost apsorpcije i disipacije predate energije, i da se energetska ravnoteža postiže preko neelastičnih deformacija konstrukcija, a da pri tome ne dođe do rušenja pojedinih spratova i konstruktivnih celina. Pri najintenzivnijem očekivanom zemljotresu, za koji se pretpostavlja da može zadesiti objekat, ne sme doći do njegovog rušenja i pored dozvoljenih značajnih oštećenja, ali mora da zadrži svoj integritet u određen deo nosivosti po prestanku dejstva zemljotresa. Izuzetak od ovakvog stava su objekti od izuzetnog značaja, za koje nisu dozvoljena veća oštećenja. Najnovijim propisima nekih zemalja, pored provere graničnih stanja nosivosti, koji se odnose na granična stanja rušenja ili druge oblike loma konstrukcije, utvrđuje se i provera graničnih stanja upotrebljivosti. Na taj način se zahteva da u slučaju manjih i češćih zemljotresa, objekat mora da ostane u potpunoj funkciji, a oštećenja da budu beznačajno mala. Praksa je pokazala da se najveća seizmička otpornost konstrukcije postiže pravilnim izborom dispozicije objekta, kako u osnovi, tako i po visini, pravilnim konstruisanjem karakterističnih elemenata i detalja konstrukcije, kao i dobrim izvođenjem objekta.

Postizanje željenih aseizmičkih karakteristika, koje se generalno mogu opisati kao duk-

tilitet, može se ostvariti samo ako se izbegnu potencijalni krti lomovi. Najkarakterističniji i istovremeno najneželjeniji krti lom je od smičućih sila. Krti lom izazvan efektima smičućih sila onemogućuje dostizanje graničnog momenta, graničnih pomeranja, a time i razvijanje procesa energetske ravnoteže, pri čemu je krajnji ishod prerani lom napregnutog elementa. Potrebnu seizmičku otpornost konstrukcije treba po pravilu postići kombinacijom manje nosivosti i veće duktilnosti, kojom se suštinski pretpostavlja nelinearni odgovor sistema. Kod izrazito duktilnih konstrukcija može se izvršiti veća redukcija nosivosti u odnosu na linearnu analizu. Donja granica krutosti se mora ostvariti kako bi se konstrukcija sačuvala od oštećenja kod slabih i češćih zemljotresa. Pored toga ne sme se dozvoliti da dođe do kolapsa konstrukcije usled efekata teorije drugog reda. Često se aktuelnim propisima najveći broj objekata proračunava primenom linearne elastične analize sa redukovanim seizmičkim opterećenjem koje zavisi od duktiliteta i sopstvenih perioda oscilovanja. Takav postupak se naziva metoda faktora duktiliteta. Maksimalno očekivana pomeranja se određuju množenjem dobijenih pomeranja konstrukcije sa faktorom duktiliteta. Za konstrukcije sa velikom krutošću primenjuje se princip jednakih radova za pretpostavljeno linearno i nelinearno (duktilno) ponašanje sistema. Što je konstrukcija kruća može se ostvariti manja redukcija seizmičke sile.

Poslednjih godina u seizmičkom proračunu popularizovana je metoda programiranog ponašanja u odnosu na metode kapaciteta duktiliteta i nosivosti. Suština ove metode je da se unapred izaberu duktilni elementi (elementi koji će se ponašati nelinearno), plastični zglobovi koji mogu formirati mehanizme sa velikom sposobnošću apsorpcije i disipacije seizmičke energije, a koji ne ugrožavaju egzistenciju konstrukcije. Na taj način samo neki elementi konstrukcije se plastifikuju, dok naprezanja u ostalim delovima konstrukcije ostaju u elastičnom području. Pri izboru projektovanih duktilnih elemenata mora se voditi računa, da se ti elementi nalaze na mestima gde je jednostavno obezbediti zahtevane kapacitete rotacije i da se oštećena mesta mogu lako popraviti.

Na osnovu detaljnih analiza i razmatranja nakon poslednjih katastrofalnih zemljotresa postojećih sistema čeličnih zgrada, došlo se do zaključka da apsorpciju seizmičke energije treba ostvariti na sasvim drugi način, kako bi se u potpunosti sprečila oštećenja konstruktivnih elemenata. Tako se javila potreba za razvojem posebnih elemenata u konstrukciji čija je funkcija samo disipacija seizmičke energije.

## 1.2 Kontrola ponašanja konstrukcije pri seizmičkom dejstvu

Razvojem različitih oblasti tehnike, pre svega računarske tehnike, automatike i novih tehnoloških materijala, stvorila se mogućnost za nov pristup rešavanja problema projektovanja zgrada otpornih na dejstvo zemljotresa. Pored toga, značaj faktora koji utiču na usvajanje i definisanje koncepta projektovanja aseizmičkih objekata nije ostao isti. Osnovnim načelom, sprečavanju kolapsa sistema i oštećenja bitnih konstruktivnih elemenata, dodat je još jedan kriterijum. Ekonomski faktor popravki oštećenja se sve više uzima u obzir. Šteta usled dva poslednja katastrofalna zemljotresa u Americi, Loma Prieta i Northridge, bila je preko 50 biliona dolara, dok je procena štete posle zemljotresa u Kobe-u (Japan) iznosila oko 150 biliona dolara. Ti poslednji zemljotresi su jasno pokazali

da savremene i tehnološki usavršene zgrade nisu imune na oštećenja koja se u ekonomskom smislu ne mogu zanemariti.

Novi zahtevi za projektante i konstruktore su postali seizmički otporni objekti kod kojih neće doći do bilo kakvih oštećenja kako konstruktivnih tako i nekonstruktivnih elemenata sistema. Ovi zahtevi su rešeni posebno projektovanim uređajima, sistemima ili konstruktivnim elementima, pomoću kojih može da se kontroliše ponašanje konstrukcije pri dejstvu zemljotresa. Na taj način odgovor sistema i pri incidentnom zemljotresu je u predviđenim granicama, pri kojima su elementi konstrukcije ostali napregnuti samo u domenu elastičnosti materijala, pa nema neželjenih deformacija ili oštećenja.

U zavisnosti od izbora sistema za kontrolu ponašanja razlikuje se pasivna i aktivna kontrola ponašanja konstrukcije. Pasivna kontrola zasniva se na redukciji dinamičkog odgovora sistema usled zemljotresa na osnovu smanjenja seizmičkih sila ili smanjenja seizmičke energije koja se predaje konstrukciji. Aktivna kontrola konstrukcije ostvaruje se pomoću uređaja sa eksternim napajanjem, koji na osnovu informacije o stanju konstrukcije nakon spoljnih dejstava deluje na nju korektivnim silama u realnom vremenu, u cilju dobijanja željenog odgovora sistema.

Ranije se samo za značajne objekte projektovala primena kontrole ponašanja konstrukcije, dok je danas ona aktuelna kod znatno većeg broja objekata.

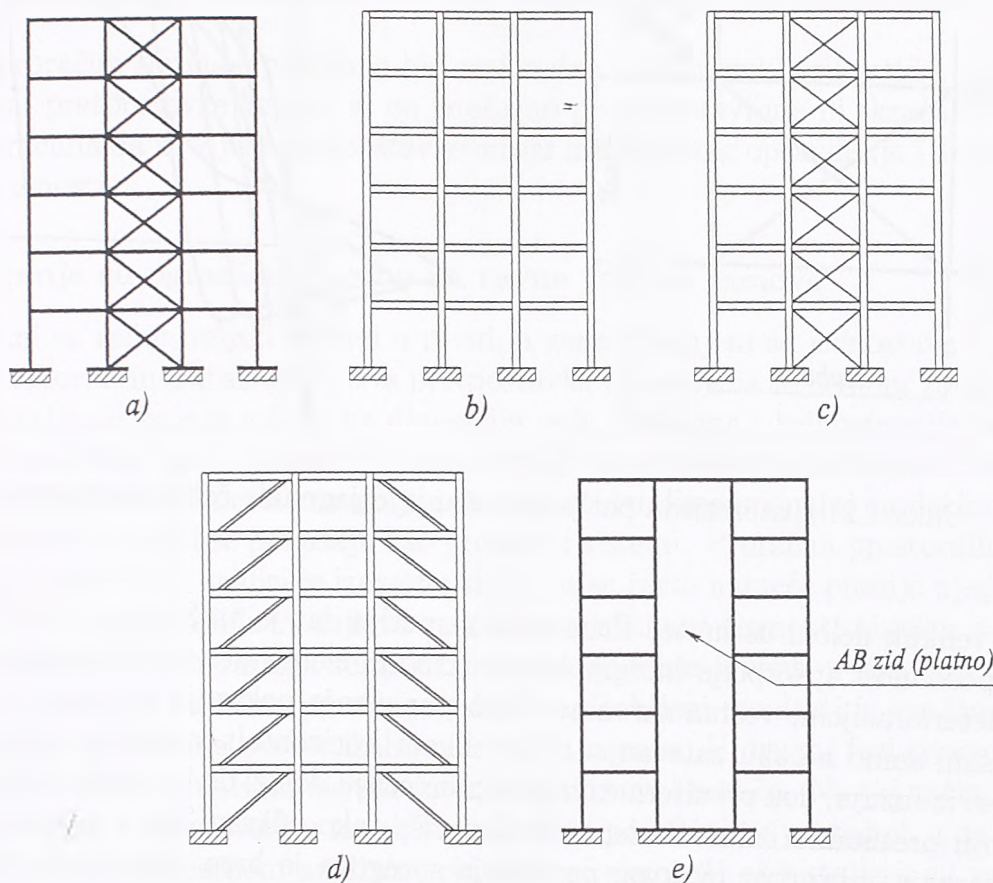
### 1.3 Odgovor čeličnih zgrada na dejstvo zemljotresa

Uobičajeno je mišljenje da su čelične zgrade po pravilu otporne na dejstvo zemljotresa, zato što poseduju osobine koje su značajne kod građenja aseizmičkih objekata. Zgrade su manje mase, materijal velike čvrstoće, ujednačenih osobina kako kod pritiska tako i kod zatezanja, velike sposobnosti plastičnog deformisanja i stabilnog histerezisnog ponašanja.

Međutim, iskustva poslednjih zemljotresa, koji su se desili u Sjedinjenim Američkim Državama, San Fernando (1971), Loma Prieta (Santa Cruz, 1989), Northridge (1994), i Japanu, Kobe (1995), ukazala su na inženjerski i ekonomski neprihvatljiva oštećenja kod čeličnih konstrukcija. Naročito značajna iskustva su definisana nakon zemljotresa Northridge [6, 7, 8]. Čelični ramovi smatrani su za najduktilnije i najpovoljnije konstrukcije za primenu u seizmički aktivnim područjima. Iako nije došlo do kolapsa sistema, zemljotres je izazvao oštećenja u mnogo većem obimu nego što su projektanti i konstruktori mogli da očekuju. Oštećenja su se ispoljila i kod propisima usaglašenih objekata, pravilno projektovanih i tehnološki dobro izvedenih, što je stvorilo sumnju u ispravnost prihvaćenih principa konstruisanja i važećih standarda i propisa za projektovanje aseizmičkih čeličnih zgrada. Uočeni različiti mehanizmi lomova i oblici deformacija ukazuju na više presudnih faktora u pojavi oštećenja. Drugim rečima, dejstvo zemljotresa Northridge je pokazalo da je veoma opasno i nerealno tvrditi da se duktilno ponašanje konstrukcije pri zemljotresu može ostvariti propisivanjem pojednostavljenih pravila pri projektovanju [9].

Na osnovu iscrpno prikupljenih podataka, zaključeno je da veoma bitnu ulogu u odgovoru i ponašanju čeličnih konstrukcija imaju čvorne veze, jer se baš u tim delovima konstrukcije desio najveći deo oštećenja. Dobra osobina čelika kao duktilnog građevinskog materijala nije došla do izražaja, već su se desili krti, veoma nepovoljni lomovi ili lokalna post-elastična izbočavanja elemenata kod zavarenih čvornih veza.





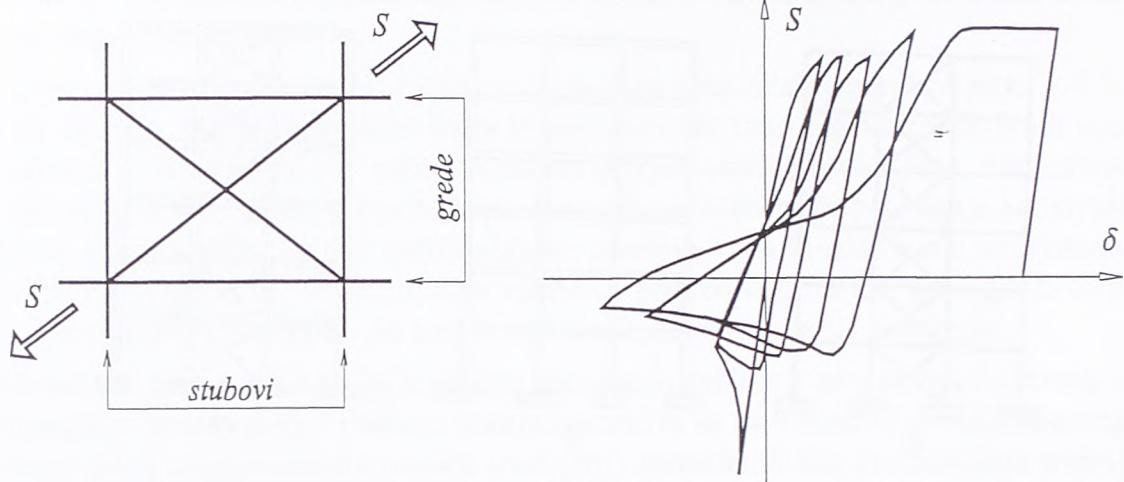
Slika 1.1: Osnovni konstruktivni sistemi čeličnih zgrada

Veze ostvarene preko zavrtnjeva imaju prednost, u pogledu zahtevanog seizmičkog ponašanja, nad često primenjivanim, za izvođenje znatno jeftinijim, zavarenim vezama. Pri dejstvu zemljotresa veliki deo apsorpcije predate energije ostvaruje se u čvorovima čeličnih ramova. Materijalna nelinearnost karakteristična za dejstvo jačih zemljotresa takođe se najvećim delom ostvaruje u ovim konstruktivnim elementima sistema, pa je u proračunu potrebno što približnije obuhvatiti sve ove fenomene. Drugim rečima, veze stubova i greda u čeličnim ramovskim sistemima treba tretirati kao polukrute, nelinearne, ekscentrične i disipativne veze.

Čelične konstrukcije su u principu relativno fleksibilni sistemi, tako da pri horizontalnim opterećenjima dolaze do izražaja efekti teorije drugog reda. Oni su vrlo često merodavni kriterijum za dimenzionisanje. Uvođenjem i teorije drugog reda u dinamičku materijalno nelinearanu analizu, proračun postaje znatno komplikovaniji. Iz tih razloga problemu treba pristupiti i sa inženjerskog, a ne samo teorijskog aspekta, kako bi proračun ostao racionalan i primenljiv.

Postoji nekoliko standardnih sistema projektovanja čeličnih zgrada. Ukrućeni čelični ramovi su veoma popularni (Slika 1.1a), jer su ekonomični u prihvatanju bočnih sila usled vetra i umereno jakih zemljotresa. Međutim, za vreme jakih zemljotresa njihovo ponašanje nije zadovoljavajuće. Ako su ukrućeni ramovi krući, oni "privlače" veće seizmičke sile, a pored toga kapacitet disipacije energije je ograničen, jer su histerezisne petlje ponašanja





Slika 1.2: Histerezisna petlja ponašanja dijagonale čeličnog sprega

spregova velikim delom uštinute. Primer takve petlje dat je na Slici 1.2 [10]. Očigledno je da je sposobnost apsorpcije energije konstruktivnih elemenata, sa ovako uštinutim petljama i deterioracijom, veoma skromna. Isto ponašanje pokazuju i spregovi koji su dimenzionisani samo na silu zatezanja. Pri velikom horizontalnom opterećenju zategnuti elementi se izdužuju, dok pri alternativnom opterećenju dolazi do izvijanja. Pri ponovnom opterećenju prethodno izduženi elementi nisu više tako efikasni čak i kad su opterećeni silom zatezanja. Rezultat ovakvog ponašanja spregova je brza degradacija sposobnosti za apsorpciju seizmičke energije, pa i moguć kolaps sistema. U Kobe-u je za vreme zemljotresa nekoliko objekata ovog tipa pretrpelo rušenje [18].

Drugi popularni sistem u čeličnom konstrukterstvu su čelični ramovi, koji se horizontalnim silama suprotstavljaju momentima savijanja (Slika 1.1b). Oni imaju znatno bolje aseizmičke osobine prvenstveno zbog veće duktilnosti sistema i stabilnih i punih histerezisnih petlji bitnih konstruktivnih elemenata. Ipak, ove konstrukcije su dosta fleksibilne i veoma je izražen nepovoljan uticaj P-Delta efekta. Potrebna su relativno velika dodatna materijalna sredstva da bi se ograničila maksimalna međuspratna i horizontalna pomeranja i tako izbegla neprihvatljiva oštećenja.

Potreba za krućim sistemima dovela je do kombinacije prethodna dva sistema: duktilni ramovi ukrućeni centričnim (Slika 1.1c) ili ekscentričnim spregovima (Slika 1.1d), pri čemu su spregovi dimenzionisani da preuzmu samo deo horizontalnih sila. Poseban slučaj ovog sistema predstavljaju ekscentrično ukrućeni ramovi. Spregovi su ekscentrično postavljeni, kako bi pri izuzetnom horizontalnom opterećenju naterali da se aktivira neelastično ponašanje grede, u cilju povećanja disipacije seizmičke energije. Ovakvo ponašanje greda prouzrokuje i neizbežnu deformaciju ploča, pa je ukupna popravka i reparacija konstruktivnih i nekonstruktivnih elemenata veoma skupa i nepovoljna sa ekonomskog gledišta. Čelični ramovi se ukrućuju i armirano betonskim zidovima koji su skuplji i ograničavaju slobodu arhitektonskih rešenja objekta, jer se zidovi po visini moraju postaviti od temelja do vrha zgrade (Slika 1.1e).

## 1.4 Polazne pretpostavke analiza i proračuna

Kako bi proračun složenog problema bio racionalan i inženjerski prihvatljiv, u ovom radu uvedene su pretpostavke kojima se on značajno pojednostavljuje ili skraćuje. Pri tome, vodilo se računa da usvojene pretpostavke imaju inženjerskog opravdanja i da se neznatno gubi na tačnosti.

Razmatranja su ograničena samo na ravne čelične ramove

Razmatrani su samo linijski sistemi u ravni, a generalisanjem se jednostavno mogu definisati i prostorni linijski sistemi. Ova pretpostavka je usvojena uglavnom zbog značajnog pojednostavljenja koje se odnosi na dimenziju reda problema i jednostavnije prezentacije dobijenih rezultata, kao i izbegavanja memorijskih programerskih problema. Svi principi i zaključci ostaju u potpunosti primenljivi i za stvarni trodimenzionalni model konstrukcije. Svi građevinski objekti se ponašaju kao prostorni sistemi. Proračun prostornih sistema u nelinearnoj seizmičkoj analizi je izuzetno skup, pa se često nameće pitanje njegove opravdanosti. Osim toga, prilikom dejstva zemljotresa nisu svi elementi objekta podjednako bitni za analizu. Iz tih razloga seizmička analiza se može izvršiti u dve faze. Prva faza proračuna je linearna analiza prostornog sistema. Dobijeni rezultati iz ove faze određuju preraspodelu opterećenja po vertikalnim ravnima nosača. U drugoj fazi sprovodi se nelinearna analiza ali samo nekih, najviše interesantnih ravni nosača. Na taj način nelinearna dinamička analiza se sprovodi u ravni, što značajno pojeftinjuje proračun, a ne gubi se na kvalitetu, jer su nelinearnom analizom obuhvaćeni elementi objekta koji su značajni pri dejstvu zemljotresa.

Usvaja se da se materijalna nelinearnost dešava samo u vezama sistema, a u okviru linijskih elemenata ostvaruje se linearno ponašanje materijala

Uticiji u ramovima usled horizontalnog seizmičkog opterećenja imaju najveće vrednosti u čvorovima, pa se u njima i može očekivati nelinearno ponašanje materijala. U isto vreme duž linijskih elemenata, greda ili stubova, dodatni uticaji usled seizmičkog dejstva su značajno manji, pa naprezanje materijala ostaje u linearnoj oblasti. Pretpostavlja se da su usvojena takva tehnička rešenja čvorova tako da neće doći do pojave plastifikacije čvorova ili krajeva linijskih elemenata, već će se desiti samo popuštanje odnosno smanjenje krutosti veze. Uz ovakvu pretpostavku proračun postaje znatno efikasniji i racionalniji. Konstitutivna relacija momenat-rotacija,  $M - \theta$ , zavisi od konkretnog tipa veze. Eksperimenti pokazuju da je kriva  $M - \theta$  nelinearna u celokupnom opsegu opterećenja i za sve tipove veza.

Razmatra se samo uticaj horizontalnog seizmičkog pomeranja na konstrukciju

U proračunu se razmatraju samo horizontalne inercijalne sile nastale usled zemljotresa, a zanemaruje se vertikalna komponenta. Kao i u slučaju prve pretpostavke, uvođenjem ove pretpostavke ništa se ne gubi na opštosti, već se samo skraćuje obim proračuna. Pored toga, u slučaju objekata visoko gradnje uobičajena je i pretpostavka da se pri dejstvu zemljotresa sve oslonačke tačke pomeraju u istoj fazi i da imaju istu vrednost ubrzanja tla.

## Literatura

- [1] Petrović B., Odabrana poglavlja iz zemljotresnog građevinarstva, Građevinska knjiga, Beograd 1989.
- [2] Aničić D., Fajfar P., Petrović B., Szavits-Nossan A. i Tomažević M., Zemljotresno inženjerstvo - visokogradnja, Građevinska knjiga, Beograd 1990.
- [3] Newmark N. and Rosenblueth E., Osnovi zemljotresnog inženjerstva, Građevinska knjiga, Beograd 1987. (prevod sa engleskog)
- [4] Kanaan A. E and Powell G. H., A General Purpose Computer Program for Dynamic Analysis of Inelastic Plane Structures, Report No. EERC 73-6 and EERC 73-22, University of California, Berkeley 1975.
- [5] Salatić Ratko, Nelinearna dinamička analiza krupnopanelnih sistema zgrada, Magistarski rad, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 1993.
- [6] Paret T. F. and Attalla M. R., Changing Perceptions of the Extent of Damage to Welded Steel Moment Frames in the Northridge Earthquake, Twelfth World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 54, New Zealand 2000.
- [7] Engelhardt M. D., Damage to Steel Moment Frames Observed in the 1994 Northridge Earthquake, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 2139, Mexico 1996.
- [8] Martin S. C. and Villaverde R., Seismic Collapse Analysis of Steel Frame Structures, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 475, Mexico 1996.
- [9] Roeder C. W., Performance of Moment-Resisting Connections, Twelfth World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 2546, New Zealand 2000.
- [10] Popov E. P. and Bertero V. V., Seismic Analysis of Some Steel Building Frames, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 106, No. EM1, pp. 75-92, 1980.
- [11] Bertero V. V., State-of-the-Art Report on: Design Criteria, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 2005, Mexico 1996.
- [12] Houser G. W. and Masri S. F., Structural Control Research Issues Arising Out of the Northridge and Kobe Earthquakes, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 2009, Mexico 1996.
- [13] Riddell R. and De la Llera J. C., Seismic Analysis and Design: Current Practice and Future Trends, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 2010, Mexico 1996.
- [14] Paulay T. and Priestley M. J. N., Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings, John Wiley & Sons Inc. New York 1992.
- [15] Priestley M. J. N., Performance Based Seismic Design, Twelfth World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 2831, New Zealand 2000.

- [16] Soong T. T. and Manolis, G. D., Active Structures, Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 11, pp. 2290–2301, 1987.
- [17] Pall A. S. and Marsh C. Response of Friction Damped Braced Frames, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 108, No. ST6, pp. 1313–1323, 1982.
- [18] Pall A. S. and Pall R., Friction-Dampers for Seismic Control of Buildings "A Canadian Experience", Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 497, Mexico 1996.
- [19] Chopra A.K., Dynamics of Structures, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [20] Aćić M., Ulićević M. Janković S., Projektovanje seizmički otpornih zgrada od armiranog betona, Građevinski kalendar, Vol 30, Beograd 1997.
- [21] Evrokod 8 - Deo I, (prevod sa engleskog) Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 1997.



---

# Polukrute veze u čeličnim ramovskim konstrukcijama

---

## 2.1 Uvod

Ramovski, odnosno skeletni sistem projektovanja čeličnih zgrada, je veoma popularan konstruktivni sistem široko primenjivan u inženjerskoj praksi. On ima veliki broj zahvalnih osobina u odnosu na seizmičko opterećenje. Zgrade ovog sistema imaju relativno male mase, što direktno utiče na smanjenje seizmičkih sila. Karakteristična manja krutost ovog sistema smanjuje frekvencu osilovanja, pa su zgrade manje pobuđene bliskim i jakim zemljotresima.

Analiza i rezultati proračuna za ramovske sisteme konstrukcija uslovljeni su usvojenim pretpostavkama pri modeliranju konstruktivnih elemenata, a najviše veza stub-greda. Konvencionalne metode analize okvirnih konstrukcija zasnovane su na pretpostavci o idealnim čvornim vezama. Pri tome se koriste dve ekstremne idealizacije veza: totalno kruta i idealno zglobna veza. Modeli sa idealnim vezama pojednostavljaju analizu, ali veoma često ne odgovaraju stvarnom ponašanju konstrukcija. To potvrđuju brojna eksperimentalna istraživanja čeličnih okvira sa različitim tipovima veza [1, 2, 3]. Formiranje idealnih veza je veoma teško, nepraktično i neekonomično, a stvarne veze su manje ili više fleksibilne, ili kako se to obično kaže polukrute. Fleksibilnost veza stub-greda nema samo uticaj u preraspodeli momenata između elemenata rama, već i u povećanju ukupnog horizontalnog pomeranja i nepovoljnih međuspratnih pomeranja, koja mogu usloviti neophodnu primenu teorije drugog reda u proračunu.

Zbog velikog značaja fleksibilnosti veza na konačne rezultate proračuna, poslednjih godina definisanje ponašanja veze je predmet mnogobrojnih naučnih istraživanja. O fleksibilnosti veza vodi se računa u mnogim aktuelnim standardima za projektovanje čeličnih konstrukcija, kao što su na primer, *American Load nad Resistance Factored Design — LRFD, AISC (1986)*, *British standard BS5950 (1990)* i *Eurocode 3 (1992)*.

## 2.2 Polukrute veze

Pretpostavljanjem da su veze idealno krute, znači da se usvaja da će ugao između dva susedna linijska elementa ostati neopromenjen i nakon deformacije nosača, Idealno zglobnom vezom pretpostavlja se da se moment savijanja ne može preneti sa jednog na drugi element. Drugim rečima, opravdanost ovih pretpostavki je direktno u zavisnosti od odnosa krutosti veze i krutosti elemenata koje spajaju. Za krutu vezu treba da je krutost veze veoma velika, a za zglobnu vezu da je veoma mala u odnosu na krutost grede i stuba.

Veza greda–stub je medijum koji prenosi odgovarajuće sile i momente sa elementa na element. U opštem slučaju, veze ravnih okvira su izložene dejstvu momenata savijanja, transverzalnih i normalnih sila. Uticaji od transverzalnih i normalnih sila su obično zanemarljivi, tako da su od praktičnog značaja samo uticaji od momenata savijanja. U zapadnim zemljama, a pogotovu u SAD-u, veze su tipizirane i standardizovane, a neke od najčešće primenjivanih šematski su prikazane na Slici 2.1 Konstitutivna relacija moment-rotacija,  $M-\theta$ , zavisi od konkretnog tipa veze. Eksperimenti pokazuju da je kriva  $M-\theta$  nelinearna u celokupnom opsegu opterećenja, generalno za sve tipove veza (Slika 2.2). Različiti standardni tipovi veza imaju različitu krutost, odnosno fleksibilnost, ali sve one se nalaze između dve granične, idealno krute i idealno zglobne. Tako na primer, veza sa priključni limom na rebro grede (*WSB - Web Side Plate*) je po ponašanju najbliža zglobnoj, a *T-Stub* veza krutoj vezi. Nelinearnost ponašanja realne polukrute veze je posledica lokalne plastifikacije elemenata u vezi. Analiziranje ponašanja veze komplikuje se pojavama kao što su: geometrijska imperfekcija, postojanje rezidualnih napona usled zavarivanja, koncentracija napona, lokalne deformacije i izbočavanja rebra stuba u zoni čvora. Pravilno izvedene polukrute veze su po pravilu veoma duktilne veze, što je veoma bitna osobina kod njihove primene u seizmički otpornim konstrukcijama.

Na Slici 2.3 ilustrovan je uticaj fleksibilnosti veze na rezultate proračuna za jedan jednospratni ram koji je opterećen koncentrisanim silama. Prikazana je zavisnost horizontalnog pomeranja rigle i momenta uklještenja od koeficijenta krutosti veze  $\gamma$  (*fixity factor, rigidity index*). Koeficijent krutosti veze je bezdimenzionalni koeficijent koji ima vrednost 1.0 za slučaj krute veze i vrednost 0.0 za slučaj zglobne veze. Uticaj fleksibilnosti veze je još značajniji ako se uzima u obzir i teorija drugog reda. Može se reći da je ponašanje rama sa vezama, koje imaju koeficijent krutosti  $\gamma = 0.5$ , mnogo bliže ponašanju rama sa krutim nego sa zglobnim vezama.

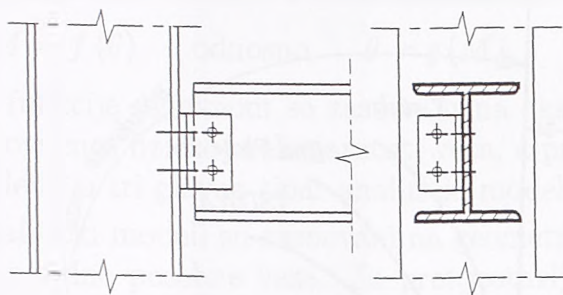
U inženjerskoj praksi bitno je imati kriterijum kako treba tretirati neki ramovski sistem. Postoje određene preporuke (Evrokod 3) [4] koje na osnovu dobijenog momenta savijanja, rotacije kraja grede i karakteristika grede, kao što su moment plastičnosti i fleksiona krutost, grede definišu očekivano ponašanje rama: kruto, polukruto ili fleksibilno. Međutim, ti kriterijumi su zasnovani na globalnom ponašanju rama, a ne na konkretnim dimenzijama i detaljima tipa veze.

### 2.2.1 Modeliranje polukrute veze pri monotonom opterećenju

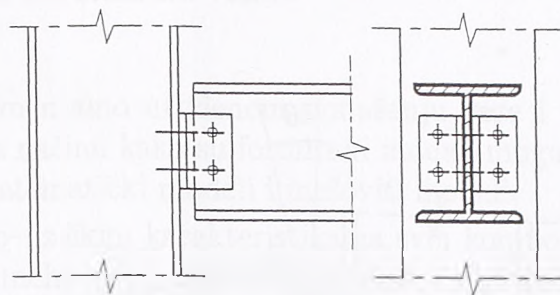
Da bi se odredilo realno ponašanje veze greda–stub u čeličnim konstrukcijama, jedini pravi put su eksperimentalna ispitivanja na modelima stvarnih dimenzija. Wilson i Moore su još 1917. godine prvi put izveli eksperiment ovakvog tipa. Poslednje dve decenije, eksperimenti na polukrutim čeličnim vezama su postali veoma popularni, tako da je izvršeno preko hiljadu eksperimenata. Nakon tih intezivnih istraživanja, formirane su obimne baze podataka eksperimentalnih rezultata za najčešće primenjivane veze. Poznat je kompjuterski program SCDB (*Steel Connection Data Bank*), koji su razvili Kishi i Chen [5], i pomoću koga su sistemski obrađeni eksperimentalni podaci za sedam tipova veza. Pogodna okolnost u klasifikaciji veza i rezultata je to što su u razvijenim zapadnim zemljama propisima definisani tipovi veza koje se primenjuju u čeličnim građevinskim konstrukcijama.

Za efikasan proračun i analizu čeličnih ramova, u kojima se razmatraju polukrute veze,

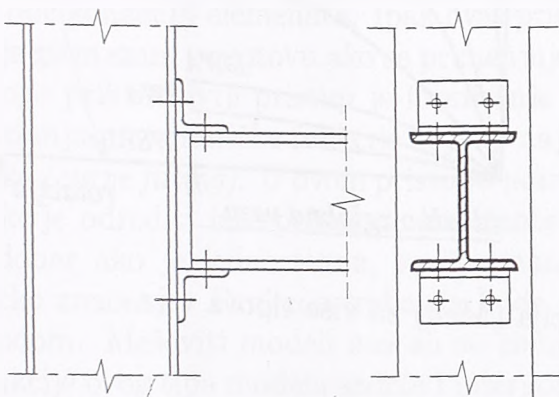




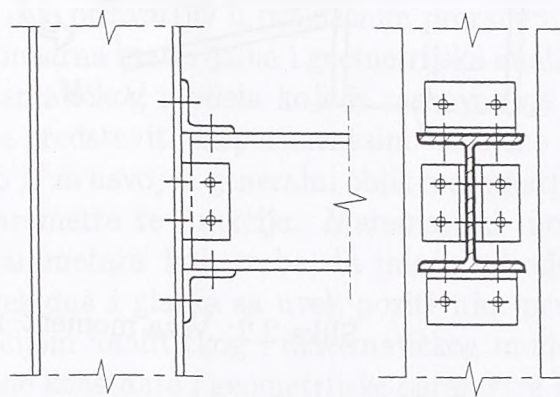
a) veza sa ugaonikom na rebru  
(SWA - Single Web Angle)



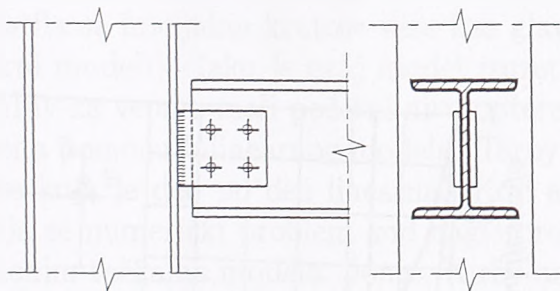
b) veza sa dva ugaonika na rebru  
(DWA - Double Web Angle)



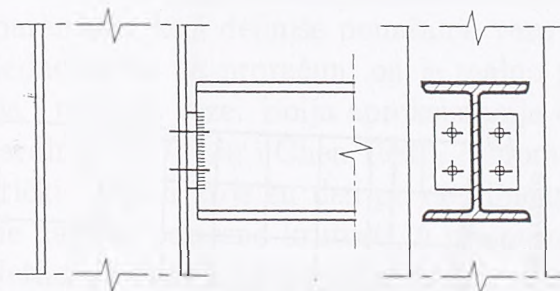
c) veza sa ugaonikom na gornjoj i donjoj nožici  
(TSA - Top and Seat Angle)



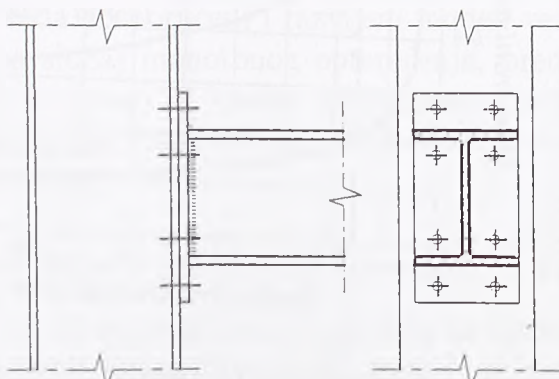
d) veza sa dva ugaonika na rebru i nožici  
(TSDWA - Top and Seat Double Web Angle)



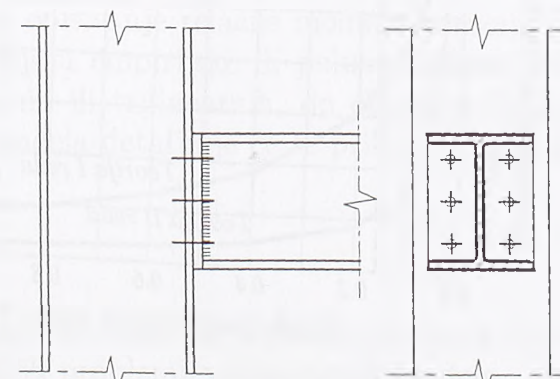
e) priključni lim rebru  
(WSP - Web Side Plate)



f) čelona ploča  
(HP - Header Plate)

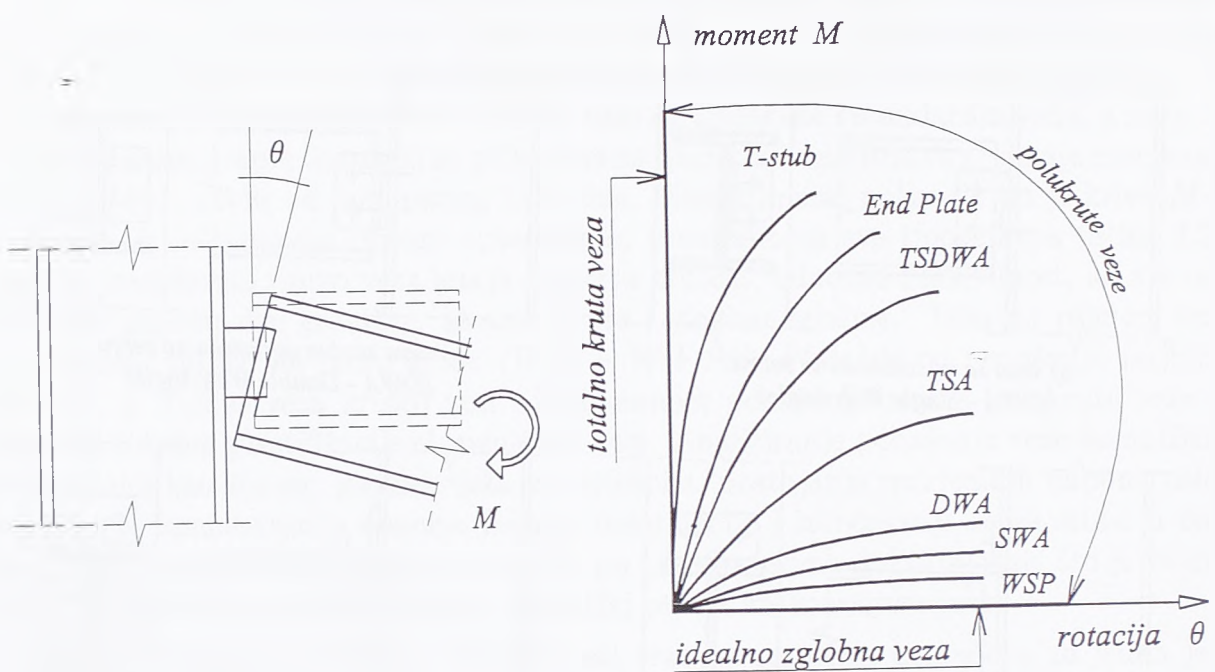


g) prepuštena čelona ploča (tip A)  
(EEP - Extended End Plate)

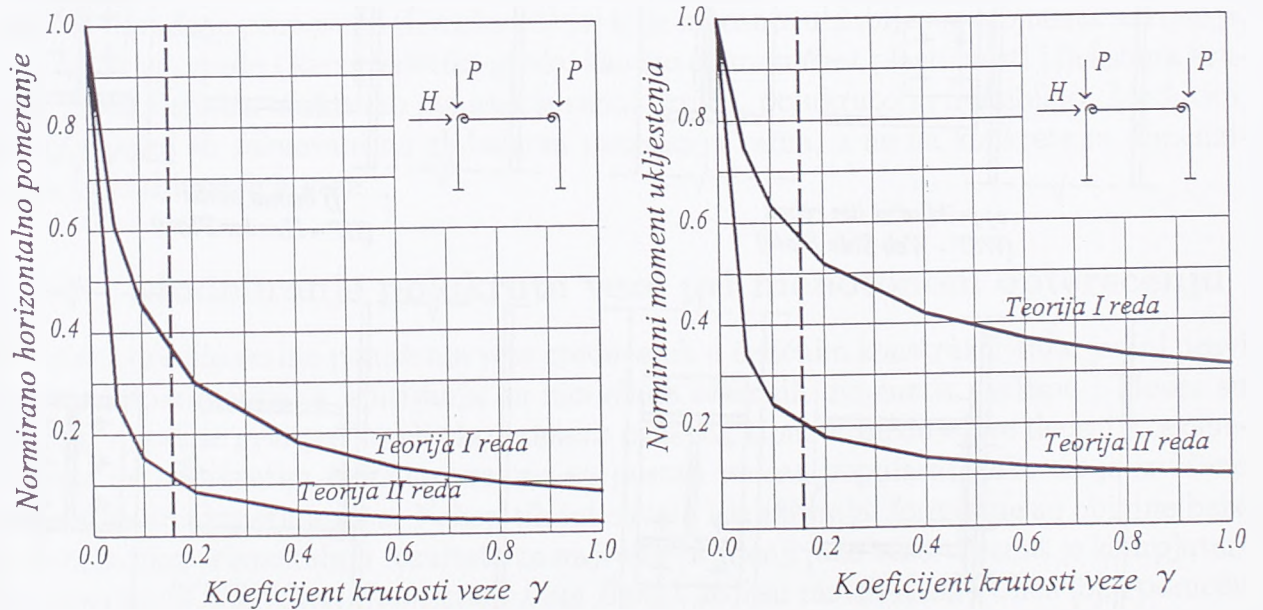


h) čelona ploča (tip B)  
(FEP - Flush End Plate)

Slika 2.1: Najčešći tipovi standardizovanih čeličnih veza greda-stub



Slika 2.2: Veza moment–rotacija ( $M-\theta$ ) za više tipova veza



Slika 2.3: Uticaj fleksibilnosti veze na rezultate proračuna

potrebno je usvojiti model koji može adekvatno da predstavi ponašanje polukrute veze. Drugim rečima, treba odrediti matematičku funkciju koja uspostavlja relaciju između momenta  $M$  i rotacije  $\theta$  na kraju elementa koji je polukruto vezan:

$$M = f(\theta) \quad \text{odnosno} \quad \theta = g(M)$$

Te funkcije uglavnom se zasnivaju na eksperimentalno utvđenom ponašanju veze i ustanovljenoj fizičkoj nelinearnosti veza, a prema načinu kako su formirani modeli mogu se podeliti u tri glavna tipa: analitički modeli, matematički modeli i mešoviti modeli.

Analitički modeli su zasnovani na geometrijsko-fizičkim karakteristikama svih komponenta jedne posebne veze. Za pretpostavljeni mehanizam deformacije veze i naponsko-deformacijsko ponašanje materijala procenjuje se globalno ponašanje cele veze. U određenom broju radova, formirani su ovakvi modeli i analizirano je ponašanje veze pomoću metode konačnih elemenata. Ipak ovaj pristup nije prihvatljiv u praktičnim proračunima jer je glomazan, pogotovu ako se primenjuje nelinearna materijalna i geometrijska analiza. Mnogo prihvatljiviji pristup je formiranje matematičkog modela koji je zasnovan na iznalaženju matematičke funkcije koja će najbolje predstaviti eksperimentalno dobijene podatke (*curve fitting*). U ovom pristupu potrebno je za usvojen generalni oblik matematičke funkcije odrediti interpolacione konstante i parametre te funkcije. Matematički model je dobar ako je jednostavan, sa što manje parametara koji treba da imaju određeno fizičko značenje. Funkcija treba da bude neprekidna i glatka sa uvek pozitivnim prvim izvodom. Mešoviti modeli nastali su kombinacijom analitičkog i matematičkog modela. Funkcije ovog tipa modela sadrže i interpolacione konstante i geometrijske parametre koji se određuju na osnovu geometrijskih veličina neke veze.

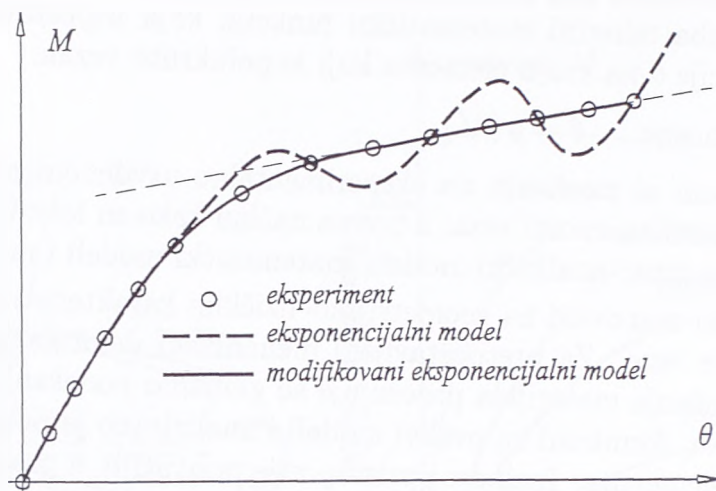
U prvim modelima (Rathbun 1936, Monforton i Wu 1963, Lightfoot i LeMessurier 1974) koristila se inicijalna krutost veze kao glavni parametar koji definiše ponašanje veze (linearni modeli). Iako je ovaj model izuzetno jednostavan za proračun, on je realno primenljiv za veoma mali početni nivo opterećenja i rotacija veze. Bolja aproksimacija ostvarena pomoću bilinearnog modela (Tarpy i Cardinal 1987, Liu i Chen 1986), ili pomoću krive koja je deo po deo linearna. Kod analitičkih krivih koje su deo po deo linearne, javlja se numerički problem kod nagle promene nagiba, odnosno krutosti, u prelomnim, temenim tačkama modela. Jones, Kirby and Nethercot razvili su model zvan na kubnoj *B-spline* krivoj koja je veoma dobro predstavljala eksperimentalne rezultate, ali je zahtevala veliki broj ulaznih podataka.

Do sada preporučeni i razvijeni modeli veza za opisivanje relacije moment-rotacija ( $M-\theta$ ) za slučaj monotonog opterećenja, predstavljaju empirijske ili poluempirijske izraze. Njihov razvoj se kretao od linearnih, bilinearnih ili trilinearnih, do eksponencijalnih i polinomnih matematičkih funkcija. Od svih modela detaljnije će se prikazati samo najznačajniji.

### Frye-Morris polinomni model

Jedan od najpopularnijih modela za analizu čeličnih ramova je polinomna veza koju su predložili Frye i Morris [8], kako bi se prevazišli problemi višelinearnih modela. Opšti oblik polinomnog modela je:

$$\theta = \sum_i C_i (KM)^i ,$$



Slika 2.4: Poređenje eksponencijalnog i modifikovanog eksponencijalnog modela

gde su  $C_i$  konstante interpolacije polinoma, čije je određivanje zasnovano na metodi najmanjih kvadrata. Da bi se smanjio broj parametara i konstanti, Frye i Morris su usvojili polinomnu veza samo za tri neparna stepena:

$$\theta = C_1(K M) + C_2(K M)^3 + C_3(K M)^5 ,$$

gde su  $C_i$  konstante zavise od tipa veze, a  $K$  konstanta koja zavisi od geometrijskih karakteristika veze.

Polinomni model zadovoljavajuće dobro može predstaviti stvarnu krivu  $M-\theta$ . Međutim, ovaj model u numeričkoj primeni ima ozbiljne nedostatke. Polinomna kriva na određenim intervalima ima nepovoljne ekstremume funkcije, minimume i maksimume, tako da se može desiti da prvi izvod funkcije bude i negativan. Kako prvi izvod fizički predstavlja krutost veze, to stvara značajne teškoće u primeni ovog modela naročito u inkrementalnoj metodi.

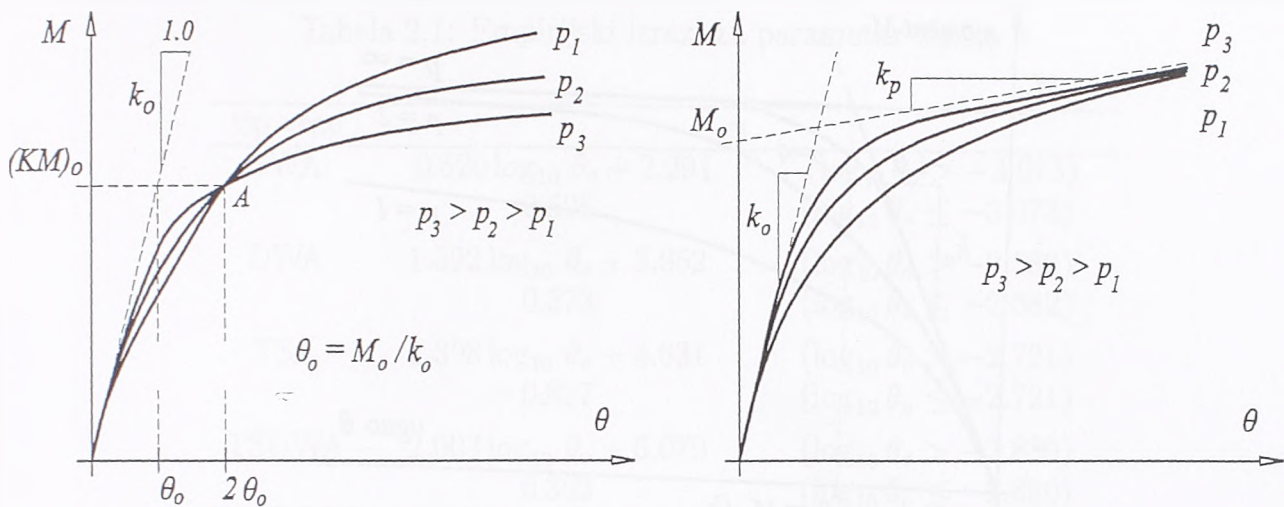
### Modifikovani eksponencijalni model

Lui i Chen [9] su primenili eksponencijalnu krivu za aproksimaciju eksperimentalno dobijenih vrednosti moment-rotacija veze ( $M-\theta$ ), za slučaj monotonog opterećenja. Kod ovog modela problem su predstavljale oštre promene nagiba krive, odnosno krutosti veze. Kishi i Chen su poboljšali eksponencijalni model kako bi se izbegle nerealno nagle promene krutosti polukrute veze. Modifikovani eksponencijalni model može se predstaviti izrazom:

$$M = M_o + \sum_{j=1}^m C_j \left[ 1 - \exp \left( -\frac{|\theta|}{2^j \alpha} \right) \right] + \sum_{k=1}^n R_k (|\theta| - |\theta_o|) H [|\theta| - |\theta_o|] ,$$

gde su  $C_j, R_k$  parametri aproksimacije,  $H[\theta]$  Heaviside-ova funkcija,  $M_o$  inicijalni moment veze,  $\alpha$  koeficijent skaliranja za numeričku stabilnost i  $\theta_o$  početna rotacija  $k$ -te linearne komponente dobijene sa eksperimentalne krive ( $M-\theta$ ).

Primenjujući linearnu interpolaciju poboljšani model je veoma dobro opisuje originalnu eksperimentalnu krivu ( $M-\theta$ ) (Slika 2.4). Koeficijenti  $C_j$  i  $R_k$  određuju se na osnovu linearne regresione analize.



Slika 2.5: a) Ramberg-Osgood-ov model, b) Richard-Abbott model

### Ramberg-Osgood-ov model

Na osnovu Ramberg-Osgood-ovih naponsko-deformacijskih veza predloženih još 1943. godine, Ang i Morris [10] su primenili ovaj stepeni model za definisanje polukrute veze pomoću četiri parametra:

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{|KM|}{(KM_o)} \left[ 1 + \left( \frac{|KM|}{(KM_o)} \right)^{p-1} \right],$$

gde su  $KM_o$  i  $\theta_o$  parametri koji određuju položaj tačke  $A$  (Slika 2.5a),  $p$  parametar oblika i  $K$  bezdimenzionalni parametar zavisin od tipa i geometrijskih veličina veze. Na osnovu eksperimentalnih rezultata za pet tipova veza definisani su primenjeni parametri.

### Tripametarski model

Model sa četiri parametra definisali su Richard i Abbott [11]:

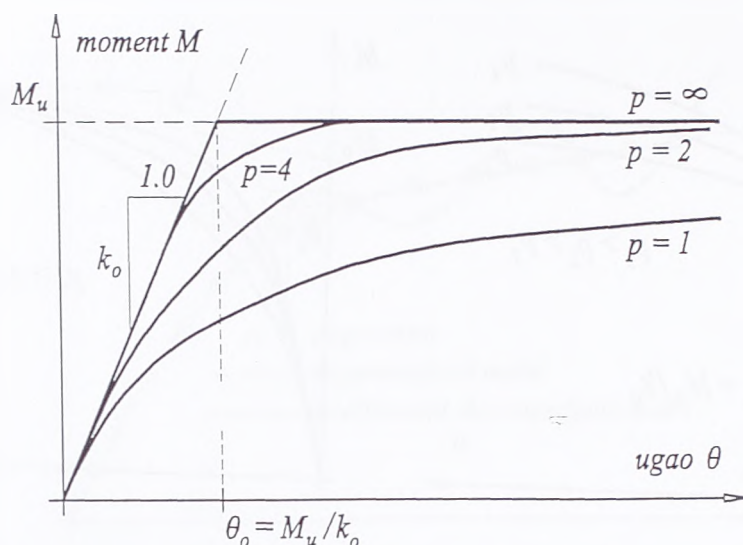
$$M = \frac{(k_o - k_p)|\theta|}{\left[ 1 + \left( \frac{(k_o - k_p)|\theta|}{M_o} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}} + k_p|\theta|,$$

gde su  $k_o$  inicijalna krutost,  $k_p$  parametar ojačanja,  $M_o$  referentni moment i  $p$  parametar oblika krive (Slika 2.5b).

Koristeći samo četiri, relativno jednostavna koeficijenta, dobijen je izraz veoma pogodan u nelinearnim numeričkim analizama, jer obezbeđuje uvek pozitivan prvi izvod. Ova model nije toliko precizan kao kubni *B-spline* model ili modifikovani eksponencijalni model, pogotovu ne blizu graničnog momenta veze, ali je znatno smanjen broj potrebnih eksperimentalnih podataka za njegovo definisanje.

Zanemarenjem ojačanja veze, eliminisan je jedan parametar ( $k_p = 0$ ), i dobijen triparametarski model oblika:

$$M = \frac{k_o \theta}{\left[ 1 + \left( \frac{\theta}{\theta_o} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}}, \quad (2.1)$$



Slika 2.6: Triparametarski model

gde su:

- $M_u$  ... granični moment nosivosti veze,
- $k_o$  ... početna krutost veze,
- $p$  ... parametar oblika veze,
- $\theta_o$  ... rotacija pri početku plastifikacije veze.

Povoljna osobina ovog modela je što se efikasno, bez iteracija, može odrediti prvi izvod funkcije (2.1), odnosno neophodna veličina krutost veze  $k$ :

$$k = \frac{dM}{d\theta} = \frac{k_o}{\left[1 + \left(\frac{\theta}{\theta_o}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}+1}}$$

Takođe, jednostavno je odrediti i rotaciju  $\theta$  preko inverzne funkcije:

$$\theta = \frac{M}{k_o \left[1 - \left(\frac{M}{M_u}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}}$$

Kishi i ostali [12, 13, 14, 15] razvili su metodologiju jednostavnog određivanja graničnog momenta nosivosti  $M_u$  i početne krutosti veze  $k_o$ , na osnovu dimenzija same veze i granice tečenja upotrebljenog materijala. Parametar oblika veze  $p$  može odrediti koristeći metod najmanjih kvadrata za pretpostavljene momente i momente dobijenih iz eksperimentalnih podataka. Što je vrednost parametra  $p$  veća, to je kriva strmija (Slika 2.6). Pretpostavlja se da je parametar  $p$  linearna funkcija logaritma početne plastične rotacije  $\log_{10} \theta_o$ . Empirijski izrazi za izračunavanje ovog parametra date su u Tabeli 2.1.

## 2.2.2 Ponašanje polukrutih veza pri cikličnom opterećenju

U dinamičkoj analizi uticaj polukrutih veza na odgovor sistema je još izraženiji nego u statičkoj analizi. Kako su ramovski sistemi sa polukrutim vezama fleksibilniji od sistema sa krutim vezama, uopšteno se može reći da se u seizmičkoj analizi dobijaju veća

Tabela 2.1: Empirijski izrazi za parametar oblika  $n$ 

tip veze	$n$	
SWA	$0.520 \log_{10} \theta_o + 2.291$	$(\log_{10} \theta_o > -3.073)$
	0.695	$(\log_{10} \theta_o \leq -3.073)$
DWA	$1.322 \log_{10} \theta_o + 3.952$	$(\log_{10} \theta_o > -2.582)$
	0.573	$(\log_{10} \theta_o \leq -2.582)$
TSA	$1.398 \log_{10} \theta_o + 4.631$	$(\log_{10} \theta_o > -2.721)$
	0.827	$(\log_{10} \theta_o \leq -2.721)$
TSDWA	$2.003 \log_{10} \theta_o + 6.070$	$(\log_{10} \theta_o > -2.880)$
	0.302	$(\log_{10} \theta_o \leq -2.880)$

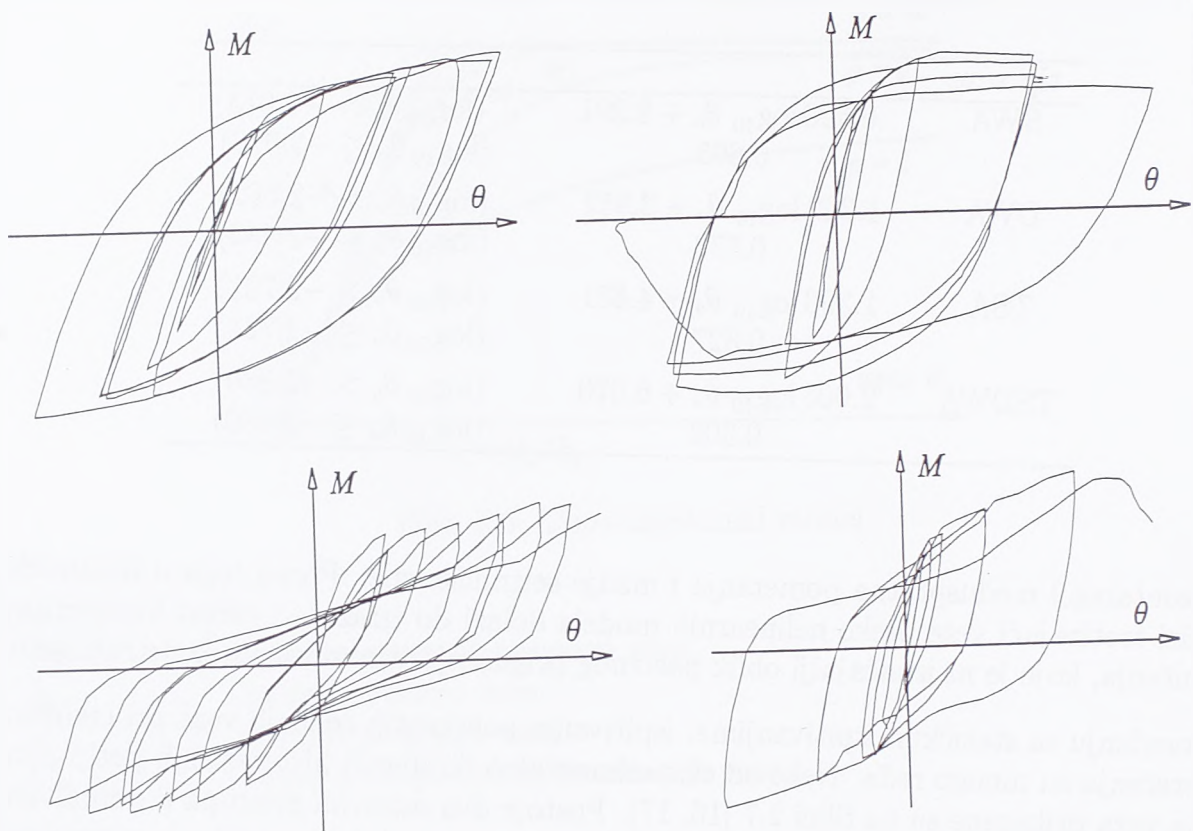
horizontalna i međuspratna pomeranja i manje seizmičke sile. Pored toga u dinamičkoj analizi tretirajući veze preko nelinearnih modela dolazi do izražaja i efekat histerezisnog prigušenja, koje je najznačajniji oblik pasivnog prigušenja u ramovskim konstrukcijama.

U poređenju sa statičkim ispitivanjima, ispitivanja polukrutih čeličnih veza pri cikličnom opterećenju su mnogo ređa. Neke od eksperimentalno dobijenih histerezisnih petlji ponašanja veza prikazane su na Slici 2.7 [16, 17]. Postoje dva osnovna pristupa u određivanju nelinearnih karakteristika ponašanja elementa konstrukcije pri dinamičkom opterećenju. Prvi je nelinearna statička analiza modela kojem su zadate nelinearne materijalne karakteristike, pa se dobijaju skeletne krive, a krive pri rasterećenju se pretpostavljaju na osnovu usvojenih pretpostavki. Drugi prilaz je eksperimentalni na idealizovanom uzorku. Nelinearne karakteristike konstrukcije i njenih elemenata su veoma bitne u dinamičkoj analizi, s obzirom na činjenicu da je seizmičko opterećenje velikog intenziteta, pa se uvek javljaju pojave kao što je tečenje, pojava pukotina, a što je karakteristično za nelinearno ponašanje sistema.

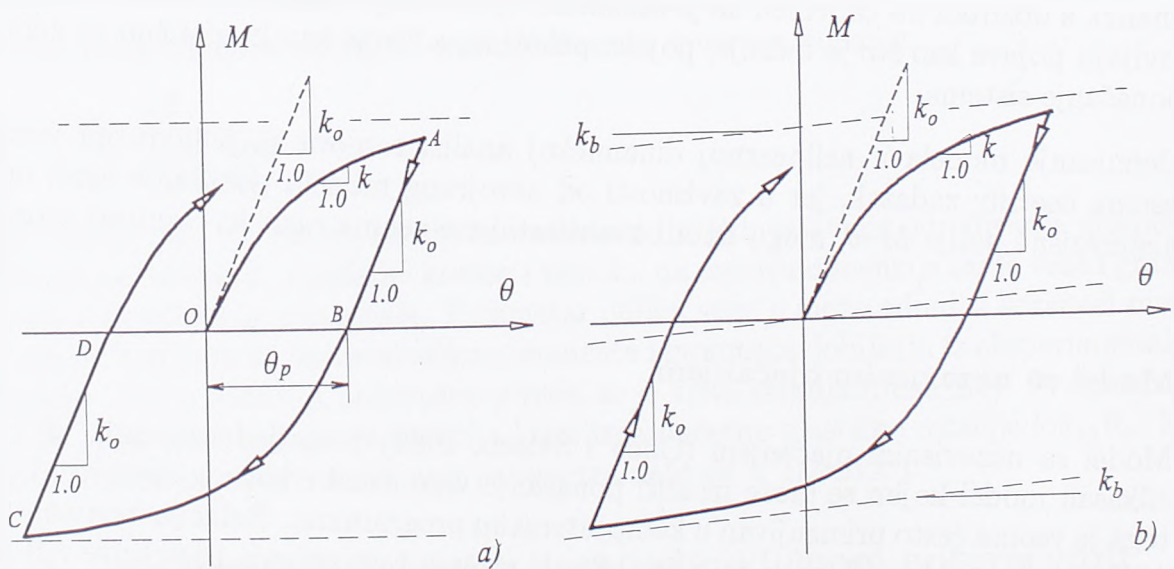
Definisanje modela u nelinearnoj dinamičkoj analizi ramova sa polukrutim vezama je veoma osetljiv zadatak, jer u zavisnosti od usvojenog modela ponašanje veze, odnosno histerezisne petlje  $M-\theta$ , mogu dobiti kvantitativno veoma različiti rezultati proračuna.

### Model sa nezavisnim ojačanjem

Model sa nezavisnim ojačanjem (Chen i Saleeb, 1982) je najjednostavniji, ali i veoma efikasan model kojim se može izraziti ponašanje veze usled cikličnog opterećenja, i zbog toga je veoma često primenjivan u kompjuterskim programima. Relacija moment-rotacija ( $M-\theta$ ) je šematski prikazana na Slici 2.8a. U slučaju rasterećenja (deo krive AB ili CD), pretpostavlja se da veza ima inicijalnu krutost  $k_o$ . Kada moment veze promeni znak (deo krive BC), uz zaostalu plastičnu deformaciju  $\theta_p$ , usvaja se da je ista kriva kao za monotono opterećenje (deo krive OA). Drugim rečima, relacija moment-rotacija ostaje nepromenljiva, a ukupna rotacija veze zavisna je od zaostalne plastične rotacije.

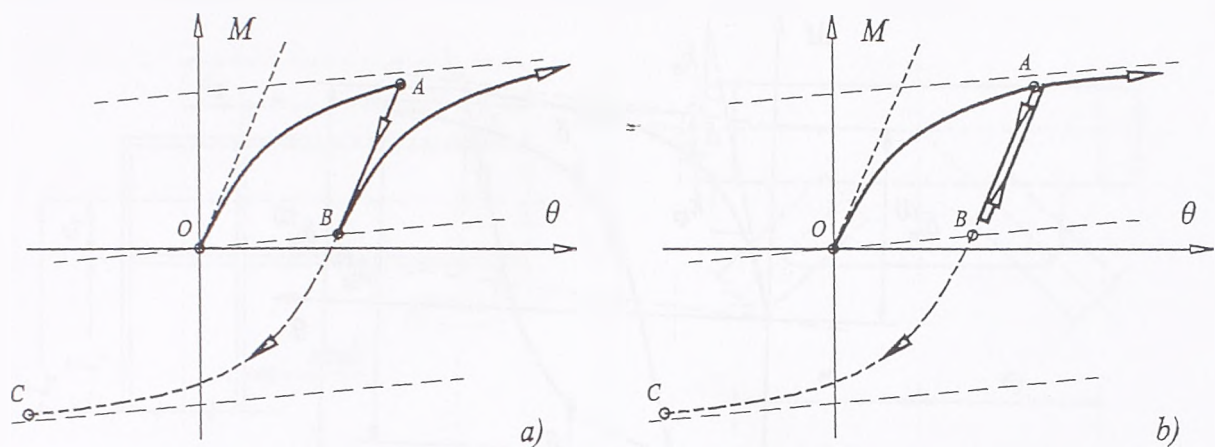


Slika 2.7: Eksperimentalno dobijene histerezisne petlje veza greda-stub



Slika 2.8: a) Model sa nezavisnim ojačanjem b) Model sa kinematičkim ojačanjem





Slika 2.9: Problem kod modela sa kinematičkim ojačanjem

### Model sa kinematičkim ojačanjem

Model pomoću koga se uzima u razmatranje kinematičko ojačanje, zasnovan na modelu sa nezavisnim ojačanjem, uveli su u razmatranje Huang i Morris 1991. Ponašanje veze pri pretpostavkama ovog modela prikazano je na Slici 2.8b. Za inicijalno monotono opterećenje usvojena je Richard-Abbott-ova kriva u obliku:

$$M = k_o \theta \left( \frac{1 - \frac{k_b}{k_o}}{\left\{ 1 + \left[ \left( 1 - \frac{k_o}{k_b} \right) \frac{\theta}{\theta_o} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}}} + \frac{k_b}{k_o} \right),$$

gde je  $k_b$  nagib asimptotske prave. Kada je  $k_b = 0$ , tada se ovaj model svodi na model sa nezavisnim ojačanjem.

### Model granične površi sa unutrašnjim promenljivima

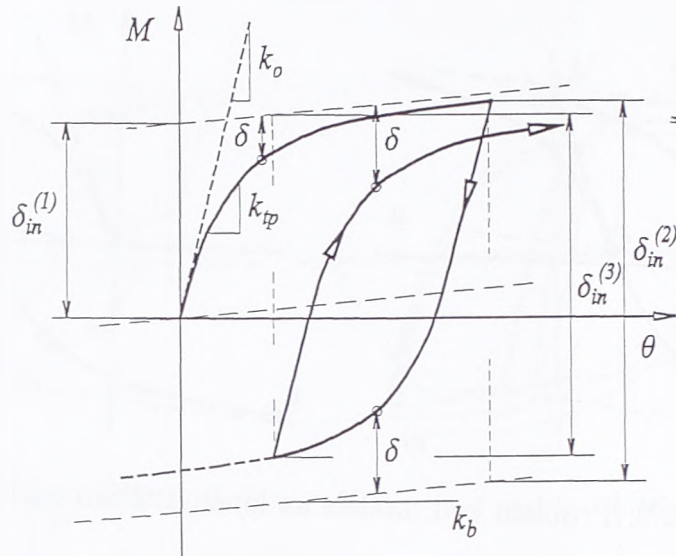
Prethodna dva modela su jednostavna za primenu i dinamičkoj analizi ramova. Oba modela daju dosta povoljne rezultate za slučaj gde se ostvaruje samo jedan ciklus opterećenja. Međutim, ako se ostvaruje više ciklusa opterećenja, rezultati analize sa ovakvim modelima dovode do dosta netačnih rezultata. Uzrok tome je nezadovoljavajuće usvojeno rešenje za ponašanje veze kada se ne ostvaruju kompletni ciklusi petlje  $M-\theta$ . U zavisnosti kada je došlo do promene znaka opterećenja dobijaju se različiti rezultati, što ne odgovara realnom ponašanju čeličnih veza. Na Slici 2.9 prikazana je ta razlika u pretpostavljenom ponašanju veze kada je ponovno opterećenje nastalo u delu krive  $BC$  ili krive  $AB$ .

Da bi se prevazišao taj nedostatak Dafalias i Popov [18] definisali su novi model. Relacija  $M-\theta$  usvojena je u inkrementalnoj formi:

$$\Delta M = k_t \Delta \theta,$$

gde je  $k_t$  tangenta krutost veze, koja se može izraziti preko inicijalne krutosti  $k_o$  i plastične tangente krutosti  $k_{tp}$ :

$$k_t = \frac{k_o k_{tp}}{k_o + k_{tp}}$$



Slika 2.10: Model granične površi sa unutrašnjim promenljivima

Plastična tangentna krutost izražava se pomoću dve promenljive  $\delta$  i  $\delta_{in}$ , koje su uslovljene pojavom plastifikacije veze:

$$k_{tp} = k_b + h \frac{\delta}{\delta_{in} - \delta},$$

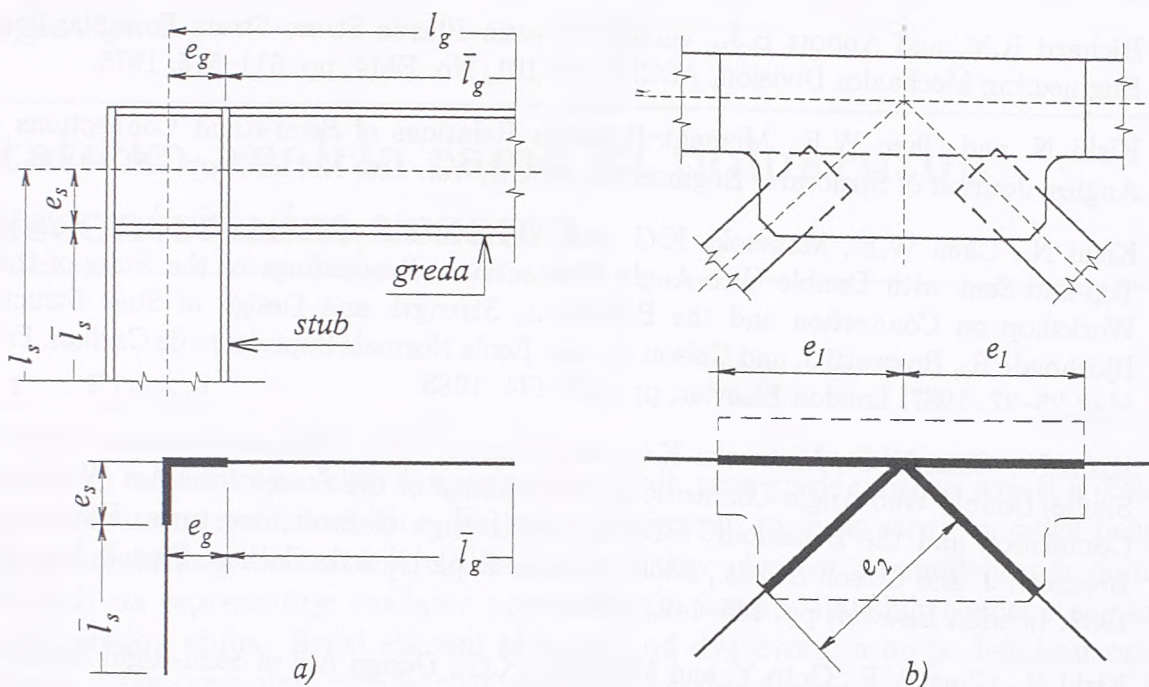
gde je  $h$  parametar ojačanja,  $k_b$  nagib asimptotske granice,  $\delta$  rastojanje od trenutne vrednosti momenta do odgovarajuće asimptotske prave i  $\delta_{in}$  inicijalna vrednost parametra  $\delta$  za svaki ciklus opterećenja (Slika 2.10).

## 2.3 Ekscentričnost čeličnih veza

Kao što su sve čelične veze više ili manje fleksibilne, tako su one takođe više ili manje ekscentrične. Najčešće se ekscentricitet veze zanemaruje, međutim u nekim slučajevima to nema opravdanja. To je slučaj kada su veze ostvarene preko čvornog lima, tako da odnos ekscentriciteta i dužine linijskog elementa nije mali. Obično se veze sa čvornim limom ostvaruju kod rešetastih nosača, a kod ramovskog sistema nosača pojavljuju se u spegovima i ukrućenjima. Kod rešetkastih nosača odnos ekscentriciteta i dužine štapa može iznositi i do 20%, dok je kod ramovskih sistema on značajno manji i iznosi oko 5%.

Karakteristike preseka linijskog elementa na delu ekscentriciteta u vezi nema iste karakteristike kao na ostalom delu element, već su one značajno veće, pa se taj deo može u proračunu tretirati kao potpuno krut (Slika 2.11).

Na osnovu analiza sprovedenih u Poglavlju 4 i Poglavlju 5 i rezultata dobijenih u ilustrativnim primerima, može se reći da se uticaj ekscentričnosti naročito u dinamičkim proračunima ne može ignorisati.



Slika 2.11: Ekscentricitet linijskih elemenata a) kod ramova b) kod rešetkastih nosača

## Literatura

- [1] Jones S.W., Kirby P.A. and Nethercot D.A., The Analysis of Frames with Semi-Rigid Connections - a State-of-the-Art Report, Journal of Construction Steel Research, Vol. 3, No. 2, pp. 2-13, 1983.
- [2] Goverdhan A.V., A Collection of Experimental Moment-Rotation Curves, Journal of Structural Structures, Vol. 15, No. 3, pp. 209-219, 1983.
- [3] Rathbun J.C., Elastic Properties of Riveted Connections, Transaction of the ASCE, Paper No. 1933, Vol. 101, pp. 524-563, 1936.
- [4] Evrokod 3 - Deo I, (prevod sa engleskog) Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 1997.
- [5] Chen W.F., Goto Y. and Richard Liew J. Y., Stability Design of Semi-rigid Frames, John Wiley & Sons, Inc. New York 1996.
- [6] Monforton G.R. and Wu T.S., Matrix Analysis of Semi-Rigidly Connected Frames, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 87, No. ST6, pp. 13-42, 1963.
- [7] Lightfoot E. and LeMessurier A.P., Elastic Analysis of Frameworks with Elastic Connections, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 100, No. ST6, pp. 1297-1309, 1974.
- [8] Frye M.J. and Morris G.A., Analysis of Flexibly Connected Steel Frames, Canadian Journal of Civil Engineers, Vol. 2, pp. 280-291, 1975.
- [9] Lui E.M. and Chen W.F., Analysis and Behaviour of Flexibly-Jointed Frames, Engineering Structures, Vol. 8, No. 2, pp. 107-118, 1986.

- [10] Ang K.M. and Morris G.A., Analysis of Three-dimensional Frame with Flexible Beam-Column Connection, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 11, pp. 245–254, 1984.
- [11] Richard R.M. and Abbott B.J., Versatile Elastic–Plastic Stress–Strain Formula, Journal Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, No. EM4, pp. 511–515, 1975.
- [12] Kishi N. and Chen W.F., Moment–Rotation Relations of Semi-Rigid Connections with Angles, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 116, No. ST7, pp. 1813–1834, 1990.
- [13] Kishi N., Chen W.F., Matsuoka K.G. and Nomachi S.G., Moment-Rotation Relation of Top-and-Seat with Double Web-Angle Connections, Proceedings of the State-of-the-Art Workshop on Connection and the Behaviour, Strength and Design of Steel Structures, Bjorhovde R., Brozzetti J. and Colson A. eds., Ecole Normale Superieure de Cachan, France, May 25–27, 1987, London Elsevier, pp. 121–134, 1988.
- [14] Kishi N., Chen W.F., Matsuoka K.G. and Nomachi S.G., Moment-Rotation Relation of Single/Double Web-Angle Connections, Proceedings of the State-of-the-Art Workshop on Connection and the Behaviour, Strength and Design of Steel Structures, Bjorhovde R., Brozzetti J. and Colson A. eds., Ecole Normale Superieure de Cachan, France, May 25–27, 1987, London Elsevier, pp. 135–149, 1988.
- [15] Kishi N., Chen W.F., Goto Y. and Matsuoka K.G., Design Aid of Semi-Rigid Connections for Frame Analysis, AISC Engineering Journal, 3rd Quater, pp. 90–107, 1993.
- [16] Calado L., Experimental Research and Analytical Modelling of the Cyclic Behaviour of Bolted Semi-rigid Connections, Steel Structures – Eurosteel '95, Kounadis (ed.), Balkema, Rotterdam 1995.
- [17] Aribert J. M. and Grecea D., Experimental Behaviour of Partial-resistant Beam-to-column Joints and their Influence on the q-factor of Steel Frames, 11-th European Conference on Earthquake, Balkema, Rotterdam, 1998.
- [18] Dafalias Y.F. and Popov E.P., Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity, Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, pp. 645–651, 1976.
- [19] Chan S.L. and Chui P.P.T, Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections, Elsevier Science Ltd., Amsterdam, 2000.
- [20] Vljajic Lj. and Miskovic Z., Load Deflection and Dynamic Numerical–Experimental Analysis of the Repaired Steel Railway Bridge over the River Sava by Brcko in Serbian Republic in Bosnia, Proceedings of the Conference Eurosteel '99, ČVUT Praha, 1999.

## Statička analiza rama sa polukrutim ekscentričnim vezama

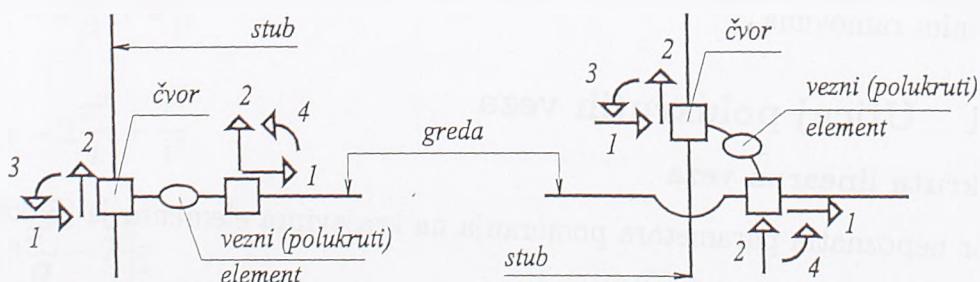
### 3.1 Uvod

Numeričko modeliranje efekta fleksibilnosti čvornih veza grede može se uvesti u diskretnu analizu okvira na različite načine. Po jednom pristupu, to se ostvaruje pomoću posebnog veznog polukrutog elementa [1] (Slika 3.1). Takav element za modeliranje polukrute veze služi da reprezentuje značajne promene ugla između linijskih elemenata, naročito između grede i stuba. Svaki element se sastoji od dva čvora, a on je definisan razlikom obrtanja u tim čvorovima u kojima su usvojene globalne čvorne nepoznate rotacije. Treba napomenuti da su to dva fiktivna čvora, pošto im se koordinate poklapaju. Ovakva formulacija modela polukrute veze je jednostavna, ali se koriste suvišni čvorovi, kao i dodatne promenljive.

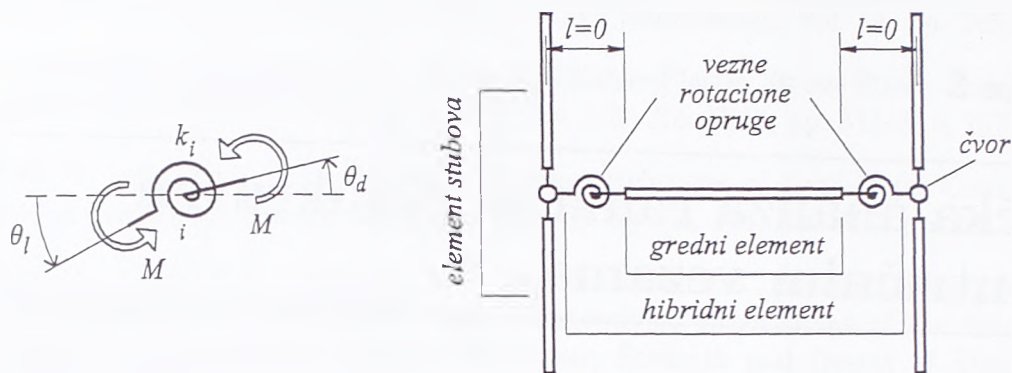
Greda sa polukrutim vezama može se predstaviti i pomoću hibridnog elementa [2]. Dodavanjem rotacione opruge na oba kraja grede formira se takav složeni element (Slika 3.2). Eliminisanjem unutrašnjih stepeni slobode opruge i modifikovanjem matrice krutosti elementa definiše se konačni element za analizu ramova sa polukrutim vezama.

Veoma efikasan pristup je pristup preko korektivnih matrica, kojima se modifikuje konvencionalna matrica krutosti elementa sa krutim vezama [3]. Elementi korektivnih matrica su obično funkcije bezdimenzionalnih parametara koji određuju krutost veze, *fixity factor* [4] ili *rigidity index* [5].

Zbog svoje jednostavnosti nekada se najviše primenjivala linearna polukruta veza, a danas se sve češće koristi i nelinearna relacija kojom se opisuje ponašanje polukrute veze. Kako su ramovski sistemi sa polukrutim vezama fleksibilniji, potrebno je u analizama razmatrati i geometrijsku nelinearnost problema.



Slika 3.1: Vezni polukruti element



Slika 3.2: Hibridni element za gredu sa polukrutim vezama

U ovom poglavlju razmatraju efekti fleksibilnosti i ekscentričnosti veza na statičko ponašanje i stabilnost ravnih okvira primenom Metode konačnih elemenata. Razvijen je model za nelinearnu numeričku analizu koji simultano uključuje nelinearno ponašanje veza i geometrijsku nelinearnost strukture. Izvedena je matrica krutosti konačnog grednog elementa i vektor ekvivalentnih čvornih sila prizmatičnog elementa sa fleksibilnim ekscentričnim vezama na osnovu varijacionog pristupa. Za osnovne parametre numeričke analize usvojena su pomeranja i obrtanja čvorova, dok su pomeranja i obrtanja krajeva elementa eliminisana kondenzacijom sistema. Na taj način, broj stepeni slobode ostaje isti kao i kod sistema sa krutim vezama u konvencionalnoj analizi ramova sa krutim vezama, pa se izbegava povećanje broja elemenata odnosno stepeni slobode u diskretnoj analizi. Dobijena matrica krutosti elementa je opšteg karaktera, a poznate matrice predstavljaju specijalan slučaj izvedene matrice krutosti.

### 3.2 Dvodimenzionalni konačni gredni element

Gredni konačni element sa polukrutim i ekscentričnim vezama sa usvojenim parametrima pomeranja prikazan je na Slici 3.3. Fleksibilnost krajeva grede modelirana je pomoću rotacionih opruga na njenim krajevima, a ekscentričnost veze predstavljena je kratkim beskonačno krutim elementima dužine  $e_1$  i  $e_2$ . U formulaciji elementa polazi se od parametara pomeranja na krajevima elementa, koji se kasnije izražavaju preko parametara pomeranja u čvorovima sistema. Formulacija elementa izvedena je tako da se jasno mogu razdvojiti uticaji usled polukrute veze i uticaji usled ekscentrične veze. Prvo je razmatrana linearna polukruta veza, a zatim nelinearna koja je mnogo bliža realnom ponašanju veza u čeličnim ramovima.

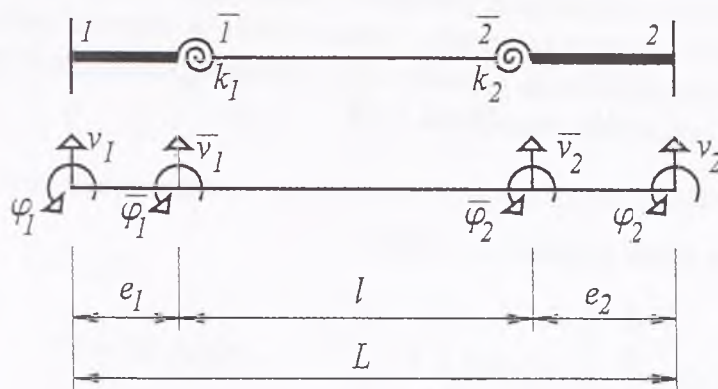
#### 3.2.1 Uticaj polukrutih veza

Polukruta linearna veza

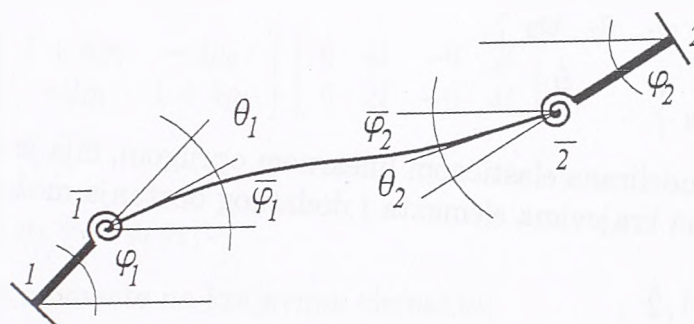
Vektor nepoznatih parametara pomeranja na krajevima elementa je (Slika 3.3):

$$\bar{u} = \{ \bar{v}_1 \quad \bar{\varphi}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\varphi}_2 \} ,$$

a vektor nepoznatih parametara pomeranja u čvorovima sistema:



Slika 3.3: Gredni element sa polukrutim ekscentričnim vezama



Slika 3.4: Deformacija elementa

$$\mathbf{u} = \{ v_1 \quad \varphi_1 \quad v_2 \quad \varphi_2 \} .$$

Veza između vertikalnog pomeranja ose linijskog elementa i parametara pomeranja čvorova na krajevima elementa može se prikazati preko interpolacionih funkcija  $N_i(x)$ :

$$v(x) = \mathbf{N}(x) \bar{\mathbf{u}} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{N}(x) = \left[ N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x) \right] ,$$

pri čemu se za funkcije  $N_i(x)$  usvajaju *Hermite*-ovi polinomi prve vrste:

$$N_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}$$

$$N_2(x) = x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad (3.2)$$

$$N_3(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} .$$

Kako su osnovne nepoznate proračuna parametri pomeranja u čvorovima sistema, potrebno je obrtanje krajeva elementa izraziti preko obrtanja čvorova sistema. Obrtanje čvora je jednako zbiru obrtanja kraja elementa  $\bar{\varphi}_i$  i dodatnog obrtanja  $\theta_i$  kraja elementa, nastalog kao posledica polukrute veze (Slika 3.4):

$$\varphi_i = \bar{\varphi}_i + \theta_i \quad i = \bar{1}, \bar{2} . \quad (3.3)$$

Jednačina (3.1) sada se može napisati u obliku:

$$v(x) = \mathbf{N}(x) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N}(x) \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}(x) \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \varphi_1 - \theta_1 \\ \bar{v}_2 \\ \varphi_2 - \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}(x) (\bar{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\theta}) , \quad (3.4)$$

gde su uvedeni u razmatranje vektori  $\bar{\mathbf{u}}$  i  $\boldsymbol{\theta}$ :

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\theta} = \left\{ \bar{v}_1 \quad \varphi_1 \quad \bar{v}_2 \quad \varphi_2 \right\}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \left\{ 0 \quad \theta_1 \quad 0 \quad \theta_2 \right\} .$$

Polukruta veza je modelirana elastičnom linearnom oprugom, čija je rotaciona krutost  $k_i$ . Između momenata na krajevima elementa i dodatnog obrtanja može se uspostaviti veza:

$$\theta_i = \frac{\bar{M}_i}{k_i} \quad i = \bar{1}, \bar{2} , \quad (3.5)$$

pa je vektor  $\boldsymbol{\theta}$ :

$$\boldsymbol{\theta} = \left\{ 0 \quad \bar{M}_1/k_1 \quad 0 \quad \bar{M}_2/k_2 \right\} .$$

Momente na krajevima grede  $\bar{M}_1$  i  $\bar{M}_2$  treba izraziti u funkciji vektora  $\bar{\mathbf{u}}$ . Iz veze sila i pomeranja na krajevima elementa:

$$\mathbf{R} = \mathbf{k} \bar{\mathbf{u}}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \end{bmatrix} ,$$

dobijaju se vrednosti momenata na krajevima elementa:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & 4l & -6 & 2l \\ 6 & 2l & -6 & 4l \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & 4l & -6 & 2l \\ 6 & 2l & -6 & 4l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \varphi_1 - \theta_1 \\ \bar{v}_2 \\ \varphi_2 - \theta_2 \end{bmatrix} .$$

Ako se primeni relacija (3.5) sledi:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & 4l & -6 & 2l \\ 6 & 2l & -6 & 4l \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} - \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & 4l & -6 & 2l \\ 6 & 2l & -6 & 4l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{M}_1}{k_1} \\ 0 \\ \frac{\bar{M}_2}{k_2} \end{bmatrix} ,$$



odnosno:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{4}{k_1} & \frac{2}{k_2} \\ \frac{2}{k_1} & \frac{4}{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & 4l & -6 & 2l \\ 6 & 2l & -6 & 4l \end{bmatrix} \bar{u} .$$

Ako se uvede bezdimenzionalna rotaciona krutost opruge u čvoru  $i$ , koja je definisana kao:

$$g_i = \frac{EI}{lk_i} \quad i = 1, 2 ,$$

dobija se:

$$\begin{bmatrix} 1 + 4g_1 & 2g_2 \\ 2g_1 & 1 + 4g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & 4l & -6 & 2l \\ 6 & 2l & -6 & 4l \end{bmatrix} \bar{u} ,$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{\Delta l^2} \begin{bmatrix} 1 + 4g_2 & -2g_2 \\ -2g_1 & 1 + 4g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4l & -6 & 2l \\ 6 & 2l & -6 & 4l \end{bmatrix} \bar{u} ,$$

gde je:

$$\Delta = 1 + 4g_1 + 4g_2 + 12g_1g_2 .$$

Tada su rešenja za momente na krajevima elementa:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{\Delta l^2} \begin{bmatrix} 6(1 + 2g_2) & 4l(1 + 3g_2) & -6(1 + 2g_2) & 2l \\ 6(1 + 2g_1) & 2l & -6(1 + 2g_1) & 4l(1 + 3g_1) \end{bmatrix} \bar{u} . \quad (3.6)$$

Vektor rotacija  $\theta$  sada se može napisati u obliku:

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{M}_1}{k_1} \\ 0 \\ \frac{\bar{M}_2}{k_2} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \varphi_1 \\ \bar{v}_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = G \bar{u} , \quad (3.7)$$

gde je uvedena korektivna matrica  $G$  za elemente sa polukrutim vezama:

$$G = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{l}(g_1 + 2g_1g_2) & 4(g_1 + 3g_1g_2) & -\frac{6}{l}(g_1 + 2g_1g_2) & 2g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{l}(g_2 + 2g_1g_2) & 2g_2 & -\frac{6}{l}(g_2 + 2g_1g_2) & 4(g_2 + 3g_1g_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_1 \\ 0 \\ s_2 \end{bmatrix} .$$

S obzirom da je određen vektor rotacija  $\theta$ , on se može eliminisati iz jednačine (3.4), a zatim definisati i vertikalno pomeranje proizvoljne tačke ose elementa u funkciji parametara pomeranja krajeva elementa:

$$v(x) = N(x) \bar{u} = N(x) (\bar{u} - \theta) = N(x) (\bar{u} - G\bar{u})$$

$$v(x) = N(x) (I - G) \bar{u} . \quad (3.8)$$

Kako je za slučaj polukrutih centričnih veza:

$$\bar{v}_1 = v_1$$

$$\bar{v}_2 = v_2 \quad ,$$

vektor  $\bar{u}$  je identičan vektoru  $u$  sledi da je vektor interpolacionih funkcija za gredu sa polukrutim vezama  $\bar{N}$ :

$$\bar{N}(x) = N(x) (I - G) \quad . \quad (3.9)$$

Matrica  $I$  je jedinična matrica, a matrica  $G$  je matrica koja određuje polukrutu vezu elementa. Ako je veza idealno kruta, veličine  $g_i$  postaju nule, a matrica  $G$  nula matrica. Razvijeni izrazi za interpolacione funkcije za gredu sa polukrutim vezama su:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= 1 - 6 \frac{g_1 + 2g_1 g_2}{\Delta} \frac{x}{l} - 3 \left( 1 - 2 \frac{2g_1 + g_2 + 6g_1 g_2}{\Delta} \right) \frac{x^2}{l^2} + 2 \left( 1 - 3 \frac{g_1 + g_2 + 4g_1 g_2}{\Delta} \right) \frac{x^3}{l^3} \\ \bar{N}_2 &= \left( 1 - 4 \frac{g_1 + 3g_1 g_2}{\Delta} \right) x - 2 \left( 1 - \frac{4g_1 + g_2 + 12g_1 g_2}{\Delta} \right) \frac{x^2}{l} + \left( 1 - 2 \frac{2g_1 + g_2 + 6g_1 g_2}{\Delta} \right) \frac{x^3}{l^2} \\ \bar{N}_3 &= 6 \frac{g_1 + 2g_1 g_2}{\Delta} \frac{x}{l} + 3 \left( 1 - 2 \frac{2g_1 + g_2 + 6g_1 g_2}{\Delta} \right) \frac{x^2}{l^2} - 2 \left( 1 - 3 \frac{g_1 + g_2 + 4g_1 g_2}{\Delta} \right) \frac{x^3}{l^3} \\ \bar{N}_4 &= -\frac{2g_1}{\Delta} x - \left( 1 - 4 \frac{g_1 + g_2 + 3g_1 g_2}{\Delta} \right) \frac{x^2}{l} + \left( 1 - 2 \frac{g_1 + 2g_2 + 6g_1 g_2}{\Delta} \right) \frac{x^3}{l^2} \quad . \quad (3.10) \end{aligned}$$

Fizičko značenje izvedenih izraza za interpolacione funkcije (3.10) ostaje nepromenjeno, samo što je sada reč o štapu sa polukrutim vezama na krajevima, pa su izrazi komplikovaniji. U graničnom slučaju kada je  $g_1 = g_2 = \infty$ , odnosno kada su veze elementa potpuno krute, tada se prethodni izrazi redukuju na poznate izraze (3.2).

### Nelinearna polukruta veza

Kao što je u prethodnom poglavlju istaknuto, na osnovu mnogobrojnih eksperimentalnih rezultata može se zaključiti da je polukruta veza nelinearna skoro u celom opsegu za sve tipove veza. Od svih predloženih i razvijenih modela, usvojen je triparametarski model za primenu u daljim razmatranjima i analizama.

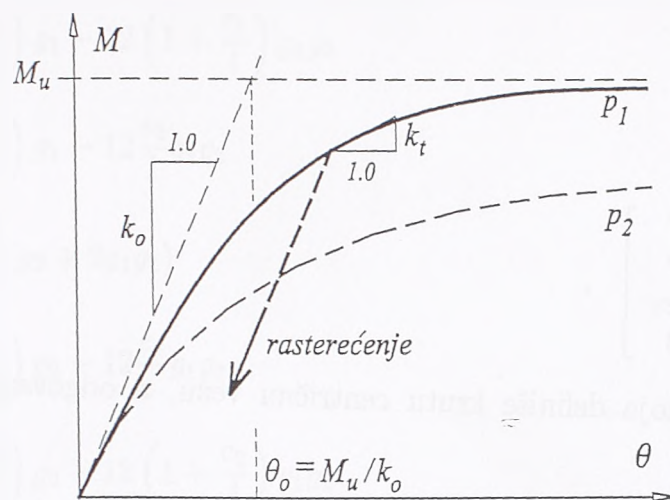
Izbor ovog modela je zasnovan na njegovim dobrim osobinama, koje su naročito značajne u nelinearnim analizama:

- Relacija moment–rotacija je glatka neprekidna kriva:

$$M = \frac{k_o \theta}{\left[ 1 + \left( \frac{\theta}{\theta_o} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}} \quad . \quad (3.11)$$

- Egzistencija inverzne relacije rotacija–moment:

$$\theta = \frac{M}{k_o \left[ 1 - \left( \frac{M}{M_w} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}} \quad . \quad (3.12)$$



Slika 3.5: Tri parametarska kriva

- Model obezbeđuje uvek pozitivan prvi izvod, odnosno krutost veze.

$$k = \frac{dM}{d\theta} = \frac{k_o}{\left[1 + \left(\frac{\theta}{\theta_o}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}+1}} \quad (3.13)$$

- Za definisanje veze potreban je veoma mali broj parametara, koji imaju jasno fizičko značenje:  $M_u$  granični moment nosivosti,  $k_o$  početna krutost veze,  $p$  parametar oblika veze.
- Potvrđeno je dobro poklapanje modela sa eksperimentalnim rezultatima.

Krutost opruge kojom je modelirana polukruta veza može se definisati nagibom tangente na krivu ( $M-\theta$ ) za neku vrednost rotacije  $\theta$  ili momenta  $M$ . Krutost opruge opada sa povećanjem opterećenja, odnosno momenta, za sve tipove polukrutih veza. Da bi se pojednostavila numerička analiza, krutost opruge može se aproksimirati sekantnom krutošću, ako je razmatrani interval  $\Delta\theta$  dovoljno mali:

$$k = \frac{\Delta M}{\Delta\theta} \quad (3.14)$$

U tom slučaju, nelinearni problem se linearizuje, krutost opruge na određenim intervalima ima konstantnu vrednost, pa je problem sveden na gredu sa polukrutom linearnom vezom, za koju su već izvedeni svi potrebni izrazi.

### 3.2.2 Uticaj ekscentričnih veza

Ekscentricitet čvorne veze je modeliran kratkim idealno fleksiono krutim elementima konačne dužine  $e_1$  i  $e_2$  (Slika 3.3). Za male rotacije, veza između vertikalnih pomeranja kraja grede i vertikalnih pomeranja čvora veze može se napisati u obliku:

$$\bar{v}_1 = v_1 + e_1 \varphi_1$$

$$\bar{v}_2 = v_2 - e_2 \varphi_2 \quad ,$$

ili matično:

$$\bar{u} = (I + E) u , \quad (3.15)$$

gde je:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

korektivna matrica koja definiše krutu centričnu vezu, a odgovarajuće interpolacione funkcije su:

$$v(x) = N(x) \bar{u} = N(x) (I + E) u$$

$$\bar{N}(x) = N(x) (I + E) . \quad (3.16)$$

### 3.2.3 Uticaj polukrutih i ekscentričnih veza

Uticaj polukrutih i ekscentričnih veza može se jednostavno odrediti primenom prethodno izvedenih relacija. Polazeći od jednačina (3.4) i (3.15) deformaciona linija grede sa polukrutim i ekscentričnim vezama se može izraziti u obliku:

$$v(x) = N(x) (I - G) \bar{u} = N(x) (I - G) (I + E) u$$

$$v(x) = N(x) (I - G + E - G E) u = \bar{N}(x) u ,$$

gde je  $\bar{N}(x)$  vektor odgovarajućih interpolacionih funkcija za gredu sa polukrutim i ekscentričnim vezama:

$$\bar{N}(x) = N(x) (I - G + E - G E) = (I + G_1) u . \quad (3.17)$$

Uvedena je nova korektivna matrica  $G_1$  za elemente sa polukrutim ekscentričnim vezama:

$$G_1 = (-G + E - G E) . \quad (3.18)$$

Matrica  $G$  u prethodnom izrazu obuhvata samo uticaje polukrute veze, matrica  $E$  obuhvata samo uticaje ekscentrične veze, a proizvod matrica  $G E$  spregnute uticaje polukrute i ekscentrične veze. Posle množenja i sabiranja odgovarajućih matrica, matrica  $G_1$  ima oblik:

$$G_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & e_1 \Delta & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & 0 & -e_2 \Delta \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}$$

gde su elementi  $r_{ij}$ :

$$r_{21} = -r_{23} = -\frac{6}{l}(g_1 + 2g_1 g_2)$$

$$r_{22} = - \left( 4 + 6 \frac{e_1}{l} \right) g_1 - 12 \left( 1 + \frac{e_1}{l} \right) g_1 g_2$$

$$r_{24} = - \left( 2 + 6 \frac{e_2}{l} \right) g_1 - 12 \frac{e_2}{l} g_1 g_2$$

$$r_{41} = -r_{43} = - \frac{6}{l} (g_2 + 2g_1 g_2)$$

$$r_{42} = - \left( 2 + 6 \frac{e_1}{l} \right) g_2 - 12 \frac{e_1}{l} g_1 g_2$$

$$r_{44} = - \left( 4 + 6 \frac{e_2}{l} \right) g_2 - 12 \left( 1 + \frac{e_2}{l} \right) g_1 g_2 .$$

### 3.2.4 Matrica krutosti grede

Teorija prvog reda

Matrica krutosti štapa sa fleksibilnim ekscentričnim vezama izvešće se se preko ukupne energije deformacije:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l [v''(x)]^2 dx + \frac{1}{2} (k_1 \theta_1^2 + k_2 \theta_2^2) ,$$

gde je prvi član potencijalna energija elastične deformacije grede, a drugi član potencijalna energija rotacionih opruga u polukrutim vezama grede. Prethodna jednačina izražena u matičnom obliku glasi:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left[ EI \int_0^l [\bar{\mathbf{N}}(x)^T]'' [\bar{\mathbf{N}}(x)]'' dx \right] \mathbf{u} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\theta} , \quad (3.19)$$

gde je matrica  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} .$$

Kako se uglovi  $\theta_i$  mogu izraziti preko parametara pomeranja u čvorovima sistema pomoću veze (3.7):

$$\theta_1 = \mathbf{s}_1 \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{r}_1 \mathbf{u}$$

$$\theta_2 = \mathbf{s}_2 \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{r}_2 \mathbf{u} ,$$

gde su  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  vektori druge i četvrte vrste matrice  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} .$$

Ako se uvede matrica  $\bar{G}$ :

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_1 \\ 0 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

jednačina (3.19) ima oblik:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left[ EI \int_0^l [\bar{N}(x)^T]'' [\bar{N}(x)]'' dx \right] \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \bar{G}^T S \bar{G} \mathbf{u},$$

ili kad se preuredi:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left[ EI \int_0^l [\bar{N}(x)^T]'' [\bar{N}(x)]'' dx + \bar{G}^T S \bar{G} \right] \mathbf{u}, \quad (3.21)$$

odakle sledi da je matrica krutosti određena jednačinom:

$$\mathbf{k} = EI \int_0^l (\bar{N}'')^T \bar{N}'' dx + \bar{G}^T S \bar{G}. \quad (3.22)$$

Prethodno je jednačinom (3.17) određen vektor interpolacionih funkcija za gredu sa polukrutim i ekscentričnim vezama  $\bar{N}$ , pa se jednačina (3.22) može razviti:

$$\mathbf{k} = \int_0^l [\mathbf{N}''(\mathbf{I} + \mathbf{G}_1)]^T \bar{N}''(\mathbf{I} + \mathbf{G}_1) dx + \bar{G}^T S \bar{G},$$

odnosno:

$$\mathbf{k} = (\mathbf{I} + \mathbf{G}_1)^T \left[ \int_0^l (\mathbf{N}'')^T \mathbf{N}'' dx \right] (\mathbf{I} + \mathbf{G}_1) + \bar{G}^T S \bar{G}.$$

Ako se uvede oznaka za matricu krutosti grede sa krutim centričnim vezama  $\mathbf{k}_o$ :

$$\mathbf{k}_o = EI \int_0^l (\mathbf{N}'')^T \mathbf{N}'' dx,$$

može se matrica krutosti grede sa ekscentričnim polukrutim vezama napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= (\mathbf{I} + \mathbf{G}_1)^T \mathbf{k}_o (\mathbf{I} + \mathbf{G}_1) + \bar{G}^T S \bar{G} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_o + \mathbf{G}_1^T \mathbf{k}_o + \mathbf{k}_o \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_1^T \mathbf{k}_o \mathbf{G}_1 + \bar{G}^T S \bar{G}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Poslednjom jednačinom ilustruje se smisao uvođenja korektivne matrice  $\mathbf{G}_1$ . Na osnovu poznate matrice krutosti standardnog grednog elementa  $\mathbf{k}_o$  i korektivne matrice  $\mathbf{G}_1$ , koja obuhvata efekte polukrutih i ekscentričnih veza elementa, jednostavno, primenjujući samo matrično množenje i sabiranje dobija se matrica krutosti modifikovanog grednog elementa.

U specijalnom slučaju kada su veze polukrute i centrične eksplicitni izrazi za matricu krutosti grede glase:

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} \frac{1+q_1+q_2}{\Delta} & \frac{6}{l^2} \frac{1+2q_2}{\Delta} & -\frac{12}{l^3} \frac{1+q_1+q_2}{\Delta} & \frac{6}{l^2} \frac{1+2q_1}{\Delta} \\ & \frac{4}{l} \frac{1+3q_2}{\Delta} & -\frac{6}{l^2} \frac{1+2q_2}{\Delta} & \frac{2}{l} \frac{1}{\Delta} \\ & & \frac{12}{l^3} \frac{1+q_1+q_2}{\Delta} & -\frac{6}{l^2} \frac{1+2q_1}{\Delta} \\ \text{simetr.} & & & \frac{4}{l} \frac{1+3q_1}{\Delta} \end{bmatrix} EI$$

Odnosno za slučaj ekscentričnih i krutih veza matrica krutosti je:

$$\bar{k} = k_o + k_e,$$

gde je:

$$k_e = \begin{bmatrix} 0 & \frac{12e_1}{l^3} & 0 & \frac{12e_2}{l^3} \\ \frac{12e_1^2}{l^3} + \frac{12e_1}{l^2} & -\frac{12e_1}{l^3} & \frac{12e_1e_2}{l^3} + \frac{6}{l^2}(e_1 + e_2) & -\frac{12e_2}{l^3} \\ & 0 & & \\ \text{simetr.} & & & \frac{12e_2^2}{l^3} + \frac{12e_2}{l^2} \end{bmatrix}$$

### Teorija drugog reda

Matrica krutosti štapa po teoriji drugog reda može da se odredi direktno, na osnovu geometrijsko-statičkog značenja njenih elemenata i rešenja diferencijalne jednačine štapa po teoriji drugog reda [9, 10]. Pošto je usvojenom pretpostavkom, problem aksijalnog naprežanja nezavisan od savijanja, to se određivanje matrice aksijalne i transverzalne krutosti može razmatrati odvojeno. Matrica aksijalne krutosti je ista kao u linearnoj teoriji, pošto je diferencijalna jednačina problema ista kao u linearnoj teoriji.

Oblik matrice krutosti grednog elementa pogodno je prikazati u obliku:

$$k^{II} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12\phi_1 & 6l\phi_2 & -12\phi_1 & 6l\phi_2 \\ & 4l^2\phi_3 & -6l\phi_2 & 2l^2\phi_4 \\ & & 12\phi_1 & -6l\phi_2 \\ \text{simetr.} & & & 4l^2\phi_3 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

gde su  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  korektivne funkcije kojima se množe članovi matrice krutosti elementa po teoriji prvog reda. Funkcije su trigonometrijske ili hiperboličke u zavisnosti da li je aksijalna sila u elementu  $S$  sila zatezanja ili sila pritiska. Za slučaj aksijalno neopterećenog elementa ( $S = 0$ ), sve funkcije  $\phi_i$  postaju jedinica, tako da se ova matrica svodi na matricu kao u linearnoj analizi. Analitički izrazi za korektivne funkcije date su u Tabeli 3.1.

Da bi se izbegle numeričke teškoće u slučaju kada je aksijalna sila u elementu jednaka ili bliska nuli, kada izrazi za članove matrice krutosti postaju neodređeni, koristi se alternativan oblik matrice krutosti štapa preko eksponencijalnih redova. Pored toga, u matricnoj analizi konstrukcija na bazi analitičkog rešenja diferencijalne jednačine teorije drugog reda pojavljuju se tri različita oblika matrice krutosti štapa, zavisno od toga da li je štap pritisnut, zategnut ili je u štapu aksijalna sila jednaka nuli. Analiza se se značajno uniformiše i pojednostavljuje primenom matrice krutosti štapa u alternativnom obliku, jer je matrica ista za bilo koji slučaj aksijalnog naprežanja štapa. Formalno elementi matrice krutosti ostaju isti, samo se menju izrazi za funkcije  $\phi_i$ :

Tabela 3.1: Funkcije  $\phi$  u zavisnosti od aksijalne sile

Funkcija	pritisnut štap	zategnut štap	$S = 0$
$\phi_1$	$\frac{\omega^3 \sin \omega}{12 \Delta_p}$	$\frac{\omega^3 \operatorname{sh} \omega}{12 \Delta_z}$	1
$\phi_2$	$\frac{\omega^2 (1 - \cos \omega)}{6 \Delta_p}$	$\frac{\omega^2 (\operatorname{ch} \omega - 1)}{6 \Delta_z}$	1
$\phi_3$	$\frac{\omega (\sin \omega - \omega \cos \omega)}{4 \Delta_p}$	$\frac{\omega (\omega \operatorname{ch} \omega - \operatorname{sh} \omega)}{4 \Delta_z}$	1
$\phi_4$	$\frac{\omega (\omega - \sin \omega)}{2 \Delta_p}$	$\frac{\omega (\operatorname{sh} \omega - \omega)}{2 \Delta_z}$	1
$\Delta_p = 2(1 - \cos \omega) - \omega \sin \omega$ $\Delta_z = 2(1 - \operatorname{ch} \omega) + \omega \operatorname{sh} \omega$			

$$\phi_1 = \frac{1}{12\phi} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\pm\omega^2)^n \right]$$

$$\phi_2 = \frac{1}{6\phi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} (\pm\omega^2)^n \right]$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4\phi} \left[ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+3)!} (\pm\omega^2)^n \right]$$

$$\phi_4 = \frac{1}{2\phi} \left[ \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} (\pm\omega^2)^n \right]$$

gde je:

$$\phi = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} (\pm\omega^2)^n$$

U prethodnim izrazima znak plus važi za aksijalnu silu zatezanja, znak minus za aksijalnu silu pritiska. Za efikasan numerički proračun neophodno je znati potreban broj članova reda koji mora da se uzme pri aproksimaciji funkcija  $\phi_i$  da bi se dobila zahtevana tačnost rešenja. Tako na primer za traženu tačnost da je relativna greška  $\Delta = 10^{-5}$ , potrebno je pri izračunavanju funkcija uzeti osam članova reda. U specijalnom slučaju kada se razmatra red samo sa dva člana, dobija se oblik matrice krutosti koji se obično predstavlja kao zbir dve matrice, klasične fleksione matrice krutosti i takozvane geometrijske matrice krutosti štapa.

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_o + \mathbf{k}_g \quad ,$$

gde je:

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l^2 & l^2 \\ & & 36 & -3l^2 \\ \text{simetr.} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{S}{30l}$$



Kad je poznata matrica krutosti, onda je jednostavno uspostaviti vezu između pomeranja i sila na krajevima elementa:

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12\phi_1 & 6l\phi_2 & -12\phi_1 & 6l\phi_2 \\ & 4l^2\phi_3 & -6l\phi_2 & 2l^2\phi_4 \\ & & 12\phi_1 & -6l\phi_2 \\ \text{simetr.} & & & 4l^2\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \varphi_1 \\ \bar{v}_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Relacije između sila i pomeranja na krajevima elementa su nelinearne, pošto funkcije  $\phi_i$  zavise od aksijalne sile, koja je takođe funkcija pomeranja i obrtanja krajeva elementa, odnosno čvorova sistema. Momenti na krajevima uz vođenje računa o jednačini (3.3) mogu da se prikažu u sledeći način:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 6\phi_2 & 4l\phi_3 & -6\phi_2 & 2l\phi_4 \\ 6\phi_2 & 2l\phi_4 & -6\phi_2 & 4l\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \varphi_1 - \theta_1 \\ \bar{v}_2 \\ \varphi_2 - \theta_2 \end{bmatrix}$$

odnosno ako se eliminišu relativne rotacije na osnovu (3.5):

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{\Delta l^2} \begin{bmatrix} 1 + 4g_2\phi_3 & -2g_2\phi_4 \\ -2g_1\phi_4 & 1 + 4g_1\phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6\phi_2 & 4l\phi_3 & -6\phi_2 & 2l\phi_4 \\ 6\phi_2 & 2l\phi_4 & -6\phi_2 & 4l\phi_3 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}},$$

gde je:

$$\Delta = (1 + 4g_1\phi_3)(1 + 4g_2\phi_3) - 4g_1g_2\phi_4^2.$$

Vektor  $\theta$  se sada može izraziti u obliku:

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{M}_1}{k_1} \\ 0 \\ \frac{\bar{M}_2}{k_2} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \varphi_1 \\ \bar{v}_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{u}},$$

gde je matrica  $\mathbf{G}_2$  korektivna matrica za element sa polukrutim vezama po teoriji drugog reda:

$$\mathbf{G}_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix}.$$

Formalno ona ima isti oblik kao i korektivna matrica u teoriji prvog reda  $\mathbf{G}$ , samo se razlikuju izrazi za članove:

$$s_{21} = -s_{23} = \frac{6}{l} [g_1 + 2g_1g_2(2\phi_3 - \phi_4)] \phi_2$$

$$s_{22} = 4 [g_1\phi_3 + g_1g_2(4\phi_3^2 - \phi_4^2)]$$

$$s_{24} = 2g_1\phi_4$$

$$s_{41} = -s_{43} = \frac{6}{l} [g_2 + 2 g_1 g_2 (2 \phi_3 - \phi_4)] \phi_2$$

$$s_{42} = 2 g_2 \phi_4$$

$$s_{44} = 4 [g_2 \phi_3 + g_1 g_2 (4 \phi_3^2 - \phi_4^2)] .$$

Efekti ekscentričnosti veze elementa mogu se uzeti u razmatranje na isti način kao po teoriji prvog reda, pa se dobija još jedna korektivna matrica:

$$\mathbf{G}_3 = (-\mathbf{G}_2 + \mathbf{E} - \mathbf{G}_2 \mathbf{E}) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & e_1 \Delta & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & 0 & -e_2 \Delta \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} ,$$

gde su elementi  $r_{ij}$ :

$$r_{21} = -r_{23} = -\frac{6}{l} [g_1 + 2 g_1 g_2 (2 \phi_3 - \phi_4)] \phi_2$$

$$r_{22} = -\frac{6e_1}{l} [g_1 + 2 g_1 g_2 (2 \phi_3 - \phi_4)] \phi_2 - 4 [g_1 \phi_3 + g_1 g_2 (4 \phi_3^2 - \phi_4^2)]$$

$$r_{24} = -\frac{6e_2}{l} [g_1 + 2 g_1 g_2 (2 \phi_3 - \phi_4)] \phi_2 - 2 g_1 \phi_4$$

$$r_{41} = -r_{43} = -\frac{6}{l} [g_2 + 2 g_1 g_2 (2 \phi_3 - \phi_4)] \phi_2$$

$$r_{42} = -\frac{6e_1}{l} [g_2 + 2 g_1 g_2 (2 \phi_3 - \phi_4)] \phi_2 - 2 g_2 \phi_4$$

$$r_{44} = -\frac{6e_2}{l} [g_2 + 2 g_1 g_2 (2 \phi_3 - \phi_4)] \phi_2 - 4 [g_2 \phi_3 + g_1 g_2 (4 \phi_3^2 - \phi_4^2)] .$$

Određivanjem korektivnih matrica efikasno se može izračunati matrica krutosti:

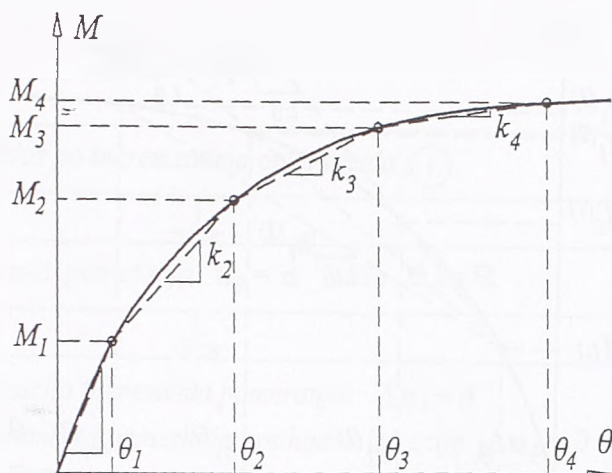
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_o + \mathbf{G}_3^T \mathbf{k}_o + \mathbf{k}_o \mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_3^T \mathbf{k}_o \mathbf{G}_3 + \bar{\mathbf{G}}_1^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{G}}_1 , \quad (3.25)$$

gde matrica  $\bar{\mathbf{G}}_1$  ima analogno značenje kao i matrica  $\bar{\mathbf{G}}$  u teoriji prvog reda (3.20).

### 3.2.5 Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja

Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja usled raspodeljenog poprečnog opterećenja  $p(x)$  duž ose štapa sa polukrutim čvornim vezama, može se odrediti na poznati način:

$$\mathbf{Q} = \int_p^l p(x) \bar{\mathbf{N}}^T(x) dx = (\mathbf{I} + \mathbf{G}) \int_o^l p(x) dx .$$



Slika 3.6: Sekantna krutost veze

### 3.3 Inkrementalno–iterativni postupak

Osnovne nepoznate veličine su pomeranja i obrtanja čvorova sistema  $u$ , koja se određuju iz jednačine:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.26)$$

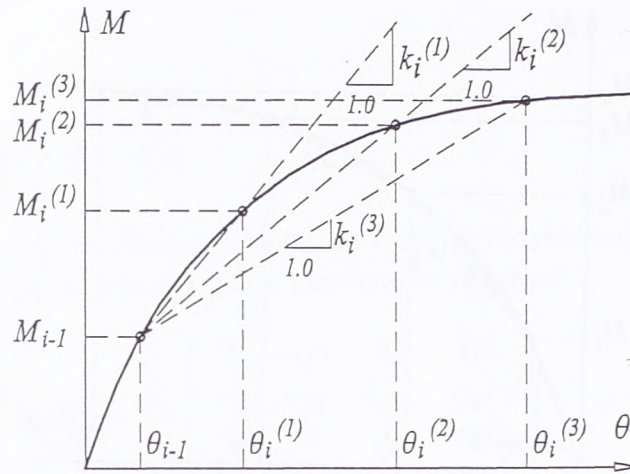
gde je  $\mathbf{K}$  matrica krutosti sistema, a  $\mathbf{F}$  vektor čvornih sila. Matrica krutosti sistema određuje se kao zbir doprinosa krutosti svih pojedinih linijskih elemenata za svaku nepoznatu, tj. za svaki stepen slobode. Kako je krutost elementa sa polukrutim nelinearnim vezama zavisna od nepoznatih obrtanja, problem je nelinearan. Pri tome treba naglasiti da se nelinearnost u jednačinama pojavljuje samo kod onih nepoznatih obrtanja čvorova gde je vezan element sa takvom polukrutom nelinearnom vezom. Za rešavanje jednačine (3.26) pogodno je primeniti inkrementalno–iterativni postupak pomoću koga se ona linearizuje.

Da bi se formirala matrica krutosti sistema potrebno je za svaki nivo opterećenja odrediti odgovarajuću krutost  $k(\theta)$  svake polukrute nelinearne veze. Opterećenje se deli na određen broj inkremenata i usvaja se pretpostavka da je krutost opruge konstantna u okviru jednog inkrementa opterećenja. Opravdanost uvedene pretpostavke je uslovljena veličinom inkrementa opterećenja, što je inkrement opterećenja manji to je pretpostavka realnija. Krutost opruge se određuje kao odgovarajuća sekantna krutost (Slika 3.6):

$$k = \frac{\Delta M}{\Delta \theta_i}$$

Na početku inkrementa nije poznata krutost veze za taj inkrement, pa je potrebno iterativnim postupkom do nje doći (Slika 3.7):

$$k_i^{(j)} = \frac{\Delta M^{(j)}}{\Delta \theta^{(j)}} = \frac{M_i^{(j)} - M_{i-1}}{\theta_i^{(j)} - \theta_{i-1}} \quad (3.27)$$



Slika 3.7: Inkrementi i iteracije

gde su  $M_{i-1}$  i  $\theta_{i-1}$  moment i odgovarajući ugao na kraju inkrementa  $i-1$ , a  $M_i^{(j)}$  i  $\theta_i^{(j)}$  vrednosti u  $j$ -toj iteraciji  $i$ -tog inkrementa.

Za početnu krutost  $i$ -tog inkrementa, u prvoj iteraciji, usvaja se sekantna krutost prethodnog inkrementa  $k_{i-1}$ , a zatim se određuje odgovarajuća matrica krutosti elementa prema izrazima kao za element sa polukrutom elastičnom vezom. Na osnovu pomeranja dobijenih rešavanjem jednačina sistema, a za promenjenu krutost sistema određuje se moment  $M_i^{(j)}$ . Primenom veze (3.11) može odrediti  $\theta_i^{(j)}$ , pa su sračunate sve potrebne veličine za definisanje krutosti opruge prema jednačini (3.27).

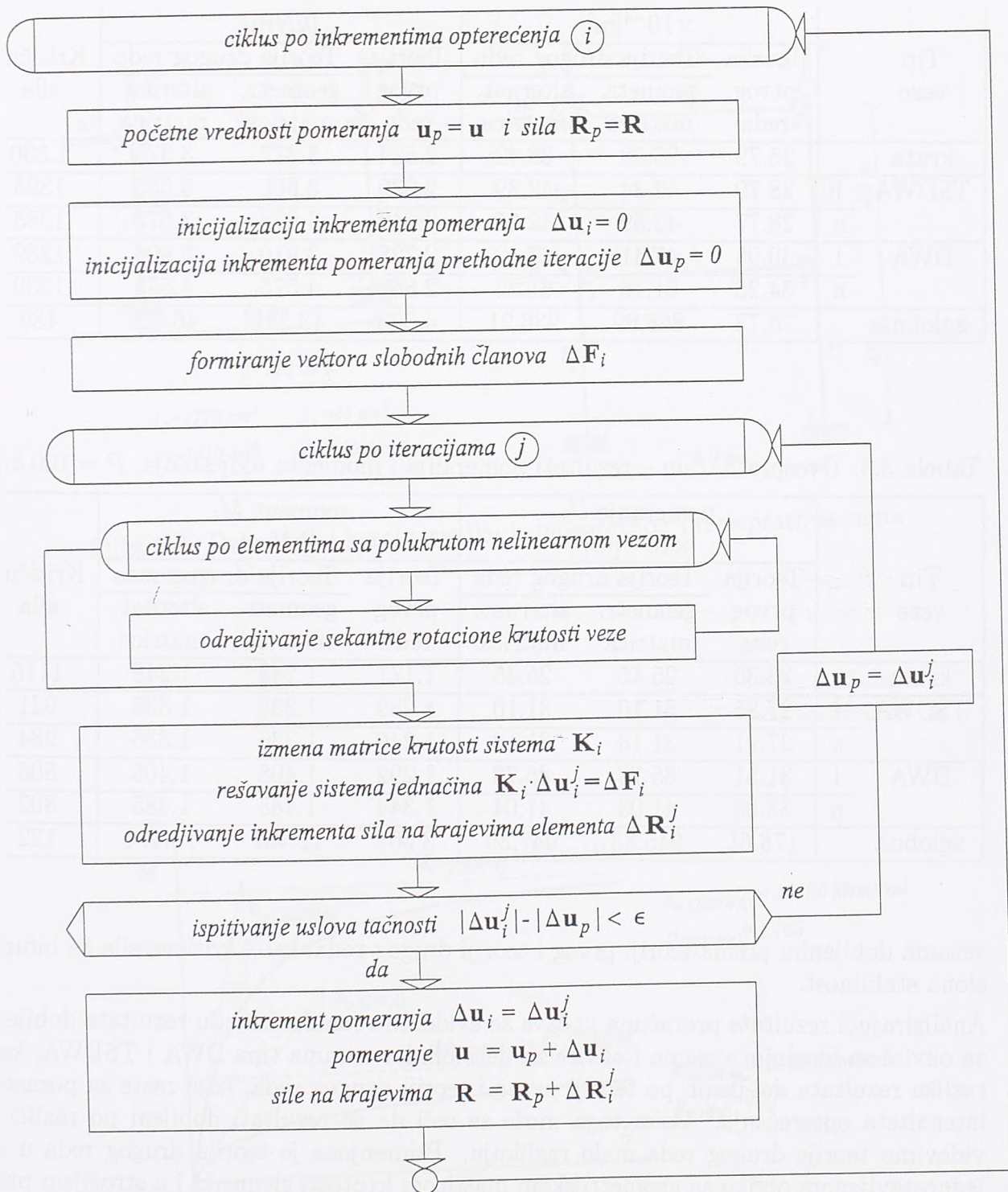
Konačna krutost opruge u okviru inkrementa određena je kada je postignuta zahtevana tačnost, definisana preko relativne razlike čvornih pomeranja sistema za dve uzastopne iteracije. Algoritam proračuna koji se odnosi na inkrementalno-iterativni postupak prikazan je na Slici 3.8.

### 3.4 Primeri

Na osnovu prethodnih teoretskih razmatranja, pomoću razvijenog računarskog programa SASF, sprovedena je numerička analiza rama različite spratnosti. Za ilustraciju prikazani su rezultati za dva jednostavna slučaja, jednospratni i dvospratni ram (Slika 3.9). U oba slučaja pored idealnih čvornih veza razmatrana su i dva tipa polukrutih veza greda-stub i to: veza sa dva priključna ugaonika na rebru (tip DWA) i veza sa četiri ugaonika (tip TSDWA). Za određivanje parametara triparametarskih krivih koje odgovaraju usvojenim vezama, korišćena je baza podataka standardizovanih tipova veza koju su formirali Chen i Kishi [13]. Oblik dobijenih krivih prikazan je na Slici 3.10.

Ramovi su opterećeni značajnim vertikalnim  $P$  i malim horizontalnim opterećenjem  $nP$ , gde je  $n=0.005$ , kako bi se utvrdio uticaj efekata teorije drugog reda na rezultate proračuna za različite krutosti veza.

Karakteristični rezultati proračuna prikazani su u Tabelama 3.2 i 3.3. Izabrana su horizontalna pomeranja na vrhu i momenti uklještenja, koji odgovaraju idealnim i polukrutim



Slika 3.8: Algoritam inkrementalno-iterativnog postupka

Tabela 3.2: Jednospratni ram – rezultati pomeranja i momenta uklještenja,  $P = 450 \text{ kN}$ 

Tip veze	pomeranje $U_3$ $\times 10^{-4} [m]$			moment $M_1$ $[kNm]$			Kritična sila	
	Teorija prvog reda	Teorija drugog reda		Teorija prvog reda	Teorija drugog reda			
		geometr. matrica	alternat. matrica		geometr. matrica	alternat. matrica		
kruta	25.79	36.38	36.42	2.524	3.377	3.376	1.530	
TSDWA	l	28.70	42.34	42.39	2.639	3.665	3.663	1395
	n	28.77	42.59	42.65	2.642	3.678	3.675	1383
DWA	l	30.95	47.41	47.49	2.728	3.910	3.908	1289
	n	34.25	61.16	61.36	2.863	4.575	4.575	1289
zglobna	75.73	868.69	936.21	4.503	43.591	46.629	489	

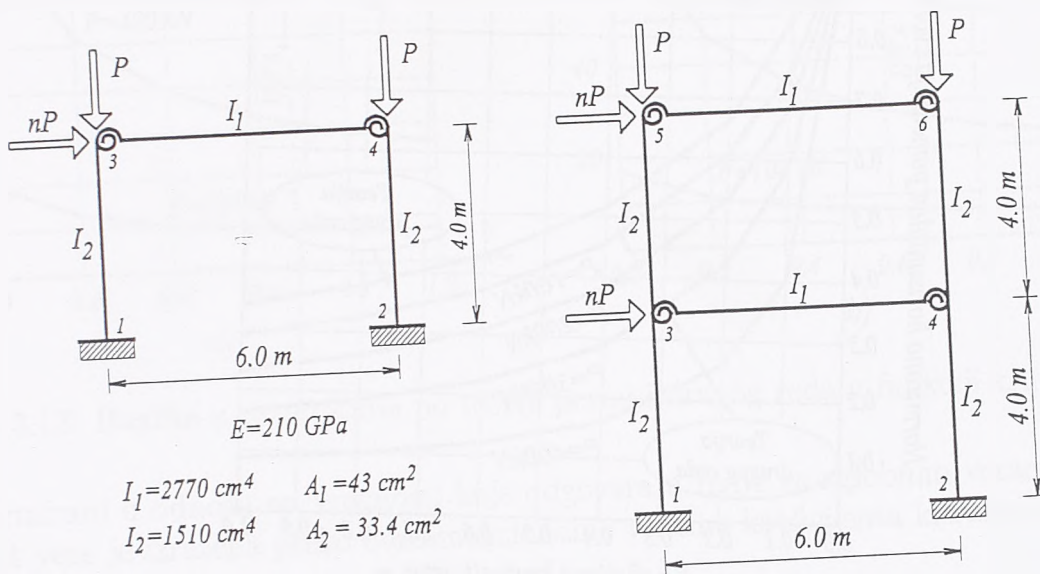
Tabela 3.3: Dvospratni ram – rezultati pomeranja i momenta uklještenja,  $P = 100 \text{ kN}$ 

Tip veze	pomeranje $U_3$ $\times 10^{-4} [m]$			moment $M_1$ $[kNm]$			Kritična sila	
	Teorija prvog reda	Teorija drugog reda		Teorija prvog reda	Teorija drugog reda			
		geometr. matrica	alternat. matrica		geometr. matrica	alternat. matrica		
kruta	23.35	25.45	25.45	1.171	1.248	1.248	1115	
TSDWA	l	27.85	31.10	31.10	1.239	1.335	1.335	921
	n	27.91	31.18	31.18	1.240	1.336	1.336	984
DWA	l	31.51	35.78	35.78	1.292	1.405	1.405	806
	n	35.06	41.03	41.04	1.344	1.485	1.485	802
zglobna	176.61	945.63	947.39	3.001	12.457	12.474	122	

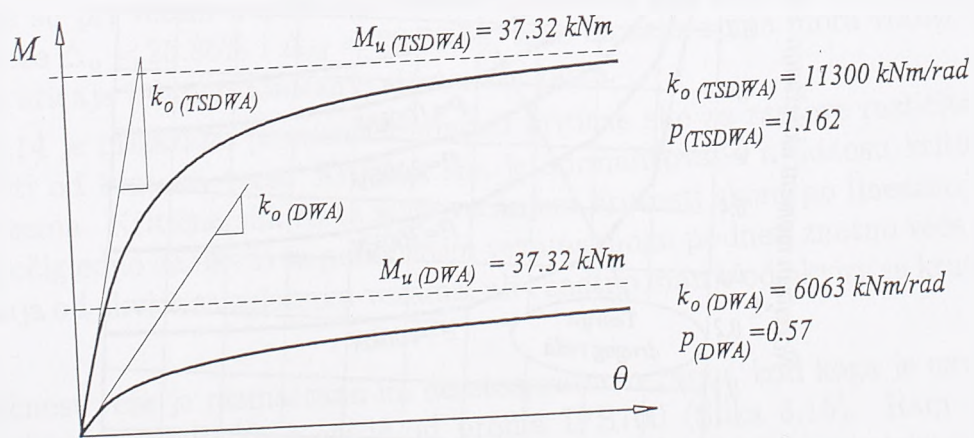
vezama dobijenim prema teoriji prvog i teoriji drugog reda, kao i kritična sila za bifurkacionu stabilnost.

Analizirajući rezultate proračuna uočava se evidentna razlika između rezultata dobijenih za okvire sa idealnim vezama i okvire za fleksibilnim vezama tipa DWA i TSDWA, kao i razlika rezultata dobijenih po teoriji prvog i teoriji drugog reda, koja raste sa porastom intenziteta opterećenja. Osim toga može se reći da se rezultati dobijeni po različitim vidovima teorije drugog reda malo razlikuju. Primenjena je teorija drugog reda u pojednostavljenom obliku sa geometrijskom matricom krutosti elementa i u strožijem preko matrice krutosti sa eksponencijalnim članovima (alternativni oblik). Razlike u rezultatima su očekivano male jer aksijalno opterećenje elemenata je malo u odnosu na kritičnu silu.

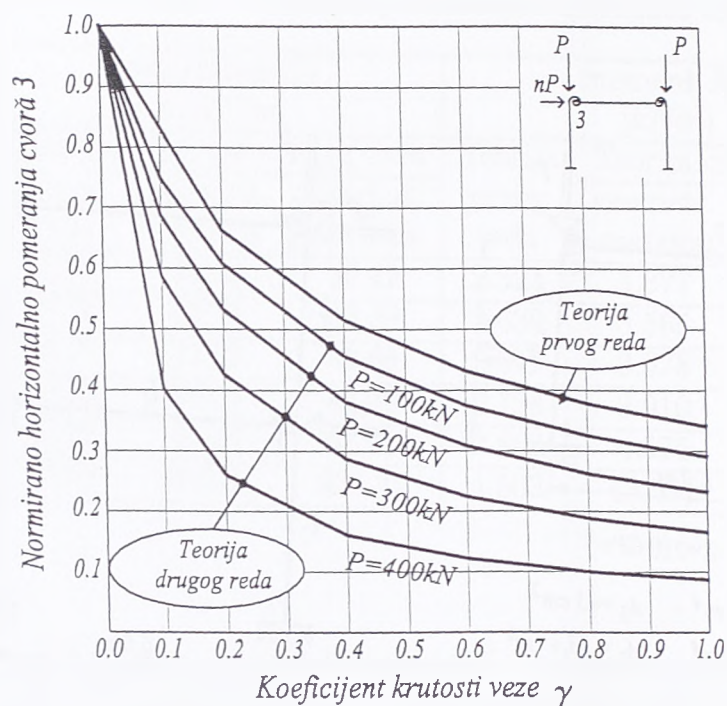
Na Slici 3.11 prikazana je promena horizontalnog pomeranja čvora 3, a na Slici 3.12 momenata uklještenja u čvoru 1, u zavisnosti of fleksibilnosti veze. Pomeranja i momenti



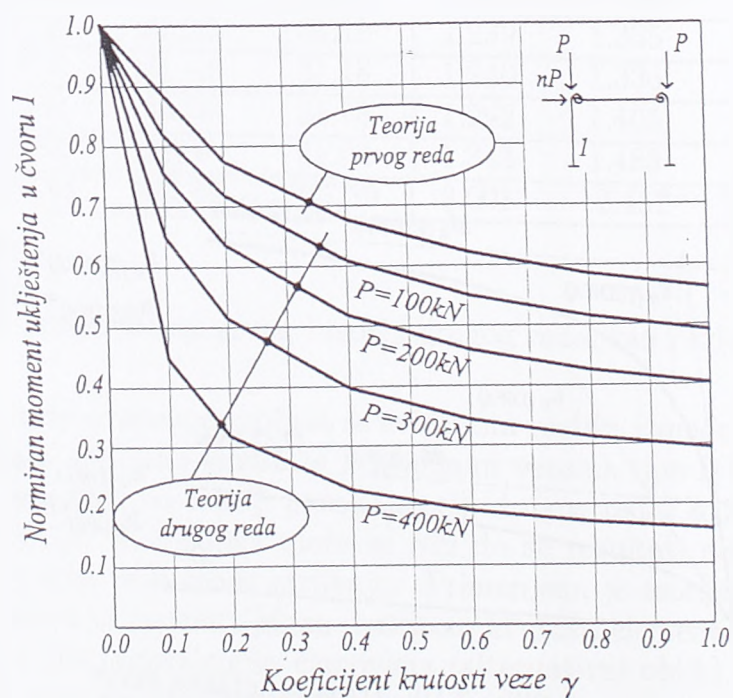
Slika 3.9: Dimenzije i karakteristike jednospratnog i dvospratnog rama



Slika 3.10: Triparametraske krive

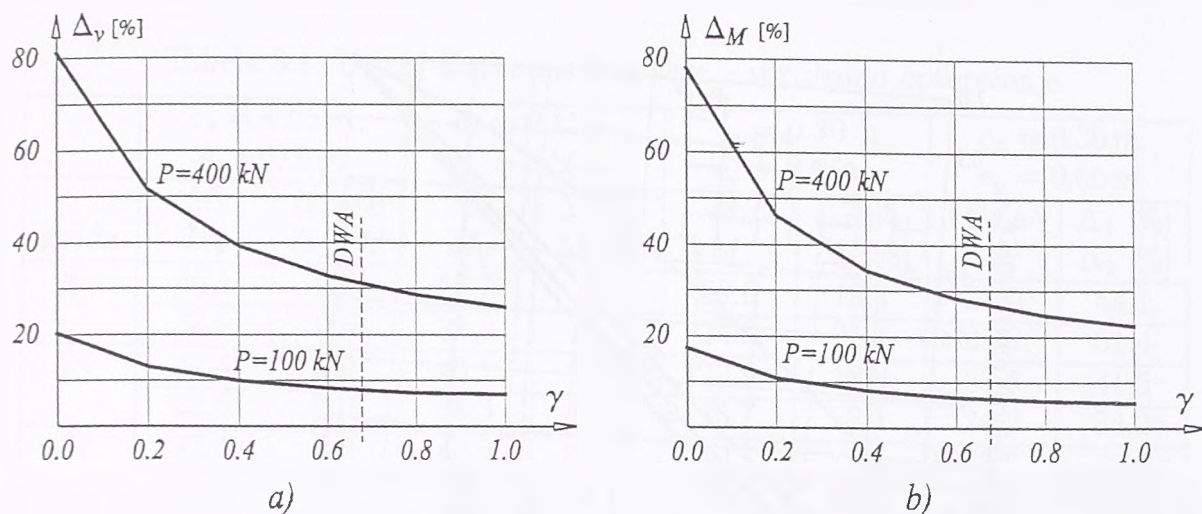


Slika 3.11: Uticaj fleksibilnosti veze na pomeranje vrha rama



Slika 3.12: Uticaj fleksibilnosti veze na moment uklještenja rama





Slika 3.13: Razlike u rezultatima po teoriji prvog i drugog reda u funkciji krutosti veze

su normirani u odnosu na vrednosti koje odgovaraju ramu sa zglobnim vezama. Fleksibilnost veze je izražena preko bezdimenzionalne veličine koeficijenta krutosti veze (*fixity factor*) [4, 17]:

$$\gamma = \frac{l}{l + 3EI/k}$$

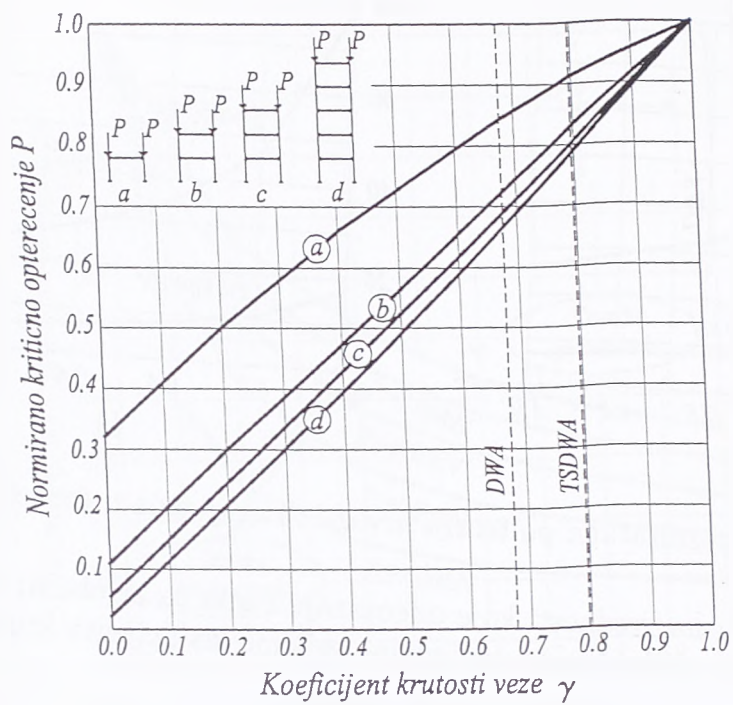
koji ima vrednost 1.0 za apsolutno krutu veze i vrednost 0.0 za idealno zglobnu vezu.

Može se videti da krive horizontalnog pomeranja i momenata uklještenja imaju sličan karakter, one opadaju sa porastom krutosti veze, i to prema linearnoj teoriji nezavisno od opterećenja, a prema teoriji drugog reda sve više za porastom opterećenja.

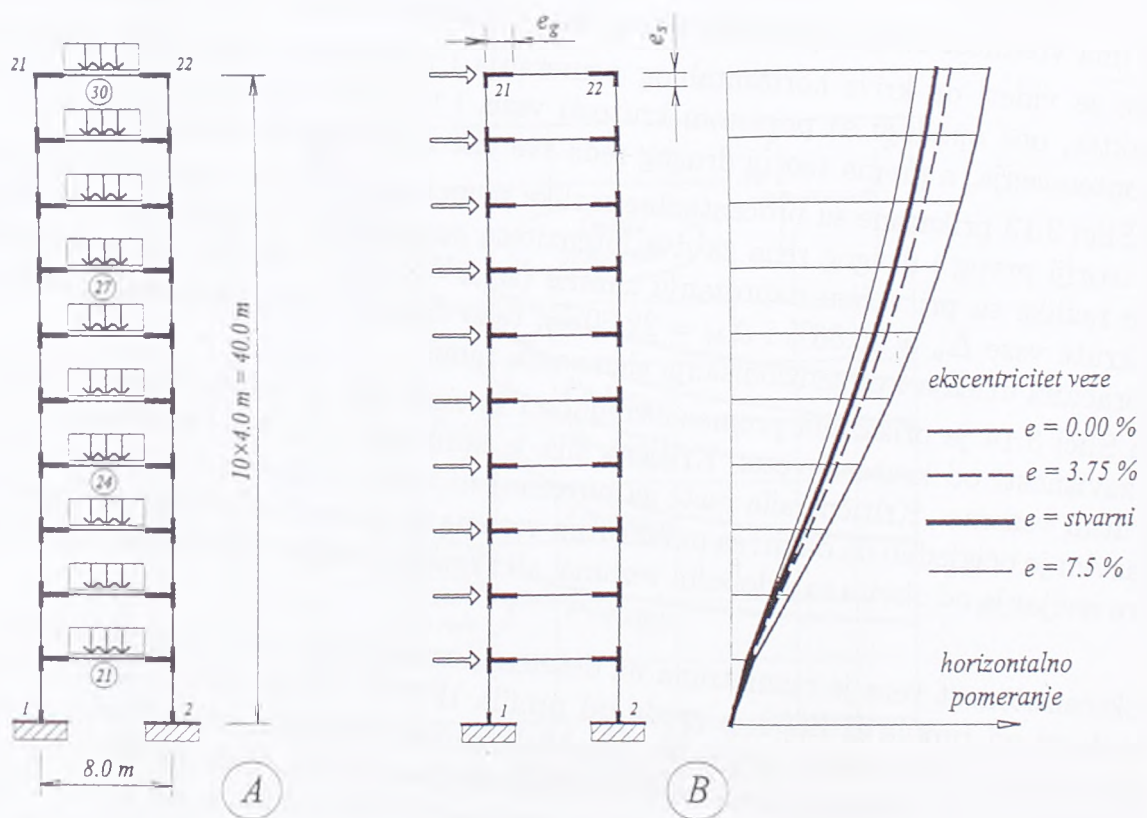
Na Slici 3.13 prikazane su procentualne razlike pomeranja, odnosno momenta uklještenja po teoriji prvog i drugog reda za dva intenziteta opterećenja ( $P=100 \text{ kN}$  i  $P=400 \text{ kN}$ ). Ove razlike su pri većem naprezanju znatne (za DWA  $\Delta_u = 30.86\%$  i  $\Delta_M = 26.67\%$ , a za krute veze  $\Delta_u = 25.86\%$  i  $\Delta_M = 22.30\%$ ), tako da se o njima mora voditi računa kod proračuna uticaja i dimenzionisanja elemenata rama.

Na Slici 3.14 je prikazana promena vrednosti kritične sile za ramove različite spratnosti u zavisnosti od krutosti veza. Kritična sila je normalizovana u odnosu kritičnu silu pri krutim vezama. Kritična sila raste sa povećanjem krutosti skoro po linearnoj zavisnosti. Sasvim je očigledno da okviri sa polukrutim vezama mogu podneti znatno veće opterećenje pre izvijanja od okvira sa zglobnim vezama, ali i znatno manje od okvira sa krutim vezama.

Ekscentričnost veze je razmatrana na desetospratnom ramu, kod koga je usvojeno da su stubovi od profila IPB600, a grede od profila IPB700 (Slika 3.15). Ram je opterećen sa dva tipa opterećenja, vertikalno raspodeljeno i horizontalno koncentrisano, kako bi se utvrdio uticaj ekscentriciteta veze na rezultate proračuna. Ekscentricitet na gredi  $e_g$  i ekscentricitet na stubu  $e_s$  je variran za vrednosti 3.75% i 7.5% u odnosu na dužinu linskog elementa, a zatim su rezultati upoređeni sa ramom za koji je pretpostavljeno da ima centrične veze ( $e_g = e_s = 0$ ). Rezultati analize prikazani su u Tabelama 3.4 i 3.5. Za slučaj vertikalnog opterećenja poređeni su rezultati momenata savijanja (momenata



Slika 3.14: Uticaj fleksibilnosti veze na kritično opterećenje



Slika 3.15: Ram sa ekscentričnim vezama za dva tipa opterećenja

Tabela 3.4: Uticaj ekscentriciteta veze – vertikalno opterećenje

greda	$e_s = 0.05 m$ $e_g = 0.0 m$		$e_s = 0.15 m$ $e_g = 0.30 m$		$e_s = 0.30 m$ $e_g = 0.35 m$		$e_s = 0.30 m$ $e_g = 0.60 m$	
	$M_o$	$\Delta_1$ [%]	$M_o$	$\Delta_1$ [%]	$M_o$	$\Delta_1$ [%]	$M_o$	$\Delta_1$ [%]
	$M_p$	$\Delta_2$ [%]	$M_p$	$\Delta_2$ [%]	$M_p$	$\Delta_2$ [%]	$M_p$	$\Delta_2$ [%]
21	46.1	0.0	38.7	19.1	38.6	19.4	32.0	44.1
	33.9	0.0	29.8	13.8	28.0	21.1	25.8	31.4
24	47.4	0.0	40.1	18.2	39.9	18.8	33.5	41.5
	32.6	0.0	28.3	15.2	26.7	22.1	24.3	34.2
27	47.5	0.0	40.2	18.2	40.1	18.5	33.7	40.9
	32.5	0.0	28.2	15.2	26.5	22.6	24.1	34.9
30	40.3	0.0	32.8	22.9	33.2	21.4	26.1	54.1
	39.7	0.0	35.6	11.5	33.4	18.9	31.7	25.2

Tabela 3.5: Uticaj ekscentriciteta veze – horizontalno opterećenje

	$e_s = 0.00 m$ $e_g = 0.00 m$	$e_s = 0.15 m$ $e_g = 0.30 m$	$e_s = 0.30 m$ $e_g = 0.35 m$	$e_s = 0.30 m$ $e_g = 0.60 m$
$U_{21} [\times 10^{-2} m]$	1.846	1.567	1.463	1.323
$\Delta$ [%]	0.0	17.8	26.2	39.5
$M_1 [kNm]$	138.5	134.5	136.1	130.7
$\Delta$ [%]	0.0	3.0	1.8	6.0

na krajevima greda  $M_o$  i momenata u polju  $M_p$ ) na reprezentativnim gredama označenim brojevima 21, 24, 27 i 30. Razlike u rezultatima izražene su procentualno preko veličina  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ , i iznose prosečno oko 20% za manji i oko 40% za veći ekscentricitet. Pri horizontalnom opterećenju razlike pomeranja vrha rama su u opsegu od 18% do 39%, dok su razlike momenata uklještenja bitno manje.

## Literatura

- [1] Kanaan A. E. and Powell G. H., A General Purpose Computer Program for Dynamic Analysis of Inelastic Plane Structures, Report No. EERC 73-6 and EERC 73-22, University of California, Berkeley 1975.
- [2] Chan S.L. and Chui P. P. T, Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections, Elsevier Science Ltd., Amsterdam, 2000.
- [3] Suarez L.E., Singh M.P. and Matheu E.E., Seismic Response of Structural Frameworks with Flexible Connections, Computer and Structures, Vol. 58, pp. 27–41, 1996.

- [4] Monforton G.R. and Wu T.S., Matrix Analysis of Semi-Rigidly Connected Frames, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 87, No. ST6, pp. 13–42, 1963.
- [5] Yu C.H. and Shanmugam N.E., Stability of Frames with Semirigid Joints, Computers and Structures, Vol. 23, pp. 639–648, 1986.
- [6] Przemieniecki J.S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw Hill Inc, New York 1968.
- [7] Sekulović M., Matrična analiza konstrukcija, Gradjevinska knjiga, Beograd 1991.
- [8] Sekulović M., Metod konačnih elemenata, Gradjevinska knjiga, Beograd 1984.
- [9] Goto Y. and Chen W.F., Second-order Elastic Analysis for Frame Design, ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 113, ST7, pp. 1501–1519, 1987.
- [10] Sekulović M., Geometrijski nelinearna analiza linijskih nosača, Teorija konstrukcija - Savremeni problemi nelinearne analize, Gradjevinska knjiga, Beograd 1992.
- [11] Sekulovic M. and Malcevic I., Second-order Analysis of Frame Structures, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 20, pp. 209–234, 1994.
- [12] Sekulovic M. and Malcevic I., Influence of the Bowing Effect in the Second-order Analysis of Frame Structures, Facta Universitatis Vol.1, pp. 1–11, 1994.
- [13] Chen W. F., Goto Y. and Richard Liew J. Y., Stability Design of Semi-rigid Frames, John Wiley & Sons, Inc. New York 1996.
- [14] Jones S.W., Kirby P.A. and Nethercot D.A, The Analysis of Frames with Semi-rigid Connections - a State-of-the-art report, Journal of Construction Steel Research, Vol. 3, pp. 2–13, 1983.
- [15] Simoes L.M.C., Optimization of Frames with Semi-rigid Connections, Computers and Structures, Vol. 60, pp. 531–539, 1996.
- [16] Chen W.F. and Lui E.M., Effect of Joint Flexibility on the Behaviour of Steel Frames, Computers and Structures, Vol. 26, pp. 719–732, 1987.
- [17] Dhillon B.S. and Abdel-Majid S., Interactive Analysis and Design of Flexibility Connected Frames, Computers and Structures, Vol. 36, pp. 189–202, 1990.
- [18] Goto Y., Suzuki S. and Chen W.F., Analysis of Critical Behaviour of Semi-rigid Frames with or without Load History in Connections, International Journal of Solids and Structures, Vol. 27, pp. 467–483, 1991.
- [19] Goto Y., Suzuki S. and Chen W.F., Stability Behaviour of Semi-rigid Sway Frames, Engng. Struct. Vol. 15, pp. 209–219, 1993.
- [20] Shi G. and Atlyri S.N., Static and Dynamic Analysis of Space Frames with Non-linear Flexible Connections, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 28, pp. 2635–2650, 1989.
- [21] Chan S.L. and Ho G.W.M., Nonlinear Vibration Analysis of Steel Frames with Semirigid Connections, ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 120, pp. 1075–1087, 1991.

# Dinamička analiza rama sa polukrutim, ekscentričnim i viskoznim vezama

---

## 4.1 Uvod

U odnosu na proračun u statičkoj analizi konstrukcija dinamički proračun je ne samo obimniji, već i znatno komplikovaniji. Razlog za to je veći broj potrebnih parametara i inženjerski mnogo neizvesnija procena ulaznih veličina. Teškoće u određivanju ulaznih veličina je posledica specifičnosti ponašanja i materijala i konstrukcije pri cikličnom dinamičkom opterećenju. Takođe, eksperimenti koji se odnose na ponašanje konstrukcije pri dinamičkom opterećenju su složeniji i zahtevniji, pa je zato i njihov broj mnogo manji u odnosu na statička ispitivanja.

Kod ramovskog konstruktivnog sistema, pri seizmičkom opterećenju, odgovor sistema je najviše uslovljen ponašanjem čvorova, odnosno veza greda–stub. U čvorovima se ostvaruje nelinearna deformacija i velika disipacija seizmičke energije. Iz tog razloga za kvalitetnu seizmičku analizu potrebno je adekvatno modelirati ove konstrukcijske elemente, sa nelinearnim konstitutivnim relacijama za čvorne veze i pojavom prigušenja u njima. Kako su čelični ramovski sistemi po pravilu fleksibilne konstrukcije, usled dejstva seizmičkih sila, dolazi do velikih horizontalnih pomeranja, pa su efekti teorije drugog reda veoma bitni. Zato u seizmičkom proračunu, pored materijalno nelinearne treba primeniti i geometrijski nelinearnu analizu. Navedeni zahtevi za analizu su veoma ozbiljni, pa je proračun veoma komplikovan. Međutim, zahvaljujući efikasnim algoritmima i računarskim programima, čak i ovakav proračun može biti primenljiv u praktičnim proračunima. Primer takvog proračuna objašnjen je u ovom poglavlju.

Za rešenje problema usvojen je proračun zasnovan na Metodi konačnih elemenata (MKE). U skladu sa usvojenim postupkom, potrebno je definisati određivanje osnovnih dinamičkih karakteristika sistema, odnosno treba odrediti matricu masa, matricu krutosti i matricu prigušenja razmatranog sistema. Određivanje matrice krutosti za gredni element sa ekscentričnim i nelinearnim polukrutim vezama definisano je u okviru prethodnog poglavlja u kojem je razmatran sistem pri dejstvu statičkog opterećenja po teoriji prvog i teoriji drugog reda. U ovom poglavlju izvedena je matrica masa konačnog linijskog elementa sa polukrutim vezama i matrica prigušenja za pretpostavljeno viskozno prigušenje u vezi greda–stub. Pošto je uveden novi parametar u proračun, koeficijent viskoznog prigušenja, izvršena je njegova procena u odnosu na relativno prigušenje, koje predstavlja inženjerski uobičajeni način kvantifikacije prigušenja. Efekat teorije drugog reda razmatran je u strožijem obliku, u kojem je uzeta u obzir promena aksijalnih sila u elementima usled horizontalnog opterećenja.

## 4.2 Oscilacije neprigušenog sistema

### 4.2.1 Matrica mase

Da bi se proračun sistema sa raspodeljenim masama pojednostavio, saglasno principu Metode konačnih elemenata, raspodeljeno inercijalno opterećenje se zamenjuje ekvivalentnim inercijalnim opterećenjem u čvorovima nosača. U tom smislu postoje dva prilaza, zamena raspodeljenih masa direktno koncentrisanim masama i zamena raspodeljenih masa ekvivalentnim masama. I u prvom i u drugom prilazu, broj jednačina kretanja linijskog nosača u ravni je isti, ali u slučaju direktno koncentrisanih masa koeficijenti uz nepoznate imaju znatno jednostavniji oblik, što značajno skraćuje i pojednostavljuje proračun, pa se zato ovakve aproksimacije često koriste u praktičnim proračunima.

Prvi postupak se sastoji u koncentrisanju masa elemenata u čvorovima nosača. Tako na primer, kod elementa konstantnog poprečnog preseka njegova ukupna masa se deli na dve jednake mase koncentrisane u njegovim krajevima. Drugi prilaz se sastoji u određivanju inercijalnog opterećenja duž elementa u toku kretanja nosača, i zatim zameni ovog inercijalnog opterećenja ekvivalentnim čvornim opterećenjem. Da bi se odredilo inercijalno opterećenje kao proizvod mase i ubrzanja, potrebno je poznavati pomeranja tačaka elementa  $v(x)$ . Tačan proračun ovih pomeranja zahteva rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina kretanja. Ovaj problem se može izbeći ako se pretpostavi da je deformisani oblik ose elementa pri dinamičkom opterećenju isti kao i pri statičkom opterećenju za date granične uslove po pomeranjima, u slučaju kad nema dejstva dinamičkog opterećenja duž ose elementa.

Na osnovu prethodnog, inercijalno opterećenje  $p_I$  duž elementa može se napisati u obliku:

$$p_I = -\rho A \frac{\partial^2 v(x)}{\partial t^2} = -\rho A \ddot{v}(x) \quad (4.1)$$

gde je  $\rho$  masa po jedinici zapremine, a  $A$  površina poprečnog preseka grede. Poprečno pomeranje proizvoljne tačke  $v(x)$  u funkciji vektora pomeranja krajeva elementa  $\mathbf{u}$ , uobičajeno se u MKE izražava se pomoću vektora interpolacionih funkcija  $\mathbf{N}(x)$ :

$$v(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{u} \quad .$$

Na osnovu stava o uzajamnosti radova rad ekvivalentnog inercijalnog čvornog opterećenja  $\mathbf{q}_I$  na pomeranjima  $\mathbf{u}$ , jednak je radu inercijalnog opterećenja  $p_I$  na pomeranjima  $v(x)$ :

$$\mathbf{q}_I^T \mathbf{u} = \int_V p_I v(x) dV \quad ,$$

pa je prema (4.1):

$$\mathbf{q}_I^T \mathbf{u} = \int_V p_I \mathbf{N}(x) dV \mathbf{u} = - \int_V \rho \ddot{v}(x) \mathbf{N}(x) dV \mathbf{u} \quad .$$

Kako važi  $\ddot{v}(x) = \mathbf{N}(x) \ddot{\mathbf{u}}$  sledi da je:

$$\mathbf{q}_I = - \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{u}} \quad .$$

Vektor ekvivalentnog inercijalnog čvornog opterećenja s druge strane može se izraziti i preko mase i ubrzanja:

$$q_I = -m \ddot{u} \quad , \quad (4.2)$$

pa sledi da je odgovarajuća matrica masa:

$$m = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad . \quad (4.3)$$

Matrica masa definisana prethodnim izrazom naziva se i konzistentna matrica masa, ako se koriste iste interpolacione funkcije kao i za definisanje polja pomeranja u elementu.

### Matrica mase grede sa krutim vezama

Ako se za interpolacione funkcije obostrano uklještenne grede konstantnog poprečnog preseka usvoje interpolacione funkcije koje odgovaraju definiciji grednog elementa u statičkoj analizi:

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ 0 & l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ \xi & 0 \\ 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ 0 & l(-\xi^2 + \xi^3) \end{bmatrix} \quad \xi = \frac{x}{l} \quad ,$$

na osnovu izvedenog izraza (4.3), matrica masa pravog obostrano uklještenog elementa konstantnog poprečnog preseka je:

$$\mathbf{m}_o = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.4)$$

### Matrica mase grede sa polukrutim vezama

Na isti način kako je određena konzistentna matrica za gredu sa krutim vezama, može se odrediti i konzistentna matrica masa za gredu sa polukrutim vezama, pri čemu treba primeniti modifikovane interpolacione funkcije  $\bar{N}_i$ , izvedene u Poglavlju 3, izraz (3.?):

$$m = \int_V \rho \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} dV \quad . \quad (4.5)$$

Nakon integracije, dobijena matrica masa se može rastaviti kao zbir dve matrice:

$$m = m_o + \bar{m} \quad ,$$

gde je  $m_o$  konzistentna matrica masa grede sa krutim vezama, a  $\bar{m}$  matrica koja modifikuje prethodnu matricu da bi se dobila konzistentna matrica masa grede sa polukrutim vezama:

$$\bar{\mathbf{m}}_i = \rho A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m}_{22} & \bar{m}_{23} & 0 & \bar{m}_{25} & \bar{m}_{26} \\ 0 & \bar{m}_{32} & \bar{m}_{33} & 0 & \bar{m}_{35} & \bar{m}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m}_{52} & \bar{m}_{53} & 0 & \bar{m}_{55} & \bar{m}_{56} \\ 0 & \bar{m}_{62} & \bar{m}_{63} & 0 & \bar{m}_{65} & \bar{m}_{66} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_{22} &= \frac{l}{35\Delta^2} \left[ -22\Delta g_1 + 13\Delta g_2 + 12(g_1^2 + g_2^2) - 6g_1 g_2(3 + 3\Delta - 2g_1 - 2g_2 - 4g_1 g_2) \right] \\ \bar{m}_{23} &= \frac{l^2}{210\Delta^2} \left[ -56\Delta g_1 + 22\Delta g_2 + 24(2g_1^2 + g_2^2) - 6g_1 g_2(9 + 23\Delta - 28g_1 + 16g_2 - 12g_1 g_2) \right] \\ \bar{m}_{25} &= \frac{3l}{70\Delta^2} \left[ 3\Delta(g_1 + g_2) - 8(g_1^2 + g_2^2) + 4g_1 g_2(3 + 3\Delta - 2g_1 - 2g_2 - 4g_1 g_2) \right] \\ \bar{m}_{26} &= \frac{l^2}{420\Delta^2} \left[ -26\Delta g_1 + 28\Delta g_2 + 48(g_1^2 + 2g_2^2) - 12g_1 g_2(9 - 12\Delta + 16g_1 - 28g_2 - 12g_1 g_2) \right] \\ \bar{m}_{33} &= \frac{l^3}{105\Delta^2} \left[ -8\Delta g_1 + 3\Delta g_2 + 4(4g_1^2 + g_2^2) - 12g_1 g_2(1 + 2\Delta - 8g_1 + 3g_2 - 12g_1 g_2) \right] \\ \bar{m}_{35} &= \frac{l^2}{420\Delta^2} \left[ -28\Delta g_1 + 26\Delta g_2 - 48(2g_1^2 + g_2^2) + 12g_1 g_2(9 - 12\Delta - 28g_1 + 16g_2 - 12g_1 g_2) \right] \\ \bar{m}_{36} &= \frac{l^3}{420\Delta^2} \left[ 4\Delta(g_1 + g_2) + 32(g_1^2 + g_2^2) - 12g_1 g_2(5 - 6\Delta + 4g_1 + 4g_2 + 36g_1 g_2) \right] \\ \bar{m}_{55} &= \frac{l}{35\Delta^2} \left[ 13\Delta g_1 - 22\Delta g_2 + 12(g_1^2 + g_2^2) - 6g_1 g_2(3 + 3\Delta - 2g_1 - 2g_2 - 4g_1 g_2) \right] \\ \bar{m}_{56} &= \frac{l^2}{210\Delta^2} \left[ -22\Delta g_1 + 56\Delta g_2 - 24(g_1^2 + 2g_2^2) + 6g_1 g_2(9 + 23\Delta + 16g_1 - 28g_2 - 12g_1 g_2) \right] \\ \bar{m}_{66} &= \frac{l^3}{105\Delta^2} \left[ 3\Delta g_1 - 8\Delta g_2 + 4(g_1^2 + 4g_2^2) - 12g_1 g_2(1 + 2\Delta + 3g_1 - 8g_2 - 12g_1 g_2) \right] \end{aligned}$$

gde je  $g_i = \frac{EI}{l k_i}$  ( $i = 1, 2$ ), a  $\Delta = 1 + 4g_1 + 4g_2 + 12g_1 g_2$ .

## 4.2.2 Jednačine kretanja

Za svaki element  $i$  može se uspostaviti veza između sila na krajevima elementa i pomeranja krajeva elementa oblika:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i - \mathbf{q}_{Ii} \quad .$$

Na osnovu ranije izvedenog izraza za vektor ekvivalentnog inercijalnog čvornog opterećenja (4.2) sledi da je:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{u}}_i \quad . \quad (4.7)$$

Pomoću matrice transformacije elementa  $\mathbf{T}_i$  izraziće se vektor pomeranja i ubrzanja preko komponentata u globalnom koordinatnom sistemu:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{U}_i \quad \text{odnosno} \quad \ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{T}_i \ddot{\mathbf{U}}_i \quad ,$$

pa je sada vektor sila na krajevima elementa  $\mathbf{R}_i$ :



$$\mathbf{R}_i = \mathbf{k}_i \mathbf{T}_i \mathbf{U}_i + m_i \mathbf{T}_i \ddot{\mathbf{U}}_i \quad (4.8)$$

Ako se dobijena vrednost za vektor sila na krajevima elementa u lokalnom sistemu  $\mathbf{R}_i$  unese u jednačinu za transformaciju  $\mathbf{R}_i^* = \mathbf{T}_i^T \mathbf{R}_i$ , gde je  $\mathbf{R}_i^*$  vektor sila na krajevima elementa u globalnom koordinatnom sistemu, tada je:

$$\mathbf{R}_i^* = \mathbf{T}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{T}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{T}_i^T m_i \mathbf{T}_i \ddot{\mathbf{U}}_i \quad .$$

Uvodeći oznake za matricu krutosti elementa  $\mathbf{k}_i^*$  i matricu masa elementa  $\mathbf{m}_i^*$  u globalnom koordinatnom sistemu:

$$\mathbf{k}_i^* = \mathbf{T}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{T}_i \quad i \quad \mathbf{m}_i^* = \mathbf{T}_i^T m_i \mathbf{T}_i \quad , \quad (4.9)$$

sledi:

$$\mathbf{R}_i^* = \mathbf{k}_i^* \mathbf{U}_i + \mathbf{m}_i^* \ddot{\mathbf{U}}_i \quad .$$

Ako se primeni D'Alambert-ov princip i označi vektor sila na krajevima svih elemenata u globalnom koordinatnom sistemu sa  $\mathbf{R}$ , jednačina ravnoteže čvorova za ceo sistem elemenata glasi:

$$\mathbf{F} + \mathbf{J} = \mathbf{R} \quad ,$$

gde je  $\mathbf{F}$  vektor dinamičkih sila u čvorovima, a  $\mathbf{J}$  vektor inercijalnih sila usled kretanja masa koje su direktno skoncentrisane u čvorovima, i za koji se može napisati veza:

$$\mathbf{J} = -\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{U}} \quad .$$

Matrica  $\mathbf{M}_c$  data je submatricama  $\mathbf{m}_{cj}$  duž glavne dijagonale oblika:

$$\mathbf{m}_{cj} = m_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r_j \end{bmatrix} \quad ,$$

gde je  $r_j$  poluprečnik inercije ekcentrično priključene mase  $m_j$  čvoru  $j$ .

Sada se može napisati jednačina dinamičke ravnoteže za ceo sistem:

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_c) \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad , \quad (4.10)$$

gde je:

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{k}_i^* \quad \text{matrica krutosti celog sistema}$$

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{m}_i^* \quad \text{matrica masa celog sistema}$$

Ako se poslednja matrična jednačina preuredi tako da se prvo ispišu uslovi ravnoteže aktivnih i inercijalnih sila u pravcu nepoznatih, pa zatim poznatih pomeranja, dobija se jednačina oblika:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_n \\ \mathbf{F}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{nn} & \mathbf{M}_{np} \\ \mathbf{M}_{pn} & \mathbf{M}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_n \\ \ddot{\mathbf{U}}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nn} & \mathbf{K}_{np} \\ \mathbf{K}_{pn} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_p \end{bmatrix} \quad . \quad (4.11)$$

## Slobodne neprigušene oscilacije

U slučaju kada ne postoji spoljašnje opterećenje i kada se oslonci ne pomeraju i uklještenja ne obrću, tj. kada je:

$$F_n = U_p = \ddot{U}_p = 0 \quad ,$$

jednačina (4.11) postaje jednačina slobodnih oscilacija nosača:

$$M_{nn}\ddot{U}_n + K_{nn}U_n = 0 \quad . \quad (4.12)$$

Ova homogena diferencijalna jednačina ima rešenje:

$$U_n = U_n^o \sin(\omega t + \alpha) \quad ,$$

gde je  $\omega$  kružna frekvencija slobodnih neprigušenih oscilacija,  $\alpha$  faza, a  $U_n^o$  vektor amplituda nepoznatih pomeranja. Smenom rešenja u diferencijalnu jednačinu (4.12) sledi:

$$(K_{nn} - \omega^2 M_{nn}) U_n^o = 0 \quad . \quad (4.13)$$

koja ima netrivialno rešenje samo ako je determinanta sistema jednaka nuli:

$$|K_{nn} - \omega^2 M_{nn}| = 0 \quad .$$

Ovo je algebarska jednačina n-tog reda po  $\omega^2$  i predstavlja frekventnu jednačinu. Rešenjem te jednačine dobijaju se svojstvene frekvencije  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n$  nosača, a rešenjem jednačine:

$$(K_{nn} - \omega_i^2 M) U_{ni}^o = 0 \quad ,$$

svojstveni vektori  $U_{ni}^o$ .

## Prinudne neprigušene oscilacije

U slučaju kada se opterećenje čvorova  $F$  i pomeranja oslonaca  $U_p$  menjaju po harmonijskom zakonu:

$$F_n = F_n^o \sin(\nu t + \varphi) \quad \text{i} \quad U_p = U_p^o \sin(\nu t + \varphi) \quad ,$$

gde je  $\nu$  kružna frekvencija prinudnih oscilacija, a  $\varphi$  faza. Pretpostavljajući rešenje u obliku:

$$U_n = U_n^o \sin(\nu t + \varphi) \quad ,$$

i pretpostavljajući da i reakcije imaju oblik:

$$F_p = F_p^o \sin(\nu t + \varphi) \quad ,$$

iz jednačine (4.11) dobija se matricna jednačina oblika:

$$F_n^o = (K_{nn} - \nu^2 M_{nn}) U_n^o + (K_{np} - \nu^2 M_{np}) U_p^o \quad , \quad (4.14)$$

odakle se može rešiti vektor amplituda nepoznatih pomeranja  $U_n^o$ . Kada se on odredi, vektor amplituda reakcija  $F_p^o$  dobija se iz jednačine:

$$F_p^o = (K_{pn} - \nu^2 M_{pn}) U_n^o + (K_{pp} - \nu^2 M_{pp}) U_p^o \quad (4.15)$$

Amplitude sila na krajevima  $i$ -tog elementa dobijaju se iz jednačine (4.8) kada se iskoristi i jednakost  $\ddot{U}_i = -\nu^2 U_i$ :

$$R_i = (k_i T_i - \nu^2 m_i T_i) U_i \quad (4.16)$$

U slučaju direktne koncentracije masa, s obzirom da nepostoji vektor ekvivalentnog inercijalnog čvornog opterećenja, veza između sila na krajevima elementa i pomeranja krajeva elementa je:

$$R_i = k_i u_i \quad .$$

Dalje izvođenje jednačina slobodnih i prinudnih vibracija nosača u svemu je identično izvođenju jednačina slobodnih i prinudnih oscilacija nosača sa ekvivalentnim masama, izuzev što je u jednačini dinamičke ravnoteže (4.10) matrica masa  $M$  jednaka nuli, pa postoji samo dijagonalna matrica masa  $M_c$ .

### Kondenzacija sistema jednačina

U postupku direktno koncentrisanih masa može se desiti da su neki elementi dijagonalne matrice  $M_c$  jednaki nuli. To su slučajevi kada je čvorna masa  $m_i$  tako mala da se u odnosu na ostale mase u čvorovima može zanemariti, ili kada je u nekom čvoru poluprečnik inercije mase  $r_i$  jednak nuli. Tada je matrica  $M_{nn}$  singularna, pa nije moguće direktno rešavanje frekventne jednačine.

U takvim slučajevima matrice  $M_{nn}$ ,  $K_{nn}$  i vektor  $U_n^o$  treba preurediti i prikazati u obliku submatrica i subvektora:

$$M_{nn} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K_{nn} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad U_n = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad ,$$

gde je  $U_1$  vektor pomeranja sa komponentama u pravcima pomeranja za koje postoje inercijalne sile, a vektor  $U_2$  vektor pomeranja u pravcima pomeranja za koje su inercijalne sile jednake nuli. Sada jednačina (4.13) može da se napiše u obliku dve matricne jednačine:

$$(K_{11} - \omega^2 M_{11}) U_1 + K_{12} U_2 = 0$$

$$K_{21} U_1 + K_{22} U_2 = 0 \quad .$$

Ako se iz druge jednačine izrazi vektor  $U_2$  i eliminiše iz prve jednačine dobija se:

$$(K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21} - \omega^2 M_{11}) U_1 = 0 \quad .$$

Definisanjem kondenzovane matrice krutosti  $K_c$ :

$$K_c = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21} \quad ,$$

prethodna jednačina dobija oblik:

$$(K_c - \omega^2 M_{11}) U_1 = 0 \quad ,$$

pa je moguće na isti način kao i ranije odrediti svojstvene vrednosti i svojstvene vektore.

## 4.3 Oscilacije prigušenog sistema

### 4.3.1 Oblici prigušenja

Kod oscilacija konstrukcija, kojima se ne dovodi energija, amplitude oscilacija se vremenom smanjuju. Nekonzervativne sile koje se protive kretanju i umanjuju mehaničku energiju, nazivaju se silama prigušenja, a pojava umanjavanja energije sistema naziva se disipacijom energije ili prigušenje.

Pri oscilacijama sistema mehanička energija konstrukcije (kinetička i potencijalna) postepeno smanjuje i pretvara u druge oblike energije, prvenstveno u termičku. Disipacija energije najčešće se ostvaruje istovremeno različitim mehanizmima. U eksperimentalnim uslovima to su obično termički efekti usled unutrašnjeg trenja nastalog pri ponovljenim naprezanjima i deformacijama materijala. U konstrukcijama trenje se pojavljuje u čeličnim vezama, u otvaranju u i zatvaranju mikroprslina, u trenju konstrukcije i nekostruktivnih elemenata. Uzimanje prigušenja u proračun je veoma bitno sa aspekta disipacije energije, koju je neophodno razmatrati prilikom seizmičkog proračuna.

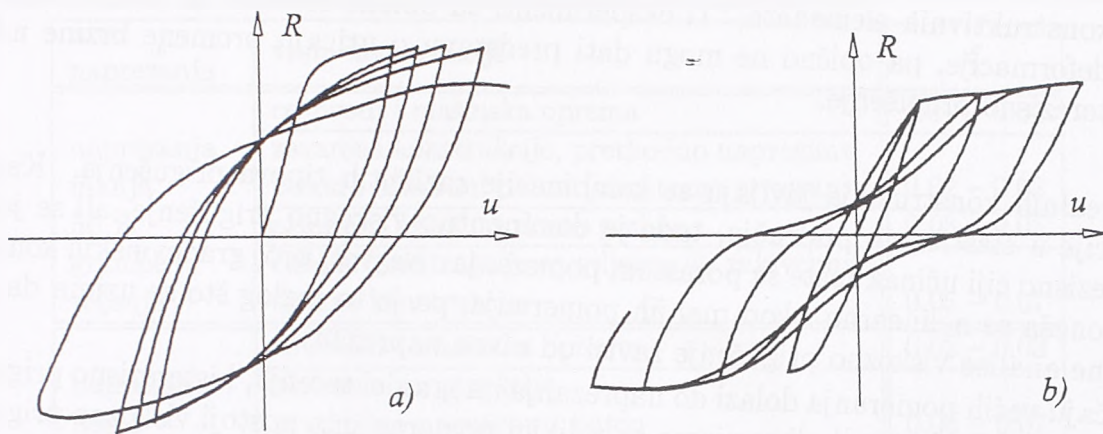
Dok su masa i krutost svojstvene karakteristike sistema, prigušenje ne može da se tako kvalifikuje. Sile prigušenja mogu da zavise od sistema koji vibrira, kao i od elemenata van njega. Formulisanje izraza za sile prigušenja predstavlja komplikovan problem koji još uvek zahteva intenzivno istraživanje. Uvođenje svih oblika prigušenja u razmatranje, u ovom trenutku nije pogodno iz prvenstveno dva glavna razloga. Prvo, svi fenomeni disipacije energije nisu u potpunosti razjašnjeni, a drugo proračun bi postao neopravdano matematički komplikovan za praktične analize građevinskih konstrukcija, pa se zbog toga prigušenje u konstrukcijama pretpostavlja u pojednostavjenom obliku.

Razlikuju se nekoliko osnovnih tipova prigušenja.

**Viskozno spoljašnje prigušenje** javlja se kod oscilacija konstrukcija u fluidima (otpori vode i vazduha). Kod građevinskih objekata ovo prigušenje je zanemarljivo u odnosu na druge tipove prigušenja.

**Viskozno unutrašnje prigušenje** je posledica viskoznosti materijala. Zavisi od relativne brzine oscilacija i frekvencije oscilacija. Taj tip prigušenja obično preovlađuje kod oscilacija u elastičnom području, i jednostavno ga je matematički modelirati, pa se iz tog razloga se najčešće upotrebljava u standardnim proračunima. Model viskoznog prigušenja se često primenjuje za modeliranje drugih vrsta prigušenja uz upotrebu ekvivalentnih koeficijenata prigušenja.

**Trenje** predstavlja poseban vid disipacije energije. Ono je nezavisno od intenziteta brzine i od veličine pomeranja. U nekim slučajevima može imati značajne vrednosti, kao što su: trenje u čvorovima i osloncima sistema, trenje na spojevima konstruktivnih elemenata, trenje površina o površinu. Najčešće se u inženjerskim proračunima usvaja pretpostavka viskoznog prigušenja ili se određuju odgovarajući ekvivalentni koeficijenti viskoznog prigušenja i za druge dominantne oblike disipacije. Međutim u slučajevima kada u sistemima postoje posebno konstruisani elementi za disipaciju energije trenjem, standardna pretpostavka viskoznog opterećenja nije opravdana, već je potrebno posebno razmotriti disipaciju energije trenjem.



Slika 4.1: Histerezisne petlje a) puna b) sa uštinućem

Konstruktivno prigušenje predstavlja otpor napregnutog elementa pri deformaciji. Pri numeričkoj integraciji jednačina kretanja, sile konstruktivnog prigušenja su u svakom koraku zasnovane na silama i deformacijskim veličinama iz prethodnog koraka. Opšti izraz za silu konstruktivnog prigušenja  $S_d$  može se izraziti relacijom [7]:

$$S_d = -\delta |S| \frac{\dot{v}}{|\dot{v}|},$$

gde je:

- |           |     |   |
|-----------|-----|---|
| $ S $     | ... | intenzitet odgovarajuće generalisane sile,          |
| $\dot{v}$ | ... | brzina promene odgovarajuće deformacijske veličine, |
| $\delta$  | ... | koeficijent konstruktivnog prigušenja.              |

Ovakav oblik prigušenja je nezavisan od perioda oscilovanja i ima konstantne odnose prigušenja za sve tonove oscilovanja sistema, ali je procena koeficijenta konstruktivnog prigušenja nesigurna i komplikovana.

Histerezisno prigušenje je bitan mehanizam disipacije energije kod oscilacija koje se odvijaju u neelastičnom području. Količina disipacione energije jednaka je površini petlje koju formira dijagram sila–pomeranje u toku svakog ciklusa opterećenje–rasterećenje. Histerezisno prigušenje zavisi od veličine pomeranja, tako da se značajno povećava sa porastom maksimalnih neelastičnih pomeranja i sa porastom širine petlje. Sama pojava prigušenja i disipacije deluje povoljno na zaštitu zanjihale konstrukcije od rušenja. Zato je neophodno obezbediti da histerezisne petlje ponašanja bitnih elemenata konstrukcije budu stabilne i "pune", bez suženja "uštinuća" kod koordinatnog početka, što odgovara velikom uticaju transverzalnih sila (Slika 4.1). Znatno manja površina histerezisne petlje sa "uštinućem" uslovljava i znatno manju apsorpciju energije, a time i veće pobude konstrukcije, koje imaju za posledicu nepovoljno velike uticaje usled seizmičkih sila, što često može dovesti do nedozvoljenog krtog loma elementa.

Proračun ovog prigušenja bitno zavisi od usvojene nelinearne veze sila-pomeranje koja se bazira na eksperimentalnim rezultatima ispitivanja konstrukcije ili njenih konstruktivnih elemenata. Ti eksperimenti su obično izvedeni sa malim brzinama deformacije, pa obično ne mogu dati predstavu o uticaju promene brzine na histerezisno prigušenje.

Kod realnih konstrukcija javljaju se kombinacije različitih tipova prigušenja. Kada su oscilacije u elastičnom području, tada je dominantno viskozno prigušenje, ali se javlja i histerezisno čiji učinak raste sa porastom pomeranja. Najveći broj građevinskih konstrukcija ponaša se nelinearno i kod manjih pomeranja, pa je to razlog što se uzima da i kod linearne analize viskozno prigušenje zavisi od nivoa naprezanja.

U slučaju većih pomeranja dolazi do naprezanja na granici tečenja, histerezisno prigušenje je najbitnije. Ipak, i kod vibracijama sa velikim pomeranjima postoji viskozno prigušenje pa se ono uzima u obzir pri proračunima. Obično se uzima da je veličina ovog prigušenja 2% do 5% od kritičnog prigušenja, mada ovaj deo nema tako veliki uticaj na rezultate proračuna kao kod linearne analize.

Izbor koeficijenta prigušenja je sa jedne strane veoma nesiguran, a s druge strane taj izbor bitno utiče na veličinu amplitude vibracija. Iz tog razloga je prigušenje je jedan od faktora koji doprinosi nesigurnosti podataka, a time i rezultata dinamičke analize.

U nekim proračunima prigušenje se zanemaruje pretpostavljajući da su vrednosti otpora prigušenja male ili da nisu značajne za neki mali vremenski interval za koji se posmatra ponašanje sistema. Pored toga, kod prinudnih oscilacija, kada je frekvencija prinudnog opterećenja nije bliska rezonantnoj frekvenciji, uticaj prigušenja se takođe može zanemariti. Međutim, ako se zahteva tačnija dinamička analiza potrebno je u jednačine kretanja uvesti i sile prigušenja. Priroda prigušenja je komplikovana, a najjednostavnije je pretpostaviti viskozni otpor, odnosno otpor proporcionalan brzini kretanja. Kako su za osnovne nepoznate proračuna usvojena pomeranja čvorova linijskog sistema, sile prigušenja su proporcionalne vektoru brzina čvorova  $\dot{U}$ , jednačina dinamičke ravnoteže za prigušen sistem može se napisati u obliku:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \quad , \quad (4.17)$$

gde je  $C$  matrica prigušenja sistema.

Pretpostavljeno viskozno prigušenje je nekarakteristično prigušenje za građevinske konstrukcije. Da bi ovaj tip prigušenja mogao da se primeni u praktične svrhe, prilikom razmatranja sistema sa jednim stepenom slobode ili nekog pojedinog tona oscilovanja, uvodi se ekvivalent viskoznog prigušenja relativno prigušenje  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{\omega} \quad \varepsilon = \frac{c}{2m} \quad .$$

Ovaj koeficijent služi da se rezultati dobijeni za slučaj viskoznog prigušenja mogu koristiti i za druge vrste otpora koji su prisutni u građevinskim konstrukcijama. Uobičajene vrednosti relativnog prigušenja u zavisnosti od tipa konstrukcije i nivoa naprezanja prikazane su u Tabeli 4.1.

Tabela 4.1: Vrednosti relativnog prigušenja

nivo naprezanja	vrsta konstrukcije	$\zeta$
naprezanja manja 50 % granice tečenja	cevovodi i mašinska oprema	0.01 – 0.02
	zavarene konstrukcije, prethodno napregnuti beton i armirani beton (obostrano armiran)	0.02 – 0.03
	armirani beton sa dosta prslina	0.03 – 0.05
	čelične konstrukcije sa viljcima ili zakivcima, drvene konstrukcije	0.05 – 0.07
naprezanja nešto manja od granice tečenja	cevovodi i mašinska oprema	0.02 – 0.03
	zavarene konstrukcije, prethodno napregnuti beton	0.05 – 0.07
	delimično prethodno napregnut beton, armirani beton	0.07 – 0.10
	čelične konstrukcije sa viljcima ili zakivcima, drvene konstrukcije sa zvrtnjevima	0.10 – 0.15
	drvene konstrukcije sa žljebovima	0.15 – 0.20

### 4.3.2 Konzistentna matrica prigušenja grednog elementa

Matrica prigušenja elementa  $c$  može se definisati na isti način i pomoću istih interpolacionih funkcija kao i matrica masa, samo se umesto gustine  $\rho$  u podintegralnom izrazu pojavljuje koeficijent prigušenja  $c$ :

$$c = \int_V c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad . \quad (4.18)$$

Struktura ove matrice ista je kao i konzistentne matrice masa, pa se ovako definisana matrica prigušenja elementa naziva konzistentna matrica prigušenja. Geometrijsko statičko značenje analogno je značenju elementa matrice masa. Element matrice prigušenja  $c_{ij}$  predstavlja generalisanu silu koja odgovara pomeranju  $u_i$  usled jedinične generalisane brzine koja odgovara pomeranju  $u_j$ , pri čemu su sva ostala generalisana pomeranja, generalisane brzine i generalisana ubrzanja jednaka nuli.

Za razliku od matrice krutosti i matrice masa, koje se u praktičnim proračunima određuju jednostavno i relativno dovoljno tačno, nalaženje matrice prigušenja predstavlja problem, pošto nije moguće definisati opšti izraz prema kome bi se određivao koeficijent prigušenja za konstrukcije različitog oblika i od različitog materijala.

### 4.3.3 Proporcionalno prigušenje

Ako se u proračunu usvoji model viskoznog prigušenja, proporcionalnog masi i krutosti, matrica prigušenja sistema može se predstaviti u obliku:

$$C_T = \alpha M + \beta K_T + \beta_o K_o \quad ,$$

gde je:

- M ... matrica masa,
- $K_T$  ... tangentna matrica krutosti,
- $K_o$  ... elastična matrica krutosti,
- $\alpha, \beta, \beta_o$  ... parametri prigušenja.

U proračunima, karakteristična su uobičajena dva oblika ovog prigušenja:

$$C = \alpha M + \beta_o K_o \quad \text{i} \quad C_T = \alpha M + \beta K_T .$$

U prvom slučaju matrica prigušenja je konstantna tokom vremena, dok je u drugom slučaju promenljiva, jer se menja zajedno s promenom tangentne matrice krutosti. Ako se prihvati viskozni oblik prigušenja, prigušenje se obično opisuje pomoću parametara  $\alpha$  i  $\beta_o$ , jer bi uzimanje u obzir tangentne matrice krutosti dovelo do nerealnog pada prigušenja tokom vremena.

Procenu parametara prigušenja  $\alpha$  i  $\beta$  u domenu linearne dinamičke analize, moguće je odrediti primenom principa modalne analize. Jednačine kretanja u slučaju pretpostavljenog oblika prigušenja moguće je transformisati u nezavisne jednačine oblika:

$$M_j \ddot{Y}_j + C_j \dot{Y}_j + K_j Y_j = P_j \quad j = 1, 2, \dots, n ,$$

gde je :

$$C_j = \alpha M_j + \beta K_j ,$$

pri čemu su:

- $M_j$  ... generalisana masa,
- $K_j$  ... generalisana krutost,
- $Y_j$  ... normalna koordinata pri tonu  $j$ .

Ako se uvede relativno prigušenje  $\zeta_j$ , pri svakom tonu prigušenje se može izraziti kao deo kritičnog prigušenja:

$$C_j = 2 \zeta_j \omega_j M_j .$$

Iz poslednje dve jednačine, uvažavajući  $K_j = \omega_j^2 M_j$ , dobija se:

$$\zeta_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta\omega_j}{2} ,$$

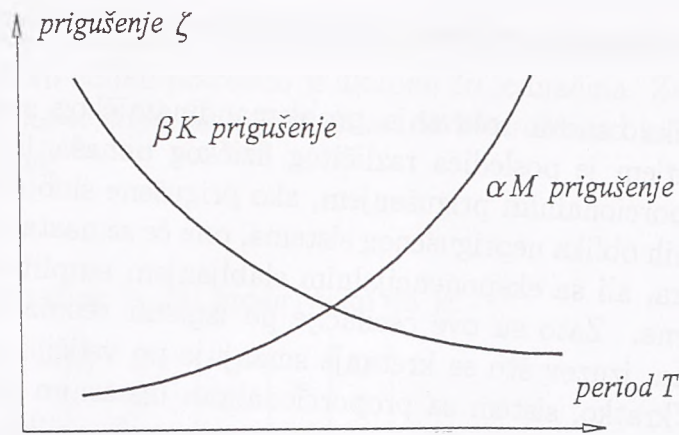
odnosno:

$$\zeta_j = \frac{\alpha T_j}{4\pi} + \frac{\beta\pi}{T_j} . \tag{4.19}$$

Na Slici 4.2 prikazan je svaki od dva člana u jednačini (4.19). Sa povećanjem perioda povećava se uticaj prigušenja proporcionalnog masi, za razliku od uticaja prigušenja proporcionalnog krutosti koji se smanjuje.

Razmatrajući prigušenje pri tonu  $i$  i tonu  $j$ , mogu se odrediti izrazi za parametre prigušenja:





Slika 4.2: Efekat prigušenja proporcionalnog masi i krutosti

$$\alpha = \frac{4\pi (T_j \zeta_j - T_i \zeta_i)}{T_j^2 - T_i^2} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{1}{\pi} \frac{T_i T_j (T_j \zeta_i - T_i \zeta_j)}{T_j^2 - T_i^2}$$

gde su  $T_i$  i  $T_j$  periodi oscilovanja pri tonovima  $i$  i  $j$ .

Da bi se odredila vrednost traženih parametara prigušenja potrebno je usvojiti relativna prigušenja  $\zeta_i$  i  $\zeta_j$ . Ako je prigušenje proporcionalno samo matrici masa ili samo matrici krutosti, za izračunavanje parametara prigušenja dovoljno je usvojiti samo relativno prigušenje pri jednom tonu, odnosno sledi da je:

$$\alpha = \frac{4\pi \zeta_i}{T_i} \quad \text{ili} \quad \beta = \frac{\zeta_i T_i}{\pi}$$

Prikazani postupak procene parametara prigušenja uobičajen je kod linearne analize.

#### 4.3.4 Nproporcionalno prigušenje

Ako je matrica prigušenja proporcionalna matrici masa i matrici krutosti, ili proizvoljnoj linearnoj kombinaciji ove dve matrice, jednačine kretanja za neki linearan prigušen sistem, primenom normalnih koordinata, mogu da se razdvoje. Tada jednačine više ne predstavljaju simultan sistem od  $n$  jednačina, već se dobija  $n$  nezavisnih jednačina. Caughey i O'Kelly [8] odredili su potreban i dovoljan uslov kada linearni prigušeni dinamički sistem ima klasične prirodne tonove. Uslov je ispunjen u slučaju kada matrica prigušenja zadovoljava komutativnost matičnog množenja:

$$CM^{-1}K = KM^{-1}C$$

Tada se za sistem kaže da ima proporcionalno prigušenje (*classical damping*), a u protivnom sistem ima nproporcionalno prigušenje (*non-classical damping*).

Nemogućnost razdvajanja jednačina stvorila je probleme kod inženjerskih proračuna koji primenjuju popularnu modalnu analizu. U jednom periodu postojala je tendencija da se određenim transformacijama i kod neklasično prigušenih sistema omogući primena modalne analize [9, 10, 11]. Veletsos i Ventura [12] su pokazali kako se neklasično prigušen sistem sa  $n$  stepeni slobode može izraziti kao linearna kombinacija pomeranja i brzina  $n$  sistema sa jednim stepenom slobode. Prikazani postupci su od značaja kod rešavanja

linearnih problema, ali nemaju primenu kod pretpostavljenog nelinearnog odgovora konstrukcije.

Različita matematička osnova rešavanja problema dinamičkog sistema sa klasičnim i neklasičnim prigušenjem je posledica različitog fizičkog ponašanja dinamičkog sistema. Kod sistema sa proporcionalnim prigušenjem, ako prigušene slobodne oscilacije započnu u jednom od prirodnih oblika neprigušenog sistema, one će se nastaviti sa nepromenjenom konfiguracijom oblika, ali sa eksponencijalnim slabljenjem amplitude istog gradijenta u svim tačkama sistema. Zato su ove oscilacije po izgledu veoma slične sa oscilacijama neprigušenog sistema, izuzev što se kretanje smanjuje po veličini amplitude dok se sistem ne zaustavi. Ukratko, sistem sa proporcionalnim linearnim viskoznom prigušenjem može da se prikaže da slobodno osciluje u skupu nevezanih oblika koji su slični po svojoj konfiguraciji sa normalnim oblicima neprigušenog sistema i sa amplitudama koje se smanjuju eksponencijalno sa vremenom i ravnomerno po sistemu. Ovi oblici se odlikuju određenim rasporedom stacionarnih čvornih tačaka ili linija. Suprotno tome, sistem sa neproporcionalnim linearnim viskoznom prigušenjem može takođe da se prikaže da slobodno osciluje u skupu nevezanih oblika u kojima tačke sistema vrše eksponencijalna prigušenja kretanja sa istom kružnom frekvencijom, ali sa različitim faznim uglovima. U ovim oblicima, čvorovi nisu stacionarni.

U slučaju neproporcionalnog prigušenja treba rešiti kompleksan problem svojstvenih vrednosti, jer se generalno pojavljuju kompleksne svojstvene vrednosti problema.

#### 4.3.5 Generalisani kvadratni problem svojstvenih vrednosti

Jednačina kretanja sistema sa viskoznom prigušenjem pri slobodnim oscilacijama definisana je jednačinom:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = 0 \quad (4.20)$$

Rešenje se može pretpostaviti u obliku:

$$U = u e^{\lambda t},$$

pri čemu je  $\lambda$  kompleksan broj, a  $u$  kompleksan vektor. Zamenom pretpostavljenog rešenja u jednačinu (4.20) dobija se:

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)u = 0.$$

Iz uslova za netrivialno rešenje homogenog sistema jednačina sledi da je:

$$|\lambda^2 M + \lambda C + K| = 0.$$

Prethodna jednačina je predstavlja frekventnu jednačinu generalisanog kvadratnog problema svojstvenih vrednosti. Dobijena frekventna jednačina je nepodesna za određivanje kružnih frekvencija, pa je potrebno da se svede na drugačiju formu. Određenim transformacijama [13, 15] može se svesti prvo na formu generalisanog linearnog problema, a zatim transformisati u standardan linearan problem svojstvenih vrednosti.

Za sistem sa neproporcionalnim prigušenjem, svaka komponenta svojstvenog vektora se ne razlikuje samo po amplitudi, već i po fazi, pa su zato za određivanje svake komponente

potrebno dva podatka. Odnosno, za određivanje svih komponenti nekog sistema sa  $n$  stepeni slobode u svakom obliku potrebno je ukupno  $2n$  jednačina. Zato se  $n$  jednačinama kretanja mora dodati još  $n$  dopunskih jednačina, da bi problem bio definisan.

Ako se primeni identitet:

$$M\dot{U} - M\ddot{U} = 0 ,$$

a zatim na osnovu jednačine (4.20) proširi tako da je:

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \dot{U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (4.21)$$

Dobijena jednačina se često pominje kao "redukovani oblik jednačine (4.20)[13]. Uvođenjem realnih i simetričnih matrica  $A$ ,  $B$  reda  $2n$  i vektora  $V$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \dot{U} \\ U \end{bmatrix} \quad \dot{V} = \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \dot{U} \end{bmatrix} ,$$

poslednja jednačina se svodi na:

$$A\dot{V} + BV = 0 .$$

Ako se uvede smena:

$$V = ve^{\lambda t} ,$$

dobija se jednačina generalisanog linearnog problema:

$$(\lambda A + B)v = 0 .$$

Pretpostavljajući da je matrica  $A$  regularna matrica, što je zadovoljeno ako je matrica  $K$  regularna, moltipliciranjem prethodne jednačine matricom  $A^{-1}$ :

$$(\lambda A^{-1}A + A^{-1}B)v = 0 \quad A_1 = A^{-1}B ,$$

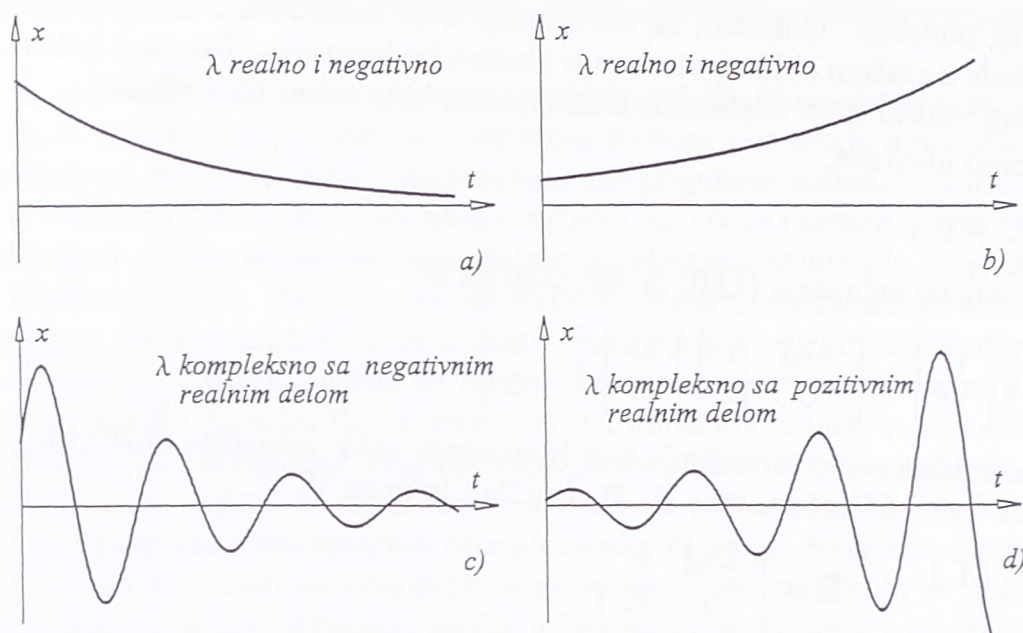
dobija se linearni standardni problem svojstvenih vrednosti:

$$(\lambda I + A_1)v = 0 ,$$

čija je frekventna jednačina:

$$|A_1 + \lambda I| = 0 . \quad (4.22)$$

Standardni linearni problem se jednostavno rešava poznatim numeričkim postupcima. Jedini nedostatak ovih transformacija je to što je red problema udvostručen. Koreni jednačine (4.22), odnosno svojstvene vrednosti generalne realne matrice  $A_1$  mogu biti realne ili kompleksne svojstvene vrednosti, kada se pojavljuju kompleksno konjugovanim parovima.[16]. Za slučaj realne vrednosti korena  $\lambda$  odgovarajuće kretanje ima karakter eksponencijalnog prigušenja ili ekponencijalne divergencije, u zavisnosti da li je koren ima negativnu ili pozitivnu realnu vrednost (Slika 4.3). Za kompleksno konjugovane korene:



Slika 4.3: Različiti oblici kretanja: a) aperiodično konvergentno, b) aperiodično divergentno, c) periodično konvergentno i d) periodično divergentno

$$\lambda = \mu + j\omega \quad \bar{\lambda} = \mu - j\omega ,$$

odgovarajući svojstveni vektori imaju oblik:

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} + j\mathbf{q} \quad \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{p} - j\mathbf{q} ,$$

a karakteristično kretanje izraženo pomoću proizvoljnih konstanti  $a$  i  $b$ :

$$\mathbf{x} = (a + jb)e^{(\mu+j\omega)t}(\mathbf{p} + j\mathbf{q}) + (a - jb)e^{(\mu-j\omega)t}(\mathbf{p} - j\mathbf{q}) ,$$

ili u redukovanom obliku:

$$\mathbf{x} = e^{\mu t}(u_1 \sin \omega t + u_2 \cos \omega t) , \quad (4.23)$$

gde je:

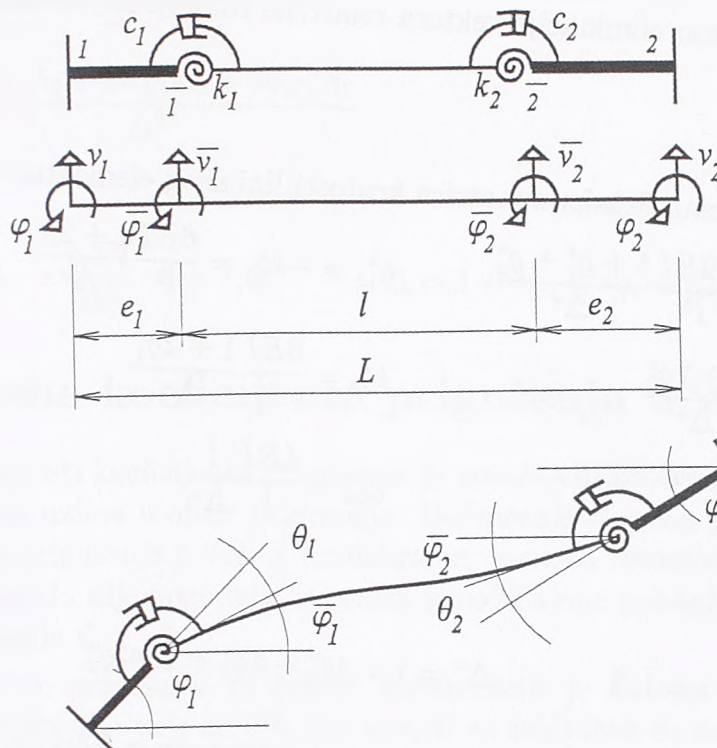
$$u_1 = -2(b\mathbf{p} + a\mathbf{q}) \quad u_2 = 2(a\mathbf{p} - b\mathbf{q}) .$$

Kretanje  $x_i$  prikazano jednačinom (4.23) je oscilatorno harmonijsko kretanje sa kružnom frekvencijom  $\omega$  čije amplitude se eksponencijalno prigušuju ili rastu u zavisnosti da li je realni deo imaginarne vrednosti negativan ili pozitivan.

Ostala kretanja imaju istu kružnu frekvenciju i prigušenje, ali nisu međusobno u fazi, s obzirom da vektori  $u_1$  i  $u_2$  nisu međusobno proporcionalni.

#### 4.3.6 Matrica prigušenja grede sa polukrutim vezama

Prethodno razmatranom modelu grednog elementa sa polukrutim i ekscentričnim vezama u statučkoj analizi dodati su rotacioni viskozni prigušivači (*dashpot*) [17] u svakoj vezi grede da bi se modeliralo i prigušenje u vezi greda-stub (Slika 4.4). U vezi se pretpostavlja



Slika 4.4: Greda sa polukrutim, ekscentričnim i viskoznim vezama

viskozno prigušenje koje je proporcionalno brzini promene ugla relativne rotacije  $\dot{\theta}(t) = d\theta(t)/dt$ , a definisano koeficijentom prigušenja veze  $c_i (i = \bar{1}, \bar{2})$  [20].

Ako je uvedeno prigušenje u vezi, tada je moment na kraju grednog elementa:

$$M_i(t) = k_i \theta_i(t) + c_i \dot{\theta}_i(t) \quad i = \bar{1}, \bar{2}$$

U slučaju periodičnog odgovora sa kružnom frekvencijom  $\omega$ , prethodna relacija se može napisati u obliku:

$$M_i^o = k_i^* \theta_i^o \quad i = \bar{1}, \bar{2}$$

gde gornji indeks  $o$  označava amplitude odgovarajućih veličina, a  $k_i^*$  je kompleksna krutost u čvoru  $i$ , koja se može predstaviti:

$$k_i^* = \frac{M_i(t)}{\theta_i(t)} = k_i + j\omega c_i \quad j = \sqrt{-1} \quad \theta_i(t) = \theta_i^o e^{j\omega t}$$

Veza između amplituda sila na krajevima elementa:

$$\bar{\mathbf{R}}^o = \left\{ \bar{T}_1^o \quad \bar{M}_1^o \quad \bar{T}_2^o \quad \bar{M}_2^o \right\},$$

i čvornih pomeranja:

$$\bar{\mathbf{u}}^o = \left\{ \bar{v}_1^o \quad \bar{\varphi}_1^o \quad \bar{v}_2^o \quad \bar{\varphi}_2^o \right\},$$

može se napisati u obliku:

$$\bar{\mathbf{R}}^o = \mathbf{k}(\bar{\mathbf{u}}^o - \boldsymbol{\theta}^o), \quad (4.24)$$

gde je  $\theta^o = \{ 0 \ \theta_1^o \ 0 \ \theta_2^o \}$  vektor relativne rotacije, a  $k$  standardna fleksiona matrica krutosti elementa. Nakon eliminacije vektora relativne rotacije u jednačini (4.24) dobija se:

$$\bar{R}(t) = k^* \bar{u}^o e^{j\omega t} \quad (4.25)$$

Matrica  $k^*$  je kompleksna fleksiona matrica krutosti linijskog elementa, čiji su elementi:

$$k_{11}^* = -k_{13}^* = k_{33}^* = \frac{12EI}{l^3} \frac{1 + g_1^* + g_2^*}{\Delta^*} \quad h_{14}^* = -h_{34}^* = \frac{6EI}{l^2} \frac{1 + 2g_1^*}{\Delta^*}$$

$$k_{12}^* = -k_{23}^* = \frac{6EI}{l^2} \frac{1 + 2g_2^*}{\Delta^*} \quad k_{44}^* = \frac{6EI}{l} \frac{1 + 2g_1^*}{\Delta^*}$$

$$k_{22}^* = \frac{4EI}{l} \frac{1 + 3g_2^*}{\Delta^*} \quad k_{24}^* = \frac{4EI}{l} \frac{l}{\Delta^*}$$

$$k_{ij}^* = k_{ji}^*$$

$$g_i^* = \frac{EI}{l} \frac{1}{k_1 + j\omega c_i} \quad i = \bar{1}, \bar{2} \quad \Delta^* = 1 + 4g_1^* + 4g_2^* + 12g_1^*g_2^*$$

Razvijajući elemente kompleksne fleksione matrice krutosti u Tejlorov red u odnosu na kružnu frekvenciju  $\omega$ :

$$k^* = k + j\omega c + \text{viši članovi reda} \quad ,$$

dobijaju se realne matrice  $k$  i  $c$  koje imaju fizičko značenje. Matrica  $k$  je fleksiona matrica krutosti grednog elementa sa polukrutim vezama, koja se može dobiti kada se kompleksna veličina  $g_i^*$  zameni realnom veličinom  $g_i = \frac{EI}{lk_i}$ . Matrica  $c$  je matrica prigušenja elementa, a njeni članovi su [22]:

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{12} & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{21} & c_{22} & 0 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{31} & c_{32} & 0 & c_{33} & c_{23} \\ 0 & c_{41} & c_{42} & 0 & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$c_{11} = -c_{13} = c_{33} = \frac{36EI}{l^3} \frac{h_1 + h_2 + 4g_1 h_2 + 4g_1^2 h_2 + 4g_2 h_1 + 4g_2^2 h_1}{\Delta^2}$$

$$c_{12} = -c_{23} = \frac{12EI}{l^2} \frac{2h_1 + h_2 + 2g_1 h_2 + 10g_2 h_1 + 12g_2^2 h_1}{\Delta^2}$$

$$c_{14} = -c_{34} = \frac{12EI}{l^2} \frac{h_1 + 2h_2 + 10g_1 h_2 + 12g_1^2 h_2 + 2g_2 h_1}{\Delta^2}$$

$$c_{22} = \frac{4EI}{l} \frac{4h_1 + h_2 + 24g_2 h_1 + 36g_2^2 h_1}{\Delta^2}$$

$$c_{24} = \frac{8EI}{l} \frac{h_1 + h_2 + 3g_1 h_2 + 3g_2 h_1}{\Delta^2}$$

$$c_{44} = \frac{4EI}{l} \frac{h_1 + 4h_2 + 24g_1 h_2 + 36g_1^2 h_2}{\Delta^2}$$

$$c_{ij} = c_{ji}$$

gde je: 
$$h_i = \frac{c_i EI}{lk_i^2} \quad i = \bar{1}, \bar{2} \quad \Delta = 1 + 4g_1 + 4g_2 + 12g_1 g_2 .$$

## 4.4 Procena koeficijenta prigušenja u vezi

Određivanje vrednosti koeficijenta prigušenja je uobičajeni problem kod dinamičkog proračuna u kojem se uzima u obzir prigušenje. Definisane stepena prigušenja preko koeficijenta viskoznog prigušenja u vezi  $c$ , modeliranog pomoću rotacionog hidrauličkog klipa, u inženjerskom smislu nije pogodno. U praksi je uobičajeno prikazivanje prigušenja preko relativnog prigušenja  $\zeta$ .

Očekivano relativno prigušenje za čelične konstrukcije je do oko 10%, dok materijalno prigušenje kod čelika nije veće od 1%, što navodi na zaključak da se glavni deo prigušenja dešava u čvorovima nosača, odnosno da je apsorpcija i trošenje seizmičke energije najznačajnije u čvorovima nosača. Procenu relativnog prigušenja sistema je moguće odrediti na osnovu eksperimenata ili inženjerskog iskustva, ali raspodelu tog prigušenja po čvorovima je komplikovano i pretpostaviti. Zbog malog broja eksperimentalnih istraživanja na osnovu kojih se može ustanoviti, koeficijent prigušenja u vezama je ostao veoma neizvesna veličina.

Na osnovu parametarske analize određena je relacija između vrednosti koeficijenta viskoznosti prigušenja u vezi  $c$  i odgovarajuće vrednosti relativnog prigušenja  $\zeta$  za celu konstrukciju. Kod neklasično prigušenih sistema sa više stepeni slobode javlja se problem pri utvrđivanju ove relacije, jer je odgovor ovakvih sistema složen, pri čemu ga nije moguće razložiti na više nezavisnih odgovora predstavljenih u glavnim koordinatama. Određenim postupkom može se globalno proceniti prigušenje po tonovima oscilovanja. Ako se pretpostavi da je poznat dominantan ton u kojem će oscilovati sistem, onda se može proceniti i relativno prigušenje sistema.

Neka su  $\lambda_j$  i  $\bar{\lambda}_j$  par konjugovanih kompleksnih svojstvenih vrednosti, dobijenih rešavanjem generalisanog kvadratnog svojstvenog problema karakterističnog za sistem sa viskoznim prigušenjem u vezama:

$$\lambda_j = -\varepsilon_j + j\omega_{d_j}$$

$$\bar{\lambda}_j = -\varepsilon_j - j\omega_{d_j} ,$$

gde su  $\varepsilon_j$  i  $\omega_{d_j}$  realni pozitivni skalari. Moduli obe kompleksne svojstvene vrednosti su jednaki i iznose:

$$\bar{\omega}_{d_j} = \sqrt{\varepsilon_j^2 + \omega_{d_j}^2} .$$

Velicina  $\bar{\omega}_{d_j}$  naziva se pseudo-kružna frekvencija  $j$ -tog tona, a odgovarajuće pseudo-relativno prigušenje tog tona je:

$$\bar{\zeta}_j = \frac{\varepsilon_j}{\bar{\omega}_{d_j}}$$

Preko ovako definisanih velicina mogu se dobiti relacije koje su slične relacijama koje važe za sistem sa jednim stepenom slobode:

$$\lambda_j = -\bar{\zeta}_j \bar{\omega}_{d_j} + j \omega_{d_j}$$

$$\bar{\lambda}_j = -\bar{\zeta}_j \bar{\omega}_{d_j} - j \omega_{d_j}$$

$$\omega_j = \bar{\omega}_{d_j} \sqrt{1 - \bar{\zeta}_j^2}$$

Uvođenjem prigušenja u razmatranje, dinamički proračun postaje značajno složeniji. Sa inženjerske strane gledišta ovakav postupak proračuna nema opravdanja, jer kružne frekvencije i drugi rezultati dinamičkog proračuna procentualno relativno malo razlikuju za prigušen i neprigušen sistem. Međutim, odgovor sistema razmatran preko amplituda uticaja se suštinski menja. Takođe, sa aspekta modeliranja mehanizma disipacije seizmičke energije, uvođenje prigušenja u vezama pri seizmičkoj pobudi ima opravdanja. Dokazano je da se značajna apsorpcija energije ostvaruje u čvorovima sistema, pa je zato potrebno razviti i primeniti dinamičku analizu i praktičan proračun kojima se ovaj tip prigušenja može uzeti u obzir. Na osnovu tih teoretskih razmatranja može izvršiti jednostavna modifikacija tehničkih rešenja čeličnih veza, koje bi mogle da ostvare zahtevani nivo disipacije energije.

## 4.5 Integracija jednačine kretanja

Za određivanje dinamičkog odgovora konstrukcije potrebno je rešiti nehomogen sistem diferencijalnih jednačina kretanja. U radu je primenjen postupak direktne integracije, u kome se vremenski domen se deli na određen broj vremenskih poddomena, najčešće jednakih intervala  $\Delta t$ . U tim diskretnim trenucima vremena  $t_i$  zahteva se da rešenja zadovoljavaju jednačine kretanja.

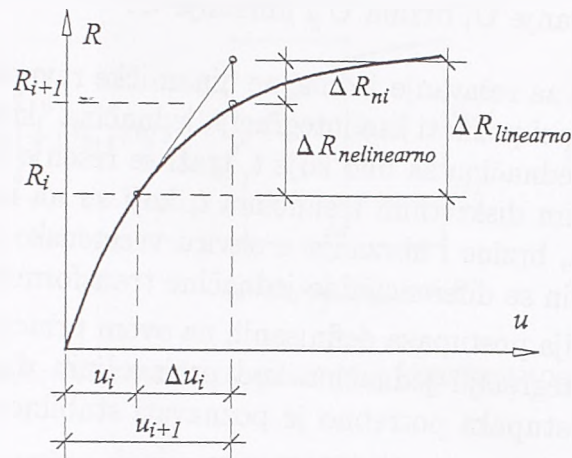
U slučaju nelinearnog problema dinamičke analize, kada dinamičke karakteristike sistema nisu konstantne u okviru intervala vremena  $\Delta t$ , ako se usvoji pretpostavka da je problem linearan, dolazi do pojave neizbalansiranog opterećenja  $\Delta R_{n_i}$  (Slika 4.5). Velicina neizbalansiranog opterećenja je manja ukoliko je manji inkrement sile, odnosno inkrement pomeranja, međutim, ako se ne izvrši korekcija dolazi do znatnih odstupanja.

Nelinearnost problema uzima se u obzir izračunavanjem novih karakteristika sistema na početku svakog intervala vremena  $\Delta t$ , a pomeranje i brzina na kraju intervala uzimaju se kao početni uslovi za naredni interval.

U razmatranom u dinamičkom proračunu uzeti su u obzir uticaji geometrijske i materijalne nelinearne analize, pa je u svakom vremenskom intervalu primenjen je inkrementalno-iterativni postupak. Usvajanjem sekantne matrice krutosti u nelinearnom iterativnom proračunu iznuta je pojava neizbalansiranog opterećenja,

Za numeričku integraciju jednačine kretanja pri razmatranju nelinearnih problema pogodno je jednačinu dinamičke ravnoteže definisati u inkrementalnom obliku.





Slika 4.5: Neizbalansirano opterećenje

#### 4.5.1 Inkrementalna jednačina dinamičke ravnoteže

U bilo kom trenutku vremena dinamičke analize  $t$ , treba da je uspostavljena ravnoteža svih sila koje deluju na sistem, pa se može napisati jednačina:

$$J(t) + D(t) + R(t) = F(t) \quad , \quad (4.27)$$

gde su:

- $J(t)$  ... vektor inercijalnih sila,
- $D(t)$  ... vektor sila prigušenja,
- $R(t)$  ... vektor restitucionih sila,
- $R(t)$  ... vektor spoljašnjih dinamičkih sila.

U narednom trenutku vremenske integracije  $t + \Delta t$  uslov dinamičke ravnoteže je:

$$J(t + \Delta t) + D(t + \Delta t) + R(t + \Delta t) = F(t + \Delta t) \quad . \quad (4.28)$$

Oduzimanjem jednačina (4.28) i (4.27) i uvođenjem oznaka:

$$\Delta J(t) = J(t + \Delta t) - J(t) = M \Delta \ddot{U}$$

$$\Delta D(t) = D(t + \Delta t) - D(t) = C(t) \Delta \dot{U}$$

$$\Delta R(t) = R(t + \Delta t) - R(t) = K(t) \Delta U$$

$$\Delta F(t) = F(t + \Delta t) - F(t) \quad ,$$

gde oznaka  $\Delta$  označava inkrement odgovarajuće veličine, dobija se inkrementalni oblik jednačine dinamičke ravnoteže:

$$M \Delta \ddot{U}(t) + C(t) \Delta \dot{U}(t) + K(t) \Delta U(t) = \Delta F(t) \quad . \quad (4.29)$$

U ovoj jednačini osnovne nepoznate su konačni inkrementi pomeranja  $\Delta U$ , brzine  $\Delta \dot{U}$  i ubrzanja  $\Delta \ddot{U}$ , a ne pomeranje  $U$ , brzina  $\dot{U}$  i ubrzanje  $\ddot{U}$ .

Najprihvatljiviji postupak za rešavanje jednačine dinamičke ravnoteže u inkrementalnom obliku su numerički postupci poznati kao integracija jednačina "korak po korak". Umesto rešenja koje zadovoljava jednačinu za bilo koje  $t$ , traži se rešenje koje će jednačinu zadovoljavati samo u određenim diskretnim trenucima  $t_i$  koji su na međusobnom rastojanju  $\Delta t$ . Promena pomeranja, brzine i ubrzanja u okviru vremenskog intervala  $\Delta t$  unapred se propisuje. Na ovaj način se diferencijalne jednačine transformišu u algebarske.

Postoji veliki broj varijacija postupaka definisanih na ovom principu, ali nisu svi dovoljno opšti i prihvatljivi za integraciju jednačina kod proizvoljnih dinamičkih sistema. Pre primene nekog od tih postupaka potrebno je poznavati stabilnost i tačnost numeričkog postupka.

Pitanje stabilnosti i tačnosti postupka određeno je odnosom  $T_i/\Delta t$ , gde su  $T_i$  periodi slobodnih oscilacija pojedinih tonova sistema, pri čemu treba imati u vidu da pri nelinearnom odgovoru periodi oscilovanja nisu konstantne veličine, jer zavise od krutosti sistema koja je promenljiva veličina.

Dalja razmatranja ograničena su samo na primenjenom postupku numeričke integracije, a to je varijanta Newmark-ovog postupka sa pretpostavkom konstantnog ubrzanja unutar svakog vremenskog intervala  $\Delta t$ . Dobra osobina ovog postupka je bezuslovna stabilnost, odnosno stabilnost rešenja je ostvarena bez obzira na izbor vremenskog intervala  $\Delta t$  i vrednosti perioda slobodnih oscilacija dinamičkog sistema.

Analizom odnosa  $T_i/\Delta t$  može se zaključiti o tačnosti postupka. Za svaki pojedini ton  $i$  odgovor sistema tačniji ukoliko je odnos  $T_i/\Delta t$  veći. Za tonove kod kojih je odnos  $T_i/\Delta t$  blizak jedinici ili manji od jedan, tačnost sračunatog odgovora je slaba, ali amplituda ima i dalje korektan red veličine, tj. rešenje je stabilno. Kako je najčešće značaj viših tonova manji u ukupnom odgovoru sistema, povoljnim izborom koraka  $\Delta t$  moguće je obuhvatiti nekoliko najnižih tonova, i dobiti rešenje koje je prihvatljivo kako sa stanovišta tačnosti, tako i u pogledu utroška kompjuterskog vremena.

#### 4.5.2 Newmark-ov postupak konstantnog ubrzanja

Na osnovu pretpostavke o konstantnom ubrzanju (Slika 4.6) u okviru vremenskog intervala  $\Delta t$ , matrična diferencijalna jednačina može se transformisati u matričnu algebarsku jednačinu sa inkrementima pomeranja  $\Delta U$  kao jedinim nepoznatim veličinama.

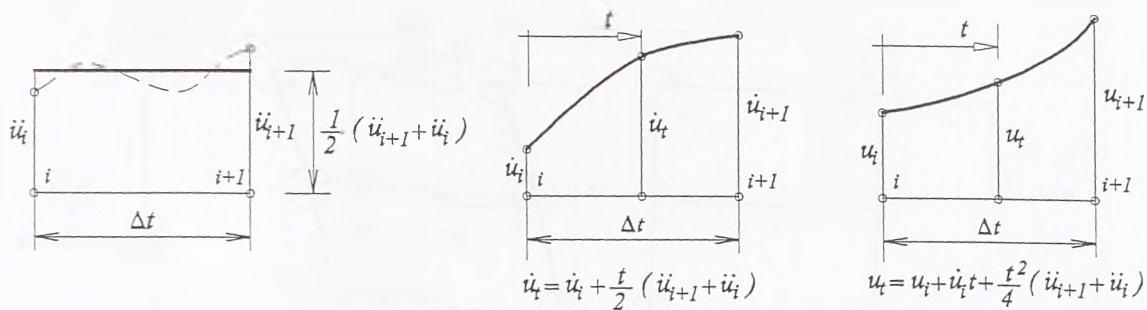
Za osrednjeno (konstantno) ubrzanje  $\ddot{U}$  za vreme intervala  $\Delta t$  važi:

$$\ddot{U} = \frac{1}{2}(\ddot{U}_i + \ddot{U}_{i+1}) \quad ,$$

pa integracijom pretpostavljenog ubrzanja dobija se brzina:

$$\dot{U} = \dot{U}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{U} dt$$

$$\dot{U}_{i+1} = \dot{U}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{U}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{U}_{i+1} \quad .$$



Slika 4.6: Newmark-ov postupak konstantnog ubrzanja

Integracijom izraza za brzinu dobija se pomeranje:

$$U = U_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{U} dt$$

$$U_{i+1} = U_i + \Delta t \dot{U}_i + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{U}_i + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{U}_{i+1} .$$

Na osnovu prethodnih izraza dobijaju se izrazi za inkremente brzine i ubrzanja:

$$\Delta \dot{U} = \dot{U}_{i+1} - \dot{U}_i = -2 \dot{U}_i + \frac{2}{\Delta t} \Delta U \quad (4.30)$$

$$\Delta \ddot{U} = \ddot{U}_{i+1} - \ddot{U}_i = -2 \ddot{U}_i - \frac{4}{\Delta t} \dot{U}_i + \frac{4}{\Delta t^2} \Delta U . \quad (4.31)$$

Izraze za inkremente brzine i ubrzanja iskoristiće se u inkrementalnoj jednačini dinamičke ravnoteže:

$$M \Delta \ddot{U} + C \Delta \dot{U} + K \Delta U = \Delta F ,$$

pa sledi jednačina:

$$\left( \frac{4}{\Delta t^2} M + \frac{2}{\Delta t} C + K \right) \Delta U = \Delta F + \left( 2 \ddot{U}_i + \frac{4}{\Delta t} \dot{U}_i \right) M + 2 \dot{U}_i C , \quad (4.32)$$

odnosno:

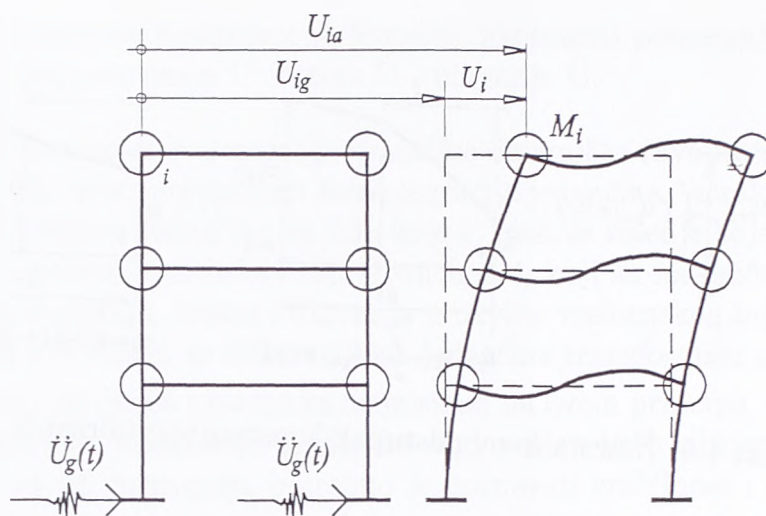
$$\bar{K} \Delta U = \Delta \bar{F} ,$$

gde su:

$$\bar{K} = \frac{4}{\Delta t^2} M + \frac{2}{\Delta t} C + K$$

$$\Delta \bar{F} = \Delta F + \left( 2 \ddot{U}_i + \frac{4}{\Delta t} \dot{U}_i \right) M + 2 \dot{U}_i C .$$

Pretpostavljajući da su poznata brzina i ubrzanje u trenutku  $t_i$ , jedina nepoznata veličina je vektor inkremenata pomeranja  $\Delta U$ . Kad se odredi vektor inkrementa pomeranja iz prethodne jednačina, jednostavno se dobijaju inkrementi brzine (4.30) i ubrzanja (4.31), pa su vrednosti pomeranja, brzine i ubrzanja na kraju intervala:



Slika 4.7: Pomeranje oslonaca, relativno i apsolutno

$$\begin{aligned}
 U_{i+1} &= U_i + \Delta U_i \\
 \dot{U}_{i+1} &= \dot{U}_i + \Delta \dot{U}_i \\
 \ddot{U}_{i+1} &= \ddot{U}_i + \Delta \ddot{U}_i \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.33}$$

Dobijene vrednosti predstavljaju početne vrednosti za naredni inkrement, pa se na taj način nastavlja dalja integracija.

### Seizmička pobuda

U slučaju kada na sistem ne deluje ni jedna čvorna dinamička sila  $F(t)$  ( $\Delta F = 0$ ), a postoji seizmička pobuda, tj. dolazi do dinamičkog pomeranja oslonaca, inkrementalna jednačina dinamičke ravnoteže transformiše se u oblik:

$$M \Delta \ddot{U}_a + C \Delta \dot{U} + K \Delta U = 0 \quad ,$$

gde je  $\Delta \ddot{U}_a$  vektor inkrementa apsolutnog ubrzanja. Apsolutno ubrzanje jednako je zbiru relativnog ubrzanja  $\ddot{U}$  i zadanog ubrzanja tla  $\ddot{U}_g$  usled seizmičke ponude, pa je:

$$\Delta \ddot{U}_a = \Delta \ddot{U} + \Delta \ddot{U}_g \quad ,$$

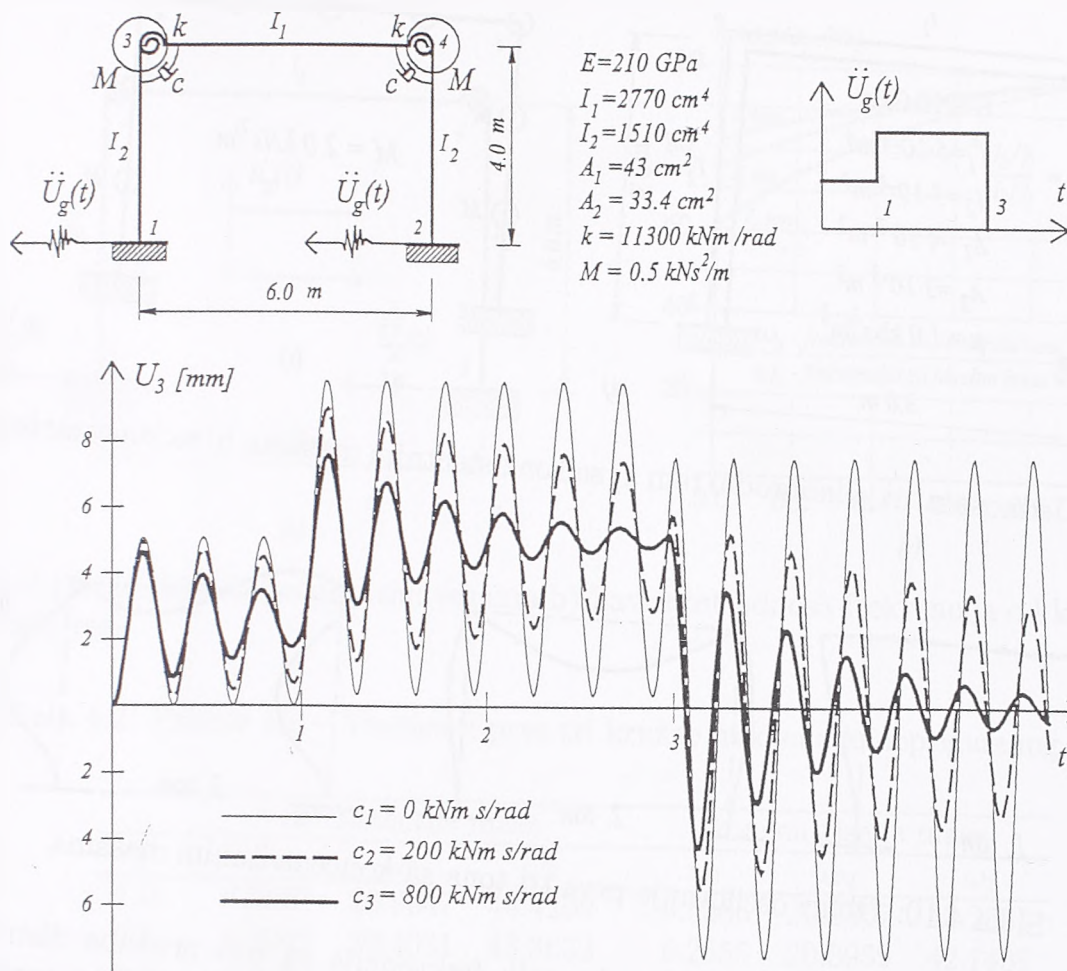
a inkrementalna jednačina postaje:

$$\begin{aligned}
 M (\Delta \ddot{U} + \Delta \ddot{U}_g) + C \Delta \dot{U} + K \Delta U &= 0 \\
 M \Delta \ddot{U} + C \Delta \dot{U} + K \Delta U &= -M \Delta \ddot{U}_g \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

Prilikom izvođenja ove jednačine pretpostavljeno je da se svi oslonci pomeraju na isti način, tj. da su im pomeranja sinhrona i i sinfazna. U vektoru ubrzanja tla  $\Delta \ddot{U}_g$  usvaja se da je samo translatorska komponenta u  $X$  pravcu različita od nule, i ona jednaka za sve mase sistema u jednom trenutku vremena  $t$ .

Kad se određuju sile na krajevima elementa primenjuje se jednačina (4.7), pri čemu treba imati u vidu da se unese apsolutna vrednost ubrzanja a ne relativna:

$$R = k u + m \ddot{u}_a = k u + m (\ddot{u} + \ddot{u}_g) \quad .$$



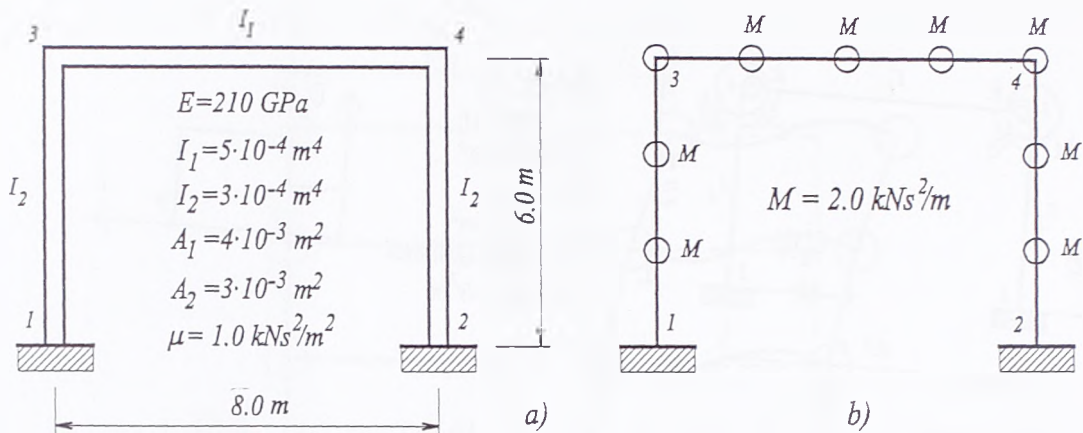
Slika 4.8: Uticaj prigušenja u vezi na odgovor sistema

#### Primer 4.1

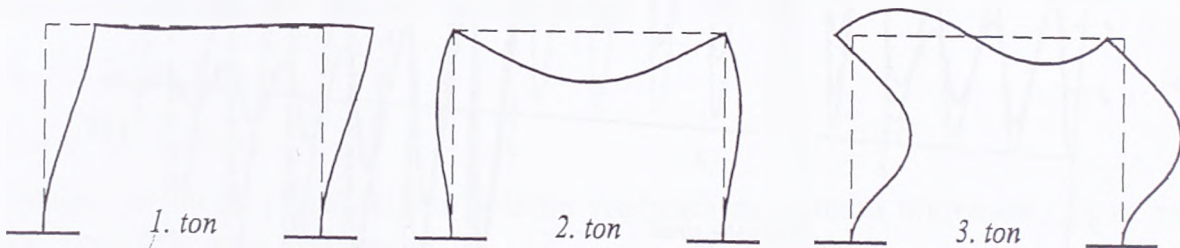
Na Slici 4.8 prikazan je uticaj prigušenja u vezama na odgovor sistema za jedan jednospratni ram pri dejstvu skokovitog naglog opterećenja, sa karakteristikama datim na slici. Usvojena je linearna polukruta veza sa koeficijentom krutosti veze  $\gamma = 0.795$ , pa je period slobodnih neprigušenih oscilacija  $T = 0.318 \text{ s}$ . Proračun je sproveden za tri vrednosti koeficijenta viskoznog prigušenja u vezi  $c = 0, 200, 800 \text{ kNm s/rad}$ . Kako se razmatrani sistem može tretirati kao sistem sa jednim stepenom slobode, onda je jednostavno na osnovu logaritamskog dekrementa oscilacija procenjeno i relativno prigušenje koje iznosi  $\zeta = 0, 1.6\%, 6.3\%$ . Na osnovu rezultata zaključuje se da se visoki nivo prigušenja odgovora konstrukcije može ostvariti povećanjem prigušenja u vezi.

#### Primer 4.2

Na primeru jednospratnog jednobrodnog rama (Slika 4.9) razmatrana su prva tri tona oscilovanja. Najpre su određeni oblici oscilovanja prva tri tona za ram sa krutim vezama bez uticaja prigušenja (Slika 4.10). Za slučaj sistema sa konzistentnim i koncentrisanim masama izračunate su prve tri kružne frekvencije u zavisnosti od koeficijenta krutosti veze grede i stuba  $\gamma$ , (Tabela 4.2).



Slika 4.9: Jednospratni jednobrodni ram a) sa konzistentnim masama b) sa koncentrisanim masama

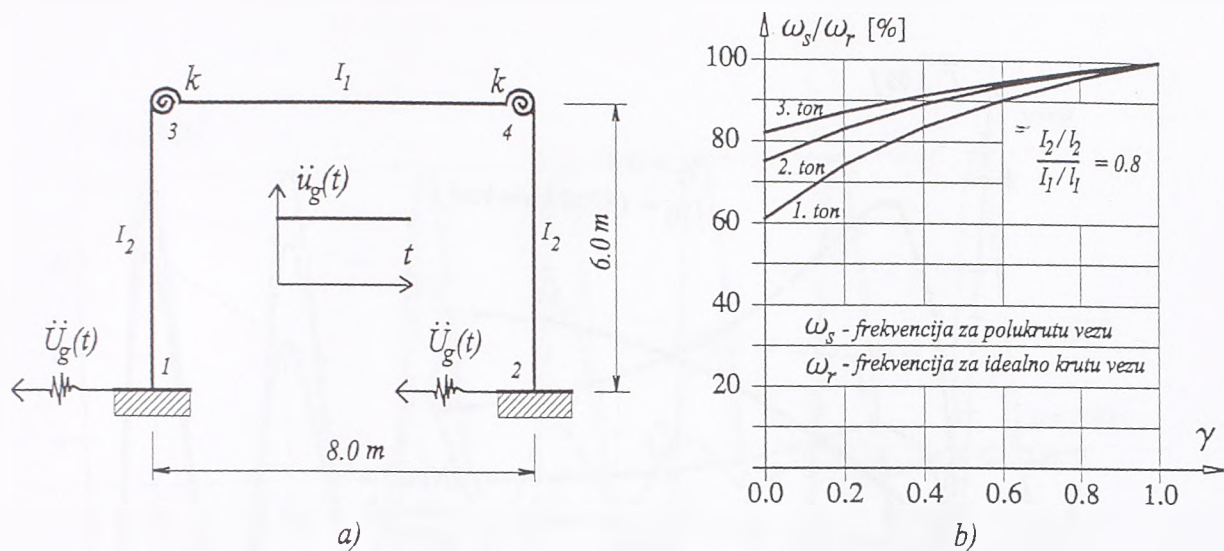


Slika 4.10: Oblici oscilovanja prva tri tona sa koncentrisanim masama

Uočava se mala razlika u rezultatima kružnih frekvencija za dva pristupa distribucije mase sistema. Zavisnost odnosa kružnih frekvencija za sistem sa fleksibilnim vezama  $\omega_s$  i kružnih frekvencija sa krutim vezama  $\omega_r$  od koeficijenta krutosti veze  $\gamma$ , prikazana je na Slici 4.11. Uticaj fleksibilnosti je najveći za kružnu frekvenciju koja odgovara prvom tonu. Pored toga, odnos kružnih frekvencija zavisi i od odnosa fleksione krutosti rigle i stuba, pa bi krive na grafiku bile strmije ako bi odnos  $I_2 l_1 / I_1 l_2$  bio manji.

Za slučaj prigušenih slobodnih oscilacija i za dva izabrana koeficijenta krutosti veze  $\gamma_1 = 0.5$  i  $\gamma_2 = 0.8$  određena je zavisnost pseudo-relativnog prigušenja  $\bar{\zeta}_i$  od koeficijenta viskoznog prigušenja u vezi  $c$ . Vrednost koeficijenta  $\gamma_1 = 0.5$  odgovara ugaonoj vezi jednim ugaonikom (*SWA - Single Web Angle*), dok koeficijent  $\gamma_2 = 0.8$  odgovara vezi sa četiri ugaonika (*TSDWA - Top and Seat Double Web Angle*). Na osnovu dobijenih rezultata i nacrtanog grafika (Slika 4.12, 4.13), primećuje se da su za isti nivo relativnog prigušenja potrebne značajno različite vrednosti koeficijenta  $c$  u zavisnosti od fleksibilnosti veze. To je još očiglednije prikazano na Slici 4.14. Za vrednost koeficijenta viskoznog prigušenja  $c = 800 \text{ kNm s/rad}$  za polukrutu vezu  $\gamma = 0.8$  ostvaruje se relativno prigušenje  $\bar{\zeta} = 1.2\%$ , dok za vezu sa koeficijentom krutosti  $\gamma = 0.5$  relativno prigušenje je  $\bar{\zeta} = 8.9\%$ .

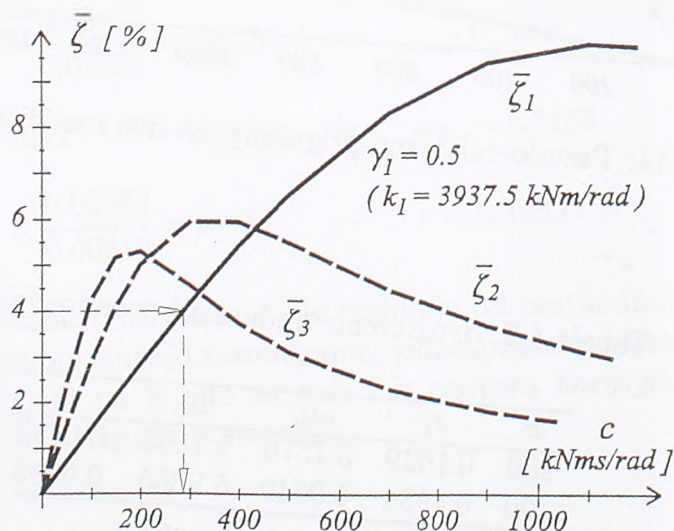
Za koeficijent krutosti veze  $\gamma = 0.5$  i dve vrednosti koeficijenta prigušenja  $c_1 = 200$  i  $c_2 = 700$ , rešen je svojstven problem i dobijena kompleksna svojstvena vrednost za prvi ton  $\lambda_1 = -\varepsilon_1 + \omega_{d1}$ . Na osnovu nje izračunata je odgovarajuća vrednost pseudo-frekvencije prvog tona  $\bar{\omega}_{d1}$  i pseudo-relativno prigušenje  $\bar{\zeta}_1$  (Tabela 4.3). Zatim je za ram



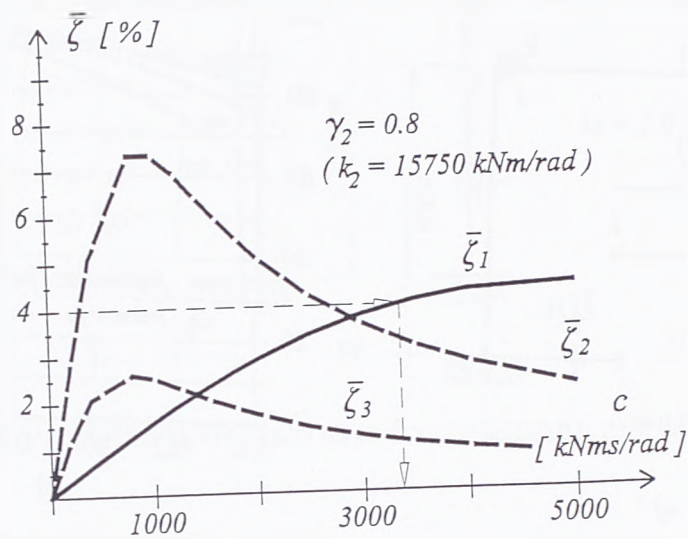
Slika 4.11: a) Ram sa polukrutim vezama b) Zavisnost odnosa frekvencija od koeficijenta krutosti veze

Tabela 4.2: Primer 4.2 – Vrednosti prve tri kružne frekvencije neprigušenog sistema

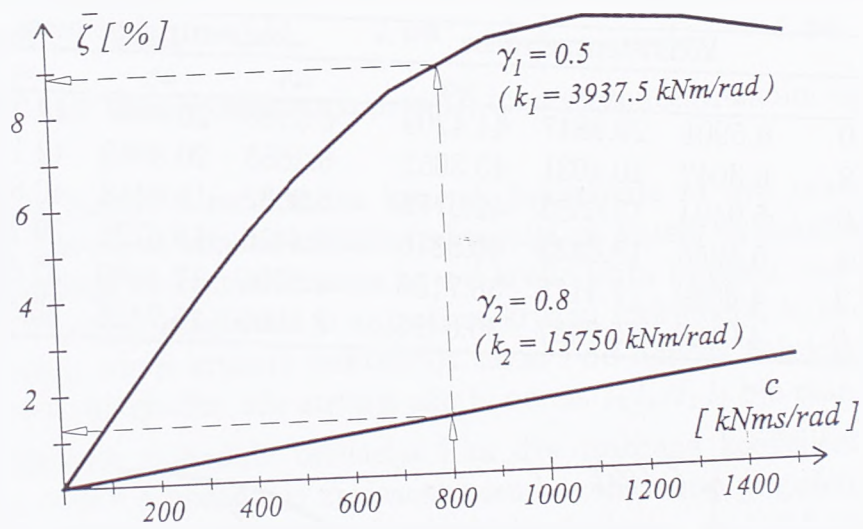
$\gamma_i$	konzistentne mase			koncentrisane mase		
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
1.0	6.5901	20.9847	44.4209	6.5586	20.9807	43.2531
0.8	6.3042	20.4031	43.3652	6.2655	20.3959	42.1409
0.6	5.9494	19.6553	42.0776	5.9033	19.6458	40.8223
0.4	5.4956	18.6832	40.5316	5.4425	18.6728	39.2827
0.2	4.8889	17.4115	38.7156	4.8305	17.4030	37.5231
0.0	4.0160	15.7457	36.6413	3.9566	15.7428	35.5608



Slika 4.12: Pseudo-relativno prigušenje prva tri tona za koeficijent krutosti veze  $\gamma = 0.5$



Slika 4.13: Pseudo-relativno prigušenje prvih tri tona za koeficijent krutosti veze  $\gamma = 0.8$

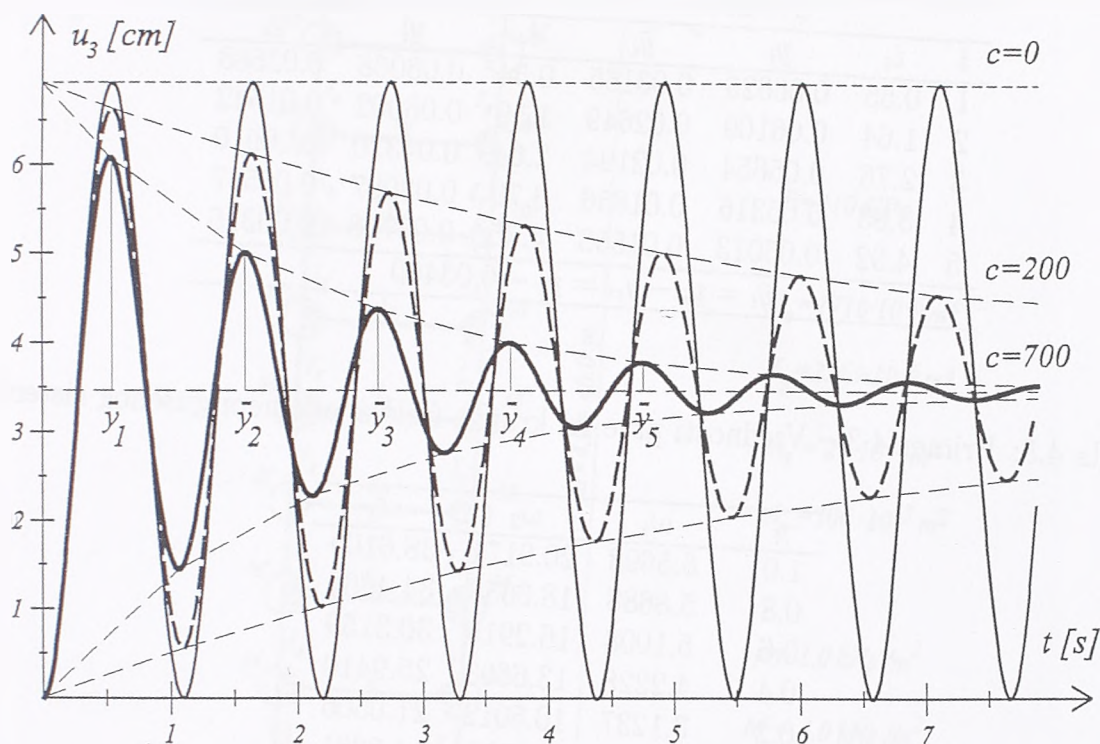


Slika 4.14: Pseudo-relativno prigušenje za dve različite krutosti  $k$

Tabela 4.3: Svojstvene vrednosti i pseudo-veličine

$c$	$\varepsilon_1$	$\omega_{d1}$	$\bar{\omega}_{d1}$	$\zeta_1$
200	0.1629	5.7570	5.7593	0.0283
700	0.4984	5.9649	5.9855	0.0833





Slika 4.15: Horizontalno pomeranje čvora 3

pobuđen dinamičkim pomeranjima oslonaca datog preko ubrzanja tla u obliku Heaviside-ove funkcije i sprovedena numerička integracija da bi se odredio odgovor sistema. Na osnovu amplituda (Tabela 4.4) i logaritamskog dekrementa oscilacija određen je period oscilovanja  $T_d$  i eksponencijalno opadanje amplituda  $e^{-\varepsilon t}$ .

$$c = 200 : \quad T_d = 1.097 \quad \rightarrow \quad \omega_{d1} = 5.7276$$

$$\ln \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_5} = \frac{0.03165}{0.01553} = 4 \varepsilon T_d \quad \rightarrow \quad \varepsilon = 0.1623$$

$$c = 700 : \quad T_d = 1.062 \quad \rightarrow \quad \omega_{d1} = 5.9163$$

$$\ln \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_5} = \frac{0.02588}{0.00316} = 4 \varepsilon T_d \quad \rightarrow \quad \varepsilon = 0.4952$$

Ovako izračunate vrednosti se veoma malo razlikuju od prethodno određenih svojstvenih vrednosti. U konkretnom slučaju razmatranog jednospratnog rama, prvi ton je dominantan u odgovoru sistema, pa je bilo moguće i iz odgovora horizontalnog pomeranja rigle rama odrediti relativno prigušenje sistema.

### Primer 4.3

Slična analiza koja je sprovedena u prethodnom primeru, izvršena je i za desetospratni ram prikazanog na Slici 4.16, da bi se procenio uticaj prigušenja u vezama kod realnijih

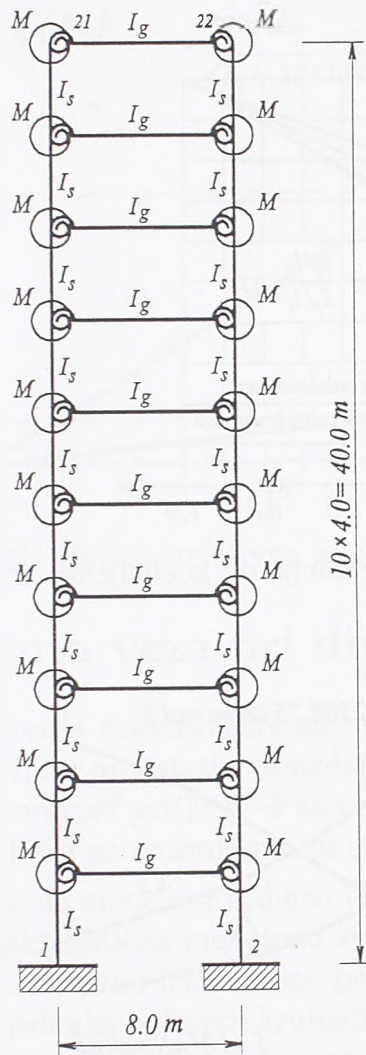
Tabela 4.4: Ordinate pomaranja

		$c = 200$		$c = 700$		
$i$	$t_i$	$y_i$	$\bar{y}_i$	$t_i$	$y_i$	$\bar{y}_i$
1	0.55	0.06625	0.03165	0.54	0.06068	0.02588
2	1.64	0.06109	0.02649	1.59	0.05002	0.01542
3	2.76	0.05654	0.02194	2.64	0.04370	0.00910
4	3.83	0.05316	0.01856	3.70	0.03997	0.00537
5	4.92	0.05013	0.01553	4.75	0.03776	0.00316
		$\bar{y}_i = y_i - y_{st} = y_i - 0.03460$				

Tabela 4.5: Primer 4.3 – Vrednosti prve tri kružne frekvencije neprigušenog sistema

$\gamma_i$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
1.0	6.5698	20.9174	38.6109
0.8	5.8688	18.6658	34.4864
0.6	5.1008	16.2915	30.3159
0.4	4.2228	13.6693	25.9410
0.2	3.1237	10.5012	21.0506
0.0	0.8558	5.2788	14.8331

dimenzija ramova. Oblici oscilovanja prva tri tona konstrukcije sa krutim vezama dati su na Slici 4.17, a vrednosti prve tri kružne frekvencije date su u Tabeli 4.5. Uticaj krutosti veze na promenu frekvencija za prvih pet tonova analiziran je preko dijagrama prikazanog na Slici 4.18. U ovom primeru mnogo je značajniji uticaj fleksibilnosti nego u slučaju jednospratnog rama. Tako na primer, prva kružna frekvencija za krutost veze  $\gamma = 0.5$  se razlikuje za 30% u odnosu na kružnu frekvenciju rama sa krutim vezama, dok je kod jednospratnog rama ova razlika iznosila 13%. Takođe uticaj prigušenja u vezama je izraženiji. Pri prvom tonu maksimalno pseudo-relativno prigušenje dostiže vrednosti i 50% kada je krutost veza  $\gamma = 0.5$  (Slika 4.19), odnosno 35% kada je krutost veze  $\gamma = 0.8$  (Slika 4.20). Ove vrednosti koeficijenta relativnog prigušenja ukazuju na moguću značajnu disipaciju energije u vezama greda-stub, ako tehnički uslovi to dopuštaju.



$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$I_s = 1710 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_g = 2569 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

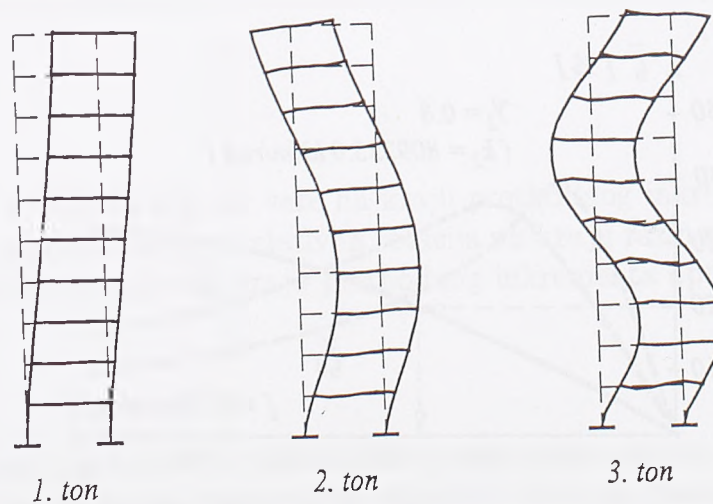
$$A_s = 27 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_g = 306 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

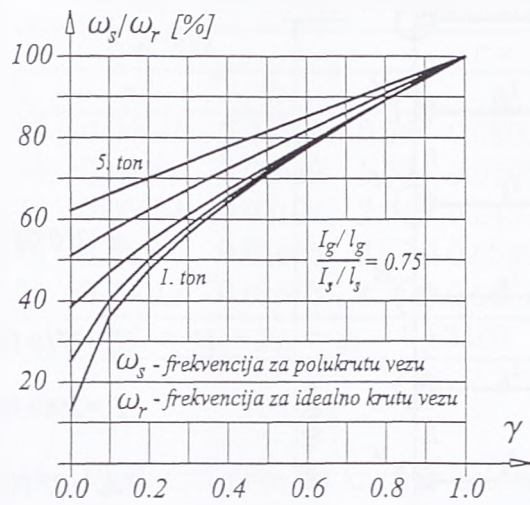
$$\mu = 1.0 \text{ kNs}^2/\text{m}^2$$

$$M = 4.0 \text{ kNs}^2/\text{m}^2$$

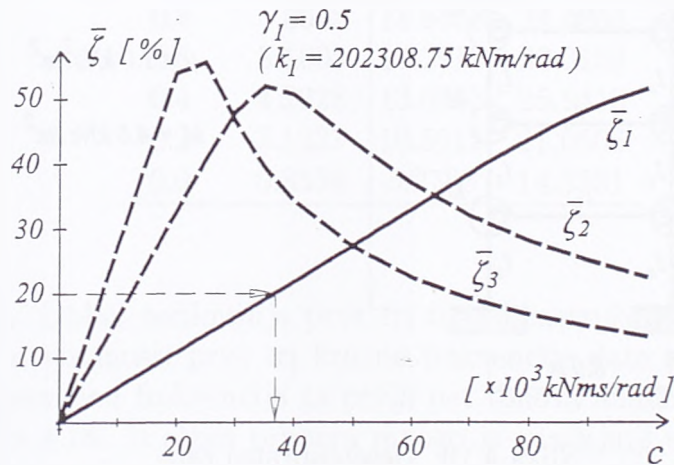
Slika 4.16: Desetospratni ram



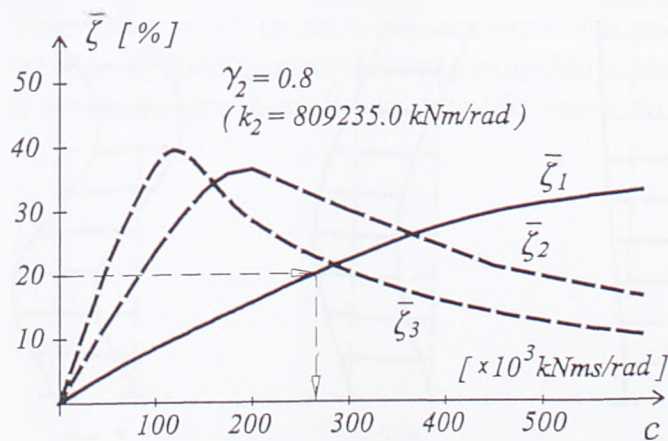
Slika 4.17: Oblici oscilovanja prva tri tona



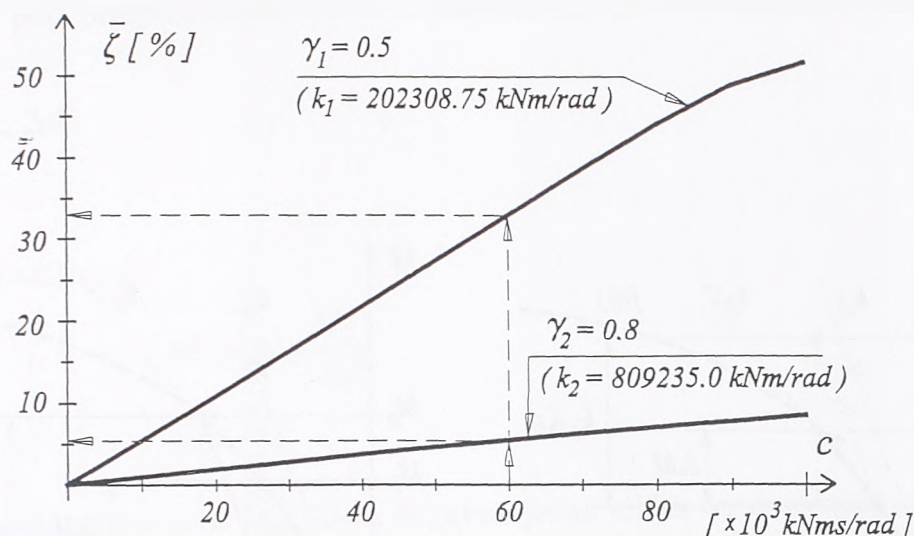
Slika 4.18: Zavisnost odnosa frekvencija od koeficijenta krutosti veze



Slika 4.19: Pseudo-relativno prigušenje prva tri tona za koeficijent krutosti veze  $\gamma = 0.5$



Slika 4.20: Pseudo-relativno prigušenje prva tri tona za koeficijent krutosti veze  $\gamma = 0.8$



Slika 4.21: Pseudo-relativno prigušenje za dve različite krutosti  $k$

## 4.6 Polukruta veza pri dinamičkom opterećenju

Usled ograničenog broja eksperimentalnih istraživanja o ponašanju veze greda-stub pri cikličnom opterećenju i nedostatka pouzdanih eksperimentalnih podataka, nije jednostavno definisati histerezinu petlju  $M-\theta$  za proizvoljne slučajeve opterećenja i rasterećenja veze koji se mogu desiti pri seizmičkom dejstvu.

Da bi se pojednostavilo modeliranje dinamičkog ponašanja veze usvojena je pretpostavka da kriva  $M-\theta$ , karakteristična monotono statičko opterećenje (tri parametarski model), odgovara skeletnim krivama histerezisne petlje  $M-\theta$ . Pri rasterećenju pretpostavlja se da je krutost veze jednaka početnoj krutosti veze  $k_0$ . Navedene pretpostavke odgovaraju histerezisnom modelu sa nezavisnim ojačanjem (v. Poglavlje 2).

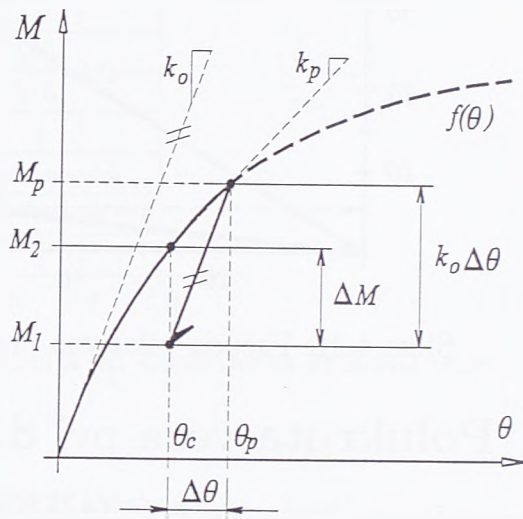
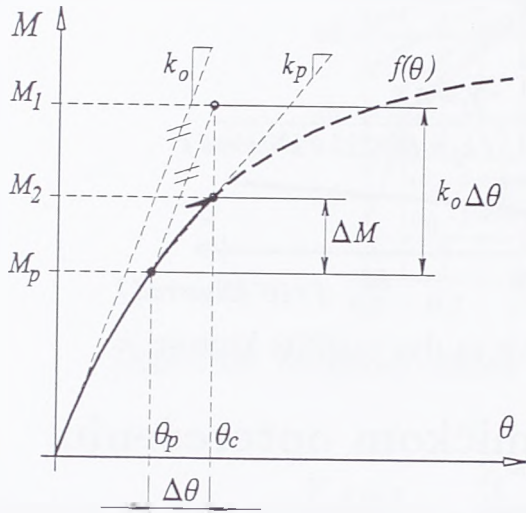
Kada se utvrdi inkrement momenta savijanja u vezi  $\Delta M$ , dobijen iz uslova ravnoteže celog sistema za iteraciju nekog inkrementa opterećenja, potrebno je odrediti inkrement relativne rotacije  $\Delta\theta$ . Primenjujući linearizaciju nelinearne konstitutivne relacije  $M-\theta$  preko sekantne krutosti konstantne u okviru jednog inkrementa, može se jednostavno izračunati:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta M}{k_p} ,$$

gde je  $k_p$  sekantna rotaciona krutost veze na kraju prethodnog inkrementa opterećenja. Ukupna relativna rotacija, odnosno relativna rotacija na kraju razmatrane interakcije jednaka je zbiru relativne rotacije na kraju prethodnog inkrementa opterećenja  $\theta_p$  i inkrementa rotacije  $\Delta\theta$ :

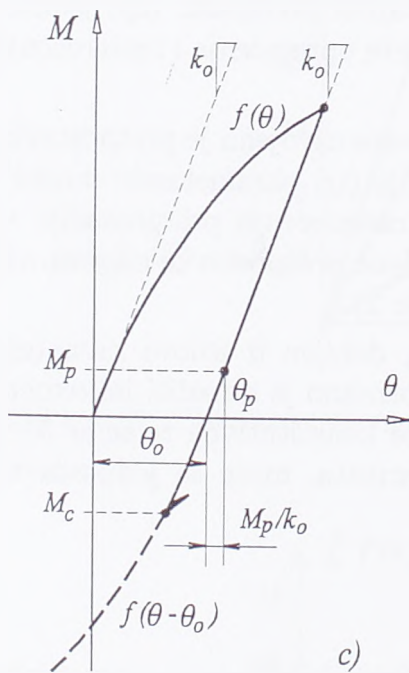
$$\theta_c = \theta_p + \Delta\theta .$$

Za tu vrednost rotacije potrebno je odrediti i odgovarajuću vrednost momenta savijanja  $M_c$  na kraju iteracije. Prikazani postupak je primenljiv kako za opterećenje (Slika 4.22a), tako i za rasterećenje u vezi (Slika 4.22b), za bilo koji znak opterećenja. Izračunava se moment  $M_1$  pod pretpostavkom promene krutosti u skladu sa početnom krutošću  $k_0$

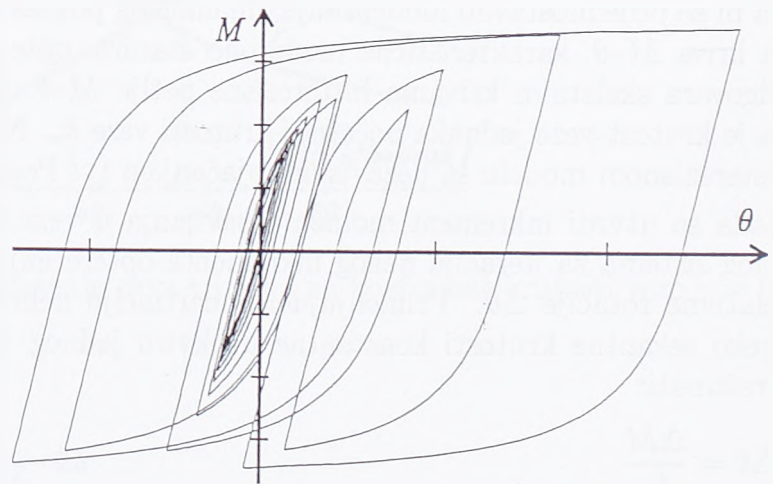


a)

b)



c)



d)

Slika 4.22: Modeliranje histerezisnog ponašanja polukrute veze

i moment  $M_2$  pod pretpostavkom da se krutost menja prema funkciji tri parametarskog modela  $f(\theta)$ :

$$M_1 = M_p + k_o \Delta\theta$$

$$M_2 = f(\theta) \quad .$$

Na osnovu kriterijuma:

$$|M_2| < |M - 1| \quad \rightarrow \quad M_c = M_2 \frac{M_1}{|M_1|}$$

$$|M_2| \geq |M - 1| \quad \rightarrow \quad M_c = M_1 \quad ,$$

utvrđuje se vrednost moment  $M_c$ . Kada se završi jedan ciklus opterećenja i rasterećenja, javlja se zaostala plastična deformacija  $\theta_o$ , koja se može odrediti preko relacije (Slika 4.22c):

$$\theta_o = \theta_p - \frac{M_p}{k_o} \quad .$$

Veličina zaostale plastične deformacije određuje translaciju histerezisne petlje u pravcu  $\theta$  ose, pa izraz za moment  $M_2$  treba modifikovati:

$$M_2 = f(\theta - \theta_o) \quad .$$

Primer histerezisne petlje  $M$ - $\theta$  polukrute veze prema prethodno usvojenim pretpostavkama o ponašanju pri cikličnom opterećenju, prizan je na Slici 4.22d.

#### Primer 4.4

Za karakteristike rama kao u primeru 4.3, analizirano je ponašanje konstrukcije sa polukrutim nelinearnim viskoznom vezama pri dejstvu zemljotresa. Razmatrane su dve tipske polukrute veze: veza sa dva ugaonika na rebu – DWA i veza sa četiri ugaonika – TS-DWA. Parametri koji definišu tri parametarske krive određeni su na osnovu karakteristika i dimenzija veze:

$$\text{DWA} : \quad M_u = 14.93 \text{ kNm} \quad k_o = 6063.36 \text{ kNm/rad} \quad p = 0.570 \quad ,$$

$$\text{TSDWA} : \quad M_u = 37.32 \text{ kNm} \quad k_o = 11300.93 \text{ kNm/rad} \quad p = 1.162 \quad .$$

Čelični ram je izložen dejstvu zemljotresa u trajanju od dve sekunde kao što je prikazano na Slici 4.23. Numerički proračun i odgovor sistema sračunat je za interval vremena šest sekundi, za neprigušen sistem i za prigušen sistem sa koeficijentom viskoznog prigušenja  $c_2 = 50.0 \text{ kNm s/rad}$ .

U odgovoru sistema za tip veze TSDWA, predstavljenog preko horizontalnog pomeranja čvora 3, razmatran je uticaj prigušenja. Sistem sa linearnom polukrutom vezom nema prigušenja i njegova maksimalna amplituda je  $8.33 \text{ cm}$ . U slučaju nelinearne veze, takođe bez viskoznog prigušenja u vezi, pri maksimalnom ostvarenom momentu  $M = 28.49 \text{ kNm}$  (što iznosi 75% momenta nosivosti preseka  $M_u$ ), uočava se pojava histerezisnog prigušenja,

Tabela 4.6: Maksimalni uticaji u ramu za različite tipove veza

tip veze	prigušenje	pomeranja		momenti	
	$c$ [kNm s/rad]	$\min U_3$ [cm]	$\max U_3$ [cm]	$\min M_1$ [kNm]	$\max M_1$ [kNm]
kruta	0	-8.16	8.16	-79.63	79.63
linearna TSDWA	0	-8.33	8.33	-76.67	76.67
nelinearna TSDWA	0	-5.30	5.65	-46.39	48.16
nelinearna TSDWA	50	-4.40	5.20	-40.16	43.90
nelinearna DWA	50	-2.72	3.01	-20.52	21.38

jer nakon prestanka pobude dolazi do opadanja amplituda. Relativno prigušenje sistema za ovo histerezisno prigušenje može se proceniti na  $\zeta = 0.64\%$ , dok je maksimalno pomeranje smanjeno 32% tako da iznosi 5.65 cm. Maksimalno pomeranje za sistem sa prigušenjem i nelinearnom polukrutom vezom je 5.20 cm, a ukupno procenjeno relativno prigušenje (histerezisno i viskozno) je  $\zeta = 0.86\%$ . Naneto opterećenje je uslovilo i pojavu određene nepovratne deformacije koja je naznačena na Slici.

U slučaju fleksibilnijeg tipa veze DWA, uticaj viskoznog prigušenja je mnogo izraženiji tako da se je maksimalna amplituda odgovora 3.01 cm, što je manje za 42% u odnosu na sistem sa krućom TSDWA vezom.

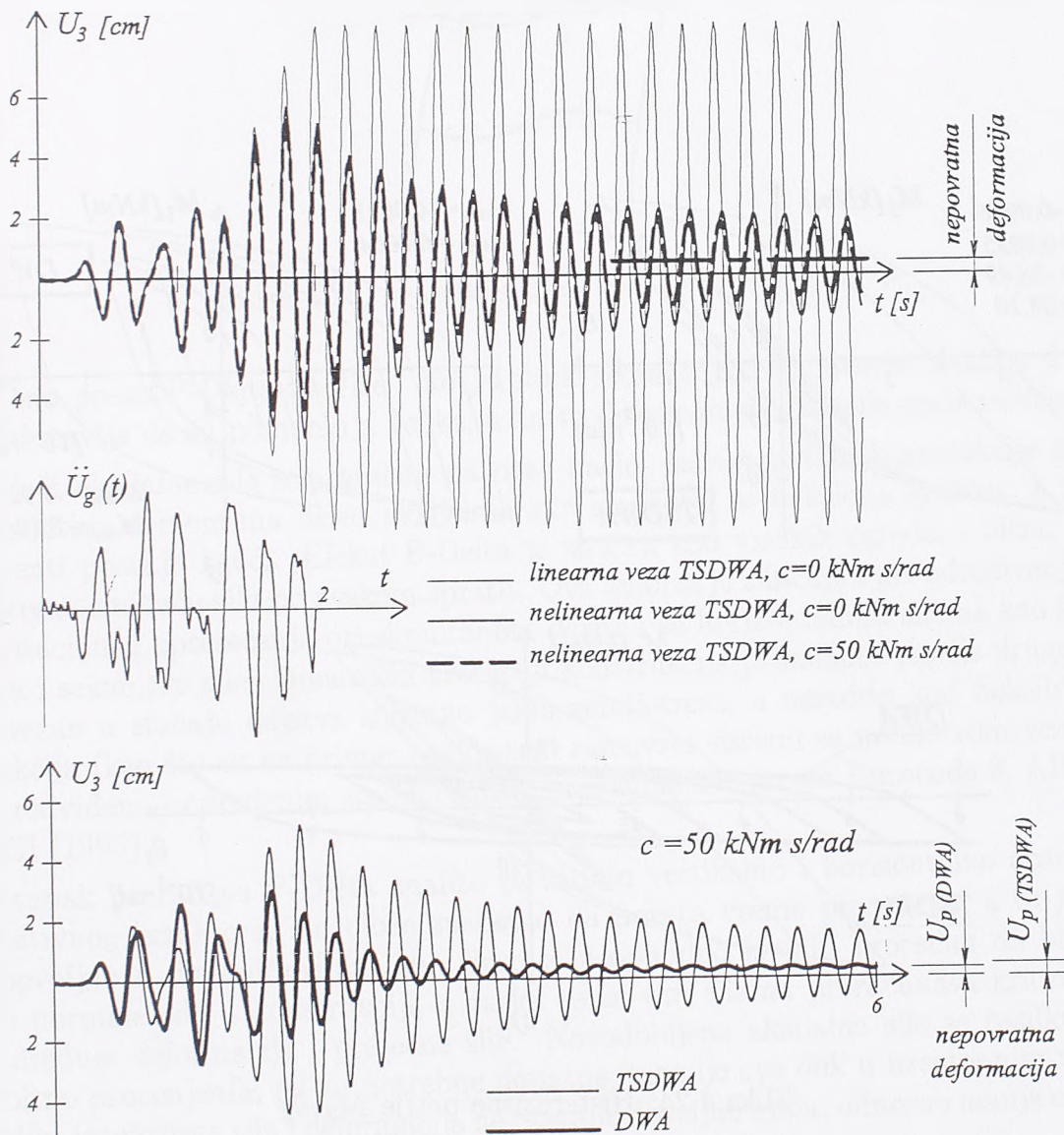
Rezultati maksimalnih pomeranja čvora 3 i momenta uklještenja u čvoru 1 dati su u Tabeli 4.6. Iako je polukruta veza DWA fleksibilnija od veze TSDWA, nisu ostvarena veća pomeranja i momenti, već su oni su bitno manji, jer je uticaj iste veličine koeficijenta viskoznog prigušenja  $c = 30 \text{ kNm s/rad}$  mnogo veći u fleksibilnijoj vezi.

Za izvršenu računsku analizu nacrtane su i odgovarajuće histerezisne petlje  $M-\theta$  čvora 3 horizontalnog elementa. Na Slici 4.24 prikazane su takve petlje za kruću TSDWA i fleksibilniju DWA polukrutu nelinearnu vezu. Zbog manjeg momenta nosivosti veze DWA ostvarene su veće rotacije u proseku za 43 %. Kod fleksibilnije veze ostvaruje se veći stepen disipacije energije uz velike relativne rotacije. Kako se zbog zahteva što veće disipacije energije u vezi, ne bi bile potrebne tehnički nerealne relativne rotacije, dozvoljena vrednost relativne rotacije mora biti projektantski kriterijum pri izboru tipa veze.

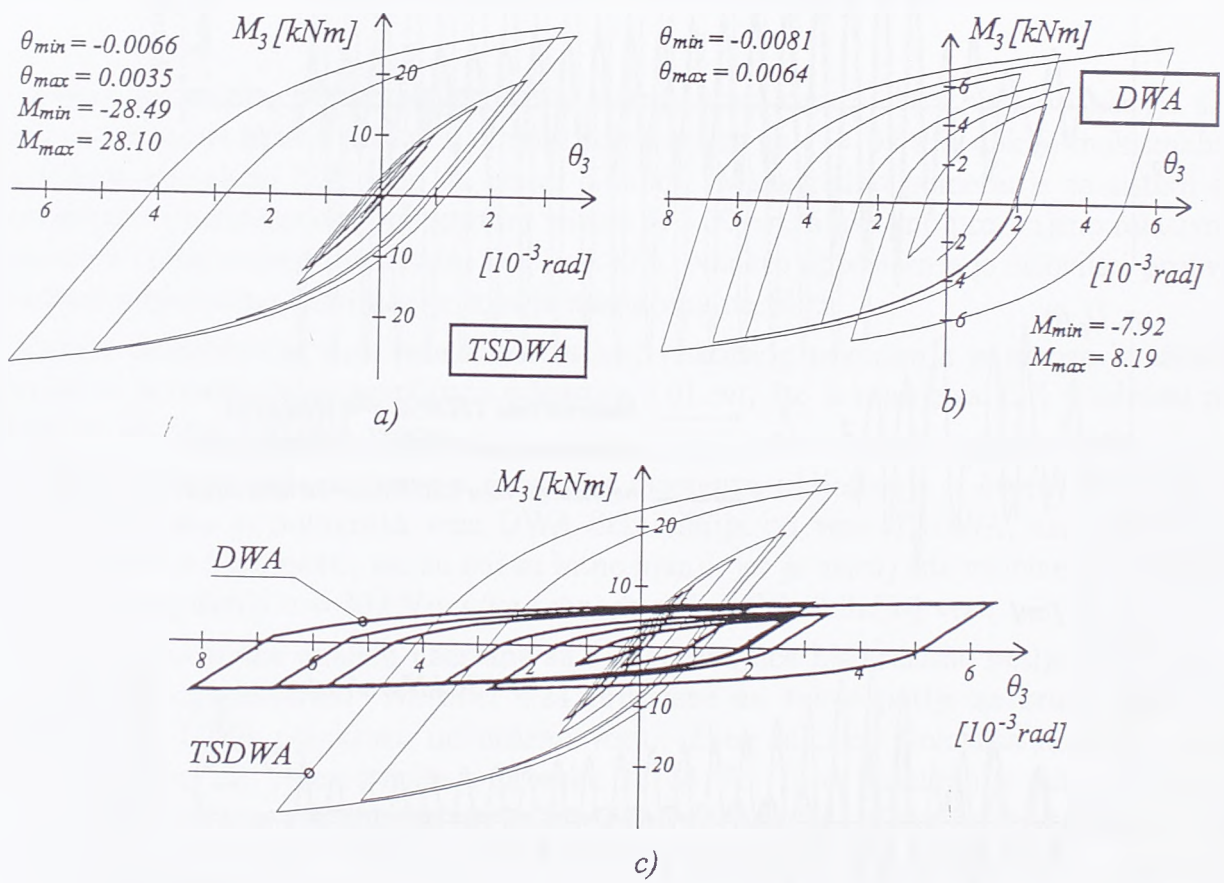
## 4.7 Uticaji teorije drugog reda

Ako se uslovi ravnoteže postavljaju na deformisanom nosaču, u jednačini uslova ravnoteže pojavljuje se član  $P\delta$  (Slika 4.25). Veličina ovog proizvoda, u odnosu na druge članove u jednačini, određuje da li proračun treba sprovesti po teoriji prvog ili drugog teoriji reda. Proizvod  $P\delta$  može biti značajan i u slučaju kad je samo jedan od činilaca dovoljno velik, odnosno kada je pomeranje malo a velika aksijalna sila, ili kada je aksijalna sila mala a pomeranje veliko. U takvim slučajevima ne može se zanemariti uticaj aksijalne sile na poprečnu deformaciju, pa se proračun mora sprovesti primenom teorije drugog reda,

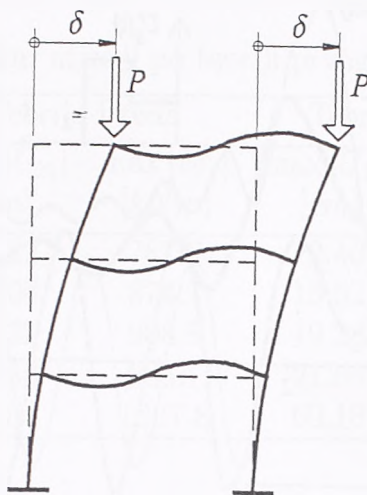




Slika 4.23: Odgovor sistema sa nelinearnom oprugom i viskoznom vezom



Slika 4.24: Histerezisne petlje  $M_3-\theta_3$



Slika 4.25: P-Delta efekat kod višerpratnog rama

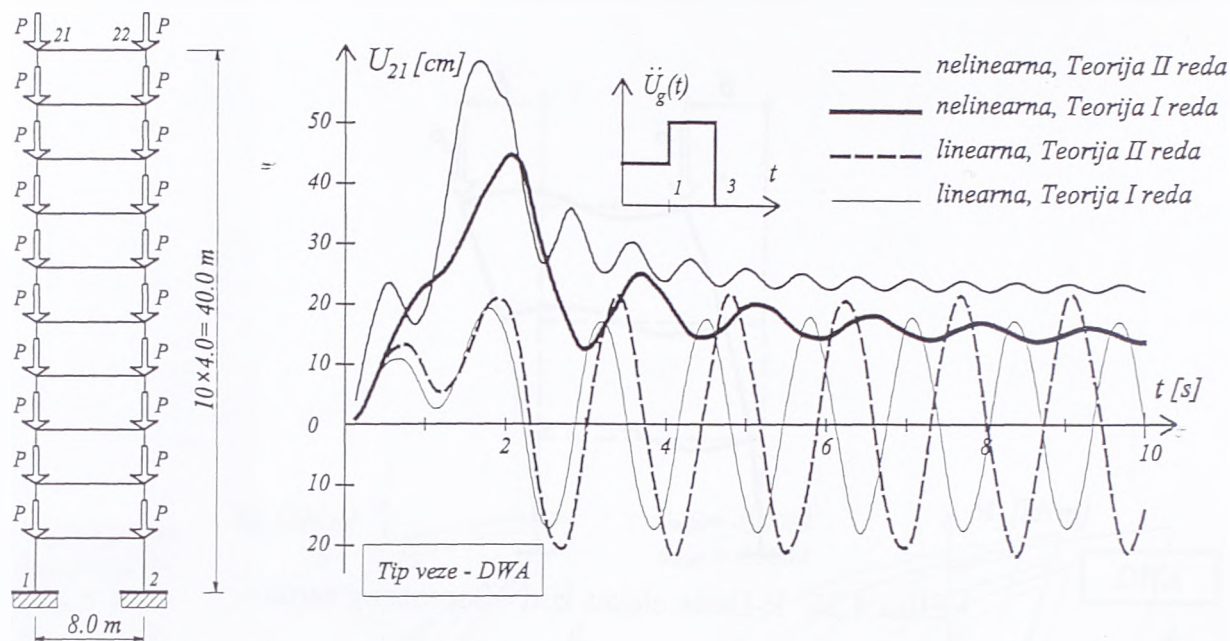
odnosno preko P-Delta analize. To je oblik geometrijski nelinearne analize u kojoj se pretpostavlja da su pomeranja velika, a da su deformacije i rotacije male veličine.

Uvodeći aksijalne sile u proračun na ovaj način, karakteristika konstrukcije se menja, pritisnutim elementima usled aksijalnih sila smanjuje se fleksiona krutost, a zategnuti elementi postaju krući. Efekat P-Delta je izražen kod visokih zgrada, i bitno povećava efektivnu smičuću silu po svakom spratu. Ova analiza je značajna pri određivanju uticaja gravitacionog opterećenja pri simultanom dejstvu sa horizontalnim silama kao što su sile vetra i seizmičke sile. Dinamički proračun konstrukcija primenom teorije drugog reda je obavezan u slučaju dejstva izuzetno jakih zemljotresa, a naročito kod fleksibilnih konstrukcija (kao što su na primer neukrućeni ramovski sistemi sa polukrutim vezama). To je predviđeno i određenim standardima i propisima kao što su Eurocode 8, AISC (1994) i ACI (1995).

Postupak proračuna P-Delta analize za zadato vertikalno i horizontalno opterećenje je iterativnog karaktera, što može značajno da poveća vreme proračuna, a to je naročito nepovoljno u dinamičkoj analizi. Prvo je neophodno izvršiti proračun da bi se procenile normale sile u konstrukciji, a zatim se sa tim silama proračunava krutost sistema i određuje deformacija i presečne sile. Novodobijene aksijalne sile se razlikuju od prvobitno procenjenih, pa su potrebne dodatne iteracije sve dok u uzastopnim iteracijama razlika intenziteta sila i deformacija ne postane dovoljno mala, odnosno manja od usvojene tačnosti.

Uobičajeno je da se P-Delta efekat kod visokih zgrada izračunava razmatranjem geometrijskih matrica krutosti aksijalno opterećenih linijskih elemenata, pri čemu se aksijalna sila određuje samo na osnovu gravitacionog opterećenja. Usvajanjem pretpostavke da se aksijalne sile u konstrukciji ne menjaju, tj. da ostaju konstantne, izvršena je linearizacija geometrijske nelinearnosti, a uzet je u obzir uticaj velikih pomeranja konstrukcije. Najznačajnija prednost ovog aproksimativnog postupka je omogućavanje jednostavne superpozicije opterećenja, kako statičkog tako i dinamičkog, što višestruko doprinosi efikasnosti proračuna.

Uticaj velikih pomeranja moguće je razmatrati i na drugi način. Efekti značajne promene



Slika 4.26: Primer 4.5 – Odgovor sistema

deformisanog oblika mogu se uzeti u ozir određivanjem neizbalansiranog opterećenja koje je posledica velikih pomeranja čvorova elementa na kraju svakog vremenskog koraka integracije. Neizbalansirano opterećenje vrlo često se prenosi kao korektivno opterećenje u narednom koraku vremenske integracije. Tačniji rezultat može se dobiti ako se određuje promena geometrijske matrice krutosti pri svakoj promeni aksijalne sile u elementu. Takođe može se primeniti istovremeno i promena geometrijske matrice krutosti i korektivno opterećenje.

#### Primer 4.5

Da bi se prikazao uticaj teorije drugog reda u dinamičkom proračunu čeličnih ramova za različite tipove veza, razmatran je primer desetospratnog rama sa karakteristikama kao u Primeru 4.3. U svakom čvoru ram je opterećen koncentrisanom vertikalnom silom  $P$ . Usvojeno je da je intenzitet sile  $P = 0.1P_{kr}$  što predstavlja realni intenzitet uobičajenog vertikalnog opterećenja konstrukcije u eksploataciji. Konstrukcija je izložena dejstvu skokovitog naglog opterećenja (Slika 4.26). Naglo opterećenje je izabrano za dinamičko opterećenje umesto seizmičkog da bi izbegli efekti stohastičke pobude u razmatranju odgovora sistema i donošenju zaključaka. Pored toga različite vrednosti frekventnih karakteristika sistema dobijenih po teoriji prvog i teoriji drugog reda u odnosu na frekventnu karakteristiku nekog izabranog zemljotresa, mogu biti od presudnog značaja na odgovor sistema.

Proračun je izvršen po teoriji prvog i teoriji drugog reda za krutu i dva tipa polukrute veze TSDWA i DWA. Za polukrute veze posebno je određen odgovor za pretpostavljenu linearnu i nelinearnu vezu. Karakteristike usvojenih triparametarskih krivih su:

$$\text{DWA} : \quad M_u = 450.0 \text{ kNm} \quad k_o = 200000.0 \text{ kNm/rad} \quad p = 0.65 \quad ,$$

$$\text{TSDWA} : \quad M_u = 850.0 \text{ kNm} \quad k_o = 800000.0 \text{ kNm/rad} \quad p = 0.85 \quad .$$

Tabela 4.7: Maksimalni uticaji po teoriji prvog i teoriji drugog reda

tip veze	Teorija I reda		Teorija II reda		Razlika	
	$\max  U_{21} $ [cm]	$\max  M_1 $ [kNm]	$\max  U_{21} $ [cm]	$\max  M_1 $ [kNm]	$\Delta_U$ [%]	$\Delta_M$ [%]
kruta	11.22	787.8	12.40	850.5	10.5	8.0
linearna TSDWA	14.08	874.2	15.62	953.7	10.9	9.1
nelinearna TSDWA	17.32	903.8	19.26	996.9	11.2	10.3
linearna DWA	19.30	933.7	21.56	1048.5	12.3	11.7
nelinearna DWA	44.64	1237.8	60.18	1601.7	34.8	29.4

Rezultati proračuna su razmatrani i upoređeni na osnovu apsolutno najvećeg pomeranja vrha zgrade  $\max |U_{21}|$  i apsolutno najvećeg momenta uklještenja  $\max |M_1|$  (Tabela 4.7). Aksijalno opterećenje stubova je relativno malo (samo 10% kritične sile), pa se u statičkoj analizi proračun može sprovesti samo po teoriji prvog reda, jer su razlike u rezultatima beznačajne (oko 1–2%). U dinamičkoj analizi uočava se povećanje uticaja teorije drugog reda sa povećanjem fleksibilnosti veze i značaj primene ove teorije, jer su razlike između rezultata po različitim teorijama značajne (na primer, za nelinearnu DWA vezu oko  $\Delta_U = 34.8\%$  i  $\Delta_M = 39.4\%$ ).

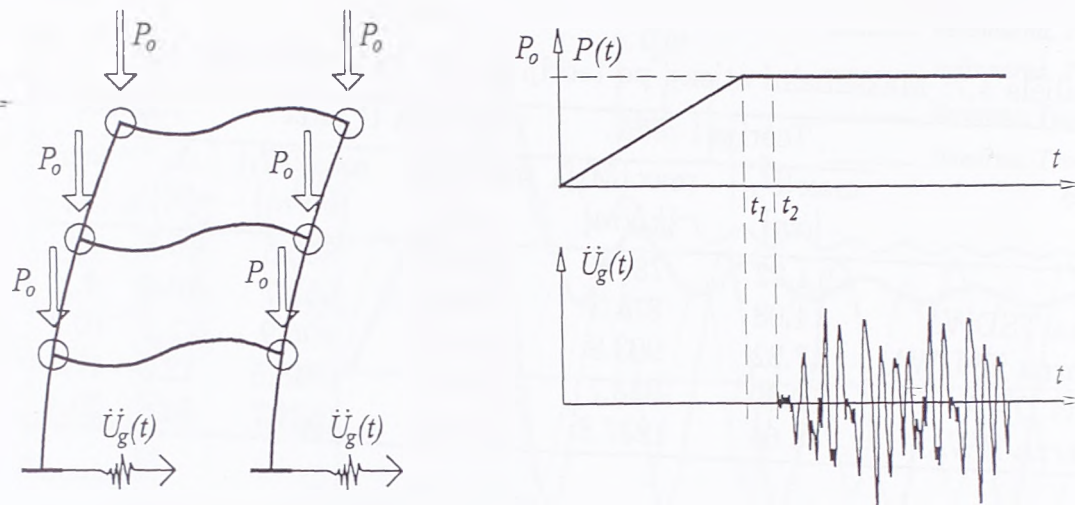
#### 4.7.1 Kombinacija statičkog i dinamičkog opterećenja

Za uobičajene ramovske sisteme, koji se često pojavljuju u objektima visokogradnje postoje dve vrste opterećenja: statičko i dinamičko. Statičko opterećenje, koje je najčešće samo gravitaciono, nanosi se na konstrukciju pre dejstva zemljotresa, i ono je dovodi konstrukciju u neki deformisani ravnotežni položaj. Nakon toga, usled dejstva zemljotresa dolazi do pojave inercijalnih sila, od kojih su obično najznačajnije horizontalne inercijalne sile. One izazivaju horizontalna pomeranja, koja imaju za posledicu pojavu P-Delta efekta. Pored toga horizontalne sile utiču i na i promenu aksijalnih sila u elementima. Stoga, pretpostavka konstantnih aksijalnih sila, strogo uzevši nema opravdanja, jer promena može iznositi i preko 50%. To znači da dinamičko opterećenje može bitno da utiče na promenu vrednosti aksijalnih sila određenih samo na osnovu gravitacionog (statičkog) opterećenja.

Da bi se obe vrste opterećenja mogle razmatrati simultano, i primeniti u proračunu stvarne aksijalne sile, potrebno je i statičko opterećenje tretirati kao dinamičko. Statičko opterećenje, u funkciji vremena  $t$ , može se predstaviti u obliku (Slika 4.27):

$$P = P(t) = \begin{cases} P_o \frac{t}{t_1} & t \leq t_1 & \dots \text{ I faza} \\ P_o & t \geq t_1 & \dots \text{ II faza} \end{cases}$$

S obzirom na činjenicu da statičko opterećenje ne izaziva inercijalne sile vrednost  $t_1$  treba da bude takva tako da uticaji usled sile  $P_o$ , tretirajući je kao statičku i kao dinamičku, budu jednaki u okvirima usvojene tačnosti. Kada  $t_1 \rightarrow \infty$ , odnosno kada se opterećenje



Slika 4.27: Kombinacija statičkog i dinamičkog opterećenja

nanosi izuzetno polako dobijaju se statički uticaji. U protivnom kada  $t_1$  — pomeranje koje ogovara uticajima usled naglog opterećenja. Nakon vremena se usvaja da je  $t_2 = 1.10 t_1$ , počinje da deluje i dinamičko opterećenje, odnosno oslonaca (Slika 4.27). Na ovaj način, može se primeniti jedinstven postupak integracije jednačine kretanja za obe vrste opterećenja.

#### 4.7.2 Inkrementalna formulacija geometrijski nelinearn

U toku numeričke integracije jednačine kretanja, aksijalna sila u elementima nije konstantna. To znači da u geometrijski nelinearnoj analizi nije moguća superpozicija opterećenja, pa je potrebno problem definisati u inkrementalno

Ako se posmatraju dva ravnotežna položaja 1 i 2, mogu se napisati jednačine

$$(\mathbf{K}^I + \mathbf{K}_2^{II}) \mathbf{u}_2 = \mathbf{F}_2$$

$$(\mathbf{K}^I + \mathbf{K}_1^{II}) \mathbf{u}_1 = \mathbf{F}_1 \quad ,$$

gde su:

- $\mathbf{K}^I$  ... deo matrice krutosti koji odgovara teoriji I reda,
- $\mathbf{K}^{II}$  ... deo matrice krutosti koji odgovara teoriji II reda,
- $\mathbf{u}$  ... vektor nepoznatih pomeranja,
- $\mathbf{F}$  ... vektor čvornih sila.

Oduzimanjem ovih jednačina i uvođenjem inkremenata:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \quad ,$$

dobija se jednačina:

$$(\mathbf{K}^I + \mathbf{K}_2^{II}) \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{F} + (\mathbf{K}_2^{II} - \mathbf{K}_1^{II}) \mathbf{u}_1 \quad ,$$

koja se formalno može svesti na uobičajeni oblik u inkrementalnim analizama:

$$\bar{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{u} = \Delta \bar{\mathbf{F}} \quad ,$$

gde su:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}^I + \mathbf{K}_2^{II}$$

$$\Delta \bar{\mathbf{F}} = \Delta \mathbf{F} + (\mathbf{K}_2^{II} - \mathbf{K}_1^{II}) \mathbf{u}_1 \quad .$$

U vektoru slobodnih članova  $\Delta \bar{\mathbf{F}}$  uslovne jednačine, pored vektora čvornih sila pojavljuju se i dodatne sile  $(\mathbf{K}_2^{II} - \mathbf{K}_1^{II}) \mathbf{u}_1$ , koje su posledica promene ravnotežne konfiguracije sistema i postavljanja uslova ravnoteže na deformisanom sistemu. Prilikom određivanja matrice  $\mathbf{K}_2^{II}$ , koja je u funkciji sila  $N_{i(2)}$ , kako bi se izbegao iterativni proces po aksijalnim silama u elementima, usvaja se aksijalna sila iz prethodnog trenutka, tako da se ona aproksimira matricom  $\mathbf{K}_2^{II}(N_{i(1)})$ . Pošto se u numeričkoj vremenskoj integraciji obično usvaja mali vremenski interval  $\Delta t$ , učinjena greška je zanemarljiva.

Da li će promena normalnih sila u elementima biti od značaja na rezultate proračuna u geometrijski nelinearnoj analizi, zavisi od nivoa aksijalnih sila u odnosu na kritično opterećenje, od veličine horizontalnih sila koje se javljaju pri zemljotresu, odnosa širine i visine rama, ortogonalnosti i simetričnosti rama. Ako je ram simetričan ortogonalan, pri dejstvu horizontalnih sila dolazi do pravilnog rasporeda promene aksijalnih sila, u nekim elementima dolazi do povećanja, dok u drugim njima simetričnim dolazi do smanjenja aksijalnih sila za skoro za istu vrednost, tako da na jednoj strani konstrukcija postaje fleksibilnija, a na suprotnoj kruta. U takvim slučajevima razlika u rezultatima proračuna sa konstantnim ili promenljivim aksijalnim silama u elementima je zanemarljiva.

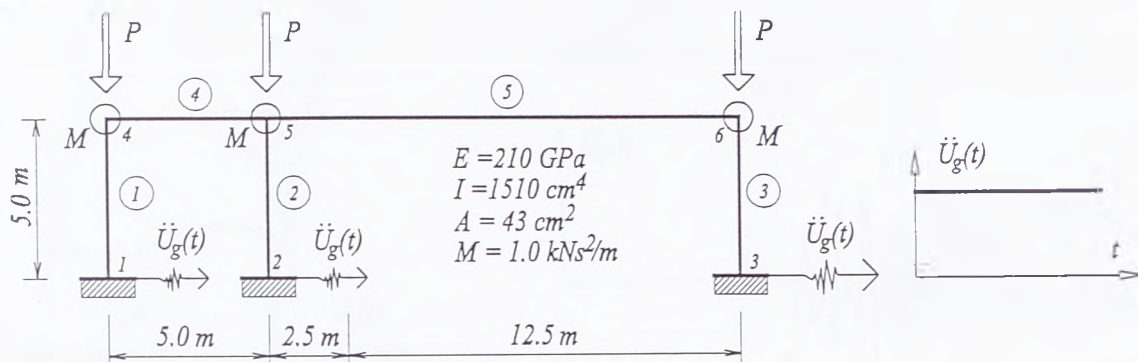
#### Primer 4.6

Razmatra se jednospratni nesimetričan ortogonalan ram prikazan na Slici 4.28. Ram je izložen dejstvu statičkog opterećenja  $P$  i dinamičkog pomeranja oslonaca datog preko ubrzanja tla u obliku Heaviside-ove funkcije. Kritičan parametar vertikalnog opterećenja je  $P_{kr} = 1754 \text{ kN}$ . Usvojeno je da na konstrukciji deluje stalno gravitaciono opterećenje koje je intenziteta:

$$P = 0.245 P_{kr} \sim 430 \text{ kN} \quad ,$$

a zatim se dođe do dejstva horizontalnih sila usled dinamičkog pomeranja oslonaca  $\ddot{U}_g$ , ukupnog intenziteta:

$$H = \sum_{i=1}^3 H = 0.140 \sum_{i=1}^3 P = 0.140 G = 0.140 \cdot 1290 = 180 \text{ kN} \quad .$$

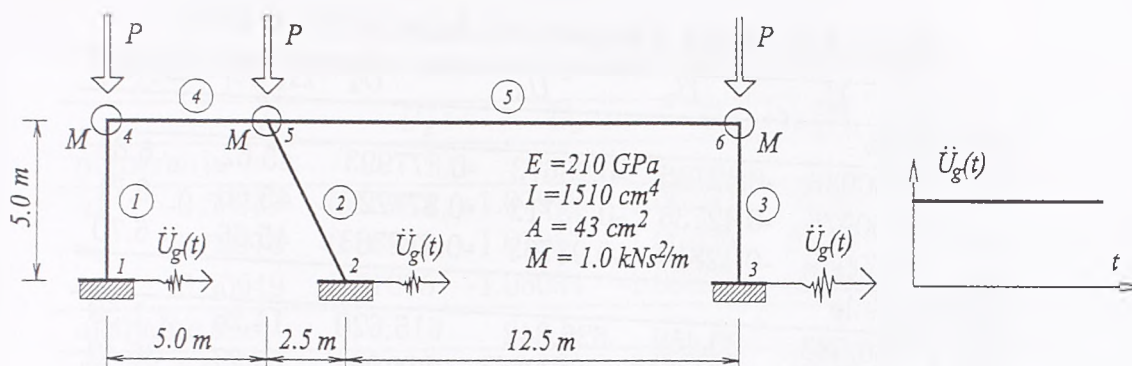


Slika 4.28: Ortogonalan jednospratni ram

Tabela 4.8: Uticaji u konstrukciji kada je  $H = 0.140 G$

	$U_1$	$U_2$	$\Delta_1$ [%]
pomeranja			
$u_4$	-0.61517	-0.619362	0.68
$u_5$	-0.61521	-0.619327	0.66
$u_5$	-0.61578	-0.619883	0.66
momenti			
$M_{14}$	-334.343	-328.867	1.67
$M_{41}$	-264.064	-265.903	0.69
$M_{25}$	-372.975	-381.166	2.15
$M_{52}$	-328.121	-331.632	1.06
$M_{36}$	-257.693	-257.378	0.12
$M_{63}$	-136.648	-131.192	4.16
$M_{54}$	227.749	230.143	1.04
$M_{56}$	100.372	101.489	1.10





Slika 4.29: Neortogonalan jednospratni ram

Rezultati proračuna za horizontalna pomeranja, i momente savijanja na krajevima elemenata, prikazani su u Tabeli 4.8, gde uvedene oznake imaju značenje:

- $U_1$  ... dinamičko opterećenje, konstantne aksijalne sile,
- $U_2$  ... dinamičko opterećenje, promenljive aksijalne sile,
- $\Delta_1$  ... procentualna razlika uticaja za dva postupka.

Analizirajući rezultate očigledno je da je razlika između dva postupka zanemarljiva u inženjerskom smislu u slučaju navedenog primera ortogonalnog rama.

Ako se ram malo modifikuje, tako da ima jedan kos stub (Slika 4.28), a slično se optereti statičkim gravitacionim opterećenjem i dinamičkim pomeranjem oslonaca. Kritičan parametar vertikalnog opterećenja je  $P_{kr} = 981.0 \text{ kN}$ , a usvojen je intenzitet koncentrisane sile  $P$ :

$$P = 0.102 P_{kr} \sim 430 \text{ kN} .$$

Ukupna horizontalna sila usled dinamičkog opterećenja je:

$$H = \sum_{i=1}^3 H = 0.102 \sum_{i=1}^3 P = 0.102 G = 0.102 \cdot 1290 = 132 \text{ kN} .$$

Rezultati proračuna za horizontalna pomeranja, normalne sile i momente savijanja na krajevima elemenata, prikazani su u Tabeli 4.9, gde uvedene oznake imaju značenje:

- $U_1$  ... statičko opterećenje,
- $U_2$  ... dinamičko opterećenje, konstantne aksijalne sile,
- $U_3$  ... zbirni uticaji  $U_1 + U_2$ ,
- $U_4$  ... dinamičko opterećenje, promenljive aksijalne sile,
- $\Delta_1$  ... procentualna razlika uticaja usled statičkih i dinamičkih sila,
- $\Delta_2$  ... procentualna razlika uticaja za dva postupka.

Uočava se da razlika u rezultatima za dva postupka (sa konstantnim i promenljivim aksijalnim silama) nije ravnomerna za sve uticaje u ramu. Za neke sile razlika je takva da se ne može zanemariti.

Za slučaj većeg ubrzanja pomeranja oslonaca, tako da ukupna horizontalna sila iznosi:

Tabela 4.9: Uticaji u konstrukciji kada je  $H = 0.102 G$ 

	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$\Delta_1$ [%]	$\Delta_2$ [%]
pomeranja						
$u_4$	-0.50936	-0.42736	-0.93673	-0.877993	45.62	6.69
$u_5$	-0.50976	-0.42736	-0.93712	-0.878227	45.60	6.71
$u_5$	-0.50949	-0.42814	-0.93763	-0.878763	45.66	6.70
aksijalne sile						
$S_1$	536.883	89.459	626.342	616.620	14.28	1.58
$S_2$	334.962	-121.982	212.980	334.974	57.27	36.42
$S_3$	421.860	-6.846	415.014	421.743	1.65	1.60
$S_4$	70.672	-0.841	69.831	65.996	1.20	5.81
$S_5$	-15.812	-46.770	-62.582	-32.251	74.73	94.05
momenti						
$M_{14}$	-316.591	-265.373	-581.964	-535.506	45.60	8.68
$M_{41}$	-289.277	-242.305	-531.582	-496.518	45.58	7.06
$M_{25}$	-310.753	-259.934	-570.687	-551.840	45.55	3.42
$M_{52}$	-301.660	-252.385	-554.045	-531.831	45.55	4.18
$M_{36}$	-202.009	-169.779	-371.788	-339.224	45.67	9.60
$M_{63}$	-93.678	-78.764	-172.442	-143.109	45.68	20.50
$M_{54}$	263.862	220.631	484.493	455.077	45.54	6.46
$M_{56}$	37.797	31.755	69.552	76.754	45.66	9.38

$$H = \sum_{i=1}^3 H = 0.136 \sum_{i=1}^3 P = 0.136 G = 0.136 \cdot 1290 = 175 \text{ kN} ,$$

sprovedena je analiza, a rezultati su dati u Tabeli 4.10. Povećana horizontalna sila prouzrokovala je još veće razlike u rezultatima.

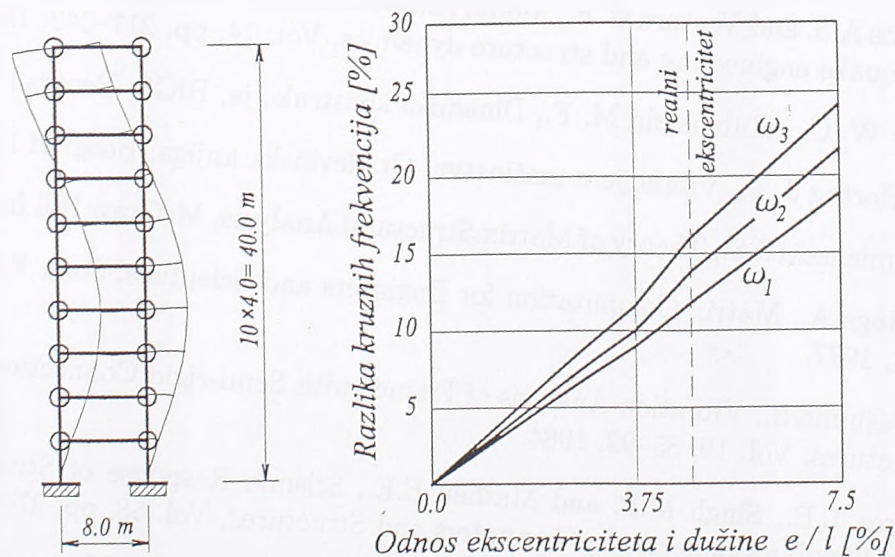
#### Primer 4.7

Da bi se ilustrovao uticaj ekscentričnosti veze linijskih elemenata sproveden je dinamički proračun jednog desetospratnog rama prikazanog na Slici 4.30. Rezultati su analizirani na osnovu promene prve tri kružne frekvencije. Tako, na primer, za ekscentricitet veze od 3.75% razlika frekvencija u odnosu na centrične veze je za prvi ton 8.95% a za treći 11.16%. Za realni ekscentricitet, koji je u konkretnom slučaju rama iznosio 3.75% za grede i 7.5% za stubove, razlika je još veća, 11.18% za prvu i 16.0% za treću kružnu frekvenciju.

Na osnovu ovih rezultata može se reći da se uticaj ekscentričnosti naročito u dinamičkim analizama ne može ignorisati.

Tabela 4.10: Uticaji u konstrukciji usled kada je  $H = 0.136 G$

	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$\Delta_1$ [%]	$\Delta_2$ [%]
pomeranja						
$u_4$	-0.50937	-0.56982	-1.07918	-1.00792	52.80	7.07
$u_5$	-0.50976	-0.56981	-1.07957	-1.00809	52.78	7.09
$u_5$	-0.50949	-0.57085	-1.08034	-1.00893	52.84	7.08
aksijalne sile						
$S_1$	536.883	119.279	656.162	645.373	18.18	1.67
$S_2$	334.962	-162.642	172.320	334.974	94.38	48.56
$S_3$	421.860	-9.128	412.732	421.743	2.21	2.14
$S_4$	70.672	-1.121	69.551	65.996	1.61	5.39
$S_5$	-15.812	-62.360	-78.172	-50.633	79.77	54.39
momenti						
$M_{14}$	-316.591	-353.831	-670.422	-612.041	52.78	9.54
$M_{41}$	-289.277	-323.073	-612.350	-569.508	52.76	7.52
$M_{25}$	-310.753	-346.578	-657.331	-638.784	52.73	2.90
$M_{52}$	-301.660	-336.514	-638.174	-614.605	52.73	3.83
$M_{36}$	-202.009	-226.372	-428.381	-386.103	52.84	10.95
$M_{63}$	-93.678	-105.019	-198.697	-157.735	52.85	25.97
$M_{54}$	263.862	294.174	558.036	522.375	52.72	6.83
$M_{56}$	37.797	42.339	80.136	92.230	52.83	13.11



Slika 4.30: Uticaj ekscentriciteta na kružne frekvencije rama

## Literatura

- [1] Dimitrijević D., Dinamika linijskih nosača u matričnom obliku, Savremeni problemi dinamike konstrukcija, Jugoslovenski građevinski centar, Beograd 1982.
- [2] Weaver W. Jr., Johnston P. R., Prentice-Hall Inc., Eaglewood Cliffs, New Jersey 1987.
- [3] Sekulović M., Matrična analiza konstrukcija, Građevinska knjiga, Beograd 1991.
- [4] Sekulović M., Metod konačnih elemenata, Građevinska knjiga, Beograd 1984.
- [5] Čorić B., Ranković S. i Salatić R., Dinamika konstrukcija, Univerzitet u Beogradu, Beograd 1998.
- [6] Finite Element Procedures In Engineering Analysis, Prentice-Hall Inc., Eaglewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [7] Kanaan A. E. and Powell G. H., A General Purpose Computer Program for Dynamic Analysis of Inelastic Plane Structures, Report No. EERC 73-6 and EERC 73-22, University of California, Berkeley 1975.
- [8] Caughey T. H. and O'Kelly M. E., Classical Normal Modes in Damping Linear Dynamic Systems, Journal mech. ASME Vol. 32, 583-588, 1965.
- [9] Foss K.A, Coordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, pp. 361-364, 1958.
- [10] Traill-Nash R. W., Modal Methods in Dynamics of Systems with Non-classical Damping, Earthquake engineering and structure dynamics, Vol. 9, pp. 153-169, 1981.
- [11] Warburton G. B. and Soni S. R., Errors in Response Calculations for Non-classically Damped Structures, Earthquake engineering and structure dynamics, Vol. 5, pp. 365-376, 1977.
- [12] Veletsos A.S. and Ventura C. E., Modal Analysis of Non-classically Damped Linear Systems, Earthquake engineering and structure dynamics, Vol. 14, pp. 217-243, 1986.
- [13] Hurty W. C. i Rubinstein M. F., Dinamika konstrukcija, BIGS, Beograd 1973.
- [14] Den Hartog J. P., Vibracije u mašinstvu, Građevinska knjiga, Beograd 1972.
- [15] Przemieniecki J.S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw Hill Inc, New York 1968.
- [16] Jennings A., Matrix Computation for Engineers and Scientists, John Willey & Sons, New York, 1977.
- [17] Kawashima S., Vibration Analysis of Frames with Semi-rigid Connections, Computers and Structures, Vol. 19, 85-92, 1984.
- [18] Suarez L.E., Singh M.P. and Matheu E.E., Seismic Response of Structural Frameworks with Flexible Connections, Computers and Structures, Vol. 58, pp. 27-41, 1996.
- [19] Sekulović M i Salatić R., Analiza okvirnih nosača sa polukrutim ekscentričnim vezama po teoriji drugog reda, XXII jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Vrnjačka Banja, 1997.

- [20] Sekulović M., Salatić R., and Mandić R., Seismic Analysis of Frames with Semi-rigid Eccentric Connections, Twelfth World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 273, New Zealand 2000.
- [21] Sekulović M., Salatić R. and Mandić R., Parametric Analysis of Frames with Semi-rigid Connections Subjected to Earthquake, International Symposium on Earthquake Engineering, Budva, Montenegro, 1999.
- [22] Salatić R, Mandić R. and Nefovska M., Dynamic Analysis of Frames with Semi-rigid Viscous Connections, 8-th International Symposium Macedonian Association of Structural Engineers, Ohrid, Macedonia, 1999.
- [23] Petrović B., Odabrana poglavlja iz zemljotresnog građevinarstva, Građevinska knjiga, Beograd 1989.
- [24] Chopra A.K., Dynamics of Structures, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [25] Chan S.L. and Chui P.P.T, Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections, Elsevier Science Ltd., Amsterdam, 2000.
- [26] Chen W.F., Goto Y. and Richard Liew J. Y., Stability Design of Semi-rigid Frames, John Wiley & Sons, Inc. New York 1996.
- [27] SAP2000 Analysis Reference Volume 1, Computers and Structures Inc., Berkeley, California, USA, 1997.
- [28] Wilson L. E., Three Dimensional Dynamic Analysis of Structures, Computers and Structures Inc., Berkeley, California, USA, 1997.



# Kontrola ponašanja konstrukcija pri dejstvu zemljotresa

---

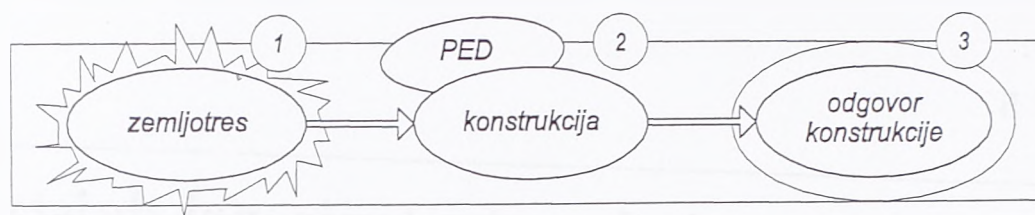
## 5.1 Uvod

Zemljotres jačeg intenziteta izaziva na objektima horizontalne inercijalne sile, usled kojih se konstrukcije zanjšu proporcionalno unetoj seizmičkoj energiji, a zatim nastave da više oscilatorno kretanje u pravcu seizmičke pobude. Sa globalnog stanovišta razmatranja rušenja konstrukcije, do kolapsa će doći ako je predata energija pri dejstvu zemljotresa veća od kapaciteta apsorpcije energije konstrukcije. Način na koji je potrošena energija u sistemu određuje nivo oštećenja konstruktivnih i nekonstruktivnih elemenata. Zato je od velikog značaja ugradnja mehanizma za apsorpciju energije.

Prema velikom broju važećih seizmičkih propisa predložen je metod aseizmičkog proračuna baziran na duktilnim konstruktivnim elementima, koji su projektovani tako da imaju mogućnost histerezisne disipacije energije pri različitim oblicima neelastične deformacije. Iako je na ovaj način konstrukcija obezbeđena od globalnog kolapsa, formiranje zglobova neizbežno zahteva veću ili manju sanaciju objekta. Često troškovi popravke mogu biti veoma visoki, tako da ekonomski faktor postaje izuzetno bitan u konceptu aseizmičkog projektovanja. Pored toga pri dugotrajnim dejstvima ili ponovljenom zemljotresu, usled kumulativnih efekata, može doći do trošenja kapaciteta duktilnosti i sloma konstrukcije.

Iz ovih razloga javila se potreba za novim principom projektovanja aseizmičkih objekata, a on bi se mogao formulirati kao zahtev za eliminaciju bilo kakvih oštećenja kako konstruktivnih tako i nekonstruktivnih elemenata objekta. Drugim rečima traži se neprekidno potpuno stanje upotrebljivosti objekta bez obzira na nivo izuzetnog opterećenja. Taj zahtev se ostvaruje primenom kontrole ponašanja konstrukcije pri dejstvu zemljotresa. Posebno projektovanim uređajima, sistemima ili konstruktivnim elementima odgovor konstrukcije se kontroliše tako da ostaje u predviđenim granicama i pri katastrofalnim zemljotresima. Elementi konstrukcije se projektuju da budu napregnuti samo u domenu elastičnosti materijala, tako da nema pojave zaostalih plastičnih deformacija ili oštećenja.

Ranije se samo za izuzetno značajne objekte projektovala primena kontrole ponašanja konstrukcije, dok danas primena sistema kontrole ponašanja postaje sve intezivnija i masovnija. U zavisnosti od izbora sistema i načina ostvarenja kontrole ponašanja razlikuje se pasivna i aktivna kontrola ponašanja konstrukcije.



Slika 5.1: Šema pasivne kontrole konstrukcija

## 5.2 Pasivna kontrola

Pasivna kontrola zasniva se na redukciji dinamičkog odgovora sistema usled zemljotresa, ili preko redukcije seizmičkih sila koje deluju na sistem, ili preko redukcije seizmičke energije koja se predaje konstrukciji.

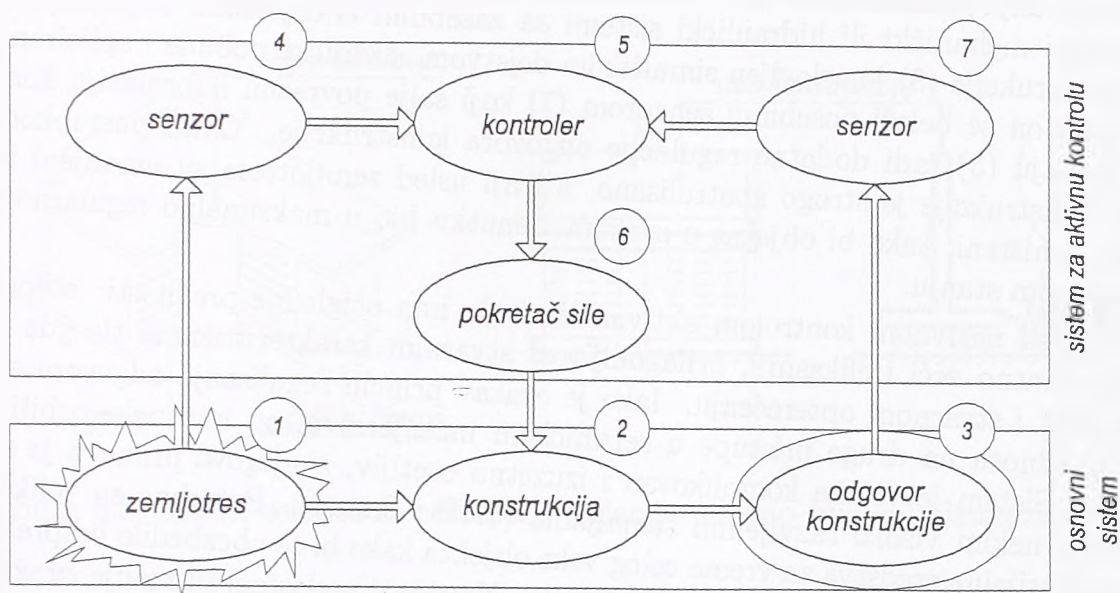
Redukcija seizmičkih sila ostvaruje se preko seizmičke izolacije, a redukcija seizmičke energije preko apsorpcije energije u prigušivačima (apsorberima energije). Prigušivači mogu biti različito konstruisani, ali su zasnovani na istoj ideji, da se što veći deo unete energije mehanički potroši, kako bi odgovor konstrukcije bio umanjen, a objekat ostao bez konstruktivnih oštećenja.

Frikcioni prigušivač (*Friction Damper*) zasnovan je na trošenju energije u histerezisnim ciklusima pri trenju. Maseni podešavajući prigušivač (*Tuned Mass Damper – TMD*) je sistem koji se sastoji od mase, opruge i viskoznog prigušivača postavljenog obično na vrhu konstrukcije. Kada konstrukcija počne da vibrira, maseni prigušivač biva aktiviran kretanjem konstrukcije. Određeni deo kinetičke energije prelazi u ovaj sistem i apsorbuje se preko viskoznog prigušivača. Tečni podešavajući prigušivač (*Tuned Liquid Damper – TLD*) koristi tečnost kao pokretnu masu, a za restitucionu silu iskorišćena je sila gravitacije. Energetska apsorpcija se ostvaruje u turbulentnom kretanju tečnosti u specijalno konstruisanoj posudi. Metalni prigušivači (*Yielding Metal Damper*) troše seizmičku energiju nelinearnim plastičnim deformacijama čeličnih ili olovnih elemenata. Viskozni i viskoelastični prigušivači su sastavljeni od nekog viskoelastičnog materijala ili viskoznog fluida. Oni su aktivni već i pri vrlo malim pomeranjima, jer nemaju definisan prag delovanja za razliku od uređaja zasnovanih na trenju.

Trenutno najrasprostranjenija strategija pasivne kontrole konstrukcija, sistem koji značajno poboljšava seizmičku otpornost konstrukcije, je seizmička izolacija (*base isolation*). Ovaj sistem nije pogodan baš za sve tipove konstrukcija, kao na primer za vitke i veoma fleksibilne konstrukcije.

Pasivna kontrola konstrukcije predstavlja relativno jednostavan sistem koji je šematski prikazan na Slici 5.1. Na konstrukciji se nalazi neki od oblika pasivne energetske disipacije (PED) pomoću koga se obezbeđuje željeni odgovor konstrukcije. Efikasnost uređaja za pasivnu kontrolu zavisi od seizmičkog opterećenja koje će dejstvovati na objekte, a ono je nepoznat ulazni podatak u proračunu. Zato je potrebno obaviti analizu za veći broj poznatih ili sintetizovanih zemljotresa, kako bi se dobile anvelope karakterističnih uticaja, na osnovu kojih se sa velikom pouzdanošću mogu definisati potrebne karakteristike pasivnog uređaja.





Slika 5.2: Šema aktivne kontrole konstrukcija

### 5.3 Aktivna kontrola

Kao logičan razvoj i nastavak pasivne kontrole javila se aktivna, poluaktivna i hibridna kontrola konstrukcija. Aktivna kontrola konstrukcije ostvaruje se pomoću uređaja sa nezavisnim energetske napajanjem, koji na osnovu informacije o stanju konstrukcije nakon spoljnih dejstava deluje na nju korektivnim silama u realnom vremenu. Poluaktivna kontrola je slučaj kada zaseban uređaj određuje primenu pasivne kontrole sistema, a hibridna kontrola predstavlja kombinaciju aktivne i pasivne kontrole. Ovakvi oblici kontrole ponašanja objekata pri dejstvu zemljotresa prevazilaze okvire klasičnog građevinskog konstrukterstva i imaju multidisciplinarni karakter. Aktivna, poluaktivna i hibridna kontrola je rezultat uspešne integracije različitih tehničkih disciplina kao što su: kompjuterska tehnika, teorija upravljanja, senzorska tehnologija, tehnologija materijala, tehnika numeričke obrade podataka, teorija stohastičkih procesa, dinamika konstrukcija i zemljotresno inženjerstvo.

Novi principi kontrole razvili su se kao potreba projektovanja novih i inženjerski složenih objekata grandioznih visina i raspona. Primena konvencionalnog pristupa projektovanja kod visokih tornjeva, oblakodera, nuklearnih centrala, mostova i krovnih konstrukcija velikih raspona, postala je nepraktična. Ostvarenje potrebnih koeficijenata sigurnosti pri dejstvu incidentnih neutvrđenih spoljnih opterećenja (vetar, zemljotres) i obezbeđenje od neželjenih oštećenja nije se mogla ostvariti na racionalan način. Problem se rešio pomoću uređaja sa nezavisnim eksternim napajanjem koji formiraju prilagodljiv sistema sa konstrukcijom. Intenzitet njihovog delovanja na konstrukciju je direktno optimiziran prema stvarnim spoljnim uticajima u realnom vremenu.

Za razliku od pasivne kontrole, u aktivnoj kontroli ima više činilaca (Slika 5.2). Seizmička pobuda (1) deluje na konstrukciju (2) i istovremeno na senzore (4) koji su locirani blizu konstrukcije ili na samoj konstrukciji. Na osnovu informacije o izmerenom intenzitetu pobude, podaci se obrađuju u posebnom uređju (5) koji na osnovu analize utvrđuje

potrebu aktiviranja pokretača sile (6) i intenzitet sile za dejstvo na konstrukciju. Pokretači sile su zasebni mehanički ili hidraulički sistemi sa zasebnim energetskim napajanjem. Odgovor konstrukcije (3) je uslovljen simultanim dejstvom seizmičke pobude i aplicirane dodatne sile i on se beleži posebnim senzorom (7) koji šalje povratnu informaciju kontrolnom uređaju (5) radi dodatne regulacije odgovora konstrukcije. Ovim postupkom ponašanje konstrukcije je strogo kontrolisano, uticaji usled zemljotresa su umanjeni ili kompletno poništeni, kako bi objekat u svakom trenutku bio u maksimalno regularnom eksploatacionom stanju.

U poređenju sa pasivnom kontrolom aktivna kontrola ima očigledne prednosti: stepen kontrole je znatno veći i efikasniji, prilagodljivost stvarnim karakteristikama tla gde se nalazi objekat i stvarnom opterećenju. Iako je ovakav princip regulisanja odgovora superioran u odnosu na druge pristupe u seizmičkom inženjerstvu, on ima neke ozbiljne nedostatke. Sistem je veoma komplikovan i izuzetno osetljiv, a njegova primena je realna samo u nekim visoko razvijenim zemaljama (SAD i Japan). Potrebna su velika i stabilna materijalna sredstva za vreme celog veka objekta kako bi se obezbedilo besprekorno održavanje kao i postojanje rezervnog sistema. Navedeni nedostaci su manje izraženi kod sistema sa poluaktivnom kontrolom jer nije potrebno ostvariti velike sile za koje su neophodni moćni mehaničko-hidraulički uređaji i energetski izvori.

Kontrola ponašanja konstrukcija ostvaruje se suštinski primenom dejstva pomoćnih sila, koje se nazivaju kontrolne sile. Način kako se generišu kontrolne sile, odnosno da li su spoljašnje ili unutrašnje, određuje da li je reč o aktivnoj ili pasivnoj kontroli. Sile u pasivnoj kontroli mogu biti efiksane samo do određenog nivoa intenziteta spoljnog opterećenja, dok sile u aktivnoj kontroli nemaju takvo ograničenje s obzirom da su one oslanjaju na dodatnu energiju. Matematički, dejstvo kontrole ponašanja konstrukcije može se predstaviti jednačinom:

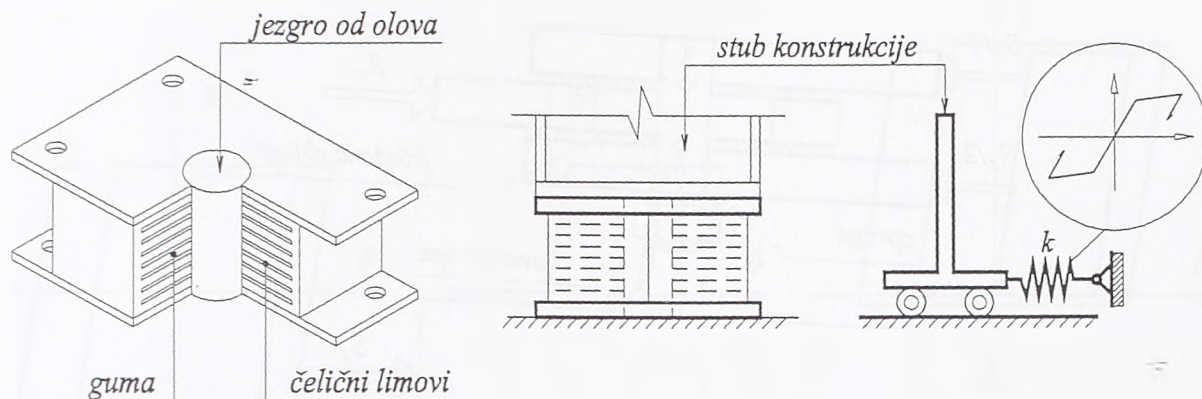
$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F - F_c \quad ,$$

gde je  $F$  vektor čvornih sila usled spoljašnjeg opterećenja, a  $F_c$  vektor kontrolnih sila. Vektor  $F_c$  smanjuje vektor slobodnih članova u sistemu jednačina kako bi se dobili manje vrednosti nepoznatih  $U_i$  odnosno uticaja u konstrukciji.

## 5.4 Seizmička izolacija

Seizmička izolacija predstavlja koncept zaštite objekta od dejstva zemljotresa, zasnovan na posebnim konstruktivnim elementima koji se postavljaju između tla i oslonaca konstrukcije. Kako zemljotres predstavlja dinamičko pomeranje oslonaca, uloga seizmičkih izolatora je da uticaje koje su oslonci primili redukuju, i tako ih umanjene prenesu na konstrukciju. Drugim rečima konstrukcija se izoluje od sila koje mogu izazvati neželjena oštećenja. Seizmička otpornost konstrukcije prvenstveno se povećava tako što se redukuju seizmičke sile, a ne preko apsorpcije energije. Iako je ideja nastala odavno, još pre oko 100 godina, tek poslednjih desetak je aktivno primenjena, tako da danas veliki broj zgrada ima ugrađene elemente za seizmičku izolaciju.

Iako postoji veliki broj tehničkih rešenja i njihovih varijacija, dva su osnovna tipa rešenja u seizmičkoj izolaciji. Prvi tip rešenja se zasniva na izolatoru male bočne krutosti, koji

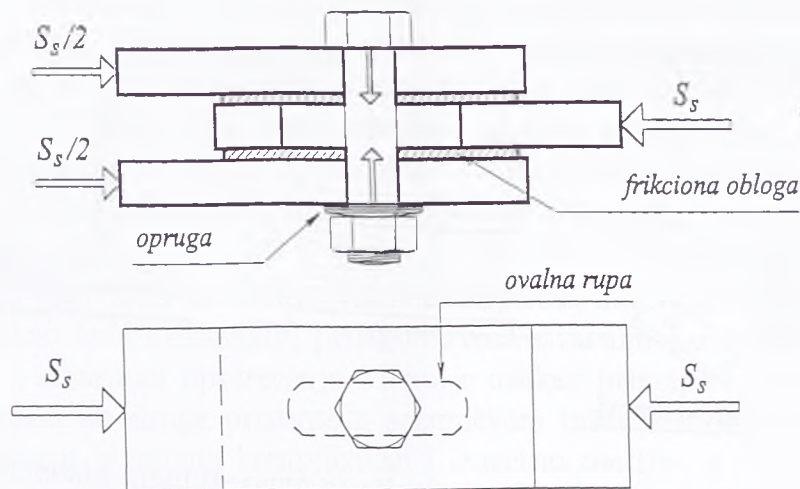


Slika 5.3: Model oslonca za seizmičku izolaciju (olovno-gumeni histerezisni oslonac)

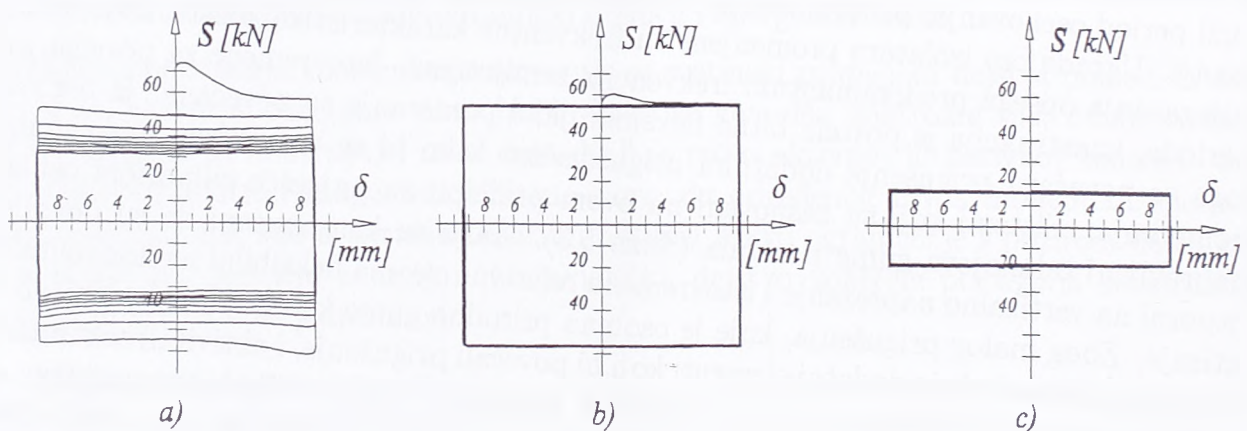
se postavlja između konstrukcije i fundamenta. Kao posledica toga, konstrukcija dobija duži period oscilovanja, pa su sile koje zemljotres može da indukuje u konstrukciji znatno manje. Ugradnjom izolatora promenjene su frekventne karakteristike konstrukcije u cilju izbegavanja opsega predominantnih frekvencija zemljotresa. Istovremeno sa povećanjem perioda, konstrukcija je postala bitno fleksibilnija, a pomeranja su povećana. Iz tog razloga se povećava prigušenje dodatnim prigušivačem kako bi se redukovala maksimalna pomeranja. Sistemi koji su zasnovani na ovom principu su najčešće cilindrični oslonci napravljeni od slojeva gume i metala (Slika 5.3). Tako su konstruisani da su dovoljno otporni na vertikalno naprezanje i istovremeno relativno veoma fleksibilni na horizontalne uticaje. Zbog malog prigušenja, koje je osobina prirodne gume kao materijala, obično se ovim osloncima dodaju dodatni elementi koji bi povećali prigušenje, i aktivirali sekundarni efekat seizmičkih izolatora, a to je disipacija energije. Ako je cilindar napravljen od veštačke gume sa osobinom velikog prigušenja, ili ako ima ispunu od olova onda nisu neophodni dodatni prigušivači. Drugi tip rešenja koji se primenjuje su kotrljajući oslonački valjci ili klizajući oslonci. Bočna sila koje će delovati na sistem ograničava se preko kotrljanja ili klizanja oslonaca. Sila pri kojoj će doći do pokretanja oslonaca mora biti veća od bočne sile koju izazivaju jači vetrovi i slabiji zemljotresi, kako bi se efekat izolacije aktivirao tek pri jačim zemljotresima. Ovakav sistem mora da ima i restitucionu silu. Ona se ostvaruje preko elastičnih opruga, gumenih odbojnika ili konkavne površine za valjke.

Primena seizmičke izolacije je veoma efikasna kod novih objekata koji se nalaze u aktivnim seizmičkim područjima. Takođe se primenjuje kod postojećih krutih i seizmički slabih konstrukcija kao što su nearmirani zidani objekti ili davno izgrađeni armirano-betonski objekti. Naročito je popularna primena kod istorijski ili arhitektonsko značajnih zgrada gde nije prikladno konvencionalno ojačanje novim armirano-betonskim platnima ili čeličnim spregovima.

Seizmička izolacija nije predmet ovog rada i daljih razmatranja. Uloga i značaj seizmičke izolacije u pasivnoj seizmičkoj kontroli bi bio posebno izražen u kombinaciji sa drugim pasivnim sistemima kao što su frikcionni spregovi, pomoću kojih se mogu eliminisati određeni nedostaci seizmičke izolacije.



Slika 5.4: Princip rada frikcionog sprega

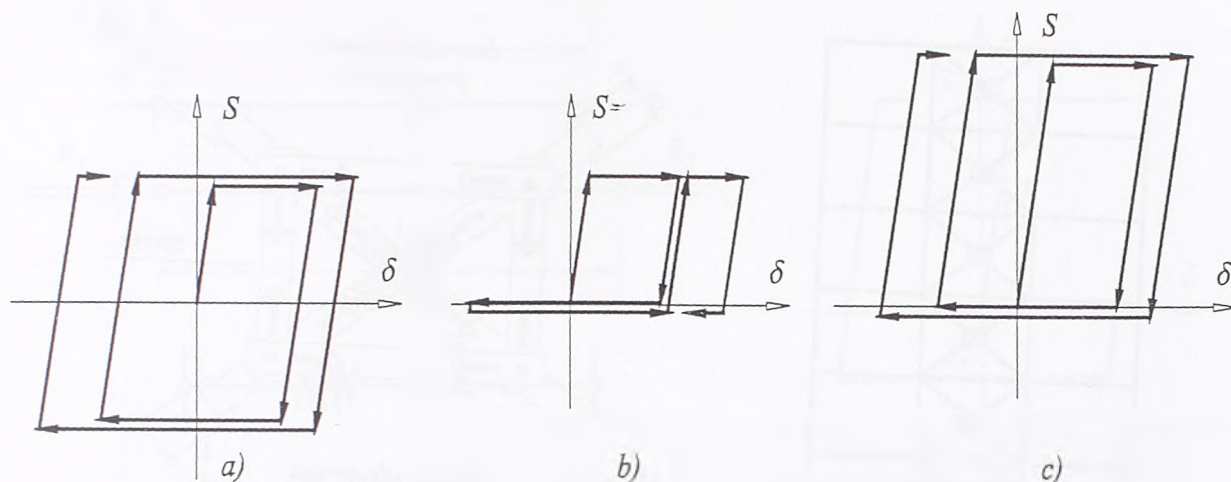


Slika 5.5: Histerezisna petlje različitih frikcionih površina u spregu a) metalizirane površine b) obloge automobilskih kočnica c) polietilenska presvlaka

## 5.5 Frikcioni spregovi

Jedan od načina da se smanji kinetička energija pri kretanju zemljotresom zanjihale konstrukcija je da se konstrukcija "prikochi kočnicom". Pall i Marsh [6] predložili su posebne konstruktivne elemente, frikционе spregove, spregove za disipaciju energije trenjem, zasnovane na ideji rada obične automobilske kočnice. Dobre osobine ovog uređaja, stabilna energetska disipacija pri višecikličnom opterećenju, temperaturna neosetljivost, bez osobine starenja materijala, prenete su na uređaj za primenu u građevinskim objektima.

Čelični ramovi ukrućeni frikcionim spregovima, imaju sposobnost da potroše ogroman deo energije preko trenja pri proklizavanju frikcionih površina (Slika 5.4). Rezultati proračuna i seizmičkog odgovora čeličnih ramova sa disipativnim spregovima pokazuju znatno bolje ponašanje u odnosu na neukrućene ili konvencionalno ukrućene čelične ramove. U ovakvim



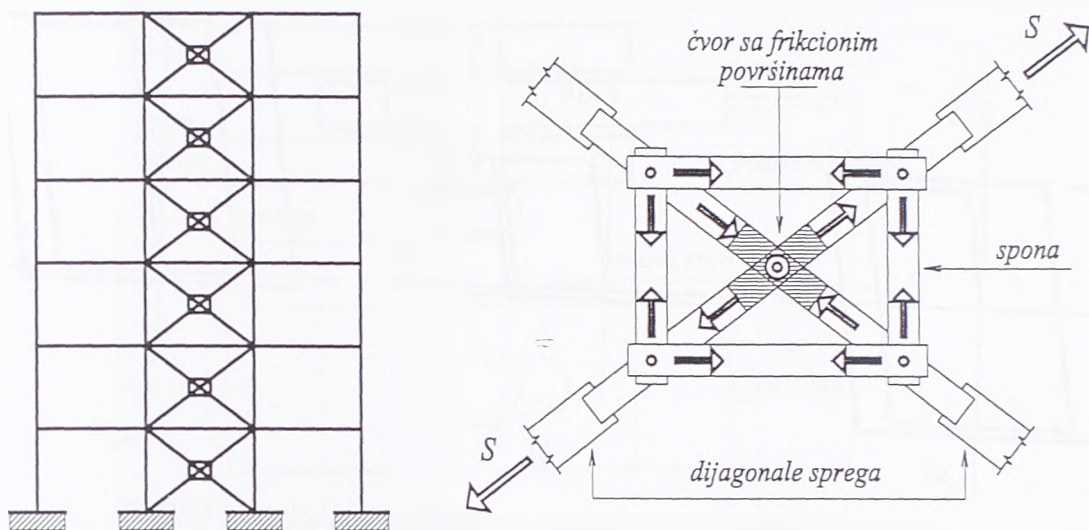
Slika 5.6: Model histerezisnog ponašanja frikcionog sprega

sistemima nivo naprezanja glavnih konstruktivnih elemenata ostaje u domenu elastičnosti i bez oštećenja. Spreg za disipaciju energije trenjem ponaša se kao konstruktivni prigušivač kojim se kontroliše amplituda pomeranja i služi kao kontrolni uređaj za pojavu neprihvatljivih horizontalnih sila.

Karakteristike frikcionih površina su slične onima kao kod automobilskih kočnica, tako da se ostvaruje stabilna sila trenja i pri višecikličnim primenama. Pored toga spregovi su spremni da prime i opterećenja od narednih zemljotresa. Histerezisne petlje ponašanja frikcionih površina su oblika skoro pravilnog pravougaonika sa velikom sposobnošću apsorpcije energije (Slika 5.5 [6]), značajno većom u odnosu na duktilne elemente koji disipiraju energiju pri plastifikaciji zglobova.

Čvor u kojem se nalaze frikционе površine i koji je namenjen za proklizavanje može se primeniti kako pri sili zatezanja tako i pri sili pritiska (Slika 5.6a). Pri tome treba štapove sprega dimenzionisati tako da spreči pojava izvijanja pre nego što dođe do proklizavanja. Međutim, elementi sprega se obično projektuju da budu vitkiji, odnosno dimenzionišu se samo na sile zatezanja, tako da se efekat proklizavanja pojavljuje samo pri silama zatezanja. U sledećem ciklusu opterećivanja, takođe pri zatezanju, do proklizavanja će doći tek kada pomeranje postane veće od pomeranja dostignutog u prethodnom ciklusu (Slika 5.6b). Takvo ponašanje sprega ima za posledicu relativno malu energiju apsorpcije. Ovaj nedostatak može se prevazići formiranjem posebnog mehanizma kod čvora ukrštanja dijagonala sprega (Slika 5.7). Kada se u jednoj dijagonali sprega dostigne sila zatezanja koja izaziva proklizavanje, aktiviraju se četiri spone koje izazivaju istovremeno proklizavanje i u drugoj dijagonali sprega. Na taj način dolazi do disipacije energije u svakom poluciklusu opterećenja u obe dijagonale sprega istovremeno, a pored toga mehanizam postavlja spreg u položaj u kojem je moguća disipacija energije trenjem i pri novim opterećivanjima sistema. Model histerezisnog ponašanja sprega sa ovakvim mehanizmom prikazan je na Slici 5.6c. Pored ovog postoje i drugi različiti oblici konstruktivnih rešenja frikcionih spregova ili frikcionih sistema [11], od kojih je najčešći K-spreg.

Spregovi se projektuju tako da ne dolazi do proklizavanja (trenja) usled eksploatacionog opterećenja, umerenog opterećenja vetra i zemljotresa. Efekat trenja je aktivan tek pri



Slika 5.7: Konstruktivno rešenje sprega sa trenjem

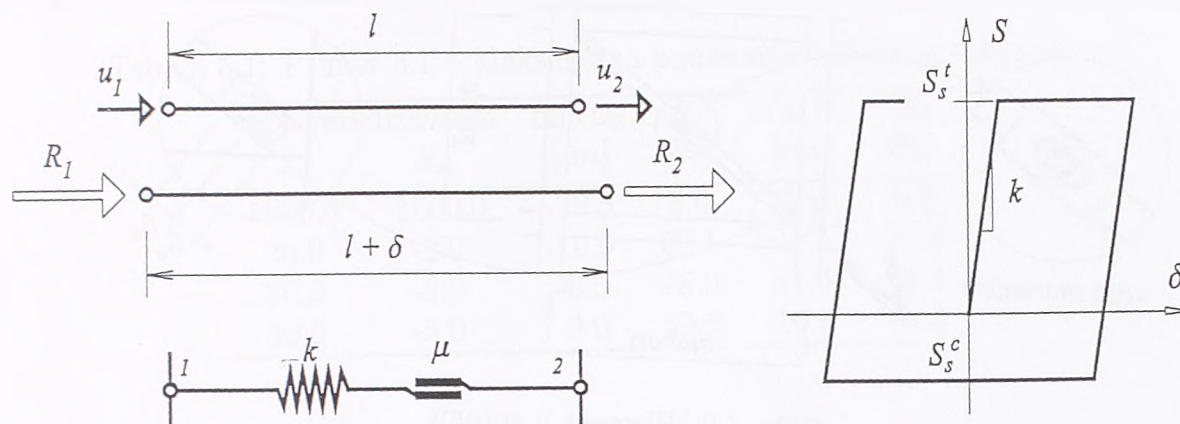
jačem horizontalnom opterećenju, pre nego što dođe do pojave plastifikacije u gredama. Kako jedan spreg prima ograničenu silu, dolazi do preraspodele horizontalne sile tako da se aktiviraju svi frikcionni spregovi po visini rama. Položaj frikcionnih spregova u ramu je obično u srednjem polju i po svim etažama rama, mada su moguće i druge varijante.

Seizmički odgovor sistema određen je iznosom veličine energije koja se apsorbuje frikcionim spregovima, a ona zavisi od nivoa sile trenja. Za svaku konstrukciju i njene dinamičke karakteristika treba odrediti optimalnu vrednost sile trenja, jer ako je ona mala tada će biti mala apsorpcija energija, a u protivnom ako je mnogo velika neće se aktivirati efekat trenja u frikcionim spregovima.

Kada je razlika unete i disipirane energije minimizirana može se smatrati da je odgovor sistema podešen (*tuned*) [12]. Baktash je pokazao da je spreg poseduje maksimalnu disipativnu sposobnost pri pseudostatičkim opterećenjem kada je povećanje bočne krutosti rama usled spregova jednako bočnoj krutosti rama bez spregova. Optimalne karakteristike sprega su funkcija dinamičkih karakteristika konstrukcije i pomeranja tla. Kako drugi parametar nije predefinisana veličina, primenom određenih aktivnih i poluaktivnih sistema moguće je menjati i optimizirati silu trenja i za vreme dejstva zemljotresa [14].

Na osnovu prethodno izloženog može se zaključiti da su osnovne osobine ramovske konstrukcije poboljšane frikcionim spregovima:

- Usled eksploatacionog opterećenja, uključujući umereni vetar i zemljotres, konstrukcija se ponaša kao ukrućen čelični ram;
- Konstrukcija može da disipira veliki deo seizmičke energije mehanički, preko trenja u specijalno konstruisanim spregovima. Značajnim smanjenjem maksimalnih amplituda i ubrzanja izbegava se tečenje u glavnim konstruktivnim elementima i oštećenja nekonstruktivnih elemenata čak i kod katastrofalnih zemljotresa;
- Ponašanje frikcionih spregova karakteriše se stabilnim punim histerezisnim petljama bez tendencije degradacije;
- U toku dejstva jačih zemljotresa povećava se fleksibilnost konstrukcije tako da dolazi



Slika 5.8: Element za modeliranje dijagonale frikcionog sprega

do redukcije seizmičkih sila;

- Pomoću frikcionih spregova može se kontrolisati odgovor konstrukcije, a optimalnim izborom sile trenja u spregovima i optimalnom krutošću sprega može se podesiti i željeni odgovor sistema;
- Frikcioni spregovi su relativno veoma jeftini elementi konstrukcije, bez posebne potrebe za održavanjem, pa su pogodni za ugradnju kako u nove tako i postojeće objekte u cilju podizanja nivoa seizmičke otpornosti. Spregovi sa trenjem su konstruisani od takvog materijala koji obezbeđuju efikasnost delovanja ne samo za vreme jednog zemljotresa već i za naredne.

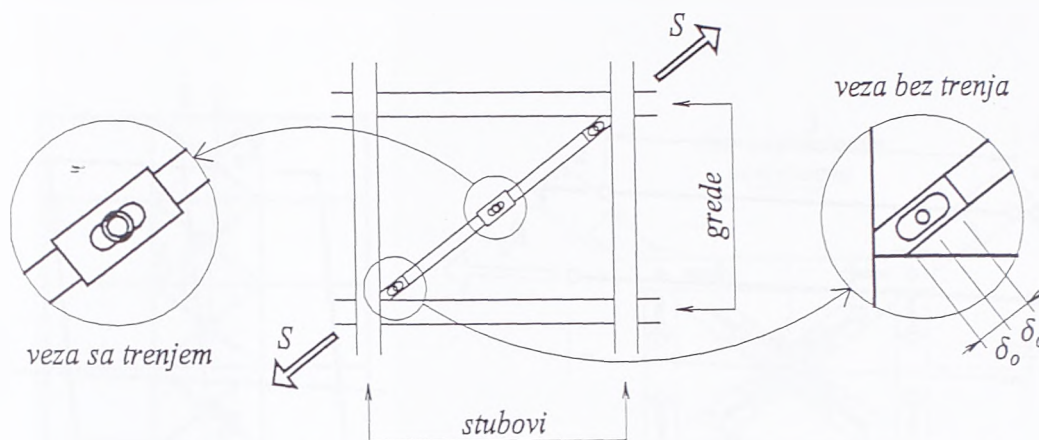
### 5.5.1 Numerički proračun ramova sa frikcionim spregovima

Nelinearni efekti koji se pojavljuju u frikcionim spregovima, prilikom vremenske integracije jednačina kretanja, mogu se tretirati kao dodatno opterećenje usled unutrašnjih sila [9]. Ovakav pristup je pogodan kada se cela konstrukcija, izuzev spregova, tretira kao linearni sistem, tako da se izbegava promena matrice sistema svaki put kad dođe do proklizavanja frikcionih površina. U radu nije primenjen ovaj princip, već su analize sprovedene pomoću posebnog konačnog elementa za modeliranje frikcionih dijagonala (Slika 5.8a).

Modeliranje frikcionih spregova može se relativno veoma jednostavno izvesti, ako se pretpostavi da je dijagonala sprega tako dimenzionisana da nema izvijanja pri pritisku i ako se zanemari međusobno sadejstvo dijagonala. Ponašanje spregova odgovara idealno elasto-plastičnom ponašanju prostog štapa, gde tečenje počinje pri sili proklizavanja  $S_{st}$  za slučaj zatezanja, odnosno sili  $S_{sc}$  za slučaj pritiska (Slika 5.8b). Jednačina kretanja može se napisati u obliku:

$$M\ddot{U} + (K_e + K_{fs})U = F \quad , \quad (5.1)$$

gde je izvršeno rastavljanje krutosti sistema na krutost  $K_e$  linijskih elemenata za koje se usvaja da se linearno elastično ponašaju i krutost frikcionih spregova  $K_{fs}$ . U toku proračuna i vremenske integracije jednačina samo matrica  $K_{fs}$  se može menjati u zavisnosti od toga u kojim je elementima spregova došlo do proklizavanja, dok sve ostale



Slika 5.9: Element u spregu

matrice  $M$ ,  $C$  i  $K_e$  ostaju konstantne. Na taj način nelinearna dinamička analiza je bitno efikasnija jer treba sprovesti ograničen broj dodatnih operacija u odnosu na običan linearan dinamički problem. U jednačini 5.1 ne pojavljuje se matrica prigušenja, jer se prigušenje (disipacija energije) ne ostvaruje viskozним prigušenjem, već značajnim histerezisnim prigučenjem, kao posledica nelinearnog ponašanja frikcionih spregova.

Kako bi se regulisalo aktiviranje frikcionog sprega samo pri izuzetnim seizmičkim opterećenjima, uvedena je veličina  $\delta_o$ . Tek kada je aksijalna deformacija dijagonale sprega veća od  $|\delta_o|$ , može se uzeti sadejstvo sprega u konstrukciji (Slika 5.9). Konstruisanjem ovalnih rupa u frikcionim spregovima suštinski je formiran jedan oblik hibridne kontrole ponašanja konstrukcije, jer se ovalna rupa ponaša kao senzor koji "uključuje" unutrašnje sile sistema.

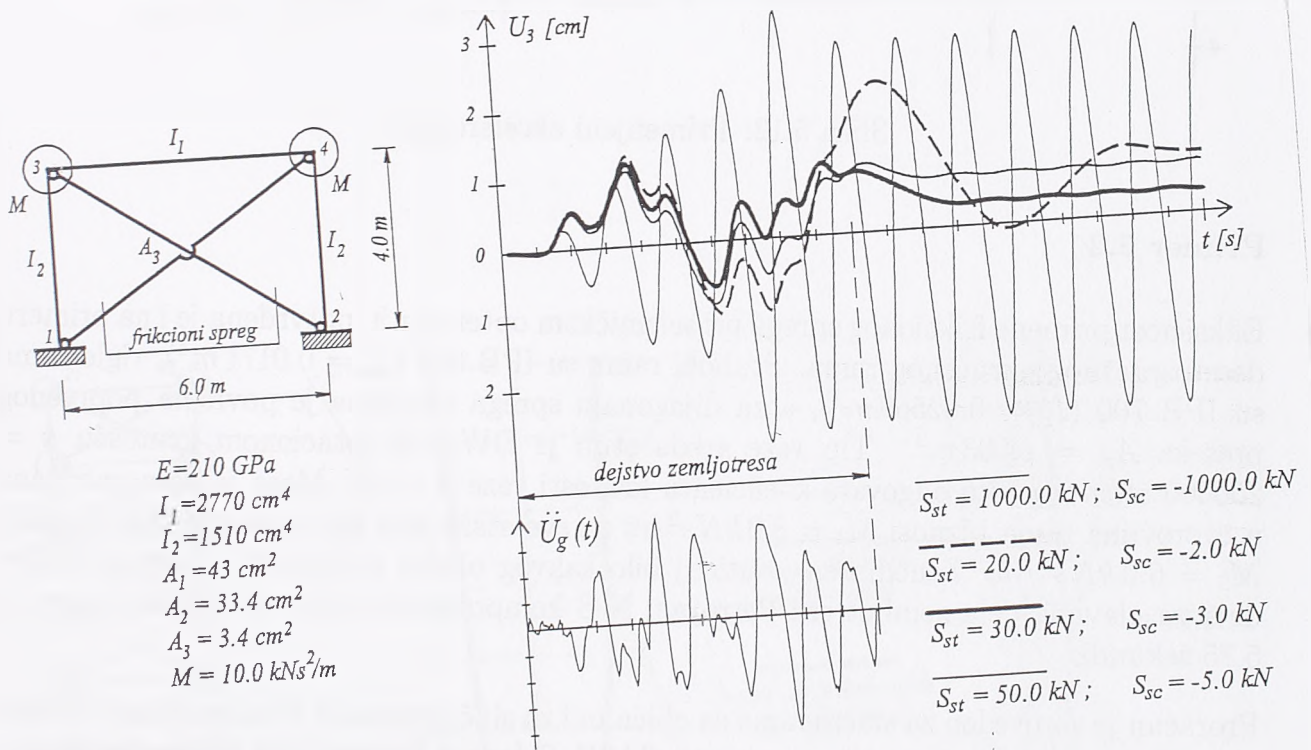
### Primer 5.1

Na primeru jednospratnog rama ilustrovana je primena frikcionog sprega (Slika 5.10). Ram je izložen dejstvu seizmičkog opterećenja, a odgovor sistema je razmatran preko istorije pomeranja čvora 3. Sprovedena je parametarska analiza za različite sile proklizavanja u dijagonalama frikcionog sprega. Rezultati proračuna prikazani su u Tabeli 5.1. Ako je sila proklizavanja velika (u primeru  $S_{st} = 1000 \text{ kN}$  i  $S_{sc} = -1000 \text{ kN}$ ), tako da za zadato opterećenje nikad ne dođe do proklizavanja, ram je ukrućen klasičnim spregom. U odnosu na takav ram analizirana je promena uticaja pri silama proklizavanja datim u tabeli. Primena frikcionog sprega je značajno smanjila pomeranja za sve vrednosti sila proklizavanja. To naročito izraženo za silu  $S_{st} = 30 \text{ kN}$ , kada redukcija pomeranja iznosi 78.0% odnosno 63.4% u odnosu na pomeranja rama sa običnim spregom. Izbor optimalne sile proklizavanja zavisi od dimenzija i karakteristika rama, krutosti dijagonale sprega i dinamičkog opterećenja. Histerezisna petlja ponašanja dijagonale sprega data je na Slici 5.11, a ona ilustruje veliku sposobnost disipacije energije.

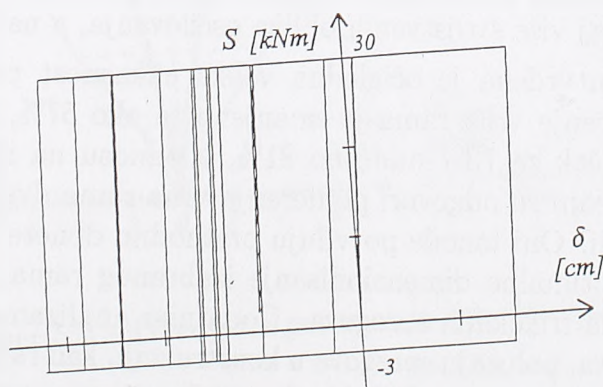


Tabela 5.1: Primer 5.1 – Maksimalna pomeranja i njihova redukcija

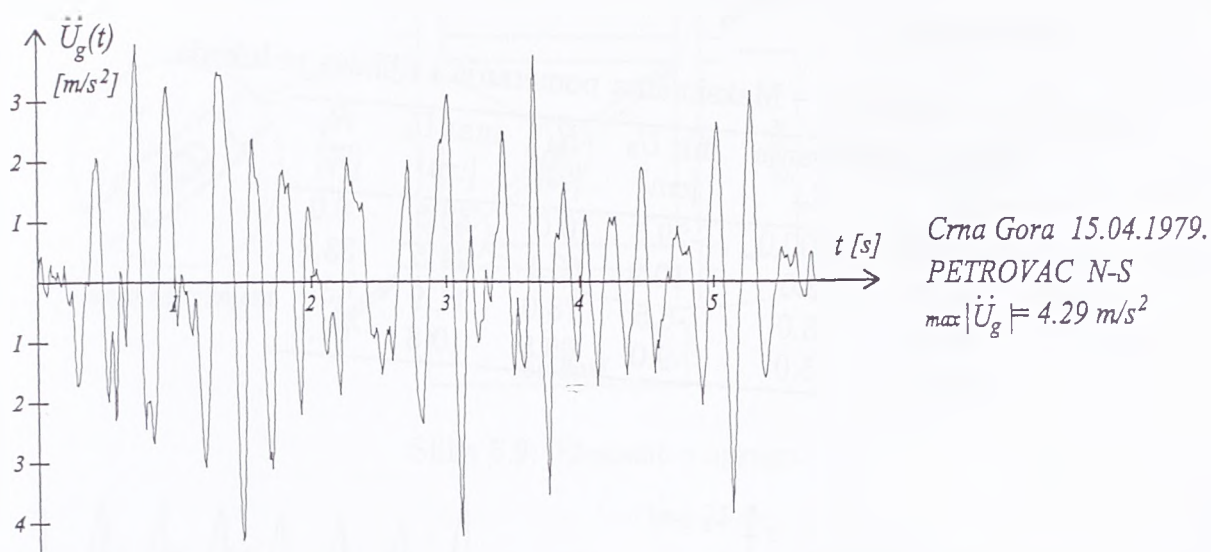
Sila proklizavanja		$\min U_3$	$R_1$	$\max U_3$	$R_2$
$S_{st}$	$S_{sc}$	[cm]	[%]	[cm]	[%]
1000.0	-1000.0	-29.5	0.0	32.5	0.0
20.0	-2.0	-10.9	63.1	21.5	33.8
30.0	-3.0	-6.5	78.0	11.9	63.4
50.0	-5.0	-9.0	69.5	10.8	66.8



Slika 5.10: Primer 5.1 – Jednospratni ram sa frikcionim spregom



Slika 5.11: Primer 5.1 – Histerezisna petlja  $S-\delta$  dijagonale frikcionog sprega



Slika 5.12: Primenjeni akcelerogram

### Primer 5.2

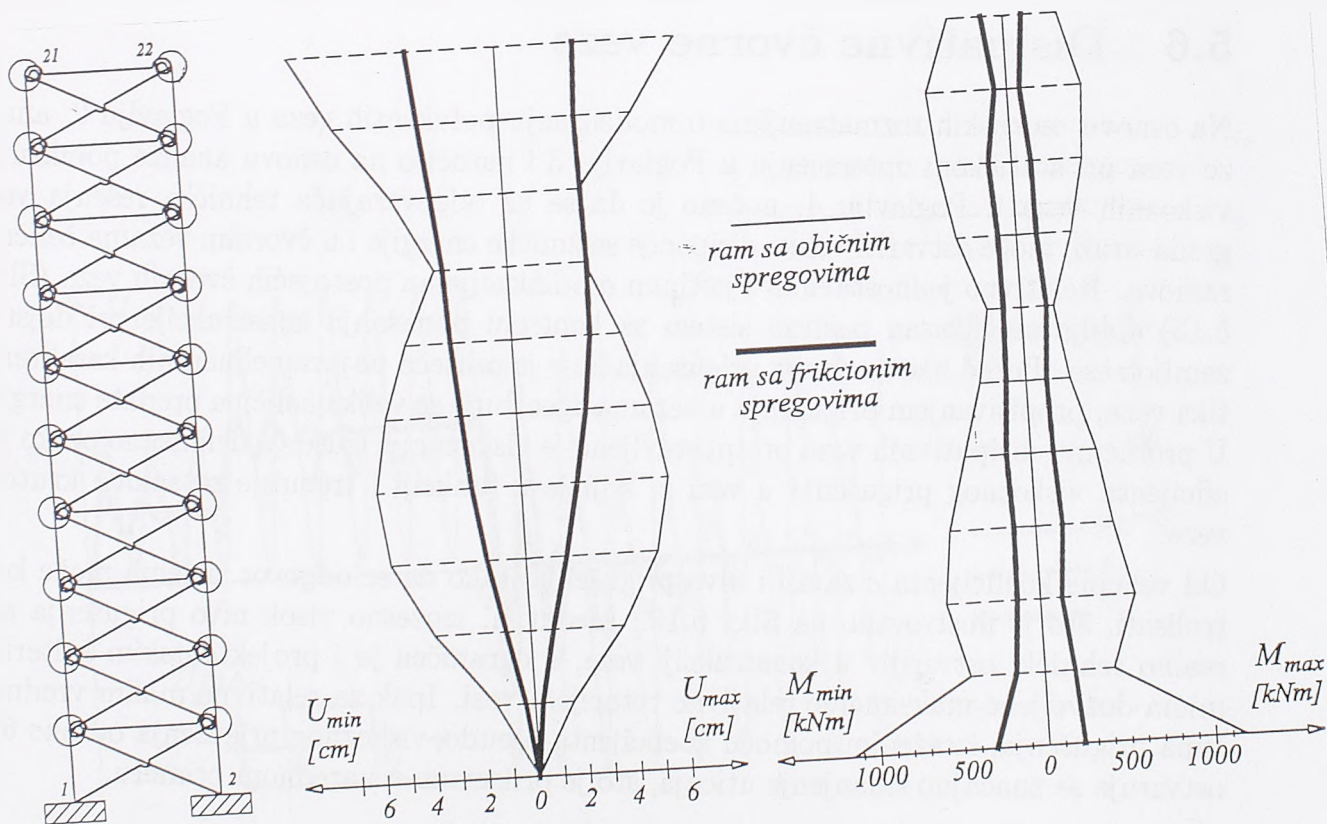
Efikasnost primene frikcionog sprega pri seizmičkom opterećenju potvrđena je i na primeru desetospratnog ukrućenog rama. Stubovi rama su IPB 600 ( $I_x = 0.0171 m^4$ ), rigle rama su IPB 700 ( $I_x = 0.02569 m^4$ ), a za dijagonalu sprega usvojena je površina poprečnog preseka  $A_x = 0.003 m^2$ . Tip veze greda stub je DWA sa rotacionom krutošću  $k = 200000 kNm/rad$  što odgovara koeficientu krutosti veze  $\gamma = 0.5$ . Masa je skoncentrisana u čvorovima rama i iznosi  $M_1 = 8.0 kNs^2/m$  za sve etaže sem za poslednju, gde je masa  $M_2 = 6.0 kNs^2/m$ . Zanemaren je uticaj bilo kakvog oblika prigušenja. Ram je izložen dejstvu glavnog dela zemljotresa Petrovac, N-S komponenta, (Slika 5.12) u trajanju od 5.75 sekundi.

Proračun je sproveden za slučaj rama sa običnim i za slučaj rama sa frikcionim spregovima pomoću razvijenog računarskog programa SASF. Odgovor konstrukcije je određen za vremenski period od 10 sekundi sa vremenskim korakom numeričke integracije  $\Delta t = 0.01 s$ . Na osnovu dobijenih rezultata nacrtane su obvojnice spratnih pomeranja i momenata savijanja u stubovima koje su prikazane na Slici 5.13. U odgovoru spratnih pomeranja rama može se uočiti uticaj više svojstvenih oblika oscilovanja, a naročito prvog i trećeg tona.

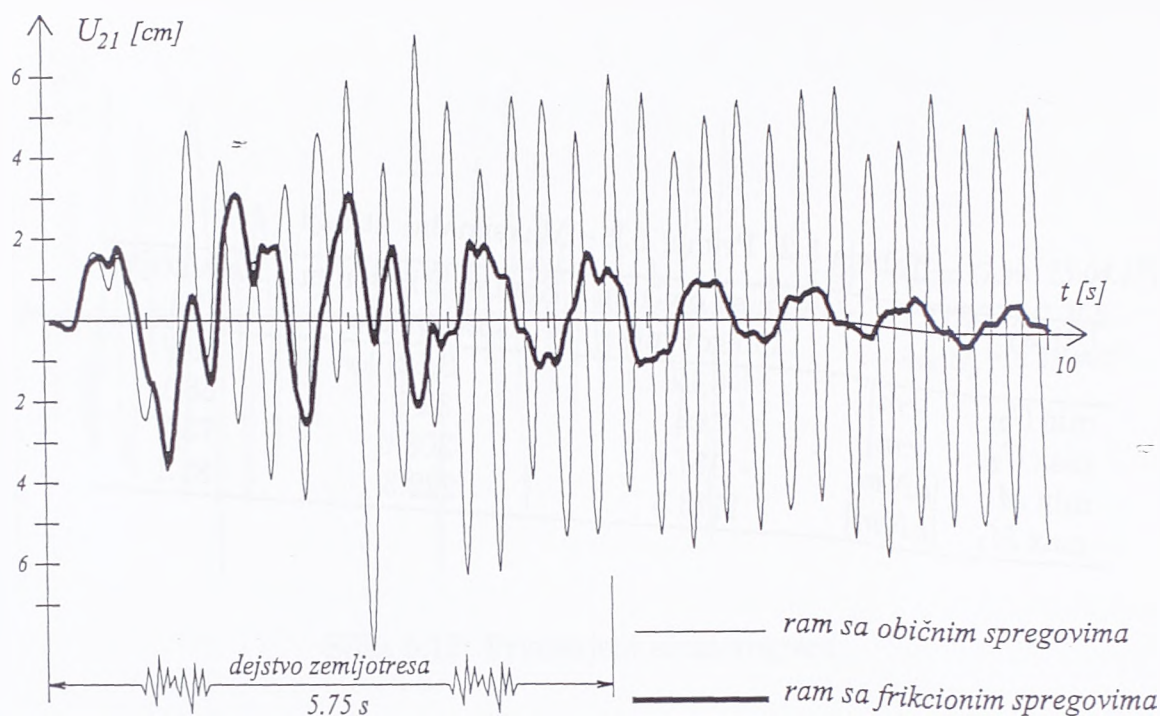
Analize rezultata utvrđena je očigledna velika efikasnost primene frikcionih spregova. Maksimalno pomeranje vrha rama je smanjeno za oko 57%, a ekstremne vrednosti momenta uklještenja čak za 73% odnosno 81%, u odnosu na ram sa običnim spregovima. Na Slici 5.14 prikazani su odgovori pomeranja vrha rama dva tipa ukrućenja rama u trajanju od 10 sekundi. Oni takođe potvrđuju prethodno donete zaključke. U ovom primeru nije razmatrano optimalno dimenzionisanje izabranog rama, kako stubova i rigli tako i dodatnih dijagonala frikcionih spregova. Dodatnim analizama, zasnovanim na različitim presecima elemenata, položaju spregova u konstrukciji, kao i silama proklizavanja u dijagonalama, može se doći do optimalnih karakteristika rama za prethodno utvrđen kriterijum za koji se želi da se sprovede optimizacija.

Tabela 5.2: Primer 5.2 – Maksimalni uticaji

Uticaj		Ram sa obicnim spregovima	Ram sa frikcionim spregovima	Redukcija [%]
$\min U_{21}$	[cm]	-8.12	3.52	56.7
$\max U_{21}$	[cm]	7.04	3.09	56.1
$\min M_1$	[kNm]	-1157.9	-308.6	73.3
$\max M_1$	[kNm]	1173.5	222.3	81.1



Slika 5.13: Primer 5.2 – Obvojnice pomeranja i momenata po spratovima



Slika 5.14: Primer 5.2 – Pomeranje vrha rama za dva tipa rama

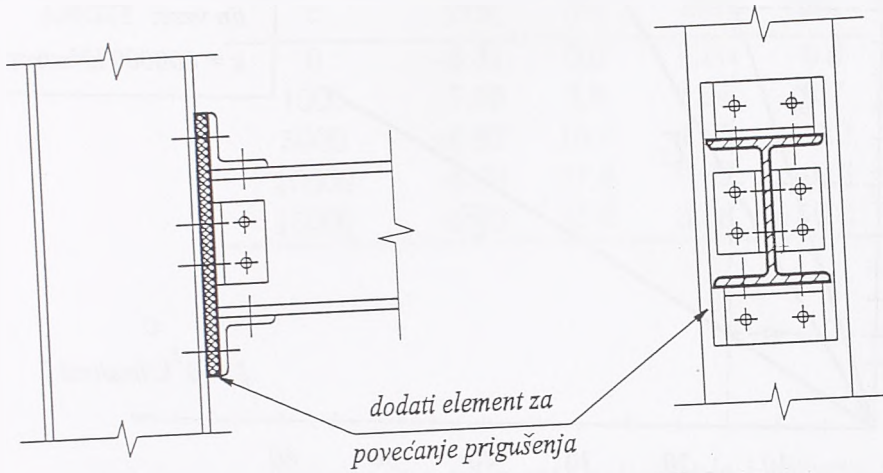
## 5.6 Disipativne čvorne veze

Na osnovu teorijskih razmatranjima o modeliranju polukrutih veza u Poglavlju 2, analize veza pri statičkom opterećenju u Poglavlju 3 i naročito na osnovu analize polukrutih viskoznih veza u Poglavlju 4, uočeno je da se uz odgovarajuća tehnička rešenja veza greda–stub, može ostvariti velika disipacije seizmičke energije i u čvornim vezama čeličnih ramova. Relativno jednostavnim i jeftinim modifikacijama postojećih čvornih veza (Slika 5.15) dobija se efikasan pasivan sistem za kontrolu ponašanja konstrukcije pri dejstvu zemljotresa. Pored histerezisnog prigušenja koje je prateća pojava nelinearnih karakteristika veza, propisivanjem prigušenja u vezama apsorbuje se velika količina predate energije. U proračunu disipativnih veza pretpostavljeno je viskozno prigušenje definisano preko koeficijenta viskoznog prigušenja u vezi  $c$ , koji je u funkciji i trenutne rotacione krutosti veze.

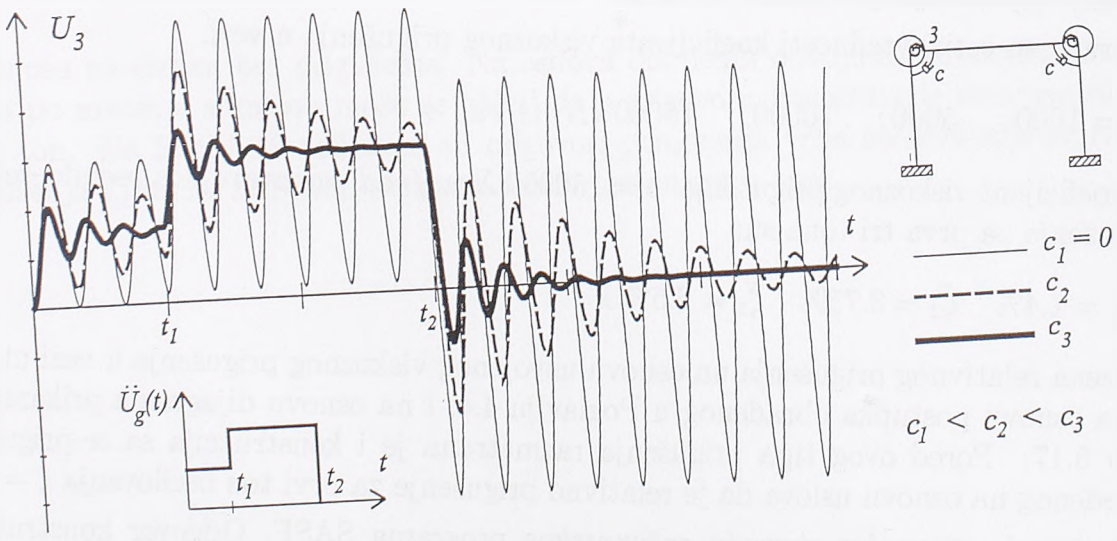
Od veličine koeficijenta  $c$  zavisi i nivo prigušenja, tako da se odgovor sistema može kontrolisati, što je ilustrovano na Slici 5.16. Međutim, izuzetno visok nivo prigušenja nije realno tehnički ostvarljiv u konstrukciji veze, a ograničen je i projektantskim kriterijumima dozvoljene maksimalne relativne rotacije u vezi. Ipak za relativno malim vrednostima prigušenja, izraženim pomoću koeficijenta pseudo-viskoznog prigušenja od oko 6%, ostvaruje se značajno smanjenje uticaja, što je prikazano u narednom primeru.

### Primer 5.3

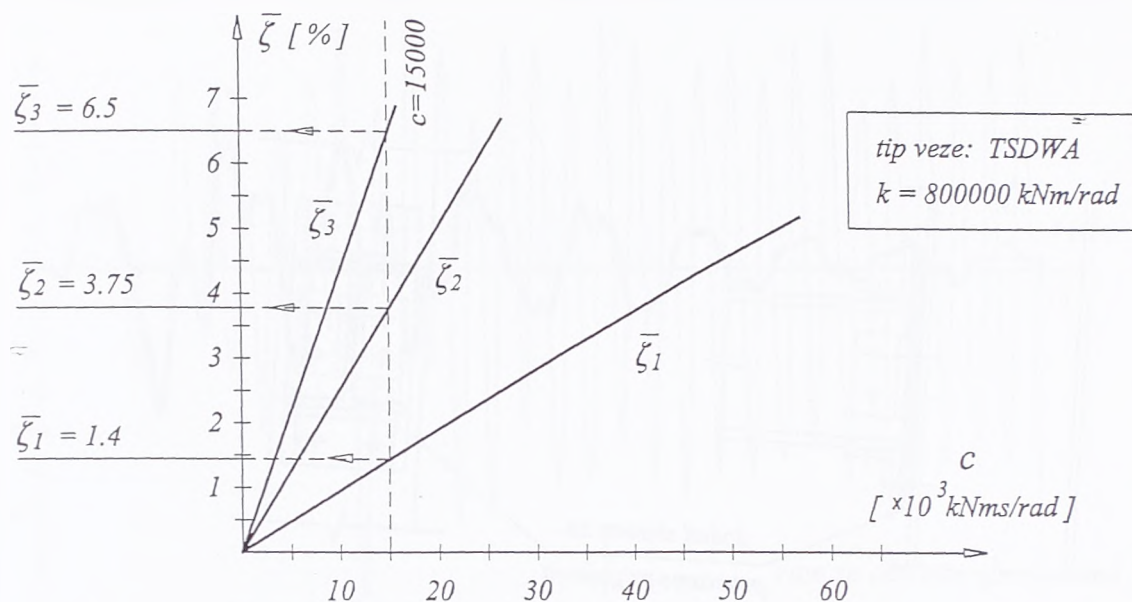
U čeličnom ramu sa deset etaža usvojene su polukrute i viskozne čvorne veze. Karakteristike stubova i greda su kao u Primeru 5.2. Stubovi rama su IPB 600 ( $I_x = 0.0171 m^4$ ), a rigle rama su IPB 700 ( $I_x = 0.02569 m^4$ ). Tip veze greda stub je TSDWA sa rotacionom



Slika 5.15: Modifikacija standardne veze



Slika 5.16: Kontrola odgovora pomoću disipativnih čvornih veza



Slika 5.17: Određivanje pseudo-relativnog prigušenja za prva tri tona

krutošću  $k = 800000 \text{ kNm/rad}$  što odgovara koeficientu krutosti veze  $\gamma = 0.8$ . Masa je skoncentrisana u čvorovima rama, i iznosi  $M_1 = 8.0 \text{ kNs}^2/\text{m}$  na svim etažama sem na poslednjoj gde je masa  $M_2 = 6.0 \text{ kNs}^2/\text{m}$ . Za usvojenu krutost i masu rama odgovarajući periodi oscilovanja prva tri tona su:

$$\bar{T}_1 = 1.07 \text{ s} \quad \bar{T}_2 = 0.34 \text{ s} \quad \bar{T}_3 = 0.18 \text{ s} \quad .$$

Za seizmičko opterećenje usvojen je glavni deo zemljotresa Petrovac, N-S komponenta (Slika 5.12) u trajanju od 5.75 sekundi.

Izabrane su četiri vrednosti koeficijenta viskoznog prigušenja u vezi:

$$c = 1000; \quad 5000; \quad 10000; \quad 15000 \text{ kNms/rad} \quad .$$

Za koeficijent viskoznog prigušenja  $c = 15000 \text{ kNms/rad}$  odgovarajuća pseudo-relativna prigušenja za prva tri tona su:

$$\bar{\zeta}_1 = 1.4\% \quad \bar{\zeta}_2 = 3.75\% \quad \bar{\zeta}_3 = 6.5\% \quad .$$

Procena relativnog prigušenja na osnovu usvojenog viskoznog prigušenja u vezi utvrđena je na osnovu postupka obrađenog u Poglavlju 4.4, i na osnovu dijagrama prikazanog na Slici 5.17. Pored ovog tipa prigušenja razmatrana je i konstrukcija sa  $\alpha$ -prigušenjem određenog na osnovu uslova da je relativno prigušenje za prvi ton oscilovanja  $\zeta = 0.01$ .

Proračun je sproveden pomoću računarskog programa SASF. Odgovor konstrukcije je određen za vremenski period od 10 sekundi sa vremenskim korakom numeričke integracije  $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ . Obvojnice spratnih pomeranja i momenata savijanja u stubovima prikazane su na Slici 5.18. Primenom disipativnih čvornih veza, za prigušenje koje je realno ostvarljivo u vezi, ekstremna pomeranja vrha rama je smanjena su za 36% i 50% (Tabela 5.3), a ekstremne vrednosti momenta uklještenja čak za 60% odnosno 66% (Tabela 5.4),

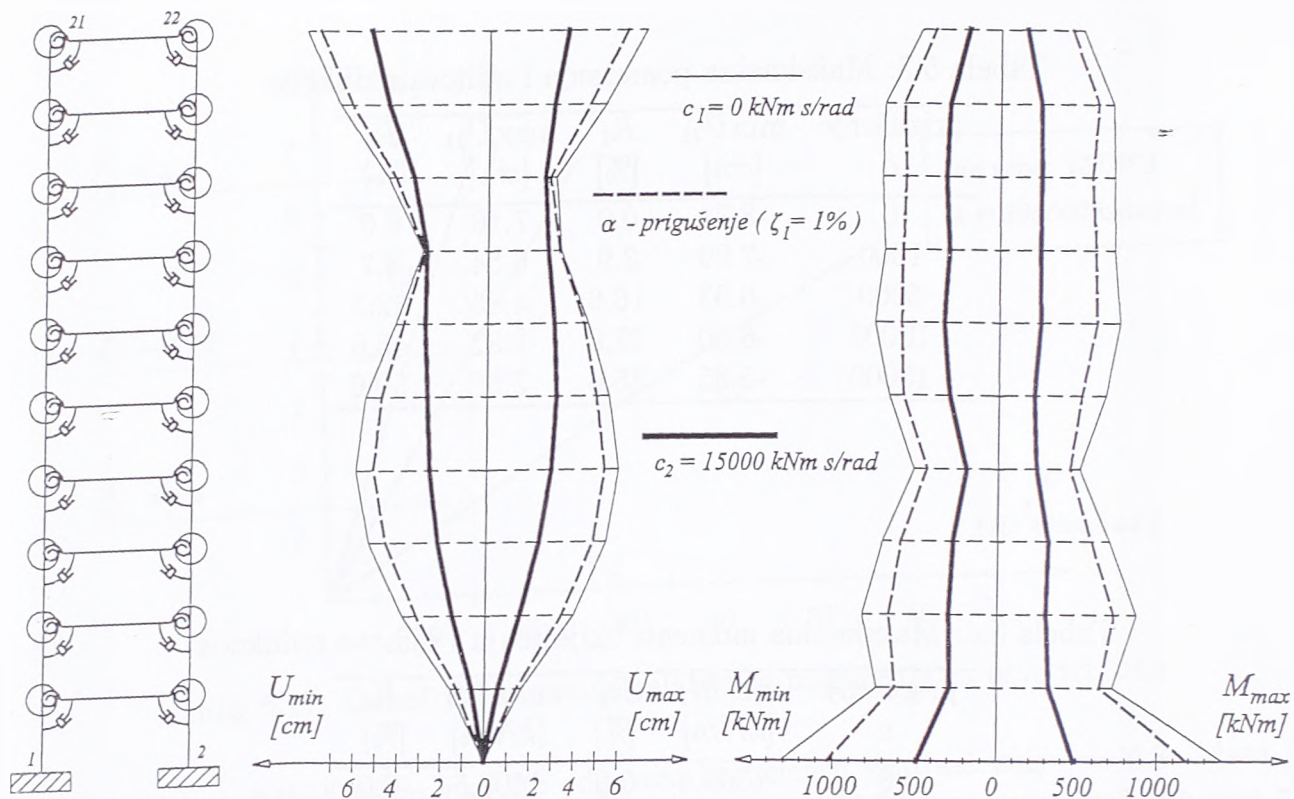
Tabela 5.3: Maksimalna pomeranja i njihova redukcija

prigušenje $c$	$\min U_{21}$ [cm]	$R_1$ [%]	$\max U_{21}$ [cm]	$R_2$ [%]
0	-8.31	0.0	7.16	0.0
1000	-7.99	3.9	6.54	8.7
5000	-6.93	16.6	4.85	32.3
10000	-6.00	27.8	3.82	46.6
15000	-5.35	35.6	3.58	50.0

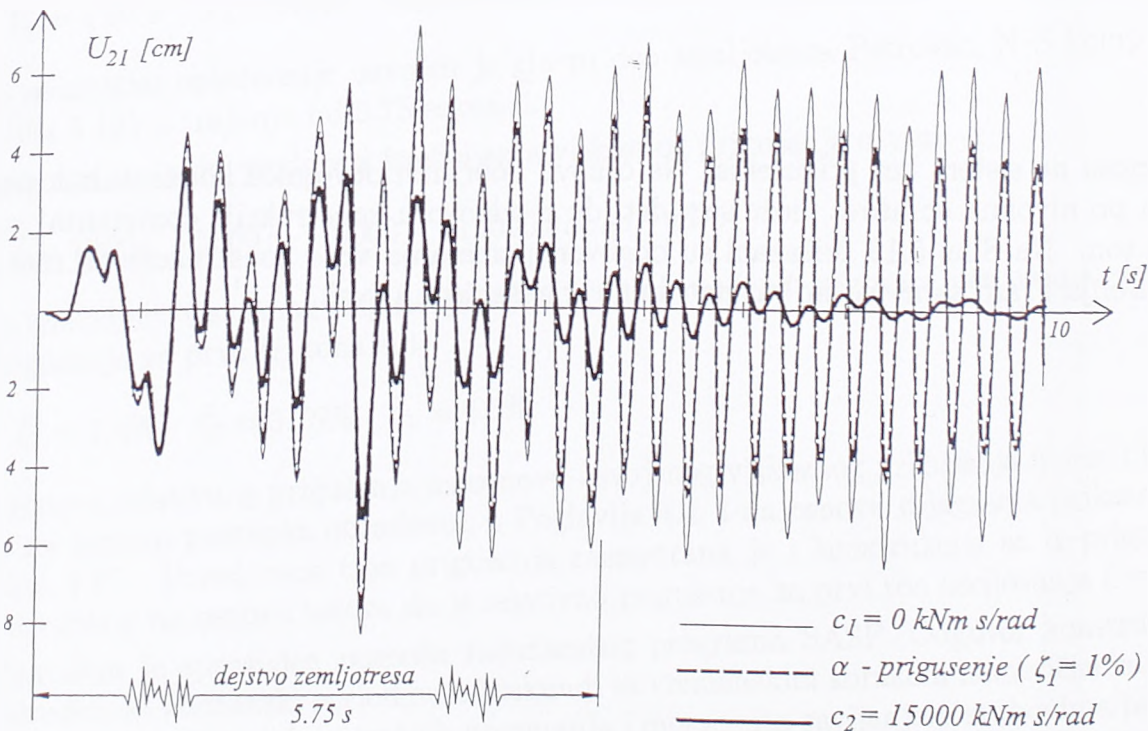
Tabela 5.4: Maksimalna momenti uklještenja i njihova redukcija

prigušenje $c$	$\min M_1$ [kNm]	$R_1$ [%]	$\max M_1$ [kNm]	$R_2$ [%]
0	-1309.4	0.0	1408.5	0.0
1000	-1017.4	22.3	1173.7	16.7
5000	-773.8	40.9	795.3	43.5
10000	-601.8	54.1	561.9	60.1
15000	-484.3	63.1	480.5	65.9

u odnosu na sistem bez prigušenja. Na osnovu dobijenih obvojnica horizontalnih pomeranja po nivoima spratova može se videti da u odgovoru konstrukcije dominantni prvi i treći ton. Na Slici 5.19 prikazani su odgovori pomeranja vrha konstrukcije za ram bez prigušenja i ram sa najvećim razmatranim prigušenjem u vezi.



Slika 5.18: Primer 5.3 – Obvojnice pomeranja i momenata po spratovima



Slika 5.19: Primer 5.3 – Pomeranje vrha rama za različita prigušenja



## Literatura

- [1] Iemura H., Development in Passive Structural Control in Japan, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 2115, Mexico 1996.
- [2] Chopra A.K., Dynamics of structures, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [3] Abdel-Rohman M. and Leipholz H. H. E., A General Approach to Active Structural Control, Structural Control, (ed. Leipholz H.H.E.), Proceedings of the International IUTAM Symposium on Structural Control held at the University of Waterloo, Ontario, Canada, 1979.
- [4] Soong T. T. and Spencer, Jr. B. F., Active, Semi-Active and Hybrid Control of Structures, Twelfth World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 2834, New Zealand 2000.
- [5] Soong T. T. and Manolis, G. D., Active Structures, Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 11, pp. 2290–2301, 1987.
- [6] Pall A. S. and Marsh C. Response of Friction Damped Braced Frames, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 108, No. ST6, pp. 1313–1323, 1982.
- [7] Pall A. S. and Pall R., Friction-Dampers for Seismic Control of Buildings "A Canadian Experience", Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 497, Mexico 1996.
- [8] Pekau O. A. and Guimond R., Controlling Seismic Response of Eccentric Structures by Friction Dampers, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 20, pp. 505–521, 1991.
- [9] Adam C. and Ziegler F., Dynamic Response of Substructures in Friction Damped Braced Frames, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 256, Mexico 1996.
- [10] Angelis M. De. and Paolacci F., On the Passive Control of the Seismic Response of Eccentric Structures by Using Dissipative Bracings, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 1550, Mexico 1996.
- [11] Martinez-Rueda J. E., Incorporation of Hysteretic Devices on Bracing Systems of Low Invasivity: A New Approach for the Seismic Redesign of Framed Structures, Twelfth World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 2147, New Zealand 2000.
- [12] Filiatrult A. and Cherry S., Comparative Performance of Friction Systems and Base Isolation Systems for Earthquake Retrofit and Seismic Design, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 16, No. 3, pp. 389–416, 1988.
- [13] Butterworth J. J. and Clifton C. G. C., Performance of Hierarchical Friction Dissipating Joints in Moment Resisting Steel Frames, Twelfth World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 718, New Zealand 2000.

- [14] Dowdell D. J. and Cherry S., On Passive and Semi-Active Friction damping for Seismic Response Control of Structures, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 957, Mexico 1996.
- [15] Filiatrult A. and Cherry S., Seismic Design Spectra for Friction-Damped Structures, Journal of Structural Engineering, Vol. 116, No.5 pp. 1334-1355, 1990.

# Računarski program SASF - Seismic Analysis of Steel Frames

---

## 6.1 Uvod

Nelinearni dinamički proračuni, koji su danas sve češće neophodna dopuna standardnim konvencionalnim proračunima i koji su propisima većeg broja zemalja preporučeni, ne mogu se zamisliti bez primene računara i računarskih programa. Prvi računarski programi za nelinearnu analizu konstrukcija zasnivali su se na elementarnim ili malo složenijim kriterijumima plastičnosti i mehanizmima koji nastaju usled formiranja plastifikovanih zglobova. Kasniji programi su se užurbano razvijali, tako da današnji programi daju mogućnost rešavanja veoma različitih i komplikovanih nelinearnih problema. Fantastičnim razvojem računarskih resursa stvorile su se mogućnosti za nastanak kompleksnih programa za nelinearnu analizu konstrukcija. Međutim, obuhvatanjem više nelinearnosti i angažovanjem velikog broja neizbežnih, a nesigurnih parametara, nije se mnogo dobilo na efikasnosti i tačnosti proračuna.

U okviru ovog rada razvijen je i računarski program SASF (*Seismic Analysis of Steel Frames*), namenjen za statičku i seizmičku (dinamičku) analizu ravnih čeličnih ramova sa polukrutim, ekscentričnim i viskoznim vezama. Cilj razvoja programa nije bila direktna komercijalna primena, već definisanje savremenih efikasnih algoritama i numeričkih postupaka koji se mogu jednostavno implementirati u aktuelne komercijalne softvere. Pored toga, pomoću razvijenog računarskog programa provereni su predloženi postupci proračuna i sprovedena je neophodna parametarska analiza za problem koji se rešava. Svi analitički razvijeni postupci za proračun, koji su primenjeni u programu, osmišljeni su tako da rešenja budu što jednostavnija, primenljiva kako u novim tako i u postojećim komercijalnim programskim paketima namenjenim za seizmičku analizu ramovskih konstrukcija. U nelinearnoj analizi, broj neophodnih parametara je maksimalno minimiziran, pri čemu je njihov izbor sproveden na osnovu pouzdanosti podataka. Iako je proračunom potrebno sprovesti veliki broj koraka i iteracija, u povećanom obimu posla se ne gubi na tačnosti i stabilnosti rezultata, a povećan broj operacija više ne predstavlja poseban problem za moćne računare.

Računarski program se zasniva se na konceptu Metode konačnih elemenata. Pretpostavlja se da se konstrukcija može idealizovati skupom diskretnih linijskih elemenata koji predstavljaju grede i stubove ramovske konstrukcije. Elementi su povezani čvorovima, u kojima su definisane osnovne nepoznate sistema, a to su pomeranja čvora. Za usvojenu analizu nosača u ravni nepoznate veličine su dve translacije i jedna rotacija čvora. Masa sistema se koncentriše u čvorovima, bilo preko konzistentne matrice masa ili preko direktne

koncentracije mase u čvorovima.

Dinamički odgovor sistema na seizmičku pobudu dobija se numeričkom integracijom "korak po korak", a sekantna matrica krutosti elementa određuje se inkrementalno-iterativno u svakom koraku vremenske integracije. Posebnim programom moguće je na osnovu matrica krutosti, masa i prigušenja odrediti frekventne karakteristike sistema. Efekti geometrijske nelinearnosti mogu se razmatrati po teoriji drugog reda sa konstantnom ili promenljivom aksijalnom silom u elementu za vreme dejstva dinamičkog opterećenja.

## 6.2 Osnovne karakteristike programa

- Program je namenjen za proračun ravnih čeličnih ramova sa polukrutim, ekscentričnim i viskoznim vezama za slučaj statičkog i seizmičkog opterećenja.
- Računarski program se zasniva se široko prihvaćenim i poznatim postupcima Metode konačnih elemenata. Pretpostavlja se da se ramovska konstrukcija se može predstaviti linijskim konačnim elemenata (grede i stubovi) povezanim u čvorovima. Osnovne nepoznate su pomeranja čvora. Za usvojenu analizu nosača u ravni to su dve translacije i jedna rotacija čvora, odnosno tri stepena slobode u jednom čvoru. Svaki stepen slobode moguće je sprečiti, tj. dodeliti mu nultu vrednost.
- Polukruta veza može se tretirati kao linearna i nelinearna. Ako je u pitanju nelinearno ponašanje potrebno je definisati parametre na osnovu modela tri paametarske krive.
- Masa sistema je skoncentrisana u čvorovima, bilo preko konzistentne matrice masa ili preko direktne koncentracije mase u čvorovima.
- Moguće je usvojiti dva tipa prigušenja: globalno i u polukrutim vezama. Globalno se zadaje preko parametara  $\alpha$  i  $\beta$ , a viskozno u vezama preko koeficijenta  $c$ .
- Pretpostavlja se da je statičko opterećenje naneto na konstrukciju pre dejstva seizmičkog opterećenja, pri čemu ono mora biti manje od kritičnog. Seizmičko opterećenje se zadaje preko akceleroograma.
- Za numeričku integraciju "korak po korak" izabran je Newmark-ov postupak sa konstantnim ubrzanjem u okviru vremenskog koraka. Sekantna matrica krutosti elementa određuje se inkrementalno-iterativno u svakom koraku vremenske integracije.
- Na osnovu matrica krutosti, masa i prigušenja za linearnu polukrutu vezu mogu se odrediti frekventne karakteristike i oblici oscilovanja sistema.
- Efekti geometrijske nelinearnosti mogu se razmatrati sa konstantnom ili promenljivom aksijalnom silom u elementu. Matrica krutosti u teoriji drugog reda može biti geometrijska ili alternativna. Ako je opterećenje veće od opterećenja koje izaziva lokalno ili globalno izvijanje, proračun se prekida i dobija se poruka o vrsti nestabilnosti.
- Konstrukcija može da ima sistem za disipaciju energije u vidu frikcionih spregova.

## 6.3 Ulazni podaci za program

- TITLE ◀ ▶
- 
- ProblemTitle ... description of the problem to be solved
- TYPE OF ANALYSIS ◀ ▶
- 
- TypeOfAnalysis ... type of analysis
    - 1 ... static analysis
    - 2 ... dynamic analysis
  - TypeOfGeomAnalysis ... type of geometrical analysis
    - 1 ... linear theory
    - 2 ... second order theory, geometrical stiffness matrix
    - 3 ... second order theory, alternative stiffness matrix
  - TypeOfSpring ... type of spring analysis
    - 1 ... linear spring
    - 2 ... nonlinear spring
- PARAMETERS FOR SECOND ORDER THEORY ◀ if TypeOfGeomAnalysis>1 ▶
- 
- FindCriticalLoad ... indicator of buckling analysis
    - 0 ... second order analysis
    - 1 ... critical load analysis
  - BowingEffect ... indicator of analysis with bowing effect
    - 0 ... analysis with bowing effect
    - 1 ... analysis without bowing effect
  - TypeOfPDelta ... type of P-Delta analysis
    - 0 ... aproximative P-Delta analysis
    - 1 ... exact P-Delta analysis
- PARAMETERS FOR INCREMENTAL PROCESS ◀ if TypeOfSpring=2 ▶
- 
- ninc ... number of load inkrements
  - DisTolerance ... relative displacement tolerance
- SYSTEM CONTROL VARIABLES ◀ ▶
- 
- njts ... number of joints
  - nmem ... number of members
  - nsupp ... number of supports
  - ntyp ... number of different element properties
  - njload ... number of joint loads
  - neload ... number of element loads
  - nBrace ... number of brace elements
  - njload ... number of different brace types
- GLOBAL PARAMETERS FOR DYNAMIC ANALYSIS ◀ if TypeOfSpring=2 ▶
- 
- nstep ... number of time steps for dynamic load integration
  - nstepS ... number of time steps for static load integration

- dt ... time step
- MassScaleFactor ... scale factor for mass to be divided
- GAccScaleFactor ... scale factor for ground acceleration to be multiply

GLOBAL DAMPING PARAMETERS ◀ if TypeOfSpring=2 ▶

---

- alpha ... mass proportional damping
- beta ... tangent stiffness proportiona damping

GROUND ACCELERATION ◀ if TypeOfSpring=2 ▶

---

- GAccFile ... file name with ground acceleration data

DYNAMIC CONTROL VARIABLES ◀ if TypeOfAnalysis=2 ▶

---

- njmass ... number of joints with lumped masses
- njxth ... number of joints for X displacement time history
- njyth ... number of joints for Y displacement time history
- njrth ... number of joints for rotation time history

JOINT COORDINATES ( njts - for each joint ) ◀ ▶

---

- k ... joint identification number
- Xj ... X global coordinate
- Yj ... Y global coordinate

SYSTEM RESTAINS ( nsupp - for each restrained joint ) ◀ ▶

---

- k ... joint identification number
- RDOF[1] ... X translation restrain code
- RDOF[2] ... Y translation restrain code
- RDOF[3] ... Z rotation restrain code
- code = 1 ... restrain degree of freedom
- code = 0 ... not restrain degree of freedom

ELEMENT TYPES ( ntyp - for each type of element section property ) ◀ ▶

---

- k ... identification number
- E ... modulus of elasticity
- A ... section area
- Iner ... moment of inertia
- mu ... mass per unit lenght

ELEMENTS ( nmem - for each element ) ◀ ▶

---

- k ... element identification number
- FirstNode ... first node number
- SecondNode ... second node number
- MaterialType ... identification number of section property
- e1 ... eccentricity at first node
- e2 ... eccentricity at second node
- m1 ... stiffness of elastic spring at the first node

- m2 ... stiffness of elastic spring at the second node
  - negative ... connection is rigid
- tspring1 ... type of semirigid connection at the first node
- tspring2 ... type of semirigid connection at the second node
  - 0 ... linear relationship  $M-\theta$
  - 1 ... connection type TSDWA
  - 2 ... connection type DWA
- c1 ... viscous damping in semirigid connection at first node
- c2 ... viscous damping in semirigid connection at second node

BRACE TYPES ( ntyp - for each type of element section property [if nBrace>0] ) ▷

---

- k ... identification number
- E ... modulus of elasticity
- A ... section area
- Sst ... slip force due to tension
- Ssc ... slip force due to compression

BRACE ELEMENTS ( nBrace - for each element ) ◁ [if nBrace>0] ▷

---

- k ... element identification number
- FirstNode ... first node number
- SecondNode ... second node number
- MaterialType ... identification number of section property
- gap ... activation gap in brace
- pcode ... printing indicator

JOINT LOADS ( njload - for each joint with load ) ◁ ▷

---

- k ... joint number
- F[1] ... force in the global X direction
- F[2] ... force in the global Y direction
- F[3] ... moment about the global Z axis

ELEMENT LOADS ( neload - for each element with load ) ◁ ▷

---

- k ... member number
- memLoad ... uniform loading in the local -Y direction

JOINT LUMPED MASS ( nmass - for each joint with mass ) [if TypeOfAnalysis=2] ▷

---

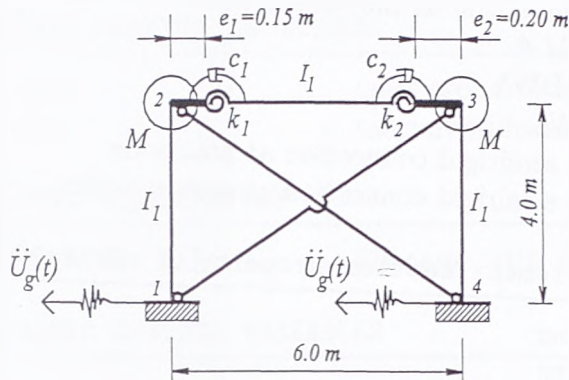
- k ... joint number
- JMass[1] ... mass associated with X displacement
- JMass[2] ... mass associated with Y displacement
- JMass[3] ... rotary inertia

TIME HISTORY ◁ if TypeOfAnalysis=2 ▷

---

- THX ... list of joint numbers for x displacement time history
- THY ... list of joint numbers for y displacement time history
- THR ... list of joint numbers for rotation time history

## 6.4 Primer



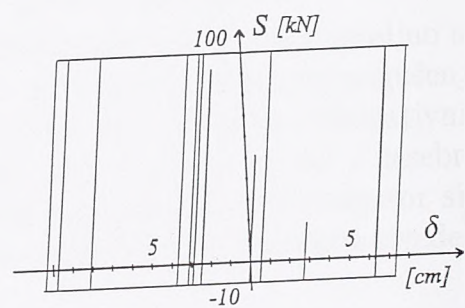
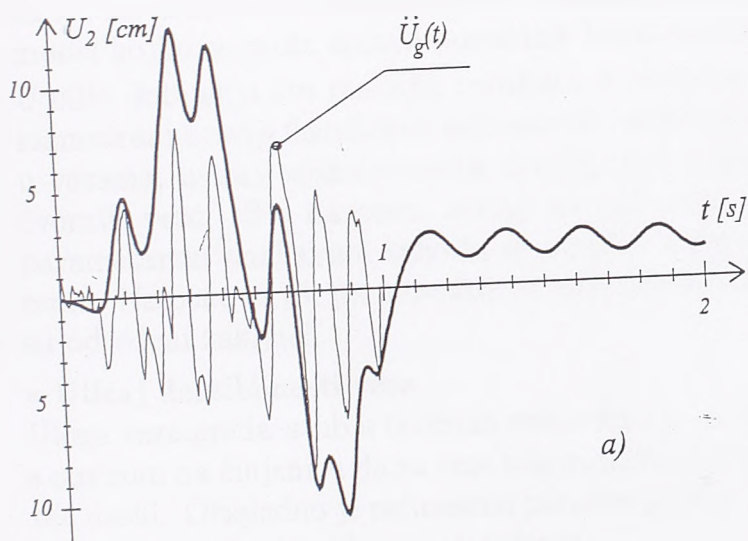
$$\begin{aligned}
 E &= 210 \text{ GPa} & k_1 &= 1000 \text{ kNm/rad} \\
 I_1 &= 1510 \text{ cm}^4 & k_2 &= 1500 \text{ kNm/rad} \\
 A_1 &= 33.4 \text{ cm}^2 & c_1 &= 100 \text{ kNms/rad} \\
 & & c_2 &= 200 \text{ kNms/rad} \\
 M &= 10 \text{ kNs}^2/\text{m}
 \end{aligned}$$

Slika 6.1: Jednospratni ram sa ekscentričnim polukrutim vezama ukrućen frikcionim spregovima

```

One Storey Friction Brace Frame                                     { ProblemTitle }
2 2 1                                                              { TypeOfAnalysis,TypeOfGeomAnalysis,TypeOfSpringAnalysis }
0 0 0                                                              { FindCriticalLoad, BowingEffect, TypeOfP_Delta }
4 3 2 1 1 0 2 1                                                 { njts,nmem,nsupp,ntype,njload,neload,nbrace,ntypebrace }
500 0 0.005 1 20                                                { nstepD, nstepS, dt, MassScaleFactor, GAccScaleFactor }
0.0000 0.0000                                                  { alpha, beta }
pet.ac                                                            { GAccFile }
2 1 0 0                                                            { njmass, njxth, njyth, njrth }
1 0 0                                                              { joint, X-coord, Y-coord }
2 0 4
3 6 4
4 6 0
1 1 1 1                                                            { restrains - joint, x, y, }
4 1 1 1
1 21e7 0.00334 151e-7 0.0 { material type - id, E, A, I, mu }
1 1 2 1 0.0 0.0 -1 -1 0 0 0 0 { elements }
2 2 3 1 0.15 0.20 1000 1500 0 0 100 200
3 3 4 1 0.0 0.0 -1 -1 0 0 0 0
1 21e7 0.00034 100 -10 { material type - id,E,A,Sst,Ssc }
1 1 3 1 0.00 0 { braces }
2 4 2 1 0.00 1
2 0 0 0 { joint loads - joint, Fx, Fy, M }
2 10.0 0 0 { lumped mass - joint, Mx, My, Io }
3 10.0 0 0
2 { time history - joints }
    
```





Slika 6.2: a) Istorija pomeranja tačke 2; b) Dijagram sila–deformacija za dijagonalu 2–4



---

# Zaključak

---

Ovaj rad pripada oblasti nelinearne dinamike konstrukcija ravnih čeličnih ramova. Polazeći od poznatih teoretskih osnova, kao i objavljenih eksperimentalnih istraživanja, uz primenu savremenih numeričkih modela, analizirano je ponašanje ramova i dva postupka za kontrolu njihovog odgovora pri dejstvu zemljotresa. Prvo je sprovedena statička analiza u kojoj su uključene obe nelinearnosti, geometrijska nelinearnost strukture i materijalna (konstitutivna) nelinearnost veza. Zatim je izvršena dinamička analiza za homogen problem, i na kraju dinamička analiza za seizmičku pobudu, kako bi se formirao proračunski model kojim se može opisati ponašanje konstrukcija pri dejstvu zemljotresa.

U cilju dobijanja što realnijih rezultata u seizmičkoj analizi čeličnih ramova detaljno su razmatrani uticaji fleksibilnih nelinearnih i ekscentričnih veza, uticaji viskoznog prigušenja u vezama, uticaji efekata teorije drugog reda i uticaji frikcionih spregova i disipativnih čvornih veza. Svi navedeni uticaji su uključeni u razvijeni računski model i zasebno parametarski analizirani kako bi se utvrdio uticaj pojedinog parametra na odgovor sistema. Na osnovu tih parametarskih analiza obrađenih na ilustrativnim primerima izvedeni su određeni zaključci.

- **Uticaj fleksibilnosti veze**

Uloga veza greda–stub u čeličnim ramovima je od presudnog značaja za seizmičku analizu s obzirom na činjenicu da su veze bile najkritičniji elementi za vreme zemljotresa koji su se već desili. Očigledno je nelinearno ponašanje veza i za manje nivoe opterećenja a naročito je izraženo pri seizmičkom opterećenju.

U numeričkim primerima ilustrovana je efikasnost primene triparametarskog modela za opisivanje nelinearnog ponašanja veza. To je postignuto jednostavnom formulacijom i jasnim fizičkim značenjima parametara modela.

Da bi nelinearna dinamička analiza bila racionalna, efikasna i inženjerski prihvatljiva, usvojen je koncept selektivnog nelinearnog ponašanja konstrukcije. tj. samo za određene elemente konstrukcije se usvaja nelinearna zavisnost, dok svi ostali elementi su napregnuti u domenu linearne elastičnosti materijala. Za čelične ramovske sisteme potrebno je i dovoljno samo čvorne veze razmatrati kao elemente sa nelinearnim ponašanjem.

Ustanovljeno je da je neophodno uzeti u obzir fleksibilnost veza, jer njihovo ignorisanje će dovesti do rezultata koji nisu bliski stvarnom ponašanju čeličnih ramova.

- **Uticaj ekscentričnosti veze**

Ekscentričnost veze takođe ima praktičan značaj zavisno od veličine i tipa veze. Pokazano je da čak i kod ramovskih sistema sa procentualno malim ekcentricitetima kružne frekvencije će se bitno razlikovati u zavisnosti da li je ekcentricitet uzet u obzir ili ne. Oba pomenuta efekta, fleksibilnost i ekscentričnost veze doprinose promeni distribucije unutrašnjih sila u sistemu.

- **Frikcioni spregovi**

Primenom kontrole ponašanja konstrukcija pri incidentnom dejstvu zemljotresa, napravljen je zaokret u principima i filozofiji aseizmičkog projektovanja. Za sve elemente sistema zahteva se linearno elastično ponašanje kako bi se izbegle trajne deformacije. Posebni elementi namenjeni za prihvatanje seizmičke energije zaštićuju se sve ostale elemente sistema. U tom smislu, frikcioni spregovi su pokazali svoju superiornost u pasivnoj kontroli ponašanja sistema, kako u jednostavnoj ugradnji tako i u efikasnoj nelinearnoj numeričkoj analizi. Efekat disipacije energije postiže se stabilnim histerezisnim prigušenjem, kao posledica nelinearnog elastoplastičnog ponašanja dijagonala frikcionih spregova.

- **Disipativne čvorne veze**

Disipacija energije u čvorovima je obično prateća, sporedna i blagotvorna pojava u odgovoru konstrukcije. U radu je predložen nov pristup disipacije seizmičke energije u vezama preko diktiranog povećanog prigušenja u vezama. Numeričkim proračunima je pokazano da se na taj način mogu jednostavno kontrolisati i ograničiti uticaji u konstrukciji, jer se ostvaruje visok nivo redukcije maksimalnih uticaja.

- **Efekti geometrijski nelinearne teorije u dinamičkoj analizi**

Poznato je da efekat geometrijske nelinearnosti raste sa porastom opterećenja, a on je još izraženiji kod ramova sa fleksibilnim vezama nego kod ramova sa krutim vezama. Fleksibilnost veza i geometrijska nelinearnost, simultano i pojedinačno imaju bitan uticaj na analizu ponašanja ramova jer značajno utiču na dinamičke karakteristike sistema.

U poređenju postupaka geometrijski nelinearne analize sa konstantnim i promenljivim aksijalnim silama u dinamičkom proračunu, zaključeno je da kod ortogonalnih ramova postupak konstantnih aksijalnih sila daje u potpunosti zadovoljavajuće rezultate, što nije slučaj kod neortogonalnih ramova, pa je neophodno primeniti postupak kojim se uzima u obzir promena aksijalnih sila u elementima usled dejstva dinamičkog opterećenja.

- **Računarski program**

U razvijenom računarskom programu SASF, namenjenom za nelinearnu materijalno geometrijsku seizmičku analizu čeličnih ramova u ravni, primenjeni su postupci i algoritmi koji obezbeđuju jednostavnost i efikasnost današnjim standardnim inženjerskim proračunima gde je obavezna nelinearna dinamička analiza.

Predloženi računski model, zasnovan na razvijenom konačnom elementu grednih linijskih nosača, značajno povećava kvalitet analize, i daje dobre mogućnosti za modeliranje ponašanja čeličnih ramovskih konstrukcija pri dejstvu zemljotresa. Postupak se zasniva na numeričkom proračunu koji je jednostavno primenljiv u proračunu pomoću računara i doprinosi efikasnijem i preciznijem proračunu objekata izloženih dejstvu zemljotresa. Ipak treba napomenuti, da bi se dobili pouzdani kvantitativni rezultati u nelinearnoj dinamičkoj analizi neophodno je imati podršku odgovarajućih eksperimentalnih istraživanja, kako u oblasti čeličnih veza greda-stub tako i u oblasti frikcionih disipacije energije. Potrebno je formirati bazu podataka (kao što je već formirana za statičko opterećenje) za histerezisno ponašanje različitih tipova veza i za različite slučajeve opterećenja i rasterećenja dinamičkog opterećenja.

---

# Prilozi

---



## Prilog A

---

### Oznake

---

$\alpha$	...	koeficijent prigušenja za prigušenje proporcionalno krutosti
$\beta$	...	koeficijent prigušenja za prigušenje proporcionalno masi
$\gamma$	...	koeficijent krutosti veze ( <i>fixity factor</i> )
$\delta$	...	koeficijent konstruktivnog prigušenja
$\delta$	...	izduženje pri aksijalnom naprezanju
$\varepsilon$	...	dilatacija
$\zeta$	...	relativno prigušenje
$\bar{\zeta}$	...	pseudo-relativno prigušenje
$\theta$	...	relativna rotacija u vezi greda-stub
$\lambda$	...	svojstvena vrednost matrice
$\mu$	...	masa po jedinici dužine elementa
$\xi$	...	bezdimenzionalna koordinata u pravcu ose elementa
$\pi$	...	3.141593...
$\rho$	...	masa po jedinici zapremine, gustina materijala
$\varphi$	...	obrtnje ose elementa
$\omega$	...	kružna frekvencija slobodnih neprigušenih oscilacija
$\omega_d$	...	kružna frekvencija slobodnih prigušenih oscilacija
$\bar{\omega}_d$	...	pseudo-kružna frekvencija prigušenih oscilacija
$A$	...	površina poprečnog preseka elementa
$C_i$	...	konstante interpolacije
$C$	...	matrica prigušenja sistema
$c$	...	koeficijent viskoznaog prigušenja
$c_i$	...	matrica prigušenja grednog elementa $i$
$E$	...	modul elastičnosti materijala
$E$	...	korektivna matrica za gredu sa krutim ekscentričnim vezama
$e_i$	...	ekscentričnost veze u čvoru $i$
$F$	...	čvorna sila
$F$	...	vektor čvornih sila
$f$	...	funkcija
$G$	...	korektivna matrica za gredu sa polukrutim centričnim vezama
$G_1$	...	korektivna matrica za gredu sa polukrutim ekscentričnim vezama
$g_i$	...	bezdimenzionalni koeficijent rotacione krutosti opruge na kraju $i$
$I$	...	moment inercije preseka elementa
$I$	...	jedinična matrica
$j$	...	imaginarna jedinica $j = \sqrt{-1}$
$J$	...	vektor inercijalnih čvornih sila
$k_i$	...	krutost opruge u vezi $i$
$k_o$	...	početna krutost veze greda-stub
$k_i$	...	matrica krutosti elementa $i$

$k_i^*$	...	matrica krutosti elementa $i$ u globalnom koordinatnom sistemu
$K$	...	matrica krutosti sistema
$l$	...	dužina elementa
$\bar{l}$	...	"svetli otvor" elementa
$M$	...	moment savijanja u preseku linijskog elementa
$M_u$	...	granični moment veze greda–stub
$M$	...	matrica mase sistema
$M_c$	...	matrica mase sistema direktno koncentrisanih mase
$m_i$	...	konzistentna matrica mase grednog elementa $i$
$\bar{m}_i$	...	korektivna matrica za matricu mase grednog elementa $i$
$m_{oi}$	...	konzistentna matrica mase grednog elementa $i$ sa krutim vezama
$N$	...	matrica interpolacionih funkcija za gredu sa krutim vezama
$\bar{N}$	...	matrica interpolacionih funkcija za gredu sa polukrutim vezama
$p$	...	parametar oblika krive $M-\theta$
$q_i$	...	vektor ekvivalentnog čvornog inercijalnog opterećenja
$R$	...	vektor sila na krajevima svih elemenata
$R_i$	...	vektor sila na krajevima grednog elementa $i$
$R_i^*$	...	vektor sila na krajevima grednog elementa $i$ u globalnom koordinatnom sistemu
$S$	...	aksijalna sila u grednom elementu
$T$	...	period slobodnih neprigušenih oscilacija
$T_d$	...	period slobodnih prigušenih oscilacija
$T_i$	...	matrica transformacije elementa $i$
$t$	...	vreme
$U$	...	vektor pomeranja u globalnom koordinatnom sistemu
$\dot{U}$	...	vektor brzina u globalnom koordinatnom sistemu
$\ddot{U}$	...	vektor ubrzanja u globalnom koordinatnom sistemu
$u$	...	vektor pomeranja u lokalnom koordinatnom sistemu
$\dot{u}$	...	vektor brzina u lokalnom koordinatnom sistemu
$\ddot{u}$	...	vektor ubrzanja u lokalnom koordinatnom sistemu
$V$	...	zapremina grednog elementa
$v$	...	vertikalno pomeranje ose elementa
$x$	...	koordinata lokalnog koordinatnog sistema



## Pregled korišćenih matrica

Matrica krutosti elementa sa krutim centričnim vezama

$$k_o = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

*simet.*

Matrica transformacije

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Geometrijska matrica krutosti

$$k_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ & & 4l^2 & 0 & -3l^2 & l^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 36 & -3l^2 \\ & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{S}{30l}$$

*simet.*

Korektivna matrica za element sa polukrutim i ekscentričnim vezama

$$G_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & e_1 \Delta & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & 0 & -e_2 \Delta \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}$$

$$r_{21} = -r_{23} = -\frac{6}{l}(g_1 + 2g_1g_2)$$

$$r_{22} = -\left(4 + 6\frac{e_1}{l}\right)g_1 - 12\left(1 + \frac{e_1}{l}\right)g_1g_2$$

$$r_{24} = - \left( 2 + 6 \frac{e_2}{l} \right) g_1 - 12 \frac{e_2}{l} g_1 g_2$$

$$r_{41} = -r_{43} = -\frac{6}{l} (g_2 + 2g_1 g_2)$$

$$r_{42} = - \left( 2 + 6 \frac{e_1}{l} \right) g_2 - 12 \frac{e_1}{l} g_1 g_2$$

$$r_{44} = - \left( 4 + 6 \frac{e_2}{l} \right) g_2 - 12 \left( 1 + \frac{e_2}{l} \right) g_1 g_2 .$$

Matrica krutosti lelementa po teoriji drugog reda

$$\mathbf{k}^{II} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 \phi_1 & 6l \phi_2 & -12 \phi_1 & 6l \phi_2 \\ & 4l^2 \phi_3 & -6l \phi_2 & 2l^2 \phi_4 \\ & & 12 \phi_1 & -6l \phi_2 \\ \text{simetr.} & & & 4l^2 \phi_3 \end{bmatrix}$$

Funkcija	pritisnut štap	zategnut štap	$S = 0$
$\phi_1$	$\frac{\omega^3 \sin \omega}{12 \Delta_p}$	$\frac{\omega^3 \text{sh } \omega}{12 \Delta_z}$	1
$\phi_2$	$\frac{\omega^2 (1 - \cos \omega)}{6 \Delta_p}$	$\frac{\omega^2 (\text{ch } \omega - 1)}{6 \Delta_z}$	1
$\phi_3$	$\frac{\omega (\sin \omega - \omega \cos \omega)}{4 \Delta_p}$	$\frac{\omega (\omega \text{ch } \omega - \text{sh } \omega)}{4 \Delta_z}$	1
$\phi_4$	$\frac{\omega (\omega - \sin \omega)}{2 \Delta_p}$	$\frac{\omega (\text{sh } \omega - \omega)}{2 \Delta_z}$	1
$\Delta_p = 2(1 - \cos \omega) - \omega \sin \omega$ $\Delta_z = 2(1 - \text{ch } \omega) + \omega \text{sh } \omega$			

Funkcije u obliku stepenih redova

$$\phi_1 = \frac{1}{12\phi} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\pm\omega^2)^n \right]$$

$$\phi_2 = \frac{1}{6\phi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} (\pm\omega^2)^n \right]$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4\phi} \left[ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+3)!} (\pm\omega^2)^n \right]$$

$$\phi_4 = \frac{1}{2\phi} \left[ \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} (\pm\omega^2)^n \right]$$

gde je:

$$\phi = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} (\pm\omega^2)^n .$$

Korektivna matrica za element sa polukrutim i ekscentričnim vezama po teoriji drugog reda

$$\mathbf{G}_3 = (-\mathbf{G}_2 + \mathbf{E} - \mathbf{G}_2 \mathbf{E}) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & e_1 \Delta & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & 0 & -e_2 \Delta \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}$$

$$r_{21} = -r_{23} = -\frac{6}{l} [g_1 + 2g_1 g_2 (2\phi_3 - \phi_4)] \phi_2$$

$$r_{22} = -\frac{6e_1}{l} [g_1 + 2g_1 g_2 (2\phi_3 - \phi_4)] \phi_2 - 4[g_1 \phi_3 + g_1 g_2 (4\phi_3^2 - \phi_4^2)]$$

$$r_{24} = -\frac{6e_2}{l} [g_1 + 2g_1 g_2 (2\phi_3 - \phi_4)] \phi_2 - 2g_1 \phi_4$$

$$r_{41} = -r_{43} = -\frac{6}{l} [g_2 + 2g_1 g_2 (2\phi_3 - \phi_4)] \phi_2$$

$$r_{42} = -\frac{6e_1}{l} [g_2 + 2g_1 g_2 (2\phi_3 - \phi_4)] \phi_2 - 2g_2 \phi_4$$

$$r_{44} = -\frac{6e_2}{l} [g_2 + 2g_1 g_2 (2\phi_3 - \phi_4)] \phi_2 - 4[g_2 \phi_3 + g_1 g_2 (4\phi_3^2 - \phi_4^2)]$$

$$\Delta = (1 + 4g_1 \phi_3)(1 + 4g_2 \phi_3) - 4g_1 g_2 \phi_4^2$$

Konzistentna matrica mase za element sa krutim vezama

$$\mathbf{m}_o = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Konzistentna matrica mase za element sa polukrutim vezama

$$\bar{\mathbf{m}}_i = \rho A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m}_{22} & \bar{m}_{23} & 0 & \bar{m}_{25} & \bar{m}_{26} \\ 0 & \bar{m}_{32} & \bar{m}_{33} & 0 & \bar{m}_{35} & \bar{m}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m}_{52} & \bar{m}_{53} & 0 & \bar{m}_{55} & \bar{m}_{56} \\ 0 & \bar{m}_{62} & \bar{m}_{63} & 0 & \bar{m}_{65} & \bar{m}_{66} \end{bmatrix}$$

$$\bar{m}_{22} = \frac{l}{35\Delta^2} \left[ -22\Delta g_1 + 13\Delta g_2 + 12(g_1^2 + g_2^2) - 6g_1 g_2 (3 + 3\Delta - 2g_1 - 2g_2 - 4g_1 g_2) \right]$$

$$\bar{m}_{23} = \frac{l^2}{210\Delta^2} \left[ -56\Delta g_1 + 22\Delta g_2 + 24(2g_1^2 + g_2^2) - 6g_1 g_2 (9 + 23\Delta - 28g_1 + 16g_2 - 12g_1 g_2) \right]$$

$$\bar{m}_{25} = \frac{3l}{70\Delta^2} \left[ 3\Delta(g_1 + g_2) - 8(g_1^2 + g_2^2) + 4g_1 g_2 (3 + 3\Delta - 2g_1 - 2g_2 - 4g_1 g_2) \right]$$

$$\begin{aligned}
\bar{m}_{26} &= \frac{l^2}{420\Delta^2} \left[ -26\Delta g_1 + 28\Delta g_2 + 48(g_1^2 + 2g_2^2) - 12g_1 g_2(9 - 12\Delta + 16g_1 - 28g_2 - 12g_1 g_2) \right] \\
\bar{m}_{33} &= \frac{l^3}{105\Delta^2} \left[ -8\Delta g_1 + 3\Delta g_2 + 4(4g_1^2 + g_2^2) - 12g_1 g_2(1 + 2\Delta - 8g_1 + 3g_2 - 12g_1 g_2) \right] \\
\bar{m}_{35} &= \frac{l^2}{420\Delta^2} \left[ -28\Delta g_1 + 26\Delta g_2 - 48(2g_1^2 + g_2^2) + 12g_1 g_2(9 - 12\Delta - 28g_1 + 16g_2 - 12g_1 g_2) \right] \\
\bar{m}_{36} &= \frac{l^3}{420\Delta^2} \left[ 4\Delta(g_1 + g_2) + 32(g_1^2 + g_2^2) - 12g_1 g_2(5 - 6\Delta + 4g_1 + 4g_2 + 36g_1 g_2) \right] \\
\bar{m}_{55} &= \frac{l}{35\Delta^2} \left[ 13\Delta g_1 - 22\Delta g_2 + 12(g_1^2 + g_2^2) - 6g_1 g_2(3 + 3\Delta - 2g_1 - 2g_2 - 4g_1 g_2) \right] \\
\bar{m}_{56} &= \frac{l^2}{210\Delta^2} \left[ -22\Delta g_1 + 56\Delta g_2 - 24(g_1^2 + 2g_2^2) + 6g_1 g_2(9 + 23\Delta + 16g_1 - 28g_2 - 12g_1 g_2) \right] \\
\bar{m}_{66} &= \frac{l^3}{105\Delta^2} \left[ 3\Delta g_1 - 8\Delta g_2 + 4(g_1^2 + 4g_2^2) - 12g_1 g_2(1 + 2\Delta + 3g_1 - 8g_2 - 12g_1 g_2) \right]
\end{aligned}$$

Matrica viskoznog prigušenja u polukrutim vezama

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{12} & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{21} & c_{22} & 0 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{31} & c_{32} & 0 & c_{33} & c_{23} \\ 0 & c_{41} & c_{42} & 0 & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = -c_{13} = c_{33} = \frac{36EI}{l^3} \frac{h_1 + h_2 + 4g_1 h_2 + 4g_1^2 h_2 + 4g_2 h_1 + 4g_2^2 h_1}{\Delta^2}$$

$$c_{12} = -c_{23} = \frac{12EI}{l^2} \frac{2h_1 + h_2 + 2g_1 h_2 + 10g_2 h_1 + 12g_2^2 h_1}{\Delta^2}$$

$$c_{14} = -c_{34} = \frac{12EI}{l^2} \frac{h_1 + 2h_2 + 10g_1 h_2 + 12g_1^2 h_2 + 2g_2 h_1}{\Delta^2}$$

$$c_{22} = \frac{4EI}{l} \frac{4h_1 + h_2 + 24g_2 h_1 + 36g_2^2 h_1}{\Delta^2}$$

$$c_{24} = \frac{8EI}{l} \frac{h_1 + h_2 + 3g_1 h_2 + 3g_2 h_1}{\Delta^2}$$

$$c_{44} = \frac{4EI}{l} \frac{h_1 + 4h_2 + 24g_1 h_2 + 36g_1^2 h_2}{\Delta^2}$$

$$c_{ij} = c_{ji}$$

$$h_i = \frac{c_i EI}{lk_i^2} \quad i = \bar{1}, \bar{2} \quad \Delta = 1 + 4g_1 + 4g_2 + 12g_1 g_2$$





