



PD 17963



300123743

COBISS

Univerzitet u Beogradu
Građevinski fakultet
Odsek za geodeziju

Mr Dragan Blagojević, dipl. geod. inž.

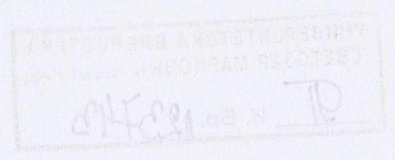
**MOGUĆNOSTI GLOBALNOG POZICIONOG
SISTEMA ZA USPOSTAVLJANJE GEODETSKE
REFERENTNE OSNOVE U GRADOVIMA**

Doktorska disertacija

Beograd, 2003.

PA 17963

UA-25922063



Univerzitet u Beogradu
Građevinski fakultet
ODSEK ZA GEODEZIJU

Mr Dragan Blagojević, dipl.geod.inž.

**MOGUĆNOSTI GLOBALNOG POZICIONOG SISTEMA
ZA USPOSTAVLJANJE GEODETSKE REFERENTNE
OSNOVE U GRADOVIMA**

Doktorska disertacija



Beograd 2003

УНИВЕРЗИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА
"СВЕТОЗАР МАРКОВИЋ" - БЕОГРАД
И. Бр. 123742

Универзитет у Београду
Географски факултет
ОДДЕЛ ЗА ГЕОДЕЗИЈУ

Mr. Džani Babić, dr. sc.
MOGUĆNOSTI GLOBALNOG PROJEKTOVANJA
ZA USPOSTAVLJANJE GEODETSKE REFERENTNE
OSNOVE U GRADOVIMA
Doktorski disertacija



Datum odbrane : _____

Datum promocije : _____

Beograd 2012

Rezime

Predmet ovog rada predstavljaju mogućnosti NAVSTAR GPS satelitskog sistema za uspostavljanje gradske geodetskih referentne osnove. U odgovoru na ovo pitanje sprovedeno je istraživanje čija se suština sastoji u analizi relativnih geometrijskih GPS modela za kratka međustanična rastojanja.

Realizacija lokalnih referentnih sistema na području naseljenih mesta konkretizovana je pre svega modelom pasivne gradske GPS mreže i dvostrukim razlikama faznih pseudoduzina kao osnovnim mernim veličinama. Na osnovu prethodne ocene tačnosti merenja pokazano je da za prosečne atmosferske uslove i međustanična rastojanja manja od 10km funkcionalni model sadrži samo koordinate i fazne neodređenosti kao nepoznate parametre. Sprovedeni eksperimenti potvrdili su da je samo povremeno neophodno uvođenje dodatnog zenitnog troposferskog parametra po staničnom paru. Stohastički model dvostrukih razlika detaljno je razrađen obuhvatanjem vremenske korelacije i eksperimentalnim određivanjem parametara kovarijacionih modela pojedinih izvora grešaka. Izvedeni su i teorijski izrazi za tačnost relativnog pozicioniranja na nivou pojedinačnih GPS vektora i mreže GPS vektora. Njihova validnost proverena je analizom i obradom GPS merenja u test mrežama Novoselo i Lapovo. Za ilustraciju koncepta pasivne geodetske osnove korišćene su već realizovane gradske GPS mreže Kraljeva i Zrenjanina. Na osnovu eksperimentalnih rezultata sledi da je sa mernim sesijama dužine 30-60min moguće postići tačnost od 3-6mm za relativne položaje tačaka, i 5-10mm za visinske razlike, pri čemu je ocenjeno da preciznost može biti dvostruko bolja.

Mogućnost realizacije lokalnih referentnih sistema pomoću malog broja stalno operativnih GPS stanica ispitana je kroz model aktivne gradske GPS osnove. U tu svrhu sproveden je eksperiment koji predstavlja simulaciju mreže permanentnih stanica za područje Beograda, i u kojem je primenjena metoda virtuelnih referentnih stanica. Rezultati eksperimenta pokazuju da je tačnost linearne interpolacije diferencijalnih korekcija bolja od 5mm za međustanična rastojanja od 40-50km. Tačnost pozicioniranja novih tačaka ocenjena je pomoću poznatih koordinata iz državne referentne GPS mreže. Otkriveno je da se tačnost položaja stabilizuje na konstantnu vrednost nakon 15min merenja, dok je u slučaju visina neophodno da merna sesija traje bar 25min. Za ponovljivost rezultata pozicioniranja utvrđena je gornja granica od 3cm po položaju i 8cm po visini, pri čemu se ove vrednosti mogu usvojiti kao pokazatelji tačnosti kinematičkog pozicioniranja na nivou verovatnoće od 99%. Uz već utvrđeno minimalno trajanje merne sesije ostvarena je tačnost statičkog pozicioniranja bolja od 10mm i 15mm za položaje i visine respektivno.

Posebna pažnja posvećena je osiguranju i kontroli kvaliteta. U okviru metrološkog obezbeđenja GPS prijemnika i antena definisan je i eksperimentalno verifikovan osnovni program ispitivanja. On se sastoji u utvrđivanju stabilnosti oscilatora, srednjih položaja faznih antenskih centara i preciznosti praćenja GPS signala, i podjednako je primenljiv u pasivnim i aktivnim gradskim GPS mrežama. Za praćenje integriteta opažanja na permanentnim stanicama praktično je implementiran sistem kvaliteta zasnovan na Kalmanovom filteru i rekurzivnom DIA postupku. Eksperimentalno je utvrđeno da je na taj način moguće pouzdano otkrivanje veoma malih grubih grešaka u kodnim merenjima, i eliminacija faznih skokova čija je vrednost svega 1cyc.

Ključne reči

Globalni pozicioni sistem, referentni sistem, funkcionalni model, stohastički model, mešoviti model, stohastički proces, komponente disperzija, Kalmanov filter, osiguranje kvaliteta, kontrola kvaliteta, testiranje hipoteza, pasivna referentna osnova, aktivna referentna osnova.

Resume

The subject of this thesis represents the possibility of NAVSTAR GPS satellite system for realization of local geodetic reference frame in urban environment. Research conducted to answer this question, led in essence to analysis of relative geometric GPS models suitable for so called short interstation distances.

Local reference frame realization in urban areas is firstly demonstrated in terms of pasive GPS network model and phase double differences. Based on apriori accuracy assessment, it is shown that normal atmospheric conditions and interstation distances less than $10km$ lead consequently to functional model consisting of point coordinates and phase ambiguities as only unknown parameters. Experimental results have confirmed that there was only an occasional need for introduction of additional zenith tropospheric parameter per baseline. On the other side, detailed stochastic model of phase double differences is presented, including time correlation and experimentally derived parameters of the covariance model for various error sources. Theoretical expressions for relative positioning accuracy are also shown on baseline and network level. The validity was checked by analysis and assessment in the frame of the test networks Novoselo and Lapovo. Pasive frame concept was illustrated with city GPS networks of Kraljevo and Zrenjanin. Results clearly show the possibility of reaching the horizontal and vertical accuracy of $3-6mm$ and $5-10mm$ respectively, based on measurement sessions of at least $30-60min$, and with the level of precision which might be better by factor of nearly two.

The possibility for realization of local reference system using small number of permanently operated GPS stations is investigated in terms of active urban GPS network model. For research purposes, an experiment was carried out, whith simulation of permanent GPS network for Beograd area and virtual stations method of positioning. Results show that simple linear interpolation is quite adequate in order to obtain virtual measurements with accuracy of $5mm$ for interstation distances of $40-50km$. Known coordinates of national zero order GPS network was used to assess the positional accuracy of new points. It was discovered that horizontal position accuracy tends to stabilize after $15min$, in comparison with measurement session of at least $25min$ necessary for stabilization of the heights accuracy. Worst case scenario for repeatability delivered values of $3cm$ for positions and $8cm$ for heights, which can be assumed as kinematic positioning accuracy with probability level of 99%. Minimum duration of measurement session mentioned above was capable of obtaining high static positioning accuracy of $10mm$ and $15mm$ for positions and heights respectively.

Special attention is devoted to quality assurance and quality control. Metrological assurance of GPS receiver and antena was proposed and experimentaly verified, with few well defined basic procedures. The program is based on estimation of local oscilator stability, mean phase center location and precision of GPS signal tracking, and it is equally applicable in pasive and active urban GPS networks. For integrity monitoring of permanent observations quality system was implemented, based on Kalman filtering and recursive DIA procedure. It was experimentaly confirmed that the system is capable of reliable detection of very small gross errors in code measurements, as well as elimination of cycle slips with magnitude of only $1cyc$ in phase measurements.

Keywords

Global Positioning System, reference system, functional model, stochastic model, mixed model, stochastic process, components of variance, Kalman filter, quality assurance, quality control, hypothesis testing, pasive reference frame, active reference frame.

Predgovor

Realizacija lokalnih referentnih sistema uspostavljanjem gradskih geodetskih mreža, vršila se u našoj zemlji do pre jedne decenije isključivo terestričkim mernim metodama. Razvoj satelitski zasnovanih tehnika pozicioniranja, a naročito široka dostupnost i potpuna operativnost američkog satelitskog sistema NAVSTAR GPS, uslovlili su i kod nas njegovu intenzivnu upotrebu za rešavanje različitih geodetskih problema. I pored toga što su poslednjih godina u tom smislu stečena dragocena iskustva, u našim uslovima se ipak oseća nedostatak određene sistematizacije specifičnosti nove tehnologije i onih aspekata modeliranja, merenja i obrade koji su inače u slučaju terestričkih metoda relativno dobro poznati. Ovaj rad predstavlja pokušaj da se ti aspekti istraže utvrđivanjem mogućnosti GPS tehnologije za uspostavljanje gradske referentne osnove, i to kroz analizu tačnosti i pouzdanosti u relativnim geometrijskim modelima koji, po GPS terminologiji, podrazumevaju mala međustanična rastojanja.

Rad je organizovan u okviru osam poglavlja.

U uvodnom *poglavlju 0* objašnjeni su ključni pojmovi, definisan je predmet rada sa osnovnim ciljevima, i dat je kratak presek stanja istraživanja u svetu zajedno sa hronološkim osvrtom na gradske osnovne radove u našoj zemlji.

Poglavlje 1 sastoji se od dva dela, i predstavlja opis systemske arhitekture NAVSTAR satelitskog sistema i osnovnih principa GPS pozicioniranja. U okviru prvog dela identifikovane su systemske komponente, data je specifikacija referentnog koordinatnog i vremenskog sistema, i naznačena je dinamika planova NAVSTAR modernizacije. Drugi deo poglavlja posvećen je strukturi GPS signala, nekim tehnološkim detaljima njegove obrade i osnovnom načinu korišćenja mernih veličina za pozicioniranje i navigaciju.

U *poglavlju 2* detaljno je razrađen opšti oblik matematičkog modela kodnih i faznih GPS merenja. Funkcionalni i stohastički deo modela formulisani su kako za originalne merne veličine, tako i za njihove najznačajnije linearne kombinacije. Detaljno je prikazana parametrizacija geometrijskih rastojanja, i to pre svega ona od značaja za primene u pozicioniranju. Sistematski i slučajni uticaji na rezultate merenja i pozicioniranja diskutovani su sa stanovišta različitih fizičkih procesa prisutnih u kosmičkom, kontrolnom i korisničkom GPS segmentu, Zemljinoj atmosferi i gornjim slojevima kore.

Matematička obrada GPS merenja prikazana je u *poglavlju 3*. Teorija ocenjivanja parametara i testiranja hipoteza predstavljena je pre svega za Gaus-Markovljev model, zajedno sa onim praktičnim aspektima koji su našli najširu geodetsku primenu. S obzirom na to da se kod korišćenja GPS često može objektivno pretpostaviti dinamika mnogih parametara stanja sistema, data je i koncizna teorija Kalmanovog filtera, i istaknute su određene numeričke teškoće u njegovoj implementaciji. Veliki deo poglavlja posvećen je specifičnostima matematičke obrade GPS merenja, koje se ogledaju u neophodnosti eliminacije faznih skokova i rešavanja faznih neodređenosti. Pored toga detaljno su obrađeni modeli popravaka merenja, pri čemu je naročita pažnja poklonjena uticajima atmosfere refrakcije.

Poglavlje 4 posvećeno je modelu pasivne gradske GPS osnove kao načinu realizacije referentnog sistema na području naseljenih mesta. U tu svrhu predložena je upotreba mernih veličina u vidu dvostrukih faznih razlika. Na osnovu detaljne kvantitativne analize instrumentalnih, atmosferskih i satelitskih uticaja formulisani su odgovarajući funkcionalni i stohastički model, a zatim su izvedeni opšti izrazi za tačnost i pouzdanost kao mere kvaliteta. Identifikovani su osnovni principi u uspostavljanju pasivnih gradskih GPS mreža, kao što su pitanja koja se odnose na geometrijski oblik, međustanična rastojanja, specifičnosti matematičke obrade i datumsku transformaciju. Osiguranje kvaliteta na nivou prijemnika i antena posebno je razrađeno formulisanjem osnovnog programa metrološkog obezbeđenja.

U *poglavlju 5* predstavljena je mogućnost realizacije lokalnog referentnog sistema pomoću aktivne gradske GPS osnove. Definisani su osnovni uslovi u pogledu rasporeda tačaka, hardverske, softverske i komunikacione opreme, opisan je način mrežnog rešavanja faznih neodređenosti, i formulisani su sistem kontrole kvaliteta koji se zasniva na Kalmanovom filteru i rekurzivnom DIA postupku. Posebna

pažnja posvećena je određivanju diferencijalnih korekcija pomoću kojih se u okviru mreže permanentnih stanica vrši pozicioniranje novih tačaka metodom mrežnih koeficijenata ili metodom virtuelnih referentnih stanica. Pored pozicioniranja, naznačene su i neke mogućnosti aktivne gradske GPS osnove u atmosferskim i geofizičkim istraživanjima.

Poglavlje 6 posvećeno je eksperimentalnoj proveru i potvrdi teorijskih postavki, i sastoji se od četiri dela. U prvom su prikazani rezultati eksperimenata kojima je obuhvaćen već predloženi osnovni program metrološkog obezbeđenja GPS prijemnika i antena. Drugi deo poglavlja predstavlja detaljnu razradu stohastičkog modela dvostrukih faznih razlika, sa eksperimentima kojima su kvantitativno vrednovane najznačajnije komponente disperzija i kovarijacija. U trećem delu izvedeni su izrazi za proračun tačnosti pozicioniranja u pasivnim gradskim GPS mrežama. Provera njihove validnosti izvršena je korišćenjem podataka terestričkih i GPS merenja u test mrežama Novoselo i Lapovo. Mogućnosti i kvalitet pozicioniranja ilustrovani su primerima već realizovanih gradskih GPS mreža Kraljeva i Zrenjanina. Četvrti deo poglavlja sadrži ispitivanja modela aktivne gradske GPS osnove. U tu svrhu korišćeni su podaci eksperimenta koji predstavlja simulaciju mreže permanentnih stanica za područje Beograda. Mogućnost otkrivanja veoma malih faznih skokova u faznim merenjima i grubih grešaka u kodnim merenjima demonstriran je pomoću praktično implementiranog sistema kvaliteta. Pored toga, poznate koordinate postojećih tačaka državne referentne mreže omogućile su numeričku proveru kvaliteta interpolacije diferencijalnih korekcija i utvrđivanje tačnosti pozicioniranja novih tačaka.

Sumarni pregled najvažnijih rezultata rada, osnovni zaključci i preporuke, otvorena pitanja i mogući pravci daljih istraživanja, dati su u *poglavlju 7*.

Priznanja

Obim i sadržaj ovog rada u velikoj meri su rezultat neposredne ili posredne pomoći određenog broja ljudi. Svoju zahvalnost dugujem pre svega prof. dr Gligoriju Peroviću, koji se bezrezervno prihvatio napornih mentorskih obaveza u već odmakloj fazi realizacije rada. Njegovim stavom prema naučnom radu i načelnim sugestijama rukovodio sam se prilikom izrade disertacije. Posebno se zahvaljujem svom dugogodišnjem nastavniku prof. dr Nataliji Bratuljević na velikoj pomoći u literaturi, pažljivom pregledu rukopisa, učinjenim primedbama, i iskazanom strpljenju i upornosti. Primedbe i zapažanja prof. dr Đorđa Paunovića sa Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu predstavljali su dragocen doprinos konačnom izgledu rada, tim pre što je u pitanju stručnjak negeodetskog profila.

Najveći deo eksperimenata prikazanih u ovom radu izveden je u okviru Republičkog geodetskog zavoda Republike Srbije. Zahvaljujem se prof. dr Dušanu Joksiću, tadašnjem direktoru te ustanove, na inicijativama i odobrenjima da se nova tehnologija koristi i u istraživačke svrhe. Ovom prilikom odajem priznanje terenskoj ekipi Sektora za osnovne geodetske radove na savesnom merenju i izvanrednim rezultatima, kao i kolegicama i kolegama istog sektora za tehničku pomoć, inspirativnu atmosferu i mnogobrojne diskusije. Zahvalnost dugujem i kolegama iz Republike Makedonije dr Vučkov Stojanču i dipl. inž. Vanči Postolovskom, na rezultatima terestričkih i GPS merenja u test mreži Novoselo. Eksperimentalna istraživanja podrazumevala su i izradu mnogih netipičnih softverskih komponenti, u čemu sam povremeno koristio nesebičnu pomoć inostranih kolega kao što su C. D. de Jong, M. Schenewerk, i mnogih drugih koji su svoje rezultate učinili javno dostupnim preko interneta.

Konačno, najveću zahvalnost dugujem svojim najbližim, za godine podrške i strpljenja.

Beograd, 2003.

Dragan Blagojević

Sadržaj

0 UVOD.....	1
1 NAVSTAR GLOBALNI POZICIONI SISTEM.....	7
1.1 Opšte karakteristike NAVSTAR sistema.....	7
1.1.1 NAVSTAR GPS program.....	7
1.1.2 Referentni GPS sistem.....	8
1.1.3 GPS systemske komponente.....	11
1.2 Principi GPS merenja i pozicioniranja.....	14
1.2.1 Struktura GPS signala.....	14
1.2.2 Obrada GPS signala.....	16
1.2.3 Princip GPS pozicioniranja.....	18
2 MATEMATIČKI MODEL GPS MERENJA.....	23
2.1 Funkcionalni model GPS merenja.....	23
2.1.1 Fazne i kodne pseudodužine.....	23
2.1.2 Parametrizacija geometrijskog rastojanja.....	25
2.1.3 Jednačina vremenskog kašnjenja.....	26
2.2 Linearne kombinacije merenja.....	27
2.2.1 Dvofrekventne linearne kombinacije.....	27
2.2.2 Modeli razlika merenja.....	30
2.3 Stohastički model GPS merenja.....	32
2.3.1 Glavne komponente grešaka merenja.....	32
2.3.2 Stohastički model merenja.....	35
2.4 Fizički aspekti matematičkog modela.....	39
2.4.1 Stabilnost oscilatora.....	39
2.4.2 Jonosfersko kašnjenje signala.....	43
2.4.3 Troposfersko kašnjenje signala.....	45
2.4.4 Relativistički efekti.....	47
2.4.5 Geofizički efekti.....	50
3 MATEMATIČKA OBRADA GPS MERENJA.....	53
3.1 Gaus-Markovljev model.....	53
3.1.1 Opšti izrazi za MNK ocene.....	53
3.1.2 Eliminacija parametara.....	54
3.1.3 Sekvencijalno MNK ocenjivanje.....	55
3.1.4 Rekurzivno MNK ocenjivanje.....	57
3.2 Kalmanov filter.....	57
3.2.1 Formulacija Kalmanovog filtera u diskretnom slučaju.....	57
3.2.2 Gaus-Markovljev proces prvog reda.....	60
3.2.3 Praktični aspekti Kalmanovog filtera.....	61
3.3 Problemi adekvatnosti modela.....	63
3.3.1 Testiranje hipoteza.....	63
3.3.2 Nerekurzivni DIA postupak.....	64
3.3.3 Rekurzivni DIA postupak.....	65
3.4 Preliminarna obrada GPS merenja.....	68
3.4.1 Određivanje stanja prijemnika.....	68
3.4.2 Otkrivanje i eliminacija faznih skokova.....	70
3.5 Modeli popravaka merenja.....	75
3.5.1 Jonosferska refrakcija.....	75
3.5.2 Troposferska refrakcija.....	78
3.5.3 Varijacije faznog centra antene.....	83
3.5.4 Korekcije satelitskih položaja.....	85

3.6 Rešavanje faznih neodređenosti.....	86
3.6.1 Geometrijske metode.....	87
3.6.2 Koordinatne metode.....	88
3.6.3 Metode pretraživanja neodređenosti.....	89
4 MODEL PASIVNE GRADSKE GPS OSNOVE.....	93
4.1 Analiza dvostrukih faznih razlika za mala rastojanja.....	93
4.1.1 Instrumentalni uticaji.....	93
4.1.2 Uticaji sredine prostiranja signala.....	94
4.1.3 Uticaji staničnih i satelitskih položaja.....	96
4.1.4 Funkcionalni model dvostrukih razlika.....	98
4.1.5 Stohastički model dvostrukih razlika.....	100
4.2 Opšti izrazi za mere kvaliteta.....	101
4.2.1 Tačnost apsolutnog pozicioniranja.....	101
4.2.2 Tačnost relativnog pozicioniranja.....	103
4.2.3 Unutrašnja i spoljašnja pouzdanost.....	104
4.3 Pasivne gradske GPS mreže.....	106
4.3.1 Uspostavljanje pasivnih gradskih GPS mreža.....	106
4.3.2 Metrološko obezbeđenje GPS prijemnika i antena.....	108
4.3.3 Neke specifičnosti matematičke obrade.....	110
4.3.4 Datumaska transformacija pasivnih gradskih GPS mreža.....	114
5 MODEL AKTIVNE GRADSKE GPS OSNOVE.....	117
5.1 Aktivne gradske GPS mreže.....	117
5.1.1 Uspostavljanje aktivnih gradskih GPS mreža.....	117
5.1.2 Rešavanje faznih neodređenosti.....	119
5.1.3 Sistem kvaliteta aktivnih gradskih GPS mreža.....	121
5.2 Mogućnosti pozicioniranja novih tačaka.....	125
5.2.1 Određivanje diferencijalnih korekcija.....	125
5.2.2 Pozicioniranje metodom mrežnih koeficijenata.....	127
5.2.3 Pozicioniranje metodom virtuelnih referentnih stanica.....	130
5.3 Ostale mogućnosti aktivnih gradskih GPS mreža.....	132
5.3.1 Mogućnosti atmosferskih istraživanja.....	132
5.3.2 Mogućnosti geodinamičkih istraživanja.....	135
6 EKSPERIMENTALNA ISTRAŽIVANJA.....	141
6.1 Metrološko obezbeđenje GPS prijemnika i antena.....	141
6.1.1 Ispitivanje stabilnosti oscilatora prijemnika.....	141
6.1.2 Određivanje srednjeg položaja faznog centra antene.....	147
6.1.3 Određivanje preciznosti kodnih i faznih merenja.....	149
6.2 Stohastičko modeliranje dvostrukih razlika.....	154
6.2.1 Višestruka refleksija.....	155
6.2.2 Troposferska refrakcija.....	159
6.2.3 Jonosferska refrakcija.....	162
6.2.4 Vremenska i međufrekventna korelacija.....	167
6.3 Tačnost pozicioniranja u pasivnim gradskim GPS mrežama.....	171
6.3.1 Proračun tačnosti GPS pozicioniranja.....	171
6.3.2 Ocena tačnosti GPS pozicioniranja u test mrežama.....	174
6.3.3 Primeri gradskih GPS mreža.....	184
6.4 Tačnost pozicioniranja u aktivnim gradskim GPS mrežama.....	188
6.4.1 Eksperimentalni podaci.....	188
6.4.2 Kontrola kvaliteta permanentnih opažanja.....	191
6.4.3 Tačnost pozicioniranja novih tačaka.....	196
7 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA.....	203
Literatura.....	???
Biografija.....	???

Spisak skraćenica

ACP	<u>A</u> rea <u>C</u> orrection <u>P</u> arameter
AFM	<u>A</u> mbiguity <u>F</u> unction <u>M</u> ethod
ARP	<u>A</u> ntena <u>R</u> eference <u>P</u> oint
AS	<u>A</u> nti <u>S</u> poofing
BIH	<u>B</u> ureau <u>I</u> nternational De L' <u>H</u> eu <u>r</u> e
BIPM	<u>B</u> ureau <u>I</u> nternational Des <u>P</u> oids Et <u>M</u> esures
BNR	<u>B</u> ias To <u>N</u> oise <u>R</u> atio
CAA	<u>C</u> ondition <u>A</u> djustment <u>A</u> lgorithm
COD	<u>C</u> enter For <u>O</u> rbit <u>D</u> etermination
DCB	<u>D</u> ifferential <u>C</u> ode <u>B</u> ias
DGPS	<u>D</u> ifferential <u>G</u> PS
DIA	<u>D</u> etection <u>I</u> dentification <u>A</u> daptation
DLL	<u>D</u> elay <u>L</u> ock <u>L</u> oop
DOD	<u>D</u> epartment <u>O</u> f <u>D</u> efense
DORIS	<u>D</u> oppler <u>O</u> rbitography And <u>R</u> adiopositioning <u>I</u> ntegrated On <u>S</u> atellite
DOY	<u>D</u> ay <u>O</u> f <u>Y</u> ear
DSARC	<u>D</u> efense <u>S</u> ystem <u>A</u> cquisition And <u>R</u> eview <u>C</u> ouncil
EGM96	<u>E</u> arth <u>G</u> ravitational <u>M</u> odel 1996
EKF	<u>E</u> xtended <u>K</u> alman <u>F</u> ilter
EMR	<u>E</u> nergy, <u>M</u> ines And <u>R</u> esources
ERP	<u>E</u> arth <u>R</u> otation <u>P</u> arameters
ESA	<u>E</u> uropean <u>S</u> pace <u>A</u> gency
EUREF	<u>E</u> Uropean <u>R</u> Eference <u>F</u> rame
FARA	<u>F</u> ast <u>A</u> mbiguity <u>R</u> esolution <u>A</u> pproach
FASF	<u>F</u> ast <u>A</u> mbiguity <u>S</u> earch <u>F</u> ilter
FOC	<u>F</u> ull <u>O</u> perational <u>C</u> apability
GFZ	<u>G</u> eo <u>F</u> orschungs <u>Z</u> entrum
GIM	<u>G</u> lobal <u>I</u> onosphere <u>M</u> ap
GLONASS	<u>G</u> LO <u>b</u> al <u>N</u> avigation <u>S</u> atellite <u>S</u> ystem
GNSS	<u>G</u> lobal <u>N</u> avigation <u>S</u> atellite <u>S</u> ystem
GPS	<u>G</u> lobal <u>P</u> ositioning <u>S</u> ystem
GRS80	<u>G</u> eodetic <u>R</u> eference <u>S</u> ystem 1980
IERS	<u>I</u> nternational <u>E</u> arth <u>R</u> otation <u>S</u> ervice
IGEX	<u>I</u> nternational <u>G</u> lonass <u>E</u> Xperiment
IGS	<u>I</u> nternational <u>G</u> PS <u>S</u> ervice

IONEX	<u>I</u> ONosphere Map <u>E</u> Xchange Format
ITRF	<u>I</u> nternational <u>T</u> errestrial <u>R</u> eference <u>F</u> rame
ITU	<u>I</u> nternational <u>T</u> elecommunications <u>U</u> nion
IUGG	<u>I</u> nternational <u>U</u> nion Of <u>G</u> eodesy And <u>G</u> eophysics
IWV	<u>I</u> ntegrated <u>W</u> ater <u>V</u> apor
JPL	<u>J</u> et <u>P</u> ropulsion <u>L</u> aboratory
JPO	<u>J</u> oint <u>P</u> rogram <u>O</u> ffice
LAMBDA	<u>L</u> east Squares <u>A</u> MBiguity <u>D</u> ecorrelation <u>A</u> djustment
LEO	<u>L</u> ow <u>E</u> arth <u>O</u> rbiter
LIA	<u>L</u> inear <u>I</u> nterpolation <u>A</u> lgorithm
LLR	<u>L</u> unar <u>L</u> aser <u>R</u> anging
LSAST	<u>L</u> east Squares <u>A</u> mbiguity <u>S</u> earch <u>T</u> echnique
MDB	<u>M</u> inimal <u>D</u> etectable <u>B</u> ias
MINQUE	<u>M</u> inimum <u>N</u> orm <u>Q</u> uadratic <u>U</u> nbiased <u>E</u> stimation
MNK	<u>M</u> etod <u>N</u> ajmanjih <u>K</u> vadrata
NASA	<u>N</u> ational <u>A</u> eronautics And <u>S</u> pace <u>A</u> dmistration
NATO	<u>N</u> orth <u>A</u> tlantic <u>T</u> reaty <u>O</u> rganization
NAVSTAR	<u>N</u> AVigation <u>S</u> ystem With <u>T</u> ime And <u>R</u> anging
NDS	<u>N</u> avigation <u>D</u> evelopment <u>S</u> atellites
NGS	<u>N</u> ational <u>G</u> eodetic <u>S</u> urvey
NINT	<u>N</u> earest <u>I</u> NTeger
NMF	<u>N</u> ew <u>M</u> apping <u>F</u> unction
NNSS	<u>N</u> avy <u>N</u> avigation <u>S</u> atellite <u>S</u> ystem
NTS	<u>N</u> avigation <u>T</u> echnology <u>S</u> atellites
NWM	<u>N</u> umerical <u>W</u> eather <u>M</u> odel
OCS	<u>O</u> perational <u>C</u> ontrol <u>S</u> ystem
OMEGA	<u>O</u> ptimal <u>M</u> ethod For <u>E</u> stimating <u>G</u> PS <u>A</u> mbiguities
OTF	<u>O</u> n <u>T</u> he <u>F</u> ly
PCV	<u>P</u> hase <u>C</u> enter <u>V</u> ariation
PDA	<u>P</u> artial <u>D</u> erivative <u>A</u> lgorithm
PLL	<u>P</u> hase <u>L</u> ock <u>L</u> oop
PPP	<u>P</u> recise <u>P</u> oint <u>P</u> ositioning
PRARE	<u>P</u> recise <u>R</u> ANGE And <u>R</u> ange Rate <u>E</u> quipment
PRN	<u>P</u> seudo <u>R</u> andom <u>N</u> oise
PW	<u>P</u> recipitable <u>W</u> ater
RCSR	<u>R</u> ecursive <u>C</u> omputation Of The <u>S</u> earch <u>R</u> ange
RTCM	<u>R</u> adio <u>T</u> echnical <u>C</u> ommission For <u>M</u> aritime Services

RTK	<u>R</u> eal <u>T</u> ime <u>K</u> inematic
SA	<u>S</u> elective <u>A</u> vailability
SAPOS	<u>S</u> atelliten <u>P</u> ositionierungsdiensste
SINEX	<u>S</u> olution <u>I</u> ndependent <u>E</u> Xchange Format
SIO	<u>S</u> cripps <u>I</u> nstitution <u>O</u> f <u>O</u> ceanography
SKF	<u>S</u> tandard <u>K</u> alman <u>F</u> ilter
SLM	<u>S</u> ingle <u>L</u> ayer <u>M</u> odel
SMART	<u>S</u> tate <u>M</u> onitoring <u>A</u> nd <u>R</u> epresentation <u>T</u> echnique
SNR	<u>S</u> ignal to <u>N</u> oise <u>R</u> atio
SP3	<u>S</u> pecial <u>P</u> roduct 3
TAI	<u>T</u> emps <u>A</u> tomique <u>I</u> nternational
TDT	<u>T</u> emps <u>D</u> ynamique <u>T</u> errestre
TEC	<u>T</u> otal <u>E</u> lectron <u>C</u> ontent
TECU	<u>T</u> otal <u>E</u> lectron <u>C</u> ontent <u>U</u> nit
UNAVCO	<u>U</u> niversity <u>N</u> AVstar <u>C</u> onsortium
URE	<u>U</u> ser <u>R</u> ange <u>E</u> rror
USNO	<u>U</u> nited <u>S</u> tates <u>N</u> aval <u>O</u> bservatory
UT	<u>U</u> niversal <u>T</u> ime
UTC	<u>U</u> niversal <u>T</u> ime <u>C</u> oordinated
VLBI	<u>V</u> ery <u>L</u> ong <u>B</u> aseline <u>I</u> nterferometry
VRS	<u>V</u> irtual <u>R</u> eference <u>S</u> tation
VTEC	<u>V</u> ertical <u>T</u> otal <u>E</u> lectron <u>C</u> ontent
WAAS	<u>W</u> ide <u>A</u> rea <u>A</u> ugmentation <u>S</u> ystem
WGS84	<u>W</u> orld <u>G</u> eodetic <u>S</u> ystem 1984

Spisak tabela

Tabela 1.1	Definicioni, geometrijski i fizički parametri WGS84	8
Tabela 1.2	Nominalna GPS-24 satelitska konstelacija. OME – rektascenzija uzlaznog čvora; LAN – longituda uzlaznog čvora (07.01.1993 0h 0m 0s); M – srednja anomalija; DM – razlika srednjih anomalija susednih satelita. Jedinice – lučni stepeni	12
Tabela 1.3	Parametri časovnika i orbite u sastavu navigacione poruke	15
Tabela 1.4	Postupci GPS pozicioniranja sa obradom aposteriori	20
Tabela 1.5	Postupci GPS pozicioniranja sa obradom u realnom vremenu	20
Tabela 2.1	Osnovna svojstva dvofrekventnih linearnih kombinacija	30
Tabela 2.2	Odnos signal-šum (SNR) i rezultujuća preciznost faznih merenja na drugoj frekvenciji	35
Tabela 2.3	Koeficijent korelacije za različite intervale vremena između opažanja	37

Tabela 2.4	Karakteristični slučajni procesi preciznih oscilatora	42
Tabela 2.5	Empirijski određeni koeficijenti u modelu troposferskog refrakcionog broja	46
Tabela 2.6	Relativni doprinosi pojedinih nebeskih tela plimatskom potencijalu	50
Tabela 3.1	Koeficijenti NMF funkcije hidrostatičke i vlažne troposferske komponente	82
Tabela 3.2	Ekscentriciteti antena pojedinih tipova GPS satelita	86
Tabela 4.1	Nesigurnost modeliranja sistematskih uticaja po principu beznačajnosti za $d=10\text{km}$ i $z=75^{\circ}$	99
Tabela 4.2	Članovi kovarijacione matrice dvostrukih razlika u proizvoljnoj epohi merenja ...	101
Tabela 5.1	Osnovne osobine linearnih dvofrekventnih kombinacija $L_{9,7}$ i $L_{-7,9}$	119
Tabela 5.2	Primer matematičkog modeliranja uticaja pojedinih izvora grešaka kod SMART algoritma	127
Tabela 6.1	Parametri obrade pri računanju relativnih frekventnih odstupanja	142
Tabela 6.2	Rezultati određivanja parametara stabilnosti test oscilatora	144
Tabela 6.3	Parametri merenja i obrade pri određivanju srednjeg položaja faznih centara	147
Tabela 6.4	Rezultati određivanja srednjeg položaja faznih centara za frekvenciju L_1	148
Tabela 6.5	Rezultati određivanja srednjeg položaja faznih centara za frekvenciju L_2	149
Tabela 6.6	Empirijski pokazatelji preciznosti faznih i kodnih merenja za karakteristične vertikalne uglove	152
Tabela 6.7	Osnovne karakteristike mernih sesija korišćenih za modeliranje disperzije dvostrukih razlika usled troposferske refrakcije	160
Tabela 6.8	Ocene modelskih parametara disperzije dvostrukih razlika usled troposferske refrakcije	162
Tabela 6.9	Ocene zenitnog standarda originalnih pseudodužina usled jonosferske refrakcije .	165
Tabela 6.10	Ocene koeficijenta korelacije između dvostrukih faznih razlika na frekvencijama L_1 i L_2 za različita međustanična rastojanja	171
Tabela 6.11	Ocene koordinata i visina tačaka test mreže Novoselo na osnovu MNK izravnjanja terestričkih merenja	175
Tabela 6.12	Osnovne karakteristike GPS merenja i obrade u test mreži Novoselo	175
Tabela 6.13	Ocene standarda relativnih položaja i visina tačaka u test mreži Novoselo na osnovu MNK izravnjanja GPS merenja	176
Tabela 6.14	Reziduumi nakon 2D transformacije sličnosti i modeliranja referentne površi visina polinomom 1. stepena u test mreži Novoselo	177
Tabela 6.15	Ocene koordinata i visina tačaka test mreže Lapovo na osnovu MNK izravnjanja terestričkih merenja	179
Tabela 6.16	Osnovne karakteristike GPS merenja i obrade u test mreži Lapovo	180
Tabela 6.17	Ocene standarda relativnih položaja i visina tačaka u test mreži Lapovo na osnovu MNK izravnjanja GPS merenja	181
Tabela 6.18	Reziduumi nakon 2D transformacije sličnosti i modeliranja referentne površi visina polinomom 2. stepena u test mreži Lapovo	181
Tabela 6.19	Upoređenje proračuna i ocene tačnosti relativnih položaja i visina u test mrežama	182

Tabela 6.20	Upoređenje proračuna i ocene tačnosti apsolutnih položaja i visina u test mrežama	182
Tabela 6.21	Osnovni podaci o konfiguraciji gradskih GPS mreža Kraljeva i Zrenjanina	185
Tabela 6.22	Parametri i rezultati osnovne obrade GPS vektora u mrežama Kraljeva i Zrenjanina	186
Tabela 6.23	Osnovni rezultati MNK ocenjivanja u gradskim GPS mrežama Kraljeva i Zrenjanina	187
Tabela 6.24	Osnovni rezultati MNK ocenjivanja u državnoj referentnoj mreži	190
Tabela 6.25	Parametri stohastičkog modela Kalmanovog filtera u okviru rekurzivnog DIA postupka kontrole kvaliteta	195
Tabela 6.26	Rezultati rekurzivnog DIA postupka nakon uvođenja faznog skoka veličine- 1cyc u L1 i grube greške veličine -3m u P2	196
Tabela 6.27	Sumarni rezultati eksperimenta ocene tačnosti relativnog pozicioniranja u mreži aktivnih permanentnih stanica	201

Spisak slika

Slika 0.1	Shema definicije i realizacije terestričkih referentnih sistema	1
Slika 0.2	Opšta klasifikacija GPS matematičkih modela	3
Slika 1.1	WGS84 geoid	9
Slika 1.2	Međusobni odnos različitih vremenskih skala	10
Slika 1.3	GPS sateliti (a) Block IIA, (b) Block IIR	11
Slika 1.4	Funkcionalna blok shema GPS prijemnika. LO – lokalni oscilator; INT – interapt ..	13
Slika 1.5	Osnovna IGS mreža permanentnih stanica	14
Slika 1.6	Blok-dijagram procesa generisanja satelitskog signala	14
Slika 1.7	Princip merenja kodnih pseudodužina	17
Slika 1.8	Princip merenja faznih pseudodužina	17
Slika 1.9	Osnovni princip satelitskog pozicioniranja	18
Slika 1.10	Rasponi tačnosti različitih metoda GPS pozicioniranja. FAZ (+1ppm) – relativno statičko pozicioniranje faznim merenjima; FAZ DGPS (RTK) – relativno kinematičko pozicioniranje faznim merenjima u realnom vremenu; KOD (FAZ float) – relativno statičko pozicioniranje kodnim merenjima ili faznim merenjima sa realnim vrednostima za fazne neodređenosti; KOD/FAZ DGPS – relativno kinematičko pozicioniranje kombinovanim mrenjima u realnom vremenu; KOD DGPS – relativno kinematičko pozicioniranje kodnim merenjima u realnom vremenu; P – apsolutno pozicioniranje P kodnim merenjima; C/A – apsolutno pozicioniranje C/A kodnim merenjima; C/A (SA) – apsolutno pozicioniranje C/A kodnim merenjima sa aktivnom SA merom zaštite	21
Slika 2.1	Primeri zavisnosti Alanovog standarda (ADEV) od osrednjavajućeg intervala (TAU), za vodonični mazer (H), cezijumski (Cs), rubidijumski (Rb) i kvarcni oscilator (x)	41

Slika 2.2	Brzina jonizacije (Čepmenov profil) za različita zenitna odstojanja u odnosu na Sunce	43
Slika 2.3	Temperaturni regioni i vertikalna temperaturna raspodela u modelu standardne atmosfere	45
Slika 3.1	Globalni raspored IGS jonosferskih stanica sa područjima zahvatanja	76
Slika 3.2	Varijacija faznog centra GPS antene	83
Slika 4.1	Jonosferski i troposferski uticaji na dužini od 10km za ekstremne vrednosti atmosferskih parametara	96
Slika 4.2	Geometrija grešaka satelitskih i staničnih položaja na primeru proste razlike prema nereferentnom satelitu	97
Slika 4.3	Uticaj satelitske geometrije (DOP faktori) na tačnost apsolutnog pozicioniranja za različita granična zenitna odstojanja	102
Slika 4.4	Shematski prikaz dispozicije tačaka gradske GPS mreže	106
Slika 4.5	Opšti princip uspostavljanja gradskih GPS mreža	107
Slika 5.1	Shematski prikaz dispozicije tačaka aktivne gradske GPS mreže	117
Slika 5.2	Princip pozicioniranja virtuelnim referentnim stanicama	130
Slika 5.3	Princip formiranja opažanja na virtuelnim referentnim stanicama	131
Slika 5.4	Aktivna gradska referentna GPS osnova i prostorna diskretizacija područja deformacija (a) apsolutni deformacioni model; (b) relativni deformacioni model	136
Slika 5.5	Odnos između brzine deformacionog procesa, intervala registracije, dužine sesije i intervala ponovljenih merenja	137
Slika 5.6	Azimutalno-zenitni prikaz satelitskih položaja tokom 24h za geografske koordinate Beograda	138
Slika 6.1	Broj satelita tokom merne sesije i tačnost pojedinačno određenih relativnih frekventnih odstupanja	142
Slika 6.2	Kompletni niz relativnih frekventnih odstupanja sračunatih na osnovu vremenskih promena faznih pseudodužina na prvoj frekvenciji	143
Slika 6.3	Test nizovi od oko 9000 relativnih frekventnih odstupanja i vremenskih odstupanja korišćenih za ispitivanje frekventne stabilnosti	143
Slika 6.4	Autokorelaciona funkcija i spektralna gustina relativnih frekventnih odstupanja test oscilatora. Prva regresiona duž ima nagib -2.2 , a druga -1.1	144
Slika 6.5	Alanov standard i interval poverenja sračunat za niskofrekventni šum frekventne modulacije kao dominantni tip procesa	145
Slika 6.6	Alanov standard test oscilatora u odnosu na empirijsku gornju granicu ponašanja za klasu kvarcnih oscilatora	146
Slika 6.7	Grafik vremenskog standarda test oscilatora sračunatog na osnovu modifikovanog Alanovog standarda	146
Slika 6.8	Dispozicija GPS antena i njihova orijentacija po mernim sesijama	147
Slika 6.9	Položaji faznih centara između mernih sesija (a) fazni centar signala L1; (b) fazni centar signala L2	148
Slika 6.10	Treće vremenske razlike dvostrukih razlika u funkciji vertikalnog ugla satelita (a) kodne pseudodužine C1 (C/A); (b) kodne pseudodužine P2; (c) fazne pseudodužine L1; (d) fazne pseudodužine L2	150

Slika 6.11	Odnos signala i šuma (SNR) na frekvencijama L1 i L2	150
Slika 6.12	Normalizovani periodogram trećih vremenskih razlika dvostrukih razlika faznih pseudodužina na frekvenciji L1	151
Slika 6.13	Ocene standarda faznih merenja u funkciji vertikalnog ugla satelita	152
Slika 6.14	Modeliranje empirijskih standarda redukcionim funkcijama na primeru faznih merenja na frekvenciji L2	153
Slika 6.15	Redukovane dvostruke razlike faznih pseudodužina (a) frekvencija L1; (b) frekvencija L2	156
Slika 6.16	Normalizovani periodogram dvostrukih razlika faznih pseudodužina (a) frekvencija L1; (b) frekvencija L2	156
Slika 6.17	Standard faznih pseudodužina usled višestruke refleksije u funkciji vertikalnog ugla	157
Slika 6.18	Redukciona funkcija standarda faznih pseudodužina usled višestruke refleksije na primeru frekvencije L2	158
Slika 6.19	Kombinovani standard dvostrukih razlika usled troposferske refrakcije, višestruke refleksije i mernog šuma, u funkciji vertikalnog ugla i različitih međustaničnih rastojanja	161
Slika 6.20	Primer zenitnog jonosferskog uticaja na frekvenciji L1 (a) ukupni zenitni jonosferski uticaj; (b) rezidualni jonosferski uticaj	164
Slika 6.21	Kombinovani standard višestruke refleksije i mernog šuma kodnih pseudodužina C1. Stanični par R034 - E497, satelitski par PRN18 - PRN19	165
Slika 6.22	Kombinovani standard dvostrukih razlika usled jonosferske refrakcije, višestruke refleksije i mernog šuma, u funkciji vertikalnog ugla i različitih međustaničnih rastojanja	166
Slika 6.23	Faktor razmere za različite intervale registracije u funkciji vremena trajanja merne sesije. Korelaciono vreme T=300s	168
Slika 6.24	Povećanje tačnosti ocena parametara za različite intervale registracije u odnosu na vrednost od 60s. Korelaciono vreme T=300s	169
Slika 6.25	Korelacija dvostrukih razlika faznih pseudodužina na frekvencijama L1 i L2 a) međustanično rastojanje 3m; b) međustanično rastojanje 10km	170
Slika 6.26	Dispozicija tačaka i GPS veza u test mreži Novoselo	174
Slika 6.27	Dispozicija tačaka i GPS veza test mreže Lapovo	178
Slika 6.28	Dispozicija tačaka i GPS veza gradske mreže Kraljevo	184
Slika 6.29	Dispozicija tačaka i GPS veza gradske mreže Zrenjanin	185
Slika 6.30	Dispozicija tačaka u eksperimentu simulacije aktivne gradske GPS mreže Beograda	189
Slika 6.31	Satelitska konstelacija tokom eksperimenta a) DOP faktor; b) broj elektronski vidljivih satelita	190
Slika 6.32	Vertikalni ugao satelita PRN09 i odnos signala i šuma faznih opažanja na eksperimentalnoj permanentnoj stanici A	191
Slika 6.33	Višestruka refleksija kodnih pseudodužina P1 a) direktno računanje iz kodno-fazne dvofrekventne linearne kombinacije; b) ocenjivanje Kalmanovim filterom	193
Slika 6.34	Tačnost jonosferskog uticaja računatog direktno iz kodnih pseudodužina P1 i P2, i	

	ocenjenog Kalmanovim filterom	194
Slika 6.35	Jonosferski uticaj i brzina njegove promene, ocenjeni postupkom Kalmanovog filtriranja	194
Slika 6.36	Test statistika adekvatnosti modela a) pre uvođenja faznog skoka i grube greške; b) nakon uvođenja faznog skoka i grube greške	195
Slika 6.37	Nagibi interpolacione ravni diferencijalnih korekcija tokom merne sesije a) nagib u pravcu geografske širine; b) nagib u pravcu geografske dužine	197
Slika 6.38	Tačnost interpolacije diferencijalnih korekcija a) originalne diferencijalne korekcije; b) interpolovane diferencijalne korekcije; c) razlika	198
Slika 6.39	Odstupanja položaja tačaka od srednjih vrednosti po pojedinačnim epohama a) odstupanja u pravcu geografske širine; b) odstupanja u pravcu geografske dužine; c) odstupanja u pravcu elipsoidne visine	199
Slika 6.40	Dvodimenzionalni prikaz rasturanja pojedinačnih horizontalnih položaja oko srednje vrednosti u svakoj epohi merenja	200
Slika 6.41	Apsolutna položajna odstupanja za pet test tačaka u funkciji dužine trajanja merne sesije a) odstupanja horizontalnih položaja; b) odstupanja visina	200
Slika 6.42	Kvalitet položaja u funkciji dužine trajanja merne sesije a) preciznost i tačnost horizontalnog položaja; b) preciznost i tačnost visina	201

Spisak važnijih oznaka

A, B	konfiguracione matrice
C, Q, R	kovarijacione matrice
I	jedinična matrica
K	Kalmanova matrica
N	matrica koeficijenata normalnih jednačina
P	tenzor napona
R^\perp	ortogonalni projektor
U	tenzor deformacije
1	vektor ili matrica sa svim članovima jednakim jedinici
e	jedinični vektor
n	vektor slobodnih članova u normalnim jednačinama
r, x	vektor položaja
\dot{x}	vektor brzine
\ddot{x}	vektor ubrzanja
c_0	brzina svetlosti u vakuumu
A	uticaj greške položaja faznog centra
dc	diferencijalna korekcija

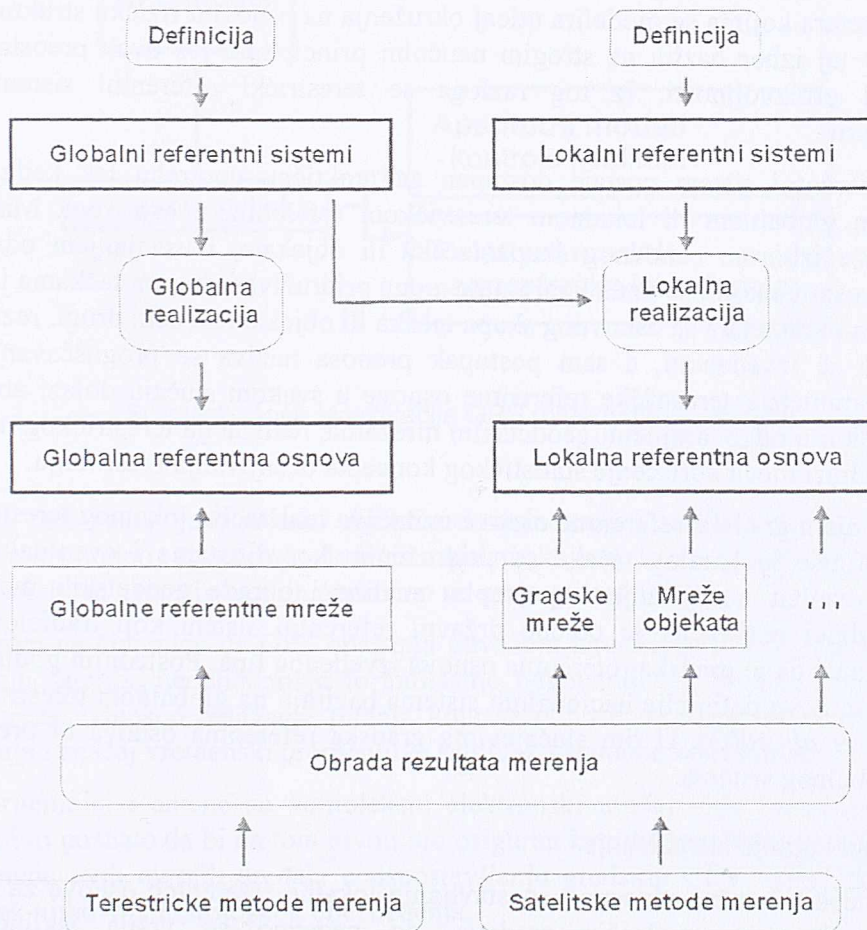
E	operator matematičkog očekivanja
F	troposferska i jonosferska redukciona funkcija
f	frekvencija signala
h	kašnjenje signala pri prolasku kroz hardver prijemnika i satelita
I	jonosfersko kašnjenje signala
L	fazna pseudodužina
M	uticaj višestruke refleksije signala
N	fazna neodređenost
n	fazni skok
O	uticaj greške satelitske orbite
P	kodna pseudodužina
Q	konverzioni troposferski faktor
q	spektralna gustina
s, β	solarno-geomagnetske koordinate
T	troposfersko kašnjenje signala
ε, ω	merni šum
φ, ψ	fazno merenje
λ	talasna dužina
δ_3	treće razlike po vremenu
δt	odstupanje časovnika od sistemskog vremena
κ	odnos jonosferskih kašnjenja signala na dve frekvencije
ρ	geometrijsko rastojanje između prijemnika i satelita
ρ_w	gustina tečne vode
σ	standard
mod σ	modifikovani Alanov standard
τ	vreme puta signala
ζ	zenitno odstojanje jonosferske tačke
Ω	kvadratna forma reziduuma
Δ	operator proste razlike interferometrijskog tipa
∇	operator proste razlike doplerskog tipa
$\Delta\nabla$	operator dvostruke razlike
$\delta\Delta\nabla$	operator trostruke razlike
\times	vektorski proizvod
\otimes	Kronekerov proizvod matrica
\oplus	operator binarnog sabiranja

Poglavlje 0

UVOD

Uvodni pojmovi

Pojam i mesto gradske geodetske referentne osnove pripadaju teoriji i terminologiji koje obuhvataju definiciju, klasifikaciju, hijerarhiju i realizaciju terestričkih referentnih sistema (*slika 0.1*).



SLIKA 0.1. Shema definicije i realizacije terestričkih referentnih sistema.

Prema savremenim shvatanjima, terestrički referentni sistem predstavlja skup materijalnih objekata na koje se odnose teorijske tvrdnje i praktična merenja u vezi događaja koji nastupaju u terestričkom okruženju (Kovalevsky, Mueller 1980; Bock, Zhu 1982; Hase 1999; Sillard, Boucher 2001). Terestrički referentni sistemi mogu se zasnivati na različitim teorijama (Njutnova klasična mehanika, specijalna teorija relativiteta), i njihova validnost može se proveravati merenjima, ali su uvek povezani

sa materijom jer bez nje pojmovi kao što su prostor i vreme nemaju nikakvog smisla. Materijalni objekti u okviru kojih se formulišu teorije i izvode merenja nazivaju se nosačima terestričkog referentnog sistema. Njihov raspored i geografski prostor nameravane primene određuju respektivno globalni ili lokalni karakter terestričkog referentnog sistema.

Terestrički referentni sistem predstavlja konkretizaciju jedne apstrakcije koja se naziva idealnim sistemom, a čiji izbor nije jedinstven. Tako se, na primer, koncept jednog idealnog terestričkog referentnog sistema može zasnivati na iskazu da u odnosu na njega Zemljina kora ima deformacije, a nema translatorna ili rotaciona kretanja. Ovakva definicija je čisto konceptualne prirode, jer ne podrazumeva nikakvu specifikaciju aktivnosti koje bi omogućile konkretnu konstrukciju sistema ili njegovo praktično korišćenje.

Aktuelna konstrukcija terestričkog referentnog sistema sastoji se pre svega u izboru osnovne fizičke strukture čije stanje i kretanje mogu da se opišu fizičkim teorijama. Ovaj izbor implicitno podrazumeva modeliranje uticaja okruženja uz pomoć dogovorno usvojenog skupa parametara. Kada se pored toga detaljno formuliše model koji opisuje odnos između konfiguracije osnovne strukture i njenih koordinata, koordinatni sistem, a time i terestrički referentni sistem, postaje u potpunosti definisan. Pošto se deformacije ili kretanja Zemljine kore mogu opisati na različite načine, izbor teorija i parametara kojima se modelira uticaj okruženja na osnovnu fizičku strukturu nije jedinstven. Čak i kada se taj izbor bazira na strogim naučnim principima, još uvek preostaje određena mera nesigurnosti i proizvoljnosti. Iz tog razloga se terestrički referentni sistemi često nazivaju konvencionalnim.

Terestrički referentni sistem postaje dostupan za praktičnu upotrebu tek kada se materijalizuje odgovarajućom globalnom ili lokalnom terestričkom referentnom osnovom. Materijalizacija se u principu postiže izborom osnovnog skupa tačaka ili objekata, i usvajanjem odnosno izvođenjem parametara na osnovu kojih se onda koordinate mogu pridruživati drugim tačkama ili objektima. Kada se izvrši prenos parametara sa osnovnog skupa tačaka ili objekata na neki drugi, rezultujuća referentna osnova naziva se izvedenom, a sam postupak prenosa naziva se progušćavanjem. Pošto se do definicionih parametara terestričke referentne osnove u svakom slučaju dolazi analizom i obradom merenja izvršenih u odgovarajućim geodetskim mrežama, realizacija terestričkog referentnog sistema neminovno podrazumeva korišćenje statističkog koncepta ocenjivanja i testiranja.

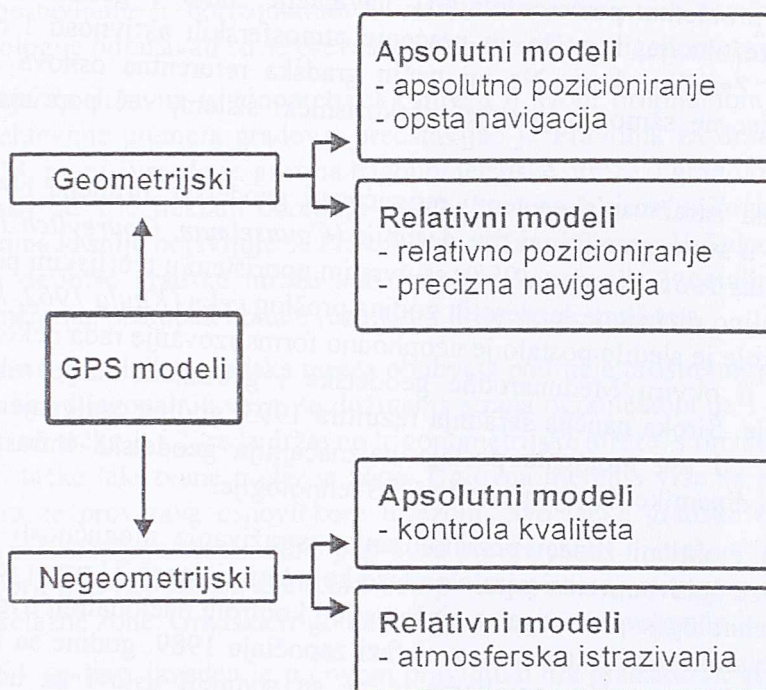
Prema tome, pojam gradske referentne osnove označava realizaciju lokalnog terestričkog referentnog sistema, a definiše je katalog tačaka sa pridruženim koordinatama i eventualno brzinama, koje predstavljaju rezultat ocenjivanja u postupku analize i obrade geodetskih merenja u gradskim mrežama. Predmet realizacije je obično državni referentni sistem koji tradicionalno ima lokalni karakter, što znači da je gradska referentna osnova izvedenog tipa. Poslednjih godina postoji izražena tendencija da se nove definicije nacionalnih sistema baziraju na globalnom terestričkom referentnom sistemu (*Ihde et al. 2002*). U tim slučajevima gradska referentna osnova bi predstavljala lokalnu realizaciju globalnog sistema.

Predmet, ciljevi i stanje istraživanja

Razvijanje gradskih mreža, odnosno uspostavljanje lokalne referentne osnove za potrebe premera i inženjerskih radova na području gradova, do nedavno se vršila isključivom upotrebom konvencionalnih terestričkih metoda. Stacionarni, neportabilni sistemi kao što su VLBI ili LLR, zasnovani na tehnologiji opažanja prirodnih kosmičkih objekata, korišćeni su samo za preciznu definiciju i realizaciju globalnih referentnih sistema. Tek je pojava satelitske merne tehnologije omogućila rutinsko rešavanje geodetskih problema i u sasvim lokalnim razmerama.

Prednosti satelitski zasnovanih mernih metoda naročito dolaze do izražaja u slučaju operativnog satelitskog sistema NAVSTAR GPS. Za razliku od terestričkih metoda merenja uglova ili prostornih dužina, GPS opažanja su praktično nezavisna od doba dana, vremenskih uslova i terenskih specifičnosti kao što je na primer dogledanje tačaka. Proces GPS merenja je potpuno automatizovan i ima mogućnost kontinualnog izvođenja. Pored toga, NAVSTAR sistem karakterišu visoka autonomnost, robusnost i integritet, zato što je originalno projektovan za vremenski kritične aplikacije.

Predmet ovog rada predstavlja upravo mogućnost primene NAVSTAR GPS sistema za uspostavljanje gradske referentne osnove, odnosno analiza odgovarajućeg GPS matematičkog modela sa stanovišta tačnosti i pouzdanosti kao najvažnijih geodetskih kriterijuma optimalnosti. U pogledu opšte klasifikacije GPS modela, predmet istraživanja ograničen je na klase relativnih geometrijskih i apsolutnih negeometrijskih modela (slika 0.2).



SLIKA0.2 Opšta klasifikacija GPS matematičkih modela.

Kao osnovni cilj rada postavljeno je kako objektivno vrednovanje specifičnosti nove tehnologije, tako i teorijsko-eksperimentalno razmatranje sledećih aspekata koji su, inače, u slučaju terestričkih metoda ili dobro istraženi, ili se naprotiv na njih praktično ne mogu primeniti:

- S obzirom na činjenicu da GPS opažanja povezuju terestričke stanice samo posredno preko pokretnih satelita, neophodno je formulisanje odgovarajućeg koncepta razvijanja gradskih GPS mreža, odnosno rešavanje pitanja koja se odnose na raspored stanica, međustanična rastojanja i značaj vremenski promenljive satelitsko-stanične konstelacije.
- GPS prijemnici i antene su kompleksni elektronski uređaji čije metrološke karakteristike moraju biti poznate da bi na tom nivou bio osiguran kvalitet rezultata merenja. To znači da je za primenu ovih mernih uređaja u uspostavljanju gradskih GPS mreža potrebno definisati postupak njihovog metrološkog obezbeđenja.
- Rezultati GPS opažanja predstavljaju u opštem slučaju vremenske serije kodnih i faznih pseudodužina na jednoj ili obe noseće frekvencije. Veliki broj podataka merenja i specifični uticaji pojedinih izvora grešaka nameću potrebu izbora optimalnih linearnih kombinacija mernih veličina, formulacije odgovarajućeg matematičkog, a naročito stohastičkog modela, i definisanja posebnog sistema kontrole kvaliteta.
- NAVSTAR GPS referentni sistem je globalnog karaktera i realizuju ga satelitske efemeride, tako da se njegova definicija po pravilu ne podudara sa definicijom državnog referentnog sistema kojeg treba da realizuje gradska referentna osnova. Osim toga, rezultati GPS opažanja praktično ne zavise od Zemljinog gravitacionog polja, što znači da se njihovom analizom i obradom dobijaju geometrijski, a ne fizički definisane visine tačaka. Prema tome, upotreba

GPS tehnologije u razvijanju gradskih mreža podrazumeva i probleme koordinatno-datumskih transformacija.

- Pošto proces GPS merenja može da se izvodi kontinuirano i u velikoj meri automatizovano, gradska referentna osnova, zasnovana na malom broju stalno operativnih GPS prijemnika i savremenim komunikacionim sredstvima, pruža mogućnost takozvane aktivne realizacije državnog referentnog sistema. Takav koncept u principu omogućuje kako rešavanje geodetskih problema pozicioniranja i navigacije, tako i geofizička ispitivanja visoke vremenske rezolucije, kao što su praćenje atmosferskih aktivnosti i određivanje lokalnih deformacija Zemljine kore. Na taj način gradska referentna osnova dobija sasvim novu dimenziju, jer ne samo da postaje višekorisnički sistem, već poprima i interdisciplinarni karakter.

Prva celovita naučna istraživanja na temu mogućnosti geodetske primene NAVSTAR satelitskog sistema započeta su u svetu pre više od dve decenije (*Counselman, Gourevitch 1981; Remondi 1984; Eissfeller 1985; Evans 1985; Landau 1988*), sa čvrstim uporištem u teorijskim postavkama satelitskih sistema koje su detaljno razrađene šezdesetih godina prošlog veka (*Kaula 1962, Mueller 1964, Arnold 1970*). U vremenu koje je sledilo postalo je neophodno formalizovanje rada nekoliko sekcija, komisija i studijskih grupa u okviru Međunarodne geodetske i geofizičke unije odnosno Međunarodne geodetske asocijacije. Široka naučna saradnja rezultira 1993. godine osnivanjem Međunarodne GPS službe (IGS), koja od tog momenta postaje najznačajnija geodetska infrastruktura za globalno proučavanje stanja i dinamike Zemlje pomoću GPS tehnologije.

Kada su u pitanju praktični zadaci pozicioniranja, istraživanja mogućnosti primene NAVSTAR sistema odvijala su se uglavnom u tri paralelne faze koje traju i danas. U prvoj je prikupljano iskustvo korišćenjem nove tehnologije pre svega za ojačavanje i kontrolu nacionalnih trigonometrijskih mreža. Može se reći da organizovana primena u ovoj fazi započinje 1989. godine sa EUREF GPS mernim kampanjama u zapadnoevropskim zemljama, čime su stvoreni uslovi za usvajanje jedinstvenog evropskog referentnog sistema (*Ihde et al. 2002*). Sudeći po rezultatima sličnih merenja izvedenih 1998. godine na teritoriji naše zemlje, danas se za međustanična rastojanja od nekoliko stotina kilometara i mernim sesijama dužine nekoliko dana sa lakoćom postiže formalna tačnost od 2mm po položaju i 6mm po visini (*Altiner et al. 1999*).

U drugoj fazi ispitivane su mogućnosti GPS za uspostavljanje visokopreciznih lokalnih mreža, prevashodno u inženjerske i geodinamičke svrhe. Ovakve primene inicirale su široka istraživanja na polju specifičnih algoritama (*Yong 1983; Bastos, Landau 1988; Hatch 1990; Euler 1991; Cankut, Sahin 2000; Radovanovic 2002; Satirapod 2002*), mogućnosti kompenzacije i eliminacije uticaja pojedinih izvora grešaka (*Schupler, Clark 1991; Rothacher et al. 1995; Niell 1996; Mertikas, Rizos 1997; Gao, Li 1999*), i naročito problema stohastičkog modeliranja GPS merenja (*El Rabbany 1994; Han, Rizos 1995; Grodecky 1997; Wang 1998; Collins, Langley 1999; Hartinger, Brunner 1999*). Druga faza praktično se odnosi na predmet istraživanja ovog rada, jer gradske GPS mreže upravo pripadaju kategoriji modela sa malim međustaničnim rastojanjima.

Treću fazu karakteriše razvoj teorije i prakse referentnih sistema (*Mueller 1980; Bock, Zhu 1982; Moritz 1984; Ashby, Spilker 1996; Hase 1999; Sillard, Boucher 2001*), istraživanja mogućnosti globalnih i regionalnih aktivnih permanentnih GPS mreža (*Wild 1994; de Jong 1996; Varner, Cannon 1997; Wanninger 2000; Wuebbena, Willgalis 2001; Brown et al. 2002*) i uspostavljanje potpuno novih oblasti primene kao što je na primer GPS meteorologija (*Bevis et al. 1992; Gabor 1997; Ewardson 1998; Schueler 2001*).

Imajući u vidu sve ove pravce razvoja, može se reći da su u lokalnom smislu svi navedeni ciljevi ovog rada i danas aktuelni kao predmet istraživanja. To se naročito odnosi na stohastički model GPS merenja i pitanja kontrole kvaliteta, jer je funkcionalni model veoma dobro poznat za širok raspon međustaničnih rastojanja. Kada je u pitanju pozicioniranje, trenutni istraživački naponi usmereni su uglavnom na formulisanje opšteg matematičkog modela i iznalaženje univerzalno primenljivih algoritama koji će važiti u uslovima najavljenе GPS modernizacije (uvođenje novih civilnih frekvencija) i integrisanih satelitskih sistema (GNSS1, GNSS2).

Hronološki osvrt na gradske osnovne radove u našoj zemlji

Osnovni radovi u premeru gradova naše zemlje postaju aktuelni 1950-ih godina, kada se u uslovima sve intenzivnije izgradnje pojavila potreba za postavljanjem geodetske osnove koja treba da zadovolji niz tehničkih zadataka vezanih za urbanizam i projektovanje. Iako gradski osnovni radovi po tradiciji podrazumevaju uspostavljanje i horizontalnih i vertikalnih referentnih mreža, razvoj i primena tehnologije i metodologije odražavali su se prevashodno na gradske trigonometrijske mreže.

Prvi rezultat saznanja da državna trigonometrijska mreža u svom originalnom obliku ne odgovara uvek specifičnim zahtevima premera gradova, predstavljao je Pravilnik za državni premer iz 1951. godine, čiji je član 13. propisivao da se gustina trigonometrijske mreže u gradovima (varošima) čiji je građevinski reon veći od 100 hektara određuje posebnim naređenjima (*Glavna geodetska uprava 1951*). Nekoliko godina kasnije pojavljuje se Pravilnik za državni premer II-A deo (*Savezna geodetska uprava 1956*), koji definiše gradske mreže kao posebnu kategoriju, i detaljno propisuje princip razvijanja, metode merenja, postupak obrade rezultata i kriterijume kvaliteta.

Prema odredbama ovog pravilnika, gradska mreža obuhvata područje proširenog građevinskog reona, i ima oblik trouglova bez dijagonalnih veza, sa dužinama strana ograničenim na 1-4km. Gradska mreža oslanja se po pravilu na tačke 1. i 2. reda državne trigonometrijske mreže, s tim što se radi povezivanja određuju po potrebi tačke takozvane prelazne zone. Uglovna merenja vrše se po metodi zatvaranja horizonta, a razmera se proverava osnovičkom mrežom. Sve tačke gradske mreže istog su reda. Kriterijum kvaliteta predstavljaju maksimalna popravka pravca (5-10") i maksimalna vrednost poluose elipse grešaka (4-8cm), u zavisnosti od skale tačnosti po kojoj će se vršiti gradski premer i prisustva odnosno odsustva prelazne zone. Gradska trigonometrijska mreža izravnavava se kao celina.

U periodu 1954-1964. godine, izveden je po ovom pravilniku niz gradskih mreža (Pančevo, Sremski Karlovci, Vršac, Stari Bečej, Ruma, Beograd, Senta, Skoplje, Titograd, Budva, Sombor, Kikinda, Ljubljana). Srazmerno visok kvalitet radova naročito ilustruje gradska mreža Beograda (*Svečnikov 1961*), u kojoj srednja greška pravca iznosi 1.6", a srednje vrednosti velike i male poluose elipse grešaka 7.7mm i 6.4mm respektivno, pri čemu su koordinate novih tačaka i njihova tačnost definisani relativno u odnosu na 11 tačaka 2. reda i 1 tačku 1. reda državne trigonometrijske mreže.

S obzirom na to da su pri realizaciji gradskih mreža naponi uglavnom bili usmereni na postizanje propisane tačnosti, već početkom 1960-ih godina pojavljuju se oprečna mišljenja po pitanju kvaliteta državne trigonometrijske mreže i uloge prelazne zone (*Jovanović 1963; Svečnikov 1964*). Međutim, radovi koji su usledili odvijali su se po neizmenjenim pravilničkim odredbama, iako je krajem 1970-godina uglavnom zaokružena teorija analize, detaljne razrade i prethodne ocene tačnosti terestričkih metoda merenja (*Činklović 1977; Bratuljević 1978; Mrkić 1978*), kao i teorija uopštenih inverzija i ocenljivih funkcija u slobodnim i neslobodnim geodetskim mrežama (*Perović 1980*). Promene koje su u međuvremenu nastupile u konceptu projektovanja i realizacije naročito dobro hronološki ilustruju gradske trigonometrijske i poligonometrijske mreže Budve (1958), Titograda (1962), Ivangrada (1971), Nikšića (1978), Pljevalja (1979) i Ulcinja (1981), razvijene u saradnji Republičke geodetske uprave Crne Gore sa Institutom za geodeziju Građevinskog fakulteta u Beogradu (*Bratuljević, Mrkić 1984*).

Merenje horizontalnih uglova predstavljalo je dominantnu mernu metodu kod uspostavljanja gradskih trigonometrijskih mreža sve do 1980. godine. Potpuna eksploatacija mogućnosti metode merenja prostornih dužina elektromagnetnim daljinomerima započela je u tom smislu relativno kasno, jer je tek gradska mreža Titovog Užica iz 1987. godine predstavljala tipičnu trilateraciju (*Bratuljević et al. 1987*). Isključiva upotreba ove metode merenja istovremeno je konačno učvrstila koncept slobodnih gradskih mreža, iako je Pravilnik za državni premer II-A deo još uvek bio formalno važeći, tako da su u periodu 1990-1995. godine sa velikim uspehom realizovane gradske trilateracije Despotovca, Gornjeg Milanovca, Kragujevca, Kosova Polja, Kuršumlije, Lapova, Novog Pazara, Orahovca, Požege, Prizrena i Sjenice (*Geoinženjering 1991*).

Ekonomičnost i tačnost metode merenja prostornih dužina elektromagnetnim daljinomerima naročito dolazi do izražaja u poligonometrijskim mrežama, gde brzo zamenjuje nepraktičnu metodu paralaktičke poligonometrije. Zahvaljujući tome, poligonometrijske mreže omogućavaju održavanje homogenog nivoa tačnosti na celom području gradske trigonometrijske mreže, i samo se iz praktičnih razloga dele na redove.

Najmanje promene od stupanja na snagu Pravilnika za državni premer II-A deo doživljavaju gradske nivelmanske mreže. Tokom vremena usavršavana je merna tehnologija, od klasičnih nivelira, preko kompenzatorskih sistema do digitalnih nivelira sa bar kod letvama, ispitivana je priroda određenih uticaja kao što su na primer temperature promene (*Milovanović, Blagojević 1996*), ali je postupak merenja uvek bio definisan kao za metodu preciznog nivelmana. Takođe su ostale nepromenjene pravilničke odredbe koje regulišu obavezu da gradska nivelmanska mreža bude oslonjena bar na dva repera mreže preciznog nivelmana ili nivelmana visoke tačnosti. U tom smislu, realizovane gradske nivelmanske mreže nemaju homogeno definisan apsolutni nivo jer se oslanjaju na repere starog državnog nivelmana koji nikad nije strogo obrađen. U periodu 1970-1973. godine izvršena su merenja u mreži II NVT cele zemlje, ali iako je prošlo trideset godina od realizacije, nova mreža još uvek nije u službenoj upotrebi (*Bratuljević et al. 1995*).

Počev od 1996. godine, Republički geodetski zavod Srbije koristi GPS tehnologiju za uspostavljanje gradskih mreža. Osnovni parametri, kao što su obim mreže, granična međustanična rastojanja i način stabilizacije uglavnom ostaju nepromenjeni, ali se zato lokacije tačaka, proces merenja i logistička podrška prilagođavaju novoj mernoj metodi. Na taj način su do 2000. godine realizovane mreže Kraljeva, Lapova, Zrenjanina, Velikog Gradišta i Bačke Palanke. Iskustvo stečeno u ovim radovima rezultiralo je i promenama u pravilničkoj regulativi (*Republički geodetski zavod 1999*). Gradske mreže postaju prostorne lokalne referentne mreže koje realizuju trodimenzionalni referentni sistem sa propisanom tačnošću relativnog horizontalnog i vertikalnog položaja tačaka od $5mm+2ppm$ i $10mm+2ppm$ respektivno. Koncept slobodnih mreža još uvek je aktuelan jer kvalitet postojeće trigonometrijske mreže ne zadovoljava savremene kriterijume tačnosti. Međutim, rezultati preliminarnih istraživanja u novoj državnoj referentnoj mreži čija je realizacija u završnoj fazi, pokazuju da će biti obezbeđena dovoljno precizna datumaska definicija da se gradske GPS mreže mogu na nju direktno oslanjati (*Blagojević et al. 1998*).

Poglavlje 1

NAVSTAR

GLOBALNI POZICIONI SISTEM

1.1 Opšte karakteristike NAVSTAR sistema

1.1.1 NAVSTAR GPS program

NAVSTAR Globalni Pozicioni Sistem (GPS) je satelitski sistem razvijen od strane američkog Ministarstva odbrane (DOD), sa osnovnim ciljem da omogući pozicioniranje, navigaciju i transfer vremena za vojne potrebe. Iako postoji više kako projektovanih tako i operativnih globalnih pozicionih sistema, kao što je francuski DORIS, nemački PRARE, ruski GLONASS ili evropski GALILEO, skraćenica GPS je danas sinonim za satelitski sistem NAVSTAR.

Počeci NAVSTAR projekta sežu u rane sedamdesete godine kada je DOD formiralo posebnu službu (JPO) sastavljenu od predstavnika svih rodova američke vojske, sa zadatkom da razmotri mogućnost razvoja novog višekorisničkog satelitskog navigacionog sistema (*Parkinson 1996*). U to vreme već su postojala tri važna programa čije su komponente mogle činiti osnovu budućeg GPS. Realizacija najstarijeg od njih (NNSS TRANSIT) započeta je još 1958. godine kao odgovor na sovjetsko lansiranje prvog veštačkog satelita SPUTNIK, a 1995. godine još su funkcionisala dva satelita ovog sistema. U međuvremenu su za navigacione potrebe mornaričkih i vazduhoplovnih snaga razvijena dva satelitska sistema (TIMATION i 621B), značajna između ostalog i po tome što su osobine atomskih časovnika po prvi put proverene u kosmičkim uslovima.

Predloženi NAVSTAR GPS program podrazumevao je navigacioni sistem baziran na konstelaciji od 24 satelita smeštenih u 6 orbitalnih ravni, i upotrebi elektromagnetnih talasa iz radio frekventnog opsega. Od TRANSIT sistema preuzeti su algoritmi za prognozu satelitskih položaja, a od sistema TIMATION i 621B orbitalna konfiguracija, struktura signala i frekvencije. Raspored i orijentacija satelitskih putanja izabrani su tako da obezbede elektronsku vidljivost najmanje 4 satelita u bilo kom trenutku vremena i sa bilo koje tačke Zemljine površi. Osim toga, predviđena je upotreba dve frekvencije zbog jonosferskih uticaja, i jednosmerno funkcionisanje sistema čime je omogućen neograničen broj korisnika. Kada je 17. decembra 1973. godine ovakav koncept dobio i formalno odobrenje nadležne službe (DSARC), dalji razvoj programa odvijao se veoma dinamično:

- 1974 - Sa korporacijom Rockwell International sklopljen je ugovor o izgradnji četiri satelitska prototipa prve generacije. Određen je tip raketa nosača, izabrane tri vrste prijemnika, započeto sa konstrukcijom kontrolnog segmenta i izrađeni planovi testiranja sistema.
- 1978 - Lansiran je prvi operativni satelitski prototip Block I. Testiranje korisničke opreme prošireno je na petokanalne prijemnike firme Texas Instruments i Rockwell Collins.
- 1990 - Uvedena je prva mera zaštite (SA) kojom se kontrolisano degradira tačnost satelitskog oscilatora i navigacione poruke, tako da se navigaciona tačnost neovlašćenih korisnika ograničava na nominalnih 100m u horizontalnom i 156m u vertikalnom smislu.
- 1993 - Izgrađena je u celosti konstelacija od 6 orbitalnih ravni sa ukupno 24 satelita.
- 1994 - Uvedena je druga mera zaštite (AS) kojom je šifrovan precizni kod, čime je dodatno degradirana navigaciona tačnost neovlašćenih korisnika.



1995 - Formalno je proglašena potpuna operativnost sistema (FOC).

2000 - Predsedničkim ukazom ukinuta je SA mera zaštite.

Iako je NAVSTAR iniciran kao vojni program, veoma rano je prepoznat veliki potencijal sistema za primene u civilnom sektoru. Mogućnosti faznih merenja i preciznog geodetskog relativnog pozicioniranja formulisane su na stručnim i naučnim skupovima još 1979. godine (*Counselman et al. 1979*), tako da već 1984. postoje na tržištu specijalizovani geodetski prijemnici tri proizvođača. Pod pritiskom civilnih institucija i pojedinaca koji danas čine više od 90% ukupnog broja korisnika, identifikovani su sledeći važniji elementi plana modernizacije NAVSTAR programa do 2020. godine:

- Uvođenje novih signala i kodova, čime će se u znatnoj meri povećati spektar korisnika i primena. Naročite implikacije u tom pogledu imaće realizacija druge civilne frekvencije najavljene 1996. godine, i napuštanje politike AS i SA zaštite. Osim toga, predviđeno je i da neki od komunikacionih satelita budu osposobljeni za emitovanje GPS signala.
- Povećanje broja satelita i njihovih tehnoloških mogućnosti, koje će za posledicu imati poboljšanje pouzdanosti, dostupnosti i ukupnog funkcionisanja sistema. Planira se da nove GPS satelitske generacije budu u velikoj meri funkcionalno autonomne i sa minimalnom interakcijom kada je u pitanju Zemaljska kontrola.
- Integracija GPS u kompleksnije sisteme (na primer WAAS), proširenje kompatibilnosti sa drugim postojećim satelitskim sistemima i poboljšanje kontrolnog segmenta, čime će se povećati pouzdanost kod kritičnih aplikacija kao što je civilna vazduhoplovna navigacija.

Razvoj i modernizacija jednog tako kompleksnog programa kao što je NAVSTAR otvaraju mnoga značajna pitanja, počev od finansiranja i održavanja, definicije spektra, nacionalne bezbednosti, međunarodne institucionalne infrastrukture potrebne za upravljanje sistemom, pa sve do problema vojnog porekla sistema i monopola nad takvim resursom kao što je globalna satelitska radio navigacija. Ukoliko se navedene teškoće prevaziđu i ostvare planovi modernizacije, NAVSTAR GPS biće potvrđen kao de fakto standard u domenu satelitske navigacione tehnologije, i činiće dominantnu komponentu svakog budućeg GNSS sistema.

1.1.2 Referentni GPS sistem

Rezultati GPS pozicioniranja i navigacije odnose se na referentni sistem WGS84. Potpuna definicija ovog referentnog sistema obuhvata komponente kao što su koordinatni sistem, elipsoidni i gravitacioni model Zemlje, sistem vremena i definicioni i izvedeni geometrijski i fizički parametri (*tabela 1.1*).

TABELA 1.1. Definicioni, geometrijski i fizički parametri WGS84.

Parametar	Vrednost
Velika poluosa	6378137.0m
Recipročna vrednost spljoštenosti	298.257223563
Uglovna brzina	$7292115.0 \cdot 10^{-11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
Geocentrična gravitaciona konstanta	$3986004.418 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
Zonalni harmonik drugog stepena	$-0.484166774985 \cdot 10^{-3}$
Mala poluosa	6356752.3142m
Prvi numerički ekscentricitet	$8.1819190842622 \cdot 10^{-2}$
Normalni potencijal	$62636860.8497 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$
Normalno ubrzanje na ekvatoru	$9.7803253359 \text{ ms}^{-2}$
Masa Zemlje sa atmosferom	$5.9733328 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

WGS84 koordinatni sistem je desno orijentisani pravougli koordinatni sistem sa početkom u centru mase Zemlje, lokalnom razmerom u smislu relativističke teorije gravitacije, i orijentacijom određenom od strane Međunarodne službe vremena (BIH) za epohu 1984. godine. Nesigurnost orijentacije iznosi oko $0.005''$, a njena vremenska evolucija po definiciji ne rezultira nikakvom globalnom rezidualnom rotacijom u odnosu na Zemljinu koru (NIMA 1997).

Realizacija WGS84 referentne osnove, odnosno skupa globalno raspoređenih fundamentalnih stanica sa pripadajućim koordinatama, izvršena je prvi put 1987. godine doplerskim TRANSIT merenjima sa tačnošću od oko $1m$. Poslednje određivanje iz 1997. godine, koje je poznato pod imenom G873, pokazuje saglasnost sa međunarodnom terestričkom referentnom osnovom (ITRF) na nivou tačnosti od $5cm$ po koordinatnim osama.

Koordinatni početak i Z-osa pravouglog WGS84 sistema služe i kao osnova definicije geometrijskog centra i male poluose WGS84 elipsoidnog modela Zemlje. Izbor definicionih parametara izvršen je po ugledu na pristup Međunarodne geodetske i geofizičke unije (IUGG) prilikom uspostavljanja i usvajanja geodetskog referentnog sistema GRS80 (Moritz 1984). Jedini izuzetak u tom pogledu predstavlja geocentrična gravitaciona konstanta GM , jer se umesto originalne GRS80 vrednosti od $3986005.0 \cdot 10^8 m^3 s^{-2}$, od 1994. godine koristi vrednost $3986004.418 \cdot 10^8 m^3 s^{-2}$. WGS84 se prema tome zasniva na teoriji geocentričnog ekvipotencijalnog obrtnog elipsoida, pri čemu je elipsoid referentna površ za geometrijsku upotrebu, dok pridruženo normalno gravitaciono polje predstavlja referentni sistem za gravimetriju i satelitsku geodeziju.

WGS84 gravitacioni model Zemlje, pod nazivom EGM96, sadrži ukupno 130321 koeficijent sferno-harmonijskog razvoja Zemljinog potencijala do stepena i reda 360 (slika 1.1). Određivanje vrednosti koeficijenata rezultat je zajedničkog NIMA/NASA napora na prikupljanju, analizi i kombinaciji terestričkih gravimetrijskih podataka i opažanja prema satelitima Lageos, Lageos-2, Ajisai, Starlette, GEOS-1 i GEOSAT (Lemoine et al. 1997). Realizacija geoidne površi na osnovu geopotencijalnog modela EGM96 ima globalnu tačnost koja se kreće u rasponu od $0.5m$ do $1m$.



SLIKA 1.1. WGS84 geoid.

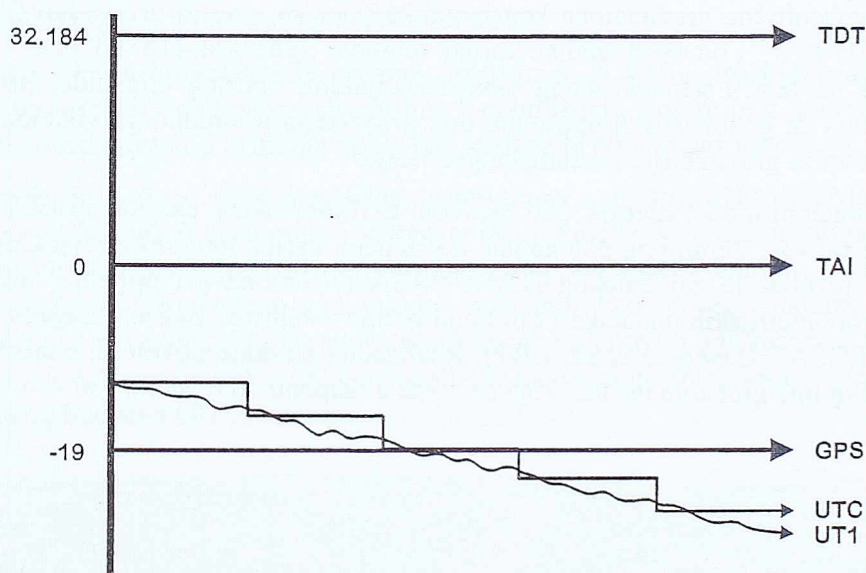
Funkcionisanje satelitskog sistema kao što je NAVSTAR zasniva se u suštini na upotrebi dinamičke (TDT) i atomske (TAI) vremenske skale. Sistemi vremena koji se izводе na osnovu Zemljine rotacije (UT, UT1) više ne odgovaraju današnjim standardima tačnosti, tako da se koriste samo posredno za

interpolaciju satelitskih položaja. Odnosi pojedinih vremenskih skala uglavnom su rezultat međunarodnih konvencija (slika 1.2).

Dinamičko vreme potrebno je za opisivanje kretanja tela u određenom referentnom sistemu shodno odgovarajućoj teoriji gravitacije. Osnovne koncepte u tom smislu danas predstavljaju opšta teorija relativiteta i inercijalni referentni sistemi. Jednačine kretanja veštačkih Zemljinih satelita sadrže terestričko dinamičko vreme TDT kao nezavisnu promenljivu, ali se ono praktično realizuje atomskom vremenskom skalom TAI:

$$TDT = TAI + 32.184s. \quad (1.1.1)$$

Atomsko vreme održava Međunarodni biro za tegove i mere (BIPM) na osnovu analize podataka atomskih standarda više svetskih laboratorija. Osnovni problem upotrebe atomskog vremena praktične je prirode jer Zemlja usporava svoju rotaciju. Da bi se izbeglo da tokom vremena TAI postane suviše nesinhronizovano sa solarnim danom (UT), uvedena je skala koordiniranog svetskog vremena (UTC) koje teče istom brzinom kao i atomsko, ali se povremeno koriguje takozvanom prestupnom sekundom da bi se razlika u odnosu na UT održala u granicama manjim od 0.9s.



SLIKA 1.2. Međusobni odnos različitih vremenskih skala.

Atomsko vreme je osnova i za izvođenje GPS sistemskog vremena, sa kojim je po konvenciji povezano izrazom:

$$GPS = TAI - 19s. \quad (1.1.2)$$

Sistemsko GPS vreme odnosi se na atomski standard američke mornaričke opservatorije (USNO), a realizuju ga časovnici satelita i GPS kontrolnog centra na taj način da je u svakom trenutku:

$$|GPS - TAI(USNO) + 19s| < 1\mu s, \quad (1.1.3)$$

s tim što se tačna razlika u odnosu na UTC(USNO) emituje korisnicima u vidu dva koeficijenta. Proizvoljna epoha GPS vremena operativno se izražava brojem sekundi proteklih od početka GPS sedmice, odnosno od ponoći između subote i nedelje, pri čemu brojanje GPS sedmica dogovorno počinje od 06.01.1980.

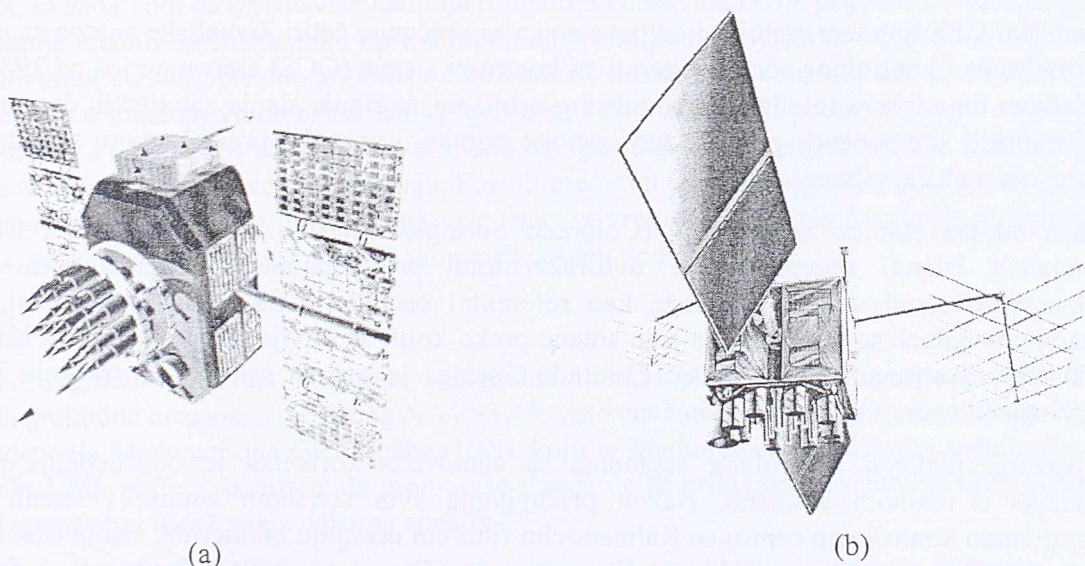
1.1.3 GPS sistemske komponente

NAVSTAR sistem čine, shodno navigacionoj terminologiji, tri velika segmenta: kosmički, kontrolni i korisnički. Tradicionalnoj podeli danas se dodaje četvrti, terestrički GPS segment, pod kojim se podrazumeva civilna infrastruktura izgrađena u poslednjih deset godina.

Kosmički segment

Kosmički segment obuhvata GPS satelite i njihovu konstelaciju. Počev od 1974. godine, lansirano je ukupno pet generacija satelita: NTS, NDS (Block I), Block II, Block IIA i Block IIR (slika 1.3). Najnovija generacija Block IIF satelita planirana je za lansiranje posle 2005. godine.

GPS sateliti predstavljaju platforme za radio prijemnike i odašiljače, rubidijumske i cezijumske atomske časovnike, kompjutere i druge elektronske uređaje potrebne kako za pozicioniranje, tako i za vojne projekte kao što je rano otkrivanje nuklearnih udara (Aparicio et al. 1996). Oni su osim toga opremljeni solarnim panelima koji obezbeđuju električnu energiju, reakcionim točkovima za kontrolu stanja i mlaznim sistemom potrebnim za korekciju orbite. Količina goriva i komponente koje obezbeđuju energiju ograničavaju vek trajanja GPS satelita na 10 godina. Block IIR sateliti u odnosu na ranije generacije poseduju dodatna svojstva kao što su mogućnost međusatelitske komunikacije i AutoNav dizajn za šestomesečno autonomno određivanje putanja bez intervencije sa Zemlje.



SLIKA 1.3. GPS sateliti (a) Block IIA, (b) Block IIR.

Nominalna GPS satelitska konstelacija poznata kao GPS-24, veoma je bliska Vokerovoj familiji kružnih orbita 24/6/1 (Walker 1977), pri čemu prvi broj označava ukupan broj satelita, drugi broj orbitalnih ravni, a treći faznu razliku satelita u susjednim orbitama. Ovakva konstelacija obezbeđuje globalnu pokrivenost Zemlje i vidljivost šest satelita u svakom trenutku vremena i sa svake tačke Zemljine površi. Aktuelna GPS konstelacija sadrži 27 satelita od kojih su 3 rezervna, i optimizovana je za slučaj otkazivanja rada jednog satelita. Orbitalne ravni imaju inklinaciju od 55° , sa putanjama čija je velika poluosa 26561.754km , a ekscentricitet blizak nuli. Period obilaska satelita iznosi 12 zvezdanih časova, što dovodi do efekata rezonancije sa Zemljinim gravitacionim poljem, zbog čega je potrebna relativno česta korekcija orbite. Nominalna međusatelitska i međuorbitalna lučna rastojanja projektovana su tako da budu približno ravnomerna (tabela 1.2).

TABELA 1.2. Nominalna GPS-24 satelitska konstelacija. OME – rektascenzija uzlaznog čvora; LAN – longituda uzlaznog čvora (07.01.1993 0h 0m 0s); M – srednja anomalija; DM – razlika srednjih anomalija susednih satelita. Jedinice – lučni stepeni.

Orbita	OME	LAN	M	DM	Orbita	OME	LAN	M	DM
A-1	272.847	127.85	268.126	106.34	D-1	92.847	61.40	135.226	100.07
A-2	272.847	74.68	161.786	119.98	D-2	92.847	126.51	265.446	98.09
A-3	272.847	179.63	11.676	103.55	D-3	92.847	11.37	35.156	129.71
A-4	272.847	14.69	41.806	31.13	D-4	92.847	77.47	167.356	32.13
B-1	332.847	94.27	80.956	130.98	E-1	152.847	152.31	197.046	130.98
B-2	332.847	140.46	173.336	92.38	E-2	152.847	25.09	302.596	105.55
B-3	332.847	28.78	309.976	105.60	E-3	152.847	86.82	66.066	92.38
B-4	332.847	155.98	204.376	31.04	E-4	152.847	40.63	333.686	31.09
C-1	32.847	169.73	111.876	100.08	F-1	212.847	53.23	238.886	103.54
C-2	32.847	119.69	11.796	32.13	F-2	212.847	106.40	345.226	106.34
C-3	32.847	103.62	339.666	98.11	F-3	212.847	166.39	105.206	119.98
C-4	32.847	54.57	241.556	129.68	F-4	212.847	1.46	135.346	30.00

Kontrolni segment

Kontrolni GPS segment sastoji se od pet stanica za praćenje, četiri Zemaljske antene za komunikaciju sa satelitima i kontrolnog centra. Operativni kontrolni sistem (OCS) aktivan je još od 1985. godine, sa zadatkom da održava satelite u predviđenim orbitama, koriguje stanja satelitskih časovnika i drugih elektronskih komponenti, generiše navigacione poruke, i upravlja premeštanjem satelita i njihovom zamenom u slučaju kvara.

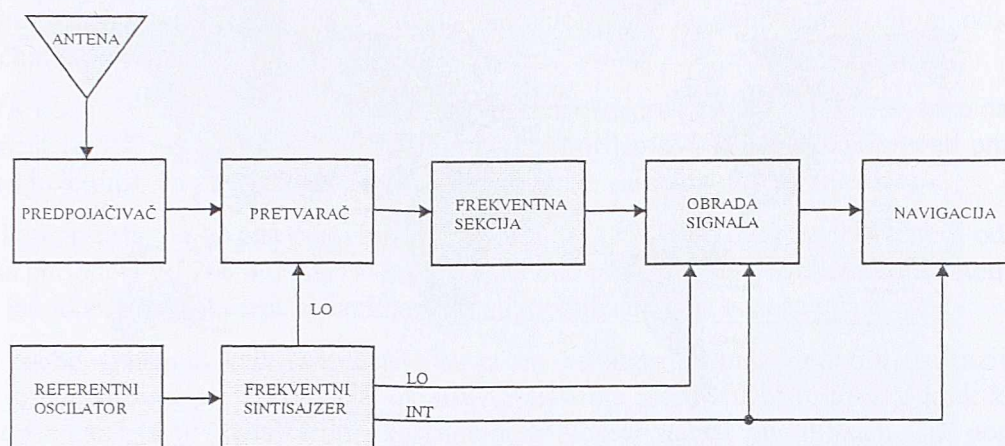
Svaka od pet stanica za praćenje (Colorado Springs, Hawaii, Ascension Island, Diego Garcia, Kwajalein Island) opremljena je dvofrekventnim prijemnicima i redundantnim cezijumskim frekventnim standardima koji služe kao referentni oscilatori. Osim stanice Hawaii, na ostalim lokacijama nalaze se velike Zemaljske antene preko kojih se odvija komunikacija sa satelitima u S-frekventnom opsegu (TT&C link). Colorado Springs je glavna stanica za praćenje i predstavlja istovremeno operativni kontrolni centar.

Najvažnija funkcija kontrolnog segmenta sa stanovišta korisnika je obezbeđenje navigacionih podataka u realnom vremenu. Nakon prikupljanja svih izvršenih kodnih i faznih merenja, u operativnom kontrolnom centru se Kalmanovim filterom ocenjuju efemeride, stanja časovnika i drugi navigacioni parametri za svaki satelit ponaosob (*Francisco 1996*). Sračunati i formatizovani navigacioni podaci upućuju se potom Zemaljskim antenama koje ih prosleđuju satelitskim memorijama.

Korisnička greška merenja pseudodužina (URE) prevashodno zavisi od učestalosti kojom se satelitske memorije pune navigacionim podacima. Kontrolni segment je dizajniran tako da se ažuriranje navigacione poruke može vršiti tri puta dnevno. U normalnim okolnostima dovoljno je da se ta aktivnost odvija jednom u toku dana, jer je u tom slučaju greška merenja pseudodužina oko 2.3m što je mnogo manje od maksimalno projektovane koja iznosi 6m.

Korisnički segment

Pod korisničkim segmentom podrazumevaju se sve vrste stacionarnih i pokretnih GPS prijemnika koji operišu na fizičkoj površi Zemlje, suvozemnim, pomorskim, vazduhoplovnim platformama i niskoletućim satelitima (LEO), a služe u civilne i vojne svrhe. Uprkos širokom spektru korisnika i specifičnim poljima primene (pozicioniranje, navigacija, transfer vremena, geodezija, geodinamika, geofizika, fizika atmosfere itd.), u arhitekturi svakog savremenog GPS prijemnika prepoznaju se standardne funkcionalne celine (*slika 1.4*).



SLIKA 1.4. Funkcionalna blok shema GPS prijmnika. LO – lokalni oscilator; INT – interapt.

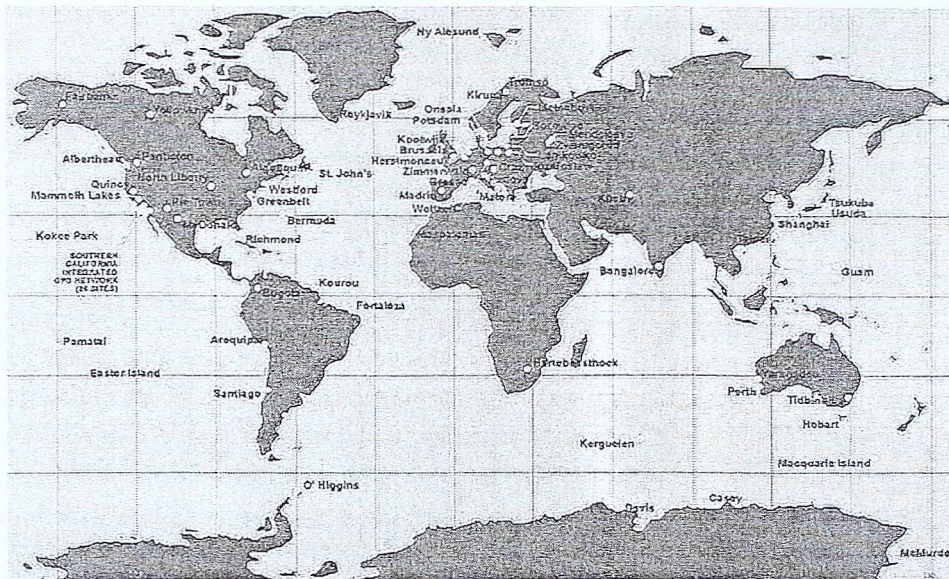
Pošto se GPS merenja u principu baziraju na vremenu dolaska satelitskih signala, referentni oscilator predstavlja ključni faktor funkcionisanja GPS prijmnika. Njegov izlaz upotrebljava frekventni sintisajzer, sa zadatkom da izvede više lokalnih oscilatora i časovnika koje prijmnik onda koristi kako za generisanje međufrekvencija, tako i prilikom obrade primljenih, pojačanih i digitalizovanih signala (Van Dierendonck 1996). Rezultate obrade čine kodne i fazne pseudodužine, odnosi signala i šuma, epohe merenja u lokalnoj vremenskoj skali prijmnika i GPS sistemski podaci za svaki satelit čiji su signali praćeni. Pošto je NAVSTAR prevashodno navigacioni sistem, prijmnik ove rezultate koristi pre svega za računanje navigacionog rešenja. Postoji međutim čitav niz specifičnih primena za koje se upotrebljavaju prijmnici koji umesto toga vrše transfer vremena, generišu korekcije na referentnim stanicama, prate jonosfersku aktivnost ili samo prikupljaju podatke.

Terestrički segment

Terestrički segment obuhvata globalne, regionalne i lokalne mreže permanentnih GPS stanica, razvijenih praktično nezavisno od samog NAVSTAR sistema. Najznačajniju globalnu infrastrukturu te vrste predstavlja Međunarodna GPS služba (IGS), koju je Međunarodna geodetska asocijacija (IAG) uspostavila 1993. godine, sa ciljem da promovise standarde za prikupljanje i analizu GPS podataka, i omogućiti geonaučna istraživanja najšireg spektra.

IGS se u opštem smislu sastoji od komponenti kao što su mreža stalno operativnih GPS stanica (slika 1.5), centri za prikupljanje podataka, centri za analizu podataka, koordinator, centralni biro, upravni odbor i korisnici. Članstvo IGS je multinacionalno, i čine ga različite organizacije, državne agencije i univerziteta. Sedam trenutno operativnih centara za analizu podataka (COD u Švajcarskoj, EMR u Kanadi, ESA i GFZ u Nemačkoj, JPL, NGS i SIO u Americi) koordinirano određuju i publikuju precizne efemeride svih aktivnih GPS satelita, parametre rotacije Zemlje (ERP), koordinate i brzine za oko 200 stalnih IGS stanica u SINEX formatu, stanja satelitskih i staničnih časovnika, diferencijalna kodna kašnjenja (DCB), stanična troposferska zenitna kašnjenja i jonosferske mape. Svi IGS rezultati odnose se na globalni terestrički referentni sistem (ITRS). U slučaju GLONASS sistema, podatke obezbeđuje permanentna mreža od oko 30 stanica (IGEX), koja se takođe može smatrati delom IGS infrastrukture.

Regionalne i lokalne permanentne mreže kao što su EUREF ili SAPOS predstavljaju pre svega hijerarhijsko progušćenje globalne IGS mreže. Pored toga što neposredno realizuju ITRS, ove mreže imaju i karakter aktivne referentne osnove jer omogućuju korisnicima pristup merenjima i korekcijama u realnom vremenu ili sa definisanim zakašnjenjem (Rothacher, Zebhauser 2000).

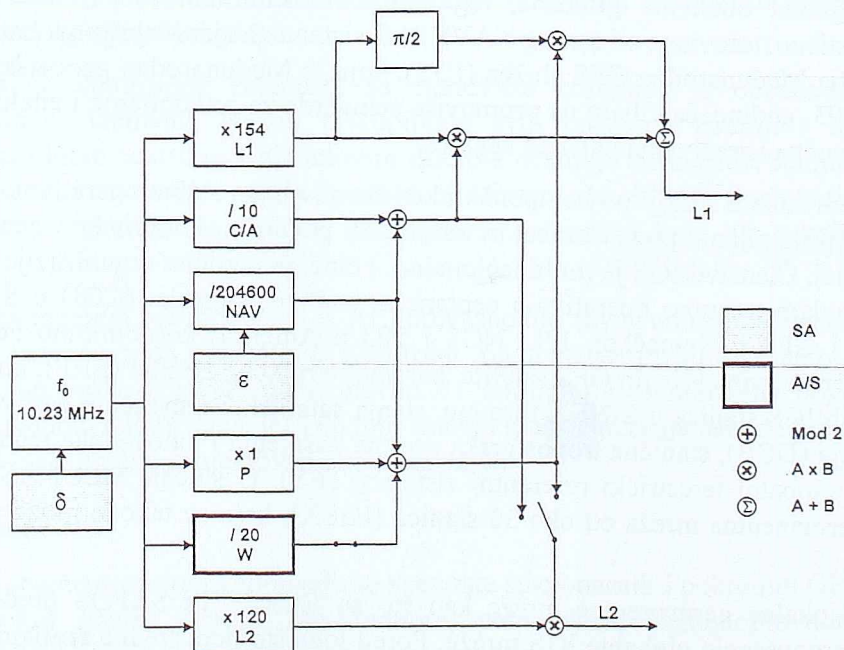


SLIKA 1.5. Osnovna IGS mreža permanentnih stanica.

1.2 Principi GPS merenja i pozicioniranja

1.2.1 Struktura GPS signala

GPS sateliti emituju radio signale na dvema frekvencijama L1 (1575.45MHz) i L2 (1226.60MHz), iz frekventnog opsega koji je Međunarodna unija za telekomunikacije (ITU) rezervisala za satelitske pozicione sisteme (slika 1.6). Izbor konkretnih frekvencija predstavlja kompromis između uticaja jonosferskog kašnjenja i eksponencijalno zavisnih gubitaka snage signala. Razmak između frekvencija dovoljno je širok da se može gotovo u potpunosti eliminisati jonosferski efekat prvog reda, ali istovremeno i dovoljno uzak da se prijem obe frekvencije može vršiti samo jednom antenom.



SLIKA 1.6. Blok-dijagram procesa generisanja satelitskog signala.

S obzirom da noseći talasi L1 i L2 predstavljaju čiste sinusne talase, oni sami po sebi ne nose nikakvu informaciju. Jednoznačno određivanje dužina omogućeno je faznom modulacijom nosećih talasa pseudoslučajnim kodovima (PRN):

- C/A kod je binarna sekvenca dužine 1023 bita na frekvenciji od 1.023MHz , tako da mu period iznosi 1ms . Ovako mali period izabran je da bi prijemnici mogli brzo otpočeti praćenje. C/A kod je jedinstven za svaki GPS satelit, i ugrađen je samo na noseći talas L1.
- P kod predstavlja veoma dugu binarnu sekvencu (15345000 bita) na frekvenciji od 10.23MHz i sa periodom od 266.4 dana. Da bi se obezbedila jedinstvenost, svakom GPS satelitu dodeljen je jednonedeljni segment koda. P kodom su modulirana oba noseća talasa.

Obe vrste pseudoslučajnih kodova generišu se poznatim algoritmima. Međutim, za razliku od C/A koda koji je uvek dostupan, P kod se u okviru AS zaštitne mere šifrira u tajni Y kod, koji je onda direktno dostupan samo ovlašćenim korisnicima. Noseći talasi modulirani su pored toga i navigacionom porukom koja sadrži podatke o satelitskom časovniku, statusu satelita, parametrima putanje, konstelaciji svih aktivnih satelita i stanju jonosfere (tabela 1.3). Navigaciona poruka je binarni niz male brzine (50 bita u sekundi), ugrađen u C/A i P kod tehnikom binarnog sabiranja. Za kompletnu transmisiju navigacione poruke potrebno je 12.5min , ali se podaci neophodni za početno određivanje položaja satelita emituju sa 1500 bitova i ponavljaju svakih 30s.

TABELA 1.3. Parametri časovnika i orbite u sastavu navigacione poruke.

Parametar	Oznaka
Indikator prisustva C/A ili P koda na L2	Code-Flag L2
GPS sedmica	GPS Week
Indikator podataka P koda na L2	L2-P-Data-Flag
Tačnost merenja pseudodužina	SV-URA
Indikator ispravnosti satelita	SV-Health
Razlika grupnog kašnjenja P-koda na L1 i L2	T_{GD}
Starost podataka o časovniku	AODC
Referentna epoha časovnika	t_{0c}
Polinomski koeficijenti popravke časovnika	a_0, a_1, a_2
Starost podataka o orbiti	AODE
Referentna epoha orbite	t_e
Keplerovi elementi orbite	$\sqrt{a}, e, M_0, \omega_0, i_0, l_0$
Brzina promene srednjeg kretanja satelita	dn
Brzina promene inklinacije orbite	di
Brzina promene rektascenzije uzlaznog čvora	$d\Omega$
Korekcionni koeficijenti argumenta perigeuma	C_{uc}, C_{us}
Korekcionni koeficijenti geocentričnog rastojanja	C_{rc}, C_{rs}
Korekcionni koeficijenti inklinacije orbite	C_{ic}, C_{is}

Signali na obe frekvencije, S_{L1} i S_{L2} , mogu se prema tome u potpunosti matematički predstaviti u obliku:

$$S_{L1}(t) = A_{Y,L1}[Y(t) \oplus D(t)]\cos(\omega_1 t + \varphi_{L1}) + A_C[C(t) \oplus D(t)]\sin(\omega_1 t + \varphi_{L1}), \quad (1.2.1)$$

$$S_{L2}(t) = A_{Y,L2}[Y(t) \oplus D(t)]\cos(\omega_2 t + \varphi_{L2}), \quad (1.2.2)$$

pri čemu $A_{Y,L1}$, $A_{Y,L2}$ i A_C označavaju amplitude odgovarajućih kodova, $Y(t)$ i $C(t)$ su Y i C/A kodni nizovi, $D(t)$ je navigaciona poruka, ω_1 i ω_2 su kružne frekvencije, a ϕ_{L1} i ϕ_{L2} početne faze nosećih talasa. U okviru SA zaštitne mere, stabilnost frekvencija nosećih talasa i tačnost podataka navigacione poruke degradiraju se takozvanim pseudoslučajnim δ i ϵ procesima.

U situacijama kada nisu u potpunosti funkcionalni, GPS sateliti mogu emitovati i takozvane nestandardne C/A i Y kodove (NSC i NSY). Osnovni razlog postojanja ove vrste kodova je zaštita korisnika, jer ih navigacioni prijemnici niti mogu generisati, niti vršiti njihov prijem.

1.2.2 Obrada GPS signala

NAVSTAR GPS je jednosmerni satelitski pozicioni sistem, što znači da se ekstrakcija informacija iz emitovane elektromagnetne energije vrši u korisničkim GPS prijemnicima. Najvažnije komponente GPS prijemnika u kojima se na nižem ili višem nivou vrši obrada primljenih GPS signala su antena, radiofrekventna sekcija, analogno-digitalni pretvarač, elektronski kanali i mikroprocesor.

U anteni se vrši prijem emitovane elektromagnetne energije, njeno pojačavanje, filtracija i pretvaranje u električnu struju kako bi se mogla dalje obrađivati elektronskim uređajima. Step en iskorišćenosti antene projektuje se tako da minimalizuje uticaj reflektovanih signala čija polarizacija ima orijentaciju suprotnu od GPS signala. Stabilnost faznog centra kao drugo važno svojstvo antene postiže se njenom minijaturizacijom, ali samo do određene mere, jer se sa smanjenjem gabarita antene smanjuje i step en njene iskorišćenosti.

Nakon preliminarne obrade u anteni, GPS signali pristižu u radiofrekventnu sekciju prijemnika u kojoj se prvo razdvajaju i ponovo filtriraju i pojačavaju. Zatim se vrši transformacija originalne frekvencije u mnogo nižu međufrekvenciju koja je pogodnija za dalju obradu. Sam postupak sastoji se u mešanju primljene i referentne frekvencije, što je matematički ekvivalentno množenju talasa:

$$\cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + \frac{1}{2} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]. \quad (1.2.3)$$

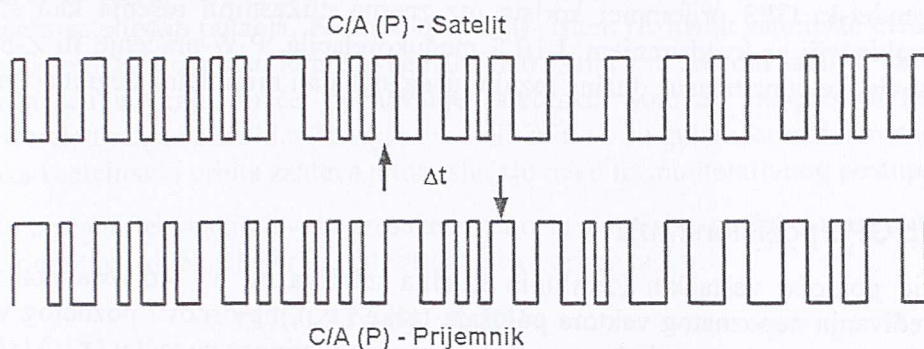
Rezultujuća međufrekvencija $\omega_1 - \omega_2$ predstavlja veličinu Doplerskog pomaka nastalog usled relativnog kretanja satelita i prijemnika, i sadrži još uvek sve modulacije kao i originalni noseći talasi.

Po prolasku kroz radiofrekventnu sekciju signali se prvo digitalizuju u analogno-digitalnom pretvaraču, a potom pojedinačno izoluju uz pomoć Doplerskih pomaka i C/A odnosno P(Y) kodova. U tu svrhu je svakom signalu i svakoj frekvenciji posvećen po jedan elektronski kanal.

Definitivnu obradu signala i formiranje mernih veličina vrši mikroprocesor. U njegove najvažnije funkcije spadaju koordinacija i sinhronizacija svih procesa, akvizicija i praćenje signala, digitalna filtracija merenja, dekodiranje navigacione poruke i računanje navigacionog rešenja u realnom vremenu. Mikroprocesor osim toga upravlja i radom elektronskih uređaja (DLL i PLL jitteri) u kojima se vrše kodna i fazna merenja.

Princip kodnih merenja kod geodetskih GPS prijemnika sastoji se u upoređenju primljenih i interno generisanih referentnih signala. DLL džiter tom prilikom vremenski translatorno pomera referentni signal dok ne postigne maksimalnu apsolutnu vrednost koeficijenta korelacije, čime se dobija vreme puta satelitskog signala Δt , odnosno razlika trenutaka vremena prijema t_m i emitovanja t^j (slika 1.7). Pošto časovnici prijemnika i satelita realizuju GPS vremensku skalu sa određenim odstupanjima, rastojanje koje se dobija množenjem vremena puta sa brzinom elektromagnetnih talasa c_0 naziva se pseudoduzinom:

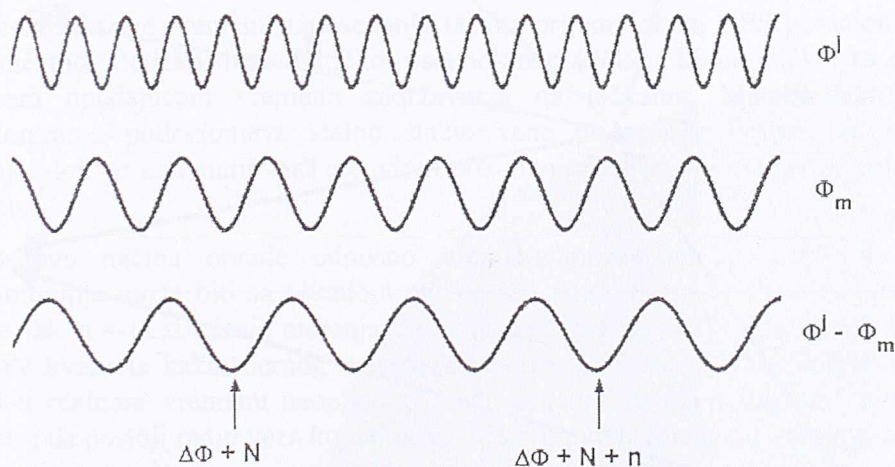
$$P = c_0(t_m - t^j). \quad (1.2.4)$$



SLIKA 1.7. Princip merenja kodnih pseudodužina.

Nakon sinhronizacije kodova i dekodiranja navigacione poruke, primljeni i referentni signal se mešaju, tako da preostaju čisti nemanulirani noseći talasi čija se faza meri u PLL džiteru. U početnoj epohi t_0 , fazno merenje $\psi(t_0)$ sastoji se od razlike faza referentnog signala $\varphi_m(t_0)$ i emitovanog signala $\varphi^j(t_0 - \Delta t)$, kao i proizvoljnog stanja registra $N(t_0)$ (slika 1.8):

$$\psi(t_0) = \varphi_m(t_0) - \varphi^j(t_0 - \Delta t) + N(t_0). \quad (1.2.5)$$



SLIKA 1.8. Princip merenja faznih pseudodužina.

Iako početno stanje registra nema nikakvo fizičko značenje, u njemu će se nakon prvog izvršenog faznog merenja kontinuirano registrovati akumulirani celi broj faznih ciklusa. Fazno merenje u proizvoljnoj epohi t imaće prema tome oblik:

$$\psi(t) = \varphi_m(t) - \varphi^j(t - \Delta t) + N(t_0) + N(t - t_0). \quad (1.2.6)$$

Do aktiviranja AS zaštitne mere postupci praćenja signala u DLL i PLL džiterima nisu se bitno međusobno razlikovali. Uvođenje tajnog W koda onemogućilo je, međutim, demodulaciju nosećeg talasa L2 i direktan pristup P kodu. Jedna od prvih metoda kojom je ovaj problem rešavan sastojala se u kvadriranju L2 signala:

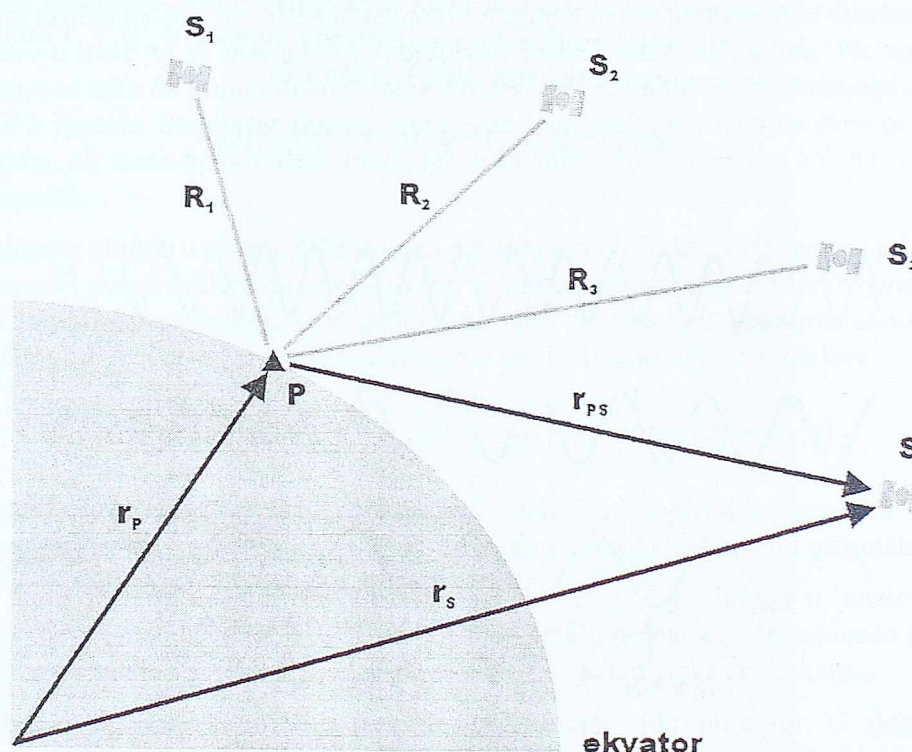
$$S_{L2}^2(t) = A_{Y,L2}^2 [Y(t) \oplus D(t)]^2 \cos^2(\omega_2 t + \varphi_{L2}) = A_{Y,L2}^2 \frac{1 + \cos[2(\omega_2 t + \varphi_{L2})]}{2}, \quad (1.2.7)$$

čime se u potpunosti uklanjala modulacija nosećeg talasa, ali je postupak imao za posledicu gubitak navigacionih podataka i rezultujući signal sa dvostruko većom frekvencijom i mernim šumom. Savremeni geodetski GPS prijemnici koriste niz znatno efikasnijih rešenja kao što su korelacija kodova u kombinaciji sa kvadriranjem, L1/L2 međukorelacija, P-W-praćenje ili Z-praćenje, čije su glavne karakteristike puna talasna dužina rezultujućeg signala i minimalna degradacija odnosa signala i šuma.

1.2.3 Princip GPS pozicioniranja

Pozicioniranje pomoću veštačkih Zemljinih satelita zasniva se na jednostavnom geometrijskom principu određivanja nepoznatog vektora položaja tačke (\mathbf{r}_P), na osnovu poznatog vektora položaja satelita (\mathbf{r}_S) i merenog vektora relativnog položaja satelita u odnosu na tačku (\mathbf{r}_{PS}) (slika 1.9):

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_P(t) &= \mathbf{r}_S(t) - \mathbf{r}_{PS}(t) \\ &= \mathbf{r}_S(t) - e_{PS}(t) |\mathbf{r}_{PS}(t)|\end{aligned}\quad (1.2.8)$$



SLIKA 1.9. Osnovni princip satelitskog pozicioniranja.

Merenje vektora \mathbf{r}_{PS} podrazumeva određivanje svih njegovih komponenti (pravca, smera i intenziteta). To se tehnološki postiže na taj način što se satelit fotografise u trenutku merenja dužine, čime se simultano određuju jedinični vektor e_{PS} i intenzitet $|\mathbf{r}_{PS}|$. Međutim, savremeno satelitsko pozicioniranje zasniva se na alternativnom postupku koji se sastoji u simultanom merenju nekoplanarnih dužina do tri ili više satelita. Položaj tačke P određen je u tom slučaju presekom sfera čiji su centri u satelitskim lokacijama, a poluprečnici jednaki izmerenim dužinama R_i . Kada je u pitanju NAVSTAR GPS pozicioniranje, neophodne su u tom smislu najmanje četiri dužine, zbog toga što je pored trodimenzionalnog položaja tačke nepoznata i veličina odstupanja časovnika prijemnika od sistemskog GPS vremena.

Ovakav način pozicioniranja naziva se apsolutnim, jer se određivanje položaja tačaka vrši u koordinatnom sistemu čiji se početak nalazi u centru mase Zemlje, a istovremeno se podudara sa žižama eliptičnih satelitskih putanja. Pošto koordinatni sistem realizuju satelitske efemeride, kvalitet apsolutnog pozicioniranja određen je pre svega geometrijskim rasporedom satelita, tačnošću njihovih položaja i tačnošću merenja. Inače, poznavanje satelitskih položaja ne predstavlja principijelno ograničenje pozicioniranja veštačkim Zemljinim satelitima, ali singularnost istovremenog određivanja položaja tačaka i satelitskih orbita zahteva u tom slučaju neku formu iterativnog postupka.

Uticaj velikog broja sistematskih izvora grešaka znatno se smanjuje, pa čak i u potpunosti eliminiše, kada se pozicioniranje jedne tačke vrši u odnosu na neku drugu tačku:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{PQ}(t) &= \mathbf{r}_{PS}(t) - \mathbf{r}_{QS}(t) \\ &= \mathbf{e}_{PS}(t) |\mathbf{r}_{PS}(t)| - \mathbf{e}_{QS}(t) |\mathbf{r}_{QS}(t)| \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Ovakav način pozicioniranja naziva se relativnim jer se određivanje položaja tačke Q vrši u topocentričnom koordinatnom sistemu čiji je početak konceptualno smešten u tački P , ali sa očuvanom globalnom orijentacijom koordinatnih osa. Postupak relativnog pozicioniranja izvodi se simultanim merenjem dužina sa obe tačke do tri ili više satelita, pri čemu je dovoljno poznavanje približnih položaja satelita i koordinatnog početka, a da tačnost relativnog položaja ostane na visokom nivou.

U poslednjih petnaest godina razvijen je veliki broj postupaka apsolutnog i relativnog GPS pozicioniranja. Iako je svaka klasifikacija tih metoda neizostavno subjektivna, mogu se definisati sledeća tri opšta kriterijuma podele:

- Na osnovu dužine vremena zaposedanja tačaka prijemnicima, GPS pozicioniranje može biti permanentno, statičko, brzo statičko, pseudokinematičko i kinematičko, sa redosledom koji odgovara opadajućem vremenu zadržavanja na tačkama. Metoda permanentnog GPS pozicioniranja podrazumeva stalno stacionirane prijemnike kojima se neprekidno vrše merenja, dok se kinematičkom metodom pozicioniranje izvodi dok je prijemnik praktično u pokretu.
- Na osnovu načina obrade odnosno vremena proteklog od izvršenih merenja, GPS pozicioniranje može biti sa obradom aposteriori ili u realnom vremenu. Obrada aposteriori vrši se nakon svih izvršenih merenja, i ima tu prednost što pruža mogućnost detaljne analize i kontrole kvaliteta kako mernog materijala, tako i rezultata pozicioniranja. Da bi se obrada izvela u realnom vremenu neophodno je da prijemnici imaju implementiran odgovarajući softver, i da postoji radio veza koja omogućuje njihovu međusobnu komunikaciju.
- Na osnovu vrste mernih veličina, GPS pozicioniranje može biti fazno ili kodno. Kodna merenja su jednoznačna, ali su rezultati pozicioniranja niže tačnosti. S druge strane, obrada mnogo preciznijih faznih merenja povezana je sa problemom takozvanih faznih neodređenosti. Njihovo rešavanje kod pseudokinematičkih i kinematičkih metoda naziva se inicijalizacijom, a može da se izvede statičkim merenjima, zaposedanjem tačaka sa poznatim koordinatama, zamenom mesta antena ili posebnim algoritmima u slučaju da je prijemnik u pokretu (OTF).

Navedene metode nisu međusobno u potpunosti nezavisne, a pojedine kombinacije imaju u literaturi i posebna imena. Tako je relativno pseudokinematičko pozicioniranje uz pomoć faznih merenja poznato kao Stop&Go kada se obrada vrši aposteriori, a kao RTK u slučaju obrade u realnom vremenu. Upotreba kodnih merenja u slične svrhe naziva se DGPS metodom. S druge strane, neke kombinacije potpuno su isključene, jer na primer navigacija u apsolutnom režimu rada nije moguća faznim, već samo kodnim merenjima. Klasifikacija postupaka GPS pozicioniranja po kriterijumu načina obrade data je u *tabeli 1.4* i *tabeli 1.5*, zajedno sa osnovnim principima i najvažnijim karakteristikama.

TABELA 1.4. Postupci GPS pozicioniranja sa obradom a posteriori.

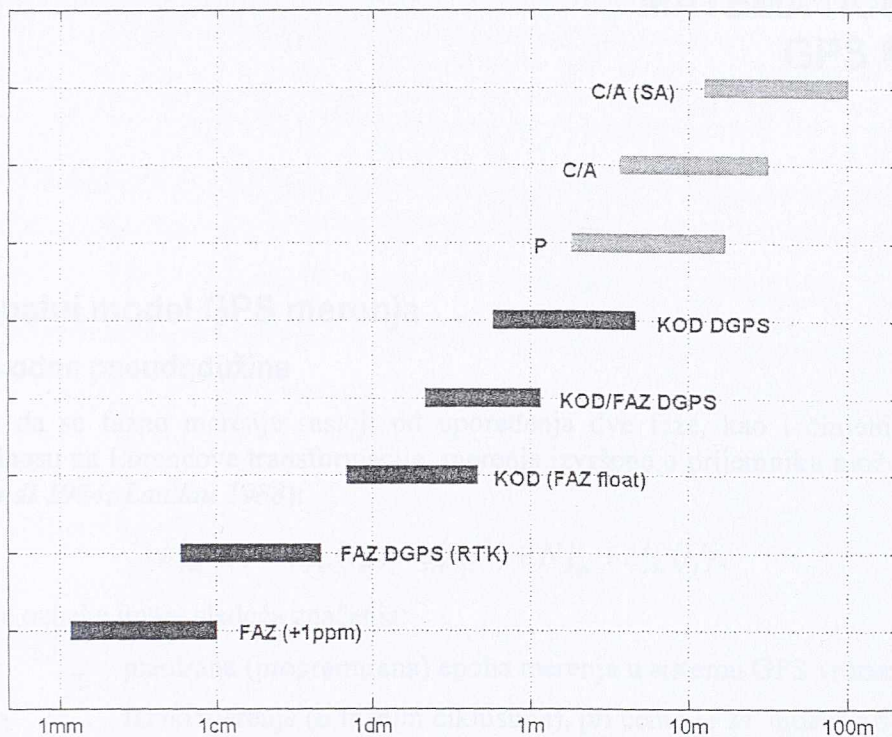
Postupak	Princip i osnovne karakteristike
Permanentni	Relativno pozicioniranje simultanim faznim merenjima, permanentno stacionirani prijemnici, vreme opažanja neograničeno, tačnost nekoliko <i>mm</i> , dvofrekventni prijemnici, proizvoljna međustanična rastojanja.
Statički	Relativno pozicioniranje simultanim faznim merenjima, premeštanje prijemnika, vreme opažanja od 1h do nekoliko dana, tačnost do 1 <i>cm</i> , jednofrekventni ili dvofrekventni prijemnici, rastojanja do 100 <i>km</i> .
Brzi statički	Relativno pozicioniranje simultanim faznim merenjima, premeštanje prijemnika i eventualno ponovno zaposedanje tačaka, vreme opažanja od nekoliko minuta do 1h, tačnost 1-2 <i>cm</i> , jednofrekventni ili dvofrekventni prijemnici, rastojanja do nekoliko desetina <i>km</i> .
Kvazikinematički	Relativno pozicioniranje simultanim faznim merenjima, inicijalizacija i sekvencijalno određivanje tačaka, vreme inicijalizacije nekoliko minuta ili OTF, vreme opažanja od nekoliko epoha, tačnost 2-3 <i>cm</i> , poželjni dvofrekventni prijemnici, rastojanja manja od 10 <i>km</i> .
Kinematički	Relativno pozicioniranje simultanim faznim merenjima, inicijalizacija i određivanje trajektorije, vreme inicijalizacije nekoliko minuta ili OTF, tačnost nekoliko <i>cm</i> , poželjni dvofrekventni prijemnici, rastojanja do nekoliko desetina <i>km</i> .

TABELA 1.5. Postupci GPS pozicioniranja sa obradom u realnom vremenu.

Postupak	Princip i osnovne karakteristike
Kinematički	Relativno pozicioniranje simultanim faznim merenjima, inicijalizacija i određivanje trajektorije ili navigacija, vreme inicijalizacije nekoliko minuta ili OTF, tačnost nekoliko <i>cm</i> , poželjni dvofrekventni prijemnici, rastojanja do nekoliko desetina <i>km</i> .
RTK	Relativno pozicioniranje simultanim faznim merenjima, inicijalizacija i sekvencijalno određivanje tačaka, vreme inicijalizacije nekoliko minuta ili OTF, vreme opažanja od nekoliko epoha, tačnost 2-3 <i>cm</i> , rastojanja manja od 10 <i>km</i> , ili nekoliko desetina <i>km</i> u mreži permanentnih stanica.
DGPS	Relativno pozicioniranje simultanim kodnim merenjima, određivanje tačaka ili navigacija, vreme opažanja od jedne do nekoliko epoha, tačnost 0.5-5 <i>m</i> , proizvoljna rastojanja.
Navigacioni	Apsolutno pozicioniranje kodnim merenjima jednog prijemnika, određivanje tačaka ili navigacija, vreme opažanja od jedne do nekoliko epoha, tačnost 5-100 <i>m</i> u zavisnosti od SA i vrste kodova.

Tačnost pozicioniranja je sa stanovišta korisnika jedan od najvažnijih kriterijuma izbora konkretnog postupka. U tom smislu metode GPS pozicioniranja pokazuju različitu osetljivost na promenu faktora kao što su na primer atmosferski uslovi, broj satelita, njihova geometrijska konstelacija, ili interval vremena sa kojim se vrši registracija merenja. U opštem slučaju, relativno pozicioniranje, duže vreme

zaposjedanja, upotreba faznih merenja i obrada aposteriori imaju za rezultat višu tačnost u odnosu na apsolutno pozicioniranje, pokretne prijemnike, upotrebu kodnih merenja i obradu u realnom vremenu (slika 1.10).



SLIKA 1.10. Rasponi tačnosti različitih metoda GPS pozicioniranja. FAZ (+1ppm) – relativno statičko pozicioniranje faznim merenjima; FAZ DGPS (RTK) – relativno kinematičko pozicioniranje faznim merenjima u realnom vremenu; KOD (FAZ float) – relativno statičko pozicioniranje kodnim merenjima ili faznim merenjima sa realnim vrednostima za fazne neodređenosti; KOD/FAZ DGPS – relativno kinematičko pozicioniranje kombinovanim merenjima u realnom vremenu; KOD DGPS – relativno kinematičko pozicioniranje kodnim merenjima u realnom vremenu; P – apsolutno pozicioniranje P kodnim merenjima; C/A – apsolutno pozicioniranje C/A kodnim merenjima; C/A (SA) – apsolutno pozicioniranje C/A kodnim merenjima sa aktivnom SA merom zaštite.

Poglavlje 2

MATEMATIČKI MODEL GPS MERENJA

2.1 Funkcionalni model GPS merenja

2.1.1 Fazne i kodne pseudodužine

Imajući u vidu da se fazno merenje sastoji od upoređenja dve faze, kao i činjenicu da su faze invarijante u odnosu na Lorencove transformacije, merenje izvršeno u prijemniku može se predstaviti u obliku (*Remondi 1984; Landau 1988*):

$$\Psi_{Fm}^j(t_i) = \varphi_{Fm}(t_m) - \varphi_F^j(t^j) + N_{Fm}^j + \varepsilon_{Fm}^j(t_i), \quad (2.1.1)$$

gde upotrebljene oznake imaju sledeća značenja:

t_i	...	planirana (programirana) epoha merenja u sistemu GPS vremena,
$\Psi_{Fm}^j(t_i)$...	fazno merenje (u faznim ciklusima), pri čemu je m indeks prijemnika, j indeks satelita, a F indeks frekvencije (1 ili 2),
$\varphi_{Fm}(t_m)$...	faza oscilatora prijemnika u trenutku prijema signala t_m (očitanje časovnika prijemnika),
$\varphi_F^j(t^j)$...	faza oscilatora satelita u trenutku emitovanja signala t^j (očitanje časovnika satelita),
N_{Fm}^j	...	nepoznati celi broj faznih ciklusa, ili takozvana fazna neodređenost,
$\varepsilon_{Fm}^j(t_i)$...	slučajna greška izvršenog faznog merenja (merni šum).

Pošto prijemnici vrše praćenje satelita pri različitim trenucima prijema i emitovanja signala, modelska simultanost izvršenih merenja obezbeđuje se ako se sve veličine odnose na jedinstvenu, unapred planiranu epohu merenja t_i u sistemu GPS vremena. Očitavanja časovnika prijemnika i satelita povezana su sa planiranim trenutkom vremena izrazima:

$$t_m = t_i + \delta_m(t_i), \quad (2.1.2)$$

$$t^j = t_i + \delta_m(t_i) - \tau(t_m, t^j), \quad (2.1.3)$$

u kojima $\delta_m(t_i)$ predstavlja odstupanje časovnika prijemnika od GPS vremena u epohi t_i , dok je $\tau(t_m, t^j)$ vreme puta signala od satelita do prijemnika koje je funkcija trenutaka emitovanja i prijema. Visoka kratkoročna frekventna stabilnost oscilatora prijemnika i satelita, reda 10^{-11} do 10^{-13} , omogućuje sledeće aproksimacije:

$$\varphi_{Fm}(t_m) = \varphi_{Fm}(t_i) + f_{Fm} \delta_m(t_i), \quad (2.1.4)$$

$$\varphi_F^j(t^j) = \varphi_F^j(t_i) + f_F^j (\delta_m(t_i) - \tau(t_m, t^j)), \quad (2.1.5)$$

koje su dozvoljene zbog toga što će za vreme puta signala nesigurnost frekvencije imati za posledicu faznu grešku od svega 0.0015 faznog ciklusa, što je daleko ispod nivoa mernog šuma. Pored toga, za

mali vremenski period kao što je $\delta_m(t_i)$, frekvencije satelitskog oscilatora f_F^j i oscilatora prijemnika f_{Fm} mogu su izjednačiti sa nominalnom frekvencijom f_F . Sa ovim aproksimacijama, model postaje:

$$\Psi_{Fm}^j(t_i) = \varphi_{Fm}(t_i) - \varphi_F^j(t_i) + f_F \tau(t_m, t^j) + N_{Fm}^j + \varepsilon_{Fm}^j(t_i). \quad (2.1.6)$$

Oscilatori ne mogu biti idealno fazno sinhronizovani zbog odstupanja časovnika prijemnika δ_m i časovnika satelita δ^j od GPS vremenske skale, tako da se faze $\varphi_{Fm}(t_i)$ i $\varphi_F^j(t_i)$ razlikuju po vrednosti iako se odnose na isti trenutak vremena:

$$\varphi_{Fm}(t_i) - \varphi_F^j(t_i) = f_F (\delta^j(t_i) - \delta_m(t_i)). \quad (2.1.7)$$

Ako se pored toga vreme puta signala $\tau(t_m, t^j)$ posmatra kao funkcija trenutka vremena prijema t_m , i razvije u Tejlorov red u okolini programirane epohe merenja:

$$t_m - t^j = \tau(t_m) = \tau(t_i) + \dot{\tau}(t_i) \delta_m(t_i), \quad (2.1.8)$$

dobija se osnovna modelska jednačina faznih merenja u kojoj se sve veličine odnose na isti trenutak vremena:

$$\Psi_{Fm}^j(t_i) = f_F \tau(t_i) - f_F \delta_m(t_i) (1 - \dot{\tau}(t_i)) + f_F \delta^j(t_i) + N_{Fm}^j + \varepsilon_{Fm}^j(t_i). \quad (2.1.9)$$

Formulacija potpune modelske jednačine faznih pseudodužina u linearnim jedinicama, postiže se množenjem faznih merenja odgovarajućom talasnom dužinom λ_F i proširenjem modela orbitalnim, instrumentalnim, atmosferskim i relativističkim uticajima:

$$L_{Fm}^j(t_i) = \rho_m^j(t_i) - c_0 \delta_m(t_i) \left(1 - \frac{\dot{\rho}_m^j(t_i)}{c_0} \right) + c_0 \delta^j(t_i) - I_{Fm}^j(t_i) + T_m^j(t_i) + A_{Fm}^j(t_i), \quad (2.1.10)$$

$$+ O_m^j(t_i) + M_{Fm}^j(t_i) - h_{Fm}(t_i) + h_F^j(t_i) + r_m^j(t_i) + \lambda_F N_{Fm}^j + \omega_{Fm}^j(t_i)$$

sa sledećim značenjem pojedinih članova:

$L_{Fm}^j = \lambda_F \Psi_{Fm}^j$...	fazna pseudodužina,
ρ_m^j	...	geometrijsko rastojanje između satelita u trenutku emitovanja i prijemnika u trenutku prijema signala,
c_0	...	brzina elektromagnetnih talasa u vakuumu,
$\dot{\rho}_m^j$...	brzina promene geometrijskog rastojanja,
I_{Fm}^j	...	uticaj kašnjenja signala pri prolasku kroz jonosferu,
T_m^j	...	uticaj kašnjenja signala pri prolasku kroz troposferu,
A_{Fm}^j	...	uticaj trenutnog položaja faznog centra antene,
O_m^j	...	uticaj greške satelitske orbite, nezavisan od frekvencije nosećeg talasa,
M_{Fm}^j	...	uticaj višestruke refleksije signala,
h_{Fm}	...	uticaj kašnjenja signala pri prolasku kroz hardver prijemnika,
h_F^j	...	uticaj kašnjenja signala pri prolasku kroz hardver satelita,
r_m^j	...	periodični relativistički uticaj, nezavisan od frekvencije nosećeg talasa,
$\omega_{Fm}^j = \lambda_F \varepsilon_{Fm}^j$...	slučajna greška fazne pseudodužine (merni šum).

Kodovi kojima su modulirani noseći talasi omogućuju da se u prijemniku direktno meri vreme puta signala. Osnovni model izvršenog kodnog merenja Δt_{Fm}^j ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\Delta t_{Fm}^j(t_i) &= t_m - \delta_m(t_i) - t^j + \delta^j(t^j) + \varepsilon_{Fm}^j(t_i) \\ &= \tau(t_m, t^j) - \delta_m(t_i) + \delta^j(t^j) + \varepsilon_{Fm}^j(t_i)\end{aligned}\quad (2.1.11)$$

Zahvaljujući visokoj stabilnosti oscilatora, odstupanje časovnika satelita u trenutku emitovanja $\delta^j(t^j)$ praktično se može zameniti odstupanjem u programiranom trenutku $\delta^j(t_i)$. Kada se pored toga vreme puta τ ponovo razvije u Tejlorov red u okolini programirane epohe merenja, dobija se:

$$\Delta t_{Fm}^j(t_i) = \tau(t_i) - \delta_m(t_i)(1 - \dot{\tau}(t_i)) + \delta^j(t_i) + \varepsilon_{Fm}^j(t_i). \quad (2.1.12)$$

Potpuna modelska jednačina kodnih pseudodužina u linearnim jedinicama podrazumeva množenje kodnih merenja brzinom elektromagnetnih talasa u vakuumu c_0 , i proširenjem modela instrumentalnim, atmosferskim i relativističkim uticajima:

$$\begin{aligned}P_{Fm}^j(t_i) &= \rho_m^j(t_i) - c_0 \delta_m(t_i) \left(1 - \frac{\dot{\rho}_m^j(t_i)}{c_0}\right) + c_0 \delta^j(t_i) + I_{Fm}^j(t_i) + T_m^j(t_i) \\ &+ A_{Fm}^j(t_i) + O_m^j(t_i) + M_{Fm}^j(t_i) - h_{Fm}(t_i) + h_F^j(t_i) + r_m^j(t_i) + \omega_{Fm}^j(t_i)\end{aligned}\quad (2.1.13)$$

Strukture funkcionalnih modela kodnih i faznih pseudodužina veoma su slične. Razlika se pre svega odnosi na suprotan predznak člana koji opisuje uticaj jonosferske refrakcije I_{Fm}^j , i na činjenicu da su kodna merenja jednoznačna, zbog čega ne sadrže član sa celim brojem talasnih dužina $\lambda_F N_{Fm}^j$.

2.1.2 Parametrizacija geometrijskog rastojanja

Član ρ_m^j u funkcionalnim modelima odnosi se na geometrijsko rastojanje između srednjeg položaja faznog centra prijemne antene i položaja faznog centra predajne satelitske antene:

$$\rho_m^j(t_i) = \left| \bar{\mathbf{x}}^j(t_i^j) - \bar{\mathbf{x}}_m(t_i) - \Delta \bar{\mathbf{x}}_{mh}(t_i) + \Delta \bar{\mathbf{x}}_e^j(t_i^j) \right|, \quad (2.1.14)$$

gde su:

- t_i^j ... trenutak emitovanja onog signala koji je kasnije primljen u programiranom trenutku prijema t_i ,
- $\bar{\mathbf{x}}^j$... vektor položaja centra mase satelita u trenutku emitovanja signala,
- $\bar{\mathbf{x}}_m$... vektor položaja stanice u trenutku prijema signala,
- $\Delta \bar{\mathbf{x}}_{mh}$... vektor relativnog položaja srednjeg faznog centra prijemne antene u odnosu na stanicu u trenutku prijema signala,
- $\Delta \bar{\mathbf{x}}_e^j$... vektor relativnog položaja faznog centra predajne antene u odnosu na centar mase satelita u trenutku emitovanja signala,

i pri čemu su svi vektori položaja definisani u jedinstvenom, inercijalnom referentnom sistemu. Vektori $\Delta \bar{\mathbf{x}}_{mh}$ i $\Delta \bar{\mathbf{x}}_e^j$ tretiraju se kao ekscentriciteti, i njihovi intenziteti se određuju u odgovarajućim modelima popravaka. Međutim, vektore položaja stanice i satelita moguće je dalje parametrizovati.

Vektor položaja stanice

Položaj stanice na fizičkoj površi Zemlje najpogodnije se izražava koordinatama \mathbf{x}_m u terestričkom referentnom sistemu. Veza između ovog položaja i položaja iste stanice u inercijalnom referentnom sistemu $\bar{\mathbf{x}}_m$, ostvaruje se serijom transformacija oblika (Mueller 1980):

$$\bar{\mathbf{x}}_m(t_i) = \mathbf{P}(\zeta_p, \theta_p, Z_p) \cdot \mathbf{N}(\delta\varepsilon, \delta\psi) \cdot \mathbf{S}(\alpha) \cdot \mathbf{Y}(\theta_x, \theta_y) \cdot \mathbf{x}_m(t_i). \quad (2.1.15)$$

Pojedine matrice u ovim transformacijama imaju sledeća značenja:

- \mathbf{P} ... matrica rotacije zbog precesije, sa članovima koji su funkcija precesionih parametara ζ_p , θ_p i Z_p ,

- N** ... matrica rotacije zbog nutacije, sa članovima koji su funkcija nutacije u nagibu ekliptike $\delta\varepsilon$ i nutacije u longitudi $\delta\psi$,
- S** ... matrica rotacije Zemlje, sa članovima koji su funkcija časovnog ugla tačke prolećne ravnodnevnice,
- Y** ... matrica rotacija zbog kretanja polova, sa članovima koji su funkcija komponenti položaja pola θ_X i θ_Y .

Osim toga, sam položaj stanice u terestričkom referentnom sistemu nije konstantan zbog niza geofizičkih i drugih uticaja, tako da se može modelirati kao:

$$\mathbf{x}_m(t_i) = \mathbf{x}_m(t_0) + \dot{\mathbf{x}}_m(t_0) \cdot (t_i - t_0) + \Delta\mathbf{x}_{mT}(t_i), \quad (2.1.16)$$

gde t_0 označava referentnu epohu, $\dot{\mathbf{x}}_m$ brzinu promene položaja stanice kao posledicu neotektonskih i seizmičkih procesa, dok je $\Delta\mathbf{x}_{mT}$ promena položaja stanice usled plimatskog disanja Zemljine kore, koja je sama po sebi funkcija položaja Sunca i Meseca i reoloških parametara Zemljine kore.

Vektor položaja satelita

Kretanje satelita u inercijalnom prostoru opisuje se vektorskom diferencijalnom jednačinom drugog reda (*Kaula 1962; Schneider 1988*):

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{q}), \quad (2.1.17)$$

u kojoj $\bar{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}}$ i $\ddot{\mathbf{x}}$ predstavljaju vektore položaja, brzine i ubrzanja satelita respektivno, dok je \mathbf{q} vektor nepoznatih početnih položaja i brzina, i parametara modela gravitacionih i negravitacionih sila. To znači da se brzina i položaj satelita u svakom proizvoljnom trenutku vremena mogu odrediti numeričkom integracijom:

$$\dot{\mathbf{x}}^j(t^j) = \dot{\mathbf{x}}^j(t_0) + \int_{t_0}^{t^j} \ddot{\mathbf{x}}(t) dt, \quad \bar{\mathbf{x}}^j(t^j) = \bar{\mathbf{x}}^j(t_0) + \int_{t_0}^{t^j} \dot{\mathbf{x}}(t) dt, \quad (2.1.18)$$

ako je zadat vektor početnih položaja i brzine, i ako su uz to poznati i modeli poremećajnih sila. Najznačajnije parametre u modelima gravitacionih uticaja predstavljaju harmonijski koeficijenti u razvoju potencijala sile Zemljine teže, dok su to kod negravitacionih uticaja parametri kojima se modelira direktni i indirektni pritisak Sunčevog zračenja.

Prema tome, geometrijsko rastojanje ρ_m^j je u opštem slučaju veoma kompleksna funkcija vremena t i hiper vektora parametara \mathbf{p} :

$$\mathbf{p}^T = [\mathbf{p}_{PN} \quad \mathbf{p}_{SY} \quad \mathbf{p}_{VT} \quad \mathbf{p}_{RP} \quad \mathbf{p}_{GN} \quad \mathbf{p}_0]^T, \quad (2.1.19)$$

sastavljenog od vektora precesionih i nutacionih parametara \mathbf{p}_{PN} , parametara Zemljine rotacije \mathbf{p}_{SY} , parametara tektonskih brzina \mathbf{p}_{VT} , reoloških parametara Zemljine kore \mathbf{p}_{RP} , parametara gravitacionih i negravitacionih uticaja \mathbf{p}_{GN} i vektora referentnih položaja, brzina i pomoćnih parametara \mathbf{p}_0 . Međutim, fazna i kodna GPS merenja nisu podjednako osetljiva na sve navedene parametre, tako da njihov izbor diktiraju uslovi kao što su ciljevi projekta, postavljena tačnost, upotrebljeni prijemnici, trajanje opažanja, geografska razmeštenost stanica i njihova međusobna rastojanja.

2.1.3 Jednačina vremenskog kašnjenja

Računanje geometrijskog rastojanja ρ_m^j podrazumeva poznavanje položaja satelita u trenutku emitovanja signala. Određivanje trenutka vremena emitovanja signala pri poznatom trenutku prijema vrši se pomoću jednačine vremenskog kašnjenja.

Vreme puta signala iznosi:

$$\tau = \frac{\rho}{c_0} = \frac{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^j|}{c_0}, \quad (2.1.20)$$

pri čemu \mathbf{x}_m označava vektor položaja prijemnika u trenutku prijema t_m , a \mathbf{x}^j vektor položaja satelita u trenutku emitovanja signala t^j . Pomoću parcijalnog izvoda vremena puta:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t^j} = -\frac{1}{\rho c_0} (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^j)^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}^j}{\partial t^j} \right) = -\frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^j)^T}{\rho c_0} \dot{\mathbf{x}}^j, \quad (2.1.21)$$

dobija se iterativni izraz za određivanje trenutka emitovanja signala, koji za k -tu iteraciju glasi:

$$t_{(k)}^j = t_m - \tau = t_m - \frac{\rho}{c_0} - \frac{\partial \tau}{\partial t^j} (t_{(k)}^j - t_{(k-1)}^j). \quad (2.1.22)$$

Uzimajući u obzir periodični relativistički uticaj na kašnjenje signala Δt_{rel} , i zanemarujući atmosferske uticaje koji čak i pri maksimalnoj vrednosti od $0.3\mu s$ imaju za posledicu grešku položaja satelita manju od $1mm$, jednačina vremenskog kašnjenja dobija oblik:

$$t_{(k)}^j \left(1 - \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^j)^T}{\rho c_0} \dot{\mathbf{x}}^j \right) = t_m - t_{(k-1)}^j - \frac{\rho}{c_0} + \left(1 - \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^j)^T}{\rho c_0} \dot{\mathbf{x}}^j \right) t_{(k-1)}^j - \Delta t_{rel}, \quad (2.1.23)$$

odnosno nakon rešavanja po $t_{(k)}^j$:

$$t_{(k)}^j = t_{(k-1)}^j + \frac{t_m - t_{(k-1)}^j - \frac{\rho}{c_0} - \Delta t_{rel}}{1 - \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^j)^T}{\rho c_0} \dot{\mathbf{x}}^j}. \quad (2.1.24)$$

Iterativni proces konvergira veoma brzo, a naročito ako se za početnu vrednost trenutka emitovanja signala usvoji vrednost sračunata na osnovu prosečnog vremena puta od $0.075s$.

2.2 Linearne kombinacije merenja

2.2.1 Dvofrekventne linearne kombinacije

Prijemnici kojima se mere fazne i kodne pseudodužine na oba noseća talasa pružaju mogućnost formiranja linearnih kombinacija koje u poređenju sa jednofrekventnim merenjima poseduju mnoge praktične prednosti. Opšti oblik takve dvofrekventne linearne kombinacije ψ_{ij} glasi:

$$\psi_{ij} = i\psi_1 + j\psi_2, \quad (2.2.1)$$

gde ψ_1 i ψ_2 označavaju fazna merenja na prvoj i drugoj frekvenciji, dok su i i j proizvoljni koeficijenti. Kombinovana fazna neodređenost N_{ij} , frekvencija f_{ij} i efektivna talasna dužina λ_{ij} iznose respektivno:

$$N_{ij} = iN_1 + jN_2, \quad (2.2.2)$$

$$f_{ij} = if_1 + jf_2, \quad (2.2.3)$$

$$\lambda_{ij} = \frac{c_0}{f_{ij}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{i\lambda_2 + j\lambda_1}. \quad (2.2.4)$$

Ako su I_1 i I_2 jonosferski uticaji u originalnim faznim merenjima, jonosferski uticaj I_{ij} u dvofrekventnoj linearnoj kombinaciji ima iznos koji se direktno računa po izrazu:

$$I_{ij} = \frac{if_1 I_1 + jf_2 I_2}{if_1 + jf_2}. \quad (2.2.5)$$

Međutim, ukoliko se za jedinični jonosferski uticaj usvoji I_1 , tada će relativnu meru jonosferskog uticaja u dvofrekventnoj linearnoj kombinaciji predstavljati jonosferski faktor k_I :

$$k_I = \frac{I_{ij}}{I_1} = \frac{f_1 if_2 + jf_1}{f_2 if_1 + jf_2}. \quad (2.2.6)$$

Pod pretpostavkom da su standardi faznih merenja na obe frekvencije međusobno jednaki u faznim ciklusima, njihova veza u linearnim jedinicama biće:

$$\sigma_1 \lambda_2 = \sigma_2 \lambda_1, \quad (2.2.7)$$

tako da se standard dvofrekventne linearne kombinacije σ_{ij} dobija direktnom primenom zakona o prenosu grešaka:

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda_2 \sqrt{i^2 + j^2}}{i\lambda_2 + j\lambda_1} \sigma_1. \quad (2.2.8)$$

Međutim, kada se standard faznog merenja na prvoj frekvenciji σ_1 usvoji kao jedinični, relativnu meru tačnosti može predstavljati faktor šuma k_σ :

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_1} = \frac{\lambda_2 \sqrt{i^2 + j^2}}{i\lambda_2 + j\lambda_1}. \quad (2.2.9)$$

Jonosferski faktor i faktor šuma omogućuju međusobno upoređenje različitih dvofrekventnih linearnih kombinacija. Pošto je teorijski moguće definisati beskonačno mnogo linearnih kombinacija, izbor njihovih koeficijenata obično se sužava ograničenjima u pogledu celobrojnosti, efektivne talasne dužine, mogućnosti eliminacije jonosferske refrakcije i zahtevima za što manjim standardom.

Linearna kombinacija L3

Ova dvofrekventna kombinacija konstruiše se da bi se eliminisao jonosferski uticaj prvog reda. Ako se kompletni izrazi za fazne pseudodužine na obe frekvencije napišu u redukovanom obliku:

$$L_1 = \rho - I_1 + \lambda_1 N_1, \quad (2.2.10)$$

$$L_2 = \rho - I_2 + \lambda_2 N_2, \quad (2.2.11)$$

a zatim pomnože kvadratima odgovarajućih frekvencija i potom oduzmu, dobija se linearna kombinacija:

$$L_3 = \frac{f_1^2 L_1 - f_2^2 L_2}{f_1^2 - f_2^2} = \rho + \frac{f_2^2 I_2 - f_1^2 I_1}{f_1^2 - f_2^2} + \frac{f_1^2 \lambda_1 N_1 - f_2^2 \lambda_2 N_2}{f_1^2 - f_2^2}. \quad (2.2.12)$$

Zbog toga što je:

$$f_1^2 I_1 = f_2^2 I_2, \quad (2.2.13)$$

sledi da linearna kombinacija L_3 ne sadrži jonosferski uticaj prvog reda. Formiranje ove dvofrekventne linearne kombinacije na nivou faznih merenja dovodi do sledećeg izbora koeficijenata:

$$\Psi_{L3} = \Psi_1 - \frac{f_2}{f_1} \Psi_2. \quad (2.2.14)$$

Pošto koeficijent uz fazno merenje na drugoj frekvenciji nije celobrojan, fazna neodređenost linearne kombinacije L_3 ne može se napisati u obliku $\lambda_3 N_3$ a da N_3 bude ceo broj. I pored toga, ona na većim rastojanjima, na kojima jonosferska refrakcija predstavlja dominantni izvor grešaka, obezbeđuje visoku tačnost pozicioniranja.

Linearna kombinacija L4

Ako se izrazi za fazne pseudodužine na obe frekvencije oduzmu, dobija se posebna dvofrekventna linearna kombinacija iz koje je eliminisana geometrija predstavljena rastojanjem ρ :

$$L_4 = L_1 - L_2 = \left(\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1 \right) I_1 + \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2. \quad (2.2.15)$$

S obzirom na to da članovi koji sadrže fazne neodređenosti ostaju konstantni tokom vremena, bilo kakva promena linearne kombinacije L_4 rezultat je prevashodno promene uticaja jonosfere, zbog čega se ova kombinacija naziva još i jonosferskim signalom. U slučaju približno normalnih jonosferskih uslova, nagle promene vrednosti linearne kombinacije L_4 ukazuju na fazne skokove, tako da se mogu iskoristiti u prethodnoj analizi mernog materijala.

Formiranje ove linearne kombinacije na nivou faznih merenja postiže se sledećim izborom koeficijenata:

$$\Psi_{L4} = \Psi_1 - \frac{f_1}{f_2} \Psi_2, \quad (2.2.16)$$

odakle sledi da ni u jonosferskom signalu fazna neodređenost nije ceo broj.

Linearna kombinacija L5

Ova dvofrekventna linearna kombinacija formira se na osnovu faznih pseudodužina i originalnih faznih merenja po sledećem obrascu:

$$L_5 = \frac{f_1 L_1 - f_2 L_2}{f_1 - f_2}, \quad (2.2.17)$$

$$\Psi_{L5} = \Psi_1 - \Psi_2. \quad (2.2.18)$$

Njena glavna karakteristika je relativno velika talasna dužina (86.2cm), koja znatno olakšava rešavanje faznih neodređenosti, dok je istovremeno jonosferski uticaj na približno istom nivou kao kod originalnih nosećih talasa. Osim toga, celobrojnost koeficijenata ima za posledicu i celobrojnost fazne neodređenosti:

$$N_5 = N_1 - N_2. \quad (2.2.19)$$

Linearna kombinacija L6

Za razliku od ostalih, linearna kombinacija L_6 formira se u vidu zbira originalnih merenja:

$$L_6 = \frac{f_1 L_1 + f_2 L_2}{f_1 + f_2}, \quad (2.2.20)$$

$$\Psi_{L6} = \Psi_1 + \Psi_2, \quad (2.2.21)$$

$$N_6 = N_1 + N_2. \quad (2.2.22)$$

Talasna dužina ove linearne kombinacije je mala (10.7cm), ali je fazna neodređenost N_6 celobrojna, i ima interesantno svojstvo da je iste parnosti kao i fazna neodređenost N_5 . Pri poznatim celobrojnim faznim ciklusima N_5 i N_6 , moguće je direktno rešavanje faznih neodređenosti originalnih merenja:

$$N_1 = \frac{N_5 + N_6}{2}, \quad (2.2.23)$$

$$N_2 = \frac{N_6 - N_5}{2}. \quad (2.2.24)$$

Osnovna svojstva navedenih dvofrekventnih linearnih kombinacija data su u tabeli 2.1.

TABELA 2.1. Osnovna svojstva dvofrekventnih linearnih kombinacija.

L	i	j	$\lambda [cm]$	k_σ	k_I
L_1	1	0	19.0	1.000	1.000
L_2	0	1	24.4	1.263	1.647
L_3	1	$-f_2/f_1$	48.5	3.211	0.000
L_4	1	$-f_1/f_2$	-	-	-
L_5	1	-1	86.2	6.368	-1.284
L_6	1	1	10.2	0.789	1.284

Analogno faznim pseudodužinama, mogu se definisati i odgovarajuće dvofrekventne linearne kombinacije kodnih pseudodužina:

$$P_3 = \frac{f_1^2 P_1 - f_2^2 P_2}{f_1^2 - f_2^2}, \quad (2.2.25)$$

$$P_4 = P_1 - P_2, \quad (2.2.26)$$

$$P_5 = \frac{f_1 P_1 - f_2 P_2}{f_1 - f_2}, \quad (2.2.27)$$

$$P_6 = \frac{f_1 P_1 + f_2 P_2}{f_1 + f_2}. \quad (2.2.28)$$

Ove linearne kombinacije ne koriste se izolovano za potrebe geodetskog pozicioniranja, već uglavnom kao pomoćno sredstvo u obradi faznih pseudodužina. Primer jedne hibridne dvofrekventne fazno-kodne kombinacije predstavlja linearna kombinacija L_{MW} (Melbourne-Wuebena):

$$L_{MW} = L_5 - P_6 = \frac{f_1 L_1 - f_2 L_2}{f_1 - f_2} - \frac{f_1 P_1 + f_2 P_2}{f_1 + f_2}, \quad (2.2.29)$$

koja je teorijski konstantna jer su eliminisani vremenski zavisni uticaji geometrije, jonosfere, troposfere i odstupanja časovnika, i ima vrednost fazne neodređenosti N_5 . Zbog toga se njene vremenske serije mogu upotrebiti za otkrivanje i korekciju faznih skokova.

2.2.2 Modeli razlika merenja

Razlog formiranja razlika izvršenih merenja leži u prostornoj ili vremenskoj korelisanosti, zbog čega se u njima eliminišu, ili bar znatno redukuju uticaji određenih izvora grešaka. Same razlike mogu se formirati na osnovu merenja koja se odnose na dva prijemnika, dva satelita ili dve vremenske epohe, a dobijaju se korišćenjem operatora Δ , ∇ i δ respektivno (Wells et al. 1986). Princip formiranja

razlika podjednako važi kako za originalne pseudodužine, tako i za njihove dvofrekventne linearne kombinacije.

Proste razlike

Razlika faznih pseudodužina izmerenih od dva prijemnika m i n do istog satelita j naziva se prostom razlikom interferometrijskog tipa:

$$\Delta L_{Fmn}^j(t_i) = L_{Fm}^j(t_i) - L_{Fn}^j(t_i). \quad (2.2.30)$$

Potpuni funkcionalni model proste razlike ovog tipa glasi:

$$\begin{aligned} \Delta L_{Fmn}^j(t_i) = & \Delta \rho_{mn}^j(t_i) - c_0(\delta_m(t_i) - \delta_n(t_i)) + \delta_m(t_i)\dot{\rho}_m^j(t_i) - \delta_n(t_i)\dot{\rho}_n^j(t_i) \\ & - \Delta I_{Fmn}^j(t_i) + \Delta T_{mn}^j(t_i) + \Delta A_{Fmn}^j(t_i) + \Delta O_{mn}^j(t_i) + P_{mn}^j(t_i) \\ & + \Delta M_{Fmn}^j(t_i) - (h_{Fm}(t_i) - h_{Fn}(t_i)) + \lambda_F \Delta N_{Fmn}^j + \omega_{\Delta L}(t_i) \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Prosta razlika nije opterećena uticajima koji se odnose na satelitski časovnik, kašnjenje signala pri prolasku kroz hardver satelita i periodične relativističke efekte. Jonosferski i troposferski uticaji prostorno su korelisani, zbog čega im je u prostoju razlici intenzitet znatno redukovan. To, međutim, nije slučaj sa višestrukom refleksijom signala i kašnjenjem signala pri prolasku kroz hardver prijemnika, jer je intenzitet ovih uticaja specifičan za svaku lokaciju odnosno prijemnik. Dominantan uticaj grešaka časovnika prijemnika u prostoju razlici sastoji se u članu koji sadrži brzinu elektromagnetnih talasa. Članovi sa brzinama promena rastojanja manji su po intenzitetu od dominantnog više od $3 \cdot 10^5$ puta. Pojava novog člana P predstavlja uticaj greške koordinata prve stanice koje se u postupku obrade uzimaju kao poznate.

Ukoliko se oduzimaju fazne pseudodužine izmerene od istog prijemnika do dva satelita j i k , dobija se prosta razlika doplerskog tipa:

$$\begin{aligned} \nabla L_{Fm}^{jk}(t_i) = & L_{Fm}^j(t_i) - L_{Fm}^k(t_i) \\ = & \nabla \rho_m^{jk}(t_i) + \delta_m(t_i)(\dot{\rho}_m^j(t_i) - \dot{\rho}_m^k(t_i)) + c_0(\delta^j(t_i) - \delta^k(t_i)) \\ & - \nabla I_{Fm}^{jk}(t_i) + \nabla T_m^{jk}(t_i) + \nabla A_{Fm}^{jk}(t_i) + \nabla O_m^{jk}(t_i) + \nabla M_{Fm}^{jk}(t_i) \\ & + (h_F^j(t_i) - h_F^k(t_i)) + \lambda_F \nabla N_{Fm}^{jk} + \omega_{\nabla L}(t_i) \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

U ovoj prostoju razlici eliminisan je dominantni član koji se odnosi na odstupanje časovnika prijemnika. Redukcija uticaja jonosfere i troposfere nije tako izražena kao u prostim razlikama interferometrijskog tipa, dok je intenzitet višestruke refleksije signala približno istog reda veličine. Prisustvo grešaka časovnika prijemnika i satelita zahteva dodatno modeliranje, zbog čega se proste razlike koriste za analizu mernog materijala, ali ne i za potrebe geodetskog pozicioniranja.

Dvostruke razlike

Dvostruke razlike formiraju se oduzimanjem prostih interferometrijskih razlika koje se odnose na dva satelita, odnosno prostih doplerskih razlika koje se odnose na dva prijemnika:

$$\Delta \nabla L_{Fmn}^{jk}(t_i) = \Delta L_{Fmn}^j(t_i) - \Delta L_{Fmn}^k(t_i) = \nabla L_{Fm}^{jk}(t_i) - \nabla L_{Fn}^{jk}(t_i). \quad (2.2.33)$$

Potpuni funkcionalni model dvostrukih razlika ima oblik:

$$\begin{aligned} \Delta \nabla L_{Fmn}^{jk}(t_i) = & \Delta \nabla \rho_{mn}^{jk}(t_i) + \delta_m(t_i)(\dot{\rho}_m^j(t_i) - \dot{\rho}_m^k(t_i)) - \delta_n(t_i)(\dot{\rho}_n^j(t_i) - \dot{\rho}_n^k(t_i)) \\ & - \Delta \nabla I_{Fmn}^{jk}(t_i) + \Delta \nabla T_{mn}^{jk}(t_i) + \Delta \nabla A_{Fmn}^{jk}(t_i) + \Delta \nabla O_{mn}^{jk}(t_i) + \nabla P_{mn}^{jk}(t_i) \\ & + \Delta \nabla M_{Fmn}^{jk}(t_i) + \lambda_F \Delta \nabla N_{Fmn}^{jk} + \omega_{\Delta \nabla L}(t_i) \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

U dvostrukim razlikama eliminisani su dominantni članovi koji se odnose na odstupanja časovnika prijemnika, kao i na kašnjenja signala pri prolasku kroz hardver prijemnika. Intenzitet ostalih uticaja,

sa izuzetkom višestruke refleksije, dodatno je redukovan u poređenju sa prostim razlikama, što dvostruke razlike čini najpogodnijim mernim veličinama za potrebe geodetskog pozicioniranja.

Trostruke razlike

Trostrukom razlikom naziva se razlika dvostrukih razlika koje se odnose na dve uzastopne epohe:

$$\delta\Delta\nabla L_{Fmn}^{jk}(t_i) = \Delta\nabla L_{Fmn}^{jk}(t_{i+1}) - \Delta\nabla L_{Fmn}^{jk}(t_i). \quad (2.2.35)$$

Epoha merenja koja se pridružuje trostrukoj razlici stvar je samo pogodnosti u notaciji, jer se trostruka razlika inače odnosi na vremenski interval $[t_i, t_{i+1}]$. Potpuni funkcionalni model ove razlike ima sledeći izgled:

$$\begin{aligned} \delta\Delta\nabla L_{Fmn}^{jk}(t_i) = & \delta\Delta\nabla\rho_{mn}^{jk}(t_i) \\ & + \delta_m(t_{i+1})(\dot{\rho}_m^j(t_{i+1}) - \dot{\rho}_m^k(t_{i+1})) - \delta_m(t_i)(\dot{\rho}_m^j(t_i) - \dot{\rho}_m^k(t_i)) \\ & - \delta_n(t_{i+1})(\dot{\rho}_n^j(t_{i+1}) - \dot{\rho}_n^k(t_{i+1})) + \delta_n(t_i)(\dot{\rho}_n^j(t_i) - \dot{\rho}_n^k(t_i)) \\ & - \delta\Delta\nabla I_{Fmn}^{jk}(t_i) + \delta\Delta\nabla T_{mn}^{jk}(t_i) + \delta\Delta\nabla A_{Fmn}^{jk}(t_i) + \delta\Delta\nabla O_{mn}^{jk}(t_i) \\ & + \delta\Delta\nabla P_{mn}^{jk}(t_i) + \delta\Delta\nabla M_{Fmn}^{jk}(t_i) + \omega_{\delta\Delta\nabla L}(t_i) \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

U trostrukim razlikama praktično su prisutni isti uticaji kao i u dvostrukim razlikama. Važan izuzetak odnosi se na faznu neodređenost koja je konstantna tokom vremena, tako da se eliminiše prilikom formiranja trostrukih razlika. Ukoliko tokom merenja dođe do pojave faznog skoka ili prekida prijema signala, greška će opteretiti samo jednu trostruku razliku, dok će ista situacija uzrokovati konstantnu grešku za sve naredne dvostruke razlike. Ova osobina čini trostruke razlike pogodnim veličinama za prethodnu analizu mernog materijala, ali se zbog znatno niže tačnosti ne koriste za potrebe geodetskog pozicioniranja.

2.3 Stohastički model GPS merenja

2.3.1 Glavne komponente grešaka merenja

Stohastički model kodnih i faznih pseudodužina definišu stohastička svojstva mernog šuma uz preduslov da su iz rezultata merenja eliminisani poznati linearni i periodični sistematski uticaji. Izvori slučajnih i sistematskih uticaja nalaze se kako u kosmičkoj i korisničkoj GPS sistemskoj komponenti, tako i u sredini prostiranja elektromagnetnih GPS signala.

Sistematski uticaji kosmičkog GPS segmenta

Izvor najvećih sistematskih uticaja u kosmičkom segmentu predstavljaju satelitski oscilatori. Odstupanje njihovih vremenskih skala kontinuirano se određuje u odnosu na skup časovnika kontrolnog segmenta, i dostavlja korisnicima preko navigacione poruke u formi prognoziranih polinomskih koeficijenata, sa tačnošću od oko $20ns$, odnosno $6m$ u izmerenoj pseudodužini.

S obzirom na ovako veliki rezidualni efekat, moguće je primeniti u principu dve tehnike obrade: greške satelitskih časovnika mogu se oceniti zajedno sa drugim parametrima modela, ili se mogu eliminisati formiranjem prostih razlika interferometrijskog tipa. Alternativni postupak predstavljala bi upotreba preciznih efemerida jer one sadrže informacije o stanju časovnika svakog satelita koje su tačnosti reda $0.1ns$. Sva tri načina u potpunosti eliminišu uticaj grešaka satelitskog časovnika na merenu pseudodužinu.

U izvore sistematskih uticaja kosmičkog segmenta ubrajaju se još i kašnjenje signala pri prolasku kroz hardver satelita i odstupanje emitovanih ili zadatih efemerida od istinitih satelitskih položaja. Kašnjenje signala pri prolasku kroz hardver satelita neodvojivo je od greške satelitskog časovnika, tako da se određuje ili eliminiše zajedno sa njom. Greška efemerida ne spada u merne greške, već sistematski opterećuje slobodne članove linearizovanog funkcionalnog modela. Relativna greška

pozicioniranja postaje na taj način proporcionalna količniku grešaka efemerida i visina leta satelita. Efemeride iz sastava navigacione poruke imaju tačnost bolju od $3m$, dok je tačnost preciznih efemerida bolja od $5cm$. Uticaj grešaka satelitskih položaja eliminiše se prema tome upotrebom preciznih efemerida, formiranjem razlika merenja, dužim vremenom opažanja, ili eksplicitnim ocenjivanjem satelitskih putanja zajedno sa ostalim parametrima.

Sistematski uticaji korisničkog GPS segmenta

Izvori sistematskih uticaja u korisničkom segmentu odnose se na časovnik prijemnika, kašnjenje signala pri prolasku kroz hardver prijemnika, varijacije faznog centra prijemne antene i odstupanje usvojenog položaja stanice od prave vrednosti.

Za razliku od satelitskih časovnika, časovnici prijemnika baziraju se na kvarcnim oscilatorima koji su ekonomičniji, ali zato i manje tačniji i stabilniji. Većina savremenih GPS prijemnika autonomno određuje odstupanje sopstvenih vremenskih skala od sistemskog GPS vremena, i održava ga u granicama od $1ms$. Sinhronizacija časovnika prijemnika ostvaruje se tom prilikom tehnikom apsolutnog pozicioniranja, sa tačnošću boljom od $1\mu s$, što u izmerenoj pseudodužini iznosi manje od $30m$. Greška zbog kašnjenja signala pri prolasku kroz kablove i hardver prijemnika neodvojiva je od odstupanja časovnika od sistemskog vremena, i određuje se zajedno sa njim.

Relativno velika rezidualna greška časovnika prijemnika eliminiše se principijelno na isti način kao i greška satelitskog časovnika, eksplicitnim ocenjivanjem u svakoj epohi merenja ili formiranjem prostih razlika doplenskog tipa. U okviru posebnih istraživanja, greška časovnika može se eliminisati i upotrebom eksternog visokostabilnog oscilatora, jer gotovo svaki prijemnik ima predviđenu mogućnost priključenja senzora raznih tipova.

Prijemne GPS antene izrađuju se tako da im se fazni centri po mogućstvu poklapaju sa geometrijskim. Međutim, trenutni položaj faznih centara antena funkcija je pravaca prema satelitima sa kojih se signali primaju, a zbog promenljive satelitske geometrije istovremeno i funkcija vremena. Iako je kod savremenih antena odstupanje trenutnog faznog centra od njegovog srednjeg položaja manje od $1cm$, posebnim programom ispitivanja moguće je odrediti vrednost greške pseudodužine za određeni tip antene u zavisnosti od azimuta i visine satelita, i eliminisati je uvođenjem popravke.

U postupcima relativnog pozicioniranja ocenjivanje položaja tačaka vrši se u odnosu na jednu referentnu tačku. Njen položaj je neophodan za linearizaciju, i mora biti poznat sa što manjim odstupanjem od pravog položaja u sistemu efemerida GPS satelita. Ovo odstupanje ne predstavlja grešku merenja već sistematski uticaj na rezultate relativnog pozicioniranja. Postupak apsolutnog pozicioniranja kodnim pseudodužinama može obezbediti tačnost položaja referentne tačke bolju od $5m$, dok se relativnim pozicioniranjem greška smanjuje na nekoliko centimetara. Kao i u slučaju efemerida, relativna greška rezultata pozicioniranja proporcionalna je odnosu greške položaja referentne tačke i visine leta satelita.

Sistematski uticaji sredine prostiranja signala

Gustina gasova atmosfere i fizičko hemijski procesi koji se u njoj odigravaju, imaju za posledicu promenu brzine kretanja i oblika putanje elektromagnetnih talasa u odnosu na vakuum, a samim tim i sistematsku grešku u izmerenoj pseudodužini. Atmosferski regioni sa najznačajnijim refrakcionim uticajima su jonosfera i troposfera.

Jonosfera je deo atmosferskog omotača karakterističan po jonizaciji gasova pod uticajem ultraljubičastog Sunčevog zračenja, što za posledicu ima veću ili manju koncentraciju slobodnih elektrona. U interakciji sa jonima, elektromagnetni talasi menjaju svoju brzinu, pravac kretanja i polarizaciju u zavisnosti od svoje frekvencije. Karakteristika je jonosferskog uticaja da sistematski skraćuje merene fazne pseudodužine dok istovremeno produžava kodne pseudodužine. Veličina sistematske greške u pravcu zenita iznosi oko $30m$, dok je u pravcu horizonta do tri puta veća. Dnevni ekstrem jonosferske sistematske greške pet do deset puta je veći od iznosa tokom noći. Jonosferska

refrakcija pokazuje dnevne i sezonske varijacije, a povezana je i sa jedanaestogodišnjim periodom ciklusa Sunčevih pega.

Jonosferski sistematski uticaj otklanja se pre svega unošenjem popravaka. Popravke se računaju na osnovu koeficijenta iz navigacione poruke, interpolacijom pomoću ocena jonosferskih uticaja na mestima stalnih opažaćkih stanica, ili sa takozvanih jonosferskih karata. Pošto su jonosferski uticaji korelisani u prostoru i vremenu, oni se znatno redukuju u prostim, dvostrukim i trostrukim razlikama. U situaciji kada se raspolaže dvofrekventnim merenjima, formiranjem odgovarajuće linearne kombinacije postiže se gotovo potpuna eliminacija jonosferskog uticaja prvog reda.

Za razliku od jonosfere troposfera nije disperzivna sredina, tako da pravac i brzina kretanja elektromagnetnih talasa zavise isključivo od atmosferskih parametara. Hidrostatička komponenta, koja čini oko 90% ukupnog troposferskog uticaja, može se prognozirati veoma pouzdano i sa visokom tačnošću. Preostalih 10% čini uticaj varijabilne vlažne komponente koji se veoma teško opisuje modelom. Uticaj troposferske refrakcije na merene pseudoduzine iznosi u pravcu zenita i na nivou mora oko 2.3m, dok je u pravcu horizonta do 30m.

Troposferska refrakcija najčešće se eliminiše unošenjem popravaka koje se računaju na osnovu nekog od brojnih troposferskih modela, pri čemu se neophodni atmosferski parametri mere ili određuju iz modela standardne atmosfere. Kod troposferskih uticaja prostorna dekorelacija brzo nastupa već pri rastojanjima od 15km, tako da formiranje razlika merenja redukuje odgovarajuću grešku samo na kraćim dužinama. Vlažnu komponentu troposferskog uticaja moguće je i direktno meriti takozvanim radiometrima vodene pare, ali to nije uobičajena praksa zbog visokih troškova i neekonomičnog postupka. Konačno, za potrebe visokotačnih radova rezidualni troposferski uticaji mogu se opisati proširenim funkcionalnim modelom.

Slučajni uticaji

Pod izvorima slučajnih uticaja na GPS kodna i fazna merenja podrazumevaju se pre svega procesi u elektronskim sklopovima prijemnika i pojava višestruke refleksije signala. Njihovo dejstvo ima za posledicu slučajne greške merenja koje se označavaju kao komponente takozvanog mernog šuma. Pored njih, u sastav mernog šuma ulaze i nemodelirani sistematski uticaji, kao i nepoznate rezidualne greške preostale nakon nepotpune eliminacije ili redukcije sistematskih uticaja.

Višestruka refleksija je pojava odbijanja signala od glatkih vodenih, metalnih ili nekih drugih površina u okolini GPS antene. Interferencija odbijenih talasa i talasa koje antena direktno prima ima za rezultat kombinovani signal sa faznim pomakom $\Delta\varphi_m$, čija se veličina može odrediti po izrazu (*Hofmann Wellenhof et al. 1994*):

$$\tan \Delta\varphi_m = \frac{\beta \sin \Delta\varphi}{1 + \beta \cos \Delta\varphi}, \quad (2.3.1)$$

pri čemu $\Delta\varphi$ označava razliku faza direktnog i odbijenog talasa, dok je β koeficijent koji izražava odnos jačine odbijenog i direktnog signala. Teorijski maksimum greške usled višestruke refleksije iznosi oko 150m za C/A kodne pseudoduzine odnosno oko 15m za P kodne pseudoduzine, ali su tipične vrednosti obično manje od 10m. Maksimalna greška faznih pseudoduzina jednaka je četvrtini talasne dužine nosećih talasa, odnosno oko 5cm.

Iako ne postoji opšti matematički model kojim bi se odredio ili prognozirao efekat višestruke refleksije na rezultate relativnog pozicioniranja, uticaj na kodne pseudoduzine može se praktično direktno meriti formiranjem dvofrekventne linearne kombinacije faznih i kodnih merenja. Najjednostavniji način redukcije greške merene pseudoduzine usled višestruke refleksije ipak predstavlja pažljivi izbor lokacije za stanicu, uz upotrebu savremenih antena sa zaštitnicima od refleksije i prijemnika koji imaju mogućnost dodatne interne filtracije signala. Istim postupcima u velikoj meri se otklanja i šum koji nastaje interferencijom GPS talasa sa elektromagnetnim talasima nekog drugog izvora radio zračenja kao što su releji, radari ili visokonaponski vodovi.

Relativno kompleksna elektronska struktura prijemnika predstavlja izvor mnogobrojnih slučajnih grešaka merenja kao što su termički šum, greška usled nestabilnosti lokalnog oscilatora, interakcija i interferencija signala pri prolasku kroz različite kanale radio frekventne sekcije, ili nepreciznost analogno digitalnih pretvarača. Dizajnom savremenih prijemnika većina navedenih slučajnih grešaka može se smatrati beznačajnim, tako da preciznost faznih i kodnih merenja pre svega zavisi od kvaliteta elektronskih uređaja za praćenje signala.

Preciznost komponenti kojima se vrše kodna i fazna merenja (DLL i PLL jitteri), može se izraziti sledećim formulama (Gianniou 1996; Langley 1996):

$$\sigma_{DLL} = \lambda_C \sqrt{\frac{\alpha B_C}{c/n_0}}, \quad (2.3.2)$$

$$\sigma_{PLL} = \frac{\lambda_P}{2\pi} \sqrt{\frac{B_P}{c/n_0}}, \quad (2.3.3)$$

gde su:

α	...	bezdimenzionalni faktor (1 ili 0.5), čija vrednost zavisi od konkretne elektronske implementacije korelatora,
B_C, B_P	...	frekventni opseg šuma DLL i PLL uređaja,
λ_C, λ_P	...	talasne dužine kodne modulacije i nosećih talasa,
c/n_0	...	reprezent odnosa jačine signala i jačine šuma.

Korišćenjem standardnih vrednosti ovih parametara, za preciznost merenja C/A i P kodnih pseudodužina dobija se oko 1m i 10cm respektivno, s tim što savremena korelatorska tehnika omogućuje danas gotovo dvostruko veću tačnost u tom pogledu. Preciznost merenja faznih pseudodužina na prvoj frekvenciji iznosi oko 0.2mm, dok ta vrednost za drugu frekvenciju zavisi od načina praćenja signala (tabela 2.2).

TABELA 2.2. Odnos signal-šum (SNR) i preciznost faznih merenja na L2.

Postupak praćenja	SNR [dB - Hz]	σ [mm]
P-kod korelacija	32 (42)	0.9 (0.3)
Kvadriranje	-6 (14)	- (7.6)
Kvadriranje (sa kodovima)	7 (27)	17.1 (1.7)
L1/L2 međukorelacija	10 (30)	12.0 (1.2)
P-W praćenje	18 (28)	4.8 (1.5)

2.3.2 Stohastički model merenja

Istraživanjima stohastičkih svojstava GPS merenja i implikacijama upotrebe različitih shema modeliranja njihovih relativnih odnosa posvećivana je velika pažnja poslednjih godina (Euler, Goad 1991; Vermeer 1997; Collins, Langley 1999; Hartinger, Bruner 1999). Razlog za to je ne samo činjenica da od izbora stohastičkog modela zavise u određenoj meri definitivni rezultati ocenjivanja, već i da realno obuhvatanje i vrednovanje različitih faktora tačnosti umnogome opredeljuje pouzdanost u otkrivanju faznih skokova i rešavanju faznih neodređenosti. Istraživački naponi usmereni su pre svega na stohastičko modeliranje GPS faznih merenja, jer se kod obrade podataka u preciznim geodetskim primenama kodne pseudodužine uglavnom koriste kao pomoćne veličine.

Stohastički model originalnih merenja

U formulaciji stohastičkog modela originalno merenih faznih i kodnih pseudodužina čine se sledeće empirijski potvrđene polazne pretpostavke:

- Fazne i kodne pseudodužine na obe frekvencije L_1 , L_2 , P_1 i P_2 smatraju se međusobno nezavisnim, jer ambijentalna temperatura, kao i drugi parametri elektronskih sklopova prijemnika u kojem se simultano vrše sva ova merenja, uzrokuje zanemarljivo malu fizičku korelaciju.
- Merni šum faznih i kodnih pseudodužina sastavljen je od nemodeliranih i slučajnih rezidualnih komponenti, slučajne greške usled višestruke refleksije signala i slučajne greške merenja elektronskih uređaja za praćenje signala. Kada su na neki od načina obuhvaćeni sistematski uticaji, nemodelirane i slučajne rezidualne komponente odnose se pre svega na jonosferske i troposferske efekte.
- Za različita zenitna odstojanja GPS satelita, signali će prelaziti različite puteve kroz Zemljin atmosferski pojas, od čega u opštem slučaju zavisi intenzitet rezidualnih jonosferskih i troposferskih uticaja. To znači da je tačnost izmerenih faznih i kodnih pseudodužina funkcija visine satelita iznad horizonta.
- Jačina GPS signala zavisi od dužine puta kroz Zemljinu atmosferu, a time posredno i od satelitskog zenitnog odstojanja. Tačnost praćenja PLL i DLL jittera funkcija je jačine signala odnosno SNR odnosa.

Prema tome, varijansa faznih i kodnih merenja ima strukturu:

$$\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_M^2 + \sigma_\varepsilon^2, \quad (2.3.4)$$

u kojoj je σ_A standard merenja pseudodužine zbog slučajnih rezidualnih atmosferskih varijacija, σ_M standard zbog slučajnog uticaja višestruke refleksije, a σ_ε standard zbog slučajnih grešaka praćenja signala. Varijansa je osim toga funkcija parametra p koji može biti zenitno odstojanje satelita ili odnos signala i šuma SNR:

$$\sigma^2 = \sigma^2(p). \quad (2.3.5)$$

Najčešći modeli varijanse merenja u funkciji visine satelita nad horizontom α su:

$$\sigma^2(\alpha) = c_1 + c_2 e^{-\alpha/c_3}, \quad (2.3.6)$$

$$\sigma^2(\alpha) = c_4 / \sin \alpha, \quad (2.3.7)$$

$$\sigma^2(\alpha) = c_5 / \sin^2 \alpha, \quad (2.3.8)$$

pri čemu c_i označavaju međusobno nezavisne konstante koje se mogu eksperimentalno odrediti. Oblik ovih krivih uglavnom odlikava intenzitet troposferskih uticaja, i glavni motiv njihovog korišćenja je obuhvatanje grešaka merenja prema satelitima koji su bliži horizontu. S obzirom na to da je kvalitet signala približno ujednačen za satelite čija je visina veća od neke granične vrednosti α_0 , umesto neprekidne može se koristiti step funkcija:

$$\sigma^2(\alpha) = \begin{cases} \sigma^2 & \alpha > \alpha_0 \\ \sigma^2(\alpha) & \alpha \leq \alpha_0 \end{cases}. \quad (2.3.9)$$

Imajući u vidu tačnost praćenja signala DLL i PLL džiterima, opšti oblik modela varijanse merenja u funkciji SNR vrednosti može glasiti:

$$\sigma^2(SNR) = c_6 / SNR, \quad (2.3.10)$$

$$\sigma^2(SNR) = c_7 + c_8 10^{-\frac{SNR}{10}}. \quad (2.3.11)$$

Prednost upotrebe ovakvih modela sastoji se pre svega u mogućnosti korišćenja realnih pokazatelja kvaliteta aktuelnih merenja, jer većina savremenih prijemnika može registrovati vrednosti odnosa signala i šuma u nekoj formi.

Eksperimentalno je utvrđeno da merenja pseudoduzina istim prijemnikom do istog satelita nisu nezavisna tokom vremena, i da je stepen fizičke korelacije tim veći što su merenja vremenski manje razdvojena (*El Rabbany 1994*). Model koeficijenta korelacije r u funkciji vremenske razlike merenja τ glasi:

$$r(t_i, t_i + \tau) = r(\tau) = e^{-\frac{\tau}{T}}, \quad (2.3.12)$$

pri čemu je T korelaciono vreme sa tipičnom vrednošću između 250s i 350s. Empirijske vrednosti koeficijenta korelacije za različite intervale registracije date su u tabeli 2.3.

TABELA 2.3. Koeficijent korelacije za različite intervale vremena između opažanja.

τ [s]	1	5	15	30	60	300	600	900
$r(\tau)$	0.996	0.981	0.944	0.891	0.794	0.315	0.099	0.031

Pošto je interval registracije podataka pri GPS merenjima konstantan i iznosi τ_0 , koeficijent korelacije između merenja koja su vremenski razdvojena za $k\tau_0$, pri čemu je k ceo broj, biće:

$$r(k\tau_0) = e^{-\frac{k\tau_0}{T}} = r(\tau_0)^k. \quad (2.3.13)$$

Uzrok vremenskoj korelaciji pseudoduzina je pre svega vremenska korelacija rezidualnih atmosferskih uticaja, koji nakon eliminacije ukupnog efekta još uvek poseduju u određenoj meri sistematski karakter. Slična argumentacija može se upotrebiti i za pseudoduzine merene istim prijemnikom ka različitim satelitima i pseudoduzine merene sa više prijemnika ka jednom ili više satelita.

Ako je $\mathbf{I}_{i,k}$ vektor merenja prijemnika i prema svim satelitima u epohi k , tada će njegova kovarijaciona matrica biti:

$$\mathbf{C}_{i,kk} = \text{diag}[\sigma_{i,j,k}^2(p_{j,k})]_{m \times m}, \quad (2.3.14)$$

pri čemu je j indeks satelita, m ukupan broj satelita u epohi k , a $p_{j,k}$ označava parametar specifičan za satelit i epohu, od kojeg zavisi tačnost merenja. Matrica je dijagonalna zbog pretpostavke o nezavisnosti merenja jednog prijemnika prema različitim satelitima u istoj epohi. S druge strane, kovarijaciona matrica koja izražava međusobnu korelaciju vektora merenja iz epoha k i l ima oblik:

$$\mathbf{C}_{i,kl} = \text{diag}[r_{kl} \cdot \sigma_{i,j,k}(p_{j,k}) \cdot \sigma_{i,j,l}(p_{j,l})]_{m \times m}, \quad (2.3.15)$$

gde je r_{kl} odgovarajući koeficijent korelacije. Vektor \mathbf{I}_k komponovan od vektora merenja u istoj epohi ali od svih n prijemnika može da se napiše kao:

$$\mathbf{I}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1,k} \\ \dots \\ \mathbf{I}_{n,k} \end{bmatrix}_{(n \cdot m) \times 1} = \mathbf{1}_{n \times 1} \otimes \mathbf{I}_{i,k}, \quad (2.3.16)$$

sa n -dimenzionalnim vektorom $\mathbf{1}$ čiji su članovi jedinice, i simboličkom oznakom \otimes za Kronekerov proizvod dve matrice. Kovarijaciona matrica ovog vektora merenja i kovarijaciona matrica kojom se izražava vremenska korelacija tada glase:

$$\mathbf{C}_{kk} = \text{diag}[\mathbf{C}_{i,kk}]_{(n-m) \times (n-m)} = \mathbf{I}_{n \times n} \otimes \mathbf{C}_{i,kk}, \quad (2.3.17)$$

$$\mathbf{C}_{kl} = \text{diag}[\mathbf{C}_{i,kl}]_{(n-m) \times (n-m)} = \mathbf{I}_{n \times n} \otimes \mathbf{C}_{i,kl}, \quad (2.3.18)$$

gde je \mathbf{I} jedinična matrica odgovarajućih dimenzija. Konačno, kompletni vektor \mathbf{I}_0 merenja svih prijemnika do svih satelita u svih q epoha, kao i njegova kovarijaciona matrica, mogu da se izraze u obliku:

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \dots \\ \mathbf{I}_q \end{bmatrix} = \mathbf{1}_{q \times 1} \otimes \mathbf{I}_k, \quad (2.3.19)$$

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \dots & \mathbf{C}_{1q} \\ & \mathbf{C}_{21} & \dots & \mathbf{C}_{2q} \\ & & \dots & \dots \\ \text{sim.} & & & \mathbf{C}_{qq} \end{bmatrix} = \mathbf{1}_{q \times q} \otimes \mathbf{C}_{kl}, \quad (2.3.20)$$

s tim što $\mathbf{1}$ sada označava kvadratnu matricu koja za sve članove ima jedinicu. Ovo je opšti oblik stohastičkog modela originalnih GPS merenja jednog tipa (fazne ili kodne pseudoduzine na prvoj ili drugoj frekvenciji). U realnim uslovima, podmatrice hipermatrice \mathbf{C}_0 ne moraju imati iste dimenzije jer je tokom merne sesije broj satelita promenljiv. Ukoliko se formuliše jedinstveni stohastički model za sve tipove GPS merenja, matrice \mathbf{C}_0 postaće podmatrice te jedinstvene blok dijagonalne kovarijacione matrice.

Stohastički model linearnih kombinacija

Stohastički model dvofrekventnih linearnih kombinacija praktično je identičan stohastičkom modelu originalnih merenja, kako po opštoj strukturi, tako i u pogledu prostorne i vremenske korelacije. Razlika se odnosi samo na varijansu, koja se za dvofrekventne fazne linearne kombinacije formirane koeficijentima i i j može izraziti pomoću faktora šuma k_σ i standarda faznih merenja na prvoj frekvenciji σ_1 po izrazu:

$$\sigma_{ij}^2 = k_\sigma^2 \sigma_1^2 = \frac{\lambda_2^2 (i^2 + j^2)}{(i\lambda_2 + j\lambda_1)^2} \sigma_1^2. \quad (2.3.21)$$

Međutim, stohastički model razlika originalnih merenja karakteriše algebarska korelacija koja proizilazi iz načina njihovog formiranja. U situaciji sa n prijemnika koji prate m satelita u q epoha, ukupan broj originalnih merenja istog tipa, kao i broj nezavisnih prostih, dvostrukih i trostrukih razlika iznosi:

$$n_0 = nmq, \quad (2.3.22)$$

$$n_\Delta = (n-1)mq, \quad (2.3.23)$$

$$n_{\nabla\Delta} = (n-1)(m-1)q, \quad (2.3.24)$$

$$n_{\delta\Delta\nabla} = (n-1)(m-1)(q-1), \quad (2.3.25)$$

Transformacijom vektora originalnih merenja \mathbf{I}_0 , dobijaju se odgovarajući vektori razlika:

$$\mathbf{I}_\Delta = \mathbf{T}_\Delta \mathbf{I}_0, \quad (2.3.26)$$

$$\mathbf{l}_{\nabla\Delta} = \mathbf{T}_{\nabla}(\mathbf{T}_{\Delta}\mathbf{l}_0) = \mathbf{T}_{\nabla}\mathbf{l}_{\Delta}, \quad (2.3.27)$$

$$\mathbf{l}_{\delta\nabla\Delta} = \mathbf{T}_{\delta}[\mathbf{T}_{\nabla}(\mathbf{T}_{\Delta}\mathbf{l}_0)] = \mathbf{T}_{\delta}\mathbf{l}_{\nabla\Delta}, \quad (2.3.28)$$

a primenom zakona o prenosu grešaka i njihove kovarijacione matrice:

$$\mathbf{C}_{\Delta} = \mathbf{T}_{\Delta}\mathbf{C}_0\mathbf{T}_{\Delta}^T, \quad (2.3.29)$$

$$\mathbf{C}_{\nabla\Delta} = \mathbf{T}_{\nabla}\mathbf{C}_{\Delta}\mathbf{T}_{\nabla}^T, \quad (2.3.30)$$

$$\mathbf{C}_{\delta\nabla\Delta} = \mathbf{T}_{\delta}\mathbf{C}_{\nabla\Delta}\mathbf{T}_{\delta}^T. \quad (2.3.31)$$

Način formiranja vektora nezavisnih razlika nije jedinstven. Stoga oblik transformacionih matrica uglavnom opredeljuje potreba da se iskoristi maksimum informacija iz raspoloživog mernog materijala. U slučaju da su merenja u vektoru organizovana hijerarhijski po epohama, stanicama i satelitima, i da se prvi prijemnik, satelit i epoha izaberu kao referentni za sve vreme trajanja merne sesije, transformacione matrice imaju oblik:

$$\mathbf{T}_{\Delta} = \mathbf{I}_{q \times q} \otimes \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{(n-1)m \times nm}, \quad (2.3.32)$$

$$\mathbf{T}_{\nabla} = \mathbf{I}_{q \times q} \otimes \left(\mathbf{I}_{(n-1) \times (n-1)} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(m-1) \times m} \right), \quad (2.3.33)$$

$$\mathbf{T}_{\delta} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{(n-1)(m-1)(q-1) \times (n-1)(m-1)q}. \quad (2.3.34)$$

2.4 Fizički aspekti matematičkog modela

2.4.1 Stabilnost oscilatora

Oscilatori u prijemnicima i satelitima realizuju GPS vremensku skalu, i istovremeno služe za koherentno izvođenje satelitskih signala različitih frekvencija. Savremeni oscilatori baziraju se po pravilu na oscilatornim fenomenima atoma elemenata vodonika (H), rubidijuma (Rb), cezijuma (Cs), ili različitih vrsta kristala kvarca (x). Stabilnost njihovih svojstava tokom vremena predstavlja ključni faktor ukupnog kvaliteta sistema.

Izlaz jednog realnog oscilatora može se u opštem slučaju predstaviti periodičnom funkcijom (Schlueter 1988):

$$U(t) = U_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi(t)) = U_0 \sin \Phi(t), \quad (2.4.1)$$

sa amplitudom U_0 , nominalnom frekvencijom f_0 , trenutnom fazom $\Phi(t)$ i faznom nesigurnošću $\varphi(t)$, koja je posledica ukupnog odstupanja trenutne frekvencije $f(t)$ od nominalne frekvencije f_0 :

$$\Delta f(t) = f(t) - f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi}. \quad (2.4.2)$$

Na veličinu frekventnog odstupanja utiču mnogobrojni faktori kao što su starenje materijala, promene u temperaturi, pritisku i vlažnosti vazduha, naponu izvora napajanja, fizičke vibracije, radijacija i magnetno polje (Vig 2001). Stoga $\Delta f(t)$ može biti veoma komplikovana funkcija vremena, ali se za većinu preciznih oscilatora standardno modelira u obliku linearne funkcije vremena:

$$\Delta f(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + f_r(t), \quad (2.4.3)$$

pri čemu je t_0 referentni trenutak vremena, dok $f_r(t)$ označava slučajne, odnosno nemodelirane frekventne varijacije. Odgovarajuća vremenska i fazna odstupanja biće respektivno:

$$\Delta t(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \frac{1}{f_0} \int_{t_0}^t f_r(t) dt, \quad (2.4.4)$$

$$\varphi(t) = f_0 \Delta t(t). \quad (2.4.5)$$

Deterministički deo moguće je oceniti i na taj način eliminisati iz izlaza oscilatora. Preostali stohastički deo koristi se kao mera stabilnosti, i to obično u vidu normirane veličine:

$$y(t) = \frac{f_r(t)}{f_0} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi f_0}. \quad (2.4.6)$$

Relativno frekventno odstupanje $y(t)$ u principu nije moguće direktno odrediti merenjem. Međutim, ako referentni oscilator svojim impulsom u trenutku t pokrene fazni brojač, a test oscilator ga svojim impulsom zaustavi, stanje brojača predstavljaće vremensko odstupanje test oscilatora $x(t)$:

$$x(t) = \int_0^t y(t) dt = \frac{1}{2\pi f_0} (\varphi(t) - \varphi(t_0)). \quad (2.4.7)$$

Na taj način je iz izlaza oscilatora moguće odrediti srednju vrednost relativnog frekventnog odstupanja $y(t_k, \tau)$, koja se odnosi na vremenski interval τ sa početkom u trenutku t_k :

$$y(t_k, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(t) dt = \frac{1}{\tau} (x(t_k + \tau) - x(t_k)). \quad (2.4.8)$$

Klasična disperzija slučajnog procesa predstavljenog konačnim nizom od N srednjih vrednosti relativnog frekventnog odstupanja $y_k = y(t_k, \tau)$, sa osrednjavajućim intervalom τ i intervalom ponavljanja merenja T , ocenjuje se po izrazu:

$$\hat{\sigma}_y^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left(y_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \right)^2. \quad (2.4.9)$$

Međutim, ova varijansa nije pogodna mera stabilnosti frekvencije zato što ne konvergira konačnoj vrednosti za određene tipove slučajnih procesa otkrivenih u ponašanju preciznih oscilatora. S druge strane, pokazano je da matematičko očekivanje ove ocene za $N = 2$ i $T = \tau$:

$$\sigma_y^2(\tau) = E[\hat{\sigma}_y^2(2, \tau, \tau)], \quad (2.4.10)$$

konvergira za svaki poznati tip procesa pod uslovom da granična vrednost egzistira, i naziva se Alanovom varijansom (Allan 1966, 1983, 1987; Allan et al. 1997). Ako su preseki slučajnih procesa y_k ($k = 1, \dots, N$) i x_k ($k = 1, \dots, N + 1$) vremenski ekvidistantni sa osnovnim intervalom τ_0 , praktično računanje Alanove varijanse za proizvoljni osrednjavajući interval $\tau = n\tau_0$ vrši se po izrazima:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_y^2(\tau) &= \frac{1}{2(N-2n+1)} \sum_{k=1}^{N-2n+1} (\bar{y}_{k+n} - \bar{y}_k)^2 \\ &= \frac{1}{2(N-2n+1)} \sum_{k=1}^{N-2n+1} \left(\frac{x_{k+2n} - 2x_{k+n} + x_k}{n\tau_0} \right)^2,\end{aligned}\quad (2.4.11)$$

pri čemu \bar{y}_k predstavlja srednje relativno frekventno odstupanje za interval τ :

$$\bar{y}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{k+n-1} y_i. \quad (2.4.12)$$

Alanova varijansa, koristi se kao opšteprihvaćena mera frekventne stabilnosti u domenu vremena, iako nije zasnovana ni na kakvom fizičkom modelu oscilatora već na empirijskim rezultatima njihovog testiranja. Početkom osamdesetih godina izvedene su i modifikovana Alanova varijansa $\text{mod } \sigma_y^2(\tau)$ i vremenska varijansa $\sigma_x^2(\tau)$ (Allan, Barnes 1981):

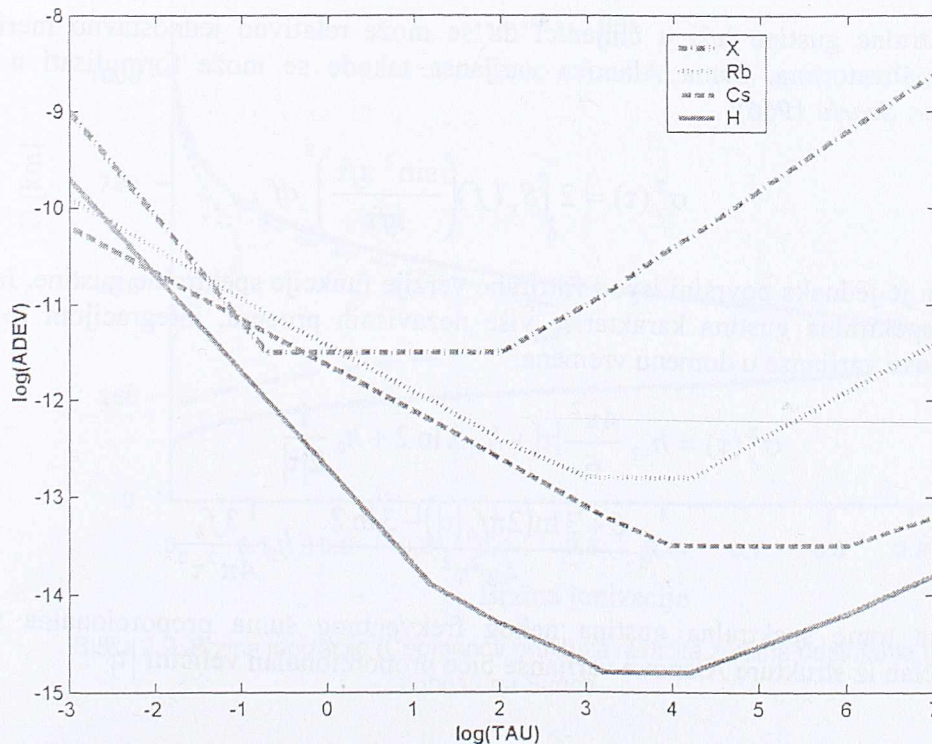
$$\text{mod } \sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2n^2\tau^2(N-3n+1)} \sum_{j=1}^{N-3n+1} \left(\sum_{i=j}^{j+n-1} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i) \right)^2, \quad (2.4.13)$$

$$\sigma_x^2(\tau) = \frac{\tau^2}{3} \text{mod } \sigma_y^2(\tau). \quad (2.4.14)$$

Alanova varijansa $\sigma_y^2(\tau)$ pokazuje u odnosu na osrednjavajući interval tipičnu zavisnost oblika:

$$\sigma_y^2(\tau) \sim \tau^\mu \Rightarrow \sigma_y(\tau) \sim \tau^\eta. \quad (2.4.15)$$

EkspONENT μ određuje preovlađujući tip procesa, i može se identifikovati kao nagib osrednjavajuće prave kada se rezultati posmatraju u koordinatnom sistemu sa logaritamskim osama (slika 2.1).



SLIKA 2.1. Primeri zavisnosti Alanovog standarda (ADEV) od osrednjavajućeg intervala (TAU), za vodonični mazer (H), cezijumski (Cs), rubidijumski (Rb) i kvarcni oscilator (X).

Tip procesa, osim toga, opredeljuje i širinu intervala poverenja ocene Alanove varijanse sračunate na osnovu konačnog broja rezultata merenja N :

$$I_{\mu} = k_{\mu} \frac{\sigma_y(\tau)}{\sqrt{N}}, \quad (2.4.16)$$

pri čemu koeficijenti k_{μ} imaju vrednosti date u tabeli 2.4.

TABELA 2.4. Karakteristični slučajni procesi preciznih oscilatora.

Tip slučajnog procesa	μ (η)	k_{μ}
Beli šum fazne modulacije (WPM)	-3 (-1.5)	0.99
Niskofrekventni šum fazne modulacije (FPM)	-2 (-1.0)	0.99
Beli šum frekventne modulacije (WFM)	-1 (-0.5)	0.87
Niskofrekventni šum frekventne modulacije (FFM)	0 (0.0)	0.77
Slučajni hod frekventne modulacije (RWFPM)	+1 (+0.5)	0.75

Stabilnost oscilatora može se osim u vremenskom posmatrati i u frekventnom domenu. Jednostrana spektralna gustina $S_y(f)$, odnosno Furijeova transformacija slučajnog procesa y_k , sadrži sve informacije o stabilnosti oscilatora, i za Furijeove frekvencije $0 < f < f_h$ ima sledeću strukturu:

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^2 h_{\alpha} f^{\alpha} = h_{-2} f^{-2} + h_{-1} f^{-1} + h_0 f^0 + h_1 f^1 + h_2 f^2, \quad (2.4.17)$$

gde su h_{α} koeficijenti koji karakterišu intenzitet šuma, f_h je granična frekvencija sistema, a eksponent α povezan je sa eksponentom u domenu vremena μ izrazom:

$$\alpha = -\mu - 1. \quad (2.4.18)$$

Prednost spektralne gustine leži u činjenici da se može relativno jednostavno meriti analognim spektralnim analizatorima. Sama Alanova varijansa takođe se može formulirati u frekventnom domenu (Cutler, Searle 1966):

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_y(f) \left(\frac{\sin^2 \pi f \tau}{\pi f \tau} \right)^2 df, \quad (2.4.19)$$

odakle sledi da je jednaka površini ispod filtrirane verzije funkcije spektralne gustine. Imajući u vidu činjenicu da spektralna gustina karakteriše više nezavisnih procesa, integracijom se može dobiti struktura Alanove varijanse u domenu vremena:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) = & h_{-2} \frac{4\pi^2}{6} |\tau| + h_{-1} 2 \ln 2 + h_0 \frac{1}{2|\tau|} \\ & + h_1 \frac{6 + 3 \ln(2\pi f_h |\tau|) - 3 \ln 2}{4\pi^2 \tau^2} + h_2 \frac{3f_h}{4\pi^2 \tau^2} \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

Ako je prema tome spektralna gustina nekog frekventnog šuma proporcionalna veličini f^{α} , odgovarajući član iz strukture Alanove varijanse biće proporcionalan veličini $|\tau|^{\mu}$.

2.4.2 Jonosfersko kašnjenje signala

Zemljinu jonosferu čine viši delovi atmosfere (od 50km do 1500km), u kojima je proces jonizacije dovoljnog intenziteta da utiče na prostiranje radio talasa. Sam proces jonizacije obuhvata odvajanje elektrona (jona) iz atoma i molekula gasova atmosfere, koje se odvija pod uticajem raznih oblika Sunčevog zračenja. U tom smislu najznačajniji je takozvani F jonosferski region koji počinje na visini od oko 150km , a u kojem na proces jonizacije prevashodno utiče Sunčevo ultraljubičasto zračenje.

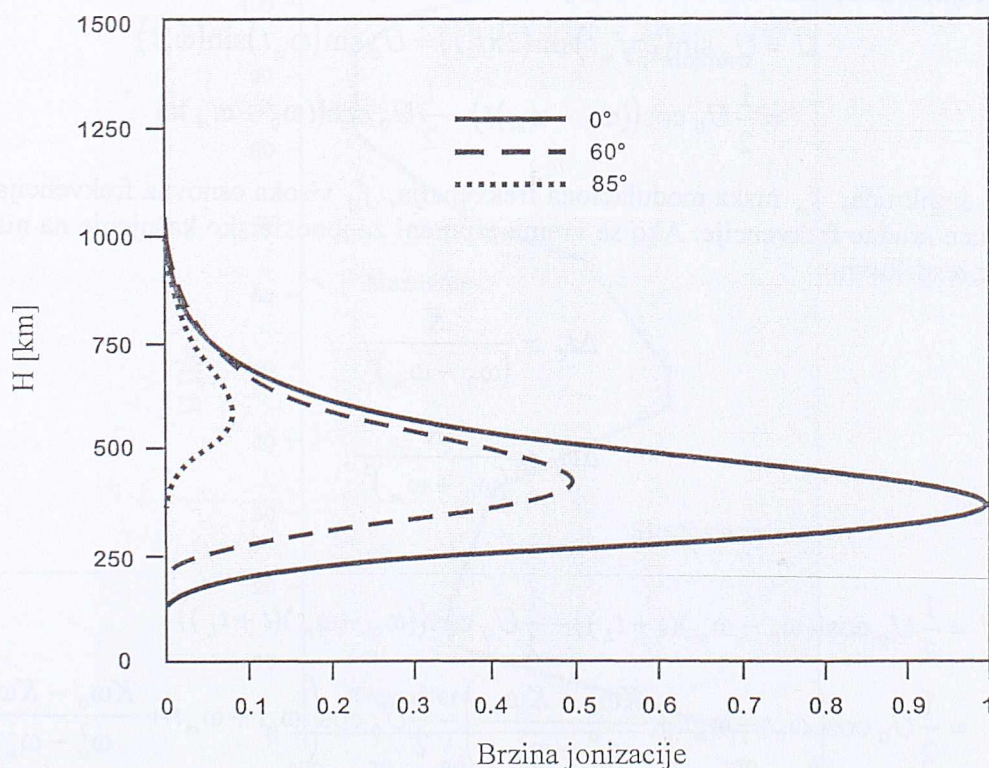
Osnovnu kvantitativnu karakteristiku stanja jonosfere predstavlja broj slobodnih elektrona u jedinici zapremine, N_e . Ova gustina zavisi od doba dana i godine, magnetnih bura i jedanaestogodišnjeg ciklusa Sunčeve aktivnosti, i njena varijacija može dostići nekoliko redova veličine. U idealizovanom slučaju horizontalno raslojene jonosfere, brzinu jonizacije $q(h, \chi)$, a time i odgovarajuću gustinu N_e , opisuje Čepmenova funkcija (Schaer 1999):

$$q(h, \chi) = q_0 e^k, \quad (2.4.21)$$

$$k = 1 - z - \sec \chi e^{-z}, \quad (2.4.22)$$

$$z = \frac{h - h_0}{\Delta h}, \quad (2.4.23)$$

sa referentnom brzinom jonizacije q_0 , visinom h , zenitnim odstojanjem u odnosu na Sunce χ , normiranom visinom z , referentnom visinom maksimalne brzine jonizacije h_0 , i visinskim faktorom Δh . Čepmenova funkcija za referentnu visinu od 350km , visinski faktor od 100km , i za različita zenitna odstojanja χ , prikazana je na slici 2.2, pri čemu je brzina jonizacije izražena u jedinicama q_0 .



SLIKA 2.2. Brzina jonizacije (Čepmenov profil) za različita zenitna odstojanja u odnosu na Sunce.

Međutim, kada je u pitanju prostiranje elektromagnetnih talasa, stanje jonosfere karakteriše ukupan elektronski sadržaj E (TEC), koji se definiše integralom gustine elektrona N_e duž putanje talasa ρ :

$$E = \int_{\rho} N_e(\rho) d\rho. \quad (2.4.24)$$

Ova veličina izražava se u *TECU* jedinicama koje odgovaraju broju od 10^{16} elektrona sadržanih u cilindru poprečnog preseka $1m^2$ čiju osu predstavlja putanja talasa. Opseg vrednosti ukupnog elektronskog sadržaja kreće se u granicama:

$$1 \cdot 10^{16} el \cdot m^{-2} = 1TECU < E < 10^3 TECU = 1 \cdot 10^{19} el \cdot m^{-2}. \quad (2.4.25)$$

Prostiranje elektromagnetnih talasa u jonosferi određeno je njenim indeksom prelamanja n_{ION} . Za talase sa frekvencijama većim od $100MHz$, jonosferski indeks prelamanja može se sa tačnošću boljom od 1% prikazati u obliku (*Klobuchar 1996*):

$$n_{ION} = 1 - \frac{C_x N_e}{2 f^2}, \quad (2.4.26)$$

gde je C_x konstanta koja zavisi od mase i naelektrisanja elektrona, kao i od permitivnosti vakuuma. Jonosfersko kašnjenje talasa u jedinicama vremena, dobija se integracijom:

$$\Delta t_{ION} = \frac{1}{c_0} \int_{\rho} (n_{ION}(\rho) - 1) d\rho = -\frac{C_x}{2c_0 f^2} \int_{\rho} N_e(\rho) d\rho = -\frac{40.3E}{c_0 f^2} = \frac{K}{f^2}, \quad (2.4.27)$$

odakle sledi da je obrnuto proporcionalno kvadratu frekvencije talasa. Sredine, kao što je jonosfera, čiji je indeks prelamanja funkcija frekvencije, nazivaju se disperzivnim sredinama.

Jonosfera dvojako utiče na GPS signale, zato što elektromagnetni talasi koji napuštaju satelitske GPS antene predstavljaju kombinaciju nosećih talasa visoke frekvencije, i fazne modulacije pseudoslučajnim kodovima niske frekvencije. Ti talasi mogu se opisati modelom:

$$\begin{aligned} U &= U_0 \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_0 t) = U_0 \sin(\omega_m t) \sin(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2} U_0 \cos((\omega_0 - \omega_m)t) - \frac{1}{2} U_0 \cos((\omega_0 + \omega_m)t), \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

gde je U_0 amplituda, f_m niska modulaciona frekvencija, f_0 visoka osnovna frekvencija, a ω_m i ω_0 odgovarajuće kružne frekvencije. Ako se vreme promeni za jonosfersko kašnjenje na niskoj i visokoj frekvenciji respektivno:

$$\Delta t_L = \frac{K}{(\omega_0 - \omega_m)^2}, \quad (2.4.29)$$

$$\Delta t_H = \frac{K}{(\omega_0 + \omega_m)^2}, \quad (2.4.30)$$

dobija se:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} U_0 \cos((\omega_0 - \omega_m)(t + t_L)) - \frac{1}{2} U_0 \cos((\omega_0 - \omega_m)(t + t_L)) \\ &= \frac{1}{2} U_0 \cos\left(\omega_0 t - \omega_m t + \frac{K\omega_0 + K\omega_m}{\omega_0^2 - \omega_m^2}\right) - \frac{1}{2} U_0 \cos\left(\omega_0 t + \omega_m t + \frac{K\omega_0 - K\omega_m}{\omega_0^2 - \omega_m^2}\right). \quad (2.4.31) \\ &= U_0 \sin\left(\omega_0 \left(t + \frac{K}{\omega_0^2 - \omega_m^2}\right)\right) \sin\left(\omega_m \left(t - \frac{K}{\omega_0^2 - \omega_m^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Pošto je $\omega_0^2 \gg \omega_m^2$ ($1.575GHz \gg 10.23MHz$), član ω_m^2 u imeniocima može se zanemariti, čime izraz dobija konačni oblik:

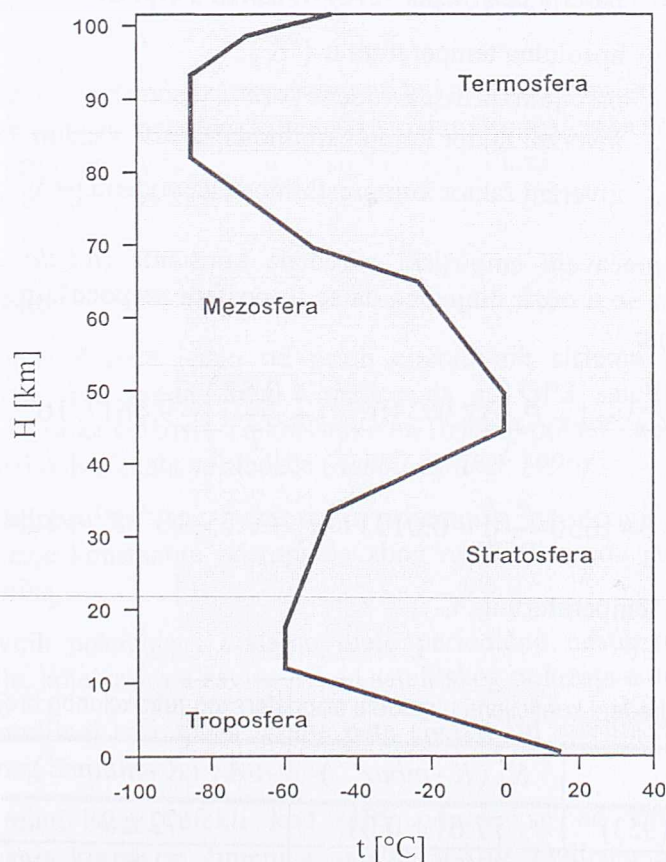
$$U = U_0 \sin\left(\omega_0\left(t + \frac{K}{\omega_0^2}\right)\right) \sin\left(\omega_m\left(t - \frac{K}{\omega_0^2}\right)\right). \quad (2.4.32)$$

Iz ove jednačine talasa sledi da će prisustvo jonosfere uzrokovati kašnjenje modulacione faze i ubrzavanje faze nosećeg talasa. Isti izraz pokazuje da je za fazna merenja jonosferski indeks prelamanja manji od jedinice, odnosno da se faza nosećeg GPS talasa kreće brže od svetlosti. Ova činjenica nije u suprotnosti sa teorijom relativnosti, jer noseći talasi sami po sebi ne sadrže nikakvu informaciju. Komunikacija koja se ostvaruje pseudoslučajnim kodovima ne može međutim da se odvija brže od svetlosti.

Postoje i druga svojstva jonosfere koja takođe utiču na prostiranje elektromagnetnih talasa, ali u znatno manjoj meri. Jedan od efekata prisustva jonosfere je, na primer, Faradejeva rotacija ravni polarizacije linearno polarizovanih radio talasa, čija veličina zavisi od ukupnog elektronskog sadržaja i longitudinalne komponente Zemljinog magnetnog polja. Jonosferski indeks prelamanja je takođe uzrok i savijanja putanje talasa, koje dostiže nekoliko lučnih sekundi. Konačno, nagle, lokalne, nepravilne promene u ukupnom elektronskom sadržaju jonosfere deformišu oblik impulsa, i uzrokuju amplitudnu i faznu scintilaciju zbog koje dolazi do prigušenja, a u nekim slučajevima i potpunog gubitka signala.

2.4.3 Troposfersko kašnjenje signala

Atmosferski sloj od fizičke površi Zemlje do visine od približno 80km naziva se neutralnom atmosferom, i obuhvata tri temperaturno razdvojena regiona: troposferu, stratosferu i deo mezofere (slika 2.3).



SLIKA 2.3. Temperaturni regioni i vertikalna temperaturna raspodela u modelu standardne atmosfere.

Za razliku od jonosfere, neutralna atmosfera nije disperzivna sredina, tako da joj indeks prelamanja zavisi samo od aktuelnih atmosferskih parametara (temperature, atmosferskog pritiska i parcijalnog pritiska vodene pare). Neutralni atmosferski region često se u celini naziva troposferom zbog dominantnog uticaja na prostiranje radio talasa, iako troposfera u užem smislu reči obuhvata samo najnižih 10km atmosfere u kojima temperaturni gradijent u proseku iznosi $-6.5^{\circ}C \cdot km^{-1}$.

Troposfera sadrži 80% ukupne molekularne mase atmosfere, i gotovo celokupnu količinu vodene pare i aerosola. Suvi vazduh troposfere sastoji se od mešavine gasova azota, kiseonika i argona, koja obuhvata 99.95 ukupne zapremine. Prisustvo vodene pare uglavnom je rezultat isparavanja vodenih površina i vegetacije, i njen sadržaj u ukupnoj zapremini iznosi od 1% do 4%. Za razliku od suvog vazduha koji predstavlja veoma konzistentnu mešavinu gasova, vodena para skoncentrisana je u najnižih 4km troposfere, gde varira kako vremenski tako i prostorno.

S obzirom na to da se elektromagnetni talasi kreću kroz troposferu brzinom koja je neznatno manja od brzine u vakuumu, uobičajeno je da se umesto troposferskog indeksa prelamanja n_{TRO} koristi troposferski refrakcioni broj N_{TRO} :

$$N_{TRO} = 10^6 (n_{TRO} - 1). \quad (2.4.33)$$

Zavisnost troposferskog refrakcionog broja od atmosferskih parametara empirijski je određena, i ima sledeći oblik (*Spilker 1996*):

$$N_{TRO} = K_1 \frac{P_d}{T} Z_d^{-1} + \left(K_2 \frac{e}{T} + K_3 \frac{e}{T^2} \right) Z_w^{-1}, \quad (2.4.34)$$

gde je:

- P_d ... parcijalni pritisak suvog vazduha u (mbar),
- T ... apsolutna temperatura u ($^{\circ}K$),
- e ... parcijalni pritisak vodene pare u (mbar),
- Z_d^{-1} ... inverzni faktor kompresibilnosti za suvi vazduh,
- Z_w^{-1} ... inverzni faktor kompresibilnosti za vodenu paru,

a K_1 , K_2 i K_3 označavaju empirijski određene konstante (tabela 2.5). Inverznim faktorima kompresibilnosti uzima se u obzir činjenica da se troposfera ne ponaša po zakonu idealnih gasova, a određuju se po izrazima:

$$Z_d^{-1} = 1 + P_d \left(57.97 \cdot 10^{-8} \left(1 + \frac{0.52}{T} \right) - 9.4611 \cdot 10^{-4} \frac{T_c}{T^2} \right), \quad (2.4.35)$$

$$Z_w^{-1} = 1 + 1650 \frac{e}{T^3} \left(1 - 0.01317 \cdot T_c + 1.75 \cdot 10^{-4} T_c^2 + 1.44 \cdot 10^{-6} T_c^3 \right), \quad (2.4.36)$$

u kojima T_c označava temperaturu u $^{\circ}C$.

TABELA 2.5. Empirijski određeni koeficijenti u modelu troposferskog refrakcionog broja.

Autor	$K_1 (K \cdot mbar^{-1})$	$K_2 (K \cdot mbar^{-1})$	$K_3 (10^5 K^2 \cdot mbar^{-1})$
Smith&Weintraub (1953)	77.61 ± 0.01	72 ± 9	3.75 ± 0.03
Boudouris (1963)	77.59 ± 0.08	72 ± 11	3.75 ± 0.03
Thayer (1974)	77.60 ± 0.01	64.79 ± 0.08	3.776 ± 0.004

Izraz za troposferski refrakcioni broj ukazuje na strukturu koja sadrži suhu i vlažnu komponentu. Međutim, suva komponenta ne može se opisati jednačinom stanja gasa odnosno hidrostatičkom jednačinom. Zbog toga se refraktivnost pogodnije izražava oblikom:

$$N_{TRO} = K_1 \frac{R\rho}{M_d} + \left(K_2 - K_1 \frac{M_w}{M_d} \frac{e}{T} + K_3 \frac{e}{T^2} \right) Z_w^{-1}, \quad (2.4.37)$$

gde je R univerzalna gasna konstanta, ρ je gustina ukupne mase troposfere, a M_d i M_w označavaju molarne težine suvog vazduha i vodene pare. U ovom izrazu prvi član se više ne smatra suvim jer je u gustini ukupne troposferske mase sadržana i gustina vodene pare, ali se zato na njega može primeniti hidrostatička jednačina. Prema tome, troposferski refrakcioni broj sastoji se od hidrostatičke i vlažne komponente:

$$N_{TRO} = N_H + N_W. \quad (2.4.38)$$

Promena troposferskog refrakcionog broja sa visinom uzrok je savijanja putanje elektromagnetnog talasa tako da se on u skladu sa Fermiovim principom kreće duž minimalnog optičkog puta. Kada se razlika između optičkog i pravolinijskog geometrijskog puta zanemari, kašnjenje GPS signala pri prolasku kroz troposferu, izraženo u vremenskim jedinicama, iznosi:

$$\Delta t_{TRO} = \frac{10^{-6}}{c_0} \int_{\rho} N_{TRO}(\rho) d\rho, \quad (2.4.39)$$

ili s obzirom na strukturu troposferskog refrakcionog broja:

$$\Delta t_{TRO} = \frac{10^{-6}}{c_0} \int_{\rho} N_H(\rho) d\rho + \frac{10^{-6}}{c_0} \int_{\rho} N_W(\rho) d\rho = \Delta t_H + \Delta t_W. \quad (2.4.40)$$

Osim što uzrokuje kašnjenje GPS signala, troposfera utiče i na njihovo prigušenje. Glavni razlog tome su turbulencije troposfere na prvih nekoliko kilometara visine (troposferska scintilacija), a u određenoj meri i padavine. Efekti prigušenja izrazitiji su za signale koje ulaze u troposferu pod malim upadnim uglom, ali nemaju veći praktični značaj.

2.4.4 Relativistički efekti

GPS je pored akceleratora čestica jedan od prvih operativnih sistema kod kojih efekti teorije relativiteta imaju značaja, pre svega zbog činjenice da su GPS sateliti opremljeni atomskim frekventnim standardima visoke tačnosti. Za korisnika na fizičkoj površi Zemlje, najvažnije posledice koje proističu iz relativističkih efekata su sledeće (*Ashby, Spilker 1996*):

- Posmatrano u odnosu na istu frekvenciju prijemnika na Zemlji, frekvencija satelitskog časovnika pokazuje konstantno odstupanje zbog razlike između geopotencijala u položaju satelita i prijemnika,
- Satelitski časovnik pokazuje i dodatno malo periodično odstupanje zbog ekscentriciteta satelitske putanje, koje varira u zavisnosti od satelitskog položaja u orbitalnoj ravni,
- Zahvaljujući Zemljinoj rotaciji za vreme puta signala od satelita do prijemnika, dolazi do pojave takozvanog Sanjakovog kašnjenja.

Prema tome, glavni relativistički efekti kod GPS odnose se na vreme. Prilikom njihovog kvantitativnog vrednovanja koristi se činjenica da vreme koje realizuje časovnik u kretanju teče sporije u odnosu na časovnik u mirovanju, a da vreme časovnika koji se nalazi u polju nižeg potencijala teče brže u odnosu na časovnik u polju višeg potencijala.

Konstantno relativističko odstupanje

U četvorodimenzionalnom prostor vremenu, linijski element u pravouglim i sfernim koordinatama ima oblik:

$$ds^2 = -(c_0 dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -(c_0 dt)^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.4.41)$$

i predstavlja skalarnu veličinu nezavisnu od izbora inercijalnog sistema (*Moritz, Hofmann Wellenhof 1993*). U prisustvu Zemljinog gravitacionog polja koje je približno sferno simetrično i ima potencijal:

$$V = -\frac{\mu}{r}, \quad (2.4.42)$$

gde je μ geocentrična gravitaciona konstanta a r rastojanje, linijski element se najpogodnije izražava Švarcšildovim koordinatama:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2V}{c_0^2}\right)(c_0 dt)^2 + \left(1 + \frac{2V}{c_0^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.4.43)$$

Ako se satelit sa časovnikom kreće po kružnoj putanji poluprečnika r_c , u orbitalnom koordinatnom sistemu važiće:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad dr = d\theta = 0, \quad r = r_c. \quad (2.4.44)$$

Pošto brzina satelita iznosi:

$$v_c^2 = r_c^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{r_c}, \quad (2.4.45)$$

linijski element duž satelitske putanje ima oblik:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\mu}{c_0^2 r_c}\right)(c_0 dt)^2 + r_c^2 d\phi^2 = -\left(1 - \frac{3\mu}{c_0^2 r_c}\right)(c_0 dt)^2. \quad (2.4.46)$$

Zadržavajući samo linearne članove pri razvoju u Tejlorov red, za priraštaj sopstvenog vremena satelitskog časovnika dobija se:

$$d\tau_{SAT} = \left|\frac{ds}{c_0}\right| \approx \left(1 - \frac{3\mu}{2c_0^2 r_c}\right) dt. \quad (2.4.47)$$

Sa istim stepenom tačnosti priraštaj sopstvenog vremena fiksnog časovnika na geoidu iznosi:

$$d\tau_{REF} \approx \left(1 + \frac{V_0}{c_0^2}\right) dt, \quad (2.4.48)$$

pri čemu V_0 označava vrednost potencijala na geoidu. Sledi da je odnos priraštaja sopstvenih vremena časovnika u satelitu i na geoidu:

$$\frac{d\tau_{SAT}}{d\tau_{REF}} = \frac{1 - \frac{3\mu}{2c_0^2 r_c}}{1 + \frac{V_0}{c_0^2}} \approx 1 - \frac{3\mu}{2c_0^2 r_c} - \frac{V_0}{c_0^2}. \quad (2.4.49)$$

Kada je u pitanju poluprečnik putanje GPS satelita (oko 26600 km), ovaj odnos odstupa od jedinice za konstantnu vrednost od $4.46475 \cdot 10^{-10}$, što znači da će se osnovna frekvencija satelitskih oscilatora

od 10.23MHz opažati sa Zemlje u iznosu većem za 0.004567Hz . Upravo se za taj konstantni iznos laboratorijski smanjuje frekvencija pre lansiranja satelita, i na taj način kompenzuje relativistički efekat.

Periodično relativističko odstupanje

Pošto se satelit ne kreće kružnom orbitom već približno po Keplerovoj eliptičnoj putanji sa velikom poluosom a i ekscentricitetom e , njegov položaj u orbitalnoj ravni određuju geocentrično rastojanje r i ekscentrična anomalija E :

$$r(t) = a(1 - e \cos E(t)), \quad (2.4.50)$$

$$E(t) - e \sin E(t) = t \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad (2.4.51)$$

pri čemu t označava vreme proteklo od trenutka prolaska satelita kroz perigeum. Shodno Njutnovoju mehanici u kojoj je gravitaciono polje konzervativno, satelit se duž putanje kreće linearnom brzinom (Mueller 1964; Arnold 1970):

$$v^2 = -\mu \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r} \right). \quad (2.4.52)$$

Satelitski časovnik tokom kretanja pokazuje sopstveno vreme čiji je priraštaj $d\tau$. Veza između ovog priraštaja i priraštaja koordinatnog vremena dt glasi:

$$dt = \left(1 + \frac{v^2}{2c_0^2} - \frac{V - V_0}{c_0^2} \right) d\tau, \quad (2.4.53)$$

gde V i V_0 ponovo označavaju geopotencijal u satelitskom položaju i na geoidu. Prema tome, konačni interval koordinatnog vremena duž satelitske putanje iznosiće:

$$\Delta t = \int \left(1 + \frac{3\mu}{2ac_0^2} + \frac{V_0}{c_0^2} - \frac{2\mu}{c_0^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right) d\tau. \quad (2.4.54)$$

Svi članovi podintegralne funkcije osim poslednjeg, već su obuhvaćeni u okviru konstantnog relativističkog odstupanja kod kretanja satelita po kružnoj orbiti. Integracijom poslednjeg člana dobija se periodični relativistički efekat:

$$\Delta t_{PER} = \frac{2\mu}{c_0^2} \int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) d\tau = \frac{2\sqrt{\mu a}}{c_0^2} e \sin E + const. \quad (2.4.55)$$

Praktični ekvivalentni izraz glasi:

$$\Delta t_{PER} = \frac{2\bar{\mathbf{x}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}}}{c_0^2}, \quad (2.4.56)$$

pri čemu $\bar{\mathbf{x}}$ i $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$ označavaju vektor položaja i brzine satelita u inercijalnom referentnom sistemu.

Sanjakovo kašnjenje

Sa tačke gledišta opažača u inercijalnom prostoru, Sanjakovo kašnjenje nastupa zbog kretanja prijemnika za vreme putovanja signala. Ako su $\bar{\mathbf{x}}^j$ i $\bar{\mathbf{x}}_m$ vektori položaja satelita i prijemnika u trenutku emitovanja signala, vektor položaja prijemnika biće u trenutku prijema signala $\bar{\mathbf{x}}_m + \mathbf{v}\tau$, gde \mathbf{v} označava vektor brzine prijemnika, a τ vreme puta signala. Konstantnost brzine svetlosti zahteva da bude ispunjeno:

$$c_0 \tau = \left| \bar{\mathbf{x}}_m + \mathbf{v}\tau - \bar{\mathbf{x}}^j \right|, \quad (2.4.57)$$

odakle se, nakon razvoja u Tejlorov red, vreme puta signala dobija kao:

$$\tau = \frac{|\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}^j|}{c_0} + \frac{(\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}^j) \cdot \mathbf{v}}{c_0^2}. \quad (2.4.58)$$

Drugi član desne strane ovog izraza predstavlja Sanjakovo kašnjenje. Kada se prijemnik ne kreće relativno u odnosu na Zemlju nego samo učestvuje u njoj rotaciji, vektor brzine biće:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{x}}_m, \quad (2.4.59)$$

gde je $\boldsymbol{\Omega}$ vektor rotacije Zemlje, a Sanjakovo kašnjenje Δt_{SAG} dobija oblik:

$$\Delta t_{SAG} = \frac{(\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}^j) \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{x}}_m}{c_0^2} = \frac{2\boldsymbol{\Omega}}{c_0^2} \cdot \frac{\bar{\mathbf{x}}^j \times \bar{\mathbf{x}}_m}{2}. \quad (2.4.60)$$

2.4.5 Geofizički efekti

Položaj proizvoljne stanice na fizičkoj površi Zemlje nije konstantan čak ni kada se izražava u odnosu na terestrički koordinatni sistem čvrsto vezan za Zemljinu koru. Geofizički procesi menjaju geometriju Zemljine površi, pri čemu se same promene mogu vremenski kategorizovati kao vekovne, periodične i epizodne, a prostorno kao globalne, regionalne i lokalne (*Vaniček, Krakiwsky 1986*). Kada je u pitanju GPS obrada, najznačajnije su deformacije pojave povezane sa plimatskim i tektonskim procesima.

Plima Zemljine kore

Zemljin potencijal se u svakoj tački spoljašnjeg prostora periodično menja zbog gravitacionog privlačenja kosmičkih objekata i promena njihovog relativnog položaja u odnosu na Zemlju (*Melchior 1978*). Objekti koji svojom masom i blizinom uzrokuju najveće plimatske promene su Mesec i Sunce, dok je doprinos ostalih nebeskih tela zanemarljiv (*tabela 2.6*).

TABELA 2.6. Relativni doprinosi pojedinih nebeskih tela plimatskom potencijalu.

Nebesko telo	Plimatski potencijal
Mesec	1.0
Sunce	0.4618
Venera	0.000054
Jupiter	0.0000059
Mars	0.0000010

Plimatski potencijal V_T koji u proizvoljnoj tački A generiše neki objekat, može se predstaviti u vidu beskonačnog reda:

$$V_T(A) = \frac{Gm}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_A}{\rho} \right)^n P_n(\cos Z), \quad (2.4.61)$$

u kojem je G Njutnova konstanta univerzalnog privlačenja, m masa kosmičkog objekta, ρ geocentrično rastojanje do kosmičkog objekta, r_A geocentrično rastojanje do tačke na fizičkoj površi Zemlje, Z geocentrično zenitno odstojanje kosmičkog objekta, a P_n su Ležandrovi polinomi odgovarajućeg stepena. Čak i u slučaju najuticajnijeg tela (Meseca), dovoljno je u razvoju beskonačnog reda zadržati samo član stepena $n = 2$:

$$V_2(A) = \frac{Gm}{\rho} \left(\frac{r_A}{\rho} \right)^2 P_2(\cos Z) = \frac{3Gmr_A^2}{2\rho^3} \left(\cos^2 Z - \frac{1}{3} \right). \quad (2.4.62)$$

Zemljina reakcija na ovu plimatsku promenu potencijala je elastična, i nalazi se između ekstremnih vrednosti za potpuno fluidno i potpuno čvrsto telo. Odnos vertikalne reakcije realne Zemlje prema hipotetičkoj potpuno fluidnoj Zemlji karakteriše Lav broj h , dok je za horizontalne deformacije to Šida broj l . Ovi brojevi su potpuno nezavisni od bilo kakvog fizičkog koncepta unutrašnjosti Zemljinog tela. Njihove prosečne vrednosti iznose:

$$h_2 = 0.6090, \quad l_2 = 0.0852. \quad (2.4.63)$$

Ukupna promena položaja ekvipotencijalnih površi Zemljinog potencijala nalazi se Brunsovom formulom i primenom operatora gradijenta na plimatski potencijal (*Heiskanen, Moritz 1967*). Shodno tome, ukupna deformacija površi realne Zemlje, izražena u pravouglim koordinatama, biće:

$$\Delta \mathbf{x}_A = \frac{mr_A^4}{M\rho^3} \left[3l_2 \cos Z \cdot \mathbf{e}_\rho + \left(3 \left(\frac{h_2}{2} - l_2 \right) \cos^2 Z - \frac{h_2}{2} \right) \mathbf{e}_r \right], \quad (2.4.64)$$

sa masom Zemlje M , i jediničnim vektorima u pravcu tačke na fizičkoj površi Zemlje \mathbf{e}_r i kosmičkog tela \mathbf{e}_ρ . Plimatska deformacija Zemlje je globalni fenomen koji se prevashodno ogleda u vertikalnom premeštanju masa. Za razliku od promena visina čija amplituda dostiže i do 50cm, promena relativnih horizontalnih položaja tačaka na fizičkoj površi Zemlje gotovo je zanemarljiva.

Okeansko plimatsko opterećenje

Površina mora i okeana reaguje na plimatski potencijal prilagođavanjem obliku ekvipotencijalne površi. Ova vrsta okeanske plime direktno se meri mareografima. S druge strane, plimatske okeanske mase opterećuje Zemljinu koru i izazivaju deformacije kako okeanskog dna, tako i obalskog pojasa. Satelitskom altimetrijom, meri se zbirni iznos okeanske plime, plime Zemljine kore i okeanskog plimatskog opterećenja (*Dach 2000*).

S obzirom da su plimatske sile kratkoperiodične, reakcija Zemljine kore na okeansko plimatsko opterećenje se i u ovom slučaju može smatrati elastičnom. U lokalnom koordinatnom sistemu sa osama usmerenim radialno, u pravcu zapada i u pravcu juga, ukupno pomeranje $\Delta \mathbf{x}_{OL}$ zbog okeanskog plimatskog opterećenja iznosi (*McCarthy 1996*):

$$\Delta \mathbf{x}_{OL} = \sum_j f_j A_{cj} \cos(\omega_j t + \chi_j + u_j - \Phi_{cj}), \quad (2.4.65)$$

pri čemu A_{cj} i Φ_{cj} označavaju amplitude i faze ukupno 11 glavnih plimatskih komponenti (dugoperiodičnih, dnevnih i poludnevni), ω_j su plimatske kružne frekvencije, a f_j i u_j funkcije longitude uzlaznog Mesečevog čvora. Astronomski argument χ_j odnosi se na trenutak vremena $t = 0^h$.

Okeansko plimatsko opterećenje predstavlja najveći poremećaj u predikciji plimatskog disanja čvrste Zemljine kore. Amplitude i faze efekata okeanskog opterećenja u velikoj meri zavise od specifične plimatske frekvencije, lokalnih reoloških Zemljinih parametara i konfiguracije obalskih linija. Ukupan efekat dostiže vrednosti od nekoliko centimetara, s tim što je vertikalna komponenta oko tri puta veća od horizontalne.

Atmosfersko plimatsko opterećenje

Atmosferska plima sama po sebi ima samo indirektni uticaj na okeanske plime i plime Zemljine kore, koji se ogleda u deformacijama zbog vremenskih i prostornih varijacija atmosferskih masa, pa time i atmosferskog pritiska. Mnogobrojna ispitivanja potvrdila su da ukupni efekti atmosferskog opterećenja mogu dostići vrednost od 25mm, pri čemu su horizontalna pomeranja jedna trećina ovog iznosa.

Model vertikalnih pomeranja Zemljine kore usled atmosferskog plimatskog opterećenja glasi:

$$\Delta h_A [mm] = -0.35P [mbar] - 0.55\bar{P} [mbar], \quad (2.4.66)$$

pri čemu P označava anomaliju atmosferskog pritiska u odnosu na normalnu vrednost od $1013.24mbar$, dok je \bar{P} srednja vrednost atmosferskog pritiska za područje radijusa $2000km$ oko tačke računanja.

Tektonska pomeranja Zemljine kore

Relativno međusobno kretanje velikih kontinentalnih ploča predmet je Vegenerove hipoteze o kretanju kontinentata još iz 1908. godine. Po toj hipotezi, velike litosferne ploče se kroz geološku istoriju neprestano kreću, nabiraju i podvlače jedna pod drugu, čime se objašnjava vulkanska aktivnost, stvaranje okeanskog dna i proces nastajanja velikih planinskih venaca. Savremene geodetske satelitske metode u potpunosti su potvrdile vrednosti relativnih brzina kretanja litosfernih ploča od oko $5cm$ godišnje, koje se dobro slažu sa rezultatima nezavisnih geoloških i geofizičkih istraživanja. Slaganje se, međutim, odnosi pre svega na takozvana savremena kretanja Zemljine kore, dok su ti procesi u dalekoj geološkoj prošlosti još uvek neodređeni.

Horizontalna pomeranja tačaka na fizičkoj površi Zemlje koja su rezultat tektonskih procesa modeliraju se u vidu komponenti vektora rotacija koji se pridružuju svakoj od većih litosfernih ploča. Standardni model Međunarodne službe za Zemljinu rotaciju (IERS) je NNR-NUVEL1A (DeMets et al. 1994), po kojem, na primer, vektor rotacije za evroazijsku kontinentalnu ploču ima sledeće komponente:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000981 \\ -0.002395 \\ +0.003153 \end{bmatrix} \left[rad / 10^6 god \right]. \quad (2.4.67)$$

Trodimenzionalne koordinate tačaka \mathbf{x}_0 koje se odnose na trenutak vremena t_0 , transformišu se u koordinate \mathbf{x} koje se odnose na neki drugi vremenski trenutak t po izrazu:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_0 (t - t_0) 10^{-6}, \quad (2.4.68)$$

NNR-NUVEL1A podrazumeva kretanje čvrstog tela, tako da modeli ove vrste opisuju samo globalno horizontalno stanje Zemljine kore. Međutim, značajne deformacije Zemljine kore mogu nastupiti i kao rezultat čitavog niza regionalnih i lokalnih fenomena. Tako se na primer u oblastima duž granica litosfernih ploča akumuliraju naponi i javljaju nelinearne interseizmičke deformacije koje dostižu brzine od $15cm$ godišnje. Koseizmičke deformacije koje nastupaju u trenutku velikih zemljotresa mogu iznositi nekoliko metara, a deformacije sličnog reda veličine uzrokuje i jaka vulkanska aktivnost. Postglacijalno izdizanje Zemljine kore, odnosno elastična reakcija Zemlje na topljenje leda iz poslednjeg ledenog doba, ima danas vrednost reda $1mm$ godišnje. Konačno, varijacije lokalnih uslova, kao što su promene nivoa podzemnih voda i atmosferskih parametara, takođe uzrokuju pomeranja fizički stabilizovanih tačaka.

Poglavlje 3

MATEMATIČKA OBRADA
GPS MERENJA

3.1 Gaus-Markovljev model

3.1.1 Opšti izrazi za MNK ocene

Ocenjivanje funkcionalnih parametara u linearnim ili linearizovanim modelima GPS faznih i kodnih merenja vrši se po pravilu metodom najmanjih kvadrata (MNK). Matematički model koji je u najčešćoj upotrebi je Gaus-Markovljev model potpunog ranga (*Koch 1988*):

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}, \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{C}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}, \quad (3.1.2)$$

gde je:

$\hat{\mathbf{l}}$...	vektor ocena merenja,
\mathbf{l}	...	vektor izvršenih merenja,
\mathbf{v}	...	vektor popravaka,
\mathbf{A}	...	konfiguraciona matrica,
$\hat{\mathbf{x}}$...	vektor ocena parametara,
\mathbf{C}_1	...	kovarijaciona matrica merenja,
σ_0	...	standard jedinice težine,
\mathbf{Q}_1	...	matrica kofaktora merenja,
\mathbf{P}	...	matrica težina merenja.

Prisustvo vektora popravaka u funkcionalnom delu modela obezbeđuje konzistentnost sistema jer je prostor ranga merenja R^n , a ranga parametara R^u . Ukoliko je konfiguraciona matrica nepotpunog ranga kolona, model se proširuje uslovima kojima se otklanja defekt ranga, ili se vektor parametara projektuje u podprostor u kojem je ocenljiv (*Perović 1986, 1998*). Metod najmanjih kvadrata podrazumeva ona rešenja konzistentnog, ali neodređenog sistema, koja minimalizuju kvadratnu formu:

$$\Omega(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\sigma_0^2} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}). \quad (3.1.3)$$

Iz uslova minimuma sledi sistem normalnih jednačina:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l}. \quad (3.1.4)$$

Definicijom ortogonalnih projektora:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1}, \quad (3.1.5)$$

$$\mathbf{R}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{R}, \quad (3.1.6)$$

i rešavanjem normalnih jednačina, dobijaju se sledeći rezultati ocenjivanja:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l}, \quad (3.1.7)$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1}, \quad (3.1.8)$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R} \mathbf{l}, \quad (3.1.9)$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T = \mathbf{R} \mathbf{C}_1 \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{R}^T, \quad (3.1.10)$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l} = -\mathbf{R}^{\perp} \mathbf{l}, \quad (3.1.11)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}} = \mathbf{C}_1 - \mathbf{A} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T = \mathbf{R}^{\perp} \mathbf{C}_1 (\mathbf{R}^{\perp})^T = \mathbf{R}^{\perp} \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1 (\mathbf{R}^{\perp})^T, \quad (3.1.12)$$

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{l}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.1.13)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} - \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T, \quad (3.1.14)$$

$$f = n - u = n - r(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{F}), \quad (3.1.15)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\Omega}{f}. \quad (3.1.16)$$

Ocena vektora parametara je najbolja linearna nepomerena ocena u teoriji aproksimacija. Za slučaj normalno raspoređenih merenja, isti rezultat bi se dobio primenom metode maksimalne verodostojnosti. Međutim, nepomenost ocene standarda jedinice težine obezbeđuje jedino metod najmanjih kvadrata.

Postupak MNK ocenjivanja ima i geometrijsku interpretaciju. U podprostoru R^u kojeg definišu vektori kolone konfiguracione matrice \mathbf{A} , vektor ocena $\hat{\mathbf{x}}$ određuje se tako da $\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}$ bude ortogonalna projekcija vektora merenja \mathbf{l} na taj podprostor:

$$\mathbf{R} \mathbf{l} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.1.17)$$

Ova projekcija deli vektor merenja na dva dela:

$$\mathbf{l} = \mathbf{R} \mathbf{l} + (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \mathbf{l} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{v}, \quad (3.1.18)$$

odakle slede svojstva:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3.1.19)$$

$$\mathbf{R} \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (3.1.20)$$

$$\mathbf{R}^{\perp} \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (3.1.21)$$

Ocenjivanje po metodi najmanjih kvadrata ima više praktičnih aspekata koji se koriste u numeričkoj primeni, kao što su eliminacija parametara i superpozicija normalnih jednačina. Suština ovih postupaka je redukcija dimenzija normalnih jednačina i mogućnost sekvencijalnog odnosno rekurzivnog ocenjivanja parametara.

3.1.2 Eliminacija parametara

Prethodna eliminacija parametara je postupak redukcije dimenzija originalnog sistema normalnih jednačina bez gubitka informacija. Ako se vektor parametara razdvoji na dva vektora $\hat{\mathbf{x}}_1$ i $\hat{\mathbf{x}}_2$, normalne jednačine mogu da se prikažu u obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.1.22)$$

Kao rezultat eliminacije vektora parametara $\hat{\mathbf{x}}_2$ dobija se redukovani sistem normalnih jednačina:

$$(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21})\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{n}_1 - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{n}_2, \quad (3.1.23)$$

ili, označeno skraćeno:

$$\tilde{\mathbf{N}}_{11}\hat{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{n}}_1. \quad (3.1.24)$$

Kvadratna forma koja odgovara originalnom sistemu normalnih jednačina računa se po izrazu (Brockmann 1996):

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l} - \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l} - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T & \mathbf{n}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l} - \mathbf{n}_1^T \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} (\mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_{21} \hat{\mathbf{x}}_1), \quad (3.1.25) \\ &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l} - \hat{\mathbf{x}}_1^T (\mathbf{n}_1 - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2) - \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2 \\ &= \tilde{\Omega} - \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2 \end{aligned}$$

odakle sledi da je kvadratnu formu koja se odnosi na redukovani sistem normalnih jednačina potrebno korigovati članom $-\mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2$ da bi udeo koji potiče od eliminisanih parametara bio uzet u obzir. Kovarijaciona matrica vektora ocena $\hat{\mathbf{x}}_1$ računa se na uobičajeni način:

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{N}_{21})^{-1}. \quad (3.1.26)$$

Za razliku od eliminacije u normalnim jednačinama, eliminacija parametara iz kovarijacione matrice originalnog vektora ocena $\hat{\mathbf{x}}$ predstavlja trivijalni postupak, i sastoji se u odbacivanju vrsta i kolona koje se odnose na eliminisane parametre. Kvadratna forma tom prilikom ostaje nepromenjena jer je njenim računanjem uticaj eliminisanih parametara već obuhvaćen.

Eliminacija parametara relativno je čest postupak u obradi GPS merenja, naročito ako su predmet obrade originalna neredukovana fazna i kodna merenja. Kada to zahteva priroda problema, može se desiti da modeliranje podrazumeva veliki broj pomoćnih nepoznatih parametara čije ocene nisu od interesa ali se moraju uzeti u obzir jer bi u protivnom funkcionalni model bio neadekvatan. Takav slučaj predstavljaju parametri modela kojima se opisuju stanja časovnika prijemnika i satelita, troposferski i jonosferski uticaji, kao i satelitske putanje, a koji se uz to još moraju često formulirati u svakoj epohi merenja.

3.1.3 Sekvencijalno MNK ocenjivanje

MNK ocenjivanje uz upotrebu svih izvršenih merenja identično je razdvajanju postupka ocenjivanja na više delova i kombinovanju pojedinačnih rešenja u konačan rezultat. Ovakvo sekvencijalno ocenjivanje poznato je u geodeziji od vremena Helmerta, a danas se koristi pre svega u situacijama sa velikim brojem podataka, kao što je to slučaj u obradi GPS merenja.

Matematički model, normalne jednačine i ocene parametara u pojedinim od ukupno m koraka sekvencijalnog ocenjivanja imaju respektivno opšti oblik:

$$\mathbf{l}_i + \mathbf{v}_i = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (3.1.27)$$

$$\mathbf{C}_i = \sigma_{0i}^2 \mathbf{P}_i^{-1}, \quad (3.1.28)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i, \quad (3.1.29)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \left(\mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i \right)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i, \quad (3.1.30)$$

$$\mathbf{C}_{x,i} = \left(\mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i \right)^{-1}. \quad (3.1.31)$$

Ako se pojedinačni vektori ocena shvate kao pseudomerenja, koja su uz to još i međusobno nezavisna, kombinovani matematički model može da se formuliše na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{x}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{x,1} \\ \dots \\ \hat{\mathbf{v}}_{x,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \dots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{x,1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{x,m} \end{bmatrix}. \quad (3.1.32)$$

Normalne jednačine koje odgovaraju ovako formulisanom matematičkom modelu imaju oblik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \dots & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{x,1}^{-1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{x,m}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \dots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \dots & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{x,1}^{-1} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{x,m}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{x}}_m \end{bmatrix}, \quad (3.1.33)$$

odnosno, s obzirom na definiciju pojedinih kovarijacionih matrica:

$$\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i \right) \hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i. \quad (3.1.34)$$

Prema tome, normalne jednačine kombinovanog sistema dobijaju se superpozicijom normalnih jednačina pojedinačnih sistema sekvencijalnog postupka (Leick 1995; Brockmann 1996). Superpozicija normalnih jednačina uvek se može sprovesti kada su pojedinačne grupe merenja međusobno nezavisne, odnosno kada kombinovana kovarijaciona matrica ima dijagonalnu strukturu.

Osim uslova linearne nezavisnosti, neophodno je da se normalne jednačine zasnivaju na jedinstvenim približnim vrednostima nepoznatih parametara. Ukoliko su u nekom od koraka sekvencijalnog postupka za linearizaciju korišćene druge približne vrednosti, odgovarajuće normalne jednačine moraju se transformisati. Različite približne vrednosti imaju za posledicu da normalne jednačine odgovaraju različitim ocenama parametara $\hat{\mathbf{x}}$ i $\tilde{\mathbf{x}}$. Međutim, njihov odnos se uvek može napisati u vidu linearne veze:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{x}} + d\mathbf{x}, \quad (3.1.35)$$

iz koje slede transformisane normalne jednačine i kvadratna forma:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} d\mathbf{x}), \quad (3.1.36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{l}}^T \mathbf{C}_1^{-1} \tilde{\mathbf{l}} &= (\mathbf{l} - \mathbf{A} d\mathbf{x})^T \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} d\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{l}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l} - 2\mathbf{n}^T d\mathbf{x} + d\mathbf{x}^T \mathbf{N} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

Uz poznate normalne jednačine i kvadratnu formu za svaki korak sekvencijalnog postupka, kombinovano rešenje za sumu kvadrata popravaka i ocenu disperzionog koeficijenta dobija se respektivno po izrazima:

$$\Omega = \sum_{i=1}^m \mathbf{l}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i - \sum_{i=1}^m \mathbf{l}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.1.38)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega}{\sum_{i=1}^m f_i}, \quad (3.1.39)$$

pri čemu su f_i pojedinačni stepeni slobode.

3.1.4 Rekurzivno MNK ocenjivanje

Rekurzivni postupak se primenjuje u slučaju kada postoje kombinovana rešenja sekvencijalnog postupka, a na raspolaganju je nova grupa merenja. Za razliku od sekvencijalnog ocenjivanja koje se zasniva na normalnim jednačinama, u rekurzivnom postupku koriste se kovarijacione matrice.

Ako se kombinovani rezultati sekvencijalnog ocenjivanja sa ukupno $m-1$ grupa merenja označe respektivno sa $\hat{\mathbf{x}}_{m-1}$, $\mathbf{C}_{x,m-1}$ i Ω_{m-1} , pri čemu je:

$$\mathbf{C}_{x,m-1} = \left(\mathbf{A}_{m-1}^T \mathbf{C}_{m-1}^{-1} \mathbf{A}_{m-1} \right)^{-1}, \quad (3.1.40)$$

tada je uključenjem nove grupe merenja moguće sve ove rezultate rekurzivno odrediti po sledećim izrazima:

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \hat{\mathbf{x}}_{m-1} + \Delta \mathbf{x}_m = \hat{\mathbf{x}}_{m-1} + \mathbf{F}_m \bar{\mathbf{v}}_m, \quad (3.1.41)$$

$$\mathbf{C}_{x,m} = \mathbf{C}_{x,m-1} - \Delta \mathbf{C}_{x,m} = \mathbf{C}_{x,m-1} - \mathbf{F}_m \mathbf{A}_m \mathbf{C}_{x,m-1}, \quad (3.1.42)$$

$$\Omega_m = \Omega_{m-1} + \Delta \Omega_m = \Omega_{m-1} + \bar{\mathbf{v}}_m^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{v}}_m. \quad (3.1.43)$$

gde je:

$$\bar{\mathbf{v}}_m = \mathbf{I}_m - \mathbf{A}_m \hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \quad (3.1.44)$$

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{C}_{x,m-1} \mathbf{A}_m^T \bar{\mathbf{P}}, \quad (3.1.45)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \left(\mathbf{C}_m + \mathbf{A}_m \mathbf{C}_{x,m-1} \mathbf{A}_m^T \right)^{-1}. \quad (3.1.46)$$

Rekurzivni postupak naročito je pogodan za slučaj inoviranja sa malim brojem novih merenja. U slučaju jednog novog merenja algoritam je gotovo trivijalan, jer operaciju invertovanja zamenjuje jednostavno deljenje. Kada je u iteracionom koraku prisutan veliki broj novih merenja, sekvencijalni postupak je jednostavniji za upotrebu.

Interesantno je da su rekurzivne formule ekvivalentne fazi ocenjivanja kod Kalmanovih filtera, pri čemu se matrica \mathbf{F} može poistovetiti sa Kalmanovom matricom. Razlika se sastoji u tome što Kalmanov filter koristi dodatne informacije o dinamici sistema i sistemskom šumu pomoću kojih vrši prognozu stanja sistema. Zbog toga su rekurzivne formule identične Kalmanovom filteru samo u specijalnom slučaju kada parametri nisu vremenski promenljivi i kada je sistemski šum zanemarljivo mali.

3.2 Kalmanov filter

3.2.1 Formulacija Kalmanovog filtera u diskretnom slučaju

Za razliku od rekurzivnog postupka, Kalmanov filter predstavlja algoritam koji omogućuje optimalno ocenjivanje vremenski promenljivih parametara linearnog dinamičkog sistema (*Kalman 1960*). Kalmanov filter naročito je pogodan za obradu GPS merenja, nezavisno od toga da li su izvršena u statičkom ili kinematičkom režimu rada, samostalno ili u kombinaciji sa drugim sensorima, jer se stanične koordinate i brzine, fazne neodređenosti, atmosferski uticaji i stanja časovnika uvek mogu

posmatrati kao parametri koji se menjaju u funkciji vremena (Axelrad 1996; Soehne 1996; Leinen 1997; Witchayangkoon 2000).

Preduslov za primenu Kalmanovog filtera je da se promene parametara tokom vremena mogu opisati sledećim osnovnim jednačinama kontinualnog modela:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t), \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (3.2.2)$$

gde je:

$\mathbf{x}(t)$...	vektor stanja sistema,
$\mathbf{F}(t)$...	dinamička matrica,
$\mathbf{G}(t)$...	poremećajna konfiguraciona matrica,
$\mathbf{w}(t)$...	poremećajna funkcija (sistemski šum),
$\mathbf{z}(t)$...	vektor opažanja,
$\mathbf{H}(t)$...	konfiguraciona matrica opažanja,
$\mathbf{v}(t)$...	merni šum,

i pri čemu $\mathbf{w}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ predstavljaju slučajne procese koji se mogu smatrati Gausovskim belim šumom sa funkcijama gustina moći $\mathbf{Q}(t)$ i $\mathbf{R}(t)$, odnosno odgovarajućim kovarijacionim funkcijama $\mathbf{Q}(t)$ i $\mathbf{R}(t)$:

$$\mathbf{w}(t) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(t)), \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{v}(t) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}(t)). \quad (3.2.4)$$

Za očekivane vrednosti pojedinih veličina važe sledeći izrazi:

$$E[\mathbf{w}(t)] = E[\mathbf{v}(t)] = \mathbf{0}, \quad (3.2.5)$$

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = \mathbf{Q}(t)\delta(t-\tau), \quad (3.2.6)$$

$$E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] = \mathbf{R}(t)\delta(t-\tau), \quad (3.2.7)$$

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] = \mathbf{0}, \quad (3.2.8)$$

sa Dirakovom δ -funkcijom koja se definiše kao:

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0 & (t-\tau \neq 0) \\ \infty & (t-\tau = 0) \end{cases}. \quad (3.2.9)$$

Vektorska diferencijalna jednačina prvog reda iz kontinualnog modela u potpunosti opisuje jedan linearni dinamički sistem sa stohastičkim ulaznim veličinama. To znači da je moguće odrediti vektor stanja sistema u proizvoljnom trenutku vremena t , ako je stanje poznato u nekom prošlom trenutku t_0 , i ako su uz to poznate i ulazne veličine sistema. Rešenje vektorske diferencijalne jednačine je oblika:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau, \quad (3.2.10)$$

sa matricom prelaza (tranzicionom matricom) $\Phi(t, t_0)$ koja ima sledeća svojstva:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{F}(t)\Phi(t, t_0), \quad (3.2.11)$$

$$\Phi(t, t) = \mathbf{I}, \quad (3.2.12)$$

$$\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0), \quad (3.2.13)$$

$$\Phi^{-1}(t_1, t_0) = \Phi(t_0, t_1). \quad (3.2.14)$$

Određivanje elemenata tranzicione matrice vrši se na osnovu dinamičke matrice. Kada je proces stacionaran, dinamička matrica ne zavisi od vremena, i u tom slučaju se tranziciona matrica dobija po izrazu:

$$\Phi(\Delta t) = e^{F\Delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} F^i \frac{\Delta t^i}{i!}. \quad (3.2.15)$$

Poznavanje ulaznih veličina i dinamičke matrice uvek je u praksi ograničeno. Stoga se za potrebe kontrole i poboljšanja prognoze stanja vrše merenja, ali po pravilu u diskretnim trenucima vremena. Diskretizacijom kontinualnog modela i linearizacijom nelinearnog dinamičkog ili mernog sistema, dobijaju se osnovni izrazi standardnog (SKF) odnosno proširenog (EKF) Kalmanovog filtera (*Gelb 1974; Welch, Bishop 1997*):

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}, \quad (3.2.16)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (3.2.17)$$

$$\mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k), \quad (3.2.18)$$

$$\mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k), \quad (3.2.19)$$

pri čemu se upotrebljeni indeksi odnose na trenutke vremena.

Algoritam Kalmanovog filtera je rekurzivan, tako da je za optimalno ocenjivanje parametara potrebno poznavanje vektora početnog stanja sistema \mathbf{x}_0 i njegove kovarijacione matrice \mathbf{P}_0 . Za svaku narednu epohu Kalmanov filter vrši prvo prognozu stanja sistema ($\tilde{\mathbf{x}}$) pomoću tranzicione matrice, a zatim i njegovu ocenu ($\hat{\mathbf{x}}$) na osnovu izvršenih merenja:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \quad (3.2.20)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_k = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T, \quad (3.2.21)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{x}}_k), \quad (3.2.22)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \tilde{\mathbf{P}}_k, \quad (3.2.23)$$

$$\mathbf{K}_k = \tilde{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (3.2.24)$$

Upotrebljene oznake imaju sledeća značenja:

\mathbf{x}_k	...	vektor stanja sistema,
\mathbf{P}_k	...	kovarijaciona matrica vektora stanja,
\mathbf{K}_k	...	Kalmanova matrica poboljšanja,
\mathbf{H}_k	...	konfiguraciona matrica opažanja,
Φ_k	...	tranziciona matrica,
\mathbf{Q}_k	...	kovarijaciona matrica sistemskog šuma,
\mathbf{R}_k	...	kovarijaciona matrica mernog šuma,
Γ_k	...	konfiguraciona matrica sistemskog poremećaja.

Za razliku od tranzicione matrice čija se diskretna forma lako izvodi na osnovu dinamičke matrice, konfiguraciona matrica sistemskog poremećaja ne može se izolovano formulisati, jer za svaku epohu vremena važi:

$$\Gamma_k \mathbf{w}_k = \int_k^{k+1} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau. \quad (3.2.25)$$

Shodno tome, prognoza kovarijacione matrice vektora stanja u pojedinim epohama vremena vrši se primenom zakona o prenosu grešaka na sistemski šum:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_k &= \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \\ &= \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \int_{k-1}^k \Phi(t_k, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \Phi^T(t_k, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

što je ustvari verzija diskretnog oblika takozvane linearne neprekidne funkcije varijanse, odnosno diferencijalne jednačine koja opisuje zakon prenosa grešaka u fazi prognoze kovarijacione matrice vektora stanja sistema:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t). \quad (3.2.27)$$

3.2.2 Gaus-Markovljev proces prvog reda

Često se kod primene Kalmanovog filtera u obradi GPS merenja, dinamika parametara vektora stanja može modelirati u vidu Gaus-Markovljevog procesa prvog reda. On je karakterističan po tome što raspodela verovatnoća procesa za proizvoljni trenutak vremena t_k zavisi samo od realizacije procesa u prethodnom trenutku vremena t_{k-1} :

$$F[x(t_k) | x(t_{k-1}), \dots, x(t_1)] = F[x(t_k) | x(t_{k-1})]. \quad (3.2.28)$$

Neprekidnom Gaus-Markovljevom slučajnom procesu prvog reda odgovara diferencijalna jednačina:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{T}x(t) + w(t) = -\beta x(t) + w(t), \quad (3.2.29)$$

u kojoj T označava korelaciono vreme, w je beli šum sa Gausovom raspodelom verovatnoća, a β faktor prigušenja. Pošto je skalarni reprezent neprekidne linearne jednačine varijanse:

$$\dot{p} = 2fp + g^2q, \quad (3.2.30)$$

pri čemu je za Gaus-Markovljev proces prvog reda q konstantno a $\dot{p} = 0$, sledi da je disperzija procesa:

$$E[x^2] = \sigma^2 = p = \frac{q}{2\beta}. \quad (3.2.31)$$

Autokovarijaciona funkcija i funkcija spektralne gustine ovog procesa glase respektivno:

$$C_{xx}(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}, \quad (3.2.32)$$

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(t) \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^{\infty} C_{xx}(t) \cos(\omega t) dt \\ &= 2\sigma^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos(\omega t) dt = \frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Diskretni Gaus-Markovljev proces ima oblik:

$$x_k = e^{-\beta\Delta t} x_{k-1} + w_{k-1}, \quad (3.2.34)$$

sa disperzijom belog šuma w_{k-1} :

$$\begin{aligned} q_{k-1} &= p - (e^{-\beta\Delta t})^2 p = p(1 - e^{-2\beta\Delta t}) \\ &= \frac{q}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t_{k+1} - t_k)}) \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Dva ekstremna slučaja Gauss-Markovljevog procesa prvog reda od velikog su praktičnog značaja kada je u pitanju obrada GPS merenja. Kraće korelaciono vreme znači manju korelisanost, i u tom slučaju moguće su velike varijacije parametara vektora stanja iz epohe u epohu. Kada korelaciono vreme teži nuli ($\beta \rightarrow \infty$), proces se označava kao čisti beli šum, sa disperzijom σ_w^2 i konstantnom spektralnom gustinom moći:

$$Q = \lim_{\beta \rightarrow \infty} S_{xx}(\omega) = \frac{2\sigma_w^2}{\beta} = 2\sigma_w^2 T. \quad (3.2.36)$$

S druge strane, duže korelaciono vreme izražava veću korelisanost i smanjuje varijacije parametara. Ukoliko korelaciono vreme teži beskonačnosti ($\beta \rightarrow 0$), proces postaje čisti slučajni hod. Diferencijalna jednačina i diskretna predstava procesa slučajnog hoda glase respektivno:

$$\dot{x}(t) = w(t), \quad (3.2.37)$$

$$x_{k+1} = x_k + w_k. \quad (3.2.38)$$

Primer parametara koji se u obradi GPS merenja mogu tretirati kao slučajni hod su stanične koordinate i fazne neodređenosti, dok se troposferski uticaji i stanja časovnika modeliraju ili kao slučajni hod ili kao beli šum.

3.2.3 Praktični aspekti Kalmanovog filtera

Direktna primena jednačina Kalmanovog filtera povezana je sa nekoliko praktičnih problema. U fazi prognoze, kovarijaciona matrica \mathbf{Q} utiče na matricu \mathbf{P} , dok u fazi ocenjivanja matrice \mathbf{P} , \mathbf{R} i \mathbf{H} utiču na Kalmanovu matricu \mathbf{K} , od koje zauzvrat zavisi matrica \mathbf{P} . To znači da se može desiti da vektor stanja iz epohe u epohu bude formalno sve tačniji, ali da se istovremeno zbog sve manjeg uticaja merenja udaljava od istinitih vrednosti. Ova pojava, koja se označava kao divergencija filtera, nastupa zbog neadekvatnog modeliranja, grešaka linearizacije i zaokruživanja, ili nedovoljnog poznavanja stohastičkih svojstava procesa. Stoga je ukupno funkcionisanje filtera u velikoj meri određeno inicijalnim izborom veličina koje definišu kvalitet merenja i parametara vektora stanja.

U situacijama u kojima je merni šum nedovoljno poznat moguće je primeniti takozvani adaptivni postupak procene tačnosti merenja. Osnovna ideja ovog postupka sastoji se u upotrebi vektora prognoziranih mernih reziduuma u epohi k :

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{x}}_k. \quad (3.2.39)$$

Pošto vrednosti pojedinačnih članova vektora prognoziranih reziduuma nisu pouzdane mere tačnosti, kao reprezentativni pokazatelji računaju se srednje vrednosti iz prethodnih N epoha:

$$\bar{z}_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k \tilde{z}_i^2. \quad (3.2.40)$$

S druge strane, očekivane vrednosti kvadrata prognoziranih reziduuma glase:

$$\left(E[\tilde{\mathbf{z}}_k \tilde{\mathbf{z}}_k^T] \right)_{ii} = \left(\mathbf{H}_k \Phi_k \tilde{\mathbf{P}}_k \Phi_k^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)_{ii} = E[\tilde{z}_k^2], \quad (3.2.41)$$

tako da se može formulisati odnos:

$$q_k = \frac{\bar{z}_k^2}{E[\bar{z}_k^2]}. \quad (3.2.42)$$

Adaptivni postupak podrazumeva da se dijagonalni članovi kovarijacione matrice \mathbf{R} u narednoj epohi određuju po izrazu:

$$R_{ii}(t_{k+1}) = q_k R_{ii}(t_k), \quad (3.2.43)$$

čime faktor q iz epohe u epohu teži jedinici.

Iskustva u implementaciji Kalmanovog filtera pokazuju da se u pojedinim fazama računanja lako mogu pojaviti numeričke nestabilnosti. To se u prvom redu odnosi na ocenjivanje kovarijacione matrice vektora stanja \mathbf{P} . Da bi se izbegli sa tim povezani numerički problemi, Kalmanov filter se najčešće formuliše uz pomoć takozvane U-D faktorizacije (*Bierman 1975*), kojom se kovarijaciona matrica \mathbf{P} rastavlja u proizvod gornje trouglaste matrice \mathbf{U} i dijagonalne matrice \mathbf{D} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T. \quad (3.2.44)$$

Može se dokazati da U-D faktorizacija uvek postoji i da je jedinstvena za svaku simetričnu i pozitivno definitnu matricu. Faktorizovana kovarijaciona matrica koristi se onda u svim fazama Kalmanovog filtera, tako da se, na primer, određivanje kovarijacione matrice \mathbf{P} u fazi ocenjivanja vrši po sledećem algoritmu koji važi za nekorelisana merenja:

$$\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{h}, \quad (3.2.45)$$

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{b}, \quad (3.2.46)$$

$$c = \frac{1}{r + \mathbf{v}^T \mathbf{b}}, \quad (3.2.47)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{U}}^T = \tilde{\mathbf{U}} (\tilde{\mathbf{D}} - c \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \tilde{\mathbf{U}}^T, \quad (3.2.48)$$

pri čemu \mathbf{h} označava vrstu konfiguracione matrice merenja, dok je r disperzija merenja (*Thornton, Bierman 1980*).

Druga teškoća u primeni Kalmanovog filtera povezana je sa računanjem Kalmanove matrice, jer ono podrazumeva inverziju matrice koja je eventualno velikih dimenzija n_k (broj merenja u aktuelnoj epohi). Ovaj problem može se prevazići sekvencijalnim pristupom u fazi ocenjivanja. Za svako opažanje z_{jk} , odgovarajuću varijansu r_{jk} i vrstu konfiguracione matrice merenja \mathbf{h}_{jk} ($j = 1, \dots, n_k$), ocene se vrše po izrazima:

$$\hat{\mathbf{x}}_{jk} = \tilde{\mathbf{x}}_{j-1,k} + \mathbf{k}_{jk} (z_{jk} - \mathbf{h}_{jk} \tilde{\mathbf{x}}_{j-1,k}), \quad (3.2.49)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{jk} = (\mathbf{I} - \mathbf{k}_{jk} \mathbf{h}_{jk}) \tilde{\mathbf{P}}_{j-1,k}, \quad (3.2.50)$$

$$\mathbf{k}_{jk} = \frac{1}{\alpha_{jk}} \tilde{\mathbf{P}}_{j-1,k} \mathbf{h}_{jk}^T, \quad (3.2.51)$$

$$\alpha_{jk} = \mathbf{h}_{jk} \tilde{\mathbf{P}}_{j-1,k} \mathbf{h}_{jk}^T + r_{jk}. \quad (3.2.52)$$

Algoritmi U-D faktorizacije i sekvencijalnog pristupa u računanju Kalmanove matrice veoma su efikasni u pogledu brzine, numeričke stabilnosti i uštede memorijskog prostora računara. Određena pojednostavljenja i neznatne modifikacije koje se javljaju za slučaj Gaus-Markovljevog procesa prvog reda predstavljaju dodatnu prednost, jer se ovom klasom procesa može modelirati veliki broj fizičkih fenomena.

3.3 Problemi adekvatnosti modela

3.3.1 Testiranje hipoteza

Rezultati i kvalitet ocenjivanja u najvećoj meri zavise od validnosti funkcionalnog i stohastičkog modela. Proveru ispunjenosti pretpostavki koje leže u suštini primene MNK omogućuju metode koje se zasnivaju na teoriji statističkog testiranja hipoteza. Ova teorija dobro je razvijena, i u njoj se razlikuju pojmovi opštih linearnih, specijalnih, parametarskih i neparametarskih hipoteza, kao i moći testa odnosno grešaka I i II vrste (*Perović 1986; Koch 1988; Grafarend 2000*).

Za primenu MNK potrebna je specifikacija prva dva statistička momenta slučajnog vektora opažanja \mathbf{I} , koja se može formalizovati u vidu nulte hipoteze:

$$H_0 : E[\mathbf{I}] = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad D[\mathbf{I}] = \mathbf{C}_1, \quad (3.3.1)$$

sa konfiguracionom matricom \mathbf{A} dimenzija $n \times u$ i kovarijacionom matricom merenja \mathbf{C}_1 dimenzija $n \times n$. Međutim, za testiranje hipoteza neophodno je pored toga i poznavanje zakona raspodele slučajnog vektora opažanja, za koji se obično pretpostavlja da je normalan. Iako se može neadekvatno formulirati bilo koji deo matematičkog modela, iskustvo pokazuje da se modelske greške u najvećem broju slučajeva odnose na funkcionalni model. Stoga opšti oblik alternativne hipoteze glasi:

$$H_a : E[\mathbf{I}] = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\nabla, \quad D[\mathbf{I}] = \mathbf{C}_1, \quad (3.3.2)$$

gde je \mathbf{B} poznata matrica dimenzija $n \times q$, a ∇ nepoznati vektor dimenzija $q \times 1$ kojim se funkcionalni model proširuje da bi se obuhvatile modelske greške određenog tipa. Linearna kombinacija merenja, odnosno test statistika kojom se izražava stepen prilagođenosti nulte ili alternativne hipoteze izvršenim merenjima ima oblik:

$$T_q = \frac{1}{q} \mathbf{v}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_v \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{v}. \quad (3.3.3)$$

Test statistika ima centralni Fišerov raspored sa q i ∞ stepeni slobode ako je istinita nulta hipoteza, odnosno necentralni Fišerov raspored sa parametrom necentralnosti λ ako je istinita alternativna hipoteza:

$$\begin{aligned} T_q | H_0 &\sim F(q, \infty, 0) \\ T_q | H_a &\sim F(q, \infty, \lambda) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Odbacivanje nulte hipoteze sledi kada je:

$$T_q \geq F_\alpha(q, \infty, 0), \quad (3.3.5)$$

pri čemu je α izabrani nivo značajnosti. Veličina α istovremeno označava grešku I vrste, odnosno verovatnoću odbacivanja nulte hipoteze kada je ona istinita:

$$\alpha = P[T_q | H_0 > F_\alpha(q, \infty, 0)] = \int_{F_\alpha}^{\infty} p_F(x | q, 0) dx, \quad (3.3.6)$$

gde je p_F funkcija gustine verovatnoće centralnog Fišerovog rasporeda sa q i ∞ stepeni slobode. Greška II vrste β je verovatnoća prihvatanja nulte hipoteze kada ona nije istinita. Njen komplement γ zove se moć testa, i predstavlja verovatnoću odbacivanja neistinite nulte hipoteze:

$$\gamma = 1 - \beta = P[T_q > F_\alpha(q, \infty, 0) | H_a] = \int_{F_\alpha}^{\infty} p_F(x | q, \lambda) dx. \quad (3.3.7)$$

Pošto se u praktičnim situacijama može javiti više vrsta modelskih grešaka a samim tim i veći broj različitih alternativnih hipoteza, testiranje adekvatnosti modela formalizuje se u vidu takozvanog DIA postupka (*Teunissen 1996*), koji se odvija u tri faze:

- U fazi detekcije (D), testira se globalna adekvatnost modela kako bi se uopšte utvrdilo prisustvo modelskih grešaka,
- Ako je prisustvo modelskih grešaka utvrđeno, u fazi identifikacije (I) vrši se otkrivanje njihovih potencijalnih izvora,
- Nakon utvrđivanja potencijalnih izvora modelskih grešaka, u fazi adaptacije (A) vrši se modifikacija nulte hipoteze da bi se eliminisao njihov uticaj na konačna rešenja.

MNK ocenjivanje parametara u linearnim modelima GPS kodnih i faznih merenja obavlja se kako na osnovu zajedničkog izravnjanja svih izvršenih merenja, tako i rekurzivnog izravnjanja merenja. Shodno tome, moguća je formulacija nerekurzivnog i rekurzivnog DIA postupka.

3.3.2 Nerekurzivni DIA postupak

Nerekurzivni tip testiranja primenjuje se nakon tradicionalnog postupka ocenjivanja parametara u Gaus Markovljevom modelu, izvršenom na osnovu svih raspoloživih rezultata merenja. Faza detekcije nerekurzivnog DIA postupka sprovodi se pomoću najopštije formulisane alternativne hipoteze, po kojoj je dovoljno da matematička očekivanja rezultata merenja pripadaju vektorskom prostoru dimenzija n :

$$\begin{aligned} H_0 : E[\mathbf{l}] &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\ H_a : E[\mathbf{l}] &\in R^n \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Pošto oblik alternativne hipoteze implicitno podrazumeva da je hipermatrica (\mathbf{A}, \mathbf{B}) kvadratna i regularna, i da je $q = n - u$, test statistika u fazi detekcije glasi:

$$T_{n-u} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{v}}{n - u}, \quad (3.3.9)$$

tako da se nulta hipoteza ne prihvata kada je:

$$T_{n-u} \geq F_\alpha(n - u, \infty, 0). \quad (3.3.10)$$

Ukoliko je u fazi detekcije došlo do odbacivanja nulte hipoteze, sledi faza identifikacije u kojoj se iskustveno pretpostavljaju potencijalni izvori grešaka modela. U slučaju obrade GPS merenja, neadekvatnost modela podrazumeva po pravilu grube greške u kodnim pseudoduzinama, odnosno grube greške ili fazne skokove u faznim pseudoduzinama. Naročito je jednostavan slučaj kada se pretpostavi prisustvo skalarne modelske greške, jer tada matrica \mathbf{B} prelazi u vektor \mathbf{b} a $q = 1$, tako da jednodimenzionalna alternativna hipoteza glasi:

$$H_a : E[\mathbf{l}] = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\nabla. \quad (3.3.11)$$

Odgovarajuća test statistika dobija tada oblik:

$$w = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_v \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{b}}}, \quad (3.3.12)$$

i ima standardizovani normalni raspored $N(0,1)$ ako je nulta hipoteza istinita. Dalje pojednostavljenje moguće je ako kovarijaciona matrica merenja ima dijagonalnu strukturu, što može biti slučaj kod obrade originalnih GPS merenja, jer je onda:

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_i}. \quad (3.3.13)$$

Test statistiku w moguće je odrediti za svako izvršeno merenje posebno u postupku koji se naziva data snooping (*Baarda 1968*). Njena maksimalna apsolutna vrednost ukazuje na moguće prisustvo grube greške u odgovarajućem rezultatu merenja ako je:

$$|w|_{\max} > N_{\alpha/2}(0,1). \quad (3.3.14)$$

U svakom slučaju, kada je izvršena identifikacija jedne ili više modelskih grešaka potrebna je korektivna intervencija kako bi nulta hipoteza bila prihvaćena. Faza adaptacije odvija se u principu na dva načina. Po prvom, jedan ili više rezultata merenja zamenjuju se novim, dok se po drugom originalna nulta hipoteza zamenjuje novom kojom se obuhvataju identifikovane modelske greške. Prvi pristup znači ponovna merenja, dok drugi znači da originalna alternativna hipoteza postaje nova nulta hipoteza. Adaptacija nulte hipoteze u opštem slučaju smanjuje moć testa u pogledu detekcije i identifikacije zbog uvođenja dodatnih parametara koji opisuju modelske greške.

DIA postupak u uskoj je vezi i sa konceptom pouzdanosti. Parametar necentralnosti λ funkcija je modelskih grešaka:

$$\lambda = \nabla^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}_l^{-1} \mathbf{C}_v \mathbf{C}_l^{-1} \mathbf{B} \nabla, \quad (3.3.15)$$

ali se istovremeno može smatrati i funkcijom nivoa značajnosti, dimenzije hipoteze i moći testa:

$$\lambda = \lambda(\alpha, q, \gamma). \quad (3.3.16)$$

Ove dve jednakosti opisuju unutrašnju pouzdanost nulte u odnosu na alternativnu hipotezu. Za jednodimenzionalnu alternativnu hipotezu skalarna modelska greška postaje:

$$|\nabla| = \sqrt{\frac{\lambda(\alpha_1, 1, \gamma)}{\mathbf{b}^T \mathbf{C}_l^{-1} \mathbf{C}_v \mathbf{C}_l^{-1} \mathbf{b}}}, \quad (3.3.17)$$

i predstavlja najmanju vrednost modelske greške koja se može otkriti sa verovatnoćom γ korišćenjem test statistike w (MDB). Da bi se međutim modelska greška sa istom verovatnoćom otkrila i globalnom test statistikom T_{n-u} , mora biti ispunjeno:

$$\lambda(\alpha_{n-u}, n-u, \gamma) = \lambda(\alpha_1, 1, \gamma) = \lambda_0 = \lambda(\alpha_1, 1, \gamma_0), \quad (3.3.18)$$

odakle se za zadati nivo značajnosti α_1 i moć jednodimenzionalnog testa γ_0 može odrediti nivo značajnosti α_{n-u} globalnog testa adekvatnosti modela. Veličina MDB važna je ne samo kao mera unutrašnje pouzdanosti, već i po svom uticaju na vrednosti ocenjenih parametara linearnog modela, što se označava kao spoljašnja pouzdanost modela.

3.3.3 Rekurzivni DIA postupak

Formalizam rekurzivnog DIA postupka potpuno je isti kao kod nerekurzivnog, ali sa dodatnim ograničenjima u implementaciji pojedinih faza:

- Ocenjivanje parametara u dinamičkim sistemima vrši se rekurzivno, jer priroda problema zahteva rezultate u realnom vremenu. Zbog rekurzivnog režima ocenjivanja, potrebno je i da kontrola kvaliteta pomoću DIA postupka bude takođe rekurzivna.
- Merni materijal kod rekurzivnog ocenjivanja predstavljaju po pravilu vremenske serije merenja. To znači da u fazi identifikacije nije dovoljno samo utvrditi potencijalni izvor modelske greške već i trenutak vremena kada se ona pojavila.
- Kod dinamičkih sistema praktično je nemoguće ponoviti merenja za koja se u fazi identifikacije utvrdi da su opterećena grubim greškama. Prema tome, faza adaptacije

rekurzivnog DIA postupka može podrazumevati jedino modifikaciju nulte hipoteze kao način da se eksplicitno modeliraju identifikovane modelske greške.

Najvažnija veličina rekurzivnog DIA postupka je vektor prognoziranih reziduuma (popravaka) za epohu k , koji predstavlja razliku vektora n_k merenja u toj epohi i vektora prognoziranih merenja (zasnovanih na prognoziranom vektoru stanja):

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{I}_k - \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k. \quad (3.3.19)$$

Ovaj vektor ima po pretpostavci normalni raspored sa nula vektorom kao matematičkim očekivanjem i kovarijacionom matricom:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}(k)} = \mathbf{C}_{\mathbf{l}(k)} + \mathbf{A}_k \mathbf{C}_{\mathbf{x}(k)} \mathbf{A}_k^T. \quad (3.3.20)$$

Činjenica da su prognozirani reziduumi na raspolaganju u svakoj epohi, kao i da su prognozirani reziduumi iz različitih epoha međusobno nekorelisani, omogućava ustvari da se rekurzivni postupak kontrole kvaliteta može sprovesti u realnom vremenu.

Ako su modelske greške prisutne u epohi k , detekcija se vrši formulisanjem sledećih lokalnih hipoteza:

$$\begin{aligned} H_0^k &: E[\mathbf{v}_k] = \mathbf{0} \\ H_a^k &: E[\mathbf{v}_k] = \mathbf{B}_k \nabla \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Uz pomoć najopštije formulisane alternativne hipoteze koja ne podrazumeva nikakva ograničenja u pogledu očekivane vrednosti vektora prognoziranih reziduuma, dobija se test statistika:

$$T_k | H_0^k = \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{C}_{\mathbf{v}(k)}^{-1} \mathbf{v}_k}{n_k} | H_0^k \sim F(n_k, \infty, 0), \quad (3.3.22)$$

na osnovu koje se može zaključiti da je u epohi k prisutan neki tip modelske greške kada je:

$$T_k \geq F_\alpha(n_k, \infty, 0). \quad (3.3.23)$$

Da bi se potencijalni izvor detektovane modelske greške identifikovao, neophodno je da se eksplicitno formuliše alternativna hipoteza. U jednodimenzionalnom slučaju, po analogiji sa fazom identifikacije nerekurzivnog DIA postupka, u tu svrhu koristi se test statistika:

$$t^k | H_0^k = \frac{\mathbf{b}_k^T \mathbf{C}_{\mathbf{v}(k)}^{-1} \mathbf{v}_k}{\sqrt{\mathbf{b}_k^T \mathbf{C}_{\mathbf{v}(k)}^{-1} \mathbf{b}_k}} | H_0^k \sim N(0, 1). \quad (3.3.24)$$

Moć testa ove jednodimenzionalne hipoteze, merena veličinom najmanje modelske greške (MDB), iznosi:

$$|\nabla^k| = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mathbf{b}_k^T \mathbf{C}_{\mathbf{v}(k)}^{-1} \mathbf{b}_k}}. \quad (3.3.25)$$

U lokalnom slučaju moguća je trenutna korektivna intervencija kojom se adaptira nulta hipoteza zbog prisustva otkrivene modelske greške u epohi k . Ona se sastoji u modifikaciji Kalmanovog filtera, tako da izrazi za adaptirani prognozirani vektor stanja i njegovu kovarijacionu matricu glase:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^a = \tilde{\mathbf{x}}_k^0 - \mathbf{K}_k \mathbf{b}_k \nabla^k, \quad (3.3.26)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}(k)}^a = \mathbf{C}_{\mathbf{x}(k)}^0 + \mathbf{K}_k \mathbf{b}_k \sigma_\nabla^2 \mathbf{b}_k^T \mathbf{K}_k^T, \quad (3.3.27)$$

pri čemu za MNK ocenu modelske greške i njene disperzije važi:

$$\nabla^k = \frac{t^k}{\sqrt{\mathbf{b}_k^T \mathbf{C}_{v(k)}^{-1} \mathbf{b}_k}}, \quad (3.3.28)$$

$$\sigma_{\nabla}^2 = \frac{1}{\mathbf{b}_k^T \mathbf{C}_{v(k)}^{-1} \mathbf{b}_k}. \quad (3.3.29)$$

Često se ispostavlja da lokalne hipoteze nemaju dovoljnu osetljivost na globalne modelske trendove jer njihove vrednosti dostižu signifikantne vrednosti tek nakon većeg broja epoha. U takvim slučajevima formulišu se globalne hipoteze, čiji se domen odnosi na interval vremena između epoha l i k :

$$\begin{aligned} H_0^{l,k} : E[\mathbf{v}^{l,k}] &= \mathbf{0} \\ H_a^{l,k} : E[\mathbf{v}^{l,k}] &= \mathbf{B}^{l,k} \nabla, \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

pri čemu je zajednički vektor prognoziranih reziduuma komponovan od vektora prognoziranih reziduuma pojedinačnih epoha između l i k . Pomoću već pomenute najopštije formulisane alternativne hipoteze dobija se globalna test statistika:

$$T^{l,k} | H_0^{l,k} = \frac{\sum_{i=l}^k \mathbf{v}_i^T \mathbf{C}_{v(i)}^{-1} \mathbf{v}_i}{\sum_{i=l}^k n_i} | H_0^{l,k} \sim F\left(\sum_{i=l}^k n_i, \infty, 0\right), \quad (3.3.31)$$

koja se uz pomoć odgovarajuće lokalne test statistike može napisati i u rekurzivnoj formi:

$$T^{l,k} = T^{l,k-1} + \frac{n_k}{\sum_{i=l}^k n_i} (T^k - T^{l,k-1}). \quad (3.3.32)$$

Prema tome, smatra se da je u vremenskom intervalu $[l, k]$ prisutna nespecificirana modelska greška ako je:

$$T^{l,k} \geq F_{\alpha}\left(\sum_{i=l}^k n_i, \infty, 0\right). \quad (3.3.33)$$

U slučaju jednodimenzionalnih hipoteza, i sa eksplicitno formulisanom alternativnom hipotezom, identifikaciona test statistika i njena MDB vrednost iznose respektivno:

$$t^{l,k} | H_0^{l,k} = \frac{\sum_{i=l}^k \mathbf{b}_i^T \mathbf{C}_{v(i)}^{-1} \mathbf{v}_i}{\sqrt{\sum_{i=l}^k \mathbf{b}_i^T \mathbf{C}_{v(i)}^{-1} \mathbf{b}_i}} | H_0^{l,k} \sim N(0,1), \quad (3.3.34)$$

$$|\nabla^{l,k}| = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\sum_{i=l}^k \mathbf{b}_i^T \mathbf{C}_{v(i)}^{-1} \mathbf{b}_i}}. \quad (3.3.35)$$

U poređenju sa lokalnim DIA postupkom, faza globalne detekcije i identifikacije povezana je sa praktičnim problemom izbora epohe l u kojoj je počelo pojavljivanje globalne modelske greške. Započinjanjem intervala vremena sa $l=1$ problem se samo delimično rešava, zbog velikih memorijskih zahteva i znatnog vremenskog kašnjenja u odnosu na rezultate rekurzivnog ocenjivanja, što je kod dinamičkih sistema obično neprihvatljivo. U takvim situacijama sugerise se korišćenje

vremenskog pojasa (prozora) čija se širina $k-l$ određuje pomoću MDB, i koji predstavlja kompromis između računarskih kapaciteta i detekcione moći (Salzmann 1991).

Druga teškoća koja je specifična za globalni DIA postupak odnosi se na fazu adaptacije. S obzirom na značajno vreme kašnjenja identifikacije, adaptacija bi u principu zahtevala korekciju svih ocenjenih stanja sistema od epohe l do epohe k , odnosno operaciju glačanja. Iako se može rekurzivno izvesti, glačanje je naknadna korektivna intervencija koja je često nepotrebna kod primena u realnom vremenu. Jedan način da se ovaj problem prevaziđe sastoji se u korekciji ocenjenog vektora stanja i njegove kovarijacione matrice samo za epohu k u kojoj je identifikovana najverovatnija alternativna hipoteza (Teunissen 1990).

3.4 Preliminarna obrada GPS merenja

3.4.1 Određivanje stanja prijemnika

Pod određivanjem stanja prijemnika podrazumeva se računanje približnog položaja stacionarne GPS antene i odstupanja časovnika prijemnika od sistemskog GPS vremena u svakoj mernoj epohi. Približne koordinate antene potrebne su u postupku linearizacije funkcionalnih veza, dok je poznavanje stanja oscilatora prijemnika neophodno za fiksiranje geometrije u tačnom trenutku opažanja i sinhronizaciju merenja prilikom formiranja linearnih kombinacija.

S obzirom na relativno niske zahteve tačnosti, stanje prijemnika standardno se određuje pod sledećim uslovima:

- Za ocenjivanje položaja prijemnika i stanja njegovog oscilatora koristi se matematički model kodnih pseudodužina jer bi upotreba faznih pseudodužina nametala potrebu dodatnog ocenjivanja faznih neodređenosti.
- Pretpostavlja se da su kodne pseudodužine popravljene za uticaj troposferske i jonosferske refrakcije, i da je obračunat uticaj odstupanja časovnika satelita, tako da nepoznate parametre funkcionalnog modela predstavljaju samo koordinate prijemnika i odstupanje njegovog časovnika. Jonosferska korekcija i odstupanje satelitskog časovnika lako se računaju iz podataka sadržanih u navigacionoj poruci, dok je za obračunavanje troposferske korekcije potrebno primeniti neki od jednostavnijih modela.
- Određivanje stanja prijemnika vrši se u svakoj epohi zbog toga što se ponašanje časovnika tokom vremena ne može sa dovoljnom tačnošću modelirati glatkim funkcijama kao što su polinomi ili splajnovi. Osim toga, savremeni prijemnici održavaju sopstvenu vremensku skalu u granicama od $1\mu s$, tako da povremeno za taj iznos autonomno koriguju oscilator čime bi bila narušena pretpostavka o glatkoći modelskih funkcija.

Pojednostavljena modelska jednačina kodne pseudodužine do i -tog satelita može se napisati u obliku:

$$p^i = \sqrt{(x^i - x)^2 + (y^i - y)^2 + (z^i - z)^2} + c_0 \delta, \quad (3.4.1)$$

gde x^i , y^i i z^i označavaju koordinate i -tog satelita u trenutku emitovanja signala, dok je p^i kodna pseudodužina oslobođena atmosferskih uticaja i uticaja odstupanja časovnika satelita:

$$p^i = P^i - T^i + I^i + c_0 \delta^i. \quad (3.4.2)$$

Postupak linearizacije dovodi do sledećeg matematičkog modela kodnih pseudodužina u proizvoljnoj epohi k :

$$\mathbf{p}_k + \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{1}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ c_0 \hat{\delta}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_k = \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (3.4.3)$$

Članove konfiguracione podmatrice \mathbf{A} koji se odnose na nepoznate koordinate predstavljaju komponente jediničnih vektora u pravcu opažanih satelita, dok je $\mathbf{1}$ vektor n_k jedinica, pri čemu n_k

označava broj opažanih satelita u epohi k . Ocene parametara ovog modela mogu se poboljšati upotrebom preciznih efemerida, P kodnih pseudodužina, dvofrekventnih kombinacija P_3 ili modifikacijom stohastičkog modela kojom se standard pojedinih merenja formuliše u funkciji vertikalnog ugla satelita. Iskustvo međutim pokazuje da je za sve praktične situacije dovoljno koristiti C/A kodne pseudodužine i komercijalne satelitske efemeride. Regularnost matrice normalnih jednačina obezbeđuje se sa najmanje četiri merene pseudodužine u svakoj epohi.

Ograničenje u pogledu minimalnog broja pseudodužina moguće je prevazići varijantom postupka po kojoj se položaj prijemnika ocenjuje na osnovu merenja izvršenih u svih n epoha, dok se stanje časovnika ocenjuje u svakoj epohi. Funkcionalni model i normalne jednačine u tom slučaju glase:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \dots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \dots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \dots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_1 & \mathbf{0}_1 & \dots & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{1}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \dots & \mathbf{1}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \hat{\delta}_1 \\ c_0 \hat{\delta}_2 \\ \dots \\ c_0 \hat{\delta}_n \end{bmatrix}, \quad (3.4.4)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_k \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k & \mathbf{A}_1^T \mathbf{1}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{1}_2 & \dots & \mathbf{A}_n^T \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_1^T \mathbf{A}_1 & n_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{1}_2^T \mathbf{A}_2 & 0 & n_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{1}_n^T \mathbf{A}_n & 0 & 0 & \dots & n_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ c_0 \hat{\delta}_1 \\ c_0 \hat{\delta}_2 \\ \dots \\ c_0 \hat{\delta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_k \mathbf{A}_k^T \mathbf{p}_k \\ \mathbf{1}_1^T \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{1}_2^T \mathbf{p}_2 \\ \dots \\ \mathbf{1}_n^T \mathbf{p}_n \end{bmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Gausovom eliminacijom određuju se nepoznate koordinate prijemnika:

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{N}}^{-1} \bar{\mathbf{n}}, \quad (3.4.6)$$

$$\bar{\mathbf{N}} = \sum_k \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k - \sum_k \frac{1}{n_k} \mathbf{A}_k^T \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k^T \mathbf{A}_k, \quad (3.4.7)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \sum_k \mathbf{A}_k^T \mathbf{p}_k - \sum_k \frac{1}{n_k} \mathbf{A}_k^T \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k^T \mathbf{p}_k, \quad (3.4.8)$$

a zatim zamenom i nepoznata stanja časovnika u svakoj epohi:

$$c_0 \hat{\delta}_k = \frac{1}{n_k} \mathbf{1}_k^T (\mathbf{p}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}). \quad (3.4.9)$$

Interesantnu alternativu ovom postupku predstavlja takozvano direktno Benkroftovo algebarsko rešenje (*Bancroft 1985; Goad 1996*). Kada se kvadrira jednačina kodne pseudodužine i izvrši odgovarajuće grupisanje članova, dobija se:

$$\frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x}^i \\ \mathbf{p}^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}^i \\ \mathbf{p}^i \end{bmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x}^i \\ \mathbf{p}^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ c_0 \delta \end{bmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ c_0 \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ c_0 \delta \end{bmatrix} \right\rangle = 0, \quad (3.4.10)$$

pri čemu su uglaste zagrade oznaka Lorencovog skalarnog proizvoda, koji je za dva četvorodimenzionalna vektora \mathbf{g} i \mathbf{h} definisan kao:

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle = \mathbf{g}^T \mathbf{M} \mathbf{h} = \mathbf{g}^T \cdot \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ -1) \cdot \mathbf{h}. \quad (3.4.11)$$

Sistem od n izmerenih kodnih pseudodužina u epohi može se sada predstaviti u obliku:

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ c_0 \delta \end{bmatrix} + \mathbf{A}^T L \mathbf{t} = \mathbf{0}, \quad (3.4.12)$$

sa sledećom strukturom pojedinih članova:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x^1 & y^1 & z^1 & p^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & y^n & z^n & p^n \end{bmatrix}, \quad (3.4.13)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n]^T, \quad (3.4.14)$$

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x}^i \\ p^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}^i \\ p^i \end{bmatrix} \right\rangle, \quad (3.4.15)$$

$$L = \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ c_0 \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ c_0 \delta \end{bmatrix} \right\rangle, \quad (3.4.16)$$

$$\mathbf{t} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T. \quad (3.4.17)$$

Iz sistema od n izmerenih kodnih pseudodužina sledi algebarska kvadratna jednačina po L :

$$\begin{aligned} & \left\langle (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{t}, (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{t} \right\rangle L^2 + 2 \left\langle (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{t}, (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\alpha} \right\rangle - 1 \Big| L \\ & + \left\langle (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\alpha}, (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\alpha} \right\rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

čijim rešavanjem se dobijaju koordinate prijemnika i odstupanje njegovog časovnika u epohi merenja. Od dva korena kvadratne jednačine bira se onaj koji odgovara merenim kodnim pseudodužinama.

Iako je Benkroftovo rešenje direktno, postupak ipak zahteva jednu iteraciju zbog toga što i najjednostavniji model popravke pseudodužina za troposfersku refrakciju podrazumeva poznavanje zenitnih odstojanja satelita, a samim tim i približni položaj prijemnika.

Konačno, određivanje stanja prijemnika moguće je i zajedničkom obradom dvofrekventnih kodnih i faznih pseudodužina u okviru posebnog postupka koji se naziva preciznim apsolutnim pozicioniranjem (PPP). Ovaj algoritam sastoji se u primeni Kalmanovog filtera sa pažljivo modeliranim plimatskim i geofizičkim uticajima, i upotrebi preciznih satelitskih efemerida (*Heroux, Kouba 1995*). Uz povoljne merne uslove i duže vreme opažanja moguće je postići centimetarsku tačnost apsolutnog položaja prijemnika, ali složenost postupka ograničava njegovo korišćenje uglavnom na globalne mreže permanentnih stanica (*Zumberge et al. 1997*).

3.4.2 Otkrivanje i eliminacija faznih skokova

Fazni skok je pojava nagle promene faznog GPS merenja za celi broj faznih ciklusa, koja nastupa zbog fizičke opstrukcije antene, izrazite jonosferske aktivnosti, visoke dinamike prijemnika, ili privremene nemogućnosti PLL džitera da prati oslabljeni GPS signal. Promena faznog merenja tom prilikom može imati vrednost u rasponu od jednog faznog ciklusa pa do više miliona faznih ciklusa.

Pod otkrivanjem faznog skoka podrazumeva se utvrđivanje trenutka njegovog nastupanja. Da bi se fazni skok potom eliminisao iz podataka merenja, neophodno je odrediti tačan broj faznih ciklusa za koji se fazno merenje promenilo. Pouzdanost otkrivanja i eliminacije zavisi od niza faktora, ali je postojećim algoritmima uglavnom zajedničko sledeće:

- Određivanje faznih skokova jednostavnije je od njihove eliminacije, naročito kada im je vrednost veća od desetak faznih ciklusa što je inače po pravilu najčešći slučaj.
- Eliminacija faznih skokova lakša je u podacima razlika merenja nego u podacima originalnih merenja, jer su razlike oslobođene uticaja velikog broja izvora grešaka. Iz istih razloga je eliminacija uspešnija kada se koriste dvofrekventne linearne kombinacije i merenja sa tačaka čija su međusobna rastojanja manja.
- Eliminacija faznih skokova iz podataka prikupljenih u statičkom režimu rada lakša je od slučaja sa kinematičkim merenjima, jer stacionarno prikupljanje podataka obezbeđuje neophodnu redundancu.
- Eliminacija faznih skokova uspešnija je u obradi a posteriori u odnosu na obradu u realnom vremenu, jer se kod a posteriori obrade raspolaze svim podacima merenja što dozvoljava filtriranje u oba pravca.

Otkrivanje i eliminacije faznih skokova odvija se u opštem slučaju u sledećim fazama:

- Prva faza predviđa formiranje vremenske test serije $t(t)$, pri čemu je glavni napor usmeren na iznalaženje veličine koja će predstavljati relativno glatku funkciju vremena i imati po mogućstvu što niži nivo šuma. Takve veličine mogu na primer biti razlike merenja, dvofrekventne linearne kombinacije kao što su L_4 i L_{MW} , ili različiti tipovi reziduuma (*Bastos, Landau 1988; Blewitt 1990; Han 1997; Gao, Li 1999*).
- U drugoj fazi vrši se otkrivanje faznih skokova na taj način što se vremenska serija $t(t)$ testira na neprekidnost, pod pretpostavkom da prekid funkcije predstavlja pouzdanu indiciju da je u pitanju fazni skok. To se postiže formiranjem viših vremenskih razlika test serije ili primenom neke od jednostavnijih formi Kalmanovog filtera. I pored relativno česte upotrebe, oba postupka povezana su sa problemima izbora kritičnih vrednosti, dok na primer podešavanje parametara Kalmanovog filtera može čak imati i sasvim nepredvidive rezultate, barem kada su u pitanju originalna fazna merenja (*Blewitt 1996*).
- U trećoj fazi eliminišu se otkriveni fazni skokovi, određivanjem njihovih celobrojnih vrednosti. Neke forme test vremenskih serija jednofrekventnih merenja dozvoljavaju direktno određivanje veličine faznog skoka. Međutim, kod dvofrekventnih merenja neophodno je formiranje još jedne nezavisne vremenske serije radi jednoznačnog određivanja veličine faznog skoka na prvoj i drugoj frekvenciji. Za samo određivanje celobrojnih vrednosti faznih skokova takođe postoje razni algoritmi, od jednostavnog zaokruživanja do testiranja parova vrednosti koje se u smislu MNK najbolje prilagođavaju linearnoj kombinaciji. Ukoliko pouzdano određivanje celobrojnih vrednosti faznih skokova nije moguće, te se veličine tretiraju kao nove nepoznate fazne neodređenosti u postupku ocenjivanja.

Jednofrekventna merenja

Jednofrekventna fazna merenja $\psi_{1m}^j(t)$, odnosno fazne pseudoduzine $L_{1m}^j(t)$, sadrže u punom iznosu uticaje odstupanja časovnika i atmosferske refrakcije, zbog čega njihove vremenske serije ne mogu da se koriste za određivanje i eliminaciju faznih skokova. Mnogo pogodniju veličinu u tom smislu predstavljaju proste razlike doplerskog tipa $\nabla L_{1m}^{jk}(t)$ za prijemnik m i satelite j i k , a naročito ako se iz njih računski eliminišu odstupanja satelitskih časovnika, uticaj troposferske refrakcije i geometrija:

$$\begin{aligned} \nabla L_{1m}^{jk}(t) = \nabla L_{1m}^{jk}(t) - \nabla \rho_m^{jk}(t) - \delta_m(t)(\dot{\rho}_m^j(t) - \dot{\rho}_m^k(t)) \\ - c_0(\delta^j(t) - \delta^k(t)) - \nabla T_m^{jk}(t) \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Razlike rastojanja $\nabla \rho$, radijalne brzine $\dot{\rho}$ i odstupanja satelitskih časovnika δ računaju se na osnovu efemerida i približnog položaja prijemnika. Odstupanje časovnika prijemnika poznato je iz određivanja njegovog stanja, dok se popravka za troposfersku refrakciju ∇T dobija primenom nekog

od mnogobrojnih modela. U strukturi tako redukovane proste razlike doplerskog tipa preostaju sledeći članovi:

$$\begin{aligned} \nabla l_{1m}^{jk}(t) = & -\nabla I_{1m}^{jk}(t) + \nabla t_m^{jk}(t) + \nabla r_m^{jk}(t) \\ & + \nabla M_{1m}^{jk}(t) + (h_1^j(t) - h_1^k(t)) + \lambda_1 \nabla N_{1m}^{jk} + \omega_{\nabla L}(t), \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

gde ∇t označava rezidualnu grešku troposferske refrakcije, a ∇r grešku zbog nesigurnosti efemerida i položaja prijemnika. Zbog prirode svih ovih uticaja, redukovana prosta razlika doplerskog tipa predstavlja relativno glatku funkciju vremena, sa varijacijama čiji su glavni uzroci ponašanje jonosferske refrakcije i periodični uticaj višestruke refleksije.

Vremenski promenljiva redukovana prosta razlika ∇l optimalno se ocenjuje Kalmanovim filterom. S obzirom na to da se njene varijacije u kraćim vremenskim intervalima mogu dobro aproksimirati polinomom drugog stepena (Mertikas, Rizos 1997), odgovarajući model biće model konstantnog ubrzanja:

$$\nabla l_k = \nabla l_{k-1} + \nabla \dot{l}_{k-1} \Delta t + \nabla \ddot{l}_{k-1} \frac{\Delta t^2}{2} + w_{k-1}. \quad (3.4.21)$$

Formulacija dinamičkog i mernog sistema za diskretni slučaj glasi:

$$\begin{bmatrix} \nabla l_k \\ \nabla \dot{l}_k \\ \nabla \ddot{l}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0.5\Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla l_{k-1} \\ \nabla \dot{l}_{k-1} \\ \nabla \ddot{l}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1,k-1} \\ w_{2,k-1} \\ w_{3,k-1} \end{bmatrix}, \quad (3.4.22)$$

$$\nabla l_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla l_k \\ \nabla \dot{l}_k \\ \nabla \ddot{l}_k \end{bmatrix} + v_k, \quad (3.4.23)$$

odnosno u matričnom obliku:

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (3.4.24)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (3.4.25)$$

Ako se pretpostavi da slučajne varijacije promene ubrzanja predstavljaju proces belog šuma sa konstantnom spektralnom gustinom i varijansom ubrzanja σ_a^2 , kovarijaciona matrica sistemskog šuma \mathbf{w} biće:

$$\begin{aligned} \Gamma_k \mathbf{Q}_k \Gamma_k^T &= \int_k^{k+1} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \Phi^T(t_{k+1}, \tau) d\tau \\ &= \sigma_a^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{20} & \frac{\Delta t^3}{8} & \frac{\Delta t^2}{6} \\ \frac{\Delta t^3}{8} & \frac{\Delta t^2}{3} & \frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t^2}{6} & \frac{\Delta t}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

S druge strane, poznato je da su greške faznih merenja vremenski korelisane, tako da odgovarajući model mernog šuma može biti Gaus-Markovljev proces prvog reda:

$$v_k = e^{-\beta \Delta t} v_{k-1} + \varepsilon_{k-1}. \quad (3.4.27)$$

Kada se primeni formalizam Kalmanovog filtera i izvrši testiranje prognoziranih popravaka u okviru sekvencijalnog DIA postupka, moguće je ustanoviti epohu u kojoj se javio fazni skok i oceniti njegovu približnu vrednost i disperziju. Pošto se kao rezultat dobija vrednost faznog skoka proste razlike doplerskog tipa koja je funkcija dva originalna fazna merenja, neophodno je u daljem postupku jednoznačno identifikovati fazne skokove za pojedine satelite.

Kalmanov filter podjednako se može primeniti i na vremenske serije dvostrukih i trostrukih faznih razlika. U slučaju trostrukih razlika često su predmet testiranja reziduumi MNK ocenjivanja koordinatnih razlika dve stanice. Nedostatak svih tih postupaka je što se na taj način određuju fazni skokovi koji su funkcija dva prijemnika i dva satelita, tako da više nije moguće jednoznačno identifikovati fazne skokove u originalnim faznim merenjima.

Ocene faznih skokova n_R dobijene testiranjem vremenskih serija, predstavljaju u svakom slučaju realne brojeve. Utvrđivanje njihovih celobrojnih vrednosti n_I sprovodi se uz pomoć intervalskih ocena:

$$n_I \sim [n_R - t \cdot \sigma_R, n_R + t \cdot \sigma_R]. \quad (3.4.28)$$

Ukoliko definisanom intervalu pripada više celobrojnih vrednosti faznog skoka, bira se ona koja u ponovljenom postupku testiranja ima za posledicu najmanju MNK ocenu disperzije.

Dvofrekventna merenja

Postupci otkrivanja i eliminacije faznih skokova u jednofrekventnim serijama merenja odnose se principijelno i na dvofrekventna merenja. Međutim, prisustvo faznih i kodnih merenja na drugoj frekvenciji omogućuje znatno bolju kontrolu pojedinih izvora grešaka kao što su jonosferska refrakcija i višestruka refleksija, tako da je proces otkrivanja i eliminacije faznih skokova u dvofrekventnim linearnim kombinacijama mnogo jednostavniji.

Dvofrekventne linearne kombinacije koje su najpogodnije za formiranje test vremenskih serija su L_4 i L_{MW} :

$$L_4(t) = L_1(t) - L_2(t), \quad (3.4.29)$$

$$L_{MW}(t) = L_5(t) - P_6(t) = \frac{f_1 L_1(t) - f_2 L_2(t)}{f_1 - f_2} - \frac{f_1 P_1(t) + f_2 P_2(t)}{f_1 + f_2}. \quad (3.4.30)$$

Detaljna struktura dvofrekventne linearne kombinacije L_4 ima oblik:

$$L_4(t) = (I_2(t) - I_1(t)) + (\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2) + (M_{L1}(t) - M_{L2}(t)) + (\varepsilon_{L1}(t) - \varepsilon_{L2}(t)), \quad (3.4.31)$$

odakle sledi da je njena veličina prevashodno funkcija međufrekventnog jonosferskog uticaja i fazne neodređenosti. Pošto se fazni skok može javiti simultano na obe frekvencije, član sa faznim neodređenostima će u prvoj narednoj epohi merenja $k+1$ imati vrednost:

$$[\lambda_1(N_1 + n_1) - \lambda_2(N_2 + n_2)], \quad (3.4.32)$$

a sama linearna kombinacija promeniće se od epohe k do epohe $k+1$ približno za iznos:

$$L_4(t_{k+1}) - L_4(t_k) = \lambda_1 n_1 - \lambda_2 n_2. \quad (3.4.33)$$

S obzirom na veličine talasnih dužina, očigledno je da se u vremenskoj seriji dvofrekventne linearne kombinacije $L_4(t)$ ne mogu otkriti fazni skokovi n_1 i n_2 kada im je odnos:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{77}{60}. \quad (3.4.34)$$

Detaljna struktura druge linearne kombinacije L_{MW} ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
L_{MW}(t) = & \lambda_5(N_1 - N_2) \\
& + \lambda_5 \left(\frac{M_{L1}(t)}{\lambda_1} - \frac{M_{L2}(t)}{\lambda_2} \right) - \lambda_6 \left(\frac{M_{P1}(t)}{\lambda_1} - \frac{M_{P2}(t)}{\lambda_2} \right), \\
& + \lambda_5 \left(\frac{\varepsilon_{L1}(t)}{\lambda_1} - \frac{\varepsilon_{L2}(t)}{\lambda_2} \right) - \lambda_6 \left(\frac{\varepsilon_{P1}(t)}{\lambda_1} - \frac{\varepsilon_{P2}(t)}{\lambda_2} \right)
\end{aligned} \tag{3.4.35}$$

pri čemu odgovarajuće talasne dužine iznose:

$$\lambda_5 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \approx 86.2 \text{ cm}, \tag{3.4.36}$$

$$\lambda_6 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \approx 10.7 \text{ cm}. \tag{3.4.37}$$

Ova linearna kombinacija oslobođena je uticaja jonosferske refrakcije, tako da joj veličina zavisi pre svega od faznih neodređenosti koje su po definiciji konstantne u odsustvu faznih skokova. Pri pojavi faznih skokova, linearna kombinacija L_{MW} menja se za iznos:

$$L_{MW}(t_{k+1}) - L_{MW}(t_k) = \lambda_5(n_1 - n_2), \tag{3.4.38}$$

odakle sledi da se u vremenskoj seriji ove linearne kombinacije ne mogu otkriti fazni skokovi n_1 i n_2 ukoliko se desi da su isti po vrednosti.

Postupak određivanja i eliminacije faznih skokova dvofrekventnih faznih merenja sastoji se u komplementarnom korišćenju prednosti linearnih kombinacija L_4 i L_{MW} . Vremenska serija faznih neodređenosti:

$$N_{5,k} = N_{1,k} - N_{2,k} = \frac{L_{MW,k}}{\lambda_5}, \tag{3.4.39}$$

propušta se prvo kroz filter čiji su izlazi identični rekurzivnoj srednjoj vrednosti i disperziji respektivno:

$$\bar{N}_{5,k} = \bar{N}_{5,k-1} + \frac{1}{k}(N_{5,k} - \bar{N}_{5,k-1}), \tag{3.4.40}$$

$$\sigma_k^2 = \sigma_{k-1}^2 + \frac{1}{k} \left[(N_{5,k} - \bar{N}_{5,k-1})^2 - \sigma_{k-1}^2 \right]. \tag{3.4.41}$$

Ukoliko je u epohi $k+1$ ispunjeno:

$$|N_{5,k+1} - \bar{N}_{5,k}| > t \cdot \sigma_k, \tag{3.4.42}$$

smatra se da je otkriven fazni skok veličine:

$$n_5 = n_1 - n_2 = N_{5,k+1} - \bar{N}_{5,k}. \tag{3.4.43}$$

Vrednost faznog skoka linearne kombinacije L_4 određuje se tako što se vremenska serija ove linearne kombinacije aproksimira polinomom stepena m sa koeficijentima koji se ocenjuju metodom najmanjih kvadrata na osnovu merenja zaključno sa epohom k . Pomoću vrednosti polinomske funkcije i linearne kombinacije L_4 u epohi $k+1$ dobija se razlika:

$$\Delta L_{4,k+1} = L_{4,k+1} - \sum_{n=0}^m a_n t_{k+1}^n. \tag{3.4.44}$$

Pod pretpostavkom da je razlika po apsolutnoj vrednosti veća od usvojene granice, i da je prema tome rezultat pojave faznog skoka, važiće:

$$\begin{aligned}\Delta L_{4,k+1} &= \lambda_1 n_1 - \lambda_2 n_2 \\ &= \lambda_1 (n_1 - n_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) n_2 . \\ &= \lambda_1 n_5 + (\lambda_1 - \lambda_2) n_2\end{aligned}\quad (3.4.45)$$

Definitivne vrednosti faznih skokova n_1 i n_2 kojima se korijuju originalna fazna merenja počev od epohe $k+1$ računaju se po izrazima:

$$n_2 = \frac{\Delta L_{4,k+1} - \lambda_1 n_5}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (3.4.46)$$

$$n_1 = n_5 + n_2. \quad (3.4.47)$$

Navedeni postupak određivanja i eliminacije faznih skokova gotovo je univerzalno prihvaćen zbog efikasnosti i pouzdanosti dobijenih rezultata. Eventualne modifikacije odnose se uglavnom na izbor aproksimacionog polinoma, procenu optimalnog stepena i formulaciju filtera kojima se u vremenskim serijama redukuje nivo šuma (*Blewitt 1990*).

3.5 Modeli popravaka merenja

3.5.1 Jonosferska refrakcija

Opšti izraz za jonosfersku popravku fazne ili kodne pseudodužine merene od prijemnika m do satelita j na frekvenciji F i u trenutku vremena t_i glasi:

$$I_{Fm}^j(t_i) = \pm \frac{k}{f_F^2} E_m^j(t_i), \quad (3.5.1)$$

pri čemu konstanta k ima vrednost $40.3m^3s^{-2}$, E označava ukupnu količinu elektrona po kvadratnom metru u pravcu prostiranja signala (TEC), a znak popravke zavisi od toga da li je u pitanju fazna ili kodna pseudodužina. Uobičajeni model jonosfere (SLM) podrazumeva da su svi slobodni elektroni skoncentrisani u sloju beskonačno male debljine na visini između $350km$ i $450km$. Tačka u kojoj signal prodire sloj naziva se jonosferskom tačkom, i njen položaj se zbog fizičke prirode fenomena izražava solarno-geomagnetnim koordinatama, odnosno geomagnetnom širinom β i longitudom s u odnosu na pravac ka Suncu.

Pošto TEC vrednost varira u funkciji vremena, položaja jonosferske tačke i pravca prema satelitu, jonosfersku popravku je pogodnije izražavati u obliku:

$$I_{Fm}^j(t_i) = \pm \frac{k}{f_F^2} F(z_m^j(t_i)) E_v(\beta_m^j(t_i), s_m^j(t_i)), \quad (3.5.2)$$

gde E_v sada označava ukupnu količinu elektrona u vertikalnom pravcu kroz jonosfersku tačku (VTEC), dok je F funkcija zenitnog odstojanja z , odnosno takozvana redukciona funkcija koja opisuje odnos ukupne količine elektrona u pravcu prema satelitu i u vertikalnom pravcu. Modeli jonosferskih popravaka razlikuju se međusobno po parametrizaciji veličine VTEC i izboru redukcione funkcije.

Lokalna parametrizacija ukupne količine elektrona u vertikalnom pravcu $E_v(\beta, s)$ najčešće se vrši u vidu dvodimenzionalnog Tejlorovog razvoja:

$$E_v(\beta, s) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M E_{nm} (\beta - \beta_0)^n (s - s_0)^m, \quad (3.5.3)$$

pri čemu β_0 i s_0 predstavljaju solarno-geomagnetne koordinate tačke razvoja. Nepoznati koeficijenti E_{nm} ocenjuju se na osnovu dvofrekventnih merenja regionalno raspoređenih stalnih GPS stanica. Za globalnu parametrizaciju koristi se sferno-harmonijski razvoj:

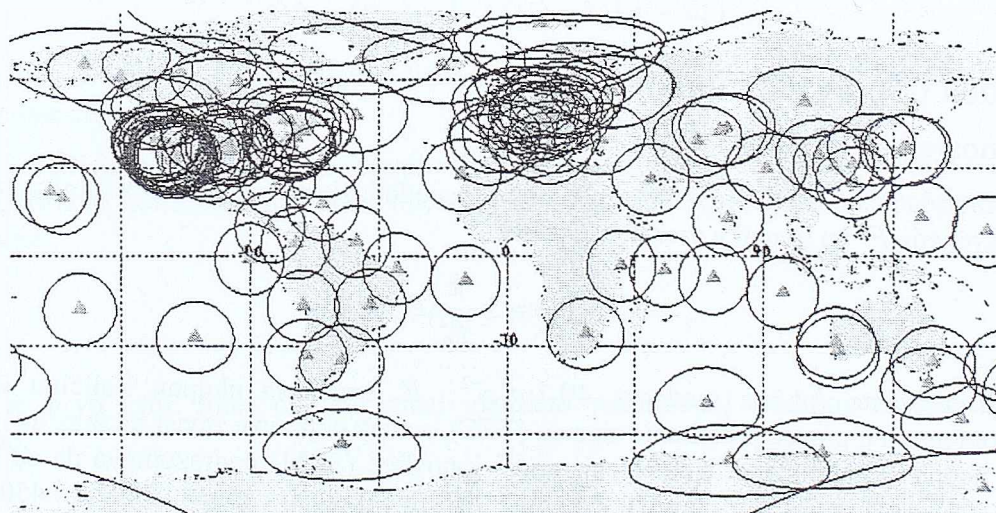
$$E_v(\beta, s) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\sin \beta) (C_{nm} \cos(ms) + S_{nm} \sin(ms)), \quad (3.5.4)$$

sa normalizovanim pridruženim Ležandrovim funkcijama \bar{P}_{nm} stepena n i reda m , i sferno-harmonijskim koeficijentima C_{nm} , S_{nm} koji se još nazivaju i GIM parametrima. Pošto maksimalni stepen razvoja N određuje koordinatnu rezoluciju rezultata:

$$\Delta\beta = \Delta s = \frac{2\pi}{N}, \quad (3.5.5)$$

od njega će zavisiti način interpolacije veličine E_v .

Međunarodna GPS služba (IGS) vrši određivanje GIM parametara na osnovu opažanja globalno raspoređenih stalnih stanica (slika 3.1), a rezultate ocenjivanja stanja jonosfere publikuje u međunarodno usvojenom IONEX formatu (Schaer et al. 1998).



SLIKA 3.1. Globalni raspored IGS jonosferskih stanica sa područjima zahvatanja.

Jonosferska redukciona funkcija koja odgovara SLM modelu jonosfere glasi:

$$F(z) = \frac{1}{\cos z_I} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 z_I}}, \quad (3.5.6)$$

gde z_I predstavlja satelitsko zenitno odstojanje u jonosferskoj tački. Ako je visina sloja H , a srednji poluprečnik Zemlje R , jonosfersko i topocentrično satelitsko zenitno odstojanje stoje u odnosu:

$$\sin z_I = \frac{R}{R+H} \sin z. \quad (3.5.7)$$

Alternativno rešenje sastoji se u polinomskoj aproksimaciji opažanih TEC odnosa pod pretpostavkom ravnomerne raspodele gustine elektrona u pojasu između 200km i 600km visine (Clynch et al. 1989):

$$F(z) = \sum_{i=0}^3 a_i \left(\frac{z}{90} \right)^{2i}, \quad (3.5.8)$$

sa z u stepenima i sledećim vrednostima koeficijenta:

$$a_0 = +1.0206, \quad a_1 = +0.4663, \quad a_2 = +3.5055, \quad a_3 = -1.8415. \quad (3.5.9)$$

Za potrebe apsolutnog pozicioniranja u realnom vremenu, jednofrekventnim korisnicima stoji na raspolaganju TEC parametrizacija u sastavu navigacione GPS poruke. Globalna raspodela elektronskog sadržaja jonosfere po ovom modelu glasi (Klobuchar 1987):

$$E_v(\beta, s) = \begin{cases} 9.2TECU + E_{amp}(\beta) \cos \frac{2\pi(s-2h)}{E_{per}(\beta)} & \left| \frac{2\pi(s-2h)}{E_{per}(\beta)} \right| < \frac{\pi}{2} \\ 9.2TECU & \left| \frac{2\pi(s-2h)}{E_{per}(\beta)} \right| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad (3.5.10)$$

pri čemu se navigacionom porukom emituju po četiri koeficijenta a_i i b_i pomoću kojih se računaju amplituda E_{amp} i period E_{per} :

$$E_{amp}(\beta) = \begin{cases} \frac{c_0}{0.162} \sum_{i=0}^3 a_i \beta^i & E_{amp}(\beta) \geq 0 \\ 0 & E_{amp}(\beta) < 0 \end{cases}, \quad (3.5.11)$$

$$E_{per}(\beta) = \begin{cases} \sum_{i=0}^3 b_i \beta^i & E_{per}(\beta) \geq 20h \\ 20h & E_{per}(\beta) < 20h \end{cases}. \quad (3.5.12)$$

Pridružena redukciona funkcija aproksimira SLM redukcionu funkciju sa tačnošću od 2% za zenitna odstojanja do 85° i visinu jonosferskog sloja od $350km$:

$$F(z) = 1 + 2 \left(\frac{z+6}{96} \right)^3. \quad (3.5.13)$$

Jonosferske popravke sračunate na osnovu globalnih i lokalnih modela ukupnog elektronskog sadržaja mogu se primeniti kako na jednofrekventna merenja, tako i na linearne kombinacije dvofrekventnih merenja u kojima jonosfersko kašnjenje nije eliminisano. Uz dovoljno visoku koordinatno-vremensku rezoluciju i odgovarajući interpolacioni postupak, formalna tačnost jonosferskih popravaka dostiže milimetarski nivo, iako je objektivno nešto niža jer modeli ne mogu obuhvatiti lokalne jonosferske poremećaje i scintilacione fenomene. S druge strane, model iz sastava navigacione poruke omogućava primene u realnom vremenu, ali ima veoma nisku tačnost i obuhvata svega oko 50% ukupnog jonosferskog uticaja.

Kod visokopreciznih radova javlja se ponekad potreba da se modelira jonosferski uticaj drugog reda I_2 . Ova veličina označava zavisnost jonosferskog kašnjenja od viših stepena frekvencije signala, i u normalnim okolnostima se obično zanemaruje. Jonosferska popravka drugog reda računa se na osnovu geomagnetnih koordinata, po izrazu:

$$I_{F2} = \left(1.377 \cdot 10^{-6} \lambda_F \frac{R}{R+H} \right)^3 \left| \sin \theta_M \cos \varepsilon_M \cos \alpha_M - 2 \cos \theta_M \sin \varepsilon_M \right| F(z) E_v, \quad (3.5.14)$$

pri čemu je θ_M korigovana geomagnetna kolatituda, a α_M i ε_M geomagnetni azimut i vertikalni ugao satelita. Osetljivost jonosferske popravke drugog reda po frekvencijama iznosi $0.16mm$ odnosno $0.33mm$ po TECU jedinici, što je veoma malo u odnosu na $162mm$ kolika je osetljivost glavne jonosferske korekcije za prvu frekvenciju.

3.5.2 Troposferska refrakcija

Troposfersko kašnjenje signala je funkcija atmosferskih parametara (pritiska, temperature i vlažnosti vazduha), i ugla koji putanja signala zauzima u odnosu na troposferske slojeve. Zbog prisustva suvih atmosferskih gasova i vodene pare, ukupno troposfersko kašnjenje obično se razdvaja na hidrostatičku i vlažnu komponentu, tako da opšti izraz za troposfersku popravku pseudoduzine može da se napiše u obliku:

$$T = T_H + T_W = F_H(\alpha)T_H^Z(p, t) + F_W(\alpha)T_W^Z(e, t), \quad (3.5.15)$$

gde su:

T_H, T_W	...	hidrostatička i vlažna komponenta ukupnog troposferskog kašnjenja,
F_H, F_W	...	redukcione funkcije hidrostatičke i vlažne komponente,
T_H^Z, T_W^Z	...	hidrostatička i vlažna komponenta troposferskog kašnjenja u pravcu zenita,
p, t, e	...	atmosferski pritisak, temperatura vazduha, parcijalni pritisak vodene pare,
α	...	vertikalni ugao putanje signala.

Nagli razvoj satelitske geodetske tehnologije poslednjih decenija uslovio je razvoj velikog broja troposferskih modela za elektromagnetne talase iz radio-frekventnog opsega (*Schueler 2001*). Varijacije modela troposferskih popravaka odnose se pre svega na izbor redukcionih funkcija i način modeliranja vertikalnih atmosferskih profila.

Modeli zenitne hidrostatičke komponente

Modeli hidrostatičke komponente zenitnog troposferskog kašnjenja izvode se po pravilu na osnovu diferencijalne forme jednačine hidrostatičke ravnoteže koja sledi iz Bojl-Mariotovog i Gej-Lisakovog zakona idealnih gasova:

$$dp = -gpdH \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_D t} dH, \quad (3.5.16)$$

gde je p pritisak, dp promena pritiska, g ubrzanje sile teže, dH promena visine, R_D gasna konstanta suvog vazduha, i t temperatura. Tipični predstavnici modela ove vrste su model HOPFIELD (*Hopfield 1969*) i model SAASTAMOINEN (*Saastamoinen 1973*).

Model HOPFIELD zasnovan je na pretpostavci linearne promene temperature sa visinom:

$$t = f(H) = t_0 + \beta H, \quad (3.5.17)$$

sa površinskom temperaturom t_0 i vertikalnim temperaturnim gradijentom β . Iz nje sledi zakon promene pritiska sa visinom:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_D} \int_{H_0}^H \frac{dH}{t_0 + \beta H} \Rightarrow p = p_0 \left(1 + \frac{\beta H}{t_0} \right)^{-\frac{g}{R_D \beta}}. \quad (3.5.18)$$

Kako je s druge strane hidrostatički refrakcioni broj:

$$\begin{aligned} N_H &= k_1 R_D \rho \doteq k_1 \frac{p}{t} = k_1 \frac{p_0}{t_0} \left(1 + \frac{\beta H}{t_0} \right)^{-\left(1 + \frac{g}{R_D \beta} \right)} \\ &= N_{H_0} \left(1 + \frac{\beta H}{t_0} \right)^{\mu} \doteq N_{H_0} \left(1 + \frac{\beta H}{t_0} \right)^4 \end{aligned}, \quad (3.5.19)$$

njegovom integracijom i zamenom standardnih vrednosti dobija se HOPFIELD model u zatvorenom obliku:

$$T_H^z = \left(0.62291 \left[\frac{m^0 K}{hPa} \right] \frac{1}{t_0} + 0.0023081 \left[\frac{m}{hPa} \right] \right) p_0, \quad (3.5.20)$$

pomoću kojeg se može izračunati hidrostatička komponenta zenitnog troposferskog kašnjenja uz poznavanje površinskih vrednosti pritiska p_0 i temperature t_0 . Iako ovaj model ima visoku preciznost, upoređenja pokazuju sistematska odstupanja i do $5mm$. Razlozi za to leže u pretpostavkama o vazduhu kao idealnom gasu i konstantnosti ubrzanja sile teže.

Polaznu osnovu modela SAASTAMOINEN takođe čini jednačina stanja idealnih gasova, ali sa visinski promenljivom gustinom atmosfere i ubrzanjem sile teže:

$$dp = -g(H)\rho(H)dH. \quad (3.5.21)$$

Pomoću integralne srednje vrednosti ubrzanja sile teže vertikalne atmosferske prizme, g_m :

$$g_m = 9.784 \left[\frac{m}{s^2} \right] \left(1 - 0.00266 \cos 2\varphi - 0.00028 \left[\frac{1}{km} \right] H_0 \right), \quad (3.5.22)$$

gde φ označava geografsku širinu stanice a H_0 njenu visinu, moguće je izraziti hidrostatički refrakcioni broj u obliku:

$$N_H = k_1 R_D \rho = -k_1 R_D \frac{1}{g_m} \frac{dp}{dH}. \quad (3.5.23)$$

Njegovom integracijom po visini dobija se zatvoreni oblik hidrostatičke komponente zenitnog troposferskog kašnjenja po modelu SAASTAMOINEN:

$$T_H^z = \frac{0.0022767 \left[\frac{m}{hPa} \right] p_0}{1 - 0.00266 \cos 2\varphi - 0.00028 \left[\frac{1}{km} \right] H_0}. \quad (3.5.24)$$

Što se tiče atmosferskih parametara, ovaj model zahteva samo poznavanje površinskog pritiska. Međutim, za korekciju verikalne komponente ubrzanja sile teže neophodne su geografska širina stanice i njena visina. Nesigurnosti koje proističu iz aproksimacija praktično su zanemarljive, tako da je model SAASTAMOINEN u širokoj upotrebi zbog svoje superiorne globalne tačnosti procenjene na oko $2.5mm$.

Modeli zenitne vlažne komponente

Za razliku od hidrostatičke komponente, vlažna komponenta zenitnog troposferskog kašnjenja modelira se mnogo teže zbog neadekvatnog poznavanja vertikalne raspodele vodene pare (*Ifadis 1986; Mendes, Langley 1998*). Od poznatijih modela ove kategorije najčešće se koriste modeli HOPFIELD, IFADIS i MENDES.

Osnovni oblik vlažnog troposferskog refrakcionog broja po modelu HOPFIELD ne razlikuje se od hidrostatičkog:

$$N_w = N_{w0} \left(1 + \frac{\beta H}{t_0} \right)^\mu \doteq N_{w0} \left(1 - \frac{H}{H_T} \right)^4, \quad (3.5.25)$$

samo što sada H_T označava visinu na kojoj počinje sloj tropopauze. Obično se za ovu veličinu pretpostavlja vrednost od $11000m$, ali se nešto bolji rezultat dobija po izrazu:

$$H_T = 7508[m] + 0.00242[m] \cdot \exp\left(\frac{t_0}{22.90[^\circ C]}\right). \quad (3.5.26)$$

Površinska vrednost vlažnog troposferskog refrakcionog broja funkcija je površinskih vrednosti parcijalnog pritiska vodene pare e_0 i temperature t_0 , i iznosi:

$$N_{w0} \doteq 370100 \left[\frac{^\circ K^2}{hPa} \right] \frac{e_0}{t_0^2}. \quad (3.5.27)$$

Zamena u izraz za vlažni troposferski refrakcioni broj i integracija do visine tropopauze daju sledeći zatvoreni oblik po modelu HOPFIELD:

$$T_w^z = \left(555.7 \left[\frac{m^\circ K^2}{hPa} \right] + 1.792 \cdot 10^{-4} \left[\frac{m^\circ K^2}{hPa} \right] \cdot \exp\left(\frac{t_0}{22.90[^\circ C]}\right) \right) \frac{e_0}{t_0^2}. \quad (3.5.28)$$

Model HOPFIELD doživeo je mnoge modifikacije. Jedna od njih je model IFADIS:

$$\begin{aligned} T_w^z = & 0.554 \cdot 10^{-2} [m] - 0.880 \cdot 10^{-4} \left[\frac{m}{hPa} \right] (p_0 - 1000) \\ & + 0.272 \cdot 10^{-4} \left[\frac{m}{hPa} \right] e_0 + 2.771 \left[\frac{m^\circ C}{hPa} \right] \frac{e_0}{t_0}, \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

a naročito je jednostavan linearni model MENDES:

$$T_w^z = 0.122[m] + 0.00943 \left[\frac{m}{hPa} \right] e_0. \quad (3.5.30)$$

Modeli vlažne troposferske komponente manje su tačnosti od odgovarajućih modela hidrostatičkog troposferskog uticaja. Upoređenja pokazuju da se preciznost globalno kreće od 12mm do 30mm, ali sa prisutnim sistematskim greškama reda 1mm do 6mm.

Modeli redukcionih funkcija

Primer osnovne troposferske redukcionne funkcije vertikalnog ugla α , odnosno zenitnog odstojanja z , je:

$$F = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos z}. \quad (3.5.31)$$

Ovim modelom se ne uzima u obzir zakrivljenost atmosferskih slojeva, niti se pravi razlika između hidrostatičke i vlažne komponente troposferskog kašnjenja, tako da mu je primena u preciznim radovima ograničena na $z < 60^\circ$. Pokazalo se ustvari da je veoma teško izvesti analitički izraz za redukcionu funkciju, pre svega zbog nepravilnog vertikalnog profila vodene pare. Iz tog razloga je poslednjih decenija publikovan veliki broj modela troposferskih redukcionih funkcija (*Marini 1972; Chao 1972; Black 1978; Lanyi 1984; Davis et al. 1985; Herring 1992; Niell 1996*).

Troposferske redukcionne funkcije mogu se odnositi na ukupno troposfersko kašnjenje ili posebno na hidrostatičku i vlažnu komponentu. Kada se određuju odvojeno, važnije je tačno modelirati hidrostatičku redukcionu funkciju jer je ova komponenta 10-20 puta veća od vlažne. Osim toga, redukciona funkcija ne mora biti eksplicitno izražena, već se može indirektno odrediti iz nekog modela troposferskog kašnjenja. Primer redukcionne funkcije iz ove grupe je model SAASTAMOINEN:

$$T = \frac{0.002277 \left[\frac{m}{hPa} \right] (1+D)}{\cos z} \left(p_0 + \left(\frac{1255 \left[\frac{^{\circ}K}{t_0} \right] + 0.005}{t_0} \right) e_0 - B \tan^2 z \right) + \delta_R, \quad (3.5.32)$$

u kojem je D popravka za vertikalnu zavisnost ubrzanja sile teže, a B i δ_R predstavljaju korekzione članove koji se nalaze interpolacijom u posebnim tablicama. Redukciona funkcija, koja je u ovom slučaju ukupnog karaktera, dobija se kao:

$$F = \frac{T}{T(z=0)}. \quad (3.5.33)$$

Na isti način koristi se i model BLACK, s tim što je moguće odvojeno određivanje redukcionih funkcija po hidrostatičkoj i vlažnoj komponenti:

$$T_{H(W)} = \frac{1.552 \cdot 10^{-5} \left[\frac{^{\circ}K}{hPa} \right] \frac{p_0}{t_0} H_{H(W)} - 1.92 \left[\frac{m}{^{\circ}} \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos \alpha}{1 + I_C \frac{H_{H(W)}}{r}} \right)^2} \alpha^2 + 0.6}. \quad (3.5.34)$$

U ovom modelu H označava visinu gornje granice sloja suvog odnosno vlažnog vazduha, I_C je faktor razmere, a r geocentrično rastojanje do stanice.

Eksplisito računanje vrednosti redukcionne funkcije obično se vrši po komponentama. Funkcije koje imaju isti oblik a različite koeficijente za hidrostatičko i vlažno troposfersko kašnjenje su, na primer, model CHAO i normalizovani model HERRING:

$$F_{H(W)}(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha + \frac{a_{H(W)}}{\tan \alpha + b_{H(W)}}}, \quad F_{H(W)}(\alpha) = \frac{1 + \frac{a_{H(W)}}{b_{H(W)}}}{1 + c_{H(W)}} \frac{1}{\sin \alpha + \frac{a_{H(W)}}{\sin \alpha + \frac{b_{H(W)}}{\sin \alpha + c_{H(W)}}}}. \quad (3.5.35)$$

Jedan od najpreciznijih, nedavno razvijenih modela troposferskih redukcionih funkcija, je takozvana nova redukciona funkcija (NMF) modela NIELL (*Niell 1996*). NMF funkcijom uzima se u obzir ne samo položajna i visinska zavisnost, već i sezonska varijacija pomoću parametra DOY koji karakteriše doba godine.

Funkcije hidrostatičke i vlažne komponente troposferskog kašnjenja po modelu NIELL glase:

$$F_H(\alpha) = \frac{1 + \frac{a_H}{b_H}}{1 + c_H} \frac{1}{\sin \alpha + \frac{a_H}{\sin \alpha + \frac{b_H}{\sin \alpha + c_H}}} + \left(\frac{1 + \frac{a_V}{b_V}}{1 + c_V} \frac{1}{\sin \alpha + \frac{a_V}{\sin \alpha + \frac{b_V}{\sin \alpha + c_V}}} \right) \frac{H}{1000}, \quad (3.5.36)$$

$$F_W(\alpha) = \frac{1 + \frac{a_W}{1 + \frac{b_W}{1 + c_W}}}{\sin \alpha + \frac{a_W}{\sin \alpha + \frac{b_W}{\sin \alpha + c_W}}}, \quad (3.5.37)$$

pri čemu je H visina stanice u metrima, a koeficijenti vertikalne zavisnosti imaju vrednosti:

$$a_V = 2.53 \cdot 10^{-5}, \quad b_V = 5.49 \cdot 10^{-3}, \quad c_V = 1.14 \cdot 10^{-3}. \quad (3.5.38)$$

Računanje ostalih koeficijenata vrši se pomoću vrednosti iz *tabele 3.1*, i to za dan u godini kada je vršeno merenje (DOY) i geografsku širinu stanice φ .

TABELA 3.1. Koeficijenti NMF funkcije hidrostatske i vlažne troposferske komponente.

Koeficijent	$\varphi = 15^\circ$	$\varphi = 30^\circ$	$\varphi = 45^\circ$	$\varphi = 60^\circ$	$\varphi = 75^\circ$
$a_H^{AVG} \times 10^3$	1.2769934	1.2683230	1.2465397	1.2196049	1.2045996
$b_H^{AVG} \times 10^3$	2.9153695	2.9152299	2.9288445	2.9022565	2.9024912
$c_H^{AVG} \times 10^3$	62.610505	62.837393	63.721774	63.824265	64.258455
$a_H^{AMP} \times 10^5$	0.0000000	1.2709626	2.6523662	3.4000452	4.1202191
$b_H^{AMP} \times 10^5$	0.0000000	2.1414979	3.0160779	7.2562722	11.723375
$c_H^{AMP} \times 10^5$	0.0000000	9.0128400	4.3497037	84.795348	170.37206
$a_W^{AVG} \times 10^4$	5.8021897	5.6794847	5.8118019	5.9727542	6.1641693
$b_W^{AVG} \times 10^3$	1.4275268	1.5138625	1.4572752	1.5007428	1.7599082
$c_W^{AVG} \times 10^2$	4.3472961	4.6729510	4.3908931	4.4626982	5.4736038

Interpolacija proizvoljnog koeficijenta NMF funkcije hidrostatske komponente odvija se po shemi:

$$p_H(\varphi, DOY) = p_H^{AVG}(\varphi_i) + \left(p_H^{AVG}(\varphi_{i+1}) - p_H^{AVG}(\varphi_i) \right) \frac{\varphi - \varphi_i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} + \left[p_H^{AMP}(\varphi_i) + \left(p_H^{AMP}(\varphi_{i+1}) - p_H^{AMP}(\varphi_i) \right) \frac{\varphi - \varphi_i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} \right] \cos \left(2\pi \frac{DOY - 28}{365.25} \right), \quad (3.5.39)$$

gde φ_i i φ_{i+1} označavaju najbliže tablične vrednosti. Koeficijenti NMF funkcije vlažne komponente interpoluju se samo po geografskoj širini:

$$p_W(\varphi) = p_W^{AVG}(\varphi_i) + \left(p_W^{AVG}(\varphi_{i+1}) - p_W^{AVG}(\varphi_i) \right) \frac{\varphi - \varphi_i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i}. \quad (3.5.40)$$

Ispitivanja preciznijih modela redukcionih funkcija i upoređenje sa rezultatima dobijenim radio sondiranjem atmosfere pokazuju da tačnost ukupne troposferske popravke suštinski zavisi od zenitnog odstojanja putanje elektromagnetnog talasa. Slaganje većine modela za zenitna odstojanja do 70° kreće se u granicama od oko $8mm$. Već na zenitnom odstojanju od 80° tačnost redukcionih funkcija spada na $50mm$, dok je za 85° u najboljem slučaju oko $100mm$. U samoj blizini horizonta, tačnost redukcionih funkcija naglo postaje veoma niska, sa odstupanjima koja dostižu i $1.5m$.

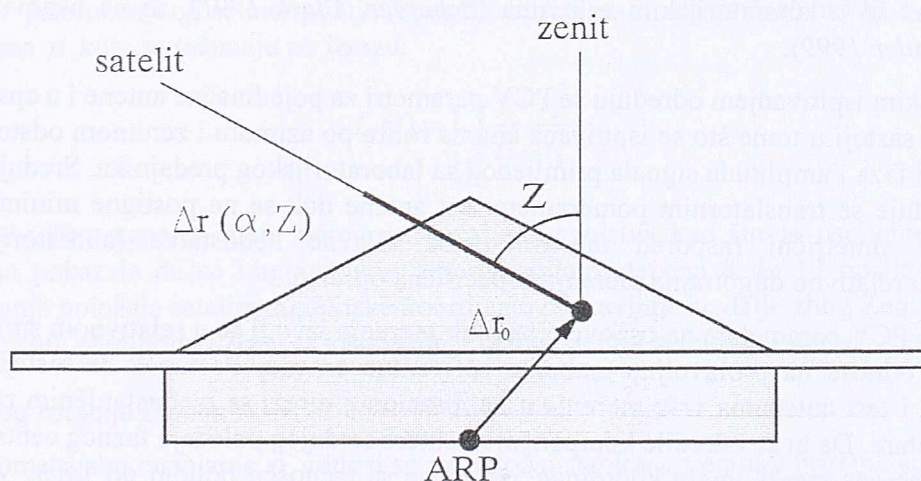
3.5.3 Varijacije faznog centra antene

Fazni centar antene označava fiktivnu tačku u kojoj se vrši elektronski prijem GPS signala. Mesto prijema nije isto za signale L_1 i L_2 , niti se poklapa sa fizički definisanom referentnom tačkom antene (ARP). Trenutni položaj faznog centra (PCV) zavisi od konstrukcije antene, njenih elektronskih svojstava i pravca i jačine GPS signala, tako da se merene fazne i kodne pseudoduzine u svakoj epohi odnose na različito mesto unutar tela antene.

Vektor trenutnog mesta prijema GPS signala ima sledeći oblik u lokalnom topocentričnom koordinatnom sistemu sa početkom u referentnoj tački antene:

$$\mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_0 + \Delta r(\alpha, z) \mathbf{e}, \quad (3.5.41)$$

pri čemu je $\Delta \mathbf{r}_0$ vektor srednjeg položaja faznog centra, \mathbf{e} jedinični vektor u pravcu satelita čiji se signal prima, a Δr varijabilna funkcija azimuta i zenitnog odstojanja koja predstavlja varijacije faznog centra u užem smislu (slika 3.2).



SLIKA 3.2. Varijacija faznog centra GPS antene.

IGS standard predviđa da vektor srednjeg položaja faznog centra bude zadat svojim koordinatnim komponentama:

$$\Delta \mathbf{r}_0^T = [\Delta N \quad \Delta E \quad \Delta U], \quad (3.5.42)$$

a funkcija Δr svojim diskretnim vrednostima za zenitna odstojanja u intervalu od 5° , tako da se vrednost za proizvoljno zenitno odstojanje može dobiti linearnom interpolacijom.

Srednjim položajem faznog centra ne popravljaju se merene pseudoduzine nego računato geometrijsko rastojanje:

$$\rho_m^j = \sqrt{(\mathbf{x}_m + \mathbf{R}(\varphi, \lambda) \Delta \mathbf{r}_0 - \mathbf{x}^j)^T (\mathbf{x}_m + \mathbf{R}(\varphi, \lambda) \Delta \mathbf{r}_0 - \mathbf{x}^j)}, \quad (3.5.43)$$

s tim što se vektor srednjeg položaja faznog centra transformiše matricom \mathbf{R} iz lokalnog topocentričnog u globalni geocentrični koordinatni sistem. Originalne fazne pseudoduzine popravljaju se samo za varijacije faznog centra, i to po jednostavnom izrazu:

$$L' = L - \Delta r(\alpha, z). \quad (3.5.44)$$

Izraz za vektor trenutnog položaja faznog centra ima četiri stepena slobode kada je u pitanju obrada GPS merenja. To znači da se GPS obradom dobijaju isti rezultati kada se umesto originalnog vektora srednjeg položaja i azimutalno-zenitne varijacije faznog centra upotrebe transformisane vrednosti:

$$\Delta \mathbf{r}_0' = \Delta \mathbf{r}_0 + \mathbf{t}, \quad (3.5.45)$$

$$\Delta r'(\alpha, z) = \Delta r(\alpha, z) - \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} + \Delta r_0, \quad (3.5.46)$$

pri čemu je \mathbf{t} konstantni proizvoljni vektor, a Δr_0 konstantna proizvoljna vrednost nezavisna od pravca (*Rothacher et al. 1995*). Jednoznačna definicija konstante Δr_0 postiže se sa:

$$\Delta r(\alpha, 0) = 0, \quad (3.5.47)$$

dok se vektor $\Delta \mathbf{r}_0$ može definisati postavljanjem uslova u intervalu zenitnih odstojanja $[0, z_0]$:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{z_0} \Delta r(\alpha, z) \sin z \, dz \, d\alpha = \min. \quad (3.5.48)$$

Kalibracija GPS antena, odnosno određivanje njenih PCV parametara (vektora $\Delta \mathbf{r}_0$ i funkcije Δr), vrši se danas ili u laboratorijskim uslovima (*Schupler, Clark 1991*), ili na osnovu izvršenih GPS merenja (*Mader 1999*).

Laboratorijskim ispitivanjem određuju se PCV parametri za pojedinačne antene i u apsolutnom smislu. Postupak se sastoji u tome što se ispitivana antena rotira po azimutu i zenitnom odstojanju, i za svaki položaj meri faza i amplituda signala primljenog sa laboratorijskog predajnika. Srednji položaj faznog centra određuje se translatorskim pomeranjem test antene dok se ne postigne minimalna varijacija i istovremeno simetrični raspored merenih faza. Glavne nedostatke laboratorijskog postupka predstavljaju relativno dugotrajna merenja i specifična oprema.

Određivanje PCV parametara na osnovu terenskih merenja izvodi se u relativnom smislu, što znači da se rezultati odnose na proizvoljno izabranu referentnu antenu. Postupak se sastoji u tome što se referentnom i test antenama vrše merenja u kalibracionoj mreži sa međustaničnim rastojanjima reda nekoliko metara. Da bi se odredile komponente vektora srednjeg položaja faznog centra potrebno je da tačke kalibracione mreže imaju koordinate određene sa tačnošću boljom od 1mm . Varijacije faznog centra mogu se onda odrediti modeliranjem u obliku glatkih funkcija zenitnog odstojanja i azimuta. Tako se, na primer, pristup istraživačke grupe američke Nacionalne geodetske službe (NGS) zasniva na MNK reziduumima prostih razlika interferometrijskog tipa:

$$(\nu_{\Delta L})_i = \tau_i + \sum_{k=1}^4 c_k z_i^k, \quad (3.5.49)$$

gde τ označava rezidualno relativno vremensko kašnjenje, a c_k su nepoznati koeficijenti polinoma četvrtog stepena. Pri merenju se koriste eksterni rubidijumski oscilatori kako bi se relativne greške časovnika prijemnika svele na minimum. S druge strane, postupak grupe sa Univerziteta u Bernu sastoji se u proširenju funkcionalnog modela originalnih GPS merenja. Pomoćni model sadrži lokalne linearne funkcije azimuta i zenitnog odstojanja, ili je u obliku sferno-harmonijskog razvoja:

$$\Delta r(\alpha, z) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos 2z) (a_{nm} \cos(m\alpha) + b_{nm} \sin(m\alpha)). \quad (3.5.50)$$

Srednji položaji faznih centara L_1 i L_2 praktično se poklapaju kod savremenih antena, iako kod nekih, kao što je Dorne Margoline, razlika može iznositi 2cm . Varijacije položaja faznog centra su po pravilu manje od 1cm , i njihovo zanemarivanje utiče na relativno pozicioniranje u zavisnosti od toga da li se koriste antene istog ili različitog tipa. U slučaju antena različitog tipa, moguća je pojava sistematske greške elipsoidnih visinskih razlika od 10cm nezavisno od rastojanja. Kada se koriste antene istog tipa uticaj ima karakter greške razmere koordinatnih razlika do 0.015ppm , uglavnom zbog toga što se pri većim rastojanjima isti satelit ne vidi pod istim zenitnim odstojanjem.

3.5.4 Korekcije satelitskih položaja

Položaj satelita u trenutku emitovanja signala računa se na osnovu podataka komercijalnih ili preciznih efemerida. Komercijalne efemeride čine sastavni deo GPS navigacione poruke, i sadrže podatke o Keplerovim elementima i njihovim vremenskim promenama (ICD-GPS-200 1997). Računanje satelitskih koordinata iz komercijalnih efemerida predstavlja standardni navigacioni postupak koji je softverski implementiran u svakom GPS prijemniku.

Za razliku od komercijalnih efemerida, precizne efemeride nisu dostupne u realnom vremenu jer se određuju kao deo rešenja globalne IGS mreže stalnih GPS stanica. Podatke preciznih efemerida čine koordinate satelita i stanja časovnika u intervalima od $15min$, u standardnom IGS formatu SP3 (Remondi 1989). Računanje ovih veličina za proizvoljni trenutak emitovanja signala t vrši se najčešće Lagranžovom interpolacijom:

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p(t_i) L_i(t), \quad (3.5.51)$$

pri čemu je p parametar koji se interpoluje (koordinate satelita ili stanje časovnika), a $L(t)$ su bazne funkcije stepena n koje se računaju po izrazu:

$$L_i(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{t - t_k}{t_i - t_k}. \quad (3.5.52)$$

Iako polinomi višeg stepena imaju određena neželjena svojstva kao što je oscilatorno ponašanje, istraživanja su pokazala da se Lagranžovom interpolacijom stepena 8 do 17 postiže milimetarska tačnost računanja položaja satelita. Satelitske koordinate popravljaju se dalje zbog Zemljine rotacije, a u slučaju preciznih efemerida i zbog ekscentriciteta faznog centra satelitske antene.

Popravka zbog rotacije Zemlje

Modelsko geometrijsko rastojanje ρ odnosi se na položaj stanice u trenutku prijema signala i položaj satelita u trenutku emitovanja signala. Ako su odgovarajući vektori položaja u inercijalnom koordinatnom sistemu $\bar{\mathbf{x}}_m(t)$ i $\bar{\mathbf{x}}^j(t - \tau)$, pri čemu je τ vreme puta signala, geometrijsko rastojanje računa se kao:

$$\rho = \left| \bar{\mathbf{x}}_m(t) - \bar{\mathbf{x}}^j(t - \tau) \right|. \quad (3.5.53)$$

Satelitske efemeride zadate su u terestričkom koordinatnom sistemu u kojem se određuju i stanični položaji. Veze između vektora položaja u ova dva sistema glase:

$$\bar{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{R}_3(-\alpha) \mathbf{x}_m(t), \quad (3.5.54)$$

$$\bar{\mathbf{x}}^j(t - \tau) = \mathbf{R}_3(-\alpha) \mathbf{R}_3(\omega\tau) \mathbf{x}^j(t - \tau), \quad (3.5.55)$$

gde je sa α označena rektascenzija Griničkog meridijana u trenutku prijema signala, ω je uglovna brzina rotacije Zemlje, a \mathbf{R}_3 matrica rotacije oko z ose terestričkog koordinatnog sistema. Pošto zajednička rotacija ne menja dužinu vektora, za rastojanje se dobija izraz:

$$\rho = \left| \bar{\mathbf{x}}_m(t) - \bar{\mathbf{x}}^j(t - \tau) \right| = \left| \mathbf{x}_m(t) - \mathbf{R}_3(\omega\tau) \mathbf{x}^j(t - \tau) \right|. \quad (3.5.56)$$

Za vreme puta signala koje iznosi oko $0.07s$, Grinički meridijan promeni svoj uglovni položaj za oko $1''$. Ukoliko se rotacija Zemlje ne bi uzela u obzir, geometrijsko rastojanje bilo bi pogrešno oko $30m$.

Ekscentricitet faznog centra satelitske antene

Kada se koriste precizne efemeride, satelitske koordinate i geometrijsko rastojanje odnose se na centar mase satelita. Merena pseudoduzina odnosi se, međutim, uvek na fazni centar satelitske antene. Njegova ekscentričnost izražava se vektorom položaja u satelitskom koordinatnom sistemu sa početkom u centru mase satelita, i osama koje su definisane na sledeći način:

- Osa z usmerena je duž antene prema centru mase Zemlje.
- Osa x upravna je na osu z , i leži u ravni koju definišu osa z i Sunce.
- Osa y usmerena je duž satelitskih Sunčevih panela i dopunjava koordinatni sistem desne orijentacije.

Komponente vektora položaja faznih centara za pojedine tipove GPS satelita date su u tabeli 3.2 (King 1999).

TABELA 3.2. Ekscentriciteti antena pojedinih tipova GPS satelita.

Tip satelita	$\Delta x [m]$	$\Delta y [m]$	$\Delta z [m]$
Block I	0.211	0.000	0.854
Block II	0.279	0.000	0.952
Block IIA	0.279	0.000	0.952
Block IIR	0.000	0.000	0.000

Ako su \mathbf{x}^j i \mathbf{x}^s vektori položaja satelita i Sunca, onda će jedinični vektori duž osa satelitskog koordinatnog sistema biti:

$$\mathbf{e}_z = -\frac{\mathbf{x}^j}{|\mathbf{x}^j|}, \quad \mathbf{e}_y = \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^j)}{|\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^j)|}, \quad \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z, \quad (3.5.57)$$

tako da se pomoću njih mogu odrediti komponente ekscentriciteta satelitske antene u terestričkom koordinatnom sistemu:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{e}_x \Delta x + \mathbf{e}_y \Delta y + \mathbf{e}_z \Delta z. \quad (3.5.58)$$

Sračunate koordinate faznog centra satelitske antene imaju praktično istu tačnost kao koordinate iz preciznih efemerida. Problemi se mogu pojaviti kada satelit uđe u Zemljinu senku, jer tada paneli ne mogu dovoljno dobro da zauzmu odgovarajući položaj prema Suncu. Tačnost koordinata faznog centra spada u takvim uslovima sa standardnih 5cm na oko 30cm.

3.6 Rešavanje faznih neodređenosti

Fazna neodređenost predstavlja stanje registra uređaja koji vrši fazna merenja u trenutku kada otpočne praćenje satelitskog signala. To stanje ogleda se u celom broju faznih ciklusa i potpuno je proizvoljno. Kada se prilikom obrade GPS merenja odrede celobrojne vrednosti faznih neodređenosti, fazna merenja konceptualno postaju milimetarski precizna rastojanja koja onda omogućuju isto tako precizno pozicioniranje.

Istraživanja na polju rešavanja faznih neodređenosti traju neprekidno od 1981. godine i još uvek su aktuelna (Kim, Langley 2000). Razlozi za to leže ne samo u izvesnim teorijski interesantnim problemima kao što je MNK ocenjivanje sa uslovima celobrojnosti, nego i u novim naučnim i komercijalnim primenama omogućenim preciznim pozicioniranjem. Stoga je danas veoma teško uspostaviti pouzdane kriterijume po kojima bi se brojne i međusobno različite metode rešavanja faznih neodređenosti mogle klasifikovati.

Uopšteno posmatrano, metode rešavanja faznih neodređenosti razvijane su uglavnom paralelno za dva velika područja primene. Prvo se odnosi na statičke metode pozicioniranja u višestaničnim mrežama u kojima je vreme zaposedanja tačaka od nekoliko sati do nekoliko dana, i u kojima međustanična rastojanja mogu iznositi do više hiljada kilometara. Drugo su brze statičke, kinematičke i navigacione primene, koje po pravilu podrazumevaju dve tačke od kojih je barem jedna pokretna, sa veoma kratkim vremenom zaposedanja i rastojanjima koja iznose do nekoliko desetina kilometara. Međutim, savremena klasifikacija metoda rešavanja faznih neodređenosti ne zasniva se na području primene već na kriterijumu načina korišćenja informacija sadržanih u faznim merenjima. U tom smislu postoje geometrijske metode iz domena merenja, metode pretraživanja iz domena koordinata i metode pretraživanja iz domena faznih neodređenosti.

3.6.1 Geometrijske metode

Metode iz ove grupe spadaju u najstarije, i mogu biti veoma efikasne u slučaju da se raspolaze dvofrekventnim merenjima. Osnovna ideja geometrijskih metoda sastoji se u direktnom određivanju faznih neodređenosti uz upotrebu faznih i kodnih pseudodužina u formi dvostrukih razlika (Mervart 1995):

$$\lambda_1 \Delta \nabla N_1 = \Delta \nabla L_1 - \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \Delta \nabla P_1 + \frac{2f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \Delta \nabla P_2, \quad (3.6.1)$$

$$\lambda_2 \Delta \nabla N_2 = \Delta \nabla L_2 - \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \Delta \nabla P_2 + \frac{2f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \Delta \nabla P_1. \quad (3.6.2)$$

Međutim, analize pokazuju da je za neposredno određivanje faznih neodređenosti po frekvencijama potreban veliki broj epoha merenja pre svega zbog niske tačnosti kodnih pseudodužina i rezidualnih efekata jonosfere na većim dužinama. Stoga je razvijen niz modifikacija karakterističnih po upotrebi dvofrekventnih linearnih kombinacija. Jedna od njih odnosi se na rešavanje faznih neodređenosti linearne kombinacije L_5 :

$$\frac{c_0}{f_1 - f_2} N_5 = \frac{f_1 L_1 - f_2 L_2}{f_1 - f_2} - \frac{f_1 P_1 + f_2 P_2}{f_1 + f_2}, \quad (3.6.3)$$

koja je pogodna zbog svoje relativno velike talasne dužine. Fazne neodređenosti po pojedinim frekvencijama mogu se nakon toga rešiti uz pomoć linearne kombinacije L_3 :

$$\frac{c_0}{f_1 + f_2} \Delta \nabla N_1 = \Delta \nabla L_3 - \Delta \nabla \rho - c_0 \frac{f_2}{f_1^2 - f_2^2} \Delta \nabla N_5, \quad (3.6.4)$$

$$\Delta \nabla N_2 = \Delta \nabla N_1 - \Delta \nabla N_5, \quad (3.6.5)$$

pod uslovom da se uticaji efemerida i troposferske refrakcije pažljivo modeliraju. Nedostaci ovakvog postupka naročito dolaze do izražaja pri aktivnoj AS meri zaštite zbog koje precizna kodna merenja na drugoj frekvenciji nisu direktno izvodljiva. U tom slučaju koristi se linearne kombinacije L_4 koja ne sadrži geometrijsko rastojanje, a pomoću koje se onda fazna neodređenost linearne kombinacije L_5 može odrediti po izrazu:

$$\frac{c_0}{f_1 - f_2} \Delta \nabla N_5 = \frac{f_1 f_2}{f_1^2 - f_2^2} \left(\Delta \nabla L_4 - \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_2^2} \Delta \nabla I_1 \right) + \Delta \nabla L_3 - \Delta \nabla \rho. \quad (3.6.6)$$

Metoda je pogodna za primenu samo na kraćim rastojanjima na kojima se implicitno može pretpostaviti da je uticaj diferencijalnog jonosferskog kašnjenja beznačajan. U slučajevima kada ta pretpostavka ne važi, moguće je da se prethodne informacije o jonosferskom kašnjenju L_I uključe u model kao fiktivna opažanja. Njihov doprinos pouzdanom rešavanju faznih neodređenosti reguliše se

dodeljivanjem odgovarajućeg standarda, tako da ekstremni slučaj $\sigma_f \rightarrow 0$ znači potpuno ignorisanje uticaja jonosferskog kašnjenja, dok je $\sigma_f \rightarrow \infty$ ekvivalentno upotrebi linearne kombinacije L_3 . Konkretna vrednost između ova dva ekstrema bira se po pravilu u zavisnosti od međustaničnog rastojanja.

Primena geometrijskih metoda je prema tome uglavnom ograničena niskom tačnošću kodnih pseudoduzina i jonosferskim uslovima. Situacija je dodatno otežana kada su na raspolaganju isključivo jednofrekventna merenja, jer su u tom slučaju neophodne duže vremenske serije i posebni postupci filtriranja. Izuzimajući specifična naučna istraživanja, geometrijske metode danas imaju samo istorijski značaj.

3.6.2 Koordinatne metode

Koordinatne metode sastoje se u pretraživanju prostora koordinata tačaka, i izboru onog rešenja koje obezbeđuje maksimalnu verovatnoću da su celobrojne vrednosti rezultujućih faznih neodređenosti tačne. Da bi se obezbedila funkcionalnost ovih metoda, neophodno je ograničiti teorijski beskonačno veliki prostor pretraživanja, i definisati kriterijume po kojima se određeni skup koordinata usvaja kao najbolje rešenje.

Tipični predstavnik grupe koordinatnih metoda je takozvana AFM metoda, odnosno metoda funkcije faznih neodređenosti (*Counselman, Gourevitch 1981*). AFM postupak odvija se u četiri faze:

- računanje početnog rešenja, odnosno ocenjivanje približnih koordinata,
- ograničavanje prostora pretraživanja i definisanje skupa potencijalnih koordinata,
- računanje vrednosti funkcije faznih neodređenosti za svaki skup potencijalnih rešenja,
- izbor najboljeg rešenja i računanje celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti.

Ocenjivanje približnih koordinata tačaka vrši se po pravilu metodom najmanjih kvadrata u modelu faznih trostrukih razlika ili dvostrukih faznih i kodnih razlika. Intervalske MNK ocene koordinata mogu se istovremeno iskoristiti i za ograničavanje prostora pretraživanja. Prema tome, suština metode sastoji se u definiciji funkcije faznih neodređenosti i kriterijumu izbora najboljeg rešenja.

Kada se zanemare slučajne i sistematske greške, dvostruke fazne razlike mogu se predstaviti u radijanima kao:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta\nabla L - \Delta\nabla\rho) = 2\pi\Delta\nabla N, \quad (3.6.7)$$

pri čemu λ označava talasnu dužinu odgovarajućeg nosećeg talasa, dok je dvostruka razlika geometrijskog rastojanja $\Delta\nabla\rho$ funkcija vektora koordinata nepoznate tačke. Pošto je $\Delta\nabla N$ ceo broj, a 2π period sinusne i kosinusne funkcije, poznavanje tačnih koordinata imaće za posledicu sledeći identitet:

$$e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta\nabla L - \Delta\nabla\rho)} = e^{i2\pi\Delta\nabla N} \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta\nabla L - \Delta\nabla\rho) = 1 \quad (3.6.8)$$

Prema tome, funkcija faznih neodređenosti može se definisati za proizvoljni potencijalni položaj nepoznate tačke \mathbf{x}_p , u vidu dvostrukog zbira kompleksne funkcije za n_e epoha i n_s satelita po epohi:

$$A(\mathbf{x}_p) = \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_s-1} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta\nabla L - \Delta\nabla\rho)} \leq n_e(n_s - 1), \quad (3.6.9)$$

odakle sledi da njena vrednost dostiže ukupan broj dvostrukih razlika samo pod uslovom da je \mathbf{x}_p vektor tačnih koordinata tačke i da merenja nisu opterećena slučajnim i sistematskim greškama. AFM metod se operativno sprovodi računanjem funkcije faznih neodređenosti za tačke pravilne

trodimenzionalne koordinatne mreže centrirane u približnom položaju tačke, i usvajanjem onog rešenja koje ima maksimalnu vrednost.

U primeni metode funkcije faznih neodređenosti postoji nekoliko praktičnih poboljšanja. Da bi se verovatnoća izbora pogrešnog potencijalnog rešenja svela na najmanju moguću meru, pretraživanje se obično vrši u dva prolaza sa variranjem koraka koordinatne mreže. Primena takozvane metode preseka ravni dvostrukih razlika, u znatnoj meri redukuje prostor pretraživanja i broj računskih operacija, a postoje i varijacije AFM metode u kojima se na odgovarajući način uzimaju u obzir stohastička svojstva merenja prema satelitima bliskim horizontu (*Erickson 1992*).

Problemi sa atmosferskim uticajima ograničavaju metod funkcije faznih neodređenosti na lokalnu primenu. Međutim, njena glavna prednost ogleda se u nezavisnosti od promene celog broja faznih ciklusa, zbog čega nije potrebno poznavanje približnih vrednosti faznih neodređenosti, niti korišćenje postupaka za otkrivanje i eliminaciju faznih skokova. Ove osobine omogućuju pozicioniranje na osnovu merenja iz samo jedne epohe, tako da se AFM metoda može koristiti za kinematičke primene u realnom vremenu.

3.6.3 Metode pretraživanja neodređenosti

Savremena obrada GPS merenja podrazumeva gotovo isključivu upotrebu metoda koje se zasnivaju na pretraživanju u prostoru faznih neodređenosti. Ovim metodama vrši se prvo ocenjivanje realnih vrednosti faznih neodređenosti, zatim utvrđivanje njihovih celobrojnih vrednosti, i na kraju konačno ocenjivanje koordinata tačaka. Najvažniji rezultati ocenjivanja prve faze su vektor realnih vrednosti faznih neodređenosti $\hat{\mathbf{x}}_N$ i odgovarajuća kovarijaciona matrica \mathbf{C}_{NN} . Drugom i trećom fazom definiše se prostor potencijalnih rešenja, iterativno određuje vektor celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti $\tilde{\mathbf{x}}_N$ i vrednuje kvalitet njihovog izbora. U ovim fazama metode se mogu razlikovati po nizu kriterijuma:

- Većina metoda podrazumeva početnu definiciju prostora pretraživanja na osnovu realnih vrednosti svih faznih neodređenosti. Međutim, postoje i metode kod kojih se ta definicija sprovodi na osnovu onog podskupa faznih neodređenosti koji je minimalan po dimenzijama ili optimalan u nekom drugom smislu.
- Veličina prostora pretraživanja proporcionalna je broju potencijalnih faznih neodređenosti. Kod jedne grupe metoda, redukcija prostora pretraživanja i broja potencijalnih faznih neodređenosti izvodi se transformacijom. Druge metode zasnivaju se na pretraživanju u više nivoa, pri čemu je veličina prostora pretraživanja nižih nivoa uslovljena vrednostima faznih neodređenosti iz viših nivoa.
- Ciljnu funkciju kod metoda pretraživanja u prostoru neodređenosti predstavlja minimum kvadratne forme reziduuma, koji se može računati na osnovu merenja jedne epohe ili svih epoha. Prva grupa metoda pogodna je za primene u realnom vremenu, ali im je tačnost niža jer ocena lokalnog minimuma može biti pomerena zbog uticaja sistematskih grešaka. S druge strane, ocena globalnog minimuma biće nepomerena ako se sistematski uticaji mogu posmatrati kao slučajni procesi.
- Metode pretraživanja u prostoru neodređenosti koriste uglavnom dva pristupa u vrednovanju kvaliteta definitivnog rezultata. Prvi pristup sastoji se u upotrebi stohastičkih svojstava ocenjenih celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti. Drugi pristup zasniva se na diskriminacionim funkcijama, i to najčešće u formi odnosa tačnosti poslednjeg i preposlednjeg rešenja.

Određivanje celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti u svom osnovnom obliku svodi se na zaokruživanje realne ocene \hat{N}_i na najbliži celi broj \tilde{N}_i . Međutim, ovako jednostavan postupak primenljiv je samo kada realne vrednosti konvergiraju odgovarajućim celobrojnim vrednostima, što

podrazumeva veoma duge nizove merenja i mala međustanična rastojanja. U suprotnom, svaka celobrojna vrednost \tilde{N}_k može se smatrati potencijalno tačnim rešenjem ako zadovoljava nejednakosti:

$$\hat{N}_i - t_{f,1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{ii} \leq \tilde{N}_k \leq \hat{N}_i + t_{f,1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{ii}, \quad (3.6.10)$$

gde t označava kvantil Studentovog rasporeda za f stepeni slobode i nivo značajnosti α , dok je $\hat{\sigma}$ ocena standarda odgovarajuće realne vrednosti fazne neodređenosti. FARA metodom (*Frei, Beutler 1990*) smanjuje se broj svih kombinacija potencijalnih celobrojnih vrednosti zadržavanjem samo onih čiji parovi \hat{N}_i i \hat{N}_j zadovoljavaju nejednakosti:

$$\left| \hat{N}_i - \hat{N}_j \right| - t_{f,1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{ij} \leq \left| \tilde{N}_i - \tilde{N}_j \right| \leq \left| \hat{N}_i - \hat{N}_j \right| + t_{f,1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{ij}, \quad (3.6.11)$$

pri čemu se standard $\hat{\sigma}_{ij}$ računa pomoću odgovarajućih članova kovarijacione matrice \mathbf{C}_{NV} :

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sqrt{c_{ii} - 2c_{ij} + c_{jj}}. \quad (3.6.12)$$

Svaka potencijalna kombinacija celobrojnih faznih neodređenosti uvodi se potom u postupak MNK ocenjivanja, a konačno rešenje predstavlja kombinacija koja za posledicu ima najmanju ocenu $\hat{\sigma}_0$.

Sasvim drugačiji pristup pri redukciji ukupnog broja kombinacija potencijalnih celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti upotrebljen je kod LSAST metode (*Hatch 1990*). On se sastoji u razdvajanju dvostrukih razlika na primarne (p) koje su neophodne za jednoznačno rešenje, i sekundarne (s) koje čine sve ostale:

$$\Delta \nabla \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \Delta \nabla \mathbf{l}_p & \Delta \nabla \mathbf{l}_s \end{bmatrix}. \quad (3.6.13)$$

Kada se formiraju kombinacije potencijalnih celobrojnih vrednosti samo za primarna opažanja, njihov ukupan broj biće znatno manji u poređenju sa brojem svih mogućih kombinacija. Za svaki skup primarnih potencijalnih celobrojnih vrednosti, MNK ocena nepoznatih koordinata dobija se kao:

$$\hat{\mathbf{x}}_p = \left(\mathbf{A}_p^T \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p \right)^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{C}_p^{-1} \Delta \nabla \mathbf{l}_p = \mathbf{N}_p^{-1} \mathbf{n}_p, \quad (3.6.14)$$

i omogućuje preliminarno rešavanje faznih neodređenosti sekundarnih opažanja operatorom zaokruživanja na najbliži ceo broj (NINT):

$$\Delta \nabla \tilde{\mathbf{N}}_s = \text{NINT} \left(\frac{\Delta \nabla L_s - \Delta \nabla \rho_s}{\lambda} \right). \quad (3.6.15)$$

Efikasnost LSAST metode ogleda se upravo u korišćenju ovog operatora, jer se na taj način eliminiše potreba za testiranjem alternativnih sekundarnih kombinacija. Ocene koordinata dobijaju se rekursivnim postupkom:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_p + \left(\mathbf{N}_p + \mathbf{A}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{A}_s \right)^{-1} \mathbf{A}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \left(\Delta \nabla \mathbf{l}_s - \mathbf{A}_s \hat{\mathbf{x}}_p \right), \quad (3.6.16)$$

a za konačno rešenje usvaja se onaj skup primarnih i sekundarnih faznih neodređenosti koji za posledicu ima najmanju ocenu $\hat{\sigma}_0$. Jedna od modifikacija LSAST postupka, poznata kao OMEGA metoda, koristi optimalnu ocenu doprinosa sekundarnih opažanja za redukciju prostora pretraživanja (*Kim, Langley 1999*).

Koncept primarnih i sekundarnih faznih neodređenosti iskorišćen je i kod FASF metode (*Chen, Lachapelle 1995*), s tom razlikom što primarna grupa nije konstantnih dimenzija već sukcesivno uključuje prethodno rešene celobrojne vrednosti u postupku koji se naziva rekursivnim računanjem intervala pretraživanja (RCSR). Granice intervala određene su izrazom:

$$\left(\hat{N}_{i1,2,\dots,j-1} \right)_{\min} \leq \tilde{N}_i \leq \left(\hat{N}_{i1,2,\dots,j-1} \right)_{\max}, \quad (3.6.17)$$

i može se dokazati da sadrže tačnu vrednost proizvoljne fazne neodređenosti N_i pod uslovom da su već utvrđene tačne vrednosti prethodnih faznih neodređenosti N_1, \dots, N_{i-1} (Chen 1994). FASF metod predviđa da se donja i gornja granična vrednost računaju kao:

$$\left(\hat{N}_{i|1,2,\dots,i-1}\right)_{\min/\max} = \hat{N}_{i|1,2,\dots,i-1} \pm \xi_{1-\alpha/(2n)} \hat{\sigma}_{i|1,2,\dots,i-1}, \quad (3.6.18)$$

pri čemu je ξ kvantil normalnog rasporeda za odgovarajući nivo značajnosti, a n predstavlja ukupni broj faznih neodređenosti. Standard $\sigma_{i|1,2,\dots,i-1}$ računa se jednostavno pomoću članova redukovane kovarijacione matrice, koja se dobija kao rezultat rekursivne eliminacije podvektora rešenih faznih neodređenosti.

Međusobna zavisnost realnih vrednosti MNK ocena faznih neodređenosti $\hat{\mathbf{x}}_N$ obrnuto je proporcionalna vremenu merenja. U hipotetičkom slučaju da te zavisnosti nema, odnosno da je odgovarajuća kovarijaciona matrica \mathbf{C}_N dijagonalna, postupak rešavanja faznih neodređenosti sastojao bi se u jednostavnom zaokruživanju, jer bi na taj način bio ispunjen uslov:

$$\|\hat{\mathbf{x}}_N - \check{\mathbf{x}}_N\|_{\mathbf{C}_N^{-1}} = \min. \quad (3.6.19)$$

Osnovna ideja LAMBDA metode zasniva se upravo na maksimalnoj dekorelaciji realnih vrednosti MNK ocena faznih neodređenosti, čime se znatno olakšava proces određivanja njihovih celobrojnih vrednosti (Teunissen 1994). Dekorelacija se izvodi nalaženjem celobrojne matrice \mathbf{Z} kojom se transformiše vektor ocena faznih neodređenosti i njegova kovarijaciona matrica:

$$\hat{\mathbf{z}}_N = \mathbf{Z}^T \hat{\mathbf{x}}_N, \quad (3.6.20)$$

$$\mathbf{C}_Z = \mathbf{Z}^T \mathbf{C}_N \mathbf{Z}. \quad (3.6.21)$$

Pošto se originalna kovarijaciona matrica \mathbf{C}_N može razložiti na proizvod:

$$\mathbf{C}_N = \left(\mathbf{L}^T\right)^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}^{-1}, \quad (3.6.22)$$

u kojem je \mathbf{L} donja trouglasta matrica sa jedinicama po dijagonali a \mathbf{D} dijagonalna matrica, sledi da će potpuna dekorelacija nastupiti kada je \mathbf{Z} jednako \mathbf{L} , jer je tada:

$$\mathbf{C}_Z = \mathbf{Z}^T \mathbf{C}_N \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T \left(\mathbf{L}^T\right)^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Z} = \mathbf{D}^{-1}. \quad (3.6.23)$$

Međutim, zbog uslova celobrojnosti transformacione matrice moguća je samo približno potpuna dekorelacija. Najvažnija osobina transformisanih faznih neodređenosti je da njihov region poverenja:

$$\left(\hat{\mathbf{z}}_N - \mathbf{z}_N\right)^T \mathbf{C}_Z^{-1} \left(\hat{\mathbf{z}}_N - \mathbf{z}_N\right) \leq \chi^2 \quad (3.6.24)$$

približno odgovara po obliku hipersferi, za razliku od hiperelipsoidnog i veoma izduženog oblika regiona poverenja originalnih faznih neodređenosti. Na taj način se mnogo pogodnije formulišu skupovi potencijalnih celobrojnih faznih neodređenosti i omogućuje primena efikasnih algoritama pretraživanja. Nalaženje transformacione matrice \mathbf{Z} operativno se sprovodi nizom celobrojnih Gausovih transformacija i permutacija kolona i vrsta (Jonge, Tiberius 1996).

Metode pretraživanja u prostoru faznih neodređenosti koje se danas primenjuju uglavnom su optimizovane u smislu brzine računanja. Neke od njih, kao FASF ili LAMBDA, rešavaju fazne neodređenosti za manje od stotog dela sekunde, što je dovoljno za najveći broj praktičnih situacija. Slabije su istraženi neki drugi aspekti problema kao što su stohastički model i sistem kontrole kvaliteta. Stoga su istraživački naponi trenutno usmereni na definisanje opšteg oblika postupka rešavanja faznih neodređenosti, primenljivog jednako i na statičke i kinematičke situacije, nezavisnog od međustaničnih rastojanja, i sposobnog za reprodukciju rezultata na proizvoljnom mestu i u bilo kom trenutku vremena.

Poglavlje 4

MODEL PASIVNE GRADSKE GPS OSNOVE

4.1 Analiza dvostrukih faznih razlika za mala rastojanja

Potpuni funkcionalni model dvostrukih faznih razlika:

$$\begin{aligned} \Delta \nabla L_{Fmn}^{jk} = & \Delta \nabla \rho_{mn}^{jk} + \delta_m (\dot{\rho}_m^j - \dot{\rho}_m^k) - \delta_n (\dot{\rho}_n^j - \dot{\rho}_n^k) - \Delta \nabla I_{Fmn}^{jk} + \Delta \nabla T_{mn}^{jk} \\ & + \Delta \nabla A_{Fmn}^{jk} + \Delta \nabla O_{mn}^{jk} + \nabla P_{mn}^{jk} + \Delta \nabla M_{Fmn}^{jk} + \lambda_F \Delta \nabla N_{Fmn}^{jk} + \omega_{\Delta \nabla L} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

sadrži članove različitih redova veličina. Fazna neodređenost $\lambda \Delta \nabla N$, koja može imati proizvoljno veliku vrednost, i geometrijsko rastojanje $\Delta \nabla \rho$, koje po definiciji ne može biti veće od dvostrukog međustaničnog rastojanja, predstavljaju dominantne članove. Preostale veličine, sa izuzetkom višestruke refleksije $\Delta \nabla M$ i mernog šuma ω , opisuju sistematske uticaje koji u većoj ili manjoj meri zavise od rastojanja d između stanica m i n . Ovi članovi dostižu svoje maksimalne vrednosti za one dvostruke fazne razlike kod kojih je referentni satelit j u zenitu, a drugi satelit k blizak horizontu i u pravcu međustaničnog rastojanja.

Zavisnost od dužine predstavlja i osnovu za definiciju malih međustaničnih rastojanja. Pod malim rastojanjima podrazumevaju se ona za koja su dvostruke fazne razlike praktično neosetljive na rezidualne jonosferske i troposferske uticaje, i na kojima je u tom smislu moguća jednoznačna identifikacija celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti. Prag osetljivosti dvostrukih faznih razlika zavisi od varijabilnih atmosferskih uslova zbog čega nije moguće ustanoviti njegovu tačnu vrednost, ali se za prosečno stanje jonosfere i troposfere obično usvaja da mala međustanična rastojanja predstavljaju dužine do $10km$.

4.1.1 Instrumentalni uticaji

U ovu grupu spadaju članovi funkcionalnog modela koji opisuju uticaj nesinhronizacije originalnih faznih merenja i varijabilnog trenutnog položaja faznog centra antene.

Nesinhronizacija faznih merenja

Činjenica da fazna merenja iz kojih se formira dvostruka razlika ne mogu biti simultano izvedena zbog grešaka časovnika prijemnika, obuhvaćena je u funkcionalnom modelu takozvanim sinhronizacionim članom:

$$\begin{aligned} \Delta \nabla S_{mn}^{jk} = & \delta_m (\dot{\rho}_m^j - \dot{\rho}_m^k) - \delta_n (\dot{\rho}_n^j - \dot{\rho}_n^k) \\ = & \delta_m \nabla \dot{\rho}_m^{jk} - \delta_n \nabla \dot{\rho}_n^{jk} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Problem simultanosti faznih merenja može se razdvojiti na apsolutno srednje odstupanje od GPS vremenske skale δ , i relativnu međusobnu neusaglašenost časovnika $\Delta \delta$:

$$\delta = (\delta_m + \delta_n) / 2, \quad (4.1.3)$$

$$\Delta\delta = (\delta_m - \delta_n)/2. \quad (4.1.4)$$

Sinhronizacioni član tada postaje:

$$\begin{aligned} \Delta\nabla S_{mn}^{jk} &= \delta(\nabla\dot{\rho}_m^{jk} - \nabla\dot{\rho}_n^{jk}) + \Delta\delta(\nabla\dot{\rho}_m^{jk} + \nabla\dot{\rho}_n^{jk}) \\ &= \delta \cdot \Delta\nabla\dot{\rho} + 2\Delta\delta \cdot \nabla\dot{\rho} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Pošto satelit blizu horizonta ima najveću radijalnu brzinu, veličina $\nabla\dot{\rho}$ može dostići maksimalnu vrednost od $0.7km \cdot s^{-1}$. U takvoj situaciji, veličina dvostruke razlike radijalnih brzina $\Delta\nabla\dot{\rho}$ zavisi od međustaničnog rastojanja, i za dužinu od $10km$ iznosi:

$$\Delta\nabla\dot{\rho} = \frac{d}{\rho} \nabla\dot{\rho} = 0.35m \cdot s^{-1}. \quad (4.1.6)$$

Većina savremenih GPS prijemnika autonomno održava sopstvenu sinhronizaciju sa GPS vremenom u granicama od $1ms$. Zbog toga se uticaj apsolutne sinhronizacije može zanemariti jer je manji od $1mm$. Međutim, relativna sinhronizacija od $1ms$ ima za rezultat maksimalnu vrednost sinhronizacionog člana od:

$$\left| \Delta\nabla S_{mn}^{jk} \right|_{\max} = 1.40m. \quad (4.1.7)$$

Položaj faznog centra antene

Varijabilni trenutni položaj faznog centra antene obično se predstavlja u obliku zavisnosti popravke pseudoduzine od zenitnog odstojanja satelita (*UNAVCO 2001*). Kod poznatih tipova antena, promena popravke po lučnom stepenu zenitnog odstojanja uvek je manja od $2mm$. Pošto je razlika zenitnih odstojanja za dužine od $10km$ najviše $5.4'$, uticaj trenutnih položaja faznih centara antena istog tipa može se zanemariti jer je manji od $0.2mm$. Međutim, pri upotrebi antena različitih proizvođača, maksimalna vrednost uticaja dostiže:

$$\left| \Delta\nabla A_{Fmn}^{jk} \right|_{\max} = 0.01m. \quad (4.1.8)$$

Dvostruke fazne razlike nisu opterećene uticajem razlike srednjih položaja faznih centara jer su geometrijska rastojanja definisana u odnosu na njih. Zbog nepoklapanja faznih i geometrijskih centara neophodno je zasebno računanje popravaka kako bi se rezultati GPS obrade odnosili na fizički stabilizovane tačke iznad kojih su centrisane antene. Ova popravka se može zanemariti kod antena istog tipa, ali je i u najnepovoljnijem slučaju manja od $1cm$.

4.1.2 Uticaji sredine prostiranja signala

Ukupni uticaj sredine prostiranja signala sastoji se od jonosferske i troposferske refrakcije, i njihovo modeliranje predstavlja ključni faktor u preciznom relativnom pozicioniranju dvostrukim faznim razlikama.

Jonosferska refrakcija

Dvostruka razlika jonosferskog uticaja prvog reda iznosi:

$$\Delta\nabla I_{Fmn}^{jk} = -\frac{40.3}{f^2} \left(\frac{VTEC_m}{\cos\zeta_m^j} - \frac{VTEC_n}{\cos\zeta_n^j} - \frac{VTEC_m}{\cos\zeta_m^k} + \frac{VTEC_n}{\cos\zeta_n^k} \right), \quad (4.1.9)$$

gde f označava frekvenciju jednog od nosećih talasa, $VTEC$ je ukupna gustina elektrona u vertikalnom pravcu, a ζ jonosfersko zenitno odstojanje. Ako se definiše apsolutna i relativna gustina elektrona:

$$VTEC = VTEC_m, \quad (4.1.10)$$

$$\delta VTEC = (VTEC_n - VTEC_m) / d, \quad (4.1.11)$$

i uzme u obzir činjenica da je referentni satelit u zenitu, ukupni jonosferski uticaj se takođe može razdvojiti na apsolutni i relativni deo:

$$\begin{aligned} \Delta \nabla I_{Fmn}^{jk} &= \Delta \nabla I_{Fmn,APS}^{jk} + \Delta \nabla I_{Fmn,REL}^{jk} \\ &= \frac{40.3}{f^2} VTEC \left(\frac{1}{\cos \zeta_m^k} - \frac{1}{\cos \zeta_n^k} \right) - \frac{40.3}{f^2} \delta VTEC \left(\frac{1}{\cos \zeta_m^k} - 1 \right) d. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Pošto za jonosfersko zenitno odstojanje ζ i terestričko zenitno odstojanje z važi približna veza (Klobuchar 1977; Wanninger 2000):

$$\frac{1}{\cos \zeta} \approx 1 + 2 \left(\frac{2}{\pi} z + \frac{1}{15} \right)^3 = \frac{3377}{3375} + \frac{4}{75\pi} z + \frac{8}{5\pi^2} z^2 + \frac{16}{\pi^3} z^3, \quad (4.1.13)$$

a razlika zenitnih odstojanja sa dve bliske stanice iznosi d/R , gde je R srednji Zemljin poluprečnik, sledi da su opšti izrazi za apsolutni i relativni jonosferski uticaj:

$$\left| \Delta \nabla I_{Fmn,APS}^{jk} \right| = \frac{40.3}{f^2} VTEC \left(\frac{4}{75\pi} + \frac{16}{5\pi^2} z_m + \frac{48}{\pi^3} z_m^2 \right) \frac{d}{R}, \quad (4.1.14)$$

$$\left| \Delta \nabla I_{Fmn,REL}^{jk} \right| = \frac{40.3}{f^2} \delta VTEC \left(\frac{2}{3375} + \frac{4}{75\pi} z_m + \frac{8}{5\pi^2} z_m^2 + \frac{16}{\pi^3} z_m^3 \right) d. \quad (4.1.15)$$

Prema tome, u slučaju ekstremnih jonosferskih uslova sa apsolutnom gustinom elektrona od $100TECU$, relativnom gustinom elektrona $0.02TECU/km$ i za zenitna odstojanja od 75° , maksimalne vrednosti apsolutnog i relativnog jonosferskog uticaja na dužini od $10km$ iznose:

$$\left| \Delta \nabla I_{Fmn,APS}^{jk} \right|_{\max} = 0.107m, \quad (4.1.16)$$

$$\left| \Delta \nabla I_{Fmn,REL}^{jk} \right|_{\max} = 0.053m. \quad (4.1.17)$$

Troposferska refrakcija

Uticaj troposferske refrakcije u modelu dvostrukih razlika ima oblik:

$$\Delta \nabla T_{mn}^{jk} = (F_m^j - F_m^k) T_m^z - (F_n^j - F_n^k) T_n^z, \quad (4.1.18)$$

pri čemu T^z označava veličinu troposferskog kašnjenja u vertikalnom pravcu, dok je F troposferska redukciona funkcija koja može zavisiti od zenitnog odstojanja, atmosferskih parametara, geografske lokacije ili doba godine. Ako se definiše apsolutno i relativno troposfersko kašnjenje:

$$T^z = T_m^z, \quad (4.1.19)$$

$$\Delta T^z = (T_n^z - T_m^z) / d, \quad (4.1.20)$$

odgovarajući uticaj troposferske refrakcije postaje:

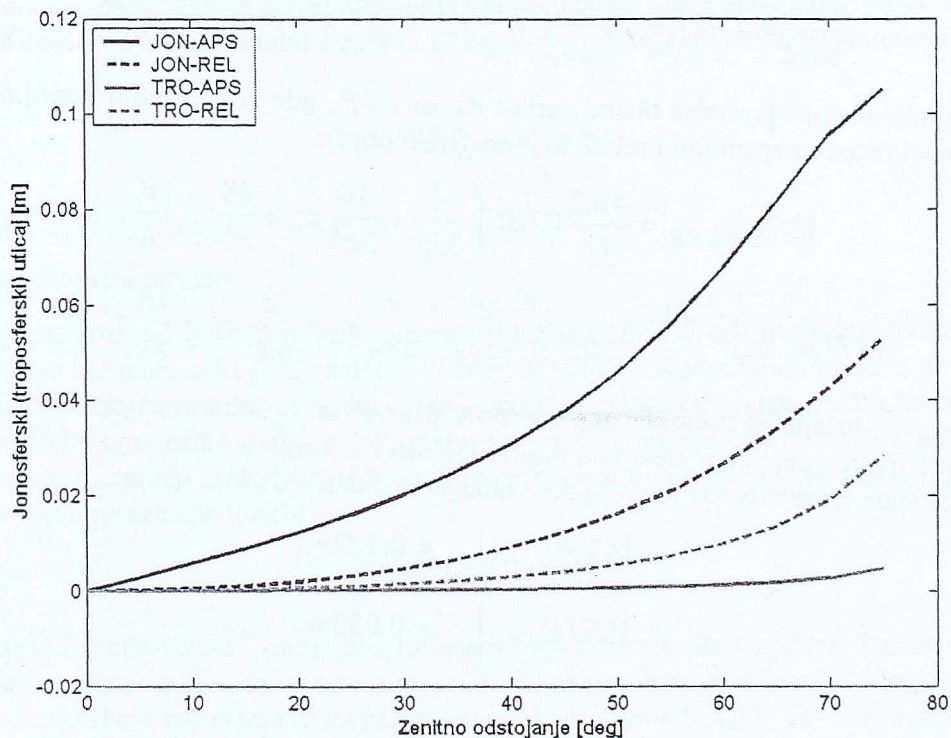
$$\begin{aligned} \Delta \nabla T_{mn}^{jk} &= \Delta \nabla T_{mn,APS}^{jk} + \Delta \nabla T_{mn,REL}^{jk} \\ &= (F_m^j - F_m^k - F_n^j + F_n^k) T^z - (F_n^j - F_n^k) \Delta T^z d. \\ &= \Delta \nabla F \cdot T^z - \nabla F \cdot \Delta T^z d \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Pošto se hidrostatički deo troposferske refrakcije može veoma tačno uzeti u obzir nekim od mnogobrojnih modela, apsolutno i relativno troposfersko kašnjenje odnosiće se uglavnom na uticaj vodene pare. Njihove ekstremne vrednosti od $0.2m$ i $0.001m \cdot km^{-1}$ respektivno, uzrokovace na dužini od $10km$ i zenitnom odstojanju 75° maksimalne iznose refrakcionih uticaja:

$$\left| \Delta \nabla T_{mn,APS}^{jk} \right|_{\max} = 0.003m, \quad (4.1.22)$$

$$\left| \Delta \nabla T_{mn,REL}^{jk} \right|_{\max} = 0.025m. \quad (4.1.23)$$

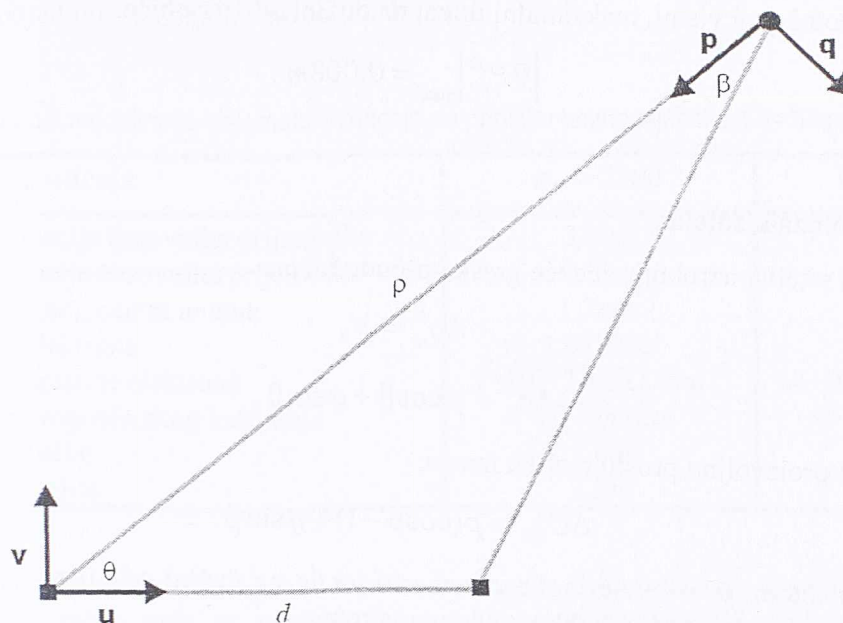
Jonosferski i troposferski refrakcioni uticaji u modelu dvostrukih razlika u funkciji zenitnog odstojanja nerefarentnog satelita dati su na slici 4.1.



SLIKA 4.1. Jonosferski i troposferski uticaji na dužini od 10km za ekstremne vrednosti atmosferskih parametara.

4.1.3 Uticaji staničnih i satelitskih položaja

Vektori grešaka apsolutnih položaja satelita i referentne tačke mogu biti proizvoljno usmereni, ali kada je u pitanju uticaj na dvostruke razlike od značaja su samo neke vektorske komponente (slika 4.2). Tako, u slučaju greške položaja referentne tačke, od značaja je komponenta u pravcu međustaničnog rastojanja \mathbf{u} , i u pravcu upravnom na međustanično rastojanje \mathbf{v} , pri čemu obe pripadaju ravni određenoj stanicama i satelitom. Kod relativno malih visinskih razlika, veličine ovih komponenti, u i v , mogu se interpretirati kao greška horizontalnog položaja i greška visine referentne tačke. Za grešku satelitskog položaja definiše se analogno komponenta \mathbf{p} u pravcu prema referentnoj tački i komponenta \mathbf{q} u upravnom pravcu. Njihove veličine, p i q , odgovaraju radijalnoj grešci i projekciji greške duž satelitske putanje na ravan definisanu stanicama i satelitom.



SLIKA 4.2. Geometrija grešaka satelitskih i staničnih položaja na primeru proste razlike prema nereferentnom satelitu.

Uticaj greške položaja referentne tačke

Greške pseudoduzina do satelita usled greške položaja referentne tačke imaju oblik:

$$\Delta\rho_m^k = u \cos\theta + v \sin\theta, \quad (4.1.24)$$

$$\Delta\rho_n^k = u \cos(\theta + \beta) + v \sin(\theta + \beta), \quad (4.1.25)$$

gde θ označava ugao između pravca sa referentne tačke ka satelitu i međustaničnog rastojanja, a β je ugao pod kojim se međustanično rastojanje vidi iz satelitskog položaja. Uticaj greške položaja referentne tačke na prostu razliku biće prema tome:

$$P = \Delta\rho_m^k - \Delta\rho_n^k = \frac{d \sin\theta}{\rho} (u \sin\theta - v \cos\theta). \quad (4.1.26)$$

Odgovarajuća maksimalna apsolutna vrednost uticaja na dvostruku razliku ima oblik:

$$\nabla P_{mn}^{jk} = \frac{d \sin\theta}{\rho} \sqrt{u^2 + v^2} \sin(\theta + \psi), \quad (4.1.27)$$

pri čemu ugao ψ zavisi od odnosa greške položaja i visine referentne tačke:

$$\psi = \arctan \frac{v}{u}. \quad (4.1.28)$$

To znači da se najveći uticaj u opštem slučaju ne odnosi na satelite blizu horizonta, već u pravcu $\psi/2$:

$$\nabla P_{mn}^{jk} = \frac{d}{\rho} \sqrt{u^2 + v^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}. \quad (4.1.29)$$

Ako, na primer, ukupna položajna greška referentne tačke od 100m ima jednake komponente po horizontalnom položaju i visini, maksimalni uticaj na dužini od 10km biće:

$$\left| \nabla P_{mn}^{jk} \right|_{\max} = 0.008m. \quad (4.1.30)$$

Uticaj greške položaja satelita

Greška položaja satelita uzrokuje sledeće greške pseudodužina:

$$\Delta \rho_m^k = p, \quad (4.1.31)$$

$$\Delta \rho_n^k = p \cos \beta + q \sin \beta, \quad (4.1.32)$$

tako da uticaj na proizvoljnu prostu razliku iznosi:

$$\Delta O_{mn}^k = p(\cos \beta - 1) + q \sin \beta. \quad (4.1.33)$$

Član sa komponentom p uvek se može zanemariti jer je na dužini od 10km ugao β manji od 2'. Odgovarajući uticaj na dvostruku razliku biće, prema tome:

$$\Delta \nabla O_{mn}^{jk} = \frac{q \sin \theta}{\rho} d. \quad (4.1.34)$$

Veličinu ovog uticaja opredeljuje pre svega projekcija uzdužne greške satelitskog položaja na ravan koja sadrži međustanično rastojanje. Uzimajući za formalnu tačnost komercijalnih satelitskih efemerida 2m, maksimalna vrednost uticaja na dužini od 10km iznosiće:

$$\left| \Delta \nabla O_{mn}^{jk} \right|_{\max} = 0.001m. \quad (4.1.35)$$

4.1.4 Funkcionalni model dvostrukih razlika

Funkcionalni model dvostrukih razlika na malim rastojanjima znatno se pojednostavljuje ako se sistematski uticaji modeliraju i eliminišu sa nesigurnošću koja je beznačajno mala u odnosu na veličinu mernog šuma i višestruke refleksije. Primenom principa beznačajnosti i jednakih uticaja dobija se:

$$8\sigma^2 \leq \frac{4}{9}\sigma_0^2 \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{2}}, \quad (4.1.36)$$

pri čemu σ označava standard dvostruke razlike kao posledicu bilo kojeg od ukupno osam izvora sistematskih uticaja, dok je σ_0 zbirni standard mernog šuma i višestruke refleksije, sa tipičnim vrednostima 5-10mm (Misra, Enge 2001). U tom slučaju opšti izrazi za pojedine standarde sistematskih uticaja glase:

$$\sigma_\delta = \frac{1}{\Delta \nabla \rho} \sigma, \quad \sigma_{\Delta \delta} = \frac{1}{2 \cdot \nabla \rho} \sigma, \quad \sigma_A = \sigma, \quad (4.1.37)$$

$$\sigma_{VTEC} = \frac{R \cdot f^2}{40.3 \cdot k_1 \cdot d} \sigma, \quad \sigma_{\delta VTEC} = \frac{f^2}{40.3 \cdot k_2 \cdot d} \sigma, \quad (4.1.38)$$

$$\sigma_{\Delta T} = \frac{1}{k_3 \cdot d} \sigma, \quad \sigma_u = \frac{\rho}{k_4 \cdot d \cdot \sqrt{2}} \sigma, \quad \sigma_q = \frac{\rho}{d} \sigma, \quad (4.1.39)$$

sa konstantama k_i koje zavise od veličine zenitnog odstojanja nereferentnog satelita. Konkretno brojne vrednosti pojedinih standarda date su u tabeli 4.1.

TABELA 4.1. Nesigurnost modeliranja sistematskih uticaja po principu beznačajnosti za $d=10\text{km}$ i $z=75^\circ$.

Izvor sistematskog uticaja	$\sigma_0 = 5\text{mm}$	$\sigma_0 = 10\text{mm}$
Apsolutna sinhronizacija časovnika prijemnika	3.3ms	6.6ms
Relativna sinhronizacija časovnika prijemnika	0.8 μs	1.6 μs
Trenutni položaj faznog centra antene	1.2mm	2.4mm
Apsolutna gustina elektrona	1.3TECU	2.6TECU
Prostorni gradijent gustine elektrona	$7 \cdot 10^{-4} \text{TECU} \cdot \text{km}^{-1}$	$14 \cdot 10^{-4} \text{TECU} \cdot \text{km}^{-1}$
Prostorni gradijent troposferskog kašnjenja	$4 \cdot 10^{-5} \text{m} \cdot \text{km}^{-1}$	$8 \cdot 10^{-5} \text{m} \cdot \text{km}^{-1}$
Položaj referentne tačke	1.6m	3.2m
Orbitalni položaj satelita	2.3m	4.6m

Većina zahteva tačnosti navedenih u tabeli lako se ispunjava. Sinhronizacija časovnika i određivanje položaja referentne tačke vrše se postupkom apsolutnog pozicioniranja, dok orbitalnu tačnost zadovoljavaju čak i emitovane efemeride. Upotreba antena istog tipa u potpunosti eliminiše greške položaja faznih centara. Ako se principom beznačajnosti obuhvate samo preostale varijacije gradijenata gustine elektrona i zenitnog troposferskog kašnjenja, dobijaju se vrednosti:

$$\sigma_{\delta V_{TEC}} = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{TECU} \cdot \text{km}^{-1}, \quad \sigma_{\Delta T} = 1.6 \cdot 10^{-4} \text{m} \cdot \text{km}^{-1}, \quad (4.1.40)$$

koje približno predstavljaju uticaj mirne atmosfere. Prema tome, eliminacijom svih poznatih sistematskih uticaja funkcionalni model dvostrukih faznih razlika dobija jednostavni oblik:

$$\Delta \nabla L_{Fmn}^{jk} = \Delta \nabla \rho_{mn}^{jk} + \lambda_F \Delta \nabla N_{Fmn}^{jk} + \omega_{\Delta \nabla L}. \quad (4.1.41)$$

Kada se u proizvoljnoj epohi izvrše simultana merenja sa p prijemnika ka s satelita, moguće je formirati ukupno $(p-1)(s-1)$ nezavisnih dvostrukih razlika, s tim što njihov izbor nije jedinstven jer zavisi od definicije referentne stanice i referentnog satelita. Odgovarajuća matična forma parametrizovanog i linearizovanog funkcionalnog modela glasi u tom slučaju:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_C + \mathbf{B} \hat{\mathbf{x}}_N - \mathbf{I}, \quad (4.1.42)$$

gde je \mathbf{v} vektor popravaka sa dimenzijom $(p-1)(s-1)$, \mathbf{A} konfiguraciona matrica dimenzija $(p-1)(s-1) \times 3(p-1)$ koja se odnosi na koordinate tačaka, $\hat{\mathbf{x}}_C$ vektor ocena koordinata sa dimenzijom $3(p-1)$, \mathbf{B} konfiguraciona matrica dimenzija $(s-1) \times (s-1)$ koja se odnosi na fazne neodređenosti, $\hat{\mathbf{x}}_N$ vektor ocena faznih neodređenosti sa dimenzijom $(s-1)$ i \mathbf{I} vektor slobodnih članova sa dimenzijom $(p-1)(s-1)$. Struktura konfiguracione matrice nepoznatih koordinata tačaka, \mathbf{A} , može se prikazati kao:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_{(p-1)} \otimes \mathbf{E}_i \quad (i = 1, \dots, p-1), \quad (4.1.43)$$

pri čemu \mathbf{I} označava jediničnu matricu dimenzija $(p-1) \times (p-1)$, dok članove matrica \mathbf{E}_i predstavljaju proste doplerske razlike jediničnih vektora \mathbf{e} u odnosu na referentni satelit:

$$\mathbf{E}_i^T = \left[\nabla \mathbf{e}_i^{1,ref} \quad \nabla \mathbf{e}_i^{2,ref} \quad \dots \quad \nabla \mathbf{e}_i^{(s-1),ref} \right]. \quad (4.1.44)$$

S druge strane, kvadratna matrica koeficijenata uz nepoznate fazne neodređenosti \mathbf{B} , ima jednostavni oblik:

$$\mathbf{B} = \lambda \mathbf{I}_{(s-1)}. \quad (4.1.45)$$

Obe konfiguracione matrice su punog ranga kolona, jer se usvajanjem referentne tačke određuju relativni stanični položaji, a usvajanjem referentnog satelita razlike prostih faznih neodređenosti. Međutim, njihove dimenzije se mogu menjati u okviru merne sesije zbog promenljivog broja satelita.

4.1.5 Stohastički model dvostrukih razlika

Kada se sva originalna merenja, simultano izvršena u proizvoljnoj epohi, organizuju hijerarhijski po stanicama i satelitima u vektoru \mathbf{l}_0 , i kada se prva stanica i satelit usvoje kao referentni, linearna transformacija kojom se dobija vektor dvostrukih razlika $\mathbf{l}_{\Delta\nabla}$ i odgovarajuće transformacione matrice glase:

$$\mathbf{l}_{\Delta\nabla} = \mathbf{T}_{\Delta} \mathbf{T}_{\nabla} \mathbf{l}_0, \quad (4.1.46)$$

$$\mathbf{T}_{\Delta} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{(s-1)} & \mathbf{I}_{(s-1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I}_{(s-1)} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(s-1)} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{I}_{(s-1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_{(s-1)} \end{bmatrix}, \quad (4.1.47)$$

$$\mathbf{T}_{\nabla} = \mathbf{I}_{(p)} \otimes \begin{bmatrix} -\mathbf{u} & \mathbf{I}_{(s-1)} \end{bmatrix}, \quad (4.1.48)$$

$$\mathbf{u}^T = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]. \quad (4.1.49)$$

Ako je \mathbf{C}_0 kovarijaciona matrica originalnih merenja, onda se kovarijaciona matrica dvostrukih razlika dobija primenom zakona o prenosu grešaka:

$$\mathbf{C}_{\Delta\nabla} = \mathbf{T}_{\Delta} \mathbf{T}_{\nabla} \mathbf{C}_0 \mathbf{T}_{\nabla}^T \mathbf{T}_{\Delta}^T. \quad (4.1.50)$$

Struktura rezultujuće matrice postaje naročito jednostavna ako se usvoji da sva originalna merenja karakteriše isti standard σ_0 . Tada se zakonom o prenosu grešaka dobija:

$$\mathbf{C}_{\Delta\nabla} = \sigma_0^2 \mathbf{U}_{(p-1) \times (p-1)} \otimes \mathbf{H}_{ij}, \quad (4.1.51)$$

gde \mathbf{U} predstavlja matricu čiji su svi članovi jednaki jedinici, dok je \mathbf{H}_{ij} kvadratna matrica dimenzija $(s-1) \times (s-1)$ koja ima oblik:

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 4 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & \dots & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.1.52)$$

Ako se uzme u obzir da originalna merenja imaju različitu tačnost, članovi kovarijacione matrice dvostrukih razlika postaju zavisni od indeksa nereferentnih stanica i satelita (tabela 4.2). Kriterijumom najveće visine nad horizontom postiže se da članovi kovarijacione matrice imaju minimalne vrednosti, pošto svaka dvostruka razlika sadrži originalno merenje sa referentne stanice prema referentnom satelitu.

Kompletna kovarijaciona matrica merne sesije je u principu puna matrica jer između dvostrukih razlika iz različitih epoha postoji vremenska kovarijacija. Međutim, ona se obično zanemaruje, tako da struktura kovarijacione matrice merne sesije postaje kvazi dijagonalna. Dodatno pojednostavljenje sastoji se u izjednačavanju standarda originalnih merenja izvedenih sa dve stanice prema istom satelitu, jer se tom aproksimacijom pravi greška od svega 0.3% za međustanična rastojanja od 10km.

TABELA 4.2. Članovi kovarijacione matrice dvostrukih razlika u proizvoljnoj epohi merenja.

Indeksi stanica	Indeksi satelita	Kovarijacija
$m = n$	$j = k$	$(\sigma_{ref}^{ref})^2 + (\sigma_{ref}^j)^2 + (\sigma_m^{ref})^2 + (\sigma_m^j)^2$
$m = n$	$j \neq k$	$(\sigma_{ref}^{ref})^2 + (\sigma_m^{ref})^2$
$m \neq n$	$j = k$	$(\sigma_{ref}^{ref})^2 + (\sigma_{ref}^j)^2$
$m \neq n$	$j \neq k$	$(\sigma_{ref}^{ref})^2$

4.2 Opšti izrazi za mere kvaliteta

4.2.1 Tačnost apsolutnog pozicioniranja

Postupkom apsolutnog pozicioniranja obezbeđuju se prostorni položaji tačaka i odstupanja časovnika prijemnika za potrebe linearizacije dvostrukih razlika i računanja sinhronizacionih članova. Formalni kvalitet rezultata može se proceniti primenom MNK algoritma na pojednostavljeni matematički model:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}, \quad \mathbf{C}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I}, \quad (4.2.1)$$

u kojem se vektor merenja odnosi na kodne pseudoduzine, a vektor nepoznatih parametara na priraštaje geografskih koordinata tačke (φ, λ, h) i odstupanje časovnika izraženo u linearnim jedinicama $(c_0 \cdot \delta)$. Ako se merenja posmatraju kao kontinuum na onom delu jedinične sfere Σ kojeg određuje granično zenitno odstojanje z_0 , koeficijenti konfiguracione matrice postaju funkcije azimuta i zenitnih odstojanja satelita:

$$a_\varphi(z, A) = \sin z \sin A, \quad a_\lambda(z, A) = \sin z \cos A, \quad (4.2.2)$$

$$a_h(z, A) = \cos z, \quad a_\delta(z, A) = 1. \quad (4.2.3)$$

Članovi matrice normalnih jednačina dobijaju se u tom slučaju po izrazu:

$$N_{ij} = \frac{1}{\sigma_0^2} \iint_{\Sigma} a_i(z, A) a_j(z, A) d\Sigma = \frac{1}{\sigma_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{z_0} a_i(z, A) a_j(z, A) \sin z \cdot dz dA, \quad (4.2.4)$$

odnosno, sa $s = \cos z_0$, po izrazu:

$$\mathbf{N} = \frac{2\pi}{\sigma_0^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{6}s^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{6}s^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(1-s^3) & \frac{1}{2}(1-s^2) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-s^2) & \frac{1}{3}(1-s^3) \end{bmatrix}. \quad (4.2.5)$$

Iz inverzije matrice normalnih jednačina sledi da su članovi kovarijacione matrice nepoznatih parametara:

$$C_{\varphi\varphi} = C_{\lambda\lambda} = \sigma_0^2 \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3}{2-3s+s^3}, \quad (4.2.6)$$

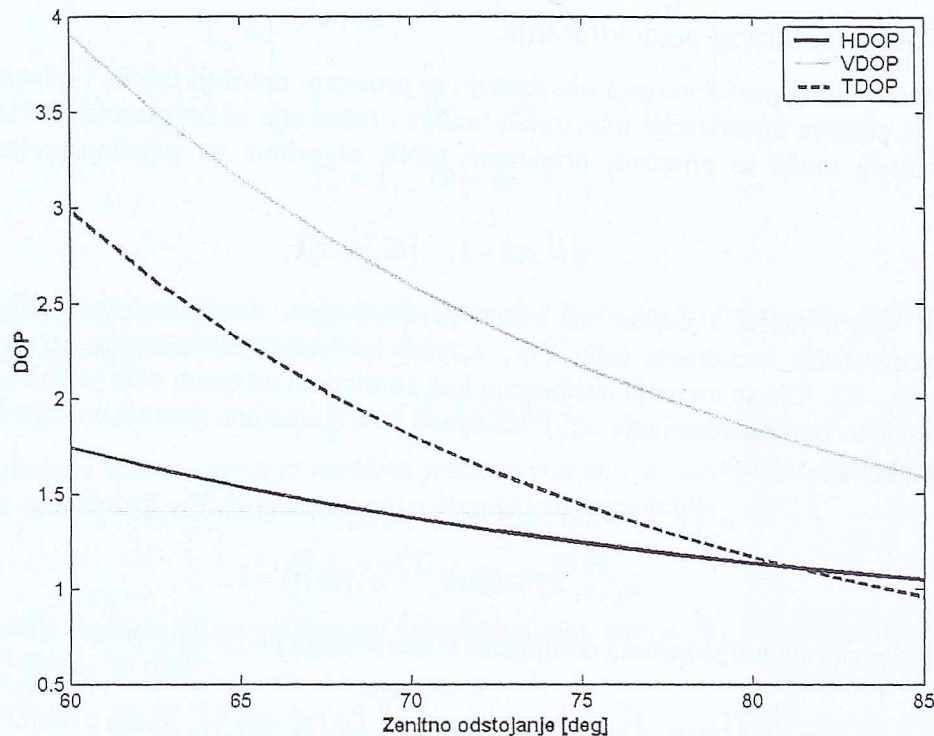
$$C_{hh} = \sigma_0^2 \frac{1}{\pi} \cdot \frac{6}{(1-s)^3}, \quad C_{\delta\delta} = \sigma_0^2 \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1-s^3}{(1-s)^4}. \quad (4.2.7)$$

Prema tome, izrazi za tačnost horizontalnog položaja tačke, njene visine i odstupanja časovnika prijemnika glase:

$$\sigma_p = \sqrt{C_{\varphi\varphi} + C_{\lambda\lambda}} = \sigma_0 \cdot HDOP, \quad (4.2.8)$$

$$\sigma_h = \sqrt{C_{hh}} = \sigma_0 \cdot VDOP, \quad \sigma_\delta = \sqrt{C_{\delta\delta}} = \sigma_0 \cdot TDOP, \quad (4.2.9)$$

pri čemu $HDOP$, $VDOP$ i $TDOP$ predstavljaju skalarne veličine koje opisuju uticaj satelitske geometrije na tačnost, i koji u slučaju kontinuuma zavise jedino od graničnog zenitnog odstojanja (slika 4.3).



SLIKA 4.3. Uticaj satelitske geometrije (DOP faktori) na tačnost apsolutnog pozicioniranja za različita granična zenitna odstojanja.

Uzimajući za formalni standard C/A kodnih pseudodužina vrednost $3m$, i granično zenitno odstojanje 75° , dobija se da tačnost položaja, visine i odstupanja časovnika iznosi po epohi $3.6m$, $6.3m$ i $14ns$ respektivno. Međutim, za razliku od odstupanja časovnika koje se ocenjuje u svakoj epohi, tačnost položaja i visine može se znatno povećati tokom merne sesije, jer se odgovarajući standardi smanjuju sa kvadratnim korenim iz broja epoha.

Ograničeni broj satelita, promenljiva geometrijska konstelacija i diskretna priroda procesa merenja narušavaju pretpostavke o kontinuumu i homogenoj tačnosti pseudodužina, tako da je kvalitet apsolutnog pozicioniranja uvek nešto niži u aktuelnim terenskim uslovima. I pored toga, dovoljan je broj od 10-20 mernih epoha pa da u potpunosti budu zadovoljeni kriterijumi kvaliteta modeliranja dvostrukih faznih razlika.

4.2.2 Tačnost relativnog pozicioniranja

Ako je \mathbf{A}_k konfiguraciona matrica modela dvostrukih razlika za proizvoljnu epohu k , tada podmatrice normalnih jednačina, koje odgovaraju particiji vektora nepoznatih na koordinate i fazne neodređenosti, imaju oblik:

$$\mathbf{N}_{C,k} = \mathbf{A}_k^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \mathbf{A}_k, \quad (4.2.10)$$

$$\mathbf{N}_{CN,k} = \mathbf{N}_{NC,k} = \lambda \mathbf{A}_k^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1}, \quad (4.2.11)$$

$$\mathbf{N}_{N,k} = \lambda^2 \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1}. \quad (4.2.12)$$

Odgovarajući izrazi za memu sesiju koja se sastoji od e epoha glase:

$$\mathbf{N}_C = \sum_{k=1}^e \mathbf{A}_k^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \mathbf{A}_k, \quad (4.2.13)$$

$$\mathbf{N}_{CN} = \mathbf{N}_{NC} = e \lambda \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1}, \quad (4.2.14)$$

$$\mathbf{N}_N = e \lambda^2 \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1}, \quad (4.2.15)$$

pri čemu su članovi matrice $\bar{\mathbf{A}}$ definisani kao srednje vrednosti članova konfiguracionih matrica iz svih epoha. Kada se eliminišu fazne neodređenosti, redukovana matrica normalnih jednačina dobija oblik:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}}_C &= \mathbf{N}_C - \mathbf{N}_{CN} \mathbf{N}_N^{-1} \mathbf{N}_{NC} \\ &= \sum_{k=1}^e \mathbf{A}_k^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \mathbf{A}_k - e \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \\ &= \sum_{k=1}^e (\mathbf{A}_k - \bar{\mathbf{A}})^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} (\mathbf{A}_k - \bar{\mathbf{A}}) \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Pošto je trajanje T merne sesije relativno kratko, a visina leta satelita mnogo veća od međustaničnih rastojanja, može se smatrati da se konfiguraciona matrica menja konstantnom brzinom:

$$\mathbf{A}_k - \bar{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} \cdot (t_k - \bar{t}). \quad (4.2.17)$$

Tako sledi da je redukovana matrica normalnih jednačina:

$$\tilde{\mathbf{N}}_C = \frac{T^2 e \cdot (e+1)}{12 \cdot (e-1)} \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \dot{\mathbf{A}}, \quad (4.2.18)$$

a odgovarajuća kovarijaciona matrica koordinata:

$$\tilde{\mathbf{C}}_C = \frac{12 \cdot (e-1)}{T^2 e \cdot (e+1)} (\dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \dot{\mathbf{A}})^{-1}. \quad (4.2.19)$$

Ovaj izraz pokazuje da je prosečna greška položaja tačke proporcionalna veličinama:

$$\tilde{\sigma}_p^2 = \frac{1}{p-1} \cdot \text{tr} \tilde{\mathbf{C}}_C \sim \begin{cases} 1/e & (T = \text{const}) \\ 1/T^2 & (e = \text{const}) \end{cases}, \quad (4.2.20)$$

što znači da tačnost koordinata brže raste povećanjem trajanja sesije nego skraćivanjem intervala registracije. Isti izraz dokazuje da kvalitet relativnog statičkog pozicioniranja, kada se fazne neodređenosti ocenjuju kao realni brojevi, prevashodno zavisi od promene satelitske geometrije.

Kada se nekom od metoda odrede celobrojne vrednosti faznih neodređenosti, i potom uvedu kao poznate veličine u postupak definitivnog ocenjivanja koordinata, normalne jednačine glase:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{N}}_C &= \sum_{k=1}^e \mathbf{A}_k^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \mathbf{A}_k \\
&= \sum_{k=1}^e (\mathbf{A}_k - \bar{\mathbf{A}})^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} (\mathbf{A}_k - \bar{\mathbf{A}}) + e \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \bar{\mathbf{A}}. \\
&= \tilde{\mathbf{N}}_C + e \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \bar{\mathbf{A}}
\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Odgovarajuća kovarijaciona matrica dobija se uz pomoć Šerman-Morison-Vudberijeve teoreme (*Press et al. 1992*):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{C}}_C &= (\tilde{\mathbf{N}}_C + e \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \bar{\mathbf{A}})^{-1} \\
&= \tilde{\mathbf{C}}_C - \tilde{\mathbf{C}}_C \bar{\mathbf{A}}^T \left(\frac{1}{e} \mathbf{C}_{\Delta\nabla} + \bar{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{C}}_C \bar{\mathbf{A}}^T \right)^{-1} \bar{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{C}}_C.
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Prisustvo matrica $\tilde{\mathbf{C}}_C$ i $\bar{\mathbf{A}}$ pokazuje da tačnost definitivnih koordinata zavisi kako od promene satelitske geometrije, tako i od njenog prosečnog oblika. Drugi član na desnoj strani jednakosti predstavlja pozitivno defintnu matricu, tako da je za svaku vrednost trajanja merne sesije ispunjeno:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{p-1} \text{tr} \tilde{\mathbf{C}}_C < \frac{1}{p-1} \text{tr} \tilde{\mathbf{C}}_C = \tilde{\sigma}^2, \tag{4.2.23}$$

što znači da određivanje celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti predstavlja neophodan uslov za postizanje najviše tačnosti relativnog pozicioniranja.

4.2.3 Unutrašnja i spoljašnja pouzdanost

Unutrašnja pouzdanost funkcionalnog modela obično se kvantitativno izražava u vidu najmanje modelske greške $|\nabla|$ (MDB) koju je moguće otkriti statističkim testom sa unapred usvojenom moći i nivoom značajnosti. Njena veličina je funkcija parametra necentralnosti λ_0 , kompletne konfiguracione matrice \mathbf{A} , kovarijacione matrice dvostrukih razlika $\mathbf{C}_{\Delta\nabla}$ i vektora \mathbf{c} čiji oblik određuje konkretni tip modelske greške:

$$|\nabla| = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mathbf{c}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \mathbf{R}^\perp \mathbf{c}}}, \tag{4.2.24}$$

pri čemu matrica \mathbf{R}^\perp označava ortogonalni projektor:

$$\mathbf{R}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1}. \tag{4.2.25}$$

Najznačajnije modelske greške koje se javljaju u obradi GPS merenja su grube greške u kodnim pseudodužinama i fazni skokovi u faznim pseudodužinama. Odgovarajući vektori \mathbf{c}_p i \mathbf{c}_L imaju opšti oblik:

$$\mathbf{c}_p = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i, \tag{4.2.26}$$

$$\mathbf{c}_L = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{e}_i, \tag{4.2.27}$$

gde \mathbf{e} predstavlja kanonski jedinični vektor čiji su svi članovi jednaki nuli osim jedinice na mestu kojeg označava indeks, dok je \mathbf{u} vektor sa nulama do mesta kojeg označava indeks i jedinicama za preostale članove. Na taj način su određeni epoha i merenje u kojem se javlja gruba greška kod kodnih pseudodužina, odnosno merenje, epoha pojave i trajanje faznog skoka kod faznih pseudodužina.

Do približnih vrednosti koje karakterišu unutrašnju pouzdanost može se doći ako se pretpostavi dijagonalna struktura kovarijacione matrice dvostrukih razlika, i ako se konfiguracione matrice pojedinih epoha međusobno izjednače. Osim toga, trag ortogonalnog projektora jednak je njegovom

rangu, odnosno razlici broja dvostrukih razlika n i broja nepoznatih parametara u , tako da za jednofrekventna i dvofrekventna merenja prosečna vrednost dijagonalnog člana matrice \mathbf{R}^\perp iznosi:

$$(\mathbf{R}^\perp)_{ii} = 1 - \frac{u}{n} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2e} \left(\frac{3}{s-1} + \frac{1}{p-1} \right) & (P1, L1) \\ 1 - \frac{1}{2e} \left(\frac{3}{2s-2} + \frac{1}{p-1} \right) & (P1, P2, L1, L2) \end{cases} \quad (4.2.28)$$

Sa ovim aproksimacijama, izraz za najmanju vrednost grube greške proizvoljne kodne pseudoduzine dobija oblik:

$$|\nabla|_p = 2\sigma_p \sqrt{\frac{\lambda_0}{1 - \frac{1}{2e} \left[\frac{3}{\delta(s-1)} + \frac{1}{p-1} \right]}}, \quad (4.2.29)$$

u kojem je σ_p standard originalnih kodnih merenja i δ broj upotrebljenih frekvencija (1 ili 2). Da bi MDB vrednost uopšte bila definisana za jednofrekventna merenja, neophodne su barem dve epohe, četiri satelita i dva prijemnika, odakle slede granice:

$$2\sqrt{\lambda_0} < \frac{|\nabla|_p}{\sigma_p} < 2\sqrt{2\lambda_0}. \quad (4.2.30)$$

Za razliku od grube greške kodnih pseudoduzina, pojava faznog skoka u epohi k opteretice vremensku seriju odgovarajuće dvostruke razlike konstantnim iznosom sve do kraja merne sesije, odnosno u ukupnoj dužini:

$$N = e - k + 1. \quad (4.2.31)$$

Sa istim stepenom aproksimacije dobija se izraz za najmanju vrednost faznog skoka:

$$|\nabla|_L = \frac{2\sigma_L}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\lambda_0}{1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k-1}{e} \right) \left[\frac{3}{\delta(s-1)} + \frac{1}{p-1} \right]}}, \quad (4.2.32)$$

koji pokazuje da ova veličina zavisi kako od epohe pojave, tako i od dužine trajanja. U slučaju jednofrekventnih merenja sa dva prijemnika i četiri satelita, MDB dostiže minimum za $k = e/2$, s tim što se taj minimum pomera prema početku merne sesije sa povećanjem broja stanica i satelita. Prema tome, minimalne vrednosti veličine $|\nabla|_L$ nalaze se u rasponu:

$$2\sqrt{\frac{\lambda_0}{N}} < \frac{|\nabla|_L}{\sigma_L} < 2\sqrt{\frac{2\lambda_0}{N}}. \quad (4.2.33)$$

Pošto MDB vrednost čak i za samo jednu epohu iznosi oko 6cm, sledi da je sistem dvostrukih razlika u tom smislu veoma pouzdan, jer se s velikom verovatnoćom može otkriti fazni skok manji od jedne talasne dužine.

Neotkrivena modelska greška utiče na vektor ocena nepoznatih parametara po zakonu:

$$\nabla \mathbf{x} = \mathbf{C}_x \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{\Delta \nabla}^{-1} \mathbf{c} \nabla, \quad (4.2.34)$$

čime se definiše spoljašnja pouzdanost sistema. Međutim, svaka alternativna hipoteza ima za rezultat po jedan vektor promena ocenjenih parametara, što onemogućava jasnu interpretaciju, tako da se kao mera spoljašnje pouzdanosti definiše skalarna veličina λ_x (BNR):

$$\lambda_x = \nabla \sqrt{\nabla \mathbf{x}^T \mathbf{C}_x^{-1} \nabla \mathbf{x}} = \sqrt{\lambda_0 \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{C}_{\Delta \nabla}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{C}_{\Delta \nabla}^{-1} \mathbf{R}^{\perp} \mathbf{c}}} \quad (4.2.35)$$

Prema tome, najmanje vrednosti grubih grešaka kodnih pseudodužina i faznih skokova faznih pseudodužina imaće respektivno sledeći uticaj na ocene nepoznatih parametara:

$$(\lambda_x)_P = \sqrt{\frac{\nabla_P^2}{4\sigma_P^2} - \lambda_0}, \quad (\lambda_x)_L = \sqrt{N \frac{\nabla_L^2}{4\sigma_L^2} - \lambda_0}. \quad (4.2.36)$$

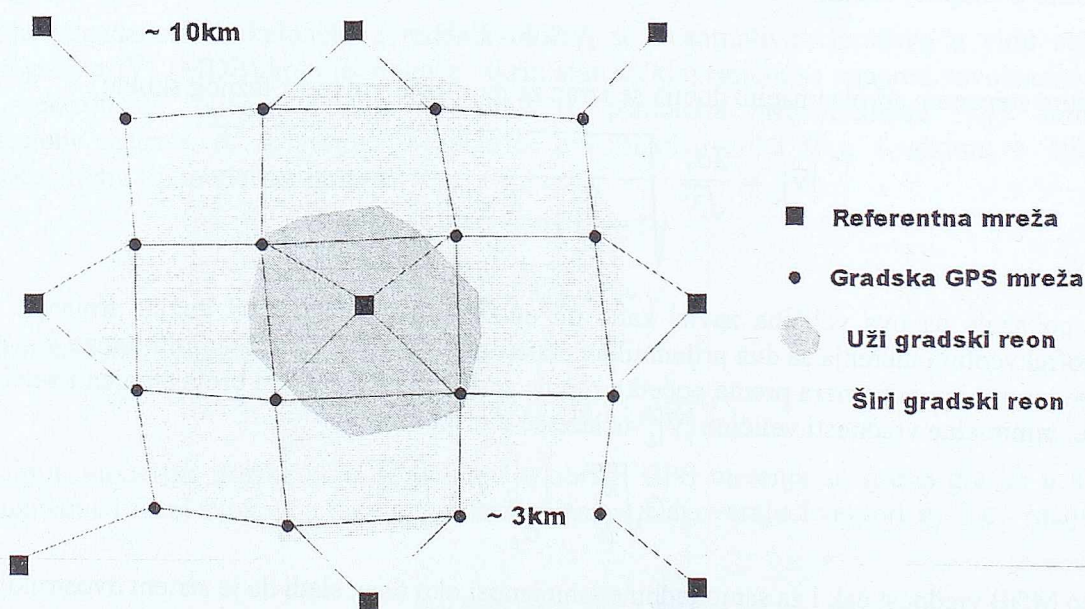
Imajući u vidu granice u kojima se kreću najmanje vrednosti modelskih grešaka, sledi da je u oba slučaja raspon pokazatelja spoljašnje pouzdanosti:

$$0 < \lambda_x < \sqrt{\lambda_0}. \quad (4.2.37)$$

4.3 Pasivne gradske GPS mreže

4.3.1 Uspostavljanje pasivnih gradskih GPS mreža

Gradska GPS mreža po definiciji predstavlja način realizacije lokalne referentne osnove na području grada odnosno većeg naseljenog mesta. S obzirom na to da se u okviru nje vrši premer i uspostavlja katastar nepokretnosti, izvode inženjersko-tehnički radovi i preduzimaju naučna istraživanja lokalnih tektonskih i seizmičkih fenomena, gradska GPS mreža po pravilu obuhvata šire gradsko područje, sa približno ravnomerno raspoređenim tačkama na međusobnom rastojanju od 1-5km, i uključuje najmanje tri tačke hijerarhijski više državne referentne mreže (slika 4.4).

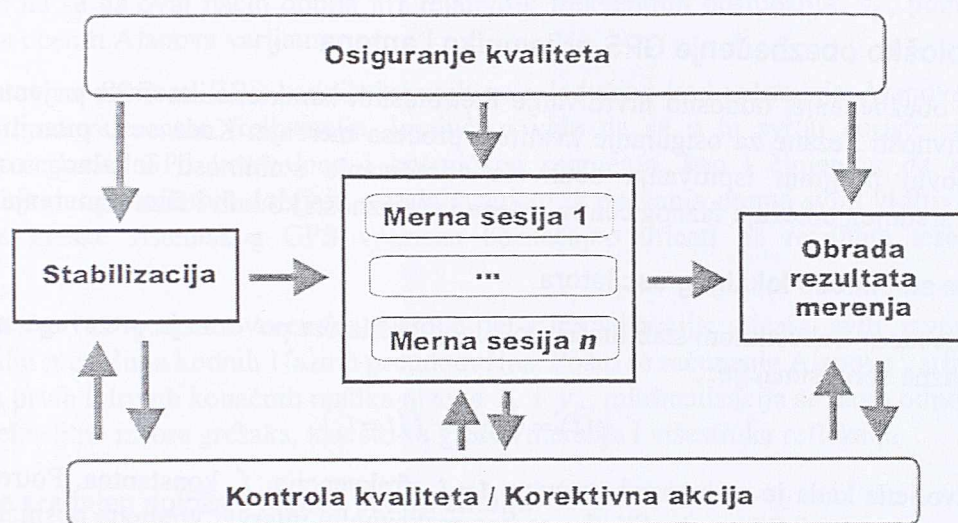


SLIKA 4.4. Shematski prikaz dispozicije tačaka gradske GPS mreže.

Zahtevi za ograničenim prosečnim rastojanjima i pravilnim rasporedom tačaka rukovođeni su samo potrebom da se obezbedi pogodna infrastruktura za eventualno proglašavanje terestričkim metodama merenja. Relativno GPS pozicioniranje praktično je istog kvaliteta za svaku dužinu koja se javlja kod gradskih mreža, a na tačnost koordinata tačaka ne utiče njihov prostorni raspored već satelitska geometrija i njena promena. U tom smislu se gradske GPS mreže razlikuju od tradicionalnih jedino po

primenjenoj mernoj tehnologiji. Što se tiče uključivanja određenog broja tačaka državne referentne mreže, njihova isključiva uloga sastoji se u datumskoj definiciji gradske GPS mreže.

Uspostavljanje gradskih GPS mreža vrši se po projektno utvrđenoj metodologiji, koja u opštem slučaju podrazumeva izbor lokacija i stabilizaciju tačaka, izvođenje GPS merenja i matematičku obradu rezultata izvršenih merenja. Svaka faza uspostavljanja gradske GPS mreže obavezno sadrži implementaciju posebnog sistema kvaliteta, odnosno skupa specifičnih mera, postupaka i parametara neophodnih za osiguranje i kontrolu kvaliteta (slika 4.5).



SLIKA 4.5. Opšti princip uspostavljanja gradskih GPS mreža.

Osiguranje kvaliteta faze stabilizacije tačaka gradske GPS mreže postiže se izborom lokacija koje obezbeđuju trajnost belega (geološka stabilnost podloge, oceditost tla, mala verovatnoća oštećenja ili uništenja) i pogodnost za izvođenje GPS merenja (elektronska vidljivost satelita, udaljenost jakih izvora radio zračenja i višestruke refleksije, mogućnost pristupa motornim vozilom). Izbor lokacija dodatno je olakšan činjenicom da izvođenje GPS merenja nije uslovljeno međusobnim dogledanjem tačaka. Kontrola kvaliteta stabilizacije vrši se direktnim uvidom u terensku situaciju i stanje belega. Sam postupak stabilizacije u principu je regulisan pravilničkim odredbama, zajedno sa oblicima belega, načinima markiranja, dimenzijama i količinama.

GPS merenja u gradskim geodetskim mrežama odvijaju se u statičkom režimu rada po mernim sesijama, jer je broj prijemnika po pravilu manji od broja tačaka. Merne sesije organizuju se na takav način da po završetku merne kampanje svaka tačka gradske GPS mreže bude nezavisno zaposednuta najmanje dva puta. Osiguranje kvaliteta GPS merenja postiže se propisivanjem metroloških karakteristika GPS prijemnika i antena, odgovarajućim postupcima i tačnošću centrisanja antena i merenja njihovih visina, intervalom registracije merenja, dužinom trajanja mernih sesija, brojem satelita, minimalnom visinom satelita nad horizontom i pokazateljima satelitske konfiguracije. Postignuti kvalitet kontroliše se testiranjem statističkih hipoteza tokom matematičke obrade rezultata merenja. Kontrola može obuhvatati originalna merenja, njihove linearne kombinacije i MNK rešenja, i to od nivoa pojedinačnih prijemnika, parova tačaka (GPS vektora), pojedinačnih sesija, cele mreže, pa sve do saglasnosti sa hijerarhijski višom referentnom osnovom (Rizos 1997).

Sistem kvaliteta u fazi matematičke obrade izvršenih GPS merenja obuhvata definiciju matematičkih modela merenja i popravaka, tačnost pomoćnih i približnih veličina, i operative algoritme eliminacije faznih skokova, tretmana rezidualnih atmosferskih uticaja, rešavanja faznih neodređenosti i MNK ocenjivanja nepoznatih parametara. Pošto se merenja u gradskim GPS mrežama izvode po mernim sesijama i na malim međustaničnim rastojanjima, matematička obrada ima tipično sekvencijalno-

rekurzivnu formu, sa dvostrukim faznim razlikama kao osnovnim ulaznim podacima i koordinatama tačaka kao primarnom grupom parametara.

S obzirom na trodimenzionalni i globalni karakter rezultata GPS pozicioniranja, gradska referentna osnova predstavljaće neposrednu realizaciju globalnog prostornog referentnog sistema geometrijskog tipa. Državni referentni sistem se u većoj ili manjoj meri datumski razlikuje od satelitskog referentnog sistema, a njegova vertikalna komponenta je uz to definisana fizički a ne geometrijski. Iz tih razloga je neophodno da definitivna matematička obrada obuhvati kako datumsku transformaciju horizontalnih položaja, tako i transformaciju elipsoidnih visina tačaka gradske GPS mreže.

4.3.2 Metrološko obezbeđenje GPS prijemnika i antena

Metrološko obezbeđenje, odnosno utvrđivanje metroloških karakteristika GPS prijemnika i antena, spada u aktivnosti vezane za osiguranje kvaliteta procesa merenja. Kada su u pitanju gradske GPS mreže, osnovni program ispitivanja obuhvata određivanje stabilnosti lokalnog oscilatora GPS prijemnika, srednjeg položaja faznog centra antene i preciznosti kodnih i faznih merenja.

Određivanje stabilnosti lokalnog oscilatora

Zahtev za visokom frekventnom stabilnošću lokalnog oscilatora povezan je pre svega sa mogućnošću takozvane fazne aproksimacije:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + f(t - t_0), \quad (4.3.1)$$

koja je dozvoljena kada je za interval vremena $t - t_0$ frekvencija f konstantna. Potrebna stabilnost frekvencije može se približno odrediti ako se kao maksimalni interval vremena posmatra vreme puta signala koje iznosi oko 0.1s, a za formalnu tačnost faze usvoji 1% odnosno 0.06rad:

$$\sigma_f < \frac{\sigma_\varphi}{3(t - t_0)} \approx 0.2 \text{ Hz}, \quad \frac{\sigma_f}{f} \approx 1.4 \cdot 10^{-10}. \quad (4.3.2)$$

Provera ispunjenosti ovako visokih zahteva vrši se u principu upoređenjem lokalnog oscilatora GPS prijemnika sa laboratorijskim referentnim oscilatorom, i računanjem Alanove varijanse za različite osrednjavajuće intervale vremena. Međutim, ispitivanje se može sprovesti i u terenskim uslovima, posrednim korišćenjem referentnih oscilatora u GPS kontrolnom i kosmičkom segmentu (*Petovello 2000, Blagojević 2002*).

Suština terenske metode ispitivanja stabilnosti sastoji se u korišćenju informacija sadržanih u izmerenim kodnim i faznim pseudoduzinama, čiji se pojednostavljeni funkcionalni modeli mogu napisati u obliku:

$$P = \rho + \Delta\rho - c_0\delta_m + c_0\delta^j + I + T + M + \omega, \quad (4.3.3)$$

$$L = \rho + \Delta\rho - c_0\delta_m + c_0\delta^j - I + T + M + \lambda N + \omega, \quad (4.3.4)$$

pri čemu je $\Delta\rho$ radijalna greška satelitskih efemerida. Preuređenje izraza za kodnu pseudoduzinu ima kao rezultat direktno vremensko odstupanje oscilatora prijemnika:

$$\delta_m = \frac{1}{c_0}(\rho - P) + \frac{1}{c_0}(\Delta\rho + I + T + M + \omega) + \delta^j. \quad (4.3.5)$$

Srednje vrednosti vremenskih odstupanja sračunate iz kodnih pseudoduzina do svih satelita u svakoj od mernih epoha predstavljaće na taj način niz x_k pomoću kojeg se ocenjuje Alanova varijansa. Ovakav postupak nije moguć sa faznim pseudoduzinama zbog nepoznatih faznih neodređenosti. Međutim, ako u prijemu GPS signala nema prekida i faznih skokova, normirana razlika faznih pseudoduzina u dve epohe sa intervalom registracije τ_0 ima oblik:

$$\frac{\delta_m(t + \tau_0) - \delta_m(t)}{\tau_0} = \frac{\rho(t + \tau_0) - \rho(t)}{c_0 \tau_0} - \frac{L(t + \tau_0) - L(t)}{c_0 \tau_0} + \frac{\Delta\rho(t + \tau_0) - \Delta\rho(t)}{c_0 \tau_0} - \frac{I(t + \tau_0) - I(t)}{c_0 \tau_0} + \frac{T(t + \tau_0) - T(t)}{c_0 \tau_0}, \quad (4.3.6)$$

$$+ \frac{M(t + \tau_0) - M(t)}{c_0 \tau_0} + \frac{\omega(t + \tau_0) - \omega(t)}{c_0 \tau_0} + \frac{\delta^j(t + \tau_0) - \delta^j(t)}{c_0 \tau_0}$$

odakle sledi da se na ovaj način dobija niz relativnih frekventnih odstupanja y_k , pomoću kojeg se takođe može oceniti Alanova varijansa.

Prvi preduslov za primenu GPS kodnih i faznih pseudodužina kod računanja Alanove varijanse je visoka stabilnost referentne frekvencije. Imajući u vidu da se u tu svrhu koriste rubidijumski i cezijumski oscilatori GPS kontrolnog i kosmičkog segmenta, kao i činjenicu da se vremenska odstupanja lokalnog oscilatora dobijaju osrednjavanjem iz opažanja prema svim vidljivim satelitima, sledi da će greške sistemskog GPS vremena beznačajno uticati na rezultate terenske metode ispitivanja.

Drugi preduslov za primenu terenske metode je minimalizacija uticaja svih izvora grešaka u funkcionalnim modelima kodnih i faznih pseudodužina. Pošto se računanje Alanove varijanse sastoji u određivanju prvih i drugih konačnih razlika nizova x_k i y_k , minimalizacija se mora odnositi pre svega na visokofrekventne izvore grešaka, kao što su greška merenja i višestruka refleksija.

Određivanje srednjeg položaja faznog centra antene

Za dve GPS antene koje su na malom međusobnom rastojanju, i različito orijentisane u odnosu na pravac severa, važi (Blagojević 2000):

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + \mathbf{R}_2(\alpha_2)\Delta \mathbf{r}_{02} - \mathbf{R}_1(\alpha_1)\Delta \mathbf{r}_{01}, \quad (4.3.7)$$

pri čemu je $\Delta \mathbf{x}$ vektor koordinatnih razlika između srednjih položaja faznih centara antena, \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 su koordinate geometrijskih centara antena, $\Delta \mathbf{r}_{01}$ i $\Delta \mathbf{r}_{02}$ su vektori srednjih položaja faznih centara, a \mathbf{R}_1 i \mathbf{R}_2 takozvane Rodrigezove matrice rotacije za uglove α_1 i α_2 . Pošto se komponente vektora $\Delta \mathbf{x}$ dobijaju obradom GPS merenja, preostaje ukupno 12 nepoznatih komponenti vektora položaja geometrijskih centara antena i vektora srednjih položaja faznih centara. Ukoliko se međutim merenje vrši više puta, a između mernih sesija se ispitivana antena rotira za različite uglove, povećavaće se broj izmerenih komponenti, dok će broj nepoznatih i dalje ostati 12. To znači da se sa dovoljnim brojem merenja mogu oceniti i komponente i njihova tačnost. Singularitet rezultujućih normalnih jednačina otklanja se usvajanjem položaja geometrijskog centra i srednjeg položaja faznog centra jedne antene, koja se u tom slučaju proglašava referentnom:

$$f_x(d\mathbf{x}_1) = 0, \quad f_r(d\Delta \mathbf{r}_{01}) = 0, \quad (4.3.8)$$

čime se broj nepoznatih parametara smanjuje na 6. Osim toga, sličnim funkcionalnim oblicima potrebno je fiksirati i vertikalnu komponentu srednjeg položaja faznog centra ispitivane antene, jer se prilikom rotacije ne očekuju njene varijacije.

Ocenjene komponente srednjeg položaja faznog centra ispitivane antene odnose se na globalni geocentrični koordinatni sistem, odnosno referentni sistem upotrebljenih satelitskih efemerida. Iz praktičnih razloga potrebno ih je transformisati u lokalni geodetski sistem, čime se dobijaju komponente u pravcu severa (Δn) i u pravcu istoka (Δe).

Osnovni preduslov za primenu ove metode predstavljaju identični uslovi merenja u svakoj mernoj sesiji. Na primer, da bi se obezbedila istovetna satelitska konstelacija, neophodno je da svaka sesija započne novog dana, i to četiri minuta UTC vremena ranije nego prethodnog.

Utvrđivanje preciznosti kodnih i faznih merenja

Preciznost GPS merenja određuje se po pravilu na takozvanoj nultoj bazi, koja se realizuje kada se jedna antena poveže sa dva prijemnika istog tipa (*Evans 1985*). Takva konfiguracija obezbeđuje da dvostruke razlike sadrže samo greške praćenja signala u DLL i PLL džiterima, jer se svi ostali uticaji eliminišu zbog odsustva bilo kakvog međustaničnog rastojanja.

U nedostatku uređaja koji razdvaja signal iz jedne antene i usmerava ga u dva prijemnika, preciznost GPS merenja može se odrediti alternativnim postupkom uz upotrebu vremenskih razlika pseudodužina na malim međustaničnim rastojanjima (*Kim, Langley 2001*). Ako je s proizvoljni član iz strukture modela kodnih ili faznih dvostrukih razlika, sa izuzetkom slučajne greške merenja ω , njegova vremenska razlika n -tog reda može se napisati u obliku:

$$\delta^n s(t_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} s(t_{n-k}). \quad (4.3.9)$$

Pošto s druge strane Tejlorov razvoj člana s glasi:

$$s(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\tau^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} s(t_0) + o(t), \quad (4.3.10)$$

gde je $o(t)$ Lagranžov ostatak a τ interval registracije merenja, sledi da je vremenska razlika:

$$\delta^n s(t_n) = \tau^n \frac{d^n}{dt^n} s(t_0) + o(t_n). \quad (4.3.11)$$

Zahvaljujući visokoj vremenskoj korelisanosti uticaja pojedinih sistematskih izvora grešaka, izvodi proizvoljnog reda i Lagranžovi ostaci imaju po pravilu veoma malu vrednost. Stoga će, uz dovoljno kratak interval registracije, vremenske razlike dvostrukih razlika kodnih odnosno faznih pseudodužina predstavljati vremenske razlike sa dominantnim slučajnim greškama merenja:

$$\delta^n \Delta \nabla L \approx \delta^n \omega_{\Delta \nabla L}, \quad \delta^n \Delta \nabla P \approx \delta^n \omega_{\Delta \nabla P}. \quad (4.3.12)$$

Na ovaj način se primenom zakona o prenosu grešaka može oceniti tačnost dvostrukih razlika, a zatim i originalnih merenja. Već u vremenskim razlikama drugog i trećeg reda eliminišu se praktično svi sistematski uticaji, pod uslovom da je interval registracije merenja sinhronizovan sa njihovim frekvencijama.

4.3.3 Neke specifičnosti matematičke obrade

Osnovne karakteristike gradskih GPS mreža, zbog kojih je matematička obrada izvršenih merenja donekle specifična, su mala međustanična rastojanja, mestimično velike visinske razlike i mikroklimatska svojstva urbane sredine. Zbog toga postupak obrade obuhvata računanja u okviru svake merne sesije i kombinovanje pojedinačnih rezultata u jedinstveno rešenje na nivou mreže.

Osnovni parametri od značaja za obradu GPS merenja odnose se na ukupan broj prijemnika, p , satelita, s , epoha, e , tačaka u mreži, n_T , sesija, n_S i identičnih tačaka koje se zaposedaju u dve sukcesivne sesije, n_Z . U slučaju gradskih GPS mreža, njih obično karakterišu sledeće relacije:

$$n_T \geq p \geq 2, \quad p > n_Z \geq 1, \quad (4.3.13)$$

$$s \geq 5, \quad e \gg 1, \quad n_S = \text{INT} \left(\frac{n_T - n_Z}{p - n_Z} \right) + 1. \quad (4.3.14)$$

Preliminarna računanja na nivou sesije

Imajući u vidu prosečna međustanična rastojanja u gradskoj GPS mreži, iz primene principa beznačajnosti sledi da se približne koordinate tačaka \mathbf{x} i stanja časovnika prijemnika δ moraju poznavati sa tačnošću boljom od $5m$ i $2\mu s$ respektivno. Određivanje ovih veličina vrši se postupkom apsolutnog pozicioniranja, uz upotrebu emitovanih satelitskih efemerida i kodnih pseudodužina na prvoj frekvenciji, P_1 . U zavisnosti od toga da li su na raspolaganju jednofrekventna ili dvofrekventna merenja, troposferske i jonosferske popravke kodnih pseudodužina računaju se po modelima:

$$T_1 = \frac{2.3m}{\cos z}, \quad I_1 = f_2^2 \frac{P_2 - P_1}{f_2^2 - f_1^2}. \quad (4.3.15)$$

S obzirom na to da u proizvoljnoj epohi merenja sa s opažanih satelita važi:

$$\delta = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (P_1 - \rho)_i, \quad (4.3.16)$$

gde je ρ sračunato geometrijsko rastojanje, stanje časovnika prijemnika biće određeno sa tačnošću mnogo boljom od $2\mu s$ čak i kada je ukupni kvalitet približnih koordinata, satelitskih položaja i merenih kodnih pseudodužina na nivou od $1000m$. To znači da postizanje predviđene tačnosti približnih koordinata ima primarni značaj u fazi preliminarne obrade na nivou sesije.

Originalna kodna i fazna merenja popravljaju se u postupku preliminarne obrade samo za uticaj troposferske refrakcije. Instrumentalni uticaji, kao što je trenutni položaj faznog centra antene, uzimaju se u obzir jedino u slučaju da su merenja vršena opremom različitih proizvođača. Za računanje troposferske korekcije koriste se parametri standardne atmosfere i bilo koji od postojećih modela, jer se rezidualni troposferski uticaji obuhvataju matematičkim modelom dvostrukih razlika. Tačnost tako računatih troposferskih popravaka zavisi od njihovih veličina T , zenitnih odstojanja z i ukupnog standarda staničnih i satelitskih položaja σ_{SU} :

$$\sigma_T = \frac{T}{\rho} \tan z \cdot \sigma_{SU}, \quad (4.3.17)$$

i ako se koriste emitovane efemeride i prethodno sračunate približne koordinate tačaka biće mnogo bolja od $1mm$ čak i za satelite blizu horizonta.

Formulisanje matematičkog modela dvostrukih razlika

Osnovne merne veličine na osnovu kojih se vrši ocenjivanje koordinata tačaka predstavljaju vremenski sinhronizovane dvostruke razlike faznih i kodnih pseudodužina, čiji je funkcionalni model oblika:

$$\Delta \nabla L_{mn}^{jk} - \delta_m \nabla \dot{\rho}_m^{jk} + \delta_n \nabla \dot{\rho}_n^{jk} = \Delta \nabla \rho_{mn}^{jk} + \Delta \nabla T_{mn}^{jk} - \Delta \nabla I_{mn}^{jk} + \lambda \Delta \nabla N_{mn}^{jk} + \omega_{\Delta \nabla L}, \quad (4.3.18)$$

$$\Delta \nabla P_{mn}^{jk} - \delta_m \nabla \dot{\rho}_m^{jk} + \delta_n \nabla \dot{\rho}_n^{jk} = \Delta \nabla \rho_{mn}^{jk} + \Delta \nabla T_{mn}^{jk} + \Delta \nabla I_{mn}^{jk} + \omega_{\Delta \nabla P}. \quad (4.3.19)$$

Eksplisito izraženi rezidualni troposferski i jonosferski uticaji odnose se na svaku epohu merenja zasebno, tako da se mogu oceniti jedino ako se izvrši njihova parametrizacija na nivou sesije.

Rezidualna troposferska refrakcija uglavnom je rezultat prostorno i vremenski varijabilnog sadržaja vodene pare u atmosferi, jer se uticaj suve komponente gotovo u potpunosti obuhvata odgovarajućim popravkama sračunatim u fazi preliminarne obrade. Pod pretpostavkom da je vlažna troposferska komponenta konstantna za vreme trajanja sesije, proizvoljnoj stanici n može se pridružiti nepoznati zenitni troposferski parametar dT_n , tako da za sva originalna merenja izvršena sa te stanice važi:

$$T_n^j = E(z_n^j) \cdot dT_n, \quad (4.3.20)$$

gde E označava izabrani model redukcione funkcije zenitnog odstojanja z . Međutim, pošto se kao merne veličine u gradskim GPS mrežama koriste dvostruke razlike, umesto apsolutnih ocenjuju se

relativni zenitni troposferski parametri dT_{mn} , i to između onih parova stanica za koje su definisane i same dvostruke razlike. Kada se zahvaljujući malim međustaničnim rastojanjima zenitna odstojanja sa dve stanice do istog satelita izjednače sa srednjom vrednošću, funkcionalni model rezidualnih troposferskih uticaja dobija oblik:

$$\Delta \nabla T_{mn}^{jk} = [E(z^j) - E(z^k)] \cdot dT_{mn}. \quad (4.3.21)$$

Nepoznati apsolutni iznos zenitne troposferske refrakcije dT_{APS} , koji je zajednički za sve tačke, a ne može se pouzdano oceniti na nivou sesije, ima za posledicu grešku razmere mreže:

$$dm = \frac{dT_{APS}}{R \cos z_{\max}}, \quad (4.3.22)$$

gde je R srednji Zemljin poluprečnik. Ovaj uticaj se međutim može zanemariti u gradskim GPS mrežama, jer iznosi u srednjem svega $0.05ppm$. S druge strane, zanemarivanje apsolutne jonosferske refrakcije smanjuje razmeru mreže po empirijski izvedenom zakonu (Rothacher, Schaer 1995):

$$dm = -0.08 \cdot VTEC, \quad (4.3.23)$$

i može dostići iznos od $5ppm$. Imajući u vidu da je:

$$I_n^j = A_n^j \cdot VTEC = -\frac{40.3}{f^2} \frac{1}{\cos \zeta_n^j} VTEC, \quad (4.3.24)$$

pri čemu ζ označava zenitno odstojanje odgovarajuće jonosferske tačke, varijacije ukupnog elektronskog sadržaja mogu se modelirati u funkciji njenih geografsko-solarnih koordinata φ^j i s^j :

$$VTEC(\varphi^j, s^j) = a_0 + \varphi^j a_1 + s^j a_2. \quad (4.3.25)$$

Funkcionalni model dvostrukih razlika jonosferskih uticaja na nivou sesije imaće prema tome oblik:

$$\Delta \nabla I_{mn}^{jk} = \Delta \nabla A_{mn}^{jk} a_0 + (\Delta A_{mn}^j \varphi^j - \Delta A_{mn}^k \varphi^k) a_1 + (\Delta A_{mn}^j s^j - \Delta A_{mn}^k s^k) a_2. \quad (4.3.26)$$

Stohastički model dvostrukih razlika formuliše se na uobičajeni način. Standardi originalnih faznih i kodnih pseudodužina pomoću kojih se konstruiše kovarijaciona matrica dvostrukih razlika računaju se po izrazu:

$$\sigma = c_0 + c_1 e^{-z/z_0}, \quad (4.3.27)$$

s tim što se konstante c_0 , c_1 i z_0 određuju eksperimentalno na osnovu samih merenja, i to zasebno za fazne i kodne pseudodužine. Alternativno se može sprovesti postupak segmentiranja serija merenja i ocenjivanja komponenti disperzije po pojednostavljenom MINQUE algoritmu (Satirapod 2002).

Rešavanje faznih neodređenosti na nivou sesije

Određivanje celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti na nivou sesije vrši se u linearnom matematičkom modelu dvostrukih razlika koji u matričnom obliku glasi:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}_C \hat{\mathbf{x}}_C + \mathbf{A}_N \hat{\mathbf{x}}_N + \mathbf{w}, \quad (4.3.28)$$

$$\mathbf{w} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_1), \quad (4.3.29)$$

pri čemu se vektor \mathbf{x}_C odnosi na nepoznate koordinatne, troposferske i jonosferske parametre, \mathbf{x}_N na dvostruke razlike faznih neodređenosti, a σ_0^2 predstavlja apriorni disperzioni faktor. Dimenzije vektora u jednoj sesiji iznose respektivno $4(p-1)+3$ i $(p-1)(s-1)$. Kada se koordinate, parametri i fazne neodređenosti ocenjuju kao realni brojevi, primenom MNK dobijaju se sledeći rezultati:

$$\hat{\mathbf{x}}_{f_{l_0}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{C, f_{l_0}} \\ \hat{\mathbf{x}}_{N, f_{l_0}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{f_{l_0}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{CC, f_{l_0}} & \mathbf{C}_{CN, f_{l_0}} \\ \mathbf{C}_{NC, f_{l_0}} & \mathbf{C}_{NN, f_{l_0}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega_{f_{l_0}}}{f}, \quad (4.3.30)$$

gde f označava broj suvišnih merenja. S obzirom na to da Ω_{flo} u ovoj fazi zavisi isključivo od kvaliteta kodnih pseudodužina, testiranje adekvatnosti modela vrši se određivanjem granica unutar kojih se mora nalaziti kvadratna forma reziduuma (Han 1997):

$$\sigma_0^2 \cdot \chi_{f;\alpha/2}^2 \leq \Omega_{flo} \leq \sigma_0^2 \cdot \chi_{f;1-\alpha/2}^2. \quad (4.3.31)$$

Nalaženje celobrojnih vrednosti faznih neodređenosti obavlja se u daljem postupku uobičajenim metodama redukovanja prostora pretraživanja pomoću dijagonalnih članova kovarijacione podmatrice $\mathbf{C}_{NN,flo}$. Ako je $\bar{\mathbf{x}}_N$ jedan od vektora potencijalnih celobrojnih vrednosti, MNK rešenja mogu se prikazati u obliku:

$$\hat{\mathbf{x}}_{C,fix} = \hat{\mathbf{x}}_{C,flo} - \mathbf{C}_{CN,flo} \mathbf{C}_{NN,flo}^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{N,flo} - \bar{\mathbf{x}}_N), \quad (4.3.32)$$

$$\mathbf{C}_{CC,fix} = \mathbf{C}_{CC,flo} - \mathbf{C}_{CN,flo} \mathbf{C}_{NN,flo}^{-1} \mathbf{C}_{NC,flo}, \quad (4.3.33)$$

$$\Omega_{fix} = \Omega_{flo} + (\hat{\mathbf{x}}_{N,flo} - \bar{\mathbf{x}}_N)^T \mathbf{C}_{NN,flo}^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{N,flo} - \bar{\mathbf{x}}_N). \quad (4.3.34)$$

Integralni metod koji omogućuje da se vektor potencijalnih celobrojnih vrednosti identifikuje sa maksimalnom verovatnoćom kao tačan za tekuću sesiju, sastoji se u zahtevu da budu ispunjena sledeća tri uslova:

$$(\hat{\mathbf{x}}_{N,flo} - \bar{\mathbf{x}}_N)^T \mathbf{C}_{NN,flo}^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{N,flo} - \bar{\mathbf{x}}_N) \leq \sigma_0^2 (p-1)(s-1) F_{(p-1)(s-1),f;1-\alpha}, \quad (4.3.35)$$

$$(\hat{\mathbf{x}}_{C,flo} - \hat{\mathbf{x}}_{C,fix})^T \mathbf{C}_{CC,flo}^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{C,flo} - \hat{\mathbf{x}}_{C,fix}) \leq \sigma_0^2 (4p-1) F_{4p-1,f;1-\alpha}, \quad (4.3.36)$$

$$\sigma_0^2 \cdot \chi_{f+(p-1)(s-1);\alpha/2}^2 \leq \Omega_{fix} \leq \sigma_0^2 \cdot \chi_{f+(p-1)(s-1);1-\alpha/2}^2. \quad (4.3.37)$$

Ukoliko navedene uslove zadovoljava samo jedan vektor potencijalnih celobrojnih vrednosti, on se usvaja kao konačan. Za slučaj više takvih vektora, onaj za koji je vrednost kvadratne forme reziduuma minimalna smatra se najverovatnijim, a usvaja se kao konačan tek nakon što diskriminacioni test pokaže da je ispunjeno:

$$\frac{\Omega_{fix,2}}{\Omega_{fix,min}} > F_{f+(p-1)(s-1),f+(p-1)(s-1);1-\alpha}, \quad (4.3.38)$$

pri čemu $\Omega_{fix,2}$ označava drugu po vrednosti kvadratnu formu reziduuma. Pošto su sada celobrojne vrednosti faznih neodređenosti poznate, moguće je dobiti mnogo preciznije MNK ocene koordinata, ali je to po pravilu nepotrebno. Na nivou sesije vrši se umesto toga samo testiranje značajnosti pojedinih sekundarnih parametara, jer bi ocenjene koordinate svakako pretrpele izmene u fazi definitivne obrade cele gradske GPS mreže.

Ocenjivanje koordinata na nivou mreže

Definitivno-ocenjivanje koordinata svih tačaka gradske GPS mreže postiže se kombinacijom rešenja po pojedinim sesijama u sekvencijalnom MNK postupku. Pošto koeficijenti i slobodni članovi normalnih jednačina u proizvoljnoj sesiji i mogu da se predstave u obliku:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{PP,i} & \mathbf{N}_{PS,i} \\ \mathbf{N}_{SP,i} & \mathbf{N}_{SS,i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{P,i} \\ \mathbf{n}_{S,i} \end{bmatrix}, \quad (4.3.39)$$

sa indeksom P za primarne nepoznate (koordinate) i indeksom S za sekundarne nepoznate (troposferski i jonosferski parametri), eliminacijom sekundarnih nepoznatih dobija se:

$$\tilde{\mathbf{N}}_{PP,i} = \mathbf{N}_{PP,i} - \mathbf{N}_{PS,i} \mathbf{N}_{SS,i}^{-1} \mathbf{N}_{SP,i}, \quad \tilde{\mathbf{n}}_{P,i} = \mathbf{n}_{P,i} - \mathbf{N}_{PS,i} \mathbf{N}_{SS,i}^{-1} \mathbf{n}_{S,i}. \quad (4.3.40)$$

Pri tome je neophodno da se normalne jednačine odnose na iste približne koordinate tačaka, i da budu oslobođene datumskih uslova kojima je otklanjan defekt ranga prilikom ocenjivanja po pojedinim

sesijama. Kada su uz to na raspolaganju odgovarajuće kvadratne forme $\mathbf{l}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i$ i redundance f_i , definitivni rezultati ocenjivanja za celu mrežu glase:

$$\hat{\mathbf{x}}_P = \left(\mathbf{N}_{DD} + \sum_{i=1}^{n_S} \tilde{\mathbf{N}}_{PP,i} \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n_S} \tilde{\mathbf{n}}_{P,i}, \quad \Omega = \sum_{i=1}^{n_S} \mathbf{l}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i - \sum_{i=1}^{n_S} \tilde{\mathbf{n}}_{P,i} \hat{\mathbf{x}}_P, \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega}{\sum_{i=1}^{n_S} f_i}, \quad (4.3.41)$$

sa matricom normalnih jednačina \mathbf{N}_{DD} kojom se otklanja defekt ranga ukupnog sistema. U slučaju gradskih GPS mreža, ova matrica mora definisati samo translatorne datumske uslove. Testiranje adekvatnosti modela na ovom nivou predstavlja kontrolu prisustva grešaka centrisanja, merenja visina antena ili parametara koji su beznačajnog uticaja za vreme trajanja pojedinih sesija, ali dolaze do izražaja za vreme cele merne kampanje. Moć ovog testa određuje pre svega broj višestruko zaposednutih tačaka gradske GPS mreže.

4.3.4 Datumska transformacija pasivnih gradskih GPS mreža

Pošto se definitivne ocene koordinata tačaka gradskih GPS mreža odnose na referentni sistem realizovan satelitskim efemeridama, za njihovu integraciju u oficijelni državni referentni sistem neophodna je datumska transformacija rešenja. U tu svrhu koristi se po pravilu model linearne transformacije koordinata iz konformne transformacione grupe $C_7(3)$, poznate kao sedmoparametarska Helmertova transformacija (*Schreiber 1991; Klein 1997; Okeke 1998; Soler 1998*). Datumska transformacija osim toga obuhvata i transformaciju elipsoidnih visina tačaka u fizički definisane visine.

Helmertovska datumska transformacija

Opšti oblik Helmertovske transformacije kojom se vremenski zavisani vektor položaja tačke gradske GPS mreže, $\mathbf{x}_G(t)$, transformiše u odgovarajući vektor položaja u državnom referentnom sistemu, $\bar{\mathbf{x}}_G(t)$, glasi:

$$\bar{\mathbf{x}}_G(t) = \mathbf{t} + m\mathbf{R}[\mathbf{x}_G(t_0) + \dot{\mathbf{x}}_G(t_0)(t-t_0)] + [\dot{\mathbf{t}} + (\dot{m}\mathbf{R} + m\dot{\mathbf{R}})\mathbf{x}_G(t_0)](t-t_0), \quad (4.3.42)$$

pri čemu \mathbf{t} označava vektor translacionih parametara, \mathbf{R} je ortogonalna matrica rotacija sa članovima koji su funkcija tri rotaciona parametra, m je parametar razmere, t_0 referentna epoha, dok su veličine $\dot{\mathbf{t}}$, $\dot{\mathbf{R}}$, \dot{m} i $\dot{\mathbf{x}}_G$ odgovarajuće vremenske promene. Parametri transformacije i njihove vremenske promene određuju se MNK ocenjivanjem na osnovu koordinata tačaka državne referentne mreže, \mathbf{x}_D , uključenih u gradsku GPS mrežu. Međutim, pošto tačke gradske GPS mreže obično nemaju definisane brzine, MNK postupak svodi se samo na ocenjivanje tri parametra translacije, tri parametra rotacije i jedan parametar razmere. Ako su datumske razlike u smislu rotacija i razmere dovoljno male, model određivanja transformacionih parametara za proizvoljnu identičnu tačku ima oblik:

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_G & y_G & x_G \\ 0 & 1 & 0 & z_G & 0 & -x_G & y_G \\ 0 & 0 & 1 & -y_G & x_G & 0 & z_G \end{bmatrix}_i \mathbf{p}, \quad (4.3.43)$$

$$\mathbf{p}^T = [t_x \quad t_y \quad t_z \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad dm]. \quad (4.3.44)$$

Ocenjivanje transformacionih parametara i njihovo korišćenje za transformaciju koordinata tačaka gradske GPS mreže povezano je sa sledeća tri glavna problema:

- Čest je slučaj da za tačke državne referentne mreže ne stoje na raspolaganju elipsoidne visine, ili im je kvalitet nizak zbog nepoznavanja geoidnih undulacija, naročito ako važeći državni sistem realizuje državna trigonometrijska mreža. U takvoj situaciji gradska GPS mreža gubi trodimenzionalni karakter jer je transformacijom moguće dobiti samo horizontalne položaje

tačaka. Uticaj nepoznavanja elipsoidnih visina h na transformisane horizontalne koordinate tačaka ocenjuje se u sfernoj aproksimaciji i sa srednjim Zemljinim poluprečnikom R , po izrazima:

$$d\varphi = \frac{|h|}{R^2 \cos \varphi} (|t_x| \sin \lambda + |t_y| \cos \lambda), \quad (4.3.45)$$

$$d\lambda = \frac{|h|}{R^2} (|t_x| \sin \varphi \cos \lambda + |t_y| \sin \varphi \sin \lambda + |t_z| \cos \varphi). \quad (4.3.46)$$

- Gradska GPS mreža obuhvata malu površinu u poređenju sa onom na koju se odnose geocentrični datumski parametri. Iz tog razloga će sistem normalnih jednačina biti slabo uslovljen, a ocenjeni transformacioni parametri u jakoj međusobnoj korelacionoj vezi, čak i u slučaju da su identične tačke pravilno raspoređene u okviru područja mreže. Ovi nedostaci delimično se otklanjaju centriranjem koordinata tačaka gradske GPS mreže, i ocenjivanjem onog podskupa transformacionih parametara za koje se testiranjem ispostavi da su signifikantni.
- Pseudomerenja u transformacionom modelu predstavljaju koordinate tačaka državne referentne mreže, dok su koeficijenti konfiguracione matrice koordinate identičnih tačaka gradske GPS mreže. S obzirom na to da se oba skupa koordinata dobijaju na osnovu merenja, ocenjivanje transformacionih parametara mora obuhvatiti i odgovarajuće kovarijacione matrice u mešovitom MNK modelu (*Leick, van Gelder 1975; Mikhail 1976*).

Transformacioni modeli upotrebljavaju se pod pretpostavkom malih uglova rotacije. Za maksimalne vrednosti pravougljih koordinata od $6 \cdot 10^6 m$, uglovi rotacija moraju biti manji od $4''$, da bi greške usled aproksimacija $\cos \varepsilon \approx 1$ i $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ bile manje od $1mm$. U protivnom se transformacioni parametri određuju iterativno.

Integracija gradskih GPS mreža u državni referentni sistem

Rezultati upoređenja transformisanih koordinata tačaka gradske GPS mreže, $\bar{\mathbf{x}}_G$, sa koordinatama identičnih tačaka državne referentne mreže, \mathbf{x}_D , predstavljaju osnovni kriterijum koji određuje postupak konačne integracije. U tu svrhu kao mera može se koristiti maksimalno r_{\max} , ili srednje r_r , apsolutno prostorno odstupanje:

$$r_{\max} = \max_i |\mathbf{x}_{D,i} - \bar{\mathbf{x}}_{G,i}|, \quad r_r = \frac{1}{u} \sum_{i=1}^u |\mathbf{x}_{D,i} - \bar{\mathbf{x}}_{G,i}|, \quad (4.3.47)$$

pri čemu u označava broj identičnih tačaka. Ako državnu referentnu osnovu definiše trigonometrijska mreža, veličine odstupanja r obično višestruko nadmašuju standard relativnog GPS pozicioniranja, i u tom slučaju se transformisane koordinate tačaka gradske GPS mreže $\bar{\mathbf{x}}_G$ usvajaju kao definitivne, zajedno sa odgovarajućom kovarijacionom matricom $\bar{\mathbf{C}}_G$:

$$\hat{\mathbf{x}}_G = \bar{\mathbf{x}}_G, \quad (4.3.48)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_G = \bar{\mathbf{C}}_G = (1 + dm)^2 \mathbf{R} \mathbf{C}_G \mathbf{R}^T. \quad (4.3.49)$$

Ukoliko je međutim državna referentna mreža realizovana GPS tehnologijom, sa tačnošću koju karakteriše kovarijaciona matrica \mathbf{C}_D , definitivne koordinate tačaka gradske GPS mreže i njihova kovarijaciona matrica ocenjuju se po izrazima:

$$\hat{\mathbf{x}}_G = \bar{\mathbf{x}}_G + \bar{\mathbf{C}}_G (\bar{\mathbf{C}}_G + \mathbf{C}_D)^{-1} (\mathbf{x}_D - \bar{\mathbf{x}}_G), \quad (4.3.50)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_G = \bar{\mathbf{C}}_G (\bar{\mathbf{C}}_G + \mathbf{C}_D)^{-1} \mathbf{C}_D \quad (4.3.51)$$

Datumska transformacija elipsoidnih visina

Pomoću gradske GPS mreže može se realizovati fizički definisani vertikalni referentni sistem samo ako se elipsoidne visine tačaka h , na odgovarajući način transformišu u ortometrijske visine H . Između geometrijski i gravitaciono zasnovanih sistema visina postoji jednostavna veza:

$$H = h - N, \quad (4.3.52)$$

iz koje sledi da tačnost rezultujućih ortometrijskih visina direktno zavisi od tačnosti GPS određenih visina i tačnosti geoidnih undulacija N . Međutim, da bi se čak i dovoljno tačan model geoida N_0 mogao direktno koristiti za područje gradske GPS mreže, on se mora odnositi na isti elipsoid na kojeg se odnose i elipsoidne visine, i mora realizovati referentnu površ ortometrijskih visina koje su u važećoj upotrebi. Ovi uslovi se obično ispunjavaju polinomskim modeliranjem geoidnih undulacija (Suenkel 1980; Schoedlbauer et al. 1992; Zhong 1997):

$$N(\varphi, \lambda) = N_0(\varphi, \lambda) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} \varphi^i \lambda^j. \quad (4.3.53)$$

Ocenjivanje nepoznatih polinomskih parametara a_{ij} vrši se MNK postupkom na osnovu GPS geoidnih undulacija izmerenih na onim tačkama u okviru gradske GPS mreže koje istovremeno imaju i ortometrijske visine:

$$N_{GPS,i} = h_{GPS,i} - H_i \quad (4.3.54)$$

Identične tačke moraju biti ravnomerno raspoređene po području gradske GPS mreže kako bi se obezbedila dobra uslovljenost sistema normalnih jednačina. Step polinoma uglavnom se ograničava na 3, zbog nepoželjnih oscilatornih svojstava i teškoća oko fizičke interpretacije rezultata ocenjivanja. MNK formalizam osim toga podrazumeva i uobičajenu ocenu tačnosti, testiranje adekvatnosti modela, eliminisanje grubih grešaka i sukcesivno odbacivanje polinomskih parametara koji nisu statistički značajni.

Ako na području gradske GPS mreže postoje podaci kao što su nivelmanske visinske razlike, vertikalni otkloni ili gravimetrijska merenja, jednostavni polinomski model geoidnih undulacija može biti znatno poboljšan dodatnim funkcionalnim vezama ili primenom kolokacije (Eissfeller 1985; Dinter 1997). Tačnost interpolacije ortometrijskih visina dostiže na taj način čak i $5mm$, ali je takav kvalitet još uvek mnogo niži od onog koji se dobija tradicionalnom metodom geometrijskog nivelmana.

Poglavlje 5

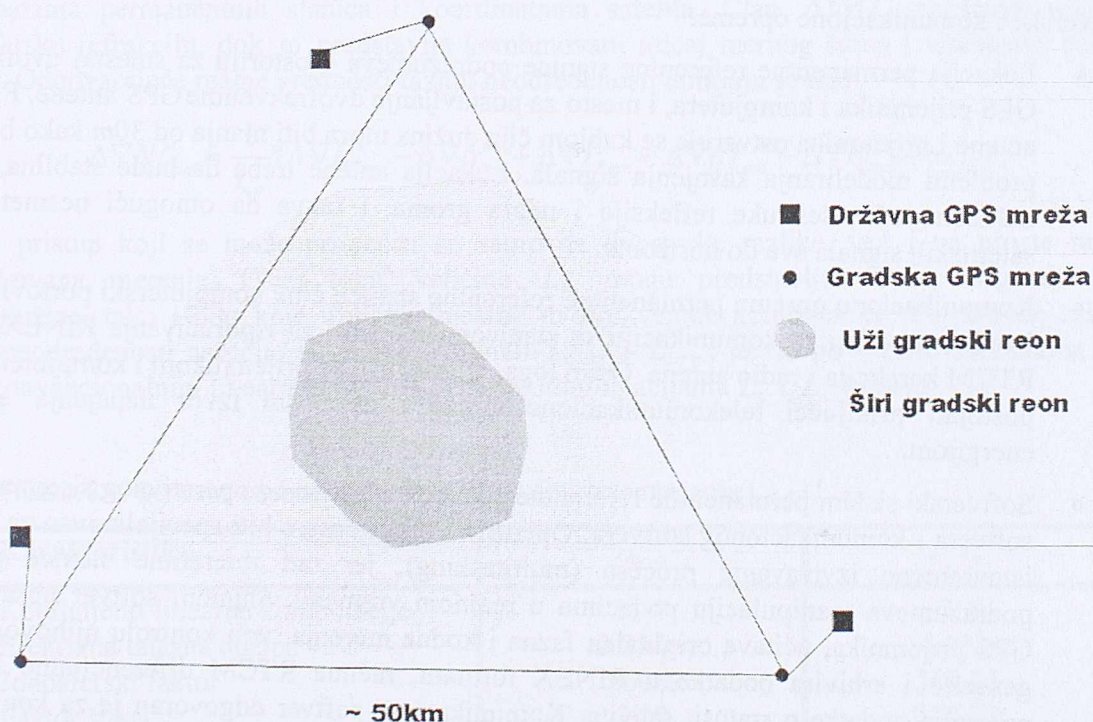
MODEL AKTIVNE
GRADSKE GPS OSNOVE

5.1 Aktivne gradske GPS mreže

5.1.1 Uspostavljanje aktivnih gradskih GPS mreža

Tradicionalne gradske mreže pasivno realizuju odgovarajući referentni sistem nezavisno od primenjene merne tehnologije, jer se ta realizacija sastoji samo od kataloga fizički stabilizovanih tačaka i njihovih koordinata. Gradska referentna geodetska osnova predstavljaće aktivnu realizaciju referentnog sistema tek onda kada njenu infrastrukturu uz to čine još i stalno operativni meri sistemi i neka forma komunikacije sa korisnicima.

Aktivna gradska referentna osnova uspostavlja se mrežom od najmanje tri permanentne GPS stanice na međusobnom rastojanju od 50-70km, koje svojim položajem u potpunosti obuhvataju gradsko područje, i na kojima se kontinuirano vrše dvofrekventna GPS merenja (slika 5.1).



SLIKA 5.1. Shematski prikaz dispozicije tačaka aktivne gradske GPS mreže.

Prema tome, rad permanentnih GPS stanica sastoji se u osnovi u prikupljanju i distribuciji podataka sa svih elektronski vidljivih GPS satelita. Međutim, da bi aktivna gradska GPS osnova imala

višekorisnički karakter, i mogla poslužiti za precizno pozicioniranje i navigaciju u realnom vremenu, izvođenje inženjerskih radova i za naučna istraživanja, mora biti zadovoljeno nekoliko osnovnih uslova:

- Apsolutni i relativni položaji tačaka referentne osnove moraju biti poznati sa tačnošću boljom od 1 dm i 1 cm respektivno. U tu svrhu položaj svake referentne permanentne stanice određuje se dugotrajnim, statičkim GPS merenjima, i to od najmanje tri najbliže tačke državne referentne mreže ili mreže permanentnih stanica.
- U svakoj epohi merenja moraju biti rešene fazne neodređenosti kako bi fazne pseudodužine bile poznate u punom obliku, i na taj način omogućile kasnije modeliranje uticaja pojedinih izvora grešaka. Rešavanje faznih neodređenosti moguće je na osnovu podataka pojedinačnih epoha zahvaljujući pre svega preciznim koordinatama referentnih permanentnih stanica, i obično se vrši na nivou dvostrukih razlika.
- Originalna fazna i kodna merenja u svakoj epohi moraju biti kontrolisanog kvaliteta u pogledu prisustva grubih grešaka i faznih skokova. Algoritam kojim se vrši kontrola kvaliteta treba da bude potpuno nezavisan, kako od konkretne primene tako i od eksternih informacija o instrumentalnim konstantama, položajima antena i satelita ili stanju atmosfere. Međutim, pošto je pozicioniranje tačaka najznačajniji domen primene aktivne gradske GPS osnove, kontrola kvaliteta mora obuhvatiti i podatke iz navigacionih GPS poruka.
- U mreži permanentnih referentnih stanica mora biti uspostavljen postupak određivanja diferencijalnih korekcija, način njihovog modeliranja, kao i oblik distribucije korisnicima. Mogućnost da se na taj način znatno redukuje uticaj linearnih sistematskih grešaka glavni je razlog za relativno velika dopuštena rastojanja između permanentnih stanica.

Navedeni zahtevi ispunjavaju se na taj način što se prilikom uspostavljanja aktivne gradske GPS osnove vrši pogodan izbor lokacija permanentnih stanica i instalacija odgovarajuće hardverske, softverske i komunikacione opreme:

- Lokacija permanentne referentne stanice podrazumeva prostoriju za smeštaj dvofrekventnog GPS prijemnika i kompjutera, i mesto za postavljanje dvofrekventne GPS antene. Fizička veza antene i prijemnika ostvaruje se kablom čija dužina mora biti manja od 30 m kako bi se izbegli problemi modeliranja kašnjenja signala. Lokacija antene treba da bude stabilna, dostupna, zaštićena od višestruke refleksije i udara groma, i takva da omogući nesmetani prijem satelitskih signala sve do horizonta.
- Komunikacionu opremu permanentne referentne stanice čine kompjuterski portovi za modem i radio, modemi za komunikaciju sa stanicom, modemi za isporučivanje RINEX datoteka i RTCM korekcija i radio antena. Osim toga, u prostoriji sa prijemnikom i kompjuterom moraju postojati priključci telekomunikacione mreže i nezavisni izvor napajanja električnom energijom.
- Softverski sistem permanentne referentne stanice sastoji se od operativnog sistema, staničnog softvera i komunikacionog softvera. Operativni sistem mora biti specijalizovan za paralelno i istovremeno izvršavanje procesa (multitasking), jer rad referentne stanice po pravilu podrazumeva manipulaciju podacima u realnom vremenu. Stanični softver upravlja radom GPS prijemnika, učitava originalna fazna i kodna merenja, vrši kontrolu njihovog kvaliteta, generiše i arhivira podatke u RINEX formatu, računa RTCM diferencijalne korekcije i prikuplja podatke o statusu satelita. Komunikacioni softver odgovoran je za kontrolu prava pristupa, transfer podataka na poziv preko modema i daljinsku kontrolu stanice.

I pored toga što se aktivna gradska GPS osnova sastoji od malog broja permanentnih stanica, njena primena ograničena je uglavnom na velika urbana područja zbog relativno visokih troškova uspostavljanja i održavanja. Osim toga, direktno pozicioniranje novih tačaka u okviru aktivne gradske GPS osnove nije moguće primenom terestričkih metoda merenja, već jedino primenom GPS tehnologije. U tom smislu, korišćenje aktivne gradske GPS osnove povezano je sa problemima

horizontalne i vertikalne transformacije u oficijelni državni referentni sistem, i to na isti način kao i u pasivnoj gradskoj GPS osnovi.

S druge strane, aktivna gradska GPS osnova ima čitav niz prednosti u poređenju sa tradicionalnim gradskim mrežama, zahvaljujući kontinuiranom procesu merenja i dostupnosti rezultata merenja u realnom vremenu. Pre svega, u aktivnoj gradskoj GPS osnovi omogućeno je periodično pozicioniranje permanentnih GPS stanica, tako da se može pratiti vremenska evolucija realizovanog referentnog sistema. Pošto se merenja na permanentnim stanicama odvijaju autonomno, relativno pozicioniranje novih tačaka može se izvesti samo sa jednim GPS uređajem, i to kako statičkim merenjima tako i u realnom vremenu, čime se znatno umanjuju troškovi sa korisničke strane. Konačno, visoka frekvencija prikupljanja podataka na permanentnim GPS stanicama pruža mogućnost analize dugih vremenskih serija i dobijanja pouzdanih informacija o atmosferskim ili seizmičkim fenomenima.

5.1.2 Rešavanje faznih neodređenosti

Za razliku od direktnog zadatka relativnog GPS pozicioniranja kod kojeg su koordinate tačaka poznate samo približno, u aktivnoj gradskoj GPS osnovi očekuje se rešavanje faznih neodređenosti u svakoj epohi merenja. Satelitska opažanja za koja nisu rešene fazne neodređenosti ne mogu se upotrebiti za računanje diferencijalnih korekcija i modeliranje uticaja preostalih izvora grešaka.

Pod pretpostavkom da su merenja popravljena za uticaj grešaka časovnika prijemnika, grešaka položaja faznog centra antene i troposfersku refrakciju, dvostruke fazne razlike imaju sledeću strukturu:

$$\Delta\nabla L_{Fmn}^{jk} = \Delta\nabla\rho_{mn}^{jk} - \Delta\nabla I_{Fmn}^{jk} + \Delta\nabla dT_{mn}^{jk} + \Delta\nabla O_{mn}^{jk} + \lambda_F \Delta\nabla N_{Fmn}^{jk} + \omega_{\Delta\nabla}, \quad (5.1.1)$$

pri čemu je geometrijsko rastojanje $\Delta\nabla\rho$ poznato sa visokom tačnošću zahvaljujući preciznim koordinatama permanentnih stanica i koordinatama satelita. Član $\Delta\nabla dT$ označava rezidualnu troposfersku refrakciju, dok ω predstavlja kombinovani uticaj mernog šuma i višestruke refleksije signala. Odgovarajuće realne vrednosti faznih neodređenosti dobijaju se kao:

$$\Delta\nabla N_{Fmn}^{jk} = \frac{1}{\lambda_F} (\Delta\nabla L_{Fmn}^{jk} - \Delta\nabla\rho_{mn}^{jk} + \Delta\nabla I_{Fmn}^{jk} - \Delta\nabla dT_{mn}^{jk} - \Delta\nabla O_{mn}^{jk} - \omega_{\Delta\nabla}), \quad (5.1.2)$$

i to je pristup koji se može primeniti ne samo na dvostruke razlike, već i na proste razlike i neredukovana merenja. Osim toga, veličine L_F mogu predstavljati kako originalne fazne pseudoduzine, tako i bilo koje njihove linearne dvofrekventne kombinacije. Za potrebe rešavanja faznih neodređenosti naročito su pogodni signali $L_{9,-7}$ i $L_{-7,9}$, jer su po svojim osobinama veoma slični konvencionalnim linearnim dvofrekventnim kombinacijama L_3 i L_4 (tabela 5.1).

TABELA 5.1. Osnovne osobine linearnih dvofrekventnih kombinacija $L_{9,-7}$ i $L_{-7,9}$.

Karakteristika	$L_{9,-7}$	$L_{-7,9}$
Koeficijenti linearne kombinacije	9, -7	-7, 9
Efektivna talasna dužina	0.054m	14.653m
Jonosferski faktor	0.0069	350.35
Faktor šuma	3.22	877.78

Strategija rešavanja faznih neodređenosti obično se zasniva na konceptu simultane parnosti linearnih dvofrekventnih kombinacija L_5 i L_6 , koji omogućuje realna rešenja za originalne signale L_1 i L_2 i kombinovani signal $L_{9,-7}$. U aktivnim gradskim GPS mrežama u kojima međustanična rastojanja ne prelaze nekoliko desetina kilometara, i pri relativno stabilnim atmosferskim uslovima, apsolutne razlike realnih faznih neodređenosti $\Delta\nabla N_F$, i najbližih celobrojnih vrednosti $\Delta\nabla \bar{N}_F$, veoma su male:

$$r_F = \left| \Delta \nabla N_F - \Delta \nabla \bar{N}_F \right| \approx 0. \quad (5.1.3)$$

Potencijalne celobrojne vrednosti faznih neodređenosti usvajaju se kao tačne kada su simultano ispunjeni sledeći uslovi:

$$\begin{aligned} r_1 &\leq 0.3 \cdot \lambda_1 \\ r_2 &\leq 0.3 \cdot \lambda_2 \\ r_{9,-7} &\leq 0.5 \cdot \lambda_{9,-7} \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Postoji više načina kojima se može smanjiti uticaj pojedinih izvora grešaka i time povećati verovatnoća pouzdanog rešavanja faznih neodređenosti:

- Uticaj grešaka satelitskih orbita na rešavanje faznih neodređenosti potpuno se eliminiše ako se umesto emitovanih koriste precizne IGS efemeride. Međutim, ovakav postupak ograničen je na naknadnu obradu jer IGS produkti nisu dostupni u realnom vremenu.
- Prostorno niskofrekventni uticaji jonosferske refrakcije mogu se obuhvatiti modeliranjem ukupnog sadržaja elektrona polinomima po solarno-geografskim koordinatama jonosferskih tačaka. Na taj način opažanja će biti opterećeni samo rezidualnom refrakcijom koja je posledica lokalnih jonosferskih poremećaja. Postupak modeliranja uticaja jonosferske refrakcije može se izvoditi kako u režimu naknadne obrade, tako i u realnom vremenu.
- Iako su standardni troposferski modeli sasvim dovoljni za potpunu eliminaciju troposferskog uticaja prvog reda, opažanja ka satelitima koji su nisko na horizontu mogu biti značajno opterećena rezidualnom troposferskom refrakcijom. Rešavanje faznih neodređenosti za takva opažanja postiže se modeliranjem zenitnih troposferskih kašnjenja i eventualno njihovih horizontalnih gradijenata. Osim toga, ekstrapolacija ovih parametara iz prethodnih epoha u tekuću izvodi se veoma jednostavno, tako da je postupak redukcije uticaja troposferske refrakcije izuzetno efikasan za upotrebu u realnom vremenu.

Da bi se međutim omogućilo uspešno rešavanje faznih neodređenosti i u uslovima kada rezidualni refrakcioni uticaji dostižu vrednosti od nekoliko centimetara, prostor pretraživanja proširuje se sa obe strane realne fazne neodređenosti odgovarajućom efektivnom talasnom dužinom λ_F . Za svaku celobrojnu vrednost iz tako dobijenog intervala računa se test veličina:

$$T_i = (r_1^2 + r_2^2 + r_{9,-7}^2)_i, \quad (5.1.5)$$

a kao definitivna fazna neodređenost usvaja se ona koja zadovoljava kriterijume razlikovanja:

$$\frac{T_{2,\min}}{T_{\min}} \geq 4, \quad (5.1.6)$$

$$r_{9,-7} \leq 0.5 \cdot \lambda_{9,-7}, \quad (5.1.7)$$

pri čemu T_{\min} i $T_{2,\min}$ označavaju respektivno prvu i drugu najmanju vrednost varijacionog niza.

Praktični postupak rešavanja faznih neodređenosti u mreži permanentnih GPS stanica omogućuje dodatnu redukciju uticaja najvažnijih izvora grešaka, i to na taj način što se prvo rešavaju fazne neodređenosti za par stanica koje su na najmanjem međusobnom rastojanju. Kada se celobrojni delovi faznih opažanja promene tako da je rezultujuća fazna neodređenost jednaka nuli, razmatrani par stanica je doveden na isti nivo neodređenosti (*Wanninger 2000*). Sukcesivno pridruživanje susednih permanentnih stanica i njihovo dovođenje na isti nivo neodređenosti ima za posledicu da su dvostruke fazne neodređenosti za svaki proizvoljni par stanica u mreži jednake nuli.

5.1.3 Sistem kvaliteta aktivnih gradskih GPS mreža

Sistem kvaliteta aktivne geodetske GPS osnove predstavlja niz mera neophodnih da se osigura konzistentno i nesmetano prikupljanje podataka, i kontrola njihovog kvaliteta u odnosu na unapred definisani skup kriterijuma (*Brown et al. 2002*).

U širem smislu te reči, kontrola kvaliteta obuhvata preliminarnu analizu registrovanih podataka, pouzdano otkrivanje naglih, kratkoperiodičnih i dugoperiodičnih promena položaja permanentnih stanica, ažuriranje njihovih koordinata i pravovremeno obaveštavanje korisnika. Međutim, njenu najvažniju komponentu sa stanovišta funkcionalnosti i višekorisničkog karaktera aktivne gradske GPS osnove predstavlja kontrola na nivou izvornih podataka. Ona obuhvata praćenje integriteta originalnih kodnih i faznih opažanja, filtriranje efekata višestruke refleksije i otkrivanje anomalija u satelitskim navigacionim porukama (*de Jong 1996; Wanninger, May 2000*).

Praćenje integriteta zasniva se u principu na paralelnoj primeni rekurzivnog DIA postupka i Kalmanovog filtera. Predmet statističkog testiranja predstavlja vektor prognoziranih reziduuma \mathbf{v}_k , koji je u proizvoljnoj epohi k jednak razlici izvršenih i prognoziranih merenja, zajedno sa odgovarajućom kovarijacionom matricom $\mathbf{C}_{\mathbf{v},k}$. Pod nultom hipotezom, vektor prognoziranih reziduuma ima matematičko očekivanje nula, i njeno testiranje predstavlja fazu detekcije. Faznu identifikaciju čini testiranje jednodimenzionalnih alternativnih hipoteza, od kojih svaka zahteva da se vektor modelskih grešaka $\nabla \mathbf{v}_k$ parametrizuje u obliku $\mathbf{c}_k^T \cdot \nabla$, pri čemu vektor \mathbf{c} određuje tip greške (gruba greška kodnih pseudodužina ili fazni skok faznih pseudodužina), dok ∇ predstavlja nepoznati skalar. Nakon identifikacije najverovatnije alternativne hipoteze vrši se adaptacija Kalmanovog filtera kako bi se eliminisao uticaj modelske greške na vektor stanja.

Prema tome, formulacija odgovarajućeg dinamičkog i mernog modela predstavlja preduslov uspešne primene Kalmanovog filtera i DIA postupka u praćenju integriteta.

Praćenje integriteta originalnih opažanja

S obzirom na to da su permanentne stanice po pravilu opremljene dvofrekventnim GPS uređajima, funkcije veze za kodne i fazne pseudodužine izmerene u proizvoljnoj epohi k mogu se napisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} I_k + \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa \\ -1 \\ -\kappa \end{bmatrix} I_k + \begin{bmatrix} h_{P1} \\ h_{P2} \\ h_{L1} \\ h_{L2} \end{bmatrix}, \quad (5.1.8)$$

sa odgovarajućom kovarijacionom matricom mernog šuma \mathbf{R}_k . Veličina I označava takozvani nedisperzivni član koji se sastoji od geometrijskog rastojanja i uticaja grešaka časovnika prijemnika, satelita, troposferske refrakcije i satelitskih orbita:

$$I_k = \rho_k + c_0 (\delta^s t_k - \delta_r t_k) + T_k + O_k, \quad (5.1.9)$$

dok disperzivni član I predstavlja uticaj jonosferskog kašnjenja signala, koji je za dve GPS frekvencije povezan odnosom:

$$\kappa = \frac{f_1^2}{f_2^2} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \Rightarrow I_2 = \kappa I_1. \quad (5.1.10)$$

Član h je uticaj kašnjenja odgovarajućeg signala pri kretanju kroz hardver prijemnika, za koji se pretpostavlja da je približno konstantan za vreme satelitskog prolaza od nekoliko časova.

Dinamika disperzivnih i nedisperzivnih uticaja za vreme intervala $\Delta t_{k,k-1} = t_k - t_{k-1}$, kao i njihovih izvoda i -tog reda, modelira se u obliku razvoja u Tajlorov red:

$$I_k^{(i)} = \sum_{j=i}^{n_l} \frac{\Delta t_{k,k-1}^{j-i}}{(j-i)!} I_{k-1}^{(j)} \quad (i=0, \dots, n_l), \quad (5.1.11)$$

$$l_k^{(i)} = \sum_{j=i}^{n_l} \frac{\Delta t_{k,k-1}^{j-i}}{(j-i)!} l_{k-1}^{(j)} \quad (i=0, \dots, n_l). \quad (5.1.12)$$

Ova dinamika se po pretpostavci sastoji od procesa belog šuma sa matematičkim očekivanjima jednakim nuli, i sa kovarijacionim matricama Q_k^l i Q_k^I koje karakterišu spektralne gustine $q_l^{(n_l+1)}$ i $q_I^{(n_l+1)}$ respektivno. Za $n_l = 1$ i $n_l = 2$, dinamički i merni model imaju respektivno oblik:

$$\begin{bmatrix} l \\ \dot{l} \\ \ddot{l} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t_{k,k-1} & 0.5\Delta t_{k,k-1}^2 \\ 0 & 1 & \Delta t_{k,k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ \dot{l} \\ \ddot{l} \end{bmatrix}_{k-1}, \quad (5.1.13)$$

$$\begin{bmatrix} I \\ \dot{I} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t_{k,k-1} \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \dot{I} \end{bmatrix}_{k-1}, \quad (5.1.14)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ \dot{l} \\ \ddot{l} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & 0 \\ -1 & 0 \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \dot{I} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 N_1 \\ \lambda_2 N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{P1} \\ h_{P2} \\ h_{L1} \\ h_{L2} \end{bmatrix}. \quad (5.1.15)$$

Merni model je singularan zbog nepotpunog ranga kolona, tako da se nepoznati parametri ne mogu odvojeno ocenjivati čak ni kada na raspolaganju stoji više epoha merenja. Regularizacija se sprovodi parametarskom transformacijom oblika:

$$\begin{bmatrix} S \\ \dot{S} \\ \ddot{S} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} l \\ \dot{l} \\ \ddot{l} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} I \\ \dot{I} \\ 0 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} h_{P1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.1.16)$$

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} I_k \\ I_k - \frac{\lambda_1 N_1}{2} \\ I_k - \frac{\lambda_2 N_2}{\kappa + 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{h_{P2} - h_{P1}}{\kappa - 1} \\ -\frac{h_{L1} - h_{P1}}{2} \\ -\frac{h_{L2} - h_{P1}}{\kappa + 1} \end{bmatrix}. \quad (5.1.17)$$

Na taj način dobija se potpuni, regularni model sa jednakim brojem jednačina i nepoznatih parametara:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ \dot{S} \\ \ddot{S} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\kappa + 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ \dot{I} \end{bmatrix}_k. \quad (5.1.18)$$

Postoje dva osnovna preduslova za uspešnu primenu potpunog mernog modela u praćenju integriteta originalnih merenja:

- Prvi preduslov odnosi se na interval registracije $\Delta t_{k,k-1}$ koji bi trebalo da bude što kraći, naročito pri aktiviranoj SA meri zaštite. S obzirom na to da je ova mera ukinuta 01.05.2000.

godine, interval registracije može čak biti veličine i nekoliko minuta, bez značajnih posledica po adekvatnost modela.

- Drugi preduslov je da parametar S bude glatka funkcija vremena. Ovakav zahtev teško je ispuniti zbog povremeno nepravilnog ponašanja časovnika prijemnika, osim u slučaju da je prijemnik povezan sa eksternim stabilnim oscilatorom. Stoga je najpogodnije da se parametar S zajedno sa svojim izvodima eliminiše, što se postiže oduzimanjem jednog opažanja od svih ostalih. Rezultujući redukovani merni model glasi:

$$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 \\ L_1 - P_1 \\ L_2 - P_1 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \kappa - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\kappa + 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ \dot{I} \end{bmatrix}_k. \quad (5.1.19)$$

Pored toga, potpuni merni model pogodan je u principu i za formiranje diferencijalnih korekcija (Jin 1996). Ako se pomoću preciznih koordinata permanentnih stanica i satelitske navigacione poruke eliminišu geometrijsko rastojanje ρ i uticaj greške satelitskog časovnika $c_0 \cdot \delta^s t$, parametar S postaje:

$$S = -c_0 \delta_r t + T + I + h, \quad (5.1.20)$$

što se upravo podudara sa definicijom diferencijalne korekcije (RTCM SC-104 1994).

Tretman višestruke refleksije signala

Intenzitet višestruke refleksije zavisi pre svega od položaja, oblika i veličine reflektujućih površina u neposrednoj okolini GPS antene. Međutim, uprkos pažljivom izboru lokacije za postavljanje permanentne stanice, prikupljanje podataka još uvek može biti u znatnoj meri opterećeno uticajima odbijenih signala. Modeliranjem efekata višestruke refleksije prilikom praćenja integriteta opažanja smanjuje se njen uticaj na rezultate testiranja, i istovremeno povećava tačnost izvedenih veličina kao što su diferencijalne korekcije ili ocene jonosferskog kašnjenja signala.

Uticaj višestruke refleksije M obuhvata se proširivanjem funkcionalnog modela u delu koji se odnosi na kodne pseudoduzine:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ i \\ \ddot{i} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \dot{I} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} h_{P1} \\ h_{P2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ \dot{M}_1 \\ M_2 \\ \dot{M}_2 \end{bmatrix}_k, \quad (5.1.21)$$

pri čemu se za dinamički model novouvedenog parametra stanja takođe podrazumeva da se sastoji od procesa belog šuma kojeg karakteriše spektralna gustina $q_M^{(2)}$. Proširenje funkcionalnog mernog modela zahteva osim toga i ponovnu regularizaciju, odnosno tri dodatne parametarske transformacije:

$$\bar{S}_k = S_k + M_{1,0}, \quad (5.1.22)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \frac{M_{2,0} - M_{1,0}}{\kappa - 1} \\ \frac{M_{1,0}}{2} \\ \frac{M_{1,0}}{\kappa + 1} \end{bmatrix}, \quad (5.1.23)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta M_1 \\ \Delta M_2 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} M_{1,0} \\ M_{2,0} \end{bmatrix}. \quad (5.1.24)$$

Potpuni i redukovani merni modeli, prošireni parametrima koji opisuju uticaj višestruke refleksije, dobijaju na taj način respektivno sledeće forme:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S} \\ \dot{\bar{S}} \\ \ddot{\bar{S}} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\kappa + 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \dot{I} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M_1 \\ \dot{M}_1 \\ \Delta M_2 \\ \dot{M}_2 \end{bmatrix}_k, \quad (5.1.25)$$

$$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 \\ L_1 - P_1 \\ L_2 - P_1 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \kappa - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\kappa + 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \dot{I} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M_1 \\ \dot{M}_1 \\ \Delta M_2 \\ \dot{M}_2 \end{bmatrix}_k. \quad (5.1.26)$$

Ovi izrazi pokazuju da nije moguće oceniti apsolutne efekte višestruke refleksije već samo njihove promene u odnosu na početne referentne vrednosti $M_{1,0}$ i $M_{2,0}$. Osim toga, ponašanje uticaja višestruke refleksije tokom vremena ne može se pratiti kada na raspolaganju stoje samo jednofrekventna merenja. Međutim, Kalmanov filter obezbeđuje mnogo tačnije i konzistentnije ocene u poređenju sa tradicionalnim postupkom korišćenja dvofrekventnih linearnih kodno-faznih kombinacija:

$$M_{1,k} = P_{1,k} - \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{1,k} + \frac{2f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{2,k}, \quad (5.1.27)$$

$$M_{2,k} = P_{2,k} - \frac{2f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{1,k} + \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{2,k}, \quad (5.1.28)$$

koje su u punom iznosu opterećene nepoznatim faznim neodređenostima, faznim skokovima i mernim šumom kodnih pseudodužina.

Kontrola kvaliteta navigacionih podataka

Prva faza postupka praćenja integriteta ne podrazumeva nikakve dodatne informacije jer je formulisana tako da je kontrola originalnih opažanja potpuno nezavisna od konkretne primene za koju se vrši prikupljanje podataka. U drugoj fazi vrši se kontrola kvaliteta satelitskih navigacionih podataka koji su neophodni pri korišćenju brzih statičkih i kinematičkih metoda pozicioniranja novih tačaka.

Navigaciona poruka sadrži između ostalog elemente i izvode Keplerovih satelitskih putanja pomoću kojih se računaju koordinate satelita, kao i parametre satelitskih časovnika kojima se njihova očitavanja transformišu u sistem GPS vremena. Kontrolni GPS segment povremeno vrši ažuriranje ovih podataka, tako da je njihova važnost ograničena u opštem slučaju na vremenski interval od oko dva časa. Pošto su navigacioni podaci rezultat ekstrapolacije, kvalitet im opada sa udaljavanjem od referentne epohe, zbog čega je njihova kontrola naročito potrebna na krajevima intervala važenja.

Postupak kontrole navigacionih podataka svodi se u suštini na upotrebu prethodno kontrolisanih kodnih pseudodužina. Razlika izmerene kodne pseudodužine i geometrijskog rastojanja sračunatog pomoću preciznih koordinata permanentne stanice i navigacionih podataka, ima strukturu:

$$\begin{aligned} dP_k &= P_k - \rho_k - c_0 \delta^s t_k \\ &= -c_0 \delta_r t_k + T_k + I_k + r_k \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

gde r označava nemodelirani kombinovani uticaj najznačajnijih rezidualnih izvora grešaka, kao što su greška orbite, satelitskog časovnika, višestruke refleksije i mernog šuma. Veličina pojedinih članova iz strukture razlike dP može se znatno redukovati na neki od sledećih načina:

- Uticaj troposferske refrakcije T eliminiše se upotrebom nekog od mnogobrojnih modela. Preostalo troposfersko kašnjenje zanemarljivo je malo u poređenju sa mernim šumom kodnih pseudodužina.
- Jonosferski efekat prvog reda I otklanja se formiranjem dvofrekventne linearne kombinacije P_3 ili primenom jonosferskih koeficijenata iz same navigacione poruke, tako da se rezidualno jonosfersko kašnjenje takođe može smatrati zanemarljivo malim.
- Odstupanje časovnika prijemnika konstantno je za sve opažane satelite u jednoj epohi. Prema tome, potpuna eliminacija člana $c_0 \delta_r t$ može se postići formiranjem prostih razlika doplerskog tipa u svakoj mernoj epohi.

Rezultujuće proste razlike za proizvoljne satelite i i j , dobijaju nakon ovih redukcija jednostavni oblik:

$$\nabla dP_k^{ij} = \nabla r_k^{ij}, \quad (5.1.30)$$

i veoma su pogodne za primenu Kalmanovog filtera i rekurzivnog DIA postupka jer predstavljaju relativno glatke funkcije vremena. Pri tome se filtriranje i testiranje sprovodi operativno na isti način kao u slučaju originalnih opažanja. Ovakav algoritam omogućuje otkrivanje eventualnih grubih grešaka u navigacionim podacima pod uslovom da se kontinuirano prate najmanje dva satelita. Za preciznu identifikaciju onog satelita čiji navigacioni podaci pokazuju anomalijsko ponašanje formiraju se i testiraju sve kombinacije prostih razlika, zbog čega je neophodno da broj satelita bude veći od dva.

5.2 Mogućnosti pozicioniranja novih tačaka

5.2.1 Određivanje diferencijalnih korekcija

Diferencijalne korekcije predstavljaju kvantitativne pokazatelje ukupnog ili individualnog uticaja izvora grešaka, koje je moguće oceniti na osnovu opažanja permanentnih stanica i poznavanja njihovih tačnih koordinata. Princip pozicioniranja pomoću diferencijalnih korekcija zasniva se na pretpostavci o njihovoj visokoj prostornoj korelaciji, tako da im se veličina može prognozirati na lokaciji nove tačke. U zavisnosti od toga da li se određuju efekti na koordinate ili opažanja, formulisanje diferencijalnih korekcija vrši se u matematičkom prostoru položaja, merenja ili stanja (*Mueller 1994; Euler et al. 2001; Wuebbena 2001*).

Diferencijalne korekcije formulišu se u domenu položaja na osnovu poznatih koordinata permanentne stanice \mathbf{x}_{PS} i njenih koordinata određenih u proizvoljnoj epohi $\mathbf{x}_{PS,k}$:

$$\mathbf{dc}_{PS,k} = \begin{bmatrix} dc_x \\ dc_y \\ dc_z \end{bmatrix}_{PS,k} = \mathbf{x}_{PS,k} - \mathbf{x}_{PS}. \quad (5.2.1)$$

Ako se vektor diferencijalnih korekcija emituje radio putem, i na taj način postane dostupan korisniku, koordinate nove tačke $\mathbf{x}_{NT,k}$, određene u istoj epohi, mogu se popraviti po izrazu:

$$\mathbf{x}_{NT} = \mathbf{x}_{NT,k} - \mathbf{dc}_{PS,k}. \quad (5.2.2)$$

Ovako formulisane diferencijalne korekcije pokazale su se nepraktičnim, jer se osim očiglednog ograničenja na kodne pseudodužine pojavljuje i zahtev da se na novoj tački opažaju isti sateliti kao i na permanentnoj stanici, što je često nemoguće zbog terenskih prilika. Stoga se diferencijalne korekcije danas određuju isključivo u domenu faznih merenja.

Funkcionalni model fazne pseudodužine na proizvoljnoj frekvenciji F , izmerena sa permanentne stanice m prema satelitu j , može se napisati u obliku:

$$L_{Fm}^j = \rho_m^j + \lambda_F N_{Fm}^j + B_{Fm}^j + \varepsilon_{Fm}^j, \quad (5.2.3)$$

pri čemu član B obuhvata sve sistematske efekte, i sastoji se od grupe uticaja časovnika C , grupe uticaja D koji pokazuju korelativnu zavisnost od rastojanja, i grupe uticaja S koji su prostorno nekorelisani tako da su specifični za svaku konkretnu permanentnu stanicu ponaosob:

$$B_{Fm}^j = C_{Fm}^j + D_{Fm}^j + S_{Fm}^j. \quad (5.2.4)$$

Pojedini grupni uticaji imaju pri tome sledeću strukturu:

- Grupa uticaja časovnika C sastoji se od odstupanja časovnika prijemnika i satelita od skale sistemskog vremena i kašnjenja signala pri prolasku kroz hardver prijemnika i satelita,

$$C_{Fm}^j = c_0 \delta_m t + h_{Fm} - c_0 \delta^j t - h_F^j = C_{Fm} - C_F^j. \quad (5.2.5)$$

- Grupa prostorno korelisanih uticaja D obuhvata grešku fazne pseudodužine usled greške satelitske orbite, kao i jonosfersko i troposfersko kašnjenje signala,

$$D_{Fm}^j = O_m^k + I_{Fm}^j + T_m^j. \quad (5.2.6)$$

- Grupa uticaja specifičnih za konkretnu lokaciju sadrži grešku fazne pseudodužine usled greške položaja faznog centra antene i uticaj višestruke refleksije signala,

$$S_{Fm}^j = A_{Fm}^j + M_{Fm}^j. \quad (5.2.7)$$

Diferencijalne korekcije konkretne permanentne stanice dobijaju se kao:

$$\begin{aligned} dc_{Fm}^j &= L_{Fm}^j - \rho_m^j - c_0 \delta_m t \\ &= \lambda_F N_{Fm}^j + B_{Fm}^j - c_0 \delta_m t + \varepsilon_{Fm}^j, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

jer se odstupanje časovnika prijemnika $\delta_m t$ lako određuje pomoću kodnih pseudodužina, čime se dodatno redukuje veličina grupnog uticaja C . Međutim, uticaj troposferske refrakcije u potpunosti je prisutan u diferencijalnoj korekciji da se ne bi prejudicirala upotreba konkretnog troposferskog modela sa korisničke strane. Korekcija sračunata na ovaj način formulisana je u prostoru merenja, sastoji se samo od jednog parametra koji obuhvata sve uticajne komponente, i predstavlja veličinu koja se po definiciji emituje u okviru standardnih RTCM poruka tipa 20/21.

Diferencijalne korekcije formulisane su u prostoru stanja onda kada je omogućeno kvantitativno određivanje podskupova uticajnih komponenti. Na primer, korekcije dc_{OT} , koje sadrže kombinovani uticaj orbitalne greške i troposferske refrakcije, i korekcije dc_I , koje opisuju uticaj jonosferskog kašnjenja, mogu se izvesti pomoću standardnih dvofrekventnih linearnih kombinacija:

$$dc_{OTm}^j = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} dc_{1m}^j - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} dc_{2m}^j, \quad (5.2.9)$$

$$dc_{1m}^j = dc_{1m}^j - dc_{2m}^j. \quad (5.2.10)$$

Specijalizovanim postupcima kao što je SMART (*Wuebbena, Willgalis 2001; Wuebbena et al. 2001*), koji se u suštini zasnivaju na paralelnoj primeni više Kalmanovih filtera, može se čak određivati i pratiti stanje svake uticajne komponente ponaosob, pod uslovom da je matematički model adekvatno formiran (*tabela 5.2*).

TABELA 5.2. Primer matematičnog modeliranja uticaja pojedinih izvora grešaka kod SMART algoritma.

Izvor greške	Funkcionalni model	Stohastički model
Satelitski časovnik	Polinom po vremenu	Beli šum
Satelitska orbita	Kartezijanski elementi	Gaus-Markovljev proces
Hardver satelita	Konstanta	Slučajni hod
Jonosferska refrakcija	Polinom po geografskim koordinatama	Gaus-Markovljev proces
Troposferska refrakcija	Modifikovani HOPFIELD model	Slučajni hod
Višestruka refleksija	Funkcija visine satelita	Gaus-Markovljev proces
Časovnik prijemnika	-	Beli šum
Hardver prijemnika	Konstanta	Slučajni hod
Fazna neodređenost	Konstanta	-
Merni šum	-	Beli šum

5.2.2 Pozicioniranje metodom mrežnih koeficijenata

Pozicioniranje u klasičnim RTK sistemima zasniva se na pretpostavci da je veličina diferencijalne korekcije približno konstantna u ograničenoj okolini referentne stanice. Ako se merenje na novoj tački n formalno popravi diferencijalnom korekcijom dc_m , dobija se:

$$L_{Fn}^j - dc_{Fm}^j = \Delta\rho_{mn}^j + \lambda_F \Delta N_{Fmn}^j + \Delta B_{Fmn}^j + \varepsilon_{Fmn}^j + \rho_m^j + c_0 \delta_m t, \quad (5.2.11)$$

odakle sledi:

$$L_{Fn}^j - dc_{Fm}^j - \rho_m^j - c_0 \delta_m t = \Delta L_{Fmn}^j. \quad (5.2.12)$$

Pošto su na levoj strani ovog izraza sve veličine poznate, to znači da je primena diferencijalnih korekcija u RTK sistemima koji se sastoje samo od jedne referentne stanice ekvivalentna formiranju prostih razlika. Zbog nepoznavanja prave vrednosti člana ΔB , očigledno je da samostalne referentne stanice ne doprinose povećanju tačnosti merenja na novoj tački.

Principijelna prednost aktivne referentne osnove koja sa sastoji od više permanentnih stanica sastoji se u mogućnosti prognoze uticaja iz grupe korelativno zavisnih grešaka D , i određene redukcije uticaja iz grupe grešaka S (Fotopoulos, Cannon 2001). To se u opštem slučaju postiže prostornim modeliranjem diferencijalnih korekcija u okviru aktivne mreže, odnosno ocenjivanjem modelskih parametara koje predstavljaju takozvani mrežni koeficijenti (ACP). Prognozirana vrednost \hat{D} postaje na taj način funkcija ACP koeficijenata i relativnog položaja nove tačke:

$$\hat{D}_n^j = f(ACP_m^j, \Delta\varphi_{mn}, \Delta\lambda_{mn}, \Delta h_{mn}), \quad (5.2.13)$$

Značaj mogućnosti predikcije ogleda se u tome što se pozicioniranje novih tačaka u okviru aktivne referentne osnove može vršiti pomoću popravljenih dvostrukih razlika:

$$\Delta\nabla L_{Fmn}^{jk} - \Delta\nabla \hat{D}_{Fmn}^{jk} = \rho_{mn}^{jk} + \lambda_F \Delta\nabla N_{Fmn}^{jk} + \Delta\nabla S_{Fmn}^{jk} + \eta_{Fmn}^{jk} + \varepsilon_{Fmn}^{jk}, \quad (5.2.14)$$

pri čemu η označava grešku prognoze. Određivanje ACP koeficijenata i povećanje tačnosti dvostrukih razlika koje se postiže predikcijom korelativno zavisnih uticaja naročito dolaze do izražaja kod primena u realnom vremenu, jer se fazne neodređenosti mogu rešavati čak i na osnovu merenja iz samo jedne epohe.

Greška prognoze η predstavlja kompleksnu funkciju oblika aktivne mreže, broja permanentnih stanica i relativnog položaja nove tačke. Njena minimalizacija je pored komunikacionih aspekata u osnovi svih savremenih metoda određivanja ACP koeficijenata. Postupci koji su u tom smislu

razvijeni mogu se grupisati prema tome da li se zasnivaju na određivanju parcijalnih izvoda funkcije greške (PDA), primeni linearne interpolacije (LIA), ili kolokacionom pristupu (CAA).

PDA postupci

Osnovna ideja PDA algoritma sastoji se u određivanju numeričkih vrednosti parcijalnih izvoda diferencijalnih korekcija kao funkcije položaja (*Varner, Cannon 1997; Varner 2000*). U tu svrhu nepoznata funkcija razvija se u Tajlorov red u okolini jedne od permanentnih stanica koja se proglašava primarnom:

$$dc = f(\varphi, \lambda, h) = f(\varphi_0, \lambda_0, h_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_0 \Delta\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_0 \Delta\lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_0 \Delta h + \dots \quad (5.2.15)$$

Stepen razvoja zavisi od veličine mreže, dominantnog pravca njenog prostiranja, broja permanentnih stanica i prostornih karakteristika pojedinih izvora grešaka. Ako se uzme u obzir nelinearno ponašanje atmosfere refrakcije u vertikalnom pravcu, ACP koeficijente obično čini sledeći skup:

$$ACP \equiv \left\{ f(\varphi_0, \lambda_0, h_0) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_0 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_0 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_0 \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}\right)_0 \right\} \quad (5.2.16)$$

$$= \{a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4\}$$

PDA algoritam je veoma fleksibilan jer broj ACP koeficijenata može varirati u toku rada sistema. Na primer, određivanje drugog izvoda po visini nije neophodno kada u aktivnoj referentnoj mreži nema velikih visinskih razlika ili su atmosferski uslovi stabilni. Isto tako, za mrežu koja se prostire uglavnom u pravcu sever jug, nema značaja određivanje gradijenta diferencijalnih korekcija po geografskoj dužini. Na taj način moguće je optimalno ocenjivanje korelativno zavisnih grešaka, ali metod ne obezbeđuje redukciju uticaja koji su specifični za konkretnu lokaciju jer koeficijent a_0 opisuje greške ove vrste samo na primarnoj referentnoj stanici.

Pošto se PDA postupak zasniva na dvostrukim razlikama, ACP koeficijenti se ocenjuju po metodi najmanjih kvadrata u svakoj mernoj epohi, i to za svaki nezavisni satelitski par. Algoritam je pogodan pre svega zbog malog opterećenja radio komunikacije, ali zahteva da korisnik upotrebljava isti onaj referentni satelit na kojeg se odnose emitovani ACP koeficijenti.

LIA postupci

Metode linearne interpolacije (LIA) već dugo se upotrebljavaju za modeliranje jonosferskog kašnjenja u obliku zavisnosti od rastojanja (*Han, Rizos 1996; Han 1999; Odijk et al. 2000*). Kao i u slučaju PDA postupka, podaci svake epohe merenja permanentnih stanica prenose se do primarne stanice na kojoj se vrši računanje jonosferskih signala I . Emitovane ACP koeficijente čine koordinate primarne stanice i skup prostih razlika jonosferskih signala za svaki pojedini satelit:

$$ACP \equiv \{(\varphi_0, \lambda_0, h_0) \quad \Delta I_{01} \quad \Delta I_{02} \quad \dots \quad \Delta I_{0s}\}, \quad (5.2.17)$$

gde s označava broj sekundarnih permanentnih stanica. Korisnik popravlja svoja merenja interpolovanim jonosferskim signalom:

$$\Delta I_{0u} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^s p_i \Delta I_{0i}, \quad P = \sum_{j=1}^s p_j, \quad (5.2.18)$$

pri čemu se težine p računaju kao recipročne vrednosti rastojanja:

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi_{ui}^2 + \Delta\lambda_{ui}^2}}. \quad (5.2.19)$$

LIA postupci nisu ograničeni na jonosferske uticaje jer se na identičan način može postupati i sa samim diferencijalnim korekcijama. Međutim, na taj način će biti redukovano samo onaj sadržaj diferencijalnih korekcija kojeg karakteriše prostorna korelacija. Istovremeno smanjenje intenziteta uticaja koji su specifični za konkretnu lokaciju može se postići modelom:

$$dc = a + b\Delta\varphi + c\Delta\lambda, \quad (5.2.20)$$

u kojem se nepoznati ACP koeficijenti ocenjuju metodom najmanjih kvadrata. Pogodnost LIA metoda sastoji se u tome što se baziraju na ocenjivanju parametara za svaki satelit posebno, zbog čega nema ograničenja u pogledu izbora referentnog satelita. Njihov glavni nedostatak predstavlja jednostavnost modela, a samim tim i rizik neadekvatnog opisa prostornog ponašanja uticajnih faktora.

CAA postupci

CAA postupak rezultat je stroge primene teorije optimalnog ocenjivanja, čime se istovremeno omogućuje filtracija diferencijalnih korekcija u opažanjima sa permanentnih stanica i njihova prognoza za opažanja na novoj tački (*Raquet 1998; Fortes et al. 1999; Townsend et al. 1999*). Metoda se zasniva na opštim izrazima kolokacije:

$$d\hat{c}_s = C_{ss} A_s^T (A_s C_{ss} A_s^T)^{-1} (A_s I_s - \lambda \cdot \Delta \nabla N_s), \quad (5.2.21)$$

$$d\hat{c}_u = C_{su} A_s^T (A_s C_{ss} A_s^T)^{-1} (A_s I_s - \lambda \cdot \Delta \nabla N_s), \quad (5.2.22)$$

u kojima pojedini članovi imaju sledeće značenje:

- $d\hat{c}_s$... vektor ocena diferencijalnih korekcija originalnih opažanja na permanentnim stanicama,
- $d\hat{c}_u$... vektor ocena diferencijalnih korekcija originalnih opažanja na novim tačkama,
- C_{ss} ... kovarijaciona matrica originalnih opažanja na permanentnim stanicama,
- C_{su} ... međukovarijaciona matrica originalnih opažanja na permanentnim stanicama i novim tačkama,
- I_s ... vektor redukovanih originalnih opažanja na permanentnim stanicama ($L - \rho$),
- A_s ... Jakobijan dvostrukih razlika originalnih opažanja na permanentnim stanicama ($\partial \Delta \nabla I_s / \partial I_s$),
- $\Delta \nabla N_s$... vektor prethodno rešenih dvostrukih razlika faznih neodređenosti.

S obzirom na to da se originalna opažanja odnose kako na tačke sa različitim međustaničnim rastojanjima tako i na satelite sa različitim zenitnim odstojanjima, određivanje članova kovarijacionih matrica C_{ss} i C_{su} vrši se na osnovu dve funkcije. Prva izražava kovarijaciju vertikalnih komponenti korelativno zavisnih grešaka za proizvoljne tačke P_m i P_n na međusobnom rastojanju d , i ima oblik:

$$\sigma_{z=0}^2(P_m, P_n) = k_1 d + k_2 d^2. \quad (5.2.23)$$

Druga funkcija je redukciona, i služi za preslikavanje kovarijacije na pravac prema satelitu koji ima proizvoljno zenitno odstojanje:

$$E(z) = \frac{1}{\cos z} + k_3 \left(0.53 - \frac{z}{\pi} \right)^3. \quad (5.2.24)$$

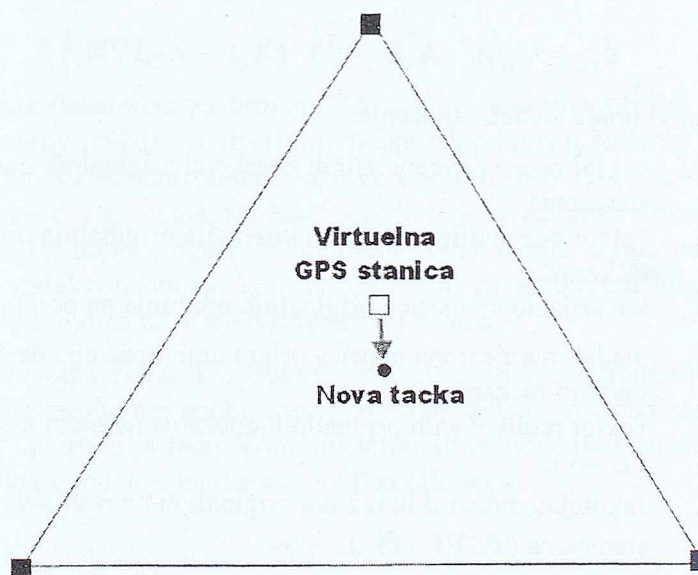
Prema tome, preduslov za upotrebu CAA algoritma predstavlja poznavanje koeficijenata k_1 , k_2 i k_3 . Za razliku od diferencijalnih korekcija njihova dinamika je mnogo niža, tako da se mogu ažurirati samo jednom dnevno.

Prognoza diferencijalnih korekcija za originalna opažanja na permanentnim stanicama i novim tačkama predstavlja važnu karakteristiku CAA postupka, jer sa korisničke strane ne postoje nikakva

ograničenja u pogledu izbora referentnog satelita ili načina obrade. Međutim, sistem ne obezbeđuje praktičnu shemu simultane upotrebe za više aplikacija u realnom vremenu, jer je prognoza specifična za svaku lokaciju ponaosob. Ovaj problem može se prevazići parametrizacijom diferencijalnih korekcija u obliku polinoma nižeg stepena, ili njihovom prognozom u tačkama pravilnog rastera odgovarajuće rezolucije, kao što je to na primer sa uspehom primenjeno u modeliranju jonosferskih uticaja kod WAAS sistema (*El-Arini et al. 1995*).

5.2.3 Pozicioniranje metodom virtuelnih referentnih stanica

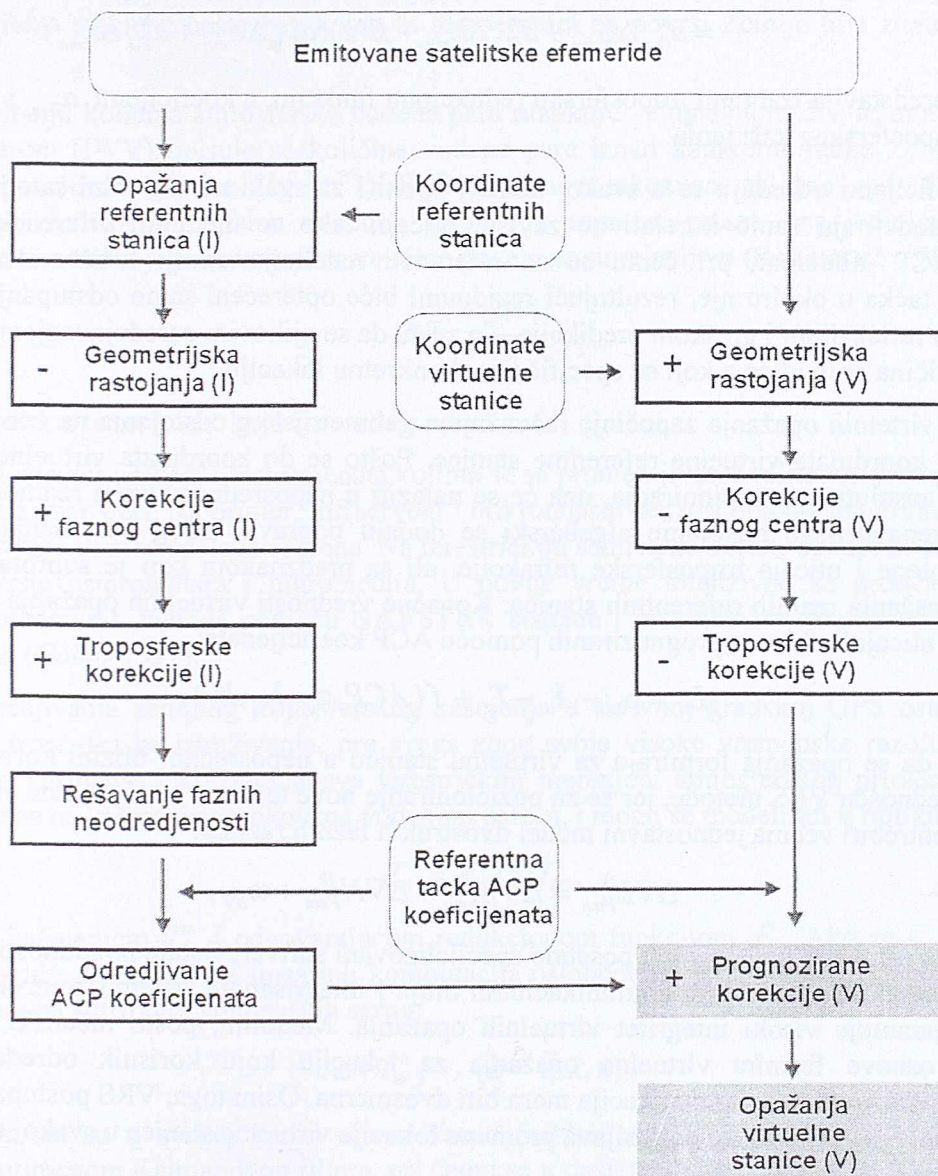
Metoda virtuelnih referentnih stanica (VRS) predstavlja relativno nov postupak pozicioniranja tačaka u okviru aktivne referentne osnove (*Jaeggi et al. 2001; Wanninger 2002*). Suština metode sastoji se u računanju vrednosti kodnih i faznih opažanja za nepostojeću (virtuelnu) referentnu stanicu na osnovu koordinata i opažanja realnih permanentnih stanica. Položaj virtuelne stanice bira se u neposrednoj blizini korisnika, tako da je onda omogućeno relativno pozicioniranje na veoma kratkim rastojanjima (*slika 5.2*).



SLIKA 5.2. Princip pozicioniranja virtuelnim referentnim stanicama.

VRS metoda implicitno podrazumeva obradu podataka realnih referentnih stanica, određivanje mrežnih koeficijenata i formiranje opažanja virtuelne referentne stanice, tako da u tom smislu predstavlja uopštenje ACP algoritma (*slika 5.3*):

Obrada podataka realnih referentnih stanica ima za cilj računanje modifikovanih diferencijalnih korekcija. Opažanja se u tu svrhu prvo redukuju geometrijskim rastojanjima koja se računaju na osnovu emitovanih efemerida i preciznih koordinata referentnih stanica. Na redukovana opažanja se potom primenjuje neki od standardnih troposferskih modela, a ako se na stanicama koristi oprema različitih proizvođača, onda se izvršena merenja dodatno popravljaju zbog odstupanja faznih centara antena. Modifikovane diferencijalne korekcije dobijaju se nakon rešavanja faznih neodređenosti i njihove eliminacije iz originalnih opažanja.



SLIKA 5.3. Princip formiranja opažanja na virtualnim referentnim stanicama.

Dvofrekventne linearne kombinacije modifikovanih diferencijalnih korekcija modeliraju se na nivou dvostrukih razlika u obliku:

$$\Delta \nabla dc_{I,mn}^{jk} = a_{I,\varphi}^k \Delta \varphi_{mn} + a_{I,\lambda}^k \Delta \lambda_{mn}, \quad (5.2.25)$$

$$\Delta \nabla dc_{OT,mn}^{jk} = a_{OT,\varphi}^k \Delta \varphi_{mn} + a_{OT,\lambda}^k \Delta \lambda_{mn}, \quad (5.2.26)$$

tako da za referentni satelit j po definiciji važi:

$$a_{I,\varphi}^j = a_{I,\lambda}^j = a_{OT,\varphi}^j = a_{OT,\lambda}^j = 0. \quad (5.2.27)$$

Koeficijenti ovih modela predstavljaju gradijente disperzivnih i nedisperzivnih uticaja po geografskoj širini odnosno dužini. Model nedisperzivnih uticaja može se pri tome dodatno razdvojiti na orbitalnu i troposfersku komponentu:

$$\begin{aligned}\Delta\nabla dc_{OT,mn}^{jk} &= \Delta\nabla dc_{O,mn}^{jk} + \Delta\nabla dc_{T,mn}^{jk} \\ &= a_{O,\varphi}^k \Delta\varphi_{mn} + a_{O,\lambda}^k \Delta\lambda_{mn} + E(z)(a_{T,\varphi}^k \Delta\varphi_{mn} + a_{T,\lambda}^k \Delta\lambda_{mn}),\end{aligned}\quad (5.2.28)$$

gde $E(z)$ predstavlja izabranu troposfersku redukcionu funkciju, a koeficijenti $a_{T,\varphi}$ i $a_{T,\lambda}$ gradijente zenitnog troposferskog kašnjenja.

Mrežni koeficijenti određuju se u svakoj mernoj epohi i za svaki nereferentni satelit ponaosob, ali njima se modeliraju samo korelativno zavisni uticaji. Ako se međutim diferencijalne korekcije redukuju ACP modelom, pri čemu se za referencu redukcije usvoji težište aktivne mreže ili proizvoljna tačka u okviru nje, rezultujući reziduumi biće opterećeni samo odstupanjima časovnika, višestrukom refleksijom i greškom predikcije. To znači da se njihovim osrednjavanjem može značajno smanjiti veličina onih uticaja koji su specifični za konkretnu lokaciju.

Formiranje virtuelnih opažanja započinje računanjem geometrijskog odstojanja na osnovu emitovanih efemerida i koordinata virtuelne referentne stanice. Pošto se do koordinata virtuelne stanice dolazi postupkom apsolutnog pozicioniranja, ona će se nalaziti u neposrednoj blizini realnog korisnika. Na sračunato geometrijsko rastojanje algebarski se dodaju popravke zbog odstupanja faznog centra virtuelne antene i uticaja troposferske refrakcije, ali sa predznakom koji je suprotan u odnosu na popravke opažanja realnih referentnih stanica. Konačne vrednosti virtuelnih opažanja L_V dobijaju se obračunom uticajnih faktora prognoziranih pomoću ACP koeficijenata:

$$L_V = \rho_V - A_V - T_V + f(ACP, \varphi_V, \lambda_V, h_V). \quad (5.2.29)$$

Mogućnost da se opažanja formiraju za virtuelnu stanicu u neposrednoj blizini korisnika smatra se glavnom prednošću VRS metode, jer se za pozicioniranje nove tačke n u odnosu na virtuelnu stanicu m može upotrebiti veoma jednostavni model dvostrukih faznih razlika:

$$\Delta\nabla L_{Fmn}^{jk} = \Delta\nabla \rho_{Fmn}^{jk} + \Delta\nabla N_{Fmn}^{jk} + \omega_{\Delta\nabla}, \quad (5.2.30)$$

što korisnika oslobađa investicija u posebno specijalizovani softver. Ostale pogodnosti VRS postupka sastoje se u malom opterećenju komunikacionih linija i integrisanom sistemu kontrole kvaliteta koji korisniku garantuje visoki integritet virtuelnih opažanja. Međutim, pošto računski sistem aktivne referentne osnove formira virtuelna opažanja za lokaciju koju korisnik određuje postupkom apsolutnog pozicioniranja, komunikacija mora biti dvosmerna. Osim toga, VRS postupak nije pogodan za kinematičke primene jer ne dozvoljava promenu lokacije virtuelne stanice u svakoj epohi merenja.

5.3 Ostale mogućnosti aktivnih gradskih GPS mreža

5.3.1 Mogućnosti atmosferskih istraživanja

Pošto je originalno projektovan za sasvim druge svrhe, principijelne mogućnosti NAVSTAR sistema u kosmički i terestrički zasnovanim atmosferskim istraživanjima ograničene su na određivanje samo nekih parametara troposferskog i jonosferskog omotača. Kada su u pitanju aktivne gradske GPS mreže, postoje još dva problema koja dodatno otežavaju ovu vrstu primene. Pre svega, aktivna gradska referentna osnova je lokalnih razmera, zbog čega se rezultati istraživanja odnose na srazmerno mali deo atmosfere. Osim toga, atmosferski parametri ocenjeni u aktivnoj mreži imaju relativni karakter, dok su za klimatološku i meteorološku interpretaciju od značaja po pravilu apsolutne vrednosti. Međutim, ukupni potencijal sistema je u tom smislu tako veliki da su odgovarajuće metode danas izdvojene u posebnu oblast koja se naziva GPS meteorologijom.

Određivanje sadržaja vodene pare u troposferi

Atmosferska vodena para predstavlja jedan od najvažnijih faktora za razumevanje promena u klimatskom sistemu i mehanizmu hidrološkog ciklusa (*Mockler 1995*). Naizmenično isparavanje vode i njena kondenzacija omogućuju prenos toplote kroz atmosferu i distribuciju vode u okviru Zemljinog ekosistema, što ima velike praktične implikacije jer su na taj način određeni režim padavina i stanje

vlažnosti tla. Osim toga, vodena para učestvuje u sastavu atmosfere sa 62%, i predstavlja glavni uzrok prirodnog efekta staklene bašte bez kojeg bi temperatura na površi Zemlje bila znatno ispod tačke smrzavanja.

Kada je u pitanju količina atmosferske vodene pare razlikuju se uglavnom dva termina. Integralnom vodenom parom (I WV) opisuje se količina vodene pare iznad konkretne tačke Zemljine površi u jedinicama površinske gustine ($kg \cdot m^{-2}$). S druge strane, takozvana taložna voda (PW) označava odgovarajuću ekvivalentnu visinu vodenog stuba čiji poprečni presek ima jediničnu površinu, i izražava se u linearnim jedinicama. Dve veličine povezane su relacijom (Bevis et al. 1992):

$$PW = \frac{I WV}{\rho_w}, \quad (5.3.1)$$

gde je ρ_w gustina tečne vode koja iznosi $1kg \cdot dm^{-3}$.

Postoji širok spektar uređaja i instrumenata kojima se sa promenljivim kvalitetom može meriti sadržaj vodene pare u atmosferi. Na primer, infracrveni i mikrotalasni senzori obično se ugrađuju u satelitske platforme, avione ili meteorološke balone. Na terestričkim stanicama koriste se radiometri vodene pare i različite vrste psihrometara i higrometara. U novije vreme intenzivno se proučava mogućnost upotrebe okultacionih metoda pomoću NAVSTAR sistema i niskotelećih satelita opremljenih GPS prijemnicima (Gabor 1997).

Rezultati ocenjivanja zenitnog troposferskog kašnjenja u aktivnoj gradskoj GPS osnovi takođe su značajni za troposferska istraživanja, pre svega zbog svoje visoke vremenske rezolucije. Pošto se hidrostatičko kašnjenje lako obračunava terestričkim merenjem atmosferskog pritiska, troposferski uticaji svode se na kašnjenja uzrokovana vodenom parom, i mogu se modelirati u obliku:

$$T_w = F_w(z)T_w^z, \quad (5.3.2)$$

sa zenitnim kašnjenjem T^z i odgovarajućom redukcionom funkcijom F . Ako se u aktivnoj mreži koriste dvostruke fazne razlike linearnih kombinacija oslobođenih jonosferskih uticaja (L_3), tada se problem svodi na filtriranje vremenskih serija:

$$\Delta \nabla T_{w,k}^z \quad (k = 1, \dots, n), \quad (5.3.3)$$

pod uslovom da su u svakoj epohi rešene fazne neodređenosti. Optimalni rezultati dobijaju se formalnom primenom Kalmanovog filtera, pri čemu se u opštem slučaju smatra da vlažnom zenitnom troposferskom kašnjenju odgovara proces slučajnog hoda:

$$\Delta \nabla T_{w,k}^z = \Delta \nabla T_{w,k-1}^z + w_k, \quad (5.3.4)$$

gde je w beli šum sa disperzijom q . Uspešnost ovakvog modela filtracije zavisi od načina na koji se rešavaju sledeći problemi:

- Relativna priroda dvostrukih razlika ima za posledicu ocene relativnih zenitnih kašnjenja, koje sa meteorološkog i klimatskog stanovišta nemaju veliki značaj. Pouzdane vrednosti apsolutnih zenitnih kašnjenja mogu se dobiti samo ako je mreža velikog obima, što sa aktivnom gradskom GPS osnovom nije slučaj. Rešenje problema obuhvata uključivanje GPS vektora koji povezuju aktivnu gradsku mrežu sa udaljenim IGS permanentnim stanicama, ili određivanje apsolutnih kašnjenja na osnovu podataka numeričkih vremenskih modela (NWM). Isti način može se koristiti i za inicijalizaciju Kalmanovog filtera.
- Numerička vrednost parametra q mora biti objektivno određena. Mala vrednost imaće za posledicu da Kalmanov filter funkcioniše kao niskopropusni filter, tako da fina struktura zenitnog kašnjenja neće biti vidljiva. Ako je vrednost suviše velika, rezultujuća vremenska serija biće značajno opterećena poremećajnim faktorima kao što su merni šum i višestruka refleksija, tako da filtriranje gubi smisao.

- Da bi rezultati ocenjivanja u aktivnoj gradskoj GPS osnovi mogli da se koriste za određivanje sadržaja atmosferske vodene pare, hidrostatičko zenitno kašnjenje mora biti precizno modelirano. Postojeći modeli, kao što je SAASTAMOINEN, imaju visoku tačnost, ali su za njihovu primenu neophodna merenja atmosferskog pritiska ili temperature. U nedostatku tih opažanja, ocene zenitnih kašnjenja mogu biti znatno pomerene.

Meteorološki upotrebljiv parametar PW dobija se iz apsolutnih zenitnih kašnjenja po izrazu:

$$PW = Q \cdot T_w^z, \quad (5.3.5)$$

gde Q označava bezdimenzionalni konverzioni faktor. Njegova vrednost može se odrediti na osnovu srednje temperature atmosfere T_M u $^{\circ}K$:

$$Q = 0.102 + \frac{1708.08}{T_M}, \quad (5.3.6)$$

pri čemu su numeričke konstante poznate sa dovoljnom tačnošću. Analiza podataka radio sonde pokazuje da srednja temperatura atmosfere linearno zavisi od površinske temperature T_0 kao nezavisne promenljive (Emardson 1998; Mendes et al. 2000):

$$T_M = 54.7 + 0.77T_0. \quad (5.3.7)$$

Pošto GPS antena nije neposredno na fizičkoj površi Zemlje već na nekoj visini, neophodno je i poznavanje vertikalnog gradijenta srednje atmosferske temperature, ali se ta vrednost može odrediti sa dovoljnom tačnošću upotrebom NWM modela. Prema tome, primena aktivnih gradskih GPS mreža u troposferskim istraživanjima ima opravdanja samo u zajedničkoj obradi sa rezultatima meteoroloških opažanja.

Određivanje sadržaja elektrona u jonosferi

Stanje jonosfere određeno je u svakom trenutku vremena sadržajem slobodnih elektrona. Intenzitet Sunčevog zračenja i rotacija Zemlje glavni su razlozi vremenskih i prostornih varijacija tog sadržaja na globalnom nivou. Postoji međutim i čitav niz nedovoljno ispitanih fizičkih procesa, kao što su interakcija sa Zemljinim magnetnim poljem, Sunčeve erupcije ili geomagnetne oluje, koji uzrokuju srednjetalasne i kratkotalasne jonosferske poremećaje. Ove pojave imaju za posledicu naglo povećanje jonosferske gustine elektrona, ali je prognoziranje njihovih efekata praktično nemoguće zbog izražene nepravilnosti perioda i intenziteta. Stoga je određivanje sadržaja elektrona sa visokom vremenskom i prostornom rezolucijom jedna od najvažnijih metoda jonosferskih istraživanja.

Činjenica da je NAVSTAR GPS dizajniran kao dvofrekventni sistem upravo sa ciljem da se eliminišu jonosferski uticaji omogućuje istovremeno da se iz izvršenih merenja izoluju jonosferske informacije. U tu svrhu se kao merna veličina koristi dvofrekventna linearna kombinacija koja sadrži samo uticaj jonosferske refrakcije i faznu neodređenost, odnosno takozvani fazni jonosferski signal L_4 :

$$\begin{aligned} L_{4,m}^j &= L_{1,m}^j - L_{2,m}^j \\ &= -\xi_4 I_m^j + \lambda_1 N_{1,m}^j - \lambda_{2,m}^j \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

gde ξ_4 označava odnos jonosferskog kašnjenja linearne kombinacije i jonosferskog kašnjenja signala na prvoj frekvenciji:

$$\xi_4 = \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_2^2} \approx -0.647. \quad (5.3.9)$$

Kada se jonosferski signali izraze na nivou dvostrukih razlika i izvrši parametrizacija jonosferskog kašnjenja, osnovni jonosferski GPS model dobija oblik:

$$\Delta \nabla L_{4,mn}^{jk} = -A \cdot \xi_4 \cdot F_{mn}^{jk}(z) \cdot VTEC_{mn}^{jk}(\beta, s) + \lambda_1 \Delta \nabla N_{1,mn}^{jk} - \lambda_2 \Delta \nabla N_{2,mn}^{jk}, \quad (5.3.10)$$

sa konstantom A ($0.162m \cdot TECU^{-1}$), redukcijom funkcijom $F(z)$ i zenitnim sadržajem elektrona, $VTEC$, u funkciji solarno-geomagnetskih koordinata s i β . Osnovni jonosferski model upućuje na sledeće važne probleme:

- Zenitni sadržaj elektrona, $VTEC$, ne može se oceniti na osnovu jedne epohe merenja jer je za pouzdano razdvajanje ovog parametra od parametara fazne neodređenosti neophodno da redukciona funkcija značajnije promeni svoju vrednost, što je moguće tek sa dužim serijama merenja.
- Solarno-geomagnetske koordinate jonosferskih tačaka menjaju svoje vrednosti zbog kretanja satelita i rotacije Zemlje. Da bi se ocene $VTEC$ parametara mogle pridružiti konkretnim vremenskim epohama, neophodna je njihova dalja parametrizacija.
- Zenitni sadržaj elektrona, $VTEC$, pojavljuje se u jonosferskom modelu na nivou dvostrukih razlika. Za određivanje apsolutnih vrednosti ovog parametra potrebno je otkloniti datumski defekt ranga.

Određivanje zenitnog sadržaja elektrona u globalnoj IGS mreži permanentnih stanica nije opterećeno navedenim problemima jer se $VTEC$ parametrizuje u obliku sfernoharmonijskog razvoja, a datumski defekt otklanja postavljanjem fizički sasvim opravdanog uslova da srednja globalna vrednost apsolutnog jonosferskog kašnjenja bude jednaka nuli. Međutim, kod aktivnih gradskih GPS mreža situacija je nešto drugačija:

- Pre svega, mogućnosti aktivne gradske osnove ograničene su njihovim lokalnim karakterom, tako da se i parametrizacija zenitnog sadržaja elektrona mora vršiti lokalno (*Georgiadou, Kleusberg 1988; Wild 1994; Komjathy 1997*). Pri tome je od odlučujućeg značaja prostiranje aktivne gradske mreže po geografskoj širini, jer je pokrivenost po Sunčevom časovnom uglu potpuna zbog permanentnih opažanja.
- Fiksiranje proizvoljne vrednosti apsolutnog jonosferskog kašnjenja za referentnu stanicu i referentni satelit otklanja defekt ranga, ali nema fizički značaj. Ovaj problem može se principijelno rešiti korišćenjem IGS jonosferskih mapa koje obezbeđuju informacije o apsolutnim jonosferskim kašnjenjima, tako da u tom smislu aktivna gradska mreža predstavlja jonosfersko progušćenje globalnog rešenja.

Kodna merenja aktivne gradske GPS mreže nemaju veliki značaj u istraživanju jonosfere zbog svoje niske tačnosti, ali se u nedostatku drugih informacija može iskoristiti činjenica da originalna dvofrekventna linearna kombinacija P_4 sadrži apsolutno jonosfersko kašnjenje:

$$P_{4,m}^j = A \cdot \xi_4 \cdot F_m^j(z) \cdot VTEC_m^j(\beta, s) + c_0(\Delta h_m - \Delta h^j). \quad (5.3.11)$$

Teškoću u ovom pristupu predstavljaju međufrekventna diferencijalna kašnjenja kodnih signala, DCB, pri prolasku kroz hardver prijemnika i satelita:

$$\begin{aligned} \Delta h_m &= h_{1,m} - h_{2,m} \\ \Delta h^j &= h_1^j - h_2^j \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Ocenjivanje DCB parametara za svaki prijemnik vrši se po pravilu relativno u odnosu na referentni prijemnik, osim kada se mogu direktno meriti kao što je to slučaj sa Rogue prijemnicima. Njihove vrednosti kreću se i do $20ns$. Što se tiče DCB vrednosti za satelite, one se određuju laboratorijski pre lansiranja tako da se mogu uzeti kao poznate, iako ispitivanja pokazuju da se ocenjene vrednosti povremeno znatno razlikuju od publikovanih (*Bertiger et al. 1998*).

5.3.2 Mogućnosti geodinamičkih istraživanja

Zbog geometrijske prirode rezultata GPS merenja i ograničene površine prostiranja, geodinamičko korišćenje aktivne gradske osnove moguće je samo u oblasti savremenih kretanja Zemljine kore

lokalnog karaktera. Rezultati geodetske deformacione analize ponovljenih GPS merenja doprinose u određenoj meri poboljšanju definicije lokalnog referentnog sistema, ali njihova objektivna vrednost zavisi pre svega od mogućnosti geofizičke, neotektonske i seizmičke interpretacije.

U zavisnosti od prostornih karakteristika ispitivanih deformacija, aktivna gradska osnova može da se koristi kao apsolutna ili relativna GPS deformaciona mreža, ali je u oba slučaja obično potrebna dodatna diskretizacija takozvanim tačkama objekta kako bi se povećala prostorna rezolucija (slika 5.4). Što se tiče vremenske diskretizacije, njena rezolucija je proizvoljno visoka za stalno operative prijemnike permanentnih stanica, tako da zavisi samo od frekvencije ponovljenih opažanja na tačkama objekta. GPS deformaciona analiza zasniva se, prema tome, na vektorima položaja tačaka \hat{x}_k i odgovarajućim kovarijacionim matricama C_{kk} ocenjenim u više epoha, i sastoji se u postizanju dva osnovna cilja: otkrivanju statistički značajnih deformacija i modeliranju tako otkrivenih deformacija.

Otkrivanje deformacija svodi se na otkrivanje promena položaja tačaka deformacione mreže, i obično se vrši pomoću vektora pomeranja između dve sukcesivne ili proizvoljne epohe merenja:

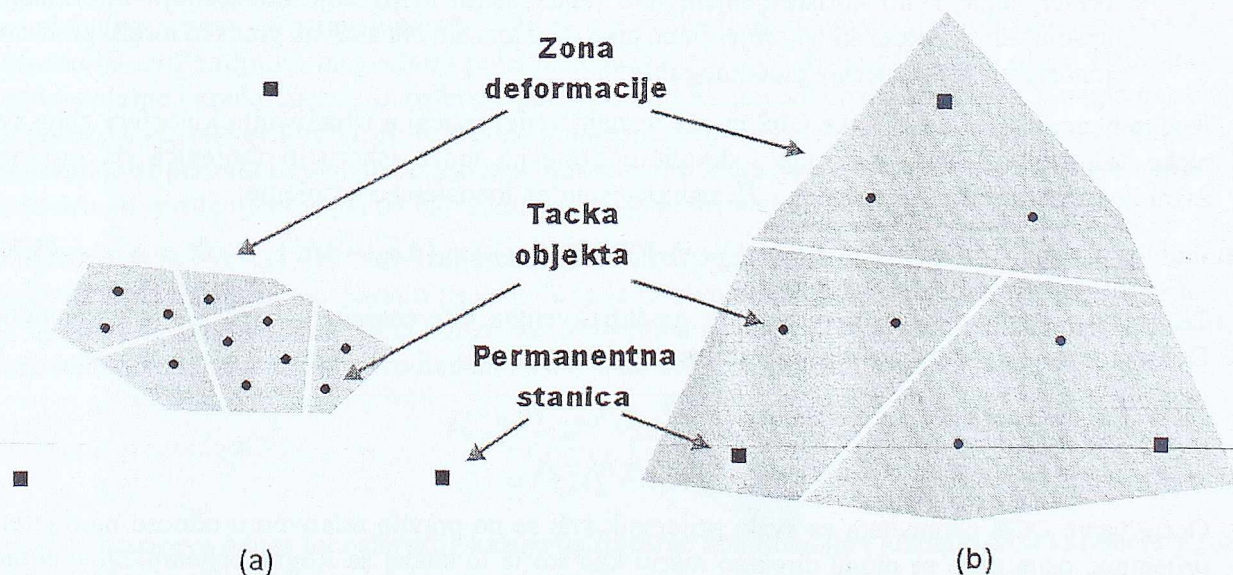
$$dx = \hat{x}_l - \hat{x}_k, \quad (5.3.13)$$

$$C_{dx} = C_{kk} + C_{ll} - C_{kl} - C_{lk}, \quad (5.3.14)$$

Test veličina kojom se utvrđuje globalna kongruentnost između dve epohe ima opšti oblik:

$$T = \frac{1}{p\hat{\sigma}_0^2} dx^T C_{dx}^+ dx, \quad (5.3.15)$$

pri čemu p označava rang kovarijacione matrice vektora pomeranja, dok je $\hat{\sigma}_0$ objedinjena ocena standarda jedinice težine. Teorijski modeli kojima se obuhvataju različiti datumski defekti, nehomogena tačnost i različite geometrije između epoha dobro su razvijeni, tako da danas postoji čitav spektar metoda kojima je moguće statistički utvrditi relativne promene položaja pojedinačnih tačaka ili grupa tačaka (Yong Qi 1983; Ašanin 1986; Caspary 1987; Perović 1998; Radovanovic 2002).



SLIKA 5.4. Aktivna gradska referentna GPS osnova i prostorna diskretizacija područja deformacija: (a) apsolutni deformacioni model; (b) relativni deformacioni model.

Osetljivost deformacione mreže, odnosno njena sposobnost da sa što većom verovatnoćom otkrije mala pomeranja u određenom pravcu, zavisi od stepena ispunjenosti osnovnih ciljnih funkcija:

$$\text{tr}(\mathbf{C}_{kk}) \rightarrow \min, \quad (5.3.16)$$

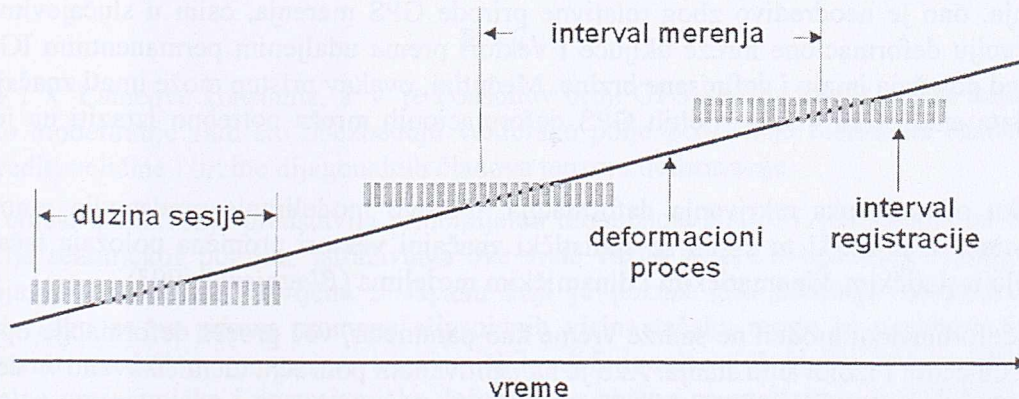
$$\text{tr}(\mathbf{C}_{kl}) \rightarrow \max, \quad (5.3.17)$$

od kojih prva predstavlja uslov što veće tačnosti pojedinih koordinatnih rešenja, a druga izražava potrebu za što većom korelacijom između epoha. Kada su u pitanju GPS deformacione mreže, ovi zahtevi ispunjavaju se relativno lako. Na tačnost relativnog GPS pozicioniranja utiče pre svega brzina promene satelitske geometrije, tako da prostorni raspored stanica ne predstavlja ograničenje. S druge strane, visoka međuzavisnost ocena položaja postiže se identičnim satelitskim konstelacijama i sličnošću uslova merenja, čime se u velikoj meri eliminišu niskofrekventni efekti višestruke refleksije i rezidualni atmosferski uticaji (Hartinger, Brunner 1999).

S obzirom na to da osetljivost GPS deformacione mreže praktično ne zavisi od geometrijskog rasporeda tačaka, dizajn mernog procesa sastoji se u izboru tri osnovna parametra: intervala registracije τ , dužine merne sesije t i intervala ponovljenih merenja T . Ovi parametri nisu međusobno nezavisni jer mora biti ispunjeno:

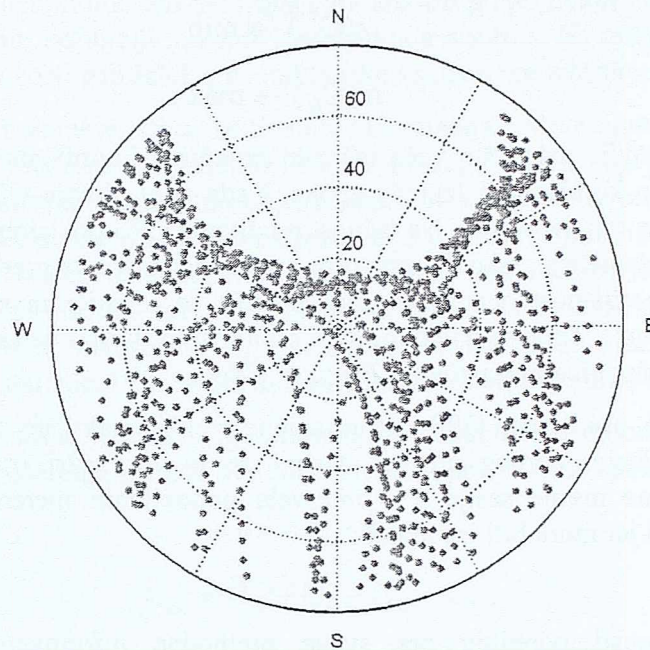
$$\tau < t < T, \quad (5.3.18)$$

ali konkretne vrednosti određuju pre svega prethodne informacije o dinamici ispitivanog deformacionog procesa (slika 5.5). Na primer, kratke merne sesije znače malu promenu satelitske geometrije, a time po pravilu i manju tačnost ocena koordinata, odnosno otežano rešavanje faznih neodređenosti. Kod dugačkih mernih sesija postoji potencijalna opasnost da koordinatna rešenja apsorbuju spore deformacije. Što se tiče intervala registracije, mala vrednost u svakom slučaju ne doprinosi suštinski postizanju veće tačnosti zbog visoke vremenske korelacije GPS merenja.



SLIKA 5.5. Odnos između brzine deformacionog procesa, intervala registracije, dužine sesije i intervala ponovljenih merenja.

GPS deformacione mreže karakteristične su po tome što je za statistički utvrđena pomeranja postupak testiranja pravca pomeranja veoma jednostavan. Razlog tome je inklinacija satelitskih putanja od 55° , zbog čega na severnoj Zemljinoj polulopti nema elektronski vidljivih satelita u užem ili širem azimutalnom pojasu oko pravca severa (slika 5.6). Posledica ovakve satelitske konstelacije je da su poluose elipsoida grešaka položaja tačaka približno paralelne pravcima osa lokalnog elipsoidnog sistema (pravac sever-jug, istok-zapad i zenit-nadir), a pošto su to istovremeno i pravci dekorelisanih grešaka, odgovarajuće komponente vektora pomeranja mogu se praktično individualno i nezavisno testirati na značajnost.



SLIKA 5.6. Azimutalno-zenitni prikaz satelitskih položaja tokom 24h za geografske koordinate Beograda.

Druga važna karakteristika GPS deformacionih mreža po kojoj se one razlikuju od terestričkih sastoji se u mogućnosti detekcije ukupne rotacije, zahvaljujući tome što je orijentacija rezultata GPS pozicioniranja dobro definisana satelitskim koordinatama. Što se tiče ukupnog translatorskog pomeranja, ono je neodredivo zbog relativne prirode GPS merenja, osim u slučajevima kada se u konfiguraciju deformacione mreže uključe i vektori prema udaljenim permanentnim IGS stanicama koje pored položaja imaju i definisane brzine. Međutim, ovakav pristup može imati značaja samo kada je rezultate analize za više različitih GPS deformacionih mreža potrebno izraziti na jedinstvenom nivou.

Za razliku od postupka otkrivanja deformacija, njihovo modeliranje predstavlja mnogo teži deo deformacione analize. U tu svrhu se statistički značajni vektori promena položaja tačaka najčešće analiziraju u statičkim, kinematičkim i dinamičkim modelima (Blagojević 1993).

Statički deformacioni modeli ne sadrže vreme kao parametar, već proces deformacije opisuju u vidu niza pojedinačnih i izolovanih stanja. Ako je na ispitivanom području identifikovano k deformabilnih oblasti, odgovarajući matematički model ima oblik:

$$\mathbf{dx} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_1 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{p}}_k \end{bmatrix} + \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{\mathbf{dx}}), \quad (5.3.19)$$

pri čemu izbor vektora parametara \mathbf{p} i oblik konfiguracione matrice \mathbf{D} određuju geološko-geofizička saznanja o prirodi deformacija. To mogu, na primer, biti sledeće mogućnosti:

- komponente vektora pomeranja tačaka:

$$\mathbf{p}_i^T = [u_x \quad u_y \quad u_z \quad \dots]_i, \quad (5.3.20)$$

- parametri kretanja čvrstog tela:

$$\mathbf{p}_i^T = [t_x \quad t_y \quad t_z \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad m]_i, \quad (5.3.21)$$

- parametri simetrične elastične deformacije:

$$\mathbf{p}_i^T = [e_{XX} \quad e_{XY} \quad e_{XZ} \quad e_{YY} \quad e_{YZ} \quad e_{ZZ}]_i, \quad (5.3.22)$$

- koeficijenti funkcija poznatih oblika:

$$\mathbf{p}_i^T = [c_1 \quad c_2 \quad \dots]_i. \quad (5.3.23)$$

U kinematičkim deformacionim modelima analiziraju se promene položaja tačaka sa stanovišta vremenske zavisnosti. Najširu upotrebu imaju polinomske oblike:

$$d\mathbf{x}_{t_0,t} = \dot{\mathbf{x}}(t-t_0) + \ddot{\mathbf{x}} \frac{(t-t_0)^2}{2} + \dots, \quad (5.3.24)$$

u kojima $\dot{\mathbf{x}}$ i $\ddot{\mathbf{x}}$ označavaju respektivno vektore brzine i ubrzanja za referentnu epohu t_0 . Kinematička deformaciona analiza je oblast u kojoj GPS deformacione mreže imaju naročito veliki potencijal. Razlog tome leži u činjenici da se interval ponovljenih GPS merenja može učiniti proizvoljno malim. Na taj način se obezbeđuje visoka reprezentativnost ocenjenih kinematičkih parametara, koji sa svoje strane imaju veliki značaj za korelaciju sa podacima drugih geonauka. Pored toga, polinomska predstava promenljivih položaja tačaka predstavlja istovremeno i pogodan način formulisanja vektora stanja i dinamičkog modela u okviru Kalmanovog filtera.

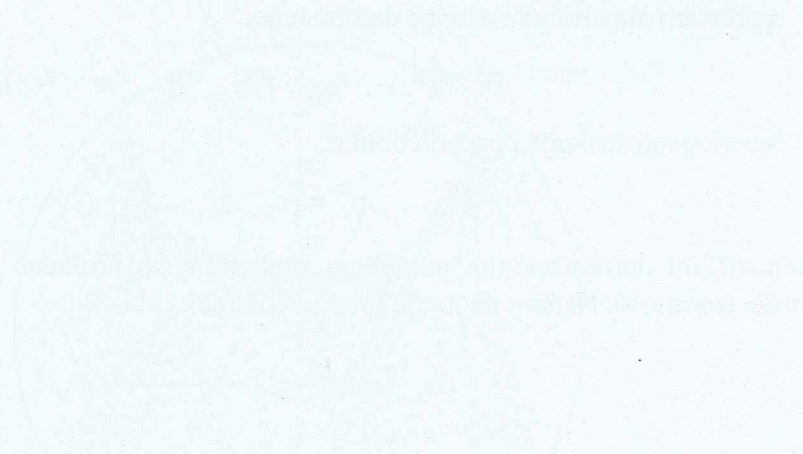
Najpotpuniji opis deformacionih procesa postiže se upotrebom dinamičkih deformacionih modela. Oni su ujedno i najkompleksniji, jer podrazumevaju modeliranje uzročnih sila. Kada je u pitanju Zemljina kora, dinamički modeli svode se na reološke funkcije kojima se ostvaruje veza između tenzora deformacije \mathbf{U} i tenzora napona \mathbf{P} . Primeri geofizički najpoznatijih reoloških funkcija su uopšteni Hukov zakon i model Njutnovog viskoznog tela (*Hofmann Wellenhof et al. 1989*):

$$\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{U} + \lambda \cdot \text{tr}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{I}, \quad (5.3.25)$$

$$\mathbf{P} = 2\nu\dot{\mathbf{U}}, \quad (5.3.26)$$

gde su μ i λ Lamove konstante, a ν je Poasonov broj. GPS deformacione mreže značajne su za dinamičko modeliranje zato što obezbeđuju vektorsko polje pomeranja tačaka na osnovu kojeg se mogu odrediti veličine i brzine dijagonalnih članova tenzora deformacije.

Posebnu oblast istraživanja predstavlja principijelna mogućnost NAVSTAR sistema za modeliranje deformacija seizmičkog porekla. Istraživanja ove vrste važna su pre svega zbog velikih praktičnih implikacija, i naročito su razvijena u Japanu koji je poznat kao područje izrazitih seizmičkih aktivnosti. Tako se na primer promene elipsoidnih visina tačaka mogu sa uspehom upotrebiti u dislokacionim modelima prognoze koseizmičkih deformacija (*Holdahl 1985; Zhang 1987*). Horizontalne preseizmičke i postseizmičke deformacije obično se analiziraju u STRAIN modelima, koji su osim toga pogodni i zbog fizičkog značenja izvedenih parametara (*Welsch 1982*). U novije vreme intenzivno se razrađuju i mogućnosti da se GPS deformacione mreže koriste kao seizmometrijski sistemi (*Ge 1999*). Međustanična rastojanja aktivnih gradskih mreža dovoljno su velika da se uz odgovarajući interval registracije mogu otkriti vremena nailaska primarnih i sekundarnih seizmičkih talasa, a time i lokacije epicentara. Konačno, GPS deformacione mreže čine nezaobilaznu komponentu raznih sistema prognoze zemljotresa, zahvaljujući mogućnostima praćenja seizmiciteta u realnom vremenu. Štaviše, najnoviji rezultati deformacionih istraživanja u pojedinim oblastima Turske sugerišu da upotreba GPS sužava nesigurnost prognoze na raspon od 3 do 30 godina (*Cankut, Sahin 2000*).



Poglavlje 6

EKSPERIMENTALNA ISTRAŽIVANJA

6.1 Metrološko obezbeđenje GPS prijemnika i antena

Metrološko obezbeđenje GPS prijemnika i antena znači utvrđivanje njihovih metroloških karakteristika. S obzirom na to da su u pitanju kompleksni, višefunkcionalni elektronski uređaji, izabrane su samo tri metrološke karakteristike od značaja za geodetsku primenu:

- stabilnost lokalnog oscilatora prijemnika,
- srednji položaj faznih centara antena,
- preciznost kodnih i faznih merenja.

Ove metrološke karakteristike mogu se u principu utvrđivati u kontrolisanim laboratorijskim uslovima. Međutim, takav pristup podrazumeva posebne uređaje kao što su, između ostalih, visokostabilni referentni oscilatori i specijalne emitujuće antene. Imajući u vidu geodetsku primenu, od interesa je uspostavljanje postupaka ispitivanja koji za rezultat imaju karakteristike GPS prijemnika i antena u promenljivim terestričkim uslovima u kojima će se i koristiti.

U okviru ovog istraživanja predloženi su praktični terenski postupci utvrđivanja navedenih metroloških karakteristika, čija se prednosti u odnosu na laboratorijske sastoje u sledećem:

- Ispitivanje stabilnosti oscilatora prijemnika bazirano na posrednoj upotrebi visokopreciznih satelitskih oscilatora umesto neportabilnih laboratorijskih uređaja,
- Utvrđivanje srednjeg položaja faznog centra antene terenskim pozicioniranjem umesto merenjem električnih veličina u specijalnim laboratorijskim komorama,
- Određivanje preciznosti kodnih i faznih merenja na osnovu vremenskih razlika samih opažanja, ali bez potrebe za posebnim kablovima i deliocima napona kao što je to slučaj kod metode nulte baze.

Sprovedena istraživanja ne samo da pokazuju pogodnost ovih postupaka u smislu geodetske periodične kontrole instrumenata, nego i da su dobijeni rezultati sasvim uporedivi sa laboratorijskim.

6.1.1 Ispitivanje stabilnosti oscilatora prijemnika

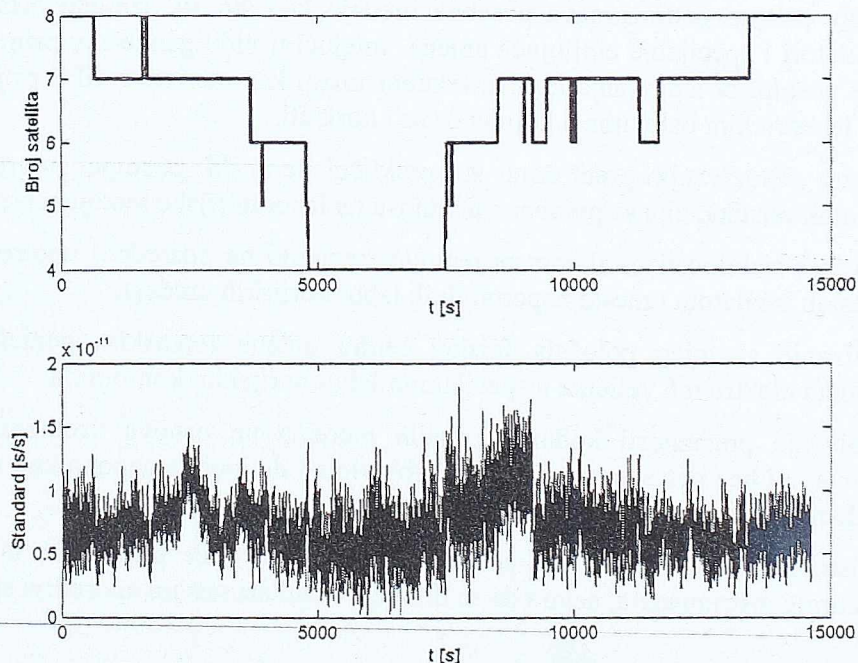
Stabilnost oscilatora ispitana je terenskom metodom na primeru kvarcnog oscilatora dvofrekventnog geodetskog GPS prijemnika TRIMBLE 4000SSE i antene COMPACT L1/2 w GP. Merenja su izvršena od 10:00UTC do 14:00UTC 22.12.2000. godine na stubu tačke R034 na krovu Građevinskog fakulteta u Beogradu, sa frekvencijom prikupljanja podataka od 1Hz i graničnim elevacionim uglom od 0°. Na osnovu promena faznih pseudodužina na prvoj frekvenciji izračunate su vrednosti 14626 relativnih frekventnih odstupanja y_k , sa parametrima obrade datim u tabeli 6.1:

$$y_k = \frac{L(t_k + \tau_0) - L(t_k)}{c_0 \tau_0} \quad (6.1.1)$$

Pri računanju relativnih frekventnih odstupanja nije obuhvaćen uticaj jonosferske refrakcije, jer je čak i u nepovoljnim atmosferskim uslovima period promene stanja jonosfere mnogo duži od osnovnog intervala prikupljanja podataka. Primena Hopfield modela pokazala je sličnu situaciju i za troposfersku refrakciju, jer se odgovarajuća korekcija samo sporadično menjala od epohe do epohe za 1-2mm. Interpolacija preciznih efemerida i vremenskih odstupanja satelitskih časovnika izvršena je Lagranžovim polinomima stepena 17, čime je osiguran milimetarski nivo tačnosti. Interpolovani satelitski položaji korigovani su za ekscentricitet satelitskih antena i vreme puta signala. Sa prosečnih 6 satelita tokom merne sesije, tačnost pojedinačno određenih relativnih frekventnih odstupanja iznosila je oko $7.0 \cdot 10^{-12}$ po satelitu, odnosno $3.0 \cdot 10^{-12}$ po mernoj epohi (slika 6.1).

TABELA 6.1. Parametri obrade pri računanju relativnih frekventnih odstupanja.

Ukupan broj epoha	14626
Broj satelita po epohi	4-8
Osnovni interval registracije	1s
Granični elevacioni ugao	15°
Koordinate tačke R034	GPS kampanja BALKAN98
Satelitske koordinate	Precizne efemeride (IGS)
Odstupanja satelitskih časovnika	Precizne efemeride (IGS)
Višestruka refleksija signala	antenski zaštitnik

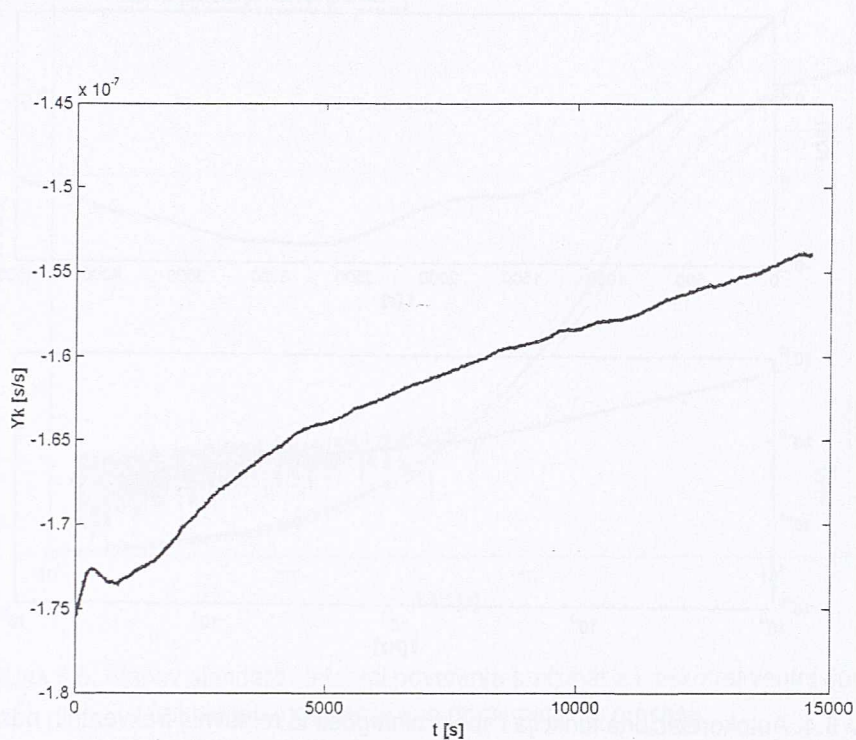


SLIKA 6.1. Broj satelita tokom merne sesije i tačnost pojedinačno određenih relativnih frekventnih odstupanja.

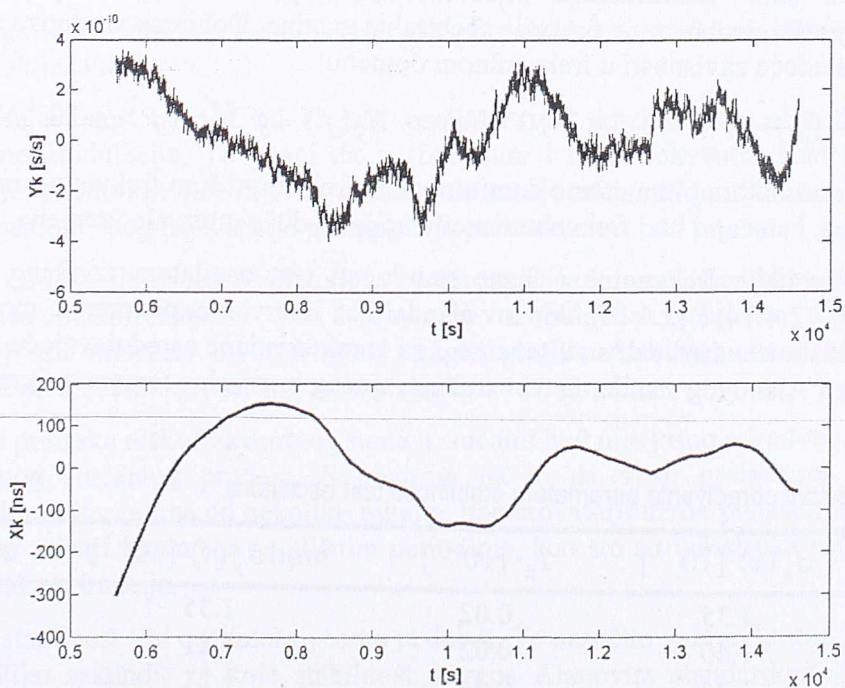
Sa slike 6.2, koja prikazuje kompletni niz relativnih frekventnih odstupanja y_k , vidljivo je da je test oscilatoru bilo potrebno oko 90 minuta da u datim uslovima stabilizuje frekvenciju. Ovako dug interval može se objasniti nesigurnim izvorom napajanja, atmosferskim uslovima i starošću prijemnika, ali u svakom slučaju potvrđuje da su merenja tokom perioda prilagođavanja instrumenta obično nižeg kvaliteta. U daljoj obradi je zbog toga zadržan test niz od oko 9000 relativnih frekventnih

odstupanja iz kojih je prvo regresijom uklonjen linearni trend sa parametrima $-1.7 \cdot 10^{-7}$ i $+1.0 \cdot 10^{-12}$, da bi zatim bio određen i niz vremenskih odstupanja x_k (slika 6.3):

$$x_i = x_{i-1} + y_i \tau_0. \quad (6.1.2)$$

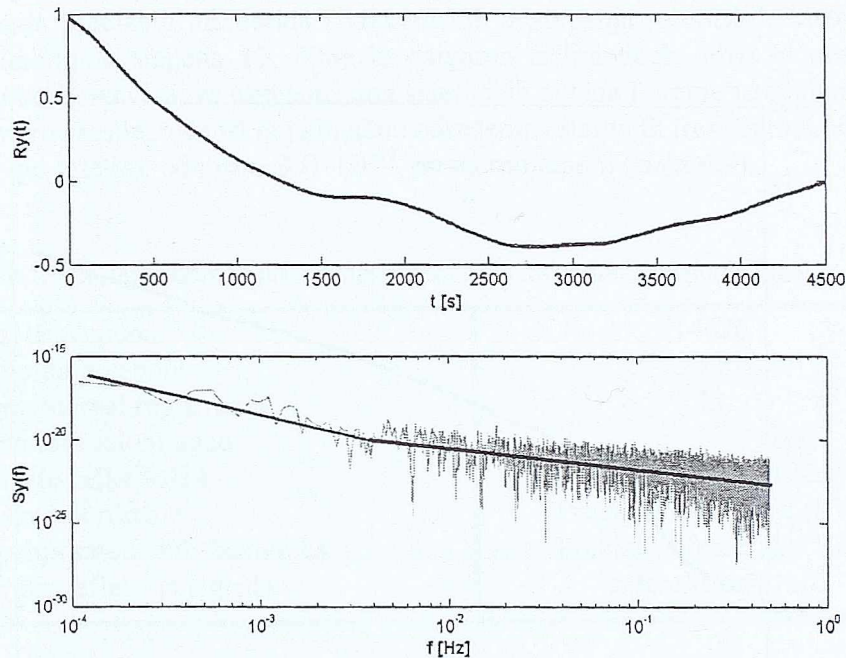


SLIKA 6.2. Kompletni niz relativnih frekventnih odstupanja sračunatih na osnovu vremenskih promena faznih pseudoduzina na prvoj frekvenciji.



SLIKA 6.3. Test nizovi od oko 9000 relativnih frekventnih odstupanja i vremenskih odstupanja korišćenih za ispitivanje frekventne stabilnosti.

Prva informacija o statističkoj prirodi ponašanja oscilatora dobijena je računanjem autokovarijacione odnosno autokorelacione funkcije $R_y(t)$ procesa y_k (slika 6.4).



SLIKA 6.4. Autokorelaciona funkcija i spektralna gustina relativnih frekventnih odstupanja test oscilatora. Prva regresiona duž ima nagib -2.2 , a druga -1.1 .

Oblik autokorelacione funkcije jasno pokazuje značajnu vremensku zavisnost relativnih frekventnih odstupanja i izvesnu dugoperiodičnost u njihovom ponašanju, odakle sledi da proces y_k u svakom slučaju nije beli šum. Identifikacija prisutnih tipova procesa izvršena je na odgovarajućem logaritamskom grafiku jednostrane funkcije spektralne gustine. Dobijene vrednosti nagiba regresionih pravih sugerišu sledeće zavisnosti u frekventnom domenu:

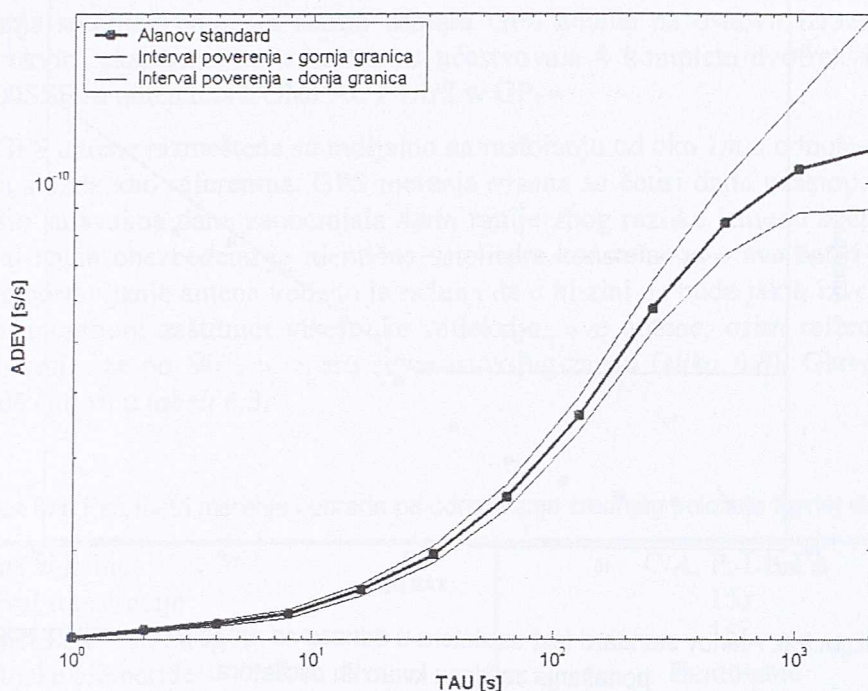
$$S_y(f) \sim f^{-2.2} \quad (f < 3 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}), \quad S_y(f) \sim f^{-1.1} \quad (f > 3 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}). \quad (6.1.3)$$

U ponašanju test oscilatora prema tome dominira niskofrekventni šum frekventne modulacije za kraće intervale vremena, i slučajni hod frekventne modulacije za duže intervale vremena.

Određivanje pokazatelja frekventne i fazne stabilnosti test oscilatora izvršeno je po formulama (2.4.11), (2.4.13), (2.4.14) i (2.4.16). Alanov standard sa intervalom poverenja, modifikovani Alanov standard i vremenski standard dati su u tabeli 6.2 za karakteristične osrednjavajuće intervale vremena, a grafik zavisnosti Alanovog standarda od osrednjavajućeg intervala vremena prikazan je na slici 6.5.

TABELA 6.2. Rezultati određivanja parametara stabilnosti test oscilatora.

τ [s]	$\sigma_y(\tau)$ [10^{-11}]	I_μ [10^{-11}]	$\text{mod } \sigma_y(\tau)$ [10^{-11}]	$\sigma_x(\tau)$ [10^{-11} s]
1	1.35	0.02	1.35	0.78
2	1.40	0.02	1.21	1.40
4	1.44	0.04	1.21	2.79
8	1.51	0.06	1.27	5.86
16	1.67	0.09	1.43	13.23
512	8.41	2.69	7.30	2157.81
2048	11.63	11.20	10.40	12292.91



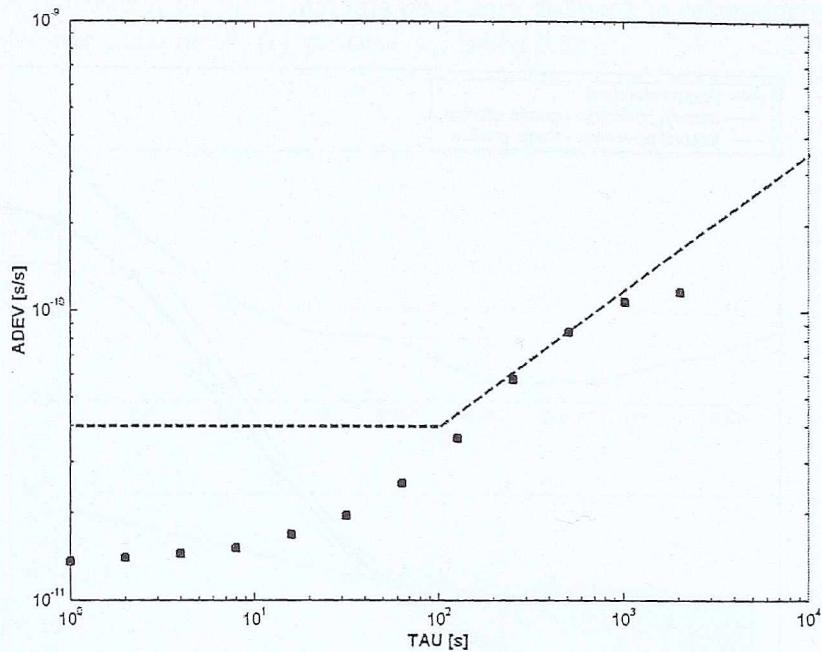
SLIKA 6.5. Alanov standard i interval poverenja sračunat za niskofrekventni šum frekventne modulacije kao dominantni tip procesa.

Pri računanju širine intervala poverenja korišćen je koeficijent niskofrekventnog šuma frekventne modulacije, dok je izbor osrednjavajućih intervala vremena vršen po izrazu:

$$\tau_i = 2^{i\tau_0} \quad (i = 0, \dots, 11), \quad (6.1.4)$$

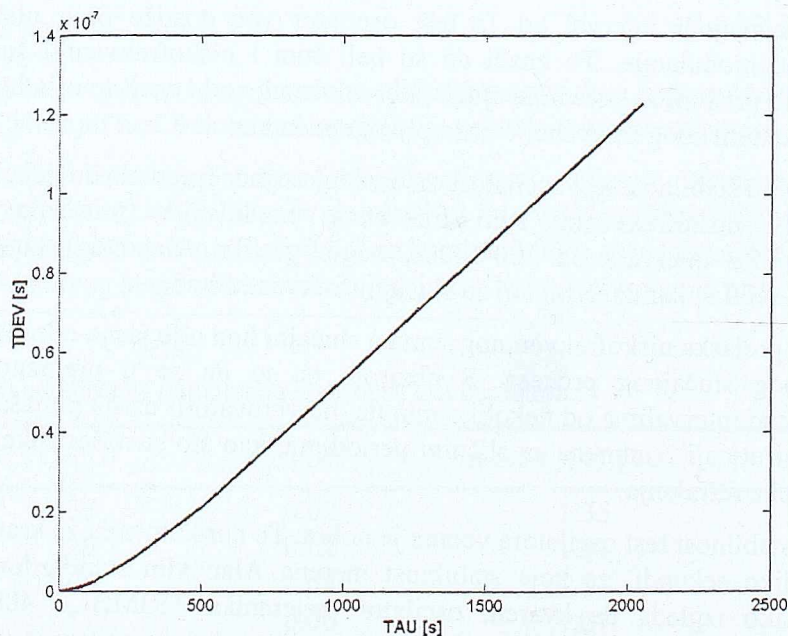
Karakteristike empirijski određene funkcije Alanovog standarda test oscilatora dozvoljavaju izvođenje sledećih opštih zaključaka:

- Za osrednjavajući interval od 1s test oscilator već dostiže prag niskofrekventnog šuma frekventne modulacije. To znači da su beli šum i niskofrekventni šum fazne modulacije eventualno prisutni za osrednjavajuće intervale manje od 1s, ali to nije bilo moguće ustanoviti eksperimentom zbog frekvencije prikupljanja podataka.
- Kratkoročnu stabilnost test oscilatora za osrednjavajuće intervale do nekoliko desetina sekundi karakteriše niskofrekventni šum frekventne modulacije (relativno konstantan Alanov standard). Za intervale od 100-1000s, nagib grafika Alanovog standarda teži teorijskoj vrednosti od 0.5, karakterističnoj za slučajni frekventni hod.
- Područje prelaska niskofrekventnog šuma u slučajni hod nije jasno određeno jer u njemu nema dominantnog slučajnog procesa. S obzirom na to da se u prelaznom području radi o vremenskim intervalima od nekoliko minuta, najverovatniji uzrok ponašanja test oscilatora su rezidualni uticaji fenomena sa sličnim periodima, kao što su višestruka refleksija signala ili atmosferska refrakcija.
- Ukupna stabilnost test oscilatora veoma je dobra. To naročito važi za kratke intervale vremena od nekoliko sekundi, za koje stabilnost merena Alanovim standardom ima vrednost oko 10^{-11} . Iako izgleda da kvarcni oscilator prijemnika TRIMBLE 4000SSE nema strogo izvedenu temperaturnu kompenzaciju, on u svakom slučaju pokazuje prosečno kratkoročno ponašanje karakteristično za svoju klasu, čak i u terenskim uslovima (slika 6.6).



SLIKA 6.6. Alanov standard test oscilatora u odnosu na empirijsku gornju granicu ponašanja za klasu kvarcnih oscilatora.

Funkcionalnost oscilatora još je očiglednija u pogledu stabilnosti realizacije vremenske skale (slika 6.7). Naime, odstupanje časovnika prijemnika od sistemskog GPS vremena predstavlja sastavni deo standardnog GPS navigacionog rešenja, ali ako se na osnovu jednom određenog vremenskog odstupanja vrši prognoza za naredne merne epohe, nesigurnost prognoze biće tim veća što je veći protekli vremenski interval. Nesigurnost vremena preslikava se direktno na kvalitet pozicioniranja, tako da se pomoću podataka *tabele 6.2* dobija da će nakon intervala od 1s, 10s, 100s i 1000s, vremenska nesigurnost test oscilatora imati za posledicu grešku pozicioniranja od 2mm, 2cm, 0.6m i 15m respektivno, ukoliko se u međuvremenu ne određuje stanje časovnika.



SLIKA 6.7. Grafik vremenskog standarda test oscilatora sračunatog na osnovu modifikovanog Alanovog standarda.

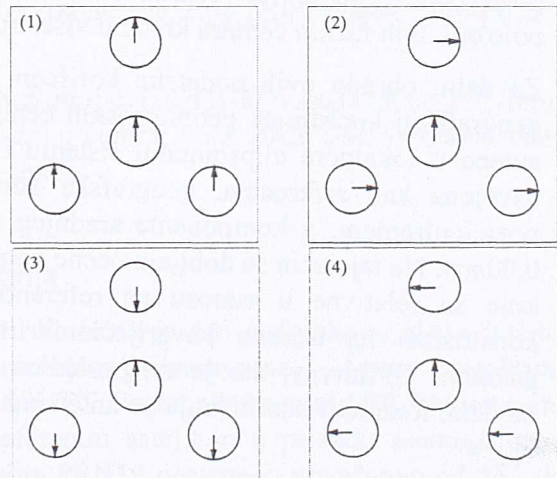
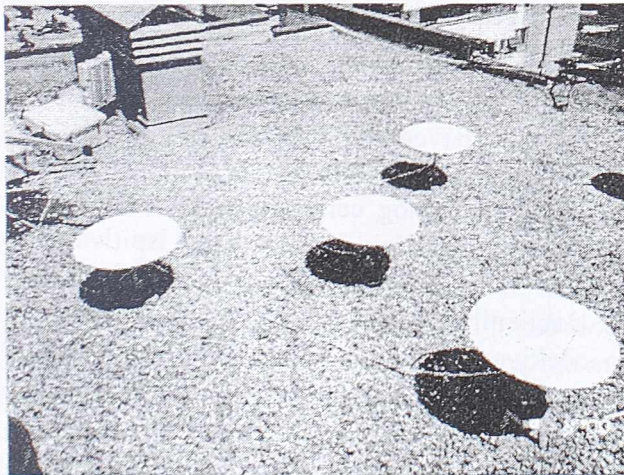
6.1.2 Određivanje srednjeg položaja faznog centra antene

Model ispitivanja srednjeg položaja faznih centara GPS antena na osnovu izraza (4.3.7) i (4.3.8) proveren je u okviru eksperimenta u kojem su učestvovala 4 kompleta dvofrekventnih prijemnika TRIMBLE 4000SSE sa antenama COMPACT L1/2 w GP.

Tri ispitivane GPS antene razmeštene su radijalno na rastojanju od oko 1m u odnosu na četvrtu koja je u eksperimentu služila kao referentna. GPS merenja vršena su četiri dana uzastopce u trajanju od 7 časova, s tim što su svakog dana započinjala 4min ranije zbog razlike između svetskog i zvezdanog vremena. Na taj način obezbeđena je identična satelitska konstelacija u sve četiri merne sesije. Pri izboru mesta za postavljanje antena vođeno je računa da u blizini ne bude jakih izvora radio zračenja, a na antene su montirani zaštitnici višestruke refleksije. Sve antene, osim referentne, rotirane su između mernih sesija za po 90° , u smeru sever-istok-jug-zapad (slika 6.8). Glavni parametri GPS merenja i obrade dati su u tabeli 6.3.

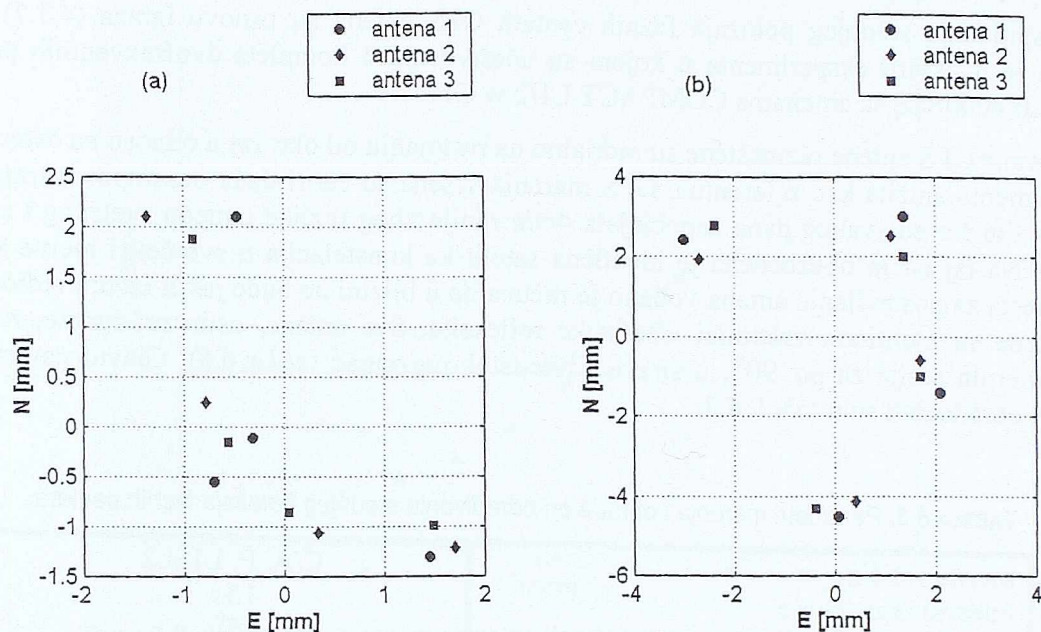
TABELA 6.3. Parametri merenja i obrade pri određivanju srednjeg položaja faznih centara.

Merne veličine	C/A, P, L1, L2
Interval registracije	15s
Granični elevacioni ugao	15°
Satelitske efemeride	Emitovane
Jonosferska refrakcija	-
Troposferska refrakcija	Modifikovani Hopfield model
Višestruka refleksija signala	Antenski zaštitnik



SLIKA 6.8. Dispozicija GPS antena i njihova orijentacija po mernim sesijama.

Obrada originalnih GPS merenja izvršena je zasebno za frekvencije L1 i L2, i to komercijalnim softverskim paketom GPSurvey. Ovaj softverski paket zasniva se na MNK obradi raspoloživih kodnih i faznih pseudodužina u formi dvostrukih razlika, i ima kao osnovne izlazne rezultate ocene komponenti vektora između faznih centara antena zajedno sa pridruženim kovarijacionim matricama u globalnom trodimenzionalnom pravouglom koordinatnom sistemu. Ocenjeni položaji faznih centara ispitivanih antena transformisani su u lokalni elipsoidni koordinatni sistem sa osama u pravcu geografske širine, geografske dužine i elipsoidne visine, i prikazani na slici 6.9.



SLIKA 6.9. Položaji faznih centara između mernih sesija (a) fazni centar signala L1; (b) fazni centar signala L2.

Sa slike je vidljivo da se položaji faznih centara grupišu u svakoj mernoj sesiji, kao i da približno prate rotaciju antena. Grupisanje se može objasniti činjenicom da su u pitanju antene istog tipa i istog proizvođača. Što se tiče rotacija antena, one su vidljivije kod rezultata za frekvenciju L2, zato što se položaji ovih faznih centara kreću u višestruko širem rasponu nego što je to slučaj sa frekvencijom L1.

Za dalju obradu ovih podataka korišćen je softver sopstvene izrade koji za rezultate ima ocene geografskih koordinata geometrijskih centara antena, komponente srednjih položaja faznih centara antena u lokalnom elipsoidnom sistemu i standarde svih navedenih veličina. Za antenu 4 koja je usvojena kao referentna, geografske koordinate fiksirane su na vrednosti dobijene apsolutnim pozicioniranjem, a komponente srednjeg položaja njenog faznog centra fiksirane su na vrednosti 0.00mm . Na taj način se dobijaju ocene komponenti srednjih položaja faznih centara ispitivanih antena koje su relativne u odnosu na referentnu antenu. Stohastički model nije modifikovan već je konstruisan na osnovu kovarijacionih matrica dobijenih preliminarnom obradom programskim paketom GPSurvey, što je za posledicu imalo očekivani neuspeh statističkog testa adekvatnosti modela. Rezultati određivanja po antenama i frekvencijama dati su u tabeli 6.4 i tabeli 6.5.

TABELA 6.4. Rezultati određivanja srednjeg položaja faznih centara za frekvenciju L1.

Veličina	Antena 1	Antena 2	Antena 3	Antena 4 (ref.)
φ	$44^{\circ} 47' 22.75893''$	$44^{\circ} 47' 22.82106''$	$44^{\circ} 47' 22.81059''$	$44^{\circ} 47' 22.79600''$
σ_{φ}	0.64mm	0.66mm	0.57mm	0.00mm
λ	$20^{\circ} 30' 53.18363''$	$20^{\circ} 30' 53.13687''$	$20^{\circ} 30' 53.24634''$	$20^{\circ} 30' 53.18603''$
σ_{λ}	0.51mm	0.55mm	0.46mm	0.00mm
Δn	-1.55mm	-1.97mm	-1.54mm	0.00mm
$\sigma_{\Delta n}$	0.55mm	0.59mm	0.50mm	0.00mm
Δe	$+0.73\text{mm}$	$+0.62\text{mm}$	$+0.35\text{mm}$	0.00mm
$\sigma_{\Delta e}$	0.56mm	0.59mm	0.50mm	0.00mm

TABELA 6.5. Rezultati određivanja srednjeg položaja faznih centara za frekvenciju L2.

Veličina	Antena 1	Antena 2	Antena 3	Antena 4 (ref.)
φ	44° 47' 22.75901"	44° 47' 22.82112"	44° 47' 22.81067"	44° 47' 22.79600"
σ_{φ}	1.37mm	1.43mm	1.24mm	0.00mm
λ	20° 30' 53.18328"	20° 30' 53.13669"	20° 30' 53.24615"	20° 30' 53.18603"
σ_{λ}	1.09mm	1.17mm	1.01mm	0.00mm
Δn	-0.65mm	-1.17mm	-0.72mm	0.00mm
$\sigma_{\Delta n}$	1.19mm	1.27mm	1.10mm	0.00mm
Δe	+1.14mm	+1.14mm	+0.75mm	0.00mm
$\sigma_{\Delta e}$	1.20mm	1.27mm	1.10mm	0.00mm

Na osnovu podataka iz tabela mogu se izvesti sledeći zaključci:

- Vrednosti komponenti srednjih položaja faznih centara dobro se međusobno slažu za sve tri ispitivane antene, što je očekivani rezultat s obzirom na to da su u pitanju antene istog proizvođača. Na osnovu toga može se predvideti da slične vrednosti važe i za četvrtu antenu koja je služila kao referentna. Osim toga, srednje vrednosti u iznosu $-1.69mm$ i $+0.57mm$ za L1, odnosno $-0.85mm$ i $+1.01mm$ za L2, dobro se slažu sa IGS vrednostima za isti tip antene.
- Standardi komponenti srednjeg položaja faznih centara za frekvenciju L2 istog su reda veličine kao i same komponente. Rezultati obrade softverskim paketom GPSurvey potvrđuju slabiji kvalitet signala L2, što znači da su tokom eksperimenta verovatno vladali uslovi pojačanog delovanja višestruke refleksije.
- Očigledno je da će rezultati relativnog GPS pozicioniranja biti opterećeni greškom od nekoliko milimetara u horizontalnom smislu čak i kod antena istog proizvođača, ukoliko se o uticaju položaja faznog centra ne vodi računa.
- Primenjeni postupak je jednostavan, relativno kratkotrajan i zadovoljavajuće tačnosti. Njime, međutim, nije obuhvaćena varijacija položaja faznog centra, koja inače ima vrednosti istog reda kao i komponente srednjeg položaja faznog centra.

6.1.3 Određivanje preciznosti kodnih i faznih merenja

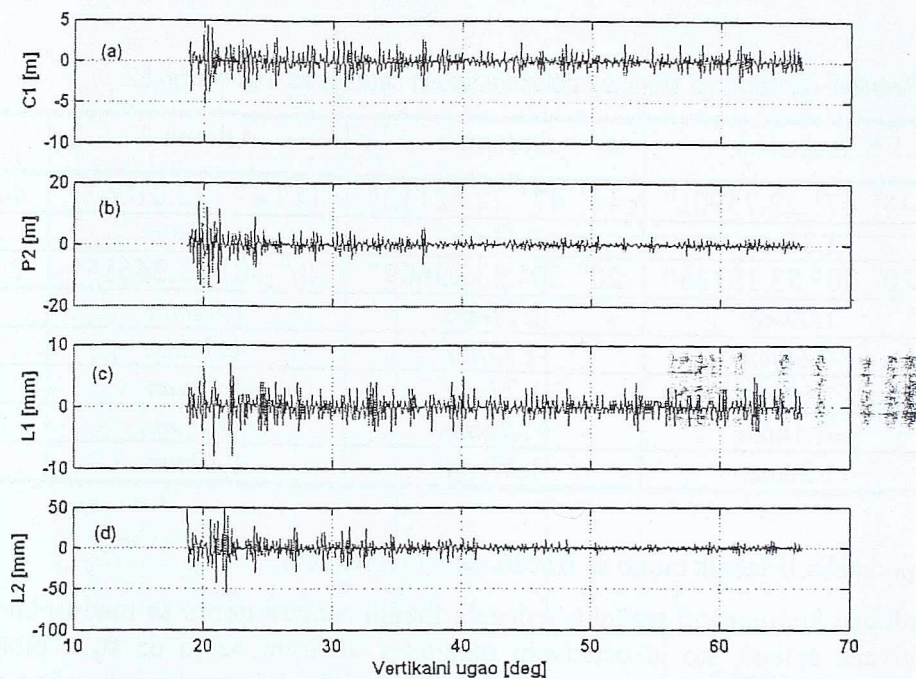
Za ispitivanje preciznosti kodnih i faznih pseudodužina iskorišćen je deo podataka iz eksperimenta određivanja srednjeg položaja faznog centra, i to merenja izvršena prijemnicima 2 i 4 prema satelitima PRN01 i PRN19 u periodu vremena od 11:10UTC do 13:00UTC. Prijemnik 4 i satelit PRN01 usvojeni su kao referentni pri formiranju dvostrukih razlika. Referentni satelit je u periodu merenja imao vertikalni ugao veći od 70° , dok se vertikalni ugao satelita PRN19 postepeno povećavao od 18° do 68° . Pored kodnih i faznih pseudodužina, za svaku epohu merenja registrovan je odnos signala i šuma (SNR) za obe frekvencije.

Preciznost faznih i kodnih merenja zavisi pre svega od snage signala, a time posredno i od karakteristika prijemne antene i nivoa termičkog šuma u elektronskim komponentama za praćenje signala. Stoga je eliminacija ostalih uticaja kao što su jonosferska refrakcija, troposferska refrakcija i višestruka refleksija izvršena formiranjem nizova od po 416 trećih vremenskih razlika δ_3 koje su se odnosile na dvostruke fazne i kodne razlike $\Delta \nabla s$:

$$\delta_3(t_k) = \Delta \nabla s(t_{k+3}) - 3\Delta \nabla s(t_{k+2}) + 3\Delta \nabla s(t_{k+1}) - \Delta \nabla s(t_k). \quad (6.1.5)$$

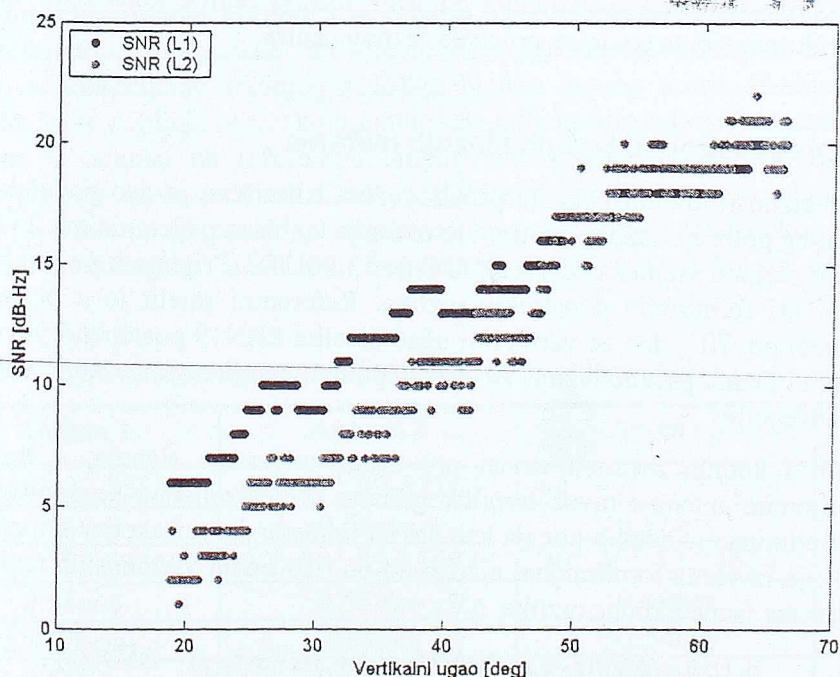
Ovi nizovi predstavljeni su na slici 6.10 u funkciji vertikalnog ugla nereferentnog satelita.

6.1 Metrološko obezbeđenje GPS prijemnika i antena



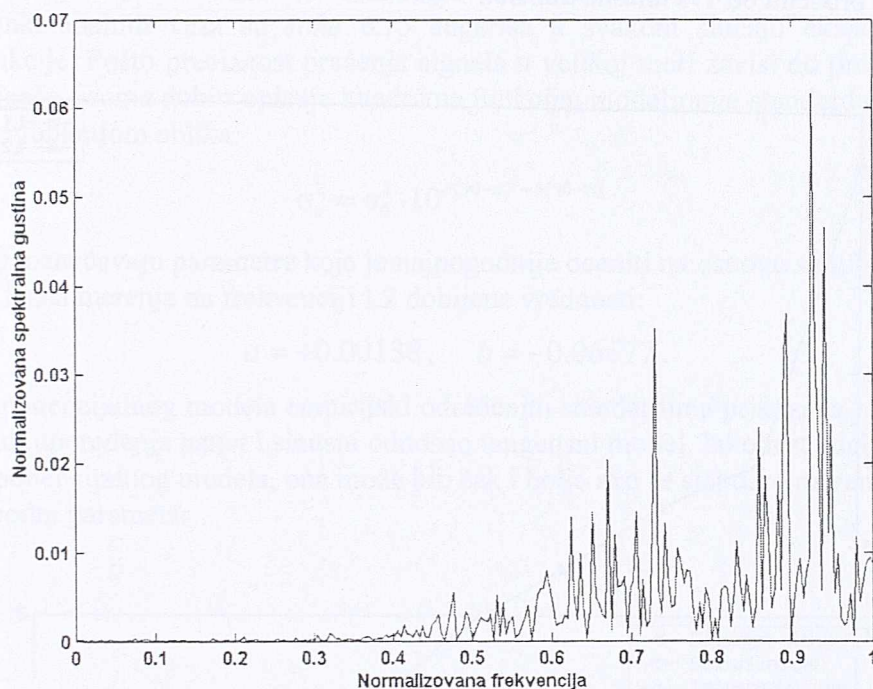
SLIKA 6.10. Treće vremenske razlike dvostrukih razlika u funkciji vertikalnog ugla satelita (a) kodne pseudoduzine C1 (C/A); (b) kodne pseudoduzine P2; (c) fazne pseudoduzine L1; (d) fazne pseudoduzine L2.

Sa slike 6.10 vidljiva je veća varijacija trećih vremenskih razlika u oblastima malih vertikalnih uglova, što znači da je snaga signala u tim uslovima manja. Dokaz za to predstavljaju i SNR vrednosti obe frekvencije, prikazane na slici 6.11, koje pokazuju da su atmosferska prigušenja i antenski gubici veći za signale koji dolaze iz pravca bližeg horizontu (Ward 1996). Osim toga, očigledno je da signal L1 ima projektovano veću snagu, što je posebno izraženo za vertikalne uglove do 40° .



SLIKA 6.11. Odnos signala i šuma (SNR) na frekvencijama L1 i L2.

Pretpostavka da izračunate treće vremenske razlike sadrže samo merni šum proverena je ocenjivanjem spektralne gustine. Slika 6.12 prikazuje periodogram koji je u tu svrhu konstruisan za slučaj faznih pseudodužina na frekvenciji L1. Frekvencije su modifikovane tako da vrednost 1 odgovara osnovnom periodu prikupljanja podataka (15s), dok su spektralne gustine normalizovane tako da je ukupni energetska sadržaj signala jediničan.



SLIKA 6.12. Normalizovani periodogram trećih vremenskih razlika dvostrukih razlika faznih pseudodužina na frekvenciji L1.

Periodogram pokazuje da je gotovo celokupna energija signala skoncentrisana u frekventnom opsegu 0.5-1 a da su spektralne vrednosti za niže frekvencije praktično zanemarljive. Navedenom frekventnom opsegu odgovara period od 15-30s. Imajući u vidu da je rastojanje između antena svega 1m, kao i činjenicu da je period atmosferskih uticaja i uticaja višestruke refleksije mnogo veći (5-10min), sledi da su u trećim vremenskim razlikama prisutne samo slučajne greške praćenja signala u elektronskim komponentama prijemnika.

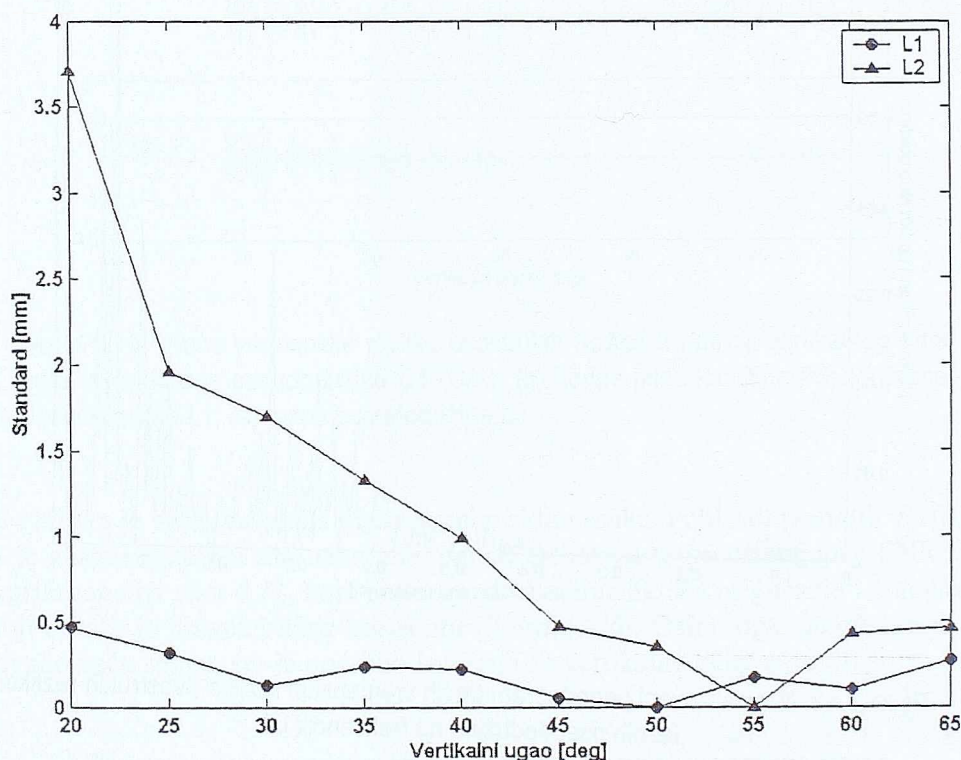
Serije trećih vremenskih razlika očigledno ne predstavljaju realizacije ergodičnih slučajnih procesa zbog svoje zavisnosti od vertikalnog ugla. Stoga je ocenjivanje standarda kodnih i faznih merenja koji karakterišu preciznost praćenja signala izvršeno u dve faze. U prvoj je ocenjen standard merenja u pravcu zenita, σ_0 , na osnovu trećih vremenskih razlika onih pseudodužina čiji je vertikalni ugao veći od 65° :

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{80} \sum_{i=1}^{N_0} \delta_3^2(t_i)}. \quad (6.1.6)$$

U drugoj fazi izvršeno je grupisanje trećih vremenskih razlika po vertikalnim uglovima u 10 nepreklapajućih klasa širine 5° , i za svaku klasu ocenjen je standard merenja po izrazu:

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{40} \sum_{i=1}^{N_j} \delta_3^2(t_i) - \sigma_0^2}. \quad (6.1.7)$$

Ovako ocenjeni standardi faznih pseudodužina prikazani su na slici 6.13, a standardi kodnih i faznih pseudodužina za nekoliko karakterističnih vertikalnih uglova dati su u tabeli 6.6. Veoma male vrednosti standarda merenja u pravcu zenita ukazuju na to da i prijemnici starije generacije, kao što je TRIMBLE 4000SSE, imaju mogućnosti praćenja signala koje po preciznosti znatno nadmašuju opšteprihvaćenu procenu od 1% talasne dužine.



SLIKA 6.13. Ocene standarda faznih merenja u funkciji vertikalnog ugla satelita.

TABELA 6.6. Empirijski pokazatelji preciznosti faznih i kodnih merenja za karakteristične vertikalne uglove.

α	σ_{L1}	σ_{L2}	σ_{C1}	σ_{P2}
20°	0.47mm	3.71mm	0.28m	0.93m
30°	0.13mm	1.70mm	0.18m	0.31m
40°	0.22mm	1.00mm	0.11m	0.21m
$>60^\circ$	0.20mm	0.46mm	0.12m	0.14m

Zavisnost preciznosti praćenja signala od vertikalnog ugla nameće potrebu izbora redukcione funkcije kako bi u postupku MNK ocenjivanja mogao biti formulisan adekvatan stohastički model. Redukcione funkcije koje se koriste u praksi imaju obično sinusni ili tangensni oblik:

$$\sigma_{\alpha}^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sin^2 \alpha}, \quad (6.1.8)$$

$$\sigma_{\alpha}^2 = \sigma_0^2 \left(1 + \frac{1}{\tan \alpha} \right)^2. \quad (6.1.9)$$

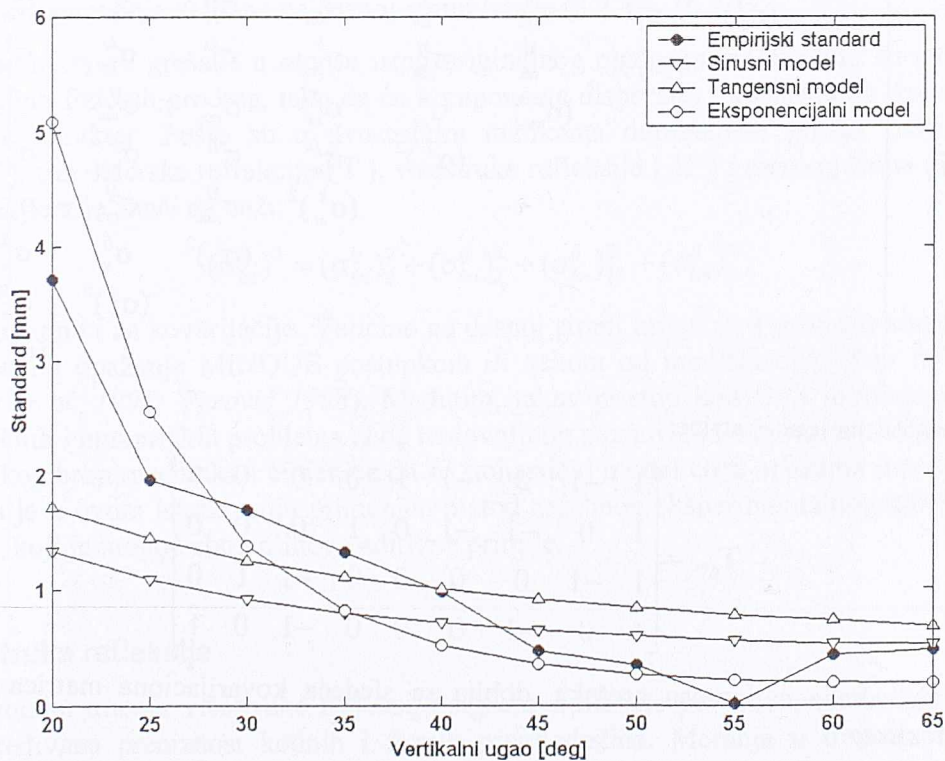
Međutim, ovakva vrsta redukcionih funkcija po pravilu ne aproksimira dobro preciznost merenja za male vertikalne uglove, niti može biti simultano pogodna za obe frekvencije. Osim toga, oblik empirijskih funkcionalnih veza sa *slike 6.13* sugeriše u svakom slučaju eksponencijalni model redukcionne funkcije. Pošto preciznost praćenja signala u velikoj meri zavisi od profila iskorišćenosti antene, kojeg inače veoma dobro opisuje kvadratna funkcija, modeliranje standarda merenja izvršeno je redukcionom funkcijom oblika:

$$\sigma_{\alpha}^2 = \sigma_0^2 \cdot 10^{a(90-\alpha)^2 + b(90-\alpha)}, \quad (6.1.10)$$

pri čemu a i b označavaju parametre koje je najpogodnije oceniti na osnovu samih merenja. Tako su iz podataka za fazna merenja na frekvenciji L2 dobijene vrednosti:

$$a = +0.00138, \quad b = -0.06677. \quad (6.1.11)$$

Saglasnost eksponencijalnog modela empirijski određenim standardima prikazana je na *slici 6.14*. Na isti grafik je radi upoređenja nanet i sinusni odnosno tangensni model. Iako test adekvatnosti pokazuje saglasnost eksponencijalnog modela, ona može biti čak i bolja ako se standard merenja u pravcu zenita tretira kao slobodni parametar.



SLIKA 6.14. Modeliranje empirijskih standarda redukcionim funkcijama na primeru faznih merenja na frekvenciji L2.

Sprovedeno istraživanje preciznosti faznih i kodnih merenja dozvoljava izvođenje sledećih zaključaka:

- Metoda vremenskih razlika dvostrukih razlika za ispitivanje preciznosti merenja predstavlja odličnu alternativu metodi nulte baze (dva prijemnika povezana za istu antenu). Uz mernu sesiju od 60min i interval registracije do 1min, iz vremenskih razlika biće potpuno eliminisani svi dugoperiodični uticaji.
- Preciznost praćenja signala veoma je visoka, čak i kod instrumenata starije generacije. Tradicionalno usvojeni parametri (1.9mm za L1, 2.4mm za L2, 3m za C1 i 0.3m za P2) predstavljaju konzervativne vrednosti koje se mogu eventualno odnositi jedino na uslove značajnog uticaja višestruke refleksije.
- Uobičajene redukcione funkcije sinusnog ili tangensnog tipa ne opisuju na adekvatan način zavisnost preciznosti od vertikalnog ugla, što je naročito izraženo za signale iz pravca bliskog horizontu. Empirijski određeni standardi pokazuju da je zavisnost eksponencijalnog oblika, sa parametrima koje je neophodno oceniti metodom najmanjih kvadrata na osnovu samih merenja.

6.2 Stohastičko modeliranje dvostrukih razlika

U opštem slučaju koji podrazumeva devet simultanih originalnih opažanja sa stanica l , m i n prema satelitima i , j i k , potpuna kovarijaciona matrica ima oblik:

$$C_l = \begin{bmatrix} (\sigma_l^i)^2 & \sigma_l^{ij} & \sigma_l^{ik} & \sigma_{lm}^i & \sigma_{lm}^{ij} & \sigma_{lm}^{ik} & \sigma_{ln}^i & \sigma_{ln}^{ij} & \sigma_{ln}^{ik} \\ & (\sigma_l^j)^2 & \sigma_l^{jk} & \sigma_{lm}^{ji} & \sigma_{lm}^j & \sigma_{lm}^{jk} & \sigma_{ln}^{ji} & \sigma_{ln}^j & \sigma_{ln}^{jk} \\ & & (\sigma_l^k)^2 & \sigma_{lm}^{ki} & \sigma_{lm}^{kj} & \sigma_{lm}^k & \sigma_{ln}^{ki} & \sigma_{ln}^{kj} & \sigma_{ln}^k \\ & & & (\sigma_m^i)^2 & \sigma_m^{ij} & \sigma_m^{ik} & \sigma_{mn}^i & \sigma_{mn}^{ij} & \sigma_{mn}^{ik} \\ & & & & (\sigma_m^j)^2 & \sigma_m^{jk} & \sigma_{mn}^{ji} & \sigma_{mn}^j & \sigma_{mn}^{jk} \\ & & & & & (\sigma_m^k)^2 & \sigma_{mn}^{ki} & \sigma_{mn}^{kj} & \sigma_{mn}^k \\ & & & & & & (\sigma_n^i)^2 & \sigma_n^{ij} & \sigma_n^{ik} \\ & & & & & & & (\sigma_n^j)^2 & \sigma_n^{jk} \\ & & & & & & & & (\sigma_n^k)^2 \end{bmatrix}. \quad (6.2.1)$$

Pomoću transformacione matrice:

$$T_{\Delta\nabla} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.2.2)$$

i uz primenu zakona o prenosu grešaka, dobija se sledeća kovarijaciona matrica odgovarajućih dvostrukih razlika:

$$C_{\Delta\nabla} = \begin{bmatrix} (\sigma_{lm}^{ij})^2 & \sigma_{lm}^{ij,ik} & \sigma_{lm,ln}^{ij} & \sigma_{lm,ln}^{ij,ik} \\ & (\sigma_{lm}^{ik})^2 & \sigma_{lm,ln}^{ik,ij} & \sigma_{lm,ln}^{ik} \\ & & (\sigma_{ln}^{ij})^2 & \sigma_{ln}^{ij,ik} \\ & & & (\sigma_{ln}^{ik})^2 \end{bmatrix}. \quad (6.2.3)$$

Članovi ove kovarijacione matrice opisuju četiri opšta slučaja:

- disperziju pojedinih dvostrukih razlika,
- kovarijaciju dvostrukih razlika istog staničnog para i različitih nereferentnih satelita,
- kovarijaciju dvostrukih razlika različitih staničnih parova i istog nereferentnog satelita,
- kovarijaciju dvostrukih razlika različitih staničnih parova i različitih nereferentnih satelita,

i to sa detaljnom strukturom koja respektivno glasi:

$$(\sigma_{lm}^{ij})^2 = (\sigma_l^i)^2 + (\sigma_l^j)^2 + (\sigma_m^i)^2 + (\sigma_m^j)^2 - 2\sigma_{lm}^i - 2\sigma_{lm}^j - 2\sigma_l^{ij} - 2\sigma_m^{ij} + 2\sigma_{lm}^{ij} + 2\sigma_{ml}^{ij} \quad (6.2.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{lm}^{ij,ik} = & (\sigma_l^i)^2 + (\sigma_m^i)^2 - \sigma_l^{ij} - \sigma_m^{ij} - \sigma_l^{ik} - \sigma_m^{ik} - 2\sigma_{lm}^i + \sigma_{lm}^{ij} + \sigma_{ml}^{ij} + \sigma_{lm}^{ik} + \sigma_{ml}^{ik} \\ & + \sigma_l^{jk} + \sigma_m^{jk} - \sigma_{lm}^{jk} - \sigma_{ml}^{jk} \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{lm,ln}^{ij} = & (\sigma_l^i)^2 + (\sigma_l^j)^2 - \sigma_{lm}^i - \sigma_{ln}^i - \sigma_{lm}^j - \sigma_{ln}^j + \sigma_{mn}^i + \sigma_{mn}^j - 2\sigma_l^{ij} + \sigma_{lm}^{ij} + \sigma_{ml}^{ij} \\ & + \sigma_{ln}^{ij} + \sigma_{nl}^{ij} - \sigma_{nm}^{ij} - \sigma_{mn}^{ij} \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{lm,ln}^{ij,ik} = & (\sigma_l^i)^2 - \sigma_{lm}^i - \sigma_{ln}^i - \sigma_l^{ij} + \sigma_l^{jk} - \sigma_l^{ik} + \sigma_{mn}^i + \sigma_{lm}^{ij} + \sigma_{ml}^{ij} + \sigma_{nl}^{ij} - \sigma_{nm}^{ij} + \sigma_{ml}^{ik} \\ & - \sigma_{ml}^{jk} + \sigma_{ln}^{ij} - \sigma_{mn}^{ij} - \sigma_{ln}^{jk} + \sigma_{mn}^{jk} \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Prema tome, dvostruke razlike su algebarski korelisane jer su rezultat linearne transformacije (6.2.2), ali su u strukturi disperzija i kovarijacija prisutni i članovi čije je poreklo u fizičkoj korelaciji originalnih merenja. Strogo stohastičko modeliranje dvostrukih razlika upravo podrazumeva kvantitativno vrednovanje veličina na desnoj strani izraza (6.2.4) – (6.2.7).

Efekte pojedinih izvora grešaka u okviru istog originalnog opažanja međusobno su nezavisni jer su rezultat zasebnih fizičkih procesa, tako da će komponente disperzija i kovarijacija dvostrukih razlika imati aditivni karakter. Pošto su u dvostrukim razlikama dominantne greške usled jonosferske refrakcije (I), troposferske refrakcije (T), višestruke refleksije (M) i mernog šuma (ω), aditivnost na primeru disperzije znači da važi:

$$(\sigma_{lm}^{ij})^2 = (\sigma_{lm}^{ij})_I^2 + (\sigma_{lm}^{ij})_T^2 + (\sigma_{lm}^{ij})_M^2 + (\sigma_{lm}^{ij})_\omega^2, \quad (6.2.8)$$

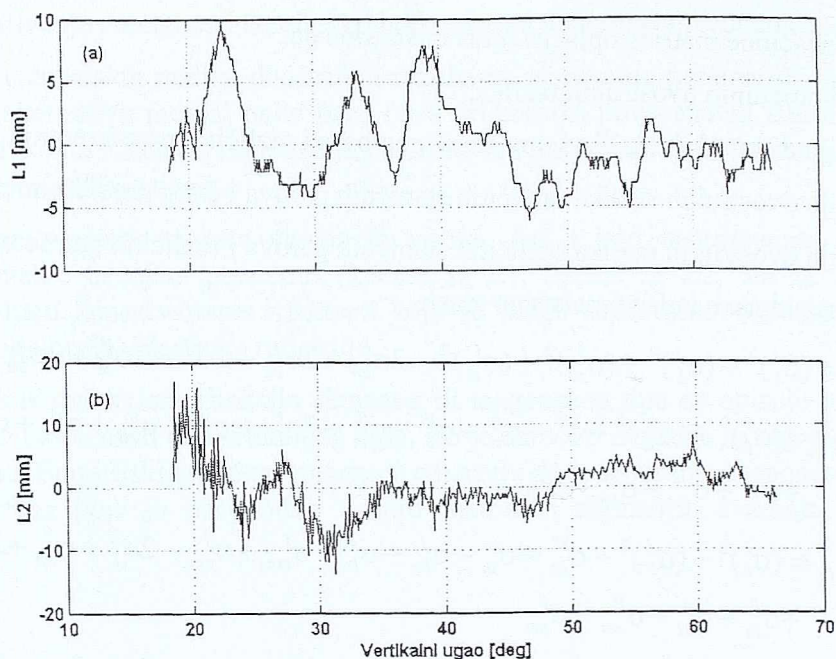
sa sličnim izrazima i za kovarijacije. Veličine na desnoj strani mogu se u principu simultano odrediti na osnovu samih opažanja MINQUE postupkom ili nekom od modifikacija (Rao 1971; Grodecky 1997; Wang et al. 1998; Perović 1998). Međutim, takav pristup kod GPS merenja povezan je sa nizom praktičnih i numeričkih problema zbog nedovoljnog poznavanja odgovarajućih konfiguracionih matrica, velikog broja podataka i činjenice da se stohastički model GPS opažanja menja od epohe do epohe. Stoga je u ovom istraživanju primenjen metod zasebnog eksperimentalnog modeliranja svake komponente, koji je moguć zbog njihove aditivne prirode.

6.2.1 Višestruka refleksija

Stohastički model uticaja višestruke refleksije signala ispitan je pomoću istih podataka na osnovu kojih je određivana preciznost kodnih i faznih pseudodužina. Merenja u trajanju od 110min sa intervalom registracije od 15s izvršena su prijemnicima 4 i 2 čije su antene bile na rastojanju od 1m. Iz faznih opažanja prema satelitima PRN01 i PRN19 formirani su za svaku frekvenciju nizovi od po 429 dvostrukih razlika iz kojih su eliminisana geometrijska rastojanja sračunata na osnovu poznatih koordinata antena i emitovanih satelitskih efemerida (slika 6.15):

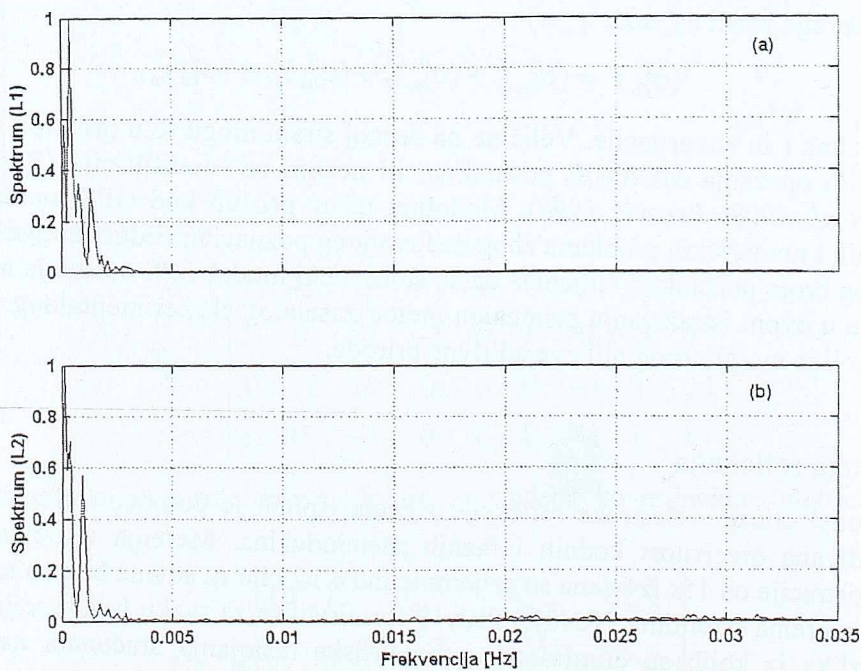
$$\Delta \nabla L_{4,2}^{01,19}(t_k) = \Delta \nabla L_{4,2}^{01,19}(t_k) - \Delta \nabla \rho_{4,2}^{01,19}(t_k). \quad (6.2.9)$$

6.2 Stohastičko modeliranje dvostrukih razlika



SLIKA 6.15. Redukovane dvostruke razlike faznih pseudodužina
(a) frekvencija L1; (b) frekvencija L2.

Redukovane dvostruke razlike sadrže samo uticaje višestruke refleksije i merni šum jer su zbog malog međuantenskog rastojanja uticaji atmosferske refrakcije zanemarljivi. Periodogrami na *slici 6.16* pokazuju da je praktično celokupni spektar dvostrukih razlika skoncentrisan u frekventnom opsegu do 0.002Hz , čemu odgovara period od 9min , karakterističan upravo za uticaj višestruke refleksije.



SLIKA 6.16. Normalizovani periodogram dvostrukih razlika faznih pseudodužina
(a) frekvencija L1; (b) frekvencija L2.

U daljem postupku, određena je zavisnost standarda uticaja višestruke refleksije od vertikalnog ugla, i to na isti način kao i u slučaju preciznosti praćenja signala. Kombinovana zenitna disperzija višestruke refleksije i mernog šuma originalnog opažanja, $(\sigma_0)_{M\omega}^2$, sračunata je na osnovu disperzije onih dvostrukih razlika čiji je vertikalni ugao nerefarentnog satelita veći od 65° :

$$(\sigma_0)_{M\omega}^2 = \frac{1}{4} \sigma_{\Delta\nabla,0}^2. \quad (6.2.10)$$

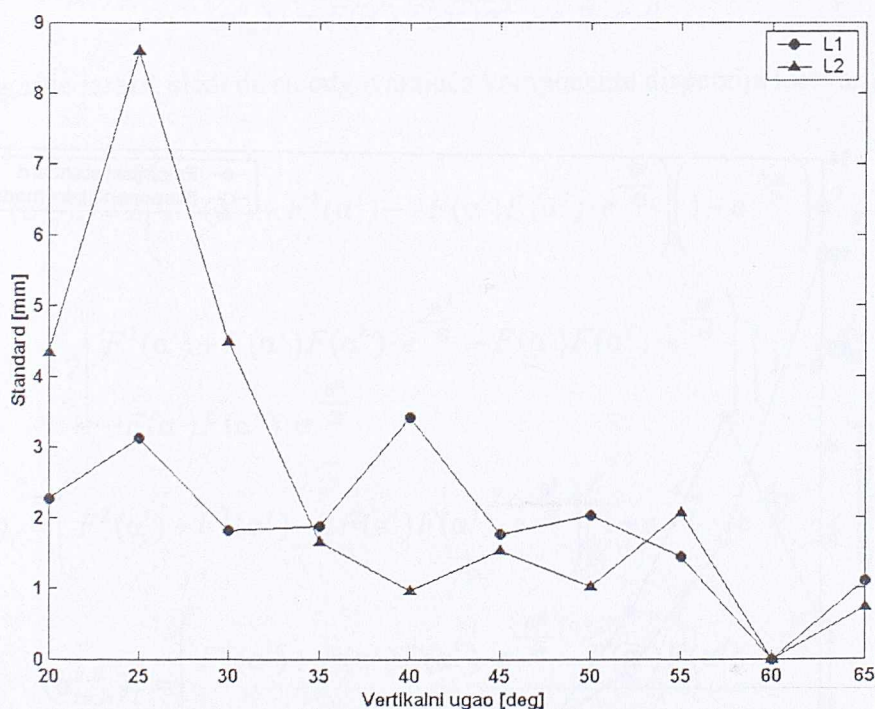
Preostale dvostruke razlike razvrstane su u 10 klasa širine 5° po vertikalnom uglu, i za svaku klasu je prvo računata disperzija dvostrukih razlika $\sigma_{\Delta\nabla,\alpha}^2$, a zatim i kombinovana disperzija uticaja višestruke refleksije i mernog šuma originalnog opažanja $(\sigma_\alpha)_{M\omega}^2$:

$$(\sigma_\alpha)_{M\omega}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\Delta\nabla,\alpha}^2 - (\sigma_0)_{M\omega}^2. \quad (6.2.11)$$

Definitivno izdvajanje disperzije uticaja višestruke refleksije postignuto je pomoću disperzije mernog šuma koja je za upotrebljene prijemnike već određena u prethodnom eksperimentu:

$$(\sigma_\alpha)_M^2 = (\sigma_\alpha)_{M\omega}^2 - (\sigma_\alpha)_\omega^2. \quad (6.2.12)$$

Rezultati računanja, dobijeni za različite vertikalne uglove i obe frekvencije, prikazani su na slici 6.17.



SLIKA 6.17. Standard faznih pseudodužina usled višestruke refleksije u funkciji vertikalnog ugla.

Pitanje redukcione funkcije koja modelira zavisnost standarda od vertikalnog ugla moguće je rešiti ako se imaju u vidu teorijska razmatranja po kojima je disperzija uticaja višestruke refleksije proporcionalna odnosu ukupne snage reflektovanog i direktnog signala (Ray 2000):

$$(\sigma_\alpha)_M^2 = \frac{\lambda^2}{2} \frac{P_r}{P_d}, \quad (6.2.13)$$

pri čemu je λ talasna dužina odgovarajućeg signala. Pošto ovaj odnos u suštini zavisi samo od stepena prigušenja reflektujućih površi i profila iskorišćenosti antene, sledi da je redukciona funkcija oblika:

$$(\sigma_\alpha)_M^2 = (\sigma_0)_M^2 \cdot 10^{a(90-\alpha)^2 + b(90-\alpha)}, \quad (6.2.14)$$

sa parametrima koji imaju iste vrednosti kao u slučaju preciznosti praćenja signala, i jedinom razlikom u pogledu zenitne disperzije. Zaključak da su redukcione funkcije višestruke refleksije i mernog šuma identične do faktora razmere proveren je pomoću već određenih parametara ($a = +0.00138$ i $b = -0.06677$). Rezultati su prikazani na slici 6.18 za primer frekvencije L2.

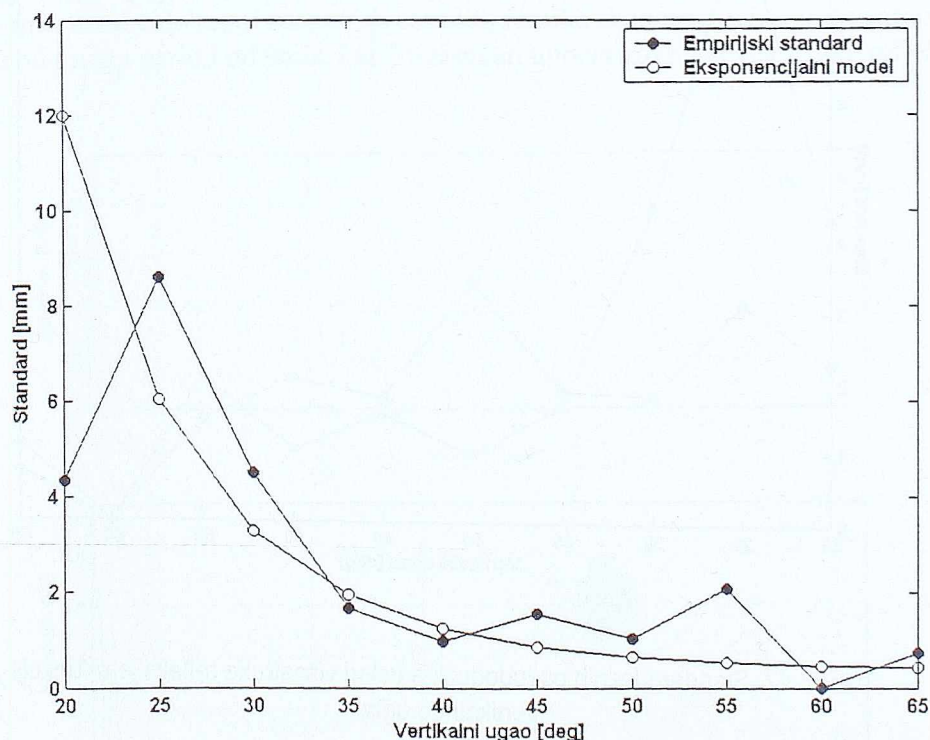
Konačno, uticaji višestruke refleksije specifični su za svaku lokaciju ponaosob i međusobno su nezavisni za simultana opažanja prema različitim satelitima. To znači da ova komponenta disperzija i kovarijacija dvostrukih faznih razlika ima sledeće oblike:

$$(\sigma_{lm}^{ij})_M^2 = (\sigma_l^i)_M^2 + (\sigma_l^j)_M^2 + (\sigma_m^i)_M^2 + (\sigma_m^j)_M^2 \quad (6.2.15)$$

$$(\sigma_{lm}^{ij,ik})_M^2 = (\sigma_l^i)_M^2 + (\sigma_m^i)_M^2 \quad (6.2.16)$$

$$(\sigma_{lm,ln}^{ij})_M^2 = (\sigma_l^i)_M^2 + (\sigma_l^j)_M^2 \quad (6.2.17)$$

$$(\sigma_{lm,ln}^{ij,ik})_M^2 = (\sigma_l^i)_M^2 \quad (6.2.18)$$



SLIKA 6.18. Redukciona funkcija standarda faznih pseudodužina usled višestruke refleksije na primeru frekvencije L2.

6.2.2 Troposferska refrakcija

Disperzija originalne pseudodužine usled dejstva troposferske refrakcije može se napisati u obliku:

$$(\sigma_l^i)_T^2 = F^2(\alpha) \sigma_{T,0}^2, \quad (6.2.19)$$

gde je F odgovarajuća troposferska redukciona funkcija vertikalnog ugla, a $\sigma_{T,0}^2$ disperzija zenitnog troposferskog kašnjenja. Stepenn kovarijacije između dve pseudodužine izmerene sa iste stanice prema dva satelita zavisi od uglovnog rastojanja θ između ovih pravaca. Manje uglovno rastojanje znači veći stepen korelacije, jer signali prolaze kroz praktično isti region troposfere. Kada je to uglovno rastojanje veliko, velika je i dekokorelacija opažanja. Odgovarajući kovarijacioni model prema tome može glasiti:

$$(\sigma_{ij}^j)_T = F(\alpha^i)F(\alpha^j) \sigma_{T,0}^2 \cdot e^{-\frac{\theta}{\Theta}}, \quad (6.2.20)$$

sa korelacionim uglovnim rastojanjem Θ . Na sličan način moguće je formulisati kovarijacioni model opažanja prema istom satelitu, ali sa dve stanice na međusobnom rastojanju d :

$$(\sigma_{lm}^i)_T = F^2(\alpha^i) \sigma_{T,0}^2 \cdot e^{-\frac{d}{D}}, \quad (6.2.21)$$

sa korelacionom dužinom D . Konačno, kovarijacija između opažanja izvršenih sa dve stanice prema dva satelita glasi:

$$(\sigma_{lm}^{ij})_T = F(\alpha^i)F(\alpha^j) \sigma_{T,0}^2 \cdot e^{-\frac{\theta}{\Theta}} \cdot e^{-\frac{d}{D}}. \quad (6.2.22)$$

Imajući u vidu gornje izraze, sledi da su odgovarajuće komponente disperzija i kovarijacija dvostrukih razlika oblika:

$$(\sigma_{lm}^{ij})_T^2 = 2 \left(F^2(\alpha^i) + F^2(\alpha^j) - 2F(\alpha^i)F(\alpha^j) \cdot e^{-\frac{\theta^{ij}}{\Theta}} \right) \left(1 - e^{-\frac{d_{lm}}{D}} \right) \sigma_{T,0}^2, \quad (6.2.23)$$

$$(\sigma_{lm}^{ij,ik})_T = 2 \begin{pmatrix} F^2(\alpha^i) + F(\alpha^j)F(\alpha^k) \cdot e^{-\frac{\theta^{jk}}{\Theta}} - F(\alpha^i)F(\alpha^j) \cdot e^{-\frac{\theta^{ij}}{\Theta}} \\ -F(\alpha^i)F(\alpha^k) \cdot e^{-\frac{\theta^{ik}}{\Theta}} \end{pmatrix} \cdot \left(1 - e^{-\frac{d_{lm}}{D}} \right) \sigma_{T,0}^2, \quad (6.2.24)$$

$$(\sigma_{lm,ln}^{ij})_T = \left(F^2(\alpha^i) + F^2(\alpha^j) - 2F(\alpha^i)F(\alpha^j) \cdot e^{-\frac{\theta^{ij}}{\Theta}} \right) \left(1 + e^{-\frac{d_{mn}}{D}} - e^{-\frac{d_{lm}}{D}} - e^{-\frac{d_{ln}}{D}} \right) \sigma_{T,0}^2, \quad (6.2.25)$$

$$(\sigma_{lm,ln}^{ij,ik})_T = \begin{pmatrix} F^2(\alpha^i) + F(\alpha^j)F(\alpha^k) \cdot e^{-\frac{\theta^{jk}}{\Theta}} - F(\alpha^i)F(\alpha^j) \cdot e^{-\frac{\theta^{ij}}{\Theta}} \\ -F(\alpha^i)F(\alpha^k) \cdot e^{-\frac{\theta^{ik}}{\Theta}} \end{pmatrix} \cdot \left(1 + e^{-\frac{d_{mn}}{D}} - e^{-\frac{d_{lm}}{D}} - e^{-\frac{d_{ln}}{D}} \right) \sigma_{T,0}^2, \quad (6.2.26)$$

pri čemu se kao jedine nepoznate veličine pojavljuju modelski parametri Θ , D i $\sigma_{T,0}^2$.

Za praktično određivanje modelskih parametara iskorišćeni su rezultati dvofrekventnih merenja dve merne sesije, od kojih se prva odnosi na međunarodnu GPS kampanju BALKAN98 (Altiner et al. 1999), dok je druga realizovana u okviru državne referentne mreže na području Centra za katastar nepokretnosti Niš (tabela 6.7).

TABELA 6.7. Osnovne karakteristike merenih sesija korišćenih za modeliranje disperzije dvostrukih razlika usled troposferske refrakcije.

Karakteristika	Merna sesija 1	Merna sesija 2
Datum merenja	09.04.1998	23.07.2002
Trajanje sesije	13:00 UTC – 15:00 UTC	10:05 UTC – 11:30 UTC
Interval registracije	15s	15s
Stanični parovi (rastojanja)	R164 – E497 (79.0km) R164 – E600 (129.2km) R164 – E007 (160.8km)	R721 – R720 (8.4km) R721 – E818 (22.3km) R721 – R716 (39.8km)
Referentni satelit	18	1
Nereferentni sateliti	4, 13, 16, 19, 24, 27	2, 13, 20, 22, 24, 27

Nakon što su originalna merenja vremenski sinhronizovana i oslobođena hidrostatičke komponente troposferske refrakcije pomoću modifikovanog HOPFIELD modela, za svaki stanični par i nereferentni satelit formirane su serije od ukupno 12170 dvostrukih razlika dvofrekventne linearne kombinacije L_3 . Pošto se ovom linearnom kombinacijom u potpunosti eliminiše jonosferski efekat prvog reda, strukturu formiranih dvostrukih razlika čine geometrijska rastojanja, fazne neodređenosti, i uticaji vlažne komponente troposferske refrakcije, višestruke refleksije i mernog šuma:

$$\Delta\nabla L_3 = \Delta\nabla\rho + \Delta\nabla N_3 + \Delta\nabla T_w + \Delta\nabla M + \omega_{\Delta\nabla}. \quad (6.2.27)$$

Geometrijska rastojanja određena su i potom eliminisana računanjem na osnovu poznatih staničnih i satelitskih koordinata. Međutim, da bi se odredile fazne neodređenosti, koje inače za kombinaciju L_3 nemaju osobinu celobrojnosti, bilo je neophodno rešavanje faznih neodređenosti originalnih faznih pseudodužina L_1 i L_2 . U tu svrhu prvo su formirane serije dvostrukih razlika dvofrekventne fazno-kodne linearne kombinacije L_{MW} :

$$\Delta\nabla L_{MW} = \frac{f_1 L_1 - f_2 L_2}{f_1 - f_2} - \frac{f_1 P_1 + f_2 P_2}{f_1 + f_2}, \quad (6.2.28)$$

koja je karakteristična po velikoj talasnoj dužini (oko 0.86m) i po odsustvu geometrijskih i atmosferskih uticaja, tako da joj je vrednost konstantna i teorijski jednaka faznoj neodređenosti dvofrekventne linearne kombinacije L_5 :

$$\Delta\nabla L_{MW} = \Delta\nabla N_5 = \Delta\nabla N_1 - \Delta\nabla N_2. \quad (6.2.29)$$

Potom je rešavana fazna neodređenost dvofrekventne linearne kombinacije L_6 :

$$\Delta\nabla N_6 = \Delta\nabla N_1 + \Delta\nabla N_2 = \frac{f_1(2\Delta\nabla L_{MW} - \Delta\nabla N_5) - f_2\Delta\nabla N_5}{f_1 - f_2}, \quad (6.2.30)$$

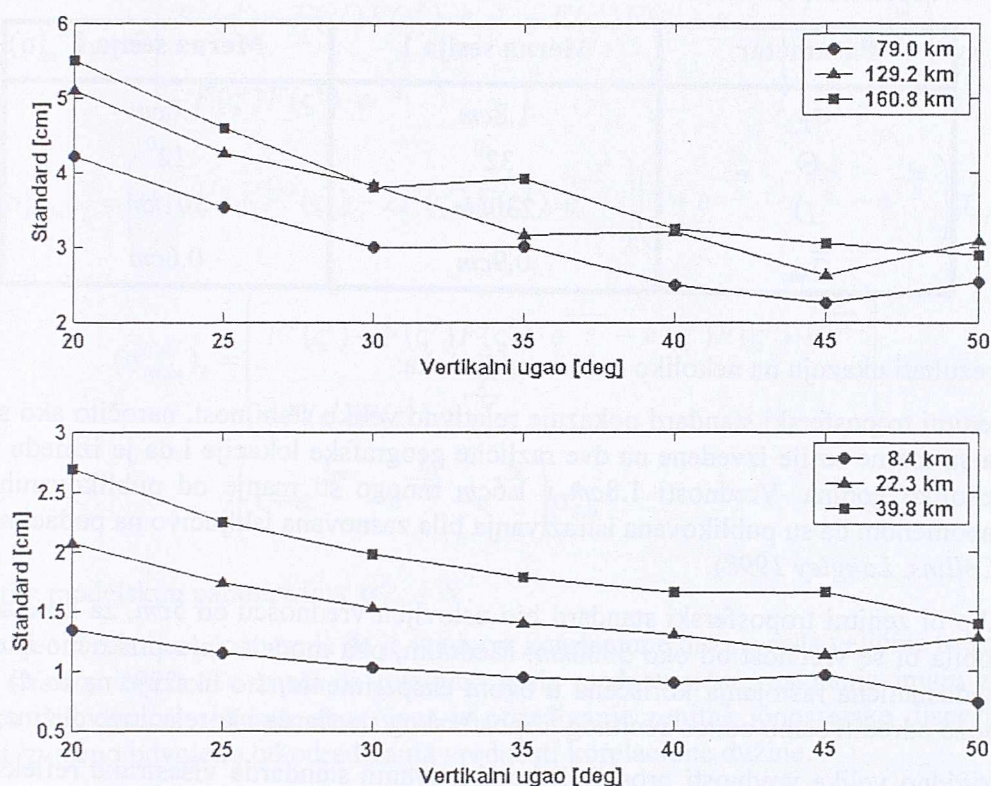
i konačno fazne neodređenosti originalnih pseudodužina:

$$\Delta\nabla N_1 = \frac{\Delta\nabla N_6 + \Delta\nabla N_5}{2}, \quad \Delta\nabla N_2 = \frac{\Delta\nabla N_6 - \Delta\nabla N_5}{2}. \quad (6.2.31)$$

Nominalne vrednosti faznih neodređenosti nizova dvostrukih razlika $\Delta\nabla L_3$ računane su po teorijskom izrazu:

$$\Delta\nabla N_3 = \Delta\nabla N_1 - \frac{f_2}{f_1} \Delta\nabla N_2, \quad (6.2.32)$$

tako da je nakon njihove eliminacije preostao samo uticaj troposferske refrakcije, višestruke refleksije i mernog šuma. Redukovane dvostruke razlike grupisane su u klase širine 5^0 po vertikalnom uglu, i za svaku klasu empirijski je određen standard (slika 6.19).



SLIKA 6.19. Kombinovani standard dvostrukih razlika usled troposferske refrakcije, višestruke refleksije i mernog šuma, u funkciji vertikalnog ugla i različitih međustaničnih rastojanja.

Sa slike je očigledna zavisnost standarda dvostrukih razlika kako od vertikalnog ugla, tako i od međustaničnog rastojanja. Dobro slaganje sa teorijskim modelom (6.2.23) objašnjava se pre svega činjenicom da se različita međustanična rastojanja odnose na istu mernu sesiju i iste nereferentne satelite.

Određivanje modelskih parametara izvršeno je na osnovu linearizovane funkcije veze (6.2.3), dodatno modifikovane tako da sadrži prosečnu kombinovanu disperziju višestruke refleksije i mernog šuma, jer su ti uticaji još uvek prisutni u nizovima dvostrukih razlika:

$$(\sigma_{lm}^{ij})_T^2 = 2 \left(F^2(\alpha^i) + F^2(\alpha^j) - 2F(\alpha^i)F(\alpha^j) \cdot e^{-\frac{\theta^{ij}}{\Theta}} \right) \left(1 - e^{-\frac{d_m}{D}} \right) \sigma_{T,0}^2 + \bar{\sigma}_{M\omega}^2. \quad (6.2.33)$$

Pri tome je za troposfersku redukcionu funkciju korišćen jednostavni izraz:

$$F(\alpha^i) = \frac{1}{\sin \alpha^i}, \quad (6.2.34)$$

dok je uglovno rastojanje računato uz pomoć vertikalnih uglova i azimuta satelita:

$$\cos \theta^{ij} = \sin \alpha^i \sin \alpha^j + \cos \alpha^i \cos \alpha^j \cos(A^i - A^j). \quad (6.2.35)$$

MNK ocene modelskih parametara za obe merne sesije date su u tabeli 6.8.

TABELA 6.8. Ocene modelskih parametara disperzije dvostrukih razlika usled troposferske refrakcije.

Parametar	Merna sesija 1	Merna sesija 2
$\sigma_{T,0}$	1.8cm	1.6cm
Θ	32°	12°
D	230km	301km
$\bar{\sigma}_{M\omega}$	0.9cm	0.6cm

Dobijeni rezultati ukazuju na nekoliko važnih zaključaka:

- Zenitni troposferski standard pokazuje relativno veliku stabilnost, naročito ako se ima u vidu da su merne sesije izvedene na dve različite geografske lokacije i da je između njih proteklo nekoliko godina. Vrednosti 1.8cm i 1.6cm mnogo su manje od publikovanih 5cm, ali sa napomenom da su publikovana istraživanja bila zasnovana isključivo na podacima radio sonde (Collins, Langley 1998).
- Ako bi zenitni troposferski standard bio uslovljen vrednošću od 5cm, za korelacionu dužinu dobila bi se vrednost od oko 3000km. Međutim, oba modela daju praktično iste rezultate za međustanična rastojanja korišćena u ovom eksperimentu, što ukazuje na to da se pouzdano može odrediti samo odnos zenitnog troposferskog standarda i korelacione dužine.
- Prividno velike vrednosti prosečnih kombinovanih standarda višestruke refleksije i mernog šuma odnose se na dvofrekventnu linearnu kombinaciju L_3 , u kojoj su ti uticaji teorijski tri puta veći u odnosu na originalne fazne pseudodužine.

6.2.3 Jonosferska refrakcija

Ako se greška pseudodužine usled jonosferske refrakcije posmatra kao posledica nesigurnosti modeliranja koncentracije elektrona u pravcu zenita, odgovarajuća disperzija ima oblik (Yang, Goad 1997):

$$(\sigma_I^i)^2 = \left(\frac{40.3}{f^2} \right)^2 \frac{\sigma_{VTEC}^2}{\cos^2 \zeta} = F^2(\zeta) \sigma_{I,0}^2, \quad (6.2.36)$$

gde F sada označava jonosfersku redukcionu funkciju čiji je argument zenitno odstojanje jonosferske tačke ζ , dok je $\sigma_{I,0}^2$ zenitna disperzija jonosferskog kašnjenja. Sa izuzetkom povremenih lokalnih poremećaja, prostorna raspodela zenitne koncentracije elektrona može se uglavnom smatrati glatkom funkcijom. To znači da kovarijacija između dve proizvoljne pseudodužine ima eksponencijalni oblik koji je veoma sličan slučaju troposferske refrakcije:

$$(\sigma_{lm}^{ij})_I = F(\zeta^i) F(\zeta^j) \sigma_{I,0}^2 \cdot e^{-\frac{s}{S}}, \quad (6.2.37)$$

s tom razlikom što je s međustanično rastojanje, odnosno rastojanje između jonosferskih tačaka. Korelaciona dužina S kontroliše prema tome i međustanične i međusatelitske korelacije.

Imajući u vidu kovarijacije između originalnih pseudodužina, sledi da su odgovarajuće komponente disperzija i kovarijacija dvostrukih razlika:

$$(\sigma_{lm}^{ij})_I^2 = 2 \left(F^2(\zeta^i) + F^2(\zeta^j) - 2F(\alpha^i)F(\alpha^j) \cdot e^{-\frac{s^{ij}}{S}} \right) \left(1 - e^{-\frac{s_{lm}}{S}} \right) \sigma_{I,0}^2, \quad (6.2.38)$$

$$(\sigma_{lm}^{ij,ik})_I = 2 \left(\begin{array}{l} F^2(\zeta^i) + F(\zeta^j)F(\zeta^k) \cdot e^{-\frac{s^{jk}}{S}} - F(\zeta^i)F(\zeta^j) \cdot e^{-\frac{s^{ij}}{S}} \\ -F(\zeta^i)F(\zeta^k) \cdot e^{-\frac{s^{ik}}{S}} \end{array} \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{s_{lm}}{S}} \right) \sigma_{I,0}^2, \quad (6.2.39)$$

$$(\sigma_{lm,ln}^{ij})_I = \left(F^2(\zeta^i) + F^2(\zeta^j) - 2F(\zeta^i)F(\zeta^j) \cdot e^{-\frac{s^{ij}}{S}} \right) \left(1 + e^{-\frac{s_{mn}}{S}} - e^{-\frac{s_{lm}}{S}} - e^{-\frac{s_{ln}}{S}} \right) \sigma_{I,0}^2, \quad (6.2.40)$$

$$(\sigma_{lm,ln}^{ij,ik})_I = \left(\begin{array}{l} F^2(\zeta^i) + F(\zeta^j)F(\zeta^k) \cdot e^{-\frac{s^{jk}}{S}} - F(\zeta^i)F(\zeta^j) \cdot e^{-\frac{s^{ij}}{S}} \\ -F(\zeta^i)F(\zeta^k) \cdot e^{-\frac{s^{ik}}{S}} \end{array} \right) \cdot \left(1 + e^{-\frac{s_{mn}}{S}} - e^{-\frac{s_{lm}}{S}} - e^{-\frac{s_{ln}}{S}} \right) \sigma_{I,0}^2, \quad (6.2.41)$$

sa nepoznatim modelskim parametrima $\sigma_{I,0}^2$ i S .

Iz već objavljenih rezultata poznato je da je vrednost korelacione dužine reda veličine nekoliko hiljada kilometara (Newby 1992). To znači da relativno mala međustanična rastojanja imaju za posledicu veoma slabu uslovljenost sistema, zbog čega je određivanje zenitne jonosferske disperzije u ovom istraživanju izvršeno odvojeno od određivanja vrednosti korelacione dužine.

Vrednost zenitne jonosferske disperzije određena je na osnovu dvofrekventnih kodnih opažanja na tački R034, izvršenih 09.08.1998. godine instrumentom TRIMBLE 4000SSE i antenom opremljenom zaštitnikom za višestruku refleksiju. Iz kodnih merenja prema svim elektronski vidljivim satelitima čiji je vertikalni ugao bio veći od 40° formirani su prvo nizovi dvofrekventnih linearnih kombinacija P_4 :

$$P_4 = P_1 - P_2 = \left(1 - \frac{f_1^2}{f_2^2} \right) I_1 + M_4 + \omega_4, \quad (6.2.42)$$

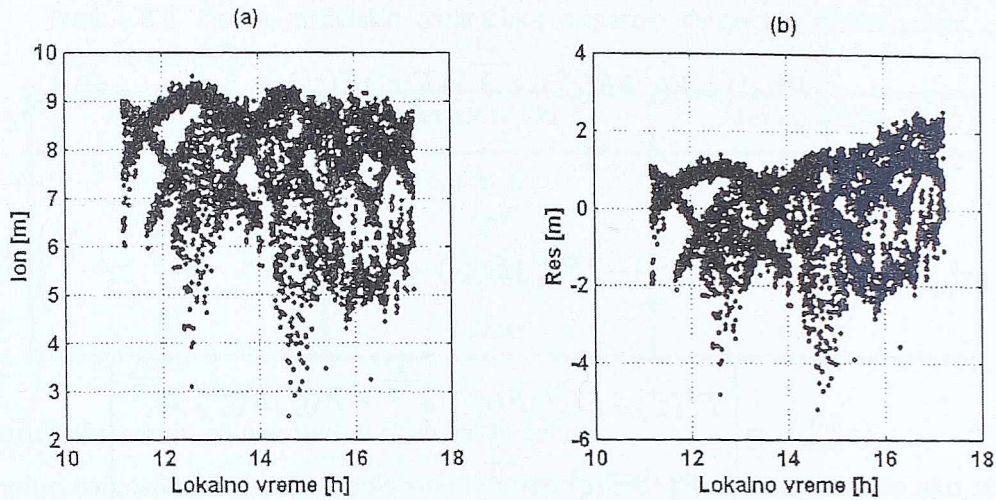
a zatim i odgovarajući nizovi ukupnog jonosferskog uticaja na prvoj frekvenciji, I_1 . Uz pomoć KLOBUCHAR algoritma, čiji koeficijenti čine sastavni deo satelitskih navigacionih poruka, iz jonosferskih signala eliminisan je modelski deo jonosferske refrakcije, i na taj način dobijeni su nizovi rezidualnih jonosferskih uticaja:

$$\delta I_1 = \frac{f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} P_4 - I_{1,KLOBUCHAR}. \quad (6.2.43)$$

Pošto se ukupni i rezidualni jonosferski uticaji odnose na satelite čiji se vertikalni ugao neprestano menja, izvršeno je njihovo projektovanje na pravac prema zenitu KLOBUCHAR redukcionom funkcijom:

$$F = 1 + 16(0.53 - \alpha)^3, \quad (6.2.44)$$

u kojoj α označava vertikalni ugao satelita izražen u umnošcima od π . Dobijeni rezultati prikazani su na slici 6.20 u funkciji lokalnog vremena. Veličina rezidualnih jonosferskih uticaja pokazuje da standardni model KLOBUCHAR apsorbuje oko 70% veličine ukupnog jonosferskog uticaja u ovom primeru, što se dobro slaže sa GPS projektom specifikacijama za godine male Sunčeve aktivnosti.



SLIKA 6.20. Primer zenitnog jonosferskog uticaja na frekvenciji L1
(a) ukupni zenitni jonosferski uticaj; (b) rezidualni jonosferski uticaj.

Kombinovani standard zenitnog jonosferskog kašnjenja, višestruke refleksije i mernog šuma sračunat je iz odstupanja od aritmetičke sredine ukupno 5545 rezidualnih zenitnih jonosferskih signala, i iznosi:

$$\sigma_{IM\omega,0} = 1.18m. \quad (6.2.45)$$

S obzirom na to da je ocena (6.2.45) opterećena uticajem višestruke refleksije i mernog šuma kodnih pseudodužina, izvršena je procena njihove prosečne vrednosti na osnovu niza od 853 trećih vremenskih razlika dvostrukih kodnih razlika, $\delta_3 \Delta \nabla C_1$, sa staničnim parom R034 – E497 i satelitskim parom PRN18 – PRN19. Pod pretpostavkom da su u trećim vremenskim razlikama eliminisani rezidualni sistematski uticaji, ocena prosečnog kombinovanog standarda višestruke refleksije i mernog šuma iznosi:

$$\sigma_{M\omega} = \sqrt{\frac{\sigma_{\delta_3 \Delta \nabla C_1}^2}{80}} = 0.21m. \quad (6.2.46)$$

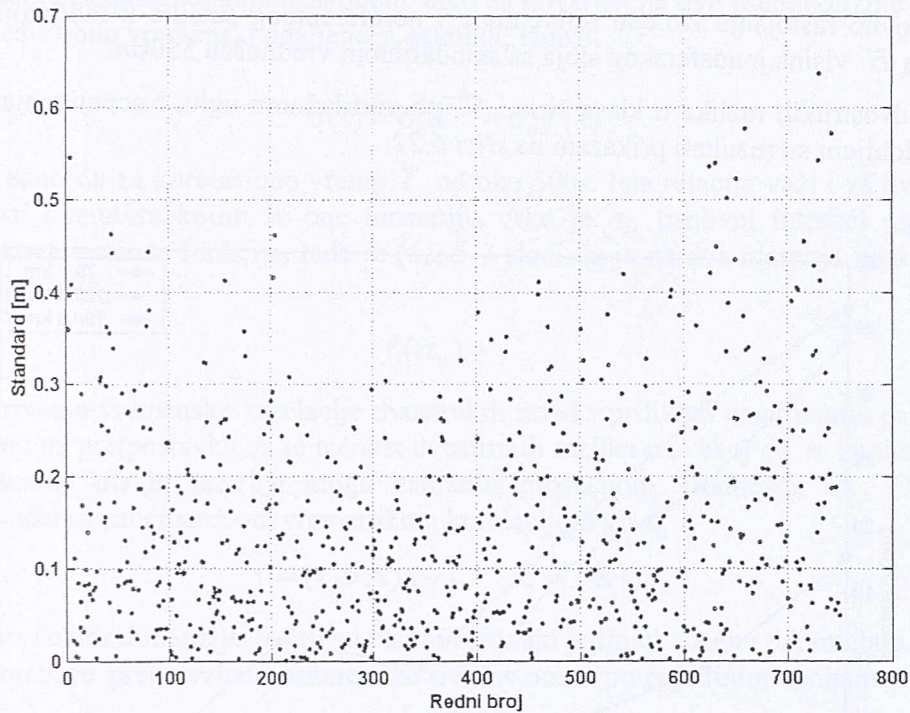
Pojedinačne vrednosti ovog standarda prikazane su radi ilustracije na slici 6.21. Ocena čistog zenitnog jonosferskog standarda iznosi 1.16m, i data je u tabeli 6.9, zajedno sa još dvema ocenama dobijenim na osnovu merenja na tački R034 izvršenim 1997. i 2000. godine. Odnosi:

$$\frac{\sigma_{I,0}^2(1998)}{\sigma_{I,0}^2(1997)} = 1.43,$$

$$\frac{\sigma_{I,0}^2(1998)}{\sigma_{I,0}^2(2000)} = 2.75, \quad (6.2.47)$$

$$\frac{\sigma_{I,0}^2(1997)}{\sigma_{I,0}^2(2000)} = 1.92,$$

ukazuju na nejednakost disperzija jer su vrednosti veće od kvantila Fišerovog rasporeda za verovatnoću 0.99, koji za veliki broj stepeni slobode iznosi praktično 1. Iz dobijenih rezultata sledi da je zenitni standard jonosferske refrakcije nestabilan i da se mora ocenjivati za epohu merenja.



SLIKA 6.21. Kombinovani standard višestruke refleksije i mernog šuma kodnih pseudodužina C1. Stanični par R034 - E497, satelitski par PRN18 - PRN19.

TABELA 6.9. Ocene zenitnog standarda originalnih pseudodužina usled jonosferske refrakcije.

Datum merenja	$\sigma_{I,0}$	Broj stepeni slobode
13.10.1997	0.97m	2469
08.09.1998	1.16m	5544
22.12.2000	0.70m	3396

Korelaciona dužina S , kao drugi modelski parametar, određena je iz nizova dvostrukih razlika linearnih dvofrekventnih kombinacija faznih pseudodužina $\Delta\nabla L_4$:

$$\begin{aligned} \Delta\nabla L_4 &= \Delta\nabla L_1 - \Delta\nabla L_2 \\ &= \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \Delta\nabla I_1 + \lambda_1 \Delta\nabla N_1 - \lambda_2 \Delta\nabla N_2 + \Delta\nabla M_4 + \omega_{\Delta\nabla} \end{aligned} \quad (6.2.48)$$

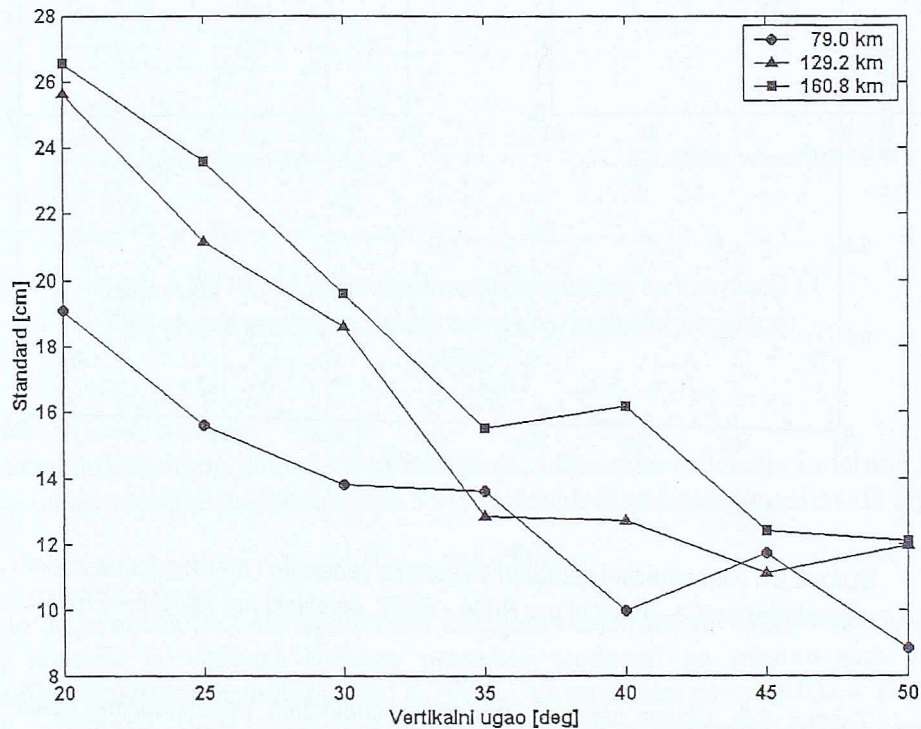
Rezultati merenja koji su tom prilikom korišćeni poticali su iz sesije u okviru GPS kampanje BALKAN98, kao i u slučaju istraživanja troposferske refrakcije. Fazne neodređenosti originalnih pseudodužina, N_1 i N_2 , rešene su i eliminisane na identični način, pomoću nizova dvostrukih razlika dvofrekventnih linearnih kombinacija $\Delta\nabla L_{MW}$ i $\Delta\nabla L_3$. Iz troposferskog eksperimenta preuzeta je vrednost kombinovanog standarda višestruke refleksije i mernog šuma, ali je modifikovana tako da se

odnosi na dvofrekventnu linearnu kombinaciju L_4 . Na taj način obezbeđeno je da nizovi $\Delta\nabla L_4$ sadrže samo dvostruke razlike jonosferskog signala. Za svaku dvostruku razliku sračunato je i rastojanje između jonosferskih tačaka po izrazu:

$$s^{ij} = \theta^{ij}(R + H), \quad (6.2.49)$$

gde je θ uglovno rastojanje između referentnog i nereferentnog satelita u radijanima, R Zemljin poluprečnik, a H visina jonosferskog sloja sa standardnom vrednošću 350km .

Grupisanjem dvostrukih razlika u klase širine 5° po vertikalnom uglu, i ocenjivanjem standarda za svaku klasu, dobijeni su rezultati prikazani na slici 6.22.



SLIKA 6.22. Kombinovani standard dvostrukih razlika usled jonosferske refrakcije, višestruke refleksije i mernog šuma, u funkciji vertikalnog ugla i različitih međustaničnih rastojanja.

Empirijski standardi pokazuju očiglednu zavisnost kako od vertikalnog ugla tako i od međustaničnog rastojanja. Dobro slaganje sa funkcijom teorijske disperzije (6.2.38) objašnjava se korišćenjem podataka koji se odnose na istu mernu sesiju, kao i u slučaju troposferske refrakcije.

Linearizacijom funkcije (6.2.38) u okolini približne vrednosti korelacione dužine kao jedine nepoznate veličine, i formalnom primenom metode najmanjih kvadrata, dobijena je ocena:

$$S = 7346\text{km}. \quad (6.2.50)$$

Prikazani praktični postupak pokazuje da je neophodno korišćenje podataka sa većih međustaničnih rastojanja zbog slabe uslovljenosti modela, i za epohu konkretnih merenja zbog nestabilnosti parametara tokom vremena. Prema tome, da bi se formulisao stohastički model lokalne referentne GPS mreže, potrebno je u tu svrhu koristiti izvršena merenja za određivanje zenitnog standarda jonosferske refrakcije, a podatke EUREF ili IGS mreže permanentnih stanica za određivanje korelacione dužine.

6.2.4 Vremenska i međufrekventna korelacija

Poznata je činjenica da su originalna GPS merenja vremenski korelisana, pri čemu je stepen korelacije tim veći što je interval registracije kraći (*El Rabbany 1994; Han, Rizos 1995*). Vremenska korelacija obično se modelira eksponencijalnim zakonom, tako da kovarijacija dve pseudodužine istog standarda σ_0 , koje su međusobno vremenski udaljene τ sekundi, iznosi:

$$\sigma(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\frac{\tau}{T}} = \sigma_0^2 f(\tau), \quad (6.2.51)$$

sa tipičnom vrednošću za korelaciono vreme T od oko 300s. Ista relacija važi i za dvostruke razlike zbog linearnosti operatora kojim se one formiraju. Ako je τ_0 osnovni interval registracije a f odgovarajuća kovarijaciona funkcija, tada iz (6.2.51) sledi da je za dva merenja koja su međusobno vremenski udaljena $i\tau_0$:

$$f(i\tau_0) = f^i. \quad (6.2.52)$$

Efekti zanemarivanja vremenske korelacije dvostrukih razlika prilikom ocenjivanja parametara mogu se kvantifikovati uz pretpostavku da je tačnost dvostrukih razlika u svakoj od n epoha merenja ista, i da se individualne dizajn matrice mogu zameniti prosečnom vrednošću \mathbf{A} . U tom slučaju, matematički model sa zanemarenom vremenskom korelacijom glasi:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{A})\mathbf{x} - \mathbf{1}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{C}_0, \quad (6.2.53)$$

gde $\mathbf{1}$ označava vektor dimenzije n čiji su članovi jednaki jedinici. Ocene parametara i odgovarajuće kovarijacione matrice predstavljaju aritmetičke sredine ocena po pojedinim epohama merenja:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{x}}_i, \quad \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{A})^{-1}. \quad (6.2.54)$$

Međutim, kada se vremenska korelacija dvostrukih razlika uzme u obzir, matematički model postaje:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{A})\mathbf{x} - \mathbf{1}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F} \otimes \mathbf{C}_0, \quad (6.2.55)$$

sa matricom \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & f & f^2 & \dots & f^{n-1} \\ f & 1 & f & \dots & f^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{n-1} & f^{n-2} & f^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.2.56)$$

Imajući u vidu svojstva Kronekerovog proizvoda, rešenja ovog modela glase:

$$\bar{\mathbf{x}} = \left\{ \left[(\mathbf{1}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^T \mathbf{F}^{-1} \right] \otimes \left[(\mathbf{A}^T \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_0^{-1} \right] \right\} \mathbf{1}, \quad (6.2.57)$$

$$\mathbf{C}_{\bar{\mathbf{x}}} = \left[(\mathbf{1}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{A}) \right]^{-1}. \quad (6.2.58)$$

Specifični oblik matrice \mathbf{F} dozvoljava jednostavno nalaženje njene inverzije, tako da se gornji izrazi mogu znatno pojednostaviti:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n g_i} \sum_{i=1}^n g_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad \mathbf{C}_{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n g_i} (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{A})^{-1}, \quad (6.2.59)$$

sa koeficijentima g čija je vrednost:

$$g_i = \begin{cases} \frac{1}{1+f}, & i=1, \quad i=n \\ \frac{1-f}{1+f}, & i \neq 1, \quad i \neq n \end{cases} \quad (6.2.60)$$

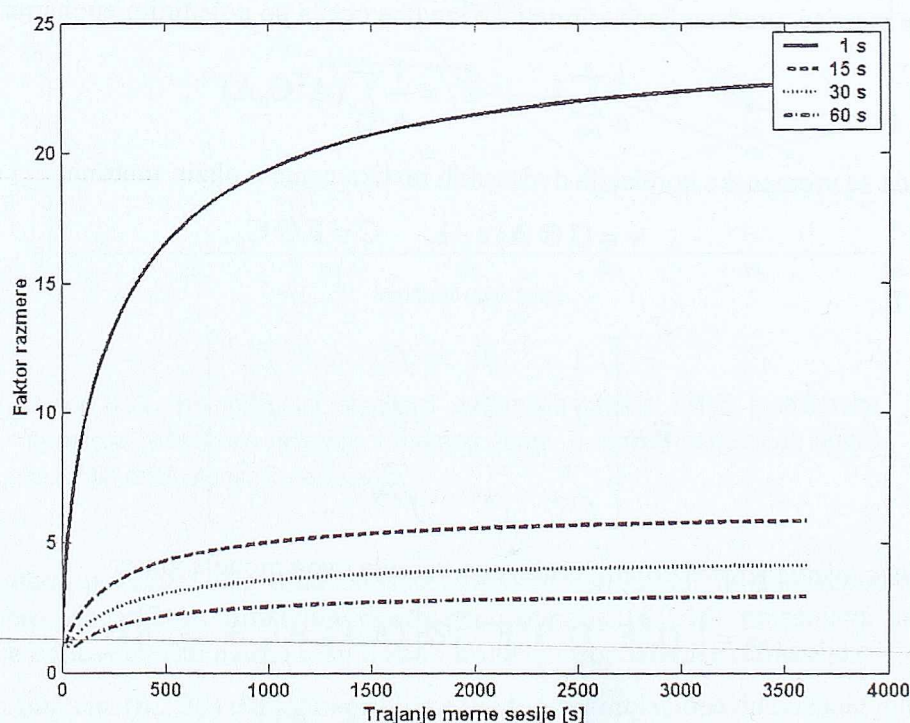
Upoređenje MNK ocena sa i bez vremenske korelacije daje:

$$\bar{x} = \hat{x} - \frac{f}{n(1-f)+2f} (2\hat{x} - \hat{x}_1 - \hat{x}_n), \quad C_{\bar{x}} = \frac{1+f}{1-f + \frac{2f}{n}} C_{\hat{x}} \quad (6.2.61)$$

Prema tome, zanemarivanje vremenske korelacije ima za posledicu promenu ocena parametara, iako se iz gornjeg izraza vidi da je ta promena minimalna. S druge strane, kovarijacionu matricu iz ocenjivanja bez vremenske korelacije potrebno je urazmeriti faktorom:

$$\alpha = \frac{1+f}{1-f + \frac{2f}{n}}, \quad (6.2.62)$$

čija vrednost očigledno zavisi od intervala registracije i broja epoha odnosno dužine merne sesije. Grafik faktora razmere $\sqrt{\alpha}$ za karakteristične vrednosti intervala registracije u funkciji vremena trajanja merne sesije dat je na slici 6.23.

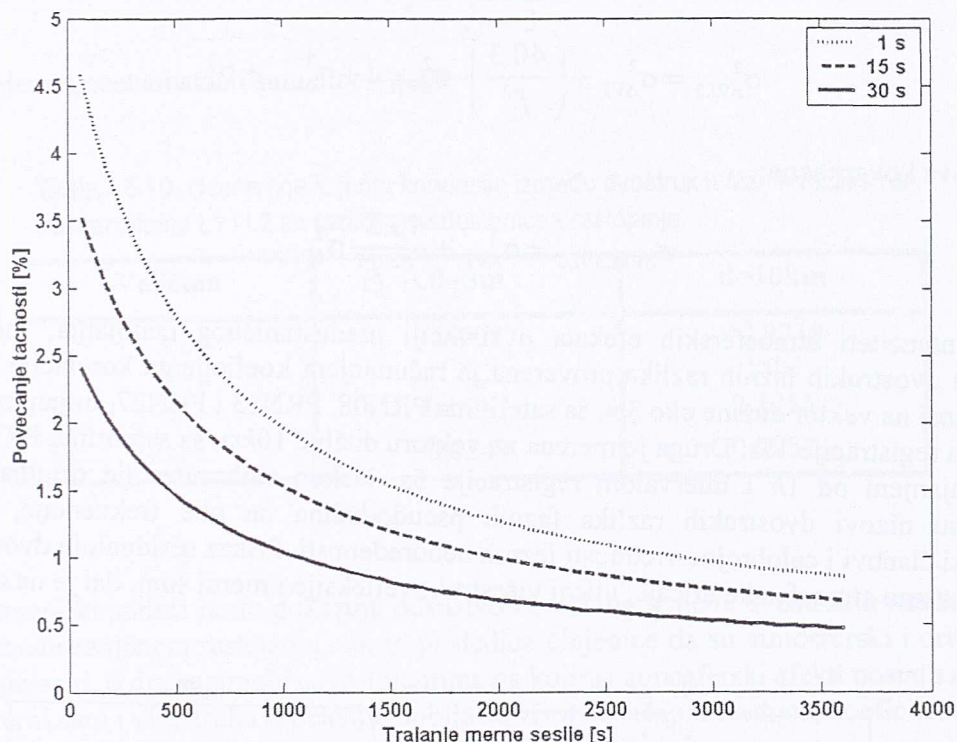


SLIKA 6.23. Faktor razmere za različite intervale registracije u funkciji vremena trajanja merne sesije. Korelaciono vreme $T=300s$.

Izraz (6.2.61) može se upotrebiti i za ispitivanje uticaja izbora intervala registracije na tačnost ocenjenih parametara. Za dve jednako duge merne sesije sa intervalima registracije τ_1 i τ_2 , relativni odnos tačnosti iznosi:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{1 + f_1}{1 + f_2} \cdot \frac{2f_2 + n_2(1 - f_2)}{2f_1 + n_1(1 - f_1)}} - 1. \quad (6.2.63)$$

Slika 6.24 prikazuje procentualno povećanje tačnosti ocena parametara za intervale registracije 1s, 15s i 30s, u odnosu na vrednost od 60s.



SLIKA 6.24. Povećanje tačnosti ocena parametara za različite intervale registracije u odnosu na vrednost od 60s. Korelaciono vreme $T=300s$.

Grafici na slici 6.23 i slici 6.24 ilustruju dva važna svojstva u vezi rezultata relativnog GPS pozicioniranja:

- Kada se vremenska korelacija dvostrukih razlika ne uzima u obzir, kvalitet rezultata ocenjivanja uvek je precenjen. Pošto je faktor razmere α veći od jedinice, objektivna tačnost relativnih položaja tačaka niža je od tačnosti koja se dobija komercijalnim softverom. Odnos tačnosti sa i bez uzimanja u obzir vremenske korelacije zavisi kako od intervala registracije, tako i od dužine sesije, ali se stabilizuje na približno konstantnu vrednost nakon 20 minuta merenja.
- Povećanje tačnosti ocena parametara upotrebom manjeg intervala registracije veoma je malo, i iznosi najviše 4.5% za interval od 1s u odnosu na interval od 60s. To je još jedan dokaz da se povećanje tačnosti relativnog pozicioniranja ostvaruje dužim trajanjem merne sesije a ne skraćivanjem intervala registracije.

Drugo pitanje od značaja za relativno pozicioniranje dvostrukim razlikama, kojem u stručnoj literaturi nije posvećena gotovo nikakva pažnja, odnosi se na problem međufrekventne korelacije. U opštem slučaju smatra se da slučajne greške praćenja signala i greške usled višestruke refleksije nisu korelisane između frekvencija. Ovakav stav nije u potpunosti tačan jer većina prijemnika koristi C/A kod da bi otpočela praćenje faze nosećeg talasa na drugoj frekvenciji, ali je takav tip korelacije veoma

teško kvantitativno vrednovati. Pravi uzrok međufrekventne korelisanosti leži u rezidualnim atmosferskim uticajima. Greška usled troposferske refrakcije opterećuje pseudodužine na obe frekvencije istim iznosom, dok je veličina greške usled jonosferske refrakcije frekventno zavisna. Prema tome, disperzije dvostrukih faznih razlika na frekvencijama f_1 i f_2 iznose:

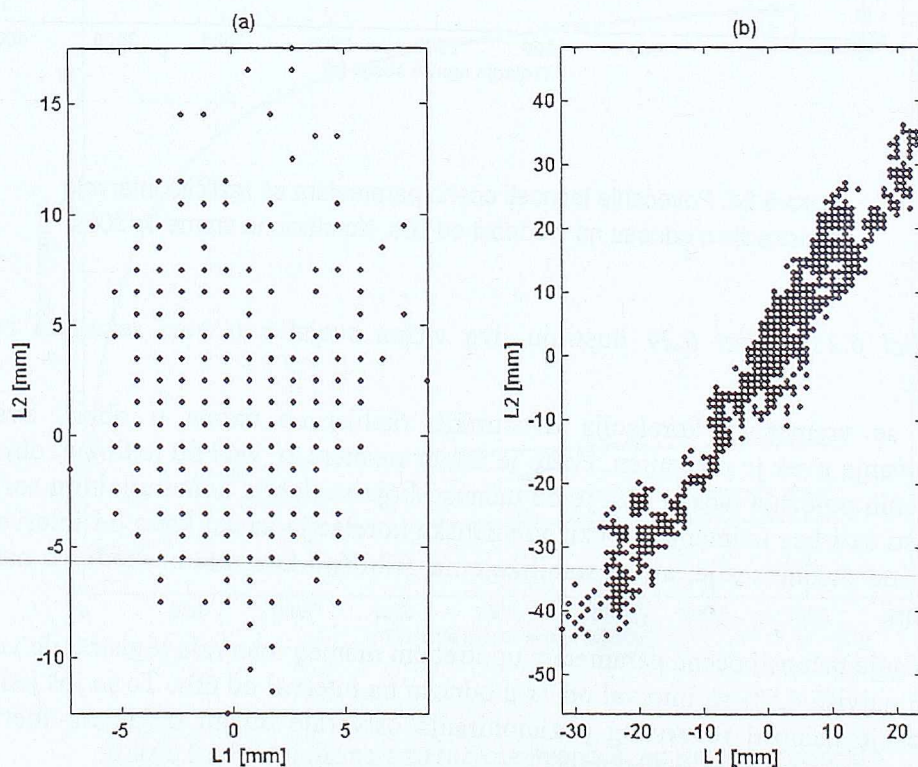
$$\sigma_{\Delta\nabla L1}^2 = \sigma_{\Delta\nabla T}^2 + \left(\frac{40.3}{f_1}\right)^2 \sigma_{\Delta\nabla TEC}^2 + \sigma_{\Delta\nabla M}^2 + \sigma_{\Delta\nabla \omega}^2, \quad (6.2.64)$$

$$\sigma_{\Delta\nabla L2}^2 = \sigma_{\Delta\nabla T}^2 + \left(\frac{40.3}{f_2}\right)^2 \sigma_{\Delta\nabla TEC}^2 + \sigma_{\Delta\nabla M}^2 + \sigma_{\Delta\nabla \omega}^2, \quad (6.2.65)$$

dok je njihova kovarijacija:

$$\sigma_{\Delta\nabla L1, \Delta\nabla L2} = \sigma_{\Delta\nabla T}^2 + \frac{40.3^2}{f_1^2 f_2^2} \sigma_{\Delta\nabla TEC}^2. \quad (6.2.66)$$

Pošto su intenziteti atmosferskih efekata u funkciji međustaničnog rastojanja, međufrekventna kovarijacija dvostrukih faznih razlika proverena je računanjem koeficijenta korelacije za dve sesije. Prva se odnosi na vektor dužine oko 3m, sa satelitima PRN08, PRN13 i PRN27, trajanjem sesije od 3h i intervalom registracije 15s. Druga je merena na vektoru dužine 10km, sa satelitima PRN02, PRN08 i PRN10, trajanjem od 1h i intervalom registracije 5s. Nakon sinhronizacije originalnih merenja, formirani su nizovi dvostrukih razlika faznih pseudodužina na obe frekvencije, i eliminisani geometrijski članovi i celobrojne vrednosti faznih neodređenosti. Prikaz rezidualnih dvostrukih razlika koje sadrže samo atmosferske uticaje, uticaj višestruke refleksije i merni šum, dat je na slici 6.25.



SLIKA 6.25. Korelacija između dvostrukih razlika faznih pseudodužina na frekvencijama L1 i L2 a) međustanično rastojanje 3m; b) međustanično rastojanje 10km.

Koeficijent korelacije r određen je iz n parova dvostrukih razlika, a zatim je izvršeno računanje ekvivalentne promenljive z i njenog standarda pomoću Fišerove transformacije (Perović 1984; Pelzer 1985):

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad (6.2.67)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (6.2.68)$$

Podaci o dobijenim ocenama dati su u tabeli 6.10.

TABELA 6.10. Ocene koeficijenta korelacije između dvostrukih faznih razlika na frekvencijama L1 i L2 za različita međustanična rastojanja.

Veličina	d=3m	d=10km
r	+0.0087	+0.9719
n	1722	1407
z	0.0087	2.1255
σ_z	0.0249	0.0267

Grafički i numerički podaci jasno pokazuju odsustvo korelacije između dvostrukih razlika formiranih na kratkom međustaničnom rastojanju, što je posledica činjenice da su atmosferski i orbitalni uticaji potpuno eliminisani. S druge strane, na rastojanjima na kojima atmosferski efekti postaju dominantni u odnosu na merni šum i višestruku refleksiju, dobija se visokoznačajna vrednost koeficijenta korelacije.

Važnost međufrekventne korelacije kod GPS obrade koja se zasniva na dvostrukim razlikama može se uglavnom posmatrati sa dva aspekta:

- Pre svega, ako se zajednički obrađuju dvostruke razlike formirane za obe frekvencije neophodno je uzeti u obzir međufrekventnu korelaciju. Međutim, zbog visoke vrednosti koeficijenta korelacije, dovoljno je koristiti dvostruke razlike samo jedne frekvencije, jer dvostruke razlike druge frekvencije ne predstavljaju dovoljno nezavisnu i novu informaciju u sistemu MNK ocenjivanja. Alternativa ovom postupku je relativno pozicioniranje zasnovano na dvofrekventnim linearnim kombinacijama.
- Značaj međufrekventne korelacije naročito dolazi do izražaja u fazi rešavanja faznih neodređenosti. Postupci rešavanja u prisustvu dvofrekventnih merenja zasnivaju se po pravilu na nekoj formi statističkog testiranja dvofrekventnih linearnih kombinacija, tako da pravilno obračunavanje međufrekventne korelacije može brže i pouzdanije dovesti do rezultata.

6.3 Tačnost pozicioniranja u pasivnim gradskim GPS mrežama

6.3.1 Proračun tačnosti GPS pozicioniranja

Sve informacije o tačnosti relativnog GPS pozicioniranja dvostrukim faznim razlikama na kratkim međustaničnim rastojanjima sadržane su u kovarijacionoj matrici koordinata, koja za mernu sesiju dužine T , sa brojem epoha merenja e i rešenim faznim neodređenostima ima oblik:

$$\mathbf{C}_{\dot{\mathbf{x}}} = \left(\frac{eT^2}{12} \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \dot{\mathbf{A}} + e\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \right)^{-1}. \quad (6.3.1)$$

Matrice $\bar{\mathbf{A}}$ i $\dot{\mathbf{A}}$ označavaju respektivno prosečnu konfiguracionu matricu i brzinu njene promene. Njihovi članovi predstavljaju dvostruke razlike komponenti i vremenskih izvoda jediničnih vektora prema opažanim satelitima, tako da se mogu odrediti kada je na raspolaganju satelitski almanah za period kada se planiraju merenja.

Međutim, izrazi za prethodnu ocenu tačnosti relativnog pozicioniranja mogu se izvesti i bez ikakvih dodatnih informacija ako se usvoje određene pretpostavke:

- Najnepovoljniji slučaj sa stanovišta prethodne ocene tačnosti predstavlja odsustvo promene satelitske konstelacije, iako je to praktično moguće samo kada se pozicioniranje vrši sa jednom epohom merenja. Tada se kovarijaciona matrica koordinata svodi na:

$$\mathbf{C}_{\dot{\mathbf{x}}} = \frac{1}{e} \left(\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \right)^{-1}. \quad (6.3.2)$$

- Algebarska korelativna zavisnost dvostrukih razlika brzo se smanjuje sa povećanjem broja opažanih satelita, tako da se može zanemariti. Odsustvo korelativne zavisnosti istovremeno znači da se merne sesije u kojima simultano učestvuje p prijemnika mogu tretirati kao skup od $p-1$ nezavisnih sesija sa po dva prijemnika. Ako je σ_0 standard fazne pseudoduzine L1 prema zenitnom referentnom satelitu, za matricu težina dvostrukih razlika dobija se u tom slučaju:

$$\mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} = \frac{\cos^2 z}{2\sigma_0^2} \mathbf{I}. \quad (6.3.3)$$

- Opažanja se posmatraju u prostornom kontinuumu kojeg predstavlja deo jedinične sfere ograničen maksimalnim zenitnim odstojanjem z_0 . Pošto se uvek može izabrati da je referentni satelit u pravcu zenita, koeficijenti konfiguracione matrice $\bar{\mathbf{A}}$ postaju funkcije zenitnog odstojanja i azimuta nerefereentnog satelita:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \sin z \cdot \sin A \\ \bar{b} &= \sin z \cdot \cos A. \\ \bar{c} &= \cos z - 1 \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Uz navedene uslove, samo su dijagonalni članovi matrice normalnih jednačina različiti od nule. Njihove srednje vrednosti iznose:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \right)_{\Delta\varphi} &= \frac{1}{2\sigma_0^2} \frac{1}{2\pi z_0} \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \sin^2 z \cdot \sin^2 A \cdot \cos^3 z \cdot dz dA \\ &= \frac{2 - 5 \cos^3 z_0 + 3 \cos^5 z_0}{60\sigma_0^2 (1 - \cos z_0)}, \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

$$\begin{aligned} \left(\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \right)_{\Delta\lambda} &= \frac{1}{2\sigma_0^2} \frac{1}{2\pi z_0} \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \sin^2 z \cdot \cos^2 A \cdot \cos^3 z \cdot dz dA \\ &= \frac{2 - 5 \cos^3 z_0 + 3 \cos^5 z_0}{60\sigma_0^2 (1 - \cos z_0)}, \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{C}_{\Delta\nabla}^{-1} \bar{\mathbf{A}})_{\Delta h} &= \frac{1}{2\sigma_0^2} \frac{1}{2\pi z_0} \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} (\cos^2 z - 1) \cos^3 z \cdot dz dA \\ &= \frac{1 - 10 \cos^3 z_0 + 15 \cos^4 z_0 - 6 \cos^5 z_0}{60 \sigma_0^2 (1 - \cos z_0)} \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Kada se ove srednje vrednosti pomnože brojem aktuelnih dvostrukih razlika $(s-1)$, i uzme u obzir njihova zanemarena vremenska korelacija, dobijaju se definitivni izrazi za disperzije relativnih horizontalnih i vertikalnih položaja tačaka:

$$\sigma_{\Delta p}^2 = \sigma_{\Delta\phi}^2 + \sigma_{\Delta\lambda}^2 = \frac{1+f}{1-f+\frac{2f}{e}} \cdot \frac{120(1-\cos z_0)}{e(s-1)(2-5\cos^3 z_0+3\cos^5 z_0)} \cdot \sigma_0^2 + 2\sigma_c^2, \quad (6.3.8)$$

$$\sigma_{\Delta h}^2 = \frac{1+f}{1-f+\frac{2f}{e}} \cdot \frac{60(1-\cos z_0)}{e(s-1)(1-10\cos^3 z_0+15\cos^4 z_0-6\cos^5 z_0)} \cdot \sigma_0^2 + 2\sigma_i^2, \quad (6.3.9)$$

pri čemu σ_c i σ_i označavaju standard centrisanja antene i standard merenja njene visine, dok je f funkcija intervala registracije τ_0 i korelacionog vremena T :

$$f = e^{-\frac{\tau_0}{T}}. \quad (6.3.10)$$

Prosečni jonosferski uticaj praktično je zanemarljiv na dužinama do $5km$, tako da u obradi merenja nije neophodno formiranje dvofrekventnih linearnih kombinacija L3. U takvim slučajevima postiže se veća tačnost relativnog pozicioniranja jednofrekventnim GPS merenjima.

Pokazatelji tačnosti pozicioniranja u okviru pasivne gradske GPS mreže koja se sastoji od n_T tačaka međusobno povezanih sa n_V vektora, izvode se iz MNK rezultata ocenjivanja. Pošto su u toj situaciji funkcije veza već linearne, dijagonalni i vandijagonalni članovi matrice normalnih jednačina iznose:

$$\begin{aligned} (\mathbf{N})_{ii} &= n_{VT} \\ (\mathbf{N})_{ij} &= -1 \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

gde n_{VT} označava prosečan broj vektora koji se susiču u svakoj tački mreže. Specifični oblik matrice normalnih jednačina dozvoljava lako nalaženje inverzije:

$$(\mathbf{N}^{-1})_{ii} = \frac{n_{VT} - n_T + 3}{(n_{VT} + 1)^2 - (n_T - 1)(n_{VT} + 1)}, \quad (6.3.12)$$

$$(\mathbf{N}^{-1})_{ij} = \frac{1}{(n_{VT} + 1)^2 - (n_T - 1)(n_{VT} + 1)}, \quad (6.3.13)$$

odakle sledi da se prosečne disperzije apsolutnih i relativnih položaja i visina tačaka mreže mogu sračunati po jednostavnim izrazima:

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{n_{VT} - n_T + 3}{(n_{VT} + 1)^2 - (n_T - 1)(n_{VT} + 1)} \cdot \sigma_{\Delta p}^2, \quad (6.3.14)$$

$$\hat{\sigma}_h^2 = \frac{n_{VT} - n_T + 3}{(n_{VT} + 1)^2 - (n_T - 1)(n_{VT} + 1)} \cdot \sigma_{\Delta h}^2, \quad (6.3.15)$$

$$\hat{\sigma}_{\Delta p}^2 = \frac{2}{n_{VT} + 1} \cdot \sigma_{\Delta p}^2, \quad (6.3.16)$$

$$\hat{\sigma}_{\Delta h}^2 = \frac{2}{n_{VT} + 1} \cdot \sigma_{\Delta h}^2 \quad (6.3.17)$$

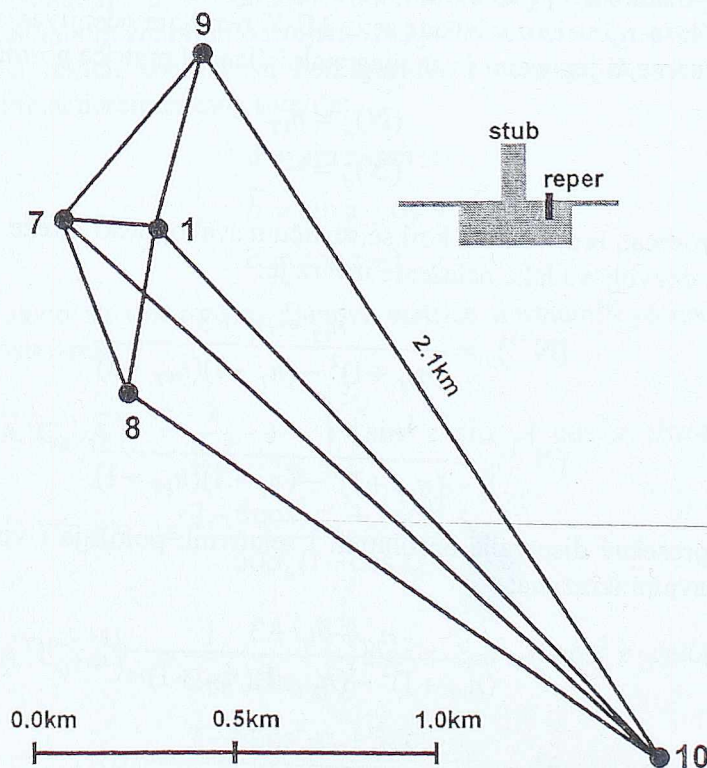
Svi navedeni izrazi za proračun tačnosti suštinski zavise od izbora standarda originalnih faznih merenja σ_0 . ICD-GPS-200 specifikacija predviđa tačnost faznih merenja na frekvenciji L1 u iznosu od $0.1rad$ odnosno $3mm$ u normalnim operativnim okolnostima. U uslovima prosečnih uticaja višestruke refleksije, za tu vrednost može se uzeti $5mm$, a kada je višestruka refleksija naročito izražena, tipična vrednost standarda kreće se do $10mm$.

6.3.2 Ocena tačnosti GPS pozicioniranja u test mrežama

Izrazi izvedeni u okviru proračuna tačnosti relativnog GPS pozicioniranja provereni su GPS merenjima i obradom rezultata u test mreži Novoselo u Republici Makedoniji i test mreži Lapovo u Republici Srbiji. Svojom konfiguracijom, brojem tačaka, prosečnim rastojanjima i karakteristikama izvršenih GPS merenja, obe test mreže zadovoljavaju uslove pretpostavljene pri izvođenju teorijskih formula.

Test mreža Novoselo

Test mreža Novoselo koja predstavlja geodetsku mrežu istoimene brane, pozicionirana je na srednjoj geografskoj širini $41^{\circ}25'$ i dužini $22^{\circ}53'$. Deo mreže korišćen u ovom istraživanju sastoji se od 5 tačaka stabilizovanih betonskim stubovima sa priborom za prisilno centrisanje, i sa reperima usađenim u stope (slika 6.26). Mreža se nalazi na prosečnoj visini od $316m$, sa maksimalnom visinskom razlikom $114m$. Rastojanja između tačaka kreću se u rasponu od $200m$ do $2km$.



SLIKA 6.26. Dispozicija tačaka i GPS veza u test mreži Novoselo.

U test mreži Novoselo izvršena su 1996. i 1997. godine precizna terestrička merenja dužina, pravaca i visinskih razlika za potrebe oskultacije objekta (Vučkov 2000). Objedinjavanjem 2D i 1D mreže i postupkom MNK ocenjivanja dobijeni su visokokvalitetni horizontalni i vertikalni položaji tačaka, koji su u ovom istraživanju usvojeni kao etalonski (tabela 6.11). Iz praktičnih razloga, horizontalne koordinate tačaka povezane su sa državnim referentnim sistemom uz uslov minimalizacije traga kovarijacione matrice položaja, dok su visine izvedene u sistemu državnog nivelmana visoke tačnosti usvajanjem visine repera DXXXIX.

TABELA 6.11. Ocene koordinata i visina tačaka test mreže Novoselo na osnovu MNK izravnjanja terestričkih merenja.

Tačka	Y [m]	X [m]	H [m]	σ_Y [mm]	σ_X [mm]	σ_H [mm]
1	255.6313	2204.1821	300.3250	0.19	0.17	0.07
7	28.8694	2219.0155	332.3730	0.54	0.40	0.16
8	319.7970	1757.7071	291.5006	0.49	0.54	0.21
9	374.5865	2756.9775	387.7480	0.86	0.80	0.20
10	1263.9939	874.6616	272.9007	0.91	1.10	0.39
Sredina:				0.65	0.68	0.23

Početkom 2003. godine, u test mreži Novoselo izvršena su GPS merenja sa dva dvofrekventna geodetska prijemnika SR530 i odgovarajućim antenama LEIAT502 firme LEICA. S obzirom na broj prijemnika, svaka merna sesija podrazumevala je određivanje pojedinačnih GPS vektora. Trajanje sesije bilo je ograničeno na 40min, sa intervalom registracije 10s i graničnim zenitnim uglom od 75° . U mreži je na taj način izmereno ukupno 9 GPS vektora. Osnovna obrada merenja izvršena je komercijalnim softverskim paketom GPSurvey v2.0 firme TRIMBLE, nakon što su originalne LEICA datoteke transformisane u standardni RINEX format. Rezultati obrade dobijeni su korišćenjem samo podataka merenja na frekvenciji L1, i prikazani su u tabeli 6.12.

TABELA 6.12. Osnovne karakteristike GPS merenja i obrade u test mreži Novoselo.

Vektor	D [m]	Δh [m]	e	s	$\check{\sigma}_{\Delta p}$ [mm]	$\check{\sigma}_{\Delta h}$ [mm]	$\check{\sigma}_0$	f
1 – 7	229	+32.1	229	5	1.3	1.7	1.45	1195
1 – 8	451	-8.8	256	6	1.3	1.4	1.95	1426
1 – 9	571	+83.5	245	5	1.1	2.1	1.64	1081
1 – 10	1668	-27.5	239	7	0.7	1.4	1.49	1440
7 – 8	547	-40.9	249	7	0.7	1.1	1.27	1500
7 – 9	641	+51.4	289	7	0.5	0.8	1.21	1838
7 – 10	1826	-59.5	261	7	0.6	1.0	1.25	1645
8 – 10	1293	-18.6	252	7	0.9	1.3	1.79	1377
9 – 10	2084	-110.9	242	6	0.6	0.9	1.15	1180
Sredina:			240	6	1.0	1.4	1.49	

Proračun tačnosti relativnog GPS pozicioniranja u test mreži Novoselo izveden je na nivou GPS vektora po izrazima (6.3.8) i (6.3.9). Imajući u vidu način centrisanja antena i merenja njihovih visina, usvojene su respektivno sledeće vrednosti:

$$\begin{aligned}\sigma_c &= 0.0\text{mm} \\ \sigma_i &= 0.5\text{mm}\end{aligned}\quad (6.3.18)$$

Kada se iz *tabele 6.12* preuzmu srednje vrednosti broja epoha i satelita, i usvoji da je standard originalnih faznih merenja $3mm$ jer u test mreži nema veštačkih reflektujućih površi, dobijaju se sledeći rezultati proračuna:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta p} &= 4.1mm \\ \sigma_{\Delta h} &= 4.3mm\end{aligned}\quad (6.3.19)$$

Nesaglasnost između ovih vrednosti i srednjih standarda relativnih položaja i visina iz *tabele 6.12* ($1.0mm$ i $1.4mm$ respektivno) rezultat je činjenice da komercijalni GPS softver po pravilu ne predviđa mogućnost implementacije vremenske korelacije originalnih GPS merenja. Stoga su srednje vrednosti standarda relativnih položaja i visina urazmerene faktorom:

$$k = \frac{1}{\bar{\sigma}_0} \sqrt{\frac{1+f}{1-f + \frac{2f}{e}}} = 4.20, \quad (6.3.20)$$

sa veličinom f sračunatom po izrazu (6.3.10), pri čemu je za korelaciono vreme izabrano $250s$, tako da su dobijeni sledeći rezultati kojima se vremenska korelacija uzima u obzir:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{\Delta p} &= 4.2mm \\ \bar{\sigma}_{\Delta h} &= 5.9mm\end{aligned}\quad (6.3.21)$$

Za proračun tačnosti relativnih položaja i visina u okviru mreže korišćeni su izrazi (6.3.16), (6.3.17) i rezultati proračuna na nivou vektora (6.3.19). Sa prosečnih 3.6 vektora koji se susište u tačkama mreže dobijaju se sledeće vrednosti:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\Delta p} &= 2.7mm \\ \hat{\sigma}_{\Delta h} &= 2.8mm\end{aligned}\quad (6.3.22)$$

Aktuelna ocena trodimenzionalnih koordinata test mreže izvršena je pomoću softvera sopstvene izrade. Ulazne veličine za proces MNK ocenjivanja predstavljale su komponente GPS vektora po koordinatnim osama i odgovarajuće kovarijacione matrice. Datumski defekt ranga matrice normalnih jednačina eliminisan je uslovljavanjem vrednosti apsolutnih trodimenzionalnih koordinata tačke 1, tako da je broj merenja iznosio 27, a broj nepoznatih parametara 12. Stohastički model formulisan je prvo originalnim kovarijacionim matricama izmerenih GPS vektora, a zatim su one urazmerene faktorom k (6.3.20). Ovakva modifikacija stohastičkog modela nema nikakvog uticaja na ocene koordinata, ali su zato dobijene dobijene sledeće ocene jediničnog standarda:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{0,1} &= 3.40 \\ \hat{\sigma}_{0,2} &= 1.21\end{aligned}\quad (6.3.23)$$

S obzirom na to da je za broj stepeni slobode 15 i verovatnoću 95% kvantil Fišerovog rasporeda 1.66, sledi da je globalna adekvatnost modela potvrđena samo ako se uzme u obzir vremenska korelacija GPS merenja. Minimalne, maksimalne i srednje vrednosti standarda relativnih položaja i visina tačaka u varijanti ocenjivanja sa modifikovanim stohastičkim modelom prikazani su u *tabeli 6.13*.

TABELA 6.13. Ocene standarda relativnih položaja i visina tačaka u test mreži Novoselo na osnovu MNK izravnjanja GPS merenja.

$\min \hat{\sigma}_{\Delta p} [mm]$	$\max \hat{\sigma}_{\Delta p} [mm]$	$\hat{\sigma}_{\Delta p} [mm]$	$\min \hat{\sigma}_{\Delta h} [mm]$	$\max \hat{\sigma}_{\Delta h} [mm]$	$\hat{\sigma}_{\Delta h} [mm]$
1.3	2.4	2.3	2.2	3.0	2.6

Konačno, proračun prosečne tačnosti apsolutnih položaja i visina tačaka test mreže Novoselo izvršen je po izrazima (6.3.14), (6.3.15) i rezultatima proračuna (6.3.19). Sa prosečnih 3.6 vektora koji se susstiču u svakoj od njih, dobija se:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= 3.1mm \\ \sigma_h &= 3.2mm\end{aligned}\quad (6.3.24)$$

Ove vrednosti proverene su na dva načina. Prvo, iz rezultata MNK ocenjivanja trodimenzionalnih koordinata test mreže sledi da su prosečni standardi apsolutnih položaja i visina tačaka:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_p &= 1.6mm \\ \hat{\sigma}_h &= 2.4mm\end{aligned}\quad (6.3.25)$$

Drugi način sastojao se u upoređenju horizontalnih položaja i visina tačaka ocenjenih iz GPS i terestričkih merenja. S obzirom na to da upoređenje ne može biti direktno zbog datumskih razlika, horizontalni položaji tačaka dovedeni su u datumsku konzistenciju dvodimenzionalnom transformacijom sličnosti sa četiri parametra, dok su razlike u visinama modelirane polinomom 1. stepena po horizontalnim koordinatama. MNK reziduumi upotrebljene transformacije sličnosti i polinomske aproksimacije dati su u tabeli 6.14.

TABELA 6.14. Reziduumi nakon 2D transformacije sličnosti i modeliranja referentne površi visina polinomom 1. stepena u test mreži Novoselo.

Tačka	v_Y [mm]	v_X [mm]	v_H [mm]
1	+6.4	-1.5	+13
7	-0.1	+2.8	-6
8	-5.2	-0.8	-3
9	-2.3	-0.9	-4
10	+1.1	+0.3	-1

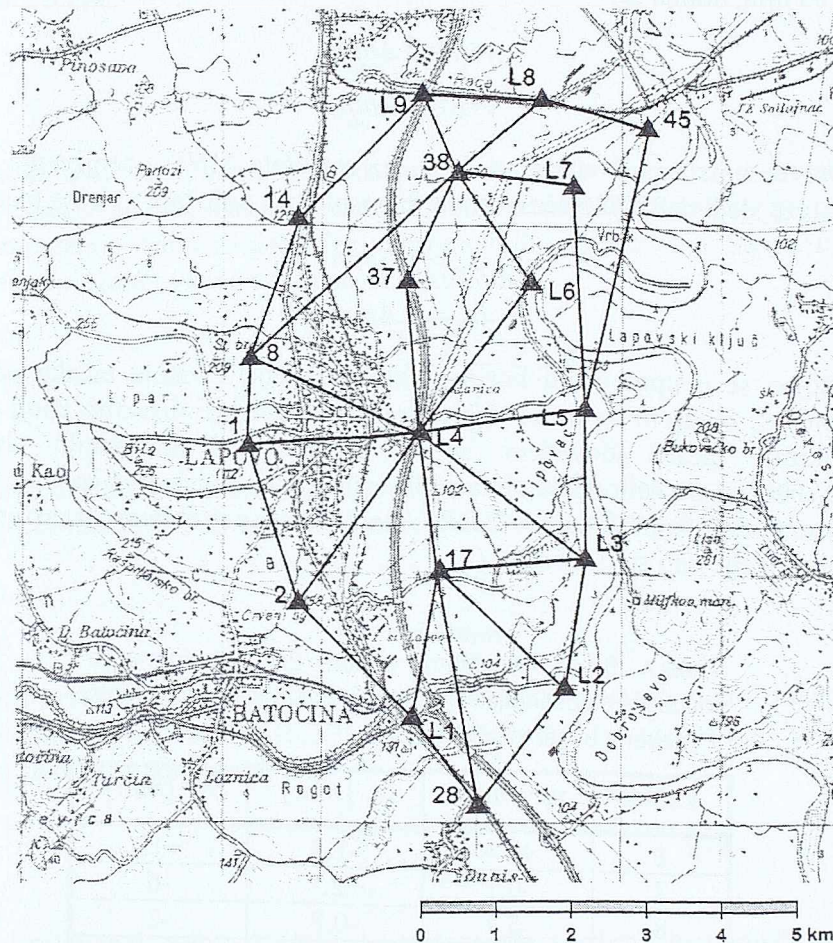
Nakon eliminacije podataka sa tačke 1 koji su ocenjeni kao grube greške izvršeno je kvadratno oduzimanje prosečnih etalonskih položajnih i visinskih standarda iz *tabele 6.11*, čime su dobijene sledeće ocene:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_p &= 3.6mm \\ \hat{\sigma}_h &= 1.7mm\end{aligned}\quad (6.3.26)$$

Test mreža Lapovo

Terestrička mreža Lapova predstavlja tipičnu gradsku trilateracionu mrežu iako je projektovana za potrebe komasacije i ostalih investiciono-tehničkih radova. Mreža se sastoji od 18 tačaka, od kojih je 9 iz sastava državne trigonometrijske mreže, a 9 novih je stabilizovano betonskim stubovima (*slika 6.27*). Prosečna visina mreže je 140m sa maksimalnom visinskom razlikom od 81m. Rastojanja između tačaka kreću se u rasponu od 1152m do 3864m.

Jula 1996. godine u test mreži Lapovo izvršeno je obostrano merenje dužina instrumentom WILD DI 5 i zenitnih odstojanja teodolitom WILD T-2. Horizontalni položaji tačaka određeni su u postupku MNK ocenjivanja, pri čemu je defekt ranga eliminisan uslovom minimalizacije dela traga kovarijacione matrice koji se odnosi na 9 tačaka postojeće državne trigonometrijske mreže.



SLIKA 6.27. Dispozicija tačaka i GPS veza test mreže Lapovo.

Avgusta iste godine uspostavljena je i nivelmanska mreža Lapova koja je obuhvatila svih 18 tačaka položajne mreže i 13 repera, sa konfiguracijom u obliku sistema zatvorenih poligona. Nivelmanska merenja izvršena su u jednom smeru sa promenom visine instrumenta, upotrebom nivelira ZEISS KONI 007 i odgovarajućih polucentimetarskih invarskih letava. Mreža je prilikom MNK ocenjivanja bila datumski oslonjena na reper XIII mreže preciznog nivelmana 1. reda iz 1930. godine.

Koordinate i visine tačaka ocenjene na osnovu terestričkih merenja dužina i visinskih razlika date su u tabeli 6.15.

U septembru 1996. godine test mreža Lapovo bila je obuhvaćena GPS mernom kampanjom. Sva merenja izvršena su sa četiri dvofrekventna geodetska prijemnika TRIMBLE 4000SSE i antenama COMPACT L1/2 w GP. Merne sesije trajale su 30min, sa intervalom registracije 15s i graničnim zenitnim odstojanjem od 75° . Između sesija dva prijemnika ostajala su na svojim mestima dok su dva premeštana na nove tačke, čime je u mreži izmereno ukupno 33 GPS vektora. Prilikom osnovne obrade korišćeni su samo podaci merenja frekvencije L1, sa rezultatima datim u tabeli 6.16.

TABELA 6.15. Ocene koordinata i visina tačaka test mreže Lapovo na osnovu MNK izravnjanja terestričkih merenja.

Tačka	Y [m]	X [m]	H [m]	σ_Y [mm]	σ_X [mm]	σ_H [mm]
1	7011.647	93032.436	160.6806	3.1	2.1	1.8
2	7659.798	90934.049	159.2771	2.3	3.4	1.4
8	7046.295	94213.372	180.9157	2.9	2.1	2.2
14	7693.758	96093.105	126.5168	2.2	2.9	2.1
17	9562.162	91354.392	103.8343	2.4	2.2	1.6
28	10039.641	88187.401	137.5842	3.4	2.8	1.9
37	9147.287	95250.113	101.9107	2.2	2.2	2.1
38	9831.447	96681.553	100.3198	1.9	2.4	2.2
45	12374.565	97275.029	102.1064	2.4	3.6	2.3
L1	9176.737	89400.034	114.5416	3.0	2.9	1.3
L2	11210.888	89773.511	104.3356	2.8	3.0	1.9
L3	11489.283	91506.793	105.3716	3.1	2.9	1.7
L4	9309.847	93206.801	109.0519	2.6	1.9	1.7
L5	11504.894	93510.191	104.8348	3.2	2.6	1.8
L6	10802.847	95201.612	103.9505	2.6	2.2	2.2
L7	11380.317	96489.040	100.0295	2.5	2.9	2.3
L8	10967.792	97655.270	102.3759	2.6	3.1	2.2
L9	9373.689	97738.426	109.4003	3.0	3.2	2.2
Sredina:				2.7	2.7	2.0

Proračunom tačnosti relativnih položaja i visina zasnovanim na srednjim vrednostima *tabele 6.16* dobijeno je:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta p} &= 4.6\text{mm} \\ \sigma_{\Delta h} &= 4.9\text{mm}\end{aligned}\quad (6.3.27)$$

pri čemu je za standard centrisanja usvojeno 0.5mm , za standard merenja visine antene 1mm , a za standard originalnih faznih merenja 3mm zbog odsustva značajnijih uticaja višestruke refleksije. Kada se uzme u obzir vremenska korelacija preko faktora razmere:

$$k = \frac{1}{\check{\sigma}_0} \sqrt{\frac{1+f}{1-f+\frac{2f}{e}}} = 6.75, \quad (6.3.28)$$

srednje vrednosti standarda relativnih položaja i visina iz osnovne GPS obrade postaju:

$$\begin{aligned}\check{\sigma}_{\Delta p} &= 4.1\text{mm} \\ \check{\sigma}_{\Delta h} &= 6.7\text{mm}\end{aligned}\quad (6.3.29)$$

Proračunom tačnosti relativnih položaja i visina na nivou mreže sa prosečnim brojem od 3.7 vektora koji se susstiču u svakoj tački dobijaju se sledeće ocene:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\Delta p} &= 3.0\text{mm} \\ \hat{\sigma}_{\Delta h} &= 3.2\text{mm}\end{aligned}\quad (6.3.30)$$

TABELA 6.16. Osnovne karakteristike GPS merenja i obrade u test mreži Lapovo.

Vektor	D [m]	Δh [m]	e	s	$\bar{\sigma}_{\Delta p}$ [mm]	$\bar{\sigma}_{\Delta h}$ [mm]	$\bar{\sigma}_0$	f
1 – 2	2196	-1.3	304	7	0.6	1.0	1.00	1789
1 – 8	1182	+20.2	124	7	0.9	1.9	0.66	644
1 – L4	2305	-51.6	121	5	0.7	1.2	0.75	665
17 – 28	3203	+33.8	145	6	0.6	1.0	0.70	722
17 – L1	1992	+10.8	259	5	0.6	1.3	0.82	1064
17 – L3	1933	+1.5	170	6	0.6	0.8	0.69	873
17 – L4	1869	+5.2	164	5	0.8	1.4	0.75	714
2 – L1	2158	-44.7	259	7	0.6	1.1	1.00	1582
38 – 14	2218	+26.2	127	8	0.5	0.8	0.53	785
38 – 37	1586	+1.6	121	7	0.7	1.1	0.82	780
38 – 45	2612	+1.8	125	7	0.5	0.8	0.55	787
38 – 8	3723	+80.7	136	7	1.7	2.8	1.70	746
38 – L6	1770	+3.6	122	7	0.6	1.2	0.69	689
38 – L7	1561	-0.3	126	8	0.5	0.8	0.54	782
38 – L8	1496	+2.0	133	5	0.5	1.0	0.48	555
38 – L9	1152	+9.1	242	5	0.4	0.7	0.48	1016
45 – L5	3864	+2.7	130	6	0.5	0.8	0.40	598
45 – L8	1457	+0.1	331	6	0.3	0.5	0.44	1576
8 – 14	1989	-54.4	119	7	0.6	1.1	0.48	662
L1 – 28	1489	+23.1	128	7	0.5	1.0	0.62	789
L2 – 17	2284	-0.5	264	6	0.4	0.7	0.73	1344
L2 – 28	1972	+33.3	469	6	0.4	0.5	0.63	2337
L2 – L3	1755	+1.0	445	6	0.4	0.5	0.69	2167
L3 – L5	2003	-0.6	125	6	0.7	0.9	0.65	616
L4 – 2	2809	+50.3	125	7	0.8	1.1	0.80	756
L4 – 37	2050	-7.2	117	7	0.6	0.9	0.58	663
L4 – 8	2479	+71.8	147	6	1.7	2.6	1.68	769
L4 – L3	2764	-3.6	123	5	0.6	1.0	0.58	582
L4 – L5	2216	-4.2	121	5	0.6	1.6	0.57	492
L4 – L6	2492	-5.1	123	7	0.6	0.9	0.68	687
L7 – L5	2982	+4.9	90	6	0.6	1.1	0.47	423
L9 – 14	2351	+17.2	119	6	0.6	1.1	0.46	658
L9 – L8	1596	-7.0	250	6	0.4	0.6	0.41	1156
Sredina:			120	6	0.7	1.2	0.76	

Aktuelno MNK ocenjivanje trodimenzionalnih koordinata test mreže Lapova izvršeno je na isti način kao i u slučaju test mreže Novoselo. Datumski defekt ranga matrice normalnih jednačina eliminisan je uslovom minimalizacije celog traga, tako da je broj merenja iznosio 99, a broj nepoznatih parametara 51. Pošto je utvrđeno da su standardizovane popravke koordinatnih komponenti vektora 38 – 45 veće od 5.0, ovi podaci eliminisani su kao modelski neadekvatni. Stohastički model formulisan je prvo originalnim kovarijacionim matricama izmerenih GPS vektora, a zatim su one urazmerene faktorom k , čime su dobijene sledeće ocene jediničnog standarda:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{0,1} &= 16.21 \\ \hat{\sigma}_{0,2} &= 1.39\end{aligned}\quad (6.3.31)$$

Pošto je za broj stepeni slobode 45 i verovatnoću 95% kvantil Fišerovog rasporeda 1.52, sledi da globalna adekvatnost modela nije potvrđena, iako je jedinični standard redukovan više od osam puta uzimanjem u obzir vremenske korelacije GPS merenja. Model se, međutim, može smatrati adekvatnim za verovatnoću od 99%. Minimalne, maksimalne i srednje vrednosti standarda relativnih položaja i visina tačaka u varijanti ocenjivanja sa modifikovanim stohastičkim modelom prikazani su u *tabeli 6.17*.

TABELA 6.17. Ocene standarda relativnih položaja i visina tačaka u test mreži Lapovo na osnovu MNK izravnjanja GPS merenja.

$\min \hat{\sigma}_{\Delta p} [mm]$	$\max \hat{\sigma}_{\Delta p} [mm]$	$\hat{\sigma}_{\Delta p} [mm]$	$\min \hat{\sigma}_{\Delta h} [mm]$	$\max \hat{\sigma}_{\Delta h} [mm]$	$\hat{\sigma}_{\Delta h} [mm]$
2.4	5.6	4.0	3.9	9.7	6.5

Konačno, proračun prosečne tačnosti apsolutnih položaja i visina tačaka test mreže Lapovo izvršen je po izrazima (6.3.14), (6.3.15) i rezultatima proračuna (6.3.19). Sa prosečnih 3.7 vektora koji se susište u svakoj od njih, dobija se:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= 2.2mm \\ \sigma_h &= 2.4mm\end{aligned}\quad (6.3.32)$$

S druge strane, iz rezultata MNK ocenjivanja trodimenzionalnih koordinata test mreže sledi da su prosečni standardi apsolutnih položaja i visina tačaka:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_p &= 3.5mm \\ \hat{\sigma}_h &= 5.9mm\end{aligned}\quad (6.3.33)$$

TABELA 6.18. Reziduumi nakon 2D transformacije sličnosti i modeliranja referentne površi visina polinomom 2. stepena u test mreži Lapovo.

Tačka	$v_Y [mm]$	$v_X [mm]$	$v_H [mm]$
1	+5.3	+8.7	-27
2	+5.2	+4.1	+4
8	-4.4	-4.6	+4
14	-2.8	+2.6	+20
17	-13.2	-15.7	+17
28	-9.1	+5.1	-6
37	-13.3	+1.2	-11
38	+7.3	-5.1	+13
45	-4.6	+7.9	+25
L1	+2.8	+7.0	+7
L2	+11.0	-7.3	-6
L3	+1.7	-3.0	0
L4	+3.4	+2.1	+9
L5	+11.4	+6.9	-3
L6	+0.3	+0.5	-10
L7	+1.2	-7.9	-11
L8	-6.5	-4.0	-27
L9	+4.5	+1.5	0

Upoređenje horizontalnih položaja ocenjenih iz GPS i terestričkih merenja izvršeno je ponovo dvodimenzionalnom transformacijom sličnosti sa četiri parametra, dok su razlike u visinama modelirane polinomom 2. stepena po horizontalnim koordinatama jer je područje test mreže Lapovo mnogo veće u odnosu na test mrežu Novoselo (*tabela 6.18*). Nakon sukcesivne eliminacije podataka sa tačaka označenih u *tabeli 6.18*, izvršeno je kvadratno oduzimanje prosečnih etalonskih položajnih i visinskih standarda iz *tabele 6.15*, čime su dobijene sledeće ocene:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_p &= 5.9\text{mm} \\ \hat{\sigma}_h &= 8.9\text{mm}\end{aligned}\quad (6.3.34)$$

Diskusija rezultata

Zbirno upoređenje pokazatelja proračuna i aktuelne ocene tačnosti relativnih i apsolutnih položaja odnosno visina tačaka test mreža Novoselo i Lapovo dato je u *tabeli 6.19* i *tabeli 6.20*.

TABELA 6.19. Upoređenje proračuna i ocene tačnosti relativnih položaja i visina u test mrežama.

Postupak ocenjivanja	Test mreža Novoselo			Test mreža Lapovo		
	$\sigma_{\Delta p}$ [mm]	$\sigma_{\Delta h}$ [mm]	$F_{\Delta p} / F_{\Delta h}$	$\sigma_{\Delta p}$ [mm]	$\sigma_{\Delta h}$ [mm]	$F_{\Delta p} / F_{\Delta h}$
	$f_{\Delta p}$	$f_{\Delta h}$	$F_{0.99} / F_{0.99}$	$f_{\Delta p}$	$f_{\Delta h}$	$F_{0.99} / F_{0.99}$
Proračun na nivou vektora	4.1 ∞	4.3 ∞		4.6 ∞	4.9 ∞	
Osnovna GPS obrada	4.2 > 1000	5.9 > 1000	1.05 / 1.88 1.00 / 1.00	4.1 > 1000	6.7 > 1000	1.26 / 1.87 1.00 / 1.00
Proračun na nivou mreže	2.7 ∞	2.8 ∞		3.0 ∞	3.2 ∞	
Izravnjanje GPS mreže	2.3 15	2.6 15	1.38 / 1.16 2.87 / 2.87	4.0 45	6.5 45	1.78 / 4.12 1.55 / 1.55

TABELA 6.20. Upoređenje proračuna i ocene tačnosti apsolutnih položaja i visina u test mrežama.

Postupak ocenjivanja	Test mreža Novoselo			Test mreža Lapovo		
	σ_p [mm]	σ_h [mm]	F_p / F_h	σ_p [mm]	σ_h [mm]	F_p / F_h
	f_p	f_h	$F_{0.99} / F_{0.99}$	f_p	f_h	$F_{0.99} / F_{0.99}$
Proračun na nivou mreže	3.1 ∞	3.2 ∞		2.2 ∞	2.4 ∞	
Izravnjanje GPS mreže	1.6 15	2.4 15	3.75 / 1.78 2.87 / 2.87	3.5 45	5.9 45	2.53 / 6.04 1.55 / 1.55
Transformacija i modeliranje	3.6 4	1.7 1	1.35 / 3.54 4.89 / 6156	5.9 24	8.9 8	7.19 / 13.75 2.23 / 2.94

1. Na osnovu podataka iz *tabele 6.19* mogući su sledeći zaključci u vezi validnost izvedenih izraza za prethodnu ocenu tačnosti relativnih položaja i visina tačaka:

- Formule (6.3.8) i (6.3.9) kojima se vrši proračun tačnosti relativnog pozicioniranja na nivou pojedinačnih GPS vektora veoma dobro se slažu sa rezultatima osnovne obrade, i to u obe test mreže. Slaganje je naročito izraženo u proračunu tačnosti relativnih položaja, što znači da aktuelna satelitska konstelacija obezbeđuje ravnomernu azimutalnu pokrivenost satelitima.

Zaključak je još pouzdaniji kada se ima u vidu da se osnovna GPS obrada po pravilu vrši sa veoma visokim brojem stepeni slobode.

- Proračun tačnosti relativnih visina na nivou vektora neznatno se razlikuje po vrednosti od proračuna tačnosti relativnih položaja. S druge strane, odnos ovih standarda kod realnih GPS merenja iznosi oko 1.5. Razlog ovom neslaganju leži u pretpostavkama pod kojima je izveden izraz (6.3.9). Pre svega, očigledno je da stvarna satelitska konstelacija ne obezbeđuje potpuno ravnomernu zenitnu pokrivenost satelitima. Osim toga, u terenskim uslovima uvek postoje rezidualni atmosferski uticaji koji gotovo u potpunosti opterećuju vertikalnu komponentu položaja, a koji su u izrazima za proračun zanemareni.
- Osnovnom GPS obradom dobijaju se izuzetno precenjeni pokazatelji tačnosti. Iskustvo pokazuje da je realna tačnost relativnog pozicioniranja 4-5 puta lošija, što je u test mrežama potvrđeno obračunavanjem uticaja zanemarene vremenske korelacije GPS merenja.
- Izrazi (6.3.16) i (6.3.17) kojima se vrši proračun tačnosti relativnog pozicioniranja na nivou mreže GPS vektora takođe pokazuju dobro slaganje sa rezultatima izravnjanja test mreže Novoselo. Disperzije izravnatih relativnih položaja i visina smanjuju se u odnosu na disperzije iz osnovne GPS obrade za faktor jednak prosečnom broju vektora koji se sustiču u svakoj tački mreže, kao što je to i predviđeno teorijskim izrazima. Kod test mreže Lapovo to smanjenje je beznačajno, što upućuje na dva moguća razloga. Prvo, moguće je prisustvo grubih grešaka centrisanja ili merenja visine antene u još nekim vektorima osim eliminisanog vektora 38 – 45, iako to nije moglo biti ustanovljeno na osnovu standardizovanih popravaka. Drugo, proračun se zasniva na pretpostavci o azimutalnom i zenitnom kontinuumu, što ima za posledicu odsustvo kovarijacije između koordinatnih komponenti GPS vektora.
- Statistički testovi pokazuju neadekvatnost matematičkog GPS modela obe test mreže ako se ne uzme u obzir vremenska korelacija GPS merenja. Obračunavanje ove korelacije izvršeno je jedinstvenim faktorom razmere, tako da modifikacija stohastičkog modela nije imala uticaja na ocene koordinata tačaka. To međutim ne mora biti slučaj kod GPS mreža u kojima su pojedinačni vektori određivani sa različitim brojem satelita, intervalom registracije ili trajanjem merne sesije.

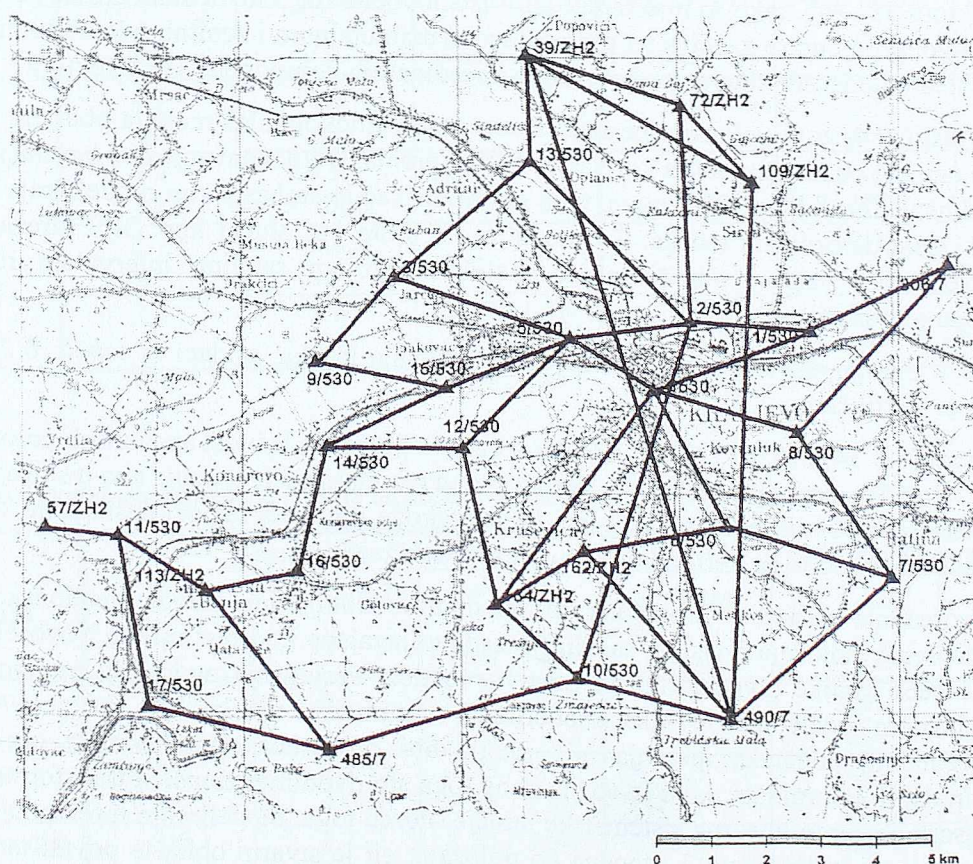
2. Kada je u pitanju tačnost apsolutnih položaja i visina tačaka, podaci iz *tabele 6.20* ukazuju na sledeće opšte zaključke:

- Izrazi (6.3.14) i (6.3.15) kojima se proračunava prosečna tačnost apsolutnih položaja i visina u okviru GPS mreže pokazuju istu saglasnost sa rezultatima izravnjanja kao u slučaju pokazatelja tačnosti relativnih položaja i visina. Isti su takođe i mogući razlozi neslaganja kod test mreže Lapovo, naročito za vertikalnu komponentu položaja.
- Upoređenje rezultata proračuna sa rezultatima dobijenim pomoću etalonskih, terestrički određenih položaja i visina, sasvim je zadovoljavajuće kod test mreže Novoselo, ali otkriva još veće razlike kod test mreže Lapovo. Razlozi neslaganja mogu biti mnogobrojni, ali su uglavnom posledica grešaka modeliranja datumskih razlika. Na primer, u nedostatku originalnih podataka merenja nije mogla biti proverena nepomenost ocena terestrički određenih koordinata, koja je važna zbog toga što dvodimenzionalna transformacija sličnosti apsorbuje samo linearne sistematske uticaje. Pored toga, modeliranje referentne površi visina izvršeno je polinomom 2. stepena po položaju, ali je stvarni oblik te površi moguće utvrditi tek na osnovu kompleksne obrade gravimetrijskih merenja.
- Pokazatelji apsolutne tačnosti datumski su zavisne veličine i ne predstavljaju mere kvaliteta u strogom smislu te reči. U ovom istraživanju učinjena je pretpostavka da se GPS i terestričke koordinate i njihovi standardi mogu upoređivati ako su ocene dobijene datumskim uslovima istog tipa. Međutim, kod utvrđivanja standarda visina tačaka test mreže Lapovo to nije moglo biti realizovano.

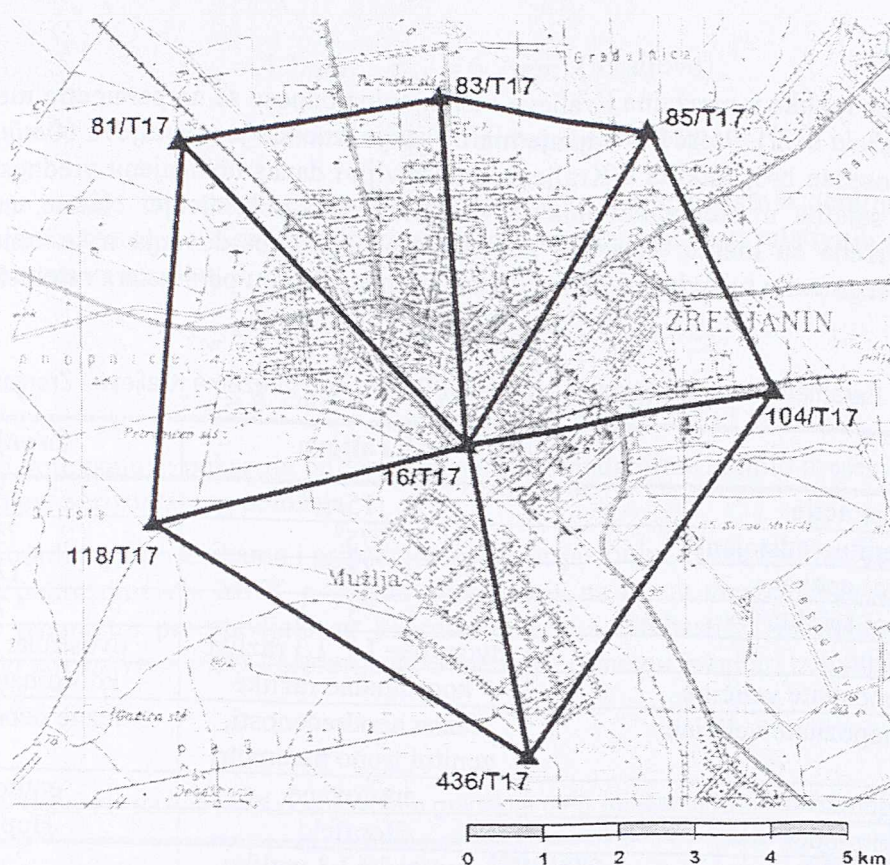
Rezultati istraživanja sugeriraju da se izvedeni izrazi za proračun tačnosti relativnog GPS pozicioniranja mogu koristiti pre svega u smislu preciznosti, a naročito kada su u pitanju relativni horizontalni položaji. Proračunate standarde relativnih visina potrebno je povećati po vrednosti za 50% kako bi bili u saglasnosti sa rezultatima obrade realnih GPS merenja. Pitanje objektivne tačnosti relativnog GPS pozicioniranja ostaje otvoreno, ali na osnovu podataka test mreža sledi da je prosečan odnos tačnosti i preciznosti oko 2. Ako se rezultati dobijeni u test mrežama uopšte, treba očekivati da za merne sesije koje traju 30-60min tačnost relativnog pozicioniranja u okviru pasivnih gradskih GPS mreža bude u granicama 3-6mm po položaju i 5-10mm po visini, sa preciznošću koja je dvostruko bolja.

6.3.3 Primeri gradskih GPS mreža

Za ilustraciju koncepta pasivne gradske GPS osnove upotrebljeni su podaci već realizovanih gradskih GPS mreža Kraljeva (slika 6.28) i Zrenjanina (slika 6.29). Ove mreže su izabrane jer predstavljaju tipičan primer geodetske osnove sa kratkim međustaničnim rastojanjima, koja u principu dozvoljavaju da se prilikom proračuna i aktuelne GPS obrade mogu zanemariti atmosferski efekti i greške satelitskih efemerida.



SLIKA 6.28. Dispozicija tačaka i GPS veza gradske mreže Kraljevo.



SLIKA 6.29. Dispozicija tačaka i GPS veza gradske mreže Zrenjanin.

Gradske GPS mreže Kraljeva i Zrenjanina imaju više zajedničkih aspekata realizacije. Način stabilizacija tačaka je skoro identičan, sa prosečnim međustaničnim rastojanjima koja u obe mreže iznose oko 4.0km. Sva merenja izvršena su istom opremom (četiri kompleta TRIMBLE 4000SSE, COMPACT L1/2 w GP), sa postupkom centrisanja i merenja visine antene koje karakterišu standardi od 0.5mm i 1.0mm respektivno. U oba slučaja je prilikom GPS merenja korišćen interval registracije 15s i granično zenitno odstojanje od 75° .

Pored navedenih sličnosti, mreže pokazuju i niz razlika u pogledu konfiguracije (tabela 6.21). Gradska GPS mreža Kraljeva zahvata veću površinu, nalazi se na većoj srednjoj visini, ima mnogo više tačaka i GPS vektora, i visinske razlike su znatno izražene u odnosu na mrežu Zrenjanina. Osim toga, mreža Kraljeva je prva realizovana gradska GPS mreža u našoj zemlji, tako da su zbog sticanja iskustva u novoj tehnologiji izmerena i tri dugačka vektora koja povezuju nesusedne tačke.

TABELA 6.21. Osnovni podaci o konfiguraciji gradskih GPS mreža Kraljeva i Zrenjanina.

Parametar	Kraljevo	Zrenjanin
Datum realizacije mreže	15.05.1996	16.02.1999
Broj tačaka mreže	27	7
Broj GPS vektora	43	12
Prosečan broj vektora po tački	3.1	3.4
Srednja visina mreže	410m	80m
Maksimalna visinska razlika	513m	6m
Prosečno međustanično rastojanje	3.4km	4.7km

Međutim, glavne razlike u mrežama Kraljeva i Zrenjanina odnose se na parametre merenja i osnovne GPS obrade (tabela 6.22). Prosečno trajanje merne sesije iznosilo je u Kraljevu 60min, a u Zrenjaninu 30min. Dok prosečan broj satelita u Kraljevu predstavlja i danas uobičajenu vrednost, izrazito visok prosečan broj satelita u Zrenjaninu ima sasvim konkretno objašnjenje. Naime, merenja u mreži Zrenjanina izvršena su mesec dana pre početka NATO bombardovanja naše zemlje, tako da je kontrolni GPS segment u tu svrhu izvršio privremenu modifikaciju parametara satelitskih putanja.

TABELA 6.22. Parametri i rezultati osnovne obrade GPS vektora u mrežama Kraljeva i Zrenjanina.

Parametar	Kraljevo	Zrenjanin
Interval registracije	15s	15s
Granično zenitno odstojanje	75°	75°
Prosečan broj epoha	240	120
Prosečan broj satelita	5	7
Merne veličine	dvostruke L1, L3 razlike	dvostruke L1 razlike
Osnovne nepoznate veličine	koordinatne razlike	koordinatne razlike
Dopunske nepoznate veličine	fazne neodređenosti, zenitni tropo parametri	fazne neodređenosti
Satelitske efemeride	emitovane	emitovane
Troposferski model	Hopfield	Hopfield
Jonosferski model	dvostruke L3 razlike	-
Jedinični standard	1.45	0.72
Standard relativnih položaja	1.1mm	0.7mm
Standard relativnih visina	1.8mm	1.0mm

Osnovna obrada GPS merenja izvršena je uobičajenim komercijalnim softverom (TRIMBLE GPSurvey v2.0), ali sa sledećim specifičnostima:

- Merne veličine predstavljale su dvostruke fazne razlike na frekvenciji L1, osim što su za tri dugačka vektora u mreži Kraljeva upotrebljene linearne dvofrekventne fazne kombinacije L3 koje su oslobođene uticaja jonosferske refrakcije.
- U delu državne referentne GPS mreže, u kojoj su međustanična rastojanja 10km, upotrebljene su emitovane i precizne satelitske efemeride, što je imalo za posledicu razliku manju od 1mm u intenzitetima vektora. Stoga je osnovna obrada u mrežama Kraljeva i Zrenjanina izvršena emitovanim efemeridama.
- U mrežama Kraljeva i Zrenjanina upotrebljeni su troposferski modeli HOPFIELD, SAASTAMOINEN i NIELL, i pronađene razlike koje su samo u pojedinim slučajevima bile na nivou 0.1mm. Definitivna obrada je zbog toga izvršena modelom HOPFIELD.
- Mreža Kraljeva je karakteristična po velikim visinskim razlikama, tako da je pored koordinatnih razlika i faznih neodređenosti uveden za svaki vektor po jedan nepoznati zenitni troposferski parametar.
- Prilikom osnovne GPS obrade nije korišćen nikakav pomoćni jonosferski model osim KLOBUCHAR modela čiji su parametri sadržani u navigacionim satelitskim porukama. Izuzetak su činila samo tri dugačka vektora u mreži Kraljeva kod kojih je jonosferska refrakcija tretirana dvofrekventnim merenjima.

Sa navedenim parametrima obrade i koeficijentima razmere kojima se uzima u obzir vremenska korelacija (3.69 za Kraljevo i 7.03 za Zrenjanin), dobijeni su sledeći prosečni standardi relativnih položaja i visina:

$$\bar{\sigma}_{\Delta p} = 4.1mm, \quad \bar{\sigma}_{\Delta h} = 6.7mm \text{ (Kraljevo)}, \quad (6.3.35)$$

$$\bar{\sigma}_{\Delta p} = 4.8mm, \quad \bar{\sigma}_{\Delta h} = 7.0mm \text{ (Zrenjanin)}. \quad (6.3.36)$$

Ovi standardi se međusobno dobro slažu, što opravdava uvođenje dodatnih zenitnih troposferskih parametara u obradu merenja u Kraljevu. S druge strane, proračun tačnosti relativnih položaja i visina na nivou vektora ima za rezultat:

$$\sigma_{\Delta p} = 4.0mm, \quad \sigma_{\Delta h} = 4.3mm \text{ (Kraljevo)}, \quad (6.3.37)$$

$$\sigma_{\Delta p} = 4.2mm, \quad \sigma_{\Delta h} = 4.6mm \text{ (Zrenjanin)}, \quad (6.3.38)$$

što su vrednosti koje ponovo pokazuju odlično slaganje sa standardima realnih merenja, ali samo kada je u pitanju tačnost horizontalnog položaja.

Sa dobijenim koordinatnim razlikama i pripadajućim kovarijacionim matricama izvršena je definitivna obrada koja je podrazumevala MNK postupak ocenjivanja na nivou mreže. U funkcionalnom delu modela jedine parametre predstavljale su koordinate tačaka. Stohastički modeli modifikovani su obračunavanjem uticaja vremenske korelacije GPS merenja. Osnovni rezultati izravnjanja za obe mreže dati su u tabeli 6.23.

TABELA 6.23. Osnovni rezultati MNK ocenjivanja u gradskim GPS mrežama Kraljeva i Zrenjanina.

Parametar	Kraljevo	Zrenjanin
Broj merenja	129	36
Broj nepoznatih	81	21
Broj datumskih uslova	3	3
Broj stepeni slobode	51	18
Jedinični standard	1.53	0.87
Prosečna unutrašnja pouzdanost	39.5%	50.0%
Maksimalna standardizovana popravka	2.24	1.98
Prosečni standard apsolutnih položaja	3.6mm	1.7mm
Prosečni standard apsolutnih visina	6.8mm	2.4mm
Prosečni standard relativnih položaja	3.8mm	2.4mm
Prosečni standard relativnih visina	7.0mm	3.4mm
Velika poluosa elipsoida grešaka	6.8mm	2.4mm
Zenitno odstojanje velike poluose	5.3 ⁰ (± 6.1 ⁰)	11.1 ⁰ (± 7.8 ⁰)
Srednja poluosa elipsoida grešaka	3.1mm	1.5mm
Azimet srednje poluose	7.3 ⁰ (± 14.9 ⁰)	15.2 ⁰ (± 3.7 ⁰)
Mala poluosa elipsoida grešaka	2.1mm	0.8mm

Na osnovu podataka izravnjanja može se učiniti nekoliko zapažanja:

- Sudeći po jediničnim standardima i stepenima slobode, ne može se potvrditi globalna adekvatnost modela, iako ta razlika nije velika za verovatnoću 99%. Međutim, odbacivanje hipoteze o modelskoj adekvatnosti bilo bi mnogo verovatnije da nije uzeta u obzir vremenska korelacija GPS merenja.
- S obzirom na maksimalne apsolutne vrednosti standardizovanih popravaka u mrežama nije otkriveno prisustvo modelskih grešaka i pored relativno visoke unutrašnje pouzdanosti.
- Imajući u vidu izravnjanje i osnovnu obradu, prosečan odnos standarda visina i položaja veoma je blizak vrednosti 1.5.

- Obe mreže dokazuju da je zbog specifične satelitske konstelacije komponenta položaja po geografskoj širini uvek slabije određena od komponente po geografskoj dužini. Prosečan odnos odgovarajućih standarda takođe iznosi oko 1.5.
- Vertikalna komponenta položaja tačaka najslabije je određena. To je istovremeno i pravac najveće poluose elipsoida grešaka, čije je zenitno odstojanje u obe mreže veoma blisko nuli. Komponenta položaja po geografskoj širini je sledeća po kvalitetu, s tim što je to istovremeno i pravac srednje poluose elipsoida grešaka, čiji je azimut u obe mreže takođe blizak nuli. Konačno, najbolje određena komponenta položaja je komponenta u pravcu geografske dužine.
- Kada su u izravnanju mreže Kraljeva izostavljena tri dugačka vektora, prosečni standardi trodimenzionalnih položaja tačaka povećali su se oko 1.2 puta, dok je to povećanje za tačke povezane dugačkim vektorima iznosilo čak 1.6 puta. To znači da je u mrežama koje zahvataju veću površinu i imaju veći broj tačaka opravdano merenje vektora koji povezuju nesusedne tačke, sve dotle dok za njih može važiti princip zanemarivanja atmosferskih uticaja i grešaka satelitskih efemerida.
- Standardi položaja i visina tačaka zaista se kreću u granicama 3-6mm odnosno 5-10mm uspostavljenim istraživanjima u test mrežama.

Radi upoređenja izvršen je i proračun tačnosti relativnih i apsolutnih položaja odnosno visina, kojim se dobijaju sledeće vrednosti:

$$\sigma_{\Delta p} = 2.8mm, \quad \sigma_{\Delta h} = 3.0mm \text{ (Kraljevo)}, \quad (6.3.39)$$

$$\sigma_p = 2.0mm, \quad \sigma_h = 2.2mm \text{ (Kraljevo)}, \quad (6.3.40)$$

$$\sigma_{\Delta p} = 2.8mm, \quad \sigma_{\Delta h} = 3.1mm \text{ (Zrenjanin)}, \quad (6.3.41)$$

$$\sigma_p = 1.3mm, \quad \sigma_h = 1.4mm \text{ (Zrenjanin)}. \quad (6.3.42)$$

Prema tome, konačan zaključak o validnosti formula za proračun tačnosti može se svesti na konstataciju da je njihova upotreba pogodna kada je u pitanju tačnost horizontalnih položaja, ali da nisu u potpunosti ispunjene usvojene pretpostavke u slučaju visina. Iako GPS određene visine nemaju velikog praktičnog značaja jer su geometrijskog a ne fizičkog karaktera, test mreže Novoselo i Lapovo, kao i gradske GPS mreže Kraljeva i Zrenjanina sugerišu mogućnost da se proračun tačnosti visina izvede na osnovu proračuna tačnosti horizontalnih položaja, i to po jednostavnim empirijskim izrazima:

$$\sigma_{\Delta h} = 1.5\sigma_{\Delta p}, \quad \sigma_h = 1.5\sigma_p. \quad (6.3.43)$$

6.4 Tačnost pozicioniranja u aktivnim gradskim GPS mrežama

6.4.1 Eksperimentalni podaci

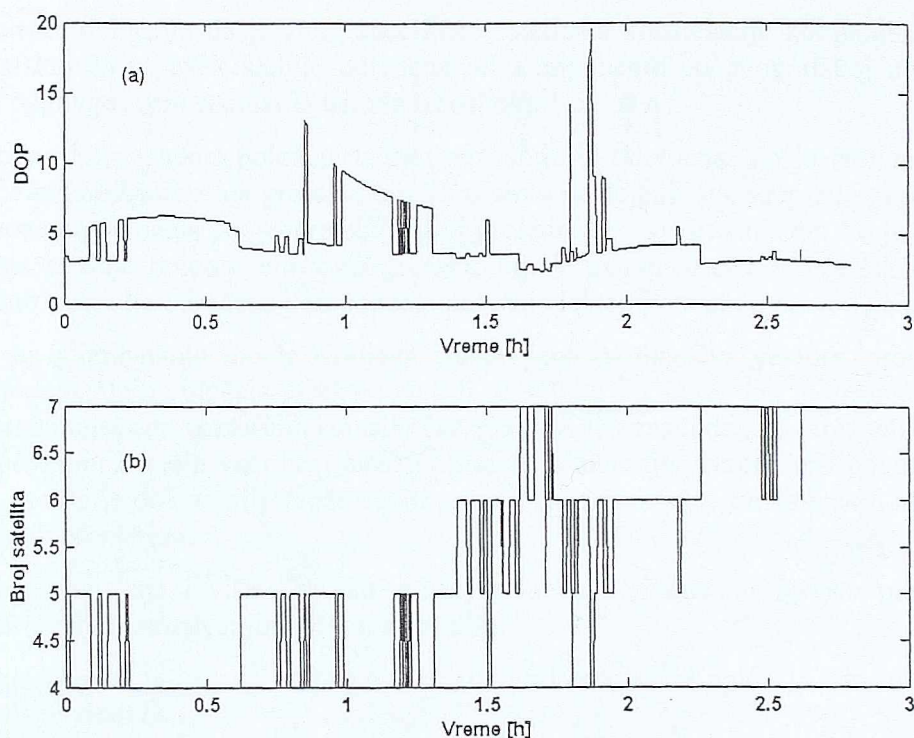
Za potrebe simulacije aktivne gradske GPS mreže izabran je deo državne referentne mreže koji teritorijalno pokriva šire područje grada Beograda (slika 6.30). Tačke A (R026), B (R039) i C (R036) izabrane su kao eksperimentalne permanentne stanice sa prosečnim međusobnim rastojanjem od oko 40km, dok su tačke 1 (R027), 2 (R030), 3 (R029), 4 (R033), 5 (R034), 6 (R035), 7 (R038) i 8 (R037) imale ulogu test tačaka u delu istraživanja koje se odnosilo na tačnost pozicioniranja.



SLIKA 6.30. Dispozicija tačaka u eksperimentu simulacije aktivne gradske GPS mreže Beograda.

Merenja u eksperimentalnoj mreži izvršena su tokom dva dana, 21. i 22. decembra 2000. godine, prijemnicima TRIMBLE 4000SSE i antenama COMPACT L1/2 w GP. Simultano prikupljanje podataka na permanentnim stanicama trajalo je po 6h svakog dana, dok su merenja na test tačkama trajala po 60min. Prilikom rada GPS prijemnika važio je interval registracije od 5s i granični vertikalni ugao od 15° . Broj elektronski vidljivih satelita iznosio je tokom eksperimenta od 4 do 7, a DOP faktor od 2.5 do 20 (slika 6.31). Na taj način izvedeno je po 4380 epoha merenja na permanentnim stanicama, i po 720 epoha merenja na test tačkama. Međutim, s obzirom na DOP vrednosti i broj satelita, može se reći da je eksperiment izveden u relativno nepovoljnim uslovima.

6.4 Tačnost pozicioniranja u aktivnim gradskim GPS mrežama



SLIKA 6.31. Satelitska konstelacija tokom eksperimenta a) DOP faktor; b) broj elektronski vidljivih satelita.

Simulacija aktivne GPS mreže izvedena je sa ciljem praktične implementacije sistema kontrole kvaliteta u realnom vremenu, ocenjivanja objektivne tačnosti pozicioniranja novih tačaka i istraživanja mogućnosti negeodetske primene kao što je praćenje stanja atmosfere. Međutim, dok je sistem kontrole kvaliteta nezavisan od eksternih informacija kao što su, na primer, satelitske efemeride, preostala dva cilja u velikoj meri zavise od tačnosti koordinata permanentnih stanica i test tačaka. Stoga je prethodno istražena pogodnost tačaka državne referentne mreže za potrebe eksperimenta.

Utvrđivanje kvaliteta državne referentne mreže sprovedeno je na osnovu postupka MNK ocenjivanja, čiji su najvažniji rezultati dati u tabeli 6.24 (Blagojević 2003).

TABELA 6.24. Osnovni rezultati MNK ocenjivanja u državnoj referentnoj mreži.

Ukupan broj nepoznatih	2514
Ukupan broj datumskih uslova	21
Ukupan broj merenja	4986
Broj stepeni slobode	2493
Standard jedinice težine	6.28
Prosečna pouzdanost	50.0%
Prosečni standard apsolutnih 2D položaja	6.0mm
Prosečni standard apsolutnih 1D položaja	10.1mm
Prosečni standard relativnih 2D položaja	4.7mm/10km
Prosečni standard relativnih 1D položaja	8.0mm/10km

Iz tabele se vidi da je prosečni standard apsolutnog trodimenzionalnog položaja tačaka na centimetarskom nivou, iako je strogo gledano u pitanju formalna preciznost u odnosu na sedam tačaka

iz GPS kampanje BALKAN98 koje su služile za datumsku definiciju mreže. U svakom slučaju, tačnost prostornih položaja eksperimentalnih permanentnih stanica A, B i C u iznosu od 13mm u potpunosti zadovoljava potrebe eksperimenta. Što se tiče standarda relativnih položaja i visina test tačaka u odnosu na eksperimentalne permanentne stanice, usvojena je pretpostavka o zakonu prenosa grešaka:

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{D}, \quad (6.4.1)$$

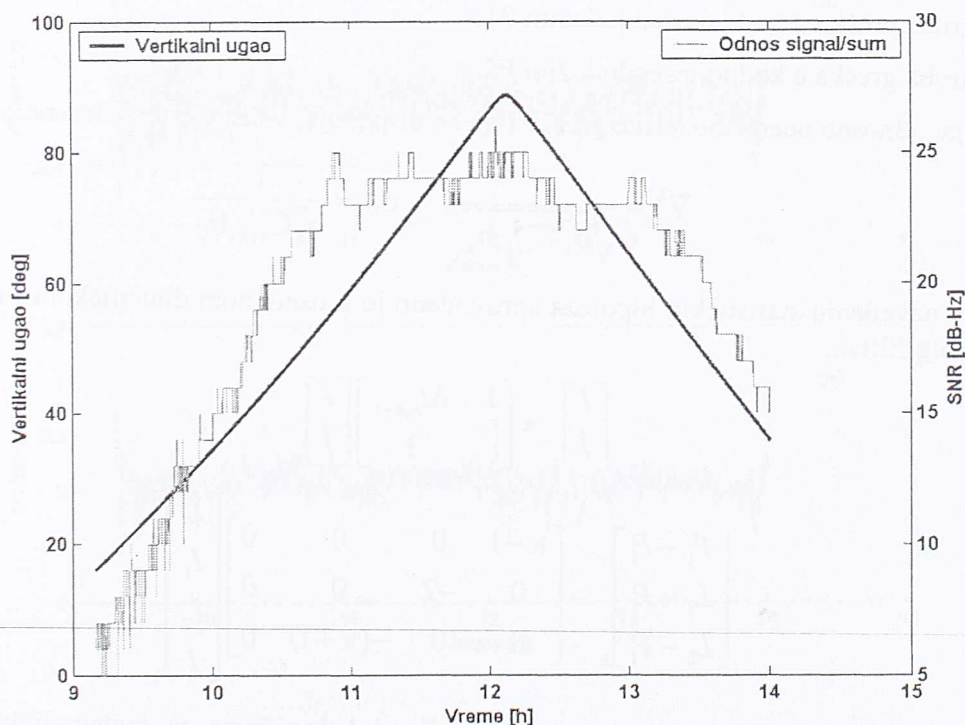
gde je D međustanično rastojanje, i na taj način dobijene su sledeće vrednosti:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 7.3mm \\ \sigma_h &= 12.3mm \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Međutim, i pored evidentno visoke tačnosti relativnih položaja utvrđeno je da opažanja na test tačkama 1, 2 i 4 sadrže veoma kratke periode sa povoljnim DOP vrednostima i brojem satelita, tako da su one izostavljene iz daljeg istraživanja.

6.4.2 Kontrola kvaliteta permanentnih opažanja

Eksperimentalna implementacija sistema kontrole kvaliteta izvršena je na faznim i kodnim opažanjima permanentne stanice A. Za test satelit izabran je PRN09, koji je bio nad horizontom za sve vreme trajanja merne sesije (slika 6.32).



SLIKA 6.32. Vertikalni ugao satelita PRN09 i odnos signala i šuma faznih opažanja na eksperimentalnoj permanentnoj stanici A.

Implementirani sistem kvaliteta zasniva se na rekurzivnom DLA postupku primenjenom na vektor od n_k prognoziranih reziduuma i njihovu kovarijacionu matricu za odgovarajuću epohu k Kalmanovog filtera:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{l}_k - \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k. \quad (6.4.3)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}(k)} = \mathbf{C}_{\mathbf{l}(k)} + \mathbf{A}_k \mathbf{C}_{\mathbf{x}(k)} \mathbf{A}_k^T. \quad (6.4.4)$$

Detekcija modelskih grešaka vršena je uz korišćenje lokalnih hipoteza:

$$\begin{aligned} H_0^k: & E[\mathbf{v}_k] = \mathbf{0} \\ H_a^k: & E[\mathbf{v}_k] = \mathbf{B}_k \nabla, \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

i računanjem test statistike:

$$T_k | H_0^k = \frac{\mathbf{v}_k^T \mathbf{C}_{\mathbf{v}(k)}^{-1} \mathbf{v}_k}{n_k} | H_0^k \sim F(n_k, \infty, 0). \quad (6.4.6)$$

Za identifikaciju detektovane modelske greške korišćena je test statistika:

$$t^k | H_0^k = \frac{\mathbf{b}_k^T \mathbf{C}_{\mathbf{v}(k)}^{-1} \mathbf{v}_k}{\sqrt{\mathbf{b}_k^T \mathbf{C}_{\mathbf{v}(k)}^{-1} \mathbf{b}_k}} | H_0^k \sim N(0, 1), \quad (6.4.7)$$

pri čemu su članovi konfiguracionog vektora \mathbf{b}_k određivani za sledeće četiri eksplicitno formulisane jednodimenzionalne alternativne hipoteze:

- fazni skok u faznoj pseudoduzini L1,
- fazni skok u faznoj pseudoduzini L2,
- gruba greška u kodnoj pseudoduzini P1,
- gruba greška u kodnoj pseudoduzini P2.

Adaptacija, odnosno ocena modelske greške i njene disperzije, vršena je respektivno po izrazima:

$$\nabla^k = \frac{t^k}{\sqrt{\mathbf{b}_k^T \mathbf{C}_{\mathbf{v}(k)}^{-1} \mathbf{b}_k}}, \quad \sigma_{\nabla}^2 = \frac{1}{\mathbf{b}_k^T \mathbf{C}_{\mathbf{v}(k)}^{-1} \mathbf{b}_k}. \quad (6.4.8)$$

Testiranje navedenih statističkih hipoteza sprovedeno je u osnovnom dinamičkom i mernom modelu Kalmanovog filtera:

$$\begin{bmatrix} I \\ \dot{I} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t_{k,k-1} \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \dot{I} \end{bmatrix}_{k-1}, \quad (6.4.9)$$

$$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 \\ L_1 - P_1 \\ L_2 - P_1 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \kappa - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\kappa + 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ \dot{I} \end{bmatrix}_k, \quad (6.4.10)$$

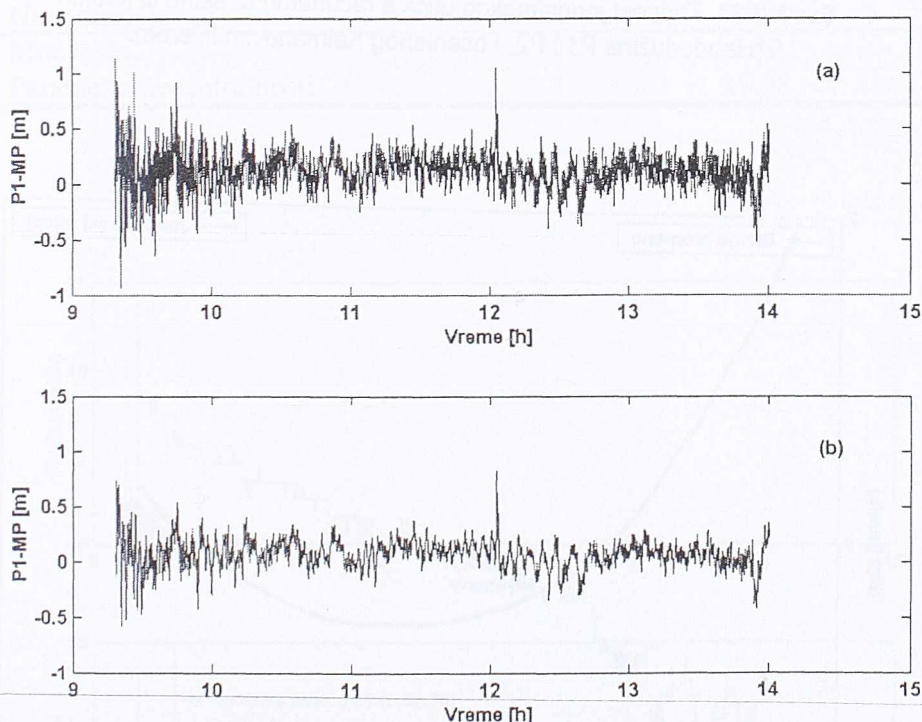
sa pretpostavkom da se dinamika procesa sastoji od belog šuma sa matematičkim očekivanjem jednakim nuli, i sa kovarijacionom matricom \mathbf{Q}_k^I koju karakteriše spektralna gustina q_I . Da bi se redukovao uticaj višestruke refleksije na rezultate testiranja, osnovni model proširen je odgovarajućim članovima:

$$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 \\ L_1 - P_1 \\ L_2 - P_1 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \kappa - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\kappa + 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \dot{I} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M_1 \\ \dot{M}_1 \\ \Delta M_2 \\ \dot{M}_2 \end{bmatrix}_k, \quad (6.4.11)$$

pri čemu su za uticaje višestruke refleksije usvojene iste pretpostavke kao i u slučaju dinamike jonosferskih uticaja. Kao ilustracija, *slika 6.33* pokazuje da su ocene uticaja višestruke refleksije na primeru kodnih pseudodužina P1 znatno preciznije u odnosu na rezultate dobijene direktnim korišćenjem dvofrekventne kodno-fazne linearne kombinacije:

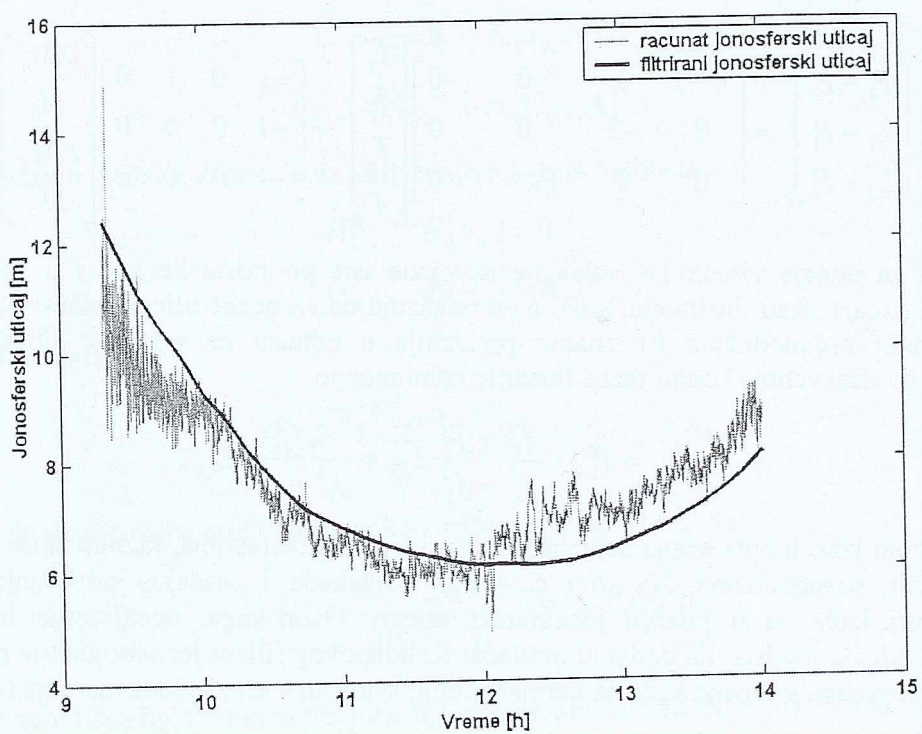
$$M_{1,k} = P_{1,k} - \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{1,k} + \frac{2f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} L_{2,k}, \quad (6.4.12)$$

koja je u punom iznosu opterećena nepoznatim faznim neodređenostima, faznim skokovima i mernim šumom kodnih pseudodužina. Na *slici 6.34* vidi se takođe i značajno povećanje preciznosti i konzistentnosti kada su u pitanju jonosferski uticaji. Osim toga, ocenjivanje brzine promene jonosferskih uticaja predstavlja dodatnu prednost Kalmanovog filtera jer omogućuje prognozu stanja jonosfere u trenucima vremena kada na permanentnim stanicama nisu vršena merenja (*slika 6.35*).

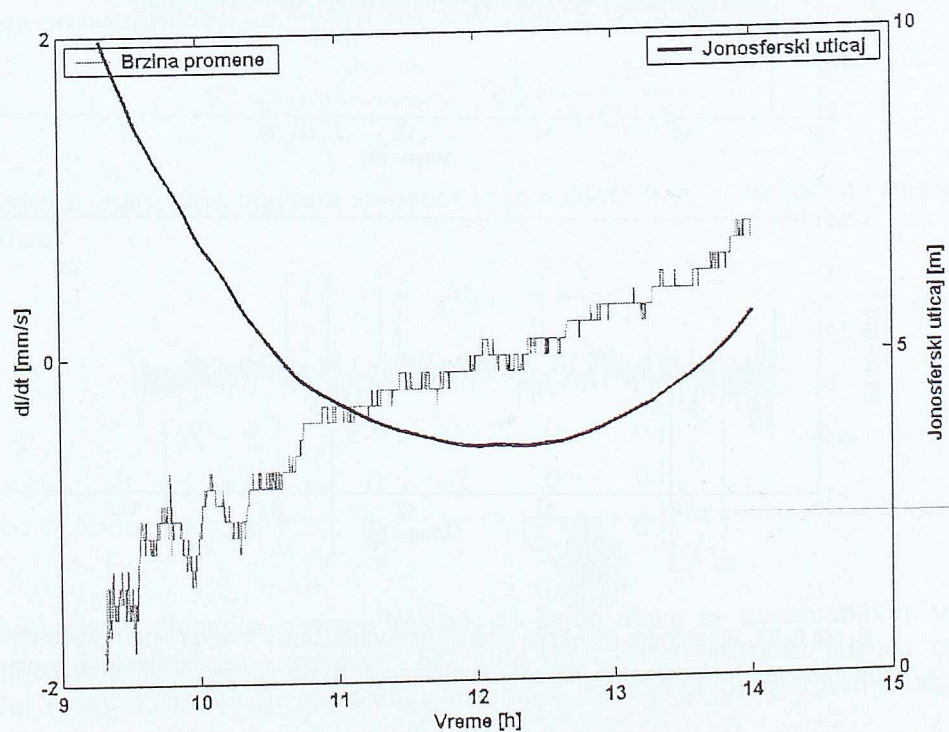


SLIKA 6.33. Višestruka refleksija kodnih pseudodužina P1 a) direktno računanje iz kodno-fazne dvofrekventne linearne kombinacije; b) ocenjivanje Kalmanovim filterom.

6.4 Tačnost pozicioniranja u aktivnim gradskim GPS mrežama



SLIKA 6.34. Tačnost jonosferskog uticaja računatog direktno iz kodnih pseudoduzina P1 i P2, i ocenjenog Kalmanovim filterom.



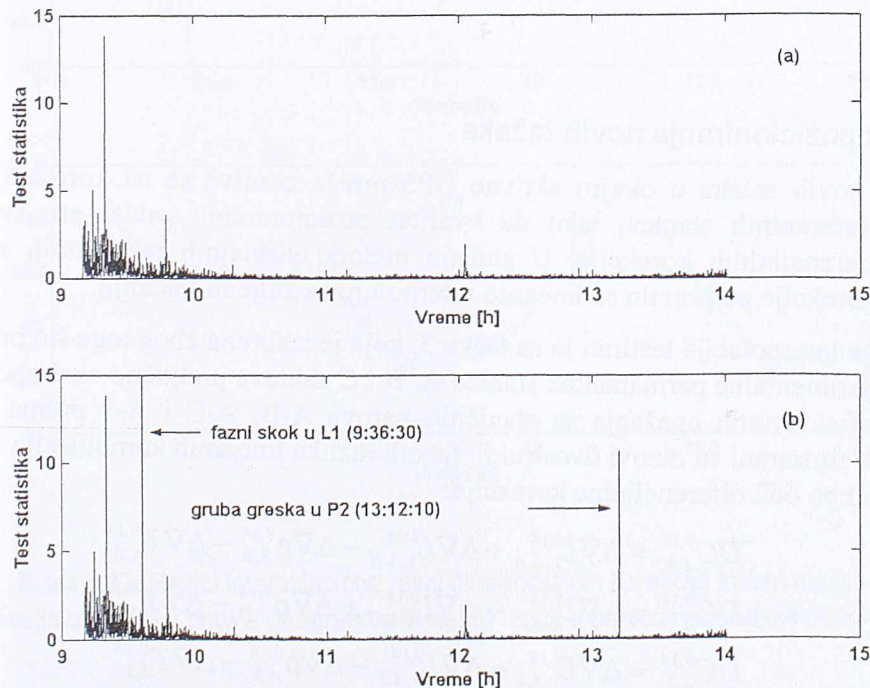
SLIKA 6.35. Jonosferski uticaj i brzina njegove promene, ocenjeni postupkom Kalmanovog filtriranja.

Mogućnost uspostavljenog sistema kvaliteta da otkrije što manje vrednosti modelskih grešaka ispitana je na taj način što je originalno fazno merenje L1 prema satelitu PRN09 promenjeno za vrednost od -1 cyc u epohi 9:36:30 UTC, čime je simuliran minimalni fazni skok, dok je originalno kodno merenje P2 prema istom satelitu promenjeno za vrednost od -3 m u epohi 13:12:10 UTC, čime je simulirana gruba greška. Upotrebljeni parametri stohastičkog modela Kalmanovog filtera dati su u tabeli 6.25. S obzirom na to da se merni deo Kalmanovog filtera u ovom eksperimentu sastojao iz 3 jednačine, kritične vrednosti za testiranje globalne adekvatnosti modela i alternativnih hipoteza iznosile su respektivno:

$$\begin{aligned} F_{0,999}(3, \infty, 0) &= 5.4 \\ N_{0,9995}(0, 1) &= 3.3 \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

TABELA 6.25. Parametri stohastičkog modela Kalmanovog filtera u okviru rekurzivnog DIA postupka kontrole kvaliteta.

Standard faznih pseudodužina L1	2.0mm
Standard faznih pseudodužina L2	2.5mm
Standard kodnih pseudodužina P1	30cm
Standard kodnih pseudodužina P2	30cm
Spektralna gustina jonosferskih uticaja	$10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$
Spektralna gustina višestruke refleksije	$10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$
Nivo značajnosti	0.001
Moć testa	0.80
Parametar necentralnosti	17.08



SLIKA 6.36. Test statistika adekvatnosti modela a) pre uvođenja faznog skoka i grube greške; b) nakon uvođenja faznog skoka i grube greške.

Na slici 6.36(a) prikazan je niz test statistike globalne adekvatnosti, T_k , za 3487 epoha opažanja prema satelitu PRN09. Sva merenja sa izuzetkom jedne epohe zadovoljavaju kriterijume kvaliteta jer su vrednosti test statistike niže od kritične vrednosti 5.4. Veće vrednosti test statistike u prvom času merne kampanje posledica su male visine satelita nad horizontom. Pošto je radi jednostavnosti postupka usvojeno da je tačnost faznih i kodnih merenja konstantna i nezavisna od vertikalnog ugla, ovakvo ponašanje je bilo sasvim očekivano.

Slika 6.36(b) dokazuje mogućnost rekurzivnog DIA postupka da pouzdano otkrije i najmanje modelske greške. Simulirani fazni skok i gruba greška ne samo da su identifikovani, već su i njihove vrednosti ocenjene sa visokom tačnošću. Detalji i rezultati postupka dati su u tabeli 6.26.

TABELA 6.26. Rezultati rekurzivnog DIA postupka nakon uvođenja faznog skoka veličine -1cyc u L1 i grube greške veličine -3m u P2.

A) Detekcija	Epoha 9:36:30	Epoha 13:12:10
Test statistika	868.06	10.46
B) Identifikacija	Epoha 9:36:30	Epoha 13:12:10
Ha: Fazni skok u L1	51.030	0.088
Ha: Fazni skok u L2	51.025	0.088
Ha: Gruba greška u P1	0.751	0.063
Ha: Gruba greška u P2	0.076	5.648
C) Adaptacija	Epoha 9:36:30	Epoha 13:12:10
Oцена faznog skoka u L1	-0.996cyc	-
Standard ocene	0.020cyc	-
Oцена grube greške u P2	-	-2.939m
Standard ocene	-	0.520m

6.4.3 Tačnost pozicioniranja novih tačaka

Pozicioniranje novih tačaka u okviru aktivne GPS mreže zasniva se na korišćenju informacija sa permanentnih referentnih stanica, tako da kvalitet pozicioniranja zavisi pre svega od kvaliteta modeliranja diferencijalnih korekcija. U slučaju metode virtuelnih referentnih stanica, sračunate diferencijalne korekcije po pravilu se linearno interpoluju za željenu lokaciju.

Kvalitet linearne interpolacije testiran je za tačku 3, koja je izabrana zbog toga što po svom položaju u odnosu na eksperimentalne permanentne stanice A, B i C zahteva praktično ekstrapolacioni postupak. Uz pomoć dvofrekventnih opažanja sa staničnih parova A-B, A-C i A-3 prema satelitskom paru PRN09-PRN14, formirani su nizovi dvostrukih faznih razlika linearnih kombinacija $\Delta\nabla L_3$ i $\Delta\nabla L_4$, a zatim i nizovi od po 662 diferencijalne korekcije:

$$\begin{aligned}
 DC_{A,B}^{9,14} &= \Delta\nabla L_{3,A,B}^{9,14} + \Delta\nabla L_{4,A,B}^{9,14} - \Delta\nabla \rho_{A,B}^{9,14} - \Delta\nabla T_{A,B}^{9,14} \\
 DC_{A,C}^{9,14} &= \Delta\nabla L_{3,A,C}^{9,14} + \Delta\nabla L_{4,A,C}^{9,14} - \Delta\nabla \rho_{A,C}^{9,14} - \Delta\nabla T_{A,C}^{9,14} \\
 DC_{A,3}^{9,14} &= \Delta\nabla L_{3,A,3}^{9,14} + \Delta\nabla L_{4,A,3}^{9,14} - \Delta\nabla \rho_{A,3}^{9,14} - \Delta\nabla T_{A,3}^{9,14}
 \end{aligned} \tag{6.4.14}$$

Geometrijska rastojanja računata su tom prilikom iz emitovanih satelitskih efemerida i poznatih koordinata tačke, a hidrostatička komponenta troposferske refrakcije standardnim HOPFIELD modelom. Prema tome, struktura sračunatih diferencijalnih korekcija sastojala se od rezidualnih

atmosferskih uticaja, satelitskih orbitalnih grešaka, i grešaka usled višestruke refleksije i mernog šuma signala.

Za svaku od 662 epohe merenja postavljan je sukcesivno linearni model oblika:

$$\begin{aligned} DC_{A,B}^{9,14} &= a \cdot \Delta\varphi_{A,B} + b \cdot \Delta\lambda_{A,B} \\ DC_{A,C}^{9,14} &= a \cdot \Delta\varphi_{A,C} + b \cdot \Delta\lambda_{A,C} \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

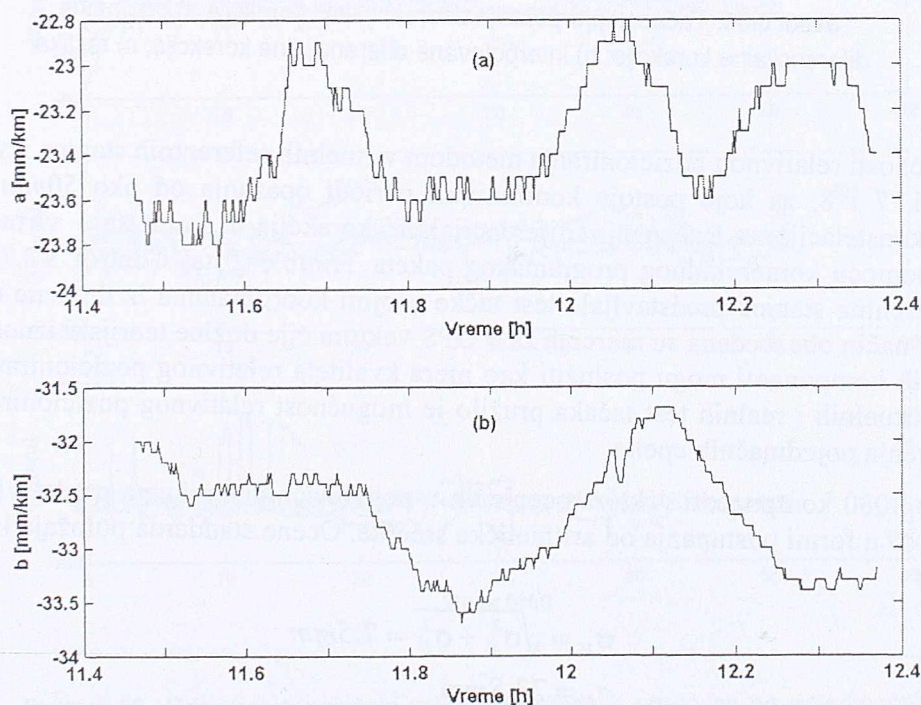
sa koordinatnim razlikama izraženim u linearnim jedinicama, čijim rešavanjem su dobijani nepoznati nagibi interpolacione ravni u pravcu geografske širine i dužine, a i b (slika 6.37). Istim modelom prognozirane su diferencijalne korekcije za lokaciju test tačke 3, a zatim direktno upoređivane sa originalnim vrednostima (slika 6.38):

$$\delta_{DC} = DC_{A,3}^{9,14} - DC_{interpolovano} \quad (6.4.16)$$

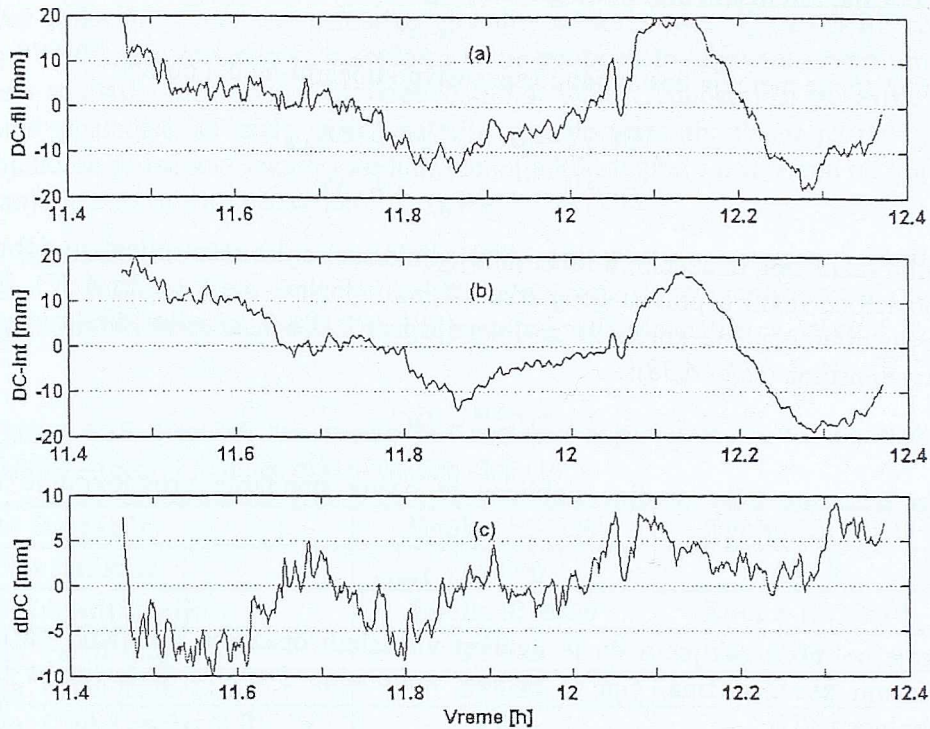
Iz odstupanja od aritmetičke sredine dobijena je ocena standarda prognoziranih diferencijalnih korekcija:

$$\sigma_{DC} = 4.3mm, \quad (6.4.17)$$

na osnovu koje se može zaključiti da je kvalitet virtualnih opažanja praktično na nivou kvaliteta originalnih faznih pseudodužina, čija je tačnost nominalno 3mm za frekvenciju L1 i normalne operative okolnosti.



SLIKA 6.37. Nagibi interpolacione ravni diferencijalnih korekcija tokom merne sesije a) nagib u pravcu geografske širine; b) nagib u pravcu geografske dužine.



SLIKA 6.38. Tačnost interpolacije diferencijalnih korekcija a) originalne diferencijalne korekcije; b) interpolovane diferencijalne korekcije; c) razlika.

Ispitivanje tačnosti relativnog pozicioniranja metodom virtuelnih referentnih stanica izvršeno je za test tačke 3, 5, 6, 7 i 8, za koje postoje kontinuirani periodi opažanja od oko 50min sa povoljnom satelitskom konstelacijom. Računanje diferencijalnih korekcija i formiranje virtuelnih opažanja izvršeno je pomoću komercijalnog programskog paketa Trimble Total Control V2.70, pri čemu su virtuelne referentne stanice predstavljale test tačke svojim koordinatama iz državne referentne GPS mreže. Na taj način obezbeđena su merenja za 5 GPS vektora čije dužine teorijski iznose nula, tako da ocene njihovih komponenti mogu poslužiti kao mera kvaliteta relativnog pozicioniranja. Osim toga, poklapanje virtuelnih i realnih test tačaka pružilo je mogućnost relativnog pozicioniranja na osnovu podataka merenja pojedinačnih epoha.

Nizovi od po 3080 komponenti vektora ocenjenih u pojedinačnim epohama predstavljeni su na slici 6.39 i slici 6.40 u formi odstupanja od aritmetičke sredine. Ocene standarda položaja i visine u jednoj epohi iznose:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_E^2} = 7.5mm \\ \sigma_h &= 23.8mm\end{aligned}\quad (6.4.18)$$

Ove vrednosti karakterišu preciznost relativnog pozicioniranja jer su dobijene iz odstupanja od aritmetičke sredine. Međutim, kada se računanje izvrši na osnovu apsolutnih odstupanja od koordinata test tačaka, dobijaju se standardi koji karakterišu tačnost:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_p &= \sqrt{\bar{\sigma}_N^2 + \bar{\sigma}_E^2} = 11.9mm \\ \bar{\sigma}_h &= 26.8mm\end{aligned}\quad (6.4.19)$$

S obzirom na to da je:

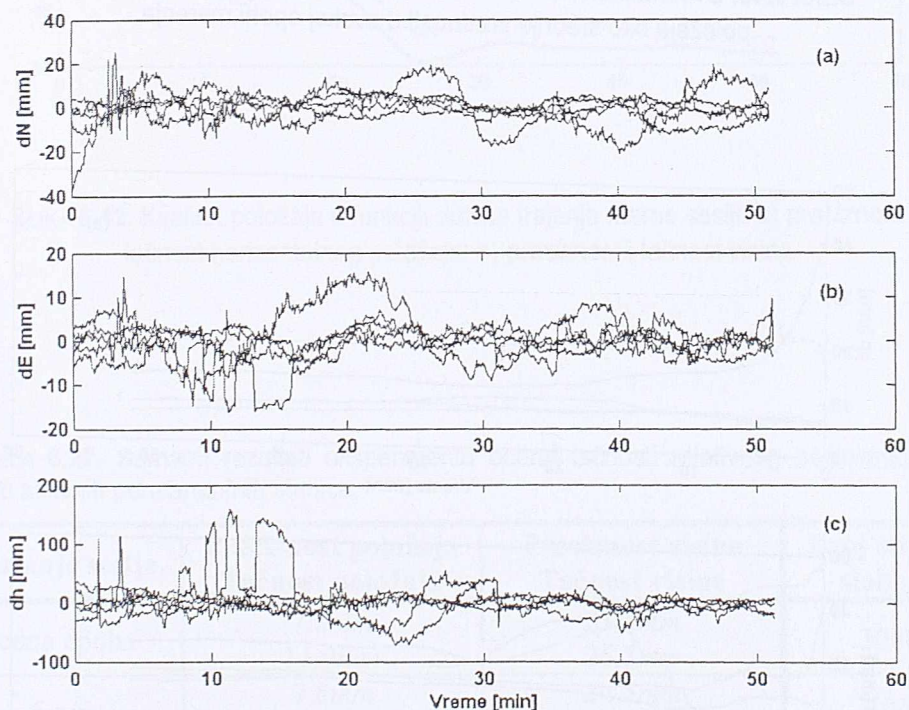
$$F_p = \frac{\overline{\sigma}_p^2}{\sigma_p^2} = 2.52 > 1.00 = F_{0.99}(3080, 3080), \quad (6.4.20)$$

$$F_h = \frac{\overline{\sigma}_h^2}{\sigma_h^2} = 1.27 > 1.00 = F_{0.99}(3080, 3080), \quad (6.4.21)$$

sledi da postoje statistički značajne komponente disperzija položaja i visine čiji je izvor u nesigurnosti koordinata test tačaka iz državne referentne GPS mreže. Ocene odgovarajućih standarda dobijene su kvadratnim oduzimanjem, i iznose:

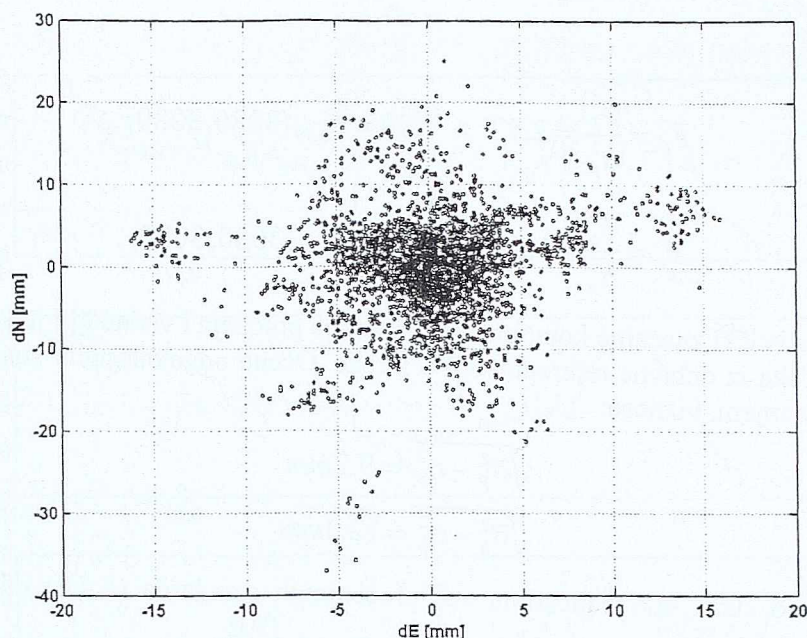
$$\begin{aligned} \sqrt{\overline{\sigma}_p^2 - \sigma_p^2} &= 9.2mm \\ \sqrt{\overline{\sigma}_h^2 - \sigma_h^2} &= 12.3mm \end{aligned} \quad (6.4.22)$$

što se veoma dobro slaže sa vrednostima već procenjenih standarda (6.4.2) od 7.3mm i 12.3mm respektivno.

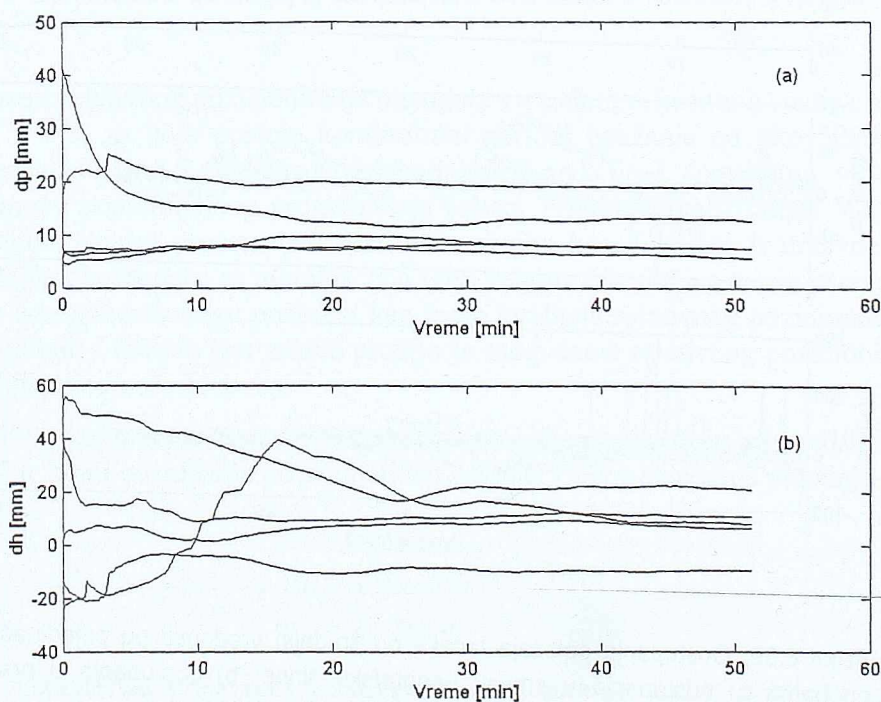


SLIKA 6.39. Odstupanja položaja tačaka od srednjih vrednosti po pojedinačnim epochama a) odstupanja u pravcu geografske širine; b) odstupanja u pravcu geografske dužine; c) odstupanja u pravcu elipsoidne visine.

6.4 Tačnost pozicioniranja u aktivnim gradskim GPS mrežama



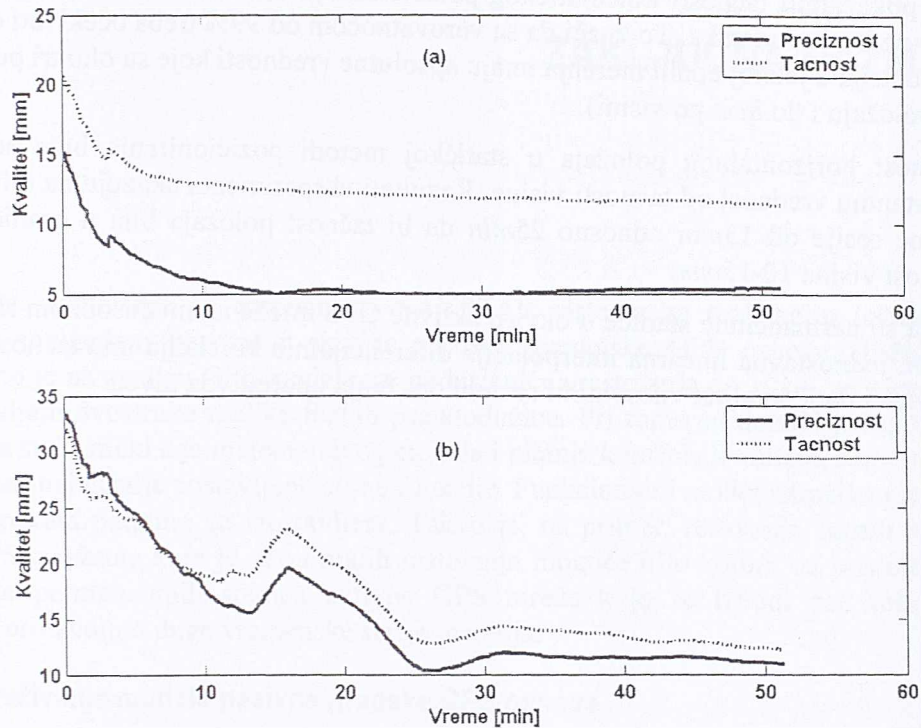
SLIKA 6.40. Dvodimenzionalni prikaz rasturanja pojedinačnih horizontalnih položaja oko srednje vrednosti u svakoj epohi merenja.



SLIKA 6.41. Apsolutna položajna odstupanja za pet test tačaka u funkciji dužine trajanja merne sesije a) odstupanja horizontalnih položaja; b) odstupanja visina.

U drugom delu eksperimenta ispitana je tačnost relativnog pozicioniranja u funkciji broja mernih epoha odnosno dužine merne sesije. Odgovarajuća apsolutna položajna i visinska odstupanja od usvojenih koordinata test tačaka prikazana su na slici 6.41, i poslužila su za ocenu tačnosti. Ocena

preciznosti izvršena je iz odstupanja od aritmetičke sredine. Grafičko upoređenje tačnosti i preciznosti dato je na slici 6.42, dok su sumarni rezultati eksperimenta navedeni u tabeli 6.27.



SLIKA 6.42. Kvalitet položaja u funkciji dužine trajanja merne sesije a) preciznost i tačnost horizontalnog položaja; b) preciznost i tačnost visina.

TABELA 6.27. Sumarni rezultati eksperimenta ocene tačnosti relativnog pozicioniranja u mreži aktivnih permanentnih stanica.

Trajanje sesije	Preciznost položaja Tačnost položaja	Preciznost visine Tačnost visine	Broj stepeni slobode
Jedna epoha	7.5mm 11.9mm	23.8mm 26.8mm	3080
5min	7.8mm 14.1mm	24.5mm 23.8mm	304
15min	5.0mm 12.4mm	19.8mm 22.7mm	912
25min	5.0mm 12.6mm	10.8mm 13.2mm	1520
50min	5.4mm 11.5mm	11.0mm 12.4mm	3040
Koordinate test tačaka	7.3mm	12.3mm	2493

Iz dobijenih eksperimentalnih rezultata mogu se izvući sledeći zaključci:

- Ponovljivost rezultata relativnog pozicioniranja metodom virtuelnih referentnih stanica bolja je od 1cm po položaju odnosno 2.5cm po visini. Međutim ove vrednosti se ne mogu usvojiti kao pokazatelji tačnosti kinematičkog pozicioniranja u realnom vremenu jer su dobijene iz velikog broja podataka. To znači da sa verovatnoćom od 99% treba očekivati da odgovarajuća odstupanja u jednoj epohi merenja imaju apsolutne vrednosti koje su oko tri puta veće (do 3cm po položaju i do 8cm po visini).
- Tačnost horizontalnog položaja u statičkoj metodi pozicioniranja brže se stabilizuje na konstantnu vrednost od tačnosti visine. Rezultati eksperimenta ukazuju na minimalno trajanje merne sesije od 15min odnosno 25min da bi tačnost položaja bila u granicama $5\text{-}10\text{mm}$ a tačnost visina $10\text{-}15\text{mm}$.
- Kada su permanentne stanice u okviru aktivne GPS mreže na međusobnom rastojanju od oko 40km , jednostavna linearna interpolacija diferencijalnih korekcija ima tačnost bolju od 5mm , što znači da je kvalitet virtuelnih i realnih opažanja uporedivog nivoa.

Poglavlje 7

ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

U ovom radu razmotrene su mogućnosti NAVSTAR sistema za realizaciju lokalnih referentnih sistema uspostavljanjem pasivne i aktivne gradske geodetske GPS osnove. Težište istraživanja skoncentrisano je na analizu GPS modela za međustanična rastojanja do 10km , sa mernim veličinama koje predstavljaju dvostruke razlike faznih pseudodužina. Pri tome su detaljnija ispitivanja dodatno ograničena na stohastički deo matematičkog modela i pitanja kontrole kvaliteta, s obzirom na tačnost i pouzdanost kao najvažnije postavljene ciljne funkcije. Funkcionalni model istraživan je u manjoj meri, a neki od aspekata potpuno su izostavljeni. Takvo je, na primer, rešavanje faznih neodređenosti u pasivnim GPS mrežama koje je zbog malih rastojanja moguće bilo kojom od postojećih metoda, ili pozicioniranje permanentnih stanica aktivne GPS mreže koje se izvodi bez teškoća jer su na raspolaganju proizvoljno duge vremenske serije merenja.

Rezultati istraživanja modela pasivne gradske GPS osnove

Istraživanje funkcionalnog modela pasivne gradske GPS osnove donelo je sledeće najvažnije rezultate:

- Osetljivost dvostrukih faznih razlika na sistematske promene svih strukturnih članova detaljno je ispitana, i pokazuje da za prosečne atmosferske uslove i međustanična rastojanja manja od 10km odgovarajući funkcionalni model sadrži samo koordinate tačaka i fazne neodređenosti kao nepoznate parametre (*tabela 4.1*). Uvođenje dodatnog zenitnog parametra, kojim se obuhvataju rezidualni uticaji troposferske refrakcije, neophodno je samo u slučajevima velikih visinskih razlika između tačaka, kao što to pokazuje upoređenje rezultata osnovne obrade merenja u gradskim GPS mrežama Kraljeva i Zrenjanina (*tabela 6.22*).
- U *podpoglavlju 4.2.3* izvedeni su teorijski izrazi za granice pokazatelja unutrašnje i spoljašnje pouzdanosti. Pošto MDB vrednost čak i za samo jednu epohu merenja iznosi oko 6cm , sledi da je sistem dvostrukih razlika u tom smislu veoma pouzdan, jer se s velikom verovatnoćom može otkriti i najmanji fazni skok od jedne talasne dužine.

Kompletan stohastički model dvostrukih faznih razlika, koji podrazumeva ne samo matematičku korelaciju već i pretpostavku o međusobnoj fizičkoj korelisanosti originalnih faznih merenja, detaljno je prikazan u *poglavlju 6.2*. *Podpoglavlja 6.2.2* i *6.2.3* sadrže eksperimentalno određivanje parametara kovarijacionih modela uticaja troposferske i jonosferske refrakcije, na osnovu kojih se mogu doneti sledeći zaključci:

- Dobijene vrednosti zenitnog troposferskog standarda od 1.8cm i 1.6cm ukazuju na njegovu stabilnost, iako su dobijene na različitim geografskim lokacijama i u rasponu od nekoliko godina (*tabela 6.8*). To znači da je određivanje dovoljno izvršiti samo jednom, ali se pouzdano može oceniti samo odnos zenitnog troposferskog standarda i korelacione dužine.
- Rezultati određivanja parametara u modelu jonosferske refrakcije pokazuje da je neophodno korišćenje podataka sa velikih međustaničnih rastojanja i za epohu konkretnih merenja (*tabela 6.9*). Prema tome, da bi se formulisao stohastički model pasivne gradske GPS mreže, potrebno je u tu svrhu koristiti izvršena merenja za određivanje zenitnog standarda jonosferske refrakcije, a podatke EUREF ili IGS mreže permanentnih stanica za određivanje korelacione dužine.

- Između dvostrukih faznih razlika postoji značajna vremenska korelacija, a kada se koriste linearne dvofrekventne kombinacije i značajna međufrekventna korelacija. Odnos tačnosti sa i bez uzimanja u obzir vremenske korelacije zavisi kako od intervala registracije, tako i od dužine sesije, ali se stabilizuje na približno konstantnu vrednost nakon 20 minuta merenja (*slika 6.23*). Povećanje tačnosti ocena parametara upotrebom manjeg intervala registracije veoma je malo, i iznosi najviše 4.5% za interval od 1s u odnosu na interval od 60s (*slika 6.24*). Zbog visoke vrednosti koeficijenta međufrekventne korelacije, potrebno je koristiti dvostruke razlike samo jedne frekvencije, jer dvostruke razlike druge frekvencije ne predstavljaju dovoljno nezavisnu i novu informaciju u sistemu MNK ocenjivanja.
- Redukciona funkcija standarda uticaja višestruke refleksije razlikuje se od odgovarajuće redukcionne funkcije memnog šuma samo u pogledu razmere (*slika 6.18*).

Tačnost relativnog GPS pozicioniranja u pasivnim gradskim GPS mrežama tretirana je apriori i aposteriori. Teorijski izrazi za proračun tačnosti izvedeni su u *podpoglavlju 6.3.1*. Eksperimentalna provera izvedenih izraza sprovedena je obradom i izravnanjem merenja u test mrežama Novoselo i Lapovo i realizovanim gradskim GPS mrežama Kraljeva i Zrenjanina. Na osnovu podataka iz *tabele 6.19*, *tabele 6.20* i *tabele 6.23* mogući su sledeći zaključci:

- Formule (6.3.8) i (6.3.9) kojima se vrši proračun tačnosti relativnog pozicioniranja na nivou pojedinačnih GPS vektora veoma dobro se slažu sa rezultatima osnovne obrade, što je naročito izraženo kada su u pitanju relativni horizontalni položaji. Osnovnom GPS obradom dobijaju se 4-5 puta precenjeni pokazatelji tačnosti ako se zanemari uticaj vremenske korelacije GPS merenja.
- Izrazi (6.3.16) i (6.3.17) kojima se vrši proračun tačnosti relativnog pozicioniranja na nivou mreže GPS vektora takođe pokazuju dobro slaganje sa rezultatima izravnanja realnih mreža. Disperzije izravnatih relativnih položaja i visina smanjuju se u odnosu na disperzije iz osnovne GPS obrade za faktor jednak prosečnom broju vektora koji se susstiču u svakoj tački mreže, kao što je to i predviđeno teorijskim izrazima.
- Statistički testovi pokazuju neadekvatnost matematičkog GPS modela ako se ne uzme u obzir vremenska korelacija GPS merenja. Obračunavanje ove korelacije izvršeno je jedinstvenim faktorom razmere, tako da modifikacija stohastičkog modela nije imala uticaja na ocene koordinata tačaka. To međutim ne mora biti slučaj kod GPS mreža u kojima su pojedinačni vektori određivani sa različitim brojem satelita, intervalom registracije ili trajanjem merne sesije.
- Izrazi (6.3.14) i (6.3.15) kojima se proračunava prosečna tačnost apsolutnih položaja i visina u okviru GPS mreže pokazuju isti stepen saglasnosti sa rezultatima izravnanja kao u slučaju pokazatelja tačnosti relativnih položaja i visina. Imajući u vidu izravnanje i osnovnu obradu, prosečan odnos standarda visina i položaja veoma je blizak vrednosti 1.5. Zbog specifične satelitske konstelacije komponenta položaja po geografskoj širini uvek je slabije određena od komponente po geografskoj dužini. Prosečan odnos odgovarajućih standarda takođe iznosi oko 1.5.
- Vertikalna komponenta položaja tačaka najslabije je određena. To je istovremeno i pravac najveće poluose elipsoida grešaka, čije je zenitno odstojanje u test mrežama veoma blisko nuli. Komponenta položaja po geografskoj širini je sledeća po kvalitetu, s tim što je to istovremeno i pravac srednje poluose elipsoida grešaka, čiji je azimut u test mrežama takođe blizak nuli. Konačno, najbolje određena komponenta položaja je komponenta u pravcu geografske dužine.
- Na međustaničnim rastojanjima prisutnim u pasivnoj gradskoj GPS mreži dominantni su slučajni uticaji kao što je merni šum ili višestruka refleksija. Stoga će ocene nepoznatih parametara imati generalno veću tačnost ako se koriste jednofrekventna GPS merenja. Dvofrekventna merenja u tim uslovima imaju prednost samo u pogledu bržeg rešavanja faznih neodređenosti.

Rezultati istraživanja sugeriraju da se izvedeni izrazi za proračun tačnosti relativnog GPS pozicioniranja mogu koristiti pre svega u smislu preciznosti, a naročito kada su u pitanju relativni horizontalni položaji. Proračunate standarde relativnih visina potrebno je povećati po vrednosti za 50% kako bi bili u saglasnosti sa rezultatima obrade realnih GPS merenja. Pitanje objektivne tačnosti relativnog GPS pozicioniranja ostaje otvoreno, ali na osnovu podataka test mreža sledi da je prosečan odnos tačnosti i preciznosti oko 2. Ako se rezultati dobijeni ovim istraživanjem uopšte, može se očekivati da za merne sesije koje traju 30-60min tačnost relativnog pozicioniranja u okviru pasivnih gradskih GPS mreža bude u granicama 3-6mm po položaju i 5-10mm po visini, sa preciznošću koja je dvostruko bolja. Vertikalna tačnost od 5-10mm ostaje očuvana kada se za transformaciju elipsoidnih GPS visina u fizički definisane ortometrijske visine koristi polinomsko modeliranje, iako je takav kvalitet neuporedivo niži u poređenju sa onim koji se dobija kombinovanom upotrebom geometrijskog nivelmana i gravimetrijskih određivanja.

Rezultati istraživanja modela aktivne gradske GPS osnove

Težište istraživanja modela aktivne gradske GPS osnove bilo je skoncentrisano prevashodno na tačnost pozicioniranja novih tačaka. U radu nisu razmatrani aspekti komunikacione infrastrukture mreže permanentnih stanica iako je ona važna sama po sebi, niti je procenjivana ukupna ekonomska opravdanost celog koncepta. Najvažniji eksperimentalni rezultati mogu se sumirati na sledeći način:

- Ponovljivost rezultata relativnog pozicioniranja metodom virtuelnih referentnih stanica bolja je od 1cm po položaju odnosno 2.5cm po visini. Međutim ove vrednosti se ne mogu usvojiti kao pokazatelji tačnosti kinematičkog pozicioniranja u realnom vremenu jer su dobijene iz velikog broja podataka. To znači da sa verovatnoćom od 99% treba očekivati da odgovarajuća odstupanja u jednoj epohi merenja povremeno imaju apsolutne vrednosti koje su oko tri puta veće (do 3cm po položaju i do 8cm po visini).
- Tačnost horizontalnog položaja u statičkoj metodi pozicioniranja brže se stabilizuje na konstantnu vrednost od tačnosti visine. Rezultati eksperimenta ukazuju na minimalno trajanje merne sesije od 15min odnosno 25min da bi tačnost položaja bila u granicama 5-10mm a tačnost visina 10-15mm.
- Kada su permanentne stanice u okviru aktivne GPS mreže na međusobnom rastojanju od oko 40km, jednostavna linearna interpolacija diferencijalnih korekcija ima tačnost bolju od 5mm, što znači da je kvalitet virtuelnih i realnih opažanja uporedivog nivoa.

Prema tome, aktivna gradska GPS osnova sa svojim potencijalom za pozicioniranje i navigaciju u realnom vremenu predstavlja načelno veoma dobru alternativu konceptu pasivnih gradskih mreža, osim činjenice da u njoj nije moguća adekvatna upotreba terestričkih mernih metoda.

Zaključci u vezi osiguranja i kontrole kvaliteta

Posebna pažnja u ovom radu bila je posvećena konceptu osiguranja i kontrole kvaliteta. Osiguranje kvaliteta u smislu metrološkog obezbeđenja GPS prijemnika i antena nezavisno je od nameravane aplikacije, tako da je podjednako primenljivo na model pasivne i aktivne gradske GPS osnove. U okviru rada formulisan je osnovni program ispitivanja koji se sastoji u ocenjivanju stabilnosti lokalnog oscilatora prijemnika, srednjeg položaja faznih centara antena i preciznosti elektronskog praćenja GPS signala. Karakteristike predloženih postupaka mogu se svesti na sledeće konstatacije:

- Svi postupci predstavljaju praktične terenske metode za koje nisu potrebni laboratorijski uslovi niti specifična oprema.
- Metoda trećih vremenskih razlika dvostrukih razlika za ispitivanje preciznosti merenja predstavlja odličnu alternativu metodi nulte baze (dva prijemnika povezana za istu antenu). Uz mernu sesiju od 60min i interval registracije do 1min, iz vremenskih razlika biće potpuno eliminisani svi dugoperiodični uticaji.

- Rezultati relativnog GPS pozicioniranja biće opterećeni greškom od nekoliko milimetara u horizontalnom smislu čak i kod antena istog proizvođača, ukoliko se o uticaju položaja faznog centra ne vodi računa. Predloženi postupak je jednostavan, relativno kratkotrajan i zadovoljavajuće tačnosti. Njime, međutim, nije obuhvaćena varijacija položaja faznog centra, koja inače ima vrednosti istog reda kao i komponente srednjeg položaja faznog centra.
- Uobičajene redukcijske funkcije sinusnog ili tangensnog tipa ne opisuju na adekvatan način zavisnost preciznosti praćenja GPS signala od vertikalnog ugla, što je naročito izraženo za signale iz pravca bliskog horizontu. Istraživanja su pokazala da je ova zavisnost eksponencijalnog oblika, sa parametrima koje je neophodno oceniti metodom najmanjih kvadrata na osnovu samih merenja.

S druge strane, kontinuirana opažanja permanentnih stanica zahtevaju mere kontrole kvaliteta koje se moraju sprovoditi u realnom vremenu. U tu svrhu predložen je i praktično implementiran sistem za praćenje integriteta koji se zasniva na Kalmanovom filteru i rekurzivnom DIA postupku. Eksperiment izveden u simuliranoj aktivnoj GPS mreži Beograda dokazuje mogućnost rekurzivnog DIA postupka da pouzdano otkrije i najmanje modelske greške (*slika 6.36*). Simulirani fazni skok i gruba greška ne samo da su uspešno identifikovani, već su im i vrednosti ocenjene sa visokom tačnošću (*tabela 6.26*).

Mogući pravci daljih istraživanja

Glavnu karakteristiku ovog rada čini matematički model pasivnih i aktivnih gradskih GPS mreža zasnovan na mernim veličinama u vidu dvostrukih faznih razlika. U tom kontekstu, moguće je identifikovati tri glavna pravca daljih istraživanja.

Prvo, nema nikakvog razloga da dalja istraživanja ne budu usmerena u pravcu korišćenja originalnih GPS merenja, jer ona suštinski predstavljaju dužine koje se od terestričkih razlikuju jedino po veličini. Glavna teškoća pristupa sa originalnim faznim merenjima sastoji se u činjenici da su u njihovom funkcionalnom modelu prisutni mnogi članovi čiji se intenzitet inače značajno smanjuje ili u potpunosti eliminiše formiranjem dvostrukih razlika. Tako na primer greške časovnika prijemnika i satelita, kao i atmosferski uticaji predstavljaju veličine koje se menjaju od epohe do epohe, što znači da se mogu tretirati jedino kao stohastički a ne deterministički parametri. Osim toga, fazne neodređenosti originalnih merenja nemaju celobrojnu prirodu koja u modelu dvostrukih razlika predstavlja značajnu informaciju, i praktično su neodvojive od početnih stanja faznih brojača.

S druge strane, koncept originalnih merenja karakteriše znatno jednostavniji stohastički model jer nema matematičke korelacije koja komplikuje obradu dvostrukih faznih razlika. Međutim, stohastička svojstva originalnih merenja, a posebno pitanja prostorne i vremenske korelacije, nisu još uvek dobro istražena za opažanja bliska horizontu. U kontekstu lokalnih GPS mreža od značaja je naročito odgovarajući tretman višestruke refleksije, rezidualnih troposferskih uticaja i varijacija položaja faznih centara antena.

Drugi pravac mogućih istraživanja odnosi se na formulaciju jedinstvenih matematičkih modela kojima će pojedinačno i kombinovano biti obuhvaćena opažanja različitih satelitskih sistema (GPS, GLONASS, GALILEO). Istraživački izazov sastojao se prevashodno u modeliranju suptilnih varijacija u različitim referentnim i vremenskim sistemima, kao i u disperzionoj analizi koja treba da omogući integraciju opažanja sa različitim stohastičkim svojstvima.

Treći pravac nesumnjivo predstavlja dalji razvoj u aktivnim mrežama permanentnih stanica. Njihov broj će se zbog kinematičkih primena u realnom vremenu stalno povećavati, čime će rasti i potreba za boljim komunikacijama, bržim algoritmima, potpunijem modeliranju pojedinih uticajnih faktora, novim područjima primene i sve pouzdanijim sistemom kvaliteta. Takva istraživanja u neposrednoj su vezi sa predmetom ovog rada jer se podskup aktivnih permanentnih stanica sa šireg područja velikog naseljenog mesta uvek može zasebno posmatrati kao realizacija gradske geodetske GPS osnove.

Literatura

- [1] **Allan D.:** *Statistics of Atomic Frequency Standards*. Proceedings of the IEEE, Vol. 54, No. 2, New York, (1966).
- [2] **Allan D.; Barnes J.:** *A Modified Allan Variance with Increased Oscillator Characterization Ability*. Proceedings of 35th Annual Frequency Control Symposium USAERADCOM, (1981).
- [3] **Allan D.:** *Clock Characterization Tutorial*. Proceedings of the 15th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting, (1983).
- [4] **Allan D.:** *Time and Frequency (Time-Domain) Characterization, Estimation and Prediction of Precision Clocks and Oscillators*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. UFFC-34, No. 6, (1987).
- [5] **Allan D.; Ashby N.; Hodge C. C.:** *The Science of Timekeeping*. Hewlett Packard Application Note 1289: GPS and Precision Timing Applications, (1997).
- [6] **Altiner Y.; Schlueter W.; Seeger H.:** *Results of BALKAN98 GPS Campaigns in Albania, Bosnia and Herzegovina and Yugoslavia*. Report on the Symposium of the IAG Subcommission for the European Reference Frame (EUREF), June 2-5 1999, Prague. Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission fuer die Internationale Erdmessung, Heft Nr. 60, EUREF Publication No. 8, Muenchen, (1999).
- [7] **Aparicio M.; Brodie P.; Doyle L.; Rajan J.; Torrione P.:** *GPS Satellite and Payload*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [8] **Arnold K.:** *Methoden der Satellitengeodaesie*. Akademie-Verlag, Berlin, (1970).
- [9] **Ashby N.; Spilker J. J.:** *Introduction to Relativistic Effects on the Global Positioning System*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [10] **Ašanin S.:** *Prilog obradi i analizi geodetskih merenja za određivanje pomeranja i deformacija objekata i tla*. Doktorska disertacija, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, (1986).
- [11] **Axelrad P.:** *GPS Navigation Algorithms*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [12] **Baarda W.:** *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*. Netherland Geodetic Commission, Vol. 2, No. 5, Delft, (1968).
- [13] **Bancroft S.:** *An Algebraic Solution of the GPS Solutions*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-21, No.7, (1985).
- [14] **Bastos L.; Landau H.:** *Fixing Cycle Slips in Dual Frequency Kinematic GPS Applications Using Kalman Filtering*. Manuscripta Geodaetica, Vol. 13, No. 4, (1988).
- [15] **Bertiger W. I.; Bar-Sever Y. E.; Haines B. J.; Iijima B. A.; Lichten S. M.; Lindqwister U. J.; Mannucci A. J.; Muellerschoen R. J.; Munson T. N.; Moore A. W.; Romans L. J.; Wilson B. D.; Wu S. C.; Yunck T. P.:** *A Real-Time Wide Area Differential GPS System*. Navigation, 44(4), (1998).

- [16] **Bevis M.; Businger S.; Herring T.:** *GPS Meteorology: Remote Sensing of Atmospheric Water Vapor Using the Global Positioning System*. Journal of Geophysical Research, Vol. 97, (1992).
- [17] **Bierman G.:** *Measurement Updating Using the U-D Factorization*. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, (1975).
- [18] **Black H. D.:** *An Easily Implemented Algorithm for the Tropospheric Range Correction*. Journal of Geophysical Research, Vol. 83, No. B4, (1978).
- [19] **Blagojević D.:** *Određivanje savremenih pomeranja Zemljine kore lokalnog i regionalnog karaktera geodetskim metodama*. Magistarski rad, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, (1993).
- [20] **Blagojević, D.; Joksić, D.; Vasiljev, V.; Bratuljević, N.:** *The New Reference GPS Network in Republic of Serbia*. Report on the Symposium of the IAG Subcommission for the European Reference Frame (EUREF), June 10-13 1998, Bad Neuenahr - Ahrweiler, Germany. Mitteilungen des Bundesamtes fuer Kartographie und Geodaesie, Band 6, EUREF Publication No. 7/I, Frankfurt am Main, (1998).
- [21] **Blagojević D.:** *Jedan način određivanja položaja faznih centara GPS antena*. CD Zbornik, Kongres metrologa Jugoslavije, Novi Sad, 15-17 novembra 2000, (2000).
- [22] **Blagojević D.:** *Terensko ispitivanje kratkoročne stabilnosti oscilatora geodetskog GPS prijemnika*. Rad predat za Kongres metrologa Jugoslavije, (2002).
- [23] **Blagojević D.:** *Nova državna referentna mreža Republike Srbije*. Savetovanje: Osnovni geodetski radovi – stanje i perspektiva, Aranđelovac 21. – 23. februar 2003. godine, (2003).
- [24] **Blewitt G.:** *An Automatic Editing Algorithm for GPS Data*. Geophysical Research Letters, Vol. 17, No. 3, (1990).
- [25] **Blewitt G.:** *GPS Data Processing Methodology*. In: Teunisson G. J. P. and Kleusberg A. (eds.): *GPS for Geodesy*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1996).
- [26] **Bock Y.; Zhu S.:** *On the Establishment and Maintenance of a Modern Conventional Terrestrial Reference System*. Proceedings of Symposium No. 5: Geodetic Applications of Radio Interferometry, IAG General Meeting, Tokyo, NOAA Technical Report NOS95-NGS24, (1982).
- [27] **Bratuljević N.:** *Objektivna ocena tačnosti metode merenja horizontalnih uglova*. Doktorska disertacija, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, (1978).
- [28] **Bratuljević N.; Mrkić R.:** *Trigonometrijske i poligonometrijske mreže u gradovima SR Crne Gore*. Monografija, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, (1984).
- [29] **Bratuljević N.; Milovanović V.; Mrkić R.; Lalović Ž.; Delčev S.; Blagojević D.:** *Trigonometrijska mreža Titovog Užica*. Tehnička dokumentacija, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, (1987).
- [30] **Bratuljević N.; Mrkić R.; Milovanović V.; Delčev S.; Blagojević D.; Vasiljev V.:** *Geodetske referentne mreže SRJ*. Studija, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, (1995).
- [31] **Brockmann E.:** *Combination of Solutions for Geodetic and Geodynamic Applications of the Global Positioning System (GPS)*. Inauguraldissertation der Philosophisch naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bern, (1996).
- [32] **Brown N.; Keally A.; Millner J.; Ramm P.; Williamson P. I.:** *Quality Control and Integrity Monitoring of the Victorian GPS Reference Station Network*. FIG XXII International Congress, Washington D. C., USA, (2002).

- [33] **Cankut D.; Sahin M.:** *Real Time Deformation Monitoring with GPS and Kalman Filter*. Earth Planets Space, No. 52, (2000).
- [34] **Caspary F. W.:** *Concepts of Network and Deformation Analysis*. Edited by J. M. Rueger, Kensington, New South Wells, Australia, (1987).
- [35] **Chao C. C.:** *A Model for Tropospheric Calibration from Daily Surface and Radiosonde Balloon Measurements*. Technical Memorandum 391-350, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, USA, (1972).
- [36] **Chen D.:** *Development of a Fast Ambiguity Search Filtering (FASF) Method for GPS Carrier Phase Ambiguity Resolution*. PhD Thesis, UCGE Reports Number 20071, University of Calgary, (1994).
- [37] **Chen D.; Lachapelle G.:** *A Comparison of the FASF and Least Squares Search Algorithms for on-the-fly Ambiguity Resolution*. Navigation: Journal of The Institute of Navigation, Vol. 42, No. 2, (1995).
- [38] **Collins J. P.; Langley B. R.:** *The Residual Tropospheric Propagation Delay: How bad can it get?* Proceedings of ION GPS-98, Nashville, Tennessee, USA, (1998).
- [39] **Collins J. P.; Langley B. R.:** *Possible Weighting Schemes for GPS Carrier Phase Observations in the Presence of Multipath*. Contract report for the United States Army Corps of Engineers Topographic Engineering Center, No. DAAH04-96-C-0086/TCN 98151, (1999).
- [40] **Counselman C. C.; Shapiro I. I.; Greenspan R. L.; Cox D. B.:** *Backpack VLBI Terminal with Subcentimeter Capability*. Proceedings: Radio Interferometric Techniques for Geodesy, NASA Conference Publication, Vol. 2115, (1979).
- [41] **Counselman C. C.; Gourevitch S. A.:** *Miniature Interferometer Terminals for Earth Surveying: Ambiguity and Multipath with Global Positioning System*. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. GE-19, No. 4, (1981).
- [42] **Cutler L. S.; Searle C. L.:** *Some Aspects of the Theory and Measurements of Frequency Fluctuations in Frequency Standards*. Proceedings of the IEEE, Vol. 54, No. 2, New York, (1966).
- [43] **Činklović N.:** *Metode preciznih geodetskih merenja*. Skripta, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, (1977).
- [44] **Dach R.:** *Einfluss von Auflasteffekten auf praezise GPS Messungen*. Deutsche Geodaetische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 519, Muenchen, (2000).
- [45] **Davis J. L.; Herring T. A.; Shapiro I. I.; Rogers A. E. E.; Elgered G.:** *Geodesy by Radio Interferometry: Effects of Atmospheric Modeling Errors on Estimates of Baseline Length*. Radio Science, Vol. 20, No. 6, (1985).
- [46] **de Jong C. D.:** *Principles and Applications of Permanent GPS Arrays*. PhD thesis, Department of Geodesy, Technical University of Budapest, (1996).
- [47] **DeMets C.; Gordon R. G.; Argus D. F.; Stein S.:** *Effect of Recent Revisions to the Geomagnetic Reversal Time Scale on Estimates of Current Plate Motions*. Geophysical Research Letters, No. 21, (1994).
- [48] **Dinter G.:** *Ein universelles Konzept zur Integration von GPS Hoehen in Gebraushoehensysteme*. DVW Schriftenreihe 27, Verlag Konrad Wittwer GmbH, Stuttgart, (1997).
- [49] **Eissfeller B.:** *The Estimation of Orthometric Heights from GPS Baseline Vectors using Gravity Field Information and Least Squares Collocation*. In Landau H, Eissfeller B, Hein G. (eds.): GPS Research 1985 at the Institute of Astronomical and Physical Geodesy,

- Universitaet der Bundeswehr Muenchen, Schriftenreihe, Heft 19, Muenchen, (1985).
- [50] **El Arini M. B.; Conker R.; Albertson T.; Reagan J. K.; Klobuchar J. A.; Doherty P.:** *Comparison of Real Time Ionospheric Algorithms for a GPS Wide Area Augmentation System (WAAS)*. Journal of the Institute of Navigation, Vol. 41, No. 4, (1995).
- [51] **El Rabbany A. E. S.:** *The Effect of Physical Correlations on the Ambiguity Resolution and Accuracy Estimation in GPS Differential Positioning*. Technical Report No. 170, Department of Geodesy and Geomatic Engineering, University of New Brunswick, Canada, (1994).
- [52] **Emardson T. R.:** *Studies of Atmospheric Water Vapor Using the Global Positioning System*. Technical Report Number 339, Chalmers University of Technology, Sweden (1998).
- [53] **Erickson C.:** *Investigations of C/A Code and Carrier Measurements and Techniques for Rapid Static GPS Surveys*. MSc Thesis, UCGE Reports Number 20044, University of Calgary, (1992).
- [54] **Euler H. J.; Goad C. C.:** *On Optimal Filtering of GPS Dual Frequency Observations Without Using Orbit Information*. Bulletin Geodesique, Volume 65, Number 2, Springer Verlag, (1991).
- [55] **Euler H. J.; Keenan C. R.; Zebhauser B. E.; Wuebbena G.:** *Study of a Simplified Approach in Utilizing Information from Permanent Reference Station Arrays*. ION GPS 2001, Salt Lake City, (2001).
- [56] **Evans A. G.:** *Collocation Tests of an Advanced Geodetic Global Positioning System Receiver*. Proceedings of the First International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Rockville, USA, (1985).
- [57] **Fortes L. P. S.; Lachapelle G.; Cannon M. E.; Marceau G.; Ryan S.; Wee S.; Raquet J.:** *Testing of a Multi Reference GPS Station Network for Precise 3D Positioning in the St. Lawrence Seaway*. Proceedings of ION GPS-99, Nashville, Tennessee, USA, (1999).
- [58] **Fotopoulos G.; Cannon M. E.:** *An Overview of Multi Reference Station Methods for Cm Level Positioning*. GPS Solutions, Vol. 4, No. 3, Wiley&Sons, (2001).
- [59] **Francisco S. G.:** *GPS Operational Control Segment*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [60] **Frei E.; Beutler G.:** *Rapid Static Positioning Based on the Fast Ambiguity Resolution Approach FARA: Theory and First Results*. Manuscripta Geodaetica, Vol. 15, No. 4, (1990).
- [61] **Gabor M.:** *Remote Sensing of Water Vapor from GPS Receivers*. ASE 389P, Remote Sensing from Space, University of Texas at Austin, (1997).
- [62] **Gao Y.; Li Z.:** *Cycle Slip Detection and Ambiguity Resolution Algorithms for Dual Frequency GPS Data Processing*. Marine Geodesy, Vol. 22, No. 4, (1999).
- [63] **Ge L.:** *GPS Seismometer and its Signal Extraction*. Proceedings of ION99, 12th International Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, Nashville Tennessee, USA, (1999).
- [64] **Gelb A.:** *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, USA, (1974).
- [65] **Geoinženjering:** *Kragujevac, Gradska trigonometrijska mreža, Sveska 1: Tehnički izveštaj*. Geoinženjering, Beograd, (1991).
- [66] **Georgiadou Y.; Kleusberg A.:** *On the Effect of Ionospheric Delay on Geodetic Relative GPS Positioning*. Manuscripta Geodaetica, No. 13, Springer Verlag, (1988).

- [67] **Gianniou M.:** *Genauigkeitssteigerung bei kurzzeit statischen und kinematischen Satellitenmessungen bis hin zur Echtzeitanwendung.* Deutsche Geodaetische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 458, Muenchen, (1996).
- [68] **Glavna geodetska uprava pri Vladi FNRJ:** *Pravilnik za državni premer I deo: Triangulacija.* Publikacija Glavne geodetske uprave pri Vladi FNRJ, Knjiga prva, Beograd, (1951).
- [69] **Goad C. C.:** *Single Site GPS Models.* In Teunisson G. J. P. and Kleusberg A. (eds.): GPS for Geodesy. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1996).
- [70] **Goad C. C.; Yang M.:** *A New Approach to Precision Airborne GPS Positioning for Photogrammetry.* Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Vol. 63, No. 9, (1997).
- [71] **Grafarend W. E.:** *Lecture Notes on Adjustment and Statistics III, Part 1, WS 2000/2001, Rev. 1.5.* Geodaetisches Institut, Universitaet Stuttgart, (2000).
- [72] **Grodecky J.:** *Estimation of Variance Covariance Components for Geodetic Observations and Implications on Deformation Trend Analysis.* Ph.D. Dissertation, Technical Report No. 186, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, The University of New Brunswick, (1997).
- [73] **Han S.; Rizos C:** *Standardization of the Variance Covariance Matrix for GPS Rapid Static Positioning.* Geomatics Research Australasia, No. 62, (1995).
- [74] **Han S.; Rizos C:** *GPS Network Design and Error Mitigation for Real Time Continuous Array Monitoring Systems.* Proceedings of ION GPS-96, (1996).
- [75] **Han S.:** *Quality Control Issues Relating to Instantaneous Ambiguity Resolution for Real Time GPS Kinematic Positioning.* Journal of Geodesy, No. 71, Springer Verlag, (1997).
- [76] **Han S.:** *Carrier Phase Based Long Range GPS Kinematic Positioning.* UNISURV S-49, School of Geomatic Engineering, The University of New South Wales, (1997).
- [77] **Han S.:** *Recent GPS Positioning Results Using Multiple Reference Stations.* GPS/GIS Showcase, Nanyang Technological University, Singapore, (1999).
- [78] **Hartinger H.; Brunner K. F.:** *Variance of GPS Phase Observations: The Sigma Epsilon Model.* GPS Solutions, Vol. 2, No. 4, Wiley&Sons, (1999).
- [79] **Hartinger H.; Brunner K. F.:** *Development of a Monitoring System of Landslide Motions Using GPS.* Proceedings of the 9th FIG Symposium on Deformation Monitoring, Olsztyn, Poland, (1999).
- [80] **Hase H.:** *Theorie und Praxis globaler Bezugssysteme.* Mitteilungen des Bundesamtes fuer Kartographie und Geodaesie, Band 13, Frankfurt am Main, (1999).
- [81] **Hatch R.:** *Instantaneous Ambiguity Resolution.* Proceedings of KIS90, Banff, Canada, (1990).
- [82] **Heiskanen A. W.; Moritz H.:** *Physical Geodesy.* W. H. Freeman and Company, San Francisco London, (1967).
- [83] **Heroux P.; Couba J.:** *GPS Precise Point Positioning with a Difference.* Paper presented at Geomatics 95, Ottawa, Ontario, Canada, (1994).
- [84] **Herring T. A.:** *Modeling Atmospheric Delays in the Analysis of Space Geodetic Data.* In J. C. de Munck and T. A. Spoelstra (Eds): Proceedings of the Symposium on Refraction of Transatmospheric Signals in Geodesy, Netherlands Geodetic Commission, Publications in Geodesy, New Series No. 36, The Hague, Netherlands, (1992).
- [85] **Hofmann Wellenhof B.; Circhner G.; Lichtenegger H.; Moritz H.; Pesec P.; Rinner K.; Stangl K.; Suenkel H.:** *Oesterreichische Beitrag zum WEGENER MEDLAS Projekt.*

- Mitteilungen der Geodaetischen Institute der Technischen Universitaet Graz, Folge 65, (1989).
- [86] **Hofmann Wellenhof B.; Lichtenegger H.; Collins J.:** *Global Positioning System: Theory and Practice*. Third revised edition, Springer Verlag, Wien New York, (1994).
- [87] **Holdahl R. S.:** *Readjustment of Leveling Networks to Account for Vertical Coseismic Motions*. Paper presented to International Symposium on Recent Crustal Movements, Maracaibo, Venezuela, (1985).
- [88] **Hopfield H. S.:** *Two Quartic Tropospheric Refractivity Profile for Correcting Satellite Data*. Journal of Geophysical Research, Vol. 74, No. 18, (1969).
- [89] **ICD-GPS-200:** *ICD-GPS-200 - Navstar GPS Space Segment / Navigation User Interfaces*. Revision C, Initial Release, ARINC Research Corporation, El Segundo, CA, USA, (1997).
- [90] **Ifadis I.:** *The Atmospheric Delay of Radio Waves: Modeling the Elevation Dependence on a Global Scale*. Technical Report No. 38L, School of Electrical and Computer Engineering, Chalmers University of Technology, Goeteborg, Sweden, (1986).
- [91] **Ihde J.; Adam J.; Gubler E.; Harrson B. G.; Luthardt J.; Torres J. A.:** *European Coordinate Reference Systems*. Report on the Symposium of the IAG Subcommission for Europe (EUREF) held in Dubrovnik 16-18 May 2001, Mitteilungen des Bundesamtes fuer Kartographie und Geodaesie, EUREF Publication No. 10, Frankfurt am Main, (2002).
- [92] **Jaeggi A.; Beutler G.; Hugentobler U.:** *Using Double Difference Information from Network Solutions to Generate Observations for a Virtual GPS Reference Receiver*. IAG 2001 Scientific Assembly, Budapest, Hungary, (2001).
- [93] **Jin X. X.:** *Theory of Carrier Adjusted DGPS Positioning Approach and Some Experimental Results*. PhD thesis, Delft University Press, Delft, Netherlands, (1996).
- [94] **Jonge P.; Tiberius C.:** *The LAMBDA Method for Integer Ambiguity Estimation: Implementation Aspects*. LGR-Series, Publications of the Delft Geodetic Computing Centre, No. 12, Delft University of Technology, (1996).
- [95] **Jovanović M.:** *Gradska trigonometrijska mreža: Prilog novim shvatanjima o razvijanju i izravananju gradskih trigonometrijskih mreža i oceni njihove tačnosti*. Doktorska disertacija, (1963).
- [96] **Kalman R.:** *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. Journal of Basic Engineering (ASME), Vol. 82D, (1960).
- [97] **Kaula M. W.:** *Celestial Geodesy*. Advances in geophysics, vol. 9, Academic Press, New York and London, (1962).
- [98] **Kim D.; Langley R. B.:** *An Optimized Least Squares Technique for Improving Ambiguity Resolution Performance and Computational Efficiency*. Proceedings of ION GPS99, Nashville, Tennessee, (1999).
- [99] **Kim D.; Langley R. B.:** *GPS Ambiguity Resolution and Validation: Methodologies, Trends and Issues*. International Symposium on GPS/GNSS, 7th GNSS Workshop, Seoul, Korea, (2000).
- [100] **Kim D.; Langley R. B.:** *Estimation of the Stochastic Model for Long-Baseline Kinematic GPS Applications*. Presented at the ION National Technical Meeting, Long Beach, CA, (2001).
- [101] **King R.:** *SVNAV.DAT – Satellite Information Table of GAMIT/GLOBK*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, USA, (1999).
- [102] **Klein U.:** *Analyse und Vergleich unterschiedlicher Modelle der dreidimensionalen*

- Geodaesie*. Deutsche Geodaetische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 479, Muenhen, (1997).
- [103] **Klobuchar A. J.:** *Ionospheric Time Delay Corrections for Advanced Satellite Ranging Systems*. AGARD Conference: Propagation Limitations of Navigation and Positioning Systems, Proceedings 209, (1977).
- [104] **Klobuchar A. J.:** *Ionospheric Time Delay Algorithm for Single Frequency GPS Users*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-23, No.3, (1987).
- [105] **Klobuchar A. J.:** *Ionospheric Effects on GPS*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [106] **Koch K.:** *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1988).
- [107] **Komjathy A.:** *Global Ionospheric Total Electron Content Mapping Using the Global Positioning System*. Ph.D. thesis, Technical Report No. 188, University of New Brunswick, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, New Brunswick, Canada, (1997).
- [108] **Kovalevsky J.; Mueller I.:** *Comments on Conventional Terrestrial and Quasi Inertial Reference Systems*. In: E. M. Gaposchkin and B. Kolaczek (eds.): *Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics*, Proceedings of IAU Colloquium 56, Sept. 8-12, 1980, Warsaw, Poland, (1980).
- [109] **Landau H.:** *Zur Nutzung des Global Positioning Systems in Geodaesie und Geodynamik: Modellbildung, Software-Entwicklung und Analyse*. Schriftenreihe Heft 36, Studiengang Vermessungswesen, Universitaet der Bundeswehr, Muenchen, (1988).
- [110] **Langley R.:** *GPS Receivers and the Observables*. In Teunisson G. J. P. and Kleusberg A. (eds.): *GPS for Geodesy*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1996).
- [111] **Lanyi G.:** *Tropospheric Delay Effects in Radio Interferometry*. Telecommunications and Data Acquisition Progress Report, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, USA, (1984).
- [112] **Leick A.; van Gelder B. H. W.:** *Similarity Transformations and Geodetic Network Distorsions Based on Doppler Satellite Observations*. OSU Report Nr. 235, The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Columbus, Ohio, USA, (1975).
- [113] **Leick A.:** *GPS Satellite Surveying*. John Wiley & Sons, New York, (1995).
- [114] **Leinen S.:** *Hochpraezise Positionierung ueber grosse Entfernungen und in Echtzeit mit dem Global Positioning System*. Deutsche Geodaetische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 472, Muenchen, (1997).
- [115] **Lemoine F. G.; Kenyon S. C.; Trimmer R.; Factor J.; Pavlis N. K.; Klosko S. M.; Chinn D. S.; Torrence M. H.; Pavlis E. C.; Rapp R. H.; Olson T. R.:** *EGM96 The NASA GSFC And NIMA Joint Geopotential Model*. NASA Technical Memorandum, (1997).
- [116] **Mader G. L.:** *GPS Antenna Calibration at the National Geodetic Survey*. GPS Solutions, Vol. 3, No. 1, Wiley&Sons, (1999).
- [117] **Marini J. W.:** *Correction of Satellite Tracking Data for an Arbitrary Tropospheric Profile*. Radio Science, Vol. 7, No. 2, (1972).
- [118] **McCarthy D. D.:** *IERS Conventions (1996)*. IERS Technical Note 21, Central Bureau of IERS, Observatory of Paris, France, (1996).
- [119] **Melchior P.:** *The Tides of the Planet Earth*. Pergamon Press, Oxford New York Toronto Sydney Paris Frankfurt, (1978).

- [120] **Mendes V. B.; Langley R.:** *Optimization of Tropospheric Delay Mapping Function Performance for High Precision Geodetic Application*. Proceedings of DORIS Days, Toulouse, France, (1998).
- [121] **Mendes V. B.; Prates G.; Santos L.; Langley R.:** *An Evaluation of the Accuracy of Models of the Determination of the Weighted Mean Temperature of the Atmosphere*. Proceedings of ION 2000 National Technical Meeting, Anaheim, CA, (2000).
- [122] **Mertikas P. S.; Rizos C.:** *Online Detection of Abrupt Changes in the Carrier Phase Measurements of GPS*. Journal of Geodesy, No. 71, Springer Verlag, (1997).
- [123] **Mervart L.:** *Ambiguity Resolution Techniques in Geodetic and Geodynamic Applications of the Global Positioning System*. Inauguraldissertation, Philosophisch naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bern, (1995).
- [124] **Mikhail E. M.:** *Observations and Least Squares*. IEP-A Dun Donnelley Publisher, New York, (1976).
- [125] **Milovanović V.; Blagojević D.:** *Some Temperature Influences on Levels and Theodolites*. Bulletin de L'Observatoire Astronomique de Belgrade, No. 154, (1996).
- [126] **Misra P.; Enge P.:** *Global Positioning System: Signals, Measurements and Performance*. Ganga-Jamuna Press, Linkoln, Massachusetts, USA, (2001).
- [127] **Mockler S. B.:** *Water Vapor in the Climate System*. Special Report, American Geophysical Union (AGU), Washington DC, (1995).
- [128] **Moritz H.:** *Geodetic Reference System 1984*. Bulletin Geodesique, Volume 58, No. 3, The Geodesists Handbook 1984, (1984).
- [129] **Moritz H.; Hofmann Wellenhof B.:** *Geometry, Relativity, Geodesy*. Wichmann Verlag GmbH, Karlsruhe, (1993).
- [130] **Mrkić R.:** *Prilog objektivnoj oceni tačnosti merenja dužina elektronskim daljinomerima*. Doktorska disertacija, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, (1978).
- [131] **Mueller I.:** *Introduction to Satellite Geodesy*. Frederick Ungar Publishing, New York, (1964).
- [132] **Mueller I.:** *Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics: A Preview*. In: E. M. Gaposchkin and B. Kolaczek (eds.): *Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics*, Proceedings of IAU Colloquium 56, Sept. 8-12, 1980, Warsaw, Poland, (1980).
- [133] **Mueller T.:** *Minimum Variance Network DGPS Algorithm*. Proceedings of IEEE PLANS 94, Institute of Electrical and Electronic Engineers, Publishing Service, New York, (1994).
- [134] **Newby S.:** *An Assessment of Empirical Models for the Prediction of the Transionospheric Propagation of Radio Signals*. M.Sc. Dissertation, Technical Report No. 160, Department of Surveying Engineering, The University of New Brunswick, (1992).
- [135] **Niell A. E.:** *Global Mapping Functions for the Atmosphere Delay at Radio Wavelengths*. Journal of Geophysical Research, Vol. 101, No. B2, (1996).
- [136] **NIMA:** *Department of Defense World Geodetic System 1984, its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems*. Technical Report TR8350.2, Third Edition, National Imagery and Mapping Agency, (1997).
- [137] **Odičk D.; van der Marel H.; Song I.:** *Precise GPS Positioning by Applying Ionospheric Corrections from an Active Control Network*. GPS Solutions, Vol. 3, John Wiley & Sons Inc., (2000).
- [138] **Okeke F. I.:** *The Curvilinear Datum Transformation Model*. Deutsche Geodaetische

- Kommission, Reihe C, Heft Nr. 481, Muenhen, (1998).
- [139] **Parkinson B. W.:** *Introduction and Heritage of NAVSTAR, the Global Positioning System*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [140] **Pelzer H.:** *Grundlagen der mathematischen Statistik und der Ausgleichung*. Kontaktstudium 1985: Geodaetische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Herausgegeben von Hans Pelzer Vermessungswesen bei Konrad Wittwer, Band 13,, (1985).
- [141] **Perović G.:** *Greške položaja tačaka*. Doktorska disertacija, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, (1980).
- [142] **Perović G.:** *Račun izravnjanja 1: Teorija grešaka merenja*. Naučna knjiga, Beograd (1984).
- [143] **Perović G.:** *Singularna izravnjanja*. Naučna knjiga, Beograd, (1986).
- [144] **Perović G.:** *Metod najmanjih kvadrata*. Monografija u pripremi za štampu, Beograd, (1998).
- [145] **Petovello M.:** *Estimating Oscillator Stability in the Time Domain Using Standalone GPS*. University of Calgary, Special Projects Course ENGO 699.58R, (2000).
- [146] **Press W. H.; Teukolsky S. A.; Vetterling W. T.; Flannery B. P.:** *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney, (1992).
- [147] **Radovanovic S. R.:** *Adjustment of Satellite Based Ranging Observations for Precise Positioning and Deformation Monitoring*. Ph.D. dissertation, UCGE Report No. 20166, The University of Calgary, (2002).
- [148] **Rao C.:** *Estimation of Variance and Covariance Components - MINQUE*. Journal of Multivariate Analysis, No. 1, (1971).
- [149] **Raquet J.:** *Development of a Method for Kinematic GPS Carrier Phase Ambiguity Resolution Using Multiple Reference Receivers*. Ph.D. dissertation, UCGE Report No. 20116, The University of Calgary, (1998).
- [150] **Ray J.:** *Mitigation of GPS Code and Carrier Phase Multipath Effects Using a Multi-Antenna System*. Ph.D. dissertation, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, (2000).
- [151] **Remondi B.:** *Using the Global Positioning System (GPS) Phase Observable for Relative Geodesy: Modeling, Processing and Results*. Ph.D. dissertation, The University of Texas at Austin, (1984).
- [152] **Republički geodetski zavod:** *Pravilnik za osnovne geodetske radove*. Službeni glasnik Republike Srbije, br. 46/1999, (1999).
- [153] **Rizos C.:** *Principles and Practice of GPS Surveying*. Monograph 17, School of Geomatic Engineering, University of New South Wales, (1997).
- [154] **Rothacher M.; Schaer S.:** *GPS Auswertetechniken*. In Heck B. und Illner M. (red.): *GPS Leistungsbilanz 94, Beitrage zum 34. DVW Seminar am Geodaetischen Institut der Universitaet Karlsruhe*, Schriftenreihe 18/1995, Deutscher Verein fuer Vermessungswesen, (1995).
- [155] **Rothacher M.; Schaer S.; Mervart L.; Beutler G.:** *Determination of Antenna Phase Center Variations Using GPS Data*. Proceedings of the IGS Workshop, Potsdam, Germany, (1995).
- [156] **Rothacher M.; Zebhauser B.:** *Einfuehrung in GPS*. Tutorial, 3. SAPOS Symposium, 23.-24 Mai, Muenchen, (2000).

- [157] **RTCM SC-104:** *RTCM Recommended Standards for Differential NAVSTAR GPS Service*. Radio Technical Commission for Maritime Services, Washington, USA, (1994).
- [158] **Saastamoinen J.:** *Contributions to the Theory of Atmospheric Refraction, Part II*. Bulletin Geodesique, 107, (1973).
- [159] **Salzmann M.:** *MDB: A Design Tool for Integrated Navigation Systems*. Bulletin Geodesique, Volume 65, Number 2, Springer Verlag, (1991).
- [160] **Satirapod C.:** *Improving the GPS Data Processing Algorithm for Precise Static Relative Positioning*. PhD Thesis, School of Surveying and Spatial Information Systems, The University of New South Wales, Sydney, Australia, (2002).
- [161] **Savezna geodetska uprava:** *Pravilnik za državni premer II-A deo: Osnovni radovi na gradskom premeru*. Publikacija Savezne geodetske uprave, privremeno izdanje, Beograd, (1956).
- [162] **Schaer S.; Gurtner W.; Feltens J.:** *IONEX: The IONosphere Map EXchange Format Version 1*. In J. M. Dow et al. (eds.): *Proceedings of the IGS Analysis Center Workshop*, ESA/ESOC, Darmstadt, Germany, (1998).
- [163] **Schaer S.:** *Mapping and Predicting the Earth's Ionosphere Using the Global Positioning System*. Inauguraldissertation der Philosophisch naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bern, (1999).
- [164] **Schlueter W.:** *Zeit und Frequenz im Messverfahren der Geodaesie*. Deutsche Geodaetische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 337, Frankfurt am Main, (1988).
- [165] **Schneider M.:** *Satellitengeodaesie - Grundlagen*. Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG Wissenschaftsverlag, Mannheim Wien Zuerich, (1988).
- [166] **Schoedlbauer A.; Krack K.; Scherer B.; Widmann R.; Beckers H.:** *GPS Leveling in High Precision Engineering Surveys*. *Proceedings of the 6th International Geodetic Symposium on Satellite Positioning*, Vol. 2, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, (1992).
- [167] **Schreiber R.:** *Ein klassifizierender Beitrag zur Abbildungstheorie und numerischen Genauigkeit von geodaetischen Datumsuebergaengen*. Deutsche Geodaetische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 377, Muenhen, (1991).
- [168] **Schueler T.:** *On Ground-Based GPS Tropospheric Delay Estimation*. Dissertation, Fakultät fuer Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr Muenchen, Deutschland, (2001).
- [169] **Schupler B. R.; Clark T. A.:** *How Different Antennas Affect the GPS Observable*. *GPS World*, November/December 1991, (1991).
- [170] **Sillard P.; Boucher C.:** *A Review of Algebraic Constraints in Terrestrial Reference Frame Datum Definition*. *Journal of Geodesy*, No. 75, Springer Verlag, (2001).
- [171] **Soehne W.:** *Ein hybrides System in der Geodaesie / Einsatz des NAVSTAR GPS mit dem Strapdown Inertial Navigationssystem LASERNAV II fuer kinematische Punktbestimmung und Orientierung*. Deutsche Geodaetische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 463, Muenchen, (1996).
- [172] **Soler T.:** *A Compendium of Transformation Formulas Useful in GPS Work*. *Journal of Geodesy*, No. 72, Springer Verlag, (1998).
- [173] **Spilker J. J.:** *Tropospheric Effects on GPS*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).

- [174] **Suenkel H.:** *A General Surface Representation Module for Geodesy*. OSU Report Nr. 292, The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Columbus, Ohio, USA, (1980).
- [175] **Svečnikov N.:** *Trigonometrijska mreža grada Beograda*. Publikacija Savezne geodetske uprave, Beograd, (1961).
- [176] **Svečnikov N.:** *Gradske geodetske mreže*. Publikacija Savezne geodetske uprave, Beograd, (1964).
- [177] **Teunissen G. J. P.:** *An Integrity and Quality Control Procedure for Use in Multisensor Integration*. Proceedings ION GPS-90, Institute of Navigation, Colorado Springs, USA, (1990).
- [178] **Teunissen G. J. P.:** *A New Method for Fast Carrier Phase Ambiguity Estimation*. Proceedings of IEEE PLANS94, Las Vegas, NV, (1994).
- [179] **Teunissen G. J. P.:** *Quality Control and GPS*. In Teunissen G. J. P. and Kleusberg A. (eds.): *GPS for Geodesy*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1996).
- [180] **Thornton C.; Bierman G.:** *UDU^T Covariance Factorization for Kalman Filtering*. Advances in Control of Dynamic Systems, Vol. XVI, Academic Press Series, London Orlando San Diego New York Austin Boston Sidney Tokyo, (1980).
- [181] **Townsend B.; Lachapelle G.; Fortes L. P. S.; Melgard T.; Norbech T.; Raquet J.:** *New Concepts for a Carrier Phase Based GPS Positioning Using a National Reference Station Network*. Proceedings of ION NTM-99, San Diego, California, USA, (1999).
- [182] **UNAVCO:** *UNAVCO Academic Research Infrastructure (ARI) Receiver and Antenna Test Report*. UNAVCO WWW Server, <http://www.unavco.ucar.edu>, (2001).
- [183] **Van Dierendonck A. J.:** *GPS Receivers*. In: Parkinson W. B. and Spilker J. J. (eds.), Axelrad P. and Enge P. (assoc. eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Progress in Astronautics and Aeronautics, vol. 163, American Institute of Aeronautics and Astronautics, (1996).
- [184] **Vaniček P.; Krakiwsky E.:** *Geodesy: The Concepts*. Elsevier, Amsterdam Lausanne New York Oxford Shannon Tokyo, Second Edition, 5th Printing 1995, (1986).
- [185] **Varner C.; Cannon M. E.:** *The Application of Multiple Reference Stations and the Determination of Multipath and Spatially Decorrelating Errors*. Proceedings of ION-NTM-97, (1997).
- [186] **Varner C.:** *DGPS Carrier Phase Networks and Partial Derivative Algorithms*. PhD dissertation, UCGE Report No. 20129, The University of Calgary, (2000).
- [187] **Vermeer M.:** *The Precision of Geodetic GPS and One Way of Improving It*. Journal of Geodesy, Volume 71, Springer Verlag, (1997).
- [188] **Vig J. R.:** *Quartz Crystal Resonators and Oscillators for Frequency Control and Timing Applications – A Tutorial*. U.S. Army Communications-Electronics Command SLCET-TR-88-1, (2001).
- [189] **Vučkov S.:** *Optimizacija određivanja pomeranja brana geodetskim metodama u 3D koordinatnom sistemu*. Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, (2000).
- [190] **Walker J. G.:** *Circular Orbit Patterns Providing Continuous Whole Earth Coverage*. Royal Aircraft Establishment, Technical Report TR-77044, (1977).
- [191] **Wang J.; Stewart M.; Tsakiri M.:** *Stochastic Modelling for Static GPS Baseline Data Processing*. Journal of Surveying Engineering, November 1998, (1998).
- [192] **Wanninger L.:** *Praezise Positionierung in regionalen GPS Referenzstationsnetzen*.

- Deutsche Geodaetische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 508, Muenchen, (2000).
- [193] **Wanninger L.; May M.:** *Carrier Phase Multipath Calibration of GPS Reference Stations*. ION GPS 2000, Salt Lake City, (2000).
- [194] **Wanninger L.:** *Virtual Reference Stations for Centimeter Level Kinematic Positioning*. ION GPS 2002, Portland, Oregon, (2002).
- [195] **Ward P.:** *Satellite Signal Acquisition and Tracking*. In: Kaplan E. (ed.): *Understanding GPS Principles and Applications*, Artech House, (1996).
- [196] **Welch G.; Bishop G.:** *An Introduction to Kalman Filter*. Technical Report TR-95-041, Department of Computer Science, University North Carolina at Chapel Hill, (1997).
- [197] **Wells D.; Beck N.; Delikaraoglou D.; Kleusberg A.; Krakiwsky J. E.; Lachapelle G.; Langley B. R.; Nakiboglu M.; Schwarz KP.; Tranquilla M. J.; Vaniček P.:** *Guide to GPS Positioning*. Canadian GPS Associates, Fredericton, N. B., Canada, (1986).
- [198] **Welsch W.:** *Description of Homogeneous Horizontal Strains and some Remarks to their Analysis*. International Symposium on Geodetic Networks and Computations, DGK, Reihe B, Heft 258/V, Muenchen, (1982).
- [199] **Wild U.:** *Ionosphere and Geodetic Satellite Systems: Permanent GPS Tracking Data for Modelling and Monitoring*. Ph.D. thesis, Geodaetisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Vol. 48, Schweizerische Geodaetische Kommission, (1994).
- [200] **Witchayangkoon B.:** *Elements of GPS Precise Point Positioning*. Ph.D. dissertation, The Graduate School, The University of Maine, (2000).
- [201] **Wuebbena G.:** *Zur Modellierung von GNSS Beobachtungen fuer die hochgenaue Positionsbestimmung*. Wissenschaftliche Arbeiten Fachrichtung Vermessungswesen an der Universitaet Hannover, Festschrift Prof. G. Seeber zum 60. Geburtstag, No. 239, Hannover, (2001).
- [202] **Wuebbena G.; Willgalis S.:** *State Space Approach for Precise Real Time Positioning in GPS Reference Networks*. Proceedings of International Symposium on Kinematic Systems in Geodesy, Geomatics and Navigation KIS-01, Banff, Canada, (2001).
- [203] **Wuebbena G.; Bagge A.; Schmitz M.:** *RTK Networks Based on GEO++ GNSMART – Concepts, Implementation, Results*. Proceedings of ION GPS-01, Salt Lake City, Utah, USA, (2001).
- [204] **Yong Qi C.:** *Analysis of Deformation Surveys – A Generalized Method*. Ph.D. Dissertation, Technical Report No. 94, Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, (1983).
- [205] **Zhang Y.:** *Beitrage zum Entwurf von optimalen Beobachtungsplanen fuer tektonische Ueberwachungsnetze*. Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen UniBwM, Heft 30, Muenchen, (1987).
- [206] **Zhong D.:** *Robust Estimation and Optimal Selection of Polynomial Parameters for the Interpolation of GPS Geoid Heights*. Journal of Geodesy, No. 71, Springer Verlag, (1997).
- [207] **Zumberge J. F.; Heflin B. M.; Jefferson C. D.; Watkins M. M.; Webb H. F.:** *Precise Point Positioning for the Efficient and Robust Analysis of GPS Data from Large Networks*. Journal of Geophysical Research, 102, No. B3, (1997).

Biografija autora

- Ime i prezime:** Dragan Blagojević
- Datum i mesto rođenja:** 26.01.1959. godine u Vučitrnu, Kosovo i Metohija, Republika Srbija
- Osnovno obrazovanje:** Osnovna škola, od 1965. do 1973. godine u Kosovskoj Mitrovici, sa odličnim uspehom
- Srednje obrazovanje:** Gimnazija, prirodno-matematički smer, od 1973. do 1977. godine u Kosovskoj Mitrovici, sa odličnim uspehom
- Visoko obrazovanje:** Studije na Odseku za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, od 1977. do 1982. godine. Prosečna ocena tokom studija 8.92. Novembra 1982. godine stekao zvanje diplomiranog geodetskog inženjera. Diplomirao na temu *Provera geometrije gradske trigonometrijske mreže Bar-Sutomore* sa ocenom 10.
- Novembra 1993. godine stekao zvanje magistra tehničkih nauka na Odseku za geodeziju Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu. Magistrirao sa temom *Određivanje savremenih pomeranja Zemljine kore lokalnog i regionalnog karaktera geodetskim metodama*. Prosečna ocena tokom magistarskih studija 9.70.
- Vojni rok:** Od aprila 1984. do februara 1985. godine u Pančevu
- Kretanje u službi:** Od 1982. do 1987. godine zaposlen kao profesor užestručnih predmeta u srednjoj geodetskoj školi *N. H. Slavko Rodić* u Beogradu.
- Od 1987. godine na Odseku za geodeziju Građevinskog fakulteta u Beogradu u svojstvu asistenta pripravnika, a od 1994. godine u svojstvu asistenta na grupi predmeta *Viša geodezija*. Reizabran u isto zvanje 1998. i 2002. godine.
- U periodu od 1996. do 2001. godine obavljao dužnost pomoćnika direktora Republičkog geodetskog zavoda Republike Srbije u Sektoru za osnovne geodetske radove.
- Strani jezici:** Čita, piše i govori engleski, služi se nemačkim



