

**GRAĐEVINSKI FAKULTET
UNIVERZITETA U BEOGRADU**

Jasna Plavšić

**ANALIZA RIZIKA OD POPLAVA POMOĆU
PREKIDNIH SLUČAJNIH PROCESA**

doktorska disertacija

Beograd, 2004.

PA 18672



GRAĐEVINSKI FAKULTET
UNIVERZITETA U BEOGRADU

Jasna Plavšić

ANALIZA RIZIKA OD POPLAVA POMOĆU
PREKIDNIH SLUČAJNIH PROCESA

doktorska disertacija

Beograd, 2004.

УНИВЕРЗИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА
"СВЕТОЗАР МАРКОВИЋ"-БЕОГРАД
91 и. Бр. 136425



SADRŽAJ

Poglavlje I: UVOD	1
I.1 O načinima analize velikih voda i statističkoj analizi velikih voda	1
I.2 O metodi parcijalnih serija	2
I.3 Predmet rada	3
Poglavlje II: METODA PARCIJALNIH SERIJA ZA STATISTIČKU ANALIZU VELIKIH VODA	5
II.1 Teorijske osnove metode parcijalnih serija	5
II.1.1 Protoci velikih voda kao slučajni proces	5
II.1.2 Opšti izraz za funkciju raspodele procesa najvećeg prekoračenja $\chi(t)$	6
II.1.3 Funkcija raspodele procesa najvećeg prekoračenja $\chi(t)$ pod nekim pretpostavkama	7
II.1.4 Povratni period u parcijalnim serijama	9
II.1.5 Drugi procesi od interesa za analizu velikih voda	11
II.2 Modeli za broj pojava prekoračenja	12
II.2.1 Slučajni procesi pojave prekoračenja	12
II.2.2 Slučajni procesi Markova kao model za pojavu velikih voda u parcijalnim serijama	13
II.2.3 Poasonova raspodela za broj pojava prekoračenja	17
II.2.4 Binomna i negativna binomna raspodela za broj pojava prekoračenja	18
II.3 Raspodele za visinu prekoračenja	20
II.3.1 Ocena parametara raspodela metodom momenata	20
II.3.2 Ocena parametara raspodela metodom verovatnosnih težinskih momenata	21
II.3.3 Eksponencijalna raspodela za visinu prekoračenja	25
II.3.4 Opšta Pareto raspodela za visinu prekoračenja	26
II.3.5 Dvoparameterska Vejbulova raspodela za visinu prekoračenja	32
II.4 Modeli parcijalnih serija za godišnje maksimume velikih voda	38
Poglavlje III: NEIZVESNOST OCENA VELIKIH VODA	41
III.1 Uvod	41
III.1.1 Pokazatelji grešaka u oceni kvantila ili verovatnoće pojave velikih voda	43
III.1.2 Načini određivanja pokazatelja grešaka u oceni kvantila	44
III.1.3 Načini određivanja pokazatelja grešaka u oceni verovatnoće pojave velikih voda	45
III.2 Neizvesnost ocene kvantila velikih voda modelom P+E	47
III.2.1 Teorijska razmatranja	47
III.2.2 O uslovnim očekivanjima ukupnog broja prekoračenja M	53

III.2.3 Pristrasnost ocene kvantila modela P+E	53
III.2.4 Varijansa ocene kvantila modela P+E.....	55
III.2.5 Komentari i zaključci	61
III.3 Neizvesnost ocene kvantila velikih voda modelom P+GP	62
III.3.1 Teorijska razmatranja.....	62
III.3.2 Uslovna očekivanja i varijanse ocena parametara modela P+GP.....	63
III.3.3 Pristrasnost i standardna greška ocene kvantila po modelu P+GP.....	66
III.3.4 Komentari i zaključci	70
III.4 Neizvesnost ocene kvantila velikih voda modelom P+W	72
III.4.1 Svojstva ocene kvantila.....	72
III.4.2 Mogućnosti ocene intervala poverenja modela P+W preko modela P+E	75
III.4.3 Komentari i zaključci	78
III.5 Neizvesnost ocene kvantila velikih voda modelima B+E i NB+E.....	79
III.5.1 Teorijska razmatranja.....	79
III.5.2 Pristrasnost i standardna greška ocene kvantila	80
III.6 Neizvesnost ocene verovatnoće velikih voda modelom P+E.....	84
III.6.1 Teorijska razmatranja.....	84
III.6.2 Svojstva ocene verovatnoće fiksnog protoka u modelu P+E	87
III.7 Neizvesnost ocene verovatnoće velikih voda ostalim modelima	90
III.7.1 Model P+GP	90
III.7.2 Model P+W.....	93
III.7.3 Modeli B+E i NB+E	97

**Poglavlje IV: PRIMERI PRORAČUNA NEIZVESNOSTI OCENA
KVANTILA I VEROVATNOĆE U MODELIMA
PARCIJALNIH SERIJA** 101

IV.1 Uvod.....	101
IV.2 Primer 1: stanica Bezdan/Dunav	101
IV.3 Primer 2: stanica Kraljevo/Zapadna Morava.....	112
IV.4 Primer 3: stanica Lopatnica Lakat/Ibar	117
IV.5 Primer 4: stanica Slovac/Kolubara	122

Poglavlje V: ZAKLJUČNA RAZMATRANJA 127

REFERENCE 130

PRILOZI

Prilog A: Težinski momenti i njihova svojstva za Vejbulovu i opštu Pareto raspodelu

A.1 Vejbulova raspodela.....	A-1
A.2 Opšta Pareto raspodela	A-4

Prilog B: Očekivanja, varijanse i kovarijanse ocena parametara raspodela	
B.1	Očekivanja, varijanse i kovarijanse funkcija slučajnih promenljivih B-1
B.2	Očekivanja, varijanse i kovarijanse ocena parametara binomne i negativne binomne raspodele..... B-2
B.3	Očekivanja, varijanse i kovarijanse ocena parametara Vejbulove raspodele dobijenih metodom momenata B-5
B.4	Očekivanja, varijanse i kovarijanse ocena parametara Vejbulove raspodele dobijenih metodom težinskih momenata..... B-11
Prilog C1: Svojstva ocene kvantila modelom P+E	
Prilog C2: Svojstva ocene kvantila modelom P+GP	
Prilog C3: Svojstva ocene kvantila modelom P+W	
Prilog C4: Svojstva ocene kvantila modelima B+E i NB+E	
Prilog C5: Svojstva ocene verovatnoće modelom P+E	
Prilog C6: Svojstva ocene verovatnoće modelom P+GP	
Prilog C7: Svojstva ocene verovatnoće modelom P+W	
Prilog C8: Svojstva ocene verovatnoće modelima B+E i NB+E	

POGLAVLJE I

UVOD

I.1 O načinima analize velikih voda i statističkoj analizi velikih voda

Proračuni velikih voda mogu se zasnivati na različitim pristupima i metodama. Izbor metode zavisi od više faktora, od kojih je prvi postojanje osmotrenih proticaja na rečnom profilu od interesa. Praćenje proticaja na rekama, koje se zasniva na kontinualnom osmatranju vodostaja i merenjima polja brzina u profilima reka, predstavlja naporan i skup proces. Iz tog razloga hidrološke stanice su znatno zastupljenije na profilima većih slivova, dok manji slivovi ostaju neosmotreni, odnosno – u hidrološkoj terminologiji – neizučeni. Na neizučenim ili delimično izučenim slivovima za određivanje velikih voda koriste se metode parametarske hidrologije, koje podrazumevaju primenu modela padavine-otica na osmotrene ili statistički obrađene podatke o padavinama.

Kada raspoložemo podacima osmatranja protoka na rekama, osnovno sredstvo za proračun velikih voda je njihova statistička analiza. S obzirom na složenost hidroloških procesa i praktičnih nemogućnosti da se oni opišu fizičkim zakonima, njihovo posmatranje kao slučajnih procesa logičan je put u razvoju hidrologije. Ekstremni hidrološki događaji, kao što su poplave i suše, javljaju se relativno retko i često ispunjavaju kriterijume da se mogu tretirati kao potpuno slučajni događaji, odnosno da se mogu analizirati uz pomoć metoda verovatnoće i statistike.

Cilj statističke analize hidroloških podataka je da poveže veličine ekstremnih događaja sa verovatnoćom njihove pojave. Statistički aparat je najjednostavniji kada se analiziraju međusobno nezavisni događaji, pa je pretpostavka o *nezavisnosti* (odnosno slučajnosti) podataka prva osnovna pretpostavka u radu sa statističkim nizovima. Druga osnovna pretpostavka odnosi se na *homogenost* nizova, što u statističkoj terminologiji podrazumeva da svi podaci potiču iz iste populacije. Prevedeno na hidrološke veličine, ta pretpostavka znači da svi podaci potiču od istorodnih hidroloških procesa. Kada su u pitanju velike vode, kod njih se može javiti problem nehomogenosti kada su one nastale na različite načine (npr. kao posledica velikih kiša ili kao posledica topljenja snega). Drugi aspekt koji se podrazumeva pod homogenošću je i vremenska ustaljenost, što znači da pretpostavljamo da se režimi velikih voda nisu menjali kroz vreme. I ova pretpostavka može biti ugrožena promenama prirodnih režima na rekama usled prirodnih i ljudskih faktora. Ukoliko ove dve osnovne pretpostavke nisu ispunjene, hidrološki nizovi se moraju analizirati složenijim statističkim aparatom koji uzima u obzir međusobnu zavisnost hidroloških događaja i njihove promene kroz vreme (takvi su npr. modeli vremenskih serija).

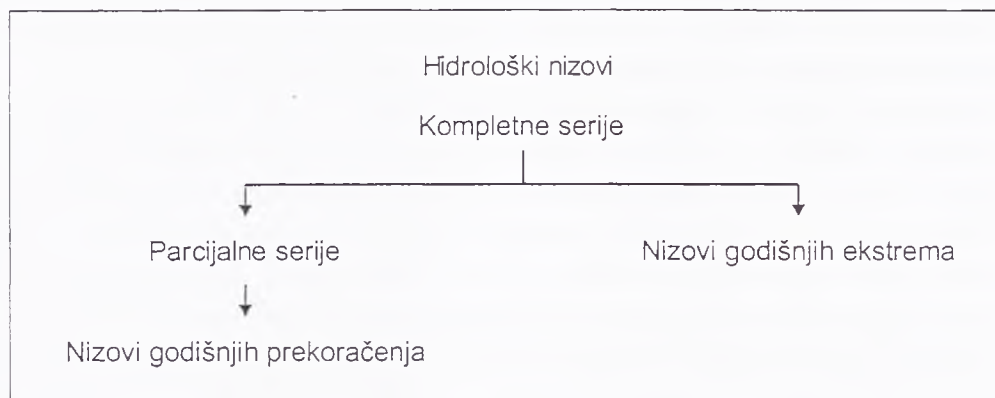
Da bi se ispunile pretpostavke o nezavisnosti i homogenosti, hidrološki nizovi se moraju pažljivo formirati. U praksi se to najčešće postiže formiranjem *nizova godišnjih ekstrema*, npr. nizova godišnjih maksimuma protoka koji obuhvataju najveće protoke iz svake godine osmatranja. Ovakav način formiranja nizova je najčešći i najzastupljeniji u svakodnevnoj hidrološkoj praksi. Postupak statističke analize nizova godišnjih ekstrema tada se svodi na sledeće korake:

- proračun statističkih pokazatelja nizova i formiranje empirijske raspodele niza;
- proračun različitih teorijskih raspodela sa parametrima određenim na osnovu statistika nizova;
- poređenje teorijskih raspodela sa empirijskim raspodela i usvajanje najpogodnije raspodele (uz primenu statističkih testova saglasnosti);
- ocena kvantila (vrednosti razmatrane veličine zadate verovatnoće pojave) ili ocena verovatnoće pojave zadate vrednosti razmatrane veličine prema usvojenoj teorijskoj raspodeli.



Ovakav postupak je prilično jednostavan i sa gledišta potrebe za podacima i sa gledišta statističkog aparata, pa je razumljivo što se najviše koristi.

Međutim, statistički nizovi se mogu formirati i na druge načine, a da su pri tome zadovoljene pretpostavke o njihovoj nezavisnosti i homogenosti. Naime, mana nizova godišnjih maksimuma je u tome što obuhvataju samo po jednu vrednost iz svake godine, pri čemu se može dogoditi da u niz uđu neke relativno male vrednosti iz sušnih godina, a da ne uđu relativno velike vrednosti "drugog najvećeg" proticaja iz neke vodnije godine. Ova mana nizova godišnjih maksimuma može se prevazići formiranjem tzv. *parcijalnih serija* u koje ulaze vrednosti proticaja veće od neke bazne vrednosti, ili *nizova godišnjih prekoračenja* u koje ulazi onoliko najvećih vrednosti od svih podataka koliko ima godina osmatranja. Nizovi godišnjih prekoračenja su podskup parcijalnih serija. Konačno, kada se posmatraju svi osmotreni podaci u hronološkom nizu, govori se o *kompletnim serijama* (slika 1).



Slika 1. Vrste hidroloških nizova prema načinu njihovog formiranja.

Statistička analiza nizova godišnjih ekstrema često se naziva i *metoda godišnjih ekstrema*, nasuprot *metodi parcijalnih serija* koja se naziva i *metoda pikova iznad praga*.

Metoda parcijalnih serija podrazumeva nešto složeniji statistički aparat od metode godišnjih ekstrema, s obzirom da se zapravo zasniva na teoriji slučajnih procesa. Međutim, ona pruža i dodatne mogućnosti u odnosu na metodu godišnjih maksimuma. Pre svega, ona može da uključi i određeni aspekt nehomogenosti nizova, a to su unutargodišnje (sezonske) neravnomernosti. Iako je ona prevashodno razvijena uz pretpostavku o međusobnoj nezavisnosti događaja koji prelaze izabrani prag, u literaturi se mogu naći i pokušaji da se u obzir uzmu i zavisni događaji. Pored toga, iz svojstava slučajnih procesa na kojima se ova metoda zasniva mogu se dobiti i druge informacije osim same raspodele verovatnoće, kao npr. očekivana vremena pojava ekstremnih događaja, očekivani periodi između pojava ekstremnih događaja, broj događaja u određenim vremenskim intervalima i slično. Iz ovih razloga, složeniji statistički aparat i nešto veći naponi u formiranju nizova mogu se isplatiti u cilju svestranije analize verovatnoća pojave velikih voda.

I.2 O metodi parcijalnih serija

Statistička analiza velikih voda tradicionalno se zasniva na izboru teorijske raspodele verovatnoće prema kriterijumu najboljeg prilagođavanja sa osmotrenim godišnjim maksimumima protoka. Veoma je širok dijapazon teorijskih raspodela koje se koriste u tu svrhu; najčešće korišćene raspodele su log-normalna (dvoparametarska i troparametarska), dvoparametarska gama, Pirsonova tipa III, log-Pirsonova tipa III i Gumbelova raspodela. Sa fizičke tačke gledišta, primena bilo koje od ovih raspodela,

osim Gumbelove, nema posebnog opravdanja i ističe potrebu za razvojem teorije koja fizički ima više smisla u statističkoj analizi velikih voda od klasične teorije ekstremnih vrednosti.

Prvi pokušaj da se takva teorija razvije predstavlja model koji je dao Todorović u svojim radovima (Todorović, 1970; Todorović i Zelenhasić, 1970). Njegov koncept se zasniva na parcijalnim serijama, odnosno na nizu protoka koji prevazilaze određenu vrednost (prag). S obzirom na prirodu procesa pojave velikih voda, vreme pojave takvih "pikova" protoka (prekoračenja preko praga) i veličina pikova predstavljaju slučajne promenljive. Kako su vremena pojave pikova slučajne, tako je i njihov broj u nekom intervalu vremena slučajna promenljiva. Zbog toga se često kaže da Todorovićev model predstavlja stohastički model slučajnog broja slučajnih promenljivih.

Todorović je prvobitno razvio svoj model za niz nezavisnih i jednako raspoređenih protoka koji prevazilaze određeni prag, ali je matematički opis tog modela dovoljno opšteg karaktera tako da se on može koristiti i pri postojanju statističke međuzavisnosti između prekoračenja i za prekoračenja koja nisu jednako raspoređena. Ovakav pristup je logičniji od teorije ekstremnih vrednosti sa fizičke tačke gledišta. Prvo, ako se izabere dovoljno visok prag, pretpostavka o nezavisnosti prekoračenja postaje i fizički opravdana. Drugo, pretpostavka da je broj prekoračenja u fiksiranom vremenskom intervalu slučajna promenljiva ne samo što ima jasnu empirijsku podlogu, već omogućava i da se model primeni na bilo koji vremenski interval (npr. mesec), što ne važi u teoriji ekstremnih vrednosti. Za veće vremenske intervale, kao što je godina, Todorovićev model nudi prirodan način za uključivanje sezonskih varijacija u pojavi prekoračenja (npr. tokom proleća se može, u proseku, javiti više prekoračenja nego tokom zime).

Iako je Todorovićev model opšteg karaktera, kao prvi izbor za kombinaciju dve komponente modela nametnuli su se, zbog svoje jednostavnosti, Poasonov proces pojave događaja i ekspanencijalna raspodela za veličinu prekoračenja.

Dalji razvoj metode parcijalnih serija nakon uspostavljanja Todorovićevog modela išao je u nekoliko pravaca. Todorović i Rousselle (1971) su proširili model mogućnošću za uvođenje sezonskih (unutargodišnjih) neravnomernosti u analizu velikih voda. Nehomogenim vremenskim procesom bavio se i North (1980). Ashkar i Rousselle (1983a,b; 1987) su se često bavili uslovima za ispunjavanje pretpostavki o Poasonovom procesu i ekspanencijalnoj raspodeli. Negativnu binomnu raspodelu za broj prekoračenja, kao alternativu Poasonovoj, predložili su Calenda i sar. (1977), a kasnije i Cunnane (1979). Binomna raspodela za broj prekoračenja je manje korišćena (npr. Van Montfort i Otten, 1991). Pored ekspanencijalne raspodele za veličinu pikova, korišćena je dvoparametarska gama raspodela (Zelenhasić, 1970), opšta Pareto raspodela (npr. Van Montfort i Witter, 1986; Wang, 1991; Rosbjerg i sar., 1992), Vejbulova raspodela (Vukmirović i Petrović, 1997) i log-normalna raspodela (Rosbjerg, 1987).

Todorović je sličnu metodologiju primenjivao i u oblasti padavina, procesa disperzije u rekama i u poroznoj sredini, kao i u oblasti pronosa nanosa (npr. Todorović i Yevjevich, 1969; Todorović, 1975).

I.3 Predmet rada

Analiza velikih voda je samo jedan korak u hidrotehničkim i vodoprivrednim studijama i projektima koji se bave procenom rizika i šteta, planiranjem sistema i projektovanjem objekata i mera za zaštitu od poplava i drugih srodnih nepogoda kao što su erozija i klizišta. Ona treba da obezbedi neophodne merodavne veličine za projektovanje ili ocenu verovatnoće pojave kritičnih događaja. Stoga je jasno da projektovana rešenja u velikoj meri zavise od rezultata analize velikih voda. Međutim, u analizi rizika od velikih voda uvek postoje neizvesnosti, kako one koje potiču od samog fizičkog procesa, tako i one koje proističu iz njegovog modeliranja. Neizvesnosti u analizi velikih voda se

neminovno prenose i na dalje rezultate, kao što su dimenzije objekata ili procenjene štete. Te neizvesnosti se ne mogu izbeći, ali je njihovo razmatranje važno kako bi se omogućilo da se sagledaju ograničenja projektovanih rešenja ili da se, uzimanjem neizvesnosti u obzir, dođe do boljih rešenja.

Statistička analiza velikih voda služi za ocenu neizvesnosti samog fizičkog procesa pojave velikih voda. S druge strane, i tradicionalna primena serija godišnjih maksimuma i primena modela parcijalnih serija podležu određenom stepenu neizvesnosti sa gledišta relativno kratkih nizova kojima se raspolaže. Uobičajeni način da se te neizvesnosti kvantifikuju predstavlja proračun tzv. uzoračkih svojstava (engl. *sampling properties*) parametara usvojenih teorijskih raspodela i rezultata statističke analize – ocene kvantila velikih voda zadate verovatnoće pojave ili ocene verovatnoće pojave zadate vrednosti protoka.

Istorijski gledano, kada je Todorovićev model parcijalnih serija protoka prihvaćen i dalje razvijan u stručnoj javnosti, pojavila se potreba za izučavanjem pouzdanosti ocena velikih voda pomoću ovog modela. Neizvesnostima pri oceni kvantila u metodi parcijalnih serija prvi se bavio Cunnane (1973) za model koji predstavlja kombinaciju Poasonove i eksponencijalne raspodele, određivši izraz za varijansu ocene kvantila. Kasnije se više autora bavilo istom temom, i uz različite pristupe manje ili veće složenosti.

Iz pregleda postojeće literature nameću se tri zaključka. Prvo, postoji relativno veliki broj radova u kome se tretiraju svojstva ocene kvantila po modelu parcijalnih serija koji predstavlja kombinaciju Poasonove i eksponencijalne raspodele; međutim, oni se razlikuju po pristupu po kome se dolazi do ovih rezultata, kao i po različitim pretpostavkama usvajanim u postupku proračuna. Nije bilo pokušaja da se ti pristupi međusobno uporede i da se pokaže validnost iznetih pretpostavki. Drugo, osim kombinacije Poasonove i eksponencijalne raspodele, od ostalih kombinacija raspodela u modelima parcijalnih serija detaljnije su razmatrana samo svojstva ocene kvantila po modelu koji predstavlja kombinaciju Poasonove i opšte Pareto raspodele (Rosbjerg i sar., 1992). Treće, razmatranje ocene verovatnoće fiksirane vrednosti protoka zastupljeno je samo u radu Rasmussena i Rosbjerga (1989) i to za kombinaciju Poasonove i eksponencijalne raspodele.

Iz gore navedenih razloga nametnuo se predmet ovog rada, pa su njegovi osnovni ciljevi sledeći:

- sistematizovanje dosadašnjih pristupa i načina određivanja neizvesnosti u oceni protoka zadate verovatnoće pojave i u oceni verovatnoće pojave zadanog protoka;
- vrednovanje određenih pretpostavki u postupku proračuna ovih svojstava;
- određivanje neizvesnosti u oceni velikih voda za one kombinacije raspodela u modelima parcijalnih serija koje nisu obrađene u literaturi;
- donošenje zaključaka o neizvesnostima u ocenama dobijenih modelima parcijalnih serija.

U radu će najpre biti date teorijske osnove modela parcijalnih serija, zajedno sa pregledom različitih teorijskih raspodela koje se koriste za broj prekoračenja preko praga i za vrednosti prekoračenja (poglavlje II). Zatim će biti uopšteno prikazani principi određivanja pokazatelja grešaka (uzoračkih svojstava ocena kvantila i verovatnoće) u modelima parcijalnih serija, a potom i rezultati sa pojedine modele (poglavlje III). U poglavlju IV je dato nekoliko primera proračuna kvantila i verovatnoće pojave i procene odgovarajućih grešaka sa nizovima na nekoliko hidroloških stanica, dok su u poglavlju V dati komentari, zaključci i preporuke za dalji rad.

POGLAVLJE II

**METODA PARCIJALNIH SERIJA
ZA STATISTIČKU ANALIZU VELIKIH VODA**

II.1 Teorijske osnove metode parcijalnih serija

II.1.1 Protoci velikih voda kao slučajni proces

Ako protok na nekoj hidrološkoj stanici posmatramo kao slučajnu promenljivu, onda familija slučajnih promenljivih

$$\{X(t); t \geq 0\}$$

predstavlja slučajan proces sa neprekidnim parametrom. Matematička formulacija ovog slučajnog procesa vodila bi ka opisu vremensko-prostornog procesa padavina u sprezi sa ostalim procesima iz hidrološkog ciklusa na slivu. Međutim, hidrologija i njoj srodne nauke još uvek nisu u stanju da daju takav opis hidrograma oticaja sa nekog sliva. S druge strane, parcijalne serije obuhvataju ekstremne protoke koji nas najviše interesuju i tako omogućavaju da se relevantne informacije uključe u model.

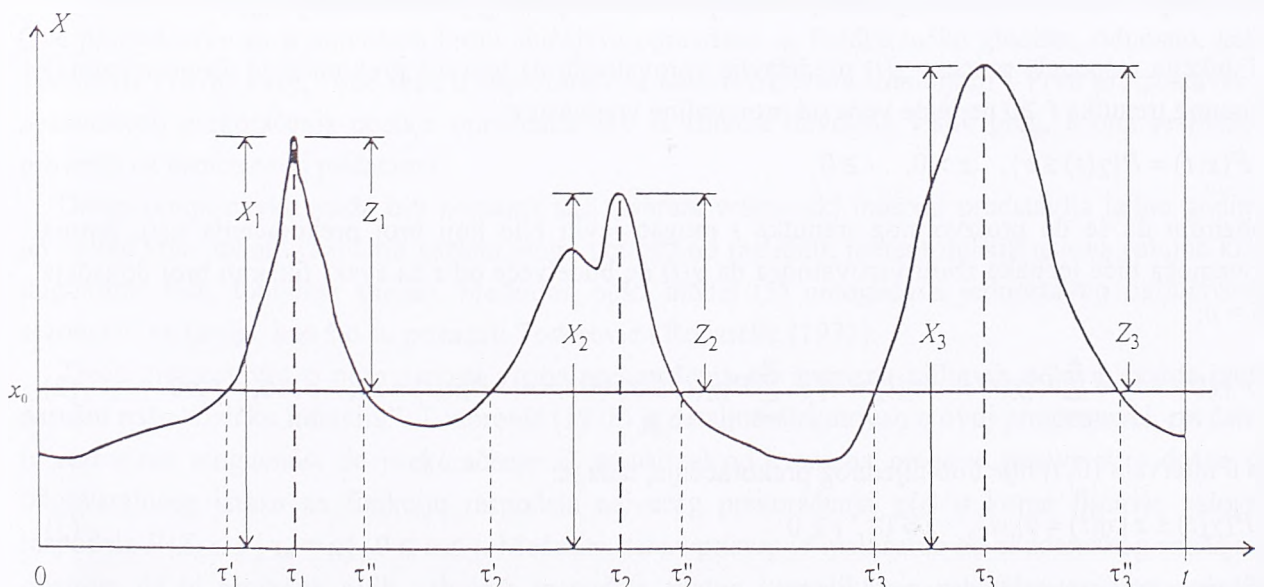
Ako izaberemo neku baznu vrednost protoka ili prag x_0 i posmatramo samo delove hidrograma koji prevazilaze taj prag (slika 2), dobijamo niz talasa velikih voda, definisanih počecima τ'_i i krajevima τ''_i ($i = 1, 2, \dots$). Maksimalne ordinate talasa velikih voda čine niz protoka X_i ($i = 1, 2, \dots$) iznad praga x_0 . Neka su τ_i ($i = 1, 2, \dots$) vremena pojave tih protoka. Tada veličine:

$$Z_i = X_i - x_0, \quad i = 1, 2, \dots$$

nazivamo *prekoračenjima* ili *pikovima*. Neka je $\eta(t)$ broj prekoračenja u intervalu $(0, t]$, tj.

$$\eta(t) = \sup \{k; \tau_k \leq t\}, \quad t \geq 0$$

Proces $\eta(t)$ predstavlja proces broja događaja u intervalu vremena $(0, t]$, a time i proces sa celobrojnim vrednostima. U razmatranom intervalu $(0, t]$ tada imamo niz slučajnih promenljivih:



Slika 2. Protoci i prekoračenja preko praga kao slučajni proces.

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_{\eta(t)} \quad (1)$$

odnosno niz slučajnog broja slučajnih promenljivih. Niz osmotrenih vrednosti (1) tokom N godina osmatranja predstavlja parcijalnu seriju. Prema preporuci Chowa (1964), ukoliko imamo složene hidrograme sa više pikova, u parcijalne serije biramo samo najveći pik (kao što je primer drugog prekoračenja na slici 2).

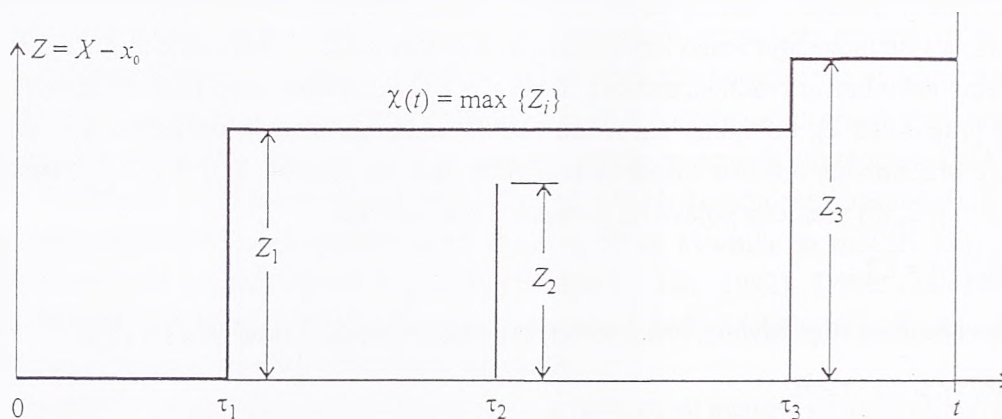
Najveće prekoračenje od svih prekoračenja Z_i u intervalu $(0, t]$ je proces $\chi(t)$:

$$\chi(t) = \max \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{\eta(t)}\}, \quad t \geq 0$$

odnosno:

$$\chi(t) = \sup \{Z_i; 0 < i \leq \eta(t)\} = \sup \{Z_i; \tau_i \leq t\}, \quad t \geq 0$$

Drugim rečima, $\chi(t)$ predstavlja najveće prekoračenje protoka iznad izabranog praga u proizvoljnom, ali fiksiranom intervalu vremena. Ovakva definicija ukazuje da se model parcijalnih serija može primeniti ne samo na vremenske intervale od jedne godine, već i na bilo koji drugi vremenski interval od interesa. Proces $\chi(t)$ je slučajni proces sa neopadajućom stepenastom trajektorijom (slika 3) i on predstavlja jedan od osnovnih predmeta analize parcijalnih serija.



Slika 3. Primer realizacije procesa $\chi(t)$ kao najvećeg prekoračenja u intervalu vremena $(0, t]$.

II.1.2 Opšti izraz za funkciju raspodele procesa najvećeg prekoračenja $\chi(t)$

Funkcija raspodele procesa $\chi(t)$ predstavlja verovatnoću da najveće prekoračenje do proizvoljnog fiksiranog trenutka $t \geq 0$ ne bude veće od proizvoljne vrednosti z :

$$F(z; t) = P\{\chi(t) \leq z\}, \quad z > 0, \quad t \geq 0$$

S obzirom da se do proizvoljnog trenutka t mogao javiti bilo koji broj prekoračenja $\eta(t)$, gornja verovatnoća biće jednaka zbiru verovatnoća da $\chi(t)$ ne bude veće od z za svaki fiksiran broj događaja $\eta(t) = n$:

$$P\{\chi(t) \leq z\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\chi(t) \leq z, \eta(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\chi(t) \leq z | \eta(t) = n\} \cdot P\{\eta(t) = n\}, \quad z > 0, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

Ako u intervalu $(0, t]$ nije bilo nijednog prekoračenja, tada je:

$$P\{\chi(t) \leq z | \eta(t) = 0\} = 1, \quad z > 0, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

Za fiksiran broj prekoračenja $n \geq 1$ imamo:

$$P\{\chi(t) \leq z | \eta(t) = n\} = P\{\max [Z_1, Z_2, \dots, Z_n] \leq z | \eta(t) = n\}, \quad z > 0, \quad t \geq 0$$

Najveće od n prekoračenja biće manje ili jednako z samo ako su i sve ostale vrednosti manje ili jednake z :

$$\begin{aligned} P\{\chi(t) \leq z \mid \eta(t) = n\} &= P\{Z_1 \leq z, Z_2 \leq z, \dots, Z_n \leq z \mid \eta(t) = n\} = \\ &= P\left\{\bigcap_{i=1}^n \{Z_i \leq z\} \mid \eta(t) = n\right\}, \quad n \geq 1, \quad z > 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Unošenjem (3) i (4) u (2) dobijamo:

$$F(z; t) = P\{\chi(t) \leq z\} = P\{\eta(t) = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\bigcap_{i=1}^n \{Z_i \leq z\} \mid \eta(t) = n\right\} \cdot P\{\eta(t) = n\} \quad (5)$$

Gornji izraz je najopštiji izraz za funkciju raspodele procesa $\chi(t)$, koji su dali Todorović i Zelenhasić (1970).

II.1.3 Funkcija raspodele procesa najvećeg prekoračenja $\chi(t)$ pod nekim pretpostavkama

Zbog uslovne verovatnoće (4), podsetimo se da događaj da u intervalu $(0, t]$ ima n prekoračenja predstavlja u stvari događaj da se u trenutku t nalazimo između n -tog i $(n+1)$ -og prekoračenja:

$$\{\eta(t) = n\} = \{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\} = \{\tau_n \leq t\} - \{\tau_{n+1} \leq t\}$$

Tada uslovna verovatnoća (4) postaje:

$$\begin{aligned} P\left\{\bigcap_{i=1}^n \{Z_i \leq z\} \mid \eta(t) = n\right\} &= P\left\{\bigcap_{i=1}^n \{Z_i \leq z\} \mid \tau_n \leq t < \tau_{n+1}\right\} = \\ &= P\left\{\bigcap_{i=1}^n \{Z_i \leq z\} \mid \tau_n \leq t\right\} - P\left\{\bigcap_{i=1}^n \{Z_i \leq z\} \mid \tau_{n+1} \leq t\right\} \end{aligned}$$

Gornji izraz ukazuje da pri formulisanju raspodele najvećeg prekoračenja (5) treba voditi računa o međusobnoj zavisnosti prekoračenja Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$), kao i o njihovoj zavisnosti od τ_n i τ_{n+1} . Tri osnovne pretpostavke koje se mogu koristiti u daljem razvoju modela parcijalnih serija su:

- 1) niz prekoračenja Z_i je niz međusobno nezavisnih slučajnih promenljivih,
- 2) prekoračenja Z_i su jednako raspoređena, i
- 3) prekoračenja su nezavisna od vremena pojave prekoračenja.

Ove pretpostavke su u najvećem broju slučajeva opravdane sa fizičke tačke gledišta, odnosno, kako Todorović (1978) kaže, "one nisu u suprotnosti sa našom fizičkom intuicijom". Prva pretpostavka o nezavisnosti prekoračenja postaje opravdana ako se izabere dovoljno visok prag, a ona se može i proveriti na osmotrenim podacima.

Druga pretpostavka može biti nerealna ako izabrani vremenski interval predstavlja jednu godinu, jer velike vode tokom različitih sezona mogu poticati od različitih meteoroloških uslova (olujne kiše, dugotrajne kiše, topljenje snega). Međutim, opšti model (5) omogućava jednostavno uključivanje sezonskih varijacija, kao što su pokazali Todorović i Rousselle (1971).

Treća pretpostavka o nezavisnosti visina prekoračenja od vremena njihovih pojava možda može narušiti našu "fizičku intuiciju". Todorović (1978) je detaljno diskutovao o ovoj pretpostavci, pri čemu je razmatrao mogućnost da prekoračenje Z_n zavisi od vremena njegove pojave τ_n , i došao do odgovarajućeg izraza za funkciju raspodele najvećeg prekoračenja $\chi(t)$ u kome figuriše uslovna raspodela $P\{Z_n \leq z \mid \tau_n = u\}$, $0 \leq u \leq t$. Međutim, takav pristup je ipak samo od akademskog značaja, s obzirom da bi proračun ovih uslovnih raspodela znatno komplikovao praktičnu primenu metode parcijalnih serija.



Ako, dakle, važi treća pretpostavka o nezavisnosti prekoračenja od vremena njihove pojave, tada funkcija raspodele procesa $\chi(t)$ postaje:

$$P\{\chi(t) \leq z\} = P\{\eta(t) = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\bigcap_{i=1}^n \{Z_i \leq z\}\right\} \cdot P\{\eta(t) = n\}$$

Ukoliko usvojimo i prvu pretpostavku o nezavisnosti samih prekoračenja, tada imamo:

$$F(z; t) = P\{\chi(t) \leq z\} = P\{\eta(t) = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n P\{Z_i \leq z\} \cdot P\{\eta(t) = n\} \quad (6)$$

Funkcija raspodele procesa najvećeg prekoračenja $\chi(t)$ za niz nezavisnih i jednako raspoređenih prekoračenja. Ako su prekoračenja, pored toga što su međusobno nezavisna, jednako raspoređena sa funkcijom raspodele

$$H(z) = P\{Z_i \leq z\}, \quad z > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

tada za funkciju raspodele najvećeg prekoračenja imamo:

$$F(z; t) = P\{\chi(t) \leq z\} = P\{\eta(t) = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} [H(z)]^n \cdot P\{\eta(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} [H(z)]^n \cdot P\{\eta(t) = n\} \quad (7)$$

Funkcija raspodele procesa najvećeg prekoračenja $\chi(t)$ za niz prekoračenja jednako raspoređenih po sezonama. Kao što je već rečeno, pretpostavka o jednako raspoređenim prekoračenjima može biti nerealna ako velike vode tokom različitih sezona potiču od različitih meteoroloških uslova, a to znači iz populacija sa različitim raspodelama verovatnoće. Ako ne usvojimo pretpostavku o jednako raspoređenim prekoračenjima, tada je funkcija raspodele procesa $\chi(t)$ data jednačinom (6). Ovako formulisana funkcija raspodele nije primenljiva jer se ne može očekivati da poznamo sve raspodele prekoračenja oblika $H_i(z) = P\{Z_i \leq z\}$, $z > 0$, $i = 1, 2, \dots$. Sa gledišta pojave velikih voda realnije je pretpostaviti da su prekoračenja jednako raspoređena unutar jedne sezone.

Ako su sezone definisane vremenskim intervalima $(0, T_1]$, $(T_1, T_2]$, ..., onda sezona k predstavlja interval $(T_{k-1}, T_k]$, pri čemu je $T_0 \equiv 0$. Kada posmatramo interval vremena $(0, t]$, trenutak t naći će se u nekoj sezoni K , odnosno $T_{K-1} < t \leq T_K$. Broj prekoračenja u bilo kojoj sezoni k ($k < K$) jednak je $\eta_k = \eta(T_k) - \eta(T_{k-1})$, dok je broj prekoračenja u poslednjoj sezoni K do trenutka t jednak $\eta_K(t) = \eta(t) - \eta(T_{K-1})$. Neka je χ_k^* najveće prekoračenje u sezoni $k < K$, a najveće prekoračenje u poslednjoj sezoni do trenutka t je $\chi_K^*(t)$. Tada je najveće prekoračenje u intervalu vremena $(0, t]$:

$$\chi(t) = \sup\{\chi_1^*, \chi_2^*, \dots, \chi_{K-1}^*, \chi_K^*(t)\}$$

dok je njegova funkcija raspodele:

$$F(z; t) = P\{\chi(t) \leq z\} = P\{\chi_1^* \leq z, \chi_2^* \leq z, \dots, \chi_{K-1}^* \leq z, \chi_K^*(t) \leq z\}$$

Pošto smo pretpostavili međusobnu nezavisnost prekoračenja, onda su i sezonski maksimumi međusobno nezavisni, pa imamo:

$$F(z; t) = P\{\chi(t) \leq z\} = \left(\prod_{k=1}^{K-1} P\{\chi_k^* \leq z\} \right) \cdot P\{\chi_K^*(t) \leq z\} \quad (8)$$

Ako se za svaku sezonu k odredi funkcija raspodele prekoračenja $H_k(z)$, tada se za raspodelu najvećeg prekoračenja u sezoni može primeniti izraz za nezavisna i jednako raspoređena prekoračenja (7). Tada za sve sezone koje su završene do trenutka t imamo:

$$F_k(z) = P\{\chi_k^* \leq z\} = \sum_{n=0}^{\infty} [H_k(z)]^n \cdot P\{\eta_k = n\} \quad (9)$$

dok je za poslednju sezonu:

$$F_K(z; t) = P\{\chi_K^*(t) \leq z\} = \sum_{n=0}^{\infty} [H_K(z)]^n \cdot P\{\eta_K(t) = n\} \quad (10)$$

Funkcija raspodele najvećeg prekoračenja sa sezonskim varijacijama onda je definisana jednačinama (8), (9) i (10). U praktičnim primenama obično se smatra da interval $(0, t]$ predstavlja jednu godinu, unutar koje je definisano K kompletnih sezona. Tada se može jednostavnije napisati da je funkcija raspodele najvećeg godišnjeg prekoračenja sa sezonskim varijacijama:

$$F(z) = P\{\chi(t) \leq z\} = \prod_{k=1}^K F_k(z) = \prod_{k=1}^K \left(\sum_{n=0}^{\infty} [H_k(z)]^n \cdot P\{\eta_k = n\} \right)$$

II.1.4 Povratni period u parcijalnim serijama

Ako posmatramo fiksiran interval vremena $(0, t^*]$, neka su tada $\chi_1(t^*)$, $\chi_2(t^*)$, ... najveća prekoračenja u prvoj, drugoj, itd. realizaciji procesa $\chi(t)$ sa funkcijom raspodele:

$$P\{\chi_i(t^*) \leq z\} = F(z; t^*), \quad i = 1, 2, \dots$$

Posmatrajmo slučajnu promenljivu $v(z)$ kao najmanji indeks i za koji je $\chi_i(t^*)$ veće od nekog z (to je indeks prvog prevazilaženja vrednosti z):

$$v(z) = \inf\{i; \chi_i(t^*) > z\}$$

Tada je verovatnoća da se vrednost z prvi put prevaziđe u n -toj realizaciji procesa jednaka:

$$\begin{aligned} P\{v(z) = n\} &= P\{\chi_1(t^*) \leq z, \chi_2(t^*) \leq z, \dots, \chi_{n-1}(t^*) \leq z, \chi_n(t^*) > z\} = \\ &= [F(z; t^*)]^{n-1} [1 - F(z; t^*)] \end{aligned}$$

Na osnovu gornje raspodele, očekivanje slučajne promenljive $v(z)$ je:

$$E[v(z)] = \sum_{n=1}^{\infty} n [F(z; t^*)]^{n-1} [1 - F(z; t^*)] = \frac{1}{1 - F(z; t^*)}$$

Očekivanje $E[v(z)]$ predstavlja prosečan broj intervala dužine t^* do prvog prevazilaženja vrednosti z , odnosno protoka većeg od $x = z + x_0$. S druge strane, vidi se da gornji izraz odgovara klasičnoj definiciji povratnog perioda ukoliko je $t^* = 1$ godina, kao što je uobičajeno. To nas upućuje da definišemo povratni period u parcijalnim serijama kao prosečan broj godina do prve pojave protoka većeg od x koji se određuje kao:

$$T(x) = \frac{1}{1 - F(x - x_0)}, \quad x > x_0 \quad (11)$$

gde je $F(x - x_0)$ funkcija raspodele najvećih godišnjih prekoračenja preko praga x_0 . Drugim rečima, protok veći od x javiće se *prvi put u proseku* za $T(x)$ godina, što je u skladu sa formulacijom povratnog perioda u serijama godišnjih maksimuma $T_{GM}(x)$ za koji se kaže da se bar jednom u $T_{GM}(x)$ godina može očekivati protok x ili veći. Osnovna razlika između $T(x)$ i $T_{GM}(x)$ je u tome što u parcijalnim serijama povratni period nije definisan za protoke manje od praga, odnosno definisan je samo za $x > x_0$.

Neki od autora koji su se bavili parcijalnim serijama (npr. Rosbjerg, 1977) nisu koristili Todorovićeve izraze za funkciju raspodele najvećih godišnjih prekoračenja, već svoje analize završavaju određivanjem raspodele samih prekoračenja $H(z)$ uz pretpostavku da broj prekoračenja $\eta(t)$ iznad osnovnog praga x_0 u intervalu vremena dužine t prati homogen Poasonov proces sa parametrom $\Lambda = \lambda t$. Oni

tada smatraju i da broj prekoračenja $\eta_z(t)$ preko proizvoljne vrednosti z u istom intervalu vremena prati Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda t[1 - H(z)]$, što je i prosečan broj takvih prekoračenja, tj.

$$E[\eta_z(t)] = \lambda t[1 - H(z)]$$

Stavljajući da je $E[\eta_z(t)] = 1$, tj. da se vrednost $x = z + x_0$ prevaziđe prosečno jednom u intervalu vremena dužine $t = T$, oni dolaze do definicije povratnog perioda parcijalnih serija:

$$T_{PDS}(x) = \frac{1}{\lambda[1 - H(x - x_0)]}, \quad x > x_0 \quad (12)$$

Ovakvom definicijom povratnog perioda se implicira da će se protok x javiti *prosečno jednom* za $T_{PDS}(x)$ godina, pod pretpostavkom da broj prekoračenja preko praga prati Poasonovu raspodelu.

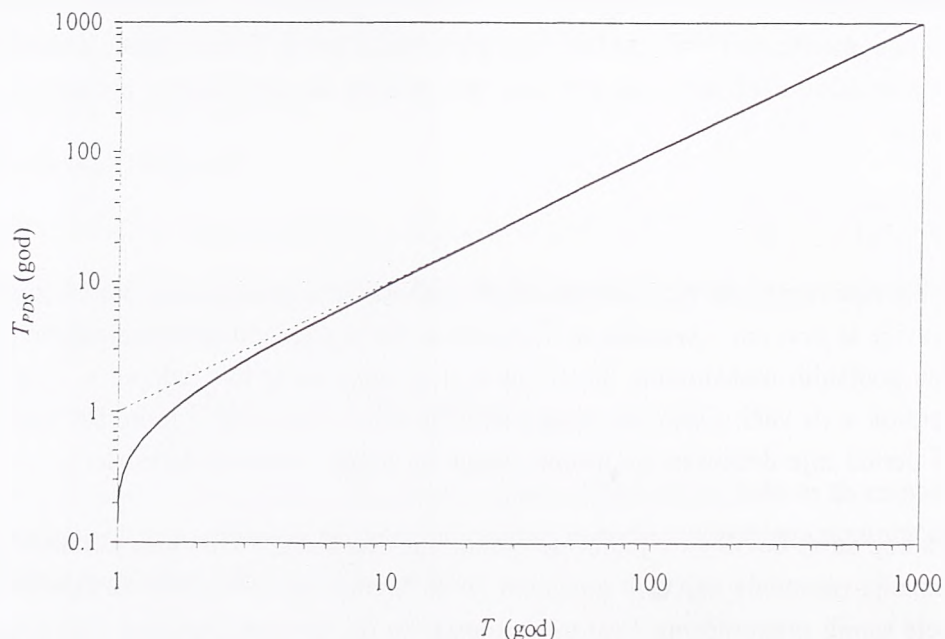
Imajući u vidu da funkcija raspodele najvećih godišnjih prekoračenja uz pretpostavku o Poasonovom broju prekoračenja preko praga glasi $F(x) = \exp\{-\lambda[1 - H(x - x_0)]\}$, između definicija povratnog perioda (11) i (12) važi relacija:

$$T(x) = \frac{1}{1 - \exp\{-1/T_{PDS}(x)\}}$$

odnosno

$$T_{PDS}(x) = \frac{1}{\ln T(x) - \ln[T(x) - 1]}$$

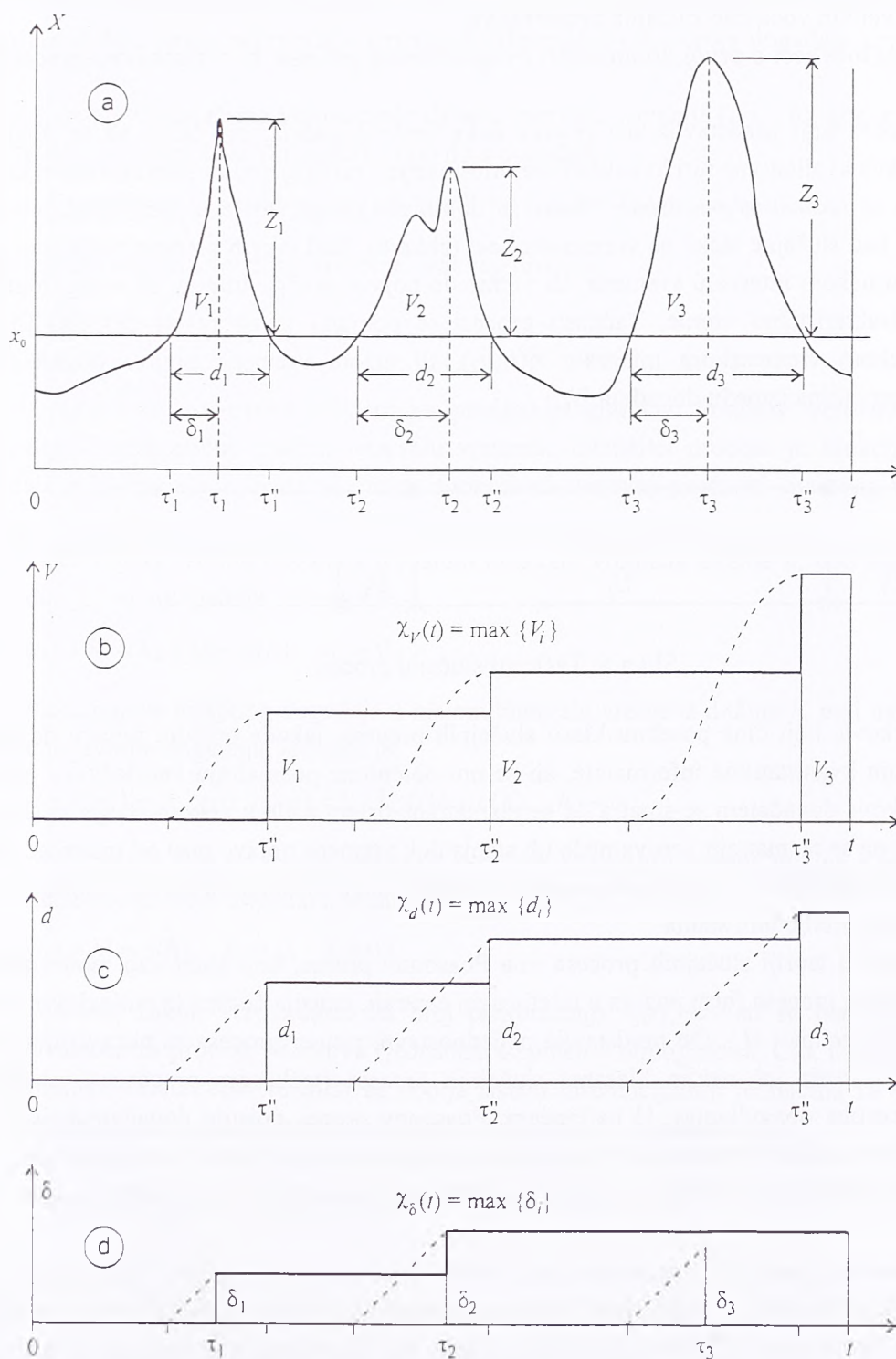
Odnos dve formulacije povratnog perioda je prikazan na slici 4. Razlike između njih su najznačajnije u domenu malih povratnih perioda ($T < 10$ godina). Pored toga, "klasičan" povratni period $T(x)$ uzima vrednosti $1 \leq T(x) < \infty$ zbog svojstva verovatnoće $0 \leq F(x) \leq 1$, dok povratni period parcijalnih serija može biti i manji od 1 godine, tj. $1/\lambda \leq T_{PDS}(x) < \infty$. Iako ova formulacija povratnog perioda može biti korisna da se opišu veoma česti događaji, ne treba zaboraviti da ona važi samo pod pretpostavkom Poasonovog broja prekoračenja preko praga i da zato nije primenljiva na modele parcijalnih serija sa drugim raspodelama za broj prekoračenja.



Slika 4. Odnos "klasične" formulacije povratnog perioda T i formulacije koja važi pod pretpostavkom Poasonovog broja prekoračenja preko praga T_{PDS} .

II.1.5 Drugi procesi od interesa za analizu velikih voda

Pored protoka, parcijalne serije omogućavaju analizu i drugih veličina relevantnih za velike vode kao što su zapremine, vremena pojave ekstremnih protoka, trajanje velikih voda i slično. Na slici 5 prikazan je primer procesa najveće zapremine iznad praga $\chi_V(t) = \max\{V_i, \tau_i'' \leq t\}$, procesa najvećeg trajanja protoka iznad praga $\chi_d(t) = \max\{d_i, \tau_i'' \leq t\}$, i procesa najvećeg vremena do maksimuma $\chi_\delta(t) = \max\{\delta_i, \tau_i \leq t\}$. Ovi procesi mogu se analizirati analogno procesu najvećeg prekoračenja sa funkcijama raspodele oblika kao u jednačini (7), u kojoj $H(z)$ treba shvatiti kao funkciju raspodele zapremine, trajanja talasa ili vremena do maksimuma koje se vezuju za odgovarajuća prekoračenja.



Slika 5. (a) Definicija procesa koji se mogu analizirati metodom parcijalnih serija: zapremine velikih voda V , trajanje velikih voda d i vreme pojave ekstremnih protoka δ . Primeri realizacije procesa: (b) zapremine, (c) trajanja velikih voda i (d) vremena pojave ekstremnih protoka.



II.2 Modeli za broj pojava prekoračenja

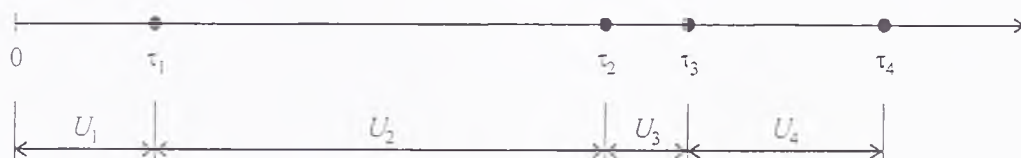
II.2.1 Slučajni procesi pojave prekoračenja

Model parcijalnih serija velikih voda koji je formulisao Todorović i koji je opisan u prethodnom odeljku predstavlja složeni slučajni proces koji ima dve osnovne komponente:

- slučajni proces pojave velikih voda, u kome se ne posmatra veličina velikih voda već samo vremena pojave ili broj pojava, i
- veličina velikih voda kao slučajna promenljiva.

U ovom odeljku biće reči o prvoj komponenti ovog složenog procesa, tj. o slučajnom procesu pojave velikih voda.

Slučajni proces koji predstavlja niz pojava neke vrste događaja, pri čemu za te događaje ne vezujemo nikakve kvalitativne niti kvantitativne informacije i razlikujemo ih samo po tome kada su se javili, nazivaju se *tačkastim procesima*. Naziv su dobili zbog toga što se u njima slučajni događaji mogu zamisliti kao slučajne tačke na vremenskoj osi (slika 6). Kod takvih procesa može nas zanimati broj događaja u nekom intervalu vremena, ili vreme do pojave prvog, drugog, ili n -tog događaja, ili neko drugo karakteristično vreme. Tačkasti procesi se potpuno ravnopravno definišu ili brojem događaja u nekom vremenskom intervalu $\eta(t_1, t_2)$, ili nizom vremena pojave događaja τ_n , ili vremenskim intervalima između događaja U_n .



Slika 6. Tačkasti slučajni proces.

Procesi Markova, koji čine posebnu klasu slučajnih procesa, takođe opisuju pojavu događaja za koje se ne vezuju kvantitativne informacije, ali se oni obično ne posmatraju kao tačkasti procesi. U procesima Markova događajem se smatra da se razmatrani sistem nađe u nekom stanju iz skupa svih mogućih stanja, pa se razmatraju verovatnoće tih stanja dok vremena pojave nisu od interesa. Osnovno svojstvo procesa Markova je da pojava nekog budućeg stanja sistema zavisi od sadašnjeg stanja sistema, ali ne i od prethodnih stanja.

Posebno mesto u teoriji slučajnih procesa ima Poasonov proces, koji služi kao model za veoma širok spektar realnih procesa (broj poziva u telefonskoj centrali, emisija čestica iz radioaktivnih izvora, broj nesreća u rudnicima i sl.). On predstavlja najjednostavniji primer procesa sa nezavisnim priraštajima, a ujedno pripada još nekim klasama slučajnih procesa (tačkastim procesima, markovskim procesima, procesima obnavljanja). U najkraćem, Poasonov proces opisuje događaje koji se mogu javiti pojedinačno u nekom vremenskom trenutku na potpuno slučajan način. Razvijajući svoj model parcijalnih serija velikih voda, Todorović je izabrao Poasonov proces kao model za broj pojava velikih voda.

Pored Poasonovog procesa tj. raspodele, kao model za broj pojava velikih voda korišćena je i negativna binomna raspodela, a nešto ređe i binomna raspodela. Ove dve raspodele mogu proisteći iz procesa rađanja kao procesa Markova, tako da se može reći da pojava prekoračenja velikih voda u opštem slučaju predstavlja markovski proces sa diskretnim stanjima u neprekidnom vremenu.

II.2.2 Slučajni procesi Markova kao model za pojavu velikih voda u parcijalnim serijama

Ako proces pojave prekoračenja velikih voda iznad izabranog praga zamislimo kao proces Markova, tada je $\eta(t)$ slučajna promenljiva koja predstavlja broj pojava velikih voda od početnog trenutka $t = 0$ do proizvoljnog trenutka t . Drugim rečima, to je proces brojanja pojava velikih voda, pri čemu nije moguća istovremena pojava više događaja. Osnovne osobine ovakvog markovskog procesa su sledeće:

- u malom intervalu vremena može se desiti samo jedan ili nijedan događaj, i
- verovatnoća pojave jednog događaja u malom intervalu vremena proporcionalna je dužini intervala i u opštem slučaju zavisi od mesta intervala na vremenskoj osi i broja događaja koji su se prethodno javili.

Ako sa $p_{n,n+1}(t, t+h)$ označimo verovatnoću da se u intervalu vremena $(t, t+h)$, gde je $h > 0$, javio jedan događaj pod uslovom da se do trenutka t javilo n događaja:

$$p_{n,n+1}(t, t+h) = P\{\eta(t+h) - \eta(t) = 1 \mid \eta(t) = n\} = P\{\eta(t+h) = n+1 \mid \eta(t) = n\}$$

tada je matematička formulacija druge osobine ovakvog procesa:

$$\frac{p_{n,n+1}(t, t+h)}{h} \rightarrow \lambda_n(t) \quad \text{kada } h \rightarrow 0 \quad (13)$$

Funkcija $\lambda_n(t)$ naziva se *intenzitom procesa* jer predstavlja graničnu vrednost verovatnoće pojave jednog događaja u beskonačno malom intervalu vremena. Intenzitet procesa je funkcija trenutnog broja događaja n i trenutka t . Sada se mogu formulirati osnovni postulati ovakvog markovskog procesa:

- a) verovatnoća pojave jednog događaja u malom intervalu vremena dužine h , pod uslovom da se prethodno javilo n događaja, jednaka je:

$$p_{n,n+1}(t, t+h) = \lambda_n(t)h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

- b) verovatnoća pojave nijednog događaja u malom intervalu vremena dužine h , pod uslovom da se prethodno javilo n događaja, jednaka je:

$$p_{n,n}(t, t+h) = 1 - p_{n,n+1}(t, t+h) = 1 - \lambda_n(t)h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

- c) verovatnoća pojave više od jednog događaja u malom intervalu vremena dužine h , pod uslovom da se prethodno javilo n događaja, jednaka je:

$$p_{n,n+k}(t, t+h) = o(h), \quad h \rightarrow 0, \quad k \neq 0,1$$

Da bi se odredio zakon verovatnoće za broj prekoračenja $\eta(t)$, koristi se osnovna jednačina prelaznih verovatnoća za procese Markova (jednačina Čepmen-Kolmogorova; Cox i Miller, 1965) uz uslove iz gornjih postulata. Kao rezultat se dobija sistem diferencijalnih jednačina za verovatnoću $p_{i,n}(s,t)$, tj. verovatnoću prelaska iz stanja i u trenutku s u stanje n u trenutku $t > s$:

$$\frac{d[p_{i,n}(s,t)]}{dt} = -\lambda_n(t)p_{i,n}(s,t) + \lambda_{n-1}(t)p_{i,n-1}(s,t), \quad n > i \quad (14)$$

$$\frac{d[p_{i,i}(s,t)]}{dt} = -\lambda_i(t)p_{i,i}(s,t) \quad (15)$$

gde su s i t dva proizvoljna vremenska trenutka ($s < t$), a i i n broj događaja u trenucima s i t . Gornji sistem jednačina se rešava uz početne uslove:

$$P_{i,n}(s,s) = \begin{cases} 1, & n = i \\ 0, & n \neq i \end{cases} \quad (16)$$

Rešenje jednačine (15) je:

$$P_{ii}(s,t) = \exp\{-\Lambda_i(s,t)\}$$

dok opšte rešenje jednačine (14) ima iterativnu formu:

$$P_{in}(s,t) = \exp\{-\Lambda_n(s,t)\} \left[\int_s^t \lambda_{n-1}(u) P_{i,n-1}(s,u) \exp\{\Lambda_n(s,u)\} du + C_n \right], \quad n > i \quad (17)$$

gde je:

$$\Lambda_n(s,t) = \int_s^t \lambda_n(u) du$$

Sukcesivnim rešavanjem jednačine (17), uz uzimanje u obzir početnih uslova (16), dobijaju se prelazne verovatnoće markovskog procesa pojave prekoračenja iznad praga. Naravno, to je moguće samo ako se zna ili pretpostavi oblik funkcije intenziteta $\lambda_n(t)$.

Intenzitet javljanja događaja. Intenzitet procesa $\lambda_n(t)$, uveden jednačinom (13) i definisan kao:

$$\begin{aligned} \lambda_n(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{n,n+1}(t,t+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\{\eta(t+h) = n+1 \mid \eta(t) = n\}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\{\eta(t+h) - \eta(t) = 1 \mid \eta(t) = n\}}{h}, \quad h > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

predstavlja verovatnoću pojave jednog događaja u malom intervalu vremena ($h \rightarrow 0$). Kao što se vidi, intenzitet procesa u opštem slučaju zavisi od vremenskog trenutka t i broja događaja n koji su se do tog trenutka javili. Ako intenzitet procesa ne zavisi od vremena, već samo od broja događaja do tog vremena, radi se o vremenski homogenom procesu.

Definisanjem intenziteta procesa za određene konkretne slučajeve definišu se različite podvrste procesa Markova. Kada je $\lambda_n(t) = \lambda = const$, radi se o homogenom Poasonovom procesu. To je najjednostavniji tip procesa Markova u kome je intenzitet pojave događaja konstantan u vremenu i nezavisan od broja događaja koji su se do razmatranog trenutka javili. Ako je $\lambda_n(t) = \lambda_n$ dobija se vremenski homogen proces rađanja u kome intenzitet događaja zavisi samo od broja prethodnih pojava događaja. U modelima parcijalnih serija za velike vode prethodna dva slučaja se najviše koriste, a to su dakle slučajevi vremenski homogenih procesa. Za $\lambda_n(t) = \lambda(t)$ imamo nehomogeni Poasonov proces, dok u opštem slučaju $\lambda_n(t)$ definiše nehomogen proces rađanja. Zbog jednostavnijeg rešavanja sistema jednačina (14) odnosno (17), interesantni su procesi u kojima se funkcija intenziteta može razdvojiti na deo koji zavisi od broja događaja i na deo koji zavisi od vremena, kao npr. $\lambda_n(t) = \alpha_n \beta(t)$. To je upravo slučaj procesa u kojima se kao rezultat dobijaju binomna i negativna binomna raspodela za broj događaja (koji će se ovde nazivati binomnim i negativnim binomnim procesom). U nastavku su prikazana rešenja sistema (14) za neke karakteristične oblike funkcije intenziteta.

Homogeni Poasonov proces. Homogeni Poasonov proces je proces u kome je funkcija intenziteta konstantna, dakle ne zavisi od broja događaja koji su se već javili, niti zavisi od vremena:

$$\lambda_n(t) = \lambda = const. > 0$$

Tada imamo:

$$\Lambda(s, t) = \int_s^t \lambda du = \lambda(t - s)$$

Rešenje sistema (14) u ovom slučaju daje Poasonovu raspodelu:

$$P_{i,n}(s, t) = \frac{[\lambda(t - s)]^{n-i}}{(n-i)!} \exp\{-\lambda(t - s)\}, \quad 0 \leq s < t, \quad n > i$$

Vidi se da verovatnoća da se u trenutku t javi n događaja, pod uslovom da je u trenutku s bilo i događaja, ne zavisi ni od trenutaka s i t niti od broja prethodnih događaja, već samo od dužine intervala vremena $t - s$ i broja događaja u tom intervalu.

Ako posmatramo broj prekoračenja velikih voda u intervalu vremena $(0, t]$, pri čemu brojanje događaja počinjemo od 0, može se napisati:

$$P_n(t) = P\{\eta(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp\{-\lambda t\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

što predstavlja Poasonovu raspodelu sa parametrom λt .

Nehomogeni Poasonov proces. Nehomogeni Poasonov proces je proces u kome funkcija intenziteta zavisi samo od vremena, a ne i od broja događaja koji su se već javili:

$$\lambda_n(t) = \lambda(t)$$

Tada imamo:

$$\Lambda(s, t) = \int_s^t \lambda(u) du = \int_0^t \lambda(u) du - \int_0^s \lambda(u) du = \Lambda(0, t) - \Lambda(0, s)$$

Rešenje sistema (14) u ovom slučaju daje sledeći oblik Poasonove raspodele:

$$P_{i,n}(s, t) = \frac{[\Lambda(s, t)]^{n-i}}{(n-i)!} \exp\{-\Lambda(s, t)\}, \quad 0 \leq s < t, \quad n > i$$

Za broj prekoračenja velikih voda u intervalu vremena $(0, t]$, pri čemu je dakle $s = 0$ i $i = 0$, možemo skraćeno da napišemo $\Lambda(0, t) = \Lambda(t)$, tako da se dobija:

$$P_n(t) = P\{\eta(t) = n\} = \frac{[\Lambda(t)]^n}{n!} \exp\{-\Lambda(t)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

što predstavlja Poasonovu raspodelu sa parametrom $\Lambda(t)$.

Nehomogeni binomni i negativni binomni proces. Procesi u kojima se funkcija intenziteta može razdvojiti na deo koji zavisi od broja događaja i na deo koji zavisi od vremena je upravo slučaj procesa u kojima se kao rezultat dobijaju binomna i negativna binomna raspodela za broj događaja. Posmatramo funkciju intenziteta javljanja u obliku:

$$\lambda_n(t) = \beta_n \alpha(t), \quad \beta_n \geq 0, \quad \alpha(t) > 0$$

gde je:

$$\beta_n = 1 + n/a, \quad a > 0, \quad n \geq 0$$

ili

$$\beta_n = 1 - n/b, \quad b > 0, \quad 0 \leq n \leq b$$

gde su a i b celi brojevi. Tada imamo:

$$\Lambda_n(s, t) = \beta_n \int_s^t \alpha(u) du = \beta_n A(s, t)$$

Rešenje sistema (14) u slučaju $\beta_n = 1 + n/a$ predstavlja negativnu binomnu raspodelu (Vukmirović, 1990; Vukmirović, 1995):

$$p_{i,n}(s, t) = \frac{\Gamma(a+k)}{(n-i)! \Gamma(a+i)} [\exp\{-A(s, t)/a\}]^{a+i} [1 - \exp\{-A(s, t)/a\}]^{n-i}, \quad n > i$$

Za broj prekoračenja velikih voda u intervalu vremena $(0, t]$, tj. za $s = 0$ i $i = 0$, možemo skraćeno da napišemo $A(0, t) = A(t)$, tako da se dobija:

$$p_n(t) = P\{\eta(t) = n\} = \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} [\exp\{-A(t)/a\}]^a [1 - \exp\{-A(t)/a\}]^n, \quad n \geq 0 \quad (18)$$

Gornji izraz je negativna binomna raspodela sa parametrima a i $p = \exp\{-A(t)/a\}$.

U slučaju $\beta_n = 1 - n/b$ rešenje sistema (14) predstavlja binomnu raspodelu:

$$p_{i,n}(s, t) = \frac{\Gamma(b-i+1)}{(n-i)! \Gamma(b-n+1)} [\exp\{-A(s, t)/b\}]^{b-n} [1 - \exp\{-A(s, t)/b\}]^{n-i}, \quad n > i$$

Za $s = 0$ i $i = 0$ možemo skraćeno da napišemo:

$$p_n(t) = P\{\eta(t) = n\} = \frac{\Gamma(b+1)}{n! \Gamma(b-n+1)} [\exp\{-A(t)/b\}]^{b-n} [1 - \exp\{-A(t)/b\}]^n, \quad 0 \leq n \leq b \quad (19)$$

Ovaj izraz predstavlja binomnu raspodelu sa parametrima b i $p = 1 - \exp\{-A(t)/b\}$.

Binomni i negativni binomni proces se mogu shvatiti kao jedan proces u kome parametar a (ili b) može da bude i pozitivan i negativan, a jedino ne može biti jednak 0. Takođe se može pokazati da je zakon verovatnoće (18) jednak zakonu verovatnoće (19) kada se stavi $b = -a$.

Homogeni binomni i negativni binomni proces. Raspodele broja događaja za homogeni binomni i negativni binomni proces neposredno slede iz odgovarajućih nehomogenih procesa ako funkcija intenziteta javljanja ne zavisi od vremena. Ako napišemo:

$$\lambda_n(t) = \alpha \beta_n, \quad \beta_n \geq 0, \quad \alpha > 0$$

tada je:

$$\Lambda_n(s, t) = \int_s^t \alpha \beta_n du = \alpha \beta_n (t - s)$$

U slučaju $\beta_n = 1 + n/a$, za broj prekoračenja iznad praga u intervalu vremena $(0, t]$ imamo negativnu binomnu raspodelu sa parametrima a i $p = \exp\{-\alpha t/a\}$:

$$p_n(t) = P\{\eta(t) = n\} = \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} [\exp\{-\alpha t/a\}]^a [1 - \exp\{-\alpha t/a\}]^n, \quad n \geq 0$$

dok u slučaju $\beta_n = 1 - n/b$ dobijamo binomnu raspodelu sa parametrima b i $p = 1 - \exp\{-\alpha t/b\}$:

$$p_n(t) = P\{\eta(t) = n\} = \frac{\Gamma(b+1)}{n! \Gamma(b-n+1)} [\exp\{-\alpha t/b\}]^{b-n} [1 - \exp\{-\alpha t/b\}]^n, \quad 0 \leq n \leq b$$

II.2.3 Poasonova raspodela za broj pojava prekoračenja

Ukoliko je proces javljanja prekoračenja velikih voda iznad praga Poasonov proces, tada je raspodela broja prekoračenja u intervalu vremena $(0, t]$ Poasonova raspodela sa parametrom $\Lambda(t)$:

$$P\{\eta(t) = n\} = \frac{[\Lambda(t)]^n}{n!} \exp\{-\Lambda(t)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Na osnovu svojstava Poasonove raspodele, očekivanje i disperzija broja prekoračenja su jednaki parametru $\Lambda(t)$, dok je indeks disperzije jednak jedinici:

$$E[\eta(t)] = D[\eta(t)] = \Lambda(t), \quad I_D = \frac{D[\eta(t)]}{E[\eta(t)]} = 1$$

Da bi se odredio parametar $\Lambda(t)$, potrebno je analizirati srednju vrednost procesa $\eta(t)$ na intervalu vremena $(0, t]$, što je proces $\bar{\eta}(t) = \sum_{i=1}^N \eta_i(t)$, gde su $\eta_i(t)$ realizacije procesa $\eta(t)$ tokom N godina osmatranja. Ukoliko je $\bar{\eta}(t)$ predstavlja pravu liniju na intervalu vremena $(0, t]$, tada se radi o homogenom Poasonovom procesu i $\Lambda(t) = \lambda t$. U suprotnom, radi se o nehomogenom Poasonovom procesu i tada su moguća dva pravca. Todorović je u svojim radovima analizirao proces $\bar{\eta}(t)$ kao periodičnu vremensku seriju i odredio njen analitički oblik, čijim je diferenciranjem došao do funkcije intenziteta $\lambda(t)$. Druga mogućnost je da se interval od jedne godine podeli na sezone u kojima se može smatrati da je $\lambda = \text{const.}$ i da se primeni složeni sezonski model parcijalnih serija.

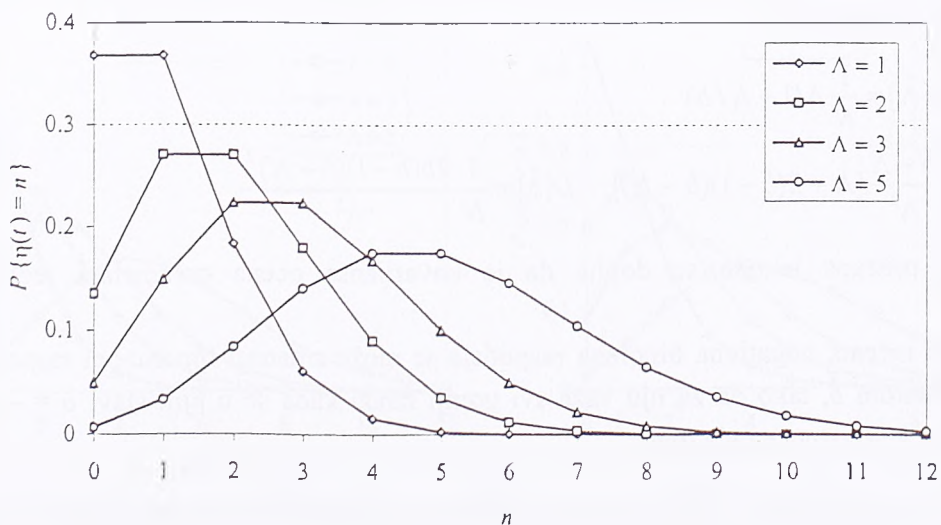
Pod pretpostavkom homogenog Poasonovog procesa i imajući u vidu da interval vremena $(0, t]$ u analizi velikih voda predstavlja jednu godinu ($t = 1$), broj prekoračenja preko praga pratiće Poasonovu raspodelu sa parametrom $\Lambda = \lambda$. Na slici 7 prikazane su raspodele Poasonove verovatnoće za nekoliko vrednosti parametra Λ . Parametar Λ se ocenjuje kao prosečan godišnji broj prekoračenja:

$$\hat{\Lambda} = \bar{\eta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i = \frac{M}{N}$$

gde je N broj godina osmatranja, η_i broj prekoračenja u svakoj od godina osmatranja, a M ukupan broj prekoračenja tokom N godina. Ocena parametra Λ ima očekivanje i varijansu:

$$E[\hat{\Lambda}] = E[\bar{\eta}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[\eta_i] = E[\eta] = \Lambda$$

$$D[\hat{\Lambda}] = D[\bar{\eta}] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N D[\eta_i] = \frac{D[\eta]}{N} = \frac{\Lambda}{N}$$



Slika 7. Verovatnoće pojave broja prekoračenja prema Poasonovoj raspodeli.

II.2.4 Binomna i negativna binomna raspodela za broj pojava prekoračenja

Binomna raspodela broja prekoračenja iznad praga u intervalu vremena $(0, t]$ glasi:

$$P\{\eta(t) = n\} = \frac{\Gamma(b+1)}{n!\Gamma(b-n+1)} [\exp\{-A(t)/b\}]^{b-n} [1 - \exp\{-A(t)/b\}]^n, \quad 0 \leq n \leq b$$

Parametri binomne raspodele su b i $p = 1 - \exp\{-A(t)/b\}$, pri čemu je $b > 0$ i $0 < p < 1$. Očekivanje, disperzija i indeks disperzije su jednaki:

$$\begin{aligned} E[\eta(t)] &= b[1 - \exp\{-A(t)/b\}] \\ D[\eta(t)] &= b \exp\{-A(t)/b\} [1 - \exp\{-A(t)/b\}] \\ I_D[\eta(t)] &= \exp\{-A(t)/b\} \end{aligned} \quad (20)$$

Da bi se utvrdilo da li se radi o homogenom ili nehomogenom procesu, treba analizirati funkciju $A(t)$. Prema (20), treba u suštini analizirati da li je zavisnost $\ln[i_d(t)]$ linearna, gde je $i_d(t)$ indeks disperzije uzorka broja javljanja.

Primena binomne raspodele znatno je jednostavnija ako se umesto parametra p koristi očekivanje $E[\eta(t)]$ kao parametar. Ako označimo očekivanje $E[\eta(t)]$ sa $\Lambda(t)$, tada zakon binomne raspodele glasi:

$$P\{\eta(t) = n\} = \frac{\Gamma(b+1)}{n!\Gamma(b-n+1)} \left[\frac{\Lambda(t)}{b} \right]^n \left[1 - \frac{\Lambda(t)}{b} \right]^{b-n}, \quad 0 \leq n \leq b$$

Napominje se da oznaka $\Lambda(t)$ u ovom kontekstu predstavlja samo srednju vrednost procesa $\eta(t)$, a ne i integralnu funkciju intenziteta procesa definisanu u odeljku II.2.2. Ova oznaka je usvojena samo zbog analogije sa srednjom vrednošću kod Poasonove raspodele. Očekivanje i disperzija binomne promenljive u ovom slučaju su:

$$E[\eta(t)] = \Lambda(t), \quad D[\eta(t)] = \Lambda(t) \left[1 - \frac{\Lambda(t)}{b} \right], \quad I_D = 1 - \frac{\Lambda(t)}{b} < 1$$

U slučaju homogenog procesa, metodom momenata za ocene parametara binomne raspodele se dobija:

$$\hat{\Lambda} = \bar{\eta}, \quad \hat{b} = \frac{\bar{\eta}}{1 - i_d} = \frac{\bar{\eta}^2}{\bar{\eta} - S_\eta^2}$$

Svojstva ocena parametara binomne i negativne binomne raspodele mogu se odrediti pristupom razvoja u Tejlorov red, što je prikazano u prilogu B.2. Dobijeni su sledeći izrazi za očekivanje i varijansa ocena parametara Λ i b :

$$\begin{aligned} E[\hat{\Lambda}] &= \Lambda, \quad D[\hat{\Lambda}] = \frac{1}{N} \Lambda(1 - \Lambda/b) \\ E[\hat{b}] &= b + \frac{1}{N} \frac{b - \Lambda}{\Lambda^2} [\Lambda + 2(b-1)(b - \Lambda)], \quad D[\hat{b}] = \frac{1}{N} \frac{2b(b-1)(b - \Lambda)^2}{\Lambda^2} \end{aligned}$$

Primenom ovog pristupa takođe se dobija da je kovarijansa ocena parametara jednaka nuli ($\text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{b}] = 0$).

Kao što je već rečeno, negativna binomna raspodela se može smatrati binomnom raspodelom sa negativnim parametrom b , tako da za nju važe svi gornji izrazi kada se u njih stavi $b = -a$. Zakon negativne binomne verovatnoće tada glasi:

$$P\{\eta(t) = n\} = \frac{\Gamma(a+n)}{n!\Gamma(a)} \left[\frac{a}{a + \Lambda(t)} \right]^a \left[1 - \frac{a}{a + \Lambda(t)} \right]^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dok su očekivanje, disperzija i indeks disperzije:

$$E[\eta(t)] = \Lambda(t), \quad D[\eta(t)] = \Lambda(t) \left[1 + \frac{\Lambda(t)}{a} \right], \quad I_D = 1 + \frac{\Lambda(t)}{a} > 1$$

Parametri negativne binomne raspodele ocenjuju se metodom momenata kao:

$$\hat{\Lambda} = \bar{\eta}, \quad \hat{a} = \frac{\bar{\eta}}{i_d - 1} = \frac{\bar{\eta}^2}{S_{\eta}^2 - \bar{\eta}}$$

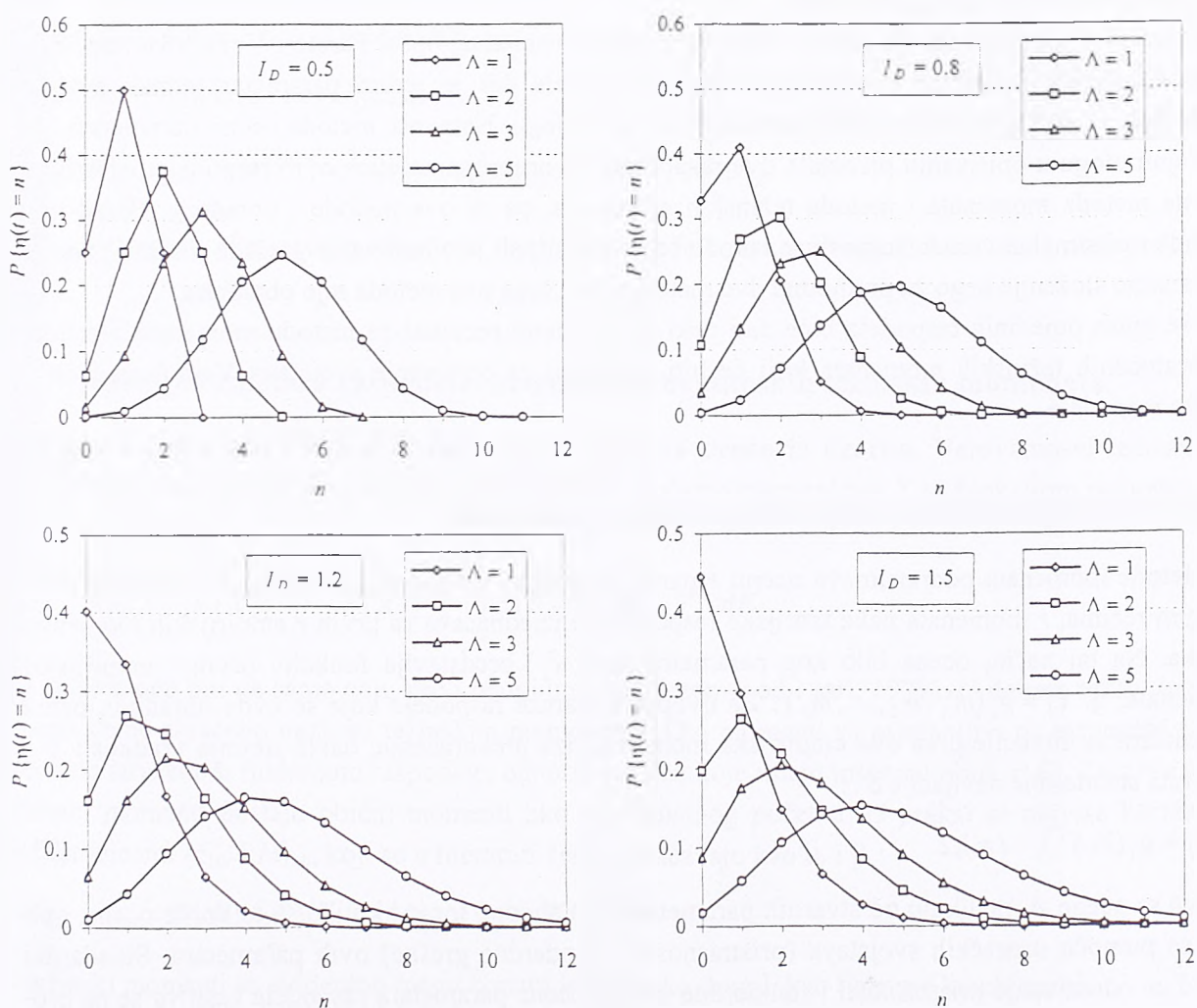
Svojstva ocena parametara negativne binomne raspodele su određena pristupom razvoja u Tejlorov red (prilog B.2), pri čemu je za očekivanja i varijanse ocena parametara dobijeno:

$$E[\hat{\Lambda}] = \Lambda, \quad D[\hat{\Lambda}] = \frac{1}{N} \Lambda(1 + \Lambda/a)$$

$$E[\hat{a}] = a + \frac{1}{N} \frac{a + \Lambda}{\Lambda^2} [\Lambda + 2(a+1)(a + \Lambda)], \quad D[\hat{a}] = \frac{1}{N} \frac{2a(a+1)(a + \Lambda)^2}{\Lambda^2}$$

Istim pristupom dobijeno je da je kovarijansa ocena parametara jednaka nuli ($\text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{a}] = 0$).

Na slici 8 prikazane su verovatnoće pojave broja prekoračenja prema binomnoj i negativnoj binomnoj raspodeli za različite srednje vrednosti i indekse disperzije broja prekoračenja.



Slika 8. Verovatnoće pojave broja prekoračenja prema binomnoj raspodeli ($I_D = 0.5$ i 0.8) i negativnoj binomnoj raspodeli ($I_D = 1.2$ i 1.5).

II.3 Raspodele za visinu prekoračenja

Formulišući svoj model parcijalnih serija, Todorović (Todorović i Zelenhasić, 1970) je opisao proces pojave velikih voda kao nehomogen Poasonov proces sa eksponencijalno raspoređenim prekoračenjima iznad praga. Jedan od problema koji se može javiti u primeni ovog modela jeste teškoća u pronalaženju vrednosti praga iznad koje je model primenljiv. Prag se mora odabrati tako da broj prekoračenja prati Poasonovu raspodelu, a da su prekoračenja međusobno nezavisna i eksponencijalno raspoređena. Međutim, iskustvo pokazuje da je u nekim slučajevima potrebno znatno podići baznu vrednost iznad one koja daje poasonovski broj prekoračenja da bi prekoračenja bila eksponencijalno raspoređena. Iz tog razloga, u istoriji razvoja modela parcijalnih serija bilo je dosta pokušaja u pronalaženju alternativnih raspodela za visinu prekoračenja. Tako su npr. Taesombut i Yevjevich (1978) koristili dvoparametarsku gama raspodelu. Rosbjerg (1987) je primenio dvoparametarsku log-normalnu raspodelu, dok je kasnije pažnja posvećena opštoj Pareto raspodeli (npr. Rosbjerg i sar., 1992). Vejbulova raspodela je korišćena u velikoj meri u radovima Vukmirovića (Vukmirović, 1995; Vukmirović i Petrović, 1997), dok je u svetskoj literaturi zabeležen mali broj radova sa primenom Vejbulove raspodele (npr. Ekanayake i Cruise, 1993).

Pri izboru raspodele za visinu prekoračenja svakako treba voditi računa o osobinama raspodele kao što su njena fleksibilnost, mogućnost eksplicitnog izražavanja inverzne funkcije raspodele, mogućnost stabilne i efikasne ocene parametara i robustnost raspodele sa gledišta uzoračkih svojstava (pristrasnosti i standardne greške) parametara.

U ovom poglavlju biće opisane tri raspodele: eksponencijalna, opšta Pareto i Vejbulova raspodela. Eksponencijalna raspodela je najjednostavnija raspodela čiji je jedini parametar jednak srednjoj vrednosti, pa kod nje metoda ocene parametra ne igra ulogu. Naravno, metoda ocene parametara igra značajnu ulogu u opisivanju preostale dve raspodele. Za ocenu parametara ovih raspodela najčešće se koriste metoda momenata i metoda težinskih momenata, pa su ove metode i obrađene. Pored njih, metoda maksimalne verodostojnosti se takođe često koristi, ali je određivanje grešaka u oceni parametara znatno složenije nego za prethodne dve metode zbog čega ova metoda nije obrađena.

Pre opisa pojedinih raspodela biće dati neki preliminarni rezultati za metodu momenata i metodu verovatnosnih težinskih momenata koji će biti korišćeni za opisivanje svojstava Vejbulove i opšte Pareto raspodele.

II.3.1 Ocena parametara raspodela metodom momenata

Metoda momenata podrazumeva ocenu r parametara neke raspodele na osnovu r momenata niza. Drugim rečima, r momenata neke teorijske raspodele se izjednačava sa prvih r empirijskih momenata uzorka. Na taj način, ocena bilo kog parametra (npr. \hat{c}_i) predstavlja funkciju prvih r empirijskih momenata, tj. $\hat{c}_i = g_i(m'_1, m'_2, \dots, m'_r)$. Za dvoparametarske raspodele koje se ovde obrađuju, ocene parametara su funkcije prva dva empirijska momenta niza prekoračenja, dakle srednje vrednosti \bar{x} i kvadrata standardne devijacije S^2 :

$$\hat{c}_i = g_i(\bar{x}, S^2), \quad i=1,2 \quad (21)$$

Koliko se ocene \hat{c}_i razlikuju od stvarnih parametara c_i , a shodno tome i koliko su to dobre ocene, opisuje se pomoću uzoračkih svojstava (pristrasnosti i standardne greške) ovih parametara. Standardni metod za određivanje pristrasnosti i standardne greške ocena parametara raspodela zasniva se na proračunu očekivanja i varijanse ovih ocena kao složene funkcije empirijskih momenata (21), uz pomoć razvoja ove funkcije u Tejlorov red (prilog B.1). Takvim postupkom očekivanje ocene parametra je jednako:

$$E[\hat{c}_i] = E[g_i(\bar{z}, S^2)] \approx \\ \approx g_i(\bar{z}, S^2) \Big|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[\bar{z}] \frac{\partial^2 g_i}{\partial \bar{z}^2} \Big|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[S^2] \frac{\partial^2 g_i}{\partial (S^2)^2} \Big|_{\mu} + \text{cov}[\bar{z}, S^2] \frac{\partial^2 g_i}{\partial \bar{z} \partial S^2} \Big|_{\mu}, \quad i = 1, 2$$

gde oznaka $|_{\mu}$ znači da se funkcije g_i i njihovi parcijalni izvodi određuju u tački $(E[\bar{z}], E[S^2])$. Na sličan način određuju se varijanse ocena parametara:

$$\text{var}[\hat{c}_i] = \text{var}[g_i(\bar{z}, S^2)] \approx \\ \approx \text{var}[\bar{z}] \left(\frac{\partial g_i}{\partial \bar{z}} \right)^2 \Big|_{\mu} + \text{var}[S^2] \left(\frac{\partial g_i}{\partial S^2} \right)^2 \Big|_{\mu} + 2 \text{cov}[\bar{z}, S^2] \left(\frac{\partial g_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial g_i}{\partial S^2} \right) \Big|_{\mu}, \quad i = 1, 2$$

dok je kovarijansa ocena dva parametra:

$$\text{cov}[\hat{c}_1, \hat{c}_2] = \text{cov}[g_1(\bar{z}, S^2), g_2(\bar{z}, S^2)] \approx \text{var}[\bar{z}] \left(\frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial g_2}{\partial \bar{z}} \right) \Big|_{\mu} + \text{var}[S^2] \left(\frac{\partial g_1}{\partial S^2} \frac{\partial g_2}{\partial S^2} \right) \Big|_{\mu} + \\ + \text{cov}[\bar{z}, S^2] \left(\frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial g_2}{\partial S^2} + \frac{\partial g_2}{\partial \bar{z}} \frac{\partial g_1}{\partial S^2} \right) \Big|_{\mu}$$

Uzoračka srednja vrednost i standardna devijacija su nepristrasne ocene prva dva momenta teorijske raspodele:

$$E[\bar{z}] = E[Z] = \mu_Z, \quad E[S^2] = D[Z] = \mu_{2Z}$$

dok su njihove varijanse i kovarijansa:

$$\text{var}[\bar{z}] = \frac{1}{n} \mu_{2Z}, \quad \text{var}[S^2] \approx \frac{1}{n} (\mu_{4Z} - \mu_{2Z}^2), \quad \text{cov}[\bar{z}, S^2] = \frac{1}{n} \mu_{3Z}$$

gde su μ_{iZ} momenti oko sredine i -tog reda teorijske raspodele prekoračenja Z , a n dužina niza prekoračenja.

II.3.2 Ocena parametara raspodela metodom verovatnosnih težinskih momenata

Definicija verovatnosnih težinskih momenata i njihova ocena iz uzorka. Verovatnosni težinski momenti (engl. *probability weighted moments*, PWM) slučajne promenljive X sa funkcijom raspodele $F(x)$ definišu se kao:

$$M_{pqr} = E[X^p \{F(X)\}^q \{1 - F(X)\}^r] = \int_0^1 [x(F)]^p F^q (1 - F)^r dF$$

gde p , q i r mogu biti ne samo celi, već i realni brojevi (Greenwood i sar., 1979). U daljem tekstu ove momente ćemo skraćeno nazivati težinskim momentima. Ovi momenti su primenljivi na raspodele sa eksplicitno izraženom funkcijom raspodele, odnosno na one koje imaju inverzni oblik $x(F)$. Za $q = r = 0$ težinski momenti postaju obični momenti oko koordinatnog početka. U praksi se najviše koriste težinski momenti M_{10r} i M_{1q0} , koji se u literaturi često označavaju kao α_r i β_q :

$$M_{10r} = \alpha_r = E[X(1 - F)^r], \quad M_{1q0} = \beta_q = E[X F^q]$$

Ovi težinski momenti se evidentno mogu izraziti jedni preko drugih kao linearne kombinacije:

$$M_{10r} = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j M_{1j0}, \quad M_{1q0} = \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} (-1)^j M_{10j} \quad (22)$$

Oni se mogu oceniti iz uzorka dužine n na sledeći način (Landwehr i sar., 1979):

$$\hat{M}_{10r} = a_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-r} \frac{(n-i)(n-i-1)\dots(n-i-r+1)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} x_{(i)}$$

$$\hat{M}_{1r0} = b_r = \frac{1}{n} \sum_{i=r+1}^n \frac{(i-1)(i-2)\dots(i-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} x_{(i)}$$

gde su $x_{(i)}$ su članovi uzorka uređenog u rastući redosled. Težinski momenti se mogu oceniti i pomoću:

$$\tilde{M}_{10r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1-p_i)^r x_{(i)}, \quad \tilde{M}_{1r0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^r x_{(i)}$$

gde je p_i neki oblik kompromisne verovatnoće. Landwehr i sar. (1979) preporučuju oblik $p_i = (i - 0.35)/n$, dok Hosking i sar. (1985) preporučuju oblik $p_i = (i - a)/(n + 1 - 2a)$ sa $-0.5 \leq a \leq 0.5$. Prema Hoskingu i sar. (1985), empirijski momenti \hat{M}_{10r} i \tilde{M}_{10r} , odnosno \hat{M}_{1r0} i \tilde{M}_{1r0} , asimptotski su ekvivalentni.

Može se pokazati da za empirijske težinske momente a_r i b_r takođe važi da se mogu izraziti jedni preko drugih kao linearne kombinacije, analogno izrazu (22):

$$a_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j b_j, \quad b_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j a_j$$

Za ocenu dvoparametarskih raspodela dovoljna su prva dva težinska momenta, tj. α_0 i α_1 , odnosno β_0 i β_1 , čije su ocene iz uzorka:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{(i)} = \bar{x}, \quad a_1 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)x_{(i)}$$

odnosno

$$b_0 = a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{(i)} = \bar{x}, \quad b_1 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=2}^n (i-1)x_{(i)}$$

Kako između dve vrste težinskih momenata važe odnosi $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_0 - \beta_1$, $\beta_1 = \alpha_0 - \alpha_1$, a isti odnosi važe i između empirijskih momenata, tj. $a_0 = b_0$, $a_1 = b_0 - b_1$, $b_1 = a_0 - a_1$, može se pokazati da se korišćenjem a_0 i a_1 s jedne strane, ili b_0 i b_1 s druge strane, dobijaju iste ocene parametara dvoparametarskih raspodela. Drugim rečima, opredeljivanje za rad sa jednom ili drugom vrstom težinskih momenata nema uticaja na ocenu parametara raspodele, pa se izbor vrste težinskih momenata za neku raspodelu vrši na osnovu toga koji se momenti lakše računaju. Za Vejbulovu i opštu Pareto raspodelu u ovom radu su korišćeni težinski momenti tipa α_r , jer imaju jednostavnije izraze u odnosu na momente tipa β_r .

Domeni primene teorijskih raspodela sa gledišta metode težinskih momenata. Poznato je da se izbor pogodne teorijske raspodele za neki uzorak zasniva, između ostalog, i na poređenju teorijskih i uzoračkih koeficijenta varijacije i asimetrije kada se parametri ocenjuju pomoću metode običnih momenata (konkretno, posmatra se zavisnost odnosa C_s/C_v , od C_v za datu teorijsku raspodelu). Kada je u pitanju metoda težinskih momenata, u literaturi je uobičajeno da se pri izboru teorijske raspodele koriste bezdimenzionalni L-momenti. L-momenti se definišu kao linearna kombinacija očekivanja statistika poretka, odnosno članova niza uređenih po rastućem redosledu (Hosking, 1990):

$$L_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E[X_{r-k:r}]$$

gde je $X_{i:r}$ i -ta statistika poretka iz slučajnog uzorka dužine r uzetog iz populacije slučajne promenljive X sa funkcijom raspodele $F(x)$. Kako je očekivanje statistike poretka jednako:

$$E[X_{i:r}] = \frac{r!}{(i-1)!(r-i)!} \int_{-\infty}^{\infty} x [F(x)]^{i-1} [1-F(x)]^{r-i} f(x) dx$$

kombinovanjem prethodna dva izraza Hosking (1990) dobija sledeći izraz za L-momente:

$$L_r = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-1-k} \binom{r-1}{k} \binom{r-1+k}{k} \int_0^1 x(F) F^k dF = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-1-k} \binom{r-1}{k} \binom{r-1+k}{k} M_{1k0}$$

Iz ovog izraza se može videti da L-momenti predstavljaju i linearnu kombinaciju težinskih momenata $M_{10k} = \beta_k$, a time i odgovarajućih težinskih momenata $M_{1k0} = \alpha_k$. Prva četiri L-momenta se tada mogu izraziti kao:

$$L_1 = EX = \alpha_0 = \beta_0$$

$$L_2 = \frac{1}{2} E[X_{2:2} - X_{1:2}] = \alpha_0 - 2\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_0$$

$$L_3 = \frac{1}{3} E[X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3}] = \alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0$$

$$L_4 = \frac{1}{4} E[X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}] = \alpha_0 - 12\alpha_1 + 30\alpha_2 - 20\alpha_3 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0$$

Smatra se da se L-momenti direktno mogu interpretirati kao mere lokacije, varijacije ili oblika neke raspodele verovatnoće. Prvi L-momenat, L_1 , evidentno je mera lokacije kao očekivanje promenljive X . Momenat L_2 , koji opisuje razlike (rastojanja) između uzastopnih vrednosti u rastućem nizu, može se shvatiti kao mera disperzije raspodele s obzirom da će L_2 biti manje ako su uzastopne vrednosti bliže i obrnuto. Momenat L_3 praktično predstavlja razliku drugog reda uzastopnih vrednosti u rastućem nizu (razliku rastojanja); sa povećavanjem rastojanja između vrednosti, razlike između rastojanja su pozitivne što ukazuje na pozitivnu asimetriju, i obrnuto, pa se L_3 može shvatiti kao mera asimetrije raspodele. Analogno objašnjenje je moguće i za L_4 , kao za meru zakrivljenosti raspodele.

Bezdimenzionalni L-momenti koji takođe predstavljaju meru varijacije, asimetrije i zakrivljenosti i koji su pandan koeficijentima varijacije, asimetrije i zakrivljenosti kod običnih momenata, jednaki su:

$$LC_v = \tau_2 = \frac{L_2}{L_1}, \quad LC_s = \tau_3 = \frac{L_3}{L_2}, \quad LC_k = \tau_4 = \frac{L_4}{L_2}$$

Bezdimenzionalni L-momenti su ograničeni; kod raspodela sa konačnim srednjim vrednostima je $|LC_s| < 1$ i $|LC_k| < 1$, dok je kod raspodela pozitivnih promenljivih ($X > 0$) i $LC_v < 1$. Iako je u literaturi uobičajeno je da se pri izboru teorijske raspodele posmatra zavisnost LC_k od LC_s , ovde će se posmatrati zavisnost LC_s i LC_v s obzirom da se koriste samo dvoparametarske raspodele.

Svojstva empirijskih težinskih momenata. Statistike a_r i b_r su nepristrasne ocene momenata α_r i β_r (Landwehr i sar., 1979):

$$E[a_r] = \alpha_r, \quad E[b_r] = \beta_r \quad (23)$$

U opštem slučaju, empirijski težinski momenti a_r i b_r , kao linearne kombinacije statistika poretka (članova niza uređenih po rastućem redosledu), asimptotski prate normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću α_r odnosno β_r i kovarijansnom matricom čiji su elementi (Hosking i sar., 1985; Heo i sar., 2001):

$$\begin{aligned} \text{cov}[a_r, a_s] &= \frac{1}{n} \cdot \frac{v_{rs} + v_{sr}}{2} \quad \text{i} \quad \text{var}[a_r] = \frac{1}{n} \cdot v_{rr} \\ \text{cov}[b_r, b_s] &= \frac{1}{n} \cdot \frac{w_{rs} + w_{sr}}{2} \quad \text{i} \quad \text{var}[b_r] = \frac{1}{n} \cdot w_{rr} \end{aligned} \quad (24)$$

gde su:

$$\begin{aligned} v_{rs} &= 2 \iint_{x < y} [1 - F(x)]^r [1 - F(y)]^s F(x)[1 - F(y)] dx dy \\ w_{rs} &= 2 \iint_{x < y} [F(x)]^r [F(y)]^s F(x)[1 - F(y)] dx dy \end{aligned} \quad (25)$$

Ako se napiše:

$$A_{rs} = 2 \iint_{x < y} [1 - F(x)]^r [1 - F(y)]^s dx dy, \quad B_{rs} = 2 \iint_{x < y} [F(x)]^r [F(y)]^s dx dy$$

tada su:

$$v_{rs} = A_{r,s+1} - A_{r+1,s+1}, \quad w_{rs} = B_{r+1,s} - B_{r+1,s+1}$$

što znači da je za određivanje varijansi i kovarijansi empirijskih težinskih momenata dovoljno odrediti integrale oblika A_{rs} i B_{rs} .

Svojstva parametara raspodela ocenjenih pomoću težinskih momenata. Kao što je već rečeno, za Vejbulovu i opštu Pareto raspodelu u ovom radu su korišćeni težinski momenti tipa α_r , jer imaju jednostavnije izraze u odnosu na momente tipa β_r , pa će u daljem tekstu samo oni biti razmatrani.

Ocena bilo kog parametra razmatranih dvoparametarskih raspodela (npr. \hat{c}_i) pomoću težinskih momenata predstavlja funkciju nultog i prvog empirijskog težinskog momenta, tj.:

$$\hat{c}_i = g_i(a_0, a_1), \quad i = 1, 2 \quad (26)$$

Kao u metodi običnih momenata, i ovde se svojstva ocena parametara raspodela određuju uz pomoć razvoja funkcije (26) u Tejlorov red (prilog B.1). Na taj način očekivanje ocene parametra se dobija kao:

$$\begin{aligned} E[\hat{c}_i] &= E[g_i(a_0, a_1)] \approx \\ &\approx g_i(a_0, a_1)|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[a_0] \left. \frac{\partial^2 g_i}{\partial a_0^2} \right|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[a_1] \left. \frac{\partial^2 g_i}{\partial a_1^2} \right|_{\mu} + \text{cov}[a_0, a_1] \left. \frac{\partial^2 g_i}{\partial a_0 \partial a_1} \right|_{\mu}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

gde oznaka $|_{\mu}$ znači da se funkcije g_i i njihovi parcijalni izvodi određuju u tački $(E[a_0], E[a_1])$. Na sličan način određuju se varijanse ocena parametara:

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{c}_i] &= \text{var}[g_i(a_0, a_1)] \approx \\ &\approx \text{var}[a_0] \left. \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_0} \right)^2 \right|_{\mu} + \text{var}[a_1] \left. \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_1} \right)^2 \right|_{\mu} + 2 \text{cov}[a_0, a_1] \left. \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_0} \frac{\partial g_i}{\partial a_1} \right) \right|_{\mu}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

dok je kovarijansa ocena dva parametra:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{c}_1, \hat{c}_2] &= \text{cov}[g_1(a_0, a_1), g_2(a_0, a_1)] \approx \text{var}[a_0] \left. \left(\frac{\partial g_1}{\partial a_0} \frac{\partial g_2}{\partial a_0} \right) \right|_{\mu} + \text{var}[a_1] \left. \left(\frac{\partial g_1}{\partial a_1} \frac{\partial g_2}{\partial a_1} \right) \right|_{\mu} + \\ &+ \text{cov}[a_0, a_1] \left. \left(\frac{\partial g_1}{\partial a_0} \frac{\partial g_2}{\partial a_1} + \frac{\partial g_2}{\partial a_0} \frac{\partial g_1}{\partial a_1} \right) \right|_{\mu} \end{aligned}$$

Očekivanja, varijanse i kovarijansa prva dva empirijska težinska momenta su, prema (23) i (24), jednaki:

$$E[a_0] = \alpha_0 = M_{100}, \quad E[a_1] = \alpha_1 = M_{101},$$

$$\text{var}[a_0] = \frac{1}{n} v_{00}, \quad \text{var}[a_1] \approx \frac{1}{n} v_{11}, \quad \text{cov}[a_0, a_1] \approx \frac{1}{2n} (v_{01} + v_{10})$$

gde su v_{rs} definisani jednačinom (25), a n je dužina niza prekoračenja.

II.3.3 Eksponecijalna raspodela za visinu prekoračenja

Eksponecijalna raspodela je najčešće korišćena raspodela verovatnoće za visinu prekoračenja Z u parcijalnim serijama. Funkcija eksponecijalne raspodele glasi:

$$H(z) = P\{Z \leq z\} = 1 - \exp\{-z/\beta\}, \quad z > 0$$

gde je β parametar eksponecijalne raspodele ($\beta > 0$) koji je jednak srednjoj vrednosti promenljive Z . Gustina eksponecijalne raspodele prikazana je na slici 9. Očekivanje i disperzija eksponecijalno raspoređene promenljive Z jednaki su:

$$E[Z] = \beta, \quad D[Z] = \beta^2$$

dok su koeficijent varijacije i asimetrije za ovu raspodelu su fiksirane vrednosti:

$$C_v = 1, \quad C_s = 2$$

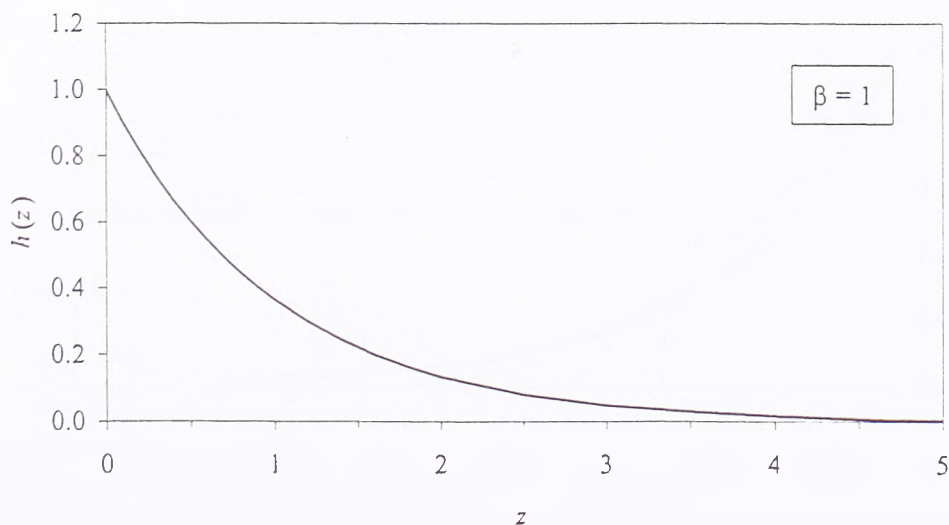
Težinski momenti za eksponecijalnu raspodelu su jednaki:

$$\alpha_r = \frac{\beta}{(r+1)^2}$$

dok su bezdimenzionalni L-momenti konstante:

$$LC_v = \tau_2 = \frac{1}{2}, \quad LC_s = \tau_3 = \frac{1}{3}$$

Međutim, kako eksponecijalna raspodela ima samo jedan parametar, kod nje izbor metode ne igra ulogu jer se parametar β određuje na osnovu prvog momenta koji u oba slučaja predstavlja srednju vrednost. Dakle, parametar β se ocenjuje pomoću srednje vrednosti niza prekoračenja:



Slika 9. Gustina eksponecijalne raspodele za parametar razmere $\beta = 1$.

$$\hat{\beta} = \bar{z} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Z_i$$

gde je M ukupan broj prekoračenja tokom N godina. Ocena parametra β ima očekivanje i varijansu:

$$E[\hat{\beta}] = E[\bar{z}] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E[Z_i] = E[Z] = \beta$$

$$D[\hat{\beta}] = D[\bar{z}] = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M D[Z_i] = \frac{D[Z]}{M} = \frac{\beta^2}{M}$$

II.3.4 Opšta Pareto raspodela za visinu prekoračenja

Funkcija opšte Pareto (GP) raspodele, sa parametrom razmere b i parametrom oblika k glasi:

$$H(z) = 1 - \left(1 - k \frac{z}{b}\right)^{1/k}, \quad k \neq 0$$

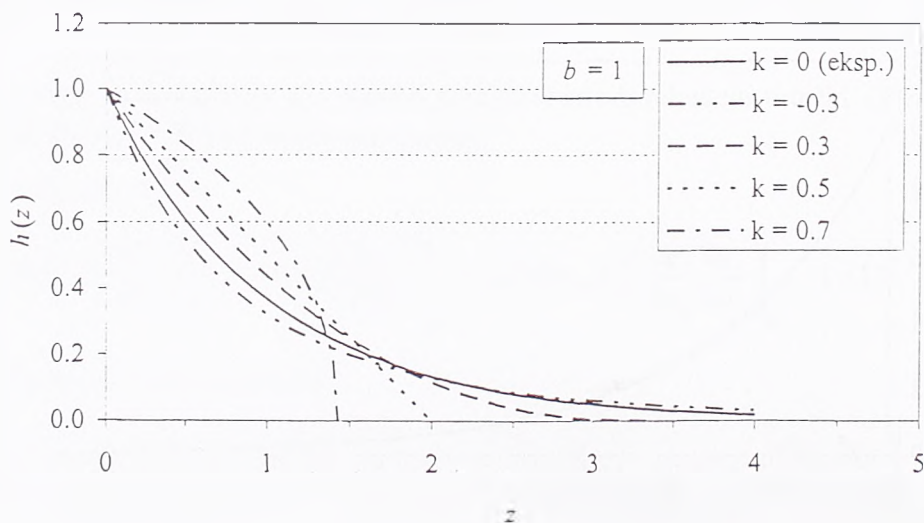
$$H(z) = 1 - e^{-z/b}, \quad k = 0$$

dok funkcija gustine GP raspodele glasi:

$$h(z) = \frac{1}{b} \left(1 - k \frac{z}{b}\right)^{1/k-1}, \quad k \neq 0$$

$$h(z) = \frac{1}{b} e^{-z/b}, \quad k = 0$$

Za $k = 0$ opšta Pareto raspodela se svodi na eksponencijalnu, dok je za $k < 0$ to obična Pareto raspodela (poznata i kao Pareto raspodela II vrste, prema Johnsonu i sar., 1994). Parametar b je uvek pozitivan. U poređenju sa eksponencijalnom raspodelom, GP raspodela za $k < 0$ ima duži gornji kraj i nije ograničena sa gornje strane ($0 \leq z < \infty$), dok je za $k > 0$ ograničena sa gornje strane ($0 \leq z \leq b/k$). Za $k = 0.5$ GP raspodela postaje trougaona raspodela, za $k > 0.5$ gustina verovatnoće je veoma izražena u blizini gornje granice, a za $k = 1$ se dobija uniformna raspodela. Na slici 10 prikazani su neki oblici GP raspodele. U praktičnim proračunima najinteresantniji opseg parametra k je između -0.5 i 0.5 , dakle u "okolini" eksponencijalne raspodele.



Slika 10. Funkcija gustine opšte Pareto raspodele za različite vrednosti parametra oblika k i za parametar razmere $b = 1$.

Opštu Pareto raspodelu u analizi prekoračenja koristili su razni autori (Van Montfort i Witter 1986; Fitzgerald, 1989; Davison i Smith, 1990; Wang, 1991; Rosbjerg i sar., 1992; Birikundavyi i Rousselle, 1997). Postoji više motiva za bavljenje ovom raspodelom. Pre svega, kako GP raspodela obuhvata i eksponencijalnu raspodelu kao specijalan slučaj, njeno uvođenje se objašnjava kao logično uopštavanje. Parametar oblika k GP raspodele omogućava bolje prilagođavanje gornjeg kraja raspodele u odnosu na jednoparametarsku eksponencijalnu raspodelu. Van Montfort i Witter (1985) su predložili dve test-statistike za testiranje eksperimentalnih podataka i donošenje odluke o tipu raspodele (eksponencijalna ili GP). Pored toga, kombinacija Poasonove i GP raspodele u modelu parcijalnih serija daje opštu raspodelu ekstremnih vrednosti (poznata i kao Dženkinsonova raspodela i kao GEV raspodela).

Drugi razlog za bavljenje ovom raspodelom je taj što je primećeno da je potrebno dosta podići prag u izboru prekoračenja da bi se ispunila pretpostavka o eksponencijalnoj raspodeli prekoračenja. Pogodnost GP raspodele je u tome što ona ima stabilnost pri promeni praga; drugim rečima, ako su prekoračenja Z iznad praga x_0 raspoređena po GP raspodeli sa parametrima k i b , onda su prekoračenja Z' iznad nekog praga $x_0 + h$, $h > 0$, raspoređena po GP raspodeli sa istim parametrom oblika k i parametrom razmere $b' = b - kh$ (Fitzgerald, 1989; Wang, 1991). Ako se posmatra osnovna baza x_0 , srednja vrednost prekoračenja je:

$$E[Z] = \frac{b}{k+1}$$

a ako se posmatra nova baza $x_0 + h$, srednja vrednost prekoračenja je:

$$E[Z'] = \frac{b'}{k+1} = \frac{b - kh}{k+1} = E[Z] \cdot \left(1 - \frac{kh}{k+1}\right)$$

odakle se vidi da je srednja vrednost prekoračenja u linearnoj zavisnosti od h . Davison i Smith (1990) predlažu da se nacrtava zavisnost srednje vrednosti prekoračenja u zavisnosti od baze i da se na takvom grafiku uoči deo sa linearnom zavisnošću. Ovakav postupak omogućava izbor najniže pogodne baze od koje se može smatrati da prekoračenja prate GP raspodelu.

Momenti reda r oko koordinatnog početka za GP raspodelu su:

$$\mu_r' = \frac{b^r r!}{(k+1)(2k+1)\dots(rk+1)}$$

pa se vidi da oni postoje samo ako je $k > -1/r$, dok za $k \leq -1/r$ nisu definisani. Očekivanje i varijansa opšte Pareto raspodele su:

$$\begin{aligned} E[Z] &= \frac{b}{k+1}, & k > -1 \\ D[Z] &= \frac{b^2}{(k+1)^2(2k+1)}, & k > -1/2 \end{aligned} \tag{27}$$

dok su koeficijent varijacije, koeficijent asimetrije i njihov odnos:

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{1}{\sqrt{2k+1}}, & k > -1/2 \\ C_s &= \frac{2(1-k)(2k+1)^{1/2}}{3k+1}, & k > -1/3 \\ \frac{C_s}{C_v} &= \frac{2(1-k)(2k+1)}{3k+1}, & k > -1/3 \end{aligned}$$

Na slici 11 prikazani su koeficijent varijacije i koeficijent asimetrije u zavisnosti od parametra k , kao i odnos C_s/C_v . Sa ove slike se može videti da vrednostima parametra k između -0.4 i 0.5 odgovara koeficijent varijacije u granicama od 0.7 do 2 , dok je za $k > 0.5$ koeficijent varijacije manji od 0.7 , što ukazuje da ova raspodela ne bi bila pogodna za vodotoke sa manjim koeficijentom varijacije. S druge strane, koeficijent asimetrije teži beskonačnosti kada $k \rightarrow -1/3$, dok za $k < -0.1$ dobija velike vrednosti. Iz ovoga se može zaključiti da u primeni GP raspodele za analizu prekoračenja treba biti oprezan, jer u domenu negativnog parametra k koeficijent asimetrije postaje veliki, dok je u domenu pozitivnog parametra k raspodela ograničena sa gornje strane.

Težinski momenti α_r za GP raspodelu su jednaki (prilog A):

$$\alpha_r = E[X(1-F)^r] = \frac{b}{(r+1)(k+r+1)} \quad (28)$$

i oni su definisani za $k > -1$. Bezdimenzionalni L-momenti za GP raspodelu tada glase:

$$LC_v = \tau_2 = \frac{1}{k+2}, \quad LC_s = \tau_3 = \frac{1-k}{k+3}$$

pri čemu je:

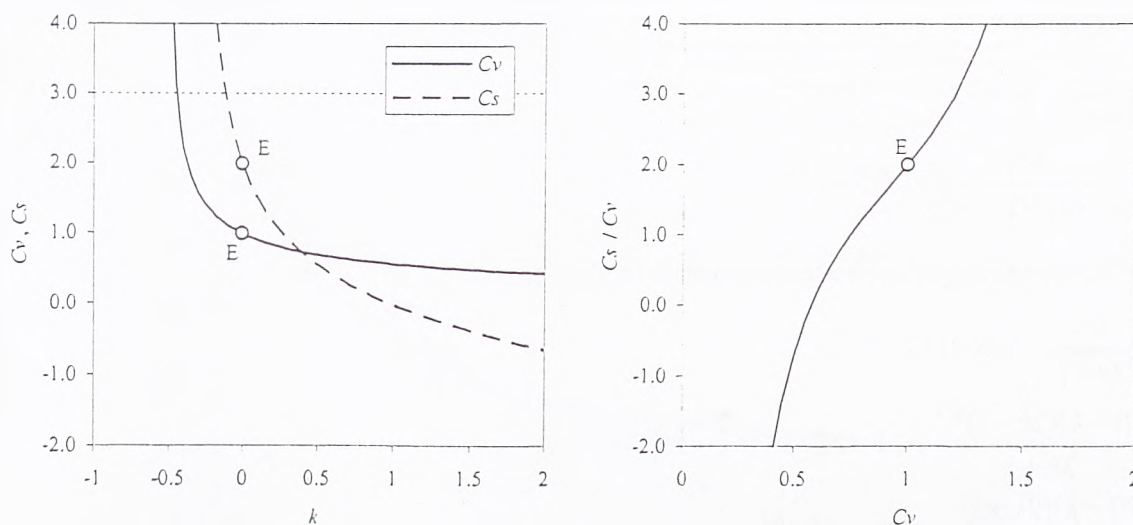
$$0 < LC_v < 1, \quad -1 < LC_s < 1$$

Na slici 12 prikazani su ovi bezdimenzionalni momenti u zavisnosti od parametra k , kao i zavisnost LC_s od LC_v , koja će se koristiti pri proveru pogodnosti teorijskih raspodela za određeni empirijski niz.

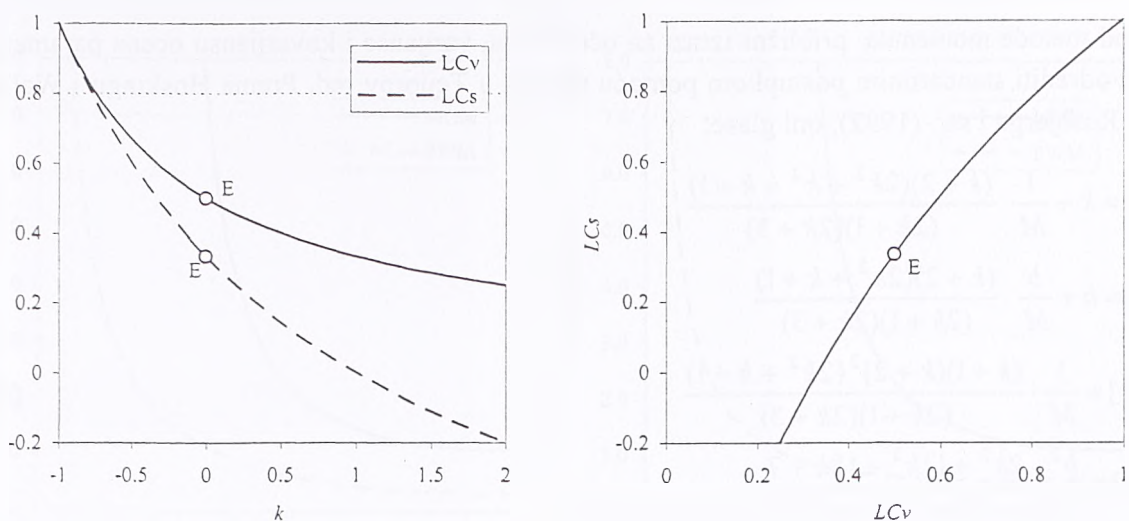
Ocena parametara opšte Pareto raspodele metodom momenata. Zamenjujući prvi i drugi moment srednjom vrednošću i standardnom devijacijom niza prekoračenja u izrazima (27), za ocenu parametara opšte Pareto raspodele se dobija:

$$\hat{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{x}^2}{S^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hat{C}_v^2} - 1 \right)$$

$$\hat{b} = \bar{x}(\hat{k} + 1) = \frac{\bar{x}}{2} \left(\frac{\bar{x}^2}{S^2} - 1 \right)$$



Slika 11. Zavisnost koeficijenta varijacije i asimetrije od parametra k (levo) i zavisnost odnosa C_s/C_v od C_v (desno); "E" označava vrednosti za eksponencijalnu raspodelu.



Slika 12. Zavisnost bezdimenzionalnih L-momenata od parametra k (levo) i zavisnost L-asimetrije od L-varijacije (desno); "E" označava vrednosti za eksponencijalnu raspodelu.

Približni izrazi za očekivanja, varijanse i kovarijansu ocena parametara mogu se odrediti standardnim postupkom pomoću razvoja u Tejlorov red. Oni glase (Hosking i Wallis, 1987; Rosbjerg i sar., 1992):

$$\begin{aligned}
 E[\hat{k}] &= k + \frac{1}{M} \cdot \frac{24k^4 + 20k^3 + 8k^2 + 11k + 5}{2(3k+1)(4k+1)} \\
 E[\hat{b}] &= b + \frac{b}{M} \cdot \frac{24k^4 + 36k^3 + 28k^2 + 15k + 5}{2(k+1)(3k+1)(4k+1)} \\
 \text{var}[\hat{k}] &= \frac{1}{M} \cdot \frac{(k+1)^2(2k+1)(6k^2+k+1)}{(3k+1)(4k+1)} \\
 \text{var}[\hat{b}] &= \frac{b^2}{M} \cdot \frac{2(k+1)^2(12k^2+6k+1)}{(2k+1)(3k+1)(4k+1)} \\
 \text{cov}[\hat{k}, \hat{b}] &= \frac{b}{M} \cdot \frac{(k+1)^2(12k^2+4k+1)}{(3k+1)(4k+1)}
 \end{aligned} \tag{29}$$

Gornji izrazi važe za $k > -1/4$, s obzirom da varijansa uzoračke disperzije S^2 zavisi od četvrtog centralnog momenta koji ne postoji za $k \leq -1/4$.

Ocena parametara opšte Pareto raspodele metodom težinskih momenata. Za ocenu parametara opšte Pareto raspodele preporučuje se da se koriste težinski momenti oblika α_r , jer imaju jednostavniji oblik od momenata β_r . Prema opštem izrazu (28), prva dva težinska momenta GP raspodele su jednaka:

$$\alpha_0 = \frac{b}{k+1}, \quad \alpha_1 = \frac{b}{2(k+2)}$$

pri čemu je $k > -1$. Stavljanjem empirijskih težinskih momenata u gornje izraze slede ocene parametara opšte Pareto raspodele:

$$\begin{aligned}
 \hat{k} &= \frac{2a_1}{a_0 - 2a_1} - 1 \\
 \hat{b} &= a_0(\hat{k} + 1) = \frac{2a_0a_1}{a_0 - 2a_1}
 \end{aligned}$$

Kao i kod metode momenata, približni izrazi za očekivanja, varijanse i kovarijansu ocena parametara mogu se odrediti standardnim postupkom pomoću razvoja u Tejlorov red. Prema Hoskingu i Wallisu (1987) i Rosbjergu i sar. (1992), oni glase:

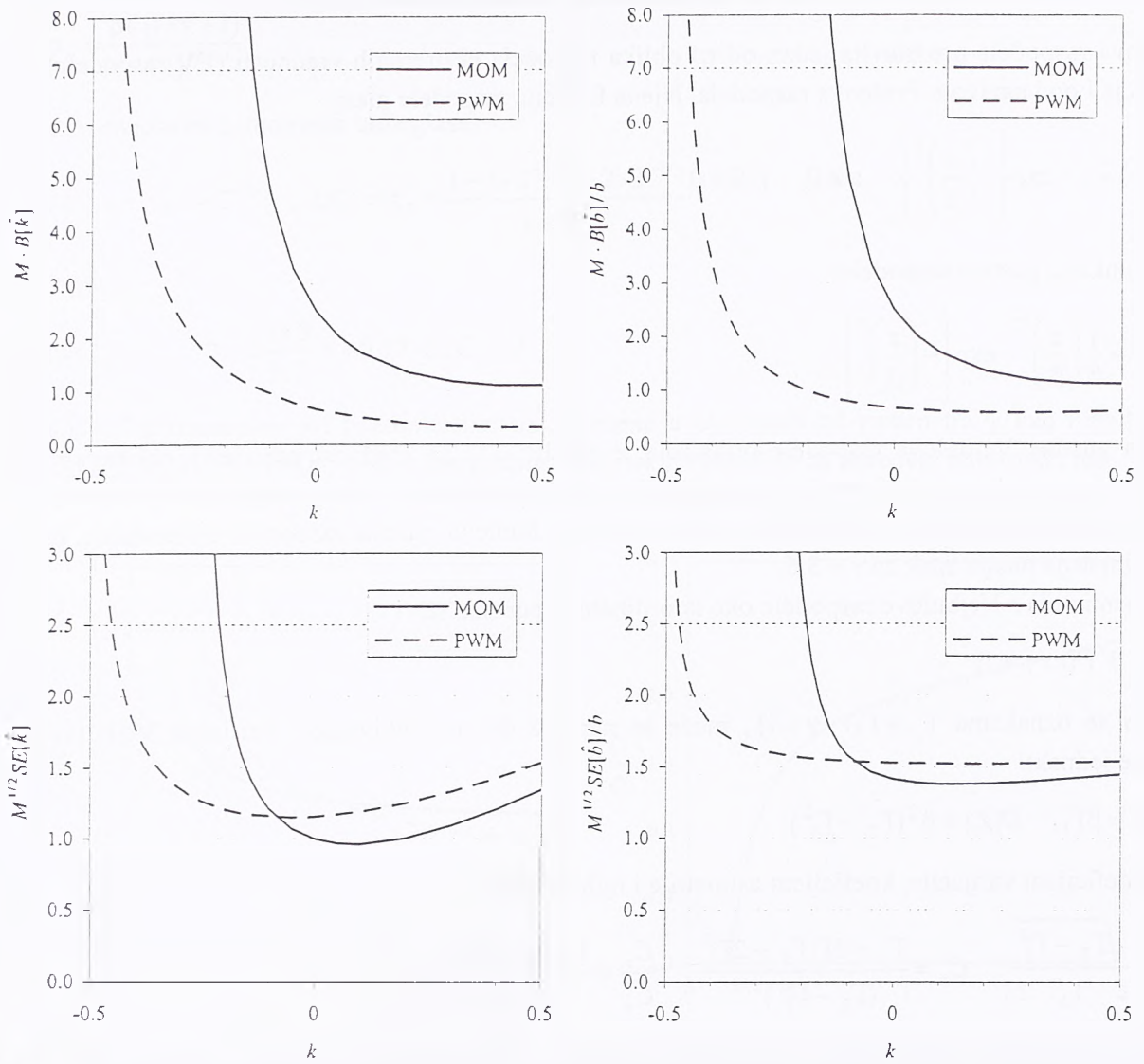
$$\begin{aligned}
 E[\hat{k}] &= k + \frac{1}{M} \cdot \frac{(k+2)(2k^3 + k^2 - k + 1)}{(2k+1)(2k+3)} \\
 E[\hat{b}] &= b + \frac{b}{M} \cdot \frac{(k+2)(2k^2 + k + 1)}{(2k+1)(2k+3)} \\
 \text{var}[\hat{k}] &= \frac{1}{M} \cdot \frac{(k+1)(k+2)^2(2k^2 + k + 1)}{(2k+1)(2k+3)} \\
 \text{var}[\hat{b}] &= \frac{b^2}{M} \cdot \frac{2k^3 + 11k^2 + 18k + 7}{(2k+1)(2k+3)} \\
 \text{cov}[\hat{k}, \hat{b}] &= \frac{b}{M} \cdot \frac{(k+2)(2k^3 + 7k^2 + 6k + 2)}{(2k+1)(2k+3)}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Svojstva ocena parametara opšte Pareto raspodele. Poređenje dve metode ocene parametara je prikazano na slici 13 na osnovu svojstava parametara prema jednačinama (29) i (30). Na dijagramima su, u zavisnosti od vrednosti parametra k , prikazane veličine:

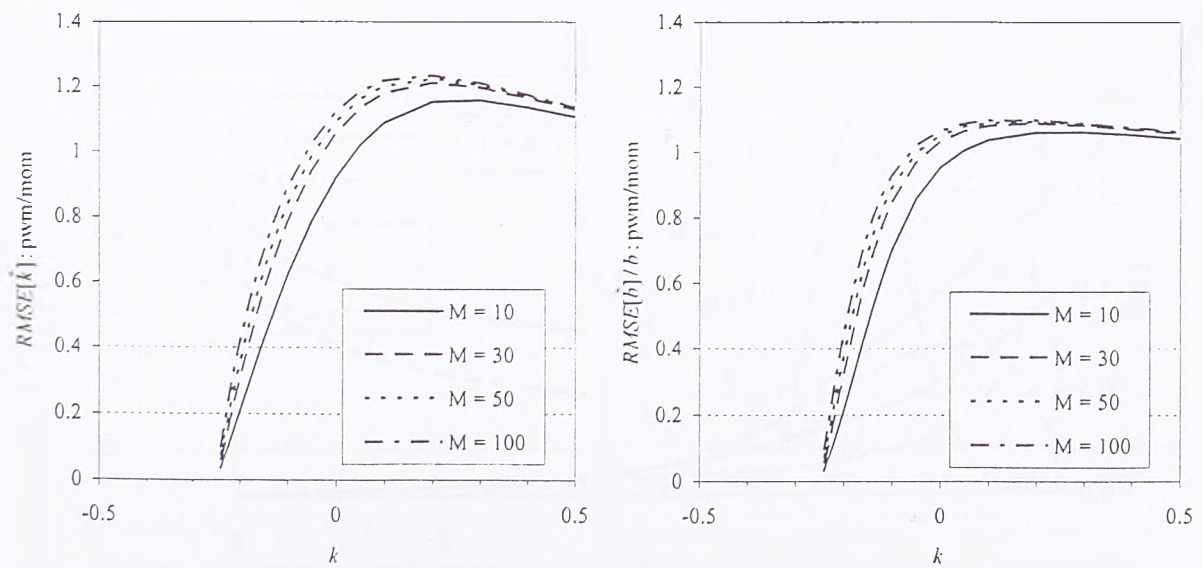
$$\begin{aligned}
 M(E[\hat{k}] - k) &= M B[\hat{k}], & M \frac{E[\hat{b}] - b}{b} &= M \frac{B[\hat{b}]}{b} \\
 \left(M \text{var}[\hat{k}] \right)^{1/2} &= M^{1/2} SE[\hat{k}], & \left(M \frac{\text{var}[\hat{b}]}{b^2} \right)^{1/2} &= M^{1/2} \frac{SE[\hat{b}]}{b}
 \end{aligned}$$

Ove veličine predstavljaju pristrasnost i standardnu grešku ocena parametara, pomnožene sa dužinom uzorka M , odnosno $M^{1/2}$, da bi se eliminisao uticaj dužine uzorka. Sa slike 13 se može videti da metoda težinskih momenata ima prednost sa gledišta pristrasnosti ocena parametara; sa gledišta standardne greške, metoda momenata ima prednost za $k > -0.1$. S obzirom da očekivanja i varijanse ocena parametara po metodi momenata ne postoje za $k < -0.25$, u tom domenu ne može se ništa reći o prednosti neke metode. Na slici 14 prikazan je odnos korena srednje kvadratne greške $RMSE = (B^2 + SE^2)^{1/2}$ ocena parametara dvema metodama, tj. količnik $RMSE_{\text{pwm}}/RMSE_{\text{mom}}$. Kada je ovaj odnos veći od 1, prednost ima metoda momenata, dok u suprotnom prednost ima metoda težinskih momenata. I ovi dijagrami upućuju na zaključak da metoda momenata ima prednost za vrednosti $k > 0$, dok metoda težinskih momenata ima prednost za $k < -0.1$; u domenu $-0.1 < k < 0$, dve metode daju skoro istu $RMSE$, mada bi metoda težinskih momenata mogla da ima prednost zbog manje pristrasnosti.

S obzirom da očekivanja i varijanse ocena parametara GP raspodele predstavljaju asimptotska svojstva, postavlja se pitanje koliko su ona primenljiva za manje dužine nizova. Nekoliko autora (Hosking i Wallis, 1987; Rosbjerg i sar., 1992; Moharram, 1997) ispitalo je ponašanje ocena parametara uz pomoć Monte Karlo eksperimenata. Njihovi zaključci su veoma slični, a to je da asimptotski izrazi po metodi momenata (jednačine 29) daju dobre aproksimacije za sve dužine uzoraka kada je $k > -0.1$ i samo za velike dužine uzoraka kada je $-0.25 < k < -0.1$, dok su neupotrebljivi kada je $k < -0.25$. Razlog zbog kojeg ovi aproksimativni izrazi ne daju dobre rezultate pri negativnim vrednostima parametra k je u tome što koeficijent zakrivljenosti (koji figuriše u varijansi uzoračke standardne devijacije) teži beskonačnosti kada $k \rightarrow -0.25$. Za asimptotske izraze po metodi težinskih momenata (jednačine 30), pomenuti autori su zaključili da su dobri za sve dužine uzorka kada je $k > -0.4$, a da daju lošije rezultate za manje dužine uzorka kada $k \rightarrow -0.5$ (kada varijansa empirijskog težinskog momenta a_0 teži beskonačnosti).



Slika 13. Svojstva ocena parametara opšte Pareto raspodele metodom momentata (MOM) i metodom težinskih momentata (PWM).



Slika 14. Odnos $RMSE$ ocena parametara GP raspodele metodama običnih i težinskih momentata za različite dužine nizova prekoračenja M .

II.3.5 Dvoparameterska Vejbulova raspodela za visinu prekoračenja

Vejbulova raspodela predstavlja jedan od tri oblika raspodela ekstremnih vrednosti (EV raspodele) i poznata je i pod nazivom Frešeova raspodela. Njena funkcija raspodele glasi:

$$H(z) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{z}{\beta}\right)^\gamma\right\}, \quad z \geq 0, \quad \gamma, \beta > 0$$

dok je funkcija gustine raspodele:

$$h(z) = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\gamma-1} \exp\left\{-\left(\frac{z}{\beta}\right)^\gamma\right\}$$

Funkcija gustine Vejbulove raspodele prikazana je na slici 15. Za vrednost parametra oblika $\gamma = 1$ Vejbulova raspodela se svodi na eksponencijalnu. Kada je parametar oblika γ manji od 1 ($0 < \gamma < 1$), funkcija gustine raspodele ima "J" oblik, dok je za $\gamma > 1$ funkcija gustine raspodele unimodalna, pri čemu asimetrija menja znak za $\gamma \approx 3.6$.

Momenti reda r Vejbulove raspodele oko koordinatnog početka su:

$$\mu'_r = \beta^r \Gamma(r/\gamma + 1)$$

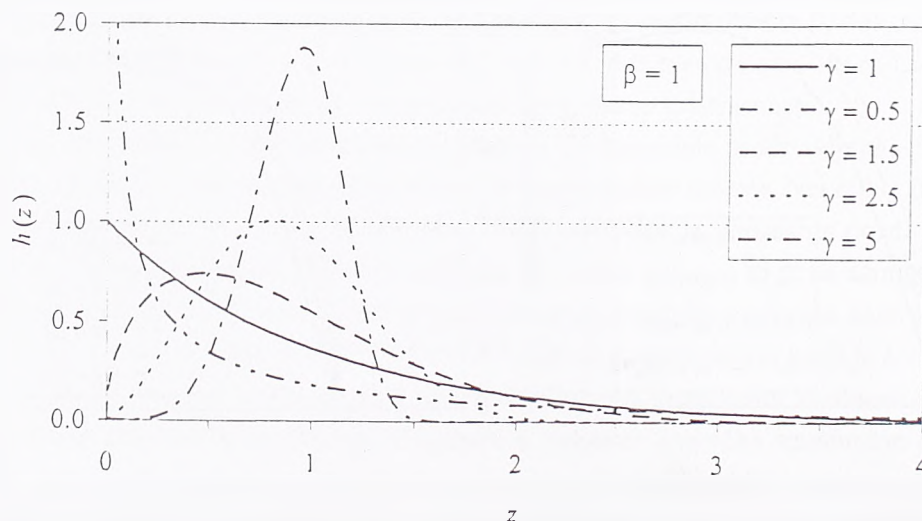
Koristeći se oznakama $\Gamma_r = \Gamma(r/\gamma + 1)$, može se napisati da su očekivanje i varijansa Vejbulove raspodele jednaki:

$$E[Z] = \beta \Gamma_1, \quad D[Z] = \beta^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)$$

dok su koeficijent varijacije, koeficijent asimetrije i njihov odnos:

$$C_v = \frac{\sqrt{\Gamma_2 - \Gamma_1^2}}{\Gamma_1}, \quad C_s = \frac{\Gamma_3 - 3\Gamma_1\Gamma_2 + 2\Gamma_1^3}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}}, \quad \frac{C_s}{C_v} = \frac{\Gamma_1(\Gamma_3 - 3\Gamma_1\Gamma_2 + 2\Gamma_1^3)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^2}$$

Na slici 16 prikazana je zavisnost koeficijenata varijacije i asimetrije od parametra oblika γ , kao i odnos C_s/C_v . Sa ovih slika se može videti da se za uobičajene vrednosti koeficijenata varijacije i asimetrije hidroloških nizova parametar γ kreće u granicama $0.5 < \gamma < 5$, tako da će se naredna razmatranja ograničiti na ovaj opseg.



Slika 15. Funkcija gustine Vejbulove raspodele za različite vrednosti parametra γ i za parametar razmere $\beta = 1$.

Težinski momenti α_r za dvoparametarsku Weibulovu raspodelu su jednaki (prilog A):

$$\alpha_r = \frac{\beta \Gamma(1/\gamma + 1)}{(r + 1)^{1/\gamma + 1}}$$

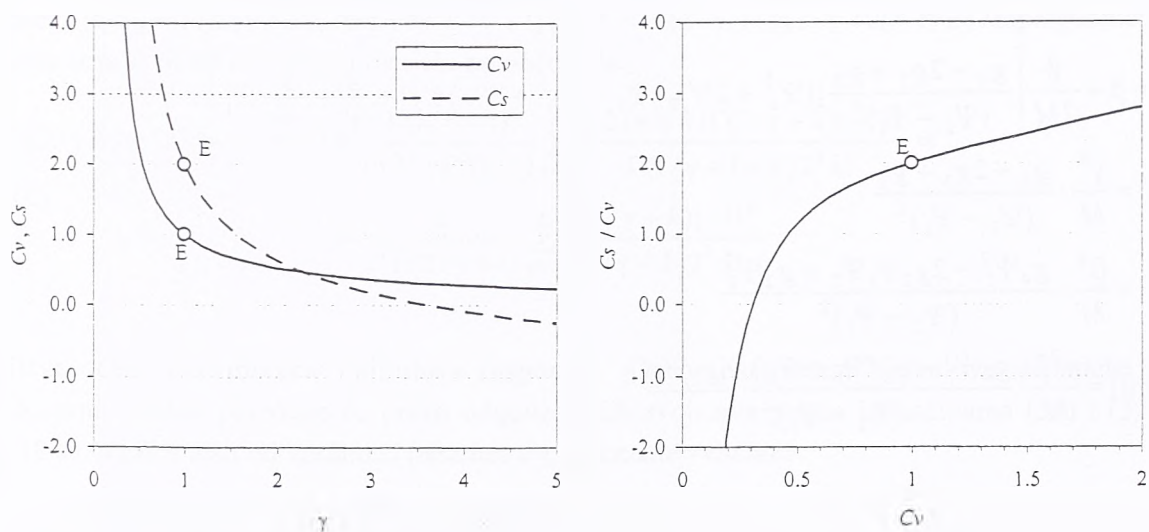
Bezdimenzionalni L-momenti tada glase:

$$LC_v = \tau_2 = 1 - 2^{-1/\gamma}, \quad LC_s = \tau_3 = \frac{1 - 3 \cdot 2^{-1/\gamma} + 2 \cdot 3^{-1/\gamma}}{1 - 2^{-1/\gamma}}$$

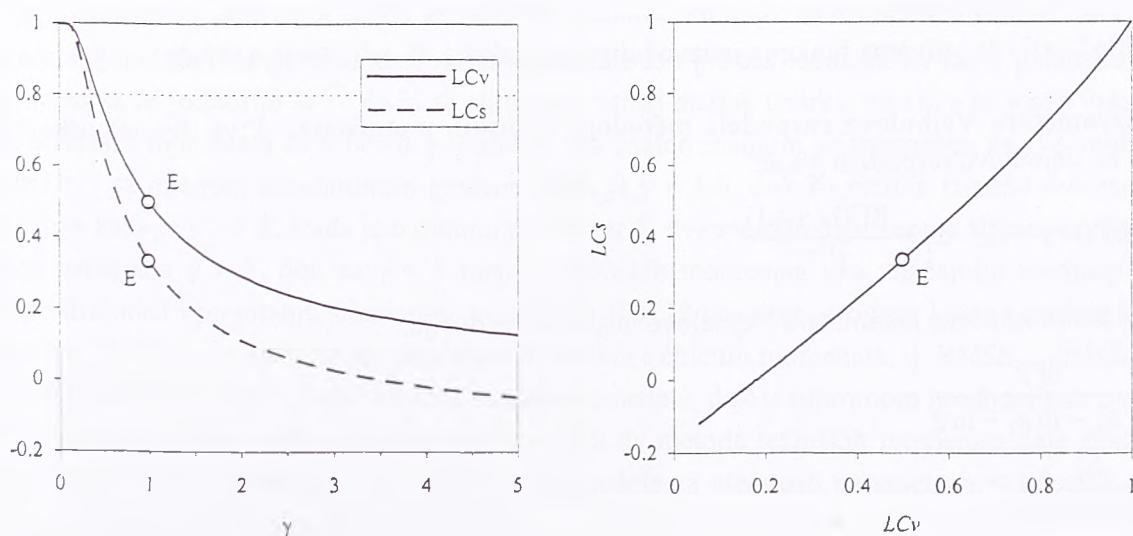
pri čemu je:

$$0 < LC_v < 1, \quad 3 - 2 \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx -0.17 < LC_s < 1$$

Na slici 17 prikazani su ovi bezdimenzionalni momenti u zavisnosti od parametra γ , kao i zavisnost LC_s od LC_v , koja se koristi pri proveru pogodnosti teorijskih raspodela za određeni empirijski niz.



Slika 16. Zavisnost koeficijenta varijacije i asimetrije od parametra γ (levo) i zavisnost odnosa C_s/C_v od C_v (desno); "E" označava vrednosti za eksponencijalnu raspodelu.



Slika 17. Zavisnost bezdimenzionalnih L-momenata od parametra γ (levo) i zavisnost L-asimetrije od L-varijacije (desno); "E" označava vrednosti za eksponencijalnu raspodelu.

Ocena parametara Vejbulove raspodele metodom momenata. Na osnovu izraza za koeficijent varijacije Vejbulove raspodele, parametar γ se može oceniti rešavanjem jednačine:

$$g(\hat{\gamma}) = \frac{\Gamma(2/\hat{\gamma} + 1)}{\Gamma^2(1/\hat{\gamma} + 1)} = 1 + \frac{S^2}{\bar{x}^2}$$

gde su \bar{x} i S^2 srednja vrednost i standardna devijacija uzorka od M prekoračenja. Parametar β određuje se na osnovu srednje vrednosti i sračunate ocene parametra γ :

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\Gamma(1/\hat{\gamma} + 1)}$$

Izrazi za svojstva ocena parametara Vejbulove raspodele po metodi momenata (kao i po metodi težinskih momenata) određeni su uz pomoć pristupa razvoja u Tejlorov red. U prilogu B.3 je prikazano izvođenje tih izraza, dok se kao rezultat dobija:

$$\begin{aligned} E[\hat{\gamma}] &= \gamma + \frac{\gamma^2}{2M} \left[\frac{g_4 - 2g_3 + g_2}{(\Psi_2 - \Psi_1)^3} [2\gamma(\Psi_2 - \Psi_1) + 2\Psi'_2 - \Psi'_1] + \frac{2g_4 - g_2 + g_1}{\Psi_2 - \Psi_1} \right] \\ E[\hat{\beta}] &= \beta + \frac{\beta}{2M} \left[\frac{g_4 - 2g_3 + g_2}{(\Psi_2 - \Psi_1)^3} [(\Psi_2^2 + 2\Psi'_2)\Psi_1 - (\Psi_1^2 + \Psi'_1)\Psi_2] + \frac{g_4 + g_1}{\Psi_2 - \Psi_1} \Psi_1 \right] \\ \text{var}[\hat{\gamma}] &= \frac{\gamma^4}{M} \cdot \frac{g_4 - 2g_3 + g_2}{(\Psi_2 - \Psi_1)^2} \\ \text{var}[\hat{\beta}] &= \frac{\beta^2}{M} \cdot \frac{g_4\Psi_1^2 - 2g_3\Psi_1\Psi_2 + g_2\Psi_2^2}{(\Psi_2 - \Psi_1)^2} \\ \text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}] &= \frac{\gamma^2\beta}{M} \cdot \frac{g_4\Psi_1 - g_3(\Psi_1 + \Psi_2) + g_2\Psi_2}{(\Psi_2 - \Psi_1)^2} \end{aligned} \quad (31)$$

gde su:

$$g_1 = \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2} - 1, \quad g_2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1, \quad g_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_2} - 1 \right), \quad g_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{\Gamma_4}{\Gamma_2^2} - 1 \right)$$

dok je $\Gamma_k = \Gamma(k/\gamma + 1)$ gama funkcija, $\psi_k = \psi(k/\gamma + 1)$ digama funkcija i $\psi'_k = \psi'(k/\gamma + 1)$ trigama funkcija odgovarajućih argumenata (digama funkcija predstavlja izvod logaritma gama funkcije, tj. $\psi(x) = d[\ln \Gamma(x)]/dx$; trigama funkcija je izvod digama funkcije, tj. $\psi'(x) = d\psi(x)/dx$).

Ocena parametara Vejbulove raspodele metodom težinskih momenata. Prva dva težinska momenta α_0 , za Vejbulovu raspodelu glase:

$$\alpha_0 = \beta\Gamma(1/\gamma + 1), \quad \alpha_1 = \frac{\beta\Gamma(1/\gamma + 1)}{2^{1/\gamma+1}}$$

Iz gornjih izraza za ocene parametara Vejbulove raspodele se dobija:

$$\hat{\gamma} = \frac{\ln 2}{\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{a_0}{\Gamma(1/\hat{\gamma} + 1)}$$

gde su a_0 i a_1 ocene težinskih momenata α_0 i α_1 iz uzorka od M prekoračenja. Očekivanja, varijanse i kovarijansa ocena parametara koji su određeni pomoću razvoja u Tejlorov red (izvođenje je dato u prilogu B.4) glase:

$$\begin{aligned}
E[\hat{\gamma}] &= \gamma + \frac{1}{M} \cdot \frac{\gamma^2}{2 \ln^2 2} [2\gamma(g_0 - 2g_1 + g_2) + (g_0 - g_2) \ln 2] \\
E[\hat{\beta}] &= \beta + \frac{1}{M} \cdot \frac{\beta}{2 \ln^2 2} (g_0 - 2g_1 + g_2)(\Psi_1^2 - \Psi_1' - \Psi_1 \ln 2) \\
\text{var}[\hat{\gamma}] &= \frac{1}{M} \cdot \frac{\gamma^4}{\ln^2 2} (g_0 - 2g_1 + g_2) \\
\text{var}[\hat{\beta}] &= \frac{1}{M} \cdot \frac{\beta^2}{\ln^2 2} [(g_0 - 2g_1 + g_2)\Psi_1^2 - 2(g_0 - g_1)\Psi_1 \ln 2 + g_0 \ln^2 2] \\
\text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}] &= \frac{1}{M} \cdot \frac{\gamma^2 \beta}{\ln^2 2} [(g_0 - 2g_1 + g_2)\Psi_1 - (g_0 - g_1) \ln 2]
\end{aligned} \tag{32}$$

gde su:

$$g_0 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1, \quad g_1 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} 2^{-1/\gamma} + 2^{1/\gamma} - 2, \quad g_2 = 4F \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 4$$

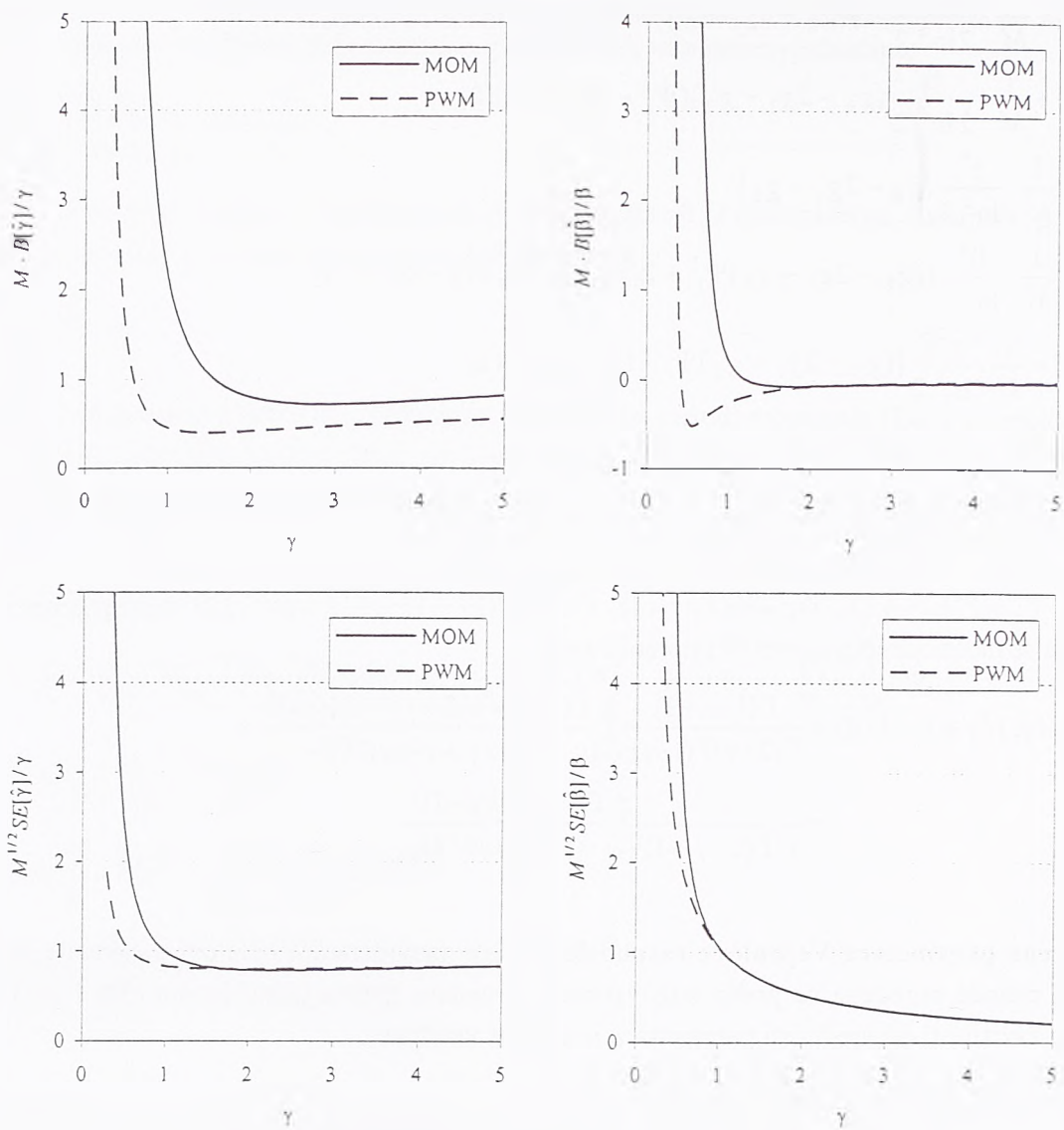
pri čemu je $\Gamma_k = \Gamma(k/\gamma + 1)$, $\Psi_k = \psi(k/\gamma + 1)$, i $F = F(2/\gamma, 1/\gamma; 1/\gamma + 1; -1/2)$ hipergeometrijska funkcija koja se može odrediti numerički pomoću reda:

$$\begin{aligned}
F(2/\gamma, 1/\gamma; 1/\gamma + 1; -1/2) &= \frac{\Gamma(1/\gamma + 1)}{\Gamma(2/\gamma)\Gamma(1/\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2/\gamma + k)\Gamma(1/\gamma + k)(-1)^k}{\Gamma(1/\gamma + 1 + k)2^k k!} = \\
&= \frac{2}{\gamma^2 \Gamma(2/\gamma + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2/\gamma + k)(-1)^k}{(1/\gamma + k)2^k k!}
\end{aligned}$$

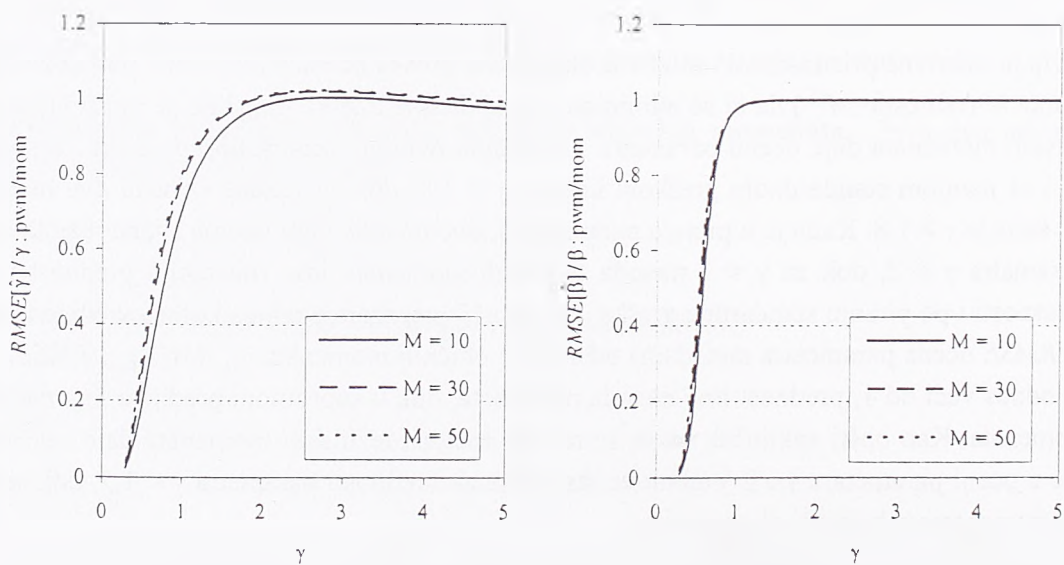
Svojstva ocena parametara Wejbulove raspodele. Ocene parametara Wejbulove raspodele prema dve opisane metode poređene su preko odgovarajućih svojstava prema jednačinama (31) i (32). Na slici 18 su, u zavisnosti od vrednosti parametra γ , prikazane veličine:

$$\begin{aligned}
M \frac{B[\hat{\gamma}]}{\gamma} &= M \frac{E[\hat{\gamma}] - \gamma}{\gamma}, \quad M \frac{B[\hat{\beta}]}{\beta} = M \frac{E[\hat{\beta}] - \beta}{\beta} \\
\sqrt{M} \frac{SE[\hat{\gamma}]}{\gamma} &= \left(\frac{\text{var}[\hat{\gamma}]}{\gamma^2} M \right)^{1/2}, \quad \sqrt{M} \frac{SE[\hat{\beta}]}{\beta} = \left(\frac{\text{var}[\hat{\beta}]}{\beta^2} M \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

koje predstavljaju relativne pristrasnosti i relativne standardne greške ocena parametara, pomnožene sa dužinom uzorka M (odnosno $M^{1/2}$) da bi se eliminisao uticaj dužine uzorka. Sa slike se može videti da metoda težinskih momenata daje ocenu parametra γ sa znatno manjom pristrasnošću za sve vrednosti parametra γ , i sa manjom standardnom greškom kada je $\gamma < 1.8$, dok su razlike između dve metode zanemarljive kada je $\gamma > 1.8$. Kada je u pitanju parametar β , dve metode daju veoma slične rezultate za vrednosti parametra $\gamma > 2$, dok za $\gamma < 1$ metoda težinskih momenata ima značajniju prednost i po pitanju pristrasnosti i po pitanju standardne greške. Na slici 19 prikazan je odnos korena srednje kvadratne greške $RMSE$ ocena parametara metodama težinskih i običnih momenata, tj. $RMSE_{pwm}/RMSE_{mom}$; kada je ovaj odnos veći od 1, prednost ima metoda momenata, dok u suprotnom prednost ima metoda težinskih momenata. Kao opšti zaključak može se reći da metoda težinskih momenata daje značajno manje greške u oceni parametara γ i β Wejbulove raspodele za vrednosti parametra $\gamma < 1.5$, dok se za $\gamma > 1.5$ mogu ravnopravno koristiti obe metode.

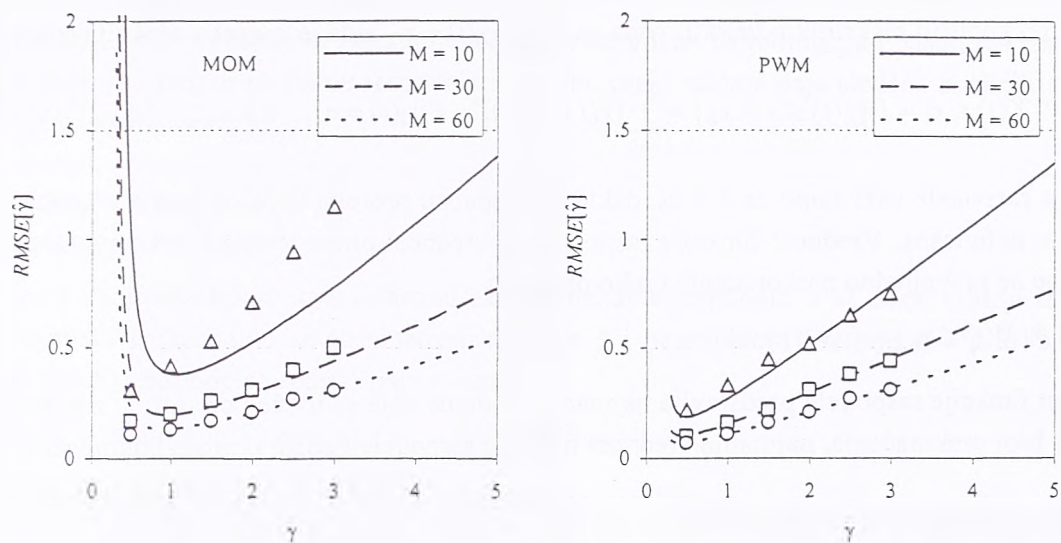


Slika 18. Svojstva ocena parametara Vejbulove raspodele metodom momenata (MOM) i metodom težinskih momenata (PWM).



Slika 19. Odnos RMSE ocena parametara Vejbulove raspodele metodama običnih i težinskih momenata za različite dužine nizova prekoračenja M .

Sa gledišta vrednovanja asimptotskih svojstava ocna parametara Vejbulove raspodele (jednačine 31 i 32), u literaturi je pronađen samo jedan rad koji se bavio ovim problemom (Mahdi i Ashkar, 2004). U kontekstu ispitivanja ponašanja ocene kvantila po Vejbulovoj raspodeli, ovi autori su ispitivali samo ponašanje ocene parametra oblika, $\hat{\gamma}$, uz pomoć Monte Karlo simulacija za metode običnih i težinskih momenata. Kada se njihovi rezultati, dati samo kao $RMSE[\hat{\gamma}]$, uporede sa asimptotskim izrazima (slika 20), može se videti da je ponašanje asimptotskih izraza sasvim dobro već za dužinu niza prekoračenja od $M = 30$.



Slika 20. Srednja kvadratna greška ocene parametra γ Vejbulove raspodele metodom momenata (levo) i metodom težinskih momenata (desno), dobijena preko asimptotskih svojstava (linije) i Monte Karlo simulacija (simboli) prema Mahdiju i Ashkaru (2004).

II.4 Modeli parcijalnih serija za godišnje maksimume velikih voda

Kao što je opisano u odeljku II.1.3, funkcija raspodele najvećeg prekoračenja u intervalu vremena $(0, t]$, uz pretpostavku da su prekoračenja nezavisna i jednako raspoređena sa funkcijom raspodele $H(z)$, jednaka je:

$$P\{\chi(t) \leq z\} = P\{\eta(t) = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} [H(z)]^n \cdot P\{\eta(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} [H(z)]^n \cdot P\{\eta(t) = n\}$$

Ako interval $(0, t]$ predstavlja jednu godinu, tada je $\chi(t)$ najveće godišnje prekoračenje iznad praga x_0 . Ako označimo godišnji maksimum velikih voda sa $X(t) = \chi(t) + x_0$, tada je njegova funkcija raspodele:

$$F(x) = P\{X(t) \leq x\} = P\{\chi(t) \leq x - x_0\} = \sum_{n=0}^{\infty} [H(x - x_0)]^n \cdot P\{\eta(t) = n\}, \quad x > x_0 \quad (33)$$

Ova funkcija raspodele važi samo za $x > x_0$, dakle za vrednosti protoka veće od bazne vrednosti, dok za $x < x_0$ nije definisana. Vrednost funkcije raspodele za vrednost praga jednaka je verovatnoći da se tokom godine ne javi nijedno prekoračenje preko praga x_0 :

$$F(x_0) = P\{X(t) \leq x_0\} = P\{\eta(t) = 0\}$$

Ova vrednost funkcije raspodele predstavlja najmanju vrednost koja se može odrediti. U zavisnosti od raspodele za broj prekoračenja, najmanja vrednost funkcije raspodele godišnjih maksimuma iznosi:

- modeli sa Poasonovom raspodelom: $x > x_0 \rightarrow F(x) > F(x_0) = e^{-\Lambda}$
- modeli sa binomnom raspodelom: $x > x_0 \rightarrow F(x) > F(x_0) = (1 - \Lambda / b)^b$
- modeli sa negativnom binomnom raspodelom: $x > x_0 \rightarrow F(x) > F(x_0) = (1 + \Lambda / a)^{-a}$

Polazeći od opšteg izraza za funkciju raspodele godišnjih maksimuma (33), dolazi se do specifičnih izraza za pojedine modele. Pretpostavljajući pojedine raspodele broja prekoračenja, izraz (33) dobija oblik poznatih funkcionalnih redova. Može se pokazati da se za funkciju raspodele godišnjih maksimuma na taj način dobija:

- modeli sa Poasonovom raspodelom: $F(x) = \exp\{-\Lambda[1 - H(x - x_0)]\}$
- modeli sa binomnom raspodelom: $F(x) = \left[1 - \frac{\Lambda}{b}[1 - H(x - x_0)]\right]^b$
- modeli sa negativnom binomnom raspodelom: $F(x) = \left[1 + \frac{\Lambda}{a}[1 - H(x - x_0)]\right]^{-a}$

U zavisnosti od izabranih raspodela za broj prekoračenja i sama prekoračenja, moguće su različite kombinacije ovih raspodela u modelu parcijalnih serija. S obzirom da se u modelima parcijalnih serija prevashodno koriste raspodele za visinu prekoračenja koje imaju i eksplicitan inverzni oblik, tada je moguće izraziti i funkciju raspodele godišnjih maksimuma u inverznoj formi, što je veoma korisno.

U tabeli 1 prikazane su kombinacije raspodela i naznačeni su modeli koji su obrađeni u ovom radu, koji su ukratko opisani u nastavku. U tabeli 2 napravljen pregled oblika funkcije raspodele godišnjih maksimuma za različite kombinacije raspodela broja prekoračenja i visine prekoračenja.

Tabela 1. Modeli parcijalnih serija kao kombinacije raspodela broja i visine prekoračenja (masnim slovima označeni su modeli obrađeni u ovom radu).

Raspodela broja prekoračenja	Raspodela visine prekoračenja		
	Eksponecijalna (E)	Vejbulova (W)	Opšta Pareto (GP)
Poasonova (P)	P+E	P+W	P+GP
Negativna binomna (NB)	NB+E	NB+W	NB+GP
Binomna (B)	B+E	B+W	B+GP

Osnovni model P+E: Poasonova i eksponencijalna raspodela. Kombinacija Poasonove raspodele za broj prekoračenja i eksponencijalne raspodele za visinu prekoračenja daje sledeću funkciju raspodele za godišnje maksimume:

$$F(x) = \exp\left\{-\Lambda \exp\left(-\frac{x-x_0}{\beta}\right)\right\}$$

gde su Λ i β parametri Poasonove odnosno eksponencijalne raspodele, a x_0 baza. Gornji izraz predstavlja Gumbelovu raspodelu sa parametrom razmere β i parametrom lokacije $x_0 + \beta \ln \Lambda$. Inverzni oblik ove funkcije raspodele predstavljaju kvantili:

$$x(F) = x_0 + \beta[-\ln(-\ln F) + \ln \Lambda] = x_0 + \beta[y(F) + \ln \Lambda]$$

gde je $y(F) = -\ln(-\ln F)$ Gumbelova standardizovana promenljiva.

Model P+GP: Poasonova i opšta Pareto raspodela. Poasonova raspodela sa parametrom Λ i opšta Pareto raspodela sa parametrima k i b daju sledeći izraz za funkciju raspodele godišnjih maksimuma:

$$F(x) = \exp\left\{-\Lambda \left(1 - k \frac{x-x_0}{b}\right)^{1/k}\right\}$$

Ako se gornji izraz napiše u obliku

$$F(x) = \exp\left\{-\left(1 - k \frac{x-c}{a}\right)^{1/k}\right\}$$

gde je $a = b\Lambda^{-k}$ i $c = x_0 + b(1 - \Lambda^{-k})$, vidi se da model P+GP svodi na opštu raspodelu ekstremnih vrednosti (GEV), poznatu i kao Dženkinsonova raspodela (Jenkinson, 1955). Inverzni oblik raspodele modela P+GP je:

$$x_T = x_0 + \frac{b}{k} \left[1 - \left(\frac{-\ln F}{\Lambda}\right)^k\right] = x_0 + \frac{b}{k} [1 - \exp\{-k[y(F) + \ln \Lambda]\}]$$

gde je opet $y(F) = -\ln(-\ln F)$ Gumbelova standardizovana promenljiva.

Model P+W: Poasonova i Vejbulova raspodela. Sa Poasonovom raspodelom sa parametrom Λ i Vejbulovom raspodelom sa parametrima γ i β , funkcija raspodele godišnjih maksimuma glasi:

$$F(x) = \exp\left\{-\Lambda \exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{\beta}\right)^\gamma\right]\right\}$$

dok se kvantil određuje kao:

$$x(F) = x_0 + \beta[-\ln(-\ln F) + \ln \Lambda]^{1/\gamma} = x_0 + \beta[y(F) + \ln \Lambda]^{1/\gamma}$$

gde je ponovo $y(F) = -\ln(-\ln F)$ Gumbelova standardizovana promenljiva.

Model B+E: Binomna i eksponencijalna raspodela. Funkcija raspodele godišnjih maksimuma kada broj prekoračenja prati binomnu raspodelu sa parametrima b i Λ , a visina prekoračenja eksponencijalnu raspodelu sa parametrom β , glasi:

$$F(x) = \left\{ 1 - \frac{\Lambda}{b} \exp\left[-\frac{x-x_0}{\beta}\right] \right\}^b$$

dok se kvantil određuje kao:

$$x(F) = x_0 + \beta \ln \left[\frac{\Lambda}{b(1-F^{1/b})} \right]$$

Model NB+E: Negativna binomna i eksponencijalna raspodela. Slično prethodnom modelu, ako broj prekoračenja prati negativnu binomnu raspodelu sa parametrima a i Λ , a visina prekoračenja eksponencijalnu raspodelu sa parametrom β , funkcija raspodele godišnjih maksimuma je:

$$F(x) = \left\{ 1 + \frac{\Lambda}{a} \exp\left(-\frac{x-x_0}{\beta}\right) \right\}^{-a}$$

Inverzni oblik ovog modela, tj. kvantil, glasi:

$$x_T = x_0 + \beta \ln \left[\frac{\Lambda}{a(F^{-1/a} - 1)} \right]$$

Tabela 2. Pregled direktnih i inverznih oblika funkcije raspodele godišnjih maksimuma za modele parcijalnih serija koji su obrađivani u ovom radu.

Model	Funkcija raspodele	Inverzni oblik (kvantil)
P+E (Λ, β)	$F(x) = \exp\left\{-\Lambda \exp\left(-\frac{x-x_0}{\beta}\right)\right\}$	$x(F) = x_0 + \beta[-\ln(-\ln F) + \ln \Lambda]$
P+GP (Λ, k, b)	$F(x) = \exp\left\{-\Lambda \left(1 - k \frac{x-x_0}{b}\right)^{1/k}\right\}$	$x(F) = x_0 + \frac{b}{k} \left[1 - \left(\frac{-\ln F}{\Lambda}\right)^k\right]$
P+W (Λ, γ, β)	$F(x) = \exp\left\{-\Lambda \exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{\beta}\right)^\gamma\right]\right\}$	$x(F) = x_0 + \beta[-\ln(-\ln F) + \ln \Lambda]^{1/\gamma}$
B+E (Λ, b, β)	$F(x) = \left\{1 - \frac{\Lambda}{b} \exp\left[-\frac{x-x_0}{\beta}\right]\right\}^b$	$x(F) = x_0 + \beta \ln \left[\frac{\Lambda}{b(1-F^{1/b})}\right]$
NB+E (Λ, a, β)	$F(x) = \left\{1 + \frac{\Lambda}{a} \exp\left(-\frac{x-x_0}{\beta}\right)\right\}^{-a}$	$x(F) = x_0 + \beta \ln \left[\frac{\Lambda}{a(F^{-1/a} - 1)}\right]$

NEIZVESNOST OCENA VELIKIH VODA

III.1 Uvod

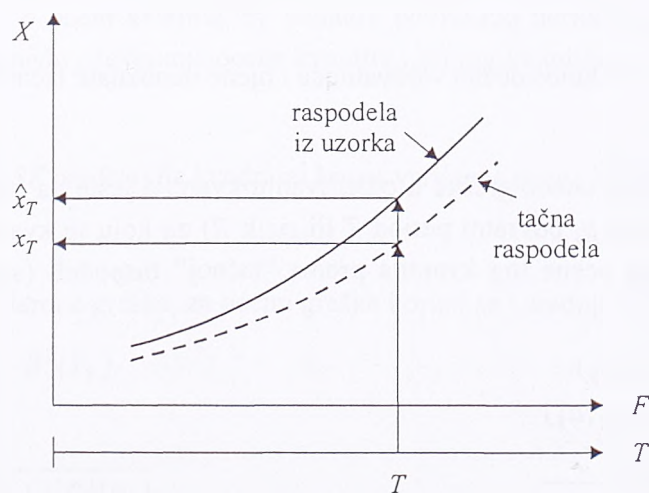
Osnovni cilj analize velikih voda u okviru projektovanja i planiranja hidrotehničkih objekata jeste da obezbedi ocenu merodavnog protoka određene verovatnoće pojave, ili da obezbedi ocenu verovatnoće pojave nekog protoka. Sa gledišta statističke analize, ova dva problema su međusobno inverzna; prvi zadatak podrazumeva određivanje kvantila za zadatu vrednost funkcije raspodele, dok drugi zadatak podrazumeva određivanje vrednosti funkcije raspodele za zadati protok. Kao kriterijum u prvom zadatku, a kao rezultat u drugom zadatku, umesto funkcije raspodele F češće se koristi verovatnoća prevazilaženja nekog protoka $p = 1 - F$ ili povratni period $T = 1/p$, a ređe rizik $R = 1 - F^L$ (gde je L vremenski horizont ili vek trajanja objekta).

Ako je $F(x)$ funkcija raspodele maksimalnih godišnjih protoka u parcijalnim serijama, u njoj figurišu vrednosti parametara raspodela broja prekoračenja i samih prekoračenja. Naravno, raspodela populacije godišnjih maksimuma ili "tačna" raspodela nije nam nikad poznata jer nam nisu poznati "tačni" parametri, već samo njihove ocene dobijene na osnovu svojstava uzorka. Za modele parcijalnih serija koji su razmatrani u ovom radu i koji imaju do tri parametra (npr. a_1, a_2, a_3), može se onda u opštem slučaju reći da imaju nepoznatu tačnu raspodelu $F(x; a_1, a_2, a_3)$ i raspodelu $F(x; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$ ocenjenu iz uzorka.

U tom smislu, merodavni protok predstavlja ocenu protoka zadate vrednosti funkcije raspodele (ili zadate verovatnoće prevazilaženja p , zadatog povratnog perioda T ili zadatog rizika R), a ne i tačnu vrednost. Drugim rečima, merodavni protok je jednak inverznoj funkciji raspodele za zadato F, p, T ili R u kojoj figurišu ocene parametara raspodele:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_F &= F^{-1}(F; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) \quad \text{ili} \\
 \hat{x}_p &= F^{-1}(1 - p; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) \quad \text{ili} \\
 \hat{x}_T &= F^{-1}(1 - 1/T; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) \quad \text{ili} \\
 \hat{x}_R &= F^{-1}[(1 - R)^{1/L}; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3]
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Na slici 21 shematski je prikazan odnos ocene kvantila i njegove nepoznate "tačne" vrednosti.



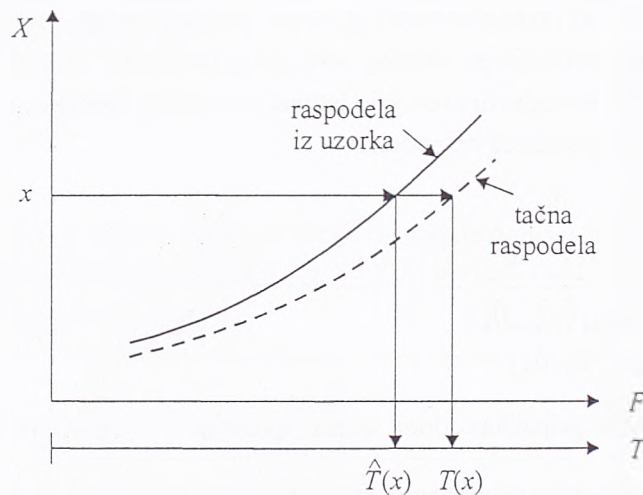
Slika 21. Odnos ocene kvantila i njegove nepoznate tačne vrednosti.

Naravno, greška koja se pravi pri oceni kvantila uvek je nepoznata jer je i tačna vrednost kvantila nepoznata, što znači da u oceni merodavnih velikih voda postoji neizvesnost. Iako se ne može znati greška ocene (34), ona se može pod određenim uslovima oceniti. Strogo govoreći, u oceni (34) kriju se dve vrste neizvesnosti: neizvesnost u parametrima usvojene raspodele i neizvesnost u samom izboru raspodele (tzv. neizvesnost modela). Ocenom grešaka može se delimično uzeti u obzir neizvesnost u parametrima usvojene raspodele ako se pretpostavi da je model (tj. raspodela) dobro formulisan, odnosno da populacija protoka potiče baš iz usvojene raspodele. Greške se mogu oceniti i ako populacija protoka potiče i iz neke druge raspodele, ali stvarna raspodela uvek ostaje nepoznata.

Inverzni zadatak u analizi velikih voda podrazumeva da se odredi vrednost funkcije raspodele F (ili verovatnoća p , povratni period T ili rizik R) usled pojave nekog protoka x . U takvim slučajevima, iz razloga istih neizvesnosti kao za kvantile, dobija se samo ocena verovatnoće, povratnog perioda ili rizika:

$$\begin{aligned}\hat{F}_x &= F(x; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) \\ \hat{p}_x &= 1 - F(x; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) = 1 - \hat{F}_x \\ \hat{T}_x &= \frac{1}{1 - F(x; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)} = \frac{1}{1 - \hat{F}_x} \\ \hat{R}_x &= 1 - [F(x; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)]^L = 1 - \hat{F}_x^L\end{aligned}\tag{35}$$

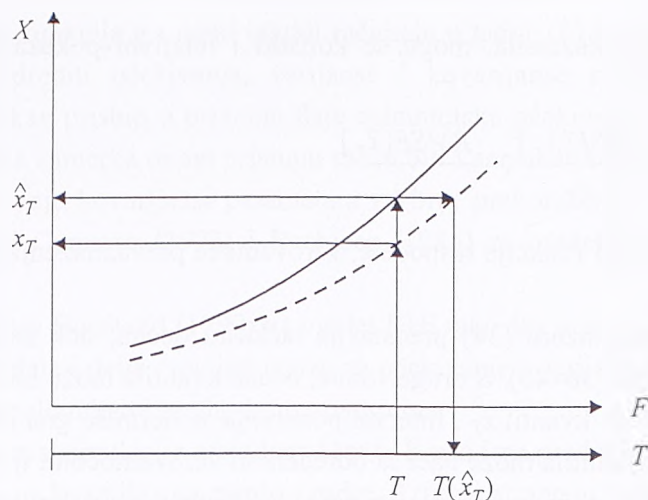
U ovom slučaju može se oceniti greška između ocena verovatnoće, povratnog perioda ili rizika i njihovih “tačnih” vrednosti. Odnos ocena i tačnih vrednosti prikazan je na slici 22.



Slika 22. Odnos ocene verovatnoće i njene nepoznate tačne vrednosti.

Treća mogućnost da se ocene greške u određivanju kvantila jeste da se uporedi vrednost funkcije raspodele (ili verovatnoća p , povratni period T ili rizik R) za koju je kvantil određen, i verovatnoća koja odgovara vrednosti ocene tog kvantila prema “tačnoj” raspodeli (slika 23). U tom slučaju se određuju vrednosti:

$$\begin{aligned}F(\hat{x}_F) &= F(\hat{x}_F; a_1, a_2, a_3) \\ p(\hat{x}_p) &= 1 - F(\hat{x}_p; a_1, a_2, a_3) \\ T(\hat{x}_T) &= \frac{1}{1 - F(\hat{x}_T; a_1, a_2, a_3)} \\ R(\hat{x}_R) &= 1 - [F(\hat{x}_R; a_1, a_2, a_3)]^L\end{aligned}$$



Slika 23. Odnos verovatnoća tačnog kvantila i njegove ocene.

Dakle, neizvesnost u oceni merodavnih velikih voda može se posmatrati kroz svojstva tri grupe veličina:

1. ocene kvantila: \hat{x}_F , \hat{x}_p , \hat{x}_T ili \hat{x}_R ,
2. ocene verovatnoće pojave: \hat{F}_x , \hat{p}_x , \hat{T}_x ili \hat{R}_x , i
3. tačne verovatnoće ocene kvantila: $F(\hat{x}_F)$, $p(\hat{x}_p)$, $T(\hat{x}_T)$, $R(\hat{x}_R)$.

Između veličina \hat{x}_F , \hat{x}_p , \hat{x}_T i \hat{x}_R u prvoj grupi nema nikakve razlike; u daljem tekstu koristiće se oznaka \hat{x}_T kao najčešće korišćen oblik (najčešće se govori o oceni velike vode zadatog povratnog perioda). U drugoj grupi veličina dovoljno je razmatrati samo \hat{F}_x , dok su ostale veličine izvedene iz \hat{F}_x . Slično važi i za treću grupu veličina, gde je dovoljno razmatrati $F(\hat{x}_T)$, a ostale veličine su izvedene iz nje.

U ovom radu biće razmatrane neizvesnosti u veličinama prve dve grupe, tj. u ocenama kvantila i verovatnoće u modelima parcijalnih serija. Treća grupa veličina nije razmatrana jer je smatrano da kvantifikovanje njihovih neizvesnosti nema praktičnu svrhu.

III.1.1 Pokazatelji grešaka u oceni kvantila ili verovatnoće pojave velikih voda

Kao pokazatelji grešaka u statističkim proračunima najčešće se koriste pristrasnost i standardna greška. Ako se npr. radi o oceni kvantila \hat{x}_T zadatog povratnog perioda T , pristrasnost B te ocene definiše se kao razlika između očekivanja ocene kvantila i samog kvantila:

$$B[\hat{x}_T] = E[\hat{x}_T] - x_T \quad (36)$$

Standardna greška ocene SE predstavlja kvadratni koren varijanse ocene kvantila:

$$SE[\hat{x}_T] = \sqrt{\text{var}[\hat{x}_T]} \quad (37)$$

Pored pristrasnosti i standardne greške, za ocenu greške koristi se i srednja kvadratna greška MSE :

$$MSE[\hat{x}_T] = SE^2[\hat{x}_T] + B^2[\hat{x}_T] \quad (38)$$

ili njen koren, $RMSE$:

$$RMSE[\hat{x}_T] = \sqrt{SE^2[\hat{x}_T] + B^2[\hat{x}_T]} \quad (39)$$

Pored ovih apsolutnih pokazatelja, mogu se koristiti i relativni pokazatelji u odnosu na vrednost kvantila:

$$\frac{B[\hat{x}_T]}{x_T}, \quad \frac{SE[\hat{x}_T]}{x_T}, \quad \frac{MSE[\hat{x}_T]}{x_T}, \quad \frac{RMSE[\hat{x}_T]}{x_T} \quad (40)$$

Pokazatelji grešaka u oceni funkcije raspodele, verovatnoće prevazilaženja, povratnog perioda i rizika imaju analogne izraze.

Ocena kvantila data izrazom (34) predstavlja tačkastu ocenu, dok se greške takve ocene mogu oceniti uz pomoć veličina (36–40). S druge strane, ocena kvantila može biti i intervalna, ako se odredi interval poverenja za tačan kvantil x_T . Interval poverenja se definiše granicama, npr. x_{T1} i x_{T2} , između kojih se tačna vrednost kvantila može naći sa određenom verovatnoćom, tj. poverenjem, $1 - \alpha$. Smatra se da je ocena kvantila iz većine raspodela asimptotski (za velike uzorke) normalno raspoređena, pa se uz pomoć standarne greške kvantila (37) može približno konstruisati $100(1 - \alpha)\%$ interval poverenja sa granicama

$$x_{T1} = \hat{x}_T - z_{1-\alpha/2} SE[\hat{x}_T], \quad x_{T2} = \hat{x}_T + z_{1-\alpha/2} SE[\hat{x}_T]$$

gde je $z_{1-\alpha/2}$ standardizovana normalna promenljiva za razmatrani prag poverenja α .

III.1.2 Načini određivanja pokazatelja grešaka u oceni kvantila

Greške u oceni kvantila za standardne raspodele koje se koriste za hidrološke nizove godišnjih maksimuma uglavnom su obrađene su u statističkoj literaturi (npr. Kite, 1977). Kada su u pitanju parcijalne serije, autori su se u literaturi najviše bavili modelom P+E (kombinacija Poasonove i eksponencijalne raspodele) i modelom P+GP (kombinacija Poasonove i opšte Pareto raspodele).

Pri proračunu grešaka u oceni kvantila osnovu čini proračun očekivanja i varijanse ocene kvantila, $E[\hat{x}_T]$ i $\text{var}[\hat{x}_T]$. Za njihov proračun se može primeniti nekoliko pristupa:

- određivanje funkcije gustine raspodele za \hat{x}_T i proračun očekivanja i varijanse;
- proračun očekivanja i varijanse složene funkcije $\hat{x}_T = g(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$ njenim razvojem u Tejlorov red, gde su $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ ocene parametara raspodele;
- direktan proračun očekivanja i varijanse \hat{x}_T eliminacijom parametara relevantnih raspodela;
- simulacije metodom Monte Karlo.

Prvi pristup je moguć ukoliko je moguće odrediti i funkcije raspodele ocena parametara raspodela koje ulaze u model parcijalnih serija. Ovaj pristup su primenili Ashkar i Rousselle (1981), kao i Rasmussen i Rosbjerg (1989), za model P+E. Za druge modele, međutim, ovaj postupak postaje praktično nemoguć.

Drugi pristup podrazumeva razvoj ocene kvantila \hat{x}_T u Tejlorov red uz zanemarivanje izvoda višeg reda (od trećeg u slučaju očekivanja, a drugog u slučaju varijanse; videti prilog B.1). Ako se ocena kvantila u modelima parcijalnih serija posmatra kao funkcija do tri ocene parametara relevantnih raspodela $\hat{x}_T = g(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$, tada su varijansa i očekivanje te složene funkcije jednaki:

$$\text{var}[\hat{x}_T] = \text{var}[g(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)] \approx \sum_i \text{var}[\hat{a}_i] \left(\frac{\partial g}{\partial \hat{a}_i} \Big|_{\mu} \right)^2 + 2 \sum_{i \neq j} \text{cov}[\hat{a}_i, \hat{a}_j] \left(\frac{\partial g}{\partial \hat{a}_i} \frac{\partial g}{\partial \hat{a}_j} \Big|_{\mu} \right)$$

$$E[\hat{x}_T] = E[g(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)] \approx g(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) \Big|_{\mu} + \frac{1}{2} \sum_i \text{var}[\hat{a}_i] \frac{\partial^2 g}{\partial \hat{a}_i^2} \Big|_{\mu} + \sum_{i \neq j} \text{cov}[\hat{a}_i, \hat{a}_j] \frac{\partial^2 g}{\partial \hat{a}_i \partial \hat{a}_j} \Big|_{\mu}$$

gde oznaka $|\mu$ znači da se funkcija g i njeni izvodi računaju u tački $(E[\hat{a}_1], E[\hat{a}_2], E[\hat{a}_3])$. Za ovakav proračun potrebno je odrediti očekivanja, varijanse i kovarijanse ocena parametara $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ pojedinih raspodela. Ovakav pristup u principu daje asimptotska očekivanja i varijanse (koji važe za velike uzorke). Eventualna zamerka ovom pristupu može biti i zanemarivanje izvoda višeg reda, a kod nekih autora i zanemarivanje kovarijansi parametara za broj prekoračenja i za visinu prekoračenja. Ovaj pristup su primenili Cunnane (1973) i Rosbjerg (1985) za model P+E, kao i Rosbjerg i sar. (1992) za model P+GP.

Treći pristup je primenio Buishand (1990) za model P+E tako što je u izraz za ocenu kvantila uneo izraze za parametre raspodela i dalje razvijao izraze za očekivanje i varijansu kvantila. Suštinski se na ovaj način dobijaju isti rezultati kao i prethodnim pristupima.

Pristup koji podrazumeva simulacije metodom Monte Karlo ima prednost što se njim može doći do očekivanja i varijanse ocene kvantila i za manje uzorke. S druge strane, u ovom pristupu je neophodno da se parametri raspodela fiksiraju za jedan set simulacija i da se ceo postupak ponovi za različite kombinacije vrednosti parametara, što ovoj metodi daje veći akademski nego praktični značaj. Metodu Monte Karlo primenili su Tavares i da Silva (1983) za model P+E, kao i Rosbjerg i sar. (1992) za model P+GP.

U narednim odeljcima ovog poglavlja biće prikazani pokazatelji greške ocene kvantila za sledeće modele parcijalnih serija: P+E, P+W, P+GP, NB+E i B+E. Najdetaljnije je obrađen model P+E, s obzirom da su za njega u literaturi primenjivani svi gore pomenuti pristupi. U slučaju ostalih modela primenjen je samo pristup razvoja funkcije kvantila u Tejlorov red. Rezultati za model P+GP preuzeti su iz literature u kojoj je ovi model obrađen, dok su za ostale modele sprovedeni proračuni.

U modelima parcijalnih serija raspodela $F(x)$ predstavlja raspodelu najvećeg godišnjeg protoka X , odnosno najvećeg prekoračenja Z preko praga x_0 ($Z = X - x_0$), tako da je ocena kvantila u suštini:

$$\hat{x}_T = \hat{z}_T + x_0$$

U razmatranjima grešaka u oceni kvantila jednostavnije je posmatrati kvantil prekoračenja \hat{z}_T umesto kvantila velikih voda \hat{x}_T , čime se eliminiše uticaj praga x_0 . Time se ništa ne menja sa gledišta ovih grešaka, s obzirom da za pristrasnost i varijansu ova dva kvantila važi:

$$B[\hat{x}_T] = E[\hat{x}_T] - x_T = E[\hat{z}_T + x_0] - (z_T + x_0) = E[\hat{z}_T] - z_T = B[\hat{z}_T]$$

$$\text{var}[\hat{x}_T] = \text{var}[\hat{z}_T + x_0] = \text{var}[\hat{z}_T]$$

III.1.3 Načini određivanja pokazatelja grešaka u oceni verovatnoće pojave velikih voda

Kada su u pitanju pokazatelji grešaka za ocenu funkcije raspodele, verovatnoće prevazilaženja, povratnog perioda i rizika zadatog protoka dati izrazima (35), mogući su isti pristupi kao i za ocenu grešaka kvantila. Ovim problemom delimično su se bavili Ashkar i Rousselle (1981) i Rasmussen i Rosbjerg (1989) za model P+E. Oni su primenili prvi pristup, pri čemu su Ashkar i Rousselle (1981) došli do raspodele za \hat{T}_x , a Rasmussen i Rosbjerg (1989) do raspodela za ocenu povratnog perioda parcijalnih serija $\hat{T}_{PDS,x}$ i za ocenu \hat{R}_x . Međutim, proračun očekivanja i varijanse na osnovu ovih gustina raspodela je moguć samo za \hat{R}_x , a ne i za \hat{T}_x . Pored toga, Rasmussen i Rosbjerg (1989) su koristili i pristup razvoja u Tejlorov red, a odgovarajuće rezultate su nazvali "aproksimativnim" izrazima. Određivanje raspodele ocena \hat{F}_x , \hat{T}_x ili \hat{R}_x za druge modele je praktično nemoguće, tako da su pristupi razvoja u Tejlorov red i Monte Karlo simulacije jedini mogući pristupi.

U ovom radu primenjen je pristup razvoja u Tejlorov red za modele P+E, P+GP, P+W, B+E i NB+E. Pored toga, za model P+E prikazan je i pristup sa određivanjem raspodele ocena \hat{F}_x , \hat{P}_x , \hat{T}_x i \hat{R}_x po ugledu na rezultate Ashkara i Roussella (1981) i Rasmussena i Rosbjerga (1989).

S obzirom da su ocene verovatnoće prevazilaženja \hat{p}_x , povratnog perioda \hat{T}_x i rizika zadatog protoka \hat{R}_x (jednačine 3535) u stvari izvedene veličine ocene funkcije raspodele \hat{F}_x , u pristupu razvoja u Tejlorov red dovoljno je odrediti očekivanje i varijansu samo za \hat{F}_x , a iz njih slede i očekivanja i varijanse za \hat{p}_x , \hat{T}_x i \hat{R}_x . Za \hat{F}_x u modelu parcijalni serija sa parametrima a_i ($i = 1, 2, 3$) imamo:

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{F}_x] &\approx \sum_i \text{var}[\hat{a}_i] \left(\frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_i} \right)^2 \Bigg|_{\mu} + 2 \sum_{i \neq j} \text{cov}[\hat{a}_i, \hat{a}_j] \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_i} \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_j} \Bigg|_{\mu} \\ E[\hat{F}_x] &\approx \hat{F}_x \Bigg|_{\mu} + \frac{1}{2} \sum_i \text{var}[\hat{a}_i] \frac{\partial^2 \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_i^2} \Bigg|_{\mu} + \sum_{i \neq j} \text{cov}[\hat{a}_i, \hat{a}_j] \frac{\partial^2 \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_i \partial \hat{a}_j} \Bigg|_{\mu} \end{aligned} \quad (41)$$

gde oznaka $|_{\mu}$ znači da se izvodi određuju u tački $(E[\hat{a}_1], E[\hat{a}_2], E[\hat{a}_3])$. Tada za ocenu verovatnoće prevazilaženja sledi:

$$\text{var}[\hat{p}_x] = \text{var}[1 - \hat{F}_x] = \text{var}[\hat{F}_x]$$

$$E[\hat{p}_x] = E[1 - \hat{F}_x] = 1 - E[\hat{F}_x]$$

Za ocene povratnog perioda i rizika važe izrazi analogni izrazima (41). Kako je:

$$\frac{\partial \hat{T}_x}{\partial \hat{a}_i} = \frac{1}{(1 - \hat{F}_x)^2} \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_i}, \quad \frac{\partial^2 \hat{T}_x}{\partial \hat{a}_i \partial \hat{a}_j} = \frac{2}{(1 - \hat{F}_x)^3} \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_i} \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_j} + \frac{1}{(1 - \hat{F}_x)^2} \frac{\partial^2 \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_i \partial \hat{a}_j}$$

i

$$\frac{\partial \hat{R}_x}{\partial \hat{a}_i} = -L \hat{F}_x^{L-1} \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_i}, \quad \frac{\partial^2 \hat{R}_x}{\partial \hat{a}_i \partial \hat{a}_j} = -L(L-1) \hat{F}_x^{L-2} \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_i} \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_j} - L \hat{F}_x^{L-1} \frac{\partial^2 \hat{F}_x}{\partial \hat{a}_i \partial \hat{a}_j}$$

tada je:

$$\text{var}[\hat{T}_x] = \hat{T}_x^4 \Bigg|_{\mu} \cdot \text{var}[\hat{F}_x]$$

$$E[\hat{T}_x] = \hat{T}_x \Bigg|_{\mu} + \hat{T}_x^3 \Bigg|_{\mu} \cdot \text{var}[\hat{F}_x] + \hat{T}_x^2 \Bigg|_{\mu} \cdot \left(E[\hat{F}_x] - \hat{F}_x \Bigg|_{\mu} \right)$$

i

$$\text{var}[\hat{R}_x] = L^2 (1 - \hat{R}_x)^{2-2/L} \Bigg|_{\mu} \cdot \text{var}[\hat{F}_x]$$

$$E[\hat{R}_x] = \hat{R}_x \Bigg|_{\mu} - \frac{1}{2} L(L-1) (1 - \hat{R}_x)^{1-2/L} \Bigg|_{\mu} \cdot \text{var}[\hat{F}_x] - L(1 - \hat{R}_x)^{1-1/L} \Bigg|_{\mu} \cdot \left(E[\hat{F}_x] - \hat{F}_x \Bigg|_{\mu} \right)$$

Dakle, za proračun svojstava u ovoj grupi veličina dovoljno je razmatrati samo svojstva ocene funkcije raspodele \hat{F}_x , dok se svojstva ostalih veličina (ocene verovatnoće prevazilaženja, povratnog perioda i rizika) mogu dobiti direktno iz svojstava \hat{F}_x .

III.2 Neizvesnost ocene kvantila velikih voda modelom P+E

III.2.1 Teorijska razmatranja

Ocena kvantila zadatog povratnog perioda T u modelu P+E jednaka je:

$$\hat{x}_T = x_0 + \hat{\beta}[-\ln(-\ln F) + \ln \hat{\Lambda}] = x_0 + \hat{\beta}(y_T + \ln \hat{\Lambda})$$

gde je F vrednost funkcije raspodele koja odgovara povratnom periodu T , $y_T = -\ln(-\ln F)$ je Gumbelova standardizovana promenljiva, $\hat{\Lambda}$ i $\hat{\beta}$ su ocene parametara Poasonove i eksponencijalne raspodele, a x_0 izabrana baza. Da bi se izbegao uticaj praga, posmatramo samo ocenu kvantila prekoračenja, tj.:

$$\hat{z}_T = \hat{x}_T - x_0 = \hat{\beta}(y_T + \ln \hat{\Lambda}) \quad (42)$$

Autori koji su razmatrali greške u oceni kvantila po modelu P+E koristili su različite pristupe. U nastavku će biti prikazani rezultati iz literature, grupisani prema pristupima.

Očekivanje i varijansa ocene kvantila kao složene funkcije ocena parametara. Prvi rad na ovu temu uopšte objavio je Cunnane (1973) koji je razmatrao varijansu ocene kvantila (42) kao funkcije ocena parametara $\hat{\Lambda}$ i $\hat{\beta}$ i njen razvoj u Tejlorov red. Takvim pristupom, za očekivanje i varijansu ocene kvantila se dobija:

$$E[\hat{z}_T] = E\hat{\beta} \cdot [y_T + \ln(E\hat{\Lambda})] - \frac{E\hat{\beta}}{2(E\hat{\Lambda})^2} \text{var}[\hat{\Lambda}] + \frac{1}{E\hat{\Lambda}} \text{cov}[\hat{\beta}, \hat{\Lambda}]$$

$$\text{var}[\hat{z}_T] = \left(\frac{E\hat{\beta}}{E\hat{\Lambda}}\right)^2 \text{var}[\hat{\Lambda}] + 2\frac{E\hat{\beta}}{E\hat{\Lambda}} [y_T + \ln(E\hat{\Lambda})] \text{cov}[\hat{\beta}, \hat{\Lambda}] + [y_T + \ln(E\hat{\Lambda})]^2 \text{var}[\hat{\beta}] \quad (43)$$

Pored Cunnanea (1973), i drugi autori su koristili ovaj pristup, ali su različito tretirali očekivanja i varijanse parametara Poasonove i eksponencijalne raspodele. Cunnane je za svojstva parametara koristio standardne izraze (videti odeljke II.2.3 i II.3.3):

$$E[\hat{\Lambda}] = \Lambda, \quad \text{var}[\hat{\Lambda}] = \frac{\Lambda}{N}, \quad E[\hat{\beta}] = \beta, \quad \text{var}[\hat{\beta}] = \frac{\beta^2}{N\Lambda}$$

a takođe je pokazao da je kovarijansa ocena Poasonovog parametra i parametra eksponencijalne raspodele jednaka nuli ($\text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{\beta}] = 0$). Unoseći prethodne izraze u izraz (43), Cunnane (1973) je za varijansu ocene kvantila dobio:

$$\text{var}[\hat{z}_T] = \frac{\beta^2}{N\Lambda} [1 + (y_T + \ln \Lambda)^2] \quad (44)$$

Cunnane se nije bavio očekivanjem ocene kvantila, ali je ono po istom principu jednako:

$$E[\hat{z}_T] = \beta(y_T + \ln \Lambda) - \frac{\beta}{2N\Lambda} = z_T - \frac{\beta}{2N\Lambda} \quad (45)$$

Rosbjerg (1985) unosi u Cunnaneov izraz (44) korekciju koja se odnosi na varijansu ocene srednje vrednosti pikova $\hat{\beta} = \bar{z}$. Naime, on smatra da se ova ocena ne može dobiti ukoliko je ukupan broj prekoračenja $\eta(Nt^*) = M$ tokom N godina, kao slučajna promenljiva koja prati Poasonovu raspodelu sa srednjom vrednošću $N\Lambda$, jednak nuli. Iz tog razloga on određuje uslovnu varijansu ocene parametra $\hat{\beta}$ pod uslovom da je $M > 0$:

$$\begin{aligned}\text{var}[\hat{\beta} | M > 0] &= \text{var}[\bar{z} | M > 0] = E[\text{var}(\bar{z} | M) | M > 0] + \text{var}[E(\bar{z} | M) | M > 0] = \\ &= E\left[\frac{\beta^2}{M} | M > 0\right] + \text{var}[\beta | M > 0] = \beta^2 E\left[\frac{1}{M} | M > 0\right] = \frac{\beta^2}{N\Lambda} K_1\end{aligned}$$

gde je:

$$K_1 = N\Lambda \cdot E\left[\frac{1}{M} | M > 0\right] = \frac{N\Lambda}{1 - e^{-N\Lambda}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(N\Lambda)^i e^{-N\Lambda}}{i \cdot i!}$$

Uz sve ostalo isto kao i kod Cunnanea, Rosbjerg (1985) za varijansu ocene kvantila dobija:

$$\text{var}[\hat{z}_T] = \frac{\beta^2}{N\Lambda} [1 + K_1 (y_T + \ln \Lambda)^2] \quad (46)$$

Poređenjem Rosbjergovog izraza sa Cunnaneovim, može se reći da je Cunnaneov izraz specijalni slučaj Rosbjergovog za $K_1 = 1$.

Funkcija raspodele ocene kvantila modela P+E. Ashkar i Rousselle (1981) su došli do raspodele za ocenu kvantila prekoračenja \hat{z}_T polazeći od funkcija raspodele ocena parametara $\hat{\Lambda}$ i $\hat{\beta}$. Raspodela za $\hat{\Lambda}$ je Poasonova:

$$P\{\hat{\Lambda} = k\} = P\{M / N = k\} = P\{M = Nk\} = \frac{(N\Lambda)^{Nk} e^{-N\Lambda}}{(Nk)!}, \quad k = 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots$$

ili

$$P\{\hat{\Lambda} = m / N\} = P\{M = m\} = \frac{(N\Lambda)^m e^{-N\Lambda}}{m!}, \quad m = Nk = 0, 1, 2, \dots$$

Za određivanje raspodele ocene $\hat{\beta}$, koja predstavlja srednju vrednost od ukupno M prekoračenja tj. $\hat{\beta} = \bar{z} = \sum_{i=1}^M z_i / M$, Ashkar i Rousselle su pošli od toga da zbir od $M = m$ (gde je m fiksiran ceo broj veći od 0) eksponencijalno raspoređenih slučajnih promenljivih $S = \sum_{i=1}^m z_i$ prati gama raspodelu sa gustinom:

$$f_S(s) = \frac{s^{m-1} e^{-s/\beta}}{\beta^m \Gamma(m)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (47)$$

Tada se za fiksiran broj prekoračenja $M = m$ ($m > 0$) može napisati da je $\{\hat{\beta} | M = m\} = S / m$, pa se transformacijom $s = bm$ dobija se uslovna raspodela ocene $\hat{\beta}$ za fiksirano M :

$$f_{\hat{\beta}}(b | M = m) = f_S(bm) \cdot \left| \frac{d}{db}(bm) \right| = \frac{m}{\beta \Gamma(m)} \left(\frac{mb}{\beta} \right)^{m-1} e^{-mb/\beta}, \quad b \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (48)$$

dok je $f_{\hat{\beta}}(b | M = 0)$ nedefinisano. U sledećem koraku Ashkar i Rousselle određuju gustinu raspodele ocene kvantila prekoračenja \hat{z}_T . Kako je $\hat{z}_T = \hat{\beta}(y_T + \ln \hat{\Lambda})$, za fiksirano $\hat{\Lambda} = m / N$ i koristeći gustinu raspodele (24) uz transformaciju $b = z / [y_T + \ln(m / N)]$, dobija se uslovna raspodela ocene kvantila:

$$f_{\hat{z}_T}(z | M = m) = f_{\hat{\beta}}\left(\frac{z}{Y} | M = m\right) \cdot \left| \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{Y}\right) \right| = \frac{m}{\beta Y \Gamma(m)} \left(\frac{mz}{\beta Y} \right)^{m-1} \exp\left\{-\frac{mz}{\beta Y}\right\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

gde je $Y = y_T + \ln(m / N)$. Bezuslovna raspodela ocene kvantila je tada:

$$f_{\hat{z}_T}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{\hat{z}_T}(z | M = m) \cdot P\{M = m\} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\beta Y \Gamma(m)} \left(\frac{mz}{\beta Y} \right)^{m-1} \exp\left\{-\frac{mz}{\beta Y}\right\} \cdot P\{M = m\}, \quad z > 0$$

Međutim, kako je:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^\infty f_{\hat{z}_T}(z) dz &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{\infty} P\{M = m\} \frac{1}{\Gamma(m)} \int_h^\infty \left(\frac{mz}{\beta Y}\right)^{m-1} \exp\left\{-\frac{mz}{\beta Y}\right\} \frac{m}{\beta Y} dz = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P\{M = m\} = P\{M > 0\} = 1 - P\{M = 0\} \end{aligned}$$

evidentno je da je u tački $z = 0$ koncentrisana verovatnoća $P\{M = 0\}$, tako da se formalno može napisati:

$$f_{\hat{z}_T}(z) = \delta(z) \cdot P\{M = 0\} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\beta Y \Gamma(m)} \left(\frac{mz}{\beta Y}\right)^{m-1} \exp\left\{-\frac{mz}{\beta Y}\right\} \cdot P\{M = m\} \quad (49)$$

gde je $\delta(z)$ Dirakova delta funkcija (za koju važi $\delta(z) = 1$ kada je $z = 0$ i $\delta(z) = 0$ kada je $z \neq 0$).

Nachtnebel i Konecny (1987) su takođe određivali funkciju raspodele ocene kvantila u modelu P+E, polazeći od toga da je:

$$\begin{aligned} F_{\hat{z}_T}(z) &= P\{\hat{z}_T \leq z\} = P\{M = 0\} + \sum_{m=1}^{\infty} P\{\hat{z}_T \leq z \mid M = m\} \cdot P\{M = m\} = \\ &= P\{M = 0\} + \sum_{m=1}^{\infty} P\{\hat{\beta}(y_T + \ln \hat{\Lambda}) \leq z \mid M = m\} \cdot P\{M = m\} \end{aligned} \quad (50)$$

Kada se ocene parametara u gornjem izrazu zamene sa $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^M z_i / M$ i $\hat{\Lambda} = M / N$, i stavljajući da je $S = \sum_{i=1}^m z_i$, dobija se:

$$\begin{aligned} F_{\hat{z}_T}(z) &= P\{M = 0\} + \sum_{m=1}^{\infty} P\left\{\frac{S}{m} \left(y_T + \ln \frac{m}{N}\right) \leq z\right\} \cdot P\{M = m\} = \\ &= P\{M = 0\} + \sum_{m=1}^{\infty} P\left\{S \leq \frac{mz}{y_T + \ln(m/N)}\right\} \cdot P\{M = m\} \end{aligned}$$

Koristeći se činjenicom da S prati gama raspodelu (47), gustina raspodele ocene kvantila se dobija diferenciranjem gornjeg izraza po z :

$$f_{\hat{z}_T}(z) = \delta(z) \cdot P\{M = 0\} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\beta Y \Gamma(m)} \left(\frac{mz}{\beta Y}\right)^{m-1} \exp\left\{-\frac{mz}{\beta Y}\right\} \cdot P\{M = m\}, \quad z > 0 \quad (51)$$

što je identično sa izrazom (49) Ashkara i Rousselle-a.

Rasmussen i Rosbjerg (1989) su primenili isti postupak kao i Nachtnebel i Konecny (1987), osim što su formulisali funkciju raspodele ocene kvantila kao:

$$F_{\hat{z}_T}(z) = P\{\hat{z}_T \leq z\} = \sum_{m=1}^{\infty} P\{\hat{z}_T \leq z \mid M = m\} \cdot P\{M = m\} \quad (52)$$

Razlika između (52) i (50) je samo u (ne)uzimanju u obzir verovatnoće $P\{M = 0\}$. Diferenciranjem (52) po z , oni su dobili:

$$g_{\hat{z}_T}(z) = \frac{1}{P\{M > 0\}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\beta Y \Gamma(m)} \left(\frac{mz}{\beta Y}\right)^{m-1} \exp\left\{-\frac{mz}{\beta Y}\right\} \cdot P\{M = m\} \quad (53)$$

pri čemu su uveli faktor $1/P\{M > 0\}$ kako bi osigurali da (53) predstavlja potpunu funkciju raspodele, tj. onu za koju je $\int_0^\infty f(z) dz = 1$. U suštini, gornja funkcija raspodele predstavlja uslovnu gustinu raspodele za $M > 0$; kako je $P\{M = m\} / P\{M > 0\} = P\{M = m \mid M > 0\}$, to je:

$$g_{\hat{z}_T}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\beta Y \Gamma(m)} \left(\frac{mz}{\beta Y} \right)^{m-1} \exp\left\{-\frac{mz}{\beta Y}\right\} \cdot P\{M = m | M > 0\} = f_{\hat{z}_T}(z | M > 0) \quad (54)$$

dok bi безусловna gustina bila:

$$\begin{aligned} f_{\hat{z}_T}(z) &= f_{\hat{z}_T}(z | M = 0) \cdot P\{M = 0\} + f_{\hat{z}_T}(z | M > 0) \cdot P\{M > 0\} = \\ &= \delta(z) \cdot P\{M = 0\} + f_{\hat{z}_T}(z | M > 0) \cdot P\{M > 0\} \end{aligned}$$

što je identično kao izrazi (49) i (51). Iz ovih izraza se vidi da su rezultati Rasmussena i Rosbjerga s jedne strane, i Ashkara i Roussellea s druge strane, u osnovi isti, mada u daljim proračunima prvi koriste uslovnu gustinu, a drugi безусловnu gustinu.

Očekivanje i varijansa ocene kvantila se dobijaju na osnovu gustine raspodele (49) odnosno (54) prema:

$$\begin{aligned} E[\hat{z}_T] &= \int_0^{\infty} z f_{\hat{z}_T}(z) dz \\ \text{var}[\hat{z}_T] &= E[\hat{z}_T^2] - (E[\hat{z}_T])^2 = \int_0^{\infty} z^2 f_{\hat{z}_T}(z) dz - (E[\hat{z}_T])^2 \end{aligned}$$

Prema funkciji gustine ocene kvantila prema Ashkaru i Rousselleu (1981) tada se dobija:

$$\begin{aligned} E[\hat{z}_T] &= \beta \{y_T - \ln N + E[\ln M | M > 0]\} \cdot P\{M > 0\} \\ \text{var}[\hat{z}_T] &= \beta^2 \left\{ E\left[\frac{\ln^2 M}{M} | M > 0 \right] + \text{var}[\ln M | M > 0] + (E[\ln M | M > 0])^2 \cdot P\{M = 0\} + \right. \\ &\quad \left. + 2(y_T - \ln N) \left(E\left[\frac{\ln M}{M} | M > 0 \right] + E[\ln M | M > 0] \cdot P\{M = 0\} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (y_T - \ln N)^2 \left(E\left[\frac{1}{M} | M > 0 \right] + P\{M = 0\} \right) \right\} \cdot P\{M > 0\} \end{aligned} \quad (55)$$

dok se prema Rasmussenu i Rosbjergu (1989) dobija:

$$\begin{aligned} E[\hat{z}_T | M > 0] &= \beta \{y_T - \ln N + E[\ln M | M > 0]\} \\ \text{var}[\hat{z}_T | M > 0] &= \beta^2 \left\{ E\left[\frac{\ln^2 M}{M} | M > 0 \right] + \text{var}[\ln M | M > 0] + 2(y_T - \ln N) E\left[\frac{\ln M}{M} | M > 0 \right] + \right. \\ &\quad \left. + (y_T - \ln N)^2 E\left[\frac{1}{M} | M > 0 \right] \right\} \end{aligned} \quad (56)$$

Iz teorije verovatnoće je poznato da se безусловno očekivanje i безусловna varijansa mogu izraziti na sledeći način:

$$\begin{aligned} E[\hat{z}_T] &= E[\hat{z}_T | M > 0] \cdot P\{M > 0\} + E[\hat{z}_T | M = 0] \cdot P\{M = 0\} \\ \text{var}[\hat{z}_T] &= \text{var}[\hat{z}_T | M > 0] \cdot P\{M > 0\} + \text{var}[\hat{z}_T | M = 0] \cdot P\{M = 0\} + \\ &\quad (E[\hat{z}_T | M > 0] - E[\hat{z}_T | M = 0])^2 \cdot P\{M > 0\} \cdot P\{M = 0\} \end{aligned}$$

S obzirom da je $E[\hat{z}_T | M = 0] = 0$ i $\text{var}[\hat{z}_T | M = 0] = 0$, gornji izrazi se svode na:

$$\begin{aligned} E[\hat{z}_T] &= E[\hat{z}_T | M > 0] \cdot P\{M > 0\} \\ \text{var}[\hat{z}_T] &= \left[\text{var}[\hat{z}_T | M > 0] + (E[\hat{z}_T | M > 0])^2 \cdot P\{M = 0\} \right] \cdot P\{M > 0\} \end{aligned} \quad (57)$$

Poređenjem (55) i (56) sa (57) vidi se da je ova relacija zadovoljena.

Direktan proračun očekivanja i varijanse ocene kvantila P+E. Buishand (1990) je razmatrao očekivanje i varijansu ocene kvantila modela P+E sa istom pretpostavkom da ukupan broj prekoračenja $\eta(Nt^*) = M$ tokom N godina ne može biti jednak nuli, i to tako što je u izraz za ocenu kvantila zamenio parametar $\hat{\Lambda}$ sa M/N :

$$\hat{z}_T = \hat{\beta}[y_T + \ln \hat{\Lambda}] = \hat{\beta}[y_T + \ln(M/N)] = \hat{\beta}[y_T + \ln M - \ln N]$$

Uslovno očekivanje ovako izraženog kvantila za fiksiranu vrednost $M = m$ je:

$$E[\hat{z}_T | M = m] = (y_T + \ln m - \ln N) \cdot E[\hat{\beta} | M = m] = \beta(y_T + \ln m - \ln N)$$

dok je uslovna varijansa:

$$\text{var}[\hat{z}_T | M = m] = (y_T + \ln m - \ln N)^2 \cdot \text{var}[\hat{\beta} | M = m] = \frac{\beta^2}{m} (y_T + \ln m - \ln N)^2$$

Koristeći se poznatim izrazima:

$$E[\hat{z}_T | M > 0] = E[E(\hat{z}_T | M) | M > 0]$$

$$\text{var}[\hat{z}_T | M > 0] = \text{var}[E(\hat{z}_T | M) | M > 0] + E[\text{var}(\hat{z}_T | M) | M > 0]$$

Buishand je dobio uslovno očekivanje i varijansu ocene kvantila:

$$\begin{aligned} E[\hat{z}_T | M > 0] &= E[\beta(y_T + \ln M - \ln N) | M > 0] = \beta\{y_T - \ln N + E[\ln M | M > 0]\} \\ \text{var}[\hat{z}_T | M > 0] &= \text{var}[\beta(y_T + \ln M - \ln N) | M > 0] + E\left[\frac{\beta^2}{M} (y_T + \ln M - \ln N)^2 | M > 0\right] = \\ &= \beta^2 \left\{ E\left[\frac{\ln^2 M}{M} | M > 0\right] + \text{var}[\ln M | M > 0] + 2(y_T - \ln N) E\left[\frac{\ln M}{M} | M > 0\right] + \right. \\ &\quad \left. + (y_T - \ln N)^2 E\left[\frac{1}{M} | M > 0\right] \right\} \end{aligned} \quad (58)$$

Kao što se vidi, izrazi (58) do kojih je došao Buishand (1990) su identični izrazima (56) koje su dobili Rassmussen i Rosbjerg (1989) preko funkcije gustine raspodele ocene kvantila.

U tabelama 3 i 4 uporedo su prikazani izrazi za očekivanje i varijansu ocene kvantila modela P+E prema različitim pristupima. Pri tome su izrazi (55) i (56) preuređeni zamenjivanjem $y_T - \ln N$ sa $y_T + \ln \Lambda - \ln(N\Lambda)$ kako bi bili uporedivi sa izrazima (44), (45) i (46).

III.2.2 O uslovnim očekivanjima ukupnog broja prekoračenja M

Uslovna očekivanja Poasonove slučajne promenljive M sa parametrom $N\Lambda$, oblika $E[g(M) | M > 0]$, koja figurišu u izrazima za očekivanje i varijansu kvantila, mogu se tačno izračunati numerički, dok je Buishand (1990) dao i uprošćene izraze za približan proračun sa dovoljnom tačnošću. Međutim, s obzirom da se radi o uslovnim očekivanjima u kojima se jedino isključuje vrednost $M = 0$, ova očekivanja se ne razlikuju mnogo od bezuslovnih očekivanja, dok aproksimacija oblika $E[g(M) | M > 0] \approx g(N\Lambda)$ u najvećem broju slučajeva sasvim zadovoljava. To naročito važi za vrednosti $N\Lambda > 20$, dakle za ukupan broj prekoračenja veći od 20, što je u praksi uvek ispunjeno. Na slici 24 prikazana su dva od ovih uslovnih očekivanja u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$, izračunata numerički (tačan proračun) i približno kao $E[g(M) | M > 0] \approx g(N\Lambda)$.

Tabela 3. Uporedni pregled izraza za očekivanje ocene kvantila modela P+E.

Pristup razvoja u Tejlorov red:

$$E[\hat{z}_T] = z_T - \frac{\beta}{2N\Lambda}$$

Rasmussen i Rosbjerg (1989), Buishand (1990):

$$E[\hat{z}_T | M > 0] = z_T + \beta\{E[\ln M | M > 0] - \ln(N\Lambda)\}$$

Ashkar i Rousselle (1981), Nachtnebel i Konecny (1987):

$$E[\hat{z}_T] = z_T + \beta\{E[\ln M | M > 0] - \ln(N\Lambda)\}(1 - e^{-N\Lambda}) - \beta(y_T + \ln \Lambda)e^{-N\Lambda}$$

Tabela 4. Uporedni pregled izraza za varijansu ocene kvantila modela P+E.

Cunnane (1973):

$$\text{var}[\hat{z}_T] = \frac{\beta^2}{N\Lambda} [(y_T + \ln \Lambda)^2 + 1]$$

Rosbjerg (1985):

$$\text{var}[\hat{z}_T] = \frac{\beta^2}{N\Lambda} [K_1 (y_T + \ln \Lambda)^2 + 1]$$

Rasmussen i Rosbjerg (1989), Buishand (1990):

$$\text{var}[\hat{z}_T | M > 0] = \frac{\beta^2}{N\Lambda} [K_1 (y_T + \ln \Lambda)^2 + 2K_2 (y_T + \ln \Lambda) + K_3]$$

Ashkar i Rousselle (1981), Nachtnebel i Konecny (1987):

$$\text{var}[\hat{z}_T] = \frac{\beta^2}{N\Lambda} \{(K_1 + K_0)(y_T + \ln \Lambda)^2 + 2(K_2 + K_0 K_4)(y_T + \ln \Lambda) + K_3 + K_0 K_4^2\}(1 - e^{-N\Lambda})$$

gde su:

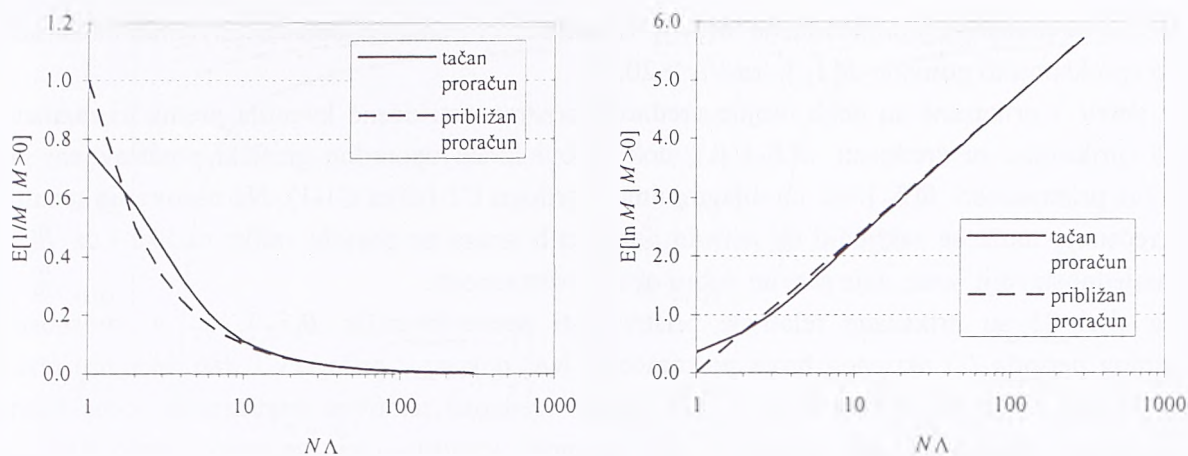
$$K_0 = N\Lambda \cdot P\{M = 0\} = N\Lambda e^{-N\Lambda}$$

$$K_1 = N\Lambda \cdot E\left[\frac{1}{M} | M > 0\right]$$

$$K_2 = N\Lambda \cdot \left\{ E\left[\frac{\ln M}{M} | M > 0\right] - E\left[\frac{1}{M} | M > 0\right] \cdot \ln(N\Lambda) \right\}$$

$$K_3 = N\Lambda \cdot \left\{ \text{var}[\ln M | M > 0] + E\left[\frac{\ln^2 M}{M} | M > 0\right] - 2E\left[\frac{\ln M}{M} | M > 0\right] \cdot \ln(N\Lambda) + E\left[\frac{1}{M} | M > 0\right] \cdot \ln^2(N\Lambda) \right\}$$

$$K_4 = E[\ln M | M > 0] - \ln(N\Lambda)$$



Slika 24. Uslovna očekivanja dve funkcije ukupnog broja prekoračenja M ($1/M$ i $\ln M$) pod uslovom da je $M > 0$ u poređenju sa približnim izrazima ($1/N\Lambda$ i $\ln(N\Lambda)$).

III.2.3 Pristrasnost ocene kvantila modela P+E

Pristrasnost ocene kvantila modela P+E je jednaka:

$$B[\hat{z}_T] = E[\hat{z}_T] - z_T = E[\hat{z}_T] - \beta(y_T + \ln \Lambda)$$

Koristeći izraze za očekivanje ocene kvantila iz tabele 3, može se napraviti sledeća rekapitulacija izraza za pristrasnost ocene kvantila:

- pristup razvoja u Tejlorov red:

$$B[\hat{z}_T]_1 = -\frac{\beta}{2N\Lambda}$$

- Rasmussen i Rosbjerg (1989), Buishand (1990):

$$B[\hat{z}_T]_2 = \beta\{E[\ln M | M > 0] - \ln(N\Lambda)\}$$

- Ashkar i Rousselle (1987), Nachtnebel i Konecny (1987):

$$B[\hat{z}_T]_3 = \beta\{E[\ln M | M > 0] - \ln(N\Lambda)\}(1 - e^{-N\Lambda}) - \beta(y_T + \ln \Lambda)e^{-N\Lambda}$$

Iz gornjih izraza se može videti da $B[\hat{z}_T]_1$ i $B[\hat{z}_T]_2$ zavise samo od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$, dok $B[\hat{z}_T]_3$ zavisi i od $(y_T + \ln \Lambda)$, tj. od povratnog perioda T i prosečnog godišnjeg broja prekoračenja Λ . Međutim, drugi sabirak u izrazu za $B[\hat{z}_T]_3$ postaje veoma mali već za $N\Lambda = 20$ (s obzirom da je tada $e^{-N\Lambda}$ veoma malo; za $N\Lambda = 20$ iznosi 2×10^{-9}), pa se može reći da $B[\hat{z}_T]_3$ za razuman ukupan broj prekoračenja $N\Lambda$ ne zavisi od $(y_T + \ln \Lambda)$ već samo od $N\Lambda$. Istovremeno, $1 - e^{-N\Lambda}$ postaje veoma blisko jedinici, pa su razlike između $B[\hat{z}_T]_3$ i $B[\hat{z}_T]_2$ zanemarljive.

Razlika uslovnog očekivanja logaritma ukupnog broja prekoračenja kao slučajne promenljive i logaritma ukupnog broja prekoračenja u izrazu za $B[\hat{z}_T]_2$ je veoma mala, kao što je prikazano na slici 24 (desni dijagram). Za ukupan broj prekoračenja $N\Lambda > 20$ ta razlika je manja od 1%. Kako je razvoj $\ln M$ u Tejlorov red u okolini sredine $N\Lambda$:

$$\ln M \approx \ln(N\Lambda) + \frac{M - N\Lambda}{N\Lambda \cdot 1!} - \frac{(M - N\Lambda)^2}{(N\Lambda)^2 \cdot 2!} + \dots$$

to je:

$$E[\ln M] - \ln(N\Lambda) \approx -\frac{1}{(N\Lambda)^2 \cdot 2!} \text{var}[M] = -\frac{1}{2N\Lambda}$$

pa se vidi da je $B[\hat{z}_T]_1$ aproksimacija $B[\hat{z}_T]_2$ za veliko $N\Lambda$ i da se pristrasnost kvantila može sasvim dobro aproksimirati pomoću $B[\hat{z}_T]_1$ za $N\Lambda > 20$.

U tabeli 5 prikazane su neke brojne vrednosti pristrasnosti ocene kvantila prema tri razmatrana izraza (prikazane su vrednosti $B[\hat{z}_T]/\beta$), dok su ovi izrazi uporedno grafički predstavljeni preko relativne pristrasnosti $B[\hat{z}_T]/z_T$ na dijagramima u prilogu C1 (slika C1-1). Na osnovu tih rezultata i gore rečenog, može se zaključiti da između ponuđenih izraza ne postoje velike razlike i da $B[\hat{z}_T]_1$, kao najjednostavniji izraz, daje sasvim dobru ocenu pristrasnosti.

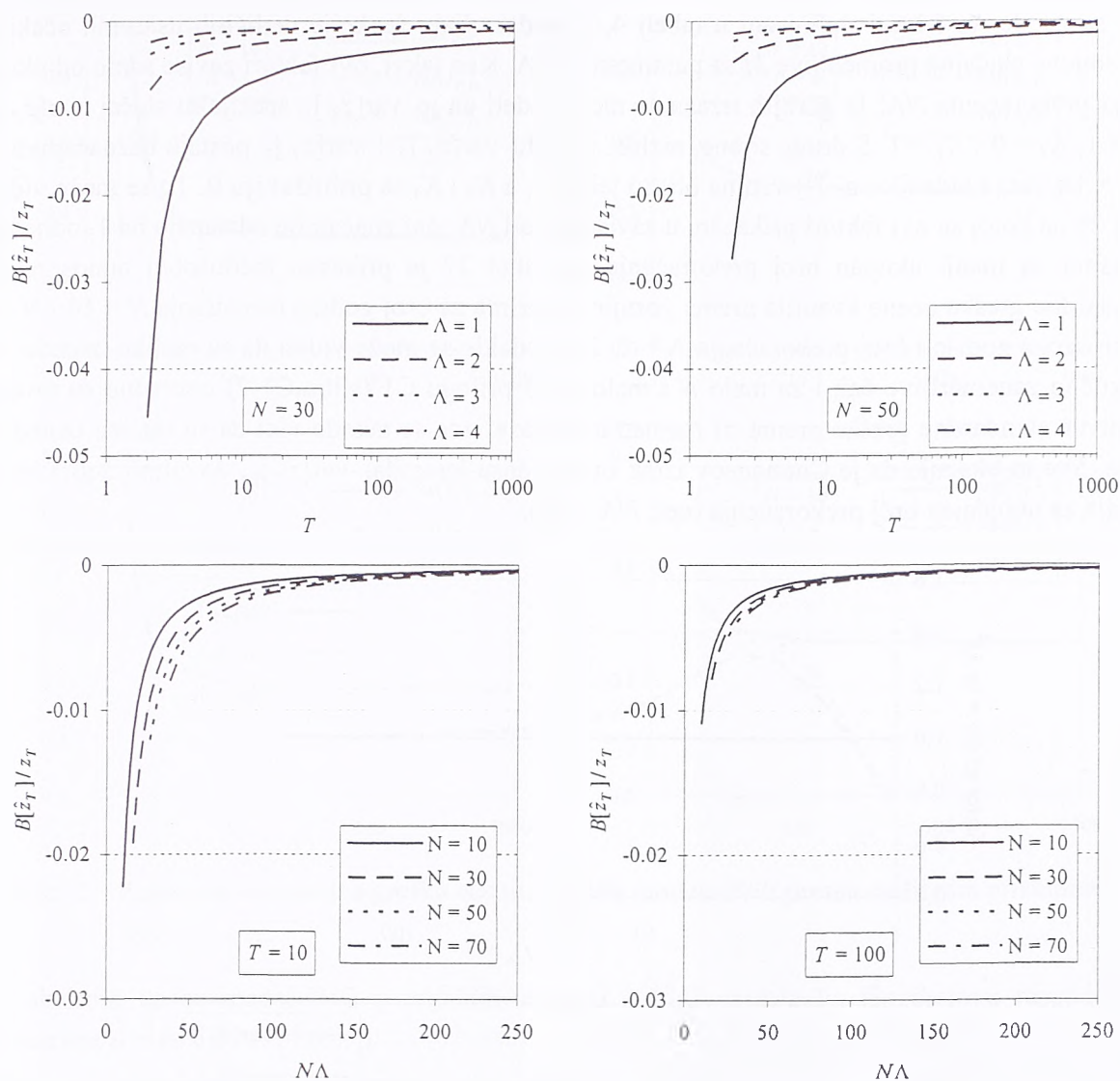
Na slici 25 su prikazane relativne pristrasnosti ocene kvantila $B[\hat{z}_T]_1/z_T$ u zavisnosti od povratnog perioda T i ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$, dok su u prilogu C1 dati detaljniji rezultati (slika C1-3). U tabeli 6 prikazane su i neke brojne vrednosti relativne pristrasnosti ocene kvantila. Pristrasnost je generalno mala (manja od 5% vrednosti kvantila, osim za veoma malo $N\Lambda$), ali je konsistentno negativna, što ukazuje na potcenjivanje merodavnih velikih voda.

Tabela 5. Pristrasnost ocene kvantila modela P+E prema različitim autorima u procentima od srednje vrednosti prekoračenja $E[Z] = \beta$.

T		$\Lambda = 1$				$\Lambda = 2$			
		N				N			
		10	20	50	100	10	20	50	100
2	B_1/β	-5.00	-2.50	-1.00	-0.50	-2.50	-1.25	-0.50	-0.25
	B_2/β	-5.51	-2.62	-1.02	-0.50	-2.62	-1.28	-0.50	-0.25
	B_3/β	-5.51	-2.62	-1.02	-0.50	-2.62	-1.28	-0.50	-0.25
10	B_1/β	-5.00	-2.50	-1.00	-0.50	-2.50	-1.25	-0.50	-0.25
	B_2/β	-5.51	-2.62	-1.02	-0.50	-2.62	-1.28	-0.50	-0.25
	B_3/β	-5.52	-2.62	-1.02	-0.50	-2.62	-1.28	-0.50	-0.25
100	B_1/β	-5.00	-2.50	-1.00	-0.50	-2.50	-1.25	-0.50	-0.25
	B_2/β	-5.51	-2.62	-1.02	-0.50	-2.62	-1.28	-0.50	-0.25
	B_3/β	-5.53	-2.62	-1.02	-0.50	-2.62	-1.28	-0.50	-0.25

Tabela 6. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+E $B[\hat{z}_T]_1/z_T$ (u procentima).

Povratni period T (god)	Prosečan broj prekoračenja Λ	Broj godina osmatranja N		
		10	30	50
		2	1	-13.6
2	-2.36		-0.79	-0.47
3	-1.14		-0.38	-0.23
10	1	-2.22	-0.74	-0.44
	2	-0.85	-0.28	-0.17
	3	-0.50	-0.17	-0.10
100	1	-1.09	-0.36	-0.22
	2	-0.47	-0.16	-0.09
	3	0.29	-0.10	-0.06
1000	1	-0.72	-0.24	-0.14
	2	-0.33	-0.11	-0.07
	3	-0.21	-0.07	-0.04



Slika 25. Relativna pristranost ocene kvantila po modelu P+E u zavisnosti od povratnog perioda T (gore) i ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (dole).

III.2.4 Varijansa ocene kvantila modela P+E

Na osnovu različitih pristupa o kojima je bilo reči u odeljku III.2.1, ovde će se razmatrati sledeći izrazi za varijansu kvantila modela P+E :

- Cunnane (1973):

$$\text{var}[\hat{z}_T]_1 = \frac{\beta^2}{N\Lambda} [(y_T + \ln \Lambda)^2 + 1]$$

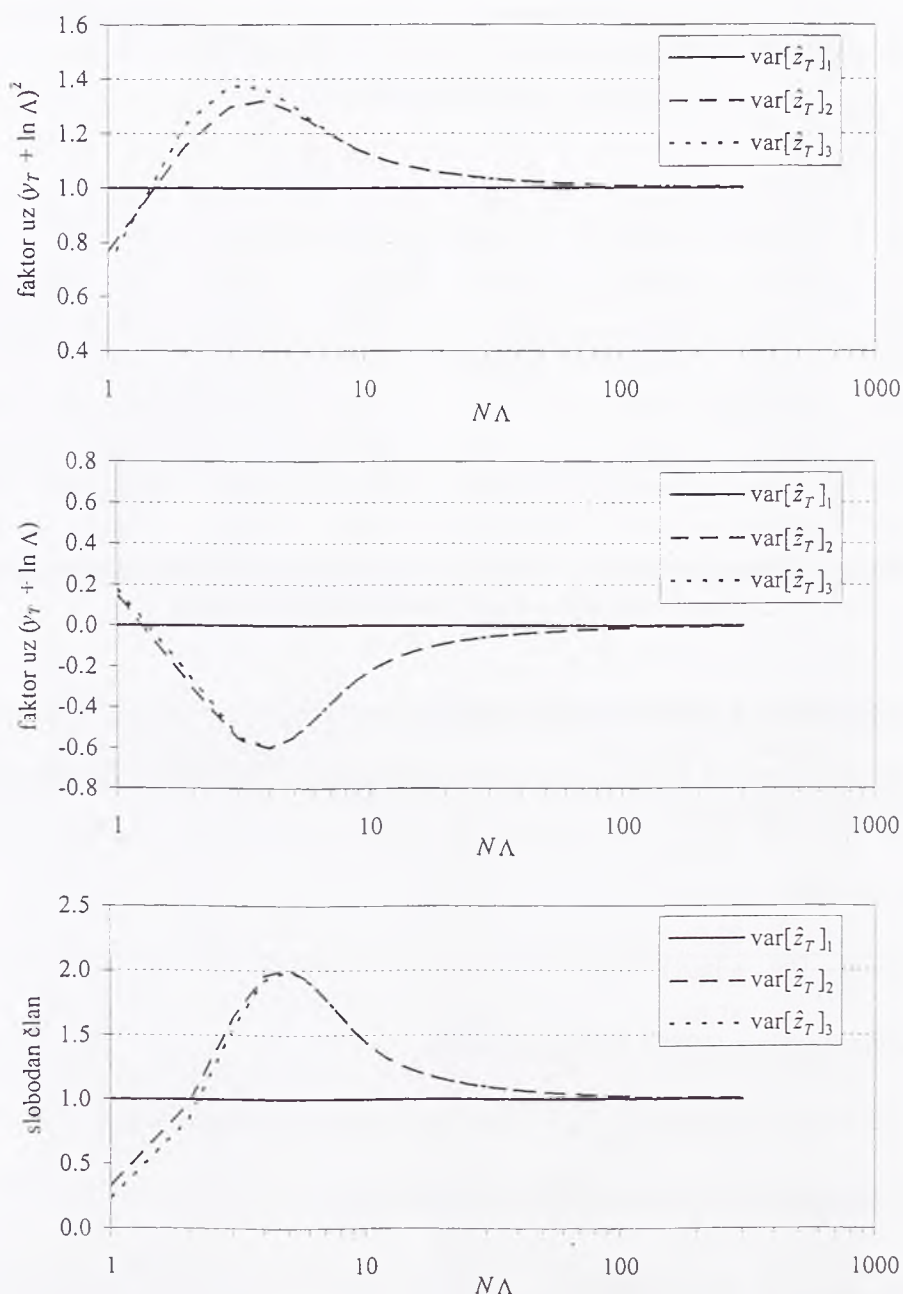
- Rasmussen i Rosbjerg (1989), Buishand (1990):

$$\text{var}[\hat{z}_T]_2 = \text{var}[\hat{z}_T | M > 0] = \frac{\beta^2}{N\Lambda} [K_1 (y_T + \ln \Lambda)^2 + 2K_2 (y_T + \ln \Lambda) + K_3]$$

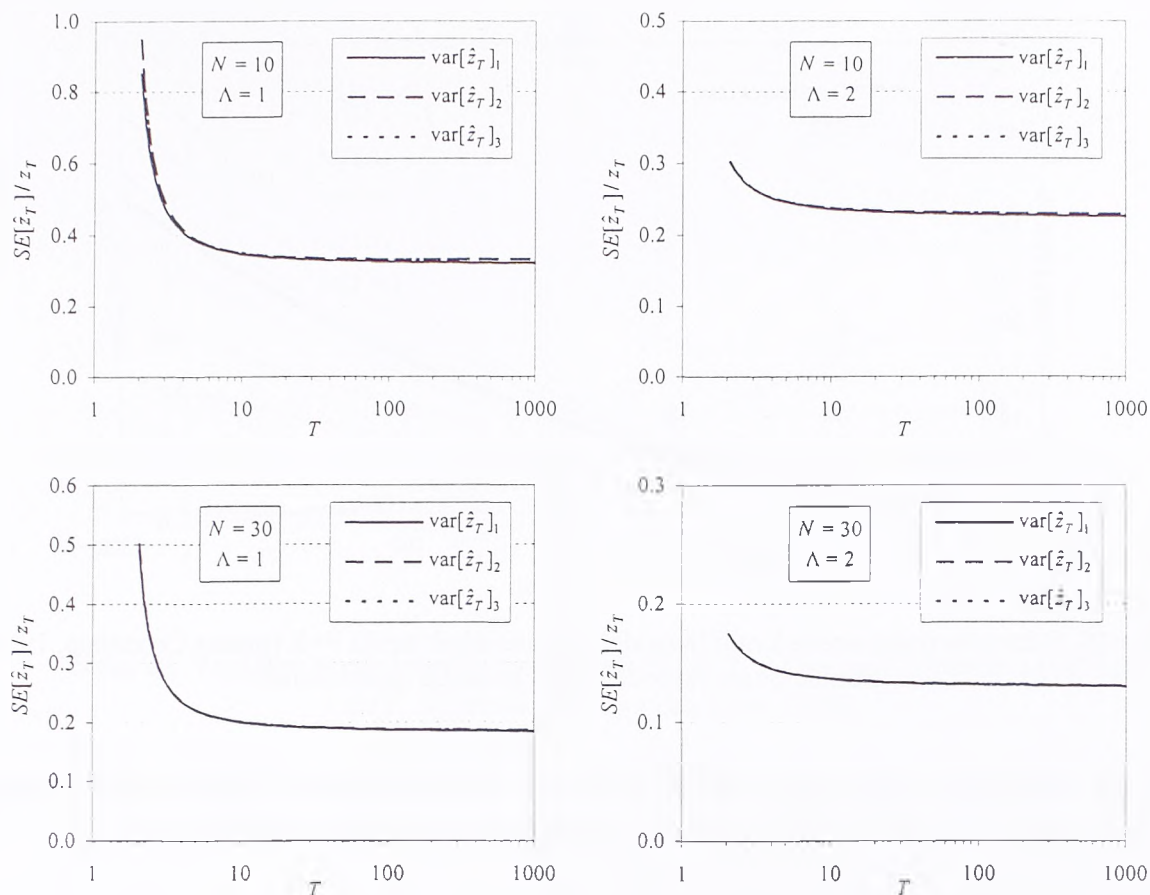
- Ashkar i Rousselle (1981), Nachtnebel i Konecny (1987):

$$\text{var}[\hat{z}_T]_3 = \frac{\beta^2}{N\Lambda} [(K_1 + K_0)(y_T + \ln \Lambda)^2 + 2(K_2 + K_0 K_4)(y_T + \ln \Lambda) + K_3 + K_0 K_4^2] (1 - e^{-N\Lambda})$$

gde su K_0 do K_4 faktori definisani u tabeli 4, a predstavljaju funkcije različitih uslovnih očekivanja Poasonove slučajne promenljive M sa parametrom $N\Lambda$. Kao takvi, ovi faktori zavise samo od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$. Iz gornjih izraza se može videti da je $\text{var}[\hat{z}_T]_1$ specijalni slučaj $\text{var}[\hat{z}_T]_2$ za $K_1 = 1, K_2 = 0$ i $K_3 = 1$. S druge strane, razlike između $\text{var}[\hat{z}_T]_2$ i $\text{var}[\hat{z}_T]_3$ postaju beznačajne već za $N\Lambda = 10$, jer je tada $(1 - e^{-N\Lambda})$ veoma blisko jedinici, a K_0 i K_4 se približavaju 0. To se može videti na slici 26 na kojoj su ovi faktori prikazani u zavisnosti od $N\Lambda$; oni značajnije odstupaju od 1, odnosno od 0, samo za manji ukupan broj prekoračenja. Na slici 27 je prikazan međusobni odnos relativne standardne greške ocene kvantila prema gornjim izrazima za broj godina osmatranja $N = 10$ i $N = 30$ i za prosečan godišnji broj prekoračenja $\Lambda = 1, 2, 3$, odakle se može videti da su razlike između izraza praktično zanemarljive čak i za malo N i malo Λ . U prilogu C1 (slika C1-2) uporedno su prikazane relativne standardne greške prema tri razmatrana izraza, gde se takođe vidi da su razlike između njih male. Sve to ukazuje da je Cunnaneov izraz za varijansu kvantila, $\text{var}[\hat{z}_T]_1$, dovoljno dobra aproksimacija za uobičajen broj prekoračenja (npr. $N\Lambda > 30$).



Slika 26. Faktori u izrazima za varijansu ocene kvantila u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.



Slika 27. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+E prema različitim pristupima.

S obzirom da se model P+E parcijalnih serija u suštini predstavlja Gumbelovu raspodelu sa parametrima $\mu = x_0 + \beta \ln \Lambda$ i $\alpha = \beta$:

$$F(x) = \exp\{-\Lambda \exp[-(x - x_0)/\beta]\} = \exp\{-\exp[-(x - x_0 - \beta \ln \Lambda)/\beta]\}$$

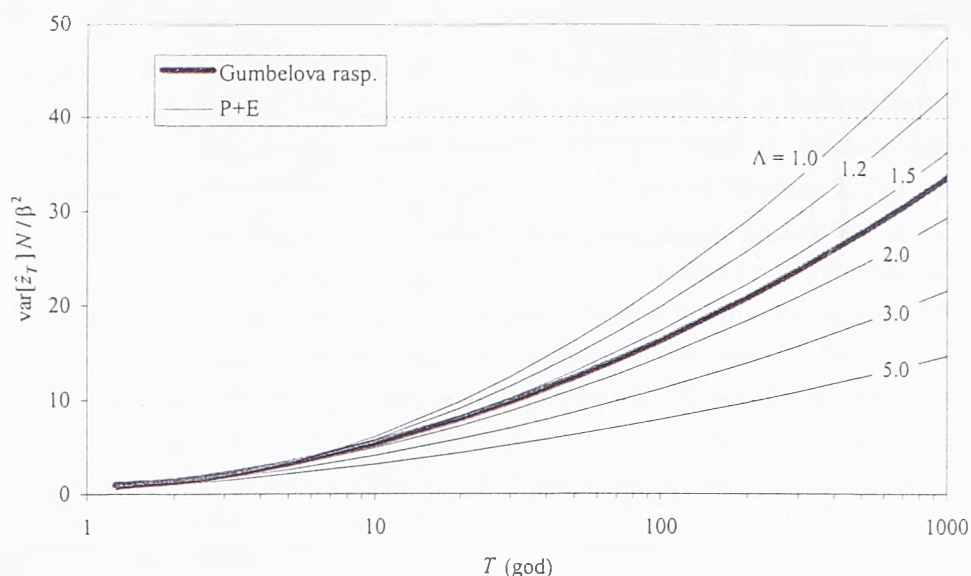
varijanse kvantila po ovom modelu mogu se porediti i sa varijansom kvantila Gumbelove raspodele za godišnje maksimume kako bi se stekla slika o efikasnosti parcijalnih serija u odnosu na nizove godišnjih maksimuma (Cunnane, 1973). Varijansa ocene kvantila Gumbelove raspodele za seriju godišnjih maksimuma, prema Kimballu (1949), glasi:

$$\text{var}[\hat{z}_T]_{GM} = \frac{\alpha^2}{N} \left[1 + \frac{6}{\pi^2} (y_T + 1 - C_E)^2\right] = \frac{\beta^2}{N} A_{GM}(T)$$

gde je C_E Ojlerova konstanta ($C_E = 0.5772$), dok je prema Cunnaneu (1973):

$$\text{var}[\hat{z}_T]_1 = \frac{\beta^2}{N\Lambda} [(y_T + \ln \Lambda)^2 + 1] = \frac{\beta^2}{N} A_1(T, \Lambda)$$

Kada se uporede veličine $A_{GM}(T)$ i $A_1(T, \Lambda)$, prikazane na slici 28, može se videti da je varijansa kvantila po modelu P+E manja od varijanse kvantila po Gumbelovoj raspodeli ako je Λ veće od 1.65. To praktično znači da ukoliko parcijalna serija sadrži manje od $1.65N$ podataka, varijansa kvantila nije prihvatljiva u poređenju sa kvantilima po Gumbelovoj raspodeli za godišnje maksimume. Ukoliko je $\Lambda = 1$, varijansa kvantila iz parcijalnih serija je manja od one za godišnje maksimume samo za povratne periode manje od 5 godina.



Slika 28. Odnos varijansi ocene kvantila modelom parcijalnih serija P+E (prema Cunnaneu, 1973) i Gumbelovom raspodelom za godišnje maksimume.

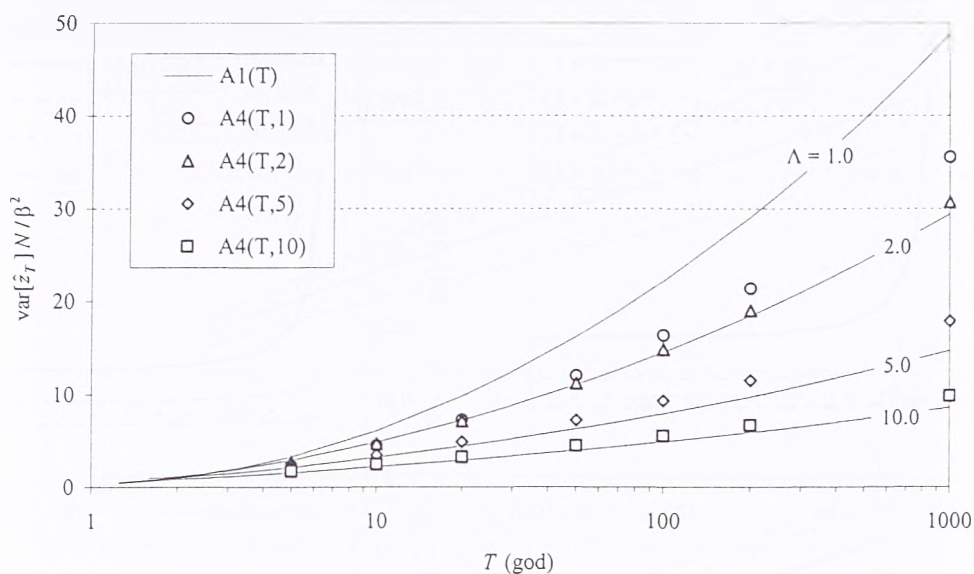
Pored analitičkih izraza prema različitim pristupima, Tavares i da Silva (1983) su dali rezultate za varijansu ocene kvantila do kojih su došli simulacijama metodom Monte Karlo u obliku:

$$\text{var}[\hat{z}_T]_4 = \frac{\beta^2}{N} A_4(T, \Lambda)$$

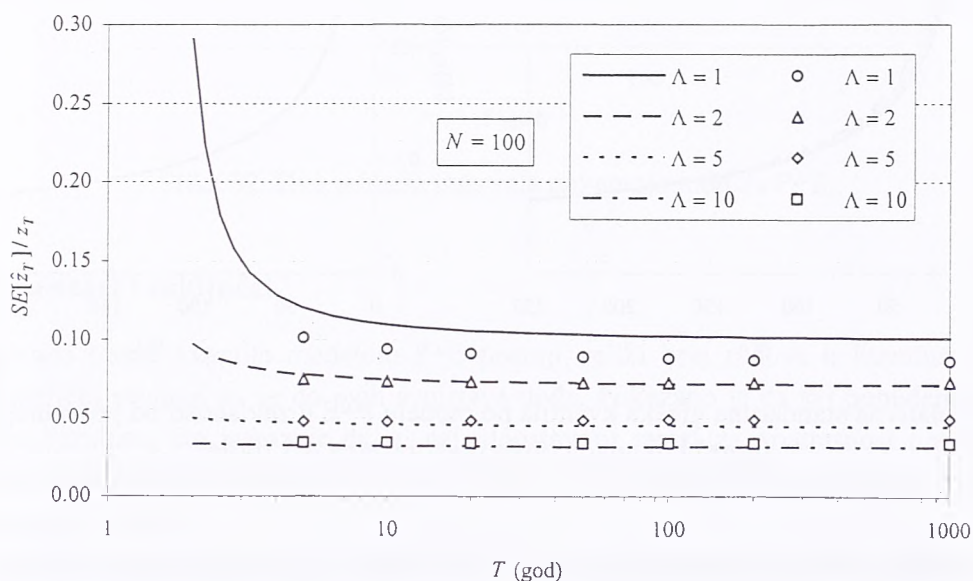
Njihovi rezultati se odnose na dužinu niza od $N = 100$ godina i prikazani su u tabeli 7. Poredeći svoje rezultate sa rezultatima Cunnanea (slika 29), Tavares i da Silva su konstatovali da približan Cunnaneov izraz daje znatno veću varijansu za $\Lambda < 2$, odnosno manju varijansu za $\Lambda > 2$, dok su rezultati uporedivi su samo u okolini vrednosti $\Lambda = 2$. Tavares i Da Silva smatraju da uzrok grešaka može biti zanemarivanje izvoda višeg reda u razvoju funkcija slučajne promenljive u Tejlorov niz i zanemarivanje $\text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{\beta}]$ u pristupu Cunnanea (1973). Međutim, rezultati Tavaresa i da Silve (1983) su uporedivi sa izrazom Cunnanea i ostalim analitičkim izrazima samo za $N = 100$ godina, što se može videti na slici 30 gde su prikazane relativne standardne greške kvantila prema izrazu Cunnanea za različite dužine niza N i prema Tavaresu i da Silvi za $N = 100$ godina. Razlike između ova dva pristupa za $N = 100$ godina su zaista najmanje kada je $\Lambda = 2$, ali nisu velike ni za ostale vrednosti Λ (za $\Lambda = 1$, radi se o razlikama u relativnoj standardnoj greški do 2%, a za $\Lambda = 5$ i $\Lambda = 10$ o razlikama manjim od 0.5%).

Tabela 7. Varijansa ocene kvantila $\text{var}[\hat{z}_T]/(\beta^2 / N) = A_4(T, \Lambda)$ na osnovu simulacija metodom Monte Karlo za dužinu niza od $N = 100$ godina prema Tavaresu i da Silvi (1983).

Povratni period T (god)	Prosečan broj prekoračenja Λ			
	1	2	5	10
5	2.294	2.702	2.229	1.705
10	4.472	4.677	3.442	2.427
20	7.299	7.151	4.895	3.236
50	12.030	11.194	7.196	4.464
100	16.365	14.842	9.319	5.517
200	21.362	19.009	11.523	6.682
1000	35.507	30.682	17.845	9.814

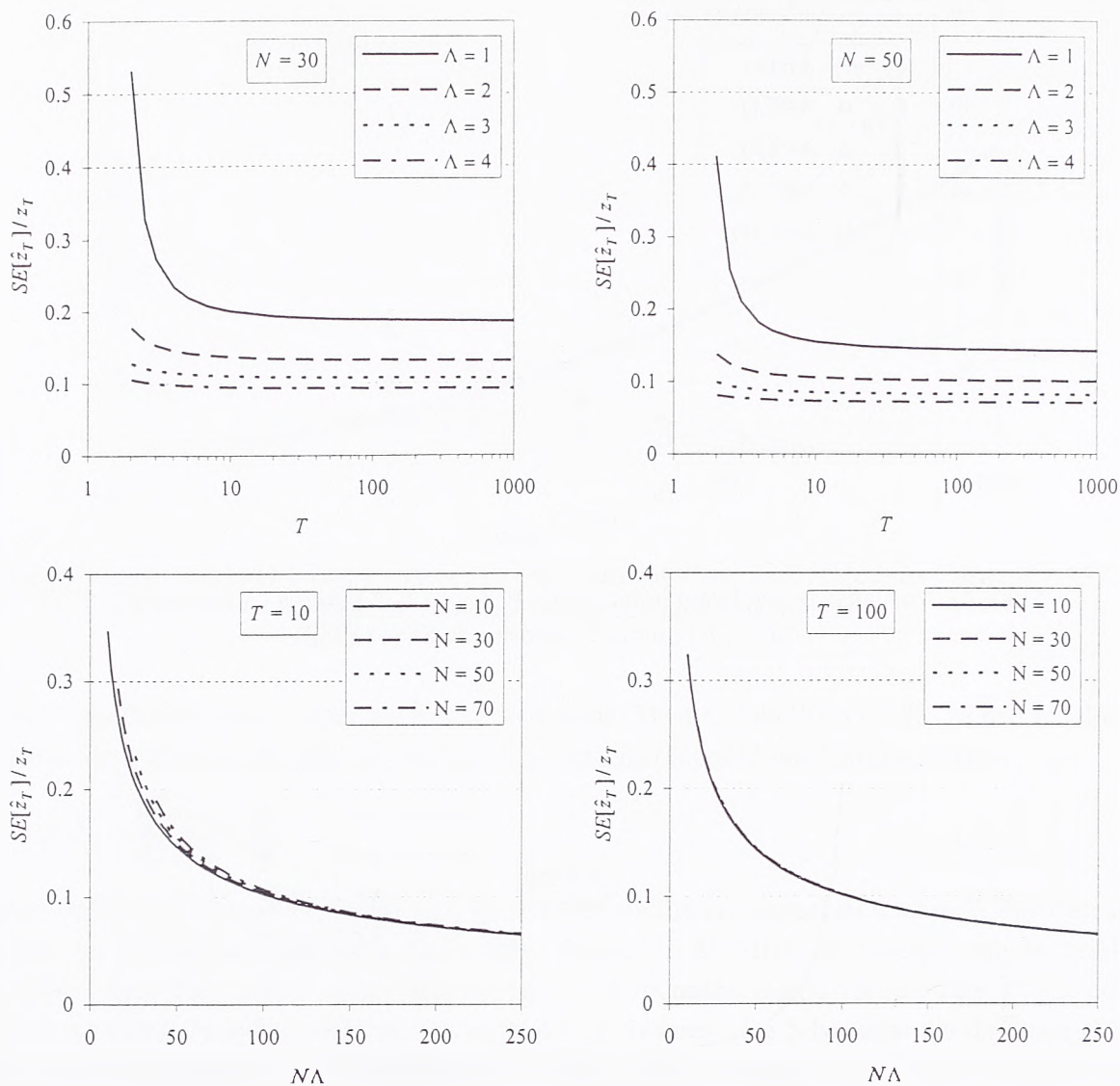


Slika 29. Varijanse ocene kvantila modelom P+E: $A_1(T, \Lambda)$ prema Cunnane-u (1973) i $A_4(T, \Lambda)$ prema Tavaresu i da Silvi (1983).



Slika 30. Relativna standardna greška ocene kvantila modelom P+E: prema Cunnaneu (1973) – pune linije, i prema Tavaresu i da Silvi (1983) – simboli.

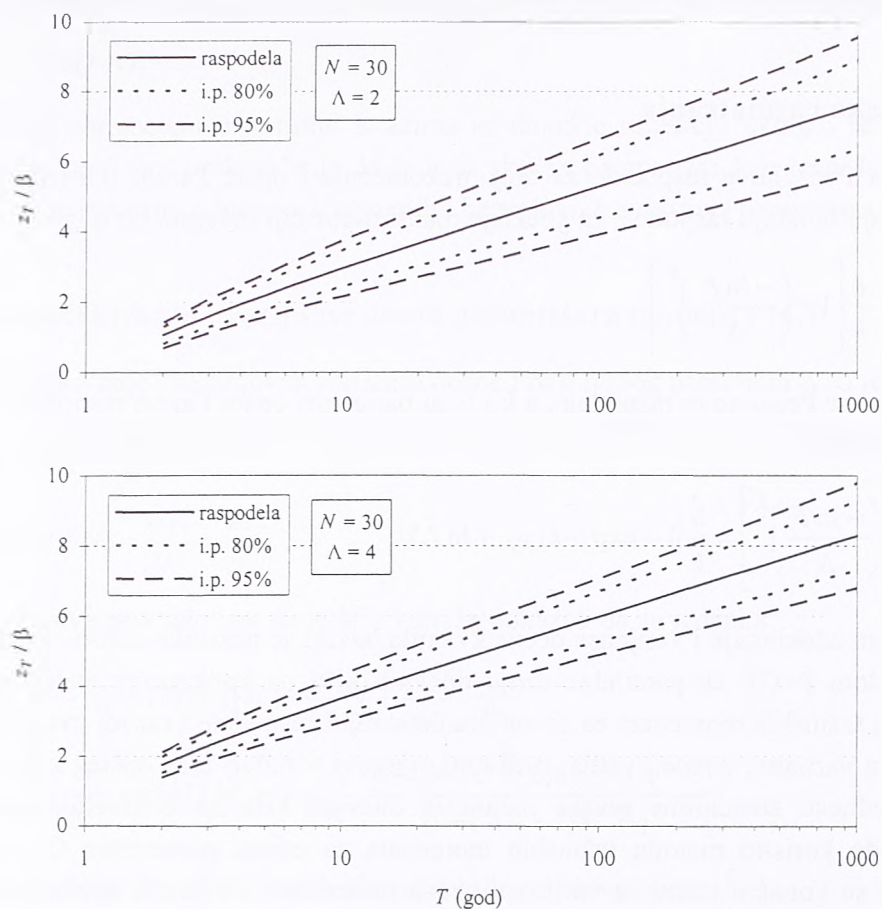
Na slici 31 su prikazane relativne standardne greške ocene kvantila po modelu P+E u zavisnosti od povratnog perioda T i od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$. Iz njih se može zaključiti da je relativna standardna greška najveća za manje povratne periode, mali broj godina osmatranja i mali prosečan godišnji broj prekoračenja, kada dostiže vrednosti i preko 50%. Za uobičajeni broj godina osmatranja i broj prekoračenja (npr. $N = 30$ i $\Lambda = 2$), relativna standardna greška je reda veličine 10–15%, pri čemu je opet najveća za male povratne periode (npr. 2 i 5 godina). Detaljniji rezultati su dati u prilogu C1 (slika C1-4). U tabeli 8 su prikazane neke brojne vrednosti relativnih standardnih grešaka, dok su na slici 32 prikazana dva primera intervala poverenja za ocenu kvantila modelom P+E.



Slika 31. Relativna standardna greška kvantila po modelu P+E u zavisnosti od povratnog perioda T (gore) i ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (dole).

Tabela 8. Relativne standardne greške ocene kvantila $SE[\hat{z}_T]/z_T$ (u procentima).

Povratni period T (god)	Prosečan broj prekoračenja Λ	Broj godina osmatranja N		
		10	30	50
2	1	91.9	53.1	41.1
	2	30.7	17.8	13.7
	3	22.1	12.8	9.9
10	1	34.6	20.0	15.5
	2	23.6	13.6	10.6
	3	19.1	11.0	8.5
100	1	32.4	18.7	14.5
	2	22.8	13.1	10.2
	3	18.5	10.7	8.3
1000	1	32.0	18.4	14.3
	2	22.6	13.0	10.1
	3	18.4	10.6	8.2



Slika 32. Dva primera intervala poverenja modela P+E.

III.2.5 Komentari i zaključci

O svojstvima ocene kvantila modelom P+E postoji veliki broj radova u literaturi u kojima su primenjeni različiti pristupi da se do ovih svojstava dođe. Pokazano je da svi ponuđeni pristupi daju veoma slične rezultate, što pokazuje da su najjednostavniji izrazi za pristrasnost i varijansu ocene kvantila, do kojih se dolazi pristupom razvoja u Tejlorov red, sasvim dobri pokazatelji grešaka u ovom modelu parcijalnih serija.

Izraz za varijansu ocene kvantila po modelu P+E koji je prvi predložio Cunnane (1973) dovoljno je tačan u poređenju sa izrazima kasnijih autora koji su uneli korekciju da pri oceni parametra eksponencijalne raspodele treba uzeti u obzir da ukupan broj prekoračenja M ne može biti jednak 0. Korekcije koje se na taj način nose sadrže proračun uslovnih očekivanja Poasonove slučajne promenljive M , pod uslovom $M > 0$, i nepotrebno komplikuju izraze za varijanse ne doprinoseći tačnosti.

Bez obzira na primenjeni pristup, rezultati pokazuju da pristrasnost i varijansa ocene kvantila najviše zavise od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$. Međutim, parcijalne serije ne treba zloupotrebjavati za mali broj godina osmatranja, jer su tada greške velike čak i pri velikom Λ .

Pristrasnost ocene kvantila modela P+E je generalno mala. Najveće vrednosti se javljaju za kratke nizove (mali broj godina osmatranja i mali prosečan godišnji broj prekoračenja) i za male povratne periode; međutim, za povratne periode veće od 10 godina i $\Lambda \geq 1$, pristrasnost je praktično uvek manja od 2% vrednosti kvantila. Standardna greška ocene kvantila je takođe najveća za male povratne periode i kratke nizove, dok je za povratne periode veće od 10 godina i $\Lambda \geq 1$ generalno manja od 20% vrednosti kvantila.

III.3 Neizvesnost ocene kvantila velikih voda modelom P+GP

III.3.1 Teorijska razmatranja

Kombinacija Poasonove raspodele za broj prekoračenja i opšte Pareto (GP) raspodele za visinu prekoračenja daje funkciju raspodele za godišnje maksimume čiji inverzni oblik glasi:

$$x(F) = x_0 + \frac{b}{k} \left[1 - \left(\frac{-\ln F}{\Lambda} \right)^k \right]$$

gde je Λ parametar Poasonove raspodele, a k i b su parametri opšte Pareto raspodele. Ocena kvantila prekoračenja je tada:

$$\hat{z}_T = \frac{\hat{b}}{\hat{k}} \left[1 - \left(\frac{-\ln F}{\hat{\Lambda}} \right)^{\hat{k}} \right] = \frac{\hat{b}}{\hat{k}} \left[1 - \exp\{-\hat{k}(y_T + \ln \hat{\Lambda})\} \right] \quad (59)$$

Određivanjem očekivanja i varijanse ocene kvantila bavilo se nekoliko autora. Fitzgerald (1989) se bavio se modelom P+GP za parcijalne serije dnevnih kiša na konkretnim stanicama, pri čemu je koristio metodu težinskih momenata za ocenu parametara GP raspodele i razvoj kvantila u Tejlorov red radi određivanja varijanse ocene kvantila; međutim, njegovi rezultati nisu opšteg karaktera već su dati kao brojne vrednosti standardne greške računskih dnevnih kiša na konkretnim stanicama. Wang (1991) je takođe koristio metodu težinskih momenata za ocenu parametara GP raspodele, ali je konstatovao da su konačni izrazi za varijansu ocena parametara i kvantila suviše komplikovani i da važe samo kao asimptotski izrazi, odnosno samo za velike dužine uzoraka. Zbog toga je sproveo Monte Karlo eksperimente, ali samo za prosečan godišnji broj prekoračenja $\Lambda = 1$ i dužinu uzorka od $N = 30$ godina. Rosbjerg i sar. (1992) su došli do očekivanja i varijanse ocene kvantila uz pomoć razvoja izraza (59) u Tejlorov red.

Parametar Λ Poasonove raspodele u modelu P+GP ocenjuje se kao prosečan broj prekoračenja $\hat{\Lambda} = M/N$, gde je M ukupan broj prekoračenja tokom N godina. Parametri k i b opšte Pareto raspodele ocenjuju se po metodi momenata na osnovu uzoračke srednje vrednosti i standardne devijacije niza prekoračenja, odnosno na osnovu uzoračkih težinskih momenata u slučaju metode težinskih momenata. U oba slučaja, u tim ocenama figuriše ukupan broj prekoračenja M kao dužina niza prekoračenja. Rosbjerg i sar. (1992) smatraju da se ove ocene ne mogu dobiti ukoliko je $M = 0$ ili $M = 1$ zbog deljenja sa M , odnosno $(M - 1)$. Kako M predstavlja Poasonovu slučajnu promenljivu sa srednjom vrednošću $N\Lambda$, isti autori smatraju da se očekivanje i varijansa ocene kvantila moraju odrediti kao uslovna očekivanja i varijanse pod uslovom da je $M > 1$.

Razvojem funkcije (59) u Tejlorov red, za varijansu i očekivanje ocene kvantila prekoračenja \hat{z}_T se dobija:

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{z}_T] = & \frac{(E\hat{b})^2 e^{-2G}}{(E\hat{\Lambda})^2} \text{var}[\hat{\Lambda}] + \frac{(E\hat{b})^2 [1 - (G+1)e^{-G}]^2}{(E\hat{k})^4} \text{var}[\hat{k}] + \frac{(1 - e^{-G})^2}{(E\hat{k})^2} \text{var}[\hat{b}] - \\ & - 2 \frac{E\hat{b}[1 - (G+1)e^{-G}](1 - e^{-G})}{(E\hat{k})^3} \text{cov}[\hat{k}, \hat{b}] \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} E[\hat{z}_T] = & \frac{E\hat{b}}{E\hat{k}} (1 - e^{-G}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{E\hat{b}(E\hat{k} + 1)e^{-G}}{(E\hat{\Lambda})^2} \text{var}[\hat{\Lambda}] + \frac{1}{2} \cdot \frac{E\hat{b}[2 - (G^2 + 2G + 2)e^{-G}]}{(E\hat{k})^3} \text{var}[\hat{k}] - \\ & - \frac{1 - (G+1)e^{-G}}{(E\hat{k})^2} \text{cov}[\hat{k}, \hat{b}] \end{aligned} \quad (61)$$

gde je sa G označeno:

$$G = Ek \cdot [y_T + \ln(E\hat{\Lambda})]$$

Svojstva ocena parametara u gornjim izrazima se donekle razlikuju ukoliko se posmatraju pod uslovom da je ukupan broj prekoračenja $M > 1$ ili ako se posmatraju kao bezuslovna svojstva. U sledećem odeljku se razmatra odnos ovih uslovnih i bezuslovnih svojstava parametara modela P+GP.

III.3.2 Uslovna očekivanja i varijanse ocena parametara modela P+GP

Bezuslovno očekivanje i bezuslovna varijansa ocene Poasonovog parametra Λ su jednaki:

$$\begin{aligned} E[\hat{\Lambda}] &= E[M / N] = \frac{N\Lambda}{N} = \Lambda \\ \text{var}[\hat{\Lambda}] &= \text{var}[M / N] = \frac{N\Lambda}{N^2} = \frac{\Lambda}{N} \end{aligned} \quad (62)$$

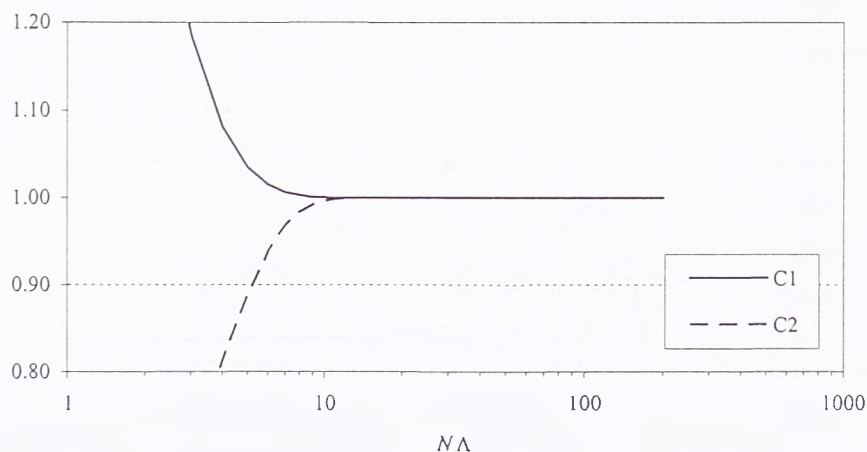
dok se za ova svojstva pod uslovom da je $M > 1$ može pokazati da su jednaka:

$$\begin{aligned} E[\hat{\Lambda} | M > 1] &= \frac{1}{N} E[M | M > 1] = \Lambda \cdot \frac{1 - e^{-N\Lambda}}{1 - (N\Lambda + 1)e^{-N\Lambda}} \\ \text{var}[\hat{\Lambda} | M > 1] &= \frac{1}{N^2} \text{var}[M | M > 1] = \frac{\Lambda}{N} \cdot \frac{1 - (N^2\Lambda^2 + 2)e^{-N\Lambda} + e^{-2N\Lambda}}{[1 - (N\Lambda + 1)e^{-N\Lambda}]^2} \end{aligned} \quad (63)$$

Ako se pogledaju odnosi između uslovnih i bezuslovnih svojstava ocene $\hat{\Lambda}$:

$$C_1 = \frac{E[\hat{\Lambda} | M > 1]}{E[\hat{\Lambda}]}, \quad C_2 = \frac{\text{var}[\hat{\Lambda} | M > 1]}{\text{var}[\hat{\Lambda}]}$$

može se videti da oni zavise samo od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$, što je prikazano na slici 33. Dijagram na ovoj slici pokazuje da se uslovna svojstva (63) razlikuju od bezuslovnih svojstava (62) samo za male vrednosti $N\Lambda$ (npr. za $N\Lambda < 20$), što u praktičnim proračunima nije od značaja.



Slika 33. Razlike između uslovnih i bezuslovnih očekivanja i varijansi ocene Poasonovog parametra Λ .

Izrazi za očekivanja i varijanse ocena parametara GP raspodele po metodi momenata i metodi težinskih momenata dati su u odeljku II.3.4; za fiksiran broj prekoračenja $M = m$ ti izrazi se mogu uopštiti na sledeći način:

$$\begin{aligned} E[\hat{k} | M = m] &= k + \frac{1}{m} \varphi_1(k), & E[\hat{b} | M = m] &= b + \frac{b}{m} \varphi_2(k) \\ \text{var}[\hat{k} | M = m] &= \frac{1}{m} \varphi_3(k), & \text{var}[\hat{b} | M = m] &= \frac{b^2}{m} \varphi_4(k), & \text{cov}[\hat{k}, \hat{b} | M = m] &= \frac{b}{m} \varphi_5(k) \end{aligned} \quad (64)$$

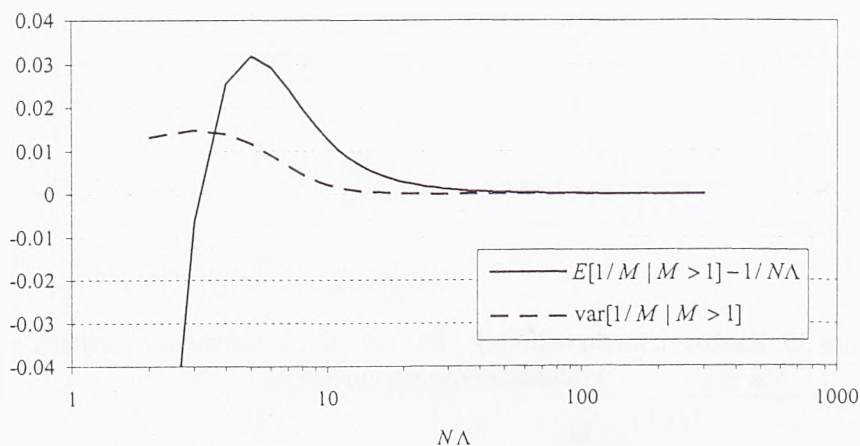
Uslovna očekivanja i varijanse ocena parametara GP raspodele uz uslov $M > 1$ su tada:

$$\begin{aligned} E[\hat{k} | M > 1] &= k + \frac{1}{N\Lambda} \varphi_1 K_1, & E[\hat{b} | M > 1] &= b + \frac{b}{N\Lambda} \varphi_2 K_1 \\ \text{var}[\hat{k} | M > 1] &= \frac{1}{N\Lambda} (\varphi_3 K_1 + \varphi_1^2 K_2), & \text{var}[\hat{b} | M > 1] &= \frac{b^2}{N\Lambda} (\varphi_4 K_1 + \varphi_2^2 K_2), \\ \text{cov}[\hat{k}, \hat{b} | M > 1] &= \frac{b}{N\Lambda} (\varphi_5 K_1 + \varphi_1 \varphi_2 K_2) \end{aligned} \quad (65)$$

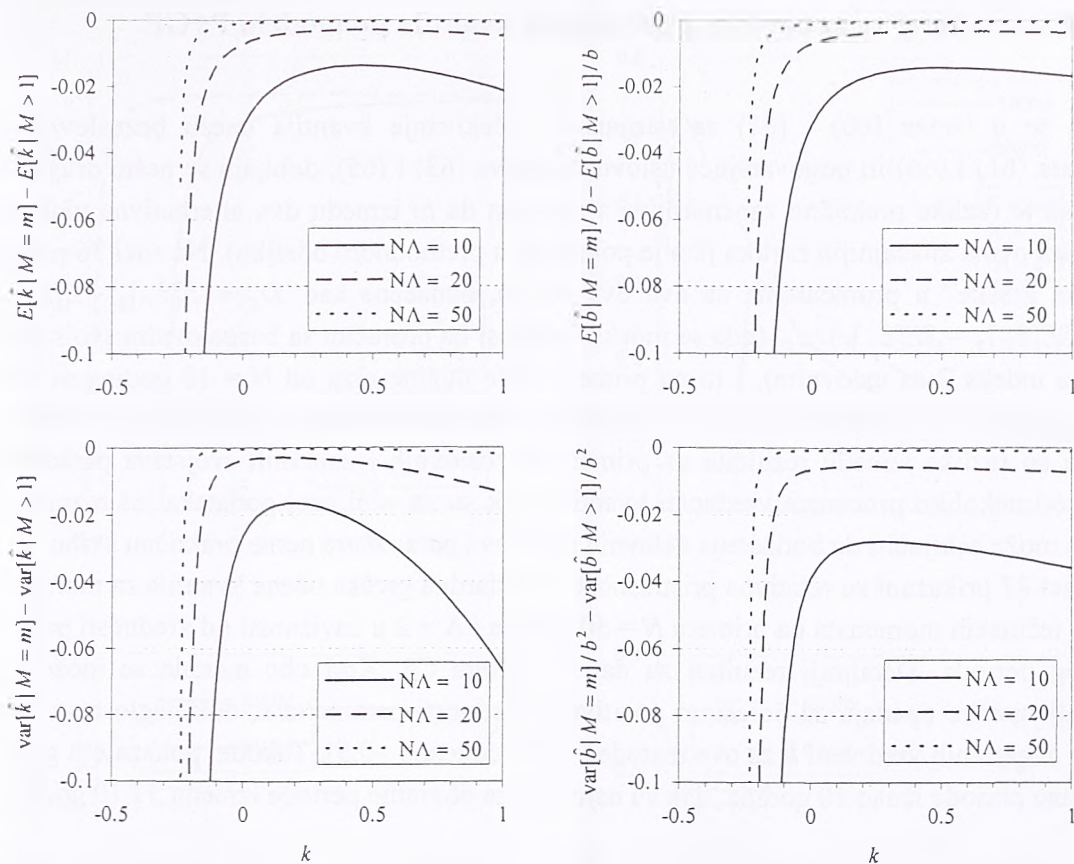
gde su $K_1 = N\Lambda E[1/M | M > 1]$ i $K_2 = N\Lambda \text{var}[1/M | M > 1]$. Međutim, uslovno očekivanje $E[1/M | M > 1]$ koje figuriše u gornjim izrazima može se aproksimirati sa $1/N\Lambda$ za $N\Lambda > 20$, dok je uslovna varijansa $\text{var}[1/M | M > 1]$ praktično zanemarljiva (slika 34). To znači da se izrazi (65) mogu aproksimirati izrazima (64) kada se u njima stavi $m = N\Lambda$:

$$\begin{aligned} E[\hat{k}] &= k + \frac{1}{N\Lambda} \varphi_1(k), & E[\hat{b}] &= b + \frac{b}{N\Lambda} \varphi_2(k) \\ \text{var}[\hat{k}] &= \frac{1}{N\Lambda} \varphi_3(k), & \text{var}[\hat{b}] &= \frac{b^2}{N\Lambda} \varphi_4(k), & \text{cov}[\hat{k}, \hat{b}] &= \frac{b}{N\Lambda} \varphi_5(k) \end{aligned} \quad (66)$$

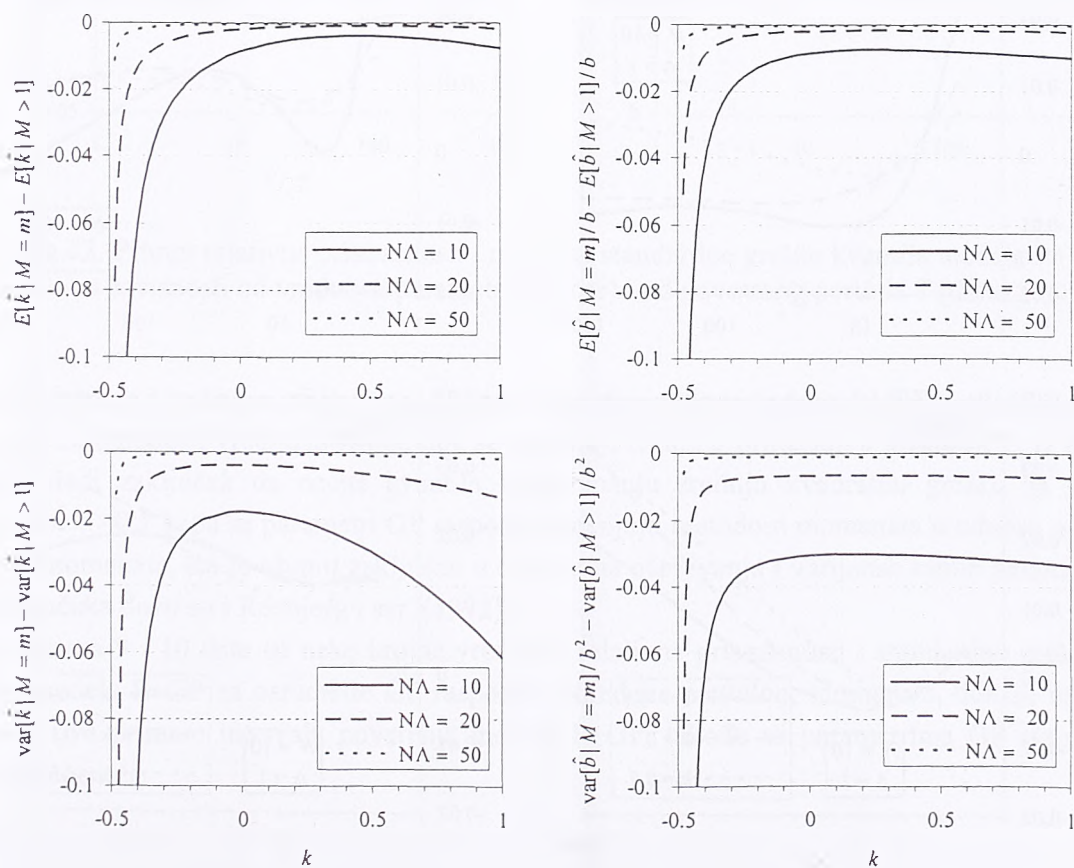
Na slikama 35a i 35b prikazane su razlike između uslovnih svojstava parametara GP raspodele (65) i približnih svojstava (66), odakle se vidi se da su te razlike zaista male osim u zonama gde se parametar k približava vrednostima -0.25 (za metodu momenata) odnosno -0.5 (za metodu težinskih momenata) gde ova očekivanja i varijanse teže beskonačnosti (iz razloga pomenutih u poglavlju II.3.4). Može se zaključiti da u praktičnim primenama nema razloga za dodatno komplikovanje proračuna varijanse kvantila sa uslovnim očekivanjima i varijansama parametara, dok kritične zone parametra k treba izbegavati i iz razloga što asimptotske formule za očekivanja i varijanse parametara u ovim zonama ne daju dobre rezultate.



Slika 34. Razlika uslovnog očekivanja $E[1/M | M > 1]$ i približne vrednosti $1/N\Lambda$ i uslovna varijansa $\text{var}[1/M | M > 1]$.



Slika 35a. Razlike između svojstava ocena parametara GP raspodele određenih metodom momenata za fiksiran broj prekoračenja i pod uslovom da je $M > 1$.

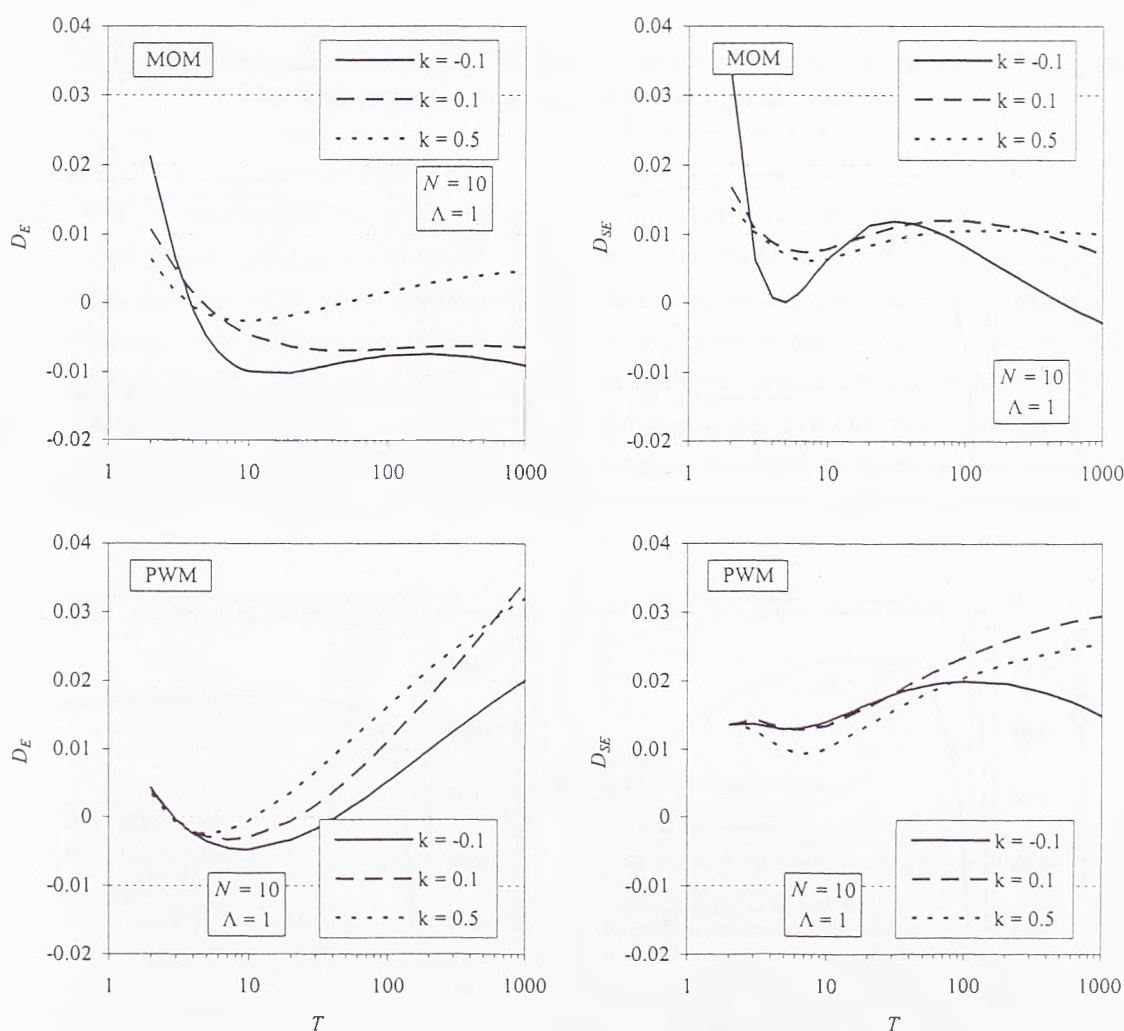


Slika 35b. Razlike između svojstava ocena parametara GP raspodele određenih metodom PWM za fiksiran broj prekoračenja i pod uslovom da je $M > 1$.

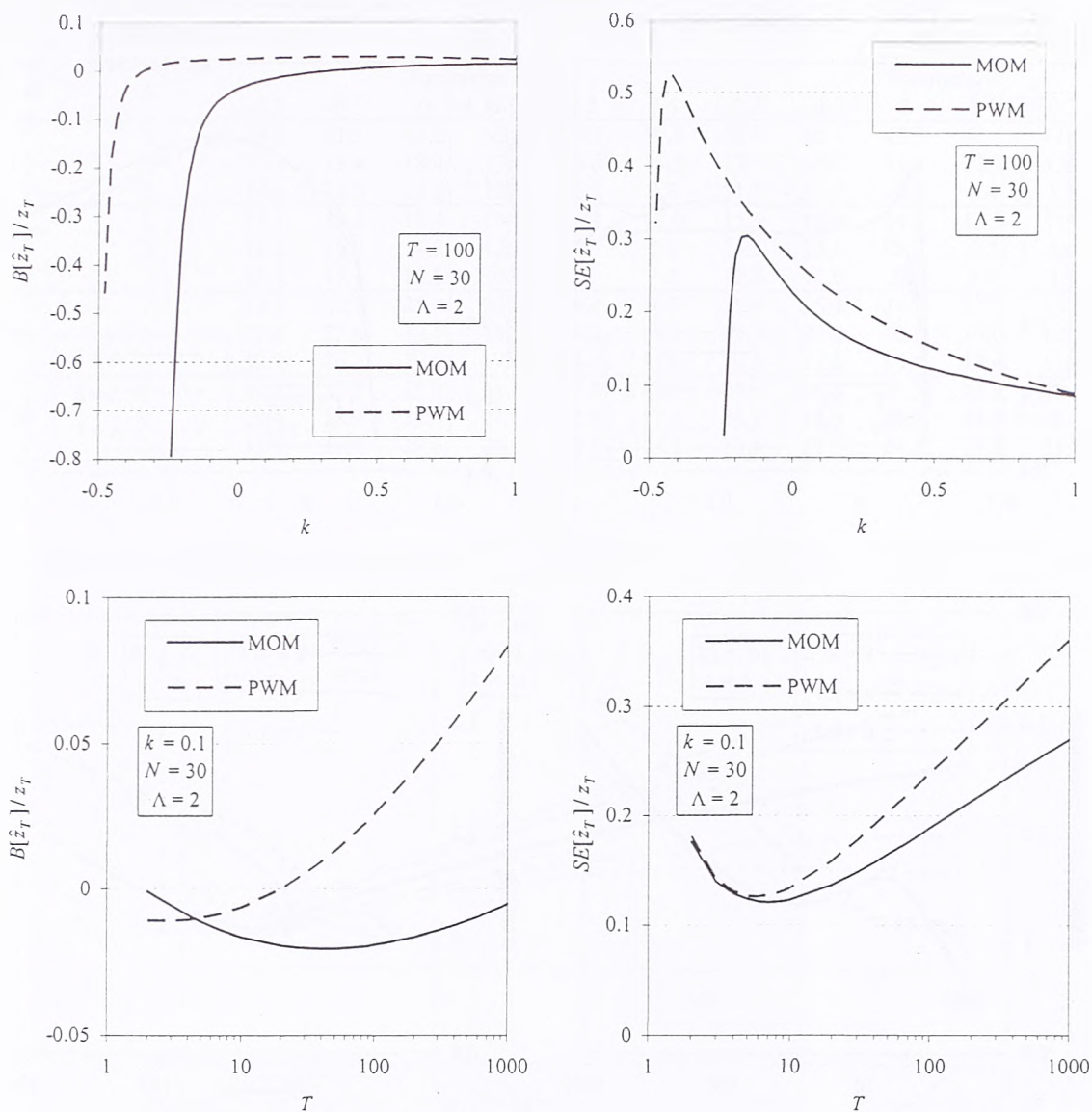
III.3.3 Pristrasnost i standardna greška ocene kvantila po modelu P+GP

Kada se u izraze (60) i (61) za varijansu i očekivanje kvantila unesu bezuslovna svojstva parametara (61) i (66) ili odgovarajuća uslovna svojstva (63) i (65), dobijaju se nešto drugačiji rezultati, ali su te razlike praktično zanemarljive s obzirom da ni između dva alternativna vida svojstava parametara nema značajnijih razlika (što je pokazano u prethodnom odeljku). Na slici 36 prikazane su "relativne greške" u proračunima na ova dva načina, označene kao $D_E = (E[\hat{z}_T]_2 - E[\hat{z}_T]_1) / z_T$ i $D_{SE} = (SE[\hat{z}_T]_2 - SE[\hat{z}_T]_1) / z_T$ (gde se indeks 1 odnosi na proračun sa bezuslovnim svojstvima parametara, a indeks 2 sa uslovnim), i to na primeru male dužine niza od $N = 10$ godina sa prosečnim brojem javljanja $\Lambda = 1$ (dakle za mali broj podataka kada su odstupanja najveća). Sa ove slike se može videti da su razlike između rezultata uz primenu bezuslovnih i uslovnih svojstava parametara reda veličine od nekoliko procenata vrednosti kvantila, dok su za veći broj podataka još manje. Iz svega ovoga se može zaključiti da korišćenje uslovnih svojstava parametara nema praktičnu svrhu.

Na slici 37 prikazani su relativna pristrasnost i standardna greška ocene kvantila za metodu običnih odnosno težinskih momenata na primeru $N = 30$ godina i $\Lambda = 2$ u zavisnosti od vrednosti parametra k i povratnog perioda. Detaljniji rezultati su dati u prilogu C2. Kod obe metode se može videti da pokazatelji greške opadaju sa porastom pozitivnih vrednosti parametra k , dok naglo rastu u zonama kritičnih negativnih vrednosti k za ove metode (-0.25 odnosno -0.5). Takođe, pokazatelji greške rastu za povratne periode iznad 10 godina, dok su najmanji za povratne periode između 5 i 10 godina.



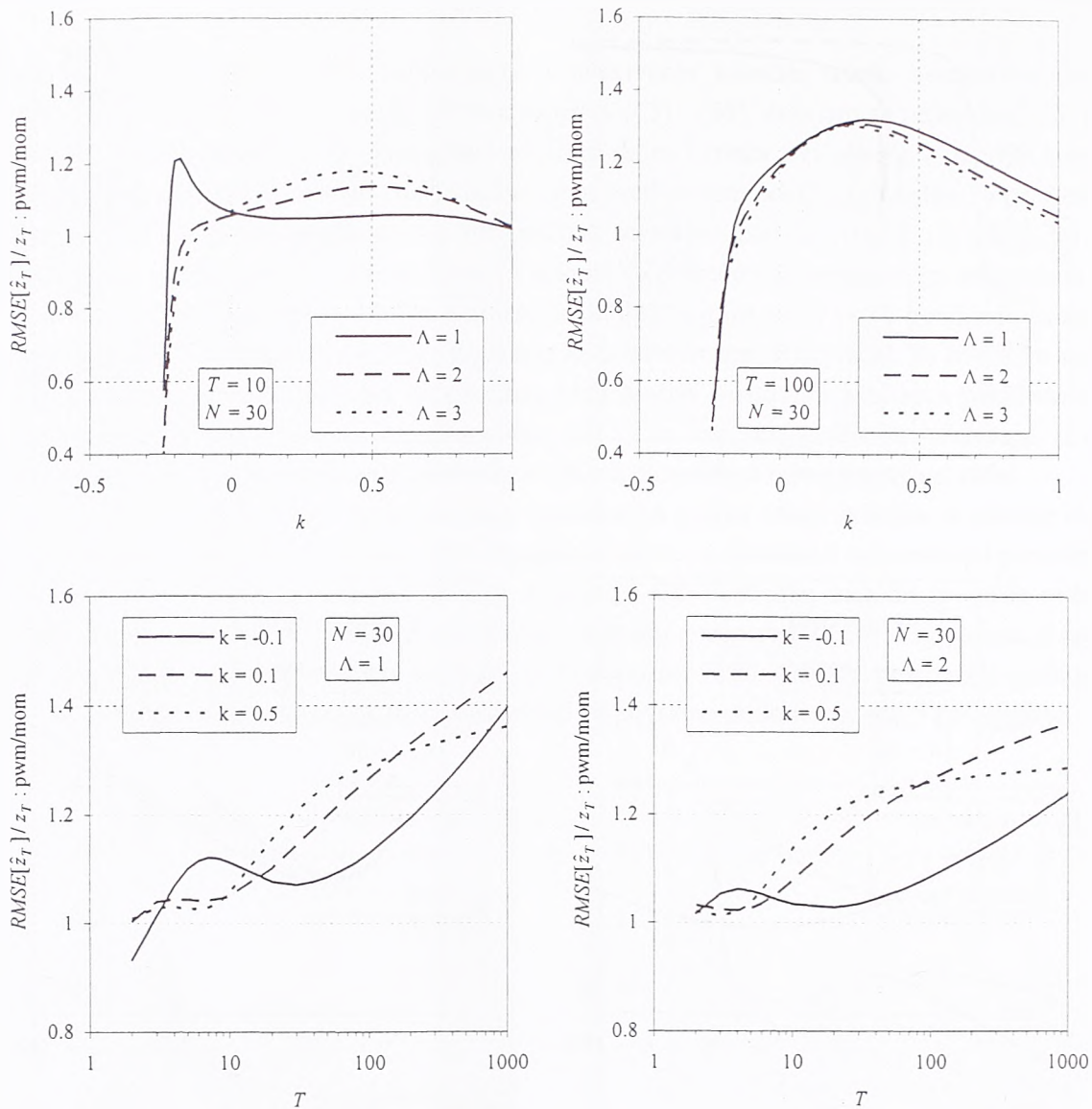
Slika 36. "Relativne greške" u očekivanju (D_E) i standardnoj greški (D_{SE}) kvantila P+GP određenih sa bezuslovnim očekivanjima i varijansama parametara i pod uslovom da je $M > 1$.



Slika 37. Primer relativne pristrasnosti i relativne standardne greške kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (gore) i od povratnog perioda T (dole).

Odnos srednje kvadratne greške ocene kvantila po dve metode (odnos $RMSE_{pwm}/RMSE_{mom}$) dat je na slici 38 za određene vrednosti N i Λ , dok su detaljniji rezultati prikazani u prilogu C2. Iz dobijenih rezultata sledi zaključak da ocene kvantila imaju manju srednju kvadratnu grešku za vrednosti parametra $k > -0.1$ kada se parametri GP raspodele ocenjuju metodom momenata u odnosu na metodu težinskih momenata, što je obrnut zaključak u odnosu na očekivanja i varijanse samih parametara. Do istih zaključaka došli su i Rosbjerg i sar. (1992).

U tabelama 9 i 10 date su neke brojne vrednosti relativne pristrasnosti i standardne greške ocene kvantila modela P+GP za parametre GP raspodele određene metodom momenata, dok su na slici 39 prikazana dva primera intervala poverenja modela P+GP, takođe sa parametrima GP raspodele po metodi momenata.



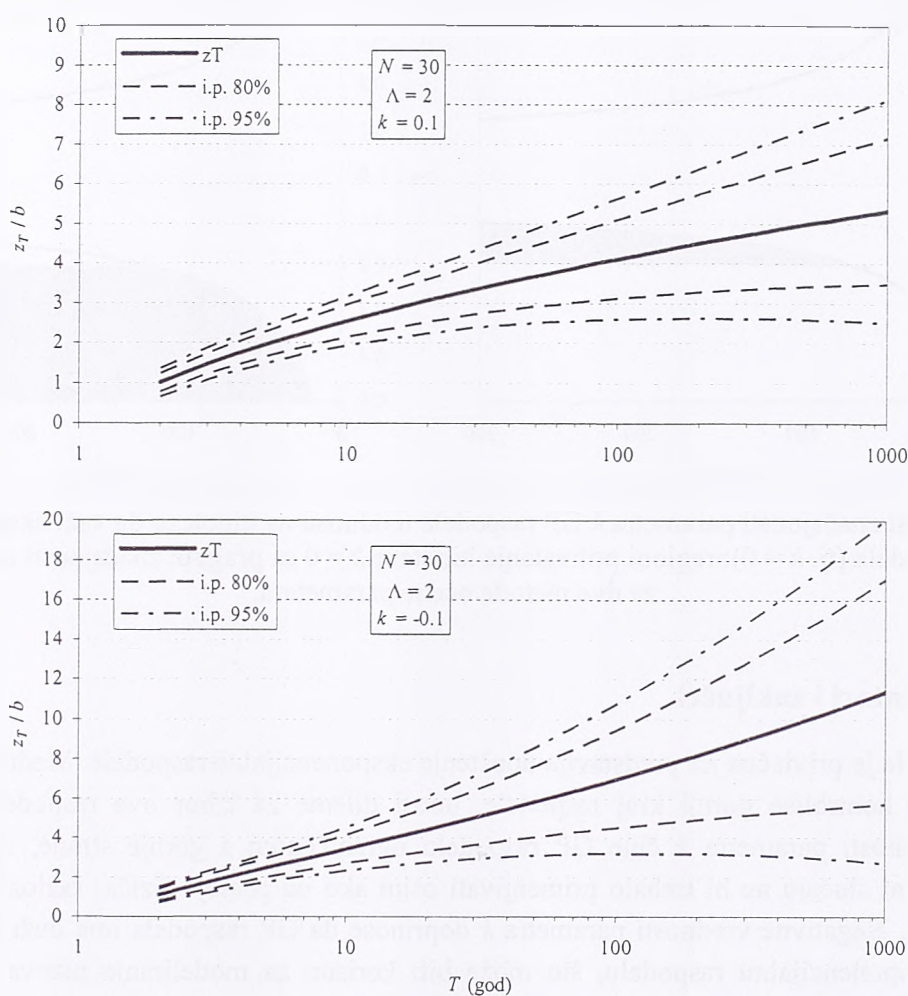
Slika 38. Odnos $RMSE$ ocene kvantila modela P+GP po metodi težinskih i običnih momenata ($RMSE_{pwm}/RMSE_{mom}$) u zavisnosti od vrednosti parametra k (gore) i od povratnog perioda T (dole).

Tabela 9. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP (u procentima).

Povratni period T (god)	Srednji broj prekoračenja Λ	Broj godina osmatranja											
		$N = 30$						$N = 50$					
		Parametar k						Parametar k					
2	1	44.3	7.1	1.0	-1.3	-2.5	-3.9	29.5	4.7	0.8	-0.7	-1.4	-2.2
	2	13.1	2.3	0.5	-0.1	-0.4	-0.7	8.6	1.4	0.3	0.0	-0.2	-0.4
	3	4.8	0.6	-0.1	-0.3	-0.4	-0.6	3.2	0.4	0.0	-0.2	-0.3	-0.3
10	1	-10.6	-3.6	-2.6	-2.3	-2.1	-1.9	-5.9	-2.1	-1.6	-1.4	-1.3	-1.2
	2	-12.7	-3.8	-2.2	-1.6	-1.3	-1.0	-7.9	-2.3	-1.3	-1.0	-0.8	-0.6
	3	-11.7	-3.2	-1.8	-1.2	-0.9	-0.6	-7.3	-2.0	-1.1	-0.7	-0.6	-0.4
100	1	-45.4	-13.5	-6.7	-4.0	-2.4	-0.6	-31.3	-8.4	-4.1	-2.4	-1.5	-0.4
	2	-31.7	-7.9	-3.6	-1.9	-1.0	0.1	-20.5	-4.8	-2.2	-1.2	-0.6	0.1
	3	-24.2	-5.5	-2.4	-1.2	-0.5	0.3	-15.2	-3.3	-1.4	-0.7	-0.3	0.2
1000	1	-64.9	-18.2	-6.9	-2.6	-0.2	2.2	-47.0	-10.6	-3.9	-1.4	0.0	1.4
	2	-44.2	-8.7	-2.7	-0.5	0.6	1.7	-27.8	-4.9	-1.5	-0.2	0.4	1.1
	3	-32.0	-5.3	-1.4	0.0	0.7	1.3	-19.0	-3.0	-0.8	0.1	0.5	0.8

Tabela 10. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP (u procentima).

Povratni period T (god)	Srednji broj prekoračenja Λ	Broj godina osmatranja											
		$N = 30$						$N = 50$					
		Parametar k						Parametar k					
		-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.4	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.4
2	1	79.8	61.1	57.2	55.4	54.2	52.3	58.4	46.1	43.7	42.5	41.6	40.3
	2	21.1	19.4	18.4	17.6	16.8	15.3	17.7	15.3	14.4	13.7	13.1	11.9
	3	14.0	13.6	12.8	12.0	11.2	9.7	11.7	10.7	10.0	9.4	8.7	7.5
10	1	17.1	19.4	18.4	16.8	15.1	12.0	15.4	16.0	14.8	13.3	11.9	9.4
	2	18.2	16.3	14.2	12.3	10.7	8.3	15.6	13.1	11.2	9.7	8.4	6.5
	3	18.7	15.1	12.6	10.7	9.2	7.3	15.8	12.0	9.9	8.4	7.2	5.7
100	1	19.5	28.7	25.4	22.0	19.4	16.0	25.0	25.4	21.1	17.8	15.5	12.6
	2	27.6	27.6	22.5	18.9	16.3	13.2	29.3	23.2	18.2	15.0	12.9	10.4
	3	30.9	26.1	20.6	17.0	14.6	11.6	30.3	21.5	16.4	13.4	11.5	9.1
1000	1	14.7	37.8	35.9	31.6	27.8	22.0	25.4	36.8	31.3	26.4	22.7	17.7
	2	28.4	38.9	32.4	27.0	22.9	17.3	36.7	34.4	26.9	21.8	18.3	13.7
	3	35.9	37.4	29.6	24.0	20.1	14.8	40.6	31.9	24.0	19.2	15.9	11.7



Slika 39. Dva primera intervala poverenja za kvantile modela P+GP.

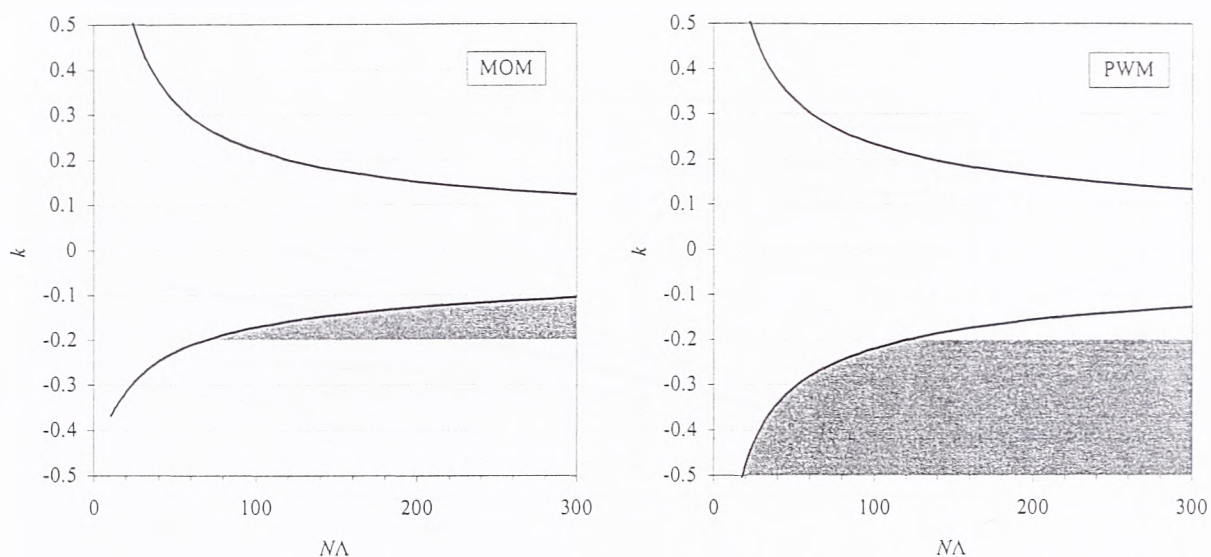
Rosbjerg i sar. (1992) su takođe razmatrali pitanje kada se može pretpostaviti eksponencijalna raspodela umesto GP raspodele. Oni su sprovedli test značajnosti sa nultom hipotezom $k = 0$ u odnosu na alternativnu hipotezu $k \neq 0$. Uz pomoć Monte Karlo simulacija oni su potvrdili da je ocena \hat{k} približno raspoređena po normalnoj raspodeli sa srednjom vrednošću i varijansom prema izrazima (66). Pod nultom hipotezom $k = 0$, za metodu momenata se dobija:

$$\hat{k}: N\left(\frac{5}{2N\Lambda}, \frac{1}{N\Lambda}\right)$$

a za metodu težinskih momenata

$$\hat{k}: N\left(\frac{2}{3N\Lambda}, \frac{4}{3N\Lambda}\right)$$

Regioni prihvatanja nulte hipoteze $k = 0$ sa pragom značajnosti od 5% za dve metode ocene parametara u zavisnosti od broja prekoračenja $N\Lambda$ prikazani su na slici 40, gde bi se moglo zaključiti da se GP raspodela može aproksimirati Pareto raspodelom u veoma širokim granicama vrednosti parametra k u okolini $k = 0$ (npr. za metodu momenata i $N\Lambda = 100$, region prihvatanja hipoteze $k = 0$ je domen $-0.17 < k < 0.22$).



Slika 40. Test značajnosti parametra k GP raspodele u odnosu na hipotezu da važi eksponencijalna raspodela (tj. $k = 0$): regioni prihvatanja hipoteze $k = 0$ sa pragom značajnosti od 5% za dve metode ocene parametara.

III.3.4 Komentari i zaključci

GP raspodela je privlačna jer predstavlja uopštenje eksponencijalne raspodele. Međutim, parametar oblika k , koji kontrolise gornji kraj raspodele, unosi dileme za izbor ove raspodele. Pre svega, pozitivne vrednosti parametra k čine GP raspodelu ograničenom s gornje strane, zbog čega ova raspodelu u tom slučaju ne bi trebalo primenjivati osim ako ne postoje fizički razlozi za postojanje gornje granice. Negativne vrednosti parametra k doprinose da GP raspodela ima duži gornji “rep” u odnosu na eksponencijalnu raspodelu, što može biti korisno za modeliranje nizova sa izduženim gornjim krajem raspodele.

Vrednost parametra k odražava se i na izbor metode za ocenu parametara. Metoda momenata nije primenljiva za $k \leq -0.5$; s druge strane, ocene parametara su u domenu $-0.5 < k < -0.2$ opterećene velikom neizvesnošću dok se za $k \leq -0.25$ čak ne mogu ni odrediti asimptotskim formulama. Sa gledišta pouzdanosti ocena kvantila, metoda momenata ima prednost nad metodom težinskih momenata kada je $k > -0.2$ u najvećem broju slučajeva (kada se ne zloupotrebljava metoda pikova, tj. kada postoji solidan broj godina osmatranja i Λ veće od bar 1.5). Metoda težinskih momenata ima prednost za vrednosti $k \leq -0.2$. Takođe je pokazano da uvođenje uslovnih očekivanja i varijansi za broj

prekoračenja $M > 1$ nema značajnog uticaja na konačne rezultate, i da zbog toga nema potrebe za dodatnim komplikovanjem izraza.

S obzirom da je pokazano da se u određenim domenima parametra k prekoračenja mogu modelirati eksponencijalnom umesto GP raspodelom čak iako je GP raspodela tačna raspodela populacije, moglo bi se zaključiti da se domen primenljivosti GP raspodele sa ocenom parametara metodom momenata ograničava na vrednosti parametra $k > -0.2$ i na dužine niza prekoračenja veće od 65, a sa metodom težinskih momenata na vrednosti $k \leq -0.2$ pri dužinama niza prekoračenja većim od 20 (osenačeni domeni na slici 40).

III.4 Pouzdanost ocena kvantila velikih voda modelom P+W

III.4.1 Svojstva ocene kvantila

Model P+W parcijalnih serija predstavlja kombinaciju Poasonove raspodele za broj prekoračenja i Vejbulove raspodele za visinu prekoračenja, čija inverzna funkcija raspodele glasi:

$$x(F) = x_0 + \beta[-\ln(-\ln F) + \ln \Lambda]^{1/\gamma}$$

gde je Λ parametar Poasonove raspodele, γ i β su parametri Vejbulove raspodele, a x_0 je baza. Ocena kvantila prekoračenja zadatog povratnog perioda T je tada:

$$\hat{z}_T = \hat{\beta}(y_T + \ln \hat{\Lambda})^{1/\hat{\gamma}}$$

gde je $y_T = -\ln(-\ln F)$ Gumbelova standardizovana promenljiva.

Model P+W parcijalnih serija je relativno malo korišćen u svetskoj literaturi. Greškama u oceni kvantila modela P+W su se bavili Ekanayake i Cruise (1993), ali se njihov model zasnivao na oceni parametara Vejbulove raspodele uz pomoć metode maksimalne entropije, dok su za ocenu grešaka koristili su Monte Karlo simulacije. Kako metoda maksimalne entropije nije zaživela u hidrološkim primenama, ona ovde nije razmatrana.

Kada se za određivanje očekivanja i varijanse ocene kvantila primeni pristup razvoja u Tejlorov red, dobijaju se sledeći izrazi:

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{z}_T] &= Y^{2/E\hat{\gamma}} \left\{ \frac{(E\hat{\beta})^2 \text{var}[\hat{\Lambda}]}{(E\hat{\gamma})^2 (E\hat{\Lambda})^2} Y^{-2} + \frac{(E\hat{\beta})^2 \text{var}[\hat{\gamma}]}{(E\hat{\gamma})^4} \ln^2 Y - 2 \frac{E\hat{\beta} \text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}]}{(E\hat{\gamma})^2} \ln Y + \text{var}[\hat{\beta}] \right\} \\ E[\hat{z}_T] &= (E\hat{\beta}) Y^{1/E\hat{\gamma}} + \frac{1}{2} Y^{1/E\hat{\gamma}} \left\{ \frac{E\hat{\beta}}{(E\hat{\gamma})^2} \frac{\text{var}[\hat{\Lambda}]}{(E\hat{\Lambda})^2} \frac{1 - (Y+1)E\hat{\gamma}}{Y^2} + \frac{E\hat{\beta} \text{var}[\hat{\gamma}]}{(E\hat{\gamma})^4} (\ln Y + 2E\hat{\gamma}) \ln Y - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}]}{(E\hat{\gamma})^2} \ln Y \right\} \end{aligned}$$

gde je $Y = y_T + \ln(E\hat{\Lambda})$. U gornjim izrazima je usvojeno da su kovarijanse Poasonovog parametra sa Vejbulovim parametrima jednake nuli:

$$\text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{\gamma}] = 0, \quad \text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{\beta}] = 0$$

S obzirom da je na primeru modela P+E i P+GP pokazano da za uobičajene vrednosti ukupnog broja prekoračenja M nema smisla razmatrati uslovna očekivanja i varijanse parametara modela za uslov da je $M > 0$ (ili $M > 1$), pri razmatranju modela P+W to neće biti uzeto u obzir. Tada za parametar Λ važi:

$$E[\hat{\Lambda}] = \Lambda, \quad \text{var}[\hat{\Lambda}] = \frac{\Lambda}{N}$$

gde je N broj godina osmatranja. Svojstva parametara Vejbulove raspodele prikazana su u odeljku II.3.5 za metodu momenata i metodu težinskih momenata. Bez obzira na metodu ocene parametara, za svojstva ovih parametara može se uopšteno napisati da su jednaka:

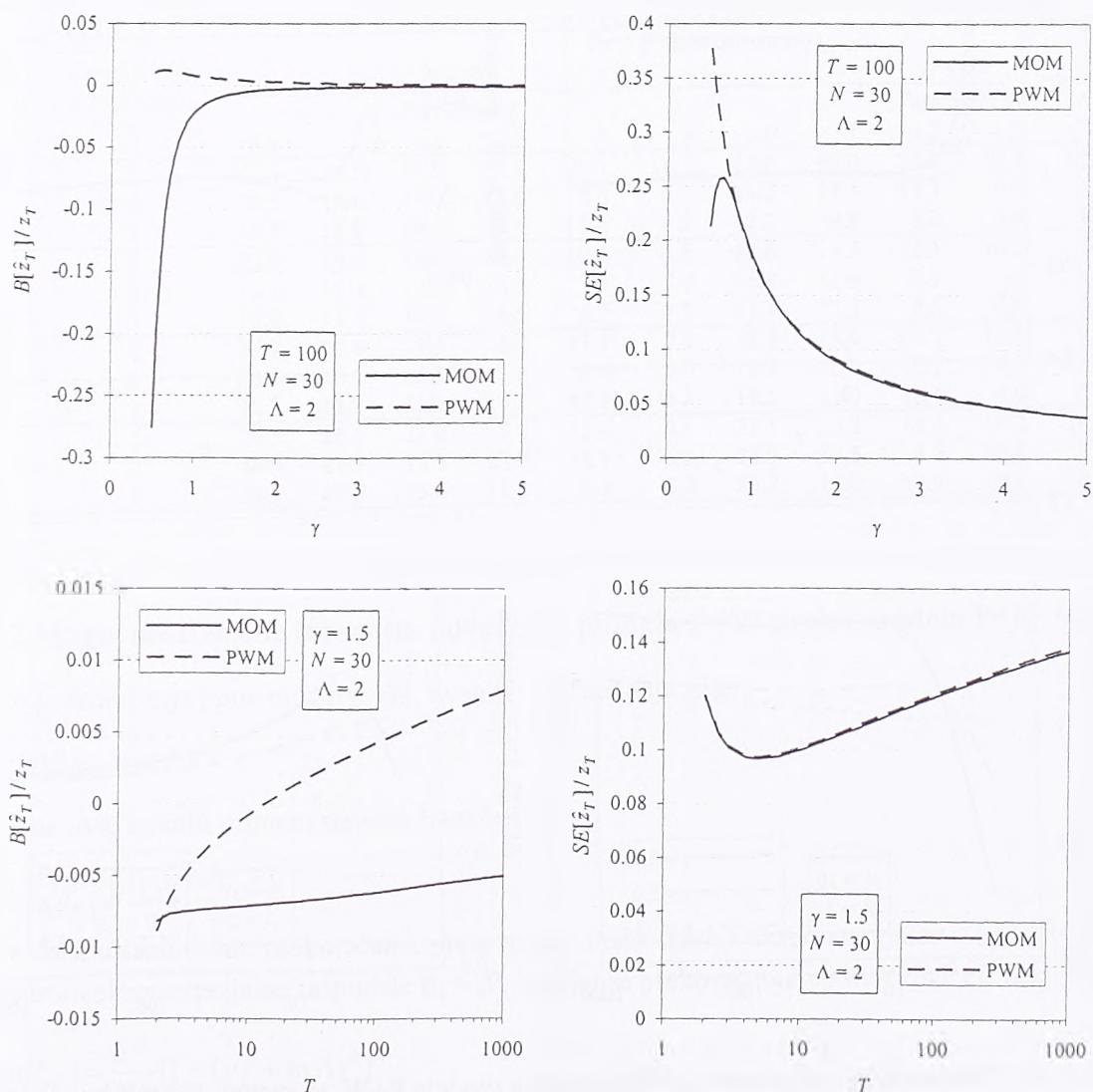
$$\begin{aligned} E[\hat{\gamma}] &= C(\gamma, N\Lambda), \quad E[\hat{\beta}] = \beta B(\gamma, N\Lambda) \\ \text{var}[\hat{\gamma}] &= \frac{1}{N\Lambda} V_\gamma(\gamma), \quad \text{var}[\hat{\beta}] = \frac{\beta^2}{N\Lambda} V_\beta(\gamma), \quad \text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}] = \frac{\beta}{N\Lambda} V_{\gamma\beta}(\gamma) \end{aligned} \tag{67}$$

Tada se za očekivanje i varijansu ocene kvantila prekoračenja može napisati:

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{z}_T] &= \frac{\beta^2 Y^{2/C}}{N\Lambda} \left\{ \frac{B^2}{C^2 Y^2} + \frac{B^2 V_\gamma}{C^4} \ln^2 Y - 2 \frac{B V_{\gamma B}}{C^2} \ln Y + V_\beta \right\} \\ E[\hat{z}_T] &= \beta B Y^{1/C} + \frac{\beta Y^{1/C}}{2N\Lambda} \left\{ \frac{B(1-C-CY)}{C^2 Y^2} + \frac{B V_\gamma}{C^4} (\ln Y + 2C) \ln Y - 2 \frac{V_{\gamma B}}{C^2} \ln Y \right\} \end{aligned} \quad (68)$$

gde je $Y = y_T + \ln \Lambda$.

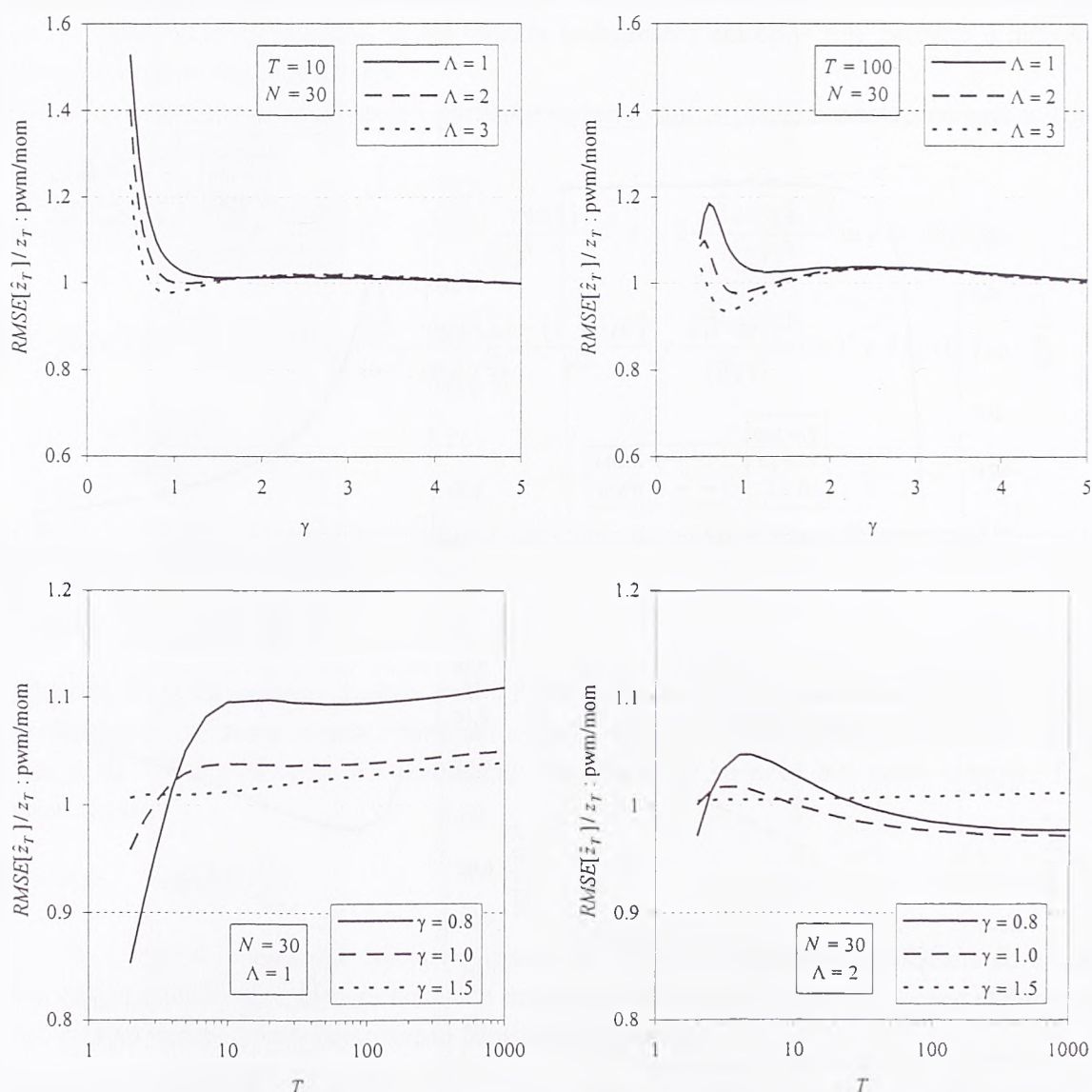
Na slici 21 prikazani su relativna pristrasnost i standardna greška ocene kvantila za metodu običnih odnosno težinskih momenata na primeru $N = 30$ godina i $\Lambda = 2$, u zavisnosti od vrednosti parametra γ i od povratnog perioda T . Detaljniji rezultati su dati u prilogu C3. Za obe metode se može reći da su pokazatelji greške najveći kada je Vejbulov parametar oblika $\gamma < 1$. Relativna pristrasnost kvantila je mala kod obe metode za $\gamma > 1$, dok kod metode momenata naglo raste za $\gamma < 1$. Relativna standardna greška je nešto manja kod metode momenata nego kod metode težinskih momenata, dok je relativna srednja kvadratna greška (RMSE) ocene kvantila približno ista za obe metode. Takođe, pokazatelji greške rastu za povratne periode iznad 10 godina, dok su najmanji za povratne periode između 5 i 10 godina.



Slika 41. Primer relativne pristrasnosti i relativne standardne greške ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (gore) i od povratnog perioda T (dole).

Međusobni odnos dve metode za ocenu parametara u oceni kvantila ispitan je na osnovu odnosa srednje kvadratne greške $RMSE[\hat{z}_T]$ (odnos $RMSE_{pwm}/RMSE_{mom}$); kada je ovaj odnos veći od 1, prednost ima metoda momenata, a kada je odnos manji od 1, prednost ima metoda težinskih momenata. Ovaj odnos je prikazan na slici 42 za određene vrednosti N i Λ , dok se detaljniji rezultati nalaze u prilogu C3. U najvećem broju slučajeva metoda momenata daje bolje rezultate u oceni kvantila od metode težinskih momenata. Metoda težinskih momenata ima prednost samo za $\gamma < 1$ i veliki broj prekoračenja (veliko $N\Lambda$). Ovaj zaključak je donekle konsistentan sa ponašanjem ovih metoda u ceni samih parametara Vejbulove raspodele (odjeljak II.3.5), gde je konstatovano da metoda težinskih momenata ima prednost za vrednosti parametra $\gamma < 1.5$, dok se za $\gamma > 1.5$ mogu ravnopravno koristiti obe metode.

Iz gornje diskusije se može zaključiti da za vrednosti parametra oblika Vejbulove raspodele $\gamma > 1$ izbor metode za ocenu parametara ne igra značajnu ulogu, dok za vrednosti $\gamma < 1$ treba obratiti pažnju na uticaj ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ na izbor metode. U ovom domenu vrednosti parametra γ , a to je domen u kome je koeficijent varijacije prekoračenja veći od 1 i koeficijent asimetrije veći od 2, model Poasonove i Vejbulove raspodele postaje osetljiv i greške u oceni kvantila mogu biti velike.



Slika 42. Odnos srednje kvadratne greške kvantila modela P+W po metodi težinskih i običnih momenata ($RMSE_{pwm}/RMSE_{mom}$) u zavisnosti od vrednosti parametra γ (gore) i od povratnog perioda T (dole).

U tabelama 11 i 12 date su neke brojne vrednosti relativne pristrasnosti i relativne standardne greške ocene kvantila modela P+W, dok je na slici 23 dat primer intervala poverenja za kvantile ovog modela.

Tabela 11. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W (u procentima).

Povratni period T (god)	Srednji broj prekoračenja Λ	Broj godina osmatranja											
		$N = 30$						$N = 50$					
		Parametar γ						Parametar γ					
		0.8	1	1.2	1.5	2	3	0.8	1	1.2	1.5	2	3
2	1	16.4	2.2	-2.3	-4.4	-4.8	-4.1	10.5	1.5	-1.3	-2.6	-2.9	-2.4
	2	0.9	-0.5	-0.8	-0.8	-0.7	-0.5	0.5	-0.3	-0.5	-0.5	-0.4	-0.3
	3	-0.5	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.3	-0.4	-0.4	-0.3	-0.2	-0.15
10	1	-5.1	-3.2	-2.2	-1.5	-1.0	-0.6	-3.0	-1.9	-1.3	-0.9	-0.6	-0.3
	2	-3.3	-1.8	-1.2	-0.7	-0.4	-0.2	-2.0	-1.1	-0.7	-0.4	-0.2	-0.1
	3	-2.4	-1.2	-0.8	-0.5	-0.3	-0.1	-1.4	-0.7	-0.5	-0.3	-0.2	-0.1
100	1	-9.3	-4.5	-2.6	-1.4	-0.7	-0.4	-5.3	-2.5	-1.5	-0.8	-0.4	-0.2
	2	-4.6	-2.1	-1.2	-0.6	-0.3	-0.2	-2.6	-1.2	-0.7	-0.4	-0.2	-0.1
	3	-2.9	-1.3	-0.7	-0.4	-0.2	-0.1	-1.7	-0.8	-0.4	-0.2	-0.1	-0.05
1000	1	-10.9	-4.8	-2.6	-1.2	-0.6	-0.3	-6.0	-2.6	-1.4	-0.7	-0.3	-0.1
	2	-4.9	-2.1	-1.1	-0.5	-0.2	-0.1	-2.7	-1.1	-0.6	-0.3	-0.1	-0.06
	3	-3.0	-1.3	-0.7	-0.3	-0.1	-0.06	-1.6	-0.7	-0.4	-0.2	-0.06	-0.03

Tabela 12. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W (u procentima).

Povratni period T (god)	Srednji broj prekoračenja Λ	Broj godina osmatranja											
		$N = 30$						$N = 50$					
		Parametar γ						Parametar γ					
		0.8	1	1.2	1.5	2	3	0.8	1	1.2	1.5	2	3
2	1	82.5	59.5	47.9	37.7	28.1	18.7	62.6	46.0	37.2	29.3	21.9	14.5
	2	23.3	18.1	15.0	12.0	9.0	6.0	18.2	14.1	11.7	9.3	7.0	4.7
	3	15.7	12.6	10.5	8.5	6.4	4.2	12.2	9.8	8.2	6.6	4.9	3.3
10	1	22.6	19.4	16.6	13.4	10.1	6.8	18.6	15.5	13.1	10.5	7.9	5.3
	2	18.1	15.0	12.5	10.0	7.5	5.0	14.8	11.9	9.9	7.8	5.8	3.9
	3	16.2	13.1	10.8	8.5	6.3	4.2	13.1	10.3	8.5	6.6	4.9	3.3
100	1	25.7	22.6	19.3	15.5	11.7	7.9	22.9	18.9	15.7	12.4	9.2	6.2
	2	23.0	18.6	15.3	12.0	8.9	6.0	19.4	15.0	12.1	9.4	6.9	4.7
	3	20.9	16.2	13.1	10.2	7.5	5.1	17.1	13.0	10.4	8.0	5.9	3.9
1000	1	29.5	26.1	22.2	17.8	13.4	9.1	27.1	22.2	18.2	14.3	10.6	7.2
	2	26.9	21.5	17.5	13.7	10.1	6.8	22.9	17.5	14.0	10.8	7.9	5.3
	3	24.3	18.7	15.0	11.6	8.5	5.7	20.2	15.0	11.9	9.1	6.6	4.5

III.4.2 Mogućnosti ocene intervala poverenja modela P+W preko modela P+E

Ako prekoračenja prate model P+W, kvantil prekoračenja glasi:

$$z_T = \beta(y_T + \ln \Lambda)^{1/\gamma}$$

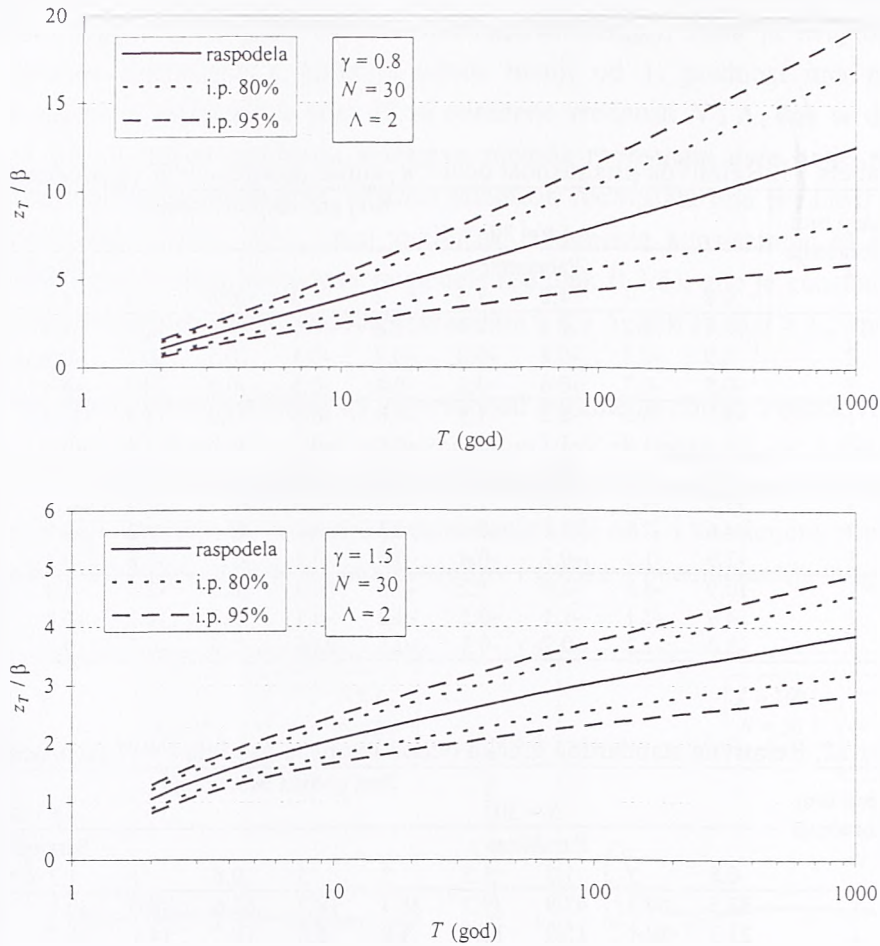
Ako se na ovaj kvantil primeni stepena transformacija:

$$\zeta_T = z_T^\gamma = \beta^\gamma (y_T + \ln \Lambda)$$

vidi se da transformisana prekoračenja prate model Poasonove i eksponencijalne raspodele (P+E) sa parametrom eksponencijalne raspodele $\beta_1 = \beta^\gamma$. Varijansa prekoračenja po modelu P+E tada bi bila:

$$\text{var}[\zeta_T] = \frac{\beta^{2\gamma}}{N\Lambda} [1 + (y_T + \ln \Lambda)^2]$$

Na osnovu gronjeg izraza, granice intervala poverenja za ovaj model su jednake:



Slika 43. Dva primera intervala poverenja kvantila u modelu P+W.

$$\zeta_T \pm t_q \sqrt{\text{var}[\zeta_T]} = z_T^y \pm t_q \beta^y \sqrt{\frac{1 + (y_T + \ln \Lambda)^2}{N\Lambda}}$$

gde je t_q standardizovana normalna promenljiva za razmatrani interval poverenja q . Uz primenu inverzne transformacije, granice intervala poverenja za promenljivu z_T su:

$$z_{1,2}^E(T) = \left[z_T^y \pm \beta^y t_q \sqrt{\frac{1 + (y_T + \ln \Lambda)^2}{N\Lambda}} \right]^{1/y} = z_T \left[1 \pm t_q \sqrt{\frac{1 + (y_T + \ln \Lambda)^2}{N\Lambda(y_T + \ln \Lambda)^2}} \right]^{1/y}$$

S druge strane, granice intervala poverenja za model P+W su:

$$z_{1,2}^W(T) = z_T \pm t_q \sqrt{\text{var}[\hat{z}_T]}$$

gde je $\text{var}[\hat{z}_T]$ dato jednačinom (68). Da bi se uporedila ova dva načina proračuna, posmatraju se širine intervala poverenja, odnosno za razlike između kvantila i donje ili gornje granice intervala poverenja:

$$\Delta z_1(T) = z(T) - z_1(T)$$

$$\Delta z_2(T) = z_2(T) - z(T)$$

Tada za širine intervala poverenja preko modela P+E imamo:

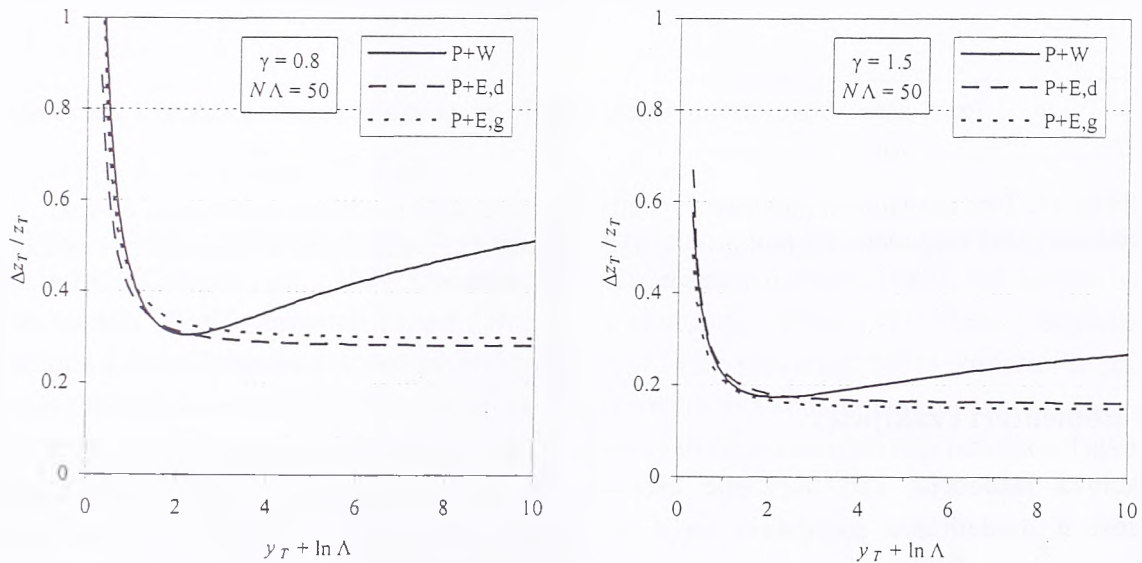
$$\frac{\Delta z_1^E(T)}{z(T)} = 1 - \left[1 - t_q \sqrt{\frac{1 + (y_T + \ln \Lambda)^2}{N\Lambda(y_T + \ln \Lambda)^2}} \right]^{1/\gamma}$$

$$\frac{\Delta z_2^E(T)}{z(T)} = \left[1 + t_q \sqrt{\frac{1 + (y_T + \ln \Lambda)^2}{N\Lambda(y_T + \ln \Lambda)^2}} \right]^{1/\gamma} - 1$$
(69)

dok za odgovarajuće širine intervala poverenja preko modela P+W važi:

$$\frac{\Delta z_1^W(T)}{z(T)} = \frac{\Delta z_2^W(T)}{z(T)} = t_q \frac{\sqrt{\text{var}[\hat{z}_T]}}{z(T)}$$
(70)

Razlike između izraza (69) i (70) najlakše se mogu uočiti ako se ovi izrazi prikažu u zavisnosti od faktora $y_T + \ln \Lambda$, jer tada zavise još samo od vrednosti parametra γ i ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (slika 24). Može se videti da ovi izrazi daju slične rezultate samo za $y_T + \ln \Lambda < 3$, što odgovara malim povratnim periodima (manjim od 20 godina za $\Lambda = 1$ i manjim od 10 godina za $\Lambda = 2$), dok za veće povratne periode proračun intervala poverenja preko modela P+E može značajno da smanji širinu intervala poverenja. Iz ovih razloga se ne može preporučiti takav način proračuna.



Slika 44. Primer širina intervala poverenja od 90% određenih uz pomoć varijanse modela P+W i posredno uz pomoć modela P+E.

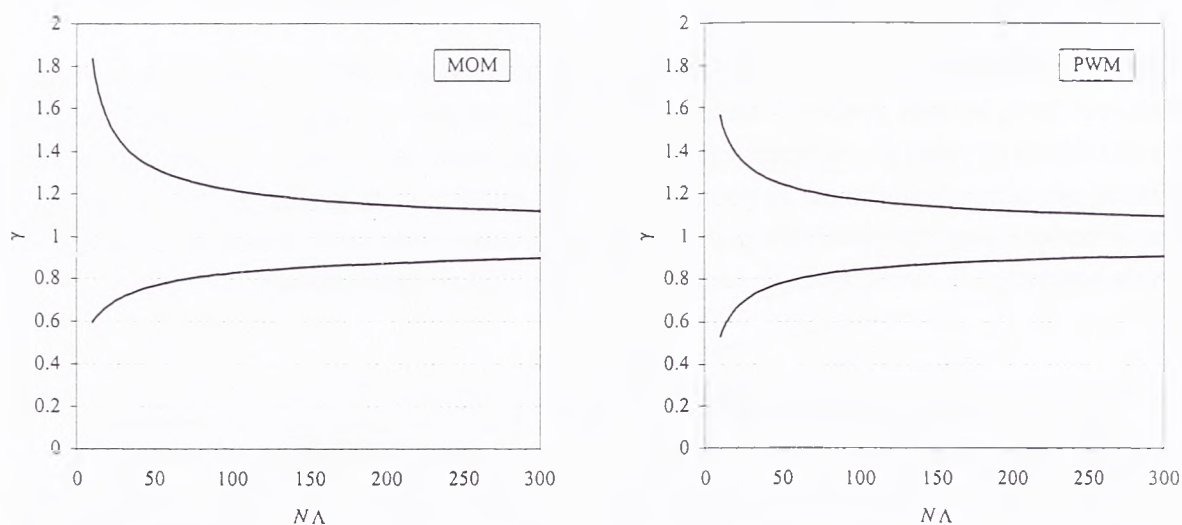
Ako se, analogno razmatranjima u modelu P+GP, pretpostavi da je ocena parametra γ (tj. $\hat{\gamma}$) normalno raspoređena sa srednjom vrednošću i varijansom kao u jednačini (67), tada se može sprovesti test značajnosti sa nultom hipotezom $\gamma = 1$ u odnosu na alternativnu hipotezu $\gamma \neq 1$ kako bi se utvrdio domen ovog parametra u kome se može smatrati da se niz prekoračenja može modelirati eksponencijalnom umesto Vejbulovom raspodelom. Pod nultom hipotezom $\gamma = 1$, za metodu momenata važi:

$$\hat{\gamma}: N\left(1 + \frac{\pi^2/6 + 1/2}{N\Lambda}, \frac{1}{N\Lambda}\right) \cong N\left(1 + \frac{2.145}{N\Lambda}, \frac{1}{N\Lambda}\right)$$

dok za metodu težinskih momenata važi:

$$\hat{\gamma}: N\left(1 + \frac{2 - \ln 2}{6N\Lambda \cdot \ln^2 2}, \frac{1}{3N\Lambda \cdot \ln^2 2}\right) \cong N\left(1 + \frac{0.453}{N\Lambda}, \frac{0.694}{N\Lambda}\right)$$

Regioni prihvatanja nulte hipoteze $\gamma = 1$ sa pragom značajnosti od 5% za dve metode ocene parametara prikazani su na slici 25. Ove granice su relativno široke (npr. za $N\Lambda = 100$, region prihvatanja nulte hipoteze je domen $0.83 < \gamma < 1.21$ za metodu momenata, odnosno $0.84 < \gamma < 1.17$ za metodu težinskih momenata). Međutim, kako se ovde radi o testu čija primenljivost nije potvrđena, ove rezultate treba uzeti sa rezervom.



Slika 45. Test značajnosti parametra γ Vejbulove raspodele u odnosu na hipotezu da važi eksponencijalna raspodela: regioni prihvatanja hipoteze $\gamma = 1$ sa pragom značajnosti 5% za dve metode ocene parametara.

III.4.3 Komentari i zaključci

Vejbulova raspodela, kao uopštenje eksponencijalne raspodele, predstavlja veoma korisnu mogućnost u modeliranju parcijalnih serija s obzirom da joj parametar oblika γ daje veliku fleksibilnost. Na osnovu analize svojstava ocene kvantila modela P+W može se reći da u najvećem broju slučajeva pri oceni parametara metoda momenata ima prednost nad metodom težinskih momenata, osim za vrednosti parametra $\gamma < 1$ pri većem ukupnom broj prekoračenja (npr. $N\Lambda > 50$).

Pristrasnost ocene kvantila modela P+W je generalno mala. Kod obe metode ocene parametara pristrasnost ne prelazi 5% vrednosti kvantila za $\gamma \geq 1$ i za razumne dužine nizova, dok kod metode momenata naglo raste u domenu $0.5 < \gamma < 1$. Po metodi momenata pristrasnost je u principu negativna, a po metodi težinskih momenata je negativna za manje povratne periode, a pozitivna za veće (menja znak u zoni $20 < T < 50$, gde je najmanja po apsolutnoj vrednosti).

Relativna standardna geška ocene kvantila kod obe metode opada sa porastom vrednosti parametra γ , i ima veoma slične vrednosti za obe metode ocene parametara. Ona je najmanja za povratne periode oko 5 godina, povećava se za $T > 5$, i naglo raste za $T < 5$.

Razmatranja mogućnosti da se intervali poverenja kvantila u modelu P+W određuju preko modela P+E pokazala su da se takav pristup ne preporučuje.

III.5 Neizvesnost ocene kvantila velikih voda modelima B+E i NB+E

III.5.1 Teorijska razmatranja

Model B+E parcijalnih serija predstavlja kombinaciju binomne raspodele za broj prekoračenja i eksponencijalne raspodele za visinu prekoračenja, čija inverzna funkcija raspodele glasi:

$$x(F) = x_0 + \beta[\ln \Lambda - \ln b - \ln(1 - F^{1/b})]$$

gde su Λ i b parametri binomne raspodele, β je parametar eksponencijalne raspodele, a x_0 je baza. Model NB+E predstavlja kombinaciju negativne binomne raspodele za broj prekoračenja i eksponencijalne raspodele za visinu prekoračenja, i njegova inverzna funkcija raspodele glasi:

$$x(F) = x_0 + \beta[\ln \Lambda - \ln a - \ln(F^{-1/a} - 1)]$$

gde su Λ i a parametri negativne binomne raspodele. Kao što je već ranije naglašeno, binomna i negativna binomna raspodela se mogu smatrati istom raspodelom sa parametrima Λ i $b = -a$ (što se vidi i iz izraza za inverzne funkcije raspodele modela B+E i NB+E), tako da je u određenim razmatranjima dovoljno posmatrati samo jedan od ova dva modela. Ocena kvantila prekoračenja modela B+E zadatog povratnog perioda T jednaka je:

$$\hat{z}_T = \hat{\beta}[\ln \hat{\Lambda} - \ln \hat{b} - \ln(1 - F^{1/\hat{b}})]$$

dok je ocena kvantila prekoračenja modela NB+E zadatog povratnog perioda T :

$$\hat{z}_T = \hat{\beta}[\ln \hat{\Lambda} - \ln \hat{a} - \ln(F^{-1/\hat{a}} - 1)]$$

Model NB+E parcijalnih serija se relativno često pominje u stručnoj literaturi kao alternativa modelu P+E (Calenda i sar. , 1977; Cunnane, 1979; Zucchini i Adamson, 1989), dok su neki od autora pored modela NB+E razmatrali i model B+E (Van Montfort i Otten, 1991; Önöz i Bayazit, 2001). Greškama u oceni kvantila ova dva modela bavili su se Önöz i Bayazit (2001), koristeći se pristupom razvoja funkcije kvantila u Tejlorov red, ali samo na primeru dva konkretna niza.

Ako se za određivanje očekivanja i varijanse ocene kvantila primeni pristup razvoja u Tejlorov red, za model B+E dobijaju se sledeći izrazi:

$$\text{var}[\hat{z}_T] = \frac{(E\hat{\beta})^2}{(E\hat{\Lambda})^2} \text{var}[\hat{\Lambda}] + \frac{(E\hat{\beta})^2}{(E\hat{b})^2} \left[1 + \frac{F^{1/E\hat{b}} \ln(F^{1/E\hat{b}})}{1 - F^{1/E\hat{b}}} \right]^2 \text{var}[\hat{b}] + \ln^2 \left[\frac{E\hat{\Lambda}}{E\hat{b}(1 - F^{1/E\hat{b}})} \right] \text{var}[\hat{\beta}]$$

$$E[\hat{z}_T] = (E\hat{\beta}) \ln \left[\frac{E\hat{\Lambda}}{E\hat{b}(1 - F^{1/E\hat{b}})} \right] - \frac{1}{2} \frac{E\hat{\beta}}{(E\hat{\Lambda})^2} \text{var}[\hat{\Lambda}] + \frac{1}{2} \frac{E\hat{\beta}}{(E\hat{b})^2} \left[1 + 2 \frac{F^{1/E\hat{b}} \ln(F^{1/E\hat{b}})}{1 - F^{1/E\hat{b}}} + \frac{F^{1/E\hat{b}} \ln^2(F^{1/E\hat{b}})}{(1 - F^{1/E\hat{b}})^2} \right] \text{var}[\hat{b}]$$

U ovim izrazima ne figuriše kovarijansa ocena parametara binomne raspodele jer je ona jednaka nuli ($\text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{b}] = 0$); u izrazu za očekivanje kvantila ne figuriše ni $\text{var}[\hat{\beta}]$ jer je $\partial^2 \hat{z}_T / \partial \hat{\beta}^2 = 0$. Takođe, usvojeno je i da su kovarijanse parametra binomne raspodele sa parametrom eksponencijalne raspodele jednake nuli:

$$\text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{\beta}] = 0, \quad \text{cov}[\hat{b}, \hat{\beta}] = 0$$

Očekivanja i varijanse ocena parametara binomne raspodele su prikazani u odeljku II.2.4 i glase:

$$E[\hat{\Lambda}] = \Lambda, \quad \text{var}[\hat{\Lambda}] = \frac{\Lambda(b - \Lambda)}{Nb}$$

$$E[\hat{b}] = b + \frac{(b - \Lambda)}{N\Lambda^2} [\Lambda + 2(b - 1)(b - \Lambda)], \quad \text{var}[\hat{b}] = \frac{2b(b - 1)(b - \Lambda)^2}{N\Lambda^2}$$

gde je N broj godina osmatranja. S druge strane, očekivanje i varijanse ocene parametra β eksponencijalne raspodele su:

$$E[\hat{\beta}] = \beta, \quad \text{var}[\hat{\beta}] = \frac{\beta^2}{N\Lambda}$$

Za model NB+E važe analogni izrazi:

$$\text{var}[\hat{z}_T] = \frac{(E\hat{\beta})^2}{(E\hat{\Lambda})^2} \text{var}[\hat{\Lambda}] + \frac{(E\hat{\beta})^2}{(E\hat{a})^2} \left[1 - \frac{F^{-1/E\hat{a}} \ln(F^{-1/E\hat{a}})}{F^{-1/E\hat{a}} - 1} \right]^2 \text{var}[\hat{a}] + \ln^2 \left[\frac{E\hat{\Lambda}}{E\hat{a}(F^{-1/E\hat{a}} - 1)} \right] \text{var}[\hat{\beta}]$$

$$E[\hat{z}_T] = (E\hat{\beta}) \ln \left[\frac{E\hat{\Lambda}}{E\hat{a}(F^{-1/E\hat{a}} - 1)} \right] - \frac{1}{2} \frac{E\hat{\beta}}{(E\hat{\Lambda})^2} \text{var}[\hat{\Lambda}] + \frac{1}{2} \frac{E\hat{\beta}}{(E\hat{a})^2} \left[1 - 2 \frac{F^{-1/E\hat{a}} \ln(F^{-1/E\hat{a}})}{F^{-1/E\hat{a}} - 1} + \frac{F^{-1/E\hat{a}} \ln^2(F^{-1/E\hat{a}})}{(F^{-1/E\hat{a}} - 1)^2} \right] \text{var}[\hat{a}]$$

gde su:

$$E[\hat{\Lambda}] = \Lambda, \quad \text{var}[\hat{\Lambda}] = \frac{\Lambda(a + \Lambda)}{Na}$$

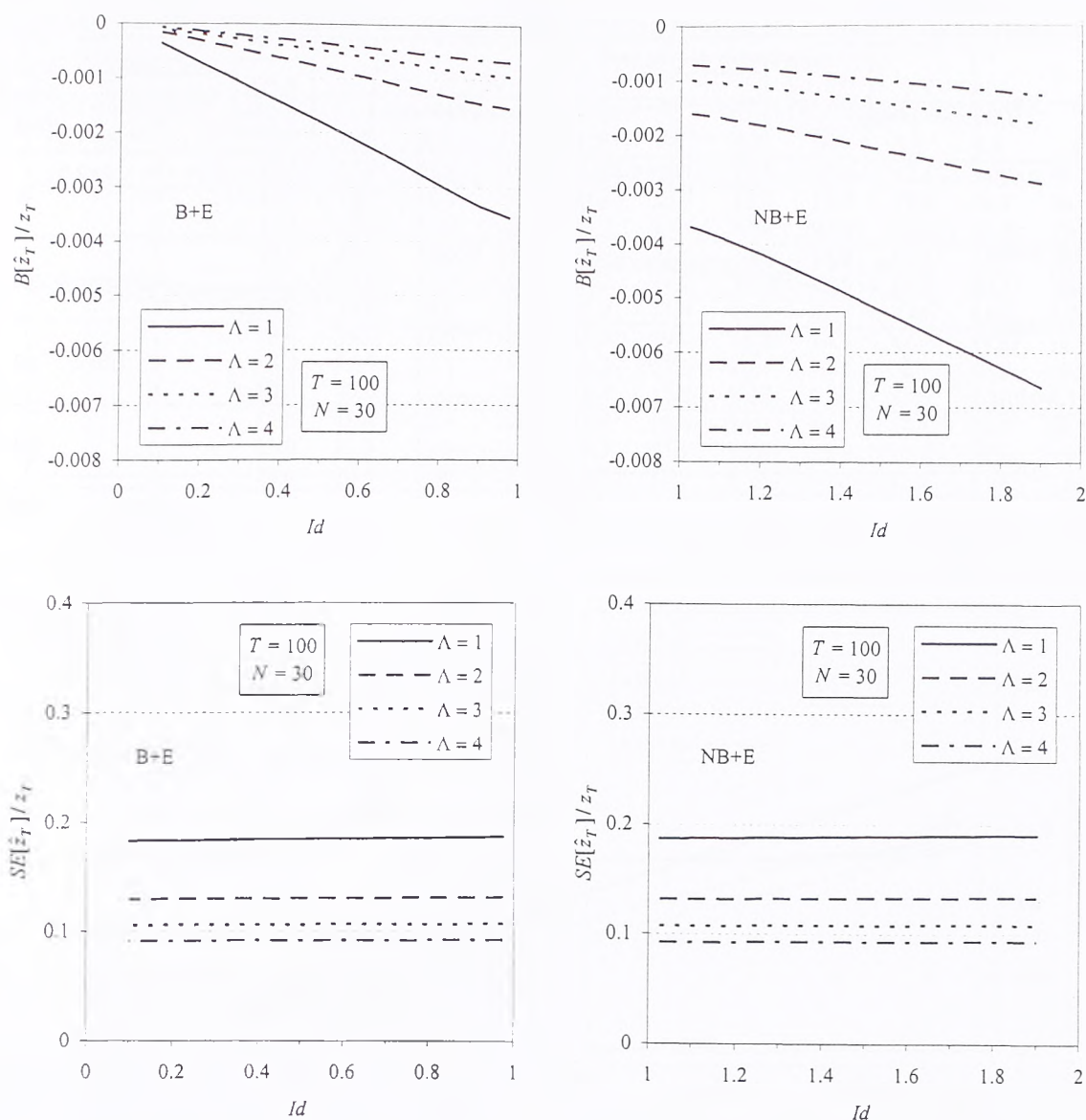
$$E[\hat{a}] = a + \frac{(a + \Lambda)}{N\Lambda^2} [\Lambda + 2(a + 1)(a + \Lambda)], \quad \text{var}[\hat{a}] = \frac{2a(a + 1)(a + \Lambda)^2}{N\Lambda^2}$$

III.5.2 Pristrasnost i standardna greška ocene kvantila

Svojstva ocene kvantila prema ova dva modela očigledno zavise od izabranog povratnog perioda T , broja godina osmatranja N i parametara Λ i a tj. b binomne tj. negativne binomne raspodele. Međutim, umesto parametara a i b za prikazivanje rezultata izabran je indeks disperzije broja prekoračenja I_d , kao ključna statistika u raspodeli broja prekoračenja. Indeks disperzije I_d kod binomne raspodele jednak je $1 - \Lambda/b$, a kod negativne binomne raspodele $1 + \Lambda/a$.

Na slici 46 prikazani su relativna pristrasnost i relativna standardna greška ocene kvantila za modele B+E i NB+E na primeru $N = 30$ godina i $T = 100$ godina za različite vrednosti srednjeg broja prekoračenja Λ i u u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekoračenja I_d . Na slici 47 su prikazana svojstva ocene kvantila u zavisnosti od povratnog perioda T , za $N = 30$, $\Lambda = 2$ i različite vrednosti indeksa disperzije. Detaljniji rezultati su dati u prilogu C4.

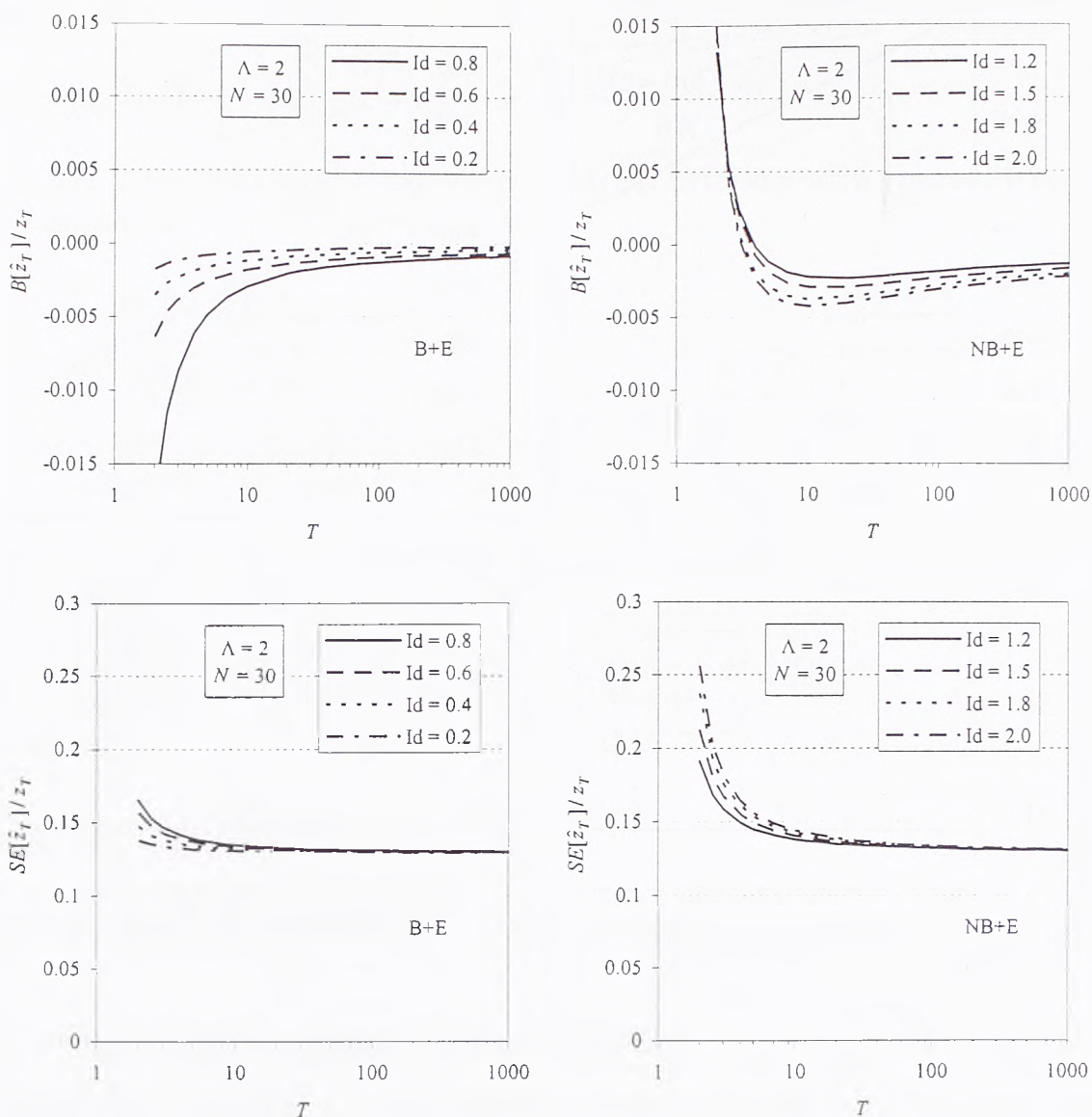
Sa slika 46 i 47 se može videti da je relativna pristrasnost ocene kvantila za oba modela mala i da ne prelazi vrednosti od 2%, osim za veoma mali broj godina osmatranja N i za prosečan godišnji broj prekoračenja $\Lambda \leq 1$. Relativna pristrasnost kvantila je generalno negativna i smanjuje se sa povećanjem povratnog perioda; u modelu NB+E to važi za povratne periode veće od 10 godina, dok za manje povratne periode opada do nule, prelazi u pozitivne vrednosti i naglo raste. Relativna pristrasnost kvantila raste sa porastom indeksa disperzije; međutim, to za model B+E znači da je pristrasnost veća kada se binomna raspodela približava Poasonovoj, a za model NB+E to znači da je pristrasnost manja kada se negativna binomna raspodela približava Poasonovoj raspodeli.



Slika 46. Primer relativne pristrasnosti i relativne standardne greške kvantila modela B+E (levo) i modela NB+E (desno) u zavisnosti od vrednosti indeksa disperzije broja prekoračenja I_d .

Relativna standardna greška ocene kvantila oba modela skoro da ne zavisi od indeksa disperzije, već samo od broja godina osmatranja N i srednjeg godišnjeg broja prekoračenja Λ . Za povratne periode veće od npr. 10 godina, relativna standardna greška oba modela takođe praktično ne zavisi od povratnog perioda; ova greška raste za manje povratne periode u modelu NB+E. Vrednosti relativne standardne greške za $N\Lambda > 50$ i $\Lambda > 1$ su manje od 15%. S obzirom da je relativna pristrasnost kvantila oba modela veoma mala, relativna srednja kvadratna greška kvantila (*RMSE*) se ponaša isto kao i relativna standardna greška.

U tabelama 13 i 14 date su neke brojne vrednosti ovih pokazatelja grešaka u oceni kvantila, dok je na slici 48 prikazan primer intervala poverenja za kvantile. Za oba modela se može reći da relativna pristrasnost i relativna standardna greška najviše zavise od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$, a veoma malo od samih N i Λ , kao i da malo zavise od indeksa disperzije i povratnog perioda. Na osnovu svega rečenog, može se zaključiti da je pouzdanost ocena kvantila modelima B+E i NB+E sasvim dobra pri razumnom izboru broja godina osmatranja i ukupnog broja prekoračenja u parcijalnim serijama.



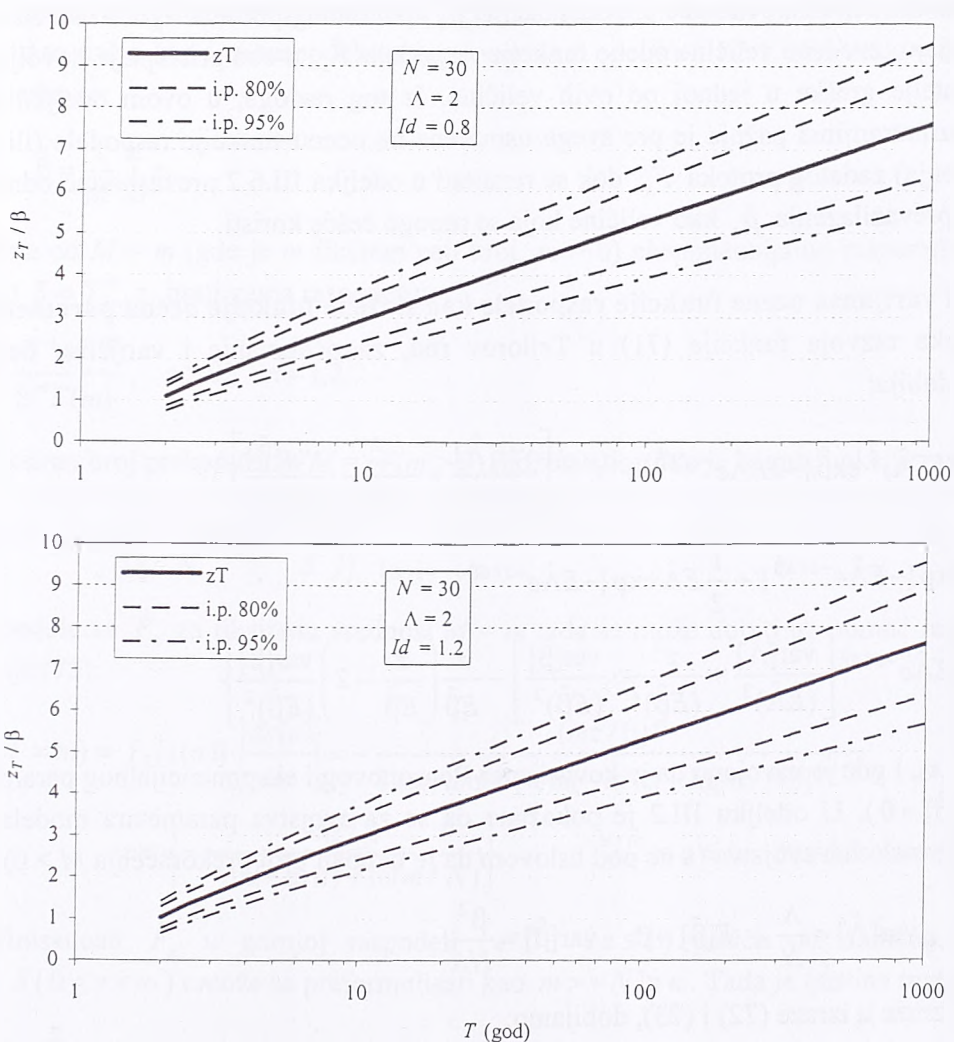
Slika 47. Primer relativne pristrasnosti i relativne standardne greške ocene kvantila modela B+E (levo) i modela NB+E (desno) u zavisnosti od povratnog perioda T .

Tabela 13. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela B+E i NB+E (u procentima).

Povratni period T (god)	Srednji broj prekoračenja Λ	Broj godina osmatranja											
		$N = 30$						$N = 50$					
		Indeks disperzije I_d						Indeks disperzije I_d					
2	1	-1.65	-2.90	-8.38	9.80	21.9	65.2	-0.99	-1.68	-5.00	9.11	13.5	35.5
	2	-0.35	-0.64	-1.77	1.32	1.47	1.41	-0.21	-0.36	-1.07	1.20	0.81	0.62
	3	-0.17	-0.32	-0.88	0.61	0.57	0.43	-0.10	-0.18	-0.54	0.55	0.30	0.15
10	1	-0.31	-0.47	-0.75	-0.56	-0.69	-0.84	-0.19	-0.28	-0.45	-0.27	-0.41	-0.52
	2	-0.12	-0.18	-0.29	-0.22	-0.29	-0.37	-0.07	-0.11	-0.18	-0.11	-0.18	-0.23
	3	-0.07	-0.11	-0.17	-0.13	-0.18	-0.23	-0.04	-0.06	-0.10	-0.07	-0.11	-0.14
100	1	-0.15	-0.22	-0.30	-0.42	-0.52	-0.63	-0.09	-0.13	-0.18	-0.25	-0.31	-0.38
	2	-0.06	-0.10	-0.13	-0.18	-0.23	-0.28	-0.04	-0.06	-0.08	-0.11	-0.14	-0.17
	3	-0.04	-0.06	-0.08	-0.11	-0.14	-0.17	-0.02	-0.04	-0.05	-0.07	-0.09	-0.10
1000	1	-0.10	-0.14	-0.19	-0.29	-0.36	-0.43	-0.06	-0.09	-0.12	-0.17	-0.22	-0.26
	2	-0.04	-0.07	-0.09	-0.13	-0.16	-0.20	-0.03	-0.04	-0.05	-0.08	-0.10	-0.12
	3	-0.03	-0.04	-0.06	-0.08	-0.10	-0.12	-0.02	-0.02	-0.03	-0.05	-0.06	-0.07

Tabela 14. Relativna standardna greška ocene kvantila modela B+E i NB+E (u procentima).

Povratni period T (god)	Srednji broj prekoračenja Λ	Broj godina osmatranja											
		$N = 30$						$N = 50$					
		Indeks disperzije I_d						Indeks disperzije I_d					
		0.4	0.6	0.8	1.2	1.5	1.8	0.4	0.6	0.8	1.2	1.5	1.8
2	1	27.5	33.9	41.4	70.9	124	341	21.3	26.4	32.4	54.9	98.2	277
	2	14.7	15.7	16.5	19.1	21.2	23.7	11.4	12.2	12.9	14.8	16.5	18.6
	3	11.4	11.8	12.2	13.3	14.2	15.1	8.84	9.19	9.50	10.3	11.0	11.7
10	1	18.9	19.3	19.6	20.4	20.9	21.5	14.7	14.9	15.2	15.8	16.2	16.6
	2	13.2	13.3	13.5	13.8	14.0	14.2	10.2	10.3	10.4	10.7	10.9	11.0
	3	10.7	10.8	10.9	11.1	11.2	11.4	8.31	8.38	8.45	8.60	8.70	8.81
100	1	18.4	18.5	18.6	18.8	18.9	19.0	14.3	14.3	14.4	14.5	14.6	14.7
	2	13.0	13.0	13.1	13.2	13.3	13.3	10.1	10.1	10.1	10.2	10.3	10.3
	3	10.6	10.6	10.7	10.7	10.8	10.8	8.22	8.24	8.26	8.31	8.35	8.39
1000	1	18.3	18.4	18.4	18.5	18.5	18.6	14.2	14.2	14.3	14.3	14.4	14.4
	2	13.0	13.0	13.0	13.0	13.1	13.1	10.0	10.1	10.1	10.1	10.1	10.2
	3	10.6	10.6	10.6	10.6	10.7	10.7	8.19	8.20	8.22	8.24	8.26	8.28



Slika 48. Primer intervala poverenja za kvantile modela B+E (gore) i NB+E (dole).

III.6 Neizvesnost ocene verovatnoće velikih voda modelom P+E

III.6.1 Teorijska razmatranja

Ocena funkcije raspodele za zadata vrednost protoka x u modelu P+E jednaka je:

$$\hat{F}_x = \exp\{-\hat{\Lambda} \exp[-(x - x_0)/\hat{\beta}]\} \quad (71)$$

gde su $\hat{\Lambda}$ i $\hat{\beta}$ ocene parametara Poasonove i eksponencijalne raspodele, a x_0 izabrana baza.

Kao što je rečeno u odeljku III.1.3, do grešaka u oceni verovatnoće fiksniranih protoka može se doći različitim pristupima. Najjednostavniji pristup sastoji se u razvoju izraza (71), kao složene funkcije ocena parametara, u Tejlorov red i određivanjem njenog očekivanja i varijanse. Iz tog razloga, ovaj pristup je prvi prikazan u nastavku. Drugi pristup koji će ovde biti prikazan sastoji se u određivanju raspodele ocene \hat{F}_x kao slučajne promenljive. Taj pristup se može naći u literaturi, mada u nešto drugačijem obliku. Naime, Ashkar i Rousselle (1981) su odredili raspodelu za \hat{T}_x , tj. povratni period koji odgovara funkciji raspodele \hat{F}_x , dok su Rasmussen i Rosbjerg (1989) došli do raspodela za ocenu povratnog perioda parcijalnih serija \hat{T}_{PDS_x} i za ocenu rizika \hat{R}_x .

S obzirom da ocene verovatnoće prevazilaženja \hat{p}_x , povratnog perioda \hat{T}_x i rizika zadanog protoka \hat{R}_x predstavljaju izvedene veličine ocene funkcije raspodele \hat{F}_x , u oba pristupa je dovoljno razmatrati samo pokazatelje greške u jednoj od ovih veličina. Iz tog razloga, u ovom odeljku koji se bavi teorijskim razmatranjima pažnja je pre svega usmerena na ocenu funkcije raspodele (ili verovatnoće neprevazilaženja) zadanog protoka \hat{F}_x , dok se rezultati u odeljku III.6.2 prevashodno odnose na ocenu verovatnoće prevazilaženja \hat{p}_x kao veličine koja se mnogo češće koristi.

Očekivanje i varijansa ocene funkcije raspodele kao složene funkcije ocena parametara. Uz primenu postupka razvoja funkcije (71) u Tejlorov red, za očekivanje i varijansu ocene funkcije raspodele se dobija:

$$\text{var}[\hat{F}_x] = (E\hat{\Lambda})^2 \exp\{-2E\hat{\Lambda}e^{-z/E\hat{\beta}}\} e^{-2z/E\hat{\beta}} \left[\frac{\text{var}[\hat{\Lambda}]}{(E\hat{\Lambda})^2} + \frac{z^2}{(E\hat{\beta})^2} \cdot \frac{\text{var}[\hat{\beta}]}{(E\hat{\beta})^2} \right] \quad (72)$$

$$E[\hat{F}_x] = \exp\{-E\hat{\Lambda}e^{-z/E\hat{\beta}}\} + \frac{1}{2} E\hat{\Lambda} \exp\{-E\hat{\Lambda}e^{-z/E\hat{\beta}}\} e^{-z/E\hat{\beta}} \cdot \left\{ E\hat{\Lambda}e^{-z/E\hat{\beta}} \left[\frac{\text{var}[\hat{\Lambda}]}{(E\hat{\Lambda})^2} + \frac{z^2}{(E\hat{\beta})^2} \cdot \frac{\text{var}[\hat{\beta}]}{(E\hat{\beta})^2} \right] - \frac{z}{E\hat{\beta}} \left(\frac{z}{E\hat{\beta}} - 2 \right) \frac{\text{var}[\hat{\beta}]}{(E\hat{\beta})^2} \right\} \quad (73)$$

gde je $z = x - x_0$, i gde je usvojeno da je kovarijansa Poasonovog i eksponencijalnog parametra jednaka nuli ($\text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{\beta}] = 0$). U odeljku III.2 je pokazano da se za svojstva parametara modela P+E mogu usvojiti tzv. bezuslovna svojstva (a ne pod uslovom da je ukupan broj prekoračenja $M > 0$), koja glase:

$$E[\hat{\Lambda}] = \Lambda, \quad \text{var}[\hat{\Lambda}] = \frac{\Lambda}{N}, \quad E[\hat{\beta}] = \beta, \quad \text{var}[\hat{\beta}] = \frac{\beta^2}{N\Lambda}$$

Unoseći ove izraze u izraze (72) i (73), dobijamo:

$$\text{var}[\hat{F}_x] = \frac{\Lambda}{N} \exp\{-2\Lambda e^{-z/\beta}\} e^{-2z/\beta} \left(1 + \frac{z^2}{\beta^2} \right)$$

$$E[\hat{F}_x] = \exp\{-\Lambda e^{-z/\beta}\} + \frac{1}{2N} \exp\{-\Lambda e^{-z/\beta}\} e^{-z/\beta} \left[\Lambda e^{-z/\beta} \left(1 + \frac{z^2}{\beta^2} \right) - \frac{z}{\beta} \left(\frac{z}{\beta} - 2 \right) \right]$$

Kako je tačna funkcija raspodele fiksanog prekoračenja $z = x - x_0$ jednaka $F_x = \exp\{-\Lambda e^{-z/\beta}\}$, gornje jednačine mogu se prikazati i u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}\text{var}[\hat{F}_x] &= \frac{1}{N\Lambda} (F_x \ln F_x)^2 (1 + y^2) \\ E[\hat{F}_x] &= F_x + \frac{1}{2N\Lambda} F_x \ln F_x [(1 + y^2) \ln F_x + y(y - 2)]\end{aligned}$$

gde je $y = z/\beta = -\ln(-\ln F_x) + \ln \Lambda$. Kako je $\hat{p}_x = 1 - \hat{F}_x$ i $p_x = 1 - F_x$, svojstva ocene verovatnoće prevazilaženja su:

$$\begin{aligned}\text{var}[\hat{p}_x] &= \text{var}[\hat{F}_x] = \frac{1}{N\Lambda} [(1 - p_x) \ln(1 - p_x)]^2 (1 + y^2) \\ E[\hat{p}_x] &= 1 - E[\hat{F}_x] = p_x - \frac{1}{2N\Lambda} (1 - p_x) \ln(1 - p_x) [(1 + y^2) \ln(1 - p_x) + y(y - 2)]\end{aligned}$$

gde je $y = z/\beta = -\ln[-\ln(1 - p_x)] + \ln \Lambda$. Do svojstava ocena povratnog perioda i rizika može se doći uz pomoć jednačina iz odeljka III.1.3.

Raspodela ocene funkcije raspodele modela P+E. Do raspodele ocene funkcije raspodele (71) može se doći na sličan način kao i za raspodelu ocene kvantila u odeljku III.2.1. Imajući u vidu da su ocene parametara jednake:

$$\hat{\Lambda} = \frac{M}{N}, \quad \hat{\beta} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M z_i$$

kao i da suma od $M = m$ (gde je m fiksan ceo broj, $m > 0$) eksponencijalno raspoređenih slučajnih promenljivih $S = \sum_{i=1}^m z_i$ prati gama raspodelu:

$$f_S(s) = \frac{s^{m-1} e^{-s/\beta}}{\beta^m \Gamma(m)}, \quad s > 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (74)$$

tada se za fiksan broj prekoračenja $M = m$ ($m > 0$) može napisati da je ocena funkcije raspodele:

$$\{\hat{F}_x | M = m\} = \exp\left\{-\frac{m}{N} \exp\left(-\frac{mz}{S}\right)\right\} \quad (75)$$

Gustina raspodele za \hat{F}_x za fiksiranu vrednost $M = m$ tada se može dobiti uz pomoć raspodele (74) i transformacije (75):

$$\begin{aligned}f_{\hat{F}_x}(a | M = m) &= f_S[s(a)] \cdot \left| \frac{ds(a)}{da} \right| = \frac{(mz/\beta)^m}{\Gamma(m) a \ln a [-\ln(-\ln a) + \ln(m/N)]^{m+1}} \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{mz/\beta}{-\ln(-\ln a) + \ln(m/N)}\right\}, \quad e^{-m/N} < a \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots\end{aligned} \quad (76)$$

Domen definisanosti \hat{F}_x u gornjoj raspodeli ($e^{-m/N} < a \leq 1$) potiče od domena definisanosti promenljive S ($0 < s < \infty$) i može se preformulisati kao $m > -N \ln a$. Tada je gustina raspodele \hat{F}_x :

$$f_{\hat{F}_x}(a) = \sum_{m > -N \ln a}^{\infty} f_{\hat{F}_x}(a | M = m) \cdot P\{M = m\}$$

Može se lako pokazati da je:

$$\int_0^1 f_{\hat{F}_x}(a) da = \int_0^1 \sum_{m > -N \ln a}^{\infty} f_{\hat{F}_x}(a | M = m) \cdot P\{M = m\} da = \sum_{m=1}^{\infty} P\{M = m\} \int_{e^{-m/N}}^1 f_{\hat{F}_x}(a | M = m) da = P\{M > 0\} = 1 - P\{M = 0\}$$

što znači da se radi o nepotpunoj raspodeli koja nije definisana za $M = 0$.

Koristeći se raspodelom ocene funkcije raspodele, mogu se odrediti i raspodele ocene povratnog perioda i ocene rizika kao veličina koje zavise od ocene funkcije raspodele: $\hat{T}_x = 1/(1 - \hat{F}_x)$ i $\hat{R}_x = 1 - \hat{F}_x^L$. Na taj način, za raspodelu ocene povratnog perioda uz uslov $M = m$ se dobija:

$$f_{\hat{T}_x}(t | M = m) = f_{\hat{F}_x}[a(t) | M = m] \cdot \left| \frac{da(t)}{dt} \right| = \frac{(mz/\beta)^m}{\Gamma(m)t(t-1) \ln \frac{t-1}{t} [-\ln(-\ln \frac{t-1}{t}) + \ln(m/N)]^{m+1}} \cdot \exp\left\{-\frac{mz/\beta}{-\ln(-\ln \frac{t-1}{t}) + \ln(m/N)}\right\}, \quad t > t_0 = 1/(1 - e^{-m/N}), \quad m = 1, 2, \dots \quad (77)$$

dok je raspodela ocene rizika za fiksirano $M = m$ glasi:

$$f_{\hat{R}_x}(r | M = m) = f_{\hat{F}_x}[a(r) | M = m] \cdot \left| \frac{da(r)}{dr} \right| = \frac{(mz/\beta)^m}{\Gamma(m)(1-r) \ln(1-r) [-\ln(-\ln(1-r)) + \ln(m/N)]^{m+1}} \cdot \exp\left\{-\frac{mz/\beta}{-\ln(-\ln(1-r)) + \ln(m/N)}\right\}, \quad 0 < r < r_0 = 1 - e^{-m/N}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (78)$$

Odgovarajuće bezuslovne gustine su tada:

$$f_{\hat{T}_x}(t) = \sum_{m > c}^{\infty} f_{\hat{T}_x}(t | M = m) \cdot P\{M = m\}, \quad c = -N \ln(1 - 1/t) \quad (79)$$

i

$$f_{\hat{R}_x}(r) = \sum_{m > c}^{\infty} f_{\hat{R}_x}(r | M = m) \cdot P\{M = m\}, \quad c = -\frac{N}{L} \ln(1 - r)$$

Ashkar i Rousselle (1981) su došli do raspodele za \hat{T}_x (izrazi 77 i 79) direktno, bez razmatranja raspodele za \hat{F}_x . Sličan postupak su koristili Rasmussen i Rosbjerg (1989) da bi došli do raspodele za \hat{T}_x i \hat{R}_x , s tim što su razmatrali povratni period parcijalnih serija $\hat{T}_{x, PDS}$ umesto povratnog perioda godišnjih maksimuma \hat{T}_x . Međutim, kako između dva vida povratnih perioda, T i T_{PDS} , postoji funkcionalna veza $T = (1 - e^{-1/T_{PDS}})^{-1}$, može se pokazati da se u suštini radi o istim raspodelama.

Gustine raspodele ocena funkcije raspodele, povratnog perioda i rizika mogu se iskoristiti za određivanje očekivanja i varijansi ovih ocena. Međutim, funkcija gustine za \hat{T}_x (izrazi 77 tj. 79) nije integrabilna ni analitički ni numerički, pa se svojstva ocene povratnog perioda ne mogu odrediti na ovaj način, što su konstatovali i Rasmussen i Rosbjerg (1989). S druge strane, Rasmussen i Rosbjerg (1989) su odredili očekivanje i varijansu ocene rizika \hat{R}_x . Naime, prvi i drugi momenat raspodele (78) definišu očekivanje i varijansu ocene funkcije raspodele za $M = m$; oni imaju prilično složene izraze i glase:

$$E[\hat{R}_x | M = m] = 1 - \frac{2}{\Gamma(m)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\frac{mL}{N}\right)^i (imz/\beta)^{m/2} K_m[2(imz/\beta)^{1/2}]$$

$$E[\hat{R}_x^2 | M = m] = 1 - \frac{2}{\Gamma(m)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2 - 2^i)}{i!} \left(\frac{mL}{N}\right)^i (imz/\beta)^{m/2} K_m[2(imz/\beta)^{1/2}]$$

gde je $K_m(\cdot)$ modifikovana Beselova funkcija III vrste. Na osnovu gornjih izraza mogu se dobiti uslovno očekivanje i uslovna varijansa za $M > 0$:

$$E[\hat{R}_x | M > 0] = \frac{1}{P\{M > 0\}} \sum_{m=1}^{\infty} E[\hat{R}_x | M = m] \cdot P\{M = m\}$$

$$\text{var}[\hat{R}_x | M > 0] = \frac{1}{P\{M > 0\}} \sum_{m=1}^{\infty} E[\hat{R}_x^2 | M = m] \cdot P\{M = m\} - (E[\hat{R}_x | M > 0])^2$$
(80)

Kada su u pitanju očekivanje i varijansa \hat{F}_x , služeći se postupkom Rasmussena i Rosbjerga (1989) može se doći do prvog i drugog momenta raspodele (76), koji glase:

$$E[\hat{F}_x | M = m] = \frac{2}{\Gamma(m)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\frac{m}{N}\right)^i (imz/\beta)^{m/2} K_m[2(imz/\beta)^{1/2}]$$

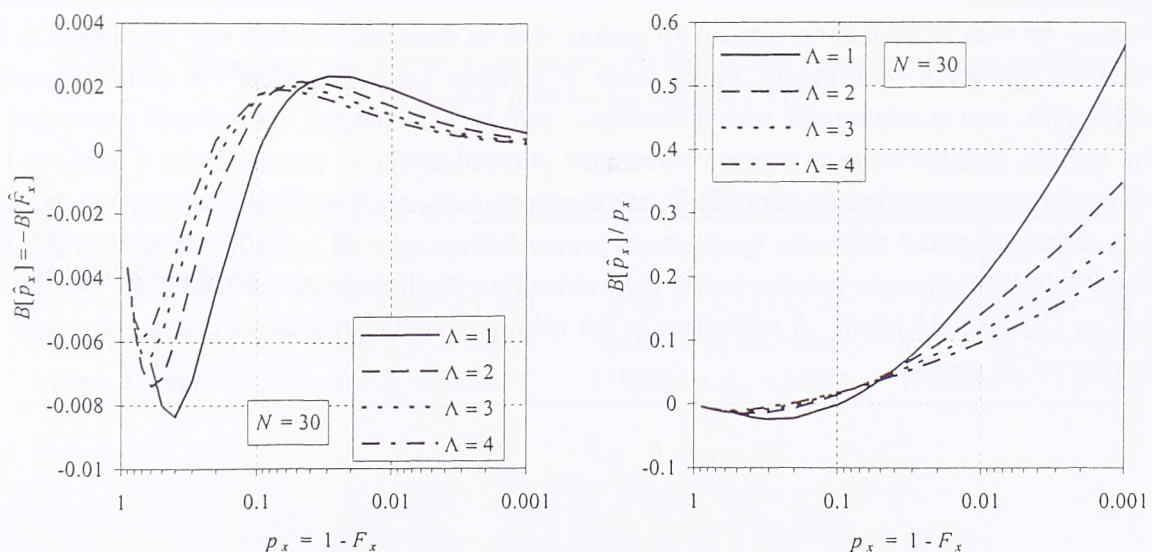
$$E[\hat{F}_x^2 | M = m] = \frac{2}{\Gamma(m)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\frac{2m}{N}\right)^i (imz/\beta)^{m/2} K_m[2(imz/\beta)^{1/2}]$$

dok se uslovno očekivanje i uslovna varijansa za $M > 0$ zatim dobijaju analogno jednačini (80).

Međutim, ovako složeni izrazi nemaju praktičnu svrhu. U radu Rasmussena i Rosbjerga (1989) se može naći jedan primer poređenja pristranosti i standardne greške ocene rizika \hat{R}_x prema izrazima (80) i prema odgovarajućim približnim izrazima dobijenim pristupom razvoja u Tejlorov red. Iz tog primera se može zaključiti da su razlike između dva pristupa male, naročito za $SE[\hat{R}_x]$, i da pristup razvoja u Tejlorov red sasvim dobro aproksimira pristup preko gustine raspodele ocene rizika \hat{R}_x .

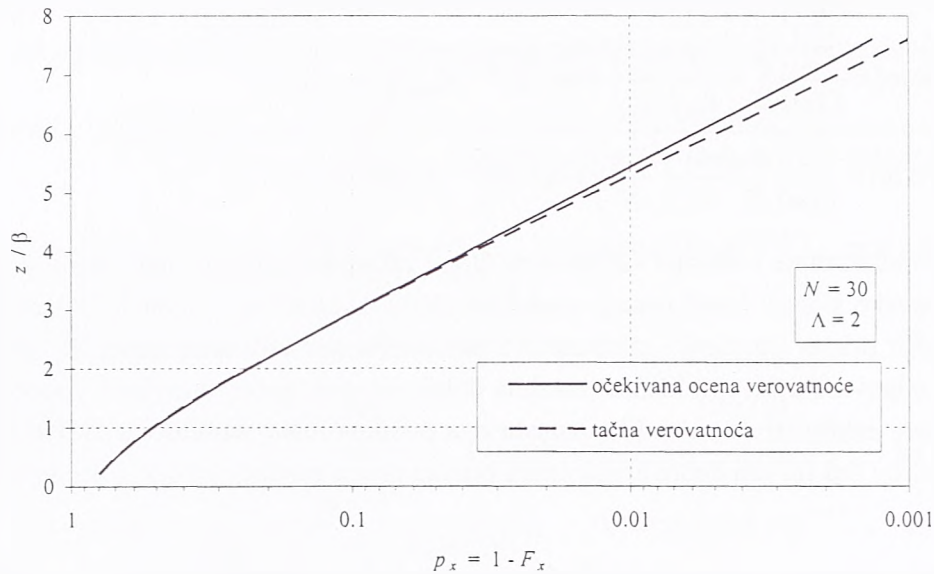
III.6.2 Svojsva ocene verovatnoće fiksiranog protoka u modelu P+E

Korišćenjem izraza za očekivanje i varijansu ocena \hat{F}_x i \hat{p}_x , dobijenih pristupom razvoja u Tejlorov red, određeni su pristranost i standardna greška ovih ocena. Na slici 49 prikazana je pristranost ocene \hat{F}_x , odnosno \hat{p}_x , u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x i za dužinu niza od 30 godina. Pored apsolutne pristranosti, na slici je prikazana i relativna pristranost $B[\hat{p}_x]/p_x$ kako bi se stekao uvid o redu veličine greške (detaljniji rezultati su dati u prilogu C5). Iz rezultata se može uočiti da je pristranost ocene \hat{p}_x za $p_x > 0.1$ (tj. $T_x < 10$) mala i negativna, dok je relativno velika i pozitivna za $p_x < 0.1$ tj. za $T_x > 10$. To znači da se za fiksirane protoke sa tačnim povratnim periodom većim od 10 godina verovatnoća prevazilaženja precenjuje, a verovatnoća



Slika 49. Pristranost ocene funkcije raspodele odnosno verovatnoće prevazilaženja fiksiranog protoka modelom P+E: apsolutna pristranost (levo) i relativna pristranost (desno).

neprevazilaženja i povratni period potcenjuju (slika 50). Na primer, u nizu od $N = 30$ godina i $\Lambda = 2$, za protok kome po tačnoj raspodeli odgovara verovatnoća prevazilaženja od $0.01 = 1/100$, očekivana ocena verovatnoće prevazilaženja iznosi 0.01142 ili $1/87.6$. U tabeli 15 su prikazane još neke vrednosti očekivanih verovatnoća prevazilaženja za dužinu niza od 30 godina.

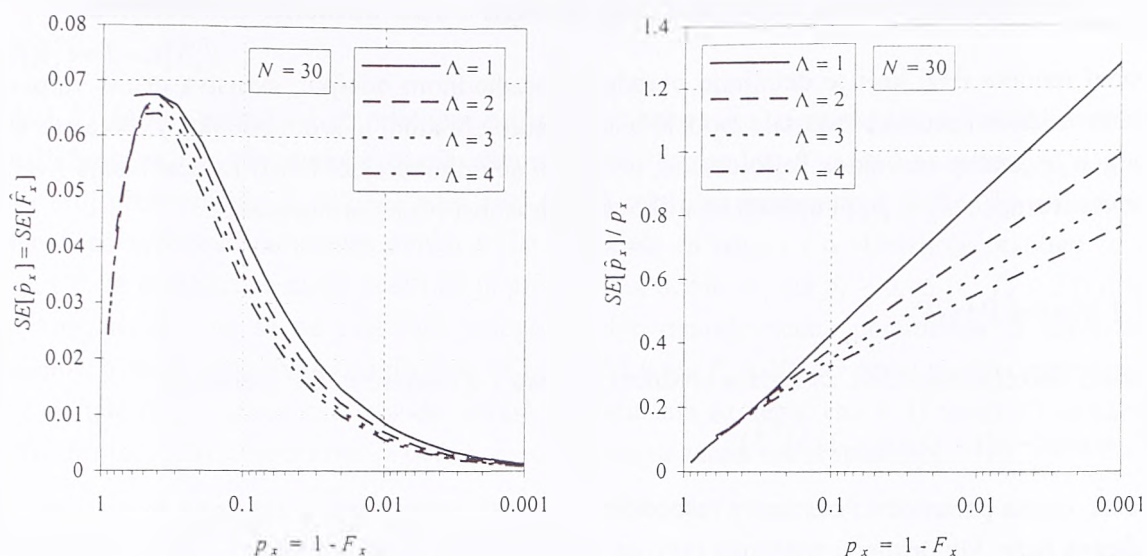


Slika 50. Primer odnosa očekivane ocene i tačne vrednosti verovatnoće prevazilaženja fiksiranog protoka u modelu P+E.

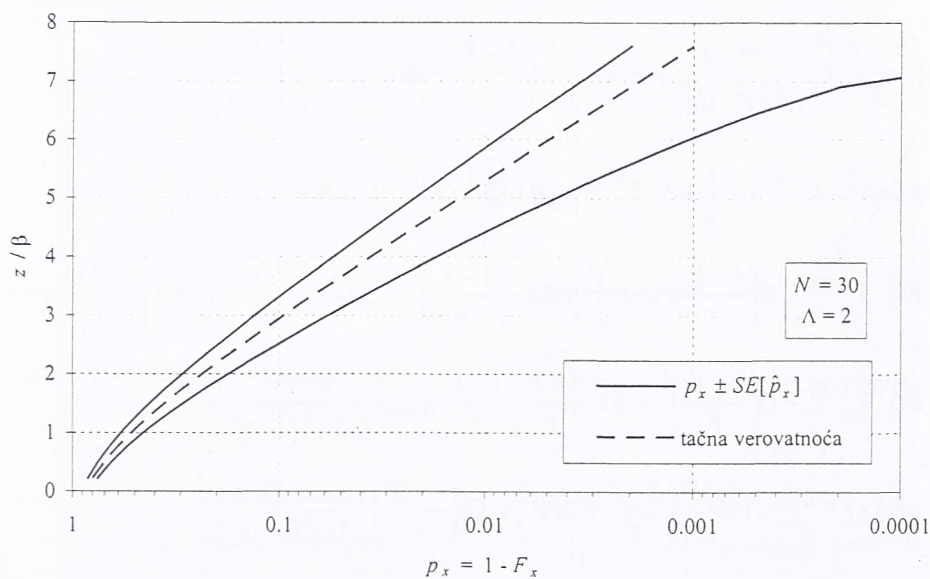
Tabela 15. Očekivane ocene verovatnoće prevazilaženja modelom P+E za $N = 30$.

Tačna verovatnoća prevazilaženja p_x	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$	$\Lambda = 3$
$0.1 = 1/10$	1/10.0	1/9.9	1/9.8
$0.01 = 1/100$	1/83.7	1/87.6	1/89.7
$0.001 = 1/1000$	1/639	1/739	1/789

Standardna greška ocene \hat{F}_x , odnosno \hat{p}_x , u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x prikazana je na slici 51 za dužinu niza od 30 godina, dok su detaljniji rezultati dati u prilogu C5. Iako je standardna greška u apsolutnom smislu mala u gornjem kraju raspodele (za male verovatnoće prevazilaženja), ona u relativnom smislu značajno raste sa smanjenjem verovatnoće prevazilaženja. Drugim rečima, granice moguće ocene verovatnoće prevazilaženja su veoma široke u gornjem kraju raspodele, što se može videti na slici 52. U istom primeru niza od $N = 30$ godina i $\Lambda = 2$, za protok kome po tačnoj raspodeli odgovara verovatnoća prevazilaženja od $0.01 = 1/100$, standardna greška za \hat{p}_x iznosi 0.00692, odnosno granice ocene verovatnoće prevazilaženja su $0.00308 < p_x < 0.01692$ ili $1/325 < p_x < 1/59.1$. U tabeli 16 prikazano je još nekoliko vrednosti granica ocene verovatnoće za dužinu niza od 30 godina.



Slika 51. Standardna greška ocene funkcije raspodele odnosno verovatnoće prevazilaženja fiksnog protoka modelom P+E: absolutna (levo) i relativna (desno) standardna greška.



Slika 52. Primer intervala (širine 2 standardne greške) ocene verovatnoće prevazilaženja fiksnog protoka po modelu P+E.

Tabela 16. Intervali ocene verovatnoće prevazilaženja (širine 2 standardne greške) za $N = 30$.

Tačna verovatnoća prevazilaženja p_x	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$	$\Lambda = 3$
$0.1 = 1/10$	$1/17.4 < \hat{p}_x < 1/7.0$	$1/16.1 < \hat{p}_x < 1/7.2$	$1/15.4 < \hat{p}_x < 1/7.4$
$0.01 = 1/100$	$1/690 < \hat{p}_x < 1/53.9$	$1/325 < \hat{p}_x < 1/59.1$	$1/254 < \hat{p}_x < 1/62.2$
$0.001 = 1/1000$	$0 < \hat{p}_x < 1/440$	$1/92336 < \hat{p}_x < 1/503$	$1/6668 < \hat{p}_x < 1/541$

III.7 Pouzdanost ocena verovatnoće velikih voda ostalim modelima

Pored modela P+E koji je detaljnije obrađen u prethodnom odeljku, svojstva ocena verovatnoće fiksirane vrednosti protoka za ostale modele biće ukratko obrađeni u ovom odeljku. Za sve ove modele primenjen je pristup razvoja u Tejlorov red; prikazani su odgovarajući izrazi za očekivanje i varijansu ocene verovatnoće \hat{F}_x i \hat{p}_x , i opisani su njihova pristrasnost i standardna greška.

III.7.1 Model P+GP

Ocena funkcije raspodele za zadatu vrednost protoka x u modelu P+GP jednaka je:

$$\hat{F}_x = \exp\{-\hat{\Lambda}[1 - \hat{k}(x - x_0)/\hat{b}]^{1/\hat{k}}\} \quad (81)$$

gde je $\hat{\Lambda}$ ocena parametra Poasonove raspodele, \hat{k} i \hat{b} su ocene parametara opšte Pareto raspodele, a x_0 izabrana baza. Uz primenu postupka razvoja funkcije (81) u Tejlorov red, za varijansu i očekivanje ocene funkcije raspodele se dobija:

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{F}_x] = & (E\hat{\Lambda})^2 Y^{2/E\hat{k}} \exp\{-2E\hat{\Lambda} \cdot Y^{1/E\hat{k}}\} \cdot \left\{ \frac{\text{var}[\hat{\Lambda}]}{(E\hat{\Lambda})^2} + \left(\frac{1-Y}{Y} + \ln Y \right)^2 \frac{\text{var}[\hat{k}]}{(E\hat{k})^4} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1-Y}{Y} \right)^2 \frac{\text{var}[\hat{b}]}{(E\hat{k})^2 (E\hat{b})^2} - 2 \frac{1-Y}{Y} \left(\frac{1-Y}{Y} + \ln Y \right) \frac{\text{cov}[\hat{k}, \hat{b}]}{(E\hat{k})^3 (E\hat{b})} \right\} \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} E[\hat{F}_x] = & \exp\{-E\hat{\Lambda} \cdot Y^{1/E\hat{k}}\} + \frac{1}{2} E\hat{\Lambda} \cdot Y^{1/E\hat{k}} \exp\{-E\hat{\Lambda} \cdot Y^{1/E\hat{k}}\} \left\{ E\hat{\Lambda} \cdot Y^{1/E\hat{k}} \frac{\text{var}[\hat{\Lambda}]}{(E\hat{\Lambda})^2} + \right. \\ & + \left[(E\hat{\Lambda} \cdot Y^{1/E\hat{k}} - 1) \left(\frac{1-Y}{Y} + \ln Y \right)^2 + E\hat{k} \cdot \left(\frac{1-Y}{Y} \right)^2 - 2E\hat{k} \cdot \left(\frac{1-Y}{Y} + \ln Y \right) \right] \frac{\text{var}[\hat{k}]}{(E\hat{k})^4} + \\ & + \left[(E\hat{\Lambda} \cdot Y^{1/E\hat{k}} - 1) \left(\frac{1-Y}{Y} \right)^2 + E\hat{k} \cdot \frac{1-Y}{Y} \left(\frac{1-Y}{Y} + 2 \right) \right] \frac{\text{var}[\hat{b}]}{(E\hat{k})^2 (E\hat{b})^2} - \\ & \left. - 2 \left[(E\hat{\Lambda} \cdot Y^{1/E\hat{k}} - 1) \frac{1-Y}{Y} \left(\frac{1-Y}{Y} + \ln Y \right) + E\hat{k} \left(\frac{1-Y}{Y} \right)^2 \right] \frac{\text{cov}[\hat{k}, \hat{b}]}{(E\hat{k})^3 (E\hat{b})} \right\} \end{aligned} \quad (83)$$

gde je sa Y označeno:

$$Y = 1 - \frac{E\hat{k}}{E\hat{b}}(x - x_0)$$

U izrazima (82) i (83) je usvojeno da su kovarijanse Poasonovog parametra i parametara GP raspodele jednake nuli. U odeljku III.3 je pokazano da se za svojstva parametara modela P+GP mogu usvojiti tzv. bezuslovna svojstva (a ne pod uslovom da je ukupan broj prekoračenja $M > 1$). Tada za parametar Poasonove raspodele važi:

$$E[\hat{\Lambda}] = \Lambda, \quad \text{var}[\hat{\Lambda}] = \frac{\Lambda}{E}$$

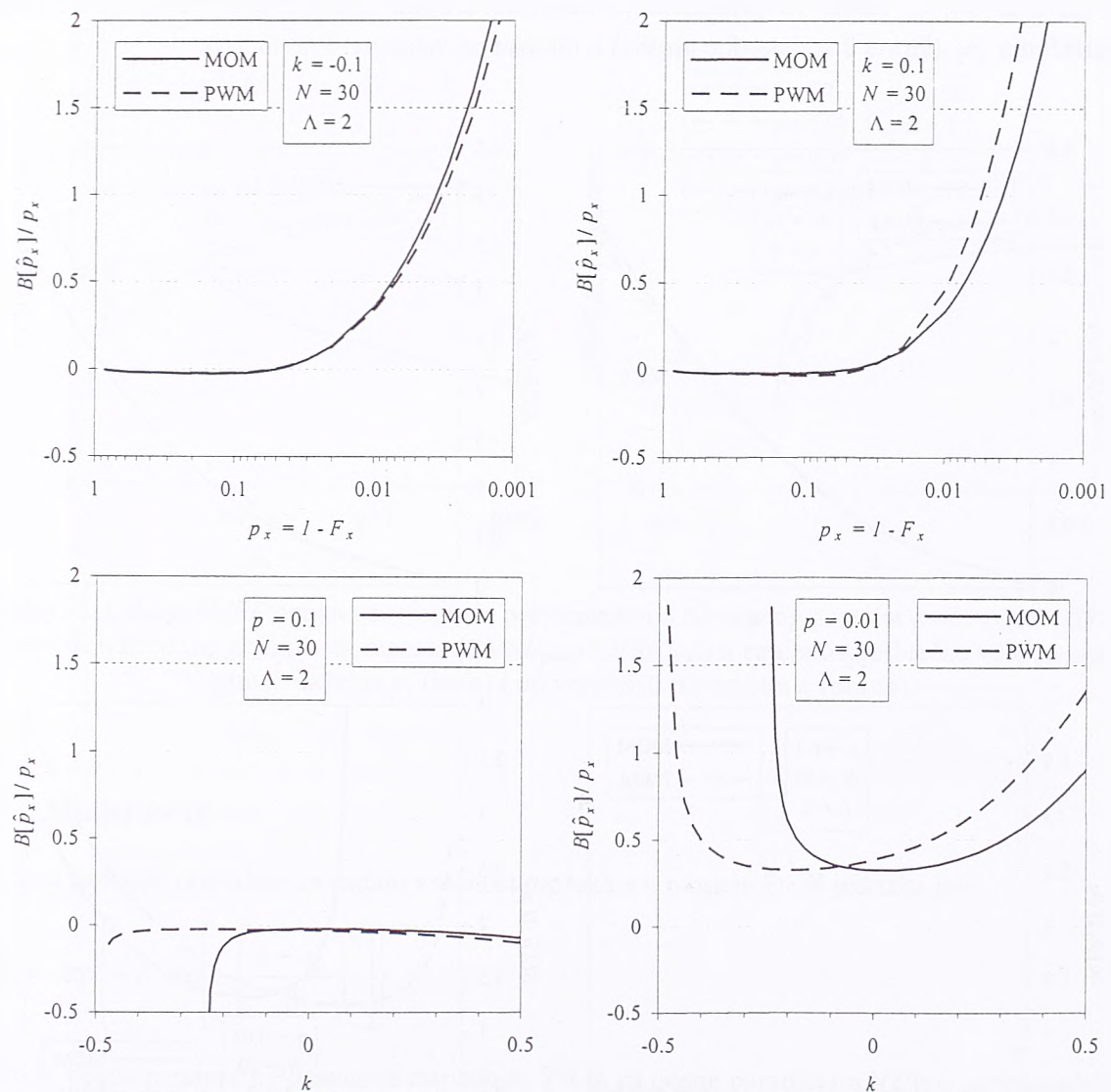
dok se svojstva ocena parametara GP raspodele određuju na osnovu obrazaca za metode običnih i težinskih momenata datih u odeljku II.3.4.

Na osnovu svojstava ocene funkcije raspodele \hat{F}_x određuju se i svojstva ocene verovatnoće prevazilaženja \hat{p}_x kao:

$$\text{var}[\hat{p}_x] = \text{var}[\hat{F}_x]$$

$$E[\hat{p}_x] = 1 - E[\hat{F}_x]$$

Na slici 53 (gore) prikazana je relativna pristrasnost ocene \hat{p}_x u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x , za obe metode ocene parametara GP raspodele i za dužinu niza od 30 godina i srednji broj prekoračenja $\Lambda = 2$; na istoj slici (dole) relativna pristrasnost ocene \hat{p}_x prikazana je u zavisnosti od vrednosti parametra oblika k GP raspodele za isto N i Λ . Detaljniji rezultati su dati u prilogu C6. Iz rezultata se može uočiti da je pristrasnost ocene \hat{p}_x za $p_x > 0.05$ (tj. $T_x < 20$) relativno mala i negativna i da se ne razlikuje mnogo za dve metode ocene parametara. S druge strane, pristrasnost postaje i pozitivna i naglo raste za $p_x < 0.05$ tj. za $T_x > 20$, pri čemu metoda momenata daje bolje rezultate za pozitivno k , a metoda težinskih momenata za negativno k . U tabeli 17 prikazano je nekoliko brojnih primera očekivanja ocene \hat{p}_x u odnosu na tačnu verovatnoću p_x .

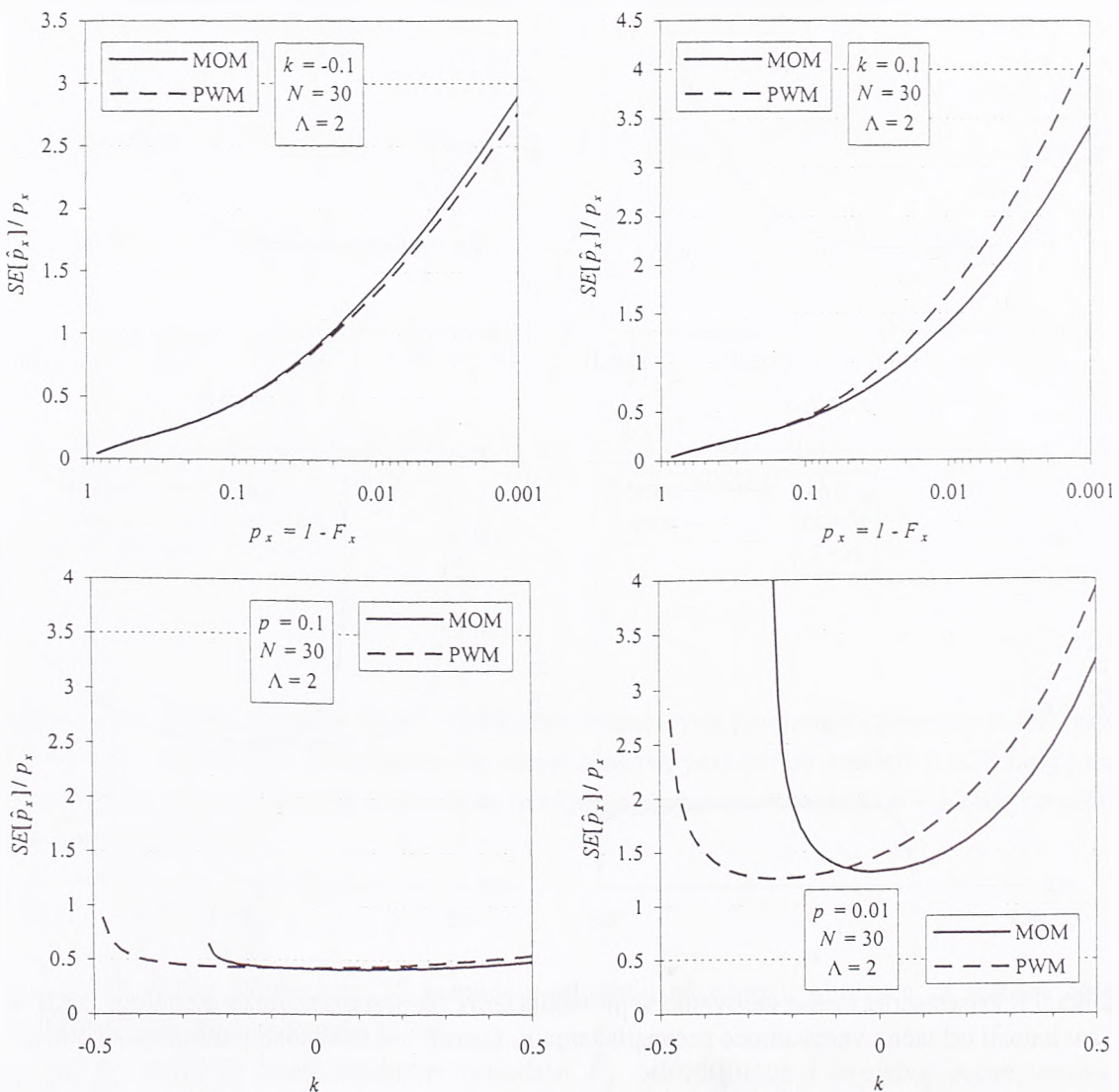


Slika 53. Pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja fiksiranog protoka modelom P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x (gore) i od vrednosti parametra k (dole).

Tabela 17. Očekivane ocene verovatnoće prevazilaženja modelom P+GP za $N = 30$ i $\Lambda = 2$.

Tačna verovatnoća prevazilaženja p_x	$k = -0.2$		$k = -0.1$		$k = 0.1$		$k = 0.2$	
	(metoda PWM)		(metoda PWM)		(metoda MOM)		(metoda MOM)	
	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$
0.1 = 1/10	1/10.4	1/10.2	1/10.4	1/10.2	1/10.3	1/10.2	1/10.3	1/10.2
0.01 = 1/100	1/77.9	1/75.4	1/78.6	1/74.7	1/80.6	1/74.9	1/81.0	1/72.1
0.001 = 1/1000	1/288	1/347	1/255	1/301	1/211	1/233	1/156	1/162

Ponašanje standardne greške ocene \hat{p}_x prikazano je na slici 54 za $N = 30$ i $\Lambda = 2$, dok su detaljniji rezultati dati u prilogu C6. Rezultati ukazuju na sličan zaključak u odnosu na pristrasnost ocene \hat{p}_x , a to je da se standardna greška ne razlikuje mnogo za dve metode ocene parametara za $p_x > 0.05$ (tj. $T_x < 20$), dok za $p_x < 0.05$ (tj. za $T_x > 20$) metoda momenata daje bolje rezultate za pozitivno k , a metoda težinskih momenata za negativno k . Takođe, standardna greška prilično raste sa približavanjem gornjem kraju raspodele tj. sa smanjenjem verovatnoće prevazilaženja. Drugim rečima, granice moguće ocene verovatnoće prevazilaženja su veoma široke u gornjem kraju raspodele, što se može videti na slici 54. U tabeli 18 prikazano je nekoliko brojnih primera granica ocene verovatnoće prevazilaženja \hat{p}_x (širine 2 standardne greške) u odnosu na tačnu verovatnoću p_x .

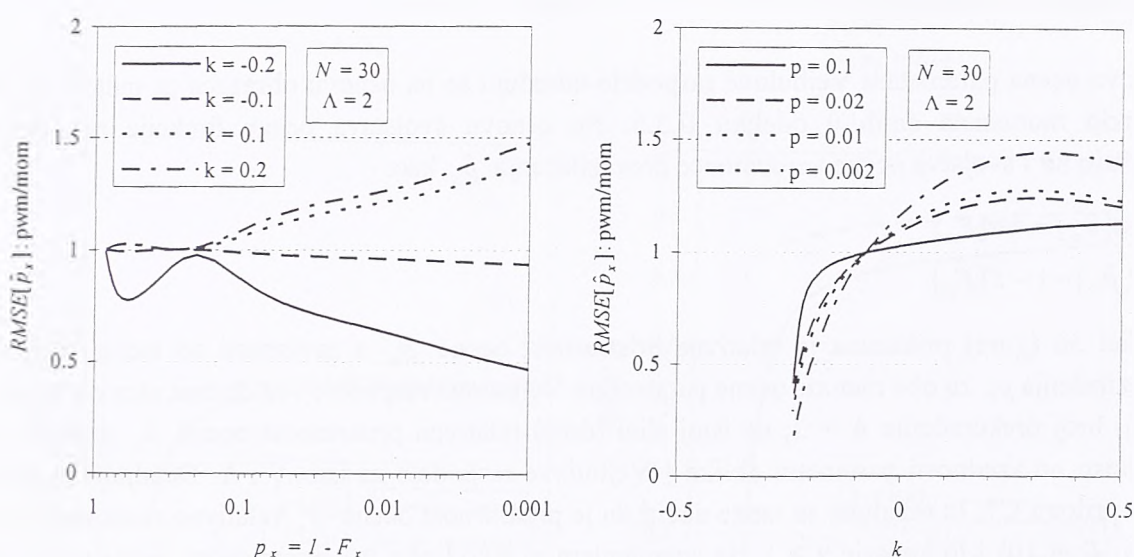


Slika 54. Standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja fiksiranog protoka modelom P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x (gore) i od vrednosti parametra k (dole).

Tabela 18. Intervali ocene verovatnoće prevazilaženja (širine 2 standardne greške) modelom P+GP za $N = 30$ i $\Lambda = 2$.

Tačna verovatnoća prevazilaženja p_x	$k = -0.2$ (metoda PWM)	$k = -0.1$ (metoda PWM)	$k = 0.1$ (metoda MOM)	$k = 0.2$ (metoda MOM)
$0.1 = 1/10$	$1/17.6 < \hat{p}_x < 1/7.0$	$1/17.4 < \hat{p}_x < 1/7.0$	$1/17.1 < \hat{p}_x < 1/7.1$	$1/17.2 < \hat{p}_x < 1/7.1$
$0.01 = 1/100$	$0 < \hat{p}_x < 1/44.2$	$0 < \hat{p}_x < 1/43.0$	$0 < \hat{p}_x < 1/41.7$	$0 < \hat{p}_x < 1/38.4$
$0.001 = 1/1000$	$0 < \hat{p}_x < 1/290$	$0 < \hat{p}_x < 1/266$	$0 < \hat{p}_x < 1/226$	$0 < \hat{p}_x < 1/184$

Odnos dve metode za ocenu parametara je ispitan preko odnosa srednje kvadratne greške $RMSE[\hat{p}_x]$ prema metodi težinskih i običnih momenata (slika 55); kada je ovaj odnos veći od 1, prednost ima metoda momenata i obrnuto. Zaključak je isti kao i ranije, a to je da metoda običnih momenata ima prednost za $k > -0.1$, dok metoda težinskih momenata ima prednost za $k < -0.1$. U domenu verovatnoća $p_x > 0.1$ dve metode su praktično ravnopravne, a za $p_x < 0.1$ značajnu prednost dobija jedna od dve metode u zavisnosti od vrednosti parametra k .



Slika 55. Odnos $RMSE$ ocene verovatnoće prevazilaženja fiksiranog protoka modelom P+GP po metodi težinskih i običnih momenata ($RMSE_{pwm}/RMSE_{mom}$) u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x (levo) i od vrednosti parametra k (desno).

III.7.2 Model P+W

Ocena funkcije raspodele za zadatu vrednost protoka x u modelu P+W jednaka je:

$$\hat{F}_x = \exp \left\{ -\hat{\Lambda} \exp \left[-\left(\frac{x - x_0}{\hat{\beta}} \right)^{\hat{\gamma}} \right] \right\} \quad (84)$$

gde je $\hat{\Lambda}$ ocena parametra Poasonove raspodele, $\hat{\gamma}$ i $\hat{\beta}$ su ocene parametara Vejbulove raspodele, a x_0 izabrana baza. Uz primenu postupka razvoja funkcije (84) u Tejlorov red, za varijansu i očekivanje ocene funkcije raspodele se dobija:

$$\text{var}[\hat{F}_x] = (E\hat{\Lambda})^2 e^{-2Y} \exp\{-2E\hat{\Lambda} \cdot e^{-Y}\} \left\{ \frac{\text{var}[\hat{\Lambda}]}{(E\hat{\Lambda})^2} + Y^2 \left[\frac{\text{var}[\hat{\gamma}]}{(E\hat{\gamma})^2} \ln^2 Y + (E\hat{\gamma})^2 \frac{\text{var}[\hat{\beta}]}{(E\hat{\beta})^2} - 2 \frac{\text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}]}{E\hat{\beta}} \ln Y \right] \right\}$$

$$E[\hat{F}_x] = \exp\{-E\hat{\Lambda} \cdot e^{-Y}\} + \frac{1}{2} E\hat{\Lambda} \cdot e^{-Y} \exp\{-E\hat{\Lambda} \cdot e^{-Y}\} \left\{ E\hat{\Lambda} e^{-Y} \frac{\text{var}[\hat{\Lambda}]}{(E\hat{\Lambda})^2} + \right. \\ \left. + Y \left[(E\hat{\Lambda} \cdot Ye^{-Y} + 1 - Y) \ln^2 Y \frac{\text{var}[\hat{\gamma}]}{(E\hat{\gamma})^2} + E\hat{\gamma} [E\hat{\gamma} (E\hat{\Lambda} \cdot Ye^{-Y} + 1 - Y) + 1] \frac{\text{var}[\hat{\beta}]}{(E\hat{\beta})^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2[(E\hat{\Lambda} \cdot Ye^{-Y} + 1 - Y) \ln Y + 1] \frac{\text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}]}{E\hat{\beta}} \right] \right\}$$

gde je sa Y označeno:

$$Y = \left(\frac{x - x_0}{E\hat{\beta}} \right)^{E\hat{\gamma}}$$

i gde je usvojeno da su kovarijanse Poasonovog parametra i parametara Vejbulove raspodele jednake nuli. Parametar Poasonove raspodele ima poznata sledeća svojstva:

$$E[\hat{\Lambda}] = \Lambda, \quad \text{var}[\hat{\Lambda}] = \frac{\Lambda}{N}$$

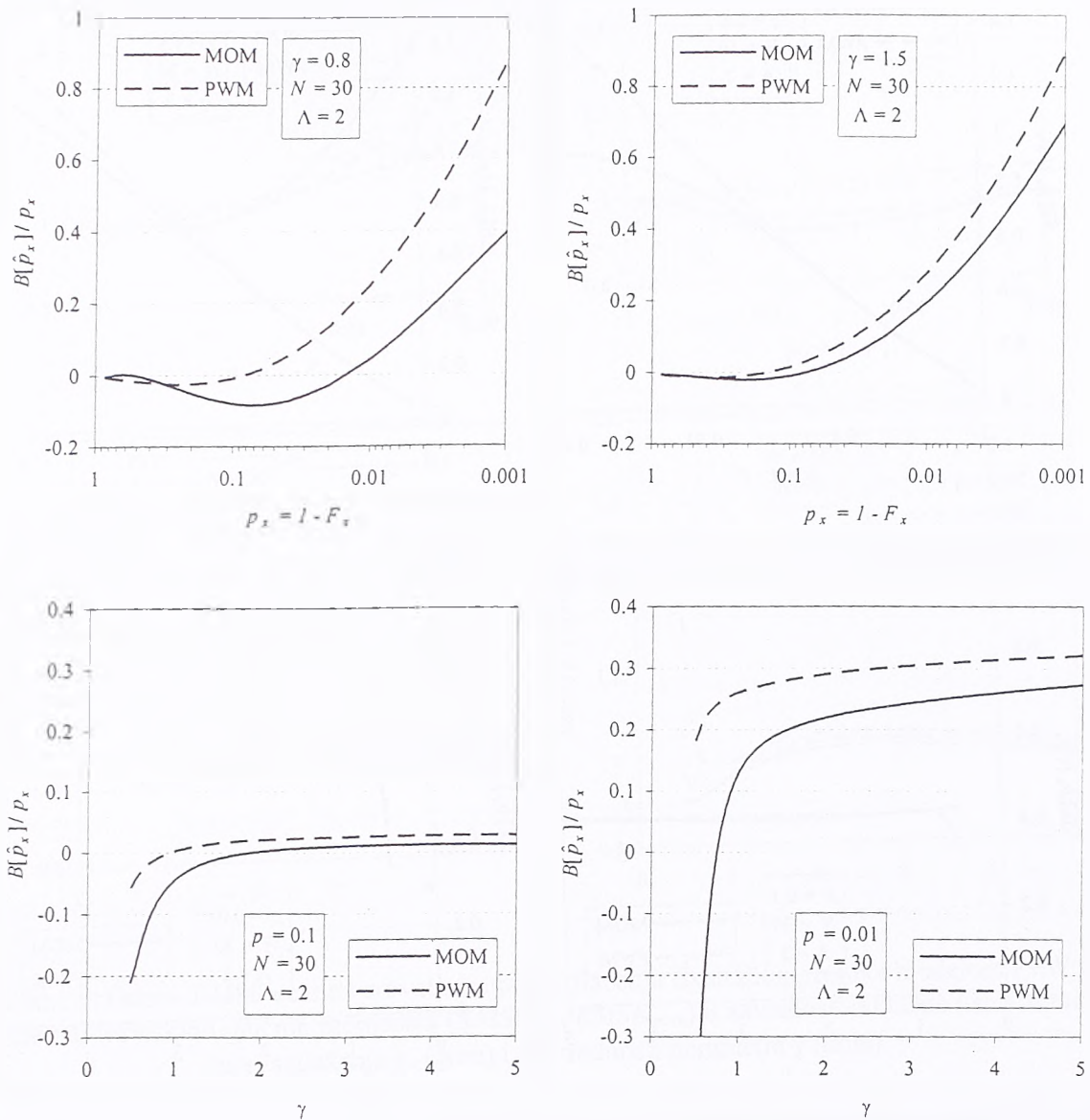
Svojstva ocena parametara Vejbulove raspodele određuju se na osnovu obrazaca za metode običnih i težinskih momenata datih u odeljku II.3.5. Na osnovu svojstava ocene funkcije raspodele \hat{F}_x određuju se i svojstva ocene verovatnoće prevazilaženja \hat{p}_x kao:

$$\text{var}[\hat{p}_x] = \text{var}[\hat{F}_x] \\ E[\hat{p}_x] = 1 - E[\hat{F}_x]$$

Na slici 56 (gore) prikazana je relativna pristrasnost ocene \hat{p}_x u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x , za obe metode ocene parametara Vejbulove raspodele i za dužinu niza od 30 godina, srednji broj prekoračenja $\Lambda = 2$; na istoj slici (dole) relativna pristrasnost ocene \hat{p}_x prikazana je u zavisnosti od vrednosti parametra oblika γ Vejbulove raspodele za isto N i Λ . Detaljniji rezultati su dati u prilogu C7. Iz rezultata se može uočiti da je pristrasnost ocene \hat{p}_x relativno mala samo za $p_x > 0.1$ (tj. $T_x < 10$) i to kada je $\gamma > 1$. Sa smanjenjem p_x ispod oko 0.1 pristrasnost postaje pozitivna i naglo raste pri svim vrednostima parametra γ . U tabeli 19 prikazano je nekoliko brojnih primera očekivanja ocene \hat{p}_x u odnosu na tačnu verovatnoću p_x .

Ponašanje standardne greške ocene \hat{p}_x prikazano je na slici 57 za $N = 30$ i $\Lambda = 2$, dok su detaljniji rezultati dati u prilogu C7. Rezultati ukazuju da standardna greška prilično raste sa smanjenjem verovatnoće prevazilaženja, tj. da su granice moguće ocene verovatnoće prevazilaženja veoma široke u gornjem kraju raspodele. Sa slike 57 se takođe uočava da standardna greška ne zavisi mnogo od parametra γ , već najviše od same verovatnoće prevazilaženja p_x . U tabeli 20 prikazano je nekoliko brojnih primera granica ocene verovatnoće prevazilaženja \hat{p}_x (širine 2 standardne greške) u odnosu na tačnu verovatnoću p_x .

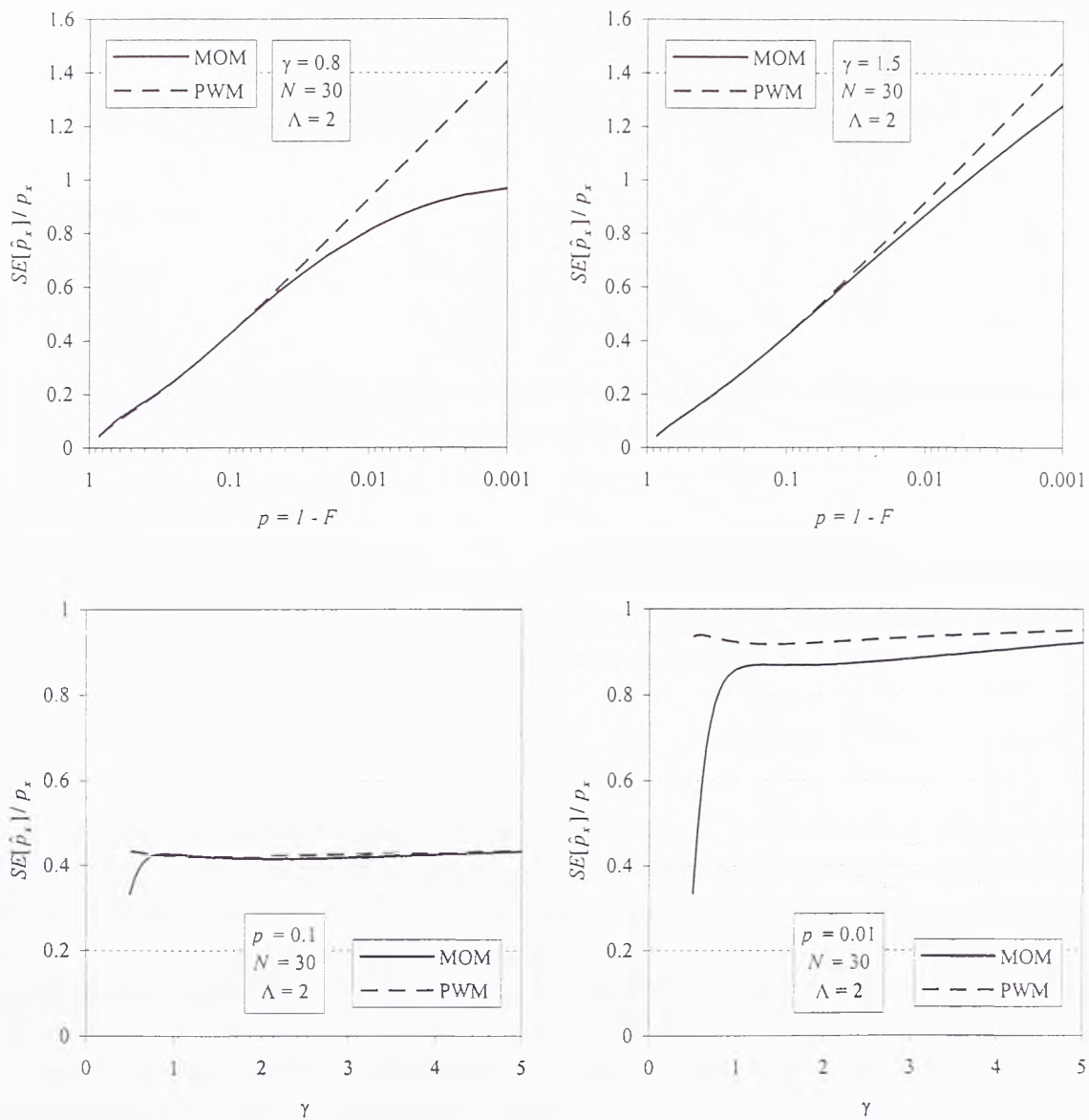
Odnos dve metode za ocenu parametara, ispitan preko odnosa srednje kvadratne greške $RMSE[\hat{p}_x]$ prema metodi težinskih i običnih momenata, prikazan je na slici 58. Generalno se može reći da metoda momenata daje bolje rezultate, dok metoda težinskih momenata ima prednost za $\gamma < 1$ i velike dužine nizova (veliko N i veliko Λ).



Slika 56. Pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja fiksiranog protoka modelom P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x (gore) i od vrednosti parametra γ (dole).

Tabela 19. Očekivane ocene verovatnoće prevazilaženja modelom P+W za broj godina osmatranja $N = 30$.

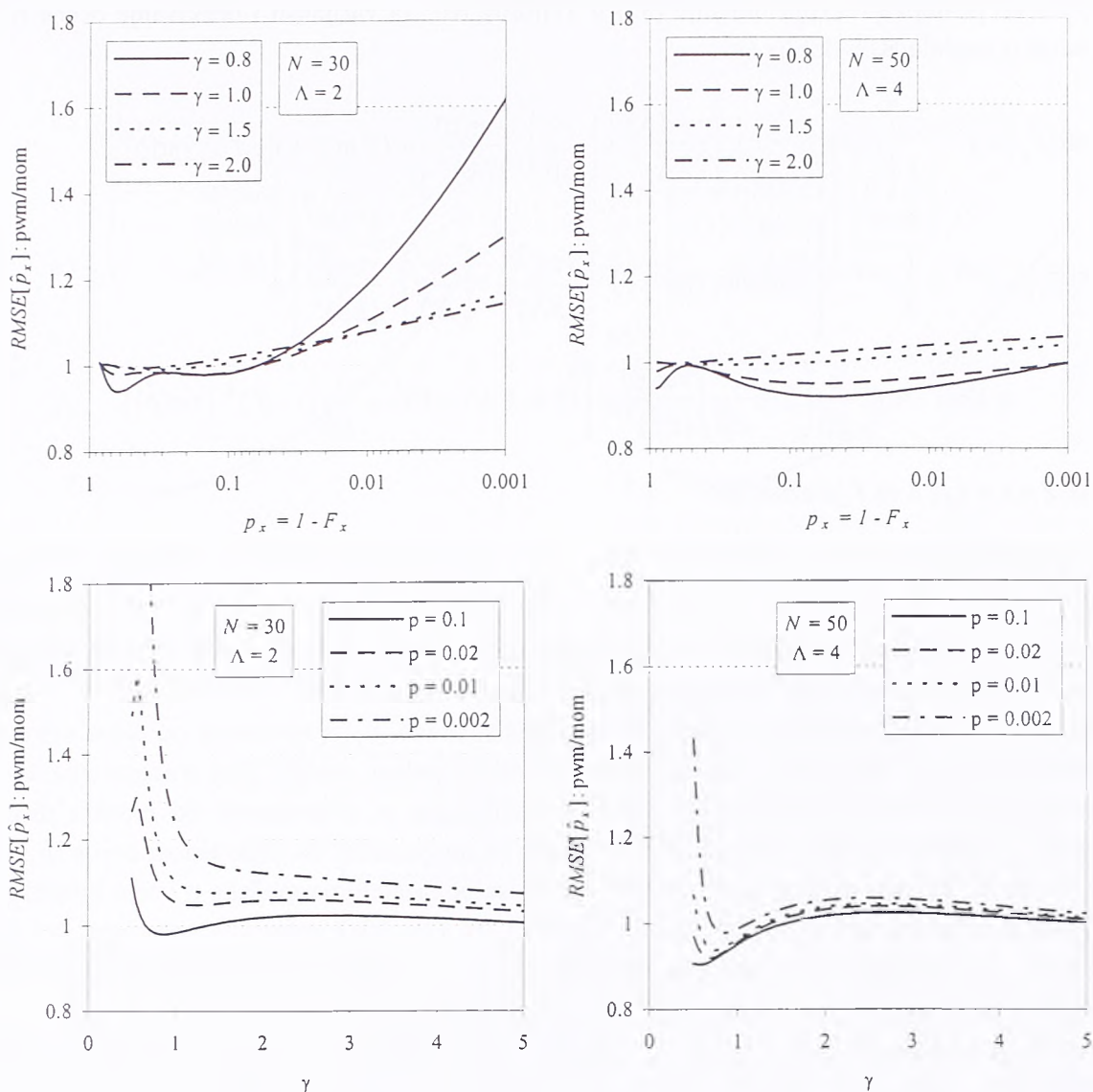
Tačna verovatnoća prevazilaženja p_x	$\gamma = 0.8$ (metoda MOM)			$\gamma = 1.2$ (metoda MOM)			$\gamma = 2.0$ (metoda MOM)		
	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$	$\Lambda = 3$	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$	$\Lambda = 3$	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$	$\Lambda = 3$
0.1 = 1/10	1/11.1	1/10.9	1/10.6	1/10.5	1/10.3	1/10.1	1/10.2	1/10.0	1/9.9
0.01 = 1/100	1/109	1/95.9	1/92.2	1/87.0	1/85.6	1/85.9	1/80.2	1/82.0	1/83.6
0.001 = 1/1000	1/923	1/717	1/686	1/587	1/606	1/635	1/516	1/579	1/624



Slika 57. Standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja fiksiranog protoka modelom P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x (gore) i od vrednosti parametra γ (dole).

Tabela 20. Intervali ocene verovatnoće prevazilaženja (širine 2 standardne greške) modelom P+W za $N = 30$ i $\Lambda = 2$.

Tačna verovatnoća prevazilaženja p_x	$\gamma = 0.8$ (metoda MOM)	$\gamma = 1.2$ (metoda MOM)	$\gamma = 2.0$ (metoda MOM)
0.1 = 1/10	$1/17.4 < \hat{p}_x < 1/7.0$	$1/17.4 < \hat{p}_x < 1/7.0$	$1/17.1 < \hat{p}_x < 1/7.1$
0.01 = 1/100	$1/527 < \hat{p}_x < 1/55.2$	$1/766 < \hat{p}_x < 1/53.5$	$1/769 < \hat{p}_x < 1/53.5$
0.001 = 1/1000	$1/31880 < \hat{p}_x < 1/508$	$0 < \hat{p}_x < 1/446$	$0 < \hat{p}_x < 1/433$



Slika 58. Odnos $RMSE$ ocene verovatnoće prevazilaženja fiksiranog protoka modelom P+W po metodi težinskih i običnih momenata ($RMSE_{pwm}/RMSE_{mom}$) u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x (gore) i od vrednosti parametra γ (dole).

III.7.2 Modeli B+E i NB+E

U modelu B+E ocena funkcije raspodele za zadatu vrednost protoka x glasi:

$$\hat{F}_x = \left[1 - \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{b}} \exp\left(-\frac{x - x_0}{\hat{\beta}}\right) \right]^{\hat{b}} \quad (85)$$

gde su $\hat{\Lambda}$ i \hat{b} ocene parametara binomne raspodele, $\hat{\beta}$ je ocena parametra eksponencijalne raspodele, a x_0 izabrana baza. U modelu NB+E ocena funkcije raspodele ima isti izraz uz $\hat{b} = -\hat{a}$:

$$\hat{F}_x = \left[1 + \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{a}} \exp\left(-\frac{x - x_0}{\hat{\beta}}\right) \right]^{-\hat{a}}$$

Uz primenu postupka razvoja funkcije (85) u Tejlorov red, za varijansu i očekivanje ocene funkcije raspodele u modelu B+E dobija se:

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{F}_x] &= Y^{2E\hat{b}-2} \left\{ (E\hat{b})^2 (1-Y)^2 \left[\frac{\text{var}[\hat{\Lambda}]}{(E\hat{\Lambda})^2} + \left(\frac{z}{E\hat{\beta}} \right)^2 \frac{\text{var}[\hat{\beta}]}{(E\hat{\beta})^2} \right] + (Y \ln Y + 1 - Y)^2 \text{var}[\hat{b}] \right\} \\ E[\hat{F}_x] &= Y^{E\hat{b}} + \frac{1}{2} Y^{E\hat{b}-2} \left\{ E\hat{b}(E\hat{b}-1)(1-Y)^2 \left[\frac{\text{var}[\hat{\Lambda}]}{(E\hat{\Lambda})^2} + \left(\frac{z}{E\hat{\beta}} \right)^2 \frac{\text{var}[\hat{\beta}]}{(E\hat{\beta})^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + E\hat{b}(1-Y)Y \frac{z}{E\hat{\beta}} \left[2 - \frac{z}{E\hat{\beta}} \right] \frac{\text{var}[\hat{\beta}]}{(E\hat{\beta})^2} + \left[(Y \ln Y + 1 - Y)^2 - \frac{1}{E\hat{b}} (1-Y)^2 \right] \text{var}[\hat{b}] \right\} \end{aligned}$$

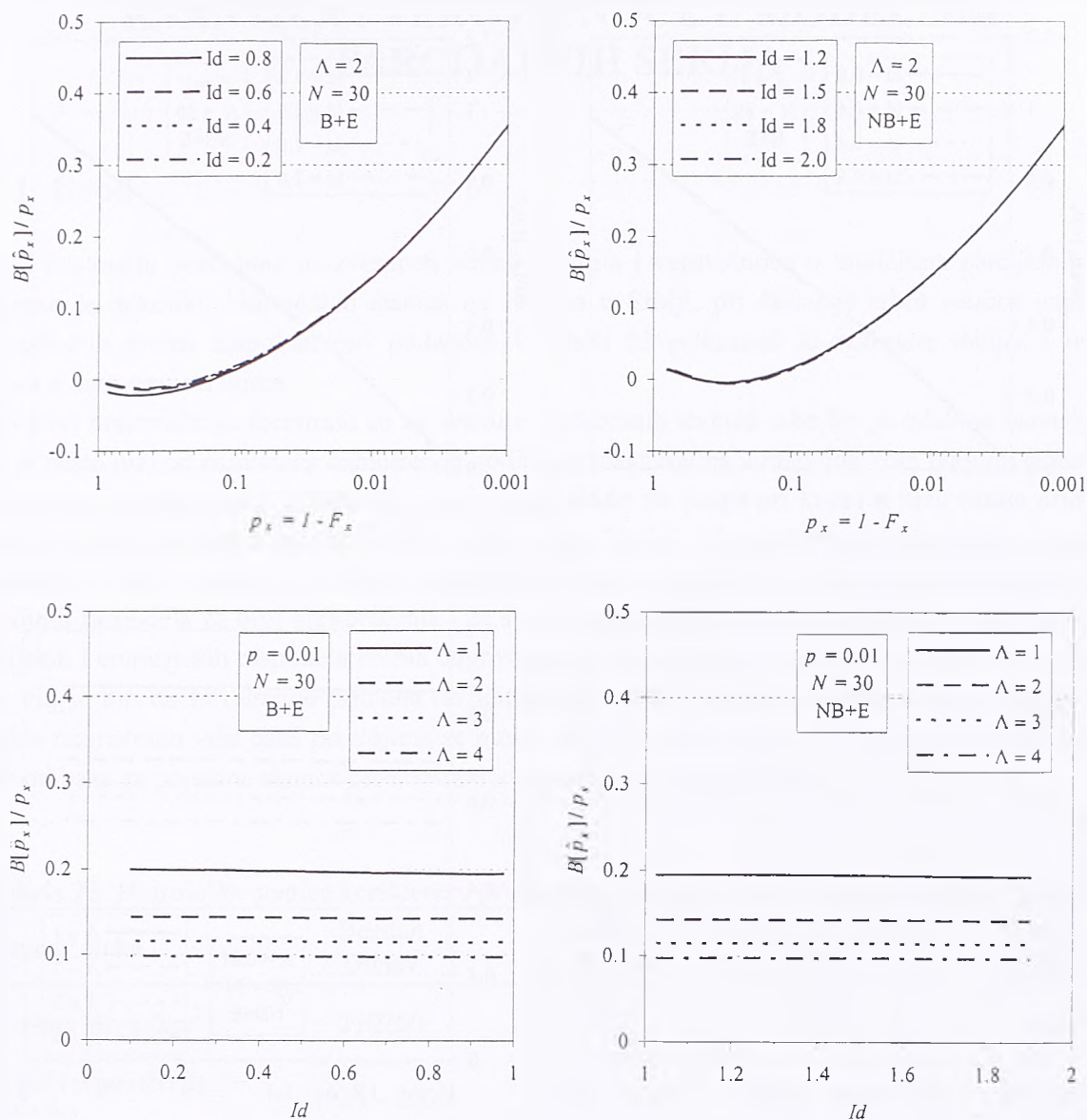
gde je $z = x - x_0$, a sa Y je označeno:

$$Y = 1 - \frac{E\hat{\Lambda}}{E\hat{b}} e^{-z/E\hat{\beta}}$$

U gornjim izrazima je usvojeno da su kovarijanse parametara binomne raspodele sa parametrom eksponencijalne raspodele jednake nuli. Za model NB+E važe isti izrazi uz $\hat{b} = -\hat{a}$.

Na slici 59 (gore) prikazana je relativna pristrasnost ocene \hat{p}_x u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x za oba modela, i to za dužinu niza od 30 godina i srednji broj prekoračenja $\Lambda = 2$; na istoj slici (dole) relativna pristrasnost ocene \hat{p}_x prikazana je u zavisnosti od indeksa disperzije. Detaljniji rezultati su dati u prilogu C8. Iz rezultata se može uočiti da pristrasnost ocene \hat{p}_x veoma malo zavisi od indeksa disperzije, što je bio slučaj i sa pokazateljima grešaka u oceni kvantila u ova dva modela. Pristrasnost je relativno mala za $p_x > 0.1$ (tj. $T_x < 10$) i generalno negativna, dok za $p_x < 0.1$ (tj. $T_x > 10$) naglo raste i ima pozitivne vrednosti. U tabeli 21 prikazano je nekoliko brojnih primera očekivanja ocene \hat{p}_x u odnosu na tačnu verovatnoću p_x .

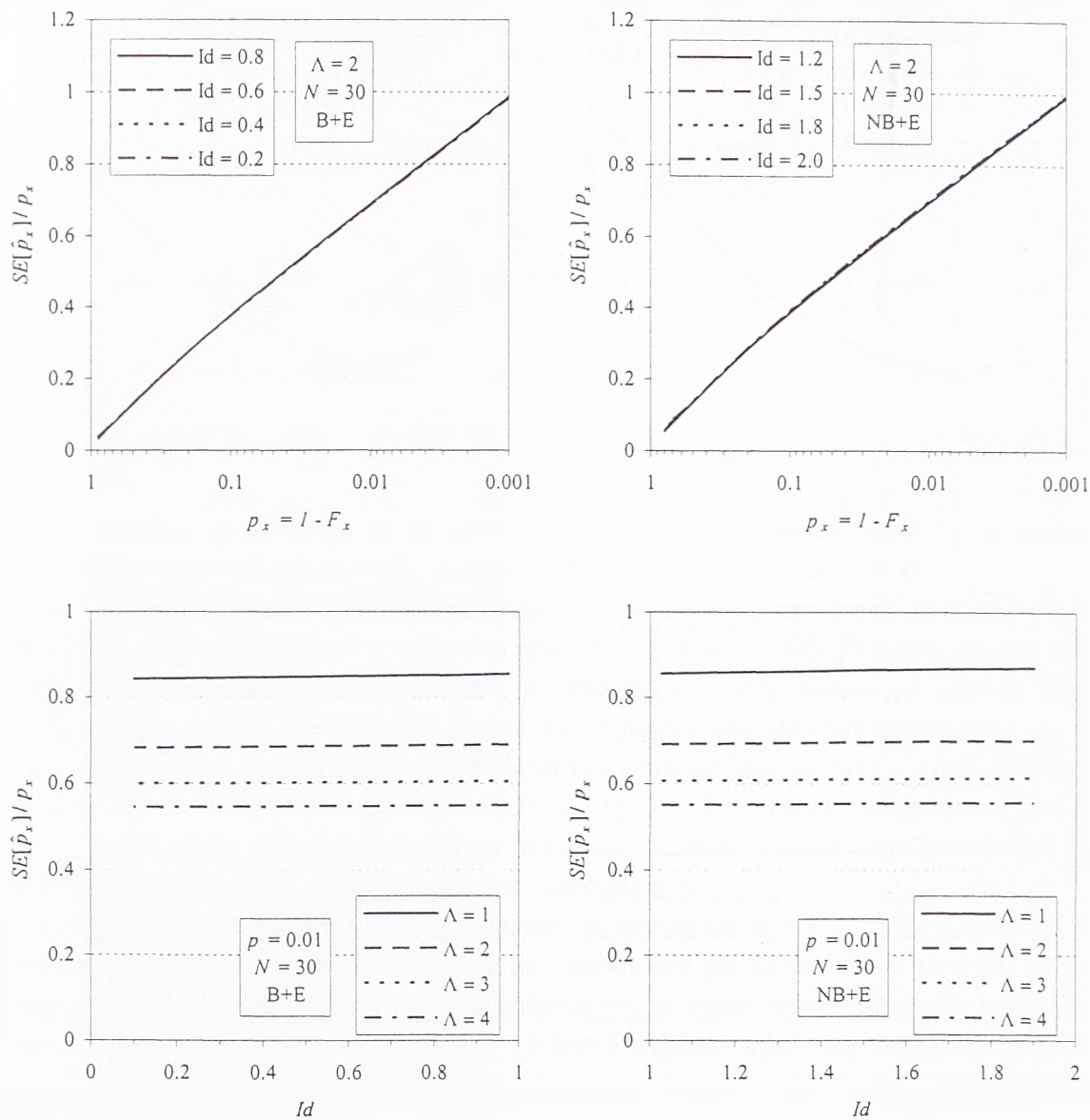
Ponašanje standardne greške ocene \hat{p}_x prikazano je na slici 60 za $N = 30$ i $\Lambda = 2$, dok su detaljniji rezultati dati u prilogu C8. Rezultati ukazuju da i standardna greška praktično ne zavisi od indeksa disperzije. Takođe, ona brzo raste (skoro eksponencijalno) sa smanjenjem verovatnoće prevazilaženja; u ovom primeru standardna greška već za $T_x = 10$ dostiže vrednost od oko 40%. U tabeli 22 prikazano je nekoliko brojnih primera granica ocene verovatnoće prevazilaženja \hat{p}_x (širine 2 standardne greške) u odnosu na tačnu verovatnoću p_x .



Slika 59. Pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja fiksanog protoka modelima B+E i NB+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x (gore) i od indeksa disperzije I_d (dole).

Tabela 21. Očekivane ocene verovatnoće prevazilaženja modelima B+E i NB+E za broj godina osmatranja $N = 30$.

Tačna verovatnoća prevazilaženja p_x	$I_d = 0.8$ (model B+E)			$I_d = 1.2$ (model NB+E)			$I_d = 1.5$ (model NB+E)		
	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$	$\Lambda = 3$	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$	$\Lambda = 3$	$\Lambda = 1$	$\Lambda = 2$	$\Lambda = 3$
0.1 = 1/10	1/10.0	1/9.9	1/9.8	1/10.0	1/9.8	1/9.8	1/10.0	1/9.8	1/9.8
0.01 = 1/100	1/84.0	1/87.6	1/89.7	1/83.7	1/87.5	1/89.7	1/83.7	1/87.6	1/89.7
0.001 = 1/1000	1/639	1/739	1/789	1/639	1/739	1/789	1/640	1/739	1/790



Slika 60. Standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja fiksiranog protoka modelima B+E i NB+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja p_x (gore) i od indeksa disperzije I_d (dole).

Tabela 22. Intervali ocene verovatnoće prevazilaženja (širine 2 standardne greške) modelima B+E i NB+E za $N = 30$ i $\Lambda = 2$.

Tačna verovatnoća prevazilaženja p_x	$I_d = 0.8$ (model B+E)	$I_d = 1.2$ (model NB+E)	$I_d = 1.5$ (model NB+E)
$0.1 = 1/10$	$1/16 < \hat{p}_x < 1/7.3$	$1/16 < \hat{p}_x < 1/7.2$	$1/16 < \hat{p}_x < 1/7.2$
$0.01 = 1/100$	$1/322 < \hat{p}_x < 1/59.2$	$1/327 < \hat{p}_x < 1/59.0$	$1/331 < \hat{p}_x < 1/58.9$
$0.001 = 1/1000$	$1/79947 < \hat{p}_x < 1/503$	$1/109494 < \hat{p}_x < 1/502$	$1/150074 < \hat{p}_x < 1/502$

PRIMERI PRORAČUNA NEIZVESNOSTI OCENA KVANTILA I VEROVATNOĆE U MODELIMA PARCIJALNIH SERIJA

IV.1 Uvod

Za ilustraciju proračuna neizvesnosti ocena kvantila i verovatnoće u modelima parcijalnih serija izabrano je nekoliko hidroloških stanica na rekama u Srbiji, pri čemu je izbor stanica napravljen prevashodno prema raspoloživosti podataka. U tabeli 23 prikazane su izabrane stanice i osnovni podaci o nizovima na njima.

Nizovi prekoračenja formirani su za svaku od odabranih stanica tako što je odabran osnovni prag koji je nešto niži od najmanjeg osmotrenog godišnjeg maksimuma u raspoloživom periodu osmatranja. Zatim su za svaku stanicu razmatrani i viši pragovi, i to do praga pri kome u nizu ostaje prihvatljiv ukupan broj prekoračenja za statističku analizu (npr. 20–30). U standardnoj hidrološkoj praksi dalji postupak bi bio usmeren na izbor najpogodnije baze, koristeći se kriterijumima primenljivosti pojedinih raspodela za broj prekoračenja i za sama prekoračenja, kao i kriterijumima dobrog slaganja teorijskih i empirijskih raspodela prema odgovarajućim statističkim testovima. Međutim, u ovom delu rada cilj je bio da se ilustruje primena različitih modela parcijalnih serija, pa je zbog toga za svaku stanicu razmatrano više baza pri kojima se mogu usvojiti pojedini modeli. Konkretni razlozi za izbor neke od baza za pojedine stanice biće opisani u odgovarajućim primerima.

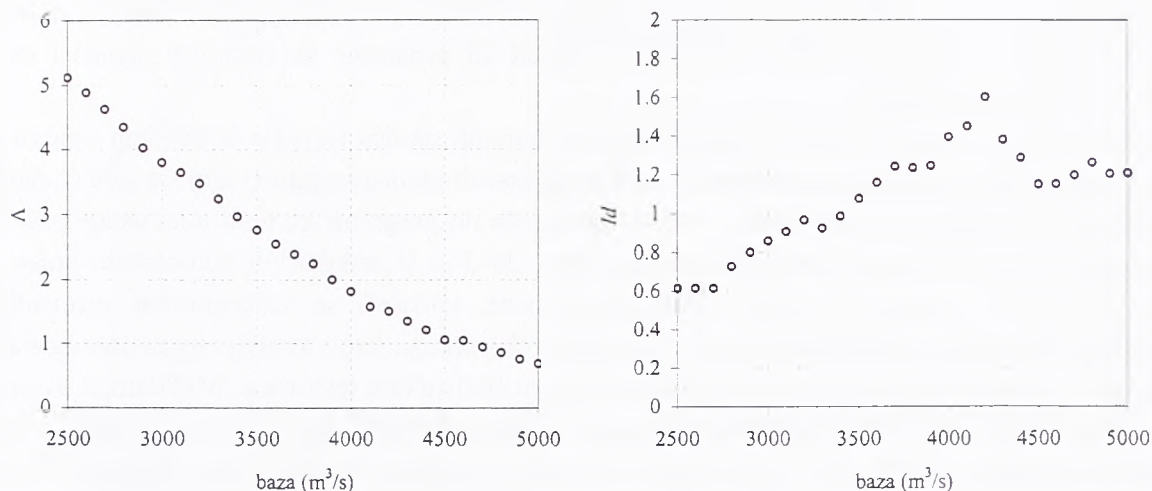
Tabela 23. Hidrološke stanice korišćene u primerima u ovom odeljku i osnovni podaci o nizovima.

Stanica / Reka	Bezdan Dunav	Kraljevo Z. Morava	Lopatnica Lakat Ibar	Slovac Kolubara
Površina sliva (km ²)	210250	4721	7818	995
Period raspoloživih podataka	1931 - 2000	1963 - 2000	1960 - 2000	1958 - 2000
Dužina niza (godina)	70	38	41	43
Raspon vrednosti god. maksimuma (m ³ /s)	2790 - 7689	64.4 - 1330	107 - 1140	19.0 - 388
Osnovna baza niza prekoračenja (m ³ /s)	2500	60	100	15

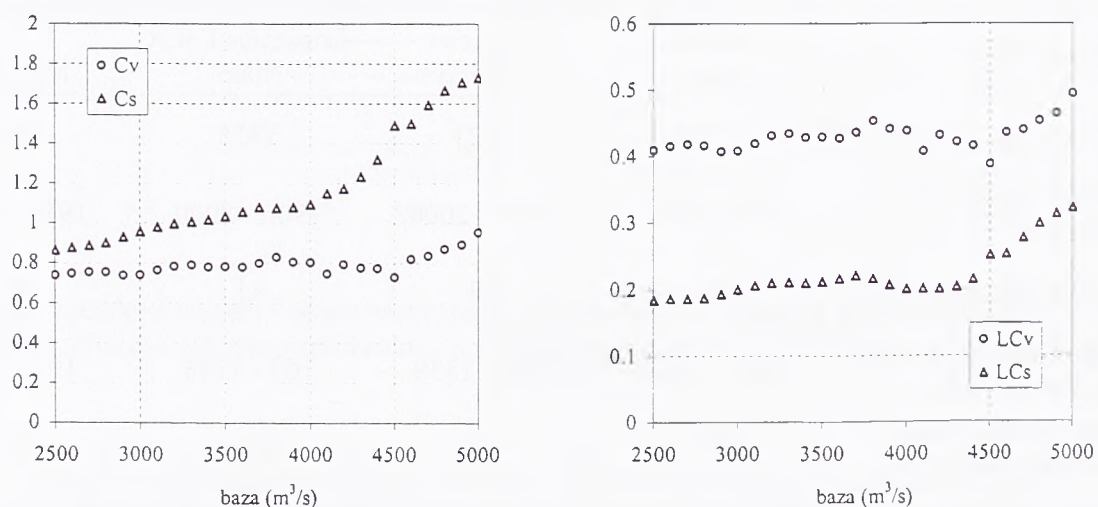
IV.2 Primer 1: stanica Bezdan/Dunav

Za stanicu Bezdan razmatrane su baze u rasponu od 2500 do 5000 m³/s, pri čemu se ukupan broj prekoračenja smanjuje od 358 do 48, a prosečan godišnji broj prekoračenja od 5.11 do 0.69. Na slici 61 prikazane su karakteristike niza broja javljanja (prosečan godišnji broj prekoračenja i indeks disperzije) u zavisnosti od vrednosti baze, dok su na slici 62 prikazane statistike nizova prekoračenja (koeficijenti varijacije i asimetrije, kao i L-varijacija i L-asimetrija).

Prema statistikama nizova prekoračenja pri različitim bazama, za primenu eksponencijalne raspodele najpogodnija je najviša baza od 5000 m³/s s obzirom da se tada koeficijenti prikazani na slici 62 najviše približavaju teorijskim vrednostima za ovu raspodelu ($C_v = 1$, $C_s = 2$; $LC_v = 0.5$, $LC_s = 0.33$). Vrednosti C_v koje su manje od 1 za sve baze ukazuju da je parametar oblika k opšte Pareto (GP) raspodele uvek pozitivan kada se oceni pomoću metode momenata; za ocenu parametra k metodom težinskih momenata na isti zaključak ukazuju i vrednosti LC_v koje su manje od 0.5 za sve baze. Kako je GP raspodela ograničena sa gornje strane kada je parametar k pozitivan, to čini ovu raspodelu manje pogodnom za modeliranje velikih voda. Iako bi u praksi ova raspodela bila eliminisana iz ovih razloga, ovde je ona ipak razmatrana sa gledišta grešaka u oceni kvantila i verovatnoće.

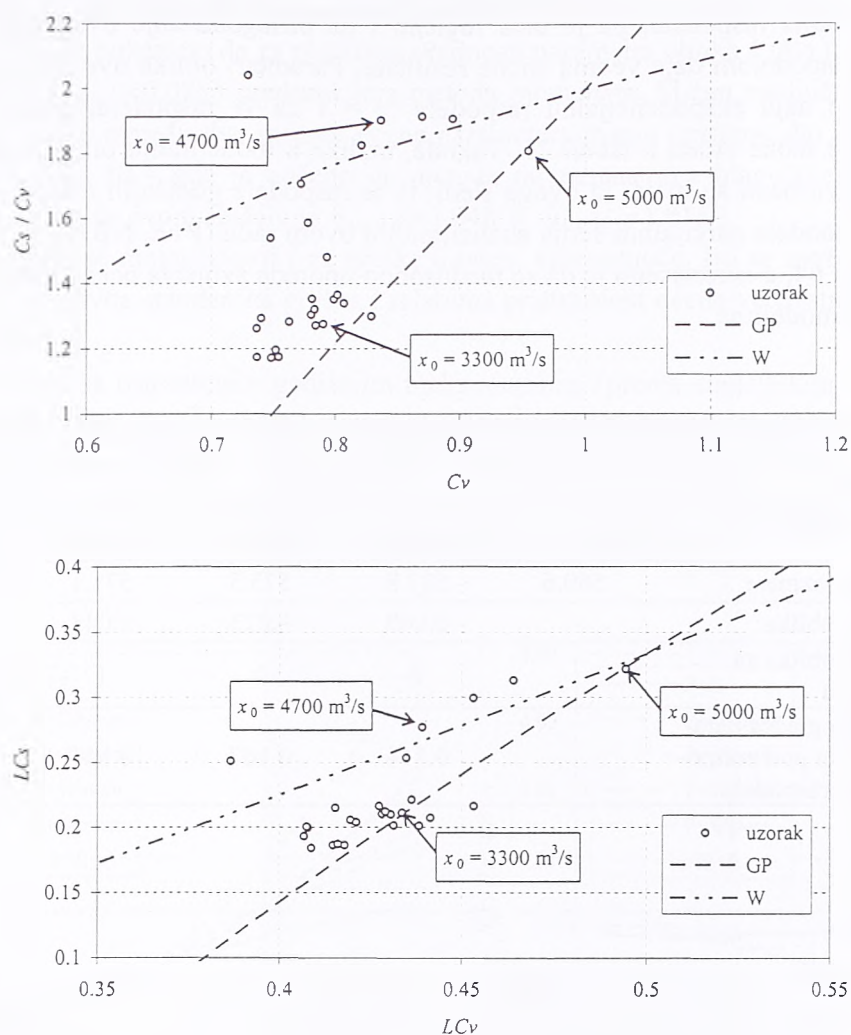


Slika 61. Prosečan godišnji broj prekoračenja (levo) i indeks disperzije (desno) u zavisnosti od vrednosti baze za stanicu Bezdán/Dunav.



Slika 62. Koeficijenti varijacije i asimetrije i njihov odnos (levo) i L-varijacija i L-asimetrija (desno) niza prekoračenja u zavisnosti od vrednosti baze za stanicu Bezdán/Dunav.

Baze koje najviše odgovaraju za primenu opšte Pareto raspodele, odnosno Vejbulove raspodele, izabrane su posmatrajući odnose C_v i C_s za slučaj ocene parametara metodom običnih momenata i odnose LC_v i LC_s za slučaj metode težinskih momenata (slika 63), pri čemu se vodilo računa da se niz broja prekoračenja može modelirati Poasonovom raspodelom. Za primenu opšte Pareto raspodele izabrana je baza od 3300 m³/s, dok je za Vejbulovu raspodelu izabrana baza od 4700 m³/s. U tabeli 24 dat je pregled statistika za tri odabrane baze za ovu stanicu.



Slika 63. Dijagram zavisnosti C_v i C_s (gore) i dijagram zavisnosti LC_v i LC_s (dole) teorijskih raspodela (krive) i nizova prekoračenja za stanicu Bezdán/Dunav pri različitim bazama (tačke).

Tabela 24. Karakteristike nizova prekoračenja pri izabranim bazama za stanicu Bezdán/Dunav.

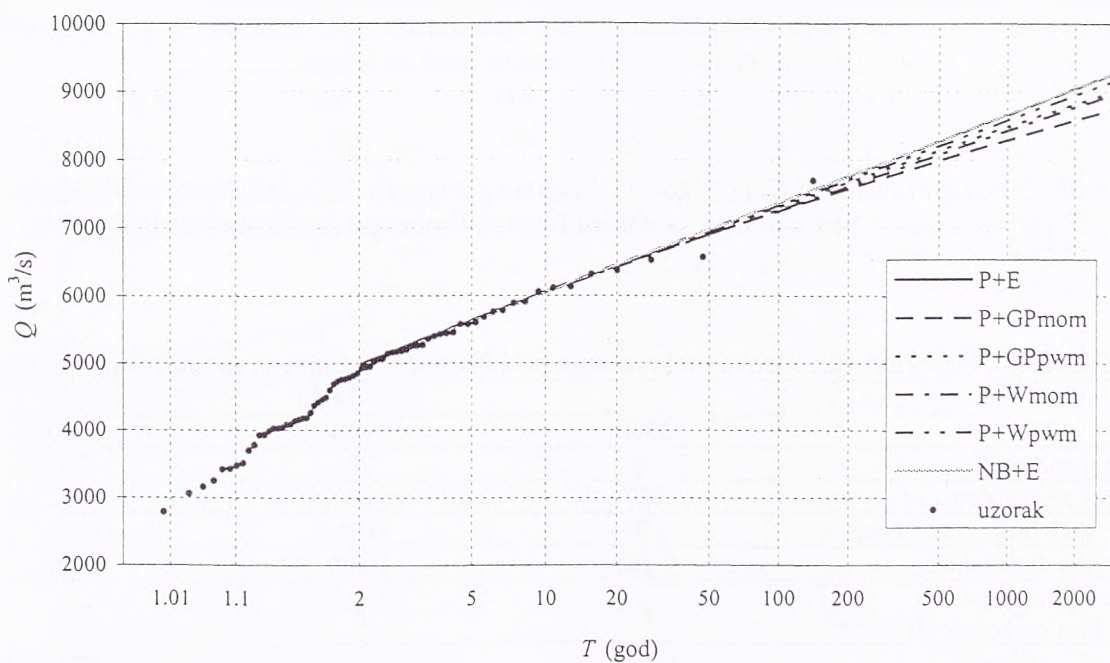
	baza (m^3/s)		
	3300	4700	5000
Broj godina N	70	70	70
Broj prekoračenja M	227	66	48
Sr. god. broj prekoračenja Λ	3.24	0.94	0.69
Indeks disperzije I_d	0.925	1.195	1.207
Usvojena raspodela za broj prekoračenja	P	P	NB
Koef. varijacije C_v	0.790	0.837	0.955 (1.0)*
Koef. asimetrije C_s	1.008	1.593	1.729 (2.0)*
C_s/C_v	1.276 (1.178)*	1.904 (1.817)*	1.811 (2.0)*
L-varijacija LC_v	0.434	0.439	0.494 (0.5)*
L-asimetrija LC_s	0.211 (0.210)*	0.277 (0.267)*	0.322 (0.333)*
Usvojena raspodela za prekoračenja	GP	W	E

* Vrednosti u zagradama predstavljaju teorijske vrednosti koeficijenata za usvojenu raspodelu.

Baza 5000 m³/s – model NB+E. Statistika niza prekoračenja za bazu od 5000 m³/s najviše odgovara eksponencijalna raspodela, pa je tada logično i da prilagođavanje ovog niza Vejbulovom ili opštom Pareto raspodelom daje veoma slične rezultate. Parametri oblika ove dve raspodele su bliski vrednostima koje daju eksponencijalnu raspodelu ($\gamma = 1$ za W raspodelu, odnosno $k = 0$ za GP raspodelu), što se može videti u tabeli 25. Takođe, razlike u modeliranju broja prekoračenja NB i P raspodelom za ovu bazu su male. Iz ovoga sledi da se raspodele godišnjih maksimuma veoma malo razlikuju za sve modele parcijalnih serija analiziranih u ovom radu (P+E, NB+E, P+GP i P+W), što je pokazano na slici 64, a iskorišćeno je da se međusobno uporede svojstva ocena kvantila i verovatnoće prema različitim modelima.

Tabela 25. Parametri raspodela prekoračenja za bazu od 5000 m³/s na stanici Bezdán/Dunav.

Raspodela za prekoračenja	E	GP		W	
		mom	pwm	mom	pwm
Parametar razmere	560.6	587.8	573.3	571.1	564.4
Parametar oblika	–	0.049	0.023	1.048	1.016
Parametar oblika za E raspodelu		0	0	1	1
Standardna greška para- metra oblika pod pretpo- stavkom E raspodele		0.144	0.167	0.144	0.120



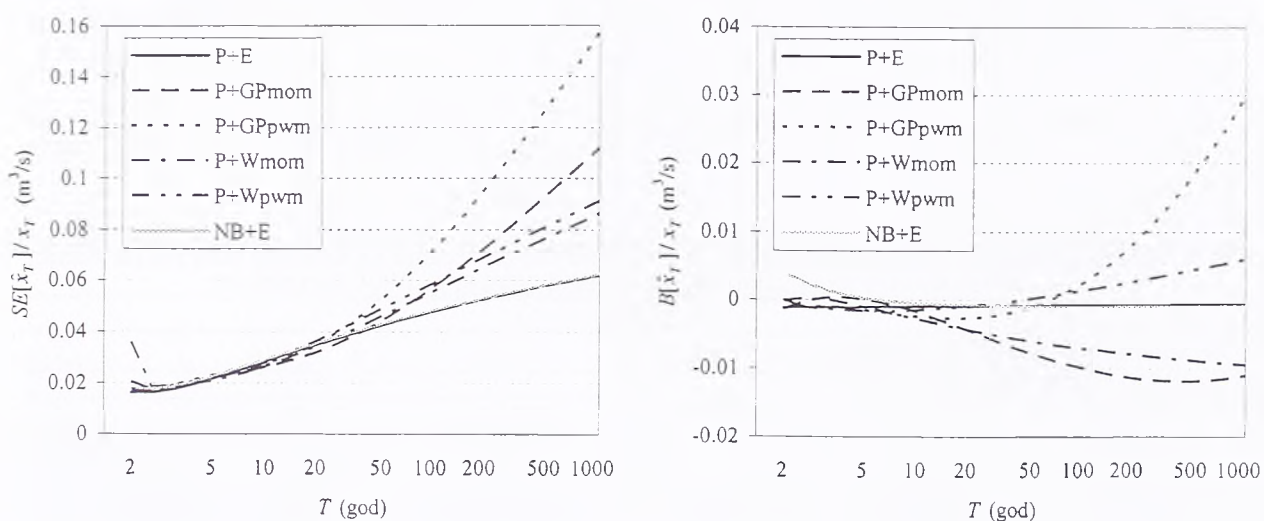
Slika 64. Raspedele godišnjih maksimuma na stanici Bezdán/Dunav za bazu od 5000 m³/s prema različitim modelima parcijalnih serija.

Dijagrami na slici 65 prikazuju relativne standardne greške i pristrasnosti ocene kvantila \hat{x}_T za bazu od 5000 m³/s za sve razmatrane modele parcijalnih serija. Na ovim dijagramima se greške u oceni kvantila modelima P+E i NB+E praktično preklapaju i imaju najmanje vrednosti, dok ostali modeli imaju veće greške u domenu većih povratnih perioda. To pokazuje da u slučaju kada se prekoračenja dobro modeliraju eksponencijalnom raspodelom nema potrebe za uvođenjem složenijih

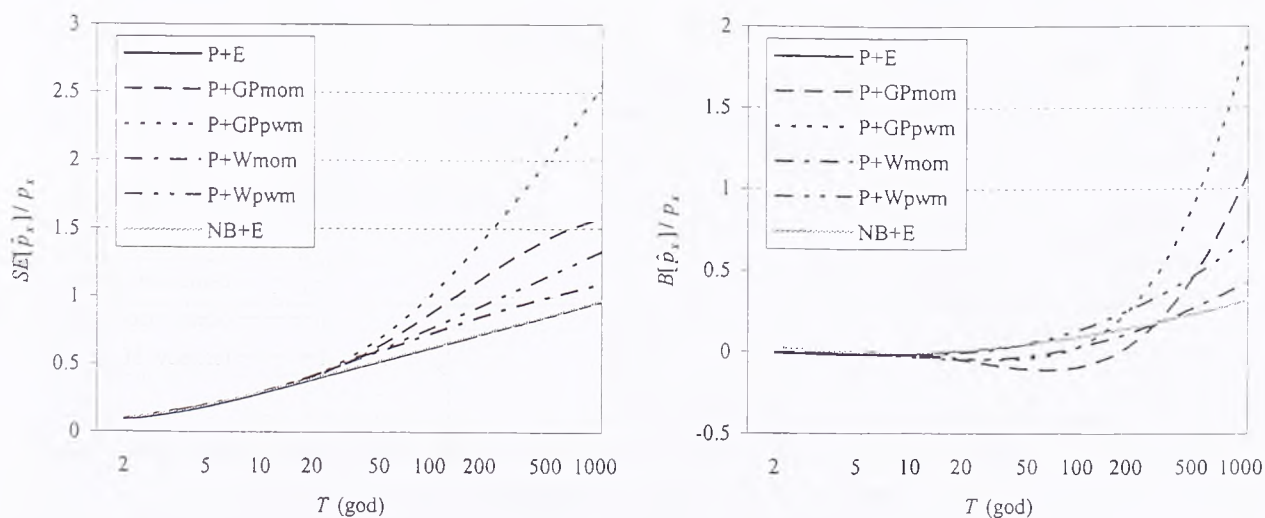
raspodela. Takođe se može uočiti da su greške modela P+GP znatno manje kada se parametri ocenjuju metodom običnih momenata u odnosu na metodu težinskih momenata. To je u skladu sa zaključcima iz odeljka III.3, gde je pokazano da za pozitivne vrednosti parametra oblika k (što je ovde slučaj, jer je $\hat{k}_{MOM} = 0.049$ tj. $\hat{k}_{PWM} = 0.023$) prednost ima metoda momenata. Sličan zaključak važi i za model P+W, mada su razlike između dve metode ocene parametara manje izražene, što je opet u skladu sa rezultatima iz odeljka III.4 gde je uočeno da metoda momenata ima blagu prednost za vrednosti parametra oblika $\gamma > 1$ (u ovom slučaju je $\hat{\gamma}_{MOM} = 1.048$ tj. $\hat{\gamma}_{PWM} = 1.016$).

Anlogni zaključci se mogu izvesti i za greške u oceni verovatnoće, što se može videti na slici 66 gde su prikazani relativna standardna greška i relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja za bazu od $5000 \text{ m}^3/\text{s}$.

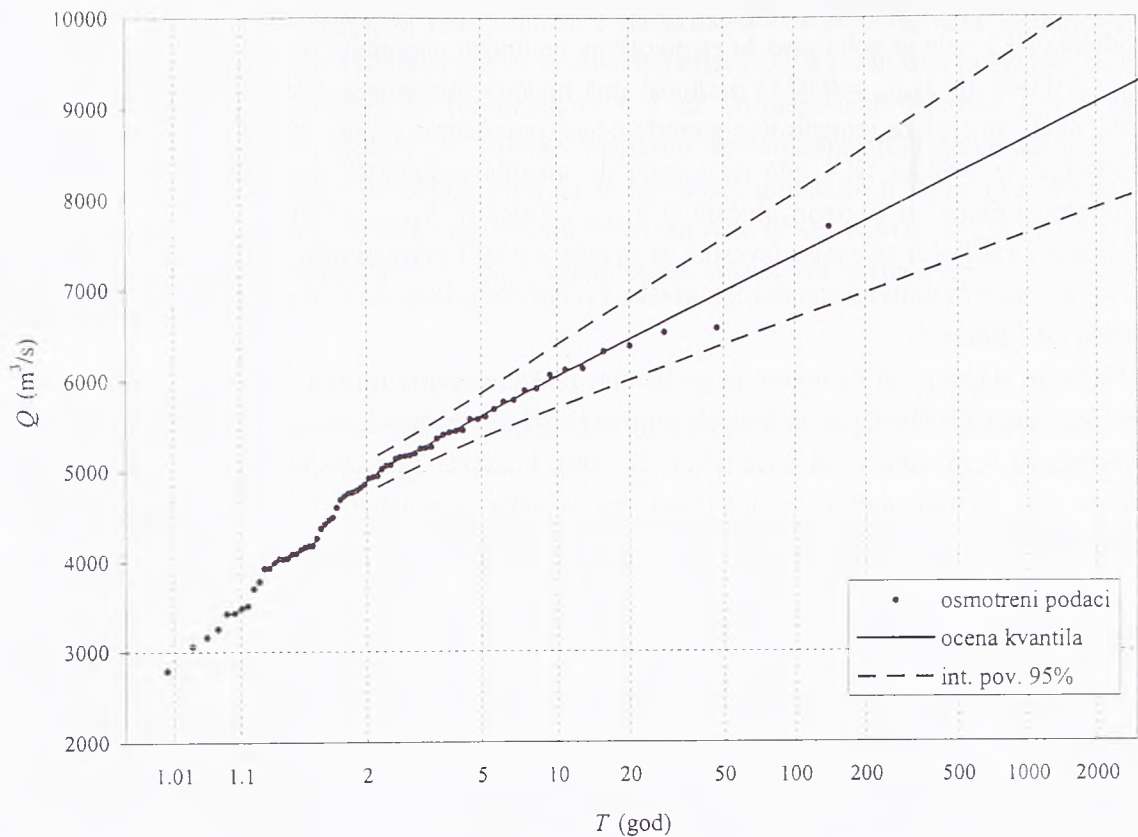
Najbolje slaganje sa osmotrenim godišnjim maksimumima (prema statističkim testovima) za ovu bazu ima model NB+E, pa su za njega prikazani interval poverenja za kvantile od 95% i interval poverenja za verovatnoću od 80% (slike 67 i 68). U tabeli 26 su prikazane ocene kvantila povratnih perioda 100 i 1000 godina sa pokazateljima grešaka, a u tabeli 27 su prikazane greške u oceni verovatnoće za najveći osmotreni protok na stanici Bezdán od $7689 \text{ m}^3/\text{s}$.



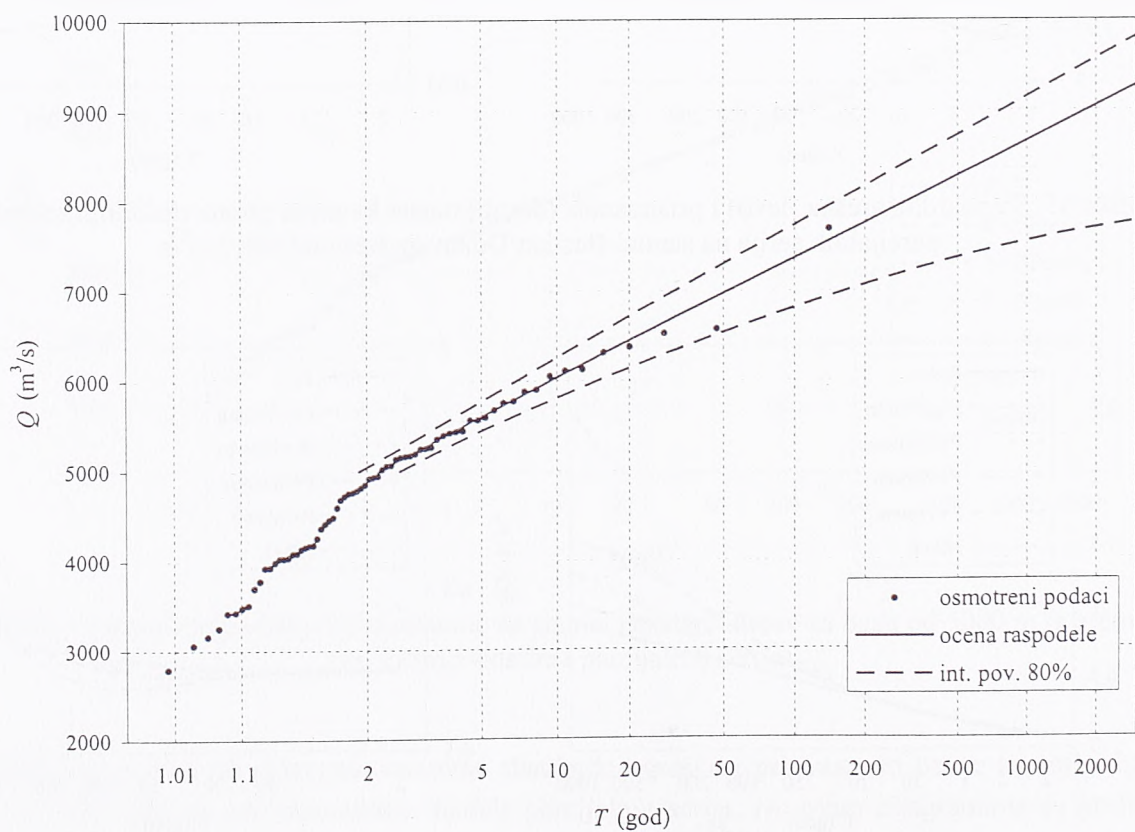
Slika 65. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene kvantila prema različitim modelima parcijalnih serija na stanici Bezdán/Dunav za bazu od $5000 \text{ m}^3/\text{s}$.



Slika 66. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene verovatnoće prema različitim modelima parcijalnih serija na stanici Bezdán/Dunav za bazu od $5000 \text{ m}^3/\text{s}$.



Slika 67. Ocena kvantila modelom NB+E i intervali poverenja za kvantile od 95% na stanici Bezdán/Dunav za bazu od 5000 m³/s.



Slika 68. Ocena verovatnoće pojave modelom NB+E i njeni intervali poverenja od 80% na stanici Bezdán/Dunav za bazu od 5000 m³/s.

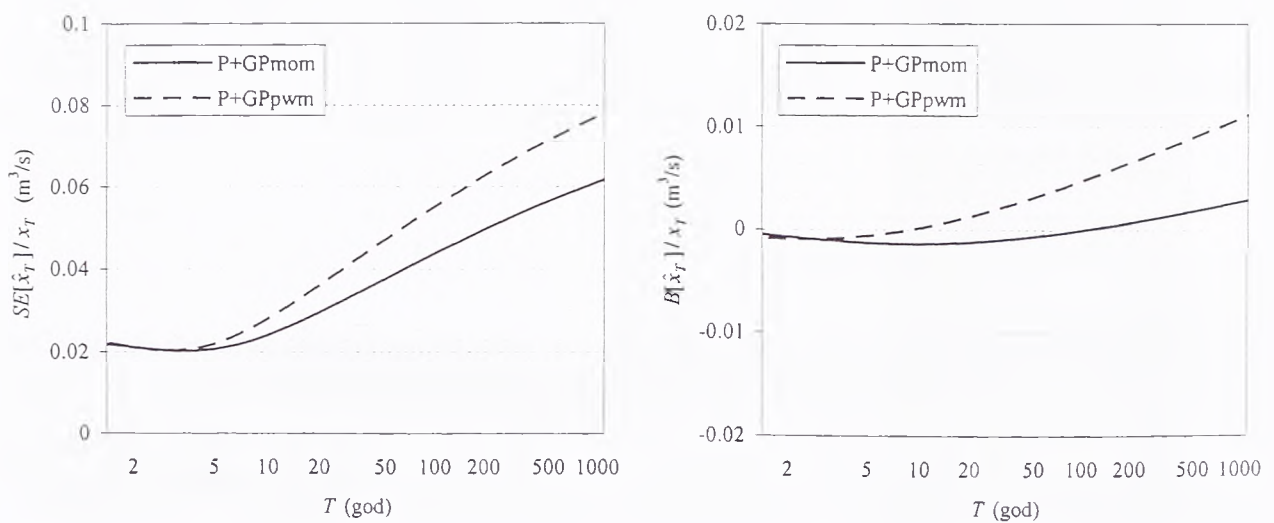
Tabela 26. Rezultati ocene kvantila velikih voda na stanici Bezdán/Dunav za bazu od 5000 m³/s prema različitim modelima parcijalnih serija.

Povratni period T (god)	Model	Ocena kvantila \hat{x}_T	Pristrasnost $B[\hat{x}_T]$	Stand. greška $SE[\hat{x}_T]$	Interval poverenja kvantila od 95%	
100	P+E	7367	-5.8	351	6679	8056
	P+GPmom	7245	-71.3	410	6440	8049
	P+GPpwm	7309	15.7	519	6291	8327
	P+Wmom	7259	-51.0	401	6474	8044
	P+Wpwm	7329	9.9	428	6489	8169
	NB+E	7367	-6.7	353	6675	8059
1000	P+E	8661	-5.8	535	7613	9709
	P+GPmom	8290	-92.6	910	6507	10073
	P+GPpwm	8481	239.5	1304	5924	11037
	P+Wmom	8424	-79.5	718	7017	9832
	P+Wpwm	8576	50.0	773	7062	10091
	NB+E	8661	-7.0	536	7611	9711

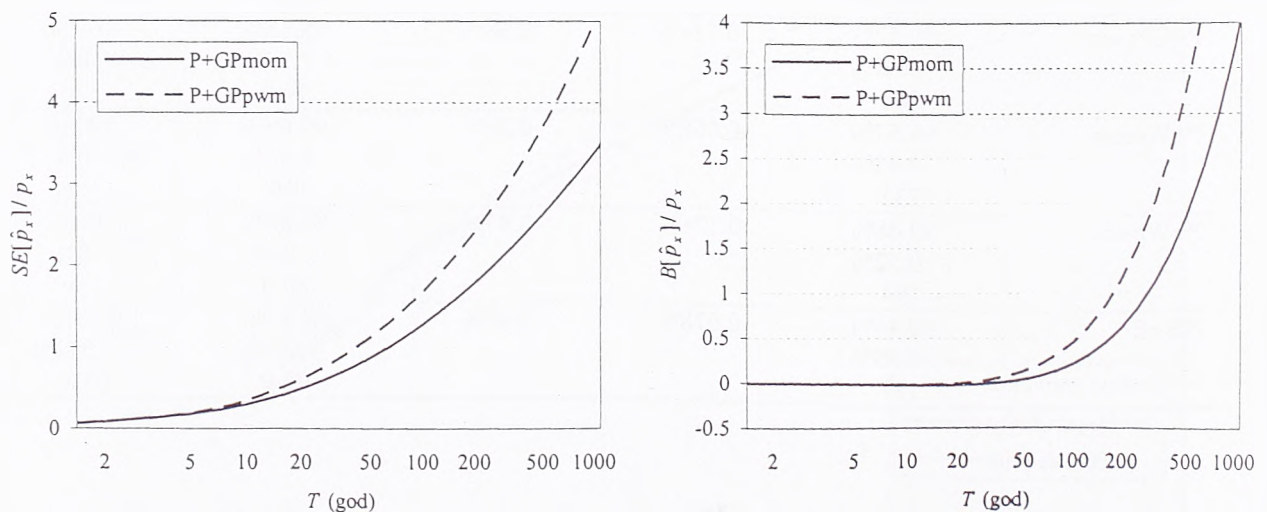
Tabela 27. Rezultati ocene verovatnoće pojave najvećeg osmotrenog protoka na stanici Bezdán/Dunav za bazu od 5000 m³/s prema različitim modelima parcijalnih serija.

Model	$\hat{F}_x, \hat{p}_x, \hat{T}_x$	$B[\hat{F}_x]$	$SE[\hat{F}_x]$	Interval poverenja verovatnoće od 80% (izražen preko F, p i T)	
P+E	99.44%	-0.078%	0.40%	98.92%	99.95%
	0.56%			1.075%	0.054%
	177			93.0	1839
P+GPmom	99.61%	-0.042%	0.47%	99.01%	100%
	0.39%			0.99%	0%
	258			101	∞
P+GPpwm	99.52%	-0.124%	0.68%	98.65%	100%
	0.48%			1.35%	0%
	208			74.0	∞
P+Wmom	99.57%	-0.058%	0.38%	99.09%	100%
	0.43%			0.91%	0%
	232			109	∞
P+Wpwm	99.48%	-0.126%	0.47%	98.88%	100%
	0.52%			1.12%	0%
	194			89.0	∞
NB+E	99.44%	-0.078%	0.40%	98.92%	99.95%
	0.56%			1.076%	0.052%
	177			92.9	1920

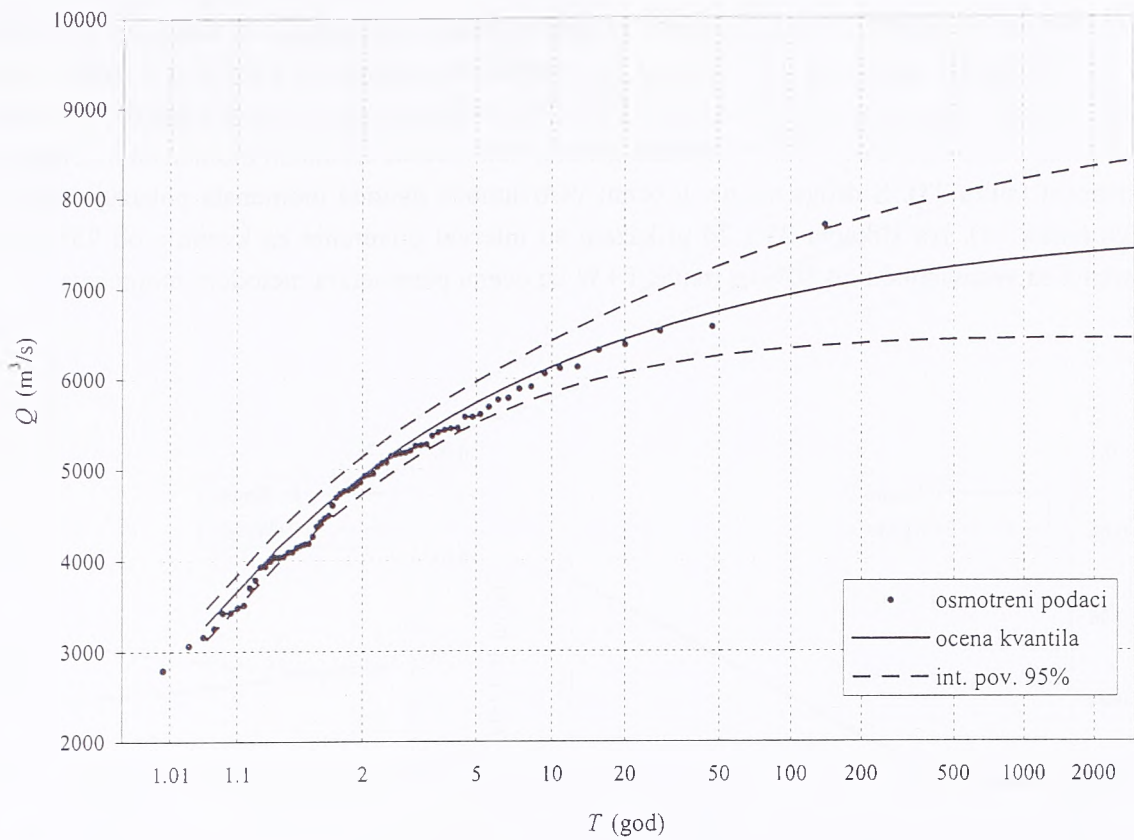
Baza 3300 m³/s: model P+GP. Ocene parametara GP raspodele po metodama običnih i težinskih momenata za prekoračenja pri bazi od 3300 m³/s veoma se malo razlikuju (po metodi momenata je $k = 0.301$ i $b = 1323$, dok je po metodi težinskih momenata $k = 0.306$ i $b = 1328$), tako da se i odgovarajuće ocene kvantila i verovatnoća praktično ne razlikuju. Ipak, sa gledišta svojstava ocene kvantila i verovatnoće, za ovu vrednost parametra oblika k prednost ima metoda momenata koja daje manju standardnu grešku i manju pristrasnost (slike 69 i 70). Na slikama 71 i 72 prikazani su interval poverenja za kvantile od 95% i interval poverenja za verovatnoću od 80% za model P+GP uz ocenu parametara metodom momenata. Međutim, pozitivna vrednost parametra oblika k u ovom slučaju čini GP raspodelu ograničenom s gornje strane, što nije pogodno za modeliranje velikih voda. Gornja granica u ovom slučaju iznosi 7699 m³/s, što je tek nešto veće od maksimalnog osmotrenog protoka od 7689 m³/s čiji bi povratni period prema ovoj raspodeli iznosio 200 miliona godina.



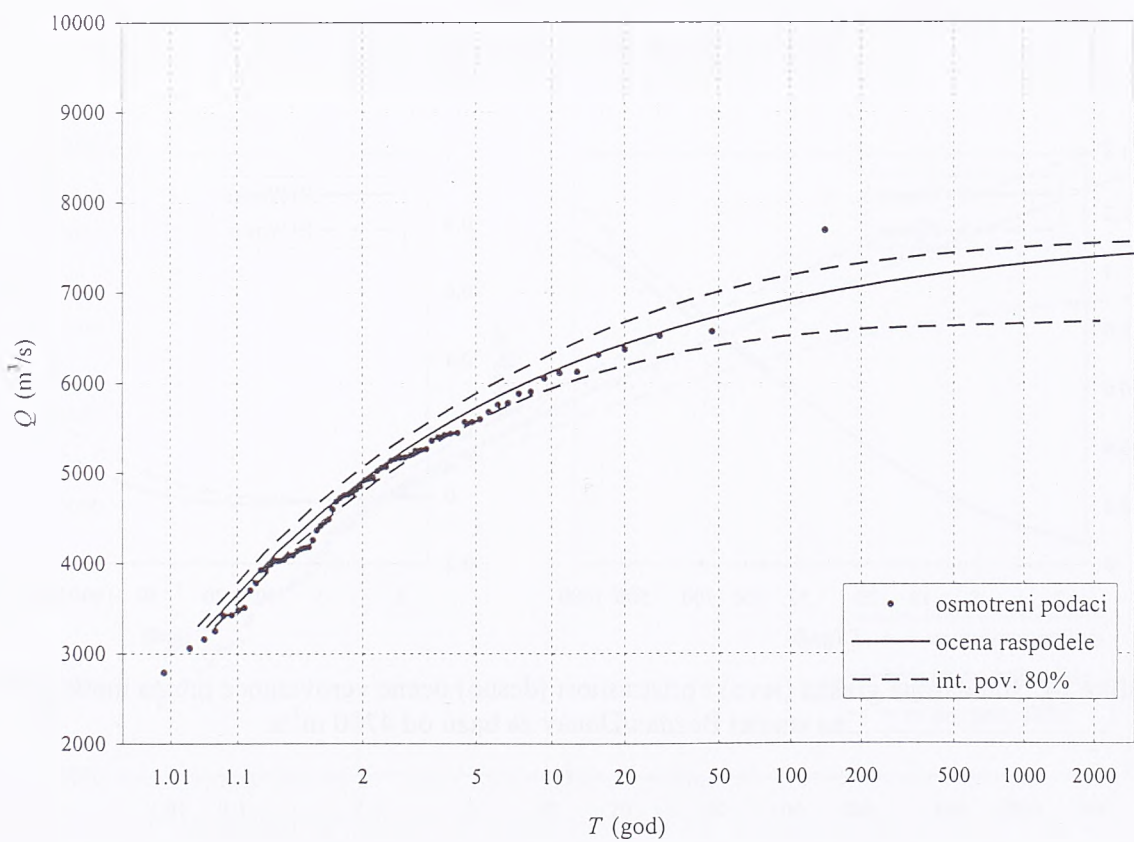
Slika 69. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene kvantila prema modelu P+GP na stanici Bezdán/Dunav za bazu od 3300 m³/s.



Slika 70. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene verovatnoće prema modelu P+GP na stanici Bezdán/Dunav za bazu od 3300 m³/s.

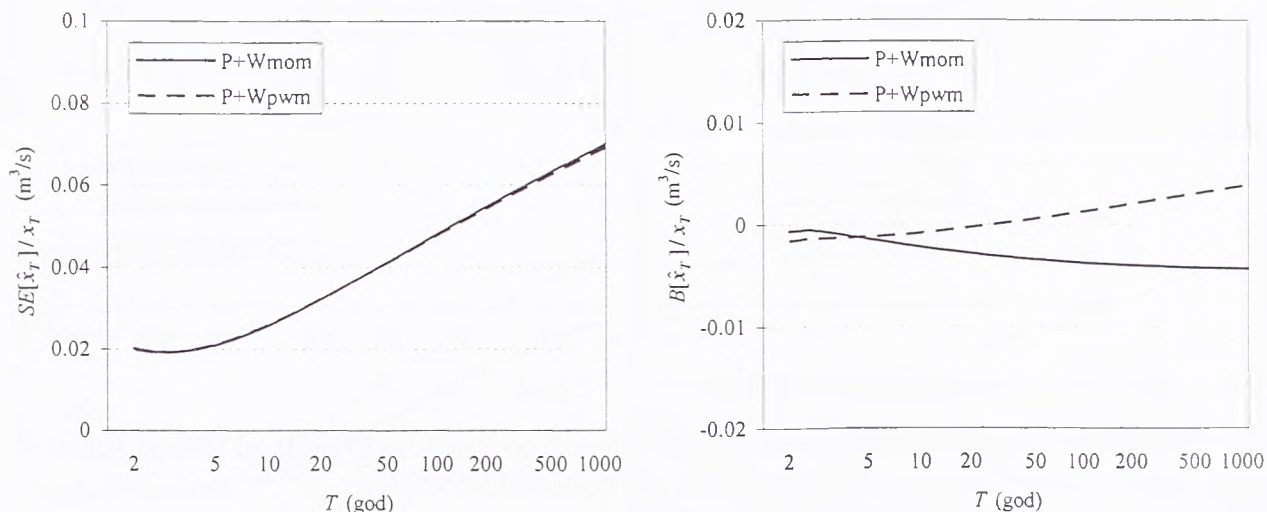


Slika 71. Ocena kvantila modelom P+GP i intervali poverenja za kvantile od 95% na stanici Bezdán/Dunav za bazu od $3300 \text{ m}^3/\text{s}$.

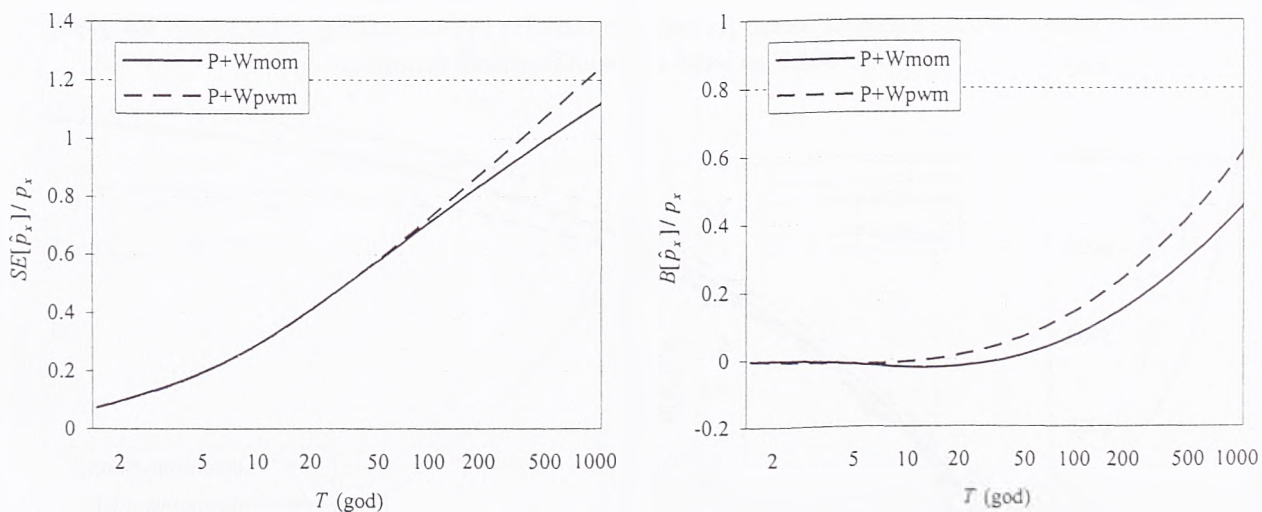


Slika 72. Ocena verovatnoće pojave modelom P+GP i njeni intervali poverenja od 80% na stanici Bezdán/Dunav za bazu od $3300 \text{ m}^3/\text{s}$.

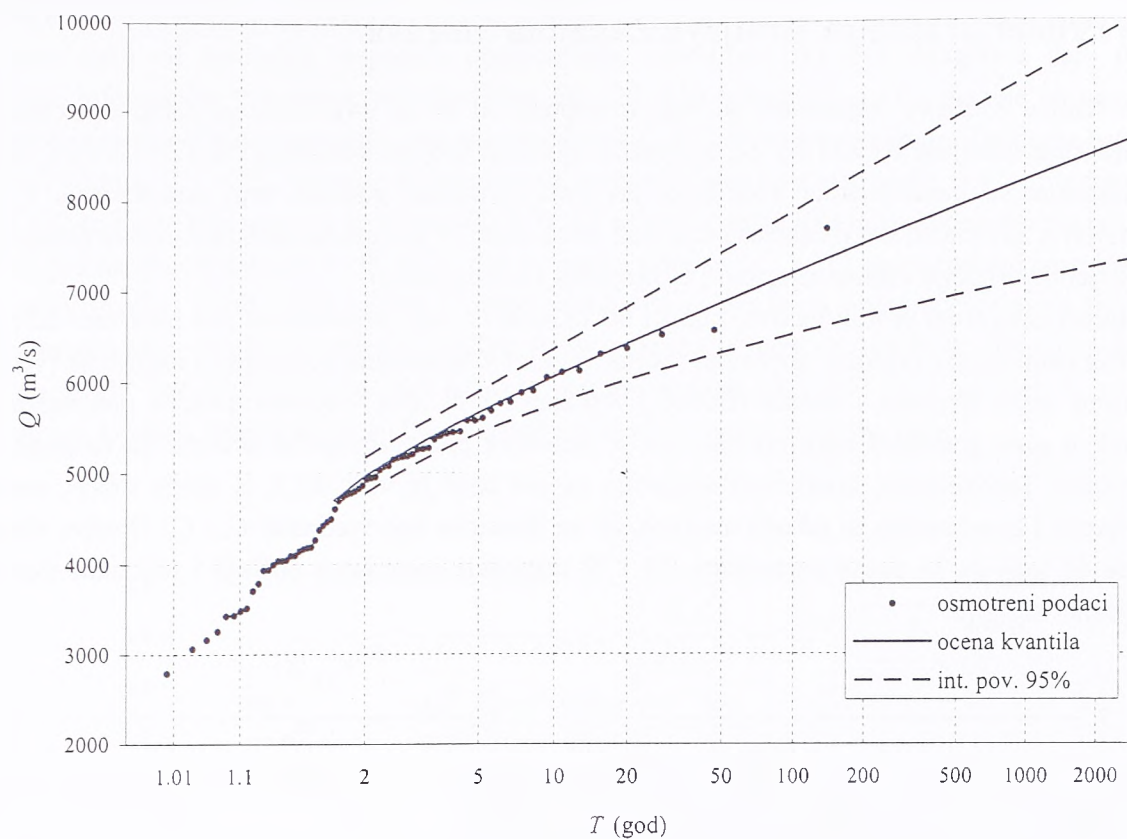
Baza 4700 m³/s: model P+W. I u ovom slučaju se ocene parametara W raspodele po metodama običnih i težinskih momenata ne razlikuju (po metodi momenata $\gamma = 1.200$ i $\beta = 708.8$, dok je po metodi težinskih momenata $\gamma = 1.119$ i $\beta = 708.6$). Sa gledišta svojstava ocene kvantila, dve metode za ocenu parametara daju skoro istu standardnu grešku, dok metoda težinskih momenata ima nešto manju pristrasnost (slika 73). S druge strane, u oceni verovatnoće metoda momenata pokazuje nešto manje greške (slika 74). Na slikama 75 i 76 prikazani su interval poverenja za kvantile od 95% i interval poverenja za verovatnoću od 80% za model P+W uz ocenu parametara metodom momenata.



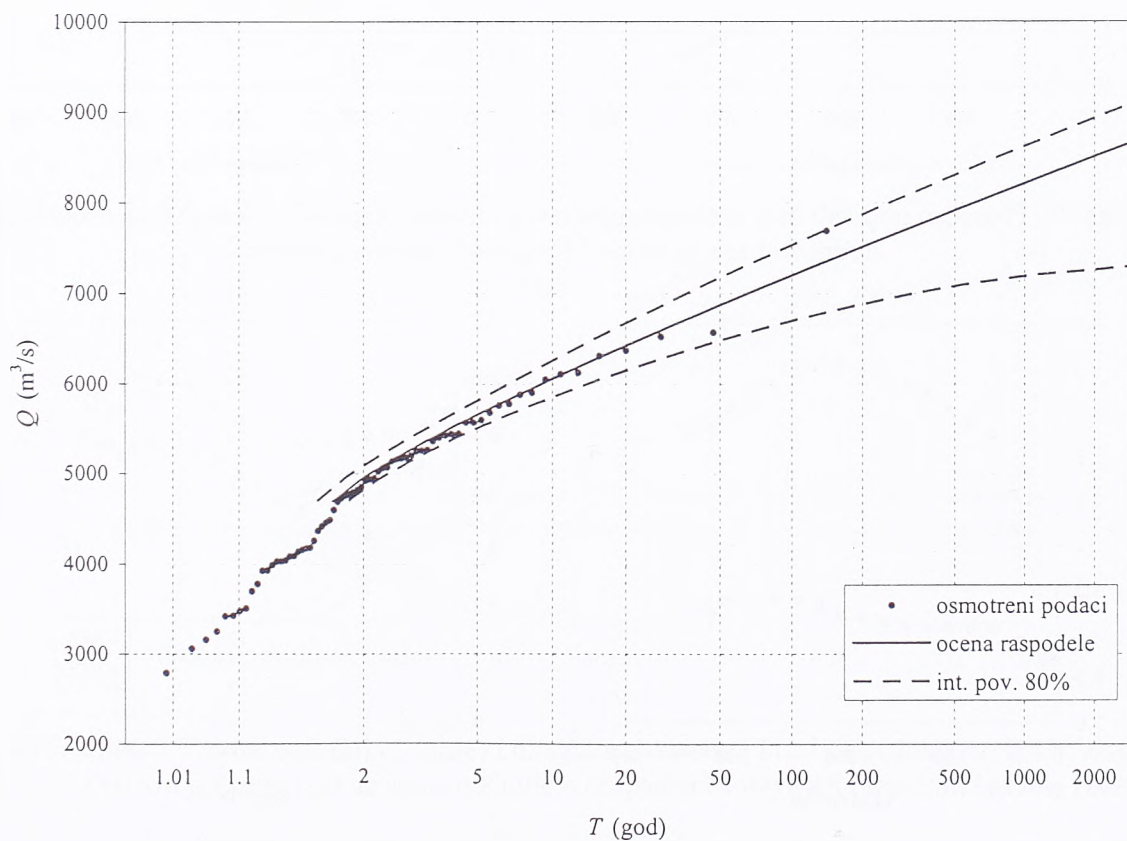
Slika 73. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene kvantila prema modelu P+W na stanici Bezdán/Dunav za bazu od 4700 m³/s.



Slika 74. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene verovatnoće prema modelu P+W na stanici Bezdán/Dunav za bazu od 4700 m³/s.



Slika 75. Ocena kvantila modelom P+W i intervali poverenja za kvantile od 95% na stanici Bezdán/Dunav za bazu od $4700 \text{ m}^3/\text{s}$.

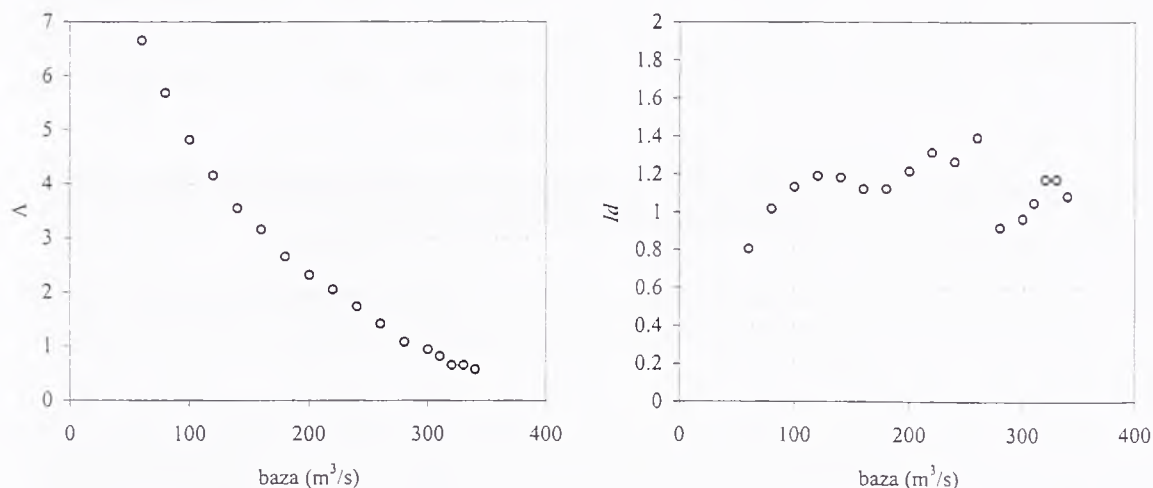


Slika 76. Ocena verovatnoće pojave modelom P+W i njeni intervali poverenja od 80% na stanici Bezdán/Dunav za bazu od $4700 \text{ m}^3/\text{s}$.

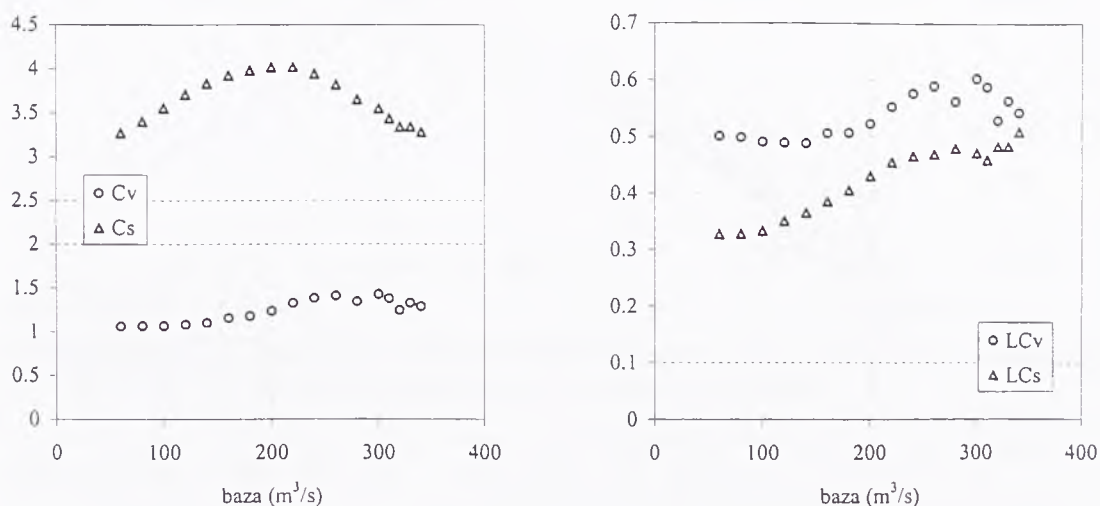
IV.3 Primer 2: stanica Kraljevo/Zapadna Morava

Za stanicu Kraljevo razmatrane su baze u rasponu od 60 do 340 m³/s, pri čemu se ukupan broj prekoračenja smanjuje od 253 do 22, a prosečan godišnji broj prekoračenja od 6.66 do 0.58. Na slici 77 prikazane su karakteristike niza broja javljanja (prosečan godišnji broj prekoračenja i indeks disperzije) u zavisnosti od vrednosti baze, dok su na slici 78 prikazane statistike nizova prekoračenja (koeficijenti varijacije i asimetrije, kao i L-varijacija i L-asimetrija).

Najveći osmotreni protok na ovoj stanici od 1330 m³/s, koji je praktično dva puta veći od drugog najvećeg osmotrenog protoka, doprinosi veoma velikim vrednostima koeficijenta asimetrije (većim od 3). Prema testu Grubbsa i Becka (Bobée i Ashkar, 1991), ova vrednost protoka predstavlja mali izuzetak u nizu godišnjih maksimuma, dok u nizovima prekoračenja ne predstavlja izuzetak ni za jednu bazu. Istovremeno, koeficijent varijacije za sve baze je veći od 1. S druge strane, vrednosti L-varijacije i L-asimetrije su takođe uvećane, ali ne drastično kao vrednosti C_v i C_s . Ovakve okolnosti dovode do toga da se ocene parametara GP i W raspodele metodama običnih i težinskih momenata značajnije razlikuju.

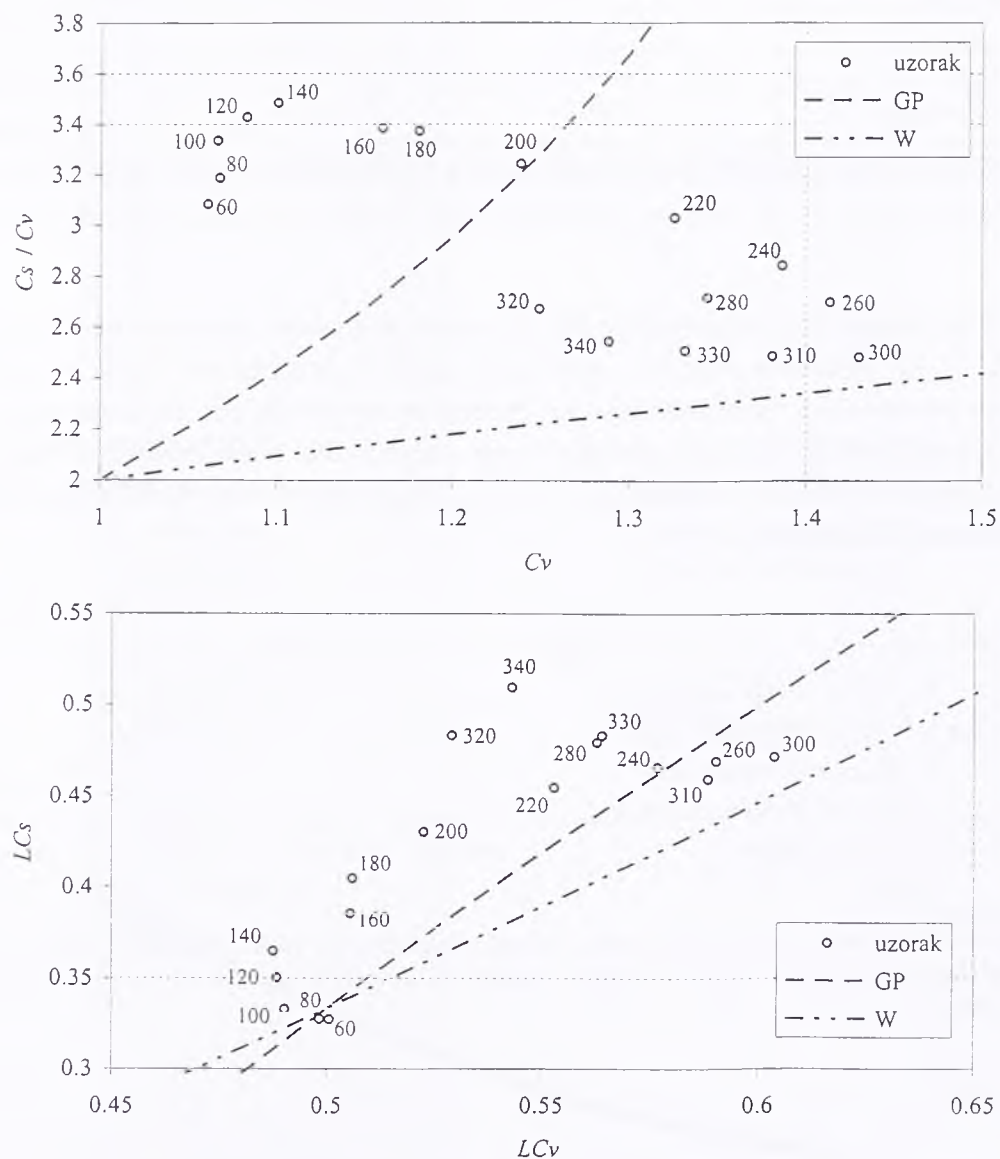


Slika 77. Prosečan godišnji broj prekoračenja (levo) i indeks disperzije (desno) u zavisnosti od vrednosti baze za stanicu Kraljevo/Zapadna Morava.



Slika 78. Koeficijenti varijacije i asimetrije i njihov odnos (levo) i L-varijacija i L-asimetrija (desno) niza prekoračenja u zavisnosti od vrednosti baze za stanicu Kraljevo/Zapadna Morava.

Na slici 79 prikazani su odnos C_v i C_s/C_v i odnos LC_v i LC_s koji bi trebalo da ukažu na pogodnost primene neke od teorijskih raspodela prekoračenja. Međutim, ova dva dijagrama daju donekle suprotne informacije. Pre svega, za niske baze 60–120 m³/s odnos LC_v i LC_s ukazuje na mogućnost primene eksponencijalne raspodele, dok prema odnosu C_v i C_s/C_v to nije moguće. Zatim, za baze 240–340 m³/s odnos C_v i C_s/C_v ukazuje na mogućnost primene Vejbulove raspodele, dok se prema odnosu LC_v i LC_s to može reći samo za bazu od 300 m³/s. Za primenu opšte Pareto raspodele prema odnosu C_v i C_s/C_v jedina pogodna baza je 200 m³/s, dok bi prema odnosu LC_v i LC_s najpogodnije baze bile 220–310 m³/s. Imajući u vidu gore rečeno i vodeći računa da se niz broja prekoračenja može modelirati Poasonovom raspodelom, za primenu modela P+W izabrana je baza od 300 m³/s, dok su za primenu modela P+GP izabrane baze od 200 m³/s za metodu momenata i 280 m³/s za metodu težinskih momenata. U tabeli 28 prikazane su karakteristike nizova za ove tri izabrane baze.



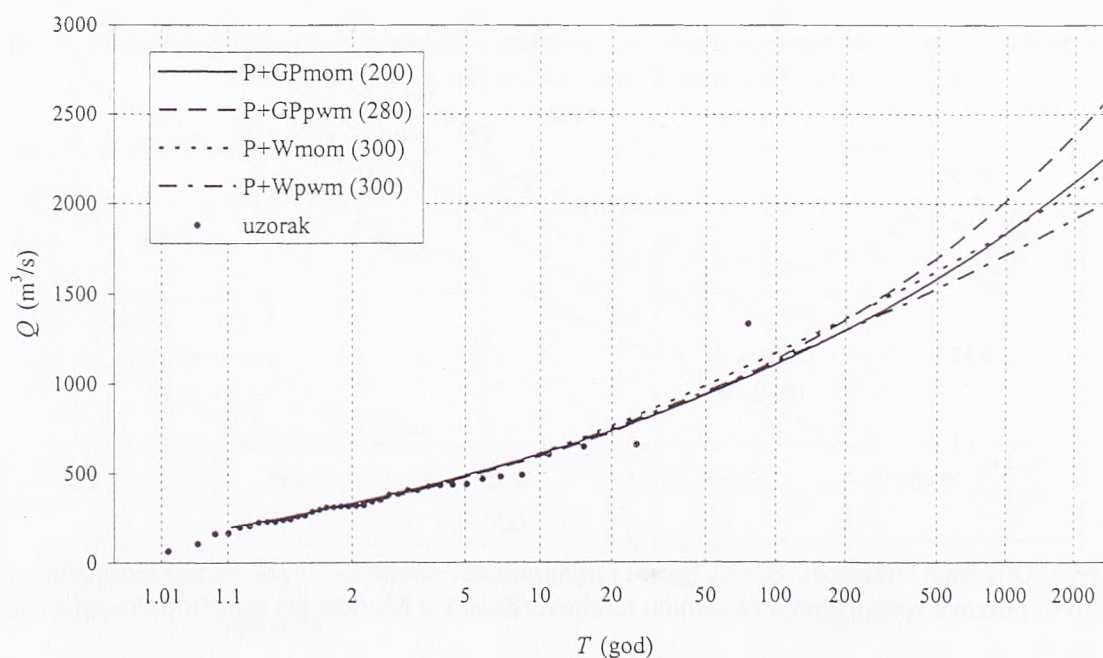
Slika 79. Dijagram zavisnosti C_v i C_s (gore) i dijagram zavisnosti LC_v i LC_s (dole) teorijskih raspodela (krive) i nizova prekoračenja za stanicu Kraljevo/Zapadna Morava pri različitim bazama (tačke).

Tabela 28. Karakteristike nizova prekoračenja pri izabranim bazama za stanicu Kraljevo/Zapadna Morava.

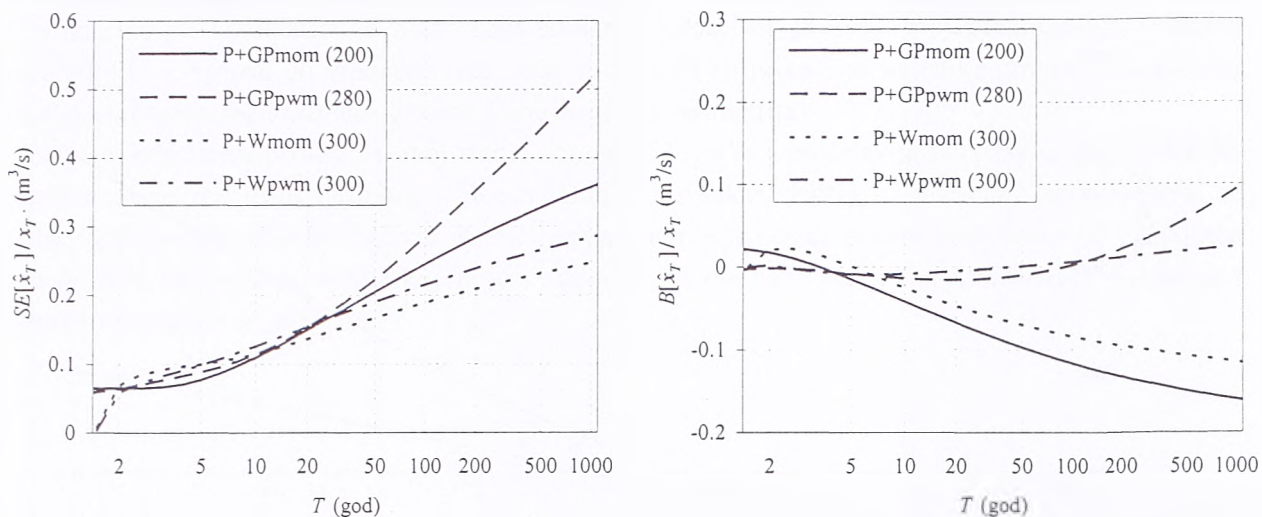
	baza (m ³ /s)		
	200	280	300
Broj godina N	38	38	38
Broj prekoračenja M	88	41	36
Sr. god. broj prekoračenja Λ	2.32	1.08	0.95
Indeks disperzije I_d	1.216	0.921	0.967
Usvojena raspodela za broj prekoračenja	P	P	P
Koef. varijacije C_v	1.238	1.344	1.430
Koef. asimetrije C_s	4.017	3.655	3.550
C_s/C_v	3.243 (3.203)*	2.719 (4.100)*	2.483 (2.367)*
L-varijacija LC_v	0.522	0.563	0.604
L-asimetrija LC_s	0.430 (0.373)*	0.480 (0.440)*	0.472 (0.451)*
Usvojena raspodela za prekoračenja	GPmom	GPpwm	W
Parametar oblika	-0.174	-0.223	0.714 (mom) 0.749 (pwm)
Parametar razmere	100.0	103.4	104.3 (mom) 108.7 (pwm)

* Vrednosti u zagradama predstavljaju teorijske vrednosti koeficijenata za usvojenu raspodelu.

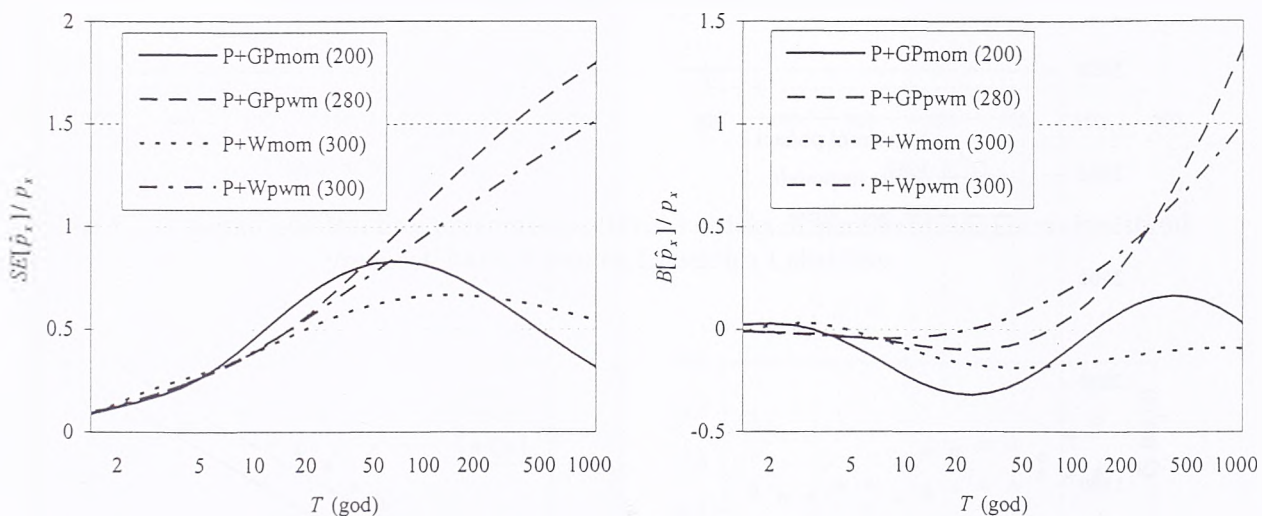
Na slici 80 prikazane su raspodele godišnjih maksimuma prema izabranim modelima, dok su na slikama 81 i 82 prikazane relativne standardne greške i pristrasnosti ocene kvantila i ocene verovatnoće prema ovim modelima. Iako se izabrani modeli značajnije razlikuju samo u domenu velikih povratnih perioda, sa gledišta grešaka u oceni najbolji izbor bi bio model P+Wmom za bazu od 300 m³/s. Interval poverenja za kvantile od 95% i interval poverenja za verovatnoću od 80% za ovaj model prikazani su na slikama 83 i 84.



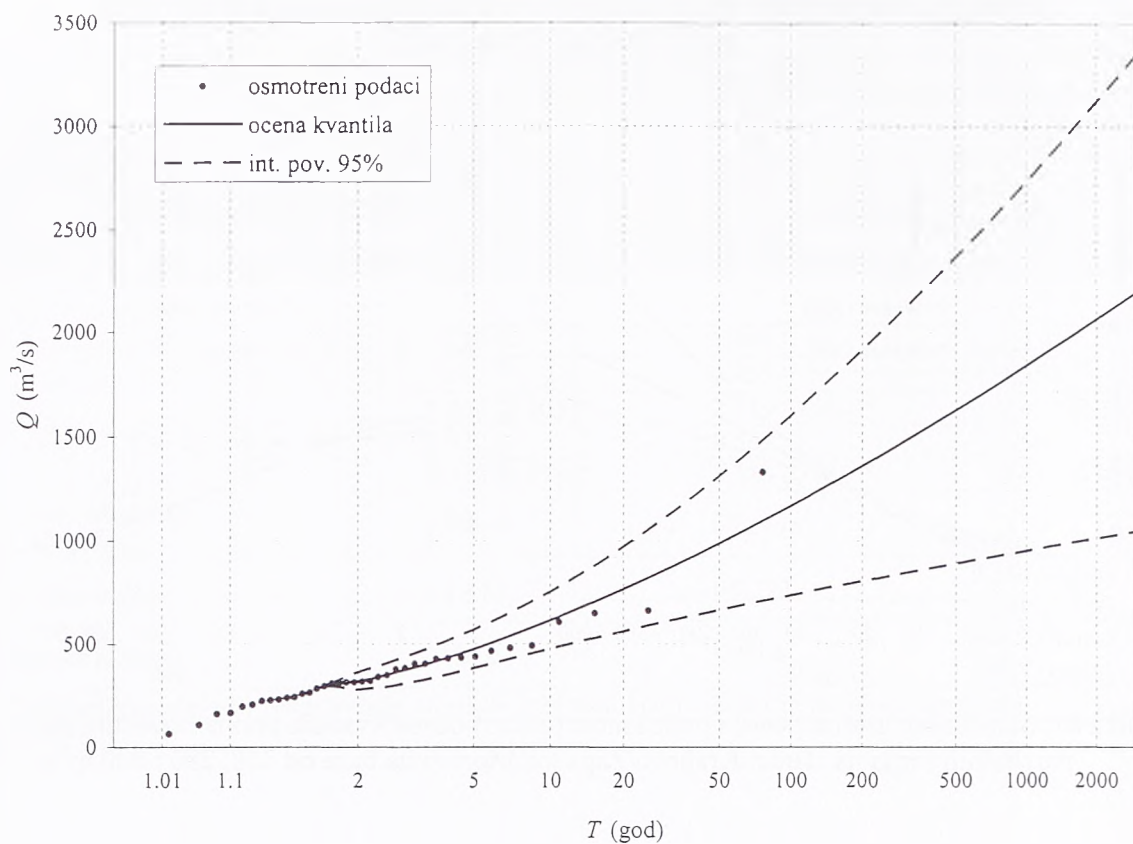
Slika 80. Raspodele godišnjih maksimuma na stanici Kraljevo/Zapadna Morava za baze od 200, 280 i 300 m³/s prema različitim modelima parcijalnih serija.



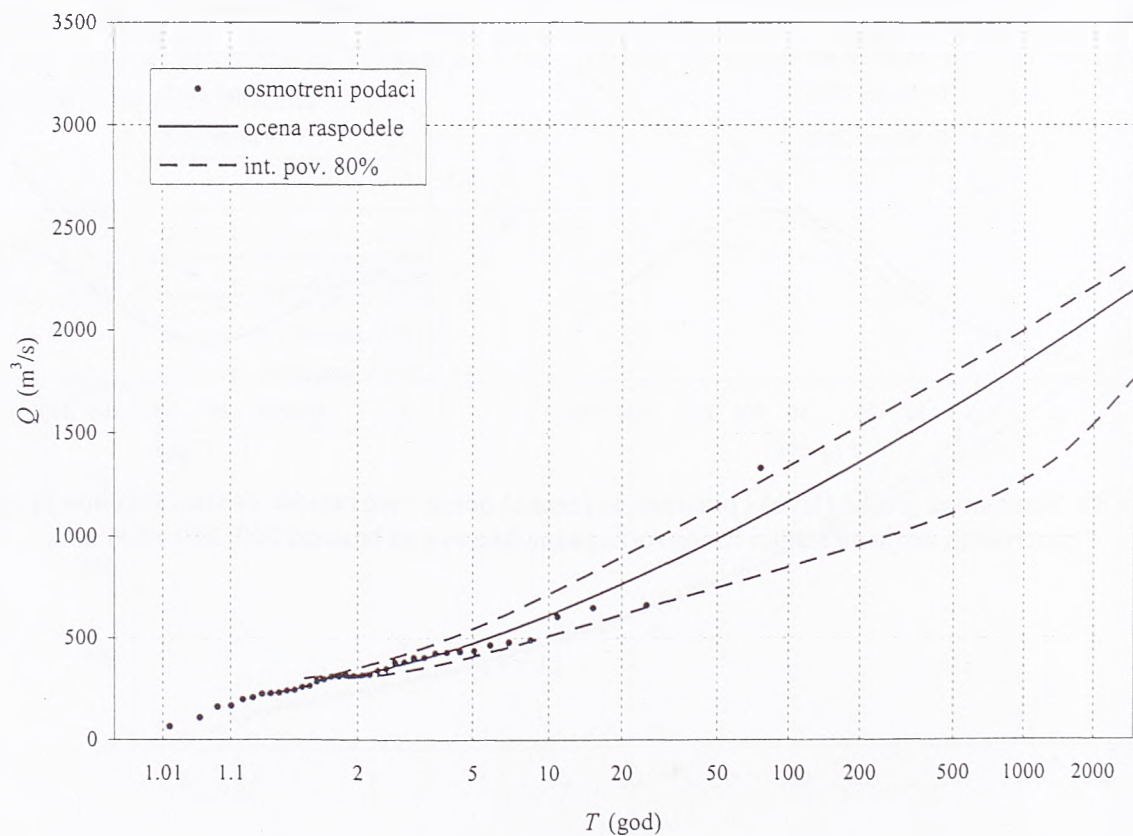
Slika 81. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene kvantila prema različitim modelima parcijalnih serija na stanici Kraljevo/Zapadna Morava za baze od 200, 280 i 300 m^3/s .



Slika 82. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene verovatnoće prema različitim modelima parcijalnih serija na stanici Kraljevo/Zapadna Morava za baze od 200, 280 i 300 m^3/s .



Slika 83. Ocena kvantila modelom P+Wmom i intervali poverenja za kvantile od 95% na stanici Kraljevo/Zapadna Morava za bazu od $300 \text{ m}^3/\text{s}$.

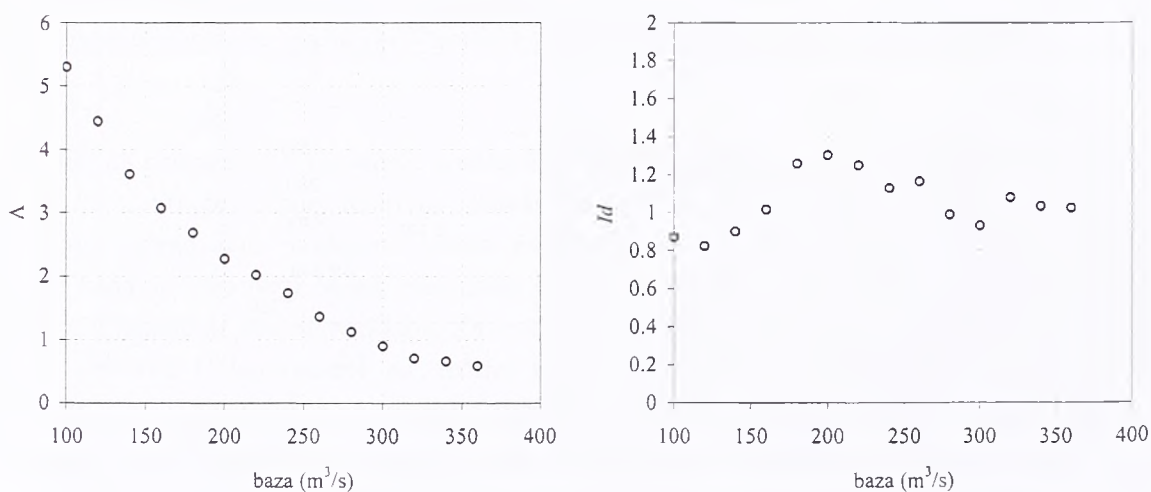


Slika 84. Ocena verovatnoće pojave modelom P+Wmom i njeni intervali poverenja od 80% na stanici Kraljevo/Zapadna Morava za bazu od $300 \text{ m}^3/\text{s}$.

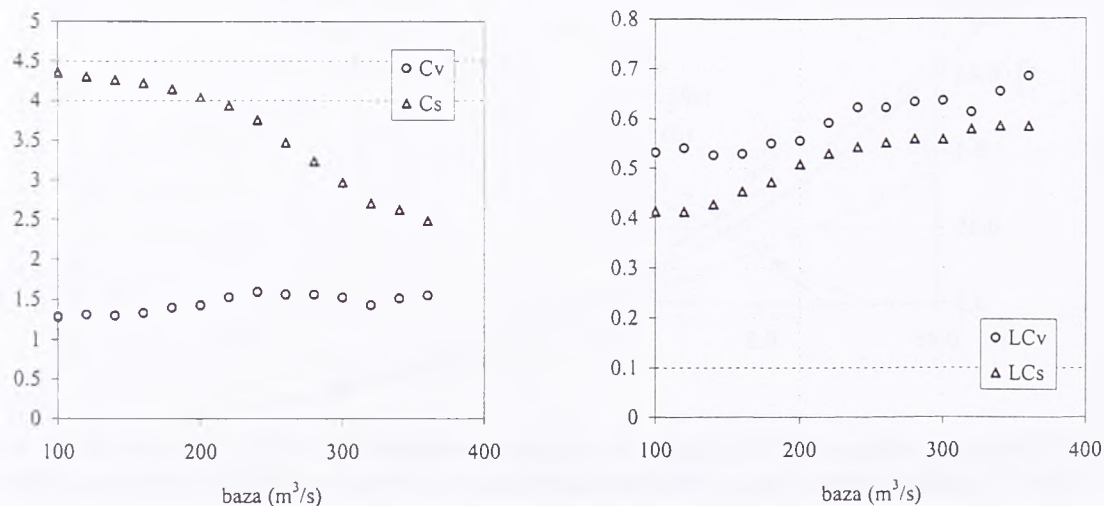
IV.4 Primer 3: stanica Lopatnica Lakat/Ibar

Ponašanje ovog niza protoka je slično nizu iz prethodnog primera, što je logično s obzirom da se radi o istom regionu. Razmatrane su baze u rasponu od 100 do 360 m³/s, pri čemu se ukupan broj prekoračenja smanjuje od 217 do 24, a prosečan godišnji broj prekoračenja od 5.29 do 0.59. Na slici 85 prikazane su karakteristike niza broja javljanja (prosečan godišnji broj prekoračenja i indeks disperzije) u zavisnosti od vrednosti baze, dok su na slici 86 prikazane statistike nizova prekoračenja (koeficijenti varijacije i asimetrije, kao i L-varijacija i L-asimetrija).

Najveći osmotreni protok na ovoj stanici iznosi 1520 m³/s i predstavlja izuzetak u nizu godišnjih maksimuma prema testu Grubbsa i Becka (Bobée i Ashkar, 1991); u nizovima prekoračenja ne predstavlja izuzetak ni za jednu bazu. Koeficijent asimetrije je i ovde veoma veliki (od 4.35 za najnižu bazu do 2.48 za najvišu), dok je koeficijent varijacije za sve baze veći od 1. Vrednosti L-varijacije i L-asimetrije takođe su uvećane.

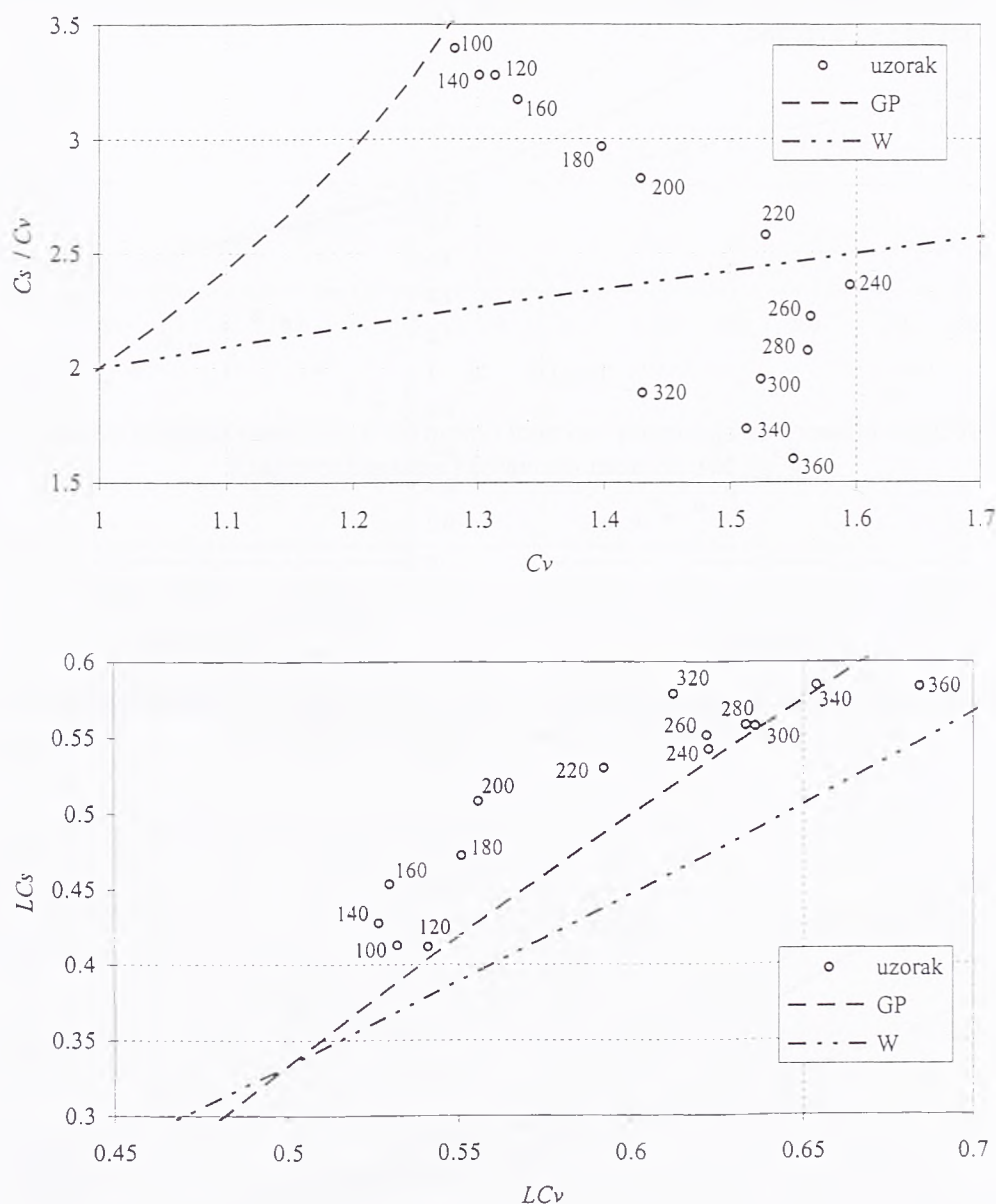


Slika 85. Prosečan godišnji broj prekoračenja (levo) i indeks disperzije (desno) u zavisnosti od vrednosti baze za stanicu Lopatnica Lakat/Ibar.



Slika 86. Koeficijenti varijacije i asimetrije i njihov odnos (levo) i L-varijacija i L-asimetrija (desno) niza prekoračenja u zavisnosti od vrednosti baze za stanicu Lopatnica Lakat/Ibar.

Na slici 87 prikazani su odnos C_v i C_s/C_v i odnos LC_v i LC_s koji i u ovom slučaju daju suprotne informacije. Odnos C_v i C_s/C_v ukazuje na mogućnost primene GP raspodele za najniže baze 100–160 m^3/s i Vejbulove raspodele za baze 200–300 m^3/s . S druge strane, odnos LC_v i LC_s uopšte ne ukazuje na mogućnost primene Vejbulove raspodele, već samo opšte Pareto raspodele. Vodeći računa da se niz broja prekoračenja može modelirati Poasonovom raspodelom, za dalje razmatranje izabrana je baza od 160 m^3/s za primenu modela P+GP za obe metode ocene parametara, kao i baza od 280 m^3/s za primenu modela P+W sa metodom momenata i modela P+GP sa metodom težinskih momenata. U tabeli 29 prikazane su karakteristike nizova za ove baze.



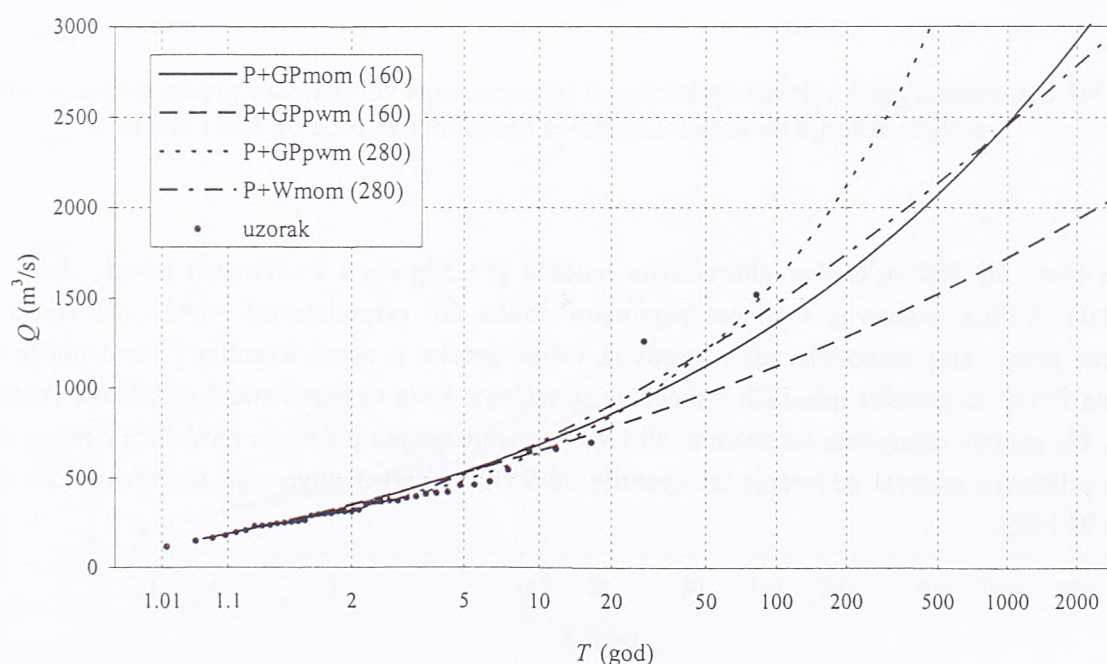
Slika 87. Dijagram zavisnosti C_v i C_s (gore) i dijagram zavisnosti LC_v i LC_s (dole) teorijskih raspodela (krive) i nizova prekoračenja za stanicu Lopatnica Lakat/Ibar pri različitim bazama (tačke).

Tabela 29. Karakteristike nizova prekoračenja pri izabranim bazama za stanicu Lopatnica Lakat/Ibar.

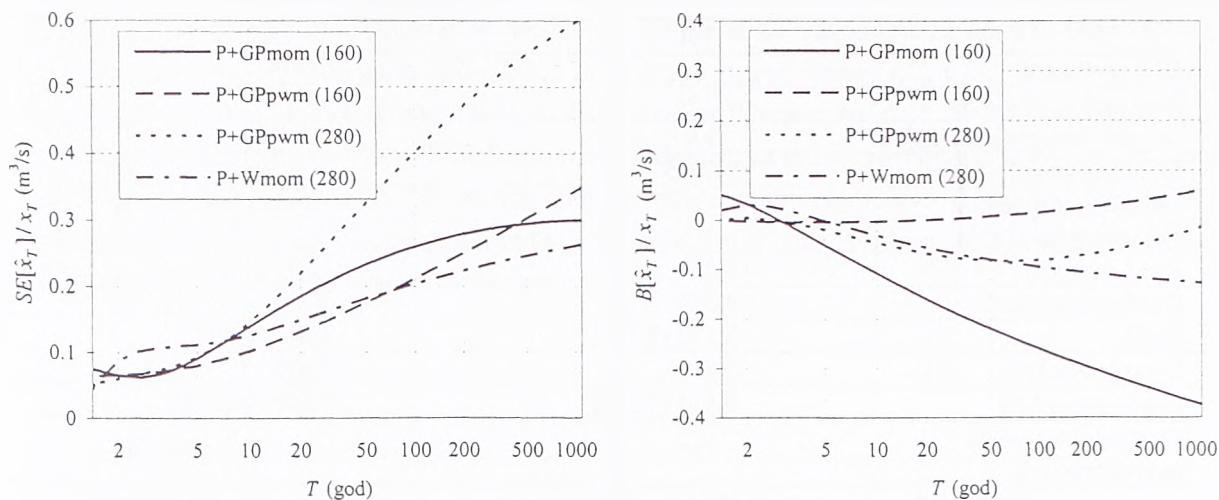
	baza (m^3/s)		
	160		280
Broj godina N	41		41
Broj prekoračenja M	126		46
Sr. god. broj prekoračenja Λ	3.07		1.12
Indeks disperzije I_d	1.015		0.989
Usvojena raspodela za broj prekoračenja	P		P
Koef. varijacije C_v	1.332		1.561
Koef. asimetrije C_s	4.224		3.236
C_s/C_v	3.172 (3.971)*		2.073 (2.467)*
L-varijacija LC_v	0.530		0.633
L-asimetrija LC_s	0.454 (0.373)*		0.559 (0.551)*
Usvojena raspodela za prekoračenja	GP	GPpwm	Wmom
Parametar oblika	-0.218 (mom) -0.112 (pwm)	-0.421	0.662
Parametar razmere	105.7 (mom) 112.0 (pwm)	88.6	114.3

* Vrednosti u zagradama predstavljaju teorijske vrednosti koeficijenata za usvojenu raspodelu.

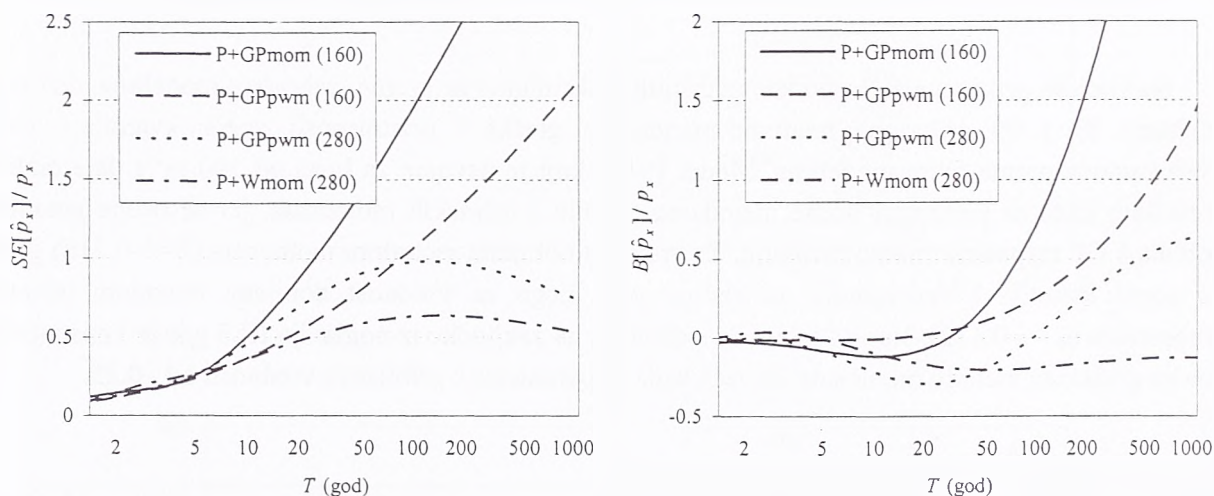
Na slici 88 prikazane su raspodele godišnjih maksimuma za prema izabranim modelima, dok su na slikama 89 i 90 prikazane relativne standardne greške i pristrasnosti ocene kvantila i ocene verovatnoće prema ovim modelima. Model P+GP koji je usvojen za bazu od $160 \text{ m}^3/\text{s}$ daje različite rezultate kada se parametri ocene metodama običnih i težinskih momenata, jer se ocene parametra oblika k GP raspodele znatno razlikuju. Za vrednost dobijenu metodom momenata ($k = -0.218$) greške u oceni kvantila i verovatnoće su znatno veće nego za vrednost dobijenu metodom težinskih momenata ($k = -0.112$), što je očekivano s obzirom na zaključke iz poglavlja III.3 gde je konstatovano da su greške za metodu momenata najveće kada se parametar k približava vrednosti od -0.25 .



Slika 88. Raspodele godišnjih maksimuma na stanici Lopatnica Lakat/Ibar za baze od 160 i $280 \text{ m}^3/\text{s}$ prema različitim modelima parcijalnih serija.

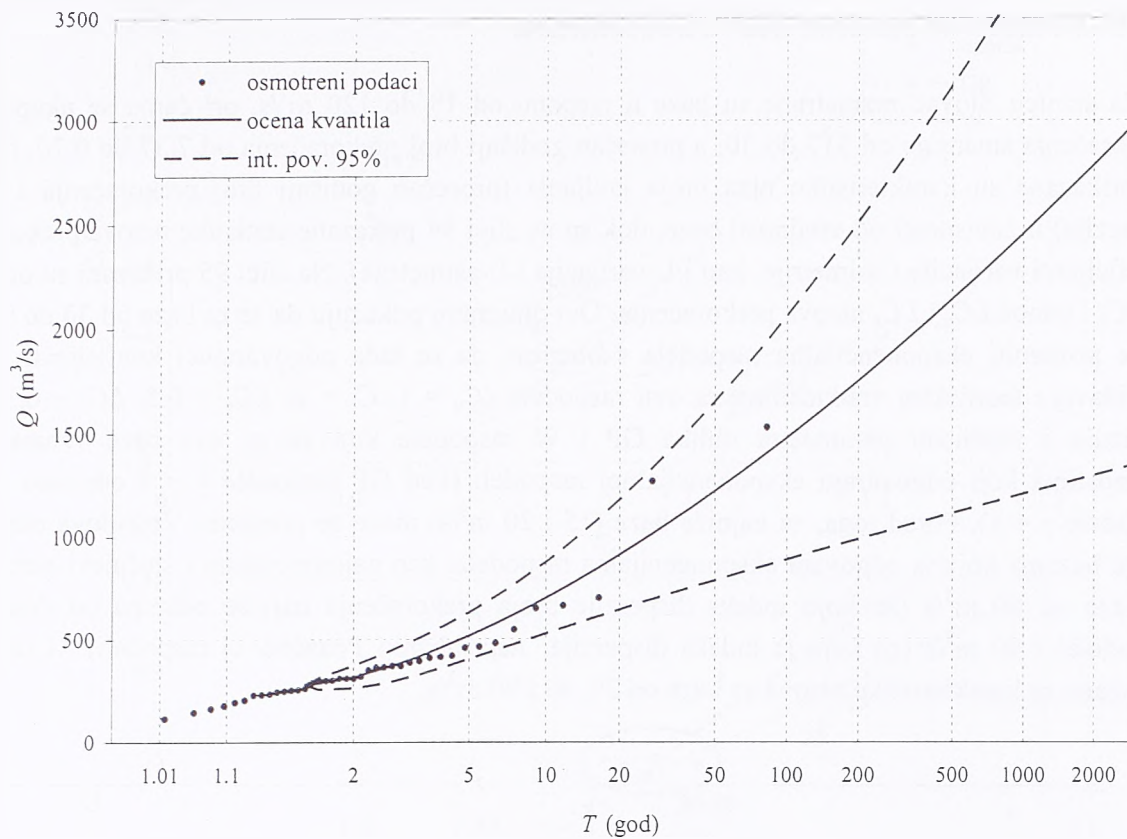


Slika 89. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene kvantila prema različitim modelima parcijalnih serija na stanici Lopatnica Lakat/Ibar za baze od 160 i 280 m³/s.

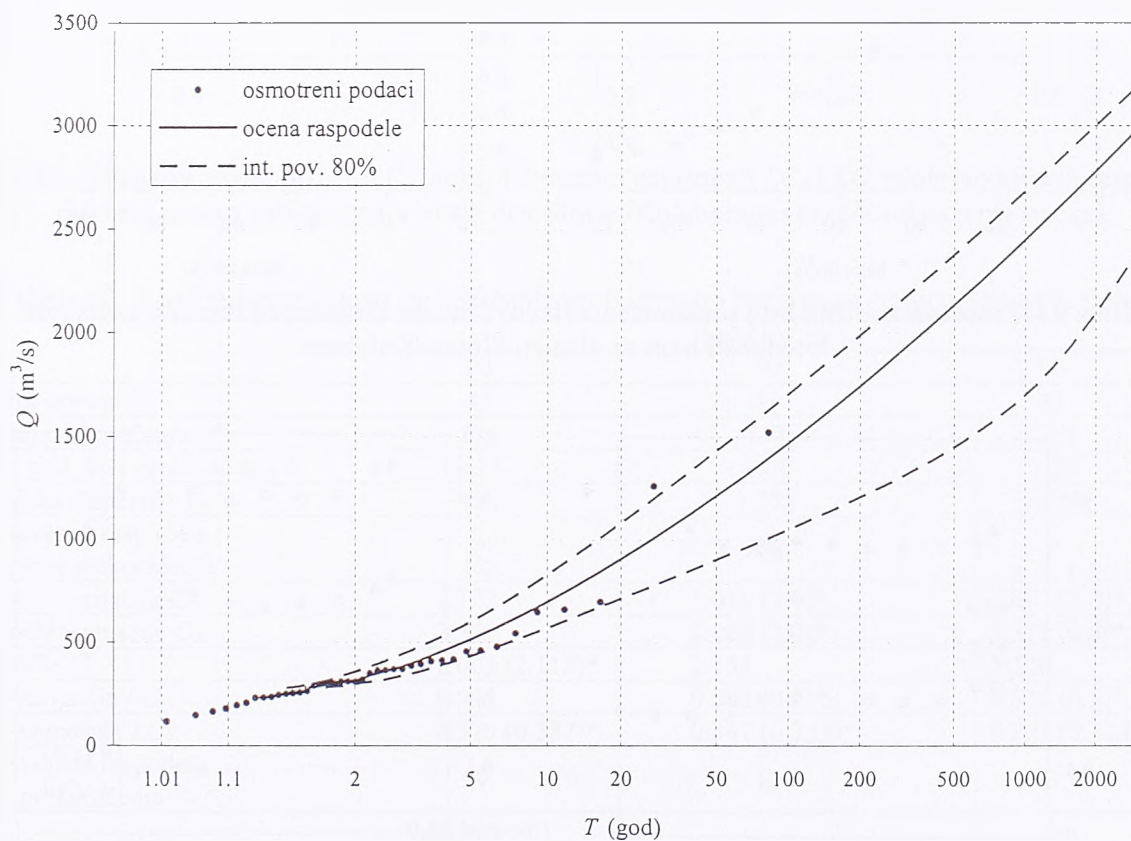


Slika 90. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene verovatnoće prema različitim modelima parcijalnih serija na stanici Lopatnica Lakat/Ibar za baze od 160 i 280 m³/s.

Za bazu od 280 m³/s dva alternativna modela (P+GPpwm i P+Wmom) takođe daju različite rezultate. Velika negativna vrednost parametra oblika GP raspodele od -0.421 uslovljava veoma izdužen gornji kraj raspodele, ali i relativno velike greške u oceni kvantila i verovatnoće (greške modela P+GP za metodu težinskih momenata su najveće kada se parametar k približava vrednosti od -0.5). Na osnovu dijagrama na slikama 89 i 90 najmanje greške pokazuje model P+Wmom, pa su za njega prikazani interval poverenja za kvantile od 95% i interval poverenja za verovatnoću od 80% (slike 91 i 92).



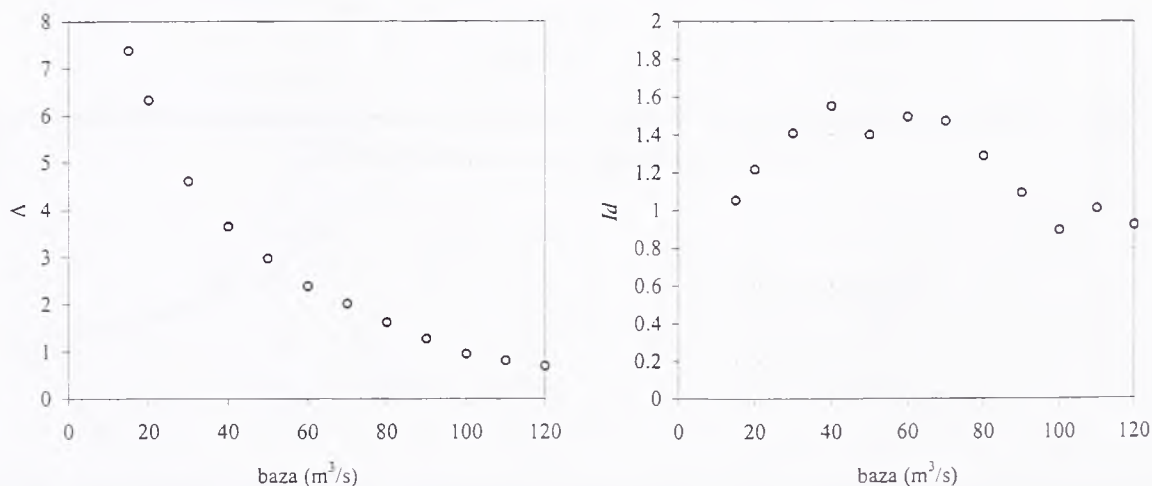
Slika 91. Ocena kvantila modelom P+Wmom i intervali poverenja za kvantile od 95% na stanici Lopatnica Lakat/Ibar za bazu od $280 m^3/s$.



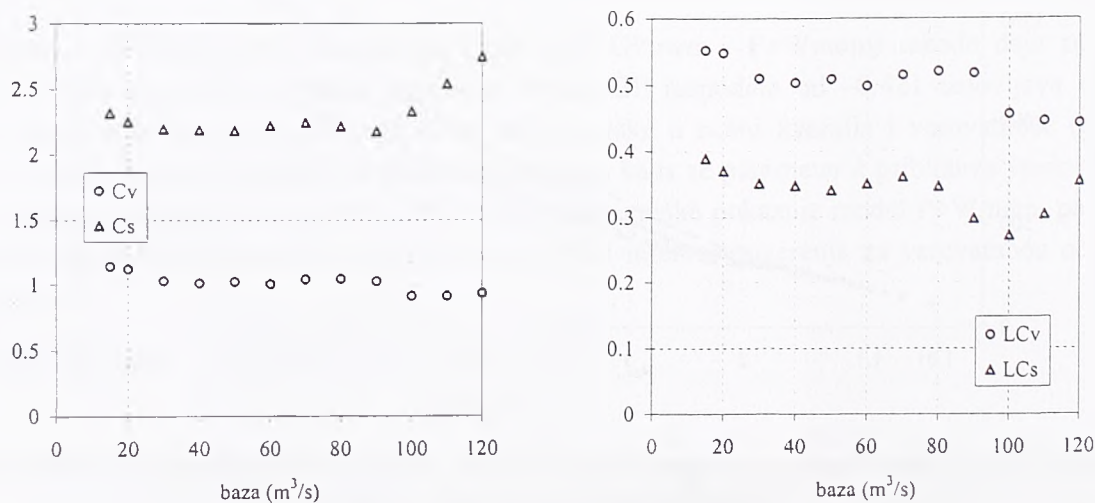
Slika 92. Ocena verovatnoće pojave modelom P+Wmom i njeni intervali poverenja od 80% na stanici Lopatnica Lakat/Ibar za bazu od $280 m^3/s$.

IV.5 Primer 4: stanica Slovac/Kolubara

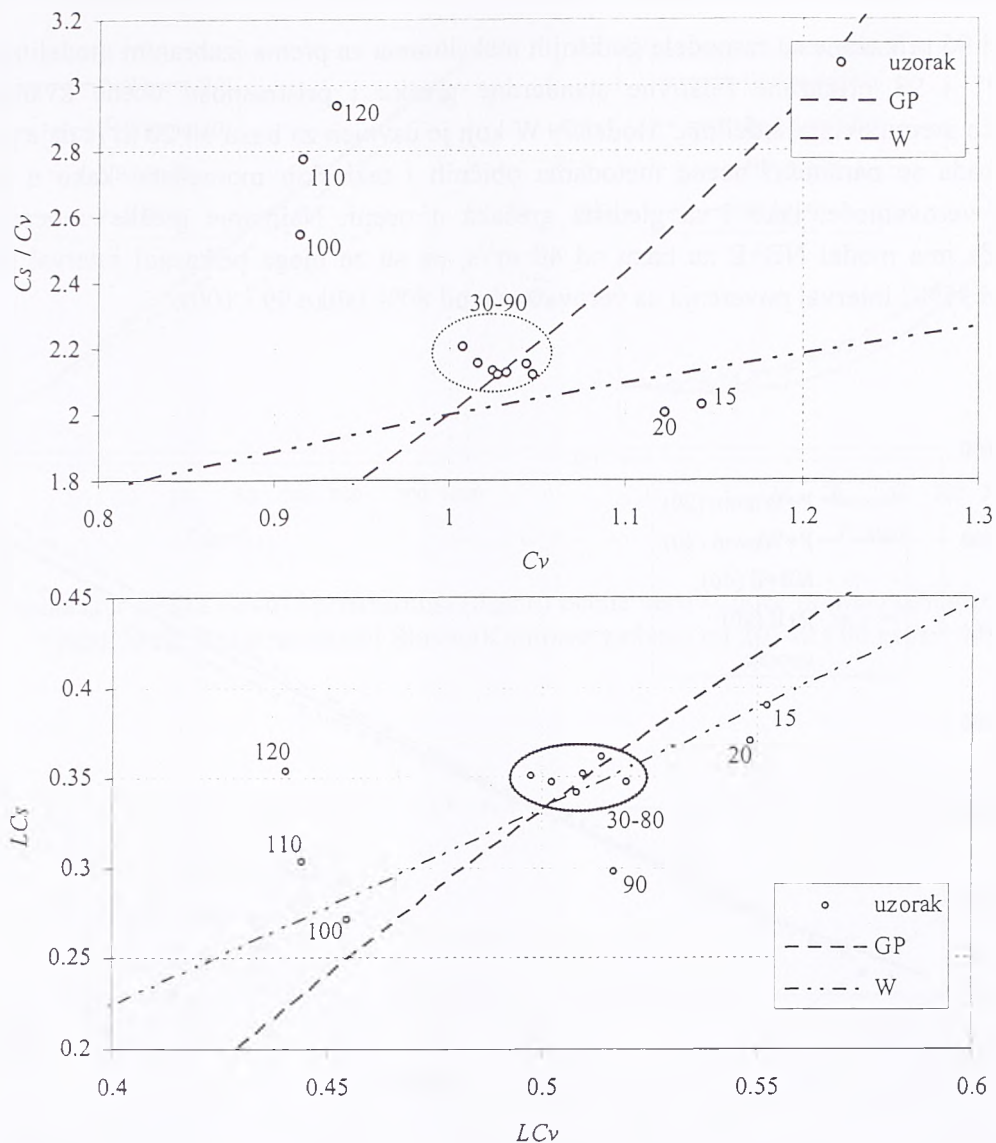
Za stanicu Slovac razmatrane su baze u rasponu od 15 do 120 m³/s, pri čemu se ukupan broj prekoračenja smanjuje od 317 do 30, a prosečan godišnji broj prekoračenja od 7.37 do 0.70. Na slici 93 prikazane su karakteristike niza broja javljanja (prosečan godišnji broj prekoračenja i indeks disperzije) u zavisnosti od vrednosti baze, dok su na slici 94 prikazane statistike nizova prekoračenja (koeficijenti varijacije i asimetrije, kao i L-varijacija i L-asimetrija). Na slici 95 prikazani su odnos C_v i C_s/C_v i odnos LC_v i LC_s nizova prekoračenja. Ovi dijagrami pokazuju da se za baze od 30 do 90 m³/s može primeniti eksponencijalna raspodela s obzirom da se tada odgovarajući koeficijenti najviše približavaju teorijskim vrednostima za ovu raspodelu ($C_v = 1$, $C_s = 2$; $LC_v = 0.5$, $LC_s = 0.33$). To pokazuju i vrednosti parametara oblika GP i W raspodele koji su za ove baze veoma bliski vrednostima koji odgovaraju eksponencijalnoj raspodeli (kod GP raspodele $k = 0$ odnosno kod W raspodele $\gamma = 1$). Pored toga, za najniže baze (15 i 20 m³/s) može se primeniti Vejbulova raspodela. Među bazama kojima odgovara eksponencijalna raspodela, kao najinteresantniji slučajevi razmatrane su baze od 40 m³/s (za koju indeks disperzije broja prekoračenja najviše odstupa od Poasonove raspodele) i 90 m³/s (za koju je indeks disperzije napribližniji Poasonovoj raspodeli). U tabeli 30 prikazane su karakteristike nizova za baze od 20, 40 i 90 m³/s.



Slika 93. Prosečan godišnji broj prekoračenja (levo) i indeks disperzije (desno) u zavisnosti od vrednosti baze za stanicu Slovac/Kolubara.



Slika 94. Koeficijenti varijacije i asimetrije i njihov odnos (levo) i L-varijacija i L-asimetrija (desno) niza prekoračenja u zavisnosti od vrednosti baze za stanicu Slovac/Kolubara.



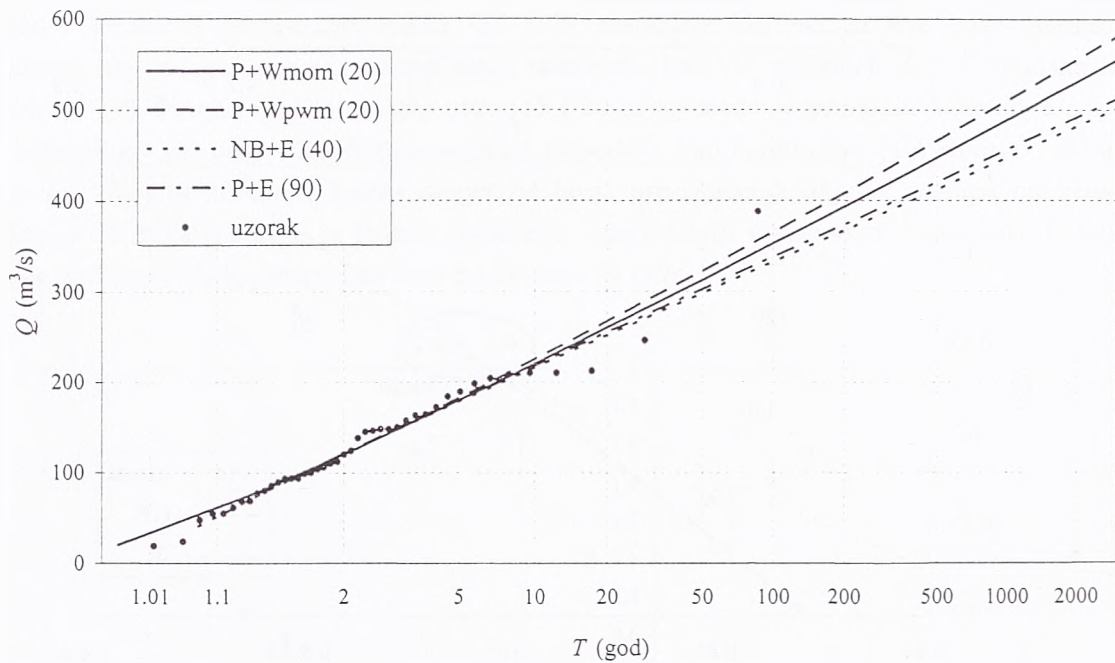
Slika 95. Dijagram zavisnosti C_v i C_s (gore) i dijagram zavisnosti LC_v i LC_s (dole) teorijskih raspodela (krive) i nizova prekoračenja za stanicu Slovac/Kolubara pri različitim bazama (tačke).

Tabela 30. Karakteristike nizova prekoračenja pri izabranim bazama za stanicu Slovac/Kolubara.

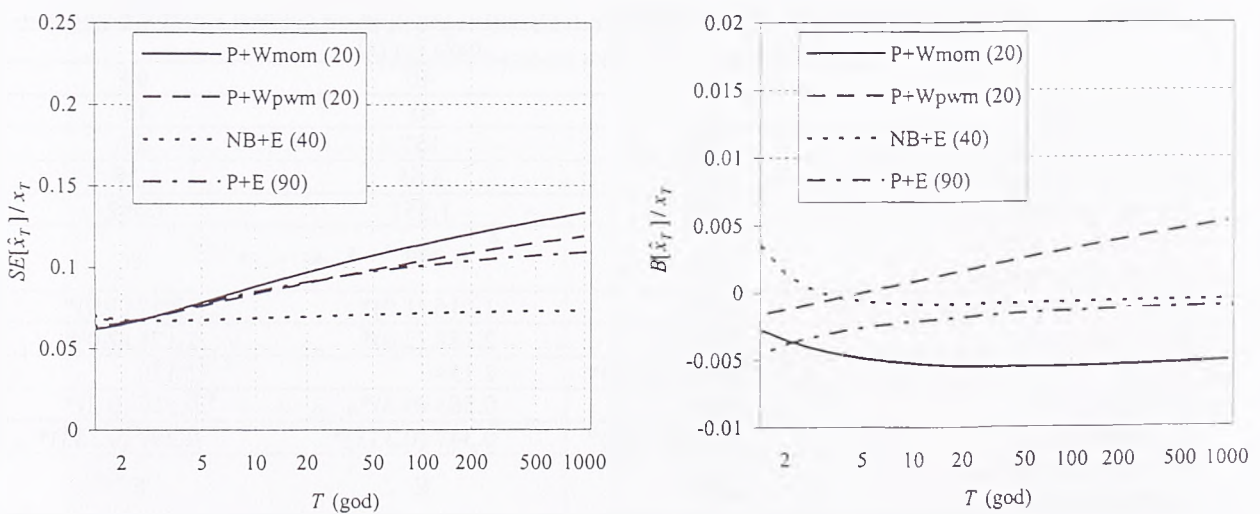
	baza (m^3/s)		
	20	40	90
Broj godina N	43	43	43
Broj prekoračenja M	272	157	55
Sr. god. broj prekoračenja Λ	6.33	3.65	1.28
Indeks disperzije I_d	1.21	1.551	1.092
Usvojena raspodela za broj prekoračenja	P	NB	P
Koef. varijacije C_v	1.122	1.016 (1.0)*	1.027 (1.0)*
Koef. asimetrije C_s	2.250	2.188 (2.0)*	2.178 (2.0)*
C_s/C_v	2.005 (2.115)*	2.154	2.120
L-varijacija LC_v	0.548	0.503 (0.5)*	0.517 (0.5)*
L-asimetrija LC_s	0.370 (0.387)*	0.347 (0.333)*	0.297 (0.333)*
Usvojena raspodela za prekoračenja	W	E	E
Parametar oblika	0.893 (mom)	–	–
	0.872 (pwm)		
Parametar razmere	41.32 (mom)	49.61	51.16
	40.77 (pwm)		

* Vrednosti u zagradama predstavljaju teorijske vrednosti koeficijenata za usvojenu raspodelu.

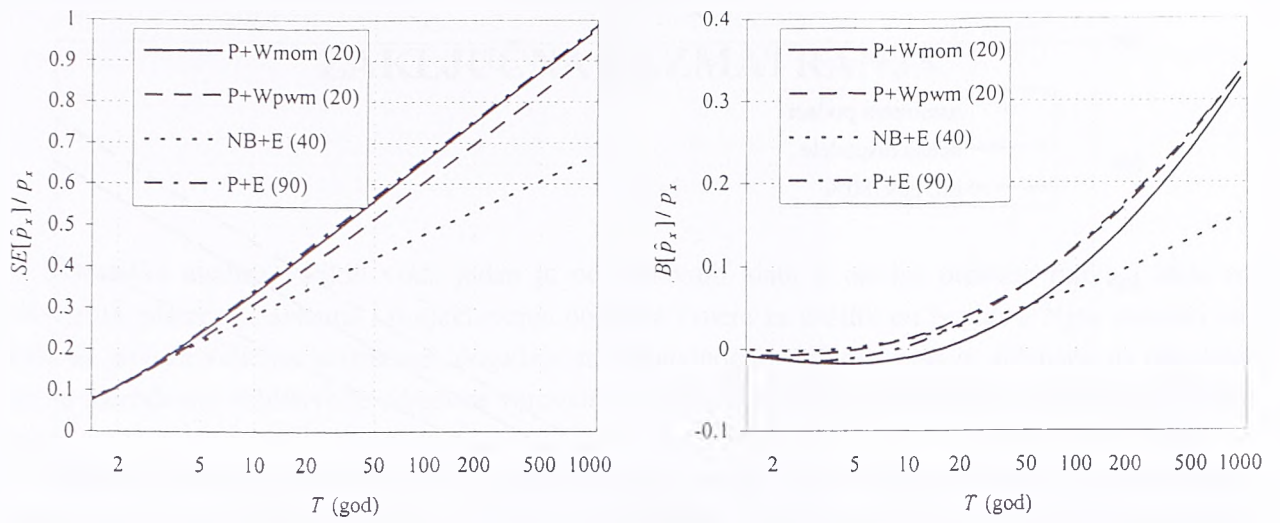
Na slici 96 prikazane su raspodele godišnjih maksimuma za prema izabranim modelima, dok su na slikama 97 i 98 prikazane relativne standardne greške i pristrasnosti ocene kvantila i ocene verovatnoće prema ovim modelima. Model P+W koji je usvojen za bazu od $20 \text{ m}^3/\text{s}$ daje približno iste rezultate kada se parametri ocene metodama običnih i težinskih momenata, kako u samoj oceni kvantila i verovatnoće, tako i sa gledišta grešaka u oceni. Najmanje greške u oceni kvantila i verovatnoće ima model NB+E za bazu od $40 \text{ m}^3/\text{s}$, pa su za njega prikazani interval poverenja za kvantile od 95% i interval poverenja za verovatnoću od 80% (slike 99 i 100).



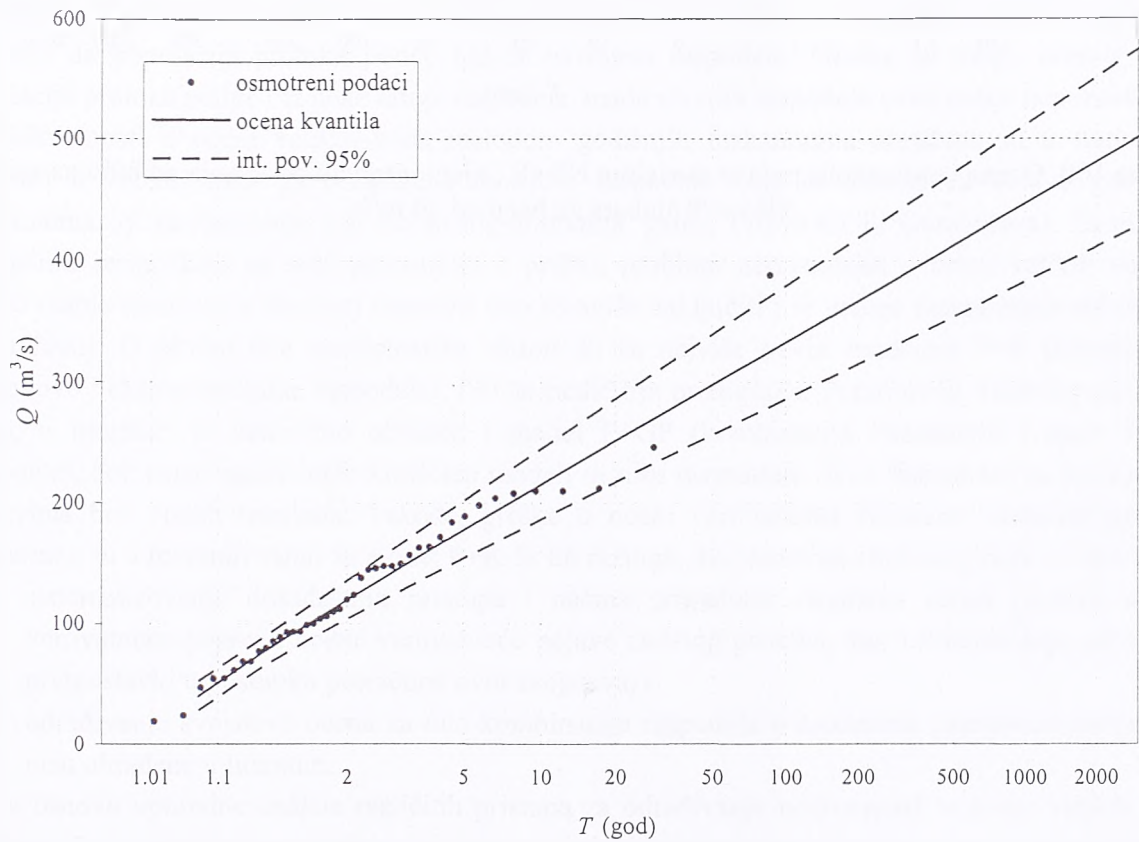
Slika 96. Raspodele godišnjih maksimuma na stanici Slovac/Kolubara za baze od 20, 40 i $90 \text{ m}^3/\text{s}$ prema različitim modelima parcijalnih serija.



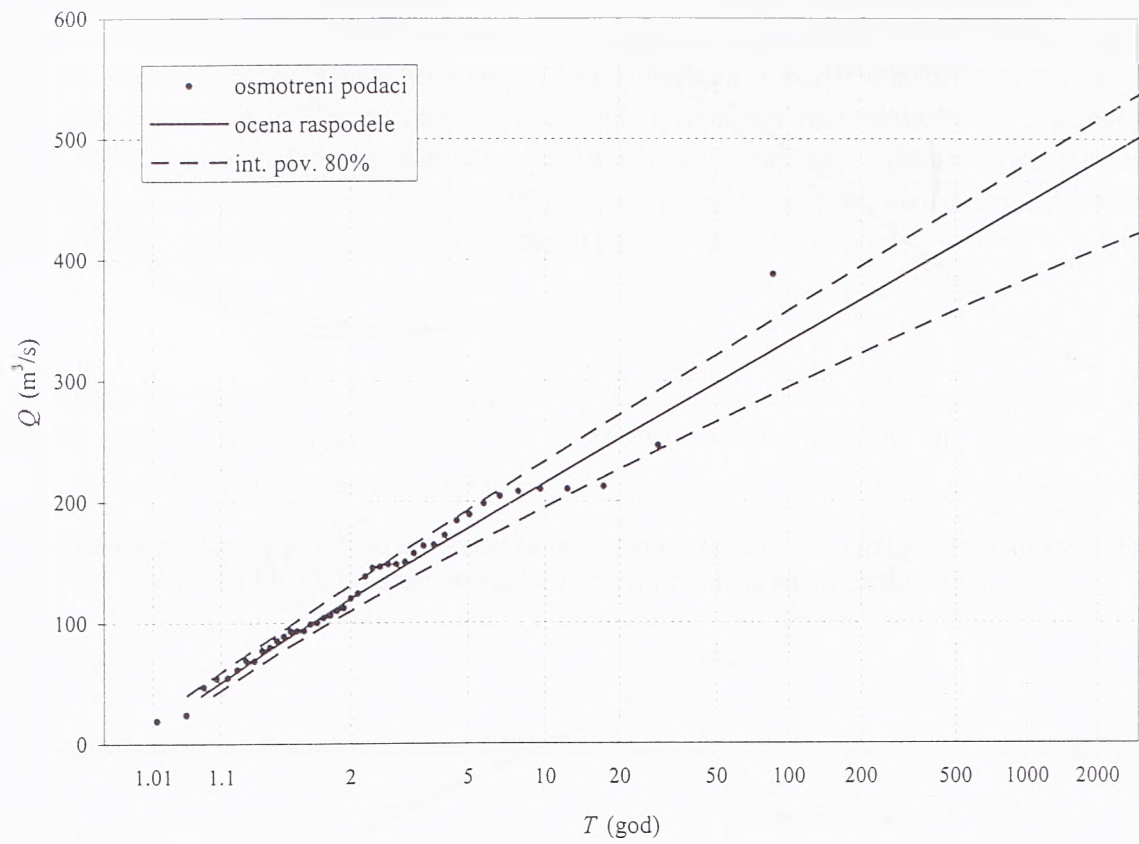
Slika 97. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene kvantila prema različitim modelima parcijalnih serija na stanici Slovac/Kolubara za baze od 20, 40 i $90 \text{ m}^3/\text{s}$.



Slika 98. Standardna greška (levo) i pristrasnost (desno) ocene verovatnoće prema različitim modelima parcijalnih serija na stanici Slovac/Kolubara za baze od 20, 40 i 90 m³/s.



Slika 99. Ocena kvantila modelom NB+E i intervali poverenja za kvantile od 95% na stanici Slovac/Kolubara za bazu od 40 m³/s.



Slika 100. Ocena verovatnoće pojave modelom NB+E i njeni intervali poverenja od 80% na stanici Slovac/Kolubara za bazu od $40 \text{ m}^3/\text{s}$.

POGLAVLJE V

ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

Statistička analiza velikih voda jedan je od osnovnih alata u okviru procene rizika i šteta od plavljenja, planiranja sistema i projektovanja objekata i mera za zaštitu od poplava. Njen osnovni cilj jeste da poveže veličine ekstremnih događaja sa verovatnoćom njihove pojave, odnosno da obezbedi ocenu merodavne velike vode određene verovatnoće pojave, ili ocenu verovatnoće pojave neke velike vode.

Međutim, postupak statističke analize zasniva se na modeliranju osmotrenog niza podataka nekom teorijskom raspodelom. Greška koja se pri tome pravi uvek je nepoznata jer je i raspodela verovatnoće populacije velikih voda nepoznata. To znači da u statističkoj analizi velikih voda postoji neizvesnost, i to dvojaka: neizvesnost u izboru teorijske raspodele (neizvesnost modela) i neizvesnost koja potiče od kratkih nizova i grešaka u merenju i obradi podataka (neizvesnost parametara).

Greška u oceni merodavnih velikih voda ili u oceni verovatnoće pojave neke velike vode može se pod određenim uslovima oceniti. Ocnom grešaka može se delimično uzeti u obzir neizvesnost u parametrima usvojene raspodele ako se pretpostavi da je model (tj. raspodela) dobro formulisan, odnosno da populacija protoka potiče baš iz usvojene raspodele. Greške se mogu oceniti i ako populacija protoka potiče i iz neke druge raspodele, mada stvarna raspodela uvek ostaje nepoznata.

Neizvesnosti u oceni velikih voda metodom godišnjih maksimuma obrađene su u statističkoj literaturi u velikoj meri za standardne teorijske raspodele koje se koriste za nizove godišnjih maksimuma (tj. za raspodele kao što su log-normalna, gama, Pirson III ili Gumbelova). Za metodu parcijalnih serija, koja se ređe primenjuje u praksi, problem neizvesnosti u oceni velikih voda je znatno manje pokriven u stručnoj literaturi (što se može zaključiti i iz veoma malog broja referenci u ovom radu). U okviru ove problematike, autori su se najviše bavili modelom P+E (kombinacija Poasonove i ekspanzionalne raspodele), i to sa različitim pristupima. Pored ovog modela parcijalnih serija, u literaturi je delimično obrađen i model P+GP (kombinacija Poasonove i opšte Pareto raspodele), dok ostali ostali češće korišćeni modeli ili nisu razmatrani ili su razmatrani na konkretnim primerima bez opštih rezultata. Takođe, greške u oceni verovatnoće fiksirane vrednosti protoka razmatrane su u literaturi samo za model P+E. Iz tih razloga, dva osnovna cilja ovog rada su bila:

- sistematizovanje dosadašnjih pristupa i načina proračuna svojstava ocena protoka zadate verovatnoće pojave i ocene verovatnoće pojave zadatog protoka, kao i vrednovanje određenih pretpostavki u postupku proračuna ovih svojstava, i
- određivanje svojstava ocena za one kombinacije raspodele u modelima parcijalnih serija koje nisu obrađene u literaturi.

Na osnovu uporedne analize različitih pristupa za određivanje neizvesnosti u oceni velikih voda modelom P+E iz literature, zaključeno je da su rezultati koji se dobijaju najjednostavnijim pristupom razvoja ocena velikih voda kao složene funkcije ocena parametara u Tejlorov red potpuno uporedivi sa rezultatima ostalih složenijih pristupa, tako da nema praktične potrebe za primenom tih složenijih pristupa. Izrazi za standardnu grešku i pristrasnost ocena kvantila i verovatnoće u ovom modelu prema pristupu razvoja u Tejlorov red veoma su jednostavni i mogu se s lakoćom primeniti u praksi.

Jedna od pretpostavki koja se javlja u literaturi pri određivanju neizvesnosti u modelima P+E i P+GP odnosi se na uvođenje uslova da ukupan broj prekoračenja M tokom N godina osmatranja u parcijalnoj seriji, koji predstavlja Poasonovu slučajnu promenljivu, ne može biti jednak 0 (model P+E)

ili manji od 2 (model P+GP), jer tada nije moguće sračunati prva dva empirijska momenata niza prekoračenja, a shodno tome ni parametre E i GP raspodele. Iz tog razloga, u proračunu neizvesnosti figurišu različite uslovne verovatnoće sa uslovima $M > 0$ ili $M > 1$. Pokazano je da ovakvo uslovljavanje nema praktičnu svrhu, jer se uslovna svojstva razmatranih veličina razlikuju od bezuslovnih samo za veoma mali ukupan broj prekoračenja (npr. $M < 20$) koji u praktičnoj primeni nema nikakvog opravdanja.

Određivanje neizvesnosti u modelu P+GP koji je ponuđen u literaturi takođe se zasniva na pristupu razvoja u Tejlorov red, uz uvođenje gore pomenutih uslova za ukupan broj prekoračenja. U radu je napravljeno poređenje rezultata proračuna svojstava ocene kvantila po ovom modelu sa i bez ovih uslovnih verovatnoća i pokazano je da su te razlike zanemarljive sa praktične tačke gledišta.

Model P+W (kombinacija Poasonove i Vejbulove raspodele) i modeli B+E i NB+E (kombinacija binomne ili negativne binomne raspodele sa eksponencijalnom raspodelom) su modeli koji nisu zastupljeni u literaturi sa gledišta neizvesnosti u oceni velikih voda. Za potrebe određivanja ovih neizvesnosti, bilo je potrebno da se odrede svojstva ocene parametara Vejbulove raspodele, za koja u literaturi nisu pronađeni izrazi, pa su oni izvedeni. Njihova provera je bila delimično moguća samo u poređenju sa odgovarajućim izrazima za opštu raspodelu ekstremnih vrednosti (GEV), čiji specijalni slučaj predstavlja Vejbulova raspodela. Takođe su izvedeni izrazi za svojstva ocene parametara binomne i negativne binomne raspodele, koji isto nisu pronađeni u literaturi.

Osim za model P+E, izrazi za standardne greške i pristrasnosti ocena kvantila i verovatnoće u razmatranim modelima parcijalnih serija prilično su glomazni, ali su eksplicitni i relativno se lako mogu sračunati. Eventualne numeričke teškoće javljaju se u proračunu svojstava ocena parametara Vejbulove raspodele gde figurišu složene funkcije kao što su gama, digama, trigama i hipergeometrijska funkcija.

Opšti zaključak o neizvesnostima u modelima parcijalnih serija je teško formirati, s obzirom da na ove neizvesnosti utiče veliki broj faktora. Ono što se najlakše uočava za sve modele jeste da su neizvesnosti najveće za najkraće nizove, odnosno za mali broj godina osmatranja. U tim slučajevima neizvesnosti su relativno velike i za veliki ukupan (ili prosečan godišnji) broj prekoračenja, što pokazuje da metodu parcijalnih serija ne treba zloupotrebljavati na kratkim nizovima (ovakva tendencija se može sresti i u radovima viđenijih autora). Takođe, za neizvesnosti u oceni kvantila i verovatnoće po svim modelima se može reći da se smanjuje sa povećanjem dužine nizova.

Na neizvesnosti modela parcijalnih serija koje uključuju dvoparametarske raspodele za visinu prekoračenja (opštu Pareto i Vejbulovu) najviše utiče vrednost parametra oblika te raspodele. Ovaj zaključak je logičan, s obzirom da i same ove raspodele mogu biti veoma različite u zavisnosti od parametra oblika (na primer, opšta Pareto raspodela je ograničena sa gornje strane za pozitivne vrednosti njenog parametra oblika, dok za negativne vrednosti nije ograničena). Poznavanje neizvesnosti u zavisnosti od vrednosti parametara raspodela tada može biti korisno u postupku izbora raspodele pri modeliranju nekog niza.

Neizvesnosti u oceni kvantila su različite za različite vrednosti zadate verovatnoće pojave ili povratnog perioda kvantila. U modelima sa eksponencijalnom raspodelom (P+E, B+E i NB+E), relativna srednja kvadratna greška se smanjuje sa povećanjem zadatog povratnog perioda; u modelima P+GP i P+W relativna srednja kvadratna greška je najmanja za povratne periode od oko 10 godina, za $T > 10$ godina postepeno raste sa povećanjem zadatog povratnog perioda, dok za $T < 10$ godina naglo raste za najmanje povratne periode.

Kada su u pitanju neizvesnosti u oceni verovatnoće pojave fiksiranog protoka, opšti zaključak je da su one veće što su protoci veći; preciznije rečeno, za protoke koji bi prema tačnoj raspodeli odgovarali povratnim periodima većim od broja godina osmatranja neizvesnosti postaju veoma velike. To ukazuje

da je ocena verovatnoće pojave ekstremnih protoka, na primer u kontekstu analize poplava koje su se desile, veoma nezahvalan zadatak.

Iako je cilj ovog rada bio da se sistematizuju i prošire znanja o neizvesnostima u analizi rizika od velikih voda primenom modela parcijalnih serija, to ne znači da u ovoj oblasti nema mesta za dalja istraživanja. Sa gledišta metodološkog pristupa, u ovom radu su ponuđeni izrazi za proračun neizvesnosti koji se zasnivaju na raspoloživim teorijskim postavkama uz određeni stepen aproksimacija. U daljim istraživanjima predloženi aproksimativni teorijski izrazi bi se mogli uporediti sa rezultatima odgovarajućih simulacija metodom Monte Karlo kako bi se uvedene aproksimacije potvrdile ili opovrgle. Dalja istraživanja takođe bi mogla da obuhvate i modele parcijalnih serija koji predstavljaju kombinacije raspodela broja i visine prekoračenja koje nisu obuhvaćene ovim radom.

Analiza velikih voda je samo jedan korak u hidrotehničkim i vodoprivrednim studijama i projektima koji se bave procenom rizika i šteta, planiranjem sistema i projektovanjem objekata i mera za zaštitu od poplava i drugih srodnih nepogoda kao što su erozija i klizišta. Ona treba da obezbedi neophodne merodavne veličine za projektovanje ili ocenu verovatnoće pojave kritičnih događaja. Stoga je jasno da projektovana rešenja u velikoj meri zavise od rezultata analize velikih voda. U analizi rizika od velikih voda neizvesnosti su uvek postojale i dalje će postojati. One se neminovno prenose i na dalje rezultate, kao što su dimenzije objekata ili procenjene štete. Ipak, u hidrološkoj i hidrotehničkoj praksi prevladuje tendencija da se postojanje neizvesnosti zanemaruje, i to tako što se ocene velikih voda smatraju kao izvesne (pa čak i kao deterministički podaci) ili tako što se sve neizvesnosti – one koje potiču od samog fizičkog procesa i one koje proističu iz njegovog modeliranja – kompenzuju npr. usvajanjem većeg projektnog povratnog perioda. Iako se neizvesnosti ne mogu izbeći, njihovo razmatranje je važno kako bi se omogućilo da se sagledaju ograničenja projektovanih objekata ili da se, uzimanjem neizvesnosti u obzir, postignu bolja tehnička rešenja i doprinese kvalitetnijem procesu odlučivanja o prihvatljivom riziku u zaštiti od velikih voda.

REFERENCE

- Ashkar, F. i Rousselle, J. (1981) Design discharge as a random variable: a risk study, *Water Resour. Res.*, 17(3): 577-591.
- Ashkar, F. i Rousselle, J. (1983a) Some remarks on the truncation used in partial flood series models, *Water Resour. Res.*, 19(2): 477-480.
- Ashkar, F. i Rousselle, J. (1983b) The effect of certain restrictions imposed on the interarrival times of flood events on the Poisson distribution used for modeling flood counts, *Water Resour. Res.*, 19(2): 481-485.
- Ashkar, F. i Rousselle, J. (1987) Partial duration series modeling under the assumption of a Poissonian flood count, *J. Hydrology*, 90: 135-144.
- Birikundavayi, S. i Rousselle, J. (1997) Use of partial duration series for single-station and regional analysis of floods, *J. Hydrol. Eng.*, 2(2): 68-75.
- Bobée, B. i Ashkar, F. (1991) *The gamma family and derived distributions applied in hydrology*, Water Resources Publications, Littleton, Colorado.
- Buishand, T.A. (1990) Bias and variance of quantile estimates from a partial duration series, *J. Hydrology*, 120: 35-49.
- Calenda, G., Petaccia, A. i Togna, A. (1977) Theoretical probability distribution of critical hydrologic events by the partial-duration series method, *J. Hydrology*, 33: 233-245.
- Chow, V.T. (1964) *Handbook of applied hydrology*, Sec. 8-I, McGraw-Hill, New York.
- Cox, D.R. i Miller, H.D. (1965) *The theory of stochastic processes*, Chapman and Hall, London.
- Cunnane, C. (1973) A particular comparison of annual maxima and partial duration series methods of flood frequency prediction, *J. Hydrology*, 18: 257-271.
- Cunnane, C. (1979) A note on the Poisson assumption in partial duration series models, *Water Resour. Res.*, 15(2): 489-494.
- Davison, A.C. i Smith, R.L. (1990) Models for exceedances over high thresholds, *J. Royal Stat. Soc. B*, 52(3): 393-442.
- Ekanayake, S.T. i Cruise, J.F. (1993) Comparisons of Weibull- and exponential-based partial duration stochastic flood models, *Stochastic Hydrol. Hydraul.*, 7: 283-297.
- Fitzgerald, D.L. (1989) Single station and regional analysis of daily rainfall extremes, *Stochastic Hydrol. and Hydr.*, 3: 281-292.
- Gradštajn, I.S. i Rižik, I.M. (Градштейн, И.Ц. и Рыжик, И.М.) (1971) *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва.
- Greenwood, J.A., Landwehr, J.M., Matalas, N.C. i Wallis, J.R. (1979) Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form, *Water Resour. Res.*, 15(5): 1049-1054.
- Heo, J.-H., Boes, D.C. i Salas, J.D. (2001) Regional flood frequency analysis based on a Weibull model: Part 1. Estimation and asymptotic variances, *J. Hydrology*, 242: 157-170.
- Hosking, J.R.M. (1990) L-moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics, *J. Royal Stat. Soc. B*, 52(1): 105-124.

- Hosking, J.R.M. i Wallis, J.R. (1987) Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution, *Technometrics*, 29(3): 339-349.
- Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. i Wood, E.F. (1985) Estimation of the generalized extreme-value distribution by the method of probability weighted moments, *Technometrics*, 27(3): 251-261.
- Jenkinson, A.F. (1955) The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) of meteorological elements, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 81: 158-171.
- Johnson, N.L., Kotz, S. i Balakrishnan, N. (1994) *Continuous univariate distributions Vol. 1*, John Wiley and Sons, New York, Ch. 20, p. 573.
- Kimball, B.F. (1949) An approximation to the sampling variances of an estimated maximum value of given frequency based on the fit of doubly exponential distribution of maximum values, *Ann. Math. Statist.*, 20: 110-113.
- Kite, G.W. (1977) *Frequency and risk analysis in hydrology*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.
- Landwehr, J.M., Matalas, N.C. i Wallis, J.R. (1979) Probability weighted moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel parameters and quantiles, *Water Resour. Res.*, 15(5): 1055-1064.
- Mahdi, S. i Ashkar, F. (2004) Exploring generalized probability weighted moments, generalized moments and maximum likelihood estimating methods in two-parameter Weibull model, *J. Hydrology*, 285: 62-75.
- Moharram, S.H., Gosain, A.K. i Kapoor, P.N. (1993) A comparative study for the estimators of the generalized Pareto distribution, *J. Hydrology*, 150: 169-185.
- Nachtnebel, H.P. i Konecny, F. (1987) Risk analysis and time-dependent flood models, *J. Hydrology*, 91: 295-318.
- North, M. (1980) Time-dependant stochastic model of floods, *J. Hydr. Div.*, 106(5): 649-665.
- Önöz, B. i Bayazit, M. (2001) Effect of the occurrence process of the peaks over threshold method on the flood estimates, *J. Hydrology*, 244: 86-96.
- Rasmussen, P.F. i Rosbjerg, D. (1989) Risk estimation in partial duration series, *Water Resour. Res.*, 25: 2319-2330.
- Rosbjerg, D. (1977) Return periods of hydrological events, *Nordic Hydrology*, 8: 57-61.
- Rosbjerg, D. (1985) Estimation in partial duration series with independent and dependent peak values, *J. Hydrology*, 76: 183-195.
- Rosbjerg, D. (1987) Partial duration series with log-normal distributed peak values, in: *Hydrologic Frequency Modelling* (ed. V.P. Singh), pp. 117-129.
- Rosbjerg, D., Madsen, H. i Rasmussen, P.F. (1992) Prediction in partial duration series with generalized Pareto-distributed exceedances, *Water Resour. Res.*, 28: 3001-3010.
- Taesombut, V. i Yevjevich, V. (1978) *Use of partial flood series for estimating distribution of maximum annual flood peak*, Hydrology Paper No. 97, Colorado State University, Fort Collins.
- Tavares, L.V. i Da Silva, J.E. (1983) Partial duration series method revisited, *J. Hydrology*, 64: 1-14.
- Todorović, P. (1970) On some problems involving random number of random variables, *Ann. Math. Stat.*, 41(3): 1059-1063.
- Todorović, P. (1975) A stochastic model of dispersion of sediment particles released from a continuous source, *Water Resour. Res.*, 11(6): 919-925.
- Todorovic, P. (1978) Stochastic model of floods, *Water Resour. Res.*, 14(2): 345-356.

- Todorovic, P. i Rousselle, J. (1971) Some problems of flood analysis, *Water Resour. Res.*, 7(5): 1144-1150.
- Todorović, P. i Yevjevich, V. (1969) *Stochastic processes of precipitation*, Hydrology Paper No. 35, Colorado State University, Fort Collins.
- Todorović, P. i Zelenhasić, E. (1970) A stochastic model for flood analysis, *Water Resour. Res.*, 6(6): 1641-1648.
- Van Montfort, M.A.J. i Otten, A. (1991) The first and the second e of the extreme value distribution EV1, *Stochastic Hydrol. Hydraul.*, 69-76.
- Van Montfort, M.A.J. i Witter, J.V. (1985) Testing exponentiality against generalized Pareto distribution, *J. Hydrology*, 78: 305-315.
- Van Montfort, M.A.J. i Witter, J.V. (1986) The generalized Pareto distribution applied to rainfall depths, *Hydrol. Sci. J.*, 31(2): 151-162.
- Vukmirović, V. (1990) *Analiza verovatnoće pojave hidroloških veličina*, Građevinski fakultet i Naučna knjiga, Beograd.
- Vukmirović, V. (1995) Analysis of maxima using renewal processes, "Méthodes statistiques et approches bayésiennes en hydrologie", međ. konf. u čast J. Berniera, UNESCO, Paris.
- Vukmirović, V. i Petrović, J. (1997) Flood flow analysis using renewal processes, UNESCO-IHP V *Tech. Documents in Hydrology* No. 11 (Annual FRIEND-AMHY meeting, Thessaloniki, 1995), 159-169.
- Wang, Q.J. (1991) The POT model described by the generalized Pareto distribution with Poisson arrival rate, *J. Hydrology*, 129: 263-280.
- Zelenhasić, E. (1970) *Theoretical probability distributions for flood peaks*, Hydrology Paper No. 42, Colorado State University, Fort Collins.
- Zucchini, W. i Adamson, P.T. (1989) Bootstrap confidence intervals for design storms from exceedance series, *J. Hydrol. Sci.*, 34(1): 41-48.



PRILOZI

TEŽINSKI MOMENTI I NJIHOVA SVOJSTVA ZA OPŠTU PARETO I VEJBULOVU RASPODELU

U ovom prilogu biće prikazani izrazi za težinske momente za dve teorijske raspodele koje su u ovom radu korišćene kao raspodele za visinu prekoračenja u modelima parcijalnih serija, opštu Pareto i Vejbulovu raspodelu. Pored toga, prikazani su i izrazi za ocenu parametara ovih raspodela preko empirijskih težinskih momenata, a izvedeni su i izrazi za svojstva empirijskih težinskih momenata (očekivanja, varijanse i kovarijanse).

Napominje se da su u ovom prilogu korišćene standardne oznake iz literature za težinske momente oblika M_{10r} i M_{1q0} , a to su oznake α_r i β_q , odnosno a_r i b_r za odgovarajuće empirijske momente. Kako bi se izbegle moguće zabune, u ovom prilogu su korišćene nešto drugačije oznake za parametre opšte Pareto i Vejbulove raspodele u odnosu na glavni tekst. Za parametre razmere ove dve raspodele korišćena je oznaka c , umesto oznake b za opštu Pareto raspodelu i umesto oznake β za Vejbulovu raspodelu.

A.1 Opšta Pareto raspodela

Funkcija raspodele i funkcija gustine opšte Pareto raspodele sa parametrima k i c glase:

$$F(x) = 1 - (1 - kx/c)^{1/k}, \quad f(x) = \frac{1}{c}(1 - kx/c)^{1/k-1}, \quad c > 0, \quad k \neq 0$$

Domen definisanosti ove funkcije raspodele zavisi od znaka parametra k ($x \geq 0$ za $k < 0$, a $0 \leq x \leq c/k$ za $k > 0$). U slučaju $k > 0$ težinski momenti α_r glase:

$$\begin{aligned} \alpha_r = M_{10r} &= \frac{1}{c} \int_0^{c/k} x(1 - kx/c)^{r/k-1/k-1} dx = \frac{c}{k^2} \int_0^1 y(1-y)^{(r+1)/k-1} dy = \\ &= \frac{c}{k^2} B[2, (r+1)/k] = \frac{c\Gamma(2)\Gamma[(r+1)/k]}{k^2\Gamma[(r+1)/k+2]} = \frac{c}{(r+1)(k+r+1)} \end{aligned}$$

U slučaju $k < 0$ granice integraljenja su drugačije, ali se uz odgovarajuću smenu dobija isti rezultat. Za momente β_q dobijaju se složeniji izrazi:

$$\beta_q = M_{1q0} = \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} (-1)^r M_{10r} = c \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} \frac{(-1)^r}{(r+1)(k+r+1)}$$

Tako su prva dva težinska momenta tipa α :

$$\alpha_0 = M_{100} = \frac{c}{k+1}, \quad \alpha_1 = M_{101} = \frac{c}{2(k+2)} \quad (\text{A1})$$

dok su prva dva težinska momenta tipa β :

$$\beta_0 = M_{100} = \frac{c}{k+1}, \quad \beta_1 = M_{110} = \frac{c(k+3)}{2(k+1)(k+2)} \quad (\text{A2})$$

Ocena parametara opšte Pareto raspodele. Ako se za ocenu parametara opšte Pareto raspodele koriste se težinski momenti α_r , odnosno empirijski momenti a_r , iz (A1) se dobija:

$$\hat{k}_\alpha = \frac{4a_1 - a_0}{a_0 - 2a_1} = \frac{2a_1}{a_0 - 2a_1} - 1, \quad \hat{c}_\alpha = \frac{2a_0 a_1}{a_0 - 2a_1} \quad (A3)$$

dok bi se korišćenjem momenata β_r , odnosno empirijskih momenata b_r , iz (A2) dobilo:

$$\hat{k}_\beta = \frac{4b_1 - 3b_0}{b_0 - 2b_1} = \frac{2(b_1 - b_0)}{b_0 - 2b_1} - 1, \quad \hat{c}_\beta = \frac{2b_0(b_1 - b_0)}{b_0 - 2b_1} \quad (A4)$$

S obzirom da je $a_0 = b_0$ i $a_1 = b_0 - b_1$, poređenjem (A3) i (A4) dobija se $\hat{k}_\alpha = \hat{k}_\beta$ i $\hat{c}_\alpha = \hat{c}_\beta$, što znači da izbor vrste težinskih momenata ne utiče na vrednosti parametara raspodele. Za opštu Pareto raspodelu u ovom radu korišćeni su težinski momenti tipa α_r , jer imaju jednostavnije izraze u odnosu na momente tipa β_r .

Svojstva empirijskih težinskih momenata za opštu Pareto raspodelu. Kao što je rečeno u odeljku II.3.2, empirijski težinski momenti a_r su nepristrasne ocene momenata α_r , pa je njihovo očekivanje za GP raspodelu jednako:

$$E[a_r] = \alpha_r = \frac{c}{(r+1)(k+r+1)}$$

Kovarijansna matrica empirijskih težinskih momenata a_r definisana je sa:

$$\text{cov}[a_r, a_s] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} (v_{rs} + v_{sr}) \quad (A5)$$

gde su

$$v_{rs} = A_{r,s+1} - A_{r+1,s+1} \quad (A6)$$

i

$$A_{rs} = 2 \iint_{x < y} [1 - F(x)]^r [1 - F(y)]^s dx dy \quad (A7)$$

što znači da je za određivanje varijansi i kovarijansi empirijskih težinskih momenata dovoljno odrediti integrale oblika A_{rs} . U slučaju $k > 0$, za integral A_{rs} imamo:

$$\begin{aligned} A_{rs} &= 2 \iint_{x < y} [1 - F(x)]^r [1 - F(y)]^s dx dy = 2 \int_{x=0}^{c/k} \int_{y=x}^{c/k} [1 - F(x)]^r [1 - F(y)]^s dx dy = \\ &= 2 \int_{F_x=0}^1 \int_{F_y=F_x}^1 [1 - F_x]^r [1 - F_y]^s \frac{dx}{dF_x} \frac{dy}{dF_y} dF_x dF_y \end{aligned}$$

dok je u slučaju $k < 0$:

$$A_{rs} = 2 \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=x}^{\infty} [1 - F(x)]^r [1 - F(y)]^s dx dy = 2 \int_{F_x=0}^1 \int_{F_y=F_x}^1 [1 - F_x]^r [1 - F_y]^s \frac{dx}{dF_x} \frac{dy}{dF_y} dF_x dF_y$$

Kao što se vidi, radi se o istim integralima. Kako je $x = c\{1 - [1 - F(x)]^k\}/k$ i $dx/dF = c(1 - F)^{k-1}$, onda integral A_{rs} glasi:

$$\begin{aligned} A_{rs} &= 2c^2 \int_{F_x=0}^1 (1 - F_x)^{r+k-1} \int_{F_y=F_x}^1 (1 - F_y)^{s+k-1} dF_y dF_x = 2c^2 \int_{F_x=0}^1 (1 - F_x)^{r+k-1} \frac{(1 - F_x)^{s+k}}{s+k} dF_x = \\ &= \frac{2c^2}{(s+k)(r+s+2k)} \end{aligned}$$

Tada su veličine v_{rs} iz izraza (A5) jednake:

$$v_{rs} = A_{r,s+1} - A_{r+1,s+1} = \frac{2c^2}{(s+1+k)(r+s+1+2k)} - \frac{2c^2}{(s+1+k)(r+s+2+2k)} =$$

$$= \frac{2c^2}{(s+1+k)(r+s+1+2k)(r+s+2+2k)}$$

Unošenjem gornjeg izraza u (A5) dobija se opšti izraz za elemente kovarijanske matrice empirijskih težinskih momenata GP raspodele:

$$\text{cov}[a_r, a_s] = \frac{1}{n} \cdot \frac{c^2}{(r+1+k)(s+1+k)(r+s+1+2k)}$$

Na osnovu gornjeg izraza slede izrazi za varijanse i kovarijansu prva dva empirijska težinska momenta GP raspodele:

$$\text{var}[a_0] = \frac{1}{n} \cdot \frac{c^2}{(k+1)^2(2k+1)}$$

$$\text{var}[a_1] = \frac{1}{n} \cdot \frac{c^2}{(k+2)^2(2k+3)}$$

$$\text{cov}[a_0, a_1] = \frac{1}{n} \cdot \frac{c^2}{2(k+1)^2(k+2)}$$

A.2 Vejbulova raspodela

Funkcija raspodele i funkcija gustine Vejbulove raspodele sa parametrima γ i c su:

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{c}\right)^\gamma\right\}, \quad f(x) = \frac{\gamma}{c} \left(\frac{x}{c}\right)^{\gamma-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{c}\right)^\gamma\right\}, \quad x \geq 0, \quad \gamma, c > 0$$

Tada su težinski momenti α_r :

$$\alpha_r = M_{10r} = \int_0^\infty x [1 - F(x)]^r f(x) dx = \int_0^\infty x \exp\left\{-(r+1)\left(\frac{x}{c}\right)^\gamma\right\} \cdot \frac{\gamma}{c} \left(\frac{x}{c}\right)^{\gamma-1} dx = \frac{c\Gamma(1/\gamma+1)}{(r+1)^{1/\gamma+1}}$$

dok su težinski momenti β_q :

$$\beta_q = M_{1q0} = \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} (-1)^r M_{10r} = c\Gamma(1/\gamma+1) \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} \frac{(-1)^r}{(r+1)^{1/\gamma+1}}$$

Tako su prva dva težinska momenta tipa α :

$$\alpha_0 = M_{100} = c\Gamma(1/\gamma+1), \quad \alpha_1 = M_{101} = \frac{c\Gamma(1/\gamma+1)}{2^{1/\gamma+1}} \quad (\text{A8})$$

a prva dva težinska momenta tipa β :

$$\beta_0 = M_{100} = c\Gamma(1/\gamma+1), \quad \beta_1 = M_{110} = c(1 - 2^{-1/\gamma-1})\Gamma(1/\gamma+1) \quad (\text{A9})$$

Ocena parametara Vejbulove raspodele. Ako se za ocenu parametara Vejbulove raspodele koriste se težinski momenti α_r , odnosno empirijski momenti a_r , iz (A8) se dobija:

$$\hat{\gamma}_\alpha = \frac{\ln 2}{\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2}, \quad \hat{c}_\alpha = \frac{a_0}{\Gamma(1/\hat{\gamma}_\alpha + 1)}$$

dok bi se korišćenjem momenata β_r , odnosno empirijskih momenata b_r , dobilo na osnovu (A9):

$$\hat{\gamma}_\beta = \frac{\ln 2}{\ln b_0 - \ln(b_0 - b_1) - \ln 2}, \quad \hat{c}_\beta = \frac{b_0}{\Gamma(1/\hat{\gamma}_\beta + 1)}$$

S obzirom da je $a_0 = b_0$ i $a_1 = b_0 - b_1$, očigledno je $\hat{\gamma}_\alpha = \hat{\gamma}_\beta$ i $\hat{c}_\alpha = \hat{c}_\beta$, pa se vidi da izbor vrste težinskih momenata ne utiče na vrednosti parametara. I za Vejbulovu, kao i za opštu Pareto raspodelu, u ovom radu su korišćeni težinski momenti tipa α_r , jer imaju jednostavnije izraze u odnosu na momente tipa β_r .

Svojstva empirijskih težinskih momenata za Vejbulovu raspodelu. Empirijski težinski momenti a_r su nepristrasne ocene momenata α_r :

$$E[a_r] = \alpha_r = \frac{c\Gamma(1/\gamma + 1)}{(r + 1)^{1/\gamma + 1}}$$

Za određivanje elemenata kovarijanske matrice empirijskih težinskih momenata Vejbulove raspodele potrebno je odrediti integral oblika (A7), koji za ovu raspodelu glasi:

$$A_{rs} = 2 \int_{x=0}^{\infty} \exp\{-r(x/c)^\gamma\} \int_{y=x}^{\infty} \exp\{-s(y/c)^\gamma\} dx dy$$

Uz smene $u = r(x/c)^\gamma$ i $v = s(y/c)^\gamma$, gornji integral postaje:

$$A_{rs} = 2 \int_{u=0}^{\infty} \frac{c}{\gamma r^{1/\gamma}} u^{1/\gamma - 1} e^{-u} \int_{v=su/r}^{\infty} \frac{c}{\gamma s^{1/\gamma}} v^{1/\gamma - 1} e^{-v} dv du = \frac{2c^2}{\gamma^2 (rs)^{1/\gamma}} \int_{u=0}^{\infty} u^{1/\gamma - 1} e^{-u} Q(1/\gamma, su/r) du \quad (A10)$$

gde je $Q(\cdot)$ oznaka za nepotpunu gama funkciju. Prema Gradštajnu i Rižiku (1971), za intergal oblika kao u (A10) važi:

$$\int_0^{\infty} x^{A-1} e^{-Bx} Q(C, Dx) dx = \frac{D^C \Gamma(A+C)}{A(B+D)^{A+C}} \cdot {}_2F_1\left(1, A+C; A+1; \frac{B}{B+D}\right)$$

gde je ${}_2F_1(\cdot)$ oznaka za hipergeometrijsku funkciju. Na taj način se za A_{rs} dobija:

$$A_{rs} = \frac{c^2 \Gamma(2/\gamma + 1)}{(r+s)^{2/\gamma}} \cdot {}_2F_1\left(1, 2/\gamma; 1/\gamma + 1; \frac{r}{r+s}\right)$$

Hipergeometrijska funkcija ${}_2F_1(A, B; C; z)$ se predstavlja (i računa) preko hipergeometrijskog reda:

$${}_2F_1(A, B; C; z) = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(A)\Gamma(B)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(A+k)\Gamma(B+k)}{\Gamma(C+k)} \cdot \frac{z^k}{k!}$$

koji konvergira kada je $|z| \leq 1$. Za dalje proračune korisna su sledeća svojstva i transformacije hipergeometrijske funkcije (Gradštajn i Rižik, 1971):

$${}_2F_1(A, B; C; 0) = 1$$

$${}_2F_1(A, B; C; 1) = \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)}$$

$${}_2F_1(A, B; C; z) = (1-z)^{-B} {}_2F_1(B, C-A; C; z/(z-1)) \quad (A11)$$

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(A, B; C; z) &= \frac{\Gamma(C)\Gamma(B-A)}{\Gamma(B)\Gamma(C-A)} (-1/z)^A {}_2F_1(A, A+1-C; A+1-B; 1/z) + \\
&+ \frac{\Gamma(C)\Gamma(A-B)}{\Gamma(A)\Gamma(C-B)} (-1/z)^B {}_2F_1(B, B+1-C; B+1-A; 1/z)
\end{aligned} \tag{A12}$$

$${}_2F_1(1, 2B; B+1; 1/2) = {}_2F_1(1/2, B; B+1; 1) = \frac{\Gamma(B+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(B+1/2)} = 2^{2B} \frac{\Gamma^2(B+1)}{\Gamma(2B+1)} \tag{A13}$$

U slučaju $r = s$, koristeći (A13), dobijamo:

$$A_{rr} = \frac{c^2 \Gamma(2/\gamma + 1)}{2^{2/\gamma} r^{2/\gamma}} \cdot {}_2F_1(1, 2/\gamma; 1/\gamma + 1; 1/2) = \frac{c^2 \Gamma^2(1/\gamma + 1)}{r^{2/\gamma}}$$

Za $r < s$ koristi se transformacija (A11), pa se dobija:

$$A_{rs} = \frac{c^2 \Gamma(2/\gamma + 1)}{s^{2/\gamma}} {}_2F_1(2/\gamma, 1/\gamma; 1/\gamma + 1; -r/s)$$

Za $r > s$ na gornji izraz se primenjuje transformacija (A12), pa se dobija

$$A_{rs} = \frac{2c^2 \Gamma^2(1/\gamma + 1)}{(rs)^{1/\gamma}} \frac{c^2 \Gamma(2/\gamma + 1)}{r^{2/\gamma}} {}_2F_1(2/\gamma, 1/\gamma; 1/\gamma + 1; -s/r)$$

Zamenom odgovarajućih integrala A_{rs} u (A6), dobijaju se sledeći izrazi:

$$v_{00} = c^2 \Gamma(2/\gamma + 1) - c^2 \Gamma^2(1/\gamma + 1) = c^2 [\Gamma(2/\gamma + 1) - \Gamma^2(1/\gamma + 1)]$$

$$v_{01} = \frac{c^2 \Gamma(2/\gamma + 1)}{2^{2/\gamma}} [1 - {}_2F_1(2/\gamma, 1/\gamma; 1/\gamma + 1; -1/2)]$$

$$v_{10} = \frac{c^2}{2^{2/\gamma}} [(2^{2/\gamma} - 2^{1/\gamma+1}) \Gamma^2(1/\gamma + 1) + \Gamma(2/\gamma + 1) {}_2F_1(2/\gamma, 1/\gamma; 1/\gamma + 1; -1/2)]$$

$$v_{11} = \frac{c^2}{2^{2/\gamma}} [\Gamma(2/\gamma + 1) {}_2F_1(2/\gamma, 1/\gamma; 1/\gamma + 1; -1/2) - \Gamma^2(1/\gamma + 1)]$$

Unošenjem gornjih izraza u (A5) konačno se dobija:

$$\text{var}[a_0] = \frac{1}{n} \cdot c^2 [\Gamma(2/\gamma + 1) - \Gamma^2(1/\gamma + 1)]$$

$$\text{var}[a_1] = \frac{1}{n} \cdot \frac{c^2}{2^{2/\gamma}} [\Gamma(2/\gamma + 1) {}_2F_1(2/\gamma, 1/\gamma; 1/\gamma + 1; -1/2) - \Gamma^2(1/\gamma + 1)]$$

$$\text{cov}[a_0, a_1] = \frac{1}{n} \cdot \frac{c^2}{2^{2/\gamma+1}} [\Gamma(2/\gamma + 1) + 2^{1/\gamma} (2^{1/\gamma} - 2) \Gamma^2(1/\gamma + 1)]$$

OČEKIVANJA, VARIJANSE I KOVARIJANSE OCENA PARAMETARA RASPODELA

B.1 Očekivanja, varijanse i kovarijanse funkcija slučajnih promenljivih

Za određivanje svojstava (očekivanja, varijansi i kovarijansi) složenijih funkcija od više slučajnih promenljivih koristi se razvoj tih funkcija u Tejlorov red. Ako je $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_r)$ funkcija od r slučajnih promenljivih, ona se može razviti u Tejlorov red u okolini tačke čije su koordinate očekivanja slučajnih promenljivih $\mu_i = EX_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Tako za slučaj funkcije dve promenljive:

$$Y = g(X_1, X_2) \quad (B1)$$

razvoj u Tejlorov red u okolini tačke (μ_1, μ_2) , uz zanemarivanje izvoda višeg reda od drugog, glasi:

$$\begin{aligned} g(X_1, X_2) \approx & g(\mu_1, \mu_2) + (X_1 - \mu_1) \left. \frac{\partial g}{\partial X_1} \right|_{\mu} + (X_2 - \mu_2) \left. \frac{\partial g}{\partial X_2} \right|_{\mu} + \\ & + \frac{1}{2} (X_1 - \mu_1)^2 \left. \frac{\partial^2 g}{\partial X_1^2} \right|_{\mu} + \frac{1}{2} (X_2 - \mu_2)^2 \left. \frac{\partial^2 g}{\partial X_2^2} \right|_{\mu} + (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) \left. \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_2} \right|_{\mu} \end{aligned} \quad (B2)$$

gde se oznaka $|_{\mu}$ odnosi na vrednost parcijalnih izvoda u tački (μ_1, μ_2) . Primenom operatora očekivanja na gornji izraz dobija se:

$$E[g(X_1, X_2)] \approx g(\mu_1, \mu_2) + \frac{1}{2} \text{var}[X_1] \left. \frac{\partial^2 g}{\partial X_1^2} \right|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[X_2] \left. \frac{\partial^2 g}{\partial X_2^2} \right|_{\mu} + \text{cov}[X_1, X_2] \left. \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_2} \right|_{\mu} \quad (B3)$$

Za varijansu funkcije (B1) važi:

$$\text{var}[g(X_1, X_2)] = E[\{g(X_1, X_2) - E[g(X_1, X_2)]\}^2]$$

pa se oduzimanjem (B3) od (B2), kvadriranjem i primenom operatora očekivanja dobija:

$$\text{var}[g(X_1, X_2)] \approx \text{var}[X_1] \left. \left(\frac{\partial g}{\partial X_1} \right)^2 \right|_{\mu} + \text{var}[X_2] \left. \left(\frac{\partial g}{\partial X_2} \right)^2 \right|_{\mu} + 2 \text{cov}[X_1, X_2] \left. \left(\frac{\partial g}{\partial X_1} \frac{\partial g}{\partial X_2} \right) \right|_{\mu} \quad (B4)$$

Kovarijansa dve funkcije od dve slučajne promenljive je:

$$\text{cov}[g(X_1, X_2), h(X_1, X_2)] = E[\{g(X_1, X_2) - E[g(X_1, X_2)]\} \{h(X_1, X_2) - E[h(X_1, X_2)]\}]$$

pa se na sličan način dobija:

$$\begin{aligned} \text{cov}[g(X_1, X_2), h(X_1, X_2)] \approx \\ \approx \text{var}[X_1] \left. \left(\frac{\partial g}{\partial X_1} \frac{\partial h}{\partial X_1} \right) \right|_{\mu} + \text{var}[X_2] \left. \left(\frac{\partial g}{\partial X_2} \frac{\partial h}{\partial X_2} \right) \right|_{\mu} + \text{cov}[X_1, X_2] \left. \left(\frac{\partial g}{\partial X_1} \frac{\partial h}{\partial X_2} + \frac{\partial h}{\partial X_1} \frac{\partial g}{\partial X_2} \right) \right|_{\mu} \end{aligned} \quad (B5)$$

U opštem slučaju složene funkcije od r slučajnih promenljivih:

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_r)$$

njeno očekivanje i varijansa se mogu prikazati u sledećem obliku:

$$E[Y] \approx g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \text{var}[X_i] \frac{\partial^2 g}{\partial X_i^2} \Big|_{\mu} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^r \text{cov}[X_i, X_j] \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \Big|_{\mu}$$

$$\text{var}[Y] \approx \sum_{i=1}^r \text{var}[X_i] \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \Big|_{\mu} + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^r \text{cov}[X_i, X_j] \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial X_j} \Big|_{\mu}$$

Kovarijansa dve funkcije od r slučajnih promenljivih, $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_r)$ i $Z = h(X_1, X_2, \dots, X_r)$, jednaka je:

$$\text{cov}[Y, Z] \approx \sum_{i=1}^r \text{var}[X_i] \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial h}{\partial X_i} \Big|_{\mu} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^r \text{cov}[X_i, X_j] \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial h}{\partial X_j} + \frac{\partial h}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial X_j} \right) \Big|_{\mu}$$

B.2 Očekivanja, varijanse i kovarijanse ocena parametara binomne i negativne binomne raspodele

Parametri Λ i b binomne raspodele ocenjuju se kao:

$$\hat{\Lambda} = \bar{\eta} \quad (B6)$$

$$\hat{b} = \frac{\bar{\eta}^2}{\bar{\eta} - S_{\eta}^2} \quad (B7)$$

gde je $\bar{\eta}$ srednja vrednost, a S_{η}^2 disperzija broja prekoračenja u godini dana. S druge strane, parametri Λ i a negativne binomne raspodele ocenjuju se kao:

$$\hat{\Lambda} = \bar{\eta}$$

$$\hat{a} = \frac{\bar{\eta}^2}{S_{\eta}^2 - \bar{\eta}}$$

odakle se vidi da se negativna binomna raspodela sa parametrima Λ i a može posmatrati i kao binomna raspodela sa parametrima Λ i $-b$. Odnos $a = -b$ važi i za verovatnoće ovih raspodela jer je:

$$\begin{aligned} P_{NB} \{ \eta(t) = n \} &= \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} \left[\frac{a}{a+\Lambda(t)} \right]^a \left[1 - \frac{a}{a+\Lambda(t)} \right]^n = \\ &= \frac{\Gamma(-b+n)}{n! \Gamma(-b)} \left[\frac{b}{b-\Lambda(t)} \right]^{-b} \left[1 - \frac{b}{b-\Lambda(t)} \right]^n = \\ &= \frac{1}{n!} (-b)(-b+1) \dots (-b+n-1) [b-\Lambda(t)]^{b-n} b^{-b} [-\Lambda(t)]^n = \\ &= \frac{1}{n!} b(b-1) \dots (b-n+1) (-1)^n \left[1 - \frac{\Lambda(t)}{b} \right]^{b-n} \left[-\frac{\Lambda(t)}{b} \right]^n = \\ &= \frac{\Gamma(b-n+1)}{n! \Gamma(b)} \left[1 - \frac{\Lambda(t)}{b} \right]^{b-n} \left[\frac{\Lambda(t)}{b} \right]^n = P_B \{ \eta(t) = n \} \end{aligned}$$

Zbog toga je za određivanje svojstava ocena parametara ove dve raspodele dovoljno da se razmatra samo jedna od ove dve raspodele. U nastavku će biti prikazani rezultati za binomnu raspodelu.

Prva četiri momenta binomne raspodele glase:

$$\mu = \Lambda$$

$$\mu_2 = \Lambda \left(1 - \frac{\Lambda}{b} \right)$$

$$\mu_3 = \Lambda \left(1 - \frac{\Lambda}{b} \right) \left(1 - 2 \frac{\Lambda}{b} \right)$$

$$\mu_4 = \Lambda \left(1 - \frac{\Lambda}{b} \right) \left[1 + 3(b-2) \frac{\Lambda}{b} \left(1 - \frac{\Lambda}{b} \right) \right]$$

Za ocenu parametra Λ odmah sledi:

$$E[\hat{\Lambda}] = E[\bar{\eta}] = \mu = \Lambda$$

$$\text{var}[\hat{\Lambda}] = \text{var}[\bar{\eta}] = \frac{\mu_2}{N} = \frac{1}{N} \Lambda \left(1 - \frac{\Lambda}{b} \right)$$

odakle se vidi da je $\hat{\Lambda} = \bar{\eta}$ nepristrasna ocena parametra Λ . Za određivanje svojstava ocena parametra b primenjuje se postupak razvoja u Tejlorov red i izrazi (B3), (B4) i (B5). Očekivanja i varijansa uzoračke disperzije broja prekoračenja, kao i kovarijansa sa srednjom vrednošću, su funkcije momenata binomne raspodele:

$$E[S_{\eta}^2] = \mu_2 = \Lambda(1 - \Lambda/b)$$

$$\text{var}[S_{\eta}^2] \approx \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{N} = \frac{1}{N} \Lambda \left(1 - \frac{\Lambda}{b}\right) \left[1 + 2(b-3) \frac{\Lambda}{b} \left(1 - \frac{\Lambda}{b}\right)\right]$$

$$\text{cov}[\bar{\eta}, S_{\eta}^2] = \frac{\mu_3}{N} = \frac{1}{N} \Lambda \left(1 - \frac{\Lambda}{b}\right) \left(1 - 2 \frac{\Lambda}{b}\right)$$

Diferenciranjem jednačine (B7) po $\bar{\eta}$ i S_{η}^2 dobija se:

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\bar{\eta}(\bar{\eta} - 2S_{\eta}^2)}{(\bar{\eta} - S_{\eta}^2)^2}, \quad \frac{\partial \hat{b}}{\partial S_{\eta}^2} = \frac{\bar{\eta}^2}{(\bar{\eta} - S_{\eta}^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial \bar{\eta}^2} = \frac{2S_{\eta}^4}{(\bar{\eta} - S_{\eta}^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial (S_{\eta}^2)^2} = \frac{2\bar{\eta}^2}{(\bar{\eta} - S_{\eta}^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial \bar{\eta} \partial S_{\eta}^2} = -\frac{2\bar{\eta}S_{\eta}^2}{(\bar{\eta} - S_{\eta}^2)^3}$$

Ovi parcijalni izvodi u tački $(E[\bar{\eta}], E[S_{\eta}^2])$ su jednaki:

$$\left. \frac{\partial \hat{b}}{\partial \bar{\eta}} \right|_{\mu} = -\frac{b(b-2\Lambda)}{\Lambda^2}, \quad \left. \frac{\partial \hat{b}}{\partial S_{\eta}^2} \right|_{\mu} = \frac{b^2}{\Lambda^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial \bar{\eta}^2} \right|_{\mu} = \frac{2b(b-\Lambda)^2}{\Lambda^4}, \quad \left. \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial (S_{\eta}^2)^2} \right|_{\mu} = \frac{2b^3}{\Lambda^4}, \quad \left. \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial \bar{\eta} \partial S_{\eta}^2} \right|_{\mu} = -\frac{2b^2(b-\Lambda)}{\Lambda^4}$$

Takođe, ocene parametara u tački $(E[\bar{\eta}], E[S_{\eta}^2])$ su jednake:

$$\left. \hat{\Lambda} \right|_{\mu} = \Lambda$$

$$\left. \hat{b} \right|_{\mu} = \frac{\bar{\eta}^2}{\bar{\eta} - S_{\eta}^2} \Big|_{\mu} = \frac{\Lambda^2}{\Lambda - \Lambda(1 - \Lambda/b)} = b$$

Unošenjem varijansi i kovarijanse uzoračke srednje vrednosti i disperzije u izraze (B3) i (B4), slede izrazi za očekivanje i varijansu ocene \hat{b} :

$$E[\hat{b}] = \left. \hat{b} \right|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[\bar{\eta}] \left. \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial \bar{\eta}^2} \right|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[S_{\eta}^2] \left. \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial (S_{\eta}^2)^2} \right|_{\mu} + \text{cov}[\bar{\eta}, S_{\eta}^2] \left. \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial \bar{\eta} \partial S_{\eta}^2} \right|_{\mu} =$$

$$= b + \frac{1}{N} \frac{(b-\Lambda)}{\Lambda^2} [\Lambda + 2(b-1)(b-\Lambda)]$$

$$\text{var}[\hat{b}] = \text{var}[\bar{\eta}] \left. \left(\frac{\partial \hat{b}}{\partial \bar{\eta}} \right)^2 \right|_{\mu} + \text{var}[S_{\eta}^2] \left. \left(\frac{\partial \hat{b}}{\partial S_{\eta}^2} \right)^2 \right|_{\mu} + 2 \text{cov}[\bar{\eta}, S_{\eta}^2] \left. \left(\frac{\partial \hat{b}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \hat{b}}{\partial S_{\eta}^2} \right) \right|_{\mu} =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{2b(b-1)(b-\Lambda)^2}{\Lambda^2}$$

Kovarijansa ocena $\hat{\Lambda}$ i \hat{b} jednaka je nuli:

$$\begin{aligned}
\text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{b}] &= \text{cov}[\bar{\eta}, \hat{b}] = \\
&= \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \hat{b}}{\partial \bar{\eta}} \bigg|_{\mu} \text{var}[\bar{\eta}] + \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial S_n^2} \frac{\partial \hat{b}}{\partial S_n^2} \bigg|_{\mu} \text{var}[S_n^2] + \left[\frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \hat{b}}{\partial S_n^2} + \frac{\partial \hat{b}}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial S_n^2} \bigg|_{\mu} \right] \text{cov}[\bar{\eta}, S_n^2] = \\
&= \frac{\partial \hat{b}}{\partial \bar{\eta}} \bigg|_{\mu} \text{var}[\bar{\eta}] + \frac{\partial \hat{b}}{\partial S_n^2} \bigg|_{\mu} \text{cov}[\bar{\eta}, S_n^2] = \\
&= -\frac{b(b-2\Lambda)}{\Lambda^2} \cdot \frac{1}{N} \Lambda(1-\Lambda/b) + \frac{b^2}{\Lambda^2} \cdot \frac{1}{N} \Lambda(1-\Lambda/b)(1-2\Lambda/b) = 0
\end{aligned}$$

Na osnovu prethodnih rezultata, slede i svojstva ocena parametara negativne binomne raspodele:

$$E[\hat{\Lambda}] = E[\bar{\eta}] = \Lambda$$

$$\text{var}[\hat{\Lambda}] = \text{var}[\bar{\eta}] = \frac{1}{N} \Lambda(1-\Lambda/b) = \frac{1}{N} \Lambda(1+\Lambda/a)$$

$$E[\hat{a}] = E[-\hat{b}] = -\hat{b} - \frac{1}{N} \frac{(b-\Lambda)}{\Lambda^2} \{2(b-1)(b-\Lambda) + \Lambda\} = a + \frac{1}{N} \frac{(a+\Lambda)}{\Lambda^2} \{2(a+1)(a+\Lambda) + \Lambda\}$$

$$\text{var}[\hat{a}] = \text{var}[-\hat{b}] = \text{var}[\hat{b}] = \frac{1}{N} \frac{2b(b-1)(b-\Lambda)^2}{\Lambda^2} = \frac{1}{N} \frac{2a(a+1)(a+\Lambda)^2}{\Lambda^2}$$

$$\text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{a}] = \text{cov}[\hat{\Lambda}, -\hat{b}] = -\text{cov}[\hat{\Lambda}, \hat{b}] = 0$$

B.3 Očekivanja, varijanse i kovarijanse ocena parametara Weibulove raspodele dobijenih metodom momenata

Metodom momenata ocena parametra γ dvoparametarske Weibulove raspodele predstavlja rešenje jednačine:

$$g(\hat{\gamma}) = \frac{\Gamma(2/\hat{\gamma} + 1)}{\Gamma^2(1/\hat{\gamma} + 1)} - 1 = \frac{S^2}{\bar{z}^2} \quad (\text{B8})$$

dok je ocena parametra β :

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{z}}{\Gamma(1/\hat{\gamma} + 1)} \quad (\text{B9})$$

Ocene $\hat{\gamma}$ i $\hat{\beta}$ su funkcije srednje vrednosti \bar{z} i disperzije S^2 prekoračenja:

$$\hat{\gamma} = h_1(\bar{z}, S^2) = g^{-1}(S^2 / \bar{z}^2) \quad (\text{B10})$$

$$\hat{\beta} = h_2(\bar{z}, S^2) \quad (\text{B11})$$

Da bi se odredila očekivanja, varijanse i kovarijansa ocena $\hat{\gamma}$ i $\hat{\beta}$, može se primeniti razvoj funkcija h_1 i h_2 u Tejlorov red i izrazi (B3), (B4) i (B5):

$$\begin{aligned} E[\hat{\gamma}] &= \hat{\gamma}|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[\bar{z}] \left. \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}^2} \right|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[S^2] \left. \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial (S^2)^2} \right|_{\mu} + \text{cov}[\bar{z}, S^2] \left. \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial \bar{z} \partial S^2} \right|_{\mu} \\ E[\hat{\beta}] &= \hat{\beta}|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[\bar{z}] \left. \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial \bar{z}^2} \right|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[S^2] \left. \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial (S^2)^2} \right|_{\mu} + \text{cov}[\bar{z}, S^2] \left. \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial \bar{z} \partial S^2} \right|_{\mu} \\ \text{var}[\hat{\gamma}] &= \text{var}[\bar{z}] \left(\left. \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} \right|_{\mu} \right)^2 + \text{var}[S^2] \left(\left. \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} \right|_{\mu} \right)^2 + 2 \text{cov}[\bar{z}, S^2] \left(\left. \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} \right) \right|_{\mu} \\ \text{var}[\hat{\beta}] &= \text{var}[\bar{z}] \left(\left. \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \bar{z}} \right|_{\mu} \right)^2 + \text{var}[S^2] \left(\left. \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial S^2} \right|_{\mu} \right)^2 + 2 \text{cov}[\bar{z}, S^2] \left(\left. \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial S^2} \right) \right|_{\mu} \\ \text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}] &= \text{var}[\bar{z}] \left(\left. \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \bar{z}} \right) \right|_{\mu} + \text{var}[S^2] \left(\left. \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial S^2} \right) \right|_{\mu} + \text{cov}[\bar{z}, S^2] \left(\left. \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial S^2} + \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \bar{z}} \right) \right|_{\mu} \end{aligned} \quad (\text{B12})$$

Očekivanja uzoračke srednje vrednosti i disperzije su:

$$E[\bar{z}] = \mu = \beta \Gamma_1, \quad E[S^2] = \mu_2 = \beta^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2) \quad (\text{B13})$$

dok su njihove varijanse i kovarijansa:

$$\begin{aligned} \text{var}[\bar{z}] &= \frac{1}{M} \mu_2 = \frac{1}{M} \beta^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2) \\ \text{cov}[\bar{z}, S^2] &= \frac{1}{M} \mu_3 = \frac{1}{M} \beta^3 (\Gamma_3 - 3\Gamma_2 \Gamma_1 + 2\Gamma_1^3) \\ \text{var}[S^2] &\approx \frac{1}{M} (\mu_4 - \mu_2^2) = \frac{1}{M} \beta^4 (\Gamma_4 - 4\Gamma_3 \Gamma_1 + 8\Gamma_2 \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 - 4\Gamma_1^4) \end{aligned} \quad (\text{B14})$$

gde su $\Gamma_k = \Gamma(k/\gamma + 1)$, a M je ukupan broj prekoračenja. Da bi se odredili parcijalni izvodi funkcija (B10) i (B11), neophodni su nam izvodi gama funkcija koje figurišu u (B8) i (B9) i funkcije $g(\hat{\gamma})$. Ako uvedemo oznake za gama funkcije:

$$\Gamma(k/\hat{\gamma} + 1) = \Gamma_k(\hat{\gamma}) = \hat{\Gamma}_k, \quad k=1,2$$

za parcijalne izvode gama funkcija imamo:

$$\frac{\partial \hat{\Gamma}_k}{\partial \hat{\gamma}} = -\frac{k}{\hat{\gamma}^2} \hat{\Gamma}_k \hat{\Psi}_k, \quad \frac{\partial^2 \hat{\Gamma}_k}{\partial \hat{\gamma}^2} = \frac{k}{\hat{\gamma}^4} \hat{\Gamma}_k [k\hat{\Psi}_k^2 + 2\hat{\gamma}\hat{\Psi}'_k + k\hat{\Psi}''_k], \quad k=1,2 \quad (\text{B15})$$

gde su $\hat{\Psi}_k$ digama funkcije, a $\hat{\Psi}'_k$ trigama funkcije, od odgovarajućih argumenata:

$$\Psi(k/\hat{\gamma} + 1) = \Psi_k(\hat{\gamma}) = \hat{\Psi}_k$$

$$\Psi'(k/\hat{\gamma} + 1) = \Psi'_k(\hat{\gamma}) = \hat{\Psi}'_k, \quad k=1,2$$

Tada su prvi i drugi izvod funkcije $g(\hat{\gamma})$:

$$g' = \frac{\partial g}{\partial \hat{\gamma}} = -\frac{2\hat{\Gamma}_2}{\hat{\gamma}^2 \hat{\Gamma}_1^2} (\hat{\Psi}_2 - \hat{\Psi}_1) \quad (\text{B16})$$

$$g'' = \frac{\partial^2 g}{\partial \hat{\gamma}^2} = \frac{2\hat{\Gamma}_2}{\hat{\gamma}^4 \hat{\Gamma}_1^2} \left[2(\hat{\Psi}_2 - \hat{\Psi}_1)(\hat{\Psi}_2 - \hat{\Psi}_1 + \hat{\gamma}) + 2\hat{\Psi}'_2 - \hat{\Psi}'_1 \right]$$

Kako se funkcije (B10) i (B11) i njihovi parcijalni izvodi u razvoju u Tejlorov red određuju u tački ($E[\bar{z}], E[S^2]$), koristeći (B13) sledi da je ocena $\hat{\gamma}$ u ovoj tački jednaka parametru γ :

$$\hat{\gamma}|_{\mu} = g^{-1} \left(\frac{S^2}{\bar{x}^2} \right) \Big|_{\mu} = g^{-1} \left(\frac{\beta^2 [\Gamma(2/\gamma + 1) - \Gamma^2(1/\gamma + 1)]}{\beta^2 \Gamma^2(1/\gamma + 1)} \right) = g^{-1} \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1 \right) = g^{-1}[g(\gamma)] = \gamma \quad (\text{B17})$$

pa za gama, digama i trigama funkcije važi:

$$\hat{\Gamma}_k \Big|_{\mu} = \Gamma(k/\hat{\gamma} + 1) \Big|_{\mu} = \Gamma(k/\gamma + 1) = \Gamma_k$$

$$\hat{\Psi}_k \Big|_{\mu} = \Psi(k/\hat{\gamma} + 1) \Big|_{\mu} = \Psi(k/\gamma + 1) = \Psi_k \quad (\text{B18})$$

$$\hat{\Psi}'_k \Big|_{\mu} = \Psi'(k/\hat{\gamma} + 1) \Big|_{\mu} = \Psi'(k/\gamma + 1) = \Psi'_k, \quad k=1,2$$

Takođe, ocena $\hat{\beta}$ u tački ($E[\bar{z}], E[S^2]$) jednaka je parametru β :

$$\hat{\beta}|_{\mu} = \frac{\bar{z}}{\Gamma(1/\hat{\gamma} + 1)} \Big|_{\mu} = \frac{\beta \Gamma_1}{\Gamma_1} = \beta \quad (\text{B19})$$

Parcijalni izvodi ocene $\hat{\gamma}$. Diferenciranjem jednačine (B8) po \bar{z} dobija se:

$$\frac{\partial g}{\partial \hat{\gamma}} \cdot \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} = -\frac{2S^2}{\bar{z}^3}$$

pa, uz oznaku $g' = \partial g / \partial \hat{\gamma}$, sledi:

$$\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} = -\frac{2S^2}{\bar{z}^3 g'} \quad (\text{B20})$$

Analogno, diferenciranjem jednačine (B8) po S^2 , dobija se:

$$\frac{\partial g}{\partial \hat{\gamma}} \cdot \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} = \frac{1}{\bar{z}^2}$$

odnosno:

$$\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} = \frac{1}{\bar{z}^2 g'} \quad (\text{B21})$$

Izvodi drugog reda dobijaju se diferenciranjem jednačina (B20) i (B21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}^2} &= \frac{2S^2}{\bar{z}^6 g'^2} \left[3\bar{z}^2 g' + \bar{z}^3 g'' \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} \right] = \frac{2S^2}{\bar{z}^6 g'^3} \left[3\bar{z}^2 g'^2 - 2S^2 g'' \right] \\ \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial \bar{z} \partial (S^2)} &= -\frac{2}{\bar{z}^3 g'^2} \left[g' - S^2 g'' \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} \right] = -\frac{2}{\bar{z}^5 g'^3} \left[\bar{z}^2 g'^2 - S^2 g'' \right] \\ \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial (S^2)^2} &= -\frac{g''}{\bar{z}^2 g'^2} \cdot \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} = -\frac{g''}{\bar{z}^4 g'^3} \end{aligned} \quad (\text{B22})$$

gde je $g'' = \partial^2 g / \partial \hat{\gamma}^2$. Kako je, prema (B16–B18):

$$\begin{aligned} g'|_{\mu} &= -\frac{2\Gamma_2}{\gamma^2 \Gamma_1^2} (\Psi_2 - \Psi_1) \\ g''|_{\mu} &= \frac{2\Gamma_2}{\gamma^4 \Gamma_1^2} \left[2(\Psi_2 - \Psi_1)(\Psi_2 - \Psi_1 + \gamma) + 2\Psi'_2 - \Psi'_1 \right] \end{aligned}$$

zamenjujući gornje izraze i (B13) u (B20–B22) dobijamo:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} \right|_{\mu} &= \frac{\gamma^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)}{\beta \Gamma_1 \Gamma_2 H_1} \\ \left. \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} \right|_{\mu} &= -\frac{\gamma^2}{2\beta^2 \Gamma_2 H_1} \\ \left. \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}^2} \right|_{\mu} &= \frac{\gamma^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)}{\beta^2 \Gamma_1^2 \Gamma_2^2} \left[(\Gamma_2 - \Gamma_1^2) \frac{H_2}{H_1^3} - 3\Gamma_2 \frac{1}{H_1} \right] \\ \left. \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial \bar{z} \partial S^2} \right|_{\mu} &= -\frac{\gamma^2}{2\beta^3 \Gamma_1 \Gamma_2^2} \left[(\Gamma_2 - \Gamma_1^2) \frac{H_2}{H_1^3} - 2\Gamma_2 \frac{1}{H_1} \right] \\ \left. \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial (S^2)^2} \right|_{\mu} &= \frac{\gamma^2}{4\beta^4 \Gamma_2^2} \frac{H_2}{H_1^3} \end{aligned} \quad (\text{B23})$$

gde su:

$$\begin{aligned} H_1 &= \Psi_2 - \Psi_1 \\ H_2 &= 2(\Psi_2 - \Psi_1)(\Psi_2 - \Psi_1 + \gamma) + 2\Psi'_2 - \Psi'_1 \end{aligned} \quad (\text{B24})$$

Parcijalni izvodi ocene $\hat{\beta}$. Izvodi prvog reda jednačine (B9), uzimajući u obzir (B15), glase:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{\hat{\Gamma}_1} - \frac{\bar{z}}{\hat{\Gamma}_1^2} \frac{\partial \hat{\Gamma}_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\hat{\Gamma}_1} + \bar{z} \frac{\Psi_1}{\gamma^2 \hat{\Gamma}_1} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial S^2} &= -\frac{\bar{z}}{\hat{\Gamma}_1^2} \frac{\partial \hat{\Gamma}_1}{\partial S^2} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} = \bar{z} \frac{\Psi_1}{\gamma^2 \hat{\Gamma}_1} \cdot \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} \end{aligned}$$

Izvodi drugog reda su:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial \bar{z}^2} &= -\frac{1}{\hat{\Gamma}_1^2} \frac{\partial \hat{\Gamma}_1}{\partial \hat{\gamma}} \left[2 \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} + \bar{z} \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \bar{z} \frac{1}{\hat{\Gamma}_1^3} \left[2 \left(\frac{\partial \hat{\Gamma}_1}{\partial \hat{\gamma}} \right)^2 - \hat{\Gamma}_1 \frac{\partial^2 \hat{\Gamma}_1}{\partial \hat{\gamma}^2} \right] \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} \right)^2 = \\ &= \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{\gamma}^2 \hat{\Gamma}_1} \left[2 \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} + \bar{z} \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \frac{\bar{z} (\hat{\Psi}_1^2 - 2\hat{\gamma} \hat{\Psi}_1 - \hat{\Psi}_1')}{\hat{\gamma}^4 \hat{\Gamma}_1} \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial \bar{z} \partial S^2} &= -\frac{1}{\hat{\Gamma}_1^2} \frac{\partial \hat{\Gamma}_1}{\partial \hat{\gamma}} \left[\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} + \bar{z} \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial \bar{z} \partial S^2} \right] + \bar{z} \frac{1}{\hat{\Gamma}_1^3} \left[2 \left(\frac{\partial \hat{\Gamma}_1}{\partial \hat{\gamma}} \right)^2 - \hat{\Gamma}_1 \frac{\partial^2 \hat{\Gamma}_1}{\partial \hat{\gamma}^2} \right] \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} = \\ &= \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{\gamma}^2 \hat{\Gamma}_1} \left[\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} + \bar{z} \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial \bar{z} \partial S^2} \right] + \frac{\bar{z} (\hat{\Psi}_1^2 - 2\hat{\gamma} \hat{\Psi}_1 - \hat{\Psi}_1')}{\hat{\gamma}^4 \hat{\Gamma}_1} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} \\ \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial (S^2)^2} &= -\frac{\bar{z}}{\hat{\Gamma}_1^2} \frac{\partial \hat{\Gamma}_1}{\partial \hat{\gamma}} \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial (S^2)^2} + \bar{z} \frac{1}{\hat{\Gamma}_1^3} \left[2 \left(\frac{\partial \hat{\Gamma}_1}{\partial \hat{\gamma}} \right)^2 - \hat{\Gamma}_1 \frac{\partial^2 \hat{\Gamma}_1}{\partial \hat{\gamma}^2} \right] \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} \right)^2 = \\ &= \frac{\bar{z} \hat{\Psi}_1}{\hat{\gamma}^2 \hat{\Gamma}_1} \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial (S^2)^2} + \frac{\bar{z} (\hat{\Psi}_1^2 - 2\hat{\gamma} \hat{\Psi}_1 - \hat{\Psi}_1')}{\hat{\gamma}^4 \hat{\Gamma}_1} \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial S^2} \right)^2\end{aligned}$$

Unošenjem (B13), (B17), (B18) i (B23) u gornje izraze, dobija se:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \bar{z}} \right|_{\mu} &= \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2) \Psi_1}{\Gamma_1 \Gamma_2 H_1} = \frac{\Gamma_2 \Psi_2 - \Gamma_1^2 \Psi_1}{\Gamma_1 \Gamma_2 H_1} \\ \left. \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial S^2} \right|_{\mu} &= -\frac{\Psi_1}{2\beta \Gamma_2 H_1} \\ \left. \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial \bar{z}^2} \right|_{\mu} &= \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)}{\beta \Gamma_1^2 \Gamma_2^2} \left[(\Gamma_2 - \Gamma_1^2) \frac{H_3}{H_1^3} - \Gamma_2 \frac{\Psi_1}{H_1} \right] \\ \left. \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial \bar{z} \partial S^2} \right|_{\mu} &= -\frac{1}{2\beta^2 \Gamma_1 \Gamma_2^2} \left[(\Gamma_2 - \Gamma_1^2) \frac{H_3}{H_1^3} - \Gamma_2 \frac{\Psi_1}{H_1} \right] \\ \left. \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial (S^2)^2} \right|_{\mu} &= \frac{1}{4\beta^3 \Gamma_2^2} \frac{H_3}{H_1^3}\end{aligned} \tag{B25}$$

gde je:

$$H_3 = \Psi_1 (\Psi_2 - \Psi_1) (2\Psi_2 - \Psi_1) + 2\Psi_1 \Psi_2' - \Psi_2 \Psi_1' \tag{B26}$$

Očekivanja, varijanse i kovarijansa ocena $\hat{\gamma}$ i $\hat{\beta}$. Koristeći razvoj ocena $\hat{\gamma}$ i $\hat{\beta}$ u Tejlorov red prema izrazima (B12) određuju se njihova očekivanja, varijanse i kovarijansa. Izrazima (B14) definisane su varijanse i kovarijansa uzoračke srednje vrednosti i disperzije, koje ovde pišemo kao:

$$\text{var}[\bar{z}] = \frac{1}{M} \beta^2 \Gamma_1^2 \mathcal{V}_2, \quad \text{cov}[\bar{z}, S^2] = \frac{1}{M} \beta^3 \Gamma_1^3 \mathcal{V}_3, \quad \text{var}[S^2] = \frac{1}{M} \beta^4 \Gamma_1^4 \mathcal{V}_4 \tag{B27}$$

gde su:

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1, \quad \mathcal{V}_3 = \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1^3} - 3 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} + 2, \quad \mathcal{V}_4 = \frac{\Gamma_4}{\Gamma_1^4} - 4 \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1^3} + 8 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - \frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_1^4} - 4 \tag{B28}$$

Uzimajući u obzir (B23), (B25) i (B27), dobijaju se sledeći izrazi:

$$\begin{aligned}\text{var}[\hat{\gamma}] &= \frac{\gamma^4}{M} \cdot \frac{\Gamma_1^4}{\Gamma_2^2} (4V_2^3 - 4V_2V_3 + V_4) \frac{1}{4H_1^2} \\ \text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}] &= \frac{\gamma^2\beta}{M} \cdot \left[\frac{\Gamma_1^4}{\Gamma_2^2} (4V_2^3 - 4V_2V_3 + V_4) \frac{\Psi_1}{4H_1^2} - \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2} (V_3 - 2V_2^2) \frac{1}{2H_1} \right] \\ \text{var}[\hat{\beta}] &= \frac{\beta^2}{M} \cdot \left[\frac{\Gamma_1^4}{\Gamma_2^2} (4V_2^3 - 4V_2V_3 + V_4) \frac{\Psi_1^2}{4H_1^2} - \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2} (V_3 - 2V_2^2) \frac{\Psi_1}{H_1} + V_2 \right] \\ E[\hat{\gamma}] &= \gamma + \frac{\gamma^2}{2M} \cdot \left[\frac{\Gamma_1^4}{\Gamma_2^2} (4V_2^3 - 4V_2V_3 + V_4) \frac{H_2}{4H_1^3} + \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2} (2V_3 - 3V_2^2) \frac{1}{H_1} \right] \\ E[\hat{\beta}] &= \beta + \frac{\beta}{2M} \cdot \left[\frac{\Gamma_1^4}{\Gamma_2^2} (4V_2^3 - 4V_2V_3 + V_4) \frac{H_3}{4H_1^3} + \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2} (V_3 - V_2^2) \frac{\Psi_1}{H_1} \right]\end{aligned}$$

Unošenjem (B28) i sređivanjem, gornji izrazi postaju:

$$\begin{aligned}\text{var}[\hat{\gamma}] &= \frac{\gamma^4}{M} \cdot \frac{1}{4H_1^2} \left(\frac{\Gamma_4}{\Gamma_2^2} - 4 \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1\Gamma_2} + 4 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1 \right) \\ \text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}] &= \frac{\gamma^2\beta}{M} \left[\left(\frac{\Gamma_4}{\Gamma_2^2} - 4 \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1\Gamma_2} + 4 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1 \right) \frac{\Psi_1}{4H_1^2} - \left(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1\Gamma_2} - 2 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} + 1 \right) \frac{1}{2H_1} \right] \\ \text{var}[\hat{\beta}] &= \frac{\beta^2}{M} \left[\left(\frac{\Gamma_4}{\Gamma_2^2} - 4 \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1\Gamma_2} + 4 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1 \right) \frac{\Psi_1^2}{4H_1^2} - \left(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1\Gamma_2} - 2 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} + 1 \right) \frac{\Psi_1}{H_1} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1 \right] \\ E[\hat{\gamma}] &= \gamma + \frac{\gamma^2}{2M} \left[\left(\frac{\Gamma_4}{\Gamma_2^2} - 4 \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1\Gamma_2} + 4 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1 \right) \frac{H_2}{4H_1^3} + \left(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1\Gamma_2} - 2 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} + \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2} - 1 \right) \frac{1}{H_1} \right] \\ E[\hat{\beta}] &= \beta + \frac{\beta}{2M} \left[\left(\frac{\Gamma_4}{\Gamma_2^2} - 4 \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1\Gamma_2} + 4 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1 \right) \frac{H_3}{4H_1^3} + \left(2 \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1\Gamma_2} - 3 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} + \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2} \right) \frac{\Psi_1}{H_1} \right]\end{aligned}$$

gde su H_1 , H_2 i H_3 definisani jednačinama (B24) i (B26). Ako uvedemo oznake:

$$g_1 = \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2} - 1, \quad g_2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1, \quad g_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1\Gamma_2} - 1 \right), \quad g_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{\Gamma_4}{\Gamma_2^2} - 1 \right)$$

uz dodatno sređivanje gornjih izraza dobija se:

$$\begin{aligned}\text{var}[\hat{\gamma}] &= \frac{\gamma^4}{M} \cdot \frac{g_4 - 2g_3 + g_2}{(\Psi_2 - \Psi_1)^2} \\ \text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}] &= \frac{\gamma^2\beta}{M} \cdot \frac{g_4\Psi_1 - g_3(\Psi_1 + \Psi_2) + g_2\Psi_2}{(\Psi_2 - \Psi_1)^2} \\ \text{var}[\hat{\beta}] &= \frac{\beta^2}{M} \cdot \frac{g_4\Psi_1^2 - 2g_3\Psi_1\Psi_2 + g_2\Psi_2^2}{(\Psi_2 - \Psi_1)^2}\end{aligned}$$

$$E[\hat{\gamma}] = \gamma + \frac{\gamma^2}{2M} \left[\frac{g_4 - 2g_3 + g_2}{(\Psi_2 - \Psi_1)^3} [2\gamma(\Psi_2 - \Psi_1) + 2\Psi_2' - \Psi_1'] + \frac{2g_4 - g_2 + g_1}{\Psi_2 - \Psi_1} \right]$$

$$E[\hat{\beta}] = \beta + \frac{\beta}{2M} \left[\frac{g_4 - 2g_3 + g_2}{(\Psi_2 - \Psi_1)^3} [(\Psi_2^2 + 2\Psi_2')\Psi_1 - (\Psi_1^2 + \Psi_1')\Psi_2] + \frac{g_4 + g_1}{\Psi_2 - \Psi_1} \Psi_1 \right]$$

B.4 Očekivanja, varijanse i kovarijanse ocena parametara Wejbulove raspodele dobijenih metodom težinskih momenata

Parametri Wejbulove raspodele ocenjuju se metodom težinskih momenata na sledeći način:

$$\hat{\gamma} = \frac{\ln 2}{\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2} \quad (\text{B29})$$

$$\hat{\beta} = \frac{a_0}{\Gamma(1/\hat{\gamma} + 1)} \quad (\text{B30})$$

gde su a_0 i a_1 empirijski težinski momenti nultog i prvog reda (prilog A). Može se napisati da su ocene $\hat{\gamma}$ i $\hat{\beta}$ su funkcija empirijskih težinskih momenata:

$$\hat{\gamma} = h_1(a_0, a_1)$$

$$\hat{\beta} = h_2(a_0, a_1)$$

pa se njihova očekivanja, varijanse i kovarijanse mogu odrediti razvojem funkcija h_1 i h_2 u Tejlorov red prema (B3), (B4) i (B5):

$$\begin{aligned} E[\hat{\gamma}] &= \hat{\gamma}|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[a_0] \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_0^2} \Big|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[a_1] \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_1^2} \Big|_{\mu} + \text{cov}[a_0, a_1] \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_0 \partial a_1} \Big|_{\mu} \\ E[\hat{\beta}] &= \hat{\beta}|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[a_0] \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial a_0^2} \Big|_{\mu} + \frac{1}{2} \text{var}[a_1] \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial a_1^2} \Big|_{\mu} + \text{cov}[a_0, a_1] \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial a_0 \partial a_1} \Big|_{\mu} \\ \text{var}[\hat{\gamma}] &= \text{var}[a_0] \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_0} \Big|_{\mu} \right)^2 + \text{var}[a_1] \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_1} \Big|_{\mu} \right)^2 + 2 \text{cov}[a_0, a_1] \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_0} \cdot \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_1} \Big|_{\mu} \right) \\ \text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}] &= \text{var}[a_0] \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_0} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_0} \Big|_{\mu} \right) + \text{var}[a_1] \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_1} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_1} \Big|_{\mu} \right) + \text{cov}[a_0, a_1] \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_0} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_1} + \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_1} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_0} \Big|_{\mu} \right) \\ \text{var}[\hat{\beta}] &= \text{var}[a_0] \left(\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_0} \Big|_{\mu} \right)^2 + \text{var}[a_1] \left(\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_1} \Big|_{\mu} \right)^2 + 2 \text{cov}[a_0, a_1] \left(\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_0} \cdot \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_1} \Big|_{\mu} \right) \end{aligned} \quad (\text{B31})$$

Očekivanja uzoračke srednje vrednosti i disperzije su:

$$E[a_0] = \alpha_0 = \beta \Gamma_1, \quad E[a_1] = \alpha_1 = \frac{\beta \Gamma_1}{2^{1/\gamma+1}} \quad (\text{B32})$$

dok su njihove varijanse i kovarijanse:

$$\begin{aligned} \text{var}[a_0] &= \frac{1}{M} \beta^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2) \\ \text{cov}[a_0, a_1] &= \frac{1}{M} \frac{\beta^2}{2^{2/\gamma+1}} [\Gamma_2 + 2^{1/\gamma} (2^{1/\gamma} - 2) \Gamma_1^2] \\ \text{var}[a_1] &= \frac{1}{M} \frac{\beta^2}{2^{2/\gamma}} (\Gamma_2 F - \Gamma_1^2) \end{aligned} \quad (\text{B33})$$

gde je M ukupan broj prekoračenja, $\Gamma_k = \Gamma(k/\gamma + 1)$, a F hipergeometrijska finkcija:

$$F = {}_2F_1(2/\gamma, 1/\gamma; 1/\gamma + 1; -1/2)$$

Parcijalni izvodi ocena $\hat{\gamma}$. Diferenciranjem (B4.1) se dobija:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_0} &= -\frac{\ln 2}{a_0 (\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2)^2} \\ \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_1} &= \frac{\ln 2}{a_1 (\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2)^2} \\ \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_0^2} &= \ln 2 \frac{\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2 + 2}{a_0^2 (\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2)^3} \\ \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_0 \partial a_1} &= -\frac{2 \ln 2}{a_0 a_1 (\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2)^3} \\ \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_1^2} &= -\ln 2 \frac{\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2 - 2}{a_1^2 (\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2)^3}\end{aligned}$$

Kako se ovi parcijalni izvodi u razvoju u Tejlorov red određuju u tački $(E[a_0], E[a_1])$, koristeći (B4.4) sledi:

$$(\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2)|_{\mu} = \ln \frac{\alpha_0}{2\alpha_1} = \ln \frac{\beta \Gamma_1}{2\beta \Gamma_1 2^{-1/\gamma-1}} = \frac{1}{\gamma} \ln 2$$

pa je za ocenu $\hat{\gamma}$ važi:

$$\hat{\gamma}|_{\mu} = \frac{\ln 2}{\ln a_0 - \ln a_1 - \ln 2}|_{\mu} = \gamma \quad (\text{B34})$$

Tada su parcijalni izvodi u u tački $(E[a_0], E[a_1])$ jednaki:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_0} \right|_{\mu} &= -\frac{\gamma^2}{\beta \Gamma_1 \ln 2} \\ \left. \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_1} \right|_{\mu} &= \frac{\gamma^2 2^{1/a+1}}{\beta \Gamma_1 \ln 2} \\ \left. \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_0^2} \right|_{\mu} &= \frac{\gamma^2 (2\gamma + \ln 2)}{\beta^2 \Gamma_1^2 \ln^2 2} \\ \left. \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_0 \partial a_1} \right|_{\mu} &= -\frac{\gamma^3 2^{1/\gamma+2}}{\beta^2 \Gamma_1^2 \ln^2 2} \\ \left. \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_1^2} \right|_{\mu} &= \frac{\gamma^2 (2\gamma - \ln 2) 2^{2/\gamma+2}}{\beta^2 \Gamma_1^2 \ln^2 2}\end{aligned} \quad (\text{B35})$$

Parcijalni izvodi ocene $\hat{\beta}$. Kako je jednačina (B30) za određivanje ocene $\hat{\beta}$ ista kao odgovarajuća jednačina u metodi momenata (jednačina B9), koriste ste rezultati iz priloga B.2 uz zamenu $\bar{z} = a_0$, pa je:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_0} &= \frac{1}{\hat{\Gamma}_1} + a_0 \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{\gamma}^2 \hat{\Gamma}_1} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_0} \\
\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_1} &= a_0 \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{\gamma}^2 \hat{\Gamma}_1} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_1} \\
\frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial a_0^2} &= \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{\gamma}^2 \hat{\Gamma}_1} \left[2 \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_0} + a_0 \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_0^2} \right] + \frac{a_0 (\hat{\Psi}_1^2 - 2\hat{\gamma} \hat{\Psi}_1 - \hat{\Psi}'_1)}{\hat{\gamma}^4 \hat{\Gamma}_1} \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_0} \right)^2 \\
\frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial a_0 \partial a_1} &= \frac{\hat{\Psi}_1}{\hat{\gamma}^2 \hat{\Gamma}_1} \left[\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_1} + a_0 \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_0 \partial a_1} \right] + \frac{a_0 (\hat{\Psi}_1^2 - 2\hat{\gamma} \hat{\Psi}_1 - \hat{\Psi}'_1)}{\hat{\gamma}^4 \hat{\Gamma}_1} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_0} \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_1} \\
\frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial a_1^2} &= \frac{a_0 \hat{\Psi}_1}{\hat{\gamma}^2 \hat{\Gamma}_1} \frac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial a_1^2} + \frac{a_0 (\hat{\Psi}_1^2 - 2\hat{\gamma} \hat{\Psi}_1 - \hat{\Psi}'_1)}{\hat{\gamma}^4 \hat{\Gamma}_1} \left(\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a_1} \right)^2
\end{aligned} \tag{B36}$$

gde su:

$$\hat{\Gamma}_1 = \Gamma_1(\hat{\gamma}) = \Gamma(1/\hat{\gamma} + 1), \quad \hat{\Psi}_1 = \Psi_1(\hat{\gamma}) = \Psi(1/\hat{\gamma} + 1), \quad \hat{\Psi}'_1 = \Psi'_1(\hat{\gamma}) = \Psi'(1/\hat{\gamma} + 1)$$

Ocena $\hat{\beta}$ u tački $(E[a_0], E[a_1])$ takođe je jednaka parametru β (prema B32 i B34):

$$\bar{\beta}|_{\mu} = \frac{a_0}{\Gamma(1/\hat{\gamma} + 1)} \Big|_{\mu} = \frac{\alpha_0}{\Gamma(1/\gamma + 1)} = \frac{\beta \Gamma_1}{\Gamma_1} = \beta \tag{B37}$$

Uzimajući u obzir (B34) i (B37) i zamenjujući (B35) u (B36) dobija se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_0} \Big|_{\mu} &= \frac{\ln 2 - \Psi_1}{\Gamma_1 \ln 2} \\
\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial a_1} \Big|_{\mu} &= \frac{\Psi_1}{\Gamma_1 \ln 2} 2^{1/\gamma+1} \\
\frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial a_0^2} \Big|_{\mu} &= \frac{\Psi_1^2 - \Psi'_1 - \Psi_1 \ln 2}{\beta \Gamma_1^2 \ln^2 2} \\
\frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial a_0 \partial a_1} \Big|_{\mu} &= - \frac{\Psi_1^2 - \Psi'_1 - \Psi_1 \ln 2}{\beta \Gamma_1^2 \ln^2 2} 2^{1/\gamma+1} \\
\frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial a_1^2} \Big|_{\mu} &= \frac{\Psi_1^2 - \Psi'_1 - \Psi_1 \ln 2}{\beta \Gamma_1^2 \ln^2 2} 2^{2/\gamma+2}
\end{aligned} \tag{B38}$$

Očekivanja, varijanse i kovarijansa ocena $\hat{\gamma}$ i $\hat{\beta}$. Koristeći razvoj ocena $\hat{\gamma}$ i $\hat{\beta}$ u Tejlorov red prema izrazima (B31) određuju se njihova očekivanja, varijanse i kovarijansa. Izrazima (B33) definisane su varijanse i kovarijansa uzoračke srednje vrednosti i disperzije. Ako uvedemo oznake:

$$g_0 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 1, \quad g_1 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} 2^{-1/\gamma} + 2^{1/\gamma} - 2, \quad g_2 = 4F \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^2} - 4 \tag{B39}$$

tada su:

$$\text{var}[a_0] = \frac{1}{M} \beta^2 \Gamma_1^2 g_0, \quad \text{cov}[a_0, a_1] = \frac{1}{M} \beta^2 \Gamma_1^2 g_1 2^{-1/\gamma-1}, \quad \text{var}[a_1] = \frac{1}{M} \beta^2 \Gamma_1^2 g_2 2^{-2/\gamma-2}$$

Koristeći gornje izraze i parcijalne izvode (B35) i (B38), očekivanja, varijanse i kovarijansa ocena parametara Weibulove raspodele glase:

$$E[\hat{\gamma}] = \gamma + \frac{1}{M} \cdot \frac{\gamma^2}{2 \ln^2 2} [2\gamma(g_0 - 2g_1 + g_2) + (g_0 - g_2) \ln 2]$$

$$E[\hat{\beta}] = \beta + \frac{1}{M} \cdot \frac{\beta}{2 \ln^2 2} (g_0 - 2g_1 + g_2) (\Psi_1^2 - \Psi_1' - \Psi_1 \ln 2)$$

$$\text{var}[\hat{\gamma}] = \frac{1}{M} \cdot \frac{\gamma^4}{\ln^2 2} (g_0 - 2g_1 + g_2)$$

$$\text{cov}[\hat{\gamma}, \hat{\beta}] = \frac{1}{M} \cdot \frac{\gamma^2 \beta}{\ln^2 2} [(g_0 - 2g_1 + g_2) \Psi_1 - (g_0 - g_2) \ln 2]$$

$$\text{var}[\hat{\beta}] = \frac{1}{M} \cdot \frac{\beta^2}{\ln^2 2} [(g_0 - 2g_1 + g_2) \Psi_1^2 - 2(g_0 - g_2) \Psi_1 \ln 2 + g_0 \ln^2 2]$$

pri čemu se hipergeometrijska funkcija F numerički određuje pomoću reda (videti prilog A):

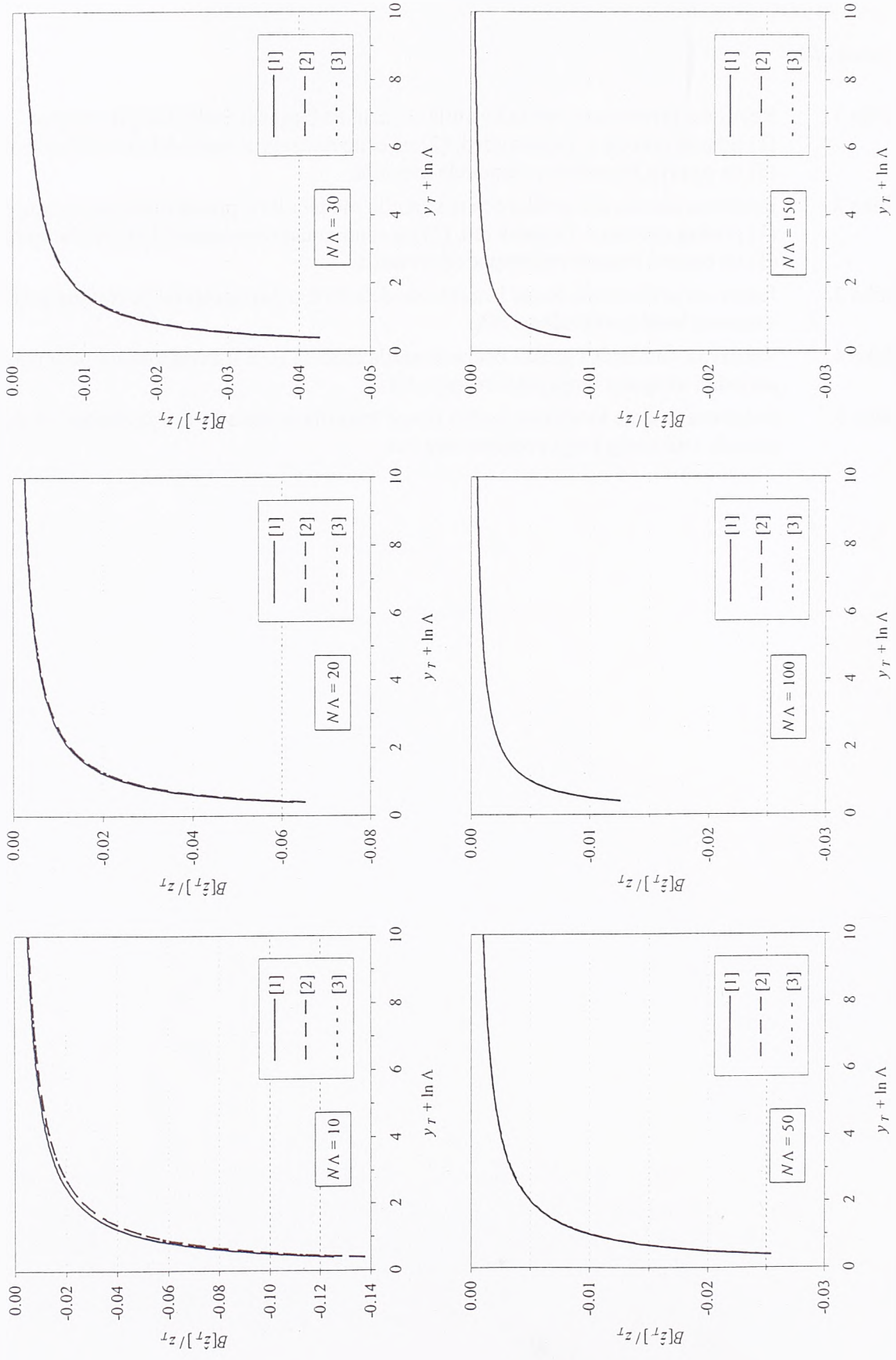
$$F = {}_2F_1(2/\gamma, 1/\gamma; 1/\gamma + 1; -1/2) = \frac{2}{\gamma^2 \Gamma(2/\gamma + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2/\gamma + k) (-1)^k}{(1/\gamma + k) 2^k k!}$$

PRILOG C1

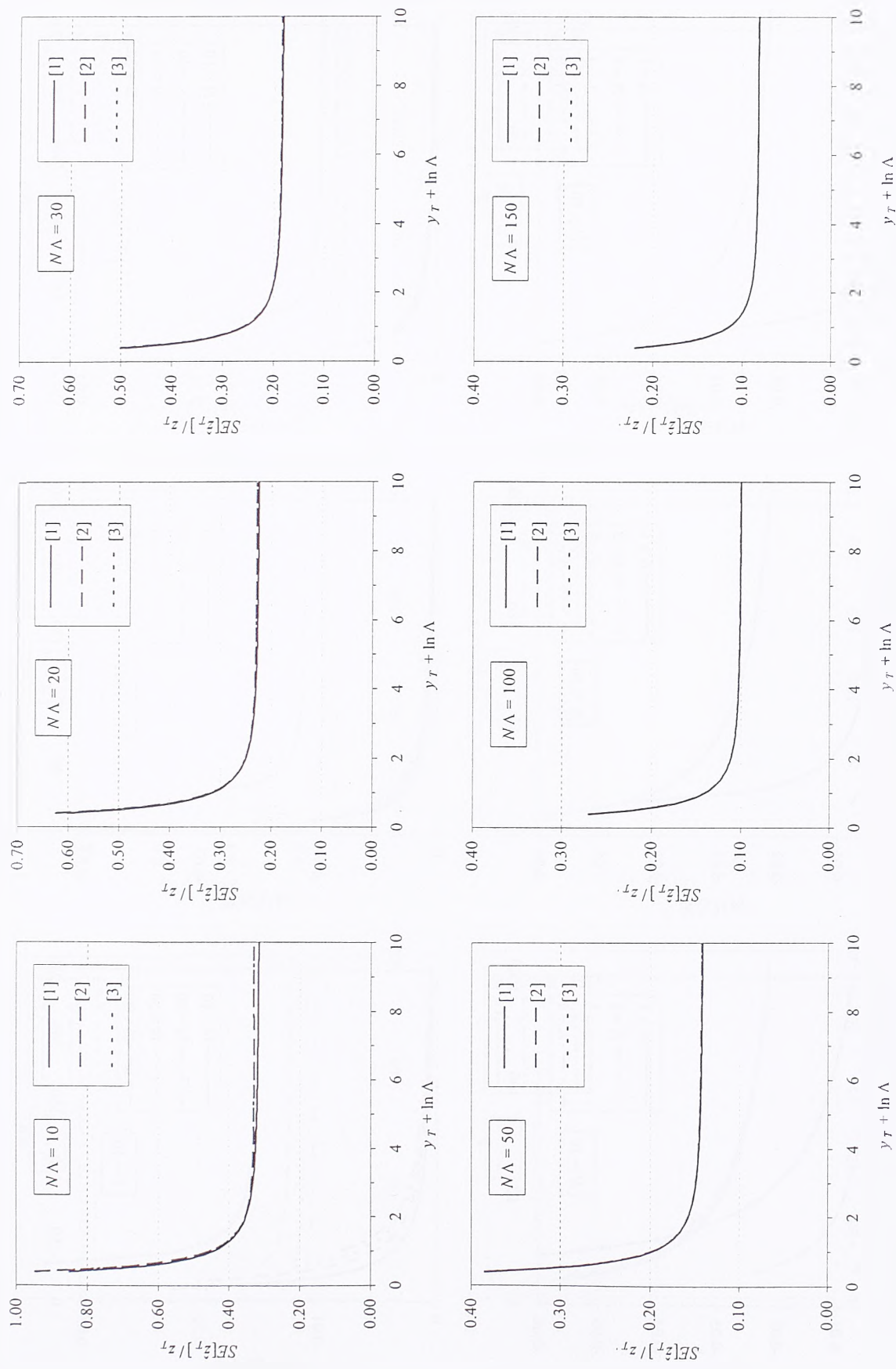
Svojstva ocene kvantila modelom P+E

Spisak slika

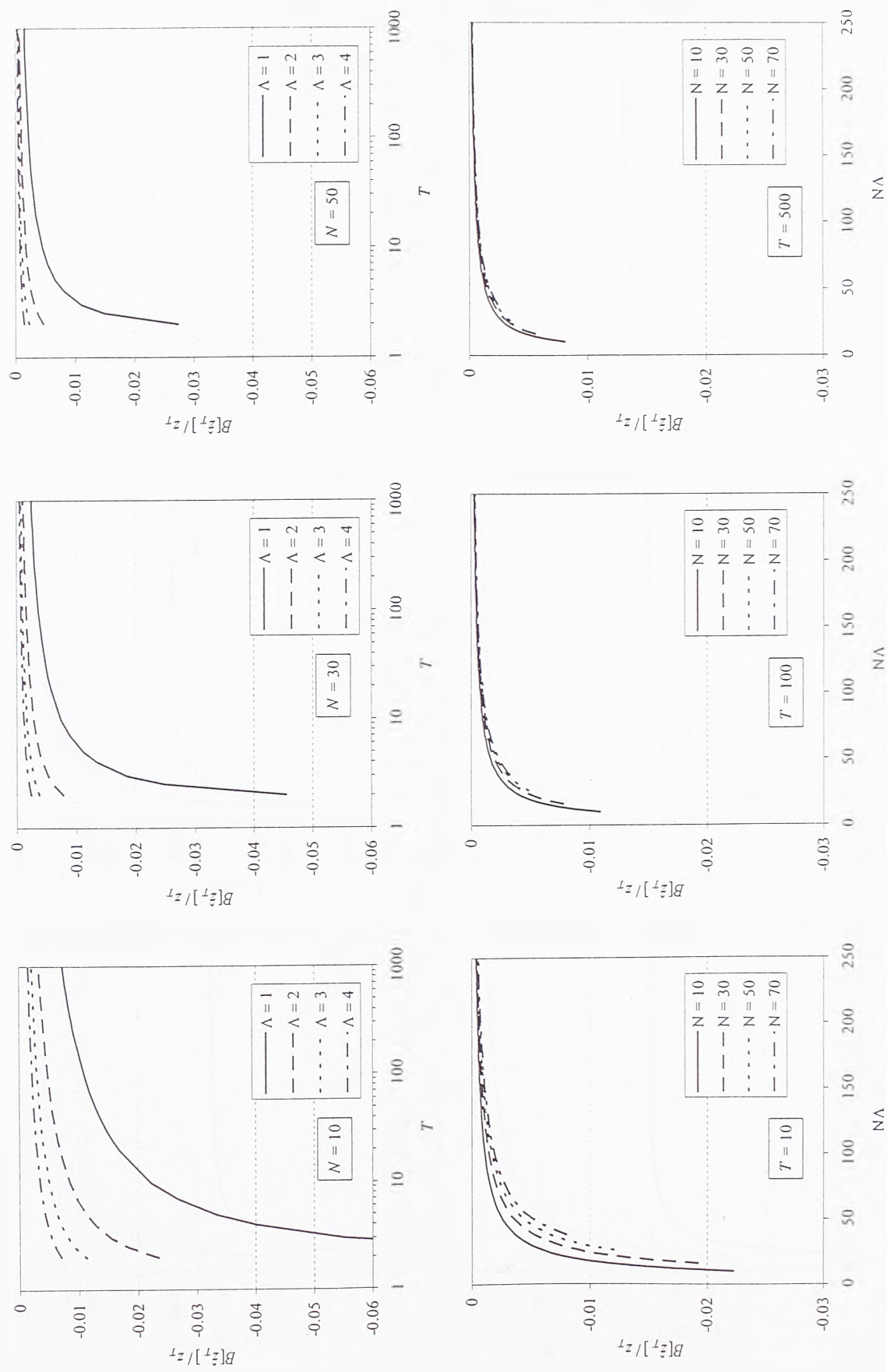
- Slika 1. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+E prema različitim pristupima:
(1) pristup razvoja u Tejlorov red, (2) na osnovu uslovne raspodele kvantila pri $M > 0$, i
(3) na osnovu bezuslovne raspodele kvantila.
- Slika 2. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+E prema različitim pristupima:
(1) pristup razvoja u Tejlorov red, (2) na osnovu uslovne raspodele kvantila pri $M > 0$, i
(3) na osnovu bezuslovne raspodele kvantila.
- Slika 3. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+E u zavisnosti od povratnog perioda i ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.
- Slika 4. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+E u zavisnosti od povratnog perioda i ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.
- Slika 5. Relativna srednja kvadratna greška ocene kvantila modela P+E u zavisnosti od povratnog perioda i ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.



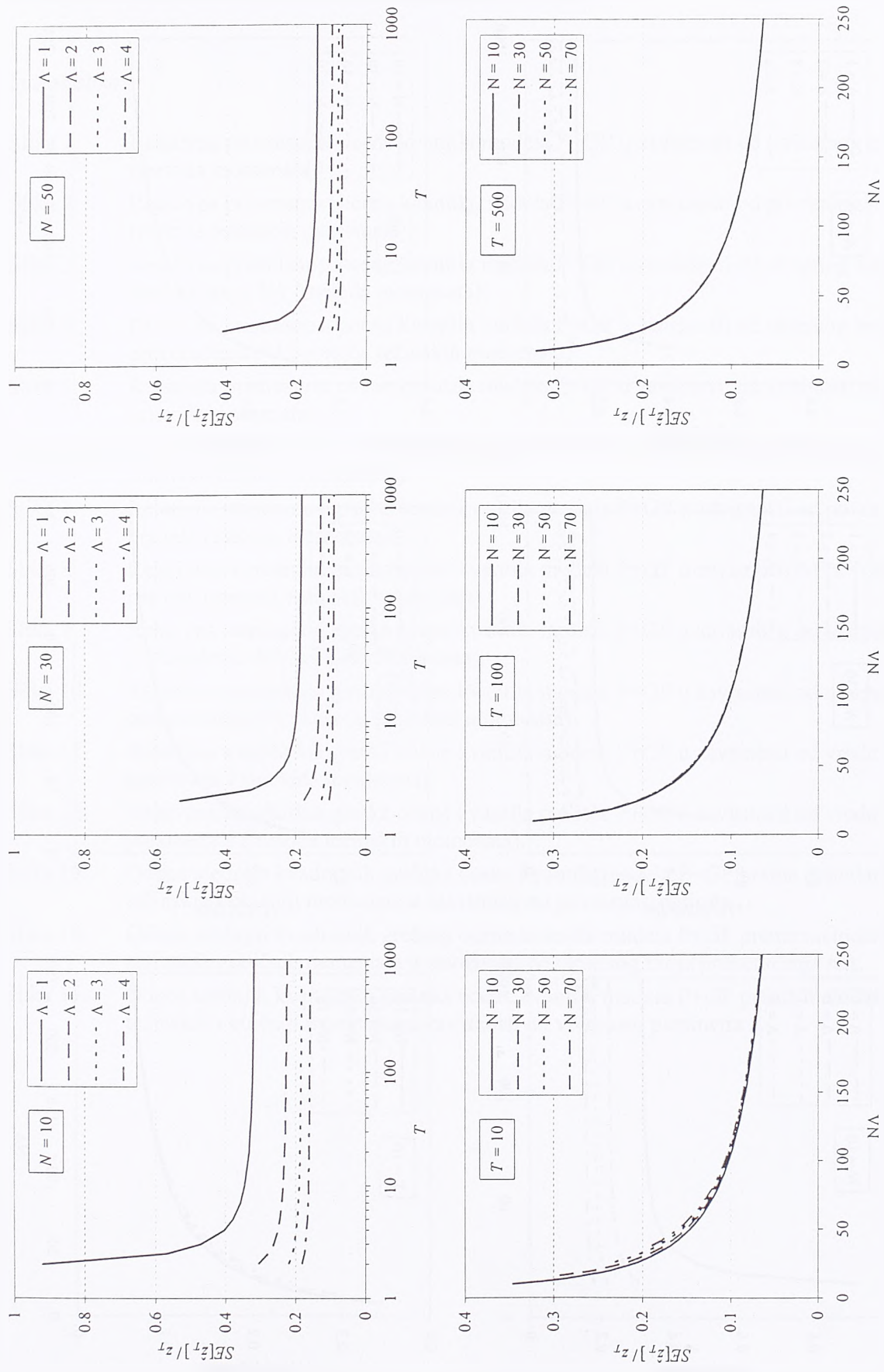
Slika 1. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+E prema različitim pristupima: (1) pristup razvoja u Tejlorov red, (2) na osnovu uslovne raspodele kvantila pri $M > 0$, i (3) na osnovu bezuslovne raspodele kvantila.



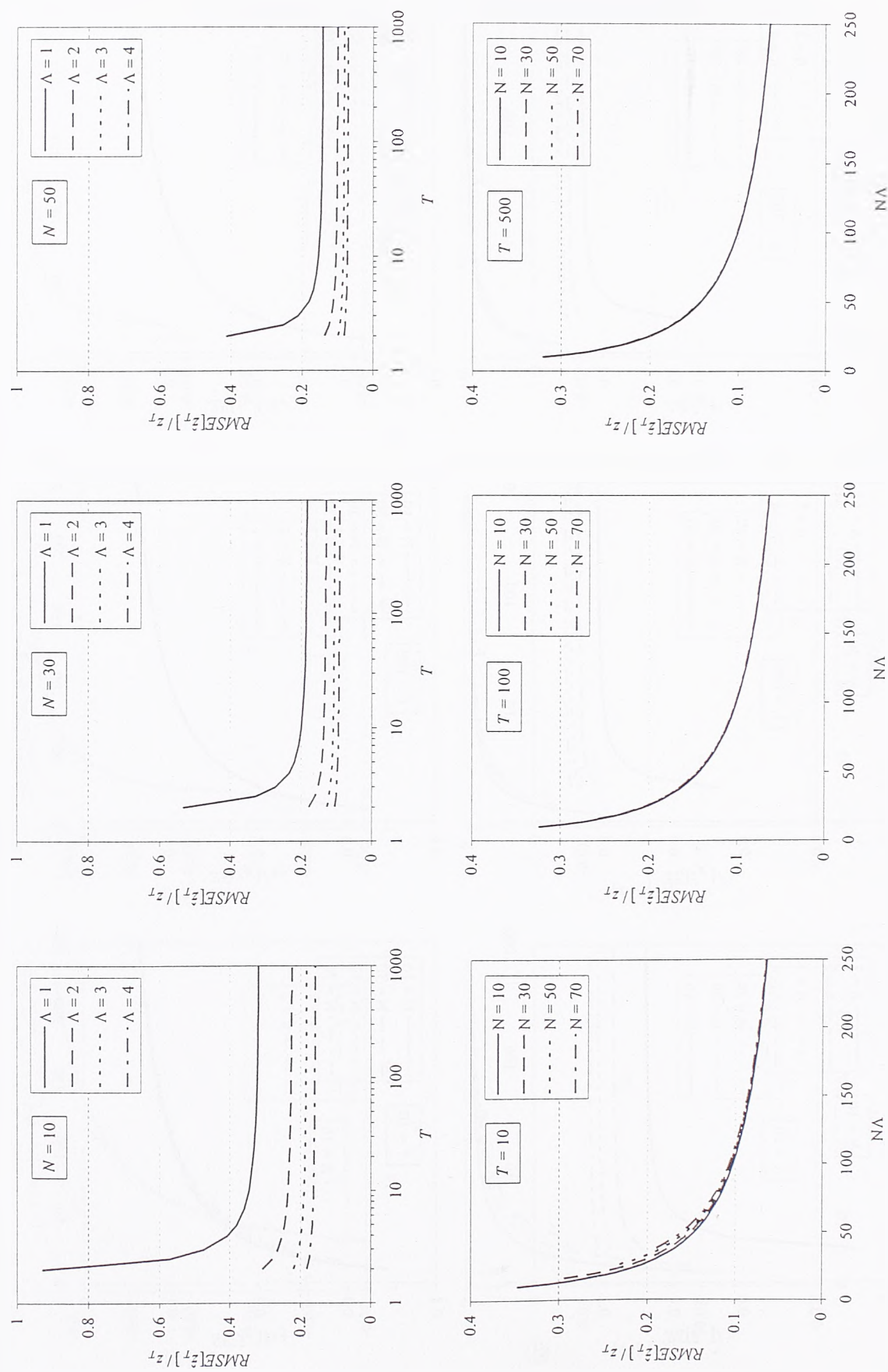
Slika 2. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+E prema različitim pristupima: (1) pristup razvoja u Tejlorov red, (2) na osnovu uslovne raspodele kvantila pri $M > 0$, i (3) na osnovu bezuslovne raspodele kvantila.



Slika 3. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+E u zavisnosti od povratnog perioda (gore) i ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (dole).



Slika 4. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+E u zavisnosti od povratnog perioda (gore) i ukupnog broja prekoračenja NA (dole).

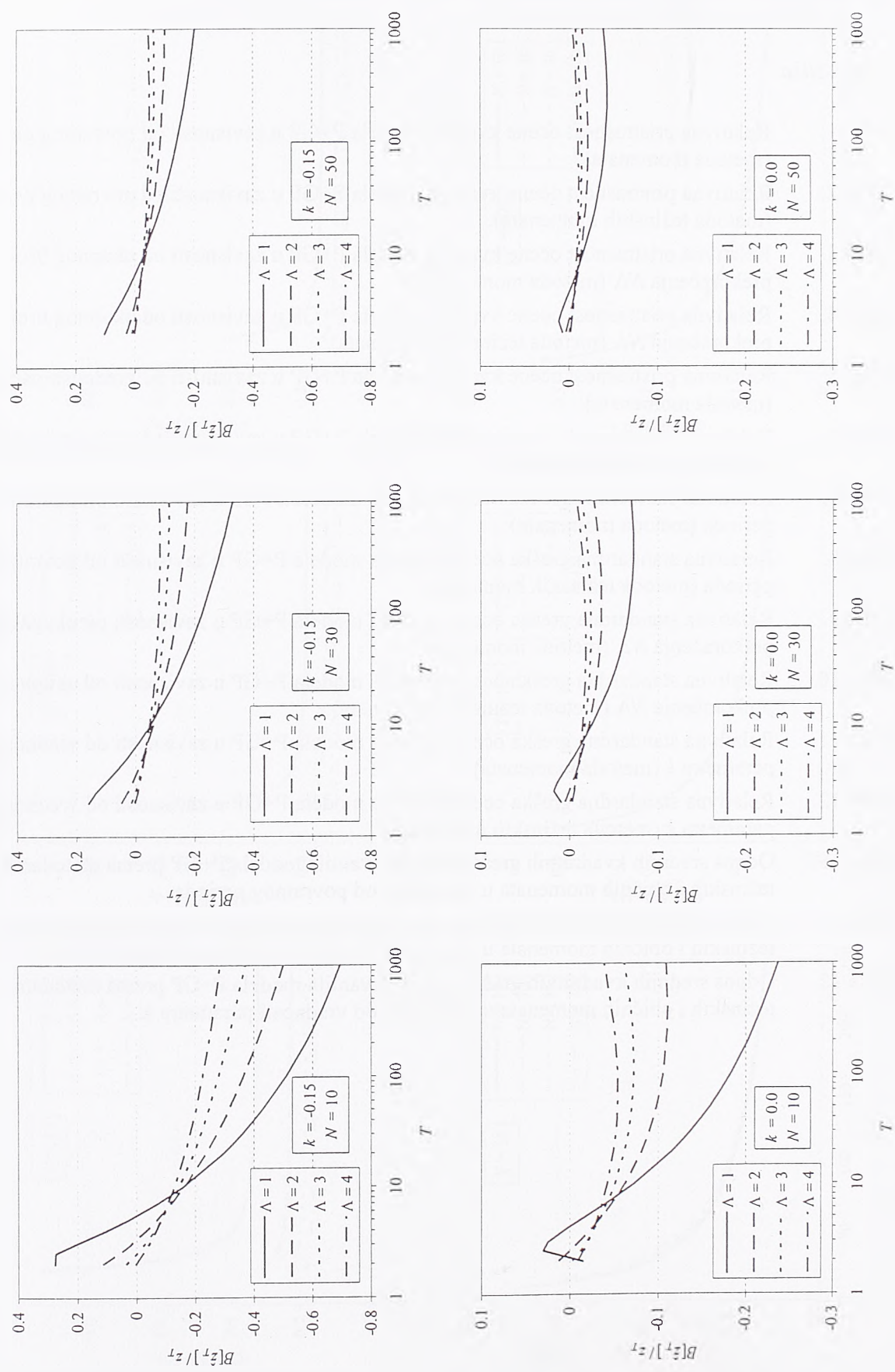


Slika 5. Relativna srednja kvadratna greška ocene kvantila modela P+E u zavisnosti od povratnog perioda (gore) i ukupnog broja prekraćenja NA (dole).

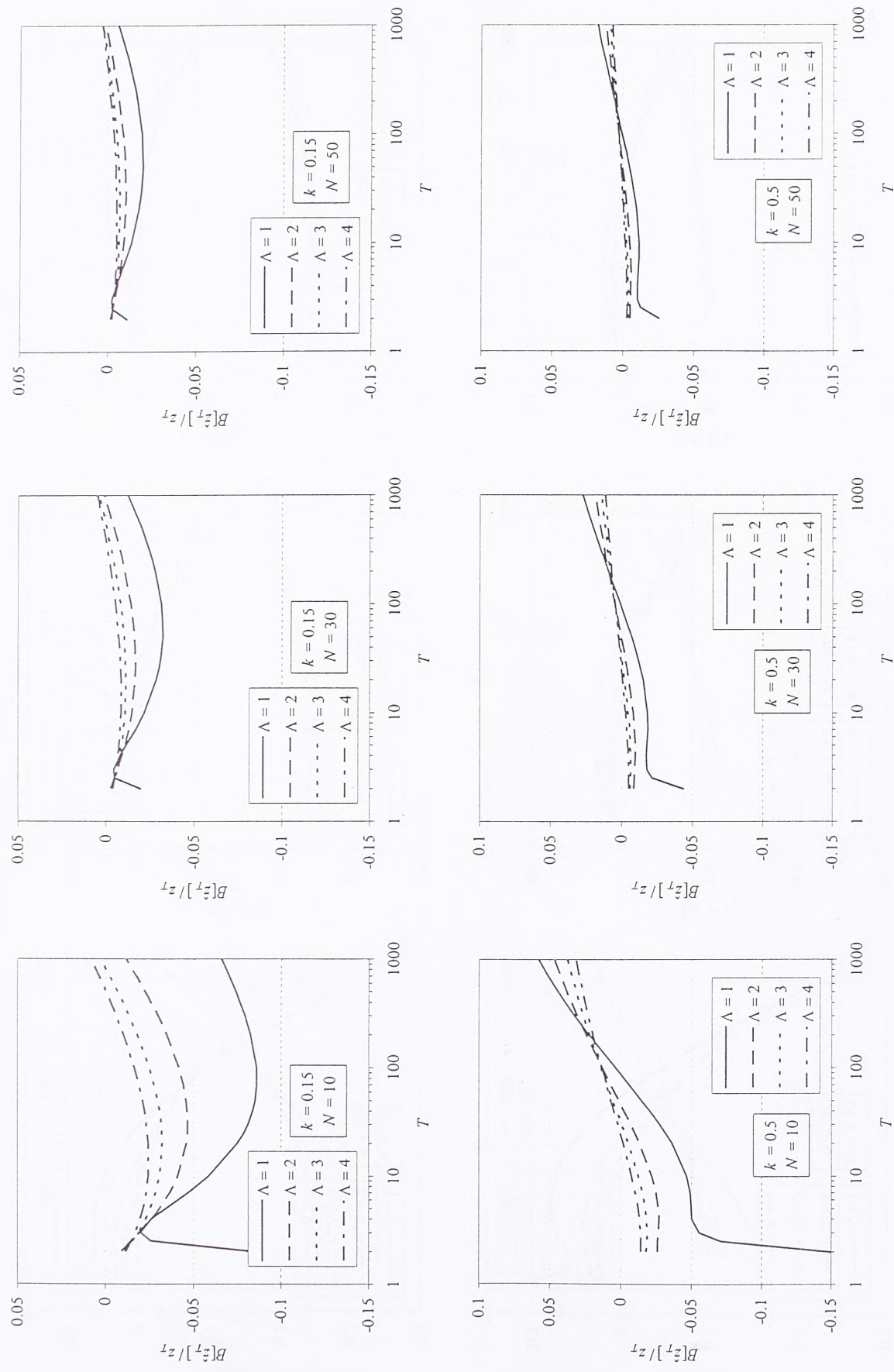
Svojstva ocene kvantila modelom P+GP

Spisak slika

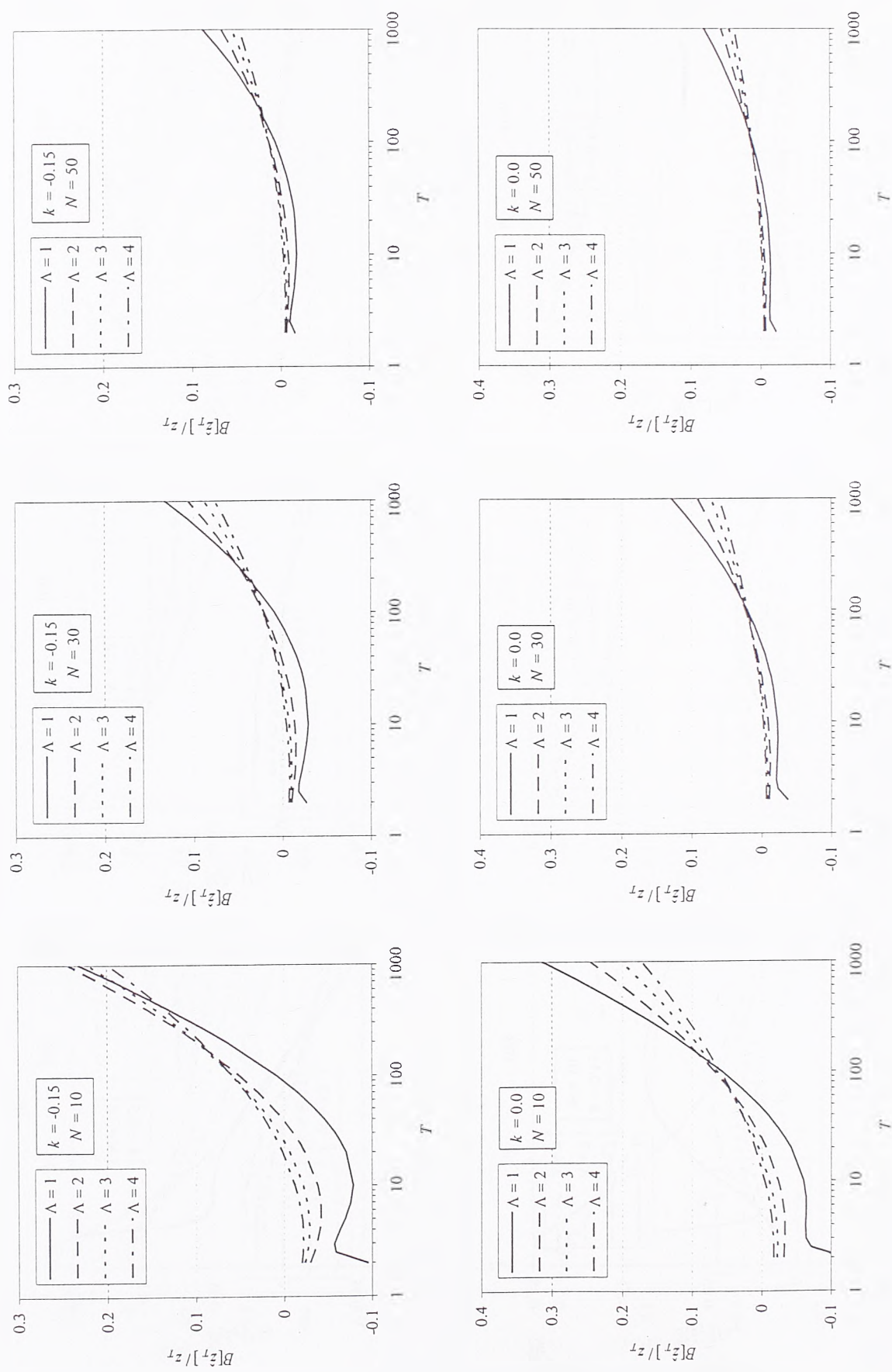
- Slika 1. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).
- Slika 2. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).
- Slika 3. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (metoda momenata).
- Slika 4. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (metoda težinskih momenata).
- Slika 5. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda momenata).
- Slika 6. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda težinskih momenata).
- Slika 7. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).
- Slika 8. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).
- Slika 9. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (metoda momenata).
- Slika 10. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (metoda težinskih momenata).
- Slika 11. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda momenata).
- Slika 12. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda težinskih momenata).
- Slika 13. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+GP prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od povratnog perioda.
- Slika 14. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+GP prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.
- Slika 15. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+GP prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od vrednosti parametra k .



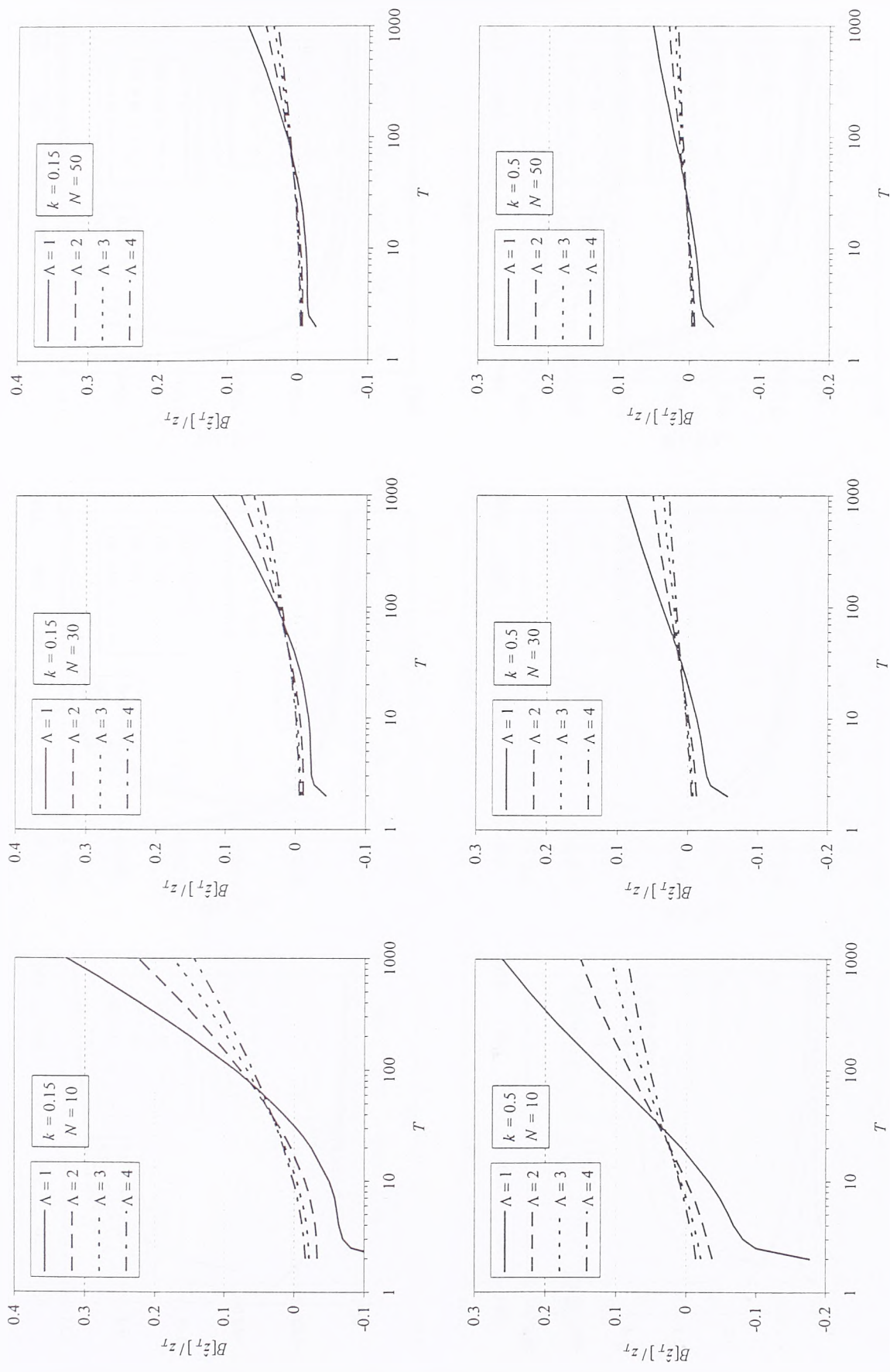
Slika 1. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).



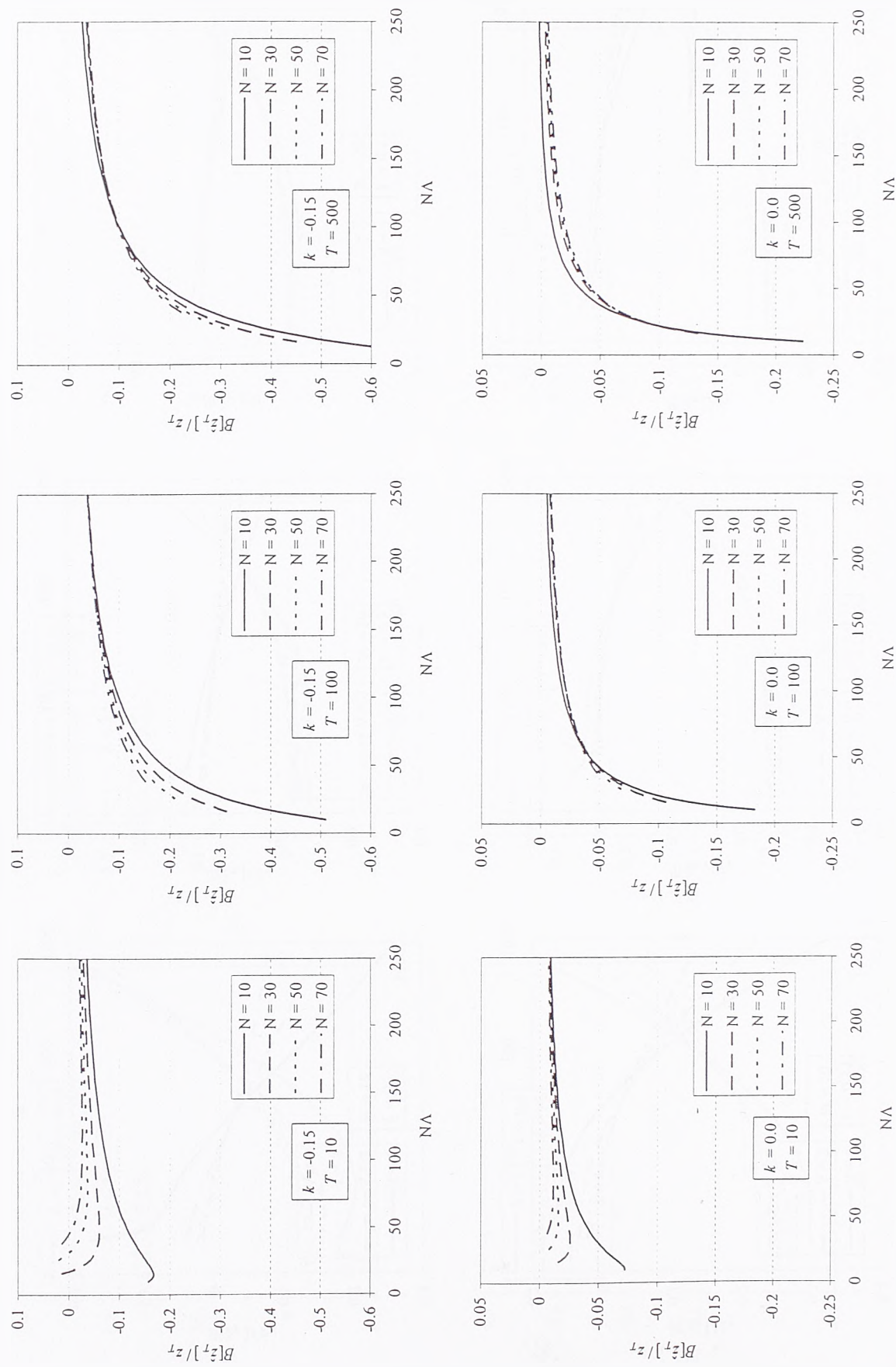
Slika 1 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).



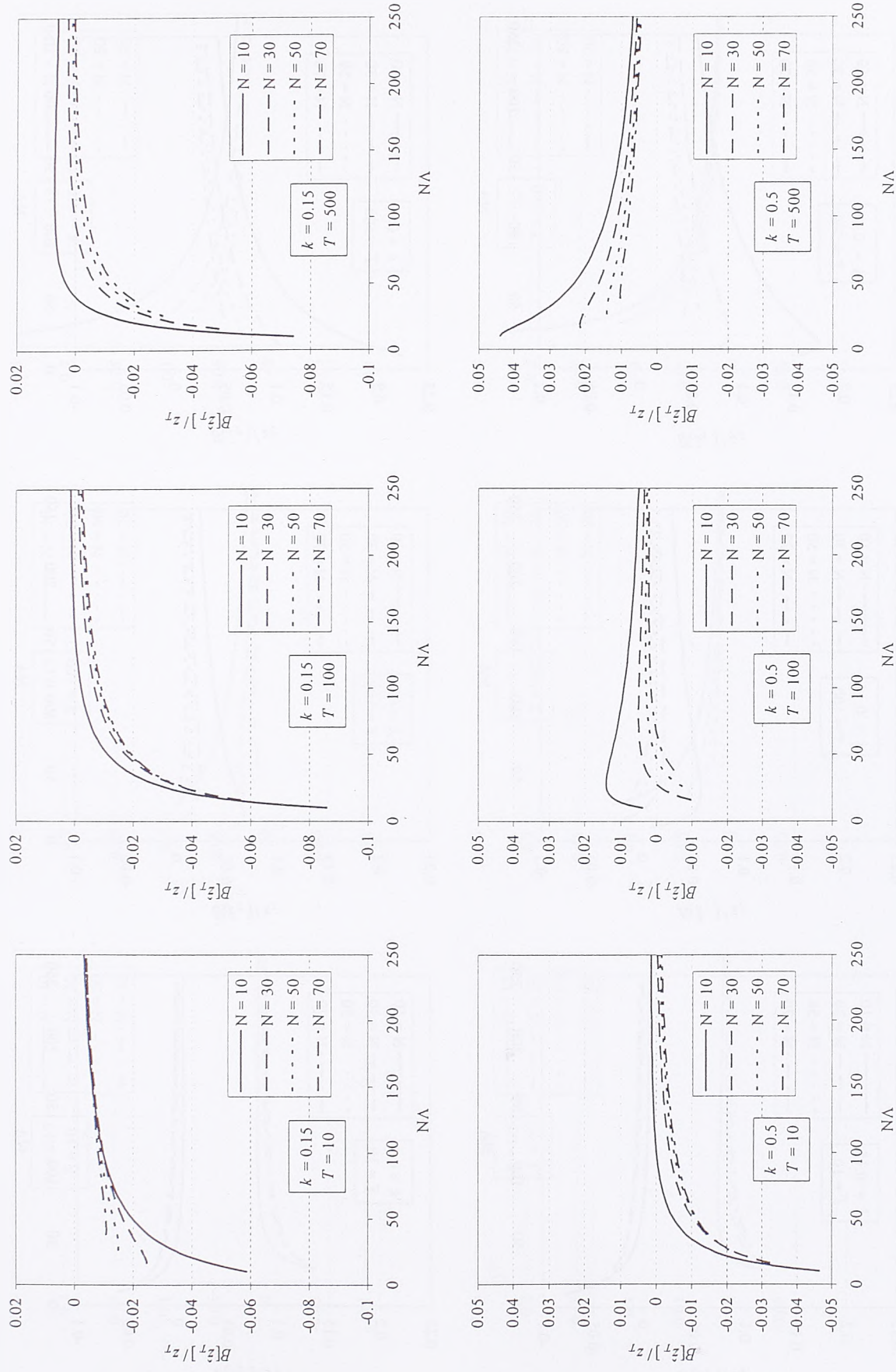
Slika 2. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).



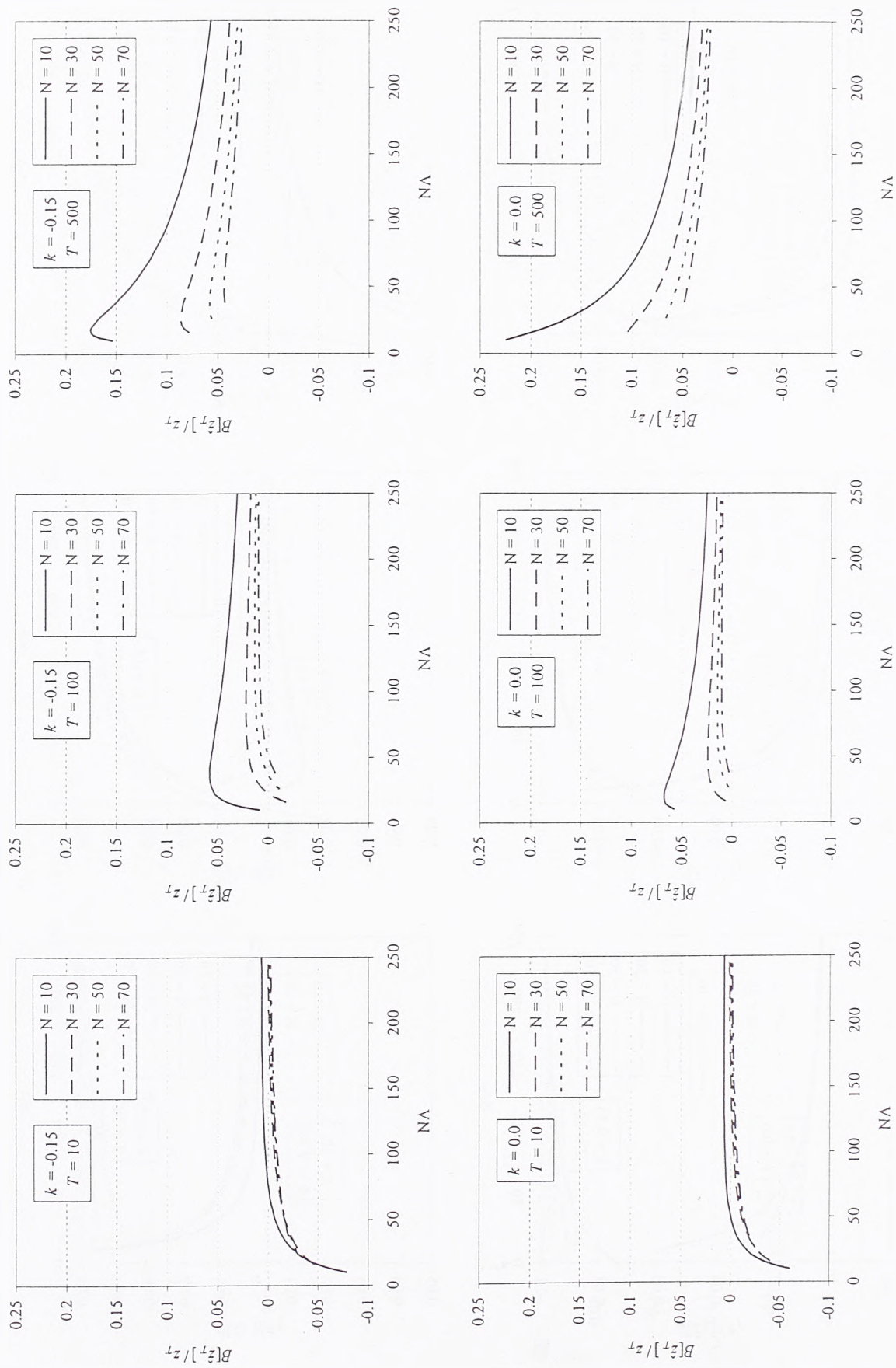
Slika 2 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).



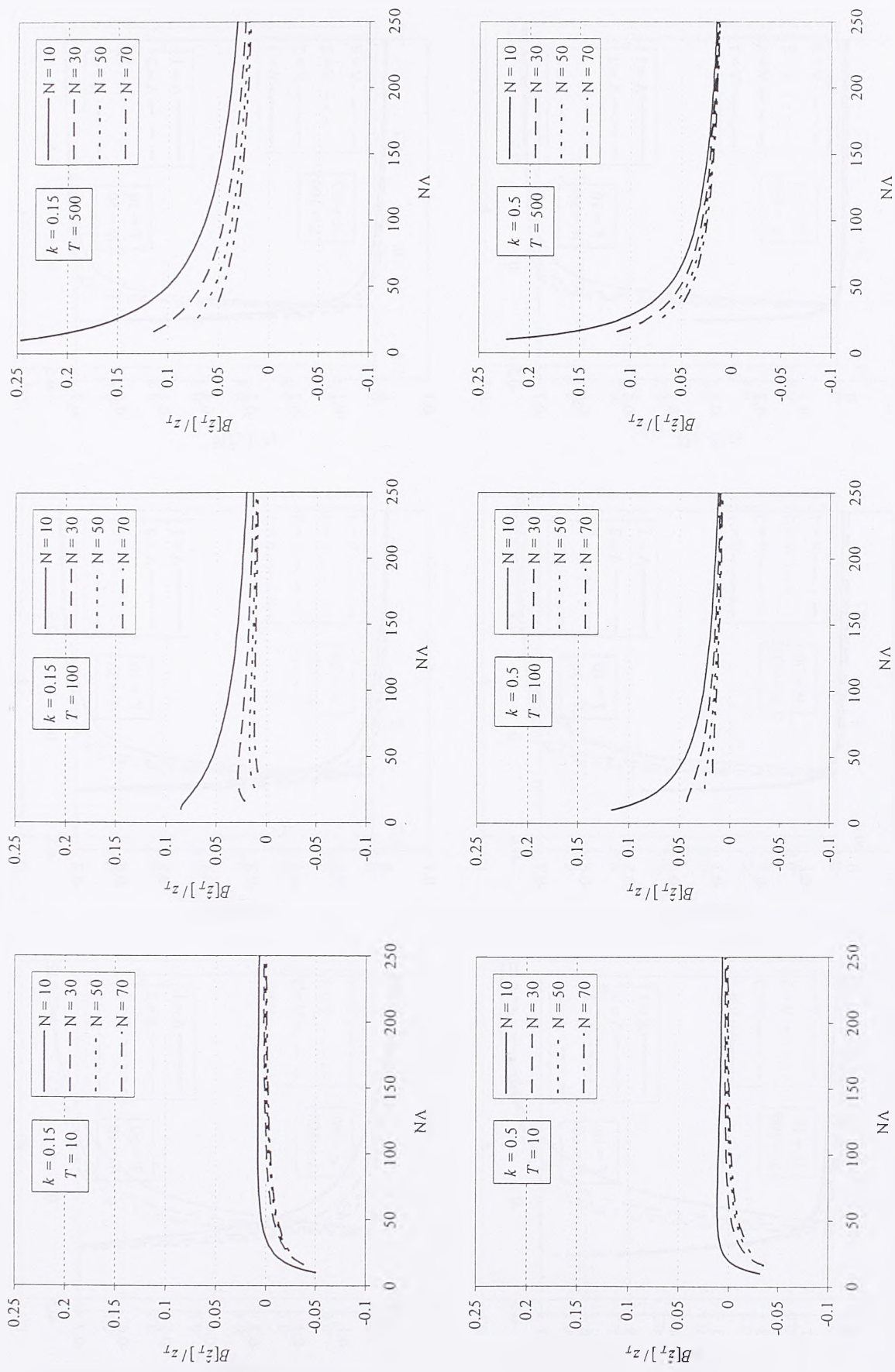
Slika 3. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja N/A (metoda momenata).



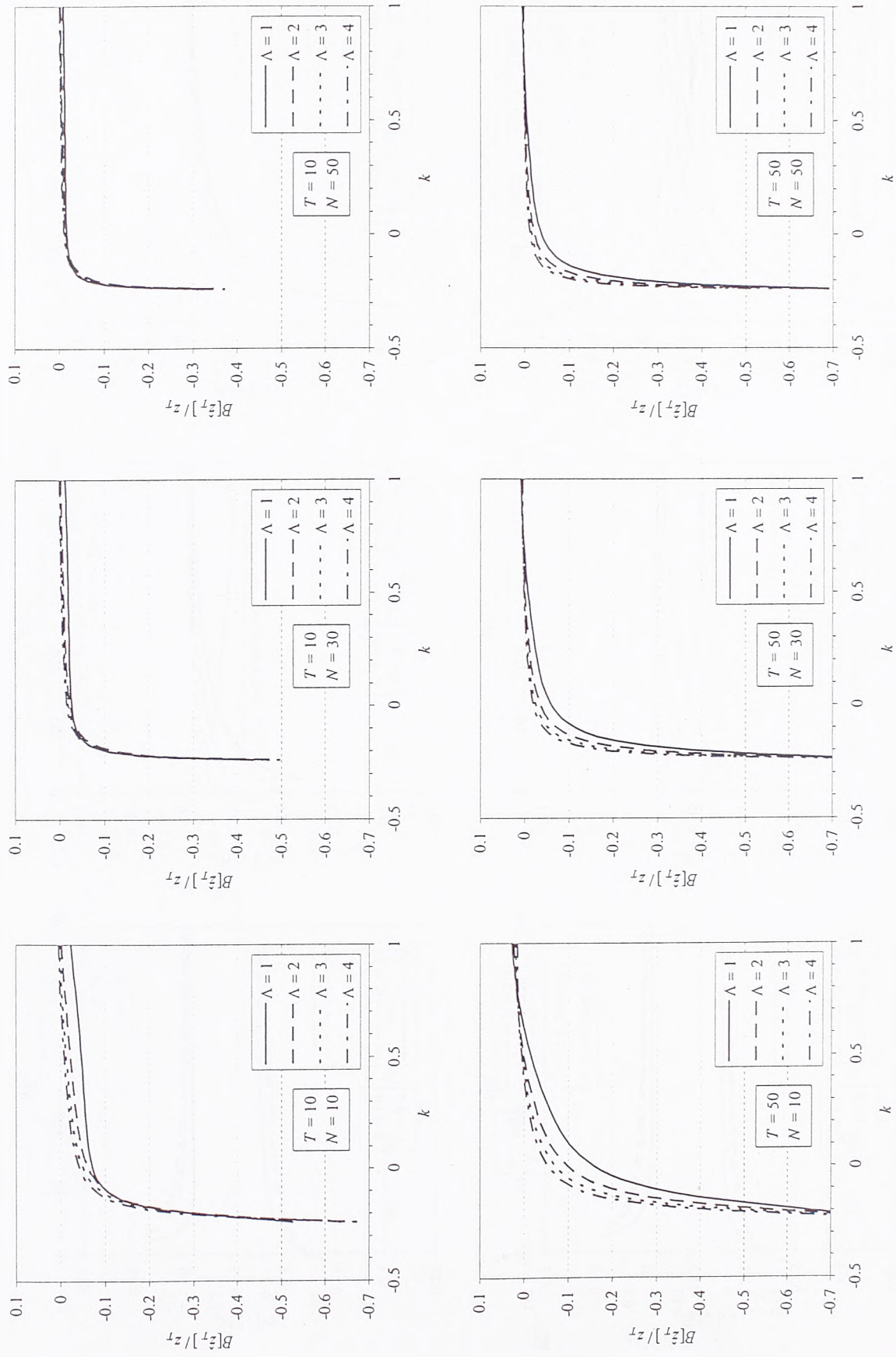
Slika 3 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Delta$ (metoda momenta).



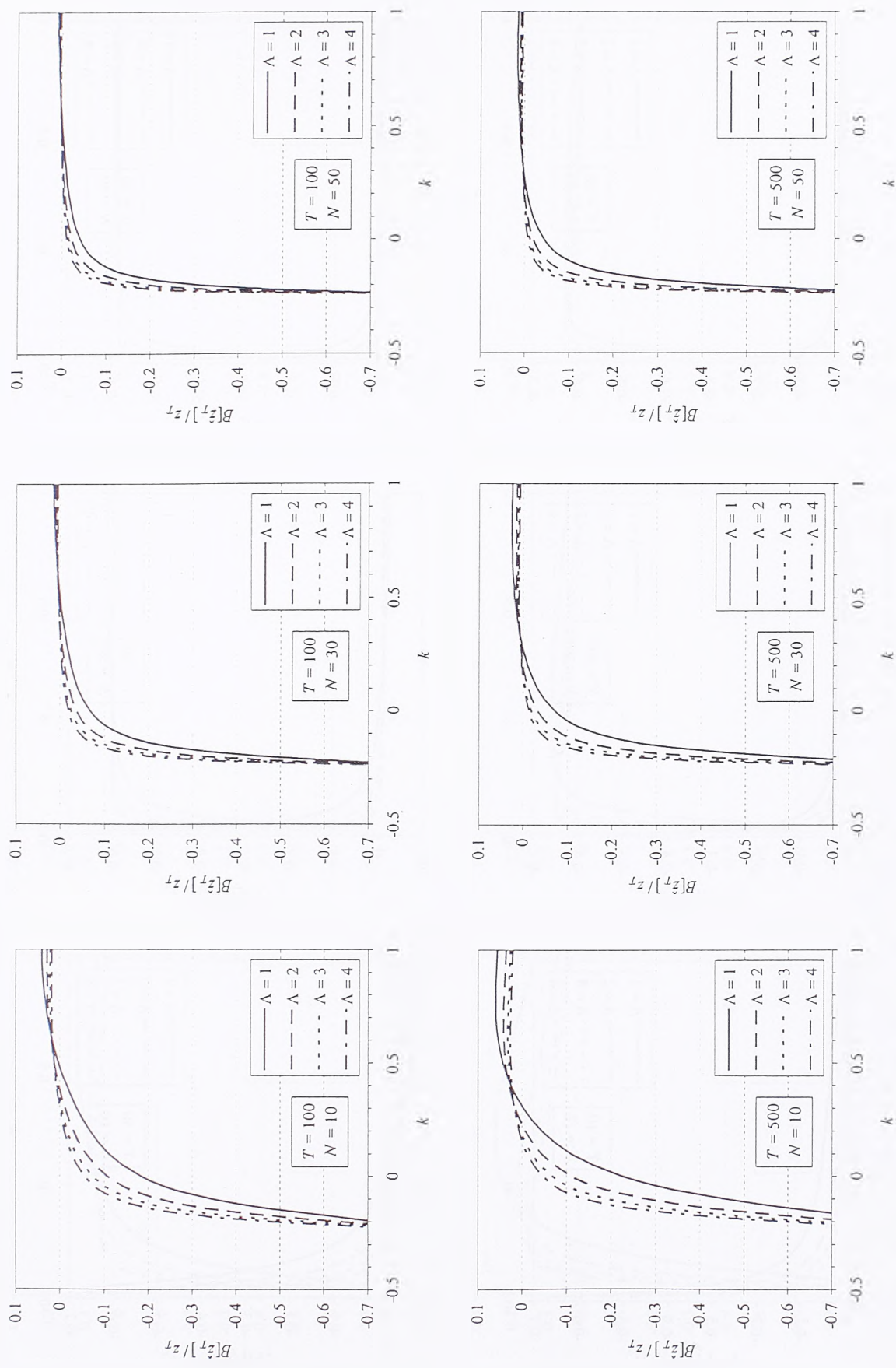
Slika 4. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja NA (metoda težinskih momenata).



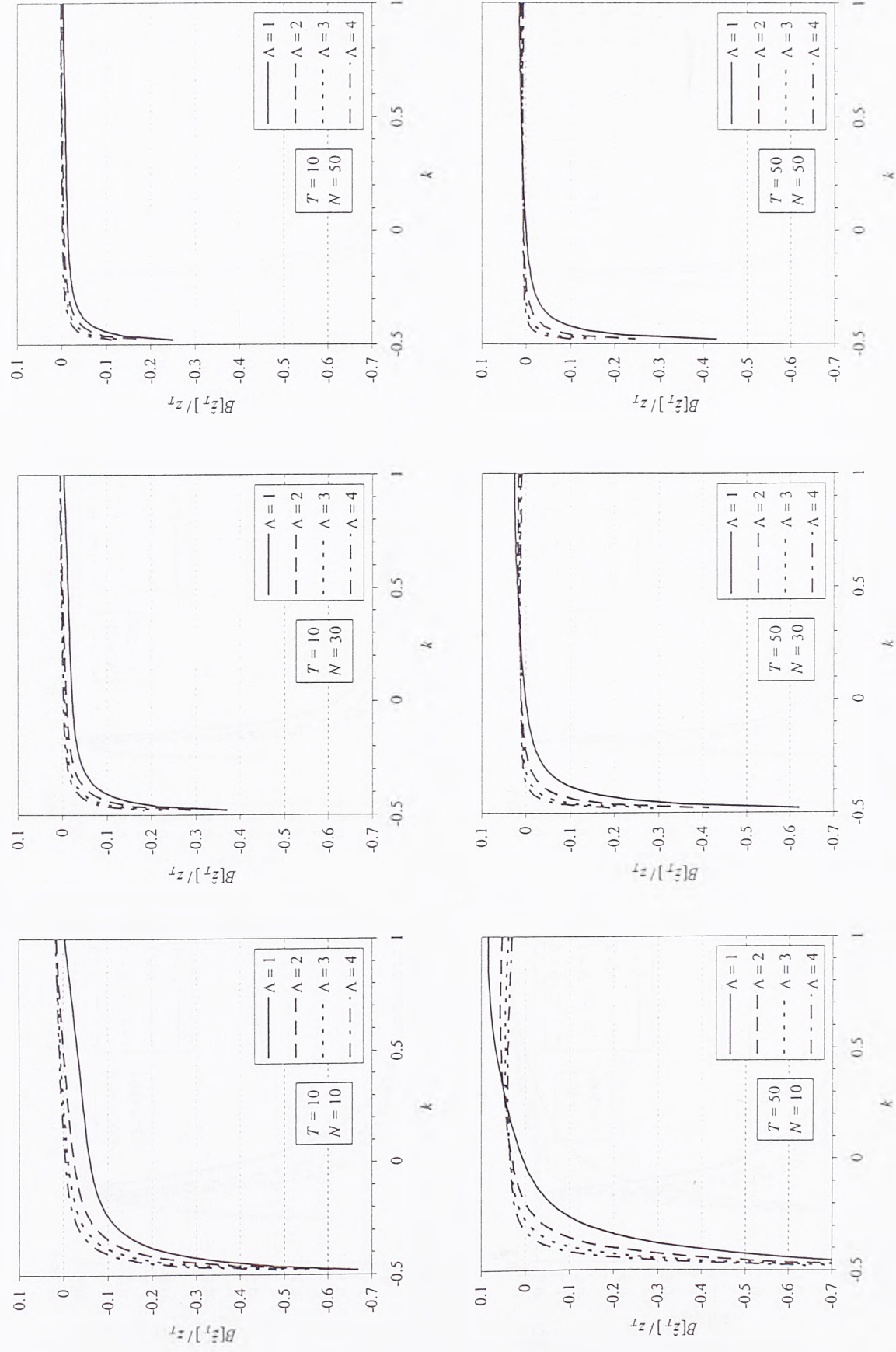
Slika 4 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (metoda težinskih momenata).



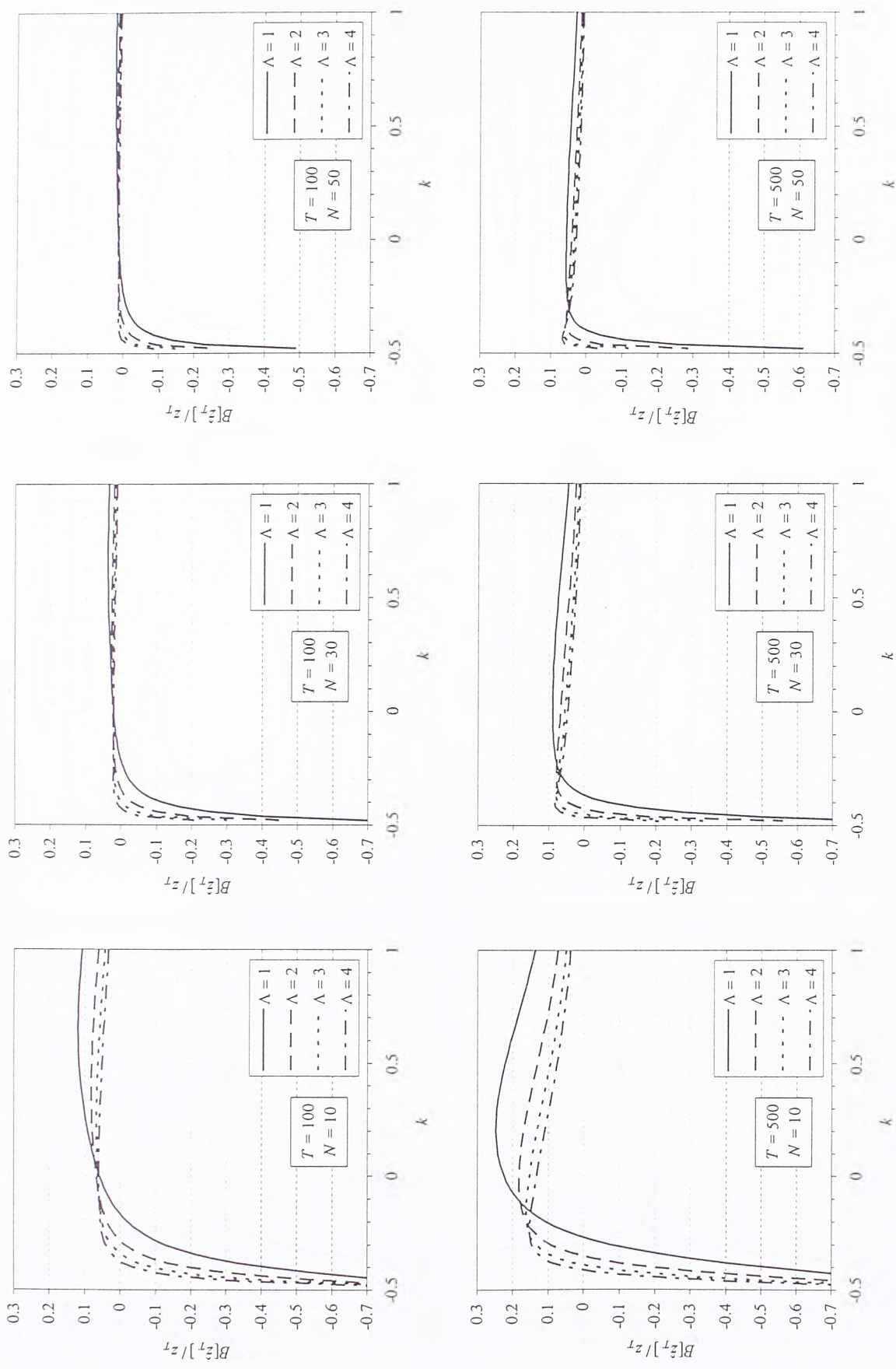
Slika 5. Relativna pristranost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda momenata).



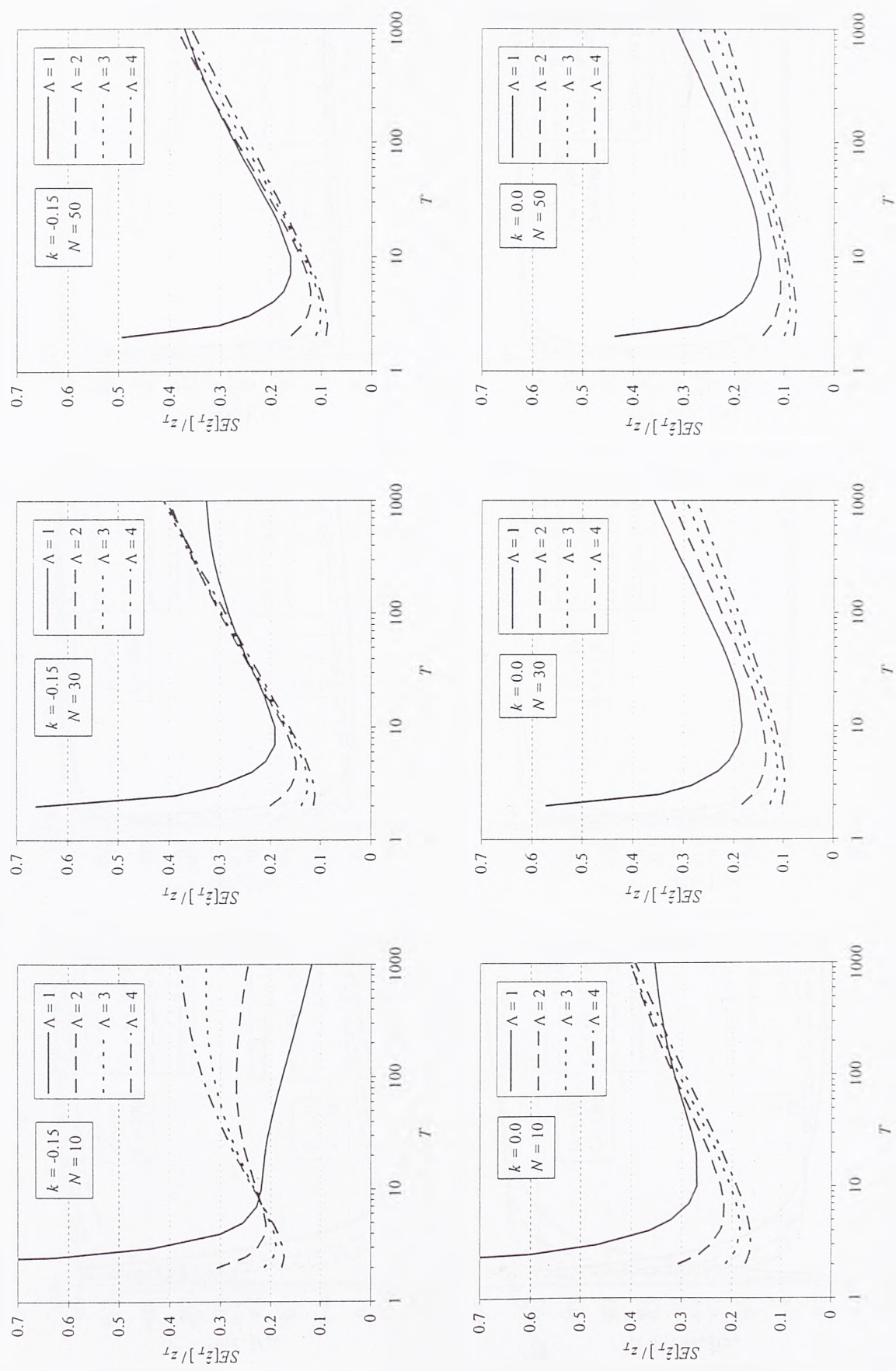
Slika 5 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda momenata).



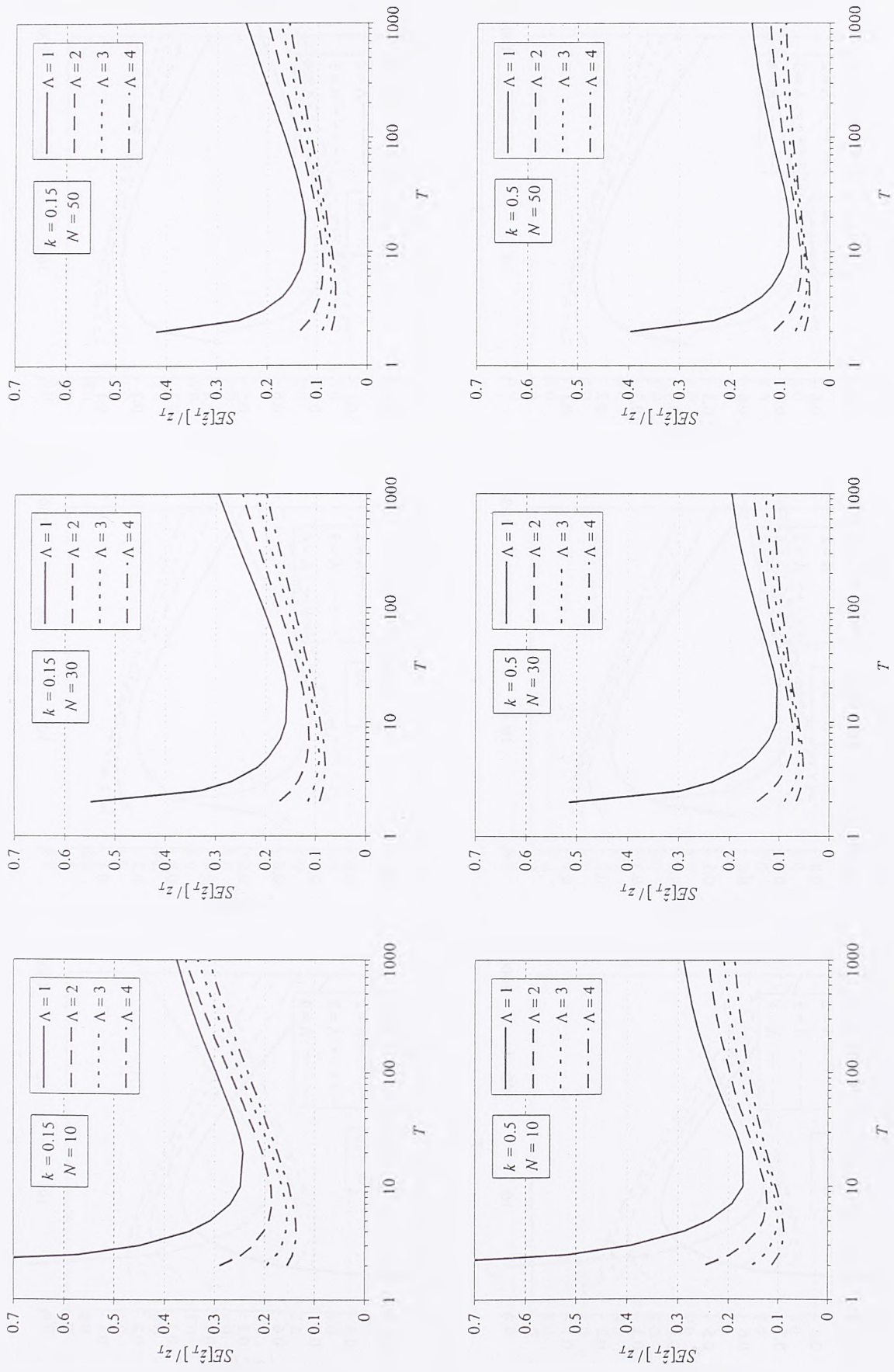
Slika 6. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda težinskih momenata).



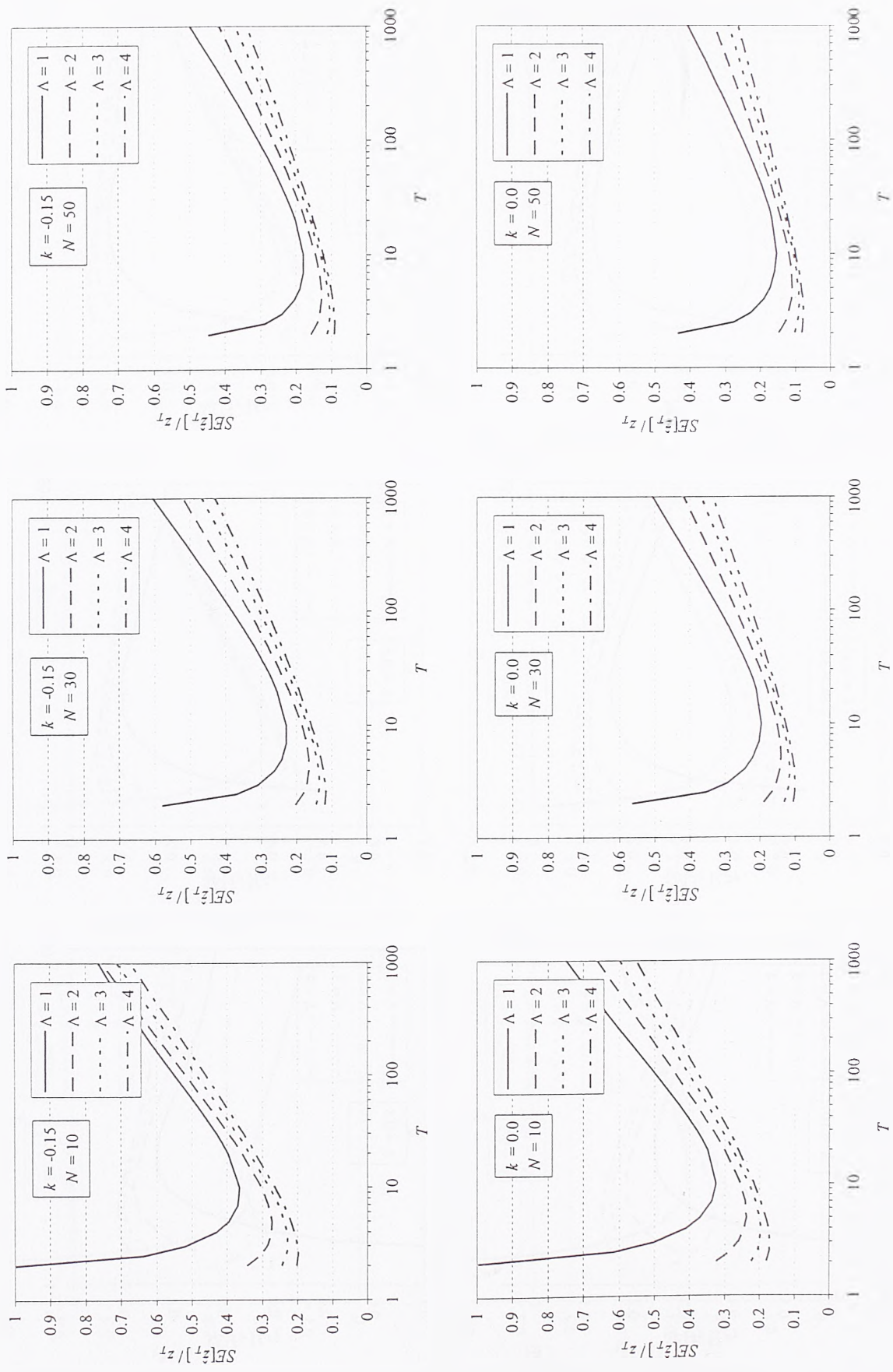
Slika 6 (nastavak). Relativna pristranost ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda težinskih momenata).



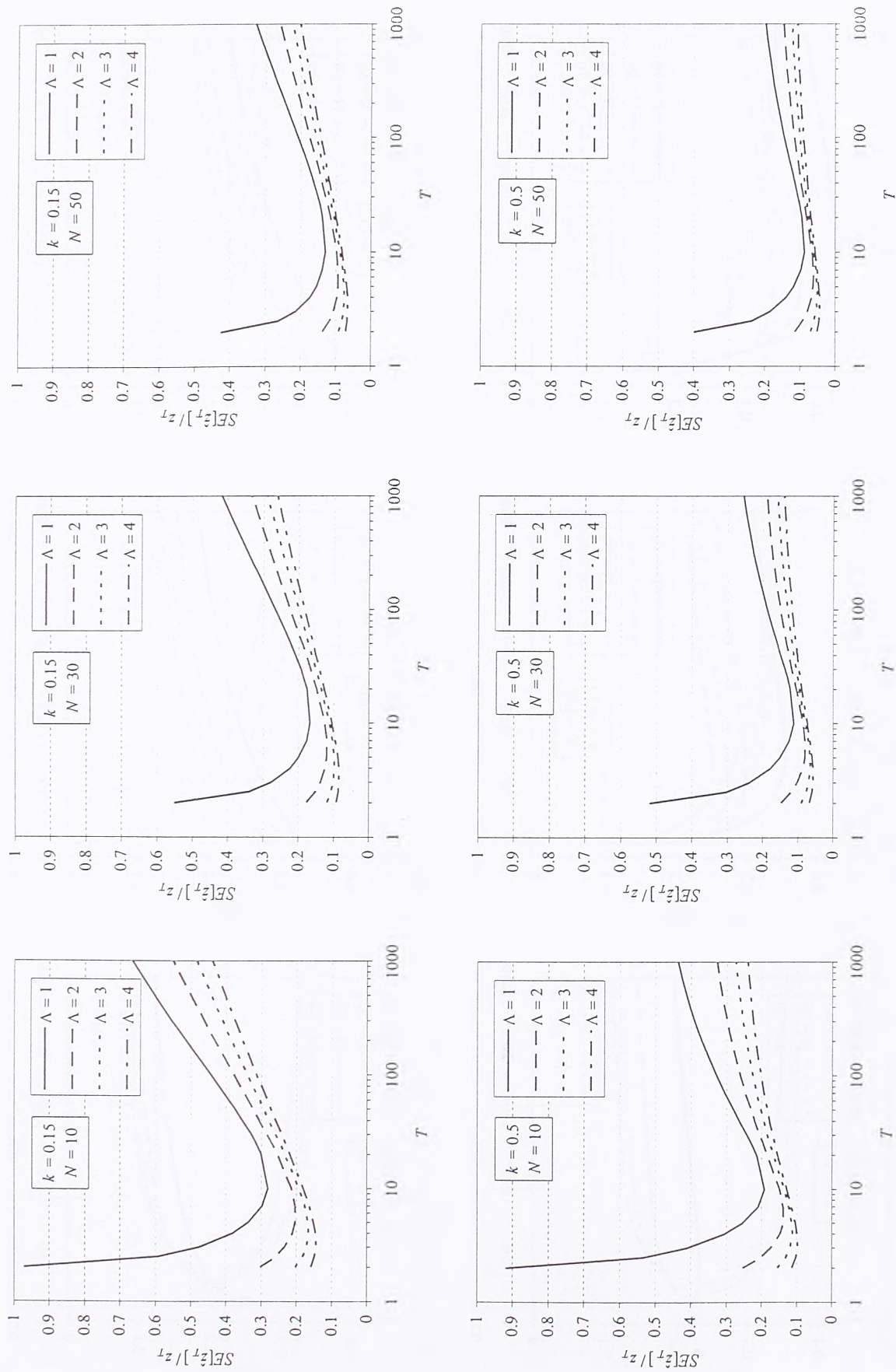
Slika 7. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).



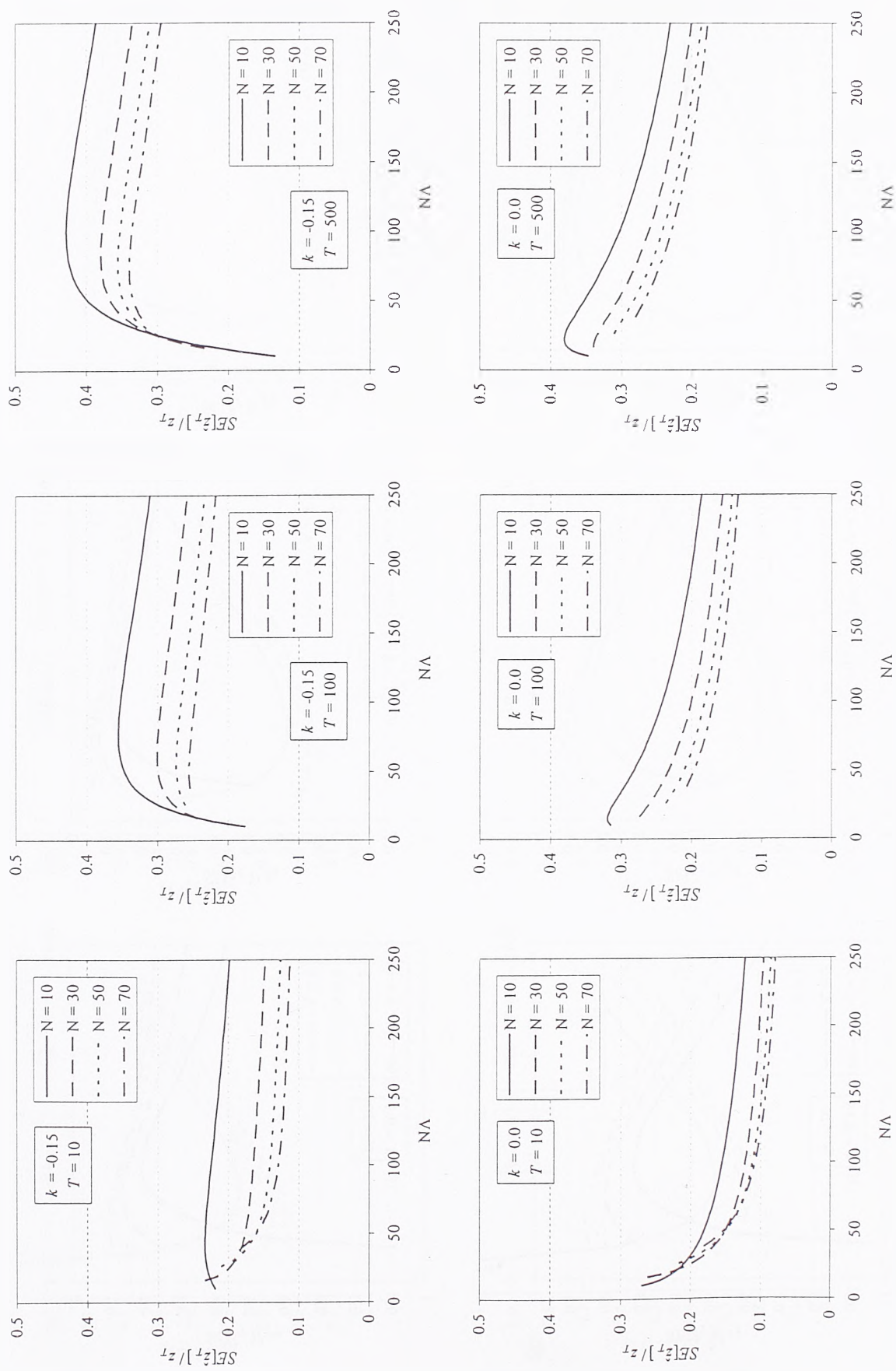
Slika 7 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).

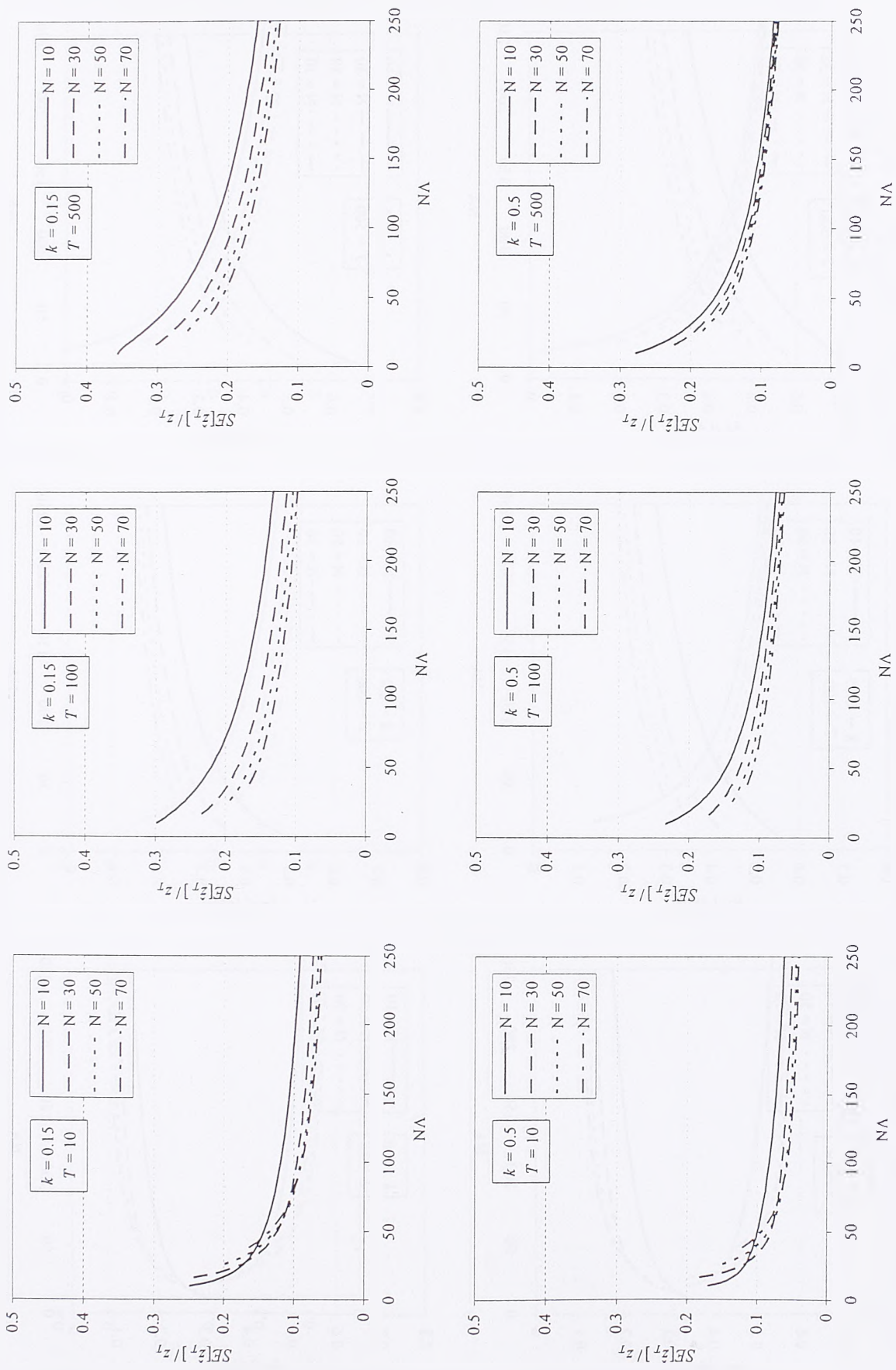


Slika 8. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).

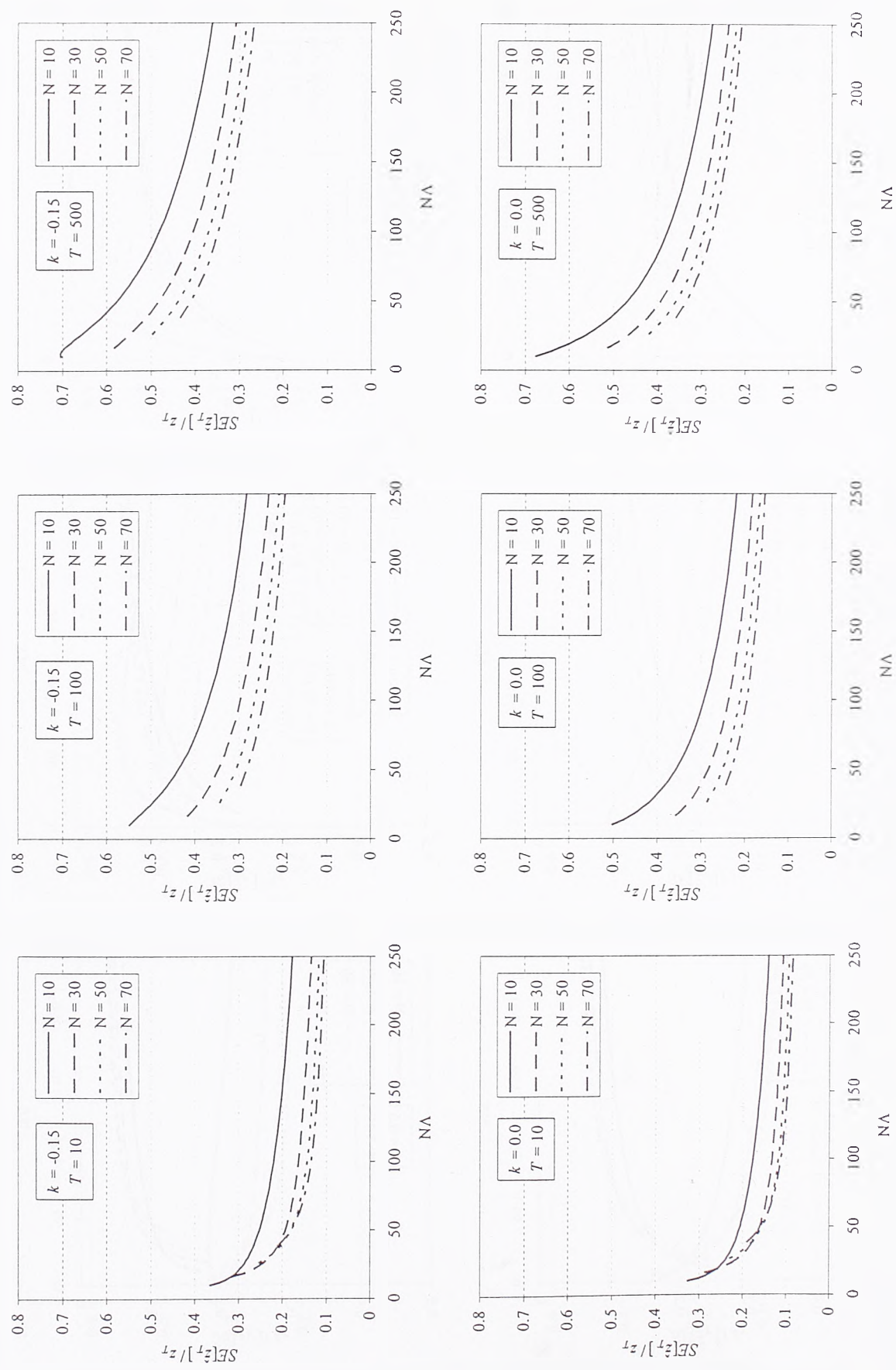


Slika 8 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).

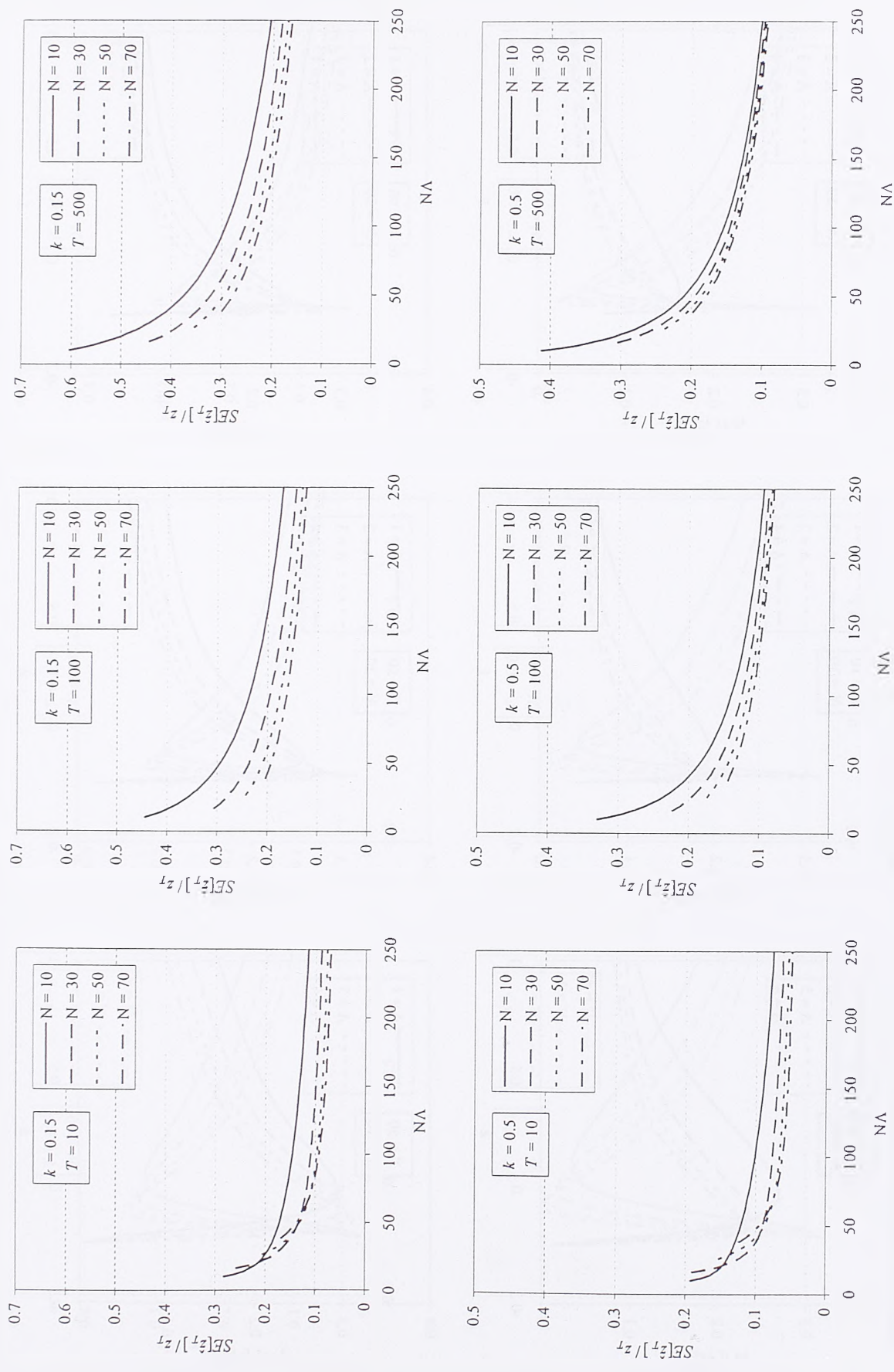
Slika 9. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Delta$ (metoda momenata).



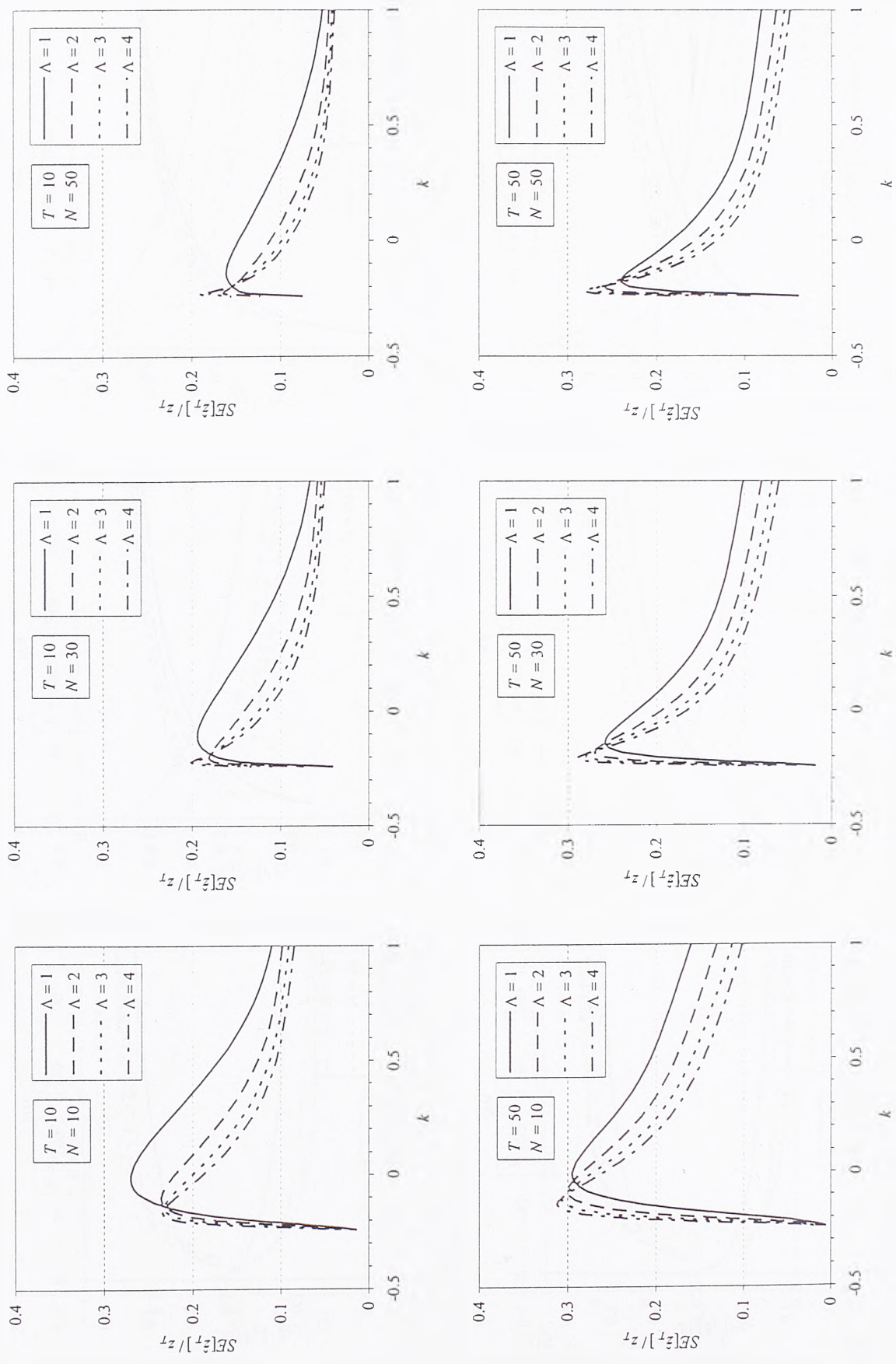
Slika 9 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja NA (metoda momenata).



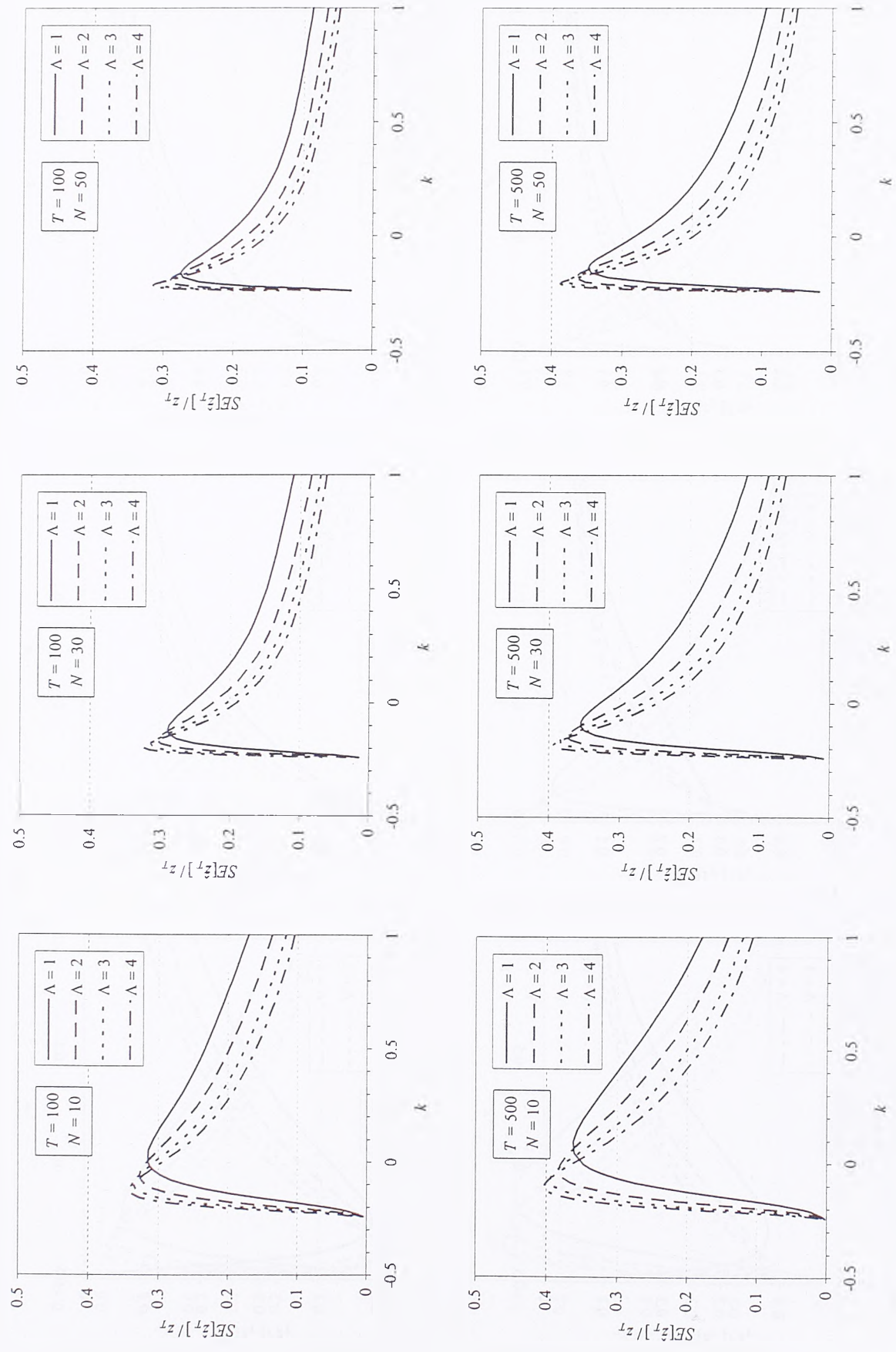
Slika 10. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\lambda$ (metoda težinskih momenata).



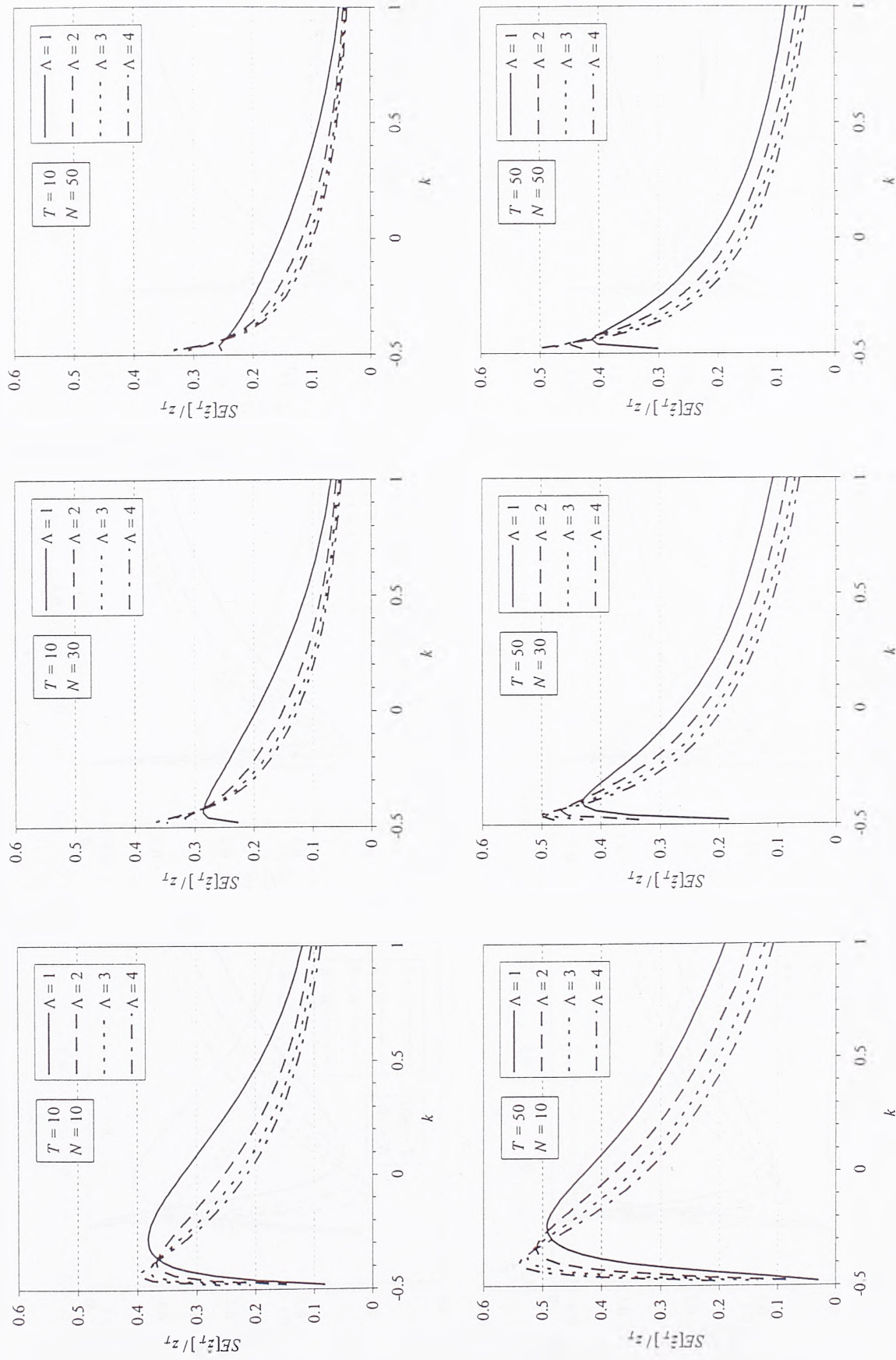
Slika 10 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (metoda težinskih momenata).

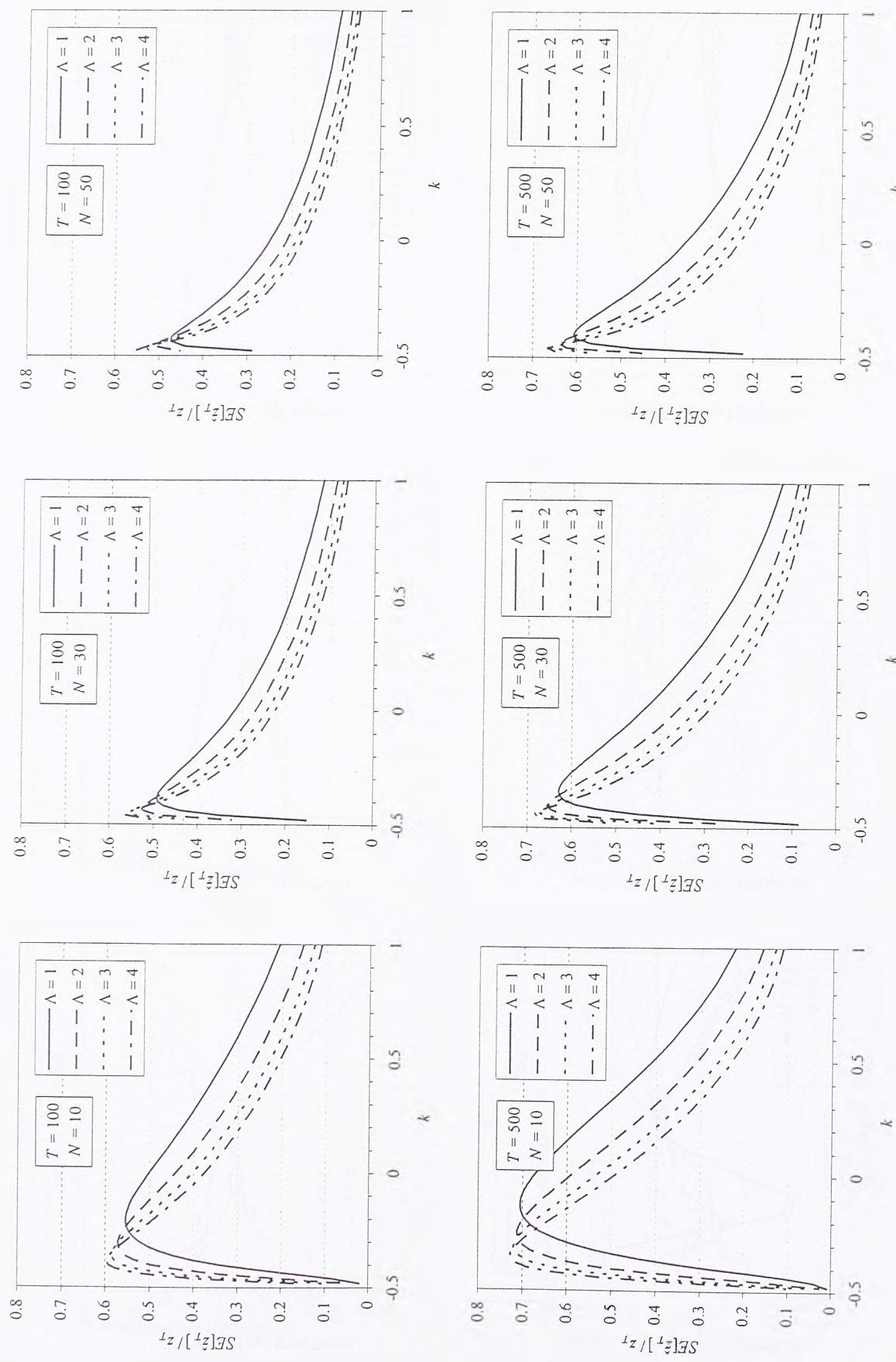


Slika 11. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda momenata).

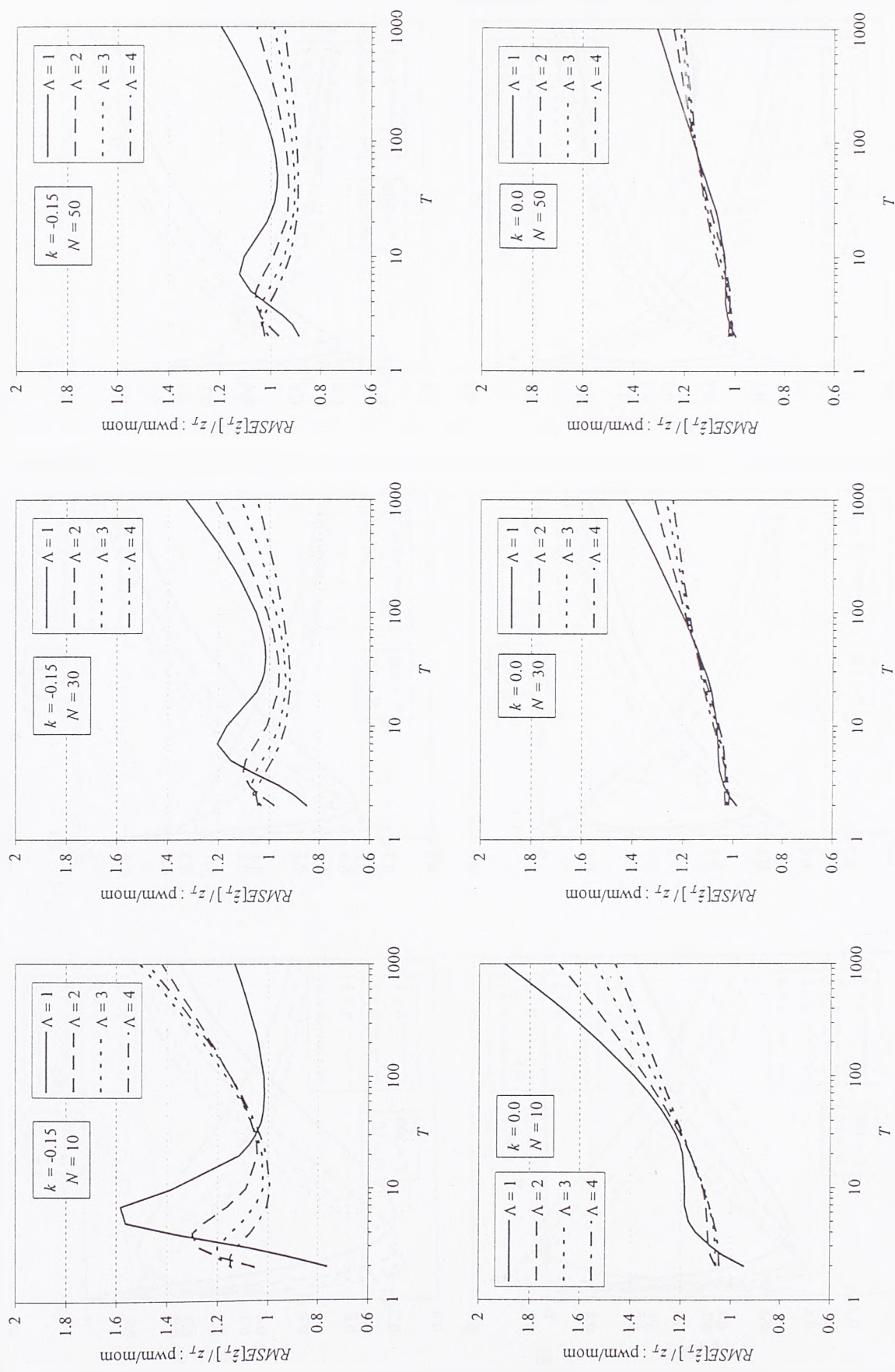


Slika 11 (nastavak): Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda momenata).

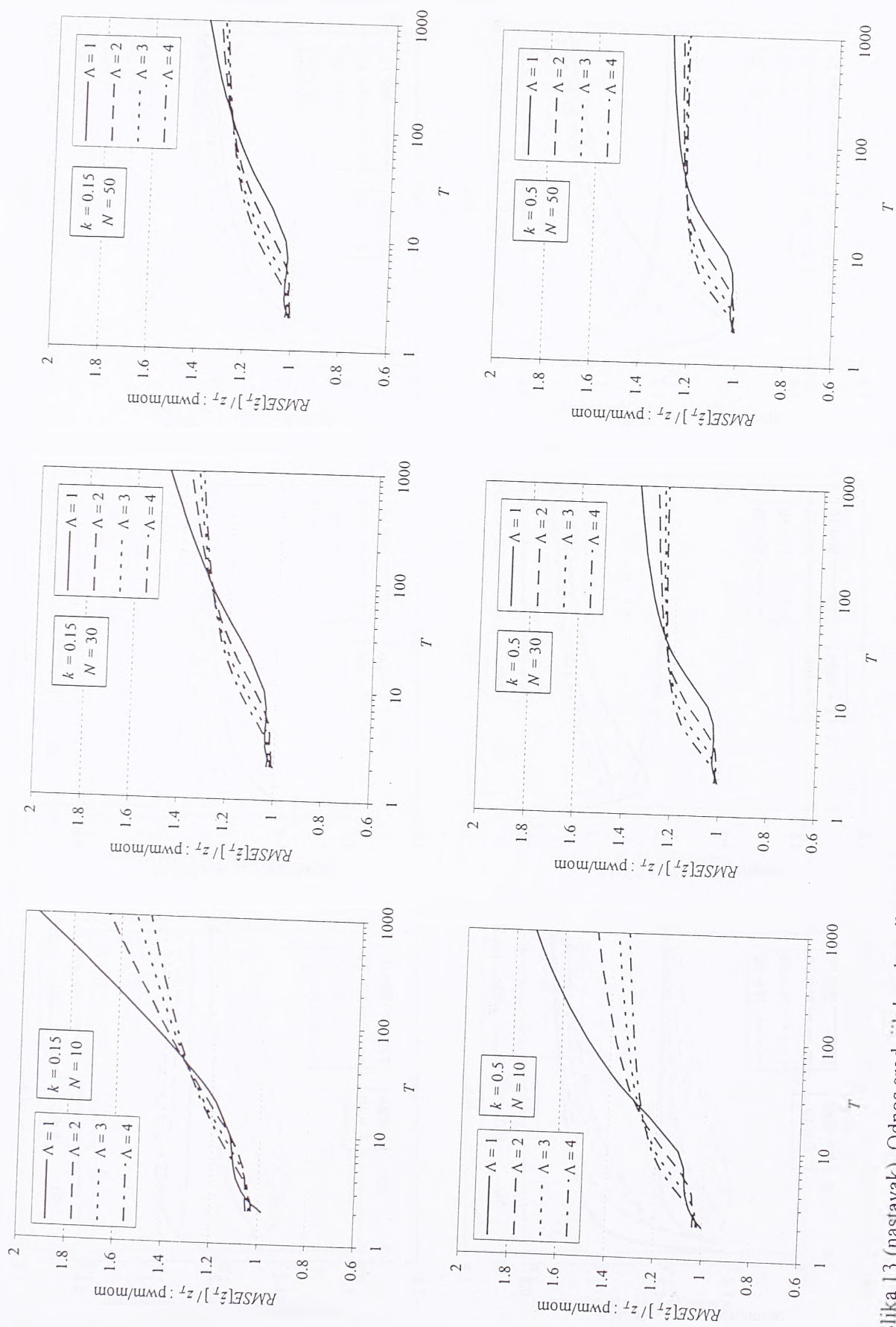
Slika 12. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda težinskih momenata).



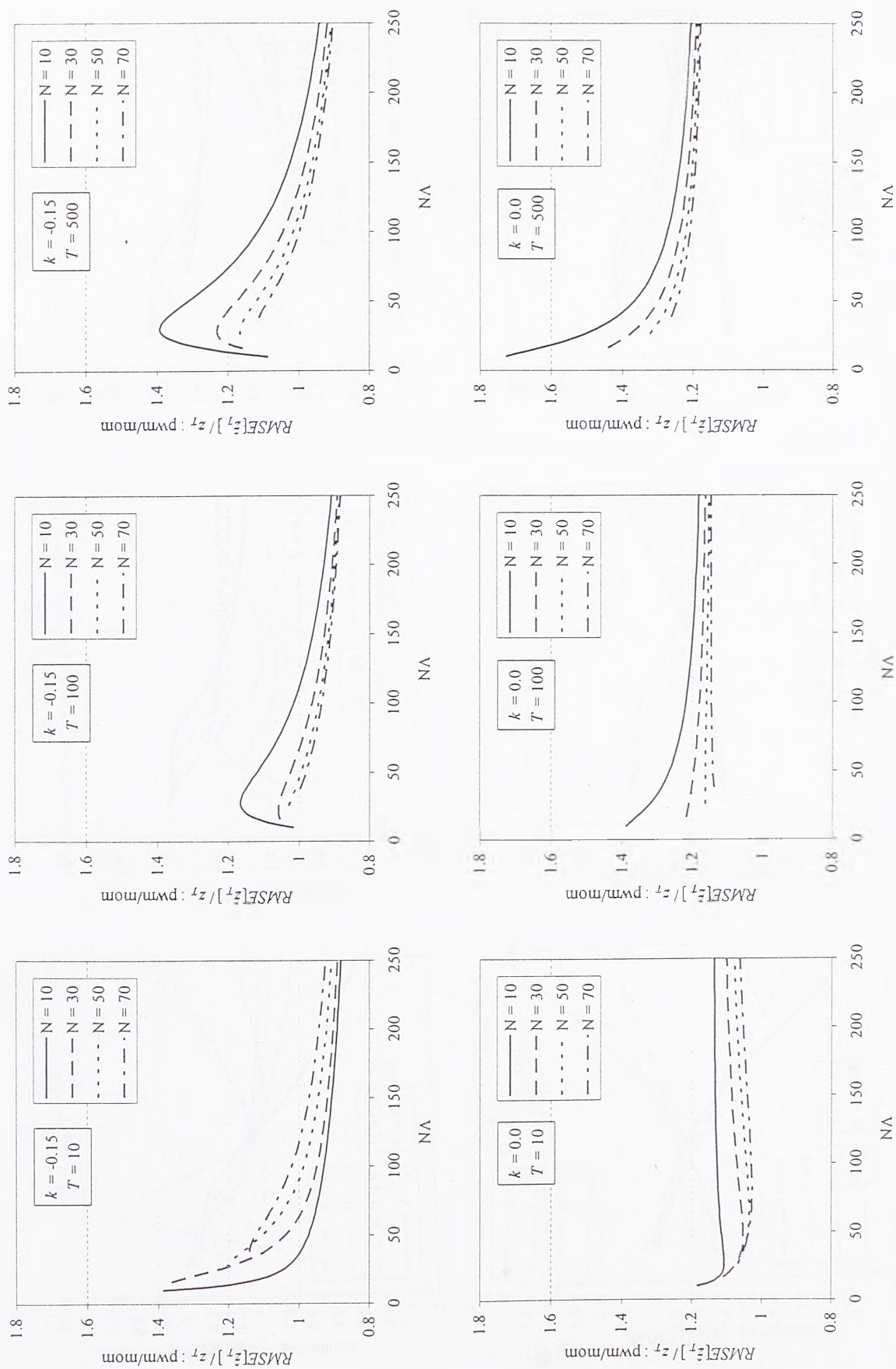
Slika 12 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+GP u zavisnosti od vrednosti parametra k (metoda težinskih momenata).



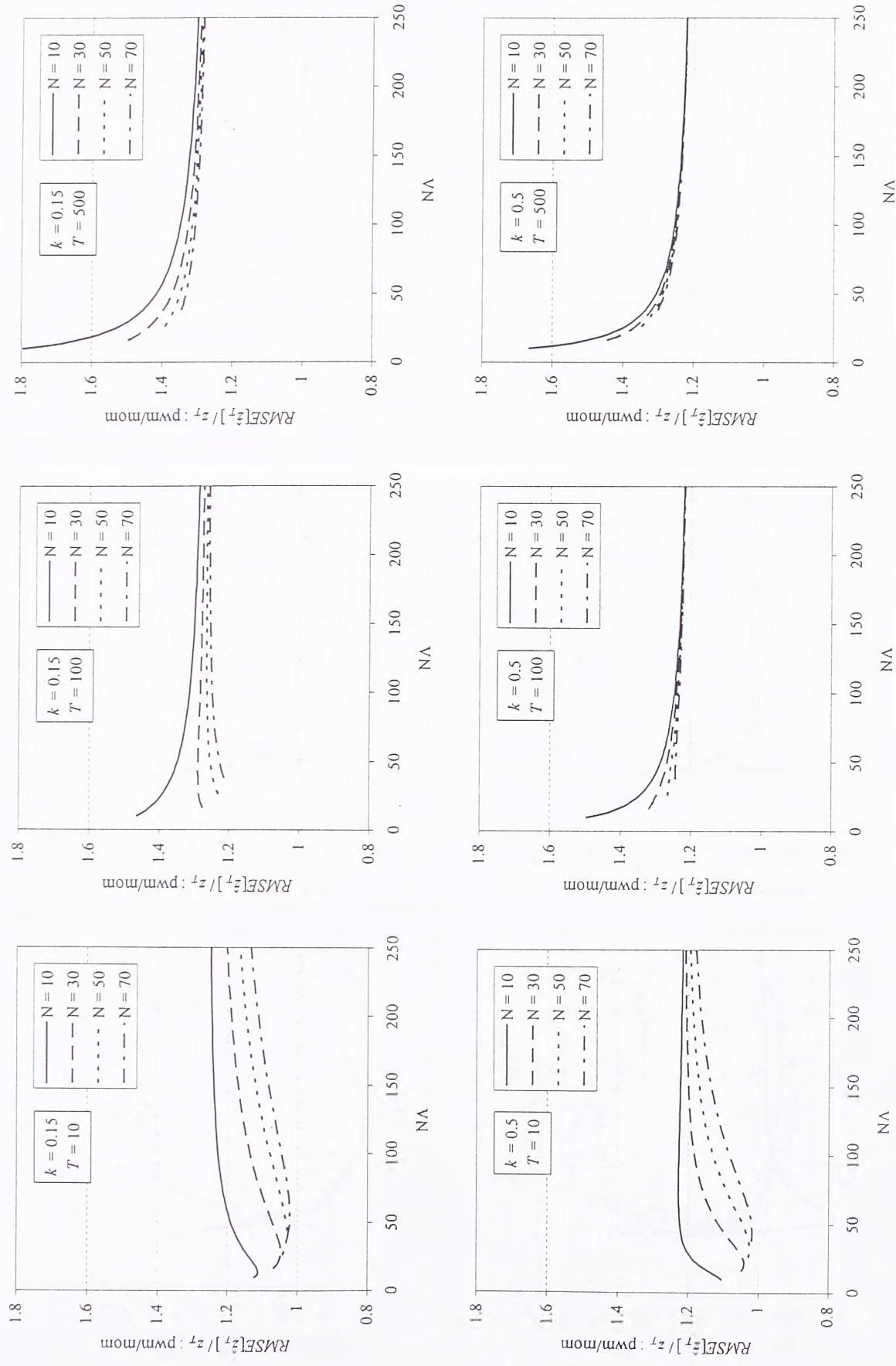
Slika 13. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+GP prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od povratnog perioda.



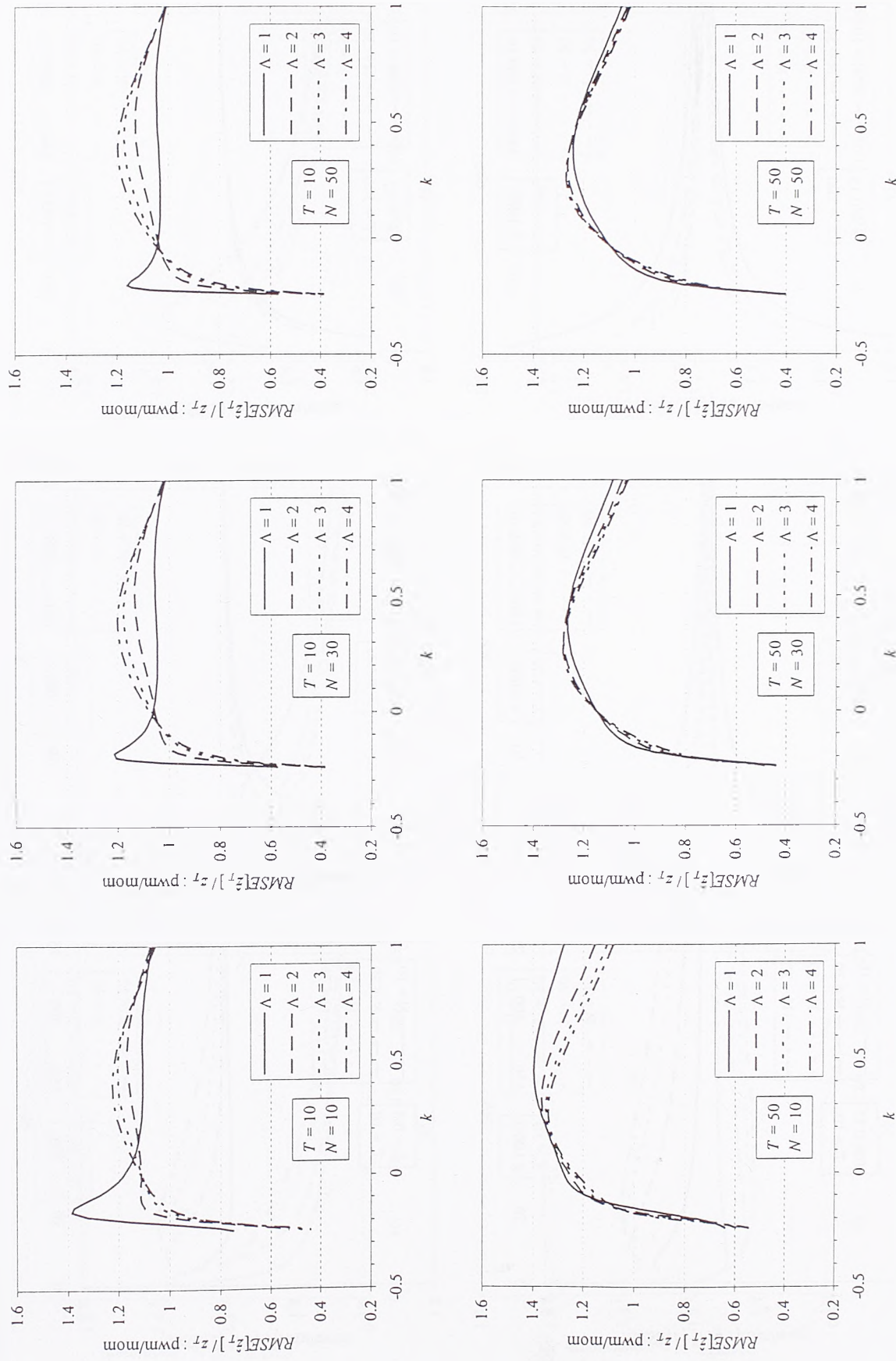
Slika 13 (nastavak). Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+GP prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od povratnog perioda.



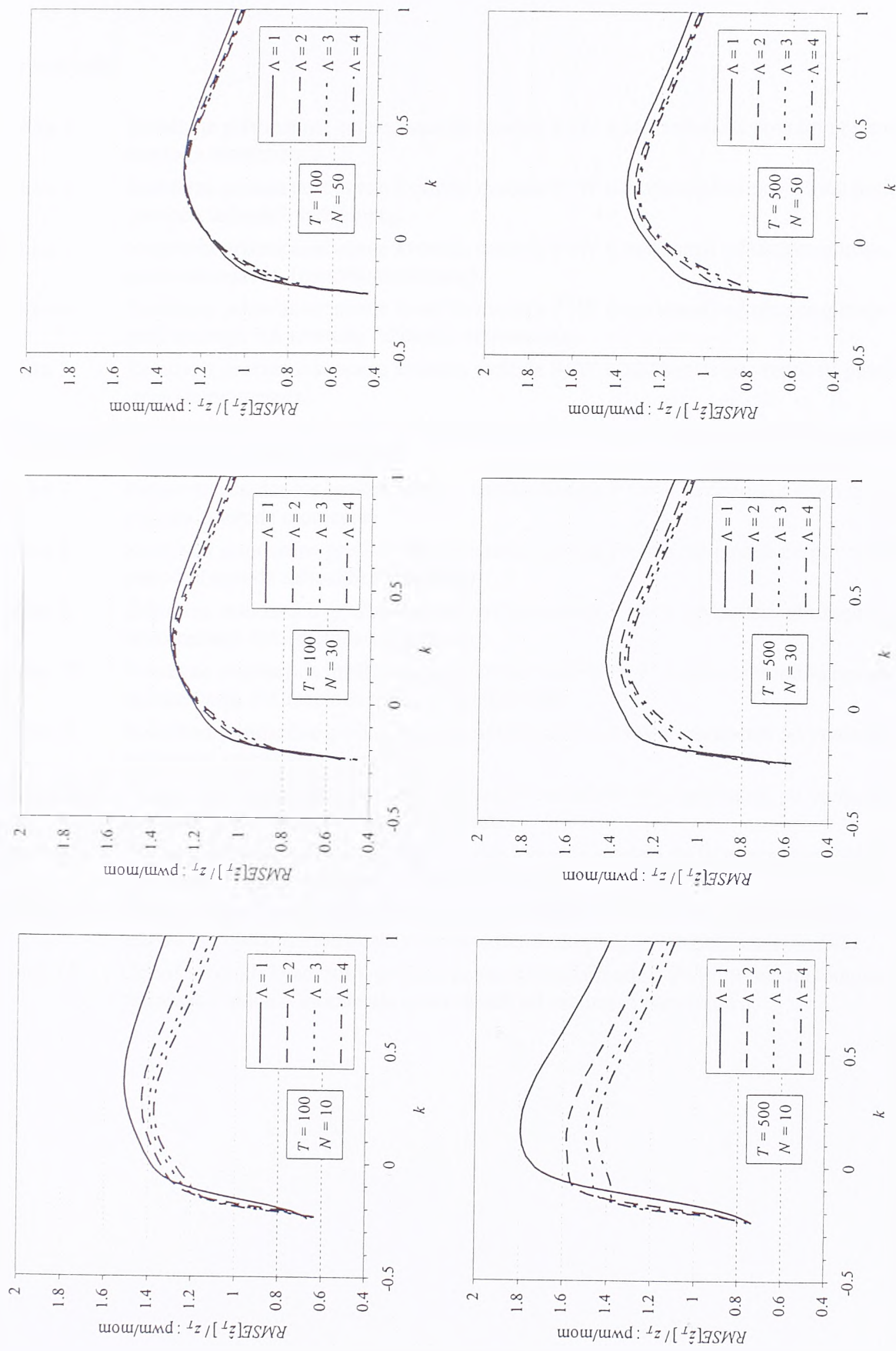
Slika 14. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+GP prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja N/A .



Slika 14 (nastavak). Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+GP prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od ukupnog broja prekorčenja NA .



Slika 15. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+GP prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od vrednosti parametra k .



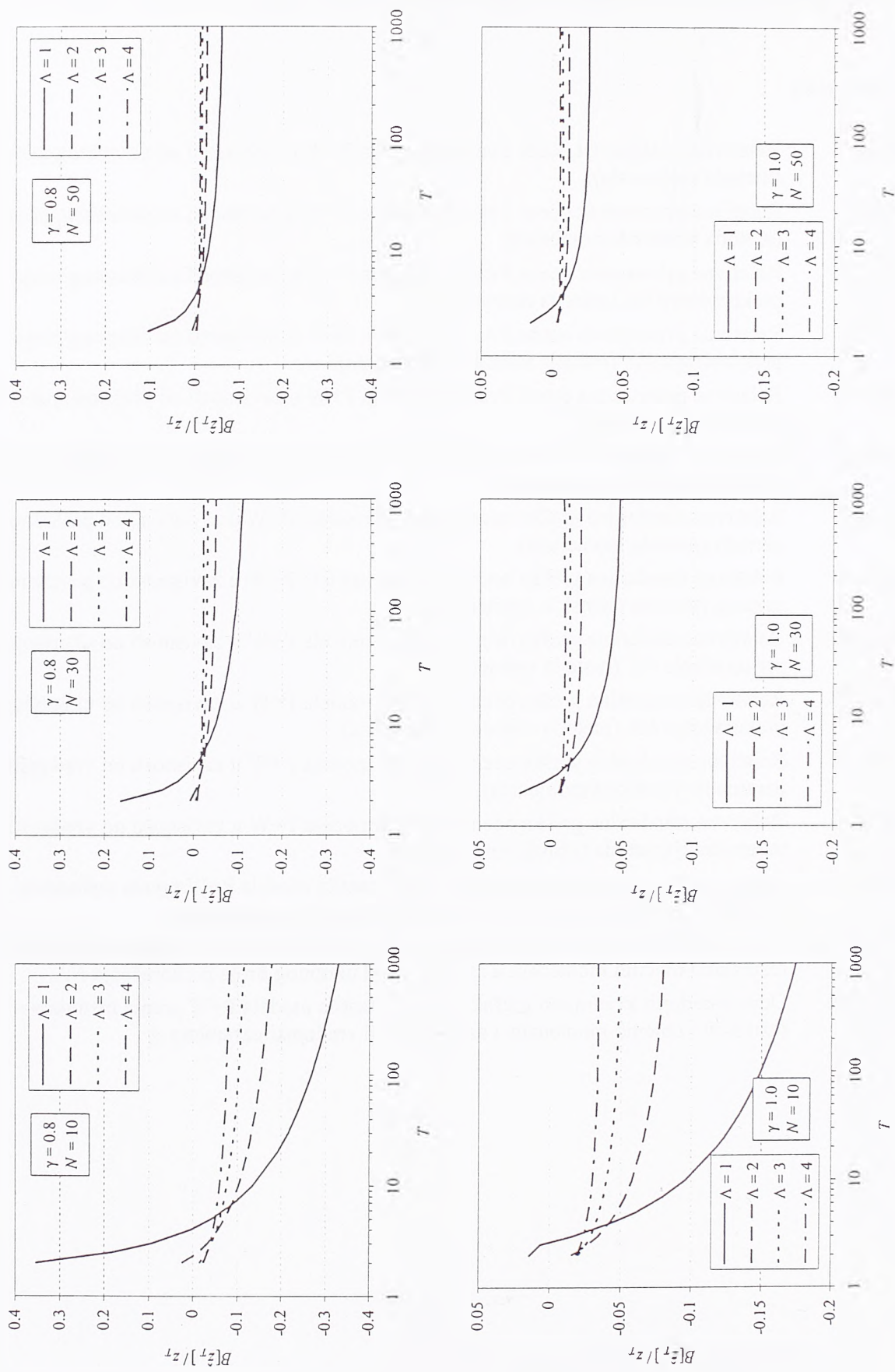
Slika 15 (nastavak). Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+GP prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od vrednosti parametra k .

PRILOG C3

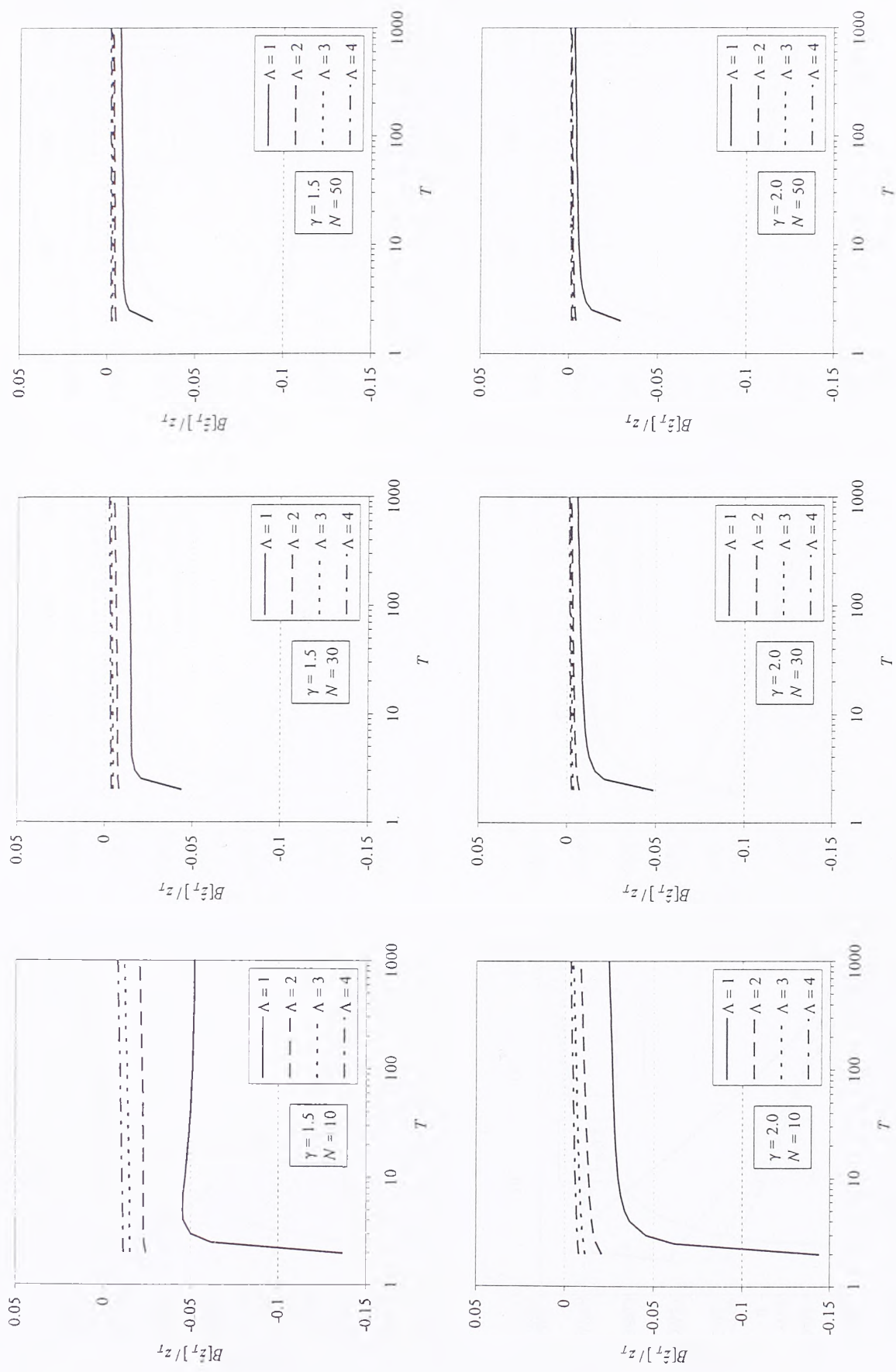
Svojstva ocene kvantila modelom P+W

Spisak slika

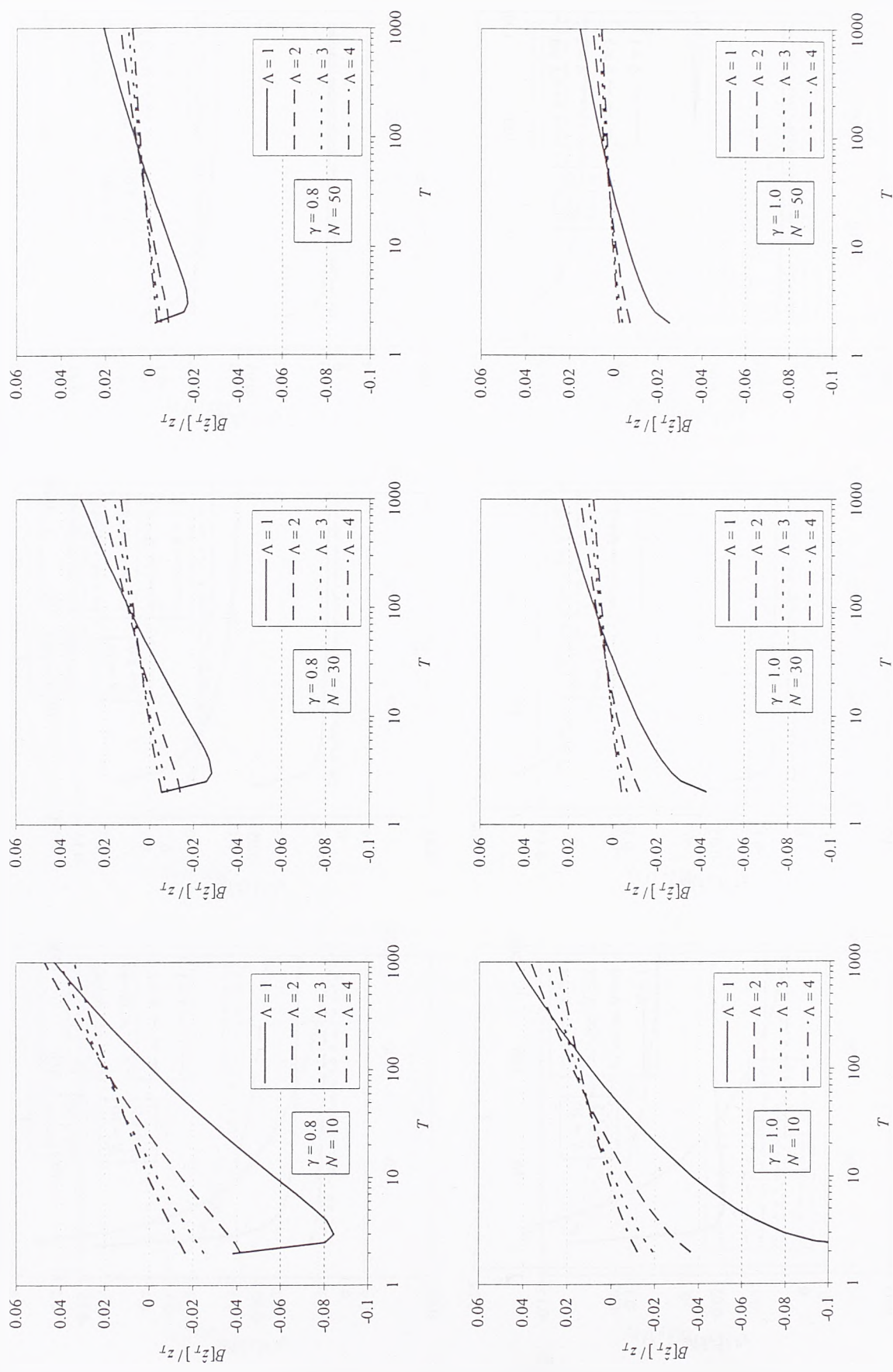
- Slika 1. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).
- Slika 2. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).
- Slika 3. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (metoda momenata).
- Slika 4. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (metoda težinskih momenata).
- Slika 5. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda momenata).
- Slika 6. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda težinskih momenata).
- Slika 7. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).
- Slika 8. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).
- Slika 9. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (metoda momenata).
- Slika 10. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (metoda težinskih momenata).
- Slika 11. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda momenata).
- Slika 12. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda težinskih momenata).
- Slika 13. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+W prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od povratnog perioda.
- Slika 14. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+W prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.
- Slika 15. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+W prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od vrednosti parametra γ .



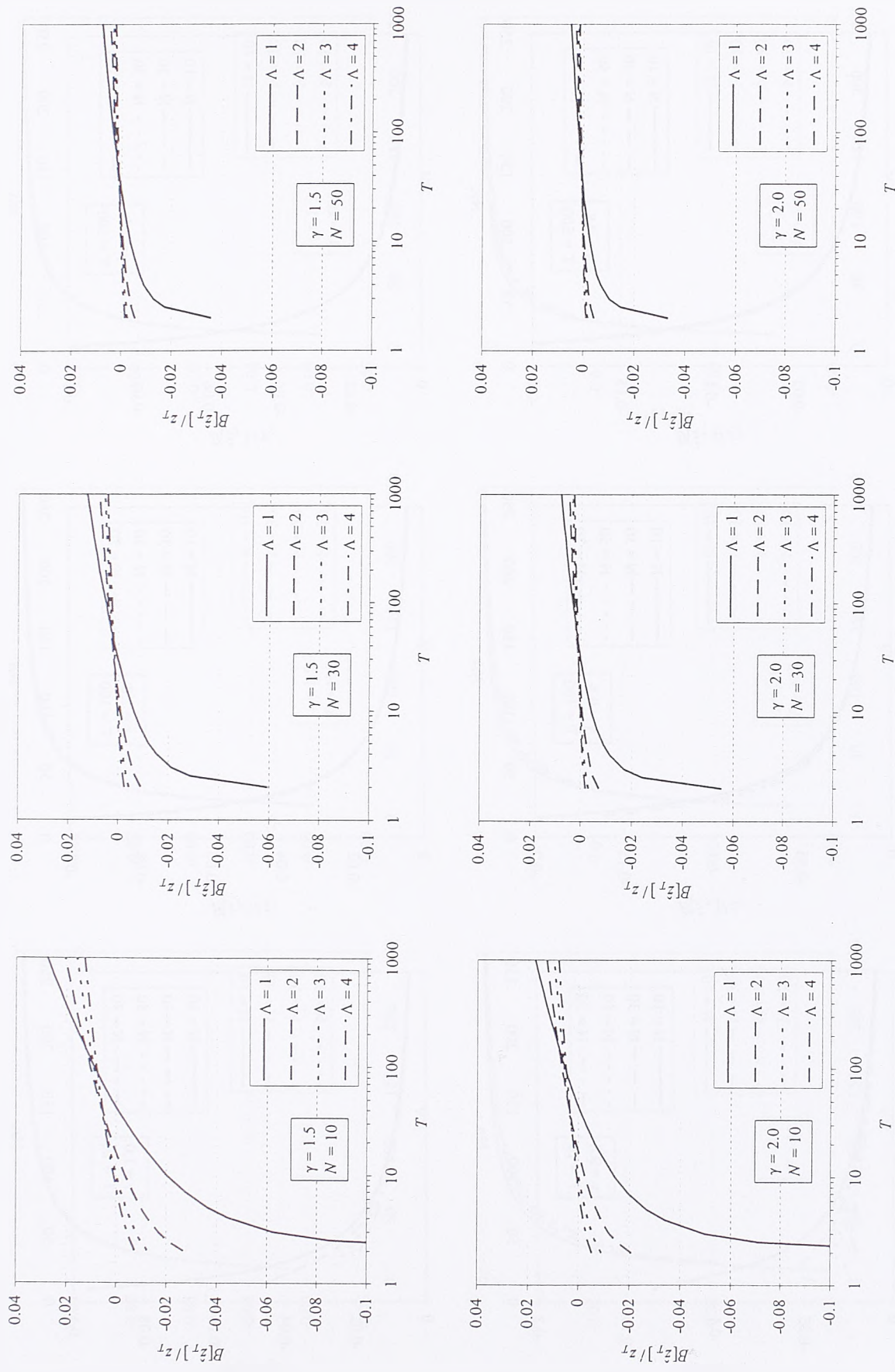
Slika 1. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).



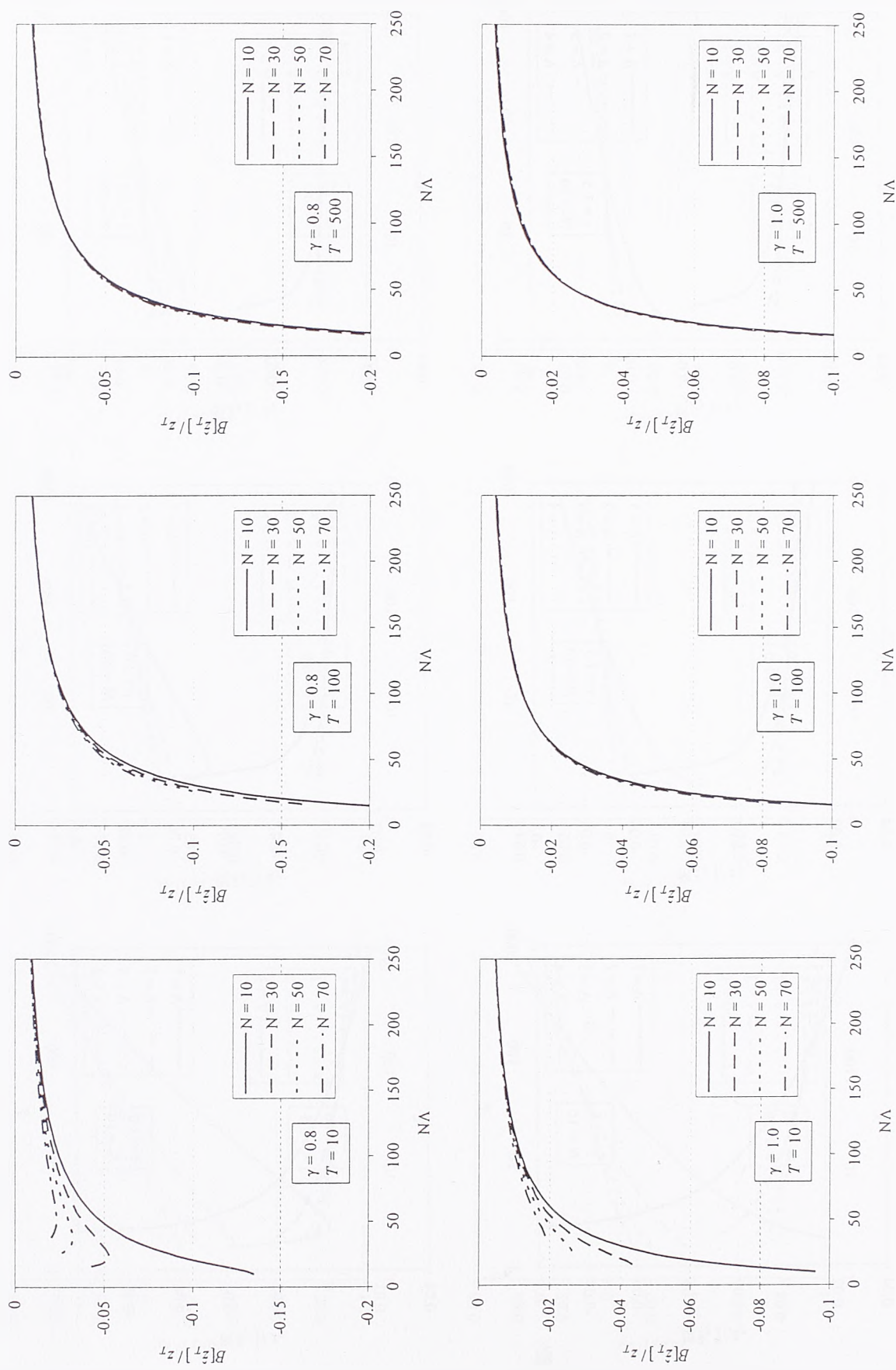
Slika 1 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).



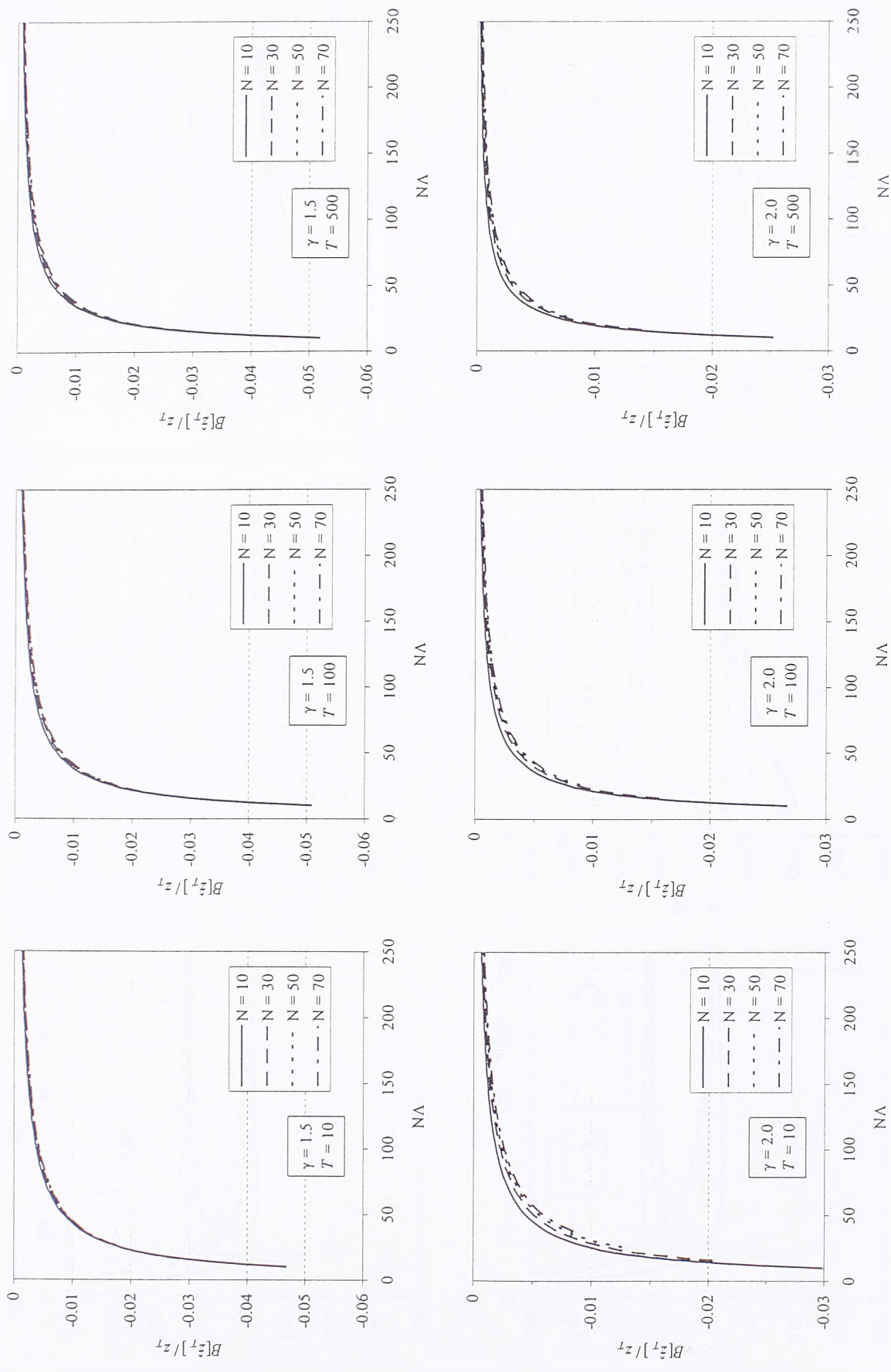
Slika 2. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).



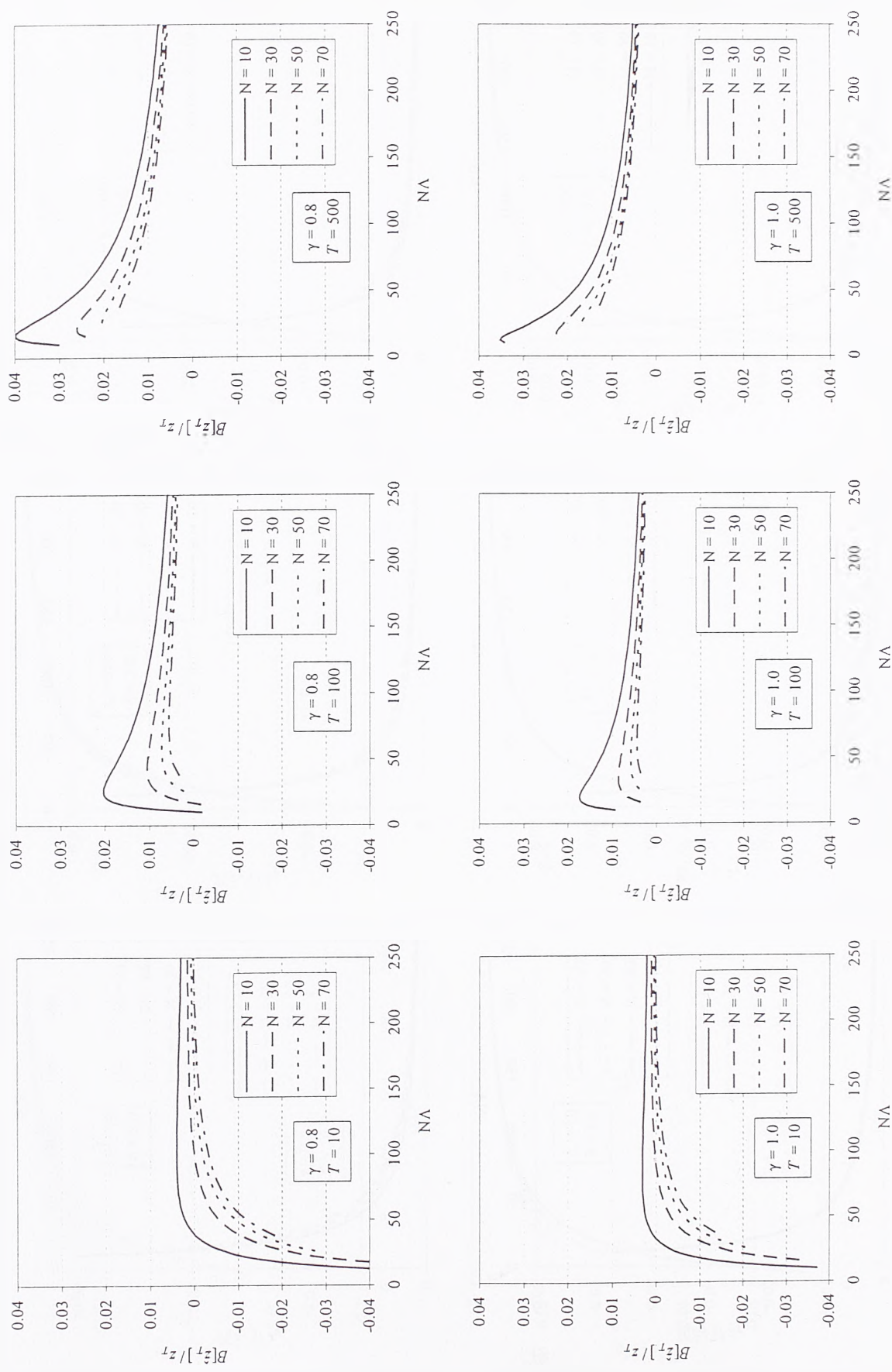
Slika 2 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).



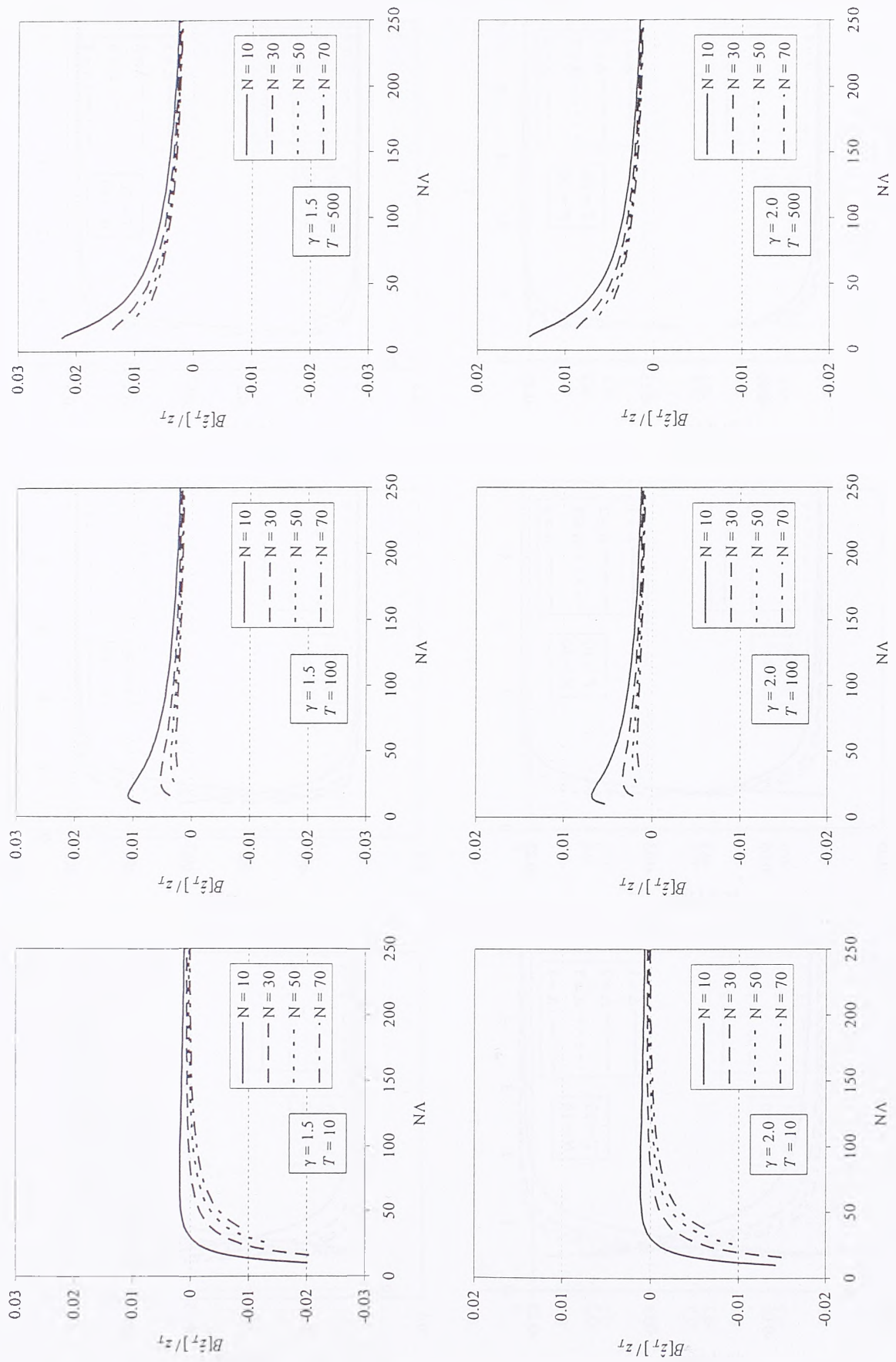
Slika 3. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekraćenja $N\lambda$ (metoda momenata).



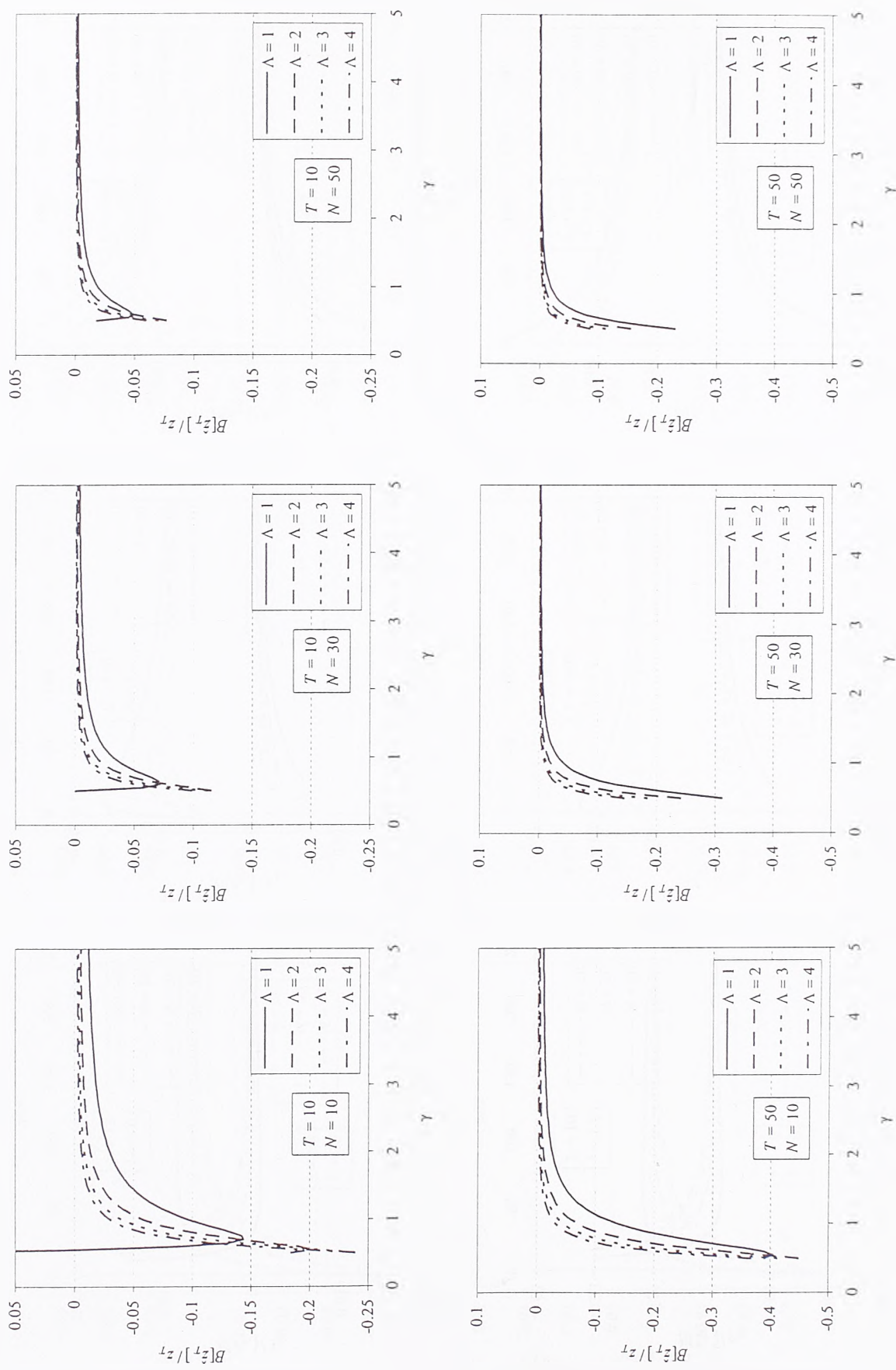
Slika 3 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$ (metoda momenata).



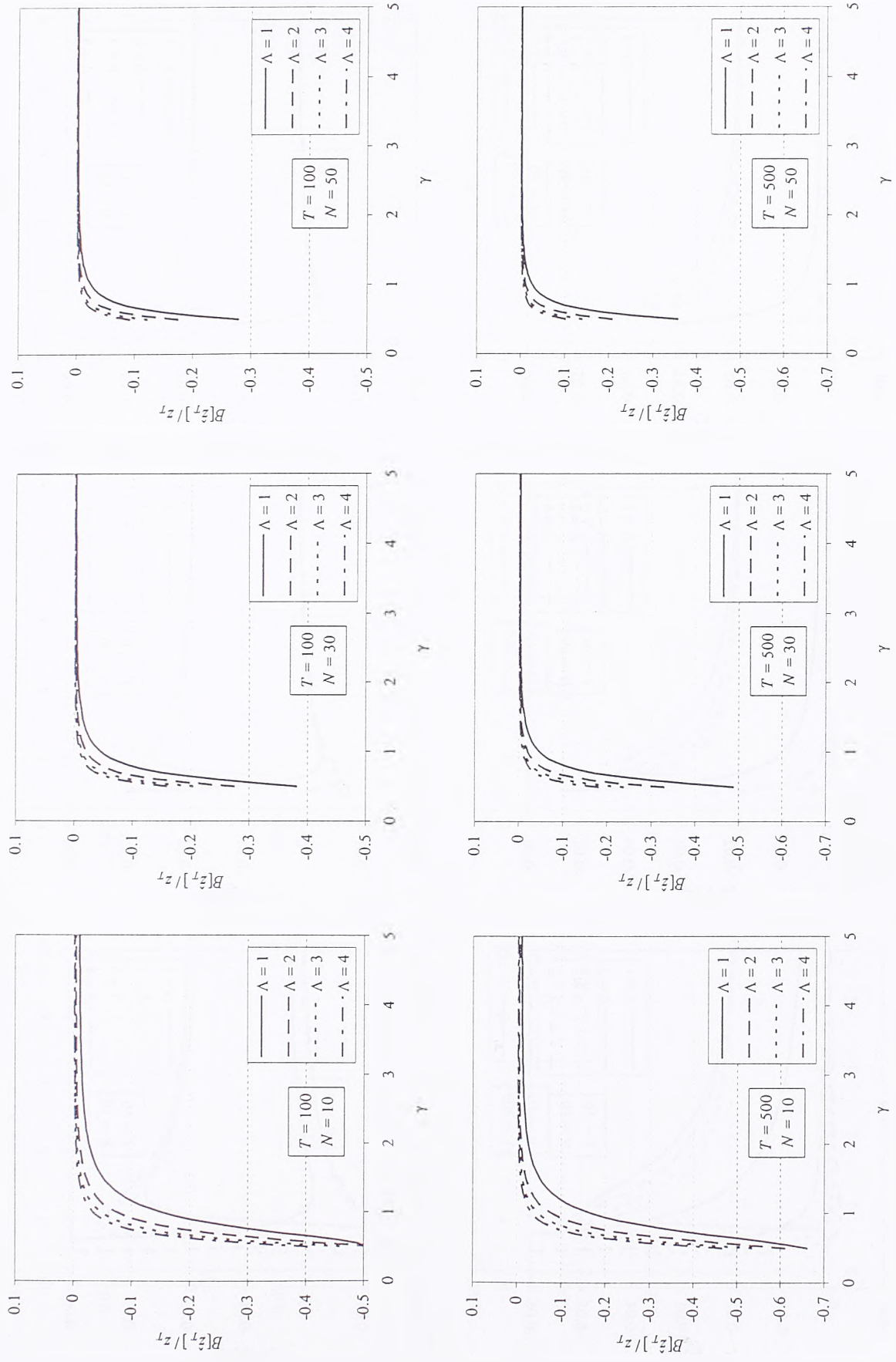
Slika 4. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja NA (metoda težinskih momenata).



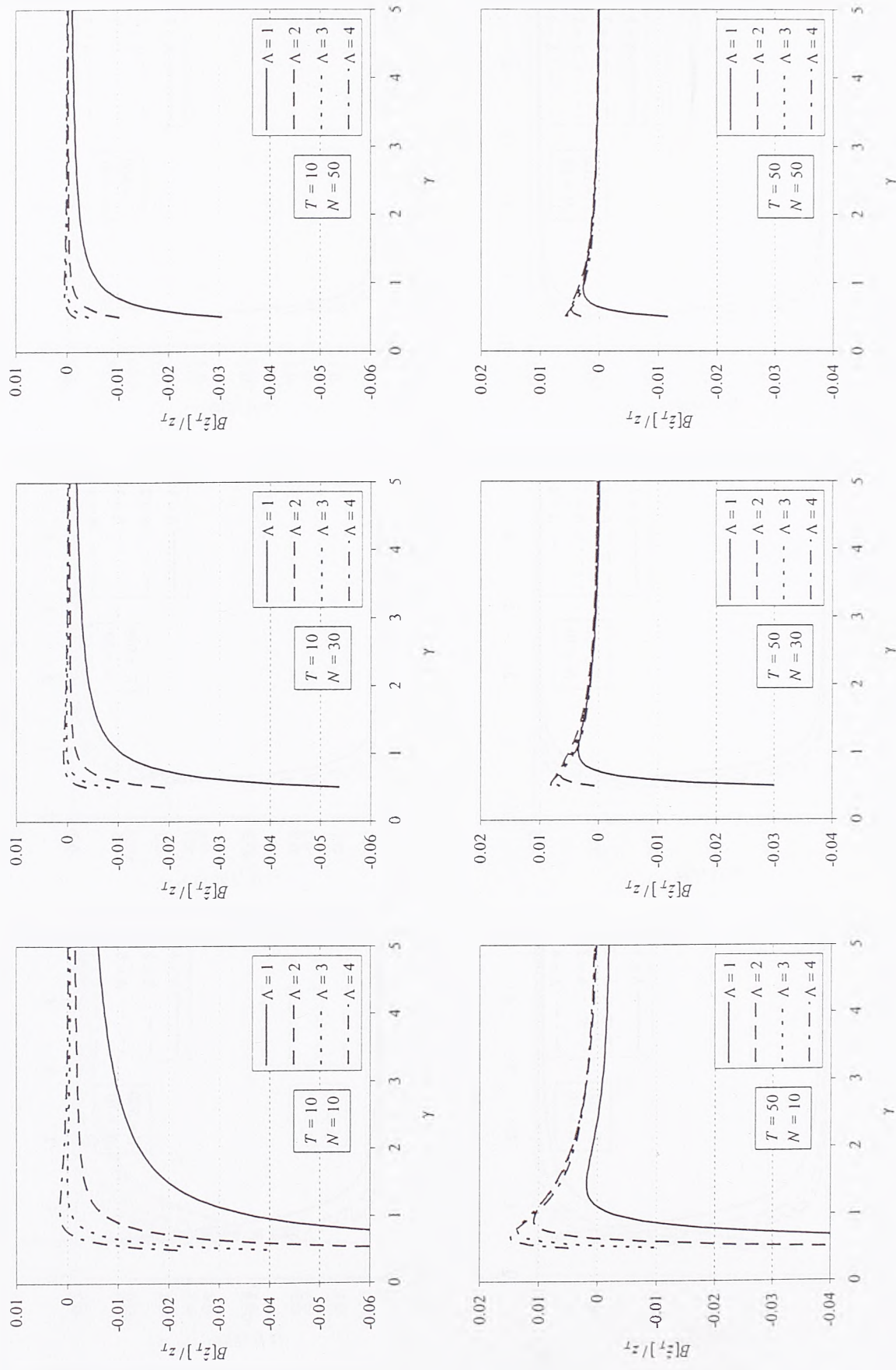
Slika 4 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\lambda$ (metoda težinskih momenata).



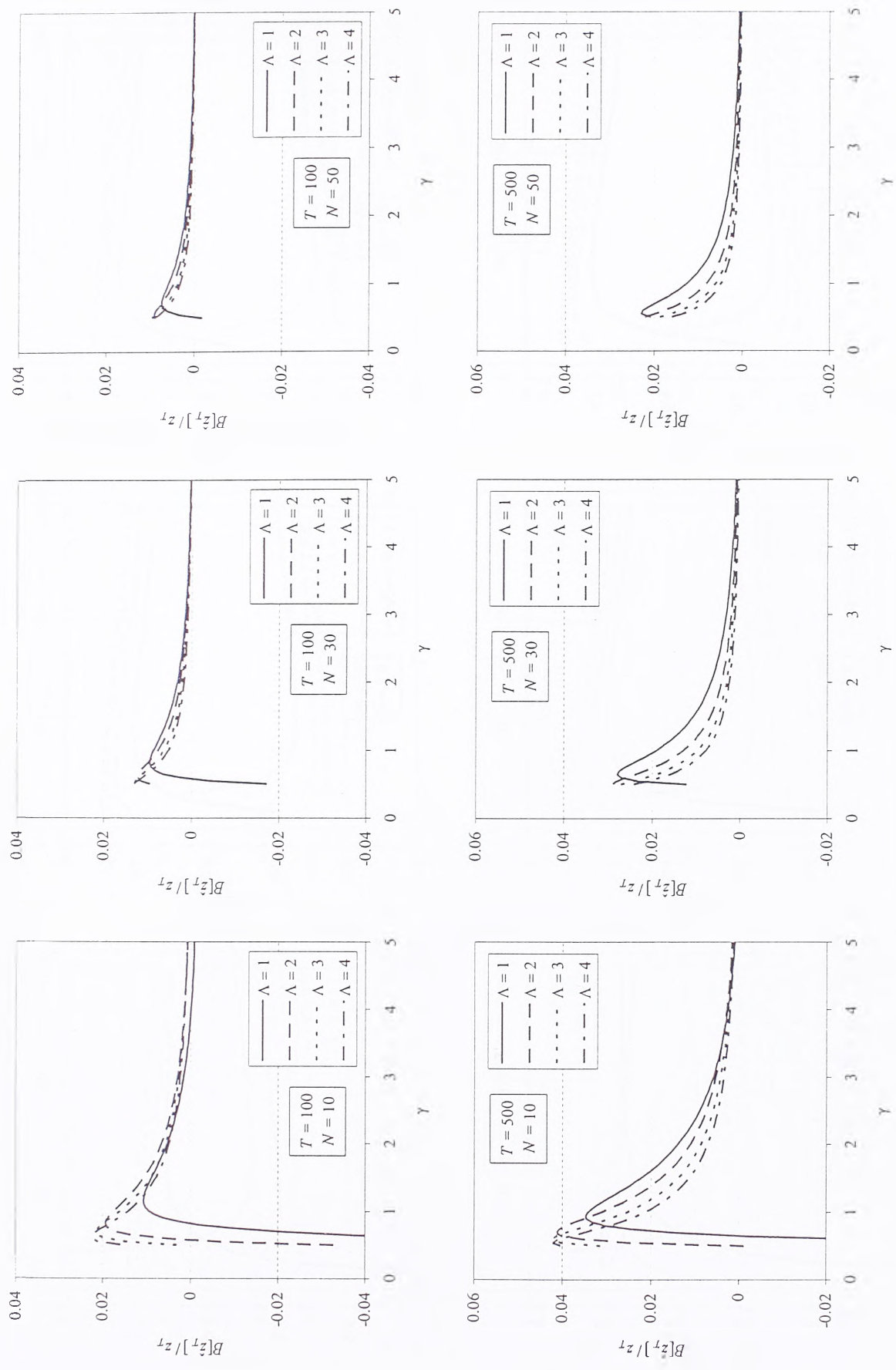
Slika 5. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda momenata).



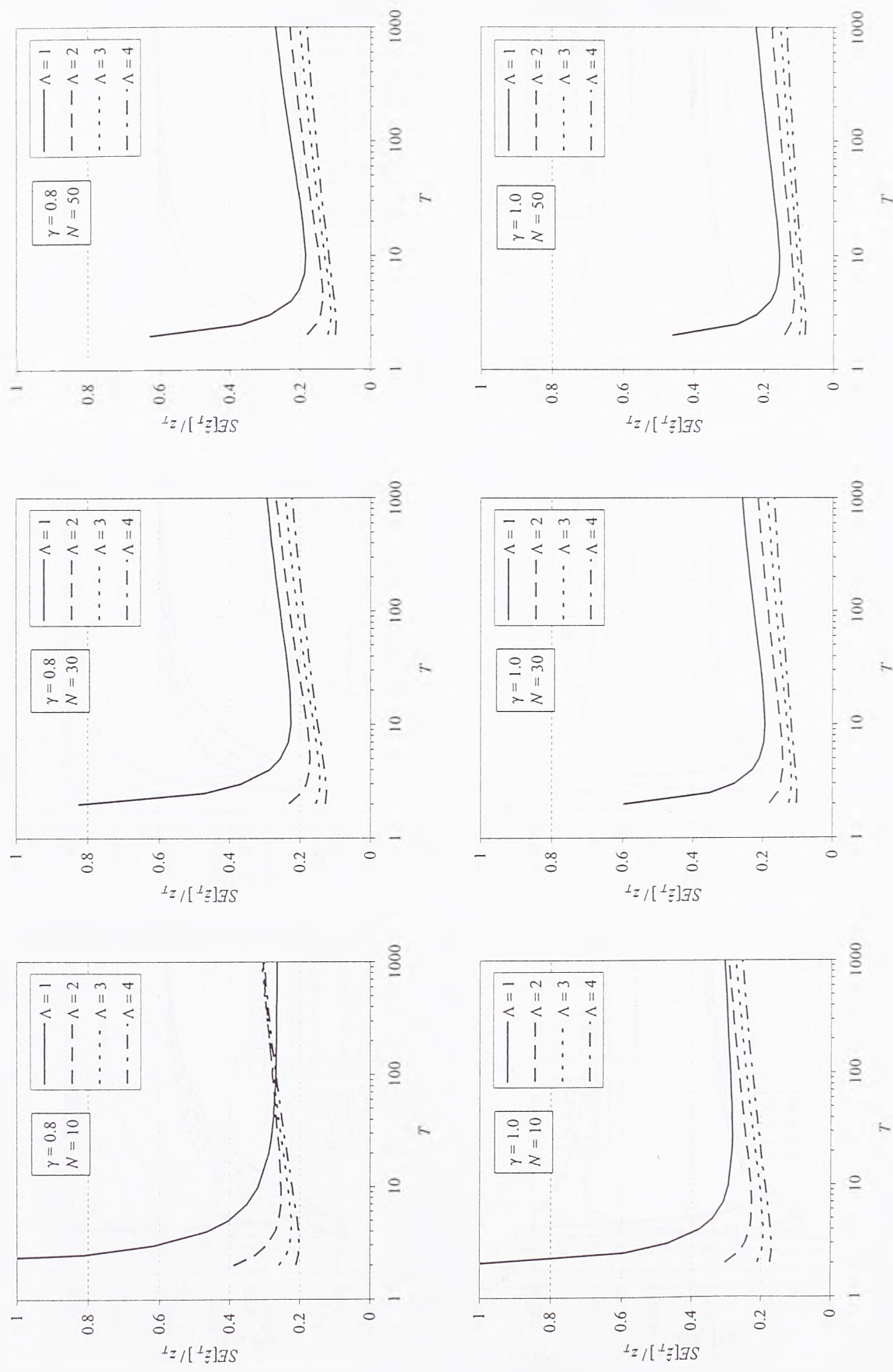
Slika 5 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda momenata).



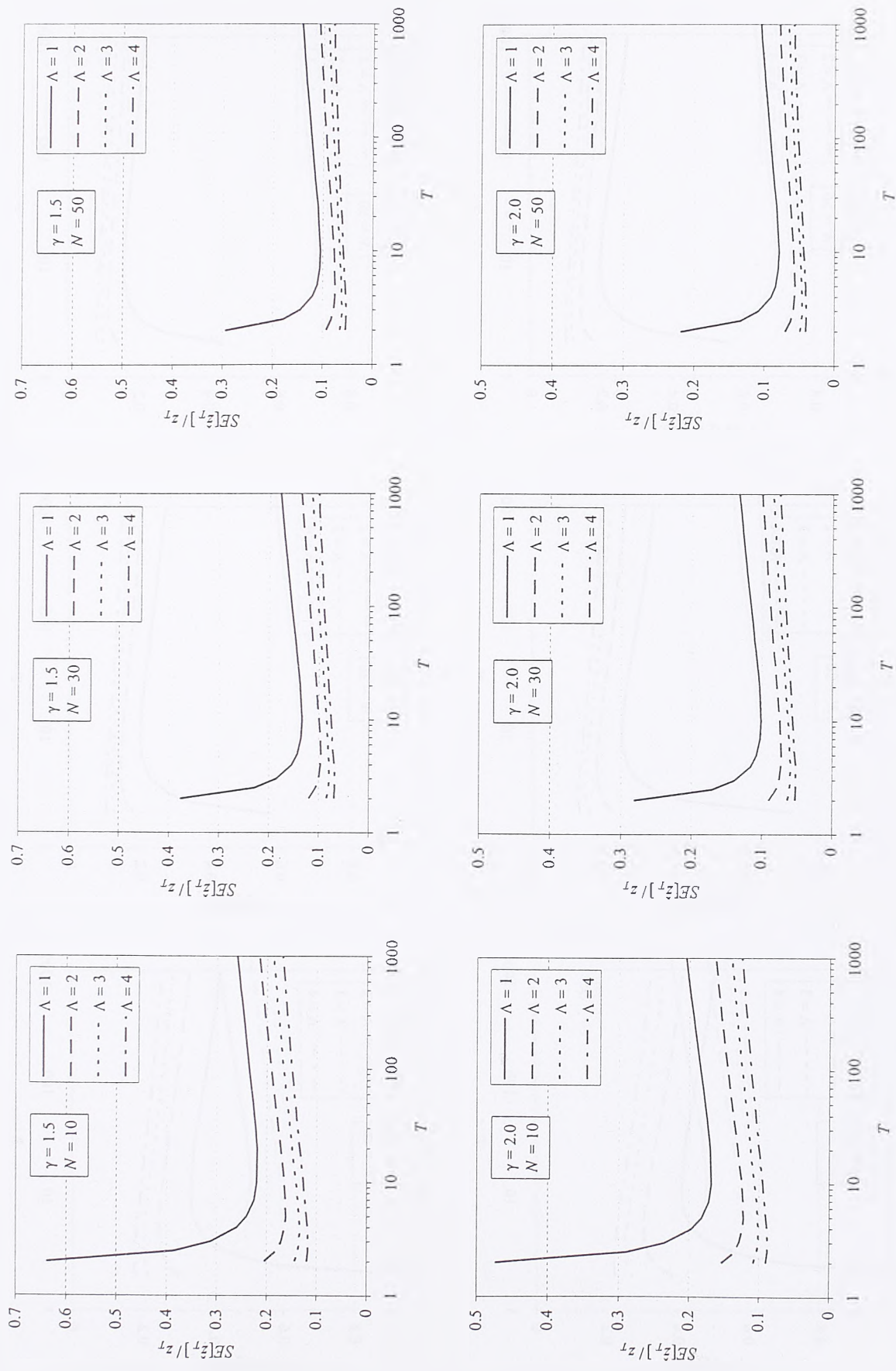
Slika 6. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda težinskih momenata).



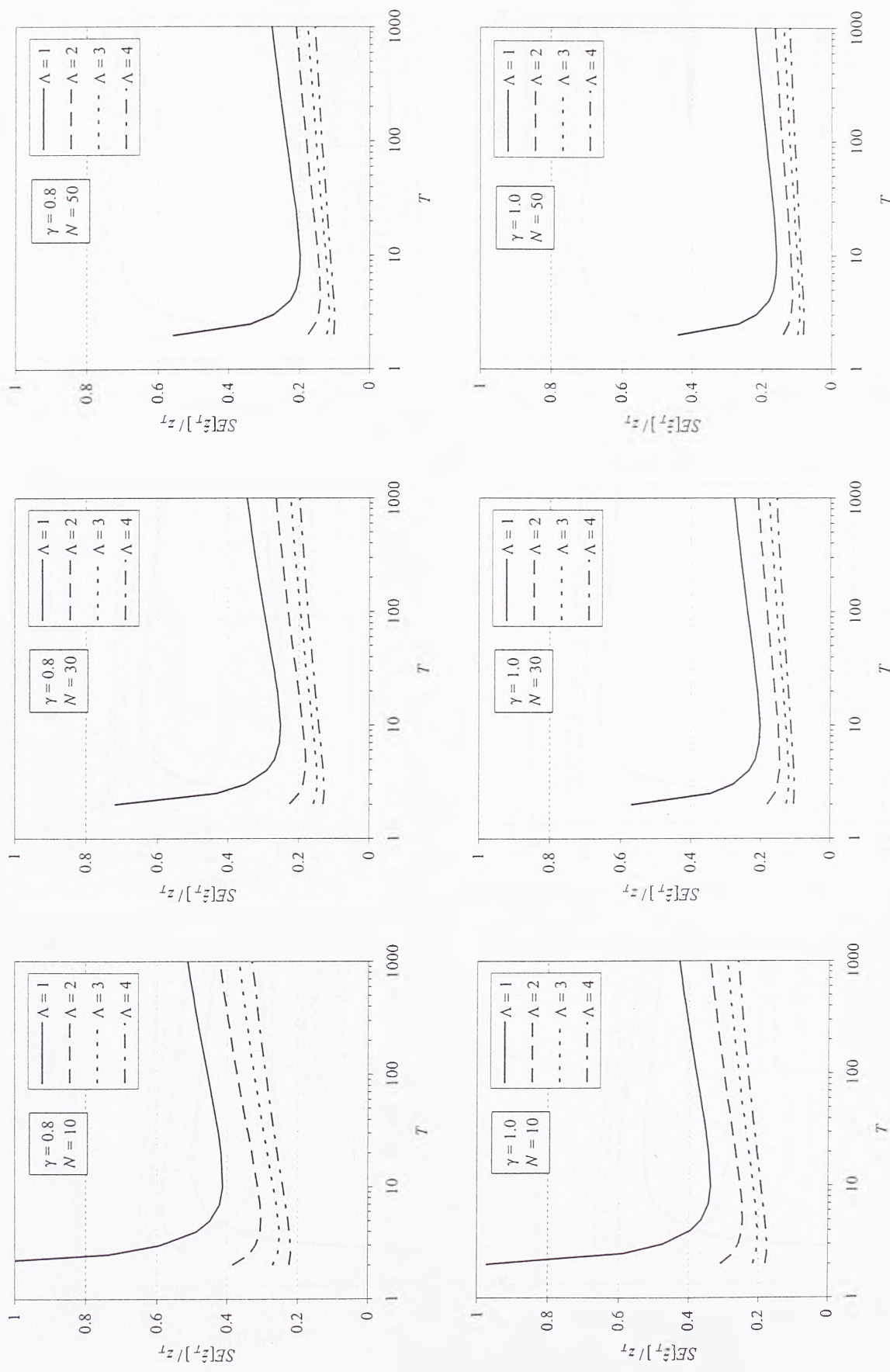
Slika 6 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda težinskih momenata).



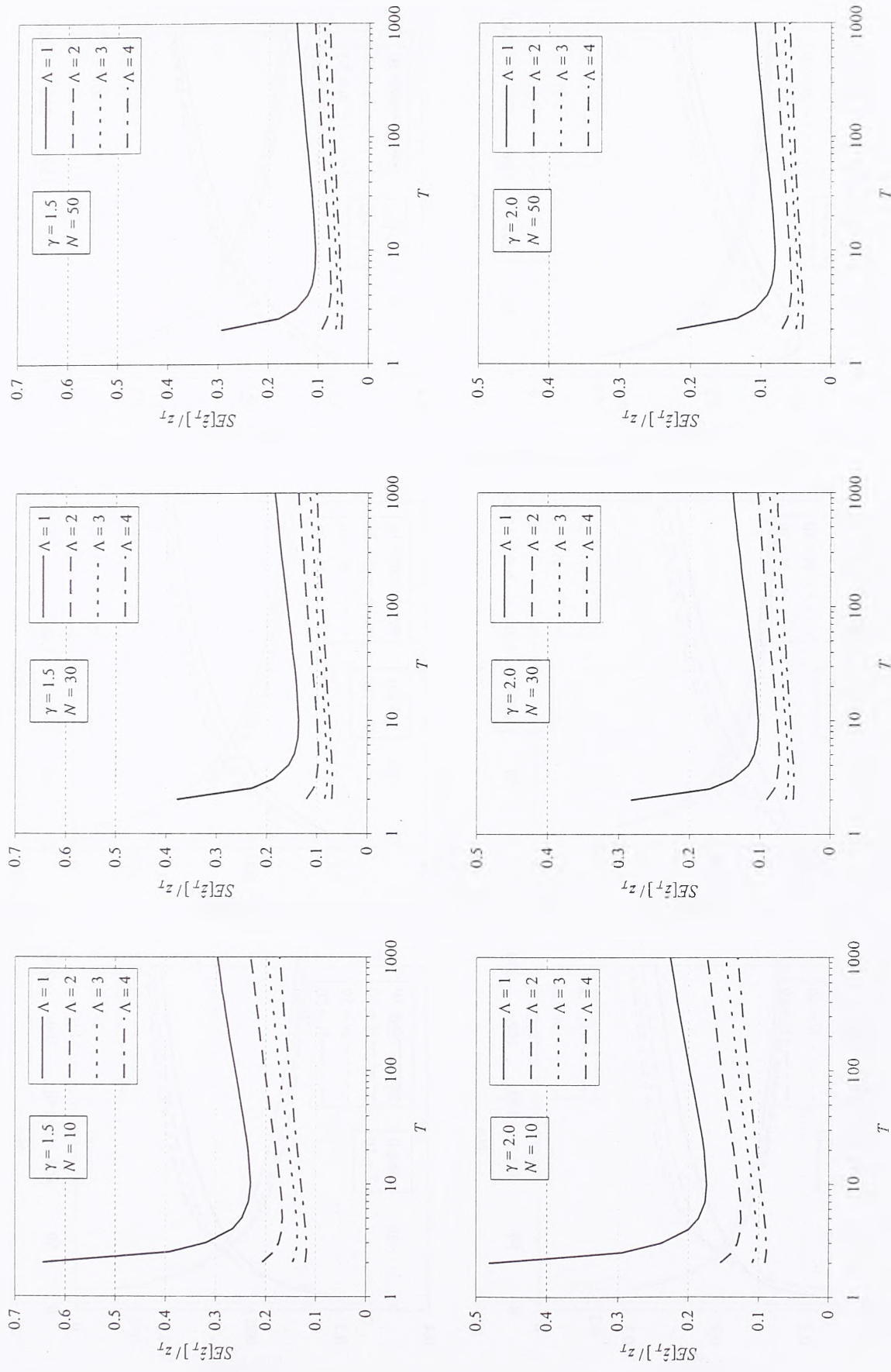
Slika 7. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).



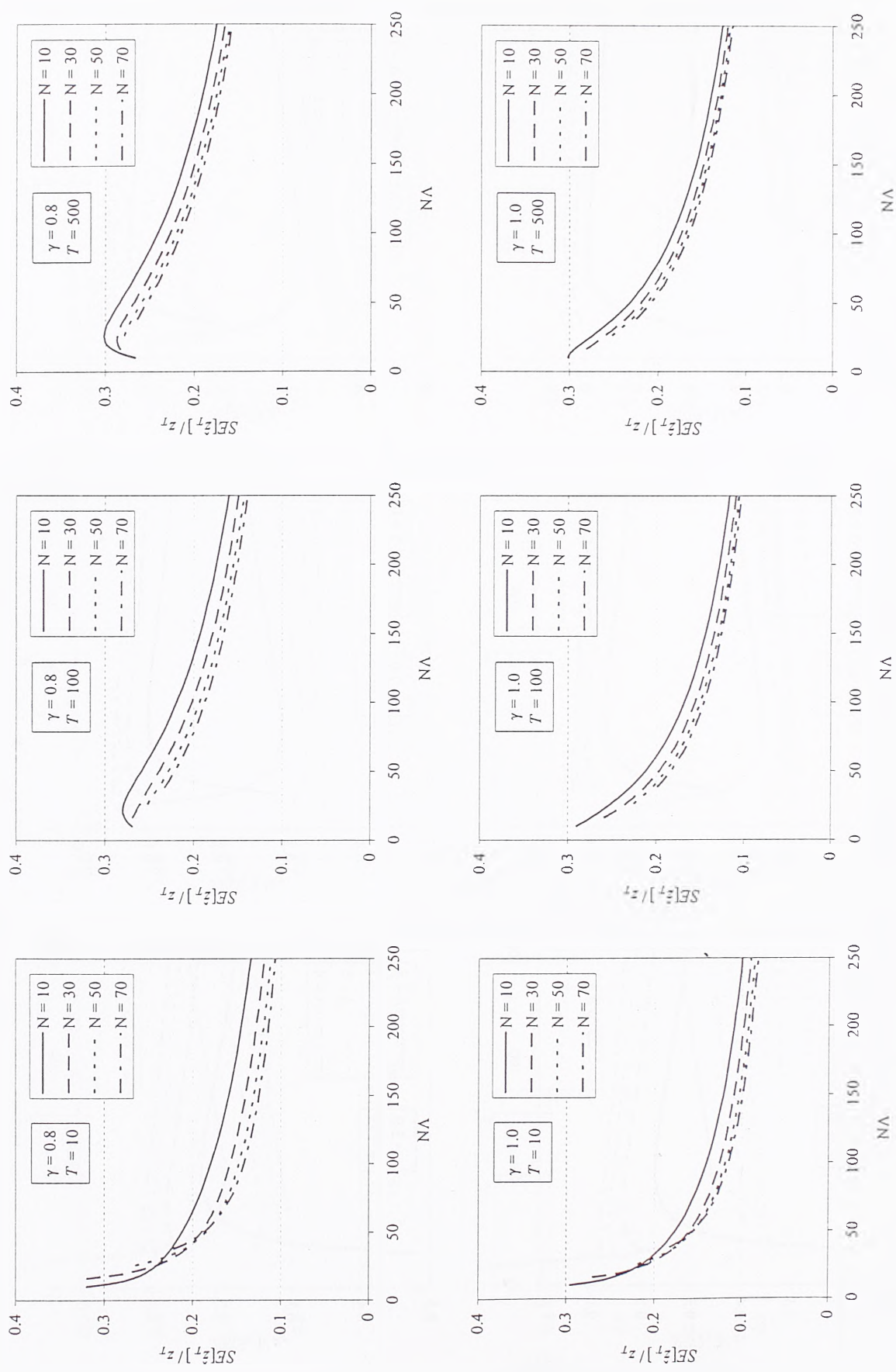
Slika 7 (nastavak). Relativna standardna grška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda momenata).



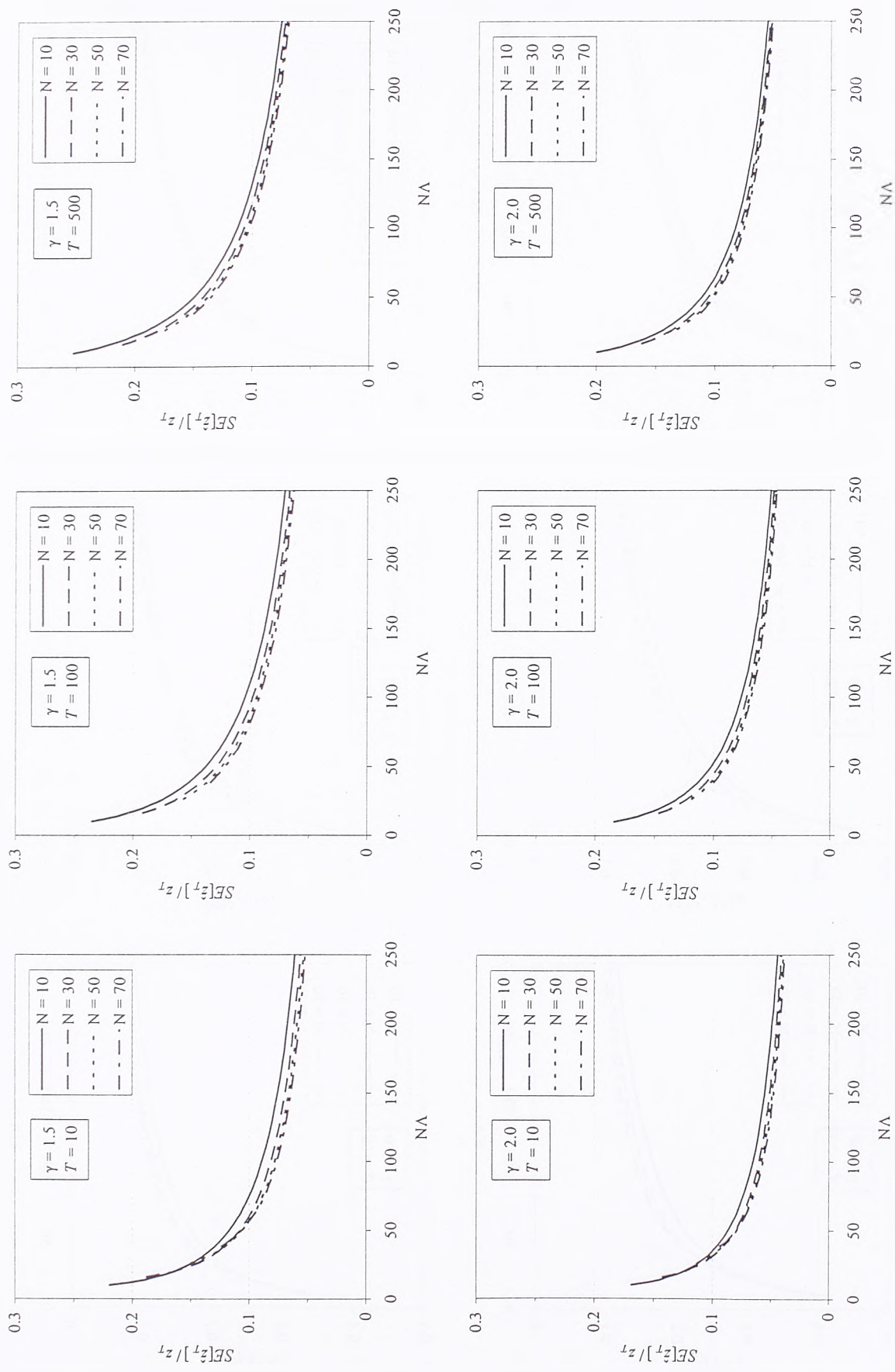
Slika 8. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).



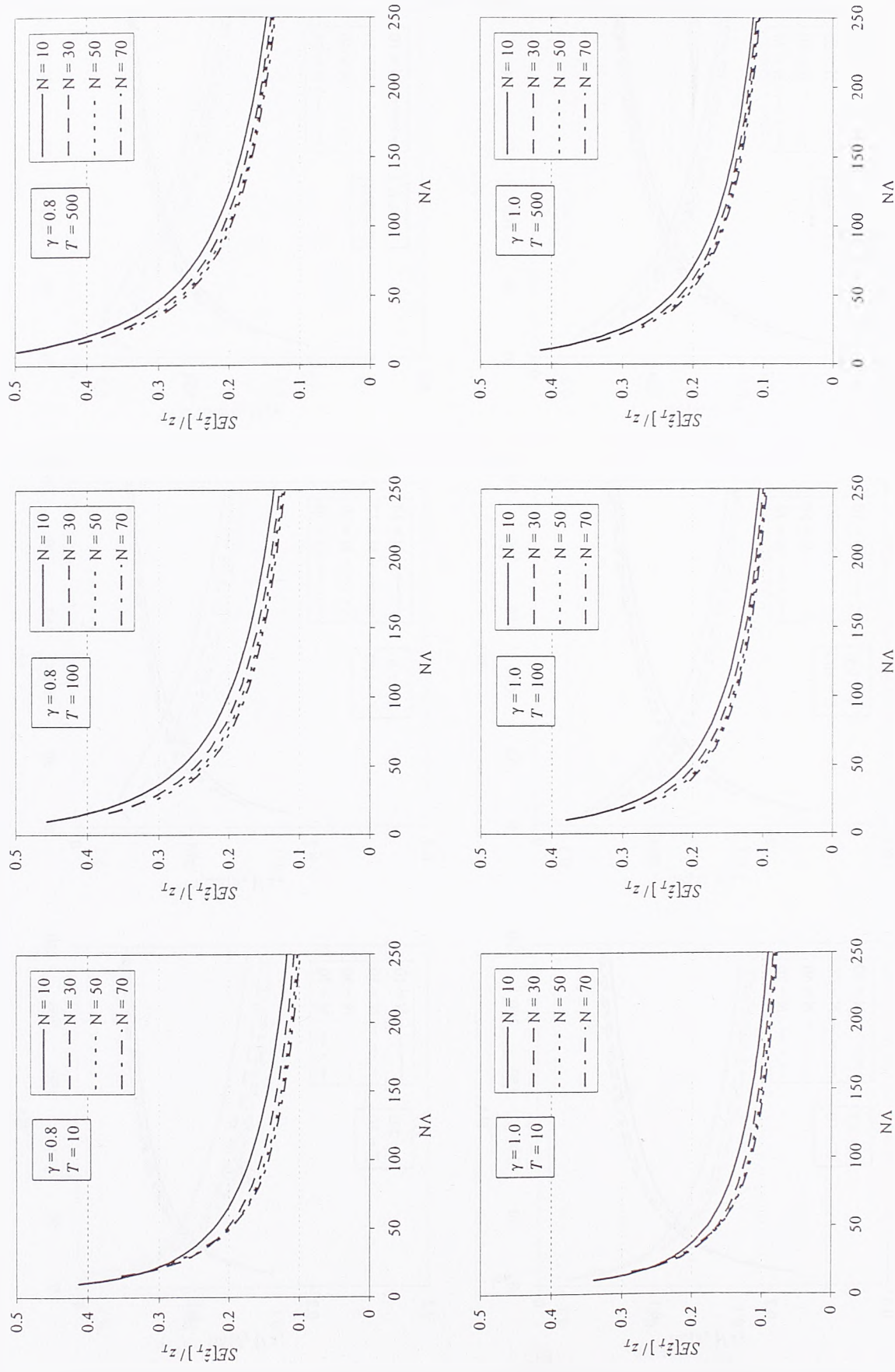
Slika 8 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od povratnog perioda (metoda težinskih momenata).



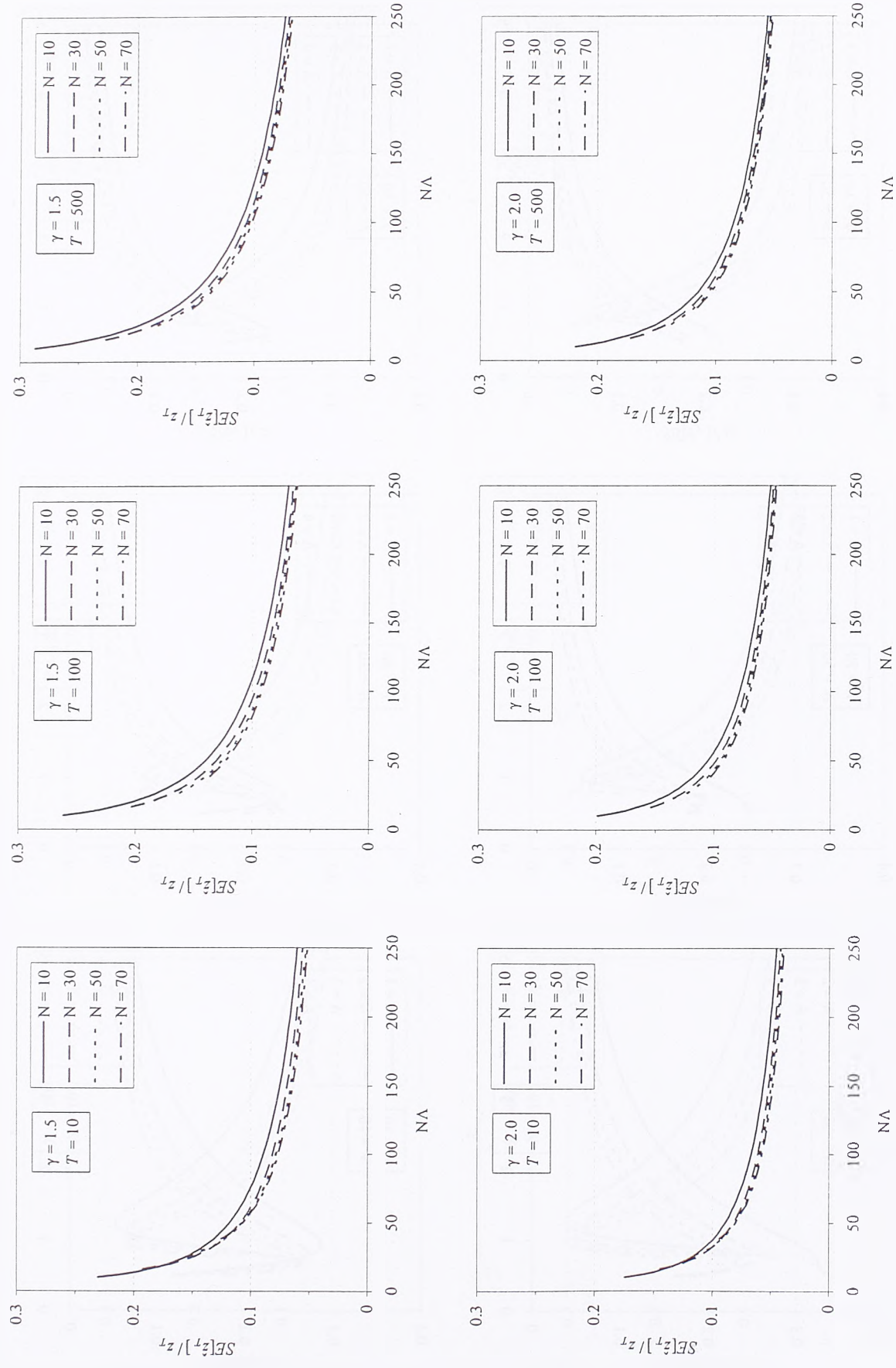
Slika 9. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekraćenja $N\Lambda$ (metoda momenata).



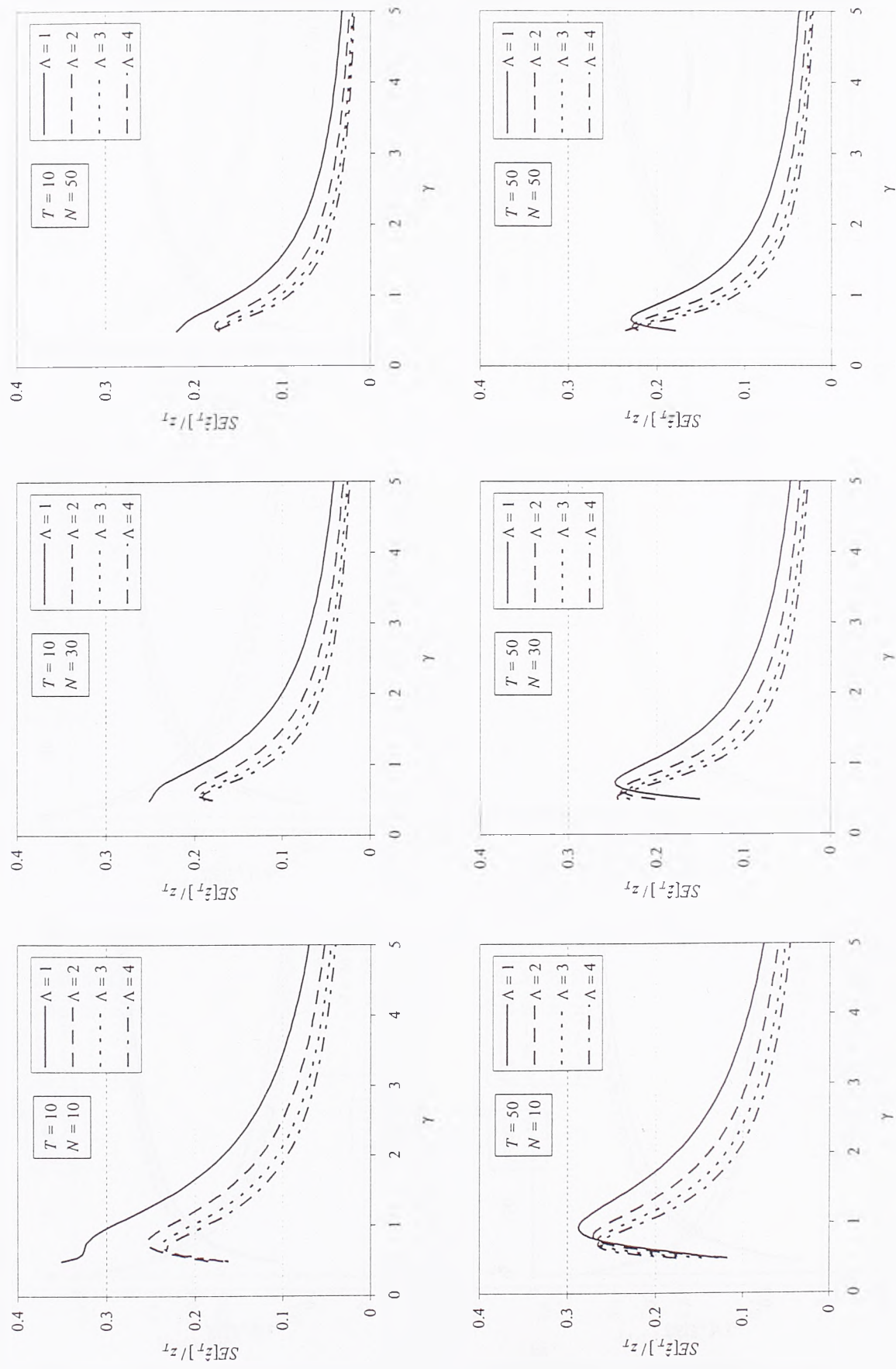
Slika 9 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja NA (metoda momenata).

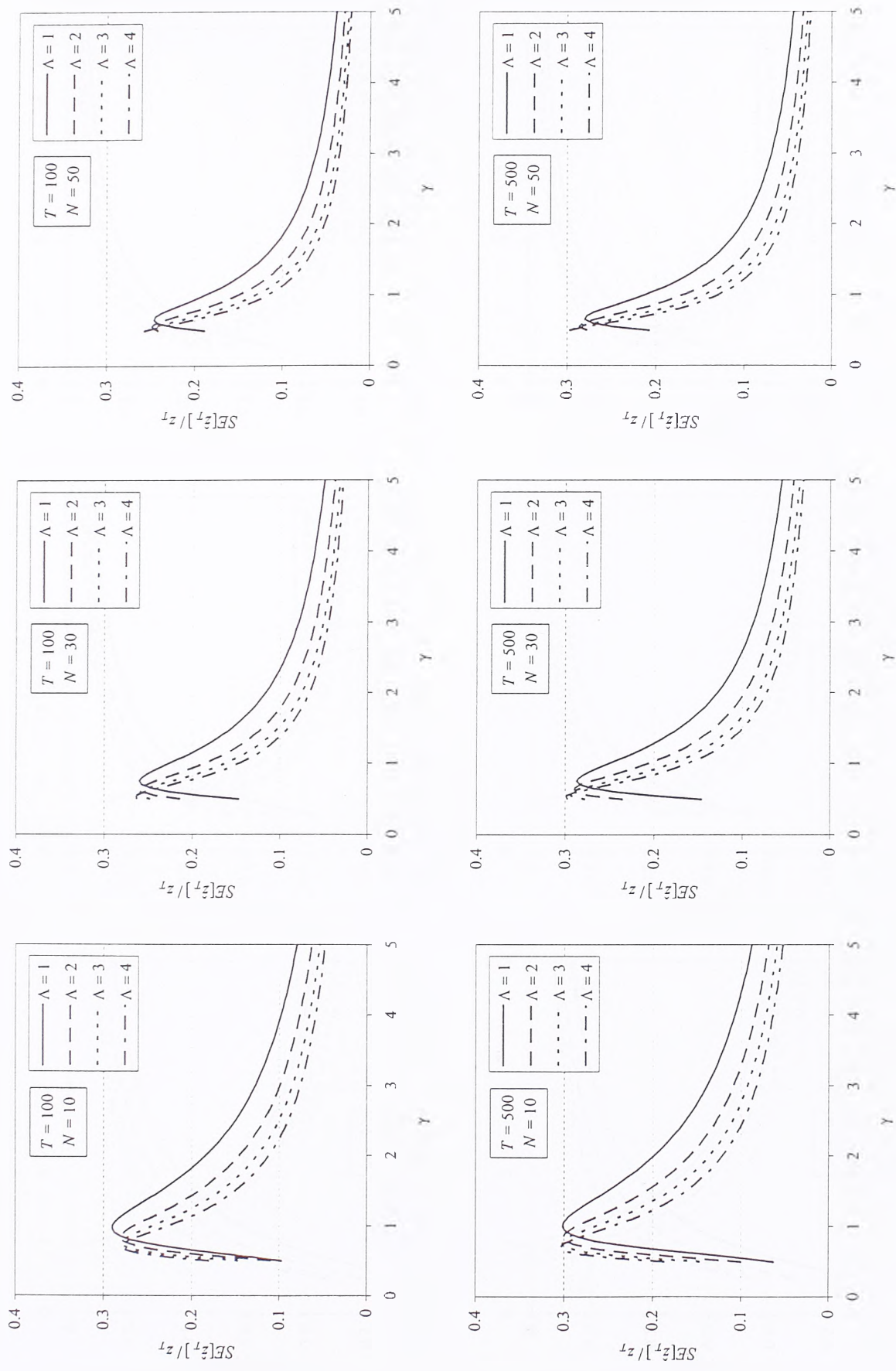


Slika 10. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekraćenja $N\Lambda$ (metoda težinskih momenata).

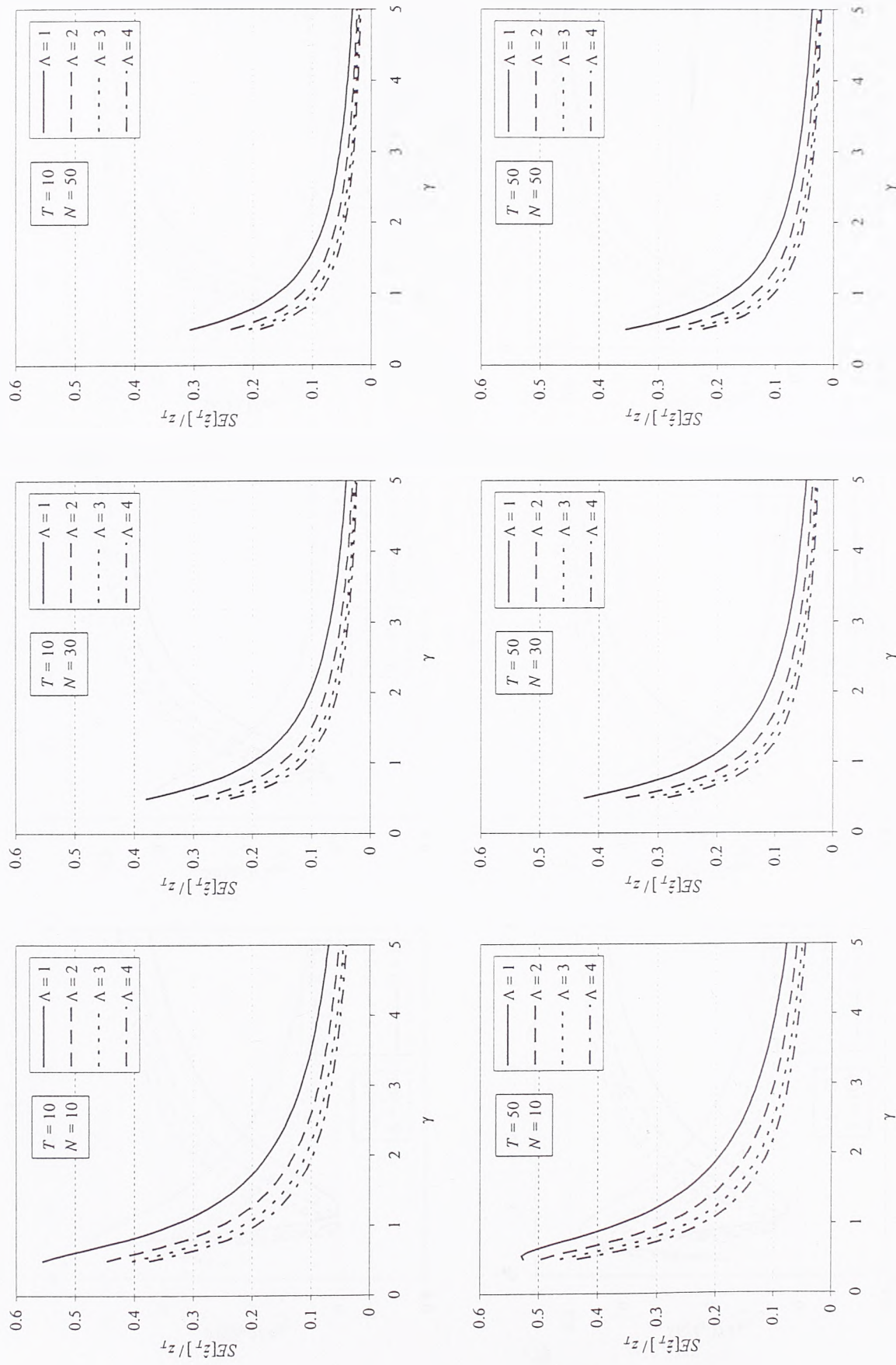


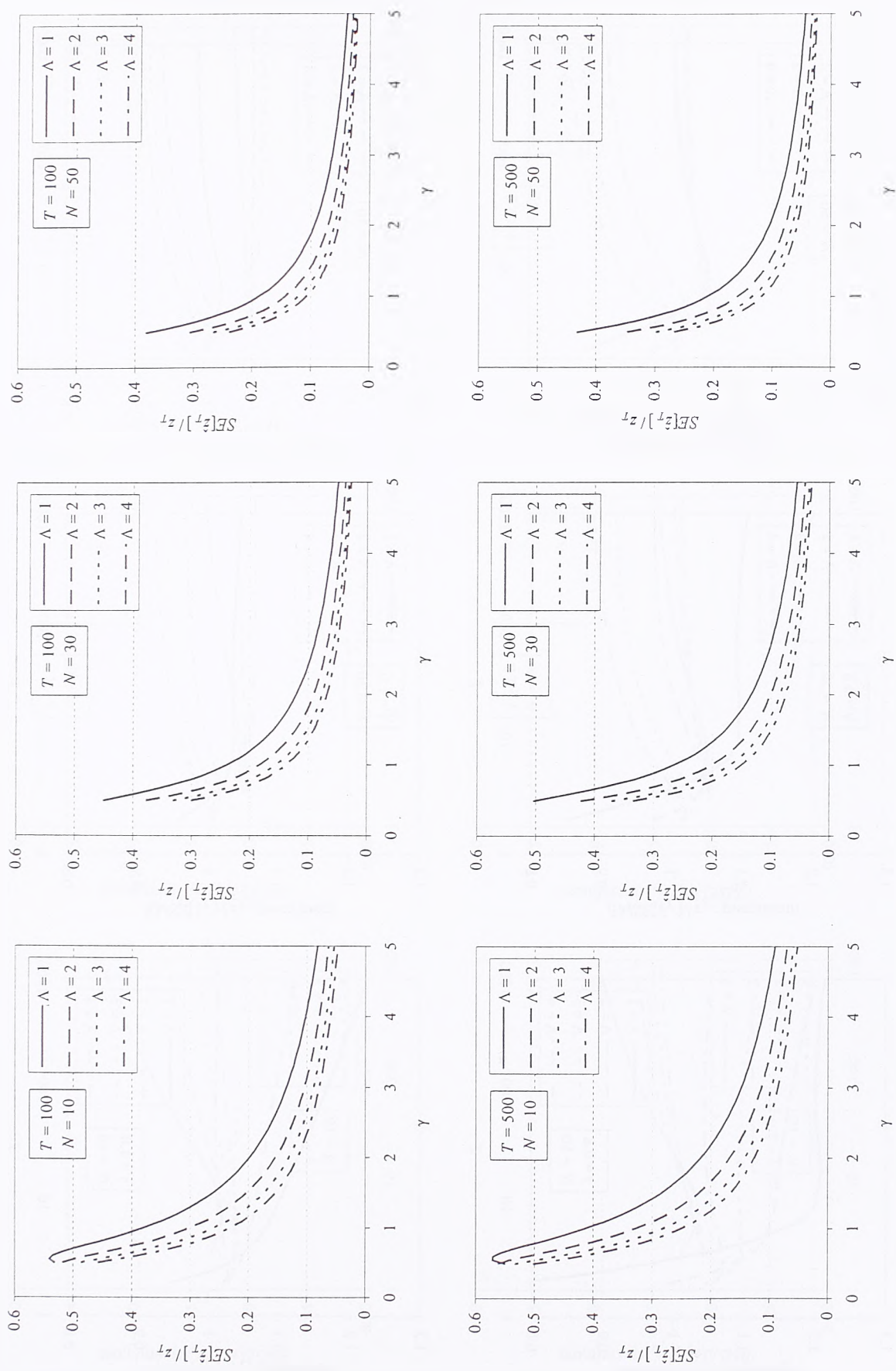
Slika 10 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja NA (metoda težinskih momenata).

Slika 11. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda momenata).

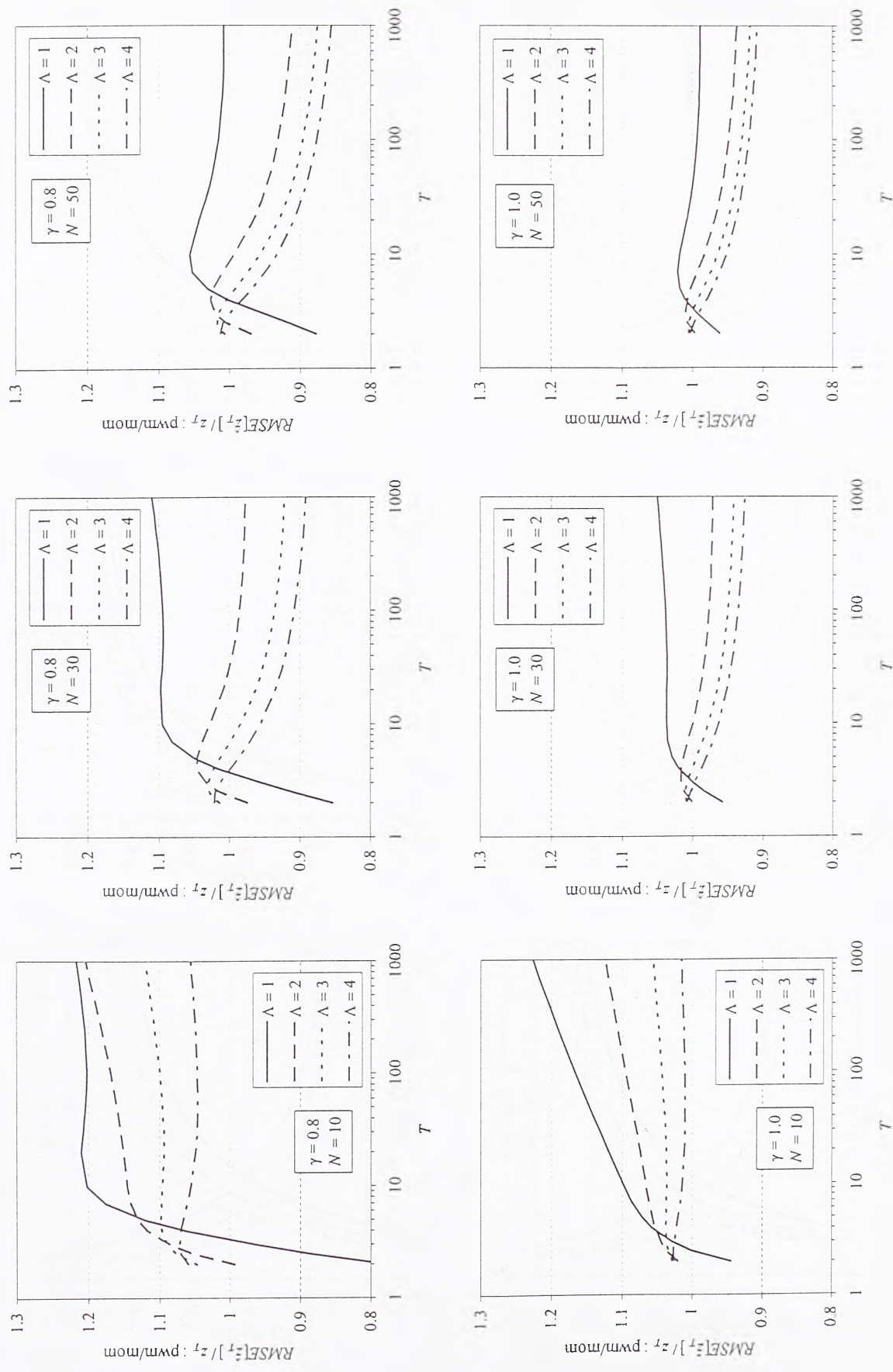


Slika 11 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda momentata).

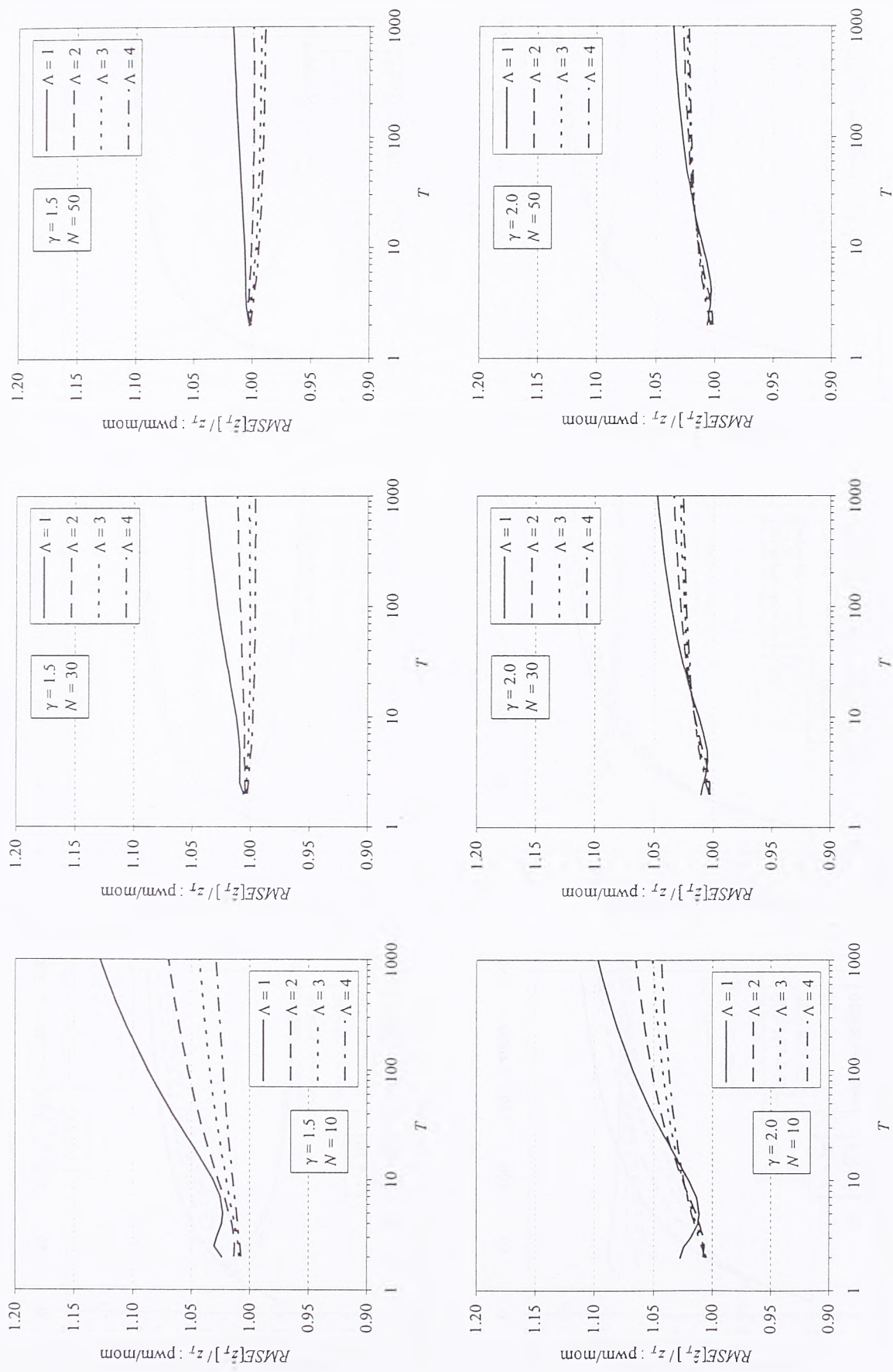
Slika 12. Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda težinskih momenata).



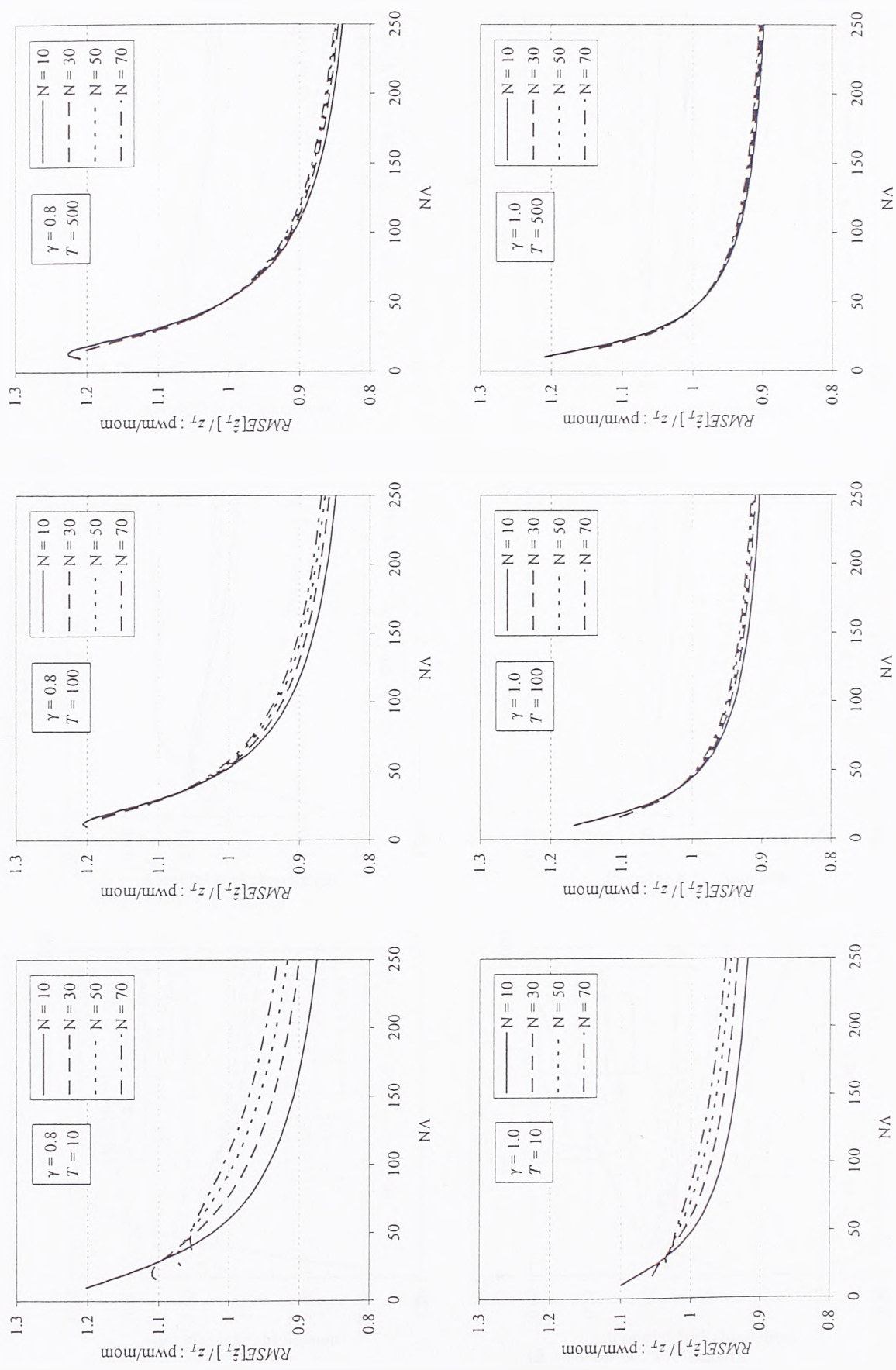
Slika 12 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela P+W u zavisnosti od vrednosti parametra γ (metoda težinskih momenata).



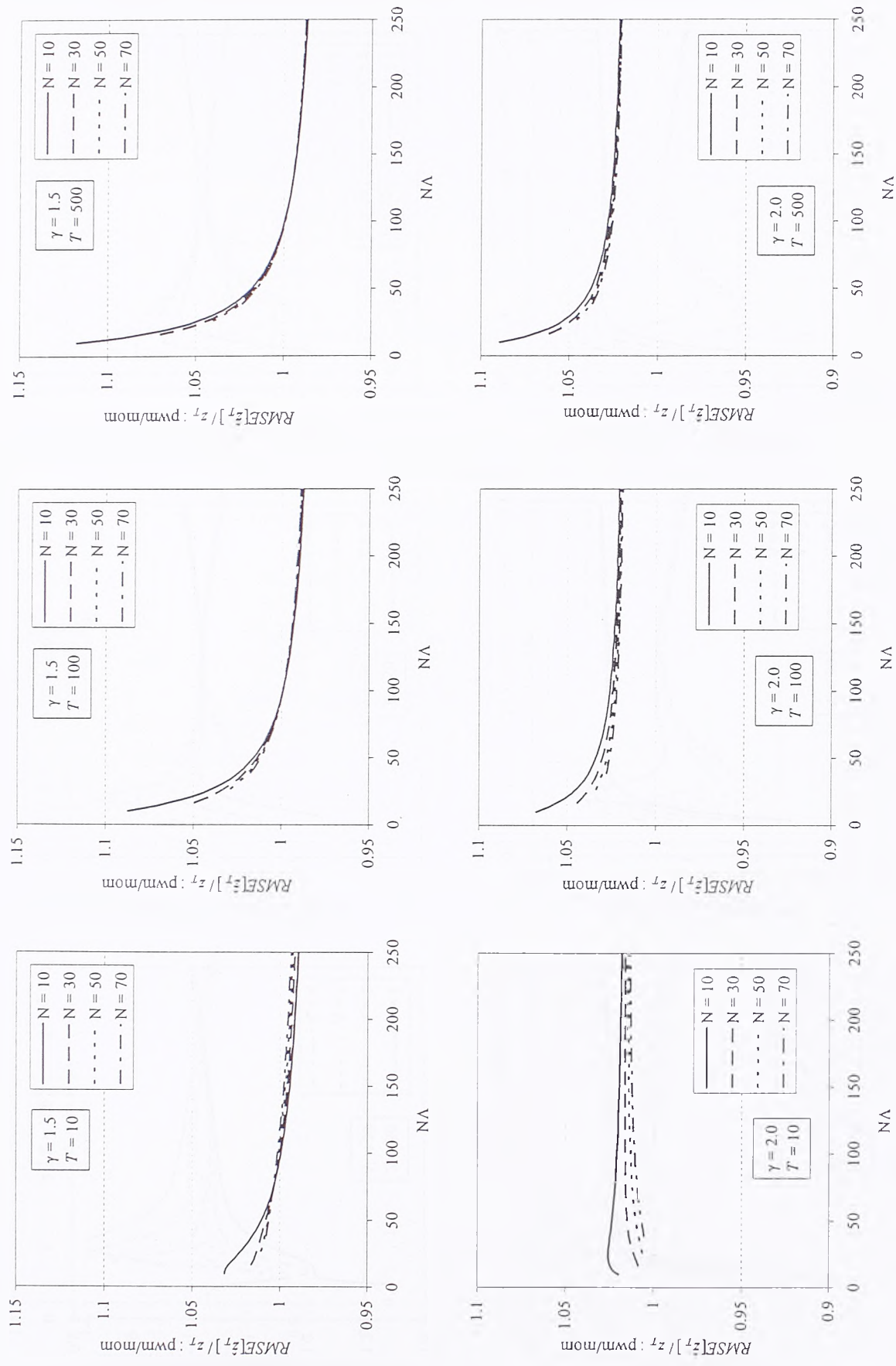
Slika 13. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+W prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od povratnog perioda.



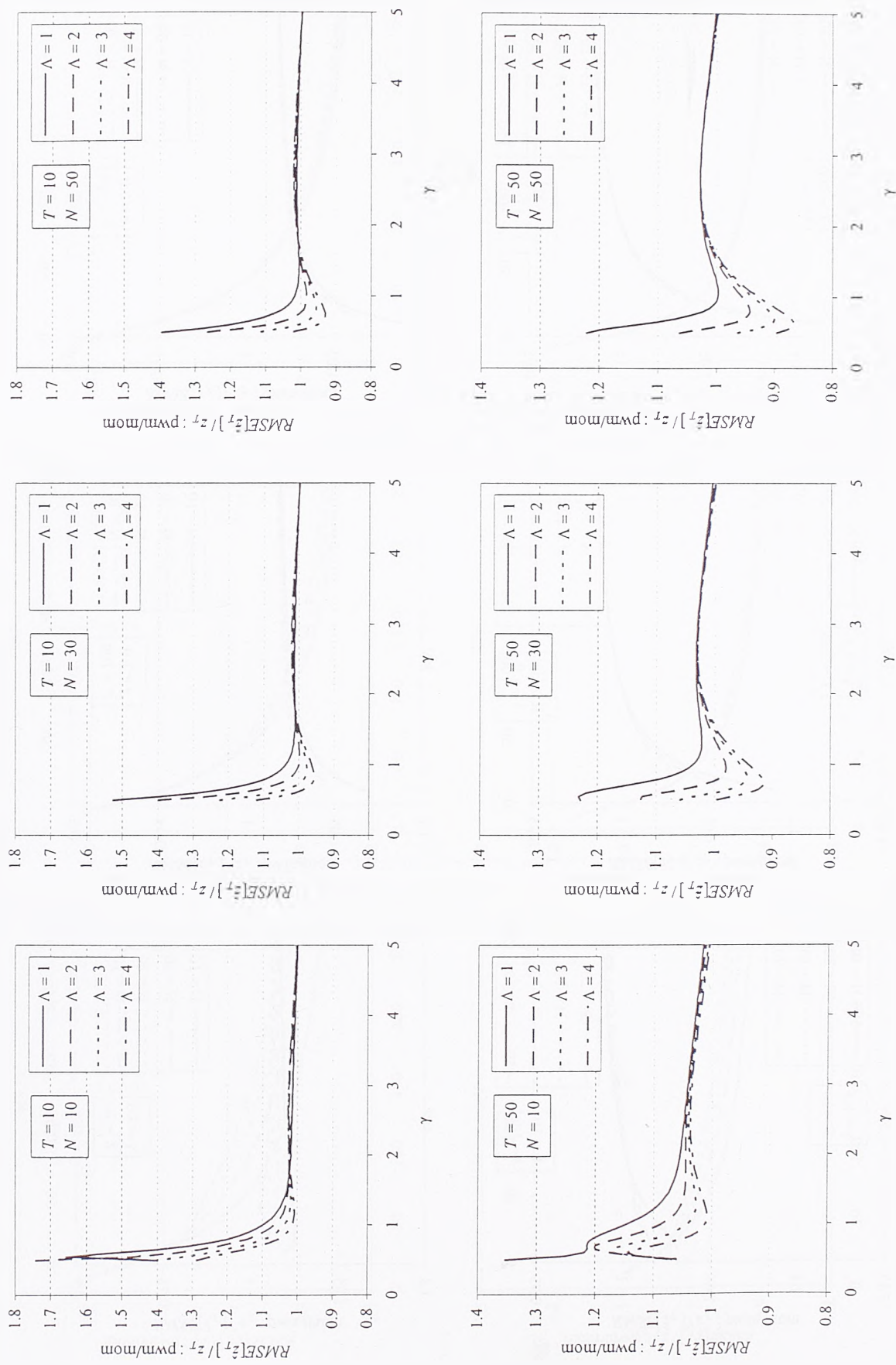
Slika 13 (nastavak). Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+W prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od povratnog perioda.



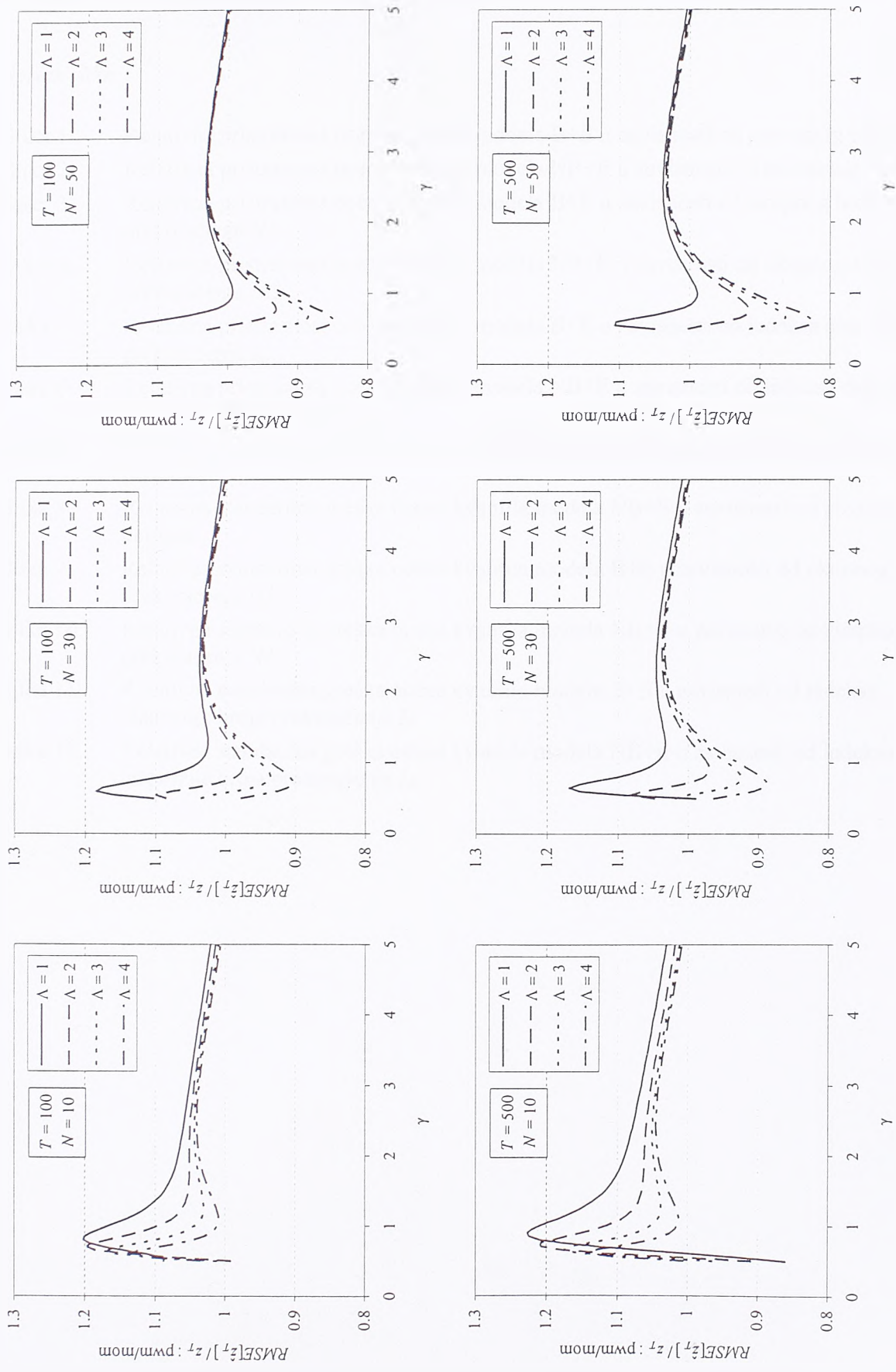
Slika 14. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+W prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja NA .



Slika 14 (nastavak). Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+W prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.



Slika 15. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+W prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od vrednosti parametra γ .



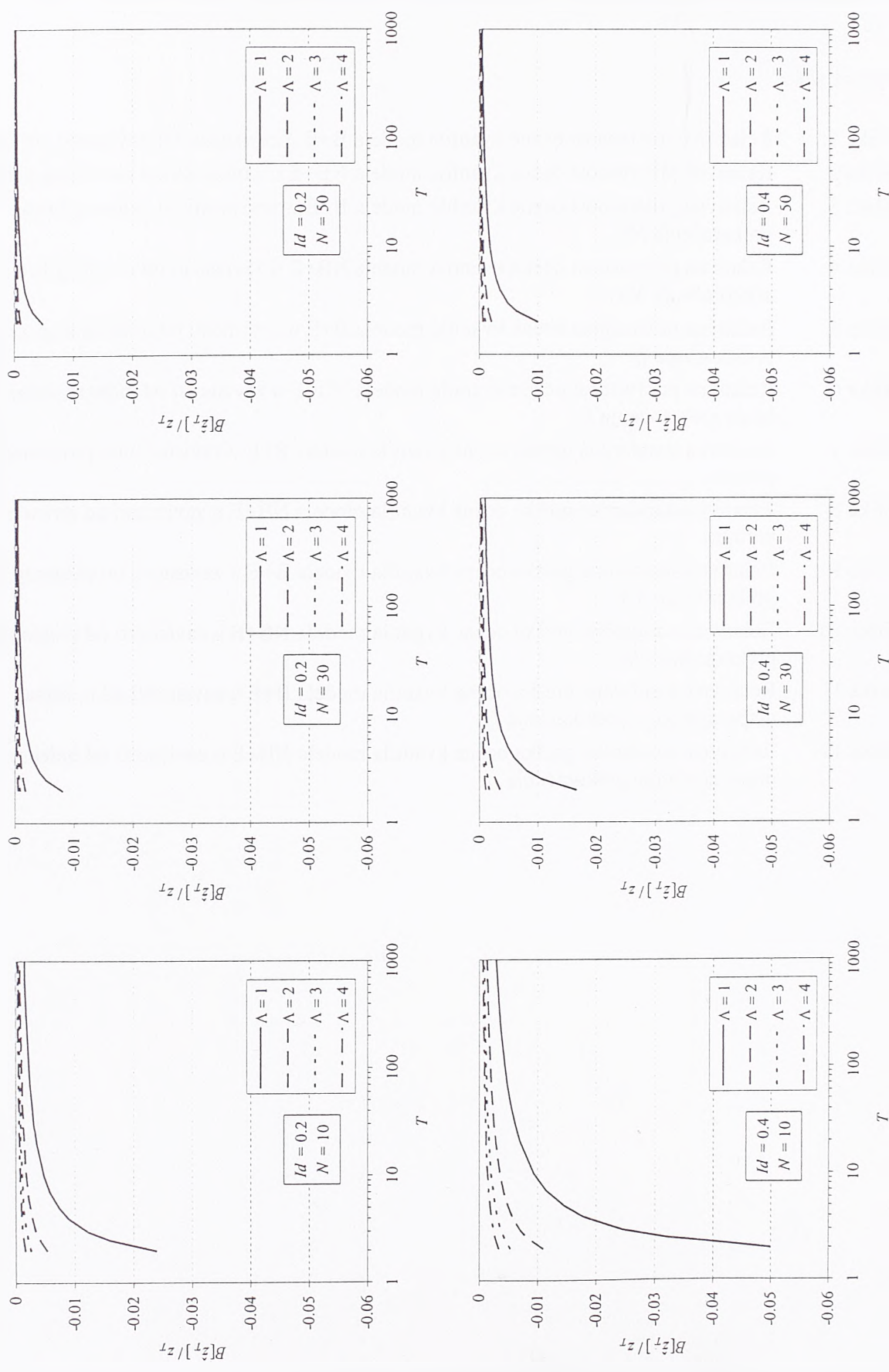
Slika 15 (nastavak). Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene kvantila modela P+W prema metodama težinskih i običnih momenata u zavisnosti od vrednosti parametra γ .

PRILOG C4

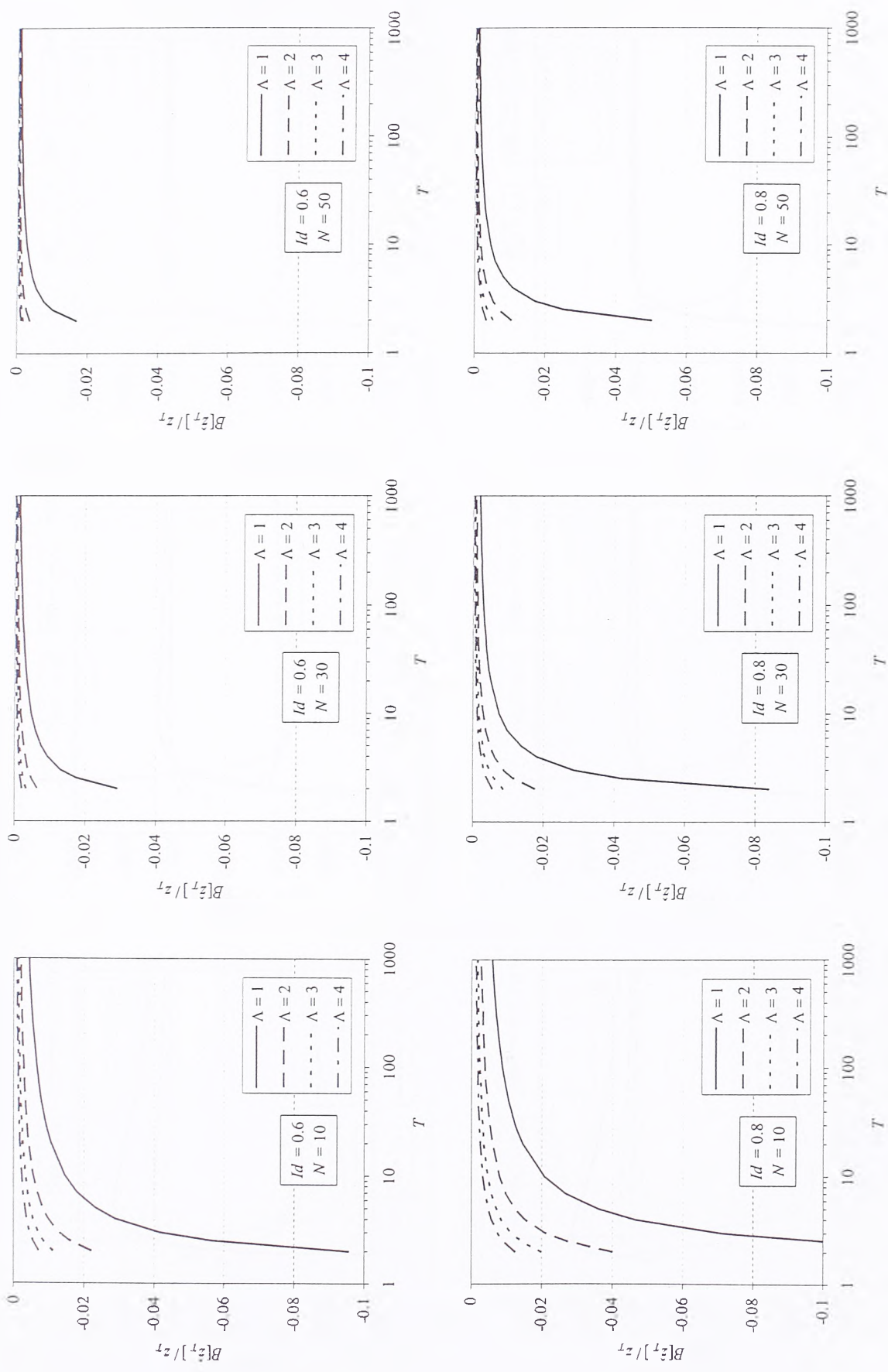
Svojstva ocene kvantila modelima B+E i NB+E

Spisak slika

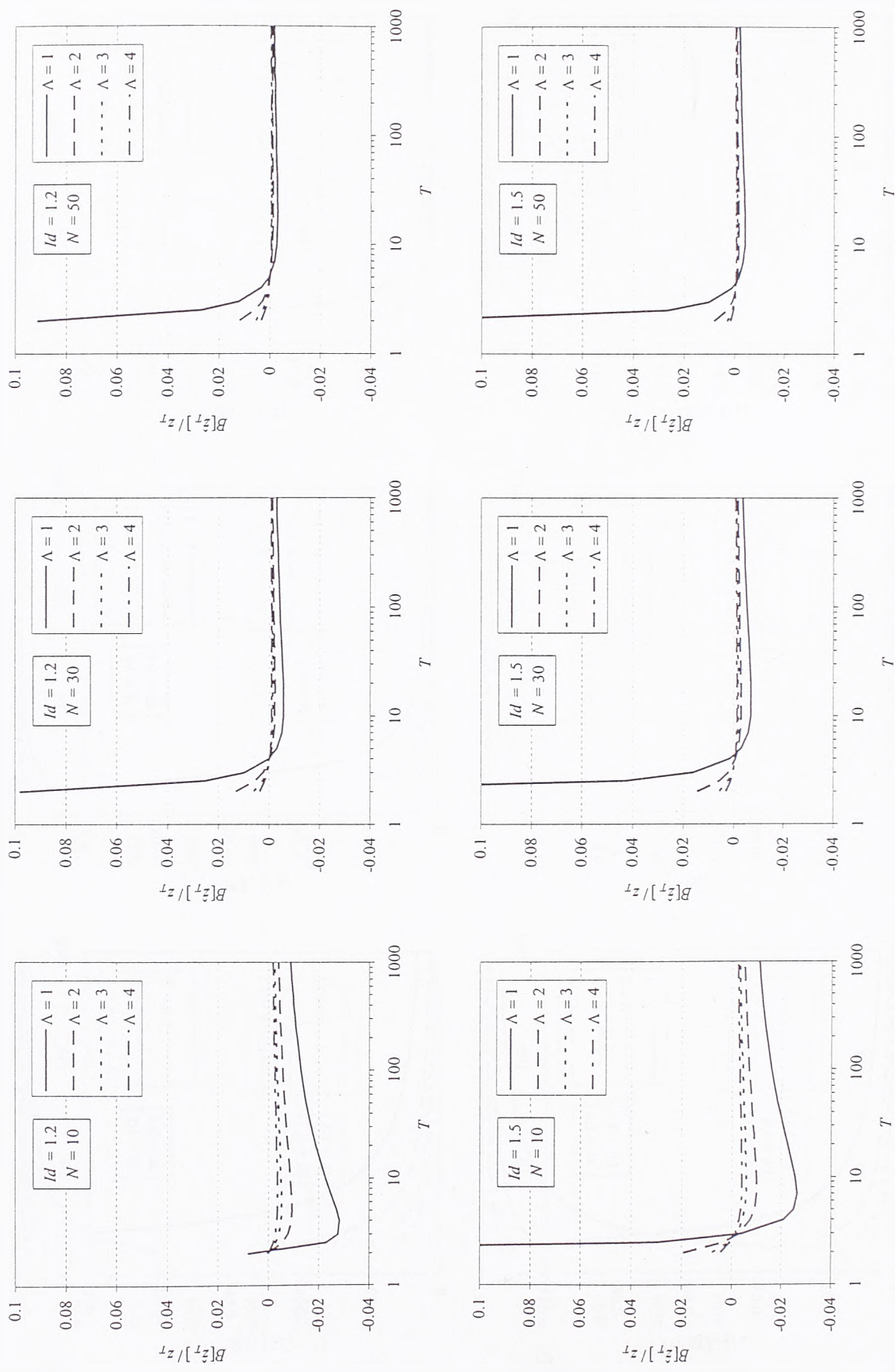
- Slika 1. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od povratnog perioda.
- Slika 2. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od povratnog perioda.
- Slika 3. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.
- Slika 4. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.
- Slika 5. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekoračenja I_d .
- Slika 6. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekoračenja I_d .
- Slika 7. Relativna standardna greška ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od povratnog perioda.
- Slika 8. Relativna standardna greška ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od povratnog perioda.
- Slika 9. Relativna standardna greška ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.
- Slika 10. Relativna standardna greška ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.
- Slika 11. Relativna standardna greška ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekoračenja I_d .
- Slika 12. Relativna standardna greška ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekoračenja I_d .



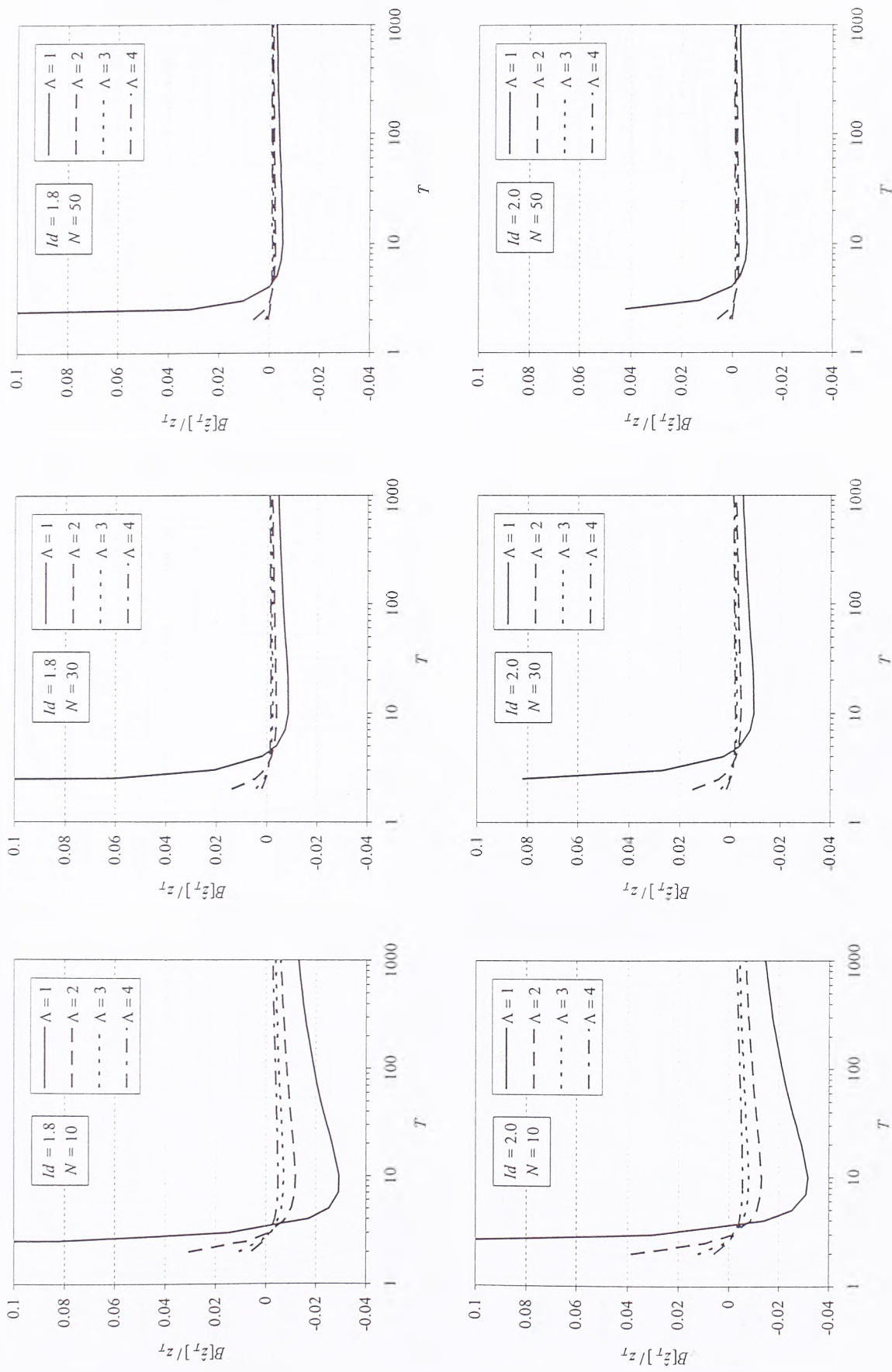
Slika 1. Relativna pristranost ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od povratnog perioda.



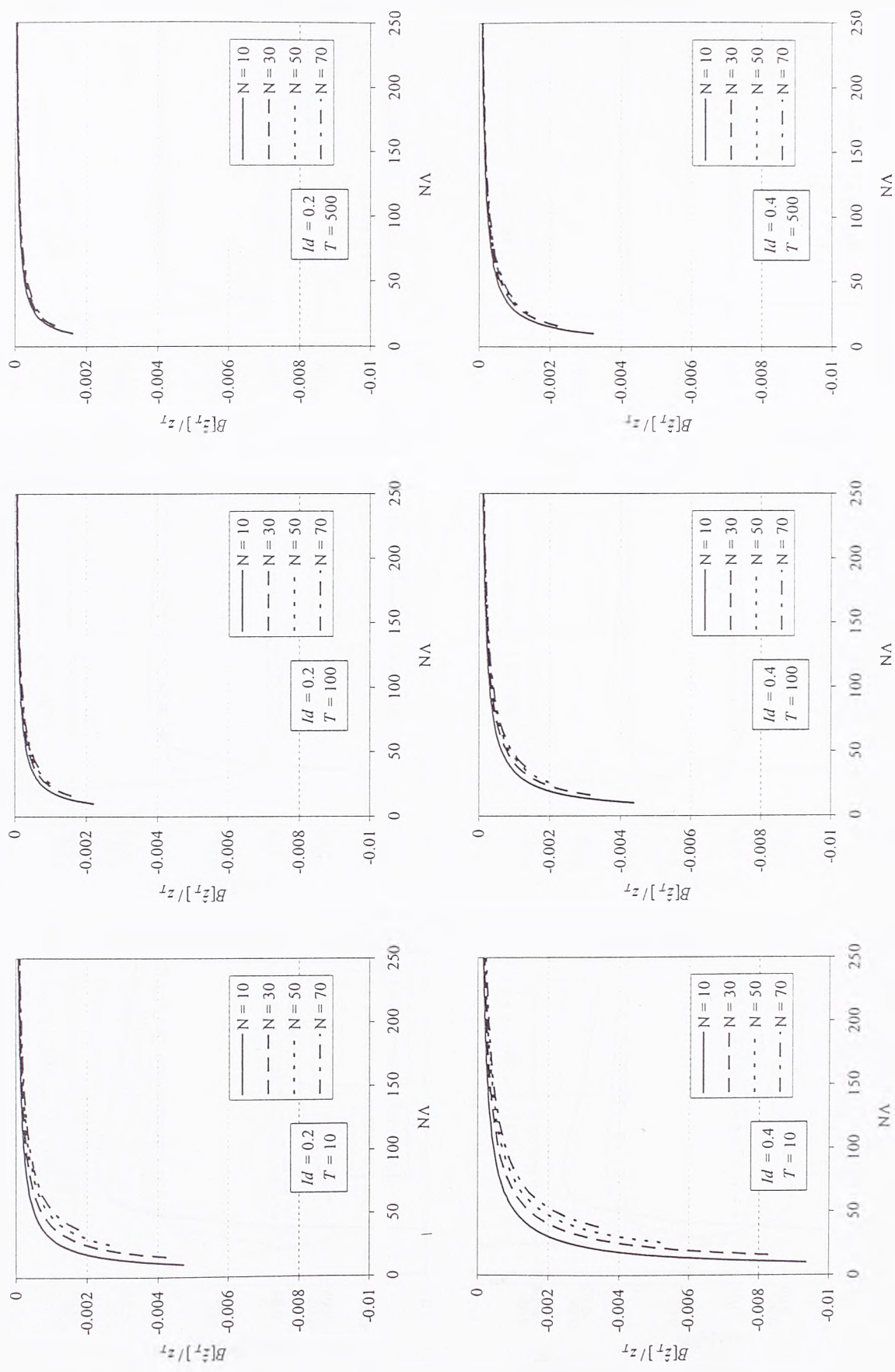
Slika 1 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od povratnog perioda.

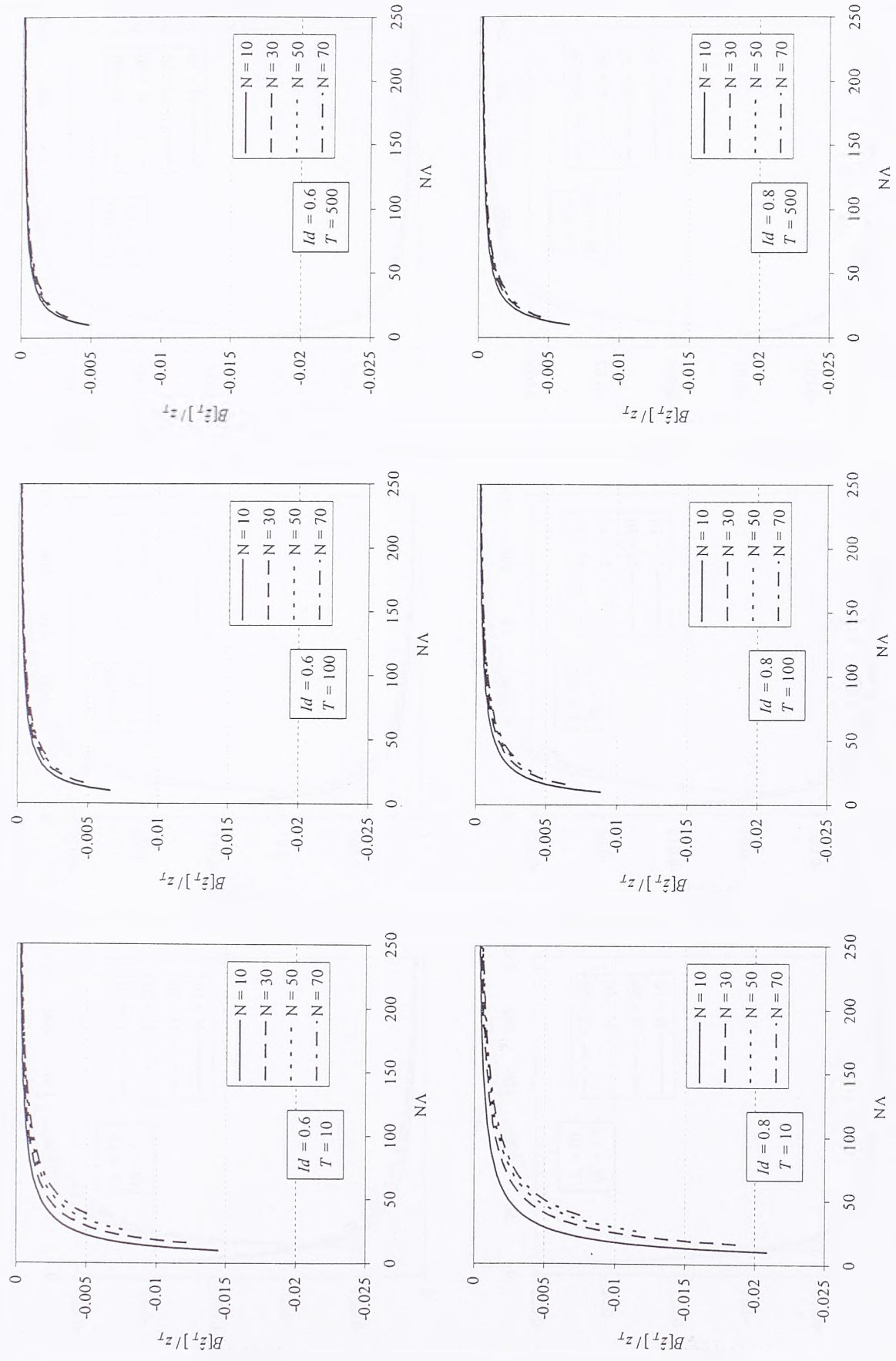


Slika 2. Relativna pristranost ocene kvančila modela NB+E u zavisnosti od povratnog perioda.

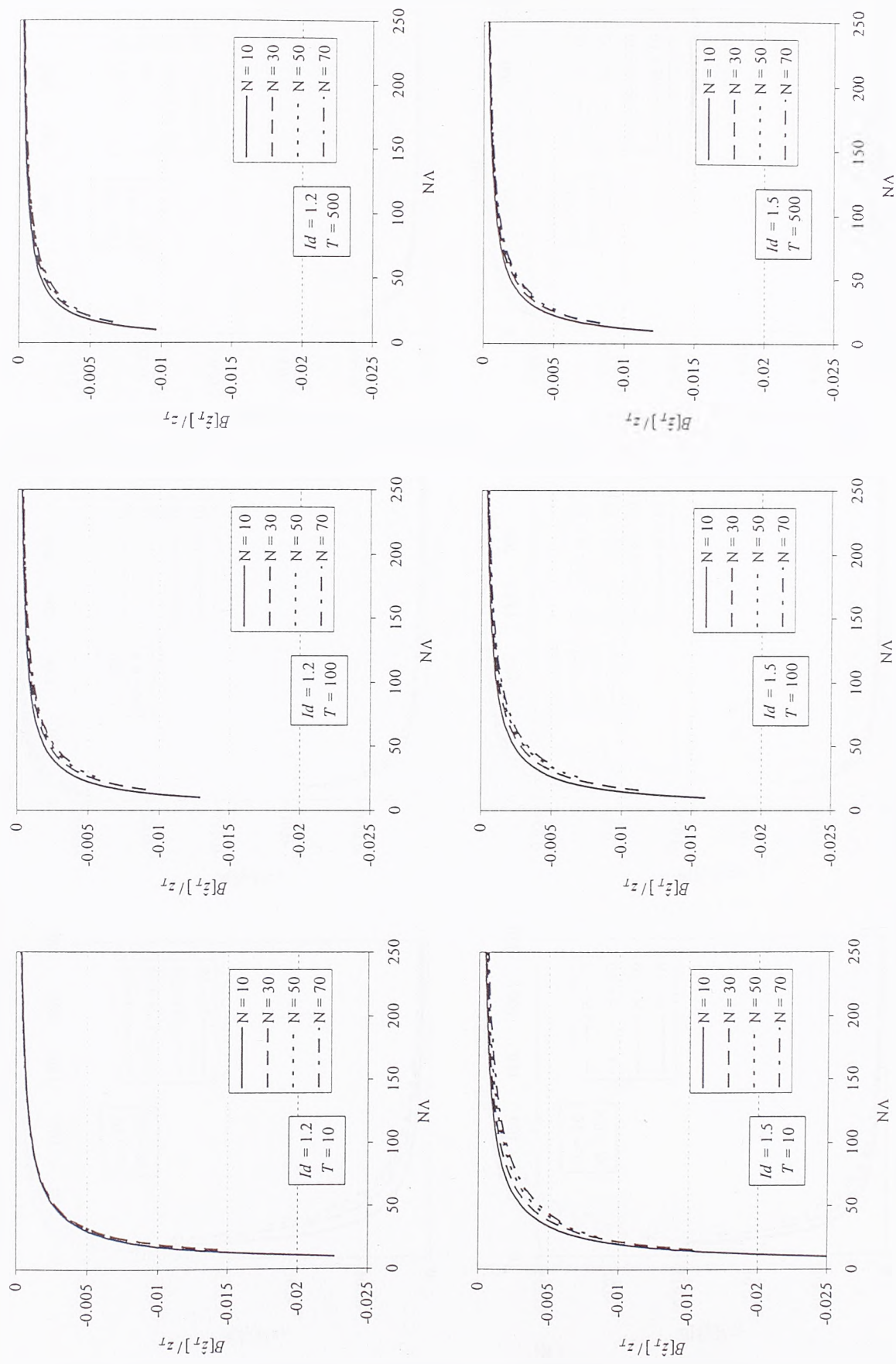


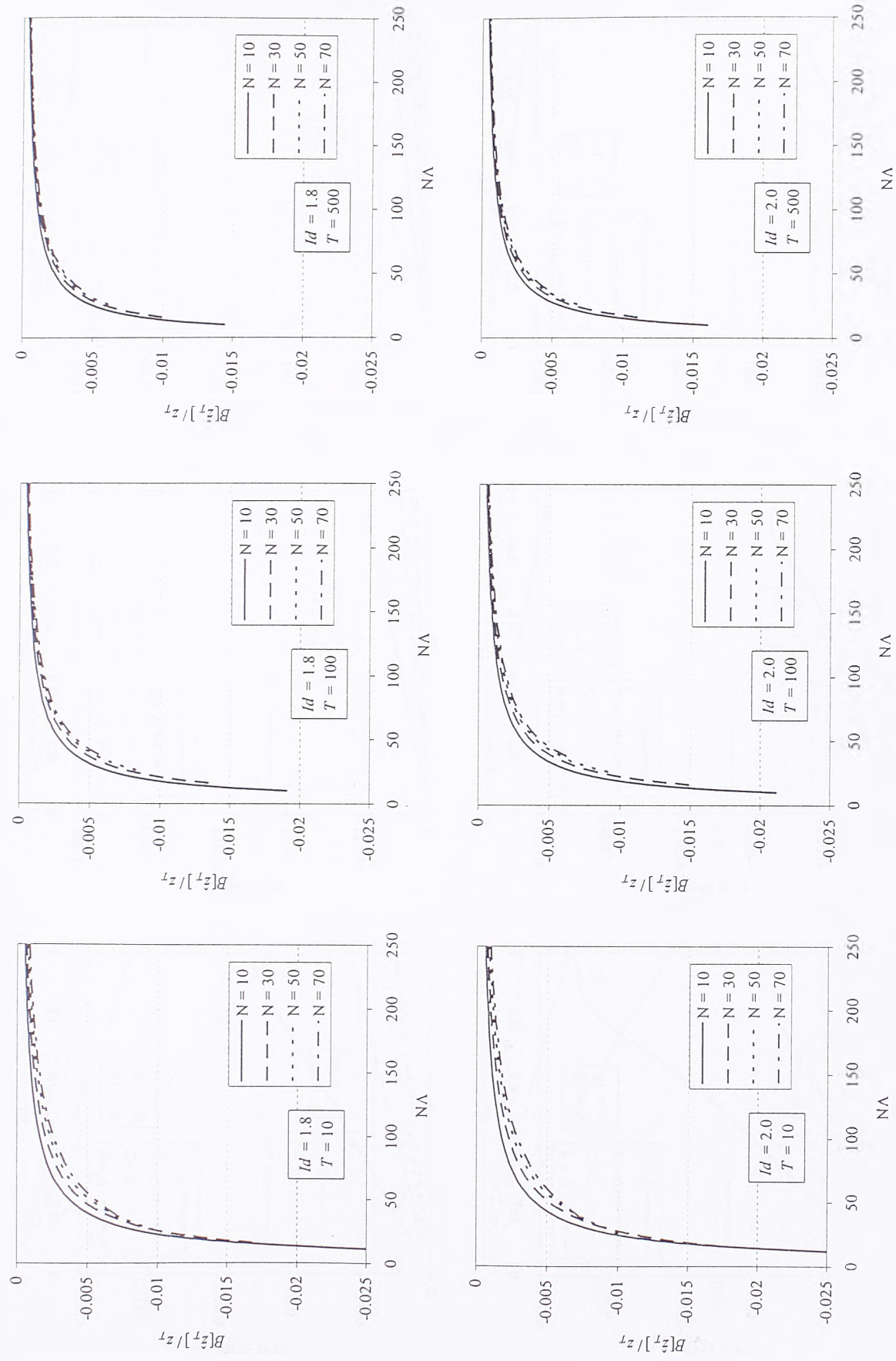
Slika 2 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od povratnog perioda.

Slika 3. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja NA .

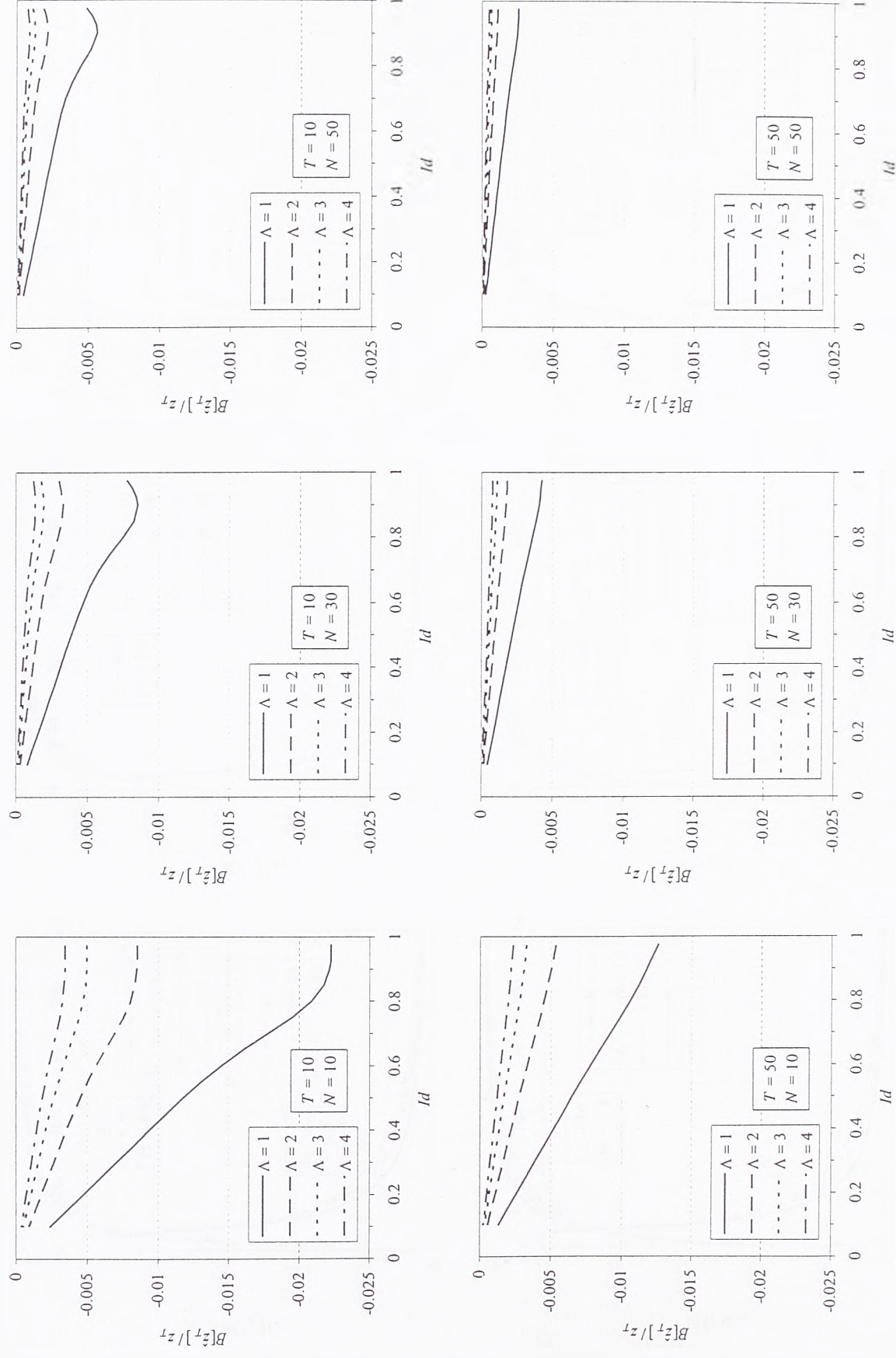


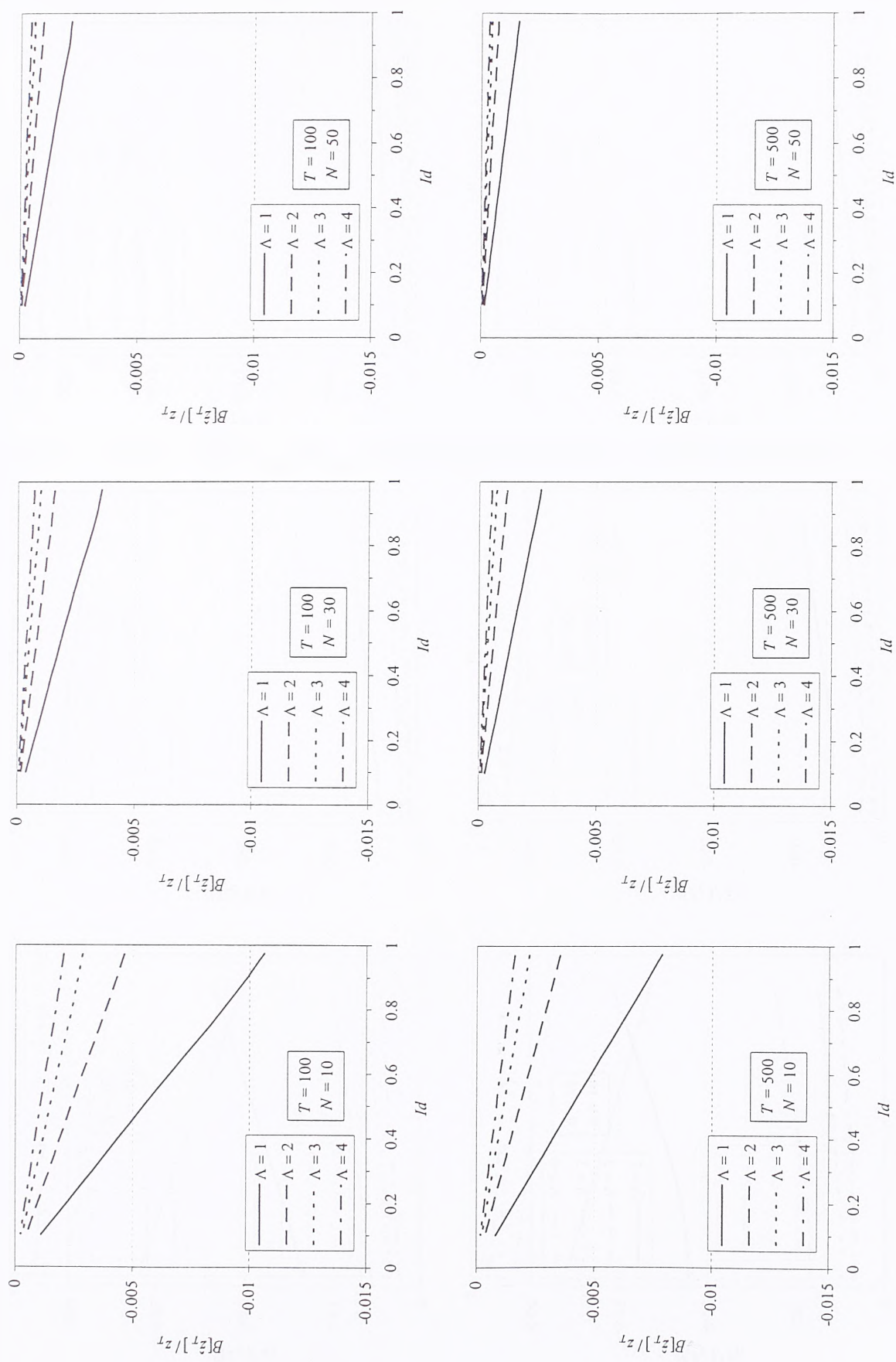
Slika 3 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od ukupnog broja preokracenja NA .

Slika 4. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\lambda$.

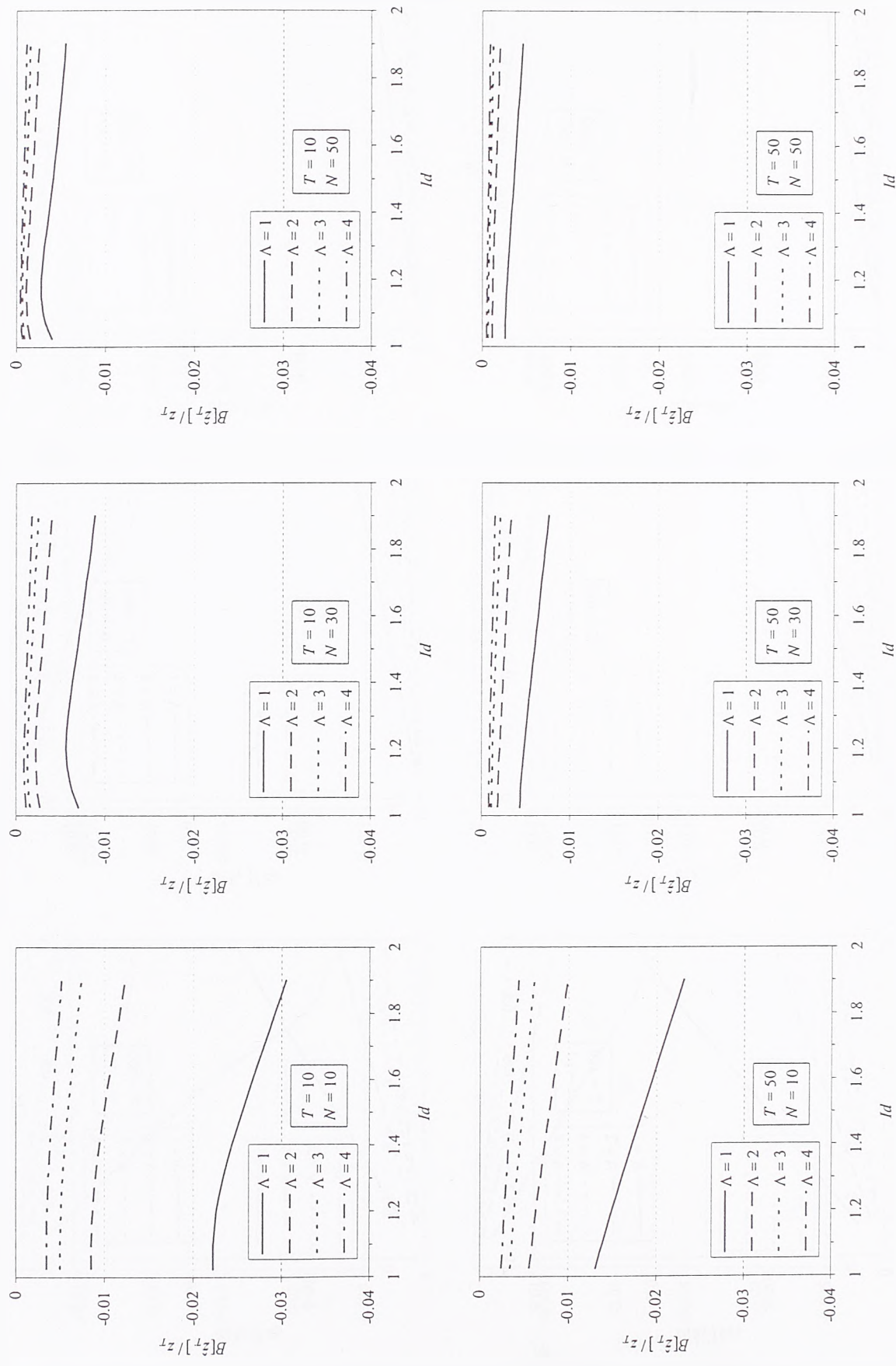


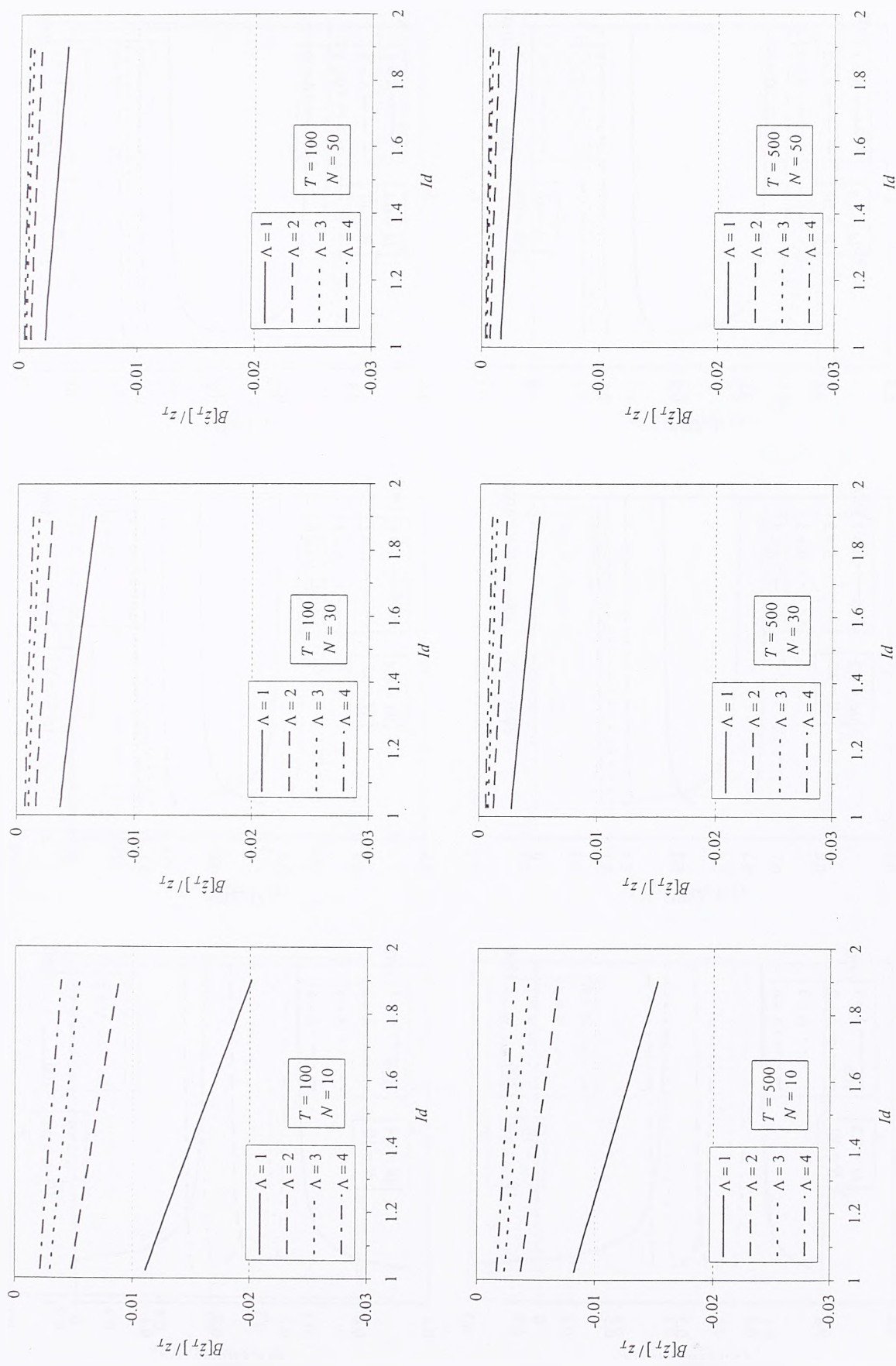
Slika 4 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\lambda$.

Slika 5. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekracenja I_d .

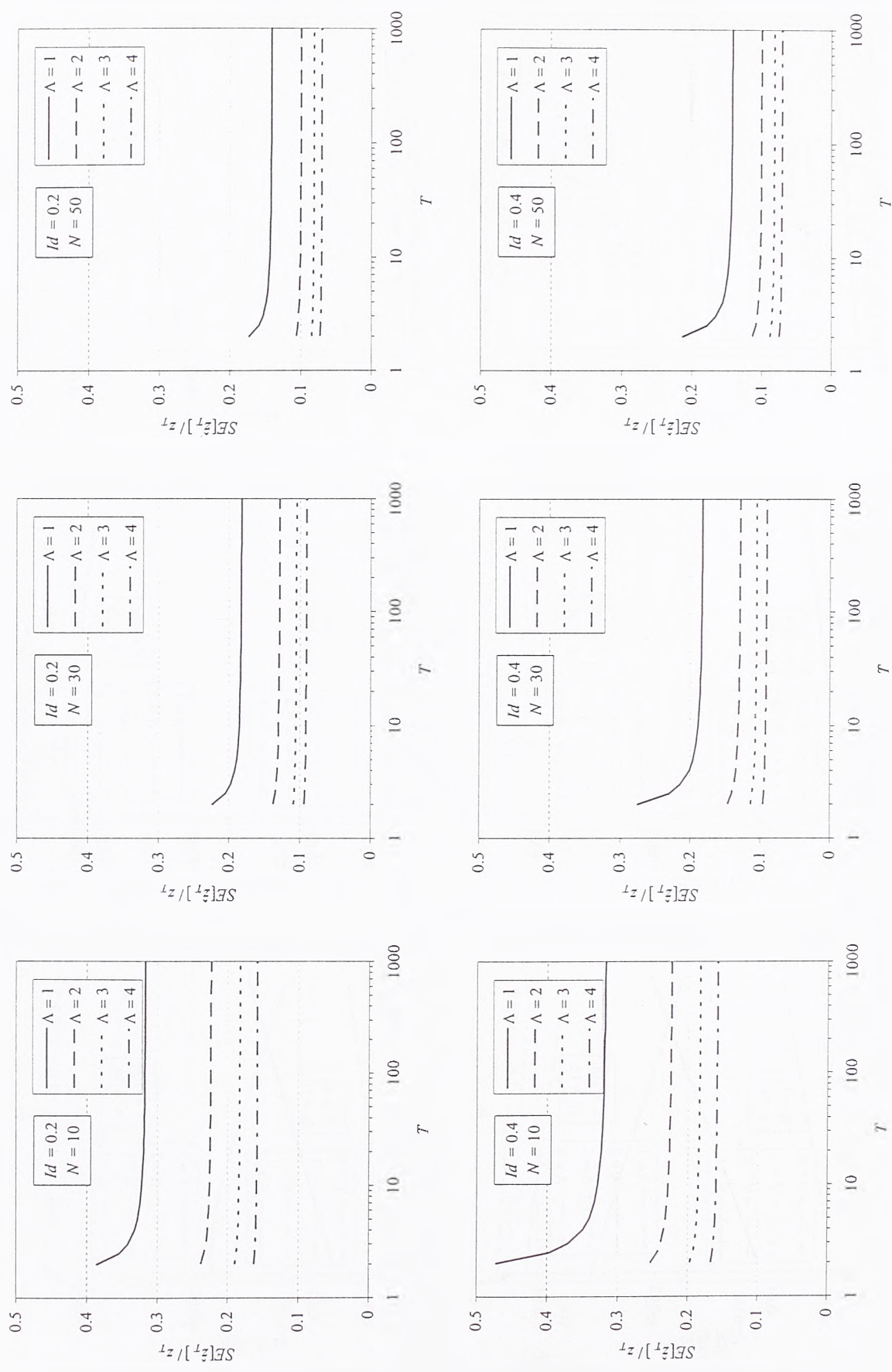


Slika 5 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekoračenja I_d .

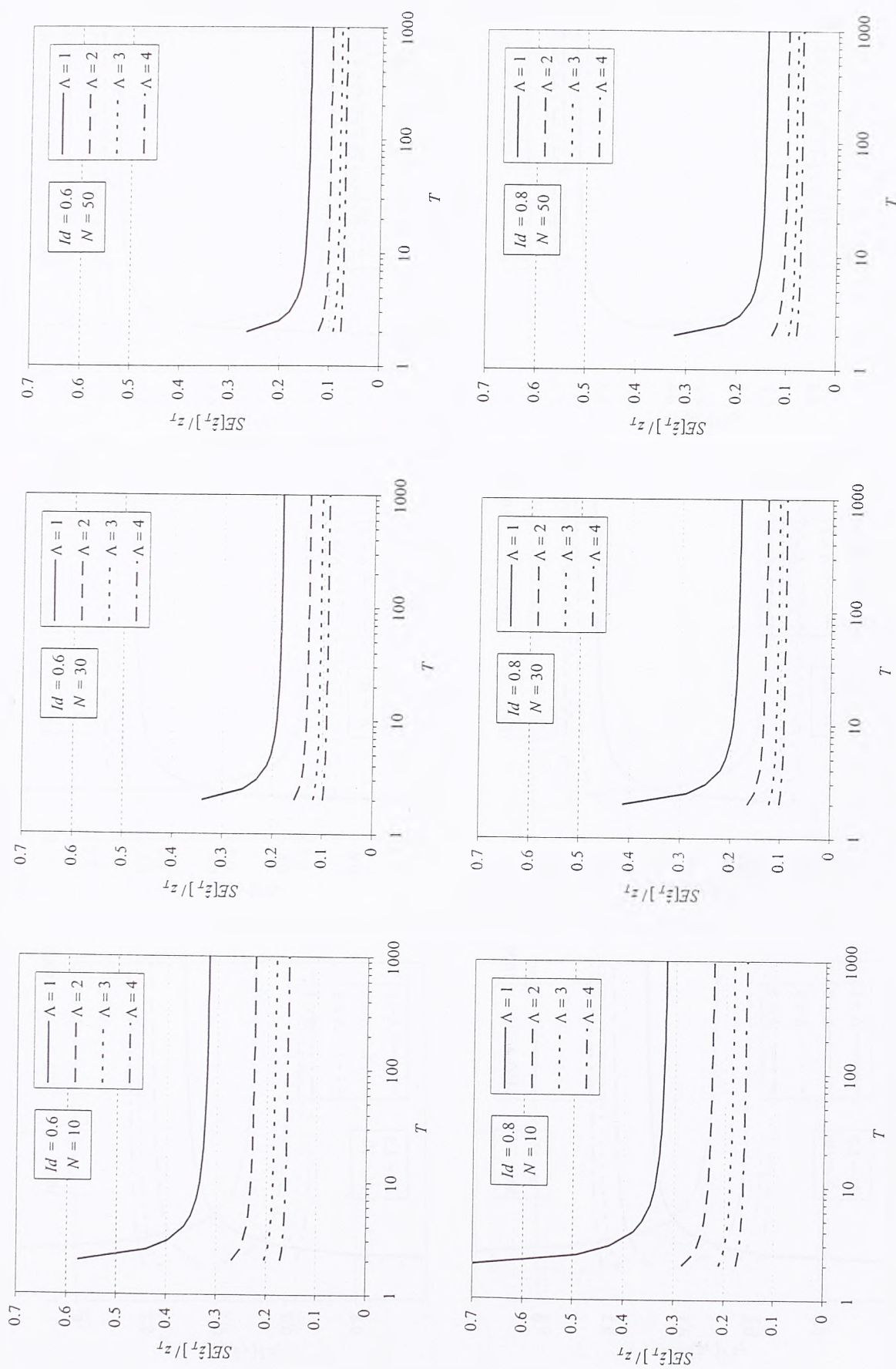
Slika 6. Relativna pristrasnost ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja preporačenja I_d .



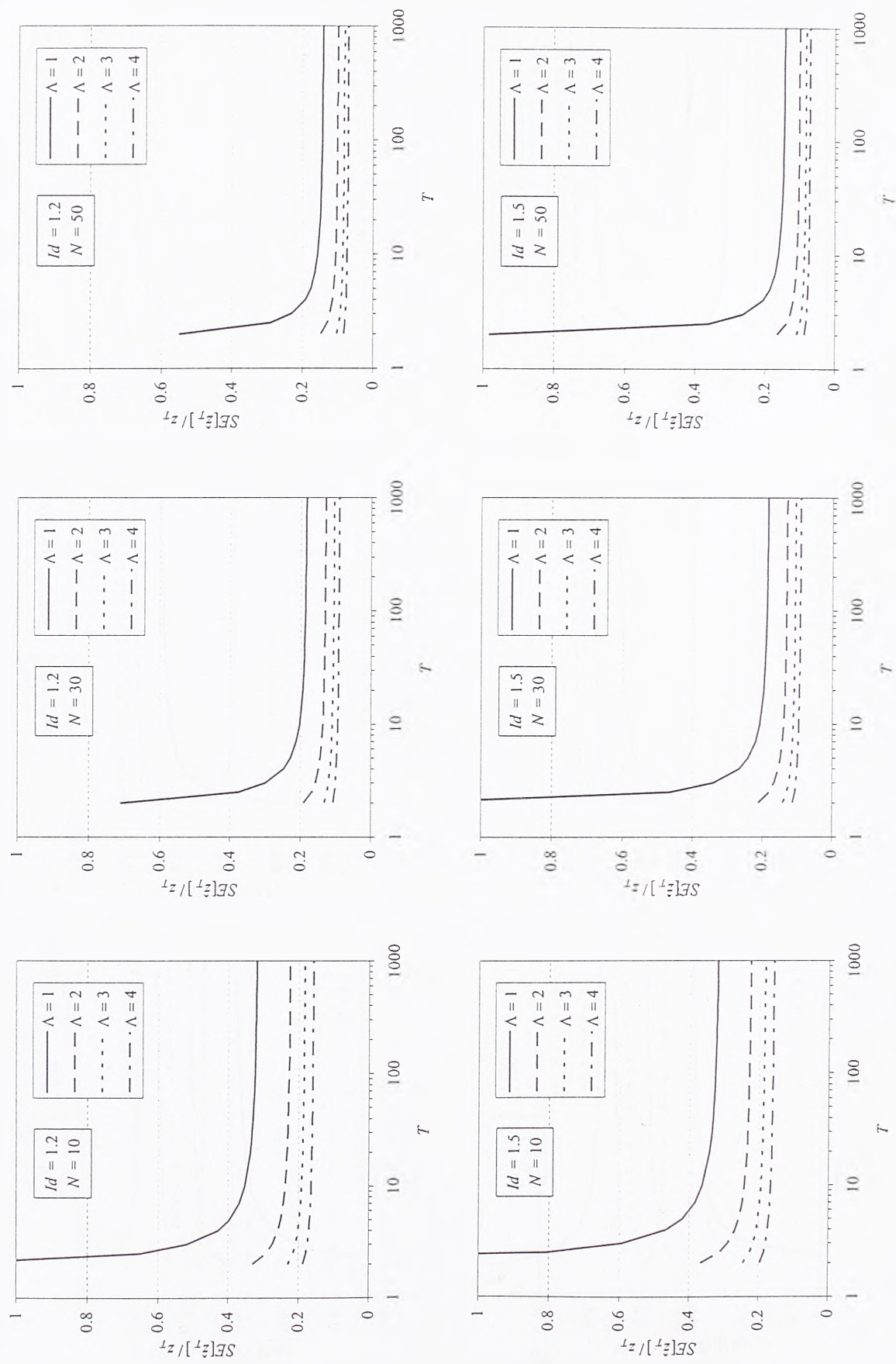
Slika 6 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekoračenja I_d .



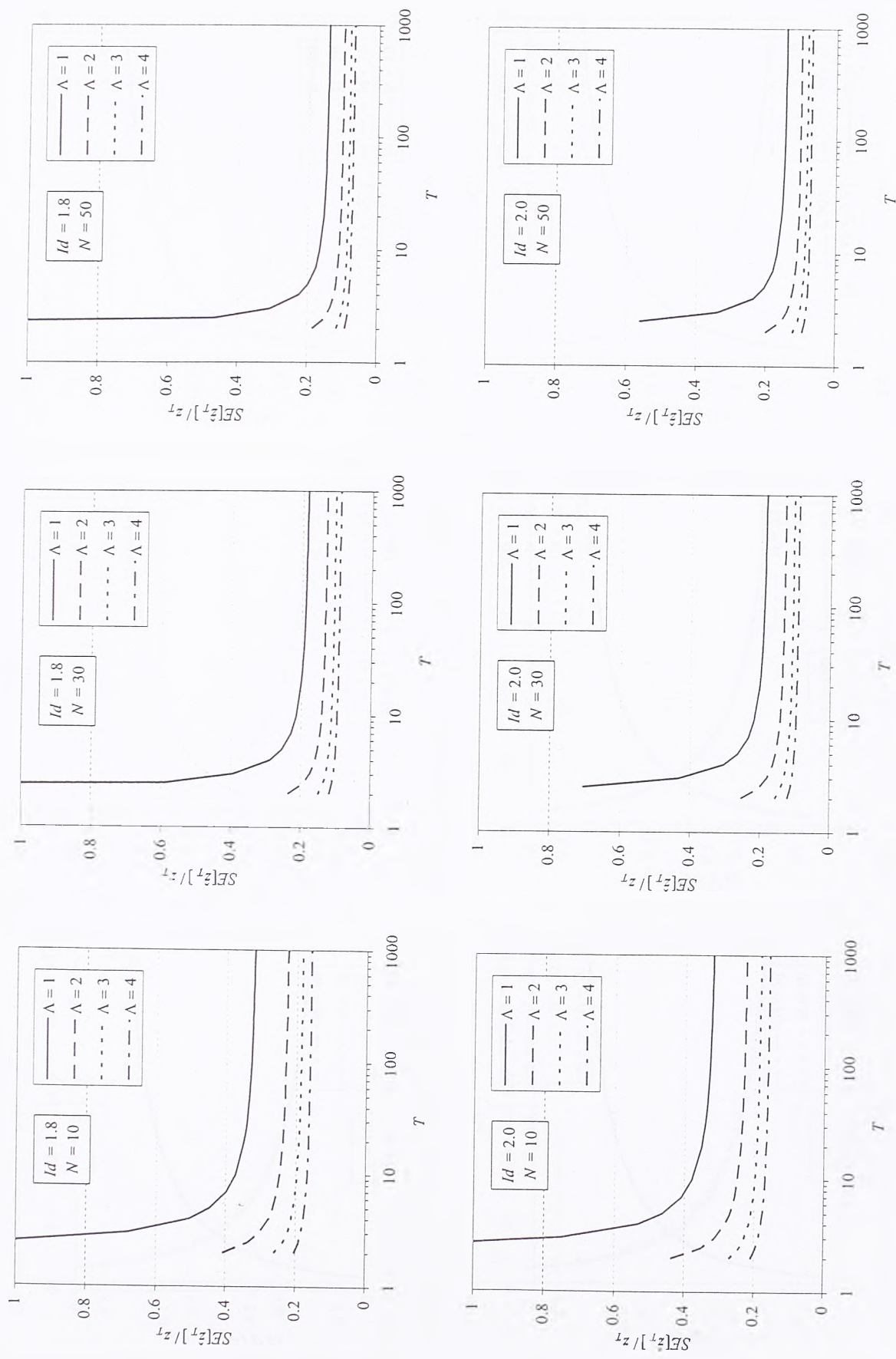
Slika 7. Relativna standardna greška ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od povratnog perioda.



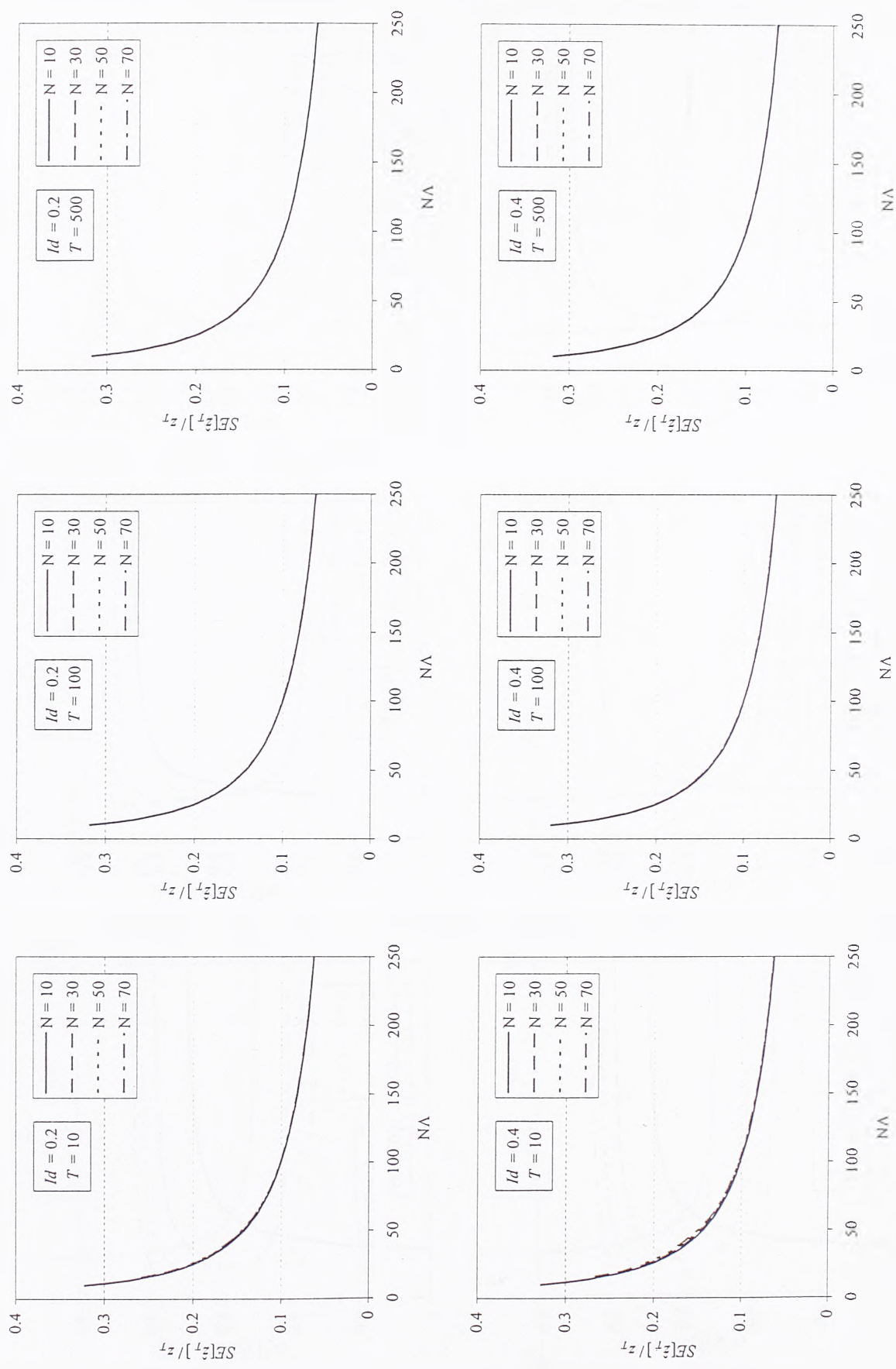
Slika 7 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od povratnog perioda.

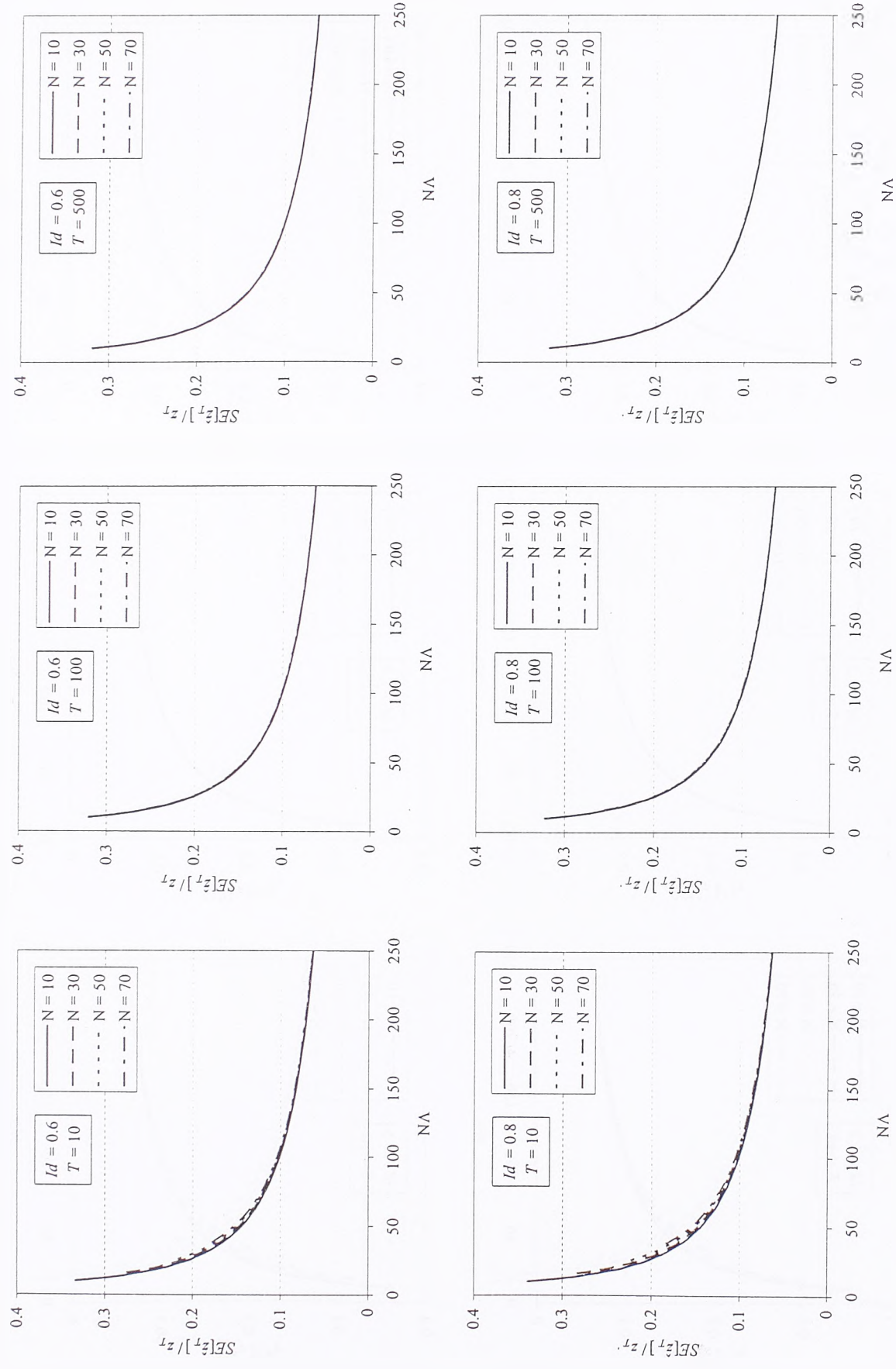


Slika 8. Relativna standardna greška ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od povratnog perioda.

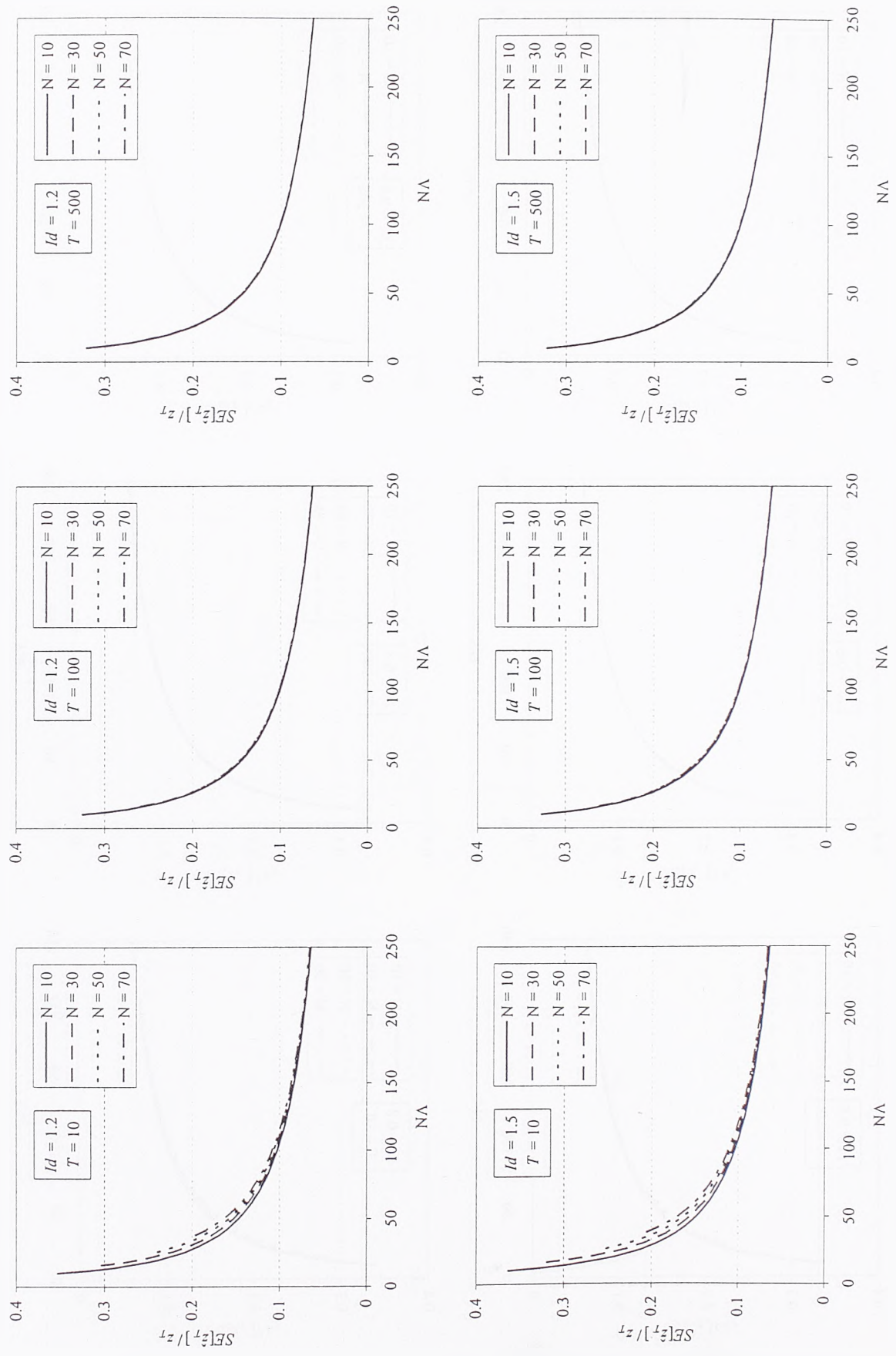


Slika 8 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od povratnog perioda.

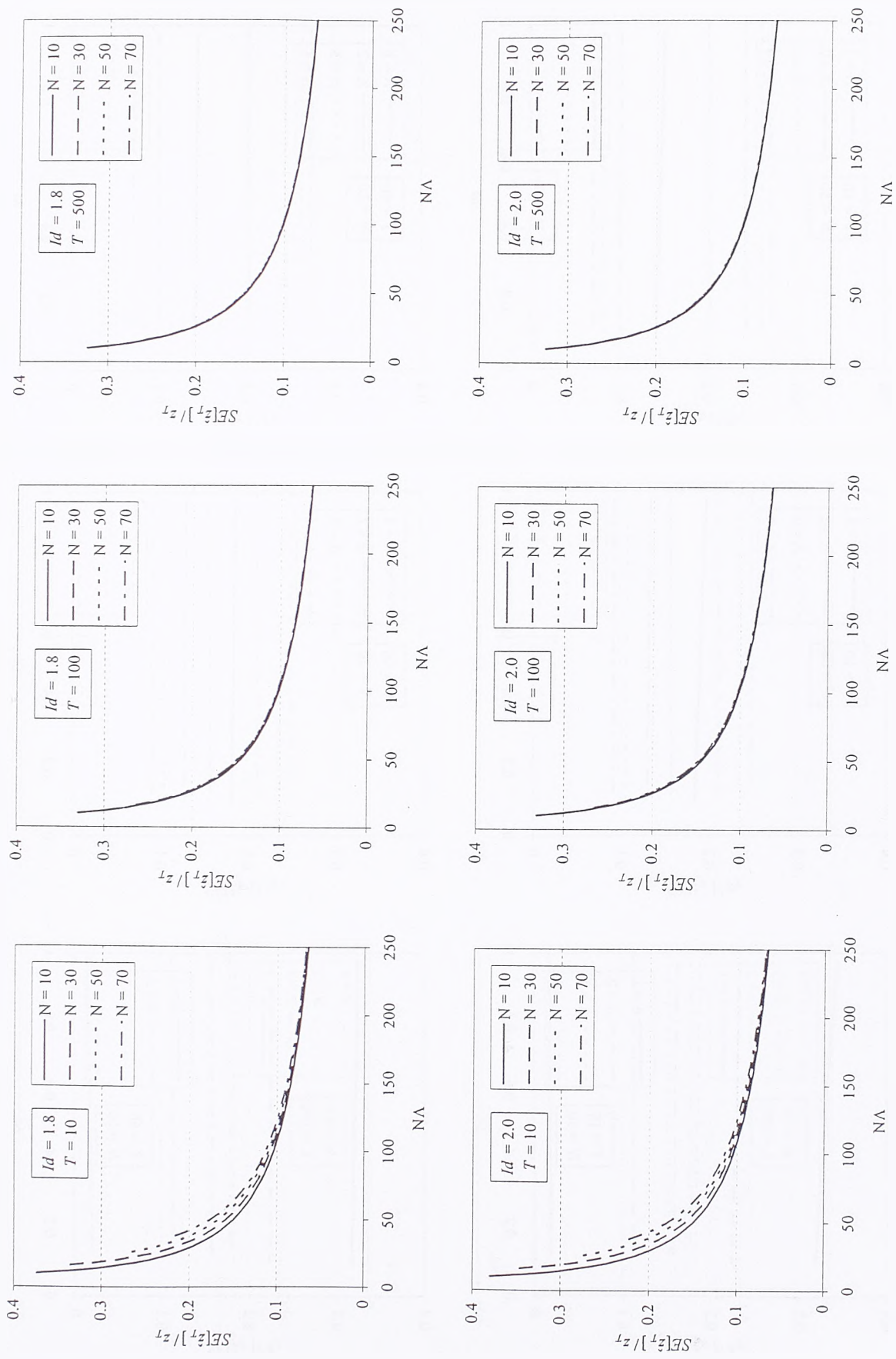
Slika 9. Relativna standardna greška ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$.



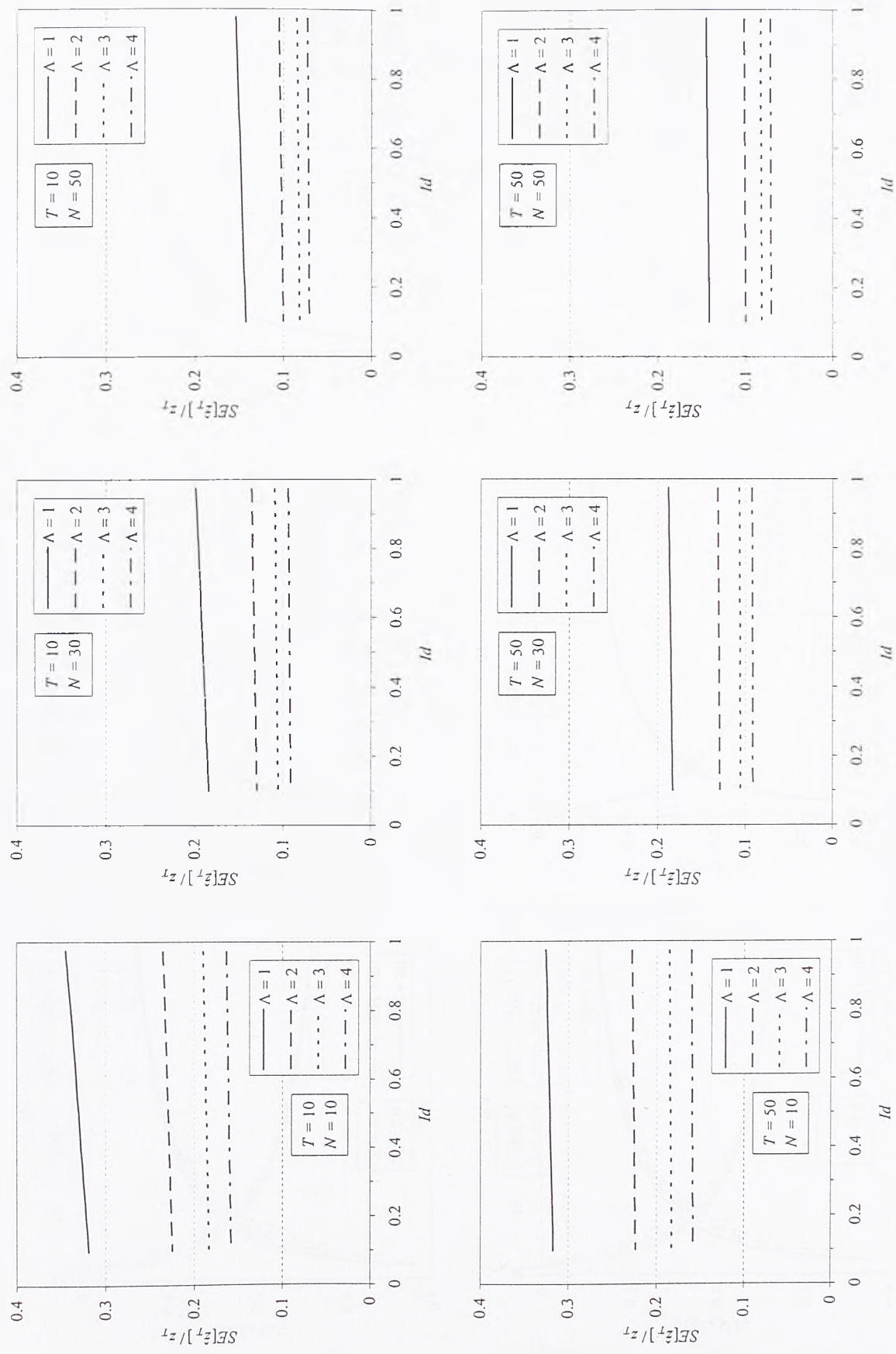
Slika 9 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja NA .

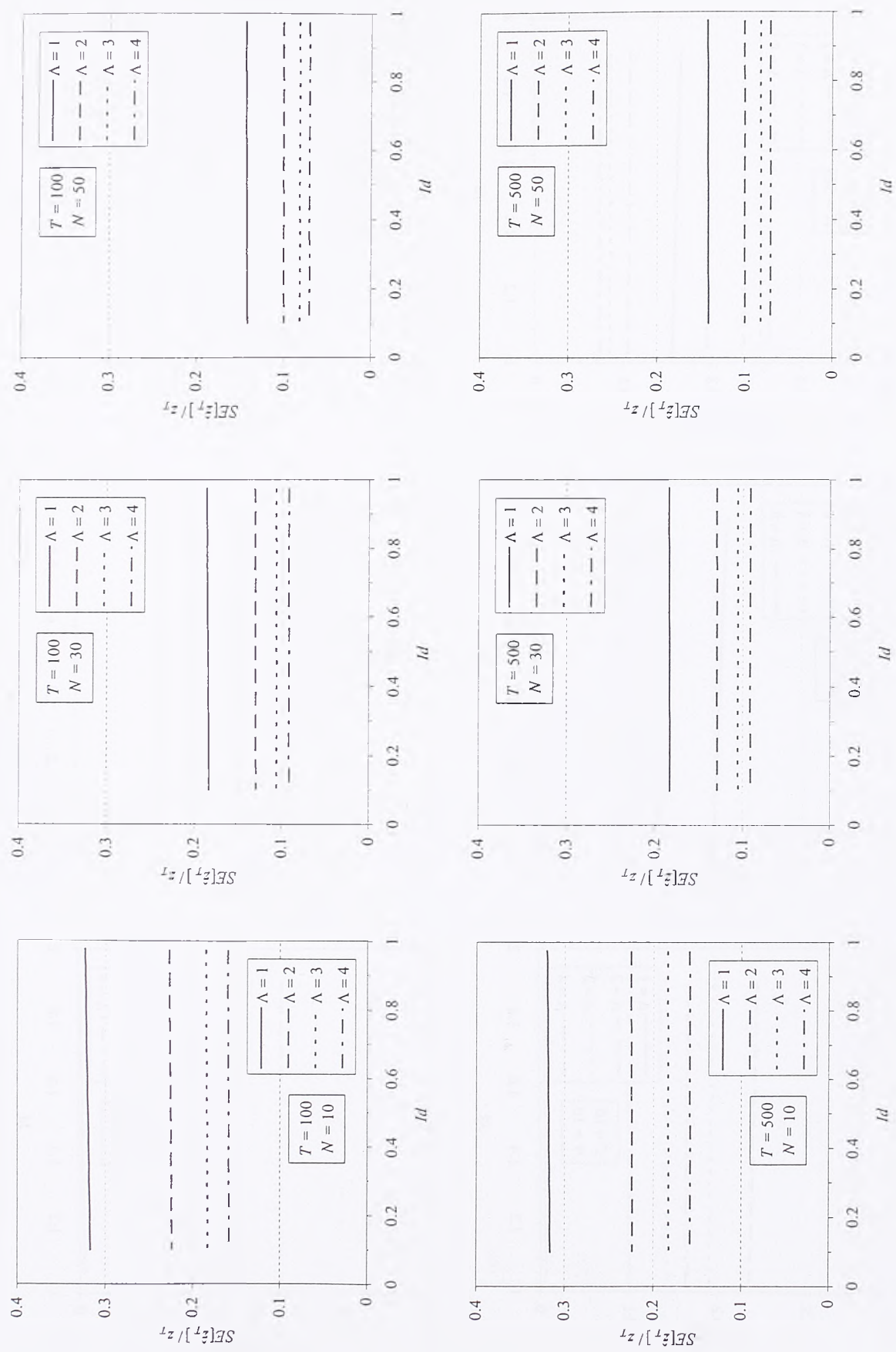


Slika 10. Relativna standardna greška ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoracjenja NA .

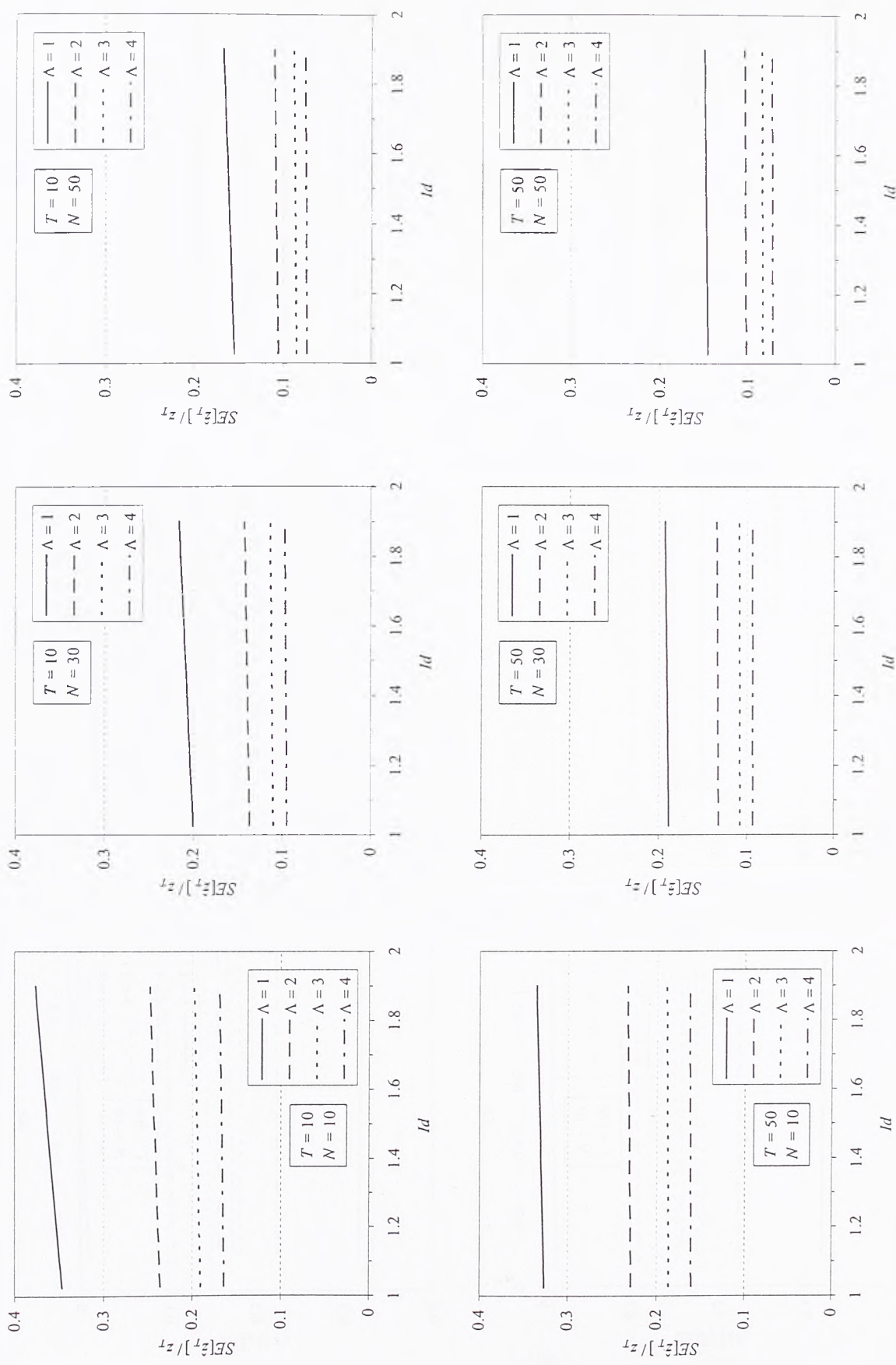


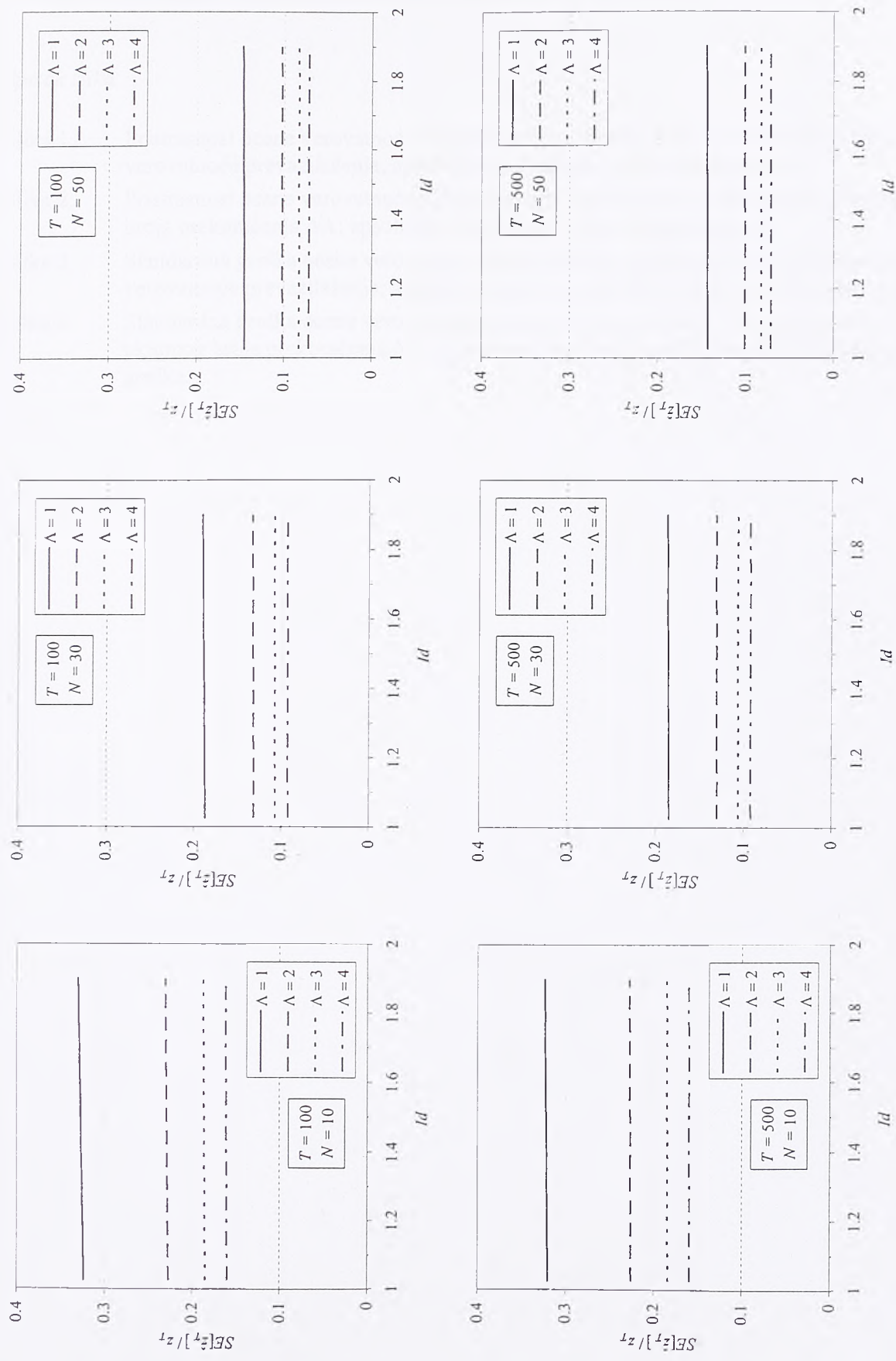
Slika 10 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja NA .

Slika 11. Relativna standardna greška ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekoračenja I_d .



Slika 11 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela B+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekoračenja I_d .

Slika 12. Relativna standardna greška ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekoračenja I_d .

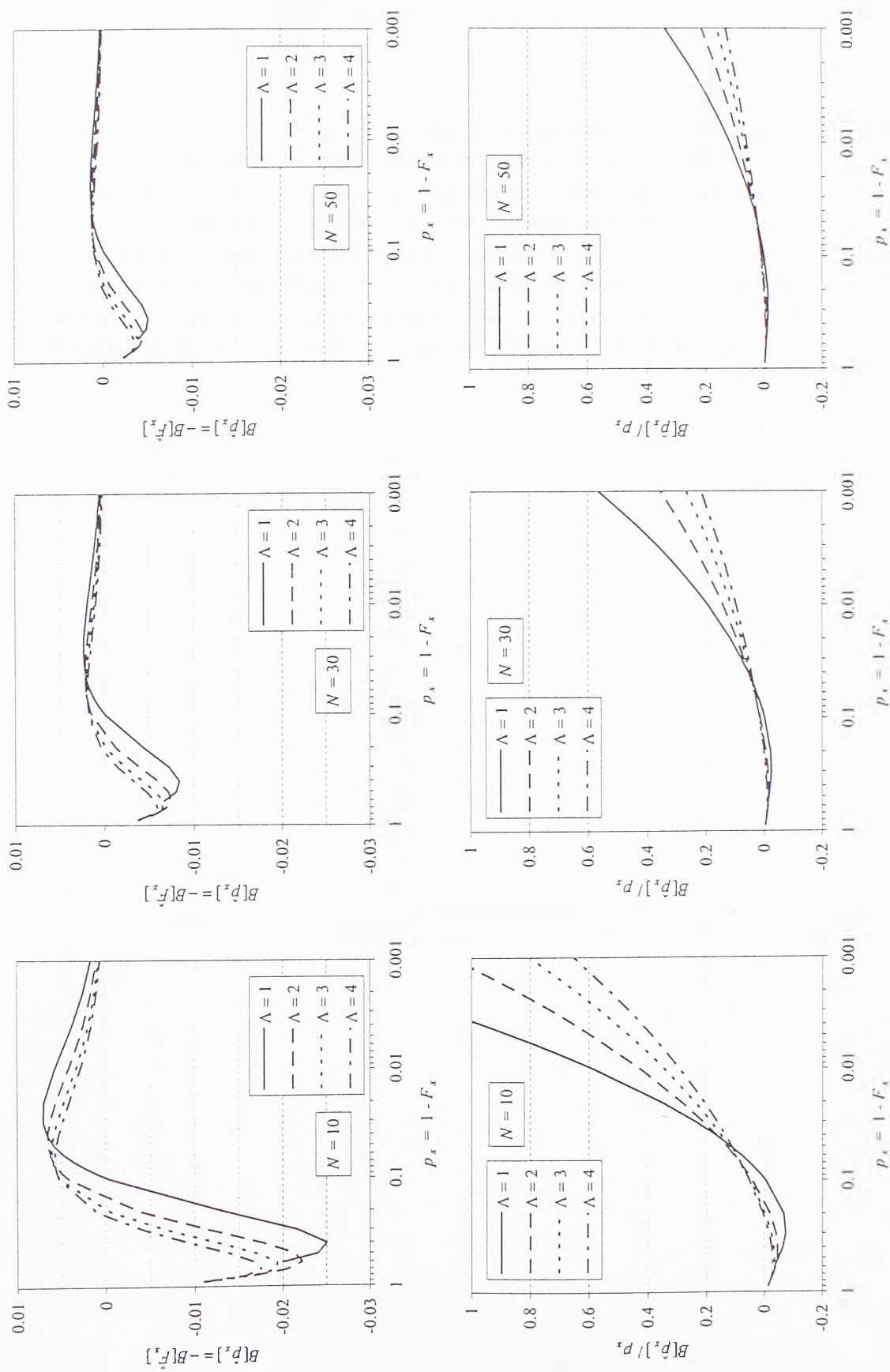


Slika 12 (nastavak). Relativna standardna greška ocene kvantila modela NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije broja prekoračenja I_d .

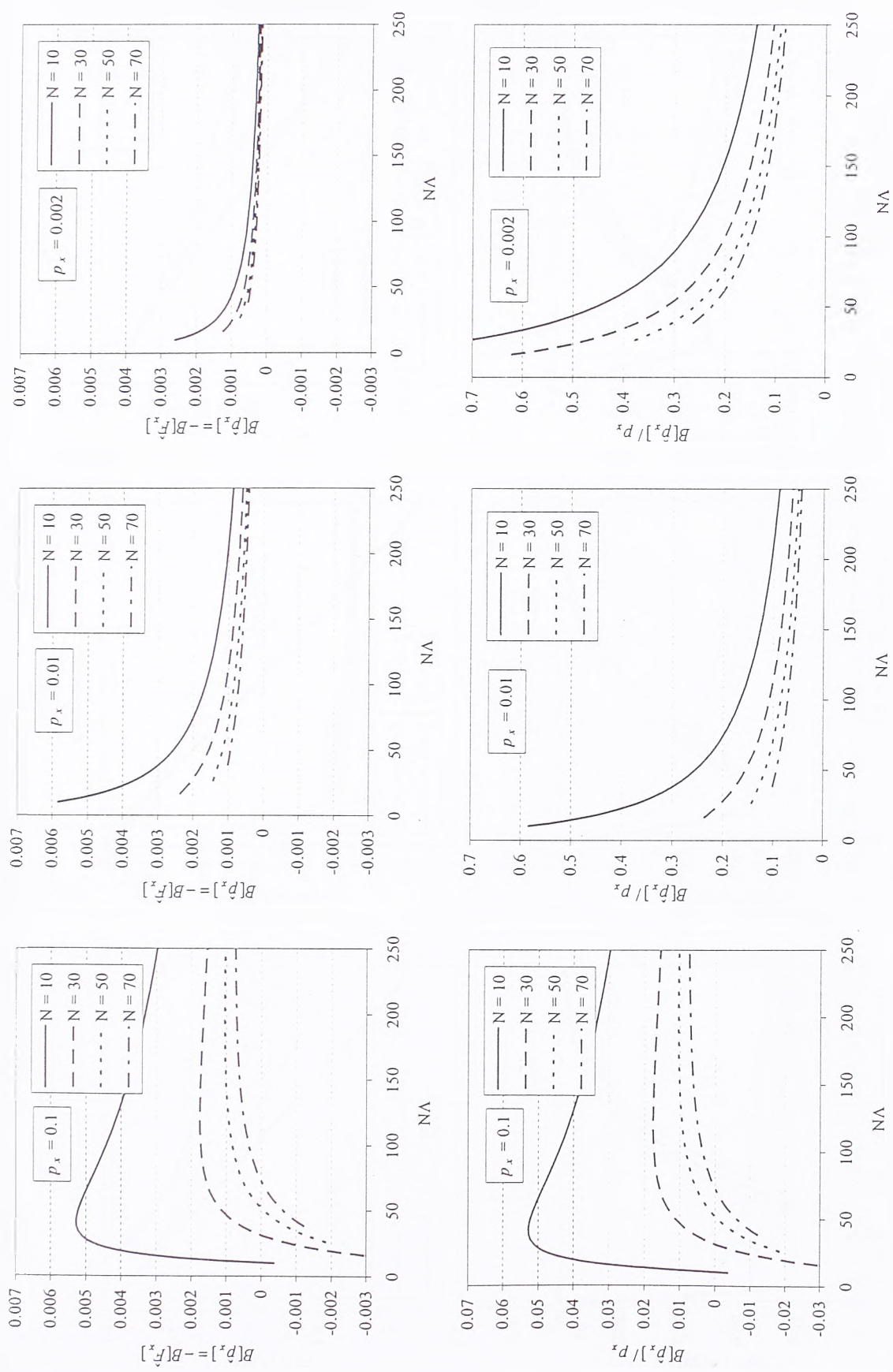
Svojstva ocene verovatnoće modelom P+E

Spisak slika

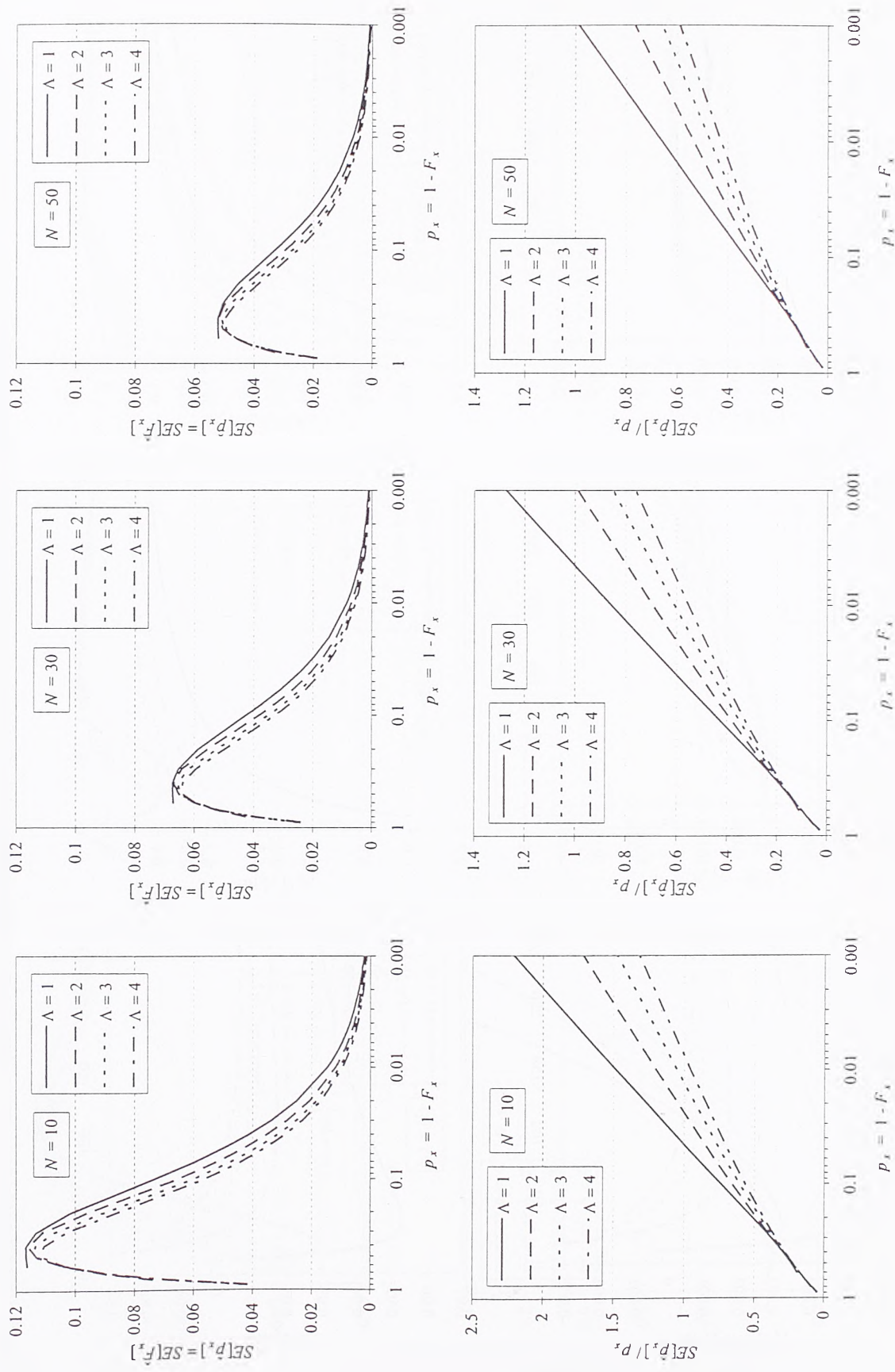
- Slika 1. Pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja; apsolutna pristrasnost i relativna pristrasnost.
- Slika 2. Pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$; apsolutna pristrasnost i relativna pristrasnost.
- Slika 3. Standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja; apsolutna standardna greška i relativna standardna greška.
- Slika 4. Standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja $N\Lambda$; apsolutna standardna greška i relativna standardna greška.



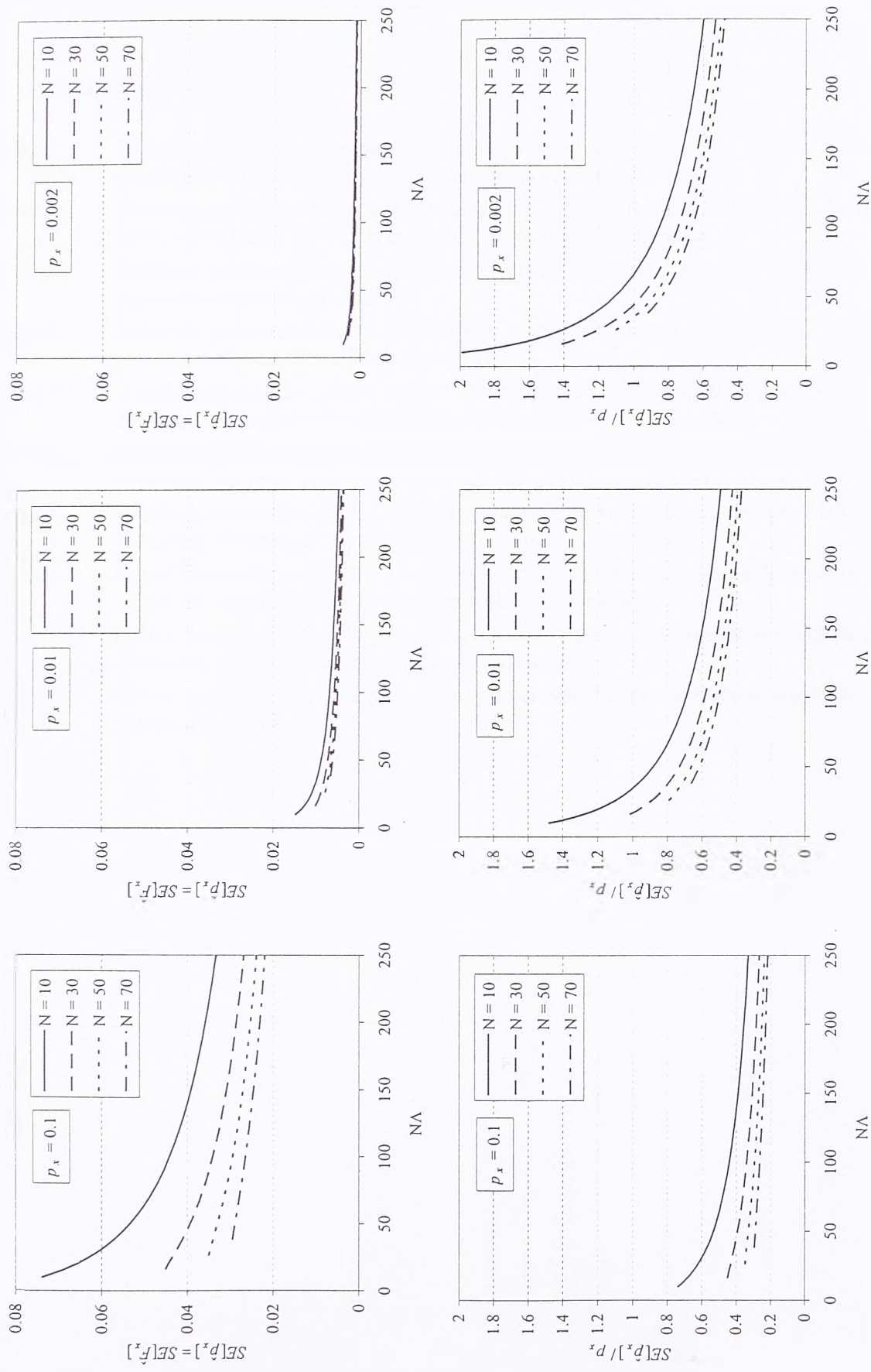
Slika 1. Pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja; apsolutna pristrasnost (gore) i relativna pristrasnost (dole).



Slika 2. Pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja NA ; apsolutna pristrasnost (gore) i relativna pristrasnost (dole).



Slika 3. Standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja; apsolutna standardna greška (gore) i relativna standardna greška (dole).

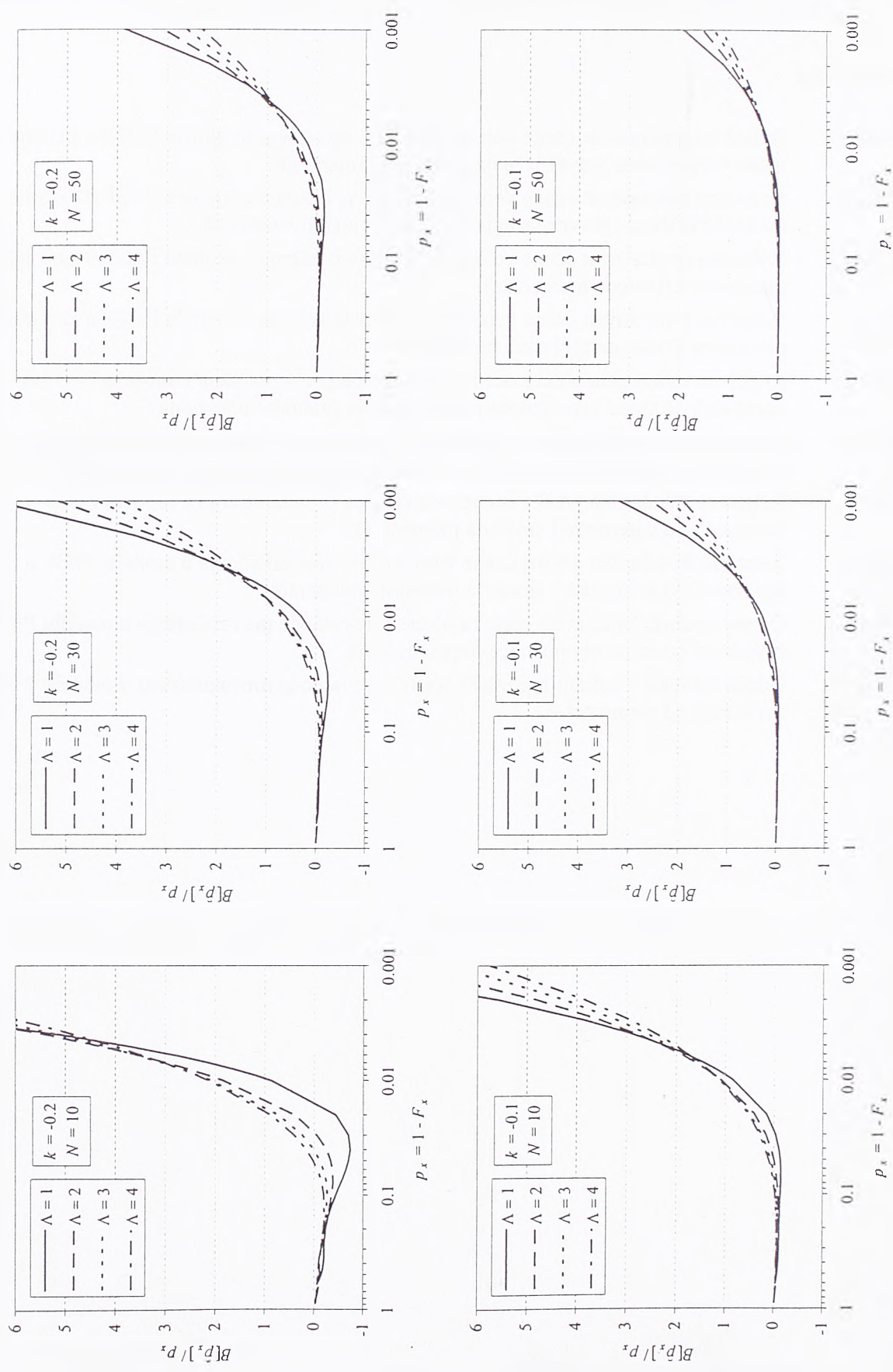


Slika 4. Standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+E u zavisnosti od ukupnog broja prekoračenja NA ; apsolutna standardna greška (gore) i relativna standardna greška (dole).

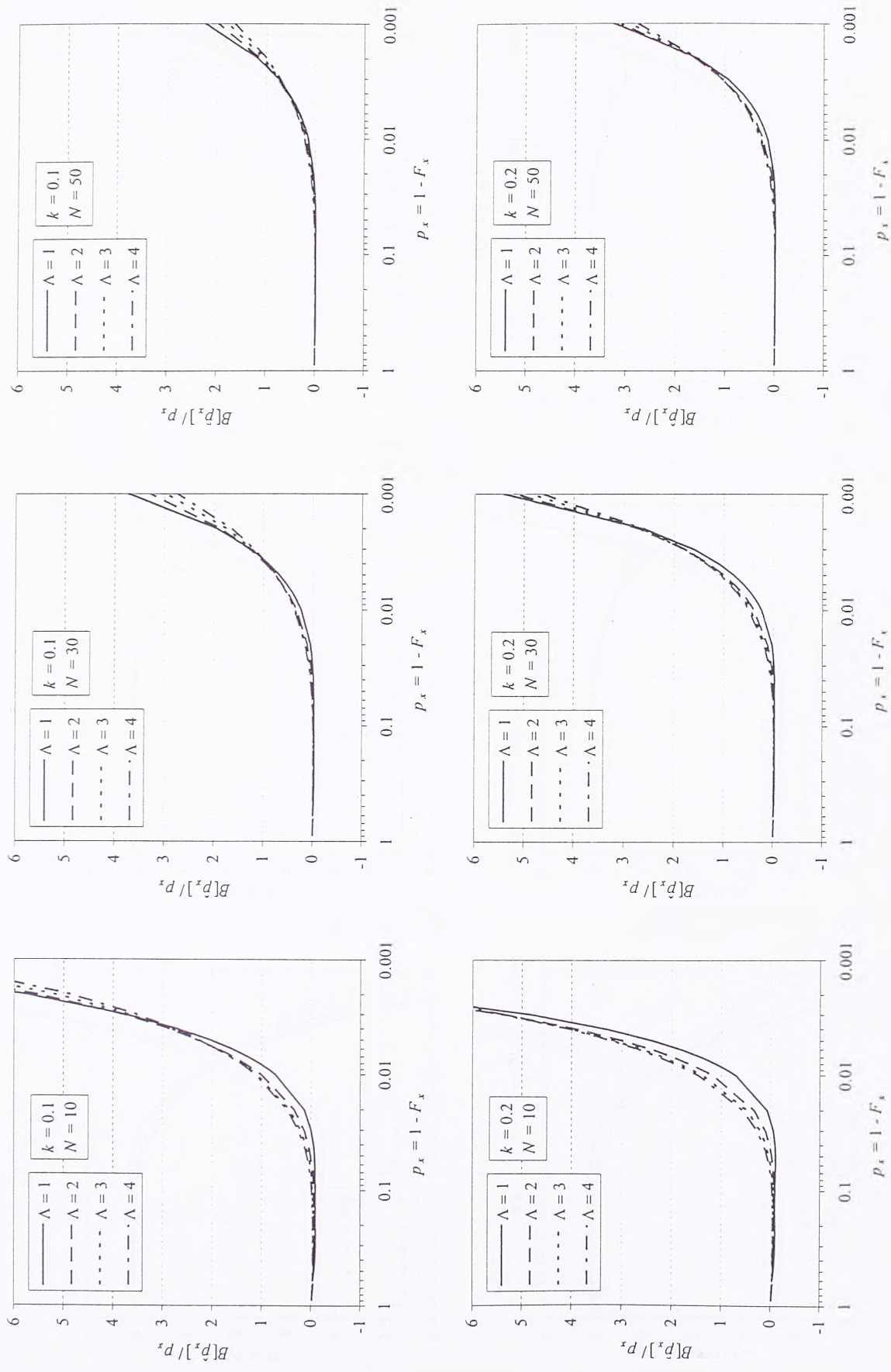
Svojstva ocene verovatnoće modelom P+GP

Spisak slika

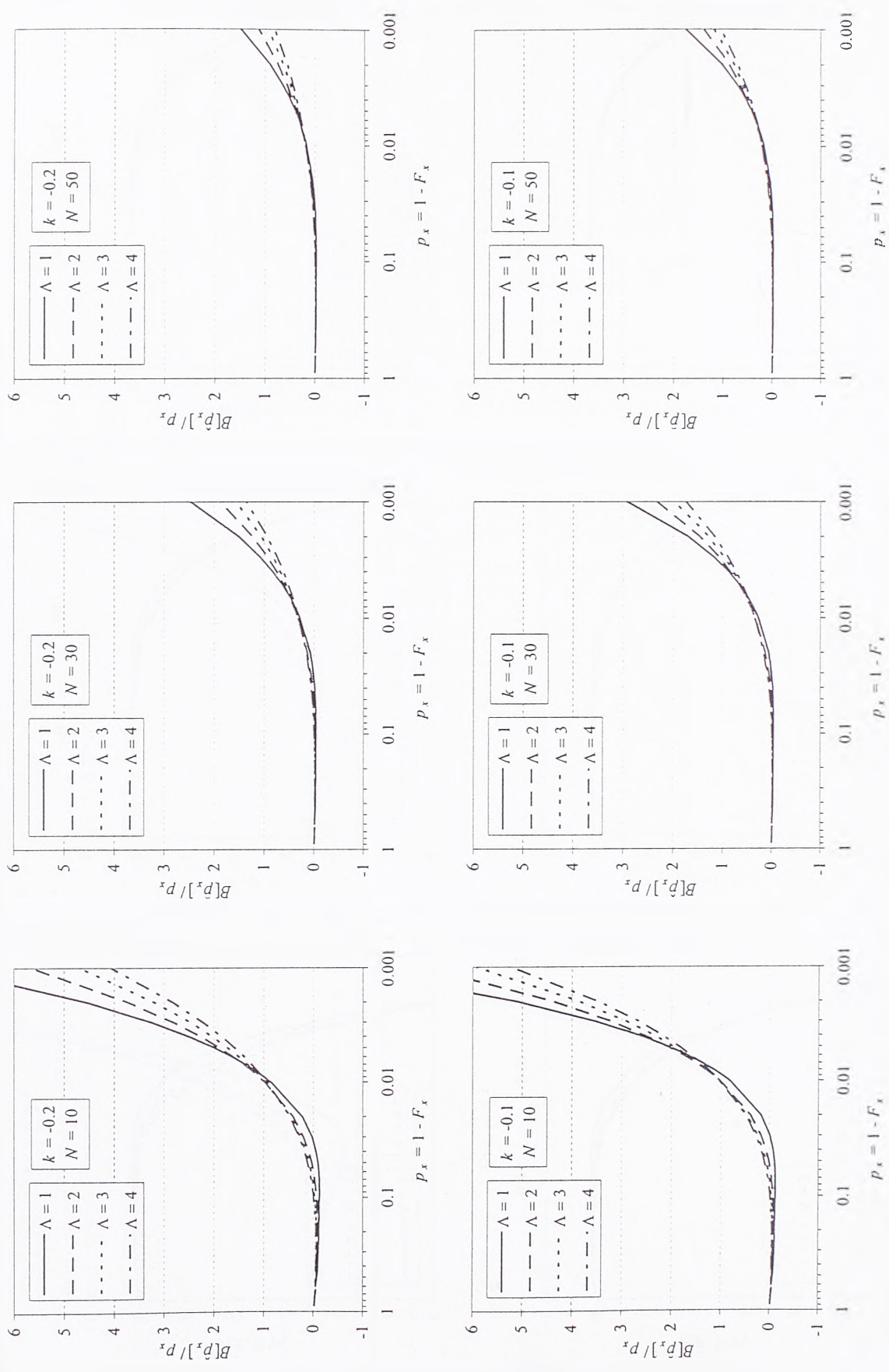
- Slika 1. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).
- Slika 2. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).
- Slika 3. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda momenata).
- Slika 4. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda težinskih momenata).
- Slika 5. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).
- Slika 6. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).
- Slika 7. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda momenata).
- Slika 8. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda težinskih momenata).
- Slika 9. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.
- Slika 10. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k .



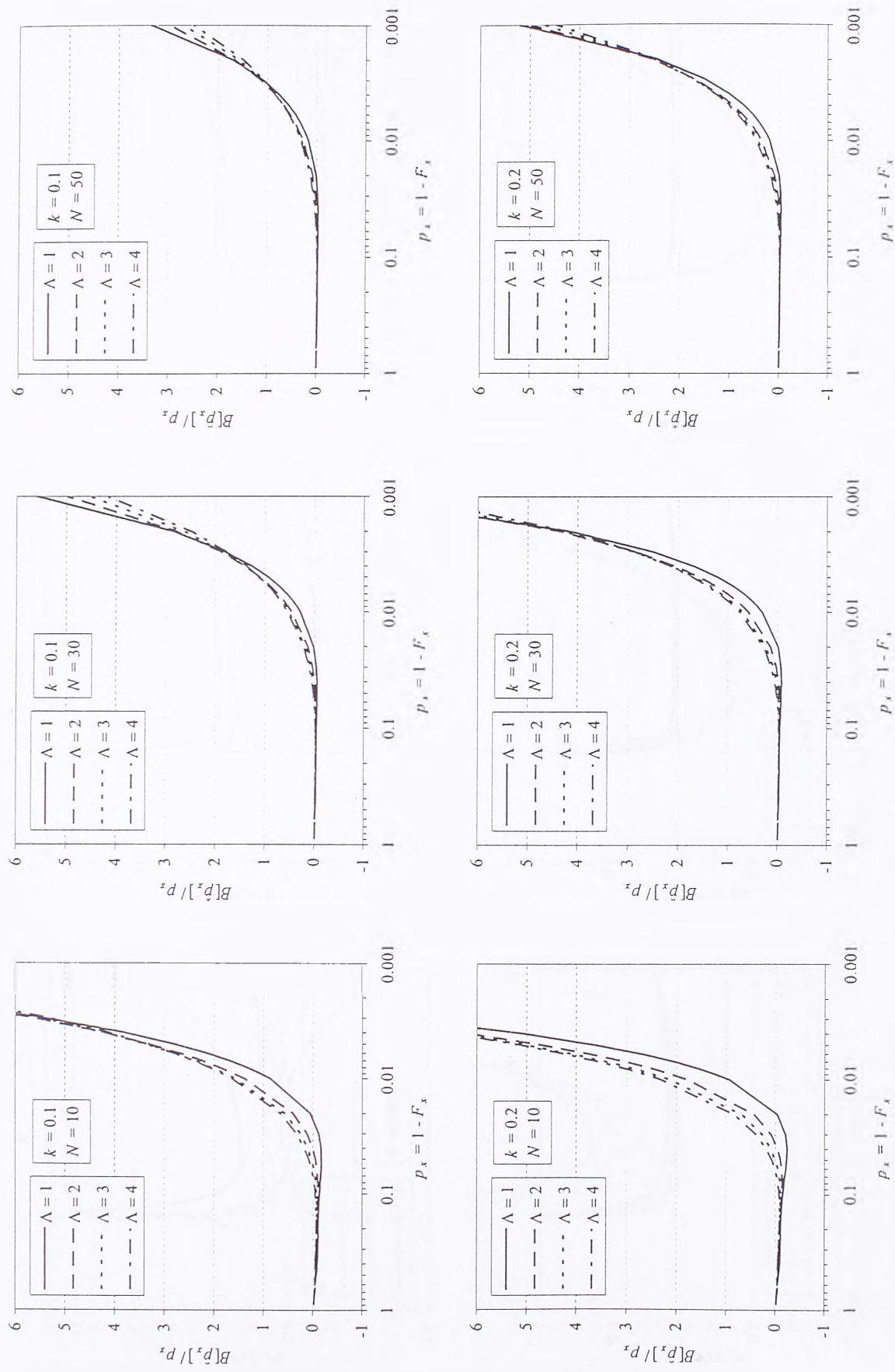
Slika 1. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).



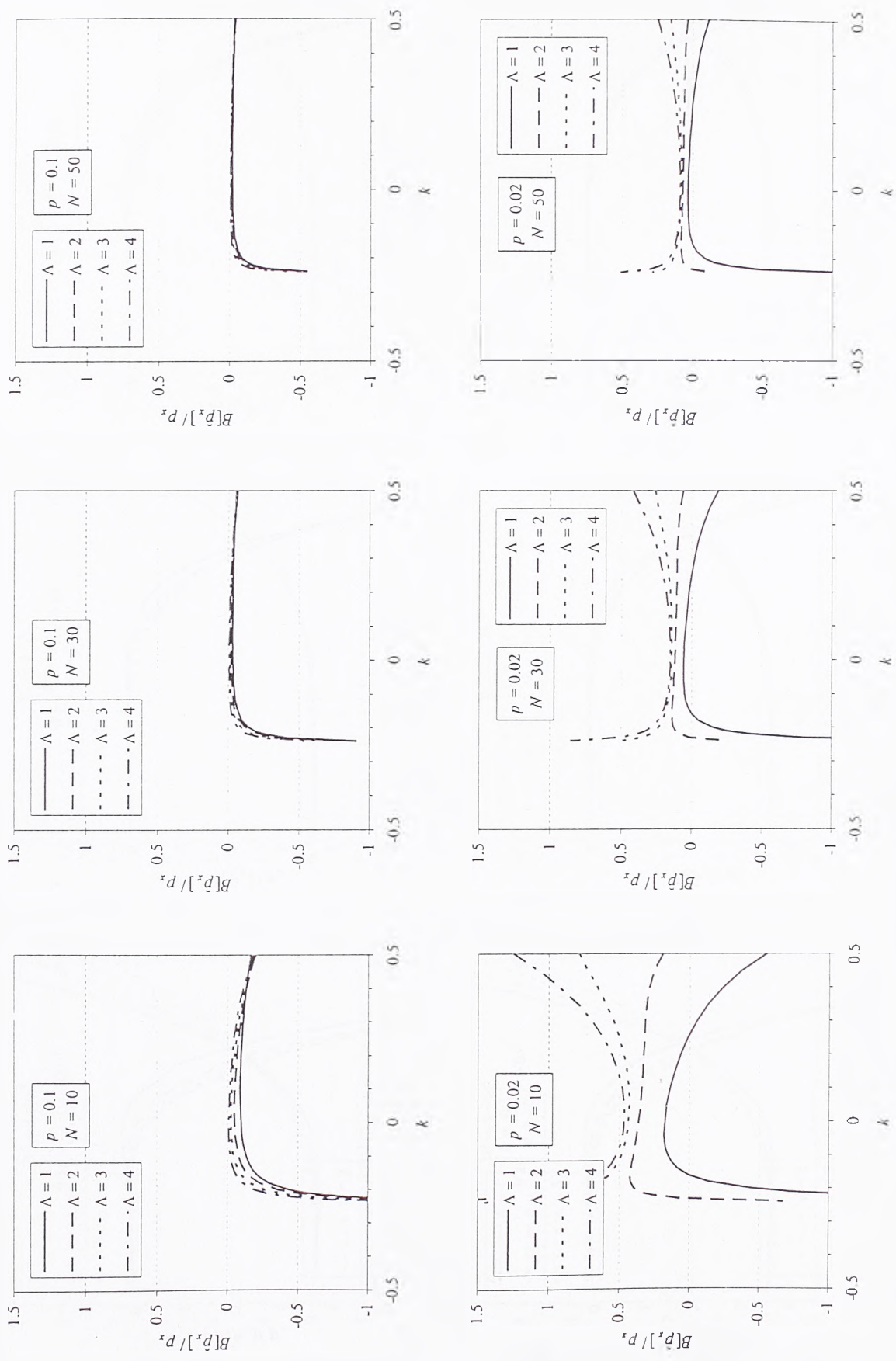
Slika 1 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).



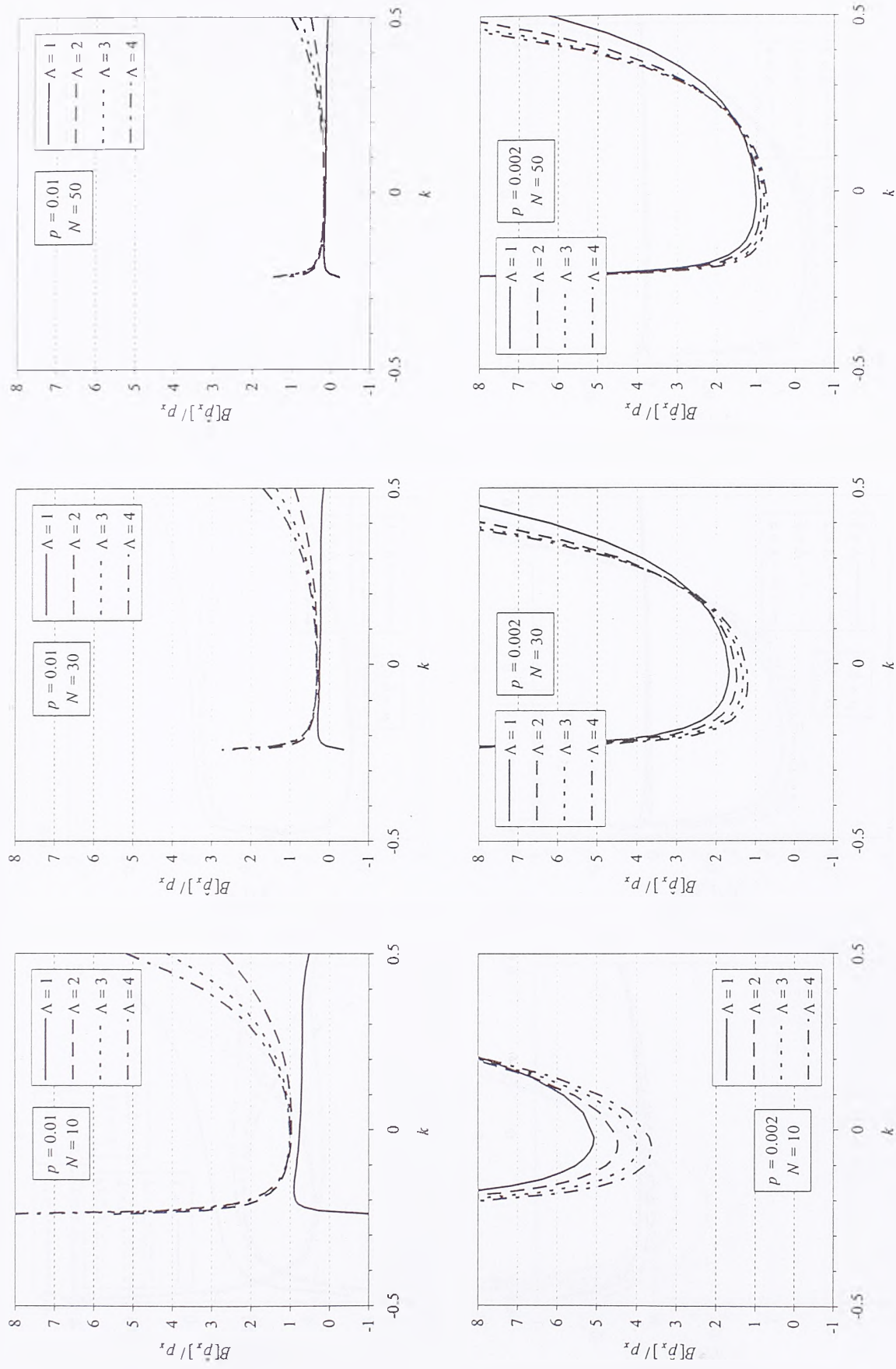
Slika 2. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).



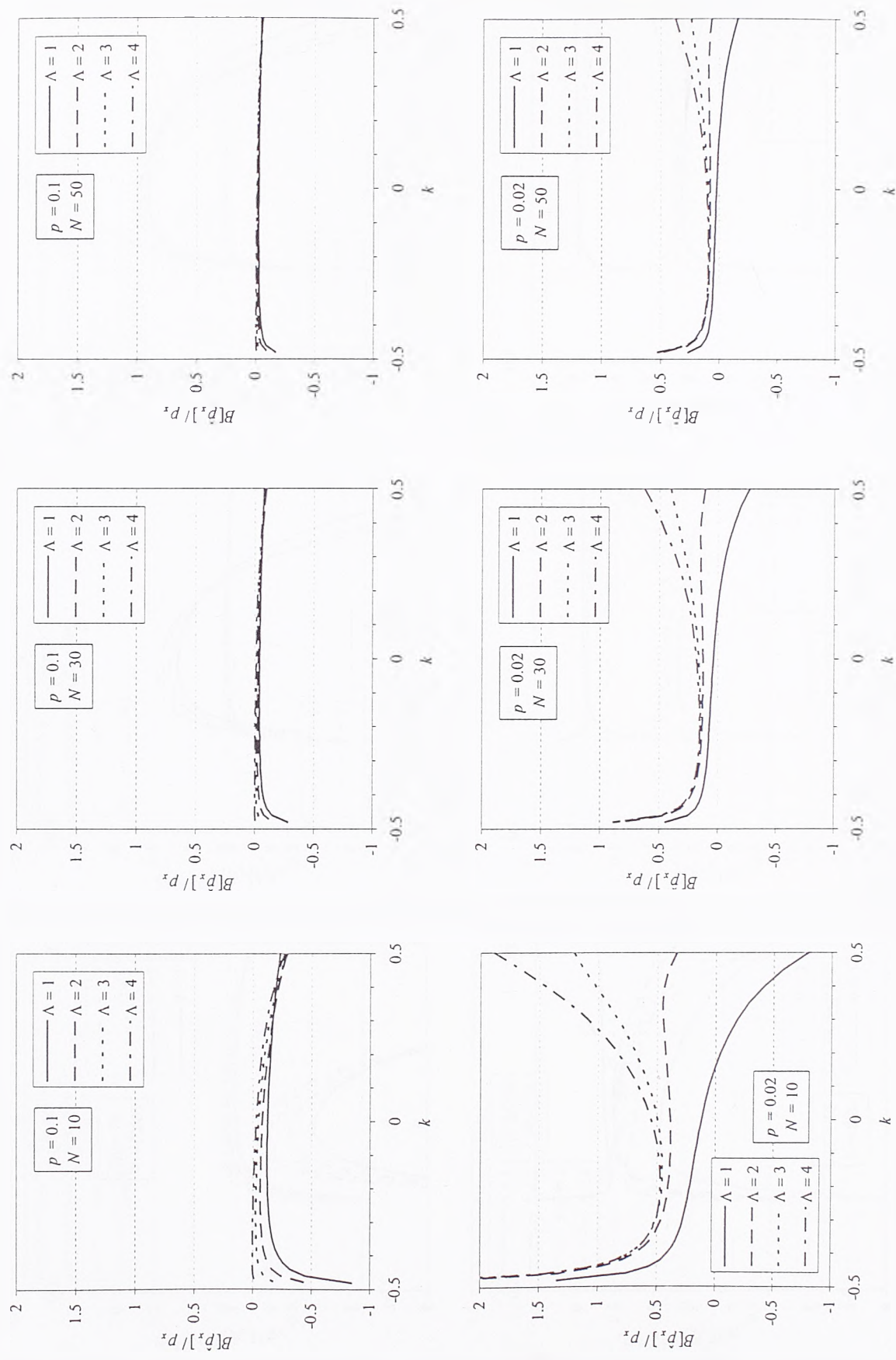
Slika 2 (nastavak). Relativna pristranost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).



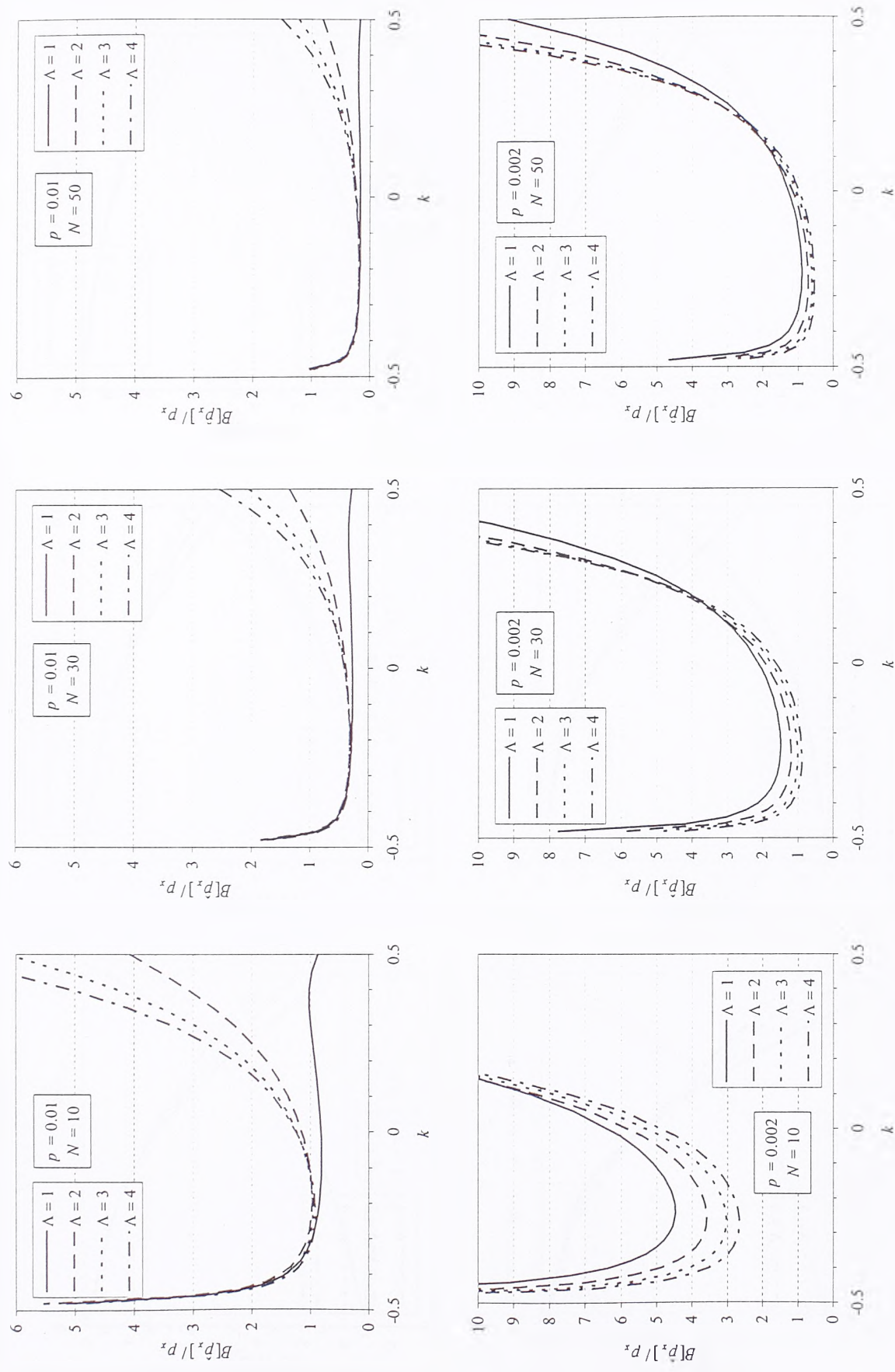
Slika 3. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda momenata).



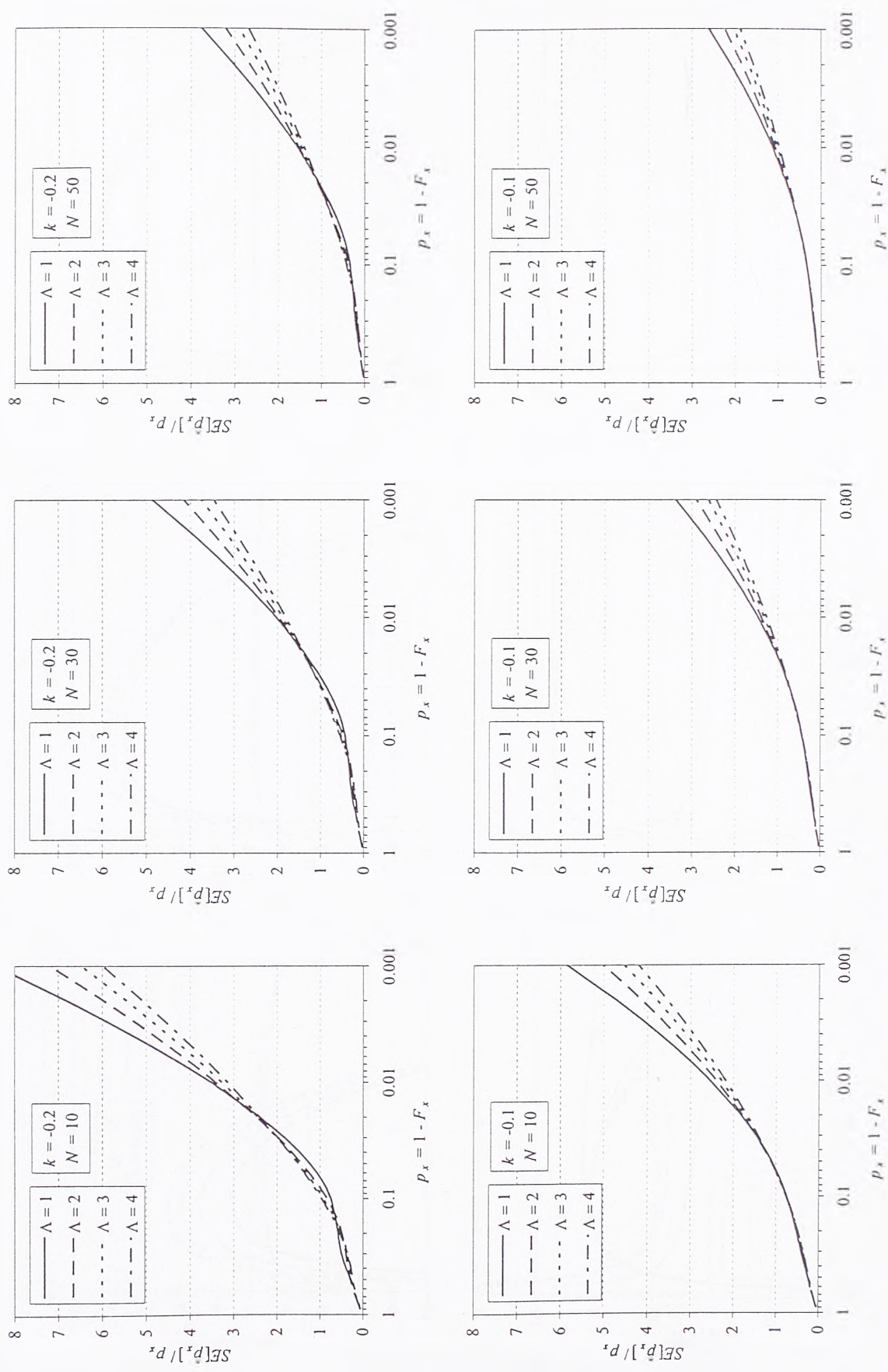
Slika 3 (nastavak). Relativna pristranost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda momenata).



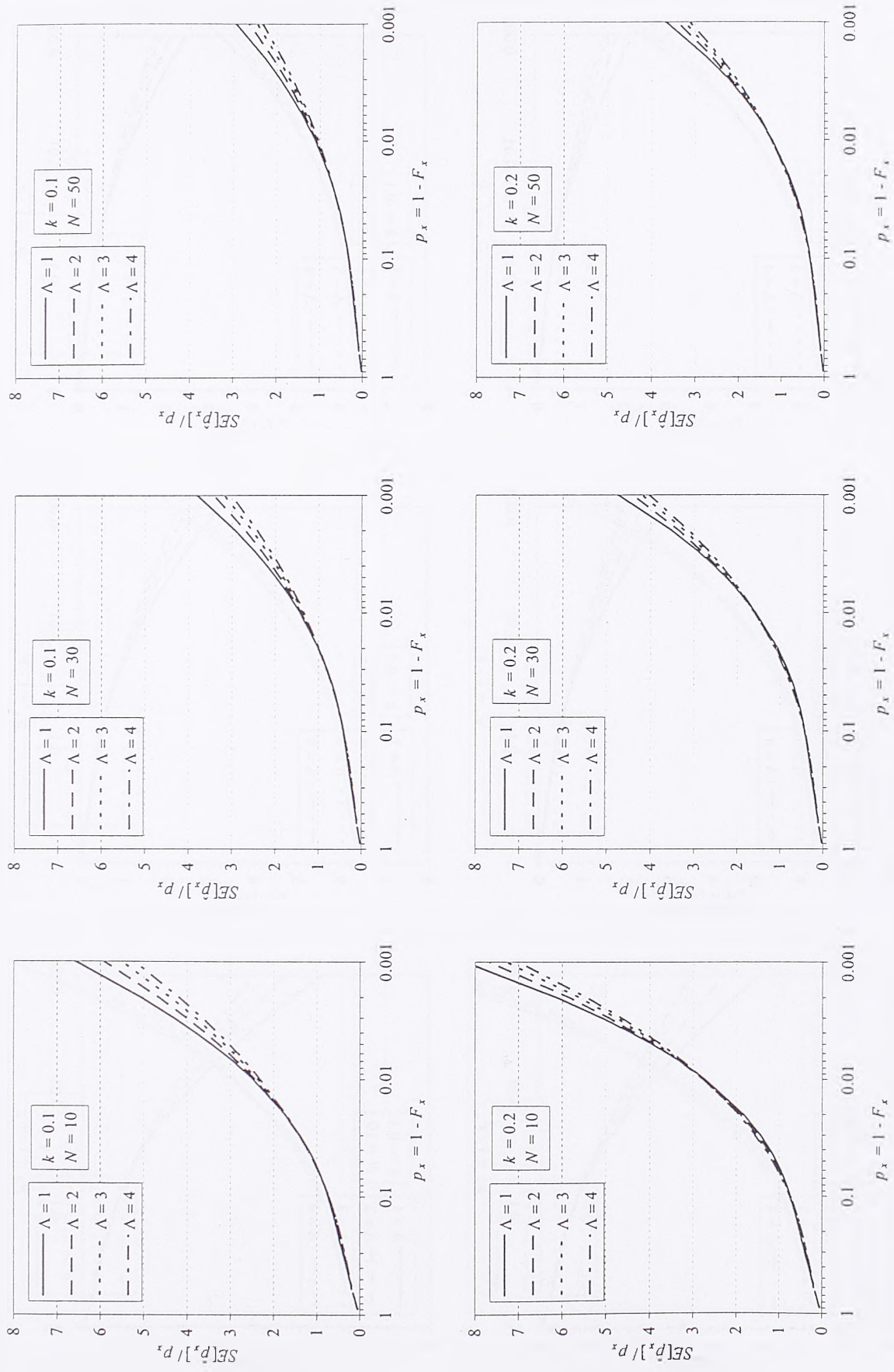
Slika 4. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda težinskih momenata).



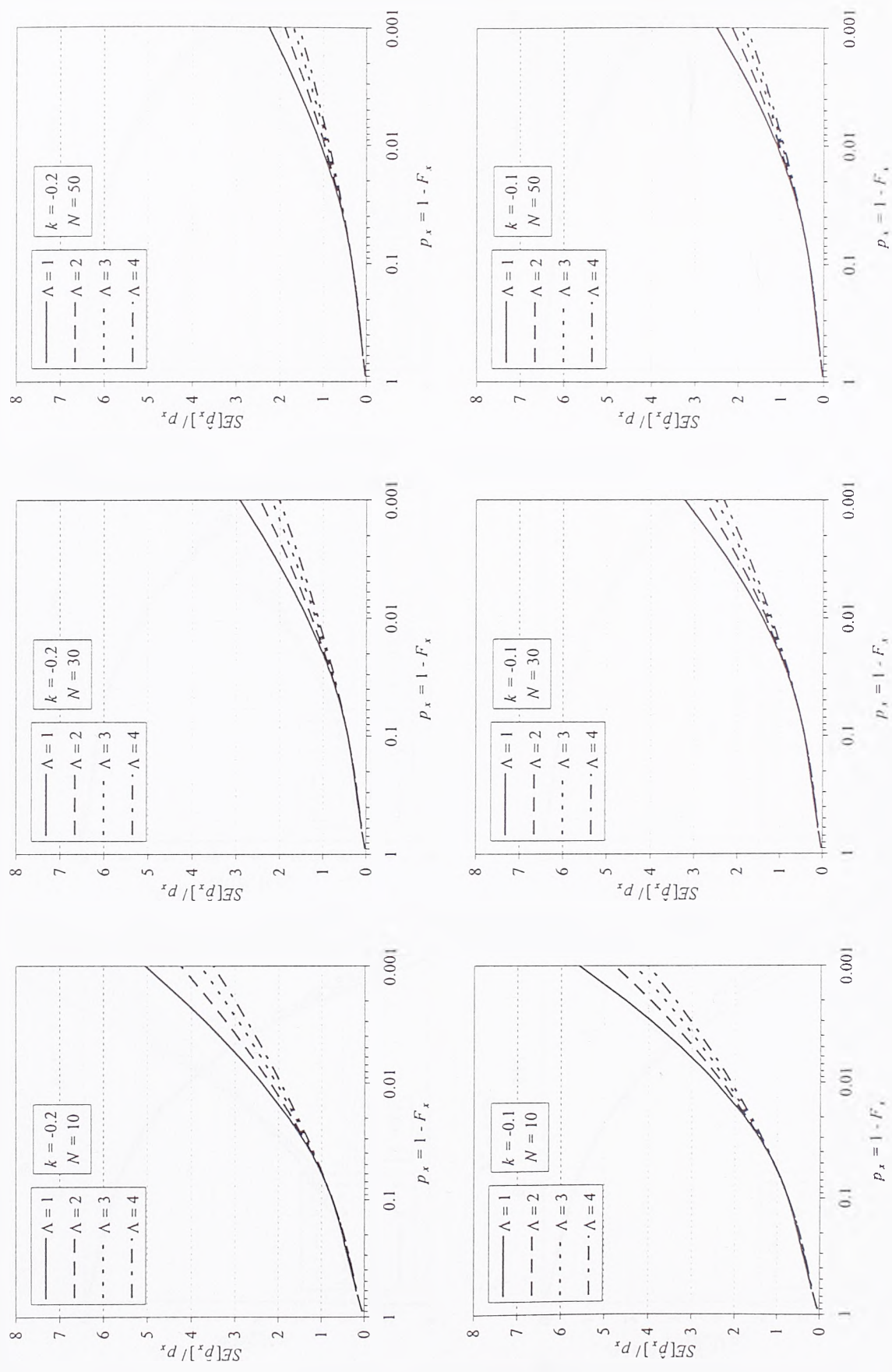
Slika 4 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda težinskih momenata).



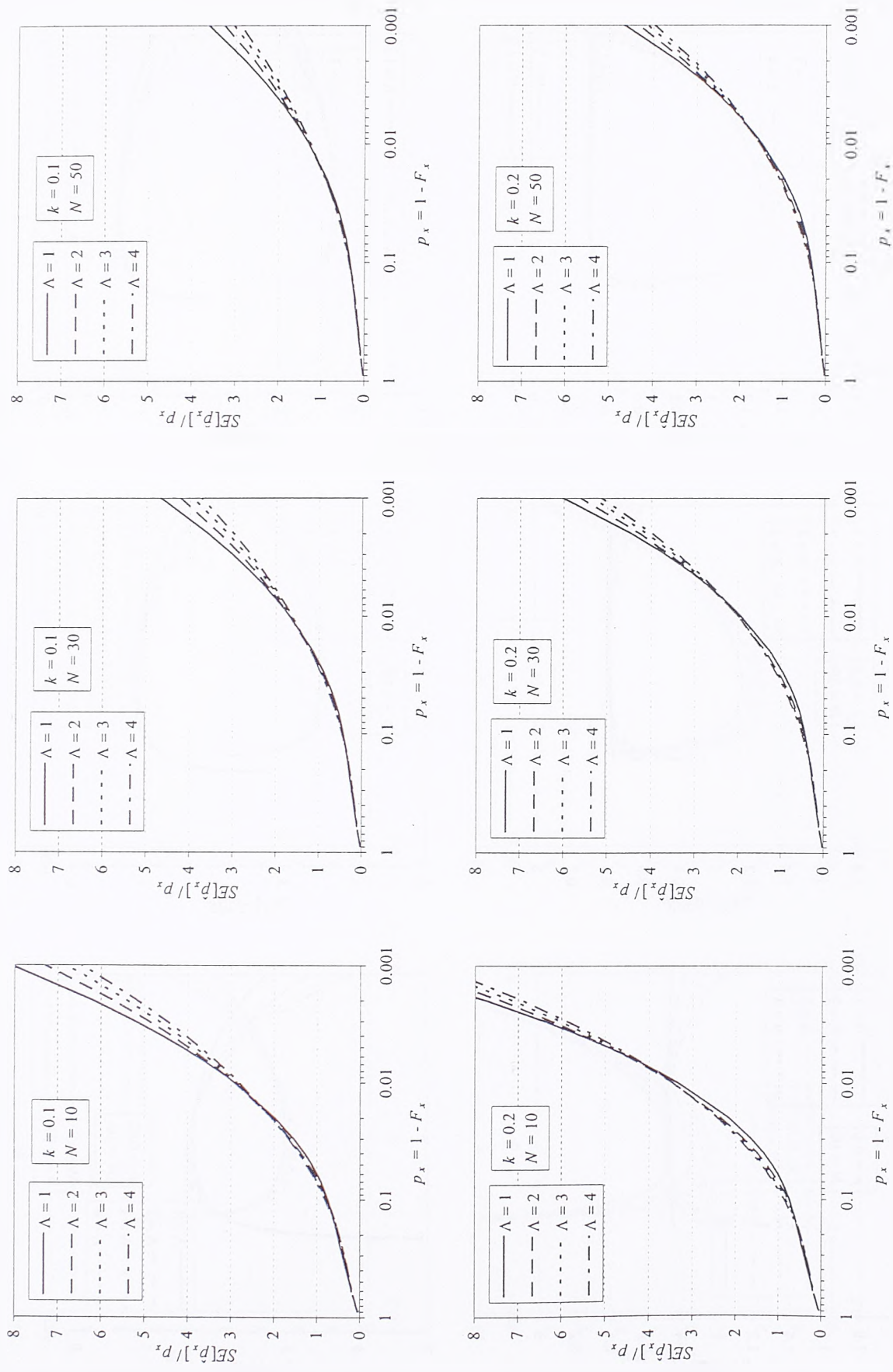
Slika 5. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).



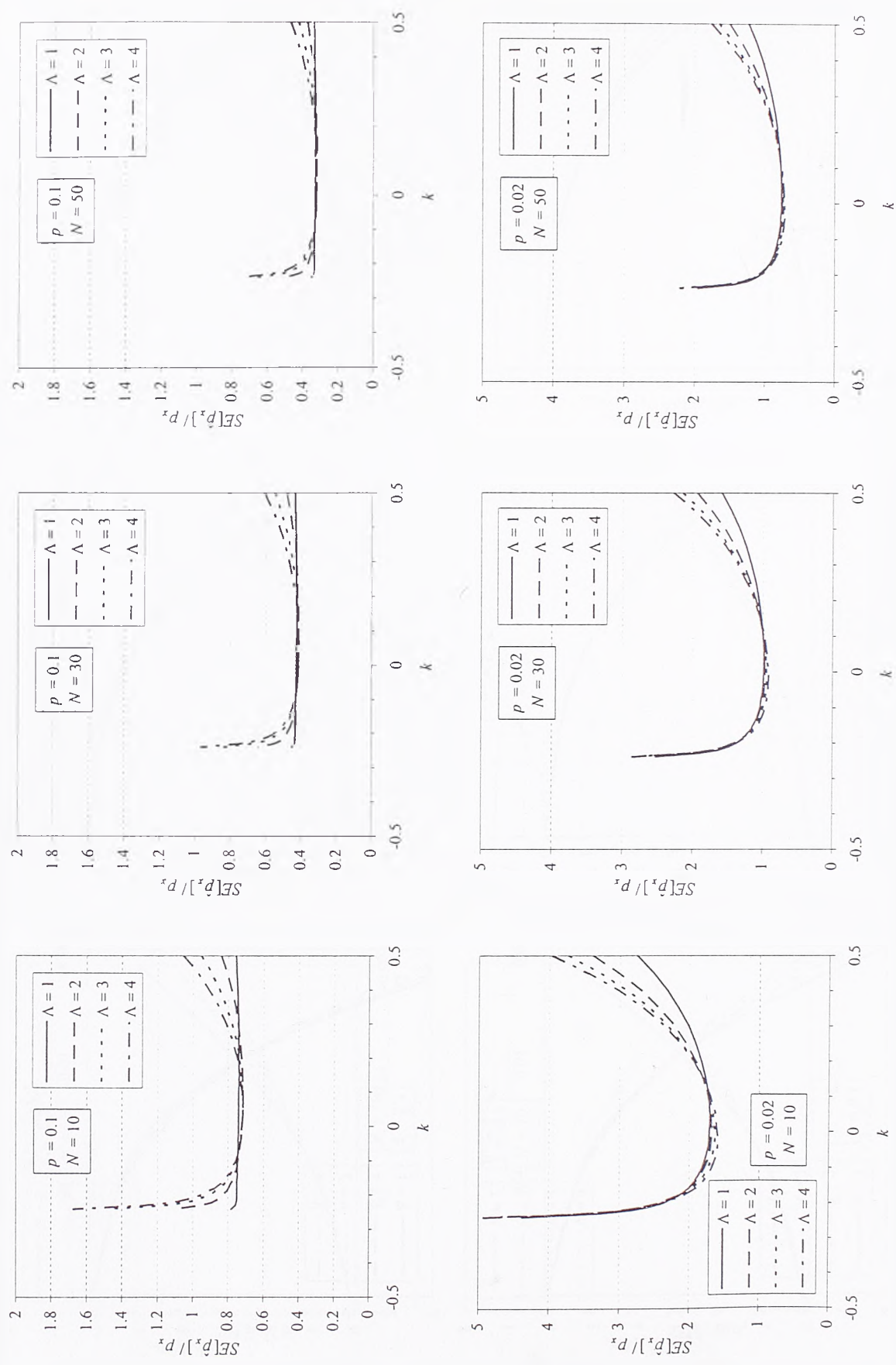
Slika 5 (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).



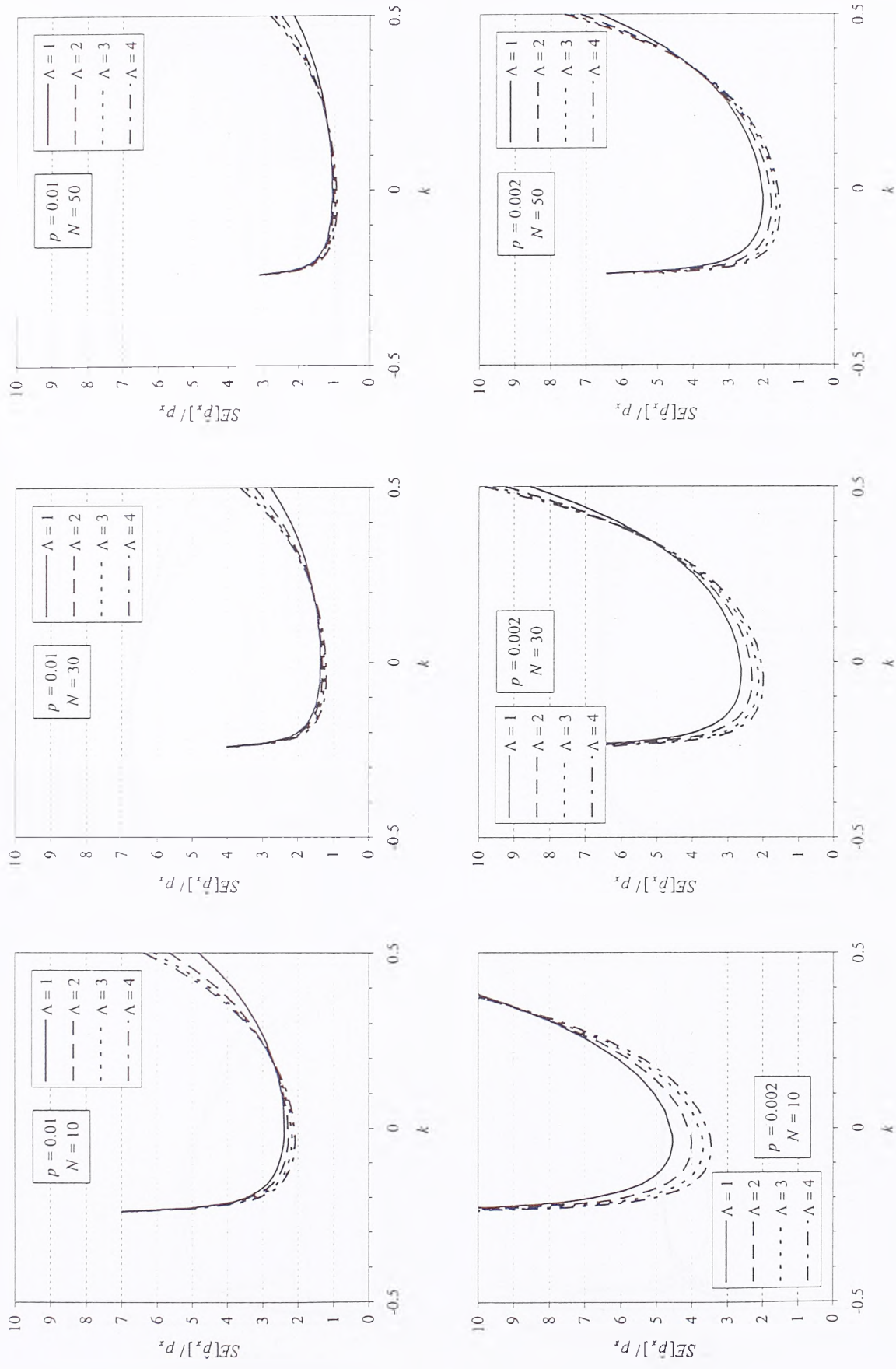
Slika 6. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).



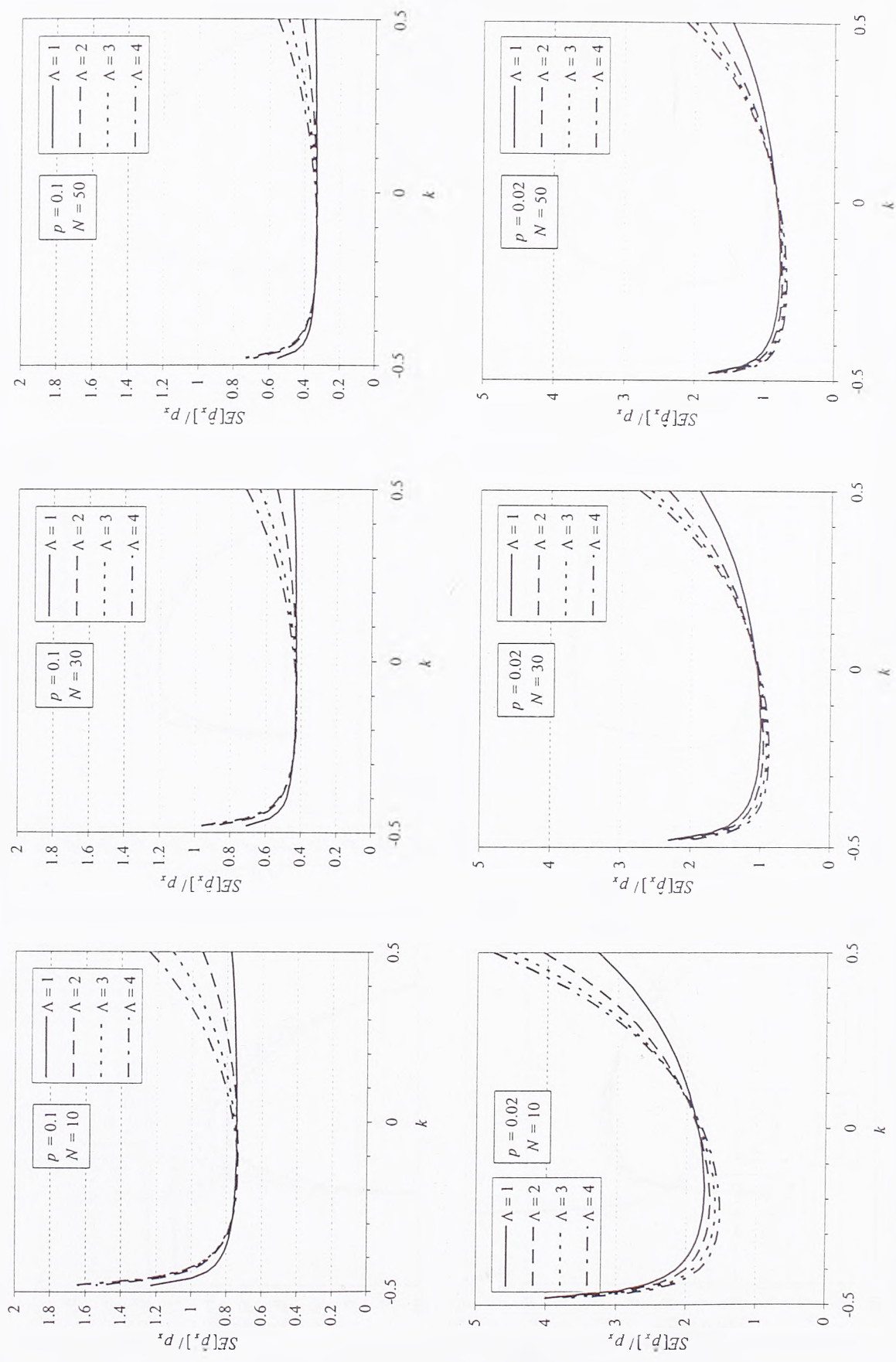
Slika 6 (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).



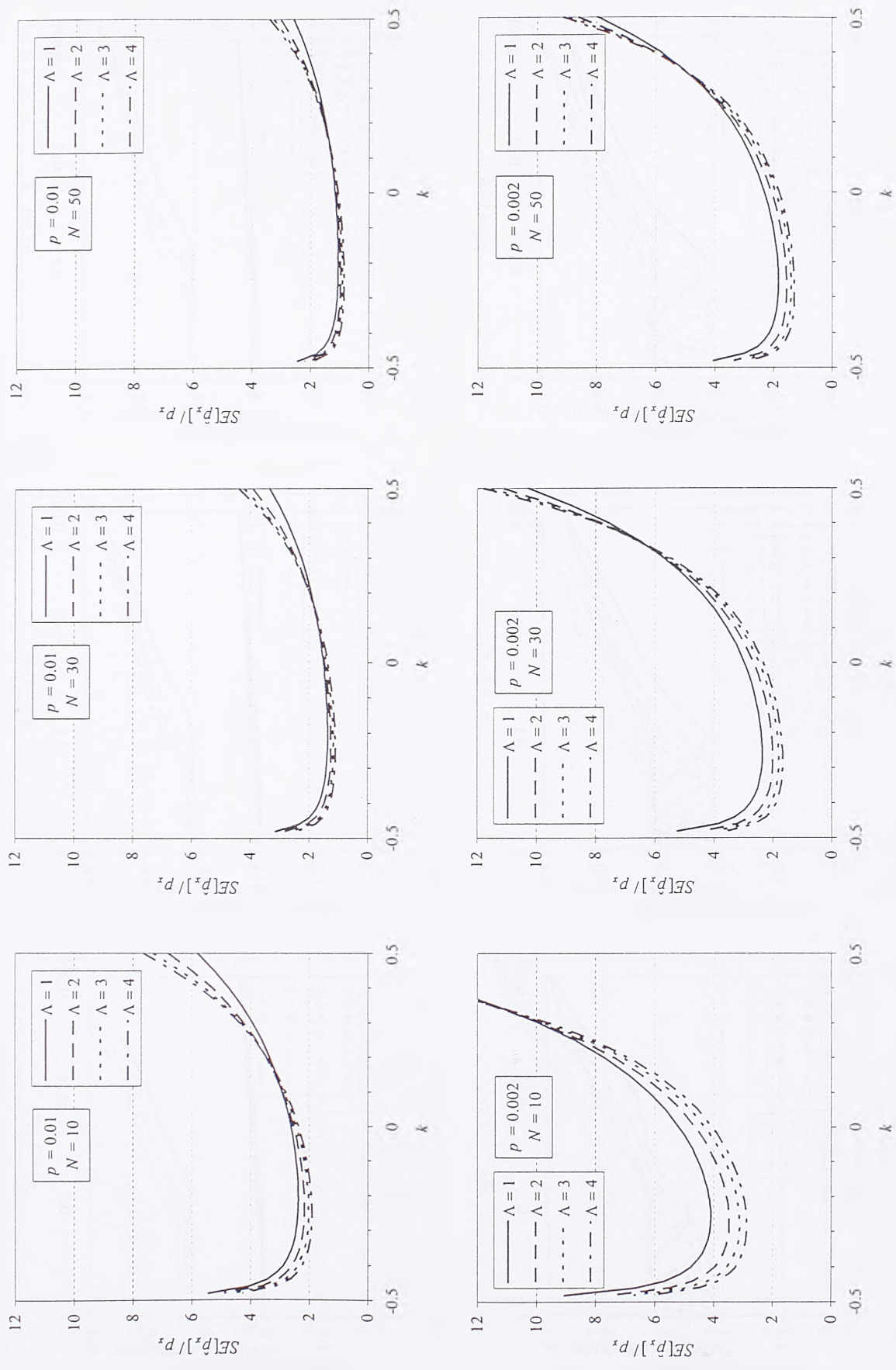
Slika 7. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda momenata).



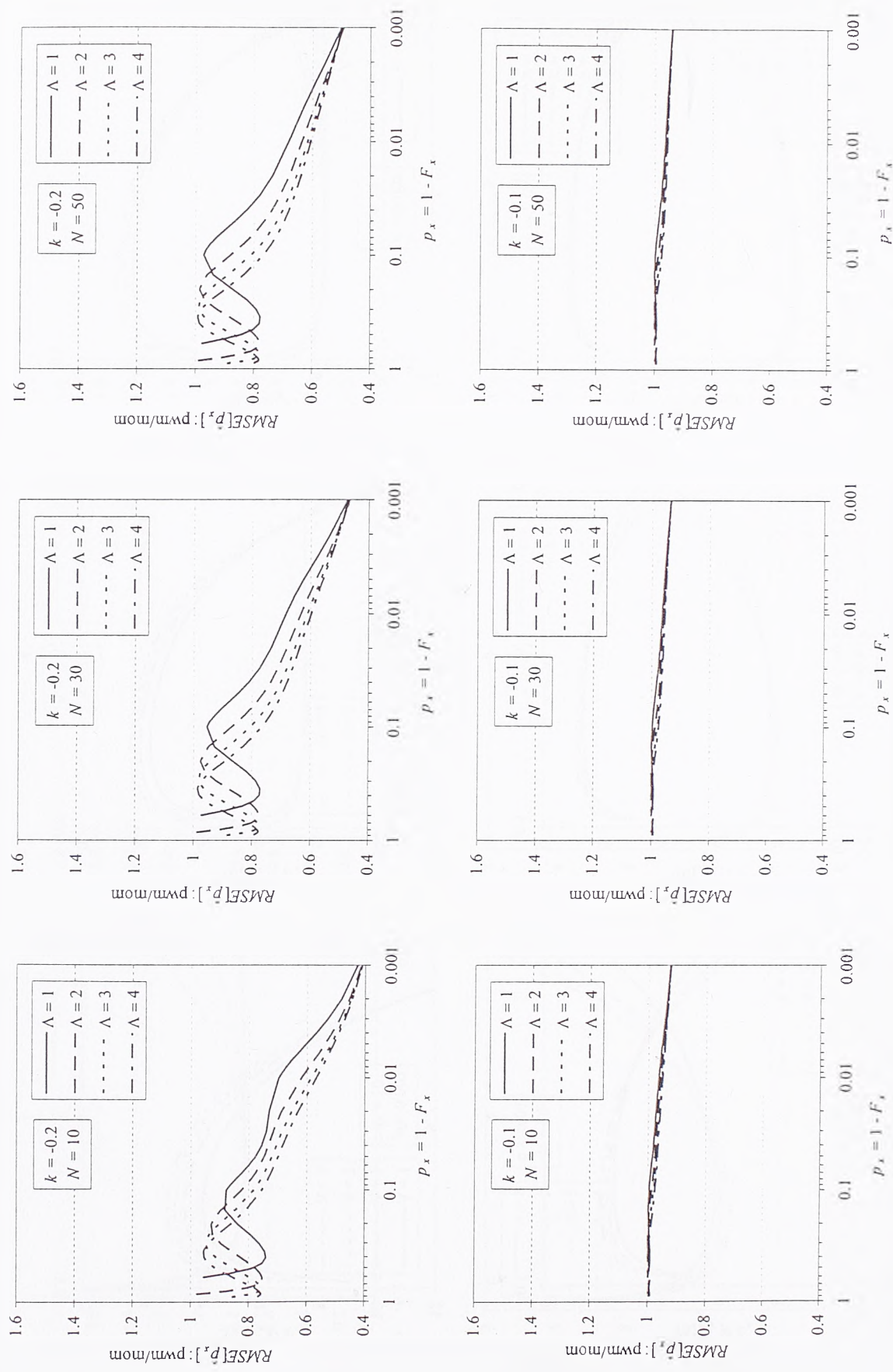
Slika 7. (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda momenata).



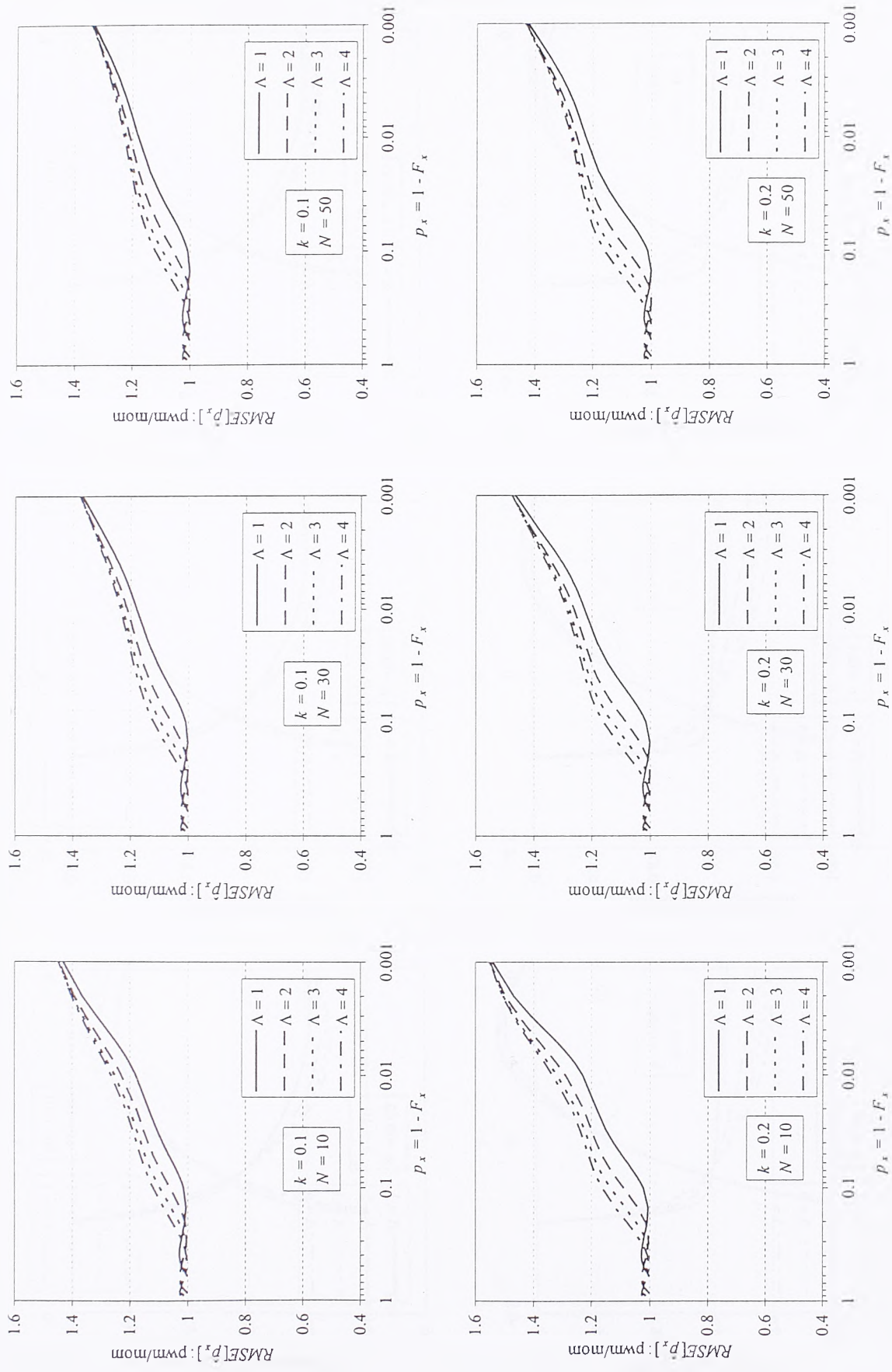
Slika 8. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda težinskih momenata).



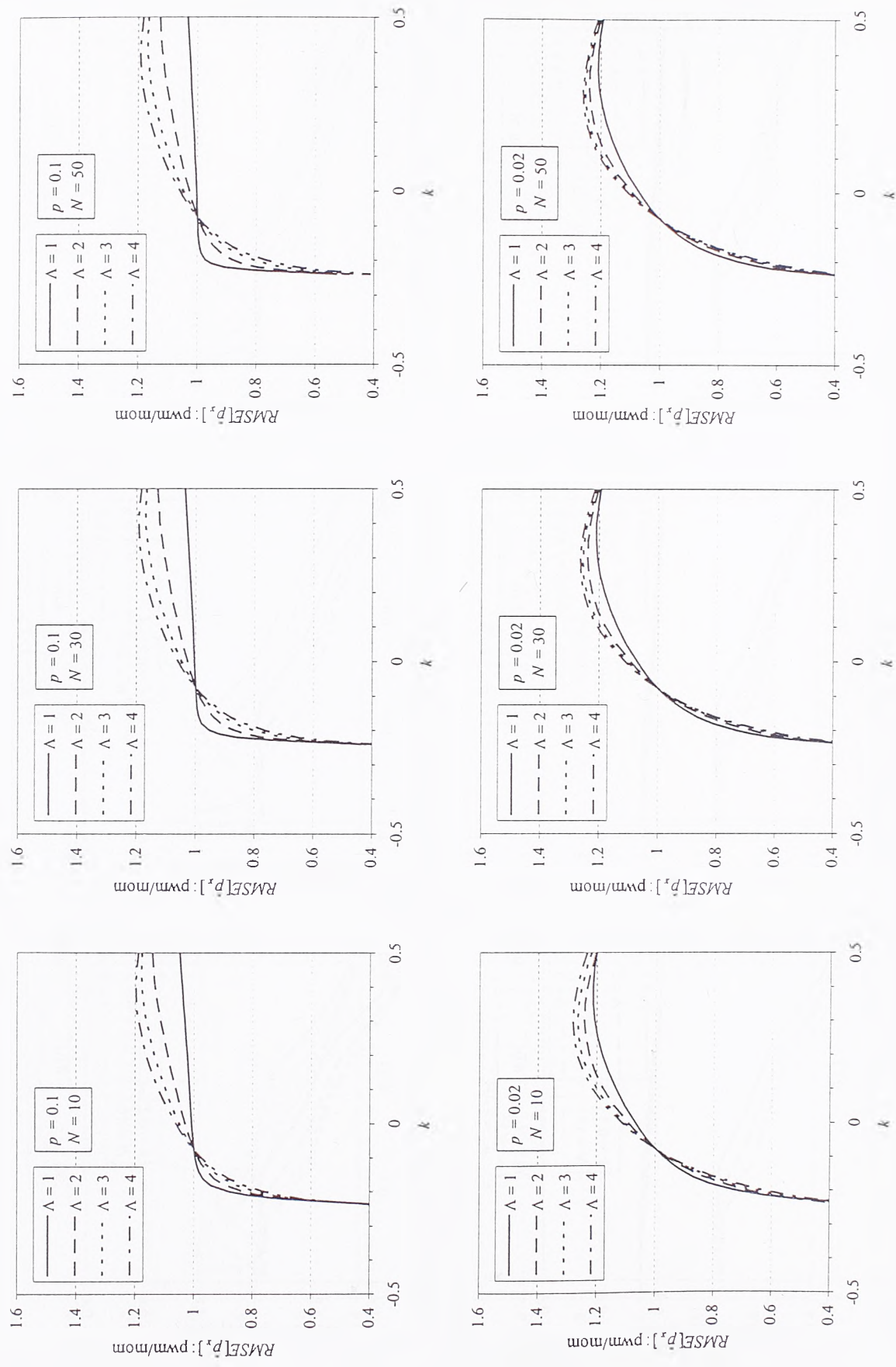
Slika 8. (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k (metoda težinskih momenata).

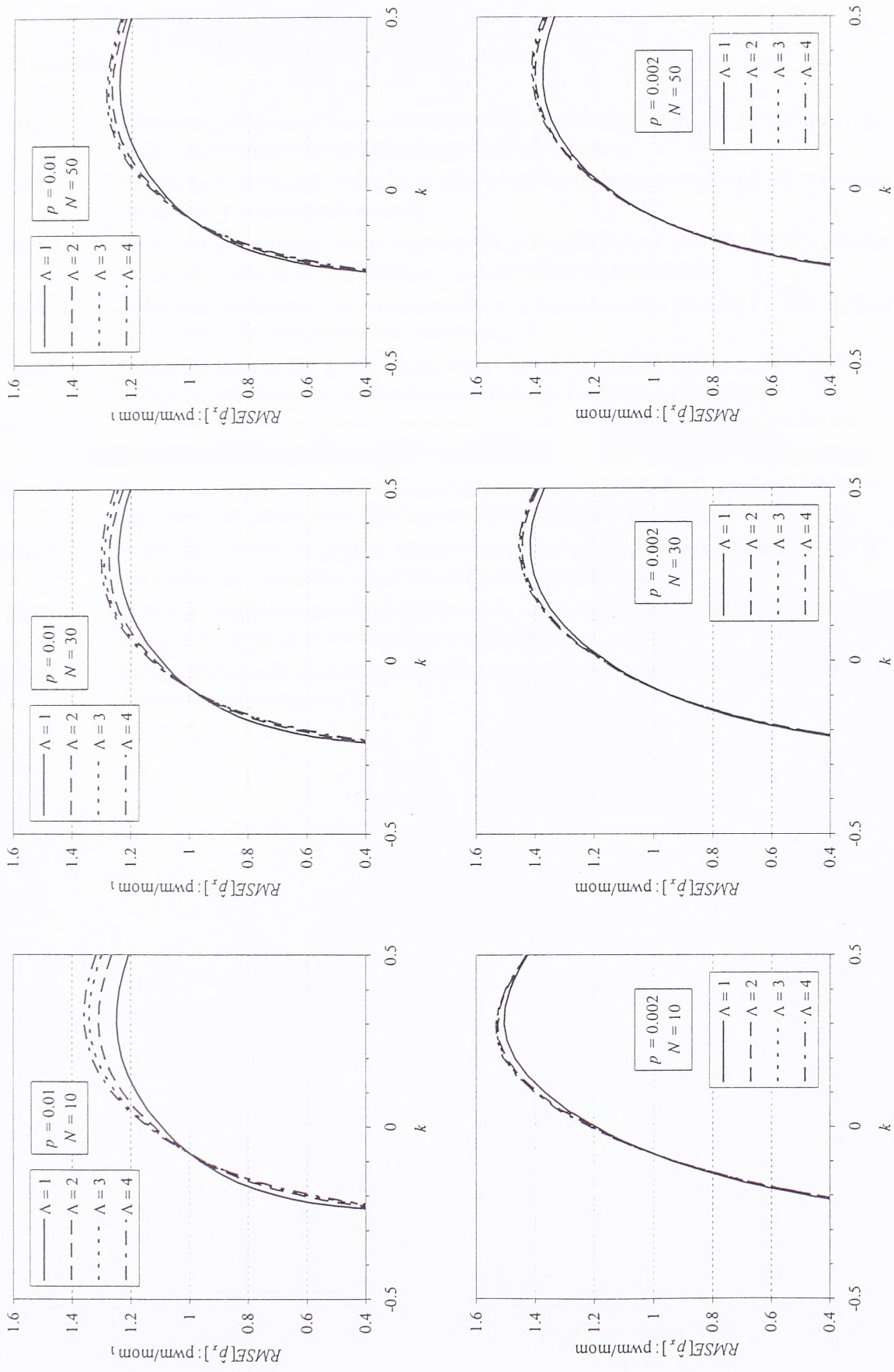


Slika 9. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.



Slika 9 (nastavak). Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.

Slika 10. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k .

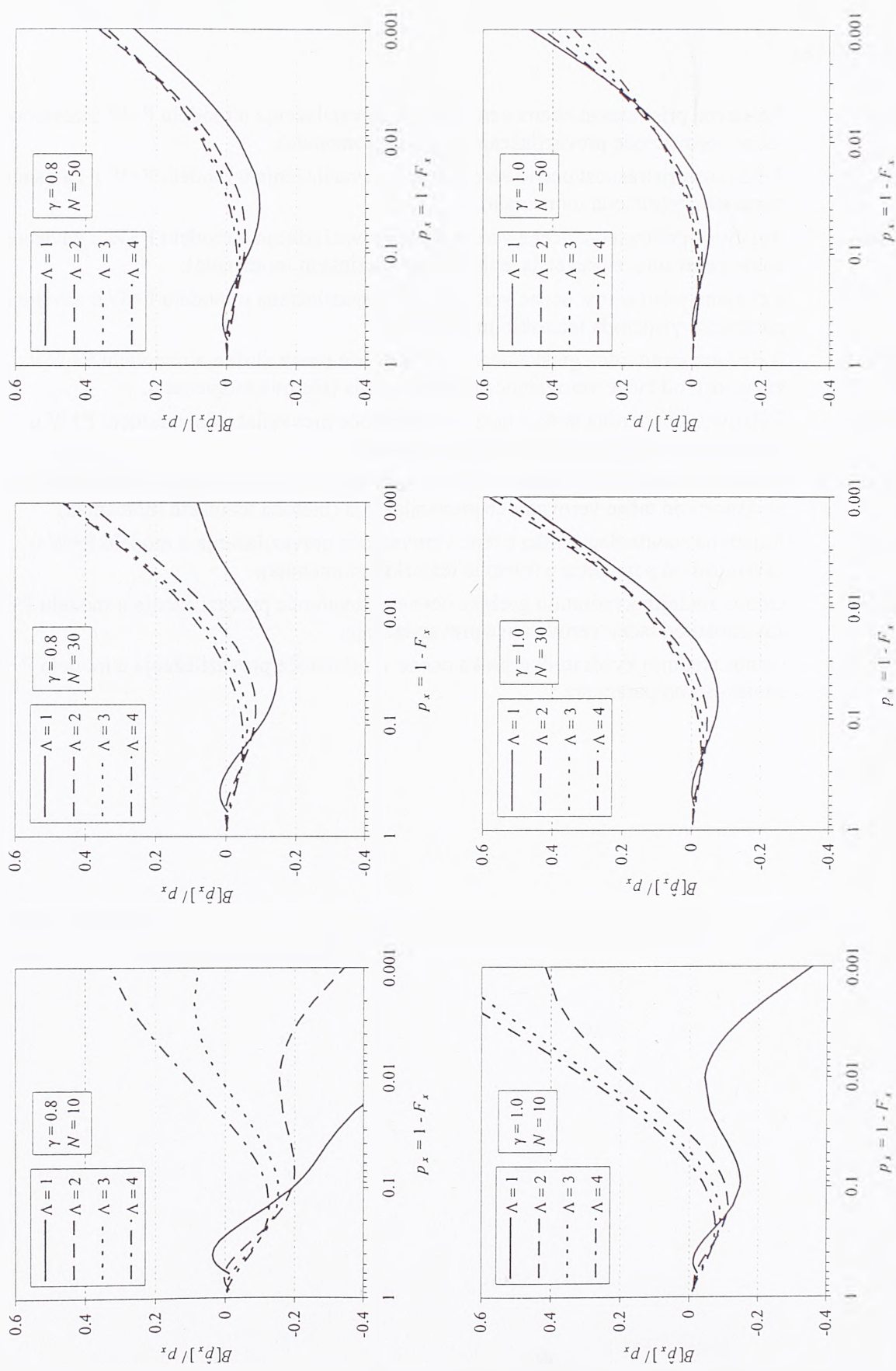


Slika 10 (nastavak). Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+GP u zavisnosti od parametra k .

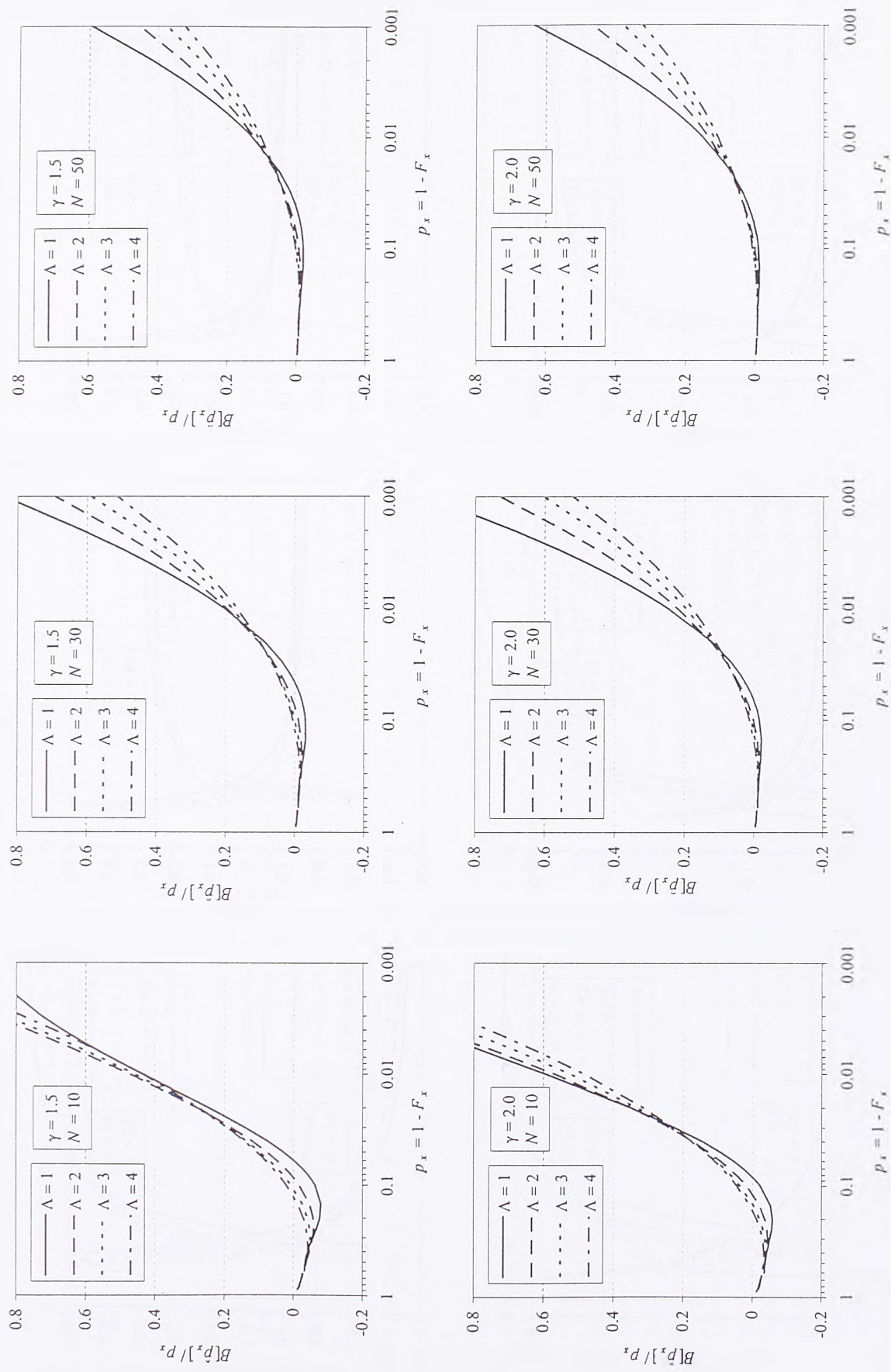
Svojstva ocene verovatnoće modelom P+W

Spisak slika

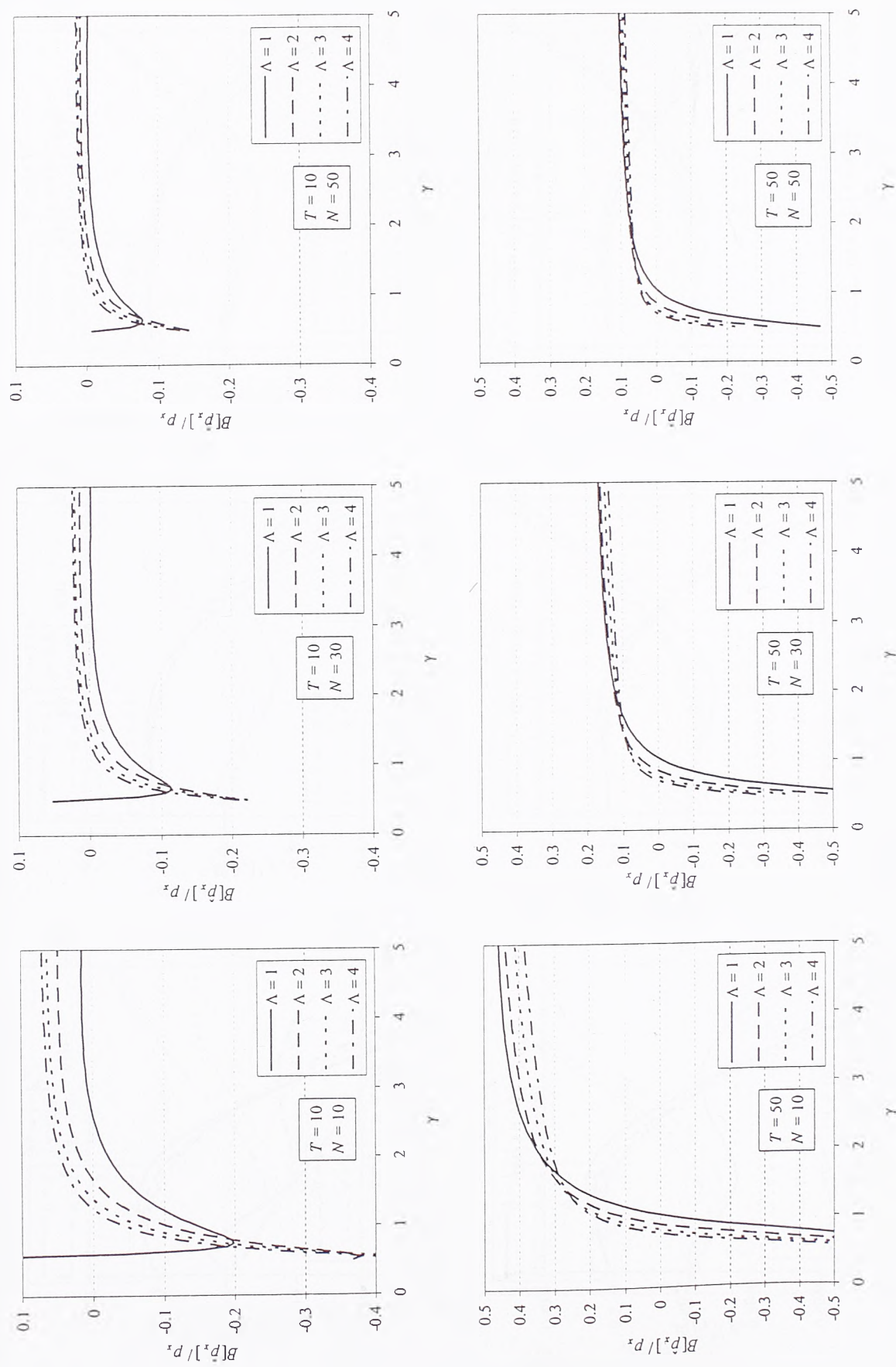
- Slika 1. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).
- Slika 2. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda momenata).
- Slika 3. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).
- Slika 4. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda težinskih momenata).
- Slika 5. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).
- Slika 6. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda momenata).
- Slika 7. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).
- Slika 8. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda težinskih momenata).
- Slika 9. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.
- Slika 10. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ .



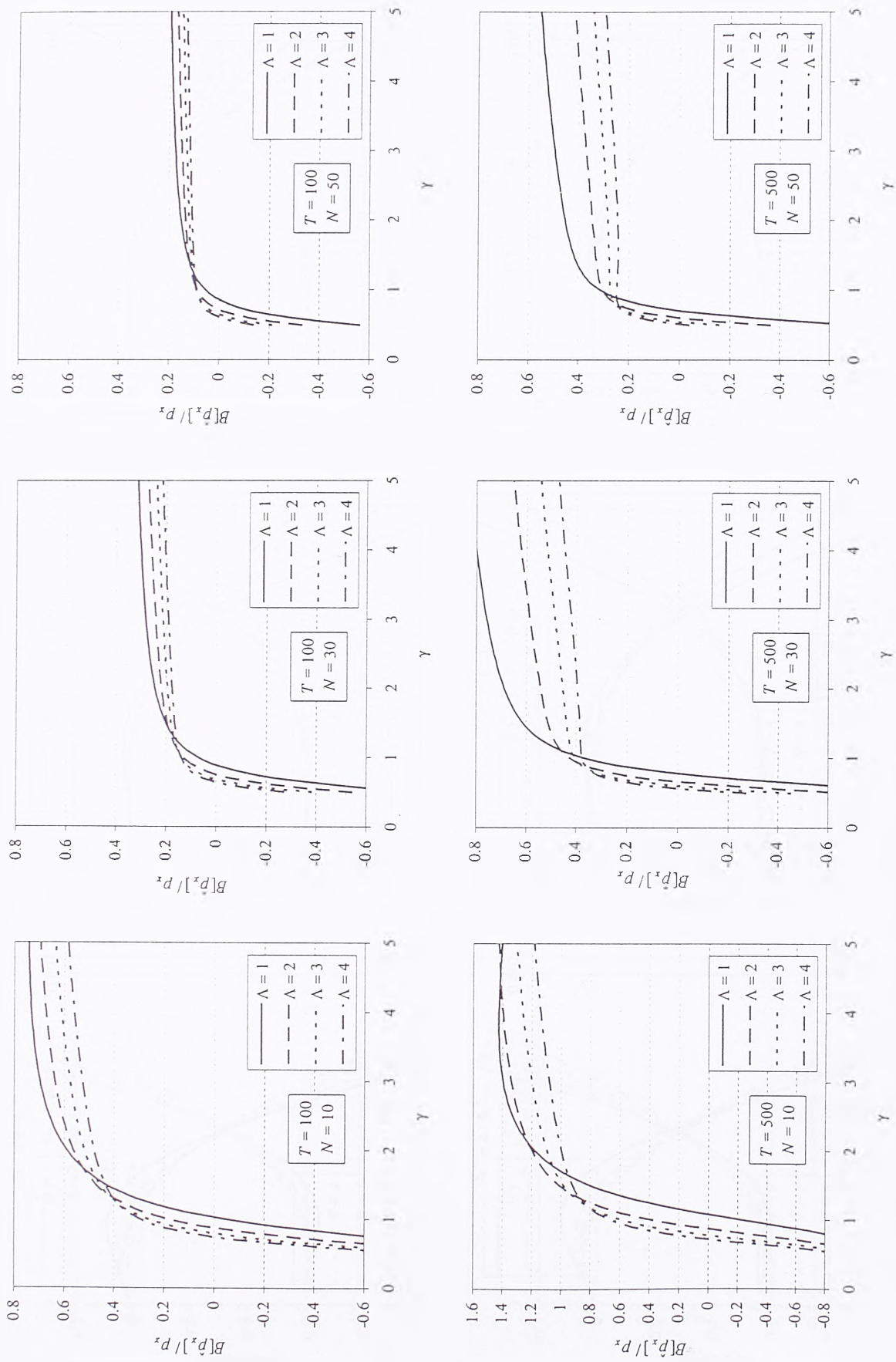
Slika 1. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).



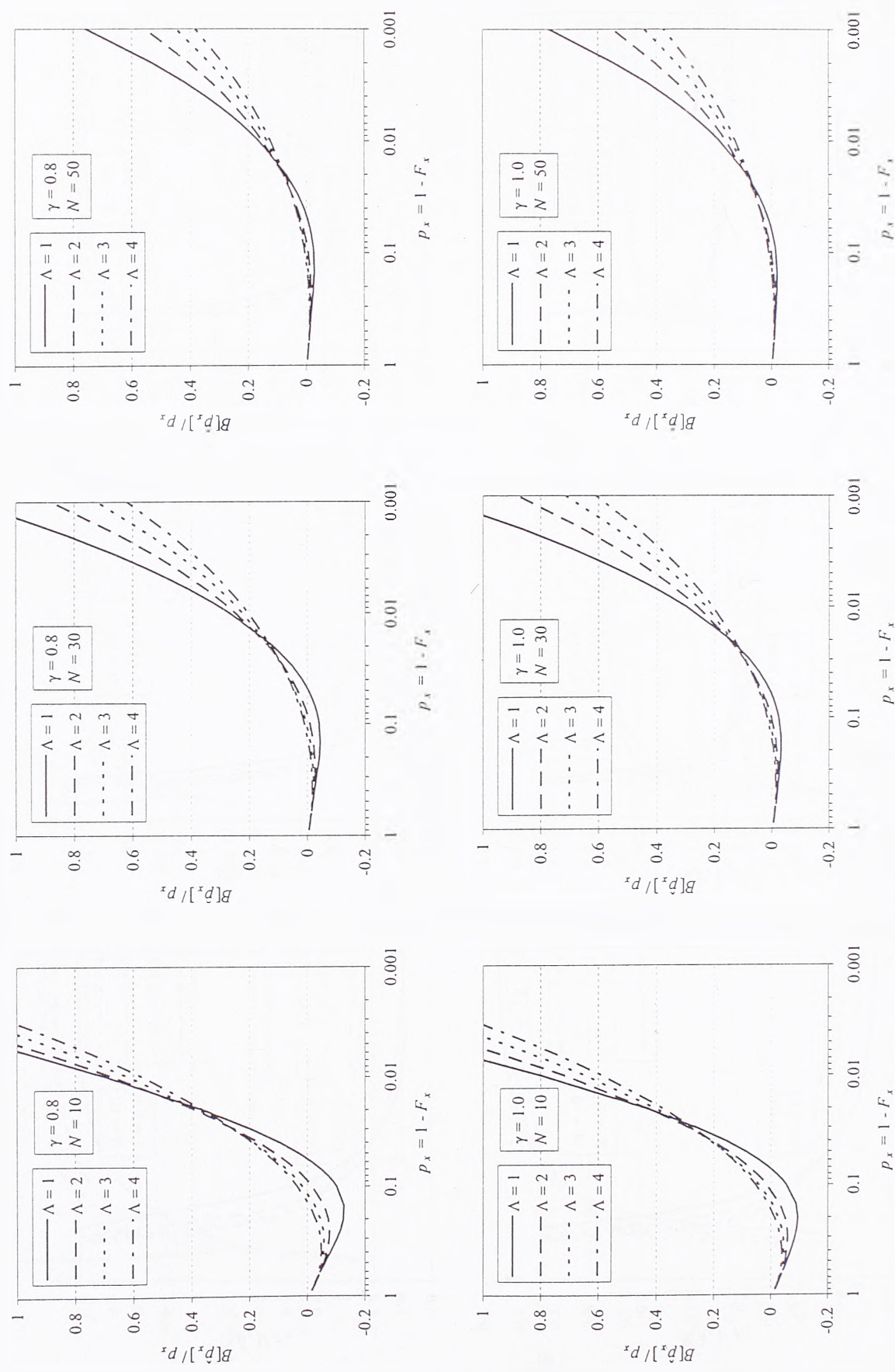
Slika 1 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).



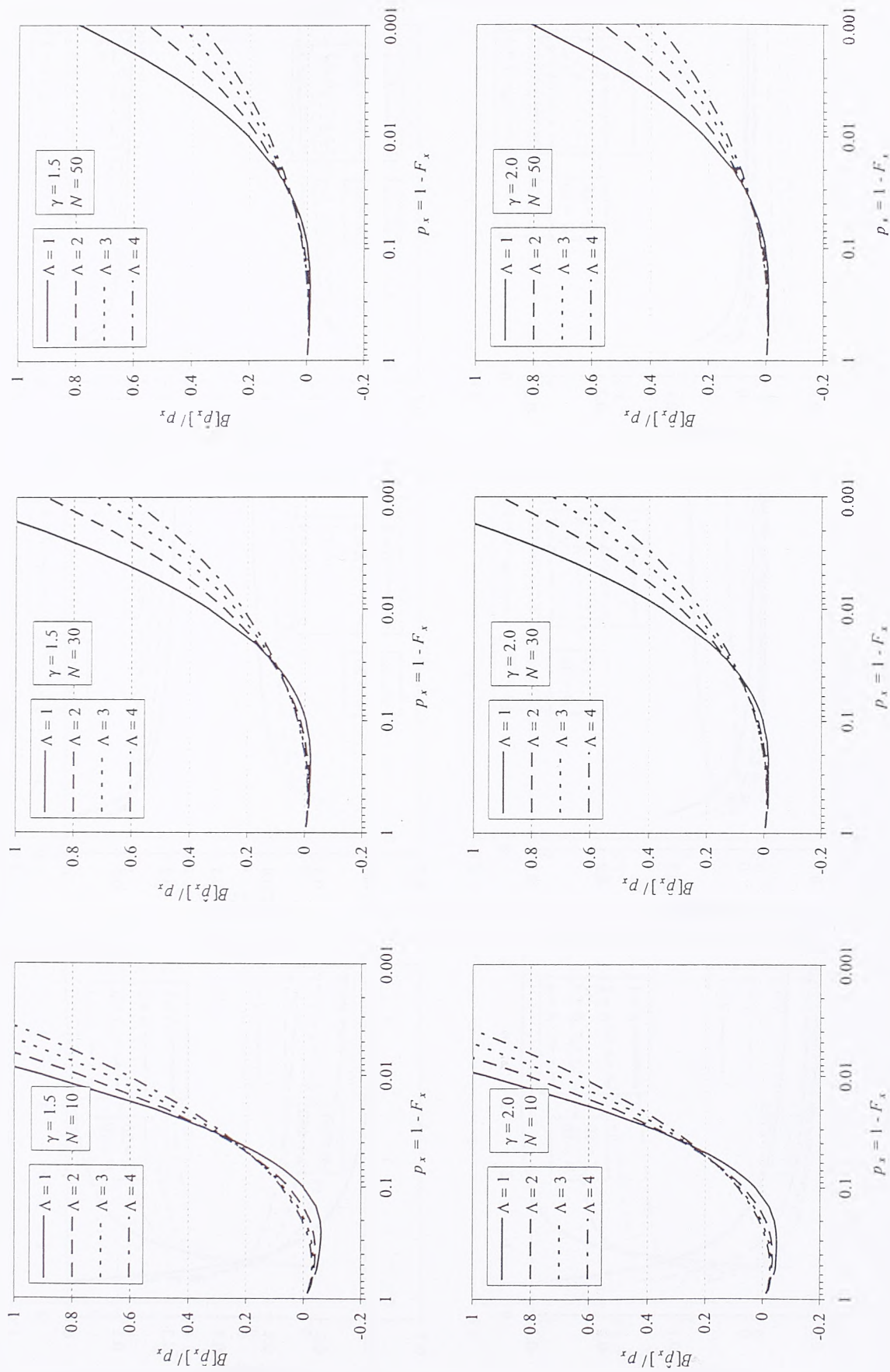
Slika 2. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda momenata).



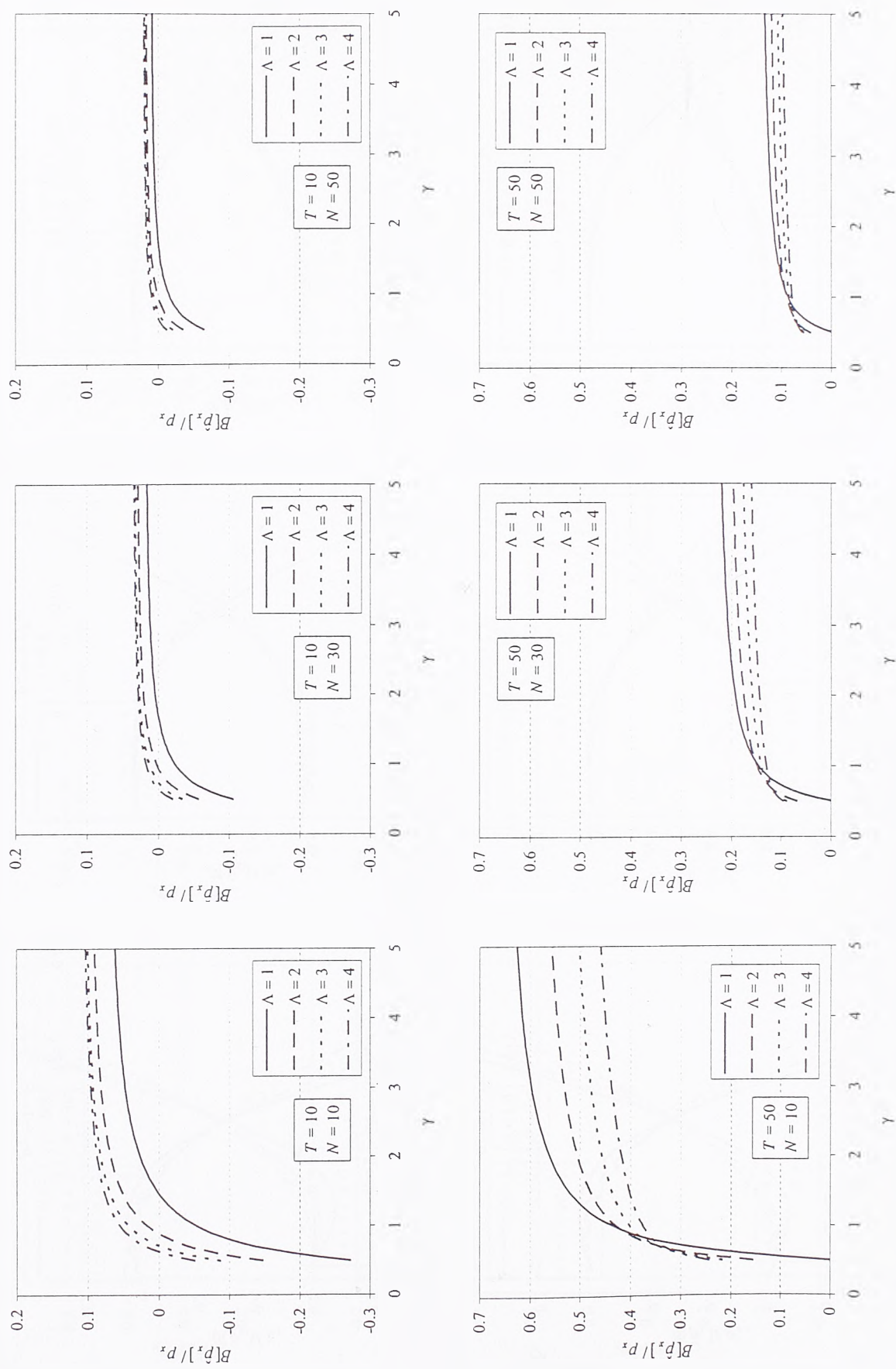
Slika 2 (nastavak). Relativna pristranost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda momenata).



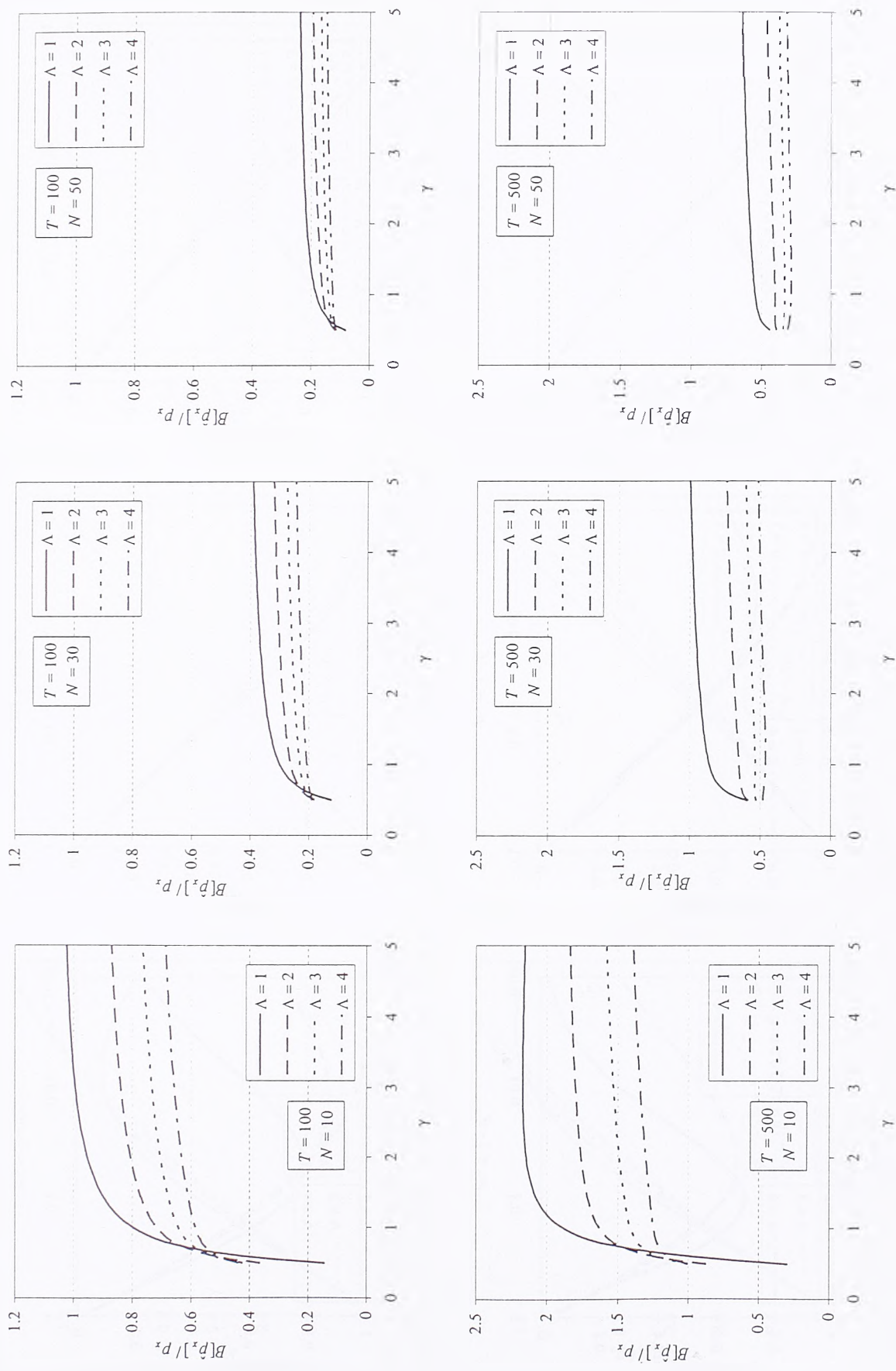
Slika 3. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).



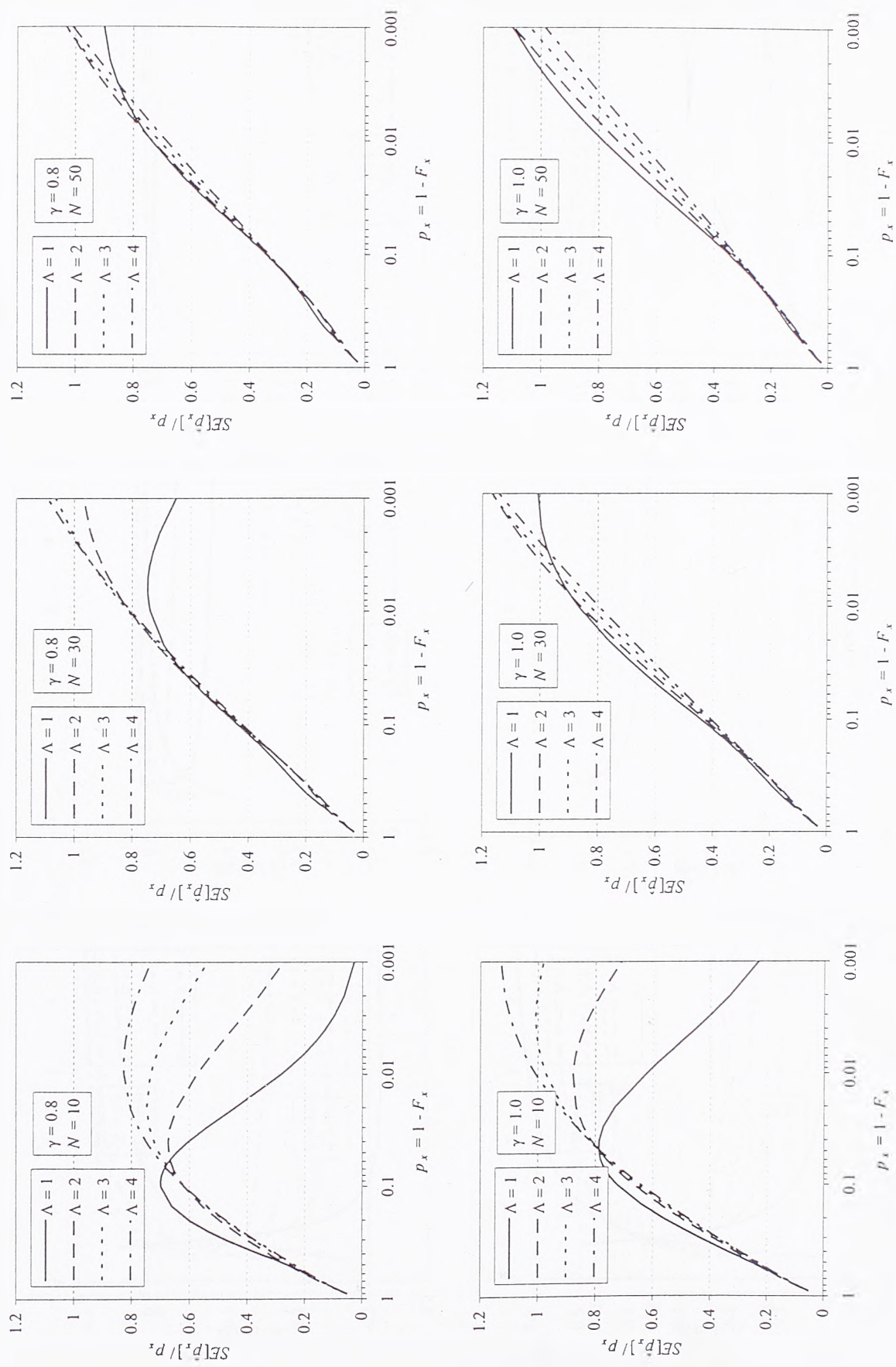
Slika 3 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).



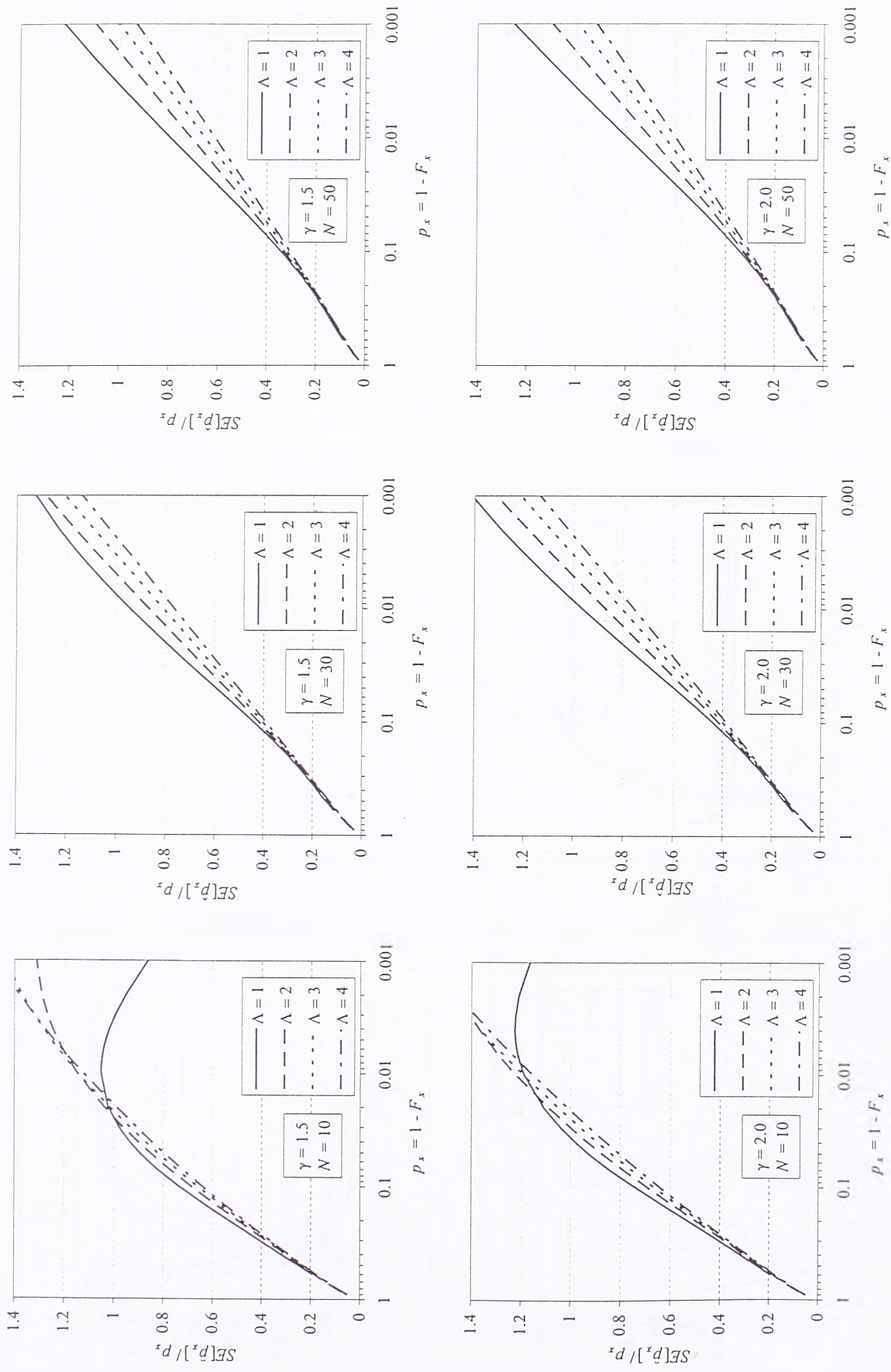
Slika 4. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda težinskih momenata).



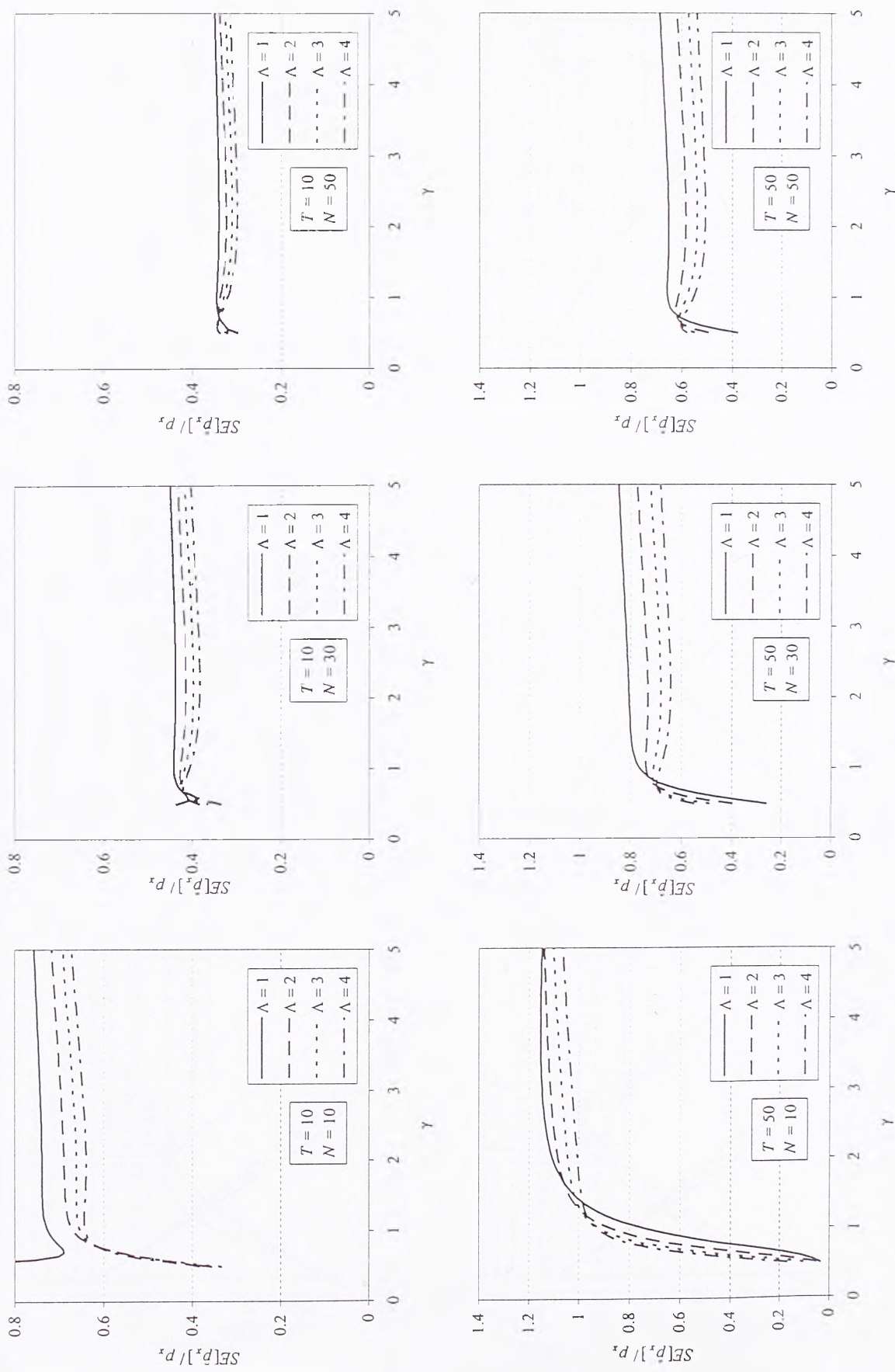
Slika 4 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda težinskih momenata).



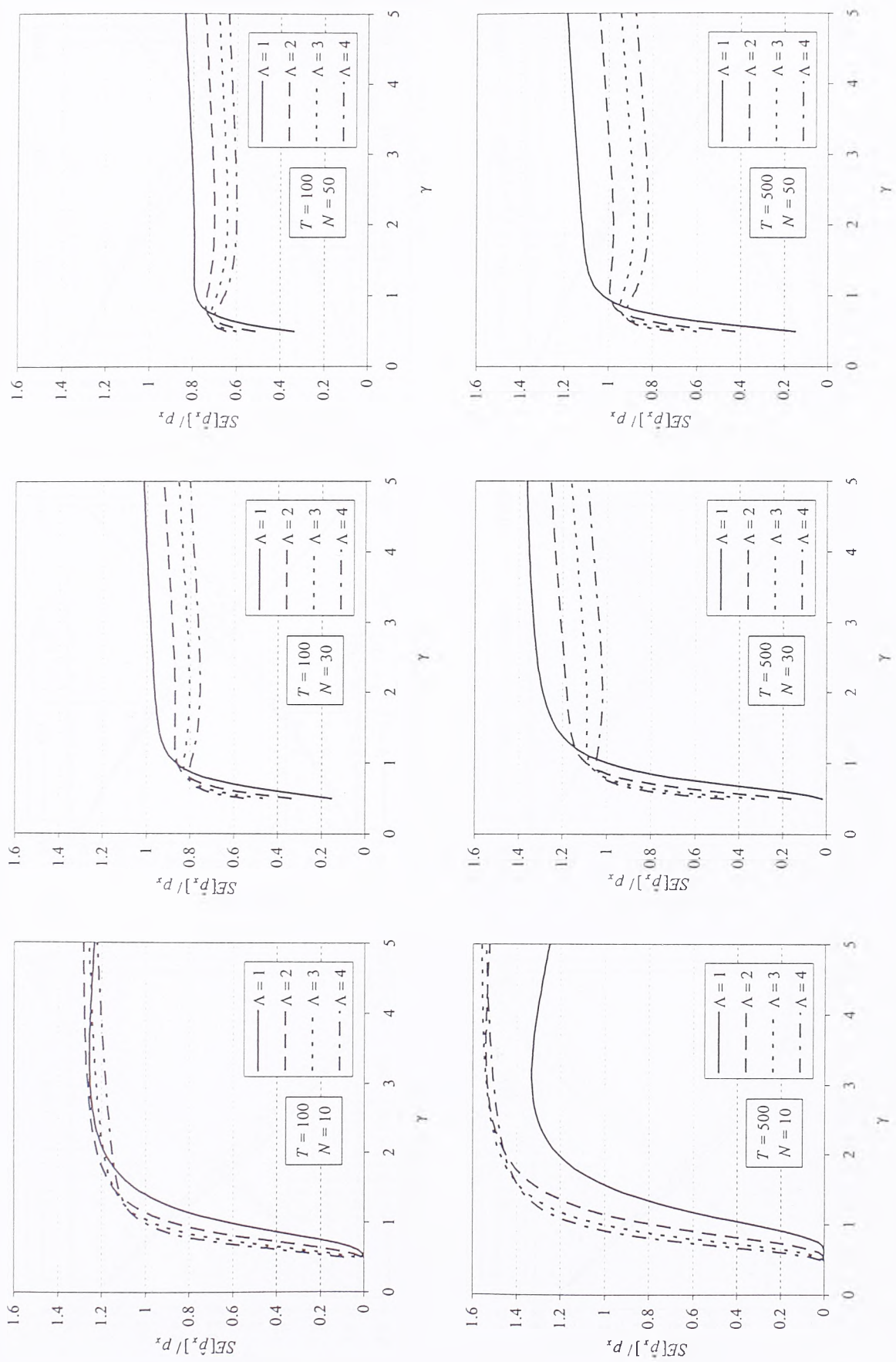
Slika 5. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).



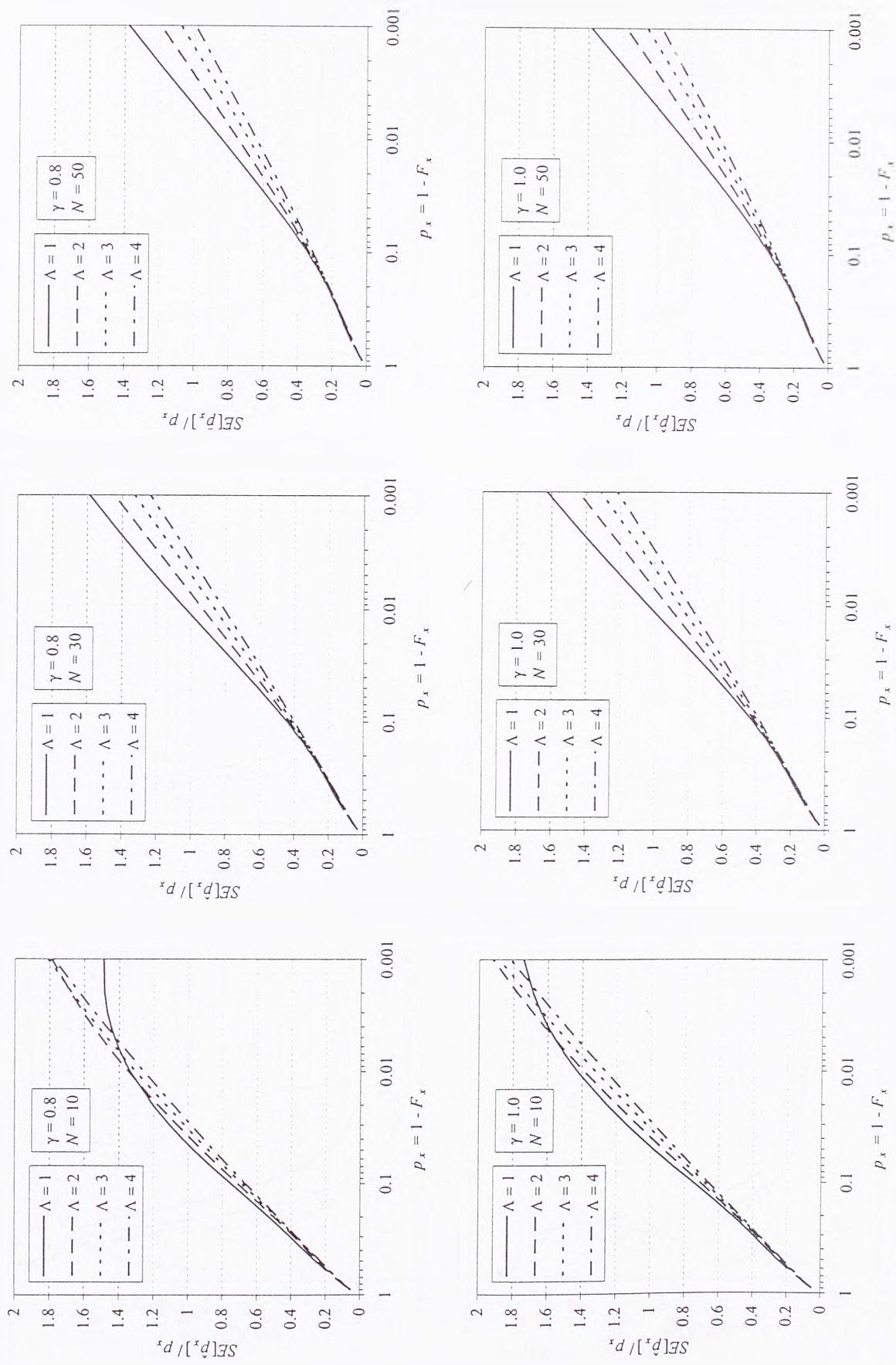
Slika 5 (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda momenata).



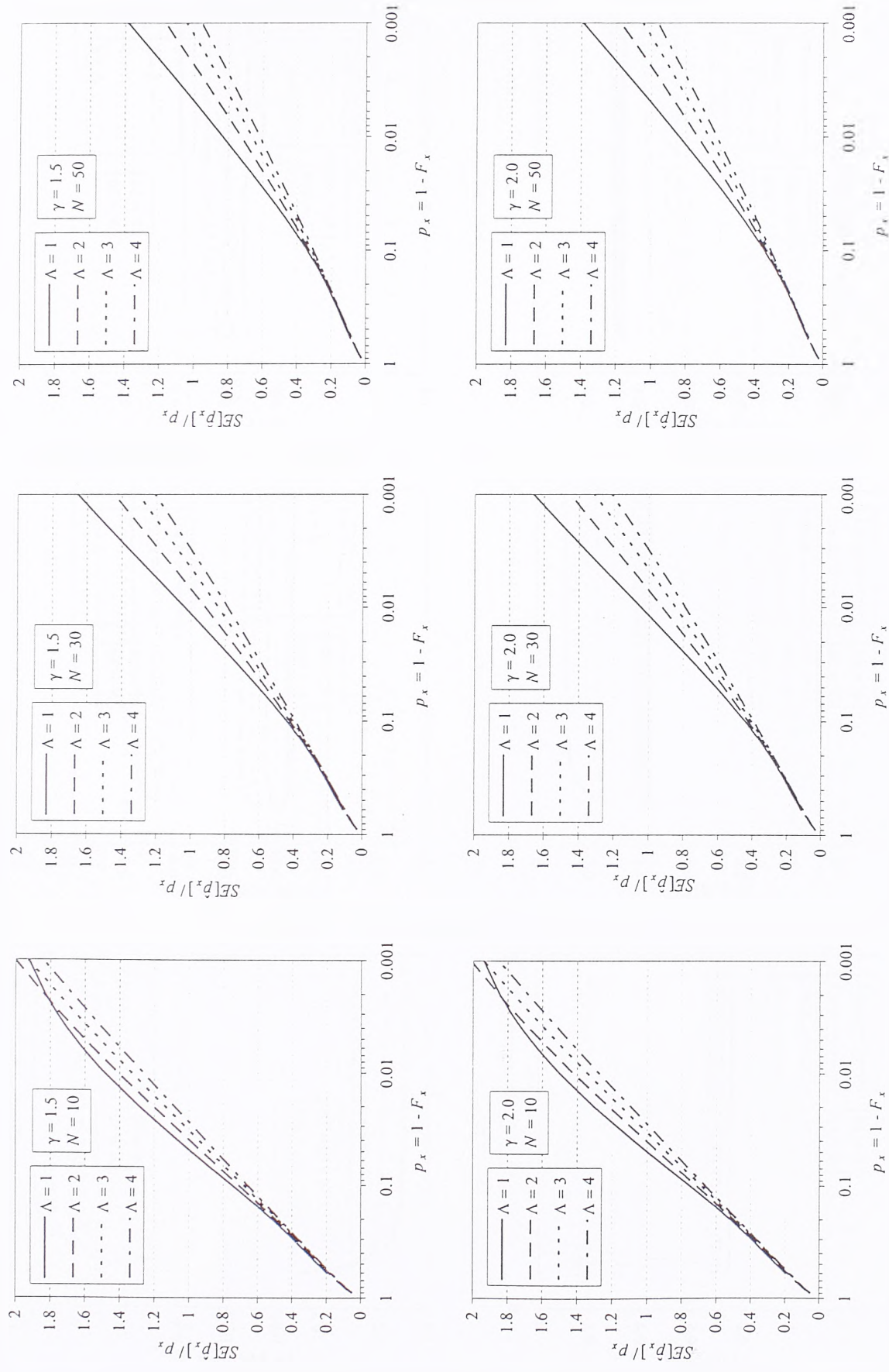
Slika 6. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda momenata).



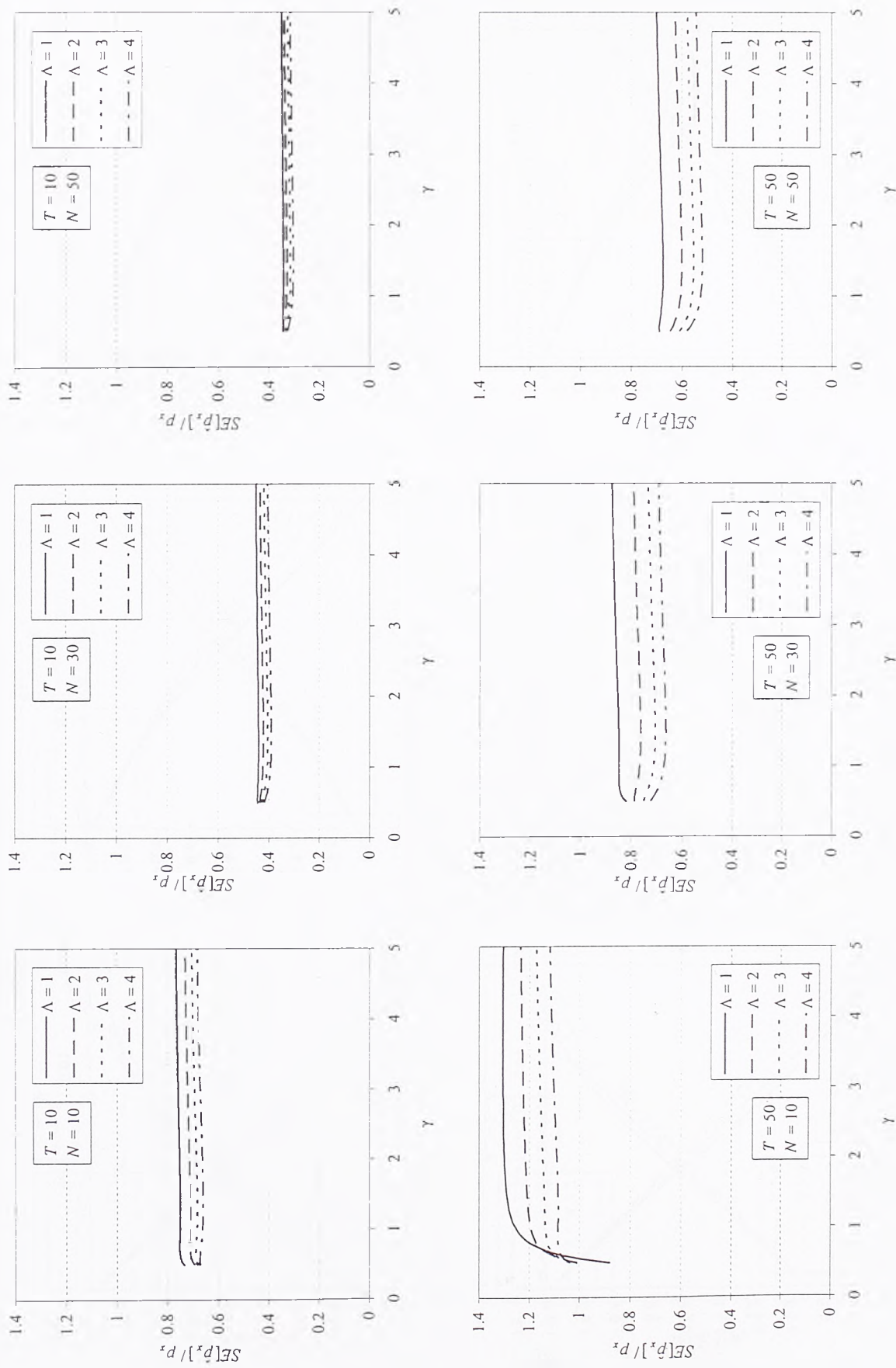
Slika 6. (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda momenata).



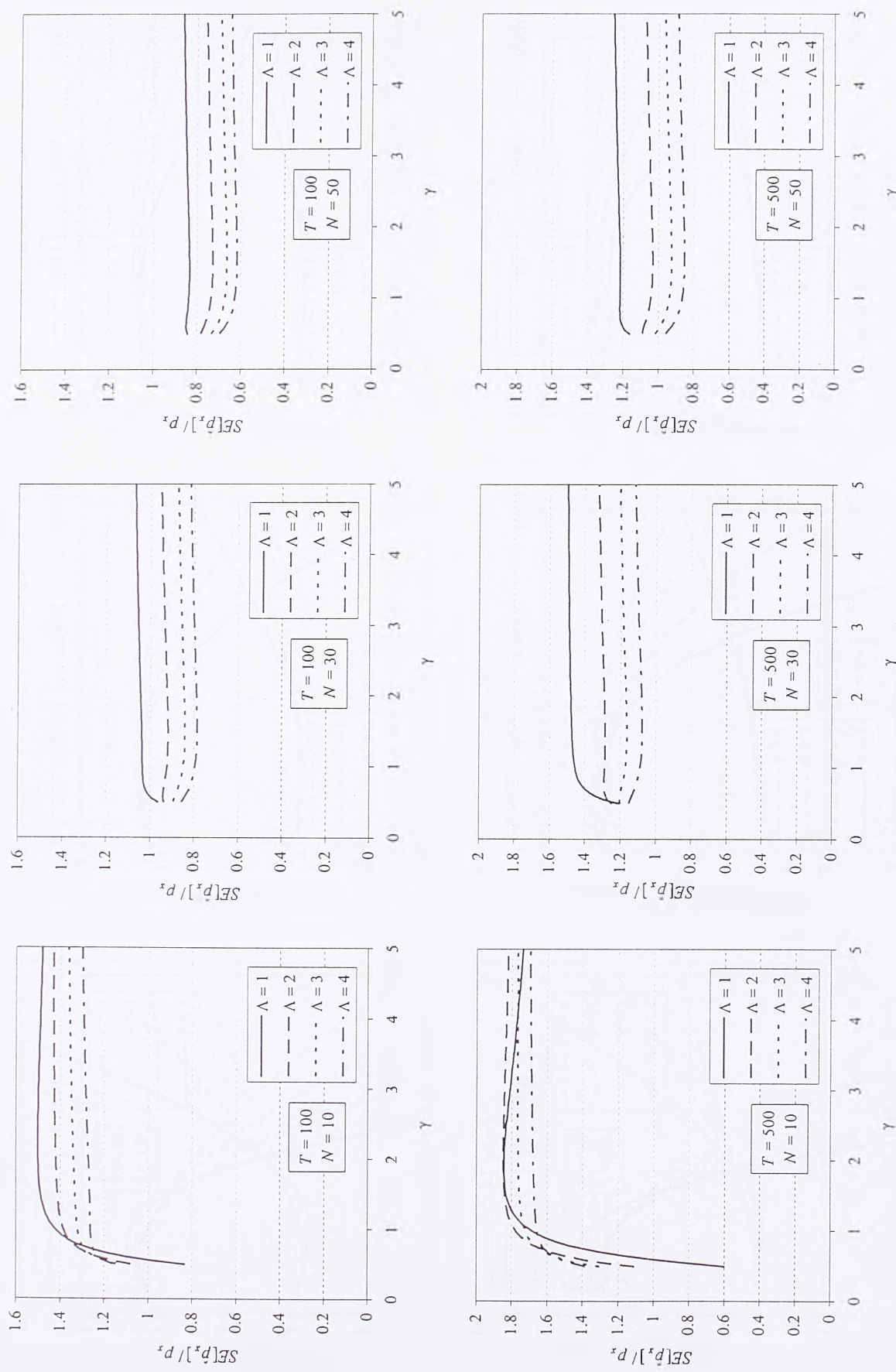
Slika 7. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).



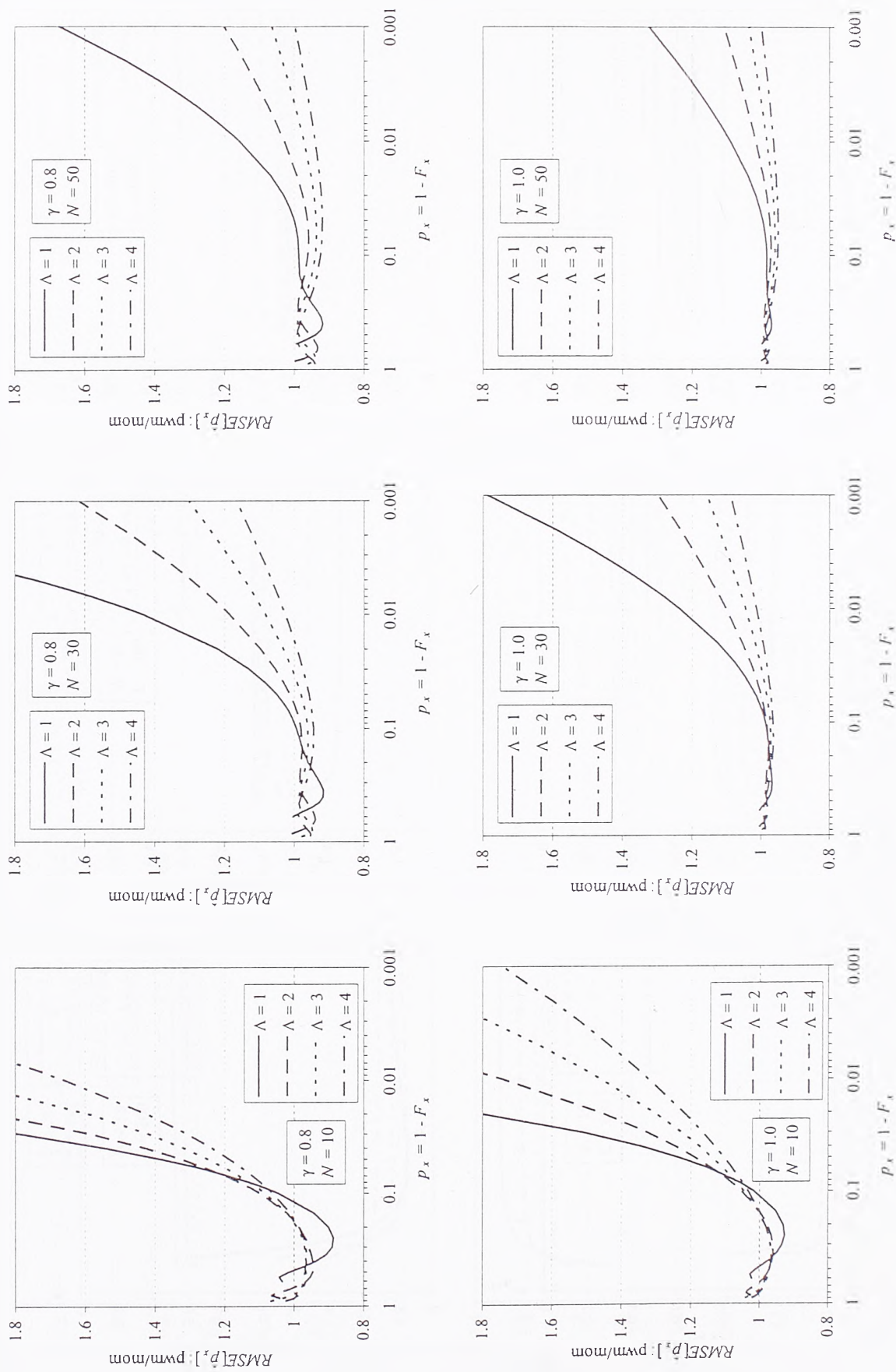
Slika 7 (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja (metoda težinskih momenata).



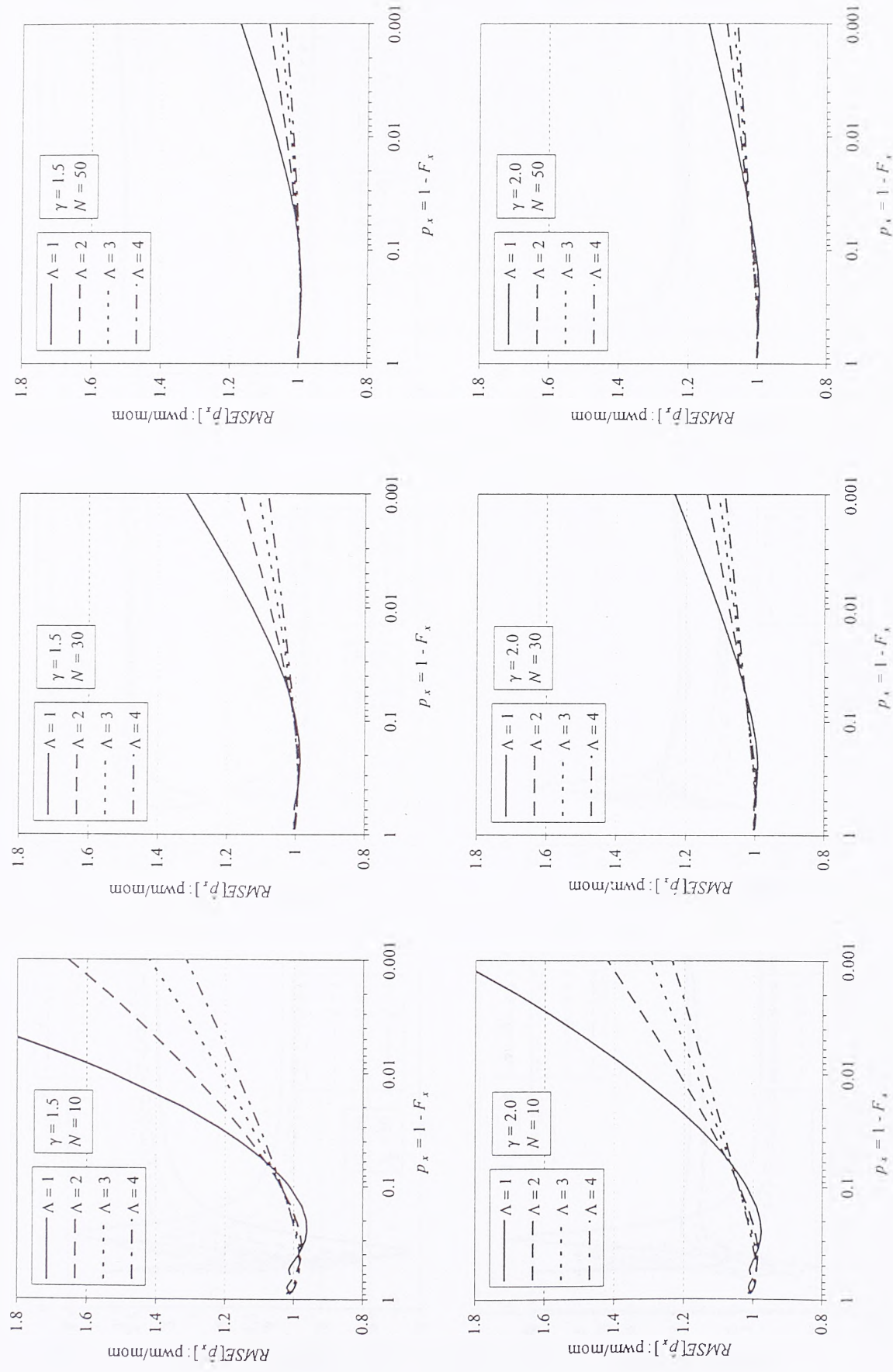
Slika 8. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda težinskih momenata).



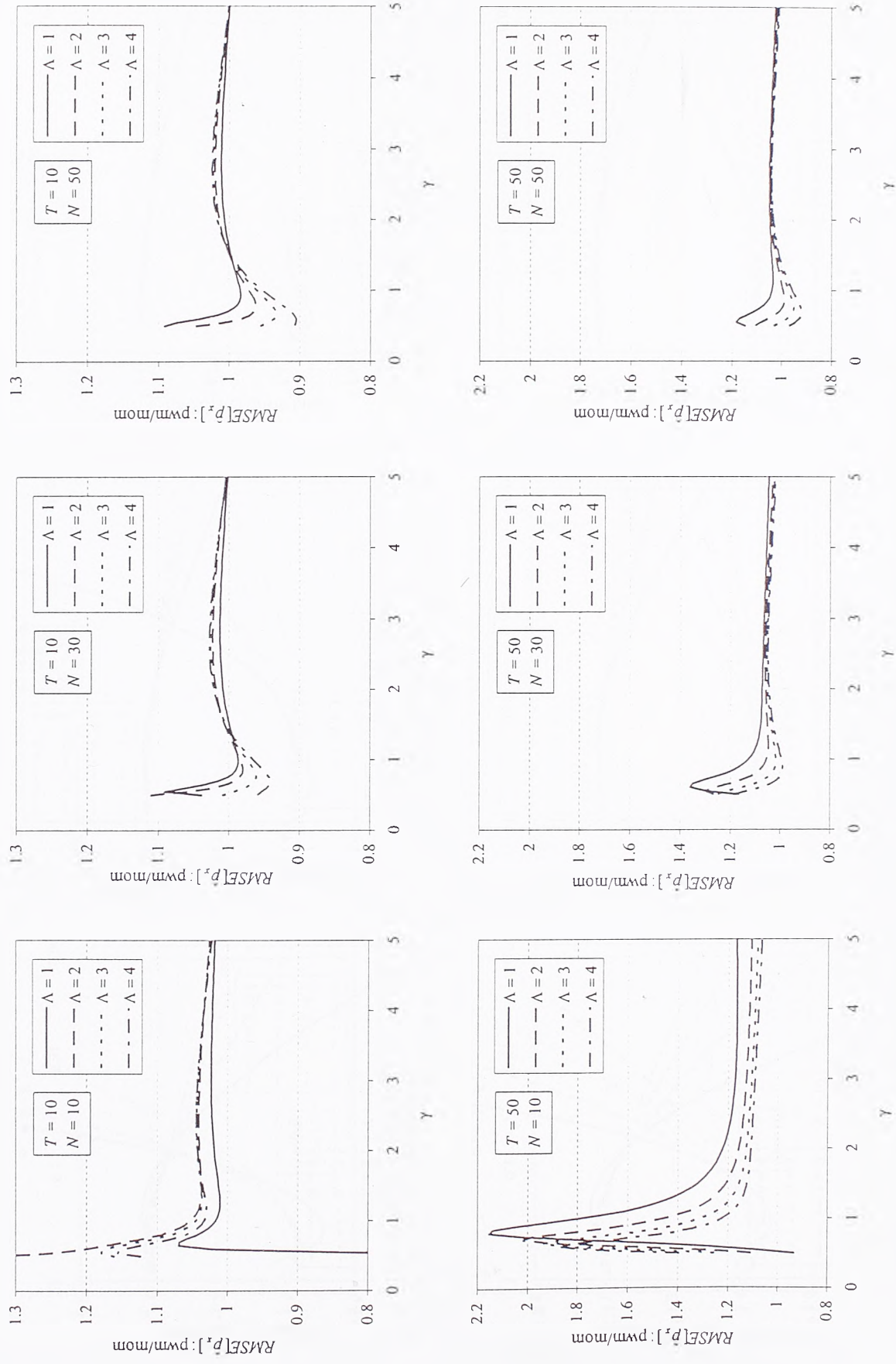
Slika 8. (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ (metoda težinskih momenata).

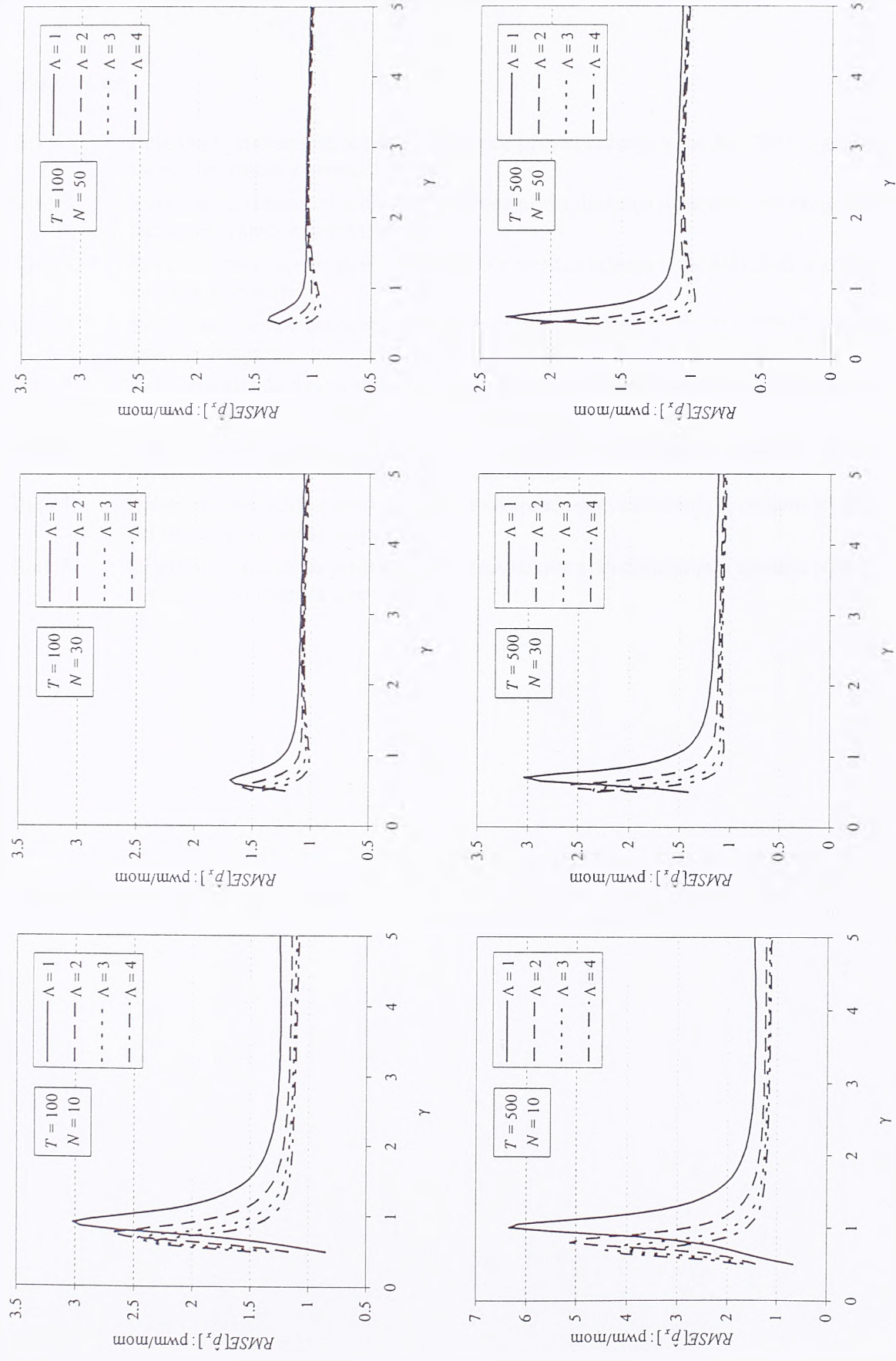


Slika 9. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.



Slika 9 (nastavak). Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.

Slika 10. Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ .



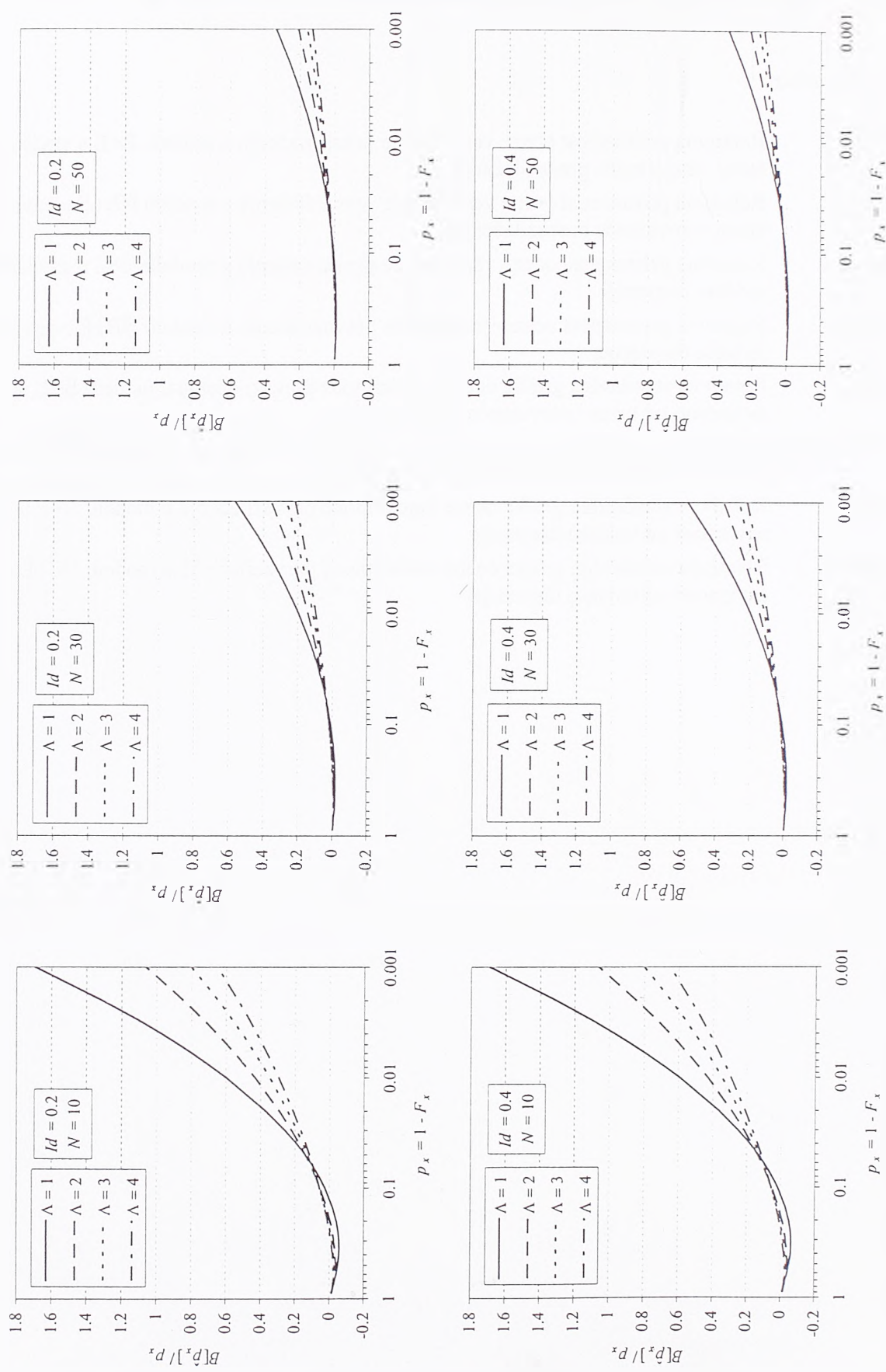
Slika 10 (nastavak). Odnos srednjih kvadratnih grešaka ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu P+W u zavisnosti od parametra γ .

PRILOG C8

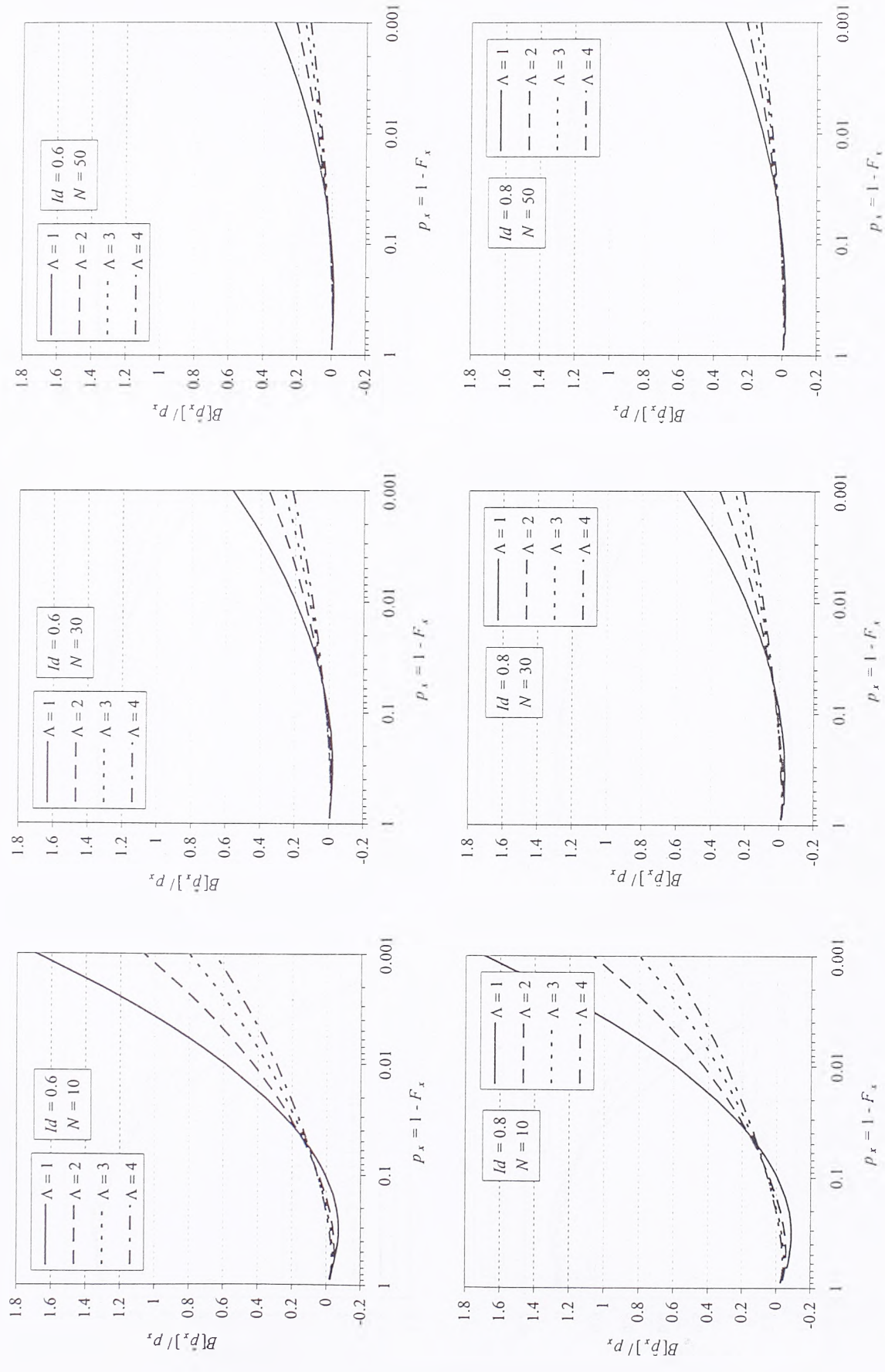
Svojstva ocene verovatnoće modelima B+E i NB+E

Spisak slika

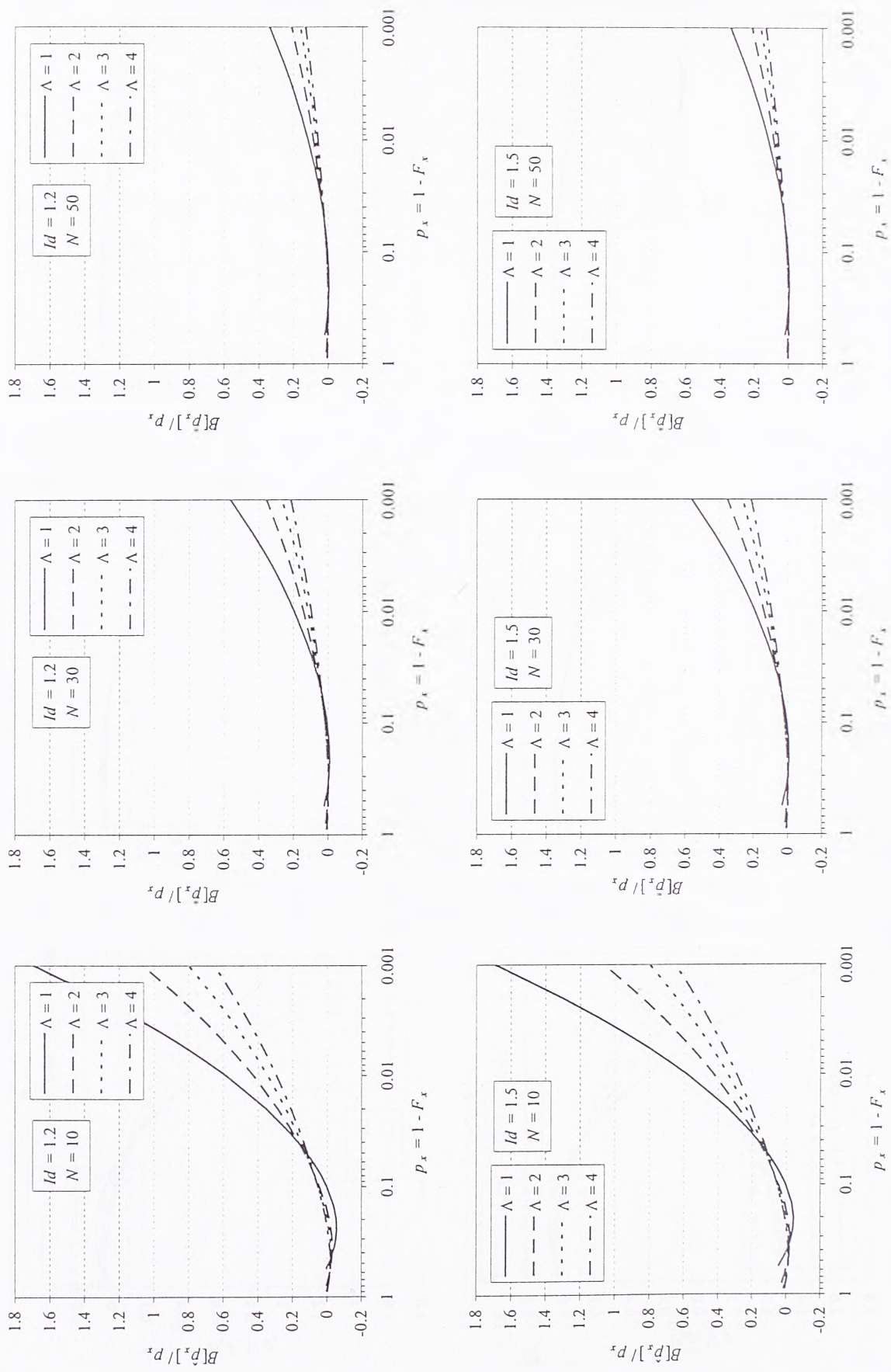
- Slika 1. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.
- Slika 2. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu NB+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.
- Slika 3. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od indeksa disperzije.
- Slika 4. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije.
- Slika 5. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.
- Slika 6. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu NB+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.
- Slika 7. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od indeksa disperzije.
- Slika 8. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije.



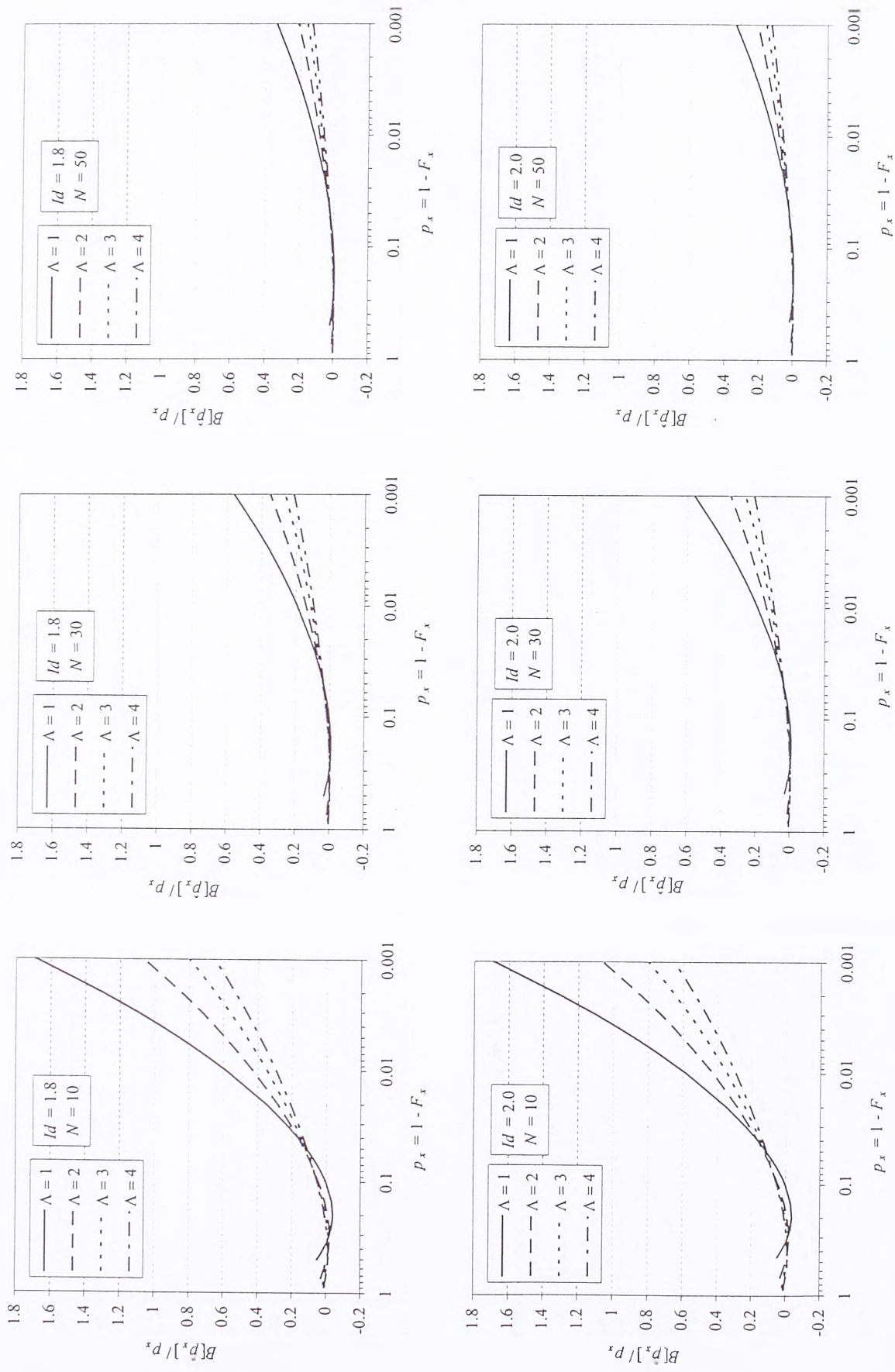
Slika 1. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.



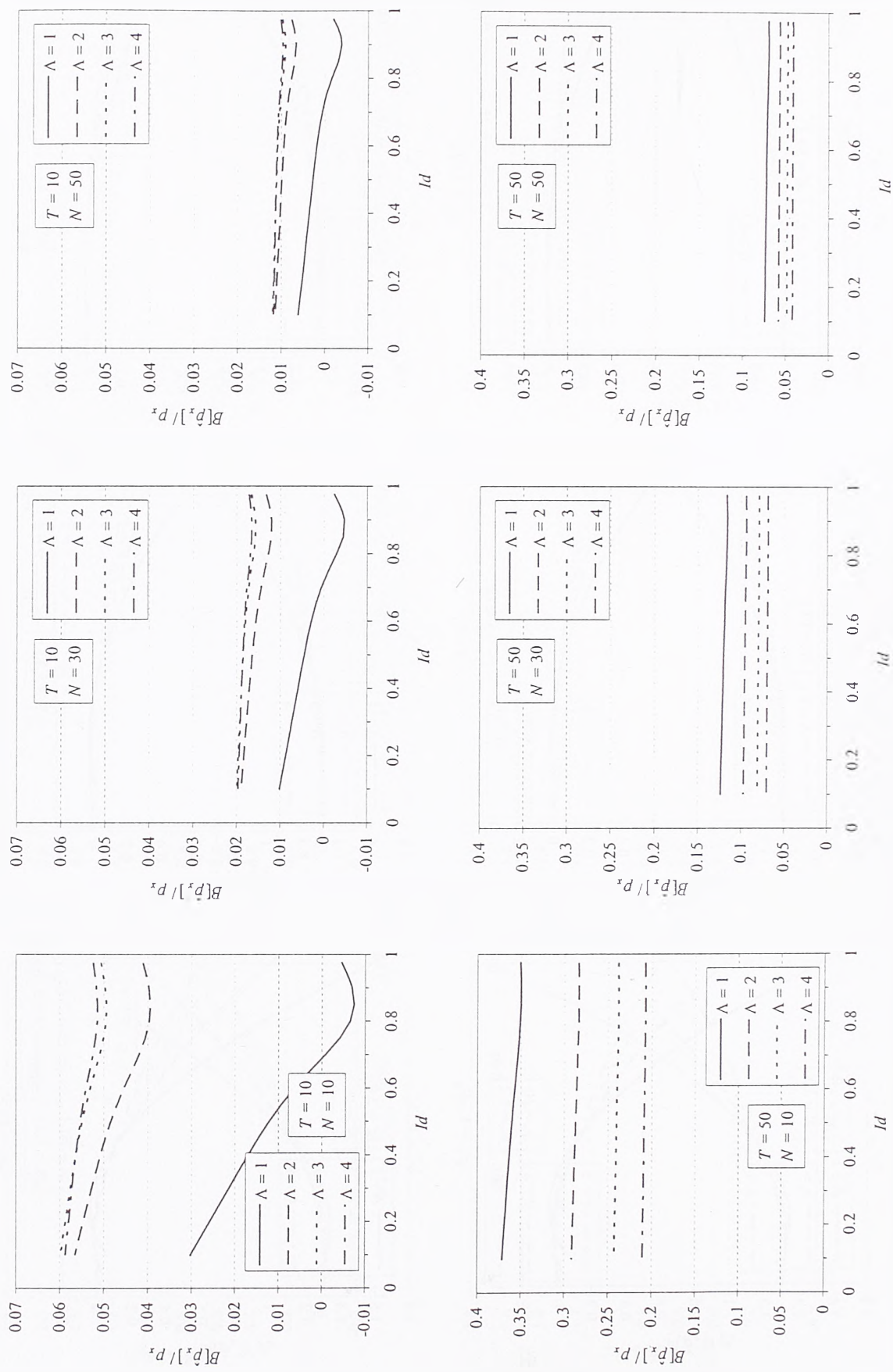
Slika 1 (nastavak). Relativna pristranost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.



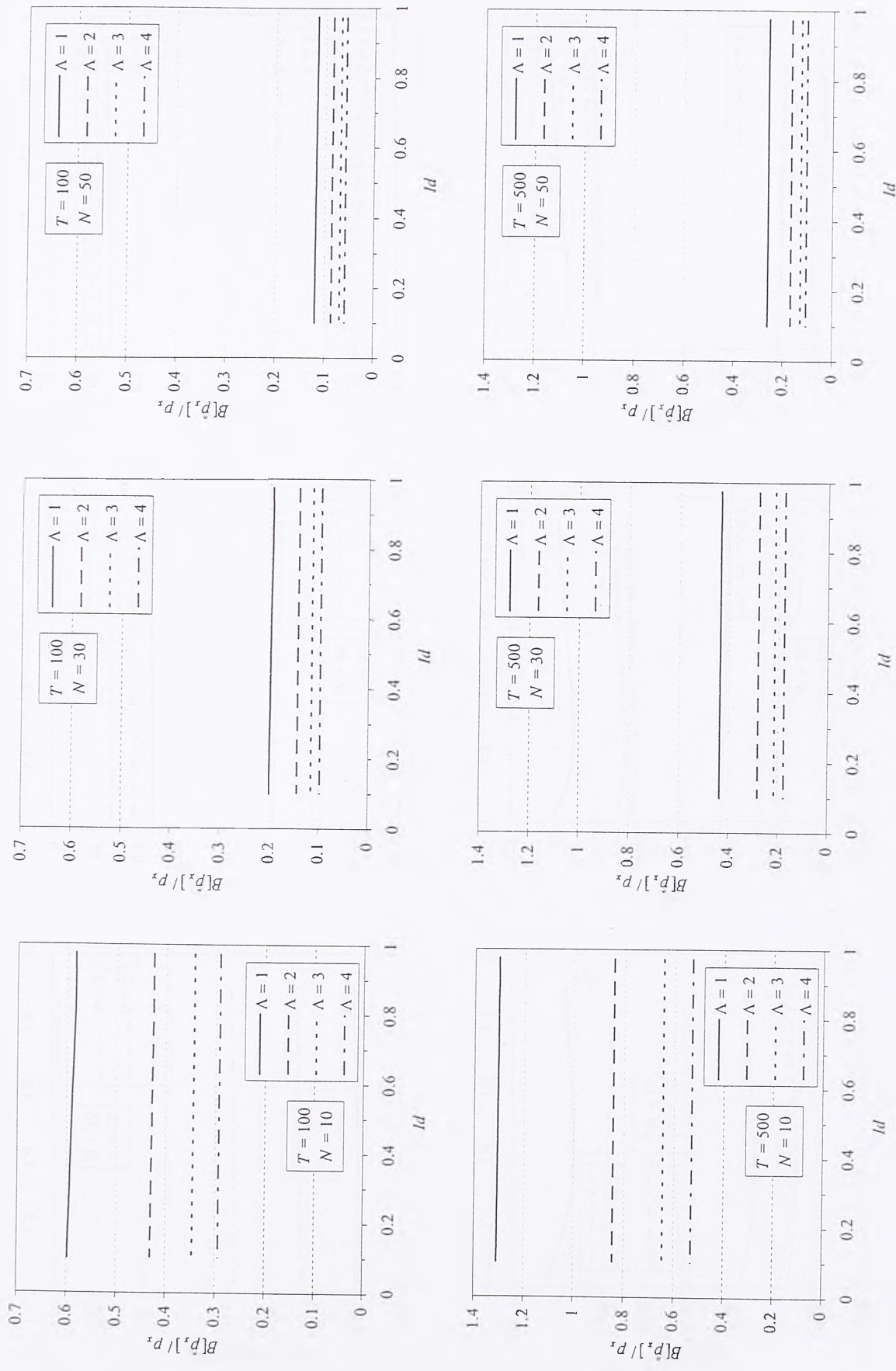
Slika 2. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu NB+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.



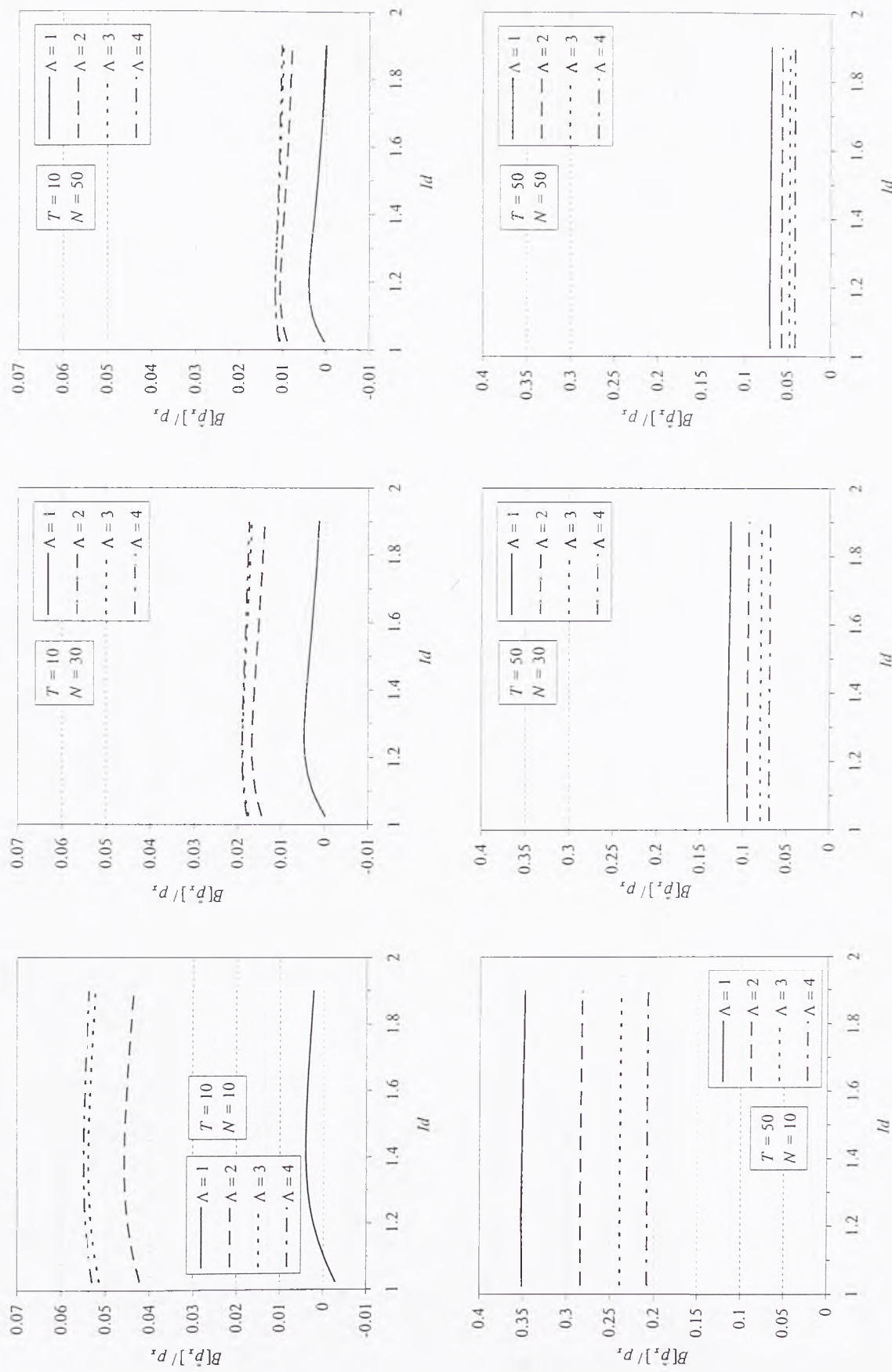
Slika 2 (nastavak). Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu NB+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.



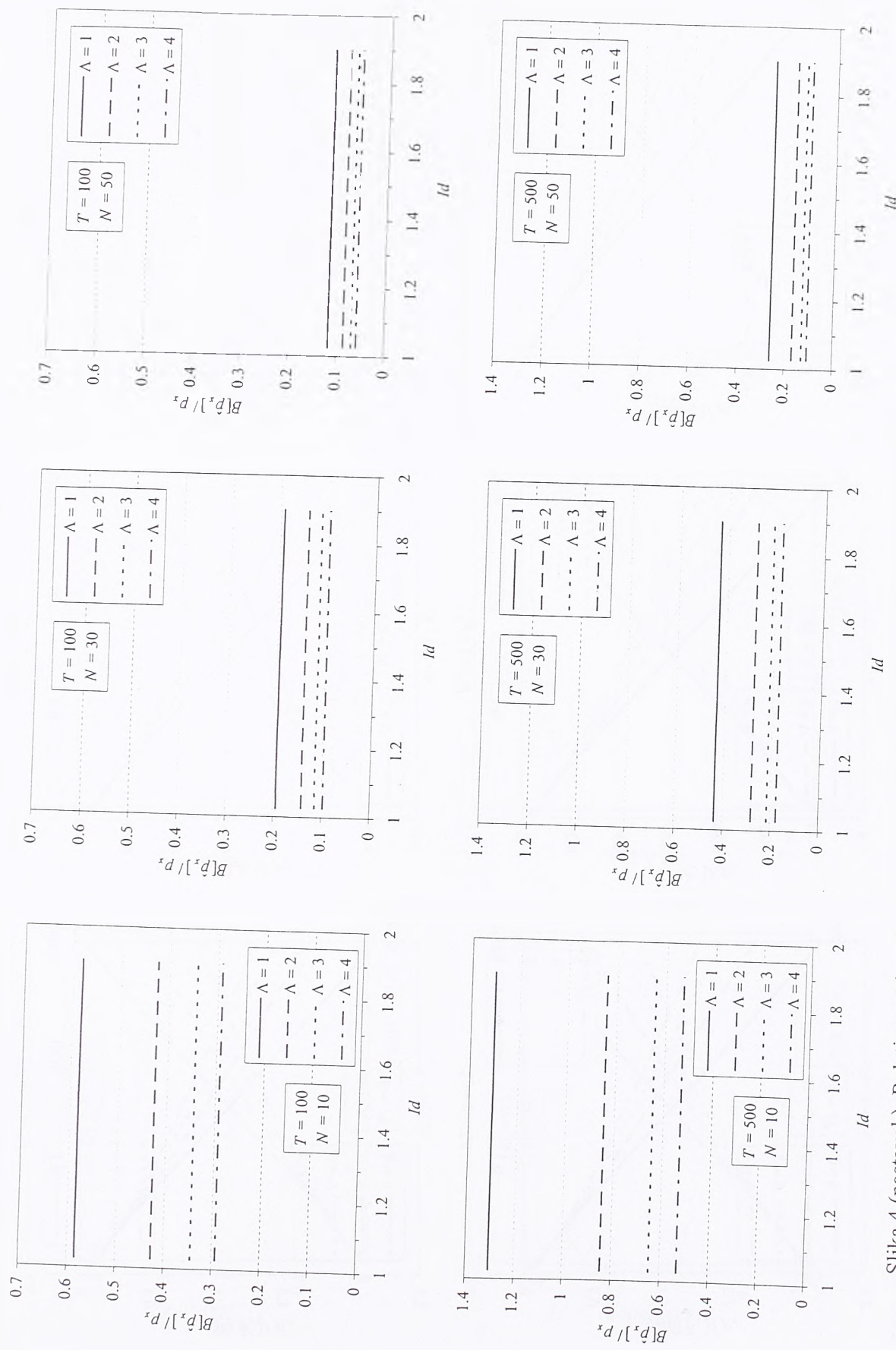
Slika 3. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od indeksa disperzije.



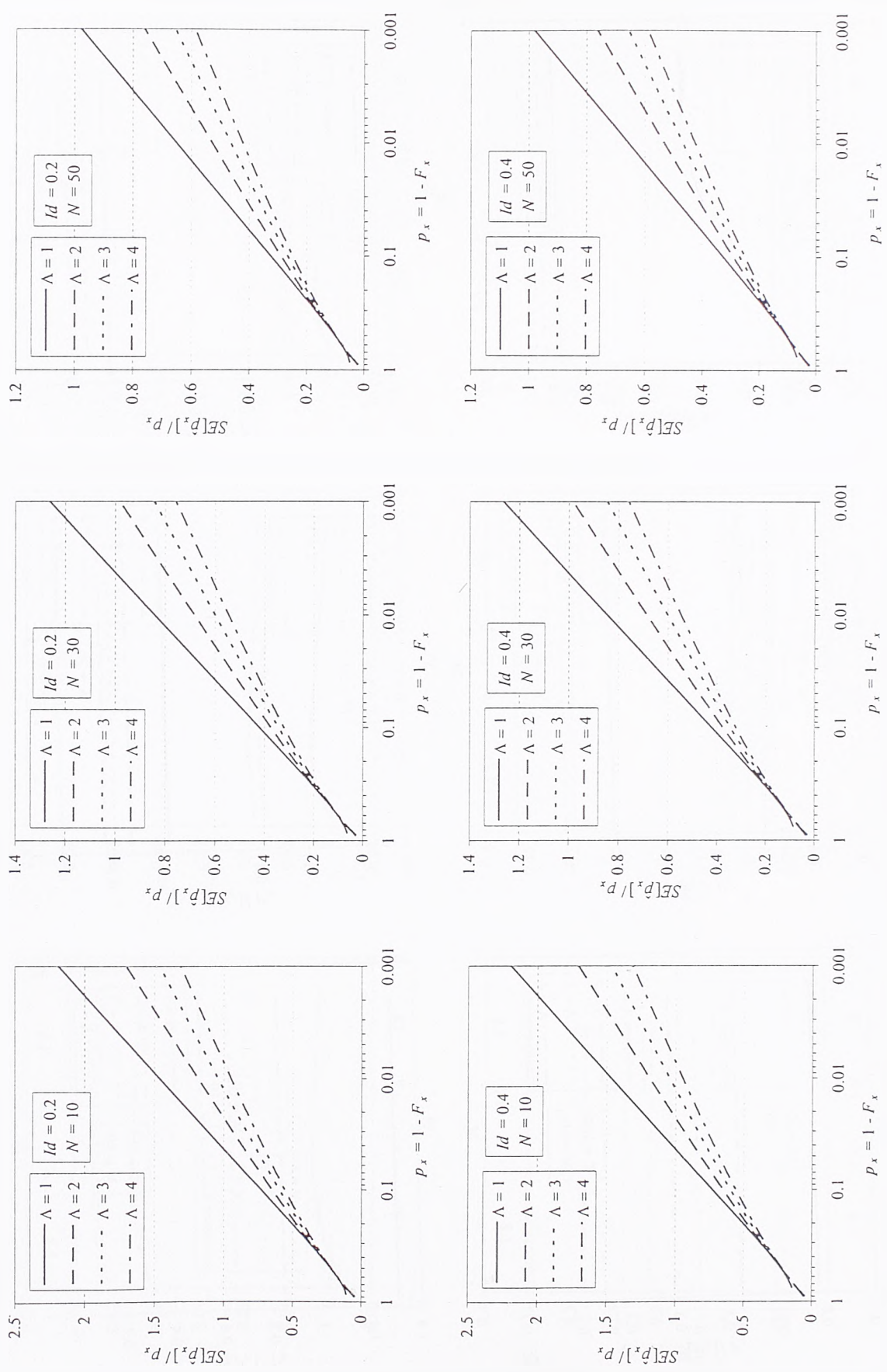
Slika 3 (nastavak). Relativna pristranost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od indeksa disperzije.



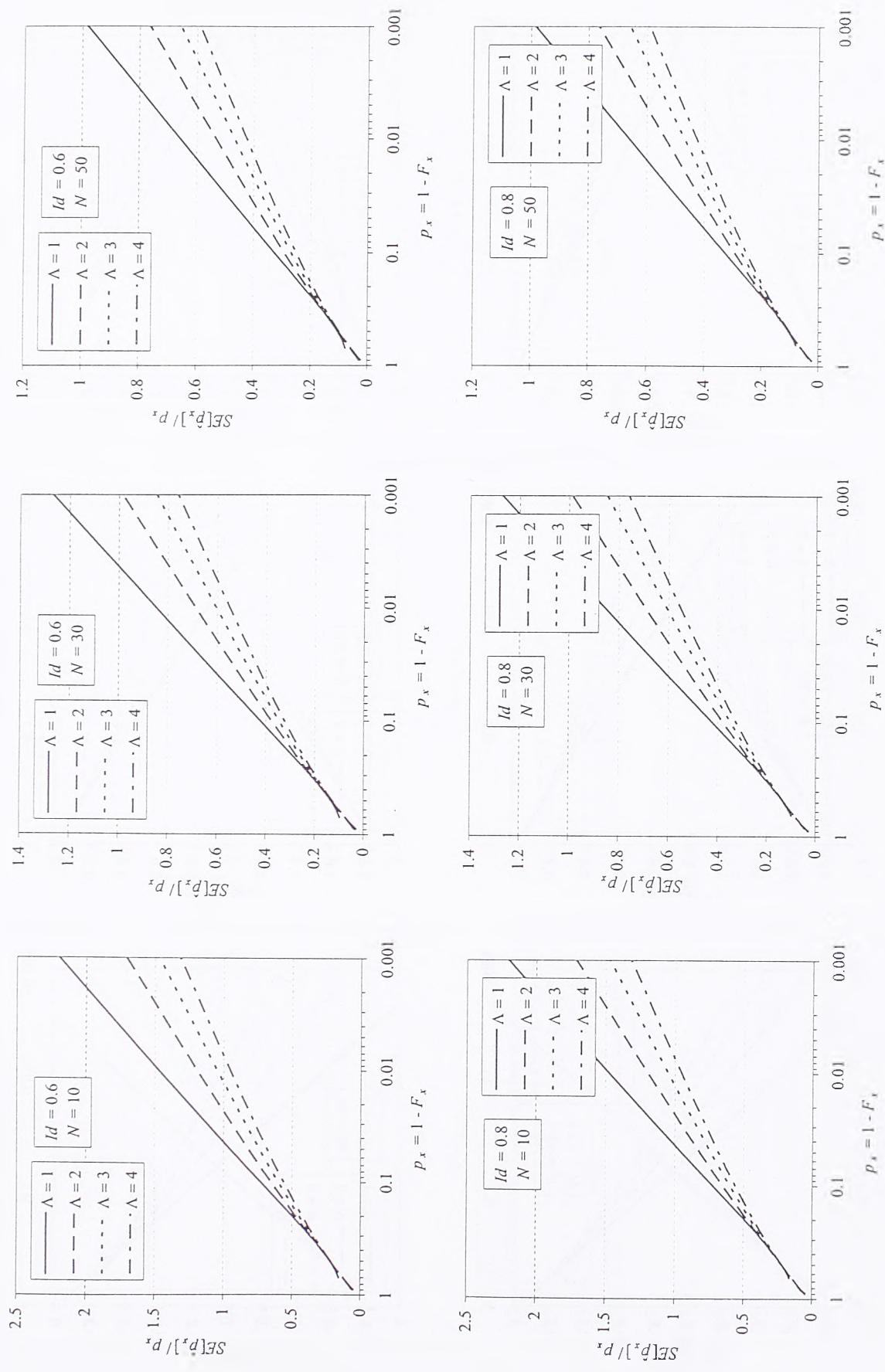
Slika 4. Relativna pristrasnost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije.



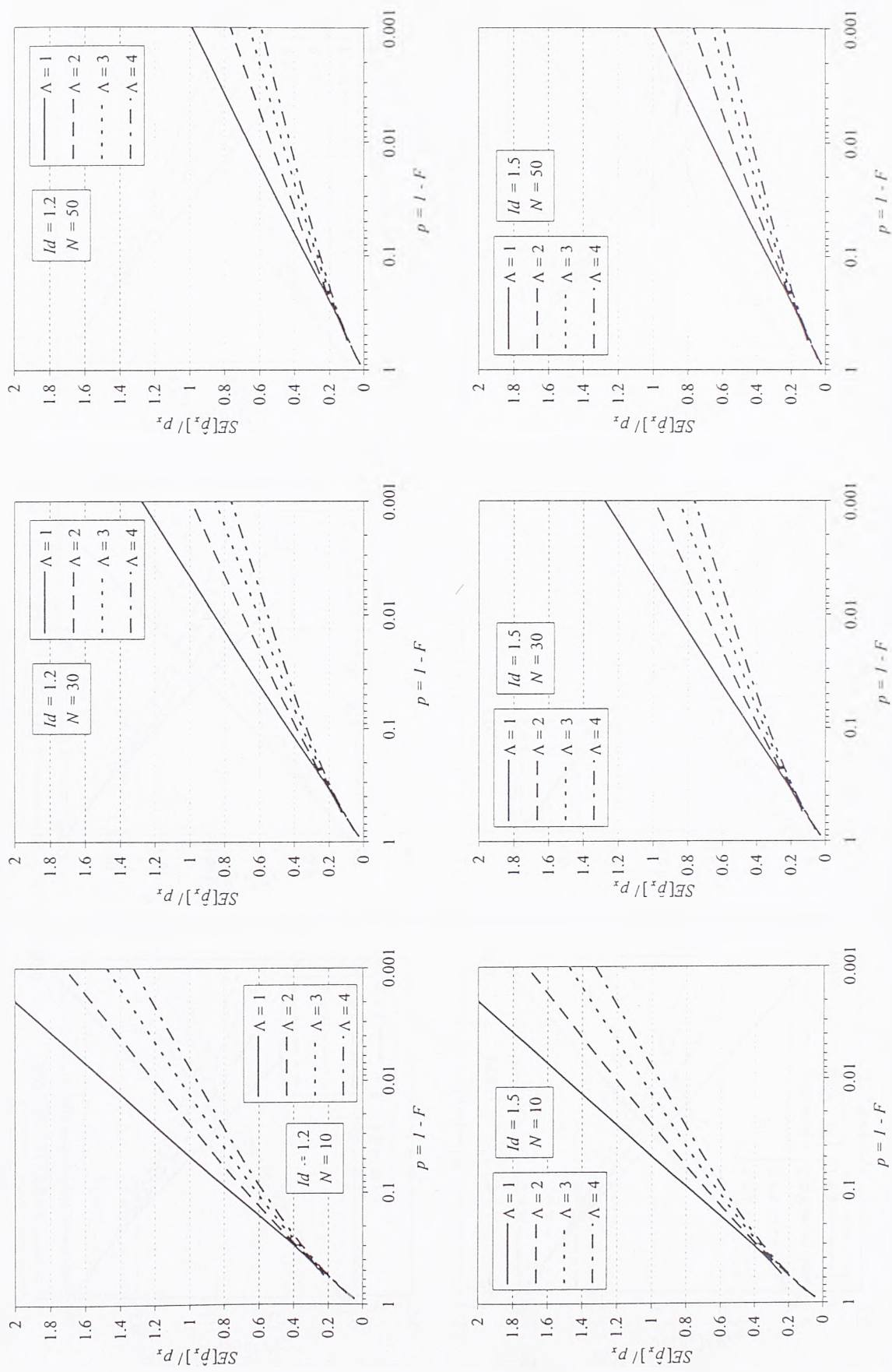
Slika 4 (nastavak). Relativna pristranost ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije.



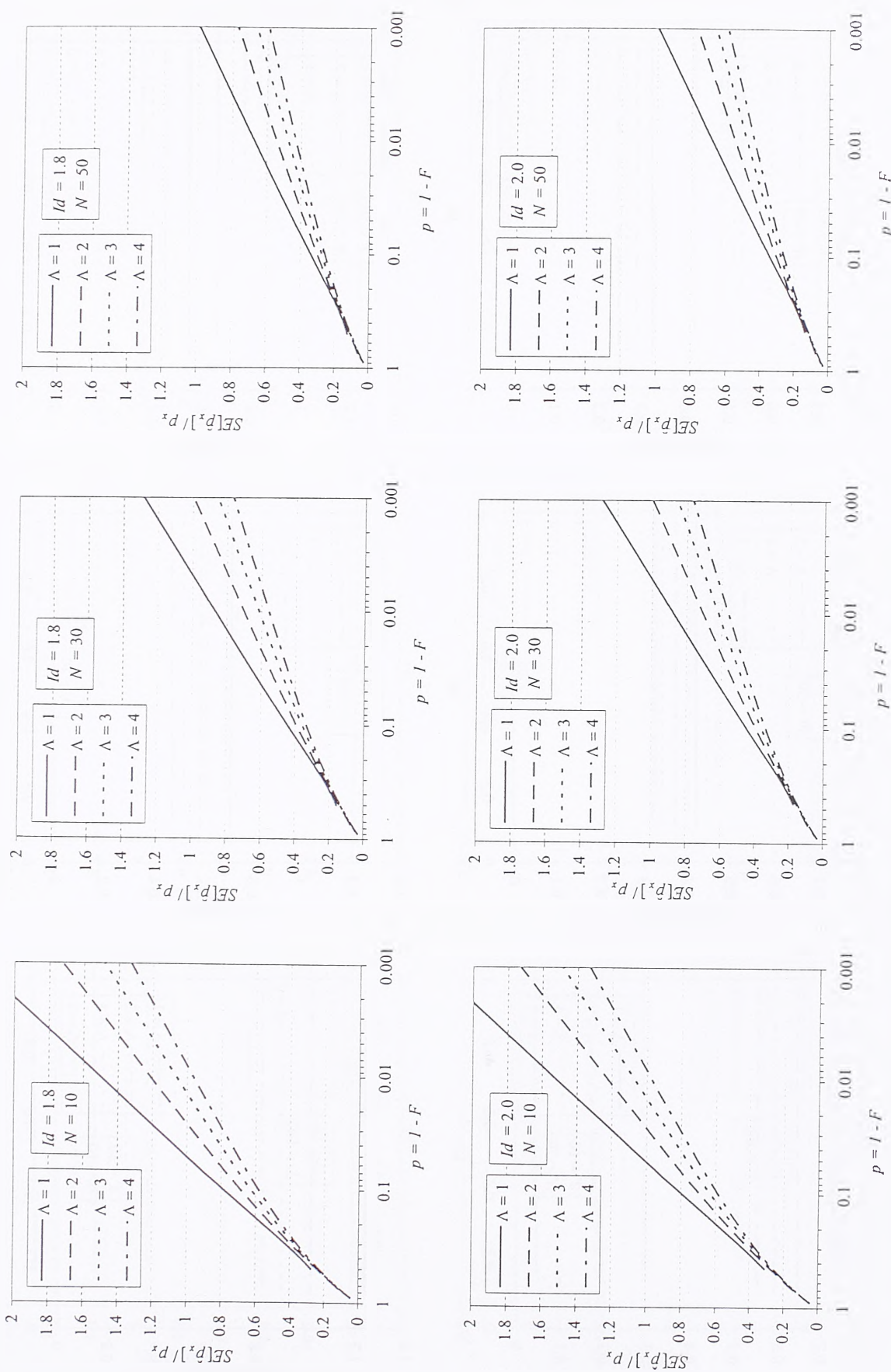
Slika 5. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.



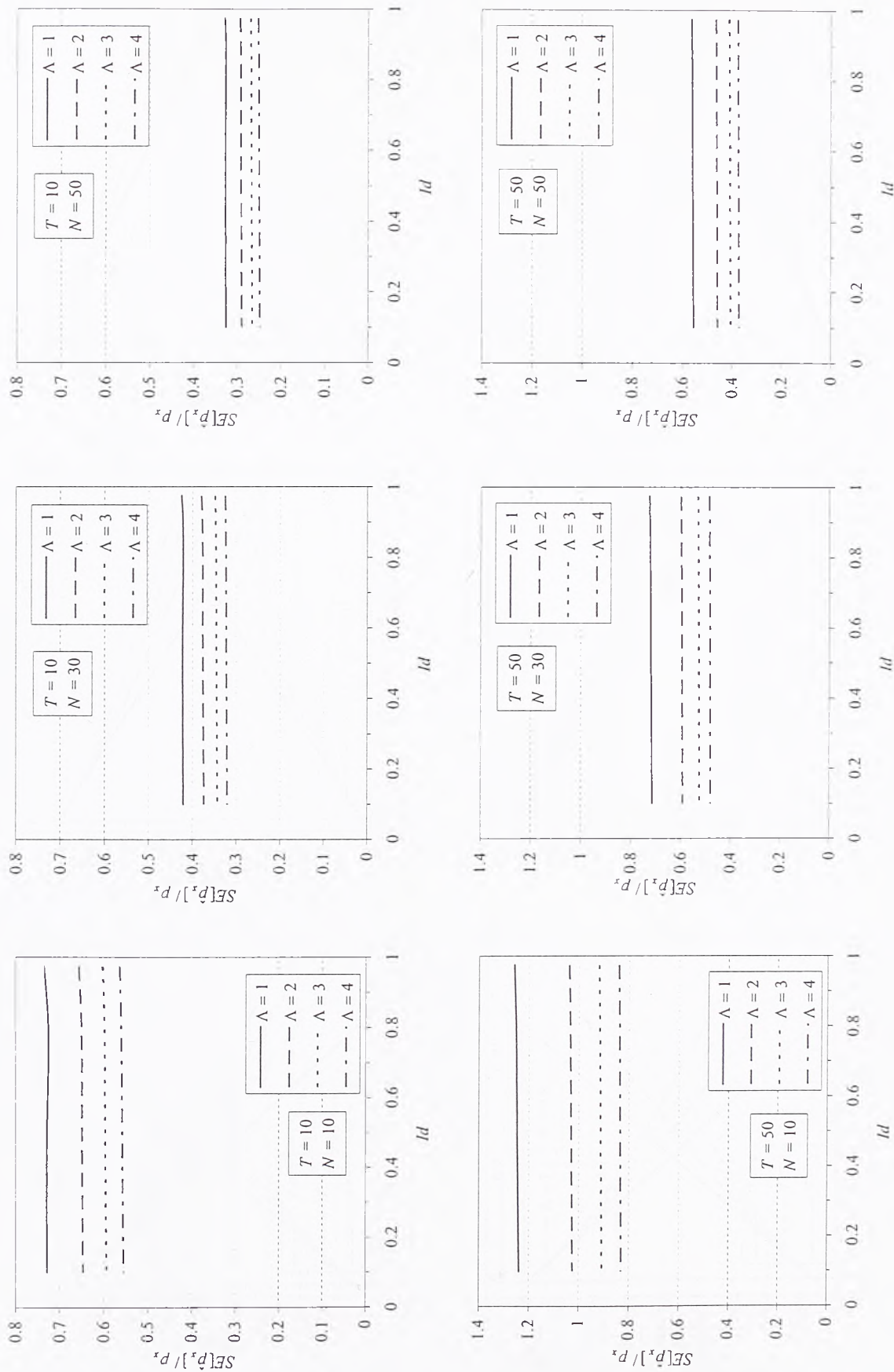
Slika 5 (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.



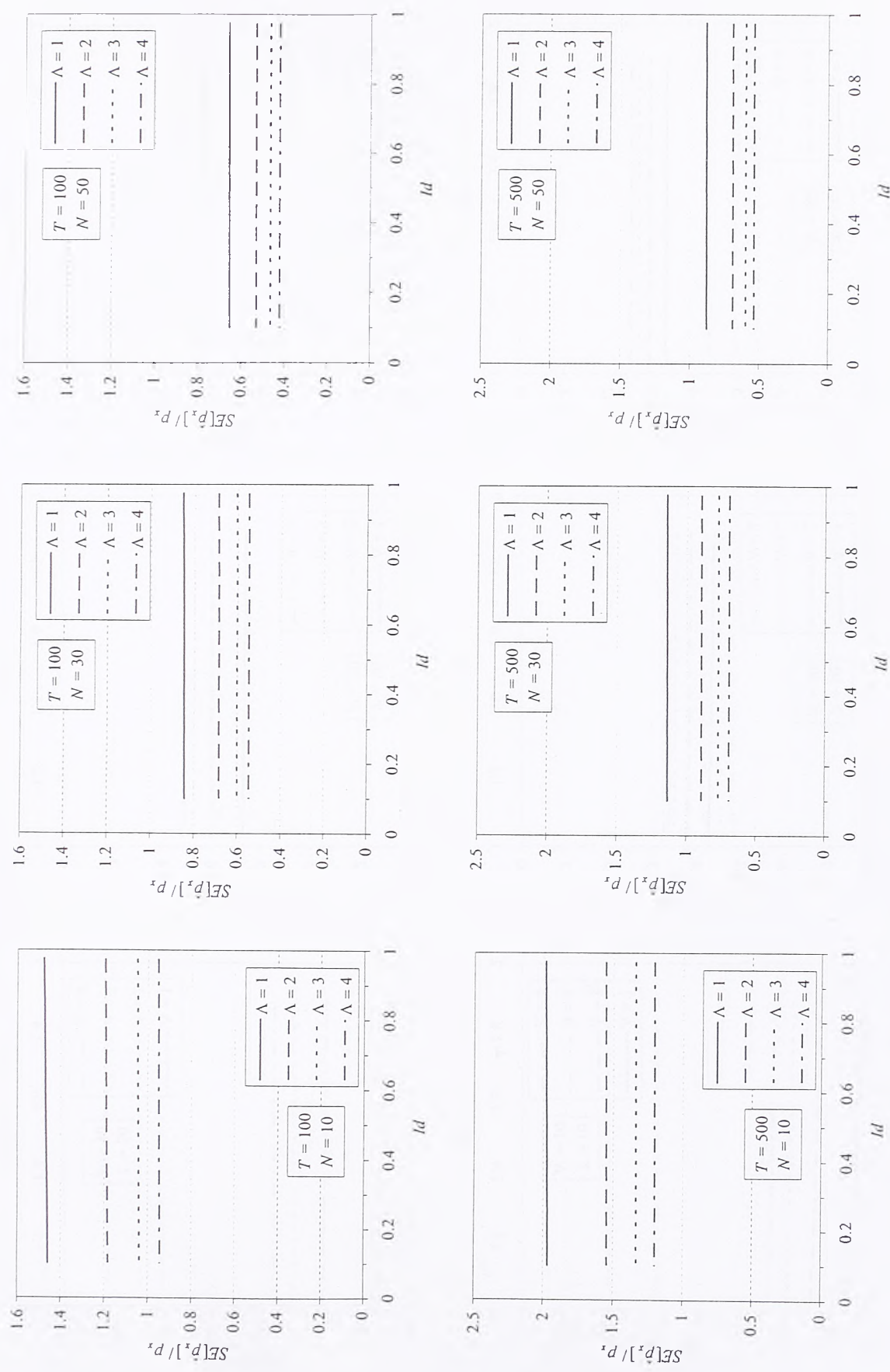
Slika 6. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu NB+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.



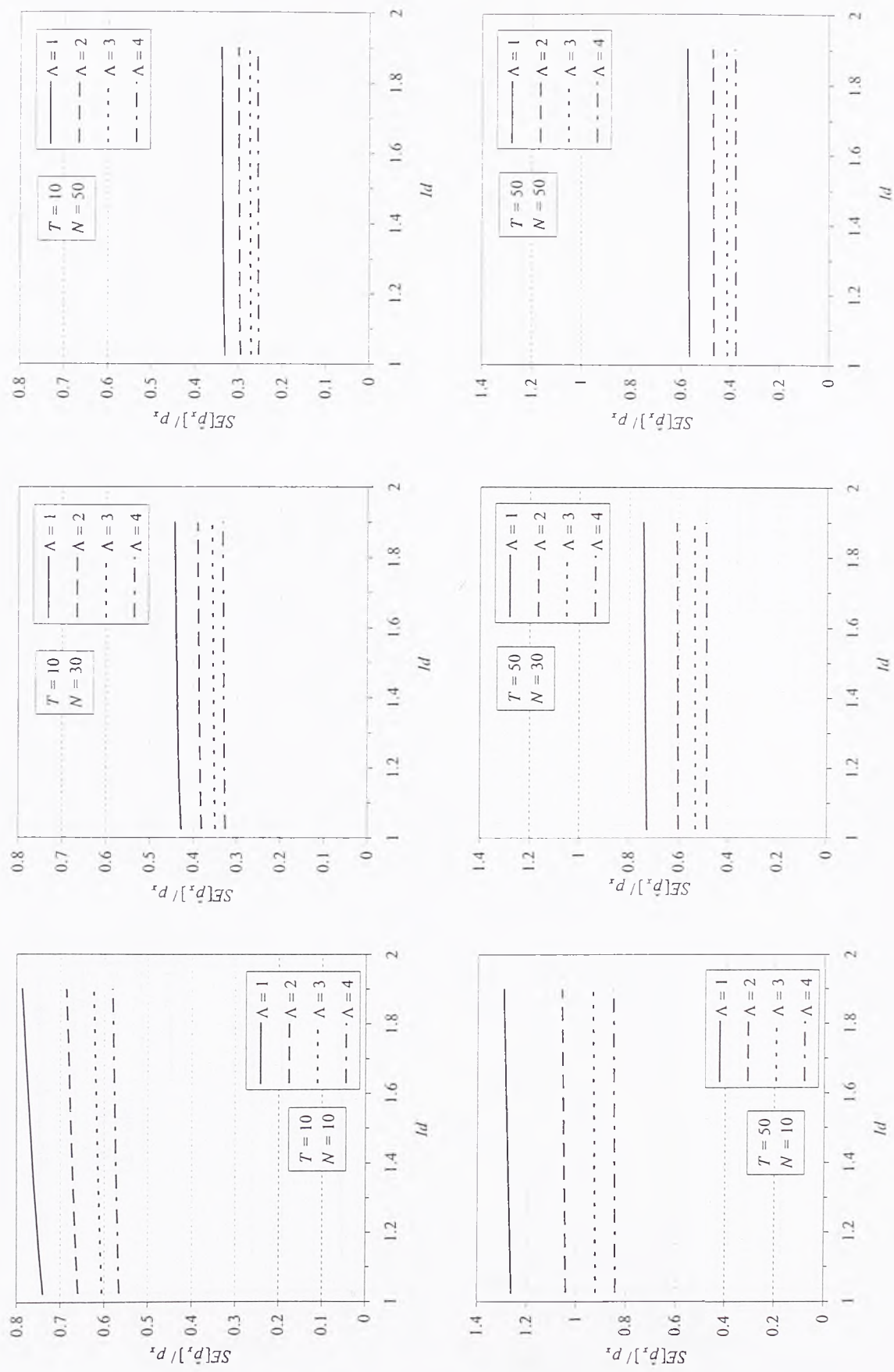
Slika 6. (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu NB+E u zavisnosti od tačne verovatnoće prevazilaženja.



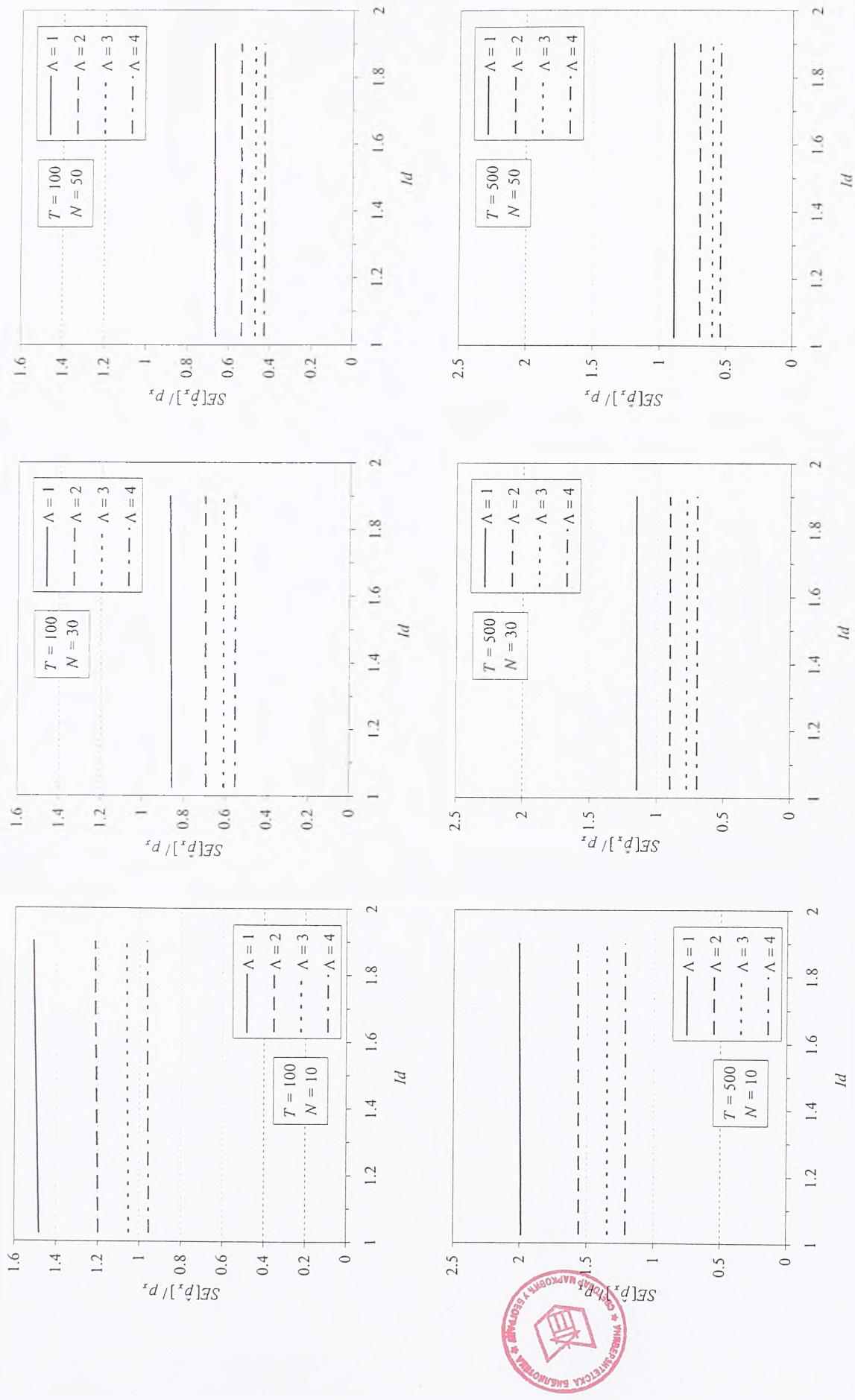
Slika 7. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od indeksa disperzije.



Slika 7 (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu B+E u zavisnosti od indeksa disperzije.



Slika 8. Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazišlaženja u modelu NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije.



Slika 8. (nastavak). Relativna standardna greška ocene verovatnoće prevazilaženja u modelu NB+E u zavisnosti od indeksa disperzije.



РД 18672



300136425

СОBISS e