



РД 17100



003114541

COBISS

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ  
- ГЕОДЕТСКИ ОДСЕК -

мр БРАДИСЛАВ С. БОЖИЋ, дип. инж.

АНАЛИЗА МЕТОДЕ МЕРЕЊА ДУЖИНА  
ГПС МЕРНИМ УРЕЂАЈИМА

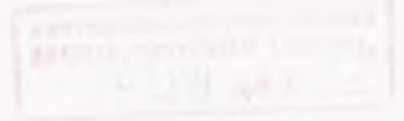
- ДИСЕРТАЦИЈА -

Београд, 2000.





РД 17400



**УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ**  
**ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ**  
**- ГЕОДЕТСКИ ОДСЕК -**

мр БРАНКО С. БОЖИЋ, дипл.инж.

**АНАЛИЗА МЕТОДЕ МЕРЕЊА ДУЖИНА**  
**ГПС МЕРНИМ УРЕЂАЈИМА**

**- ДИСЕРТАЦИЈА -**

Београд, 2000.



УДК: [528.1+528.021.001.2] : 629.783.005 (043.3)

**БОЖИЋ, Бранко**

Анализа методе мерења дужина ГПС мерним уређајима : дисертација / мр Бранко Божич, дипл.инж. - Београд : Универзитет у Београду : Грађевински факултет : геодетски одсек, 2000 (Београд : Војногеографски институт, 2000). - 249 стр. : 5 прилога ; 30 см.

**Кратак садржај:** У раду су обрађени основни елементи садржаја Глобалног сателитског система за позиционирање, математички модели GPS резултата мерења, утицаји атмосфере на простирање сигнала, најзначајнији извори грешака GPS мерења, показатељи поузданости и основи теорије оцена компоненти дисперзија мерења базних линија. У практичном делу, приказани су резултати мерења у мрежама кратких, средњих и великих дужина. Обрада резултата мерења и квалитет добијених оцена, потврдили су претпоставке о значајности постављених услова при мерењу, услова тачности, процедуре мерења и обраде добијених резултата који су произашли из анализе методе GPS мерења. Теоријски и практично, истакнути су ефекти утицаја тропосфере и јоносфере на оцену вектора базне линије и оцењена су гранична растојања у примени једнофреквентних и двофреквентних пријемника. Анализом мера поузданости, на примеру избора оптималног референтног сателита, указује се на значај њихове примене у припреми и обради GPS мерења. Такође, предложен је један поступак оцене адicione константе GPS антена и њене несигурности и анализиран је ниво сагласности експерименталног AIUB модела тачности мерења дужина базних линија и модела добијеног из анализе методе.

**Кључне речи:** Геодезија, Метрологија, Сателитски премер, GPS, Метода мерења дужина, Дисертација.



**МЕНТОРИ:**

**1. проф.др Радован Мркић, дипл.инж.**

*Грађевински факултет у Београду – геодетски одсек*

**2. проф.др Глигорије Перовић, дипл.инж.**

*Грађевински факултет у Београду – геодетски одсек*

**ДАТУМ ОДБРАНЕ:**

\_\_\_\_\_

**ДАТУМ ПРОМОЦИЈЕ:**

\_\_\_\_\_



Subjekt:

## ANALYSIS OF METHOD OF MEASUREMENT DISTANCES BY GPS MEASURING DEVICES

All of the relevant sources of errors were included in the analysis of GPS method of measurement in this work. In surveying, because relative method of GPS measurement is the most popular technique, the analysis included those sources that have the most influence on that type of measurement. All errors were clasified by theirs nature and place of occurrence.

With much care during GPS measurement, it is possible to improve the accuracy of GPS results. Taking a network with known attributes, several important conditions connected with reliability of GPS results were developed. Some results that were obtained from several experiments satisfied the statement had given from the analysis. It was proved that model of baseline estimation accuracy assessment obtained from the analysis is good correlated with AIUB model. This means that analysis of method of measurement distances by GPS measuring devices could improve accuracy and reliability of GPS results.

### Key words:

Geodesy, Satellite surveying, Global Positioning System, Method of measurements, Dissertacion.



## ПРЕДГОВОР

Рад на изради дисертације је започет крајем 1994. године. У то време, *Војногеографски институт* је имао на располагању четири двофреквентна *GPS* пријемника *WM102 (Wild-Magnavox model 102)*. Бавећи се у то време једном сложеном савременом технологијом, стекао се утисак да и поред достигнутог нивоа сазнања из ове области, има простора да се учини један помак у напред. Конкретну помоћ при изради тезе пружили су: *dr G. Beutler* са *Астрономског института Универзитета у Берну* и *др. М. Минчев* из [*Војногеографског института*] у *Софији*. У овом контексту се могу споменути и неформални контакти са мађарским колегама, геодетама са којима сам се сусретао у оквиру редовних послова *Војногеографског института*. Помоћ се пре свега односила на достављање неопходне стручне литературе која се није могла код нас пронаћи.

На крају, желим да изразим своју велику захвалност и поштовање према покојном проф. **др Владети Миловановићу, дипл.инж.** који ми је дао почетни подстицај у изради овог рада. Нарочиту захвалност изражавам и својим менторима проф. др **Радовану Мркићу, дипл.инж.** и проф. др **Глигорију Перовићу, дипл.инж.**, коме можда и највише дугујем за све што сам до сада у струци постигао. Такође, посебно се захваљујем и осталим члановима *Комисије* који су конструктивним примедбама, раду дали већи значај и тежину. Не мању захвалност дугујем и колегама из *Војногеографског института* који су ми пружили велику помоћ у мерењима и техничкој обради рада као и свима другим који су на било који начин допринели његовом садржају и изгледу.

*Београд, 10.06.2000. године*

*А у њ о р*



## СКРАЋЕНИЦЕ

AS	Anti-Spoofing: Ограничење приступа Р коду
AIUB	Астрономски институт Универзитета у Берну
BIH	Међународни биро за време
BIPM	Међународни биро за мере и тегове
BPSK	Binary Phase Shift Key
CA	Груби код
CEP	Небески ефемеридски пол
SIGNET	Међународна <i>GPS</i> мрежа
CIO	Конвенционално међународно исходиште (пола)
CIS	Конвенционални инерцијални систем
CODE	Европски центар за одређивање података о орбитама
CTRS	Конвенционални терестрички референтни систем
CTS	Конвенционални терестрички систем
DDO	Опажање двоструких разлика
DGPS	Диференцијални GPS
DLL	Коло за кашњење
DMA	Картографска агенција Министарства одбране САД (сада NIMA)
DoD	Министарство одбране
DOP	Разлагање прецизности
ECI	Инерцијални систем са почетком у центру масе Земље
ECEF	Систем фиксиран за Земљу са почетком у центру масе Земље
EPVGI	Експериментални полигон Војногеографског института
EDM	Електронско мерење дужина
EUREF	Европски референтни оквир
GA(M)ST	Гриничко привидно звездано време
GDOP	Разлагање геометријске прецизности
GMST	Гриничко средње звездано време
GPS	Глобални систем за позиционирање
GRS	Геодетски референтни систем
HDOP	Разлагање хоризонталне прецизности

HIRAN	High RANging Sistem
IAG	Међународна геодетска асоцијација
IERS	Међународна служба за земљину ротацију
IGS	Међународна <i>GPS</i> служба за геодинамику
IRF	Међународни референтни оквир
ITRF	IERS Терестрички референтни оквир
IUGG	Међународна унија за геодезију и геофизику
MIT	Институт за технологију у Масачусетсу
MINQE	Квадратни оцењивач са минималном нормом
NAVSTAR	Navigation System with Time and Ranging
NNSS	Морнарички навигациони сателитски систем
OTF	On-the-fly
P	Прецизни код
PDOP	Разлагање положајне прецизности
PLL	Коло са фазним детектором
PPS	Служба прецизног позиционирања
PRN	Псеудо - случајни шум
RINEX	Стандардни формат размене података <i>GPS</i> мерења
SLR	Ласерско мерење до сателита
SNR	Однос сигнал шум
SPS	Служба стандардног позиционирања
SV	Свемирско возило
TDB	Терестричко барицентрично време
TDO	Опажање троструких разлика
TDOP	Разлагање временске прецизности
TDT	Терестричко динамичко време
TEC	Укупан збир електрона
TOW	Telemetry Word
TRF	Терестрички референтни оквир
UT	Универзално време
UTC	Универзално координирано време
UTM	Универзална Меркаторова попречна (пројекција)
VDOP	Разлагање висинске прецизности
VLBI	Дугобазисна интерферометрија
WGS	Светски геодетски систем





# САДРЖАЈ

SUBJECT

ПРЕДГОВОР

СКРАЋЕНИЦЕ

Страна

<b>1.</b>	<b>УВОД</b> .....	<b>1</b>
<b>2.</b>	<b>ОСНОВЕ GPS</b> .....	<b>13</b>
2.1.	<b>РЕФЕРЕНТНИ СИСТЕМИ</b> .....	13
2.1.1.	<b>Координатни системи</b> .....	15
	Дефиниције .....	15
	Конвенционални инерцијални систем .....	16
	Конвенционални исторички референтни систем .....	17
	Трансформације .....	19
	Прецесија .....	20
	Нутиација .....	21
	Звездано време .....	22
	Поларно кретање .....	22
2.1.2.	<b>Системи времена</b> .....	23
	Развој система времена .....	23
	Астрономске скале времена .....	24
	Ајомско време .....	29
	Потреба за координацијом времена .....	29
	Веза са ротацијом Земље .....	30
2.2.	<b>КОМПОНЕНТЕ GPS СИСТЕМА</b> .....	30
2.2.1.	<b>Космичка компонента система</b> .....	31
	Орбите сателита .....	36
	Кеплерова путања .....	36
	Приказ орбите .....	39
	Поремећајно кретање сателита .....	42
	Поремећајна убрзања .....	44
	Утицај несферичности Земље на поремећај убрзања сателита .....	45
	Утицај привлачне силе других небеских тела - тидални (tidal) утицај .....	46
	Утицај иридиске сунчеве радијације на поремећај убрзања .....	47
	Релативистички утицаји на поремећај убрзања сателита .....	47
	Рачунање елемената орбите .....	47
	Проблем граничне вредности .....	49
	Побољшање тачности рачунаних параметара орбите .....	50
	Поремећене орбите - аналитичко решење .....	50
	Поремећене орбите - нумеричко решење .....	51
	Емитовање параметара орбите - мреже за праћење сателита .....	51
	Ефемериде .....	52
	Алманах .....	53
	Емитивне ефемериде .....	54
	Прецизне ефемериде .....	55
2.2.2.	<b>Контролна компонента система</b> .....	56
2.2.3.	<b>Корисничка компонента система</b> .....	57
2.2.4.	<b>Технике обраде резултата GPS мерења</b> .....	63
2.2.5.	<b>Испитивање, контрола и одржавање GPS уређаја</b> .....	63
	Испитивање GPS антена .....	63
	Контрола и одржавање GPS уређаја .....	64



3.	МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ GPS РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА .....	65
3.1.	МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ АПСОЛУТНЕ МЕТОДЕ GPS РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА .....	66
3.1.1.	Функционални модел апсолутне методе кодних GPS резултата мерења .....	66
3.1.2.	Функционални модел апсолутне методе фазних GPS резултата мерења .....	69
3.1.3.	Стохастички модел апсолутне методе GPS резултата мерења .....	74
3.2.	МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ РЕЛАТИВНЕ МЕТОДЕ GPS РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА .....	77
3.2.1.	Функционални модел фазних разлика GPS резултата мерења .....	77
	<i>Функционални модел једносџруке фазне разлике</i> .....	77
	<i>Функционални модел двосџруке фазне разлике</i> .....	80
	<i>Функционални модел тросџруке фазне разлике</i> .....	83
3.2.2.	Стохастички модели фазних разлика .....	83
	<i>Корелација фазних комбинација</i> .....	83
	<i>Једносџруке фазне разлике</i> .....	84
	<i>Двосџруке фазне разлике</i> .....	85
	<i>Тросџруке фазне разлике</i> .....	86
3.3.	БРОЈ НЕОПХОДНИХ ОПАЖАЊА ПО РЕЛАТИВНОЈ МЕТОДИ GPS РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА .....	87
3.4.	ОБРАДА GPS РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА .....	88
3.4.1.	Откривање циклусних скокова .....	89
3.4.2.	Решавање неодређености .....	91
3.4.3.	Изравнање GPS резултата мерења .....	92
4.	АТМОСФЕРА И ЊЕН УТИЦАЈ НА ПРОСТИРАЊЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА .....	95
4.1.	ОСНОВЕ ПРОСТИРАЊА ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА .....	95
4.2.	УТИЦАЈ ТРОПОСФЕРЕ НА ПРОСТИРАЊЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА .....	96
4.3.	УТИЦАЈ ЈОНОСФЕРЕ НА ПРОСТИРАЊЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА .....	100
4.3.1.	Ефекти треперења .....	102
4.3.2.	Ефекти изазвани појавом магнетне олује .....	102
4.3.3.	Ефекти изазвани сунчевом активношћу .....	103
4.4.	БРЗИНА И ПРАВАЦ ПРОСТИРАЊА ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА .....	103
4.4.1.	Показатељ преламања ваздуха .....	105
4.4.2.	Поправке GPS мерења због утицаја атмосфере .....	108
	<i>Поправка због утицаја тросџруке</i> .....	109
	<i>Поправка због утицаја јоносфере</i> .....	113
5.	ГРЕШКЕ РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА ДУЖИНА БАЗНИХ ЛИНИЈА .....	119
5.1.	ИЗВОРИ ГРЕШАКА .....	119
5.2.	КАРАКТЕРИСТИКЕ ПОЈЕДИНИХ ИЗВОРА ГРЕШАКА .....	125
5.2.1.	Грешке изазване утицајем тропосфере .....	125
	<i>Грешка релативног утицаја тросџруке</i> .....	112
	<i>Грешка апсолутног утицаја тросџруке</i> .....	127
5.2.2.	Грешка јоносферског утицаја .....	129
5.2.3.	Грешка гравитационе константе .....	131
5.2.4.	Грешка висине фиксне тачке .....	133
5.2.5.	Грешка хоризонталног положаја фиксне тачке .....	134
5.2.6.	Грешке положаја сателита .....	135
	<i>Грешка радијалне компоненте положаја сателита</i> .....	137
	<i>Грешка аксијалне компоненте положаја сателита</i> .....	138
5.2.7.	Грешка фазе изазвана деградацијом сигнала (selective availability - SA) .....	139
5.2.8.	Грешка часовника .....	140
	<i>Грешка часовника у пријемнику</i> .....	141
	<i>Грешка часовника у сателиту</i> .....	142
5.2.9.	Грешка одређивања брзине светлости у вакууму .....	143
5.2.10.	Грешка одређивања брзине светлости у ваздуху .....	143
5.2.11.	Грешка мерења разлике фаза .....	144

5.2.12.	Грешка фреквенције сигнала .....	144
5.2.13.	Грешка одређивања адicione константе антена .....	145
5.2.14.	Грешка рефлексије сигнала .....	145
5.2.15.	Грешка центрисања антена .....	148
5.2.16.	Грешка несавршености конструкције инструмента и сателита .....	148
5.2.17.	Грешка услед недовољне јачине сигнала .....	149
5.2.18.	Грешка услед недовољног напона батерија .....	149
5.2.19.	Релативистички ефекти .....	149
5.3.	<b>ПОДЕЛА ГРЕШАКА ПО ЗНАЧАЈУ</b> .....	150
5.3.1.	Грешке од којих зависи тачност мерења - грешке прве групе .....	153
5.3.2.	Грешке чији се утицај може учинити безначајним - грешке друге групе .....	153
	<i>Грешке које се ошклањају методама рада - грешке прве подгрупе</i> .....	154
	<i>Грешке чији се утицај избором услова при мерењу може учинити занемарљивим - грешке друге подгрупе</i> .....	154
	<i>Грешке које се ошклањају условима тачности - грешке прве подгрупе</i> .....	154
	<i>Грешке које се ошклањају поправкама - грешке четврте подгрупе</i> .....	154
<b>6.</b>	<b>АНАЛИЗА ПОУЗДАНОСТИ И ОЦЕНА КОМПОНЕНТИ ДИСПЕРЗИЈА ФАЗНИХ МЕРЕЊА БАЗНЕ ЛИНИЈЕ</b> .....	<b>155</b>
6.1.	<b>ОТКРИВАЊЕ РЕЗУЛТАТА КОЈИ ОДСКАЧУ - ТЕСТОВИ ГРУБИХ ГРЕШАКА</b> .....	156
6.2.	<b>АНАЛИЗА ПОУЗДАНОСТИ ОЦЕНА БАЗНИХ ЛИНИЈА</b> .....	157
6.2.1.	Унутрашња поузданост .....	157
6.2.2.	Спољашња поузданост .....	158
6.3.	<b>ОЦЕНА КОМПОНЕНТИ ДИСПЕРЗИЈА БАЗНИХ ЛИНИЈА</b> .....	160
6.3.1.	Модел компоненти дисперзија .....	160
6.3.2.	Оцена параметара модела .....	162
<b>7.</b>	<b>АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА</b> .....	<b>165</b>
7.1.	<b>ТЕРЕСТРИЧКА МЕРЕЊА</b> .....	166
7.1.1.	Опис мреже Експерименталног полигона Војногеографског института - ЕПВГИ .....	166
7.1.2.	Мерења у мрежи Експерименталног полигона Војногеографског института .....	167
7.2.	<b>GPS МЕРЕЊА</b> .....	168
7.2.1.	<b>GPS мерења у мрежи кратких дужина - мрежа Експерименталног полигона Војногеографског института</b> .....	168
	<i>Услови при мерењу</i> .....	170
	<i>Контрола мерења</i> .....	171
	<i>Обрада резултата мерења</i> .....	171
	<i>Оцена компонентни дисперзија мерења базних линија</i> .....	173
7.2.2.	Мерења у мрежи средњих дужина .....	178
7.2.3.	Мерења у мрежи великих дужина - мрежа референтних тачака за потребе ВЈ .....	181
	<i>Израда плана мерења</i> .....	182
	<i>Обрада вектора</i> .....	187
	<i>Изравнање мреже као слободне</i> .....	190
	<i>Повезивање мреже са ITRF</i> .....	190
	<i>Изравнање мреже као целине</i> .....	193
7.3.	<b>ИСПИТИВАЊЕ УТИЦАЈА НЕАДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛА ТРОПОСФЕРЕ И ИОНОСФЕРЕ</b> .....	194
7.3.1.	Испитивање ефеката релативног утицаја тропосфере .....	194
7.3.2.	Испитивање ефеката апсолутног утицаја тропосфере .....	198
7.3.3.	Испитивање ефеката изазваних неузимањем у обзир модела јоносфере .....	199
7.4.	<b>РЕЗУЛТАТИ АНАЛИЗЕ ПОУЗДАНОСТИ МЕРЕЊА БАЗНИХ ЛИНИЈА</b> .....	200
7.5.	<b>ОЦЕНА АДИЦИОНЕ КОНСТАНТЕ GPS АНТЕНА</b> .....	203
7.5.1.	Начин опажања и оцене базних линија .....	203
7.5.2.	Оцена адicione константе и њене несигурности .....	206
	<i>Формулација проблема</i> .....	206
	<i>Оцена дисперзије GPS резултата мерења која не зависи од величине дужине и адicione константе пара антена</i> .....	207
7.6.	<b>УПОРЕЂЕЊЕ АІВ МОДЕЛА И МОДЕЛА ДОБИЈЕНОГ ИЗ АНАЛИЗЕ</b> .....	208



8.	ЗАКЉУЧЦИ .....	215
	ПРИЛОЗИ .....	225
	ЛИТЕРАТУРА .....	245
	БИОГРАФИЈА .....	249

## 1. УВОД

---

“Глобални систем позиционирања (*GPS – Global Positioning System*) јесте просторно оријентисани навигациони систем намењен непрекидном задовољавању војних потреба за што тачнијим одређивањем тренутних положаја, брзине и времена покретних објеката у јединственом референтном систему, на коју, мору или ваздуху” (*Wooden, 1985* и *Hoffman-Wallenhof, 1994*).

У последње време, *GPS* се све интензивније развија чиме значајно проширује област своје примене. Од посебне важности су активности на (*Brunner, 1999*):

- дефинисању глобалног референтног оквира,
- имплементацији и одржавању националних геодетских мрежа,
- решавању проблема неодређености при *GPS* мерењима у реалном времену,
- испитивању ефеката утицаја извора грешака *GPS* мерења на станици *-site effects*,
- *GPS* метеорологији и
- контроли квалитета *GPS* резултата мерења у реалном времену.

Развој перманентних *GPS* мрежа, пре свега регионалних размера, значајно је изменио форму позиционирања. Осим у успостављању мрежа, *GPS* заузима све значајније место у оквиру даљинске детекције, постајући средство испитивања јоносфере и концентрације водене паре у тропосфери.

Лансирање руског сателита *SPUTNIK (1957)*, донело је преокрет у области сателитске геодезије. Први примери примене вештачких земљиних сателита, били су засновани на принципу звездане триангулације који је развијен у Финској крајем педесетих година овог века. Метод је захтевао јасну видљивост неба, што је представљало велику препреку у његовом даљем развоју. Убрзо затим, појављују се инструменти засновани на принципу електромагнетских таласа који су били применљиви у свим временским условима, уз истовремено постизање веће тачности и ниже цене. Њихова значајнија употреба, забележена је у време Другог светског рата (*High RANging sistem - HIRAN*) и имала је за циљ повезивање геодетских мрежа Северне Америке и Европе.

Други значајан помак у сателитској геодезији, настао је применом *Доплеровог ефекта* при мерењу дужине и брзине кретања. Доплеров ефекат представља промену фреквенције сигнала која се јавља као последица међусобног кретања одашиљача који емитује и пријемника који тај сигнал прима. Регистравање тачног времена емитовања и



пријема сигнала и познавање положаја сателита на путањи, омогућују оцену положаја *GPS* пријемника.

Следећи корак у развоју сателитских технологија јесте појава *Морнаричког навигационог сателитског система (Navi Navigational Satellite System - NNSS)* познатији као *TRANSIT* систем. Систем је чинило 6 сателита који су се кретали по орбитама на висини од *1100 km*. Систем је војне природе чији је основни циљ био одређивање координата објеката на мору и ваздуху. У геодезији, овај систем је такође оставио дубоки траг. Методом транслокације, постигнута је тачност позиционирања већа од *1m*. За разлику од *SPUTNIKA*, *TRANSIT* сателити су праћени са неколико широко распоређених земаљских станица, што је омогућавало прецизније рачунање ефемерид. Због ниских орбита и малог броја сателита, *TRANSIT* систем није могао задовољити потребе највеће тачности, па је седамдесетих година морао препустити место новијој технологији - *Глобалном систему позиционирања*.

За разлику од *TRANSIT* система, *GPS* је могао у сваком тренутку "дати" информацију о времену, положају и брзини кретања покретних објеката. Са орбитама на око *20000 km* изнад Земље, *GPS* сателити су знатно стабилнији у односу на *TRANSIT* сателите, чиме су створени услови за до тада најтачније мерење дужина између сателита и земаљских станица.

Глобални систем позиционирања, при мерењу псеудодужина до сателита, користи концепт познат под називом *time-of-arrival* или мерење временског периода путовања сателитског сигнала. Множењем временског интервала простирања сигнала са брзином његовог простирања, добија се растојање између *GPS* пријемника и сателита. Мерење времена простирања сигнала емитованих са више сателита (најмање три сателита) даје могућност оцене положаја *GPS* пријемника. Како је емитовани сигнал оријентисан само у једном смеру (*one way concept*) он у себи мора садржати податак о временском тренутку напуштања сателита. Часовник у сателиту има "обавезу" не само да производе већ и да контролише податак о временској епохи на коју се односе подаци положаја сателита. Сви часовници у сателитима су синхронизовани у оквиру интерног временског система - *GPS* системског времена. Пријемник на Земљи, садржи часовник који такође мора бити синхронизован са системским временом. Информација о времену је саставни део сателитског сигнала чиме се пријемнику омогућује да срачуна тренутак када сигнал напушта сателит. Регистравањем времена пријема сигнала (у *GPS* пријемнику) рачуна се временски период простирања сигнала, а тиме и дужина између пријемника и сателита.

Свако мерено растојање дефинише једну сферну површ као место могуће локације *GPS* пријемника. Мерењем дужина на три сателита добијају се три такве површи. Пресек

три сфере даје две могуће тачке (решења) од којих је једну лако одбацити као немогуће решење (једно је на земљи, а друго високо изнад ње), (*Kaplan, 1995*).

Ради формулисања проблема сателитског позиционирања и навигације, неопходно је схватање појмова везаних за референтне координатне системе у којем се сателити и пријемници налазе. Положаји сателита и пријемника се често исказују векторима положаја и брзине у оквиру просторних правоуглих координатних система од којих се издвајају два: инерцијални (стационарни) и обртни. Инерцијални подразумева да се једначине кретања сателита могу моделовати уз претпоставку да је систем неубрзан, односно, да у таквом систему важе Њутнови закони кретања и гравитације. Због извесних нерегуларности у обртању Земље (изазваних обликом Земље, густином распореда маса као и променљивог просторног односа привлачних сила које на њу делују) инерцијални систем (још се назива *Conventional Inertial System - CIS* или *Earth Centered Inertial - ECI*) није потпуно стабилан. Проблем се превазилази везивањем положаја оса система за одређени тренутак, епоху. Из тог разлога *CIS (ECI)* користи оријентацију екваторске равни у 12:00 часова *UTC(USNO)* на дан 1. јануара 2000. године.

За разлику од инерцијалног система у којем се рачунају положаји сателита, природно би било положаје пријемника изразити у систему који је везан за Земљу и заједно са њом ротира око њене обртне осе. Овај се систем назива *ECEF (Earth Centered Earth Fixed* или *Conventional Terrestrial Reference System - CTRS*). У овом систему, *XY* координатна раван се поклапа са равни екватора, *X* оса је усмерена у правцу Гриничког меридијана, док је *Z* оса управна на екваторску раван и усмерена је у правцу географског севера. Да би се из резултата *GPS* мерења добиле координате положаја *GPS* пријемника, неопходно је положаје сателита трансформисати из *ECI* у *ECEF* систем. Комплетна трансформација је описана у поглављу 2.1.1.

Резултат обраде мерења јесу просторне правоугле координате *GPS* пријемника у *ECEF* систему. Међутим, уобичајено је да се просторне координате изразе (трансформишу) у облику геодетске ширине, дужине и висине, што захтева познавање физичког модела Земље. Стандардни физички модел Земље који се користи у *GPS* применама, назива се *Свејшким геодетским системом 1984 (World Geodetic System 1984 - WGS84)*. Модел система састоји се из два дела: физичког и геометријског. Геометријски модел система *WGS84* чини елипсоид одређених димензија са исходиштем у центру масе Земље, *X* осом усмереном у правцу Гриничког меридијана, *XY* површи која се поклапа са средњим положајем равни екватора у епохи 1984 и *Z* осом која се поклапа са осом ротације у истој епохи. Обртни елипсоид обезбеђује једноставан и довољно тачан модел геометријског облика Земље и погодан је математички дефинисано тело за формулисање

тродимензионалних и дводимензионалних геодетских (математичких) модела. Полазећи од тога, да је избором обртног елипсоида добијен једноставан математички модел Земље, функција елипсоида се проширује додајући му гравитационо поље које апроксимира актуелно земљино гравитационо поље. Наиме, слично као што се Земља може описати гравитацијом и потенцијалом, тако се на сличан начин и обртни елипсоид, уз одређене спецификације, може физички дефинисати. У моделовању гравитационог поља елипсоида, мора се узети у обзир одговарајућа маса елипсоида као и његова ротација заједно са Земљом. Успостављањем одређених математичких услова, површ елипсоида се дефинише као еквипотенцијална површ која има сопствено нормално гравитационо поље (нормално јер су линије виска нормалне на површ елипсоида). Такав елипсоид се назива нивоским елипсоидом. Нормални потенцијал гравитације  $-U$  се у потпуности дефинише са четири константе, и то: великом полуосом елипсоида  $-a$ , динамичким фактором форме  $-J_2$ , производом Њутнове гравитационе константе и масе земље  $-GM$  и угаоном брзином земље  $-\varepsilon$ .

*ECEF* координатни систем је заступљен *WGS84* референтним елипсоидом у односу на кога се просторне координате  $(X, Y, Z)$  трансформишу у геодетске  $(\varphi, \lambda, h)$ , при чему је  $h$  елипсоидна висина *GPS* пријемника. Међутим, надморске висине могу бити значајно различите од *GPS* добијених елипсоидних висина. Разлика је последица непоклапања површи *WGS84* елипсоида и геоида (који се практично апроксимира локалним средњим нивоом мора).

Поглавље 2.2.1 описује кретање сателита и рачунање њихових положаја у равни орбите. Истакнуте су силе које делују на сателите од којих је најзначајнија сила земљине гравитације. Поред ње, описани су утицаји гравитације “трећег тела” (Сунца и Месеца), притисак сунчеве радијације, релативистички утицаји и др. Орбите сателита су описане користећи шест орбиталних параметара, временском епохом на коју се односе и карактером њихових временских промена.

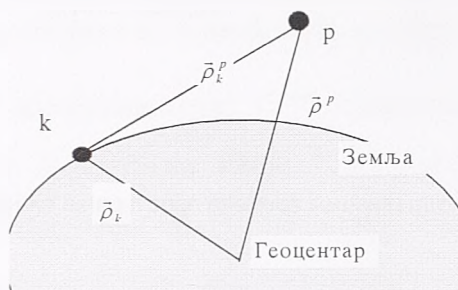
*GPS* сателити емитују сигнале чија је структура подређена преношењу информација потребних за мерење дужина између сателита и пријемника као и података неопходних у навигацији. Сигнали садрже кодове којима су модулисане носеће фреквенције. Кодови, иако делују као случајне секвенце бинарних вредности, детерминисани су и предвидиви, тако да се и у пријемнику могу по истом математичком поступку произвести. Има их два, један са краћим периодом понављања ( $1ms$ ) и назива се *CA* (*coarse acquisition*) и други са периодом од око 267 недеља, при чему су интересантне његове седмодневне секвенце које се понављају после сваке поноћи између суботе и недеље и назива се *P* кодом. *P* код је заштићен комбиновањем са тзв. *W* кодом, при чему се добија *Y* код.



Задатак *GPS* пријемника јесте да одреди (оцени) геоцентрични вектор  $\vec{\rho}_k$  који репрезентује његов положај у односу на *CTRS (ECEF)* координатни систем. Познавајући координате сателита и мерећи дужине до истог, вектор геоцентричног положаја тачке (слика 1-1) одређен је изразом облика.

$$\vec{\rho}_k = \vec{\rho}^p - \vec{\rho}_k^p, \quad (1-1)$$

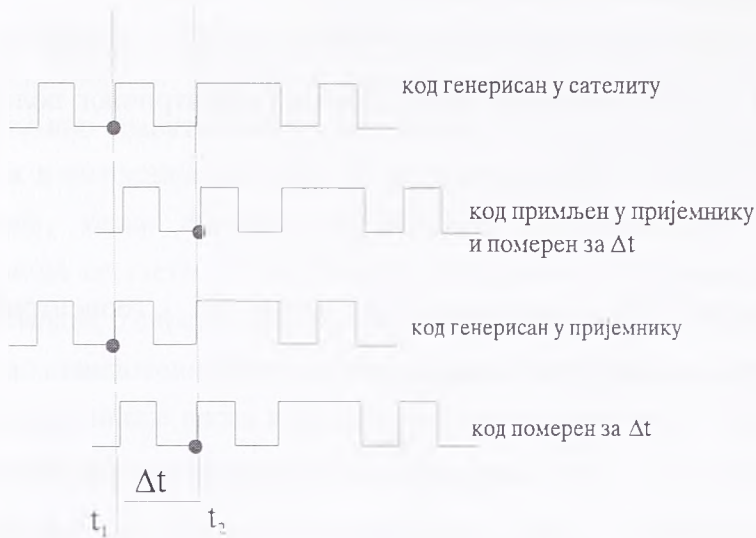
где је:  $\vec{\rho}_k$  - геоцентрични вектор положаја стајне тачке,  $\vec{\rho}^p$  - геоцентрични вектор положаја сателита, а  $\vec{\rho}_k^p$  - вектор резултата мерења.



Слика 1-1: Основни троугао положаја

Код генерисан у сателиту у тренутку  $t_1$ , у *GPS* пријемнику пристиже у тренутку  $t_2$ . Време простирања сигнала јесте  $\Delta t$  (слика 1-2). У пријемнику се генерише исти код који се затим временски помера све до потпуне корелације са пристиглим кодним сигналом. Уколико су часовници у сателиту и пријемнику у потпуности синхронизовани, процес корелације ће дати право време простирања сигнала. Како, из практичних разлога, *GPS* пријемници користе јефтине часовнике, то је њихова сагласност са сателитским системским временом недовољна, што има за последицу да је резултат мерења дужине од сателита до пријемника за тај утицај померен, па се отуда дужина  $\|\vec{\rho}_k^p\|$  често назива *псеудодужином (pseudorange)*.

Након укључења *GPS* пријемника, захваљујући подацима које пријемници поседују о положајима сателита, успоставља се “контакт” са “видљивим” сателитима. Тада, поред кодних мерења, пријемник врши сабирање циклуса (периода) фазних осцилација сигнала изазваних помаком фреквенције услед Доплеровог ефекта на  $L1$  и  $L2$  носећим таласима (један циклус репрезентује помак од  $2\pi$  радијана или једну таласну дужину).

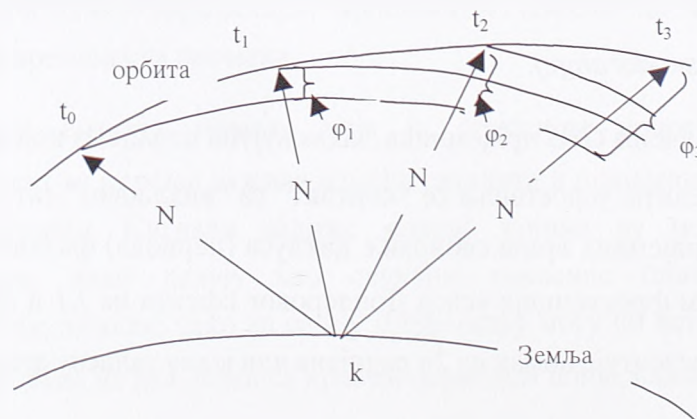


Слика 1-2: Принцип одређивања времена простирања сигнала уз помоћ кода

У свакој епохи мерења, пријемник збиру циклуса из претходне епохе додаје циклусе добијене интеграцијом фреквенције носећег таласа  $-f_d$  промењене услед Доплеровог ефекта у текућој епохи<sup>1</sup>, при чему  $f_d$  представља брзину промене носеће фазе у периоду трајања епохе.

На крају сваке епохе, укупном броју циклуса, пријемник додаје резултат мерења - део фазе у оквиру једног циклуса (најчешће, псеудодужина не садржи цео број циклуса).

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \int_{t_1}^{t_2} f_d(t) dt + \Delta\varphi_2 \tag{1-2}$$



Слика 1-3: Фазна мерења

<sup>1</sup> Претпоставимо да је пријемник укључен у епохи  $t_0$ . У епохи  $t_2$ , фазно оцажање  $\varphi_2$  садржи фазно оцажање у епохи  $t_1$  -  $\varphi_1$ , укупан број циклуса између епоха  $t_1$  и  $t_2$  (интеграл у изразу 1-2) и мерену вредност дела фазе

Иако се реконструкција броја циклуса између две епохе мерења и мерење дела фазе унутар једног циклуса једноставно реализују, фазна мерења су неодређена јер је укупан број циклуса између пријемника и сателита (*ambiguities - N*) непознат (слика 1-3). Проблем се решава на више начина. Један од њих се заснива на формирању двоструких разлика кодних псеудодужина, у односу на која се врши уклапање (*centering*) одговарајућих двоструких разлика фазних мерења. Као резултат ове операције, добијају се тзв. "*smoothed-code*" опажања двоструких разлика која више нису неодређена. Проблем непознавања укупног броја циклуса није само актуелан код директних фазних мерења, већ се он појављује и код интерферометријских мерења, где спадају релативне методе *GPS* позиционирања о којима ће касније бити више речи.

Предност употребе двофреквентних *GPS* пријемника је вишеструка. Једна од значајнијих јесте могућност формирања збира и разлике *L1* и *L2* фреквенција. Као резултат, добијају се таласне дужине од *10.7cm* и *86.25cm*. Прва се добија из разлике фреквенција носећих таласа (*wide lane* врста опажања), а друга из збира (*narrow lane* врста опажања) и обе имају значајну улогу у процесу ефикасног решавања неодређености.

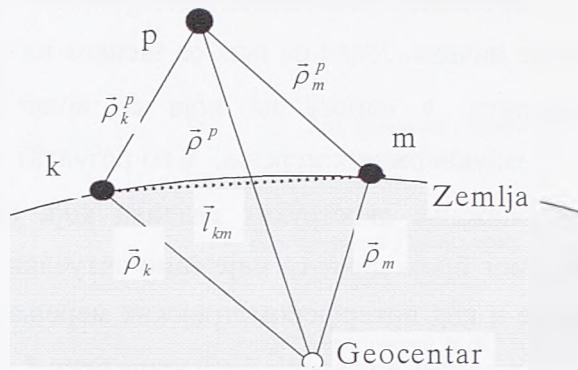
Псеудодужина између пријемника и сателита се може оценити из кодних или фазних мерења. Кодна мерења немају значајнију примену у геодетском премеру. За разлику од кодних, фазна мерења омогућују центиметарску тачност оцене дужине. Међутим, овај ниво тачности практично је тешко остварити, првенствено због природе утицаја неколико фактора – извора грешака. Зависност оцене псеудодужине од појединих извора грешака се најбоље види из модела фазних мерења. Наиме, грешка мерења псеудодужина биће сагласна тачности мерења фаза сигнала (0.01 циклуса), ако је грешка часовника у пријемнику позната са тачношћу од *0.01 ns*. Услед значајних утицаја појединих извора грешака на директна фазна и кодна мерења, у обради *GPS* резултата мерења, формирају се њихове разлике, између: станица, сателита и различитих епоха. Овим се поступком значајно редукују утицаји појединих извора грешака, а тачност оцена битно повећава.

Први покушаји ове врсте, везују се за *I. Smith (Hofmann and Wellenhof i dr., 1994)* који је 1964. предложио наведени принцип мерења. Њему се касније придружује и *R. Easton (Hofmann and Wellenhof i dr., 1994)*, користећи поменути принцип при формирању фазних разлика између сигнала добијених са два или више сателита, што чини основу интерферометријског принципа, кога *Counselman (Hofmann and Wellenhof i dr., 1994)* описује при истраживањима спроведеним на Институту за технологију у *Massachusetts (Institute of technology from the Massachusetts - MIT)*, при праћењу ракете *Apolo 16*.

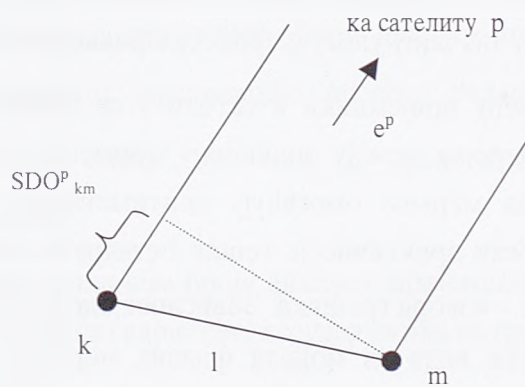




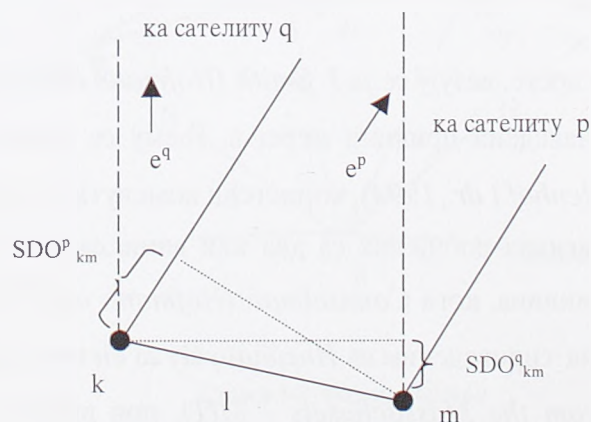
Примењени принцип рада, био је основа при конструкцији првог *GPS* пријемника (слике 1-4, 1-5 и 1-6).



Слика 1-4: Релативна метода мерења



Слика 1-5: Опажање једноструке разлике



Слика 1-6: Опажање двоструке разлике



Тачност оцене положаја пријемника зависи од:

- тачности положаја сателита,
- тачности мерења дужине између сателита и пријемника и
- квалитета геометрије сателита у односу на пријемник.

Оцена тачности путање сателита као и утицај геометрије нису предмет детаљнијег бављења овог рада. Рад је првенствено усмерен на анализу извора грешака *GPS* мерења и дефинисање неопходних услова при мерењу како би се постигла највиша могућа тачност оцена параметара - координата тачака. Обрађене су методе апсолутног и релативног позиционирања, при чему је посебан акценат дат релативним методама оцене вектора базне линије (методе једноструких и двоструких разлика - слике 1-5 и 1-6). Најпростији пример релативног позиционирања јесте када се са две станице опажа један сателит (слике 1-4 и 1-5). Тада, једначина опажања представља линеарну функцију облика

$$SDO_{km}^p = (\bar{l}_{km} \cdot \bar{e}^p) \cdot \lambda^{-1} = \varphi_{km}^p(t) = \varphi_k^p(t) - \varphi_m^p(t) = \frac{f}{c} [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] \quad (1-3)$$

где је:  $\bar{e}_{km}^p$  јединични вектор у правцу сателита  $p$  (кофицијенти матрице  $\mathbf{A}$  -израз 3.2.1-10)

Вектор  $\bar{l}_{km}$  се обично изражава правоуглим координатним разликама у *WGS84*, тј.

$$\bar{l}_{km} = \begin{bmatrix} u_m - u_k \\ v_m - v_k \\ w_m - w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_u \\ l_v \\ l_w \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

Оценом вектора базне линије између две тачке, остварен је први циљ релативног позиционирања. Други циљ јесте оцена положаја непознате тачке  $m$  у односу на познату тачку (на пример, тачка  $k$  је позната из ранијих мерења или из навигационог решења). Положај тачке  $m$ , добија се као

$$\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_k + \bar{l}_{km} \quad (1-5)$$

Резултат *GPS* мерења се добија у овој форми, уколико се опажа са два пријемника и уколико се обрада носећих таласа врши "вектор по вектор" (*vektor by vektor*). Комплетна коваријациона матрица је блок дијагонална, са субматрицама  $(3 \times 3)$  на дијагонали. Једна опажачка сесија са  $R$  пријемника, даје  $R-1$  независних вектора и  $3 \times (R-1) \times 3 \times (R-1)$  коваријациону матрицу координатних разлика. Примарни резултат *GPS* премера није само добијени вектор између две станице, већ између више станица (мрежа). У обради резултата мерења, циљ унутрашњег (*inner*) и/или минимално условљеног (*minimally constrained*) векторског решења јесте објединити независно опажане векторе или сесије у једно решење (мрежу).

Прецизна оцена вектора базне линије је могућа само уколико се метода мерења добро познаје, тј. уколико се познају карактер и ефекти утицаја појединих извора грешака, како би се смањењем доминантних грешака (или чинећи их безначајним) утицало на повећање тачности резултата мерења. При анализи методе мерења пошло се од закључака изведених на *Астрономском институту Универзитета у Берну* (*Astronomical Institute of the University of Berne - AIUB*). Као основа анализе тачности *GPS* мерења у *AIUB*, узета су опажања *једносателитних фазних разлика* која се геометријски могу интерпретирати као разлике дужина између једног сателита и два пријемника (слика 1-5). При извођењу објективне оцене тачности *GPS* мерења базних линија, *AIUB* је користио терестричка (у мрежи кратких дужина,  $10\text{ km} \times 10\text{ km}$ ) и екстратерестричка (у мрежама великих дужина, преко  $100\text{ km}$ ) мерења, на дужинама од  $500\text{ m}$  до  $4200\text{ km}$  (*Beutler, G i dr., 1987*). На основу анализе резултата мерења, изведена је емпиријска формула облика

$$\frac{\Delta l}{l} = 0.7 \cdot l^{-0.42} \text{ mm / km} \quad (1-6)$$

где је:  $\Delta l/l$  - релативна грешка у  $\text{mm/km}$ , а  $l$  - дужина у  $\text{km}$ .

Израз је изведен уз претпоставке: да се мери са двофреквентним пријемницима, да инструменти садрже најмање *SA* код, да нема утицаја рефлексије и да је програм за обраду "идеалан" односно, да програм узима у обзир све изворе грешака и моделује њихов утицај.

Тачност оцене базних линија се може добити и из анализе методе мерења. Анализирајући утицаје појединих извора грешака на тачност оцене дужине базне линије, могу се издвојити две групе утицаја:

- утицаји прве групе - спадају извори грешака који утичу на тачност оцена висина и
- утицаји друге групе - спадају извори грешака који утичу на тачност оцена дужина базних линија.

Према карактеру утицаја, извори грешака *GPS* мерења дужина базних линија могу бити доминантни или се њихов утицај може учинити безначајним (поглавље 5.3). Поред грешака положаја сателита, један од доминантних извора грешака јесте средина кроз коју се сигнал простире. Наиме, познато је да атмосфера има слојевит састав и да сигнал који пролази кроз атмосферу мења своју брзину и облик. Такође, пажњу треба посветити тачности положаја фиксне тачке, тачности познавања адicione константе антена и ефектима одбијања сигнала од околних објеката (*multipath*).

На мрежама кратких, средњих и великих дужина, испитани су ефекти утицаја медија на оцену параметара модела и дефинисани су услови при мерењу и обради резултата *GPS* мерења. Дат је и један поступак оцене адicione константе *GPS* антена и



анализирана је тачност *GPS* резултата мерења базних линија. Кроз анализу поузданости мерења базних линија, релативном методом фазних мерења показана је могућност оптимизације плана опажања или начина обраде резултата мерења. На примеру реалних резултата мерења, анализом мера поузданости, извршен је избор референтног сателита. На сличан начин се може анализирати најповољнији план опажања, период мерења и сл. Поред мера поузданости, применом модела компоненти дисперзија, показана је могућност оцене стохастичког модела *GPS* мерења, чиме се математички модел изравнања значајно употпуњује. На крају, упоређење *AIUB* модела са моделом добијеним из анализе методе, указује на високи степен корелације два решења и потврђује оправданост напора на дефинисању модела оцене тачности резултата *GPS* мерења базних линија из анализе, што је и био основни циљ овог рада.



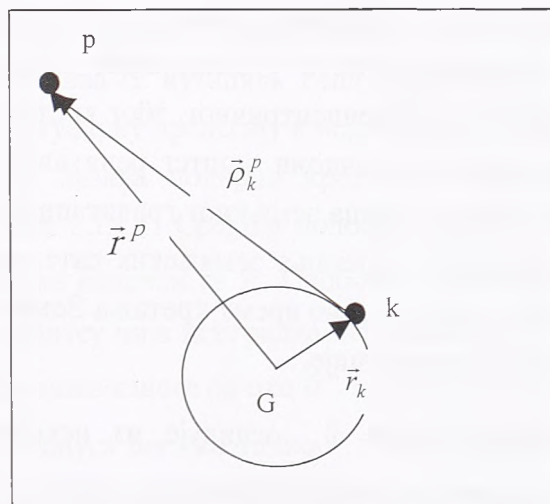


## 2. ОСНОВЕ GPS

### 2.1. РЕФЕРЕНТНИ СИСТЕМИ

Основна једначина опажања која повезује топоцентрични вектор положаја сателита  $\vec{\rho}_k^p$  са геоцентричним вектором положаја сателита  $\vec{r}^p$  и геоцентричним вектором положаја тачке опажања  $\vec{r}_k$ , изгледа

$$\vec{\rho}_k^p = \vec{r}^p - \vec{r}_k \quad (2.1-1)$$



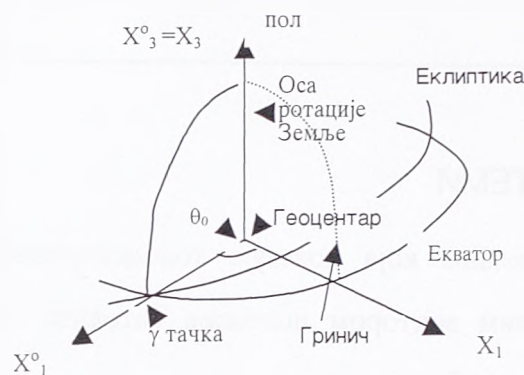
Слика 2.1.1: Вектори положаја

У изразу (2.1-1) оба геоцентрична вектора морају бити изражена у јединственом координатном систему. Дефинисање тродимензионалног правоуглог система захтева избор оријентације координатних оса и позиционирање исходишта система.

Код глобалних примена (случај сателитске геодезије) употребљавају се екваторски координатни системи. Два су основна типа екваторских координатних система од посебног значаја. То су: *проспирни* или *инерцијални* систем  $X_i^0$  и *земаљски* или *терестрички* систем  $X_i$ , при чему је  $i = 1, 2, 3$ . Вектор угаоне брзине Земље  $\vec{\omega}_E$  служи као  $X_3$  оса у оба система. Оса  $X_1^0$  просторног система је усмерена према тачки пролећне равнодневнице која се налази на пресеку екваторске и еклиптичке равни. Оса  $X_1$  терестричког система дефинисана је линијом пресека екваторске равни са равни Гриничког меридијана. Угао  $\mathcal{S}_0$



између два система се назива *Гриничко звездано време*. Оса  $X_2$  је ортогонална на осе  $X_1$  и  $X_3$  и с њима комплетира десни координатни систем.



Слика 2.1-2. Екваторски координатни системи

Координатни систем чије се исходиште налази у барицентру јесте стационаран (непокретан) у односу на сунчев систем и у њему важе закони Њутнове механике. Геоцентрични систем, за разлику од барицентричног, због кретања Земље око Сунца је убрзан и у њему се морају уважавати закони општег релативитета. Међутим, како су главни релативистички ефекти последица земљиног гравитационог поља, геоцентрични систем је адекватнији за описивање кретања земаљских сателита. Осе геоцентричног координатног система остају паралелне, сво време кретања Земље око Сунца, јер се ово кретање описује као револуција без ротације.

Вектор угаоне брзине Земље  $\vec{\omega}_E$  осцилује из неколико разлога. Основне диференцијалне једначине којима се описују осцилације, следе из класичне механике и гласе,

$$\vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt} \quad (2.1-2)$$

$$\vec{M} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} + \vec{\omega}_E \times \vec{N}$$

где је:  $\vec{M}$  – вектор момента силе,  $\vec{N}$  – вектор момента импулса Земље, а  $t$ – време. Симбол  $\times$  указује да се ради о векторском производу. Вектор момента силе  $\vec{M}$  настаје као последица гравитационих сила Сунца и Месеца. Прва једначина у (2.1-2) је изражена у (квази) инерцијалном систему као што је  $X_1^0$ , док друга једначина важи у ротирајућем систему  $X_1$ . Парцијални изводи изражавају временске промене  $\vec{N}$  у односу на терестрички систем, а векторски производ узима у обзир ротацију овог система у односу на инерцијални. Вектор  $\vec{\omega}_E$  је повезан са вектором  $\vec{N}$  преко тензора инерције  $\vec{C}$ , као

$$\vec{N} = \vec{C} \cdot \vec{\omega}_E \quad (2.1-3)$$

Вектор угаоне брзине Земље  $\vec{\omega}_E$  се може изразити и као

$$\vec{\omega}_E = \omega_E \cdot \vec{\omega}, \quad (2.1-4)$$

где су:  $\vec{\omega}$  - јединични вектор, а  $\omega_E$  норма вектора угаоне брзине Земље.

Диференцијалне једначине (2.1-2) имају двоструки смисао, јер осцилације осе  $\omega$  утичу на варијације  $X_3$  осе, а осцилације норме  $\omega_E$  изазивају промене у брзини ротације. Узимајући у обзир само хомогени део (када је  $\vec{M} = 0$ ) израза (2.1-2) описују се слободне осцилације. Нехомогено решење даје принудне (*forced*) осцилације. У оба случаја, осцилације се могу повезати са инерцијалним или терестричким системом.

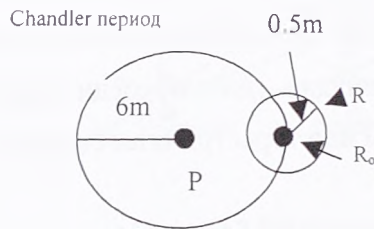
### 2.1.1. Координатни системи

#### Дефиниције

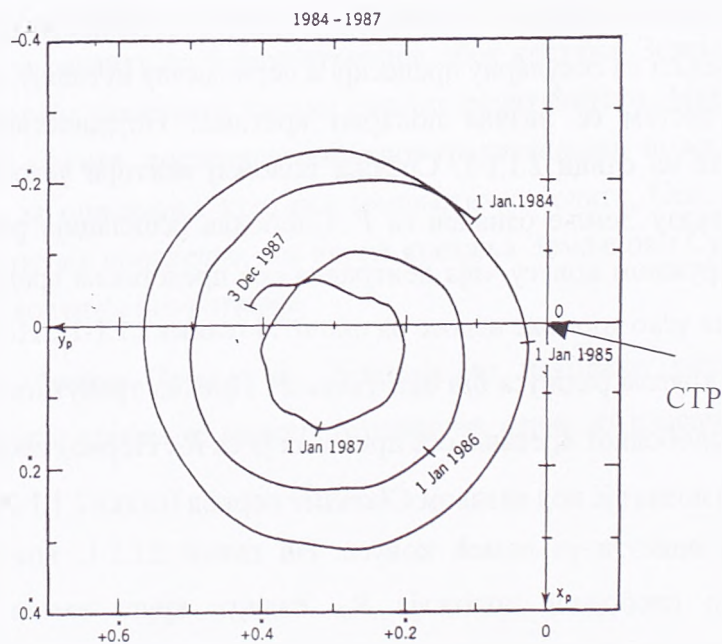
Осцилације вектора угаоне брзине Земље (оса земљине ротације) у односу на инерцијални простор, назива се нутација. Ради једноставности приказа, укупни ефекат утицаја је подељен на секуларну прецесију и периодичну нутацију. Осцилација у односу на терестрички систем се назива поларно кретање. Поједностављен приказ поларног кретања је дат на слици 2.1.1-1. Средњи положај вектора угаоне брзине Земље је на поларном приказу Земље означен са  $P$ . Слободна осцилација резултира кретањем осе ротације по кружном конусу чија централна оса представља средњи положај ротације и чији централни угао достиже износе од око  $0''.4$  (слика 2.1.1-1). На Земљи, ово кретање је приказано са кругом радијуса  $bt$  око тачке  $P$ . Приказ тренутног положаја осе ротације као резултат слободног кретања осе приказан је са  $R_0$ . Период слободног кретања износи око 430 дана и познат је под називом *Chandler* период (слика 2.1.1-2). Принудно кретање се може такође описати уз помоћ конуса. На слици 2.1.1-1, конус је приказан кругом описаним око слободног положаја  $R_0$ . Радијус круга зависи од плимних утицаја (гравитација Сунца, Месеца и сл. – *tidal deformation*) и износи око  $0.5 m$ . Приближно дневни период принудног кретања је коресподентан тесералном делу потенцијала другог степена док зоналне и секторалне компоненте немају утицаја.

Респективна кретања осе угаоног момента, која су у границама од око  $0''.001$  од осе ротације су веома слична. Слободно кретање осе момента импулса заслужује посебну пажњу јер се принудно кретање може моделовати. Слободно поларно кретање јесте дугопериодично и слободни положај у простору је фиксиран. За  $\vec{M} = 0$  интеграција (2.1-1) даје  $\vec{N} = const$ . Другим речима, овај резултат је последица закона о очувању момента импулса и важи све до узмања у обзир утицаја спољашњих сила. Због напред наведених карактеристика, оса момента импулса је погодна за дефинисање референтне осе, а у

стручној терминологији се слободни положај исте у простору назива *Небеским ефемеридским њолом* (*Celestial Ephemeris Pole – CEP*). У терестричком систему, референтну осу чини средњи положај осе ротације приказан као *P* (слика 2.1.1-1). Њен положај се назива *Конвенционалним међународним исходишћем* (*Conventional International Origin – CIO*). Из историјских разлога, *CIO* репрезентује средњи положај осе ротације за период од 1900 до 1905.



Слика 2.1.1-1: Кретање обртне осе



Слика 2.1.1-2: Поларно кретање осе ротације Земље (*Leick, 1995*)

### Конвенционални инерцијални систем

По конвенцији,  $X_3^0$  оса је идентична са положајем осе момента инерције за стандарну епоху, означену као *J2000.0*. Оса  $X_1^0$  је усмерена у правац тачке пролећне равнодневнице. Тачка пролећне равнодневнице је реализована кинематички, уз помоћ фундаменталних звезда. Како је овај систем конвенционално дефинисан, његова практична реализација не коинцидира у потпуности са теоретским системом, тако да се исти назива (конвенционално) оквиром *Инерцијалног референцијног система* (*Inertial*



*Reference Frame - IRF*). Понекад се користи израз *quasi-inertial*, ради истицања да геодетички систем, због убрзаног кретања Земље око Сунца, није строго инерцијалан.

#### Конвенционални терестрички референтни систем

Такође, према конвенцији,  $X_3$  оса је идентична са средњим положајем осе земљине ротације, дефинисаним као *CIO*. Увођењем неких додатних нутација, *CIO* пол мења положај и назив у *конвенционални терестрички пол (Conventional Terrestrial Pole - CTP)*. *CEP* је везан са *CTP* координатама кретања пола ( $x_p$  и  $y_p$ ). Исходиште поларног кретања координатног система је у *CTP*,  $x_p$  оса је усмерена ка Гринвичком меридијану, а  $y_p$  оса је позитивна у правцу 270. степена меридијана (слика 2.2.2-2). Конвенционални терестрички екватор је ортогоналан на правац *CTP* пола. Оса  $X_1$  је усмерена у правац средњег Гриничког меридијана. Реализација оваквог система се назива (конвенционално) оквиром *терестричког референтног система (Terrestrial Reference Frame – TRF)* и дефинише се скупом терестричких контролних станица које служе као референтне тачке. Већина референтних тачака је опремљена опремом за мерење дужина до сателита (*Satellite Laser Ranging - SLR*) и дугобазисна интерферометријска мерења (*Very Long Baseline Interferometry - VLBI*).

Пример једног таквог терестричког референтног оквира је успостављен од стране *Међународне службе за земљину ротацију (International Earth Rotation Service – IERS)*. Терестрички референтни оквир се назива *ITRF* при чему прво слово указује да се ради о *IERS* исходишту. *ITRF* се сваке године допуњује (поправља), па се зато скраћеници *ITRF* на крају додају задње две цифре године на коју се параметри координатног система односе.

Табела 2.1.1-1. Параметри *WGS-84* елипсоида

Параметар и његова вредност	Опис
$a = 6378137 \text{ m}$	Велика полуоса елипсоида
$C_{2,0} = -484.16685 \cdot 10^{-6}$	Зонални коефицијент другог степена
$\omega_E = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad/s}$	Угаона брзина ротације Земље
$\mu = 3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$	Гравитациона константа Земље

Од 1987. године, *GPS* користи *Светски геодетски систем (World Geodetic System – WGS84)* као референтни. *WGS-84* је геодетички еквипотенцијални обртни елипсоид кога дефинишу четири параметра дата у Табели 2.1.1-1. Користећи се теоријом еквипотенцијалног елипсоида, добијају се нумеричке вредности осталих параметара као што су спљоштеност  $f = 1/298.2572236$  или мала полуоса  $b = 6356752.314 \text{ m}$ . Вредности параметара су дефинисани у односу на елипсоид *Геодетског референтног система 1980 (Geodetic Reference System 1980 – GRS-80)*. Међутим, код *GRS-80* зонални коефицијент

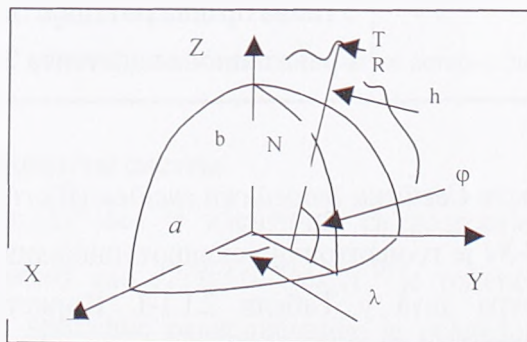
$J_2 = -\sqrt{5} \cdot C_{2,0}$  је дефинисан полазећи од вредности  $J_2 = 108263 \cdot 10^{-8}$ . Оригинални зонални коефицијент је дефинисан са шест цифара, док се сада исти дефинише са осам. Ово изазива разлику у спљоштености  $\Delta f = f_{GRS} - f_{WGS} = 16 \cdot 10^{-12}$ .



Слика 2.1.1-3: Конвенционални терестрички референтни систем (Leick, 1995)

Пошто су координате поларног кретања мале у поређењу са луком од  $90^\circ$  (од пола до екватора), у свим практичним применама се изједначава лук између тачке пролећне равнодневнице и тачке  $C$  (мерен дуж правог небеског екватора) и лук од  $B$  до  $A$  (мерен дуж терестричког екватора).

Вектор положаја неке тачке  $T$  у терестричком систему се може приказати правоуглим координатама  $X, Y, Z$  или елипсоидним координатама  $\varphi, \lambda$  и  $h$ . Правоугле (картезијанске) координате се често називају *Earth-Centered-Earth-Fixed (ECEF)* координатама.



Слика 2.1.1-4: Картезијански координатни систем

Веза између два система координата дефинише се као

$$X = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ (N+h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \left(\frac{b^2}{a^2} N+h\right) \cdot \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (2.1.1-1)$$

где су:  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $h$  – елипсоидна латитуда, лонгитуда и висина,  $N$  – радијус закривљености по првом вертикалу,  $a$ ,  $b$  - велика и мала полуоса елипсоида.

### Трансформације

Трансформација између *CIS* и *CTRS* система изводи се уз помоћ неколико ротација облика

$$\bar{x}_{CTS} = \mathbf{R}^M \cdot \mathbf{R}^S \cdot \mathbf{R}^N \cdot \mathbf{R}^P \cdot \bar{x}_{CIS}, \quad (2.1.1-2)$$

где су:

$\mathbf{R}^M$  – матрица ротације за утицај поларног кретања,

$\mathbf{R}^S$  - матрица ротације за утицај звезданог времена,

$\mathbf{R}^N$  - матрица ротације за утицај нутације и

$\mathbf{R}^P$  - матрица ротације за утицај прецесије.

*CIS* је дефинисан за стандардну епоху *J2000.0* и узимајући у обзир прецесију и нутацију, трансформише се у тренутни или прави (*true*) систем у епохи мерења. Оса  $X_3^0$  правог *CIS* репрезентује слободни положај осе ротације и усмерена је у правцу *CEP*. Ротирајући *CIS* око  $X_3^0$ , уз помоћ матрице  $\mathbf{R}^S$  за вредност звезданог времена, положај *CEP* се неће променити. На крају, *CEP* се уз помоћ матрице  $\mathbf{R}^M$  ротира у *CIO* (*CTP*), чиме се трансформација комплетира.

Матрице ротације у (2.1.1-2) састављене су из елементарних матрица  $\mathbf{R}_i(\alpha)$  које описују позитивне ротације координатног система око  $X_i$  оса за износ угла  $\alpha$ . Ротационе матрице имају следећи облик

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1(\alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_2(\alpha) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_3(\alpha) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.1-3)$$



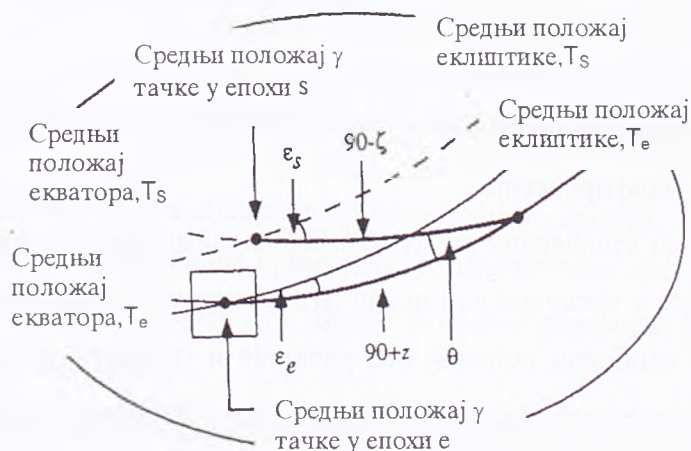
Напред приказане матрице су конзистентне у односу на десни координатни систем. Угао ротације  $\alpha$  има позитиван знак за ротацију у правцу казаљке на сату, посматрано из исходишта према позитивним смеровима оса  $X_i$ .

### Прецесија

Графички приказ прецесије је дат на слици 2.1.1-5. Средњи положај тачке пролећне равнодневнице у стандардној епохи  $t_0$ , означен је са  $\gamma_e$ , а положај у епохи  $t$  је означен са  $\gamma_s$ . Матрица ротације за утицај прецесије  $\mathbf{R}^P$ , добија се множењем три сукцесивне ротационе матрице, облика

$$\mathbf{R}^P = \mathbf{R}_3\{-z\} \cdot \mathbf{R}_2\{\vartheta\} \cdot \mathbf{R}_3\{\zeta\}, \quad (2.1.1-4)$$

где су:  $z, \vartheta, \zeta$  - параметри прецесије.



Слика 2.1.1-5: Прецесија (Leick, 1995)

Експлицитно, уколико се у (2.1.1-4) уврсте ротационе матрице, добија се

$$\mathbf{R}^P = \begin{bmatrix} \cos z \cos \vartheta \cos \zeta - \sin z \sin \zeta & -\cos z \cos \vartheta \sin \zeta - \sin z \cos \zeta & -\sin z \sin \vartheta \\ \sin z \cos \vartheta \cos \zeta + \cos z \sin \zeta & -\sin z \cos \vartheta \sin \zeta + \cos z \cos \zeta & -\sin z \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \zeta & -\sin \vartheta \sin \zeta & \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad (2.1.1-5)$$

Параметри прецесије се рачунају на основу следећег израза (*Nautical Almanac Office, 1983*)

$$\begin{aligned} \zeta &= 2306.''2181 \cdot T + 0.''30188 \cdot T^2 + 0.''017998 \cdot T^3 \\ z &= 2306.''2181 \cdot T + 1.''09468 \cdot T^2 + 0.''018203 \cdot T^3 \\ \vartheta &= 2004.''3109 \cdot T + 0.''42665 \cdot T^2 + 0.''041833 \cdot T^3 \end{aligned} \quad (2.1.1-6)$$

Период  $T$  представља време између стандардне епохе  $J2000.0$  и епохе опажања и изражава се у Јулијанским вековима (Јулијански век садржи 36525 средњих сунчевих дана). На пример, за  $J1990.5$ , тј.  $T = -0.095$ , добија се  $\zeta = -219''.0880$ ,  $z = -219.''0809$  и  $\theta = -190.''4134$ . Заменом срачунатих параметара у (2.1.1-5) добија се прецесиона матрица облика (Hofmann-Wellenhof, 1994),

$$\mathbf{R}^P = \begin{bmatrix} 0.999997318 & 0.002124301 & 0.000923150 \\ -0.002124301 & 0.999997744 & -0.000000981 \\ -0.000923150 & -0.000000981 & 0.999999574 \end{bmatrix}$$

### Нутација

Графички приказ нутације дат је на слици 2.1.1-6. Средњи положај тачке пролећне равнодневнице приказан је са  $\gamma_e$ , а њен прави (*true*) положај са  $\gamma$ . Матрицу нутације  $\mathbf{R}^N$  чине три сукцесивне ротационе матрице при чему се нутација по лонгитуди  $\Delta\psi$  и нутација по облигацији  $\Delta\varepsilon$  третирају као различите вредности, тј.



Слика 2.1.1-6: Нутација (Leick, 1995)

$$\mathbf{R}^N = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\psi \cos \varepsilon & -\Delta \sin \varepsilon \\ \Delta\psi \cos \varepsilon & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\psi \sin \varepsilon & \Delta\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1-7)$$

Средња облигација еклиптике  $\varepsilon$  одређује се као

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21.''448 - 46.''8150 \cdot T - 0.''000059 \cdot T^2 + 0.''001813 \cdot T^3 \quad (2.1.1-8)$$

при чему је  $T$  раније дефинисано. Параметри нутације рачунају се на следећи начин

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \sum_{i=1}^{106} a_i \cdot \sin\left(\sum_{j=1}^5 e_j \cdot E_j\right) = -17.''2 \cdot \sin\Omega_m + \dots \\ \Delta\varepsilon &= \sum_{i=1}^{64} b_i \cdot \cos\left(\sum_{j=1}^5 e_j \cdot E_j\right) = 9.''2 \cdot \cos\Omega_m + \dots\end{aligned}\quad (2.1.1-9)$$

Амплитуде  $a_i$  и  $b_i$ , као и коефицијенти  $e_j$  се могу пронаћи у посебним публикацијама (на пример, *Nautical Almanac Office*). Пет фундаменталних аргумената  $E_j$  описују средње кретање у систему Сунце-Земља-Месец, а  $\Omega_m$  је средња лонгитуда месечевог узлазног чвора. Месечев чвор се креће у ретроградном правцу са периодом од око 18.6 година, што је једнако периоду главних чланова у изразу (2.1.1-9).

### Звездано време

Матрица ротације звезданог времена  $\mathbf{R}^S$  изгледа

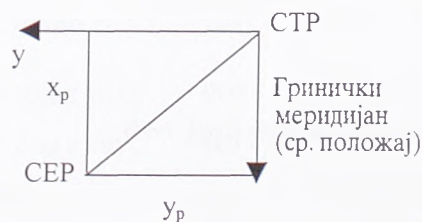
$$\mathbf{R}^S = \mathbf{R}_3(\Theta_0). \quad (2.1.1-10)$$

где је:  $\Theta_0$  - привидно гриничко звезданог време.

*WGS-84* систем је дефинисан униформном угаоном брзином  $\omega_E$ . То значи, да се уместо привидног звезданог времена, у изразу (2.1.1-10) користи средње звездано време.

### Поларно кретање

Претходним рачунањима (по изразу 2.1.1-10) добија се тренутни положај *CEP*. *CEP* се даље мора ротирати у тзв. *CTP* положај. Да би се то остварило, потребно је познавати координате пола  $x_p$  и  $y_p$ , које дефинишу положај *CEP* у односу на *CTP* (слика 2.1.1-7).



Слика 2.1.1-7: Поларне координате

Поларне координате одређује и публикује *IERS*. Матрица ротације за утицај кретања полова је дата изразом облика

$$\mathbf{R}^M = \mathbf{R}_2(-x_p) \cdot \mathbf{R}_1(y_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1-11)$$



Матрице ротације  $\mathbf{R}^S$  и  $\mathbf{R}^M$  се често комбинују у једну матрицу  $\mathbf{R}^R$ , облика

$$\mathbf{R}^R = \mathbf{R}^M \cdot \mathbf{R}^S. \quad (2.1.1-12)$$

У *GPS* применама, просторни координатни систем је већ везан за *СЕР*. Зато је  $\mathbf{R}^R$  једина ротациона матрица која се примењује при трансформацији у терестрички систем. У већини практичних примена, ефекат поларног кретања је занемарљив.

### 2.1.2. Системи времена

Било који уређај способан да генерише секвенце константних временских интервала може служити као часовник. Данашње временске скале користе осцилације кварцних кристала или промене нивоских стања атома. У премери и навигацији важно је да те временске скале буду повезане са ротацијом Земље. Топоцентрична дужина до сателита је директно повезана са ротацијом Земље (њеним тренутним положајем), односно она је временска функција. Како атомски часовници генеришу независне временске скале, потребно је исте координирати. То је задатак служби које се баве земљином ротацијом и одржавањем службе времена.

#### Развој система времена

У току двадесетог века, побољшање тачности остваривања стабилних временских секвенци је вишеструко увећано. У доба пешчаних часовника, дневно одржавање тачног времена се кретало, мање више, у границама варијација дневних вредности земљине ротације. Тада је имало смисла користити дневну земљину ротацију као временски стандард. Такве прилике су водиле ка ротационим временским скалама звезданог (*Sideral time - ST*) и сунчевог времена (*Solar time - UT*). Међутим, опажања небеских објеката, користећи напред поменуте ротационе скале, показивала су конзистентну разлику између опажаних и предвиђених положаја. Закључило се, да земљина ротација није константна, а самим тим није ни подесна да служи као временска скала. Астрономи уводе нову временску скалу коју називају ефемеридским временом (*Ephemeris time - ET*). Ова нова временска скала се заснивала на орбиталном кретању Сунца и Месеца, изазваним законима гравитације. Међутим, ни ова нова скала није издржала "трку са временом".

За прецизна мерења времена користи се сат са кристалом кварца у којем кристал кварца осцилује са фреквенцијом од приближно 1MHz и даје релативну тачност од око 1ms на дан. Још већа тачност времена се добија са атомским часовницима. Код ових сатова, користи се веза између периодичних кретања у молекулима и атомима са спектралним линијама које емитују. Цезијумски сат је најтачнији стандард атомског времена који обезбеђује већу тачност од  $10^{-13}$ . Он се користи за дефиницију секунде у интернационалном систему јединица.

Основне карактеристике модерних временских уређаја подразумевају њихову кратку, средњу и дуго-периодичну стабилност изражену кроз однос  $\Delta f/f$ , где је  $\Delta f$  промена фреквенције  $f$  у неком временском интервалу. У Табели 2.1.2-1, приказана је једнодневна стабилност и време које је потребно атомским часовницима да би акумулирали грешку од  $1s$ , уз претпоставку да се стабилност временски не мења у току периода за који је извршен прорачун. Време акумулације грешке код атомских часовника се мери у хиљадама година.

Табела 2.1.2-1: Време акумулирања грешке од  $1s$  за различите врсте осцилатора (Leick, 1995)

Тип часовника	Фреквенција осцилација (GHz)	Стабилност фреквенције ( $\Delta f/f$ )	Време да би се направила грешка од $1s$ .
Кристал кварца	0.005 (типично)	$10^{-9}$	30 година
Рубидијум	6.834 682 613	$10^{-12}$	30 000 година
Цезијум	9.192 631 770	$10^{-13}$	300 000 година
Водонични масер	1.420 405 751	$10^{-14}$	3 000 000 година

Табела 2.1.2-2 показује колику дужину светлост пређе у одређеним временским интервалима и грубу процену времена које је потребно цезијумским стандардима да би акумулирали грешке једнаке временима за које светлост пређе наведене дужине, уз претпоставку да је само дневна стабилност часовника узета у обзир.

Табела 2.1.2-2: Захтеви за одржавањем тачног времена (Leick, 1995)

Дужина ( $m$ )	Вредност грешке ( $ns$ )	Време за акумулирање грешке (цезијумски часовник – у секундама)
300.0	1000	$10^7$
0.3	1	$10^4$
0.003	0.01	$10^2$

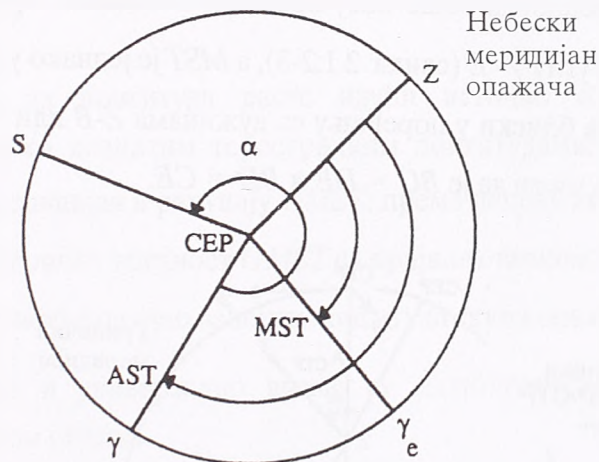
Како се код *GPS* пријемника не користе скупи цезијумски стандарди, природно се намеће потреба елиминисања грешака часовника на неки други начин. Један од начина је да се грешка часовника оцењује у свакој епохи мерења. Међутим, приступ који подразумева формирање разлика између пријемника и сателита дао је боље резултате, о чему ће бити речи у наредним поглављима.

#### Астрономске скале времена

Постоје три астрономске временске скале: *звездано време*, *универзално* (сунчево) *време* и *ефемеридско време*. Звездано време и универзално време су засновани на земљиној ротацији, док је ефемеридско време засновано на орбиталном кретању Сунца (и Месеца), следећи законе гравитације. Слика 2.1.2-1 показује прави (*true*) небески меридијан опажача -СЕР-Z, прави положај тачке пролећне равнодневнице  $\gamma$  и средњи

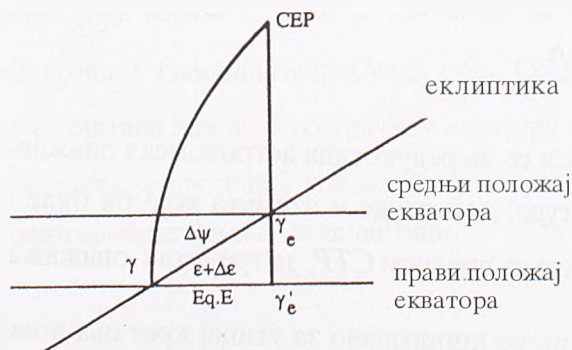
положај тачке пролећне равнодневнице  $\gamma_e$  одређеног датума. Часовни углови правог и средњег положаја тачке пролећне равнодневнице се називају *привидним звезданим временом* (*Apparent Sideral Time - AST*) и *средњим звезданим временом* (*Mean Sideral Time - MST*), респективно. Како се звездана времена односе на локални небески меридијан који је везан за Земљу, иста припадају ротационим временским скалама. Мала разлика између *AST* и *MST* се назива једначином еквиноција (*Equation of Equinox - Eq.E*) и резултат је утицаја нутације на осу ротације, тј.

$$Eq.E = AST - MST = \Delta\psi \cdot \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \quad (2.1.2-1)$$



Слика 2.1.2-1: Привидно звездано време -AST (Leick, 1995)

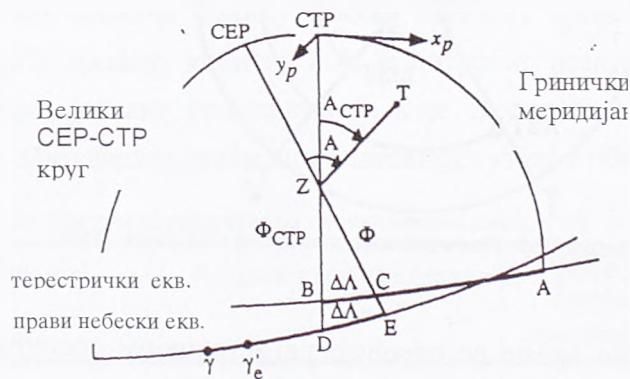
Привидно звездано време се одређује регистрацијом тренутка проласка звезде кроз небески меридијан места. У том тренутку проласка, привидно звездано време је једнако правој (*true*) ректасцензији, која се добија из звезданих каталога. Овај метод одређивања времена има и једну ману, а то је да у два суседна дана звезда неће проћи кроз меридијан у истој епохи.



Слика 2.1.2-2: Једначина еквиноција (Leick, 1995)



Слика 2.1.2-3 управо указује на проблем изазван различитошћу положаја  $CEP$  и  $CTP$ . Избор два сукцесивна положаја  $CEP$  нема практичног смисла, јер је циљ повезати сва опажања за тачку која је фиксирана у односу на чврсти део Земље (*crust*), а што заправо представља положај  $CTP$ . Ради комплетне информације, слика 2.1.2-3 показује и друге астрономске величине на које утиче кретање полова. Слика се може интерпретирати и као сфера праваца лоцирана у топоцентру. Правац  $Z$  представља правац вертикале (правац виска) у тачки опажања. Символ  $T$  представља визуру (циљ). Опажане вредности астрономске лонгитуде, латитуде и азимута ( $\Lambda, \Phi, A$ ) се односе на прави (*true*) небески меридијан  $CEP-Z-E$ , док се ( $\Lambda_{CTP}, \Phi_{CTP}, A_{CTP}$ ) односе на “редуковани” меридијан  $CTP-Z-B$ . Последње вредности више нису временски зависне. Привидно звездано време ( $AST$ ) је коресподентно углу  $\gamma - E$  (слика 2.1.2-3), а  $MST$  је једнако углу  $\gamma_e - E$ . Како су  $CEP$  и  $CTP$  положајно веома блиски у поређењу са дужинама  $Z-B$  или  $Z-CEP$ , може се у свим практичним применама узети да је  $BC = DE$  и  $BD = CE$ .



Слика 2.1.2-3: Редукција за утицај поларног кретања (Leick, 1995)

Полазећи од правила сферне тригонометрије, могуће је извести следеће односе

$$\begin{aligned} \Phi_{CTP} &= \Phi + y_p \cdot \sin \Lambda - x_p \cdot \cos \Lambda \\ \Lambda_{CTP} &= \Lambda - (y_p \cdot \cos \Lambda + x_p \cdot \sin \Lambda) \cdot \tan \Phi \\ A_{CTP} &= A - \frac{y_p \cdot \cos \Lambda + x_p \cdot \sin \Lambda}{\cos \Phi} \end{aligned} \quad (2.1.2-2)$$

Ознака  $CTP$  у индексу, односи се на редукована астрономска опажања у  $CTRS$  систему, тј. редуковане вредности латитуде, лонгитуде и азимута које би биле опажане када би оса ротације Земље коинцидирала са правцем  $CTP$ , за тренутак опажања.

Привидно звездано време кориговано за утицај кретања полова ( $AST1$ ) које би се добило када би оса ротације Земље коинцидирала са правцем  $CTP$  у тренутку опажања, добија се као

$$AST1 = AST - \Delta\Lambda = AST - (y_p \cdot \cos \Lambda + x_p \cdot \sin \Lambda) \cdot \tan \Phi \quad (2.1.2-3)$$

Поправка за прелазак на звездано време ( $\Delta\Lambda$ ) је независна од деклинације звезде. Иста временска поправка се може применити и за добијање *средње звездано времена*  $MST1$ , тј.

$$MST1 = AST1 - Eq \cdot E \quad (2.1.2-4)$$

Ако се од од  $MST1$  одузме лонгитуда тачке опажања у  $CTRS$  систему, добиће се *Гриничко средње звездано време* (*Greenwich Mean Sideral Time - GMST*), као

$$GMST = MST1 - \Lambda_{CTP} \quad (2.1.2-5)$$

Треба истаћи, да лонгитуда расте идући источно од Гринича. Неколико опсерваторија у свету, са познатим терестричким лонгитудама, опажају у исто време пролазак звезде кроз меридијан и рачунају  $GMST$ , према напред наведеној процедури. Све оне ће добити исту нумеричку вредност  $GMST$  са крајњом тачком (или почетном) у тачки  $A$ . Локација тачке  $A$  зависиће од прихваћених лонгитуда скупа опажачких станица.

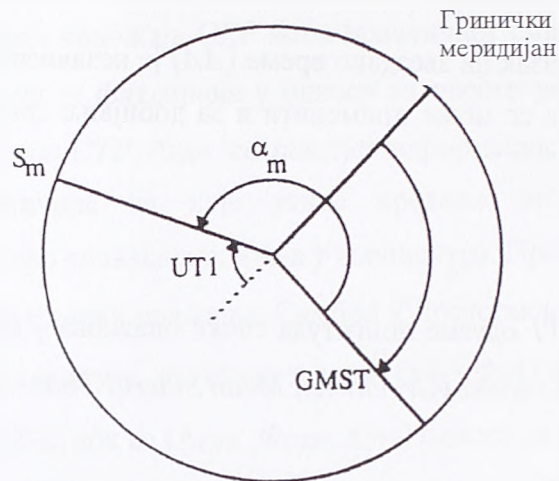
Звездано време и универзално време су математички везани преко средње временске скале, изразом облика

$$GMST = UT1 + \alpha_m - 12^h \quad (2.1.2-6)$$

где је:

$$\alpha_m = 18^h 41^m 50^s .54841 + 8640184^s .812866T + 0^s .093104 \cdot T^2 - 6^s .2 \cdot 10^{-6} \cdot T^3 \quad (2.1.2-7)$$

а,  $T$  је раније описан период (2.1.1).  $UT1$  јесте универзално време Гриничког меридијана. Геометријска интерпретација израза (2.1.2-6) је приказана на слици 2.1.2-4. Симбол  $\alpha_m$  јесте средња ректасцензија средњег (замисљеног) Сунца -  $S_m$ . Средње Сунце у ствари представља његово “кретање” по еклиптици или по терестричком екватору. Угаона брзина средњег Сунца је константна и коресподентна је просечној угаоној брзини правог (*true*) Сунца, што је једнако просечној угаоној брзини кретања Земље по еклиптици.

Слика 2.1.2-4: Гриничко средње звездано време и  $UT1$  (Leick, 1995)

Средњи сунчев дан се дефинише као временски период два сукцесивна пролаза средњег Сунца кроз исти меридијан. Средњи сунчев дан почиње у доњем пролазу тако да се цивилно подне обележава као 12 часова. Дужина средњег сунчевог дана јесте функција кретања средњег Сунца у односу на средњи положај тачке пролећне равнодневнице. Јулијански датум чини збир средњих сунчевих дана рачунат од 4753.године п.н.е. Конверзија из Грегоријанског календара ( $Y$  = година,  $M$  = месец,  $D$  = дан) у Јулијански ( $JD$ ) се може извршити користећи израз облика (у Гриничко подне),

$$JD = 367 \cdot Y - 7 \cdot [Y + (M + 9) / 12] / 4 + 275 \cdot M / 9 + D + 1721014 . \quad (2.1.2-8)$$

Израз важи за датуме од марта 1900. године (израз је написан као FORTRAN исказ, а дељење са целобројном константом не уважава децимални део). Уместо Јулијанског датума, често је у употреби модификована верзија Јулијанског датума ( $MJD$ ), при чему је

$$MJD = JD - 2400000.5 . \quad (2.1.2-9)$$

Јулијански век садржи 36525 средњих сунчевих дана. Тропска (средња сунчева) година је једнака времену које је потребно да замишљено Сунце изврши два сукцесивна проласка кроз средњи положај тачке пролећне равнодневнице. Тропска година садржи  $365^d.24219879$  средњих сунчевих дана. С обзиром да тропска година не садржи цео број средњих сунчевих дана, у календару се уводи појам преступне године.

$UT1$  представља меру праве угаоне ротације Земље кориговане за утицај кретања пола.  $UT1$  даје меру земљине ротације као да Земља ротира око  $CTP$  пола.  $UT1$  је математички везано са  $GMST$  и  $GAST$  ( $GAST1$  јер је  $A$  лоцирано на терестричком екватору, а Гриничко време се увек односи на Гринички меридијан).  $GAST$  и координате



кретања пола су три елемента који комплетно повезују прави небески координатни систем са конвенционалним терестричким координатним системом.

Ефемеридско време, такође има неке своје негативне особине. Наиме, орбитално кретање Сунца и Месеца не следи у потпуности законе гравитације, па га је самим тиме врло тешко одржавати. Из тих разлога *ET* се замењује атомским временом.

### Атомско време

Дужина атомске секунде се дефинише коресподентно *ET* секунди. На *XIII Генералној конференцији за тежине и мере (CGPM)* у Паризу 1967. године, дефинисана је временска секунда (позната и као *International System – SI* секунда) као трајање 9192631770 периода радијације коресподентних преласку између два хиперфина нивовска стања (*ground state*) атома цезијума 133. Епоха новог интернационалног атомског времена (*TAI*) је изабрана тако да разлика *ET-TAI* износи 32.184 s и иста важи на дан 1. јануара 1977. године. Од тог датума, *ET* је замењено са *TAI*. Код најтачнијих рачунања ефемерида, неопходно је горе наведени однос поправити за утицај релативистичких ефеката. Уколико се једначине кретања односе на барицентар, користи се *барицентрично динамичко време (TDB)*, док се у случају геоцентричног референтног оквира користи *геоцентрично динамичко време (TDT)*, при чему се ова два времена веома мало разликују. У терминологији општег релативитета, *TDT* је коресподентно правом времену (*proper time*), док је *TDB* коресподентно координатном времену (*coordinate time*). *TDT* је у основи једнако са *ET*. Важе следећи односи

$$TDT = TAI + 32^s.184$$

$$TDB = TDT + 0^s.001658 \cdot \sin(g + 0.0167 \cdot \sin g)$$

где је

$$g = (357^\circ.528 + 35999^\circ.050 \cdot T) \left( \frac{2\pi}{360^\circ} \right)$$

(2.1.2-10)

при чему је период *T* раније објашњен.

### Потреба за координацијом времена

Известан број лабораторија и агенција у свету користе сопствене атомске часовнике, производећи независне атомске скале. Све званичне агенције сарађују са *Међународним бироом за тежине и мере (Bureau International des Poids et Mesures - BIPM)* који је одговоран за обједињавање различитих атомских времена и рачунање међународног атомског времена. До недавно, *TAI* је рачунат у *Међународној служби времена (Bureau International de l'Heure - BIH)*. Од 1. јануара 1988. године обавезе *BIH* су преузели *BIPM* и *Централни биро међународне службе за земљину ротацију (International Earth Rotation Service/Central Bureau - IERS/CB)*. Поређење различитих

времена се остварује преко *LORAN-C* веза, различитих сателита и часовника, а у последње време *GPS* представља основу глобалног трансфера времена. Погодност *GPS* је посебно изражена, јер су сателити видљиви са веома широко распоређених станица. Циљ светске синхронизације јесте тачност од  $100 \text{ ns}$  и боље. У 1995. години, у свету је било око 50 институција са преко 180 цезијумских атомских часовника које су оквиру *BIPM* одржавале интернационалну временску скалу.

### Веза са ротацијом Земље

Атомско време није везано са ротацијом Земље. Међутим, у навигацији и премери, неопходно је атомско време повезати са ротацијом Земље. Такође, рачунање топоцентричне дужине је функција времена. Кретање сателита по орбитама је независно од брзине ротације Земље, као што ни орбитално кретање Земље нема везе са дневном ротацијом Земље. Атомско време се веже са земљином ротацијом уводећи универзалну координирану временску скалу (*UTC*). То је хибридна временска скала, при чему је *UTC* секунда једнака *SI* секунди, успостављеној стабилним атомским временом *TAI*. Важи услов

$$|UT1 - UTC| < 0^s.9, \quad (2.1.2-11)$$

који указује да атомско време на изванредан начин следи ротационо време *UT1*. Када је разлика у (2.1.2-11) већа од назначеног износа, *UTC* се периодично поправља за једну секунду (преступна секунда). Поправљање се врши 30. јуна или 31. децембра, а што је у надлежности *IERS*. Нестабилност *TAI* је вишеструко пута мања од ротационе временске скале *UT1*, а разлике поменутих времена се обележавају као

$$\begin{aligned} \Delta UT1 &= UT1 - UTC \\ \Delta AT &= TAI - UTC \end{aligned} \quad (2.1.2-12)$$

и емитује их неколико служби времена. *UTC* време је 1972. године подешено тако да  $\Delta AT$  износи цео број секунди. *UTC* се емитује се преко јавних медија (радија или телевизије) и представља основу службе тачног цивилног времена.

## 2.2. КОМПОНЕНТЕ ГПС СИСТЕМА

Глобални систем позиционирања се састоји из три компоненте, и то:

- космичке,
- контролне и
- корисничке.

### 2.2.1. Космичка компонента система

Прву генерацију *GPS* сателита су чинили сателити из програма *Block I*. *GPS* сателити прве генерације нису имали уграђене *SA/AS* могућности. Ова серија сателита, за разлику од каснијих генерација, избачена је у орбите са нешто већим инклинацијама ( $i = 63^\circ$ ). Сателити су унутар орбиталних равни били позиционирани тако да задовоље америчке војне интересе и били су технички конструисани да буду у стању да три до четири дана врше своју функцију и без директне везе са контролним центром.

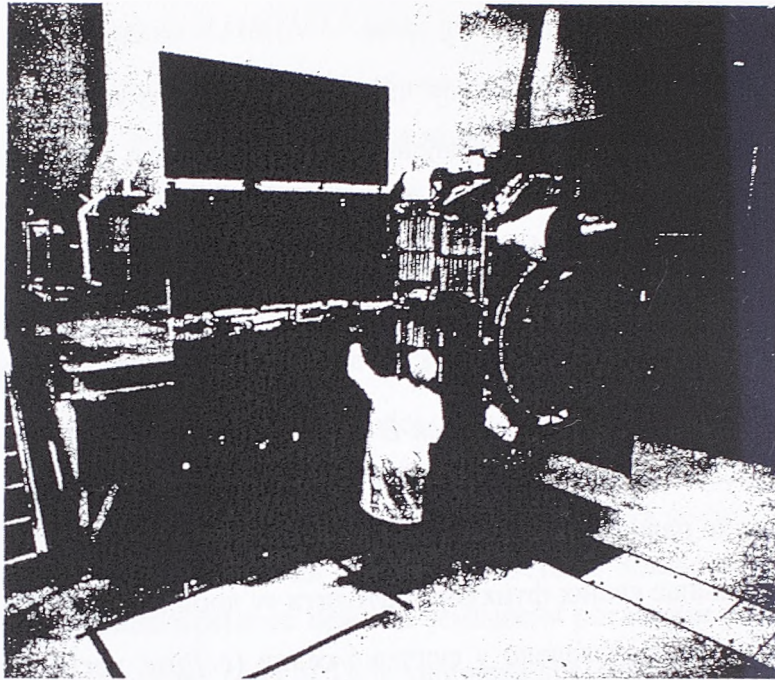
Први оперативни *GPS* сателит *Block II* серије је лансиран 1989. године. Сателити су имали век трајања око 7.5 година и били су тешки преко 2.5 тоне. Сателити су лансирани у орбиталне равни чија инклинација у односу на екваторску раван износи  $i = 55^\circ$ . Енергију за обављање својих функција, сателити су добијали преко соларних ћелија (слика 2.2.1-1), а за време проведено у сунчевој сенци (*eclipse period*), сателити су се напајали из интерних батерија које су се налазиле у сваком сателиту. Како сваки сателит генерише и одржава сопствено номинално време, за његово генерисање служи неколико рубидијумских и цезијумских атомских часовника. Сателити ове серије су већ имали могућност селектованог давања података (*Selective availability - SA*), као и заштите приступа *P* коду (*Anty spoofing - AS*). Сателити су дизајнирани да са постојећом навигационом поручком опслужују кориснике најмање 14 дана.

Први сателит *Block IIA* серије је лансиран новембра 1990. године и представљао је малу модификацију претходне серије. За разлику од претходне серије, ови су сателити имали могућност самосталног рада, без контакта са контролним станицама, у периоду од 180 дана (у нормалним околностима контролни сегмент сваког дана ажурира постојеће податке у сателитима).

Тренутно, *GPS* констелацију сателита чине сателити нове генерације - *Block IIR*. За разлику од претходне серије, ови сателити имају додатну могућност самостално одређивања положаја орбите и генерисања навигационе поруке коју без директне везе са контролним сегментом шаљу корисницима. Сателити *Block IIR* су у стању да самостално врше мерења међусобних растојања и да иста шаљу другим сателитима и контролном центру. Сателити могу пола године самостално обављати све функције, без смањења тачности емитујућих ефемерида. Увођење у орбиту нових генерација сателита (*Block IIF*), очекује се после 2000 године.

*GPS* сателити су размештени у шест орбиталних равни означених словима од А до Ф. Равни су постављене у односу на екватор под углом од  $i = 55^\circ$ . У свакој равни се налази по четири сателита. Орбиталне равни су елипсе са великом полуосом од око 26 000 km (врло мали ексцентрицитет  $e = 0.02$ ).





Слика 2.2.1-1: ГПС сателит (Leick, 1995)

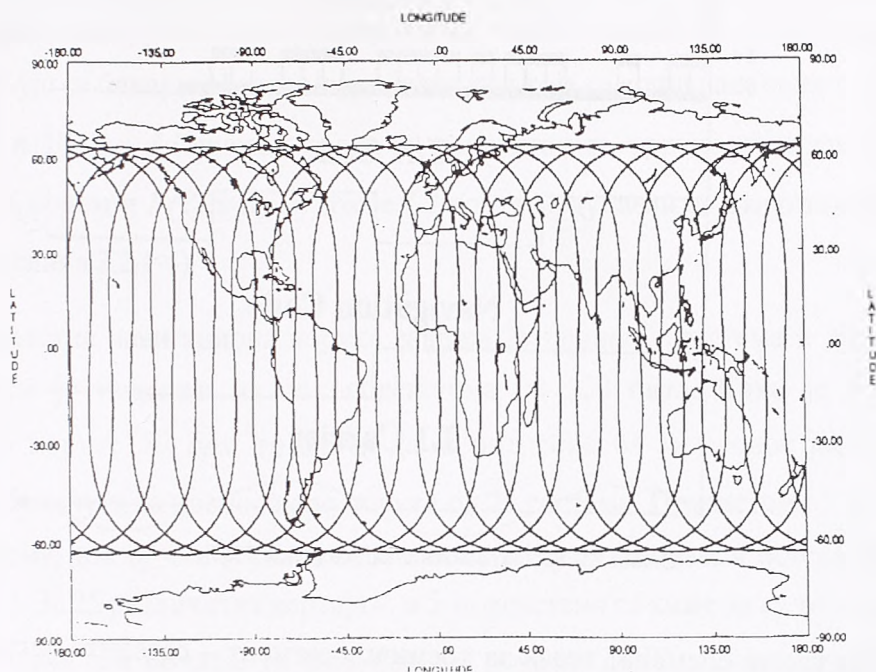
Сходно трећем Кеплеровом закону, орбитални период сателита износи нешто мање од  $12h$  ( $11h$  и  $58min$ ). То значи, да за време од једне земљине ротације сателит два пута обиђе орбиту (слика 2.2.1-2).

Због висине на којој се налазе, *GPS* сателити се могу истовремено видети са веома широког простора на Земљи. Тако, на пример, уколико је угао елевације  $10^\circ$ , централни угао Земљине површи са чијих се крајева види исти сателит износи  $132^\circ$ . Обично, у највећем броју примена, због утицаја тропосфере, сателити се опажају само изнад елевација већих од  $10 - 15^\circ$ .

Поред значаја који има угао елевације, код *GPS* сателита је важно указати и на феномен проласка сателита кроз сунчеву сенку, која се појављује када се Сунце нађе у/или близу орбиталне равни сателита. У тим ситуацијама, утицај сунчеве радијације не постоји, што је веома битно не само за корисника, већ и за све који рачунају ефемериде сателита. Овај феномен се при моделовању наведеног извора грешака обавезно мора узети у обзир. Време које сателит проведе у зони сенке износи до  $60$  минута.

Подаци који се шаљу са сателита су кохерентни и изведени су из фундаменталне фреквенције коју генеришу атомски часовници у сателиту и која износи  $10.23MHz$ . Множењем фундаменталне фреквенције са  $154$ , добија се фреквенција  $L1$  носећег таласа која износи  $L1 = 1575.42MHz$ . Множењем фундаменталне фреквенције са  $120$ , добија се носећа фреквенција  $L2 = 1227.60MHz$ . Поред носећих фреквенција, по математички дефинисаном алгоритму, у сателиту се генеришу два кода, и то:  $P(Y)$  код и  $CA$  код. Фреквенција  $P(Y)$  кода износи  $10.23MHz$ , а  $CA$  кода  $1.023MHz$ . На крају, за задовољење

већег броја корисника, у сателитима се генерише и навигациона порука. Иста се модулише на оба носећа таласа и има брзину преноса од  $50 \text{ bps}$  (бита у секунди).



Слика 2.2.1-2: Путање ГПС сателита

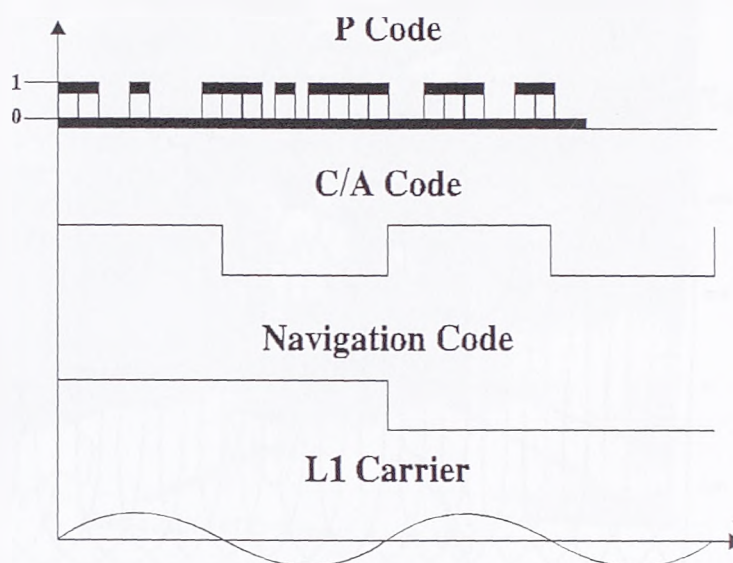
$P(Y)$  код је основни код који се користи за војне потребе.  $P(Y)$  код представља тзв. *pseudorandom noise (PRN)* и генерише се електронским мешањем два  $PRN$  кода по математички дефинисаном поступку. Истим су модулисане обе носеће фреквенције. Период његовог понављања (секвенце) износи 37 недеља. На основу ове чињенице, једнонедељна секвенца  $P(Y)$  кода је употребљена ради идентификације сателита, тако да иако сателити емитују исте носеће фреквенције, исти се на основу ексклузивне кодне секвенце лако могу идентификовати.

Период  $CA$  кода износи  $1 \text{ ms}$ . Секвенца  $CA$  кода садржи 1023 бита (слика 2.2.1-3), а сваки сателит шаље различит скуп  $CA$  кодова. Истим је модулисана само  $L1$  носећа фреквенција. Примена  $CA$  кода чини основу стандардног режима примене (*Standard Positioning Service - SPS*), док  $P(Y)$  код чини основу прецизног режима примене (*Precise Positioning Service - PPS*).  $CA$  и  $P(Y)$  код су међусобно синхронизовани тако да овај први, будући да га је једноставније пратити, олакшава приступ  $P(Y)$  коду.

Да би се сателити могли једнозначно идентификовати, један од начина јесте коришћењем тзв.  $PRN$  недељног броја. На пример, ако се каже  $PRN 13$ , то значи да се ради о сателиту који шаље 13. недељни део  $PRN$  кода. Скраћена верзија ознаке  $PRN 13$  јесте  $SV 13$  (*Space Vehicle - SV*). Други начин идентификације користи број секвенце



лансирања сателита. Тако, по другом начину идентификације, *PRN 13* има ознаку *NAVSTAR 9* или *SVN 9*.



Слика 2.2.1-3: Сателитска порука (Leick, 1995)

Следећи важан елеменат везан за космички сегмент – сателите, јесте сателитско време. Сваки сателит помоћу атомских часовника производи своје сопствено време. Важно је знати да су кодови и навигациона порука директно везани са сателитским системом времена. Међутим, подаци у навигационој поруци се односе на *GPS* системско време које је униформно и одржава га Контролни сегмент система. *GPS* временска скала је везана са *UTC (US Naval Observatory - USNO)* време, и у односу на њега, разликује се мање од  $1\mu s$ . За разлику од *UTC* времена, *GPS* време је континуирана временска скала и не поправља се сваке преступне године. Последња заједничка епоха два системска времена, била је 5/6. јануара 1980. године Највећа јединица *GPS* времена јесте *GPS* недеља која садржи  $604800 s$ . Да би се сателитско време svelo на *GPS* системско време, у оквиру навигационе поруке се шаљу одговарајуће корекције.

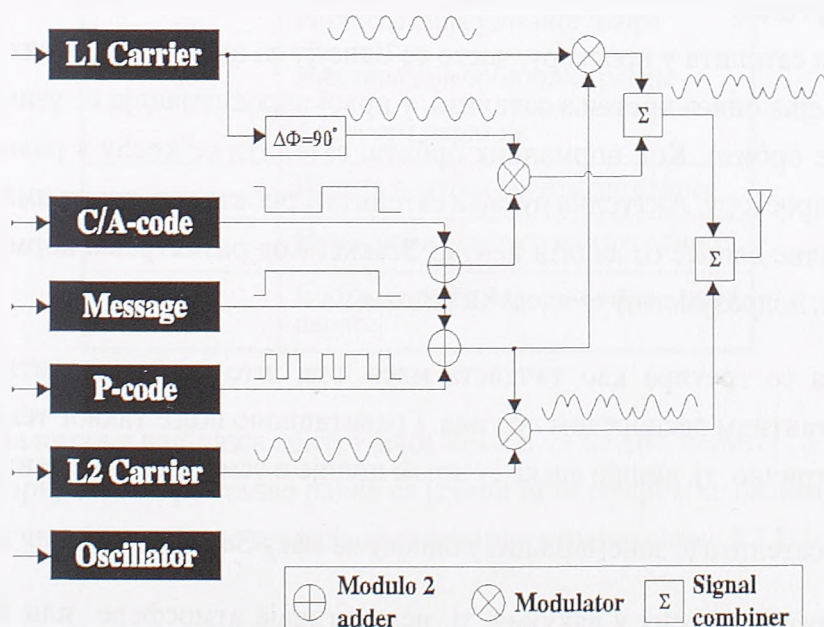
Релативистички утицаји су важан елеменат *GPS* премера, али се срећом могу веома успешно моделовати. Постоје два ефекта, и то: специјални и генерални. Први је изазван различитим брзинама којим се крећу часовници у сателиту и на Земљи, а други настаје као последица различитости утицаја гравитационе силе у сателиту и на Земљи. Анализирањем свеукупности релативистичких утицаја, идентификоване су две поправке, од којих је прва захтевала корекцију фундаменталне фреквенције за  $\Delta f = -0.0045674 Hz$ , док је друга поправка коресподентна ексцентрицитету орбите (изазива временски помак од око  $45 ns$ , што је коресподентно дужини од око  $14 m$ ) и лако се моделује као функција велике полуосе, ексцентрицитета и ексцентричне аномалије. Код релативне методе *GPS* премера, релативистички ефекти се скоро у свим случајевима могу занемарити.



Следеће важно питање везано за космички сегмент јесте структура сигнала који се шаље из сваког сателита. Потпуно објашњење овог појма није могуће без дубљег познавања електронике, тако да ће се овде дати само основни појмови из ове области.

Носећи таласи су по форми синусне функције. Да би се уз помоћ истих могле мерити дужине између сателита и пријемника, носећи таласи се морају модулисати. Код *GPS* примењује се бинарна фазна модулација, код које се врши наизменична промена фазе за  $180^\circ$  ( $0^\circ$  и  $180^\circ$ ). *L1* носећи талас је модулисан са три компоненте: навигационом поруком, *CA* кодом и *P(Y)* кодом, док је *L2* носач модулисан са навигационом поруком и *P(Y)* кодом (слика 2.2.1-4).

Комплетна навигациона порука садржи 25 целина – система и дуга је 1500 бита. Сваки систем је подељен на пет подсистема од 300 бита. Како је брзина преноса навигационе поруке  $50 \text{ bps}$ , то значи да је потребно  $6\text{s}$  за пренос једног подсистема, односно  $12.5$  минута за пренос целе поруке од 25 система. Подсистеми 1., 2. и 3. су исти у сваком систему, док су 4. и 5. различити и понављају се тек након истека циклуса (слања целе поруке). За 25 различитих верзија 4. и 5. подсистема се каже да су то странице од 1. до 25. Сваки подсистем почиње са специјалним речима *TOW* (*Telemetry Word*) и *HOW* (*Handover Word*) од којих је прва намењена ауторизованим корисницима, а друга служи за лакшу идентификацију поједине секвенце *P(Y)* кода. У првом подсистему се поред *TOW* и *HOW* шаљу поправка сателитовог часовника, референтно време као и параметри везани за стање осцилатора - часовника. Подсистеми 2 и 3 садрже ефемериде.



Слика 2.2.1-4: Бинарна двофазна модулација (Leick, 1995)

## Орбите сателита

Примена *GPS* зависи од познавања орбита сателита. Код примене појединачних *GPS* уређаја, грешка орбите је веома корелисана са грешком позиционирања. У релативном позиционирњу, релативне орбиталне грешке су једнаке релативним грешкама базних линија.

Информације о орбитама се шаљу са сателита као део навигационе поруке или се добијају (обично неколико дана касније) од стране надлежних институција. Активирање политике ограничења тачности (*Selective Availability - SA*) код *Block II* сателита изазвало је деградацију тачности емитованих података о орбитама на ниво од 50 *m* до 100 *m*. Како поједини корисници имају потребу за орбитама веће тачности, приморани су да прецизне ефемериде сами рачунају.

Кретање сателита по орбити се јавља као резултат привлачења земљине гравитационе силе и једног броја других сила као што су сила привлачења Сунца и Месеца, притисак сунчеве радијације и сл., а чији је утицај значајно мањи. Код сателита са тако удаљеним орбитама, утицај атмосфере на кретање сателита је безначајан. Математички посматрано, једначине кретања сателита су диференцијалне једначине (временске функције) које се решавају методама нумеричке интеграције. Интеграција започиње са почетним условима, као што су положај и брзина сателита у некој почетној епохи кретања. Срачунати положаји сателита се могу упоредити са актуелним опажањима, а могуће разлике ће послужити ради побољшаног моделовања функције силе, почетних услова или положаја опажачке станице.

## Кеплерова путања

Положаји сателита у простору, често се описују са шест Кеплерових елемената. Ради поједностављења описа кретања сателита, у првој апроксимацији се узимају у обзир само тзв. нормалне орбите. Код нормалних орбита, сателити се крећу у равни орбите која је фиксирана у простору. Актуелна путања сателита у орбиталној равни има облик елипсе. У жижи орбиталне елипсе се налази центар Земље. Код разматрања нормалне орбите, као претпоставка, подразумевају се следећи услови:

- Земља се третира као тачкаста маса или, што је еквивалентно, као сфера са константним распоредом густина. Гравитационо поље таквог тела јесте радијално симетрично, тј. линије виска су праве линије и усмерене су ка центру сфере;
- Маса сателита је занемарљива у односу на масу Земље;
- Сателити се крећу у вакууму, тј. нема утицаја атмосфере или притиска сунчеве радијације на сателите и
- На кретање сателита не утичу гравитационе силе других небеских тела.

Узмимо две тачкасте масе  $m_1$  и  $m_2$  одвојене дужином  $r$ . Ако се за тренутак узме у обзир само сила привлачења између маса и примењујући законе Њутнове механике, кретање масе  $m_2$  релативно у односу на  $m_1$  се дефинише хомогеном диференцијалном једначином другог реда, облика

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{G \cdot (m_1 + m_2)}{r^3} \cdot \vec{r} = \vec{0}, \quad (2.2.1-1)$$

где су:

$\vec{r}$  – релативни вектор положаја  $\|\vec{r}\| = r$ ,

$\dot{\vec{r}}$  – релативни вектор убрзања,

$G$  – универзална гравитациона константа,

при чему је  $t$  – инерцијално време и реализује се помоћу *GPS* системског времена.

Производ  $G$  и масе Земље  $M_E$  се означава са  $\mu$  и познат је као један од параметара којим се дефинише *WGS-84* референтни систем, тј.

$$\mu = G \cdot M_E = 3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

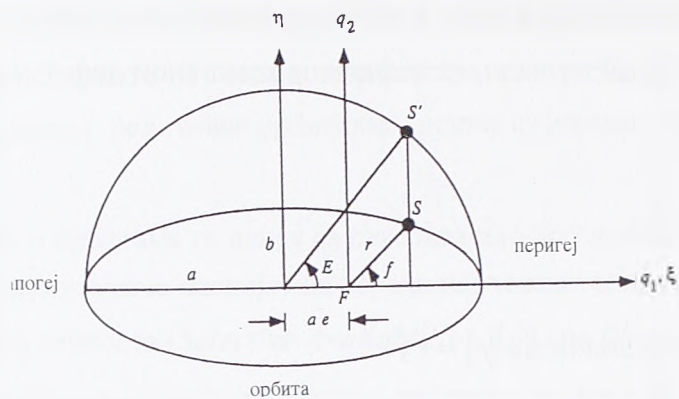
Аналитичко решење израза (2.2.1-1) се може наћи у литератури (на пример *Leick, 1995* или *Brower and Clemence, 1961* и др.) и описује Кеплерово кретање кога дефинише шест параметара орбите (Табела 2.2.1-1) коресподентних са шест интеграционих константи векторске једначине другог реда (2.2.1-1).

Табела 2.2.1-1: Кеплерови параметри орбите

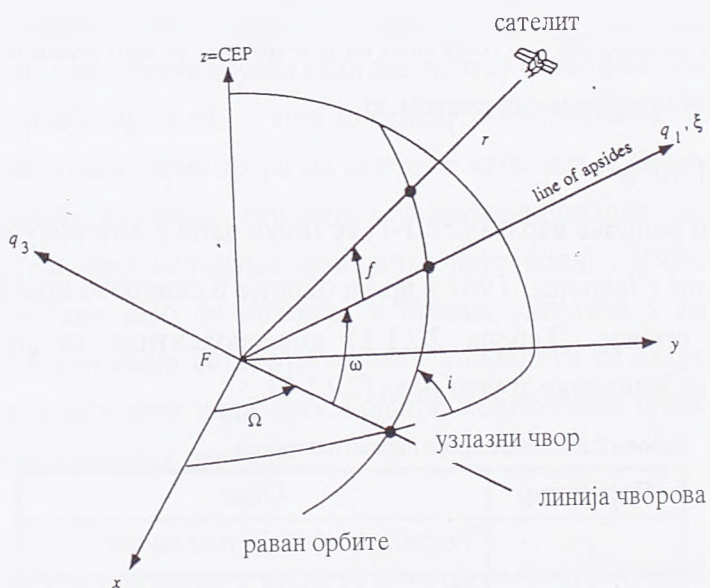
Параметар	Опис
$\Omega$	Ректасцензија узлазног чвора
$i$	Инклинација орбиталне равни
$\omega$	Аргумент перигеја
$a$	Велика полуоса орбиталне елипсе
$e$	Нумерички ексцентрицитет елипсе
$T_0$	Епоха проласка сателита кроз перигеј

Тачка на путањи најближа центру масе Земље се назива перигеј, а најдаља апогеј. Пресеци екваторијалне и орбиталне равни са јединичном сфером се називају чворови, при чему је узлазни чвор онај који сече екватор са северне стране (слике 2.2.1-1-а,б,ц).

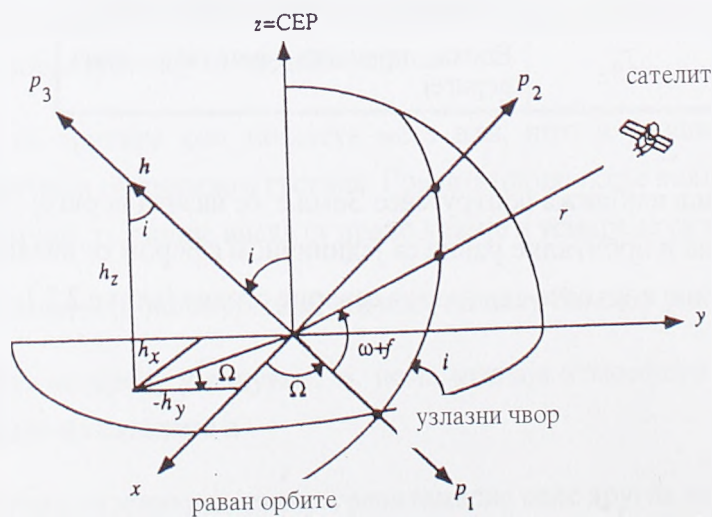




Слика 2.2.1-1а. Нормална орбита (Leick, 1995)



Слика 2.2.1-1б: Параметри путање сателита (Leick, 1995)



Слика 2.2.1-1ц: Орбитална раван (Leick, 1995)

Као што је раније поменуто, кретање сателита под условима нормалне орбите, сагласно првом Кеплеровом закону се одвија по елипси. Други Кеплеров закон тврди да геоцентрични вектор положаја сателита  $r$  прекрива једнаке површине у једнаким временским интервалима. Средња угаона брзина сателита  $n$  (средње кретање), са периодом револуције  $P$ , дефинисана је трећим Кеплеровим законом, као

$$n = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (2.2.1-2)$$

Код *GPS* орбита, номинална вредност велике полуосе износи  $a = 26560 \text{ km}$ . Заменом  $a$  у (2.2.1-2) добија се да је  $P = 12$  звезданих часова, што говори да се путање сателита сваки звездани дан понављају. Горња једначина указује да велика полуоса комплетно одређује средње кретање, односно период орбите.

Тренутни положај сателита унутар орбите описује се угаоном величином познатом као аномалија (овај назив је остао из историјских разлога). Постоје три врсте аномалија: средња ( $M$ ), ексцентрична ( $E$ ) и права (*true* -  $f$ ). Све три аномалије су функције времена. Осим средње аномалије која је математички дефинисана, остале две имају геометријску интерпретацију (слика 2.2.1-1а,б,ц). Аномалије су повезане следећим изразима

$$\begin{aligned} M(t) &= n \cdot (t - T_0) \\ E(t) &= M(t) + e \cdot \sin E(t) \\ f(t) &= 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan \frac{E(t)}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.2.1-3)$$

где је:  $e$  – ексцентрицитет елипсе.

Прва једначина у (2.2.1-3) следи из дефиниције и показује да се као параметар уместо  $T_0$  може користити и средња аномалија  $M(t)$ . Друга једначина је позната као Кеплерова једначина, а трећа следи из чисто геометријског односа који ће бити описан у даљем тексту.

### Приказ орбите

Координатни систем  $(q_1, q_2)$  дефинише орбиталну раван (слике 2.2.1-1а,б). Вектори положаја сателита  $\vec{r}$  и брзине  $\dot{\vec{r}} = d\vec{r}/dt$  сателита се могу представити у функцији ексцентричне или истините (праве) аномалије, тј.

$$\vec{r} = a \cdot \begin{bmatrix} \cos E - e \\ \sqrt{1-e^2} \cdot \sin E \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} \cos f \\ \sin f \end{bmatrix} \quad (2.2.1-4)$$

$$r = a \cdot (1 - e \cdot \cos E) = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos f} \quad (2.2.1-5)$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{n \cdot a^2}{r} \cdot \begin{bmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1-e^2} \cdot \cos E \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mu}{a \cdot (1-e^2)}} \cdot \begin{bmatrix} -\sin f \\ \cos f + e \end{bmatrix} \quad (2.2.1-6)$$

$$\dot{r} = \frac{n \cdot a^2}{r} \sqrt{1-(e \cdot \cos E)^2} = \sqrt{\mu \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (2.2.1-7)$$

Компоненте вектора  $\vec{r}$  су очигледне (слике 2.2.1-1а,б,ц), где је мала полуоса орбиталне елипсе  $b$  замењена са  $a \cdot \sqrt{1-e^2}$ . Геоцентрична дужина  $r=r(E)$  је коресподентна норми  $\|\vec{r}(E)\|$ . Израз  $r = r(f)$  је познат као једначина елипсе. Трансформација  $\vec{r}$  и  $\dot{\vec{r}}$  у екваторски систем  $X_i^0$  се извршава уз помоћ ротационе матрице  $\mathbf{R}$ , а као резултат, добијају се вредности компонената  $\bar{\rho}, \dot{\bar{\rho}}$ . Вектори изражени у систему орбите се приликом трансформације узимају као тродимензионални. То значи да се поред оса  $\bar{q}_1, \bar{q}_2$  уводи и оса  $\bar{q}_3$  која је ортогонална на орбиталну раван. Како су  $\vec{r}$  и  $\dot{\vec{r}}$  вектори који се налазе у орбиталној равни, значи да је компонента вектора дуж  $\bar{q}_3$  осе једнака нули. Трансформација из орбиталног у екваторски систем гласи

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \mathbf{R} \cdot \vec{r} \\ \dot{\bar{\rho}} &= \mathbf{R} \cdot \dot{\vec{r}} \end{aligned} \quad (2.2.1-8)$$

где је матрица  $\mathbf{R}$  састављена од три сукцесивне ротационе матрице и има следећи облик

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_3 \{-\Omega\} \mathbf{R}_1 \{-i\} \mathbf{R}_3 \{-\omega\} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix} \\ &= [\bar{q}_1 \quad \bar{q}_2 \quad \bar{q}_3] \end{aligned} \quad (2.2.1-9)$$

Колоне вектори ортогоналне матрице  $\mathbf{R}$  су осе орбиталног координатног система, дефинисаног у односу на екваторски систем  $X_i^0$ .

Ради ротације система  $X_i^0$  у систем који је фиксиран у односу на Земљу -  $X_i$ , потребна је додатна ротација за износ угла  $\Theta_0$  који представља Гриничко звездано време. Трансформациона матрица сада има следећи облик

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}_3 \{\Theta_0\} \mathbf{R}_3 \{-\Omega\} \mathbf{R}_1 \{-i\} \mathbf{R}_3 \{-\omega\}. \quad (2.2.1-10)$$

Ако се узме да је  $l = \Omega - \Theta_0$ , онда се горњи израз може преуредити и гласи

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}_3 \{-l\} \mathbf{R}_1 \{-i\} \mathbf{R}_3 \{-\omega\}, \quad (2.2.1-11)$$

а, када се параметар  $\Omega$  замени са  $l$ , матрица  $\mathbf{R}'$  је коресподентна матрици  $\mathbf{R}$  (2.2.1-9).



Изводи  $\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}$  у односу на шест Кеплерових параметара су важни ради утврђивања утицаја појединих извора грешака и добијају се на следећи начин. Прво се рачунају изводи вектора  $\vec{r}$  и  $\dot{\vec{r}}$  у односу на параметре  $a, e$  и  $T_0$ , док је матрица  $\mathbf{R}$  функција преостала три параметра  $\omega, i, \Omega$ . При одређивању извода користе се вектори изражени у функцији ексцентричне аномалије, а у првом кораку узимају се изводи  $n, E$  и  $r$  у односу на  $a, e$  и  $T_0$ . Диференцирањем (2.2.1-2) добија се

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial a} &= -\frac{3 \cdot n}{2 \cdot a}, \\ \frac{\partial n}{\partial e} &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial T_0} &= 0.\end{aligned}\tag{2.2.1-12}$$

Диференцирањем Кеплерове једначине (други израз у 2.2.1-3) и узимајући у обзир (2.2.1-12) добија се

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= -\frac{3 \cdot M}{2 \cdot r} \\ \frac{\partial E}{\partial e} &= \frac{a}{r} \cdot \sin E \\ \frac{\partial E}{\partial T_0} &= -n \cdot \frac{a}{r}.\end{aligned}\tag{2.2.1-13}$$

На крају, диференцирањем (2.2.1-5), добија се

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial a} &= (1 - e \cdot \cos E) + a \cdot e \cdot \sin E \cdot \frac{\partial E}{\partial a} \\ \frac{\partial r}{\partial e} &= -a \cdot \cos E + a \cdot e \cdot \sin E \cdot \frac{\partial E}{\partial e} \\ \frac{\partial r}{\partial T_0} &= a \cdot e \cdot \sin E \cdot \frac{\partial E}{\partial T_0}.\end{aligned}\tag{2.2.1-14}$$

Након примене одређених правила на изразе (2.2.1-4) и (2.2.1-6) и уважавајући да је  $dm = -n \cdot dT_0$ , добија се

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial a} = \begin{bmatrix} \cos E - e + \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{r} \cdot M \cdot \sin E \\ \sqrt{1 - e^2} \cdot (\sin E - \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{r} \cdot M \cdot \cos E) \end{bmatrix}\tag{2.2.1-15}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial e} = \begin{bmatrix} -a \cdot (1 + \frac{a}{r} \cdot \sin^2 E) \\ \frac{a^2 \cdot \sin E}{r \cdot \sqrt{1 - e^2}} \cdot (\cos E - e) \end{bmatrix}\tag{2.2.1-16}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial m} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2}{r} \cdot \sin E \\ \frac{a^2}{r} \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot \cos E \end{bmatrix} \quad (2.2.1-17)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a} = \frac{a \cdot n}{2r} \begin{bmatrix} \sin E - \frac{3a}{r} \cdot M \cdot \left( \frac{a \cdot e}{r} \cdot \sin^2 E - \cos E \right) \\ \sqrt{1-e^2} \cdot \left( \frac{3a}{r} \cdot M \cdot \sin E \cdot \left( \frac{a \cdot e}{r} \cdot \cos E + 1 \right) - \cos E \right) \end{bmatrix} \quad (2.2.1-18)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial e} = \frac{a^2 \cdot n}{r} \begin{bmatrix} \frac{a^2}{2r^2} (2e \cdot \sin E + \sin(2E)) \cdot (e \cdot \cos E - 2) \\ -\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \cos E + \frac{a}{r} \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot \left( \frac{a}{r} \cdot \sin^2 E - \cos^2 E \right) \end{bmatrix} \quad (2.2.1-19)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial m} = -\frac{n \cdot a^4}{r^3} \begin{bmatrix} \cos E - e \\ \sqrt{1-e^2} \cdot \sin E \end{bmatrix} \quad (2.2.1-20)$$

Полазећи од (2.2.1-9), диференцирање матрице  $\mathbf{R}$  у односу на параметре  $\omega$ ,  $i$ ,  $\Omega$  је једноставно (Hofmann-Wellenhof, 1994).

Уважавајући напред дефинисане односе, диференцијалне једначине имају следећи коначан облик

$$\begin{aligned} \partial \vec{\rho} &= \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \cdot da + \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial e} \cdot de + \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial m} \cdot dm \\ &+ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \omega} \cdot \vec{r} \cdot d\omega + \frac{\partial \vec{R}}{\partial i} \cdot \vec{r} \cdot di + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \Omega} \cdot \vec{r} \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (2.2.1-21)$$

$$\begin{aligned} \partial \dot{\vec{\rho}} &= \vec{R} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a} \cdot da + \vec{R} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial e} \cdot de + \vec{R} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial m} \cdot dm \\ &+ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \omega} \cdot \dot{\vec{r}} \cdot d\omega + \frac{\partial \vec{R}}{\partial i} \cdot \dot{\vec{r}} \cdot di + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \Omega} \cdot \dot{\vec{r}} \cdot d\Omega \end{aligned}$$

У изразима (2.2.1-15) до (2.2.1-20) узета је у обзир ексцентрична аномалија, тако да су изводи у односу на параметре  $a$ ,  $e$  и  $m$  временски зависне величине. Због параметара  $\vec{r}$  и  $\dot{\vec{r}}$ , сви изрази у (2.2.1-21) су временски зависни, иако су изводи матрице  $\mathbf{R}$  у односу на параметре  $\omega$ ,  $i$ ,  $\Omega$  константни.

### Поремећајно кретање сателита

Кеплерове орбите представљају теоретске орбите и не садрже утицаје које изазивају поремећајно кретање сателита. Убрзања изазвана додатним утицајима  $d\ddot{\vec{\rho}}$  се морају узети у обзир и уврстити у израз (2.2.1-1) који је сада изражен у екваторском систему. Поремећено кретање је изражено нехомогеном диференцијалном једначином другог реда облика,

$$\ddot{\vec{\rho}} + \frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{\rho} = d\ddot{\vec{\rho}}. \quad (2.2.1-22)$$

Познато је да код *GPS* сателита, убрзање изазвано централном силом привлачења  $\frac{\mu}{\rho^2}$  јесте  $10^4$  пута интензивније од убрзања изазваних поремећајним силама. Аналитичко решење једначине (2.2.1-22) уз примену теорије пертурбација (поремећаја), узимањем само хомогеног дела једначине, води рачунању Кеплерове орбите дефинисане са шест параметара  $p_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , у епохи  $t_0$ . Свако поремећајно убрзање  $d\ddot{\rho}$  изазива временске промене  $\dot{p}_{i0} = dp_{i0} / dt$  параметара орбите. Зато, у слободној епохи  $t$ , параметри  $p_i$  описују тзв. оскултујућу орбиту која се описује изразом облика

$$p_i = p_{i0} + \dot{p}_{i0}(t - t_0). \quad (2.2.1-23)$$

Да би се одредили изводи  $p_i$  по времену, Кеплерово кретање се пореди са поремећеним кретањем. У првом случају, параметри  $p_i$  су константе, док су у другом случају они временске функције. Тако, вектор положаја и брзине поремећеног кретања сателита може се изразити као

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \bar{\rho}\{t, p_i(t)\} \\ \dot{\bar{\rho}} &= \dot{\bar{\rho}}\{t, p_i(t)\} \end{aligned} \quad (2.2.1-24)$$

Диференцирањем горњих израза по времену и узимајући у обзир (2.2.1-22) добија се

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}} &= \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) \\ \ddot{\bar{\rho}} &= \frac{\partial \dot{\bar{\rho}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial \dot{\bar{\rho}}}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) = \frac{\mu}{\rho^3} \bar{\rho} + d\ddot{\bar{\rho}} \end{aligned} \quad (2.2.1-25)$$

Како је у било којој епохи  $t$  (оскултујућа) елипса дефинисана, изрази (2.2.1-25) важе и за Кеплерово кретање. Да би еквивалентност била очигледна, уводе се услови

$$\sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) = \bar{0} \quad (2.2.1-26)$$

$$\sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial \dot{\bar{\rho}}}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t} \right) = d\ddot{\bar{\rho}}. \quad (2.2.1-27)$$

Ради једноставности приказа, у даљем објашњењу ће се узети у обзир само једно поремећајно убрзање. Векторске једначине (2.2.1-26) и (2.2.1-27) су коресподентне са шест линеарних једначина које када се представе у векторском облику, изгледају

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{l}}, \quad (2.2.1-28)$$

где су:



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{p}}{\partial a} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial e} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial m} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \omega} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial i} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial a} & \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial e} & \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial m} & \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial i} & \frac{\partial \dot{\bar{p}}}{\partial \Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R} \frac{\partial \bar{r}}{\partial a} & \bar{R} \frac{\partial \bar{r}}{\partial e} & \bar{R} \frac{\partial \bar{r}}{\partial m} & \bar{r} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega} & \bar{r} \frac{\partial \bar{R}}{\partial i} & \bar{r} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega} \\ \dot{\bar{R}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial a} & \dot{\bar{R}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial e} & \dot{\bar{R}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial m} & \dot{\bar{r}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega} & \dot{\bar{r}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial i} & \dot{\bar{r}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega} \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = [\dot{a} \quad \dot{e} \quad \dot{m} \quad \dot{\omega} \quad \dot{i} \quad \dot{\Omega}]^T \quad (2.2.1-29)$$

$$\bar{l} = \begin{bmatrix} \ddot{0} \\ \ddot{d\bar{p}} \end{bmatrix}$$

Матрица  $\mathbf{A}_{6 \times 6}$  садржи изводе вектора дужине и брзине по Кеплеровим параметрима (2.2.1-21). Вектор  $l_{6 \times 1}$  садржи поремећајна убрзања, а вектор  $u_{6 \times 1}$  садржи шест непознатих временских извода појединих елемената орбите. Инверзија (2.2.1-28) даје Лагранжове једначине код којих се уводи поремећајни потенцијал  $R$ , заједно са поремећајним убрзањем

$$\ddot{d\bar{p}} = \text{grad}R, \quad (2.2.1-30)$$

при чему, сходно *Beutler* (1992, у *Hofmann-Wellenhof*, 1994), исте имају следећи облик

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial m} \\ \dot{e} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial m} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \dot{m} &= -\frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} \\ \dot{i} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} \end{aligned} \quad (2.2.1-31)$$

Решење датих једначина је дато, на пример, у *Seeber* (1993).

### Поремећајна убрзања

У стварности, на сателит делује више поремећајних сила које утичу на промену његовог убрзања или промену Кеплерових елемената. Утицаји се могу грубо поделити у две групе: гравитациони и негравитациони. Како се *GPS* сателити налазе на висинама од око  $20\,000\text{ km}$ , индиректни ефекати и утицај отпора ваздуха се занемарују. Са друге стране, облик сателита није једноставан што онемогућава прецизно моделовање сунчеве радијације. Такође, треба нагласити и да су сателити направљени од различитих материјала који имају различите коефицијенте апсорпције чиме се још више компликује начин њиховог моделовања.

Ради илустрације ефеката поремећајног убрзања, претпоставиће се да је његов утицај на сателит константан и да износи  $10^{-9} m/s^2$ . Помак положаја сателита за утицај ове вредности поремећајног убрзања износи  $d\rho = d\ddot{\rho}(t^2 / 2) \approx 1m$ , за период од  $t = 12$  часова.

У Табели 2.2.1-2 су приказани извори поремећајних убрзања.

Табела 2.2.1-2: Извори поремећајних убрзања (King i dr, 1985)

Извор грешке	Убрзање (m/s <sup>2</sup> )	Пертурбације	
		лук од 3 <sup>h</sup>	лук од 2 дана
<b>Земљина несферичност</b>			
а) коефицијент J <sub>2</sub>	5x10 <sup>-5</sup>	око 2km	око 14km
б) остали хармоници	5x10 <sup>-7</sup>	5 - 80m	100 - 1500m
<b>Утицај Сунца и Месеца</b>	5x10 <sup>-6</sup>	5 - 150m	1000 - 3000m
<b>Утицај плимних валова</b>			
а) земљине коре	1x10 <sup>-9</sup>	-	0.5 - 1m
б) океана	1x10 <sup>-9</sup>	-	0.0 - 2.0m
<b>Притисак сунчеве радијације</b>			
а) директни	1x10 <sup>-7</sup>	5 - 10	100 - 800
б) одбијени	1x10 <sup>-9</sup>	-	1.0 - 1.5m

Утицај несферичности Земље на поремећај убрзања сателита

Потенцијал Земље ( $V$ ) се може представити сферним хармоником облика (Heiskanen и Moritz, 1967)

$$V = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_E}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \varphi) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a_E}{r} \right)^n [J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\sin \varphi) \right] \quad (2.2.1-32)$$

где је:  $a_E$  - велика полуоса Земље,  $r$  - геоцентрична дужина до сателита,  $\varphi$  и  $\lambda$  -латитуда и лонгитуда,  $J_n$ ,  $J_{nm}$ ,  $K_{nm}$  су зонални и тесерални коефицијенти хармонијског реда који су познати на основу познавања модела Земље. На крају,  $P_n$  су Лежандрови полиноми, а  $P_{nm}$  су одговарајуће Лежандрове функције.

Први израз са десне стране ( $\mu/r$ ) репрезентује потенцијал Земље као сфере ( $V_0$ ). Његов градијент  $grad(\mu/r) = (\mu/r^3) x \bar{r}$  се сматра као централна сила при Кеплеровим путањама сателита. На основу тога, поремећајни потенцијал  $R$  се добија као

$$R = V - V_0 \quad (2.2.1-33)$$

Поремећај убрзања изазван утицајем извора кога у (2.2.1-32) репрезентује  $J_2$  (коресподентан спљоштености) је  $10^4$  пута мањи од убрзања изазваног са  $V_0$ . Са друге стране, утицај изазван спљоштеношћу је око три пута већи од било ког другог утицаја. Истраживања су показала да је код GPS орбита довољно, у моделу 2.2.1-32, узети у обзир коефицијенте осмог степена и реда (King i dr, 1985).

Напомена: Убрзање изазвано централном силом износи

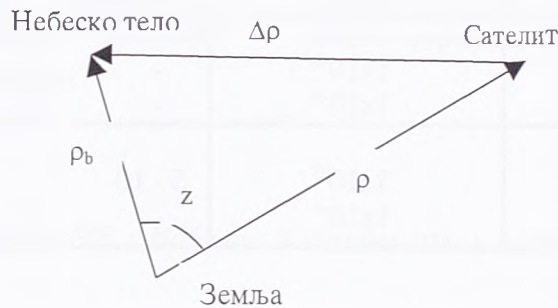
$$\|\ddot{\vec{r}}\| = \left(\frac{\mu}{r^2}\right) \approx 0.57 \text{ m/s}^2, \text{ а убрзање коресподентно утицају спљоштености}$$

$$\|\ddot{d\vec{r}}\| \approx \|\partial R / \partial r\| = 3\mu(a_E / r^2)^2 J_2 P_2(\sin \varphi), \text{ при } \varphi = 55^\circ \text{ (вредност инклинације}$$

$$\text{орбите) и } J_2 \approx 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ износи } \|\ddot{\vec{r}}\| \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2.$$

Утицај привлачне силе других небеских тела - плимни (tidal) утицај

Геоцентрични угао  $z$  између небеског тела и сателита се може изразити као функција  $\vec{\rho}_b$  и  $\vec{\rho}$  облика (слика 2.2.1-2)



Слика 2.2.1-2: Проблем три тела

$$\cos z = \frac{\vec{\rho}_b \cdot \vec{\rho}}{\|\vec{\rho}_b\| \cdot \|\vec{\rho}\|} \quad (2.2.1-34)$$

Маса неког тела утицаће на убрзање сателита, у зависности од његовог положаја као и јачине силе привлачења. За кретање сателита око Земље, важна је разлика утицаја две силе (Земље и неког другог небеског тела), тј.

$$\|\ddot{d\vec{\rho}}\| = G \cdot m_b \left[ \frac{\vec{\rho}_b - \vec{\rho}}{\|\vec{\rho}_b - \vec{\rho}\|^3} - \frac{\vec{\rho}_b}{\|\vec{\rho}_b\|^3} \right]. \quad (2.2.1-35)$$

У зависности од значајности утицаја небеских тела на кретање сателита, у пракси се разматрају само утицаји Сунца и Месеца. Максималан утицај се остварује када су сва три тела у истој линији. Знајући вредности параметара у (2.2.1-35) за Сунце ( $Gm_b \approx 1.3 \cdot 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\rho_b \approx 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ) поремећај убрзања изазван утицајем силе привлачења Сунца износи  $\|\ddot{d\vec{\rho}}\| = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$ . Што се тиче утицаја Месеца, поремећај убрзања изазван утицајем силе привлачења износи  $\|\ddot{d\vec{\rho}}\| = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$ , при  $Gm_b \approx 4.9 \cdot 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\rho_b \approx 3.8 \cdot 10^8 \text{ m}$ . Осим директног утицаја небеских тела, на поремећај убрзања сателита утичу и деформације чврсте Земље и њених водених површина изазване плимским кретањима, о чему треба водити рачуна код радова највише тачности. Код радова ниже тачности, ова два утицаја се могу занемарити. Као последица померања земљине коре и водених површина, услед гравитационог утицаја других планета, долази до промене



геоцентричног вектора положаја стајне тачке, при чему се као последица јавља промена њеног положаја. О овоме се мора водити рачуна код извођења најтачнијих радова, попут успостављања референтних оквира и сл.

#### Утицај притиска сунчеве радијације на поремећај убрзања

Убрзање изазвано директним утицајем притиска сунчеве радијације има своје две компоненте. Прва компонента је усмерена од Сунца ка сателиту, а друга има смер у осе сунчевих хелија на сателиту.

Прва компонента се мора узети у обзир и може се моделовати изразом облика

$$d\ddot{\rho} = \nu \cdot K \cdot \rho_s^2 \cdot \frac{\bar{\rho} - \bar{\rho}_s}{\|\bar{\rho} - \bar{\rho}_s\|} \quad (2.2.1-36)$$

где је:  $\bar{\rho}_s$  - геоцентрични вектор положаја Сунца,  $K$ - фактор који зависи од константе сунчеве радијације, рефлективних особина сателита и односа површине и масе сателита. Вредност  $\nu$  је посебан фактор (*factor eclipse*) који је једнак нули када се сателит нађе у земљиној сенци (сваки сателит се два пута годишње нађе у том положају који се јавља када се Сунце нађе у равни орбите или близу ње; период боравка сателита у земљиној сенци траје око 1 сат, при чему је  $0 < \nu < 1$ ). Максимална вредност поремећајног убрзања изазвана овим утицајем износи  $\|d\ddot{\rho}\| = 10^{-7} m/s^2$ . Моделовање овог утицаја је јако тешко, што се очигледно може видети из захтева за познавањем појединих фактора у моделу. Утицај друге компоненте је вишеструко мањи, тако да исти нема неки већи практичан значај. Део притиска сунчеве радијације изазван рефлексијом од земљине порши се назива *алbedo* ефекат и код *GPS* не игра значајну улогу.

#### Релативистички утицаји на поремећај убрзања сателита

Релативистички ефекти на орбите сателита су изазвани утицајем земљиног гравитационог поља и доприносе поремећају убрзања сателита на начин приказан изразом облика

$$d\ddot{\rho} = -\frac{3\mu^2 a(1-e^2)}{c^2} \cdot \frac{\bar{\rho}}{\rho^5} \quad (2.2.1-37)$$

где је  $c$ - брзина светлости, а  $e$  – ексцентрицитет орбите. Вредност убрзања изазвана утицајем овог извора износи  $\|d\ddot{\rho}\| = 3 \cdot 10^{-10} m/s^2$ .

#### Рачунање елемената орбите

Рачунање елемената орбите подразумева оцену параметара орбите као и оцену утицаја грешака часовника у сателиту. У принципу, проблем је инверзан навигационом решењу. Полази се од фундаменталних једначина за растојање и брзину

$$\rho = \|\bar{\rho}^S - \bar{\rho}_R\|$$

$$\dot{\rho} = \frac{\bar{\rho}^S - \bar{\rho}_R}{\|\bar{\rho}^S - \bar{\rho}_R\|} \cdot \dot{\bar{\rho}}^S \quad (2.2.1-38)$$

између опажача  $R$  и сателита  $S$ . Вектор положаја сателита и вектор брзине сателита се сматрају непознатим, док су координате тачке опажача у геоцентричном координатном систему познате.

За моменат, претпоставићемо да су вектори положаја и брзине сателита добијени из опажача. Вектори положаја и брзине, дати у једној (истој) епохи, дефинишу тзв. иницијални проблем (*initial value problem*) док два положаја у две различите временске епохе дефинишу (први) гранични проблем.

Иницијални проблем подразумева оцену Кеплерових параметара познавајући векторе положаја и брзине, у истој временској епохи, изражених у екваторском координатном систему (решавање система диференцијалних једначина 2.2.1-1). Два дата вектора садрже шест компоненти и омогућавају рачунање шест Кеплерових параметара. Како су оба вектора дата у истој епохи, параметар време се занемарује.

Рачунање подразумева трансформациону инверзију израза (2.2.1-8), узимајући у обзир да су вредности дужина или углова инваријантни у односу на ротације, при чему важе следећи изрази

$$\|\bar{\rho}\| = \|\bar{r}\|$$

$$\|\dot{\bar{\rho}}\| = \|\dot{\bar{r}}\|$$

$$\bar{\rho} \cdot \dot{\bar{\rho}} = \bar{r} \cdot \dot{\bar{r}}$$

$$\|\bar{\rho} \times \dot{\bar{\rho}}\| = \|\bar{r} \times \dot{\bar{r}}\| \quad (2.2.1-39)$$

Такође, узимајући у обзир (2.2.1-4) и (2.2.1-6) добијају се следећи изрази

$$\bar{\rho} \cdot \dot{\bar{\rho}} = \sqrt{\mu \cdot a} (e \cdot \sin E)$$

$$\|\bar{\rho} \times \dot{\bar{\rho}}\| = \sqrt{\mu \cdot a} (1 - e^2) \quad (2.2.1-40)$$

Инверзна трансформација се извршава према следећој процедури. Прво треба срачунати геоцентричну дужину  $r$  и брзину  $\dot{r}$  на основу познатих вредности  $\rho$  и  $\dot{\rho}$ . На основу срачунатих вредности из једначине (2.2.1-7) срачунати велику полуосу  $a$ . Када се одреде  $a$  и  $r$ ,  $e \cos E$  ће се добити из (2.2.1-4) а,  $e \sin E$  из (2.2.1-40 – прва једначина), тј. могу се срачунати ексцентрицитет  $e$  и ексцентрична аномалија  $E$ , као и средња и истинита аномалија  $M$  и  $f$ . Векторски производ од  $\bar{\rho}$  и  $\dot{\bar{\rho}}$  је еквивалентан вектору угаоног момента који је ортогоналан у односу на орбиталну раван. Исти вектор је након нормализације идентичан са  $\bar{q}_3$  у изразу (2.2.1-9) из кога се добијају параметри  $i$  и  $l$ . У складу са (2.2.1-40-

друга једначина) норма векторског производа омогућава проверу претходно срачунатих параметара  $a$  и  $e$ . За одређивање  $\omega$  дефинише се јединични вектор  $\bar{k} = [\cos l, \sin l, 0]^T$  који је усмерен према узлазном чвору. Са слике 2.2.1-1а,б могуће је утврдити односе  $\bar{\rho} \cdot \bar{k} = r \cdot \cos(\omega + f)$  и  $\bar{\rho} \cdot \bar{X}_3 = r \cdot \sin i \sin(\omega + f)$ . Како су  $r, f, i$  већ познати, решавањем двају једначуна добија се  $\omega$ .

### Проблем граничне вредности

Као претпоставка, узима се да су позната два положајна вектора  $\bar{\rho}^S(t_1)$  и  $\bar{\rho}^S(t_2)$  у епохама  $t_1$  и  $t_2$ . Треба истаћи да су вектори положаја значајно погоднији код одређивања орбите јер су тачнији од вектора брзине. Дати подаци су коресподентни граничним вредностима у решењу основне диференцијалне једначине (2.2.1-1).

Приближни метод оцене Кеплерових параметара користи почетне вредности дефинисане за средењу епоху  $t = 1/2(t_1 + t_2)$ :

$$\begin{aligned}\bar{\rho}^S(t) &= \frac{\bar{\rho}^S(t_2) + \bar{\rho}^S(t_1)}{2} \\ \dot{\bar{\rho}}(t) &= \frac{\bar{\rho}^S(t_2) - \bar{\rho}^S(t_1)}{t_2 - t_1}\end{aligned}\tag{2.2.1-41}$$

Строго решење почиње са рачунањем геоцентричних дужина

$$\begin{aligned}r_1 = r(t_1) &= \|\bar{\rho}^S(t_1)\| \\ r_2 = r(t_2) &= \|\bar{\rho}^S(t_2)\|\end{aligned}\tag{2.2.1-42}$$

Јединични вектор  $\bar{q}_3$  који је ортогоналан на орбиталну раван, добија се на основу векторског производа

$$\bar{q}_3 = \frac{\bar{\rho}^S(t_1) \times \bar{\rho}^S(t_2)}{\|\bar{\rho}^S(t_1) \times \bar{\rho}^S(t_2)\|},\tag{2.2.1-43}$$

на основу чега се могу добити лонгитуда  $l$  и инклинација  $i$  (2.2.1-9) и (2.2.1-11). Раније је већ поменуто да се аргумент латитуде  $u = \omega + f$  дефинише као угао између правца на сателит и вектора узлазног чвора  $\bar{k} = [\cos l, \sin l, 0]^T$ . На основу тога, може се написати релација облика

$$r_i \cdot \cos u_i = \bar{k} \cdot \bar{\rho}^S(t_i), \quad i = 1, 2,\tag{2.2.1-44}$$

где се  $u_i$  ( $u_2 > u_1$ ) јединствено оцењују. Тиме су стварени услови за дефинисање двају израза облика (2.2.1-5)

$$r_i = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(u_i - \omega)}, \quad i = 1, 2,\tag{2.2.1-45}$$



при чему су параметри  $a$ ,  $e$  и  $\omega$  непознати. Систем једначина (2.2.1-45) се може решити узимањем  $a$  и  $e$  као непознатих, при чему се користи приближна вредност аргумента перигеја  $\omega$  као номинална. Полазећи од претпостављене вредности  $\omega$  као и срачунатих  $u_i$ , добијају се истините аномалије- $v_i$  и средње аномалије  $M_i$ . Такође, средња угаона брзина сателита се може срачунати на основу (2.2.1-2) и (2.2.1-3-први израз), тј.

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1} \quad (2.2.1-46)$$

Еквивалентност се добија итеративним поступком (варирањем  $\omega$ ) што је типично код проблема овакве врсте. На крају, епоха проласка сателита кроз перигеј  $T_0$ , добија се као

$$T_0 = t_1 - \frac{M_1}{n} \quad (2.2.1-47)$$

#### Побољшање тачности срачунатих параметара орбите

Уколико се располаже са већим бројем опажања, параметри тренутне Кеплерове елипсе се могу прецизније оценити, односно, могуће је срачунати вектор положаја  $\vec{\rho}_0^S$  заједно са референтном елипсом. Сваки нови резултат мерења даје једну додатну једначину облика

$$\rho = \rho_0 + d\rho = \|\vec{\rho}_0^S - \vec{\rho}_R\| + \frac{\vec{\rho}_0^S - \vec{\rho}_R}{\|\vec{\rho}_0^S - \vec{\rho}_R\|} \cdot d\vec{\rho}^S \quad (2.2.1-48)$$

Вектор  $d\vec{\rho}^S$  се може изразити као функција Кеплерових параметара (2.2.1-21). Тако, израз (2.2.1-48) садржи диференцијалне инкременте (поправке) за шест орбиталних параметара.

Поправљање тачности орбите се често изводи приликом обраде *GPS* података. Тада, заједно са вектором терестричког положаја  $\vec{\rho}_R$ , решење омогућава одређивање поправака  $d\rho_0$ . Треба истаћи да уколико је мрежа малих димензија, процедура рачунања, позната под називом *orbit relaxation* је нестабилна или чак није могућа.

#### Поремећене орбите - аналитичко решење

Раније је већ речено, да се поремећено кретање карактерише временским променама параметара орбите. Аналитички изрази тих промена као и поступак извођења појединих израза су дати у (*Hofmann-Wellenhof, 1994*). Карактер промена појединих параметара је дат у Табели 2.2.1-3.

Табела 2.2.1-3: Пертурбације изазване утицајем земљиног гравитационог поља (Hofmann-Wellenhof, 1994)

Параметар	Секуларна промена	Дугопериодична	Краткопериодична
$a$	не	не	да
$e$	не	да	да
$i$	не	да	да
$\Omega$	да	да	да
$\omega$	да	да	да
$M$	да	да	да

На основу Табеле 2.2.1-3, може се закључити да су краткопериодичним утицајима изложени сви параметри, дугопериодичним сви осим велике полуосе, док су секуларним варијацијама подложни само  $\Omega$ ,  $\omega$  и  $M$ . Аналитички изрази секуларних варијација изазваних утицајем израза за спљоштеност  $J_2$  показују да је:  $\dot{\Omega} \approx -0^\circ.03$  (по једном дану),  $\dot{\omega} \approx 0^\circ.01$  (по једном дану) и  $\dot{M} \approx 0$  (Hofmann-Wellenhof, 1994).

#### Поремећене орбите - нумеричко решење

Уколико се поремећајно убрзање не може изразити у аналитичкој форми, потребно је применити нумеричке методе интеграције. Тако, у принципу, са почетним вредностима као што су вектор положаја и вектор брзине ( $\vec{p}(t_0), \dot{\vec{p}}(t_0)$ ) у референтној епохи  $t_0$ , могуће је уз помоћ (2.2.1-22) применити метод нумеричке интеграције. У том циљу, диференцијална једначина другог реда се трансформише у систем двају диференцијалних једначина првог реда облика,

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{p}}(t) &= \ddot{\vec{p}}(t_0) + \int_{t_0}^t \ddot{\ddot{\vec{p}}}(t_0) dt = \ddot{\vec{p}}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[ d\ddot{\vec{p}}(t_0) - \frac{\mu}{\rho^3(t_0)} \cdot \vec{p}(t_0) \right] dt, \\ \dot{\vec{p}}(t) &= \dot{\vec{p}}(t_0) + \int_{t_0}^t \ddot{\vec{p}}(t_0) dt. \end{aligned} \quad (2.2.1-49)$$

при чему се нумеричка интеграција извршава примењујући стандардни алгоритам *Runge-Kutta*.

Применом метода нумеричке интеграције могуће је постићи тачност параметара реда  $10^{-6}$ .

#### Емитовање параметара орбите -мреже за праћење сателита

Емитујуће (*broadcast*) ефемериде које су емитовали сателити *Block I* са цезијумским часовницима имали су тачност око 5 m (са три дневна слања параметара у сателите). Код сателита *Block II*, за неовлашћене кориснике, тачност ефемерида је деградирана и износи од 50-100 метара, уколико је активирана SA. Међутим, како овај

ниво тачности за потребе најтачнијих геодетских мерења није довољан, широм света су, с циљем рачунања ефемерида са већом тачношћу, развијене локалне, регионалне и глобалне мреже. Важи принцип да глобална мрежа омогућава већу поузданост и тачност оцене орбите од регионалне мреже. Повезивање орбиталног система са терестричким референтним оквирима се врши повезивањем *GPS* пријемника са *VLBI* и *SLR* станицама. Распоред тачака *GPS* мреже при оцени параметара орбите значајно утиче на тачност добијених оцена. У пракси постоје два приступа: први – код којег су тачке равномерно распоређене дуж целе земаљске кугле и други – код кога је поред сваке *GPS* тачке у мрежи постављено по неколико помоћних које служе за решавање неодређености, чиме се решење три до пет пута чини чвршћим.

Осим мреже тачака којом се остварује функција контролног сегмента *GPS* система, успостављено је још неколико мрежа чији је задатак одређивање орбите. Занемарујући мање локалне или регионалне мреже, изнеће се само неке од глобалних. Ту пре свега спада тзв. *CIGNET* (*Cooperative International GPS Network*) мрежа са станицама постављеним на *VLBI* тачкама. Према подацима из 1994. године (*Hofmann-Wallenhof, 1994*) *CIGNET* мрежа је имала 48 тачака распоређених дуж целе планете. *CIGNET* мрежа је нешто специфична у односу на званичне (официјалне) пратеће мреже. Као прво и најважније, на станицама се региструју фазна и кодна мерења на све сателите са оба кода и на обе фреквенције. Друга погодност се огледа у чињеници да су резултати праћења одмах приступачни корисницима, док се прецизне ефемериде (званичне) добијају са закашњењем. На крају, *CIGNET* тачке се односе на *ITRF*, док су званичне ефемериде дате у *WGS84*.

Корисници могу приступити резултатима мерења *CIGNET* тачака и уколико су опремљени адекватним програмима, могу рачунати сопствене ефемериде. Резултати мерења се могу комбиновати са мерењима локалног премера чиме се ствара могућност коришћења програма за релаксацију (поправљање) орбите.

Међународна геодетска асоцијација (*LAG*) је 1990. године формирала Међународну *GPS* службу за геодинамику (*IGS*) која је почела са радом 1994. године. Главни разлог формирања те службе је био стварање неопходних услова за праћење геодинамичких померања. У ту сврху *IGS* је успоставила перманентну мрежу од 25 контролних тачака у чијој непосредној близини је ангажовано преко 100 додатних повремених (*fiducial*) станица (Прилог 5).

### Ефемериде

Вектори положаја и брзине сателита у терестричком референтном систему, у сваком временском тренутку се могу срачунати на основу три различита скупа ефемерида.



То су: алманах, емитујуће ефемериде и прецизне ефемериде. Разлика између њих је углавном у тачности са којом се ови вектори могу одредити као и временском периоду на који се односе.

Табела 2.2.1-4: Ефемериде и њихова тачност (Hofmann-Wellenhof, 1994)

Ефемериде	Тачност	Напомена
Алманах	Неколико километара	Тачност зависи од старости података
Емитујуће (активиран SA)	2-50 m	Тачност зависи од нивоа SA
Емитујуће (искључен SA)	2 – 5 m	Тачност може бити и боља
Прецизне	0.5 – 1 m	Тачност може бити и боља

### Алманах

Намена алманаха је да омогући кориснику (пријемнику) брже проналажење сателита на небу као и планирање премера (*visibility charts*). Алманах се емитује унутар навигационе поруке која садржи параметре орбите, параметре сателитовог часовника као и неке друге помоћне информације (Табела 2.2.1-5).

Табела 2.2.1-5: Подаци алманаха (Hofmann-Wellenhof, 1994)

Параметар	Објашњење
<i>ID</i>	PRN број сателита
<i>HEALTH</i>	Оперативни (здравствени) статус сателита
<i>WEEK</i>	Текућа GPS седмица
$t_a$	Референтна епоха у оквиру текуће седмице (секундама)
$\sqrt{a}$	Корен велике полуосе
$e$	Екцентрицитет
$M_0$	Средња аномалија у референтној епохи
$\omega$	Аргумент перигеја
$\delta_i$	Помак од 0.3 полуциклуса (око 54°)
$l_0$	Лонгитуда узлазног чвора у односу на епоху текуће седмице
$\dot{\Omega}$	Брзина промене ректасцензије узлазног чвора
$a_0$	Помак фазе часовника ( <i>clock phase bias</i> )
$a_1$	Помак фреквенције часовника ( <i>clock frequency bias</i> )

Параметар  $l_0$  представља разлику ректасцензије у епохи  $t_a$  и Гриничког звезданог времена у епохи  $t_0$  - почетак текуће GPS седмице. Свођење Кеплерових параметара у епоху опажања  $t$ , изводи се уз помоћ следећих израза

$$\begin{aligned}
 M &= M_0 + n(t - t_0) \\
 i &= 54^\circ + \delta_i \\
 l &= l_0 + \dot{\Omega}(t - t_0) - \omega_E(t - t_0)
 \end{aligned}
 \tag{2.2.1-50}$$

где је  $\omega_E = 7292115.1467 \cdot 10^{-11} \text{ rad/s}$  и представља угаону брзину ротације Земље. Остала три Кеплерова параметра  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$  су константна. У трећем изразу у (2.2.1-50) други члан са десне стране представља регресију узлазног чвора, а трећи равномерну промену звезданог времена у односу на епоху  $t_0$ . Помак (ход) сателитовог часовника се моделује као

$$\delta^S = a_0 + a_1(t - t_0). \tag{2.2.1-51}$$

### Емитујуће ефемериде

Емитујуће (*broadcast*) ефемериде (Табела 2.2.1-6) се рачунају на основу *GPS* опажања на пет пратећих станица *GPS* контролног сегмента. При рачунању параметара орбите користе се подаци непосредно изведених мерења. Подаци нових опажања се методом Калмановог филтрирања додају претходним, на основу чега се добијају поправљене орбите које даље служе у екстраполацији положаја сателита за период опажања. Тачност срачунатих података о орбитама износи око 5 m, под условом да се њихово учитавање у сателите врши три пута дневно. Са једнодневним учитавањем, може се очекивати тачност орбита од око 10 m.

Табела 2.2.1-6: Емитујуће ефемериде (Hofmann-Wellenhof, 1994)

Параметар	Објашњење
$AODE$	Старост ефемерида
$t_e$	Референтна епофа ефемерида
$\sqrt{a}, e, M_0$	Кеплерови параметри у епохи $t_e$
$\omega_0, i_0, l_0$	
$\Delta n$	Поправка средње брзине кретања сателита
$i$	Брзина промене инклинације
$\dot{\Omega}$	Брзина промене ректасцензије узлазног чвора
$C_{us}, C_{us}$	Коефицијенти за рачунање поправке аргумента перигеја
$C_{ur}, C_{ur}$	Коефицијенти за рачунање поправке геоцентричне дужине
$C_{is}, C_{is}$	Коефицијенти за рачунање поправке инклинације

Главна контролна станица је “одговорна” за рачунање ефемерида и њихово слање у сателите. Ефемериде садрже шест параметара којима се описује непоремећена

Кеплерова елипса у референтној епохи као и изванредан број секуларних и других периодичних корекција за поправљање срачунатих параметара. Параметри приказани у претходној табели (стање из 1995. године) се шаљу сваки сат и могу се користити у периоду од четири сата од епохе на коју се односе.

Пертурбациони ефекти изазвани несферичношћу Земље, директним утицајем других планета и притиском сунчеве радијације, узимају се у обзир преко последњих девет параметара датих у Табели 2.2.1-6. Да би се срачунали положаји сателита у епохи опажања  $t$ , потребно је поред познавања  $a$  и  $e$ , срачунати следеће параметре

$$\begin{aligned}
 M &= M_0 + \left[ \sqrt{\frac{\mu}{a^3} + \Delta n} \right] (t - t_e) \\
 l &= l_0 + \dot{\Omega}(t - t_e) - \omega_E(t - t_0) \\
 \omega &= \omega_0 + C_{uc} \cos(2u) + C_{us} \sin(2u) \\
 r &= r_0 + C_{rc} \cos(2u) + C_{rs} \sin(2u) \\
 i &= i_0 + C_{ic} \cos(2u) + C_{is} \sin(2u) + i(t - t_e)
 \end{aligned} \tag{2.2.1-52}$$

где је  $u = \omega + v$  аргумент латитуде. Геоцентрична дужина  $r_0$  се рачуна из (2.2.1-5) користећи  $a$ ,  $e$ ,  $E$ , у епохи опажања. У односу на референтну епоху  $t_e$ , рачунање  $l$  је аналогно као у (2.2.1-50). Треба нагласити да се при рачунањима мора користити тачна вредност брзине земљине ротације.

### Прецизне ефемериде

Прецизне ефемериде се рачунају из података опажања изведених на посебним мрежама за праћење сателита и рачунају се у неколико различитих институција. Резултати обраде су доступни са закашњењем од четири до 14 дана (према подацима из 1995. године) од тренутка опажања и изражени су у форми положаја и брзине кретања сателита у одређеним епохама. На пример, податаци по формату *NGS* садрже:

- заглавље (*header*) кога чине опште информације (интервал епоха, тип орбите и сл.) и
- податке (ефемериде) по епохама.

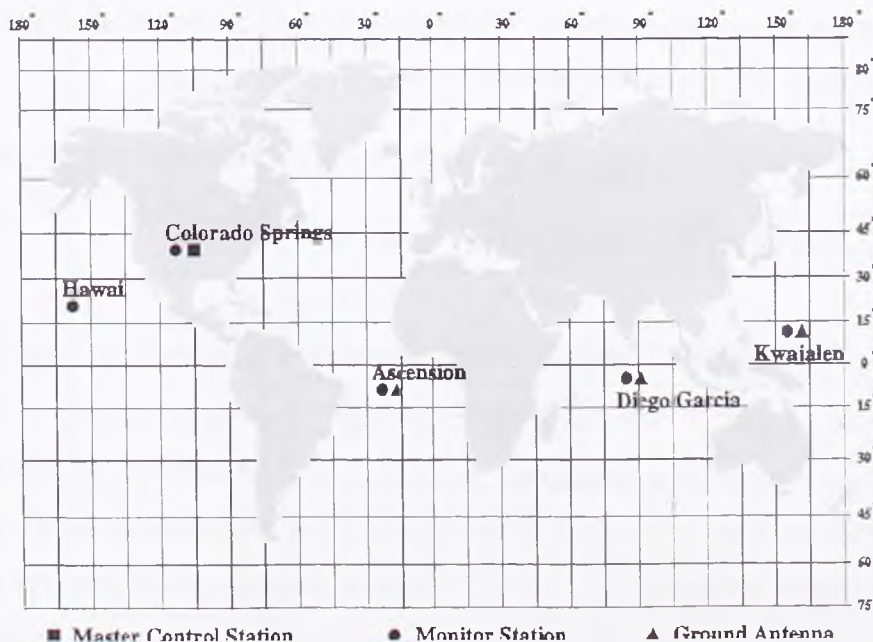
Подаци се односе на сваки сателит посебно и репрезентују вектор положаја  $\vec{p}$  ( $km$ ) и вектор брзине  $\dot{\vec{p}}$  ( $km/s$ ). Поред потпуног, постоји и редуковани *NGS* формат који садржи само податке о векторима положаја, док се вектори брзина рачунају из података положаја. У почетку, *NGS* резултати су били засновани на двофреквентним *P* кодним опажањима добијеним са *CIGNET* станица. Касније, *NGS* прелази на опажања фаза носећих таласа. Орбите се рачунају користећи *IERS* координате станица које су приближне *WGS84* вредностима. Унутрашња тачност орбита се креће око  $10^{-7}$ . *NGS* дистрибуира податке као *ASCII* или бинарне датотеке. Како се подаци прецизних



ефемерида не дају за сваку епоху, коришћење истих захтева интерполацију како би се срачунале вредности параметара орбите за сваку епоху опажања. Обично се за те намене користи Лагранжова интерполација која омогућава примену срачунатих коефицијената полинома дужих серија мерења, без новог рачунања коефицијената. Нека истраживања су показала (*Remondi, 1989* и *Hofmann –Wellenhof, 1994*) да код *GPS* сателита, при интервалу епоха од 30 минута, интерполација деветог степена обезбеђује тачност ефемерида реда  $10^{-8}$ .

### 2.2.2. Контролна компонента система

Контролни део *GPS*-а чини опрема за управљање, контролу и праћење сателита и опрема за пријем сигнала и произвођење навигационе поруке. Пратеће станице прате сателите и прикупљају податке уз помоћ кодних и фазних мерења. Исте су повезане са главном контролном станицом (*Master Control Station - MCS*) где се врши обрада података и одређивање положаја сателита. *MCS* поправља раније срачунате приближно одређене ефемериде и шаље их до антена преко којих се дистрибуирају до сателита. Емитујуће ефемериде садрже податке о орбитама сателита, користећи податке праћења истих, у задње две недеље. На крају сваког дана, ефемериде се поправљају са новим елементима, прикупљеним праћењем сателита до тог времена. Оперативни контролни део *GPS*-а чине главна контролна станица у *Colorado Springsu*, три земаљске пратеће станице у *Kwajaleinu* на Филипинима, *Diego Garcia* и *Ascension*, једна пратећа станица при *MCS* и једна на Хавајима (слика 2.2.2-1).



Слика 2.2.2-1: Положај пратећих станица (*Hardcastle, 1986*)

Картографска агенција Министарства одбране САД (*Defense Mapping Agency - DMA*), у сврху рачунања прецизних ефемерида, планира успостављање још три земаљске антене лоциране у Великој Британији, Аустралији и Аргентини као и још 16 пратећих станица лоцираних по целом свету (*Eckels, 1987*).

Када је реч о *GPS*, емитујуће ефемериде се односе на *IRF* за тренутак опажања, поправљен за утицај нутације и прецесије. Оно што преостаје пријемнику (или у обради) јесте да изврши поправку за померање пола и за износ Гриничког звезданог времена. У зависности од тога о каквој се примени *GPS* ради, корисник бира које ће ефемериде користити, строго водећи рачуна на који се референтни систем исте односе. Од овог последњег ће увелико зависити и прецизност добијених оцена вектора, посебно када је реч о великим дужинама.

### 2.2.3. Корисничка компонента система

Кориснички део *GPS* обухвата пријемнике, методе мерења, изравнање мреже и трансформацију координата. Како је *GPS* првенствено дизајниран да задовољи потребе у навигацији (тачност положаја око *20m*), да би се исти користило и у геодетском премеру највишег нивоа тачности, потребно је користити систем на начин који одступа од класичног (користи се у навигацији). Основна тенденција корисничког дела *GPS* је постизање тачности према захтевима премера. Да би се овај циљ постигао потребно је максимално редуковати све изворе грешака који утичу на тачност мерења, тј. треба познавати методу мерења, односно инструментариј са којим се врши пријем сигнала са сателита.

Основни делови *GPS* пријемника су:

- Антена са предпојачивачем;
- Радиофреквентна јединица;
- Микропроцесор;
- Јединица за унос података и екран;
- Јединица за смештај података и
- Јединица за напајање енергијом.

Основни задатак *GPS* антене јесте претварање енергије електромагнетских таласа који су приспели са сателита у електрично-струјни ток који се даље унутар пријемника обрађује. Величина и облик антене су веома важни јер од њих зависи способност антене да региструје *GPS* сигнале мале јачине. Антена може прикупљати податке на једном (*L1*) или оба носећа таласа (*L1* и *L2*). Упркос веома оштрим захтевима, у пракси се може срести велики број антена различитих типова, од којих су *микроспиралне* антене тренутно најраспрострањеније.

Најважније карактеристике *GPS* антена су: осетљивост антене на елевацију, азимут сателита и одбијени сигнал и стабилност фазног центра (тачке пријема емитованог таласа).

Врло често, ради појачавања сигнала на путу до пријемника, *GPS* антена се комбинује са предпојачивачем. Предпојачивач је уграђен на дно антене (код антена које су одвојене од инструмента – на пример, код WM102), а неопходно напајање добија преко коаксијалног кабла којим је повезана са пријемником.

Антена је тако конструисана да врши пријем са свих сателита из свих праваца изнад хоризонта. Након појачавања сигнала, исти се даље упућује у радио-фреквентни део. Сигнали су врло отпорни на интерференцију јер су *PRN* кодови јединствени за сваки сателит и имају врло малу унакрсну корелацију. Веома важна особина антена јесте стабилност фазног центра антене. Исти треба да је веома близак геометријском центру и стабилан на промену азимута и елевације сателита. Ово се посебно односи на примене *GPS* у кинематичком премеру. Антене које се користе у радовима високе тачности, имају могућност редукције сигнала са сателита малих елевација или сигнала произведених одбијањем од околних објеката. Чест је случај да се из тих разлога у антене уграђују и одговарајући заштитни прстенови.

Микропроцесор контролише цео систем и омогућује навигацију у реалном времену (уколико се користе кодна мерења). Контролни део обезбеђује интерактивну комуникацију са пријемником. Команде се могу издавати преко тастатуре, а обезбеђен је и велики број разних корисних информација у току мерења.



Слика 2.2.3-1: Основне компоненте ГПС пријемника

Јединица за смештај података служи за регистрацију опажања и навигационе поруке који су неопходни у даљем поступку обраде. У употреби су различити медији и то: микрочипови, касете, дискови и сл. Осим тога, пријемници се могу повезати и на посебан спољашњи уређај за регистрацију.

Што се тиче извора напајања, већина пријемника поседује интерни извор - батерије, али је могуће користити и спољни извор напајања.



Радио фреквентна јединица ( $RF$ ) представља најважнији део пријемника. Након приспећа сигнала из антене, уз помоћ  $CA$  кода се врши раздвајање компоненти сигнала који су јединствени за сваки сателит.  $RF$  садржи канале у којима се врши обрада примљених сигнала. У зависности од тога да ли се ради о једнофреквентним или двофреквентним пријемницима, зависиће и начин обраде мерења. Двофреквентни пријемници имају и ту могућност да врше комбиновање двају фреквенција и тако елиминишу утицај јоносфере. Важна особина  $RF$  дела јесте и број канала, од чега зависи да ли ће сваки канал пратити само један или више сателита. Код савремених  $GPS$  пријемника важи правило - да сваки канал прати само један сателит. Вишеканални пријемници су тачнији и мање осетљиви на губитак сигнала, али су истовремено осетљивији на међуканалне систематске грешке. Међутим, последње генерације савршенијих пријемника, пре почетка регистрације сигнала врше међуканалну калибрацију, достижући ниво тачности од око  $0.1mm$ . За разлику од вишеканалних пријемника постоје и друге врсте, као што су на пример, секвенцијални или мултиплекс канали који подразумевају праћење више сателита на једном каналу. Овакви  $GPS$  пријемници су јевтинији, али и мање тачнији и посебно су осетљиви на губитак сигнала (*Hofmann-Wellenhof, 1994*).

Основни елементи  $RF$  дела су осцилатори који генеришу референтну фреквенцију, мултипликатори који дају високе фреквенције, филтери који елиминишу нежељене ефекте и миксери. Производ двају осцилација  $y_1$  и  $y_2$  са различитим амплитудама  $a_1$  и  $a_2$  и различитим кружним фреквенцијама  $\omega_1$  и  $\omega_2$  изгледа (поједностављен израз)

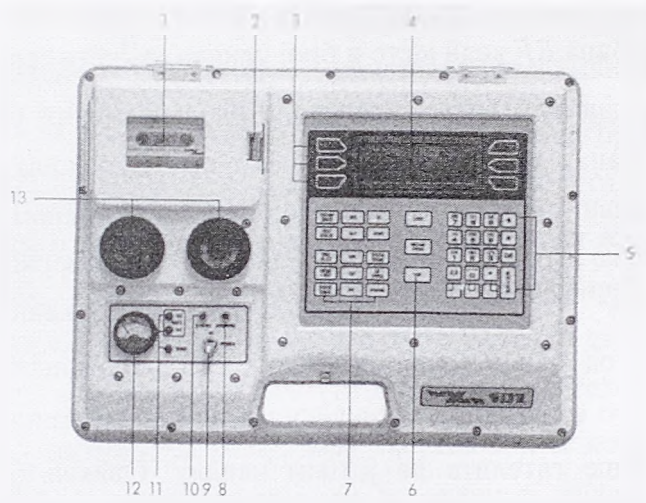
$$\begin{aligned}
 y &= y_1 \cdot y_2 = a_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cdot a_2 \cos(\omega_2 \cdot t) = \\
 &= \frac{a_1 \cdot a_2}{2} \cdot [\cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t) + \cos((\omega_1 + \omega_2) \cdot t)],
 \end{aligned}
 \tag{2.2.3-1}$$

при чему се као резултат добја осцилација  $y$  коју чини нискофреквентни и високофреквентни део. Након примене ускопојасног филтера, високофреквентни део се елиминише, а нискофреквентни користи у даљој обради.

Од 1980. године, када је на комерцијалном тржишту био присутан само један  $GPS$  пријемник до 2000. године, број различитих типова уређаја се повећао на преко 100 модела. Разликују се неколико основних категорија инструмената, и то: војни и цивилни, навигациони и геодетски, инструменти за пренос времена,  $CA$  и  $P$  пријемници, једнофреквентни и двофреквентни, итд. Иако између ових типова уређаја постоје извесне разлике, основни принципи рада су исти.

У Табелама 2.2.3-1 и 2.2.3-2 су дате неке од основних карактеристика навигационих и геодетских пријемника. Подаци су прикупљени из различитих извора, тако да није било могуће у потпуности приказати сваки важан податак.

Поред основних делова *GPS* пријемника, у теренском комплекту се налази: статив, глава статива, адаптер антене, уређај за мерење висине антене и уређаји за мерење температуре, притиска и влажности. На слици 2.2.3-2 приказани су основни делови *GPS* инструмента *Wild - Magnavox WM102*.



1. касетна јединица
2. бравица
3. програмабилно-функционални тастери
4. дисплеј
5. алфанумерички тастери
6. програмирани тастери
7. функционални тастери
8. индикатор ујозорења
9. on/off
10. индикатор стајуса
11. вишенаменски прекидач
12. индикатор напона
13. ујијачи влаге

Слика 2.2.3-2: Основни делови ГПС уређаја *WM102*

Табела 2.2.3-1: Навигациони пријемници (подаци из 1991. године)

МОДЕЛ	БРОЈ КАНАЛА	ПРИЈЕМ	ДИМЕНЗИЈЕ ( <i>cm</i> )	ТЕЖИНА ( <i>kg</i> )	НАКНАДНА ОБРАДА
Trimble 4000 A	4	L1 - CA	178x457x489	20	-
Sony GTT 2000	4	L1 - CA	160x205x295	7	-
Polytechnic XR1	1	L1 - CA	480x195x495	12	-
Magnavox T-set	5	L1 - CA	968x457x962	16	-
Prakla Seismos	1	L1 - CA	493x259x271	25	-
Ashtech XII Renger	12	L1 - CA	100x216x200	9,7	ДА
Standard Lor. Glob. M2000	6	L1 - CA	244x102x61	1,4	НЕ
Gessa GPS pac	5	L1 - CA	120x40x90	0,9	НЕ
Konsberg Navigation DS9254	5	L1 - CA	200x120x70	2,0	ДА
Magelan 5000 pro	5	L1 - CA	215x90x50	0,8	ДА
Magnavox MX 1000	6	L1 - CA	300x150x66	1,2	НЕ
Navstar XR4 - G	2	L1 - CA	280x150x89	2,9	НЕ
Rauff & Sorensen GPS- 7	5	L1 - CA	170x114x74	1,9	НЕ
Terranav 2000	6	L1 - CA	160x60x230	1,1	ДА
Trimble Pathfinder	9	L1 - CA	207x127x51	1,3	ДА



Табела 2.2.3-2: Геодетски пријемници (подаци из 1991.године)

МОДЕЛ	БРОЈ КАНАЛА	БРОЈ САТЕЛИТА	ДИМЕНЗИЈЕ (cm)	АНТЕНА	ПРИЈЕМ	ТЕЖИНА (kg)
Trimble 4000 S	4 ili 5	5	178x457x469	Helix micro - strip	L1 - CA	20
Texas I. TI 4100	1	4	373x445x211	Helix	L1 - CA, P L2 - P	24
Wild M. WM 101	1	6	510x390x179	Helix	L1 - CA	14,4
Sercel TRS 5	5	5	370x525x445	Helix	CA	90
Litton Survey set	-	-	410x290x200	Helix	CA	5
Norstar 1000	5 ili 7	5 - 7	180x450x550	-	CA	15
Macrometar V 1000	6	6	690x530x640	Dipole	Beskodni, L1 *	45
Macrometar II	6	6	-	Micro strip	Beskodni, L1, L2 *	27
Minimac	4	8	-	Helix ili Micro strip	Beskodni, L1, L2 *	-
Istac model 1991	-	sve	660x360x230	Micro strip	L1	29
Istac model 2002	1 (9)	sve	290x420x420	Micro strip	L1, L2	7
Ashtech M-XII	12/24	12	100x216x200	Micro strip	L1 - CA, L2	9,7
Ashtech P-12	96	12	100x216x200	Micro strip	L1 - CA, P L1 - P	9,7
Leica Wild 2000	9	9	203x209x114	-	L1 - CA, L2 - P *	2,2
Rogue 8C SNR mini	8	8	483x178x432	-	L1 - CA, P L2 - P	11,95
Rogue 8C SNR 8000	Turbo 8	8	229x58x292	-	L1 - CA, P L2 - P	9,6
Sercel NR 101	10	10	275x123x275	-	L1 - CA	6,9
Sokia GSS 1	8	8	990x155x410	-	L1 - CA	7,0
Trimble Geodetic Surveyor	T 8/12	sve	905x132x959	-	L1 - CA	7,9
Trimble Geodetic Sist P	8	sve	905x132x959	-	L1 - CA L2 - P *	7,9
Terasurv 2000	6	6	160x60x290	-	L1 - CA	2,1
WM 102	8	6	-	Helix	L1 - CA, P L2 - P	19,8

\* - техника квадрирања сигнала

#### 2.2.4. Технике обраде резултата GPS мерења

Сигнал емитован са сателита преко антене доспева у пријемник где се врши његово појачавање и доводи у фазни детектор (Симић, 1992). С друге стране се у фазни детектор уводи референтни сигнал из основног генератора модулационог напона. У фазном детектору, техником кодне корелације, врши се упоређивање фаза емитованог и референтног сигнала и врши мерење фазне разлике. Постоји неколико начина мерења фазне разлике од којих се највише користи дигитални.

Техника кодне корелације обезбеђује све компоненте сателитског сигнала, и то: параметре часовника, навигациону поруку и немодулисане носеће таласе. Једини услов јесте познавање *PRN* кода. Техника обраде подразумева неколико корака. Први корак обухвата генерисање референтног носећег таласа који се модулише уз помоћ познатог *PRN* кода. У другом кораку врши се корелација референтног сигнала са примљеним сигналом, након чега се један у односу на други помера, све до њихове потпуне корелације (математичке). Временски померај  $\Delta t$  (одбацујући грешке часовника) коресподентан је времену путовања сигнала од сателита до антене. Након одбацивања *PRN* кода, примљени сигнал још увек садржи навигациону поруку која се издваја уз помоћ широкопојасног филтера. Коначан резултат јесте доплерски померен носећи талас који служи за формирање резултата фазног мерења. Применом *C/A* кода, кодно корелациона техника реконструира само *L1* носећи талас. Уколико пријемник поседује и *P* код (тј. *Y* код), уз помоћ кодно корелационе технике, могуће је реконструисати оба носача. Демодулација навигационе поруке омогућује потпунију корелацију сигнала и лакше праћење *P* кода. Уколико пријемник није у стању да генерише *Y* код, постоје и друге технике рада којима се врши реконструкција *L2* носећег таласа, међу којима треба истаћи: технику квадрирања сигнала, технику унакрсне корелације, технику квадрирања кодно корелисаног сигнала и *Z tracking* технику (Hofmann-Wallenhof, 1994).

#### 2.2.5. Испитивање, контрола и одржавање GPS уређаја

Пре почетка мерења потребно је извршити: испитивање антена и контролу рада појединих делова пријемника.

##### Испитивање GPS антена

Испитивање *GPS* антена обухвата одређивање положаја фазног центра у односу на геометријски центар и одређивање стабилности положаја фазног центра у зависности од положаја сателита. Сва испитивања се врше у апехроичним просторијама (*anechoic chamber* или *глувим собама*) које поседују посебан уређај (позиционер) са пет степени слободе кретања (три translације и две ротације). На позиционер се монтира антена, док се на помоћни (фиксиран положај) део поставља извор сигнала (симулатор сателита). Сви

зидови коморе као и унутрашња опрема су прекривени материјалом који важи као високи апсорбент микроталасне енергије (нема ефеката одбијања сигнала). *GPS* антена се у току испитивања помера у односу на фиксни извор зрачења. Иако сама опрема (њена неусавршеност) при раду, изазива извесне систематске утицаје, они су истоветни при испитивању различитих антена, тако да се тај утицај у разлици између антена истог типа, може узети као занемарљив.

Положај фазног центра (тачке пријема сигнала) се оцењује из серија фазних мерења под различитим зенитним угловима и различитим азимутима. Нека испитивања су показала (*Schupler and Clark 1991*) да постоје значајне разлике у промени положаја фазног центра у зависности од модела антене, тако при датом зенитном углу, неке антене показују  $L1$  фазне разлике и до  $50^\circ$ , или око  $2.6\text{ cm}$ . *Ashjaee (1986)* тврди, да се једнаким усмеравањем антена на крајевима базних линија редукује грешка мерења дужине изазвана овим утицајем и своди на свега  $2\text{mm}$ . Други веома важан закључак је да постоји разлика између фазних мерења са једном антенном на  $L1$  и  $L2$  фреквенцији. Тј. једна антена која на једној фреквенцији показује велико одступање фазног центра у односу на геометријски центар, по правилу, нема велико одступање на другој фреквенцији. Као опште правило важи закључак да нема *GPS* антене за коју се може рећи да је најбоља за све врсте радова. Сваки корисник бира антену у зависности од врсте посла којом се бави. Најважније је истаћи то да свака *GPS* антена има своје сопствене карактеристике. Чак и антене које су на први поглед сличне, могу имати веома различите карактеристике. Ове се разлике морају узети у обзир уколико се жели постићи највиша тачност. Мешање различитих антена може изазвати различите ефекте, док су варијације између антена истог типа веома мале. Ово је срећна околност, јер омогућава да се испитивањем једног узорка истог типа, добију карактеристике те врсте антена. Међутим, да би се ово потврдило у пракси, пожељно би било испитати већи број антена.

### Контрола и одржавање *GPS* уређаја

Контрола исправности појединих модула инструмента се изводи тестирањем њихове исправности, појединачно или свих одједном. Индикатор исправности функционисања се одмах након извођења теста приказује на екрану пријемника (случај код *WM102*). У зависности од врсте грешке, дефинисане су и активности које треба предузети на отклањању последица. Део грешке се може отклонити рутински, док се озбиљнији кварови морају отклонити у специјализованим лабораторијама произвођача. Основни проблем у раду антена (из искустава у раду са антенама пријемника *WM102*) представљају контакти на крајевима кабла који повезује антену са пријемником. Стога је нужно, с времена на време, исте преконтролисати и фиксирати. Редовна замена интерних батерија је такође нужна и треба је вршити у складу са упутством произвођача.



### 3. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ МЕТОДА GPS РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА

---

Приликом сваког планирања мерења бира се функционални модел који ће репрезентовати физичку стварност и коју треба повезати са извршеним мерењем, с циљем добијања оцена параметара усвојеног функционалног модела. У геодезији, најчешћи примери функционалног модела јесу геометријски по природи и односе се на неку геометријску фигуру (троугао, четвороугао и сл.). Функционални модели нису увек експлицитни, а не морају бити ни очигледни. Тако, на пример, *GPS* дужина као физичка појава чак и не постоји. Конкретно, код дужина мерених са електрооптичким даљиномерима (или са *GPS*), дужина се добија индиректним путем, мерећи време које сигнал пређе између пријемника и антене. Колико ће неки модел бити сложен, зависиће како од типа инструмента тако и од примењене методе мерења. Значи, под математичким моделом се сматра теоретски систем или концепт са којим се описује неки физички процес или скуп неких догађаја (мерења). Математички модел чине: функционални и стохастички модел. Први описије детерминистичка (квантитативна) својства променљивих (мерења) а други (стохастички) описује квалитативна (стохастичка) својства мерења (променљиве).

Изравнање по методи најмањих квадрата (*least-squares adjustment*), обрадом сувишних опажања у складу са дефинисаним математичким законима, омогућује објективну контролу квалитета резултата мерења. Сувишна мерења јесу она прекобројна мерења (која су преко неопходног броја мерења) која се користе при оцени непознатих параметара. Ова метода оцене се користи посебно када се жели постићи висока тачност оцена. У теорији методе најмањих квадрата, неопходно је истаћи неколико статистичких постулата који су веома важни ради даљег разумевања теорије оцена параметара у линеарним моделима, (*Leick, 1995*):

- Опажање представља један статистички догађај, односно оно представља исход статистичког експеримента (мерење углова, дужина, псеудодужина и сл.);
- Исход таквог експеримента се назива случајном променљивом;
- Популацијом се назива укупност свих догађаја, тј. популацију чине све вредности које случајна променљива може да има. Популација се описује коначним скупом параметара који се називају параметрима популације. Тако, нормална расподела се описује са два параметра - средњом вредношћу и дисперзијом (варијансом);

- Узорком се сматра подскуп неке популације. На пример, мерење неке дужине више пута илу у више серија по више пута у свакој серији и сл.;
- Статистика репрезентује оцену параметара популације или функције тих параметара и могуће ју је добити из узорка резултата мерења. На пример, у серији од неколико резултата мерења, статистиком се називају оцена средње вредности и оцена дисперзије;
- Вероватноћом се изражава учестаност појављивања неког догађаја. Свака вредност случајне променљиве има неку своју вероватноћу појаве; и
- Вероватноће се описују функцијом распореда густина вероватноћа која показује вероватноће могућих вредности случајних променљивих.

Теренска мерења прати извештај број различитих извора грешака које није могуће избећи. У процесу мерења присутне су: случајне, систематске и грубе грешке.

Случајне грешке су неизбежне и настају као резултат несавршености методе мерења и нестабилности свих услова у процесу мерења неке физичке величине. Оне су саставни део процеса мерења и немогуће их је потпуно занемарити. Метод најмањих квадрата је потпуно прилагођен природи утицаја случајних грешака и у стању је да их у потпуности узме у обзир (у обради).

### 3.1. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ АПСОЛУТНЕ МЕТОДЕ GPS РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА

#### 3.1.1. Функционални модел апсолутне методе кодних GPS резултата мерења

Топоцентрични вектор положаја сателита  $p$  у тачки  $k$  једнак је разлици вектора њихових геоцентричних положаја (слика 2.1-1), тј.

$$\vec{\rho}_k^p = \vec{r}^p - \vec{r}_k, \quad (3.1.1-1)$$

одакле је:

$$\|\vec{\rho}_k^p\| = \|\vec{r}^p - \vec{r}_k\|. \quad (3.1.1-2)$$

Норма топоцентричног вектора положаја сателита јесте геометријска дужина између тачке  $k$  и сателита  $p$  и једнака је производу брзине простирања сигнала -  $c$  и времена -  $\Delta t$  које је потребно да сигнал пређе пут од сателита до пријемника, тј.

$$\rho_k^p = c \cdot (t_k - t^p) = c \cdot \Delta t. \quad (3.1.1-3)$$

Мерење дужина између пријемника  $k$  и сателита  $p$ , оптерећено је утицајима неколико извора грешака чији ефекти онемогућавају добијање геометријске дужине, већ

тзв. псеудодужине. Узевши у обзир само грешке часовника, псеудодужине се дефинишу као

$$R_k^P = c \cdot \left[ (t_k + \delta t_k) - (t^P + \delta t^P) \right], \quad (3.1.1-4)$$

где су:  $\delta t_k$  и  $\delta t^P$  грешке часовника у пријемнику и сателиту, респективно.

Подаци о часовнику сателита су познати и шаљу се као део навигационе поруке у форми три коефицијента ( $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$ ) полинома, са податком о референтном времену  $t_0$ , тако да једначина

$$\delta t^P(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2, \quad (3.1.1-5)$$

омогућује рачунање систематске грешке сателитовог часовника у епохи  $t$ . Треба напоменути да (3.1.1-4) моделује већи део утицаја часовника у сателиту, али ипак остаје један део грешке који није могуће у потпуности моделовати.

Израз (3.1.1-4) се може написати у другом облику, као

$$R_k^P = \rho_k^P + c \cdot (\delta t_k - \delta t^P), \quad (3.1.1-6)$$

па када се члан који се односи на грешку часовника у сателиту премести на леву страну (позната вредност из навигационе поруке) добија се коначан модел мерења псеудодужина (узимајући у обзир само грешке часовника) облика

$$R_k^P + \delta t^P = \rho_k^P + c \cdot \delta t_k = \left\| \vec{r}^P - \vec{r}_k \right\| + c \cdot \delta t_k. \quad (3.1.1-7)$$

У изразу (3.1.1-7) садржане су четири непознате координате стајне тачке  $k$  и грешка часовника -  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $w_k$  и  $\delta t_k$ . Да би се систем решио, неопходно је измерити најмање четири псеудодужине, односно, потребна су најмање четири различита сателита. За случај већег броја мерења, оцена координата положаја пријемника може се извршити уз помоћ методе најмањих квадрата. У том случају, систем (3.1.1-7) се развојем у Тејлоров ред линеаризује у близини непознатих координата тачке  $k$ , на следећи начин:

Нека су  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $w_k$  - истините (највероватније) координате,  $u_{ko}$ ,  $v_{ko}$ ,  $w_{ko}$  - приближне координате, а  $\Delta u_k$ ,  $\Delta v_k$ ,  $\Delta w_k$  - поправке приближних координата положаја тачке  $k$ .

Нека је

$$R_k^P = \sqrt{(u^P - u_k)^2 + (v^P - v_k)^2 + (w^P - w_k)^2} + c \cdot \delta t_k = f(u_k, v_k, w_k, \delta t_k). \quad (3.1.1-8)$$

функција која повезује мерену псеудодужину и непознате параметре. Приближна вредност мерене псеудодужине се може изразити као

$$R_{ko}^P = \sqrt{(u^P - u_{ko})^2 + (v^P - v_{ko})^2 + (w^P - w_{ko})^2} + c \cdot \delta t_{ko} = f(u_{ko}, v_{ko}, w_{ko}, \delta t_{ko}). \quad (3.1.1-9)$$



Како је

$$u_k = u_{ko} + \Delta u_k, \quad v_k = v_{ko} + \Delta v_k, \quad w_k = w_{ko} + \Delta w_k, \quad \delta t_k = \delta t_{ko} + \Delta \delta t_k, \quad (3.1.1-10)$$

тада важи,

$$f(u_k, v_k, w_k, \delta t_k) = f(u_{ko} + \Delta u_k, v_{ko} + \Delta v_k, w_{ko} + \Delta w_k, \delta t_{ko} + \Delta \delta t_k). \quad (3.1.1-11)$$

Развојем функције (3.1.1-8) у Тејлоров ред у близини приближних положаја тачке  $k$ , (задржавајући се на члановима првог степена) добија се

$$f(u_k, v_k, w_k, \delta t_k) = f(u_{ko}, v_{ko}, w_{ko}, \delta t_{ko}) + \frac{f}{x_{ko}} \Delta u_k + \frac{f}{y_{ko}} \Delta v_k + \frac{f}{z_{ko}} \Delta w_k. \quad (3.1.1-12)$$

Када се нађу изводи функције по непознатим параметрима, добија се

$$R_k^p = R_{ko}^p - \frac{u^p - u_{ko}}{\rho_{ko}^p} \Delta u_k - \frac{v^p - v_{ko}}{\rho_{ko}^p} \Delta v_k - \frac{w^p - w_{ko}}{\rho_{ko}^p} \Delta w_k + c \cdot \Delta \delta t_k, \quad (3.1.1-13)$$

где је:

$$\rho_{ko}^p = \sqrt{(u^p - u_{ko})^2 + (v^p - v_{ko})^2 + (w^p - w_{ko})^2}. \quad (3.1.1-14)$$

Премештањем првог члана са десне стране изврза (3.1.1-13) на леву страну, означавањем појединих чланова уз непознате са  $a$ ,  $b$  и  $c$  (коэффицијент  $c$  не треба мешати са брзином простирања сигнала) и множењем целог израза са  $(-1)$  добија се коначан облик линеарног модела опажања псеудодужине, тј.

$$R_{ko}^p - R_k^p = \Delta R = a_k^p \cdot \Delta u_k + b_k^p \cdot \Delta v_k + c_k^p \cdot \Delta w_k - c \cdot \Delta \delta t_k. \quad (3.1.1-15)$$

Како израз (3.1.1-15) садржи четири непознате, да би систем имао решење, неопходне су најмање четири псеудодужине облика (3.1.1-15), тј.

$$\begin{aligned} \Delta R_k^1 &= a_k^1 \cdot \Delta u_k + b_k^1 \cdot \Delta v_k + c_k^1 \cdot \Delta w_k - c \cdot \Delta \delta t_k \\ \Delta R_k^2 &= a_k^2 \cdot \Delta u_k + b_k^2 \cdot \Delta v_k + c_k^2 \cdot \Delta w_k - c \cdot \Delta \delta t_k \\ \Delta R_k^3 &= a_k^3 \cdot \Delta u_k + b_k^3 \cdot \Delta v_k + c_k^3 \cdot \Delta w_k - c \cdot \Delta \delta t_k \\ \Delta R_k^4 &= a_k^4 \cdot \Delta u_k + b_k^4 \cdot \Delta v_k + c_k^4 \cdot \Delta w_k - c \cdot \Delta \delta t_k \end{aligned} \quad (3.1.1-16)$$

или, у матричном облику,

$$\Delta R = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad (3.1.1-17)$$

где су:

$$\Delta R = \begin{bmatrix} R_{ko}^1 - R_k^1 \\ R_{ko}^2 - R_k^2 \\ R_{ko}^3 - R_k^3 \\ R_{ko}^4 - R_k^4 \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_k^1 & b_k^1 & c_k^1 & -c \\ a_k^2 & b_k^2 & c_k^2 & -c \\ a_k^3 & b_k^3 & c_k^3 & -c \\ a_k^4 & b_k^4 & c_k^4 & -c \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta v_k \\ \Delta w_k \\ \Delta \delta t_k \end{bmatrix}. \quad (3.1.1-18)$$

Оцена вектора параметара се добија директно као

$$\hat{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \Delta R. \quad (3.1.1-19)$$

У свакој епохи  $t$ , постоје 4 непозната параметра. То су три координате и параметар стања пријемниковог часовника и исти се могу оценити на основу симултаних опажања на четири сателита. Ако је број сателита једнак  $S$ , а број епоха  $T$ , тада је број једначина опажања једнак  $S \cdot T$ . Да би се добило јединствено решење, број непознатих не сме бити већи од броја опажања. На основу израза (3.1.1-7) следи

$$R_k^p(t) + c \cdot \delta t^p(t) = \rho_k^p(t) + c \cdot \delta t_k(t) \quad (3.1.1-20)$$

$$S \cdot T \geq 3 + T$$

Уколико горњи израз посматрамо у једној епохи ( $T = 1$ ), добија се да је  $S \geq 4$ . Ако се свака епоха посебно посматра, положај тачке  $k$  и утицај часовника се могу у свакој епохи оценити из 4 или више симултаних опажања. Уколико је број опажања већи од четири, тада ће се применом методе најмањих квадрата, за вектор параметара добити оцена:

$$\bar{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K}_1 \cdot \Delta R, \quad (3.1.1-21)$$

где је:  $\mathbf{K}_1$  - коваријациона матрица опажања која се добија као  $\mathbf{K}_1 = \sigma^2 \cdot \mathbf{P}^{-1}$  (елементи матрице  $\mathbf{P}$  се емитију као део навигационе поруке).

### 3.1.2. Функционални модел апсолутне методе фазних GPS резултата мерења

Псеудорастојања се могу добити, осим из кодних мерења и мерењем фаза носећих таласа. Функционални модел фазних мерења гласи:

$$\varphi_k^p(t) = \varphi_k(t) - \varphi^p(t) + N_k^p(1) + J_{k,\varphi}^p(t) + \frac{f}{c} \cdot T_k^p(t) + \delta_{k,\varphi}(t) + \delta_{k,\varphi}^p(t) + \delta_{\varphi}^p(t) + \varepsilon_{\varphi}, \quad (3.1.2-1)$$

где су:  $\varphi_k(t)$  и  $\varphi^p(t)$  - фазе сигнала генерисаног у пријемнику  $k$  и примљеног са сателита  $p$ , у епохи номиналног времена пријемника,  $N_k^p(1)$  - целобројна неодређеност (*ambiguity*),  $J_{k,\varphi}^p(t)$  и  $T_k^p(t)$  - ефекти утицаја јоносфере и тропосфере,  $\delta_{k,\varphi}(t)$  и  $\delta_{\varphi}^p(t)$  - застоји настали као утицај несавршености конструкције сателита и пријемника,  $\delta_{k,\varphi}^p(t)$  - ефекат одбијања

сигнала од околине (*multipath*) и  $\varepsilon_{\varphi}$  - случајна грешка шума сигнала. Сви изрази су дати у циклусима носеће фреквенције.

Фазни детектор региструје временске промене  $\varphi_k(t) - \varphi^p(t)$ , померајући фазу референтног таласа до корелисаности са фазом примљеном таласа. Тако, уместо временских разлика, мере се разлике у фази. Када се фазна разлика промени у збиру за 1 циклус ( $2\pi$ ),  $\varphi_k^p(t)$  се такође промени за исти износ. У случају да у току рада дође до прекида у пријему сигнала, пријемник губи информацију о до тада регистрованом целом броју циклуса, па тек након поновног контакта са сателитом наставља нормално да ради, при чему бројач циклуса не показује више коректне резултате. У том случају, каже се да су се десили циклусни скокови (*cycle slips*) и исте је потребно на неки начин оценити. Опажање  $\varphi_k^p(t)$  временски посматрано, назива се и опажањем *акумулираних фаза* носећег таласа. Разлика  $\varphi_k(t) - \varphi^p(t)$  се односи на вакуум, јер се остали утицаји накнадно уводе.

Да би се формирао модел фазног мерења, полази се од (3.1.2-1), при чему се изједначава фаза примљеног са емитованим сигналом (у тренутку емитовања)  $\tau_k^p$  секунди раније. Фазе пристиглог сигнала и сигнала у тренутку његовог емитовања из сателита -  $\varphi_T^p$ , повезане су изразом

$$\varphi^p(t) = \varphi_T^p(t - \tau_k^p), \quad (3.1.2-2)$$

где је:  $\tau_k^p$  - време простирања сигнала кроз вакуум. Фазе које се односе на време право-  $t_r$  и номинално -  $t$ , везане су изразима

$$\begin{aligned} \varphi_k(t_r) &= \varphi_k(t) + f \cdot \delta t_k \\ \varphi_T^p(t_r - \tau_k^p) &= \varphi_T^p(t - \tau_k^p) + f \cdot \delta t^p \end{aligned} \quad (3.1.2-3)$$

Како су фреквенције осцилатора константне и сагласне систему сопственог времена које се генерише у пријемнику и сателиту, из задња два израза следи да је

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \varphi_k(t_r) - f \cdot \delta t_k \\ \varphi^p(t) &= \varphi_T^p(t - \tau_k^p) = \varphi_T^p(t_r - \tau_k^p) - f \cdot \delta t^p \end{aligned} \quad (3.1.2-4)$$

и када се земене у (3.1.2-1), при чему ће се за кратко изоставити остали утицаји, добија се

$$\varphi_k^p(t) = \varphi_k(t_r) - \varphi_T^p(t_r - \tau_k^p) - f \cdot \delta t_k + f \cdot \delta t^p + N_k^p(1). \quad (3.1.2-5)$$

Како је  $\tau_k^p \approx 70 \text{ ms}$ , други израз са десне стране захтева да се моделује и фреквенција осцилатора у сателиту, тј.

$$\dot{\varphi}_T^p(t_r) = f + a^p + b^p \cdot t, \quad (3.1.2-6)$$



где су:  $a^p$  - промена (помак) фреквенције (*frequency offset*), а  $b^p$  - брзина промене фреквенције (*frequency drift*) у тренутку емитовања сигнала<sup>1</sup>.

Развојем израза  $\varphi_T^p(t_r - \tau_k^p)$  у Тејлоров ред у близини епохе емитовања сигнала и задржавајући се на члановима првог степена, добија се

$$\begin{aligned} \varphi_T^p(t_r - \tau_k^p) &= \varphi_T^p(t_r) - \int \dot{\varphi}_T^p \cdot dt \\ &= \varphi_T^p(t_r) - \left( f + a^p + \frac{1}{2} b^p \cdot \tau_k^p \right) \cdot \tau_k^p \end{aligned} \quad (3.1.2-7)$$

Заменом (3.1.2-7) у (3.1.2-5), добија се

$$\varphi_k^p(t) = \varphi_k(t_r) - \varphi_T^p(t_r) - f \cdot \delta t_k + f \cdot \delta t^p + \left( f + a^p + \frac{1}{2} b^p \cdot \tau_k^p \right) \cdot \tau_k^p + N_k^p(1) \quad (3.1.2-8)$$

Како се изрази  $\varphi_k(t_r)$  и  $\varphi_T^p(t_r)$  не могу издвојити из грешака часовника  $f \cdot \delta t_k$  и  $f \cdot \delta t^p$ , исти се игноришу, тим пре јер се исти неутралишу формирањем двоструких разлика фазних опажања (*double difference phase observable*).

За анализу утицаја помака и брзине промене фреквенције сателитовог осцилатора на промену фазе пристиглог таласа, послужиће израз

$$\Delta\varphi^p = \left( a^p + \frac{1}{2} b^p \cdot \tau_k^p \right) \cdot \tau_k^p, \quad (3.1.2-9)$$

који говори колико се промени фаза услед нестабилности осцилатора у сателиту за време простирања сигнала  $\tau_k^p$ . Анализирајући (3.1.2-9), може се закључити да, с обзиром да је  $\tau_k^p$  релативно мала вредност, допринос изазван брзином промене фреквенције је занемарљив, па се (3.1.2-8) мења и гласи

$$\varphi_k^p(t) = -f \cdot \delta t_k + f \cdot \delta t^p + \left( f + a^p \right) \cdot \tau_k^p + N_k^p(1) \quad (3.1.2-10)$$

На крају, неопходно је изразити однос између времена простирања сигнала и топоцентричне дужине, тј.

$$\tau_k^p = \frac{\rho_k^p(t) + \dot{\rho}_k^p(t) \cdot \delta t_k}{c}, \quad (3.1.2-11)$$

па када се (3.1.2-11) замени у (3.1.2-10) и уведу остали утицаји, добија се коначан израз за директно фазно опажање, тј.

<sup>1</sup> Код цезијумских осцилатора (у сателитима)  $a/f_0 \approx 10^{-12}$  за  $b^h$  а  $b/f_0 \approx 10^{-15}$  за период од  $6^h$ .

$$\begin{aligned} \varphi_k^p(t) = & \frac{f}{c} \rho_k^p(t) - f \cdot \left[ 1 - \frac{\dot{\rho}_k^p(t)}{c} \right] \cdot \delta t_k + f \cdot \delta t^p + N_k^p(1) + \frac{a^p}{c} \cdot \rho_k^p(t) + J_{k,\varphi}^p(t) + \\ & + \frac{f}{c} \cdot T_k^p(t) + \delta_{k,\varphi}^p(t) + \delta_{k,\varphi}^p(t) + \delta_{\varphi}^p(t) + \varepsilon_{\varphi} \end{aligned} \quad (3.1.2-12)$$

Из (3.1.2-12) се види да грешка часовника у пријемнику има двоструки утицај. Већи део утицаја је изражен кроз производ  $f \cdot \delta t_k$ , а мањи кроз израз везан за промену топоцентричне дужине  $\dot{\rho}_k^p(t)$ . За  $\delta t_k = 1 \text{ ns}$ ,  $f \cdot \delta t_k = 1,5$  циклуса, што је скоро 150 пута више од тачности фазног мерења ( $\delta \varphi_k^p(t) = 0,01$  циклуса). Да би грешка фазе била испод 0,01 циклуса, потребно је да грешка часовника у пријемнику буде мања од  $0,01 \text{ ns}$ . У другом изразу ( $f \cdot \frac{\dot{\rho}_k^p(t)}{c}$ ) уз претпоставку да је  $|\dot{\rho}_k^p(t)| < 800 \text{ m/s}$  и  $\delta t_k = 1 \mu\text{s}$ ,  $\delta \varphi_k^p(t) \approx 0,004$  циклуса. Овај израз мења знак, у зависности од тога да ли сателит прилази или се удаљава од станице. Уколико грешка часовника  $\delta t_k$  не прелази  $0,1 \mu\text{s}$ , други део израза за утицај грешке часовника у пријемнику се може изоставити.

Грешка часовника у сателиту изазива грешку мерења фазе кроз два израза  $f \cdot \delta t^p$  и  $\frac{a^p}{c} \cdot \rho_k^p(t)$ . Одавде се види, да је утицај изражен другим изразом знатно мањи и зависи од помака фреквенције и времена простирања сигнала. Како је грешка часовника и других немоделираних ефеката линеарна, препоручује се да се комбиновани ефекти моделују са по једним параметром у свакој епохи мерења. Срећом, већина грешака се или елиминише или се значајно редукује применом метода разлика фаза.

Аналогно са (3.1.1), полазећи од модела фазних мерења (3.1.2-12, без пратећих параметара) облика

$$\varphi_k^p(t) = \frac{1}{\lambda} \cdot \rho_k^p(t) + N_k^p + f \cdot \delta t^p(t) - f \cdot \delta t_k(t), \quad (3.1.2-13)$$

једини израз који садржи непознате у нелинеарној форми јесте топоцентрична дужина  $\rho_k^p(t)$ . Између "мерених" топоцентричних дужина и непознатих параметара (координата стајних тачака) важе следећи односи

$$h_1(u_k, v_k, w_k) = \rho_k^p(t) + v_k^p(t), \quad (3.1.2-14)$$

при чему је:

$$\rho_k^p(t) = \sqrt{(u^p(t) - u_k)^2 + (v^p(t) - v_k)^2 + (w^p(t) - w_k)^2}, \quad (3.1.2-15)$$

топоцентрична дужина.

Ако је  $u_k = u_{k0} + \Delta u_k$ ,  $v_k = v_{k0} + \Delta v_k$  и  $w_k = w_{k0} + \Delta w_k$ , при чему су  $u_{k0}$ ,  $v_{k0}$ ,  $w_{k0}$  приближне вредности координата познате, док су  $\Delta u_k$ ,  $\Delta v_k$ ,  $\Delta w_k$  непознате, линеаризацијом (3.1.2-14 -развојем у Тејлоров ред у близини приближних вредности непознатих координата) добија се

$$h_i(u_k, v_k, w_k) = h_i(u_{k0} + \Delta u_k, v_{k0} + \Delta v_k, w_{k0} + \Delta w_k) = h_i(u_{k0}, v_{k0}, w_{k0}) + \frac{\partial h_i}{\partial u_{k0}} \cdot \Delta u_k + \frac{\partial h_i}{\partial v_{k0}} \cdot \Delta v_k + \frac{\partial h_i}{\partial w_{k0}} \cdot \Delta w_k + \dots \quad (3.1.2-16)$$

при чему су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial u_{k0}} &= -\frac{u^p(t) - u_{k0}}{\rho_{k0}^p(t)} = a_k^p(t) \\ \frac{\partial h_i}{\partial v_{k0}} &= -\frac{v^p(t) - v_{k0}}{\rho_{k0}^p(t)} = b_k^p(t) \quad , \\ \frac{\partial h_i}{\partial w_{k0}} &= -\frac{w^p(t) - w_{k0}}{\rho_{k0}^p(t)} = c_k^p(t) \end{aligned} \quad (3.1.2-17)$$

кофицијенти матрице  $\mathbf{A}$  у (3.4.3-1) и представљају компоненте јединичног вектора усмереног од сателита ка стајним тачкама. Множењем једначине (3.1.2-13) са  $\lambda$  имајући у виду да је  $c = \lambda \cdot f$ , те преношењем мерених и познатих израза на леву страну а непознатих на десну, добија се

$$\lambda \cdot \varphi_k^p(t) - \rho_{k0}^p(t) - c \cdot \delta t^p(t) = a_k \cdot \Delta u_k + b_k \cdot \Delta v_k + c_k \cdot \Delta w_k + \lambda \cdot N_k^p - c \cdot \delta t_k(t), \quad (3.1.2-18)$$

при чему је  $l_k^p(t)$  једнако

$$l_k^p(t) = \lambda \cdot \varphi_k^p(t) - \rho_{k0}^p(t) - c \cdot \delta t^p(t). \quad (3.1.2-19)$$

Ако узмемо да се са тачке  $k$  опажа пет сателита у две епохе мерења, добиће се систем једначина који има десет опажања са десет непознатих параметара, тј.

$$l(t)^T = [l_k^1(t_1) \ l_k^2(t_1) \ l_k^3(t_1) \ l_k^4(t_1) \ l_k^5(t_1) \ l_k^1(t_2) \ l_k^2(t_2) \ l_k^3(t_2) \ l_k^4(t_2) \ l_k^5(t_2)], \quad (3.1.2-20)$$



$$A = \begin{bmatrix} a_k^1(t_1) & b_k^1(t_1) & c_k^1(t_1) & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 \\ a_k^2(t_1) & b_k^2(t_1) & c_k^2(t_1) & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -c & 0 \\ a_k^3(t_1) & b_k^3(t_1) & c_k^3(t_1) & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -c & 0 \\ a_k^4(t_1) & b_k^4(t_1) & c_k^4(t_1) & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -c & 0 \\ a_k^5(t_1) & b_k^5(t_1) & c_k^5(t_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -c & 0 \\ a_k^1(t_2) & b_k^1(t_2) & c_k^1(t_2) & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ a_k^2(t_2) & b_k^2(t_2) & c_k^2(t_2) & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ a_k^3(t_2) & b_k^3(t_2) & c_k^3(t_2) & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -c \\ a_k^4(t_2) & b_k^4(t_2) & c_k^4(t_2) & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -c \\ a_k^5(t_2) & b_k^5(t_2) & c_k^5(t_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -c \end{bmatrix} \quad (3.1.2-21)$$

$$x^T = [\Delta u_k \ \Delta v_k \ \Delta w_k \ N_k^1 \ N_k^2 \ N_k^3 \ N_k^4 \ N_k^5 \ \delta t_k(t_1) \ \delta t_k(t_2)], \quad (3.1.2-22)$$

одакле следи - да би се могао применити принцип најмањих квадрата, неопходно је увести најмање још једну епоху мерења, чиме би се број непознатих повећао за један ( $\delta t_k(t_3)$ ), док би се број опажања попео на 15 ( $5 \cdot 3 = 15$ ).

За  $S$  сателита,  $T$  епоха и за једну тачку  $k$ , постоји  $S \cdot T$  могућих опажања, а број непознатих (сагласно изразу 3.1.2-13, без пратећих параметара) износи

$$\varphi_k^P(t) - f \cdot \delta t^P(t) = \frac{f}{\lambda} \cdot \rho_k^P(t) + N_k^P(t) - f \cdot \delta t_k(t) \quad (3.1.2-23)$$

$$S \cdot T \geq 3 + S + T$$

Решење за једну епоху (на пример,  $T = 1$ ) је једино могуће ако је  $S$  целеобројних неодређености раније решено. У том случају, модел са мерењем фаза једнак је кодном моделу, одакле произилази да је  $S \geq 4$ . У статичком премеру (где неодређености треба оценити), теоретски минимум сателита јесте  $S = 2$ , а минимални број епоха износи  $T = 5$ . Практично,  $S = 4$  сателита даје прихватљиво решење, при чему минималан број епоха мора износити  $T = 3$ .

### 3.1.3. Стохастички модел апсолутне методе GPS резултата мерења

С обзиром на зависност различитих електронских компоненти и стратегија коришћених у дизајнирању GPS пријемника, може се рећи да не постоји универзална формула којом би се описала тачност кодних мерења, (Leick, 1995). Са друге стране, у литератури се често може пронаћи израз за грешку временске синхронизације примљеног и референтног сигнала. Тако, Van Dierendonck i dr. (1992) и RTCM-104 (1994), (Leick, 1995), у зависности од избора фазног детектора, дају неколико различитих израза. Према једном од њих, грешка мерења износи

$$\sigma_C = \frac{c}{R_C} \cdot \sqrt{\frac{B_L \cdot d}{2S/N_0}} \quad (3.1.3-1)$$

Израз не садржи грешке изазване утицајем средине кроз који се сигнал простире, утицај рефлексије и сл., о чему треба водити рачуна и исте треба укључити у коначном моделу укупне грешке. Израз (3.1.3-1) репрезентује грешке мерења псеудодужине изазване стварањем шумова сигнала, при чему је:  $d$  – *chip spacing*,  $B_L$  – ширина фреквентног опсега уређаја за праћење сигнала,  $S/N_0$  – однос сигнал/шума,  $c$  – брзина светлости, а  $R_C$  – брзина промене  $CA$  или  $P$  кодног бинарног низа (*chipping rate*). Како је брзина  $P(Y)$  кодног низа десет пута већа од  $CA$ , то је и тачност мерења са  $P$  кодним пријемницима боља. У последње време, код тзв. *narrow correlator CA* пријемника ( $d$  је мање од 0.05), напредак у развоју технологије, значајно је утицао на повећање тачности мерења псеудодужина, тако да ови пријемници само незнатно заостају у тачности (око два пута) у односу на  $P$  кодне пријемнике.

Поред наведених грешака, на оцену тачности мерења псеудодужине (кодне или фазне) утичу и други фактори, као што су: атмосфера, околни објекти око антена,  $SA$ , инструменталне грешке и сл. Укупно време застоја сигнала изазвано утицајем појединих извора грешака се може изразити са:

$$\delta t_R = \delta t_{ATM} + \delta t_{SR} + \delta t_{REF} + \delta t_{PR} + \delta t_{SA} \quad (3.1.3-2)$$

где су:

$\delta t_{ATM}$  – застој изазван утицајем атмосфере,

$\delta t_{SR}$  – застој изазван утицајем шума и резолуције пријемника,

$\delta t_{REF}$  – застој изазван рефлексијом сигнала од подлоге,

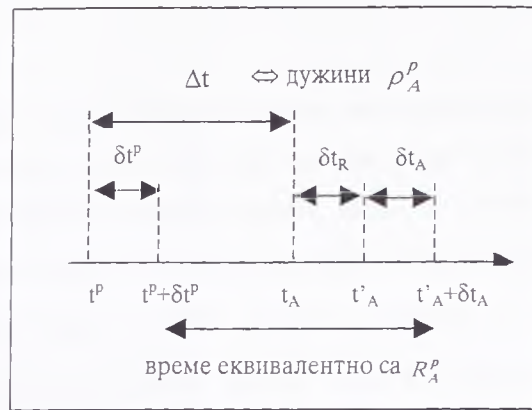
$\delta t_{PR}$  – застој изазван несавршености конструкције антена пријемника и сателита и

$\delta t_{SA}$  – застој изазван увођењем политике  $SA$ .

Са слике 3.1.3-1 се јасно може уочити да је

$$\begin{aligned} R_A^P &= c \cdot \left[ (t_A + \delta t_A) - (t^P + \delta t^P) \right] = \\ &= c \cdot \left[ (t_A + \delta t_R + \delta t_A) - (t^P + \delta t^P) \right] = \\ &= \rho_A^P + c \cdot (\delta t_A - \delta t^P + \delta t_R) \end{aligned} \quad (3.1.3-3)$$

Укупан утицај свих извора грешака дефинише тачност мерења псеудодужина која се у *GPS* терминологији назива *User Equivalent Range Error - UERE*. Приближне вредности појединих грешака које сачињавају *USERE*, дате су у Табели 3.1.3-1.



Слика 3.1.3-1: Грешке мерења псеудодужина

Табела 3.1.3-1: Компоненте укупне грешке оцене псеудодужине – кодна мерења (Kaplan, 1987)

За кориснике службе прецизног позиционирања (PPS) P/Y код			За кориснике службе стандардног позиционирања – SPS – C/A код	
Сегмент система	Извор грешке	1σ вредност (m)	1σ са SA (m)	1σ без SA (m)
Космички	Часовник у сателиту	3.0	3.0	3.0
	Прогноза пертурбација сателита	1.0	1.0	1.0
	Утицај изазван појавом SA	-	32.3	
	Остали утицаји (термална радијација и др.)	0.5	0.5	0.5
Контролни	Грешка ефемерида	4.2	4.2	4.2
	Остали утицаји	0.9	0.9	0.9
Кориснички	Јоносфера	2.3	5.0	5.0
	Тропосфера	2.6	1.5	1.5
	Шум пријемника и резолуција	1.5	1.5	1.5
	Рефлексија	1.2	2.5	2.5
	Остали утицаји (међуканална синхронизованост и сл.)	0.5	0.5	0.5
	УКУПНО (UERE):	6.6	33.3	8.0

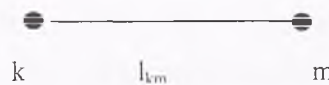
Што се тиче тачности фазних мерења псеудодужина, извори грешака су исти. Једина разлика је у томе што групни талас касни у фази (*code delay*), а носећи талас предњачи у фази (*phase advance*). Утицај рефлексије код фазних мерења је значајно мањи.



С обзиром на корелисаност појединих извора грешака *GPS* мерења са растојањем између антена, у геодетским радовима високе тачности, уместо апсолутне, користи се релативна метода *GPS* мерења.

### 3.2. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ РЕЛАТИВНЕ МЕТОДЕ *GPS* РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА

Циљ релативне методе мерења јесте оцена координата непознате тачке у односу на тачку чије су координате познате. Другим речима, релативним позиционирањем се одређује вектор између две тачке, познатији под именом "базна линија". На слици 3.2-1,  $k$  је позната референтна тачка,  $m$  - непозната тачка, а  $l_{km}$  - базна линија (вектор).



3.2-1. релативно позиционирање

Уводећи одговарајуће положајне векторе  $r_k$  и  $r_m$  (слика 1-4), може се написати израз облика

$$\vec{r}_m = \vec{r}_k + \vec{l}_{km}, \quad (3.2-1)$$

док су компоненте базног вектора  $l_{km}$  изражене као

$$\vec{l}_{km} = \begin{bmatrix} u_m - u_k \\ v_m - v_k \\ w_m - w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u_{km} \\ \Delta v_{km} \\ \Delta w_{km} \end{bmatrix}. \quad (3.2-2)$$

Функционални модели кодних и фазних мерења, примењују се респективно, уз услов да су познате координате референтне тачке. Координате су дате у *WGS-84* систему и добијају се најчешће из кодних мерења.

Релативно позиционирање је најефикасније када се симултана мерења извршавају како на референтној тако и на осталим непознатим тачкама. Симултаност подразумева да је временски период опажања идентичан. Ако се симултана мерења изводе са тачака  $k$  и  $m$ , на сателите  $p$  и  $q$ , могу се формирати линеарне комбинације: једноструких, двоструких и троструких разлика. Већина програма за накнадну обраду користи напред поменуте врсте опажања.

#### 3.2.1. Функционални модели фазних разлика *GPS* резултата мерења

Функционални модел једноструке фазне разлике

Једноструке фазне разлике се добијају када се са две станице  $m$  и  $k$  опажа (један) сателит  $p$ . Модел фазних опажања са две тачке гласи:

$$\varphi_k^p(t) - f \cdot \delta t^p(t) = \frac{1}{\lambda} \cdot \rho_k^p(t) + N_k^p(1) - f \cdot \delta t_k(t) \quad (3.2.1-1)$$

$$\varphi_m^p(t) - f \cdot \delta t^p(t) = \frac{1}{\lambda} \cdot \rho_m^p(t) + N_m^p(1) - f \cdot \delta t_m(t)$$

а њихова разлика даје:

$$\varphi_m^p(t) - \varphi_k^p(t) = \frac{1}{\lambda} [\rho_m^p(t) - \rho_k^p(t)] + N_m^p(1) - N_k^p(1) - f \cdot [\delta t_m(t) - \delta t_k(t)] \quad (3.2.1-2)$$

Израз (3.2.1-2) се назива опажање *једноструке фазне разлике* или *single difference observable*. Систем једначина облика (3.2.1-2) има дефект ранга, тј. очигледна је функционална зависност чланова са десне стране израза. Последица овога су линеарно зависне колоне матрице коефицијената једначина поправака. Ако се уведу нове ознаке

$$\begin{aligned} N_{km}^p(1) &= N_m^p(1) - N_k^p(1) \\ \delta t_{km}(t) &= \delta t_m(t) - \delta t_k(t) \end{aligned} \quad (3.2.1-3)$$

добија се

$$\begin{aligned} \varphi_{km}^p(t) &= \varphi_m^p(t) - \varphi_k^p(t) \\ \rho_{km}^p(t) &= \rho_m^p(t) - \rho_k^p(t) \end{aligned} \quad (3.2.1-4)$$

и замена (3.2.1-3) и (3.2.1-4) у (3.2.1-2), даје:

$$\varphi_{km}^p(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_{km}^p(t) + N_{km}^p(1) - f \cdot \delta t_{km}(t) \quad (3.2.1-5)$$

Када се узму у обзир сви остали утицаји садржани у моделу опажања једноструке фазне разлике, израз (3.2.1-5) се проширује и гласи (Leick, 1995)

$$\begin{aligned} SDO_{km}^p &= \varphi_{km}^p(t) = \varphi_k^p(t) - \varphi_m^p(t) = \frac{f}{c} [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] + \frac{a^p}{c} [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] \\ &+ \frac{f}{c} [\dot{\rho}_k^p(t) \delta \alpha_k - \dot{\rho}_m^p(t) \delta \alpha_m] + N_{km}^p(1) - f(\delta \alpha_k - \delta \alpha_m) + J_{km,\varphi}^p(t) + \frac{f}{c} T_{km}^p(t) \\ &+ \delta_{km,\varphi}(t) + \delta_{km,\varphi}^p(t) + \varepsilon_{km,\varphi}^p \end{aligned} \quad (3.2.1-6)$$

Основна предност ове врсте опажања је у томе да се грешке које се односе на сателит елиминишу (израз  $\delta t^p$  се не појављује). Смањивањем дужине између пријемника, израз за помак (*offset*) фреквенције осцилатора у сателиту тежи нули. Утицај несавршености конструкције сателита се такође поништава, као и неке друге грешке чији је утицај у току емитовања сигнала константан. Због растојања између пријемника, номинална времена пријема сигнала могу бити иста, иако емитована времена нису једнака јер су дужине између два сателита различите. У *SDO* још увек је изражен значајан утицај грешака пријемникових часовника.





где је:  $\mathbf{A}_{1j}$  ( $S \cdot 3$ ) субматрица облика (3.2.1-10),  $\mathbf{I}$  је ( $S \cdot S$ ) јединична матрица, а  $\mathbf{E}$  је  $S$ -димензионални колона вектор са вредностима  $-1$ , док су остали чланови на дијагонали једнаки нула. Јасно се уочава да модел (3.2.1-7) садржи велики број непознатих параметара које треба у свакој епохи мерења решити. Тако, уколико је број сателита у свакој епохи једнак  $S$ , матрица  $\mathbf{A}$  садржи  $n = S \cdot k$  врста, број непознатих параметара износи  $u = (3 + k + S)$ ,  $k$  је број епоха мерења, а  $S$  број мерења у свакој епохи (једнак броју сателита  $S$ ;  $n$ -и представља број степени слободе (3.3-1).

### Функционални модел двоструке фазне разлике

Уколико се на две станице  $k$  и  $m$  опажају два сателита  $p$  и  $q$ , могу се образовати две једначине облика

$$\begin{aligned} \varphi_{km}^p(t) &= \frac{1}{\lambda} \rho_{km}^p(t) + N_{km}^p(1) - f \cdot \delta t_{km}(t) \\ \varphi_{km}^q(t) &= \frac{1}{\lambda} \rho_{km}^q(t) + N_{km}^q(1) - f \cdot \delta t_{km}(t) \end{aligned} \quad (3.2.1-13)$$

па, ако се одузме друга од прве, уз претпоставку да су фреквенције једнаке, добија се

$$\varphi_{km}^p(t) - \varphi_{km}^q(t) = \frac{1}{\lambda} [\rho_{km}^p(t) - \rho_{km}^q(t)] + N_{km}^p(1) - N_{km}^q(1). \quad (3.2.1-14)$$

Када се горњи израз среди, добиће се коначан израз облика

$$\varphi_{km}^{pq}(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_{km}^{pq}(t) + N_{km}^{pq}(1). \quad (3.2.1-15)$$

Као и у случају једноструких фазних разлика, увођењем осталих утицаја, потпун модел двоструких фазних разлика (*double difference observable*) гласиће (Leick, 1995)

$$\begin{aligned} DDO_{km}^{pq} = SDO_{km}^p - SDO_{km}^q = \varphi_{km}^{pq}(t) &= \frac{a^p}{c} [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] - \frac{a^q}{c} [\rho_k^q(t) - \rho_m^q(t)] + \\ &+ \frac{f}{c} [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)] - \frac{f}{c} [\rho_k^q(t) - \rho_m^q(t)] + \\ &+ \frac{f}{c} [\dot{\rho}_k^p(t) \cdot \tilde{\alpha}_k - \dot{\rho}_m^p(t) \cdot \tilde{\alpha}_m] - \frac{f}{c} [\dot{\rho}_k^q(t) \tilde{\alpha}_k - \dot{\rho}_m^q(t) \tilde{\alpha}_m] + \\ &+ N_{km}^{pq}(1) + J_{km,\varphi}^{pq}(t) + \frac{f}{c} \cdot T_{km}^{pq}(t) + \delta_{km}^{pq}(t) + \varepsilon_{km,\varphi}^{pq} \end{aligned} \quad (3.2.1-16)$$

Основна предност ове врсте опажања је у томе што се њоме у потпуности неутралишу грешке часовника  $\delta t_k$  и  $\delta t_m$ , уколико су опажања на оба сателита једновремена и ако је брзина промене фреквенција пријемникових осцилатора у периоду

мерења занемарљива. Мањи део грешке часовника, као функција промене топоцентричне дужине је и даље остао у моделу. Ефекат одбијања сигнала од подлоге, као функција геометрије *сатџелии-џријемник-џовриш*, не може се неутралисати. У *DDO* параметар *неодређеносџи* игра важну улогу. Уколико је у фази обраде могуће исти оценити и фиксирати као целобројну, тј. поставити услов да је  $N_{km}^{pq}(1)$  целобројна, тада је решење најмање померено. Тиме се систем значајно ојачава, јер је број параметара значајно смањен.

Велики проблем у анализи и оцени параметра *неодређеносџи* представља дужина базне линије у односу на коју се параметар неодређености фиксира и дефинисани алгоритам који омогућава фиксирање истих (на краћим дужинама) за што мањи период мерења.

Линеаризација функције двоструких фазних разлика врши се аналогно претходно описаном поступку за случај једноструких разлика. Полазећи од модела

$$\lambda \cdot \varphi_{km}^{pq}(t) = \rho_{km}^{pq}(t) + \lambda \cdot N_{km}^{pq}, \quad (3.2.1-17)$$

у којем вектор  $\rho$  садржи информацију о геометрији и има следећи облик:

$$\rho_{km}^{pq}(t) = \rho_m^q(t) - \rho_m^p(t) - \rho_k^m(t) + \rho_k^p(t), \quad (3.2.1-18)$$

(представља комбинацију четири мерене физичке величине) свака псеудодужина се мора посебно линеаризовати. На крају се добија (*Hofmann-Wellenhof, 1994*)

$$I_{km}^{pq}(t) = a_k^{pq}(t) \cdot \Delta u_k + b_k^{pq}(t) \cdot \Delta v_k + c_k^{pq}(t) \cdot \Delta w_k + a_m^{pq}(t) \cdot \Delta u_m + b_m^{pq}(t) \cdot \Delta v_m + c_m^{pq}(t) \cdot \Delta w_m + \lambda \cdot N_{km}^{pq}, \quad (3.2.1-19)$$

где је:

$$I_{km}^{pq}(t) = \lambda \cdot \varphi_{km}^{pq}(t) - \rho_{m0}^q(t) + \rho_{m0}^p(t) + \rho_{k0}^q(t) - \rho_{k0}^p(t), \quad (3.2.1-20)$$

$$\begin{aligned} a_k^{pq}(t) &= + \frac{u^q(t) - u_{k0}}{\rho_{k0}^q(t)} - \frac{u^p(t) - u_{k0}}{\rho_{k0}^p(t)} \\ b_k^{pq}(t) &= + \frac{v^q(t) - v_{k0}}{\rho_{k0}^q(t)} - \frac{v^p(t) - v_{k0}}{\rho_{k0}^p(t)} \\ c_k^{pq}(t) &= + \frac{w^q(t) - w_{k0}}{\rho_{k0}^q(t)} - \frac{w^p(t) - w_{k0}}{\rho_{k0}^p(t)} \\ a_m^{pq}(t) &= - \frac{u^q(t) - u_{m0}}{\rho_{m0}^q(t)} + \frac{u^p(t) - u_{m0}}{\rho_{m0}^p(t)} \\ b_m^{pq}(t) &= - \frac{v^q(t) - v_{m0}}{\rho_{m0}^q(t)} + \frac{v^p(t) - v_{m0}}{\rho_{m0}^p(t)} \\ c_m^{pq}(t) &= - \frac{w^q(t) - w_{m0}}{\rho_{m0}^q(t)} + \frac{w^p(t) - w_{m0}}{\rho_{m0}^p(t)} \end{aligned} \quad (3.2.1-21)$$

Међутим, како се код релативне методе мерења, једна тачка узима као позната (на пример тачка  $k$ ), број непознатих се смањује за три ( $\Delta u_k = \Delta v_k = \Delta w_k = 0$ ), тако да се сви изрази уз поправке за тачку  $k$  елиминишу и у једној епохи мерења остају четири непозната параметра. У том случају, вектор слободних чланова  $-l$  има облик

$$l_{km}^{pq}(t) = \lambda \cdot \varphi_{km}^{pq}(t) - \rho_{m0}^q(t) + \rho_{m0}^p(t) + \rho_k^q(t) - \rho_k^p(t), \quad (3.2.1-22)$$

при чему, први израз са десне стране представља резултат мерења, други и трећи се рачунају из приближних координата, док су последња два израза позната (дата). Из напред реченог, види се значај тачности познавања положаја тачке  $k$ .

Ако се претпостави да су опажања вршена са две станице  $k$  и  $m$  на четири сателита  $p, q, s$  и  $r$  у две епохе  $t_1$  и  $t_2$ , систем има шест једначина са шест непознатих, тј.

$$l = \begin{bmatrix} l_{km}^{pq}(t_1) \\ l_{km}^{ps}(t_1) \\ l_{km}^{pr}(t_1) \\ l_{km}^{pq}(t_2) \\ l_{km}^{ps}(t_2) \\ l_{km}^{pr}(t_2) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \Delta u_m \\ \Delta v_m \\ \Delta w_m \\ \lambda N_{km}^{pq} \\ \lambda N_{km}^{ps} \\ \lambda N_{km}^{pr} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{u_m}^{pq}(t_1) & b_{v_m}^{pq}(t_1) & c_{w_m}^{pq}(t_1) & 1 & 0 & 0 \\ a_{u_m}^{ps}(t_1) & b_{v_m}^{ps}(t_1) & c_{w_m}^{ps}(t_1) & 0 & 1 & 0 \\ a_{u_m}^{pr}(t_1) & b_{v_m}^{pr}(t_1) & c_{w_m}^{pr}(t_1) & 0 & 0 & 1 \\ a_{u_m}^{pq}(t_2) & b_{v_m}^{pq}(t_2) & c_{w_m}^{pq}(t_2) & 1 & 0 & 0 \\ a_{u_m}^{ps}(t_2) & b_{v_m}^{ps}(t_2) & c_{w_m}^{ps}(t_2) & 0 & 1 & 0 \\ a_{u_m}^{pr}(t_2) & b_{v_m}^{pr}(t_2) & c_{w_m}^{pr}(t_2) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.1-23)$$

У развијеном облику (у случају мерења једне базне линије у једној епохи) матрица  $A$  изгледа (изостављајући аргумент време),

$$A_j = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{(u^2 - u_m)}{\rho_{m,0}^2} - \frac{(u^1 - u_m)}{\rho_{m,0}^1} \right\} \left\{ \frac{(v^2 - v_m)}{\rho_{m,0}^2} - \frac{(v^1 - v_m)}{\rho_{m,0}^1} \right\} \left\{ \frac{(w^2 - w_m)}{\rho_{m,0}^2} - \frac{(w^1 - w_m)}{\rho_{m,0}^1} \right\} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left\{ \frac{(u^S - u_m)}{\rho_{m,0}^S} - \frac{(u^1 - u_m)}{\rho_{m,0}^1} \right\} \left\{ \frac{(v^S - v_m)}{\rho_{m,0}^S} - \frac{(v^1 - v_m)}{\rho_{m,0}^1} \right\} \left\{ \frac{(w^S - w_m)}{\rho_{m,0}^S} - \frac{(w^1 - w_m)}{\rho_{m,0}^1} \right\} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.1-24)$$

Може се закључити да је у односу на (3.2.1-7) број параметара значајно мањи. Матрица  $A$  има три непозната параметра положаја и  $S-1$  непознатих параметара *неодређености* ( $S$  је број сателита опажаних у епохи  $j$ ). Укупна матрица  $A$  има следећи облик

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & I \\ \dots & \dots \\ A_{1j} & I \\ \dots & \dots \\ A_{1n} & I \end{bmatrix}, \quad (3.2.1-25)$$

при чему је  $A_{1j}$  субматрица димензија  $(S-1) \cdot 3$  са коефицијентима уз непознате поправке координата, а  $I$  је  $(S-1) \cdot (S-1)$  јединична матрица.



Поред три непознате координате, систем садржи и  $S-1$  непознатих параметара *неодређености*  $\mathcal{N}$ , при чему је број двоструких фазних разлика у свакој епохи једнак  $S-1$ , а укупан број врста матрице  $\mathbf{A}$  износи  $n = k \cdot (S-1)$ . Опажања су корелисана, коваријациона матрица је блок-дијагонална са димензијама  $(S-1) \cdot (S-1)$ , у свакој епохи  $j$  (види 3.2.2). Уобичајено је, да број сателита буде најмање четири, па како је број двоструких фазних разлика  $n_{DDO} = (S-1) \cdot (R-1) \cdot T$ , за  $S = 4$  и  $R = 2$ , имамо три једначине са шест непознатих, па тек са  $T = 2$ , број једначина је једнак броју непознатих (шест) и систем има решење (види 3.3).

### Функционални модел троструке фазне разлике

За разлику од опажања двоструких разлика које се односе на једну епоху, разлике двоструких фазних разлика у две суседне епохе мерења формирају модел троструке фазне разлике (*triple difference observable*), (Leick, 1995)

$$\varphi_{km}^{pq}(t_2) - \varphi_{km}^{pq}(t_1) = \frac{1}{\lambda} [\rho_{km}^{pq}(t_2) - \rho_{km}^{pq}(t_1)] \quad (3.2.1-26)$$

Код ове врсте опажања поништава се израз за неодређеност  $N_{km}^{pq}(1)$  јер је исти константан за обе епохе мерења, док је осетљивост у односу на утицај грешака часовника и *offseta* фреквенције сателита једнака као у *DDO*. *TDO* решење се често користи у претходној обради резултата мерења ради добијања приближне оцене положаја антена, након чега се прелази на обраду *DDO*. *TDO* је врло значајан и при утврђивању резултата који одскачу. Због додатног формирања фазних разлика *TDO* обично има слабију геометрију, тј. мањи број сувишних мерења од *DDO*.

### 3.2.2. Стохастички модели фазних разлика

#### Корелација фазних комбинација

Генерално узевши, постоје две групе корелација: физичка и алгебарска. Фазе примљене са једног сателита на две станице су физички корелисане јер се односе на један сателит. Међутим, код *GPS* физичка корелација се не узима у обзир, већ се главна пажња усмерава на алгебарску корелацију.

Као претпоставка, узима се да су фазне грешке случајне по природи и да имају нормалан распоред са очекивањем нула и дисперзијом  $\sigma^2$ . Мерене "сирове" фазе су линеарно независне или некорелисане. Ако се уведе вектор  $\varphi$  који садржи мерене фазе, тада гласи:

$$\mathbf{K}_\varphi = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}, \quad (3.2.2-1)$$

коваријациона матрица мерених фаза, при чему је  $\mathbf{I}$  јединична матрица.

### Једноструке фазне разлике

Ако се у епохи  $t$  са две тачке  $k$  и  $m$  опажа на сателит  $p$ , тада добијамо опажање једноструке фазне разлике, облика

$$\varphi_{km}^p(t) = \varphi_m^p(t) - \varphi_k^p(t). \quad (3.2.2-2)$$

Уколико се са истих станица опажа и сателит  $q$ , добиће се још једно опажање облика

$$\varphi_{km}^q(t) = \varphi_m^q(t) - \varphi_k^q(t). \quad (3.2.2-3)$$

Опажања приказана у последња два израза се могу добити и као

$$\mathbf{SDO} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.2.2-4)$$

где је:

$$\mathbf{SDO} = \begin{bmatrix} \varphi_{km}^p(t) \\ \varphi_{km}^q(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.2-5)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_k^p(t) \\ \varphi_m^p(t) \\ \varphi_k^q(t) \\ \varphi_m^q(t) \end{bmatrix}$$

Применом закона преноса коваријација, добија се

$$\mathbf{K}_{\mathbf{SDO}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{K}_{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{C}^T, \quad (3.2.2-6)$$

и заменом у (3.2.2-1), добија се

$$\mathbf{K}_{\mathbf{SDO}} = \mathbf{C} \cdot \sigma^2 \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{C}^T = \sigma^2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T. \quad (3.2.2-7)$$

Када се узме у обзир да је

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \mathbf{I}, \quad (3.2.2-8)$$

и када се задњи израз замени у (3.2.2-7), добија се

$$\mathbf{K}_{\mathbf{SDO}} = 2 \cdot \sigma^2 \cdot \mathbf{I}, \quad (3.2.2-9)$$

одакле се види да су опажања једноструких разлика некорелисана. Димензије јединичне матрице у (3.2.2-9) су коресподентне броју појединачних разлика у епохи  $t$ , док фактор 2 не зависи од броја појединачних фазних разлика. Уколико се узме у обзир више епоха, коваријациона матрица је јединична са димензијама једнаким укупном броју појединачних фазних разлика.

### Двоструке фазне разлике

Нека су  $p$ ,  $q$  и  $l$  три сателита, од којих је  $p$  референтни,  $k$  и  $m$  су  $GPS$  станице, а  $t$  је епоха мерења. Могуће је формирати две једначине двоструких разлика, облика

$$\begin{aligned}\varphi_{km}^{pq}(t) &= \varphi_{km}^q(t) - \varphi_{km}^p(t) \\ \varphi_{km}^{pl}(t) &= \varphi_{km}^l(t) - \varphi_{km}^p(t)\end{aligned}\quad (3.2.2-10)$$

У матричном облику, израз (3.2.2-10) гласи:

$$\mathbf{DDO} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{SDO}, \quad (3.2.2-11)$$

где је:

$$\begin{aligned}\mathbf{DDO} &= \begin{bmatrix} \varphi_{km}^{pq}(t) \\ \varphi_{km}^{pl}(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{SDO} &= \begin{bmatrix} \varphi_{km}^p(t) \\ \varphi_{km}^q(t) \\ \varphi_{km}^l(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.2.2-12)$$

а, коваријациона матрица двоструких разлика дата је као

$$\mathbf{K}_{\mathbf{DDO}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{SDO}} \cdot \mathbf{C}^T, \quad (3.2.2-13)$$

па када се (3.2.2-9) узме у обзир, добија се

$$\mathbf{K}_{\mathbf{DDO}} = 2\sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.2.2-14)$$

Израз (3.2.2-14) јасно указује да су опажања двоструких разлика корелисана. Матрица тежина или корелациона матрица  $\mathbf{P}(t)$  се добија инверзијом коваријационе матрице

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{K}_{\mathbf{DDO}}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.2.2-15)$$



Израз (3.2.2-15) се односи на два опажања двоструких разлика у једној епохи. Генерално, ако је број двоструких разлика у епохи  $t$  једнак  $n_{DDO}$ , корелациона матрица има следећи облик

$$P(t) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{1}{n_{DDO} + 1} \cdot \begin{bmatrix} n_{DDO} & -1 & -1 & \dots \\ -1 & n_{DDO} & -1 & \dots \\ -1 & -1 & n_{DDO} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n_{DDO} \end{bmatrix}, \quad (3.2.2-16)$$

са димензијом  $n_{DDO} \cdot n_{DDO}$ . Ради илустрације, узеће се четири опажања двоструких разлика. Корелациона матрица има димензије  $4 \cdot 4$  и има следећи облик

$$P(t) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (3.2.2-17)$$

У ранијим примерима, узимана су у обзир опажања изведена у једној епохи мерења. Уколико се располаже са  $t_1, t_2, t_3 \dots$  епоха, корелациона матрица је блок-дијагонална и има следећи облик

$$P(t) = \begin{bmatrix} P(t_1) & & & \\ & P(t_2) & & \\ & & P(t_3) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad (3.2.2-18)$$

при чему је сваки елемент на дијагонали посебна матрица. Матрице  $P(t_1), P(t_2), P(t_3), \dots$  не морају имати исте димензије, јер број опажања у различитим епохама не мора бити исти.

### Троструке фазне разлике

Слично као и у претходне две врсте разлика, могуће је и код троструких фазних разлика формирати корелациону матрицу. Тако, уколико имамо два опажања коваријациона матрица има следећи облик

$$K_{TDO} = 2 \cdot \sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (3.2.2-19)$$

Како је ова врста опажања, са аспекта оцене параметара модела мање значајна, неће се изводити генералан облик коваријационе матрице за случај троструких фазних разлика.

### 3.3. БРОЈ НЕОПХОДНИХ ОПАЖАЊА ПО РЕЛАТИВНОЈ МЕТОДИ GPS РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА

Код статичне релативне методе мерења једне базне линије између станица  $k$  и  $m$ , два пријемника морају бити стационарна, за сво време трајања опажања.

Нека су  $T$  и  $S$  број епоха мерења и број сателита, респективно. У свакој епохи мерења могуће је формирати опажање једноструких фазних разлика за сваки сателит. Број опажања износи  $T \cdot S$ . Број непнатих параметара је дат испод једначине једноструких фазних разлика, тј.

$$\varphi_{km}^p(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_{km}^p(t) + N_{km}^p(1) - f \cdot \delta t_{km}(t) \quad (3.3-1)$$

$$S \cdot T \geq 3 + S + T$$

одакле се добија број епоха

$$T \geq \frac{S+3}{S-1} \quad (3.3-2)$$

па, ако се узме у обзир нормалан случај при чему је број сателита једнак  $S = 4$ , из (3.3-2) произилази да је број епоха једнак  $7/3$  или  $T \geq 3$ . Поштујући исту логику, може се одредити неопходан број епоха код опажања двоструких разлика. Наиме, за добијање једног опажања двоструких разлика неопходна су два сателита. Са  $S$  сателита се може формирати  $S-1$  двоструких фазних разлика у свакој епохи мерења, тако да у  $T$  епоха мерења, број двоструких фазних разлика износи  $(S-1) \cdot T$ , тј.

$$\varphi_{km}^{pq}(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_{km}^{pq}(t) + N_{km}^{pq}(1) \quad (3.3-3)$$

$$(S-1) \cdot T \geq 3 + (S-1)$$

при чему број епоха износи

$$T \geq \frac{S+2}{S-1} \quad (3.3-4)$$

За минималан број сателита  $S = 2$ , број епоха износи  $T \geq 4$ . Уколико је број сателита четири, неопходне су две епохе мерења. Да би се избегле линеарно зависне једначине при формирању двоструких фазних разлика, користи се референтни сателит у односу на кога се формирају фазне разлике осталих сателита. На пример, ако се врше мерења на сателите 6, 9, 11 и 12, при чему је 6 референтни, у свакој епохи се могу формирати следеће двоструке фазне разлике, и то: (9-6), (11-6) и (12-6). Остале двоструке фазне разлике су линеарне комбинације, па су зато и линеарно зависне.

Модел троструких фазних разлика укључује само три непознате координате тачке. Код опажања једне фазне троструке разлике, неопходне су две епохе. Ако постоји  $T$  епоха, могуће је формирати  $T-1$  линеарно независних комбинација. Тако

$$\varphi_{km}^{pq}(t_{12}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \rho_{km}^{pq}(t_{12}), \quad (3.3-5)$$

$$(S-1) \cdot (T-1) \geq 3$$

изрази (3.3-5) представљају релацију на основу које се добија да је

$$T \geq \frac{S+2}{S-1}. \quad (3.3-6)$$

На основу (3.3-6) произилази да је за  $S = 2$  неопходно више од 4 епохе мерења. Ако постоје 4 сателита, неопходне су најмање две епохе мерења.

### 3.4. ОБРАДА GPS РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА

У обради *GPS* резултата мерења, важно место заузима начин откривања и отклањања тзв. циклусних скокова. Како до њих долази? Наиме, након укључивања пријемника, формирају се разлике фаза између пристиглог сигнала и сигнала генерисаног у пријемнику и иницијализује се бројач. За време праћења сателита, када год се фазна разлика промени од  $2\pi$  до 0, бројач дода (инкрементира) један циклус. Тако, у некој епохи  $t$ , акумулирана фаза  $\varphi$  представља збир фазне разлике  $\Delta\varphi$  и стања бројача (показује укупан број циклуса који одговара дужини између два различита положаја сателита -  $n$ ). Укупан број целих циклуса између пријемника и сателита у тренутку отпочињања мерења ( $N$ - укупан број таласних дужина) је непознат.  $N$  је константно, све до прекида у пријему сигнала. У том тренутку, бројач се реиницијализује, што за цео број циклуса изазива дисконтинуитет (скок -*jump*) у тренутно акумулираној вредности фазе. Такав скок се назива циклусни скок (*cycle slip*) и појављује се искључиво код фазних мерења. Три су главна разлога настанка циклусних скокова, и то: физичке препреке у околини тачке на којој се врши мерење, ниски ниво односа сигнал-шум (*Signal-to-NoiseRatio* - *SNR*) као последица лоших услова у јоносфери, утицаја одбијених таласа, кретања пријемника или ниске елевације сателита и особине софтвера у смислу његове прилагођености техникама откривања и отклањања циклусних неодређености. До циклусних скокова може доћи и услед проблема у раду осцилатора у сателитима, али су ти случајеви веома ретки. Одређивање величине циклусног скока и поправљање података фазних мерења назива се фиксирањем циклусних скокова (*cycle slip fixing*).



### 3.4.1. Откривање циклусних скокова

Формулисање тест величина, заснива се на мереним фазама носећег таласа и на кодним дужинама. За појединачну тачку, тест величину чине сирове фазе, комбинације фаза, комбинације фаза и кодних дужина или комбинације фаза и интегрисаних Доплерових фреквенција.

Мерена сирова фаза  $\varphi_k^p(t)$  се може множењем са  $\lambda$  моделовати као

$$\lambda \cdot \varphi_k^p(t) = \rho_k^p(t) + \lambda \cdot N_k^p + c \cdot \delta t_k^p(t) - \frac{A_k^p(t)}{f^2} + \dots, \quad (3.4.1-1)$$

где је:  $A_k^p(t) = 40.3 \cdot TVEC / \cos z'$ , а  $TVEC$  – укупан број електрона у вертикалном цилиндру попречног пресека површине  $1\text{m}^2$ , а  $z'$  – зенитни угао у јоносферској тачци. Треба напоменути да у моделу (3.4.1-1) постоји неколико израза са десне стране који зависе од времена и који могу негативно утицати на откривање циклусних скокова.

Модел двофреквентне фазне комбинације је развијен полазећи од једне станице и једног сателита (ознаке у индексима су изостављене, али је истакнута зависност у односу на фреквенцију - помоћу ознака  $L1$  и  $L2$ ), тј.

$$\begin{aligned} \lambda_{L1} \cdot \varphi_{L1}(t) &= \rho_k^p(t) + \lambda_{L1} \cdot N_{L1} + c \cdot \delta t(t) - \frac{A_k^p(t)}{f_{L1}^2} + \dots, \\ \lambda_{L2} \cdot \varphi_{L2}(t) &= \rho_k^p(t) + \lambda_{L2} \cdot N_{L2} + c \cdot \delta t(t) - \frac{A_k^p(t)}{f_{L2}^2} + \dots, \end{aligned} \quad (3.4.1-2)$$

Када се нађе разлика двају једначина (3.4.1-2), добија се

$$\lambda_{L1} \cdot \varphi_{L1}(t) - \lambda_{L2} \cdot \varphi_{L2}(t) = \lambda_{L1} \cdot N_{L1} - \lambda_{L2} \cdot N_{L2} - \frac{A_k^p(t)}{f_{L1}^2} + \frac{A_k^p(t)}{f_{L2}^2}, \quad (3.4.1-3)$$

у којој више нису садржани изрази који зависе од фреквенције (мисли се на геометријску дужину и утицај часовника). Када се горњи израз подели са  $\lambda_{L1}$ , и узимајући у обзир да је  $\lambda_{L2}/\lambda_{L1} = f_{L1}/f_{L2}$  као и да је  $c = \lambda \cdot f$  добија се

$$\varphi_{L1}(t) - \frac{f_{L1}}{f_{L2}} \cdot \varphi_{L2}(t) = N_{L1} - \frac{f_{L1}}{f_{L2}} \cdot N_{L2} - \frac{A(t)}{\lambda_{L1} \cdot f_{L1}^2} \cdot \left(1 - \frac{f_{L1}^2}{f_{L2}^2}\right) \quad (3.4.1-4)$$

који представља коначну форму двофреквентне комбинације. Модел се често назива јоносферском поправком (*ionospheric residual*). У односу на модел са сировом фазом (3.4.1-1), у моделу (3.4.1-4) утицај јоносфере је редукован за око 65%. Када не би било прекида у пријему сигнала (без циклусних скокова) временске промене оцене јоносферске поправке би биле мале, посебно при нормалним условима у јоносфери и код кратких

дужина. Индикатор појаве циклусних скокова је изненадни скок (размак) између две сукцесивне вредности оцењене јоносферске поправке, па уколико иста постоји, једина је дилема да ли се односи на  $L1$ ,  $L2$  или оба носача.

Следећа тест величина се може добити комбиновањем фазних и кодних мерења, тј.

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \varphi_k^p(t) &= \rho_k^p(t) + \lambda \cdot N_k^p + c \cdot \Delta \delta t_k^p(t) - J(t) + T(t), \\ R_k^p(t) &= \rho_k^p(t) + c \cdot \Delta \delta t_k^p(t) + J(t) + T(t), \\ \lambda \cdot \varphi_k^p(t) - R_k^p(t) &= \lambda \cdot N_k^p - 2J(t) \end{aligned} \quad (3.4.1-5)$$

при чему се сви временски зависни изрази, осим израза за јоносферску рефракцију поништавају. Што се тиче јоносферског утицаја, треба истаћи да се исти може успешно моделовати. Међутим, како су временске промене између две суседне епохе врло мале, јоносферски утицај се често може занемарити, поготово код кратких дужина базних линија.

Свака од описаних тест величина (у литератури се могу пронаћи и друге) садржи локацију циклусног скока. Наиме, формирањем разлика двају сукцесивних епоха, стварају се услови за утврђивање локације. На овај начин се утврђује само његова приближна вредност, док се истинита вредност мора накнадно оценити (користећи на пример, временске серије, полиноме). Изузев у моделу (3.4.1-4), у осталим моделима детектовани циклусни скокови су целобројне вредности.

Једна од метода откривања циклусних скокова је дата у Табели 3.3.1-1, (*Lichtenegger and Hofmann-Wellenhof, 1989* у *Hofmann-Wellenhof, 1994*). Нека је  $y(t_i)$  временска функција (ред) сигнала који садржи скок чија је вредност “ $e$ ” у епохи  $t_i$ , и где је  $i = 1, 2, \dots, 7$ , а  $y^1, y^2, y^3, y^4$ , представљају разлике првог, другог, трећег и четвртог реда, респективно.

Табела 3.4.1-1: Принцип откривања циклусних скокова

$t_i$	$y(t_i)$	$y^1$	$y^2$	$y^3$	$y^4$
$t_1$	0				
		0			
$t_2$	0		0		
		0		$e$	
$t_3$	0		$e$		$-3e$
		$e$		$-2e$	
$t_4$	$e$		$-e$		$3e$
		0		$e$	
$t_5$	$e$		0		$-e$
		0		0	
$t_6$	$e$		0		
		0			
$t_7$	$e$				

Важна особина која указује на извесну нерегуларност у подацима јесте истицање циклусног скока у разлици већег степена. Када је циклусни скок откривен, оцена његове величине захтева упоређивање тестиране величине са полиномском кривом, пре и после појаве циклусног скока. Величина циклусног скока се добија упоређењем тих двају кривих, а што је могуће извести и уз помоћ линеарне регресије или користећи метод најмањих квадрата (могуће је користити и методе предикције, као што је метода Калмановог филтрирања). Када се оцени вредност циклусног скока, истом се поправљају све наредне вредности мерених величина (неке специфичности везане за оцену и отклањање проблема ове врсте нису предмет овог рада и могу се наћи, на пример, у (*Hofmann-Wellenhof, 1994*)).

### 3.4.2. Решавање неодређености

Појам *неодређености* је везан искључиво за фазна мерења и зависи како од пријемника тако и од сателита. Не постоји његова временска зависност, све док се непрекинуто врши пријем сигнала.

У моделу фазних мерења (изостављујући индексе и ознаку за време),

$$\varphi = \frac{1}{\lambda} \cdot \rho + f \cdot \Delta t + N - \frac{1}{\lambda} \cdot J, \quad (3.4.2-1)$$

$N$  представља неодређеност (*ambiguity*). Чим се  $N$  оцени као целобројна вредност, каже се да је иста решена или фиксирана. Њено решавање јесте врло значајно при оцени вектора базних линија, јер се тиме јача решење (већа поузданост). Међутим, има и примера (*Rothacher et.al. 1989* и *Hofmann-Wellenhof, 1994*) да су решења са фиксираним и реалним (*floating*) решењима неодређености блиска у само неколико милиметара. Генерално, решавање неодређености повећава поузданост и тачност решења базних вектора.

У зависности од врсте опажања, постоји неколико основних метода решавања неодређености, и то: решавање неодређености код једнофреквентних фазних мерења, решавање неодређености код двофреквентних фазних мерења, решавање неодређености код двофреквентних фазних уз помоћ кодних мерења и сл. Код свих метода, важно место заузима број мерених епоха, где важи опште правило - већи број мерења омогућава поузданију оцену.

При оцени целобројне вредности неодређености, значајну улогу игра коваријација вредности неодређености (реалне) добијене из изравнања. Све целобројне вредности блиске реалној (*float*) вредности су могући кандидати при избору целобројне вредности за  $N$ . Тако, узимајући их све као познате вредности и њиховим сукцесивним увођењем у процес изравнања, врши се избор оптималне, по критеријуму најмањег корена средње квадратне грешке (*root mean square - rms*) положаја, које се усваја као најбоље ("*best*")



решење. Решење са најмањим *rms* се усваја, ако је однос његовог *rms* и следећег најмањег *rms* већи од 2 (или што је још поузданије, веће од 3; однос два решења се у програму *GPSurvey* назива *ratio*). Овај метод је практичан једино ако се врши оцена базних линија појединачно и познат је под именом *секвенционално фиксирање неодређености* (*sequential fixing of the ambiguities*). У литератури је могуће пронаћи и друге, боље методе, од којих треба посебно истаћи *FARA* (*Fast Ambiguity Resolution Approach*), чије су главне карактеристике: - при избору дозвољених одступања користи статистичке информације из иницијалног изравнања, - при одбацивању неких вредности неодређености које нису статистички значајне, користи информације из коваријационе матрице и - при избору могућих вредности целобројних  $N$ , примењује статистичке хипотезе.

### 3.4.3. Изравнање GPS резултата мерења

Нека је  $A$  -  $n \cdot u$  матрица познатих коефицијената (3.2.1-10 или 3.2.1-24),  $x$  -  $n \cdot u$  вектор непознатих фиксних параметара,  $l$  -  $n \cdot 1$  случајни вектор опажања (*GPS* резултати мерења) и  $K_l = \sigma^2 \cdot P^{-1}$  -  $n \cdot n$  коваријациона матрица од  $l$ , при чему су матрица тежина  $P$  опажаних величина  $l$  и фактор  $\sigma^2$  познати. Уколико матрица  $A$  има потпун ранг колона, а матрица  $P$  је позитивно дефинитна, тада се

$$A \cdot x = E(l) ; K_l = \sigma^2 \cdot P^{-1} \quad (3.4.3-1)$$

назива *Гаус-Марковљевим* моделом са потпуним рангом. Ознака  $E$  указује да се ради о математичким очекивањима. У горњем моделу, очекиване вредности опажања -  $l$ , могу се представити линеарном комбинацијом датих коефицијената и непознатих параметара (зато се за горњи модел и каже да је линеаран). Тачније, линеарна веза наступа тек након линеаризације модела опажаних величина који представљају квантитативне тврдње. Линеарна веза се још назива и *регресијом*, а оцена по моделу (3.4.3-1) *регресионом анализом*.

Ако је  $r(A) = u$ , модел (3.4.3-1) има потпун ранг, при чему је  $n \geq u$ . При  $n > u$ , систем једначина  $Ax = l$  није конзистентан. Да би исти био конзистентан, неопходно је додати  $n \cdot 1$  вектор грешака од  $l$ , тј.

$$A \cdot x = l + v ; E(v) = 0 , K_l = \sigma^2 \cdot P^{-1} , \quad (3.4.3-2)$$

Израз  $A \cdot x = l + v$  се у теорији најмањих квадрата назива *једначинама грешака*, оцена по Гаус-Марковљевом моделу *изравнање резултата опажања*, а вектор  $v$  се назива *вектором поправака* (*corrections* или *residuals*).

Коваријациона матрица  $K_1 = \sigma^2 \cdot P^{-1}$  опажања  $I$  је позната, осим фактора  $\sigma^2$ . У теорији најмањих квадрата, уводи се и кофакторска матрица (или матрица коефицијената тежина)  $Q$ , при чему је  $Q = P^{-1}$ , па се може написати да је  $K_1 = \sigma^2 \cdot Q$ . Када је  $P = I$ , из (3.4.3-1) следи да је  $K_1 = \sigma^2 \cdot I$ . Из тог разлога  $\sigma^2$  се назива дисперзијом јединичне тежине (или дисперзијом јединице тежине).

У случају обраде опажања једноструких фазних разлика (*single differences observable - SDO*), нормалне једначине имају следећи облик

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot f = N \cdot x = n . \quad (3.4.3-3)$$

У случају обраде опажања двоструких фазних разлика (*double differences observable - DDO*) која су корелисана, нормалне једначине имају следећи облик

$$A^T \cdot K_1^{-1} \cdot A \cdot x = A^T \cdot K_1^{-1} \cdot f = N \cdot x = n . \quad (3.4.3-4)$$

Уколико је извршена ортонормализација, систем је некорелисан, а нормалне једначине у том случају изгледају

$$\bar{A}^T \cdot \bar{A} \cdot x = \bar{A}^T \cdot f = N \cdot x = n . \quad (3.4.3-5)$$

Решење система нормалних једначина има следећи облик

$$\hat{x} = N^{-1} \cdot n \quad (3.4.3-6)$$

Коваријациона матрица оцењених параметара се добија (уколико је позната дисперзија јединице тежине) као

$$K_{\hat{x}} = \sigma_0^2 \cdot N^{-1} , \quad (3.4.3-7)$$

а, уколико није позната варијанса, као

$$K_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1} . \quad (3.4.3-8)$$

Оцена дисперзије јединице тежине или фактор дисперзије се добија у зависности од тога да ли је а priori коваријациона матрица јединична или није. Тада је

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega}{n - u} , \quad (3.4.3-9)$$

са:

$$\Omega = \hat{v}^T \cdot \hat{v} , \quad (3.4.3-10)$$

када се оцењује дисперзија јединичне тежине, или

$$\Omega = \hat{v}^T \cdot K_1^{-1} \cdot \hat{v} \quad (3.4.3-11)$$

када се оцењује варијанс фактор.

Коваријациона матрица поправака је од велике важности при оцени унутрашње и спољашње поузданости (поглавље 6). Матрица је сингуларна са  $r(\mathbf{K}_1) = n - u$  и добија се као

$$\mathbf{K}_{\hat{v}} = \sigma_0^2 \cdot (\mathbf{K}_1 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}_{\hat{x}} \cdot \mathbf{A}^T) = \sigma_0^2 \cdot (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_i), \quad (3.4.3-12)$$

када се користи а приори коваријациона матрица опажања ( $\mathbf{K}_i$ ), или

$$\mathbf{K}_{\hat{v}} = \sigma_0^2 \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}_{\hat{x}} \cdot \mathbf{A}^T) = \sigma_0^2 \cdot (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{K}_{\hat{x}} \cdot \bar{\mathbf{A}}^T) = \sigma_0^2 \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i), \quad (3.4.3-13)$$

када се користи јединична матрица као а приори коваријациона матрица. Матрица  $\mathbf{K}_i$  је коваријациона матрица изравнатих опажања фазних разлика, а фактор дисперзије може, а и не мора бити познат.



## 4. АТМОСФЕРА И ЊЕН УТИЦАЈ НА ПРОСТИРАЊЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА

---

### 4.1. ОСНОВЕ ПРОСТИРАЊА ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА

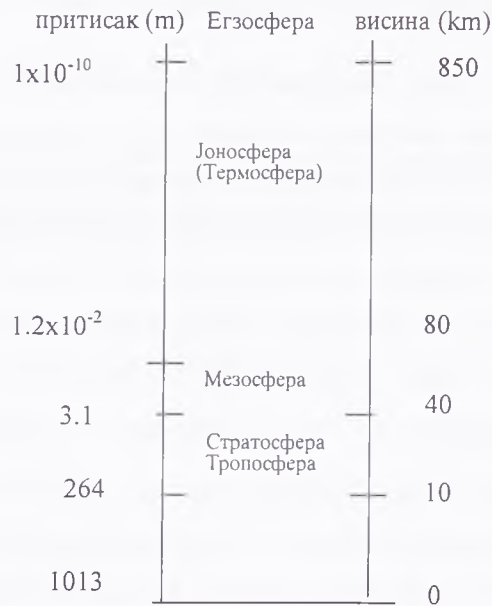
Електромагнетно поље је једно од форми постојања материје. У њему се остварује узајамно дејство наелектрисаних честица, као што се у гравитационом пољу осећа узајамно дејство међу масама тела. Простирање променљивог електромагнетног поља се назива електромагнетним таласом и он представља форму простирања електромагнетне енергије у некој средини. Динамика електромагнетног поља се описује системом Максвелових једначина којима је успостављен однос између електричног и магнетног поља и честицама унутар њих (Симић, 1992). Параметри који карактеришу електромагнетна својства средине су: диелектрична константа -  $\epsilon$ , магнетна пермеабилност -  $\mu$  и специфична електрична проводљивост -  $\sigma$ . Средина у којој нема апсорпције електромагнетних таласа, назива се слободним простором или вакуумом. У њему нема слободних наелектрисаних честица, а његова специфична електрична проводљивост износи  $\sigma = 0$ . Из практичних разлога, често се користе релативне вредности параметара које се добијају помоћу израза облика

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \\ \mu_r &= \frac{\mu}{\mu_0}, \end{aligned} \quad (4.1-1)$$

где су:  $\epsilon$  - диелектрична константа у некој средини,  $\epsilon_0$  - диелектрична константа у вакууму,  $\epsilon_r$  - релативна диелектрична константа,  $\mu$  - магнетна пермеабилност у некој средини,  $\mu_0$  - магнетна пермеабилност у вакууму и  $\mu_r$  - релативна магнетна пермеабилност. У вакууму, релативне вредности диелектричне константе и магнетне пермеабилности су једнаке и износе  $\epsilon_r = \mu_r = 1$ .

Простирање *GPS* таласа се врши у атмосфери. Према резултатима испитивања, атмосфера се простира у висину од око 2 до 3 земљина полупречника (Проворов, 1973). До висине од око 16 *km*, налази се око 9/10 укупне масе Земље, а само један милионити део масе налази се изнад висине веће од 100 *km*. По физичким својствима атмосфера није једнородна, а по висини је подељена на слојеве - сфере (слика 4.1-1). Атмосферске слојеве

карактеришу једнаке физичке особине као што су: температура, садржај и однос гасова и јонизација. Код *GPS* мерења, посебан значај се придаје тропосфери и јоносфери. Значајно је истаћи да тропосфера изазива кашњење модулишућег и носећег таласа, док јоносфера изазива предњачење у фази носећег таласа и кашњење у фази модулишућег (групног, кодног) сигнала. Кашњење у фази модулишућег сигнала<sup>1</sup> (*group delay*) репрезентује време за које, *P* (или *CA*) кодна секвенца на носећем таласу (таласу носиоцу; Симић, 1992) касни у односу на време њеног простирања у вакууму.



Слика 4.1.1 Атмосфера

## 4.2. УТИЦАЈ ТРОПОСФЕРЕ НА ПРОСТИРАЊЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА

Тропосферу чине следећи гасови: азот (78%), кисеоник (21%), аргон (0.9%) и угљендиоксид (0.02-0.04%). У мањим количинама се могу наћи: водоник, неон, хелијум као и неки други гасови. Поред гасова, атмосфера садржи у течном и гасовитом стању воду (у неким деловима до 4%), као и неке друге течне и чврсте честице различитог састава (Проворов, 1973).

Специфична електрична проводљивост тропосфере је практично занемарљива, тако да се тропосфера сматра диелектриком. Магнетна пермеабилност је једнака јединици, док је диелектрична константа, при средњим условима (притисак  $p = 1013 \text{ mbar}$ , температура  $T = 15^\circ \text{ C}$  и парцијални притисак водене паре  $e = 10 \text{ mbar}$ ) једнака 1.000636 (Проворов, 1973). До висине од око  $90 \text{ km}$ , гасови који чине атмосферу су прилично стабилног састава. Изнад те границе, под утицајем сунчеве радијације, долази до цепања

<sup>1</sup> Модулишући сигнал – основни сигнал који треба пренети модулацијом таласа носиоца (Симић, 1992). Код *GPS* сигнала то су *CA* и *P* кодови и навигациона порука.

молекула кисеоника и азота на атоме што изазива слојевити распоред гасова по висини. Основни метеоролошки елементи атмосфере који значајно опредељују начин простирања електромагнетних таласа јесу: температура, притисак и влажност ваздуха.

Температура ваздуха у тропосфери опада са висином и одређена је зрачењем површи Земље која зависи од неколико других фактора. У нижим слојевима тропосфере који су највише изложени директним зрачењем земљине површи, до висине од  $1\text{ km}$  до  $1.5\text{ km}$ , средњи градијент загревања износи  $3\text{--}4\text{ }^\circ\text{C}/\text{km}$ . Величина градијента је врло нестабилна и у зависности од стања у атмосфери, при дневним условима, може достићи вредности од  $10\text{--}15\text{ }^\circ\text{C}/\text{km}$ . У средњим слојевима тропосфере, на висинама од  $1.5\text{ km}$  до  $5\text{--}6\text{ km}$ , температурни градијент износи  $5\text{--}6\text{ }^\circ\text{C}/\text{km}$ , док у горњим слојевима достиже вредности од  $6.5\text{ }^\circ\text{C}/\text{km}$  до  $7.5\text{ }^\circ\text{C}/\text{km}$ . У вишим слојевима тропосфере, на висинама од  $15\text{ km}$  до  $25\text{ km}$ , температура ваздуха је константна и износи око  $-53^\circ\text{C}$ . Изнад ове висине, температуре значајно варирају, достижући износ и до неколико хиљада целзијусових степени. У Табели 4.2-1 су приказане температуре ваздуха на висинама до  $16\text{ km}$ , при стандардној атмосфери.

Неравномерно загревање земљине површи, у зависности од положаја Сунца, рељефа земљишта, вегетације и влажности, утиче на неравномерно загревање ваздуха, вертикално и хоризонтално мешање ваздушних маса изазивајући температурну инверзију. У атмосфери су могућа и таква турбулентна струјања која изазивају краткопериодичне промене температуре које достижу вредности од  $1^\circ\text{C}$ . Промена температуре у атмосфери није само везана за висину, већ се и на тачкама једнаких висина јављају различите температуре. Код једнородних средина (у смислу терена и вегетације) разлике у температури на истој висини, на растојању од неколико десетина километара, не прелазе вредности од  $1^\circ\text{C}$ , осим у периоду излаза и залаза Сунца, када су могуће промене и до  $5^\circ\text{C}$ . При преласку са једне на другу површ, посебно при преласку са копна на море, температуре могу бити различите и до  $10^\circ\text{C}$ . Температуре изнад умерено обраслог терена (на пример, пашњака или дела са умереном вегетацијом) могу бити различите и до  $3.5^\circ\text{C}$ , а у горњим слојевима тропосфере, нарочито ноћу, изнад долине и изнад брдовитог терена, разлике износе и до  $17^\circ\text{C}$ . Температуре ваздуха у граду и околини, ноћу могу бити различите и до  $5^\circ\text{C}$ . (Проворов, 1973).

Атмосферски притисак се смањује са повећањем висине по експоненцијалном закону. Близу нивоа мора, градијент притиска износи око  $12.5\text{ mbar}$  на  $100\text{ m}$ . Могуће су како сезонске варијације притиска тако и варијације које зависе од промене састава атмосфере. У општем пољу притиска, атмосферу је могуће третирати као равномерну и једнородну са скоро безначајним флукуацијама.



Табела 4.2-1: Параметри стандардне атмосфере на различитим висинам при влажности ваздуха једнакој нула (Проворов, 1973)

Висина ( <i>km</i> )	Температура (°C)	Притисак ( <i>mbar</i> )	Парцијални притисак водене паре ( <i>mbar</i> )
0	15	1013	10.0
2	2	795	4.6
4	-11	616	1.5
6	-24	472	0.3
8	-37	356	0.05
10	-50	264	0.005
12	-56.5	194	-
14	-56.5	141	-
16	-56.5	103	-

Влажност ваздуха карактерише садржај водене паре. Ако је  $q$  - специфична влажност,  $e$  - парцијални притисак водене паре, а  $E$  - притисак zasiћене водене паре, однос између парцијалног притиска водене паре и релативне влажности  $r$  може се описати изразом облика

$$e = \frac{p \cdot q}{622 + 0.378q} = \frac{E \cdot r}{100}, \quad (4.2-1)$$

где је:  $p$  - атмосферски притисак у *mbar*.

Распоред влажности у тропосфери зависи од: температуре, кретања ваздушних маса, процеса кондензације, испарења и количине падавина. По правилу, већа влажност се јавља у деловима где су већа испарења. Променљива влажност је посебно изражена у нижим слојевима тропосфере, на висинама до 100 *m*.

Притисак водене паре опада са висином по експоненцијалном закону, значајно брже него атмосферски притисак. Зависност парцијалног притиска водене паре од висинске разлике, могуће је изразити емпиријском формулом облика

$$e_2 = e_1 \cdot 10^{-0.0819 h - 0.0146 \Delta h^2}, \quad (4.2-2)$$

где је:  $\Delta h$  висинска разлика у *km*. У Табели 4.2-1, парцијални притисак водене паре је срачунат по изразу (4.2-2).

Влажност ваздуха се обично мери посредним путем помоћу аспирационог психрометра, мерећи температуру суве -  $t_s$  и влажне тачке -  $t_v$ , на основу чега се рачуна парцијални притисак водене паре помоћу израза

$$e = E - \frac{p}{1510} \cdot (t_s - t_v) \cdot \left(1 + \frac{t_v}{873}\right), \quad (4.2-3)$$

где је:  $E$  притисак засићене водене паре при температури  $t_v$ , а  $p$  притисак ваздуха. При мерењу температуре са тачношћу од  $0.1^\circ\text{C}$ , тачност оцене парцијалног притиска добијеног помоћу израза (4.2-3) износи  $0.5 \text{ mbar}$ .

Израз за рачунање вредности парцијалног притиска водене паре у  $\text{mbar}$  дао је и *A. Sprung (Rueger, 1988)*, по коме је

$$e = E - 0.000662 \cdot p \cdot (t_s - t_v), \quad (4.2-4)$$

где су:  $t_s$  и  $t_v$  температуре у сувој и влажној тачки психрометра у  $^\circ\text{C}$ ,  $p$  - притисак у  $\text{mbar}$ , а

$$E = 10^{\left(\frac{7.5 t_v}{273.3 + t_v} + 0.7858\right)} \quad (4.2-5)$$

$$p = 1013.2 \cdot \left(1 - \frac{H_{\text{km}}}{44.3}\right)^{5.26} \quad (4.2-6)$$

$$t^0 = 15 - 6.5 \cdot H_{\text{km}}$$

Изнад висине од  $11 \text{ km}$ , температура се усваја као константа и једнака је  $-56.5^\circ\text{C}$ , а притисак се одређује по формули

$$p = 226 \cdot 10^{\frac{h_{\text{km}} - 11}{14.6}} \quad (4.2-7)$$

За таласе фреквенција мањих од  $30 \text{ GHz}$ , тропосфера има једнак утицај на брзину простирања таласа, независно од фреквенције. За сателите у зениту, кашњење сигнала изазвано утицајем тропосфере (у поређењу са сигналом који би се простирао кроз вакуум), изражено у дужини, износи око  $1.9 \text{ m} - 2.5 \text{ m}$ . Са смањењем елевационог угла сателита вредност кашњења расте достижући, при елевацијама од  $5^\circ$ , износе од  $20 \text{ m} - 28 \text{ m}$ . Кашњење таласа зависи од температуре, влажности и притиска и варира са висином посматрача и врстом терена изнад којег се талас простире.

При моделовању, тропосфера се може посматрати као мешавина два идеална гаса, и то: сувог ваздуха и водене паре. Суви део обухвата око  $90 \%$  укупне тропосферске рефракције, док остатак ( $10\%$ ) припада утицају водене паре (влажна компонента ваздуха). Суви део тропосфере се може веома успешно моделовати (тачност  $2-5 \%$ ) мерењем притиска и температуре, имајући у виду да се суви ваздух веома добро покоравља законима који важе за идеалан гас (*Leick, 1991*).

За разлику од суве компоненте, влажна компонента тропосфере се теже моделује. Чак и при нормалним временским условима, на појединим местима постоје скривени извори водене паре који се тешко могу унапред предвидети узимањем узорака са терена. Упркос своје променљивости, присуство водене паре се на неки начин мора моделовати. То се чини у оквиру истог модела којим се обухвата и утицај суве компоненте. Дуж путање

сигнала, присуство водене паре се може мерити специјалним уређајима тзв. радиометрима водене паре али је њихова примена, због високе цене коштања, углавном ограничена на специјалне намене, када се тражи висока прецизност *GPS* мерења. На средњим географским ширинама, влажна компонента тропосфере утиче на мерење *GPS* растојања у износу од *5-30 cm* и може се моделовати са тачношћу од око *2-5 cm*. Применом радиометара, грешка се може свести на свега *1-2 cm*.

Параметри атмосфере мерени на површи Земље, морају се веома пажљиво користити. Њихове вредности су најчешће оптерећене непосредним утицајем земљине површи или микрометеоролошким приликама. Због тога, те вредности нису репрезентативне и не одражавају стање атмосфере дуж целе путање простирања сигнала. Из тих разлога, често се препоручује примена стандардних модела атмосфере.

#### 4.3. УТИЦАЈ ЈОНОСФЕРЕ НА ПРОСТИРАЊЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА

Узајамно дејство сунчевих и космичких зрачења изазива у горњим слојевима атмосфере повећање јонизације, чиме се формира јоносфера која садржи значајну количину наелектрисаних честица (електрона и јона). Диелектрична константа јоносфере је мања од јединице, док је електрична проводљивост веома висока.

Јоносфера обухвата појас од око *50 km* до више од *1000 km* изнад Земље. Она одржава своје постојање првенствено захваљујући ултравиолетној сунчевој радијацији. Фотони, као изазивачи јонизације, ударају у атоме и молекуле и кидају везе које држе електроне везане за изворне атоме и тако их јонизују. Као резултат ове појаве, јавља се велики број слободних електрона и позитивно наелектрисаних атома и молекула који се називају јони. Слободни електрони и јони утичу на простирање радио таласа. На таласе фреквенција испод *30 MHz*, јоносфера делује скоро као огледало, омогућујући телекомуникацију на великим просторствима. На вишим фреквенцијама, какве су *GPS* фреквенције, електромагнетни талас пролази кроз јоносферу, трпећи њен извештан утицај.

Брзина простирања сигнала кроз јоносферу, директно зависи од броја слободних електрона дуж путање простирања сигнала. Укупан број електрона у замишљеном цилиндру површине попречног пресека  $1\text{m}^2$  који се простире од сателита до пријемника, назива се *TEC (Total Electron Content)*. *TEC* је функција више различитих извора. На ноћној страни Земље, слободни електрони имају тенденцију рекомбиновања са јонима, што изазива смањење *TEC*. Као последица тога, *TEC* има велике дневне варијације. Промене *TEC* се могу јавити и у много краћим временским интервалима. Промена *TEC* од  $1.2 \cdot 10^{16}$  електрона по  $\text{m}^2$  ( $\text{el}/\text{m}^2$ ) може изазвати промену фазе на *L1* носећем таласу у вредности једног циклуса. Односно, промена фазе од једног радијана коресподентна је



промени  $TEC$  од  $0.19 \cdot 10^{16}$   $e/m^2$  што је око 0.2% од типичне концентрације која износи  $10^{18}$   $e/m^2$ .

Сигнал модулисан на носећем таласу ( $PRN$  кодови и навигациона порука, модулишући сигнал, групни сигнал), касни ( $delay$ ) у односу на носећи талас. Како је модулишући сигнал формиран суперпонирањем више сигнала различитих фреквенција, кашњење модулишућег сигнала се назива групно кашњење ( $group\ delay$ ). Групно кашњење сигнала, изазива грешку мерења псеудорастојања, независно од врсте кода који је примењен. Грешка варира од неколико дециметара до преко 100 m и мења се у зависности од: доба дана, доба године, географске ширине места, елевације сателита, сунчеве активности и стања земљиног магнетног поља. Групно кашњење је једнако фазном предњачењу ( $phase\ advance$ ).

Величина фазног предњачења и групног кашњења су функције вредности фреквенције носећег таласа и фреквенције модулишућег таласа. По правилу, што је већа фреквенција то је утицај безначајнији и обрнуто. Овакав утицај јоносфере се назива дисперзија и може се поистоветити са дељењем светлости (уз помоћ призме) на њене саставне делове (боје). Дисперзиона природа јоносфере је добро искоришћена, тако да је применом две фреквенције њен утицај значајно смањен.

При стабилној јоносфери (ујутро и увече), грешка која настаје под утицајем јоносфере је пропорционална секансу зенитног угла сателита опажаног из центроида јоносфере који се налази на око 400 km изнад Земље. При кретању сателита од зенита ка хоризонту, поправка псеудорастојања се повећава три пута, а на елевацијама од  $5^\circ$  достиже уобичајену вредност од 30m.

Једнофреквентни пријемници, морају користити моделе за које се коефицијенти шаљу као део навигационе поруке. Примена модела код једнофреквентних пријемника, умањује грешку групног кашњења за око 50%. Алгоритам за рачунање јоносферског утицаја моделује дневну јоносферску варијацију преко неколико коефицијената који се мењају (побољшавају) сваких 10 дана, по потреби и чешће, како би се што боље обухватиле сезонске варијације као и промене сунчеве активности. Након узимања у обзир ових фактора, једино краткопериодични јоносферски утицаји остају немоделовани. Применити јединствен модел при различитим стањима јоносфере није могуће. Дешава се да јоносфера изазива бржу промену фазе сигнала него што је ширина фреквенцијског опсега пријемника ( $frequency\ bandwidth$ ), што може довести до губитка сигнала. Због тога, ширина фреквенцијског опсега пријемника мора бити адекватна могућностима нормалног праћења брзине промене Доплерове фреквенције.

Грешка која настаје под утицајем јоносфере је сложена грешка и састоји се из више различитих случајних утицаја, и то: грешке које настају услед ефеката треперења,

грешке које настају као резултат земљине магнетене активности и грешке које настају као резултат периодичне сунчеве активности.

#### 4.3.1. Ефекти треперења

Нерегуларност земљине јоносфере може изазивати краткопериодично слабљење сигнала, што утиче на поремећај рада *GPS* пријемника. Слабљење може бити толико, да ниво сигнала падне испод могућности праћења.

Реони са најјачим сцинтилационим<sup>2</sup> ефектима, простиру се око 30°, са обе стране геомагнетног екватора. Слабљење сигнала под утицајем сцинтилације, у екваторском појасу, траје неколико часова и обично се јавља у предвечерје. Значајни су и сцинтилациони утицаји који се дешавају у северним -поларним реонима али су ти реони ипак доста мањи (по ширини) од екваторијалног. Период најјачег сцинтилационог утицаја, у екваторском појасу, траје приближно један час и дешава се између локалног заласка Сунца и локалне поноћи. Могући су и изузеци, али су шансе за појаву сцинтилационих ефеката у екваторском појасу највеће између 19<sup>h</sup> и 24<sup>h</sup> (по локалном времену). Од априла до краја августа, појава значајног сцинтилационог ефекта од Америке преко Африке до Индије је ретка, док су ови ефекти у том периоду најјачи у Пацифичким реонима. Од септембра до краја марта, ситуација је обрнута.

#### 4.3.2. Ефекти изазвани појавом магнетне олује

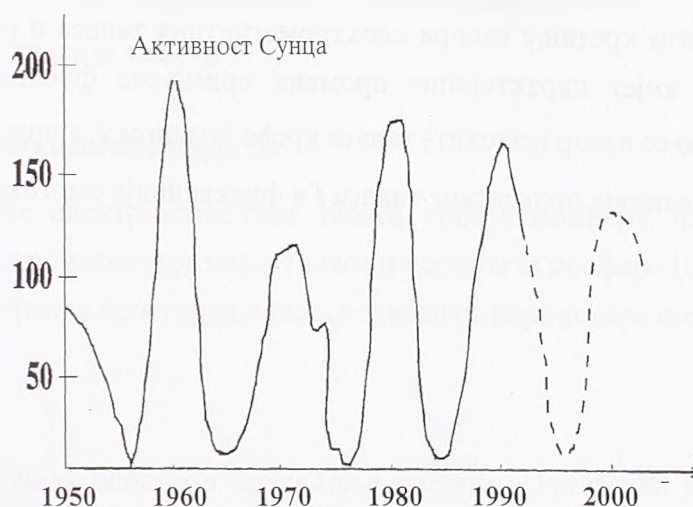
У северним и поларним ширинама, било која значајна магнетна олуја на Земљи може произвести сцинтилационе ефекте, али они нису толико јаки као они у блиско-екваторијалном појасу. Олује могу трајати од неколико сати до неколико дана и нису ограничене на локалне вечерње сате, као што је то случај са сцинтилационим ефектима. Магнетне олује изазивају наелектрисане честице (*solar flares*) које долазе са Сунца на Земљу изазивајући промене земљиног магнетног поља. Видљива "аурора" или северна и јужна светлост је узрокована честицама велике енергије које се крећу дуж линија земљиног магнетног поља према половима, где ступају у интеракцију са неутралном атмосфером, производећи црвену или зелену светлост. Јако електрично поље генерисано у јоносфери за време магнетне активности, помера електроне изнад поларног круга, изазивајући велике и брзе промене јоносфере, чак и у периоду од једне минуте. Иако магнетне олује могу трајати и до неколико дана, географски појас у коме се јављају јаки сцинтилациони ефекти, доста је мали. Укупни аурора и поларни појас износе око 7% земљине површи, док екваторијални појас где се сцинтилациони ефекти јављају у великим износима, представља око 50% земљине површи. За време јаких магнетних олуја (као што је била у марту 1989.), аурорални ефекти се могу проширити до средњих ширина. За време таквих утицаја, кашњење сигнала изазваног утицајем јоносфере, може бити врло значајно.

<sup>2</sup> Scintilacija – зрачење изазвано флуksom електричномагнетних честица.

Врло јаке магнетне олује дешавају се само неколико пута за време 11. годишњег сунчевог циклуса.

#### 4.3.3. Ефекти изазвани сунчевом активношћу

Ултравиолентна сунчева радијација је основни узрочник постојања јоносфере. Ултравиолентно зрачење варира са сунчевом активношћу, а меру ове активности представља број сунчевих пега које се опажају још од почетка XVII века. Опажања показују јасну варијацију са средњим периодом од 11 година. Слика 4.3.3-1 илуструје сунчеву активност у задњих 50 година.



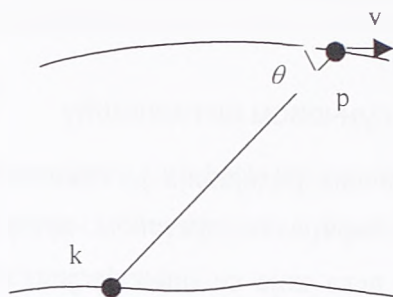
Слика 4.3.3-1: Сунчева активност у задњих 50 година

У задњих 400 година, од када се сунчева активност прати, последњих 50 година су биле најбурније. У том периоду, десила су се три од четири највећа циклуса (било их је укупно 22). Из непознатих разлога, велике магнетне олује се дешавају за време опадања сунчеве активности.

#### 4.4. БРЗИНА И ПРАВАЦ ПРОСТИРАЊА ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ТАЛАСА

Веома важна карактеристика електромагнетних таласа јесте брзина његовог простирања. У слободном пространству (вакууму), брзина простирања таласа је једнака за све таласне дужине и као таква представља једну од фундаменталних константи физике.





Слика 4.4-1: Геометрија пријемник-сателит

При узајамном кретању извора електромагнетних таласа и пријемника, јавља се Доплеров ефекат, којег карактерише промена примљене фреквенције у односу на емитовану. Уколико се извор (сателит) таласа креће брзином  $v$ , а пријемник мирује (слика 4.4-1), тада су фреквенција примљеног таласа  $f$  и фреквенција емитованог таласа  $f_0$  везани изразом облика

$$f = f_0 \cdot \frac{1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4.4-1)$$

где је:  $c$  - брзина светлости у вакууму, а  $\theta$  - угао који заклапа радијус вектор сателита са правцем путање. Ако је радијална брзина кретања сателита  $v_r = v \cdot \cos \theta$  (која је значајно нижа од брзине светлости) тада је

$$f = f_0 \cdot \left(1 \pm \frac{v_r}{c}\right). \quad (4.4-2)$$

Доплеров ефекат има врло важну улогу у астрономији и примењује се при одређивању положаја вештачких космичких објеката.

У реалној средини, простирање електромагнетних таласа зависи од својства средине и фреквенције електромагнетних осцилација. У идеалном диелектрику, зависност брзине кретања се изражава формулом облика

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}, \quad (4.4-3)$$

па, ако су уведу релативне вредности горњих променљивих, добија се

$$v = \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_0 \cdot \mu_0) \cdot (\epsilon_r \cdot \mu_r)}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}. \quad (4.4-4)$$

*GPS* сигнал представља сложени талас. Познато је да се у дисперзивним срединама сложени таласи простиру различитим брзинама. Често се при анализи таквих таласа, говори о тзв. групној брзини (мисли се на брзину модулишућег таласа). Групна брзина представља брзину кретања максималне амплитуде сложених осцилација и карактерише брзину простирања енергије таласа у простору. Веза између групне ( $v_{gr}$ ) и фазне брзине (брзине сигнала носиоца -  $v_f$ ) сложеног таласа се изражава формулом облика

$$v_{gr} = v_f - \lambda \cdot \frac{dv_f}{d\lambda} \quad (4.4-5)$$

Израз  $dv_f/d\lambda$  представља карактеристику дисперзивне средине и код недисперзивних средина једнак је нули, па је тада  $v_{gr} = v_f$ .

#### 4.4.1. Индекс преламања ваздуха

При кретању електромагнетних таласа кроз атмосферу, долази до узајамном дејства између електромагнетног поља таласа и честица атмосфере (средина, медиј и сл.). У општем случају, брзина простирања таласа зависи од параметара средине и износи

$$\frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r} = n \quad (4.4.1-1)$$

а, величина  $n$  се назива *индексом преламања* средине. Очигледно је да се одређивање брзине простирања електромагнетних таласа у некој средини, своди на оцену индекса преламања средине.

Индекс преламања зависи од састава гасова у атмосфери, парцијалног притиска водене паре, температуре, притиска ваздуха и фреквенције таласа. У већини случајева, индекс преламања расте са смањењем таласне дужине (нормална дисперзија), док је обрнута зависност доста ређа (аномална дисперзија). На *XVI Генералној скупуштини IUGG* (1975) усвојена је вредност за брзину простирања таласа у вакууму од  $c_0 = 299792458$  m/s са грешком од  $s = 1.2$  m/s.

Величине релативне диелектричне константе  $\epsilon_r$  и релативне магнетне пермеабилности ваздуха  $\mu_r$ , за неке гасове који се налазе у атмосфери, дате су у табели 4.4.1-1, одакле се види да је у ваздуху  $\mu_r - 1$  значајно мање од  $\epsilon_r - 1$ . Из тог разлога, често се при рачунању индекса преламања ваздуха узима да је  $\mu_r = 1$ , што изазива систематску грешку мању од  $2 \cdot 10^{-7}$ . Са довољном тачношћу, индекс преламања се може добити као

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (4.4-1-2)$$

Табела 4.4.1-1: Вредности  $\epsilon_r$  и  $\mu_r$ 

Медиј	$(\epsilon_r-1) \times 10^6$	$(\mu_r-1) \times 10^6$
Суви ваздух	576	0.4
Влажни ваздух	875	0.4
Азот	588	0.0
Кисеоник	531	1.9
Аргон	556	0.0
Угљендиоксид	988	0.0

Индекс преламања ваздуха је близак јединици. Његова величина у нижим слојевима тропосфере износи од 1.0002 до 1.0004 и постепено опада са висином. У случају јоносфере која се понаша као проводник, индекс преламања је мањи од јединице. Уместо индекса преламања, често се користи његов модификовани облик који се означава са  $N$  (у *Leick, 1995* или *Reuger, 1988*,  $N$  се назива *рефрактивност* или на енглеском: *refractivity*) и који се дефинише као

$$N = (n-1) \cdot 10^6 . \quad (4.4.1-3)$$

Рефрактивност изазвана утицајем тропосфере, може се према *Froomi* и *Essenu*, изразити емпиријском формулом облика

$$N = \frac{77.6}{T} \cdot \left( p - \frac{1}{6} \cdot e + \frac{4791 \cdot e}{T} \right) \approx \frac{77.6}{T} \cdot \left( p + \frac{4791 \cdot e}{T} \right) . \quad (4.4.1-4)$$

Како се густина атмосфере која одређује индекс преламања смањује са висином, то се и индекс преламања у општем случају смањује. Зависност индекса преламања (или његовог модификованог облика -  $N$ ) од висине, може се приказати изразом облика

$$N = A + B \cdot h + C \cdot h^2 , \quad (4.4.1-5)$$

где су:  $A$ ,  $B$  и  $C$  непознати коефицијенти који се односе на одређену територију и оцењују се из вишегодишњих опажања притиска, температуре и влажности ваздуха на разним висинама  $h$ , израженим у  $km$ . Уколико таква опажања постоје, могуће је за област дефинисану висинама  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , оценити средњу вредност величине  $N_i$  на свакој висини и поставити једначине грешака облика

$$v_i = A + B \cdot h_i + C \cdot h_i^2 - N_i , \quad (4.4.1-6)$$

где су:  $v_i$  - поправке срачунатих вредности  $N_i$ . Коефицијенти  $A$ ,  $B$  и  $C$ , оцењују се по методи најмањих квадрата. За стандардну атмосферу и при константној влажности од 70%, модификовани индекс преламања радио таласа се може довољно тачно представити изразом (*Проворов, 1973*)

$$N = 329 - 40.4 \cdot h + 1.69 \cdot h^2 . \quad (4.4.1-7)$$



Из формуле (4.4.1-7) произилази да је вертикални градијент модификованог индекса преламања једнак

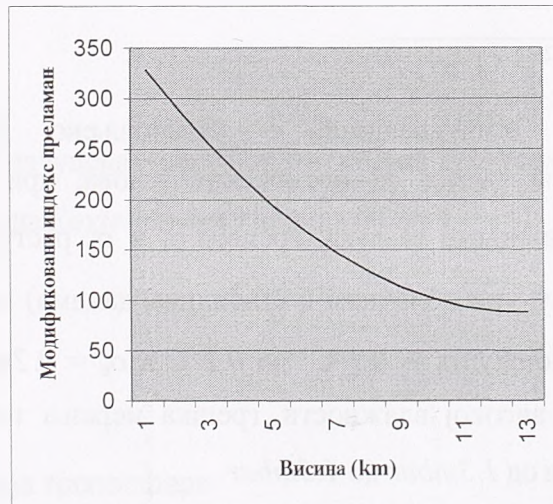
$$g_N = \frac{\partial N}{\partial H} = B + 2C \cdot h. \quad (4.4.1-8)$$

За стандардну атмосферу, из (4.4.1-8) следи

$$g_N = (-40.4 + 3.38 \cdot h) \cdot 10^{-3}, \text{ на } 1\text{m висине.} \quad (4.4.1-9)$$

Очигледно је да се модул градијента смањује са висином. У приземном слоју, за  $h = 0$ , градијент индекса преламања при стандардној атмосфери износи око  $-4 \cdot 10^{-2} / \text{m}$ .

Приближне вредности индекса преламања добијене емпиријским путем, могу се користити код радова ниже тачности. Код високотачних сателитских мерења, у мрежи чије су дужине  $l > 30\text{km}$ , пожељно би било вршити непосредна мерења параметара атмосфере, изнад свих тачака територије премера.



Слика 4.4.1-1: Зависност модификованог индекса ( $N$ ) од висине ( $h_{km}$ ), (Гроворов, 1973)

Промене индекса преламања ваздуха са висином често су праћене скоковима, а његов градијент у слоју висине до  $1\text{km}$  показује промене од  $-0.04$  до  $-0.30$  по  $1\text{m}$ . При неповољним временским приликама, у неким деловима тропосфере, долази до аномалија температурног градијента. Тада, уместо умањења градијента са висином, имамо његово повећавање. Међутим, колебање индекса преламања ваздуха у општем случају, смањује се са повећањем висине и на висинама од око  $9\text{ km}$ , његово значење је практично константно у току целе године.

Још је мања закономерност промене индекса преламања ваздуха у непосредној близини земљине површи. Забележени су случајеви промена индекса преламања на малим висинама (на растојањима од неколико километара) од око 50 јединица. Карактер промена у великој мери зависи од густине вегетације и рељефа земљишта. Тако, изнад шумског покривача, величина вертикалног градијента индекса преламања је 6 до 8 пута већа него

изнад откривеног земљишта, у исто време. Са повећањем висине, разлике индекса преламања у хоризонталној равни се смањују, а највеће његове промене се дешавају у топлијим периодима, посебно при заласку и изласку Сунца. Најмање промене индекса преламања се јављају у другој половини дана, а највеће ноћу.

Утицај грешака мерења метеоролошких параметара на тачност оцене индекса преламања, може се добити диференцирањем израза (4.4.1-4), при чему се добија

$$dN = -\frac{77.6}{T^2} \left( p - \frac{e}{6} + \frac{9582 \cdot e}{T} \right) dT + \frac{77.6}{T} dp + \frac{77.6}{T} \left( \frac{4791}{T} - \frac{1}{6} \right) de, \quad (4.4.1-10)$$

При средњим условима,  $T = 288^\circ\text{K}$ ,  $p = 1013\text{mbar}$  и  $e = 10\text{mbar}$ , на основу (4.4.1-10) добија се

$$dN = 0.3dp - 1.3dT + 4.5de, \quad (4.4.1-11)$$

где су:  $dp$  и  $de$  изражени у  $\text{mbar}$ , а  $dT$  у степенима. Преласком са диференцијала на средњу квадратну грешку, добија се

$$\sigma_N = \sqrt{(0.3\sigma_p)^2 + (1.3\sigma_t)^2 + (4.5\sigma_e)^2}. \quad (4.4.1-12)$$

Експерименталним испитивањима је установљено да грешка мерења метеоролошких параметара зависи од временских услова, при чему са повећањем температуре а посебно влажности ваздуха, грешке  $\sigma_t$  и  $\sigma_e$  расту. При најповољнијим условима (за  $T = 0^\circ\text{C}$ , ноћу, при облачним и стабилним данима) мерење температуре и влажности се врши са тачношћу:  $\sigma_t = 0.1^\circ\text{C}$  до  $0.2^\circ\text{C}$  и  $\sigma_e = 0.2\text{mbar}$  до  $0.3\text{mbar}$ . При високим температурама и високој влажности, грешка мерења температуре износи од  $0.6^\circ\text{C}$  до  $0.8^\circ\text{C}$ , а влажности од  $1.3\text{mbar}$  до  $1.5\text{mbar}$ .

На основу изнетих показатеља произилази да (код радио таласа) на тачност оцене индекса преламања највише утиче грешка одређивања влажности ваздуха.

#### 4.4.2. Поправке GPS мерења због утицаја атмосфере

Брзина простирања монохроматског електромагнетног таласа таласне дужине  $\lambda$  и фреквенције  $f$  у простору износи

$$v_f = \lambda f. \quad (4.4.2-1)$$

Код таласа сачињеног композицијом више фреквенција, резултујући талас се креће (групном) брзином од

$$v_{gr} = -\frac{df}{d\lambda} \lambda^2. \quad (4.4.2-2)$$

Фазна брзина (брзина простирања таласа носиоца) се односи на фазна *GPS* мерења, а групна на кодна. Однос између фазне и кодне брзине, сагласно (4.4-5), дефинише се *Rayleigh* - ом једначином облика (*Hofmann - Wellenhof i dr. 1994*)

$$v_{gr} = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}, \quad (4.4.2-3)$$

при чему су вредности  $v_f$  и  $v_{gr}$  једнаке у вакууму.

У атмосфери брзина простирања електромагнетског таласа зависиће од индекса преламања средине и износи

$$v = \frac{c}{n}. \quad (4.4.2-4)$$

Генерално, брзина простирања фазног и групног таласа износи

$$v_f = \frac{c}{n_f}, \quad (4.4.2-5)$$

$$v_{gr} = \frac{c}{n_{gr}}, \quad (4.4.2-6)$$

па након одређених рачунских операција и замена (*Hofmann - Wellenhof i dr. 1992*), добија се модификована *Rayleigh-va* једначина облика

$$n_{gr} = n_f - \lambda \frac{dn_f}{d\lambda}, \quad (4.4.2-7)$$

или,

$$n_{gr} = n_f + f \frac{dn_f}{df}. \quad (4.4.2-8)$$

Поправка због утицаја тропосфере

Већина програма за обраду *GPS* мерења, за отклањање утицаја тропосфере користи неколико модела. Тако, програм *PoPS* (са којим се располагало у обради) нуди следеће тропосферске моделе: 1) *Saastamoinen*-ов модел, 2) *Hopfield*-ов 1 и 2 и 3) *Essen* и *Froome*-ов модел. Разлике у коришћењу појединих модела су мале (неколико *mm*). Према упутству за коришћење *WMI02*, у Европи се најчешће користи *Saastamoinen*-ов модел, док се примена *Essen* и *Froome*-овог модела остварује на мрежама са мањим растојањима и великим висинским разликама. За опажања изнад 20° елевације, *Saastamoinen*-ов модел даје веома поуздане корекције, а израз за одређивање кашњења сигнала гласи

$$T_k^p(z) = \frac{0.002277}{\cos Z} \left[ P + \left( \frac{1255}{T} + 0.05 \right) e - \tan^2 Z \right], \quad (4.4.2-9)$$

где су:



- $T_k^p(z)$  - кашњење таласа услед утицаја тропосфере у (m),
- $Z$  - зенитни угао сателита у ( $^\circ$ ),
- $P$  - притисак у (mbar),
- $T$  - температура у  $K$  ( $^\circ C + 273.16$ ) и
- $e$  - парцијални притисак водене паре у (mbar).

Нешто касније, *Saastamoinen* је допунио израз за рачунање поправке за утицај тропосфере, уводећи два нова корекциона израза, од којих први зависи од висине тачке опажања ( $B$ ), а други од висине и зенитног угла ( $\delta P$ ), тј.

$$T = \frac{0.002277}{\cos Z} \left[ P + \left( \frac{1255}{T} + 0.05 \right) e - B \cdot \tan^2 Z \right] + \delta R \quad (4.4.2-10)$$

Типичне вредности за  $B$  и  $\delta R$  су дате у табелама (4.4.2-1) и (4.4.2-2)

Табела 4.4.2-1: Вредности за  $B$ 

Висина (m)	$B$ (mbar)
0.0	1.156
0.5	1.079
1.0	1.006
1.5	0.938
2.0	0.874
2.5	0.813
3.0	0.757
4.0	0.654
5.0	0.563

Табела 4.4.2-2: Вредности коорекционог параметра  $\delta P$  (m)

Зенитни угао $^\circ - '$	Висина (km)				
	0	0.5	1.0	1.5	2.0
60-00	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002
70-00	0.012	0.011	0.010	0.009	0.008
75-00	0.031	0.028	0.025	0.023	0.021
77-00	0.050	0.045	0.041	0.037	0.033
78-00	0.065	0.059	0.054	0.049	0.044
79-00	0.087	0.079	0.072	0.065	0.059
80-00	0.121	0.110	0.100	0.091	0.083

Користећи се параметрима стандардне атмосфере на висини  $H = 0$ , кашњење таласа изазвано утицајем тропосфере, код сателита у зениту, износи око 2.3m.

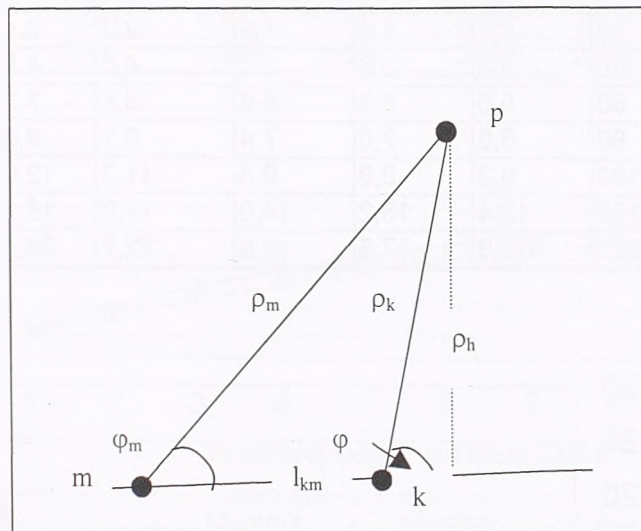
У литератури је могуће пронаћи и друге моделе утицаја тропосфере (*Leick, 1995, Hofmann-Wallenhof, 1994, Kaplan, 1996*). Један од њих (*Altshuler, 1971* у *Kaplan, 1996*), кашњење сигнала услед утицаја тропосфере описује изразом облика

$$T_k^p = \text{csc } \varphi (1.4588 + 0.0029611 \cdot N) - 0.3048(N - 360)^2 + 294) \cdot \varphi^{-2.30} \quad (4.4.2-11)$$

где су:

- $T_k^p$  - кашњење таласа услед утицаја тропосфере у (m)
- $\varphi$  - елевациони угао сателита у односу на пријемник у ( $^\circ$ )
- $N$  – модификовани индекс преламања.

Уколико се посматрају два пријемника  $k$  и  $m$  који под различитим елевационим угловима “виде” исти сателит, разлика у кашњењу сигнала ће бити функција њиховог међусобног растојања  $l_{km}$  (слика 4.4.2-1), тј.



Слика 4.4.2-1: Утицај тропосфере

$$\text{csc } \varphi - \text{csc } \varphi_m = \frac{\rho_m}{\rho_h} - \frac{\rho_k}{\rho_h} = \frac{\rho_m - \rho_k}{\rho_h} \approx l_{km} \cdot \frac{\cos \varphi_m}{\rho_h} \quad (4.4.2-12)$$

Узимајући у обзир (4.4.2-12), добија се израз за разлику у кашњењу простирања сигнала на крајевима базне линије, облика

$$T_m^p - T_k^p \approx l_{km} \cdot \frac{\cos \varphi_m}{\rho_h} \cdot (1.4588 + 0.0029611 \cdot N) - 0.3048 \cdot (0.00586 \cdot (N - 360)^2 + 294) \cdot (\varphi^{-2.30} - \varphi_m^{-2.30}) \quad (4.4.2-13)$$

Други израз са десне стране, користи се само при елевацијама мањим од  $10^\circ$ .

Према изразу (4.4.2-13) срачунате су вредности разлика у кашњењу сигнала у зависности од дужине базне линије, индекса рефракције и елевационог угла сателита. Вредности разлика су дате у табели 4.4.2-3 (тачке  $k$  и  $m$  се налазе на истој висини). Графички приказ зависности разлика од наведених параметара је дат на слици 4.4.2-2.

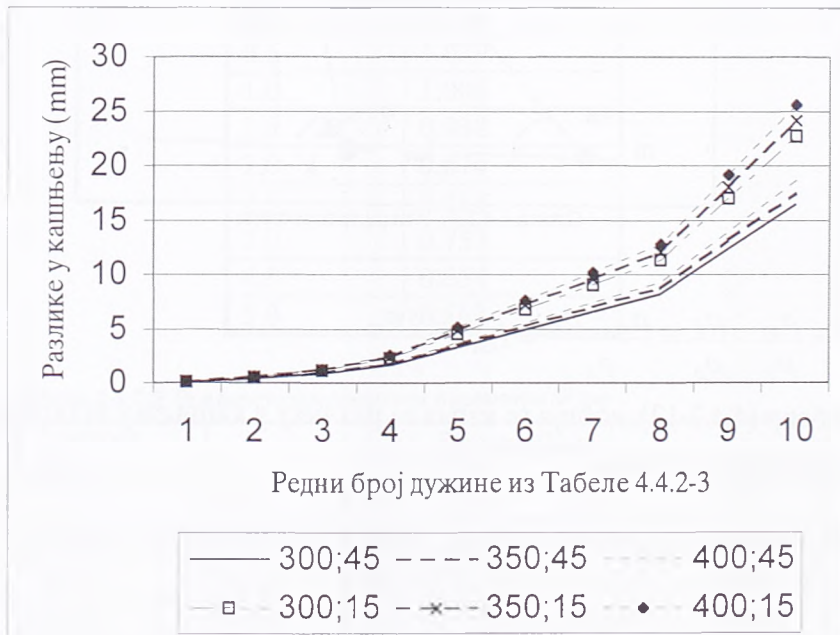
Висинска разлика између тачака  $k$  и  $m$  има значајан утицај на величину поправака псеудодужина изазваних утицајем тропосфере (табела 4.4.2-4 и слика 4.4.2-3). Ако је тачка  $m$  на висини  $h$ , тада је однос између поправака псеудодужина дефинисан изразом

$$T_m^p = T_k^p \cdot e^{-\left[ (0.002 \cdot N + 0.07) \cdot h + \left( \frac{0.83}{N} - 0.0017 \right) \cdot h^2 \right]} \quad (4.4.2-14)$$

За тачку  $m$  на висини  $h = 1\text{km}$ , разлика поправака услед утицаја тропосфере износи око  $2m$  (за  $N=360$ ).

Табела 4.4.2-3: Разлике кашњења сигнала на крајевима базне линије (mm)

Дужина (km)	Разлике кашњења сигнала ( $\varphi_m=45^\circ$ )			Разлике кашњења сигнала ( $\varphi_m=15^\circ$ )		
	N=300	N=350	N=400	N=300	N=350	N=400
1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
5	0,4	0,4	0,5	0,6	0,6	0,6
10	0,8	0,9	0,9	1,1	1,2	1,3
20	1,7	1,8	1,9	2,3	2,4	2,6
40	3,3	3,5	3,7	4,5	4,8	5,1
60	5,0	5,3	5,6	6,8	7,2	7,7
80	6,6	7,0	7,4	9,1	9,6	10,2
100	8,3	8,8	9,3	11,3	12,0	12,8
150	12,4	13,2	14,0	17,0	18,1	19,1
200	16,5	17,6	18,6	22,7	24,1	25,5

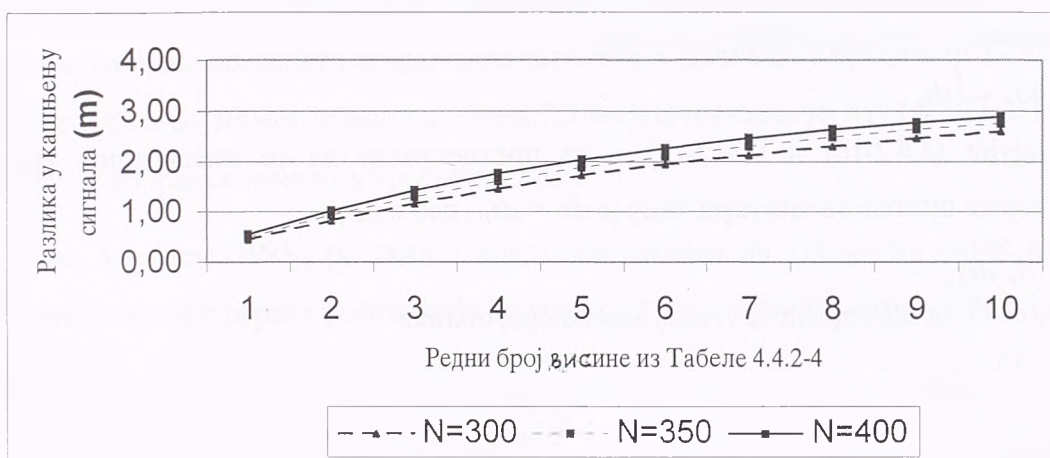


Слика 4.4.2-2: Разлике у кашњењу сигнала на крајевима базне линије у метрима у зависности од индекса рефракције, елевационог угла сателита и дужине базне линије



Табела 4.4.2-4: Вредности разлика у кашњењу сигнала на крајевима базне линије у зависности од висине  $h$  и при углу елевације сателита од  $\varphi_m=45^\circ$ 

Висина (km)	Вредности кашњења сигнала на висини $h$			Разлике кашњења сигнала на висини $h$ и референтној тачки $m$ (m)		
	N=300	N=350	N=400	N=300	N=350	N=400
0,2	3,06	3,00	2,94	0,44	0,50	0,56
0,4	2,68	2,57	2,47	0,82	0,93	1,03
0,6	2,34	2,20	2,08	1,16	1,30	1,42
0,8	2,05	1,89	1,75	1,45	1,61	1,75
1	1,79	1,62	1,47	1,71	1,88	2,03
1,2	1,56	1,39	1,23	1,94	2,11	2,27
1,4	1,37	1,19	1,04	2,13	2,31	2,46
1,6	1,20	1,02	0,87	2,30	2,48	2,63
1,8	1,04	0,87	0,73	2,46	2,63	2,77
2	0,91	0,75	0,61	2,59	2,75	2,89



Слика 4.4.2-3: Вредности разлика у кашњењу сигнала на крајевима базне линије у зависности од висинске разлике између тачака и индекса рефракције (за вредност кашњења сигнала на једном крају базне линије је усвојена вредност од 3.5m).

### Поправка због утицаја јоносфере

Према *Seeber-u (1989 u Hofmann-Wellenhof i dr., 1992)* израз

$$n_f = 1 + \frac{c_2}{f^2} + \frac{c_3}{f^3} + \frac{c_4}{f^4} + \dots \quad (4.4.2-15)$$

апроксимира индекс преламања носећег таласа (у литератури се назива и фазни индекс преламања; *Leick, 1995*). Коefицијенти  $c_2$ ,  $c_3$  и  $c_4$  не зависе од фреквенције таласа већ од броја електрона по  $m^3$  (густина електрона -  $Ne$ ) дуж путање таласа. У пракси, довољно је задржати се на коefицијенту другог реда, тако да горњи израз изгледа

$$n_f = 1 + \frac{c_2}{f^2} \quad (4.4.2-16)$$

и при томе довољно тачно апроксимира вредност индекса преламања носећег таласа. Диференцирањем (4.4.2-16) по  $f$  заједно са (4.4.2-16), заменом у (4.4.2-8), добија се

$$n_{gr} = 1 - \frac{c_2}{f^2} \quad (4.4.2-17)$$

Према *Seeber-u (1989 u Hofmann-Wellenhof i dr. 1992)*

$$c_2 = -40.3 \cdot N_e [\text{Hz}^2], \quad (4.4.2-18)$$

одакле следи да је  $n_{gr} > n_f$ , а  $v_{gr} < v_f$ , што код *GPS* значи да постоји кашњење у простирању групног сигнала (кодно мерење) и предњачење у простирању фазе носећег таласа. Ово има за последицу да су кодне дужине дуже, а фазне краће од геометријских (топоцентричних). Вредност помераја је у апсолутном износу једнака.

У складу са Фермеовим принципом, мерене дужине се дефинишу као

$$s = \int n ds, \quad (4.4.2-19)$$

при чему се интеграл простира дуж читаве путање таласа. Геометријско растојање  $s_0$  се мери дуж праве линије између сателита и пријемника и добија се из (4.4.2-19), за  $n=1$ , као

$$s_0 = \int ds_0, \quad (4.4.2-20)$$

па поправка за утицај јоносфере износи

$$J_k^p = \int n ds - \int ds_0. \quad (4.4.2-21)$$

Уважавајући (4.4.2-16) и (4.4.2-17) и уз претпоставку да се интеграција врши дуж геометријске путање таласа, при чему је  $ds = ds_0$ , као и да је

$$TEC = \int N_e ds_0, \quad (4.4.2-22)$$

добијају се коначни изрази за утицај јоносфере, облика

$$J_{k_f}^p = -\frac{40.3}{f^2} TEC, \quad (4.4.2-23)$$

тј.

$$J_{k_{gr}}^p = \frac{40.3}{f^2} TEC. \quad (4.4.2-24)$$

Како је интеграција у (4.4.2-22) извршена дуж вертикалног правца, за случај произвољног зенитног угла сателита, важе следећи изрази

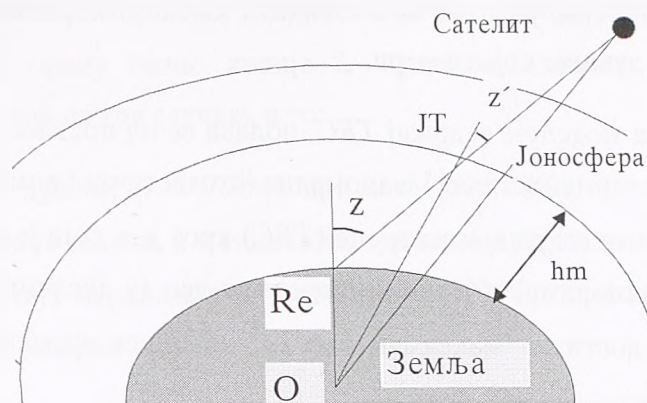
$$J_{k_f}^p = -\frac{1}{\cos z'} \frac{40.3}{f^2} TEC, \quad (4.4.2-25)$$

тј.

$$J_{k_{gr}}^p = \frac{1}{\cos z'} \frac{40.3}{f^2} TEC, \quad (4.4.2-26)$$

јер се дужина путање у јоносфери мења са променом зенитне даљине ( $z'$ ) јоносферске тачке ( $JT$ ), (слика 4.4.2-4)

$$\sin z' = \frac{R_E}{R_E + h_m} \sin z, \quad (4.4.2-27)$$



Слика 4.4.2-4: Геометрија јоносферског застоја

где је:  $R_E$  - средњи радијус Земље,  $h_m$  - средња вредност висине јоносфере, а  $z'$  и  $z$  зенитни углови у јоносферској тачки ( $J$ ) и у тачки опажања, респективно. Вредности за  $z$  се могу добити из приближних вредности координата сателита и опажача, а вредности за  $h_m$  су у границама од  $300\text{km}$  до  $400\text{km}$  (обично се узима  $350\text{km}$ ). Очигледно је, из (4.4.2-23) и (4.4.2-24), да вредност поправке зависи од вредности  $TEC$ .

Према *Kaplanu* (1995), разлика у кашњењу сигнала на крајевима базне линије изазвана утицајем јоносферске рефракције, коресподентна је дужини базне линије ( $l_{km}$ ) и износи

$$\varepsilon_{\text{Јоно},m} - \varepsilon_{\text{Јоно},k} = \frac{l_{km}}{\rho_k^p} \cdot \left( \frac{l_{km}}{\rho_k^p} - \cos z'_k \right) \cdot \frac{40.3}{f^2} \cdot TEC \quad (4.4.2-28)$$

За средњу вредност  $TEC = 50 \cdot 10^{16} \text{el/m}^2$  (типично за умерене појасе),  $\rho_k^p = 20000\text{km}$ ,  $f = 1.575 \cdot 10^9 \text{ Hz}$  и различите дужине између станица, дате су разлике јоносферске поправке на крајевима базне линије (табела 4.4.2-5).

Табела 4.4.2-5: Разлике јоносферске поправке на крајевима базне линије (cm)

$l_{km}$	Елевација сателита - $z'_k$				
	$75^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$30^\circ$	$15^\circ$
1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
20	0	0	1	1	1
40	0	1	1	1	2
80	1	2	2	3	3
100	1	2	3	3	4
200	2	4	6	7	8
500	5	10	14	17	19



На основу података у табели, јасно се може видети каква је корелисаност јоносфере у зависности од величине дужине која се мери.

У покушају да се моделује садржај  $TEC$ , полази се од претпоставке да јоносферу чини збир регуларне (детерминистичке) и аномалне (стохастичке) компоненте. Регуларна компонента описује општи садржај електрона ( $TEC$ ) кроз део који је условно стабилан - константан (у ноћним условима) и један променљиви део (у дневним условима) који, у периоду од  $8^h$  до  $20^h$ , достиже максимум око  $14^h$  локалног времена. Укупан садржај електрона ( $TEC$ ) се моделује изразом облика

$$TEC_e = TEC_e^{(0)} + TEC_e^{(1)} \cdot \cos\left[\frac{(t-14) \cdot \pi}{12}\right], \quad (4.4.2-29)$$

где је:  $t$  - локално средње време,  $TEC_e^{(0)}$  - типична концентрација електрона која варира од  $10^{16}$  до  $10^{18}$ .

*Klobuchar*-ов модел апроксимира глобални распоред јоносферске рефракције и користи се за рачунање поправке једнофреквентних опажања ( $L1$ ), тј.

$$J_{km, \varphi L1}^{p(0)} = A_1 + A_2 \cdot \cos\left[\frac{2\pi(t - A_3)}{A_4}\right], \quad (4.4.2-30)$$

где су:  $A_1 = 5ns$ ,  $A_3 = 14^h$ ,  $A_2 = \sum \alpha_i \varphi^{i-1}_M$ ,  $A_4 = \sum \beta_i \varphi^{i-1}_M$  ( $\varphi_M$  - геомагнетска ширина јоносферске тачке,  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  - параметри који се емитују као део навигационе поруке). Горњи израз компензира ефекат јоносфере код једнофреквентних опажања у износу од око 50%. При мирној јоносфери, грешка размере изазвана утицајем овог извора грешке, код једнофреквентних мерења, достиже вредност од око  $1-2 \cdot 10^{-6} l_{km}$  ( $1-2 ppm$ ).

Стохастички део јоносфере се моделује кроз промену (аномалија)  $TEC$  у јединици времена. Дисперзија (варијанса) промене  $TEC$  на једној станици се изражава, као

$$\sigma^2(TEC_e(t_j) - TEC_e(t_i)) = (t_j - t_i)^2 \cdot \sigma_0^2(TEC_e), \quad (4.4.2-31)$$

где су:  $t_i$  и  $t_j$  - епохе мерења,  $\sigma_0^2$  - варијанса од  $TEC$  за један минут опажања. Како се мерења врше на две тачке једновремено, од интереса је видети резултујућу величину, тј.

$$\sigma(TEC_e) = (s(TEC_e)_k \cdot \cos a + s(TEC_e)_m \cdot \sin a) \frac{l}{l_{max}}, \quad (4.4.2-32)$$

где су:  $s(TEC_e)$  - оцена стандардне девијације од  $TEC$  на тачкама  $k$  и  $m$ ,  $a$  - азимут базне линије, а  $l$  - дужина базне линије, при чему се узима да је за  $l > l_{max}$ ,  $l/l_{max} = 1$ . У интервалу  $0 \leq l \leq l_{max}$  корелација између укупног садржаја  $TEC$  на двама станицама се мења од 0 до 1, при чему је узето (*Rothacher i dr.*, 1993 у *Минчев*, 1996) да је  $l_{max} = 200 km$ .

Испитивања су показала (Минчев, 1996) да ефекти утицаја изазвани непознавањем вредности  $TEC$ , на оцену базне линије  $l$ , директно зависе од њене дужине. У испитивањима су издвојена три случаја, и то:

- Кратке и средње дужине ( $l < 20km$ ), при чему је  $\sigma(TEC_e) < s(TEC_e)$ . Компензација утицаја јоносфере је велика, а у типичним приликама постиже се максимална тачност оцена базних линија мерењем у интервалима од  $2^h$ , без примене додатних модела у обради резултата мерења;
- Велике дужине ( $50 < l < 200km$ ), при чему је  $s(TEC_e) \leq \sigma(TEC_e) \ll \sqrt{2}s(TEC_e)$ . У овом случају, мања је компензација утицаја јоносфере. Да би се постигла највиша тачност оцена базних линија, потребно је период мерења повећати на  $8-12^h$ , а у обради користити посебне алгоритме. Мерење са једнофреквентним уређајима је искључено. Код краћих дужина могу се користити  $L1$  и  $L2$  мерења, док код дужих је обавезна примена  $L3$  комбинација фреквенција и
- Дужине  $l > 200km$ , при чему је  $\sigma(TEC_e) = \sqrt{2}s(TEC_e)$ . У овом случају нема компензације утицаја јоносфере. Да би се постигла највиша тачност оцена базних линија потребно је изводити дневна и ноћна мерења и користити додатне алгоритме за моделовање утицаја јоносфере (на пример,  $L3$  опажање).





## 5. ГРЕШКЕ РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА ДУЖИНА БАЗНИХ ЛИНИЈА

---

У зависности од моделовања утицаја појединих извора грешака и начина решавања *неодређености* (*ambiguities*) на основу дефинисаних функционалних модела оцена базних линија, разликују се три категорије дужина, и то: **кратке, средње и велике**.

Кратким дужинама се генерално сматрају оне дужине код којих се параметри модела могу оценити, а да се при томе у функционалном моделу грешке које зависе од величине дужине могу игнорисати (*Rizos, 1999* у *IAG, 1999*). Максимална дужина у овој категорији, зависиће од утицаја тропосфере, јоносфере и тачности орбите и износи од око 10 km до 15 km.

Са повећањем дужине између пријемника, корелисаност утицаја поменутих извора грешака се смањује, а функционални модел мора бити проширен тако да одговори промењеним околностима. У противном, модел који одговара кратким дужинама неће бити адекватан и оцена параметара није сагласна могућностима методе мерења. За случај мерења средњих дужина, развијено је неколико метода којима се на различите начине решава проблем *неодређености* (*Han&Rizos, 1997b* и *Rizos, 1999* у *IAG, 1999*). Слично категорији кратких дужина, средњим дужинама се генерално сматрају оне дужине код којих у функционалном моделу не долазе до изражаја други утицаји осим моделованих (са члановима којима се уважава величина дужине), а од чега такође, значајно зависи оцена параметара *неодређености*. Распон дужина зависи од спољних услова и креће се од 10 km до 100 km (*Rizos, 1999* и *IAG 1999*). Ако дужине прелазе назначене вредности, целобројне *неодређености* се коришћењем специјалних процедура морају фиксирати (на пример, почетном иницијализацијом и сл.; *Colombo&Rizos, 1996; Han, 1997a; Blewitt, 1989; Dong&Bock, 1989; у IAG 1999*).

По аналогiji са претходним критеријумима, великим дужинама би се, начелно, могле сматрати дужине веће од 100 km.

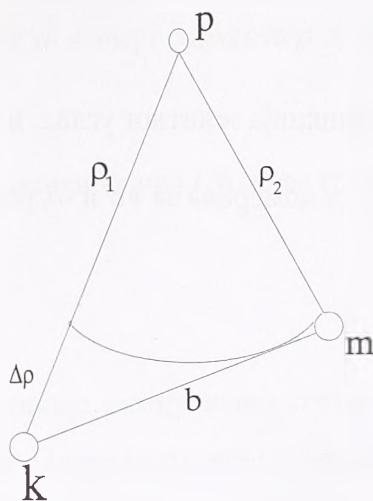
### 5.1. ИЗВОРИ ГРЕШАКА

Примена *GPS* технологије у геодезији, у највећој мери се своди на коришћење релативног метода мерења. Основна врста опажања која се том приликом користи јесте опажање *једносруке фазне разлике* (*SDO*). Оно представља разлику две фазе носећих таласа (*one-way phases*) регистрованих у пријемницима на две различите

станице  $k$  и  $m$ . Поједностављено речено,  $SDO$  је разлика дужина између сателита  $p$  и два  $GPS$  пријемника  $k$  и  $m$ , лоцираних на две станице у тренутку  $t$  (слика 5.1-1). У анализи утицаја појединих извора грешака подразумеваће се да су *неодређености* успешно решене и да су добијене разлике псеудодужина ослобођене утицаја часовника, ефеката одбијања сигнала и утицаја медија простирања.

Анализом су обухваћени следећи извори грешака  $GPS$  резултата мерења, и то:

- грешка релативног утицаја тропосфере -  $\delta_{Tr}$ ,
- грешка апсолутног утицаја тропосфере -  $\delta_{Ta}$ ,
- грешка јоносферског утицаја -  $\delta_J$ ,
- грешка гравитационе константе -  $\delta GM$ ,
- грешка висине фиксне тачке -  $\delta_h$ ,
- грешка хоризонталног положаја фиксне тачке -  $\delta_o$ ,
- грешка радијалне компоненте положаја сателита -  $\delta r_{rad}$ ,
- грешка аксијалне компоненте положаја сателита -  $\delta r_a$ ,
- грешка фазе изазвана деградацијом сигнала (*Selective Availability - SA*) -  $\delta\phi_{SA}$ ,
- грешка часовника у пријемнику -  $\delta t_k$ ,
- грешка часовника у сателиту -  $\delta t^p$ ,
- грешка мерења разлике фаза -  $\delta_\phi$ ,
- грешка одређивања брзине светлости у вакууму -  $\delta_{c_0}$ ,
- грешка одређивања брзине светлости у ваздуху -  $\delta_c$ ,
- грешка фреквенције -  $\delta_f$ ,
- грешка рефлексије сигнала -  $\delta_{ref}$ ,
- грешка центрисања антена -  $\delta_{ca}$ ,
- грешка одређивања адиционе константе антена -  $\delta_a$ ,
- грешка услед недовољне јачине сигнала -  $\delta_{ms}$ ,
- грешка услед недовољног напона батерија -  $\delta_{nv}$ ,
- грешка несавршености конструкције инструмента и сателита -  $\delta_{ms}$ ,
- грешка изазвана утицајем реалитивистичких ефеката -  $\delta_{rel}$ .



Слика 5.1-1: Једнострука фазна разлика

У намери да се утврди утицај грешке мерења дужине до сателита на дужину између тачака  $k$  и  $m$  (базна линија) увешће се следеће претпоставке<sup>1</sup>:

- 1) За свако опажање  $\Delta\rho$  ка сателиту  $p$  који се налази под зенитним углом  $z$  и азимутом  $a$  постоји опажање  $\Delta\rho^*$  ка сателиту  $q$  који се налази под истим зенитним углом и азимутом  $(a+180^\circ)$ ;  $p$  и  $q$  могу а не морају бити идентични (приближно је,  $\Delta\rho^* = -\Delta\rho$ ).
- 2) Пријемници  $k$  и  $m$  леже у хоризонталној равни или је висинска разлика између два пријемника сразмерно мала у односу на међусобну дужину.
- 3) Дужина базне линије  $l = |\bar{b}|$  је мала у поређењу са  $\rho_i$ , тј.  $l \ll \rho_i$ , за  $i = 1, 2$ .

Нека су  $\tilde{\Delta\rho}$  и  $\tilde{\Delta\rho}^*$  померене (оптерећене систематским утицајем) вредности опажања  $\Delta\rho$  и  $\Delta\rho^*$ . У анализи ефеката утицаја појединих извора грешака на оцене базних линија, издвајају се два случаја (Beutler *et al.* 1987b), и то:

- **први**: опажања  $\Delta\rho$  и  $\Delta\rho^*$  су загађена за исту вредност  $\delta$ , тј.

$$\tilde{\Delta\rho} = \Delta\rho + \delta(z, a)$$

<sup>1</sup> Прва претпоставка (униформан распоред сателита око вертикалне осе фиксне станице) представља основу извођења аналитичких израза од 5.1-1 до 5.2.7. У реалним условима ипак распоред сателита није могуће у потпуности остварити. Нека испитивања са симулираним и реалним мерењима су показала (Beutler *et al.*, 1987) да су аналитички изрази добра основа за прелиминарну анализу тачности мерења, чак и када распоред сателита није потпуно симетричан.

Комплексна анализа тачности утицаја појединих извора грешака се базирала на једноструким фазним разликама. Међутим, у обради резултата GPS мерења користе се двоструке фазне разлике (DDO). У принципу је било могуће извести анализу грешака и за ову врсту опажања, али је процедура јако компликована и по мишљењу многих аутора (Beutler *et al.* 1987) резултати би били потпуно идентични.



$$\Delta\tilde{\rho}^* = \Delta\rho^* + \delta(z, a+180^0), \tag{5.1-1}$$

где је:  $\delta(z, a+180^0) = \delta(z, a)$  функција зенитног угла  $z$  и азимута  $a$ ,

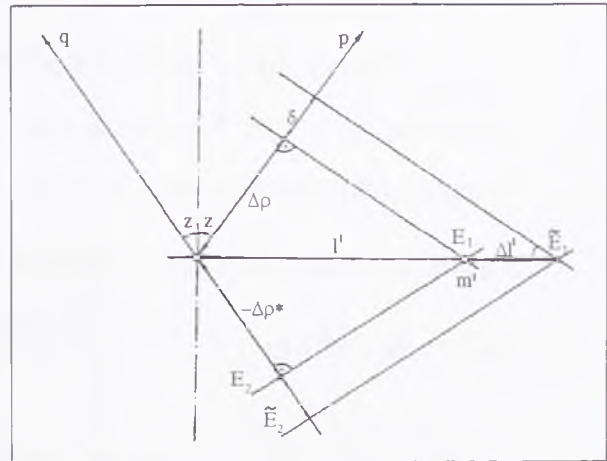
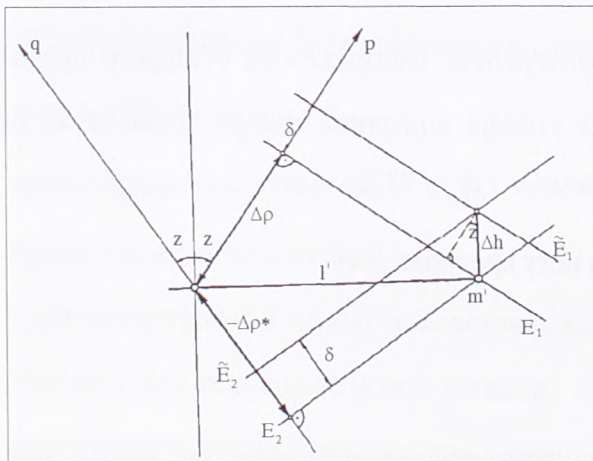
- други: опажања  $\Delta\tilde{\rho}$  и  $\Delta\tilde{\rho}^*$  су померена за  $+\delta$  и  $-\delta$ , респективно,

$$\Delta\tilde{\rho} = \Delta\rho + \delta(z, a)$$

$$\Delta\tilde{\rho}^* = \Delta\rho^* + \delta(z, a+180^0) \tag{5.1-2}$$

где је:  $\delta(z, a+180^0) = -\delta(z, a)$ .

Може се доказати да се ефекти немоделованих извора грешака првог случаја одражавају на оцену параметара висине (пријемника  $m$  у односу на  $k$ ), а другог случаја, на оцену дужине базне линије. Да би напред изнето илустровали, послужићемо се једноставним геометријским методом. Опажање  $\Delta\rho$  говори да  $m$  мора лежати у равни  $E_1$  која је управна на дуж  $k-p$  и на растојању  $\Delta\rho$  од  $k$  (3. претпоставка). Аналогно се може закључити да  $m$  мора лежати у равни  $E_2$  управној на  $k-q$ , на растојању  $\Delta\rho^*$  од  $k$  ( $E_1$  и  $E_2$  морају лежати са различитих страна у односу на  $k$ ). Очигледно, тачка  $m$  лежи на линији пресека две равни. Како су опажања загађена, уведе се равни  $\tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}_2$  паралелне са  $E_1$  и  $E_2$  на растојању  $\pm\delta$  од  $E_1$  и  $E_2$ , а ефекти утицаја се могу оценити из упоређења положаја линије пресека  $\tilde{E}_1$  и  $\tilde{E}_2$  са положајем линије пресека равни  $E_1$  и  $E_2$ . На сликама (5.1-2) и (5.1-3) приказани су утицаји загађења првог и другог случаја.



Слика 5.1-2: Утицај грешака прве групе (Beutler i dr., 1987)

Слика 5.1-3: Утицај грешака друге групе (Beutler i dr., 1987)

Обе слике су дефинисане у равни  $kpq$ . То значи да се може видети само нормална пројекција  $m'$  од  $m$  на ту равн. Пројекција базне линије на равн  $kpq$  ће

имати дужину  $l \cdot \cos(a-a_0)$ , где је:  $a$ - азимут сателита  $p$ , а  $a_0$ - азимут базне линије у  $k$ ,  $l$ - дужина базне линије  $|\bar{b}|$ .

Слика (5.1-2) показује да систематски утицај ( $\delta$ ) прве групе грешака изазива грешку у оцени висине, тј.

$$\Delta h(a, z) = \frac{\delta(a, z)}{\cos z}, \quad (5.1-3)$$

док друге компоненте базне линије остају непомерене. Израз (5.1-3) карактерише утицај пара  $\Delta\rho$  и  $\Delta\rho'$  опажања. Подразумевајући хомоген распоред сателита, ефекат утицаја грешака свих опажања рачуна се као средња вредност свих  $\Delta h(a, z)$ , као

$$\Delta h = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{z_{\max}} \Delta h(a', z') \cdot \sin z' \cdot dz' \cdot da'}{\pi(1 - \cos z_{\max})}. \quad (5.1-4)$$

Слика (5.1-3) показује да систематски утицај друге групе грешака изазива грешку у оцени дужине базне линије, тј.

$$\Delta l(a, z) = \frac{\delta(a, z)}{\sin z \cdot \cos \Delta a}, \quad (5.1-5)$$

где је:  $\Delta a = a - a_0$ ,  $a$  - азимут сателита (из  $k$ ),  $a_0$  - азимут базне линије (из  $k$ ). Као и у претходном случају, да би се изразио ефекат систематских утицаја свих опажањских парова на грешку дужине, узеће се средина из свих  $\Delta l$ , као

$$\Delta l = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{z_{\max}} \Delta l(a', z') \cdot \sin z' \cdot dz' \cdot da'}{\pi(1 - \cos z_{\max})}. \quad (5.1-6)$$

У поступку анализе појединих извора грешака, свака грешка је распоређена у складу са извором настајања и законитости појаве. Анализа показује да са променом појединих услова при мерењу, неки извори систематских утицаја могу прећи у изворе случајних и обрнуто, што има за последицу промену параметара распореда појединих елементарних грешака. Што се тиче извора случајних грешака, опште је познато да су ефекти њихових утицаја пре почетка мерења мање познати, док се ефекти систематских утицаја могу моделовати. С обзиром да се знају законитости понашања систематских грешака, постоји могућност да се утицај истих учини безначајним или значајно редукује, али да остаје један део који се не може у потпуности моделовати (*bias*). Код подела грешака по законитости њихове појаве, примењен је познати критеријум, по којем се случајним сматрају оне грешке чије је очекивање нула, а систематским оне грешке чије је очекивање различито од нуле (*Перовић, 1989*). С обзиром на природу утицаја појединих грешака као и на начин на који се њихов утицај може учинити безначајним, грешке су даље подељене на две групе: *прва* - где спадају

грешке које директно утичу на тачност резултата мерења и *друџа* - у коју спадају грешке чији се утицај, на неки начин, може учинити безначајним. У оквиру друге групе грешака, свака грешка је према начину на који се може учинити безначајном, сврстана у једну од четири подгрупе (грешке које се отклањају методама рада, условима при мерењу, условима тачности или поправкама).

Поред поменутих категорија поделе извора грешака на оцену *GPS* резултата мерења, у последње време, врше се посебна истраживања на утврђивању тзв. *site specific errors*, тј. испитивању укупног утицаја свих елемената простора (извора грешака) у окружењу тачке на којој се *GPS* пријемник налази. Према извештају *Специјалне радне групе 1.158 (Johansson, 1999 и IAG, 1999)*, извори грешака који спадају у категорију ефеката специфичних за тачку на којој се врше *GPS* опажања, деле се у три групе.

Прву групу чине проблеми везани за пријемник, антену, заштитник антене (*radome*) и емитујући сигнал. Утицаји ових извора грешака су константни док су услови идентични. Са променом констелације сателита, угла елевације и сл. ефекти утицаја ће се променити. Ефекти утицаја ове групе грешака се највише испољавају на оцену вертикалне компоненте вектора базне линије. Посебну улогу у овој групи грешака има утицај водене паре на простирање сигнала, па је у последње време на овом плану ангажовано више стотина стручњака из области *GPS*, у преко 12 земаља (*IAG, 1999*).

Другу групу репрезентују они извори чији ефекти варирају, али немају неки значајнији периодични утицај на мерења. Кондензација, рефлексација сигнала, поље атмосферског притиска и атмосферски градијенти су типични представници ове групе. Недостатак података о пољу притиска може изазвати појаву различитих ефеката. Услед овог фактора, вертикални положај пријемника може варирати око *1 cm*. Уколико је атмосфера добро испитана, овај извор грешака се може успешно моделовати, иако га често није могуће у потпуности разликовати од других извора као што су угао елевације, рефлексација и сл. Тренутно, врше се интензивна истраживања у правцу моделовања овог утицаја, у чему значајну улогу играју мерења на *IGS* перманентним станицама (*IAG, 1999*).

Трећу групу чине они извори који изазивају ефекте померања тачке у дужем временском периоду. Ту спадају: локација тачке, врста терена и начин стабилизације тачака. Ова група грешака је најмање описана. Њихов утицај на стабилност референтног оквира (регионалног или локалног) или реализацију геодинамичких пројеката може бити врло значајан. С тим у вези, велику пажњу треба поклонити испитивању померања стубова. Неки аутори (*Johnson i dr., 1995 и 1996*) сматрају да су померања случајне природе, док има и оних (*Mao i dr., 1999; Davis i dr. 1996* у *IAG*



1999) који тврде супротно. За идеално постављену *GPS* тачку се сматра она тачка чије померање зависи само од тектонских кретања. Међутим, познато је да локација, врста и геолошки састав земљишта и вегетација, могу имати извештан утицај на дугорочну стабилност тачке. Да би се открио периодични карактер утицаја ове групе извора грешака, неопходна су дуготрајна испитивања. У анализи ове групе утицаја посебна пажња се посвећује стабилизацији тачака. При томе, код захтева високе тачности, треба обавезно предвидети постављање помоћних стубова и дубинско финансирање и обезбеђивање центара стуба као и његову термичку изолацију. Ово последње је важно, јер је позната корелација између померања стуба и утицаја спољних температурних услова.

## 5.2. КАРАКТЕРИСТИКЕ ПОЈЕДИНИХ ИЗВОРА ГРЕШАКА

### 5.2.1. Грешке изазване утицајем тропосфере

Грешка релативног утицаја тропосфере

За разлику од *GPS* мерења у великим мрежама где се инсистира на мерењу атмосферских параметара (температура, притисак и влажност) и њиховом укључивању у неки од тропосферских модела (*Saastamoinen, Hopfield i dr.*), код мрежа мањих димензија ( $l < 15km$ ) због ограничене тачности стандардних уређаја за мерење параметара и због ефеката локалних микроклиматских услова, најчешће се параметри не региструју или се бар не региструју на свим тачкама (*Gurtner i dr. 1987* у *Beutler i dr. 1987b*). Да би оценили утицај релативних грешака тропосфере на тачност резултата мерења, користиће се упрошћен израз *Saastamoinen*-ове формуле за рачунање поправке за утицај тропосферске рефракције (*Bauersima, 1983* и *Beutler i dr. 1987b*), облика

$$T_k^p(z) = \frac{T_k^p(0)}{\cos z}, \quad (5.2.1-1)$$

где је:  $T_k^p(z)$  - поправка за тропосферску рефракцију у правцу зенитног угла  $z$ , а  $T_k^p(0)$ - поправка за тропосферску рефракцију при  $z = 0$ , облика

$$T_k^p(0) = 2.277 \cdot \left[ p + \left( \frac{1255}{273 + T} + 0.05 \right) \cdot e \right], \quad (5.2.1-2)$$

где је:  $T_k^p(0)$  - поправка у  $mm$ ,  $p$  - притисак у  $mbar$ ,  $T$  - температура у  $^{\circ}C$  и  $e$  - притисак водене паре у  $mbar$ , дат као

$$e = \frac{H}{100} \cdot \exp(-37.2465 + 0.213166 \cdot (T + 273) - 0.000256908 \cdot (T + 273)^2), \quad (5.2.1-3)$$

где је:  $H$  - влажност у %.

Парцијалним диференцирањем израза (5.2.1-2) по  $T$ ,  $p$  и  $H$  и при различитим вредностима  $T$ ,  $p$  и  $H$  добијају се (након дељења са  $\cos z$ , - 5.2.1-1) вредности систематских утицаја појединих извора грешака на резултате мерења  $\Delta\rho$  или  $\Delta\rho^*$ , ако је (на једној станици) грешка мерења температуре  $1^{\circ}\text{C}$  или грешка мерења притиска  $1\text{mbar}$  или грешка мерења влажности  $1\%$  (Табела 5.2.1-1).

Табела 5.2.1-1: Вредности  $T_k^p(0)$  за  $\delta T=1^{\circ}\text{C}$ ,  $\delta P=1\text{mbar}$  и  $\delta H=1\%$ .

$T$ $^{\circ}\text{C}$	$P$ mbar	$H$ %	$(\delta T/\delta T)$ $\text{mm}/^{\circ}\text{C}$	$(\delta T/\delta P)$ $\text{mm}/\text{mbar}$	$(\delta T/\delta H)$ $\text{mm}/(1\%)$
0	1000	100	5	2	0.6
30	1000	100	27	2	4.0
0	1000	50	3	2	0.6
30	1000	50	14	2	4.0

Очигледно је да висока температура и висока влажност имају директног утицаја на тачност резултата мерења. Претпоставимо да је систематска грешка оцене тропосферске рефракције  $T_k^p(0)$  на станици  $k$  једнака  $\delta_{Tr}$ , релативно у односу на тачку  $m$ . Ако је грешка мерења температуре  $\delta T = 1^{\circ}\text{C}$  и ако нема других извора грешака  $\delta_{Tr} = 27\text{mm}$  (за  $T = 30^{\circ}$ ,  $p = 1000\text{mbar}$  и  $H = 100\%$  на  $k$ ). Уколико у току мерења  $\Delta\rho$  и  $\Delta\rho^*$  нема промена метеоролошких услова, оба резултата мерења су померена за исту вредност систематске грешке  $\delta_{Tr}$ . Може се закључити да грешке настале као резултат релативног утицаја тропосфере спадају у прву групу грешака и утичу на тачност оцене параметра висине. Тако, полазећи од (5.2.1-1) и узимајући у обзир све опажачке парове (5.1-4) добија се коначан израз за утицај  $\delta_{Tr}$  на тачност висинске разлике, тј.

$$\Delta h = \frac{1}{\cos z_{\max}} \cdot \delta_{Tr} \quad (5.2.1-4)$$

Из израза (5.2.1-4) за  $z_{\max} = 70^{\circ}$  и  $\delta T = 1^{\circ}\text{C}$  следи да је  $\delta_{Tr} = 27\text{mm}$  и  $\Delta h = 80\text{mm}$ . За различите вредности зенитног угла сателита, у Табели 5.2.1-2 су приказани ефекти утицаја грешке једнаке  $\delta_{Tr} = 27\text{mm}$  на оцену вектора базне линије.

Табела 5.2.1-2: Вредности  $\Delta h$  за различите вредности  $z_{\max}$  и за  $\delta_{Tr} = 27\text{mm}$

Зенитни угао $z_{\max}$ ( $^{\circ}$ )	75	80	85
$\Delta h$ (mm)	104	155	310

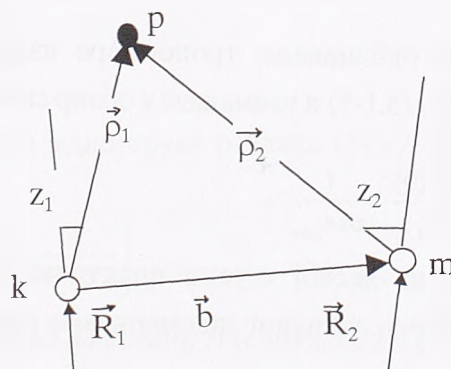
Грешке у оцени висинске разлике могу изазвати грешку размере, у зависности од нагнутости базне линије  $\vec{b}$ . Ова чињеница посебно долази до изражаја, уколико се одбаца друга претпоставка.

Релативни утицај тропосфере не зависи од дужине базне линије, тј. што је већа дужина, то је утицај овог извора мањи (константна систематска грешка - на пример, 1 mm јесте 1 ppm за дужину од 1 km, али за дужину од 10 km, 1mm изазива грешку од 0.1 ppm). Зато, у мрежи средњих и великих дужина (преко 50 km) да би се утицај ове грешке учинио безначајним, довољно је мерити параметре атмосфере и применити неки од стандардних модела. Код оваквих мрежа, радиометри водене паре дају веома добре резултате, док је код мрежа малих димензија, ефекат њихове примене веома мали.

Грешка је систематског карактера и изазвана је утицајем спољашње средине. Спада у другу групу грешака - трећу и четврту подгрупу.

#### Грешка апсолутног утицаја тропосфере

Претпоставимо да су атмосферски услови идентични на обе тачке базне линије. Посматрано генерално, пријемници на крајевима базне линије не “виде” сателит под истим зенитним углом (слика 5.2.1-1).



Слика 5.2.1-1: Геометрија утицаја тропосферске рефракције (Beutler i dr., 1987)

Под претпоставком једнаких метео услова на оба краја, игнорисање тропосфере ће изазвати систематски утицај на резултат мерења у износу од

$$\delta_{Ta}(a, z) = T_k^p(0) \cdot \left\{ \frac{1}{\cos z_1} - \frac{1}{\cos z_2} \right\}. \quad (5.2.1-5)$$

Са слике (5.2.1-1) се може видети да је

$$\vec{\rho}_i \cdot \vec{R}_i = \rho_i \cdot R_i \cdot \cos z_i, \quad i = 1, 2.$$

па заменом у (5.2.2-5, део у загради) добија се

$$\frac{1}{\cos z_1} - \frac{1}{\cos z_2} = \frac{\rho_1 \cdot R_1}{\vec{\rho}_1 \cdot \vec{R}_1} - \frac{\rho_2 \cdot R_2}{\vec{\rho}_2 \cdot \vec{R}_2} \quad (5.2.1-6)$$



Из задњег израза се могу елиминисати  $\bar{\rho}_2, \bar{R}_2$ , јер важи

$$\rho_2^2 = (\bar{\rho}_1 - \bar{b})^2 \approx \rho_1^2 - 2\bar{\rho}_1 \cdot \bar{b},$$

или

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \left[ 1 - \frac{\bar{\rho}_1 \cdot \bar{b}}{\rho_1^2} \right], \quad (5.2.1-7)$$

и

$$\bar{\rho}_2 \cdot \bar{R}_2 = (\bar{\rho}_1 - \bar{b}) \cdot (\bar{R}_1 + \bar{b}) \approx \bar{\rho}_1 \cdot \bar{R}_1 + \bar{\rho}_1 \cdot \bar{b}, \quad (5.2.1-8)$$

јер је  $\bar{b}^2 \approx 0, R_2 \approx R_1$ , пошто је  $R_1 \cdot \bar{b} = 0$  (због друге претпоставке).

Заменом (5.2.1-7) и (5.2.1-8) у (5.2.1-6) као и рачунањем скаларног производа у азимутно-зенитном систему тачке  $k$ , тако добијеног израза који када уврстимо у (5.2.1-5) даје коначан израз за систематски утицај садржан у опажању  $\Delta\rho$ , као

$$\delta_{Ta}(a, z) = T(0)_k^p \cdot \tan z_1 \cdot \cos(a - a_0) \cdot l \cdot \left\{ \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{R_1 \cdot \cos z_1} \right\}. \quad (5.2.1-9)$$

За опажање  $\Delta\rho^*$  (исти зенитни угао,  $a = a + 180^\circ$  и иста топоцентрична дужина као  $\Delta\rho$ ) из (5.2.1-9) се може закључити да је

$$\delta(a + 180^\circ, z) = -\delta(a, z), \quad (5.2.1-10)$$

из чега следи да потпуно одбацивање тропосфере изазива грешку другог случаја (размер). Заменом (5.2.1-9) у (5.1-5) и узимањем у обзир свих опажања, добија се да је

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{T_k^p(0)}{\rho} \cdot \frac{|l \cdot n \cdot \cos z_{\max}|}{1 - \cos z_{\max}} + \frac{T_k^p(0)}{R_1} \cdot \frac{1}{\cos z_{\max}}, \quad (5.2.1-11)$$

па, пошто се део израза на десној страни практично може занемарити, коначан апроксимативни израз за случај потпуног занемаривања атмосфере, изгледа

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{T_k^p(0)}{R_1} \cdot \frac{1}{\cos z_{\max}}. \quad (5.2.1-12)$$

Из (5.2.1-12) следи да уколико се занемари утицај тропосфере,  $GPS$  оцењене дужине ће бити веће. Како је укупан износ утицаја тропосфере  $\sim 2.25\text{m}$ , за  $z_{\max} = 70^\circ$  и  $l/\cos z_{\max} = 2.9$ , може се очекивати да ће максимална грешка размере изазвана комплетним занемаривањем тропосферске рефракције износити око  $1\text{ppm}$  (Табела 5.2.1-3).

Табела 5.2.1-3: Вредности  $\Delta l/l$  за различите вредности  $z_{\max}$

Зенитни угао $z_{\max}$ ( $^\circ$ )	70	75	80	85
$\Delta l/l$ (mm/km)	1	1.4	2.0	4.0

Из напред реченог следи да је веома важно применити неки од модела тропосфере (*Saastamoinen, Hopfield i dr.*) и уколико се мере атмосферски параметри, немоделовани утицаји нису већи од 5 см, што значи, да је у том случају укупан утицај овог извора грешака мањи од 0.02 ppm. У пракси, озбиљне проблеме задају грешке недовољног познавања влажне компоненте (оне представљају око 10% укупне грешке, *Beutler i dr. 1987b*) али је њихов утицај (апсолутни) сведен на свега 0.1 ppm (уколико се примењује неки од постојећих модела), тако да је релативни утицај тропосфере од знатно веће важности на тачност добијених резултата мерења од апсолутног утицаја.

Грешка је систематског карактера и изазвана је утицајем спољашње средине. Спада у другу групу грешака - трећу и четврту подгрупу.

### 5.2.2. Грешка јоносферског утицаја

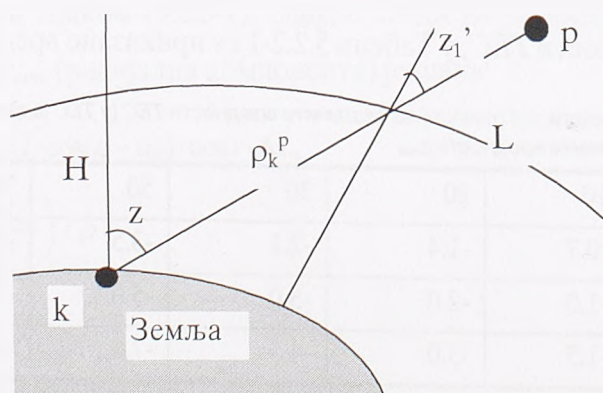
Јоносферска рефракција се најједноставније моделује применом тзв. једноструког омотача (*single layer* модел). Код овог модела се претпоставља да су сви слободни електрони концентрисани у сферном бесконачно танком омотачу на висини  $H$  изнад земљине површи (слика 5.2.2-1). Уз претпоставку да је густина електрона по  $m^2$  ( $TEC$ ) равномерна, поправка за утицај јоносферске рефракције (додаје се опажању извршеном на једној станици да би се добила геометријска дужина) се рачуна као

$$J_k^p = \frac{41}{f^2} \cdot TEC \cdot \frac{1}{\cos z'} \quad (5.2.2-1)$$

Систематска грешка једноструке разлике ( $SDO$ ) изазвана неузимањем у обзир јоносфере износи

$$\delta_J(z, a) = -\frac{41}{f^2} \cdot TEC \cdot \left[ \frac{1}{\cos z'_1} - \frac{1}{\cos z'_2} \right], \quad (5.2.2-2)$$

где су:  $z'_1$  и  $z'_2$  зенитни углови на висини  $H$  (слика 5.2.2-1).



Слика 5.2.2-1: Једноструки јоносферски омотач

Изражавањем зенитног угла  $z'$  у функцији угла  $z$ , и након одређених апроксимација и замена (Beutler *i dr.* 1987) добија се коначан израз за утицај јоносферске рефракције на резултат опажања једноструке разлике, тј.

$$\delta_j(z, a) = -\frac{41}{f^2} \cdot TEC \cdot \left( \tan z_1 - \frac{H}{R} \cdot \tan z_1^3 \right) \cdot \cos(a - a_0) \cdot l \cdot \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{R_1 \cdot \cos z_1} \right). \quad (5.2.2-3)$$

Уз услов да је  $250\text{km} \leq H \leq 400\text{km}$ , при чему је  $H/R=0.05$ , у претходној формули се може други израз у првој загради одбацити, тако да се коначно добије

$$\delta_j(z, a) = -\frac{41}{f^2} \cdot TEC \cdot \tan z_1 \cdot \cos(a - a_0) \cdot l \cdot \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{R_1 \cdot \cos z_1} \right). \quad (5.2.2-4)$$

Очигледно је да су ефекти занемаривања јоносфере слични ефектима занемаривања тропосфере. Такође (опажањем само једне фреквенције) није могуће одвојити та два ефекта. Ефекат утицаја јоносфере спада у другу групу, која изазива промену размере и износи (по аналогији са 5.2.1.2-8)

$$\frac{\Delta l}{l} = -41 \cdot \frac{TEC}{f^2} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{\cos z_{\max}}. \quad (5.2.2-5)$$

Заменом вредности фреквенције носећег таласа ( $f_{L1} = 1.57542 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ ) у задњи израз и за  $z_{\max} = 70^\circ$  добија се вредност релативног утицаја јоносфере (*scale factor*) у  $\text{mm/km}$  (ppm), као

$$\frac{\Delta l}{l} = -0.7 \cdot 10^{-17} \cdot TEC, \quad (5.2.2-6)$$

из чега се види да су дужине, неузимањем у обзир јоносфере, краће. Како вредност  $TEC$  варира од  $0.5 \cdot 10^{17} \text{ el/m}^2$  (ноћу) до око  $5 \cdot 10^{17} \text{ el/m}^2$  (два часа после локалног поднева на географским ширинама  $\pm 20^\circ$ ), грешка у опажању ( $SDO$ ) изазвана не узимањем у обзир утицаја јоносфере варира од  $\Delta l/l \approx 0.35\text{ppm}$  до  $\Delta l/l \approx 3.5\text{ppm}$ , за  $L1$  фреквенцију. За различите вредности  $TEC$ , у Табели 5.2.2-1 су приказане вредности  $\Delta l/l$  у  $\text{mm/km}$ .

Табела 5.2.2-1: Вредности  $\Delta l/l$  ( $\text{mm/km}$ ) за различите вредности  $TEC$  (у  $TEC$  јединицама;  $1TEC = 1 \cdot 10^{16} \text{ el/m}^2$ ) и различите вредности  $z_{\max}$

$TEC$	10	20	30	50	70	100
$z_{\max} = 70^\circ$	-0.7	-1.4	-2.1	-3.5	-4.9	-7.0
$z_{\max} = 75^\circ$	-1.0	-2.0	-3.0	-5.0	-7.0	-10.0
$z_{\max} = 80^\circ$	-1.5	-3.0	-4.5	-7.5	-10.5	-14.9

Грешка утицаја јоносфере се може редуковати:

- применом двофреквентних пријемника,



- коришћењем најмање једног двофреквентног пријемника за добијање параметара локалног модела јоносфере (уколико се ради са једнофреквентним уређајима - *Georgiadou i Kleusberg, 1987*) и
- коришћењем резултата мерења на локалним перманентним *GPS* станицама или, у току обраде *GPS* мерења користити параметре јоносферског модела који се смитују у оквиру навигационе поруке.

Грешка је систематског карактера и изазвана је утицајем спољашње средине. Спада у другу групу грешака - трећу и четврту подгрупу.

### 5.2.3. Грешка гравитационе константе

Познато је да је код дефинисања геодетског датума *WGS72*, вредност гравитационе константе износила  $GM_{72} = 398.6008 \cdot 10^{12}$ , а да је преласком на *WGS84* иста добила нову вредност у износу  $GM_{84} = 398.60044 \cdot 10^{12}$ , па судећи по њиховим номиналним износивама, њихова разлика износи 1ppm. Међутим, на срећу ова разлика није битно утицала на грешку мерења. Полазећи од трећег Кеплеровог закона ( $n^2 \cdot a^3 = GM$ , где је:  $a$  - вредност велике полуосе орбите сателита у метрима, а  $n$  - средње кретање сателита у rad/s), добија се израз који показује зависност промене велике полуосе орбите од промене вредности гравитационе константе Земље, тј.

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta GM}{GM} \quad (5.2.3-1)$$

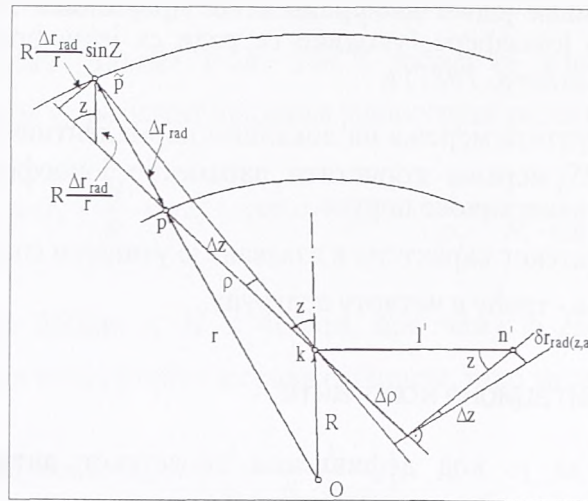
Пошто су *GPS* орбите, скоро кружног облика, промене велике полуосе су пропорционалне променама радијуса  $r$  круга (орбите), па се може написати да је

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta GM}{GM} \quad (5.2.3-2)$$

што значи да промена вредности  $GM$  од 1ppm изазива промену геоцентричне дужине сателита од око 0.33ppm. Утицај промене вредности константе  $GM$  на размер мреже се може илустровати сликом (5.2.3-1), одакле следи да је вредност грешке изазване променом радијуса  $\Delta r_{rad}$  (радијална компонента) једнака

$$\delta r_{rad}(z, a) = l \cdot \cos z \cdot \Delta z = l \cdot \cos(a - a_0) \cdot \cos z \cdot \Delta z \quad (5.2.3-3)$$

где је:  $\Delta z = \sin z \cdot \left( R \cdot \frac{\Delta r_{rad}}{r} \right) / \rho$ .



Слика 5.2.3-1: Утицај грешке радијалне компоненте на (Beutler i dr., 1987)

Заменом (5.2.3-3) у (5.2-5) и узимајући у обзир све парове мерења на станици добија се утицај грешке свих парова мерења на грешку размере, тј.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 z_{\max}}{1 - \cos z_{\max}} \cdot \frac{\Delta r_{\text{rad}}}{r} \quad (5.2.3-4)$$

па, уз претпоставку да је  $\rho \approx 22000\text{km}$ ,  $R = 6378\text{km}$  и  $z_{\max} = 70^\circ$ , добија се израз којим се изражава утицај грешке радијуса сателита (може се третирати и као радијална компонента грешке ефемериде) на тачност оцене дужине базне линије, као

$$\frac{\Delta l}{l} = 0.20 \cdot \frac{\Delta r_{\text{rad}}}{r} \quad (5.2.3-5)$$

Заменом (5.2.3-2) у (5.2.3-4) и (5.2.3-5) добијају се коначни изрази за утицај промене вредности  $GM$  на грешку оцене дужине базне линије, као

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{6} \cdot \frac{R}{\rho} \cdot \frac{\sin^2 z_{\max}}{1 - \cos z_{\max}} \cdot \frac{\delta GM}{GM}, \quad (5.2.3-6)$$

или

$$\frac{\Delta l}{l} = 0.07 \cdot \frac{\delta GM}{GM}, \quad (5.2.3-7)$$

што је, практично, занемарљива вредност (око 1/10 укупне промене  $GM$ ). Узимајући у обзир оцену грешке  $\delta GM_{84}$ , њен утицај на релативну грешку базне линије је мањи од 0.01ppm (Beutler i dr., 1987b).

Грешка оцене дужине базне линије изазвана непознавањем тачне вредности гравитационе константе је систематског карактера и изазвана је утицајем спољашње средине. Грешка спада у другу групу грешака - трећу подгрупу.

#### 5.2.4. Грешка висине фиксне тачке

Код релативног *GPS* позиционирања, обично се једна тачка фиксира као дата. Утицај ове грешке, посебно долази до изражаја, уколико су геоцентричне координате фиксне тачке одређене из кодних *GPS* мерења (*single point positioning*). Према слици (5.2.4-1), вредност грешке *SDO* опажања изазвана утицајем грешке непознавања висине фиксне тачке  $\delta_h$ , је дата изразом

$$\delta_h(z, a) = l' \cdot \cos z \cdot \Delta z, \quad (5.2.4-1)$$

а,

$$\Delta z = \frac{\Delta h \cdot \sin z}{\rho},$$

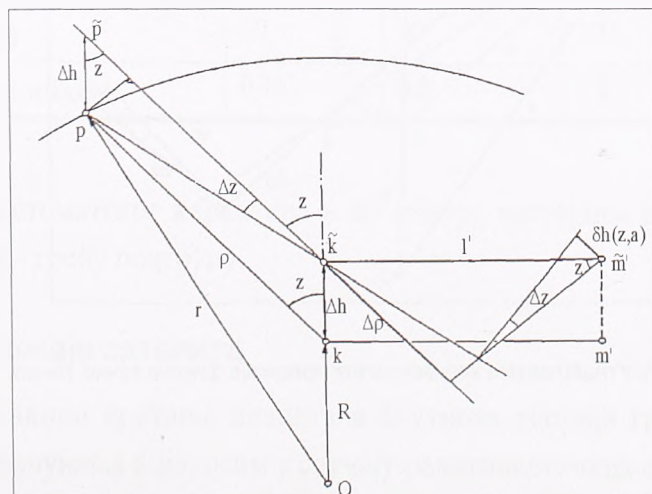
из чега се може закључити да је утицај ове грешке веома сличан утицају грешке одређивања константе *GM*, тј. припада групи грешака које утичу на тачност размере. Заменом горњег израза у (5.1.5) и узимајући у обзир све парове мерења (5.1-6), добија се ефекат утицаја свих опажања (загађених грешком непознавања тачне вредности висине фиксне тачке) као,

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta h}{\rho} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 z_{\max}}{1 - \cos z_{\max}} = \frac{\Delta h}{R} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 z_{\max}}{1 - \cos z_{\max}}, \quad (5.2.4-2)$$

па, уз раније усвојене вредности  $\rho \approx 22000\text{km}$ ,  $R = 6378\text{km}$  и  $z_{\max} = 70^\circ$ , добија се коначан израз за утицај грешке непознавања висине  $\Delta h$  на грешку оцене дужине базне линије, као

$$\frac{\Delta l}{l} = 0.20 \cdot \frac{\Delta h}{R}. \quad (5.2.4-2)$$

Из горњег израза следи; да за  $\Delta h = 6\text{m}$ , релативна грешка дужине износи 0.20 ppm.



Слика 5.2.4-1: Утицај грешке висине фиксне тачке (Beutler i dr., 1987)



Табела 5.2.4-1: Ефекти утицаја грешке висине фиксне тачке на оцену дужине базне линије

$\Delta h$ (m)	6	30	60	100
$\Delta l/l$ (mm/km)	0.2	0.9	1.9	3.1

Грешка дужине изазвана грешком непознавања тачне вредности висине фиксне тачке је систематског карактера, а према извору настајања грешка је сложена. Спада у другу групу грешака - трећу подгрупу.

### 5.2.5. Грешка хоризонталног положаја фиксне тачке

Нека је станица  $k$  изабрана као фиксна и нека је њен положај погрешан за неку вредност  $\Delta O$ , тј.

$$\bar{R} = \bar{R} + \Delta \bar{O}, \tag{5.2.5-1}$$

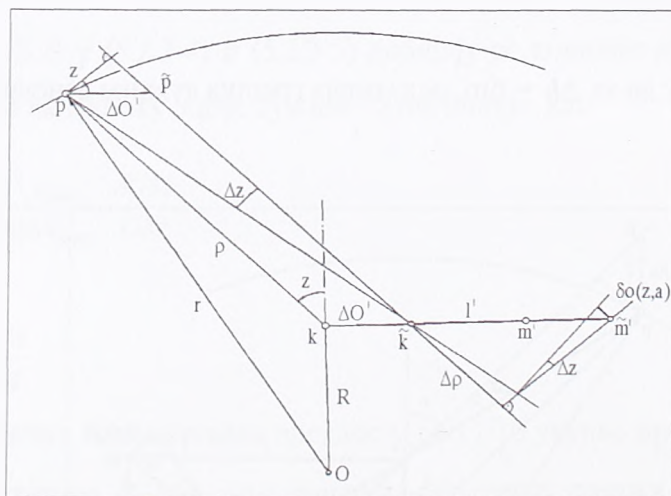
где је:

$$\bar{R} \cdot \Delta \bar{O} = 0. \tag{5.2.5-2}$$

Слика (5.2.5-1) илуструје ефекат утицаја грешке хоризонталног вектора  $\Delta O$  на опажање  $\delta_o(a, z)$ , тј.

$$\delta_o(a, z) = l' \cdot \cos z \cdot \Delta z = \frac{l' \cdot \cos z \cdot \Delta O' \cdot \cos z}{\rho}, \tag{5.2.5-3}$$

где су:  $l'$  и  $\Delta O'$  пројекције вектора  $\bar{b}, \Delta \bar{O}$  на раван  $Okr$ , тј.



Слика 5.2.5-1: Утицај грешке хоризонталног положаја фиксне тачке (Beutler i dr., 1987)

$$l' = l \cdot \cos(a - a_0) \tag{5.2.5-4}$$

$$\Delta O' = \Delta O \cdot \cos(a - a_1)$$

где су:  $a$ ,  $a_0$  и  $a_1$  азимути сателита, базне линије и вектора  $\Delta\vec{O}$ . Ако се уместо опажања сателита под азимутом  $a$  узме сателит под азимутом  $a+180^\circ$  и како у том случају долази до промене знака код  $\Delta z$  и  $\cos(a-a_0)$ , биће очигледно да се ради о утицају који спада у прву групу (класу) - који утиче на тачност оцене висинске разлике. Према (5.1-3) и уважавајући (5.2.5-3) и (5.2.5-4) може се извести израз којим се приказује утицај грешке положаја фиксне тачке за један пар опажања (сателита), тј.

$$\Delta h(a, z) = l \cdot \cos(a - a_0) \cdot \cos(a - a_1) \cdot \cos z \cdot \frac{\Delta O}{\rho}, \quad (5.2.5-5)$$

или, уколико се укључе сва опажања, сходно (5.1-4) добија се укупан ефекат утицаја положајне грешке фиксне тачке на тачност оцене једне висинске разлике, тј.

$$\frac{\Delta h}{l} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin^2 z_{\max}}{1 - \cos z_{\max}} \cdot \frac{\Delta O}{\rho} \cdot \cos(a_1 - a_0). \quad (5.2.5-6)$$

Ако се узме у обзир мрежа са више тачака (базне линије под различитим азимутима), према (*Beutler i dr., 1987*), иста ће бити ротирана око осе смештене у хоризонталној равни која је управна на  $\Delta O$ . Угао ротације (у радијанима) се може добити директно из (5.2.5-6), као

$$\omega = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin^2 z_{\max}}{1 - \cos z_{\max}} \cdot \frac{\Delta O}{\rho}, \quad (5.2.5-7)$$

па, на пример, уз услов да је  $z_{\max} = 70^\circ$ ,  $\Delta O = 10\text{m}$  и  $\rho \approx 22000\text{km}$ , добија се  $\omega = 0''.03$ . Другим речима, уколико грешка положаја фиксне тачке износи 30 m (у лучној мери око 1'') *GPS* мрежа ће бити бити ротирана за око 0.1''. Генерално посматрано, тачка  $k$  не лежи у равни  $Okr$ , што има за последицу промену размере, али се даље овај утицај не анализира.

Табела 5.2.5-1: Ефекат утицаја грешке хоризонталног положаја фиксне тачке

$\Delta O$ (m)	10	30	100
$\Delta h/l$ (mm/km)	0.15	0.4	1.5

Грешка је систематског карактера и по извору настајања је сложена. Спада у другу групу грешака - трећу подгрупу.

## 5.2.6. Грешке положаја сателита

Кеплерови закони кретања планета и Њутнова теорија гравитације, дали су основ за теоретска рачунања која, осим у случају релативистичких ефеката, обезбеђују тачну представу орбите. Орбита по којој се сателит креће одређена је почетним положајем и брзином сателита, као и пољем сила које на њега делују. У теорији

кретања сателита, често се положај орбите изучава двостепено. У првој апроксимацији посматра се кретање сателита у гравитационом пољу сферно симетричне Земље, а у другој се узимају у обзир и сви други гравитациони и негравитациони утицаји који врше тзв. пертурбације орбите (*King i dr. 1987*).

Кретање сателита под утицајем гравитационих и негравитационих сила, може се описати диференцијалном једначином другог степена, облика

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm_e r}{|r|^3} + \ddot{\vec{r}}_t \quad (5.2.6-1)$$

где први члан горњег израза описује утицај централног дела геопотенцијала, а други део ( $\ddot{\vec{r}}_t$ ) садржи нецентралне гравитационе и негравитационе утицаје, тј.

$$\ddot{\vec{r}}_t = \ddot{\vec{r}}_g + \ddot{\vec{r}}_{ls} + \ddot{\vec{r}}_d + \ddot{\vec{r}}_{sp} + \ddot{\vec{r}}_a + \ddot{\vec{r}}_e + \ddot{\vec{r}}_o \quad (5.2.6-2)$$

где су:  $\ddot{\vec{r}}_g$  - убрзање изазвано утицајем несферичности централног тела (Земљини хармоници),  $\ddot{\vec{r}}_{ls}$  - убрзање изазвано привлачном силом других небеских тела (на пример, Сунца и Месеца),  $\ddot{\vec{r}}_d$  - убрзање изазвано утицајем отпора ваздуха,  $\ddot{\vec{r}}_{sp}$  - убрзање изазвано директним и индиректним утицајем Сунчеве радијације ( $\ddot{\vec{r}}_a$ ), и  $\ddot{\vec{r}}_e$  и  $\ddot{\vec{r}}_o$  - убрзања настала плимним утицајем копна и мора.

Да би се горња једначина решила, потребно је моделовати све пертурбационе силе (*King i dr. 1985*). Са аспекта тачности *GPS* мерења, основно питање које се поставља гласи - до ког степена тачности је потребно моделовати утицајне факторе да би се постигла релативна тачност позиционирања од 0.1 до 1ppm? Испитивања су показала (*King i dr. 1985*) да се *GPS* сателити налазе на таквим висинама да се утицаји отпора ваздуха, индиректног притиска сунчеве радијације и плимних валова могу занемарити, док се утицаји несферичности Земље, привлачне силе Сунца и Месеца и директног притиска сунчеве радијације морају узети у обзир (Табела 2.2.1-2).

Нецентрални део геопотенцијала варира у зависности од латитуде, лонгитуде и геоцентричног растојања и обично се његов утицај моделује помоћу сферног хармонијског реда (*King i dr. 1985*). Највећи поремећај путање сателита изазива земљина спљоштеност (кофицијент  $J_2$ ) чији је ефекат три пута већи од било ког другог коефицијента у нецентралном геопотенцијалном моделу, али је у односу на утицај централног тела  $10^4$  пута мањи ( $5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$  према  $0.5 \text{ m/s}^2$ ). Због релативно високих и стабилних орбита (око 20000 km), *GPS* сателити су мање осетљиви на краткопериодичне поремећаје потенцијала, што има за последицу да се у горњем моделу могу користити коефицијенти нижег реда и степена. Тако, *King i dr. (1985)*



показује да модел 8. степена и 8. реда (8,8 модел) који садржи 81 коефицијент, представља “референтни” геопотенцијални модел за период од неколико револуција.

Следећи извор грешака чији се утицај такође мора моделовати јесте директан утицај Сунца и Месеца (*King i dr. 1985*). У моделу овог утицаја, као параметри, јављају се масе Сунца и Месеца, њихови геоцентрични положајни вектори и геоцентрични положај сателита.

Притисак сунчеве радијације спада у тзв. негравитациони утицај и код одређивања орбита са тачношћу од 20 m и већом, мора се узети у обзир. Од свих модела којима се укључују утицаји појединих извора грешака, овај модел је најнеизвеснији јер у себи обухвата највише променљивих величина. Тако, сунчева константа варира годишње око 7%, а проблем земљине сенке и полусенке је веома тешко дефинисати. Исто тако, јављају се тешкоће у дефинисању јединственог фактора рефлексije сателита и услед његовог неправилног облика, појављује се проблем одређивања ефективног односа површине и масе сателита.

У анализи утицаја укупне грешке изазване непознавањем тачне вредности положаја сателита (ефемерида) раздвајају се радијална (управно на правац кретања) и аксијална (у правцу кретања сателита) компонента грешке ефемерида.

#### Грешка радијалне компоненте положаја сателита

У (5.2.3.), при анализи утицаја грешке непознавања тачне вредности гравитационе константе ( $GM$ ) израз (5.2.3-5) представља утицај радијалне компоненте грешке положаја сателита на релативну грешку мерења базне линије, тј.

$$\frac{\Delta l}{l} = 0.20 \cdot \frac{\Delta r_{rad}}{r} \quad (5.2.6-3)$$

Табела 5.2.6-1: Ефекат утицаја грешке радијалне компоненте  $\Delta r_{rad}$

$\Delta r_{rad}$ (m)	1	10	20	50	100
$\Delta l/l$ (mm/km)	0.009	0.09	0.18	0.45	0.9

Упоређујући (5.2.6-3) са формулом коју је дао (*Bauersima, 1983* у *Beutler i dr. 1987*) и која гласи

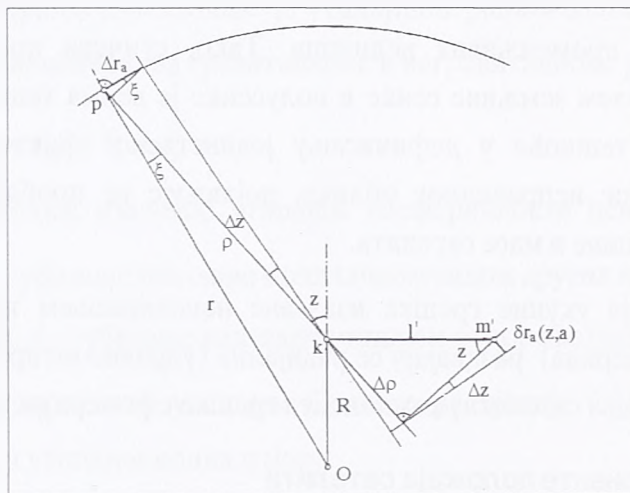
$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta r}{r} \quad (5.2.6-4)$$

при чему је:  $\Delta l$  - систематска грешка оцене базне линије а,  $\Delta r$  - укупна грешка положаја сателита, потврђује се, да је утицај грешке радијалне компоненте орбите мање значајан од аксијалног.

Грешка настала утицајем овог извора је систематског карактера, а по извору настајања грешка је сложена. Спада у другу групу грешака - трећу подгрупу.

### Грешка аксијалне компоненте положаја сателита

Да би извели утицај аксијалне компоненте, узето је за претпоставку, да је грешка у правцу кретања сателита константна и да орбита пролази кроз зенит тачке  $k$ . Апроксимирањем топоцентричне орбите (гледано из  $k$ ) са вертикалном равни под азимутом  $a$ , на сл. (5.2.6-1) је дата геометријска интерпретација грешке у правцу кретања сателита.



Слика 5.2.6-1: Утицај грешке аксијалне компоненте положаја сателита (Beutler i dr., 1987)

$$\delta r_a(z, a) = l' \cdot \cos z \cdot \Delta z = \frac{l' \cdot \cos z \cdot \Delta r_a \cdot \cos \zeta}{\rho} \quad (5.2.6-5)$$

С обзиром да је  $\zeta \leq 14^\circ$  за  $z \geq 20^\circ$  и  $l' = l \cdot \cos(a - a_0)$ , претходни израз се може поједноставити, тако да гласи

$$\delta r_a(z, a) = l \cdot \cos(a - a_0) \cdot \cos z \cdot \frac{\Delta r_a}{\rho} \quad (5.2.6-6)$$

Како се променом азимута за  $180^\circ$  (други сателит) долази до промене знака угла  $z$  и  $\cos(a - a_0)$ , утицај ове грешке ( $\Delta r_a$ ) спада у прву класу грешака које утичу на оцену висине. Узимајући у обзир сва опажања (хомоген распоред сателита), израз за утицај грешке орбите свих сателита у правцу кретања сателита изгледа

$$\frac{\Delta h}{l} = \cos(a - a_0) \cdot \frac{\Delta r_a}{\rho} \quad (5.2.6-7)$$

Табела 5.2.6-2: Ефекат утицаја грешке аксијалне компоненте  $\Delta r_a$  ( $\rho = 22000\text{km}$  и  $a - a_0 = 0^\circ$ )

$\Delta r_{rad}$ (m)	1	10	20	50	100
$\Delta h/l$ (mm/km)	0.04	0.45	0.9	2.3	4.5

Израз (5.2.6-7) заслужује два коментара:

**Први:** грешка ефемерида у правцу кретања сателита може имати знатно већи утицај на тачност оцене *GPS* резултата него радијална компонента. Уколико базна линија лежи у равни орбите, компонента висине трпи утицај дефинисан изразом (5.2.6.1-2).

**Други:** грешка ефемерида  $\Delta r_a$ , у правцу кретања сателита (за један сателит) ће изазвати ротацију *GPS* мреже око осе управне на раван орбите за угао  $\Delta r_a / \rho$ .

Грешка је систематског карактера, а по извору настајања је сложена. Спада у другу групу грешака - трећу подгрупу.

### 5.2.7. Грешка фазе изазвана деградацијом сигнала (*selective availability-SA*)

Министарство одбране *SAD* је политику *SA* увело од 25.03.1990.године.

Грешка изазвана овим извором је по природи двојака. Она се манифестује кроз грешку орбите ( $\epsilon$  - тип *SA*) и кроз грешку часовника, или ( $\delta$  - тип *SA*). Овај други део грешке се првенствено одражава на тачност одређивања брзине а, остварује се деградацијом часовника.

Тип  $\epsilon$  се може имплементирати код *Block I* и *Block II* сателита, док се тип  $\delta$  може увести само код *Block II* сателита. Износ и утицај *SA* је испитивао велики број аутора и он варира. Тако, *Kramer i dr. (1990, u Lachapelle i dr. 1992)* тврди да се ефекти утицаја овог извора грешке крећу око 100m и имају време корелације од око 3 минуте. *Tolman i dr. (1990, u Lachapelle i dr. 1992)* наводи типичне оперативне *SA* вредности од неколико десетина метара у 10.-то минутном периоду, што углавном приписује  $\delta$  типу.

Теоретски, да би се утицај *SA* отклонио, најбоље је бити у позицији ауторизованог корисника, тј. имати могућност декодирања загађеног сигнала. Други начин је применом техника диференцирања. Код метода релативног позиционирања, коришћење прецизних ефемерида може утицај ове грешке учинити безначајним. Тамо, где се траже прецизне координате у реалном времену, препоручује се коришћење тзв. концепта активних контролних референтних станица.

Грешка часовника изазвана увођењем *SA* се може потпуно елиминисати техникама диференцирања, само онда, ако су часовници у пријемницима потпуно синхронизовани. Сматра се (*Feigl i dr. 1991, u Hofmman and Walenhof, 1994*) да *SA* деградација часовника изазива грешку у *SDO* у износу

$$\delta\varphi_{km}^p(SA) = \Delta f^l(SA) \cdot \Delta t, \quad (5.2.7-1)$$



где је:  $\delta\varphi_{km}^p(SA)$  - грешка фазе изазвана  $SA$  деградацијом,  $\Delta f^j(SA)$  - промена фреквенције у односу на номиналну услед деградације часовника у сателиту, а  $\Delta t$  - разлика у времену путовања сигнала мерног фронта таласа, тј. кашњења у простирању таласа. Генерално гледајући, пријемник ближи сателиту ће примити фазу која касније напушта сателит од фазе коју региструје пријемник удаљенији од сателита, ако подаци регистрације припадају истој епохи. Теоретски, максимално  $\Delta t$  настаје када су сателит  $j$  и пријемници  $k$  и  $m$  леже на правој линији (што је реткост), па је тада  $\Delta t = l_{km}/c$ , где је  $l_{km}$  - дужина између тачака  $km$ , а  $c$  - брзина светлости. Износ  $\Delta f^j(SA)$  се контролише помоћу контролног  $GPS$  сегмента и износи  $\Delta f^j(SA) = \sim 2\text{Hz}$ , а често и више, па заменом у (5.2.8-1) добија се за, на пример,  $l_{km} = 300\text{km}$  ( $\Delta t = 0.001\text{ s}$ )  $\delta\varphi_{km}^p(SA) = 0.002$  циклуса (или  $0.4\text{mm}$ , за  $\lambda = 19\text{cm}$ ). Како је овај износ за најнеповољнији случај практично занемарив, може се закључити да је утицај  $SA$  на застој у простирању сигнала такође занемарив. Такође, треба још једном истаћи значај тачности синхронизације двају пријемника, посебно код  $SDO$  опажања, јер при грешци синхронизације од  $1\text{ ms}$   $\delta\varphi_{km}^p(SA) = 0.4\text{ mm}$  (за  $\Delta f^j(SA) = 2\text{Hz}$ ).

Може се закључити да је деградација часовника изазвана утицајем  $SA$  безначајна за све дужине (базне линије) уколико се примењују технике диференцирања сигнала (*single, double, triple*) и ако су  $GPS$  пријемници синхронизовани боље од  $2\text{ ms}$  ( $\delta\varphi_{km}^p(SA) = 0.8\text{mm}$  при  $\Delta f^j(SA) = 2\text{Hz}$ ). На терену, овај ниво синхронизације, посебно, код кварцних часовника (које поседује већина пријемника) није могућ. Међутим, уколико се обрада података изводи накнадно у бироу, постојећи алгоритми у већини програма за обраду су у стању да оцене параметре часовника са потребном тачношћу (већом од  $1\mu\text{s}$ ).

Грешка је и према законитости појаве и према извору настајања сложеног карактера. Спада у другу групу - прву подгрупу грешака.

### 5.2.8. Грешка часовника

Обе врсте опажања (кодна и фазна) су оптерећене грешкама часовника пријемника и сателита. Један од циљева формирања разлика фаза је редукција или елиминисање грешака часовника. Изрази за утицај часовника се издвојени у Табели (5.2.8-1).

Табела 5.2.8-1: Ефекти утицаја часовника

Израз	Вредност (у циклусима $L_1$ фреквенције)
$a^p \cdot \rho_k^p(t)/c$	$10^{-4}$
$a^p \cdot [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)]/c$	$< 10^{-4}$
$f \cdot \dot{\rho}_k^p \cdot \delta t_k / c$	$< 4 \times 10^{-3}$
$f \cdot \delta t_k$	1500
$a^p / f = 10^{-12}$ ; $\dot{\rho}_k^p \leq 800 m/s$ ; $\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t) \leq 1000 km$ $c = 3 \cdot 10^5 km$ ; $\rho_k^p(t) = 20000 km$ ; $\delta t_k = 1 \mu s$	

### Грешке часовника у пријемнику

Тачност одређивања грешке часовника у пријемнику из навигационог решења износи  $1 \mu s$  и боље. Ограничавајући фактор при оцени стања часовника су вредност таласне дужине кодова, утицај јоносфере и тропосфере, грешке ефемерида и политика селективне пропустљивости ( $SA$ ). Уколико је почетни положај антене добро оцењен, онда се уместо грешака часовника могу користити појединачно оцењене псеудодужине. Процес почиње рачунањем топоцентричне дужине  $\rho_k^p(t)$  у функцији времена простирања сигнала. Како је часовник у сателиту добро контролисан, његов је утицај веома мали ( $\delta t^p = 1 \mu s$  изазива грешку топоцентричне дужине од  $1 mm$ ). Тако оцењена  $\rho_k^p(t)$  када се замени у (3.1.2-12) омогућује оцену  $\delta t_k$ . Тачност оцене  $\delta t_k$  зависи од грешке сателитовог часовника, утицаја јоносфере и тропосфере, рефлексије сигнала, несавршености конструкције и сл. На тај начин  $\delta t_k$  се може оценити за сваку епоху мерења. На основу искустава у раду, може се приметити да се појединачне оцене значајно разликују. Тако, ако се користе “тачне”  $WGS84$  координате пријемника, часовник пријемника показује осцилације у износу и до  $200 \mu s$ , у периоду од 20 минута. У случају да се за пријемник користе приближне координате, ове су разлике значајно више.

Да би вредност израза  $f \cdot \delta t_k$  била безначајна потребно је да су опажања симултана. Код  $DDO$ , ако два пријемника опажају у различитим епохама са тачношћу синхронизације рада од  $1 \mu s$ , тачност оцене базне линије је у границама тачности фазних мерења. Међутим, у пракси је тешко постићи такав ниво синхронизације. Реално је очекивати да се постигне ниво синхронизације од  $1 ms$ , што уз претпоставку да дужина између два пријемника није већа од  $300 km$ , има за последицу да се изрази  $a^p$  и  $a^q$  могу у формули за  $SDO$  занемарити.

Код већине типова *GPS* пријемника, опажања се коригују за утицај грешке часовника према изразу

$$\Delta \rho_k^p = \frac{f}{c} \cdot \dot{\rho}_k^p \cdot \delta t_k \quad (5.2.8-1)$$

Такође, директна мерења се могу поправити и за утицај  $f \cdot \delta t_k$ , али ово задње није неопходно сходно безначајности овог утицаја код *DDO* опажања. У случају *DDO*, синхронизованост рада двају пријемника подразумева, да је *drift* часовника познат са тачношћу од  $1 \mu s$ , а да разлика *drifta* два пријемника не пређе износ од  $1 ms$ . Ако се  $\rho_k^p(t)$  рачуна ради кориговања емитованог времена, израз са  $\dot{\rho}_k^p$  се може игнорисати.

Грешка је систематског карактера, а по извору настајања спада у инструменталне грешке. Спада у другу групу - прву подгрупу грешака.

#### Грешка часовника у сателиту

Контролни сегмент одржава *GPS* системско време у односу на *UTC (USNO - US Naval Observatory)* са тачношћу од  $1 \mu s$ . *GPS* системско време је униформна временска скала, тј. за разлику од *UTC* времена, нема “додавања” тзв. “преступних” секунди. Сви потребни подаци који повезују *GPS* системско и сателитско номинално време дати су у оквиру навигационе поруке са тачношћу која гарантује да се у периоду путовања сигнала од сателита до пријемника разлика између номиналног и *UTC(USNO)* времена буде мања од  $90 ns$  ( $1\sigma$ ). Поправка сателитског времена  $\Delta t^p$  се рачуна као

$$\Delta t^p = a_{f_0} + a_{f_1}(t^p - t_0) + a_{f_2}(t^p - t_0)^2 + \Delta t_R \quad (5.2.8-2)$$

где је:

$$t_{GPS} = t^p - \Delta t^p, \quad (5.2.8-3)$$

а,

$$\Delta t_R = -\frac{2}{c^2} \cdot \sqrt{a \cdot \mu} \cdot e \cdot \sin E. \quad (5.2.8-4)$$

Коефицијенти полинома  $a_{f_0}$ ,  $a_{f_1}$  и  $a_{f_2}$  се шаљу као део навигационе поруке у  $s$ ,  $s/s$  и  $s/s^2$ . Референтно време часовника  $t_0$  се такође шаље као део навигационе поруке у сец. Израз (5.2.8-4) представља релативистички ефекат изазван утицајем ексцентрицитета орбите ( $e$ ),  $\mu$  - представља гравитациону константу,  $a$  - велику полуосу а,  $E$  - ексцентричну аномалију орбите. За  $a \approx 26000 km$ ,  $\Delta t_R (\mu s) = -2e \sin E$ . Како су сви напред наведени параметри садржани у навигационој поруци, корекција псеудодужине се врши у пријемнику. Израз (5.2.8-2) је значајан код кодних мерења, док се исти потпуно елиминише формирањем разлика фазних мерења, с обзиром да исте зависе



само од *offseta* фреквенције сателитових часовника. Овај утицај је пре свега функција геометрије пријемник-сателит и дужине базне линије, тј.

$$\Delta\varphi_{km}^p(t) = \frac{a^p}{c} \cdot [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)], \quad (5.2.8-5)$$

па, ако у горњем изразу део у загради заменимо са дужином базне линије  $l$ , добија се

$$\Delta\varphi_{km}^p(t) = 0.3 \cdot 10^{-5} \cdot a^p_{(ciklus/sec)} \cdot l_{(km)} \quad (5.2.8-6)$$

За  $a^p/f = 10^{-12}$  (цезијумски часовник) и  $a^p = 0.0015$  циклуса/s, очигледно је да је утицај овог извора грешака код релативног позиционирања безначајан, јер је за дужину од 500 km грешка фазе настала као ефекат утицаја офсета часовника у сателиту једнака 0.0005 mm ( $2 \cdot 10^{-6}$  циклуса).

Грешка је систематског карактера, а по извору настајања спада у инструменталне грешке. Спада у другу групу - прву и четврту подгрупу грешака.

### 5.2.9. Грешка одређивања брзине светлости у вакууму

У последњих 300 година многи астрономи и физичари су покушавали да прецизно дефинишу брзину светлости у вакууму, да би тек у последњих 20 година, тачност њеног одређивања била повећана од 1km/s на 1m/s. На *XVI Генералној скупштини IUGG (1975)*, усвојена је вредност брзине светлости у вакууму у износу од  $c_0 = 299729.458$  km/s са грешком од  $s = 1.2$ m/s. Стандардна девијација од  $c_0$  износи око 0.004ppm и потиче углавном због немогућности дефинисања метра. Код електронских даљиномера,  $c_0$  се може сматрати 'тачном' вредношћу, јер су ретки изузеци (на пример, ME5000) да неки електронски даљиномер има прецизност већу од 1ppm.

Након фиксирања брзине светлости на горњу вредност, *XVII Генерална конференција за тежине и мере* дефинише метар као растојање које пређе светлост у вакууму за период од  $1/299729.458$  дела секунде (око  $3\eta s$ ).

Грешка је систематског карактера, а по извору настајања је сложена. Спада у прву групу грешака.

### 5.2.10. Грешка одређивања брзине светлости у ваздуху

Брзина простирања светлости у ваздуху једнака је

$$c = \frac{c_0}{n}, \quad (5.2.10-1)$$

где је:  $n$  - индекс преламања светлости у ваздуху. Очигледно је да тачност одређивања брзине светлости у ваздуху зависи од тачности познавања индекса преламања дуж

путање простирања таласа од сателита до пријемника. Подаци о атмосфери са којима се рачуна индекс преламања узимају се, најчешће на станици, па самим тим не репрезентују стање атмосфере дуж путање таласа.

Грешка одређивања брзине светлости у ваздуху је сложеног карактера, али делује као линеарна систематска грешка. Припада првој групи грешака, од које зависи тачност мерења.

### 5.2.11. Грешка мерења разлике фаза

На основу израза (3.2.1-15), може се успоставити веза облика

$$l = \Delta\rho = \frac{c}{f}(N + \Delta\varphi) + \sum \delta l, \quad (5.2.11-1)$$

где је:  $\sum \delta l$  - збир свих утицаја на тачност мерења дужине. Диференцирањем дужине  $l$  по  $\Delta\varphi$  добија се да је

$$\sigma_l = \frac{c}{f} \cdot \sigma_{\Delta\varphi}, \quad (5.2.11-2)$$

из чега се види да је грешка дужине директно пропорционална грешци мерења разлике фаза, а обрнуто пропорционална фреквенцији сигнала.

Грешка је сложеног карактера, али се систематски део елиминише методом мерења, а случајни се део значајно смањује мерењем у дужем временском интервалу. По извору настајања спада у инструменталне грешке. По начину утицаја, грешка спада у прву групу грешака.

### 5.2.12. Грешка фреквенције сигнала

При мерењу фазне разлике мора се знати фреквенција сигнала (носећег таласа). Веома је важно да фреквенција буде што стабилнија јер иста директно утиче на тачност мерења фазних разлика. Код *GPS* пријемника најчешће се користе кварцни осцилатори. Иако је ова група осцилатора мање стабилна од, на пример, рубидијумских или цезијумских, нема потребе за бољим јер се параметри часовника оцењују у процесу обраде мерења са тачношћу већом од  $1\mu\text{s}$ , што у формули за двоструку фазну разлику (3.2.1-16) изазива грешку базне линије мању од  $1\text{mm}$ .

Грешка фреквенције је укупног карактера. У њој су укључене: константна грешка - померај фреквенције (*frequency offset*) и грешка која настаје као резултат промене брзине у генерисању осцилација (*frequency drift*). По извору настајања грешка је инструменталног карактера. Спада у прву групу грешака, које директно утичу на тачност мерења.

### 5.2.13. Грешка одређивања адicione константе антена

За разлику од класичних геодетских призми код којих је адациона константа по дефиницији стабилна, код *GPS* антена, однос између места пријема сигнала (фазни центар) и геометријског центра није стабилан и садржи поред систематског и случајни део. Систематски део грешке се може оценити (на пример, тестом нулте базе или позиционером), док се случајни део грешке адicione константе може значајно редуковати постављањем одређених услова при мерењу.

Грешка је и по законитости појаве и по извору настајања сложеног карактера. Спада у другу групу грешака, четврту подгрупу, мада се случајни део грешке може сврстати и у прву групу.

### 5.2.14. Грешка рефлексије сигнала

Одбијање сигнала од околних објеката (*multipath*) јесте један од главних извора грешака који прати *GPS* резултате мерења (*Leick, 1995*). *GPS* сигнал може допрети до антене на два начина, и то: као директан сигнал, или као индиректан сигнал, рефлектован од земљине површи или неког другог објекта у близини.

Грешка одбијања (рефлексије) сигнала је грешка која настаје као резултат деструктивне интерференције између директног и одбијеног сигнала. Тако, при избору *GPS* станица, треба обратити пажњу да се у близини истих не налазе објекти од којих се сигнал може одбити. Величина ове грешке зависи од јачине рефлектујућег сигнала и могућности антене да се “одупре” таквом сигналу. Јачина рефлектујућег сигнала зависи од коефицијента рефлексије рефлектујуће површи, који варира, не само са разликом земљине “углађености” већ и са интензитетом биљног покривача. Када микроталасни сателитски сигнал додирне, на пример, водену површ, он ће се рефлектовати у потпуности, без апсорпције, тј. коефицијент рефлексије биће 1. Овај феномен ће узроковати најдеструктивније мешање директног и рефлектујућег сигнала. У екстремном случају ово може бити узрок појаве прекида у пријему сигнала (*outlier* или *cycle slips*).

Табела (5.2.14-1) показује неке коефицијенте рефлексије добијене емпиријским путем у односу на неколико врста рефлектујућих површи. Из табеле се види, да јачина рефлектујућег сигнала зависи од фреквенције долазећег сигнала и природе рефлектујуће површ

Грешка рефлексије утиче и на кодна и на фазна мерења. Величина утицаја на кодна мерења зависи од дужине чипа *PRN* кода, (*CA* код има дужину чипа 293m, а *P* код 29.3m). У статичком начину рада, ефекат одбијања сигнала није случајног карактера (у гаусовом смислу) и тешко га је елиминисати или редуковати користећи неку од техника



филтрирања сигнала, изузев, уколико опажања трају дуже од једног дана. Тада, овај утицај поприма случајни карактер са очекивањем блиским нули (*Lachapelle i dr. 1992*). У краћим временским интервалима (неколико минута) уочене су амплитуде и до 20m.

Табела 5.2.14-1: Коефицијенти рефлексије

Фреквенција	Водена површ		Равна површ		Неравна површ		Пошумљен терен	
	RC	C(db)	RC	C(db)	RC	C(db)	RC	C(db)
2GHz	1.0	0	0.8	2	0.6	4	0.3	10
3GHz	1.0	0	0.8	2	0.5	6	0.2	14
4GHz	1.0	0	0.8	2	0.5	6	0.2	14
11GHz	1.0	0	0.8	2	0.4	8	0.16	16

RC - коефицијент рефлексије; C(db) - апсорпција сигнала

Према неким подацима из литературе (*Eckels, 1987*) величина утицаја ове грешке износи око 1m, за кодна мерења и око 0.05m до 0.06m, при мерењу фаза носећих таласа.

Утицај одбијања сигнала од подлоге се може оценити на основу израза

$$\tan \delta_{ref} = \frac{\beta \cdot \sin \Delta\varphi}{1 + \beta \cdot \cos \Delta\varphi} \quad (5.2.14-1)$$

где је:  $\Delta\varphi$  - промена фазе одбијеног сигнала,  $\delta_{ref}$  - застој у фази изазван утицајем одбијеног сигнала од околине а,  $\beta$  - фактор који карактерише степен рефлексије (*damping* фактор – варира од 0 до 1).

За  $\beta = 0$ ,  $\beta_M = 1$  ( $\beta_M = \sqrt{1 + \beta^2 + 2\beta \cos \Delta\varphi}$ ) и  $\delta_{ref} = 0$ , тј. нема рефлексије. За  $\beta = 1$ , (најјачи утицај рефлексије - на пример, за водене површи),  $\beta_M = 2 \cos(\Delta\varphi/2)$  и  $\delta_{ref} = 1/2(\Delta\varphi)$ . Вредности  $\beta_M$  и  $\delta_{ref}$ , као функције  $\Delta\varphi$  дате су у Табели 5.2.14-2.

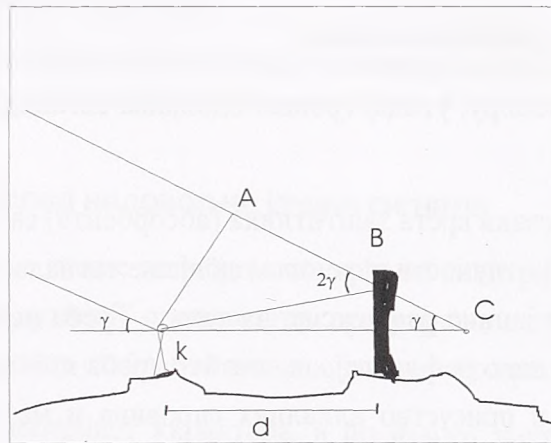
Табела 5.2.14-2: Утицај рефлексије сигнала

$\Delta\varphi$ (у степенима)	$\beta_M$	$\delta_{ref}$ (у степенима)
0	2	0
90	$\sqrt{2}$	45
180	0	90

Из табеле се види да максималан утицај рефлексије сигнала код фазних мерења износи  $\delta_{ref} = 90^\circ$  (одговара 1/4 циклуса, тј. за  $\lambda = 24\text{cm}$  то износи  $\delta_{ref} = 6\text{ cm}$ ). То

значи, да максимална грешка дужине изазвана ефектом одбијања сигнала износи 6 см. Ако се користе линеарне комбинације фазних опажања, ова се грешка повећава.

Код релативног позиционирања, при доброј геометрији сателита и довољно дугом периоду опажања, ефекат утицаја рефлексije не прелази 1 см (*Counselman, 1981* и *Hofmann-Wallenhof, 1994*). Пракса је показала, да и мале промене у висинама антена могу изазвати велике промене у резултатима мерења, тако да при избору локације тачака, о овом се мора водити рачуна (Табела 5.2.14-1).



Слика 5.2.14-1: Одбијање сигнала од вертикалне препреке

Утицај одбијеног сигнала се може илустровати сликом 5.2.14-1. Застој изазван одбијањем сигнала од вертикалног објекта једнак је збиру дужина АВ и ВС. Конвертујући тај збир у  $L1$  циклусе, а ове у радијане, добија се

$$\Delta\varphi_{k,L1}^p = \frac{4\pi d}{\lambda_1} \cdot \cos\gamma_k^p \quad (5.2.14-4)$$

Грешка фреквенције, изазвана утицајем одбијеног сигнала, коресподентна је застоју у фази  $\Delta\varphi$ . Диференцирањем израза (5.2.14-2), добија се грешка фреквенције  $L1$  носача, изазвана одбијањем сигнала (*Leick, 1995*), тј.

$$f_{\delta,L1} = f_{\Delta\varphi,L1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi_{k,L1}^p}{dt} = \frac{2d}{\lambda_1} \cdot \sin\gamma_k^p \cdot \left| \dot{\gamma}_k^p \right| \quad (5.2.14-5)$$

Добијена фреквенција је директно пропорционална управној дужини између антене и препреке -  $d$ , елевационом углом сателита-  $\gamma_k^p$ , а инверзно пропорционална

таласној дужини носећег таласа- $\lambda_1$ . С обзиром да се сателит креће, фреквенција изазвана одбијањем сигнала је временски зависна величина. Тако, на пример, за  $d = 10\text{m}$ ,  $\gamma_k^p = 45^\circ$ , и  $\dot{\gamma}_k^p = 0.07 \text{ mrad/s}$  ( $=1/2$  сателитског средњег кретања), период грешке изазване одбијањем сигнала од објекта износи 5 минута. Уколико је објекат удаљен  $d = 1\text{m}$ , период износи 50 минута, што указује на значај овог извора грешака, њену зависност од дужине трајања мерења као и на потребу испуњења услова при мерењу, а који се односе на избор локације стајне тачке. Важно је истаћи и то, да је однос фреквенција изазваних утицајем рефлектованих сигнала пропорционалан односу носећих фреквенција  $L1$  и  $L2$  носећих сигнала.

У кинематичком премеру, утицај грешке одбијања сигнала има више изражен случајни карактер.

Очигледно је, да би свака врста заштитника (абсорбента) са доње стране антене добро дошла, иако не би у потпуности спречила одбијање сигнала. Облик и димензије заштитника би зависили од јачине рефлексије на тачки. Треба истаћи, да ће умерене нивовске површи повећати ниво рефлексије, а посебно треба избегавати оне реоне где је уочен висок салинитет и присуство алкалних сировина и метала. Такође, треба водити рачуна и о томе да се антене постављају што даље (најмање 150 m) од извора електромагнетног зрачења, који у најгорем случају може и оштетити *GPS* пријемнике (*Jiyu, 1991* и *Hofmman Wellenhof, 1994*).

Грешка је случајног карактера, а по извору настајања спада у инструменталне и изазване спољашном средином. Спада у прву групу грешака, а делимично и другу групу - другу подгрупу.

#### 5.2.15. Грешка центрисања антена

Центрисање антена се врши оптичким вискром или присилно. Уколико се центрисање врши помоћу оптичког виска, исти треба претходно испитати и ректифициковати. Уколико је станица ексцентрична, елементе ексцентрицитета треба оценити и укључити у даљу обраду.

Грешка је случајног карактера, а по извору настајања је инструментална. С обзиром на високу прецизност *GPS* мерења, грешка се може сврстати у прву групу грешака.

#### 5.2.16. Грешка несавршености конструкције инструмента и сателита

Грешке ове врсте, углавном настају због загревања антене или интерних компоненти пријемника или несавршености конструкције сателита. Њихова величина зависи од ширине фреквентног опсега, односно од односа густине сигнал/шум, као и



параметара кодног и фазног сигнала. Како је јачина сигнала веома корелисана са елевацијом сателита, то ће и тачност мерења бити такође зависна од елевације. Тачност мерења фаза носећих таласа зависиће и од ширине фреквентног опсега канала за праћење (*tracking bandwidth*), и према подацима (*Lachapelle i dr. 1992*) та тачност је већа од 1cm, док код кодних мерења она износи око 1m (CA) и 10cm (P). Како је за успешно решавање *неодређености* потребна минимална тачност од око 10cm, то је примена P-кодних пријемника значајнија, с тим да се тропосферски утицаји и ефекти одбијања сигнала условима при мерењу и адекватним поправкама учине безначајним или сведу на најмању могућу меру.

Грешка је случајног карактера, а по извору настајања је инструментална. Спада у прву групу грешака.

#### 5.2.17. Грешка услед недовољне јачине сигнала

До слабљења јачине сигнала може доћи из више разлога, и то због: неповољног положаја сателита, утицаја средине дуж простирања сигнала и одбијања сигнала од подлоге. Као последица слабљења сигнала, јавља се грешка мерења разлике фаза.

Грешка је случајног карактера, а по извору настајања је сложена. Припада другој групи - другој подгрупи грешака.

#### 5.2.18. Грешка услед недовољног напона батерија

Скоро сви *GPS* пријемници имају могућност унутрашњег и спољашњег напајања. Као и други инструменти и *GPS* пријемници имају одређени ниво толеранције напона батерија. Након пада напона испод дозвољене границе, инструмент се сам искључи или пређе на алтернативни начин напајања, ако постоји. Пад напона доводи до прегревања појединих склопова уређаја што изазива већи утицај инструменталне грешке, а самим тим и грешку мерења фазе.

Грешка је случајног карактера, а по извору настајања је инструментална. Припада другој групи - другој подгрупи грешака.

#### 5.2.19. Релативистички ефекти

Релативистички ефекти су веома важан фактор код *GPS* премера, али се, срећом, могу веома успешно моделовати. Атомски стандарди фреквенције код *GPS* сателита трпе две врсте релативистичких утицаја, и то: специјални релативитет (услед кретања сателита) и општи релативитет (због разлике потенцијала сателит - Земља). Главни део релативистичког утицаја је заједнички за све сателите и не зависи од ексцентрицитета орбите. Релативни помак фреквенције износи  $\Delta f/f = 4.45 \cdot 10^{-10}$ . Овај

помак је коресподентан временском увећању од око  $38.3\mu\text{s}$  на дан, тј. часовници у сателиту раде брже. Привидна промена фреквенције износи  $\Delta f = 0.00455 \text{ Hz}$  при фундаменталној фреквенцији од  $10.23\text{MHz}$ . Фреквенција је коригована пре лансирања сателита на износ од  $10.22999999545 \text{ MHz}$ . Други део релативистичког ефекта је пропорционалан ексцентрицитету орбите сателита. Код чисто кружних орбита корекција је једнака нули. Код *GPS* орбита са ексцентрицитетом од  $0.02$ , тај утицај износи око  $45.8\text{ns}$  (око  $14 \text{ m}$ ). Овај део утицаја се може срачунати у функцији велике полуосе, ексцентрицитета и ексцентричне аномалије, и обично се у пријемнику обрачунава. Код релативног позиционирања, релативистички ефекти се неутралишу.

Грешка је систематског карактера, а по извору настајања је сложена. Спада у другу групу грешака - прву и четврту подгрупу.

### 5.3. ПОДЕЛА ГРЕШАКА ПО ЗНАЧАЈУ

Према карактеру њиховог утицаја све грешке се могу поделити у две групе, и то: прва - у коју спадају оне грешке од којих директно зависи тачност мерења и друга - у коју спадају грешке чији се утицај може на неки начин учинити безначајним. Грешке друге групе, према начину на који се њихов утицај може учинити безначајним се деле на четири подгрупе, и то: прва- у коју спадају грешке чији се утицај може отклонити методом рада, друга - у коју спадају грешке чији се утицај смањује избором одређених услова при мерењу, трећа - у коју спадају грешке чији се утицај може учинити занемарљивим и четврта - у коју спадају грешке које се отклањају увођењем поправки. Преглед свих извора грешака са моделом и природом утицаја је дат у Табели 5.3-1. Утицај појединих извора грешака на резултате *GPS* мерења су дати у Табели 5.3-2.

Табела 5.3-1: Извори грешака GPS мерења базних линија

Рб.	Извор грешке	Модел утицаја	Природа утицаја		Г*	ПГ*
			-по карактеру	-по извору настанка		
1	Грешка одређивања брзине светлости у вакууму		Систематска Сложена		1.	
2	Грешка одређивања брзине светлости у ваздуху		Систематска Сложена		1.	
3	Грешка мерења разлике фаза	$\sigma_l = \frac{c}{f} \cdot \sigma_{\Delta\varphi}$	Сложена Инструментална		1.	
4	Грешка фреквенције		Сложена Инструментална		1.	
5	Грешка рефлексије сигнала	$\tan \delta_{ref} = \frac{\beta \cdot \sin \Delta\varphi}{1 + \beta \cdot \cos \Delta\varphi}$	Случајна Инструментална		1.	
6	Грешка несавршености конструкције инструмента и сателита		Случајна Инструментална		1.	
7	Грешка фазе изазвана деградацијом сигнала	$\delta\varphi_{km}^p(SA) = \Delta f^j(SA) \cdot \Delta t$	Сложена Сложена		2.	1.
8	Грешка часовника у сателиту	$\Delta\varphi_{km}^p(t) = \frac{a^p}{c} \cdot [\rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)]$	Систематска Инструментална		2.	1.
9	Грешка часовника у пријемнику	$\Delta\varphi_k^p = \frac{f}{c} \cdot \dot{\rho}_k^p \cdot \delta t_k$	Систематска Инструментална		2.	1.
10	Грешка изазвана утицајем реалитивистичких ефеката.		Систематска Сложена		2.	1.
11	Грешка услед недовољне јачине сигнала		Случајна Сложена		2.	2.
12	Грешка услед недовољног напона батерија		Случајна Инструментална		2.	2.
13	Грешка релативног утицаја тропосфере	$\Delta h = \frac{1}{\cos z_{max}} \cdot \delta T_r$	Систематска Спољна средина		2.	3.
14	Грешка апсолутног утицаја тропосфере	$\frac{\Delta l}{l} = \frac{T_k^p(0)}{R_1} \cdot \frac{1}{\cos z_{max}}$	Систематска Спољна средина		2.	3.



Рб.	Извор грешке	Модел утицаја	Природа утицаја		
			-по карактеру -по извору настанка	Г*	ПГ*
15	Грешка јоносферског утицаја	$\frac{\Delta l}{l} = -0.7 \cdot 10^{-17} \cdot TEC$	Систематска Спољна средина	2.	3.
16	Грешка гравитационе константе	$\frac{\Delta l}{l} = 0.07 \cdot \frac{\delta GM}{GM}$	Систематска Спољна средина	2.	3.
17	Грешка висине фиксне тачке	$\frac{\Delta l}{l} = 0.20 \cdot \frac{\Delta h}{R}$	Систематска Сложена	2.	3.
18	Грешка хоризонталног положаја фиксне тачке	$\frac{\Delta h}{l} = \frac{1}{4} \frac{\sin^2 z_{\max}}{1 - \cos z_{\max}} \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho} \cdot \cos(a_1 - a_0)$	Систематска Сложена	2.	3.
19	Грешка радијалне компоненте положаја сателита	$\frac{\Delta l}{l} = 0.20 \cdot \frac{\Delta r_{rad}}{r}$	Систематска Сложена	2.	3.
20	Грешка аксијалне компоненте положаја сателита	$\frac{\Delta h}{l} = \cos(a - a_0) \cdot \frac{\Delta r_a}{\rho}$	Систематска Сложена	2.	3.
21	Грешка центрисања антена		Случајна Инструментална	2.	3.
22	Грешка одређивања адicione константе антена		Сложена Сложена	2.	4.

Г\* - група

ПГ\* - подгрупа

Табела 5.3-2: Утицај појединих извора грешака на тачност GPS резултата мерења (Beutler i dr. 1987)

Извор грешке	Класа	Тип	Величина утицаја
Тропосфера - релативни утицај	1	висина	Грешка тропосферске поправке од 1mm у правцу зенита изазваће грешку оцене параметра висине од око 2.9mm
Тропосфера - апсолутни утицај	2	размер	Грешка тропосферске поправке у правцу зенита од 1m изазваће грешку размере од око 0.4 ppm (ако се тропосфера занемари дужине базних линија су веће)
Јоносфера	2	размер	Уколико се занемари вредност TEC у износу од $10^{17}$ el/m <sup>2</sup> , мрежа ће се скупити за око 0.6 ppm.
Вредност ГМ константе	2	размер	Ако се GM повећа за 1ppm, размер мреже ће се променити (повећати) за око 0.05ppm.
Висина фиксне станице	2	размер	Грешка висине од 10 m ће утицати на промену размере у износу од око 0.4 ppm (ако је висина фиксне тачке већа, размер се смањује)
Хоризонтални положај фиксне тачке	1	ротација	Грешка хоризонталног положаја од 1" изазваће ротацију мреже за износ од 0.1" око хоризонталне осе која је управна на вектор грешке положаја станице.
Аксијална компонента грешке ефемерида	1	ротација	Грешка аксијалне компоненте положаја сателита од 1" изазваће ротацију GPS мреже за исти износ (1") око осе која је управна на раван орбите

### 5.3.1. Грешке од којих зависи тачност мерења - грешке прве групе

Грешке прве групе чине главне компоненте дисперзија и у њих спадају:

- грешка одређивања брзине светлости у вакууму,
- грешка одређивања брзине светлости у ваздуху,
- грешка мерења разлике фаза,
- грешка фреквенције,
- грешка рефлексије сигнала,
- грешка центрисања антена и
- грешка несавршености конструкције инструмента и сателита.

### 5.3.2. Грешке чији се утицај може учинити безначајним - грешке друге групе

При класификацији грешака, због њиховог сложеног карактера и различитости утицаја, скоро је немогуће сваку грешку сврстати само у једну категорију. Код GPS је то посебно сложено, али је из разлога анализе методе мерења и конзистентности са

њеним захтевима, учињен покушај да се исте, према њиховој доминантној улози сврстају у једну од њих.

Грешке које се отклањају методама рада - грешке прве подгрупе

У другу групу - прву подгрупу грешака спадају:

- грешка фазе изазвана деградацијом сигнала ( $SA$ ),
- грешка часовника у сателиту,
- грешка часовника у пријемнику, и
- грешка изазвана утицајем реалитивистичких ефеката.

Грешке чији се утицај избором услова при мерењу може учинити занемарљивим - грешке друге подгрупе

У ову подгрупу спадају:

- грешка услед недовољне јачине сигнала, и
- грешка услед недовољног напона батерија.

Због могућности значајног умањења утицаја постављањем одређених услова при мерењу, у ову подгрупу се може сврстати и грешка рефлексije сигнала, иако је она, због великог директног утицаја на резултате мерења, сврстана у прву групу.

Грешке које се отклањају условима тачности - грешке треће подгрупе

У ову подгрупу спадају:

- грешка релативног утицаја тропосфере,
- грешка апсолутног утицаја тропосфере,
- грешка јоносферског утицаја,
- грешка гравитационе константе,
- грешка висине фиксне тачке,
- грешка хоризонталног положаја фиксне тачке,
- грешка радијалне компоненте положаја сателита,
- грешка аксијалне компоненте положаја сателита, и

Грешке које се отклањају поправкама - грешке четврте подгрупе

У ову подгрупу спада:

- грешка одређивања адиционе константе антена.



## 6. АНАЛИЗА ПОУЗДАНОСТИ И ОЦЕНА КОМПОНЕНТИ ДИСПЕРЗИЈА ФАЗНИХ МЕРЕЊА БАЗНЕ ЛИНИЈЕ

---

Од шездесетих година овог века па надаље, у геодезији су се десиле крупне промене. Појава теорије откривања грубих грешака уз помоћ “*data snooping*” процедуре, теорије поузданости мерења (*Baarda 1968, 1977*) као и поновна афирмација Хелмертове идеје из 1924. године о структури стохастичког модела резултата мерења, отворили су један нови правац у развоју геодетске науке. У почетку су се поменуте области углавном примењивале у терестричким мрежама, да би, у последње време, Бардине идеје нашле примену и у *GPS* тродимензионалним мрежама, посебно у истраживањима на *Технолошком универзитету* у Делфту (*Delft University of Technology*- Холандија).

*Wanless (1985)* и *Lachapelle i dr. (1988)* значајно су допринели увођењу статистичких метода у *GPS* премер. Касније (1989), с циљем проширења стандардних оцена тачности заснованих на коваријационој матрици непознатих параметара са мерама поузданости, извршена су опсежна истраживања на Универзитету у Калгарију. Посебно место у истраживањима припало је методама прецизних статичких релативних *GPS* мерења.

Мерама тачности се на традиционалан начин описује квалитет геодетске мреже. Међутим, ове оцене нису потпуне јер су датумски зависне и занемарују аспект поузданости. Тако, на пример, ако су у некој мрежи мерене дужине са *GPS* пријемницима и ако је у њима садржана систематска грешка, уколико нема других грешака, мерама тачности се она неће констатовати, а координате тачака ће бити померене. Једини начин да се грешке открију јесте путем успостављања неког независног извора информација који би био у стању да укаже на постојаност грешке размере. Уколико план опажања није направљен тако да је у стању генерисати такву информацију, тада су облик мреже и оцењени положаји недовољно поуздани, што може изазвати доношење погрешних закључака. Не постоји апсолутна поузданост, тако да се различите мере односе на различите аспекте концепта. Неке од мера зависе од избора датума, што ствара додатне проблеме. Без обзира на то, концепт поузданости, заједно са мерама прецизности, формира заједничку базу за оцену и упоређење квалитета геодетских мрежа.

## 6.1. ОТКРИВАЊЕ РЕЗУЛТАТА КОЈИ ОДСКАЧУ - ТЕСТОВИ ГРУБИХ ГРЕШАКА

У случају корелисаних  $DDO$  може се применити статистика коју је Барда предложио (*Baarda 1968*), (*Kok 1984*). За познату вредност дисперзије мерења, нестудентизована тест статистика гласи

$$T_n = \frac{d^T \cdot \mathbf{K}_1^{-1} \cdot \hat{v}}{\sigma_0 \sqrt{d^T \mathbf{K}_1^{-1} \cdot \mathbf{K}_{\hat{v}} \cdot \mathbf{K}_1^{-1} \cdot d}} \rightarrow N(0,1). \quad (6.1-1)$$

Уколико је дисперзија позната, користи се студентизована тест статистика која гласи

$$T_\tau = \frac{d^T \cdot \mathbf{K}_1^{-1} \cdot \hat{v}}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{d^T \mathbf{K}_1^{-1} \cdot \mathbf{K}_{\hat{v}} \cdot \mathbf{K}_1^{-1} \cdot d}} \rightarrow \tau(1, n - u - 1), \quad (6.1-2)$$

при чему је број степени слободе бројиоца један, а, имениоца  $n-u-1$ , због примене оцењене вредности дисперзије. Ознаком  $N$  представљен је нормалан распоред, а са  $T_\tau$ , Томсонов тау ( $\tau$ ) распоред (*Pope, 1976*). Вектор  $d$  је  $n$ -димензионалан, код кога су сви чланови једнаки нула, осим  $i$ -тог који је једнак јединици.

Уколико се користе некорелисана мерења ( $SDO$ ), тест статистика за једнодимензионалне хипотезе које се постављају за свако мерење, гласи

$$T_n = \frac{d^T \cdot \hat{v}}{\sigma_0 \sqrt{d^T \cdot \mathbf{K}_{\hat{v}} \cdot d}} = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_0 \sqrt{\mathbf{K}_{\hat{v}_{ii}}}} = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \rightarrow N(0,1), \quad (6.1-3)$$

односно, при познатом  $\sigma$

$$T_\tau = \frac{d^T \cdot \hat{v}}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{d^T \cdot \mathbf{K}_{\hat{v}} \cdot d}} = \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{\mathbf{K}_{\hat{v}_{ii}}}} = \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}} \rightarrow \tau(1, n - u - 1). \quad (6.1-4)$$

Рачунање потпуне матрице  $\mathbf{K}_{\hat{v}}$  није неопходно. У случају некорелисаних опажања, рачунају се само дијагонални елементи матрице  $\mathbf{K}_{\hat{v}}$ . Уколико је

$$|T| < N_{1-\alpha_0}, \quad (6.1-5)$$

прихвата се хипотеза  $H_0$ : резултат мерења не садржи грубу грешку. За  $\alpha_0 = 0.1\%$ , гранична вредност статистике износи  $T_{\text{гранично}} = 3.29$ . Примена израза (6.1-1) и (6.1-3) при тестирању појединачних поправака се назива Бардином *data-snooping* процедуром.

Код рачунања граничних вредности за студентизовану тест статистику, сва се опажања тестирају у исто време, а ниво значајности за поједине поправке рачуна се, не узимајући у обзир корелисаност поправака, као

$$\alpha_0 = 1 - (1 - \alpha)^n \cong \frac{\alpha}{n} \quad (6.1-6)$$

где је:  $n$  - број опажања, а за  $\alpha$  се обично користи вредност  $\alpha = 5\%$ . Нулта хипотеза се прихвата (нема резултата који одскачу) уколико је

$$|T_\tau| < \tau_{1-\alpha, n, n-u-1}, \quad (6.1-7)$$

при чему је:  $\tau_{1-\alpha, n, n-u-1}$ , функција од  $\alpha$ ,  $n$  и  $n - u$  (Pope 1976).

При откривању грубих грешака у резултатима *GPS* мерења базних линија, могуће је очекивати извесне проблеме. Разлог томе лежи у чињеници да грубе грешке могу потицати од једног-истог сателита. У случају *DDO* опажања, уколико су грубе грешке последица проблема везаних за референтни сателит, тада је сваки *DDO* у тој епохи загађен. Ако се *DDO* формира из разлика на више сателита у једној епохи (не само у односу на један – референтни), груба грешка у *SDO* опажањима ће идентификовати проблематични сателит, а само једно *DDO* опажање у тој епохи ће бити загађено. На тај начин, олакшава се могућност откривања и одбацавања резултата мерења (сателита) који садржи грубу грешку.

## 6.2. АНАЛИЗА ПОУЗДАНОСТИ ОЦЕНА БАЗНИХ ЛИНИЈА

Концепт поузданости подразумева: 1) способност модела изравнања у избору адекватног функционалног и стохастичког модела и 2) откривање ефеката некоректне формулације модела на оцену параметара. У ужем смислу, поузданост представља способност модела да открије грубе грешке у опажањима због чега се за поузданост каже да је средство контроле грешке II врсте ( $\beta_0$ ), са одређеном вероватноћом неоткривања или прихватања грубе грешке, у тестовима грубих грешака. *Kok (1984)* овај концепт, након примене једнодимензионалних тестова над појединим опажањима, описује као квантификацију и анализу грешака I и II врсте. У смислу грубих грешака, поузданост се доводи у везу са тачношћу опажања, бројем сувишних мерења и геометријом (пријемник - сателити).

### 6.2.1. Унутрашња поузданост

Под унутрашњом поузданошћу се подразумева способност модела да уз помоћ једнодимензионалног теста, користећи вероватноћу грешке II врсте, у опажањима открије појаву грубе грешке. Применом ове стратегије, користећи параметар нецентралности  $\lambda_0$  добијен на основу нивоа значајности  $\alpha_0$  и моћи теста  $1 - \beta_0$  за свако опажање  $l_i$  могу се срачунати вредности маргиналних грешака (*marginally detectable errors - MDE*; мера унутрашње поузданости) које се датим тестом могу открити. Параметар нецентралности



$\lambda_0$  дефинише функцију густине нецентралног распореда коресподентног алтернативној хипотези  $H_a$ , у тестовима (6.1-5) и (6.1-7). У случају корелисаних  $DDO$  опажања, унутрашње мере поузданости се рачунају као

$$\nabla \mathbf{l}_i = \sigma_0 \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{d^T \cdot \mathbf{K}_i^{-1} \cdot \mathbf{K}_v \cdot \mathbf{K}_i^{-1} \cdot d}} \quad (6.2.1-1)$$

Уколико је матрица тежина дијагонална (код  $SDO$  и некорелисаних  $DDO$ ), израз (6.2.1-1) је једноставнији и изгледа

$$\nabla \mathbf{l}_i = \sigma_0 \frac{\sigma_{l_i} \cdot \sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{d^T \cdot \mathbf{K}_i^{-1} \cdot \mathbf{K}_v \cdot d}} \quad (6.2.1-2)$$

Уводећи редундантне бројеве (фактори -  $r_i$ ), који се добијају као дијагонални елементи матрице

$$\mathbf{r}_i = (\mathbf{K}_i^{-1} \cdot \mathbf{K}_v)_{ii} \quad (6.2.1-3)$$

изрази (6.2.1-1) и (6.2.1-2) се могу даље редуковати.

Редундантни бројеви (локалне редунданце) описују допринос  $l_i$  опажања укупној редундантности ( $f = n - u$ ) изравнања. Уважавајући напред речено, израз (6.2.1-2) се може написати као

$$\nabla \mathbf{l}_i = \sigma_{l_i} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mathbf{r}_i}} \quad (6.2.1-4)$$

За  $\nabla \mathbf{l}_i$  се каже да представља вредност маргиналне грешке ( $MDE$ ) која, ако буде достигнута, тестом може бити откривена. Што је  $MDE$  веће, модел је лошији и обрнуто.

## 6.2.2. Спољашња поузданост

При обради резултата мерења, мера спољашње поузданости се користи ради описа могућности мреже (или, у случају  $GPS$ , изравнања базних линија) да апсорбује ефекте утицаја грубих грешака или других неадекватности у математичком моделу, приликом оцене непознатих параметара. Спољашња поузданост се дефинише као утицај сваке  $MDE$  (која се може открити) на оцену вектора непознатих параметара. Ова помереност оцене непознатих параметара се често назива локалном мером спољашње поузданости и може се срачунати за свако опажање  $l_i$ , као

$$\nabla \mathbf{x}_i = \mathbf{N}^{-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_i \quad (6.2.2-1)$$

при чему је:

$$\nabla \mathbf{u}_i = \mathbf{A}^T \nabla \mathbf{l} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K}_i^{-1} \nabla \mathbf{l} = \bar{\mathbf{A}}^T \nabla \mathbf{l} \quad (6.2.2-2)$$

а,  $\nabla l_i$  -  $n$  димензионални вектор са елементима нула, осим  $l_i$  који садржи  $MDE - \nabla l_i$ . Како је, посебно код  $GPS$  примена, израз (6.2.2-1) сложен, ова се мера замењује *глобалним параметром дисторзије (total distortion parameter-TPD)* или *глобалном мером спољашње поузданости  $\tilde{\lambda}_i$  (global external reliability- GER)* која се добија као квадратна форма локалне мере спољашње поузданости, услед појаве  $MDE$  у опажању  $l_i$ , тј.

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \nabla \mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{K}_x^{-1} \cdot \nabla \mathbf{x}_i \quad (6.2.2-3)$$

Важна особина модела оцене параметара јесте да пружа могућност поделе на део који садржи коефицијенте уз непознате координате и део који садржи коефицијенте уз допунске параметре. Ово је важно, јер омогућује посебно испитивање ефеката утицаја на оцену непознатих поправака координата. Одговарајућа коваријациона матрица у том случају има следећи облик

$$\mathbf{K}_{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\tilde{x}_{11}} & \mathbf{K}_{\tilde{x}_{12}} \\ \mathbf{K}_{\tilde{x}_{21}} & \mathbf{K}_{\tilde{x}_{22}} \end{bmatrix} \quad (6.2.2-4)$$

Тако, ако се жели утврдити утицај грубих грешака на непознате координате, сачунаће се *парцијални параметар дисторзије (partial parameter distortion -PPD)* за опажање  $l_i$ , као

$$\tilde{\lambda}_{ii} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \nabla \mathbf{x}_{ii}^T \cdot \mathbf{K}_{\tilde{x}_{ii}}^{-1} \cdot \nabla \mathbf{x}_{ii} \quad (6.2.2-5)$$

Како (6.2.2-3) и (6.2.2-5) нису погодни за директну примену (садрже непознате вредности поправака координата - локалне мере спољашње поузданости), у пракси се параметри дисторзије рачунају коришћењем изрази облика (Kok 1984)

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \nabla l_i^T \cdot \mathbf{K}_i^{-1} \cdot \nabla l_i - \lambda_0, \quad (6.2.2-6)$$

где је:  $\lambda_0$  - параметар нецентралности коришћен у (6.2.1-1), (6.2.1-2) и (6.2.1-4), при рачунању  $MDE$ . Коресподентно са (6.2.2-5), ефекат утицаја  $MDE$  на оцену непознатих координата (на пример при оцени базне линије) може се исказати изразом облика (за случај корелираних опажања)

$$\tilde{\lambda}_{ii} = \left( \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \nabla l_i^T \cdot \mathbf{K}_i^{-1} \cdot \nabla l_i - \lambda_0 \right) - \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \nabla l_i^T \cdot \mathbf{K}_i^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{N}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{A}_2^T \cdot \mathbf{K}_i^{-1} \cdot \nabla l_i \quad (6.2.2-7)$$

$\mathbf{N}_{22}$  и  $\mathbf{A}_{22}$  су делови матрице нормалних једначина и дизајн матрице  $\mathbf{A}$  који се односе на параметре неодређености, респективно.

За случај некорелираних опажања, глобалне мере спољашње поузданости се добијају на основу изрази облика

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{1-r_i}{r_i} \cdot \lambda_0 = \frac{a_i}{r_i} \cdot \lambda_0, \quad (6.2.2-8)$$

при чему се  $a_i$  назива локалном апсорбцијом или апсорбционим бројем који указује на простирање грубе грешке при оцени параметара и добија се као

$$a_i = (\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{K}_i^{-1})_{ii} \quad (6.2.2-9)$$

При оцени базне линије, глобални параметри дисторзије не зависе од избора датума. Према неким искуствима (на *Универзитету за технологију* у Делфту), при  $\alpha_0 = 0.1\%$  и  $1-\beta_0 = 80\%$ , појединачне вредности параметара дисторзије треба да су мање од 100 (у геодетским мрежама), (*Baarda 1977*). Како је при *GPS* оценама базних линија број сувишних мерења велики, при планирању мерења ове вредности могу бити значајно ниже.

## 6.3. ОЦЕНА КОМПОНЕНТИ ДИСПЕРЗИЈА БАЗНИХ ЛИНИЈА

### 6.3.1. Модел компоненти дисперзија

Као што је већ напред истакнуто, стохастичке особине *GPS* резултата мерења се моделују коваријационом матрицом облика

$$\mathbf{K}_i = E([\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{x}] \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{x}]') = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q} \quad (6.3.1-1)$$

Матрица  $\mathbf{Q}$  је позната кофакторска матрица, а  $\sigma_0^2$  је апприори фактор дисперзије који се "проверава" и обично замењује својом оценом - а постериори фактором дисперзије  $\hat{\sigma}_0^2$ , који се добија као

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}' \mathbf{P} \mathbf{v}}{f} \quad (6.3.1-2)$$

Изрази (6.3.1-1) и (6.3.1-2) нису сасвим адекватни и неодражавају у потпуности реалност. Први покушај замене модела (6.3.1-1) флексибилнијим и сложенијим учинио је *F.R. Helmert (1924)*, али тај покушај, због сложених рачунских операција, није наишао на ширу примену. Касније је *C.A. Rao (1970)*, независно од Хелмерта предложио нов стохастички модел, идентичан Хелмертовом, уз услов да је распоред резултата мерења нормалан.

Нека је Гаус-Марковљев модела облика

$$E(\mathbf{l}) = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (6.3.1-3)$$

где је:  $\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$ , а коваријациона матрица је једнака збиру  $k$  компоненти дисперзија, од којих је свака помножена са одговарајућом кофакторском матрицом  $\mathbf{Q}_i$ . Вектор истинитих грешака  $\boldsymbol{\varepsilon}$  представља збир линеарних функција различитих елементарних грешака  $\varepsilon_i$ , тј.



$$E(\varepsilon\varepsilon^t) = \mathbf{K}_l = \sum_{i=1}^k \sigma_{oi}^2 \mathbf{Q}_i, \quad (6.3.1-4)$$

при чему сваки  $\varepsilon_i$  припада извору грешака познатих вредности матрице коефицијената  $\mathbf{G}_i$ , тј.

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^k \mathbf{G}_i \varepsilon_i. \quad (6.3.1-5)$$

На основу (6.3.1-5) следи да је

$$E(\varepsilon\varepsilon^t) = \mathbf{K}_l = \sum_{i=1}^k \mathbf{G}_i E(\varepsilon_i \varepsilon_i^t) \mathbf{G}_i^t, \quad (6.3.1-6)$$

па када се уведу следеће претпоставке,

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_i \varepsilon_i^t) &= \sigma_{oi}^2 \mathbf{I} \\ E(\varepsilon_i \varepsilon_j^t) &= \mathbf{0} \text{ за } i \neq j, \end{aligned} \quad (6.3.1-7)$$

$$\mathbf{G}_i \mathbf{G}_i^t = \mathbf{Q}_i,$$

$$E(\varepsilon_i) = \mathbf{0}$$

израз (6.3.1-1) гласи

$$\mathbf{K}_l = \sigma_{o1}^2 \mathbf{Q}_1 + \sigma_{o2}^2 \mathbf{Q}_2 + \dots + \sigma_{ok}^2 \mathbf{Q}_k. \quad (6.3.1-8)$$

За случај тродимензионалне мреже са хетерогеним мерењима, размориће се пример са косим мерењима дужина са електронским даљиномером ME5000 и GPS пријемницима. Обе групе мерења имају специфичне карактеристике грешака и морају се посебно моделовати. Коваријациона матрица је димензија  $n \times n$ , при чему је  $n = p+q$  и има следећи облик

$$\mathbf{K}_l = \sigma_{o,ME}^2 \cdot \mathbf{Q}_{ME} + \sigma_{o,GPS}^2 \cdot \mathbf{Q}_{GPS}. \quad (6.3.1-9)$$

Кофакторске матрице имају следећи облик

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ME} &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Q}}_{ME} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{GPS} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{Q}}_{GPS} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.3.1-10)$$

где су кофакторске матрице  $\mathbf{Q}_{ME}$  и  $\mathbf{Q}_{GPS}$  дате на основу стохастичких својстава резултата мерења.

Како је коваријациона матрица састављена од мерених дужина, тада су и за EDM и за GPS дужине матрице  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  дефинисане као

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \text{diag}[1, 1, 1, \dots, 1] \\ \mathbf{G}_2 &= \text{diag}[D_1, D_2, D_3, \dots, D_n], \end{aligned} \quad (6.3.1-11)$$

па су кофакторске матрице за EDM и GPS дужине идентичне и износе

$$Q_1 = I, \quad (6.3.1-12)$$

$$Q_2 = \text{diag}[D_1^2, D_2^2, D_3^2, \dots, D_n^2].$$

Конечан облик коваријационе матрице, у збирном моделу, који садржи и *EDM* и *GPS* дужине изгледа

$$K_1 = \sigma_{01ME}^2 Q_1 + \sigma_{02ME}^2 Q_2 + \sigma_{01GPS}^2 Q_1 + \sigma_{02GPS}^2 Q_2. \quad (6.3.1-13)$$

### 6.3.2. Оцена параметара модела

Оцена компоненти дисперзија *EDM* и *GPS* дужина по *MINQE* моделу (*Rao, 1970*), спроводи се кроз следеће кораке:

- На основу приближних вредности компонената дисперзија, формирати коваријациону матрицу  $K_1$  и помоћну матрицу  $R$ , облика

$$R = K_1^{-1} - K_1^{-1} A (A' K_1^{-1} A)^{-1} A' K_1^{-1}. \quad (6.3.2-1)$$

- Срачунати матрицу  $H$  и вектор  $f$ , као

$$H = (h_{ij}) \Rightarrow h_{ij} = \text{tr} RV_i RV_j \Rightarrow H = \begin{bmatrix} \text{tr}(RV_1 RV_1) & \text{tr}(RV_1 RV_2) & \text{tr}(RV_1 RV_3) & \text{tr}(RV_1 RV_4) \\ \text{tr}(RV_2 RV_1) & \text{tr}(RV_2 RV_2) & \text{tr}(RV_2 RV_3) & \text{tr}(RV_2 RV_4) \\ \text{tr}(RV_3 RV_1) & \text{tr}(RV_3 RV_2) & \text{tr}(RV_3 RV_3) & \text{tr}(RV_3 RV_4) \\ \text{tr}(RV_4 RV_1) & \text{tr}(RV_4 RV_2) & \text{tr}(RV_4 RV_3) & \text{tr}(RV_4 RV_4) \end{bmatrix},$$

$$f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_k) \Rightarrow f_i = f' R Q_i R f \Rightarrow f = \begin{bmatrix} f' R V_1 R f \\ f' R V_2 R f \\ f' R V_3 R f \\ f' R V_4 R f \end{bmatrix} \quad (6.3.2-2)$$

где су:

$$f = I_0 - I,$$

$$V_1 = \sigma_{01ME}^2 Q_1$$

$$V_2 = \sigma_{02ME}^2 Q_2$$

$$V_3 = \sigma_{01GPS}^2 Q_1$$

$$V_4 = \sigma_{02GPS}^2 Q_2 \quad (6.3.2-3)$$

- Итеративним поступком наћи оцене

$$s = H^{-1} f, \quad (6.3.2-4)$$

све док не буде задовољен услов  $s = [1, 1, 1, 1]^t$ , при чему је

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}. \quad (6.3.2-5)$$

- Компоненте дисперзија у  $k+1$  итерацији се рачунају као

$$\sigma_{i(k+1)}^2 = s_{i(k+1)} \sigma_{i(k)}^2, \text{ за } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.3.2-6)$$

при чему се почетне (нулте) вредности  $\sigma_{0i}^2$  (за  $i = 1, 2$ ) узимају произвољно, али тако да је  $s_{i(1)}$  (за  $i = 1, 2$ ) веће од нуле.





## 7. АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА

---

У практичном делу рада, реализоване су следеће активности:

### А) Мерења:

- У мрежи кратких дужина (*Експериментални полигон Војногеографског института* - дужине од 1.6 km до 6 km) извршена су терестричка (*ME5000*) и *GPS* мерења (*WM102*) у три различите временске епохе, (поглавља 7.1.1 до 7.2.3).
- У мрежи средњих дужина (геодетски четвороугао - дужине од 14 km до 42 km) извршена су *GPS* мерења са *WM102* и *Trimble 4400 GPS* пријемницима у две различите епохе, (поглавље 7.2.4).
- У мрежи великих дужина (мрежа референтних тачака за војне потребе - дужине преко 100 km) извршена су *GPS* мерења са девет *GPS* пријемника у једној епохи (осам *Trimble 4400* и један *Trimble 4000SSE*), (поглавље 2. 7.2.5).
- На основици у Ковину, извршена су *GPS* мерења са четири *GPS* пријемника *Trimble 4400* у једној епохи, (поглавље 7.5).

### Б) Анализа резултата мерења:

- На основу резултата мерења у мрежи кратких дужина, по *MINQE* методи су оцењене компоненте дисперзија *EDM* и *GPS* мерења базних линија (поглавље 7.2.3). Анализирани су ефекти утицаја тропосфере и јоносфере на оцену вектора базне линије (поглавље 7.3) и анализирани су могућности примене мера поузданости при планирању и обради *GPS* мерења, (поглавље 7.4).
- На основу резултата мерења у мрежи средњих дужина, анализирана је сагласност оцена базних линија мерених са два различита *GPS* пријемника и једнофреквентних и двофреквентних решења добијених једним пријемником - *WM102* (поглавље 7.2.4).
- Анализом методе мерења, уочени су доминантни извори грешака при мерењу базних линија у мрежи великих дужина, на основу чега је направљен одговарајући план мерења, дефинисани су услови при мерењу (период мерења, угао елевације, прецизне ефемериде и тачност положаја референтне тачке и сл.), начин обраде мерења и оцењене су компоненте дисперзија *GPS* резултата мерења (поглавље 7.2.5).
- Предложен је један поступак верификације *GPS* антена и оцењени су адациона константа и компонента дисперзије мерења базних линија која не зависи од величине дужина (поглавље 7.5) и
- Симулирањем грешака *GPS* мерења по *AIUB* моделу и моделу добијеном из анализе методе, анализирана је сагласност два модела (поглавље 7.6).

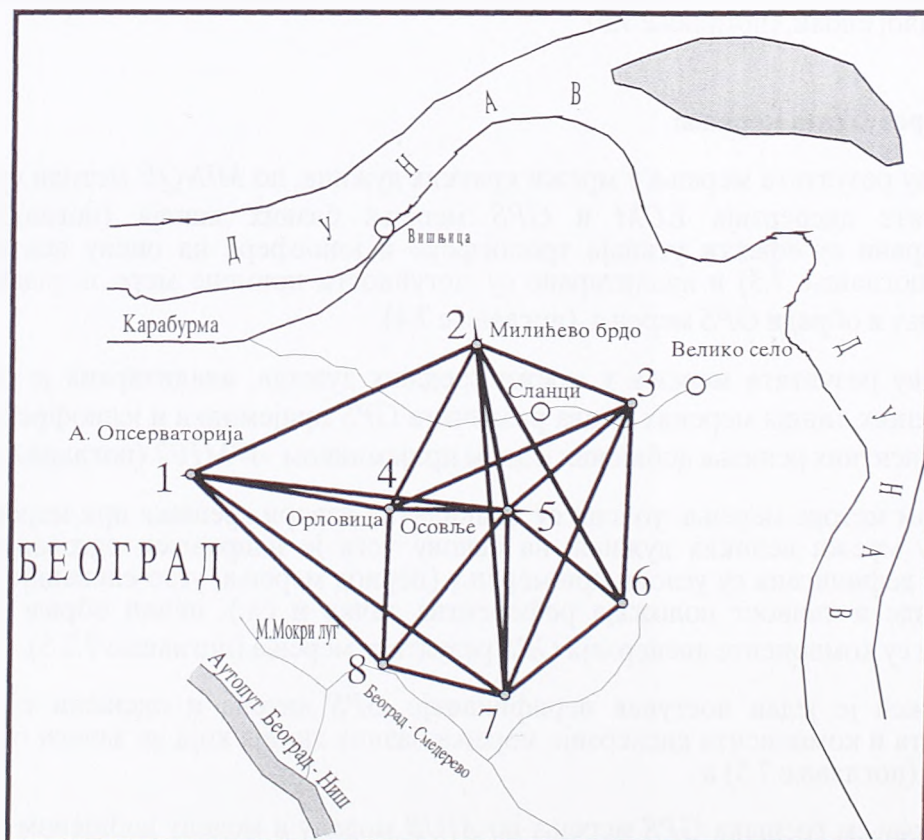
## 7.1. ТЕРЕСТРИЧКА МЕРЕЊА

### 7.1.1. Опис мреже Експерименталног полигона Војногеографског института - ЕПВГИ

Мрежа садржи 8 стубова (слика 7.1.1-1). Сваки стуб чине две азбестне цеви ( $\phi = 300\text{mm}$  и  $\phi = 400\text{mm}$ ) од којих је ужа попуњена бетоном и армирана у “бетонску стопу” димензија  $1\text{m} \times 1\text{m} \times 40\text{cm}$ , укопану на дубину од  $1.75\text{m}$ . Између два стуба је слободан простор. На врху стуба је уграђен уређај за присилно центрисање. Стубови су висине  $3\text{m}$ , од чега је око  $1.30\text{m}$  изнад земље (слика 7.1.1-2).

Табела 7.1.1-1: Основне карактеристике ЕПВГИ

Број стубова	8
Максимална дужина стране	5200 m
Минимална дужина стране	1600 m
Максимална висина тачке	279 m
Минимална висина тачке	156 m
Мogućност присилног центрисања	ДА
Максималан зенитни угао	$93^{\circ}10'$



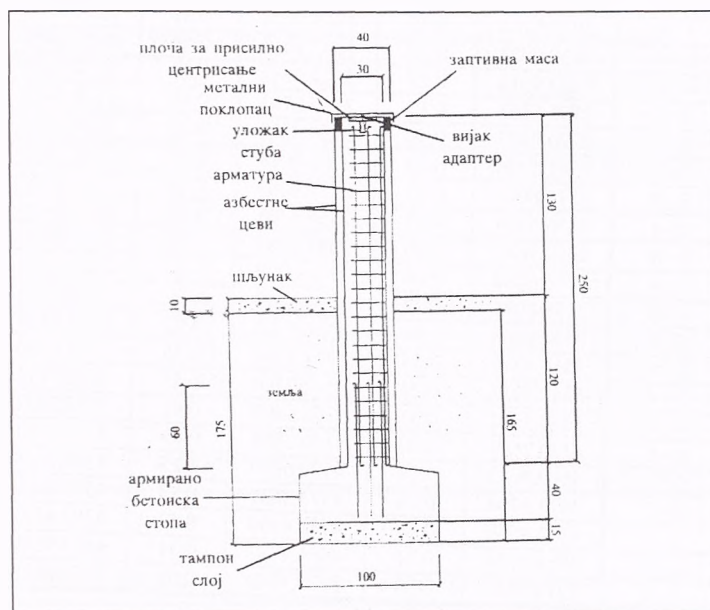
Слика 7.1.1-1.: Положај мреже ЕПВГИ

Анализа квалитета геометрије мреже (урађена на Институту за геодезију - ГФ у Београду по програму ГЕО29) показала је да при мерењу дужина са даљинометром  $DD0$ , чији је стандард  $\sigma = 4\text{mm}$ , и хоризонталних углова са теодолитом  $T2000$ , чији је стандард



$\sigma = 0.96''$ , просечна релативна грешка мерење стране износи 1:973000, а оцена средње положајне грешке износи 2.5mm.

Након израде пројекта и оцене квалитета геометрије пројектоване мреже, од **Републичке геодетске управе** (сада Републички геодетски завод) је добијена сагласност за престабилизацију раније постављених геодетских ознака. Стабилизација стубова у мрежи извршена је у априлу и мају 1990. године.



Слика 7.1.1-2.: Приказ стуба у мрежи ЕПВГИ

### 7.1.2. Мерења у мрежи Експерименталног полигона Војногеографског института

У периоду од 1991. до 1994. године, на Експерименталном полигону Војногеографског института је изведено неколико терестричких кампања мерења. Поред тригонометријског и геометријског нивелмана, мерења зенитних и хоризонталних углова, извршена су мерења са електрооптичким даљиномерима *ME5000* и *DI20*. Мерења су извршена по посебном програму, са десет регистрација сваке стране, обострано.

Инструментима су пре и после мерења верификоване фреквенције и констатована је потпуна сагласност са номиналним вредностима. Адициона константа *ME5000* је оцењена из резултата мерења на *EDM* бази у Ковину и констатовано је да иста није значајна.

Притисак ваздуха је мерен барометрима типа *Thomen* (2A2 и TX-22), а температура ваздуха са психрометрима типа *Lambrecht* (тип 761). Прибор је метролошки испитан пре и после мерења. У току мерења дужина, уз помоћ радио уређаја, синхронизовано са регистрацијама узимани су параметри атмосфере. Резултати мерења

су поправљени за утицај прве<sup>1</sup> и друге<sup>2</sup> корекције брзине и за прелазак са лука на тетиву (Rueger, 1987) и сведени су на врх стуба. Резултати обраде су дати у табели 7.1.2-1, као средња вредност из мерења дужина напред-назад, са  $f = 18$  степени слободе.

Табела 7.1.2-1: Резултати мерења дужина са МЕ500 на ЕПВГИ - косе дужине

Р.Б.	од - до	МЕКОМЕТАР - МЕ5000					
		април 1991		септембар 1991		мај 1994	
		дужина (m)	s (mm)	дужина (m)	s (mm)	дужина (m)	s (mm)
1.	4 - 5	1644.3444	0.18	1644.3461	0.16	1644.3480	0.03
2.	7 - 8	1675.1920	0.16	1675.1942	0.12	1675.1940	0.39
3.	5 - 6	1973.5704	0.25	1973.5774	0.31	1973.5720	0.98
4.	6 - 7	2037.0924	0.09	2037.1019	0.30	2037.1027	1.49
5.	4 - 8	2122.9916	0.27	2122.9942	0.23	2122.9888	0.19
6.	3 - 5	2195.6763	0.15	2195.6763	0.19	2195.6684	0.06
7.	2 - 3	2220.2873	0.40	2220.2882	0.38	2220.2916	0.59
8.	2 - 5	2381.7018	0.25	2381.7018	0.15	2381.7021	0.53
9.	5 - 7	2511.8007	0.27	2511.8080	0.19	2511.8052	1.41
10.	2 - 4	2556.5754	0.13	2556.5745	0.27	2556.5786	0.08
11.	5 - 8	2697.9881	0.30	2697.9937	0.49	2697.9906	0.74
12.	1 - 4	2756.0784	0.09	2756.0798	0.32	2756.0840	0.77
13.	3 - 6	2798.8096	0.27	2798.8072	0.32	2798.7976	2.90
14.	6 - 8	3332.9166	0.34	3332.9305	0.51	3332.9226	2.92
15.	4 - 6	3417.4234	0.54	3417.4296	0.45	3417.4248	0.36
16.	3 - 4	3542.7116	0.24	3542.7160	0.45	3542.7111	0.23
17.	1 - 8	3763.5332	0.31	3763.5409	0.61	3763.5431	1.00
18.	2 - 6	4120.2609	0.60	4120.2588	0.49	4120.2581	3.85
19.	1 - 2	4199.6982	0.16	4199.6990	1.25	4199.6948	2.22
20.	3 - 7	4373.3704	0.56	4373.3639	0.33	4373.3600	2.64
21.	1 - 5	4382.4539	0.48	4382.4550	0.49	4382.4591	0.94
22.	2 - 7	4854.9156	0.71	4854.9083	0.11	4854.9169	0.70
23.	1 - 7	5270.3555	0.58	5270.3584	0.54	5270.3598	0.83

## 7.2. GPS МЕРЕЊА

### 7.2.1. GPS мерења у мрежи кратких дужина - мрежа Експерименталног полигона Војногеографског института

GPS мерења на ЕПВГИ<sup>3</sup>, изведена су у три независне кампање, и то у: јулу 1990. године, мају 1991. године и мају 1994. године. Опште карактеристике мерења на ЕПВГИ за све три кампање, приказане су у табели 7.2-1-1.

Из резултата мерења, помоћу програма за обраду *POPs -V3.31*, оцењене су базне линије између тачака у мрежи, а резултати оцена су приказани у табелама од 7.2.1-2 до 7.2.1-5.

<sup>1</sup> Прва корекција брзине је коресиоденитна разлици референитног индекса рефракитије инитрументита -  $n_{REF}$  и актиуелног индекса рефракитије у итеренским условим -  $n$ , који се добија мерењем итаремитара аитмосфере.

<sup>2</sup> Друга корекција брзине јесте системаитка гитешка кој наститаје као итоследица мерења итаремитара аитмосфере на крајевима ситране, иитако да се средња вредности за  $n$  не односи на криву радијуса  $r$  (иититана ииталаса), већ  $R$  (земљин иитолуитречник), (Rueger, 1987).

Табела 7.2.1-1: Основне карактеристике GPS кампања на ЕПВГИ

Карактеристика	1. кампања	2. кампања	3. кампања
Врста пријемника	WM 102	WM 102	WM 102
Број пријемника	3	4	4
Број сесија	5	4	4
Број сателита	4-6	4-7	4-7
Број станица	8	8	8
Орбите	Емитијуће	Емитијуће	Емитијуће
Број нерешених неодређености	максимално до 2	максимално до 2	максимално до 2

Табела 7.2.1-2: Резултати GPS мерења на ЕПВГИ - јули 1990 (L1/L2 фреквенције)\*

Р.Б.	од - до	Сесија	$n_{DDO}$	Број нерешених N	$s_{DDO}$ (m)	Коса дужина l (m)	$s_l$ (m)
1.	4 - 5	3	793	0	0.009	1644.3428	0.0004
2.	7 - 8						
3.	5 - 6						
4.	6 - 7						
5.	4 - 8	3	868	0	0.008	2122.9832	0.0004
6.	3 - 5	2	728	2	0.007	2195.6556	0.0005
7.	2 - 3	2	830	0	0.009	2220.2839	0.0004
8.	2 - 5	2	736	0	0.006	2381.6945	0.0005
9.	5 - 7						
10.	2 - 4						
11.	5 - 8	3	710	2	0.007	2697.9830	0.0005

Табела 7.2.1-3: Резултати GPS мерења на ЕПВГИ - мај 1991 (L1/L2 фреквенције)

Р.Б.	од - до	Сесија	$n_{DDO}$	Број нерешених N	$s_{DDO}$ (m)	Коса дужина l (m)	$s_l$ (m)
1.	4 - 5	7	160	0	0.005	1644.3438	0.0008
2.	7 - 8	3	414	6	0.004	1675.1887	0.0014
3.	5 - 6	1	522	0	0.006	1973.5619	0.0004
4.	6 - 7	5	706	0	0.006	2037.0921	0.0003
5.	4 - 8	3	606	0	0.005	2122.9849	0.0006
6.	2 - 3	5	470	1	0.007	2220.2799	0.0004
7.	2 - 5	1	576	0	0.006	2381.6908	0.0004
8.	5 - 8	7	596	0	0.006	2697.9782	0.0004
9.	1 - 4	7	280	0	0.007	2756.0673	0.0010
10.	3 - 6	5	688	0	0.008	2798.8007	0.0005
11.	4 - 7	3	648	0	0.006	2982.5962	0.0004
12.	3 - 4	3	686	0	0.006	3542.7095	0.0003
13.	1 - 8	7	658	0	0.008	3763.5237	0.0005
14.	2 - 6	1	558	0	0.008	4120.2392	0.0006
15.	1 - 2	1	626	0	0.010	4199.6854	0.0005
16.	3 - 7	5	666	0	0.009	4373.3540	0.0006
16.	1 - 5	7	596	0	0.008	4382.4396	0.0004
17.	2 - 7	5	558	0	0.008	4854.9131	0.0006
24.	3 - 8	3	596	2	0.008	4884.4505	0.0005

<sup>3</sup> Пројекат мреже, мерења и обрада резултата мерења, извршени су уз помоћ и подршку проф. др Глигорија Перовић, дил.инж. Елаборат мерења се налази у Војногеографском институту.



Табела 7.2.1-4: Резултати GPS мерења на ЕПВГИ - мај 1991 (L1 фреквенција)

Р.Б.	од - до	Сесија	$n_{DDO}$	Број нерешених N	$s_{DDO}$ (m)	Коса дужина l (m)	$s_l$ (m)
1.	4 - 5	7	80	0	0.003	1644.3416	0.0008
2.	7 - 8	3	115	1	0.003	1675.2562	0.0007
3.	5 - 6	1	261	3	0.003	1973.5284	0.0051
4.	6 - 7	5	353	0	0.004	2037.0919	0.0003
5.	4 - 8	3	303	1	0.004	2122.9893	0.0005
6.	2 - 3	5	235	0	0.005	2220.2805	0.0004
7.	2 - 5	1	288	0	0.005	2381.6931	0.0005
8.	5 - 8	7	298	0	0.004	2697.9809	0.0003
9.	1 - 4	7	140	0	0.006	2756.0713	0.0013
10.	3 - 6	5	344	0	0.006	2798.8072	0.0006
11.	3 - 4	3	343	0	0.005	3542.7109	0.0003
12.	1 - 8	7	329	0	0.007	3763.5254	0.0006
13.	2 - 6	5	354	0	0.009	4120.2555	0.0007
14.	1 - 2	1	307	0	0.008	4199.6913	0.0006
15.	3 - 7	3	175	2	0.005	4373.3656	0.0037
16.	1 - 5	1	301	0	0.008	4382.4373	0.0005
17.	2 - 7	5	365	0	0.008	4854.9090	0.0007

Табела 7.2.1-5: Резултати GPS мерења на ЕПВГИ - мај 1994 (L1 фреквенција)

Р.Б.	од - до	Сесија	$n_{DDO}$	Број нерешених N	$s_{DDO}$ (m)	Коса дужина l	$s_l$ (m)
1.	5 - 6	3	609	0	0.005	1973.5661	0.0003
2.	6 - 7	3	427	2	0.004	2037.1044	0.0007
3.	4 - 8	1	603	0	0.004	2122.9925	0.0004
4.	3 - 5	3	795	0	0.008	2195.6716	0.0005
5.	2 - 3	4	715	0	0.007	2220.2927	0.0003
6.	5 - 7	3	386	2	0.004	2511.7998	0.0005
7.	2 - 4	1	859	1	0.005	2556.5835	0.0003
8.	1 - 4	1	448	0	0.006	2756.0850	0.0003
9.	3 - 6	4	609	2	0.007	2798.7885	0.0006
10.	1 - 8	1	604	0	0.008	3763.5406	0.0006
11.	2 - 6	4	645	1	0.004	4120.2562	0.0004
12.	1 - 2	4	690	0	0.006	4199.7037	0.0003
13.	3 - 7	3	593	1	0.006	4373.3574	0.0005
14.	2 - 8	1	589	0	0.005	4573.5412	0.0004
15.	1 - 3	4	604	1	0.008	5977.1570	0.0004
16.	1 - 6	4	629	1	0.006	6148.5824	0.0003

### Услови при мерењу

Услови при мерењу су били следећи:

- у близини антена није било препрека од којих би се одбијали сигнали,
- моторна возила су била најмање 10m удаљена од антена,
- батерије су биле адекватно напуњене, а обезбеђени су и резервни извори напајања,
- све антене су биле оријентисане у истом смеру,
- мерења су почињала у раним јутарњим часовима,
- висине антена су мерене два пута, пре и после завршетка опажачке сесије,
- центрисање антена је било присилно и

- праћени су сателити са елевационим углом већим од  $15^\circ$ .

#### Контрола мерења

Процес мерења је потпуно аутоматизован. Инструменти *WM102* дају могућност увида у неке показатеље квалитета на основу којих је вршена контрола мерења, и то на основу:

- показатеља конзистентности регистрованих сигнала,
- показатеља о сагласности узастопних регистрација и
- показатеља квалитета сигнала и исправности функционисања појединих модула инструмента.

#### Обрада резултата мерења

Обрада резултата мерења је извршена на стандардни начин, софтверским пакетом *PoPs - V.3.31*, према Упутству произвођача. Решавање неодређености јесте кључни део програма за обраду, код којег начин фиксирања циклусних скокова (прекида у регистрацији сигнала) и решавање неодређености (*ambiguities*) зависе од више фактора, и то: дужине трајања мерења, конзистентности сигнала, утицаја јоносфере, исправности осцилатора пријемника као и примењене стратегије обраде. Код програма *PoPs*, за решавање неодређености, употребљавају се опажања троструких разлика, а као показатељ загађености резултата мерења, користе се разлике двоструких разлика између двају узастопних епоха више различитих парова сателита, при чему се један од њих аутоматски бира као референтни. Честе промене знака разлика указују на постојање шумова у регистрацији сигнала и значајно утичу на тачност оцене параметара. Прекиди у регистрацији сигнала изазивају појаву нове неодређености коју треба решити. То је једино могуће уколико постоји довољан број мерења и уколико су она квалитетна. С тим у вези, искуства показују, да је у статичном релативном премеру неопходно остварити значајно већи број опажања од неопходног минимума, чиме ће се у великој мери повећати поузданост оцена и створити услови за оцену или редукцију пратећих параметара (неодерђености, утицај рефлексije сигнала и сл.).

Резултати обраде *GPS* мерења у обе мреже, као и упоредни резултати мерења са *ME5000* су дати у табелама 7.2.1-6 и 7.2.1-7.

Табела 7.2.1-6 : Оцењене GPS дужине базних линија - из изравнања мреже (L1 фреквенција)

Р.Б.	од - до	Јули 1990		Септембар 1991		Мај 1994	
		Дужина (m)	s (m)	Дужина (m)	s (m)	Дужина (m)	s (m)
1.	4 - 5	1644.3453	0.0005	1644.3389	0.0006	1644.3491	0.0005
2.	7 - 8	1675.1833	0.001	1675.1920	0.0006	1675.1884	0.0008
3.	5 - 6	1973.5652	0.0008	1973.5691	0.0005	1973.5645	0.0005
4.	6 - 7	2037.0958	0.001	2037.0948	0.0006	2037.1012	0.0005
5.	4 - 8	2122.9874	0.0009	2122.9889	0.0009	2122.9921	0.0005
6.	3 - 5	2195.6627	0.0009	2195.6760	0.0006	2195.6701	0.0004
7.	2 - 3	2220.2831	0.0004	2220.2808	0.0004	2220.2904	0.0004
8.	2 - 5	2381.6949	0.0008	2381.6975	0.0005	2381.7042	0.0008
9.	5 - 7	2511.7915	0.0011	2511.7990	0.0006	2511.7956	0.0009
10.	2 - 4	2556.5682	0.0011	2556.5743	0.0006	2556.5779	0.0005
11.	5 - 8	2697.9884	0.0006	2697.9843	0.0005	2697.9868	0.0010
12.	1 - 4	2756.0738	0.002	2756.0737	0.0007	2756.0845	0.0003
13.	3 - 6	2798.7987	0.001	2798.8043	0.0008	2798.7898	0.0005
14.	6 - 8	3332.9164	0.0007	3332.9151	0.0005	3332.9195	0.0006
15.	4 - 6	3417.4182	0.0009	3417.4171	0.0007	3417.4241	0.0006
16.	3 - 4	3542.7028	0.001	3542.7092	0.0006	3542.7116	0.0005
17.	1 - 8	3763.5223	0.002	3763.5227	0.0007	3763.5414	0.0007
18.	2 - 6	4120.2522	0.0005	4120.2525	0.0005	4120.2542	0.0008
19.	1 - 2	4199.6869	0.0012	4199.6944	0.0005	4199.7042	0.0003
20.	3 - 7	4373.3498	0.001	4373.3627	0.0008	4373.3540	0.0008
21.	1 - 5	4382.4460	0.0018	4382.4397	0.0005	4382.4606	0.0005
22.	2 - 7	4854.8960	0.0007	4854.9094	0.0006	4854.9112	0.0008
23.	1 - 7	5270.3288	0.0021	5270.3394	0.0007	5270.3541	0.0009
		$\sigma_{DDO}=2370$ N=3 $\sigma_{DDO}=0.007$		$\sigma_{DDO}=3347$ N=4 $\sigma_{DDO}=0.007$		$\sigma_{DDO}=7236$ N=2 $\sigma_{DDO}=0.008$	

Једнофреквентна мерења су изравната по следећем моделу:

- Параметри атмосфере: Глобални модел,
- Модел јоносфере: *Single-layer*,
- Модел тропосфере: *Saastamoinen*,
- Ефемериде: *Broadcast*,
- Корелација: *Single-Double*,

Двофреквентна мерења су изравната по следећем моделу:

- Параметри атмосфере: Глобални модел,
- Модел јоносфере: *Single-layer*,
- Модел тропосфере: *Saastamoinen*,
- Ефемериде: *Broadcast*,
- Корелација: *Single-Double*,



Табела 7.2.1-7 : Оцењене GPS дужине базних линија - из изравнања мреже ЕПВГИ (L1/L2 фреквенције)

Р.Б.	од - до	Јули 1990		Мај 1991	
		Дужина (m)	s (m)	Дужина (m)	s (m)
1.	4 - 5	1644.3416	0.0005	1644.3434	0.0004
2.	7 - 8	1675.1718	0.0009	1675.1925	0.0005
3.	5 - 6	1973.5641	0.0006	1973.5675	0.0004
4.	6 - 7	2037.0941	0.0009	2037.0949	0.0003
5.	4 - 8	2122.9862	0.0008	2122.9865	0.0004
6.	3 - 5	2195.6600	0.0007	2195.6745	0.0004
7.	2 - 3	2220.2828	0.0004	2220.2790	0.0004
8.	2 - 5	2381.6998	0.0006	2381.6966	0.0004
9.	5 - 7	2511.7849	0.0009	2511.7969	0.0005
10.	2 - 4	2556.5637	0.0009	2556.5742	0.0005
11.	5 - 8	2697.9862	0.0005	2697.9835	0.0005
12.	1 - 4	2756.0623	0.0016	2756.0644	0.0003
13.	3 - 6	2798.7956	0.0008	2798.8040	0.0004
14.	6 - 8	3332.9101	0.0006	3332.9159	0.0004
15.	4 - 6	3417.4124	0.0008	3417.4200	0.0003
16.	3 - 4	3542.6989	0.0008	3542.7107	0.0004
17.	1 - 8	3763.5122	0.0014	3763.5134	0.0007
18.	2 - 6	4120.2474	0.0005	4120.2506	0.0004
19.	1 - 2	4199.6732	0.0011	4199.6908	0.0004
20.	3 - 7	4373.3425	0.0009	4373.3611	0.0004
21.	1 - 5	4382.4308	0.0015	4382.4352	0.0003
22.	2 - 7	4854.8837	0.0006	4854.9060	0.0005
23.	1 - 7	5270.3057	0.0016	5270.3310	0.000
		$n_{DDO}=4740$ N=5 $s_{DDO}=0.009$		$n_{DDO}=6572$ N=1 $s_{DDO}=0.007$	

### Оцена компоненти дисперзија мерења базних линија

Мрежа ЕПВГИ је изравната као трилатерациона у 3Д моделу, по програму написаном у МАТЛАБ-у . У изравнање су укључене све косо-мерене дужине (46 дужна мерених са ME5000), сведене на тетиву између два стуба. Изравнање је извршено по Гаус-Марковљевом моделу са истовременим оцењивањем компоненти дисперзија (поглавље 6.3) . Упоредни резултати мерења са ME5000 и GPS - WM102 и њихове разлике, дати су у табели 7.2.1-8. Оцене дужина мерених са ME5000 и разлике оцена дужина мерених са ME5000 и GPS - WM102, дати су у табелама 7.2.1-9 и 7.2.1-10 , респективно.

Табела 7.2.1-8 : Преглед резултата мерења косих дужина на ЕПВГИ : А - са GPS у мају 1991 и L1 фреквенцијом; Б- са GPS у мају 1991 и L1/L2 фреквенцијом; Ц- са GPS у мају 1994 и L1 фреквенцијом; Д са ME5000 у априлу 1991; Е - са ME5000 у мају 1994

ОД-ДО	А	Б	Ц	Д	Е	А-Д	Б-Д	Ц-Е
4 - 5	1644.3416	1644.3438		1644.3444	1644.3480	-2.8	-0.6	
7 - 8	1675.2562*	1675.1887		1675.1920	1675.1940		-3.3	
5 - 6	1973.5284*	1973.5619	1973.5661	1973.5704	1973.5720		-8.5	-5.95
6 - 7	2037.0919	2037.0921	2037.1044	2037.0924	2037.1027	-0.5	-0.3	1.65
4 - 8	2122.9893	2122.9849	2122.9925	2122.9916	2122.9888	-2.25	-6.65	3.75
3 - 5			2195.6716	2195.6763	2195.6684			3.2
2 - 3	2220.2805	2220.2799	2220.2927	2220.2873	2220.2916	-6.8	-7.4	1.15
2 - 5	2381.6931	2381.6908		2381.7018	2381.7021	-8.7	-11.0	
5 - 7			2511.7998	2511.8007	2511.8052			-5.35
2 - 4			2556.5835	2556.5754	2556.5786			4.95
5 - 8	2697.9809	2697.9782		2697.9881	2697.9906	-7.2	-9.9	
1 - 4	2756.0713	2756.0673	2756.085	2756.0784	2756.0840	-7.1	-11.1	0.95
3 - 6	2798.8072	2798.8007	2798.7885	2798.8096	2798.7976	-2.45	-8.95	-9.1
6 - 8				3332.9166	3332.9226			
4 - 6				3417.4234	3417.4248			
3 - 4	3542.7109	3542.7095		3542.7116	3542.7111	-0.7	-2.1	
1 - 8	3763.5254	3763.5237	3763.5406	3763.5332	3763.5431	-7.8	-9.5	-2.5
2 - 6	4120.2555	4120.2392	4120.2562	4120.2609	4120.2581	-5.45	-21.75	-1.95
1 - 2	4199.6913	4199.6854	4199.7037	4199.6982	4199.6948	-6.9	-12.85	8.85
3 - 7	4373.3656	4373.354	4373.3574	4373.3704	4373.3600	-4.8	-16.45	-2.65
1 - 5	4382.4373	4382.4396		4382.4539	4382.4591	-16.6	-14.3	
2 - 7	4854.909	4854.9131		4854.9156	4854.9169	-6.6	-2.5	
1 - 7				5270.3555	5270.3598			

Табела 7.2.1-9 : Оцењене дужине базних линија и компоненте дисперзија (IMINQE) мерења са ME5000 у ЕПВГИ- из изравнања у 3Д моделу по посебном програму написаном у МАТЛАБ-у В.4.2

Р.Б.	од - до	АПРИЛ 1991	СЕПТЕМБАР 1991	МАЈ 1994
1.	4 - 5	1644.3477	1644.3468	1644.3479
2.	7 - 8	1675.1950	1675.1944	1675.1935
3.	5 - 6	1973.5735	1973.5776	1973.5720
4.	6 - 7	2037.0926	2037.1025	2037.1026
5.	4 - 8	2122.9921	2122.9953	2122.9884
6.	3 - 5	2195.6763	2195.6763	2195.6684
7.	2 - 3	2220.2872	2220.2881	2220.2915
8.	2 - 5	2381.7012	2381.7004	2381.7020
9.	5 - 7	2511.8033	2511.8070	2511.8048
10.	2 - 4	2556.5758	2556.5752	2556.5784
11.	5 - 8	2697.9893	2697.9927	2697.9910
12.	1 - 4	2756.0791	2756.0813	2756.0855
13.	3 - 6	2798.8123	2798.8078	2798.7953
14.	6 - 8	3332.9164	3332.9301	3332.9225
15.	4 - 6	3417.4232	3417.4362	3417.4248
16.	3 - 4	3542.7118	3542.7168	3542.7110
17.	1 - 8	3763.5335	3763.5397	3763.5428
18.	2 - 6	4120.2609	4120.2587	4120.2532
19.	1 - 2	4199.6976	4199.6975	4199.6950
20.	3 - 7	4373.3700	4373.3621	4373.3602
21.	1 - 5	4382.4542	4382.4549	4382.4589
22.	2 - 7	4854.9164	4854.9180	4854.9174
23.	1 - 7	5270.3537	5270.3581	5270.3607
		$S_1^2 = 1.175 \text{ mm}^2$ $S_{s_1^2} = 1.24 \text{ mm}^2$ $S_2^2 = 0.153 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $S_{s_2^2} = 1.00 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $s_0 = 1.0000$ $f = 22$ одбачено: $d_{45}, d_{87}, d_{75}, d_{85}, d_{61}$	$S_1^2 = 3.534 \text{ mm}^2$ $S_{s_1^2} = 1.64 \text{ mm}^2$ $S_2^2 = 1.115 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $S_{s_2^2} = 0.71 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $s_0 = 1.0000$ $f = 25$ одбачено: $d_{46}, d_{27}$	$S_1^2 = 1.13 \text{ mm}^2$ $S_{s_1^2} = 0.72 \text{ mm}^2$ $S_2^2 = 0.052 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $S_{s_2^2} = 1.56 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $s_0 = 1.0000$ $f = 25$ одбачено: $d_{41}, d_{63}, d_{62}$

Табела 7.2.1-10 : Разлике изравнатих дужина GPS – ME5000 (mm)

од-до	Дужина (km)	1991L1 мај-април	1991L1 мај-септ.	1991L1 без тачке ЕП1 мај-април	1994L1 мај-мај	1991 L1/L2 мај-април	1994 L1/L2 мај-септ.
4 - 5	1.644	-8.8	-7.9	-8.5	1.2	-4.3	-3.4
7 - 8	1.675	-3.0	-2.4	-2.9	-5.1	-2.5	-1.9
5 - 6	1.974	-4.4	-8.5	-3.9	-7.5	-6.0	-10.1
6 - 7	2.037	2.2	-7.7	1.8	-1.4	2.3	-7.6
4 - 8	2.123	-3.2	-6.4	-4.7	3.7	-5.6	-8.8
3 - 5	2.196	-0.3	-0.3	0	1.7	-1.8	-1.8
2 - 3	2.220	-6.4	-7.3	-5.4	-1.1	-8.2	-9.1
2 - 5	2.382	-3.7	2.9	-2.9	2.2	-4.6	-3.8
5 - 7	2.512	-4.3	-8.0	-4.9	-9.2	-6.4	-10.1
2 - 4	2.557	-1.5	-0.9	0.5	-0.5	-1.6	-1.0
5 - 8	2.698	-5.0	-8.4	-5.0	-4.2	-5.8	-9.2
1 - 4	2.756	-5.4	-7.6		-1.0	-14.7	-16.9
3 - 6	2.799	-8.0	-3.5	-7.2	-5.5	-8.3	-3.8
6 - 8	3.333	-1.3	-15.0	-0.9	-3.0	-0.5	-14.2
4 - 6	3.417	-6.1	-19.1	-5.8	-0.7	-3.2	-16.2
3 - 4	3.543	-2.6	-7.6	-1.3	0.6	-1.1	-6.1
1 - 8	3.764	-10.8	-17.0		-1.4	-20.1	-26.3
2 - 6	4.120	-8.4	-6.2	-7.0	1.0	-10.3	-8.1
1 - 2	4.200	-3.2	-3.1		9.2	-6.8	-8.1
3 - 7	4.373	-7.3	0.6	-7.5	-6.2	-8.9	-6.7
1 - 5	4.382	-14.5	-15.2		1.7	-19.0	-1.0
2 - 7	4.855	-7.0	-8.6	-6.8	-6.2	-10.4	-12.0
1 - 7	5.270	-14.3	-18.7		-6.6	-22.7	-27.1
	збир	-127.3	-181.7	-72.4	-38.3	-170.5	-224.9
	збир/н	-5.53	-7.90	-4.02	-1.67	-7.41	-9.78

Оцена компоненти дисперзија је извршена по моделу датом у поглављу (6.3), а параметара регресионе праве по моделу линеарне регресије (Перовић, 1998). Резултати оцена су дати у табелама 7.2.1-11, 7.2.1-12 и 7.2.1-13.

Табела 7.2.1-11 : Компоненте дисперзија GPS мерења дужина  $S_1^2$  и  $S_2^2$  и параметри регресионе праве  $a$  и  $b$  оцењени из разлика мерења дужина GPS – ME5000 (према подацима из Табеле 7.2.1-8)

1991 MajL1-Април	1991 MajL1/L2-Април	1994 MajL1-Maj
$S_1^2 = 2.02 \text{ mm}^2$	$S_1^2 = 0.11 \text{ mm}^2$	$S_1^2 = 15.05 \text{ mm}^2$
$S_{s_1^2} = 3.65 \text{ mm}^2$	$S_{s_1^2} = 87.7 \text{ mm}^2$	$S_{s_1^2} = 1.44 \text{ mm}^2$
$S_2^2 = 1.10 \text{ mm}^2/\text{km}^2$	$S_2^2 = 2.50 \text{ mm}^2/\text{km}^2$	$S_2^2 = 1.34 \text{ mm}^2$
$S_{s_2^2} = 0.89 \text{ mm}^2$	$S_{s_2^2} = 0.69 \text{ mm}^2/\text{km}^2$	$S_{s_2^2} = 2.03 \text{ mm}^2/\text{km}^2$
$a = -0.22 \text{ mm}$	$a = 2.42 \text{ mm}$	$a = -0.44 \text{ mm}$
$s_a = 2.71 \text{ mm}$	$s_a = 3.01 \text{ mm}^2$	$s_a = 5.12 \text{ mm}^2$
$b = -1.74 \text{ mm}/\text{km}$	$b = -3.71 \text{ mm}$	$b = 0.06 \text{ mm}$
$s_b = 0.95 \text{ mm}^2/\text{km}^2$	$s_b = 1.18 \text{ mm}^2/\text{km}^2$	$s_b = 1.82 \text{ mm}^2/\text{km}^2$
$s_0 = 1.00$	$s_0 = 1.00$	$s_0 = 1.00$
$k_{\text{lopp}} = 64.15$	$k_{\text{lopp}} = 560000$	$k_{\text{lopp}} = 16.65$
$k_{\text{param}} = 100.37$	$k_{\text{param}} = 79.06$	$k_{\text{param}} = 130.48$
$f = 13$	$f = 15$	$f = 11$



Табела 7.2.1-12 : Компоненте дисперзија GPS мерења дужина  $S_1^2$  и  $S_2^2$  и параметри регресионе праве  $a$  и  $b$  оцењени из разлика изравнатих дужина GPSL1 - ME5000 (према подацима из табеле 7.2.1-10)

1991 мај-април	1991 мај-септембар	1991 bez EP1 мај-април	1994 мај-мај
$S_1^2 = 9.30 \text{ mm}^2$ $S_{s_1^2} = 0.68 \text{ mm}^2$ $S_2^2 = 0.23 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $S_{s_2^2} = 2.63 \text{ mm}^2/\text{km}^2$	$S_1^2 = 2.16 \text{ mm}^2$ $S_{s_1^2} = 5.64 \text{ mm}^2$ $S_2^2 = 2.99 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $S_{s_2^2} = 0.64 \text{ mm}^2/\text{km}^2$	модел није дозволио оцену компоненти	$S_1^2 = 11.15 \text{ mm}^2$ $S_{s_1^2} = 0.86 \text{ mm}^2$ $S_2^2 = 0.74 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $S_{s_2^2} = 1.40 \text{ mm}^2/\text{km}^2$
$a = 1.03 \text{ mm}$ $s_a = 2.21 \text{ mm}^2$ $b = -2.13 \text{ mm}/\text{km}$ $s_b = 0.71 \text{ mm}^2/\text{km}^2$	$a = -1.06 \text{ mm}$ $s_a = 3.21 \text{ mm}^2$ $b = -2.13 \text{ mm}/\text{km}$ $s_b = 1.21 \text{ mm}^2/\text{km}^2$	$a = -1.27 \text{ mm}$ $s_a = 1.43 \text{ mm}^2$ $b = -1.16 \text{ mm}/\text{km}$ $s_b = 0.32 \text{ mm}^2/\text{km}^2$	$a = -1.82 \text{ mm}$ $s_a = 2.75 \text{ mm}^2$ $b = 0.06 \text{ mm}/\text{km}$ $s_b = 0.92 \text{ mm}^2/\text{km}^2$
$s_0 = 1.00$ $k_{\text{ломп}} = 53.18$ $k_{\text{парам}} = 113.48$ $f = 21$	$s_0 = 1.00$ $k_{\text{ломп}} = 282.49$ $k_{\text{парам}} = 91.36$ $f = 21$	$s_0 = 1.00$ $k_{\text{ломп}} = 51.76$ $k_{\text{парам}} = 441.35$ $f = 12$	$s_0 = 1.00$ $k_{\text{ломп}} = 14.16$ $k_{\text{парам}} = 106.52$ $f = 21$

$k_{\text{комп}}$  - кондицион матрице нормалних једначина компоненти дисперзија

$k_{\text{парам}}$  - кондицион матрице нормалних једначина параметара  $a$  и  $b$ .

Табела 7.2.1-13: Оцењене GPS дужине примењујући стохастички модел проширен са моделом компоненти дисперзија и оцене компонента дисперзија (метода IMINQE)<sup>4</sup>

од - до	GPS L1 - мај 1991 (m)	GPS L1/L2 -1991мај (m)	GPS L1 - 1994 мај (m)
4 - 5	1644.3473	1644.3476	
7 - 8		1675.1948	
5 - 6		1973.5733	1973.5718
6 - 7	2037.0926	2037.0926	2037.1027
4 - 8	2122.9920	2122.9920	2122.9886
3 - 5			2195.6686
2 - 3	2220.2870	2220.2871	2220.2916
2 - 5	2381.7010	2381.7011	
5 - 7			2511.8046
2 - 4			2556.5786
5 - 8	2697.9889	2697.9890	
1 - 4	2756.0788	2756.0789	2756.0854
3 - 6	2798.8121	2798.8121	2798.7949
3 - 4	3542.7118	3542.7118	
1 - 8	3763.5333	3763.5334	3763.5428
2 - 6	4120.2608	4120.2607	4120.2534
1 - 2	4199.6975	4199.6975	4199.6954
3 - 7	4373.3698	4373.3697	4373.3601
1 - 5	4382.4537	4382.4540	
2 - 7	4854.9163	4854.9163	
	$S_1^2 = 16.26 \text{ mm}^2$ $S_{s_1^2} = 1.68 \text{ mm}^2$ $S_2^2 = 3.19 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $S_{s_2^2} = 1.02 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $s_0 = 1.0000$ $f = 37$	$S_1^2 = 11.65 \text{ mm}^2$ $S_{s_1^2} = 3.91 \text{ mm}^2$ $S_2^2 = 10.74 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $S_{s_2^2} = 0.70 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $s_0 = 1.0000$ $f = 39$	$S_1^2 = 12.10 \text{ mm}^2$ $S_{s_1^2} = 1.17 \text{ mm}^2$ $S_2^2 = 0.77 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $S_{s_2^2} = 2.18 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $s_0 = 1.0000$ $f = 38$

<sup>4</sup> Компоненте дисперзија су оцењене у 3Д моделу, по програму написаном у МАТЛАБ-у. У обраду су узете GPS косо-мерене дужине (Табела 7.2.1-8), заједно са косим дужинама мереним са ME5000. По истом моделу оцењене су компоненте дисперзија и за ME5000 и за GPS. Оцењене компоненте дисперзија за ME5000 су сагласне са оценама дајим у Табели 7.2.1-9, а резултатни оцене компоненте дисперзија за GPS уређаје су дајим у Табели 7.2.1-13.

Табела 7.2.1-14: Преглед оцена компоненти дисперзија и параметара линеарног регресионог модела за различите моделе оцена

Кампања	Модел*	$s_j^2$ ( $mm^2$ )		$s_a$ (mm)		$s_b$ ( $mm/km$ )	
		$s_1^2$	$s_2^2$	$a$	$b$	$s_a$	$s_b$
Кампања 1991 мај-април L1 фреквенција	1	16.26 са $f = 37$	3.19				
	2	9.30 са $f = 21$	0.23	1.03	2.21	-2.13	0.71
	3	2.02 са $f = 13$	1.10	-0.22	2.71	-1.74	0.95
Кампања 1991 мај-септембар L1 фреквенција	1						
	2	2.16 са $f = 21$	2.99	-1.06	3.21	-2.13	1.21
	3						
Кампања 1994 мај-мај L1 фреквенција	1	12.10 са $f = 38$	0.77				
	2	11.15 са $f = 21$	0.74	-1.82	2.75	0.06	0.92
	3	15.05 са $f = 11$	1.34	-0.44	5.12	0.06	1.82
Кампања 1991 мај-арил L1L2 фреквенција	1	11.65 са $f = 39$	10.74				
	2			1.09	1.93	-2.83	0.89
	3	0.11 са $f = 15$	2.50	2.42	3.01	-3.71	1.18

\* 1- оцена из 3Д модела (табела 7.2.1-13); 2 – оцена из разлика изравнатих дужина по моделу линеарне регресије (табела 7.2.1-12) и 3 – оцена из разлика мерених дужина (табела 7.2.1-11)

Средње вредности оцена компоненти дисперзија мерења дужина са ME5000 (табела 7.2.1-9) износе:  $s_1^2 = 1.98 mm^2$  и  $s_2^2 = 0.45 mm^2/km^2$ , са  $f = 72$  степени слободе.

Средње вредности оцена компоненти дисперзија мерења базних линија са GPS (табела 7.2.1-11 - из разлика мерења само на L1 фреквенцији) износе:  $s_1^2 = 7.99 mm^2$  и  $s_2^2 = 1.21 mm^2/km^2$ , са  $f = 24$  степени слободе. Средње вредности оцена компоненти дисперзија мерења базних линија са GPS (табела 7.2.1-12-из разлика изравнатих дужина) износе:  $s_1^2 = 7.54 mm^2$  и  $s_2^2 = 1.32 mm^2/km^2$ , са  $f = 63$  степени слободе.

## 7.2.2. Мерења у мрежи средњих дужина

Мерења у мрежи средњих дужина, извршена су на тачкама геодетског четвороугла са странама дужине од 20 km до 50 km. Првог јуна 1991. године, изведена су мерења са четири пријемника *WM102* на четири тачке (слика 7.2.2-1) које се налазе на растојању од 14km до 43km. Три тачке припадају државној мрежи, а четврта (327) је стуб (за астрономска мерења) на Авали. Дужине су оцењене пар по пар и то као: комбинација *L1* и *L2* фреквенција (*L3*), затим посебно *L1* и *L2* фреквенције, користећи једнослојни омотач као модел јоносфере и *L1* и *L2*, без узимања у обзир јоносфере. Резултати оцена су дати у табели 7.2.2-1. У табели 7.2.2-2 су дате оцењене дужине и њихове разлике (разлике између дужина *ionofree* комбинације и применом *singlelayer* модела) за сваки пар независно мерених косих дужина. У табели 7.2.2-3 су дати резултати оцена косих дужина, из изравнања. Мрежа је изравната користећи двофреквентна и једнофреквентна (*L1*) опажања, а у табели 7.2.2-4 су дати резултати тестирања на значајност разлика два решења. Тестиране су разлике дужина добијених из *L1/L2 ionofree* комбинације и дужина добијених мерењем са *L1* фреквенцијом, при чему је за стандард мерења дужина базних линија усвојена априори вредности стандарда која износи  $5\text{mm} + 1 \cdot 10^{-6} D_{\text{km}}$ .

**Двофреквентна мерења (*WM102*) су изравната по следећем моделу:**

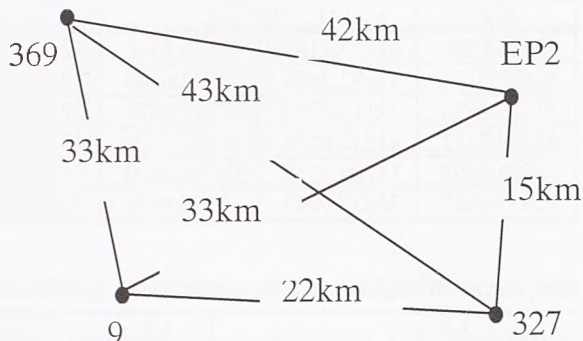
- период мерења: 01.06.1991. од 4:52 -6:49,
- параметри атмосфере: Глобални модел,
- модел јоносфере: *ionofree*,
- модел тропосфере: *Saastamoinen*,
- ефемериде: *Broadcast*,
- корелација: *Single-Double*,
- укупан број двоструких фазних разлика  $n_{\text{DDO}} = 1223$ ,
- број нерешених неодређености: седам и
- $s_{\text{DDO}} = 0.018\text{m}$ .

**Једнофреквентна мерења (*WM102*) су изравната по следећем моделу:**

- период мерења: 01.06.1991. од 4:52 -6:49,
- параметри атмосфере: Глобални модел,
- модел јоносфере: *Single-layer*,
- модел тропосфере: *Saastamoinen*,
- ефемериде: *Broadcast*,
- корелација: *Single-Double*,
- укупан број двоструких фазних разлика  $n_{\text{DDO}} = 896$ ,



- број нерешених неодређености: три и
- $s_{DDO} = 0.019m$ .



Слика 7.2.2-1: Положај тачака у мрежи геодетског четвороугла

Табела 7.2.2-1: Резултати GPS мерења у мрежи геодетског четвороугла 1991. године(WM102)

Р.Б.	од - до	Фреквенција	$n_{DDO}$	Број нерешених N	$s_{DDO}$	Коса дужина l	$s_l$	Модел јоносфере
1.	EP2-369	L5/L3	224	4	0.01	42112.9252	0.0210	ionofree
2.	EP2-369	L1	224	2	0.014	42113.1366	0.0019	singlelayer
3.	EP2-369	L2	356	1	0.029	42113.2181	0.0027	singlelayer
4.	EP2-369	L1	356	2	0.018	42113.1502	0.0032	no model
5.	EP2-369	L2	356	1	0.030	42113.1782	0.0028	no model
6.	EP2-9	L5/L3	287	0	0.011	32692.4948	0.0194	ionofree
7.	EP2-9	L1	287	1	0.019	32692.6214	0.0025	singlelayer
8.	EP2-9	L2	287	4	0.020	32692.7489	0.0341	singlelayer
9.	EP2-9	L1	287	2	0.016	32692.6445	0.0044	no model
10.	EP2-9	L2	287	4	0.019	32692.7275	0.0334	no model
11.	EP2-327	L1/L2	632	0	0.015	14706.3292	0.0010	no model
12.	EP2-327	L1	316	0	0.009	14706.3483	0.0008	singlelayer
13.	EP2-327	L2	327	3	0.014	14706.3159	0.0055	singlelayer
14.	EP2-327	L1	294	0	0.009	14706.3400	0.0008	no model
15.	EP2-327	L2	294	0	0.014	14706.3198	0.0012	no model
16.	9-369	L3/L5	260	0	0.014	32937.8057	0.0016	ionofree
17.	9-369	L1	260	3	0.014	32937.8642	0.0129	singlelayer
18.	9-369	L2	302	3	0.022	32937.9043	0.0182	singlelayer
19.	9-369	L1	302	3	0.014	32937.8634	0.0113	no model
20.	9-369	L2	302	3	0.022	32937.8846	0.0181	no model
21.	9-327	L3/L5	258	0	0.015	22113.6737	0.0013	ionofree
22.	9-327	L1	258	0	0.009	22113.6726	0.0008	singlelayer
23.	9-327	L2	258	0	0.013	22113.6719	0.0012	singlelayer
24.	9-327	L1	258	0	0.009	22113.6624	0.0008	no model
25.	9-327	L2	258	0	0.013	22113.6551	0.0012	no model
26.	369-327	L3/L5	274	1	0.013	43243.8990	0.0024	ionofree
27.	369-327	L1	309	1	0.015	43243.7722	0.0021	singlelayer
28.	369-327	L2	274	0	0.024	43243.6556	0.0027	singlelayer
29.	369-327	L1	309	1	0.016	43243.7506	0.0022	no model
30.	369-327	L2	274	0	0.023	43243.6188	0.0027	no model

Табела 7.2.2-2: Оцењене (из директних мерења) GPS дужине (у метрима) за различите моделе јоносфере (Према подацима из табеле 7.2.2-1)

од - до	L3 <i>ionofree</i> (1)	L1 - <i>single</i> <i>layer</i> (2)	L2- <i>single</i> <i>layer</i> (3)	L1 <i>no model</i>	L2 <i>no model</i>	(1) - (2)	(1) - (3)
EP2 -369.	42112.9252	42113.1366	42113.2181	42113.1502	42113.1782	-0.2114	-0.2929
EP2 - 9.	32692.4948	32692.6214	32692.7489	32692.6445	32692.7275	-0.1266	-0.2541
9 - 327.	22113.6737	22113.6726	22113.6719	22113.6624	22113.6551	0.0011	0.0113
369 - 327	43243.8990	43243.7722	43243.6556	43243.7506	43243.6188	0.1268	0.2434
EP2 - 327	14706.3292	14706.3483	14706.3159	14706.3400	14706.3198	-0.0190	0.0133
9 - 369	32937.8057	32937.8642	32937.9043	32937.8634	32937.8846	-0.0585	-0.0986

Табела 7.2.2-3: Резултати оцене дужина из изравњања (у метрима)

од - до	L3 <i>ionofree</i>	$s_{L3}$ (m)	L1 <i>single layer</i>	$s_{L1}$ (m)
EP2 -369	42112.9083	0.0319	42113.0540	0.0025
EP2 - 9	32692.4401	0.0016	32692.4209	0.0017
9 - 327	22113.5263	0.0019	22113.5086	0.0022
369 - 327	43243.9225	0.0293	43244.0650	0.0038
EP2 - 327	14706.3836	0.0016	14706.4035	0.0024
9 - 369	32937.8312	0.0191	32937.8932	0.0430

Табела 7.2.2-4: Тестирање значајности разлика оцењених дужина (према табели 7.2.2-3)

од - до	L3 - L1 (iz izravnawa) $\Delta_{L3-L1}$ (mm)	Статистика $\Delta/\sqrt{(s_{L3}^2+s_{L1}^2)}$	Нормални распоред $p = 0.95$
EP2 -369	-145.7	2.18*	1.96
EP2 - 9	19.2	0.36	1.96
9 - 327	17.7	0.46	1.96
369 - 327	-142.5	2.10*	1.96
EP2 - 327	-19.9	0.70	1.96
9 -369	-62.0	1.15	1.96

\* - одбачена хипотеза  $H_0: (I_{L3} - I_{L1})/s_{L3,L1} = N$  (нормални распоред)

$$\sigma_{L3} = \sigma_{L1} = 5mm + 1 \cdot 10^6 I_{km}$$

Табела 7.2.2-5: Резултати GPS мерења у мрежи геодетског четвороугла (Trimble 4400) - Модел тропосфере: Saastamoinen - (13.08.1998 од 08:00- 11:00)<sup>5</sup>

Р.Б.	од - до	Фреквенција	Период мерења (минута)	Коса дужина l (m)	$s_l$ (mm)	модел јоносфере
1.	EP2 -369	L3	180	42112.870	0.286	ionofree
2.	EP2 - 9	L3	180	32692.437	0.298	ionofree
3.	9 - 327	L3	180	22113.673	0.591	ionofree
4.	369 - 327	L3	180	43244.047	0.659	ionofree
5.	EP2 - 327	L3	180	14706.350	0.595	ionofree
6.	9 - 369	L3	180	32937.838	0.432	ionofree

<sup>5</sup> Резултати мерења су обрађени користећи прецизне ефемериде.

Табела: 7.2.2-6: Тестирање значајности разлика оцењених дужина (према табелама 7.2.2-2 и 7.2.2-5)<sup>6</sup>

Р.Б.	од - до	Trimble - WM102 ( <i>ionofree</i> решење), $\Delta$	Статистика $\Delta/\sqrt{(s_{TR}^2+s_{WM}^2)}$	Нормални распоред $p = 0.95$
1.	EP2 - 369	- 55.2mm	-0.83	1.96
2.	EP2 - 9	- 57.8mm	-1.08	1.96
3.	9 - 327	-0.7mm	-0.02	1.96
4.	369 - 327	148.0mm	2.17*	1.96
5.	EP2 - 327	20.8mm	0.75	1.96
6.	9 - 369	32.3mm	0.60	1.96

$$\sigma_{Trimble} = \sigma_{WM} = 5mm + 1 \cdot 10^6 I_{km}$$

С циљем испитивања поновљивости резултата мерења и оцене сагласности резултата оцена добијених употребом различитих *GPS* пријемника, 13.08.1998. године, са четири *Trimble* двофреквентна пријемника - модел 4400, извршена су мерења у четвороуглу, по истом распореду. Резултати оцена су дати у табели 7.2.2-5.

Поред тестирања разлика оцењених дужина, извршена је 3Д Хелмертова седмопараметарска трансформација између двофреквентног и једнофреквентног решења (координате) добијених из мерења са *WM102*. Однос дужина, изражен као *scale faktor*, износи 2ppm, са грешком од 1.05ppm (Програм *PoPs V.3.31*). Релативно значајна разлика између два решења узрокована је пре свега разликама у мерењу две стране, и то: 369 - EP2 и 369 - 327. На основу резултата приказаних у табели 7.2.2-3, може се закључити - да све три стране мерене са тачке 369 имају значајно веће стандардне девијације у односу на друге стране. У намери да се испита које је решење поузданије, 13.08.1998. године, извршена су додатна мерења са *Trimble 4400* двофреквентним пријемницима. На основу резултата мерења, са  $p = 0.95$ , може се закључити да разлика мерених дужина са пријемницима *Trimble 4400* и *Wild-Magnavox - WM102* није статистички значајна, тј. једнофреквентна решења нису поуздана.

Индикативно је констатовати да су само разлике EP2-369 и 369-327 дужина једнофреквентних и двофреквентних решења значајне (табела 7.2.2-4). Ово наводи на закључак да је (с обзиром да се ради о највећим дужинама -преко 30 km) утицај јоносфере био значајан.

### 7.2.3. Мерења у мрежи великих дужина - мрежа референтних тачака за потребе ВЈ

У периоду од 23. јуна до 2. јула 1998. године, у оквиру посебног захтева војне природе, извршена су *GPS* мерења на целој територији *CPJ*, (*Божич, 1998*). Циљ мерења је био стварање јединственог просторног оквира (*frame*) за будућу ефикаснију примену

<sup>6</sup> Дужина 369 - 327 је оцењена у програму *PoPs* из независне кампање мерења изведене 1.06.1991 са *WM102* од 9:00 до 10:14 (81 ојажарење *DDO*), а оцена иста износи  $l = 43244.153$  са  $s = 30.5$  mm, што је сагласно (оцена дужине) оцени добијеној мерењима са *Trimble 4400*.



GPS технологије у пословима који захтевају прецизне положаје појединих елемената простора или објеката у њему. У складу са потребама наручиоца, захтевано је да тачност координата тачака буде испод 10cm. Мрежа је пројектована тако да садржи тачке државне тригонометријске мреже, равномерно распоређене на целој површи државе. Мерења су извршена двофреквентним GPS уређајима типа *Trimble 4400* и *4000SSE*. Обрада мерења је извршена по програму *GPSurvey*, верзија 2.2. Постављени задатак, иако врло сложен, добро је послужио као својеврсни изазов за практичну проверу свих до тада стечених теоријских сазнања и “скромних” практичних искустава на овако сложеним и великим пословима.

### Израда плана мерења

При изради почетног плана мерења поштовани су следећи услови:

- да се пријем сигнала врши са седам *Trimble GPS* пријемника серије 4400, са присилним центрисањем антена (*compact L1/L2 with ground plane*),
- да се једном сесијом обухвате најудаљеније тачке мреже, а у осталим сесијама што ближе тачке,
- да растојања између тачака у свакој сесији буду уједначена,
- да свака наредна сесија садржи по три тачке из претходне сесије,
- да свака тачка у мрежи буде поседнута најмање два пута, различитим пријемником,
- да растојања која оператори на терену морају савладати при преласку са тачке на тачку буду што краћа,
- да теренске екипе имају укупно на располагању 4 *PC* рачунара за пренос примљених сигнала на дискете (у две копије),
- да се при сваком посетању тачке изврши пријем сигнала у непрекинутом трајању од најмање 10 часова,
- да се пријем сигнала врши претежно ноћу,
- да се користе сателити чија је елевација већа од 15°,
- да минималан број сателита не сме бити мањи од пет и
- да квалитет геометрије сателити-пријемници мерен фактором  $PDOP^7$  не сме бити мањи од 7.

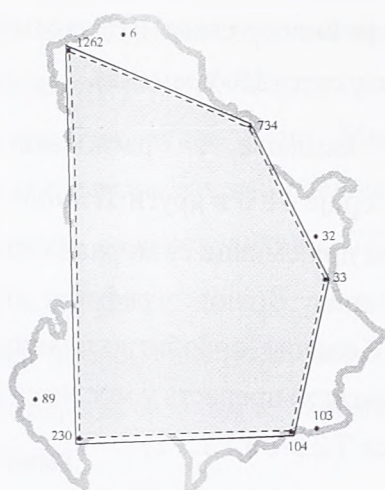
Планирање мерења је извршено уз помоћ модула *Plain*, програма *GPSurvey*, са алманахом од 10. јуна 1998. године.

У складу са наведеним условима, одлучено је да све сесије почињу у 20 часова, а завршавају наредног дана у 10 часова (по локалном времену), тј. да пријем сигнала траје 14 часова, са брзином регистрације од 15 s. У одабраном периоду, број одговарајућих

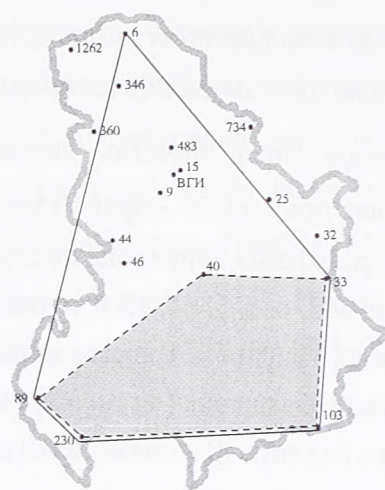
<sup>7</sup>  $PDOP$  - *Position Dilution of Precision*; вредности квадратног корена збира дисперзија положаја по  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  осу.

сателита је углавном био шест и више (пет је било у свега 10% времена), а *PDOP* је претежно износио шест или мање (седам је био у свега 3% времена).

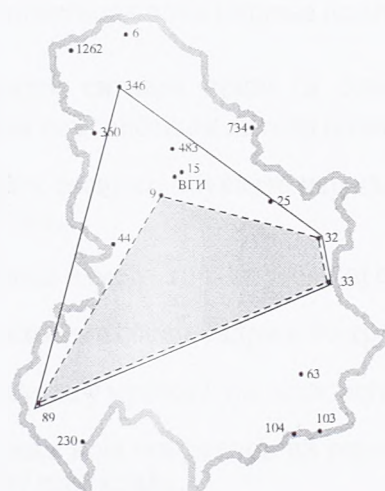
Непосредно пред почетак теренске кампање, на располагање су накнадно стављена још два пријемника - први *Trimble* серије 4400 и други *Trimble* серије 4000SSE. Руководећи се разлозима наручиоца посла, ови пријемници су морали бити постављени на новим тачкама: 483, 6, 346, 44, 15 и тачки на крову Војногеографског института, која не припада државној тригонометријској мрежи. Коначно, првобитно планирана мрежа од 18 тачака са укупно 105 вектора (од тога 30 независних) прераста у мрежу са 21 тачком у којој има 180 вектора (од тога 40 независних), (слике 7.2.3-1 и 7.2.3-2).



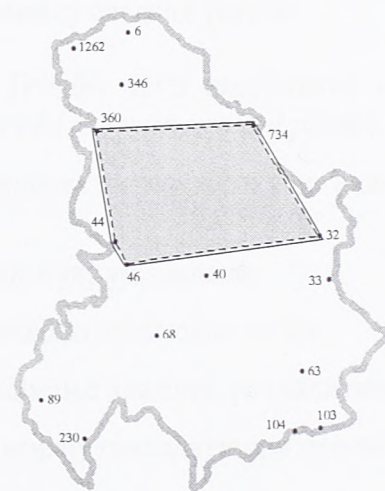
ПРВА СЕСИЈА



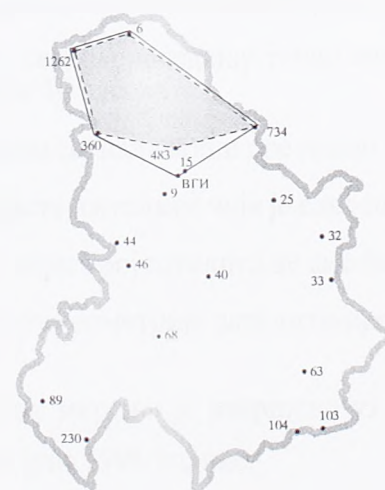
ДРУГА СЕСИЈА



ТРЕЋА СЕСИЈА



ЧЕТВРТА СЕСИЈА



ПЕТА СЕСИЈА

ЛЕГЕНДА:

 ПЛАНИРАНО

 ОСТВАРЕНО

Слика 7.2.3-1: Увећање сесија у односу на план (Радојчић, 1998)





Слика 7.2.3-2: Тачке GPS мреже (Радојчић, 1998)

Табела 7.2.3-1: Остварено поседање по тачкама

<u>СЕСИЈА</u>	<u>ТАЧКЕ</u>
ПРВА:	1262, 734, 15, 46, 33, 230, 104, 483, VGI
ДРУГА:	40, 33, 68, 89, 63, 230, 103, 6, VGI
ТРЕЋА:	9, 32, 46, 40, 33, 68, 89, 346, VGI
ЧЕТВРТА:	360, 734, 9, 15, 25, 32, 46, 44, VGI
ПЕТА:	1262, 6, 346, 360, 483, 734, 15, 104, VGI

Табела 7.2.3-2: Дефинитивни план опажања у GPS мрежи

Р.Б	Тачка	1. СЕСИЈА Време опажања: од 20:00/23.06 до 10:00/24.06	2. СЕСИЈА Време опажања: од 20:00/25.06 до 10:00/26.06	3. СЕСИЈА Време опажања: од 20:00/27.06 до 10:00/28.06	4. СЕСИЈА Време опажања: од 20:00/29.06 до 10:00/30.06	5. СЕСИЈА Време опажања: од 20:00/01.07 до 10:00/02.07
1.	6		Екипа 8			Екипа 1
2.	9			Екипа 6	Екипа 3	
3.	15	Екипа 3			Екипа 6	Екипа 8
4.	25				Екипа 5	
5.	32			Екипа 7	Екипа 7	
6.	33	Екипа 5	Екипа 5	Екипа 5		
7.	40		Екипа 1	Екипа 1		
8.	44				Екипа 8	
9.	46	Екипа 4		Екипа 2	Екипа 4	
10.	63		Екипа 2			
11.	68		Екипа 3	Екипа 3		
12.	89		Екипа 4	Екипа 4		
13.	103		Екипа 7			
14.	104	Екипа 7				Екипа 7
15.	230	Екипа 6	Екипа 6			
16.	346			Екипа 8		Екипа 6
17.	360				Екипа 2	Екипа 4
18.	483	Екипа 8				Екипа 3
19.	734	Екипа 2			Екипа 1	Екипа 5
20.	1262	Екипа 1				Екипа 2
21.	ВГИ	Перман. ст.	Перман. ст.	Перман. ст.	Перман. ст.	Перман. ст.

У току кампање мерења, четири тачке су поседане само једном (25, 44, 63 и 103), две тачке три пута (15 и 33), једна тачка пет пута (ВГИ), а остале тачке два пута.

Мерења су извршена на свакој тачци, уз поштовање следеће процедуре:

- сваки *GPS* пријемник је имао резервни извор напајања (аутомобилски акумулатор),
- антене су присилно центрисане на стубове уз помоћ адаптера, хоризонтиране и све једнако усмерене у правац севера,
- на свакој антени је била постављена заштитна плоча (*ground plane*),
- висине антена су мерене на четири краја, пре и после сваке сесије,
- сви подаци су уписивани у записник, уз контролу другог лица,
- сигнали су регистровани само са сателита изнад 15° елевације,

- брзина регистрације података је износила 15 секунди,
- све физичке препреке у близини тачака су претходно уклоњене и
- подаци мерења су регистровани на меморијске картице, а по завршетку сесије вршен је *backup* података на дискете, у два примерка.

#### Обрада вектора

Обрада резултата мерења је извршена по следећој процедури:

- пренос и верификација резултата теренских мерења,
- преузимање резултата *GPS* мерења са неколико европских перманентних станица,
- преузимање прецизних ефемерида из *CODE* центра за целокупни период трајања кампање,
- изравнање *GPS* мреже као слободне, ради детекције грешака у резултатима мерења и испитивања адекватности функционалног и стохастичког модела,
- изравнање четири тачке *GPS* мреже, фиксирајући координате перманентних тачака као дате вредности и анализа тачности добијених оцена и
- изравнање целе *GPS* мреже, фиксирајући четири тачке које су у претходном изравнању везане за *ITRF*.

Подаци прикупљени у теренском делу кампање, само су део података неопходних за апсолутно позиционирање мреже. Поред њих, неопходно је било преузети резултате мерења са неколико европских перманентних станица, као и прецизне ефемериде сателита у периоду опажања. Сви подаци су преузети са *Interneta*.

Употреба перманентних станица имала је за циљ - добијање апсолутних положаја тачака у оквиру *ITRF* референтног система. Унапред је било јасно, да метод мерења и могућности софтвера којим се планирала обрада, не могу дати максималну геодетску тачност, али се ипак могла очекивати тачност апсолутног положаја боља од једног дециметара, што је, с обзиром на намену мреже, задовољавало захтеве наручиоца.

У обраду резултата мерења су ушла сва мерења извршена на 21 тачки *GPS* мреже, у пет опажачких сесија (слика 7.2.3-1). Свим мерењима су придружени мерени метеоролошки параметри тропосфере и прецизне координате *CODE* центра (орбите у *ITRF96*, за епоху 1998.5).

Обрађивани су независни вектори (8 по сесији + један, настао услед прекида пријема сигнала на тачки 1262 током прве сесије), чији је избор препуштен самом софтверу. За референтни тачку је усвојена тачка 15, а при обради је коришћен *Saastmoinen*-ов модел тропосфере. Током обраде мерења одбачени су они сателити за које је током ранијих пробних обрада мреже утврђено да кваре резултате мерења (јер су у њима присутни у кратком трајању, недовољном да се реше *ambiguity*). Већ у првом



пролазу, добијени су врло добри резултати, са само једним *iono-free float* решењем (табела 7.2.3-3), у петој сесији, на најдужем вектору у мрежи (између тачака 15 и 104, међусобно удаљених око 300km).

Табела 7.2.3-3: Део резултата прве рачунске сесије (Радочић, 1998)

Од	до	Врста решења	Коса дужина	Ratio	Реф.дисперзија
15	VGI	Iono free fixed	5900.648	10.2	0.905
VGI	483	Iono free fixed	28184.394	50.3	1.097
15	734	Iono free fixed	72637.917	116.5	0.480
VGI	46	Iono free fixed	111331.333	20.5	1.294
734	33	Iono free fixed	174511.864	40.6	0.925
33	104	Iono free fixed	173118.207	16.6	1.147
46	230	Iono free fixed	185635.538	11.5	7.615
483	1262	Iono free fixed	142064.603	68.2	0.669
483	1262	Iono free fixed	142064.610	13.7	0.278
33	63	Iono free fixed	100654.901	14.3	0.577
33	40	Iono free fixed	117722.356	18.0	0.577
63	103	Iono free fixed	74931.343	31.1	0.415
40	68	Iono free fixed	77037.361	11.3	0.564
40	VGI	Iono free fixed	110907.226	7.9	1.069
68	230	Iono free fixed	136995.972	15.4	0.685
VGI	6	Iono free fixed	145547.184	5.6	1.853
230	89	Iono free fixed	61323.797	11.9	0.687
33	32	Iono free fixed	45103.995	24.6	0.571
32	40	Iono free fixed	113143.835	27.1	0.739
40	68	Iono free fixed	77037.365	18.6	0.793
68	89	Iono free fixed	140797.563	24.2	0.672
68	46	Iono free fixed	80392.424	23.6	0.684
46	9	Iono free fixed	83944.765	33.2	0.852
9	VGI	Iono free fixed	28068.825	10.1	1.269
VGI	346	Iono free fixed	103927.229	8.1	2.093
15	VGI	Iono free fixed	5900.648	16.6	1.114
VGI	9	Iono free fixed	28068.827	7.4	1.913
9	44	Iono free fixed	68213.464	46.1	1.261
44	46	Iono free fixed	25416.783	13.5	0.470
15	734	Iono free fixed	72637.914	46.2	0.690
734	25	Iono free fixed	78814.383	39.4	0.450
25	32	Iono free fixed	55365.083	63.7	0.701
9	360	Iono free fixed	90007.642	27.5	1.024
15	VGI	Iono free fixed	5900.647	17.6	1.021
VGI	483	Iono free fixed	28184.391	22.1	1.018
15	734	Iono free fixed	72637.910	21.8	0.561
483	346	Iono free fixed	76291.366	26.0	0.804
346	360	Iono free fixed	56623.523	29.1	0.768
346	6	Iono free fixed	60328.572	38.0	0.896
346	1262	Iono free fixed	67247.025	13.2	0.679
15	104	Iono free float	299714.243	(5.4)	3.004

У наредним рачунским сесијама, понављена је обрада вектора са *iono-free float* решењем и оних који имају истовремено мали *ratio* и велику дисперзију. Коначни показатељи о векторима који су поновљеним обрадама претрпели промене (и избачени сателити) дати су у табели 7.2.3-4.

Табела 7.2.3-4: Показатељи поновљеног процесирања вектора (Радојчић, 1998)

СЕСИЈА	ВЕКТОР	САТЕЛИТИ	СТАРО		НОВО	
			Ratio	$\sigma^2$	Ratio	$\sigma^2$
5	15 - 104	3, 14, 29, 1, 8, 22, 23	(5.4)	3.004	14.9	1.438
1	46 - 230	3, 14, 29, 1, 6, 9	11.5	7.615	119.3	0.737
3	VGI - 346	3, 14, 29, 9, 10, 17, 22, 23	8.1	2.093	17.4	1.730
4	VGI - 9	3, 14, 29, 22, 23	7.4	1.913	25.1	1.887
2	VGI - 6	3, 14, 29, 10, 22, 23	5.6	1.853	7.1	1.700
2	230 - 89	3, 14, 29, 6, 9, 10, 18	11.9	0.687	24.6	0.688
1	VGI - 483	3, 14, 29, 6, 9, 18	50.3	1.097	72.5	1.073
1	15 - 734	3, 14, 29, 6	116.5	0.480	117.6	0.488
1	VGI - 46	3, 14, 29, 1, 6, 9	20.5	1.294	22.2	1.183
1	33 - 104	3, 14, 29, 6, 18, 22	16.6	1.147	44.7	1.260
1	15 - VGI	3, 14, 29, 5, 6, 8, 9, 13	10.2	0.905	16.5	0.891
1	483 - 1262	3, 14, 29, 23	13.7	0.278	22.4	0.631
2	40 - VGI	3, 14, 29, 19, 22	7.9	1.069	11.4	1.002

Резултати показују, да је квалитет оцена вектора добар јер су сва решења *iono-free fixed*, а *ratio* и дисперзије у очекиваним границама. Ово је потврдила и контрола затварања фигура која није детектовала ни један неприхватљив вектор и која је указала на високу прецизност мерења, бољу од 0.1 ppm.

На остварени квалитет посредно указују и разлике дужина појединих независних вектора који су мерени у више сесија као и оцене компоненти дисперзија добијени по *MINQE* методи (табела 7.2.3-5)<sup>8</sup>.

Табела 7.2.3-5: Дужине појединих независних вектора

ВЕКТОР	Дужина (m)	$D_{\max} - D_{\min}$ (m)	Компоненте дисперзија
15 - ВГИ	5900.648	0.001	$s_1^2 = 0.30 \text{ mm}^2$ $s_{s_1^2} = 1.45 \text{ mm}^2$ $s_2^2 = 0.002 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ $s_{s_2^2} = 0.41 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ са $f = 8$ степени слободе
	5900.647		
	5900.648		
9 - ВГИ	28068.825	0.002	
	28068.827		
ВГИ - 483	28184.391	0.002	
	28184.393		
15 - 734	72637.916	0.006	
	72637.910		
	72637.914		
40 - 68	77037.361	0.004	
	77037.365		
483 - 1262	142064.603	0.007	
	142064.610		

<sup>8</sup> Вектор 483-1262 није мерен два пута по 14 часова, већ је у првој сесији дошло до прекида пријема сигнала, иако да је једно мерење трајало 7 часова, а друго 5 часова; ошуда и нешто већа разлика у дужини између ова два вектора, него међу векторима код којих је пријем сигнала трајао по 14 часова.

Запажено је, да вектори којима се на једном крају налази тачка *ВГИ*, имају по правилу лошије показатеље у односу на друге векторе сличних дужина. Претпоставка је да су пријем сигнала ометале антене постављене на крову оближњег студентског дома, као и одбијени сигнали (*multipath* ефекти) од околних објеката којих је било, а што се није могло избећи јер су били чврсто грађени, а наручилац је инсистирао да тачка на крову *ВГИ* мора ући у састав мреже, због евентуалног њеног даљег коришћења као референтне станице у будућим применама *GPS*. У сваком случају, ако се у будућим кампањама планира коришћење тачке на крову *ВГИ*, претходно би требало испитати ову појаву и уверити се да ли је ова тачка погодна да служи као референтна. Један од начина да се то утврди јесте да се *GPS* мрежа обради без тачке *ВГИ* и да се добијени резултати анализирају и упореде са резултатима обраде у којој је она учествовала.

### Изравнање мреже као слободне

Изравнање је извршено помоћу програма *TRIMNET Plus*, који је саставни део *GPSurvey*-а. У изравнање су ушли сви независни вектори (41). У овој фази изравнања мреже, извршено је само унутрашње условљено (*inner constrained*) изравнање, с циљем оцене унутрашње тачности и тестирања резултата мерења на постојање грубих грешака. Изравнање је извршено у више итерација, при чему су у првој итерацији усвојене *default* вредности свих опција *Network Adjustment* модула. За грешку мерења висине антене унета је вредност 0.001m, а за грешку њеног центрисања вредност 0.003m. После неколико итерација, задовољен је глобални тест модела, а оцена а постериори референтног фактора дисперзије је износила  $\hat{\sigma}_0 = 1.09$ . Тест грубих грешака је показао да у резултатима мерења истих није било.

Добијене оцене су потврдиле остварену високу тачност позиционирања. Средње квадратне грешке координата су у већини случајева мање од 4 mm, не прелазећи ни у једном случају вредност од 7 mm.

### Повезивање мреже са ITRF

Резултати *GPS* мерења за период од 23. јуна до 2. јула 1998. године преузети су са следећих европских перманентних станица: *Graz* (Аустрија), *Penc* (Мађарска), *Matera* (Италија), *Zimmerwald* (Швајцарска), *Wetzell* (Немачка) и *Sofia* (Бугарска).

У току њиховог сортирања и општег прегледа, уочено је да датотеке са резултатима рада станице *Sofia* нису поуздане, тако да се ова станица у даљој обради мреже није користила. Како су преузете координате перманентних станица биле дате у систему *ITRF96* за епоху 1997.0, исте су сведене на епоху опажања, према следећем изразу:

$$T_{1998.5} = T_{1997.0} + V \cdot (1998.5 - 1997.0)$$

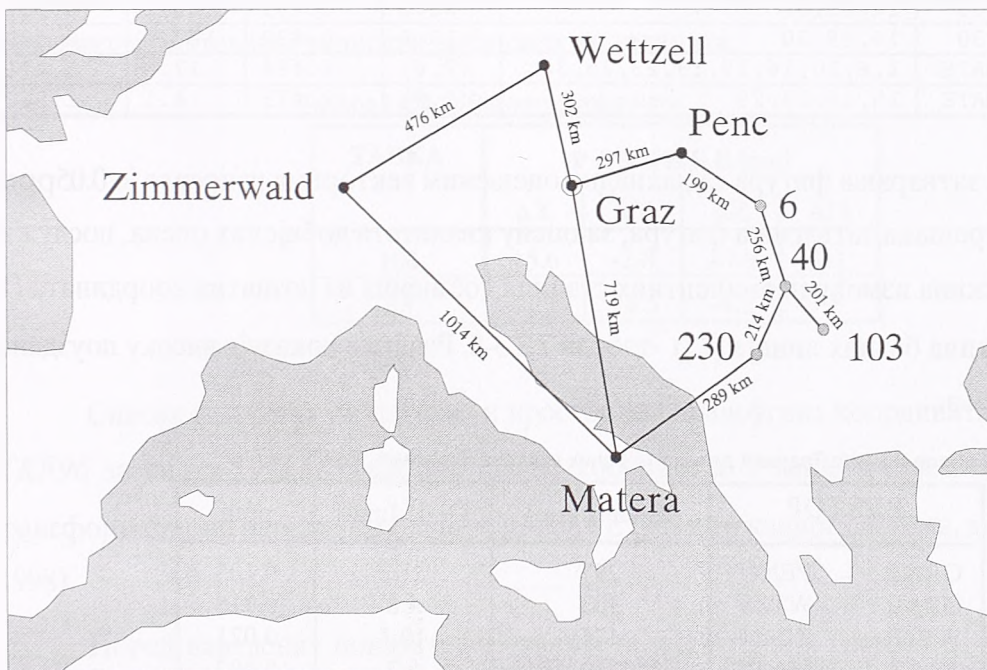


где су:

$T_{1998.5}, T_{1997.0}$  ..... геоцентричне координате X, Y, Z (у епохама 1998.5 и 1997.0)

$V$  ..... вектори померања разматране тачака

У обраду су ушла сва мерења извршена 25. и 26. јуна на четири тачке GPS мреже (6, 40, 103 и 230) и мерења извршена на пет европских перманентних станица (*Zimmerwald*, *Wetzell*, *Graz*, *Penc* и *Matera*). Њима су придружене прецизне ефемериде CODE центра (орбите које се односе на *ITRF96* у епохи 1998.5) док је тропосферу репрезентовао *Saastmoinen*-ов модел. Кампању је чинила једна сесија са 48 сати мерења на перманентним станицама и 14 сати мерења на тачкама GPS мреже (слика 7.2.3-3).



Слика 7.2.3-3: Коришћене перманентне станице и тачке GPS мреже употребљене за уклапање GPS мреже у ITRF (Радојчић, 1998)

Резултати прве рачунске сесије дају се у табели 7.2.3-6.

Табела 7.2.3-6: Део резултата прве рачунске сесије (Радојчић, 1998)

Вектор	Тип решења	Коса дужина	Ratio	Реф. дисперзија
GRAZ PENC	Iono free fixed	296823.571	1.9	7.568
GRAZ WTZR	Iono free float	302043.773	(3.8)	0.636
WTZR ZIMM	Iono free fixed	475892.887	3.0	16.132
PENC 6	Iono free fixed	198631.398	19.9	1.495
GRAZ MATE	Iono free fixed	719367.690	2.4	0.921
6 40	Iono free fixed	256100.439	5.0	1.558
40 103	Iono free fixed	201188.016	82.9	0.491
40 230	Iono free fixed	213642.670	13.6	0.672
230 MATE	Iono free float	287782.671	(7.6)	6.464
ZIMM MATE	Iono free float	1013797.073	(2.8)	2.473

Грешке затварања фигура које се крећу испод 0.1ppm, потврдиле су високу унутрашњу тачност добијених оцена, а процесирање вектора је настављено све до постизања жељених вредности оцена, уз одбацавање сателита који ометају обраду (табела 7.2.3-7).

Табела 7.2.3-7: Показатељи поновљеног процесирања вектора (Радојић, 1998)

ВЕКТОР	САТЕЛИТИ	СТАРО		НОВО	
		Ratio	$\sigma^2$	Ratio	$\sigma^2$
GRAZ - PENC	30	1.9	7.568	1.9	1.371
GRAZ - WTZR	7, 9, 10, 26, 27	(3.8)	0.636	2.7	0.804
WTZR - ZIMM	4, 24, 13, 23	3.0	16.132	4.9	2.212
PENC - 6	14, 29	19.9	1.494	31.2	1.681
GRAZ - MATE	-	2.4	0.921	2.4	0.921
6 - 40	14, 29	5.0	1.558	5.2	1.526
40 - 103	14, 29, 30	82.9	0.491	46.2	0.557
40 - 230	14, 29, 30	13.6	0.672	107.8	0.688
230 - MATE	1, 6, 10, 16, 17, 18, 23, 25, 30	(7.6)	6.464	17.0	5.471
ZIMM - MATE	15, 16, 23, 29	(2.8)	2.473	4.1	2.960

Грешка затварања фигура са накнадно оцењеним векторима износила је 0.05ppm и боље. Поред грешака затварања фигура, за оцену квалитета добијених оцена, послужиле су и разлике дужина између перманентних станица добијених из познатих координата ( $D_i$ ) и оцењених дужина базних линија ( $L_i$ ) -табела 7.2.3-8. Разлике показују високу поузданост оцењених решења.

Табела 7.2.3-8: Разлика датих и мерених вектора (Радојић, 1998)

ВЕКТОР	Дужина [km]	$D_i - L_i$ [mm]	ppm
GRAZ - PENC	297	31.2	0.105
GRAZ - WTZR	302	4.8	0.016
WTZR - ZIMM	476	10.1	0.021
GRAZ - MATE	719	5.2	0.007
ZIMM - MATE	1014	5.0	0.005

Након обраде вектора, извршено је изравнање мреже, фиксирањем координата перманентних станица (осим станице *Penc*). Изравнање је извршено у неколико итерација, а сви резултати су задовољили  $\tau$  - критеријум (највећа  $\tau$  - вредност је износила  $\tau = 0.69$ ). Као спољашњи индикатор квалитета добијених оцена, послужиле су координате тачке у *Penci*, где разлике оцењених и датих координата указују на испуњење захтева везаних са унапред дефинисану тачност од 10cm (табела 7.2.3-9).

Табела 7.2.3-9: Разлике датих и изравнатих координата станице *Penc* (Радојић, 1998)

СТАНИЦА	РАЗЛИКЕ [cm]			
	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\Delta H$
<i>Penc</i>	+4.2	-1.8	+2.3	+4.0

### Изравнање мреже као целине

Оценом координата тачака 6, 40, 103 и 230 у систему *ITRF96* за епоху 1998.5, створени су услови за потпуно условљено изравнање *GPS* мреже као целине. Изравнање мреже је још у првој итерацији дало добре резултате. Одбачен је само један вектор (ВГИ-6;  $\tau = 1.24$ ), а изравнање је поновљено без њега.

За делимичну спољашњу контролу оцењених координата, послужиле су координате тачке 104 одређене у међународној кампањи *EUREF - FYROM - 1996* и тачке 33 које су одредиле бугарске колеге (током заједничких југословенско-бугарских радова на државној граници, 1997. године). Координате су сведене у *ETRS89* за епоху 1989.0 и упоређене са одговарајућим *ETRS89* координатама из изравнања *GPS* мреже. Разлике координата су приказане у табели 7.2.3-10. Разлике не противурече закључку о постигнутој захтеваној тачности добијених координата.

Табела 7.2.3-10: Разлике координата

ТАЧКА	РАЗЛИКЕ [cm]			
	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\Delta H$
104	+5.6	-2.8	+7.9	+9.1
33	-7.3	+4.5	-4.2	-3.2

Списак коначних геодетских и просторних правоуглих координата тачака мреже у *ITRF96* за епоху 1998.5, трансформисане координате у више различитих датума као и трансформациони параметари за везу између *ETRS* и државног система, дати су у Радојчић (1998).

Поред наведених показатеља квалитета постигнутих резултата, мерени вектори базних линија су упоређени и са дужинама добијеним из независне кампање петодневних мерења при успостављању националног референтног оквира, у септембру 1998. године, (*YUREF98*). Решења из четири опажачке сесије по 24 сата опажања (укупно 96 сати мерења) су упоређена са решењима из мерења у војној мрежи од 14 сати. Разлике дужина базних линија, заједно са релативним грешкама страна су приказани у табели 7.2.3-11 и указују на високу сагласност два решења.

Табела 7.2.3-11: Разлике дужина базних линија из *GPS* мреже и *YUREF* мреже

Од - до	Дужина (km)	Разлика (mm)	ppm
346 -33	284	8mm	0.03
346 -230	367	14mm	0.04
346 - 103	412	1mm	0.003
33 - 103	162	1mm	0.01



### 7.3. ИСПИТИВАЊЕ УТИЦАЈА НЕАДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛА ТРОПОСФЕРЕ И ЈОНОСФЕРЕ

#### 7.3.1. Испитивање ефеката релативног утицаја тропосфере

У оквиру испитивања ефеката релативног утицаја тропосфере на оцену параметара модела *GPS* резултата мерења, изведена су два експеримента. Први експеримент је обухватио мерења на три тачке у једној опајачкој сесији са три *GPS* пријемника, а други експеримент је обухватио мерења на 5 тачака у две опајачке сесије (два дана).

Мерења у оквиру првог експеримента су извршена 23. јула 1990. године и трајала су у периоду од 5:52 до 7:59. На свакој тачци су у одређеним временским размацама мерени: температура суве и влажне тачке у цеви (психрометром) и притисак ваздуха.

У намери да се покажу ефекти утицаја изазваних несигурношћу оцена параметара тропосфере на мрежи малих димензија, оцењене су дужине узимајући у обзир:

- мерене параметре атмосфере (модел А),
- параметре добијене на основу локалног модела атмосфере (модел В)<sup>9</sup>,
- параметре добијене по моделу стандардне атмосфере (модел С)<sup>10</sup>.

У другом и трећем случају (модели В и С), при рачунању параметара атмосфере коришћен је исти модел облика (*Gurtner i dr., 1987*; исти модел је садржан у софтверском пакету PoPS)

$$\begin{aligned} T &= T_0 - 0.0065(h - h_0) \\ p &= p_0 \cdot (1 - 0.0000226(h - h_0)^{5.225}), \\ H &= H_0 \cdot e^{(-0.0006396(h - h_0))} \end{aligned} \quad (7.3.1-1)$$

где су:  $T_0$ ,  $p_0$  и  $H_0$  вредности параметара атмосфере на референтној висини  $h_0$ .

Параметри тропосферског модела (модели А, В и С) приказани су у табели 7.3.1-1.

<sup>9</sup> Оцена параметара локалног модела је извршена у односу на стварна мерења параметара атмосфере на тачки EP3 тј.  $h_{ref} = 201.3 \text{ m}$ ,  $T = 22.8 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p = 999.0 \text{ mbar}$  и  $H = 46.5 \%$ .

<sup>10</sup> Оцена параметара глобалног модела је извршена на основу параметара стандардног модела атмосфере, тј.  $h_{ref} = 0 \text{ m}$ ,  $T = 18 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p = 1013.2 \text{ mbar}$  и  $H = 50 \%$ .

Табела 7.3.1-1: Вредности параметара тропосферског модела

Станица	$h_{(m)}$	$T_{(^{\circ}C)}$			$P_{(mbar)}$			$H_{\%}$		
		A	B	C	A	B	C	A	B	C
EP3	201	22.8	22.8	16.7	999.0	999.0	989.3	46.5	46.5	43.9
EP5	320	28.0	21.2	15.9	1010	985.0	975.5	74	43.1	40.8
EP2	324	22.1	22.0	15.9	985.0	984.5	975.0	57.4	43.0	40.6

На основу добијених оцена параметара, оцењени су вектори (косе дужине)<sup>11</sup> за сва три случаја, користећи Saastamoinen-ов модел тропосфере. Резултати оцена су дати у табели 7.3.1-2.

Табела 7.3.1-2: Оцене мерених дужина за различите моделе тропосфере

Страна	Модел А	$s_m$	Модел В	$s_m$	Модел С	$s_m$
EP2 – EP3	2220.2803m	0.0015	2220.2866m	0.0004	2220.2857m	0.0004
EP2 – EP5	2381.6805m	0.0040	2381.6930m	0.0010	2381.6934m	0.0010
EP3 – EP5	2195.6027m	0.0034	2195.6622m	0.0008	2195.6613m	0.0008

На основу оцењених дужина формиране су разлике истих. Резултати упоређења су приказани у табелама 7.3.1-3 и 7.3.1-4.

Табела 7.3.1-3: Разлике оцењених дужина по моделу В и С

Страна	Разлика В – С
EP2 – EP3	0.9mm
EP2 – EP5	-0.4mm
EP3 – EP5	0.9mm

Табела 7.3.1-4: Разлике оцењених дужина по моделу А и В

Страна	Разлика А – В
EP2 – EP3	-6.3mm
EP2 – EP5	-12.5mm
EP3 – EP5	-59.5mm

Полазећи од декларисане тачности мерења са GPS пријемницима WM102 (5mm+1ppm), може се са  $p=95\%$  закључити да је само разлика EP3 – EP5 значајна, а што је и судећи према вредностима параметара (табела 7.3.1-1) било и очекивано. Међутим, интересантно је да је на EP5 дошло до такозване ‘температурне инверзије’<sup>12</sup>. Ако се погледају резултати мерења температуре у дужем периоду на истој тачци (EP5), може се закључити да је температура значајно варирајала (табела 7.3.1-5), па је ово и разлог више који потврђује препоруку- да у мрежи малих димензија, а посебно уколико су висинске

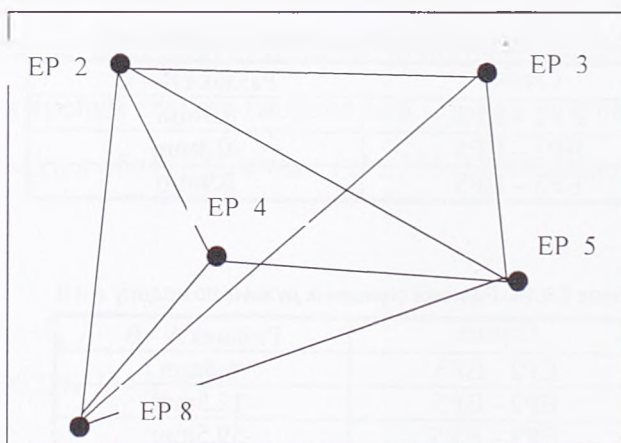
<sup>11</sup> Укупан број мерених двоструких фазних разлика износио је  $n_{DDO} = 1428$ . Оцена тачности изведена из одступања двоструких фазних разлика износила је: а) за модел А -  $s_{DDO} = 0.033$  m, б) за модел В -  $s_{DDO} = 0.008$  m, и с) за модел С -  $s_{DDO} = 0.008$  m.

<sup>12</sup> Температурна инверзија – појава да су на већим надморским висинама веће температуре него на мањим висинама.

разлике значајне, обавезно треба користи стандардни или локални модел атмосфере. Анализирајући резултате упоређења оцењених дужина са различитим параметрима тропосферског модела (табеле 7.3.1-3 и 7.3.1-4) може се закључити, да разлике оцена дужина по моделима В и С нису статистички значајне.

Ради потврде претпоставки из анализе о класи релативног утицаја тропосфере, у мрежи ЕПВГИ, изведен је још један експеримент. Мерења су обављена у јутарњим часовима, иако временски период за прецизно мерење није био најповољнији. Наиме, познато је, да је у јутарњим часовима могућа појава температурне инверзије као и локалних нерегуларности у тропосфери (напр. појава магле и сл.) тако да прикупљени параметри тропосфере на тачкама мреже највероватније најбоље не репрезентују стање у атмосфери, изнад станица премера. Међутим, управо овакви услови су добра основа за анализу утицаја ове врсте.

Мерења су изведена 23.07 и 24.07. 1990. године у периоду од 5:52-7:59 (23.07) и од 6:12 – 7:59 (24.07). За модел тропосфере је узет *Saastamoinen*-ов модел, док су параметри истог, за први случај узети глобалне-стандардне вредности, а у другом мерене вредности (табела 7.3.1-5)



Слика 7.3.1-1: Скица положаја тачака

Да би се оценили ефекти примене различитих модела тропосфере (модел А и модел С) на оцену параметара вектора базне линије, извршена је Хелмертова седмопараметарска трансформација у тродимензионалном моделу (види, на пример, *Gurtner i dr., 1987*) и оцењене су поправке трансформисаних координата тачака (несигурност) у правцу координатних оса. Резултати оцене су дати у табели 7.3.1-8. На основу добијених оцена може се закључити да се релативни утицај тропосфере највише испољава на компоненту висине (сагласно претпоставкама исказаним у анализи методе), а да њен утицај на оцену параметара положаја није статистички значајан. Што се тиче оцене базне линије, иста ће зависити од њеног нагиба. Што је већа нагнутост, то ће ефекти утицаја бити већи. Сходно томе, у мрежи малих димензија, пажњу треба посветити овом извору грешака, посебно ако су висинске разлике у мрежи значајне.



Табела 7.3.1-5. Мерене вредности атмосферских параметара

Станица	Датум	Време	Температура	Притисак	Влажност
EP 2	23.07	5 <sup>h</sup> 41'	19.2	987	79.71
		6 <sup>h</sup> 32'	22.1	985	60.2
		7 <sup>h</sup> 05'	22.1	985	57.39
		7 <sup>h</sup> 38'	22.2	983	56.83
EP 3	23.07	6 <sup>h</sup> 01'	22.4	999	54.05
		7 <sup>h</sup> 01'	22.8	999	46.53
		7 <sup>h</sup> 31'	24.2	999	43.28
		5 <sup>h</sup> 48'	21.0	1010	59.5
EP 5	23.07	6 <sup>h</sup> 10'	23.0	1010	75.99
		6 <sup>h</sup> 45'	26.0	1010	77.5
		7 <sup>h</sup> 22'	30.0	1010	72.8
EP 4	24.07	6 <sup>h</sup> 01'	18.2	985	69.8
		6 <sup>h</sup> 28'	17.0	985	81.2
		7 <sup>h</sup> 01'	16.2	985	92.2
EP 5	24.07	5 <sup>h</sup> 35'	18.4	989	66.7
		7 <sup>h</sup> 28'	20.0	989	74.4
EP 8	24.07	6 <sup>h</sup> 03'	16.4	988	80.5
		6 <sup>h</sup> 54'	17.2	988	82.2

Табела 7.3.1-6: Оцене GPS дужина из изравњања (модел тропосфере С и А)

Страна	ME5000 (април 91)		GPS решење (модел С) <sup>13</sup>		GPS решење (модел А) <sup>14</sup>	
	дужина (m)	s(mm)	дужина(m)	s(mm)	дужина(m)	s(mm)
EP2-EP3	2220.2873	0.40	2220.2854	0.0004	2220.2801	0.0013
EP2-EP5	2381.7018	0.25	2381.6909	0.0008	2381.7072	0.0035
EP2-EP8			4573.5166	0.0011	4573.5235	0.0038
EP3-EP5	2195.6763	0.15	2195.6572	0.0006	2195.6287	0.0020
EP3-EP8			4884.4391	0.0009	4884.4287	0.0032
EP5-EP8	2697.9881	0.30	2697.9856	0.0007	2697.9862	0.0025
EP4-EP5	1644.3444	0.18	1644.3432	0.0005	1644.3437	0.0018
EP4-EP8	2122.9916	0.27	2122.9852	0.0004	2122.9840	0.0014
EP2-EP4	2556.5754	0.13	2556.5642	0.0010	2556.5601	0.0016

Табела 7.3.1-7: Разлике дужина оцењених по моделима С и А

Страна	Разлика С – А
EP2-EP3	-5.3mm
EP2-EP5	2.8
EP2-EP8	6.9
EP3-EP5	-28.6
EP3-EP8	-10.4
EP5-EP8	0.6
EP4-EP5	0.5
EP4-EP8	-1.2
EP2-EP4	-4.1

<sup>13</sup> У изравњању је учествовало  $n_{DDO}=2096$ ,  $N=3$  и  $s_{DDO} = 0.007m$ .<sup>14</sup> У изравњању је учествовало  $n_{DDO}=2096$ ,  $N=3$  и  $s_{DDO} = 0.025m$

Табела 7.3.1-8: Резултати упоређења два решења

Станица	Поправке (mm)		
	7. параметарска Хелмертова трансформација <i>GPS</i> (глобални модел атмосфере) – <i>GPS</i> (модел са мереним параметрима)		
	Фактор размере = -1.431ppm (s = 18.355)		
	Север-југ	Исток-запад	Висина
EP2	-11	2	-4
EP3	4	9	-76
EP4	0	-6	49
EP5	6	-10	172
EP8	2	5	-102

### 7.3.2. Испитивање ефеката апсолутног утицаја тропосфере

За испитивање ефеката апсолутног утицаја тропосфере, послужила су *GPS* мерења на мрежи *ЕПВГИ* из 1994. године. У обраду су узете три опајачке сесије које су извршене од 9. до 12. маја 1994. године. Мерењем је обухваћено свих осам тачака мреже *ЕПВГИ*. Оцена параметара (координата) и дужина је извршена по програму *PoPS V.3.41*, при чему је у првом случају примењен *Saastamoinen*-ов модел тропосфере са стандардним (генералним) параметрима атмосфере, а у другом случају, модел тропосфере је потпуно искључен. Резултати оцена по оба модела су приказани у Прилозима 1 и 2, респективно.

На основу резултата оцене параметара, као и у претходном испитивању, извршена је Хелмертова седмопараметарска трансформација, на основу чега су оцењене поправке координата (несигурност) за сваку тачку мреже, за све три осе. Резултати оцене су приказани у табели 7.3.2-1.

Значајно је истаћи, да изостављање тропосфере (апсолутни утицај) не утиче на оцену положаја тачака, док је утицај на оцену параметра висине значајан. Не може се категорички тврдити, без додатних свеобухватнијих мерења на више различитих мрежа, да је утицај статистички значајан. Претпоставља се да је несигурност оцена параметра висине резултат нагиба (висинских разлика) појединих страна у мрежи (тачке EP2, EP3 и EP5 су екстремне тачке у погледу висина). Такође, значајно је истаћи и да је промена размере услед одбацивања тропосфере значајна и да је иста у овој мрежи настала не само због изостављања тропосферског модела већ и због несигурности оцене параметара висине, што је и био циљ ове анализе.

Табела 7.3.2-1: Резултати упоређења два решења (1-2)<sup>15</sup>

Станица	Поправке (mm)		
	7. параметарска Хелмертова трансформација		
	Фактор размере = 1.811ppm (s=3.1869)		
	$s_{\text{transf}} = 0.02167\text{m}$		
	Север-југ	Исток-запад	Висина
EP1	1	0	-25
EP2	-1	0	42
EP3	1	0	-60
EP4	0	0	8
EP5	-3	0	41
EP6	-2	0	-1
EP7	4	2	8
EP8	0	0	-13

### 7.3.3. Испитивање ефеката изазваних неузимањем у обзир моделе јоносфере

Као и у претходном испитивању, за анализу утицаја занемаривања јоносфере у оцени параметара модела мерења у мрежи *ЕПВГИ*, послужио је исти узорак *GPS* мерења, стим што је обрада мерења извршена изостављањем модела јоносфере (Прилог 3).

Обрађени резултати су анализирани на исти начин као у претходна два случаја, а резултати упоређења су приказани у табели 7.3.3-1. На основу приказаних резултата се може закључити, да изостављање модела јоносфере није утицало на оцену параметара положаја и висине. Потврђене су претпоставке из анализе, да изостављање јоносферског модела изазива промену размере, тј. оцењене дужине су краће.

Табела 7.3.3-1: Резултати упоређења два решења (1-3)<sup>16</sup>

Станица	Поправке (mm)		
	7. параметарска Хелмертова трансформација		
	Фактор размере = -1.394ppm (s=0.1150)		
	$s_{\text{transf}} = 0.000782\text{m}$		
	Север-југ	Исток-запад	Висина
EP1	-1	1	0
EP2	0	1	0
EP3	1	1	0
EP4	0	0	1
EP5	0	0	1
EP6	1	-1	0
EP7	-1	-1	-1
EP8	0	-1	1

<sup>15</sup> 1 -Тройосферски модел: Saastamoinen; Атмосферски модел: стандардни; Јоносферски модел: single-layer

2 -Тройосферски модел: Saastamoinen; Атмосферски модел: no модел; Јоносферски модел: single-layer

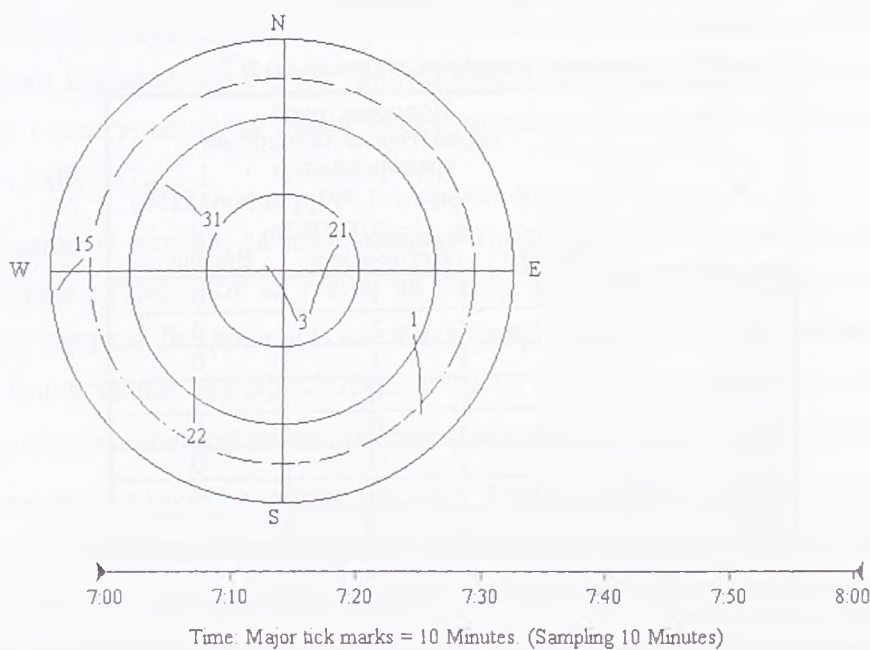
<sup>16</sup> 1 -Тройосферски модел: Saastamoinen; Атмосферски модел: стандардни; Јоносферски модел: single-layer

3 -Тройосферски модел: Saastamoinen; Атмосферски модел: стандардни; Јоносферски модел: no model



#### 7.4. РЕЗУЛТАТИ АНАЛИЗЕ ПОУЗДАНОСТИ МЕРЕЊА БАЗНИХ ЛИНИЈА

Ради илустрације значаја појединих параметара поузданости при анализи плана мерења и квалитета извршених фазних *GPS* мерења базне линије, дат је пример *GPS* мерења које је изведено 13.08.1998. године. Мерења су извршена у периоду од три часа, али је за илустрацију теоретског приказа одабран период мерења од 7:00 до 8:15. Ради креирања дизајн матрице  $A$  (израз 3.2.1-24) координате сателита су преузете са Интернета (*CODE* – Европски центар за одређивање ефемерида у Берну; *ITRF96* систем, 225 дан 1998 године-98225.), док су координате тачке 15 (Милићево брдо) добијене из изравнања мреже (у анализи поузданости је довољно користити приближне вредности). При рачунању коефицијената матрице  $A$ , коришћено је пет сателита (слика 7.4-1). Кроз мере поузданости анализирани су три варијанте избора референтног сателита. Резултати анализе су приказани у табели 7.4-1. коришћени су осредњени 15. минутни положаји сателита. Како се у периоду опажања од 75 минута налази 6 таквих интервала, укупан број опажања износи  $24 = (S-1) \times 6$ , док је број непознатих параметара једнак седам (три непознате координате тачке 15 и 4 неодређености  $N = (S-1) = 4$ ), при чему је узето да је у свакој епохи коришћен исти скуп сателита (SV1, SV3, SV15, SV21, SV22 и SV31).



Слика 7.4-1: Положаји сателита

Циљ анализе је био - испитивање могућности мера поузданости при утврђивању референтног сателита као најоптималнијег решења у обради резултата мерења. На

сличан начин би било могуће утврдити и најповољнију констелацију сателита, период опажања и сл.

Резултати рачунања фактора локалне поузданости опажања двоструких разлика ( $R$ ), маргиналних грешака које се могу открити (*Marginally detectable errors – MDE*) укупних параметара дисторзије који изражавају ефекте *MDE* на све параметре (*TDP* - израз 6.2.2-6) и парцијалних параметара дисторзије који исказује ефекте утицаја *MDE* само на координате (*PDP*), приказани су у табели 7.4-1. Задње две врсте у табели 7.4-1 садрже максималне и минималне вредности срачунатих параметара, респективно.

При рачунању *MDE* коришћен је параметар нецентралности  $\lambda_0 = 4.13$  ( $\alpha_0 = 0.1\%$  и  $1-\beta = 20\%$ ). Узевши да је а приори варијанса једнака 1cm, вредности појединих *MDE* не прелазе четвороструку вредност а приори варијансе, тј. у *DDO* опажањима је могуће открити грубе грешке веће од 4cm.

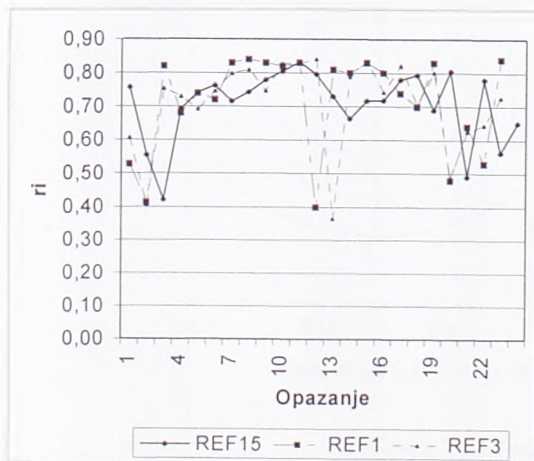
Упоредом срачунатих вредности параметара, при избору 1. 3. и 15. сателита као референтног, може се закључити да сателит 15 треба изабрати као референтни. Наиме, максималне вредности мера поузданости у случају избора овог сателита су најмање.

На сликама 7.4-2 и 7.4-3 су дати графички прикази вредности редувантних фактора и маргиналних грешака за сва три случаја.

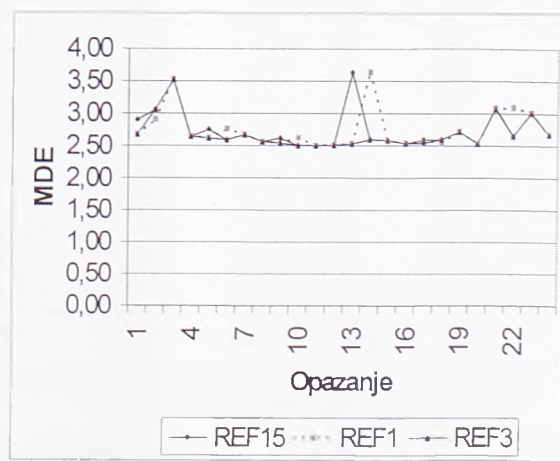
Табела 7.4-1: Вредности појединих мера поузданости при избору различитих референтних сателита (SV 1 SV 3 и SV 15)

Референтни сателит - 1				Референтни сателит -3				Референтни сателит -15			
R	MDE	TDP	PDP	R	MDE	TDP	PDP	R	MDE	TDP	PDP
0.67	2.90	2.60	1.48	0.66	2.68	1.60	0.64	0.76	2.68	1.60	0.64
0.53	3.06	3.37	2.12	0.61	2.90	2.60	1.48	0.56	3.06	3.37	2.12
0.41	3.52	5.81	4.15	0.40	3.52	5.81	4.15	0.42	3.52	5.81	4.15
0.82	2.65	1.48	0.54	0.75	2.65	1.48	0.54	0.69	2.65	1.48	0.54
0.68	2.76	1.95	0.94	0.73	2.62	1.35	0.44	0.74	2.62	1.35	0.44
0.74	2.59	1.25	0.35	0.69	2.76	1.95	0.94	0.76	2.59	1.25	0.35
0.72	2.67	1.58	0.63	0.75	2.67	1.58	0.63	0.72	2.67	1.58	0.63
0.83	2.57	1.13	0.26	0.80	2.57	1.13	0.26	0.74	2.57	1.13	0.26
0.84	2.62	1.37	0.45	0.81	2.54	1.03	0.17	0.78	2.54	1.03	0.17
0.83	2.51	0.89	0.05	0.75	2.62	1.37	0.45	0.80	2.51	0.89	0.05
0.82	2.50	0.88	0.04	0.83	2.50	0.88	0.04	0.83	2.50	0.88	0.04
0.83	2.51	0.91	0.07	0.83	2.51	0.91	0.07	0.80	2.51	0.91	0.07
0.40	3.64	6.46	4.69	0.84	2.53	0.99	0.14	0.73	2.53	0.99	0.14
0.81	2.60	1.27	0.37	0.36	3.64	6.46	4.69	0.66	2.60	1.27	0.37
0.80	2.58	1.19	0.31	0.79	2.58	1.19	0.31	0.72	2.58	1.19	0.31
0.83	2.54	1.02	0.16	0.84	2.54	1.02	0.16	0.72	2.54	1.02	0.16
0.80	2.54	1.03	0.17	0.74	2.59	1.22	0.33	0.78	2.59	1.22	0.33
0.74	2.60	1.26	0.36	0.82	2.54	1.03	0.17	0.80	2.60	1.26	0.36
0.70	2.72	1.80	0.81	0.71	2.72	1.80	0.81	0.69	2.72	1.80	0.81
0.83	2.53	1.00	0.14	0.80	2.53	1.00	0.14	0.81	2.53	1.00	0.14
0.48	3.09	3.53	2.25	0.49	3.07	3.42	2.16	0.49	3.07	3.42	2.16
0.64	2.65	1.51	0.57	0.63	3.09	3.53	2.25	0.78	2.65	1.51	0.57
0.53	3.01	3.12	1.91	0.65	3.01	3.12	1.91	0.56	3.01	3.12	1.91
0.84	2.68	1.61	0.66	0.73	2.68	1.61	0.66	0.65	2.68	1.61	0.66
0.84	3.64	6.46	4.69	0.84	3.64	6.46	4.69	0.83	3.52	5.81	4.15
0.04	2.5	0.88	0.04	0.36	2.5	0.88	0.04	0.42	2.5	0.88	0.04

Напомена: претпоследња врста садржи максималне вредности параметара, а последња минималне.



Слика 7.4-2. Фактори локалне поузданости



Слика 7.4-3. Вредности маргиналних грешака (cm)

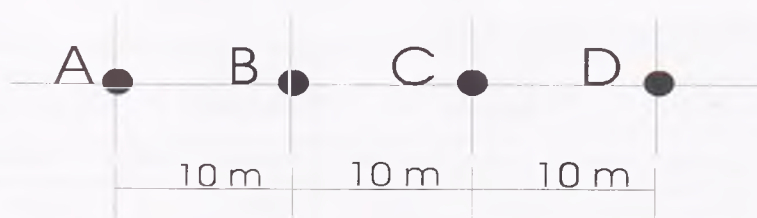


## 7.5. ОЦЕНА АДИЦИОНЕ КОНСТАНТЕ GPS АНТЕНА

### 7.5.1. Начин опажања и оцена базних линија

Адициона константа *GPS* антене представља растојање између положаја њеног геометријског центра и тачке пријема сигнала (условно речено - фазног центра). Код релативне методе мерења базних линија, при чему се користе два *GPS* пријемника (две антене) адициону константу пара антена чини резултанта двају појединачних адиционих константи. Оцена адиционе константе *GPS* антена је неопходна при анализи релативне методе *GPS* мерења и претходне оцене тачности мерења базних линија. До поуздане оцене могуће је доћи лабораторијским испитивањем или на основу резултата мерења у реалним условима. Код мерења у реалним условима користе се веома кратка растојања. Најчешће се користи тест нулте базе, код кога се једна антена повезује на два пријемника, при чему очекивана вредност дужине треба бити једнака нули. Поред теста нулте базе, експерименти се изводе и на кратким дужинама (од неколико метара) при чему се претпостављају идентични услови при мерењу на оба краја дужине.

Ради оцене адиционе константе пара *GPS* антена као и прецизности мерења краћих дужина базних линија, на еталону за дужине у Ковину, извршена су четвородневна *GPS* мерења на четири стуба (слика 7.5.1-1) са пријемницима *Trimble 4400* (антене типа *Compact/L1L2 with ground plane*). Мерења са електрооптичким даљиномером *ME5000* су изведена по посебном плану, док су оцене дужина између стубова добијене из изравнања (табела 7.5.1-6). Опажања у једном дану су извршена са четири *GPS* пријемника у четири серије, при чему се једном серијом мерења сматрало идентични положаји антена по правцима (антене су у свакој серији биле идентично усмерене по правцима 1-4; слика 7.5.1-2). Мерења у првој серији су изведена у периоду од 08-09, другој од 09-10, трећој 10-11 и четвртој од 11-12 часова. Положај и растојања између стубова су приказани на слици 7.5.1-1.



Слика 7.5.1-1. Распоред стубова и њихово приближно међусобно растојање



Слика 7.5.1-2: Положаји антена у појединим серијама

Мерења су изведена од 18. до 21. септембра, при чему се сваког дана мерило у приближно једнаким интервалима (један час) са једнаким почетком и завршетком (једнака геометрија сателита). Резултати мерења су дати у табелама 7.5.1-1 до 7.5.1-4.

Табела 7.5.1-1. Мерења првог дана (18.09.1999)

Дужина	Резултат мерења		Резултат мерења		Резултат мерења		Резултат мерења	
	Правац 1 $s(mm)$		Правац 2 $s(mm)$		Правац 3 $s(mm)$		Правац 4 $s(mm)$	
AB	10.031	0.4	10.031	0.6	10.030	0.5	10.031	0.5
AC	19.962	0.4	19.962	0.6	19.962	0.5	19.962	0.5
CD	30.005	0.4	30.004	0.6	30.004	0.5	30.005	0.5
BC	9.931	0.4	9.931	0.5	9.932	0.4	9.931	0.5
BD	19.974	0.5	19.974	0.6	19.973	0.5	19.974	0.5
CD	10.043	0.5	10.043	0.6	10.042	0.4	10.043	0.5

Табела 7.5.1-2. Мерења другог дана (19.09.1999)

Дужина	Резултат мерења		Резултат мерења		Резултат мерења		Резултат мерења	
	Правац 1 $s(mm)$		Правац 2 $s(mm)$		Правац 3 $s(mm)$		Правац 4 $s(mm)$	
AB	10.031	0.4	10.31	0.6	10.030	0.4	10.031	0.5
AC	19.963	0.4	19.962	0.5	19.963	0.4	19.963	0.6
CD	30.006	0.5	30.005	0.5	30.004	0.5	30.005	0.5
BC	9.932	0.5	9.932	0.6	9.932	0.5	9.931	0.5
BD	19.975	0.5	19.974	0.6	19.974	0.5	19.974	0.6
CD	10.043	0.5	10.043	0.5	10.042	0.5	10.042	0.6

Табела 7.5.1-3. Мерења трећег дана (20.09.1999)

Дужина	Резултат мерења		Резултат мерења		Резултат мерења		Резултат мерења	
	Правац 1 $s(mm)$		Правац 2 $s(mm)$		Правац 3 $s(mm)$		Правац 4 $s(mm)$	
AB	10.028	0.5	10.031	0.5	10.030	0.4	10.032	0.6
AC	19.960	0.4	19.961	0.5	19.962	0.5	19.962	0.7
CD	30.002	0.5	30.004	0.6	30.003	0.5	30.005	0.6
BC	9.931	0.5	9.930	0.5	9.931	0.4	9.930	0.7
BD	19.974	0.5	19.973	0.6	19.973	0.5	19.973	0.5
CD	10.042	0.5	10.042	0.5	10.042	0.5	10.043	0.7

Табела 7.5.1-4. Мерења четвртог дана (21.09.1999)

Дужина	Резултат мерења		Резултат мерења		Резултат мерења		Резултат мерења	
	Правац 1 $s(mm)$		Правац 2 $s(mm)$		Правац 3 $s(mm)$		Правац 4 $s(mm)$	
AB	10.032	0.5	10.032	0.5	10.031	0.5	10.032	0.5
AC	19.963	0.5	19.963	0.5	19.962	0.5	19.963	0.5
CD	30.004	0.6	30.004	0.6	30.004	0.6	30.004	0.6
BC	9.931	0.5	9.931	0.5	9.930	0.4	9.931	0.5
BD	19.972	0.5	19.972	0.5	19.973	0.5	19.972	0.6
CD	10.041	0.4	10.041	0.5	10.042	0.5	10.041	0.6

На основу резултата мерења срачунате су средине по данима (табела 7.5.1-5). При оцени средина узети су у обзир сви резултати мерења.

Табела 7.5.1-5. Средине мерених дужина по данима и њихове дисперзије

Дужина	Први дан		Други дан		Трећи дан		Четврти дан	
	$l(m)$	$s^2(mm^2)$	$l(m)$	$s^2(mm^2)$	$l(m)$	$s^2(mm^2)$	$l(m)$	$s^2(mm^2)$
AB	10,031	0,2500	10,031	0,2500	10,030	2,9167	10,032	0,2500
AC	19,962	0,0000	19,963	0,2500	19,961	0,9167	19,963	0,2500
AD	30,005	0,3333	30,005	0,6667	30,004	1,6667	30,004	0,0000
BC	9,931	0,2500	9,932	0,2500	9,931	0,3333	9,931	0,2500
BD	19,974	0,2500	19,974	0,2500	19,973	0,2500	19,972	0,2500
CD	10,043	0,2500	10,043	0,3333	10,042	0,2500	10,041	0,2500

Тестирањем једнакости средњих вредности, закључено је да не постоји значајна разлика у оценама средина по данима. На основу тога, из средина по данима срачунате су оцене појединих распона и исте су приказане у табели 7.5.1-6. У истој табели су дате и оцене распона добијене из мерења са електронским даљиномером ME5000 и разлике оцењених (GPS и ME5000) дужина.



Табела 7.5.1-6. Дефинитивне оцене дужина и разлике ГПС-МЕ5000

Дужина	GPS - Дефинитивне оцене		МЕ5000 - Дефинитивне оцене		Разлика GPS-МЕ5000
	$l(m)$	$s^2(mm^2)$	$l(m)$	$s^2(mm^2)$	
AB	10,031	1,050	10.0289	0.13	2.100
AC	19,962	0,696	19.9585	0.13	3.500
AD	30,004	0,867	30.0021	0.13	1.900
BC	9,931	0,462	9.9296	0.13	1.400
BD	19,973	0,783	19.9732	0.13	-0.200
CD	10,042	0,562	10.0436	0.13	-1.600

На основу разлика дефинитивних оцена дужина, оцењена је адициона константа и она износи  $a = 0.1 \text{ mm}$ . Иста се може занемарити, при чему се усваја вредност  $a = 0$ .

Оцена дисперзије резултата мерења добијена из одступања свих резултата мерења у односу на средње вредности (табела 7.5.1-6) износи  $s_l^2 = 0,74 \text{ mm}^2$  са  $f = 90$  степени слободе

### 7.5.2. Оцена адиционе константе и њене несигурности

Формулација проблема

Нека је  $\mathbf{I}$  - вектор случајних променљивих димензија  $n \times 1$ , облика

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{G}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (7.5.2-1)$$

где су :  $\mathbf{A}$  - позната матрица (матрица коефицијената једначина грешака, у нашем случају вредности коефицијената су 0, 1 и -1, *Божић, 1993*),  $\mathbf{X}$  -  $m \times 1$  вектор непознатих параметара (дужине  $AB, AC, AD$  и адициона константа  $a$ ), а  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{I}$ , а  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  - вектор некорелираних случајних променљивих са  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$  и  $D(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma_1^2 \mathbf{I}_n$ , где је  $\sigma_1^2$  непозната референтна дисперзија која не зависи од дужине.

Познати су следећи односи (поглавље 6.3)

$$E(\mathbf{I}) = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

$$D(\mathbf{I}) = \sigma_1^2 \mathbf{V}_1 \quad (7.5.2-2)$$

где је:  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1^T = \mathbf{I}$

Проблем гласи: оценити непознате параметре (дужине  $AB, AC$  и  $AD$  и адициона константа  $a$ ) и експерименталну дисперзију  $\sigma_1^2$ .

Оцена дисперзије  $\sigma_1^2$  извршена је по моделу *IMINQE* (итеративни *MINQE*). Како је матрица  $\mathbf{V}_1$  *nnd.* (ненегативно дефинитна) препоручује се модификована итеративна

процедура код које дисперзија  $\sigma_1^2$  остаје ненегативна кроз све итерације. Оцена непознате дисперзије се рачуна према изразу облика

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\hat{v}^T \cdot K_1^{-1} \cdot V_1 \cdot K_1^{-1} \cdot \hat{v}}{tr(R \cdot V_1)} \quad (7.5.2-3)$$

где су:

$\hat{v} = -K_1 \cdot R \cdot I$  - вектор оцењених поправака,

$K = \sigma_{0l}^2 \cdot I_n$  - коваријациона матрица вектора мерења димензија  $n$ ,

$R = K_1^{-1} - K_1^{-1} \cdot A(A^T K_1^{-1} A)^{-1} A^T K_1^{-1}$  и

$I$  – вектор слободних чланова (или вектор мерења у нашем случају пошто се ради о линеарном моделу).

Оцена дисперзије GPS резултата мерења која не зависи од величине дужине и адicione константе пара антена

На основу горњих израза у програмском пакету *MATLAB*, оцењена је компонента дисперзије резултата *GPS* мерења која не зависи од величине растојања и адicione константа пара *GPS* антена. Не одбацујући ни један резултат мерења, оцена компонента дисперзије која не зависи од величине растојања износи  $\sigma_1^2 = 0.724 \text{ mm}^2$  ( $f = 92$  степени слободе;  $\sigma_0^2 = 1.00$ ). Након тестирања на постојаност грубих грешака (*data snooping*) одбачен је само један резултат ( $AB = 10.028 \text{ m}$  из трећег дана), после чега је добијена оцена  $\sigma_1^2 = 0.635 \text{ mm}^2$  ( $f = 91$  степени слободе;  $\sigma_0^2 = 1.00$ ). Оцена адicione константе пара антена износи  $a = 0$  (након одбацивања резултата  $AB = 10.028$ ). Коваријациона матрица оцењених параметара (три дужине и адicione константа)  $Q_x$ , гласи

$$Q_x = \begin{bmatrix} 0.0299 & 0.0296 & 0.0393 & -0.0195 \\ 0.0296 & 0.0597 & 0.0698 & -0.0400 \\ 0.0393 & 0.0698 & 0.1098 & -0.0602 \\ -0.0195 & -0.0400 & -0.0602 & 0.0403 \end{bmatrix}$$

## 7.6. УПОРЕЂЕЊЕ АИУВ МОДЕЛА И МОДЕЛА ДОБИЈЕНОГ ИЗ АНАЛИЗЕ

На Астрономском институту Универзитета у Берну (AIUB) изведен је израз за оцену тачности *GPS* мерене базне линије као функција њене дужине (*Beutler i dr., 1987*). Израз је изведен уз претпоставку да се користе идеални *GPS* пријемници (двофреквентни, најмање да поседују C/A код и да нема утицаја одбијених сигнала) и да је програм за обраду мерења идеалан (узима у обзир све значајне изворе грешака приказане у 5. поглављу).

При извођењу израза, *AIUB* је имао на располагању узорак великог обима *GPS* мерених резултата на мрежама од 500m до 4200km, извршених у периоду од 1983. до 1986. године на више локација широм света. Оцењени су резултати мерења из изравнања (формална тачност- *Beutler i dr., 1987*), као и из упоређења *GPS* мерених базних линија и мерења (актуелна тачност) изведених класичним геодетским инструментима или уређајима за екстратерестричка мерења (*VLBI*).

На основу резултата формалне и актуелне тачности, констатована је разлика у корист формалне тачности (мање номиналне вредности оцена) и конструисана је права која приказује вредности  $\Delta l$  у зависности од дужине базне линије  $l$ . При графичком конструисању тог односа коришћен је логаритамски размер за  $\Delta l$  и  $l$ . На основу извршене анализе, констатован је однос између  $\Delta l$  и  $l$ , (може се апроксимирати правом линијом), облика

$$\log(\Delta l) = \log(\Delta b_1) + \lambda \cdot \log(l), \quad (7.6-1)$$

где је:  $\Delta b_1$  –тачност мерења базне линије дужине 1km.

На основу резултата експерименталних испитивања добијене су оцене за  $\Delta b_1 = 0.7\text{mm}$  и  $\lambda = 0.58$ , па израз за оцену тачности *GPS* мерења базних линија гласи

$$\Delta l = 0.7 \cdot l^{0.58} \text{ mm} \quad (7.6-2)$$

где је:  $l$  - дужина базне линије у km.

Израз (7.6-2) се може трансформисати у други облик, чиме се дефинише релативна тачност *GPS* мерења базних линија, и то:

$$\frac{\Delta l}{l} = 0.7 \cdot l^{-0.42} \text{ mm} / \text{ km} \cong \sqrt{\frac{1}{2l}} \text{ mm} / \text{ km} \quad (7.6-3)$$

који одражава потенцијалну релативну тачност *GPS* мерења базних линија.



Произвођачи *GPS* уређаја, тачност мерења базних линија декларишу изразом

$$\sigma_l = \sigma_1 + \sigma_2 \cdot l_{km}, \quad (7.6-4a)$$

који се користи и код класичних *EDM* инструмената. Осим тога, *Schaffrin* и *Bock* (1988), (*Leick*, 1995), дисперзију опажања двоструких фазних разлика моделују као

$$\sigma^2(\varphi_{km}^{pq}) = 4(a^2 + b^2 \cdot l^2), \quad (7.6-4b)$$

при чему је:  $a$  -компонента дисперзије која не зависи од дужине базне линије,  $b$  - компонента дисперзије која делује пропорционално дужини и  $l$  - дужина базне линије у километрима.

Из теорије метода мерења (*Мркић*, 1978; *Перовић*, 1998), као и теорије компоненти дисперзија (*Caspary*, 1987) познато је да су стандардне грешке  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (или њихови квадрати – компоненте дисперзија) састављене из извесног броја елементарних грешака, сагласно моделу (6.3.1-4), односно (6.3.1-6). Такође је познато, да прву компоненту чине елементарне грешке које не зависе од дужине, у шта сагласно (5.3.1) спадају: *грешка мерења фазе* ( $\sigma_\varphi$ ), *грешка рефлексије сигнала* ( $\sigma_{ref}$ ) и *грешка несавршености конструкције инструмената и сајтелија укључујући и грешку пара GPS антена* ( $\sigma_{ms+ca}$ ). Претпостављено је и да ове грешке имају случајан карактер и да се повећањем броја мерења (броја двоструких фазних разлика –  $n_{DDO}$ ) њихов утицај смањује. Компоненту грешке која се множи са мереном дужином, сходно (5.3.1) чине: *грешка фреквенције сигнала* ( $\sigma_f$ ) и *грешка брзине ширења сигнала* ( $\sigma_c$ ). Према Перовићу (*Перовић*, 1998), у грешци мерења дужине, садржане су још две грешке: *грешка центрисања инструмената* ( $\sigma_{cl}$ ) и *грешка центрисања сигнала* ( $\sigma_{cs}$ ). У случају *GPS*, ове две грешке се могу објединити у једну - *грешку центрисања антена* ( $\sigma_{ca}$ ).

Сагласно начину декларисања тачности мерења базних линија од стране произвођача *GPS* опреме као и изнетим претпоставкама у вези структуре појединих компонената дисперзија мерења дужина, дисперзија *GPS* мерења дужине базне линије са *GPS* уређајима се може написати као

$$\sigma_l^2 = \sigma_{ca}^2 + \frac{1}{n_{DDO}}(\sigma^2 + \sigma_{ref}^2 + \sigma_{ms+a}^2) + l^2 \cdot \left[ \left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2 \right]. \quad (7.6-4c)$$

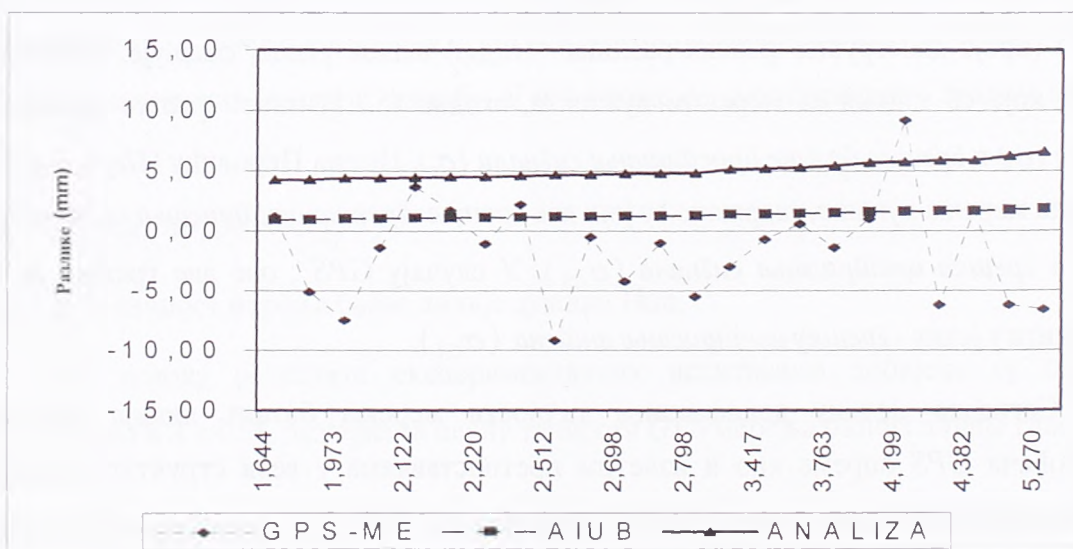
У табели 7.6-1, према подацима из литературе, дате су вредности појединих грешака.

У табели 7.6-2, приказане су вредности грешака мерења базних линија према распону дужина у мрежи *ЕПВГИ*, по *AIUB* моделу (7.6-2) и моделу (7.6-4c).

Табела 7.6-1: Опште вредности грешака 1. групе

Грешка	Вредност грешке
$\sigma_{CA}$	1 - 2 mm
$\frac{\sigma_c}{c}$	$1 \times 10^{-6}$
$\frac{\sigma_f}{f}$	$1 \times 10^{-9}$
$\sigma_\varphi$	3.4 mm (односи се на пар уређаја)
$\sigma_{ref}$	84.8 mm (односи се на пар уређаја)
$\sigma_{ins+a}$	14.1 mm (односи се на пар уређаја)

У последњој колони табеле (7.6-2) су приказане разлике изравнатих дужина мерених на ЕПВГИ са GPS пријемницима WM102 (мај 94) и даљиномером ME5000. Према резултатима приказаним у табели 7.6-2, на слици 7.6-1, графички су приказани резултати оцена грешака по: AIUB моделу, моделу изведеном из анализе<sup>17</sup> и разлике изравнатих дужина базних линија мерених са GPS и ME5000.



Слика 7.6-1: Грешке GPS базних линија оцењених по моделу 7.6-2 (AIUB) и 7.6-4ц (АНАЛИЗА) и разлике изравнатих GPS косо-мерених дужина и косих дужина мерених са ME5000 на ЕПВГИ (задња колона из табеле 7.6-2)

На основу приложених показатеља, очигледно је постојање константне систематске разлике између два модела. Међутим, ако се узме у обзир да је AIUB модел изведен уз претпоставке дефинисане на почетку овог поглавља, и ако се исте ( $\sigma_{ref} = 0$ ;  $\sigma_{ins+a} = 0$ ;  $\sigma_\varphi = 0$  и уз услов да је  $\sigma_c/c = 0.15 \cdot 10^{-6}$ ) уврсте у модел (7.6-4ц), између оцена

<sup>17</sup> У рачунањима вредности грешака по моделу 7.6-4ц, за грешку центрирања је коришћена вредност  $\sigma_{CA} = 0$  (присилно центрирање).

грешака мерења базних линија по оба модела, нема значајне разлике (слика 7.6-2; коефицијент корелације износи  $r = 0.99$ ).

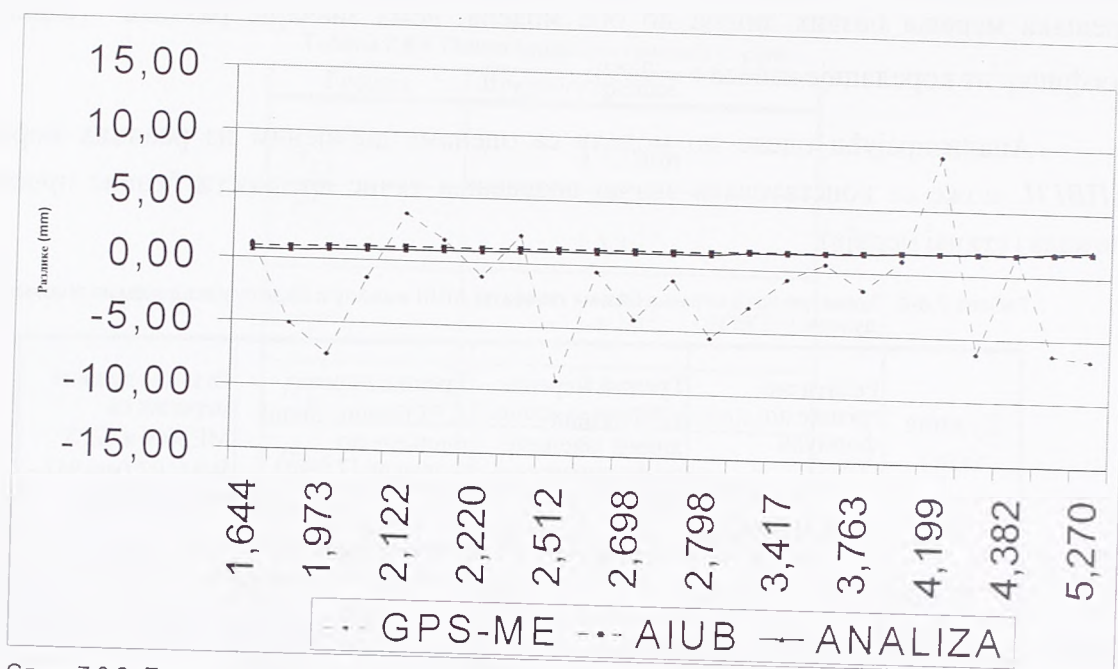
Анализирајући оцене по моделу са оценама добијеним из реалних мерења на ЕПВГИ, може се констатовати значај познавања тачне вредности брзине простирања сигнала (утицај медија).

Табела 7.6-2: Оцене грешака мерења базних линија по AIUB моделу и моделу изведеном из анализе (дужине у ЕПВГИ)

Дужина (km)	Релативне грешке по формули (7.6-3) (mm/km)	Грешке мерених GPS базних линија оцењене по формули (7.6-2) (mm)	Грешке мерених GPS базних линија оцењене по формули (7.6-4ц) (mm)	Разлике дужина мерених са ME5000 и GPS WM102 (мај 94) – из изравнања (mm)
1,644	0,551	0,934	4,257	1,2
1,675	0,546	0,944	4,269	-5,1
1,973	0,503	1,038	4,395	-7,5
2,037	0,495	1,058	4,424	-1,4
2,123	0,485	1,083	4,464	3,7
2,196	0,477	1,105	4,499	1,7
2,220	0,474	1,112	4,511	-1,1
2,382	0,458	1,158	4,593	2,2
2,512	0,446	1,194	4,661	-9,2
2,556	0,442	1,206	4,686	-0,5
2,698	0,430	1,245	4,764	-4,2
2,756	0,426	1,260	4,797	-1
2,799	0,423	1,271	4,822	-5,5
3,333	0,387	1,407	5,150	-3
3,417	0,382	1,428	5,205	-0,7
3,543	0,376	1,458	5,289	0,6
3,763	0,364	1,510	5,439	-1,4
4,120	0,348	1,591	5,692	1
4,200	0,345	1,610	5,749	9,2
4,373	0,338	1,647	5,878	-6,2
4,382	0,338	1,649	5,884	1,7
4,855	0,321	1,750	6,244	-6,2
5,270	0,308	1,835	6,572	-6,6

Код великих дужина, да би се извели неки закључци о поузданости модела (7.6-4ц), неопходно би било поседовати референтне вредности, са чиме се нажалост није располагало. Уобичајено је за потребе ове врсте (Beutler *i dr.*, 1987) користити VLBI мерења. Међутим, када је реч о великим дужинама, више ради оцене сагласности два модела, занимљиво је графички приказати оцене по оба модела и то у случају када се узму вредности грешака дефинисаних у литератури (слика 7.6-3) и условима какви су претпостављени при извођењу AIUB израза, при чему је узета претпостављена вредност  $\sigma_c/c = 0.1 \cdot 10^{-6}$  (слика 7.6-4) и то за дужине од 1km до 100km, према распонима симулираним у табели 7.6-3.

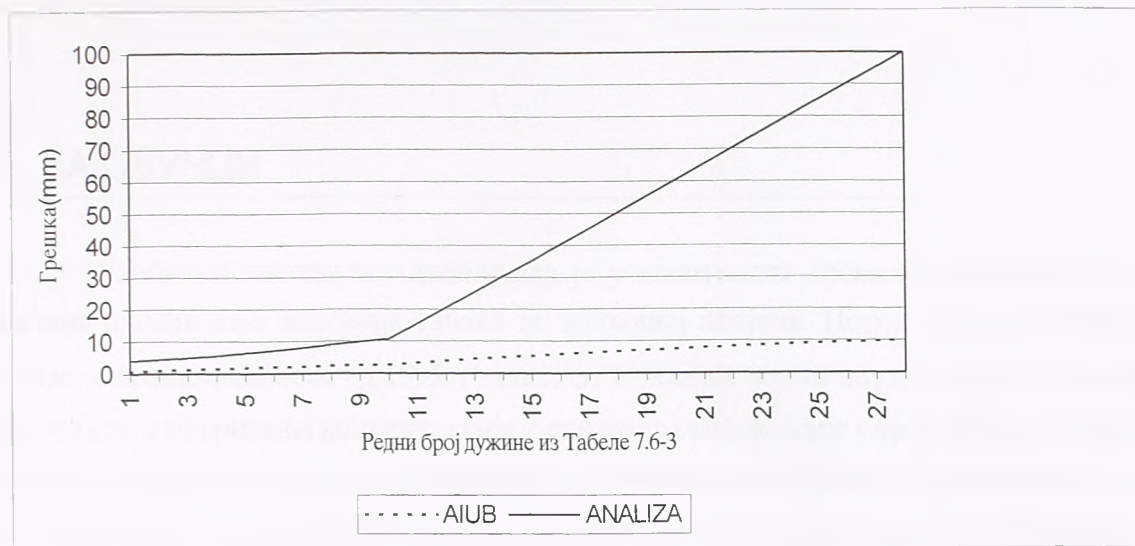




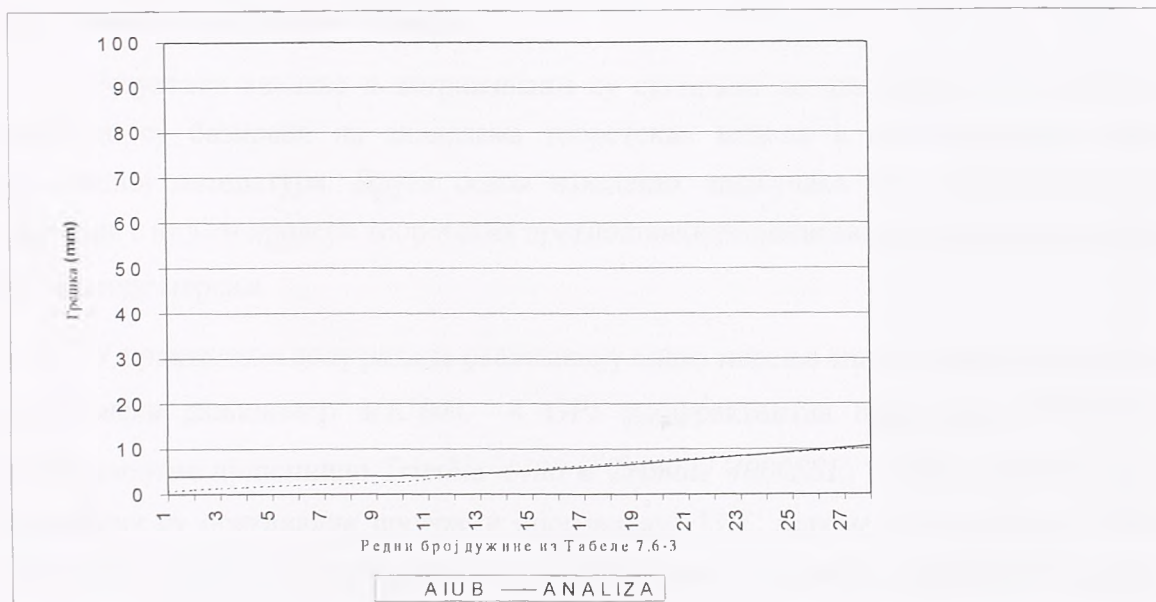
Слика 7.6-2: Приказ оцена грешака по оба модела уз претпоставке које су узете у обзир при извођењу AIUB израза и за  $\sigma_c/c = 0.15 \cdot 10^{-6}$

Табела 7.6-3: Симулиране вредности дужина

Дужине базних линија			
Редни број дужине	$l$ (km)	Редни број дужине	$l$ (km)
1.	1	15.	35
2.	2	16.	40
3.	3	17.	45
4.	4	18.	50
5.	5	19.	55
6.	6	20.	60
7.	7	21.	65
8.	8	22.	70
9.	9	23.	75
10.	10	24.	80
11.	15	25.	85
12.	20	26.	90
13.	25	27.	95
14.	30	28.	100



Слика 7.6-3: Приказ грешака GPS мерења по моделу 7.6-2 (AIUB) и моделу 7.6-4ц (АНАЛИЗА) према подацима из табеле 7.6-3,



Слика 7.6-4: Приказ грешака GPS мерења по моделу 7.6-2 (AIUB) и моделу 7.6-4ц (АНАЛИЗА) према подацима из табеле 7.6-3 и претпоставки уведених код AIUB модела, за  $\sigma_e/c = 0.1 \cdot 10^{-6}$

На основу изнетих показатеља, очигледно је, какав значај има познавање тачне вредности брзине простирања сигнала између сателита и пријемника. Слика 7.6-4, заједно са подацима испод, потврђује претпоставку изведена у анализи о неопходности познавања укупног броја електрона дуж путање простирања сигнала ( $TEC$ ) са тачношћу већом од  $0.1 \cdot 10^{17} \text{ el/m}^2$ . Такође, упоредни резултати указују на високу корелацију између емпиријског (AIUB) и теоретског (7.6-4ц) модела.





## 8. ЗАКЉУЧЦИ

---

Глобални систем позиционирања је у потпуности променио принципе дасадашњег начина одређивања положаја тачака не земљиној површи. Поред његове значајне улоге у области позиционирања, од 1995. године, *GPS* постаје веома поуздано средство испитивања јоносфере и откривања концентрације и распореда водене паре у тропосфери, чиме се његова улога проширује, а тачност позиционирања значајно побољшава. У развијању и одржавању глобалних, регионалних и националних просторних геодетских мрежа, *GPS* данас има водећу улогу. Од посебног је значаја испитивање квалитета *GPS* мерења, посебно у применама везаним за одређивање положаја тачака у реалном времену као и при дефинисању терестричких референтних оквира.

Резултати анализе и истраживања су сумирани по два основа. По првом основу, закључци су базирани на анализама теоретских модела и експеримената описаних у коришћеној литератури. Други основ изведених закључака јесу експерименти који су извршени с циљем провере теоретских претпоставки дефинисаних у анализи извора грешака *GPS* методе мерења.

У практичном делу рада за реализацију плана мерења ангажовани су следећи уређаји: електронски даљиномер *ME5000*, 4 *GPS* двофреквентна пријемника *WM102* и *GPS* двофреквентни пријемници *Trimble 4400* и *Trimble 4000SSE*. У обради резултата мерења коришћени су оригинални програми произвођача ГПС опреме, док су оцена компоненти дисперзија и анализа поузданости мерења извршени по посебним програмима, урађеним за ову намену.

Тачност положаја добијених применом *GPS* методе мерења зависи од: тачности положаја сателита и квалитета њихове геометрије (међусобног односа сателита и пријемника) и тачности мерења дужина од сателита до пријемника.

Квалитет геометрије сателита јесте функција броја и распореда сателита у оквиру *GPS* констелације. Показатељи квалитета геометрије се добијају из кофакторске матрице нормалних једначина, при чему се матрица тежина узима као јединична. Рачунају се у фази припреме мерења и служе за планирање периода извођења кампање. У зависности од намене, у употреби је неколико различитих показатеља. Један од најважнијих од њих јесте *GDOP* фактор који се добија као траг матрице нормалних једначина (поред параметара координата у моделу су укључени и параметри пријемникових часовника). Код захтева високе тачности, препоручује се да вредност *GDOP* фактора буде мања од шест.

На простирање сигнала између сателита и пријемника утиче више различитих извора грешака. Код релативних метода *GPS* мерења при оцени вектора базних линија најзначајнији су следећи извори грешака: *грешке изазване утицајем атмосфере, грешке орбите, грешке настале услед одбијања сигнала од околине, грешке положаја фиксне тачке и грешке непознавања тачне вредности адicione константе антена.*

Највиша тачност резултата *GPS* мерења се постиже применом интерферометријских метода мерења при чему се као основно опажање користи *опажање једноструке разлике.* Оно представља разлику фаза носећих таласа примљених у истом временском тренутку са једног сателита у два *GPS* пријемника који се налазе на две различите локације. Опажање једноструке разлике се геометријски може интерпретирати као разлика дужина између једног сателита и два *GPS* пријемника. Уколико опажања нису адекватно моделована, резултати *GPS* мерења могу бити оптерећени систематским утицајима, а оцене параметара модела померене. Успостављање адекватног модела, услед неправилних варијација појединих извора грешака, није увек једноставно. С друге стране, конвенционални програми за обраду резултата мерења, не моделују у потпуности све изворе грешака (на пример, немају могућност оцена параметара орбите). Стога је веома важно анализирати утицаје немоделованих извора грешака и оценити њихове ефекте на *GPS* резултате мерења.

Анализу је могуће извести на два начина: симулирањем утицаја појединих извора грешака и аналитичким методама. У раду је примењен други начин, који даје прихватљив резултат у општем смислу. На основу анализе наведених извора грешака закључено је да постоје две основне групе (класе) утицаја: *прве* – у коју спадају они извори грешака чији се утицаји испољавају на оцену параметра висине и који се могу интерпретирати и као ротације око хоризонталне осе и *друге* – у коју спадају они извори грешака чији се утицаји испољавају на оцену дужине (*scale effect*).

У прву групу грешака чији се утицаји одражавају на оцену параметра висине, спада *релативна грешка атмосфере, грешке хоризонталног положаја фиксне тачке и грешке аксијалне компоненте положаја сателита.* Може се закључити, да моделовање утицаја тропосферске рефракције (применом *Saastamoinen*-овог, или неког другог модела) са мереним параметрима атмосфере, у мрежама малих димензија (око  $15\text{km} \times 15\text{km}$ ) може дати лоше резултате оцена параметра висине. Грешка тропосферске поправке (вертикалне) на једној станици од  $1\text{mm}^1$  изазваће грешку оцене висине од око  $3\text{mm}$ . Утицај не зависи од дужине базне линије и скоро да је са стандардним уређајима за мерење атмосферских параметара практично немогуће постићи захтевану тачност. Наведени бројчани показатељи важе при температури  $0^\circ\text{C}$ , притиску од  $1000\text{ mbar}$  и влажности ваздуха од 50%, на нивоу

<sup>1</sup> Грешка тропосферске поправке од  $1\text{mm}$  настаће уколико температура буде измерена са грешком од  $0.3^\circ\text{C}$ , притисак са грешком од  $0.5\text{ mbar}$  или влажношћу са грешком од 1.5%.

мора. Уколико су услови другачији, на пример, при температури од  $30^{\circ}\text{C}$ , притиску од  $1000\text{ mbar}$  и влажности од  $100\%$ , ефекти су пет пута већи. У мрежама малих димензија са релативно малим висинским разликама, препоручује се мерење параметара атмосфере на једној тачки (референтној) док на осталим тачкама мреже, параметре треба рачунати применом стандардног модела атмосфере. Емпиријски је доказано да код мрежа са висинским разликама испод  $100\text{ m}$ , ефекти грешака изазваних применом стандардног модела атмосфере биће мањи од ефеката изазваних грешкама мерења параметара. Уколико су висинске разлике у мрежама малих димензија преко  $100\text{ m}$ , параметри атмосфере се морају мерити на свим тачкама мреже. На којим дужинама базне линије се може тропосфера сматрати некорелисаном, није могуће тачно рећи. Разлика у застојима сигнала на крајевима базне линије услед утицаја тропосферске рефракције зависиће од: дужине базне линије, индекса рефракције, висинске разлике и елевационог угла сателита. У мрежама са великим дужинама, за моделовања тропосферског утицаја, препоручује се узимање узорака тропосфере на свим тачкама или коришћење *радиометара водене паре*. Грешке аксијалне компоненте положаја сателита и грешке недовољно тачног познавања хоризонталног положаја фиксне тачке, елиминишу се употребом прецизних ефемерида и пажљивим избором тачака референтне мреже.

У групу грешка чији се утицаји одражавају на оцену дужина спадају: *ајсолујна грешка тропосфере, грешка јоносфере, грешка гравитационе константе, грешка висине фиксне тачке и грешка радијалне компоненте положаја сателита*. Систематска грешка тропосфере, константна на свим тачкама мреже, изазваће промену размере. Игнорисање утицаја тропосфере ће у најгорем случају повећати дужине, највише до  $1\text{ ppm}$ . Међутим, уколико се параметри тропосфере мере на свим тачкама, немоделовани заједнички утицај неће бити већи од око  $5\text{ cm}$ , што ће изазвати промену размере испод  $0.02\text{ ppm}$ .

Јоносфера значајно утиче на квалитет мерења. Иако је њена структура врло сложена и променљива, њен се утицај може моделовати. Уколико се захтева највиша тачност, мерења треба планирати у периодима “мирне” јоносфере (ноћу), при чему посебну пажњу посветити анализи стања у јоносфери (кроз коришћење расположивих показатеља - јоносферске карте, стање сунчевог циклуса, магнетна активност и сл.). Најзначајнији показатељ стања јоносфере јесте укупан број електрона по квадратном метру – *TEC*. Тачност оцена вектора базне линије директно зависи од тачности познавања укупне количине *TEC*. За различите вредности *TEC*, у табели 8-2 су приказани ефекти утицаја јоносфере на тачност оцена вектора базних линија.



Табела 8-2: Ефекти утицаја јоносфере на оцену базне линије

$l$ (km)	TEC ( $e/m^2$ )	$\Delta l/l$	$\Delta l$ (cm)
1	5	0.35	0.03
	50	3.5	0.35
10	5	0.35	0.35
	50	3.5	3.5
100	5	0.35	3.5
	50	3.5	35
1000	5	0.35	35
	50	3.5	350

Имајући у виду да се функционални модел фазних мерења мора моделовати са центиметарском тачношћу (због ефикасности оцена параметара неодређености) наведени показатељи (табела 8-2) указују:

- Ефекти утицаја јоносфере на оцену тачности вектора базне линије зависе од стабилности јоносфере, једнакости њеног стања (корелисаности) дуж простирања пута од сателита до GPS пријемника (на крајевима базне линије) и могућности GPS пријемника (једнофреквентни или двофреквентни);
- У условима нестабилне јоносфере као и разлике у укупном броју електрона  $/m^2$  на крајевима базне линије у износу од 5 TECU (TECUnits - јединица =  $10^{16} e/m^2$ ), употреба једнофреквенчних пријемника није препоручљива за дужине веће од 15 km. Да би се мерена дужина са једнофреквенцијским пријемницима повећала, неопходно је тачније "познавати" јоносферу. У практичним применама, уз коришћење изв. **single-layer** модела јоносфере, једнофреквентни пријемници се могу користити на максималним дужинама до 30km;
- Код захтева високе тачности, на дужинама преко 30km (граница није строга и зависи од стања у атмосфери), обавезно се користе двофреквентни GPS пријемници и **iono-free** линеарне комбинације носећих фреквенција;
- На основу показатеља приказаних у табели 4.4.2-5, може се закључити да ефекти утицаја јоносфере зависе од вредности TEC, угла елевације сателита и растојања између антена. Полазећи од Кајлановог модела (израз 4.4.2-28) потврђује се претпоставка из претходног закључка, да је значајна некорелисаност јоносфере на дужинама већим од 30 km и да на тим дужинама треба користити двофреквендне пријемнике.

Промена вредности гравитационе константе неће значајно утицати на промену размере дужина базних линија. Наиме, грешка гравитационе константе од 1 ppm, изазваће промену размере од свега 0.05 ppm (табела 5.3-2).

Грешка висине фиксне тачке може бити значајна, уколико је положај референтне тачке одређен као једностанично решење. Међутим, то се ретко дешава. Треба имати на уму, да грешка висине фиксне тачке од 10 m, изазваће грешку размере од око 0.3 ppm (табела 5.3-2).

Посебну важност при обради *GPS* мерења треба посветити тачности употребљених орбита сателита (ефемерида). Према изразу (5.2.6-4), могу се приказати приближни ефекти утицаја грешака орбите (сличан утицај има и грешка положаја фиксне тачке) на оцену тачности базне линије (табела 8-1).

Табела 8-1: Приближни ефекти грешака ефемерида ( $\Delta l_{\text{укупно}}$ ) и положаја фиксне тачке на оцену тачности базне линије (Leick, 1995)

$l$ (km)	$\Delta l_{\text{укупно}}$ (m)	$\Delta l/l$	$\Delta l$ (cm)
1	200	10	1
	20	1	0.1
	2	0.1	0.01
10	200	10	10
	20	1	1
	2	0.1	0.1
100	200	10	100
	20	1	10
	2	0.1	1
1000	200	10	1000
	20	1	100
	2	0.1	10
	0.2	0.01	1

Анализом ефеката утицаја грешака ефемерида на тачност оцена базних линија, може се закључити:

- При мерењу крајњих дужина (10km - 15km) примена емисијујућих ефемерида чија је тачност око 20m (са искљученим SA) омогућиће адекватно моделовање оцажања, сагласно тачности фазних мерења и захтевима ефикасне оцене параметара неодређености (исход 1cm);
- При мерењу средњих дужина (10km - 100km) неопходно је користићии прецизне ефемериде, а уколико су дужине базних линија ближе горњој граници ове категорије расона, грешке ефемерида не смеју бити веће од 2 m, и
- При мерењу великих дужина (преко 100 km) неопходно је користићии прецизне ефемериде чија је тачност већа од 2 m, а уколико су дужине 1000 km и веће, грешке ефемерида не смеју бити веће од 20 cm.

При употреби релативне методе *GPS* мерења, сви закључци везани за утицај грешака ефемерида (радијалне компоненте), важе и у случају грешака положаја (висине) фиксне тачке.

Следећи извори грешака на који треба обратити посебну пажњу јесу: грешке антена, грешке изазване рефлексijом сигнала, грешке изазване несавршеношћу конструкције пријемника и сателита и грешке мерења фазе. Грешке антена могу достићи вредности од неколико центиметара, у зависности од типа антена и услова окружења. Чак и код антена

истог типа, варијације фазног центра настале као резултат различитих елевација сателита, могу значајно утицати на оцену вектора базне линије. Укупно електромагнетско поље око антене представља суперимпозицију директног и одбијених сигнала. Ефекти одбијених сигнала утичу на амплитуду и фазу примљеног сигнала на свакој тачци, различито. Да би се ефекти извора грешака везаних за антене редуковали, неопходно је:

- испитивањима антијене, пре и после кампање мерења и оценивши однос геометријског и фазног центара антјена,
- висину антјена меривши пре и после ојажачке сесије (по могућности обезбедивши контролу другог лица),
- пре и после ојажачке сесије извршивши проверу хоризонталности и центрисаности антјена,
- оптички вискови и либеле на подножним главама (или адаптерима) морају бити испитивани и верификовани,
- у записнике унети серијске бројеве антјена и глава ситива и
- обезбедивши поседање тачака у више ојажачких сесија при чему поновно поседање извршивши уз прелиходно скидање антјена.

Ефекти утицаја осталих извора грешака се могу значајно редуковати дефинисањем услова при мерењу, у смислу:

- пажљивој избора локације ситјне тачке,
- коришћења ситбилног и поузданог извора најтања,
- повећања висине антјена (до одређене границе) и употребе заштитних екранова (абсорбентна одбијених сигнала),
- одбацавања ниских сителија чије су елевације мање од  $15^\circ$ , и
- дужег периода пријема сигнала.

Као што је на почетку истакнуто, по другом основу, анализирани су *GPS* резултати мерења извршени: на мрежи кратких дужина - *ЕПВГИ* (од  $1.5 \text{ km}$  до  $6 \text{ km}$ ), мрежи средњих дужина - геодетски четвороугао (од  $15 \text{ km}$  до  $43 \text{ km}$ ) и мрежи великих дужина (војна *GPS* мрежа референтних тачака - дужине од  $6 \text{ km}$  до преко  $400\,000 \text{ km}$ ).

Резултати анализе мерења дужина базних линија са *GPS* пријемницима су показали да сви извори грешака немају једнак утицај на тачност добијених оцена. Утицај појединих извора грешака се може моделовати, док се утицај оних других, у већини случајева, на неки од начина може значајно редуковати.

За постизање највише тачности мерења кратких дужина посебан значај имају:

- грешка рефлексије сигнала,
- грешка неизнавања тачне вредности адicione константе пара антјена,
- грешка несавршености конструкције *GPS* пријемника (и сителија) и
- грешка мерења фазних разлика.



За постизање највише тачности мерења средњих и великих дужина, посебан значај имају:

- грешка недовољно тачног познавања параметара тропосфере и јоносфере,
- грешка недовољно тачног познавања вредности ефемерида сателита и
- грешка недовољно тачног познавања вредности положаја фиксне тачке.

Да бе ефекти утицаја атмосфере, код GPS мерења средњих и великих дужина, свели на износ мањи од  $0.02 \text{ ppm}$ , неопходно је (поглавље 5.2.1):

- користити искључиво двофреквендне GPS пријемнике и
- тропосферу моделовати коришћењем мерених вредности параметара на свим станицама, уз примену неког од тропосферских модела (или користити моделе тропосфере и јоносфере добијене у EUREF или IGS центрима за обраду и анализу података).

Да би се ефекти утицаја грешака ефемерида и положаја фиксне тачке редуковали, неопходно је у обради мерења:

- користити прецизне ефемериде,
- као референцу, користити тачку референдне мреже чије су координате познате у оквиру EUREF стандарда тачности и
- да резултати мерених GPS мерења, прецизне ефемериде сателита и координате референцијских тачака, морају бити у истом координатном систему.

Резултати оцене компоненти дисперзија дужина мерених са ME5000 на ЕПВГИ, према критеријуму значајности, омогућују оцену компоненти дисперзија базних линија добијених из GPS мерења. На основу оцена дужина у 3Д моделу и оцена добијених из разлика мерења дужина са ME5000 и GPS уређајима WM102, у моделу линеарне регресије су оцењени адациона и мултипликациона константа, као и компоненте дисперзија GPS мерења. На основу резултата оцене, може се закључити (поглавље 7.2.1):

- Оцена адicione константе није поуздана и да је оцену исте потребно извршити мерењем што краћих дужина (шест нулте базе или мерењем крајке довољно условно тачне дужине, пример основице у Ковину, поглавље 7.5) и
- Оцена мултипликационе константе варира и постоји значајна разлика између оцена изведених из мерења са једном фреквенцијом и оцена изведених мерењем са две фреквенције. Оцена добијена из резултата мерења у епохи 1994. са периодом мерења од преко 4 часа, наводи на закључак да између једнофреквенцијских GPS мерења у дужем временском интервалу на мрежи ових димензија и класичних мерења нема значајне разлике, тј. разлике се налазе у границама тачности мерења.

Оценом компоненти дисперзија по MINQE моделу компоненти дисперзија, добијене су компоненте дисперзија GPS мерења дужина базних линија у мрежи кратких растојања. На основу резултата оцене, може се закључити:

- При  $p=0.95$ , може се констатовати постојање значајне разлике у оцени компоненте дисперзије која не зависи од дужине и која из резултата мерења, када се искључи

компоненција дисперзије ME5000, износи  $s_1^2 = 6.01 \text{ mm}^2$  и а priori оцене даће у Ујујисиву произвођача која износи  $\pm 25 \text{ mm}^2$  и

- При  $p=0.95$ , може се констативовати не постојање значајне разлике у оцени компоненте дисперзије која је пропорционална дужини и која из мерења, када се искључи компоненте дисперзије ME5000, износи  $s_2^2 = 0.76 \text{ mm}^2/\text{km}^2$  и а priori оцене даће у Ујујисиву произвођача која износи  $1 \text{ mm}^2/\text{km}^2$ .

На основу оцењених параметара из резултата мерења у мрежи малих, средњих и великих дужина, може се закључити:

- У мрежи крајњих дужина, у периоду мерења већем од 4 сати и у условима стабилне јоносфере, са једнофреквенцијним пријемницима могуће је постићи релативну тачност мерења од 1:800 000;
- У мрежи средњих дужина, уочена је значајна сагласност једнофреквенцијних и двофреквенцијних мерења на дужинама испод 30 km, као и између резултата мерења изведених са два различита GPS пријемника, у две различите временске епохе. Што се тиче дужина већих од 30 km (2 дужине: ЕП 2-369 = 42km и 369 - 327 = 43km), разлике између двофреквенцијних и једнофреквенцијних мерења су значајне, што би могло значити да је утицај јоносфере био доминантан и
- У мрежи великих дужина, уочена је неходност коришћења прецизних ефемериде које заједно са прецизним координатама референцијних тачака и резултатима мерења, пре обраде мерења морају бити сведени у исти координатни систем.

На основу испитивања значајности релативног утицаја тропосфере, може се закључити (поглавље 7.3.1):

- У мрежи малих димензија, потврђене су претпоставке из анализе о значајности примене стандардног модела тропосфере у односу на коришћење мерених вредности параметара које најчешће неадекватно репрезентују средину кроз коју се простира сигнал и
- Потврђене су претпоставке из анализе о зависности ефеката релативног утицаја тропосфере од нагнутог базних линија, тј. што су нагиби већи то је и утицај значајнији.

На основу испитивања значајности апсолутног утицаја тропосфере, може се закључити (поглавље 7.3.2):

- Потврђене су претпоставке из анализе о карактеру утицаја овог извора зрешака, тј. да је њен утицај на размеру значајан, док је утицај на тачност оцене параметара висине значајно мањи од релативног утицаја, али и да је исти такође директно пропорционалан нагибу базне линије.

На основу испитивања значајности утицаја јоносфере, може се закључити (поглавље 7.3.3):

- Потврђене су претпоставке из анализе методе о значајности утицаја јоносфере на размеру оцењених дужина, тј. да су неузимањем у обзир јоносфере, оцене дужина краће.

На основу анализе поузданости резултата GPS мерења, може се закључити (поглавље 7.4):

- Оцењене мере поузданости указују на постојање могућности њихове примене у анализи: поузданости мерења, квалитета периода мерења, избора сателита и избора референцијног сателита.

На основу испитивања могућности оцене адicione константе GPS антена на еталону за дужине у Ковину, може се закључити (поглавље 7.5):

- На полигону у Ковину постоје услови за оцмену адicione константе GPS антена, а да предложено испитивање даје објективну и поуздану оцмену.

На основу испитивања сагласности *AIUB* емпиријског модела грешака оцене базних линија и модела добијеног из анализе, може се закључити (поглавље 7.6):

- *Уз једнаке, унапред претпостављене услове при мерењу и обради резултата мерења, између два модела нема значајних разлика.*





## **ПРИЛОЗИ:**

- 1. Изравнање GPS мреже према стандардној процедури*
- 2. Изравнање GPS мреже при апсолутном изоставању ионосфере*
- 3. Изравнање GPS мреже при апсолутном изоставању јоносфере*
- 4. Процедура за попуњавање референциног оквира применом GPS технологије и обраду локалних GPS мрежа*
- 5. Процедура за коришћење IGS података при попуњавању EUREF и ETRF мреже*

Прилог 1

```

*****
*
*           COMPUTATION DESCRIPTION
*
* Campaign name           EPVGI94
* Subdirectory            EPVGI94
* Data from               05:40 Mon  9 May 1994
*      to                 09:51 Thu 12 May 1994
*
* Computation at         21:01 Thu 26 Nov 1998
*
* Reference system       WGS 84
*
*****
    
```

Session	Session window
1	05:40:00 Mon 9 May 1994-09:54:00 Mon 9 May 1994 05:40:00-09:54:00
3	05:13:00 Wed 11 May 1994-09:46:00 Wed 11 May 1994 05:13:00-09:46:00
4	05:16:00 Thu 12 May 1994-09:51:00 Thu 12 May 1994 05:16:00-09:51:00

Session	Site-pair	Freq.	Category
1	1 EPVGI 1 2 EPVGI 2	L1	Short
1	2 EPVGI 2 4 EPVGI 4	L1	Short
1	4 EPVGI 4 8 EPVGI 8	L1	Short
3	3 EPVGI 3 5 EPVGI 5	L1	Short
3	5 EPVGI 5 6 EPVGI 6	L1	Short
3	6 EPVGI 6 7 EPVGI 7	L1	Short
4	2 EPVGI 2 1 EPVGI 1	L1	Short
4	2 EPVGI 2 3 EPVGI 3	L1	Short
4	2 EPVGI 2 6 EPVGI 6	L1	Short

```

#####
#           COMPUTATION MODEL PARAMETERS           #
#####
    
```

```

A priori accuracy      :      6
Minimum elevation      :    15
Tropospheric model     : Saastamoinen
Weather information    : Atmospheric model
Ionospheric model      : Single-layer model
Ephemeris              : Broadcast ephemeris
Resolved ambiguities  : Use resolved values
Correlations           : Single -> double
Observation sampling   :      1
    
```



```

# NETWORK COMPUTATION #
#####
#####
# Site-pairs used #
#####
    
```

Session	Site-pair	Category	Observable
1	1 EPVGI 1	Short	L1
1	2 EPVGI 2	Short	L1
1	4 EPVGI 4	Short	L1
3	3 EPVGI 3	Short	L1
3	5 EPVGI 5	Short	L1
3	6 EPVGI 6	Short	L1
4	2 EPVGI 2	Short	L1
4	2 EPVGI 2	Short	L1
4	2 EPVGI 2	Short	L1

```

No. of double-difference observations used 5484
No. of unknown parameters determined 24
No. of ambiguity parameters included 3
No. of ambiguities resolved 0
    
```

```

R.m.s. of double-difference observation
without ambiguity resolution .010 m
    
```

```

#####
# FINAL COORDINATES #
#####
    
```

Number of stations in computation : 8

Site Name	Cartesian	Geographical	Sigmas
1 EPVGI 1	X 4245829.7880	Lat 44ø48'10.58819" N	åLat .0012 m
	Y 1588563.1347	Lon 20ø30'47.41015" E	åLon .0006 m
	Z 4472063.3338	Ht 321.4820	åHt .0018 m
2 EPVGI 2	X 4243381.1320	Lat 44ø49'04.57455" N	åLat .0010 m
	Y 1591762.2870	Lon 20ø33'42.82962" E	åLon .0005 m
	Z 4473249.5060	Ht 326.9113	åHt .0015 m
3 EPVGI 3	X 4243115.5437	Lat 44ø48'38.05642" N	åLat .0013 m
	Y 1593863.1518	Lon 20ø35'16.58791" E	åLon .0006 m
	Z 4472582.0359	Ht 203.8363	åHt .0019 m
4 EPVGI 4 Fixed	X 4245283.6463	Lat 44ø47'50.89406" N	åLat .0000 m
	Y 1591229.1030	Lon 20ø32'49.71698" E	åLon .0000 m
	Z 4471627.0806	Ht 314.5848	åHt .0000 m
5 EPVGI 5	X 4244750.7996	Lat 44ø47'48.97815" N	åLat .0013 m
	Y 1592784.2976	Lon 20ø34'04.47854" E	åLon .0006 m
	Z 4471590.5866	Ht 322.3560	åHt .0020 m

6	EPVGI 6	X	4245030.6954	Lat	44ø47'07.45631" N	ΔLat	.0013 m
		Y	1594491.1076	Lon	20ø35'12.69414" E	ΔLon	.0006 m
		Z	4470640.1088	Ht	264.4175	ΔHt	.0019 m
7	EPVGI 7	X	4246434.3537	Lat	44ø46'27.71803" N	ΔLat	.0018 m
		Y	1593281.3088	Lon	20ø33'58.74233" E	ΔLon	.0008 m
		Z	4469793.9948	Ht	299.3951	ΔHt	.0025 m
8	EPVGI 8	X	4246707.7604	Lat	44ø46'42.19475" N	ΔLat	.0009 m
		Y	1591659.5853	Lon	20ø32'45.31732" E	ΔLon	.0004 m
		Z	4470112.5618	Ht	301.2843	ΔHt	.0014 m

#####  
 # INTER-STATION SLOPE DISTANCES #  
 #####

1	EPVGI 1	Initial	New	Change	R.m.s.
2	EPVGI 2	4199.7019	4199.7019	.0000	.0004
3	EPVGI 3	5977.1527	5977.1527	.0001	.0005
4	EPVGI 4	2756.0795	2756.0795	.0000	.0006
5	EPVGI 5	4382.4555	4382.4561	.0006	.0005
6	EPVGI 6	6148.5754	6148.5755	.0001	.0006
7	EPVGI 7	5270.3533	5270.3478	-.0055	.0010
8	EPVGI 8	3763.5559	3763.5559	.0000	.0012

2	EPVGI 2	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	4199.7019	4199.7019	.0000	.0004
3	EPVGI 3	2220.2898	2220.2897	-.0001	.0004
4	EPVGI 4	2556.5817	2556.5817	.0000	.0010
5	EPVGI 5	2381.7024	2381.7028	.0005	.0008
6	EPVGI 6	4120.2516	4120.2518	.0002	.0007
7	EPVGI 7	4854.9002	4854.9096	.0094	.0014
8	EPVGI 8	4573.5569	4573.5569	.0000	.0014

3	EPVGI 3	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	5977.1527	5977.1527	.0001	.0005
2	EPVGI 2	2220.2898	2220.2897	-.0001	.0004
4	EPVGI 4	3542.7137	3542.7138	.0002	.0008
5	EPVGI 5	2195.6666	2195.6685	.0019	.0006
6	EPVGI 6	2798.7876	2798.7882	.0006	.0009
7	EPVGI 7	4373.3352	4373.3528	.0175	.0014
8	EPVGI 8	4884.4678	4884.4681	.0002	.0013

4	EPVGI 4	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	2756.0795	2756.0795	.0000	.0006
2	EPVGI 2	2556.5817	2556.5817	.0000	.0010
3	EPVGI 3	3542.7137	3542.7138	.0002	.0008
5	EPVGI 5	1644.3495	1644.3502	.0007	.0006
6	EPVGI 6	3417.4217	3417.4218	.0001	.0007
7	EPVGI 7	2982.5946	2982.5961	.0015	.0015
8	EPVGI 8	2123.0127	2123.0127	.0000	.0009

5	EPVGI 5	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	4382.4555	4382.4561	.0006	.0005
2	EPVGI 2	2381.7024	2381.7028	.0005	.0008
3	EPVGI 3	2195.6666	2195.6685	.0019	.0006
4	EPVGI 4	1644.3495	1644.3502	.0007	.0006
6	EPVGI 6	1973.5625	1973.5629	.0004	.0006
7	EPVGI 7	2511.7846	2511.7955	.0109	.0014
8	EPVGI 8	2698.0047	2698.0049	.0002	.0014

6	EPVGI 6	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	6148.5754	6148.5755	.0001	.0006
2	EPVGI 2	4120.2516	4120.2518	.0002	.0007
3	EPVGI 3	2798.7876	2798.7882	.0006	.0009
4	EPVGI 4	3417.4217	3417.4218	.0001	.0007
5	EPVGI 5	1973.5625	1973.5629	.0004	.0006
7	EPVGI 7	2037.0813	2037.1006	.0193	.0009
8	EPVGI 8	3332.9224	3332.9224	-.0001	.0008

7	EPVGI 7	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	5270.3533	5270.3478	-.0055	.0010
2	EPVGI 2	4854.9002	4854.9096	.0094	.0014
3	EPVGI 3	4373.3352	4373.3528	.0175	.0014
4	EPVGI 4	2982.5946	2982.5961	.0015	.0015
5	EPVGI 5	2511.7846	2511.7955	.0109	.0014
6	EPVGI 6	2037.0813	2037.1006	.0193	.0009
8	EPVGI 8	1675.1900	1675.1786	-.0114	.0009

8	EPVGI 8	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	3763.5559	3763.5559	.0000	.0012
2	EPVGI 2	4573.5569	4573.5569	.0000	.0014
3	EPVGI 3	4884.4678	4884.4681	.0002	.0013
4	EPVGI 4	2123.0127	2123.0127	.0000	.0009
5	EPVGI 5	2698.0047	2698.0049	.0002	.0014
6	EPVGI 6	3332.9224	3332.9224	-.0001	.0008
7	EPVGI 7	1675.1900	1675.1786	-.0114	.0009



Прилог 2

```

*****
*
*          COMPUTATION DESCRIPTION
*
* Campaign name          EPVGI94
* Subdirectory           EPVGI94
* Data from              05:40 Mon  9 May 1994
*                       to          09:51 Thu 12 May 1994
*
* Computation at        21:14 Thu 26 Nov 1998
*
* Reference system      WGS 84
*
*****
    
```

Session	Session window
1	05:40:00 Mon 9 May 1994-09:54:00 Mon 9 May 1994 05:40:00-09:54:00
3	05:13:00 Wed 11 May 1994-09:46:00 Wed 11 May 1994 05:13:00-09:46:00
4	05:16:00 Thu 12 May 1994-09:51:00 Thu 12 May 1994 05:16:00-09:51:00

Session	Site-pair	Freq.	Category
1	1 EPVGI 1	2	EPVGI 2 L1 Short
1	2 EPVGI 2	4	EPVGI 4 L1 Short
1	4 EPVGI 4	8	EPVGI 8 L1 Short
3	3 EPVGI 3	5	EPVGI 5 L1 Short
3	5 EPVGI 5	6	EPVGI 6 L1 Short
3	6 EPVGI 6	7	EPVGI 7 L1 Short
4	2 EPVGI 2	1	EPVGI 1 L1 Short
4	2 EPVGI 2	3	EPVGI 3 L1 Short
4	2 EPVGI 2	6	EPVGI 6 L1 Short

```

#####
#          COMPUTATION MODEL PARAMETERS          #
#####
    
```

```

A priori accuracy      :      6
Minimum elevation      :    15
Tropospheric model     : No model
Weather information    : Atmospheric model
Ionospheric model      : Single-layer model
Ephemeris              : Broadcast ephemeris
Resolved ambiguities  : Use resolved values
Correlations           : Single -> double
Observation sampling   :      1
    
```

```
#####
#                               #
#           NETWORK COMPUTATION           #
#                               #
#####

#####
#                               #
#           Site-pairs used               #
#                               #
#####
```

-----  
 Session AAAAAAAAAAAAAA Site-pair AAAAAAAAAAAAAA Category Observable  
 -----

1	1	EPVGI 1	2	EPVGI 2	Short	L1
1	2	EPVGI 2	4	EPVGI 4	Short	L1
1	4	EPVGI 4	8	EPVGI 8	Short	L1
3	3	EPVGI 3	5	EPVGI 5	Short	L1
3	5	EPVGI 5	6	EPVGI 6	Short	L1
3	6	EPVGI 6	7	EPVGI 7	Short	L1
4	2	EPVGI 2	1	EPVGI 1	Short	L1
4	2	EPVGI 2	3	EPVGI 3	Short	L1
4	2	EPVGI 2	6	EPVGI 6	Short	L1

No. of double-difference observations used      5484  
 No. of unknown parameters determined            24  
 No. of ambiguity parameters included            3  
 No. of ambiguities resolved                      0

R.m.s. of double-difference observation  
 without ambiguity resolution                    .013 m

```
#####
#                               #
#           FINAL COORDINATES           #
#                               #
#####
```

Number of stations in computation :      8

Site Name		Cartesian			Geographical			Sigmas
		X	Y	Z	Lat	Lon	Ht	
1	EPVGI 1	X	4245829.7859		Lat	44ø48'10.58821" N	åLat	.0016 m
		Y	1588563.1283		Lon	20ø30'47.40991" E	åLon	.0007 m
		Z	4472063.3304		Ht	321.4766	åHt	.0023 m
2	EPVGI 2	X	4243381.1215		Lat	44ø49'04.57470" N	åLat	.0013 m
		Y	1591762.2850		Lon	20ø33'42.82970" E	åLon	.0006 m
		Z	4473249.5019		Ht	326.9009	åHt	.0019 m
3	EPVGI 3	X	4243115.6193		Lat	44ø48'38.05649" N	åLat	.0016 m
		Y	1593863.1881		Lon	20ø35'16.58824" E	åLon	.0007 m
		Z	4472582.1220		Ht	203.9563	åHt	.0024 m
4	EPVGI 4 Fixed	X	4245283.6463		Lat	44ø47'50.89406" N	åLat	.0000 m
		Y	1591229.1030		Lon	20ø32'49.71698" E	åLon	.0000 m
		Z	4471627.0806		Ht	314.5848	åHt	.0000 m
5	EPVGI 5	X	4244750.7915		Lat	44ø47'48.97823" N	åLat	.0017 m
		Y	1592784.2968		Lon	20ø34'04.47863" E	åLon	.0008 m
		Z	4471590.5826		Ht	322.3475	åHt	.0026 m

6	EPVGI 6	X	4245030.7281	Lat	44ø47'07.45628" N	ΔLat	.0016 m
		Y	1594491.1266	Lon	20ø35'12.69442" E	ΔLon	.0007 m
		Z	4470640.1447	Ht	264.4693	ΔHt	.0024 m
7	EPVGI 7	X	4246434.3686	Lat	44ø46'27.71774" N	ΔLat	.0022 m
		Y	1593281.3154	Lon	20ø33'58.74237" E	ΔLon	.0010 m
		Z	4469793.9986	Ht	299.4093	ΔHt	.0032 m
8	EPVGI 8	X	4246707.7714	Lat	44ø46'42.19463" N	ΔLat	.0011 m
		Y	1591659.5894	Lon	20ø32'45.31732" E	ΔLon	.0006 m
		Z	4470112.5682	Ht	301.2972	ΔHt	.0018 m

#####  
 # INTER-STATION SLOPE DISTANCES #  
 #####

1	EPVGI 1	Initial	New	Change	R.m.s.
2	EPVGI 2	4199.7019	4199.7100	.0081	.0005
3	EPVGI 3	5977.1527	5977.1631	.0104	.0006
4	EPVGI 4	<del>2756.0795</del>	2756.0849	.0053	.0007
5	EPVGI 5	4382.4561	4382.4631	.0070	.0007
6	EPVGI 6	6148.5755	6148.5865	.0109	.0007
7	EPVGI 7	5270.3478	5270.3583	.0106	.0013
8	EPVGI 8	3763.5559	3763.5626	.0067	.0015

2	EPVGI 2	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	4199.7019	4199.7100	.0081	.0005
3	EPVGI 3	2220.2897	2220.2885	-.0012	.0005
4	EPVGI 4	2556.5817	2556.5865	.0048	.0013
5	EPVGI 5	2381.7028	2381.7047	.0019	.0011
6	EPVGI 6	4120.2518	4120.2578	.0060	.0009
7	EPVGI 7	4854.9096	4854.9227	.0131	.0018
8	EPVGI 8	4573.5569	4573.5653	.0084	.0017

3	EPVGI 3	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	5977.1527	5977.1631	.0104	.0006
2	EPVGI 2	2220.2897	2220.2885	-.0012	.0005
4	EPVGI 4	3542.7138	3542.7178	.0039	.0010
5	EPVGI 5	2195.6685	2195.6651	-.0034	.0007
6	EPVGI 6	2798.7882	2798.7899	.0017	.0011
7	EPVGI 7	4373.3528	4373.3631	.0103	.0018
8	EPVGI 8	4884.4681	4884.4754	.0074	.0016

4	EPVGI 4	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	2756.0795	2756.0849	.0053	.0007
2	EPVGI 2	2556.5817	2556.5865	.0048	.0013
3	EPVGI 3	3542.7138	3542.7178	.0039	.0010
5	EPVGI 5	1644.3502	1644.3521	.0020	.0008
6	EPVGI 6	3417.4218	3417.4271	.0053	.0009
7	EPVGI 7	2982.5961	2982.6041	.0080	.0019
8	EPVGI 8	2123.0127	2123.0164	.0037	.0011



5 EPVGI 5		Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	4382.4561	4382.4631	.0070	.0007
2	EPVGI 2	2381.7028	2381.7047	.0019	.0011
3	EPVGI 3	2195.6685	2195.6651	-.0034	.0007
4	EPVGI 4	1644.3502	1644.3521	.0020	.0008
6	EPVGI 6	1973.5629	1973.5665	.0037	.0007
7	EPVGI 7	2511.7955	2511.8068	.0112	.0018
8	EPVGI 8	2698.0049	2698.0110	.0061	.0017

6 EPVGI 6		Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	6148.5755	6148.5865	.0109	.0007
2	EPVGI 2	4120.2518	4120.2578	.0060	.0009
3	EPVGI 3	2798.7882	2798.7899	.0017	.0011
4	EPVGI 4	3417.4218	3417.4271	.0053	.0009
5	EPVGI 5	1973.5629	1973.5665	.0037	.0007
7	EPVGI 7	2037.1006	2037.1089	.0083	.0012
8	EPVGI 8	3332.9224	3332.9288	.0064	.0011

7 EPVGI 7		Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	5270.3478	5270.3583	.0106	.0013
2	EPVGI 2	4854.9096	4854.9227	.0131	.0018
3	EPVGI 3	4373.3528	4373.3631	.0103	.0018
4	EPVGI 4	2982.5961	2982.6041	.0080	.0019
5	EPVGI 5	2511.7955	2511.8068	.0112	.0018
6	EPVGI 6	2037.1006	2037.1089	.0083	.0012
8	EPVGI 8	1675.1786	1675.1809	.0023	.0012

8 EPVGI 8		Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	3763.5559	3763.5626	.0067	.0015
2	EPVGI 2	4573.5569	4573.5653	.0084	.0017
3	EPVGI 3	4884.4681	4884.4754	.0074	.0016
4	EPVGI 4	2123.0127	2123.0164	.0037	.0011
5	EPVGI 5	2698.0049	2698.0110	.0061	.0017
6	EPVGI 6	3332.9224	3332.9288	.0064	.0011
7	EPVGI 7	1675.1786	1675.1809	.0023	.0012

Прилог 3

```

*****
*
*          COMPUTATION DESCRIPTION          *
*
* Campaign name          EPVGI94           *
* Subdirectory           EPVGI94           *
* Data from              05:40 Mon  9 May 1994 *
*      to                09:51 Thu 12 May 1994 *
*
* Computation at        21:17 Thu 26 Nov 1998 *
*
* Reference system      WGS 84             *
*
*****
    
```

Session	Session window
1	05:40:00 Mon 9 May 1994-09:54:00 Mon 9 May 1994 05:40:00-09:54:00
3	05:13:00 Wed 11 May 1994-09:46:00 Wed 11 May 1994 05:13:00-09:46:00
4	05:16:00 Thu 12 May 1994-09:51:00 Thu 12 May 1994 05:16:00-09:51:00

Session	Site-pair	Freq.	Category
1	1 EPVGI 1                    2 EPVGI 2	L1	Short
1	2 EPVGI 2                    4 EPVGI 4	L1	Short
1	4 EPVGI 4                    8 EPVGI 8	L1	Short
3	3 EPVGI 3                    5 EPVGI 5	L1	Short
3	5 EPVGI 5                    6 EPVGI 6	L1	Short
3	6 EPVGI 6                    7 EPVGI 7	L1	Short
4	2 EPVGI 2                    1 EPVGI 1	L1	Short
4	2 EPVGI 2                    3 EPVGI 3	L1	Short
4	2 EPVGI 2                    6 EPVGI 6	L1	Short

```

#####
#          COMPUTATION MODEL PARAMETERS          #
#####
    
```

```

A priori accuracy      :      6
Minimum elevation      :    15
Tropospheric model     : Saastamoinen
Weather information    : Atmospheric model
Ionospheric model      : No model
Ephemeris              : Broadcast ephemeris
Resolved ambiguities   : Use resolved values
Correlations           : Single -> double
Observation sampling   :      1
    
```

```
#####
#
# NETWORK COMPUTATION #
#####
#####
#
# Site-pairs used #
#####
```

-----  
 Session AAAAAAAAAAAAAA Site-pair AAAAAAAAAAAAAA Category Observable  
 -----

1	1	EPVGI 1	2	EPVGI 2	Short	L1
1	2	EPVGI 2	4	EPVGI 4	Short	L1
1	4	EPVGI 4	8	EPVGI 8	Short	L1
3	3	EPVGI 3	5	EPVGI 5	Short	L1
3	5	EPVGI 5	6	EPVGI 6	Short	L1
3	6	EPVGI 6	7	EPVGI 7	Short	L1
4	2	EPVGI 2	1	EPVGI 1	Short	L1
4	2	EPVGI 2	3	EPVGI 3	Short	L1
4	2	EPVGI 2	6	EPVGI 6	Short	L1

No. of double-difference observations used 5484  
 No. of unknown parameters determined 24  
 No. of ambiguity parameters included 3  
 No. of ambiguities resolved 0

R.m.s. of double-difference observation  
 without ambiguity resolution .010 m

```
#####
#
# FINAL COORDINATES #
#####
```

Number of stations in computation : 8

Site	Name	Cartesian	Geographical	Sigmas
1	EPVGI 1	X 4245829.7881 Y 1588563.1382 Z 4472063.3361	Lat 44ø48'10.58821" N Lon 20ø30'47.41030" E Ht 321.4845	åLat .0012 m åLon .0006 m åHt .0018 m
2	EPVGI 2	X 4243381.1353 Y 1591762.2861 Z 4473249.5035	Lat 44ø49'04.57443" N Lon 20ø33'42.82953" E Ht 326.9115	åLat .0011 m åLon .0005 m åHt .0015 m
3	EPVGI 3	X 4243115.5477 Y 1593863.1481 Z 4472582.0331	Lat 44ø48'38.05630" N Lon 20ø35'16.58769" E Ht 203.8360	åLat .0013 m åLon .0006 m åHt .0019 m
4	EPVGI 4 Fixed	X 4245283.6463 Y 1591229.1030 Z 4471627.0806	Lat 44ø47'50.89406" N Lon 20ø32'49.71698" E Ht 314.5848	åLat .0000 m åLon .0000 m åHt .0000 m
5	EPVGI 5	X 4244750.8012 Y 1592784.2956 Z 4471590.5862	Lat 44ø47'48.97812" N Lon 20ø34'04.47843" E Ht 322.3562	åLat .0014 m åLon .0006 m åHt .0020 m



6	EPVGI 6	X	4245030.6957	Lat	44°47'07.45631" N	ΔLat	.0013 m
		Y	1594491.1033	Lon	20°35'12.69395" E	ΔLon	.0006 m
		Z	4470640.1075	Ht	264.4157	ΔHt	.0019 m
7	EPVGI 7	X	4246434.3514	Lat	44°46'27.71816" N	ΔLat	.0018 m
		Y	1593281.3065	Lon	20°33'58.74227" E	ΔLon	.0008 m
		Z	4469793.9975	Ht	299.3949	ΔHt	.0025 m
8	EPVGI 8	X	4246707.7580	Lat	44°46'42.19485" N	ΔLat	.0009 m
		Y	1591659.5848	Lon	20°32'45.31734" E	ΔLon	.0004 m
		Z	4470112.5636	Ht	301.2839	ΔHt	.0014 m

#####  
 # INTER-STATION SLOPE DISTANCES #  
 #####

1	EPVGI 1	Initial	New	Change	R.m.s.
2	EPVGI 2	4199.7100	4199.6953	-.0147	.0004
3	EPVGI 3	5977.1631	5977.1441	-.0190	.0005
4	EPVGI 4	2756.0849	2756.0766	-.0083	.0006
5	EPVGI 5	4382.4631	4382.4507	-.0124	.0005
6	EPVGI 6	6148.5865	6148.5688	-.0176	.0006
7	EPVGI 7	5270.3583	5270.3422	-.0162	.0010
8	EPVGI 8	3763.5626	3763.5523	-.0102	.0012

2	EPVGI 2	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	4199.7100	4199.6953	-.0147	.0004
3	EPVGI 3	2220.2885	2220.2870	-.0015	.0004
4	EPVGI 4	2556.5865	2556.5775	-.0090	.0010
5	EPVGI 5	2381.7047	2381.7000	-.0048	.0008
6	EPVGI 6	4120.2578	4120.2476	-.0101	.0007
7	EPVGI 7	4854.9227	4854.9020	-.0207	.0014
8	EPVGI 8	4573.5653	4573.5499	-.0154	.0014

3	EPVGI 3	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	5977.1631	5977.1441	-.0190	.0005
2	EPVGI 2	2220.2885	2220.2870	-.0015	.0004
4	EPVGI 4	3542.7178	3542.7079	-.0099	.0008
5	EPVGI 5	2195.6651	2195.6648	-.0003	.0006
6	EPVGI 6	2798.7899	2798.7845	-.0054	.0009
7	EPVGI 7	4373.3631	4373.3443	-.0188	.0014
8	EPVGI 8	4884.4754	4884.4596	-.0158	.0013

4	EPVGI 4	Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	2756.0849	2756.0766	-.0083	.0006
2	EPVGI 2	2556.5865	2556.5775	-.0090	.0010
3	EPVGI 3	3542.7178	3542.7079	-.0099	.0008
5	EPVGI 5	1644.3521	1644.3478	-.0043	.0006
6	EPVGI 6	3417.4271	3417.4180	-.0091	.0007
7	EPVGI 7	2982.6041	2982.5920	-.0121	.0015
8	EPVGI 8	2123.0164	2123.0098	-.0066	.0009

5 EPVGI 5		Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	4382.4631	4382.4507	-.0124	.0005
2	EPVGI 2	2381.7047	2381.7000	-.0048	.0008
3	EPVGI 3	2195.6651	2195.6648	-.0003	.0006
4	EPVGI 4	1644.3521	1644.3478	-.0043	.0006
6	EPVGI 6	1973.5665	1973.5611	-.0054	.0006
7	EPVGI 7	2511.8068	2511.7906	-.0162	.0014
8	EPVGI 8	2698.0110	2698.0002	-.0109	.0014

6 EPVGI 6		Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	6148.5865	6148.5688	-.0176	.0006
2	EPVGI 2	4120.2578	4120.2476	-.0101	.0007
3	EPVGI 3	2798.7899	2798.7845	-.0054	.0009
4	EPVGI 4	3417.4271	3417.4180	-.0091	.0007
5	EPVGI 5	1973.5665	1973.5611	-.0054	.0006
7	EPVGI 7	2037.1089	2037.0959	-.0130	.0009
8	EPVGI 8	3332.9288	3332.9173	-.0115	.0008

7 EPVGI 7		Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	5270.3583	5270.3422	-.0162	.0010
2	EPVGI 2	4854.9227	4854.9020	-.0207	.0014
3	EPVGI 3	4373.3631	4373.3443	-.0188	.0014
4	EPVGI 4	2982.6041	2982.5920	-.0121	.0015
5	EPVGI 5	2511.8068	2511.7906	-.0162	.0014
6	EPVGI 6	2037.1089	2037.0959	-.0130	.0009
8	EPVGI 8	1675.1809	1675.1766	-.0043	.0009

8 EPVGI 8		Initial	New	Change	R.m.s.
1	EPVGI 1	3763.5626	3763.5523	-.0102	.0012
2	EPVGI 2	4573.5653	4573.5499	-.0154	.0014
3	EPVGI 3	4884.4754	4884.4596	-.0158	.0013
4	EPVGI 4	2123.0164	2123.0098	-.0066	.0009
5	EPVGI 5	2698.0110	2698.0002	-.0109	.0014
6	EPVGI 6	3332.9288	3332.9173	-.0115	.0008
7	EPVGI 7	1675.1809	1675.1766	-.0043	.0009

## ПОСТУПАК<sup>1</sup> за погушћавање референтног оквира применом GPS технологије и обраду локалних GPS мрежа

### А) Погушћавање референтног оквира

Погушћавање постојећег GPS референтног оквира се врши по следећој процедури (услови мерења):

- Поред GPS фазних мерења на новим тачкама, неопходно је извршити GPS мерења на најмање једној референтној тачци.
- Мерења вршити само са испитаном и верификованом GPS опремом, при чему избегавати употребу GPS пријемника различитих произвођача (типа). Вредности поправака за неједнакост фазног и геометријског центра узети у обзир при обради мерења.
- Брзина регистрације података (*sampling rate*) треба да износи 15 секунди.
- Све антене треба да су једнако оријентисане.

---

<sup>1</sup> *Остваривањем EUREF-89 ГПС кампање и резултатима које је она постигла, земље западне Европе су по први пут добиле око 100 референтних станица чија је тачност боља од 1dm (Gurtner, 1993). Референтне тачке представљају основу за:*

- *даље погушћавање мреже и рад у оквиру јединственог система,*
- *проширење мреже и*
- *рачунање трансформационих параметара између локалних система и Европског референтног система (EUREF-89).*

*Успостављање локалних мрежа компатибилних са Европском референтном мрежом јесте текућа активност ка потпуном успостављању јединственог европског система. Паралелно са тим, ITRF (представља окосницу EUREF-89) се даље надограђује и усавршава. Тако, SLR и VLBI референтне тачке су већ одређене у ITRF (ITRF-91) са релативном тачношћу од 1cm, по све три компоненте.*

*У погушћавању постојећег Европског референтног оквира, централно место заузимају производи Интернационалне GPS геодинамичке службе (IGS - International GPS Geodynamics Service). Референтни оквир јесте од примарног значаја у геодинамичким мрежама. Континуирано одржавање и употреба истог у обради свих епоха мерења јесте предуслов постојања савремене геодетске основе.*



- Геодетска ознака (белега) треба да је трајно стабилизована и отпорна на природне метеоролошке утицаје.
- Антене, по могућству, присилно центрисати на стубове или на стативе, при чему целокупни прибор адекватно испитати и верификовати.
- Око тачака не сме бити вештачких препрека изнад  $15^\circ$  елевације.
- Квалитет регистрованих података се мора верификовати у смислу откривања утицаја екстерних извора сигнала (радара) или одбијених сигнала.
- Висину антене мерити вертикално на две дијаметрално супротне стране, пре и после опажачке сесије.
- Дужина опажачке мора бити у складу са постојећим стандардима, зависно од растојања између тачака и доба дана. Мерења у основној референтној мрежи морају бити изведена претежно ноћу, са периодом опажачке не мањим од 14 часова. Између две сукцесивне опажачке сесије остварити преклоп на најмање две заједничке тачке.
- Уколико су растојања између тачака већа од 10 km, а висинске разлике између тачака веће од 100 m, при обради мерења неопходно је користити неки од понуђених модела тропосфере при чему се ради моделовања влажне компоненте тропосфере, препоручује употреба радиометара водене паре. Целокупни прибор за мерење параметара тропосфере мора бити адекватно испитан и верификован.
- Софтвер мора обезбедити обраду мерења са адекватном тачношћу, тј. примењени физички и математички модели морају обезбедити адекватно моделовање утицајних величина на тачност оцене координата. Уколико захтевана тачност износи  $1\text{cm}$ , утицај немоделираних грешака не сме прећи износ од неколико милиметара ( $< 3\text{mm}$ ).
- Избор софтвера зависиће од дужине базних линија. Софтвери комерцијалног типа (*PRISM*, *SKI TRIMVEC* и сл.) погодни су за кратке ( $< 10\text{ km}$ ) дужине базних линија. Њихова примена код обраде средњих дужина базних линија ( $< 100\text{ km}$ ) мора бити пажљива у смислу: могућности откривања циклусних скокова, моделовања утицаја тропосфере, могућности употребе прецизних ефемерида и истовремене обраде *GPS* мерења на већем броју тачака.
- Орбите је неопходно обезбедити у истом референтном систему у којем су и референтне станице. Уколико то није случај, координате референтних станица трансформисати у референтни систем орбита.
- Тачност ефемерида мора бити довољна да обезбеди непомерену оцену вектора. Уколико се не располаже са прецизним орбитама, нужно је извршити мерења на некој од референтних станица. Да би се утицај грешака изазваних недовољном тачношћу ефемерида редуковао, неопходно је да референтна

тачка буде што ближе. Избор већег броја референтних тачака (3 или 4) значајно ће утицаће на: смањење ефеката грешака мерења и повећање тачности оцене координата.

Да би се постигла хомогена тродимензионална тачност мреже од  $1\text{cm}$ , тачност орбита мора бити сагласна дужинама базних линија. За дужине од  $1000\text{km}$ , тачност орбита не сме бити мања од  $20\text{ cm}$ , тј. орбите морају омогућити релативну тачност оцене базних линија од  $1 \times 10^{-8}$ .

## Б) Обрада локалних мрежа

- За постизање хомогене тачности мреже, сагласно тачности референтног оквира, обрада мерења у локалној мрежи мора бити пажљиво изведена. Приликом обраде мерења у локалним мрежама, потребно је придржавати се одређених правила. Два су главна извора грешака при обради независне локалне ГПС мреже, и то: *грешка координата фиксне тачке и грешка ефемерида (орбита) сателита*. Остали извори грешака се морају елиминисати условима при мерењу.
- Обично се једна (некада и више) локална тачка, са унапред датим координатама укључује у обраду мерења. У зависности од тачности координата (у односу на систем орбита), резултати обраде локалне мреже ће бити мање или више деформисани. Величина утицаја је директно пропорционална димензијама мреже. Уколико се жели гарантовати центиметарска тачност у мрежи са дужинама око  $100\text{ km}$ , тачност фиксне тачке у односу на орбите мора бити боља од  $2\text{ m}$  ( $1/10^7$ ). За мрежу ових димензија, тачност *single-point positioning* решења није адекватна, тако да се тачност оцене координата фиксне тачке мора повећати, сагласно тачности референтних тачака.
- Тачност орбита мора бити адекватна захтеваној тачности оцене параметара мреже. Тачност орбита је такође условљена димензијама мреже. На мрежама димензија око  $100\text{ km}$ , неопходно је обезбедити тачност орбита од  $2\text{ m}$  (обезбеђује релативну тачност оцене базне линије од  $1/10^7$ ) што није могуће постићи коришћењем емитујућих ефемерида. Орбите и референтне тачке треба да буду у истом координатном систему и сведене на исту епоху. У противном, локалну мрежу трансформисати у јединствен референтни систем постојеће референтне мреже.

## ПОСТУПАК<sup>2</sup> за коришћење IGS података при погушћавању EUREF и ETRF мреже

### А) Погушћавање EUREF мреже

При погушћавању EUREF мреже, потребно је придржавати се следећих принципа:

- Погушћавање мреже вршити само са испитаним уређајима, односно ако је софтвер у стању да узме у обзир поправку положаја фазног центра у односу на геометријски центар антене.
- Орбите морају бити дате у ECEF систему, заснованом на ITRF-91 (или каснијем), за актуелну епоху опажања.

---

<sup>2</sup> На иницијативу проф. Ивана Милера (Ivan Mueller) са државног универзитета у Охају (Ohio State University - SAD), 1990. године је неколико институција и појединаца донело одлуку о формирању међународне службе за геодинамику - IGS. За почетак, требало је спровести GPS тест кампању у 1992. години с циљем стварања основе - мреже за опслуживање корисника подацима неопходним у раду са GPS технологијом, при извршавању задатака највишег ранга тачности. Након тромесечне кампање мерења са 30 P-кодних пријемника на свих шест континената, подаци су пренети у седам центара за обраду мерења (Bern, Otava, Darmstadt, Potsdam, Pasadena, San Diego i Austin). После обраде мерења, сви подаци су били доступни корисницима. Тачност оцењених орбита обезбеђује дневну поновљивост базних линија већих од 1000 km, од неколико милиметара до 2 cm. Сагласност GPS решења за Европу и SLR/VLBI координата (ITRF-91) је на нивоу од 1 cm. Постигнути ниво тачности је у потпуности испунио очекивања и IGS добија потпуну подршку за наставак својих активности. На предлог IAG, IGS постаје перманентна служба, а од 1993. године њој се придружује и NGS (National Geodetic Survey – Национална геодетска служба SAD).

Производи IGS су путем Интернета доступни јавности користећи FTP трансфер протокол. Подаци су регистровани у ASCII формату са следећим конвенцијама назива: фајлови са ефемеридама - cscwww.d.ERN, ERP фајлови (параметри ротације Земље) - cscwww.d.ERP, сумарни фајлови - cscwww.d.SUM, при чему је: csc - код за идентификацију центра за обраду (три карактера), www - GPS недеља и d - дан у недељи. Фајлови са ефемеридама садрже ECEF положаје GPS сателита у SP1 формату или у новијем SP3 формату. Референтни систем орбита је ITRF-91, за епоху опажања. Производи CODE центра се добијају преко FTP на Internet адреси 130.92.4.10 у директоријуму (ASTRONOMY.CODE).



- Референтне тачке које се користе у поступку погушћавања мреже, морају бити сведене на одговарајућу епоху. За ту намену, потребно је познавати њихове годишње брзине померања.
- Резултати оцене координата из актуелне епохе мерења свести на заједничку епоху (на пример, у случају *EUREF-89* у епоху 1989,0) за шта је такође потребно познавати векторе брзине промена положаја између појединих епоха.
- Орбите су дате у *ECIF* координатама. Постојећи комерцијални софтвери интерполују ефемериде у епоху мерења, не користећи информације о земљиној ротацији. Професионални софтвери (као што је на пример *Bernese*) врши трансформацију ефемерида у инерцијални простор користећи динамичке моделе, при чему се морају познавати текуће координате Земљиног пола, као и *UT1-UTC* разлика. Неопходни подаци се могу добити преко *IERS Bulletin B* службе. *ERP* фајлови који су компатибилни са *Bernese GPS* софтвером, могу се преузети заједно са координатама из *CODE* центра. У практичним, применама, где се не тражи највиша тачност, најчешће нема потреба за увођењем ове корекције.

## Б) Поступак рачунања $ETRF^3$ координата

- Обезбедити *ITRF-TI* орбите у епохи опажања *TO* (*ITRF-TI* су добијене тако што су координате референтних станица претходно биле трансформисане из

<sup>3</sup> У складу са *EUREF* резолуцијом, *ETRF* је везан за "чврсти" део европског копна. У вези са тим *EUREF* мора дефинисати који је то део копна и за који временски период се то односи. *ETRF* се заједно са плочом такође помера, о чему *IGS* води рачуна и обавештава заинтересоване кориснике. На основу података о померањима, морају се извршити периодична прерачунавања, на основу чега се врши рачунање временски зависних параметара за прелазак из *ETRF-TE* у *ITRF-TI*.

*EUREF-89* поседује тачност координата од око 2 cm на *SLR/VLBI* тачкама и око 4cm по положају и 6 cm по висини за остале *GPS* тачке (*EUREF-89* координате од *SLR/VLBI* тачака су идентичне са *ITRF-89* координатама за епоху 1989,0). На основу додатних испитивања из *IGS* података је закључено да је *ITRF-91* тачније одређен од *ITRF-89*. Да би се мерења уклопила у тачнији систем, неопходно је у обради фиксирати координате референтних тачака у новом систему (*ITRF-91* или новији). Ради увођења *ITRF* референтног оквира вишег нивоа тачности у поступак погушћавања мреже, препоручује се поседовање *SLR/VLBI* тачака у домету од 1000km и коришћење *ITRF91* (или новијег) координата добијених трансформацијом из *ETRF*. При овоме, неопходно је поседовати податке побољшаних вредности *ETRF* координата које се могу добити и трансформацијом последње одређених вредности *ITRF* координата у *ETRF* и њиховом корекцијом у одговарајућу референтну епоху, користећи поменуте трансформационе параметре и брзине годишњих промена.

референтне епохе *ITRF-TI* у епоху *TO* на пример, из *ITRF-91* за епоху 1988.0 у *ITRF-91* за епоху 1993.5; *TI* је година реализације *ITRF*, на пример 91).

- Конвертовати све референтне тачке које се користе у поступку погушћавања и које су дате у *ETRF-TE* из референтне епохе *TR* у епоху мерења *TO*, користећи брзине промена за *ETRF-TE* (на пример из *ETRF-89* у епохи 1989.0 у *ETRF89* у епохи 1993.5; за стабилни део европског континента брзине су једнаке нули).
- Добијене координате трансформисати у *ITRF-TI* користећи трансформационе параметре између *ETRF-TE* и *ITRF-TI* за епоху *TO* (на пример из *ETRF-89* у *ITRF-91*, оба у епохи 1993.5; ови су параметри временски зависни и одражавају чињеницу да је *ETRF* везан за чврсти део европске тектонске плоче). Фиксирањем референтних тачака у обради мерења има за последицу да су оцене параметара односе на исти референтни систем (*ITRF-TI* за епоху *TO*, тј. *ITRF-91* за епоху 1993.5).
- Да би се резултати изразили у *ETRF-TE* (на пример *ETRF-89*), неопходно је:
  - трансформисати резултате из *ITRF-TI* за епоху *TO* у *ETRF-TE* (на пример, из *ITRF-91* у *ETRF-89*, оба у епохи 1993.5),
  - трансформисати *ETRF-TE* координате из *TO* у жељену епоху *TR* (напр. 1989.0), користећи брзине промена дате у односу на *ETRF-TE* (на пример, *ETRF-89* из епохе 1993.5 у *ETRF-89* у епохи 1989.0).





## ЛИТЕРАТУРА

---

**Vaarda, W.:** Measures for Accuracy of Geodetic Networks. In: "Optimization of Design and Computation of Control Networks", lectures from the symposium held in Sopron, Budapest, Hungary, 4-10, July 1977.

**Beutler, G., Gurtner, W., Rothacher, M., Schildknecht, T., I. Bauersima:** Using the Global Positioning System (GPS) for High Precision Geodetic Surveys: Highlights and Problem Areas, IEEE Symposium, Las Vegas, 1986.

**Beutler, G., Bauersima, I., Botton, S., Gurtner, W., Rothacher, M., Schildknecht, T.:** Accuracy and Biases of the Global Positioning System, 19. IUGG General Assembly, Vancouver, 1987.

**Beutler, G., Bauersima, I., Gurtner, W., Rothacher, M., Schildknecht, T., Geiger, A.:** Atmospheric Refraction and other Important Biases in GPS Carrier Phase Observations, 19. IUGG General Assembly, Vancouver, 1987.

**Bauersima, I.:** NAVSTAR/Global Positioning System (GPS), I, II, III; Mitt. der Sat.-Beob.-Station Zimmerwald, Nr. 9/1982, 10/1983, 12/1983.

**Blewitt, G.:** Carrier Phase Ambiguity Resolution for the Global Positioning System Applied to Geodetic Baseline up to 2000km, Journal of Geophysical Research, 94, 1989.

**Bock, Y., Abbott, R.I., Counselman, C.C., King, R.W.:** Three-dimensional geodetic control by interferometry with GPS: Processing of GPS phase observable, First International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, National Geodetic Survey, Rockville, 1985.

**Божих, Б.:** Оцена компоненти дисперзија у дводимензионалним геодетским мрежама, Магистарски рад, Грешевински факултет Универзитета у Београду, 1993.

**Божих, Б.:** Артиљеријска ГПС мрежа, пројекат, Војногеографски институт, Београд, 1998.

**Bratuljević, N., Mrkić, R.:** Trigonometrijske i poligonometrijske mreže u gradovima SR Crne Gore, Gradjevinski fakultet univerziteta u Beogradu, Institut za geodeziju, Beograd, 1984.

**Brunner, F.K.:** Advances in Positioning and Reference Frames, IAG Scientific Meeting, Rio de Janeiro, Brazil, Springer Verlag, Vol. 118, 1998.

**Brunner, F.K., Hartinger, H., Troyer, L.:** GPS signal diffraction modelling, the SIGMA-D Model. Submit to Journal of Geodesy, 1999.

**Caspary, W.F.:** Concepts of network and deformation analysis, The university of New South Wales, 1988.

**Colombo, O.L., Rizos, C., Hirsch, B.:** Decimetre-Level DGPS Navigation Over Distances of More than 1000km: Results of the Sydney Harbour Experiment. 4th Int. Conf. on Differential Satellite Navigation Systems, Bergen, Norway, April 1995.

**Cross, P.A.:** Progress In Precise Kinematic GPS Positioning, "GPS Directions 1999" workshop, School of geomatic Engineering, The University of New South Wales, April 1999.

**Činklović, N.:** Analiza i prethodna ocena tačnosti metoda preciznih geodetskih merenja, Naučna kwiga, Beograd, 1978.

- Georgiadou, Y., Kleusberg, A.: On the effect of ionospheric delay on geodetic relative positioning, *Manuscripta geodetica*, 1987.
- Gurtner, W., Beutler, G., Botton, S., Rothacher, M., Geiger, A., Kahle, H., Schneider, D., Wiget, A.: The Use of the Global Positioning System in Mountainous Areas, 19. IUGG General Assembly, Vancouver, 1987.
- Gurtner, W., Beutler, G., Bauersima, I., Schildknecht, T.: Evaluation of GPS carrier phase difference observations: The Bernese Second Generation Software Package, First International Symposium on Precise Positioning with Global Positioning, National Geodetic Survey, Rockville, 1985.
- Goad, C., Remondi B.W.: Initial relative positioning results using the global positioning system, *Bulletin Geodesique*, 58, 1984.
- King, R.W., Masters, E.G., Rizos, C., Stolz, A., and Collins, J.: Surveying with GPS, Monograph 9, School of Surveying, University of New South Wales, Australia, 1985.
- Контић, С., Мркић, Р.: Електронско мерење дужина, Научна књига, Београд, 1987.
- IAG: Travaux, General and technical reports, XXII General Assembly, Birmingham, United Kingdom, July, 1999.
- Forstner, W.: Reliability and Discernability of Extended Gauss-Markov Models. In: F.E. Ackermann (ed.), *Photogrammetric Models of Geodetic/Photogrammetric Point Determination With Regard to Outliers and Systematic Errors*, Deutsche Geodetische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 98, Munich, Germany, 79-103, 1983.
- Lachapelle, G., Kielland, P., Casey, M.: GPS for marine navigation and hydrography, *International Hydrographic Review*, Vol. LXIX, No. 1, I, International Hydrographic Bureau, Monaco, 1992.
- Heiskanen, W., Moritz, H.: *Physical Geodesy*, Freeman, San Francisco London, 1967.
- Hofmann Wellenhof, B., Lichtenegger, H., Collins, J.: *GPS Theory and Practice*, Springer, New York, 1992.
- Hofmann Wellenhof, B., Lichtenegger, H., Collins, J.: *GPS Theory and Practice*, 2<sup>nd</sup> edition, Springer, New York, 1994.
- Leick, A.: *GPS Satellite Surveying*, John Wiley & Sons, Second edition, New York, 1995.
- Миловановић, В., Лаловић, Ж.: Ласерски даљиномер геодиметар 8 и одређивање теренских еталона за дужине. Зборник радова, Јукем, Нови Сад, 1984.
- Миловановић, В., Лаловић, Ж.: Коришћење дистомата DI-20 за одређивање теренских еталонских дужина, Геодетска служба, бр. 46, 1986.
- Миловановић, В., Лаловић, Ж.: Коришћење дистомата DI-20 за одређивање теренских еталонских дужина, Зборник радова Јукем, Београд, 1986.
- Минчев, М., Гибенски, П.: Иследбаниа на јоносферните ефекти врху резултатите от ГПС-измеренија в Државната геодезическа мрежа, Висше военно училиште за артилерија и противвоздушна отбрана П.Волов, Сборник трудове, част шеста. Шумен, 1996.
- Moritz, H.: *Advanced Physical Geodesy*, Wichmann, Karlsruhe, 1980.
- Мркић, Р.: Прилог објективној оцени тачности мерења дужина електронским даљиномерима, Дисертација, Универзитет у Београду - Грађевински факултет, Београд, 1978.
- Eckels, R.: Surveying with GPS in Australia, Report School of Surveying, The University of New South Wales Kensington, N.S.W. 2033, Australia, 1987.

- Перовић, Г.:** Рачун изравнања, Књига 1, Теорија грешака мерења. Научна књига, Београд, 1989.
- Перовић, Г.:** Метод најмањих квадрата, Монографија 1 (у штампи), Грађевински факултет, Београд, 1998.
- Проворов, К.Л.:** Радиогодезија, Прво издање, Недра, Москва, 1965.
- Проворов, К.Л.:** Радиогодезија, Друго издање, Недра, Москва, 1973.
- Remondi, W.:** Using the global positioning system (GPS) phase observable for relative geodesy: Modeling, Processing, and Results. Ph. D. Dissertation, 360 pp. the University of Texas at Austin, Texas, 1984.
- Радојчић, С.:** Технички извештај о обради мерења у Артиљеријској ГПС мрежи, Војногеографски институт, Београд, 1998.
- Rao, C.R. :** Estimation of Heteroscedastic Variances in Linear Models, Journ. Am. Stat. Ass.,63, 161-172, 1970.
- Rueger, J.M.:** Introduction to Electronic Distance Measurement, The University of New South Wales, 1987.
- Saastamoinen, J.:** Atmospheric correction for the troposphere and stratosphere in radio ranging of satellites, The use of artificial satellites for geodesy, Geophysical Monograph 15, American Geophysical Union, Washington, D.C., 1983.
- Seeber, G.:** Satellitengeodasie; Verl. Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1989.
- Seeger, H. et. al.:** Doppler Activities in Europe; Allg. Verm.-Nachr., Intern. Suppl. No. 1/1984, S. 19-29.
- Sigl, R.:** Satelitsko pozicioniranje, Geodetska služba, Geokarta, brojevi 58 i 59, 1991.
- Simić, M.:** Електроника и електронска мерења у геодезији. Грађевински факултет, Београд, 1992
- Wanninger, L.:** Prazise Positionierung in regionalen GPS-Referenzstationsnetzen, Dissertationen, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission bei der C.H.Beck'schen Verlagsbuchhandlung, Munchen, 2000.
- Wild:** PoPS Manual, WM Satellite Survey Company. Heerbrugg (Switzerland), 1990.
- Ware, R.H., Rocken, C., Hurst, K.J.:** Baseline analysis from the spring 1985 GPS test, Fourth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, Austin, Texas, 1986.





## БИОГРАФИЈА

Рођен сам у Убу, 14.01.1959. године од оца Спасоја и мајке Милојке, обоје просветни радници – учитељи, као прво од два мушка детета. Основну школу сам завршио 1974 године у Убу, стичући Вукову диплому. Године 1978. сам завршио Војну гимназију у Београду са одличним успехом, а 1982. године Војну академију Копнене војске у Београду, као први у рангу те генерације Академије. Од 1982. године радим у Војногеографском институту у Београду, са краћим прекидом од 1994. до 1995. године, будући да сам се тада налазио у Војнотехничкој академији ВЈ у Жаркову. У оквиру службе сам се бавио различитим пословима из домена струке, и то: геодетским премером, геомагнетским премером, триангулацијом и трилатерацијом, сателитским мерењима, мерењима са жироскопом и сл. Учествовао сам у планирању и успостављању Експерименталног полигона Војногеографског института као и планирању и обради података GPS мерења у војној референтној GPS мрежи, планирању и обради GPS мерења приликом извођења експерименталног премера на Бугарској и Мађарској граници, као и на низу других мање значајних радова. У наставном процесу сам ангажован од 1991. године, као спољни сарадник на Војној академији КоВ из предмета геодезије, сателитске геодезије и геомагнетизма, а од 1998. године сам асистент на Војнотехничкој академији, на предметима Геодезија 1 и Рачун изравнања 1 и 2. Године 1986. сам дипломирао на Грађевинском факултету – Геодетски отсек на теми: *Топографска картица као извор њроситорних информационих сисџема*, а 1989. године, у Центру за учење страних језика ЈНА, завршио сам једногодишњу школу страних језика – енглески језик. Магистрирао сам на истом факултету 1993. године на теми: *Компонентне дисперзија у дводимензионалним мрежама*. Завршио сам и неколико краћих специјалистичких курсева и објавио преко 30 радова, у домаћим стручним часописима. Тренутно се налазим на месту начелника *Одељења за научноисџживачки рад* у Војногеографском институту. Ожењен сам супругом Мирјаном и имам две ћерке, Марију и Ану.





