UNIVERZITET U BEOGRADU
GRADJEVINSKI FAKULTET

PROKIĆ ALEKSANDAR

TANKOZIDNI NOSAČI OTVORENO-ZATVORENOG POPREČNOG PRESEKA

-DOKTORSKA DISERTACIJA-

MENTOR:
PROF. DR. MIODRAG SEKULOVIĆ

SADRŽAJ

Strana

KRATAK ISTORIJSKI PREGLED

Otstupanje od pretpostavke o ravnim presecima na kojoj se zasniva klasična teorija štapova prvi je uočio C. Bach [1] 1909, vršeći eksperimente sa nosačima *[*-preseka, opterećenih na savijanje. Za torzione deformacije koje su se javljale smatrao je da su posledica nesimetričnosti poprečnog preseka. Tek je R. Maillart [25] dao ispravno objašnjenje ove pojave, pokazavši da do odstupanja od ravnog preseka može doći i kod dvoosno simetričnih preseka.

Prvi teorijski rad u kojem se razmatra pitanje tankozidnih nosača otvorenog preseka, i u vezi sa tim problem torzionog izbočavanja, potiče od S. Timošenka [43]. Rešavajući problem torzione stabilnosti nosača *I*-preseka Timošenko je pokazao da se u preseku, pored smičućih napona, pojavljuju i normalni naponi.

H. Wagner [49] i R. Kappus [21] ispitujući problem torzionog izbočavanja tankozidnih nosača izvode opšte diferencijalne jednačine izvijanja centrično pritisnutih elemenata.

Od posebnog značaja za dalji razvoj teorije tankozidnih nosača pretstavlja rad V. Vlasova [48]. Uvodjenjem novih pojmova, sektorske koordinate i generalisanih bimomenata, i njihovog preciznog fizičkog odredjenja, Vlasov je postavio teoriju koja je našla široku praktičnu primenu u proračunu raznih inženjerskih konstrukcija.

A. Goldenveizer [15], polazeći od teorije cilindričnih ljuski, precizno odredjuje područje važnosti pretpostavki teorije Vlasova.

Prvi radovi iz teorije tankozidnih nosača zatvorenog poprečnog preseka javljaju se znatno kasnije. Pokušaj da se postigne potpuna analogija sa profilima otvorenog preseka nije dala zadovoljavajuće rezultate. A. Umanski [44] polazeći od pretpostavke da su pomeranja usled deplanacije duž srednje linije preseka ista kao i kod slobodne Saint-Venantove torzije zatvorenih profila daje približno rešenje, koje će pretstavljati osnovu za dalja istraživanja u ovoj oblasti.

Veoma detaljan prikaz teorije tankozidnih nosača otvorenog i zatvorenog preseka sa originalnim pristupom problemu može se naći u knjizi C. Kollbrunnera i N. Hajdina [22].

Zbog matematičke složenosti problema analitička rešenja moguća su samo za najjednostavnije nosače, sa odredjenim graničnim uslovima i opterećenjem, pa se u poslednje vreme velika pažnja poklanja razvoju numeričkih metoda. Primena kompjutera i metode konačnih elemenata, kao jedne od veoma efikasnih numeričkih metoda, omogućila je analizu složenijih konstrukcija. Definisanjem odgovarajućih matrica krutosti rešavaju se složeni problemi stabilnosti, geometrijske i materijalne nelinearnosti i postkritičnog ponašanja tankozidnih nosača.

Matrica krutosti tankozidnog elementa otvorenog poprečnog preseka prvi puta prikazana je u radu J. Krahule [23].

J. Renton u svom radu [35] odredjuje matricu početnih napona, a R. Barsoum i R. Gallagher [7], rešavajući probleme stabilnosti, izvode matricu početnih aksijalnih sila i matricu početnih momenata savijanja.

Z. Bažant i M. Nimeiri [6] u matricu krutosti uvode bimoment i odredjuju geometrijsku matricu krutosti.

Polazeći od updated Lagrangeove formulacije problema i principa virtualnih pomeranja M. Sekulović i A. Prokić [32], [39], [40] izvode opštu linearnu i geometrijsku matricu krutosti prostornog tankozidnog štapa otvorenog poprečnog preseka i rešavaju probleme postkritičnog ponašanja konstrukcija.

Radovi koji tretiraju tankozidne nosače zatvorenog poprečnog preseka novijeg su datuma [38], [50], [30], [24]. U doktorskoj disertaciji M. Sekulovića [36] predložena je funkcija deplanacije koja ima opštiji karakter i može se primeniti na elemente sa veoma tankim zidovima kako otvorenog tako i zatvorenog poprečnog preseka.

UVOD

Tehnička teorija tankozidnih nosača otvorenog, nedeformabilnog poprečnog preseka zasnovana je na pretpostavkama V. Z. Vlasova:

- deformacija klizanja u srednjoj površini štapa se zanemaruje
- linijski elemenat upravan na srednju površinu i posle deformacije ostaje prav i upravan na deformisanu srednju površinu

Polazeći od gornjih pretpostavki pomeranja tačaka u pravcu ose štapa mogu se prikazati u zavisnosti od parametara pomeranja u ravni preseka i translatornog pomeranja preseka kao krute ravni. Raspodela normalnih napona, izazvanih deplanacijom, odredjena je sektorskom koordinatom i kvalitativno je ista za sve poprečne preseke. Saint-Venantovi smičući naponi τ_s rasporedjeni su antimetrično u odnosu na srednju liniju preseka. Naponi τ_w, izazvani ograničenom torzijom, ne mogu se, s obzirom na učinjene pretpostavke, odrediti direktno iz deformacija klizanja. Njih odredjujemo preko normalnih napona, iz uslova ravnoteže. Kao posledica javlja se neusaglašenost polja napona i polja deformacija, odnosno deformacije sračunate iz komponentalnih napona ne zadovoljavaju uslove kompatibilnosti . Ipak, ova teorija zbog svoje jednostavnosti ima široku primenu i za štapove sa otvorenim poprečnim presekom, kod kojih su naponi τ_s znatno veći od napona τ_w, daje dovoljno tačne rezultate.

Teorija tankozidnih štapova zatvorenog poprečnog preseka razmatra se odvojeno. Kod zatvorenih preseka i u slučaju slobodne torzije smičući naponi rasporedjeni su ravnomerno po debljini zida. Zadržavanje gornjih pretpostavki očigledno bi značilo otsustvo bilo kakve deformacije, pa se deplanacija preseka kvalitativno opisuje funkcijom koja se unapred odredjuje. Najčešće se usvaja funkcija Saint-Venantove slobodne torzije štapova zatvorenog poprečnog preseka.

Podela tankozidnih nosača na otvorene i zatvorene uslovljena je i matematičkom složenošću problema. Primena metode konačnih elemenata, kao jedne od numeričkih metoda, uz primenu savremenih elektronskih računara, omogućuje opštiji pristup teoriji tankozidnih nosača, sa mogućnošću analize i nelinearnih problema (geometijskih i materijalnih). Ovaj rad pretstavlja prilog ovoj oblasti.

Funkcija deplanacije koja se predlaže omogućuje jedinstvenu analizu tankozidnih nosača otvorenog i zatvorenog, nedeformabilnog, poprečnog preseka. Pretpostavka o zanemarenju klizanja u srednjoj površini štapa nije neophodna, pa se smičući naponi mogu odrediti direktno iz odgovarajućih komponentalnih deformacija. Raspored normalnih napona izazvanih deplanacijom nije više odredjen sektorskom koordinatom, već parametrima pomeranja čvornih tačaka, i u opštem slučaju promenljiv je od preseka do preseka. Konačni elemenat, koji je razvijen polazeći od usvojenih pretpostavki, može se koristiti u analizi konstrukcija kombinovanih istovremeno od nosača otvorenog i zatvorenog preseka, što je značajna prednost u odnosu na klasičan tankozidni konačni elemenat.

U 1. poglavlju izvedene su diferencijalne jednačine tankozidnog nosača proizvoljnog poprečnog preseka u okviru linearne teorije.

U 2. poglavlju metodom konačnih elemenata izvedene su linearna i nelinearna matrica krutosti geometrijski nelinearnih problema. Posmatrana su dva elementa, sa i bez uticaja transverzalnih sila od savijanja na deformaciju nosača.

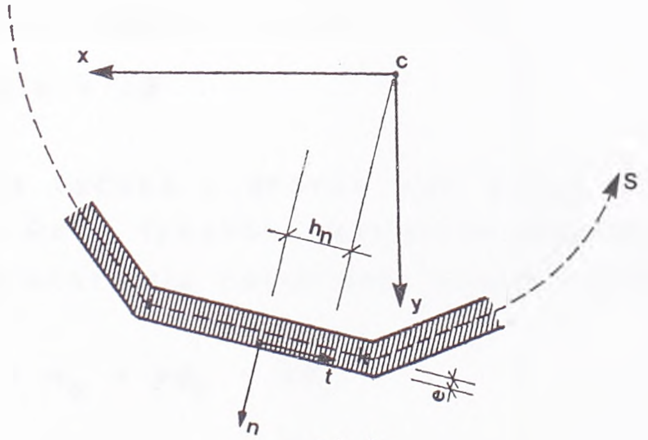
U 3. poglavlju opisane su inkrementalne metode rešavanja nelinearnih jednačina ravnoteže, a odgovarajući numerički primeri dati su u poglavlju 4.

U 6. poglavlju opisan je računski program razvijen na osnovu teorijskih razmatranja u predhodnim poglavljima sa detaljnim uputstvima za njegovu primenu.

1. TANKOZIDNI ŠTAP PROIZVOLJNOG, OTVORENOG ILI ZATVORENOG POPREČNOG PRESEKA

1.1 OSNOVNE PRETPOSTAVKE

Posmatra se prav tankozidni štap otvorenog ili zatvorenog, u opštem slučaju višećelijskog poprečnog preseka. Proizvoljna srednja linija poprečnog preseka aproksimirana je poligonalnom, pri čemu se broj strana poligona usvaja u zavisnosti od tačnosti koja se želi postići, (sl.1). Tačke u kojima se sustiču dve ili više strana poligona nazivaju se čvorne tačke.



sl.1

Za z osu Descartesovog koordinatnog sistema usvojena je prava koja spaja težišne tačke poprečnih preseka, dok se x i y ose poklapaju sa glavnim osama inercije preseka.

Pored uobičajenih pretpostavki linearne teorije elastičnosti u daljim razmatranjima koristiće se i sledeće pretpostavke:

- poprečni preseci štapa su nedeformabilni u svojoj ravni

- pomeranja u pravcu ose štapa, duž srednje linije profila, menjaju se linearno izmedju susednih čvornih tačaka poligona
- relativno krivljenje preseka u odnosu na srednju liniju (poprečna deplanacija) kvalitativno je odredjeno rešenjem Saint-Venantove slobodne torzije

1.2 DEFORMACIJA ŠTAPA

Polazeći od pretpostavke o nedeformabilnosti poprečnog preseka, za opisivanje pomeranja u ravni preseka dovoljna su tri parametra. Kada se za parametre pomeranja usvoje pomeranja težišne tačke preseka u i v u pravcima osa x i y, i obrtanje preseka ϑ oko težišne tačke, tada su pomeranja proizvoljne tačke preseka u_* i v_*, u pravcima x i y, pri malim uglovima obrtanja, odredjena izrazima:

$$
\begin{aligned}
u_* &= u - y\vartheta \\
v_* &= v + x\vartheta
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

Pomeranje tačaka u pravcu ose štapa može se razložiti u dva dela. Prvi, izazvan aksijalnim naprezanjem i savijanjem štapa, pretstavlja pomeranje preseka kao ravnog:

$$w_r = w_o + y\psi_x - x\psi_y \qquad (1.2)$$

gde parametar w_o označava translatorno pomeranje, a parametri ψ_x i ψ_y obrtanje preseka oko x i y ose.

Drugi član u izrazu za aksijalna pomeranja odredjuje deplanaciju preseka nastalu usled torzije. Ovaj deo ukupnog pomeranja najčešće se prikazuje kao proizvod dve funkcije nezavisnih argumenata:

$$w_d = \Omega(x,y)w(z) \qquad (1.3)$$

Funkcija Ω definiše kvalitativno deplanaciju poprečnog preseka. Najčešće se usvaja unapred, kao funkcija Saint-Venantove slobodne torzije. U tom slučaju svi preseci krive se na isti način, odredjen sektorskom koordinatom. Funkcija w odredjuje intenzitet deplanacije. Ona pretstavlja novu nepoznatu, ili se usvaja, kao poznata veličina, u funkciji ostalih parametara pomeranja.

U ovom radu predložen je nov način opisivanja deplanacije preseka, što čini osnovu daljeg izlaganja, i pruža mogućnost jedinstvenog prikaza teorije tankozidnih nosača otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka:

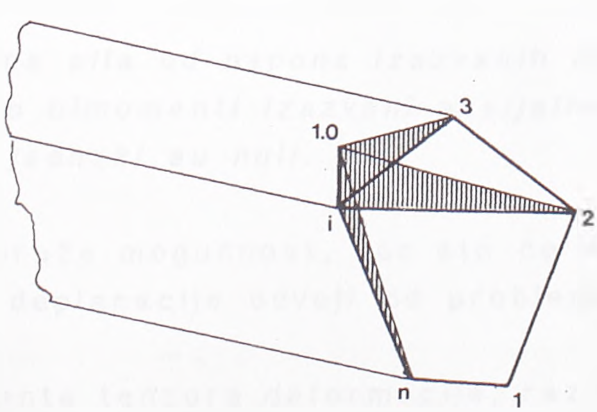
$$w_d = w_d^s + w_d^e \tag{1.4}$$

gde je:

$$w_d^s = \sum_i \Omega^i(x,y)\, w_i(z) \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{1.5}$$

deplanacija duž srednje linije preseka. Za nepoznate parametre pomeranja w_i možemo birati pomeranja proizvoljnih tačaka na srednjoj liniji preseka. Najčešće su to čvorne tačke, pa je ukupan broj osnovnih nepoznatih w_i jednak broju čvorova poligona n.

Funkcija Ω^i zavisna je od načina promene pomeranja izmedju čvorova poligonalnog preseka. U radu je pretpostavljena linearna promena, što je saglasno klasičnoj teoriji tankozidnih nosača, pa funkcija Ω^i dobija jednostavno geometrijsko značenje, (sl.2).



sl.2

Funkcija Ω^i različita je od nule samo na delovima konture koji se sustiču u čvoru i, linearno se menjajući od vrednosti jedan u čvoru i , do vrednosti nula u susednim čvorovima.

Za 'poprečnu' deplanaciju, tj za relativna pomeranja u odnosu na srednju liniju preseka, usvojena je funkcija:

$$w_d^e = -\omega(x,y)\,f(z) \tag{1.6}$$

Intenzitet deplanacije odredjen je novim parametrom f, a za funkciju ω usvaja se funkcija Saint-Venantove slobodne torzije:

$$\omega = h_n e \tag{1.7}$$

Odstojanje h_n je pozitivno, (sl.1), ako za ravan sa pozitivnom z osom kao normalom, jedinični vektor $\vec{n}$ ima smer obrtanja oko težišne tačke suprotan obrtanju kazaljke na satu.

Kada se uzmu u obzir izrazi (1.2), (1.5) i (1.6), za ukupno aksijalno pomeranje w_*, dobija se:

$$w_* = w_o + y\psi_x - x\psi_y + \sum_i \Omega^i w_i - \omega f \tag{1.8}$$

Treba uočiti da od $n+1$ parametar pomeranja w_o, w_1, w_2, ..., w_n samo n parametra je medjusobno nezavisno. U daljem izvodjenju, za opisivanje stanja pomeranja i deformacija, koristiće se svih $n+1$ parametar, uz dopunski uslov:

normalna sila od napona izazvanih deplanacijom, odnosno bimomenti izazvani aksijalnom deformacijom, jednaki su nuli. (1.9)

Ovaj uslov pruža mogućnost, kao što će se kasnije videti, da se problem deplanacije odvoji od problema aksijalnog naprezanja.

Komponente tenzora deformacije, različite od nule, odredjene su izrazima:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_z &= \frac{\partial w_*}{\partial z} = w_o' + y\psi_x' - x\psi_y' + \sum_i \Omega^i w_i' - \omega f' \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial u_*}{\partial z} + \frac{\partial w_*}{\partial x} = u' - y\vartheta' - \psi_y + \sum_i \Omega^i_{,x} w_i - \omega_{,x} f \qquad (1.10) \\
\gamma_{zy} &= \frac{\partial v_*}{\partial z} + \frac{\partial w_*}{\partial y} = v' + x\vartheta' + \psi_x + \sum_i \Omega^i_{,y} w_i - \omega_{,y} f
\end{aligned}
$$

1.3 NAPONI I PRESEČNE SILE

Pretpostavljajući homogen, izotropan i elastičan materijal veze izmedju komponentalnih napona i komponentalnih deformacija date su Hookeovim zakonom:

$$
\begin{aligned}
\sigma_z &= E\varepsilon_z \\
\tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \qquad (1.11) \\
\tau_{zy} &= G\gamma_{zy}
\end{aligned}
$$

gde su, s obzirom na usvojene pretpostavke o deformacijama i naponima:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{E'}{1-\nu^2} \\
G &= \frac{E'}{2(1+\nu)} \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

Kada se izrazi za komponentalne deformacije (1.10) uvrste u (1.11) dobija se veza izmedju komponentalnih napona i parametara pomeranja:

$$
\begin{aligned}
\sigma_z &= E(w_o' + y\psi_x' - x\psi_y' + \sum_i \Omega^i w_i' - \omega f') \\
\tau_{zx} &= G(u' - y\vartheta' - \psi_y + \sum_i \Omega^i_{,x} w_i - \omega_{,x} f) \qquad (1.13) \\
\tau_{zy} &= G(v' + x\vartheta' + \psi_x + \sum_i \Omega^i_{,y} w_i - \omega_{,y} f)
\end{aligned}
$$

Presečne sile mogu se izraziti preko napona, na uobičajeni način, redukcijom elementarnih sila na težišnu tačku preseka:

$$
\begin{aligned}
N &= \iint \sigma_z dF \\
Q_x &= \iint \tau_{zx} dF \\
Q_y &= \iint \tau_{zy} dF \\
M_x &= \iint y \sigma_z dF \\
M_y &= -\iint x \sigma_z dF \\
M_z &= \iint (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dF \\
B_i &= \iint \Omega^i \sigma_z dF \qquad i = 1,2,\ldots,n \\
B_\omega &= -\iint \omega \sigma_z dF
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Poslednja dva izraza odredjuju bimomente, analogno njihovoj definiciji koja se koristi u Vlasovljevoj teoriji tankozidnih nosača. Za svaki parametar pomeranja w_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ i f, koji opisuju deplanaciju poprečnog preseka, može se formulisati odgovarajući bimomenat, pa je ukupan broj bimomenata $n+1$.

Kada se u gornjim izrazima umesto napona unesu njihove vrednosti date jednačinama (1.13), uz vodjenje računa o uslovu (1.9), dobija se veza izmedju presečnih sila i parametara pomeranja:

$$
\begin{aligned}
N &= EFw_o' \\
Q_x &= G(Fu' - F\psi_y + \sum_i S_{\Omega^i,x} w_i - S_{\omega,x} f) \\
Q_y &= G(Fv' + F\psi_x + \sum_i S_{\Omega^i,y} w_i - S_{\omega,y} f) \\
M_x &= E(I_{yy}\psi_x' + \sum_i I_{y\Omega^i} w_i' - I_{y\omega} f') \\
M_y &= E(I_{xx}\psi_y' - \sum_i I_{x\Omega^i} w_i' + I_{x\omega} f') \\
M_z &= G[(I_{xx} + I_{yy})\vartheta' - \sum_i I_{\Omega^i} w_i + I_\omega f] \\
B_i &= E(I_{y\Omega^i}\psi_x' - I_{x\Omega^i}\psi_y' + \sum_j I_{\Omega^i\Omega^j} w_j') \qquad i = 1,2,\ldots,n \\
B_\omega &= E(I_{x\omega}\psi_y' - I_{y\omega}\psi_x' + I_{\omega\omega} f')
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

gde su uvedene sledeće oznake:

$$
\begin{aligned}
S_{\Omega^i_{,x}} &= \iint \Omega^i_{,x}\, dF \\
S_{\Omega^i_{,y}} &= \iint \Omega^i_{,y}\, dF \\
S_{\omega_{,x}} &= \iint \omega_{,x}\, dF \\
S_{\omega_{,y}} &= \iint \omega_{,y}\, dF \\
I_{xx} &= \iint x^2\, dF \\
I_{yy} &= \iint y^2\, dF \\
I_{x\Omega^i} &= \iint x\Omega^i\, dF \\
I_{y\Omega^i} &= \iint y\Omega^i\, dF \\
I_{x\omega} &= \iint x\omega\, dF \\
I_{y\omega} &= \iint y\omega\, dF \\
I_{\Omega^i\Omega^j} &= \iint \Omega^i\Omega^j\, dF \\
I_{\omega\omega} &= \iint \omega^2\, dF \\
I_{\Omega^i} &= \iint (y\Omega^i_{,x} - x\Omega^i_{,y})\, dF \\
I_{\omega} &= \iint (y\omega_{,x} - x\omega_{,y})\, dF
\end{aligned}
\qquad (1.16)
$$

1.4 USLOVI RAVNOTEŽE

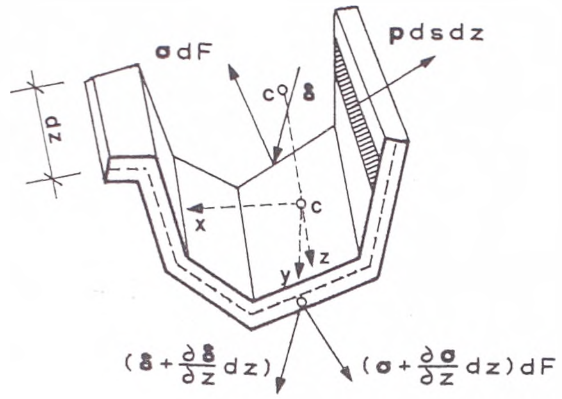
Posmatra se elemenat štapa ograničen presecima $z_1 = z$ i $z_2 = z + dz$. U proizvoljnoj tački preseka z_1 deluje vektor napona $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau_{zx}\mathbf{i}_x + \tau_{zy}\mathbf{i}_y + \sigma_z\mathbf{i}_z \qquad (1.17)$$

a u odgovarajućoj tački preseka z_2, na diferencijalno malom rastojanju dz od preseka z_1, vektor napona $\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z}dz$, (sl.3).

Za spoljno opterećenje $\mathbf{p}$ sa komponentama p_x, p_y i p_z pretpostavlja se da deluje u tačkama srednje površine štapa.

Uslovi ravnoteže izvešće se principom virtualnih pomeranja.



sl.3

Vektor virtualnih pomeranja $\bar{\boldsymbol{\delta}}$, za koji se zahteva da je neprekidna funkcija koordinata i da zadovoljava uvedene pretpostavke o deformaciji štapa, može se usvojiti u istom obliku kao i vektor stvarnih pomeranja:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\delta}} &= \bar{u}_* \boldsymbol{i}_x + \bar{v}_* \boldsymbol{i}_y + \bar{w}_* \boldsymbol{i}_z = \\ &= (\bar{u} - y\bar{\vartheta})\boldsymbol{i}_x + (\bar{v} + x\bar{\vartheta})\boldsymbol{i}_y + (\bar{w}_o + y\bar{\psi}_x - x\bar{\psi}_y + \sum_i \Omega^i \bar{w}_i - \omega\bar{f})\boldsymbol{i}_z \end{aligned} \tag{1.18}$$

Virtualni parametri pomeranja, koji su za razliku od stvarnih pomeraja označeni crtom iznad osnovne oznake, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{w}_o$, $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2, \ldots,$ $\bar{w}_n$ i $\bar{f}$, su proizvoljne funkcije koordinata i ne zavise od stvarnog opterećenja štapa.

Princip virtualnih pomeranja glasi:

$$\bar{W} + \bar{U} = 0 \tag{1.19}$$

Sa $\bar{W}$ je označen rad spoljašnjih sila pri virtualnim pomeranjima $\bar{\boldsymbol{\delta}}$, a sa $\bar{U}$ odgovarajući rad unutrašnjih sila.

Rad spoljašnjih sila, redukovan na jedinicu dužine ose štapa, jednak je:

$$\bar{W} = \iint (\boldsymbol{\sigma}_{,z}\bar{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{\sigma}\bar{\boldsymbol{\delta}}_{,z})dF + \int \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{\delta}}ds \tag{1.20}$$

odnosno, imajući u vidu izraze za vektor napona (1.17) i vektor virtualnih pomeranja (1.18), i nakon što se izvrši njihovo diferenciranje po koordinati z, za rad spoljašnjih sila $\bar{W}$

dobija se:

$$
\begin{aligned}
\overline{W} = \iint [& \tau'_{zx}(\overline{u} - y\overline{\vartheta}) + \\
& \tau'_{zy}(\overline{v} + x\overline{\vartheta}) + \\
& \sigma'_z(\overline{w}_o + y\overline{\Phi}_x - x\overline{\Phi}_y + \sum_i \Omega^i \overline{w}_i - \omega\overline{f}) + \\
& \tau_{zx}(\overline{u}' - y\overline{\vartheta}') + \\
& \tau_{zy}(\overline{v}' + x\overline{\vartheta}') + \\
& \sigma_z(\overline{w}'_o + y\overline{\Phi}'_x - x\overline{\Phi}'_y + \sum_i \Omega^i \overline{w}'_i - \omega\overline{f}')]dF + \\
\int [& p_x(\overline{u} - y\overline{\vartheta}) + \\
& p_y(\overline{v} + x\overline{\vartheta}) + \\
& p_z(\overline{w}_o + y\overline{\Phi}_x - x\overline{\Phi}_y + \sum_i \Omega^i \overline{w}_i - \omega\overline{f})]ds
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Prvi integral odnosi se na površinu, a drugi na srednju liniju poprečnog preseka.

Rad unutrašnjih sila jednak je negativnom radu komponentalnih napona pri zadatim virtualnim deformacijama. Redukovan na jedinicu dužine štapa, iznosi:

$$
\overline{U} = -\iint(\tau_{zx}\overline{\gamma}_{zx} + \tau_{zy}\overline{\gamma}_{zy} + \sigma_z\overline{\varepsilon}_z)dF \tag{1.22}
$$

Kada se za virtualne deformacije unesu izrazi (1.13), gde se umesto stvarnih pomeranja podrazumevaju virtualna, izraz za rad unutrašnjih sila postaje:

$$
\begin{aligned}
\overline{U} = -\iint [& \tau_{zx}(\overline{u}' - y\overline{\vartheta}' - \overline{\Phi}_y + \sum_i \Omega^i_{,x}\overline{w}_i - \omega_{,x}\overline{f}) + \\
& \tau_{zy}(\overline{v}' + x\overline{\vartheta}' + \overline{\Phi}_x + \sum_i \Omega^i_{,y}\overline{w}_i - \omega_{,y}\overline{f}) + \\
& \sigma_z(\overline{w}'_o + y\overline{\Phi}'_x - x\overline{\Phi}'_y + \sum_i \Omega^i \overline{w}'_i - \omega\overline{f}')]dF
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Ako jednačine rada spoljašnjih i unutrašnjih sila, (1.21) i (1.23), sredjene po parametrima virtualnih pomeranja, koji se mogu izvući ispred znaka integrala, uvrstimo u izraz (1.19) dobija se:

$$
\begin{aligned}
&\bar{w}_o\{\iint \sigma_z' dF + \int p_z ds\} + \\
&\bar{u}\ \{\iint \tau_{zx}' dF + \int p_x ds\} + \\
&\bar{v}\ \{\iint \tau_{zy}' dF + \int p_y ds\} + \\
&\bar{\Phi}_x\{\iint (y\sigma_z' - \tau_{zy}) dF + \int y p_z ds\} + \\
&\bar{\Phi}_y\{\iint (\tau_{zx} - x\sigma_z') dF - \int x p_z ds\} + \\
&\bar{\vartheta}\ \{\iint (x\tau_{zy}' - y\tau_{zx}') dF + \int (x p_y - y p_x) ds\} + \\
&\sum_i \bar{w}_i\ \{\iint (\Omega^i \sigma_z' - \Omega^i_{,x}\tau_{zx} - \Omega^i_{,y}\tau_{zy}) dF + \int \Omega^i p_z ds\} + \\
&\bar{f}\ \{\iint (-\omega\sigma_z' + \omega_{,x}\tau_{zx} + \omega_{,y}\tau_{zy}) dF\} = 0
\end{aligned}
\qquad (1.24)
$$

Pošto parametri virtualnih pomeranja $\bar{w}_o$, $\bar{u}$, $\bar{v}$,... mogu imati proizvoljne vrednosti, jednačina (1.24) biće zadovoljena samo ako su izrazi u velikim zagradama jednaki nuli. Koristeći pri tome izraze za presečne sile (1.14) i vodeći računa o uslovu (1.9):

$$
\iint (\Omega^1 w_1 + \Omega^2 w_2 + \ldots) dF = \iint (\Omega^1 \bar{w}_1 + \Omega^2 \bar{w}_2 + \ldots) dF = 0 \qquad (1.25)
$$

dobija se sistem jednačina koji pretstavlja tražene uslove ravnoteže tankozidnog štapa:

$$
\begin{aligned}
&N' + p_z^* = 0 \\
&Q_x' + p_x^* = 0 \\
&Q_y' + p_y^* = 0 \\
&M_x' - Q_y + m_x^* = 0 \\
&M_y' + Q_x + m_y^* = 0 \\
&M_z' + m_z^* = 0 \\
&\iint (B_i' - \Omega^i_{,x}\tau_{zx} - \Omega^i_{,y}\tau_{zy}) dF + m^*_{\Omega^i} = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n \\
&\iint (B_\omega' + \omega_{,x}\tau_{zx} + \omega_{,y}\tau_{zy}) dF = 0
\end{aligned}
\qquad (1.26)
$$

gde:

$$p_x^* = \int p_x ds \qquad p_y^* = \int p_y ds \qquad p_z^* = \int p_z ds$$

$$m_x^* = \int y p_z ds \quad m_y^* = -\int x p_z ds \quad m_z^* = \int (x p_y - y p_x) ds \quad (1.27)$$

$$m_{\Omega^i}^* = \int \Omega^i p_z ds \qquad i = 1,2 \ldots, n$$

pretstvljaju redom komponente spoljnjeg opterećenja u pravcima koordinatnih osa x, y, i z, momente savijanja oko x i y ose, momenat torzije i odgovarajuće bimomente.

Poslednjih $n+1$ jednačina pretstavljaju uslove ravnoteže štapa pri deplanaciji. Neki članovi u njima dati su preko napona u integralnom obliku, da bi se izbeglo uvodjenje novih generalisanih sila potrebnih za njihovo prikazivanje.

1.5 DIFERENCIJALNE JEDNAČINE I KONTURNI USLOVI

Kada se izrazi za presečne sile (1.15) i napone (1.13) uvrste u uslove ravnoteže (1.26) dobija se sistem simultanih diferencijalnih jednačina drugog reda po nepoznatim parametrima pomeranja w_o, u, v,... :

$$EFw_o'' = -p_z^*$$

$$GFu'' - GF\psi_y' + G\sum_i S_{\Omega^i_{,x}} w_i' - GS_{\omega_{,x}} f' = -p_x^*$$

$$GFv'' + GF\psi_x' + G\sum_i S_{\Omega^i_{,y}} w_i' - GS_{\omega_{,y}} f' = -p_y^*$$

$$EI_{yy}\psi_x'' + E\sum_i I_{y\Omega^i} w_i'' - EI_{y\omega} f'' - GFv' - GF\psi_x - G\sum_i S_{\Omega^i_{,y}} w_i + GS_{\omega_{,y}} f = -m_x^*$$

$$EI_{xx}\psi_y'' - E\sum_i I_{x\Omega^i} w_i'' + EI_{x\omega} f'' + GFu' - GF\psi_y + G\sum_i S_{\Omega^i_{,x}} w_i - GS_{\omega_{,x}} f = -m_y^* \qquad (1.28)$$

$$G(I_{xx} + I_{yy})\vartheta'' - G\sum_i I_{\Omega^i} w_i' + GI_\omega f' = -m_z^*$$

$$EI_{y\Omega^i}\psi_x'' - EI_{x\Omega^i}\psi_y'' + E\sum_j I_{\Omega^i\Omega^j} w_j'' - GS_{\Omega^i_{,x}} u' - GS_{\Omega^i_{,y}} v' + GI_{\Omega^i}\vartheta' - GS_{\Omega^i_{,y}}\psi_x + GS_{\Omega^i_{,x}}\psi_y - G\sum_j (I_{\Omega^i_{,x}\Omega^j_{,x}} + I_{\Omega^i_{,y}\Omega^j_{,y}}) w_j = -m_{\Omega^i}^*$$

$$-EI_{y\omega}\psi_x'' + EI_{x\omega}\psi_y'' + EI_{\omega\omega} f'' + GS_{\omega_{,x}} u' + GS_{\omega_{,y}} v' - GI_\omega \vartheta' + GS_{\omega_{,y}}\psi_x - GS_{\omega_{,x}}\psi_y - G(I_{\omega_{,x}\omega_{,x}} + I_{\omega_{,y}\omega_{,y}}) f = 0$$

U kupan broj diferencijalnih jednačina je $N=6+n+1$. Kao što je ranije rečeno $n+1$ pretstavlja broj parametara koji opisuju deplanaciju preseka. Da bi ovaj sistem diferencijalnih jednačina drugog reda imao jednoznačno rešenje potrebno je poznavati $2N$ konturnih uslova, koji mogu biti zadati po pomeranjima:

$$
\begin{aligned}
w_o &= w_o^* \\
u &= u^* \\
v &= v^* \\
\psi_x &= \psi_x^* \\
\psi_y &= \psi_y^* \\
\vartheta &= \vartheta^* \\
w_i &= w_i^* \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,n \\
f &= f^*
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

ili po silama:

$$
\begin{aligned}
N &= N^* \\
Q_x &= Q_x^* \\
Q_y &= Q_y^* \\
M_x &= M_x^* \\
M_y &= M_y^* \\
M_z &= M_z^* \\
B_i &= B_i^* \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,n \\
B_\omega &= B_\omega^*
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

ili mešovito, po pomeranjima i po silama. Zvezdica iznad osnovne oznake označava da se radi o zadatoj veličini.

1.6 UPROŠĆENJE $f = \vartheta'$

U daljem izlaganju uvedeno je jedno uprošćenje kojim se broj nepoznatih parametara pomeranja smanjuje za jedan. Odnosno, za funkciju f, koja odredjuje intenzitet 'poprečne' deplanacije, pretpostavljeno je da se može prikazati preko parametra pomeranja koji se koristi pri opisivanju torzije poprečnog preseka, i kao takva ne pretstavlja više nepoznatu veličinu:

$$f(z) = \vartheta'(z) \tag{2.31}$$

Relativna deplanacija u odnosu na srednju liniju preseka sada je prikazana u istom obliku kao i u klasičnoj teoriji tankozidnih nosača.

Izrazi koji su izvedeni u predhodnim poglavljima postaju:

Pomeranja

$$\begin{aligned} u_* &= u - y\vartheta \\ v_* &= v + x\vartheta \\ w_* &= w_o + y\psi_x - x\psi_y + \sum_i \Omega^i w_i - \omega\vartheta' \end{aligned} \tag{1.32}$$

Deformacije

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= w_o' + y\psi_x' - x\psi_y' + \sum_i \Omega^i w_i' - \omega\vartheta'' \\ \gamma_{zx} &= u' - (y + \omega_{,x})\vartheta' - \psi_y + \sum_i \Omega^i_{,x} w_i \\ \gamma_{zy} &= v' + (x - \omega_{,y})\vartheta' + \psi_x + \sum_i \Omega^i_{,y} w_i \end{aligned} \tag{1.33}$$

Naponi

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E(w_o' + y\psi_x' - x\psi_y' + \sum_i \Omega^i w_i' - \omega\vartheta'') \\ \tau_{zx} &= G[u' - (y + \omega_{,x})\vartheta' - \psi_y + \sum_i \Omega^i_{,x} w_i] \\ \tau_{zy} &= G[v' + (x - \omega_{,y})\vartheta' + \psi_x + \sum_i \Omega^i_{,y} w_i] \end{aligned} \tag{1.34}$$

Presečne sile

$$
\begin{aligned}
N &= EFw_o' \\
Q_x &= G(Fu' - F\psi_y - S_{\omega,x}\vartheta' + \sum_i S_{\Omega'_i,x} w_i) \\
Q_y &= G(Fv' + F\psi_x - S_{\omega,y}\vartheta' + \sum_i S_{\Omega'_i,y} w_i) \\
M_x &= E(I_{yy}\psi_x' - I_{y\omega}\vartheta'' + \sum_i I_{y\Omega'_i} w_i') \\
M_y &= E(I_{xx}\psi_y' + I_{x\omega}\vartheta'' - \sum_i I_{x\Omega'_i} w_i') \\
M_z &= G[(I_{xx} + I_{yy} + I_\omega)\vartheta' - \sum_i I_{\Omega'_i} w_i] \\
B_i &= E(I_{y\Omega'_i}\psi_x' - I_{x\Omega'_i}\psi_y' + \sum_j I_{\Omega'_i\Omega'_j} w_j') \qquad i = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

Diferencijalne jednačine

$$
\begin{aligned}
& EFw_o'' = -p_z^* \\
& GFu'' - GS_{\omega,x}\vartheta'' - GF\psi_y' + G\sum_i S_{\Omega'_i,x} w_i' = -p_x^* \\
& GFv'' - GS_{\omega,y}\vartheta'' + GF\psi_x' + G\sum_i S_{\Omega'_i,y} w_i' = -p_y^* \\
& -EI_{y\omega}\vartheta''' + EI_{yy}\psi_x'' + E\sum_i I_{y\Omega'_i} w_i'' - GFv' + GS_{\omega,y}\vartheta' - \\
& \qquad GF\psi_x - G\sum_i S_{\Omega'_i,y} w_i = -m_x^* \\
& EI_{x\omega}\vartheta''' + EI_{xx}\psi_y'' - E\sum_i I_{x\Omega'_i} w_i'' + GFu' - GS_{\omega,x}\vartheta' - \\
& \qquad GF\psi_y + G\sum_i S_{\Omega'_i,x} w_i = -m_y^* \\
& G(I_{xx} + I_{yy} + I_\omega)\vartheta'' - G\sum_i I_{\Omega'_i} w_i' = -m_z^* \\
& EI_{y\Omega'_i}\psi_x'' - EI_{x\Omega'_i}\psi_y'' + E\sum_j I_{\Omega'_i\Omega'_j} w_j'' - GS_{\Omega'_i,x}u' - GS_{\Omega'_i,y}v' + GI_{\Omega'_i}\vartheta' \\
& \qquad - GS_{\Omega'_i,y}\psi_x + GS_{\Omega'_i,x}\psi_y - G\sum_j (I_{\Omega'_i,x\Omega'_j,x} + I_{\Omega'_i,y\Omega'_j,y}) w_j = -m_{\Omega'_i}^* \\
& -EI_{\omega\omega}\vartheta''' + EI_{y\omega}\psi_x'' - EI_{x\omega}\psi_y'' - GS_{\omega,x}u' - GS_{\omega,y}v' + \\
& \qquad G(I_{\omega,x\omega,x} + I_{\omega,y\omega,y} + I_\omega)\vartheta' - GS_{\omega,y}\psi_x + GS_{\omega,x}\psi_y = 0
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

Poslednja jednačina (1.36,8) nije nezavisna. Kada je, uz predhodno diferenciranje po koordinati z, pridružimo jednačini (1.36,6), i kada zanemarimo članove trećeg i četvrtog reda kao male u odnosu na ostale članove u izrazu, o čemu će biti više reči u sledećem poglavlju, konačno dobijamo:

$$
\begin{aligned}
&EFw_o'' = -p_z^* \\
&GFu'' - GS_{\omega,_x}\vartheta'' - GF\psi_y' + G\sum_i S_{\Omega'_{,x}} w_i' = -p_x^* \\
&GFv'' - GS_{\omega,_y}\vartheta'' + GF\psi_x' + G\sum_i S_{\Omega'_{,y}} w_i' = -p_y^* \\
&EI_{yy}\psi_x'' + E\sum_i I_{y\Omega^i} w_i'' - GFv' + GS_{\omega,_y}\vartheta' - GF\psi_x - G\sum_i S_{\Omega'_{,y}} w_i = -m_x^* \\
&EI_{xx}\psi_y'' - E\sum_i I_{x\Omega^i} w_i'' + GFu' - GS_{\omega,_x}\vartheta' - GF\psi_y + G\sum_i S_{\Omega'_{,x}} w_i = -m_y^* \\
&-GS_{\omega,_x}u'' - GS_{\omega,_y}v'' + GI_h\vartheta'' - GS_{\omega,_y}\psi_x' + GS_{\omega,_x}\psi_y' - G\sum_i I_{\Omega^i} w_i' = -m_z^* \\
&EI_{y\Omega^i}\psi_x'' - EI_{x\Omega^i}\psi_y'' + E\sum_j I_{\Omega^i\Omega^j} w_j'' - GS_{\Omega^i_{,x}}u' - GS_{\Omega^i_{,y}}v' + GI_{\Omega^i}\vartheta' \\
&\qquad - GS_{\Omega^i_{,y}}\psi_x + GS_{\Omega^i_{,x}}\psi_y - G\sum_j (I_{\Omega^i_{,x}\Omega^j_{,x}} + I_{\Omega^i_{,y}\Omega^j_{,y}}) w_j = -m_{\Omega^i}^*
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

gde je sa I_h označen momenat inercije preseka pri torziji:

$$
I_h = I_{xx} + I_{yy} + I_{\omega,_x\omega,_x} + I_{\omega,_y\omega,_y} + 2I_\omega \tag{1.38}
$$

Sistem od $N=6+n$ linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda (1.37) i odgovarajućih $2N$ konturnih uslova (1.29,1-7) ili (1.30,1-7) jednoznačno odredjuju N nepoznatih parametara pomeranja w_o, u, v, ψ_x, ψ_y, ϑ, w_1, $w_2,\dots,w_n$. Kada se odrede parametri pomeranja onda iz jednačina (1.32), (1.33), (1.34) i (1.35) odredjujemo pomeranja, deformacije, napone i presečne sile čime je problem naponsko-deformacijskog stanja štapa rešen.

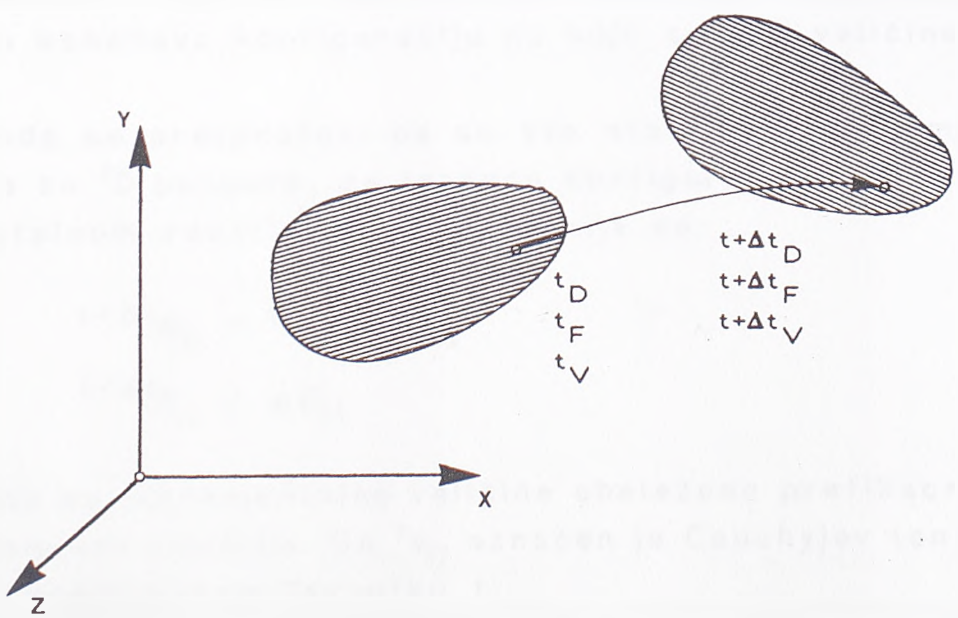
Prva diferencijalna jednačina je separatna, što je direktna posledica stava (1.9), dok ostale jednačine pretstavljaju simultani sistem diferencijalnih jednačina, koje se, u opštem slučaju, ne mogu rešiti u zatvorenom obliku. Rešenje se dobija numeričkim putem, što će se razmatrati u sledećim poglavljima.

2. PRIMENA METODE KONAČNIH ELEMENATA

2.1 UPDATED LAGRANGEOVE INKREMENTALNE JEDNAČINE RAVNOTEŽE

U prošlom poglavlju izvedene su diferencijalne jednačine tankozidnog štapa proizvoljnog preseka u okviru linearne teorije. Primenom metode konačnih elemenata razmatranja će se proširiti i na geometrijski nelinearne probleme.

Osnovne inkrementalne jednačine ravnoteže konačnog elementa mogu se izvesti polazeći od principa virtualnih pomeranja i opštih nelinearnih jednačina mehanike kontinuma. Pri tome će se koristiti updated Lagrangeova metoda u kojoj se za referentnu konfiguraciju usvaja tekuća, deformisana konfiguracija, ili tačnije, konfiguracija na početku svakog sledećeg koraka proračuna.



sl.4

U globalnom Descartesovom koordinatnom sistemu XYZ posmatra se proizvoljno telo u toku deformacije. Sa ${}^{t}D$ obeležena je tekuća konfiguracija tela u vremenskom trenutku t, a sa ${}^{t+\Delta t}D$ konfiguracija u trenutku vremena $t+\Delta t$, na konačnom rastojanju od ${}^{t}D$, (sl.4). Odgovarajuće zapremine i površine spoljašnje konture tela označene su sa ${}^{\tau}V$, odnosno ${}^{\tau}F$ ($\tau=t, t+\Delta t$). Uslove ravnoteže tela u konfiguraciji ${}^{t+\Delta t}D$ dobićemo polazeći od principa virtualnih pomeranja izraženog u odnosu na referentnu konfiguraciju u vremenskom trenutku t:

$$\iiint {}^{t+\Delta t}S_{IJ}\,\delta\,{}^{t+\Delta t}E_{IJ}\,d\,{}^{t}V = \delta\,{}^{t+\Delta t}R \qquad (2.1)$$

Sa ${}^{t+\Delta t}S_{IJ}$ obeležen Piola-Kirchhoffov tenzor napona druge vrste, a sa ${}^{t+\Delta t}E_{IJ}$ Green-Lagrangeov tenzor deformacije. Desna strana jednačine pretstavlja rad spoljašnjih sila pri datim virtualnim pomeranjima:

$$\delta\,{}^{t+\Delta t}R = \iint {}^{t+\Delta t}p_k\,\delta u_k\,d\,{}^{t}F + \iiint {}^{t+\Delta t}\rho_k\,\delta u_k\,d\,{}^{t}V \qquad (2.2)$$

gde su sa ${}^{t+\Delta t}p_k$ i ${}^{t+\Delta t}\rho_k$ obeležene komponente površinskih i zapreminskih sila izraženih po jedinici površine, odnosno zapremine tela u konfiguraciji ${}^{t}D$.

Indeks sa gornje leve strane statičkih i deformacijskih veličina označava konfiguraciju na koju se ove veličine odnose.

Kada se pretpostavi da su sve statičke i deformacijske veličine za ${}^{t}D$ poznate, za traženu konfiguraciju ${}^{t+\Delta t}D$, na inkrementalnom rastojanju od ${}^{t}D$, dobija se:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}S_{IJ} &= {}^{t}\sigma_{IJ} + \Delta S_{IJ} \\ {}^{t+\Delta t}E_{IJ} &= \Delta E_{IJ} \end{aligned} \qquad (2.3)$$

pri čemu su inkrementalne veličine obeležene prefiksom Δ ispred osnovne veličine. Sa ${}^{t}\sigma_{IJ}$ označen je Cauchyjev tenzor napona u vremenskom trenutku t.

Green-Lagrangeov inkrementalni tenzor deformacije može se pretstaviti u obliku:

$$\Delta E_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij} + \Delta \eta_{ij} \tag{2.4}$$

gde su:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij} &= \tfrac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \\ \Delta \eta_{ij} &= \tfrac{1}{2}\Delta u_{k,i}\Delta u_{k,j} \end{aligned} \tag{2.5}$$

linearni i nelinearni deo inkrementalnog tenzora deformacije.

Jednačina ravnoteže (2.1), vodeći računa o konstitutivnim vezama izmedju tenzora inkrementalnih napona i deformacija:

$$\Delta S_{ij} = D_{ijkl}\Delta E_{kl} \tag{2.6}$$

postaje:

$$\iiint D_{ijkl}\Delta E_{kl}\delta\Delta E_{ij}d\,^tV + \iiint {}^t\sigma_{ij}\delta\Delta\eta_{ij}d\,^tV = \delta\,^{t+\Delta t}R - \iiint {}^t\sigma_{ij}\delta\Delta\varepsilon_{ij}d\,^tV \tag{2.7}$$

Jednačina je nelinearna po inkrementima pomeranja, pa se ne može direktno rešiti. Da bi je doveli na oblik pogodan za dalju primenu izvršićemo linearizaciju, uvodeći sledeće aproksimacije:

$$\begin{aligned} \Delta S_{ij} &= D_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} \\ \delta\Delta E_{ij} &= \delta\Delta\varepsilon_{ij} \end{aligned} \tag{2.8}$$

pa dalje sledi:

$$\iiint D_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}\delta\Delta\varepsilon_{ij}d\,^tV + \iiint {}^t\sigma_{ij}\delta\Delta\eta_{ij}d\,^tV = \delta\,^{t+\Delta t}R - \iiint {}^t\sigma_{ij}\delta\Delta\varepsilon_{ij}d\,^tV \tag{2.9}$$

Dobijena je linearna jednačina updated Lagrangeove metode, po nepoznatim parametrima pomeranja, od koje se polazi pri formulisanju problema po metodi konačnih elemenata.

2.2 FORMULACIJA PROBLEMA PO METODI KONAČNIH ELEMENATA

Pri daljoj analizi prostornih konačnih elemenata, tankozidnog poprečnog preseka, pogodnije je koristiti lokalne koordinatne ose *xyz*, vezane za elemenat. Matrice krutosti pojedinih elemenata dobiće se kada se sve statičke i kinematičke veličine korišćene u predhodnom poglavlju izraze u odnosu na lokalni koordinatni sistem.

Da bi se problem definisao po metodi konačnih elemenata ponašanje proizvoljnog elementa definisaće se preko vrednosti čvornih veličina unutar elementa:

$$\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{N} \Delta \boldsymbol{q} \tag{2.10}$$

gde je $\boldsymbol{N}$ matrica interpolacionih funkcija, a $\Delta \boldsymbol{q}$ vektor inkrementalnih čvornih pomeranja.

Polazeći od (2.9) i (2.10) dobijaju se osnovne inkrementalne jednačine ravnoteže napisane u matričnom obliku:

$$({}^{t}\boldsymbol{K}_{L} + {}^{t}\boldsymbol{K}_{NL}) \Delta \boldsymbol{q} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{R} - {}^{t}\boldsymbol{Q} \tag{2.11}$$

gde su:

$${}^{t}\boldsymbol{K}_{L} = \iiint {}^{t}\boldsymbol{B}_{L}^{T} \boldsymbol{D} \, {}^{t}\boldsymbol{B}_{L} \, d\, {}^{t}V$$ *linearna matrica krutosti*

$${}^{t}\boldsymbol{K}_{NL} = \iiint {}^{t}\boldsymbol{B}_{NL}^{T} \, {}^{t}\boldsymbol{\sigma} \, {}^{t}\boldsymbol{B}_{NL} \, d\, {}^{t}V$$ *geometrijska matrica krutosti*

$${}^{t}\boldsymbol{Q} = \iiint {}^{t}\boldsymbol{B}_{L}^{T} \, {}^{t}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \, d\, {}^{t}V$$ *vektor ravnotežnih čvornih sila*

${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{R}$ *vektor spoljašnjeg opterećenja*

${}^{t}\boldsymbol{B}_{L}$ *linearna matrica transformacije*

${}^{t}\boldsymbol{B}_{NL}$ *nelinearna matrica transformacije*

$\boldsymbol{D}$ *konstitutivna matrica*

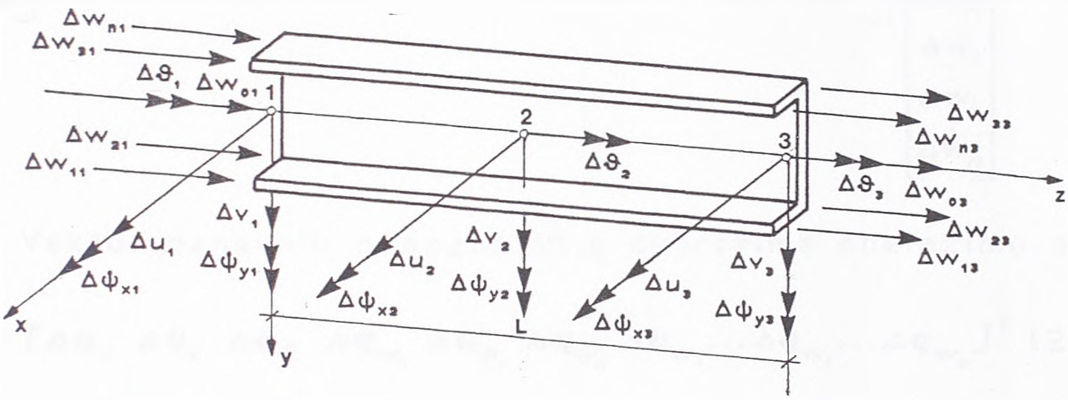
${}^{t}\boldsymbol{\sigma}$ *matrica Cauchyjevih napona*

${}^{t}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ *vektor Cauchyjevih napona*

2.3 KONAČAN ELEMENAT I

2.3.1 OSNOVNE KARAKTERISTIKE ELEMENTA

Na (sl.5) prikazan je pravolinijski, prostorni tankozidni elemenat, proizvoljnog, nedeformabilnog poprečnog preseka.



sl.5

Analiza konačnog elementa izvršiće se u lokalnom koordinatnom sistemu xyz, čija z osa prolazi kroz težišne tačke preseka, a ose x i y se poklapaju sa glavnim osama inercije preseka. Posmatra se konfiguracija elementa u proizvoljnom trenutku vremena t.

Svaki elemenat ima dva glavna čvora, u krajnjim presecima, sa po $6+n$ stepeni slobode pomeranja Δu_i, Δv_i, Δw_{oi}, $\Delta \psi_{xi}$, $\Delta \psi_{yi}$, $\Delta \vartheta_i$, Δw_{1i}, Δw_{2i}, ..., Δw_{ni} $(i=1,3)$, i srednji čvor, na sredini raspona elementa, sa pet stepeni slobode pomeranja Δu_2, Δv_2, $\Delta \psi_{x2}$, $\Delta \psi_{y2}$ i $\Delta \vartheta_2$.

Elemenat može imati velika pomeranja i rotacije, ali se pri tome pretpostavlja da deformacije ostaju male.

2.3.2 VEKTOR POMERANJA

Jednačine (1.1) i (1.8) mogu se prikazati i u matričnom obliku, pri čemu prefiks Δ označava da se radi o inkrementalnim veličinama:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_* \\ \Delta v_* \\ \Delta w_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \, .. \, 0 \, .. \, 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \, .. \, 0 \, .. \, 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 1 & -x & y & \Omega^1 \, .. \, \Omega^i \, .. \, \Omega^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta \vartheta \\ \Delta \vartheta' \\ \Delta w_o \\ \Delta \psi_y \\ \Delta \psi_x \\ \Delta w_1 \\ \vdots \\ \Delta w_i \\ \vdots \\ \Delta w_n \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

Vektor osnovnih nepoznatih u čvorovima obeležimo sa:

$$\Delta \boldsymbol{q} = [\Delta \boldsymbol{q}_u \;\; \Delta \boldsymbol{q}_v \;\; \Delta \boldsymbol{q}_\vartheta \;\; \Delta \boldsymbol{q}_{w_o} \;\; \Delta \boldsymbol{q}_{\psi_y} \;\; \Delta \boldsymbol{q}_{\psi_x} \;\; \Delta \boldsymbol{q}_{w_1} \ldots \Delta \boldsymbol{q}_{w_i} \ldots \Delta \boldsymbol{q}_{w_n}]^T \qquad (2.14)$$

gde su:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{q}_u &= [\Delta u_1 \;\; \Delta u_2 \;\; \Delta u_3]^T \\ \Delta \boldsymbol{q}_v &= [\Delta v_1 \;\; \Delta v_2 \;\; \Delta v_3]^T \\ \Delta \boldsymbol{q}_\vartheta &= [\Delta \vartheta_1 \;\; \Delta \vartheta_2 \;\; \Delta \vartheta_3]^T \\ \Delta \boldsymbol{q}_{w_o} &= [\Delta w_{01} \;\; \Delta w_{03}]^T \\ \Delta \boldsymbol{q}_{\psi_y} &= [\Delta \psi_{y1} \;\; \Delta \psi_{y2} \;\; \Delta \psi_{y3}]^T \\ \Delta \boldsymbol{q}_{\psi_x} &= [\Delta \psi_{x1} \;\; \Delta \psi_{x2} \;\; \Delta \psi_{x3}]^T \\ \Delta \boldsymbol{q}_{w_i} &= [\Delta w_{i1} \;\; \Delta w_{i3}]^T \qquad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Ovaj redosled komponenata vektora generalisanih čvornih pomeranja usvojen je zbog preglednijeg i sažetijeg daljeg izvodjenja, stim što će se u krajnjim izrazima izvršiti transformacija kako bi se dobio uobičajeni redosled pisanja osnovnih nepoznatih, pogodniji pri prelasku na globalni sistem.

Za interpolacione funkcije inkrementalnih pomeranja Δu, Δv, $\Delta \vartheta$, $\Delta \psi_y$ i $\Delta \psi_x$ usvojena je kvadratna funkcija, a za Δw_o i Δw_i ($i=1,2,\ldots,n$) linearna promena izmedju krajnjih čvorova:

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= \mathbf{N} \Delta \mathbf{q}_u \\
\Delta v &= \mathbf{N} \Delta \mathbf{q}_v \\
\Delta \vartheta &= \mathbf{N} \Delta \mathbf{q}_\vartheta \\
\Delta w_o &= \mathbf{N}_w \Delta \mathbf{q}_{w_o} \\
\Delta \psi_y &= \mathbf{N} \Delta \mathbf{q}_{\psi_y} \\
\Delta \psi_x &= \mathbf{N} \Delta \mathbf{q}_{\psi_x} \\
\Delta w_i &= \mathbf{N}_w \Delta \mathbf{q}_{w_i} \qquad i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

gde su:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N} &= [1-3\xi+2\xi^2 \quad 4\xi(1-\xi) \quad -\xi(1-2\xi)] \\
\mathbf{N}_w &= [1-\xi \quad \xi]
\end{aligned}
\qquad \xi = \frac{z}{L}
\tag{2.17}
$$

Smenom (2.16) u (2.13) uspostavlja se veza izmedju inkrementalnih pomeranja proizvoljnih tačaka poprečnog preseka i parametara pomeranja u čvorovima elementa kao osnovnih nepoznatih:

$$
\begin{bmatrix} \Delta u_* \\ \Delta v_* \\ \Delta w_* \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\mathbf{N} & 0 & -y\mathbf{N} & 0 & 0 & 0 & 0 \,..\, 0 \,..\, 0 \\
0 & \mathbf{N} & x\mathbf{N} & 0 & 0 & 0 & 0 \,..\, 0 \,..\, 0 \\
0 & 0 & -\omega\mathbf{N}' & \mathbf{N}_w & -x\mathbf{N} & y\mathbf{N} & \Omega^1\mathbf{N}_w \,..\, \Omega^i\mathbf{N}_w \,..\, \Omega^n\mathbf{N}_w
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_u \\ \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \mathbf{q}_\vartheta \\ \Delta \mathbf{q}_{w_o} \\ \Delta \mathbf{q}_{\psi_y} \\ \Delta \mathbf{q}_{\psi_x} \\ \Delta \mathbf{q}_{w_1} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{q}_{w_i} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{q}_{w_n} \end{bmatrix}
= \mathbf{A} \Delta \mathbf{q}
$$

2.3.3 LINEARNA MATRICA KRUTOSTI

Komponente linearnog dela inkrementalnog tenzora deformacije, različite od nule:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = [\Delta\varepsilon_{33} \quad 2\Delta\varepsilon_{13} \quad 2\Delta\varepsilon_{23}]^T \tag{2.19}$$

imajući u vidu jednačinu (2.5,1) glase:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{33} &= \Delta u_{3,3} = \frac{\partial \Delta w_*}{\partial z} \\ 2\Delta\varepsilon_{13} &= \Delta u_{1,3} + \Delta u_{3,1} = \frac{\partial \Delta u_*}{\partial z} + \frac{\partial \Delta w_*}{\partial x} \\ 2\Delta\varepsilon_{23} &= \Delta u_{2,3} + \Delta u_{3,2} = \frac{\partial \Delta v_*}{\partial z} + \frac{\partial \Delta w_*}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Posle unošenja (2.18) u (2.20) za inkrementalne deformacije dobija se:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}_L \Delta\boldsymbol{q} \tag{2.21}$$

gde je:

$$\boldsymbol{B}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \boldsymbol{A} \tag{2.22}$$

odnosno:

$$\boldsymbol{B}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega \boldsymbol{N}'' & \boldsymbol{N}_w' & -x\boldsymbol{N}' & y\boldsymbol{N}' & \Omega^1 \boldsymbol{N}_w' \ldots & \Omega^i \boldsymbol{N}_w' \ldots & \Omega^n \boldsymbol{N}_w' \\ \boldsymbol{N}' & 0 & -(y+\frac{\partial\omega}{\partial x})\boldsymbol{N}' & 0 & -\boldsymbol{N} & 0 & \frac{\partial\Omega^1}{\partial x}\boldsymbol{N}_w \ldots & \frac{\partial\Omega^i}{\partial x}\boldsymbol{N}_w \ldots & \frac{\partial\Omega^n}{\partial x}\boldsymbol{N}_w \\ 0 & \boldsymbol{N}' & (x-\frac{\partial\omega}{\partial y})\boldsymbol{N}' & 0 & 0 & \boldsymbol{N} & \frac{\partial\Omega^1}{\partial y}\boldsymbol{N}_w \ldots & \frac{\partial\Omega^i}{\partial y}\boldsymbol{N}_w \ldots & \frac{\partial\Omega^n}{\partial y}\boldsymbol{N}_w \end{bmatrix}$$

Ako se sa $\boldsymbol{D}$ označi matrica elastičnosti:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} E & & \\ & G & \\ & & G \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

gde E pretstavlja modul elastičnosti, a G modul klizanja, sledi da je:

$$
\mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L = \begin{bmatrix}
G\mathbf{N}_2 & 0 & -G(y+\frac{\partial\omega}{\partial x})\mathbf{N}_2 & 0 & -G\mathbf{N}_5 & 0 & \cdots & G\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}\mathbf{N}_7 & \cdots \\
 & G\mathbf{N}_2 & G(x-\frac{\partial\omega}{\partial y})\mathbf{N}_2 & 0 & 0 & G\mathbf{N}_5 & \cdots & G\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\mathbf{N}_7 & \cdots \\
 & & \begin{matrix} E\omega^2\mathbf{N}_{10} \\ + \\ G[(y+\frac{\partial\omega}{\partial x})^2+(x-\frac{\partial\omega}{\partial y})^2]\mathbf{N}_2 \end{matrix} & -E\omega\mathbf{N}_{11} & \begin{matrix} Ex\omega\mathbf{N}_9 \\ + \\ G(y+\frac{\partial\omega}{\partial x})\bar{\mathbf{N}}_5 \end{matrix} & \begin{matrix} -Ey\omega\mathbf{N}_9 \\ + \\ G(x-\frac{\partial\omega}{\partial y})\mathbf{N}_5 \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} -E\omega\Omega^j\mathbf{N}_{11} \\ + \\ G[(x-\frac{\partial\omega}{\partial y})\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}-(y+\frac{\partial\omega}{\partial x})\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}]\mathbf{N}_7 \end{matrix} & \cdots \\
 & & & E\mathbf{N}_4 & -Ex\mathbf{N}_8^T & Ey\mathbf{N}_8^T & \cdots & E\Omega^j\mathbf{N}_4 & \cdots \\
 & & & & Ex^2\mathbf{N}_2+G\mathbf{N}_1 & -Exy\mathbf{N}_2 & \cdots & -Ex\Omega^j\mathbf{N}_8-G\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}\mathbf{N}_6 & \cdots \\
 & & \text{s i m e t r i č n o} & & & Ey^2\mathbf{N}_2+G\mathbf{N}_1 & \cdots & Ey\Omega^j\mathbf{N}_8+G\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\mathbf{N}_6 & \cdots \\
 & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & \cdots & \begin{matrix} E\Omega^i\Omega^j\mathbf{N}_4 \\ + \\ G(\frac{\partial\Omega^i}{\partial x}\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}+\frac{\partial\Omega^i}{\partial y}\frac{\partial\Omega^j}{\partial y})\mathbf{N}_3 \end{matrix} & \cdots \\
 & & & & & & & \vdots &
\end{bmatrix}
$$

Zbog kraćeg pisanja uvedene su sledeće oznake:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_1 &= \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \\
\boldsymbol{N}_2 &= \boldsymbol{N}'^T \boldsymbol{N}' \\
\boldsymbol{N}_3 &= \boldsymbol{N}_w^T \boldsymbol{N}_w \\
\boldsymbol{N}_4 &= \boldsymbol{N}_w'^T \boldsymbol{N}_w' \\
\boldsymbol{N}_5 &= \boldsymbol{N}'^T \boldsymbol{N} \\
\boldsymbol{N}_6 &= \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N}_w \\
\boldsymbol{N}_7 &= \boldsymbol{N}'^T \boldsymbol{N}_w \\
\boldsymbol{N}_8 &= \boldsymbol{N}'^T \boldsymbol{N}_w' \\
\boldsymbol{N}_9 &= \boldsymbol{N}''^T \boldsymbol{N}' \\
\boldsymbol{N}_{10} &= \boldsymbol{N}''^T \boldsymbol{N}'' \\
\boldsymbol{N}_{11} &= \boldsymbol{N}''^T \boldsymbol{N}_w'
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

gde su:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}' &= \frac{1}{L}[-3+4\xi \quad 4-8\xi \quad -1+4\xi] \\
\boldsymbol{N}'' &= \frac{1}{L^2}[4 \quad -8 \quad 4] \\
\boldsymbol{N}_w' &= \frac{1}{L}[-1 \quad 1]
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Integracijom članova matrice (2.25), vodeći računa da je $\iint \omega dF = \iint \omega \Omega^j dF = \iint \omega \Omega^j_{,x} dF = \iint \omega \Omega^j_{,y} dF = \iint (\omega_{,x} \Omega^j_{,x} + \omega_{,y} \Omega^j_{,y}) dF = 0$ i da se pojedini članovi metrice kao male veličine mogu zanemariti *, uz uslov (1.9), dobija se linearna matrica krutosti elementa:

---

* Imajući u vidu izraze izvedene u poglavlju dobija se:

$$\iint \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\Omega^j}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\right) dF = \Sigma \iint \left[(e\sin\alpha + h_n\cos\alpha)\frac{\sin\alpha}{l} + (e\cos\alpha - h_n\sin\alpha)\frac{\cos\alpha}{l}\right] dF = \Sigma \iint \frac{e}{l} dF = 0$$

$$\iint \frac{1}{L^2} x\omega dF = \Sigma \iint h_n \cos\alpha \left(\frac{e}{L}\right)^2 dF \ll \iint \frac{\partial\omega}{\partial x} dF = \Sigma \iint h_n \cos\alpha dF$$

$$\iint \frac{1}{L^2} \omega^2 dF = \Sigma \iint h_p^{*2} \left(\frac{e}{L}\right)^2 dF \ll \iint \left[\left(y + \frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(x - \frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] dF = \Sigma \iint (h_p^* + e)^2 dF$$

$$
\mathbf{K}_L = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
\Delta\mathbf{q}_u & \Delta\mathbf{q}_v & \Delta\mathbf{q}_\vartheta & \Delta\mathbf{q}_{w_o} & \Delta\mathbf{q}_{\psi_y} & \Delta\mathbf{q}_{\psi_x} & \cdots & \Delta\mathbf{q}_{w_1} & \cdots
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
GF\mathbf{K}_2 & 0 & -GS_{\omega,x}\mathbf{K}_2 & 0 & -GF\mathbf{K}_5 & 0 & \cdots & GS_{\Omega',x}\mathbf{K}_7 & \cdots \\
 & GF\mathbf{K}_2 & -GS_{\omega,y}\mathbf{K}_2 & 0 & 0 & GF\mathbf{K}_5 & \cdots & GS_{\Omega',y}\mathbf{K}_7 & \cdots \\
 & & GI_h\mathbf{K}_2 & 0 & GS_{\omega,x}\mathbf{K}_5 & -GS_{\omega,y}\mathbf{K}_5 & \cdots & G(I_{x\Omega',y}-I_{y\Omega',x})\mathbf{K}_7 & \cdots \\
 & & & EF\mathbf{K}_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
 & & & & EI_{xx}\mathbf{K}_2+GF\mathbf{K}_1 & 0 & \cdots & -EI_{x\Omega'}\mathbf{K}_8-GS_{\Omega',x}\mathbf{K}_8 & \cdots \\
 & \text{s i m e t r i č n o} & & & & EI_{yy}\mathbf{K}_2+GF\mathbf{K}_1 & \cdots & EI_{y\Omega'}\mathbf{K}_8+GS_{\Omega',y}\mathbf{K}_8 & \cdots \\
 & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & \cdots & \begin{array}{c} EI_{\Omega'\Omega'}\mathbf{K}_4 \\ + \\ G(I_{\Omega',x\Omega',x}+I_{\Omega',y\Omega',y})\mathbf{K}_3 \end{array} & \cdots \\
 & & & & & & & \vdots &
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ \Delta\mathbf{q}_u \\ \Delta\mathbf{q}_v \\ \Delta\mathbf{q}_\vartheta \\ \Delta\mathbf{q}_{w_o} \\ \Delta\mathbf{q}_{\psi_y} \\ \Delta\mathbf{q}_{\psi_x} \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{q}_{w_1} \\ \vdots
\end{array}
$$

Linearna matrica krutosti dobijena je u eksplicitnom obliku. Za geometrijske karakteristike preseka uvedene su iste oznake kao i u prethodnom poglavlju:

$$
\begin{aligned}
S_{\Omega^j{}_{,x}} &= \iint \Omega^j{}_{,x}\, dF \\
S_{\Omega^j{}_{,y}} &= \iint \Omega^j{}_{,y}\, dF \\
S_{\omega_{,x}} &= \iint \omega_{,x}\, dF \\
S_{\omega_{,y}} &= \iint \omega_{,y}\, dF \\
I_{xx} &= \iint x^2\, dF \\
I_{yy} &= \iint y^2\, dF \\
I_h &= \iint [(y+\frac{\partial\omega}{\partial x})^2 + (x-\frac{\partial\omega}{\partial y})^2]\, dF \\
I_{x\Omega^j} &= \iint x\Omega^j\, dF \\
I_{y\Omega^j} &= \iint y\Omega^j\, dF \\
I_{x\Omega^j{}_{,y}} &= \iint x\Omega^j{}_{,y}\, dF \\
I_{y\Omega^j{}_{,x}} &= \iint y\Omega^j{}_{,x}\, dF \\
I_{\Omega^i\Omega^j} &= \iint \Omega^i\Omega^j\, dF \\
I_{\Omega^i{}_{,x}\Omega^j{}_{,x}} &= \iint \Omega^i{}_{,x}\Omega^j{}_{,x}\, dF \\
I_{\Omega^i{}_{,y}\Omega^j{}_{,y}} &= \iint \Omega^i{}_{,y}\Omega^j{}_{,y}\, dF
\end{aligned}
\qquad (2.29)
$$

Submatrice $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$, ..., $\boldsymbol{K}_8$ date su izrazima:

$$
\boldsymbol{K}_1 = \frac{L}{15}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -0,5 \\ 1 & 8 & 1 \\ -0,5 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{K}_2 = \frac{1}{3L}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}
$$

$$\boldsymbol{K}_3 = \frac{L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_4 = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_5 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{K}_6 = \frac{L}{3}\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_7 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 4 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_8 = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kada komponente vektora čvornih pomeranja (2.14) napišemo u redosledu koji je pogodniji pri kasnijim transformacijama matrice krutosti elementa:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{q} = [&\Delta u_1 \;\; \Delta v_1 \;\; \Delta w_{01} \;\; \Delta \psi_{x1} \;\; \Delta \psi_{y1} \;\; \Delta \vartheta_1 \;\; \Delta w_{11} \ldots \Delta w_{i1} \ldots \Delta w_{n1} \\ &\Delta u_3 \;\; \Delta v_3 \;\; \Delta w_{03} \;\; \Delta \psi_{x3} \;\; \Delta \psi_{y3} \;\; \Delta \vartheta_3 \;\; \Delta w_{13} \ldots \Delta w_{i3} \ldots \Delta w_{n3} \\ &\Delta u_2 \;\; \Delta v_2 \;\; \Delta \psi_{x2} \;\; \Delta \psi_{y2} \;\; \Delta \vartheta_2]^T \end{aligned} \tag{2.31}$$

za matricu transformacije $\boldsymbol{B}_L$ i linearnu matricu krutosti $\boldsymbol{K}_L$ dobija se:

$$
\mathbf{B}_L = \begin{array}{cccccccccc}
\Delta u_1 & \Delta v_1 & \Delta w_{01} & \Delta\psi_{x1} & \Delta\psi_{y1} & \Delta\vartheta_1 & \Delta w_{11} & \cdots & \Delta w_{i1} & \cdots & \Delta w_{n1}
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|ccccc}
0 & 0 & -\frac{1}{L} & \frac{y}{L}(-3+4\xi) & -\frac{x}{L}(-3+4\xi) & -\frac{4\omega}{L^2} & -\frac{\Omega^1}{L} & \cdots & -\frac{\Omega^i}{L} & \cdots & -\frac{\Omega^n}{L} \\ \hline
\frac{1}{L}(-3+4\xi) & 0 & 0 & 0 & -(1-3\xi+2\xi^2) & -\frac{1}{L}\left(y+\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)(-3+4\xi) & \frac{\partial\Omega^1}{\partial x}(1-\xi) & \cdots & \frac{\partial\Omega^i}{\partial x}(1-\xi) & \cdots & \frac{\partial\Omega^n}{\partial x}(1-\xi) \\ \hline
0 & \frac{1}{L}(-3+4\xi) & 0 & 1-3\xi+2\xi^2 & 0 & \frac{1}{L}\left(x-\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)(-3+4\xi) & \frac{\partial\Omega^1}{\partial y}(1-\xi) & \cdots & \frac{\partial\Omega^i}{\partial y}(1-\xi) & \cdots & \frac{\partial\Omega^n}{\partial y}(1-\xi)
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\Delta u_3 & \Delta v_3 & \Delta w_{03} & \Delta\psi_{x3} & \Delta\psi_{y3} & \Delta\vartheta_3 & \Delta w_{13} & \cdots & \Delta w_{i3} & \cdots & \Delta w_{n3}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|ccccc}
0 & 0 & \frac{1}{L} & \frac{y}{L}(-1+4\xi) & -\frac{x}{L}(-1+4\xi) & -\frac{4\omega}{L^2} & \frac{\Omega^1}{L} & \cdots & \frac{\Omega^i}{L} & \cdots & \frac{\Omega^n}{L} \\ \hline
\frac{1}{L}(-1+4\xi) & 0 & 0 & 0 & \xi(1-2\xi) & -\frac{1}{L}\left(y+\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)(-1+4\xi) & \frac{\partial\Omega^1}{\partial x}\xi & \cdots & \frac{\partial\Omega^i}{\partial x}\xi & \cdots & \frac{\partial\Omega^n}{\partial x}\xi \\ \hline
0 & \frac{1}{L}(-1+4\xi) & 0 & -\xi(1-2\xi) & 0 & \frac{1}{L}\left(x-\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)(-1+4\xi) & \frac{\partial\Omega^1}{\partial y}\xi & \cdots & \frac{\partial\Omega^i}{\partial y}\xi & \cdots & \frac{\partial\Omega^n}{\partial y}\xi
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\Delta u_2 & \Delta v_2 & \Delta\psi_{x2} & \Delta\psi_{y2} & \Delta\vartheta_2
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{c|c|c|c|c}
0 & 0 & \frac{y}{L}(4-8\xi) & -\frac{x}{L}(4-8\xi) & \frac{8\omega}{L^2} \\ \hline
\frac{1}{L}(4-8\xi) & 0 & 0 & -4\xi(1-\xi) & -\frac{1}{L}\left(y+\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)(4-8\xi) \\ \hline
0 & \frac{1}{L}(4-8\xi) & 4\xi(1-\xi) & 0 & \frac{1}{L}\left(x-\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)(4-8\xi)
\end{array}\right]
$$

$$\mathbf{K}_L = \begin{array}{c}
\begin{matrix} \Delta u_1 & \Delta v_1 & \Delta w_{01} & \Delta\psi_{x1} & \Delta\psi_{y1} & \Delta\vartheta_1 & \cdots & \Delta w_{j1} & \cdots & \Delta u_3 & \Delta v_3 & \Delta w_{03} & \Delta\psi_{x3} & \Delta\psi_{y3} & \Delta\vartheta_3 & \cdots & \Delta w_{j3} & \cdots & \Delta u_2 & \Delta v_2 & \Delta\psi_{x2} & \Delta\psi_{y2} & \Delta\vartheta_2 \end{matrix} \\
\left[\begin{matrix}
7a & 0 & 0 & 0 & 1.5La & 7g & \cdots & -5k^j & \cdots & a & 0 & 0 & 0 & -0.5La & g & \cdots & -k^j & \cdots & -8a & 0 & 0 & 2La & -8g \\
 & 7a & 0 & -1.5La & 0 & 7h & \cdots & -5l^j & \cdots & 0 & a & 0 & 0.5La & 0 & h & \cdots & -l^j & \cdots & 0 & -8a & 2La & 0 & -8h \\
 & & c & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 7e+2f & 0 & -1.5Lh & \cdots & p^j+Ll^j & \cdots & 0 & -0.5La & 0 & e-0.5f & 0 & -0.5Lh & \cdots & -p^j & \cdots & 0 & 2La & -8e+f & 0 & 2Lh \\
 & & & & 7d+2f & 1.5Lg & \cdots & o^j-Lk^j & \cdots & 0.5La & 0 & 0 & 0 & d-0.5f & 0.5Lg & \cdots & -o^j & \cdots & -2La & 0 & 0 & -8d+f & -2Lg \\
 & & & & & 7b & \cdots & -5r^j & \cdots & g & h & 0 & 0.5Lh & -0.5Lg & b & \cdots & -r^j & \cdots & -8g & -8h & -2Lh & 2Lg & -8b \\
 & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & \cdots & 2n^{ll}+m^{ll} & \cdots & k^l & l^l & 0 & -p^l & o^l & r^l & \cdots & n^{lj}-m^{lj} & \cdots & 4k^l & 4l^l & 2Ll^l & -2Lk^l & 4r^l \\
 & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & 7a & 0 & 0 & 0 & -1.5La & 7g & \cdots & 5k^j & \cdots & -8a & 0 & 0 & -2La & -8g \\
 & & & & & & & & & & 7a & 0 & 1.5La & 0 & 7h & \cdots & 5l^j & \cdots & 0 & -8a & 2La & 0 & -8h \\
 & & & & & & & & & & & c & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 7e+2f & 0 & 1.5Lh & \cdots & p^j+Ll^j & \cdots & 0 & -2La & -8e+f & 0 & -2Lh \\
 & & & & & & & & & & & & & 7d+2f & -1.5Lg & \cdots & o^j-Lk^j & \cdots & 2La & 0 & 0 & -8d+f & 2Lg \\
 & & & \text{s i m e t r i č n o} & & & & & & & & & & & 7b & \cdots & 5r^j & \cdots & -8g & -8h & 2Lh & -2Lg & -8b \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \cdots & 2n^{ll}+m^{ll} & \cdots & -4k^l & -4l^l & 2Ll^l & -2Lk^l & -4r^l \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & 16a & 0 & 0 & 0 & 16g \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 16a & 0 & 0 & 16h \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 16e+8f & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 16d+8f & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 16b
\end{matrix}\right]
\end{array}
\begin{matrix} \\ \Delta u_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta w_{01} \\ \Delta\psi_{x1} \\ \Delta\psi_{y1} \\ \Delta\vartheta_1 \\ \vdots \\ \Delta w_{l1} \\ \vdots \\ \Delta u_3 \\ \Delta v_3 \\ \Delta w_{03} \\ \Delta\psi_{x3} \\ \Delta\psi_{y3} \\ \Delta\vartheta_3 \\ \vdots \\ \Delta w_{l3} \\ \vdots \\ \Delta u_2 \\ \Delta v_2 \\ \Delta\psi_{x2} \\ \Delta\psi_{y2} \\ \Delta\vartheta_2 \end{matrix}$$

gde su:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{3L} GF \\
b &= \frac{1}{3L} G I_h \\
c &= \frac{1}{L} EF \\
d &= \frac{1}{3L} E I_{xx} \\
e &= \frac{1}{3L} E I_{yy} \\
f &= \frac{L}{15} GF \\
g &= -\frac{1}{3L} G S_{\omega,x} \\
h &= -\frac{1}{3L} G S_{\omega,y} \\
k^j &= \frac{1}{6} G S_{\Omega^j_{,x}} \\
l^j &= \frac{1}{6} G S_{\Omega^j_{,y}} \\
m^{ij} &= \frac{1}{L} E I_{\Omega^i \Omega^j} \\
n^{ij} &= \frac{L}{6} G (I_{\Omega^i_{,x} \Omega^j_{,x}} + I_{\Omega^i_{,y} \Omega^j_{,y}}) \\
o^j &= -\frac{1}{L} E I_{x \Omega^j} \\
p^j &= \frac{1}{L} E I_{y \Omega^j} \\
r^j &= \frac{1}{6} G (I_{x \Omega^j_{,y}} - I_{y \Omega^j_{,x}}) \qquad i,j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

2.3.4 GEOMETRIJSKA MATRICA KRUTOSTI

Nelinearne komponente inkrementalnih deformacija odredjene su jednačinom (2.5,2):

$$
\begin{aligned}
\Delta\eta_{33} &= \frac{1}{2}[(\Delta u_{3,3})^2 + (\Delta u_{1,3})^2 + (\Delta u_{2,3})^2] = \frac{1}{2}[(\frac{\partial \Delta w_*}{\partial z})^2 + (\frac{\partial \Delta u_*}{\partial z})^2 + (\frac{\partial \Delta v_*}{\partial z})^2] \\
2\Delta\eta_{13} &= \Delta u_{2,1} \Delta u_{2,3} + \Delta u_{3,1} \Delta u_{3,3} = \frac{\partial \Delta v_*}{\partial x} \frac{\partial \Delta v_*}{\partial z} + \frac{\partial \Delta w_*}{\partial x} \frac{\partial \Delta w_*}{\partial z} \\
2\Delta\eta_{23} &= \Delta u_{1,2} \Delta u_{1,3} + \Delta u_{3,2} \Delta u_{3,3} = \frac{\partial \Delta u_*}{\partial y} \frac{\partial \Delta u_*}{\partial z} + \frac{\partial \Delta w_*}{\partial y} \frac{\partial \Delta w_*}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Lako je pokazati da se matrica $\boldsymbol{B}_{NL}$ može napisati u obliku:

$$
\boldsymbol{B}_{NL} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \boldsymbol{A} =
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{N} & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \omega}{\partial x}\boldsymbol{N}' & 0 & -\boldsymbol{N} & 0 & \frac{\partial \Omega^1}{\partial x}\boldsymbol{N}_w & .. & \frac{\partial \Omega^i}{\partial x}\boldsymbol{N}_w & .. & \frac{\partial \Omega^n}{\partial x}\boldsymbol{N}_w \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{N} & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \omega}{\partial y}\boldsymbol{N}' & 0 & 0 & \boldsymbol{N} & \frac{\partial \Omega^1}{\partial y}\boldsymbol{N}_w & .. & \frac{\partial \Omega^i}{\partial y}\boldsymbol{N}_w & .. & \frac{\partial \Omega^n}{\partial y}\boldsymbol{N}_w \\ \boldsymbol{N}' & 0 & -y\boldsymbol{N}' & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ 0 & \boldsymbol{N}' & x\boldsymbol{N}' & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & -\omega\boldsymbol{N}'' & \boldsymbol{N}_w' & -x\boldsymbol{N}' & y\boldsymbol{N}' & \Omega^1\boldsymbol{N}_w' & .. & \Omega^i\boldsymbol{N}_w' & .. & \Omega^n\boldsymbol{N}_w' \end{bmatrix} \tag{2.36}
$$

Ako je σ normalni napon, a τ_x i τ_y naponi smicanja u poprečnim presecima elementa, tada je matrica Cauchyjevih napona $\boldsymbol{\sigma}$ data izrazom:

$$
\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_y \\ 0 & 0 & \tau_y & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ \tau_x & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & \tau_x & 0 & \tau_y & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \tag{2.37}
$$

Posle množenja matrica (2.36) i (2.37) dobija se:

$$
\boldsymbol{B}_{NL}^{T}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B}_{NL}=
\left[\begin{array}{ccccccccc}
\sigma\boldsymbol{N}_2 & 0 & -\tau_y\boldsymbol{N}_5-y\sigma\boldsymbol{N}_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
 & \sigma\boldsymbol{N}_2 & \tau_x\boldsymbol{N}_5+x\sigma\boldsymbol{N}_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
 & & \begin{array}{c}(x\tau_x+y\tau_y)(\boldsymbol{N}_5+\boldsymbol{N}_5^T)\\ \omega(\frac{\partial\omega}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\omega}{\partial y}\tau_y)(\boldsymbol{N}_9+\boldsymbol{N}_9^T)\\ \omega^2\sigma\boldsymbol{N}_{10}+(x^2+y^2)\sigma\boldsymbol{N}_2\end{array} & \begin{array}{c}-(\frac{\partial\omega}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\omega}{\partial y}\tau_y)\boldsymbol{N}_8\\ -\omega\sigma\boldsymbol{N}_{11}\end{array} & \begin{array}{c}x(\frac{\partial\omega}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\omega}{\partial y}\tau_y)\boldsymbol{N}_2\\ \omega\tau_x\boldsymbol{N}_{12}+x\omega\sigma\boldsymbol{N}_9\end{array} & \begin{array}{c}-y(\frac{\partial\omega}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\omega}{\partial y}\tau_y)\boldsymbol{N}_2\\ -\omega\tau_y\boldsymbol{N}_{12}-y\omega\sigma\boldsymbol{N}_9\end{array} & \cdots & \begin{array}{c}-\Omega^j(\frac{\partial\omega}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\omega}{\partial y}\tau_y)\boldsymbol{N}_8\\ -\omega(\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\tau_y)\boldsymbol{N}_{14}\\ -\omega\Omega^j\sigma\boldsymbol{N}_{11}\end{array} & \cdots \\
 & & & \sigma\boldsymbol{N}_4 & -\tau_x\boldsymbol{N}_{13}-x\sigma\boldsymbol{N}_8^T & \tau_y\boldsymbol{N}_{13}+y\sigma\boldsymbol{N}_8^T & \cdots & \begin{array}{c}(\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\tau_y)\boldsymbol{N}_{15}\\ \Omega^j\sigma\boldsymbol{N}_4\end{array} & \cdots \\
 & & & & \begin{array}{c}x\tau_x(\boldsymbol{N}_5+\boldsymbol{N}_5^T)\\ x^2\sigma\boldsymbol{N}_2\end{array} & \begin{array}{c}-y\tau_x\boldsymbol{N}_5^T-x\tau_y\boldsymbol{N}_5\\ -xy\sigma\boldsymbol{N}_2\end{array} & \cdots & \begin{array}{c}-x(\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\tau_y)\boldsymbol{N}_7\\ -\Omega^j\tau_x\boldsymbol{N}_{13}^T-x\Omega^j\sigma\boldsymbol{N}_8\end{array} & \cdots \\
 & & \text{s i m e t r i č n o} & & & \begin{array}{c}y\tau_y(\boldsymbol{N}_5+\boldsymbol{N}_5^T)\\ y^2\sigma\boldsymbol{N}_2\end{array} & \cdots & \begin{array}{c}y(\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\tau_y)\boldsymbol{N}_7\\ \Omega^j\tau_y\boldsymbol{N}_{13}^T+y\Omega^j\sigma\boldsymbol{N}_8\end{array} & \cdots \\
 & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & \cdots & \begin{array}{c}\Omega^i(\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\tau_y)\boldsymbol{N}_{15}^T\\ \Omega^j(\frac{\partial\Omega^i}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\Omega^i}{\partial y}\tau_y)\boldsymbol{N}_{15}\\ \Omega^i\Omega^j\sigma\boldsymbol{N}_4\end{array} & \cdots \\
 & & & & & & & \vdots &
\end{array}\right]
$$

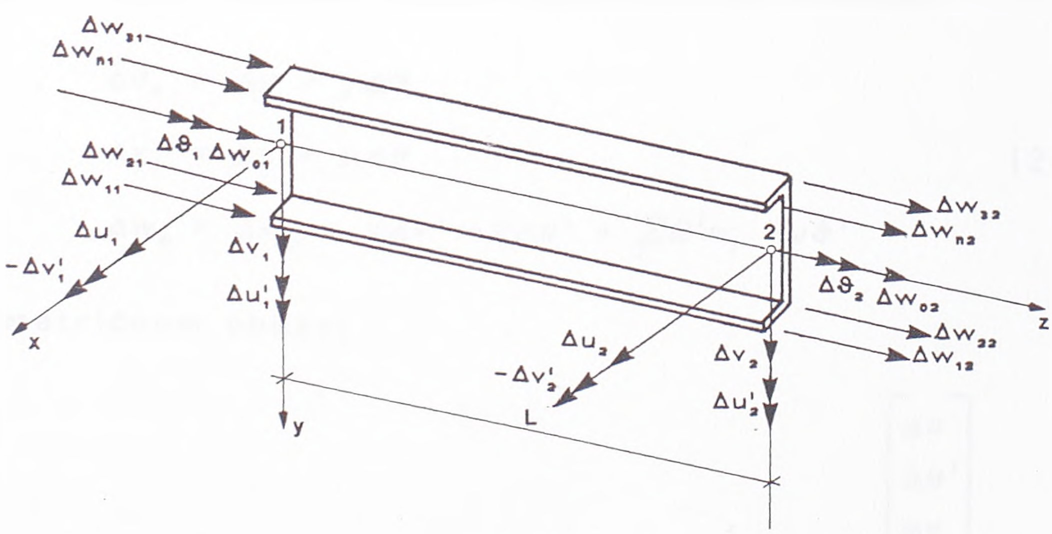
gde je značenje oznaka $N_1,\dots,N_{11}$ dato ranije izrazima (2.26), i gde je:

$$\begin{aligned} N_{12} &= N''^T N \\ N_{13} &= N_w'^T N \\ N_{14} &= N''^T N_w' \\ N_{15} &= N_w'^T N_{w'} \end{aligned} \qquad (2.39)$$

Geometrijska ili nelinearna matrica krutosti odredjena je izrazom (2.12,2) i dobija se numeričkom integracijom pojedinih članova gornje matrice.

2.4 KONAČAN ELEMENAT II

2.4.1 OSNOVNE KARAKTERISTIKE ELEMENTA



sl.6

Ako se zanemari uticaj transverzalnih sila na deformaciju dobija se klasičan štap za koji važi Bernoullijeva pretpostavka o ravnim presecima. Obrtanje poprečnog preseka nije nezavisna veličina, već se može izraziti preko transverzalnih pomeranja ose štapa:

$$\psi_x = -\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$\psi_y = \frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.40}$$

Čvorovi, koji su pretstavljeni težišnim tačkama krajnjih poprečnih preseka elementa i obeleženi sa 1 i 2 (sl.6), imaju po $6+n$ stepeni slobode pomeranja Δu_i, Δv_i, Δw_{oi}, $\Delta\psi_{xi}$, $\Delta\psi_{yi}$, $\Delta\vartheta_i$, Δw_{1i}, $\Delta w_{2i}, \ldots,$ Δw_{ni} $(i=1,2)$.

Za posmatrani elemenat važe sve pretpostavke i napomene koje su date i za elemenat opisan u poglavlju 2.3.

2.4.2 VEKTOR POMERANJA

Izrazi za inkrementalna pomeranja proizvoljne tačke poprečnog preseka Δu_*, Δv_* i Δw_*, polazeći od pretpostavke o o nedeformabilnosti preseka u svojoj ravni, mogu se izraziti u funkciji generalisanih inkrementalnih pomeranja ose elementa i pomeranja čvornih tačaka poligonalnog preseka:

$$\begin{aligned} \Delta u_* &= \Delta u - y\Delta\vartheta \\ \Delta v_* &= \Delta v + x\Delta\vartheta \\ \Delta w_* &= \Delta w_o - y\Delta v' - x\Delta u' + \sum_i \Omega^i w_i - \omega\vartheta' \end{aligned} \tag{2.41}$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_* \\ \Delta v_* \\ \Delta w_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & 0\,.\,.\,0\,.\,.\,0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 0 & 0 & 0\,.\,.\,0\,.\,.\,0 \\ 0 & -x & 0 & -y & 0 & -\omega & 1 & \Omega^1 . . \Omega^i . . \Omega^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta u' \\ \Delta v \\ \Delta v' \\ \Delta\vartheta \\ \Delta\vartheta' \\ \Delta w_o \\ \Delta w_1 \\ \vdots \\ \Delta w_i \\ \vdots \\ \Delta w_n \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Vektor osnovnih nepoznatih u čvorovima 1 i 2 konačnog elementa označen je sa:

$$\Delta \boldsymbol{q} = [\Delta \boldsymbol{q}_u \;\; \Delta \boldsymbol{q}_v \;\; \Delta \boldsymbol{q}_\vartheta \;\; \Delta \boldsymbol{q}_{w_o} \;\; \Delta \boldsymbol{q}_{w_1} \dots \Delta \boldsymbol{q}_{w_i} \dots \Delta \boldsymbol{q}_{w_n}] \qquad (2.43)$$

gde su:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{q}_u &= [\Delta u_1 \;\; \Delta u_1' \;\; \Delta u_2 \;\; \Delta u_2']^T \\ \Delta \boldsymbol{q}_v &= [\Delta v_1 \;\; -\Delta v_1' \;\; \Delta v_2 \;\; -\Delta v_2']^T \\ \Delta \boldsymbol{q}_\vartheta &= [\Delta \vartheta_1 \;\; \Delta \vartheta_2]^T \\ \Delta \boldsymbol{q}_{w_o} &= [\Delta w_{o1} \;\; \Delta w_{o2}]^T \\ \Delta \boldsymbol{q}_{w_i} &= [\Delta w_{i1} \;\; \Delta w_{i2}]^T \qquad i = 1,2,\dots,n \end{aligned} \qquad (2.44)$$

Za interpolacione funkcije inkrementalnih pomeranja Δu i Δv usvojeni su Hermitovi polinomi prve vrste, a za inkrementalna pomeranja $\Delta\vartheta$, Δw_o, Δw_1, $\Delta w_2, \dots,$ Δw_n linearna promena izmedju čvorova:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \boldsymbol{N}_u \Delta \boldsymbol{q}_u \\ \Delta v &= \boldsymbol{N}_v \Delta \boldsymbol{q}_v \\ \Delta \vartheta &= \boldsymbol{N} \Delta \boldsymbol{q}_\vartheta \\ \Delta w_o &= \boldsymbol{N} \Delta \boldsymbol{q}_{w_o} \\ \Delta w_i &= \boldsymbol{N} \Delta \boldsymbol{q}_{w_i} \qquad i = 1,2,\dots,n \end{aligned} \qquad (2.45)$$

pri čemu su uvedene sledeće oznake:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_u &= [1-3\xi^2+2\xi^3 \;\; L(\xi-2\xi^2+\xi^3) \;\; 3\xi^2-2\xi^3 \;\; L(-\xi^2+\xi^3)] \\ \boldsymbol{N}_v &= [1-3\xi^2+2\xi^3 \;\; L(-\xi+2\xi^2-\xi^3) \;\; 3\xi^2-2\xi^3 \;\; L(\xi^2-\xi^3)] \\ \boldsymbol{N} &= [1-\xi \quad \xi] \qquad \xi = \frac{z}{L} \end{aligned} \qquad (2.46)$$

Kada se jednačine (2.45) uvrste u (2.42) dobijaju se izrazi za inkrementalna pomeranja proizvoljnih tačaka preseka koja su izražena preko parametara pomeranja krajeva elementa:

$$
\begin{bmatrix} \Delta u_* \\ \Delta v_* \\ \Delta w_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_u & 0 & -y\boldsymbol{N} & 0 & 0 \;..\; 0 \;..\; 0 \\ 0 & \boldsymbol{N}_v & x\boldsymbol{N} & 0 & 0 \;..\; 0 \;..\; 0 \\ -x\boldsymbol{N}'_u & -y\boldsymbol{N}'_v & -\omega\boldsymbol{N}' & \boldsymbol{N} & \Omega^1\boldsymbol{N} \;..\; \Omega^i\boldsymbol{N} \;..\; \Omega^n\boldsymbol{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{q}_u \\ \Delta\boldsymbol{q}_v \\ \Delta\boldsymbol{q}_\vartheta \\ \Delta\boldsymbol{q}_{w_o} \\ \Delta\boldsymbol{q}_{w_1} \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{q}_{w_i} \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{q}_{w_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\,\Delta\boldsymbol{q}
$$

gde su:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}'_u &= \frac{1}{L}[-6\xi+6\xi^2 \quad L(1-4\xi+3\xi^2) \quad 6\xi-6\xi^2 \quad L(-2\xi+3\xi^2)] \\
\boldsymbol{N}'_v &= \frac{1}{L}[-6\xi+6\xi^2 \quad L(-1+4\xi-3\xi^2) \quad 6\xi-6\xi^2 \quad L(2\xi-3\xi^2)] \qquad (2.48) \\
\boldsymbol{N}' &= \frac{1}{L}[-1 \quad 1] \qquad\qquad \xi = \frac{z}{L}
\end{aligned}
$$

2.4.3 LINEARNA MATRICA KRUTOSTI

Polazeći od jednačina (2.20), (2.21) i (2.22) za matricu $\boldsymbol{B}_L$ dobija se:

$$
\boldsymbol{B}_L = \begin{bmatrix} -x\boldsymbol{N}''_u & -y\boldsymbol{N}''_v & 0 & \boldsymbol{N}' & \Omega^1\boldsymbol{N}' \;..\; \Omega^i\boldsymbol{N}' \;..\; \Omega^n\boldsymbol{N}' \\ 0 & 0 & -(y+\frac{\partial\omega}{\partial x})\boldsymbol{N}' & 0 & \frac{\partial\Omega^1}{\partial x}\boldsymbol{N} \;..\; \frac{\partial\Omega^i}{\partial x}\boldsymbol{N} \;..\; \frac{\partial\Omega^n}{\partial x}\boldsymbol{N} \\ 0 & 0 & (x-\frac{\partial\omega}{\partial y})\boldsymbol{N}' & 0 & \frac{\partial\Omega^1}{\partial y}\boldsymbol{N} \;..\; \frac{\partial\Omega^i}{\partial y}\boldsymbol{N} \;..\; \frac{\partial\Omega^n}{\partial y}\boldsymbol{N} \end{bmatrix}
$$

gde su:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}''_u &= \frac{1}{L^2}[-6+12\xi \quad L(-4+6\xi) \quad 6-12\xi \quad L(-2+6\xi)] \\
\boldsymbol{N}''_v &= \frac{1}{L^2}[-6+12\xi \quad L(4-6\xi) \quad 6-12\xi \quad L(2-6\xi)]
\end{aligned} \qquad (2.50)
$$

Imajući u vidu izraz za matricu elastičnosti (2.24), dalje sledi:

$$
\mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L = \begin{bmatrix}
Ex^2\mathbf{N}_1 & Exy\mathbf{N}_8 & 0 & -x\mathbf{N}_5 & \cdots & -Ex\Omega^j\mathbf{N}_5 & \cdots \\
 & Ey^2\mathbf{N}_2 & 0 & -y\mathbf{N}_6 & \cdots & -Ey\Omega^j\mathbf{N}_6 & \cdots \\
 & & G[(y+\frac{\partial\omega}{\partial x})^2+(x-\frac{\partial\omega}{\partial y})^2]\mathbf{N}_4 & 0 & \cdots & G[(x-\frac{\partial\omega}{\partial y})\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}-(y+\frac{\partial\omega}{\partial x})\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}]\mathbf{N}_7 & \cdots \\
 & & & E\mathbf{N}_4 & \cdots & E\Omega^j\mathbf{N}_4 & \cdots \\
 & & & & & \vdots & \\
 & \text{simetrično} & & & \cdots & \begin{matrix} E\Omega^i\Omega^j\mathbf{N}_4 \\ + \\ G(\frac{\partial\Omega^i}{\partial x}\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}+\frac{\partial\Omega^i}{\partial y}\frac{\partial\Omega^j}{\partial y})\mathbf{N}_3 \end{matrix} & \cdots \\
 & & & & & \vdots &
\end{bmatrix}
$$

gde su:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_1 &= \boldsymbol{N}_u''^T \boldsymbol{N}_u'' \\
\boldsymbol{N}_2 &= \boldsymbol{N}_v''^T \boldsymbol{N}_v'' \\
\boldsymbol{N}_3 &= \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \\
\boldsymbol{N}_4 &= \boldsymbol{N}'^T \boldsymbol{N}' \\
\boldsymbol{N}_5 &= \boldsymbol{N}_u''^T \boldsymbol{N}' \\
\boldsymbol{N}_6 &= \boldsymbol{N}_v''^T \boldsymbol{N}' \\
\boldsymbol{N}_7 &= \boldsymbol{N}'^T \boldsymbol{N} \\
\boldsymbol{N}_8 &= \boldsymbol{N}_u''^T \boldsymbol{N}_v''
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Linearna matrica krutosti, uvažavajući uslov (1.9), dobija se prema jednačini (2.12,1):

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccccc} \Delta \boldsymbol{q}_u & \Delta \boldsymbol{q}_v & \Delta \boldsymbol{q}_\vartheta & \Delta \boldsymbol{q}_{w_0} & \cdot\cdot & \Delta \boldsymbol{q}_{w_j} & \cdot\cdot \end{array} & \\
\boldsymbol{K}_L = & \left[\begin{array}{ccccccc}
EI_{xx}\boldsymbol{K}_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & -EI_{x\Omega'}\boldsymbol{K}_5 & \cdot\cdot \\
 & EI_{yy}\boldsymbol{K}_2 & 0 & 0 & \cdot\cdot & -EI_{y\Omega'}\boldsymbol{K}_6 & \cdot\cdot \\
 & & GI_h\boldsymbol{K}_4 & 0 & \cdot\cdot & G(I_{x\Omega'_{,y}} - I_{y\Omega'_{,x}})\boldsymbol{K}_7 & \cdot\cdot \\
 & & & EF\boldsymbol{K}_4 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\
 & \textit{simetrično} & & & & \vdots & \\
 & & & & \cdot\cdot & \begin{array}{c} EI_{\Omega'\Omega'}\boldsymbol{K}_4 \\ G(I_{\Omega'_{,x}\Omega'_{,x}} + I_{\Omega'_{,y}\Omega'_{,y}})\boldsymbol{K}_3 \end{array} & \cdot\cdot \\
 & & & & & \vdots &
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \Delta \boldsymbol{q}_u \\ \Delta \boldsymbol{q}_v \\ \Delta \boldsymbol{q}_\vartheta \\ \Delta \boldsymbol{q}_{w_0} \\ \vdots \\ \Delta \boldsymbol{q}_{w_j} \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Matrice $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$, ..., $\boldsymbol{K}_7$ date su izrazima:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_1 &= \frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{simet.} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{K}_2 &= \frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ \text{simet.} & & 12 & 6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{K}_3 &= \frac{L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{K}_4 &= \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{K}_5 = -\boldsymbol{K}_6 &= \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{K}_7 &= \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

Ako komponente vektora čvornih pomeranja (2.43) napišemo u redosledu koji je pogodniji za kasniju primenu:

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{q} = [&\Delta u_1 \;\; \Delta v_1 \;\; \Delta w_{01} \;\; -\Delta v_1' \;\; \Delta u_1' \;\; \Delta\vartheta_1 \;\; \Delta w_{11} \ldots \Delta w_{i1} \ldots \Delta w_{n1} \\
&\Delta u_2 \;\; \Delta v_2 \;\; \Delta w_{02} \;\; -\Delta v_2' \;\; \Delta u_2' \;\; \Delta\vartheta_2 \;\; \Delta w_{12} \ldots \Delta w_{i2} \ldots \Delta w_{n2}]^T
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

za matrice $\boldsymbol{B}_L$ i $\boldsymbol{K}_L$ dobija se:

$$
\mathbf{B}_L = \begin{array}{ccccccccccc}
\Delta u_1 & \Delta v_1 & \Delta w_{01} & -\Delta v_1' & \Delta u_1' & \Delta\vartheta_1 & \Delta w_{11} & \cdot\cdot & \Delta w_{i1} & \cdot\cdot & \Delta w_{n1} \\
\frac{x}{L^2}(6-12\xi) & \frac{y}{L^2}(6-12\xi) & -\frac{1}{L} & \frac{y}{L}(-4+6\xi) & -\frac{x}{L}(-4+6\xi) & 0 & -\frac{\Omega^1}{L} & \cdot\cdot & -\frac{\Omega^i}{L} & \cdot\cdot & -\frac{\Omega^n}{L} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L}\left(y+\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) & \frac{\partial\Omega^1}{\partial x}(1-\xi) & \cdot\cdot & \frac{\partial\Omega^i}{\partial x}(1-\xi) & \cdot\cdot & \frac{\partial\Omega^n}{\partial x}(1-\xi) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L}\left(x-\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) & \frac{\partial\Omega^1}{\partial y}(1-\xi) & \cdot\cdot & \frac{\partial\Omega^i}{\partial y}(1-\xi) & \cdot\cdot & \frac{\partial\Omega^n}{\partial y}(1-\xi) \\
\Delta u_2 & \Delta v_2 & \Delta w_{02} & -\Delta v_2' & \Delta u_2' & \Delta\vartheta_2 & \Delta w_{12} & \cdot\cdot & \Delta w_{i2} & \cdot\cdot & \Delta w_{n2} \\
\frac{x}{L^2}(-6+12\xi) & \frac{y}{L^2}(-6+12\xi) & \frac{1}{L} & \frac{y}{L}(-2+6\xi) & -\frac{x}{L}(-2+6\xi) & 0 & \frac{\Omega^1}{L} & \cdot\cdot & \frac{\Omega^i}{L} & \cdot\cdot & \frac{\Omega^n}{L} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L}\left(y+\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) & \frac{\partial\Omega^1}{\partial x}\xi & \cdot\cdot & \frac{\partial\Omega^i}{\partial x}\xi & \cdot\cdot & \frac{\partial\Omega^n}{\partial x}\xi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L}\left(x-\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) & \frac{\partial\Omega^1}{\partial y}\xi & \cdot\cdot & \frac{\partial\Omega^i}{\partial y}\xi & \cdot\cdot & \frac{\partial\Omega^n}{\partial y}\xi
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{K}_L =
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\Delta u_1 & \Delta v_1 & \Delta w_{o1} & -\Delta v_1' & \Delta u_1' & \Delta\vartheta_1 & \cdot\cdot & \Delta w_{j1} & \cdot\cdot & \Delta u_2 & \Delta v_2 & \Delta w_{o2} & -\Delta v_2' & \Delta u_2' & \Delta\vartheta_2 & \cdot\cdot & \Delta w_{j2} & \cdot\cdot
\end{array} & \\
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccc}
6a & 0 & 0 & 0 & 3La & 0 & & 0 & & -6a & 0 & 0 & 0 & 3La & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\
 & 6b & 0 & -3Lb & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 & -6b & 0 & -3Lb & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\
 & & c & 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\
 & & & 2L^2b & 0 & 0 & \cdot\cdot & -k^J & \cdot\cdot & 0 & 3Lb & 0 & L^2b & 0 & 0 & \cdot\cdot & k^J & \cdot\cdot \\
 & & & & 2L^2a & 0 & \cdot\cdot & h^J & \cdot\cdot & -3La & 0 & 0 & 0 & L^2a & 0 & \cdot\cdot & -h^J & \cdot\cdot \\
 & & & & & d & \cdot\cdot & -g^J & \cdot\cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & \cdot\cdot & -g^J & \cdot\cdot \\
 & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & & \cdot\cdot & e^{IJ}+2f^{IJ} & \cdot\cdot & 0 & 0 & 0 & k^I & -h^I & g^I & \cdots & -e^{IJ}+f^{IJ} & \cdot\cdot \\
 & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & 6a & 0 & 0 & 0 & -3La & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\
 & & & & & & & & & & 6b & 0 & 3Lb & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\
 & & \text{s i m e t r i č n o} & & & & & & & & & c & 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\
 & & & & & & & & & & & & 2L^2b & 0 & 0 & \cdot\cdot & -k^J & \cdot\cdot \\
 & & & & & & & & & & & & & 2L^2a & 0 & \cdot\cdot & h^J & \cdot\cdot \\
 & & & & & & & & & & & & & & d & \cdot\cdot & g^J & \cdot\cdot \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \cdot\cdot & e^{IJ}+2f^{IJ} & \cdot\cdot \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots &
\end{array}\right]
&
\begin{array}{c}
\Delta u_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta w_{o1} \\ -\Delta v_1' \\ \Delta u_1' \\ \Delta\vartheta_1 \\ \vdots \\ \Delta w_{I1} \\ \vdots \\ \Delta u_2 \\ \Delta v_2 \\ \Delta w_{o2} \\ -\Delta v_2' \\ \Delta u_2' \\ \Delta\vartheta_2 \\ \vdots \\ \Delta w_{I2} \\ \vdots
\end{array}
\end{array}
$$

pri čemu su:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{2}{L^3} E I_{xx} \\
b &= \frac{2}{L^3} E I_{yy} \\
c &= \frac{1}{L} E F \\
d &= \frac{1}{L} G I_h \\
e^{ij} &= \frac{1}{L} E I_{\Omega^i \Omega^j} \\
f^{ij} &= \frac{L}{6} G (I_{\Omega^i_{,x} \Omega^j_{,x}} + I_{\Omega^i_{,y} \Omega^j_{,y}}) \\
g^j &= \frac{1}{2} G (I_{x \Omega^j_{,y}} - I_{y \Omega^j_{,x}}) \\
h^j &= -\frac{1}{L} E I_{x \Omega^j} \\
k^j &= -\frac{1}{L} E I_{y \Omega^j} \qquad\qquad i,j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

2.4.4 GEOMETRIJSKA MATRICA KRUTOSTI

Polazeći od izraza (2.35) i (2.36) za nelinearnu matricu transformacije $\boldsymbol{B}_{NL}$, kako je to već ranije pokazano, dobija se:

$$
\boldsymbol{B}_{NL} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \boldsymbol{N} & 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\
-\boldsymbol{N}'_u & 0 & -\frac{\partial \omega}{\partial x}\boldsymbol{N}' & 0 & \frac{\partial \Omega^1}{\partial x}\boldsymbol{N} & .. & \frac{\partial \Omega^i}{\partial x}\boldsymbol{N} & .. & \frac{\partial \Omega^n}{\partial x}\boldsymbol{N} \\
0 & 0 & -\boldsymbol{N} & 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\
0 & -\boldsymbol{N}'_v & -\frac{\partial \omega}{\partial y}\boldsymbol{N}' & 0 & \frac{\partial \Omega^1}{\partial y}\boldsymbol{N} & .. & \frac{\partial \Omega^i}{\partial y}\boldsymbol{N} & .. & \frac{\partial \Omega^n}{\partial y}\boldsymbol{N} \\
\boldsymbol{N}'_u & 0 & -y\boldsymbol{N}' & 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\
0 & \boldsymbol{N}'_v & x\boldsymbol{N}' & 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\
-x\boldsymbol{N}''_u & -y\boldsymbol{N}''_v & 0 & \boldsymbol{N}' & \Omega^1\boldsymbol{N}' & .. & \Omega^i\boldsymbol{N}' & .. & \Omega^n\boldsymbol{N}'
\end{bmatrix}
\tag{2.59}
$$

Matrica Cauchyjevih napona data je izrazom (2.37), pa dalje sledi:

$$
\mathbf{B}_{NL}^{T}\,\sigma\,\mathbf{B}_{NL}=
\begin{bmatrix}
\begin{array}{c} x\tau_x(\mathbf{N}_{11}+\mathbf{N}_{11}^{T}) \\ (x^2\mathbf{N}_1+\mathbf{N}_9)\sigma \end{array} &
\begin{array}{c} x\tau_y\mathbf{N}_{13}+y\tau_x\mathbf{N}_{14} \\ xy\sigma\mathbf{N}_8 \end{array} &
\begin{array}{c} x(\frac{\partial\omega}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\omega}{\partial y}\tau_y)\mathbf{N}_5 \\ -\tau_y\mathbf{N}_{15}-y\sigma\mathbf{N}_{16} \end{array} &
-\tau_x\mathbf{N}_{18}-x\sigma\mathbf{N}_5 & \cdots &
\begin{array}{c} -x(\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\tau_y)\mathbf{N}_{19} \\ -\Omega^j\tau_x\mathbf{N}_{16}^{T}-x\Omega^j\sigma\mathbf{N}_5 \end{array} & \cdots \\
 & \begin{array}{c} y\tau_y(\mathbf{N}_{12}+\mathbf{N}_{12}^{T}) \\ (y^2\mathbf{N}_2+\mathbf{N}_{10})\sigma \end{array} &
\begin{array}{c} y(\frac{\partial\omega}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\omega}{\partial y}\tau_y)\mathbf{N}_6 \\ \tau_x\mathbf{N}_{17}+x\sigma\mathbf{N}_{18} \end{array} &
-\tau_y\mathbf{N}_{18}-y\sigma\mathbf{N}_6 & \cdots &
\begin{array}{c} -y(\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\tau_y)\mathbf{N}_{20} \\ -\Omega^j\tau_y\mathbf{N}_{18}^{T}-y\Omega^j\sigma\mathbf{N}_6 \end{array} & \cdots \\
 & & \begin{array}{c} (x\tau_x+y\tau_y)(\mathbf{N}_7+\mathbf{N}_7^{T}) \\ (x^2+y^2)\sigma\mathbf{N}_4 \end{array} &
-(\frac{\partial\omega}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\omega}{\partial y}\tau_y)\mathbf{N}_4 & \cdots &
-\Omega^j(\frac{\partial\omega}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\omega}{\partial y}\tau_y)\mathbf{N}_4 & \cdots \\
 & & & \sigma\mathbf{N}_4 & \cdots &
\begin{array}{c} (\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\tau_y)\mathbf{N}_7 \\ \Omega^j\sigma\mathbf{N}_4 \end{array} & \cdots \\
 & \text{s i m e t r i č n o} & & & & \vdots & \\
 & & & & \cdots &
\begin{array}{c} \Omega^i(\frac{\partial\Omega^j}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\Omega^j}{\partial y}\tau_y)\mathbf{N}_7^{T} \\ \Omega^j(\frac{\partial\Omega^i}{\partial x}\tau_x+\frac{\partial\Omega^i}{\partial y}\tau_y)\mathbf{N}_7 \\ \Omega^i\Omega^j\sigma\mathbf{N}_4 \end{array} & \cdots \\
 & & & & & \vdots &
\end{bmatrix}
$$

Pored oznaka $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2, \ldots,$ $\mathbf{N}_8$ čije je značenje odredjeno izrazima (2.52), radi kraćeg pisanja, uvedene su i sledeće oznake:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N}_9 &= \mathbf{N}_u'^{\,T} \mathbf{N}_u' \\
\mathbf{N}_{10} &= \mathbf{N}_v'^{\,T} \mathbf{N}_v' \\
\mathbf{N}_{11} &= \mathbf{N}_u'^{\,T} \mathbf{N}_u'' \\
\mathbf{N}_{12} &= \mathbf{N}_v'^{\,T} \mathbf{N}_v'' \\
\mathbf{N}_{13} &= \mathbf{N}_u''^{\,T} \mathbf{N}_v' \\
\mathbf{N}_{14} &= \mathbf{N}_u'^{\,T} \mathbf{N}_v'' \\
\mathbf{N}_{15} &= \mathbf{N}_u'^{\,T} \mathbf{N} \\
\mathbf{N}_{16} &= \mathbf{N}_u'^{\,T} \mathbf{N}' \\
\mathbf{N}_{17} &= \mathbf{N}_v'^{\,T} \mathbf{N} \\
\mathbf{N}_{18} &= \mathbf{N}_v'^{\,T} \mathbf{N}' \\
\mathbf{N}_{19} &= \mathbf{N}_u''^{\,T} \mathbf{N} \\
\mathbf{N}_{20} &= \mathbf{N}_v''^{\,T} \mathbf{N}
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

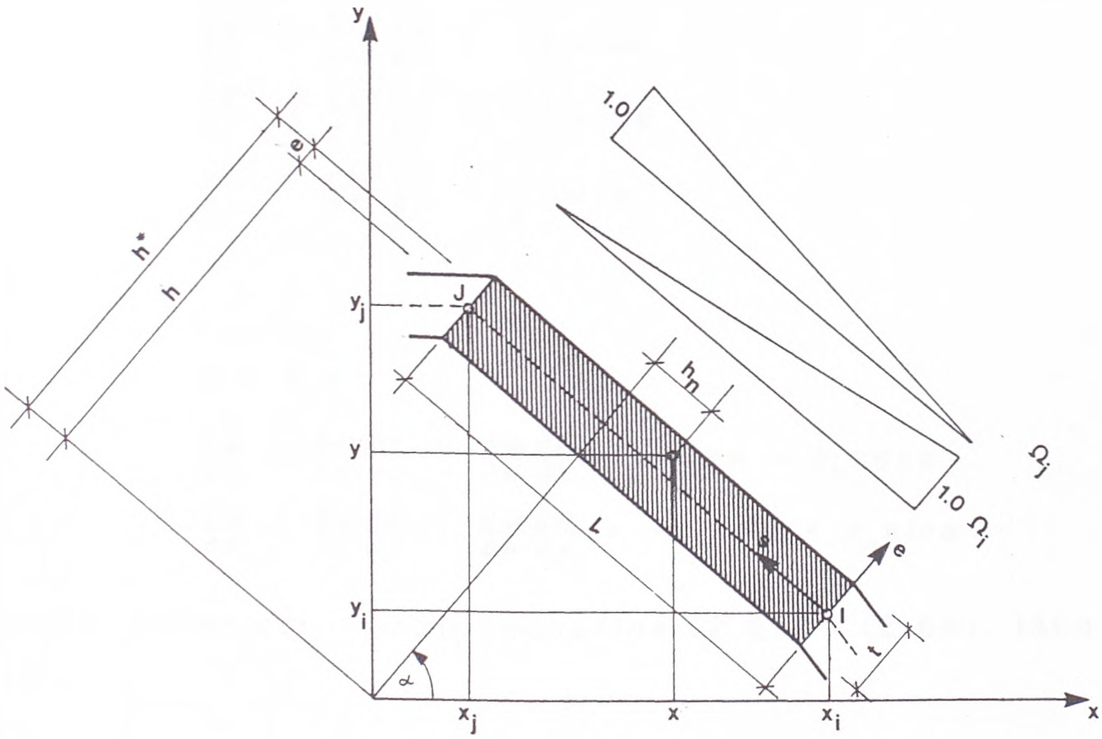
Integracijom pojedinih članova matrice (2.60), nekom od metoda numeričke integracije, o čemu će biti više reči kasnije, dobijamo geometrijsku matricu krutosti elementa.

2.5 GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE PRESEKA

Integrali odredjeni jednačinama (2.29) mogu se sračunati eksplicitno u funkciji geometrijskih karakteristika poprečnog preseka. Ceo postupak proračuna može se lako automatizovati. Za ulazne podatke potrebno je uneti koordinate čvornih tačaka i debljine zidova svake strane poligonalnog preseka.

Posmatrajmo stranu *ij* poligonalnog profila, (sl.7). Mogu se uspostaviti sledeće relacije:

$$
\begin{aligned}
l &= \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\
\cos\alpha &= \frac{1}{l}(y_j - y_i) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{l}(x_i - x_j) \\
h &= \frac{1}{l}|y_i x_j - y_j x_i|
\end{aligned}
\qquad (2.62)
$$



sl.7

Pored koordinatnog sistema čije se ose x i y poklapaju sa glavnim težišnim osama inercije uvodi se i koordinatni sistem vezan za srednju liniju preseka. Veza izmedju odgovarajućih koordinata data je izrazima:

$$
\begin{aligned}
x &= x_i + s\sin\alpha + e\cos\alpha \\
y &= y_i + s\cos\alpha + e\sin\alpha
\end{aligned}
\qquad (2.63)
$$

Takodje, važe i sledeće relacije:

$$
\begin{aligned}
h^* &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\
h_n &= x\sin\alpha - y\cos\alpha
\end{aligned}
\qquad (2.64)
$$

Kako je:

$$
\begin{aligned}
\Omega^i &= 1 - \frac{s}{l} \\
\Omega^j &= \frac{s}{l} \\
\frac{\partial \Omega^i}{\partial x} &= \frac{\partial \Omega^i}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{l} \sin\alpha \\
\frac{\partial \Omega^j}{\partial x} &= \frac{\partial \Omega^j}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{l} \sin\alpha \\
\frac{\partial \Omega^i}{\partial y} &= \frac{\partial \Omega^i}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{1}{l} \cos\alpha \\
\frac{\partial \Omega^j}{\partial y} &= \frac{\partial \Omega^j}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{l} \cos\alpha
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

i:

$$
\begin{aligned}
\omega &= h_n e \\
\frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{\partial \omega}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial x} = e \sin\alpha + h_n \cos\alpha \\
\frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{\partial \omega}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial y} = -e \cos\alpha + h_n \sin\alpha
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

to se, uzimajući u obzir jednačine (2.63) i (2.64), lako dobija:

$$
\begin{aligned}
F &= \sum l t \\
S_{\Omega',x} &= \sum_i \pm t \sin\alpha \\
S_{\Omega',y} &= \sum_i \mp t \cos\alpha \\
S_{\omega,x} &= \sum (x_i l t \sin\alpha \cos\alpha - y_i l t \cos^2\alpha - \frac{1}{2} l^2 t \cos\alpha) \\
S_{\omega,y} &= \sum (x_i l t \sin^2\alpha - y_i l t \sin\alpha \cos\alpha - \frac{1}{2} l^2 t \sin\alpha) \\
I_{xx} &= \sum [\frac{1}{4}(x_j + x_i)^2 l t + \frac{1}{12} l t^3 \cos^2\alpha + \frac{1}{12} l^3 t \sin^2\alpha] \\
I_{yy} &= \sum [\frac{1}{4}(y_j + y_i)^2 l t + \frac{1}{12} l t^3 \sin^2\alpha + \frac{1}{12} l^3 t \cos^2\alpha] \\
I_h &= \sum (h^2 l t + \frac{1}{3} l t^3) \\
I_{x\Omega'} &= \sum_i (\frac{1}{2} x_i l t \mp \frac{1}{6} l^2 t \sin\alpha) \\
I_{y\Omega'} &= \sum_i (\frac{1}{2} y_i l t \pm \frac{1}{6} l^2 t \cos\alpha)
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

$$I_{x\Omega^i_{,y}} = \sum_i \mp (x_i t\cos\alpha - \frac{1}{2} l t\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$I_{y\Omega^i_{,x}} = \sum_i \pm (y_i t\sin\alpha + \frac{1}{2} l t\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$I_{\Omega^i\Omega^i} = \sum_i \frac{1}{3} l t$$

$$I_{\Omega^i\Omega^j} = \frac{1}{6} l t$$

$$I_{\Omega^i_{,x}\Omega^i_{,x}} = \sum_i \frac{t}{l}\sin^2\alpha$$

$$I_{\Omega^i_{,y}\Omega^i_{,y}} = \sum_i \frac{t}{l}\cos^2\alpha$$

$$I_{\Omega^i_{,x}\Omega^j_{,x}} = -\frac{t}{l}\sin^2\alpha$$

$$I_{\Omega^i_{,y}\Omega^j_{,y}} = -\frac{t}{l}\cos^2\alpha$$

U gornjim izrazima sa $\sum_i$ označen je zbir po stranama poligona koje se sustiču u čvoru i, a sa $\sum$ zbir po svim stranama poligonalnog preseka. U izrazima ispred kojih stoje dva znaka gornji znak odnosi se na slučaj kada je čvor i prvi čvor posmatrane strane poligona, pri čemu je potrebno voditi računa o konvenciji obeležavanja čvorova.

2.6 MODIFIKACIJA MATRICE KRUTOSTI ELEMENTA

Parametri pomeranja $\Delta\boldsymbol{q}_p$ srednjeg neopterećenog čvora, konačnog elementa I, mogu se pre formiranja globalne matrice krutosti eliminisati, tako što će se izraziti preko parametara pomeranja krajnjih čvorova $\Delta\boldsymbol{q}_n$. Na taj način dobija se kondenzovana matrica krutosti elementa sa smanjenim ukupnim brojem nepoznatih parametara.

Pošto su parametri pomeranja, koji odgovaraju sporednim stepenima slobode pomeranja $\Delta\boldsymbol{q}_p$ srednjeg čvora, grupisani na kraju odgovarajuće matrice:

$$\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{F}_n \\ \Delta\boldsymbol{F}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{K}_{nn} & \Delta\boldsymbol{K}_{np} \\ \Delta\boldsymbol{K}_{pn} & \Delta\boldsymbol{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{q}_n \\ \Delta\boldsymbol{q}_p \end{bmatrix} \qquad (2.68)$$

i pošto je vektor čvornih sila $\Delta\boldsymbol{F}_p$ jednak nuli, to sledi:

$$\Delta \boldsymbol{q}_p = -\boldsymbol{K}_{pp}^{-1}\boldsymbol{K}_{pn}\Delta \boldsymbol{q}_n \tag{2.69}$$

Kada se jednačina (2.69) uvrsti u (2.68,1) dobija se:

$$\Delta \boldsymbol{F}_n = (\boldsymbol{K}_{nn} - \boldsymbol{K}_{np}\boldsymbol{K}_{pp}^{-1}\boldsymbol{K}_{pn})\Delta \boldsymbol{q}_n \tag{2.70}$$

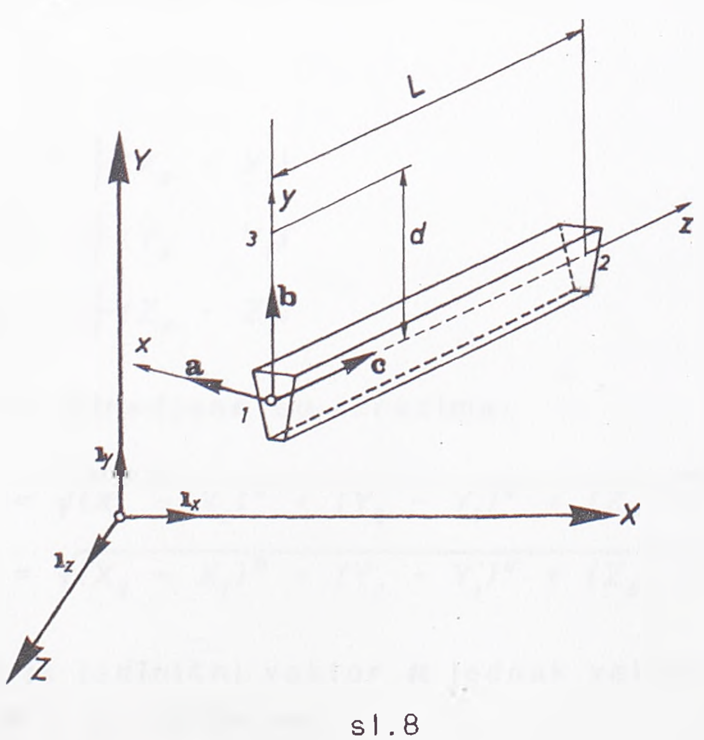
odakle sledi izraz za modifikovanu matricu krutosti elementa:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_{nn} - \boldsymbol{K}_{np}\boldsymbol{K}_{pp}^{-1}\boldsymbol{K}_{pn} \tag{2.71}$$

2.7 MATRICA TRANSFORMACIJE

2.7.1 MATRICA TRANSFORMACIJE ZA POČETNU KONFIGURACIJU ELEMENTA

Matrica transformacije uspostavlja vezu izmedju glavnih osa inercije elementa, koje istovremeno definišu ose lokalnog koordinatnog sistema *xyz*, i osa globalnog koordinatnog sistema *XYZ*. Posmatra se proizvoljan elemenat u početnoj konfiguraciji, u vremenskom trenutku $t=0$, (sl.8).



sl.8

Matrica transformacije potrebna u inkrementalnom postupku biće definisana u sladećem poglavlju.

Date su globalne koordinate tri tačke: dve čvorne tačke *1* i *2* na krajevima elementa i proizvoljne tačke *3* u ravni poprečnog preseka *1* koja odredjuje položaj koordinatne ose y. Ako sa (a_X, a_Y, a_Z), (b_X, b_Y, b_Z) i (c_X, c_Y, c_Z) označimo projekcije jediničnih vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ lokalnih koordinatnih osa na ose globalnog koordinatnog sistema, odredjene jediničnim vektorima $\mathbf{i}_X$, $\mathbf{i}_Y$ i $\mathbf{i}_Z$, matrica transformacije data je izrazom:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} a_X & a_Y & a_Z \\ b_X & b_Y & b_Z \\ c_X & c_Y & c_Z \end{bmatrix} \qquad (2.72)$$

gde su:

$$\begin{aligned} c_X &= \frac{1}{L}(X_2 - X_1) \\ c_Y &= \frac{1}{L}(Y_2 - Y_1) \\ c_Z &= \frac{1}{L}(Z_2 - Z_1) \end{aligned} \qquad (2.73)$$

i:

$$\begin{aligned} b_X &= \frac{1}{d}(X_3 - X_1) \\ b_Y &= \frac{1}{d}(Y_3 - Y_1) \\ b_Z &= \frac{1}{d}(Z_3 - Z_1) \end{aligned} \qquad (2.74)$$

Veličine L i d odredjene su izrazima:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \\ d &= \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2 + (Z_3 - Z_1)^2} \end{aligned} \qquad (2.75)$$

Iz uslova da je jedinični vektor $\mathbf{a}$ jednak vektorskom proizvodu vektora $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ dobija se:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_X & \mathbf{i}_Y & \mathbf{i}_Z \\ b_X & b_Y & b_Z \\ c_X & c_Y & c_Z \end{bmatrix} = a_X \mathbf{i}_X + a_Y \mathbf{i}_Y + a_Z \mathbf{i}_Z$$

gde su:

$$\begin{aligned} a_X &= b_Y c_Z - b_Z c_Y \\ a_Y &= b_Z c_X - b_X c_Z \\ a_Z &= b_X c_Y - b_Y c_X \end{aligned} \tag{2.77}$$

Sa ovako definisanom matricom transformacije veza između jediničnih vektora lokalnih i globalnih koordinatnih osa glasi:

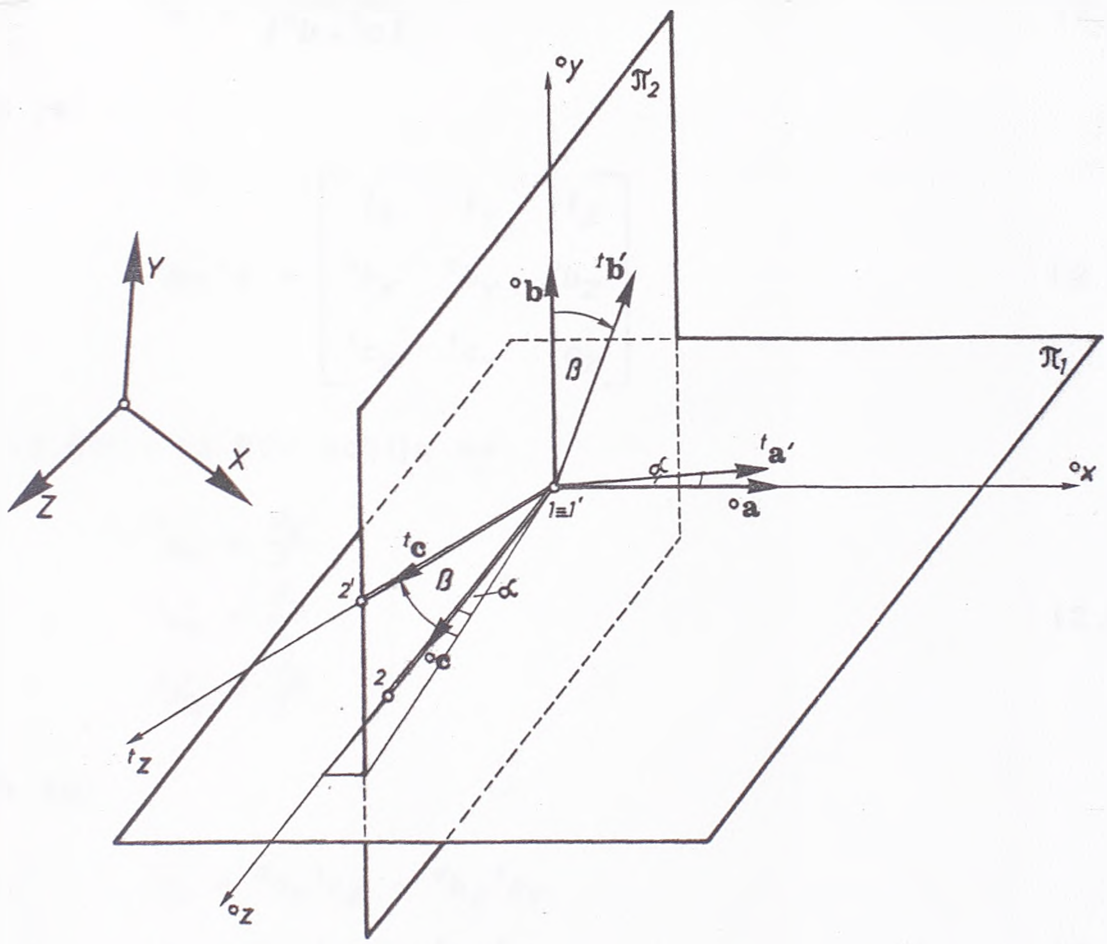
$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \mathbf{t} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_X \\ \mathbf{i}_Y \\ \mathbf{i}_Z \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

2.7.2 MATRICA TRANSFORMACIJE U UPDATED LAGRANGEOVOM INKREMENTALNOM POSTUPKU

Updated Lagrangeov inkrementalni postupak zahteva nalaženje matrice transformacije za svaki naredni korak proračuna. Pretpostavlja se da je poznat položaj lokalnog koordinatnog sistema, za početnu konfiguraciju elementa u vremenskom trenutku $\tau=0$, u odnosu na globalni koordinatni sistem. Matrica transformacije za konfiguraciju u proizvoljnom vremenskom trenutku $\tau=t$, koristeći Eulerove uglove rotacija, koji lokalne koordinatne ose iz položaja u vremenskom trenutku $\tau=0$ prevode u položaj u trenutku $\tau=t$, može se pisati u obliku:

$${}^{t}\mathbf{t} = {}^{t}\mathbf{t}^{R}\,{}^{t}\mathbf{t}^{K} \tag{2.79}$$

Matrica transformacije ${}^{t}\boldsymbol{t}^{K}$ uključuje rotacije oko osa odredjenih jediničnim vektorima ${}^{o}\boldsymbol{b}$ i ${}^{t}\boldsymbol{a}'$, koje čvorove *1* i *2* elementa, iz položaja u vremenskom trenutku $\tau=0$, prevode u položaj u vremenskom trenutku $\tau=t$, (sl.9).



sl.9

Matrica ${}^{t}\boldsymbol{t}^{K}$ data je izrazom:

$$
{}^{t}\boldsymbol{t}^{K} = \begin{bmatrix} {}^{t}a'_X & {}^{t}a'_Y & {}^{t}a'_Z \\ {}^{t}b'_X & {}^{t}b'_Y & {}^{t}b'_Z \\ {}^{t}c_X & {}^{t}c_Y & {}^{t}c_Z \end{bmatrix} \tag{2.80}
$$

Projekcije jediničnog vektora ${}^{t}\boldsymbol{c}$ na globalne koordinatne ose odredjene su izrazima (2.73) i (2.75,1), pri čemu se globalne koordinate tačaka *1* i *2* elementa sada odnose na proizvoljan vremenski trenutak *t*.

Globalne projekcije jediničnog vektora ${}^t\boldsymbol{a}'$ mogu se odrediti polazeći od relacije:

$$ {}^t\boldsymbol{a}' = \frac{{}^o\boldsymbol{b} \times {}^t\boldsymbol{c}}{\| {}^o\boldsymbol{b} \times {}^t\boldsymbol{c} \|} \tag{2.81} $$

gde je:

$$ {}^o\boldsymbol{b} \times {}^t\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_X & \boldsymbol{i}_Y & \boldsymbol{i}_Z \\ {}^ob_X & {}^ob_Y & {}^ob_Z \\ {}^tc_X & {}^tc_Y & {}^tc_Z \end{bmatrix} \tag{2.82} $$

iz (2.81) i (2.82) dobija se:

$$ \begin{aligned} {}^ta'_X &= \frac{J_X}{J} \\ {}^ta'_Y &= \frac{J_Y}{J} \\ {}^ta'_Z &= \frac{J_Z}{J} \end{aligned} \tag{2.83} $$

gde su:

$$ \begin{aligned} J_X &= {}^ob_Y\,{}^tc_Z - {}^ob_Z\,{}^tc_Y \\ J_Y &= {}^ob_Z\,{}^tc_X - {}^ob_X\,{}^tc_Z \\ J_Z &= {}^ob_X\,{}^tc_Y - {}^ob_Y\,{}^tc_X \end{aligned} \tag{2.84} $$

i:

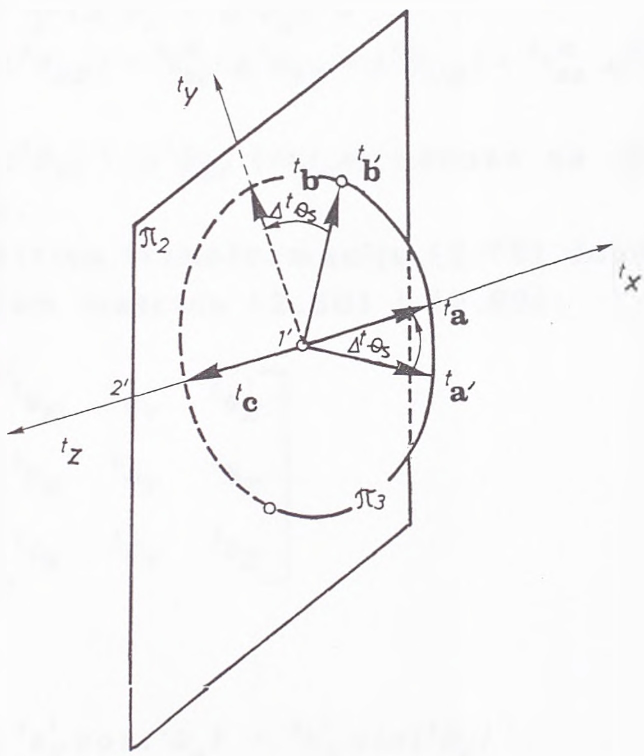
$$ J = \sqrt{J_X^2 + J_Y^2 + J_Z^2} \tag{2.85} $$

Koristeći izraz:

$$ {}^t\boldsymbol{b}' = {}^t\boldsymbol{c} \times {}^t\boldsymbol{a}' \tag{2.86} $$

projekcije jediničnog vektora ${}^t\boldsymbol{b}'$, na globalne koordinatne ose, date su jednačinama:

$$
\begin{aligned}
{}^t b'_X &= {}^t c_Y\,{}^t a'_Z - {}^t c_Z\,{}^t a'_Y \\
{}^t b'_Y &= {}^t c_Z\,{}^t a'_X - {}^t c_X\,{}^t a'_Z \\
{}^t b'_Z &= {}^t c_X\,{}^t a'_Y - {}^t c_Y\,{}^t a'_X
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$



sl.10

Matrica transformacije ${}^t\boldsymbol{t}^R$ odredjuje rotaciju elementa ${}^t\vartheta_s$ oko njegove aksijalne ose, u konfiguraciji u trenutku vremena $\tau = t$. Ovom rotacijom ose odredjene jediničnim vektorima ${}^t\boldsymbol{a}'$ i ${}^t\boldsymbol{b}'$ prevode se u ose ${}^t x$ i ${}^t y$, odredjene jediničnim vektorima ${}^t\boldsymbol{a}$ i ${}^t\boldsymbol{b}$:

$$
{}^t\boldsymbol{t}^R = \begin{bmatrix} \cos({}^t\vartheta_s) & \sin({}^t\vartheta_s) & 1 \\ -\sin({}^t\vartheta_s) & \cos({}^t\vartheta_s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\tag{2.88}
$$

Ugao obrtanja ${}^t\vartheta_s$, imajući u vidu da je njegova vrednost iz predhodnog koraka proračuna poznata, dobija se iz izraza:

$$ {}^{t}\vartheta_{s} = {}^{t-\Delta t}\vartheta_{s} + \Delta^{t}\vartheta_{s} \tag{2.89} $$

$\Delta^{t}\vartheta_{s}$ pretstavlja srednju vrednost inkrementalnih uglova obrtanja krajnjih poprečnih preseka elementa:

$$ \Delta^{t}\vartheta_{s} = \frac{1}{2}(\Delta^{t}\vartheta_{1} + \Delta^{t}\vartheta_{2}) = $$
$$ \frac{1}{2}[{}^{t}t^{K}_{31}(\Delta^{t}\vartheta_{X1} + \Delta^{t}\vartheta_{X2}) + {}^{t}t^{K}_{32}(\Delta^{t}\vartheta_{Y1} + \Delta^{t}\vartheta_{Y2}) + {}^{t}t^{K}_{33}\ \Delta^{t}\vartheta_{Z1} + \Delta^{t}\vartheta_{Z2})] $$

Veličine $\Delta^{t}\vartheta_{Xi}$, $\Delta^{t}\vartheta_{Yi}$ i $\Delta^{t}\vartheta_{Zi}$ $(i=1,2)$ odnose se na globalni koordinatni sistem.

Tražena matrica transformacije (2.79) dobija se odgovarajućim množenjem matrica (2.80) i (2.88):

$$ {}^{t}\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} {}^{t}a_{X} & {}^{t}a_{Y} & {}^{t}a_{Z} \\ {}^{t}b_{X} & {}^{t}b_{Y} & {}^{t}b_{Z} \\ {}^{t}c_{X} & {}^{t}c_{Y} & {}^{t}c_{Z} \end{bmatrix} \tag{2.91} $$

gde su:

$$ \begin{aligned} {}^{t}a_{X} &= {}^{t}a'_{X}\cos({}^{t}\vartheta_{s}) + {}^{t}b'_{X}\sin({}^{t}\vartheta_{s}) \\ {}^{t}a_{Y} &= {}^{t}a'_{Y}\cos({}^{t}\vartheta_{s}) + {}^{t}b'_{Y}\sin({}^{t}\vartheta_{s}) \\ {}^{t}a_{Z} &= {}^{t}a'_{Z}\cos({}^{t}\vartheta_{s}) + {}^{t}b'_{Z}\sin({}^{t}\vartheta_{s}) \\ {}^{t}b_{X} &= {}^{t}b'_{X}\cos({}^{t}\vartheta_{s}) - {}^{t}a'_{X}\sin({}^{t}\vartheta_{s}) \\ {}^{t}b_{Y} &= {}^{t}b'_{Y}\cos({}^{t}\vartheta_{s}) - {}^{t}a'_{Y}\sin({}^{t}\vartheta_{s}) \\ {}^{t}b_{Z} &= {}^{t}b'_{Z}\cos({}^{t}\vartheta_{s}) - {}^{t}a'_{Z}\sin({}^{t}\vartheta_{s}) \end{aligned} \tag{2.92} $$

2.8 MATRICA KRUTOSTI KONAČNOG ELEMENTA U GLOBALNOM KOORDINATNOM SISTEMU

Označimo sa $\Delta\boldsymbol{q}^{*}$ vektor generalisanih pomeranja čiji su elementi projekcije inkrementalnih parametara pomeranja krajnjih poprečnih preseka elementa u pravcima globalnih koordinatnih osa:

$$\Delta \boldsymbol{q} = [\Delta u_{X1}\ \Delta u_{Y1}\ \Delta u_{Z1}\ \Delta\psi_{X1}\ \Delta\psi_{Y1}\ \Delta\psi_{Z1}\ \Delta w_{11}\ldots\Delta w_{i1}\ldots\Delta w_{n1}$$
$$[\Delta u_{X2}\ \Delta u_{Y2}\ \Delta u_{Z2}\ \Delta\psi_{X2}\ \Delta\psi_{Y2}\ \Delta\psi_{Z2}\ \Delta w_{12}\ldots\Delta w_{i2}\ldots\Delta w_{n2}]^T$$

Veza izmedju vektora pomeranja u globalnom i lokalnom koordinatnom sistemu odredjena je relacijom:

$$\Delta \boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\Delta \boldsymbol{q}^* \tag{2.94}$$

gde je $\boldsymbol{T}$ ukupna matrica transformacije koja se može pretstaviti pomoću matrice transformacije date izrazom (2.91):

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\ & \boldsymbol{t} & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & & \cdot\cdot & 1 & \cdot\cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & \boldsymbol{t} & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\ & & & & & & \boldsymbol{t} & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot \\ & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & \cdot\cdot & 1 & \cdot\cdot \\ & & & & & & & & \vdots & \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

Ako se sa $\Delta \boldsymbol{F}^*$ označi vektor čiji su elementi projekcije inkrementalnih čvornih sila konačnog elementa u pravcima globalnog koordinatnog sistema:

$$\Delta \boldsymbol{F}^* = [\Delta F_{X1}\ \Delta F_{Y1}\ \Delta F_{Z1}\ \Delta M_{X1}\ \Delta M_{Y1}\ \Delta M_{Z1}\ \Delta B_{11}\ldots\Delta B_{i1}\ldots\Delta B_{n1}$$
$$[\Delta F_{X2}\ \Delta F_{Y2}\ \Delta F_{Z2}\ \Delta M_{X2}\ \Delta M_{Y2}\ \Delta M_{Z2}\ \Delta B_{12}\ldots\Delta B_{i2}\ldots\Delta B_{n2}]^T$$

i koristeći uslov jednakosti virtualnog rada sila pri virtualnim pomeranjima, u odnosu na lokalni i globalni koordinatni sistem, dobija se:

$$\delta U = \delta \Delta \boldsymbol{q}^T \Delta \boldsymbol{F} = \delta \Delta \boldsymbol{q}^{*T} \Delta \boldsymbol{F}^* = \delta \Delta \boldsymbol{q}^{*T} \boldsymbol{T}^T \Delta \boldsymbol{F} \quad (2.97)$$

odnosno:

$$\Delta \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{T}^T \Delta \boldsymbol{F} \quad (2.98)$$

Koristeći izraze (2.94) i (2.98) mogu se uspostaviti veze izmedju matrice krutosti elementa u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu:

$$\Delta \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{K}^* \Delta \boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{T}^T \Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}^T (\boldsymbol{K} \Delta \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{T} \Delta \boldsymbol{q}^*$$

odnosno:

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{T} \quad (2.99)$$

Matrica $\boldsymbol{T}$ je ortogonalna, $\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^T$, pa se mogu pisati i inverzni oblici jednačina (2.94), (2.98) i (2.99):

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{q}^* &= \boldsymbol{T}^T \Delta \boldsymbol{q} \\ \Delta \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{T} \Delta \boldsymbol{F}^* \\ \boldsymbol{K} &= \boldsymbol{T} \boldsymbol{K}^* \boldsymbol{T}^T \end{aligned} \quad (2.100)$$

2.9 SISTEMNA TAČKA PRESEKA

Kao što je već ranije napomenuto konačan elemenat koji je opisan u ovom radu dozvoljava analizu sistema kombinovanih od tankozidnih elemenata otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka. U opštem slučaju težišne tačke dva susedna elementa ne moraju se medjusobno poklapati, pa je prethodno potrebno vektor pomeranja $\Delta \boldsymbol{q}$ transformisati u vektor $\Delta \boldsymbol{q}_S$, čije se sve komponente odnose na zajedničku, sistemnu tačku S preseka:

$$\Delta \boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}_S \Delta \boldsymbol{q}_S \quad (2.101)$$

Ako se koordinate težišne tačke preseka, u odnosu na koordinatni sistem xsy paralelan glavnim osama inercije, obeleže sa x_c i y_c, mogu se uspostaviti sledeće relacije; za konačan elemenat I:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \Delta u_s - y_c \Delta\vartheta_s \\
\Delta v &= \Delta v_s + x_c \Delta\vartheta_s \\
\Delta w_o &= \Delta w_{os} + y_c \psi_{xs} - x_c \psi_{ys} \\
\Delta\psi_x &= \Delta\psi_{xs} \\
\Delta\psi_y &= \Delta\psi_{ys} \\
\Delta\vartheta &= \Delta\vartheta_s \\
\Delta w_i &= \Delta w_{is} \qquad i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned} \tag{2.102}$$

i za konačan elemenat II:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \Delta u_s - y_c \Delta\vartheta_s \\
\Delta v &= \Delta v_s + x_c \Delta\vartheta_s \\
\Delta w_o &= \Delta w_{os} - y_c \Delta v_s' - x_c \Delta u_s' \\
-\Delta v' &= -\Delta v_s' - x_c \Delta\vartheta_s' \\
\Delta u' &= \Delta u_s' - y_c \Delta\vartheta_s' \\
\Delta\vartheta &= \Delta\vartheta_s \\
\Delta w_i &= \Delta w_{is} \qquad i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned} \tag{2.103}$$

gde, sobzirom da smo usvojili linearnu promenu ugla obrtanja $\Delta\vartheta$ izmedju krajnjih čvorova elementa, možemo pisati:

$$\Delta\vartheta_s' = \frac{1}{L}(\Delta\vartheta_{s2} - \Delta\vartheta_{s1}) \tag{2.104}$$

Izrazima (2.102) i (2.103) odredjene su matrice transformacije $\boldsymbol{T}_s$ za konačan elemenat I i konačan elemenat II:

$$
{}^{1}\boldsymbol{T}_{s} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_c & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_c & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & y_c & -x_c & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_c & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_c & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & y_c & -x_c & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\mathbf{T}_{s} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_c & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_c & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & y_c & -x_c & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{L}x_c & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L}x_c & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{L}y_c & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L}y_c & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_c & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_c & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & y_c & -x_c & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L}x_c & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{L}x_c & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L}y_c & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{L}y_c & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{bmatrix}
$$

U izrazima (2.94), (2.98), (2.99) i (2.100) matricu transformacije $\boldsymbol{T}$ treba zameniti matricom transformacije $\boldsymbol{T}_u$:

$$\boldsymbol{T}_u = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}_s \tag{2.105}$$

koja uspostavlja vezu izmedju lokalnog i globalnog koordinatnog sistema i istovremeno uključuje transformaciju svih komponenata na sistemnu tačku preseka.

2.10 MATRICA KRUTOSTI SISTEMA

U prethodnim poglavljima izvedena je matrica transformacije koja definiše položaje lokalnih koordinatnih sistema, u kojima je analiza elemenata najjednostavnija, u odnosu na zajednički globalni koordinatni sistem, čime su ujedno odredjene globalne matrice krutosti pojedinih elemenata.

Da bi se izvršila analiza kompletne konstrukcije neophodno je definisati matricu krutosti sistema. Matrica krutosti sistema $\hat{\boldsymbol{K}}$ dobija se kada se elementi matrice krutosti pojedinih elemenata, koji su izraženi preko oznaka čvorova u globalnom koordinatnom sistemu, postave na odgovarajuću poziciju unutar matrice sistema, i elementi koji padnu u istu poziciju saberu:

$$\hat{\boldsymbol{K}} = \sum_m \boldsymbol{K}_m^* \tag{2.106}$$

m označava ukupan broj elemenata u sistemu.

Na isti način formira se i vektor ravnotežnih čvornih sila sistema:

$$\hat{\boldsymbol{Q}} = \sum_m \boldsymbol{Q}_m^* \tag{2.107}$$

Lagrangeove inkrementalne jednačine ravnoteže sistema date su izrazom:

$$({}^t\hat{\boldsymbol{K}}_L + {}^t\hat{\boldsymbol{K}}_{NL})\Delta\hat{\boldsymbol{q}} = {}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{R}} - {}^t\hat{\boldsymbol{Q}} \tag{2.108}$$

gde je sa $\Delta\hat{q}$ označen vektor generalisanih parametara pomeranja čvorova sistema u odnosu na globalni koordinatni sistem. U oslonačkim čvorovima odgovarajuća pomeranja su poznata, što smanjuje ukupan broj nepoznatih, a samim tim i ukupan broj jednačina sistema.

2.11 VEKTOR ČVORNIH SILA I NUMERIČKA INTEGRACIJA

Drugi član na desnoj strani inkrementalnih jednačina ravnoteže sistema (2.108) pretstavlja vektor ravnotežnih čvornih sila, koji izražen preko unutrašnjih napona, ima oblik:

$$ {}^{t}\hat{\boldsymbol{Q}} = \sum_{m} \iiint {}^{t}\boldsymbol{B}_{L}^{T}\, {}^{t}\hat{\sigma}\, d\, {}^{t}V \tag{2.109}$$

Da bi sistem bio u ravnoteži ovaj vektor treba da bude jednak vektoru spoljnjih sila:

$$ {}^{t}\hat{\boldsymbol{\phi}} = {}^{t}\hat{\boldsymbol{R}} - {}^{t}\hat{\boldsymbol{Q}} = 0 \tag{2.110}$$

Uslovi (2.110) nisu ispunjeni u strogo matematičkom smislu, usled čega dolazi do otstupanja od tačnog rešenja, zavisno od stepena nelinearnosti problema.

Da bi se smanjio vektor neuravnoteženih čvornih sila ${}^{t}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ vrše se iteracije sve dok se ne ispune postavljeni uslovi konvergencije.

Vektor čvornih sila i geometrijska matrica krutosti elementa dobijaju se numeričkom integracijom. U radu je korišćen Newton-Cotesov integracioni postupak sa maksimalno sedam ekvidistantnih integracionih tačaka duž ose elementa, maksimalno sedam integracionih tačaka duž svake strane poligonalnog preseka i tri integracione tačke po debljini poligonalne strane.

3. NUMERIČKI POSTUPAK REŠAVANJA GEOMETRIJSKI NELINEARNIH PROBLEMA

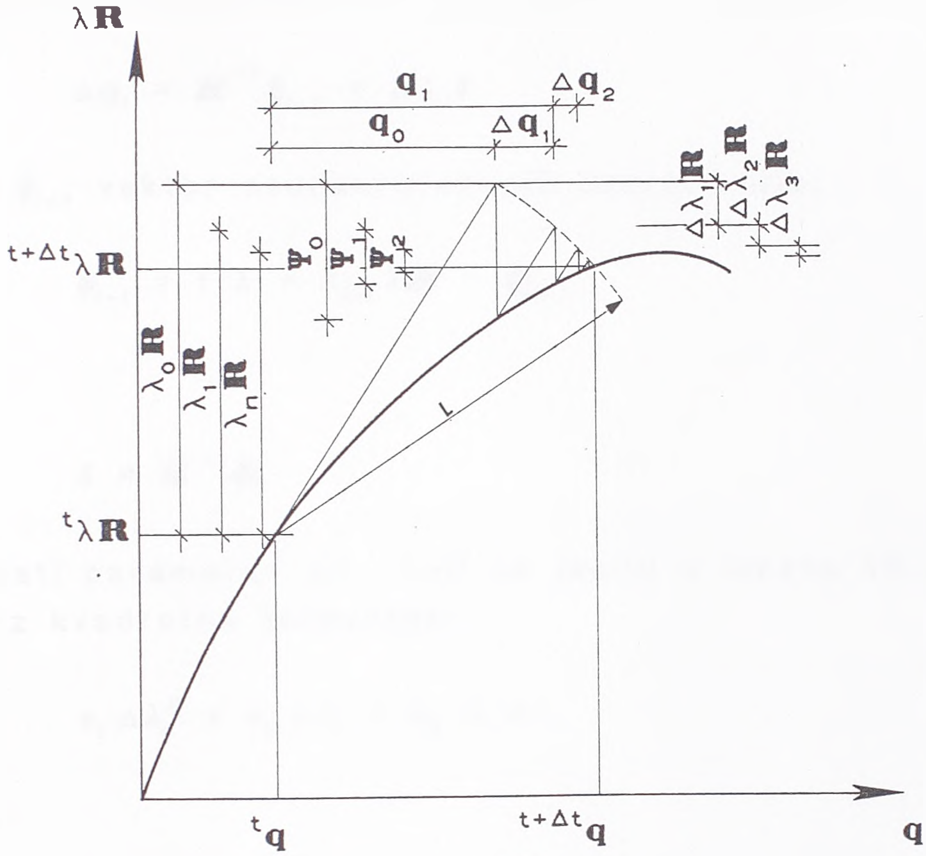
3.1 UVOD

Primenom principa virtualnih pomeranja, uz fizičku diskretizaciju sistema konačnim elementima, izvedene su osnovne inkrementalne forme jednačina ravnoteže sistema, linearne po inkrementima pomeranja. Problemi geometrijske nelinearnosti svode se sada na sukcesivno rešavanje sistema linearnih jednačina, primenom neke od brojnih metoda proračuna.

Klasičnim inkrementalno iterativnim metodama u opštem slučaju nije moguće dobiti rešenje u neposrednoj blizini granične tačke, bez obzira na veličinu inkrementa i broj iteracija, odnosno u područjima izrazitih nelinearnosti ove metode najčešće dovode do divergencije rešenja. Jedan od veoma efikasnih numeričkih postupaka rešavanja geometrijski nelinearnih problema, uz mogućnost analize predkritičnog i postkritičnog ponašanja konstrukcija, je metoda konstantnog luka koju je prvi predložio E. Ricks, a prilagodio metodi konačnih elemenata M. Crisfield. Ova metoda u kombinaciji sa metodom konstantnog inkrementa spoljnjeg rada primenjena je u ovom radu i u izabranim primerima dala je dobre rezultate.

3.2 METODA KONSTANTNOG LUKA

Inkrementalnim jednačinama ravnoteže (2.108) dodat je nov uslov kojim se preko zadate veličine l ograničavaju veličine inkrementa u $N+1$ dimenzionalnom prostoru. Kao nova nepoznata javlja se parametar λ, (sl.11).



sl.11

Iz (sl.11) sledi:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q}_i &= \boldsymbol{q}_{i-1} + \Delta \boldsymbol{q}_i \\
{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{q} &= {}^{t}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_n \\
\lambda_i &= \lambda_{i-1} + \Delta\lambda_i \\
{}^{t+\Delta t}\lambda &= {}^{t}\lambda + \lambda_n \qquad\qquad i = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Dopunski uslov može se napisati u obliku:

$$\boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{q}_i + \lambda_i^2 \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{R} = l^2 \tag{3.2}$$

ili, kako predlaže Crisfield:

$$\boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{q}_i = l^2 \tag{3.3}$$

koristeći modifikovanu Newton-Raphsonovu metodu inkrementalna pomeranja dobijaju se iz jednačine:

$$\Delta \boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}_{i-1} + \Delta\lambda_i \boldsymbol{\delta} \tag{3.4}$$

gde je $\boldsymbol{\phi}_{i-1}$ vektor neuravnoteženih čvornih sila:

$$\boldsymbol{\phi}_{i-1} = ({}^t\lambda + \lambda_{i-1})\boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}_{i-1} \tag{3.5}$$

i:

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{R} \tag{3.6}$$

Nepoznati parametar $\Delta\lambda_i$, koji se javlja u izrazu (3.4), dobija se iz kvadratne jednačine:

$$a_1\Delta\lambda_i^2 + a_2\Delta\lambda_i + a_3 = 0 \tag{3.7}$$

gde su:

$$\begin{aligned} a_1 &= \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\delta} \\ a_2 &= 2(\boldsymbol{q}_{i-1} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}_{i-1})^T\boldsymbol{\delta} \\ a_3 &= (\boldsymbol{q}_{i-1} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}_{i-1})^T(\boldsymbol{q}_{i-1} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}_{i-1}) - l^2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Od dva korena jednačine usvaja se onaj koji odredjuje pozitivan ugao izmedju vektora $\boldsymbol{q}_{i-1}$ i $\boldsymbol{q}_i$. Veličina l koja je u prvom inkrementu odredjena izrazom:

$$l = \lambda_0\sqrt{\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\delta}} \tag{3.9}$$

u svakom sledećem ciklusu opterećenja odredjuje se tako da se uslov konvergencije zadovolji u približno istom broju iteracija:

$$l_i = l_{i-1}\frac{3\div 5}{J_{i-1}} \tag{3.10}$$

pri čemu je J_{i-1} broj iteracija u prethodnom ciklusu.

Početni parametar opterećenja λ_0 u okviru svakog inkrementa odredjen je jednačinom:

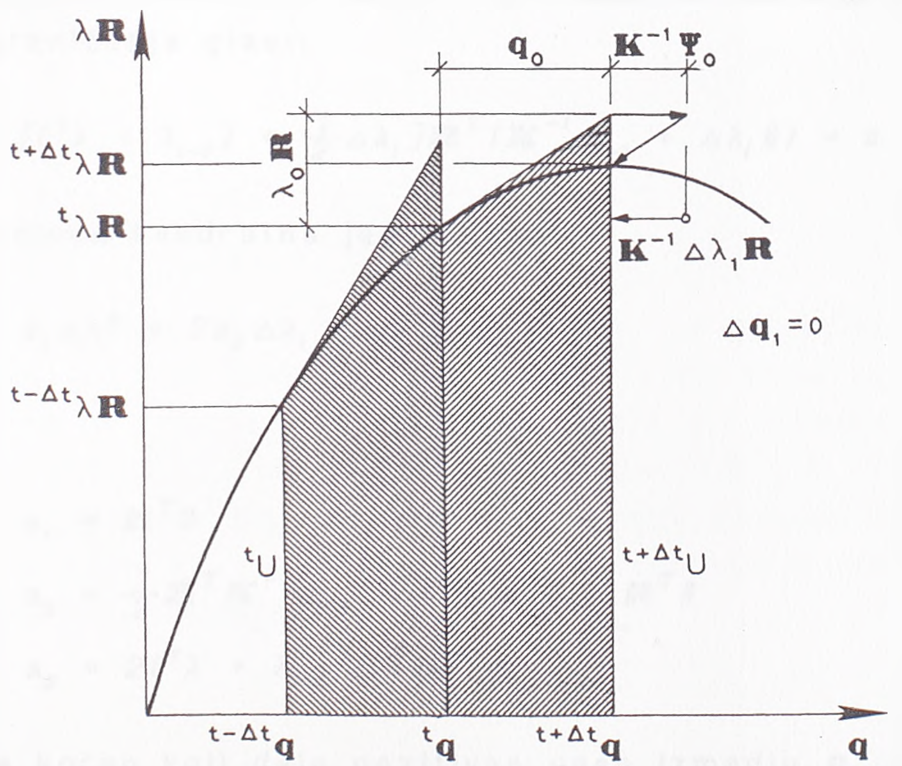
$$\lambda_o = \pm \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\delta}}} \tag{3.11}$$

Promena znaka uslovljena je promenom znaka inkrementalnog rada ΔU, čija se vrednost ispituje na početku svakog inkrementa opterećenja:

$$\Delta U = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{R} \tag{3.12}$$

3.3 METODA KONSTANTNOG INKREMENTA SPOLJNJEG RADA

U blizini graničnih tačaka bolja konvergencija se postiže ako se umesto metode konačnog luka primeni metoda konstantnog inkrementa spoljnjeg rada, (sl.12).



sl.12

Ako sa ${}^{t+\Delta t}U$ označimo inkrementalni rad spoljnjih sila, jednačina ograničenja (3.3), za prvu iteraciju u okviru posmatranog inkrementa, u ovom slučaju glasi:

$$({}^{t}\lambda + \frac{1}{2}\lambda_o)\lambda_o \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{\delta} = {}^{t+\Delta t}U \tag{3.13}$$

čime je odredjena kvadratna jednačina po nepoznatom parametru opterećenja λ_o:

$$a_1 \lambda_o^2 + 2a_2 \lambda_o + a_3 = 0 \tag{3.14}$$

gde su:

$$\begin{aligned} a_1 &= \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{\delta} \\ a_2 &= {}^{t}\lambda \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{\delta} \\ a_3 &= -2\,{}^{t+\Delta t}U \end{aligned} \tag{3.15}$$

Od dva moguća realna korena jednačine treba uzeti onaj koji je po apsolutnoj vrednosti manji. U sledećim iteracijama jednačina ograničenja glasi:

$$[({}^{t}\lambda + \lambda_{i-1}) + \frac{1}{2}\Delta\lambda_i]\boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}_{i-1} + \Delta\lambda_i \boldsymbol{\delta}) = 0 \tag{3.16}$$

a odgovarajuća kvadratna jednačina:

$$a_1 \Delta\lambda_i^2 + 2a_2 \Delta\lambda_i + a_3 = 0 \tag{3.17}$$

gde su:

$$\begin{aligned} a_1 &= \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{\delta} \\ a_2 &= \frac{1}{2}\boldsymbol{R}^T \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}_{i-1} + ({}^{t}\lambda + \lambda_{i-1})\boldsymbol{R}^T \boldsymbol{\delta} \\ a_3 &= 2({}^{t}\lambda + \lambda_{i-1})\boldsymbol{R}^T \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\phi}_{i-1} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Usvaja se koren koji daje pozitivan ugao izmedju $\boldsymbol{q}_{i-1}$ i $\boldsymbol{q}_i$.

Prelazak sa metode konačnog luka na metodu konstantnog inkrementa spoljnjeg rada vrši se automatski kad je ispunjen uslov:

$$abs(\frac{\|{}^{t+\Delta t}U\|}{\|{}^{t}U\|} - 1) \leq 0.15 \div 0.25 \tag{3.19}$$

Na početku svakog inkrementa odredjuje se vrednost inkrementalnog rada na osnovu njegove vrednosti iz prethodnog koraka proračuna:

$$ {}^{t+\Delta t}U = \frac{{}^{t}\lambda}{{}^{t-\Delta t}\lambda}\,{}^{t}U \qquad (3.20) $$

gde je ${}^{t}U$ odredjeno jednačinom (3.13). Dalji postupak proračuna isti je kao i kod metode konstantnog luka.

3.4 KRITERIJUMI KONVERGENCIJE

Iterativni proces u okviru posmatranog inkrementa opterećenja smatramo okončanim kada se ispune postavljeni kriterijumi konvergencije:

$$ \frac{\Delta \boldsymbol{q}_i^T[({}^{t}\lambda + \lambda_i)\boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}_{i-1}]}{\boldsymbol{q}_o^T[({}^{t}\lambda + \lambda_o)\boldsymbol{R} - {}^{t}\boldsymbol{Q}]} \le ETOL \qquad (3.21) $$

i:

$$ \frac{\|({}^{t}\lambda + \lambda_i)\boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}_i\|_2}{\|({}^{t}\lambda + \lambda_o)\boldsymbol{R} - {}^{t}\boldsymbol{Q}\|_2} \le RTOL \qquad (3.22) $$

gde je sa $\| \ \|_2$ označena Euclideova norma, a sa $ETOL$ i $RTOL$ mere konvergencije koje se mogu programski zadati.

Kod Newton-Raphsonove metode, koja se takodje koristi u datom programu, u slučaju da konvergencija nije postignuta u zadatom broju iteracija, a proces nije divergentan, iterativni postupak se automatski ponavlja sa upola manjim inkrementom opterećenja.

4. BROJNI PRIMERI

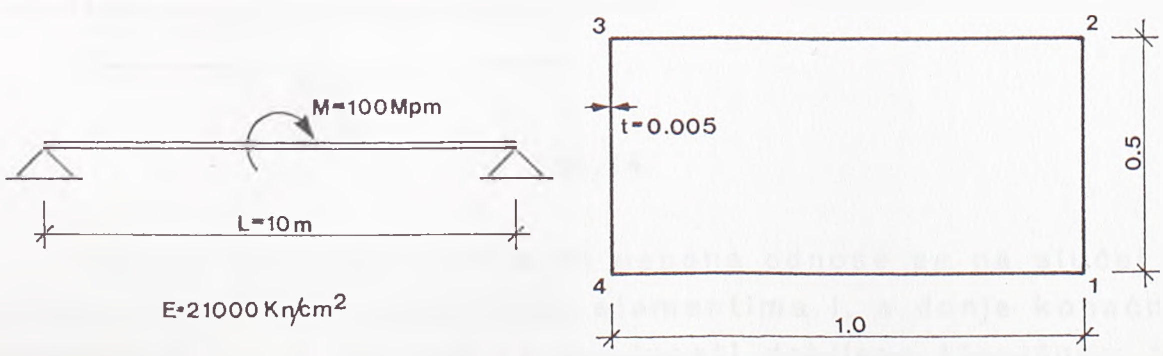
4.1 UVOD

Na osnovu teorijskih razmatranja u predhodnim poglavljima napisan je program *TEZOP*, čiji je listing sa opisom ulaznih podataka dat u prilogu, na kraju rada. Program je napisan u programskom jeziku *Fortran 77*.

Program se koristi za linearnu i nelinearnu analizu konstrukcija sastavljenih od nosača otvorenog i zatvorenog tankozidnog poprečnog preseka. U okviru geometrijski nelinearnih problema, moguće je analizirati i postkritično ponašanje konstrukcija.

Za ilustraciju svega do sada iznetog i radi provere napisanog programa uradjeno je nekoliko elementarnih primera, čija se rešenja mogu naći u literaturi. Za sve primere prikazani su samo karakteristični rezultati. Primeri su uradjeni na mikroračunaru *ATARI 1040ST*, memorije 1Mb.

4.2 PRIMER 1.



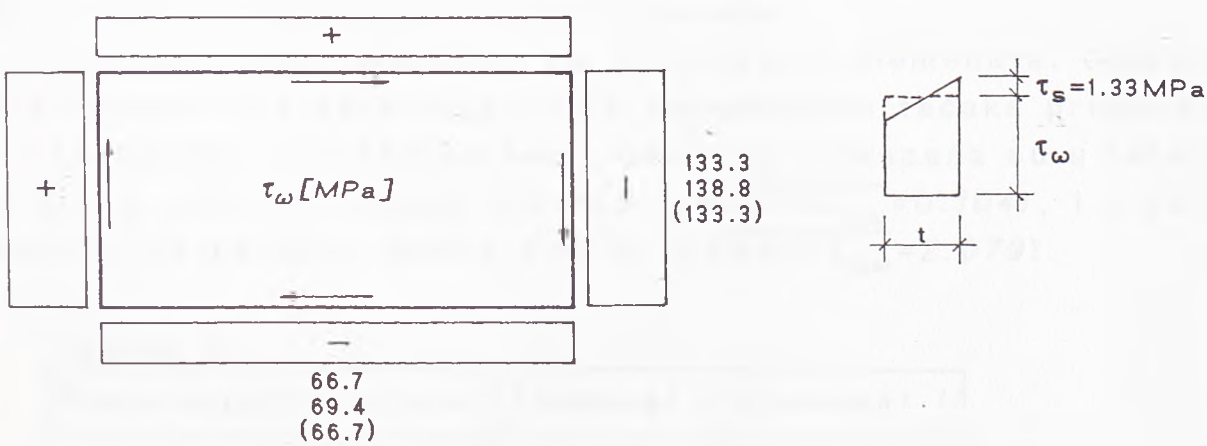
sl.13

Kao prvi primer izabran je tankozidni nosač sandučastog poprečnog preseka prikazanog na (sl.13). Nosač je viljuškasto oslonjen na krajevima. U sredini raspona opterećen je koncentrisanim momentom torzije *M*. Ugao obrtanja srednjeg poprečnog preseka ϑ, u zavisnosti od broja konačnih elemenata, i greška u odnosu na vrednost koja se dobija klasičnom teorijom tankozidnih nosača, dati su u tabeli 1.

Tabela 1.

Br. elem.	$\vartheta_{klas.}$	*Elemenat I*		*Elemenat II*	
		ϑ_I	*Greška %*	ϑ_{II}	*Greška %*
2	*0.01419*	*0.01384*	*2.47*	*0.01387*	*2.25*
4		*0.01402*	*1.20*	*0.01404*	*1.06*
6		*0.01410*	*0.63*	*0.01410*	*0.63*
8		*0.01413*	*0.42*	*0.01413*	*0.42*

Vrednosti smičućih napona τ_w, ravnomerno raspoređjenih po debljini zida, pri aproksimaciji nosača sa 16 konačnih elemenata, prikazana su na (sl.14).

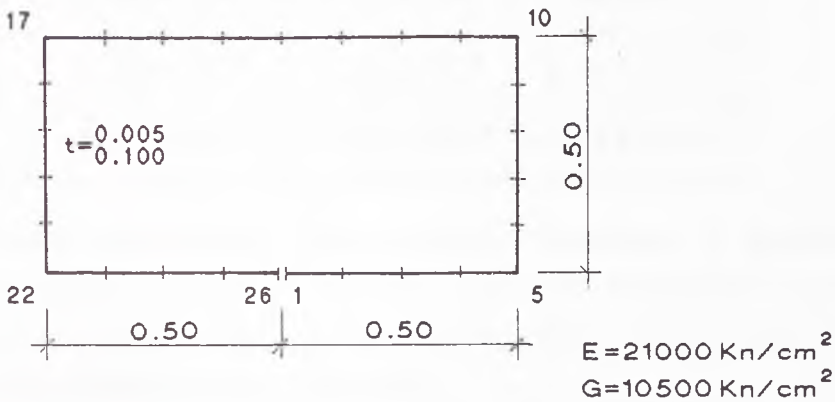


sl.14

Gornje vrednosti smičućih napona odnose se na slučaj aproksimacije nosača konačnim elementima I, a donje konačnim elementima II. U zagradi su vrednosti dobijene klasičnom teorijom.

4.3 PRIMER 2.

Rasecanjem nosača sa (sl.13) duž podužne izvodnice dobija se nosač otvorenog poprečnog preseka, (sl.15).



sl.15

Da bi dobili što tačniju raspodelu smičućih napona od ograničene torzije, ravnomerno rasporedjenih po debljini zida, duž poprečnog preseka usvojeno je 26 čvornih tačaka. Izmedju čvornih tačaka, kao posledica usvojene pretpostavke o linearnoj promeni funkcije deplanacije, smičući naponi od ograničene torzije su konstantni, i pretstavljaju srednje vrednosti u opštem slučaju nelinearne promene.

Nosač je aproksimiran sa 16 konačnih elemenata. Obrtanje i pomeranja karakterističnih poligonalnih tačaka preseka, na rastojanju $z=3.75m$ od levog oslonca, prikazana su u tabeli 2, za debljinu zidova $t=0.005$ $(L\sqrt{GK/EI_{\omega\omega}}=0.104)$, i u tabeli 3, za debljinu zidova $t=0.10$ $(L\sqrt{GK/EI_{\omega\omega}}=2.079)$.

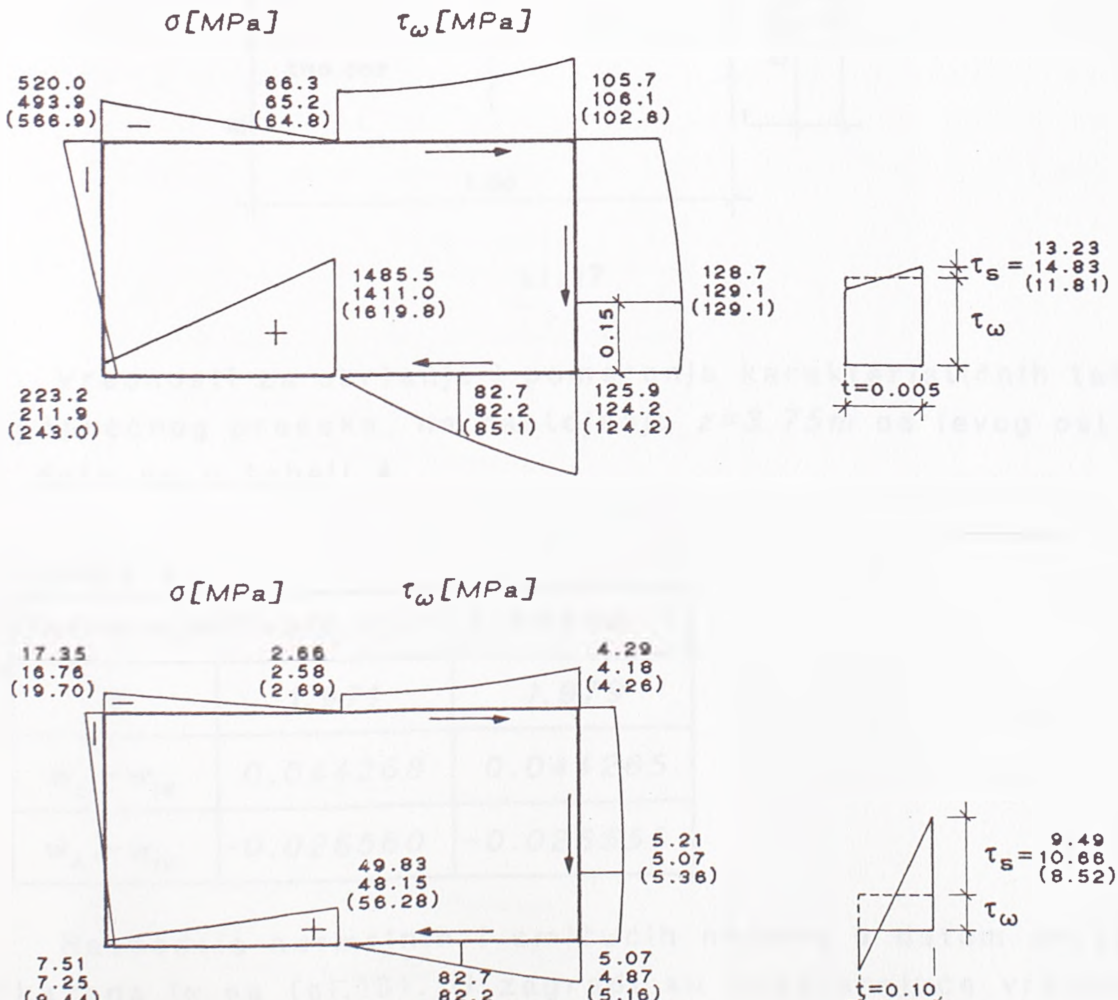
Tabela 2.

Pomeranja	Klasič.teor.	Elemenat I	Elemenat II
ϑ	0.1567	0.1658	0.1580
$w_1, -w_{26}$	0.01125	0.01121	0.01065
$w_5, -w_{22}$	0.00169	0.00172	0.00164
$w_{10}, -w_{17}$	-0.00394	-0.00396	-0.00376

Tabela 3.

Pomeranja	Klasič.teor.	Elemenat I	Elemenat II
ϑ	0.00546	0.00567	0.00549
$w_1, -w_{26}$	4.06×10^{-4}	3.96×10^{-4}	3.82×10^{-4}
$w_5, -w_{22}$	6.09×10^{-5}	6.15×10^{-5}	5.93×10^{-5}
$w_{10}, -w_{17}$	-1.42×10^{-4}	-1.40×10^{-4}	-1.35×10^{-4}

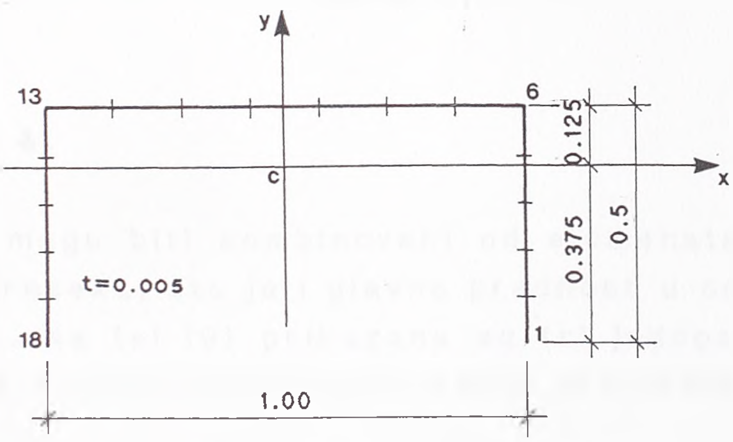
Raspodela smičućih i normalnih napona, u posmatranom preseku, prikazana je na (sl.16). Gornje vrednosti odnose se na elemenat I, donje na elemenat II, dok su u zagradi vrednosti dobijene klasičnom teorijom.



sl.16

4.4 PRIMER 3.

Posmatra se nosač, opterećen koncentrisanim momentom torzije koji deluje u sredini raspona, isto kao u predhodnom primeru, [-poprečnog preseka. Nosač je zamenjen sa 16 konačnih elemenata I. Duž stranica poprečnog preseka usvojeno je 18 čvornih tačaka u kojima se traže pomeranja izazvana deplanacijom, (sl.17). Kao što je već rečeno, veći broj čvornih tačaka daje tačniju raspodelu smičućih napona duž preseka.



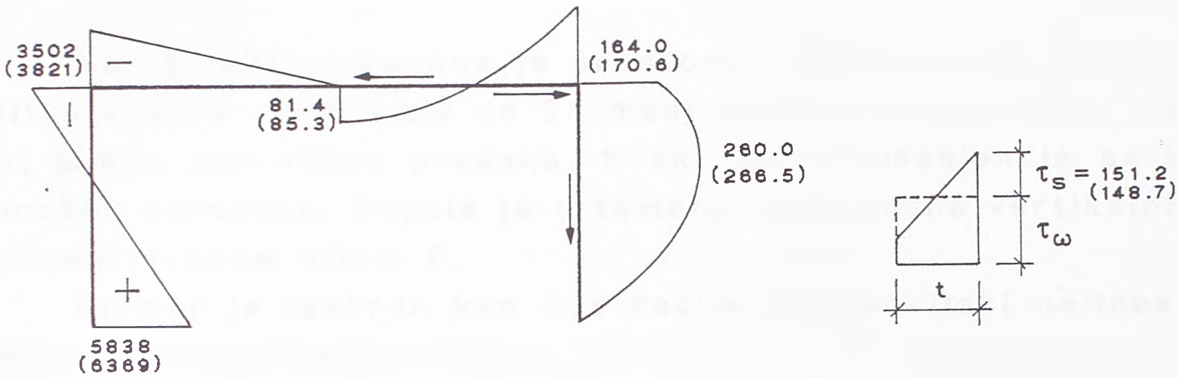
sl.17

Vrednosti za obrtanje i pomeranja karakterističnih tačaka poprečnog preseka, na rastojanju $z=3.75m$ od levog oslonca, data su u tabeli 4.

Tabela 4.

Pomeranja	*Klasič.teor.*	*Elemenat I*
ϑ	*1.971*	*1.979*
$w_1, -w_{18}$	*0.044268*	*0.044265*
$w_6, -w_{13}$	*-0.026560*	*-0.026555*

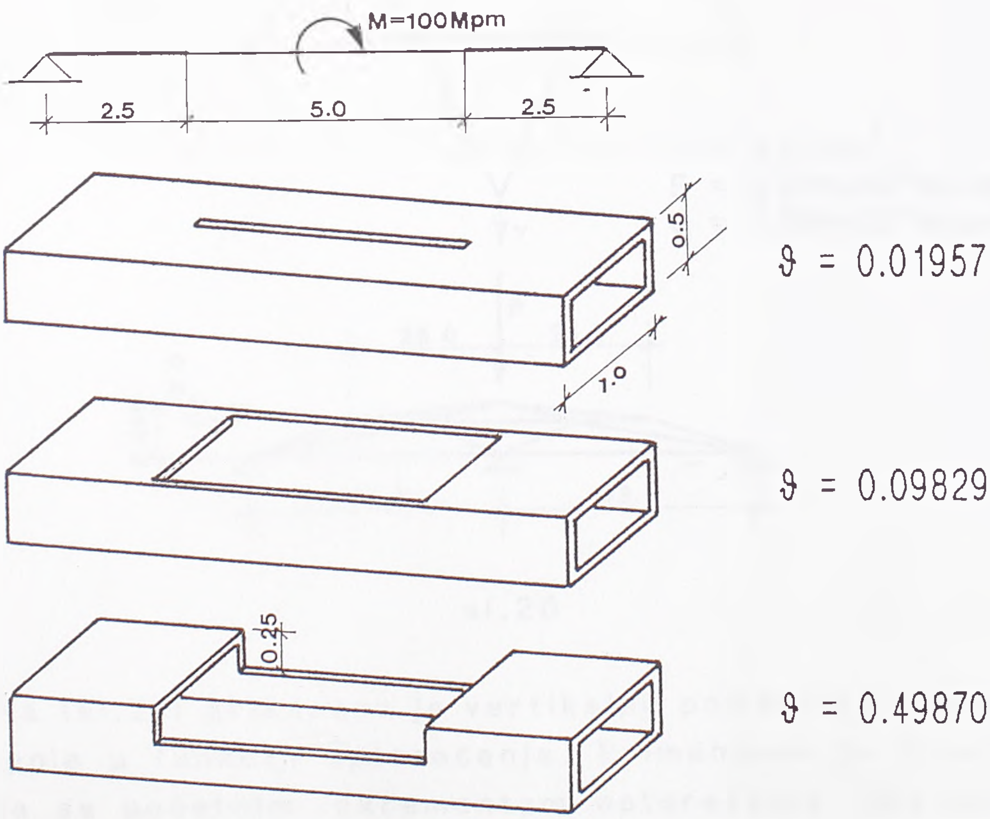
Raspodela normalnih i smičućih napona u datom preseku prikazana je na (sl.18). U zagradi su odgovarajuće vrednosti prema klasičnoj teoriji.



sl.18

4.5 PRIMER 4.

Nosači mogu biti kombinovani od elemenata otvorenog i zatvorenog preseka, što je i glavna prednost u odnosu na klasičnu teoriju. Na (sl.19) prikazana su tri jednostavna primera sa odgovarajućim uglovima obrtanja središnjeg preseka.

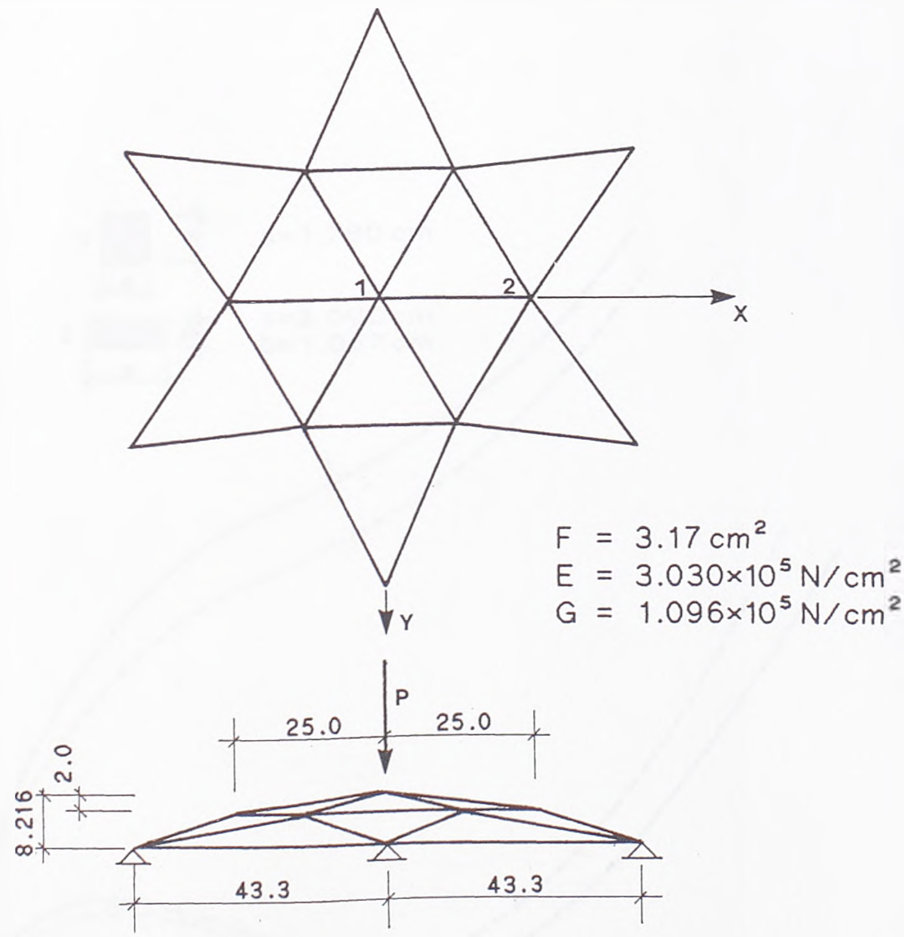


sl.19

4.6 PRIMER 5.

Na (sl.20) prikazana je prostorna konstrukcija u obliku plitke kupole, formirane od 24 medjusobno kruto vezana štapa, punog poprečnog preseka. Svaki štap zamenjen je sa tri konačna elementa. Kupola je u temenu opterećena vertikalnom koncentrisanom silom P.

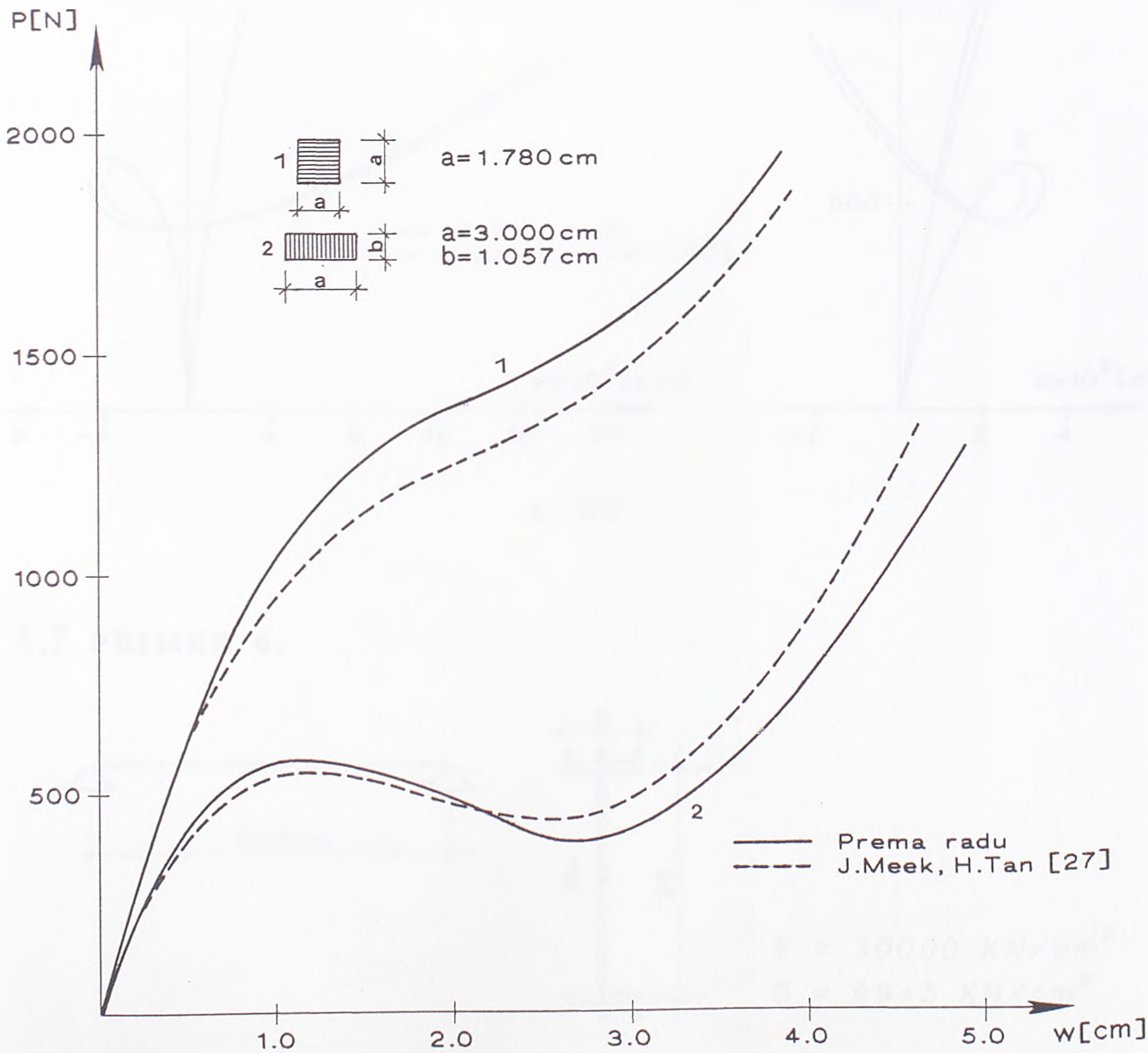
Primer je izabran kao ilustracija geometrijski nelinearnog ponašanja konstrukcija.



sl.20

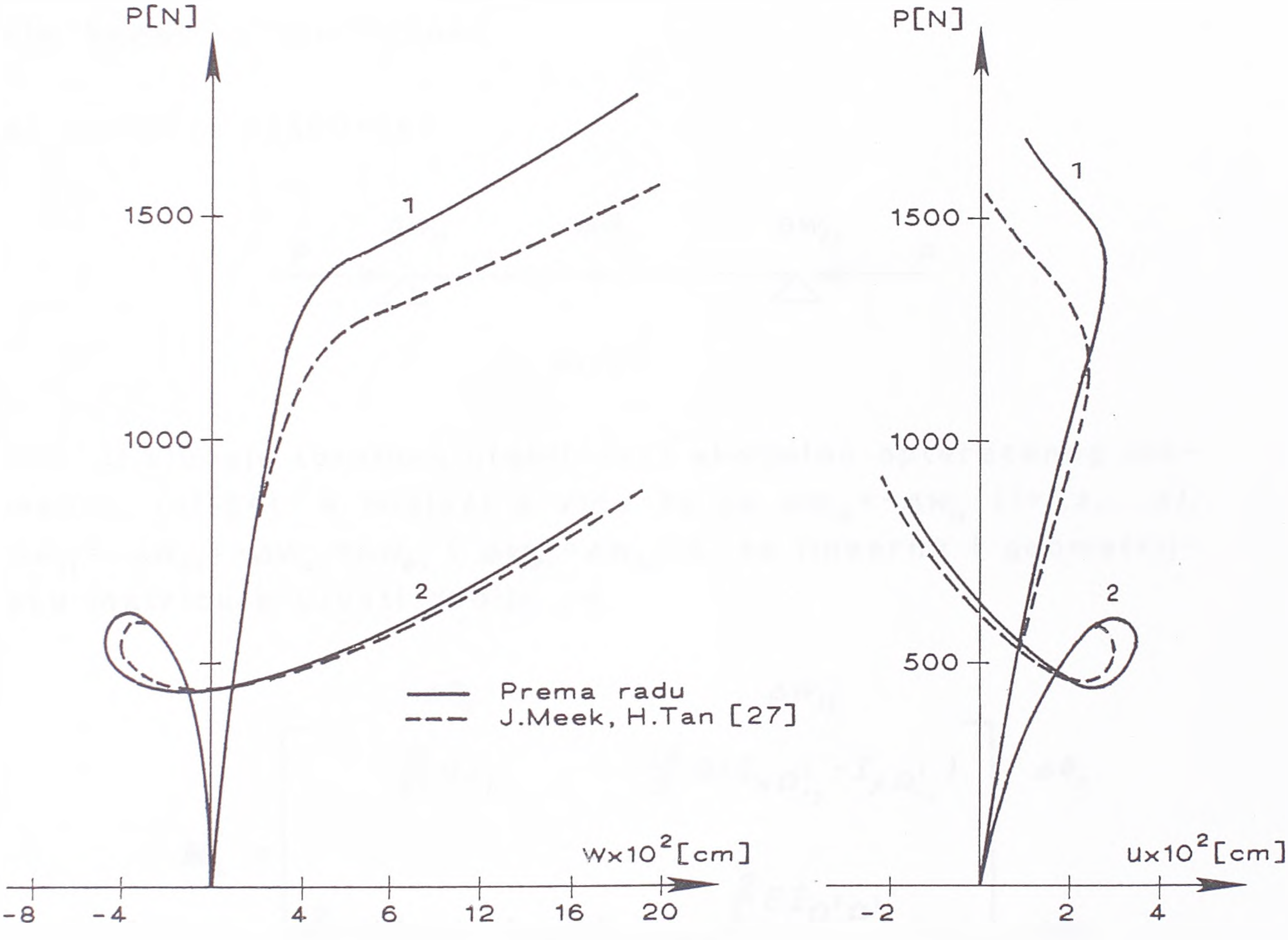
Na (sl.21) prikazano je vertikalno pomeranje temene tačke kupole u funkciji opterećenja. Primenjena je Crisfieldova metoda sa početnim inkrementom opterećenja $\Delta P=100KN$. Za svaki korak opterećenja potrebno je u proseku tri iteracije, pri usvojenom kriterijumu konvergencije $etol=10^{-4}$ i $rtol=10^{-4}$. Na istoj slici isprekidanom linijom označene su krive koje su dobili J. Meek i H. Tan, [27].

U slučaju kvadratnog poprečnog preseka štapova ravnotežna kriva je stabilna u celom opsegu opterećenja. Smanjenjem vertikalne krutosti poprečnih preseka, zadržavajući pri tome istu vrednost za površinu, ravnotežna kriva, što je uočljivo sa slike, postaje izrazito nelinearna. Dostizanjem granične tačke konstrukcija gubi stabilnost. Iza granične tačke deformacije se o dvijaju bez priraštaja opterećenja, da bi posle donje granične tačke došlo ponovo do "ojačanja" konstrukcije.



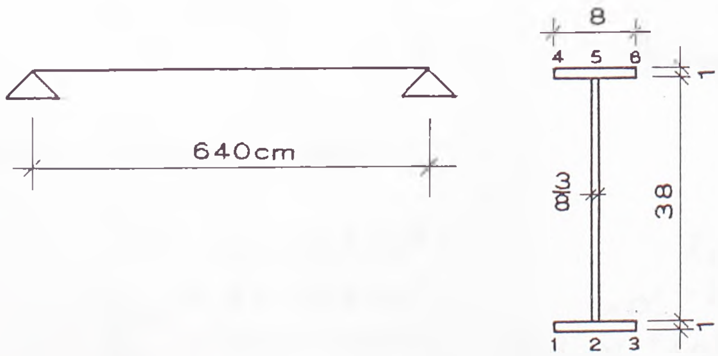
sl.21

Na (sl.22) prikazana su pomeranja, vertikalno i horizontalno, čvora 2 kupole.



sl.22

4.7 PRIMER 6.



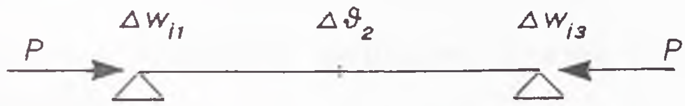
$E = 30000\ KN/cm^2$

$G = 9945\ KN/cm^2$

sl.23

Razmatraju se dva jednostavna primera, torzione i bočne stabilnosti, tankozidnog nosača viljuškasto oslonjenog na krajevima, (sl.23). U oba slučaja nosač je aproksimiran jednim konačnim elementom.

a) Torziona stabilnost



sl.24

U slučaju torzione stabilnosti aksijalno opterećenog elementa, (sl.24), a imajući u vidu da je $\Delta w_{i3}=-\Delta w_{i1}$ $(i=1,2,\ldots 6)$, $\Delta w_{11}=-\Delta w_{31}=-\Delta w_{41}=\Delta w_{61}$ i $\Delta w_{21}=\Delta w_{51}=0$, za linearnu i geometrijsku matricu krutosti dobija se:

$$
\mathbf{K}_L = \begin{array}{cc} \Delta\vartheta_2 & \Delta w_{11} & \\ \left[\begin{array}{c} \frac{16}{3L} G I_h \\ \\ \frac{2}{3} G(I_{x\Omega'_{,y}} - I_{y\Omega'_{,x}}) \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \frac{16}{3} G(I_{x\Omega'_{,y}} - I_{y\Omega'_{,x}}) \\ \\ \frac{2}{L} E I_{\Omega'\Omega'} + \frac{L}{6} G(I_{\Omega'_{,x}\Omega'_{,x}} + I_{\Omega'_{,y}\Omega'_{,y}}) \end{array}\right] & \begin{array}{c} \Delta\vartheta_2 \\ \\ \Delta w_{11} \end{array} \end{array}
$$

$$
\mathbf{K}_{NL} = -P \begin{array}{cc} \Delta\vartheta_2 & \Delta w_{11} & \\ \left[\begin{array}{c} \frac{16}{3LF}(I_{xx}+I_{yy}) \\ \\ 0 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 0 \\ \\ \frac{2}{LF} I_{\Omega'\Omega'} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \Delta\vartheta_2 \\ \\ \Delta w_{11} \end{array} \end{array}
$$

gde je za dati I nosač:

$$
\begin{aligned}
F &= 30.625\,cm^2 & I_{\Omega'\Omega'} &= 1.333\,cm^2 \\
I_{xx} &= 85.505\,cm^4 & I_{x\Omega'_{,y}} - I_{y\Omega'_{,x}} &= -19.5\,cm^2 \\
I_{yy} &= 7939.1\,cm^4 & I_{\Omega'_{,x}\Omega'_{,x}} + I_{\Omega'_{,y}\Omega'_{,y}} &= 0.250 \\
I_h &= 6090.0\,cm^4 & &
\end{aligned}
$$

Polazeći od uslova stabilnosti:

$$/\boldsymbol{K}_L + \boldsymbol{K}_{NL}/ = 0$$

za kritičnu silu izvijanja dobija se:

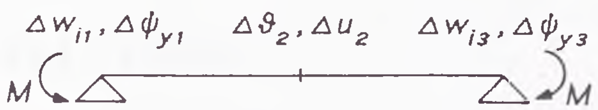
$$P = 336.5KN$$

što se u odnosu na vrednost dobijenu prema klasičnoj teoriji tankozidnih nosača:

$$P = \frac{F}{I_o}(GI_t + \frac{\pi^2}{L^2}EI_\omega) = 318.0KN$$

razlikuje za 5.8%.

b) Bočna stabilnost



sl.25

Elemenat je opterećen koncentrisanim momentima M na krajevima, (sl.25). Pri simetričnoj formi izvijanja imamo da je $\Delta w_{i3} = -\Delta w_{i1}$ $(i=1,2,\dots 6)$, $\Delta w_{11} = -\Delta w_{31} = -\Delta w_{41} = \Delta w_{61}$, $\Delta w_{21} = \Delta w_{51} = 0$ i $\Delta\psi_{y1} = -\Delta\psi_{y3}$, pa se za linearnu i geometrijsku matricu krutosti dobija:

$$\boldsymbol{K}_L = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Delta u_2 & \Delta\vartheta_2 & \Delta\psi_{y1} & \Delta w_{11} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{16}{3L}GF & 0 & -\frac{4}{3}GF & 0 \\ 0 & \frac{16}{3L}GI_h & 0 & \frac{16}{3}G(I_{x\Omega'_{,y}} - I_{y\Omega'_{,x}}) \\ -\frac{2}{3}GF & 0 & \frac{2}{L}EI_{xx} & 0 \\ -\frac{L}{6}GS_{\Omega'_{,x}} & \frac{2}{3}G(I_{x\Omega'_{,y}} - I_{y\Omega'_{,x}}) & -\frac{2}{L}EI_{x\Omega'} -\frac{L}{6}GS_{\Omega'_{,x}} & \frac{2}{L}EI_{\Omega'\Omega'} + \frac{L}{6}G(I_{\Omega'_{,x}\Omega'_{,x}} + I_{\Omega'_{,y}\Omega'_{,y}}) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{K}_{NL} = M \begin{array}{cccc} \Delta u_2 & \Delta \vartheta_2 & \Delta \psi_{y1} & \Delta w_{,1} \\ \end{array}$$

$$\mathbf{K}_{NL} = M \begin{bmatrix} 0 & -\frac{16}{3L} & 0 & 0 \\ -\frac{16}{3L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gde je:

$$I_{x\Omega'} = -5.333cm^3$$
$$S_{\Omega',x} = -1.0cm$$

Koristeći uslov stabilnosti za kritični moment izvijanja dobija se:

$$M = 2249.2KNcm$$

U odnosu na vrednost kritičnog momenta dobijenu klasičnom teorijom:

$$M = \frac{\pi}{L}\sqrt{EI_{xx}(GI_t + EI_\omega \frac{\pi^2}{L^2})} = 2269.5KNcm$$

razlika je 0.90%.

5. ZAKLJUČAK

Dobijeni rezultati, kao što se iz uradjenih primera vidi, veoma se dobro slažu sa rezultatima tehničke teorije tankozidnih nosača. Nešto veće razlike javljaju se kod elemenata otvorenog poprečnog preseka. To je i razumljivo, s obzirom da se u radu, za razliku od tehničke teorije tankozidnih štapova, ne zanemaruje deformacija klizanja u srednjoj površini štapa, pa su dobijeni rezultati tačniji.

U zaključku možemo konstatovati da predložena funkcija deplanacije i konačni elementi koji su na osnovu nje definisani omogućavaju sledeće:

- analizu konstrukcija kombinovanih od elemenata otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka
- dobijanje smičućih napona od ograničene torzije direktno iz odgovarajućih deformacija klizanja
- pošto otpada potreba za odredjivanjem centra smicanja i sektorske koordinate, sve relevantne veličine lako se mogu sračunati iz koordinata čvornih tačaka poligonalnog preseka i debljine zidova.

6. PRILOG

6.1 OPIS ULAZNIH PODATAKA ZA PROGRAM *TEZOP*

A KARTICA ZA ZAGLAVLJE (20A4)

Kolone	1-5	Tekst (HED)

B KONTROLNA KARTICA 1 (12I5)

Kolone	1-5	Tip elementa (IELE) 1 Elemenat I 2 Elemenat II
	6-10	Vrsta analize (KLIN) 0 Linearna 1 Nelinearna
	11-15	Broj čvorova (NUMNP)
	16-20	Broj oslonačkih čvorova (NBOUN)
	21-25	Broj elemenata (NUME)
	26-30	Broj grupa elemenata (NUMMAT) istih karakteristika
	31-35	Stepen izvršenja (MODEX) 0 Štampanje ulaznih podataka 1 Izvršenje programa
	36-40	Broj tabela sa integracionim tačkama za koje se štampaju naponi (NTABLE)
	41-45	Maksimalan broj tačaka u tabeli (JTABLE)
	46-50	Broj grupa sa čvorovima za koje se štampaju pomeranja (NPB) NPB=0 štampaju se pomeranja svih čvorova
	51-55	Broj integracionih tačaka u z-pravcu (INTZ) Maksimalan broj je 7
	56-60	Broj integracionih tačaka u s-pravcu (INTS) Maksimalan broj je 7

C ČVOROVI ZA KOJE SE ŠTAMPAJU POMERANJA (2I5)

Ako je NPB=0 kartice se ne unose. U suprotnom, učitava se NPB kartica.

Kolone 1-5 Prvi čvor u nizu
6-10 Poslednji čvor u nizu

D KONTROLNA KARTICA 2 (4I5, 3F10.0, I5)

Kolone 1-5 Metod proračuna
1 Newton-Raphson
2 Crisfield
6-10 Broj inkremenata opterećenja
11-15 Interval štampanja rezultata
16-20 Dozvoljeni broj iteracija
21-30 Uslov konvergencije po pomeranjima
31-40 Uslov konvergencije po silama
41-50 Referentno opterećenje pri konvergenciji
51-55 Maksimalno dozvoljeni broj podinkremenata

E BROJ STEPENI SLOBODE POMERANJA ČVOROVA (4I5)

Kolone 1-5 Broj čvora
6-10 Broj stepeni slobode pomeranja
11-16 Broj (KN) za automatsku generaciju podataka
KN=0, bez automatske generacije podataka
16-20 Poslednji čvor u nizu (samo ako je KN=0)

Broj stepeni slobode zadaje se za svaki čvor. Na jednoj kartici mogu biti podaci o samo jednom čvoru, ili, ako se koristi broj za automatsku generaciju podataka, o više čvorova.

$$N_1,\ N_1+1*KN,\ N_1+2*KN,\ \ldots\ldots,\ N_2$$

gde je N_1 prvi čvor u nizu, a N_2 poslednji čvor u nizu. Na poslednjoj kartici mora se nalaziti poslednji čvor konstrukcije.

F KOORDINATE ČVOROVA (I5, 3F10.0, I5)

Kolone 1-5 Broj čvora
6-15 X-koordinata
16-25 Y-koordinata
26-35 Z-koordinata
36-40 Broj (KN) za automatsku generaciju podataka

Na jednoj kartici nalaze se koordinate samo jednog čvora, ili, ako se koristi broj za automatsku generaciju podataka (KN), koordinate više čvorova. Broj KN generiše podatke za grupu čvorova koji se nalaze na jednakim rastojanjima duž prave linije:

$$N_1, \; N_1+1*KN, \; N_1+2*KN, \; \ldots\ldots, \; N_2$$

gde su, podaci za prvi čvor u nizu N_1 i zadnji čvor u nizu N_2 dati na dve uzastopne kartice. Poslednja kartica mora sadržati podatke o poslednjem čvoru u konstrukciji.

G GRANIČNI USLOVI (16I5)

Podaci o jednom čvoru dati su na jednoj ili više kartica, u zavisnosti od broja stepeni slobode pomeranja. Ovakvih grupa kartica ima koliko i oslonačkih čvorova (NBOUN).

Kolone	1-5	Broj čvora
	6-10	Pomeranje u pravcu X
	11-15	Pomeranje u pravcu Y
	16-20	Pomeranje u pravcu Z
	21-25	Obrtanje oko ose X
	26-30	Obrtanje oko ose Y
	31-35	Obrtanje oko ose Z
	36-40	Deplanacija čvorne tačke 1 preseka
	41-45	Deplanacija čvorne tačke 2 preseka
	....	....
	....	Deplanacija čvorne tačke N preseka
		0 Slobodno pomeranje
		1 Sprečeno pomeranje

H BROJ OPTEREĆENJA (I5)

Kolone 1-5 Broj koncentrisanih opterećenja

I PODACI O OPTEREĆENJU (2I5, F10.0)

Broj kartica jednak je broju koncentrisanih opterećenja, koji je zadat na prethodnoj kartici.

Kolone	1-5	Čvor na koji deluje opterećenje
	6-10	Broj stepeni slobode koji odgovara posmatranoj generalisanoj sili.

1 Sila u pravcu X-ose
2 Sila u pravcu Y-ose
3 Sila u pravcu Z-ose
4 Momenat oko X-ose
5 Momenat oko Y-ose
6 Momenat oko Z-ose
7 Bimomenat za čvornu tačku 1 preseka
8 Bimomenat za čvornu tačku 2 preseka
. ...
N+6 Bimomenat za čvornu tačku N preseka

J KARAKTERISTIKE MATERIJALA I PRESEKA (2F10.0, 2I5)

Broj kartica jednak je broju grupa elemenata istih karakteristika (NUMMAT).

Kolone 1-10 Modul elastičnosti
11-20 Poissonov koeficijent
21-25 Broj čvornih tačaka preseka
26-30 Broj stranica konture preseka

K PODACI O POPREČNIM PRESECIMA ELEMENATA

Sledeći niz kartica ponavlja se za svaku grupu elemenata istih karakteristika, čiji je broj definisan na prvoj kontrolnoj kartici.

K1 KOORDINATE SISTEMNE TAČKE PRESEKA (2F10.0)

Kolone 1-10 x-koordinata
11-20 y-koordinata

K2 KOORDINATE ČVORNIH TAČAKA PRESEKA (2F10.0)

Jedna kartica po čvoru u rastućem nizu, polazeći od prve čvorne tačke.

Kolone 1-10 x-koordinata
11-20 y-koordinata

K3 PODACI O STRANICAMA KONTURE PRESEKA (2I5, F10.0)

Jedna kartica po svakoj konturnoj stranici, u rastućem nizu, polazeći od prve.

Kolone 1-5 Broj čvora na jednom kraju stranice
6-10 Broj čvora na drugom kraju stranice
11-20 Debljina stranice

Obavezno se mora prvo uneti čvor sa manjim rednim brojem.

L NAPONSKE TABELE

Ove kartice se izostavljaju ako je broj tabela sa integracionim tačkama za koje se štampaju naponi jednaki nuli. U suprotnom, učitava se NTABLE grupa kartica. Svaka ova grupa definiše jednu tabelu i ne može imati više od JTABLE ulaza. N-ta grupa kartica definiše N-tu naponsku tabelu, kako sledi:

L1 KARTICA 1 (16I5)

Kolone 1-5 1. integraciona tačka
6-10 2. integraciona tačka
....
76-80 16. integraciona tačka

L2 KARTICA 2 (16I5) (Ako je potrebna)

Kolone 1-5 17. integraciona tačka
6-10 18. integraciona tačka
....
JTABLE. integraciona tačka

Svaka integraciona tačka identifikuje se jednim petocifrenim brojem. Prva cifra broja odredjuje položaj integracione tačke u z-pravcu. Druge dve cifre odredjuju stranicu poligonalnog preseka. Četvrta cifra odredjuje položaj integracione tačke u s-pravcu, a peta u e-pravcu (maksimalno 3 tačke po debljini stranice).

M PODACI O ELEMENTIMA

Karakteristike svih elemenata moraju biti unete ili generisane u rastućem nizu, polazeći od prvog elementa. Podaci o jednom elementu ili grupi elemenata, kada je KG >1, dati su na dve ili više kartica.

M1 KARTICA 1 (7I5)

Kolone 1-5 Broj elementa

6-10 Broj čvora na jednom kraju elementa

11-15 Broj čvora na drugom kraju elementa

16-20 Broj čvora koji odredjuje yz ravan

21-25 Broj koji odredjuje grupu elemenata istih karakteristika, kojoj posmatrani elemenat pripada

26-30 Broj naponske tabele IS koja će se koristiti pri štampanju napona

IS=0 nema štampanja za ovaj elemenat

31-35 Broj (KG) za automatsku generaciju podataka

Kada se koristi automatska generacija podataka brojevi krajnjih čvorova, sukcesivnih elemenata u grupi, uvečavaju se za KG. Pri tome su, broj čvora koji odredjuje yz-ravan, broj grupe elemenata istih karakteristika, broj naponske tabele i podaci sa sledeće kartice, isti za sve elemente u grupi. Podaci za poslednji elemenat moraju se obavezno uneti.

M2 KARTICA 2 (16I5)

Kolone 1-5 Globalni stepen slobode 1. čvora poprečnog preseka na kraju 1 elementa

6-10 Globalni stepen slobode 2. čvora poprečnog preseka na kraju 1 elementa

....

..... Globalni stepen slobode N. čvora poprečnog preseka na kraju 1 elementa

..... Globalni stepen slobode 1. čvora poprečnog preseka na kraju 2 elementa

..... Globalni stepen slobode 2. čvora poprečnog preseka na kraju 2 elementa

....

..... Globalni stepen slobode N. čvora poprečnog preseka na kraju 2 elementa

Ako gornji podaci ne mogu da stanu na jednu karticu uvodi se nova.

6.2 LISTING PROGRAMA *TEZOP*

LISTING 1

```
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      CHARACTER*4 HED(20)
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      COMMON /DIM/ N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N10,N11,N12,N13,N14,N136
      COMMON /EL/ IND,ICOUNT,NUMMAT,MTOT,ITWO,NUME,NUM1,NUM2,NUM3,KLIN
      COMMON /STNL/ XLT,ZOL,SOL,FAC,PFAC,INTZ,INTS
      COMMON /TABLE/ NTABLE,JTABLE
      COMMON /NORMS/ RNORM,RENORM,RTOL,DTOL,ETOL
      COMMON /EQIT/ NLSTPD,ISDVG,ITEDIV,NLSTEP
      COMMON /KMC/ KM,IDWA,KMM,KAS
      COMMON /PRCON/ IPNODE(2,8),NPB
      COMMON /CRIS/ DP,DPSUM,DPO,DL,DETER,NRORC,A1,A4,WC1,WC2,KLKR,NPP
      DIMENSION IHOURS(2),MINS(2),ISECS(2),IHUNDS(2)
      REAL A
      INTEGER IA(1)
      COMMON A(10000)
      EQUIVALENCE (A(1),IA(1))
      MTOT=10000
      ITWO=2
      IREF=0
      KPRI=1
      IPRI=1
      KSTEP=0
      KKSTEP=1
      ICOUNT=2
      NLSTPD=0
      DPO=1.0
      NRORC=1
      KLKR=1
      DPSUM=0.0
      WC1=0.0
      IND=0
      OPEN (1,FORM='UNFORMATTED')
      OPEN (2,FILE='ENTER')
      OPEN (3,FILE='PRN:',STATUS='NEW')
      OPEN (5,FORM='UNFORMATTED')
      OPEN (8,FORM='UNFORMATTED')
      CALL TIME (IHOURS(1),MINS(1),ISECS(1),IHUNDS(1))
      READ(2,1000) HED,IELE,KLIN,NUMNP,NBOUN,NUME,NUMMAT,MODEX,NTABLE,JT
     1ABLE,NPB,INTZ,INTS
      WRITE(3,2000) HED,IELE,KLIN,NUMNP,NBOUN,NUME,NUMMAT,MODEX,NTABLE,J
     1TABLE,NPB,INTZ,INTS
      IF (NPB.EQ.0) GOTO 3
      READ (2,1020) ((IPNODE(I,J),I=1,2),J=1,NPB)
      GOTO 4
    3 IPNODE(1,1)=1
      IPNODE(2,1)=NUMNP
      NPB=1
    4 IF (KLIN.EQ.0) GOTO 5
      READ (2,1005) NRORC,NSTE,IPRI,ITEMAX,DTOL,RTOL,RNORM,NLSTPD
      IF (ITEMAX.EQ.0) ITEMAX=15
      IF (DTOL.EQ.0.0) DTOL=0.01
      IF (RTOL.EQ.0.0) RTOL=0.01
      ETOL=10.0*RTOL*DTOL
      WRITE (3,2003) NRORC,NSTE,IPRI,ITEMAX,DTOL,RTOL,RNORM,NLSTPD
    5 N1=1
      N2=N1+NUMNP
      CALL PRIPP (A(N1),NUMNP,KM)
      N3=N2+NUMNP*KM
      N4=N3+NUMNP*ITWO
      N5=N4+NUMNP*ITWO
      N6=N5+NUMNP*ITWO
      IF(N6.GT.MTOT) CALL ERROR (N6-MTOT)
      CALL INPUT (A(N1),A(N2),A(N3),A(N4),A(N5),KM)
      N7=N6+NEQ*ITWO
      WRITE(3,2006)
      READ(2,1010) NLOAD
```

LISTING 2

```
      WRITE(3,2010) NLOAD
      N8=N7+NLOAD
      N9=N8+NLOAD
      N10=N9+NLOAD*ITWO
      IF(N10.GT.MTOT) CALL ERROR (N10-MTOT)
      CALL LOADS (A(N6),A(N7),A(N8),A(N9),A(N2),NLOAD,KM)
      NN=N6+NEQ-1
      DO 6 I=N6,NN
    6 IA(I)=0
      N7=N6+NEQ
      N8=N7+NUMMAT
      N9=N8+NUMMAT
      N10=N9+NUMMAT
      N11=N10+NUMMAT
      N12=N11+NUMMAT
      N13=N12+NUMMAT*ITWO
      N14=N13+NUMMAT*ITWO
      CALL ELCAL (A(N7),A(N8),A(N9),A(N10),A(N11),A(N12),A(N13))
      CALL ADDRES (A(N1),A(N6))
      MM=NWK/NEQ
      WRITE(3,2015) NEQ,NWK,MK,MM
      IF (MODEX.EQ.0) GOTO 125
   30 KAS=2*KM+5
      IF (IELE.EQ.2) KAS=2*KM
      IND=1
      N2=N1+NEQ+1
      N3=N2+NEQ*ITWO
      N3A=N3+NEQ*ITWO
      IF (NEQ*ITWO.LT.KM) N3A=N3+KM
      N4=N3A+NEQ*ITWO
      IF (NLSTPD.EQ.0) N4=N3A
      N5=N4+NWK*ITWO
      NN1=NEQ*ITWO
      NN2=KAS*(KAS+1)/2*ITWO
      N6=N5+NN1
      IF (NN2.GT.NN1) N6=N5+NN2
      NN3=KAS*KAS*ITWO
      NN4=NUMNP*KM
      NN=NEQ*ITWO
      IF (NN3.GT.NN) NN=NN3
      IF (NN4.GT.NN) NN=NN4
      N7=N6+NN
      NNL=NEQ*ITWO
      CALL CLEAR (A(N2),NNL)
      LPRI=0
  100 KSTEP=KSTEP+1
      REWIND 1
      IREF=0
      IEQREF=0
      NPP=0
      ISDVG=0
      CALL LOADMS (A(N3))
      CALL ASSEM
  115 NN=NEQ*ITWO
      DO 150 I=1,NN
  150 A(N5+I-1)=A(N3+I-1)
      CALL COLSOL (A(N4),A(N3),A(N1),NEQ,NWK,1)
      IF (NRORC.EQ.2) CALL CRIS1 (A(N3),A(N136),A(N5),NEQ)
      KKSTEP=2
      IREF=1
      WRITE (3,2060)
      IF (KLIN.EQ.0) GOTO 110
      CALL EQUIT (A(N4),A(N3),A(N3A),A(N5),A(N2),A(N1),A(N6))
      IF (IEQREF.EQ.0) GOTO 110
      IF (NRORC.EQ.1) GOTO 109
      CALL DIVCRI (A(N2),A(N3),A(N3A),A(N4),A(N5),A(N6),A(N1))
      GOTO 111
  109 CALL DIVERG (A(N2),A(N3),A(N3A),A(N4),A(N5),A(N6),A(N1))
```

LISTING 3

```
  111 IF (ISDVG.EQ.Ø) GOTO 11Ø
      WRITE (3,2Ø4Ø)
      GOTO 21Ø
  11Ø CALL NEWDAV (A(N2),A(N3))
      LPRI=LPRI+1
      KPRI=IPRI-LPRI
      IF (KPRI.GT.Ø) GOTO 13Ø
      LPRI=Ø
      CALL WRITE (A(N2),A(N6),A(N5),A(N3),NEQ,NUMNP)
      CALL ELEMNT
      KPRI=1
      IF (KLIN.EQ.Ø) GOTO 125
  13Ø ICOUNT=2
      IF (KSTEP.LT.NSTE) GOTO 1ØØ
  125 CALL TIME (IHOURS(2),MINS(2),ISECS(2),IHUNDS(2))
  12Ø IHOUR=IHOURS(2)-IHOURS(1)
      MIN=MINS(2)-MINS(1)
      ISEC=ISECS(2)-ISECS(1)
      IVREME=36ØØ*IHOUR+6Ø*MIN+ISEC
      IF (MODEX.EQ.Ø) GOTO 2ØØ
      WRITE(3,2Ø25) IVREME
      GOTO 21Ø
  2ØØ WRITE(3,2Ø2Ø) IVREME
  21Ø CONTINUE
 1ØØØ FORMAT (2ØA4/12I5)
 1ØØ5 FORMAT (4I5,3F1Ø.Ø,I5)
 1Ø1Ø FORMAT (I5)
 1Ø2Ø FORMAT (2I5)
 2ØØØ FORMAT (1ØH PROGRAM: ,2ØA4 ////
     155H *** K O N T R O L N E  I N F O R M A C I J E ***      ////5X,
     255HTIP ELEMENTA  (1-ELEMENAT I, 2-ELEMENAT II)(IELE)      =,I5//5X,
     355HVRSTA ANALIZE (Ø-LINEARNA, 1-NELINEARNA) . (KLIN)      =,I5//5X,
     455HBROJ CVOROVA NOSACA . . . . . . . . . . . (NUMNP)      =,I5//5X,
     555HBROJ OSLONACKIH CVOROVA NOSACA . . . . . . (NBOUN)     =,I5//5X,
     655HBROJ ELEMENATA NOSACA . . . . . . . . . . (NUME)       =,I5//5X,
     755HBROJ GRUPA ELEMENATA ISTIH KARAKTERISTIKA. (NUMMAT)    =,I5//5X,
     855HSTEPEN IZVRSENJA . . . . . . . . . . . . . (MODEX)     =,I5 /5X,
     955H   Ø - PROVERA ULAZNIH PODATAKA                            /5X,
     155H   1 - IZVRSENJE PROGRAMA                                 //5X,
     255HBROJ TABELA KOJE ODREDJUJU INTEGRACIONE                    /5X,
     355HTACKE U KOJIMA SE TRAZE NAPONI . . . . . . (NTABLE)    =,I5//5X,
     455HMAKSIMALAN BROJ TACAKA U TABELI  . . . . . (JTABLE)    =,I5//5X,
     555HBROJ TABELA KOJE ODREDJUJU CVOROVE                         /5X,
     655HZA KOJE SE STAMPAJU POMERANJA  . . . . . . (NPB)       =,I5//5X,
     755HBROJ INTEGRACIONIH TACAKA U Z-PRAVCU . . . (INTZ)      =,I5//5X,
     855HBROJ INTEGRACIONIH TACAKA U S-PRAVCU . . . (INTS)      =,I5)
 2ØØ3 FORMAT (/5X,
     155HMETOD PRORACUNA  . . . . . . . . . . . . . (NRORC)     =,I5 /5X,
     255H   1 - NEWTON-RAPHSON                                      /5X,
     355H   2 - CRISFIELD                                          //5X,
     455HBROJ INKREMENATA OPTERECENJA . . . . . . . (NSTE)      =,I5//5X,
     555HINTERVAL STAMPANJA REZULTATA . . . . . . . (IPRI)      =,I5//5X,
     655HDOZVOLJENI BROJ ITERACIJA  . . . . . . . . (ITEMAX)    =,I5//5X,
     755HUSLOV KONVERGENCIJE PO POMERANJIMA . . . . (DTOL)      =,E11.4//
     8                                                               5X,
     955HUSLOV KONVERGENCIJE PO SILAMA  . . . . . . (RTOL)      =,E11.4//
     1                                                               5X,
     255HREFERENTNO OPTERECENJE PRI KONVERGENCIJI . (RNORM)     =,E11.4//
     3                                                               5X,
     455HMAKSIMALANO DOZVOLJENI BROJ PODINKREMENATA (NLSTPD)    =,I5)
 2ØØ5 FORMAT (/////45H *** P O D A C I  O  O P T E R E C E N J U ***)
 2Ø1Ø FORMAT (///56H BROJ KONCENTRISANIH OPTERECENJA  . . . . . (NLOAD)
     1   =,I5)
 2Ø15 FORMAT (/////
     155H *** P O D A C I  O  M A T R I C I  S I S T E M A ***  ////5X,
     255HBROJ JEDNACINA  . . . . . . . . . . . . . (NEQ)        =,I5//5X,
     355HBROJ ELEMENATA MATRICE . . . . . . . . . . (NWK)       =,I5//5X,
     455HMAKSIMALNA SIRINA TRAKE  . . . . . . . . . (MK)        =,I5//5X,
```

LISTING 4

```
     556HSREDNJA SIRINA TRAKE . . . . . . . . . . . . (MM)        =,I6)
 2020 FORMAT (////32H VREME POTREBNO ZA ULAZ PODATAKA    ,I6,4H SEC)
 2025 FORMAT (////35H VREME POTREBNO ZA RESENJE PROBLEMA,I6,4H SEC)
 2040 FORMAT (/////1H ,
     150HNEURAVNOTEZENE SILE VECE OD INKREMENTA OPTERECENJA)
 2060 FORMAT (////26H *** R E Z U L T A T I ***)
      END
*     --------------------------------------------------
      SUBROUTINE ERROR (N)
      WRITE(3,2000) N
      STOP
 2000 FORMAT (// 44H *** GRESKA - KAPACITET MEMORIJE PREMASEN ZA,I9)
      END
*     --------------------------------------------------
      SUBROUTINE PRIPP (NDF,NUMNP,KM)
      DIMENSION NDF(1)
      KM=1
    4 READ(2,900)N,NDF(N),KN,M
      IF (NDF(N).GT.KM) KM=NDF(N)
      IF(KN.EQ.0) GOTO 6
      L=N+KN
      DO 5 J=L,M,KN
    5 NDF(J)=NDF(N)
    6 IF (N.NE.NUMNP.AND.M.NE.NUMNP) GOTO 4
      RETURN
  900 FORMAT (4I5)
      END
*     --------------------------------------------------
      SUBROUTINE INPUT (NDF,ID,X,Y,Z,KM)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      DIMENSION ID(KM,1),X(1),Y(1),Z(1),NDF(1)
      KNOLD=0
      NOLD=0
   10 READ(2,1000) N,X(N),Y(N),Z(N),KN
      IF (KNOLD.EQ.0) GOTO 50
      NUM=(N-NOLD)/KNOLD
      NUMN=NUM-1
      IF (NUMN.LT.1) GOTO 50
      XNUM=NUM
      DX=(X(N)-X(NOLD))/XNUM
      DY=(Y(N)-Y(NOLD))/XNUM
      DZ=(Z(N)-Z(NOLD))/XNUM
      K=NOLD
      DO 30 J=1,NUMN
      KK=K
      K=K+KNOLD
      X(K)=X(KK)+DX
      Y(K)=Y(KK)+DY
      Z(K)=Z(KK)+DZ
   30 CONTINUE
   50 NOLD=N
      KNOLD=KN
      IF (N.NE.NUMNP) GOTO 10
      DO 60 I=1,NBOUN
      READ(2,1010) N,(ID(J,N),J=1,NDF(N))
   60 CONTINUE
      WRITE(3,2015)
      WRITE(3,2020)
      DO 200 N=1,NUMNP
  200 WRITE(3,2030) N,X(N),Y(N),Z(N),NDF(N)
      WRITE(3,2040)
      DO 300 N=1,NUMNP
  300 WRITE(3,2050) N,(ID(J,N),J=1,NDF(N))
      NEQ=0
      DO 100 N=1,NUMNP
      DO 100 I=1,NDF(N)
      IF (ID(I,N)) 110,120,110
```

LISTING 6

```
  120 NEQ=NEQ+1
      ID(I,N)=NEQ
      GOTO 100
  110 ID(I,N)=0
  100 CONTINUE
      WRITE(3,2060) NEQ
      WRITE(8) (NDF(I),I=1,NUMNP)
      DO 90 J=1,NUMNP
   90 WRITE(8) (ID(I,J),I=1,NDF(J))
      ENDFILE 8
      RETURN
 1000 FORMAT (I5,3F10.0,I5)
 1010 FORMAT (16I5)
 2015 FORMAT (/////42H *** P O D A C I  O  C V O R O V I M A ***///)
 2020 FORMAT (6H CVOR ,19X,18HKOORDINATE CVOROVA,13X,15HM. S. SLOBODE  /
     11H ,19X,1HX,12X,1HY,12X,1HZ)
 2030 FORMAT (I4,7X,3F13.3,6X,I5)
 2040 FORMAT (//6H CVOR ,16H GRANICNI USLOVI/
     1 7X,1HX,2X,1HY,2X,1HZ,3H XX,3H YY,3H ZZ,3H W1,3H W2,3H W3,5H.....)
 2050 FORMAT(I4,1X,(25I3))
 2060 FORMAT(//56H BROJ JEDNACINA  . . . . . . . . . . . . . .  (NEQ)
     1 =,I5)
      END
*     ------------------------------------------------
      SUBROUTINE LOADS (R,NOD,IDIRN,FLOAD,ID,NLOAD,KM)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      DIMENSION R(NEQ),NOD(1),IDIRN(1),FLOAD(1),ID(KM,1)
      WRITE(3,2000)
      READ(2,1000) (NOD(I),IDIRN(I),FLOAD(I),I=1,NLOAD)
      WRITE(3,2010) (NOD(I),IDIRN(I),FLOAD(I),I=1,NLOAD)
      IF (MODEX.EQ.0) RETURN
      DO 210 I=1,NEQ
  210 R(I)=0.0
      DO 220 L=1,NLOAD
      LN=NOD(L)
      LI=IDIRN(L)
      II=ID(LI,LN)
      IF (II) 220,220,240
  240 R(II)=FLOAD(L)
  220 CONTINUE
      WRITE(1) R
      ENDFILE 1
      RETURN
 1000 FORMAT (2I5,F10.0)
 2000 FORMAT (//36H CVOR       PRAVAC       OPTERECENJE/)
 2010 FORMAT (I4,8X,I4,8X,E12.5)
      END
*     ------------------------------------------------
      SUBROUTINE ELCAL (NUMPN1,NUMPN2,NUMPS1,NUMPN,NUMPS,E,G)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /EL/ IND,ICOUNT,NUMMAT,MTOT,ITWO,NUME,NUM1,NUM2,NUM3,KLIN
      COMMON /KMC/ KM,IDWA,KMM,KAS
      COMMON /STNL/ XLT,ZOL,SOL,FAC,PFAC,INTZ,INTS
      DIMENSION NUMPN1(1),NUMPN2(1),NUMPN(1),NUMPS(1),NUMPS1(1),E(1),
     1G(1)
      WRITE(3,2000)
      NUM1=0
      NUM2=0
      NUM3=0
      NUMPN1(1)=0
      NUMPN2(1)=0
      NUMPS1(1)=0
      KMM=1
      DO 10 I=1,NUMMAT
      READ(2,1000) E(I),G(I),NUMPN(I),NUMPS(I)
      NUM1=NUM1+NUMPN(I)
```

LISTING 6

```
      NUM2=NUM2+NUMPN(I)*(NUMPN(I)+1)/2
      IF (NUMPS(I).GT.KMM) KMM=NUMPS(I)
      NUM3=NUM3+NUMPS(I)
      IF (I.EQ.NUMMAT) GOTO 10
      M=I+1
      NUMPN1(M)=NUM1
      NUMPN2(M)=NUM2
      NUMPS1(M)=NUM3
   10 CONTINUE
      IDWA=INTZ*INTS*KMM*3*4+1
      CALL ELEMNT
      RETURN
 1000 FORMAT (2F10.0,2I5)
 2000 FORMAT (/////44H *** P O D A C I  O  E L E M E N T I M A ***///)
      END
*     --------------------------------------------------------
      SUBROUTINE ELEMNT
      COMMON A(1)
      COMMON /DIM/ N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N10,N11,N12,N13,N14,N136
      COMMON /EL/ IND,ICOUNT,NUMMAT,MTOT,ITWO,NUME,NUM1,NUM2,NUM3,KLIN
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      COMMON /TABLE/ NTABLE,JTABLE
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /KMC/ KM,IDWA,KMM,KAS
      COMMON /CRIS/ DP,DPSUM,DPO,DL,DETER,NRORC,A1,A4,WC1,WC2,KLKR,NPP
      IF (KSTEP.GT.1.OR.IREF.EQ.1) GOTO 60
      NFIRST=N7
      IF(IND.EQ.0) GOTO 20
      N8=N7+NUMMAT
      N9=N8+NUMMAT
      N10=N9+NUMMAT
      N11=N10+NUMMAT
      N12=N11+NUMMAT
      N13=N12+NUMMAT*ITWO
      N14=N13+NUMMAT*ITWO
   20 M2=N2
      N101=N14+NUMMAT*ITWO
      N102=N101+NUMMAT*ITWO
      N103=N102+NUM1*ITWO
      N104=N103+NUM1*ITWO
      N105=N104+NUM3*ITWO
      N106=N105+NUM3*2
      N107=N106+2*KM*NUME
      N108=N107+9*NUME*ITWO
      N109=N108+NUME
      N110=N109+NUME
      NTAB=NTABLE
      LL=JTABLE/16
      LLL=JTABLE-LL*16
      IF (LLL.GT.0) LL=LL+1
      LL=LL*16
      N111=N110+LL*NTABLE
      N112=N111+NUMMAT*ITWO
      N113=N112+NUMMAT*ITWO
      N114=N113+NUMMAT*ITWO
      N115=N114+NUMMAT*ITWO
      N116=N115+NUMMAT*ITWO
      N117=N116+NUMMAT*ITWO
      N118=N117+NUMMAT*ITWO
      N119=N118+NUM1*ITWO
      N120=N119+NUM1*ITWO
      N121=N120+NUM1*ITWO
      N122=N121+NUM1*ITWO
      N123=N122+NUM1*ITWO
      N124=N123+NUM2*ITWO
      N125=N124+NUM2*ITWO
      NLAST=N125
      N126=N125+(KM-6)*2
```

LISTING 7

```
      IF (IND.EQ.1) GOTO 50
      IF(N126.GT.MTOT) CALL ERROR (N126-MTOT)
      NNL=N126-N110
      CALL CLEAR (A(N110),NNL)
      N127=N126
      N128=N126
      N129=N126
      N130=N126
      N131=N126
      N132=N126
      N133=N126
      N134=N126
      GOTO 40
   50 N127=N126+KAS*5*NUME*ITWO
      N128=N127+KAS*ITWO
      N129=N128+2*KM*NUME*ITWO
      N130=N129+IDWA*NUME*ITWO
      N131=N130+NUME*ITWO
      N132=N131+KAS*3*ITWO
      N133=N132+KAS*7*ITWO
      N134=N133+2*KM*ITWO
      N135=N134+2*KM*ITWO
      N136=N135+9*NUME*ITWO
      N137=N136
      IF (NRORC.EQ.2) N137=N136+NEQ*ITWO
      IF (N137.GT.MTOT) CALL ERROR (N137-MTOT)
      NNL=N137-N126
      CALL CLEAR (A(N126),NNL)
   60 M2=N2
      IF (ICOUNT.LT.3) GOTO 40
      M2=N6
   40 CALL CSP (A(M2),A(M2),A(N3),A(N4),A(N5),A(N5),A(N6),A(N6),A(N7),A(
     1N8),A(N9),A(N10),A(N11),A(N12),A(N13),A(N14),A(N101),A(N102),A(N10
     23),A(N104),A(N105),A(N106),A(N107),A(N108),A(N109),A(N110),A(N111)
     3,A(N112),A(N113),A(N114),A(N115),A(N116),A(N117),A(N118),A(N119),A
     4(N120),A(N121),A(N122),A(N123),A(N124),A(N125),A(N126),A(N127),A(N
     5128),A(N129),A(N130),A(N131),A(N132),A(N133),A(N134),A(N135),KM,
     6KAS,IDWA,NTAB,KMM)
      IF(IND.NE.0) GOTO 30
      MAXEST=NLAST-NFIRST
      WRITE(6) (A(I),I=NFIRST,NLAST-1)
      ENDFILE 6
   30 CONTINUE
      RETURN
      END
*     ---------------------------------------------------
      SUBROUTINE CSP (ID,DID,X,Y,Z,S,MHT,AS,NUMPN1,NUMPN2,NUMPS1,NUMPN,N
     1UMPS,E,G,XC,YC,XX,YY,TS,ISN,LM,XYZ,MATP,IPS,ITABLE,FF,IXX,IYY,IXY,
     2IH,SWX,SWY,SFX,SFY,IXF,IYF,IXBYA,IFF,IAABB,NN,SREL,DISP,PDISP,WA,
     3GAMA,B,BNL,RE,XM,TTT1,KM,KAS,IDWA,NTAB,KMM)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 IXBYA(1),IFF(1),IAABB(1),IXX(1),IYY(1),IXY(1),IH(1),LL,IXF(
     11),IYF(1)
      COMMON /EL/ IND,ICOUNT,NUMMAT,MTOT,ITWO,NUME,NUM1,NUM2,NUM3,KLIN
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      COMMON /STNL/ XLT,ZOL,SOL,FAC,PFAC,INTZ,INTS
      COMMON /TABLE/ NTABLE,JTABLE
      COMMON /DIM/ N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N10,N11,N12,N13,N14,N136
      COMMON /POS/ I1,I2,I3,I4,ISTRES
      COMMON /IC/ IC(12),XCC,YCC
      COMMON /CRIS/ DP,DPSUM,DPO,DL,DETER,NRORC,A1,A4,WC1,WC2,KLKR,NPP
      DIMENSION NUMPN1(1),NUMPN2(1),NUMPN(1),NUMPS(1),NUMPS1(1)
      DIMENSION FF(1),SFX(1),SFY(1),SWX(1),SWY(1)
      DIMENSION XX(1),YY(1),X(1),Y(1),Z(1),XYZ(9,1),XC(1),YC(1)
      DIMENSION E(1),G(1),ID(KM,1),MATP(1),MHT(1),LM(2*KM,1),NN(1),TS(1)
      DIMENSION AS(KAS,1),ISN(1),IPS(1),B(3,1),BNL(7,1),RE(1),DISP(1)
     1,PDISP(2*KM,1),SREL(KAS*5,1),GAMA(1),ITABLE(NTAB,1),WA(IDWA
```

LISTING 8

```
     2,1),S(1),BS(3,3),DID(1),XM(1),TTT(3,3),TTT1(9,1)
      REAL A
      COMMON A(1)
      IF (KPRI.EQ.Ø) GOTO 8ØØ
      IF (IND.GT.Ø) GOTO 42Ø
      DO 1Ø I=1,NUMMAT
      WRITE(3,2ØØØ) I
      WRITE(3,2Ø1Ø) NUMPN(I),NUMPS(I)
      READ(2,1ØØØ) XC(I),YC(I)
      WRITE(3,2Ø15) XC(I),YC(I)
      WRITE(3,2Ø2Ø)
      DO 2Ø J=1,NUMPN(I)
      II=NUMPN1(I)+J
      READ(2,1ØØØ) XX(II),YY(II)
   2Ø WRITE(3,2Ø3Ø) J,XX(II),YY(II)
      WRITE(3,2Ø4Ø)
      DO 3Ø J=1,NUMPS(I)
      READ(2,1Ø1Ø) II,JJ,T
      TS(NUMPS1(I)+J)=T
      ISN(2*(NUMPS1(I)+J)-1)=II
      ISN(2*(NUMPS1(I)+J))=JJ
      WRITE(3,2Ø5Ø) J,II,JJ,T
      JJJ=NUMPN1(I)+JJ
      III=NUMPN1(I)+II
      LIJ=NUMPN2(I)+(II-1)*NUMPN(I)-(II-1)*II/2+JJ
      LII=NUMPN2(I)+(II-1)*NUMPN(I)-(II-3)*II/2
      LJJ=NUMPN2(I)+(JJ-1)*NUMPN(I)-(JJ-3)*JJ/2
      X2=XX(JJJ)
      X1=XX(III)
      Y2=YY(JJJ)
      Y1=YY(III)
      LL=DSQRT((X2-X1)*(X2-X1)+(Y2-Y1)*(Y2-Y1))
      COS=(X2-X1)/LL
      SIN=(Y2-Y1)/LL
      SIN2=2.*SIN*COS
      FF(I)=FF(I)+LL*T
      FI1=LL*T**3/12.
      FI2=LL**3*T/12.
      IYY(I)=IYY(I)+ABS((Y2+Y1)/2.)**2*LL*T+FI1*COS**2+FI2*SIN**2
      IXX(I)=IXX(I)+ABS((X2+X1)/2.)**2*LL*T+FI1*SIN**2+FI2*COS**2
      IXY(I)=IXY(I)+(Y2+Y1)*(X2+X1)/4.+Ø.5*(FI1-FI2)*SIN2
      AA=(-X1*COS-Y1*SIN-Ø.5*LL)*LL*T
      HH=(Y1*X2-Y2*X1)/LL
      IH(I)=IH(I)+HH*HH*LL*T+FI1*4.
      SWX(I)=SWX(I)+AA*SIN
      SWY(I)=SWY(I)-AA*COS
      SFX(JJJ)=SFX(JJJ)+COS*T
      SFX(III)=SFX(III)-COS*T
      SFY(JJJ)=SFY(JJJ)+SIN*T
      SFY(III)=SFY(III)-SIN*T
      IXF(JJJ)=IXF(JJJ)+(LL*COS/3.+XX(III)/2.)*LL*T
      IXF(III)=IXF(III)+(LL*COS/6.+XX(III)/2.)*LL*T
      IYF(JJJ)=IYF(JJJ)+(LL*SIN/3.+YY(III)/2.)*LL*T
      IYF(III)=IYF(III)+(LL*SIN/6.+YY(III)/2.)*LL*T
      IXBYA(JJJ)=IXBYA(JJJ)+(XX(III)*SIN-YY(III)*COS)*T
      IXBYA(III)=IXBYA(III)-(XX(III)*SIN-YY(III)*COS)*T
      IFF(LII)=IFF(LII)+LL*T/3.
      IFF(LJJ)=IFF(LJJ)+LL*T/3.
      IFF(LIJ)=LL*T/6.
      IAABB(LII)=IAABB(LII)+T/LL
      IAABB(LJJ)=IAABB(LJJ)+T/LL
   3Ø IAABB(LIJ)=-T/LL
      WRITE(3,2Ø6Ø) E(I),G(I),FF(I),IXX(I),IYY(I),IXY(I),IH(I),SWX(I),SW
     1Y(I)
      WRITE(3,2Ø7Ø)
      DO 4Ø J=1,NUMPN(I)
      II=NUMPN1(I)+J
   4Ø WRITE(3,2Ø8Ø) J,SFX(II),SFY(II),IXF(II),IYF(II),IXBYA(II)
```

LISTING 9

```
      WRITE(3,2090)
      DO 60 J=1,NUMPN(I)
   60 WRITE(3,2120) (IFF(NUMPN2(I)+(K-1)*NUMPN(I)-(K-1)*K/2+J),K=1,J)
      WRITE(3,2100)
      DO 70 J=1,NUMPN(I)
   70 WRITE(3,2120) (IAABB(NUMPN2(I)+(K-1)*NUMPN(I)-(K-1)*K/2+J),K=1,J)
   10 WRITE(3,2130)
      IF (NTABLE.LE.0) GOTO 99
      L=JTABLE/16
      LL=JTABLE-16*L
      IF (LL.GT.0) L=L+1
      DO 96 I=1,NTABLE
      K=0
      DO 97 J=1,L
      K=K+1
      KK=K+15
      READ (2,1015) (ITABLE(I,JJ),JJ=K,KK)
      DO 98 JJ=K,KK
      IF (ITABLE(I,JJ).EQ.0) GOTO 96
   98 CONTINUE
   97 K=KK
   96 CONTINUE
   99 WRITE(3,2140)
      N=1
  100 READ(2,1020) M,II,JJ,KK,MTYP,IS,KG
      IF (KG.EQ.0) KG=1
  120 IF (M.NE.N) GOTO 200
      K=KK
      I=II
      J=JJ
      KKK=KG
      MTYPE=MTYP
      IPST=IS
      READ(2,1020) (NN(IL),IL=1,2*NUMPN(MTYPE))
  200 XYZ(1,N)=X(I)
      XYZ(2,N)=Y(I)
      XYZ(3,N)=Z(I)
      XYZ(4,N)=X(J)
      XYZ(5,N)=Y(J)
      XYZ(6,N)=Z(J)
      XYZ(7,N)=X(K)
      XYZ(8,N)=Y(K)
      XYZ(9,N)=Z(K)
      MATP(N)=MTYPE
      IPS(N)=IPST
      DO 390 L=1,6
      LM(L,N)=ID(L,I)
  390 LM(6+NUMPN(MTYPE)+L,N)=ID(L,J)
      DO 400 L=1,NUMPN(MTYPE)
      LM(6+L,N)=ID(6+NN(L),I)
  400 LM(12+NUMPN(MTYPE)+L,N)=ID(6+NN(L+NUMPN(MTYPE)),J)
      NMAX=12+2*NUMPN(MTYPE)
      CALL COLHT (MHT,NMAX,LM(1,N))
      WRITE(3,2150) N,I,J,K,MTYPE
      IF (N.EQ.NUME) GOTO 500
      N=N+1
      I=I+KKK
      J=J+KKK
      IF (N.GT.M) GOTO 100
      GOTO 120
  500 WRITE(3,2160)
      DO 600 I=1,NUME
  600 WRITE(3,2170) I,(LM(J,I),J=1,12+NUMPN(MATP(I))*2)
      RETURN
  420 IF (IREF.EQ.1) GOTO 430
      NNL=NWK*ITWO
      CALL CLEAR (A(N4),NNL)
  430 ISTRES=-1
```

LISTING 10

```
      DO 710 N=1,NUME
      MTYPE=MATP(N)
      EY=E(MTYPE)
      XNU=G(MTYPE)
      FAC=EY/(1.-XNU*XNU)
      PFAC=EY/(2.*(1.+XNU))
      NMAX=12+2*NUMPN(MTYPE)
      XCC=XC(MTYPE)
      YCC=YC(MTYPE)
      NSIZE=17+2*NUMPN(MTYPE)
      IF (IELE.EQ.2) NSIZE=NMAX
      DO 735 I=1,NMAX
      DISP(I)=0.0
  735 RE(I)=0.0
      DO 440 I=1,3
      DO 440 J=1,NSIZE
  440 B(I,J)=0.0
      DO 450 I=1,7
      DO 450 J=1,NSIZE
  450 BNL(I,J)=0.0
      CALL LENGTH (XLT,XYZ(1,N))
      CALL TRANSF (XYZ(1,N),AS,BS,TTT,DISP,PDISP(1,N),GAMA(N),NUMPN(MTYP
     1E),1,KAS)
      IF (KKSTEP.EQ.2) GOTO 460
      DO 470 I=1,3
      DO 470 J=1,3
  470 TTT1(3*(J-1)+I,N)=TTT(I,J)
  460 IF (KLIN.EQ.0) GOTO 726
      IF (KKSTEP.EQ.1.AND.IREF.EQ.0) GOTO 726
      DO 720 I=1,NMAX
      IP=LM(I,N)
      IF (IP.EQ.0) GOTO 720
      DISP(I)=DID(IP)
  720 CONTINUE
      GAMAE=GAMA(N)
      CALL TRANSF (XYZ(1,N),AS,BS,TTT,DISP,PDISP(1,N),GAMA(N),NUMPN(MTYP
     1E),3,KAS)
      DO 762 I=1,NMAX
      DISP(I)=DISP(I)-PDISP(I,N)
      IF (ICOUNT.NE.3.AND.ITONLY.NE.5) PDISP(I,N)=PDISP(I,N)+DISP(I)
  762 CONTINUE
      DO 701 I=1,6
      IC(I)=I
  701 IC(6+I)=6+NUMPN(MTYPE)+I
      DO 722 I=1,10,3
      II=IC(I)
      DO 722 J=1,3
      IJ=II+J-1
      TEMP=0.
      DO 723 K=1,3
      IK=II+K-1
  723 TEMP=TEMP+TTT1(3*(K-1)+J,N)*DISP(IK)
  722 XM(IJ)=TEMP
      DO 725 I=1,12
      II=IC(I)
  725 DISP(II)=XM(II)
      IF (ICOUNT.EQ.3) GOTO 727
      DO 728 I=1,3
      DO 728 J=1,3
  728 TTT1(3*(J-1)+I,N)=TTT(I,J)
  727 IF ((XCC.NE.0.0).OR.(YCC.NE.0.0)) CALL TRANPC (DISP,RE,1)
      IF (IELE.EQ.1) CALL ENDREL (AS,SREL(1,N),DISP,NSIZE,3,KM)
      IF (ICOUNT.GT.2) GOTO 591
      IF (IREF.NE.0) GOTO 591
  726 DO 650 I=1,NSIZE
      DO 650 J=1,NSIZE
  650 AS(I,J)=0.0
      I7=7+NUMPN(MTYPE)
```

LISTING 11

```
      I8=I7+1
      I9=I8+1
      I1Ø=I9+1
      I11=I1Ø+1
      I12=I11+1
      IF (IELE.EQ.2) GOTO 64Ø
      I13=13+2*NUMPN(MTYPE)
      I14=I13+1
      I15=I14+1
      I16=I15+1
      I17=I16+1
      AA=PFAC*FF(MTYPE)/3./XLT
      AS(1,1)=7.*AA
      AS(1,I7)=AA
      AS(1,I13)=-8.*AA
      AS(I7,I7)=AS(1,1)
      AS(I7,I13)=AS(1,I13)
      AS(I13,I13)=16.*AA
      AS(2,2)=AS(1,1)
      AS(2,I8)=AS(1,I7)
      AS(2,I14)=AS(1,I13)
      AS(I8,I8)=AS(I7,I7)
      AS(I8,I14)=AS(I7,I13)
      AS(I14,I14)=AS(I13,I13)
      AA=PFAC*FF(MTYPE)/6.
      AS(1,5)=3.*AA
      AS(1,I11)=-AA
      AS(1,I16)=4.*AA
      AS(5,I7)=AA
      AS(5,I13)=-AS(1,I16)
      AS(I7,I11)=-AS(1,5)
      AS(I7,I16)=-AS(1,I16)
      AS(I11,I13)=-AS(5,I13)
      AS(2,4)=-AS(1,5)
      AS(2,I1Ø)=-AS(1,I11)
      AS(2,I15)=-AS(1,I16)
      AS(4,I8)=-AS(5,I7)
      AS(4,I14)=-AS(5,I13)
      AS(I8,I1Ø)=-AS(I7,I11)
      AS(I8,I15)=-AS(I7,I16)
      AS(I1Ø,I14)=-AS(I11,I13)
      AA=PFAC*SWX(MTYPE)/3./XLT
      BB=PFAC*SWY(MTYPE)/3./XLT
      AS(1,6)=-7.*AA
      AS(1,I12)=-AA
      AS(1,I17)=8.*AA
      AS(6,I7)=-AA
      AS(6,I13)=AS(1,I17)
      AS(I7,I12)=AS(1,6)
      AS(I7,I17)=AS(1,I17)
      AS(I12,I13)=AS(1,I17)
      AS(I13,I17)=-16.*AA
      AS(2,6)=-7.*BB
      AS(2,I12)=-BB
      AS(2,I17)=8.*BB
      AS(6,I8)=-BB
      AS(6,I14)=AS(2,I17)
      AS(I8,I12)=AS(2,6)
      AS(I8,I17)=AS(2,I17)
      AS(I12,I14)=AS(2,I17)
      AS(I14,I17)=-16.*BB
      AA=PFAC*IH(MTYPE)/3./XLT
      AS(6,6)=7.*AA
      AS(6,I12)=AA
      AS(6,I17)=-8.*AA
      AS(I12,I12)=AS(6,6)
      AS(I12,I17)=AS(6,I17)
      AS(I17,I17)=16.*AA
```

LISTING 12

```
AA=FAC*FF(MTYPE)/XLT
AS(3,3)=AA
AS(3,I9)=-AA
AS(I9,I9)=AA
AA=FAC*IXX(MTYPE)/XLT/3.
BB=FAC*IYY(MTYPE)/XLT/3.
CC=PFAC*FF(MTYPE)*XLT/15.
AS(5,5)=7.*AA+2.*CC
AS(5,I11)=AA-Ø.5*CC
AS(5,I16)=-8.*AA+CC
AS(I11,I11)=AS(5,5)
AS(I11,I16)=AS(5,I16)
AS(I16,I16)=16.*AA+8.*CC
AS(4,4)=7.*BB+2.*CC
AS(4,I1Ø)=BB-Ø.5*CC
AS(4,I15)=-8.*BB+CC
AS(I1Ø,I1Ø)=AS(4,4)
AS(I1Ø,I15)=AS(4,I15)
AS(I15,I15)=16.*BB+8.*CC
AA=-PFAC*SWX(MTYPE)/3.
BB=PFAC*SWY(MTYPE)/3.
AS(5,6)=3.*AA/2.
AS(5,I12)=AA/2.
AS(5,I17)=-2.*AA
AS(6,I11)=-AS(5,I12)
AS(6,I16)=-AS(5,I17)
AS(I11,I12)=-AS(5,6)
AS(I11,I16)=AS(5,I16)
AS(I11,I17)=-AS(5,I17)
AS(I12,I16)=AS(5,I17)
AS(4,6)=3.*BB/2.
AS(4,I12)=BB/2.
AS(4,I17)=-2.*BB
AS(6,I1Ø)=-AS(4,I17)
AS(6,I15)=-AS(4,I17)
AS(I1Ø,I12)=-AS(4,6)
AS(I1Ø,I17)=-AS(4,I17)
DO 7ØØ I=1,NUMPN(MTYPE)
II=NUMPN1(MTYPE)+I
II6=6+I
II12=12+NUMPN(MTYPE)+I
AA=PFAC*SFX(II)/6.
BB=PFAC*SFY(II)/6.
AS(1,II6)=-5.*AA
AS(1,II12)=-AA
AS(II6,I7)=AA
AS(II6,I13)=4.*AA
AS(I7,II12)=-AS(1,II6)
AS(II12,I13)=-AS(II6,I13)
AS(2,II6)=-5.*BB
AS(2,II12)=-BB
AS(II6,I8)=BB
AS(II6,I14)=4.*BB
AS(I8,II12)=-AS(2,II6)
AS(II12,I14)=-AS(II6,I14)
AA=PFAC*IXBYA(II)/6.
AS(6,II6)=-5.*AA
AS(6,II12)=-AA
AS(II6,I12)=AA
AS(II6,I17)=4.*AA
AS(I12,II12)=-AS(6,II6)
AS(II12,I17)=-AS(II6,I17)
AA=-FAC*IXF(II)/XLT
BB=PFAC*SFX(II)*XLT/6.
CC=FAC*IYF(II)/XLT
DD=PFAC*SFY(II)*XLT/6.
AS(5,II6)=AA-BB
AS(5,II12)=-AA
AS(II6,I11)=AS(5,II12)
```

```
      AS(II6,I16)=-2.*BB
      AS(I11,II12)=AS(5,II6)
      AS(II12,I16)=AS(II6,I16)
      AS(4,II6)=CC+DD
      AS(4,II12)=-CC
      AS(II6,I10)=AS(4,II12)
      AS(II6,I15)=2.*DD
      AS(I10,II12)=AS(4,II6)
      AS(II12,I15)=AS(II6,I15)
      DO 700 J=I,NUMPN(MTYPE)
      IJ=NUMPN2(MTYPE)+(I-1)*NUMPN(MTYPE)-(I-1)*I/2+J
      JJ6=6+J
      JJ12=12+NUMPN(MTYPE)+J
      AA=FAC*IFF(IJ)/XLT
      BB=PFAC*IAABB(IJ)*XLT/6.
      AS(II6,JJ6)=AA+2.*BB
      AS(II6,JJ12)=-AA+BB
      AS(JJ6,II12)=AS(II6,JJ12)
  700 AS(II12,JJ12)=AS(II6,JJ6)
      GOTO 660
  640 AA=2.*FAC*IXX(MTYPE)/XLT/XLT/XLT
      AS(1,1)=6.*AA
      AS(1,I7)=-AS(1,1)
      AS(1,5)=3.*AA*XLT
      AS(1,I11)=AS(1,5)
      AS(5,5)=2.*AA*XLT*XLT
      AS(5,I7)=-AS(1,5)
      AS(5,I11)=AA*XLT*XLT
      AS(I7,I7)=AS(1,1)
      AS(I7,I11)=-AS(1,5)
      AS(I11,I11)=AS(5,5)
      BB=2.*FAC*IYY(MTYPE)/XLT/XLT/XLT
      AS(2,2)=6.*BB
      AS(2,I8)=-AS(2,2)
      AS(2,4)=-3.*BB*XLT
      AS(2,I10)=AS(2,4)
      AS(4,4)=2.*BB*XLT*XLT
      AS(4,I8)=-AS(2,4)
      AS(4,I10)=BB*XLT*XLT
      AS(I8,I8)=AS(2,2)
      AS(I8,I10)=-AS(2,4)
      AS(I10,I10)=AS(4,4)
      AA=FAC*FF(MTYPE)/XLT
      AS(3,3)=AA
      AS(3,I9)=-AA
      AS(I9,I9)=AA
      AA=PFAC*IH(MTYPE)/XLT
      AS(6,6)=AA
      AS(6,I12)=-AA
      AS(I12,I12)=AA
      DO 715 I=1,NUMPN(MTYPE)
      II=NUMPN1(MTYPE)+I
      II6=6+I
      II12=12+NUMPN(MTYPE)+I
      AA=PFAC*IXBYA(II)/2.
      AS(6,II6)=-AA
      AS(6,II12)=-AA
      AS(II6,I12)=AA
      AS(I12,II12)=AA
      AA=FAC*IYF(II)/XLT
      AS(4,II6)=AA
      AS(4,II12)=-AA
      AS(II6,I10)=-AA
      AS(I10,II12)=AA
      BB=FAC*IXF(II)/XLT
      AS(5,II6)=-BB
      AS(5,II12)=BB
      AS(II6,I11)=BB
```

```
      AS(I11,II12)=-BB
      DO 715 J=I,NUMPN(MTYPE)
      IJ=NUMPN2(MTYPE)+(I-1)*NUMPN(MTYPE)-(I-1)*I/2+J
      JJ6=6+J
      JJ12=12+NUMPN(MTYPE)+J
      AA=FAC*IFF(IJ)/XLT
      BB=PFAC*IAABB(IJ)*XLT/6.
      AS(II6,JJ6)=AA+2.*BB
      AS(II6,JJ12)=-AA+BB
      AS(JJ6,II12)=AS(II6,JJ12)
  715 AS(II12,JJ12)=AS(II6,JJ6)
  660 IF (KLIN.EQ.Ø) GOTO 592
      IF (KKSTEP.EQ.1.AND.IREF.EQ.Ø) GOTO 592
      GOTO 591
  592 DO 590 I=1,NSIZE
      DO 590 J=I,NSIZE
  590 AS(J,I)=AS(I,J)
      GOTO 742
  591 NMN=NUMPN(MTYPE)
      NMS=NUMPS(MTYPE)
      NMN1=NUMPN1(MTYPE)
      NMS1=NUMPS1(MTYPE)
      CALL STIFNL (NMN,NMS,XX(NMN1+1),YY(NMN1+1),TS(NMS1+1),ISN(2*NMS1+1
     1),AS,RE,WA(1,N),DISP,B,BNL,KAS)
      IF (IREF.EQ.Ø.AND.NRORC.EQ.2) GOTO 739
      IF (IEQREF.EQ.1.AND.NRORC.EQ.2) GOTO 739
      IF ((XCC.NE.Ø.Ø).OR.(YCC.NE.Ø.Ø)) CALL TRANPC (DISP,RE,2)
      DO 732 I=1,12
      II=IC(I)
  732 XM(II)=RE(II)
      DO 733 I=1,1Ø,3
      II=IC(I)
      DO 733 J=1,3
      TEMP=Ø.Ø
      IJ=II+J-1
      DO 734 K=1,3
      IK=II+K-1
  734 TEMP=TEMP+TTT(K,J)*XM(IK)
  733 RE(IJ)=TEMP
      MADR=N3
      IF (ICOUNT.EQ.3) MADR=N5
      CALL ADDBAN (NMAX,A(MADR),A(N1),S,RE,LM(1,N),2)
  739 IF (ICOUNT-2) 74Ø,74Ø,711
  74Ø IF (IREF) 71Ø,742,71Ø
  742 K=Ø
      IF (IELE.EQ.1) CALL ENDREL (AS,SREL(1,N),DISP,NSIZE,2,KM)
      CALL TRANSF (XYZ(1,N),AS,BS,TTT,DISP,PDISP(1,N),GAMA(N),NUMPN(MTYP
     1E),2,KAS)
      DO 745 I=1,NMAX
      DO 745 J=I,NMAX
      K=K+1
  745 S(K)=AS(I,J)
      CALL ADDBAN (NMAX,A(N4),A(N1),S,RE,LM(1,N),1)
      GOTO 71Ø
  711 GAMA(N)=GAMAE
  71Ø CONTINUE
      RETURN
  8ØØ ICOUNT=3
      IPRNT=Ø
      DO 855 N=1,NUME
      IPST=IPS(N)
      IF (IPST.EQ.Ø) GOTO 855
      IPRNT=IPRNT+1
      IF (IPRNT.NE.1) GOTO 894
      WRITE (3,2Ø25)
  894 MTYPE=MATP(N)
      XCC=XC(MTYPE)
      YCC=YC(MTYPE)
```

```
      DO 797 I=1,6
      IC(I)=I
  797 IC(6+I)=6+NUMPN(MTYPE)+I
      EY=E(MTYPE)
      XNU=G(MTYPE)
      FAC=EY/(1.-XNU*XNU)
      PFAC=EY/(2.*(1.+XNU))
      NMAX=12+2*NUMPN(MTYPE)
      NSIZE=17+2*NUMPN(MTYPE)
      IF (IELE.EQ.2) NSIZE=NMAX
      DO 810 I=1,3
      DO 810 J=1,NSIZE
  810 B(I,J)=0.0
      DO 820 I=1,7
      DO 820 J=1,NSIZE
  820 BNL(I,J)=0.0
      DO 866 I=1,NMAX
      DISP(I)=0.
      IP=LM(I,N)
      IF (IP.EQ.0) GOTO 856
      DISP(I)=DID(IP)
  856 CONTINUE
      CALL LENGTH (XLT,XYZ(1,N))
      CALL TRANSF (XYZ(1,N),AS,BS,TTT,DISP,PDISP(1,N),GAMA(N),NUMPN(MTYP
     1E),1,KAS)
      GAMAE=GAMA(N)
      CALL TRANSF (XYZ(1,N),AS,BS,TTT,DISP,PDISP(1,N),GAMA(N),NUMPN(MTYP
     1E),3,KAS)
      DO 863 I=1,NMAX
  863 DISP(I)=DISP(I)-PDISP(I,N)
      DO 870 I=1,10,3
      II=IC(I)
      DO 870 J=1,3
      IJ=II+J-1
      TEMP=0.
      DO 871 K=1,3
      IK=II+K-1
  871 TEMP=TEMP+TTT1(3*(K-1)+J,N)*DISP(IK)
  870 XM(IJ)=TEMP
      DO 873 I=1,12
      II=IC(I)
  873 DISP(II)=XM(II)
      IF ((XCC.NE.0.0).OR.(YCC.NE.0.0)) CALL TRANPC (DISP,RE,1)
      IF (IELE.EQ.1) CALL ENDREL (AS,SREL(1,N),DISP,NSIZE,3,KM)
      ISTRES=0
      IF (NTABLE) 862,862,865
  862 WRITE(3,2026) N
      NMN=NUMPN(MTYPE)
      NMS=NUMPS(MTYPE)
      NMN1=NUMPN1(MTYPE)
      NMS1=NUMPS1(MTYPE)
      CALL STIFNL (NMN,NMS,XX(NMN1+1),YY(NMN1+1),TS(NMS1+1),ISN(2*NMS1+1
     1),AS,RE,WA(1,N),DISP,B,BNL,KAS)
      GAMA(N)=GAMAE
      GOTO 866
  865 ISTRES=1
      WRITE(3,2026) N
      L=IPST
      DO 867 K=1,JTABLE
      M=ITABLE(L,K)
      IF (M) 866,866,868
  868 I1=M/10000
      II=M-I1*10000
      I3=II/100
      III=II-I3*100
      I2=III/10
      I4=III-I2*10
      IST=4*(3*((I2-1)+INTS*((I3-1)+NUMPS(MTYPE)*(I1-1)))+I4-1)+1
```

LISTING 16

```
      IST=IST+1
      ISTRES=IST
      NMN=NUMPN(MTYPE)
      NMS=NUMPS(MTYPE)
      NMN1=NUMPN1(MTYPE)
      NMS1=NUMPS1(MTYPE)
  867 CALL STIFNL (NMN,NMS,XX(NMN1+1),YY(NMN1+1),TS(NMS1+1),ISN(2*NMS1+1
     1),AS,RE,WA(1,N),DISP,B,BNL,KM)
      GAMA(N)=GAMAE
  855 CONTINUE
      RETURN
 1000 FORMAT (2F10.0)
 1010 FORMAT (2I5,F10.0)
 1015 FORMAT (16I5)
 1016 FORMAT (6F10.0)
 1020 FORMAT (16I5)
 2000 FORMAT (18H GRUPA ELEMENATA -,I3/1H+,20(1H-)///)
 2010 FORMAT (56H BR. CVOROVA POLIGONALNOG PRESEKA  . . . .  (NUMPN)
     1=,I5/56H BR. STRANA POLIGONALNOG PRESEKA  . . . . . (NUMPS)    =,I
     25)
 2015 FORMAT (//47H RASTOJANJE TEZISTA OD SISTEMNE TACKE PRESEKA: ,3HXC=
     1,E10.3,2X,3HYC=,E10.3)
 2020 FORMAT (//5H CVOR,7X,10HKOORDINATE/12X,1HX,8X,1HY)
 2025 FORMAT (1H ,17X,28HP R O R A C U N  N A P O N A//
     11X,7HELEMENT,2X,8HLOKACIJA,13X,20HKOMPONENTALNI NAPONI/10X,
     28HZ SP S E,8X,2HZZ,12X,2HZX,12X,2HZY)
 2026 FORMAT (/1X,I5)
 2030 FORMAT (1X,I3,3X,2F9.3)
 2040 FORMAT (//7H STRANA,3X,6H1.CVOR,3X,6H2.CVOR,3X,13HDEBLJINA ZIDA/)
 2050 FORMAT (1X,I4,5X,I4,5X,I4,5X,E12.5)
 2060 FORMAT (//24H MODUL ELASTICNOSTI   E=,E12.5/24H POISONOV KOEFICIJE
     1NT G=,E12.5/22H POVRSINA PRESEKA   A=,E12.5/22H MOMENAT INERCIJE I
     2XX=,E12.5/22H MOMENAT INERCIJE IYY=,E12.5/22H MOMENAT INERCIJE IXY
     3=,E12.5/5H  IH=,E12.5/5H SWX=,E12.5/5H SWY=,E12.5//)
 2070 FORMAT (5H CVOR,6X,3HSFX,9X,3HSFY,9X,3HIXF,9X,3HIYF,6X,9HIXFY-IYFX
     1/)
 2080 FORMAT (I4,2X,5E12.4)
 2090 FORMAT (//4H IFF/4H+---/)
 2100 FORMAT (//12H IFXFX+IFYFY/12H+-----------/)
 2120 FORMAT (8E11.3)
 2130 FORMAT (///)
 2140 FORMAT (5H STAP,3X,6HCVOR I,3X,6HCVOR J,3X,6HCVOR K,3X,5HGRUPA/)
 2150 FORMAT (I4,4X,I4,5X,I4,5X,I4,5X,I3)
 2160 FORMAT (//48H STAP   VEZA LOKALNE I GLOBALNE MATRICE KRUTOSTI/)
 2170 FORMAT (I4,1X,19I4)
      END
*     ------------------------------------------------------
      SUBROUTINE COLHT (MHT,ND,LM)
      DIMENSION LM(1),MHT(1)
      LS=100000
      DO 100 I=1,ND
      IF (LM(I)) 110,100,110
  110 IF (LM(I)-LS) 120,100,100
  120 LS=LM(I)
  100 CONTINUE
      DO 200 I=1,ND
      II=LM(I)
      IF (II.EQ.0) GOTO 200
      ME=II-LS
      IF (ME.GT.MHT(II)) MHT(II)=ME
  200 CONTINUE
      RETURN
      END
*     ------------------------------------------------------
      SUBROUTINE ADDRES (MAXA,MHT)
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      DIMENSION MAXA(1),MHT(1)
      NN=NEQ+1
```

LISTING 17

```
      DO 2Ø I=1,NN
   2Ø MAXA(I)=Ø
      MAXA(1)=1
      MAXA(2)=2
      MK=Ø
      IF (NEQ.EQ.1) GOTO 1ØØ
      DO 1Ø I=2,NEQ
      IF (MHT(I).GT.MK) MK=MHT(I)
   1Ø MAXA(I+1)=MAXA(I)+MHT(I)+1
  1ØØ MK=MK+1
      NWK=MAXA(NEQ+1)-MAXA(1)
      RETURN
      END
*     ------------------------------------------------
      SUBROUTINE CLEAR (A,N)
      DIMENSION A(1)
      DO 1Ø I=1,N
   1Ø A(I)=Ø.Ø
      RETURN
      END
*     ------------------------------------------------
      SUBROUTINE ASSEM
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /DIM/ N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N1Ø,N11,N12,N13,N14
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      COMMON A(1)
      IF (KSTEP.GT.1) GOTO 1Ø
      NN=N7+MAXEST-1
      REWIND 5
      READ(5) (A(I),I=N7,NN)
   1Ø CALL ELEMNT
      RETURN
      END
*     ------------------------------------------------
      SUBROUTINE LENGTH (XLT,XYZ)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION XYZ(1)
      XX=Ø.
      DO 1Ø L=1,3
      D=XYZ(L)-XYZ(L+3)
   1Ø XX=XX+D*D
      XLT=DSQRT(XX)
      RETURN
      END
*      ------------------------------------------------
      SUBROUTINE STIFNL (NUMPN,NUMPS,XX,YY,TS,ISN,AS,RE,WA,DISP,B,BNL,KA
     1S)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /EL/ IND,ICOUNT,NUMMAT,MTOT,ITWO,NUME,NUM1,NUM2,NUM3,KLIN
      COMMON /POS/ I1,I2,I3,I4,ISTRES
      COMMON /STNL/ XLT,ZOL,SOL,FAC,PFAC,INTZ,INTS
      COMMON /TABLE/ NTABLE,ITABLE
      COMMON /BTRANS/ DXYZ(9),XLN,EPS,EPS1
      COMMON /ICCOM/ ICC(21)
      COMMON /BELSTR/ SIG(4)
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      COMMON /IC/ IC(12),XC,YC
      COMMON /CRIS/ DP,DPSUM,DPO,DL,DETER,NRORC,A1,A4,WC1,WC2,KLKR,NPP
      REAL*8 LL
      DIMENSION AS(KAS,1),XX(1),YY(1),TS(1),ISN(1),B(3,1),BNL(7,1),
     1DISP(1),WI(7,7),RE(1),WA(1),DLL(3)
      DATA WI/1.ØDØ,13*Ø.ØDØ,Ø.666666666667DØ,2*Ø.166666666667DØ,
     111*Ø.ØDØ,Ø.133333333333DØ,2*Ø.355555555556DØ,2*Ø.777777777778D-1,
     22*Ø.ØDØ,7*Ø.ØDØ,Ø.32380952381DØ,2*Ø.321428571429D-1,
     32*Ø.257142857143DØ,2*Ø.488095238881D-1/
*     IF ((XC.EQ.Ø.Ø).AND.(YC.EQ.Ø.Ø)) GOTO 1
*     XLN1=WA(1)
```

LISTING 18

```
*       DO 5 I=1,3
*     5 DLL(I)=DISP(I+6+NUMPN)-DISP(I)
*       ADUM=(XLN1+DLL(3))**2+DLL(2)*DLL(2)
*       ADUM=DSQRT(ADUM)
*       XLN2=ADUM*ADUM+DLL(1)*DLL(1)
*       XLN2=DSQRT(XLN2)
*       EPS1=(XLN1-XLT)/XLT
*       EPS=(XLN2-XLT)/XLT
*       GOTO 2
      1 EPS1=WA(1)
        EPS=(XLN-XLT)/XLT
      2 DO 60 I=1,6
        ICC(I)=I
     60 ICC(8+I)=6+NUMPN+I
        DO 70 I=1,5
     70 ICC(I+16)=2*NUMPN+12+I
        IF (ISTRES) 49,49,10
     10 ZOL=((-1)**I1)/DBLE(FLOAT(INTZ-1))
        L1=I1/2
        ZOL=ZOL*L1+0.5
        IC1=ISN(2*I3-1)
        IC2=ISN(2*I3)
        TT=TS(I3)
        X2=XX(IC2)
        X1=XX(IC1)
        Y2=YY(IC2)
        Y1=YY(IC1)
        LL=DSQRT((X2-X1)*(X2-X1)+(Y2-Y1)*(Y2-Y1))
        COS=(Y2-Y1)/LL
        SIN=(X1-X2)/LL
        ICC(7)=6+IC1
        ICC(8)=6+IC2
        ICC(15)=12+NUMPN+IC1
        ICC(16)=12+NUMPN+IC2
        SOL=((-1)**I2)/DBLE(FLOAT(INTS-1))
        L2=I2/2
        SOL=SOL*L2+0.5
        SOLX=X1+(X2-X1)*SOL
        SOLY=Y1+(Y2-Y1)*SOL
        EOL=((-1)**I4)/DBLE(2.0)
        L3=I4/2
        EOL=EOL*L3*TT
        SOL1X=SOLX+EOL*COS
        SOL1Y=SOLY+EOL*SIN
        CALL SHAPE (SOL1X,SOL1Y,EOL,LL,COS,SIN,B,BNL)
        IST=ISTRES
        CALL BELPAL (WA(IST),DISP,B)
        WRITE(3,2000) I1,I3,I2,I4,(SIG(I),I=1,3)
        RETURN
     49 IST=-2
        DO 100 I1=1,INTZ
        ZOL=((-1)**I1)/DBLE(FLOAT(INTZ-1))
        L1=I1/2
        ZOL=ZOL*L1+0.5
        DO 105 I3=1,NUMPS
        IC1=ISN(2*I3-1)
        IC2=ISN(2*I3)
        TT=TS(I3)
        X2=XX(IC2)
        X1=XX(IC1)
        Y2=YY(IC2)
        Y1=YY(IC1)
        LL=DSQRT((X2-X1)*(X2-X1)+(Y2-Y1)*(Y2-Y1))
        COS=(Y2-Y1)/LL
        SIN=(X1-X2)/LL
        ICC(7)=6+IC1
        ICC(8)=6+IC2
        ICC(15)=12+NUMPN+IC1
```

LISTING 19

```
      ICC(16)=12+NUMPN+IC2
      DELV=XLT*TT*LL
      DO 110 I2=1,INTS
      SOL=((-1)**I2)/DBLE(FLOAT(INTS-1))
      L2=I2/2
      SOL=SOL*L2+0.5
      SOLX=X1+(X2-X1)*SOL
      SOLY=Y1+(Y2-Y1)*SOL
      DO 115 I4=1,3
      EOL=((-1)**I4)/DBLE(2.0)
      L3=I4/2
      EOL=EOL*L3*TT
      SOL1X=SOLX+EOL*COS
      SOL1Y=SOLY+EOL*SIN
      CALL SHAPE (SOL1X,SOL1Y,EOL,LL,COS,SIN,B,BNL)
      IST=IST+4
      CALL BELPAL (WA(IST),DISP,B)
      IF (NTABLE.EQ.0.AND.ISTRES.EQ.0) GOTO 120
      WFAC=WI(I1,INTZ)*WI(I2,INTS)*WI(I4,3)*DELV
      TAU13=SIG(2)
      TAU23=SIG(3)
      IF (IREF.EQ.0.AND.NRORC.EQ.2) GOTO 323
      IF (IEQREF.EQ.1.AND.NRORC.EQ.2) GOTO 323
      TAU33=SIG(4)
      DO 324 L=1,2
      DO 324 I=1,4,3
      DO 324 K=I,2*I
      KL=(L-1)*8+K
      J=ICC(KL)
      TEMP=B(1,J)*TAU33+B(2,J)*TAU13+B(3,J)*TAU23
  324 RE(J)=RE(J)+TEMP*WFAC
      TAU33=SIG(1)-SIG(4)
      DO 325 I=1,2
      K=(I-1)*8+3
      J=ICC(K)
      TEMP=B(1,J)*TAU33+B(2,J)*TAU13+B(3,J)*TAU23
  325 RE(J)=RE(J)+TEMP*WFAC
  323 IF (ICOUNT.GT.2) GOTO 115
      IF (IREF.NE.0) GOTO 115
  326 TAU33=SIG(1)
      K=21
      IF (IELE.EQ.2) K=16
      DO 400 I=1,K
      II=ICC(I)
      DO 400 J=I,K
      JJ=ICC(J)
      TEMP=(BNL(5,II)*BNL(5,JJ)+BNL(6,II)*BNL(6,JJ)+BNL(7,II)*BNL(7,JJ))
     1*TAU33+(BNL(1,II)*BNL(6,JJ)+BNL(2,II)*BNL(7,JJ)+BNL(6,II)*BNL(1,JJ
     2)+BNL(7,II)*BNL(2,JJ))*TAU13+(BNL(3,II)*BNL(5,JJ)+BNL(4,II)*BNL(7,
     3JJ)+BNL(5,II)*BNL(3,JJ)+BNL(7,II)*BNL(4,JJ))*TAU23
      AS(II,JJ)=AS(II,JJ)+TEMP*WFAC
  400 CONTINUE
      IF (NTABLE.NE.0.OR.ISTRES.NE.0) GOTO 115
  120 WRITE(3,2000) I1,I3,I2,I4,(SIG(I),I=1,3)
  115 CONTINUE
  110 CONTINUE
  105 CONTINUE
  100 CONTINUE
      IF (ISTRES.GE.0) RETURN
      IF (ICOUNT.GT.2) RETURN
*     IF ((XC.NE.0.0).OR.(YC.NE.0.0)) EPS=XLN2
      WA(1)=EPS
      IF (IREF) 351,369,351
  369 L=17+2*NUMPN
      IF (IELE.EQ.2) L=L-5
      DO 350 I=2,L
      K=I-1
      DO 350 J=1,K
```

LISTING 2Ø

```
  35Ø AS(I,J)=AS(J,I)
  351 CONTINUE
      RETURN
 2ØØØ FORMAT (9X,I2,I3,2I2,2X,3E14.6)
      END
*      -------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE SHAPE (SOLX,SOLY,EOL,LL,COS,SIN,B,BNL)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /STNL/ XLT,ZOL,SOL,FAC,PFAC,INTZ,INTS
      COMMON /ICCOM/ L(21)
      COMMON /EL/ IND,ICOUNT,NUMMAT,MTOT,ITWO,NUME,NUM1,NUM2,NUM3,KLIN
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      REAL*8 LL
      DIMENSION B(3,1),BNL(7,1)
      HN=SOLX*SIN-SOLY*COS
      DWX=HN*COS+EOL*SIN
      DWY=HN*SIN-EOL*COS
      W=HN*EOL
      F1=(1.-SOL)/XLT
      F2=SOL/XLT
      IF (IELE.EQ.2) GOTO 2Ø
      R1=(-3.+4.*ZOL)/XLT
      R2=(-1.+4.*ZOL)/XLT
      R3=1.-3.*ZOL+2.*ZOL*ZOL
      R4=(1.-2.*ZOL)*ZOL
      R5=(4.-8.*ZOL)/XLT
      R6=(1.-ZOL)*ZOL*4.
      B(1,3)=-1./XLT
      B(1,4)=SOLY*R1
      B(1,5)=-SOLX*R1
      B(1,6)=-4*W/XLT/XLT
      B(1,L(11))=-B(1,3)
      B(1,L(12))=SOLY*R2
      B(1,L(13))=-SOLX*R2
      B(1,L(14))=B(1,6)
      B(1,L(19))=SOLY*R5
      B(1,L(2Ø))=-SOLX*R5
      B(1,L(21))=-2.*B(1,6)
      B(2,1)=R1
      B(2,5)=-R3
      B(2,6)=-(SOLY+DWX)*R1
      B(2,L(9))=R2
      B(2,L(13))=R4
      B(2,L(14))=-(SOLY+DWX)*R2
      B(2,L(17))=R5
      B(2,L(2Ø))=-R6
      B(2,L(21))=-(SOLY+DWX)*R5
      B(3,2)=R1
      B(3,4)=R3
      B(3,6)=(SOLX-DWY)*R1
      B(3,L(1Ø))=R2
      B(3,L(12))=-R4
      B(3,L(14))=(SOLX-DWY)*R2
      B(3,L(18))=R5
      B(3,L(19))=R6
      B(3,L(21))=(SOLX-DWY)*R5
      B(1,L(7))=-F1
      B(1,L(8))=-F2
      B(1,L(15))=F1
      B(1,L(16))=F2
      B(2,L(7))=SIN*(1.-ZOL)/LL
      B(2,L(8))=-B(2,L(7))
      B(2,L(15))=SIN*ZOL/LL
      B(2,L(16))=-B(2,L(15))
      B(3,L(7))=-COS*(1-ZOL)/LL
      B(3,L(8))=-B(3,L(7))
      B(3,L(15))=-COS*ZOL/LL
      B(3,L(16))=-B(3,L(15))
```

LISTING 21

```
      IF (KLIN.EQ.Ø) GOTO 1Ø
      BNL(1,6)=R3
      BNL(1,L(14))=-R4
      BNL(2,5)=-R3
      BNL(2,6)=-DWX*R1
      BNL(2,L(13))=R4
      BNL(2,L(14))=-DWX*R2
      BNL(3,6)=-R3
      BNL(3,L(14))=R4
      BNL(4,4)=R3
      BNL(4,6)=-DWY*R1
      BNL(4,L(12))=-R4
      BNL(4,L(14))=-DWY*R2
      BNL(5,1)=R1
      BNL(5,6)=-SOLY*R1
      BNL(5,L(9))=R2
      BNL(5,L(14))=-SOLY*R2
      BNL(6,2)=R1
      BNL(6,6)=SOLX*R1
      BNL(6,L(1Ø))=R2
      BNL(6,L(14))=SOLX*R2
      BNL(7,3)=-1./XLT
      BNL(7,4)=-BNL(5,6)
      BNL(7,5)=-BNL(6,6)
      BNL(7,6)=-4*W/XLT/XLT
      BNL(7,L(11))=1./XLT
      BNL(7,L(12))=-BNL(5,L(14))
      BNL(7,L(13))=-BNL(6,L(14))
      BNL(7,L(14))=BNL(7,6)
      BNL(2,L(7))=SIN*(1.-ZOL)/LL
      BNL(2,L(8))=-BNL(2,L(7))
      BNL(2,L(15))=SIN*ZOL/LL
      BNL(2,L(16))=-BNL(2,L(15))
      BNL(4,L(7))=-COS*(1.-ZOL)/LL
      BNL(4,L(8))=-BNL(4,L(7))
      BNL(4,L(15))=-COS*ZOL/LL
      BNL(4,L(16))=-BNL(4,L(15))
      BNL(7,L(7))=-F1
      BNL(7,L(8))=-F2
      BNL(7,L(15))=F1
      BNL(7,L(16))=F2
      BNL(1,L(21))=R6
      BNL(2,L(2Ø))=-R6
      BNL(2,L(21))=-DWX*R5
      BNL(3,L(21))=-R6
      BNL(4,L(19))=R6
      BNL(4,L(21))=-DWY*R5
      BNL(5,L(17))=R5
      BNL(5,L(21))=-SOLY*R5
      BNL(6,L(18))=R5
      BNL(6,L(21))=SOLX*R5
      BNL(7,L(19))=-BNL(5,L(21))
      BNL(7,L(2Ø))=-BNL(6,L(21))
      BNL(7,L(21))=-2.*BNL(7,6)
      GOTO 1Ø
   2Ø R1=(6.-12.*ZOL)/XLT/XLT
      R2=(4.-6.*ZOL)/XLT
      R3=(2.-6.*ZOL)/XLT
      R4=(6.*ZOL-6.*ZOL*ZOL)/XLT
      R5=-1.+4.*ZOL-3.*ZOL*ZOL
      R6=2.*ZOL-3.*ZOL*ZOL
      B(1,1)=SOLX*R1
      B(1,2)=SOLY*R1
      B(1,3)=-1./XLT
      B(1,4)=-SOLY*R2
      B(1,5)=SOLX*R2
      B(1,L(9))=-B(1,1)
      B(1,L(1Ø))=-B(1,2)
```

LISTING 22

```
      B(1,L(11))=-B(1,3)
      B(1,L(12))=-SOLY*R3
      B(1,L(13))=SOLX*R3
      B(1,L(7))=-F1
      B(1,L(8))=-F2
      B(1,L(15))=F1
      B(1,L(16))=F2
      B(2,6)=(SOLY+DWX)/XLT
      B(2,L(14))=-B(2,6)
      B(3,6)=-(SOLX-DWY)/XLT
      B(3,L(14))=-B(3,6)
      B(2,L(7))=SIN*(1.-ZOL)/LL
      B(2,L(8))=-B(2,L(7))
      B(2,L(15))=SIN*ZOL/LL
      B(2,L(16))=-B(2,L(15))
      B(3,L(7))=-COS*(1-ZOL)/LL
      B(3,L(8))=-B(3,L(7))
      B(3,L(15))=-COS*ZOL/LL
      B(3,L(16))=-B(3,L(15))
      IF (KLIN.EQ.Ø) GOTO 1Ø
      BNL(1,6)=1.-ZOL
      BNL(1,L(14))=ZOL
      BNL(2,1)=R4
      BNL(2,5)=R5
      BNL(2,6)=DWX/XLT
      BNL(2,L(9))=-BNL(2,1)
      BNL(2,L(13))=R6
      BNL(2,L(14))=-BNL(2,6)
      BNL(3,6)=-B(1,6)
      BNL(3,L(14))=-BNL(1,L(14))
      BNL(4,2)=BNL(2,1)
      BNL(4,4)=-BNL(2,5)
      BNL(4,6)=DWY/XLT
      BNL(4,L(1Ø))=BNL(2,L(9))
      BNL(4,L(12))=-BNL(2,L(13))
      BNL(4,L(14))=-BNL(4,6)
      BNL(5,1)=-BNL(2,1)
      BNL(5,5)=-BNL(2,5)
      BNL(5,6)=SOLY/XLT
      BNL(5,L(9))=-BNL(2,L(9))
      BNL(5,L(13))=-BNL(2,L(13))
      BNL(5,L(14))=-BNL(5,6)
      BNL(6,2)=-BNL(4,2)
      BNL(6,4)=-BNL(4,4)
      BNL(6,6)=-SOLX/XLT
      BNL(6,L(1Ø))=-BNL(4,L(1Ø))
      BNL(6,L(12))=-BNL(4,L(12))
      BNL(6,L(14))=-BNL(6,6)
      BNL(7,1)=SOLX*R1
      BNL(7,2)=SOLY*R1
      BNL(7,3)=-1./XLT
      BNL(7,4)=-SOLY*R2
      BNL(7,5)=SOLX*R2
      BNL(7,L(9))=-BNL(7,1)
      BNL(7,L(1Ø))=-BNL(7,2)
      BNL(7,L(11))=1./XLT
      BNL(7,L(12))=-SOLY*R3
      BNL(7,L(13))=SOLX*R3
      BNL(2,L(7))=SIN*(1.-ZOL)/LL
      BNL(2,L(8))=-BNL(2,L(7))
      BNL(2,L(15))=SIN*ZOL/LL
      BNL(2,L(16))=-BNL(2,L(15))
      BNL(4,L(7))=-COS*(1.-ZOL)/LL
      BNL(4,L(8))=-BNL(4,L(7))
      BNL(4,L(15))=-COS*ZOL/LL
      BNL(4,L(16))=-BNL(4,L(15))
      BNL(7,L(7))=-F1
      BNL(7,L(8))=-F2
```

LISTING 23

```
      BNL(7,L(15))=F1
      BNL(7,L(16))=F2
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
*     ---------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE BELPAL (SIGO,DISP,B)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /ICCOM/ M(21)
      COMMON /STNL/ XLT,ZOL,SOL,FAC,PFAC,INTZ,INTS
      COMMON /EL/ IND,ICOUNT,NUMMAT,MTOT,ITWO,NUME,NUM1,NUM2,NUM3,KLIN
      COMMON /BTRANS/ DXYZ(9),XLN,EPS,EPS1
      COMMON /BELSTR/ SIG(4)
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      DIMENSION SIGO(4),DELEPS(4),DELSIG(4),DISP(1),B(3,1)
      DO 10 I=1,4
   10 SIG(I)=SIGO(I)
      I=1
      TEMP=0.
      DO 105 J=1,4
  105 DELEPS(J)=0.0
      IF (IELE.EQ.2) GOTO 140
      DO 108 J=1,5
  108 TEMP=TEMP+B(I,M(3+J))*DISP(M(3+J))+B(I,M(11+J))*DISP(M(11+J))+
     1B(I,M(16+J))*DISP(M(16+J))
      GOTO 130
  140 DO 110 J=1,3
      DO 110 K=1,2
      L=(3*J-3)+K
  110 TEMP=TEMP+B(I,M(L))*DISP(M(L))+B(I,M(L+8))*DISP(M(L+8))
  130 DELEPS(4)=TEMP
      DELEPS(1)=DELEPS(4)+B(I,M(3))*DISP(M(3))+B(I,M(11))*DISP(M(11))
*     DELEPS(1)=DELEPS(4)+EPS-EPS1
      IF (IELE.EQ.2) GOTO 150
      DO 310 I=2,3
      DO 310 J=1,21
      DELEPS(I)=DELEPS(I)+B(I,M(J))*DISP(M(J))
  310 CONTINUE
      GOTO 160
  150 DO 320 I=2,3
      DO 320 J=6,8
  320 DELEPS(I)=DELEPS(I)+B(I,M(J))*DISP(M(J))+B(I,M(J+8))*DISP(M(J+8))
  160 DELSIG(1)=FAC*DELEPS(1)
      DELSIG(4)=FAC*DELEPS(4)
      DO 120 L=2,3
  120 DELSIG(L)=PFAC*DELEPS(L)
      DO 125 L=1,4
  125 SIG(L)=DELSIG(L)+SIG(L)
      IF (ICOUNT.EQ.3) GOTO 200
      DO 12 I=1,4
   12 SIGO(I)=SIG(I)
  200 CONTINUE
      RETURN
      END
*     ---------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE ENDREL (AS,SREL,DISP,NSIZE,IENDRL,KM)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION AS(2*KM+5,1),SREL(5,1),DISP(1)
      IF (IENDRL-2) 30,30,10
   10 DO 20 J=1,5
      JJ=NSIZE-5+J
      DUM=0.0
      K=JJ-1
      DO 15 I=1,K
   15 DUM=DUM+SREL(J,I)*DISP(I)
   20 DISP(JJ)=-DUM/SREL(J,JJ)
      RETURN
   30 DO 40 K=1,5
```

LISTING 24

```
      LL=NSIZE-K
      KK=LL+1
      DO 40 L=1,LL
      DUM=AS(KK,L)/AS(KK,KK)
      DO 40 M=1,L
   40 AS(L,M)=AS(L,M)-AS(KK,M)*DUM
      DO 50 I=1,6
      K=NSIZE-6+I
      DO 50 J=1,NSIZE
   50 SREL(I,J)=AS(K,J)
      NNSIZE=NSIZE-6
      DO 60 I=2,NNSIZE
      K=I-1
      DO 60 J=1,K
   60 AS(J,I)=AS(I,J)
      RETURN
      END
      ---------------------------------------------------------
      SUBROUTINE TRANSF (XYZ,AS,BS,T,DISP,PDISP,GAMA,NUMPN,ITONLY,KAS)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /STNL/ XLT,ZOL,SOL,FAC,PFAC,INTZ,INTS
      COMMON /BTRANS/ DXYZ(9),XLN,EPS,EPS1
      COMMON /EL/ IND,ICOUNT,NUMMAT,MTOT,ITWO,NUME,NUM1,NUM2,NUM3,KLIN
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /IC/ IC(12),XC,YC
      DIMENSION T(3,3),XYZ(9),AS(KAS,1),BS(3,3),XM(3),DL(3),PDISP(1),
     1DISP(1),ICC(4),IDD(2)
      IF (ITONLY-2) 6,11,200
    6 CX=XYZ(4)-XYZ(1)
      CY=XYZ(5)-XYZ(2)
      CZ=XYZ(6)-XYZ(3)
      DX=XYZ(7)-XYZ(1)
      DY=XYZ(8)-XYZ(2)
      DZ=XYZ(9)-XYZ(3)
      AX=DY*CZ-CY*DZ
      AY=CX*DZ-DX*CZ
      AZ=DX*CY-CX*DY
      AL=DSQRT(AX*AX+AY*AY+AZ*AZ)
      CL=DSQRT(CX*CX+CY*CY+CZ*CZ)
      T(1,1)=AX/AL
      T(1,2)=AY/AL
      T(1,3)=AZ/AL
      T(3,1)=CX/CL
      T(3,2)=CY/CL
      T(3,3)=CZ/CL
      T(2,1)=T(1,3)*T(3,2)-T(1,2)*T(3,3)
      T(2,2)=T(1,1)*T(3,3)-T(1,3)*T(3,1)
      T(2,3)=T(1,2)*T(3,1)-T(1,1)*T(3,2)
  100 CONTINUE
      RETURN
  200 DO 201 I=1,3
  201 XM(I)=DISP(I+6+NUMPN)-DISP(I)
  205 DO 202 I=1,3
      TEMP=0.0
      DO 203 J=1,3
  203 TEMP=TEMP+T(I,J)*XM(J)
  202 DL(I)=TEMP
      ADUM=(XLT+DL(3))**2+DL(2)*DL(2)
      ADUM=DSQRT(ADUM)
      TEMP=ADUM/XLT
      IF (TEMP.GT.0.000001D0) GOTO 223
      DO 221 I=1,3
  221 XM(I)=PDISP(I+6+NUMPN)-PDISP(I)
      ITONLY=6
      GOTO 205
  223 AROT=(XLT+DL(3))/ADUM
      BROT=DL(2)/ADUM
```

LISTING 28

```
      XLN=ADUM*ADUM+DL(1)*DL(1)
      XLN=DSQRT(XLN)
      CROT=ADUM/XLN
      DROT=DL(1)/XLN
      BS(3,3)=AROT*CROT
      BS(3,1)=DROT
      BS(3,2)=BROT*CROT
      BS(1,3)=-AROT*DROT
      BS(1,1)=CROT
      BS(1,2)=-BROT*DROT
      BS(2,3)=-BROT
      BS(2,1)=0.0
      BS(2,2)=AROT
      DO 230 I=1,3
      DO 232 J=1,3
      TEMP=0.0
      DO 234 K=1,3
  234 TEMP=TEMP+BS(I,K)*T(K,J)
  232 XM(J)=TEMP
      DO 235 L=1,3
  235 BS(I,L)=XM(L)
  230 CONTINUE
      RROT=0.0
      DO 210 I=1,3
  210 RROT=RROT+T(3,I)*((DISP(I+3)-PDISP(I+3))+(DISP(I+9+NUMPN)-PDISP(I+
     19+NUMPN)))
      RROT=0.5*RROT+GAMA
      GAMA=RROT
      ROT1=DCOS(RROT)
      ROT2=DSIN(RROT)
      DO 215 I=1,3
      T(3,I)=BS(3,I)
      T(1,I)=ROT1*BS(1,I)+ROT2*BS(2,I)
  215 T(2,I)=-ROT2*BS(1,I)+ROT1*BS(2,I)
      RETURN
   11 IF ((XC.EQ.0.0).AND.(YC.EQ.0.0)) GOTO 9
      NMAX=12+2*NUMPN
      DO 8 I=1,NMAX
      AS(6,I)=AS(6,I)-YC*AS(1,I)+XC*AS(2,I)
      AS(IC(12),I)=AS(IC(12),I)-YC*AS(IC(7),I)+XC*AS(IC(8),I)
      IF (IELE.EQ.2) AS(6,I)=AS(6,I)+XC/XLT*(AS(4,I)+AS(IC(10),I))+YC/XL
     1T*(AS(5,I)+AS(IC(11),I))
      IF (IELE.EQ.2) AS(IC(12),I)=AS(IC(12),I)-XC/XLT*(AS(4,I)+AS(IC(10)
     1,I))-YC/XLT*(AS(5,I)+AS(IC(11),I))
      AS(4,I)=AS(4,I)+YC*AS(3,I)
      AS(5,I)=AS(5,I)-XC*AS(3,I)
      AS(IC(10),I)=AS(IC(10),I)+YC*AS(IC(9),I)
    8 AS(IC(11),I)=AS(IC(11),I)-XC*AS(IC(9),I)
      DO 7 I=1,NMAX
      AS(I,6)=AS(I,6)-YC*AS(I,1)+XC*AS(I,2)
      AS(I,IC(12))=AS(I,IC(12))-YC*AS(I,IC(7))+XC*AS(I,IC(8))
      IF (IELE.EQ.2) AS(I,6)=AS(I,6)+XC/XLT*(AS(I,4)+AS(I,IC(10)))+YC/XL
     1T*(AS(I,5)+AS(I,IC(11)))
      IF (IELE.EQ.2) AS(I,IC(12))=AS(I,IC(12))-XC/XLT*(AS(I,4)+AS(I,IC(1
     10)))-YC/XLT*(AS(I,5)+AS(I,IC(11)))
      AS(I,4)=AS(I,4)+YC*AS(I,3)
      AS(I,5)=AS(I,5)-XC*AS(I,3)
      AS(I,IC(10))=AS(I,IC(10))+YC*AS(I,IC(9))
    7 AS(I,IC(11))=AS(I,IC(11))-XC*AS(I,IC(9))
    9 DO 10 I=1,2
      ICC(I)=3*I-2
   10 ICC(2+I)=4+NUMPN+3*I
      IDD(1)=7
      IDD(2)=13+NUMPN
      DO 450 I=1,4
      II=ICC(I)
      DO 480 J=I,4
      JJ=ICC(J)
```

LISTING 26

```
      DO 5Ø1 M=1,3
      I1=II+M-1
      DO 5Ø1 NI=1,3
      TEMP=Ø.Ø
      DO 5ØØ K=1,3
      K1=JJ+K-1
  5ØØ TEMP=TEMP+AS(I1,K1)*T(K,NI)
      BS(M,NI)=TEMP
  5Ø1 CONTINUE
      DO 511 M=1,3
      I1=II+M-1
      DO 511 NI=1,3
      J1=JJ+NI-1
      TEMP=Ø.Ø
      DO 51Ø K=1,3
  51Ø TEMP=TEMP+T(K,M)*BS(K,NI)
      AS(I1,J1)=TEMP
  511 CONTINUE
  45Ø CONTINUE
      DO 6ØØ I=1,2
      II=IDD(I)
      DO 6ØØ J=1,4
      JJ=ICC(J)
      DO 61Ø M=1,NUMPN
      I1=II+M-1
      DO 6Ø1 NI=1,3
      TEMP=Ø.Ø
      DO 6Ø3 K=1,3
      K1=JJ+K-1
  6Ø3 TEMP=TEMP+AS(I1,K1)*T(K,NI)
      BS(1,NI)=TEMP
  6Ø1 CONTINUE
      DO 61Ø NI=1,3
      J1=JJ+NI-1
      IF (I1-J1) 615,615,616
  615 AS(I1,J1)=BS(1,NI)
      GOTO 61Ø
  616 AS(J1,I1)=BS(1,NI)
  61Ø CONTINUE
  6ØØ CONTINUE
      RETURN
      END
      -------------------------------------------------------
      SUBROUTINE TRANPC (DISP,RE,ITON)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /IC/ IC(12),XC,YC
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      COMMON /STNL/ XLT,ZOL,SOL,FAC,PFAC,INTZ,INTS
      DIMENSION DISP(1),RE(1)
      IF (ITON-2) 1Ø,2Ø,2Ø
   1Ø DISP(1)=DISP(1)-YC*DISP(6)
      DISP(2)=DISP(2)+XC*DISP(6)
      DISP(3)=DISP(3)+YC*DISP(4)-XC*DISP(5)
      IF (IELE.EQ.2) DISP(4)=DISP(4)+XC/XLT*(DISP(6)-DISP(IC(12)))
      IF (IELE.EQ.2) DISP(5)=DISP(5)+YC/XLT*(DISP(6)-DISP(IC(12)))
      DISP(IC(7))=DISP(IC(7))-YC*DISP(IC(12))
      DISP(IC(8))=DISP(IC(8))+XC*DISP(IC(12))
      DISP(IC(9))=DISP(IC(9))+YC*DISP(IC(1Ø))-XC*DISP(IC(11))
      IF (IELE.EQ.2) DISP(IC(1Ø))=DISP(IC(1Ø))+XC/XLT*(DISP(6)-DISP(IC(1
     12)))
      IF (IELE.EQ.2) DISP(IC(11))=DISP(IC(11))+YC/XLT*(DISP(6)-DISP(IC(1
     12)))
      RETURN
   2Ø RE(4)=RE(4)+YC*RE(3)
      RE(5)=RE(5)-XC*RE(3)
      RE(6)=RE(6)-YC*RE(1)+XC*RE(2)
      IF (IELE.EQ.2) RE(6)=RE(6)+XC/XLT*(RE(4)+RE(IC(1Ø)))+YC/XLT*(RE(5)
     1+RE(IC(11)))
```

```
      RE(IC(10))=RE(IC(10))+YC*RE(IC(9))
      RE(IC(11))=RE(IC(11))-XC*RE(IC(9))
      RE(IC(12))=RE(IC(12))-YC*RE(IC(7))+XC*RE(IC(8))
      IF (IELE.EQ.2) RE(IC(12))=RE(IC(12))-XC/XLT*(RE(4)+RE(IC(10)))-YC/
     1XLT*(RE(5)+RE(IC(11)))
      RETURN
      END
*     ------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE ADDBAN (NMAX,A,MAXA,S,RE,LM,KKK)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(1),MAXA(1),S(1),LM(1),RE(1)
      IF (KKK-1) 10,10,300
   10 NDI=0
      DO 200 I=1,NMAX
      II=LM(I)
      IF (II) 200,200,100
  100 MI=MAXA(II)
      KS=I
      DO 220 J=1,NMAX
      JJ=LM(J)
      IF (JJ) 220,220,110
  110 IJ=II-JJ
      IF (IJ) 220,210,210
  210 KK=MI+IJ
      KSS=KS
      IF (J.GE.I) KSS=J+NDI
      A(KK)=A(KK)+S(KSS)
  220 KS=KS+NMAX-J
  200 NDI=NDI+NMAX-I
      RETURN
  300 DO 310 I=1,NMAX
      II=LM(I)
      IF (II) 310,310,350
  350 A(II)=A(II)-RE(I)
  310 CONTINUE
      RETURN
      END
*     -----------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE LOADMS (RE)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /EL/ IND,ICOUNT,NUMMAT,MTOT,ITWO,NUME,NUM1,NUM2,NUM3,KLIN
      COMMON /CRIS/ DP,DPSUM,DPO,DL,DETER,NRORC,A1,A4,WC1,WC2,KLKR,NPP
      DIMENSION RE(NEQ)
      READ (1) RE
      IF (KLIN.EQ.0.OR.NRORC.EQ.2) GOTO 10
      DO 5 I=1,NEQ
    5 RE(I)=RE(I)*KSTEP
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
*     ---------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE EQUIT (AA,DISPI,DINCOR,RE,DISP,MAXA,WV)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /ENERGY/ PEOLD,PEINIT
      COMMON /NORMS/ RNORM,RENORM,RTOL,DTOL,ETOL
      COMMON /EL/ IND,ICOUNT,NUMMAT,MTOT,ITWO,NUME,NUM1,NUM2,NUM3,KLIN
      COMMON /EQIT/ NLSTPD,ISDVG,ITEDIV,NLSTEP
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      COMMON /KM/ KM,IDWA,KMM,KAS
      COMMON /DIM/ N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N10,N11,N12,N13,N14,N136
      COMMON /CRIS/ DP,DPSUM,DPO,DL,DETER,NRORC,A1,A4,WC1,WC2,KLKR,NPP
      REAL A
      COMMON A(1)
      DIMENSION AA(1),DISPI(1),RE(1),DISP(1),MAXA(1),WV(1),DINCOR(1)
      ICOUNT=3
```

LISTING 28

```
      NPP=Ø
      ICONVG=Ø
      ITE=Ø
      PEINIT=PRDINN (RE,DISPI,NEQ)
      PEOLD=PEINIT
  5ØØ ITE=ITE+1
      REWIND 1
      CALL LOADMS (RE)
      IF (NRORC.EQ.1) GOTO 5
      DO 1Ø I=1,NEQ
   1Ø RE(I)=DP*RE(I)
    5 IF (ISDVG.LT.2) GOTO 5Ø
      DO 27 I=1,NEQ
   27 RE(I)=RE(I)-DINCOR(I)
   5Ø DO 12Ø I=1,NEQ
  12Ø WV(I)=DISP(I)+DISPI(I)
      CALL ELEMNT
      IF (NRORC.EQ.2) GOTO 23Ø
      IF (ITE.EQ.1.AND.PEINIT.LT.1.ØD-8) PEINIT=1.ØD-8
      IF (PEOLD.GT.1ØØØØ.Ø*PEINIT) GOTO 21Ø
      IF (ITE.LT.(ITEMAX/2+1)) GOTO 23Ø
      IF (PEOLD.LE.PEINIT) GOTO 23Ø
  21Ø IEQREF=1
      ICOUNT=2
      REWIND 1
      RETURN
  23Ø DO 235 I=1,NEQ
  235 WV(I)=RE(I)
      CALL COLSOL (AA,RE,MAXA,NEQ,NWK,2)
      IF (NRORC.EQ.2) CALL CRIS2 (DISPI,RE,A(N136),WV,DINCOR,NEQ)
      IF (NPP.EQ.1) GOTO 21Ø
      RENORM=PRDINN (WV,WV,NEQ)
      RENORM=DSQRT(RENORM)
      PEOLD=PRDINN (RE,WV,NEQ)
      IF (RNORM.EQ.Ø.Ø) GOTO 29Ø
      IF (RENORM.GT.RTOL*RNORM) GOTO 256
  29Ø IF (ABS(PEOLD).GT.ETOL*ABS(PEINIT)) GOTO 256
      ICONVG=1
  256 DO 3ØØ I=1,NEQ
  3ØØ DISPI(I)=DISPI(I)+RE(I)
  31Ø IF (ICONVG.EQ.1) GOTO 4ØØ
  37Ø IF (ITE.LT.ITEMAX) GOTO 5ØØ
      GOTO 21Ø
  4ØØ ICOUNT=2
      IF (RNORM.GT.Ø.Ø) GOTO 385
      WRITE (3,2Ø25) KSTEP,ITE
      IF (NRORC.EQ.2) WRITE (3,2Ø26) DP
      WRITE (3,2Ø31) RENORM,PEINIT,PEOLD
      GOTO 386
  385 RTNORM=RTOL*RNORM
      WRITE (3,2Ø25) KSTEP,ITE
      IF (NRORC.EQ.2) WRITE (3,2Ø26) DP
      WRITE (3,2Ø3Ø) RTNORM,RENORM,PEINIT,PEOLD
  386 CONTINUE
      IF (NRORC.EQ.1) GOTO 43Ø
      WC1=WC2
      IF (KLKR.EQ.1) GOTO 41Ø
      BETA=DP/DPSUM
      TETA=ABS(ABS(BETA)-1)
      IF (TETA.GT.Ø.15) KLKR=3
      WC2=BETA*WC1
      GOTO 42Ø
  41Ø DL=DL*DSQRT(4.Ø/DBLE(ITE))
  42Ø DPSUM=DP
      DP=Ø.Ø
  43Ø CONTINUE
      RETURN
 2Ø25 FORMAT (///1H ,
```

LISTING 29

```
     150HINKREMENT OPTERECENJA                                         =,I6/
     251H BROJ ITERACIJA                                               =,I6)
 2026 FORMAT (1H ,
     151HNIVO OPTERECENJA                                              =,E15.6)
 2030 FORMAT (     ///1H ,31HNORMA U POSLEDNJOJ ITERACIJI              //
     151H MAKSIMALNO DOZVOLJENA NORMA NEURAVNOTEZENIH SILA =,E15.6/
     251H NORMA NEURAVNOTEZENIH SILA                                   =,E15.6/
     351H NORMA INKREMENTALNE ENERGIJE                                 =,E15.6/
     451H NORMA NEURAVNOTEZENE INKREMENTALNE ENERGIJE                  =,E15.6 )
 2031 FORMAT (    /  1H ,31HNORMA U POSLEDNJOJ ITERACIJI               //
     151H MAKSIMALNO DOZVOLJENA NORMA NEURAVNOTEZENIH SILA =,
     23X, 21H(** NE KORISTI SE **)                                             /
     251H NORMA NEURAVNOTEZENIH SILA                                   =,E15.6/
     351H NORMA INKREMENTALNE ENERGIJE                                 =,E15.6/
     451H NORMA NEURAVNOTEZENE INKREMENTALNE ENERGIJE                  =,E15.6 )
      END
*     ------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE COLSOL (A,V,MAXA,NN,NWK,KKK)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /CRIS/ DP,DPSUM,DPO,DL,DETER,NRORC,A1,A4,WC1,WC2,KLKR,NPP
      DIMENSION A(NWK),V(1),MAXA(1)
      IF (KKK-2) 40,150,150
   40 DETER=1.0
      DO 140 N=1,NN
      KN=MAXA(N)
      KL=KN+1
      KU=MAXA(N+1)-1
      KH=KU-KL
      IF (KH) 110,90,50
   50 K=N-KH
      IO=0
      KLT=KU
      DO 80 J=1,KH
      IO=IO+1
      KLT=KLT-1
      KI=MAXA(K)
      ND=MAXA(K+1)-KI-1
      IF (ND) 80,80,60
   60 KK=MIN0(IO,ND)
      C=0.
      DO 70 L=1,KK
   70 C=C+A(KI+L)*A(KLT+L)
      A(KLT)=A(KLT)-C
   80 K=K+1
   90 K=N
      B=0.
      DO 100 KK=KL,KU
      K=K-1
      KI=MAXA(K)
      C=A(KK)/A(KI)
      B=B+C*A(KK)
  100 A(KK)=C
      A(KN)=A(KN)-B
  110 IF (NRORC.EQ.1) GOTO 115
      IF (A(KN).LT.0.0) DETER=-DETER
      GOTO 140
  115 IF (A(KN)) 120,120,140
  120 WRITE (3,2000) N,A(KN)
      STOP
  140 CONTINUE
  150 DO 180 N=1,NN
      KL=MAXA(N)+1
      KU=MAXA(N+1)-1
      IF (KU-KL) 180,160,160
  160 K=N
      C=0.
      DO 170 KK=KL,KU
      K=K-1
```

LISTING 30

```
  170 C=C+A(KK)*V(K)
      V(N)=V(N)-C
  180 CONTINUE
      DO 200 N=1,NN
      K=MAXA(N)
  200 V(N)=V(N)/A(K)
      IF (NN.EQ.1) RETURN
      N=NN
      DO 230 L=2,NN
      KL=MAXA(N)+1
      KU=MAXA(N+1)-1
      IF (KU-KL) 230,210,210
  210 K=N
      DO 220 KK=KL,KU
      K=K-1
  220 V(K)=V(K)-A(KK)*V(N)
  230 N=N-1
      RETURN
 2000 FORMAT (//45H STOP - MATRICA NIJE POZITIVNO DEFINITNA      //
     1           45H NEPOZITIVAN ELEMENAT ZA JEDNACINU           ,I4,//
     2           30H BROJNA VREDNOST ELEMENTA =    ,E20.12)
      END
*     ------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE DIVERG (DISP,R,RESID,AA,RE,WV,MAXA)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /EQIT/ NLSTPD,ISDVG,ITEDIV,NLSTEP
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      DIMENSION DISP(1),R(1),AA(1),RE(1),WV(1),MAXA(1),RESID(1)
      COMMON A(1)
      INTEGER IA(1)
      REAL A
      EQUIVALENCE (A(1),IA(1))
      IF (NLSTPD.EQ.0) GOTO 400
      ITESUM=ITE
      ITEDIV=ITE
      ITDVMX=NLSTPD*ITEMAX
      ISDVG=2
      NLSTEP=0
      FACTOR=0.0
      DELFAC=0.0
      WRITE (3,2500) NLSTPD
   10 DLFACO=DELFAC
      DELFAC=DELFAC*DELFAC
      IF (DLFACO.LT.0.25.AND.DLFACO.GT.0.0625) DELFAC=0.0625
      IF (DELFAC.EQ.0.0) DELFAC=0.5
      IF (DELFAC.LT.0.0625) GOTO 500
      KTR=2
      CALL LOADMS (R)
   20 CONTINUE
      CALL ELEMNT
      DO 30 I=1,NEQ
      RESID(I)=R(I)*(1.0-(DELFAC/(1.0-FACTOR)))
      R(I)=R(I)*DELFAC/(1.0-FACTOR)
   30 RE(I)=R(I)
      CALL COLSOL (AA,R,MAXA,NEQ,NWK,KTR)
      IEQREF=0
      IREF=1
      CALL EQUIT (AA,R,RESID,RE,DISP,MAXA,WV)
      ITESUM=ITESUM+ITE
      ITEDIV=ITEDIV+ITE
      IF (ITEDIV.GT.ITDVMX) GOTO 200
      IF (ITE.GT.ITEMAX) GOTO 10
      IF (IEQREF.EQ.0) GOTO 50
      GOTO 10
   50 NLSTEP=NLSTEP+1
      FACTOR=FACTOR+DELFAC
      WRITE (3,2552)
```

```
      WRITE (3,2551) NLSTEP,FACTOR,ITESUM
      ITESUM=0
      IF (FACTOR.EQ.1.0) GOTO 100
      IF (NLSTEP.EQ.NLSTPD) GOTO 500
      DELFAC=0.5
      IF (ITE.GT.4) DELFAC=0.25
      IF (ITE.GT.12) DELFAC=0.0625
      IF ((FACTOR+DELFAC).GT.1.0) DELFAC=1.0-FACTOR
      DO 55 I=1,NEQ
   55 DISP(I)=DISP(I)+R(I)
   70 REWIND 1
      CALL LOADMS (R)
      KTR=1
      IREF=0
      GOTO 20
  100 ISDVG=0
      WRITE (3,2600) NLSTEP,ITEDIV
      RETURN
  200 WRITE (3,2000) NLSTEP,FACTOR
      WRITE (3,2200) ITDVMX
      ISDVG=1
      RETURN
  400 WRITE (3,2100) ITE
      ISDVG=1
      RETURN
  500 WRITE (3,2000) NLSTEP,FACTOR
      ISDVG=1
      RETURN
 2000 FORMAT (1H ,
     159HKONVERGENCIJA NIJE POSTIGNUTA U OVOM INKREMENTU OPTERECENJA/
     210X,41H BROJ ISKORISCENIH PODINKREMENATA       = ,I5/
     310X,41H DOSTIGNUTI DEO INKREMENTA OPTERECENJA = ,E14.6)
 2100 FORMAT (1H ,
     166HNEURAVNOTEZENE SILE VECE OD INKREMENTA OPTERECENJA NAKON ITERAC
     2IJE,I5)
 2200 FORMAT (//1H ,
     137HMAKSIMALNO DOZVOLJENI BROJ ITERACIJA,,I5,13H JE DOSTIGNUT)
 2500 FORMAT (//1H ,
     162HITERACIJE U OKVIRU OVOG INKREMENTA OPTERECENJA NE KONVERGIRAJU
     2//47H INKREMENT OPTERECENJA BICE PODELJEN U MAKSIMUM,I5,
     358H MANJIH PODINKREMENATA DA BI SE POKUSALO SA KONVERGENCIJOM//)
 2552 FORMAT (//1H ,
     15X,10HREDNI BROJ,7X,14HDOSTIGNUTI DEO,7X,4HBROJ/3X,
     214HPOD-INKREMENTA,7X,10HINKREMENTA,7X,9HITERACIJA/)
 2551 FORMAT (9X,I2,11X,E14.6,8X,I3)
 2600 FORMAT (/1H ,
     161HKONVERGENCIJA POSTIGNUTA U OKVIRU OVOG INKREMENTA OPTERECENJA/
     210X,50HBROJ ISKORISCENIH INKREMENATA                        = ,I5/
     310X,50HUKUPAN BROJ ITERACIJA POTREBAN ZA KONVERGENCIJU = ,I5)
      END
*     -----------------------------------------------------
      SUBROUTINE DIVCRI (DISP,R,RESID,AA,RE,WV,MAXA)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /EQIT/ NLSTPD,ISDVG,ITEDIV,NLSTEP
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      COMMON /CRIS/ DP,DPSUM,DPO,DL,DETER,NRORC,A1,A4,WC1,WC2,KLKR,NPP
      COMMON /DIM/ N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N10,N11,N12,N13,N14,N136
      DIMENSION DISP(1),R(1),AA(1),RE(1),WV(1),MAXA(1),RESID(1)
      REAL A
      COMMON A(1)
      INTEGER IA(1)
      NLSTEP=0
      WRITE (3,2500) NLSTPD
   10 DL=DL*0.5
      WC2=WC2*0.5
      NLSTEP=NLSTEP+1
      CALL LOADMS (R)
```

```
      CALL ELEMNT
      DO 3Ø I=1,NEQ
   3Ø RE(I)=R(I)
      CALL COLSOL (AA,R,MAXA,NEQ,NWK,2)
      CALL CRIS1 (R,A(N136),RE,NEQ)
      IEQREF=Ø
      CALL EQUIT (AA,R,RESID,RE,DISP,MAXA,WV)
      IF (ITE.GT.ITEMAX) GOTO 2Ø
      IF (IEQREF.EQ.1) GOTO 2Ø
      ISDVG=Ø
      WRITE (3,26ØØ) NLSTEP
      RETURN
   2Ø IF (NLSTEP.LT.NLSTPD) GOTO 1Ø
      ISDVG=1
      WRITE (3,27ØØ)
      RETURN
 25ØØ FORMAT (//1H ,
     162HITERACIJE U OKVIRU OVOG INKREMENTA OPTERECENJA NE KONVERGIRAJU
     2//47H INKREMENT OPTERECENJA BICE PODELJEN U MAKSIMUM,I5,
     358H MANJIH PODINKREMENATA DA BI SE POKUSALO SA KONVERGENCIJOM//)
 26ØØ FORMAT (/1H ,
     161HKONVERGENCIJA POSTIGNUTA U OKVIRU OVOG INKREMENTA OPTERECENJA/
     21ØX,5ØHBROJ ISKORISCENIH PODINKREMENATA                    = ,I5/)
 27ØØ FORMAT (1H ,
     162HKONVERGENCIJA NIJE POSTIGNUTA U DOZVOLJENOM BR. PODINKREMENATA)
      END
*     ---------------------------------------------------------
      SUBROUTINE WRITE (DISP,ID,NDF,D,NEQ,NUMNP)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /KMC/ KM,IDWA,KMM,KAS
      COMMON /PRCON/ IPNODE(2,8),NPB
      COMMON /EL/ IND,ICOUNT,NUMMAT,MTOT,ITWO,NUME,NUM1,NUM2,NUM3,KLIN
      DIMENSION NDF(1),ID(KM,1),DISP(1),D(1)
      REWIND 8
      READ(8) (NDF(I),I=1,NUMNP)
      DO 1Ø J=1,NUMNP
   1Ø READ(8) (ID(I,J),I=1,NDF(J))
      WRITE(3,2ØØØ)
      DO 15Ø IB=1,NPB
      NODE1=IPNODE(1,IB)
      NODE2=IPNODE(2,IB)
      DO 1ØØ II=NODE1,NODE2
      DO 11Ø I=1,NDF(II)
  11Ø D(I)=Ø.Ø
      DO 12Ø I=1,NDF(II)
      KK=ID(I,II)
      IL=I
  12Ø IF (KK.NE.Ø) D(IL)=DISP(KK)
      WRITE(3,2Ø1Ø) II,(D(I),I=1,6)
  1ØØ WRITE(3,2Ø2Ø) (D(I),I=7,NDF(II))
  15Ø CONTINUE
      RETURN
 2ØØØ FORMAT(/32X,16HP O M E R A NJ A// 6H CVOR ,2X,
     112H X-POMERANJE,12H Y-POMERANJE,12H Z-POMERANJE,12H XX-ROTACIJA,
     212H YY-ROTACIJA,12H ZZ-ROTACIJA/)
 2Ø1Ø FORMAT(1X,I4,3X,6E12.4)
 2Ø2Ø FORMAT(3X,5HW(I):,(6E12.4))
      END
*     --------------------------------------------------------
      SUBROUTINE NEWDAV (DISP,DISPI)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /SOL/ NUMNP,NBOUN,NEQ,MAXEST,NWK,MK,NSTE,IELE
      DIMENSION DISP(1),DISPI(1)
      DO 1Ø I=1,NEQ
   1Ø DISP(I)=DISP(I)+DISPI(I)
      RETURN
      END
*     --------------------------------------------------------
```

LISTING 33

```
      FUNCTION PRDINN (AA,BB,N)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION AA(N),BB(N)
      PRDINN=Ø.Ø
      DO 1ØØ I=1,N
  1ØØ PRDINN=PRDINN+AA(I)*BB(I)
      RETURN
      END
*     ---------------------------------------------------------
      SUBROUTINE CRIS1 (V,DISPO,RE,NEQ)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /VAR/ MODEX,KSTEP,ITEMAX,KPRI,IPRI,ITE,IEQREF,IREF,KKSTEP
      COMMON /CRIS/ DP,DPSUM,DPO,DL,DETER,NRORC,A1,A4,WC1,WC2,KLKR,NPP
      DIMENSION V(1),DISPO(1),RE(1)
      A4=Ø.
      DO 1 I=1,NEQ
      DISPO(I)=V(I)
    1 A4=A4+RE(I)*V(I)
      IF (KLKR-2) 5,2,2
    2 B=DPSUM*A4
      C=-2.Ø*WC2
      DPO1=(-B+DSQRT(B*B-A4*C))/A4
      DPO2=(-B-DSQRT(B*B-A4*C))/A4
      DPO=DPO1
      IF (ABS(DPO1).GT.ABS(DPO2)) DPO=DPO2
      IF (KLKR.EQ.2) GOTO 3Ø
    5 A1=Ø.
      DO 1Ø I=1,NEQ
   1Ø A1=A1+V(I)*V(I)
      DS=DSQRT(A1)
      IF (KLKR.EQ.3) GOTO 15
      IF (KSTEP.GT.1.OR.IEQREF.EQ.1) GOTO 2Ø
   15 DL=ABS(DPO)*DS
      IF (KLKR.EQ.3) GOTO 3Ø
      GOTO 35
   2Ø IF (DETER.LT.Ø.Ø) DS=-DS
      DPO=DL/DS
   35 WC2=(DPSUM+Ø.5*DPO)*DPO*A4
      IF (KSTEP.EQ.1) GOTO 3Ø
      BETA=WC2/WC1
      TETA=ABS(ABS(BETA)-1)
      IF (TETA.LT.Ø.15) KLKR=2
   3Ø DP=DPSUM+DPO
      DO 4Ø I=1,NEQ
      V(I)=DPO*V(I)
   4Ø RE(I)=DPO*RE(I)
      IF (KLKR.EQ.3) KLKR=1
      RETURN
      END
*     ---------------------------------------------------------
      SUBROUTINE CRIS2 (DISPI,DISP,DISPO,WV,DINCOR,NEQ)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /CRIS/ DP,DPSUM,DPO,DL,DETER,NRORC,A1,A4,WC1,WC2,KLKR,NPP
      DIMENSION DISPI(1),DISP(1),DISPO(I),WV(I),DINCOR(1)
      T1=Ø.
      T2=Ø.
      REWIND 1
      CALL LOADMS (DINCOR)
      IF (KLKR.EQ.1) GOTO 5
    6 A1=A4
      AA=Ø.Ø
      DO 1 I=1,NEQ
    1 AA=AA+DINCOR(I)*DISP(I)
      A2=Ø.5*AA+DP*A1
      A3=2.Ø*DP*AA
      GOTO 15
    5 A2=Ø.
      A3=Ø.
```

LISTING 34

```
      DO 10 I=1,NEQ
      AA=DISPI(I)+DISP(I)
      A2=A2+AA*DISPO(I)
   10 A3=A3+AA*AA
      A1=2.0*A1
      A2=2.0*A2
      A3=(A3-DL*DL)*2.0
   15 DS=A2*A2-A1*A3
      IF (DS.LT.0.0) GOTO 80
      DS=DSQRT(DS)
      DL1=(-A2-DS)/A1
      DL2=(-A2+DS)/A1
      DO 20 I=1,NEQ
      T1=T1+(DISPI(I)+DISP(I)+DL1*DISPO(I))*DISPI(I)
   20 T2=T2+(DISPI(I)+DISP(I)+DL2*DISPO(I))*DISPI(I)
      IF (T1.GT.0.0.AND.T2.GT.0.0) GOTO 30
      DLL=DL2
      IF (T1.GT.0.0) DLL=DL1
   60 DO 40 I=1,NEQ
   40 DISP(I)=DISP(I)+DLL*DISPO(I)
      GOTO 50
   30 DLL=DL2
      IF (ABS(DL1+A3/A2/2.).LT.ABS(DL2+A3/A2/2.)) DLL=DL1
      GOTO 60
   50 DP=DP+DLL
      DO 70 I=1,NEQ
   70 WV(I)=WV(I)+DLL*DINCOR(I)
      RETURN
   80 IF (KLKR-2) 90,100,90
   90 KLKR=2
      GOTO 110
  100 KLKR=1
  110 NPP=1
      RETURN
      END
```

LITERATURA

1. C. Bach
   Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Balken mit -förmigem Querschnitt.
   Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 1909.

2. K. Bathe
   A finite element program for automatic dynamic incremental nonlinear analysis; Adina.

3. K. Bathe
   Finite element procedures in engineering analysis.
   Prentice-Hall 1982.

4. K. Bathe, E. Dvorkin
   On the automatic solution of nonlinear finite element equations. CS Vol. 17. 1983.

5. K. Bathe, S. Bolourchi
   Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. IJNME Vol. 14. 1979.

6. Z. Bažant, M. Nimeiri
   Large deflection spatial buckling of thin walled beams and frames. JEMD Decembar 1973.

7. R. Barsoum, R. Gallagher
   Finite element analysis of torsional and torsional flexural stability problems. IJNME Vol. 2. 1970.

8. D. Brush, B. Almroth
   Buckling of bars, plates, and shells.
   McGraw-Hill, 1975.

9. A. Chaudhary
Generalized stiffness matrix for thin walled beams. JSD St. 3. 1982.

10. R. Cook
Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley and Sons, 1974.

11. M. Crisfield
A fast incremental solution procedure that handles "snap-through". CS Vol. 13. 1981.

12. M. Crisfield
An arc-length method including line searches and accelerations. IJNME Vol. 19. 1983.

13. M. Epstein, D. Murray
Three dimensional large deformation analysis of thin walled beams. IJSS Vol. 12. 1976.

14. P. Friberg
Beam element matrices derived from Vlasov's theory of open thin walled elastic beams.
IJNME Vol. 21. 1985.

15. A. Goldenveizer
O teorii tonkostennih sterežnej. PM tom 13. 1949.

16. C. Gurujee, K. Shah
A computer program for thin walled frame analysis Adv. Eng. Software, Vol. 11. 1989.

17. N. Hajdin
Tankozidni nosači otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka. Skripta, Gradjevinski fakultet u Beogradu.

18. E. Hinton, D. Owen
Finite element programming. Academic Press 1977.

19. E. Hinton, D. Owen
Finite element computations. Pineridge Press 1979.

20. J. Jeusette, G. Laschet, S. Idelsohn
An effective automatic incremental-iterative method for static nonlinear structural analysis.
CS Vol. 32. 1989.

21. R. Kappus
Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich.
Luftfahrtforschung, 1937.

22. C. Kollbrunner, N. Hajdin
Dünnwandige Stäbe 1. Springer-Verlag 1972.

23. J. Krahula
Analysis of bent and twisted bars using the finite element method. AIAA Journal, Vol 5, 1967.

24. S. Krenk, B. Jeppesen
Finite elements for beam cross-sections of moderate wall thickness. CS Vol. 32. 1989.

25. R. Maillart
Zur Frage der Biegung.
Schweizerische Bauzeitung, 1921.

26. H. Martin, G. Carey
Introduction to finite element analysis.
McGraw-Hill.

27. J. Meek, H. Tan
Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique.
CMAME 47. 1984.

28. B. Mehrotra, A. Mufti, R. Redwood
Analysis of three dimensional thin walled structures.
JSD St 12. 1969.

29. S. Morchi, E. Lovell
Lateral Buckling of intersecting connected beams.
JMD EM 2. 1978.

30. N. Murray, M. Attard
A direkt method of evaluating the warping properties of thin walled open and closed profiles. Thin-Walled Struct. 5. 1987.

31. M. Paz, C. Strehl, P. Schrader
Computer determination of the shear center of open and closed sections. CS Vol. 6. 1976.

32. A. Prokić
Prilog postkritičnoj analizi prostornog sistema štapova punog i tankozidnog poprečnog preseka. Magistarski rad. Gradj. fakultet u Beogradu 1983.

33. A. Prokić
Uticaj geometrijskih imperfekcija na ponašanje rešetkastih konstrukcija. 17. Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Zadar 1986.

34. J. Przemieniecki
Theory of matrix structural analysis. McGraw-Hill, 1968.

35. J. Renton
Buckling of frames composed of thin-walled members. Thin-Walled Structures 1967.

36. M. Sekulović
Tankozidni prostorno krivi štap. Doktorska disertacija. Gradjevinski fakultet u Beogradu 1972.

37. M. Sekulović
Prilog nelinearnoj analizi tankozidnih konstrukcija. 15. Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Kupari 1981.

38. M. Sekulović, A. Prokić
Nelinearna analiza tankozidnih nosača otvorenog i zatvorenog poprečnog preseka. 17. Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Zadar 1986.

39. M. Sekulović, A. Prokić
Analiza stabilnosti tankozidnih nosača po metodi konačnih elemenata. Simpozijum, Tara 1982.

40. M. Sekulović, A. Prokić
Prilog post-kritičnom ponašanju linijskih nosača. Bečići 1984.

41. M. Sekulović, B. Pujević, A. Prokić
Contribution to nonlinear analysis of thin-walled frames. Proceedings of the Int. Conf. on Steel, Budva 1986.

42. C. Szymczak
Buckling and initial post-buckling behavior of thin-walled columns. CS Vol. 11. 1980.

43. S. Timoshenko
EinigeStabilitatsproblemederElastizitatstheorie. Zeitschrift fur Mathematik und Physik, 1910.

44. S. Timoshenko, J. Gere
Theory of elastic stability. Mc Graw-Hill 1961.

45. A. Umanskij
Kručenije i izgib tankostennih aviokonstrukcij. Moskva Oborongiz 1939.

46. P. Vacharajittiphan, N. Trahair
Warping and distortion at I-section joints. JSD St 3. 1974.

47. P. Vacharajittiphan, N. Trahair
Analysis of lateral buckling in plane frames. JSD St 3. 1975.

48. V. Vlasov
Tankostennie uprugie steržni. Gosstroiizdat 1940.

49. H. Wagner
Verdrehung und Knickung von offen Profilen. Festschrift 25 Jahre T.H. Danzig, 1929.

50. C. Yoo, S. Acra
Cross-sectional properties of thin-walled multi-cellular section. CS Vol. 22. 1986

51. C. Yoo
Bimoment contribution to stability of thin walled assemblages. CS Vol. 11. 1980.

CS - Computer and Structures
IJNME - International Journal for Numerical Methods in Enginneering
IJSS - International Journal of Solid and Structures
JEMD - Journal of the Engineering Mechanics Division
JSD - Journal of the Structural Division
JMD - Journal of the Engineering Mechanics Division