UNIVERZITET CRNE GORE
GRAĐEVINSKI FAKULTET
U PODGORICI

INTERNACIONALNI NAUČNO-STRUČNI SKUP

GRAĐEVINARSTVO - NAUKA I PRAKSA

ZBORNIK RADOVA

ŽABLJAK, 03-07. MARTA 2008.

ISBN 978-86-82707-14-1 *Knjiga 1*
ISBN 978-86-82707-15-8 *Knjiga 2*

Izdavač

UNIVERZITET CRNE GORE
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Za izdavača

Prof.dr Duško Lučić

Urednik

Doc.dr Snežana Rutešić

Uređivački odbor

Doc.dr Radomir Zejak
Doc.dr Snežana Rutešić
Mr Biljana Šćepanović

Tehnički urednici

Goran Pavlović

Mr Biljana Šćepanović

Priprema za štampu

Goran Pavlović

Fotografija na koricama

Vladimir Tomašević

Štampa

Štamparija 3M Makarije

Tiraž

400 primjeraka

CIP – Каталогизација у публикацији
Централна народна библиотека Црне Горе, Цетиње

624(082)
69(082)

ИНТЕРНАЦИОНАЛНИ научно–стручни скуп
"Грађевинарство – наука и пракса" (2008 ; Жабљак)
Zbornik radova / Internacionalni naučno–stručni skup
Građevinarstvo – nauka i praksa, Žabljak, 03–07. marta 2008. ;
[urednik Snežana Rutešić]. – Podgorica : Univerzitet Crne Gore,
Građevinski fakultet, 2008 (Podgorica : 3M Makarije). – 2 knj.
(1434 str.) : ilustr. ; 24 cm

Tiraž 400. – Tekst na više jezika. – Bibliografija uz sve radove.
– Rezimei na više jezika.
ISBN 978-86-82707-14-1 (Knj. 1)
ISBN 978-86-82707-15-8 (Knj. 2)

а) Грађевинарство – Зборници
COBISS.CG–ID 12496656

INTERNACIONALNI NAUČNO-STRUČNI SKUP
GRAĐEVINARSTVO - NAUKA I PRAKSA
ŽABLJAK, 03-07. MARTA 2008.

Marina Ćetković[1], *Đorđe Vuksanović*[2]

SLOJEVITI MODEL SENDVIČ PLOČE SA MEKIM JEZGROM

Rezime

U ovom radu analizirane su sopstvene vibracije sendvič ploča sa mekim jezgrom primenom slojevitog modela ploče [4]. Predloženi model polje pomeranja, a time i deformacija i napona, pretpostavlja na nivou sloja, čime je u stanju da realno opiše anizotropno ponašanje ploče. Osnovne dinamičke jednačine problema izvedene su primenom Hamilton-ovog principa, koristeći pretpostavljeno polje pomeranja, linearne veze deformacija i pomeranja i 3D konstitutivne jednačine ploče. Analitička rešenja sopstvenih vibracija ploče su nađena Navier-ovim postupkom i rešavanjem problema svojstvenih vrednosti. Numerički primeri su urađeni korišćenjem sopstvenog programa, napisanog u MATLAB programskom jeziku, i potvrđeni su sa rešenjima iz literature. U radu su prikazani i neki novi rezultati, za slojeviti model sendvič ploče sa mekim jezgrom.

Ključne reči:

sendvič ploča, slojeviti model ploče, sopstvene vibracije, analitičko rešenje.

A LAYERWISE MODEL FOR SOFT CORE SANDWICH PLATES

Summary

In this paper free vibrations of soft-core sandwich plates, using layerwise plate model are analyzed [4]. The proposed model assumes displacement, and there by deformation and stress fields at the layer level, being able to realistically describes the plate anisotropic behavior. Governing differential equations are derived applying Hamilton's principle, by using assumed displacement field, linear strain displacement relations and 3D plate constitutive equations. The analytical solutions for plate free vibrations are obtained following the Navier's technique and solving the eigen value problem. Numerical results are found using original program, made in MATLAB programming language, and are verified with those from the literature. Some new results for soft-core sandwich plates, using proposed layerwise model, are shown.

Key words:

sandwich plate, layerwise mode, free vibrations, analytical solution.

[1] *Asistent, dipl. građ. inž., Građevinski fakultet u Beogradu, Srbija, marina@grf.bg.ac.yu*

[2] *Profesor, dipl. građ. inž., Građevinski fakultet u Beogradu, Srbija, george@grf.bg.ac.yu*

1. UVOD

Vlaknima ojačane polimerne ploče (Fiber Reinforced Polymer) su zbog svojih dobrih osobina kao što su: visoka čvrstoća u poređenju sa malom težinom, otpornost na koroziju i zamor, jednostavno oblikovanje i održavanje, našle široku primenu u građevinarstvu i to: 1) za nove konstrukcije, 2) za ojačanje i sanaciju postojećih objekata i 3) u arhitekturi. U slučajevima kada su potrebni konstruktivni elementi male težine i visoke krutosti na savijanje, kao što je slučaj u mostogradnji, FRP ploče se smeštaju što dalje od neutralne ravni, a između se postavlja debelo meko jezgro od penastog polimera ili saćastog materijala. U ovako formiranoj ploči, spoljašnje ploče, slično I-preseku, prihvataju napone savijanja, a jezgro napone smicanja. Dakle, osnovna odlika sendvič ploče je manja težina i veća krutost na savijanje u odnosu na punu ploču iste visine i istog materijala kao što su spoljašnje ploče.

Kao posledica pomenute građe, sendvič ploču odlikuje manja poprečna deformabilnost, a time i veće sopstvene frekvencije u odnosu na punu ploču, u čemu leži i značaj primene sendvič ploča za poboljšanje dinamičkog ponašanja konstrukcije. Takođe, velike razlike u karakteristikama materijala u spoljašnjim pločama i u jezgru, dovode do značajnog uticaja smičuće deformacije u ukupnoj deformaciji ploče. Dakle, realna procena smičućih deformacija usko je povezana sa tačnošću dobijanja sopstvenih vibracija u sendvič ploči.

Pokazalo se da teorije ploča zasnovane na jednom ekvivalentnom sloju (Equivalent Single Layer) nisu u stanju da daju tačan odgovor na ponašanje sendvič ploča, s obzirom da pretpostavljaju polje pomeranja u obliku kontinualne funkcije koordinate z po debljini ploče. Naime, pomenuta funkcija ne može da opiše diskontinuitete u poprečnim smičućim deformacijama na granicama slojeva različitih krutosti, kakvi se realno javljaju kod sendvič ploča. U tim slučajevima, lokalni odgovor kao što su deformacije i naponi, a time i globalni odgovor, kao što su sopstvene frekvencije, nije moguće tačno predvideti. Jedan od načina za prevazilaženje nedostataka ESL teorija je primena Slojevitih (Layer Wise) modela ploča ili 3D teorije elastičnosti. Kako 3D modeli zahtevaju veliki numerički obim posla, LW modeli ploča sve više nalaze opravdanost za svoju primenu. U LW modelima polje pomeranja, a time i deformacija i napona se pretpostavlja na nivou sloja, čime se dobija mnogo realnija slika ponašanja ploče.

U ovom radu prikazan je slojeviti model ploče u kome su pomeranja u ravni razvijena po debljini ploče primenom Lagrange-ove familije 1D interpolacionih funkcija, a poprečno pomeranje je konstantno po debljini ploče [4]. Nezavisna interpolacija polja pomeranja u ravni i po deblji ploče, čini pomenuti model efikasnijim, ali isto toliko tačnim u poređenju sa 3D modelom elastične teorije. Teorija takođe u obzir uzima kvadratnu promenu poprečnih smičućih napona unutar svakog sloja ploče. Koristeći pretpostavljeno polje pomeranja, linearne veze deformacija i pomeranja i konstitutivne jednačine ploče, dinamičke jednačine ravnoteže su izvedene primenom Hamilton-ovog principa. Analitičko rešenje jednačina slobodnih vibracija ploče je nađeno sledeći Navier-ov postupak i rešavajući problem svojstvenih vrednosti. Numerički primeri su urađeni primenom sopstvenog programa napisanog u MATLAB programskom jeziku, i upoređeni su sa rešenjima iz literature. Prikazani su neki novi rezultati za sendvič ploče dobijeni primenom pomenutog slojevitog modela.

2. TEORIJSKA FORMULACIJA

2.1. POLJE POMERANJA

Posmatra se ploča sačinjena od n ortotropnih slojeva. Ceo broj k označava redni broj sloja, koji uzima vrednosti počevši od donje površine ploče. Neka su (x, y, z) koordinate u srednjoj ravni ploče, a (x_k, y_k, z_k) koordinate unutar sloja k. Debljine ploče i sloja k su označene sa h i h_k, respektivno. Pretpostavlja se da su: 1) slojevi idealno spojeni, 2) materijal svakog sloja je linarno elastičan i ima tri ravni materijaln simetrije (tj. ortotropan), 3) deformacije su male, 4) slojevi su konstantne debljine i 5) važi pretpostavka o neistegljivosti normale.

Komponente pomeranja (u_1, u_2, u_3) u tački (x, y, z) mogu se napisati kao:

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= u(x,y) + \sum_{I=1}^{N} U^I(x,y)\cdot\Phi^I(z)\\
u_2(x,y,z) &= v(x,y) + \sum_{I=1}^{N} V^I(x,y)\cdot\Phi^I(z)\,,\\
u_3(x,y,z) &= w(x,y)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

gde su (u, v, w) komponente pomeranja u tački $(x, y, 0)$ u srednjoj ravni ploče, U^I i V^I su neodređeni koeficijenti, a $\Phi^I(z)$ je deo po deo kontinualna funkcija koordinate z po debljini ploče. Ako se pretpostavi linearna Lagrange-ova interpolacija po debljini ploče, može se uočiti da je svaki sloj zapravo 1D konačni element i da su pomeranja u ravni kontinualna po debljini ploče.

2.2. VEZE DEFORMACIJA I POMERANJA

Deformacije vezane za polje pomeranja (1), mogu se sračunati koristeći linearne veze deformacija i pomeranja, kao:

$$
\begin{aligned}
\{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T\\
\{\boldsymbol{\varepsilon}^I\} &= \left\{ \frac{\partial U^I}{\partial x} \quad \frac{\partial V^I}{\partial y} \quad \frac{\partial U^I}{\partial y}+\frac{\partial V^I}{\partial x} \quad U^I \quad V^I \right\}^T
\end{aligned}
\tag{2}
$$

2.3. KONSTITUTIVNE JEDNAČINE SLOJA

Veze napona i deformacija za k-ti sloj:

$$
\{\boldsymbol{\sigma}\}^{(k)} = [\mathbf{Q}]^{(k)} \times \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{(k)}
\tag{3}
$$

gde su $\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^{(k)T}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^{(k)T}$ komponente vektora napona i deformacija, a $\mathbf{Q}_{ij}^{(k)}$ je transformisana matrica elastičnih koeficijenata, k-tog sloja u globalnim koordinatama.

2.4. PRINCIP VIRTUALNOG RADA

Princip virtualnog rada se može napisati koristeći Hamilton-ov princip::

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega \Bigg\{ N_{xx}\frac{\partial \delta u}{\partial x} + N_{yy}\frac{\partial \delta v}{\partial y} + N_{xy}\left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x}\right) + Q_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \\
&\sum_{I=1}^{N}\left[N_{xx}^I \frac{\partial \delta U^I}{\partial x} + N_{yy}^I \frac{\partial \delta V^I}{\partial y} + N_{xy}^I\left(\frac{\partial \delta U^I}{\partial y} + \frac{\partial \delta V^I}{\partial x}\right) + Q_x^I U^I + Q_y^I V^I\right] + \\
&- I_0\left(\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w\right) - \sum_{I=1}^{N} I^I\left(\ddot{U}^I \delta u + \ddot{u}\delta U^I + \ddot{V}^I \delta v + \ddot{v}\delta V^I\right) \\
&- \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{N} I^{IJ}\left(\ddot{U}^I \delta U^J + \ddot{V}^I \delta V^J\right)\Bigg\} d\Omega \ dt = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Iz jednačine (4) mogu se dobiti Euler-Lagrange-ove diferencijalne jednačine kretanja u obliku:

$$
\begin{aligned}
&\delta u = 0 : N_{xx,x} + N_{xy,y} = I_0 \ddot{u} + \sum_{J=1}^{N} I^J \ddot{U}^J \\
&\delta v = 0 : N_{xy,x} + N_{yy,y} = I_0 \ddot{v} + \sum_{J=1}^{N} I^J \ddot{V}^J \\
&\delta w = 0 : Q_{x,x} + Q_{y,y} = I_0 \ddot{w} \\
&\delta U^I = 0 : N^I{}_{xx,x} + N^I{}_{xy,y} - Q^I{}_x = I^I \ddot{u} + \sum_{J=1}^{N} I^{IJ} \ddot{U}^J \\
&\delta V^I = 0 : N^I{}_{xy,x} + N^I{}_{yy,y} - Q^I{}_y = I^I \ddot{v} + \sum_{J=1}^{N} I^{IJ} \ddot{V}^J \qquad I = 1,\dots N
\end{aligned}
\tag{5}
$$

gde su $I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, dz,\ \ I^I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, \Phi^I dz,\ \ I^{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, \Phi^I \Phi^J dz$ momenti inercije, a ρ je gustina.

Dobijenih $(3+2N)$ parcijalnih diferencijalnih jednačina po promenljivima (u, v, w, U^I, V^I), sa odgovarajućim graničnim uslovima po silama i pomeranjima u potpunosti definišu problem slobodnih vibracija ploče.

3. ANALITIČKO REŠENJE

Navier-ovo rešenje je izvedeno za pravougaonu ploču axb sa ukrštenim vlaknima (cross-ply) i slobodno oslonjenim ivicama:

$$v = w = V^I = N_{xx} = N^I_{xx} = 0 \quad za \quad x = 0, a$$
$$u = w = U^I = N_{yy} = N^I_{yy} = 0 \quad za \quad y = 0, b \tag{6}$$

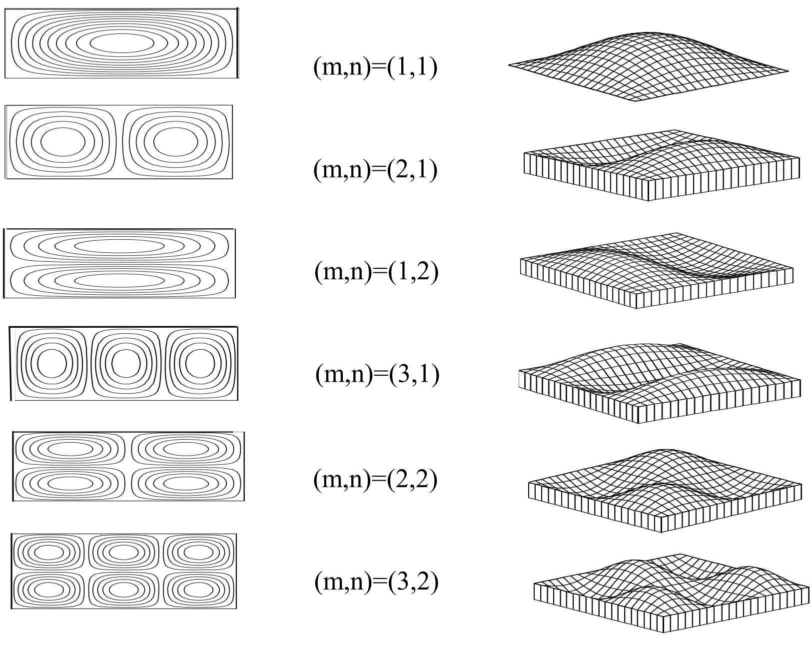
Polje pomeranja koje zadovoljava granične uslove (6) i Euler-Lagrange-ove jednačine kretanja (5), pretpostavlja se u obliku:

$$\begin{aligned} \left(u(x,y); U^I(x,y)\right) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left(X_{mn}; R^I{}_{mn}\right) \cdot e^{i\omega_{mn}t} \cdot cos\frac{m\pi}{a}x \cdot sin\frac{n\pi}{b}y, \\ \left(v(x,y); V^I(x,y)\right) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left(Y_{mn}; S^I{}_{mn}\right) \cdot e^{i\omega_{mn}t} \cdot sin\frac{m\pi}{a}x \cdot cos\frac{n\pi}{b}y, \\ w(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \cdot e^{i\omega_{mn}t} \cdot sin\frac{m\pi}{a}x \cdot sin\frac{n\pi}{b}y. \end{aligned} \tag{7}$$

Zamenom pretpostavljenog polja pomeranja (7) u sistem jednačina (5) dobija se sistem algebarskih jednačina:

$$\left([\mathbf{K}] - \omega^2_{mn} [\mathbf{M}] \right)\{ \boldsymbol{\Delta} \} = \{\mathbf{0}\} \tag{8}$$

iz koga, reševanjem problema svojstvenih vrednosti, za svaki izbor (m,n) dobijamo kružnu frekvenciju oscilovanja ω_{mn}. Najmanja od ω_{mn}, različita od nule, je sopstvena kružna frekvencija. Sopstveni vektor je onda $\{\Delta\}^T = \{X_{mn}, Y_{mn}, W_{mn}, R^I_{mn}, S^I_{mn}\}$. Slika 1 prikazuje konturne linije i oblike oscilovanja slobodno oslonjene pravougaone ploče.



Slika 1. Konturne linije i oblici oscilovanja slobodno oslonjene pravougaone ploče

4. NUMERIČKI PRIMER

Analizirana je sendvič ploča dimenzija 1.83x1.22m, sa aluminijumskim spoljašnjim slojevima i aluminijumskim saćastim jezgrom. Materijalne karakteristike su:

Spoljašnje ploče: $t_f = 0.4064\,mm$

$$E_f = 68.984\,GPa, \nu_f = 0.3, G_f = 25.924\,GPa, \rho_f = 2768\,kg/m^3$$

Jezgro: $t_c = 6.35\,mm$

$$E_c = 0.1379\,GPa, \nu_c = 0, G_{xy} = 0, G_{xz} = 0.13445\,GPa, G_{yz} = 0.05171\,GPa, \rho_c = 121.8\,kg/m^3$$

Iz tabele 1 se vidi da predloženi slojeviti model (GLPT) daje rešenja koja su bliska sa rešenjima ostalih teorija ploča [2,3].

Tabela 1. Sopstvene frekvencije ploče za prvih šest tonova oscilovanja

Sopstvena frekvencija, ton (Hz)	GLPT	HODF [3]	SFPM [2]
(1,1)	22.16	23.04	23.29
(2,1)	42.51	44.16	44.47
(1,2)	67.57	69.76	71.15
(3,1)	76.39	79.17	78.78
(2,2)	87.46	90.24	91.57
(3,2)	120.85	124.27	125.10

5. ZAKLJUČAK

Predloženi slojeviti model ploče je sposoban da dovoljno tačno predvidi slobodne vibracije sendvič ploča sa mekim jezgrom.

LITERATURA

[1] Đ. Vuksanovic, Linear Analysis of Laminated Composite Plates Using Single Layer Higher-Order Discrete Models, Composite Structures, Vol. 48, 2000, p.205-211

[2] H.B. Zhou, G. Y. Li, Free Vibration Analysis of Sandwich Plates with Laminated Faces Using Spline Finite Point Method, Composite Structures, 1996, Vol. 2, p.257-263

[3] T. Wang, V., Sokolinsky, S., Rajaram, S.R., Nutt, Consistent Higher Order Free Vibration Analysis of Composie Sandwich Plates, Composite Structures, 2007, in press

[4] J.N. Reddy, E.J. Barbero, A Plate Bending Element Based on A Generalized Laminated Plate Theory, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1989, Vol. 28, p.2275-2292

[5] M. Ćetković, Primena metode konačnih elemenata na opštu teoriju laminatnih poča, Magistarska Teza, 2005, Građevinski fakultet, Beograd, Srbija