Univerzitet u Beogradu
Građevinski fakultet

Ivan Aleksić

PRILOG OPTIMIZACIJI GEODETSKIH MREŽA

-Doktorski rad-

Beograd
1991

UNIVERZITET U BEOGRADU - GRAĐEVINSKI FAKULTET

Mr. Ivan Aleksić, dipl.inž.

PRILOG OPTIMIZACIJI GEODETSKIH MREŽA

- DOKTORSKI RAD -

BEOGRAD, Decembra 1991.

SADRŽAJ

P R E D G O V O R

Ova disertacija nastala je kao rezultat višegodišnjeg rada autora na izučavanju problema optimizacije geodetskih mreža. Ustvari, ona predstavlja nastavak započetih istraživanja vezanih za sekvencijalni model optimizacije opažanja u geodetskim mrežama.

Kako se dosadašnji sekvencijalni model bazirao na optimizaciji geodetskih mreža samo sa aspekta njihove tačnosti, u ovom radu biće pokazan razvoj integralnog modela optimizacije sa aspekta tačnosti, pouzdanosti i osetljivosti.

U čitavom razvoju ovog modela, od osnovne ideje pa do zaokruženja koje je dato u ovm radu, imao sam veliku i stalnu naučnu podršku od strane profesora dr. Krunislava Mihailovića i njegove korisne sugestije u mnogome su doprinele poboljšanju ovga rada na čemu mu se posebno zahvaljujem.

Posebnu zahvalnost dugujem i profesoru dr. Krsti Vračariću na svesrdnoj podršci u radu i na korisnim sugestijama.

Zahvalnost dugujem i dr. Toši Ninkovu na pomoći u prikupljanju savremene literature iz ove oblasti.

U Beogradu | Autor
25. 12. 1991. god.

NOTACIJA

Generalizovane inverzije matrica

$\otimes$ *kronekerov proizvod matrica*
I *jedinična matrica*
A_D^- *desna inverzija pravougle matrice*
A_L^- *leva inverzija pravougle matrice*
G *generalizovana inverzija matrice*
A^+ *pseudo inverzija matrice*

Modeli izravnanja geodetskih mreža

A_{nu} *matrica dizajna u modelu posrednog izravnanja*
B_{rn}^T *matrica dizajna u modelu uslovnog izravnanja*
l *vektor opažanja*
v *vektor popravaka*
$\hat{x}$ *vektor ocena nepoznatih parametara*
$\hat{l}$ *vektor izravnatih vrednosti opažanja*
h *vektor ocena u modelu izravnanja*
K_h *kovarijaciona matrica vektora ocena* h
P *matrica težina opažanja*
Q_l *matrica kofaktora opažanja*
$Q_{\hat{x}}$ *matrica kofaktora nepoznatih parametara*
Q_v *matrica kofaktora popravaka*
$Q_{\hat{l}}$ *matrica kofaktora izravnatih opažanja*
σ_o *a priori standardna devijacija jedinice težine*
$\hat{\sigma}_o$ *a posteriori standardna devijacija jedinice težine*
$\sigma_{\hat{x}}$ *standardna devijacija nepoznatih parametara*
M *srednja položajna greška tačke*

Pouzdanost geodetskih mreža

∇l_i	gruba greška opažanja
$\hat{\nabla} l_i$	ocena grube greške u opažanju
∇l	vektor opažanja koji sadrži grube greške
∇v	uticaj grubih grešaka na popravke
$\nabla \hat{x}$	uticaj grubih grešaka na ocene parametara
$\nabla \hat{l}$	uticaj grubih grešaka na ocene izravnatih opažanja
r_i	elementarni brojevi suvišnih opažanja
R	matrica elementarnih brojeva suvišnih opažanja
u_i	koeficijenti uticaja grubih grešaka na izravnate vrednosti opažanja
U	matrica koeficijenata uticaja grubih grešaka na izravnate vrednosti opažanja
w_i	test statistike u identifikaciji grubih grešaka
δ_i	empirijske vrednosti parametra necentralnosti
δ_o	teorijska vrednost parametra necentralnosti
α	greška I vrste
$1-\beta$	greška II vrste
β	moć testa
k	kritična vrednost
$\nabla_o l_i$	unutrašnja pouzdanost opažanja
$\nabla_o x_i$	spoljašnja pouzdanost opažanja
$\nabla_o f_i$	pouzdanost funkcije nepoznatih parametara
v_{ij}	elementarne popravke
R_o	optimalni oblik matrice R

Optimizacija opažanja u geodetskim mrežama

$\odot$ *Khatri-Rao proizvod matrica*

$*$ *Hadamard proizvod matrica*

Q_x *kriterijum matrica kofaktora nepoznatih parametara*

K_x *kovarijaciona kriterijum matrica nepoznatih parametara*

R_x *korelaciona matrica nepoznatih parametara*

σ_x *definisana neophodna tačnost nepoznatih parametara*

D_x *dijagonalna matrica definisane neophodne tačnosti parametara*

$\underline{K}_{\hat{l}}$ *kovarijaciona kriterijum matrica izravnatih opažanja*

$\underline{K}_v$ *kriterijum kovarijaciona matrica popravaka*

$\sigma_{\bar{l}}$ *optimalna standardna devijacija opažanja*

D_l *dijagonalna matrica optimalnih standardnih devijacija*

r_{min} *minimalni elementarni broj suvišnih opažanja*

u_{max} *maksimalni koeficijent uticaja grubih grešaka na izravnate vrednosti opažanja*

Optimizacija opažanja u geodetskim deformacionim mrežama

$\hat{x}'$ *vektor ocena koordinata u tekućoj epohi*

$\hat{x}$ *vektor ocena koordinata u prethodnoj epohi*

d' *vektor prividnih pomeranja*

d *vektor relativnih pomeranja*

B *matrica koeficijenata stabilnih i nestabilnih tačaka*

Q_d *matrica kofaktora relativnih pomeranja*

σ_d *standardna devijacija relativnog pomeranja*

t_i *test statistike u identifikaciji pomeranja*

d_o *minimalno pomeranje*

a_o *globalna osetljivost deformacione mreže*

$d_{i,o}$ *lokalna osetljivost deformacione mreže*

D_d *dijagonalna matrica standardnih devijacija relativnih pomeranja*

R_d *korelaciona matrica relativnih pomeranja*

$\underline{K}_d$ *kovarijaciona kriterijum matrica osetljivosti*

$\underline{K}_{x,d}$ *transformisana kriterijum matrica osetljivosti*

1. UVOD

Problemima optimizacije geodetskih mreža naučna i stručna geodetska javnost okupirana je već jedno stoleće. Pionirskim radom u ovoj oblasti smatra se disertacija *Helmert-a, F.R.(1868.)*. Ogroman naučni doprinos rešavanju problema optimizacije geodetskih mreža dali su: *Schreiber (1882.), Bruns, H. (1886.), Jordan, W. (1988.), Runge, C. (1890.)*, a u novije vreme *Wolf, H. (1958., 1960., 1961.), Grafarend, E. (1979.), Cross, P.* i *Thapa, K. (1977.), Schmit, G. (1982.), Banov, B. (1982.), Bill, R., Muller,H., Schmit G.(1983.), Bill, R. (1985.), Pelzer, H. (1985.), Illner, M. (1987.), Gaspar P., Schmit, G. (1989.), Hoppe, H., Kaltenbach, H. (1989.)*, a kod nas *Ninkov, T. (1982., 1989.), Bilajbegović, A. (1983.), Mihajlović, K.* i *Vračarić, K. (1985.d), Mihajlović, K.(1988a.) Perović, G.* i *Ašanin, S. (1985.), Aleksić, I. (1988.)*.

U navedenim radovima pažnja je najčešće posvećivana problemima optimizacije sa aspekta tačnosti, gde su matematički modeli optimizacije uglavnom bazirani na analizi tačnosti geodetskih mreža, a veoma retko su razmatrani problemi ekonomičnosti.

U savremenim uslovima, pored kriterijuma tačnosti i ekonomičnosti u matematičke modele optimizacije uključuju se i kriterijumi pouzdanosti geodetskih mreža. Na osnovu analize teorije pouzdanosti geodetskih mreža koju je razvio *Baarda, W. (1967., 1968.)*, preporuke u cilju optimizacije sa ovog aspekta dali su *Pelzer,H. (1977., 1985.), Alberda, J.E. (1980.) Forstner, W. (1985.), Kok, J. J. (1984.), Murle, M.* i *Bill, R. (1984.), Teunissn, P. (1984.), Hech, B. (1980.), Van Mierlo, J.* i *Hahn, M. (1987.)* i drugi, a kod nas *Ninkov T. (1989.), Perović, G.* i *Ašanin, S. (1989.)* i *Aleksić, I. (1990a.)*.

Matematičke modele optimizacije koji sadrže kriterijume pouzdanosti geodetskih mreža kreirali su *Van Mierlo,J.(1981.)* i *Muller, H. (1986.)*. Očigledno je veoma malo pažnje posvećeno istraživanjima modela optimizacije sa aspekta pouzdanosti a u slučaju modela optimizacije geodetskih deformacionih mreža sa aspekta osetljivosti obim istraživanja je sveden na minimum. Preporuke u cilju optimizacije geodetskih deformacionih mreža sa aspekta osetljivosti dao je *Pelzer, H. (1985.)* a modele optimizacije sa ovog aspekta kreirali su: *Huaxue, T. i Fengxiang, J. (1990.), Zhang, Z. i Li, X. (1990.).*

Osnovni cilj ovog rada je uključivanje kriterijuma tačnosti, pouzdanosti i osetljivosti u jedan integralni model optimizacije. Razvoj ovog integralnog modela, u daljem radu nazvan sekvencijalni model optimizacije geodetskih mreža, zasnovan je na već postojećem iterativnom modelu optimizacije *Aleksić I. (1988a., 1990a.),* koji je do sada omogućavao optimizaciju opažanja samo sa aspekta tačnosti.

Sledeći cilj koji se želeo ovde postići je da kriterijumi tačnosti, pouzdanosti ili osetljivosti budu invarijantni u odnosu na koordinatne sisteme u kojima se geodetske mreže nalaze. Naime, najveći broj razvijenih modela optimizacije geodetskih mreža podrazumeva obavezno formiranje kriterijum matrice kofaktora nepoznatih parametara Q_x. Problemi koji nastaju prilikom formiranja ove matrice i razlozi zbog čega se oni javljaju već su istaknuti, ali osnovni problem se ne ističe sa dovoljno oštrine. Treba imati u vidu da se matrica kofaktora Q_x odnosi na koordinate tačaka u geodetskim mrežama. Ako znamo da se apsolutni položaj tela u prostoru ne može ni na koji način odrediti *Einstein, A. (1987.)* onda je potpuno jasno da se i koordinate geodetskih tačaka nemogu apsolutno određivati.

Ako smo već prinuđeni da uvodimo konvencijalne ili na proizvoljan način odabrane koordinatne sisteme onada treba nastojati da se izbegne uticaj ovih koordinatnih sistema na rezultate optimizacije opažanja. Potpuno je jasno da se fizički procesi planiranih opažanja u geodetskim mrežama odvijaju nezavisno od uvedenih koordinatnih sistema.

U želji da se određena rešenja istaknutih ciljeva što bolje objasne u ovom radu, u okviru poglavlja 2 sažeto je data analiza generalizovanih inverzija matrica *Rao, C. i Mitra, S. (1971.),* koja služi kao neophodna osnova za rešavanje problema u narednim poglavljima.

U poglavlju 3 sažeto su prikazani funkcionalni i stohastički modeli izravnanja geodetskih mreža neophodnih za kasniju analizu teorije pouzdanosti i formiranja modela optimizacije. Ovde je pokazano da položajna tačnost tačaka u slobodnoj geodetskoj mreži ne zavisi od težišta mreže, kako se to do sada često smatralo, već od povezanosti tačaka mreže opažanim veličinama i tačnosti opažanja odnosno, da su invarijantne u odnosu na koordinatne sisteme.

Poglavlje 4 sadrži dosadašnja saznanja iz oblasiti teorije pouzdanosti geodetskih mreža koju je definisao *Baarda, W. (1967., 1968.)*, i to samo oni delovi koji su bili neophodni za razvoj modela optimizacije sa aspekta pouzdanosti.

Poglavlje 5 objašnjava ograničenja teorije pouzdanosti. Ukupne popravke opažanja razložene su na elementarne koje su omogućile lakše sagledavanje problema testiranja statističkih hipoteza grubih grešaka, kao i problema ocena grubih grešaka. Iz ovih teorijskih razmatranja proistekao je i optimalni oblik matrice R_o neophodan u cilju projektovanja i optimizacije geodetskih mreža.

Poglavlje 6 objašnjava savremene ciljeve optimizacije opažanja u geodetskim mrežama kao i kriterijume tačnosti i pouzdanosti u geodetskim mrežama. Detaljno je objašnjen nov postupak dobijanja realne kovarijacione kriterijum matrice koordinata na osnovu položajne tačnosti tačaka u mreži.

Poglavlje 7 objašnjava nov razvoj sekvencijalnog modela optimizacije opažanja sa aspekta tačnosti i pouzdanosti geodetskih mreža. Prikazan razvoj je zasnovan na modelu posrednog i uslovnog izravnanja kao i rezultati primene u 1-D i 2-D geodetskim mrežama.

Poglavlje 8 posvećeno je optimizaciji opažanja u deformacionim geodetskim mrežama. O problemima deformacione analize ovde neće biti govora, a oni mogu biti sagledani u radovima *Heck, B . (1980.), Kok, J. J. (1982.), Deformationsanalysen (1983.), Caspary, W. i Borutta, H. (9187.), Yan, Z. (1987.) Niemeier,W.(1988.)* i drugi, a kod nas *Mihailović, K. (1985.),Ninkov T. (1985.), Ašanin, S. (1986.), Čvorović, M. (1986.) Vučkov, S. (1988.), Aleksić, I. (1989.)*. U ovom poglavlju bi će samo sažeto prikazana metoda Mihailovića. Ovaj matematički model deformacione analize poslužio je za formiranje jedne opšte kriterijuma matrice osetljivosti. Takođe su pokazane osnovne ideje dva najsavremenija pristupa u optimizaciji deformaconih mreža sa aspekta osetljivosti.

U ovom poglavlju detaljno je objašnjen i nov pristup optimizaciji deformacionih mreža sa aspekta osetljivosti i pouzdanosti odnosno, uključivanje kriterijuma osetljivosti i pouzdanosti u sekvencijalni model optimizacije.

U poglavlju 9 dati su zaključci i preporuke za buduća istraživanja u ovoj oblasti optimizacije.

U poglavlju 10 pokazani su rezultati analiza i istraživanja u simuliranim geodetskim mrežama, dobijeni na osnovu programa I1DGM, OPT1D, ISTGE1 ISTGE2 čiji je tvorac autor ovoga rada, a već postojeći program IGM2D samo je prilagođen u smislu kompatibilnosti sa programom ISTGE2.

Na kraju je priložen spisak literature sastavljen od bibliografskih jedinica kojima se autor služio prilikom svojih ranijih istraživanja vezanih za ovu problematiku.

2. GENERALIZOVANE INVERZIJE MATRICA

2.1. Matrice potpunog ranga

Regularna inverzija kvadratne matrice

Za kvadratnu matricu N reda $u \times u$ i ranga $r(N) = u$ postoji jedinstvena regularna inverzija N^{-1} za koju važi

$$N N^{-1} = N^{-1} N = I_u \qquad \ldots(2.1.1)$$

gde je I_u jedinična matrica reda u .

Desna inverzija pravougle matrice

Za pravouglu matricu A reda $n \times u$ sa potpunim rangom vrsta $r(A)=n$ i rangom $r(A^T A) = n$ postoji desna inverzija A_D^- za koju važi

$$(A A^T)(A A^T)^{-1} = A(A^T(A^T A)^{-1}) = A A_D^- = I_n \qquad \ldots(2.1.2)$$

gde je

$$A_D^- = A^T (A A^T)^{-1} \qquad \ldots(2.1.3)$$

desna inverzija pravougle matrice a I_n jedinična matrica reda n.

Leva inverzija pravougle matrice

Za pravouglu matricu A reda $n \times u$ sa potpunim rangom kolona $r(A)=u$ i rangom $r(A^T A) = u$ postoji leva inverzija A_L^- za koju važi

$$(A^T A)^{-1} (A^T A) = ((A^T A)^{-1} A^T) A = A_L^- A = I_u \qquad \ldots(2.1.4)$$

gde je

$$A_L^- = (A^T A)^{-1} A^T \qquad \ldots(2.1.5)$$

leva inverzija pravougle matrice a I_u jedinična matrica reda u.

Desna i leva inverzija pravougle matrice egzistira samo ako je $r(A\,A^T) = n$ i $r(A^T A) = u$ odnosno, da matrica A ima potpun rang vrsta $r(A)=n$ ili potpun rang kolona $r(A) = u$. U opštem slučaju

$$A_D^- A \neq I_u \quad \text{i} \quad A\,A_L^- \neq I_n$$

Opšti izrazi za desnu i levu inverziju

Neka je matrica A reda $n \times u$ i potpunog ranga vrsta $r(A)=n$. Matrične jednačine

$$A\,x = l \quad \text{i} \quad A^T P\,A\,x = A^T P\,l \qquad \text{...(2.1.6)}$$

su ekvivalentne ako je $r(A^T PA) = r(A) = n$, gde je P proizvoljna matrica sa $det\ P \neq 0$. Rešenje jednačine je

$$x = P\,A^T\,(\,A\,P\,A^T\,)^{-1} l \qquad \text{...(2.1.7)}$$

gde je opšta desna inverzija matrice A

$$A_D^- = P\,A^T\,(\,A\,P\,A^T\,)^{-1} \qquad \text{...(2.1.8)}$$

Očigledno važi $A\,A_D^- = I_n$. Ako je matrica A sa potpunim rangom kolona $r(A) = u$ onda je rešenje matrične jednačine (2.1.6) oblika

$$x = (\,A^T\,P\,A\,)^{-1} A^T\,P\,l \qquad \text{...(2.1.9)}$$

gde je opšta leva inverzija matrice A

$$A_L^- = (\,A^T\,P\,A\,)^{-1} A^T\,P \qquad \text{...(2.1.10)}$$

Očigledno važi $A_L^- A = I_u$.

2.2. Matrice nepotpunog ranga i generalizovane inverzije

Matricu A reda $n \times u$ nazivamo matricom sa nepotpunim rangom ako je njen rang $r(A)$ manji od $min\ (n,u)$. Za $n > u$ matrica A ima nepotpun rang kolona a za $n < u$ nepotpun rang vrsta.

Ako je matrica A kvadratna i reda n, rešenje linearne matrične jednačine $A\,x = y$ je oblika $x = A^{-1}y$ gde je A^{-1} regularna inverzija od A i važi $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Ako je matrica A kvadratna i reda n, ali singularna $det\ A = 0$, ili je A pravougla matrica, onda se postavlja pitanje da li egzistira matrica G takva da je $x = G\,y$ rešenje jednačine $A\,x = y$.

Odavde sledi definicija za generalizovanu inverziju. Neka je matrica A reda $u \times n$ proizvoljnog ranga. Generalizovana inverzija A je reda $n \times u$ u oznaci G takva da je $x = G\,y$ rešenje jednačine $A\,x = y$ za bilo koje y odnosno, generalizovana inverzija G matrice A ispunjava uslov

$$A\,G\,A = A \qquad \ldots(2.2.1)$$

Generalizovana inverzija G nije jedinstvena i postoji više izbora za matricu G, tako da jednakost (2.2.1) bude ispunjena. Različite mogućnosti određivanja generalizovane inverzije date su u *Rao, C.* i *Mitra, S. (1971.)* ili *Perović, G. (1986.)*, a ovde će dalje biti prikazane neke specijalne mogućnosti od interesa za naredna teorijska razmatranja u ovom radu.

2.3. Rešenja sistema jednačina pomoću G inverzije

Rešenje sa minimalnom normom

Za saglasan sistem $A\,x = y$ neophodno je odrediti generalizovanu inverziju G nezavisno od vektora y, tako da rešenje $x = G\,y$ ima minimaalnu normu

$$\min_{Ax=y} \| x \| = \| G y \| \qquad \ldots(2.3.1)$$

gde je $\| x \| = (x^T x)^{1/2}$ i $\| x \| = \min \iff x^T x = \min.$

Prema teoremi datoj u *Rao, C.* i *Mitra, S. (1971.)* rešenje saglasnog sistema $A x = y$ ima minimalnu normu ako generalizovana inverzija G zadovoljava sleдеće uslove

$$A G A = A \,, \; (G A)^T = G A \;\; \text{i} \;\; G A A^T = A^T \qquad \ldots(2.3.2)$$

Ako je norma $\| x \| = (x^T P x)^{1/2}$, gde je P pozitivno određena matrica, tada su uslovi (2.3.2) oblika

$$A G A = A \quad , \quad (G A)^T P = P G A \quad \text{i}$$

$$G A P^{-1} A^T = P^{-1} A \qquad \ldots(2.3.3)$$

Za $P = I$ uslovi (2.3.3) prelaze u specijalne (2.3.2). Treba naglasiti još da da je rešenje sa minimalnom normom jedinstveno a norma inverzije G ne mora biti minimalna.

Rešenje sa minimumom sume kvadrata

Za nesaglasan sistem $A x = y$ postoji rešenje $\hat{x}$ sa minimumom sume kvadrata ako je

$$\|v\| = \| A \hat{x} - y \| = \inf_x \|A x - y\| \qquad \ldots(2.3.4)$$

Rešenje sa minimalnom sumom kvadrata $\hat{x} = G y$ mora da zadovolji uslove

$$A G A = A \,, \; (A G)^T = A G \;\; \text{i} \;\; A^T A G = A^T \qquad \ldots(2.3.5)$$

gde je G generalizovana inverzija od A. Ako je $\| x \| = (x^T P x)^{1/2}$ gde je P pozitivno određena matrica, onda uslovi (2.3.5) imaju oblik

$$AGA = A \,, \; (AG)^T P = PAG \;\; \text{i} \;\; A^T PAG = A^T P \qquad \ldots(2.3.6)$$

Za P=I uslovi (2.3.6) prelaze u specijalne (2.3.5).

Rešenje sa minimalnom normom i minimalnom sumom kvadrata

Za nesaglasan sistem $A\,x = y$ postoji rešenje $\hat{x} = A^{+}y$ sa minimalnom normom i minimalnom sumom kvadrata ako su ispunjeni uslovi

$$
\begin{array}{ll}
(a) & A\,A^{+}A = A \\
(b) & A^{+}A\,A^{+} = A^{+} \\
(c) & (A\,A^{+})^{T} = A\,A^{+} \\
(d) & (A^{+}A)^{T} = A^{+}A
\end{array}
\qquad \ldots (2.3.7)
$$

gde je A^{+} generalizovana G inverzija matrice A odnosno inverzija *Moore (1920.)* i *Penrose (1955)* ili pseudoinverzija.

Za razliku od prethodnih G inverzija pseudoinverzija označena je simbolom "+" zbog sledećih osobina :

(1) pseudo inverzija A^{+} je generalizovana inverzija matrice A jer uslov (2.3.7.a) odgovara uslovu (2.2.1),

(2) za pseudo inverziju A^{+} važi:

$$A\,A^{+}A = A \quad , \quad A^{+}A\,A^{+} = A^{+} \quad i \quad (A^{+})^{+} = A$$

ako važi $r(A) = r(A^{+})$,

(3) pseudo inverzija A^{+} zasniva se na rešenju sa minimalnom sumom kvadrata $||v|| = (v^{T}v)^{1/2} = \min$ saglasno uslovu (2.3.4) ,

(4) pseudo inverzija A^{+} istovremeno je zasnovana i na rešenju sa minimalnom normom $||x|| = (x^{T}x)^{1/2} = \min$ saglasno uslovu (2.3.1) ,

(5) pseudo inverzija A^{+} je jedinstvena što je posledica jedinstvenosti rešenja sa minimalnom normom .

(6) pseudo inverzija A^{+} ima minimalni trag $trA^{+} = \min$, što je posledica minimalne norme rešenja .

Različite mogućnosti dobijanja pseudoinverzija objašnjene su u *(Rao, C. i Mitra, S. 1971.)* ili *(Perović, G. 1986.)* a u ovom radu biće korišćena

$$A^{+} = A^{T} (A A^{T})^{-} A (A^{T} A)^{-} A^{T} \qquad \ldots(2.3.9)$$

sa relacijama

$$(A^{+})^{T} = (A^{T})^{+}$$

$$(A A^{T})^{+} = (A^{+})^{T} A^{+}$$

3. FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODELI IZRAVNANJA GEODETSKIH MREŽA

U teoriji izravnanja geodetskih mreža egzistiraju najčešće dva standardna problema. Prvi problem izravnanja po metodi posrednih merenja pišemo kao relacije između opažanih vrednosti i nepoznatih parametara u vidu linearnog funkcionalnog modela

$$\tilde{l} = A\,\tilde{x} \qquad \ldots(3.1)$$

a drugi, izravnanje po metodi uslovnih merenja kada merene veličine stoje u nekim matematičkim uslovima

$$B^T\tilde{l} = 0 \qquad \ldots(3.2)$$

gde su :

$\tilde{l}$ vektor istinitih vrednosti opažanja *(nx1)* ,

$\tilde{x}$ vektor istinitih vrednosti nepoznatih parametara *(ux1)*,

$A_{nxu} = \left[\dfrac{\partial F(x)}{\partial x} \right]$ matrica dizajna u modelu posrednog izravnanja,

$B^T_{rxu} = \left[\dfrac{\partial F(l)}{\partial l} \right]$ matrica dizajna u modelu uslovnog izravnanja.

gde je: F vektor funkcija merenih i nepoznatih veličina.

3.1. Matematički model posrednog izravnanja

Zamenom vektora istinitih vrednosti $\tilde{l}$ sa vektorom opažanih vrednosti l u (3.1) dobijamo jednačine popravka odnosno, funkcionalni model

$$\hat{l} = l + v = A\,\hat{x} + l\,(x_o)$$

ili

$$\boxed{v = A\,\hat{x} + f} \qquad \ldots(3.1.1)$$

gde je:

v vektor popravaka,

$\hat{x}$ vektor ocena nepoznatih parametara,

$f = l(x_o) - l$ vektor slobodnih članova,

$\hat{l} = l + v$ vektor izravnatih vrednosti opažanja .

Matematičko očekivanje vektora popravaka je $E(v) = 0$ a stohastička svojstva vektora opažanja ogledaju se u matematičkom očekivanju

$$E(l) = \hat{l} = A\,\hat{x}$$

i kovarijacionoj matrici

$$K_l = \sigma_o^2\, Q_l = \sigma_o^2\, P^{-1}$$

sa normalnom raspodelom

$$l \sim N\{\, A\hat{x}\ ,\ \sigma_o^2\, Q_l \,\} \qquad \ldots(3.1.2)$$

Primenom uopštenog metoda najmanjih kvadrata $v^T K_l^{-1} v = min$ dobijamo vektor ocena

$$h = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{l} \\ v \\ \hat{f} \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{x}}\, A^T\, Q_l^{-1} \\ A\, Q_{\hat{x}}\, A^T\, Q_l^{-1} \\ A\, Q_{\hat{x}}\, A^T\, Q_l^{-1} - I \\ g^T Q_{\hat{x}}\, A^T\, Q_l^{-1} \\ I \end{bmatrix} l = H\, l \qquad \ldots(3.1.3)$$

gde je kofaktor matrica nepoznatih parametara

$$Q_{\hat{x}} = (\, A^T\, Q_l^{-1}\, A\,)^{-1} \quad \text{za} \quad r(A) = r = u$$

ili $$Q_{\hat{x}} = (\, A^T\, Q_l^{-1}\, A\,)^{+} \quad \text{za} \quad r(A) = r < u$$

Vektor $\hat{f}$ je linearna funkcija nepoznatih parametara

$$\hat{f} = g^T\hat{x} = g^T Q_{\hat{x}}\, A^T Q_l^{-1} l \qquad \ldots(3.1.4)$$

Kovarijaciona matrica vektora h ima oblik

$$K_h = \hat{\sigma}_o^2\, H\, Q_l\, H^T = \hat{\sigma}_o^2\, Q_h \qquad \ldots(3.1.5)$$

gde je Q_h kofaktor matrica koja definiše korelativnu zavisnost između pojedinih ocena

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \hat{x} & \hat{l} & v & \hat{f} & l \end{array} \\
Q_h = \begin{bmatrix}
Q_{\hat{x}} & Q_{\hat{x}} A^T & 0 & Q_{\hat{x}} g & Q_{\hat{x}} A^T \\
 & A Q_{\hat{x}} A^T & 0 & A Q_{\hat{x}} g & A Q_{\hat{x}} A^T \\
 & & Q_l - A Q_{\hat{x}} A^T & 0 & A Q_{\hat{x}} A^T - Q_l \\
 & & & g^T Q_{\hat{x}} g & A Q_{\hat{x}} g \\
 & \text{simetrično} & & & Q_l
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} \hat{x} \\ \hat{l} \\ v \\ \hat{g} \\ l \end{array}
\end{array}
$$

Disperzija jedinice težine

$$\hat{\sigma}_o^2 = v^T P v / r$$

je nepristrasna ocena disperzije jedinice težine σ_o^2 gde je $r = n-u$ broj suvišno merenih veličina za $r(A)=u$. Kada je $r(A) < u$ onda je $r=d+n-u$ gde je $d=u-r(A)$ defekt funkcionalnog modela.

3.2. Matematički model uslovnog izravnanja

Zamenom vektora istinitih vrednosti $\tilde{l}$ sa vektorom opažanih vrednosti l u jednačini (3.2) dobijamo uslovne jednačine popravaka odnosno, linearni fukcionalni model uslovnog izravnanja

$$B^T v + B^T l = 0$$

ili

$$\boxed{B^T v + w = 0} \qquad \ldots(3.2.1)$$

gde je $w = B^T l$ vektor slobodnih članova . Stohastička svojstva vektora v i vektora opažanja l su

$$M(v) = 0 \;, \; K_l = \sigma_o^2 Q_l = \sigma_o^2 P^{-1} \qquad \ldots(3.2.2)$$

$$l \sim N\{\hat{l}, \sigma_o^2 Q_l\}$$

Primenom uopštenog metoda najmanjih kvadrata $v^T K_l^{-1} v = \min$ dobijamo vektor ocena

$$h = \begin{bmatrix} \hat{l} \\ v \\ k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - Q_l B N^{-1} B^T \\ Q_l B N^{-1} B^T \\ - N^{-1} B^T \\ I \end{bmatrix} l = H\, l \qquad \ldots (3.2.3)$$

gde je matrica koeficijenata normalnih jednačina korelata $N = B^T Q_l B$. Kovarijaciona matrica vektora h dobija se prema (3.1.5) a kofaktor matrica je

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \hat{l} & v & k & l \end{array} \\ Q_h = & \begin{bmatrix} Q_l - Q_l B N^{-1} B^T Q_l & 0 & 0 & Q_l - Q_l B N^{-1} B^T Q_l \\ & Q_l B N^{-1} B^T Q_l & Q_l B N^{-1} & Q_l B N^{-1} B^T Q_l \\ & & N^{-1} & N^{-1} B^T Q_l \\ \text{simetrično} & & & Q_l \end{bmatrix} \begin{array}{c} \hat{l} \\ v \\ k \\ l \end{array} \end{array}$$

Disperzija jedinice težine iz izravnanja $\hat{\sigma}_o^2 = (v^T K_l^{-1} v) / r$ je nepristrasna ocena od σ_o^2, gde je r broj linearno nezavisnih matematičkih uslova .

3.3. Ocene parametara

Ako se jedna geodetska mreža izravna po metodi uslovnih i posrednih merenja, dobro je poznato da se dobijaju identične ocene za pojedine vektore kao i za standardnu devijaciju $\hat{\sigma}_o$. U slučaju uslovnog izravnanja ove ocene proističu iz jasno definisanih nezavisnih matematičkih uslova koji povezuju merene fizičke veličine nezavisno od koordinatnog sistema. Kod posrednog izravnanja merene fizičke veličine, dovode se u funkcionalnu vevezu sa koordinatnim sistemom, a iz ovog modela izravnanja određuju se ocene za vektor parametara $\hat{x}$, koji se odnosi na koordinate tačaka u mreži. Ocene mogu biti ili nepristrasne ili pristrasne što zavisi od funkcionalnog modela mreže. Ako je $\hat{x}$ ocena parametra x onda važi:

1. ocena $\hat{x}$ je nepristrasna ocena parametra x ako je matematičko očekivanje $E(\hat{x}) = x$,
2. ocena $\hat{x}$ je linearna nepristrasna ocena parametra x ako je $E(\hat{x}) = x$ i linearna ocena $\hat{x} = L\,l$ gde je L linearni operator.

Kada je matrica dizajna geodetske mreže A_{nu} potpunog ranga kolona $r(A)=u$ i iz uslova izravnanja važi $n > u$, ocena za parametar x je nepristrasna. Ocena dobijena u vektoru (3.1.3) za nezavisna opažanja i iste tačnosti je

$$Q_l^{-1} = I$$

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T l \qquad \ldots(3.3.1)$$

a njeno matematičko očekivanje

$$E(\hat{x}) = (A^T A)^{-1} A^T E(l) \qquad \ldots(3.3.2)$$

Kako je $E(l) = A\,x$ onda (3.3.2) ima oblik

$$E(\hat{x}) = (A^T A)^{-1} A^T A\,x$$

odnosno $E(\hat{x}) = x$

je nepristrasna ocena. Ova ocena je i linearno nepristrasna jer iz (3.3.1) sledi

$$\hat{x} = L\,l \qquad \text{gde je} \qquad L = (A^T A)^{-1} A^T$$

Na osnovu ovih razmatranja proističe, da za neslobodne mreže u kojima je definisan datum, i za koje matica dizajna A uvek ima potpun rang kolona, ocene parametra $\hat{x}$ su linearno nepristrasne.

Kada je matrica dizajna A_{nu} nepotpunog ranga kolona, $r(A) < u$ i $r(A^TA) < u$ ocena

$$\hat{x} = (A^T A)^+ A^T l = N^+ A^T l \qquad ...(3.3.3)$$

je linearno pristrasna. Matematičko očekivanje vektora (3.3.3) je

$$E(\hat{x}) = N^+ A^T E(l)$$

ili

$$E(\hat{x}) = N^+ A^T A \; x = N^+ N \; x \qquad ...(3.3.4)$$

Kako za pseudoinverziju važi $N^+ N \not\equiv I$ to je

$$E(\hat{x}) \neq x \qquad ...(3.3.5)$$

odnosno $\hat{x}$ je linearno pristrasna ocena, sa pristrasnošću

$$E(\hat{x} - x) = E(\hat{x}) - E(x) = E(\hat{x}) - x = N^+ N x - x =$$

$$= (N^+ N - I) x = C x = \Delta x \qquad ...(3.3.6)$$

gde je $C = (N^+ N - I)$.

Na osnovu ovih izraza sledi da za slobodnu geodetsku mrežu za koju nije definisan datum, i za koju matrica dizajna A ima nepotpun rang kolona, ocena parametra $\hat{x}$ je linearno pristrasna. Za ocenu parametra $\hat{x}$ neslobodne mreže (3.3.1) dobija se kovarijaciona matrica $K_{\hat{x}}$ sa najmanjim disperzijama nepoznatih parametara pa se ova ocena naziva najbolja linearna nepristrasna ocena. Takođe za ocenu parametra $\hat{x}$ slobodne mreže (3.3.3) dobija se jedinstvena kovarijaciona matrica $K_{\hat{x}}$ sa najmanjom disperzijom, pa ocenu nazivamo najbolja linearna pristrasna ocena. Kako se ocena $\hat{x}$ za slobodne mreže dobija pomoću pseudoinverzije sa minimalnom normom

$$||x|| = (x^T x)^{1/2} = \min$$

to je i pristrasnost $\Delta x^T \Delta x = \min$.

$x = \{ x_1, x_2, \ldots x_u \}$ skup nepoznatih parametara
(čvorovi grafa),

$l = \{ l_1, l_2, \ldots l_n \}$ skup merenih veličina
(orijentisane grane grafa).

Matrica incidencije ili matrica susedstva A za orijentisan graf 1-D mreže, ima koeficijente

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 \text{ , ako } l_i \text{ izlazi iz } x_j \\ 0 \text{ , ako } x_j \text{ i } l_i \text{ nisu susedni elementi} \\ 1 \text{ , ako } l_i \text{ ulazi u } x_j \end{cases}$$

$$i = 1,2,3, \ \ldots n \ , \ j = 1,2,3, \ \ldots u$$

Matrica susedstva identična je matrici dizajna A. Očigledno je da koeficijenti matrice A ni u kom slučaju ne zavise od datuma 1-D mreže već isključivo od $\boxed{\text{zavisnosti}}$ nepoznatih parametara x_j $\boxed{\text{od}}$ opažanih veličina l_i.

Neka je 1-D mreža izravnata po metodi najmanjih kvadrata i neka su dobijene izravnate vrednosti opažanja $\hat{l}_i$ kao i kovarijaciona matrica $K_{\hat{l}}$. Ova kovarijaciona matrica izravnatih veličina invarijantna je u odnosu na datum mreže.

Sada se nameće pitanje, kako izravnate vrednosti opažanih veličina $\hat{l}_i$ utiču svojom tačnošću $\sigma_{\hat{l}}$ na čvorove grafa odnosno, nepoznate parametre x_i? Da bi se odgovorilo na ovo pitanje, napišemo funkcije veze između vrednosti izravnatih veličina i parametara *(Sl.3.4.2)* u obliku

$$\hat{l}_1 = x_2 - x_1$$

$$\hat{l}_2 = x_3 - x_1$$

....

$$\hat{l}_n = x_u - x_{u-1}$$

ili u matričnom obliku

$$\hat{l} = A\, x \qquad \ldots(3.4.1)$$

sa kovarijacionom matricom

$$K_{\hat{l}} = A\, K_x\, A^T \qquad \ldots(3.4.2)$$

Iz ove matrične jednačine neophodno je odrediti matricu K_x. Pravougla mamatrica A je nepotpunog ranga kolona a njena transpozicija je nepotpunog ranga vrsta, pa za njih ne postoji leva i desna inverzija. Jednačinu (3.4.2) pomnožimo sa desne strane matricom A a sa leve A^T

$$A^T K_{\hat{l}}\, A = A^T A\, K_x\, A^T A \qquad \ldots(3.4.3)$$

gde je $r(A^TA)<u$ i $det(A^TA)=0$. Matričnu jednačinu (3.4.3.) rešimo pod uslovom minimalne norme i minimalne sume kvadrata koristeći pseudoinverziju (2.3.12) pa sledi rešenje oblika

$$\boxed{K_x = (\,A^T A\,)^+ A^T K_{\hat{l}}\, A\,(\,A^T A\,)^+} \qquad \ldots(3.4.4)$$

Na osnovu ovog rešenja jasno se vidi distribucija odnosno, uticaj tačnosti izravnatih veličina na tražene parametre ili koordinate tačaka u mreži. Prema tome, tačnost koordinata x zavisiće od tačnosti izravnatih veličina $K_{\hat{l}}$ i od međusobne povezanosti tačaka merenim veličinama koju definiše matrica dizajna A. Kako je napred istaknuto, da su matrice $K_{\hat{l}}$ i A invarijantne u odnosu na datum mreže onda, prema (3.4.4) sledi i invarijantni uticaj tačnosti izravnatih veličina na tačnost traženih parametara. To znači da ukupni uticaj svih izravnatih veličina u mreži na pojedine tačke mreže ni u kom slučaju ne zavisi od datuma mreže a samim tim ni od težišta mreže. Nepobitan dokaz za ove tvrdnje je dat izrazom (3.4.4).

Na osnovu ovih razmatranja sledi da srednja položajna greška *M* ne zavisi od datuma mreže a naravno ni od njenog težišta u slučaju izravnanja sa nepotpunim rangom matrice A. Matrična jednačina ima opšti karakter i napred navedene tvrdnje važe i za slučajeve višedimenzionalnih mreža. Ovde je 1-D mreža poslužila samo radi očiglednosti i jednostavnosti prikazivanja. Pre razmatranja 2 - D mreža svakako je interesantnije dati odgovor

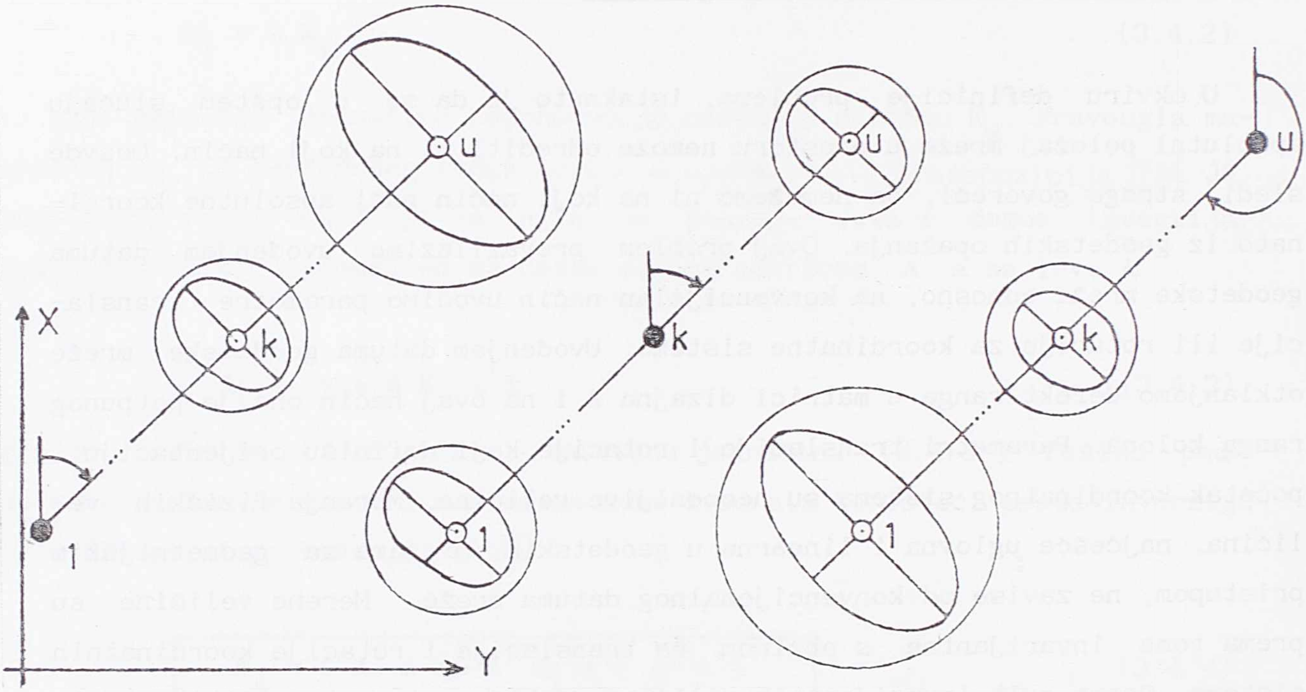
3.4. Problem datuma i invarijantne veličine

U okviru definicije problema, istaknuto je da se u opštem slučaju apsolutni položaj mreže u prostoru ne može odrediti ni na koji način. Odavde sledi, strogo govoreći, da ne možemo ni na koji način naći apsolutne koordinate iz geodetskih opažanja. Ovaj problem prevazilazimo uvođenjem datuma geodetske mreže odnosno, na konvencionalan način uvodimo parametre translacije ili rotacije za koordinatne sisteme. Uvođenjem datuma geodetske mreže otklanjamo defekt ranga u matrici dizajna A i na ovaj način ona je potpunog ranga kolona. Parametri translacije i rotacije koji definišu orijentaciju i početak koordinatnog sistema su neocenljive veličine. Merenja fizičkih veličina, najčešće uglovna i linearna u geodetskim mrežama sa geometrijskim pristupom, ne zavise od konvencionalnog datuma mreže. Merene veličine su prema tome invarijantne s obzirom na translacije i rotacije koordinatnih sistema. Ocene ovih invarijantnih veličina, dobijene iz matematičkih modela izravnanja geodetskih mreža su uvek najbolje linearno nepristrasne ocene.

U analizi geodetskih mreža najčešće se koriste informacije koje daje kovarijaciona matrica $K_{\hat{x}}$. Kao što je poznato, u slučaju izravnanja mreža za koje je definisan datum, standardne devijacije traženih koordinata $\sigma_{\hat{x}}$, polupréčnici elipsi grešaka *a* i *b* kao i uglovi orijentacija Θ, srednje položajne greške *M*, sopstvene vrednosti λ matrice $K_{\hat{x}}$, su veličine koje zavise od datumske određenosti mreže. Ova zavisnost geometrijski je pokazana na slici 3.4.1.

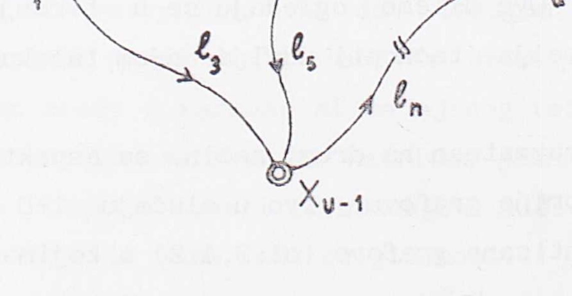
U slučaju izravnanja sa nepotpunim rangom matrice A, kada se koordinate svih tačaka posmatraju kao nepoznati parametri, slični su zaključci, mada postoje određene dileme. Ove dileme ogledaju se u tvrdnjama, da se povećavaju vrednosti pokazatelja tačnosti udaljavanjem tačaka od težišta mreže.

Ovaj problem biće sada razmatran na drugi način, sa aspekta matematičkih metoda modeliranja i teorije grafova, prvo u slučaju 1-D mreža. Sve 1-D mreže predstavljaju orijentisane grafove (sl.3.4.2) u kojima su:



a) Datum u tački 1. b) Datum u tački k. c) Datum u tački u.

Sl.3.4.1.Zavisnost veličina od datuma mreže.



Sl.3.4.2. Orijentisan graf 1-D mreže .

na pitanje: kakva je razlika između matrice K_x dobijene u (3.4.4) i matrice $K_{\hat{x}}$ dobijene iz posrednog izravnanja, koja predstavlja kovarijacionu matricu ocena koordinata. Radi pojednostavljivanja posmatraćemo matrice kofaktora Q_x i $Q_{\hat{x}}$ koje ne menjaju suštinu zaključivanja. Matricu kofaktora $Q_{\hat{1}}$ dobijenu iz posrednog izravnanja sa nepotpunim rangom matrice A uvrstimo u (3.4.4) pa sledi

$$Q_x = (A^T A)^+ A^T A \, Q_{\hat{x}} \, A^T A \, (A^T A)^+ \qquad \ldots(3.4.5)$$

gde je

$$Q_{\hat{x}} = N^+ \quad \text{i} \quad N = A^T A \qquad \ldots(3.4.6)$$

Imajući u vidu jednakosti (3.4.6), jednačinu (3.4.5) pišemo

$$Q_x = N^+ N N^+ N N^+$$

odnosno, na osnovu svojstva pseudo inverzije (2.3.7.a) dobijamo

$$Q_x = N^+ N N^+$$

ili prema svojstvu (2.3.7.b)

$$Q_x = N^+ \qquad \ldots(3.4.7)$$

Jednakosti (3.4.6) i (3.4.7) daju sledeću jednakost

$$\boxed{Q_x = Q_{\hat{x}}} \qquad \ldots(3.4.8)$$

koja predstavlja dokaz da je matrica K_x dobijena prema (3.4.4) ekvivalentna matrici $K_{\hat{x}}$ datoj u modelu posrednog izravnanja sa nepotpunim rangom matrice A. Prema ovome zaključci napred doneseni za matricu K_x važe i za matricu $K_{\hat{x}}$.

Kada je definisan datum mreže, matrica A je potpunog ranga kolona ali tada njen dizajn zavisi od izbora datuma. U ovom slučaju rešenje za (3.4.2) nalazimo pomoću leve i desne inverzije pravougle matrice

$$K_x = A_L^- K_{\hat{l}} (A^T)_D^-$$

ili prema (2.1.3) i (2.1.5) dobijamo

$$K_x = (A^T A)^{-1} A^T K_{\hat{l}} A (A^T A)^{-1} \qquad \text{...(3.4.9)}$$

Matrica $K_{\hat{l}}$ je invarijantna u odnosu na datum ali kako je matrica A zavisna od datuma to je i matrica K_x zavisna od njega. Ako matricu kofaktora izravnatih veličina $Q_{\hat{l}}$ dobijenu iz posrednog izravnanja unesemo u (3.4.9) onda sledi

$$Q_x = (A^T A)^{-1} A^T A Q_{\hat{x}} A^T A (A^T A)^{-1} = Q_{\hat{x}}$$

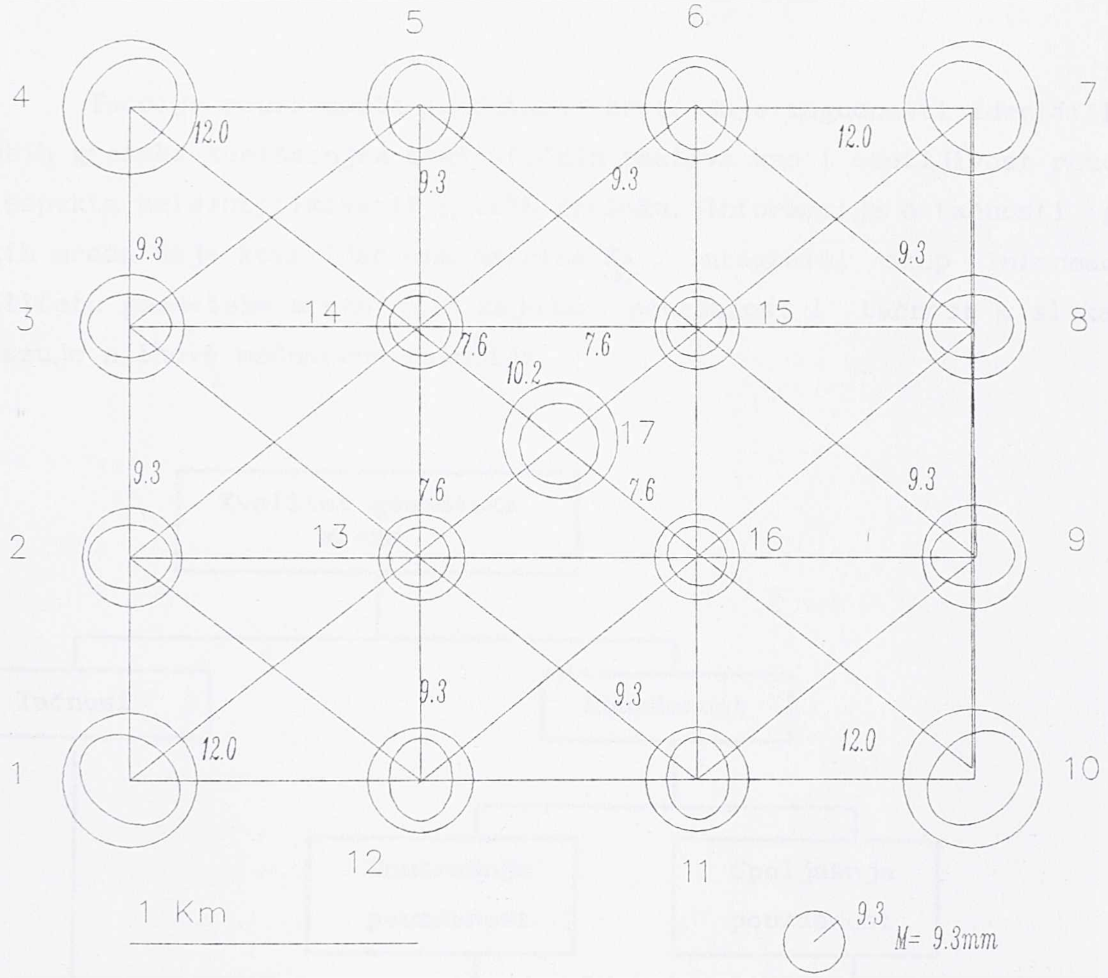
pa prema tome i zavisnost matrice $Q_{\hat{x}}$ od datuma mreže odnosno, srednjih položajnih grešaka *M*.

Prethodna teorijska razmatranja, sada će biti ilustrovana na primeru 2-D mreže *(Sl.3.4.3)* u kojoj su merene dužine sa istom tačnošću ali je mreža tako projektovana da su pojedine grupe tačaka određene sa različitim brojem dužina. Mreža je izravnata kao slobodna sa nepotpunim rangom matrice A a informacije dobijene na osnovu matrice $K_{\hat{x}}$ date su na istoj slici.

Na osnovu navedenih ilustracija očigledno je da položajne greške M_i ne zavise od težišta mreže već od povezanosti tačaka opažanim veličinama i naravno od njihove tačnosti. Na slici 3.4.3. uočava se, da su tačke 13, 14, 15 i 16 određene sa najvećim brojem dužina (ukupno 8) pa iz tog razloga imaju najmanje srednje položajne greške $M_i = 7.6$.

Sledeći skup čine tačke 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11 i 12 koje su određene sa po pet dužina i imaju manju položajnu tačnost $M_i = 9.3$. Tačka 17 određena je na osnovu četiri dužine sa $M_i = 10.2$. Na kraju tačke 1, 4, 7 i 10 određene su sa najmanjim brojem dužina (samo tri) imaju i najveće srednje položajne greške ili najmanju položajnu tačnost.

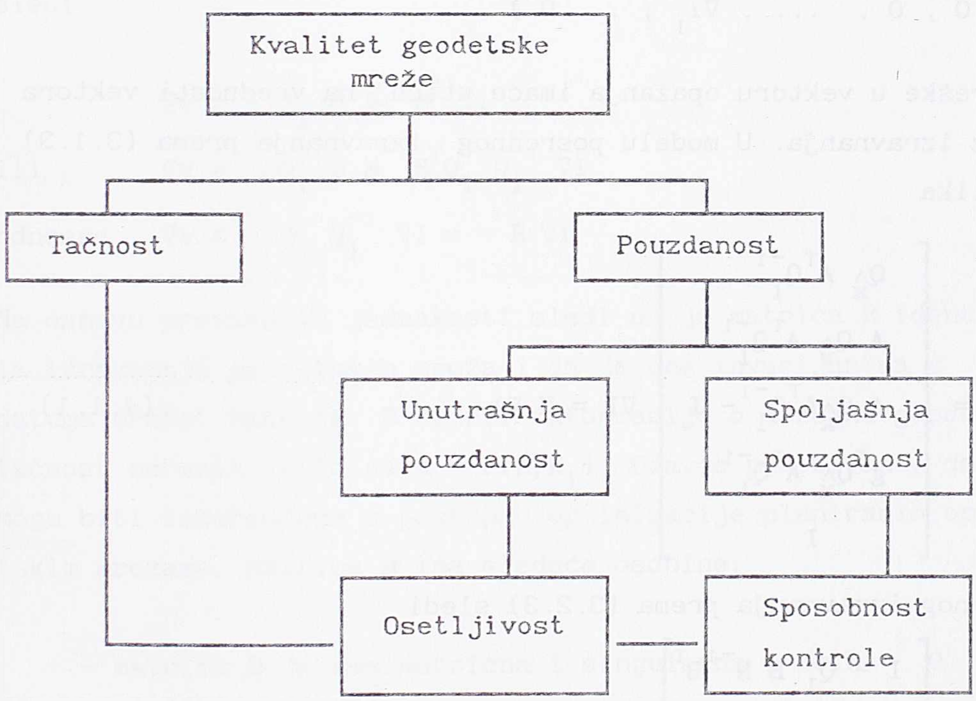
Naglasimo još samo to da su rezultati ovde prezentovani u potpunoj saglasnosti sa prethodnim teorijskim razmatranjima. Ove invarijantne veličine neophodne su za definisanje kriterijuma tačnosti geodetskih mreža u cilju njihove optimizacije.



Sl.3.4.3. Položajna tačnost u 2-D mreži.

4. POUZDANOST GEODETSKIH MREŽA

Teorija pouzdanosti geodetskih mreža daje mogućnosti identifikacije grubih grešaka korišćenjem statističkih testova kao i osetljivost rezultata sa aspekta neidentifikovanih grubih grešaka. Informacije o tačnosti geodetskih mreža daje kovarijaciona matrica $K_{\hat{x}}$. Integralni skup informacija o kvalitetu geodetske mreže daju zajedno pouzdanost i tačnost a slika 4.1. pokazuje njihove međusobne relacije.



Sl.4.1. Kvalitet geodetske mreže.

Koncept unutrašnje i spoljašnje pouzdanosti geodetske mreže definisao je *Baarda, W. (1967. i 1968.)* a teorijska i praktična razmatranja obogaćena su radovima *Kok,J. (1982.,1983. i 1984.), De Heus, H. (1982.), Pelzer, H. (1977. i 1985.), Forstner, W. (1985.), Van Mierlo, J. (1987. i 1990.), Caspary, W. (1987.), Niemeier, W. (1989.)* i drugi. U ovom radu dalje će biti razmatrani matematički modeli neophodni u cilju optimizacije geodetskih mreža sa aspekta pouzdanosti odnosno, sa aspekta mogućih grešaka u rezultatima planiranih opažanja.

4.1. Uticaj grubih grešaka na vektor ocena

Ako opažana vrednost l_i sadrži grubu grešku ∇l_i onda njenu pojavu u vektoru opažanja l označavamo sa

$$\nabla l^T = (0 , 0 , \dots , \nabla l_i , \dots 0)$$

Prisustvo grube greške u vektoru opažanja imaće uticaj na vrednosti vektora ocena dobijenog iz izravnanja. U modelu posrednog izravnanja prema (3.1.3) ovaj uticaj je oblika

$$\nabla h = \begin{bmatrix} \nabla\hat{x} \\ \nabla\hat{l} \\ \nabla v \\ \nabla\hat{f} \\ \nabla l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{x}} A^T Q_l^{-1} \\ A Q_{\hat{x}} A^T Q_l^{-1} \\ A Q_{\hat{x}} A^T Q_l^{-1} - I \\ g^T Q_{\hat{x}} A^T Q_l^{-1} \\ I \end{bmatrix} \nabla l = H \nabla l \qquad \dots(4.1.1)$$

ili u modelu uslovnog izravnanja prema (3.2.3) sledi

$$\nabla h = \begin{bmatrix} \nabla\hat{l} \\ \nabla v \\ \nabla k \\ \nabla l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - Q_l B N^{-1} B^T \\ - Q_l B N^{-1} B^T \\ - N^{-1} B^T \\ I \end{bmatrix} \nabla l = H \nabla l \qquad \dots(4.1.2)$$

4.2. Uticaj grubih grešaka na popravke

Uticaj grubih grešaka na popravke dobijamo iz (4.1.1) u obliku

$$\nabla v = (A\, Q_{\hat{x}}\, A^T Q_l^{-1} - I)\nabla l = -Q_v Q_l^{-1} \nabla l \qquad \text{...(4.2.1)}$$

ili

$$\boxed{\nabla v = -\, R\, \nabla l} \qquad \text{...(4.2.2)}$$

gde je $\quad R = Q_v\, Q_l^{-1} = K_v\, K_l^{-1}$ ...(4.2.3)

Jednačina (4.2.1) važi i u slučaju posmatranja uticaja slučajnih grešaka merenja ε na popravke v. Iz modela uslovnog izravnanja, prema (4.1.2) sledi

$$\nabla v = -\, Q_l\, B\, N^{-1} B^T\, \nabla l$$

ili $\quad \nabla v = -\, Q_l\, B\, N^{-1} B^T Q_l\, Q_l^{-1}\, \nabla l$

odnosno $\quad \nabla v = -\, Q_v\, Q_l^{-1}\, \nabla l = -\, R\, \nabla l$

Na osnovu prethodnih jednakosti sledi da je matrica R identična u oba modela izravnanja geodetskih mreža i da je ona invarijantna u odnosu na izbor datuma mreže. Matrica R sadrži informacije o dizajnu geodetske mreže kao i tačnost merenih veličina $R = F(A, K_l)$. Odavde proizilazi, da ove informacije mogu biti iskorišćene u postupku optimizacije planiranih opažanja u geodetskim mrežama. Matrica R ima sledeće osobine:

- matrica R je nesimetrična i singularna , $\det R = 0$
  (simetrična samo za $Q_l = I$)
- rang matrice R prema Silvesterovoj teoremi je
  $r(R)=r(Q_v Q_l^{-1}) \Rightarrow r(Q_v) - [n - r(Q_l^{-1})] \le r(R) \le r(Q_v) \Rightarrow$
  $n-u- [n-n] \le r(R) \le n-u \Rightarrow r(R) = n-u = r$
  pa je R nepotpunog ranga
- matrica je idempotentna $R = R\, R = R^2$
- trag matrice je $tr(R) = \Sigma r_{ii} = n-u=r \Rightarrow r(R)=tr(R) = r$

- za dijagonalne elemente matrice R važi $0 \leq r_{ii} \leq 1$ koji predstavljaju elementarne brojeve suvišnih merenja. Uticaj pojedine grube greške ∇l_i na korespodentnu popravku v_i određujemo posredstvom elementarnih brojeva suvišnih merenja r_i

$$\boxed{\nabla v_i = - r_i \nabla l_i} \qquad \ldots(4.2.4)$$

gde je $\quad r_i = (Q_v Q_l^{-1})_{ii}$

Kako su vrednosti r_i u granicama 0 i 1 onda se samo mali deo greške prenosi na popravke. Grube greške bi će pouzdanije otkrivene ako $r_i \rightarrow max$ odnosno $r_i \rightarrow 1$. Odavde sledi zaključak da u optimizaciji opažanja u geodetskim mrežama sa aspekta unutrašnje pouzdanosti neophodno je uključiti i numeričke pokazatelje r_i sa ciljem $r_i \rightarrow max$.

Iz jednačine (4.2.4) sledi ocena vrednosti greške ∇l u obliku

$$\boxed{\hat{\nabla} l_i = - v_i / r_i} \qquad \ldots(4.2.5)$$

a njena standardna devijacija

$$\sigma_{\hat{\nabla} l_i} = \sigma_{v_i} / r_i \qquad \ldots(4.2.6)$$

Kako je

$$\sigma_{v_i} = \sigma_o \sqrt{Q_{v_i v_i}} = \sigma_{l_i} \sqrt{r_i} \qquad \ldots(4.2.7)$$

onda (4.2.6) pišemo u obliku

$$\sigma_{\hat{\nabla} l_i} = \sigma_{v_i} / r_i = \sigma_{l_i} / \sqrt{r_i} \qquad \ldots(4.2.8)$$

Ocene grubih grešaka $\hat{\nabla} l$ u pojedinim opažanjima možemo dobiti i sa aspekta linearnih statističkih hipoteza. Hipoteze su

$$H_o \; : \; E(l/H_o) = A\,x \qquad \ldots(4.2.9)$$

$$H_a \; : \; E(l/H_a) = A\,x + C\,\nabla l \qquad \ldots(4.2.10)$$

gde je

$$C^T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & i & & k & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a opažanja l_i i l_k sadrže grube greške. Alternativnoj hipotezi adekvatan je funkcionalni model posrednog izravnanja

$$v = A\,x + C\,\nabla l \; - l \qquad \dots(4.2.11)$$

ili

$$v = \begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \nabla l \end{bmatrix} - l \qquad \dots(4.2.12)$$

Primenom metode najmanjih kvadrata slede normalne jednačine

$$\begin{bmatrix} A^TP\,A & A^TP\,C \\ C^TP\,C & C^TP\,C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \nabla l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^TP\,l \\ C^TP\,l \end{bmatrix} \qquad \dots(4.2.13)$$

Iz ovog sistema jednačina dobijamo matričnu jednačinu

$$(C^TPC - C^TPAN^{-1}A^TPC)\,\hat{\nabla} l = C^TP\,(P^{-1} - AN^{-1}A^T)\,Pl$$

u kojoj je

$$Q_v = P^{-1} - AN^{-1}A^T$$

$$Q_{\hat{\nabla}l\hat{\nabla}l} = (C^TPC - C^TPAN^{-1}A^TPC)^{-1} = (C^TPQ_vPC)^{-1} \qquad \dots(4.2.14)$$

pa rešenje za $\hat{\nabla}l$ pišemo kraće

$$\hat{\nabla}l = Q_{\hat{\nabla}l\hat{\nabla}l}\,C^TPQ_vP\,l \qquad \dots(4.2.15)$$

Vektor popravaka v napišemo u obliku

$$v = A\,\hat{x} - l = (AQ_{\hat{x}}\,A^TP - I)\,l = -Q_vP\,l \qquad \dots(4.2.16)$$

i zamenom u (4.2.15) sledi

$$\hat{\nabla}l = -Q_{\hat{\nabla}l\hat{\nabla}l}\,C^TP\,v \qquad \dots(4.2.17)$$

Za jedno pogrešno opažanje ∇l_i pišemo

$$C^T = c_i^T = e_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a jednakost (4.2.17) ima oblik

$$\hat{\nabla}l_i = \frac{-\,e_i^T\,P\,v}{e_i^TPQ_vPe_i} \qquad \dots(4.2.18)$$

ili za stohastički nezavisna opažanja (P=Diag P)

$$\hat{\nabla} l_i = \frac{-p_i v_i}{p_i Q_{v_i} p_i} = \frac{-v_i}{Q_{v_i} p_i} = \frac{-v_i}{r_i}$$

što je identično izrazu (4.2.5).

4.3. Uticaj grubih grešaka na izravnate vrednosti opažanja

Uticaj grubih grešaka na izravnate vrednosti opažanja sledi iz (4.1.1) u obliku

$$\nabla\hat{l} = A\, Q_{\hat{x}}\, A^T Q_l^{-1} \nabla l = Q_{\hat{l}}\, Q_l^{-1}\, \nabla l \qquad \text{...(4.3.1)}$$

ili $$\boxed{\nabla\hat{l} = U\, \nabla l} \qquad \text{...(4.3.2)}$$

gde je $$U = Q_{\hat{l}}\, Q_l^{-1} = K_{\hat{l}}\, K_l^{-1} \qquad \text{...(4.3.3)}$$

Isti uticaj dobijamo iz (4.1.2)

$$\nabla\hat{l} = (\, I - Q_l\, B\, N^{-1} B^T)\, \nabla l$$

ili $$\nabla\hat{l} = (\, Q_l - Q_l\, B\, N^{-1} B^T Q_l)\, Q_l^{-1}\, \nabla l$$

odnosno $$\nabla\hat{l} = Q_{\hat{l}}\, Q_l^{-1}\, \nabla l = U\, \nabla l$$

pa sledi da je matrica U identična u oba modela izravnanja geodetskih mreža i da je invarijantna u odnosu na izbor datuma mreže. Na osnovu (4.2.1) i (4.3.3) dobijamo jednakost

$$\nabla v = (\, U - I\,)\, \nabla l = -R\, \nabla l$$

ili $$R + U = I \qquad \text{...(4.3.4)}$$

odnosno $$u_i + r_i = 1. \qquad \text{...(4.3.5)}$$

Osobine matrice U su :

- matrica U je nesimetrična i singularna , $\det U = 0$
- rang matrice U je $r(U) = u$
- matrica U je idempotentna $U = U\,U = U^2$
- trag matrice U je $tr(U)=\sum u_i = u \Rightarrow r(U)=tr(U)=u$

- za dijagonalne elemente matrice U važi $0 \leq u_{ii} \leq 1$ i oni vrše distribuciju grubih grešaka na izravnate vrednosti opažanja. Uticaj pojedine grube greške ∇l_i na korespodentnu izravnatu vrednost opažanja je

$$\nabla \hat{l}_i = u_i \, \nabla l_i$$

sa ocenom

$$\boxed{\hat{\nabla} \hat{l}_i = u_i \, \hat{\nabla} l_i} \qquad \ldots(4.3.6)$$

gde je:

$u_i = (Q_{\hat{l}} \, Q_l^{-1})_{ii}$ dijagonalni koeficijent matrice U,

$\hat{\nabla} l_i$ ocena grube greške u opažanju l_i određena prema (4.2.5).

Standardne devijacije izravnatih velična dobijamo prema

$$\sigma_{\hat{l}_i} = \sigma_o \sqrt{Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}} = \sigma_{l_i} \sqrt{u_i}$$

a standardne devijacije ocena grubih grešaka u izravnatim vrednostima opažanja (4.3.6) prema

$$\sigma_{\hat{\nabla} \hat{l}_i} = \sqrt{u_i} \; \sigma_{\hat{\nabla} l_i} \qquad (4.3.7)$$

ili zamenom (4.2.7) u (4.3.7) dobijamo

$$\sigma_{\hat{\nabla} \hat{l}_i} = \sigma_{l_i} \sqrt{u_i / r_i} \qquad \ldots(4.3.8)$$

4.4. Uticaj grubih grešaka na ocene parametara

Uticaj grubih grešaka na ocene parametara sledi iz (4.1.1)

$$\nabla\hat{x}_i = Q_{\hat{x}} A^T Q_l^{-1} \nabla l_i$$

odnosno, kako su određene ocene $\hat{\nabla} l_i$ za ∇l_i u (4.2.5) prethodnu jednakost pišemo

$$\boxed{\hat{\nabla}\hat{x}_i = Q_{\hat{x}} A^T Q_l^{-1} \hat{\nabla} l_i} \qquad \text{...(4.4.1)}$$

Ove ocene zavise od izbora datuma mreže pa određujemo invarijantne ocene posredstvom norme kvadratne forme

$$\| \hat{\nabla}\hat{x}_i \|^2 = (\hat{\nabla}\hat{x}_i^T Q_{\hat{x}}^{-1} \hat{\nabla}\hat{x}_i) \qquad \text{...(4.4.2)}$$

Zamenom (4.4.1) u (4.4.2) sledi

$$\| \hat{\nabla}\hat{x}_i \|^2 = \hat{\nabla} l_i^T (Q_l^{-1} Q_{\hat{l}} Q_l) \hat{\nabla} l_i$$

ili imajući u vidu (4.3.3)

$$\| \hat{\nabla}\hat{x}_i \|^2 = \hat{\nabla} l_i^T (Q_l^{-1} U) \hat{\nabla} l_i \qquad \text{...(4.4.3)}$$

Za stohastički nezavisna merenja pišemo

$$\bar{\delta}_i = \| \hat{\nabla}\hat{x}_i \| = \sqrt{p_i u_i}\; \hat{\nabla} l_i \qquad \text{...(4.4.4)}$$

ili prema (4.2.5) i (4.4.4) sledi

$$\bar{\delta}_i = - \frac{\sqrt{p_i u_i}}{r_i} v_i = - \frac{\sqrt{p_i (1-r_i)}}{r_i} v_i \qquad \text{...(4.4.5)}$$

U slučaju opažanja iste tačnosti dobijamo jednostavan izraz

$$\bar{\delta}_i = - \frac{\sqrt{1-r_i}}{r_i} v_i \qquad \text{...(4.4.6)}$$

koji je u funkciji r_i i v_i.
Uticaj grubih grešaka opažanja na linearnu funkciju

$$\hat{f} = g^T \hat{x}$$

sledi iz (4.1.1)

Prvi integral u ovoj jednačini je verovatnoća na levoj strani normalne necentralne distribucije koja se odnosi na hipotezu H_a. Za velike vrednosti β vrednost prvog integral je praktično zanemarljiva ($I_1 \approx 0$) u odnosu na β. Drugi integral razvijemo u obliku

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(\delta-k)}^{+\infty} e^{-1/2\, x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(\delta-k)}^{0} e^{-1/2\, x^2} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-1/2\, x^2} dx$$

ili

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(\delta-k)}^{0} e^{-1/2\, x^2} dx + 0.5 \qquad \ldots(4.5.14)$$

Jednačinu (4.5.13) možemo pisati i kraće

$$\beta = [\, 1 - \Phi(\delta+k)] + \Phi(\delta-k) = I_1 + I_2 \qquad \ldots(4.5.15)$$

gde je za veliku vrednost β vrednost $I_1 \approx 0$ a moć testa

$$\beta = \Phi(\delta-k) \qquad \ldots(4.5.16)$$

Zahtevi da greška prve vrste bude minimalna a moć testa maksimalna, su u suprotnosti pa je neophodno nalaženje optimalnog rešenja. Pri rešavanju ovog problema neophodno je imati u vidu i problem necentralnog parametra δ.

Naime, kako u opštem slučaju neznamo unapred uticaj grubih grešaka onda proizilazi da nemožemo unapred birati konstantnu vrednost za necentralni parametar δ a samim tim i primenjivati (4.5.15) ili (4.5.16) u cilju određivanja moći testa β. Parametar necentralnosti treba odrediti na osnovu usvojene optimalne verovatnoće greške prve vrste α_o i usvojene optimalne moći testa β_o tako da je $\delta_o = f(\alpha_o, \beta_o)$. Rešenje dobijamo direktno iz jednačine (4.5.16) u obliku

$$\delta_o = k + \Phi^{-1}(\beta_o) \qquad \ldots(4.5.17)$$

ili zamenom (4.5.10) u (4.5.17) sledi

$$\delta_o = \Phi^{-1}(1-\alpha_o/2) + \Phi^{-1}(\beta_o) \qquad \ldots(4.5.18)$$

U tabeli 4.5.2 određene su vrednosti necentralnog parametra δ_o prema (4.5.18) za različite verovatnoće α_o i β_o.

Tabela 4.5.2.

β_o \ α_o, k	0.01% 3.72	0.1% 3.29	1% 2.58	5% 1.96
50%	3.72	3.29	2.58	1.96
70%	4.41	3.82	3.10	2.48
80%	4.73	4.13	3.42	2.80
90%	5.17	4.57	3.86	3.24
95%	5.54	4.94	4.22	3.61
99%	6.22	5.62	4.90	4.29

Vrednosti necentralnog parametra $\delta_o = f(\alpha_o, \beta_o)$

Testiranje jednodimenzionalnih statističkih hipoteza dato je u vidu grafičkog algoritma (*Sl.4.5.2*), u literaturi poznat kao " data snooping " ili *Baardin metod* testiranja *(De Heus,H. 1982.)* ili *(Kok,J.J. 1984.)*. Za testiranje standardne devijacije jedinice težine $\hat{\sigma}_o$ uzima se globalna r dimenzionalna test statistika

$$T= \frac{v^T P\, v}{r\,\sigma_o^2} = \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \sim F_{1-\alpha, r, oo} \quad (=\frac{\chi_r^2}{r}) \qquad ...(4.5.19)$$

gde se za $T \le F_{1-\alpha, r, oo}$ prihvata nulta hipoteza H_o. Za jednodimenzionalni " data snooping " test

$$|w_i|^2 = \left[\frac{v_i}{\sigma_o \sqrt{Q_{v_i}}} \right]^2 \sim F_{1-\alpha, 1, oo} \qquad ...(4.5.20)$$

$$\boxed{\hat{\nabla}\hat{f}_i = g^T K_{\hat{x}} A^T K_l^{-1} \hat{\nabla} l_i} \qquad \ldots(4.4.7)$$

ili za stohastički nezavisna opažanja

$$\hat{\nabla}\hat{f}_i = g^T K_{\hat{x}} a_i^T \hat{\nabla} l_i \,/\, \sigma^2_{l_i} \qquad \ldots(4.4.8)$$

gde je a_i^T i-ti red matrice **A**.

Prema Schwarz-ovoj nejednakosti

$$u^T V w \le (u^T V u)^{1/2} (w^T V w)^{1/2}$$

jednačinu (4.4.8) pišemo u obliku

$$\hat{\nabla}\hat{f}_i \le (g^T K_{\hat{x}} g)^{1/2} (a_i K_{\hat{x}} a_i^T)^{1/2} \frac{\hat{\nabla} l_i}{\sigma^2_{l_i}}$$

gde je

$$(g^T K_{\hat{x}} g)^{1/2} = \sigma_f$$

$$(a_i K_{\hat{x}} a_i^T)^{1/2} = \sigma_{\hat{l}_i} = \sigma_{l_i} \sqrt{u_i}$$

pa sledi

$$\hat{\nabla}\hat{f}_i \le \sigma_f \sqrt{u_i} \;\frac{\hat{\nabla} l_i}{\sigma_{l_i}} \qquad \ldots(4.4.9)$$

Imajući u vidu (4.3.9) i (4.4.9) dobijamo

$$\boxed{\hat{\nabla}\hat{f}_i \le \bar{\delta}_i \, \sigma_f} \qquad \ldots(4.4.10)$$

Ovaj izraz daje uticaj grešaka $\hat{\nabla} l_i$ u opažanjima na linearnu funkciju $\hat{f}$ i predstavlja empirijsku osetljivost funkcije.

4.5. Statističko testiranje hipoteza

U postupku identifikacije grubih grešaka u opažanjima, statistički testovi daju kriterijume za donošenje odluke o prihvatanju ili odbacivanju hipoteza

$$H_o : \nabla l_i = 0 \qquad \qquad \ldots(4.5.1)$$
$$H_a : \nabla l_i \neq 0$$

Kada su opažanja stohastički zavisna test statistika ima oblik (*Van Mierlo J. 1982.*)

$$w_i = \frac{-\,c_i^T\, K_l^{-1}\, v}{\sigma_o \sqrt{c_i^T\, K_l^{-1}\, K_v\, K_l^{-1}\, c_i}} \qquad \ldots(4.5.2)$$

ili za stohastički nezavisna

$$w_i = \frac{-\,v_i}{\sigma_o \sqrt{Q_{v_i v_i}}} = \frac{-\,v_i}{\sigma_{v_i}} \qquad \ldots(4.5.3)$$

odnosno

$$w_i = \frac{-\,v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{-\,v_i}{\sigma_{l_i}\sqrt{r_i}} \sim N\,(0,1) \qquad \ldots(4.5.4)$$

Ocena test statistike u nultoj hipotezi je

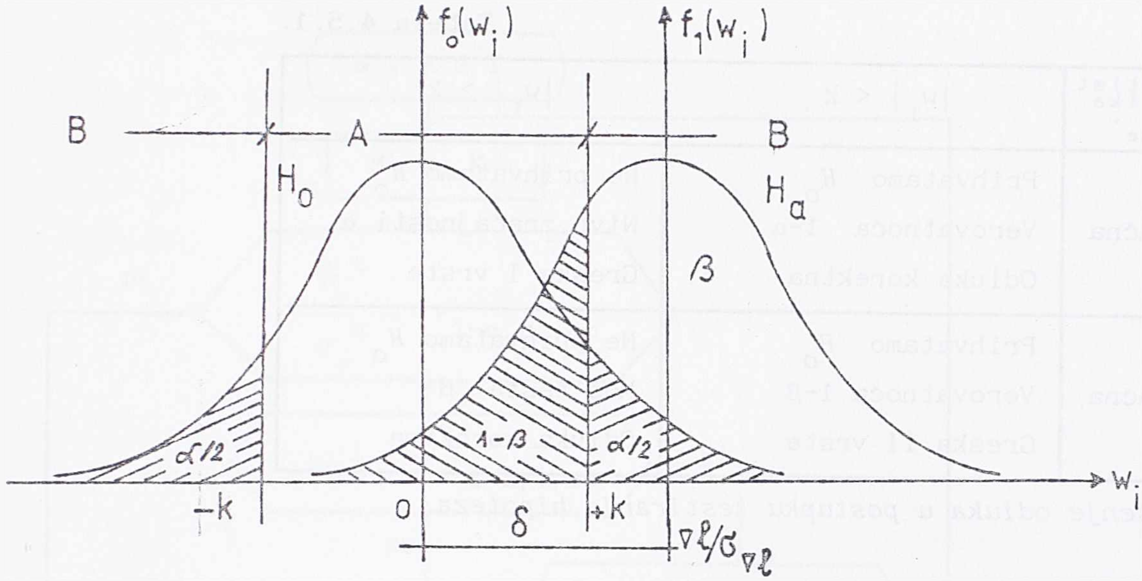
$$E\,\{\, w_i / H_o \,\} = 0 \qquad \ldots(4.5.5)$$

a u alternativnoj

$$E\,\{\, w_i / H_a \,\} = \nabla w_i = \delta_i \qquad \ldots(4.5.6)$$

odnosno $w_i \,/\, H_o \sim N(0,1)$

$w_i \,/\, H_a \sim N(\delta_i\,,1)$



Sl.4.5.1. Gustina funkcija test statistika w_i

gde je $N(\ \delta_i,\ 1\ )$ necentralna normalna distribucija a δ_i parametar necentralnosti. Parametar necentralnosti (4.5.6) možemo pisati prema (4.5.4) odnosno, prema (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7)

$$\delta_i = \nabla w_i = -\frac{\nabla v_i}{\sigma_{v_i}} = -\frac{\hat{\nabla} l_i}{\sigma_{\hat{\nabla} l_i}} = \frac{\hat{\nabla} l_i \sqrt{r_i}}{\sigma_{l_i}} \qquad \ldots(4.5.7)$$

a odavde proizilazi da slaba geometrija mreže ima mali uticaj na test statistiku pa samim tim otežava donošenje korektnih odluka između hipoteza H_o i H_a. Odluke o prihvatanju ili odbacivanju hipoteza donosimo na osnovu *tabele 4.5.1.*

Verovatnoća da test statistika w_i dobije vrednost između kritičnih vrednosti $-k$ i k, kada je H_o tačna, jednaka je

$$1 - \alpha = P\ (\ w_i \in A\ /\ H_o\ ) \qquad \ldots(4.5.8)$$

a njen komplement do 1 je nivo značajnosti α koji predstavlja verovatnoću pojave greške prve vrste

$$\alpha = P\ (\ w_i \in B\ /\ H_o\ ) = 2\ \{\ 1 - \phi(k)\ \} \qquad \ldots(4.5.9)$$

Tabela 4.5.1.

Statistika / Hipoteze	$\lvert w_i \rvert < k$	$\lvert w_i \rvert > k$
H_o tačna	Prihvatamo H_o Verovatnoća $1-\alpha$ Odluka korektna	Ne prihvatamo H_o Nivo značajnosti α Greška I vrste
H_a tačna	Prihvatamo H_o Verovatnoća $1-\beta$ Greška II vrste	Ne prihvatamo H_o Moć testa β Odluka korektna

Donošenje odluka u postupku testiranja hipoteza.

iz koje sledi kritična vrednost

$$k = \phi^{-1}(1-\alpha/2) \qquad \ldots(4.5.10)$$

Verovatnoća korektnog ne prihvatanja nulte hipoteze H_o odnosno, verovatnoća prihvatanja alternativne hipoteze H_a kada je ona tačna, jednaka je moći testa

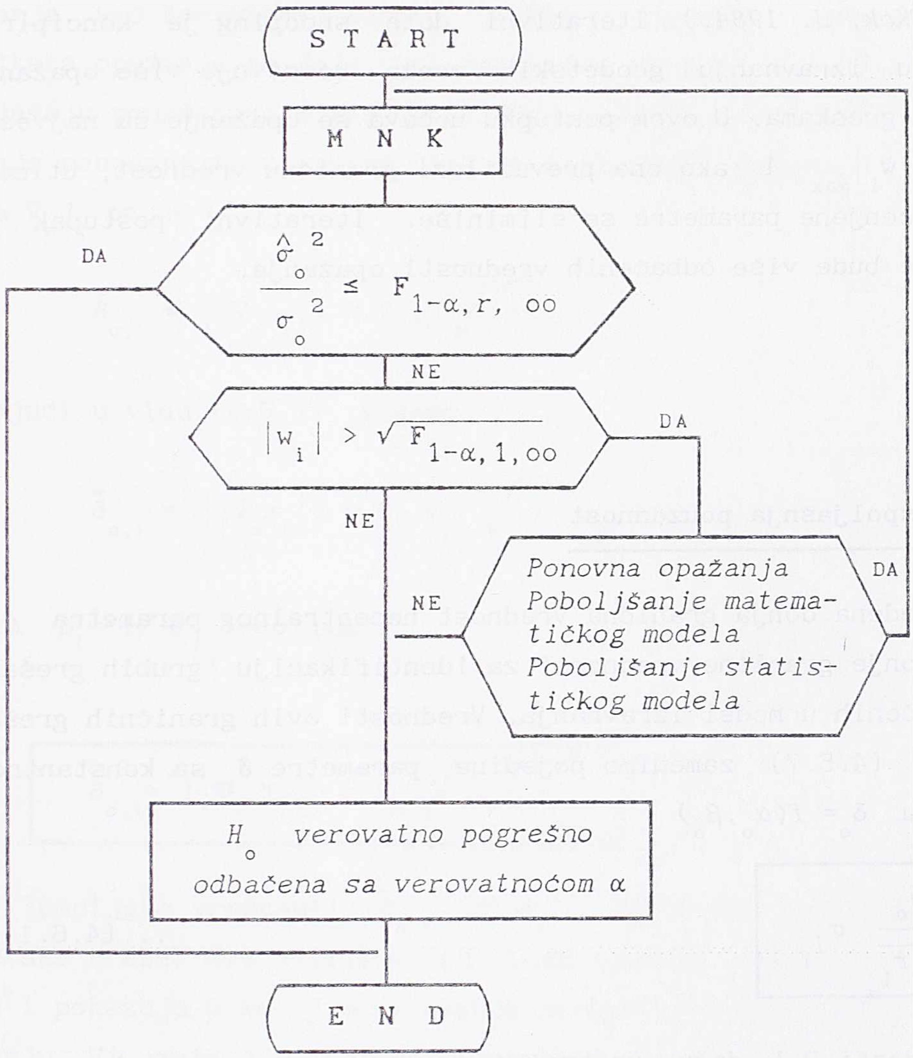
$$\beta = P\,(\,w_i \in B \,/\, H_a\,) \qquad \ldots(4.5.11)$$

a njen komplement do 1 je verovatnoća pojave greške druge vrste

$$1-\beta = P\,(\,w_i \in A \,/\, H_a\,) \qquad \ldots(4.5.12)$$

Prilikom testiranja hipoteza, za grešku prve vrste α usvajaju se obično verovatnoće $\alpha = 0.05,\ 0.01, \ldots\ 0.001$ a prema (4.5.10) određujemo kritičnu vrednost k. Ako je pritom poznata vrednost parametra necentralnosti δ_i onda određujemo moć testa

$$P(w_i>k\,/H_a)=\beta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-(k+\delta)} e^{-1/2\,x^2}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-(\delta-k)}^{+\infty} e^{-1/2\,x^2}dx = I_1+I_2 \qquad \ldots(4.5.13)$$



Sl.4.5.2. Testiranje statističkih hipoteza, " Data snooping "

prihvata se nulta hipoteza H_o ako je

$$|w_i| \le \sqrt{F_{1-\alpha,1,\infty}} \qquad \dots(4.5.21)$$

Pored klasičnog "data snooping-a" razvijen je i iterativni "data snooping" koji se bazira na rekurzivnim formulama odnosno, ponavljanju standardnog data snooping-a *(Kok, J. 1984.)*. Iterativni data snooping je koncipiran za slučajeve kada u izravnanju geodetskih mreža učestvuje više opažanja opterećenih grubim greškama. U ovom postupku uočava se opažanje sa najvećom test statistikom $|w_i|_{max}$ i ako ona prevazilazi graničnu vrednost, uticaj ovog opažanja na ocenjene parametre se eliminiše. Iterativni postupak se ponavlja sve dok ne bude više odbačenih vrednosti opažanja.

4.6. Unutrašnja i spoljašnja pouzdanost

Kada je određena donja granična vrednost necentralnog parametra δ_o mogu se odrediti donje granične vrednosti za identifikaciju grubih grešaka u opažanjima uključenih u model izravnanja. Vrednosti ovih graničnih grešaka dobijamo kada u (4.5.7) zamenimo pojedine parametre δ_i sa konstantnom graničnom vrednošću $\delta_o = f(\alpha_o, \beta_o)$

$$\boxed{\nabla_o l_i = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}\,\sigma_{l_i}} \qquad \ldots(4.6.1)$$

Teorijske vrednosti $\nabla_o l_i$ daju unutrašnju pouzdanost geodetske mreže koju je definisao *Baarda*. Ove granične greške mogu se odrediti za sva opažanja u geodetskoj mreži kao mere sposobnosti mreže da identifikuje grube greške u pojedinim opažanjima. Obično se za sva opažanja u mreži uzima δ_o=const u cilju dobijanja homogene unutrašnje pouzdanosti mreže.

Imajući u vidu da teorijske vrednosti graničnih grešaka (4.6.1) ne zavise od rezultata opažanja već od dizajna mreže, stohastičkog modela opažanja i parametra necentralnosti δ_o proizilazi da unutrašnja pouzdanost geodetske mreže može biti određena pre realizacije opažanja. Ova mogućnost bi će iskorišćena kasnije u ovom radu u okviru optimizacije geodetskih mreža.

Najčešće finalni rezultati izravnanja geodetske mreže nisu izravnata opažanja, već koordinate tačaka. Dobra i homogena unutrašnja pouzdanost rezultata opažanja ne daje uvek adekvatnu pouzdanost koordinata odnosno, spoljašnju pouzdanost mreže. U cilju dobijanja teorijskih vrednosti spoljašnje pouzdanosti u izrazu (4.4.4) empirijsku vrednost $\hat{\nabla} l_i$ zamenimo teorijskom $\nabla_o l_i$ pa je

$$\bar{\delta}_{o,i} = ||\nabla_o x_i|| = \nabla_o l_i \sqrt{p_i\, u_i} \qquad \ldots(4.6.2)$$

i imajući u vidu (4.6.1) pišemo

$$\bar{\delta}_{o,i} = ||\nabla_o x_i|| = \delta_o\, \sigma_{l_i} \sqrt{p_i\, u_i\, /\, r_i}$$

ili za $p_i = 1/\,\sigma^2_{l_i}$ dobijamo

$$\boxed{\bar{\delta}_{o,i} = ||\nabla_o X_i|| = \delta_o \sqrt{u_i / r_i}} \qquad \ldots(4.6.3)$$

Teorijske vrednosti $\bar{\delta}_{o,i} = ||\nabla_o X_i||$ definišu spoljašnju pouzdanost geodetske mreže. Ove veličine su invarijantne u odnosu na datum geodetske mreže i pokazuju u kojoj meri moguća neidentifikovana gruba greška u opažaopažanju ∇l, može uticati na definitivne ocene nepoznatih parametara **x** odnosno, vrednosti koordinata.

Kako ove mere ne zavise od rezultata opažanja to one mogu biti određene pre početka opažanja u mreži odnosno, mogu biti uključene u matematičke modele optimizacije. Za linearnu funkciju sledi prema (4.6.2) i (4.4.9)

$$\hat{\nabla} \hat{f}_i \le \sigma_f\, \delta_i \sqrt{u_i / r_i} \qquad \ldots(4.6.4)$$

a zamenom δ_i sa δ_o dobijamo

$$\boxed{\nabla_o f_i \le \sigma_f \, \delta_o \sqrt{u_i / r_i}} \qquad \ldots(4.6.5)$$

spoljašnju teorijsku pouzdanost funkcije.

5. OGRANIČENJA TEORIJE POUZDANOSTI

Određeni problemi koji mogu nastupiti pri identifikaciji grubih grešaka putem klasične teorije pouzdanosti, već su istaknuti u radovima : Kok, J. J. (1984.), Caspary, W. (1988.), Forstner, W. (1985.), Mihailović, K. (1991.b) i drugi.

U postupku identifikacije grubih grešaka može se dogoditi, da opažanja koja ne sadrže grube greške imaju maksimalnu vrednost test statistike veću od kritične vrednosti i na taj način se nekorektno odbacuju. Gruba greška jednog opažanja može prouzrokovati velike vrednosti test statistika više drugih opažanja koje prevazilaze kritičnu vrednost. Ove pojave obično se objašnjavaju time, da popravke opažanja u mreži dobijene izravnanjem po MNK nisu robustne s obzirom na pojavu grubih grešaka u opažanjima.

Zato se želi ukazati na određena ograničenja u teoriji pouzdanosti. S obzirom na ova ograničenja biće određen optimalni oblik matrice R_o koji može biti korišćen u fazama projektovanja i optimizacije geodetskih mreža.

5.1 Elementarne popravke

Vektor popravaka v iz modela posrednog izravnanja (3.1.3) možemo pisati u drugom obliku ako imamo u vidu (4.2.3)

$$\boxed{v = - R\, l} \qquad \ldots(5.1.1)$$

Odavde je očigledno da se uticaj rezultata opažanja l na vektor popravaka v ostvaruje preko matrice R. Jednakost (5.1.1) napišemo sada u razvijenom obliku

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

ili

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{11} l_1 + r_{12} l_2 + \dots + r_{1n} l_n \\ r_{21} l_1 + r_{22} l_2 + \dots + r_{2n} l_n \\ \vdots \\ r_{n1} l_1 + r_{n2} l_2 + \dots + r_{nn} l_n \end{bmatrix} \qquad \dots(5.1.2)$$

odnosno,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} v_{11} + v_{12} + \dots + v_{1n} \\ v_{21} + v_{22} + \dots + v_{2n} \\ \vdots \\ v_{n1} + v_{n2} + \dots + v_{nn} \end{bmatrix} \qquad \dots(5.1.3)$$

gde su :

v_i ukupne popravke

$$- v_i = r_{i1} l_1 + r_{i2} l_2 + \dots + r_{in} l_n = $$
$$= v_{i1} + v_{i2} + \dots + v_{in} \qquad (i=1,2,\dots,n) \qquad \dots(5.1.4)$$

v_{ij} elementarne popravke

$$- v_{ij} = r_{ij} l_j \qquad (j=1,2,\dots,n) \qquad \dots(5.1.5)$$

Ukupna popravka v_i jednog opažanja u vektoru **v** zavisi od koeficijenata matrice R i od svih rezultata opažanja

$$v_i = f(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}, l_1, l_2, \dots, l_n) \qquad \dots(5.1.6)$$

a elementarna v_{ij} samo od korespondentnih vrednosti

$$v_{ij} = f(r_{ij}, l_j) \qquad (i,j=1,2,\dots,n) \qquad \dots(5.1.7)$$

Za elementarne popravke važi

$$\left.\begin{aligned} E(v_{ij}) &= -r_{ij}\, E(l_j) = -r_{ij}\, \mu_{l_i} \neq 0 \\ \sigma_{v_{ij}} &= r_{ij}\, \sigma_{l_j} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(5.1.8)$$

Na osnovu standardnih devijacija ukupnih popravaka v_i

$$\sigma_{v_i} = \sigma_o \sqrt{Q_{v_i v_i}} = \sigma_{l_i} \sqrt{r_{ii}}$$

i standardnih devijacija elementarnih popravaka (5.1.8)

sledi veza između njih

$$\sigma_{v_{ii}} = \sigma_{v_i} \sqrt{r_{ii}} = r_{ii}\, \sigma_{l_i} \qquad \ldots(5.1.9)$$

Kako su vrednosti koeficijenata r_{ii} u realnim geodetskim mrežama uvek manje od jedan

$$r_{ii} < 1$$

to je

$$\sigma_{v_{ii}} < \sigma_{v_i} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \qquad \ldots(5.1.10)$$

Prethodna razmatranja poslužiće u cilju uočavanja ograničenja u identifikaciji grubih grešaka u narednim poglavljima.

5.2. Problemi identifikacije grubih grešaka

U teoriji pouzdanosti geodetskih mreža, postavlja se zahtev da $r_i \Rightarrow max$ u cilju pouzdanijeg otkrivanja grubih grešaka. Numerički pokazatelji dobijeni na osnovu velikog broja simuliranih i realnih geodetskih mreža, dati su u tabeli 5.2.1. *(Murle, M. i Bill, R. 1984).*

Tabela 5.2.1.

GRANICE r	OCENE KONTROLE
$o \le r_i < 0.01$	nema kontrole
$0.01 \le r_i < 0.1$	slaba kontrola
$0.1 \le r_i < 0.3$	dovoljna kontrola
$0.3 \le r_i \le 1$	dobra kontrola

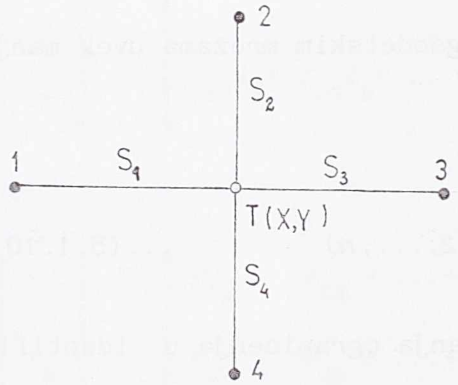
Ocene kontrole u teoriji pouzdanosti.

Karakteristične vrednosti koeficijenata r_i u geodedetskim mrežama *(Caspary, W. 1988.)* su:

- trigonometrijske mreže $r_i = 0.3 - 0.6$
- poligonske mreže $r_i = 0.1 - 0.2$
- kombinovane mreže $r_i = 0.5 - 0.8$
- nivelmanske mreže $r_i = 0.2 - 0.5.$

Međutim, ustanovljeno je kada vrednosti koeficijenata r_i pripadaju intervalu dobre kontrole $0.3 \le r_i < 1$, grube greške u opažanjima mogu ostati neidentifikovane pouzdano. Sledeći primer ilustruje ovu konstataciju.

Primer 5.2.1. *Za 2-D mrežu (Sl.5.2.1) imamo:*



$\sigma_{S_i} = 1$ mm

$(i=1,2,3,4)$

SL.5.2.1. Merene dužine u 2-D mreži.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0.1 \\ -0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix}_{[mm]}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Vrednost opažanja l_2 opteretimo grubom greškom

$$\nabla l_2 = 10 \text{ mm} \; \{ \nabla l_2 > \nabla_o l_2 = 5.8 \text{ mm}, \; \delta_o = f\,(\,0.001;\, 0.80;\, 1;\, \infty\,) = 4.13 \,\}$$

pa je sada vektor opažanja

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 + \nabla l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 10.1 \\ -0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix}_{[mm]}$$

Nakon primene MNK dobijamo

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -4.65 \\ -0.10 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 0.90 \\ -5.45 \\ 0.90 \\ -5.45 \end{bmatrix} [mm]$$

odnosno, nakon identifikacije grubih grešaka

$$T = \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} = 30.5 > 3.0 = F_{0.95;2;\infty}$$

$$w_i = \frac{|v_i|}{\sigma_{v_i}} = \left.\begin{bmatrix} 1.27 \\ 7.71 \\ 1.27 \\ 7.71 \end{bmatrix} \begin{matrix} < \\ > \\ < \\ > \end{matrix}\right\} k, \qquad \hat{\nabla} l_i = \frac{-v_i}{r_i} = \begin{bmatrix} -1.8 \\ 10.9 \\ -1.8 \\ 10.9 \end{bmatrix}$$

$$k = \sqrt{F_{0.999;1;\infty}} = 3.29$$

Iz ovog primera jasno se vidi da gruba greška u opažanju l_2 pokazuje identične vrednosti test statistika

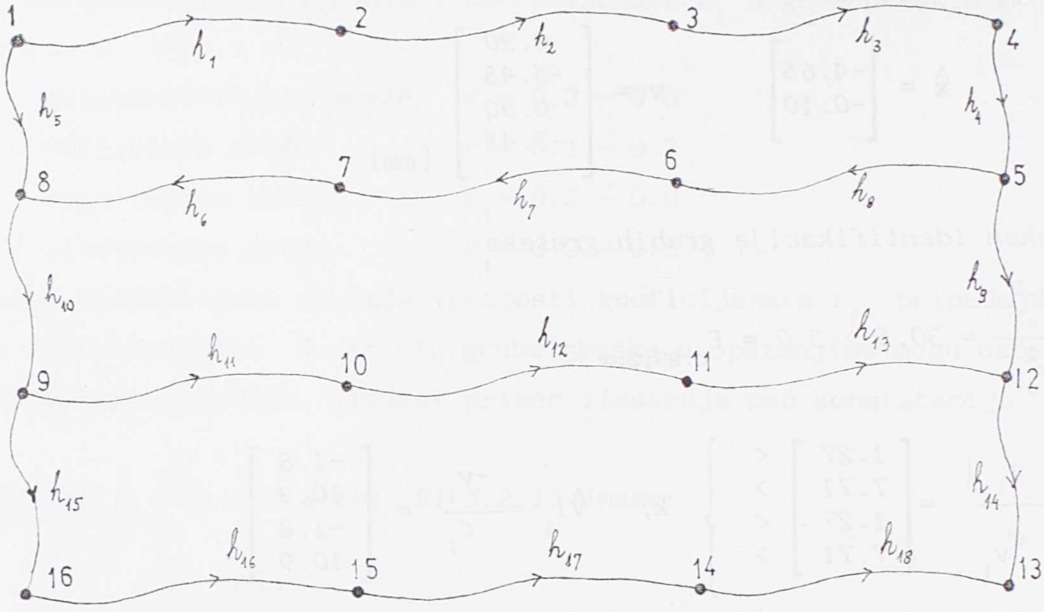
$$w_2 = w_4 > k.$$

Odavde proizilazi da se ne može nakon testiranja statističkih hipoteza doneti odluka o tome, da li se gruba greška nalazi u opažanju l_2 ili l_4 ili možda u oba ova opažanja. Prema tome, ako se koeficijenti $r_i = 0.5$ nalaze u granici dobre kontrole identifikacija grube greške nije pouzdana.

Ako se samo opažanje l_4 optereti grubom greškom dolazi do identične pojave $w_2 = w_4$. Ova će pojava doći do izražaja i kada je u pitanju par opažanja l_1 i l_3 odnosno, pojava grube greške u jednom ili drugom dovodi do identičnih vrednosti test statistika $w_1 = w_3$.

Sledeći primer je nivelmanska mreža na slici 5.2.2. sa prosečnom pouzdanošću opažanja $\bar{r} = r/n = 0.17$ u granicama dovoljne kontrole. Za grubu grešku u jednom od opažanja dobijaju se sledeće identične vrednosti test statistika:

- za h_1 ili h_2 ili ... ili h_5 $\Rightarrow$ $w_1 = w_2 = \ldots = w_5$ ili,
- za h_6 ili h_7 ili h_8 $\Rightarrow$ $w_6 = w_7 = w_8$ ili,
- za h_{11} ili h_{12} ili h_{13} $\Rightarrow$ $w_{11} = w_{12} = w_{13}$ ili,
- za h_{16} ili h_{17} ili h_{18} $\Rightarrow$ $w_{16} = w_{17} = w_{18}$.

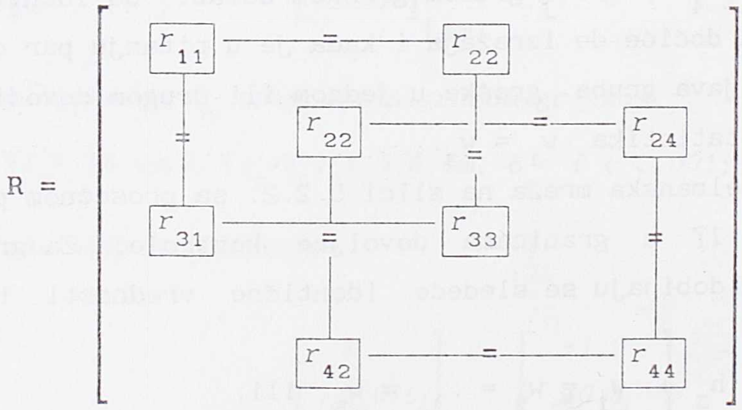


Sl.5.2.2. Nivelmanska mreža ($\sigma_{h_1} = \sigma_{h_2} = \ldots = \sigma_{h_n}$).

U ovim slučajevima moguće je samo identifikovati grupu opažanja u kojoj se nalazi opažanje opterećeno grubom greškom, ali koje je od njih zaista pogrešno ne možemo ustanoviti.

Prethodno izneta dva primera pokazuju dileme koje mogu nastati u identifikaciji grubih grešaka posredstvom test statistika w_i. Navedene dileme mogu nastati i u drugim vrstama geodetskih mreža.

Razlog ovih pojava nalazi se u matrici R gde su dijagonalni i vandijagonalni koeficijenti jednaki $r_{ii}=r_{ij}$ (sl.5.2.3)



Sl.5.2.3. Jednakost dijagonalnih i vandijagonalnih koeficijenata $r_{ii}=r_{ij}$ za mrežu datu na slici 5.2.1.

Ako imamo u vidu (5.1.1) onda u primeru 5.2.1 za popravke v_1 i v_3 dobijamo

$$- v_1 = r_{11} l_1 + r_{13} l_3$$
$$- v_3 = r_{31} l_1 + r_{33} l_3 , \qquad (r_{11} = r_{33} = r_{13} = r_{31})$$

pa je očigledno da su vrednosti ovih popravaka identične, bez obzira da li je gruba greška u opažanju l_1 ili l_3 ili u oba ova opažanja. Isti zaključak važi i za popravke v_2 i v_4 gde je

$$- v_2 = r_{22} l_2 + r_{24} l_4$$
$$- v_4 = r_{42} l_2 + r_{44} l_4 , \qquad (r_{22} = r_{44} = r_{24} = r_{42})$$

odnosno $v_2 = v_4$ bez obzira na vrednosti l_2 i l_4.

Kako je P=I odnosno Q_v= R vrednosti test statistika su

$$w_i = \frac{| v_i |}{\sigma_o \sqrt{Q_{v_i v_i}}} = \frac{| v_i |}{\sigma_o \sqrt{r_{ii}}} \qquad (i=1,2,3,4)$$

ili za $v_1 = v_3$ i $r_{11} = r_{33}$ dobijamo

$$w_1 = w_3$$

odnosno, za $v_2 = v_4$ i $r_{22} = r_{44}$ sledi

$$w_2 = w_4$$

Za ove parove opažanja dobijaju se takođe identične vrednosti ocena grubih grešaka.

Ako se do sada istaknute dileme uoče nakon izravnanja i testiranja statističkih hipoteza, onda je kasno za intervencije i preostaje jedino da se obave ponovna merenja u cilju pouzdanog otkrivanja grube greške. Ovi problemi mogu biti izbegnuti ako se vodi računa o matrici R u fazama projektovanja i optimizacije geodetskih mreža.

Prema tome, neophodno je odrediti optimalni oblik matrice R odnosno, optimalne vrednosti kako dijagonalnih tako i vandijagonalnih koeficijenata ove matrice.

U izravnanju realnih geodetskih mreža po MNK, problem test statistike ogleda se u tome što je popravka pojedinog opažanja v_i u funkciji svih opažanja a ne samo korespodentnog l_i pa test statistiku (4.5.4) pišemo

$$w_i = \frac{-v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{f\,(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\sigma_{l_i}\sqrt{r_{ii}}} \qquad \ldots(5.2.1)$$

ili imajući u vidu izraz (5.1.4) sledi

$$w_i = \frac{-v_i}{\sigma_{l_i}\sqrt{r_{ii}}} = \frac{r_{i1}}{\sigma_{l_i}\sqrt{r_{ii}}}\, l_1 + \ldots + \frac{r_{ii}}{\sigma_{l_i}\sqrt{r_{ii}}}\, l_i + \ldots + \frac{r_{in}}{\sigma_{l_i}\sqrt{r_{ii}}}\, l_n \qquad \ldots(5.2.2)$$

U idealnom slučaju kada bi vandijagonalni koeficijenti matrice R bili jednaki nuli izraz (5.2.2) bi postao

$$w_i = \frac{r_{ii}}{\sigma_{l_i}\sqrt{r_{ii}}}\, l_i = \frac{v_{ii}}{\sigma_{v_i}} = \frac{-v_i}{\sigma_{v_i}} \qquad (za\ r_{ij}=0,\ i\neq j) \ldots(5.2.3)$$

i jedino u tom slučaju bilo bi

$$w_i = f\,(l_i, \sigma_{l_i}, r_i) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

odnosno, test statistika w_i zavisi samo od korespondentnih vrednosti l_i, σ_l i r_i.

U geodetskim mrežama sa dobrom pouzdanošću imamo

$$\left.\begin{array}{l} r_{ii} \Rightarrow max \Rightarrow 1 \\ r_{ij} \Rightarrow min \Rightarrow 0 \\ r_{ii} > r_{ij} \end{array}\right\} \qquad \ldots(5.2.4)$$

a test statistika (5.2.2) za homogenu tačnost opažanja postaje

$$\lim_{\substack{r_{ii}\to 1\\ r_{ij}\to 0}} w_i \Rightarrow \frac{r_{ii}}{\sigma_{l_i}\sqrt{r_{ii}}}\, l_i \Rightarrow \frac{\max v_i}{\sigma_{v_i}} = \max w_i \qquad \ldots(5.2.5)$$

U ovim najboljim slučajevima, pojava grube greške ∇l_i u opažanju l_i imaće za posledicu maksimalnu vrednost test statistike i-tog opažanja $\max w_i$. U slučajevima kada je

$$r_{ii} = r_{jj} = r_{ij} = r_{ji}$$

bez obzira na vrednosti ovih koeficijenat dobijaju se identične vrednosti test statistika

$$w_i = w_j$$

U slučajevima kada su vandijagonalni koeficijenti r_{ij} veći od dijagonalnih r_{ii} ($r_{ij} > r_{ii}$), može doći do pojave da gruba greška u opažanju l_i prouzrokuje maksimalnu vrednost test statistike w_j opažanja j ili

$$w_j > w_i$$

U ovom slučaju korektno otkrivanje grube greške je nemoguće. Na sličan način možemo posmatrati i ocene grubih grešaka $\hat{\nabla} l_i$. Ako u izrazu (4.2.5) ukupnu popravku v_i zamenimo sa zbirom elementarnih popravaka (5.1.4) dobijamo

$$\hat{\nabla} l_i = \frac{-v_i}{r_{ii}} = \frac{r_{i1}}{r_{ii}}\, l_1 + \ldots + \frac{r_{ii}}{r_{ii}}\, l_i + \ldots + \frac{r_{in}}{r_{ii}}\, l_n \qquad \ldots(5.2.6)$$

ili

$$\hat{\nabla} l_i = \frac{-v_i}{r_{ii}} = \frac{r_{i1}}{r_{ii}}\, l_1 + \ldots + l_i + \ldots + \frac{r_{in}}{r_{ii}}\, l_n \qquad \ldots(5.2.7)$$

odnosno, za stvarnu vrednost grube greške $\nabla l_i = l_i$ ocena je

$$\hat{\nabla} l_i = \frac{-v_i}{r_{ii}} = \frac{r_{i1}}{r_{ii}}\, l_1 + \ldots + \nabla l_i + \ldots + \frac{r_{in}}{r_{ii}}\, l_n \qquad \ldots(5.2.8)$$

Iz (5.2.8) jasno se vidi da ocena grube greške $\hat{\nabla} l_i$ zavisi od vrednosti svih n opažanja a ne samo od korespodentne grube greške ∇l_i, kao i od svih koeficijenata matrice R a ne samo dijagonalnih.

Do istog izraza možemo doći direktno iz (4.2.15) gde je ocena $\hat{\nabla} l$ u funkciji vektora opažanja l a ne popravaka v, bez uključivanja elementarnih popravaka v_{ij} uzimajući za

$$c^T = \left[0 \;\; 0 \;\; 0 \ldots \underset{i}{1} \ldots 0 \right] \quad \text{i} \quad P=I$$

pa prema (4.2.15) dobijamo

$$Q_{\hat{\nabla} l \hat{\nabla} l} = (c^T P Q_v P c)^{-1} = (c^T Q_v c)^{-1} = Q^{-1}_{v_i v_i} \qquad \ldots(5.2.9)$$

$$c^T P Q_v \, l = c^T Q_v \, l = Q_{v_1 v_1} l_1 + Q_{v_2 v_2} l_2 + \ldots + Q_{v_n v_n} l_n \qquad \ldots(5.2.10)$$

Kako za

$$P = I \Rightarrow Q_v = R \Rightarrow r_{ij} = Q_{v_i v_j}$$

(5.2.9) i (5.2.10) pišemo

$$Q_{\hat{\nabla} l \hat{\nabla} l} = r^{-1}_{ii} \qquad \ldots(5.2.11)$$

$$c^T P Q_v \, l = r_{i1} l_1 + r_{i2} l_2 + \ldots + r_{in} l_n \qquad \ldots(5.2.12)$$

a zamenom (5.2.11) i (5.2.12) u (4.2.15) sledi

$$\hat{\nabla} l_i = \frac{r_{i1}}{r_{ii}} l_1 + \ldots + l_i + \ldots + \frac{r_{in}}{r_{ii}} l_n$$

što je identično sa (5.2. 7).

Kada bi vandijagonalni koeficijenti bili $r_{ij}=0$ $(i \neq j)$ onda bi ocena (5.2.8) postala

$$\hat{\nabla} l_i = \frac{-v_i}{r_{ii}} = \nabla l_i \, , \qquad (\text{za } r_{ij}=0, \; i \neq j) \qquad \ldots(5.2.13)$$

Međutim, u realnim geodetskim mrežama ovaj uslov nije nikada ispunjen, pa ni ocena $\hat{\nabla} l_i$ neće biti jednaka stvarnoj vrednosti grube greške ∇l_i. U realnim geodetskim mrežama sa dobrom pouzdanošću dizajna vandijagonalni koeficijenti r_{ij} su znatno manji po apsolutnom iznosu od dijagonalnih r_{ii}

$$|r_{ij}| \ll |r_{ii}|$$

odnosno $r_{ii} \Rightarrow max \Rightarrow 1$

$r_{ij} \Rightarrow min \Rightarrow 0.$

Ovo doprinosi da u oceni (5.2.8) imamo

$$\lim_{\substack{r_{ii}\to 1\\ r_{ij}\to 0}} \hat{\nabla} l_i \Rightarrow \nabla l_i \qquad \ldots(5.2.14)$$

odnosno

$$\frac{r_{ij}}{r_{ii}} \Rightarrow 0, \qquad (i \neq j) \qquad \ldots(5.2.15)$$

Na osnovu dosadašnjih razmatranja i na osnovu izraza (5.2.4), (5.2.5), (5.2.14) i (5.2.15) sledi optimalni oblik matrice R_o

$$R_o = \begin{bmatrix} \ddots & & r_{ij} \Rightarrow min \\ & r_{ii} \Rightarrow max & \\ r_{ij} \Rightarrow min & & \ddots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots(5.2.16)$$

ili granična vrednost matrice

$$\lim R \Rightarrow R_o \Rightarrow I \qquad \ldots(5.2.17)$$

Znači, optimalni oblik matrice R_o teži jediničnoj matrici I. Pri projektovanju i optimizaciji geodetskih mreža neophodno je voditi računa o ovom optimalnom obliku matrice R_o da bi se otklonile moguće kasnije dileme o pouzdanosti pojedinih opažanja nakon izravnanja.

Tabela 5.2.1 može poslužiti u ocenjivanju kontrole pouzdanosti opažanja ali uz uslov da koeficijenti matrice R van glavne dijagonale r_{ij} $(i \neq j)$ teže nuli ili još preciznije, vrednosti r_{ij} moraju biti znatno manje po apsolutnoj vrednosti od dijagonalnih r_{ii}.

Uloga matrice R u preraspodeli grubih grešaka može se posmatrati i na drugi način. Iz razlike vektora popravaka (4.2.2) i (5.1.1)

$$\nabla v = \bar{v} = - R \nabla l$$

$$v = - R\, l$$

dobijamo

$$\bar{v} - v = - R (\nabla l - l) \qquad \ldots(5.2.18)$$

gde je

$\nabla v = \bar{v}$ vektor popravaka opterećen grubom greškom.

Matričnu jednačinu (5.2.18) napišemo u razvijenom obliku

$$\bar{v} - v = -R \left\{ \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_i + \nabla l_i \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_i \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \right\} \qquad \ldots(5.2.19)$$

ili

$$\bar{v} - v = -R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \nabla l_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots(5.2.20)$$

odnosno

$$\bar{v} = v - \begin{bmatrix} r_{1i} \\ r_{2i} \\ \vdots \\ r_{ii} \\ \vdots \\ r_{ni} \end{bmatrix} \nabla l_i \qquad \ldots(5.2.21)$$

Izraz (5.2.21) možemo napisati kraće

$$\bar{v}_i = v_i - R_i \nabla l_i \qquad \ldots(5.2.22)$$

gde je R_i i-ta kolona matrice R preko koje se prenose grube greške na vektor popravaka. Odavde se nedvosmisleno vidi da će gruba greška ∇l_i biti prisutna u svim popravkama $\bar{v}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Iz (5.2.21) takođe se lako uočava da gruba greška ∇l_i može izazvati najveću vrednost popravke $\bar{v}_i$ one merene veličine kod koje je koeficijent r_{ij} najveći

$$\bar{v}_{i_{max}} = v_i - r_{ij_{max}} \nabla l_i \qquad \ldots(5.2.23)$$

Ovde mogu nastupiti dva slučaja. Prvi ako je $r_{ij_{max}}$ van glavne dijagonale

$$\bar{v}_{j_{max}} = v_j - r_{ij_{max}} \nabla l_i \qquad (i \neq j) \qquad \ldots(5.2.24)$$

onda će gruba greška u opažanju l_i prouzrokovati maksimalni uticaj na popravku opažanja l_j. U ovom slučaju identifikacija grube greške u opažanju

l_j može biti nepouzdana jer je

$$w_{j_{max}} = \frac{|v_{j_{max}}|}{\sigma_{l_j}\sqrt{r_{jj}}}, \qquad \hat{\nabla} l_{j_{max}} = \frac{-v_{j_{max}}}{r_{jj}}$$

odnosno, može se dogoditi da test statistika opažanja l_j bude maksimalna.

U drugom slučaju kada je u (5.2.23) dijagonalni koeficijent veći od vandijagonalnih imamo

$$\bar{v}_{i_{max}} = v_i - r_{ii} \nabla l_{i_{max}} \qquad \ldots(5.2.25)$$

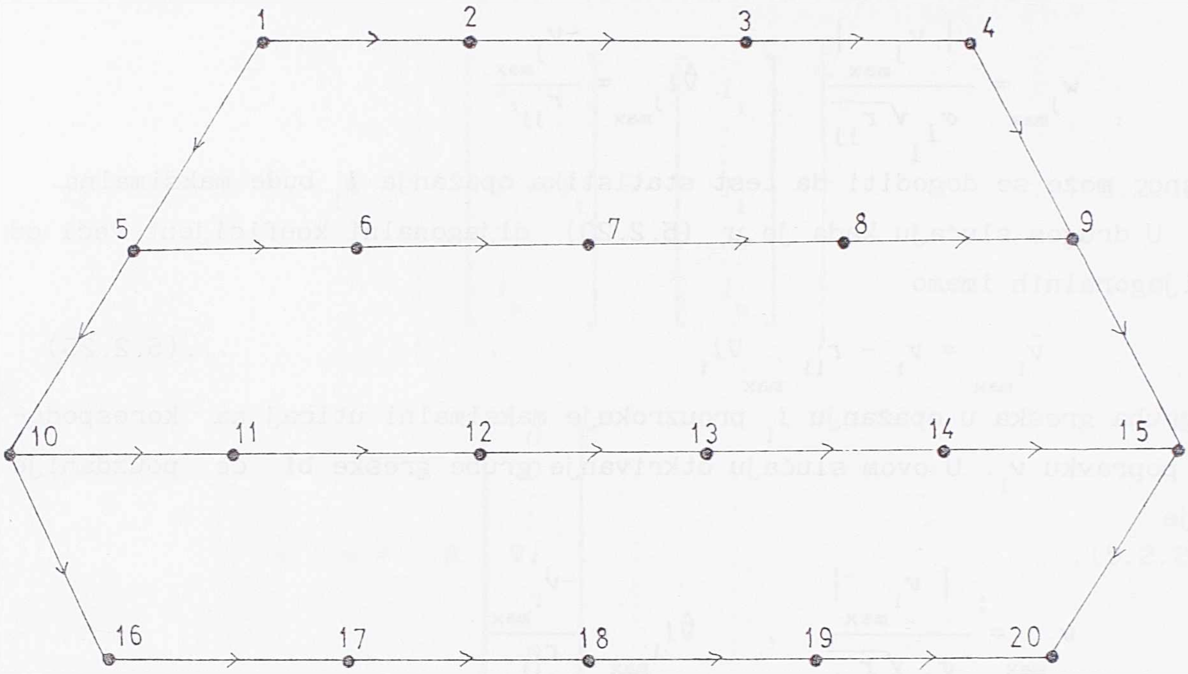
gde gruba greška u opažanju l_i prouzrokuje maksimalni uticaj na korespodentnu popravku v_i. U ovom slučaju otkrivanje grube greške biće pouzdanije jer je

$$w_{i_{max}} = \frac{|v_{i_{max}}|}{\sigma_{l_i}\sqrt{r_{ii}}}, \qquad \hat{\nabla} l_{i_{max}} = \frac{-v_{i_{max}}}{r_{ii}}$$

Na osnovu ovih razmatranja proizilazi da je otkrivanje grubih grešaka pouzdanije ako su koeficijenti r_{ij} matrice R van glavne dijagonale mali u odnosu na dijagonalne r_{ii}, što je saglasno sa zaključcima donetim prethodno u (5.2.16) i (5.2.17).

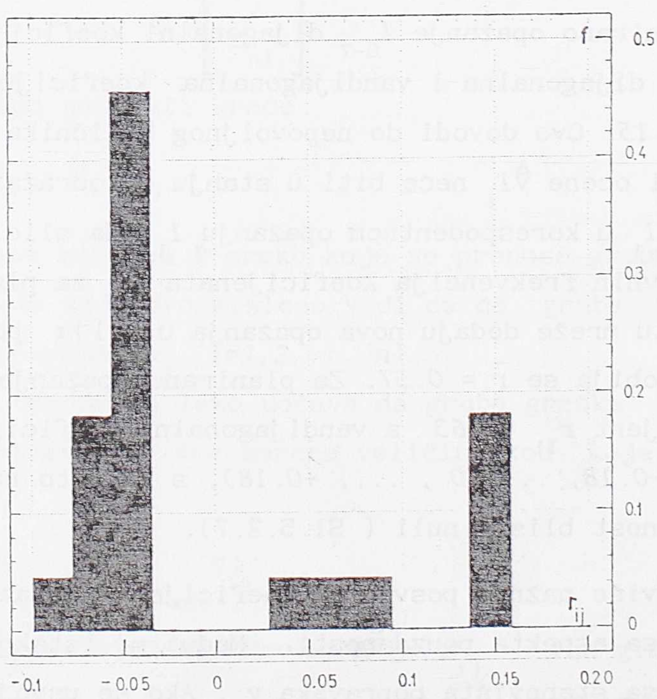
Na slici 5.2.4 dat je projekat 1-D mreže sa slabom prosečnom pouzdanošću $\bar{r}=0.14$. Za planirano opažanje l_{6-7} dijagonalni koeficijent je $r_{ii}=0.15$ ali postoje još tri dijagonalna i vandijagonalna koeficijenta koji imaju istu vrednost $r_{ij}=0.15$. Ovo dovodi do nepovoljnog količnika $r_{ij}/r_{ii} = 1$ pa test statistike w_i i ocene $\hat{\nabla} l_i$ neće biti u stanju da odražavaju stvarnu pojavu grube greške ∇l_i u korespodentnom opažanju l_i. Na slici 5.2.5 pokazan je histogram relativnih frekvencija koeficijenata r_{ij} za planirano opažanje h_{6-7}. Ako se projektu mreže dodaju nova opažanja u cilju povećanja pouzdanosti (Sl.5.2.6) dobija se $\bar{r} = 0.57$. Za planirano opažanje h_{6-7} sada je dijagonalni koeficijent $r_{ii}=0.63$ a vandijagonalni koeficijenti nalaze se u intervalu $r_{ij} \in (-0.18, \ldots, 0, \ldots, +0.18)$, s tim što najveći broj koeficijenata ima vrednost blisku nuli (Sl.5.2.7).

Do sada je najviše pažnje posvećeno koeficijentima matrice R zbog kasnije optimizacije sa aspekta pouzdanosti. Međutim, istaknuti problemi mogu se posmatrati i sa stanovišta popravaka v_i. Ako se usvoji da je $v_i=0$ iz (5.2.23) sledi

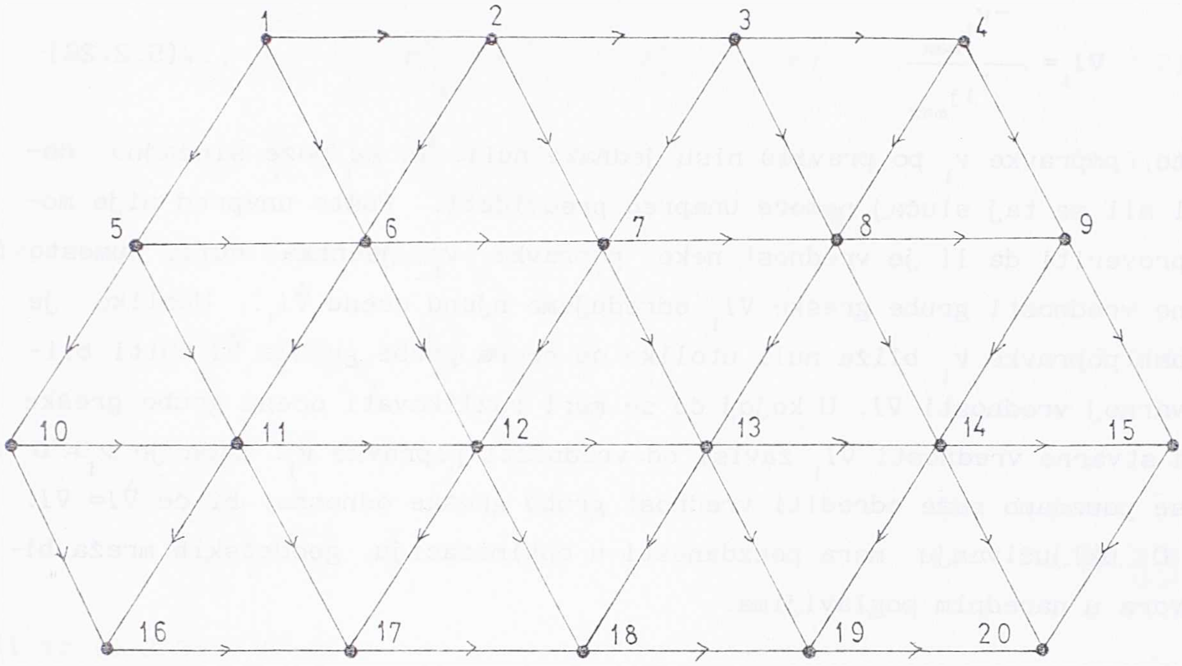


$r=3, \quad \bar{r} = r/n = 0.14$

Sl.5.2.4. Projekat 1-D mreže sa slbom pouzdanošću.

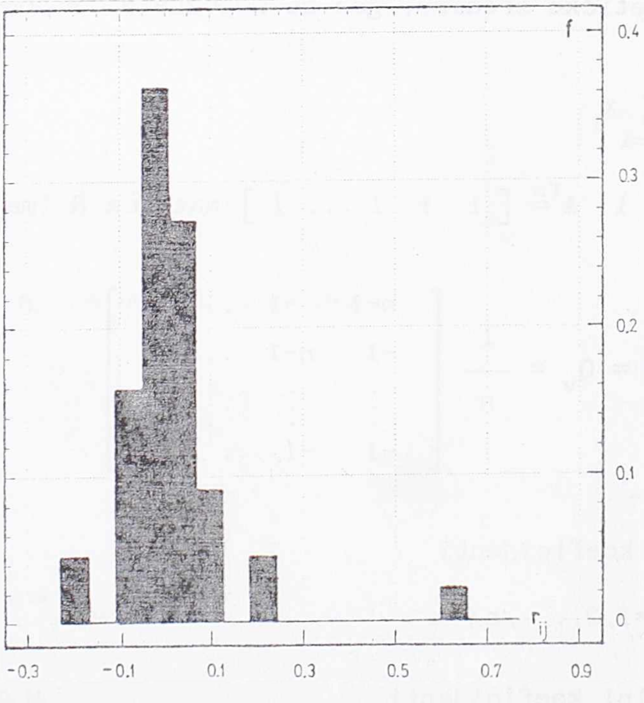


SL.5.2.5. Histogram relativnih frekvencija koeficijenata r_{ij} opažanja h_{6-7} u mreži na slici (5.2.4).



$r=25, \quad \bar{r} = r/n = 0.57$

Sl.5.2.6. Projekat 1-D mreže sa dobrom pouzdanošću.



SL.5.2.7. Histogram relativnih frekvencija koeficijenata r_{ij} opažanja h_{6-7} u mreži na slici (5.2.6).

$$\nabla l_i = \frac{-\bar{v}_{i_{max}}}{r_{ij_{max}}} \qquad \ldots(5.2.26)$$

Naravno, popravke v_i po pravilu nisu jednake nuli. To se može slučajno dogoditi ali se taj slučaj ne može unapred predvideti. Pošto unapred nije moguće proveriti da li je vrednost neke popravke v_i jednaka nuli, umesto stvarne vrednosti grube greške ∇l_i određujemo njenu ocenu $\hat{\nabla} l_i$. Ukoliko je vrednost popravke v_i bliža nuli utoliko će ocena grube greške $\hat{\nabla} l_i$ biti bliža stvarnoj vrednosti ∇l. U kojoj će se meri razlikovati ocena grube greške $\hat{\nabla} l_i$ od stvarne vrednosti ∇l_i zavisi od vrednosti popravke v_i. Kada je $v_i = 0$ tada se pouzdano može odrediti vrednost grube greške odnosno, biće $\hat{\nabla} l = \nabla l$.

O uključivanju mera pouzdanosti u optimizaciju geodetskih mreža biće govora u narednim poglavljima.

5.3. Prosta aritmetička sredina

Interesantno je razmotriti kako se grube greške opažanja mogu identifikovati iz proste aritmetičke sredine, gde se nepoznata $\bar{x}$ određuje prema

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Kako je matrica P = I i $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$ matrica R ima oblik

$$R = Q_v P = Q_v = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{bmatrix} \qquad \ldots(5.3.1)$$

gde su:

r_{ii} dijagonalni koeficijenti

$$r_{ii} = \frac{n-1}{n}, \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

r_{ij} vandijagonalni koeficijenti

$$r_{ij} = \frac{-1}{n}, \quad (i \neq j, \; j=1,2,\ldots,n)$$

Elementarne popravke i njihove disperzije su:

$$v_{ii} = \frac{n-1}{n} l_i, \quad \sigma^2_{v_{ii}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \sigma^2_{l_i}, \quad i=j \qquad \text{...(5.3.2)}$$

$$v_{ij} = \frac{-1}{n} l_j, \quad \sigma^2_{v_{ij}} = \frac{1}{n^2} \sigma^2_{l_j}, \quad i\neq j \qquad \text{...(5.3.3)}$$

Disperzije ukupnih popravaka v_i su

$$\sigma^2_{v_i} = \sigma^2_o Q_{v_i v_i} = \frac{n-1}{n} \sigma^2_{l_i} \qquad \text{...(5.3.4)}$$

Iz (5.3.2) i (5.3.4) sledi

$$\sigma^2_{v_{ii}} = \frac{n-1}{n} \sigma^2_{v_i} \qquad \text{...(5.3.5)}$$

ili iz (5.3.3) i (5.3.4)

$$\sigma^2_{v_{ij}} = \frac{1}{n(n-1)} \sigma^2_{v_i} \qquad \text{...(5.3.6)}$$

odnosno, iz (5.3.5) i (5.3.6)

$$\sigma^2_{v_{ii}} = (n-1)^2 \sigma^2_{v_{ij}} \qquad \text{...(5.3.7)}$$

Test statistiku w_i napišemo prema (5.2.2)

$$w_i = \frac{-v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{\frac{1}{n} l_1}{\sigma_{v_i}} + \ldots + \frac{\frac{n-1}{n} l_i}{\sigma_{v_i}} + \ldots + \frac{\frac{1}{n} l_n}{\sigma_{v_i}} \qquad \text{...(5.3.8)}$$

gde je za $n \to \infty$ njena granična vrednost

$$\lim_{(n\to\infty)} w_i \Rightarrow \frac{\frac{n-1}{n} l_i}{\sigma_{v_i}} \Rightarrow \frac{v_{ii}}{\sigma_{v_i}} \qquad \text{...(5.3.9)}$$

ili kako je

$$\lim_{(n\to\infty)} \frac{n-1}{n} \Rightarrow r_{max} \Rightarrow 1$$

onda (5.3.9) postaje

$$\lim_{(r\to\infty)} w_i \Rightarrow \frac{v_{i\,max}}{\sigma_{v_i}} = w_{i\,max} \qquad \text{...(5.3.10)}$$

Prema tome kada je n veće otkrivanje grubih grešaka biće puzdanije. Drugim rečima, pošto su članovi na glavnoj dijagonali r_{ii} matrice R, $(n-1)$ puta veći od članova van glavne dijagonale r_{ij}, to će se i standardne devijacije $\sigma_{v_{ii}}$ i $\sigma_{v_{ij}}$ (5.3.7) nalaziti u istoj proporciji. Kada je $n=2$ nije moguće otkriti grubu grešku, jer je tada

$$|r_{ii}| = |r_{jj}| = |r_{ij}| = |r_{ji}|.$$

Slični zaključci vrede i za ocene grubih grešaka $\hat{\nabla} l_i$.

5.4. Opšta aritmetička sredina

Kod opšte aritmetičke sredine nepoznata $\bar{x}$ se određuje prema

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}$$

Kako je matrica $A^T = [\,1 \;\; 1 \;\; 1 \ldots 1\,]$ matrica R ima oblik

$$R = Q_v\, P = Q_v = \frac{1}{\Sigma p} \begin{bmatrix} \Sigma p - p_1 & -p_2 & \ldots & -p_n \\ -p_1 & \Sigma p - p_2 & \ldots & -p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1 & -p_2 & \ldots & \Sigma p - p_n \end{bmatrix} \qquad \ldots(5.4.1)$$

gde su:

r_{ii} dijagonalni koeficijenti

$$r_{ii} = \frac{\Sigma p - p_i}{\Sigma p}, \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

r_{ij} vandijagonalni koeficijenti

$$r_{ij} = \frac{-p_j}{\Sigma p}, \quad (i \neq j,\ j=1,2,\ldots,n)$$

Elementarne popravke i njihove disperzije su:

$$v_{ii} = \frac{\Sigma p - p_i}{\Sigma p}\, l_i, \quad \sigma^2_{v_{ii}} = \left(\frac{\Sigma p - p_i}{\Sigma p}\right)^2 \sigma^2_{l_i}, \qquad i=j \qquad \ldots(5.4.2)$$

$$v_{ij} = \frac{-p_j}{\Sigma p} l_j, \quad \sigma^2_{v_{ij}} = (\frac{p_j}{\Sigma p})^2 \sigma^2_{l_j}, \qquad i \neq j \qquad \ldots(5.4.3)$$

Disperzije ukupnih popravaka v_i su

$$\sigma^2_{v_i} = \sigma^2_o Q_{v_i v_i} = \frac{\Sigma p - p_i}{\Sigma p} \sigma^2_{l_i} \qquad \ldots(5.4.4)$$

Iz (5.4.3) i (5.4.4) sledi

$$\sigma^2_{v_{ii}} = \frac{\Sigma p - p_i}{\Sigma p} \sigma^2_{v_i} \qquad \ldots(5.4.5)$$

ili iz (5.4.3) i (5.4.4)

$$\sigma^2_{v_{ij}} = \frac{p_j^2}{(\Sigma p - p_i)\Sigma p} \sigma^2_{v_i} \qquad \ldots(5.4.6)$$

odnosno, iz (5.4.5) i (5.4.6)

$$\sigma^2_{v_{ii}} = \frac{(\Sigma p - p_i)^2}{p_j^2} \sigma^2_{v_{ij}} \qquad \ldots(5.4.7)$$

Količnik između popravaka v_{ii} i v_{ij} identičan je količniku koeficijenata r_{ii} i r_{ij}

$$\frac{r_{ii}}{r_{ij}} = \frac{\Sigma p - p_i}{-p_j} \qquad \ldots(5.4.8)$$

Imajući u vidu uslov (5.2.15) i količnik (5.4.8) sledi

$$\frac{r_{ij}}{r_{ii}} = \frac{-p_j}{\Sigma p - p_i} \Rightarrow 0 \qquad (i \neq j)$$

odnosno, ako $p_j \to 0$ otkrivanje grubih grešaka je pouzdanije. Drugim rečima, što je manja vrednost p_j u odnosu na $\Sigma p - p_i$ otkrivanje grubih grešaka je pouzdanije.

Kada je $n=2$ popravke v_i su

$$- v_1 = \frac{\Sigma p - p_1}{\Sigma p} l_1 - \frac{p_2}{\Sigma p} l_2$$

$$- v_2 = \frac{-p_1}{\Sigma p} l_1 + \frac{\Sigma p - p_2}{\Sigma p} l_2$$

odnosno

$$- v_1 = \frac{p_2}{\Sigma p} (l_1 - l_2)$$

$$- v_2 = \frac{p_1}{\Sigma p} (l_2 - l_1)$$

pa je očigledno da pojava grube greške u jednom od ovih opažanja *ne* može biti pouzdano otkrivena, bez obzira na njenu veličinu.

6. OPTIMIZACIJA OPAŽANJA U GEODETSKIM MREŽAMA

Problemima optimizacije geodetskih mreža naučna i stručna geodetska javnost okupirana je već preko stotinu godina. Za različite ciljeve optimizacije formirane u proteklom periodu opštu klasifikaciju dao je *Grafarend, E. (1979.)* u okviru četiri reda (Tabela 6.1).

Tabela 6.1.

Dizajn	Konstantni parametri	Nepoznati parametri	Rešenje problema
Nulti red	A, P	$\hat{x}$, $Q_{\hat{x}}$	Datuma
Prvi red	P, $Q_{\hat{x}}$	A	Konfiguracije
Drugi red	A, $Q_{\hat{x}}$	P	Težina
Treći red	$Q_{\hat{x}}$	A, P (DELOM SLOBODNI)	Poboljšanje postojećih mreža

Opšta klasifikacija optimizacije geodetskih mreža.

U široj populaciji naučno istraživačkih radova najveća pažnja posvećivana je dizajnu drugog reda, što će biti slučaj i u ovom radu.

6.1. Savremeni ciljevi optimizacije

Najveći broj razvijenih matematičkih modela optimizacije geodetskih mreža, od različitih autora, dobijen je iz opšte matematičke jednačine

$$A^T P A = Q_x^{-1} \quad \text{za} \quad r(A) = r = u \qquad \ldots(6.1.1)$$

$$\text{ili} \quad A^T P A = Q_x^{+} \quad \text{za} \quad r(A) = r < u$$

gde je Q_x kriterijum matrica.

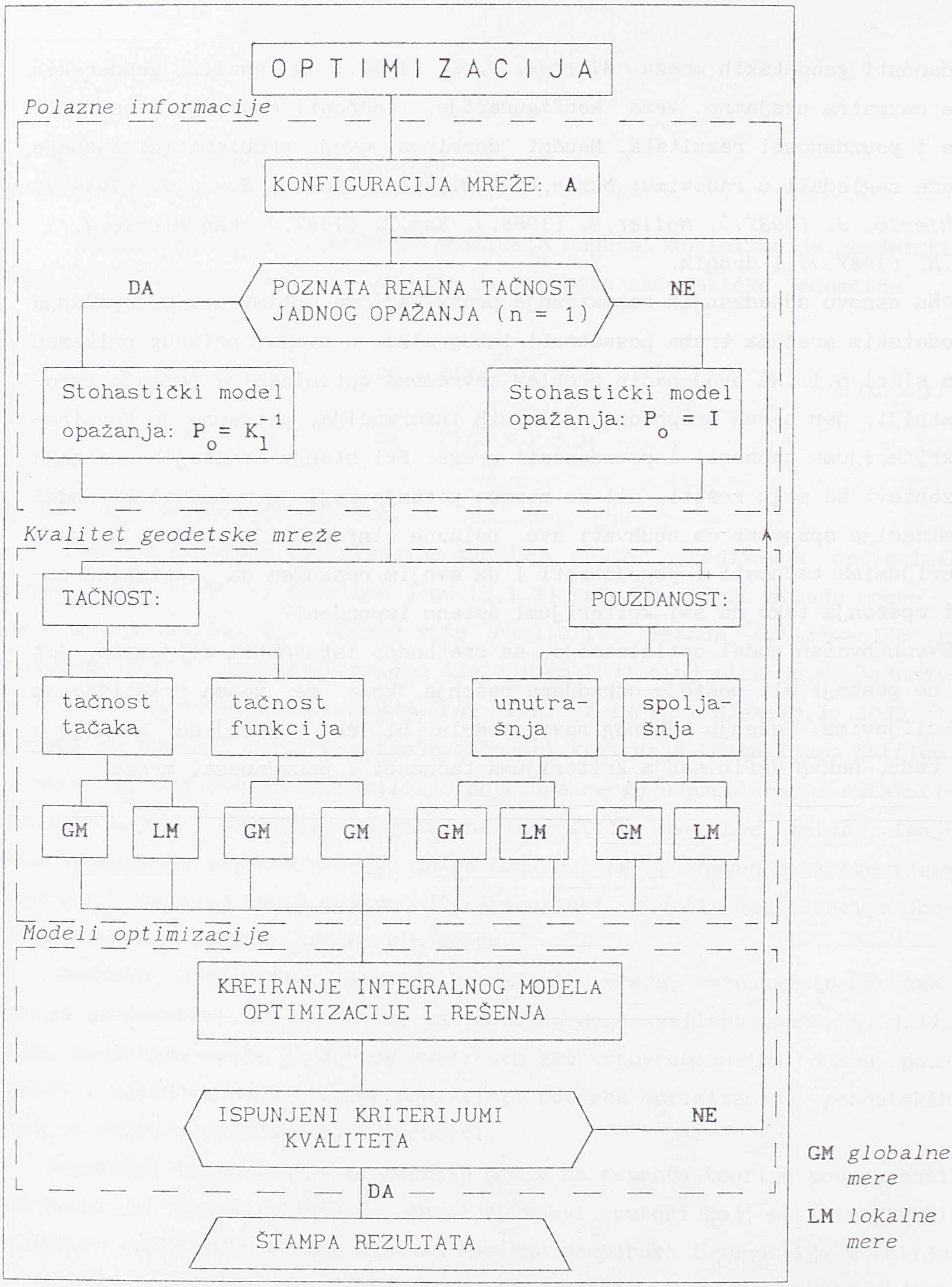
Rešenje problema optimizacije zasniva se na određivanju optimalnih težina opažanja P iz matrične j-ne (6.1.1) kada je poznat dizajn mreže A i kriterijum matrica Q_x. Razvoj više različitih metoda optimizacije iz jednačine (6.1.1) omogućile su dve činjenice. Prva činjenica je da jednačina (6.1.1) ima višeznačna rešenja *(Van Mierlo,J.1981.* i *Aleksić,I. 1988.*), a druga, da postoji širok spektar mogućnosti kreiranja kriterijuma matrice Q_x. Međutim, bez obzira na različite pristupe rešenju problema u matematičkom smislu kao i postignute objektivne rezultate, sve ove metode imaju jednu zajedničku osobinu a to je de se baziraju na poznavanju kriterijuma matrice Q_x. Na ovaj način dosadašnji matematički modeli optimizacije obuhvatili su samo tačnost geodetskih mreža.

Međutim, u savremenoj analizi geodetskih mreža, važno mesto zauzima teorija pouzdanosti, koja zajedno sa tačnošću daje kvalitet mreže *(Sl.4.1)*. Dakle, geodetska mreža je dobrog kvaliteta ako istovremeno ima dobru pouzdanost i dobru tačnost. Odavde proizilazi potreba optimizacije geodetskih mreža sa aspekta pouzdanosti i tačnosti.

Mogućnost optimizacije geodetskih mreža sa aspekta teorije pouzdanosti nagovestio je *Baarda (1968.)*. Kasnije, mnogi autori koji su istraživali pouzdanost geodetskih mreža, dali su korisne preporuke i sugestije u cilju optimizacije. *Pelzer, H. (1977.)* dao je doprinos formiranju kriterijuma pouzdanosti geodetskih mreža. *Alberda, J. E. (1980.)* u analizi geodetskih mreža razmatra uzajamne veze konfiguracije, tačnosti opažanja, tačnosti mreže i pouzdanosti rezultata. Naučni doprinos ovoj problematici takodje se može sagledati u radovima: *Murle,M.* i *Bill,R. (1984.), Kok,J.J. (1984.), Van Mierlo, J. (1987.), Muller,H. (1986.), Yan,Z. (1987.), Van Mierlo,J.* i *Hahn,M. (1987.)*, i drugih.

Na osnovu dosadašnjih razmatranja proizilazi da optimizaciju opažanja u geodetskim mrežama treba posmatrati integralno, a ovakav pristup prikazan je na slici 6.1. Na ovaj način problem savremene optimizacije postaje sveobuhvatniji, jer pored neophodnih polaznih informacija, potrebno je formiranje kriterijuma tačnosti i pouzdanosti mreže. Pri stanju sadašnjih saznanja ovi zahtevi se mogu rešiti, ali se nameće pitanje koji je matematički model optimizacije sposoban da obuhvati sve polazne informacije zajedno sa svim kriterijumima tačnosti i pouzdanosti i da svojim rešenjem dâ optimalnu tačnost opažanja tako da svi kriterijumi ostanu ispunjeni?

Sveobuhvatan model optimizacije, sa prethodno istaknutim ciljevima, još uvek ne postoji ali postoje odredjena rešenja koja se veoma približavaju ovim ciljevima. Rešenja jednog novog modela, biće objašnjena kasnije u ovom radu, nakon definisanja kriterijuma tačnosti i pouzdanosti mreža.



Sl.6.1. *Integralni model optimizacije.*

6.2. Kriterijumi tačnosti i kriterijum matrice

Iz analize geodetskih mreža znamo da najšire informacije o njenoj tačnosti daje kovarijaciona matrica $K_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0 Q_{\hat{x}}$. Veličine koje se dobijaju iz ove matrice (sl.6.2.1), mogu poslužiti kao osnova za formiranje kriterijuma tačnosti u postupku optimizacije odnosno, u dizajniranju kriterijum matrica Q_x.

Najjednostavniji oblik kriterijum matrice $Q_x = I$ nije našao svoje mesto u primeni jer na ovaj način korelaciona zavisnost izmedju nepoznatih je izjednačena sa nulom, što nije u saglasnosti sa realnim matricama $Q_{\hat{x}}$ geodetskih mreža. Problem korelacionih zavisnosti izmedju nepoznatih rešio je *Grafarend, E. (1979.)*, formirajući kriterijum matrice sa Taylor-Karman - om strukturom $Q_x = Q_{TK}$. Korelacione funkcije koje se u ovom postupku koriste određene su na bazi eksperimentalnih istraživanja, te mogu dati samo aproksimativne vrednosti za kriterijum matrice.

Na osnovu teorijskih i empirijskih studija različitih korelacionih funkcija *Bill, R. (1985.)* pokazao je da koeficijenti kriterijum matrica mogu biti dobijeni na osnovu različitih korelacionih funkcija, ali rešenja naravno zavise od izbora funkcije.

Jedno bolje približenje kriterijum matrice realnom stanju, realizovao je *Banov, B. (1982.)* uzimajući u obzir moguću tačnost planiranih opažanja, na osnovu koje je iterativnim putem odredio matricu $Q_{\hat{l}}^{(i)}$, a zatim indirektno kriterijum matricu $Q_x = F(A, Q_{\hat{l}}^{(i)})$. Problem kriterijum matrica u 1-D mrežama, *Cross, P.* i *Thapa, K. (1977.)* rešili su direktno iskoristivši pogodnost određivanja koeficijenata korelacije između nepoznatih u ovim mrežama.

Mogućnost kreiranja objektivnih kriterijum matrica, kada su poznati rezultati prethodne analize tačnosti opažanja u obliku matrice K_l i kada je u fazi izrade projekta mreže definisana neophodna i dovoljna tačnost koordinata

KOVARIJACIONA MATRICA $K_{\hat{x}}$

- tačnost tačaka
  - globalne mere
  - lokalne mere
- tačnost funkcija
  - globalne mere
  - lokalne mere

$$\mathrm{Det}K_{\hat{x}} = \Pi\,\lambda_i \Longrightarrow \min$$
$$\mathrm{tr}\,K_{\hat{x}} = \Sigma\,\lambda_i \Longrightarrow \min$$
$$\bar{\sigma}^{2}_{x} = \frac{1}{u}\,\mathrm{tr}\,K_{\hat{x}}$$

$$\sigma_{\hat{x}_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{x}_i\hat{x}_i}}$$
$$A = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_1}$$
$$B = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_2}$$
$$\mathrm{tg}2\Theta = 2Q_{\hat{x}\hat{x}} \;/\; (Q_{\hat{x}\hat{x}}Q_{\hat{y}\hat{y}})$$
$$M = \sqrt{\sigma^2_{\hat{x}} + \sigma^2_{\hat{y}}}$$
$$M = \hat{\sigma}_o \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$f^T f \lambda_{min} \le \sigma^2_F \le f^T f \lambda_{max}$$
$$\lambda_{max} \Longrightarrow \min$$
$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \Longrightarrow 1$$
$$\lambda_{max} - \lambda_{min} \Longrightarrow \min$$

$$\sigma^2_F = \hat{\sigma}^2_0\, f^T K_{\hat{x}\hat{x}}\, f$$
$$A^2 = \frac{\hat{\sigma}^2_0}{2}\,(Q_{\Delta x\Delta x} + Q_{\Delta y\Delta y} + k)$$
$$B^2 = \frac{\hat{\sigma}^2_0}{2}\,(Q_{\Delta x\Delta x} + Q_{\Delta y\Delta y} - k)$$
$$\mathrm{tg}\Theta = \frac{2\,Q_{\Delta x\Delta y}}{Q_{\Delta x\Delta x} - Q_{\Delta y\Delta y}}$$

Sl.6.2.1. Kriterijumi tačnosti geodetskih mreža.

σ_x objašnjene su u radu *Aleksić, I. (1988a)*. U ovom pristupu neophodno je prvo odrediti matricu kofaktora nepoznatih veličina

$$Q_{\hat{x}} = (A^T K_l^{-1} A)^+ \qquad \ldots(6.2.1)$$

a zatim iz ove matrice koeficijente korelacije

$$r_{\hat{x}_i \hat{x}_j} = Q_{\hat{x}_i \hat{x}_j} / \sqrt{Q_{\hat{x}_i \hat{x}_i} Q_{\hat{x}_j \hat{x}_j}} \qquad i,j = 1,2\ldots u \quad i \neq j \qquad \ldots(6.2.2)$$

odnosno korelacionu matricu

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & r_{\hat{x}_1\hat{x}_2} & \ldots & r_{\hat{x}_1\hat{x}_u} \\ & 1 & \ldots & r_{\hat{x}_2\hat{x}_u} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{simetrično} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots(6.2.3)$$

Kovarijacionu kriterijum matricu pišemo u obliku

$$K_x = D_x R_x D_x = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & r_{\hat{x}_1\hat{x}_2}\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} & \ldots & r_{\hat{x}_1\hat{x}_u}\sigma_{x_1}\sigma_{x_u} \\ & \sigma_{x_2}^2 & \ldots & r_{\hat{x}_2\hat{x}_u}\sigma_{x_2}\sigma_{x_u} \\ \text{simetrično} & & \ldots & \sigma_{x_u} \end{bmatrix} \qquad \ldots(6.2.4)$$

gde je D_x dijagonalna matrica neophodne i dovoljne tačnosti

$$D_x = \mathrm{Diag}\ [\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \ldots \sigma_{x_u}]. \qquad \ldots(6.2.5)$$

Lako se uočava da je kovarijaciona kriterijum matrica u funkcionalnoj zavisnosti od

$$K_x = F \left[\begin{array}{l} 1.\ \text{dizajna mreže} = A \\ 2.\ \text{neophodna i dovoljna tačnost} = D_x \\ 3.\ \text{tačnosti planiranih opažanja} = K_l \end{array} \right.$$

ili za $K_l = I$

$$K_x = F \left[\begin{array}{l} 1.\ \text{dizajn mreže} = A \\ 2.\ \text{neophodna i dovoljna tačnost} = D_x . \end{array} \right.$$

Na ovaj način formirane kriterijum matrice bile su korišćene u različitim modelima optimizacije, *Aleksić, I.(1988a, 1988b, 1990.)*, u kojima je pokazana objektivnost ovih matrica.

Međutim, i pored ove objektivnosti, istaknut je problem definisanja neophodne i dovoljne tačnosti posredstvom σ_x. Razlog ovome je činjenica da u realnim geodetskim mrežama stanadardne devijacije $\sigma_{\hat{x}}$ zavise od izbora datuma mreže, odnosno daju apsolutnu tačnost (sl. 3.4.1).

Ova pojava ima manji ili veći uticaj na rezultate optimizacije gde se dolazi u situaciju da oni zavise od datuma mreže odnosno, izbora početka koordinatnog sistema. Naravno, zavisnost optimalne tačnosti opažanja od koordinatnog sistema ne može se ničim opravdati. Zapravo, fizički proces opažnja koji treba da se ostvari prema optimalnim standardnim devijacijama ne može se ni na koji način dovoditi u vezu sa koordinatnim sistemom. Drugim rečima, kakve veze ima fizički proces opažanja sa koordinatnim sistemom koga možemo proizvoljno postaviti ili birati u proizvoljnoj tački mreže? Jasno je, nikakve.

Problem kriterijum matrice, strogo govoreći, bio bi valjano rešen, kada bi se njeni koeficijenti određivali na osnovu parametara koji ne zavise od izbora datuma mreže.

Pokušaj autora da reši uočeni problem kod kriterijum matrice, pri tadašnjem stanju znanja, ostao je bez rezultata. Sada, imajući u vidu radove *Einstein, A. (1961.)*, *Grafarend, E. (1976.)* i *Welsh, W. (1979.)*, kao i zaključak iz poglavlja 3.4, istaknuti problem može ipak biti rešen.

Razmotrimo prvo problem kriterijum matrica u slobodnim 1-D mrežama. Kako je u poglavlju 3.4 pokazano da standardne devijacije nepoznatih $\sigma_{\hat{x}}$ ne zavise od koordinatnog sistema onda, neophodna i dovoljna tačnost može biti definisana u vidu matrice D_x (6.2.5), a kriterijum matrica određena prema (6.2.4).

Kod slobodnih 2-D mreža, srednje položajne greške M_i su invarijantne u odnosu na datum, pa pomoću njih možemo definisati kriterijume tačnosti. Očigledno, sada se nameće sledeće pitanje; Kako definisane vrednosti M_i uključiti u kriterijum matricu?

Radi jednostavnosti, razmotrimo prvo slučaj jedne tačke za koju je poznata položajna tačnost M i submatrica

$$Q_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{X}\hat{X}} & Q_{\hat{X}\hat{Y}} \\ Q_{\hat{Y}\hat{X}} & Q_{\hat{Y}\hat{Y}} \end{bmatrix} \qquad \ldots(6.2.6)$$

preuzeta iz matrice (6.2.1). Nepoznata kriterijum matrica ima oblik

$$K_x = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{XY} & K_{YY} \end{bmatrix} \qquad \ldots(6.2.7)$$

Iz matrične jednačine

$$K_x = \sigma_o^2\, Q_{\hat{x}}$$

slede dijagonalni koeficijenti

$$K_{XX} = \sigma_o^2\, Q_{\hat{X}\hat{X}} = \sigma_o^2\, Q_{\hat{X}\hat{X}}\, \frac{M^2}{M^2} = \frac{\sigma_o^2\, Q_{\hat{X}\hat{X}}\, M^2}{\sigma_o^2 (Q_{\hat{X}\hat{X}} + Q_{\hat{Y}\hat{Y}})} \qquad \ldots(6.2.8)$$

$$K_{YY} = \sigma_o^2\, Q_{\hat{Y}\hat{Y}} = \sigma_o^2\, Q_{\hat{Y}\hat{Y}}\, \frac{M^2}{M^2} = \frac{\sigma_o^2\, Q_{\hat{Y}\hat{Y}}\, M^2}{\sigma_o^2 (Q_{\hat{X}\hat{X}} + Q_{\hat{Y}\hat{Y}})} \qquad \ldots(6.2.9)$$

ili

$$\boxed{K_{XX} = \frac{Q_{\hat{X}\hat{X}}}{Q_{\hat{X}\hat{X}} + Q_{\hat{Y}\hat{Y}}}\, M^2} \qquad \ldots(6.2.10)$$

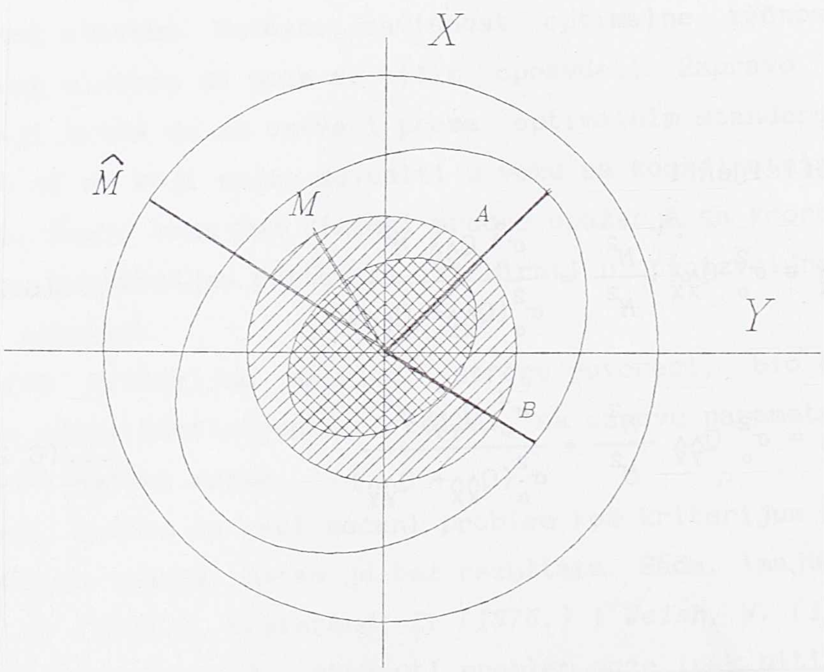
$$K_{YY} = \frac{Q_{\hat{Y}\hat{Y}}}{Q_{\hat{X}\hat{X}} + Q_{\hat{Y}\hat{Y}}} M^2 \qquad \text{...(6.2.11)}$$

Vandijagonalni koeficijent određujemo prema

$$K_{XY} = r_{\hat{X}\hat{Y}} \sqrt{K_{XX} \; K_{YY}} \qquad \text{...(6.2.12)}$$

gde je koeficijent $r_{\hat{X}\hat{Y}}$ određen prema (6.2.2).

Rešenja $K_{XX} = \sigma_X^2$, $K_{YY} = \sigma_Y^2$ i $K_{XY} = r_{\hat{X}\hat{Y}} \, \sigma_X \, \sigma_Y$ predstavljaju tražene koeficijente kovarijacione kriterijum matrice (6.2.4). Očigledno, u slučaju više tačaka u mreži, na ovaj način svi koeficijenti matrice (6.2.4) mogu biti određeni. Geometrijsko značenje ovog rešenja prikazano je na slici 6.2.2.



Sl.6.2.2. Realna položajna tačnost $\hat{M}$ *i neophodna* M (M < $\hat{M}$).

Ako je definisana neophodna i dovoljna položajna tačnost M manja od realne položajne tačnosti u mreži $\hat{M}$ (M < $\hat{M}$), onda su i standardne devija- devijacije σ_X manje od realnih $\sigma_{\hat{X}}$ ($\sigma_X < \sigma_{\hat{X}}$), takođe elipsa grešaka sa poluosama A i B je manja ali ima istu orjentaciju.

Ista orjentacija elipse grešaka je posledica određivanja koeficijenata korelacije iz realne mreže prema (6.2.2).

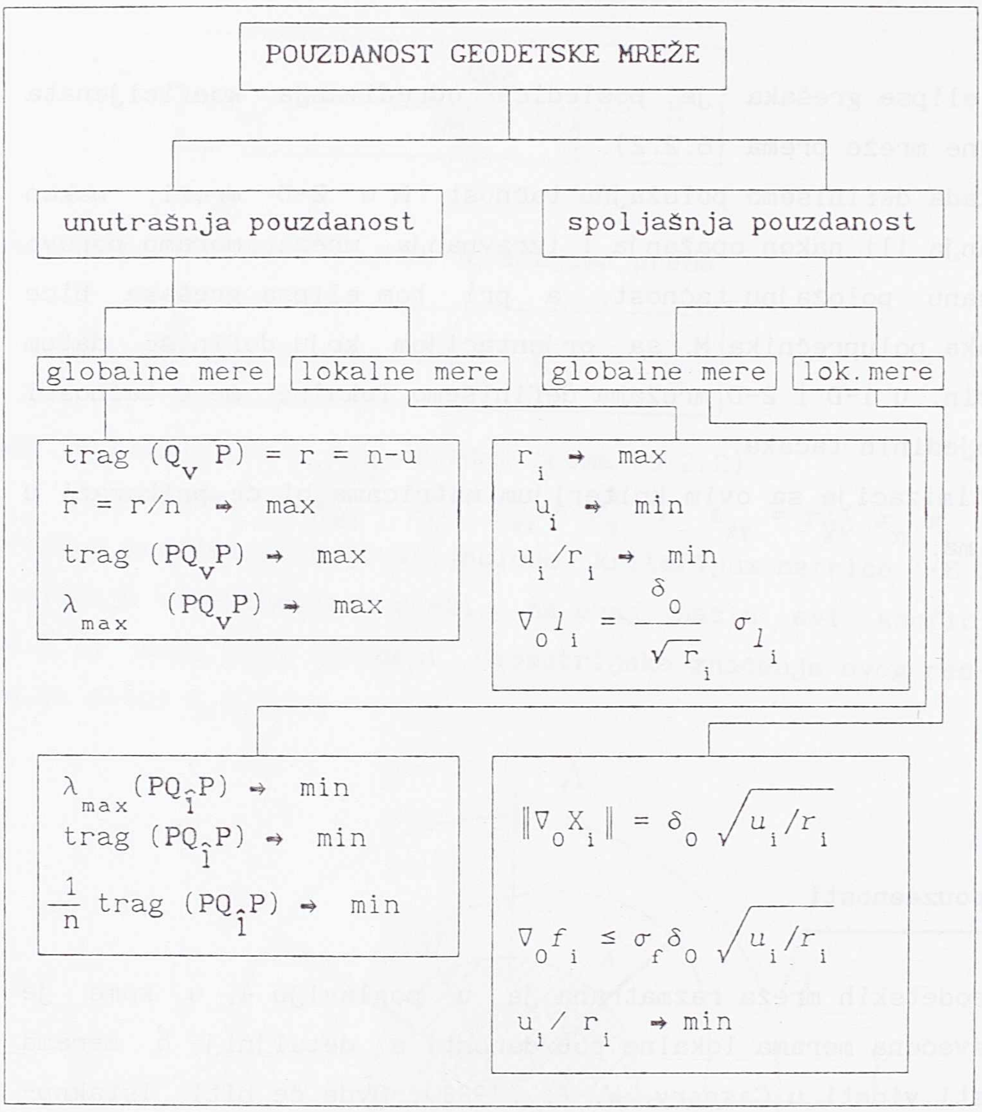
Prema tome, kada definišemo položajnu tačnost M u 2-D mreži, nakon optimizacije opažanja ili nakon opažanja i izravnanja mreže, moramo ponovo dobiti ovu definisanu položajnu tačnost, a pri tom elipsa grešaka biće unutar kruga grešaka poluprečnika M, sa orjentacijom koju definiše datum mreže. Na ovaj način, u 1-D i 2-D mrežama definišemo lokalne mere tačnosti odnosno tačnost pojedinih tačaka.

Rezultati optimizacije sa ovim kriterijum matricama biće prikazani u narednim poglavljima.

6.3. Kriterijumi pouzdanosti

Pouzdanost geodetskih mreža razmatrana je u poglavlju 4, u kome je najveća pažnja posvećena merama lokalne pouzdanosti a detaljnije o merama globalne pouzdanosti videti u *Caspary, W. F. (1988)*. Ovde će biti istaknute samo mere pouzdanosti koje mogu poslužiti kao kriterijumi pouzdanosti u optimizaciji geodetskih mreža *(Sl.6.3.1)*.

Ove mere pouzdanosti mogu biti direktno uključene u optimizaciju dizajna drugog reda; problem je složen iz jednostavnog razloga što je matrica dizajna A konstantna. Odavde proizilazi da o globalnim merama pouzdanosti možemo voditi računa samo u fazi izrade projekta. Naime, nijedan postupak optimizacije drugog reda ne može poboljšati globalne kriterijume, jer ako je mreža projektovana sa brojem suvišnih merenja r=10, ovaj broj ostaje konstantan nakon optimizacije. Međutim, metodama optimizacije drugog reda otvoren je put ka rešenju lokalnih mera pouzdanosti.



Sl.6.3.1. Kriterijumi pouzdanosti geodetskih mreža.

Činjenica je, da i pored toga što projekat mreže može imati dobru globalnu pouzdanost, mogu postojati pojedina planirana opažanja sa veoma slabom lokalnom pouzdanošću. Ovo je upravo problem koji treba da reši optimizacija drugog reda: Kako opažanja sa slabom lokalnom pouzdanošću transformisati metodom optimizacije u opažanja sa dobrom pouzdanošću?

Odgovor na ovo pitanje biće dat u narednim poglavljima.

7. SEKVENCIJALNI MODEL OPTIMIZACIJE OPAŽANJA

Kao što je naglašeno, izvesne metode optimizacije opažanja u geodetskim mrežama, za tražene optimalne težine daju negativne vrednosti ovih veličina. Ova pojava, najčešće je izražena kod primene metode direktnog rešenja ($(A^T \odot A^T)p=q$, $q=vec\ Q_x^{-1}$), metode kanonskog rešenja ($(A^T \odot A^T)p=d$, $d=vec\lambda_i$), i drugih, pa ova rešenja redovno prati dodatno ograničenje $p_i \geq 0$.

Nasuprot ovim metodama, razvijeni su postupci koji daju uvek pozitivna rešenja, pa je na taj način dodatno ograničenje suvišno, a jedan od ovih postupaka je i sekvencijalni. Kako je razvoj ovog modela optimizacije već detaljno objašnjen u *(Aleksić, I. 1988a., 1990.)* to će on biti veoma sažeto prikazan u cilju kasnijeg uključivanja optimizacije sa aspekata pouzdanosti i osetljivosti.

7.1. Model baziran na tačnosti

Problem određivanja optimalnih težina opažanja ili, što je identično ovome, optimalnih standardnih devijacija definišemo opštom matričnom jednačinom

$$\boxed{K_x = (A^T K_{\bar{l}}^{-1} A)^+} \qquad \ldots(7.1.1)$$

gde je:

K_x kovarijaciona kriterijum matrica nepoznatih,

$K_{\bar{l}}$ kovarijaciona matrica nepoznatih optimalnih, standardnih devijacija planiranih opažanja.

Imajući u vidu mogućnost razlaganja kovarijacione kriterijum matrice (6.2.4), jednačinu (7.1.1) pišemo u obliku

$$D_x R_x D_x = (A^T D_{\bar{l}}^{-1} R_{\bar{l}}^{-1} D_{\bar{l}}^{-1} A)^+ \qquad \ldots(7.1.2)$$

U ovoj jednačini poznate su matrice D_x = const, A = const i $R_{\bar{l}}$ = const ili za stohastički nezavisna opažanja $R_{\bar{l}}$ =I. Na levoj strani jednačine nepoznata je korelaciona matrica $R_x=F(A,K_l)$ odnosno K_l a na desnoj dijagonalna matrica optimalnih standardnih devijacija

$$D_{\bar{l}} = \mathrm{Diag}\,[\, \sigma_{\bar{l}_1}, \sigma_{\bar{l}_2}, \ldots \sigma_{\bar{l}_n} \,] \qquad \ldots(7.1.3)$$

Na ovaj način, postoji jedna matrična jednačina sa dve nepoznate matrice, pa slede višeznačna rešenja za (7.1.2). Problem leve strane jednačine rešen je putem definisanja početnih uslova odnosno, formiranjem realne kovarijacione kriterijum matrice K_x.

U cilju dobijanja optimalnih standardnih devijacija $\sigma_{\bar{l}_i}$ jednačinu (4.3.3) pišemo u obliku

$$u_i = \sigma^2_{\hat{l}_i} / \sigma^2_{l_i}$$

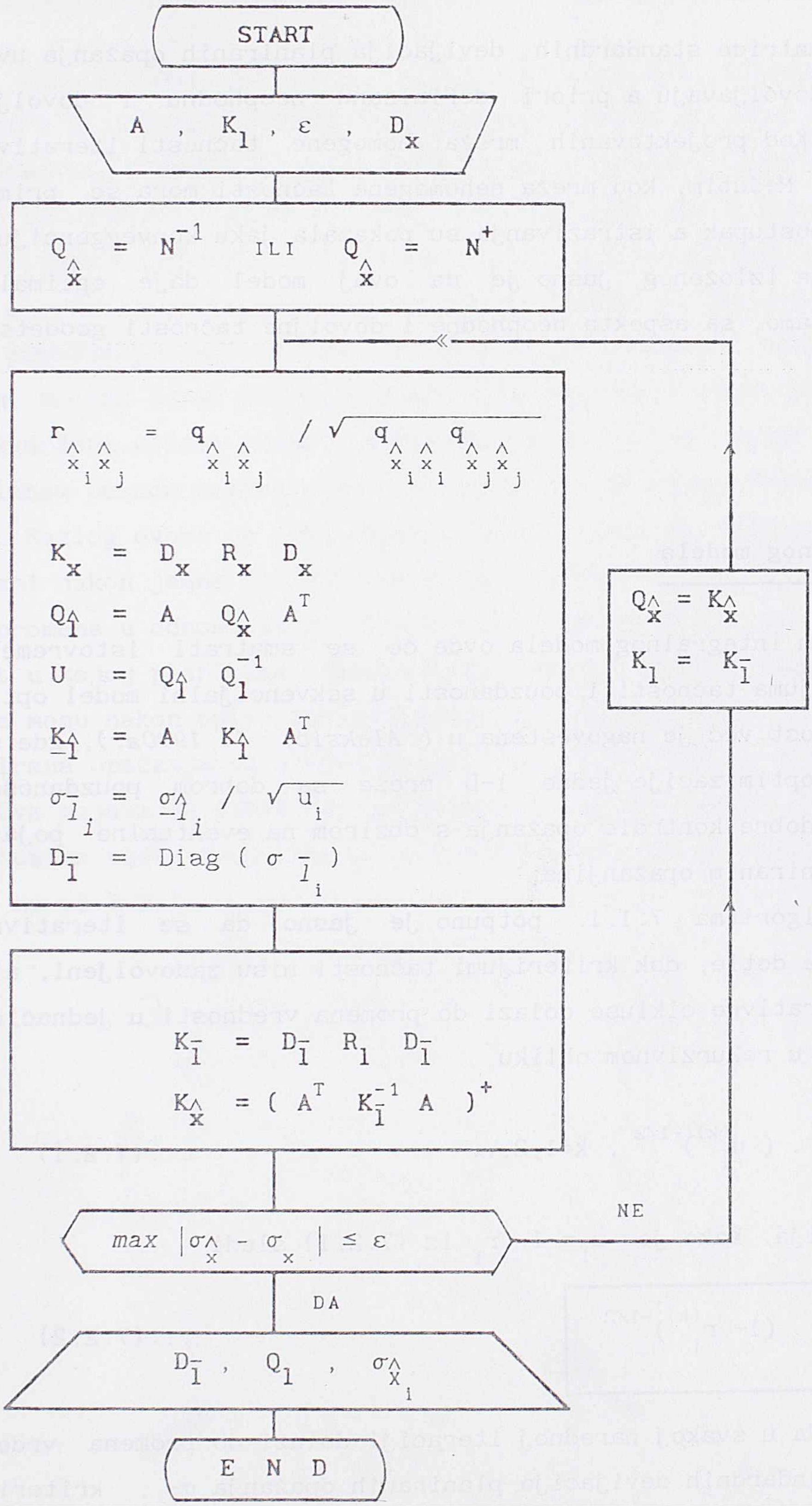
ili

$$\sigma_{l_i} = \sigma_{\hat{l}_i} / \sqrt{u_i} \quad , \; i=1,2,\ldots n \qquad \ldots(7.1.4)$$

Standardne devijacije izravnatih veličina $\sigma_{\hat{l}}$ zamenimo sa vrednostima $\underline{\sigma}_{\hat{l}}$ dobijenim iz kriterijum matrice izravnatih veličina (6.4.4), pa slede

$$\boxed{\sigma_{\bar{l}_i} = \underline{\sigma}_{\hat{l}_i} / \sqrt{u_i} = F(A,K_l,D_x)} \qquad \ldots(7.1.5)$$

optimalne standardne devijacije planiranih opažanja. Da bi se što bolje ispunili zahtevi neophodne tačnosti definisani matricom D_x , postupak se može ponavljati odnosno, postaje iterativan što je ilustrovano grafičkim algoritmom na slici 7.1.1. Ovaj postupak primenjivan je kod slobodnih i neslobodnih 1-D, 2-D i 3-D geodetskih mreža. Rešenja koja se dobijaju



Sl.7.1.1. Sekvencijalni model optimizacije geodetskih mreža sa aspekta tačnosti.

u vidu dijagonalne matrice standardnih devijacija planiranih opažanja uvek su pozitivna i zadovoljavaju a priori definisanu neophodnu i dovoljnu tačnost nepoznatih. Kod projektovanih mreža homogene tačnosti iterativni postupak je suvišan. Međutim, kod mreža nehomogene tačnosti mora se primenjivati iterativni postupak a istraživanja su pokazala jaku konvergenciju.

Na osnovu svega izloženog, jasno je da ovaj model daje optimalnu tačnost opažanja samo sa aspekta neophodne i dovoljne tačnosti geodetske mreže.

7.2. Razvoj integralnog modela

Pod razvojem integralnog modela ovde će se smatrati istovremeno uključivanje kriterijuma tačnosti i pouzdanosti u sekvencijalni model optimizacije. Ova mogućnost već je nagoveštena u (*Aleksić, I. 1990a.*), gde su pokazani rezultati optimizacije jedne 1-D mreže sa dobrom pouzdanošću odnosno, mogućnošću dobre kontrole opažanja s obzirom na eventualne pojave grubih grešaka u planiranim opažanjima.

Na osnovu algoritma 7.1.1. jasno je da se iterativni postupak ponavlja sve dotle, dok kriterijumi tačnosti nisu zadovoljeni, ali istovremeno kroz iterativne cikluse dolazi do promena vrednosti u jednačini (7.1.5) koju pišemo u rekurzivnom obliku

$$\sigma_{\bar{l}_i}^{(k)} = \sigma_{\hat{\underline{l}}_i}^{(k)} \cdot (u_i^{(k)})^{-1/2} , \quad k=1,2,.. \qquad ...(7.2.1)$$

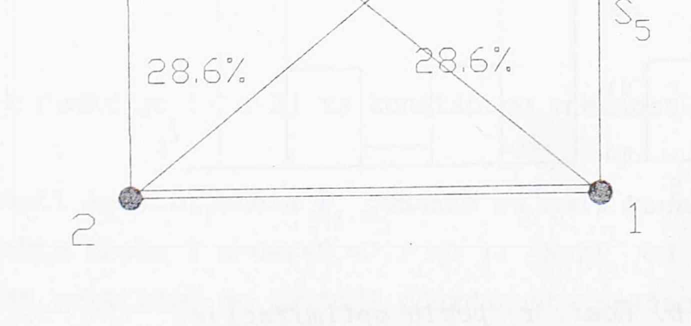
gde je k broj iteracija. Kako je $u_i = 1- r_i$ iz (7.2.1) sledi

$$\boxed{\sigma_{\bar{l}_i}^{(k)} = \sigma_{\hat{\underline{l}}_i}^{(k)} \cdot (1- r_i^{(k)})^{-1/2}} \qquad ...(7.2.2)$$

Prema (7.2.2) sledi da u svakoj narednoj iteraciji dolazi do promena vrednosti optimalnih standardnih devijacija planiranih opažanja $\sigma_{\bar{l}}$, kriterijum matrice $K_{\hat{\underline{l}}}$ kao i koeficijenata r_i.

Kako su koeficijenti r_i elementi kriterijuma pouzdanosti (Sl.6.3.1) to znači da u samom procesu optimizacije dolazi do interakcije tačnosti i pouzdanosti. U narednim razmatranjima upravo se želi posvetiti pažnja navedenoj interakciji između tačnosti i pouzdanosti kao i mogućnostima uvođenja kriterijuma pouzdanosti u sekvencijalni model optimizacije.

Pre svega interesantno je razmotriti ponašanje koeficijenata r_i u dosadašnjem modelu (Sl.7.1.1). U istraživanju većeg broja realnih mreža, uočeno je da projekat mreže koji ima dobre ocene kontrole *(0.3 ≤ r_i ≤ 1)*, zadržava slične ocene i nakon optimizacije. Sa druge strane, projekat sa slabom ocenom kontrole može zadržati takođe slabe ocene nakon optimizacije. Razlog ovome je jaka konvergencija modela ka rešenju, pa u praktičnoj primeni nakon jedne ili dve iteracije vrednosti koeficijenata r_i se neznatno promene u odnosu na početno stanje. Uočeno je da postoji i treća mogućnost u kojoj planirana opažanja sa dobrom ocenom kontrole u projektu mreže mogu nakon optimizacije dobijaju slabije ocene, a važi i obrnuto, planirana opažanja sa slabom ocenom nakon optimizacije dobijaju dobre ocene. Ova pojava je retka ali je moguća u slučajevima gde je broj iteracija eventualno veći. Ovaj slučaj ilustruje optimizacija neslobodne 2-D mreže date na sl.7.2.1.



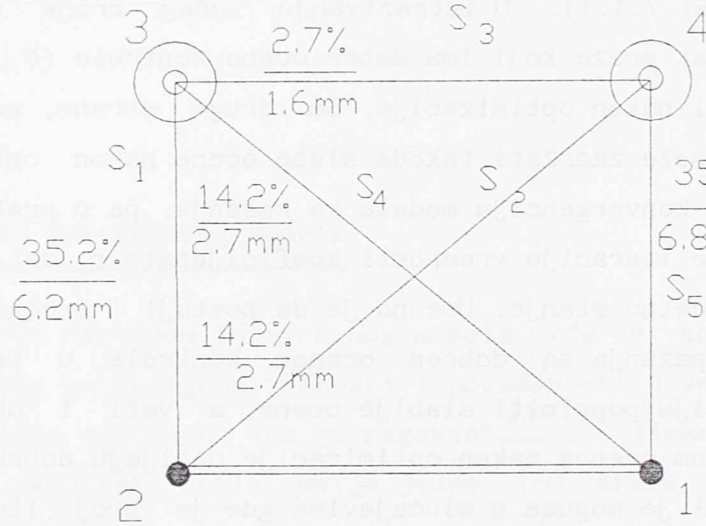
$\bar{r}=r/n=0.20$

$r=\sum r_i=1$

$p_i = 1$

Sl.7.2.1. Koeficijenti r_i u projektu 2-D mreže

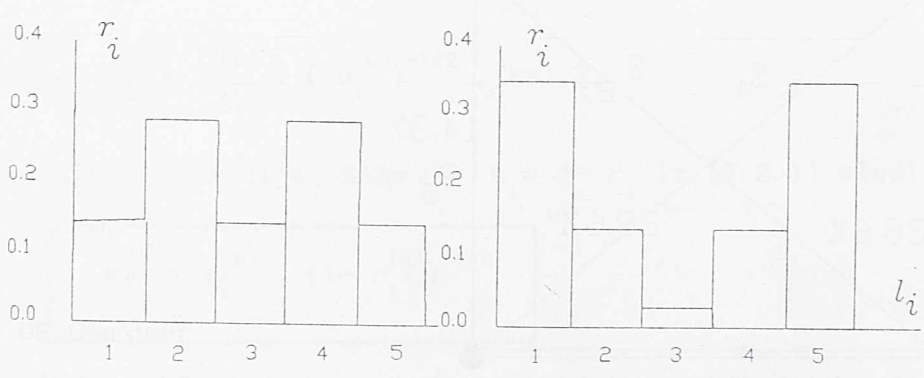
Svi koeficijenti r_i u projektu imaju ocenu dovoljne kontrole $(0.1 \leq r_i \leq 0.3)$ a nakon optimizacije *(Sl.7.2.2)*, vrednosti koeficijenata r_1 i r_5 su se povećale i pripadaju sada oceni dobre kontrole $(r_1$ i $r_5 > 0.3)$, vrednosti koeficijenata r_2 i r_4 su se smanjile ali ostaju u intervalu $(0.1 < r_i < 0.3)$, dok se vrednost koeficijenta r_3 znatno smanjila i nalazi se u domenu slabe kontrole.



$$\frac{35.2\ \%}{6.2\ mm} = \frac{r_i}{\sigma_{s_i}} \quad , \quad \sigma_{X_i} = \sigma_{Y_i} = 5\ mm \ , \ r = 1$$

Sl.7.2.2. Koeficijenti r_i nakon optimizacije mreže.

Ilustracija ove transformacije koeficijenata r_i data je na slici 7.2.3.



a) Koef. r_i u projektu. b) Koef. r_i posle optimizacije.

Sl.7.2.3. Preraspodela koeficijenata r_i u optimizaciji.

Kako je suma koeficijenata r_i konstantna $\sum r_i = const = r$ onda preraspodela njihovih vrednosti mora biti u okviru ove konstante. To znači da će povećanje vrednosti jednog od koeficijenata r_i prouzrokovati smanjenje vrednosti drugih koeficijenata ili obrnuto, smanjenje vrednosti jednog koeficijenta prouzrokovaće povećanje ostalih.

Promene koeficijenata r_i odnosno u_i prouzrokovaće promene u vrednostima optimalnih standardnih devijacija $\sigma_{\bar{l}_i}$. Za konstantnu vrednost standardne devijacije $\sigma_{\hat{l}}$ date su vrednosti $\sigma_{\bar{l}_i}$ u funkciji promena r_i (tabela 7.2.1), prema (7.2.2).

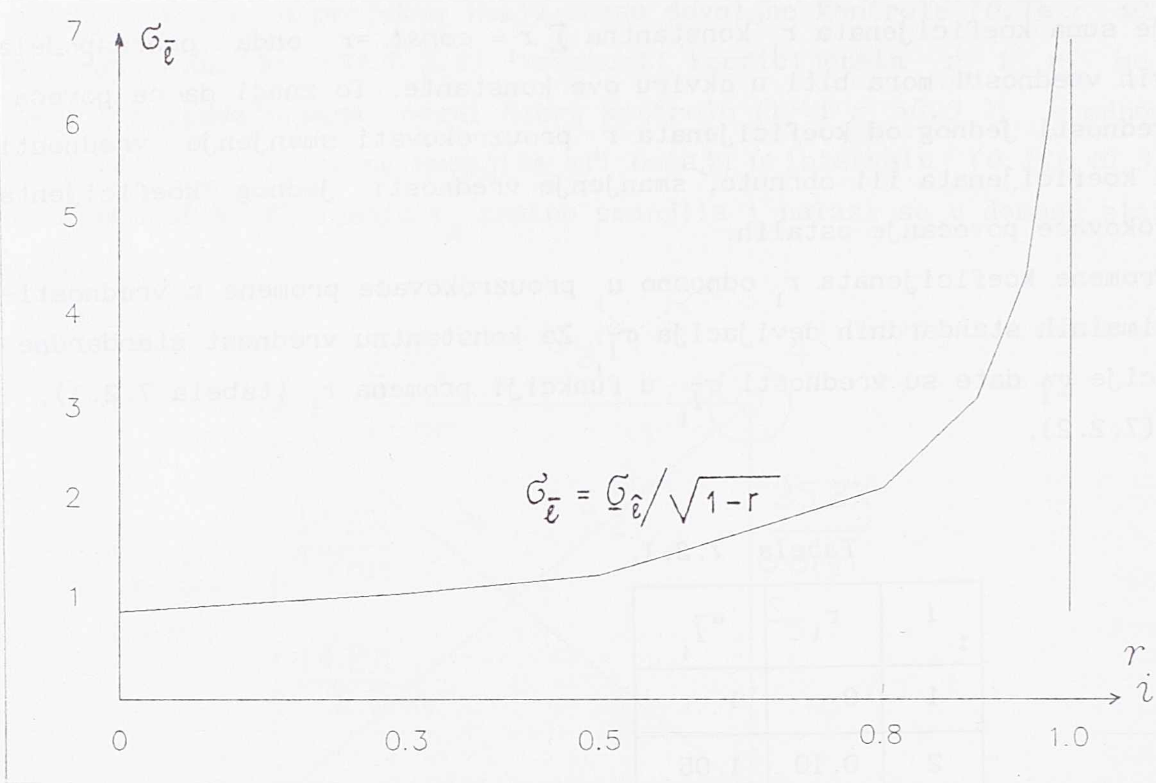
Tabela 7.2.1.

i	r_i	$\sigma_{\bar{l}_i}$
1	0	1
2	0.10	1.05
3	0.50	1.41
4	0.80	2.24
5	0.90	3.16
6	0.95	4.47
7	0.99	10.00
8	1.00	∞

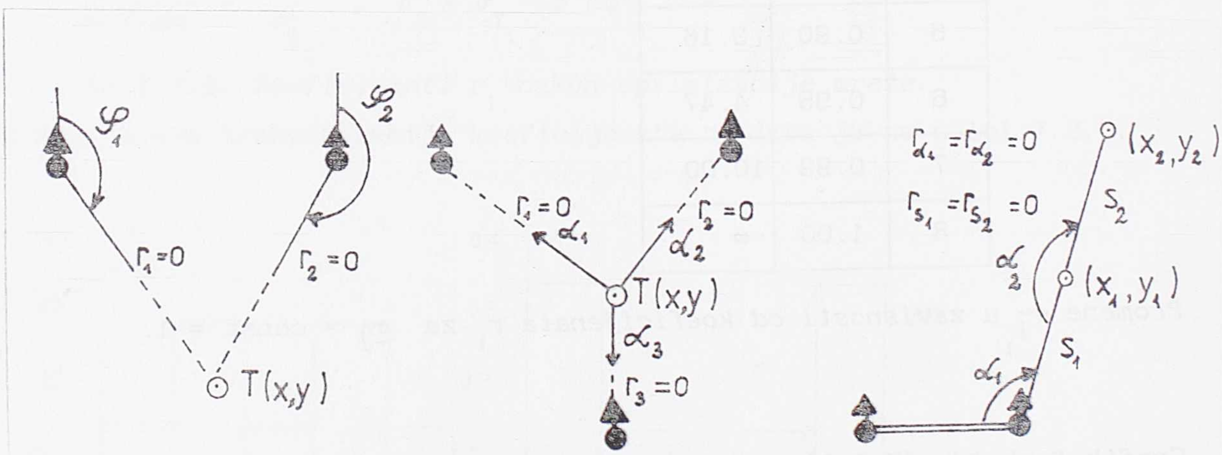
Promene $\sigma_{\bar{l}_i}$ u zavisnosti od koeficijenata r_i za $\sigma_{\hat{l}}$ = const = 1.

Grafik funkcije (7.2.2) za konstantnu vrednost $\sigma_{\hat{l}}$ dat je na slici 7.2.4.

Vrednosti koeficijenata r_i jednake su nuli kada nema suvišnih opažanja u projektu mreže ($n-u=r=0 \Rightarrow r_i=0$). Neki od slučajeva u geodetskim mrežama kada praktično ne postoji pouzdanost opažanja dati su na slici 7.2.5.



Sl. 7.2.4. Promene $\sigma_{\bar{l}_i}$ u zavisnosti od r_i pri $\sigma_{\hat{l}}$ = const.



Sl.7.2.5. Slučajevi kada je r_i=0.

Odavde proizilazi, da ovi slučajevi ne mogu biti obuhvaćeni modelom optimizacije sa aspekta puzdanosti opažanja već samo sa aspekta tačnosti.

U sekvencijalnom modelu optimizacije, kroz iteracije dolazi do promene vrednosti r_i, $\sigma_{\hat{l}}$ i $\sigma_{\bar{l}}$ prema (7.2.2). Grafik ovih promena dat je na slici 7.2.6, za karakteristično planirano opažanje dužine S_3 u optimizaciji 2-D mreže (sl.7.2.1. i 7.2.2). Očigledno, vrednosti optimalnih standardnih devijacija $\sigma_{\bar{l}_i}$ monotono opadaju kroz iteracije. Na osnovu numeričkih pokazatelja za r_i i $\sigma_{\hat{l}_i}$ datih na istom grafiku uočava se da njihove vrednosti takođe monotono opadaju kroz iteracije.

Naravno, ove vrednosti mogu biti i monotono rastuće. Na sl. 7.2.7. grafik promena $\sigma_{\bar{S}_i}$ (i = 1,2...5) pokazuje oba slučaja monotonosti, a bitno je to da kroz iteracije vrednosti ne menjaju trend rasta ili opadanja.

Nakon ovih detaljnih razmatranja, sada ima smisla govoriti o uključivanju kriterijuma pouzdanosti u sekvencijalni model optimizacije. Na osnovu rezultata optimizacije *(Sl.7.2.4, 7.2.6 i 7.2.7)* lako je uočiti da važi

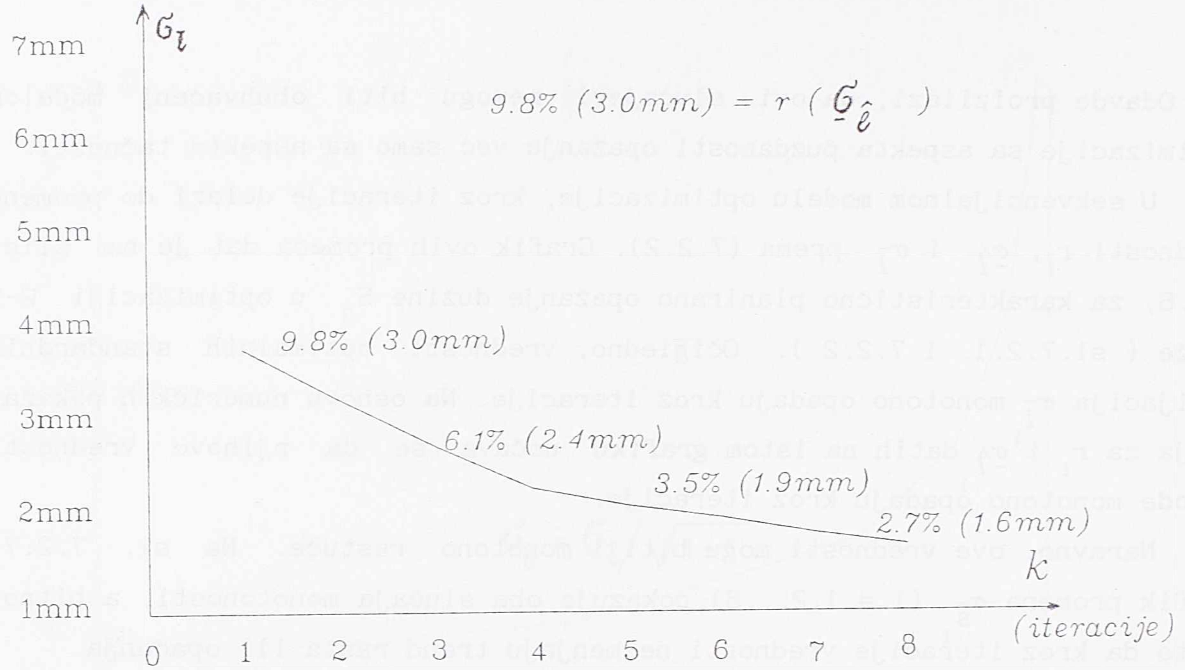
$$\left.\begin{array}{ll} \text{ako} & r_i \to \max \\ \text{onda} & u_i \to \min \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} u_i/r_i & \to \min \\ \sigma_{\bar{l}_i} & \to \max \end{array}\right] \qquad ...(7.2.3)$$

Odavde proizilazi, da sa povećanjem pouzdanosti opažanja u mreži ($r_i \to$ max), sekvencijalni model optimizacije daje povećane vrednosti optimalnih standardnih devijacija $\sigma_{\bar{l}}$ ->max odnosno, manju tačnost opažanja. Sledi

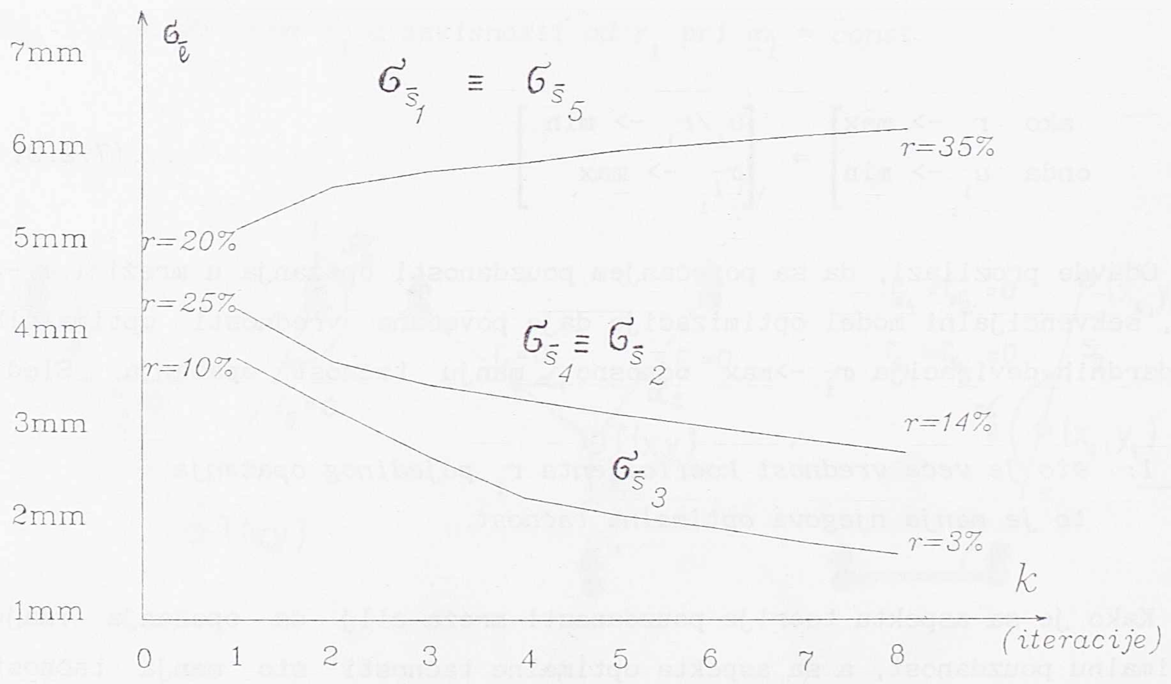
<u>stav 1:</u> *što je veća vrednost koeficijenta r_i pojedinog opažanja*

to je potrebna manja tačnost.

Kako je sa aspekta teorije pouzdanosti mreža cilj da opažanja imaju maksimalnu pouzdanost, a sa aspekta optimalne tačnosti što manja tačnost opažanja, onda je potpuno jasno da sekvencijalni model ispunjava oba zahteva automatski.



Sl.7.2.6. Osetljivost vrednosti $\sigma_{\bar{l}_i}$, r_i i $\sigma_{\hat{l}_i}$



Sl.7.2.7. Osetljivost $\sigma_{\bar{s}_i}$ i r_i u optimizaciji 2-D mreže.

Relacije (7.2.3.) su proizvod zaključaka donešenih na osnovu istraživanja osobina sekvencijalnog modela optimizacije, i sada se može lako konstatovati da su oni u potpunoj saglasnosti sa kriterijumima pouzdanosti geodetskih mreža (sl.6.3.1).

Kada u sekvencijalnom modelu optimizacije vrednosti funkcija monotono opadaju onda važi

$$\left.\begin{array}{l} \text{ako } \; r_i \rightarrow \min \\ \text{onda } \; u_i \rightarrow \max \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_i/r_i \rightarrow \max \\ \sigma_{\bar{l}_i} \rightarrow \min \end{array}\right] \qquad \ldots(7.2.4)$$

U ovom slučaju kada pouzdanost opažanja opada ($r_i \rightarrow \min$) istovremeno tačnost korespodentnog opažanja je strožija ($\sigma_{\bar{l}_i} \rightarrow \min$). Sledi

<u>stav 2:</u> *što je manja vrednost koeficijenta r_i pojedinog opažanja to je potrebna veća tačnost.*

Na ovaj način, sekvencijalni model optimizacije planiranim opažanjima sa slabom pouzdanošću automatski dodeljuje veću optimalnu tačnost, što je principijelno posmatrano sasvim ispravno. Međutim, problem može nastupiti kada koeficijent r_i imaju male vrednosti, kao što je slučaj na sl.7.2.3. a optimalna tačnost korespodentnog opažanja postaje znatno strožija u odnosu na tačnost drugih opažanja (sl.7.2.2).

Ovaj problem u sekvencijalnom modelu optimizacije može se prevazići uvođenjem donje granične vrednosti za koeficijente r_i. Minimalna vrednost $r_{min} = \min(r_i)$ u ovom modelu optimizacije bi će određivana prema $r_{min} = (1/2)\bar{r}$ *Muller, H. (1986.).* Na ovaj način, ako u određenoj iteraciji vrednost koeficijenta r_i dostigne graničnu vrednost $r_{min} = (1/2)\,\bar{r}$ onda vrednosti r_i i $\sigma_{\bar{l}_i}$ proglašavamo konstantnim veličinama

$$\text{ako je } \; r_i^{(k)} \leq r_{min} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r_i^{(k)} = r_{min} = \text{const} \\ \sigma_{\bar{l}_i}^{(k)} = \text{const} \end{array}\right] \qquad \ldots(7.2.5)$$

gde je k broj iteracija.

U sledećim iteracijama *k+1, k+2,...* vrednosti $r_i^{(k)}$ i $\sigma_{\bar{l}_i}^{(k)}$ ostaju konstantne veličine, kao donje granične vrednosti, a za ostala planirana opažanja ove vrednosti će biti promenljive sve do ispunjenja kriterijuma tačnosti mreže.

Na osnovu određene minimalne vrednosti r_{min} lako određujemo maksimalnu vrednost $u_{max} = 1 - r_{min}$.

Kada su uz navedene kriterijume tačnosti i pouzdanosti dobijene optimalne standardne devijacije $\sigma_{\bar{l}}$ predstoji određivanje veličina koje mogu poslužiti u cilju kontrole opažanja. Zamenjujući standardnu devijaciju opažanja σ_l sa optimalnom standardnom devijacijom planiranog opažanja $\sigma_{\bar{l}}$ u (4.6.1) dobijamo

$$\boxed{\nabla_o \bar{l}_i = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}\,\sigma_{\bar{l}_i}} \qquad \text{...(7.2.6)}$$

gde je:

$\nabla_o \bar{l}_i$ optimalna unutrašnja pouzdanost,

$\sigma_{\bar{l}_i}$ optimalna standardna devijacija,

$r_i \geq r_{min} = \frac{1}{2}\,\bar{r}$ koeficijenti r_i nakon optimizacije.

Vrednost parametra necentralnosti $\delta_o = f(\alpha_o, \beta_o)$ biće constantna $\delta_o =$ *const* za sva planirana opažanja. Na osnovu vrednosti $\nabla_o \bar{l}$ možemo u fazi optimizacije geodetske mreže, unapred znati granične vrednosti grubih grešaka koje mogu biti identifikovane nakon izravnanja po metodi najmanjih kvadrata.

Sa koeficijentima r_i dobijenim nakon optimizacije ($r_i \geq r_{min} = \frac{1}{2}\,\bar{r}$) takođe može biti određena optimalna spoljašnja pouzdanost mreže prema (4.6.3) ili (4.6.5).

Na osnovu svih dosadašnjih razmatranja, kreiran je integralni model optimizacije odnosno, sekvencijalni model sa aspekta tačnosti i pouzdanosti mreže (sl.7.2.8). Sam dijagram toka ovog modela optimizacije ne treba dodatno objašnjavati jer je on logička celina dosadašnjih matematičkih razmatranja, ali zato vredi diskutovati mere za ostvarivanje unutrašnje i spoljašnje pouzdanosti koje se na osnovu njega dobijaju.

Na osnovu *stava 1* i *2* i konstantnog parametra necentralnosti $\delta_0 = const$, (7.2.6) pišemo u obliku

$$\nabla_o \bar{l}_i = \frac{\sigma_{\bar{l}_i}}{\sqrt{r_i}}\,\delta_o\ , \quad \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{l}_i} \rightarrow \max \\ r_i \rightarrow \max \end{bmatrix}$$

ili

$$\nabla_o \bar{l}_i = \frac{\sigma_{\bar{l}_i}}{\sqrt{r_i}}\,\delta_o\ , \quad \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{l}_i} \rightarrow \min \\ r_i \rightarrow \min \end{bmatrix} \qquad \ldots(7.2.7)$$

Odavde proizilazi da će mere unutrašnje pouzdanosti određene prema prvom i drugom slučaju (7.2.7) biti približnih vrednosti, bez obzira na vrednosti r_i. Ovo se može ilustrovati na osnovu rezultata optimizacije samo sa aspekta tačnosti (sl.7.2.2) gde dobijamo za S_1 i S_3

$$\nabla_o S_1 = \frac{\delta_o}{\sqrt{0.352}}\ 6.2 = 43 \text{ mm}$$

i
$$\nabla_o S_3 = \frac{\delta_o}{\sqrt{0.027}}\ 1.6 = 40 \text{ mm} \qquad (\delta_o = 4.13).$$

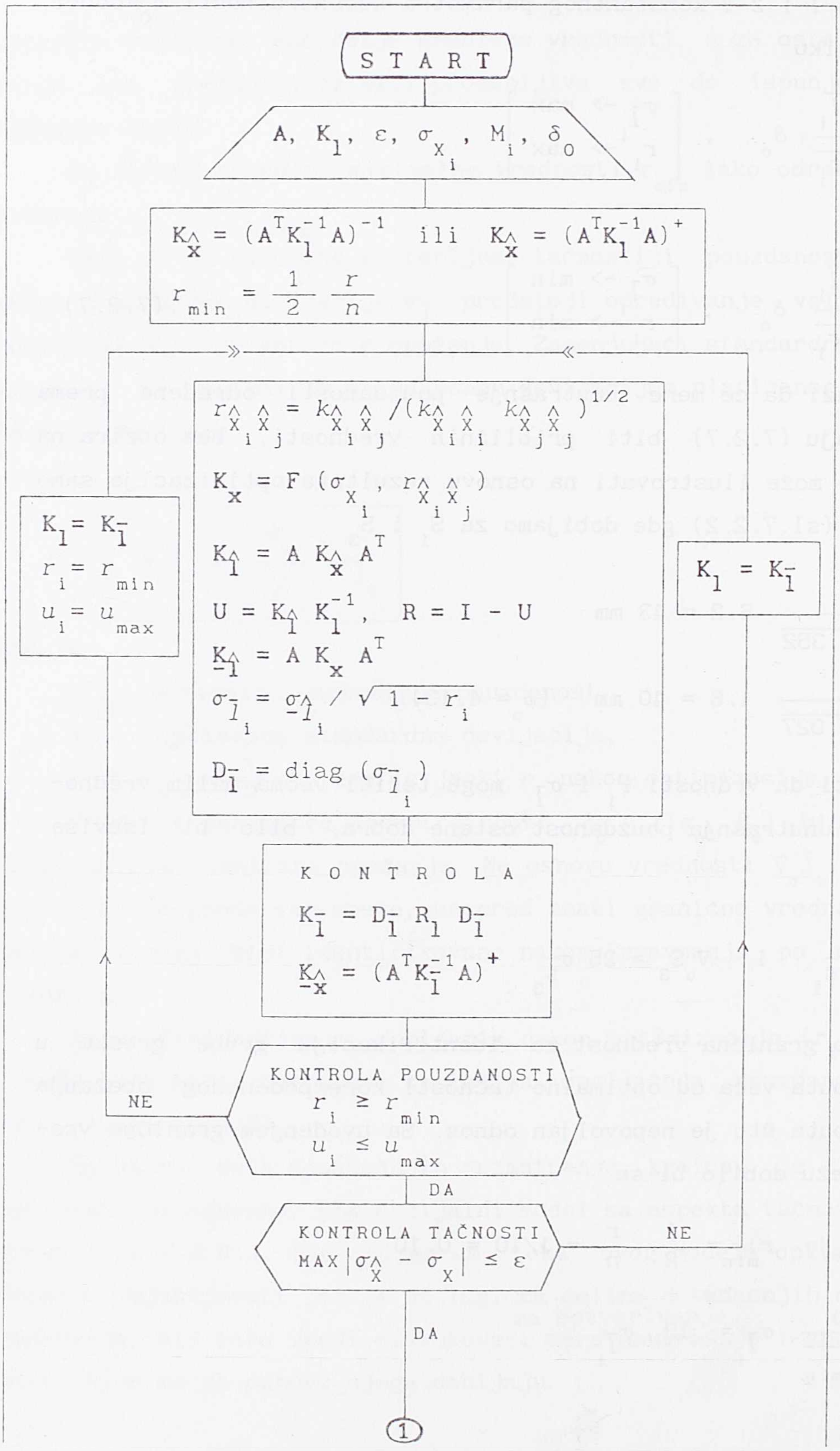
Međutim, tvrditi da vrdnosti r_i i $\sigma_{\bar{l}_i}$ mogu težiti veoma malim vrednostima, a da pri tom unutrašnja pouzdanost ostane dobra, bilo bi isuviše preuranjeno jer je

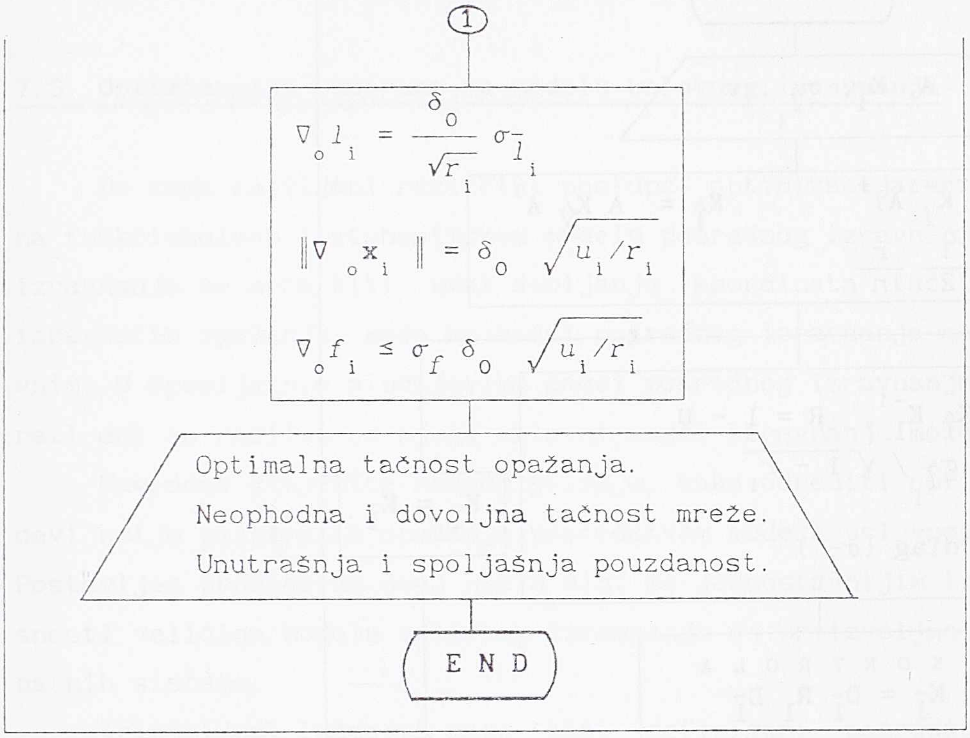
$$\nabla_o S_1 = 7\ \sigma_{\bar{S}_1} \quad \text{i} \quad \nabla_o S_3 = 25\ \sigma_{\bar{S}_3}$$

Očigledno donja granična vrednost za identifikaciju grube greške u opažanju S_1 je 7 puta veća od optimalne tačnosti korespodentnog opažanja dok za S_3 čak 25 puta što je nepovoljan odnos. Sa uvođenjem granične vre-vrednosti za ovu mrežu dobilo bi se

$$r_i > r_{min} \quad \text{gde je} \quad r_{min} = \frac{1}{2}\ \frac{r}{n} = 1/10 = 0.10$$

$$(\nabla_o S_i)_{min} = \frac{\delta_o}{\sqrt{r_{min}}}\ \sigma_{\bar{l}_i} = 13\ \sigma_{\bar{l}_i}$$


START
A, K_l, ε, σ_{x_i}, M_i, δ_0
$K_{\hat{x}} = (A^T K_l^{-1} A)^{-1}$ ili $K_{\hat{x}} = (A^T K_l^{-1} A)^+$
$r_{min} = \frac{1}{2} \frac{r}{n}$
$r_{\hat{x}_i \hat{x}_j} = k_{\hat{x}_i \hat{x}_j} / (k_{\hat{x}_i \hat{x}_i} k_{\hat{x}_j \hat{x}_j})^{1/2}$
$K_x = F(\sigma_{x_i}, r_{\hat{x}_i \hat{x}_j})$
$K_{\hat{l}} = A K_{\hat{x}} A^T$
$U = K_{\hat{l}} K_l^{-1}$, $R = I - U$
$K_{\hat{l}} = A K_x A^T$
$\sigma_{\bar{l}_i} = \sigma_{\hat{l}_i} / \sqrt{1 - r_i}$
$D_{\bar{l}} = \mathrm{diag}(\sigma_{\bar{l}_i})$
$K_l = K_{\bar{l}}$
$r_i = r_{min}$
$u_i = u_{max}$
$K_l = K_{\bar{l}}$
KONTROLA
$K_{\bar{l}} = D_{\bar{l}} R_l D_{\bar{l}}$
$K_{\hat{x}} = (A^T K_{\bar{l}}^{-1} A)^+$
KONTROLA POUZDANOSTI
$r_i \geq r_{min}$
$u_i \leq u_{max}$
NE
DA
KONTROLA TAČNOSTI
$\mathrm{MAX}|\sigma_{\hat{x}} - \sigma_x| \leq \varepsilon$
NE
DA
1



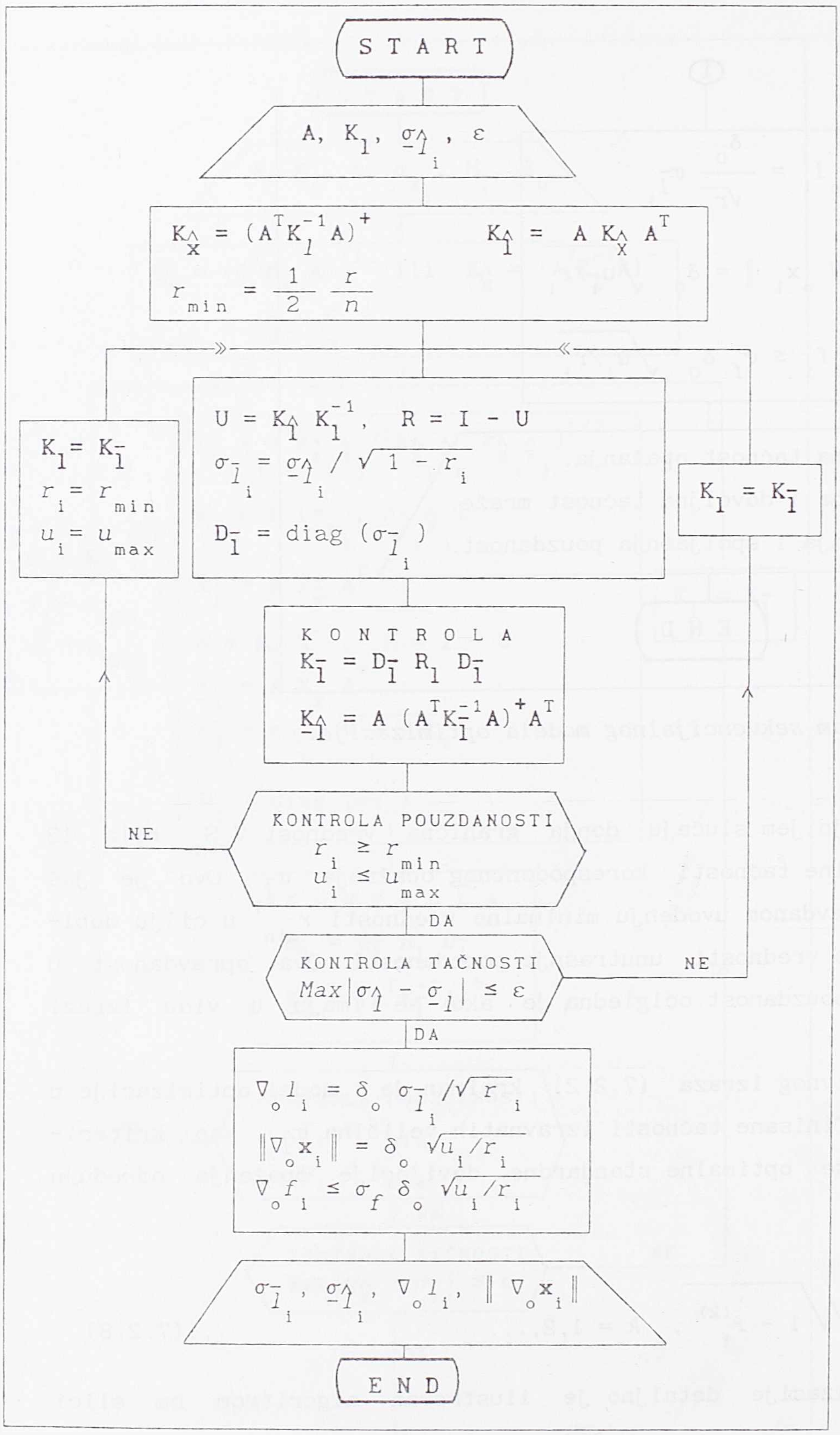
Sl. 7.2.8. Algoritam sekvencijalnog modela optimizacije.

pa bi u najnepovoljnijem slučaju donja granična vrednost $\nabla_o S_i$ bila 13 puta veća od optimalne tačnosti korespodentnog opažanja σ_{l_i}. Ovo je još jedan doprinos opravdanom uvođenju minimalne vrednosti r_{min} u cilju dobijanja donje granične vrednosti unutrašnje pouzdanosti. Ova opravdanost u slučaju spoljašnje pouzdanost očigledna je ako se imaju u vidu izrazi (4.6.3) i (4.6.5).

Na bazi rekurzivnog izraza (7.2.2) kreiran je i model optimizacije u slučaju *a priori* definisane tačnosti izravnatih veličina $\sigma_{\hat{l}}$, kao kriterijuma tačnosti, gde se optimalne standardne devijacije opažanja određuju prema

$$\sigma_{l_i}^{(k)} = \sigma_{\hat{l}_i} \Big/ \sqrt{1 - r_i^{(k)}} \, , \quad k = 1,2,\ldots \qquad \ldots(7.2.8)$$

Ovaj model optimizacije detaljno je ilustrovan algoritmom na slici 7.2.9.



Sl.7.2.9. *Algoritam sekvencijalnog modela optimizacije kada je definisana tačnost izravnatih veličina.*

7.3. Optimizacija bazirana na modelu uslovnog izravnanja

Do sada razvijani različiti postupci optimizacija uglavnom su bazirani na funkcionalnom i stohastičkom modelu posrednog izravnanja. Međutim, cilj izravnanja ne mora biti uvek dobijanje koordinata tačaka već vrednosti izravnatih opažanja, kada se model posrednog izravnanja može zameniti uslovnim. U specijalnim slučajevima model posrednog izravnanja ne može egzistirati dok za razliku od njega uslovni model izravnanja može biti formiran.

Navedene činjenice nameću pitanje, kako odrediti optimalne standardne devijacije planiranih opažanja posredstvom modela uslovnog izravnanja? Postavljen problem na ovaj način čini se jednostavnijim iz razloga nezavisnosti veličina modela uslovnog izravnanja od proizvoljno uvedenih koordinatnih sistema.

Kriterijumi tačnosti mogu biti definisani posredstvom neophodne i dovoljne tačnosti izravnatih veličina $\sigma_{\hat{l}_i}$. Matrica dizajna uslovnog izravnanja B^T određuje se na osnovu projekta mreže. Ako je poznata tačnost metoda opažanja i mernog pribora (za broj opažanja n = 1), onda nju treba uključiti kao polaznu veličinu.

Na osnovu ovih poznatih informacija lako se formira matrica

$$N = B^T K_l B = F \begin{cases} 1.\ \text{dizajna mreže} = B^T \\ 2.\ \text{analiza metoda opažanja} = \sigma_{l_i} \end{cases} \qquad \ldots(7.3.1)$$

ili za $K_l = P^{-1} = I$ matrica $N = B^T B$.

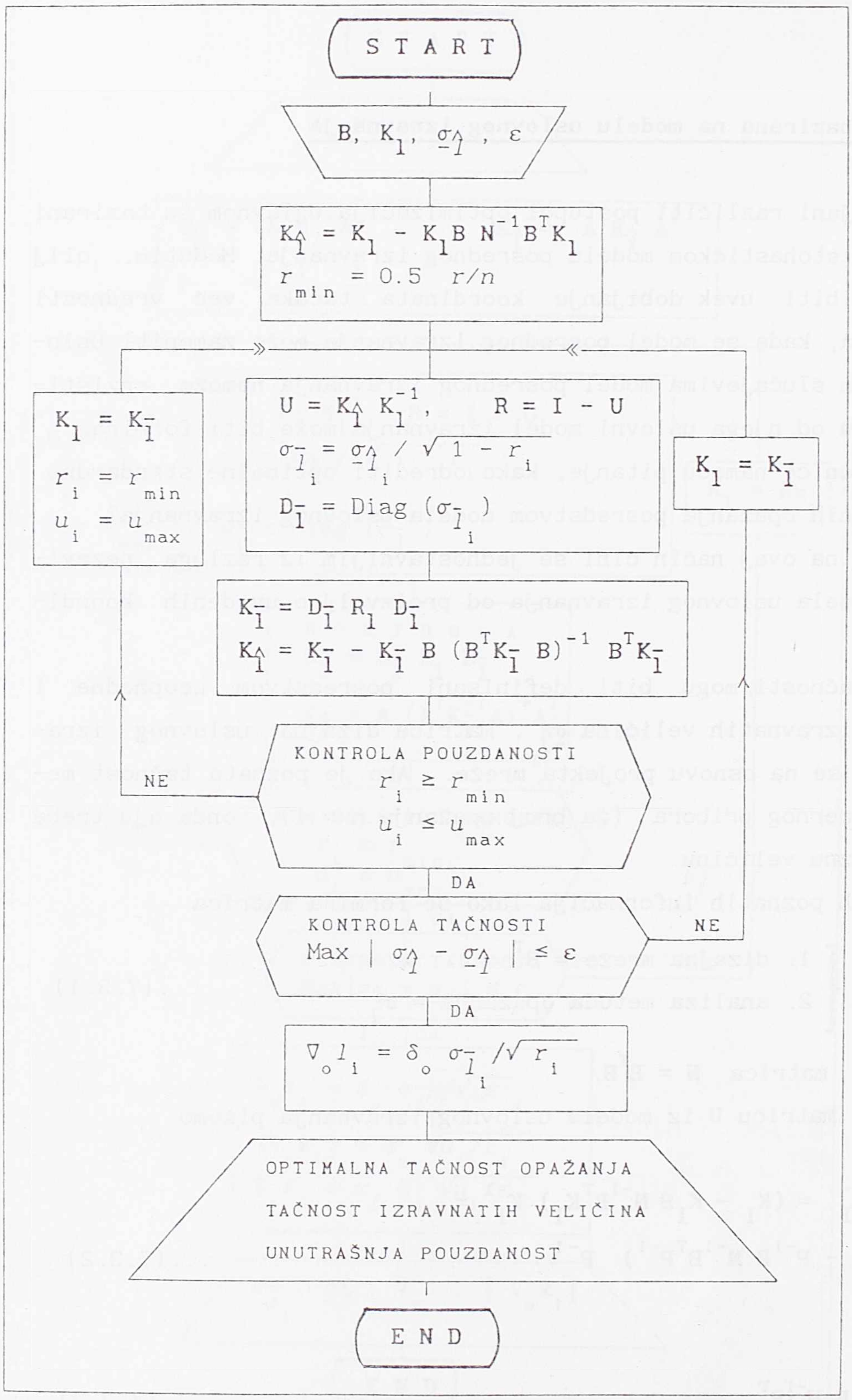
Prema (4.3.3) matricu U iz modela uslovnog izravnanja pišemo

$$U = K_{\hat{l}} K_l^{-1} = (K_l - K_l B N^{-1} B^T K_l) K_l^{-1} =$$
$$= (P^{-1} - P^{-1} B N^{-1} B^T P^{-1}) P^{-1} \qquad \ldots(7.3.2)$$

ili za P = I

$$U = I - B N^{-1} B^T \qquad \ldots(7.3.3)$$

a matrica R = I - U.



Sl.7.3.1. Sekvencijalni model optimizacije baziran na uslovnom modelu izravnanja.

Kada su poznate vrednosti koeficijenata matrica U ili R, optimalne standardne devijacije planiranih opažanja određujemo pomoću rekurzivnih izraza (7.2.1) ili (7.2.2) u obliku

$$\sigma_{l}^{(k)} = \sigma_{\hat{l}_i} \Big/ \sqrt{\sqrt{u_i^{(k)}}}\,, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

ili

$$\sigma_{l_i}^{(k)} = \sigma_{\hat{l}_i} \Big/ \sqrt{1 - r_i^{(k)}}\,, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

gde je $k = 1,2,3,\ldots$ broj iteracija.

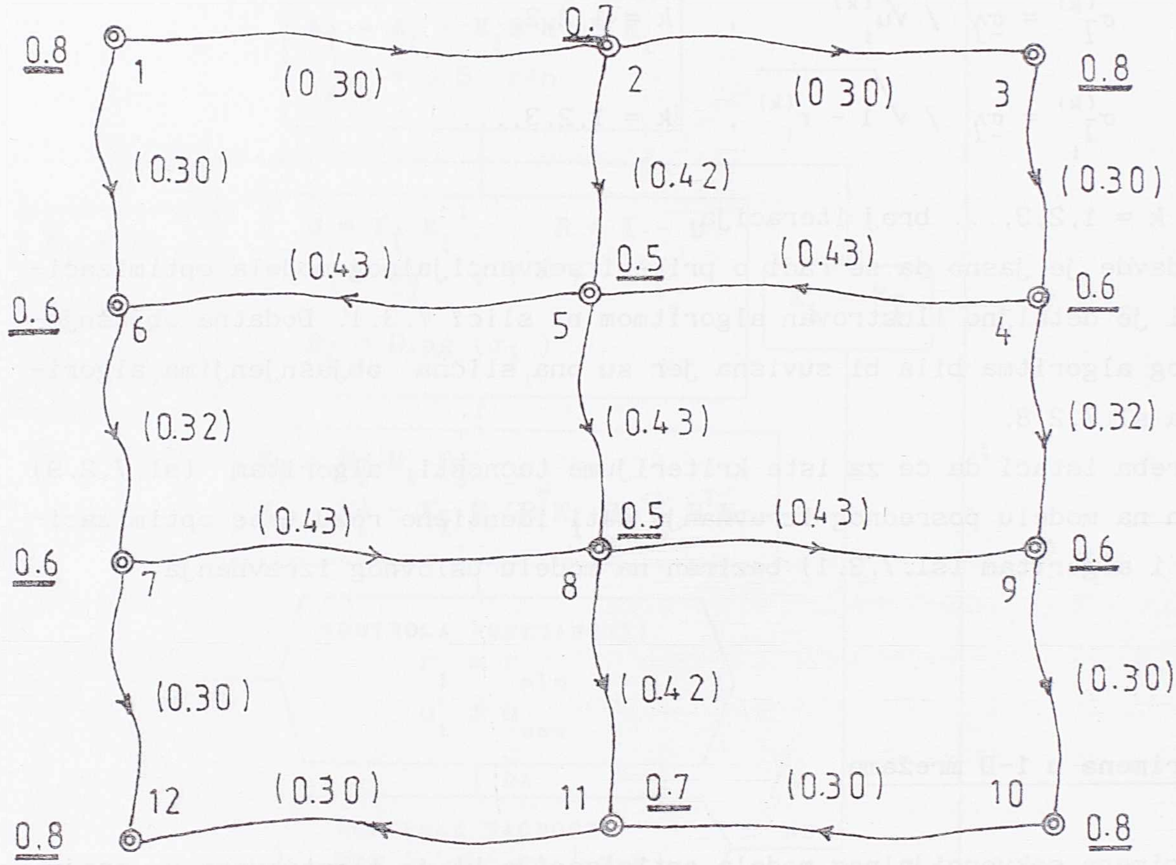
Odavde je jasno da se radi o primeni sekvencijalnog modela optimizacije koji je detaljno ilustrovan algoritmom na slici 7.3.1. Dodatna objašnjenja ovog algoritma bila bi suvišna jer su ona slična objašnjenjima algoritama na sl.7.2.8.

Treba istaći da će za iste kriterijume tačnosti, algoritam (sl.7.2.9) baziran na modelu posrednog izravnanja dati identične rezultate optimizacije kao i algoritam (sl.7.3.1) baziran na modelu uslovnog izravnanja.

7.4. Primena u 1-D mrežama

Primena sekvencijalnog modela optimizacije biće ilustrovana u projektu 1-D mreže (sl.7.4.1). Definisana neophodna i dovoljna tačnost mreže je homogena $\sigma_{x_i} = 5$ mm $(i = 1,2\ldots12)$. Minimalna granična vrednost koeficijenta r_i $(i = 1,2\ldots17)$ je $r_{min} = 1/2\ \bar{r} = 0.18$. Za homogenu tačnost planiranih opažanja ($\sigma_{l_i} = 1$ mm, $i = 1,2\ldots17$) standardne devijacije nepoznatih $\sigma_{\hat{x}_i}$ i koeficijenti pojedinih opažanja r_i dati su na sl.7.4.1.

Optimizacija ove slobodne mreže, kao i niz drugih mreža u cilju provere sekvencijalnog modela optimizacije, izvršena je programom OPT1D. Ovaj program napisan je programskim jezikom FORTRAN 77, prema grafičkom algoritmu sekvencijalnog modela optimizacije (sl.7.2.8). Kompletni rezultati optimizacije dobijeni ovim programom nalaze se u dodatku 1, a na slici 7.4.2. date su optimalne standardne devijacije σ_{l} kao i koeficijenti r_i nakon optimizacije.

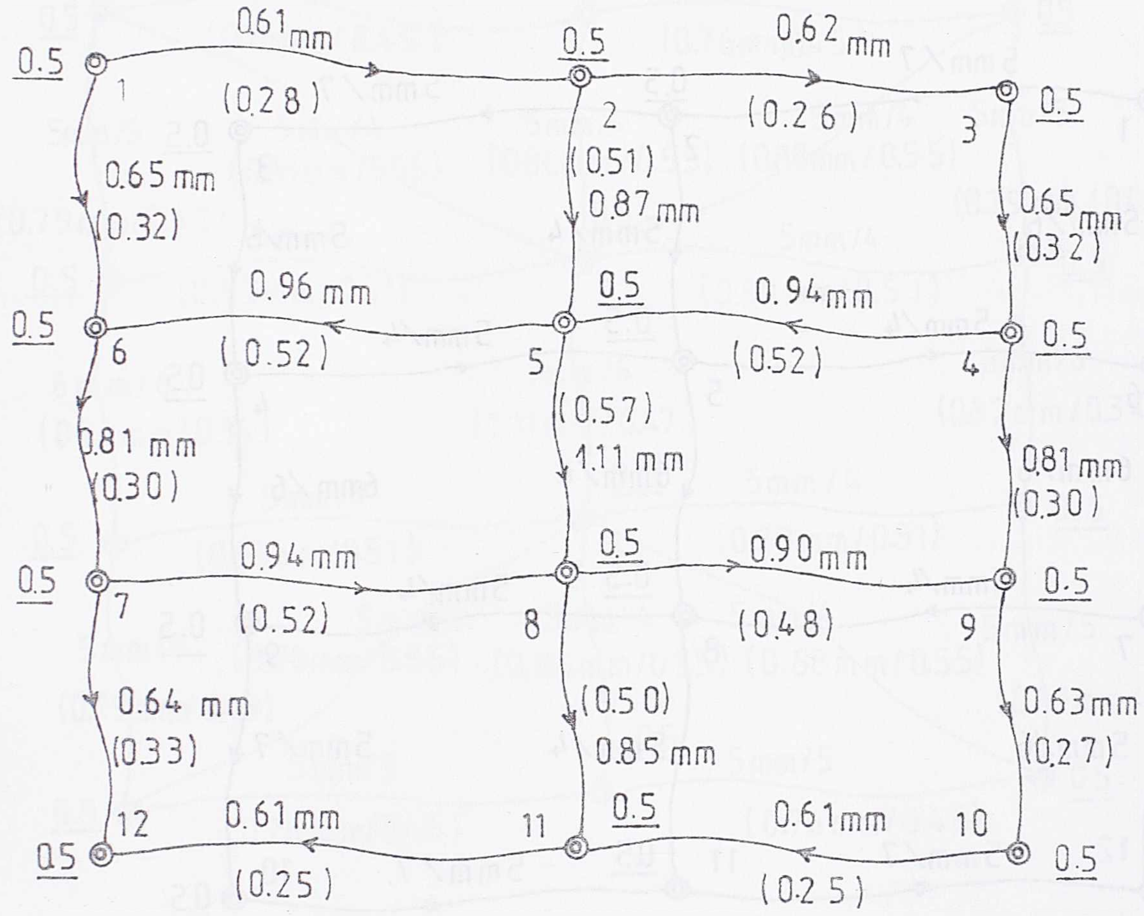


$\underline{0.8} = \sigma_{\hat{x}}$, $\sigma_l = 1$ mm , $r = n - u + d = 6$

$(0.30) = r_i$, $s_i = 1$ km , $\bar{r} = r/n = 0.35$

Sl.7.4.1. Karakteristike projekta slobodne 1-D mreže.

Posledica ispunjenja homogene tačnosti mreže ($\sigma_{x_i} = 0.5$mm), posredstvom sekvencijalnog modela optimizacije dovodi do strožije tačnosti optimalnih opažanja ako se manji broj opažanja sustiče u jednoj tački, i obrnuto, tačnost planiranih opažanja je manja ako se veći broj opažanja sustiče u jednoj tačci.

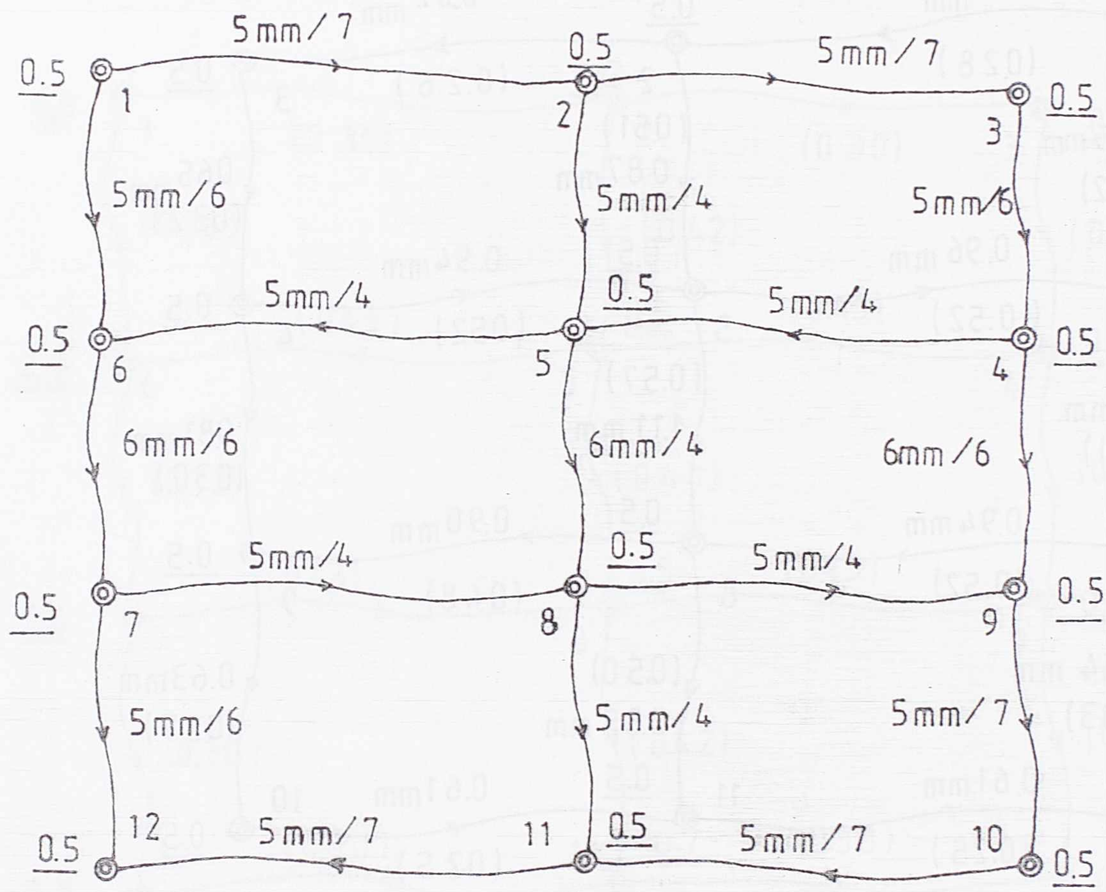


$\underline{0.5} = \sigma_x$, $(0.32) = r_i$

$0.61\ mm = \sigma_{\bar{l}_i}$, $r_{min} = 0.18$

Sl.7.4.2. Optimalne standardne devijacije planiranih opažanja $\sigma_{\bar{l}_i}$ u 1-D mreži.

To znači da ako su pojedine tačke u projektu mreže određene malim brojem planiranih opažanja, optimalne standardne devijacije ovih opažanja biće manje, i važi obrnuto. Na ovaj način sekvencijalni model optimizacije, dovodi do logičkih rezultata optimalnih standardnih devijacija planiranih opažanja.



$\underline{0.5} = \sigma_x$

$5\ mm\ /\ 7 = \nabla_o l_i\ /\ ||\nabla_o x_i||$

ALFA 0 = 0.001

BETA 0 = 0.80

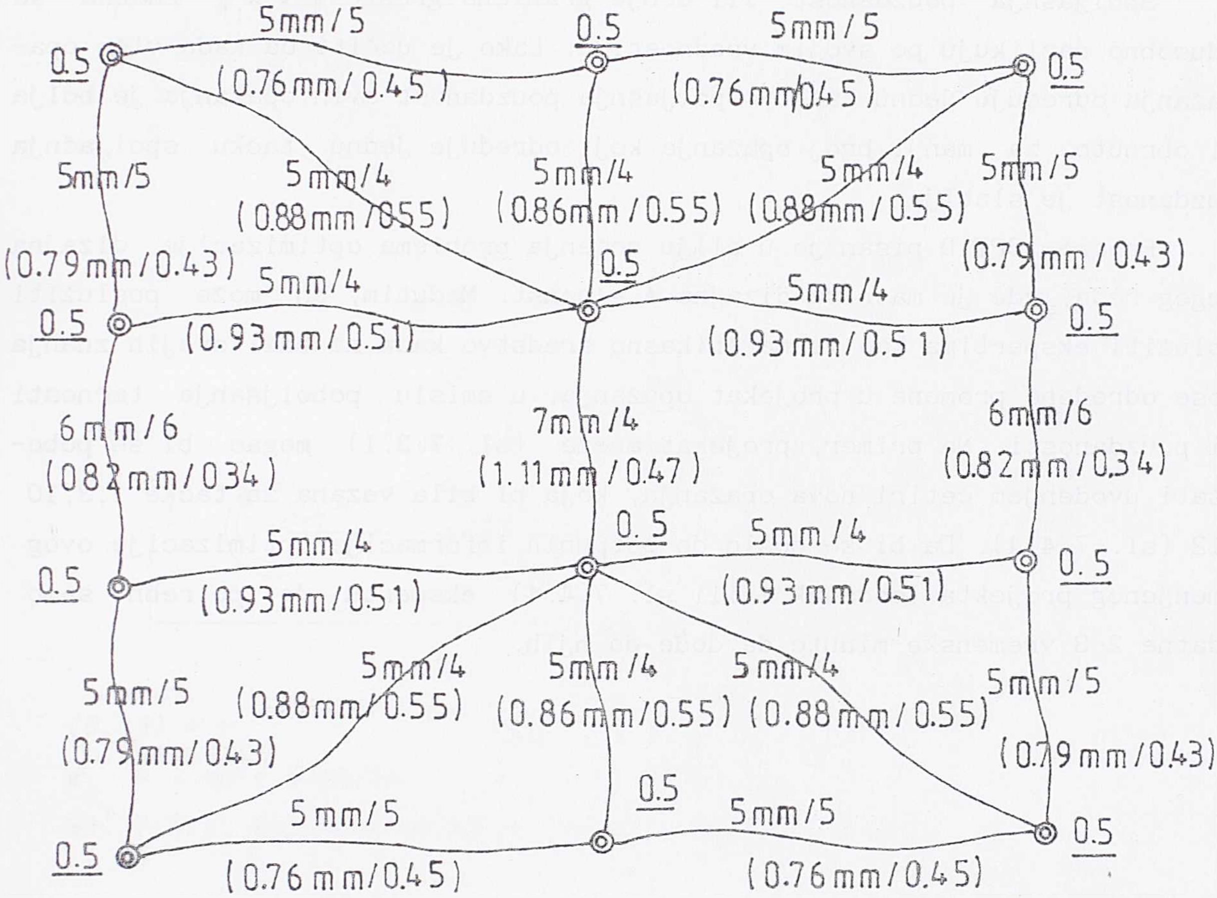
DELTA 0= 4.13

$k = 3.29$

Sl.7.4.3. Optimalna unutrašnja i spoljašnja pouzdanost 1-D mreže.

Koeficijenti r_i neznatno su se promenili nakon optimizacije, i njihove vrednosti su znatno veće od donje granične $(r)_{min} = 0.18$.

Optimalna unutrašnja i spoljašnja pouzdanost dobijena takođe programom OPT1D, data je na sl.7.4.3. Donje granične greške $\nabla_o l_i$ u kontroli opažanja ove mreže veoma su bliske po svojim vrednostima (5 mm i 6 mm) tako da



$\underline{0.5} = \sigma_X$ ALFA 0 = 0.001

$5\ mm\ /\ 5 = \nabla_o l_i\ /\ ||\nabla_o x_i||$ BETA 0 = 0.80

$(0.76\ mm/\ 0.45) = (\ \sigma_{\bar{l}_i}\ /\ r_i)$ DELTA 0= 4.13

$k = 3.29$

Sl.7.4.4. Optimalna tačnost i kontrola opažanja izmenjenog projekta 1-D mreže.

je unutrašnja pouzdanost veoma bliska homogenoj pouzdanosti opažanja. Međutim, bez obzira na ovu homogenost treba imati u vidu da je donja granična vrednost $\nabla_o l_{1-2}$ visinske razlike 1-2 veća 7.8 puta od njene optimalne standardne devijacije $\sigma_{\bar{l}_{1-2}}$ a na primer $\nabla_o l_{5-8}$ je veća 5.4 puta od korespodentne $\sigma_{\bar{l}_{5-8}}$.

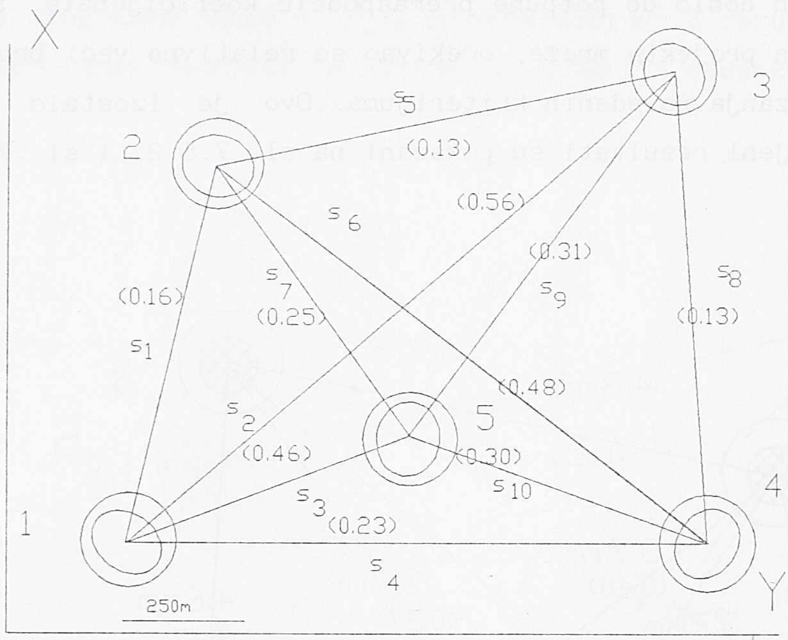
Spoljašnja pouzdanost ili donje granične greške $\| \nabla_o x_i \|$ znatno se međusobno razlikuju po svojim vrednostima. Lako je uočiti da kada više opažanja određuju jednu tačku, spoljašnja pouzdanost ovih opažanja je bolja ili obrnuto, za manji broj opažanja koji određuje jednu tačku spoljačnja pouzdanost je slabija.

Program OPT1D pisan je u cilju rešenja problema optimizacije dizajna drugog reda, gde je matrica dizajna A = const. Međutim, on može poslužiti ekspertima kao veoma efikasno sredstvo kada na bazi svojih znanja unose određene promene u projekat opažanja, u smislu poboljšanja tačnosti ili pouzdanosti. Na primer, projekat mreže (sl. 7.3.1) mogao bi se poboljšati uvođenjem četiri nova opažanja, koja bi bila vezana za tačke 1,3,10 i 12 (sl. 7.4.4). Da bi se došlo do potpunih informacija optimizacije ovog izmenjenog projekta (dodatak 1 ili sl. 7.4.4) ekspertu je potrebno samo dodatne 2-3 vremenske minute da dođe do njih.

7.5. Primena u 2-D mrežama

Primena sekvencijalnog modela optimizacije u 2-D mrežama biće pokazana za projekat slobodne mreže, čije su karakteristike date na sl. 7.5.1. Neophodna i dovoljna tačnost definisana je u vidu homogene položajne tačnosti tačaka M_i = 3 mm (i = 1,2,...5). Na osnovu ovih kriterijuma, određena je kriterijum kovarajaciona matrica (6.2.4) prema (6.2.10., 6.2.11. i 6.2.12.). Donja granična vrednost koeficijenata r_i (i = 1, 2,...,10) je $r_{min} = 1/2\ \bar{r} = 0.15$.

Vrednosti koeficijenata r_5 i r_8 u projektu mreže (sl.7.5.1.) nalaze se ispod granične vrednosti $(r)_{min}$, a vrednost r_1 je veoma bliska njoj. Razlog ovome je slab dizajn projekta mreže. Neki pokušaji u smislu povećanja vrednosti koeficijenata r_i intervencijama u samom projektu ne bi dali vidne rezultate, jer su položaji tačka 1,2,...,5 konstantni, a dodavanje novih linearnih opažanja projektu, očigledno nije moguće.



$(0.13) = r_i$ $\qquad\qquad r = n - u + d = 3$

$\sigma_{s_i} = 3\ mm + 5\ mm/km$ $\qquad\qquad \bar{r} = r/n = 0.30$

Sl. 7.5.1. Karakteristike projekta slobodne 2-D mreže.

U ovom slučaju, optimizacija dolazi do potpunog izražaja, sa ciljem da reši problem optimalne tačnosti opažanja, uz istovremeno zadovoljenje definisane tačnosti i kriterijuma pouzdanosti.

Primenjen sekvencijalni model optimizacije u potpunosti je ispunio navedene kriterijume.

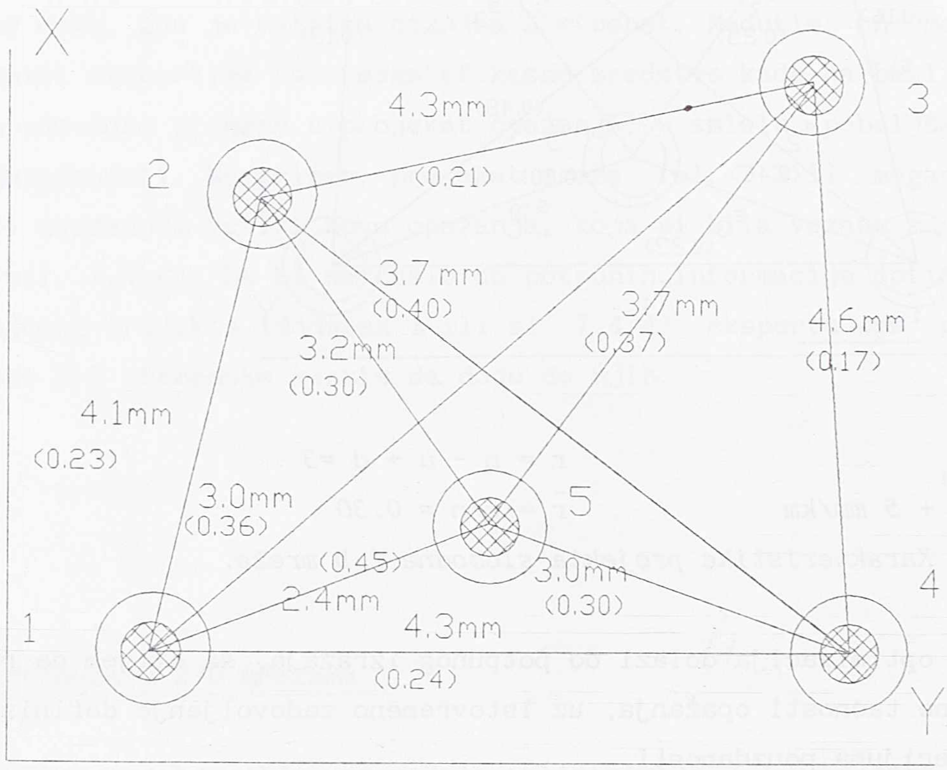
Koeficijenti r_5 i r_8 nakon optimizacije zadržali su minimalne granične vrednosti $r_5 = r_8 = (r)_{min} = 0.15$ dok su se ostale vrednosti r_i neznatno promenile u odnosu na početno stanje (sl. 7.5.1). Na ovaj način koeficijenti r_i prema tabeli 5.2.1. pripadaju granicama dovoljne i dobre kontrole.

Ovde se sada došlo do jedne nove ideje, da se za početne vrednosti koeficijenata r_i uzmu vrednosti

$$r_i^{(o)} = \bar{r} = r/n = 0.30, \qquad i = 1,2,\ldots 10$$

koje pripadaju granicama dobre kontrole, i da iterativni proces počne u odnosu na ovo nulto stanje, a kriterijum o donjoj granici $r_{min}=0.15$ ostaje i dalje prisutan.

Kako je na ovaj način došlo do potpune preraspodele koeficijenata $r_i^{(o)}$ i kako je "slab" dizajn projekta mreže, očekivao se relativno veći broj iteracija u cilju postizanja navedenih kriterijuma. Ovo je izostalo i nakon jedne iteracije dobijeni rezultati su pokazani na sl. 7.5.2. i sl. 7.5.3.

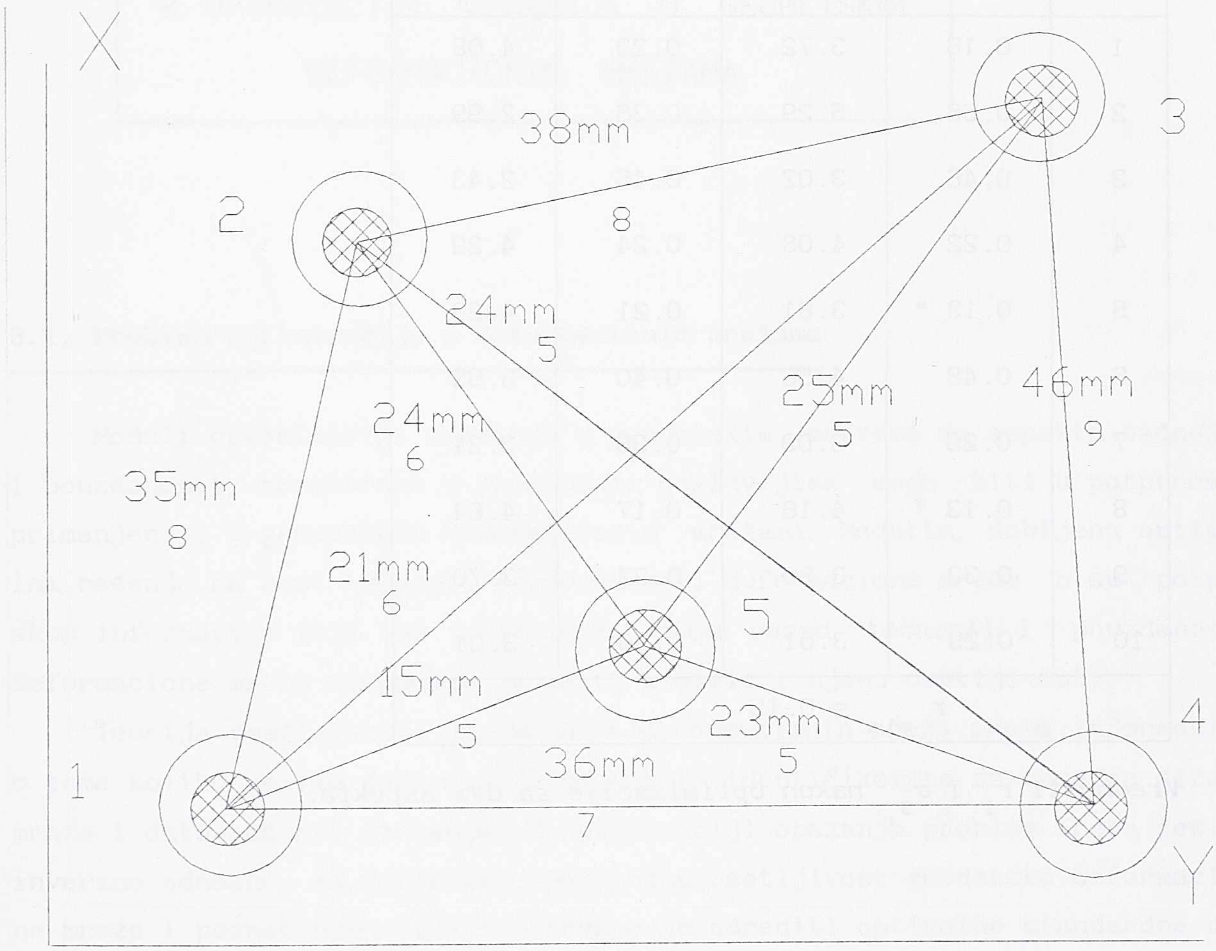


$4.1\ mm = \sigma_{\bar{S}_i}$ $\qquad r_{min} = 0.15$

$(0.21) = r_i$ $\qquad M = 3\ mm$

Sl. 7.5.2. Optimalne standardne devijacije planiranih opažanja $\sigma_{\bar{S}_i}$ u 2-D mreži.

U tabeli 7.5.1. dati su rezultati optimizacije ove 2-D mreže sa aspekta tačnosti (sl. 7.1.1) i sa aspekta tačnosti i pouzdanosti (sl. 7.2.8). U prvom slučaju, koeficijenti r_5 i r_8 imaju manje vrednosti od donje granične vrednosti r_{min} dok u drugom slučaju ova pojava nije prisutna. Za simulirane rezultate opažanja sa optimalnom tačnošću $\sigma_{\bar{S}}$ dobijenom iz sekvencijalnog modela optimizacije sa aspekta tačnosti i pouzdanosti izvršeno je izravnanje programom IGM2D u cilju provere dobijenih rezultata kao i ispunjenja kriterijuma tačnosti, a rezultati su dati u dodatku 2.



$M = 3$ mm

$35 \text{ mm} = \nabla_o l_i$

$8 = ||\nabla_o x_i||$

ALFA 0 = 0.001

BETA 0 = 0.80

DELTA 0= 4.13

k = 3.29

Sl.7.5.3. Optimalna unutrašnja i spoljašnja pouzdanost 2-D mreže.

Tabela 7.5.1.

Optimizacija sa aspekta tačnosti.			Optimizacija sa aspekta tačnosti i pouzdanosti.	
S_i	r_i	$\sigma_{\bar{S}_i}$	r_i	$\sigma_{\bar{S}_i}$
1	0.16	3.72	0.23	4.08
2	0.56	5.29	0.36	2.99
3	0.46	3.02	0.45	2.43
4	0.22	4.08	0.24	4.29
5	0.13 *	3.81	0.21	4.26
6	0.48	4.56	0.40	3.69
7	0.25	3.09	0.30	3.21
8	0.13 *	4.16	0.17	4.64
9	0.33	3.80	0.37	3.70
10	0.29	3.01	0.30	3.01
$r_{min} = 0.15$				

Vrednosti r_i *i* $\sigma_{\bar{S}_i}$ *nakon optimizacije sa dva aspekta.*

8. OPTIMIZACIJA OPAŽANJA U GEODETSKIM DEFORMACIONIM MREŽAMA

8.1. Problem optimizacije u deformacionim mrežama

Modeli optimizacije opažanja u geodetskim mrežama sa aspekta tačnosti i pouzdanosti, razmatrani u prethodnim poglavljima mogu biti u potpunosti primenjeni i u geodetskim deformacionim mrežama. Međutim, dobijena optimalna rešenja na bazi tačnosti i pouzdanosti deformacione mreže nisu potpun skup informacija koji nas interesuje. Naime pored tačnosti i pouzdanosti deformacione mreže neophodno je uzeti u obzir i njenu osetljivost.

Teorija osetljivosti geodetskih deformacionih mreža pruža informacije o tome koliko velike deformacije mogu biti identifikovane za određen dizajn mreže i datu tačnost opažanja. U optimizaciji opažanja problem treba rešiti inverzno odnosno, za definisanu neophodnu osetljivost geodetske deformacione mreže i poznat njen dizajn potrebno je odrediti optimalne standardne devijacije planiranih opažanja.

Kako je osnovni cilj geodetskih deformacionih mreža identifikacija deformacija objekata i pomeranja tla, to onda optimizacija ovih mreža sa aspekta osetljivosti ima primarni značaj u odnosu na optimizaciju sa aspekta tačnosti ili pouzdanosti. Rešenja problema optimizacije sa aspekta osetljivosti deformacionih mreža biće detaljno izložena u narednim poglavljima.

Novo razvijen sekvencijalni model optimizacije sa aspekta osetljivosti baziran je na metodi deformacione analize *Mihailovića*.

8.2. Identifikacija stabilnih tačaka metodom Mihailovića

Mogućnost identifikacije stabilnih tačaka u geodetskim deformacionim mrežama metodama translacije koordinatnog sistema, rotacije koordinatnog sistema i kombinacijom ove dve, teorijski su objašnjene u radovima (*Mihailović, K. 1985a, 1985b, 1985c, 1986, 1988)*. Prednosti ovih metoda nad već postojećim istaknute su u doktorskom radu *Čvorović,M. (1986)*.

Radi potpunijeg sagledavanja optimizacije geodetskih deformacionih mreža neophodno je u kratkim crtama izložiti metodu identifikacije stabilnih tačaka, na kojoj će biti primenjena optimizacija.

Razlike vektora ocena koordinata dveju epoha daju vektor prividnih pomeranja

$$d' = \hat{x}' - \hat{x} \qquad \ldots(8.2.1)$$

gde je

$\hat{x}'$ vektor ocena koordinata u tekućoj epohi,

$\hat{x}$ vektor ocena koordinata u prethodnoj epohi.

Prividno pomeranje (8.2.1) stabilne tačke je

$$d'_s = \hat{x}'_s - \hat{x}_s \qquad \ldots(8.2.2)$$

Relativna pomeranja tačaka

$$d_i = d'_i - d'_s \quad ,i = 1,2\ldots n \qquad \ldots(8.2.3)$$

određuju se u odnosu na najstabilniju tačku u mreži.

U 1-D mreži kada je poznata opšta tendencija kretanja, prividna pomeranja najstabilnije tačke su

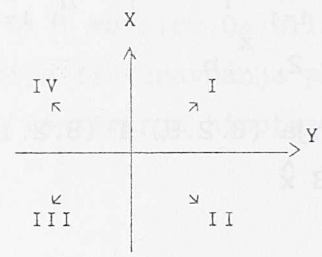
$$d'_s = d'_{i,max} = \hat{x}'_s - \hat{x}_s, \text{ za slučaj sleganja} \qquad \ldots(8.2.4)$$

ili

$$d'_s = d'_{i,min} = \hat{x}'_s - \hat{x}_s, \text{ za slučaj izdizanja} \qquad \ldots(8.2.5)$$

U 2-D mreži za poznatu tendenciju kretanja, izbor prividnih pomeranja za najstabilniju tačku zavisi od segmenta.

Tabela 8.2.1.

Segment	X - osa	Y - osa	
I	$d'_{i,min}$	$d'_{i,min}$	
II	$d'_{i,max}$	$d'_{i,min}$	
III	$d'_{i,max}$	$d'_{i,max}$	
IV	$d'_{i,min}$	$d'_{i,max}$	

Relativna pomeranja (8.2.3) u slučaju jedne stabilne tačke, ili što je identično slučaju najstabilnije tačke, bez obzira na dimenzije mreže su

$$d_i = d'_i - d_{i,min(max)}, \quad i = 1,2...n \qquad ...(8.2.6)$$

gde je za tekuću stabilnu tačku $d_i = 0$.

Ako u mreži postoji n_1 stabilnih tačaka ($n_1 > 1$) i poznata je tendencija kretanja, onda se određuje srednja vrednost prividnih pomeranja

$$\bar{d}' = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} d'_i \qquad ...(8.2.7)$$

ili relativna pomeranja u odnosu na ovu srednju vrednost

$$d_i = d'_i - \bar{d}' = d'_i - \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} d'_i \qquad ...(8.2.8)$$

Srednja vrednost (8.2.7) u geometrijskom smislu odnosi se na fiktivnu stabilnu tačku odnosno, težište svih n_1 stabilnih tačaka u granicama tačnosti opažanja. Na osnovu (8.2.8) i (8.2.1) relativna pomeranja su

- za stabilne tačke

$$d_i = (\hat{x}'_i - \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\hat{x}'_i) - (\hat{x}_i - \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\hat{x}_i) \qquad \ldots(8.2.9)$$

- za nestabilne tačke

$$d_j = (\hat{x}'_j - \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\hat{x}'_i) - (\hat{x}_j - \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\hat{x}_i) \qquad \ldots(8.2.10)$$

$j = n_1 + 1,\ n_1 + 2, \ldots n$

Relativna pomeranja (8.2.9) i (8.2.10) pišemo u matričnom obliku

$$d = B\,\hat{x}' - B\,\hat{x} \qquad \ldots(8.2.11)$$

gde je matrica

$$B_{nn} = \frac{1}{n_1}\begin{bmatrix} n_1 - 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & n_1 - 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & & n_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & n_1 \\ -1 & -1 & n_1 - 1 & 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix}$$

Koeficijenti matrice B imaju značenje:

- za stabilne tačke $\quad b_{(i,i)} = (n_1 - 1)/\,n_1$

$\quad b_{(i,j)} = -\,1/\,n_1, \quad i \neq j$

- za nestabilne tačke $\quad b_{(i,i)} = 1$

$\quad b_{(i,j)} = 0, \quad i \neq j$

ili za jednu stabilnu tačku $(n_1 = 1)$:

- za stabilnu tačku $\quad b_{(i,i)} = 0,$

$\quad b_{(i,j)} = -1,$

- za nestabilne tačke $\quad b_{(i,i)} = 1,$

$\quad b_{(i,j)} = 0.$

Matrica kofaktora relativnih pomeranja (8.2.11) ima oblik

$$\boxed{Q_d = B\,Q_{\hat{x}'}B^T + B\,Q_{\hat{x}}B^T} \qquad \ldots(8.2.12)$$

ili za isti dizajn mreže u obe epohe

$$Q_d = 2\ B\ Q_{\hat{x}} B^T = 2\ B\ N^{-1} B^T \qquad \ldots(8.2.13)$$

gde se matrica kofaktora $Q_{\hat{x}} = N^{-1}$ određuje iz klasičnog izravnanja po metodi posrednih merenja.

Kako su ovde matrice Q_d i B dimenzija (n x n), matrici $Q_{\hat{x}}$ iz klasičnog izravnanja treba dodati nula vrstu i nula kolonu koje se odnose na tačku u kojoj je definisan datum mreže, da bi i matrica $Q_{\hat{x}}$ bila dimenzija (nxn).

Kada su na raspolaganju informacije iz izravnanja prethodne i naredne epohe, moguće je izvršiti statističko testiranje hipoteza

$$H_o:\ M\ [d\,] = 0$$
$$H_a:\ M\ [d\,] \neq 0 \qquad \ldots(8.2.14)$$

gde test statistike

$$t_i = \frac{d_i}{\hat{\sigma}_{d_i}} = \frac{d_i}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{d_{ii}}}} \qquad \ldots(8.2.15)$$

slede studentov t-raspored verovatnoća. Za istu geometriju mreže i homogenu tačnost merenih veličina obe epohe važi

$$\hat{\sigma}_0 = \left(\frac{v^T P' v' + v^T P\ v}{2\,(n - u)}\right)^{1/2} \qquad \ldots(8.2.16)$$

Izbor kritične vrednosti $t_{1-\alpha/2;f}$ zavisi od broja stepeni slobode $f=2(n-u)$ i nivoa značajnosti (najčešće $\alpha = 0{,}05$). Odluke o prihvatanju ili odbacivanju hipoteza donose se na sledeći način:

- za $t_i \leq t_{1-\alpha/2,f}$ prihvata se H_0 (tačke su stabilne),
- za $t_i > t_{1-\alpha/2,f}$ prihvata se H_a (tačke su nestabilne).

Ako je tačka zaista stabilna ($d = 0$), a prihvaćena hipoteza H_a čini se greška prve vrste $P\ (t_i > t_{1-\alpha/2,f}) = \alpha$. Ako je tačka zaista nestabilna ($d \neq 0$), a prihvaćena hipoteza H_0 čini se greška druge vrste $P(t_i < t_{1-\alpha/2,f}) = 1-\beta$.

Kada je nepoznata tendencija kretanja tla ili objekata odnosno, kada su ona u različitim pravcima, neophodno je posmatrati vrednosti prividnih pomeranja d_i' i uočiti ona koja se grupišu oko neke vrednosti u granicama tačnosti merenja.

Maksimalan broj vrednosti koje se grupišu u granicama tačnosti merenja ekvivalentan je broju stabilnih tačaka n_1 i na osnovu njih obrazujemo srednju vrednost prividnih pomeranja prema (8.2.7) a relativna pomeranja prema (8.2.8). Odavde proizilazi da je obrazovanje matrice B i testiranje statističkih hipoteza identično slučaju više stabilnih tačaka kada je poznata tendencija.

Matematičke relacije napred napisane odnose se na jednu osu, radi što kraćeg prikaza metode Mihailovića, a u slučaju 2-D mreže, neophodno je obrazovati matricu B po obe ose B_x i B_y ili za matricu Q_d po obe ose Q_{dx} i Q_{dy} kao i test statistike t_{X_i} i t_{Y_i}.

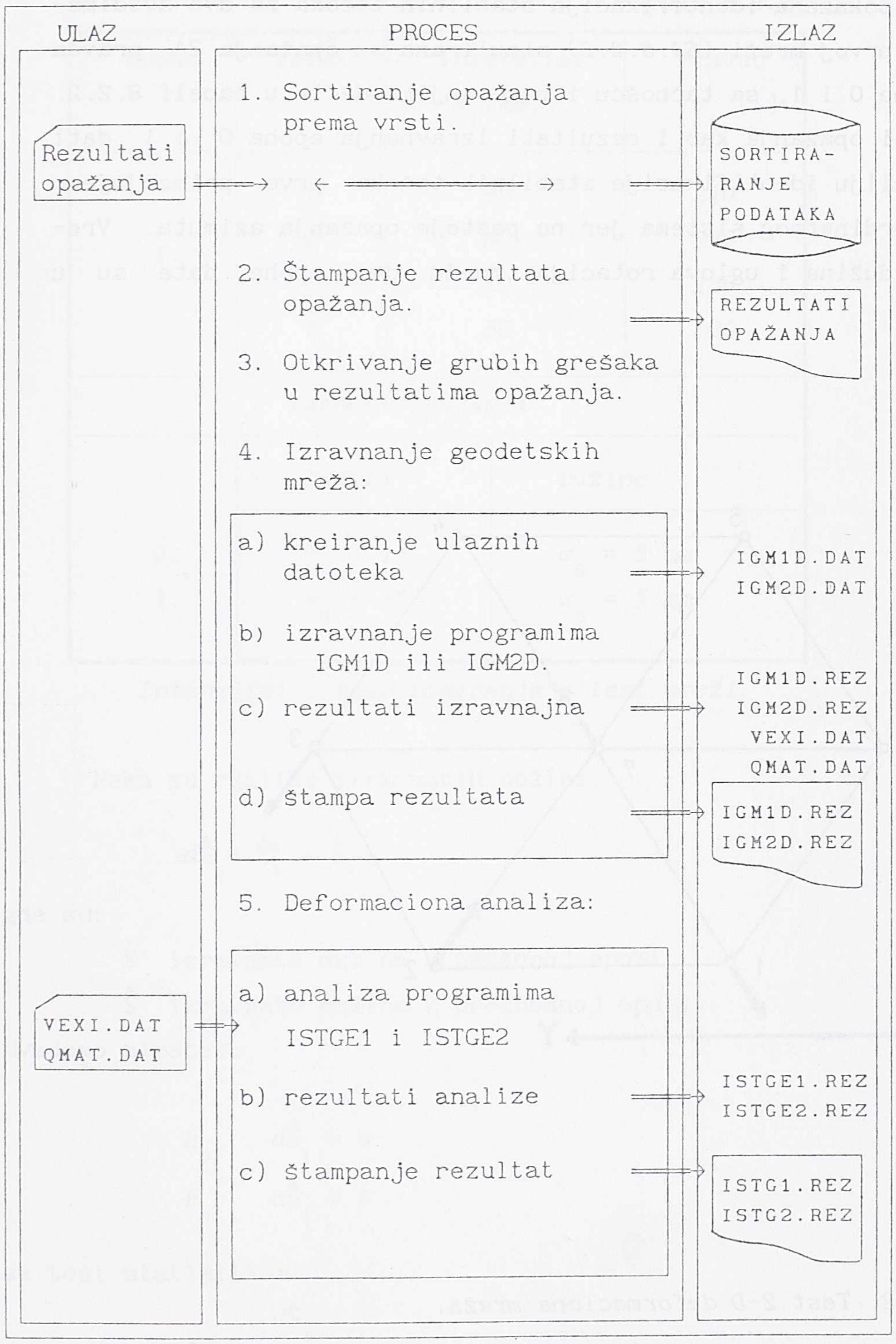
U cilju opširnijih istraživanja navedene metode u eksperimentalnim i simulacionim mrežama, autor ovog rada napisao je adekvatan softver. Softver je kompleksan i zbog svoje obimnosti u ovom radu neće biti prikazan detaljno, već samo pregledno (sl. 8.2.1).

Srž softvera čine četiri programa:

1. IGM1D Izravnanje geodetskih mreža 1-D,
2. IGM2D Izravnanje geodetskih mreža 2-D,
3. ISTGE 1 Identifikacija stabilnih tačaka geodetskih 1-D mreža,
4. ISTGE 2 Identifikacija stabilnih tačaka geodetskih 2-D mreža.

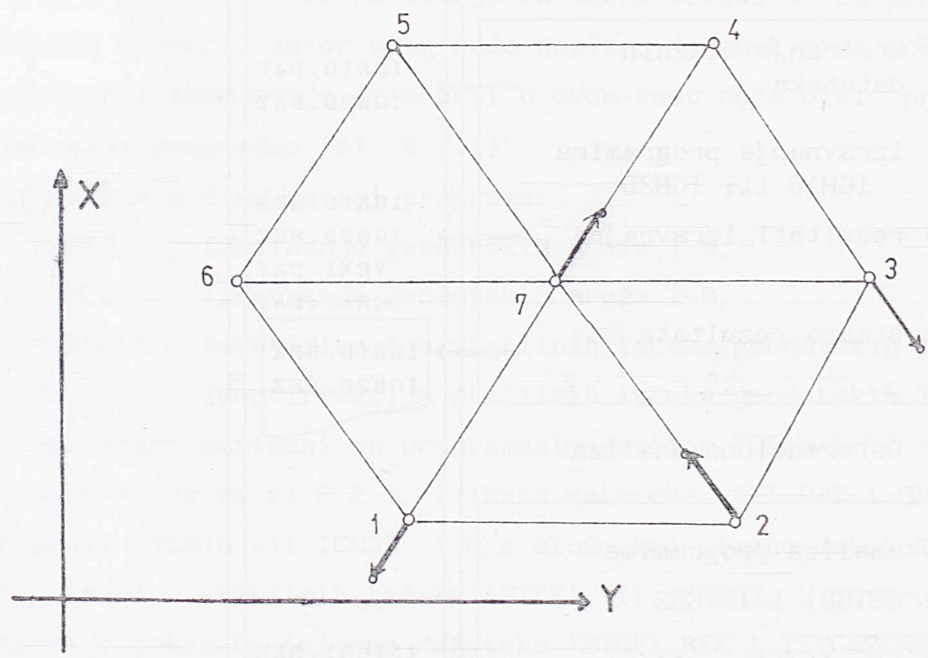
Svi programi napisani su programskim jezikom FORTRAN 77 a tok informacija ilustrovan je na sl.8.2.1. Izlazne datoteke VEXI.DAT i QMAT.DAT kreiraju programi IGM1D ili IGM2D i one služe kao ulazne datoteke programima za identifikaciju stabilnih tačaka ISTGE1 ili ISTGE2. U okviru ovoga rada bi će kasnije pokazane izlazne datoteke ISTGE1.REZ i ISTGE2.REZ koje sadrže informacije deformacione analize.

Navedeni softver pokazao se kao veoma moćno i efikasno sredstvo u analizi deformacionih mreža. Na osnovu ispitivanja mnogobrojnih 1-D i 2-D simuliranih deformacionih mreža ovim softverom, u svim slučajevima relativna pomeranja (8.2.3) ili (8.2.8) su dobijena korektno odnosno, relativna pomeranja dobijena iz analize u potpunoj su saglasnosti sa apriori usvojenim vrednostima.



Sl.8.2.1.Automatska obrada podataka u deformacionoj analizi.

Ovde će biti pokazana identifikacija stabilnih tačaka za dve dvodimenzionalne mreže. U prvoj mreži (*Sl.8.2.2)* simulirana su opažanja 24 pravca i 12 dužina za epohe 0 i 1, sa tačnošću i pomeranjima datim u tabeli 8.2.2. Simulirani rezultati opažanja kao i rezultati izravnanja epoha 0 i 1 dati su u dodatku 3. U cilju identifikacije stabilnih tačaka prvo primenjujemo metodu rotacije koordinatnog sistema jer ne postoje opažanja azimuta. Vrednosti deformacija dužina i uglova rotacija između dve epohe date su u dodatku 4.



Sl.8.2.2. Test 2-D deformaciona mreža.

Tabela 8.2.2.

Epoha	Tačka	Intenzitet d_i [mm]	Pravac ν_i [o]
1.	1	40	210
	2	60	330
	3	50	150
	7	50	30

Tačnost opažanja		
	Pravci	Dužine
0.	$\sigma_\alpha = 1''$	$\sigma_S = 5$ mm
1.	$\sigma_\alpha = 1''$	$\sigma_S = 5$ mm

Intenzitet i smer pomeranja u test mreži.

Neka su razlike izravnatih dužina

$$d\hat{S}_i = \hat{S}'_i - \hat{S}_i \qquad \ldots(8.2.17)$$

gde su:

$\hat{S}'$ izravnate dužine u narednoj epohi,

$\hat{S}$ izravnate dužine u prethodnoj epohi.

Uvedemo hipoteze

$$\begin{aligned} H_o &: \quad d\hat{S}_i = 0 \\ H_a &: \quad d\hat{S}_i > 0 \end{aligned} \qquad \ldots(8.2.18)$$

sa test statistikom

$$t_i = \frac{d\hat{S}_i}{\hat{\sigma}_{d\hat{S}_i}} \qquad \ldots(8.2.19)$$

koja sledi Studentovu raspodelu sa $r=r_1+r_2$ stepeni slobode i standardnim devijacijama razlika izravnatih dužina

$$\hat{\sigma}^2_{d\hat{S}_i} = \hat{\sigma}^2_{\hat{S}'_i} + \hat{\sigma}^2_{\hat{S}_i} \qquad \ldots(8.2.20)$$

ili za homogenu tačnost

$$\hat{\sigma}_{d\hat{S}_i} = \hat{\sigma}_{\hat{S}_i} \sqrt{2} \qquad \ldots(8.2.21)$$

Nulta hipoteza H_o se prihvata ako je

$$t_i \le t_{r,1-\alpha} \qquad \ldots(8.2.22)$$

gde je $t_{r,1-\alpha}$ kritična vrednost. Rezultati testiranja ovih hipoteza dati su u tabeli 8.2.3.

Vrednosti uglova rotacija φ_i za nedeformisane dužine date su u tabeli 8.2.4. Ove vrednosti za strane koje spajaju stabilne tačke grupišu se oko najverovatnije vrednosti φ u granici tačnosti ΔG_{φ}. Ovu granicu tačnosti možemo odrediti iz razlika

$$\varphi_i = d\nu_i = \nu'_{ij} - \nu_{ij} \qquad \ldots(8.2.23)$$

ili nakon linearizacije

$$\varphi = g\, x' + g\, x$$

sa kovarijacionom matricom

$$K_{\varphi} = g\, K_{x'} g^T + g\, K_x\, g^T = 2\, \hat{\sigma}_o\, g\, Q_x\, g^T \qquad \ldots(8.2.24)$$

Prema (8.2.24) mogu se dobiti standardne devijacije pojedinih uglova rotaije φ_i *(tabela 8.2.4)*. Od ukupno m vrednosti $\hat{\sigma}_{\varphi_i}$ odredimo prosečnu vrednost

$$\bar{\sigma}_{\varphi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \hat{\sigma}_{\varphi_i} \qquad \ldots(8.2.25)$$

Granična tačnost je

$$\Delta G_{\varphi} = t_p\, \bar{\sigma}_{\varphi} \qquad \ldots(8.2.26)$$

odnosno, vrednost ugla φ nalazi se u intervalu

$$\varphi_i - \Delta G_{\varphi} < \varphi_i < \varphi_i + \Delta G_{\varphi} \qquad \ldots(8.2.27)$$

Tabela 8.2.3.

T_i	T_j	$d\hat{S}_i$ [mm]	$\hat{\sigma}_{\hat{S}_i}$ [mm]	$\hat{\sigma}_{\hat{S}'_i}$ [mm]	t_i	Prihvata se H_o
1	2	11	3.9	3.8	2.02	da
1	3	-36	4.2	4.0	6.21	
1	4	-41	4.1	3.9	7.25	
1	5	-46	4.2	4.0	7.93	
1	6	-11	4.0	3.8	1.99	da
1	7	-92	3.1	2.9	21.70	
2	3	49	3.9	3.7	9.12	
2	4	44	4.2	3.9	7.78	
2	5	54	4.4	4.2	8.88	
2	6	45	4.5	4.3	7.23	
2	7	31	3.2	3.0	7.07	
3	4	-56	4.0	3.8	10.20	
3	5	-45	4.4	4.2	7.40	
3	6	-23	4.3	4.1	3.87	
3	7	3	3.1	3.0	0.61	da
4	5	4	3.8	3.6	0.76	da
4	6	-3	4.3	4.1	0.51	da
4	7	48	3.0	2.9	11.50	
5	6	-11	3.9	3.8	2.02	da
5	7	31	3.2	3.1	6.96	
6	7	-32	3.2	3.1	7.18	

$r = r_1 + r_2 = 18+18=36, \quad \alpha = 0.05$

$t_{r,1-\alpha} = t_{36;0.95} = 2.03$

Testiranje hipoteza u deformacijama dužina.

Tabela 8.2.4.

T_i	T_j	$d\hat{S}_i$ [mm]	φ_i ["]	$\hat{\sigma}_{\varphi_i}$ ["]	
1	2	11	19.7	1.30	$\bar{\sigma}_\varphi = 1.24''$
1	6	-11	-6.9	1.25	
3	7	3	-15.7	1.30	$\Delta G_\varphi = t_p \bar{\sigma}_\varphi = 3.7''$
4	5	4	0.7	1.30	
4	6	-3	2.2	1.05	$t_p = 3$
5	6	-11	2.1	1.25	

Uglovi rotacije za nedeformisane dužine.

Kada je relativno mali broj uglova φ_i onda se vizuelno mogu selektovati vrednosti koje se grupišu u granicama tačnosti ΔG_φ. Međutim, kod većeg broja neophodno je za svaku vrednost ugla φ_i obrazovati interval $\varphi_i + \Delta G_\varphi$ i ustanoviti koliko se vrednosti preostalih uglova nalazi u ovom intervalu (tabela 8.2.5). Pošto je za metodu rotacije koordinatnog sistema neophodno da postoje najmanje tri stabilne tačke onda, proizilazi da moraju postojati najmanje tri vrednosti φ_i (i=1,2,3) koje se nalaze u granici tačnosti ΔG_φ.

Tabela 8.2.5.

T_i	T_j	φ_i	$\varphi_i + \Delta G_\varphi$	Broj vrednosti koje se grupišu	Tačke u grupi
1	2	19.7	16.0; 23.4	1	1,2
1	6	- 6.9	-10.6;-3.2	1	1.6
3	7	-15.7	-22.6;-12.0	1	3,7
4	5	0.7	-3.0; 4.4	3	4,5,6
4	6	2.2	-1.5;5.9	3	4,5,6
5	6	2.1	-1.6;5.8	3	4,5,6
Maksimalni broj vrednosti koje se grupišu				3	
Tačke stabilne grupe					4,5,6

Selekcija maksimalnog broja vrednosti φ_i u granici tačnosti ΔG_φ.

Kada postoji znatno veliki broj vrednosti φ_i koje se nalaze u granici tačnosti ΔG_φ poželjno je selektovane vrednosti φ_i proveriti jednim od metoda za identifikaciju grubih grešaka u opažanjima. Ovde će biti korišćeno pravilo Tompsona u cilju provere.

Na osnovu *m* selektovanih vrednosti φ_i koje se nalaze u granici ΔG_φ obrazuju se

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \qquad \ldots(8.2.28)$$

$$S^{*2} = \hat{\sigma}^2_{v_\varphi} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\varphi_i - \bar{\varphi})^2 \qquad \ldots(8.2.29)$$

Test statistika je oblika

$$t_i = \frac{\varphi_i - \bar{\varphi}}{S^*} = \frac{v_\varphi}{\hat{\sigma}_{v_\varphi}} \qquad \ldots(8.2.30)$$

Kada je $t_i \leq t_{m-2,\alpha}$ prihvata se nulta hipoteza H_o odnosno, da ne postoje rezultati koji se znatno izdvajaju, a u suprotnom za $t_i > t_{m-2,\alpha}$ odbacujemo H_o, a vrednost φ_i isključujemo iz zajedničkog skupa. Kritična vrednost $t_{m-2,\alpha}$ uzima se iz tablica datih u dodatku 10. Provera vrednosti φ_i pravilom Tompsona data je u tabeli 8.2.6.

Tabela 8.2.6.

T_i	T_j	φ_i	t_i	Testiranje H_o
4	5	0.7	1.41	$t_{m-2,\alpha} = t_{1;0.05}$
4	6	2.2	0.78	$t_{m-2,\alpha} = 1.41$
5	6	2.1	0.63	
$\bar{\varphi} = 1.667$	$S^* = 0.685$			Prihvata se H_o

Statističko testiranje vrednosti φ_i pravilom Tompsona.

Na osnovu navedene selekcije pomoću granične tačnosti ΔG_φ (*Tabela 8.2.5*) i na osnovu provere pravilom *Tompsona* (*Tabela 8.2.6*) donosi se zaključak o stabilnosti tačaka 4, 5 i 6.

Najverovatnija vrednost ugla rotacije $\bar{\varphi}$ određuje se na osnovu selektovanih vrednosti φ_i u granicama tačnosti ΔG_φ pomoću uopštene aritmetičke sredine

$$\bar{\varphi} = \frac{e^T K_\varphi^{-1} \varphi}{e^T K_\varphi^{-1} e} = \frac{e^T Q_\varphi^{-1} \varphi}{e^T Q_\varphi^{-1} e} \qquad \ldots(8.2.31)$$

gde je K_{φ} odnosno Q_{φ} određeno prema (8.2.24) a $e^T = [\,1 \;\; 1 \;\; 1 \; .... \; 1\,]$

Za $Q_{\varphi}^{-1} = P$ dobijamo

$$\bar{\varphi} = \frac{e^T P \varphi}{e^T P e} \qquad ...(8.2.32)$$

ili za P = I sledi

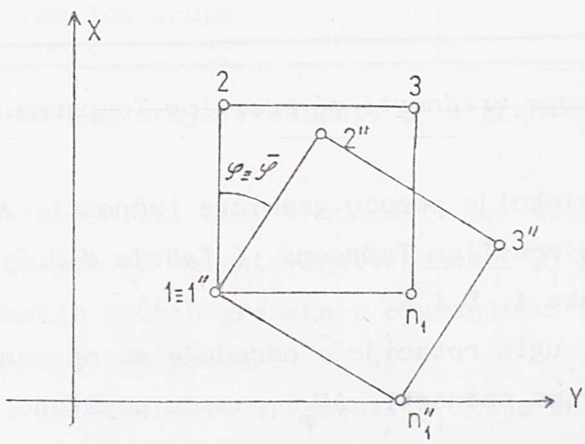
$$\bar{\varphi} = \frac{e^T \varphi}{e^T e} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \varphi_i \qquad ...(8.2.33)$$

Vrednost ugla $\bar{\varphi}$ može se odrediti i pomoću unimodalne transformacije koordinata selektovanih n_1 stabilnih tačaka

$$tg\, \bar{\varphi} = \frac{[\overline{X}\overline{Y}'' - \overline{Y}\overline{X}'']}{[\overline{X}\overline{X}'' + \overline{Y}\overline{Y}'']} \qquad ...(8.2.34)$$

Izrazi (8.2.33) i (8.2.34) daju identične rezultate za $\bar{\varphi}$. Razlog ovome je što se koriste samo koordinate stabilnih tačaka u (8.2.34) kao i u (8.2.33) gde je

$$\varphi_i = \nu_i'' - \nu_i = f(\, X_i\,,\; Y_i\,,\; X_i''\,,\; Y_i''\,), \qquad (i=1,2,...,n_1)$$



Sl.8.2.3. Identične vrednosti $\varphi = \bar{\varphi}$ *određene prema (8.2.33) i (8.2.34) kada je* $q_X = q_Y = 1$.

Na ovaj način geodetskoj mreži u koordinatnom sistemu XOY odgovara identična mreža u sistemu X"O"Y" koja nije deformisana. Kada nije ispunjen uslov $q_X=q_Y=1$ odnosno, kada je mreža u sistemu X"O"Y" pretrpela deformacije onda je $\varphi \neq \bar{\varphi}$, ili vrednosti određene prema (8.2.33) i (8.2.34) su različite. Međutim, kako se za određivanje ovih vrednosti uzimaju koordinate samo stabilnih tačaka u deformacionoj analizi uvek će biti $\varphi = \bar{\varphi}$ odnosno, izrazi (8.2.33) i (8.2.34) daju iste rezultate.

Slična identičnost ne postoji između (8.2.31) i (8.2.34) odnosno, u teorijskom smislu (8.2.34) nemože zameniti (8.2. 31). Razlog ovome je što u (8.2.34) nije uzeta u obzir korelativna zavisnost koordinata već je ona zanemarena. Prema ovome, treba dati odgovor na pitanje, kako bi trebalo da izgleda izraz (8.2.34) da bi dao identičan rezultat kao (8.2. 31)?

U tom cilju, pođimo od vektora transformacionih koeficijenata koji se određuje u transformaciji koordinata *(Mihailović, K. 1991.)*

$$t = -\left(C^T N^{-1} C \right)^{-1} C^T N^{-1} w \qquad \text{...(8.2.35)}$$

gde je za unimodalnu transformaciju

$$t^T = \left[\varphi \quad c_X \quad c_Y \right]$$

$$q_X = q_Y = 1, \qquad \varphi = \varphi_o + d\varphi, \qquad \varphi_o = 0$$

$$C = \begin{bmatrix} -y_1 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{n_1} & 1 & 0 \\ x_{n_1} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad w = X''-X = \begin{bmatrix} w_{X_1} \\ w_{Y_1} \\ \vdots \\ w_{X_{n1}} \\ w_{Y_{n1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''_1 - x_1 \\ y''_1 - y_1 \\ \vdots \\ x''_{n1} - x_{n1} \\ y''_{n1} - y_{n1} \end{bmatrix}$$

$$N = K_{\hat{X}''} + B^T K_{\hat{X}} B = K_{\hat{X}''} + K_{\hat{X}} \qquad \text{...(8.2.36)}$$

gde je za $\varphi_o = 0$ matrica B = I.

Za homogenu tačnost opažanja i istu geometriju mreže u obe epohe (8.2.36) postaje

$$N = 2\, K_{\hat{x}} = 2\, \hat{\sigma}_o^2\, Q_{\hat{x}}$$

i zamenom u (8.2.35) dobijamo

$$t = -\,(\, C^T Q_{\hat{x}}^{-1}\, C\,)^{-1}\, C^T\, Q_{\hat{x}}^{-1}\, (X''-X) \qquad \ldots(8.2.37)$$

Dakle, umesto izraza (8.2.34) neophodno je koristiti (8.2.37) gde se u okviru vektora t odredi vrednost ugla rotacije φ koja će biti identična sa vrednošću dobijenom prema (8.2.31). Ako se u (8.2.37) zanemari korelaciona zavisnost koordinata dobijamo

$$t = -\,(C^T C)\;\; C^T (X''-X) \qquad \ldots(8.2.38)$$

a vrednost ugla rotacije φ dobijena u okviru vektora t' bi će identična sa vrednostima dobijenim prema (8.2.33) i (8.2.34). Za identifikovane stabilne tačke 4, 5 i 6 (Tabela 8.2.6) najverovatnije vrednosti ugla rotacije φ određene su u Tabeli 8.2.7.

U cilju dalje primene metode translacije koordinatnog sistema neophodno je koordinate iz tekuće serije X" transformisati u X'

$$X'' \xrightarrow{\;\bar{\varphi}\;} X'$$

za vrednost ugla rotacije $\bar{\varphi}$ prema

$$\begin{aligned} Y' &= Y_T + (Y''-Y_T)\cos\bar{\varphi} + (X''-X_T)\sin\bar{\varphi} \\ X' &= X_T + (X''-X_T)\cos\bar{\varphi} - (Y''-Y_T)\sin\bar{\varphi} \end{aligned} \qquad \ldots(8.2.39)$$

gde su Y_T i X_T parametri translacije. Transformacija prema (8.2.39) pokazana je u dodatku 5 za prethodno određene parametre test mreže.

Identifikacija stabilnih tačaka metodom translacije koordinatnog sistema, kada je tendencija nepoznata, zahteva određivanje graničnih vrednosti u čijem se okviru prividna pomeranja grupišu oko neke nepoznate vrednosti. Ove granice tačnosti moraju biti korektno određene jer u suprotnom mogu nastati pogrešne odluke o stabilnim tačkama.

Tabela 8.2.7.

Br.	Način određivanja $\bar{\varphi}$
1	$\bar{\varphi} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \varphi_i = 2''$, $r=3$
2	$tg\,\bar{\varphi} = \frac{[\overline{X}\overline{Y}'' - \overline{Y}\overline{X}'']}{[\overline{X}\overline{X}'' + \overline{Y}\overline{Y}'']}$, $\bar{\varphi} = 2''$, $n_1 = 3$
3	$\bar{\varphi} = \frac{e^T Q_\varphi^{-1} \varphi}{e^T Q_\varphi^{-1} e} = 2''$
4	$t = \begin{bmatrix} \varphi \\ c_X \\ c_Y \end{bmatrix} = -(C^T Q_{\hat{x}}^{-1} C)^{-1} C^T Q_{\hat{x}}^{-1} w$, $\varphi = 2''$

$$Q_\varphi = Q_{dv} = \begin{bmatrix} 1.684 & 1.047 & 0.755 \\ & 1.103 & 1.111 \\ \text{simetrično} & & 1.572 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2200 & 1 & 0 \\ 2500 & 0 & 1 \\ -1200 & 1 & 0 \\ 2600 & 0 & 1 \\ -400 & 1 & 0 \\ 1600 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 223.9 & -145.1 & 65.30 & -162.6 & -36.99 & -53.79 \\ & 418.6 & 50.58 & 356.3 & 154.6 & 111.1 \\ & & 166.2 & 36.61 & 89.35 & -15.09 \\ & & & 452.7 & 173.9 & 134.5 \\ & \text{simetrično} & & & 237.8 & 15.83 \\ & & & & & 147.5 \end{bmatrix}$$

Načini određivanja $\bar{\varphi}$ za stabilne tačke.

Kovarijaciona matrica prividnih pomeranja (8.2.1) je

$$K_{d'} = K_{\hat{x}'} + K_{\hat{x}}$$

odnosno

$$\sigma^2_{d'} = \sigma^2_{\hat{x}'} + \sigma^2_{\hat{x}} \qquad \ldots(8.2.40)$$

ili za homogenu tačnost

$$\sigma_{d'_i} = \sigma_{\hat{x}_i} \sqrt{2}, \qquad (i=1,2,3,\ldots,u) \qquad \ldots(8.2.41)$$

Na osnovu u vrednosti $\sigma_{d'}$ odredimo prosečnu vrednost

$$\bar{\sigma}_{d'} = \frac{1}{u} \sum_{i=1}^{u} \sigma_{d'_i} \qquad \ldots(8.2.42)$$

a interval tačnosti ili granična vrednost, u okviru koje treba da se grupišu vrednosti d'_i je

$$\Delta G_{d'} = t_p \, \bar{\sigma}_{d'} \qquad \ldots(8.2.43)$$

U 2-D mrežama neophodno je odrediti ove granične vrednosti po X i Y osi tako da se nepoznata vrednost prividnog pomeranja oko koje se ostale vrednosti grupišu u najvećem broju, nađe u intervalu

$$\begin{aligned} d'_{x_i} - \Delta G_{d'_x} &< d'_{x_i} < d'_{x_i} + \Delta G_{d'_x} \\ d'_{y_i} - \Delta G_{d'_y} &< d'_{y_i} < d'_{y_i} + \Delta G_{d'_y} \end{aligned} \qquad \ldots(8.2.44)$$

Za test mrežu koju posmatramo granična tačnost po X i Y osi određena je u tabeli 8.2.8.

Kada su selektovane vrednosti prividnih pomeranja d'_i koje se u najvećem broju grupišu oko neke vrednosti u granici tačnosti $\Delta G_{d'}$, poželjno je ove selektovane vrednosti proveriti i uveriti se da ne postoje vrednosti koje se znatno izdvajaju. Primenom *Tompsonovog* pravila za m vrednosti d' koje se grupišu u granici $\Delta G_{d'}$ sledi

Tabela 8.2.8.

T_i	$\sigma_{d'_Y}$	$\sigma_{d'_X}$	Granice tačnosti
1	3.4	3.2	$\bar{\sigma}_{d'_Y} = 3.3$ mm
2	3.5	3.5	
3	3.5	3.2	$\bar{\sigma}_{d'_X} = 3.2$ mm
4	3.4	3.2	
5	3.4	3.7	$\Delta G_{d'_Y} = 3 \times 3.3 = 10$ mm
6	3.8	3.2	
7	2.3	2.4	$\Delta G_{d'_X} = 3 \times 3.2 = 10$ mm

Granice tačnosti $\Delta G_{d'_Y}$ i $\Delta G_{d'_X}$.

$$\bar{d'} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} d'_i$$

$$S^{*2} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (d'_i - \bar{d'})^2 \qquad \ldots (8.3.45)$$

a test statistika je oblika

$$t_i = \frac{d'_i - \bar{d'}}{S^*} \qquad \ldots (8.2.46)$$

Kada je $t_i \leq t_{m-2,\alpha}$ prihvatamo nultu hipotezu H_o i smatramo da ne postoje vrednosti koje se znatno izdvajaju. Kritična vrednost $t_{m-2,\alpha}$ uzima se iz tablica datih u dodatku 10.

Kompletna identifikacija stabilnih tačaka sa testiranjem statističkih hipoteza, za datu test mrežu, izvršena je programom ISTGE2 a rezultati su pokazani u dodatku 6. Uzimanjem iz ovog dodatka vrednosti prividnih pomeranja koja se grupišu u granicama tačnosti $\Delta G_{d'}$ u tabeli 8.2.9 pokazani su rezultati provere *Tompsonovim* pravilom.

Konačni rezultati dobijeni metodom translacije koordinatnog sistema kada je tendencija nepoznata (dodatak 6), dati su pregledno u tabeli 8.2.10. radi uporedne analize sa početnim stanjem, iz koje sledi dobra saglasnost.

Tabela 8.2.9.

Osa X			Osa Y	
T_i	d'_X	t_X	d'_Y	t_Y
4	-7	0.16	8	o.12
5	-1	1.30	12	1.28
6	-11	1.14	5	1.16
$\bar{d'_X} = -6.33$ mm $S^{*2} = 4.11$ mm^2 $t_{m-2,\alpha} = t_{1;0.05} = 1.41$ Prihvata se H_o			$\bar{d'_Y} = 8.33$ mm $S^{*2} = 2.87$ mm^2 $t_{m-2,\alpha} = t_{1;0.05} = 1.41$ Prihvata se H_o	

Statističko testiranje vrednosti d'_X i d'_Y pravilom Tompsona.

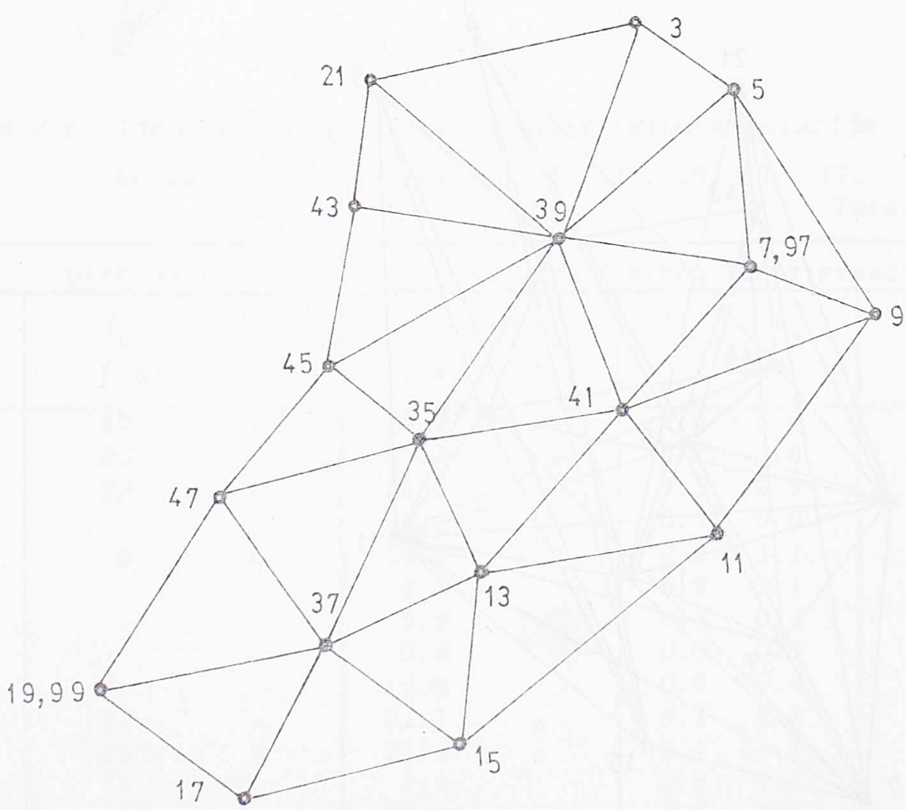
Tabela 8.2.10.

POČETNE VREDNOSTI			VREDNOSTI NAKON IDENTIFIKACIJE		
T_i	d_i [mm]	ν_i [o]	d_i [mm]	ν_i [o]	STABILNA TAČKA
1	40	210	40	210.8	NE
2	60	330	60	328.2	NE
3	50	150	54	150.2	NE
4			2		DA
5			9		DA
6			4		DA
7	50	30	52	23.3	NE

Vrednosti d_i i ν_i pre i posle identifikacije.

Ovde će biti pokazana i analiza druge test mreže date na sl.8.2.4 koju je simulirao *Kok, J. J. 1983.* sa pomeranjima datim u tebeli 8.2.11.

U mreži su simulirana opažanja 72 pravaca i 37 dužina za epohe 1 i 2A, sa tačnošću datom u tabeli 8.2.11 bez prisustva grubih grešaka. Tačke 7 i 19 su prisutne samo u epohi 1, a samo u epohi 2A tačke 9, 97 i 99. Identifikacija stabilnih tačaka kada je tendencija nepoznata, obavljena je na identičan način kao i u prethodnoj test mreži, pa će ovde biti pokazani samo rezultati detaljne analize. Na slici 8.2.5. pokazane su nedeformisane dužine dobijene nakon testiranja statičkih hipoteza (8.2.18). Identifikovane stabilne tačke metodom rotacije koordinatnog sistema pokazane su na slici 8.2.6. Iste tačke identifikovane su kao stabilne i metodom translacije koordinatnog sistema. Detaljna analiza pokazana je u dodatku 7 a u tabeli 8.2.12. date su uporedne vrednosti iz koje se vidi dobra saglasnost.

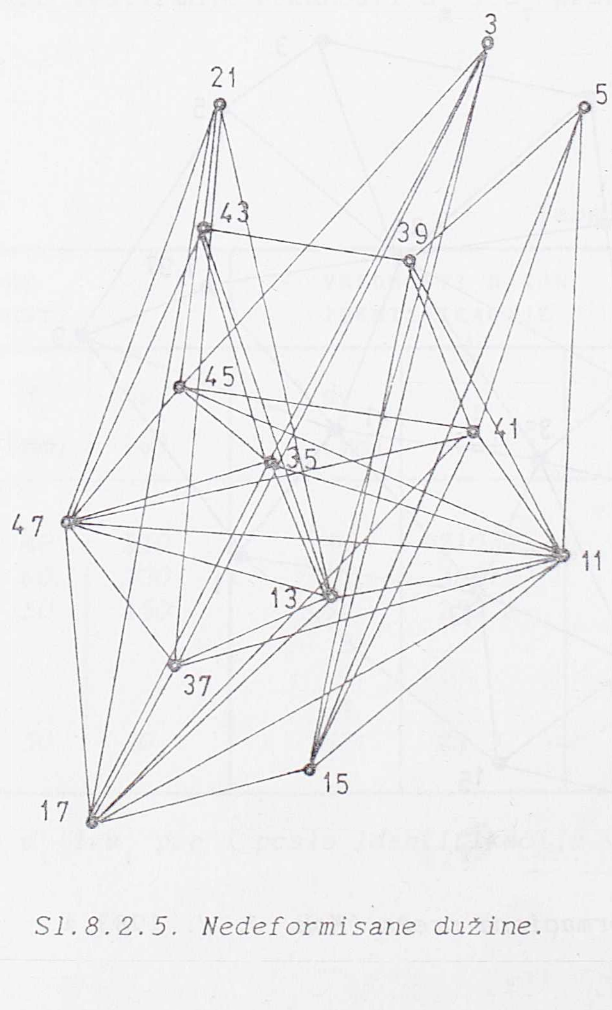


Sl.8.2.4. Test deformaciona mreža (Kok, J. J. 1983.)

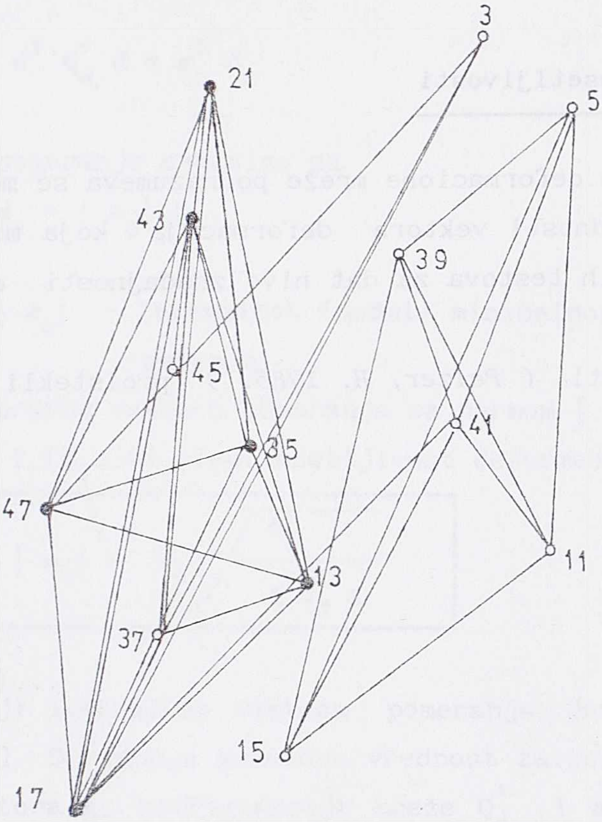
Tabela 8.2.11.

Epoha	Stanica	Y	X	d	ν
2A	3	+0.20	+0.02	0.20	↗
	5	+0.12	+0.20	0.23	↗
	11	+0.12	+0.20	0.23	↗
	15	-0.06	+0.06	0.08	↘
	39	+0.12	+0.20	0.23	↗
	41	+0.12	+0.20	0.23	↗
	45	-0.08	-0.10	0.13	↙
Tačnost opažanja					
		pravci		dužine	
1		σ_α =0.1 mgon		σ_s = 0.01 m	
2A		σ_α =0.1 mgon		σ_s = 0.08 m	

Pomeranja i tačnost opažanja za test 2-D mrežu (Sl.8.2.4)



Sl.8.2.5. Nedeformisane dužine.



Sl.8.2.6. Identifikovane stabilne tačke metodom rotacije koordinatnog sistema: 13, 17, 21, 35, 43 i 47.

Tabela 8.2.12.

DATE VREDNOSTI			VREDNOSTI NAKON IDENTIFIKACIJE				
T_i	d_i [cm]	ν_i [o]	d_i [cm]	ν_i [o]	t_X	t_Y	STABILNA TAČKA
3	20	↗	23.6	↗	0.9	6.0	
5	23	↗	23.3	↗	2.7	2.8	
11	23	↗	26.2	↗	5.5	0.9	
13			2.2		0.5	0.0	DA
15	8	↘	14.0	↘	2.2	1.1	
17			6.2		0.9	0.1	DA
21			5.9		0.8	0.4	DA
35			0.3		0.0	0.1	DA
37			4.6		0.9	0.4	DA
39	23	↗	21.1	↗	5.1	2.2	
41	23	↗	21.2	↗	6.1	1.1	
43			2.3		0.5	0.2	DA
45	13	↙	15.9	↙	4.7	1.6	
47			5.3		1.3	0.1	DA

Uporedne vrednosti deformacija.

8.3. Optimizacija sa aspekta osetljivosti

Pod osetljivošću geodetske deformacione mreže podrazumeva se mogućnost određivanja donje granične vrednosti vektora deformacija koja može biti ustanovljena putem statističkih testova za dat nivo značajnosti α i moć testa β.

Osnovi analize osetljivosti (*Pelzer, H. 1985.*) proistekli su iz statističkih test hipoteza

$$H_0: \; E\,(d) = 0 \qquad H_a: \; E\,(d) \neq 0 \qquad \ldots(8.3.1)$$

sa test statistikom

$$F = \frac{d^T\, Q_d^+\, d}{\hat{\sigma}_0^2\; r\,(Q_d)} \qquad \ldots(8.3.2)$$

gde je:

$$d = \hat{x}_2 - \hat{x}_1$$

$$Q_d = Q_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} + Q_{\hat{x}_2 \hat{x}_2} = 2\, Q_{\hat{x}} = 2\,(A^T\, P\, A)^+$$

$$r\,(Q_d) = \text{rang } Q_d$$

F - test statistika sledi F raspodelu sa brojevima stepeni slobode $n_1 = rang\ Q_d$ i $n_2 = r = r_1 + r_2$.

Analiza osetljivosti treba da odgovori na pitanje ako je hipoteza H_a prihvaćena i postoji pomeranje onda, koliko veliko pomeranje d može biti identifikovano za date verovatnoće α i β ?

U slučaju alternativne hipoteze H_a, test statistika F sledi necentralnu $F_{1-\alpha,r,\infty,\delta}$ raspodelu sa parametrom necentralnosti

$$\delta = \frac{d^T\, Q_d^+\, d}{\sigma_0^2} \qquad \ldots(8.3.3)$$

Parametar necentralnosti δ zamenimo sa teorijskom donjom graničnom vrednošću

$$\delta_0 = f\,(r,\, \infty,\, \alpha_0,\, \beta_0) \qquad \ldots(8.3.4)$$

i (8.3.3) pišemo u obliku

$$d^T Q_d^+ d = \sigma_0^2 \delta_0 \qquad \ldots(8.3.5)$$

Minimalno pomeranje označimo sa

$$d_0 = | a_0 | g \qquad \ldots(8.3.6)$$

gde je

$a_0 = | a_0 |$ - intenzitet (modul) minimalnog vektora pomeranja,

g - pravac vektora pomeranja sa normom $\| g \| = 1$.

Iz (8.3.5) i (8.3.6) sledi osetljivost deformacione mreže

$$\boxed{| a_0 | = \sigma_0 \sqrt{\frac{\delta_0}{g^T Q_d^+ g}}} \qquad \ldots(8.3.7)$$

ili najmanji intenzitet vektora pomeranja koji može biti identifikovan ($|a_0| = a_{min}$). Ova donja granična vrednost zavisi od verovatnoća α_0, β_0, pravca vektora g, konfiguracije mreže Q_d^+ i *a priori* usvojenog standarda jedinice težine σ_0.

Matrica kofaktora Q_d može biti napisana u obliku spektralne matrice

$$Q_d = S \Lambda S^T \qquad \ldots(8.3.8)$$

ili njena pseudo inverzija

$$Q^+ = S \Lambda^+ S^T = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\lambda_i} s_i s_i^T \qquad \ldots(8.3.9)$$

gde je:

$S = [s_1, s_2, \ldots s_r, \ldots s_u]$,

$\Lambda = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r, 0, \ldots 0]$,

λ_i = sopstvene vrednosti matrice Q_d,

s_i = sopstveni vektori korespodentni sa λ_i,

$\lambda_1 = \lambda_{max}$ i $\lambda_r = \lambda_{min}$ $(\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_r)$.

Iz spektralne analize sledi

$$g^T Q_d^+ g = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\lambda_i} (g^T s_i)(s_i^T g)$$

ili uzimajući da su pravci vektora g i s_i paralelni ($g = s_i$)

$$g^T Q_d^+ g = \lambda_i^{-1} \qquad \text{...(8.3.10)}$$

gde je norma vektora $\| g \| = \| s \| = 1$.
Zamenom (8.3.10) u (8.3.7) dobijaju se intenziteti pomeranja u navedenim pravcima

$$| a^0_{min} | = \sigma_0 \sqrt{\delta_0 \lambda_{min}} \qquad \text{...(8.3.11)}$$

$$| a^0_{max} | = \sigma_0 \sqrt{\delta_0 \lambda_{max}} \qquad \text{...(8.3.12)}$$

gde je za minimalnu sopstvenu vrednost λ_{min} osetljivost najbolja, a za maksimalnu vrednost λ_{max} osetljivost je najslabija.

Mere osetljivosti (8.3.7) ili (8.3.11) mogu poslužiti kao kriterijumi u optimizaciji geodetskih deformacionih mreža (*Zhang, Y. 1987., Zhang, Z. i Li, X. 1990, Huaxue, T.* i *Fengxiang, J. 1990.*) i ovde će biti pokazani samo osnovni idejni pristupi. Metod optimizacije baziran na kriterijumu osetljivosti (*Zhang, Z.* i *Li, X. 1990.*) podrazumeva prvo iznalaženje kriterijum matrice osetljuvosti $\underline{Q}_d$ za matricu kofaktora Q_d.
Prema (8.3.6) i (8.3.11) sledi jednakost

$$d_0 = \sigma_0 \sqrt{\delta_0 \lambda_0}\; g \quad , \quad (\lambda_0 = \lambda_{min}) \qquad \text{...(8.3.13)}$$

na osnovu koje se dobijaju vrednosti

$$\lambda_0 = \frac{d_0^2}{\sigma_0^2 \delta_0} \qquad \text{...(8.3.14)}$$

za definisani minimalni intenzitet pomeranja d_0, poznatu standardnu devijaciju σ_0 i parametar necentralnosti δ_0. Kako je na osnovu dizajna mreže poznata matrica (8.3.8) onda zamenom sopstvenih vrednosti λ sa vrednostima λ_0 u ovoj matrici dobija se kriterijum matrica osetljivosti

$$\underline{Q}_d = S\, \Lambda_o\, S^T$$

Optimalne težine opažanja određuju se iz matrične jednačine

$$A^T P\, A = 2\, \underline{Q}_d^+ \qquad \ldots (8.3.15)$$

gde je P nepoznata dijagonalna matrica težina. Jednačinu (8.3.15) pišemo u obliku sistema linearnih jednačina

$$(A^T \odot A^T)\; p = q$$

gde je

$p = \text{vec}\,(P)$ vektor dijagonalnih koeficijenata matrice P

$q = \text{vec}\,(2\,\underline{Q}_d^+)$ vektor koeficijenata donje trougaone matrice $2\,\underline{Q}_d^+$,

$u\,(u + 1)/2$ = broj linearnih jednačina.

U opštem slučaju broj linearnih jednačina je veći od broja nepoznatih težina n, pa se rešenje sistema jednačina nalazi po metodi najmanjih kvadrata. Problem ovog rešenja je pojava negativnih težina ili zahteva za veoma visokom tačnošću opažanja koji su praktično neizvodljivi pa je neophodno uvođenje dodatnog uslova $p_i > 0$ $(i = 1,2,\ldots n)$. Pored ovog ograničenja uvodi se i ograničenje za minimalnu pouzdanost mreže. Kako početne vrednosti težina mogu biti nerealne, uveden je iterativni postupak, gde se posle svake iteracije formira nova kriterijum matrica osetljivosti, sa limitom iteracija

$$\| \Delta \| = |\; \text{vec}\; 2\,(A^T P\, A)^+ - \underline{Q}_d \;| < \varepsilon_o$$

gde je norma $\| \Delta \| = \varepsilon_o$ mala pozitivna vrednost.

U *(Huaxue, T. i Fengxiang, J. 1990.)* osnovna ideja optimizacije deformacionih mreža sa aspekta osetljivosti, proistekla je iz matrične jednačine (8.3.9) koja s obzirom na relacije između sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora može biti pisana u obliku

$$Q_d^+ s_i = \Lambda^+ s_i = \frac{1}{\lambda_{min}} s_i \qquad \text{...(8.3.16)}$$

ili

$$\frac{1}{2} A^T P A s_i - \frac{1}{\lambda_{min}} s_i = 0 \qquad \text{...(8.3.17)}$$

Matematički model optimizacije dobijen je primenom metode najmanjih kvadrata gde je minimalna norma

$$\left\| \frac{1}{2} A^T P A s_i - \frac{1}{\lambda_{min}} s_i \right\| = min \qquad \text{...(8.3.18)}$$

U ovom izrazu poznata je matrica dizajna deformacione mreže A kao i vrednost $\lambda_{min} = \lambda_0$ koja se određuje prema (8.3.14). Za poznate aproksimativne pravce pomeranja u deformacionoj mreži sopstveni vektor s_i može biti zamenjen sa aproksimativnim s_o, pa (8.3.18) ima oblik

$$\left\| \frac{1}{2} A^T P A s_o - \frac{1}{\lambda_0} s_o \right\| = min \qquad \text{...(8.3.19)}$$

Na ovaj način u (8.3.19) preostaje nepoznata dijagonalna matrica težina P, za koju se nalazi optimalno rešenje.

8.4. Sekvencijalni model optimizacije sa aspekta osetljivosti

U okviru razmatranja mogućnosti optimizacije opažanja u geodetskim deformacionim mrežama (poglavlje 8.3), lako je uočiti da su kriterijumi osetljivosti uzeti samo kao globalne mere. Međutim, dobra globalna osetljivost ne znači i dobru lokalnu osetljivost. Zbog toga, ovde će biti prvo razmatrane mogućnosti dobijanja lokalnih mera osetljivosti što znači određivanje osetljivosti za svako pojedino pomeranje.

Ideja o određivanju lokalnih mera osetljivosti može biti realizovana ako se ima u vidu statističko testiranje hipoteza (8.2.14). U test statistici (8.2.15) ocenu standardne devijacije $\hat{\sigma}_0$ dobijenu iz izravnanja po metodi najmanjih kvadrata zamenimo sa teorijskom vrednošću σ_0 pa sledi

$$t_i = \frac{d_i}{\sigma_{d_i}} = \frac{d_i}{\sigma_0 \sqrt{Q_{d_{ii}}}} \sim N \qquad \text{...(8.4.1)}$$

U slučaju nulte hipoteze H_o test statistika t_i sledi standardizovanu normalnu raspodelu $t_i \sim N$ (0, 1), a u slučaju alternativne hipoteze H_a necentralnu normalnu raspodelu $t_i \sim N\,(\delta_i,\ 1)$ sa parametrom necentralnosti δ (sl.4.5.1), i pišemo

$$\delta_i = \frac{\nabla d_i}{\sigma_{d_i}} \qquad \text{...(8.4.2)}$$

Empirisku vrednost parametra necentralnosti δ_i sada zamenimo sa teorijskom vrednošću

$$\delta_o = f\,(\alpha_o,\ \beta_o)$$

pa (8.4.2) pišemo u obliku

$$\boxed{d_{i,o} = \delta_o\, \sigma_{d_i} = \delta_o\, \sigma_o \sqrt{Q_{d_{ii}}}} \qquad \text{...(8.4.3)}$$

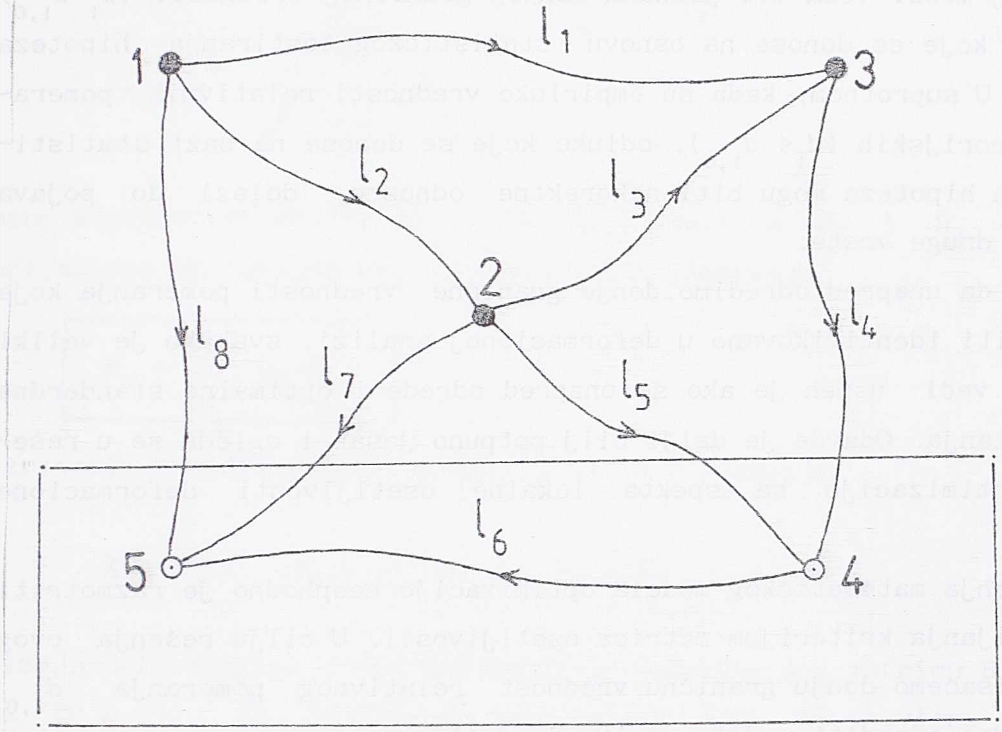
Jednakost (8.4.3) predstavlja upravo tražene mere lokalne osetljivosti ili osetljivost svakog pojedinog relativnog pomeranja u deformacionoj mreži. Očigledno ona zavisi od parametra necentralnosti δ_o, *a priori* uzete standardne devijacije σ_0 i dizajna deformacione mreže Q_d. Parametar necentralnosti δ_0 treba određivati prema tabeli 4.5.2. za usvojene verovatnoće α_0 i β_0, tako da bude konstantan (δ_0= const) za sva relativna pomeranja u deformacionoj mreži. Kako za parametar necentralnosti δ_0 biramo obično donju graničnu vrednost, to će onda i $d_{i,0}$ određeno prema (8.4.3) predstavljati donju graničnu vrednost relativnog pomeranja, koje može biti identifikovano putem testiranja statističkih hipoteza. Drugim rečima, za poznat dizajn deformacione mreže i usvojeno α_0, β_0 i σ_0 moguće je odrediti donje granične vrednosti relativnih pomeranja koje mogu putem testiranja statističkih hipoteza biti identifikovane.

Očigledno, terijske vrednosti (8.4.3) lako se mogu odrediti međutim, sada se nameće pitanje koliko one odražavaju realno stanje odnosno, da li prilikom statističkih testiranja hipoteza u deformacionoj analizi zaista mogu biti korektno identifikovana pomeranja koja u malome prevazilaze ili su jednaka ovim graničnim vrednostima.

U ovom cilju, ispitivano je više mreža a ovde će biti pokazane samo dve. Za test 1-D deformacionu mrežu (sl.8.4.1) teorijske donje granične vrednosti (8.4.3) date su u tabeli 8.4.1. Prilikom formiranja matrice B za ovu svrhu potpuno je suvišno poznavanje tendencija pomeranja.

Za ovu test 1-D deformacionu mrežu u nultoj epohi simulirana su opažanja l_i (i = 1,2,3... 8) sa tačnošću σ_l = 1mm a u tekućoj epohi takođe sa istom tačnošću ali sa pomeranjima na tačkama 4 i 5 u iznosima d_4= + 4mm i d_5= - 4mm, tako da ove vrednosti u malome prevazilaze donje granične vrednosti na ovim tačkama ($d_{i,0}$ = 3,7mm). Na osnovu rezultata izravnanja obe epohe izvršena je deformaciona analiza programom ISTGE1 a informacije dobijene nalaze se u dodatku 8. Imajući u vidu dobijene informacije može se zaključiti da su odluke prilikom statističkog testiranja hipoteza donešene korektno.

Slično je postupljeno i sa mrežom na slici 7.4.1, za koju su donje granične vrednosti (8.4.3) određene u tabeli 8.4.3. a simulirana su pomeranja neznatno veća od teorijskih donjih graničnih vrednosti. Informacije dobijene na osnovu deformacione analize pokazale su i u ovom slučaju da su odluke donšene korektno prilikom statističkog testiranja hipoteza.



● stabilna tačka $\sigma_{l_i} = 1\text{mm}, \quad i = 1,2, \ldots 8$

⊙ nestabilna tačka

Sl.8.4.1. Test 1-D deformaciona mreža.

Tabela 8.4.1

T_i	$d_{i,o}$ [mm]	Poznate vrednosti
1	2. 41	$\alpha_0 = 0,001$
2	2. 25	$\beta_0 = 0,80$
3	2. 41	$\delta_0 = f\ (0.001,\ 0.80) = 4.13$
4	3. 66	$Q_d = 2\ B\ Q_{\hat{x}}\ B^T$
5	3. 66	$\sigma_0 = 1\text{mm}$

Lokalna osetljivost test 1-D deformacione mreže.

Na osnovu navedenih ispitivanja, kao i na osnovu ispitivanja drugih mreža koje ovde neće biti prikazivane, konstatovano je da ako su pomeranja u deformacionoj mreži veća ili jednaka donjoj graničnoj vrednosti ($d_i \geq d_{i,0}$) onda će odluke koje se donose na osnovu statističkog testiranja hipoteza biti korektne. U suprotnom, kada su empiriske vrednosti relativnih pomeranja manje od teorijskih ($d_i < d_{i,0}$), odluke koje se donose na bazi statističkog testiranja hipoteza mogu biti nekorektne odnosno, dolazi do pojava grešaka prve i druge vrste.

Mogućnost da unapred odredimo donje granične vrednosti pomeranja koje mogu kasnije biti identifikovane u deformacionoj analizi, svakako je veliki uspeh, ali još veći uspeh je ako se unapred odrede i optimalne standardne devijacije opažanja. Odavde je dalji cilj potpuno jasan i ogleda se u rešenju problema optimizacije sa aspekta lokalne osetljivosti deformacione mreže.

Pre kreiranja matematičkog modela optimizacije neophodno je razmotriti mogućnosti dobijanja kriterijum matrica osetljivosti. U cilju rešenja ovog problema definisaćemo donju graničnu vrednost relativnog pomeranja $d_{i,0}$ koju je neophodno odrediti u deformacionoj mreži

$$d_{i,0} \equiv \text{definisana vrednost} \qquad \ldots (8.4.4)$$

Na primer, ako se na bazi realne analize objekta došlo do saznanja da pomeranja veća od 10 mm narušavaju statiku objekta onda, donja granična vrednost mora biti definisana vrednošću od $d_{i,0} = 10\text{mm}$. Prema tome, u cilju rešenja problema optimizacije vrednosti $d_{i,0}$ moraju biti odraz realnih potreba deformacionih objekata iz prirode, a nikako teorijske vrednosti u funkciji uzetih verovatnoća. Na osnovu vrednosti (8.4.4) i jednakosti (8.4.3) pišemo

$$\sigma_{d_i} = \frac{d_{i,0}}{\delta_0} \qquad \ldots (8.4.5)$$

ili u vidu dijagonalne matrice standardnih devijacija relativnih pomeranja

$$D_d = \mathrm{Diag}\left[\, \sigma_{d_1}, \sigma_{d_2}, \ldots \sigma_{d_n} \right] \qquad \ldots (8.4.6)$$

Za poznati dizajn deformacione mreže matrica kofaktora Q_d (8.2.13) takođe je poznata, pa iz nje određujemo koeficijente korelacije relativnih pomeranja

$$r_{d_i d_j} = \frac{Q_{d_i d_j}}{\sqrt{Q_{d_i d_i} \; Q_{d_j d_j}}} \qquad \ldots(8.4.7)$$

odnosno korelacionu matricu R_d. Na osnovu matrica D_d i R_d dobijamo kovarijacionu kriterijum matricu relativnih pomeranja

$$\boxed{\underline{K}_d = D_d \, R_d \, D_d} \qquad \ldots(8.4.8)$$

ili kriterijum matricu osetljivosti koja je u funkciji

$$\underline{K}_d = f\,(d_{i,0}, \delta_0, Q_d) = f(d_{i,0}, \alpha_0, \beta_0, A, B) \qquad \ldots(8.4.9)$$

Dizajn deformacione mreže definisan je matricom A a matricu B određujemo prema (8.2.11). Za formiranje matrice B ovde je suvišno poznavanje tendencija kretanja tla i objekta i jedino što treba znati to su tačke koje se nalaze u oblasti deformacija koje se ispituju. Na osnovu matrične analize ustanovljeno je da u svim slučajevima matrica B ima nepotpunu rang (det B = 0) odnosno, B je singularna matrica. Ako sada kovarijacionu matricu relativnih pomeranja

$$K_d = 2 \; B \; K_{\hat{x}} \; B^T \qquad \ldots(8.4.10)$$

zamenimo sa kriterijum matricom (8.4.8) dobijamo

$$\underline{K}_d = 2 \; B \; K_{\hat{x}} \; B^T \qquad \ldots(8.4.11)$$

Matričnu jednačinu (8.4.11) pomnožimo sa leva matricom B^T i sa desna matricom B, pa je

$$B^T \, \underline{K}_d \, B = 2 \; B^T B \; K_{\hat{x}} \; B^T B \qquad \ldots(8.4.12)$$

odnosno

$$\frac{1}{2}\,(B^TB)^+\,B^T\,\underline{K}_d\,B\,(B^TB)^+ = K_{\hat{\underline{x}}} \qquad \ldots(8.4.13)$$

ili uvedemo oznaku

$$\underline{K}_{x,d} = K_{\hat{\underline{x}}} \qquad \ldots(8.4.14)$$

gde je

$$\boxed{\underline{K}_{x,d} = \frac{1}{2}\,(B^TB)^+\,B^T\,\underline{K}_d\,B\,(B^T\,B)^+} \qquad \ldots(8.4.15)$$

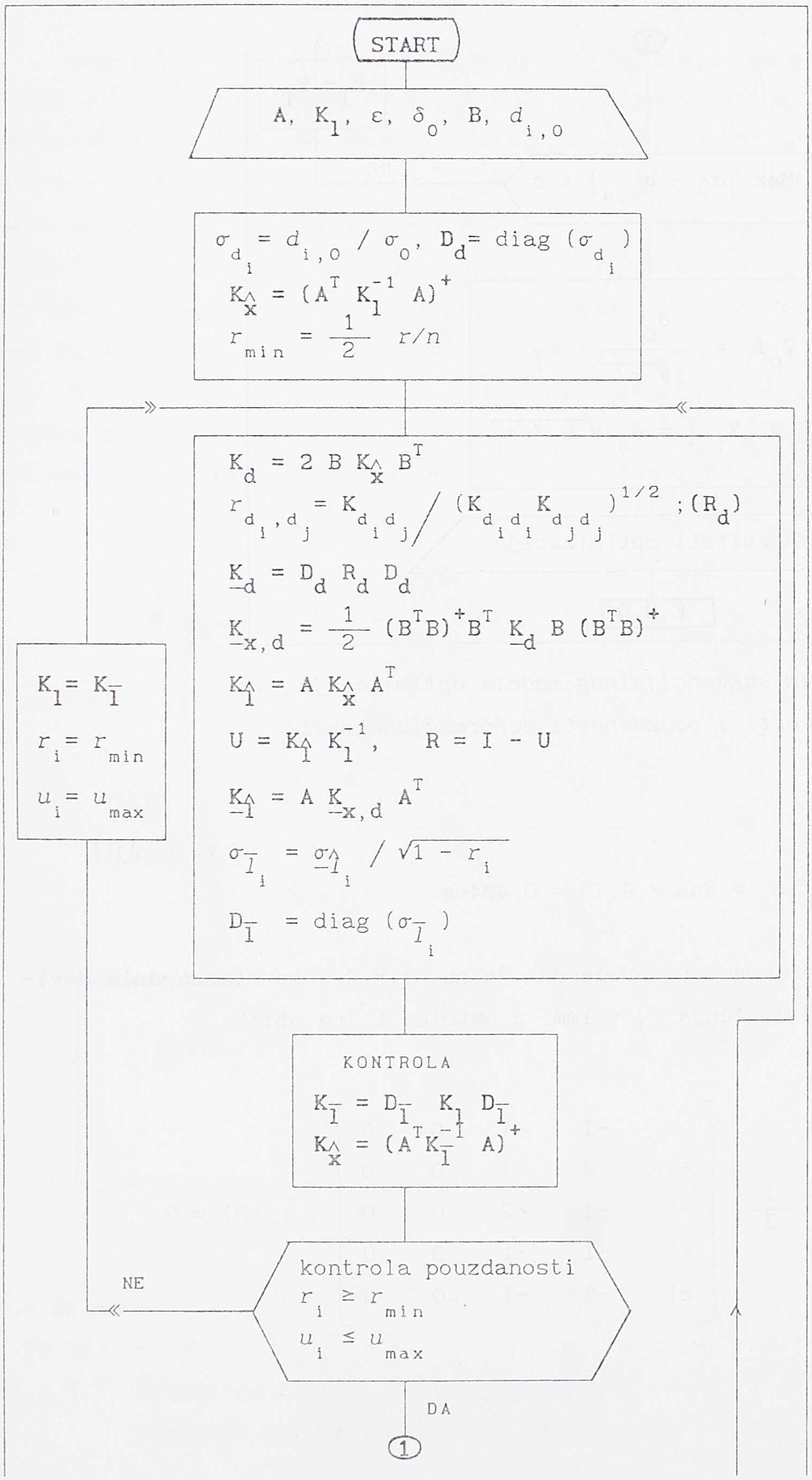
Matrična jednačina (8.4.15) predstavlja transformaciju kriterijum matrice osetljivosti $\underline{K}_d$ u kriterijum kovarijacionu matricu nepoznatih parametara $\underline{K}_{x,d}$. Ova transformacija neophodna je zbog primene sekvencijalnog modela optimizacije. Naime, ako (8.4.14) napišemo u obliku

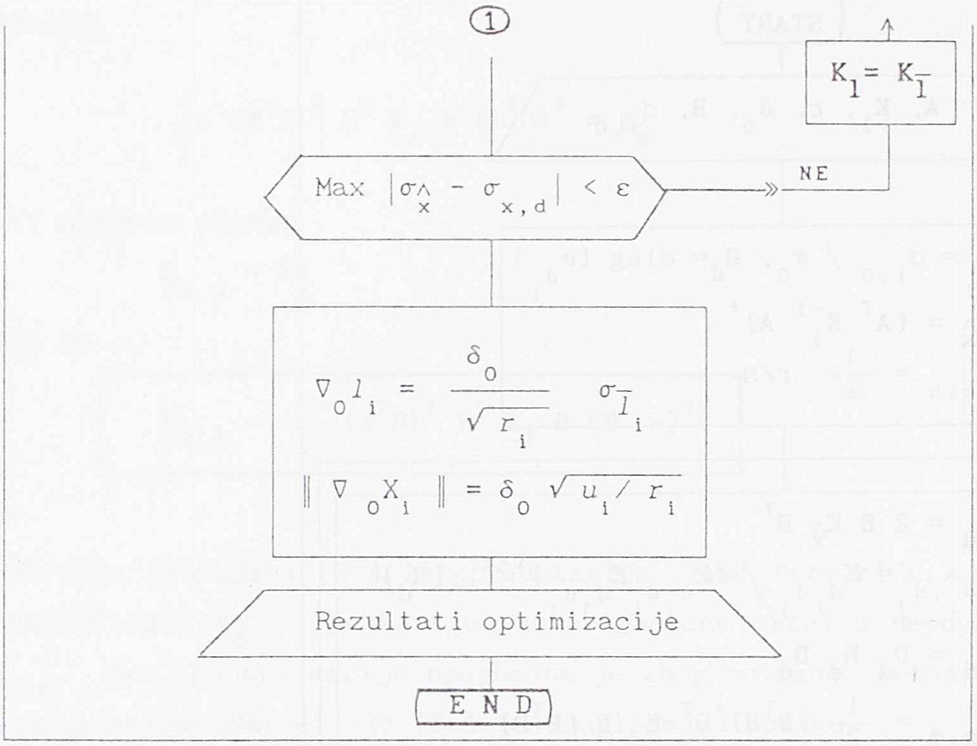
$$\underline{K}_{x,d} = (A^T\,D_l^{-1}\,R_l\,D_l^{-1}\,A)^+ \qquad \ldots(8.4.16)$$

i ovu jednačinu uporedimo sa (7.1.2), onda je potpuno jasno da se optimizacija sa aspekta lokalne osetljivosti svodi na sekvenvcijalni model optimizacije.

Sekvencijalni model optimizacije detaljno je objašnjen u poglavlju 7 i sve njegove karakteristike važiće i u ovom slučju. Jedina je razlika što u optimizaciji sa aspekta lokalne osetljivosti formiramo kriterijum matricu $\underline{K}_{x,d}$ umesto kriterijum matrice K_x u optimizaciji sa aspekta tačnosti. Kriterijumi unutrašnje i spoljašnje pouzdanosti deformacione mreže pri optimizaciji sa aspekta osetljivosti bi će uključeni na već ranije objašnjen način (sl. 7.2.10). Kompletan algoritam sekvencijalnog modela optimizacije sa aspekta osetljivosti i pouzdanosti deformacione mreže dat je na slici 8.4.2.

Primena sekvencijalnog modela optimizacije (sl.8.4.2) ovde će biti pokazana za test 1-D deformacionu mrežu (sl. 8.4.1). Za ovu test mrežu definisana je donja granična vrednost pomeranja $d_{i,0}$= 2mm koja treba da bude identifikovana u deformacionoj analizi. Iz tablica određujemo $\delta_0 = f(\alpha_0,\ \beta_0) = f(0.001,\ 0.80) = 4.13$ i prema (8.4.5) dobijamo


START
$A,\ K_l,\ \varepsilon,\ \delta_0,\ B,\ d_{i,0}$
$\sigma_{d_i} = d_{i,0} / \sigma_0,\ D_d = \mathrm{diag}\,(\sigma_{d_i})$
$K_{\hat{x}} = (A^T K_l^{-1} A)^+$
$r_{min} = \frac{1}{2}\, r/n$
$K_d = 2\, B\, K_{\hat{x}}\, B^T$
$r_{d_i,d_j} = K_{d_i d_j} \Big/ (K_{d_i d_i} K_{d_j d_j})^{1/2}\ ;(R_d)$
$\underline{K}_d = D_d\, R_d\, D_d$
$\underline{K}_{x,d} = \frac{1}{2} (B^T B)^+ B^T\, \underline{K}_d\, B\, (B^T B)^+$
$K_{\hat{l}} = A\, K_{\hat{x}}\, A^T$
$U = K_{\hat{l}}\, K_l^{-1},\quad R = I - U$
$\underline{K}_{\hat{l}} = A\, \underline{K}_{x,d}\, A^T$
$\sigma_{\bar{l}_i} = \underline{\sigma}_{\hat{l}_i} / \sqrt{1 - r_i}$
$D_{\bar{l}} = \mathrm{diag}\,(\sigma_{\bar{l}_i})$
$K_l = K_{\bar{l}}$
$r_i = r_{min}$
$u_i = u_{max}$
KONTROLA
$K_{\bar{l}} = D_{\bar{l}}\, K_l\, D_{\bar{l}}$
$K_{\hat{x}} = (A^T K_{\bar{l}}^{-1} A)^+$
kontrola pouzdanosti
$r_i \geq r_{min}$
$u_i \leq u_{max}$
NE
DA
1



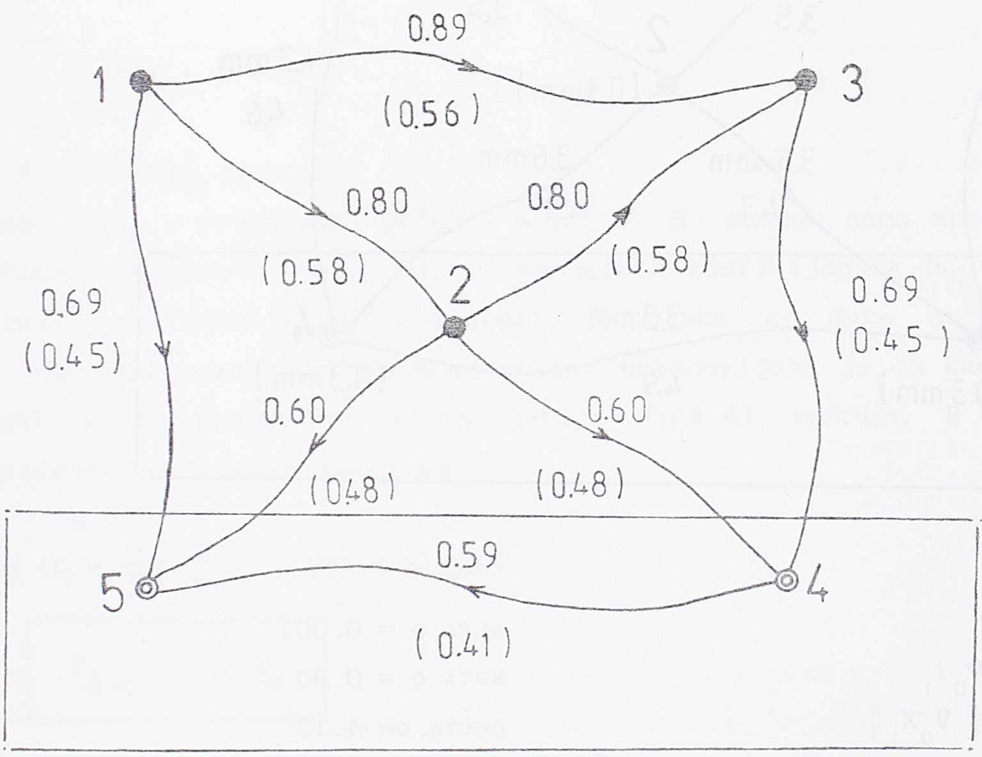
Sl. 8.4.2. Algoritam sekvencijalnog modela optimizacije sa aspekta osetljivosti i pouzdanosti deformacione mreže.

$$\sigma_{d_i} = d_{i,0} / \delta_0 = 2\text{mm} / 4.13 = 0.484\text{mm}.$$

Dizajn test deformacione mreže dat je na sl.8.4.1 sa standardnim devijacijama planiranih opažanja $\sigma_{l_i} = 1\text{mm}$, a matrica B ima oblik

$$B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad r(B) = 3$$

Neophodna računanja prema algoritmu na sl.8.4.2. data su u dodatku 9, a ovde će biti diskutovani samo dobijeni rezultati optimizacije. Dobijene optimalne vrednosti standardnih devijacija $\sigma_{\bar{l}}$ (sl.8.4.3) su realne. Parovi visinskih razlika ($l_{1,2}$, $l_{2,3}$), ($l_{1,5}$, $l_{3,4}$) i ($l_{2,5}$, $l_{2,4}$) imaju identičan položaj u deformacionoj mreži, pa su očekivanja da će sekvencijalni model optimizacije dati za ove parove identična rešenja u potpunosti ispunjena. U tabeli 8.4.1. za tačnost opažanja u ovoj mreži σ_l = 1 mm dobijene su donje donje granične vrednosti relativnih pomeranja u intervalu od $d_{i,o}$ = 2.4 mm do $d_{i,o}$ = 3.7mm, a iz sekvencijalnog modela optimizacije za nižu donju graničnu vrednost $d_{i,o}$ = 2mm dobijene su optimalne standardne devijacije (sl.8.4.3) koje zahtevaju realno višu tačnost opažanja.

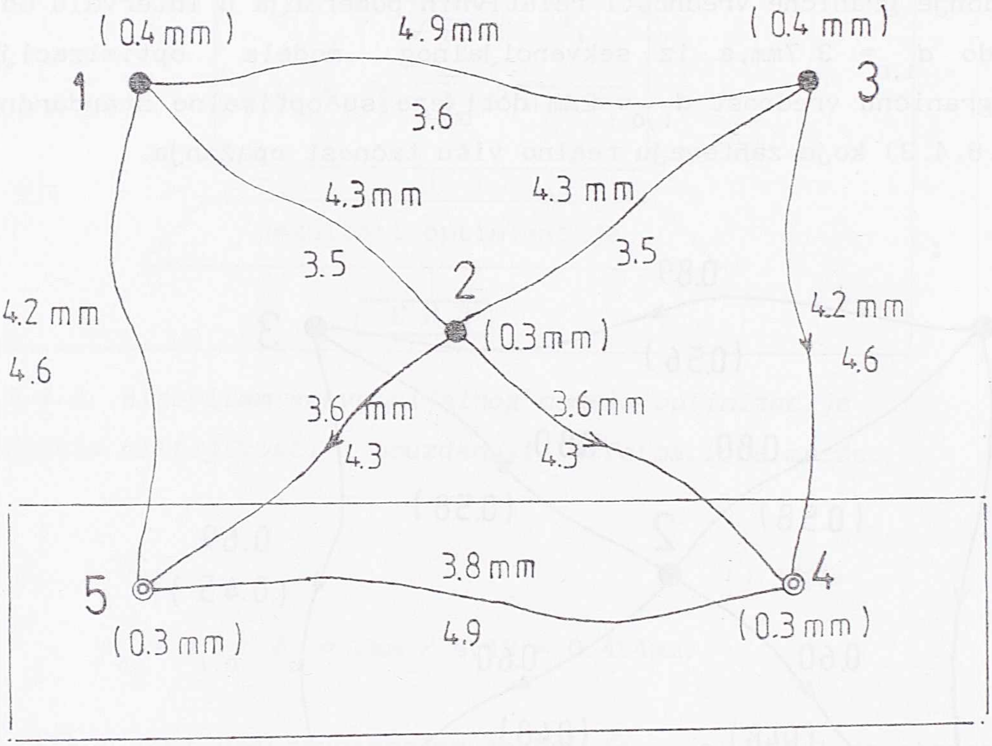


$0.89\ mm = \sigma_{\bar{l}_i}$ $\qquad (r)_{min} = 0.25$

$(0.56) = r_i$ $\qquad d_{i,o} = 2\ mm$

Sl.8.4.3. Optimalne standardne devijacije planiranih opažanja u test 1-D deformacionoj mreži.

Treba uočiti da se viša tačnost opažanja zahteva u delu mreže gde su moguće pojave deformacija u odnosu na deo mreže gde se ne očekuju njihove pojave. Za optimalnu unutrašnju i spoljašnju pouzdanost može se reći da je dobra a data je na slici 8.4.4.



4.9mm = $\nabla_0 l_i$

3.6 = $\| \nabla_0 X_i \|$

1 (0.4mm) = 1 (σ_x)

ALFA 0 = 0.001

BETA 0 = 0.80

DELTA 0= 4.13

k = 3.29

Sl. 8.4.4. Optimalna unutrašnja i spoljašnja pouzdanost test 1-D deformacione mreže.

Kada se opravdano može prihvatiti hipoteza da će u deformacionoj mreži biti relativno veći broj stabilnih tačaka onda, koeficijenti matrice B (8.2.11) imaju granične vrednosti:

- za stabilne tačke

$$b_{ii} = \lim_{n_1 \to \infty} \frac{n_1 - 1}{n_1} = 1$$

$$b_{ij} = \lim_{n_1 \to \infty} \frac{-1}{n_1} = 0\,, \quad i = j \qquad \ldots(8.4.17)$$

- za nestabilne tačke

$$b_{ii} = \lim_{n_1 \to \infty} \frac{n_1}{n_1} = 1$$

$$b_{ij} = \lim_{n_1 \to \infty} \frac{0}{n_1} = 0 \qquad \ldots(8.4.18)$$

ili

$$\lim_{n_1 \to \infty} B = B = I$$

gde je I jedinična matrica.

Naravno, u praktičnoj primeni matricu B možemo samo aproksimirati jediničnom matricom I. Vrednosti dijagonalnih koeficijenata b_{ii} i vandijagonalni b_{ij} u funkciji od broja stabilnih tačaka n_1 date su u tabeli 8.4.2. Za ispitivan određen broj mreža ustanovljeno je da kada je broj stabilnih tačaka jednak ili veći od četiri ($n_1 \geq 4$) matrica B može biti aproksimirana jediničnom matricom

$$B \cong I \qquad \ldots(8.4.19)$$

Zamenom (8.4.19) u (8.4.15) dobijamo

$$\boxed{\underline{K}_{x,d} \cong \frac{1}{2} \underline{K}_d} \qquad \ldots(8.4.20)$$

Na ovaj način prilikom određivanja kriterijum matrice $\underline{K}_{x,d}$ izbegnuto je iznalaženje pseudoinverzije koja se javlja u matričnoj jednačini (8.4.15), pa samim tim problem se pojednostavljuje. Određivanje *a priori* kovarijacione matrice relativnih pomeranja takođe se može pojednostaviti, zamenom (8.4.19) u (8.4.10) pa sledi

Tabela 8.4.2.

n_1	$b_{ii} = (n_1 - 1)/\ n_1$	$b_{ij} = \frac{-1}{n_1}$
1	0	-1
2	0.5	-0.5
3	0.667	-0.333
4	0.75	-0.25
5	0.80	-0.20
10	0.9	-0.1
15	0.93	-0.067
20	0.95	-0.05
30	0.967	-0.033

Vrednosti koeficijenata b_{ii} i b_{ij} u funkciji od broja stabilnih tačaka n_1.

$$K_d \cong 2\ K_{\hat{x}} \qquad \ldots(8.4.21)$$

ili

$$Q_d \cong 2\ Q_{\hat{x}} \qquad \ldots(8.4.22)$$

Aproksimativno određivanje matrice K_d ili Q_d ima za posledicu aproksimativno određivanje donjih graničnih vrednosti prema (8.4.3)

$$d_{i,0} \cong \delta_0\, \sigma_0 \sqrt{2\ Q_{\hat{x}_{ii}}} \qquad \ldots(8.4.23)$$

Ove vrednosti određene su prema (8.4.3) i (8.4.23) u tabeli 8.4.3., za 1-D mrežu datu na sl.7.4.1. i broj stabilnih tačaka $n_1 = 6$.

Tabela 8.4.3

T_i	$d_{i,0} = \delta_0 \sigma_0 \sqrt{Q_{d_{ii}}}$ $Q_d = 2\ B\ Q_{\hat{x}}\ B^T$	$\alpha_{i,0} \cong \delta_0 \sigma_0 \sqrt{Q_{d_{ii}}}$ $Q_d \cong 2\ Q_{\hat{x}}$	Date vrednosti
1	4.2	4.7	$n_1 = 6$
2	4.0	4.0	
3	4.3	4.7	stabilne tačke:
4	3.5	3.7	1, 3, 4, 6,
5	3.3	3.0	7, 10
6	3.4	3.7	σ_0 = 1mm
7	3.8	3.7	α_0 = 0.001
8	3.7	3.0	β_0 = 0.80
9	4.2	3.7	δ_0 = 4.13
10	4.9	4.7	
11	4.7	4.0	
12	4.9 [mm]	4.7 [mm]	

Donje granične vrednosti određene prema (8.4.3) i (8.4.23) za mrežu datu na sl.7.4.1.

Naglasimo još samo to da kovarijaciona kriterijum matrica osetljivosti (8.4.8) ili (8.4.9) ima opšti karakter, a njen aproksimativni oblik (8.4.21) ili (8.4.22) odgovara obliku (8.3.15) koji se do sada koristio u optimizaciji praktično u uprošćenom obliku.

9. ZAKLJUČAK

Na osnovu detaljnih razmatranja u prethodnim poglavljima može se zaključiti da je savremena optimizacija opažanja u geodetskim mrežama veoma kompleksna. Ova kompleksnost ogleda se u uključivanju kriterijuma tačnosti, pouzdanosti i osetljivosti geodetskih mreža u modele optimizacije.

Kriterijumi tačnosti u geodetskim mrežama najčešće se odnose na tačnost koordinata pojedinih tačaka. U ovom radu pokazano je kako se neophodna tačnost koordinata pojedinih tačaka može definisati posredstvom srednjih položajnih grešaka.

Pokazano je da su ove mere u slobodnim geodetskim mrežama invarijantne u odnosu na uvedene koordinatne sisteme i da položajna tačnost ne zavisi od težišta mreže. Na bazi ovih veličina formiran je nov oblik realne kovarijacione kriterijum matrice K_x neophodne za optimizaciju geodetskih mreža.

Pored već postojećih problema u teoriji pouzdanosti geodetskih mreža, u ovom radu je ukazano na određena nova ograničenja ove teorije. U cilju lakših teorijskih razmatranja ukupne popravke opažanja u mreži rasčlanjene su na elementarne popravke. U ovom pristupu pokazano je da i pored toga što opažanje ima dobru pouzdanost, prisustvom grube greške u njemu može ostati neidentifikovano nakon izravnanja.

Razlog ovome otkriven je u matrici koeficijenata R. Do sada u teoriji pouzdanosti vodilo se računa samo o dijagonalnim koeficijentima ove matrice. Međutim, kako je u ovom radu istaknuto vandijagonalni koeficijenti mogu imati presudnu ulogu u identifikaciji grubih grešaka. Da bi se ove poteškoće izbegle nakon izravnanja i testiranja statističkih hipoteza o grubim greškama, pronađen je optimalni oblik matrice R_o, o kome se mora voditi računa u toku projektovanja i optimizacije geodetskih mreža.

Za razliku od dosadašnjih saznanja teorije pouzdanosti, gde se smatralo da dijagonalni koeficijenti ove matrice moraju težiti maksimalnim vrednostima $r_{ii} \Rightarrow max \Rightarrow 1$, u ovm radu je pokazano da vandijagonalni koeficijenti moraju imati minimalne vrednosti $r_{ij} \Rightarrow min \Rightarrow 0$, ili da je njihov količnik minimalan $r_{ij} / r_{ii} \Rightarrow min \Rightarrow 0$. Posebna pažnja je posvećena i slučajevima koji su često zastupljeni u obradi podataka, kada se nepoznate veličine određuju putem proste ili opšte aritmetičke sredine.

Analiza teorije pouzdanosti iskorišćena je u kasnijem radu za definisanje kriterijuma pouzdanosti u optimizaciji geodetskih mreža. U ovom cilju korišćene su mere lokalne unutrašnje i spoljašnje pouzdanosti koje su invarijantne u odnosu na uvedene koordimatne sisteme.

Pristup razvoju sekvencijalnog modela optimizacije bio je integralan gde su u ovaj model istovremeno uključeni lokalni kriterijumi tačnosti i pouzdanosti. Pokazano je da ako se izvrši optimizacija samo sa aspekta željene tačnosti, pouzdanost opažanja u mreži može ostati veoma slaba, pa je time istaknut značaj integralnog pristupa.

U analizi sekvencijalnog modela optimizacije pokazano je da ovaj model za veću pouzdanost planiranog opažanja u projektu daje manju njegovu optimalnu tačnost i obrnuto, za manju pouzdanost planiranog opažanja daje veću optimalnu tačnost opažanja. Modelom su predviđena ograničenja u smislu unutrašnje i spoljašnje pouzdanosti tako da sva opažanja u projektu imaju elementarne brojeve suvišnih opažanja r_i veće od minimalne vrednosti r_{min} i nijedno opažanje ne sme imati veći koeficijent uticaja u_i od maksimalne vrednosti u_{max}.

Da sekvencijalni model optimizacije geodetskih mreža može biti primenjivan u širem smislu, pokazano je njegovim razvojem na bazi modela uslovnog izravnanja i može biti od izuzetne važnosti.

U optimizaciju opažanja geodetskih deformacionih mreža neophodno je bilo uključiti kriterijume osetljivosti kao primarne. Nakon definisanja lokalne osetljivosti pomeranja u svakoj tački deformacione mreže kreirana je kovarijaciona kriterijum matrica osetljivosti pomeranja. Za njeno formiranje, pored navedenih informacija neophodno je poznavanje matrice koeficijenata stabilnih ili nestabilnih tačaka, ali je potpuno suvišno poznavanje tendencija kretanja tla i objekata, već jednostavno treba znati tačke koje se nalaze u oblasti mogućih deformacija ili van nje.

Da bi sekvencijalni model optimizacije bio primenjen u optimizacije geodetskih deformacionih mreža kovarijaciona kriterijum matrica osetljivosti $\underline{K}_d$ transformisana je u matricu osetljivosti $\underline{K}_{x,d}$. Uključivanje kriterijuma osetljivosti i pouzdanosti geodetskih deformacionih mreža u sekvencijalni model optimizacije pokazano je algoritmom na slici 8.4.2.

U jednom opštem zaključku može se reći da sekvencijalni model optimizacije razvijen u ovom radu može veoma uspešno rešiti probleme optimizacije geodetskih mreža sa aspekta tačnosti, pouzdanosti i osetljivosti. Osnovna njegova prednost nad već postojećim modelima je da uvek daje pozitivne vrednosti traženih optimalnih standardnih devijacija i da ima jaku kovergenciju.

U budućim istraživanjima optimizacije geodetskih mreža neophodno je prvenstveno posvetiti pažnju novim mrežama globalnih pozicionih sistema. U ovom trenutku kod nas a i u Svetu ne postoji integralni model optimizacije savremenih mreža globalnih pozicionih sistema (GPS) sa aspekta tačnosti, pouzdanosti i osetljivosti.

10. DODACI

DODATAK 1: SEKVENCIJALNI MODEL OPTIMIZACIJE U 1-D MREŽAMA PROGRAM OPT1D

UNIVERZITET U BEOGRADU
GRADEVINSKI FAKULTET
INSTITUT ZA GEODEZIJU

OBJEKAT: TEST1 1-D MREZA
SLOBODNA MREZA - DEFEKT RANGA d=1
OPAZANJA NEZAVISNA

BROJ NEPOZNATIH TACAKA	NN=	12
BROJ DATIH TACAKA	ND=	0
UKUPAN BROJ TACAKA	NU=	12
BROJ MERENIH VELICINA	NM=	17
BROJ SUVISNIH MERENJA	R =	6

PLANIRANA OPAZANJA U 1-D MREZI:

Ti	Tj	TEZINE P(i)
1	2	1.0000
2	3	1.0000
3	4	1.0000
4	5	1.0000
2	5	1.0000
5	6	1.0000
1	6	1.0000
6	7	1.0000
7	8	1.0000
5	8	1.0000
8	9	1.0000
4	9	1.0000
9	10	1.0000
10	11	1.0000
8	11	1.0000
11	12	1.0000
7	12	1.0000

REZULTATI OPTIMIZACIJE 1-D MREZE :

Ti	Tj	OP.ST.D SDO(i)	KOEFI. U(i,i)	ST.D.I SLI	KOEFI. R(i,i)	POUZDANOST NoL(i)	MREZE NoX(i)
1	2	0.6133	0.7168	0.5192	0.2832	4.7594	6.5702
2	3	0.6156	0.7368	0.5284	0.2632	4.9550	6.9093
3	4	0.6529	0.6773	0.4583	0.3227	4.7241	5.9827
4	5	0.9376	0.4766	0.6039	0.5234	5.3522	3.9407
2	5	0.8719	0.4880	0.6091	0.5120	5.0324	4.0322
5	6	0.9636	0.4334	0.6343	0.5666	5.2867	3.6119
1	6	0.6529	0.6773	0.5348	0.3227	4.7241	5.9827
6	7	0.8148	0.6949	0.6792	0.3051	6.0920	6.2323
7	8	0.9376	0.4766	0.6472	0.5234	5.3522	3.9407
5	8	1.1114	0.4317	0.7302	0.5683	6.0888	3.5994
8	9	0.9023	0.5178	0.6493	0.4822	5.3665	4.2794
4	9	0.8148	0.6949	0.6792	0.3051	6.0920	6.2323
9	10	0.6309	0.7333	0.5402	0.2667	5.0452	6.8484
10	11	0.6118	0.7480	0.5292	0.2520	5.0334	7.1150
8	11	0.8536	0.5033	0.6056	0.4967	5.0020	4.1573
11	12	0.6118	0.7480	0.5647	0.2520	5.0334	7.1150
7	12	0.6434	0.6723	0.5276	0.3277	4.6420	5.9151

ALFAo = 0.001

BETAo = 0.80

DELTAo = f(0.001,0.80,1,oo) = 4.13

KRITICNA VREDNOST k = 3.29

BROJ ITERACIJA 2

TRAZENE VELICINE I OCENA TACNOSTI:

TACKA	A PRIORI Mx(i)	A POSTERIORI MOx(i)
1	0.5000	0.5418
2	0.5000	0.5401
3	0.5000	0.5418

4	0.5000	0.5297
5	0.5000	0.5187
6	0.5000	0.5337
7	0.5000	0.5184
8	0.5000	0.4996
9	0.5000	0.5175
10	0.5000	0.5418
11	0.5000	0.4977
12	0.5000	0.5418

EPSILON = 0.07500

(C) I.A.

Deo izlazne datoteke programa OPT1D za TEST2 1-D mreže.

OBJEKAT: TEST2 1-D MREZA

SLOBODNA MREZA - DEFEKT RANGA d=1

OPAZANJA NEZAVISNA

BROJ NEPOZNATIH TACAKA NN= 12

BROJ DATIH TACAKA ND= 0

UKUPAN BROJ TACAKA NU= 12

BROJ MERENIH VELICINA NM= 21

BROJ SUVISNIH MERENJA R = 10

REZULTATI OPTIMIZACIJE 1-D MREZE :

Ti	Tj	OP.ST.D SDO(i)	KOEFI. U(i,i)	ST.D.I SLI	KOEFI. R(i,i)	POUZDANOST MREZE NoL(i)	NoX(i)
1	2	0.7577	0.5536	0.5638	0.4464	4.6838	4.5990
2	3	0.7577	0.5536	0.5638	0.4464	4.6838	4.5990
3	4	0.7889	0.5663	0.5937	0.4337	4.9478	4.7197
4	5	0.9258	0.4890	0.6474	0.5110	5.3487	4.0399
2	5	0.8645	0.4507	0.5804	0.5493	4.8175	3.7408
5	6	0.9258	0.4890	0.6474	0.5110	5.3487	4.0399
1	6	0.7889	0.5663	0.5937	0.4337	4.9478	4.7197
6	7	0.8156	0.6557	0.6605	0.3443	5.7409	5.6995
7	8	0.9258	0.4890	0.6474	0.5110	5.3487	4.0399
5	8	1.1113	0.5319	0.8105	0.4681	6.7085	4.4026
8	9	0.9258	0.4890	0.6474	0.5110	5.3487	4.0399
4	9	0.8156	0.6557	0.6605	0.3443	5.7409	5.6995
9	10	0.7889	0.5663	0.5937	0.4337	4.9478	4.7197
10	11	0.7577	0.5536	0.5638	0.4464	4.6838	4.5990
8	11	0.8645	0.4507	0.5804	0.5493	4.8175	3.7408
11	12	0.7577	0.5536	0.5638	0.4464	4.6838	4.5990
7	12	0.7889	0.5663	0.5937	0.4337	4.9478	4.7197
1	5	0.8793	0.4549	0.5931	0.5451	4.9187	3.7731
3	5	0.8793	0.4549	0.5931	0.5451	4.9187	3.7731
8	10	0.8793	0.4549	0.5931	0.5451	4.9187	3.7731
8	12	0.8793	0.4549	0.5931	0.5451	4.9187	3.7731

ALFAo = 0.001

BETAo = 0.80

DELTAo = f(0.001,0.80,1,oo) = 4.13

KRITICNA VREDNOST k = 3.29

BROJ ITERACIJA 1

TRAZENE VELICINE I OCENA TACNOSTI:

TACKA	A PRIORI Mx(i)	A POSTERIORI MOx(i)
1	0.5000	0.5416
2	0.5000	0.5475
3	0.5000	0.5440
4	0.5000	0.5009
5	0.5000	0.4497
6	0.5000	0.5490
7	0.5000	0.5291
8	0.5000	0.4497
9	0.5000	0.5490
10	0.5000	0.5416
11	0.5000	0.5475
12	0.5000	0.5416

EPSILON = 0.10000

DODATAK 2: PROVERA REZULTATA DOBIJENIH SEKVENCIJALNIM MODELOM OPTIMIZACIJE U 2-D MREŽI - PROGRAM IGM2D

```
UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAGJEVINSKI FAKULTET              OBJEKAT:
INSTITUT ZA  GEODEZIJU          2-D OPTIMALNA MREŽA
        DOKUMENTACIJA KORISCENE VERZIJE
              SLOBODNO IZRAVNANJE MREZE
              VERZIJA 1
        TRILATERACIJA
              OPAZANI  ELEMENTI
        MERENE DUZINE                           10
        OPAZANE GRUPE PRAVACA                    0
        MAKSIMALNI BROJ PRAVACA NA TACKI         0
        BROJ DATIH TACAKA                        0
              NEPOZNATE
        NEPOZNATE KOORDINATE                    10
        NEPOZNATE ORIJENTACIJE                   0
        DEFEKT RANGA                             3
```

PRIKAZ DUZINA - ULAZNI PODACI
===========================

BR.	OD	DO	MER. DUZ. (M)	TEZINA	SR.GR.PRE (CM)	SLOB. CLAN (CM)
1	1	2	824.6270	0.06	0.40	-0.59
2	1	3	1414.2210	0.11	0.30	-0.74
3	1	5	583.1020	0.17	0.24	-0.68
4	1	4	1000.0080	0.05	0.43	-0.80
5	2	3	824.6250	0.06	0.42	-0.39
6	2	4	1131.3760	0.07	0.37	-0.52
7	2	5	583.1000	0.10	0.32	-0.48
8	3	4	1000.0060	0.05	0.46	-0.60
9	3	5	860.2270	0.07	0.37	0.55
10	4	5	583.0930	0.11	0.30	0.22

PRIKAZ DUZINA - IZLAZNI PODACI
==============================

BR.	OD	DO	MER. DUZ. (M)	POPRAVKA (CM)	DUZINA (M)	S.G.POSLE (CM)
1	1	2	824.6270	-0.09	824.6261	0.35
2	1	3	1414.2210	-0.14	1414.2196	0.23
3	1	5	583.1020	0.19	583.1039	0.21
4	1	4	1000.0080	-0.28	1000.0052	0.37
5	2	3	824.6250	-0.10	824.6240	0.38
6	2	4	1131.3760	0.08	1131.3768	0.28
7	2	5	583.1000	0.00	583.1000	0.26
8	3	4	1000.0060	-0.23	1000.0037	0.42
9	3	5	860.2270	0.39	860.2309	0.27
10	4	5	583.0930	0.12	583.0942	0.25

SUMMA PVV = 0.00000295

SR. GR. MO = 0.00099175

P R I K A Z K O O R D I N A T A
===============================

TACKA BR.	PRIBLIZNE KOORDINATE YP	XP	DEFINITIVNE KOORDINATE YD	XD
1	1000.0000	1000.0000	999.9961	999.9976
2	1200.0000	1800.0000	1199.9975	1800.0024
3	2000.0000	2000.0000	2000.0007	2000.0014
4	2000.0000	1000.0000	2000.0013	999.9977
5	1500.0000	1300.0000	1500.0043	1300.0008

O C E N A T A C N O S T I
=========================

TACKA	MY (CM)	MX (CM)	MV (CM)	A (CM)	B (CM)	DELTA
1	0.20	0.22	0.30	0.25	0.16	140.146
2	0.23	0.20	0.30	0.23	0.19	81.560
3	0.21	0.21	0.30	0.24	0.17	138.580
4	0.20	0.24	0.31	0.26	0.18	27.186
5	0.19	0.23	0.30	0.23	0.19	168.489

DODATAK 3: IZRAVNANJE 0. I 1. EPOHE TEST DEFORMACIONE MREŽE - PROGRAM IGM2D

```
        UNIVERZITET U BEOGRADU
        GRAGJEVINSKI FAKULTET              OBJEKAT:
        INSTITUT ZA GEODEZIJU              EPOHA 0
                      SLOBODNO IZRAVNANJE MREZE
                      OPAZANI  ELEMENTI
                 MERENE DUZINE                        12
                 OPAZANE GRUPE PRAVACA                 7
                 MAKSIMALNI BROJ PRAVACA NA TACKI      6
                 BROJ DATIH TACAKA                     0
                      NEPOZNATE
                 NEPOZNATE KOORDINATE                 14
                 NEPOZNATE ORIJENTACIJE                7
                 DEFEKT RANGA                          3

                      I Z L A Z N I    P O D A C I
                      ============================
STANICA       1         Y =    1000.000     X =    1000.003
-------------------------------------------------------------
                        TEZINA PRAVCA  TP =    1.0000
OSMATR.      OPAZANI      DEFINITIVNI       DUZINA         V
 TACKA       PRAVCI       DIREKC. UGAO
   6        0  0  0.00    315  0  0.26     848.5259     0.482
   7       77  0 20.00     32  0 20.22     943.3952     0.443
   2      135  0  1.30     90  0  0.15    1000.0019    -0.925

STANICA       2         Y =    2000.002     X =    1000.003
-------------------------------------------------------------
                        TEZINA PRAVCA  TP =    1.0000
OSMATR.      OPAZANI      DEFINITIVNI       DUZINA         V
 TACKA       PRAVCI       DIREKC. UGAO
   1        0  0  0.00    270  0  0.15    1000.0019    -0.489
   7       57 59 37.30    327 59 40.14     943.3950     2.198
   3      123 41 25.00     33 41 23.93    1081.6596    -1.709
```

STANICA 3 Y = 2599.997 X = 1899.999

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
2	0 0 0.00	213 41 23.93	1081.6596	0.481
7	51 6 56.70	264 48 20.00	1104.5318	-0.146
4	112 37 13.60	326 18 36.71	721.1093	-0.335

STANICA 4 Y = 2200.000 X = 2500.000

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
3	0 0 0.00	146 18 36.71	721.1093	0.104
7	78 41 22.50	224 59 59.71	989.9494	0.596
5	129 24 0.90	275 42 36.81	1004.9887	-0.700

STANICA 5 Y = 1199.998 X = 2599.994

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
4	0 0 0.00	95 42 36.81	1004.9887	0.166
7	63 44 0.60	159 26 37.14	854.3963	-0.100
6	122 56 59.20	218 39 35.78	1280.6156	-0.066

STANICA 6 Y = 400.002 X = 1600.003

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
5	0 0 0.00	38 39 35.78	1280.6156	0.934
7	41 2 8.60	79 41 43.20	1118.0327	-0.247
1	96 20 26.10	135 0 0.26	848.5259	-0.687

STANICA 7 Y = 1500.001 X = 1799.999

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
1	0 0 0.00	212 0 20.22	943.3952	-0.899
6	47 41 22.10	259 41 43.20	1118.0327	-0.021
5	127 26 15.30	339 26 37.14	854.3963	0.727
4	192 59 38.50	44 59 59.71	989.9494	0.088
3	232 47 58.10	84 48 20.00	1104.5318	0.786
2	295 59 19.70	147 59 40.14	943.3950	-0.681

PRIKAZ DUZINA - IZLAZNI PODACI

BR.	OD	DO	MER. DUZ. (M)	POPRAVKA (CM)	DUZINA (M)	S.G.POSLE (CM)
1	1	2	1000.0000	0.19	1000.0019	0.39
2	2	3	1081.6600	-0.04	1081.6596	0.39
3	3	4	721.1080	0.13	721.1093	0.40
4	4	5	1004.9890	-0.03	1004.9887	0.38
5	5	6	1280.6210	-0.54	1280.6156	0.39
6	1	6	848.5310	-0.51	848.5259	0.40
7	1	7	943.4000	-0.48	943.3952	0.31
8	2	7	943.3950	0.00	943.3950	0.32
9	3	7	1104.5290	0.28	1104.5318	0.31
10	4	7	989.9500	-0.06	989.9494	0.30
11	5	7	854.3880	0.83	854.3963	0.32
12	6	7	1118.0290	0.37	1118.0327	0.32

SUMMA PVV = 0.00000165

SR. GR. MO = 0.00030282

PRIKAZ PRIRASTAJA
=================

TACKA	P R I R A S T A J I	
	VY (M)	VX (M)
1	-0.0004	0.0035
2	0.0015	0.0027
3	-0.0031	-0.0012
4	0.0002	-0.0001
5	-0.0015	-0.0064
6	0.0020	0.0026
7	0.0013	-0.0011

P R I K A Z   K O O R D I N A T A
=================================

TACKA	PRIBLIZNE KOORDINATE		DEFINITIVNE KOORDINATE	
BR.	YP	XP	YD	XD
1	1000.0000	1000.0000	999.9996	1000.0035
2	2000.0000	1000.0000	2000.0015	1000.0027
3	2600.0000	1900.0000	2599.9969	1899.9988
4	2200.0000	2500.0000	2200.0002	2499.9999
5	1200.0000	2600.0000	1199.9985	2599.9936
6	400.0000	1600.0000	400.0020	1600.0026
7	1500.0000	1800.0000	1500.0013	1799.9989

O C E N A   T A C N O S T I
===========================

TACKA	MY	MX	MV	A	B	DELTA
	(CM)	(CM)	(CM)	(CM)	(CM)	
1	0.24	0.23	0.33	0.25	0.22	52.909
2	0.25	0.25	0.35	0.26	0.24	141.549
3	0.25	0.23	0.34	0.25	0.23	98.713
4	0.24	0.23	0.33	0.24	0.23	51.846
5	0.24	0.26	0.35	0.27	0.23	148.968
6	0.27	0.23	0.35	0.27	0.23	94.735
7	0.16	0.17	0.23	0.17	0.16	0.693

UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAGJEVINSKI FAKULTET OBJEKAT:
INSTITUT ZA GEODEZIJU EPOHA 1

SLOBODNO IZRAVNANJE MREZE
OPAZANI ELEMENTI

MERENE DUZINE	12
OPAZANE GRUPE PRAVACA	7
MAKSIMALNI BROJ PRAVACA NA TACKI	6
BROJ DATIH TACAKA	0

NEPOZNATE

NEPOZNATE KOORDINATE	14
NEPOZNATE ORIJENTACIJE	7
DEFEKT RANGA	3

I Z L A Z N I   P O D A C I

STANICA 1 Y = 999.987 X = 999.959

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
6	0 0 0.00	315 0 7.15	848.5370	0.180
7	77 0 10.70	32 0 16.40	943.4874	-1.273
2	134 59 32.40	89 59 40.47	999.9910	1.094

STANICA 2 Y = 1999.978 X = 1000.054

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
1	0 0 0.00	269 59 40.47	999.9910	0.504
7	58 0 8.20	327 59 47.55	943.3644	-0.616
3	123 42 1.50	33 41 41.58	1081.6108	0.112

STANICA 3 Y = 2600.023 X = 1899.958

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
2	0 0 0.00	213 41 41.58	1081.6108	0.818
7	51 6 56.60	264 48 35.70	1104.5291	-1.660
4	112 36 54.30	326 18 35.90	721.1654	0.843

STANICA 4 Y = 2199.993 X = 2500.005

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
3	0 0 0.00	146 18 35.90	721.1654	0.209
7	78 41 25.60	225 0 1.22	989.9018	-0.070
5	129 24 0.60	275 42 36.15	1004.9850	-0.139

STANICA 5 Y = 1199.995 X = 2599.995

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
4	0 0 0.00	95 42 36.15	1004.9850	-0.197
7	63 43 51.30	159 26 27.86	854.3655	0.212
6	122 56 57.30	218 39 33.64	1280.6269	-0.015

STANICA 6 Y = 400.001 X = 1599.987

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
5	0 0 0.00	38 39 33.64	1280.6269	0.301
7	41 1 59.80	79 41 33.12	1118.0648	-0.020
1	96 20 34.10	135 0 7.15	848.5370	-0.281

STANICA 7 Y = 1500.023 X = 1800.042

TEZINA PRAVCA TP = 1.0000

OSMATR. TACKA	OPAZANI PRAVCI	DEFINITIVNI DIREKC. UGAO	DUZINA	V
1	0 0 0.00	212 0 16.40	943.4874	-0.840
6	47 41 15.40	259 41 33.12	1118.0648	0.474
5	127 26 10.80	339 26 27.86	854.3655	-0.179
4	192 59 44.70	45 0 1.22	989.9018	-0.719
3	232 48 17.50	84 48 35.70	1104.5291	0.957
2	295 59 30.00	147 59 47.55	943.3644	0.307

PRIKAZ DUZINA - IZLAZNI PODACI

BR.	OD	DO	MER. DUZ. (M)	POPRAVKA (CM)	DUZINA (M)	S.G.POSLE (CM)
1	1	2	999.9870	0.40	999.9910	0.38
2	2	3	1081.6120	-0.12	1081.6108	0.37
3	3	4	721.1700	-0.46	721.1654	0.38
4	4	5	1004.9860	-0.10	1004.9850	0.36
5	5	6	1280.6280	-0.11	1280.6269	0.38
6	1	6	848.5410	-0.40	848.5370	0.38
7	1	7	943.4810	0.64	943.4874	0.29
8	2	7	943.3690	-0.46	943.3644	0.30
9	3	7	1104.5230	0.61	1104.5291	0.30
10	4	7	989.9090	-0.72	989.9018	0.29
11	5	7	854.3620	0.35	854.3655	0.31
12	6	7	1118.0630	0.18	1118.0648	0.31

SUMMA PVV = 0.00000149

SR. GR. MO = 0.00028813

PRIKAZ PRIRASTAJA
=================

TACKA	P R I R A S T A J I	
	VY (M)	VX (M)
1	-0.0131	-0.0405
2	-0.0221	0.0542
3	0.0233	-0.0417
4	-0.0069	0.0045
5	-0.0053	-0.0054
6	0.0015	-0.0135
7	0.0227	0.0424

P R I K A Z   K O O R D I N A T A
=================================

TACKA	PRIBLIZNE KOORDINATE		DEFINITIVNE KOORDINATE	
BR.	YP	XP	YD	XD
1	1000.0000	1000.0000	999.9869	999.9595
2	2000.0000	1000.0000	1999.9779	1000.0542
3	2600.0000	1900.0000	2600.0233	1899.9583
4	2200.0000	2500.0000	2199.9931	2500.0045
5	1200.0000	2600.0000	1199.9947	2599.9946
6	400.0000	1600.0000	400.0015	1599.9865
7	1500.0000	1800.0000	1500.0227	1800.0424

O C E N A   T A C N O S T I
===========================

TACKA	MY	MX	MV	A	B	DELTA
	(CM)	(CM)	(CM)	(CM)	(CM)	
1	0.23	0.22	0.32	0.24	0.21	52.909
2	0.24	0.24	0.34	0.25	0.22	141.549
3	0.24	0.22	0.33	0.24	0.22	98.713
4	0.22	0.22	0.31	0.23	0.22	51.846
5	0.23	0.25	0.34	0.26	0.21	148.968
6	0.26	0.22	0.34	0.26	0.22	94.735
7	0.15	0.16	0.22	0.16	0.15	0.693

DODATAK 4: DEFORMACIJE DUŽINA I UGLOVA ROTACIJE - PROGRAM MRKS

```
**************************************************
*    IDENTIFIKACIJA STABILNIH TACAKA             *
*     METODOM ROTACIJE KOORDINATNOG              *
*              SISTEMA                           *
**************************************************
```

KOORDINATE TACAKA

	NULTA EPOHA		TEKUCA EPOHA	
Ti	Yo	Xo	Yi	Xi
1	1000.000	1000.004	999.987	999.960
2	2000.002	1000.003	1999.978	1000.054
3	2599.997	1899.999	2600.023	1899.958
4	2200.000	2500.000	2199.993	2500.005
5	1199.998	2599.994	1199.995	2599.995
6	400.002	1600.003	400.002	1599.986
7	1500.001	1799.999	1500.023	1800.042

BROJ TACAKA U MREZI N= 7

BROJ KOMBINACIJA K=N(N-1)/2 = 21

	NULTA EPOHA		TEKUCA EPOHA		DEFORMACIJE	
Ti-Tj	NIo	So	NIi	Si	dNI	dS
	[o.]	[m]	[o.]	[m.]	["]	[m]
1 2	90.00004	1000.002	89.99457	999.991	19.698	0.011
1 3	60.64233	1835.751	60.64283	1835.787	-1.811	-0.036
1 4	38.65989	1920.935	38.65911	1920.976	2.790	-0.041
1 5	7.12502	1612.442	7.12514	1612.487	-0.416	-0.046
1 6	315.00007	848.526	315.00199	848.537	-6.893	-0.011
1 7	32.00562	943.395	32.00456	943.487	3.817	-0.092
2 3	33.68998	1081.660	33.69489	1081.611	-17.666	0.049
2 4	7.59461	1513.272	7.59546	1513.227	-3.074	0.044
2 5	333.43473	1788.848	333.43458	1788.794	0.562	0.054
2 6	290.55605	1708.800	290.55420	1708.755	6.661	0.045
2 7	327.99449	943.395	327.99655	943.364	-7.417	0.031

3	4	326.31020	721.109	326.30997	721.165	0.817	-0.056
3	5	296.56491	1565.244	296.56577	1565.289	-3.112	-0.046
3	6	262.23492	2220.355	262.23563	2220.378	-2.584	-0.023
3	7	264.80556	1104.532	264.80992	1104.529	-15.707	0.003
4	5	275.71023	1004.989	275.71004	1004.985	0.668	0.004
4	6	243.43500	2012.458	243.43439	2012.462	2.200	-0.003
4	7	224.99992	989.949	225.00034	989.902	-1.532	0.048
5	6	218.65994	1280.616	218.65935	1280.627	2.136	-0.011
5	7	159.44365	854.396	159.44107	854.365	9.299	0.031
6	7	79.69533	1118.033	79.69253	1118.065	10.095	-0.032

DODATAK 5: TRANSFORMACIJA KOORDINATA X"Y" U X'Y' - PROGRAM TRAN

```
*****************************************
*   TRANSFORMACIJA KOORDINATA TACAKA KADA    *
*   SU POZNATI PARAMETRI TRANSLACIJE  I      *
*   ROTACIJE  KOORDINATNOG SISTEMA           *
*****************************************
```

BROJ TACAKA N= 7

PARAMETAR ROTACIJE FI= 0. 0. 2.000

PARAMETRI TRANSLACIJE: YT= 999.987 XT= 999.960

KOORDINATE TACAKA U SISTEMU XX O YY

Ti	YYi	XXi
1	999.987	999.960
2	1999.978	1000.054
3	2600.023	1899.958
4	2199.993	2500.005
5	1199.995	2599.995
6	400.002	1599.986
7	1500.023	1800.042

TRANSFORMISANE KOORDINATE TACAKA U SISTEM XOY

Ti	Yi	Xi
1	999.987	999.960
2	1999.978	1000.045
3	2600.032	1899.943
4	2200.008	2499.993
5	1200.010	2599.993
6	400.007	1599.992
7	1500.030	1800.038

DODATAK 6: IDENTIFIKACIJA STABILNIH TAČAKA 2-D TEST MREŽE 1 - PROGRAM ISTGE2

```
*********************************************************
*  ---------------------------------------------------  *
*  IDENTIFIKACIJA  STABILNIH  TACAKA  U  2-D MREZI      *
*  ---------------------------------------------------  *
*********************************************************
```

PROGRAM : I S T G E 2 ver 2.2

PROJEKAT : TEST MREZA

MESTO / DATUM / VREME : BEOGRAD/20-02-91/

BROJ TACAKA U MREZI: N = 7

	NULTA EPOHA		TEKUCA EPOHA	
Ti	Xi	Yi	XPi	YPi
1	1000.004	1000.000	999.960	999.987
2	1000.003	2000.002	1000.045	1999.978
3	1899.999	2599.997	1899.943	2600.032
4	2500.000	2200.000	2499.993	2200.008
5	2599.994	1199.998	2599.993	1200.010
6	1600.003	400.002	1599.992	400.007
7	1799.999	1500.001	1800.038	1500.030

	PRIVIDNE DEFORMACIJE		RELATIVNE DEFORMACIJE	
Ti	DXP	DYP	DX	DY
1	-0.043	-0.013	-0.037	-0.021
2	0.042	-0.023	0.048	-0.032
3	-0.056	0.035	-0.050	0.027
4	-0.007	0.008	-0.001	0.000
5	-0.001	0.012	0.005	0.003
6	-0.011	0.005	-0.005	-0.003
7	0.039	0.029	0.045	0.021

GRX= -0.006 GRY= 0.008

Ti	VEKTOR INTENZITET	DEFORMACIJA SMER	STABILNA TACKA X-OSA	Y-OSA
1	0.043	208.920	NE	NE
2	0.058	326.824	NE	NE
3	0.057	151.519	NE	NE
4	0.001	199.093	**DA**	**DA**
5	0.006	32.037	**DA**	**DA**
6	0.006	214.170	**DA**	**DA**
7	0.050	24.533	NE	NE

Interval granice tacnosti [X-osa] , DGX = 0.010
Interval granice tacnosti [Y-osa] , DGY = 0.010
Broj stabilnih tacaka [X-osa] , BSTX= 3
Broj stabilnih tacaka [Y-osa] , BSTY= 3

```
.................................................
:   STATISTICKO   TESTIRANJE   HIPOTEZA        :
:          STUDENTOV  T - TEST                 :
:   Ho: M[d]=0      i   Ha: M[d]#0             :
:...............................................:
```

U ODNOSU NA NAJSTABILNIJU(E) TACKU(E)

--------- X - O S A : --------

Ti	SR.GR.REL.DEF Md=moSQRT(Qd)	TEST STAT. ti=di/Md	STABILNA TACKA
1	0.004	10.250	NE
2	0.004	12.105	NE
3	0.004	13.718	NE
4	0.000	0.000	**DA**
5	0.003	2.004	NE
6	0.003	1.105	**DA**
7	0.003	15.988	NE

Kvantil t-studentove raspodele [t0.95,f]= 1.960
Broj stabilnih tacaka BST= 2

-------- Y - OSA : --------

Ti	SR.GR.REL.DEF Md=moSQRT(Qd)	TEST STAT. ti=di/Md	STABILNA TACKA
1	0.004	5.637	NE
2	0.004	8.778	NE
3	0.003	8.856	NE
4	0.000	0.000	**DA**
5	0.004	0.999	**DA**
6	0.004	0.694	**DA**
7	0.003	7.030	NE

Kvantil t-studentove raspodele [t0.95,f]= 1.960

Broj stabilnih tacaka BST= 3

....

: STATISTICKO TESTIRANJE HIPOTEZA :

: STUDENTOV T - TEST :

: Ho: M[d]=0 i Ha: M[d]#0 :

:..:

U ODNOSU NA FIKTIVNU STABILNU TACKU

Ti	PRIVIDNE DEFORMACIJE DXP	DYP	RELATIVNE DEFORMACIJE DX	DY
1	-0.043	-0.013	-0.035	-0.021
2	0.042	-0.023	0.051	-0.032
3	-0.056	0.035	-0.047	0.027
4	-0.007	0.008	0.002	0.000
5	-0.001	0.012	0.008	0.003
6	-0.011	0.005	-0.002	-0.003
7	0.039	0.029	0.048	0.021

SUMX= -0.009 SUMY= 0.008

Ti	INTENZITET VEKTORA	SMER VEKTORA
1	0.040	210.782
2	0.060	328.242
3	0.054	150.150
4	0.002	350.789
5	0.009	22.645
6	0.004	239.172
7	0.052	23.292

--------- X - O S A : --------

Ti	SR.GR.REL.DEF Md=moSQRT(Qd)	TEST STAT. ti=di/Md	STABILNA TACKA
1	0.003	11.147	NE
2	0.003	14.680	NE
3	0.003	16.400	NE
4	0.002	1.105	**DA**
5	0.003	2.691	NE
6	0.002	1.105	**DA**
7	0.002	19.366	NE

Kvantil t-studentove raspodele [t0.95,f]= 1.960

Broj stabilnih tacaka [X-osa] , BSTX= 2

-------- Y - OSA : --------

Ti	SR.GR.REL.DEF Md=moSQRT(Qd)	TEST STAT. ti=di/Md	STABILNA TACKA
1	0.003	7.540	NE
2	0.003	10.158	NE
3	0.003	8.698	NE
4	0.002	0.131	**DA**
5	0.002	1.689	**DA**
6	0.002	1.400	**DA**
7	0.002	10.110	NE

Kvantil t-studentove raspodele [t0.95,f]= 1.960

Broj stabilnih tacaka [Y-osa] , BSTY= 3

DODATAK 7: IDENTIFIKACIJA STABILNIH TAČAKA 2-D TEST MREŽE 2 - PROGRAM ISTGE2

```
**********************************************
*  ------------------------------------------  *
*  IDENTIFIKACIJA  STABILNIH  TACAKA  U  2-D MREZI  *
*  __________________________________________  *
**********************************************
```

PROGRAM : I S T G E 2 ver 2.2
PROJEKAT : TEST MREZA 2
MESTO / DATUM / VREME :/BEOGRAD/25-02-91/
BROJ TACAKA U MREZI: N = 14

	NULTA EPOHA		TEKUCA EPOHA	
Ti	Xi	Yi	XPi	YPi
3	191680.014	103710.018	191679.920	103710.208
5	181690.005	115980.008	181690.146	115980.122
11	121599.995	115599.998	121600.220	115599.987
13	115660.009	84650.000	115659.995	84649.962
15	92849.997	81779.980	92850.094	81779.898
17	84149.987	53549.990	84150.013	53549.960
21	181820.000	68829.995	181819.909	68829.978
35	133609.996	75869.998	133609.963	75869.958
37	106059.992	64500.005	106059.999	64499.983
39	161040.013	93610.000	161040.170	93610.047
41	138700.000	102240.000	138700.172	102240.005
43	165629.990	66860.007	165629.933	66859.976
45	144120.002	64149.994	144119.819	64149.896
47	125209.994	50070.003	125209.906	50069.970

	PRIVIDNE DEFORMACIJE		RELATIVNE DEFORMACIJE	
Ti	DXP	DYP	DX	DY
3	-0.094	0.190	-0.058	0.229
5	0.141	0.114	0.176	0.153
11	0.225	-0.011	0.261	0.028

13	-0.014	-0.038	0.022	0.001
15	0.097	-0.082	0.133	-0.043
17	0.026	-0.030	0.062	0.008
21	-0.091	-0.017	-0.055	0.022
35	-0.033	-0.040	0.003	-0.001
37	0.007	-0.022	0.043	0.016
39	0.157	0.047	0.193	0.086
41	0.172	0.004	0.207	0.043
43	-0.057	-0.031	-0.022	0.008
45	-0.183	-0.098	-0.147	-0.059
47	-0.088	-0.033	-0.052	0.006
	GRX= -0.036	GRY= -0.039		

	VEKTOR	DEFORMACIJA	STABILNA TACKA	
Ti	INTENZITET	SMER	X-OSA	Y-OSA
3	0.236	104.306	**DA**	NE
5	0.233	40.906	NE	NE
11	0.262	6.082	NE	**DA**
13	0.022	2.497	**DA**	**DA**
15	0.140	341.876	NE	**DA**
17	0.062	7.793	**DA**	**DA**
21	0.059	158.660	**DA**	**DA**
35	0.003	337.218	**DA**	**DA**
37	0.046	21.074	**DA**	**DA**
39	0.211	24.075	NE	NE
41	0.212	11.781	NE	**DA**
43	0.023	160.781	**DA**	**DA**
45	0.159	201.977	NE	**DA**
47	0.053	173.725	**DA**	**DA**

Interval granice tacnosti [X-osa] , DGX = 0.080
Interval granice tacnosti [Y-osa] , DGY = 0.071
Broj stabilnih tacaka [X-osa] , BSTX= 8
Broj stabilnih tacaka [Y-osa] , BSTY= 11

```
:..............................................:
:   STATISTICKO   TESTIRANJE   HIPOTEZA        :
:          STUDENTOV   T - TEST                :
:      Ho: M[d]=0    i    Ha: M[d]#0           :
:..............................................:
```

U ODNOSU NA NAJSTABILNIJU(E) TACKU(E)

--------- X - O S A : --------

Ti	SR.GR.REL.DEF Md=moSQRT(Qd)	TEST STAT. ti=di/Md	STABILNA TACKA
3	0.066	0.922	**DA**
5	0.064	2.695	NE
11	0.047	5.453	NE
13	0.037	0.526	**DA**
15	0.060	2.151	NE
17	0.064	0.927	**DA**
21	0.075	0.773	**DA**
35	0.000	0.000	**DA**
37	0.042	0.963	**DA**
39	0.037	5.141	NE
41	0.033	6.137	NE
43	0.052	0.473	**DA**
45	0.032	4.734	NE
47	0.042	1.320	**DA**

Kvantil t-studentove raspodele [t0.95,f]= 1.960

Broj stabilnih tacaka BST= 8

-------- Y - OSA : --------

Ti	SR.GR.REL.DEF Md=moSQRT(Qd)	TEST STAT. ti=di/Md	STABILNA TACKA
3	0.038	6.032	NE
5	0.055	2.778	NE
11	0.029	0.909	**DA**
13	0.000	0.000	**DA**
15	0.040	1.106	**DA**

17	0.065	0.115	**DA**
21	0.050	0.414	**DA**
35	0.028	0.074	**DA**
37	0.038	0.406	**DA**
39	0.038	2.241	NE
41	0.039	1.073	**DA**
43	0.042	0.157	**DA**
45	0.038	1.579	**DA**
47	0.046	0.105	**DA**

Kvantil t-studentove raspodele [t0.95,f]= 1.960

Broj stabilnih tacaka BST= 11

```
:.................................................:
:    STATISTICKO   TESTIRANJE   HIPOTEZA          :
:         STUDENTOV   T - TEST                    :
:    Ho: M[d]=0      i    Ha: M[d]#0              :
:.................................................:
```

U ODNOSU NA FIKTIVNU STABILNU TACKU

	PRIVIDNE DEFORMACIJE		RELATIVNE DEFORMACIJE	
Ti	DXP	DYP	DX	DY
3	-0.094	0.190	-0.051	0.226
5	0.141	0.114	0.184	0.150
11	0.225	-0.011	0.268	0.025
13	-0.014	-0.038	0.029	-0.002
15	0.097	-0.082	0.140	-0.046
17	0.026	-0.030	0.069	0.006
21	-0.091	-0.017	-0.048	0.019
35	-0.033	-0.040	0.010	-0.004
37	0.007	-0.022	0.050	0.014
39	0.157	0.047	0.200	0.084
41	0.172	0.004	0.215	0.041
43	-0.057	-0.031	-0.014	0.005
45	-0.183	-0.098	-0.140	-0.062
47	-0.088	-0.033	-0.045	0.003

SUMX= -0.043 SUMY= -0.036

Ti	INTENZITET VEKTORA	SMER VEKTORA
3	0.232	102.714
5	0.237	39.291
11	0.269	5.383
13	0.029	356.947
15	0.147	341.826
17	0.069	4.909
21	0.052	158.321
35	0.011	339.902
37	0.052	15.571
39	0.217	22.678
41	0.219	10.743
43	0.015	160.707
45	0.153	203.876
47	0.045	175.894

---------- X - O S A : --------

Ti	SR.GR.REL.DEF Md=moSQRT(Qd)	TEST STAT. ti=di/Md	STABILNA TACKA
3	0.053	0.965	**DA**
5	0.055	3.355	NE
11	0.044	6.021	NE
13	0.033	0.899	**DA**
15	0.054	2.599	NE
17	0.053	1.302	**DA**
21	0.063	0.762	**DA**
35	0.027	0.376	**DA**
37	0.033	1.527	**DA**
39	0.029	6.968	NE
41	0.033	6.600	NE
43	0.045	0.319	**DA**
45	0.036	3.861	NE
47	0.038	1.200	**DA**

Kvantil t-studentove raspodele [t0.95,f]= 1.960

Broj stabilnih tacaka [X-osa] , BSTX= 8

-------- Y - OSA : --------

Ti	SR.GR.REL.DEF Md=moSQRT(Qd)	TEST STAT. ti=di/Md	STABILNA TACKA
3	0.028	8.012	NE
5	0.050	3.019	NE
11	0.027	0.933	**DA**
13	0.024	0.064	**DA**
15	0.036	1.279	**DA**
17	0.052	0.114	**DA**
21	0.037	0.515	**DA**
35	0.022	0.164	**DA**
37	0.027	0.522	**DA**
39	0.028	2.983	NE
41	0.033	1.245	**DA**
43	0.028	0.180	**DA**
45	0.027	2.302	NE
47	0.036	0.090	**DA**

Kvantil t-studentove raspodele [t0.95,f]= 1.960

Broj stabilnih tacaka [Y-osa] , BSTY= 10

(C) I. A.

DODATAK 8: IDENTIFIKACIJA STABILNIH TAČAKA U 1-D MREŽI U SLUČAJU GRANIČNIH POMERANJA - PROGRAM ISTGE1

```
**************************************************
*                                                *
*  IDENTIFIKACIJA STABILNIH TACAKA  U  1-D  MREZI *
*                                                *
**************************************************

PROGRAM   :  I S T G E 1   ver  1.0
PROJEKAT :  TEST 1-D MREZA (S1.8.5.1)
MESTO / DATUM / VREME :  20.09
BROJ TACAKA U MREZI:  N =    5
```

Ti	NULTA SERIJA Xi	TEKUCA SERIJA XPi
1	9.999	9.999
2	20.001	20.001
3	30.000	30.000
4	40.000	40.005
5	49.999	49.995

Ti	PRIVIDNA POMERANJA DXP	RELATIVNA POMERANJA DX	STABILNA TACKA
1	0.000	0.000	**DA**
2	-0.001	0.000	**DA**
3	0.000	0.000	**DA**
4	0.005	0.005	NE
5	-0.005	-0.004	NE

GRX=   0.000

```
Interval granice tacnosti  , DGX =   0.002
Broj stabilnih tacaka       , BSTX=     3
```

```
.................................................
:   STATISTICKO   TESTIRANJE    HIPOTEZA    :
:           STUDENTOV    T - TEST           :
:     Ho: M[d]=0      i    Ha: M[d]#0       :
:...............................................:
```

U ODNOSU NA NAJSTABILNIJU(E) TACKU(E)

Ti	SR.GR.REL.DEF Md=moSQRT(Qd)	TEST STAT. ti=di/Md	STABILNA TACKA
1	0.001	0.827	**DA**
2	0.000	0.000	**DA**
3	0.001	0.311	**DA**
4	0.001	5.668	NE
5	0.001	4.225	NE

Kvantil t-studentove raspodele [t0.95,f]= 3.306

Broj stabilnih tacaka BST= 3

```
.................................................
:   STATISTICKO   TESTIRANJE    HIPOTEZA    :
:           STUDENTOV    T - TEST           :
:     Ho: M[d]=0      i    Ha: M[d]#0       :
:...............................................:
```

U ODNOSU NA FIKTIVNU STABILNU TACKU

Ti	PRIVIDNA POMERANJA DXP	RELATIVNA POMERANJA DX
1	0.000	0.000
2	-0.001	0.000
3	0.000	0.000
4	0.005	0.005
5	-0.005	-0.004
SUMX=	0.000	

Ti	SR.GR.REL.DEF Md=moSQRT(Qd)	TEST STAT. ti=di/Md	STABILNA TACKA
1	0.001	0.741	**DA**
2	0.001	0.673	**DA**
3	0.001	0.113	**DA**
4	0.001	5.766	NE
5	0.001	5.019	NE

Kvantil t-studentove raspodele [t0.95,f]= 3.306

Broj stabilnih tacaka , BSTX= 3

* MATRICA B(I,J) *

0.667	-0.333	-0.333	0.000	0.000
-0.333	0.667	-0.333	0.000	0.000
-0.333	-0.333	0.667	0.000	0.000
-0.333	-0.333	-0.333	1.000	0.000
-0.333	-0.333	-0.333	0.000	1.000

* MATRICA QDx=2 B Qx BT *

0.3408	-0.1482	-0.1926	-0.1038	0.2964E-01
-0.1482	0.2963	-0.1482	0.7411E-01	0.7411E-01
-0.1926	-0.1482	0.3408	0.2964E-01	-0.1038
-0.1038	0.7411E-01	0.2964E-01	0.7853	0.2519
0.2964E-01	0.7411E-01	-0.1038	0.2519	0.7853

DODATAK 9: SEKVENCIJALNI MODEL OPTIMIZACIJE U DEFORMACIONIM MREŽAMA

OPTIMIZACIJA TEST 1-D DEFORMACIONE MREŽE

Matrica kofaktora relativnih pomeranja

$$Q_d = 2\ B\ Q_{\hat{x}}\ B^T = \begin{bmatrix} 0.341 & -0.148 & -0.193 & -0.104 & 0.030 \\ & 0.296 & -0.148 & 0.074 & 0.074 \\ & & 0.341 & 0.030 & -0.104 \\ & \textit{simetrično} & & 0.785 & 0.252 \\ & & & & 0.785 \end{bmatrix}$$

Korelaciona matrica relativnih pomeranja

$$R_d = \begin{bmatrix} 1 & -0.466 & -0.565 & -0.201 & 0.057 \\ & 1 & -0.466 & 0.145 & 0.154 \\ & & 1 & 0.057 & -0.201 \\ & \textit{simetrično} & & 1 & 0.321 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Kovarijaciona kriterijum matrica osetljivosti

$$K_d = D_d\ R_d\ D_d = \begin{bmatrix} 0.234 & -0.109 & -0.132 & -0.047 & 0.013 \\ & 0.234 & -0.109 & 0.036 & 0.036 \\ & & 0.234 & 0.013 & -0.047 \\ & \textit{simetrično} & & 0.234 & 0.075 \\ & & & & 0.234 \end{bmatrix}$$

$D = \mathrm{Diag}\ (\sigma_{d_i}),\quad \sigma_{d_i} o = 0.484$ mm , i=1,2,...5

Kovarijaciona kriterijum matrica nepoznatih

$$\underset{-}{K}_{\hat{x},d} = \begin{bmatrix} 0.139 & -0.047 & -0.044 & -0.039 & -0.009 \\ & 0.110 & -0.047 & -0.008 & -0.009 \\ & & 0.139 & -0.009 & -0.039 \\ & \textit{simetrično} & & 0.068 & -0.012 \\ & & & & 0.068 \end{bmatrix}$$

gde je pseudo inverzija

$$(B^T B)^+ = \begin{bmatrix} 0.747 & -0.253 & -0.253 & -0.119 & -0.121 \\ & 0.747 & -0.253 & -0.119 & -0.121 \\ & & 0.747 & -0.119 & -0.121 \\ & \textit{simetrično} & & 0.681 & -0.321 \\ & & & & 0.681 \end{bmatrix}$$

Dijagonalni koeficijenti matrica R, $\underset{-}{K}_{\hat{l}}$ i $D_{\hat{l}}$ su

$$\textit{Diag}\ R = \begin{bmatrix} 0.467 \\ 0.533 \\ 0.533 \\ 0.467 \\ 0.533 \\ 0.467 \\ 0.533 \\ 0.467 \end{bmatrix}, \quad \textit{Diag}\ \underset{-}{K}_{\hat{l}} = \begin{bmatrix} 0.366 \\ 0.343 \\ 0.343 \\ 0.225 \\ 0.194 \\ 0.160 \\ 0.194 \\ 0.225 \end{bmatrix}, \quad \textit{Diag}\ D_{\hat{l}} = \begin{bmatrix} 0.886 \\ 0.802 \\ 0.802 \\ 0.694 \\ 0.603 \\ 0.586 \\ 0.603 \\ 0.694 \end{bmatrix}$$

DODATAK 10: TABLICE

KRITERIJUMI ISKLJUČENJA GRUBIH GREŠAKA

Kritične vrednosti $t_{n,\alpha}$ *- Tompsonovo pravilo.*

n	α = 0.002	0.01	0.02	0.05	0.10
1	1.414	1.414	1.414	1.410	1.397
2	1.730	1.723	1.715	1.645	1.559
3	1.982	1.948	1.917	1.757	1.611
4	2.178	2.106	2.051	1.814	1.631
5	2.329	2.218	2.142	1.848	1.640
6	2.447	2.301	2.207	1.870	1.644
7	2.541	2.364	2.256	1.885	1.647
8	2.616	2.414	2.294	1.896	1.648
9	2.679	2.454	2.324	1.904	1.649
10	2.731	2.486	2.348	1.910	1.649
11	2.775	2.513	2.368	1.915	1.649
12	2.812	2.536	2.385	1.920	1.650
13	2.845	2.556	2.399	1.923	1.650
14	2.874	2.573	2.411	1.926	1.650
15	2.899	2.588	2.422	1.929	1.649
16	2.921	2.601	2.431	1.931	1.649
17	2.941	2.613	2.440	1.933	1.649
18	2.959	2.623	2.447	1.934	1.649
19	2.975	2.632	2.454	1.936	1.649
20	2.990	2.641	2.460	1.937	1.649
21	3.003	2.649	2.465	1.938	1.649
22	3.015	2.655	2.470	1.939	1.649
23	3.026	2.662	2.475	1.940	1.649
24	3.037	2.668	2.479	1.941	1.649
25	3.047	2.673	2.483	1.942	1.648
26	3.055	2.678	2.486	1.943	1.648
27	3.064	2.683	2.490	1.943	1.648
28	3.071	2.687	2.493	1.944	1.648
29	3.078	2.691	2.496	1.945	1.648
30	3.085	2.695	2.498	1.945	1.648
31	3.092	2.699	2.501	1.946	1.648
32	3.098	2.702	2.503	1.946	1.648
33	3.103	2.705	2.505	1.947	1.648
34	3.108	2.708	2.507	1.947	1.648
35	3.114	2.711	2.509	1.947	1.648
36	3.118	2.713	2.511	1.948	1.648
37	3.123	2.716	2.513	1.948	1.648
38	3.127	2.718	2.514	1.948	1.648
39	3.131	2.720	2.516	1.949	1.647
40	3.135	2.723	2.518	1.949	1.647
41	3.139	2.725	2.519	1.949	1.647
42	3.142	2.727	2.520	1.950	1.647
43	3.145	2.729	2.522	1.950	1.647
44	3.149	2.730	2.523	1.950	1.647
45	3.152	2.732	2.524	1.950	1.647
46	3.155	2.734	2.525	1.951	1.647
47	3.158	2.735	2.526	1.951	1.647
48	3.161	2.736	2.527	1.951	1.647
49	3.163	2.738	2.528	1.951	1.647
50	3.165	2.739	2.529	1.951	1.647
55	3.176	2.746	2.533	1.952	1.647
60	3.186	2.750	2.537	1.953	1.647
65	3.194	2.755	2.540	1.954	1.646
70	3.201	2.759	2.541	1.954	1.646
75	3.207	2.762	2.545	1.955	1.646
80	3.212	2.765	2.547	1.955	1.646
85	3.216	2.767	2.548	1.955	1.646
90	3.220	2.769	2.550	1.955	1.646
95	3.224	2.771	2.551	1.955	1.646
100	3.227	2.773	2.553	1.956	1.646

LITERATURA

[1] *Alberda, J.E. (1980).* A review of analysis techniques for engineering survey control Schemes, Industrial and Engineering Survey Conference, London.

[2] *Aleksić, I. (1988a).* Optimizacija merenja u geodetskim mrežama, Magistarski rad, Građevinski fakultet, Beograd.

[3] *Aleksić, I. (1988b).* Optimizacija geodetskih mreža modifikovanom metodom minimalne norme, Geodetski list br. 7-9, Zagreb.

[4] *Aleksić, I. (1989a).* Identifikacija stabilnih tačaka geodetskih 2-D mreža - program ISTGE2, Geodetski list, br.4-6, Zagreb.

[5] *Aleksić, I. (1989b).* Eksperimentalna analiza identifikacije stabilnih tačaka metodama translacije i rotacije koordinatnog sistema, Geodetska služba, br.54, Beograd.

[6] *Aleksić, I. (1990a).* Optimization of geodetic networks with stochastic observations, The 8-th International Symposium on Geodetic Computation, Wuhan, China.

[7] *Aleksić, I.(1990b).* Geodezija 3-zbirka rešenih zadataka Naučna knjiga, Beograd.

[8] *Ašanin, S. (1986).* Prilog obradi i analizi geodetskih merenja za određivanje pomeranja i deformacija objekata i tla, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd.

[9] *Baarda, W. (1968).* A testing procedure for use in geodetic networks, Netherlands Geodetic Commission, New series, Volume 2, Number 5, Delft.

[10] *Baarda,W. (1967).* Statistical concepts in geodesy, Netherlands Geodetic Commission, New series, Volume 2, Number 4, Delft.

[11] *Banov,B. (1982).* Special method to derive a criterion matrix, Survey Control Networks, Munchen.

[12] *Baumer,R. und Heister,H. (1984).* Das programm - SYSTEM NOPTI II zum entwurf des optimalen beobachtungsplanes geodatischer lagenetze nach invarijanten kriterien, Beitrage aus dem Institut fur Geodasie, Heft 10, Munchen.

[13] *Bilajbegović,A. (1983).* Optimizacije geodetskih mreža Zbornik radova, Niz A - Svezak br.35, Geodetski fakultet, Zagreb.

[14] *Bill,R.,Muller,H.,Schmitt,G. and Monicke,H.J. (1983).* Der optimale Entwurf eines Staudamm-Uberwachungsnetze, AVN, Heft 10.

[15] *Bill,R. (1985).* Kriteriunmatrizen ebener geodatisher Netze, DGK, Reihe A, Heft Nr. 102, Munchen.

[16] *Cross,P. and Thapa,K. (1977).* The optimal design of levelling networks, Survey Review XXV.

[17] *Caspary,W. and Borutta,H. (1987).* Robust estimation in deformation models, Survey Review.

[18] *Caspary,W. (1988).* Concept of network and deformation analysis, Monograph 11, The University of New South Wales, Australia.

[19] *De Heus,H. (1982).* Data-snooping in control networks, Survey Control Networks, Munchen.

[20] *Deformationsanalysen (1983).* Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodatischer Netze, Munchen.

[21] *Einstein,A. (1961).* What is the theory of relativity, Srpska akademija nauka i umetnosti, Beograd.

[22] *Fletcher,R. (1987).* Practical Methods of Optimization Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapure.

[23] *Forstner,W. (1985).* Reliability, gross error detection and Selfcalibration, Photogrammetry Engineering, Insti tute for Photogrammetry, Stuttgart.

[24] *Gaspar,P. und Schmit,G. (1989).* Design zweiter Ordnung durch diskrete suboptimale Programmierung, AVN, Heft 6.

[25] *Grafarend,E. and Schraffrin,B. (1976).* Equivalence of Estimable Quantities and Invariants in Geodetic Netwo-rks, ZfV, Nr 11/976.

[26] *Grafarend,E. (1976).* Space-time differential geodesy, The Ohio State University.

[27] *Grafarend,E. and Schaffrin,B. (1979).* Variance-Covari-ance- Component Estimation of Helmert Type, Surveying and Mapping, Vol.XXXIX, No.3.

[28] *Grafarend,E. (1979).* Optimierung geodatischer Mesope-rationen, Karlsruhe.

[29] *Hahn,M. (1986).* Comparison of different methods and strategies for detecting outliers in data, Karlsruhe.

[30] *Heck,B. (1980).* Statistische ausreisserkriterien zur kontrolle geodatischer beobachtungen, VIII Internat. kurs feuer ingenieurvermessung, Zuerich.

[31] *Hoppe,H. und Kaltenbach,H. (1989).* Gewichtsoptimierung angeschlossener geodatischer Netze, DGK, Reihe A, Heft Nr.105.

[32] *Huaxue,T. and Fengxiang,J. (1990).* Method of dynamic programming with multiobjective function to determina-tion of crustal movements, XIX Internationaler kongre-ss, Helsinki.

[33] *Illner,M. (1987).* Ausgleichungs und Optimierungsmode-lle der Netzverdichtung, AVN, Heft 3.

[34] *Kok,J.J. (1982).* Statistical analysis of deformation problems using Baarda's testing procedures, Published in Forty Yers of Thought Delft University of Technolo-gy, Delft.

[35] *Kok,J.J. (1983).* Simuliertes Beobachtungsmaterial fur das Testnetz zur Deformationsanalyse, Geometrische Analyse und Interpretation von Defoirmationen Geodatischer Netze, Munchen.

[36] *Kok,J.J. (1984).* On Data Snooping and Multiple Outlier Testing, National Geodetic Survey, Rockville.

[37] *Mihailović,K. (1985a).* Nov pristup za određivanje stabilnih tačaka kod deformacionih merenja, Zbornik radova Instituta za geodeziju, br.24, Beograd.

[38] *Mihailović,K. (1985b).* Identifikacija stabilnih tačaka na osnovu rotacije koordinatnog sistema, Geodetska služba, br. 43, Beograd.

[39] *Mihailović,K. (1985c).* Određivanje stabilnih repera, Geodetska služba, br.43, Beograd.

[40] *Mihailović,K. i Vračarić,K. (1985d).* Geodezija 3, Naučna knjiga, Beograd.

[41] *Mihailović,K. (1988a).* Optimizacija merenih veličina u geodetskim mrežama, Geodetska služba, br.51, Beograd.

[42] *Mihailović,K.(1988b).* Identifikacija stabilnih tačaka, Savetovanje, Priština.

[43] *Mihailović,K. (1986a).* Položajne greške tačaka u gradskim mrežama, Geodetski list, br. 7-12, Zagreb.

[44] *Mihailović,K. (1986b).* Matematička obrada merenih veličina pri određivanju deformacija, Geodetski list, br 4-6, Zagreb.

[45] *Mihailović,K. (1986c).* Nov pristup pri određivanju broja merenja, odnosno broja girusa, Geodetska služba br. 46, Beograd.

[46] *Mihailović,K. (1991a).* Izravnanje geodetskih mreža, Monografija u rukopisu, Naučna knjiga, Beograd.

[47] *Mihailović,K. (1991b).* Kritički osvrt na mogućnosti otkrivanja grubih grešaka, Geodetska služba, br.60, Beograd.

[48] *Muller,H. (1986).* Zur Berucksichtigung der Zuverlassigkeit bei der Gewichtsoptimierung geodatischer Netze, ZfV, Heft 4.

[49] *Murle,M. and Bill,R. (1984).* Zuverlassigkeits und Genauigkeitsuntersuchung ebener geodatisher Netze, AVN.

[50] *Niemeier,W. (1988).* Deformationsanalyse aktueller stand in theorie und praxis, X. Internationaler Kurs fur Ingenieurvermessung, Munchen.

[51] *Neimeier W. (1989).* Zur Zuverlassigkeit geodatischer Systeme, Problemformulierung und Losungsansatze, Hanover.

[52] *Ninkov,T. (1985).* Deformaciona analiza i njena praktična primena, Geodetski list, br.7-9, Zagreb.

[53] *Ninkov,T. (1989).* Optimizacija projektovanja geodetskih mreža, Naučna knjiga, Beograd.

[54] *Ninkov,T. i Aleksić,I. (1990).* Upoređivanje rezultata optimizacije geodetskih mreža po raznim kriterijumima, Geodetski list, br.4-6, Zagreb.

[55] *Ninkov,T. (1982).* Matematička optimizacija projektovanja geodetskih mreža, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd.

[56] *Pelzer,H. (1977).* Criteria for the reliability of geodetic networks, International Symposium on optimization of design and computation of control networks, Sopron.

[57] *Pelzer,H. (1985).* Geodatishe Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Stuttgart.

[58] *Perović,G. (1986).* Singularna izravnanja, Naučna knjiga, Beograd.

[59] *Perović,G. i Ašanin,S. (1989).* Pouzdanost poligonometrijskih mreža, Geodetski list, br. 10-12, Zagreb.

[60] *Perović,G. i Ašanin,S. (1985).* Optimalno projektovanje gradskih poligonometrijskih mreža, Građevinski fakultet, Beograd.

[61] *Perović,G. i Ašanin,S. (1987).* Definisanje razmere i njen uticaj na preciznost i pouzdanost mreža, Svetovanje o osnovnim geodetskim radovima, Struga.

[62] *Peiliang,X. (1989).* On robust estimation with correlated observations, Bulletin Geodesique, V.63, No.3.

[63] *Rao,C. and Mitra,S. (1971).* Generalized Inverse of Matrices and its Aplications, New York.

[64] *Schmitt,G. (1982).* Optimization of geodetic Networks, Reviews of geophysics and space physics, Vol.20,No.4.

[65] *Stefanović,P. (1978).* Blunders and least squares, ITC Journal.

[66] *Teunissen, P. (1984).* Quality control in geodetic networks, 3rd Course: Optimization and Design of Geodetic Networks, Erice-Trapani-Sicily.

[67] *Van Mierlo,J. (1981).* Second oreder design: precision and reliability aspects, AVN, Heft 3.

[68] *Van Mierlo,J. (1982).* A review of model checks and reliability, DGK, Reihe B, Heft Nr.258/V, Munchen.

[69] *Van Mierlo,J. und Hahn,M. (1987).* Konsequenzen fur die Zuverlassigkeitsmase infolge der Elimination von Beobachtungen, AVN, No. 3.

[70] *Van Mierlo,J. (1987).* Die folge einer gewichtsanderung einer beobachtung auf die zuverlassigketsmasse, Geodetski fakultet, Zagreb.

[71] *Van Mierlo,J. and Fahlbusch,T. (1990).* Strukture and Design of GPS- Network, XIX International Congress Helsinki, Finland.

[72] *Vučkov,S. (1988).* Neki savremeni postupci pri analizi i obradi geodetskih deformacionih merenja, Magistarski rad, Građevinski fakultet, Beograd.

[73] *Čvorović,M. (1986).* Prilog metodologiji otkrivanja stabilnih tačaka u trigonometrijskoj mreži pri pomeranju tla i objekata, Disertacija, Građevinski fakultet, Beograd.

[74] *Zhang,Z. and Li,X. (1990).* New Method for Monitoring Networks Base, ZfV, Heft 6.

[75] *Welsch,W. (1979).* A review the adjustment of free networks, Survey Review, No.194.

[76] *William,H.P., Brian,P.F., Saul,A.T. and William,T.V. (1986).* Numerical Recipes, Cambridge University Press Cambridge.

[77] *Yan,Z. (1987).* Beitrage zum Entwurf von optimalen Beobachtungsplanen fur tektonische Uberwachungsnetze, Dissertation, Universitat der Bundeswehr, Munchen.

AVN - Allgemeine Vermessungs Nachrichten.

ZfV - Zeitschrift fur Vermessungswesen

DGK - Deutsche Geodatische Kommission

[73] Cvorovic,M. (1986). Prilog metodologiji odredjivanja stabilnih tacaka u trigonometrijskoj mrezi pri pomeranju tla i objekata. Disertacija, Gradjevinski fakultet, Beograd.

[74] Zhang,Z. and Li,X. (1990). New Method for Monitoring Networks Base, ZfV, Heft 6.

[75] Welsch,W. (1979). A review the adjustment of free networks, Survey Review, No.194.

[76] William,H.P., Brian,P.F., Saul,A.T. and William,T.V. (1986). Numerical Recipes, Cambridge University Press, Cambridge.

[77] Yan,Z. (1987). Beitrage zum Entwurf von optimalen Beobachtungsplanen fur tektonische Uberwachungsnetze, Dissertation, Universitat der Bundeswehr, Munchen.

AVN - Allgemeine Vermessungs Nachrichten

ZfV - Zeitschrift fur Vermessungswesen

DGK - Deutsche Geodatische Kommission