

24<sup>th</sup> national and 1<sup>st</sup> international scientific convention



**moNGeometrija**

**2008**

Serbia | Vrnjačka Banja | September 25<sup>th</sup> - 27<sup>th</sup> | [www.mongeometrija.org](http://www.mongeometrija.org)

**PROCEEDINGS | ZBORNIK RADOVA**

**UNDER THE AUSPICES OF:**

**The Republic of Serbia / Ministry of Education  
University of Niš  
Faculty of Architecture and Civil Engineering of Niš  
The Faculty of Mechanical engineering of Niš  
Faculty of Sciences and Mathematics of Niš  
The Faculty of Occupational Safety of Niš  
Donors**

**POKROVITELJI:**

**Ministarstvo prosvete Republike Srbije  
Univerzitet u Nišu  
Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu  
Mašinski fakultet u Nišu  
Prirodno-matematički fakultet u Nišu  
Fakultet zaštite na radu u Nišu  
Donatori**

24<sup>th</sup> national and 1<sup>st</sup> international scientific conference  
24. nacionalni i 1. međunarodni naučni skup

**moNGeometrija 2008**

**PROCEEDINGS | ZBORNİK RADOVA**

September 25<sup>th</sup> - 27<sup>th</sup> 2008

24<sup>th</sup> national and 1<sup>st</sup> international scientific conference  
24. nacionalni i 1. međunarodni naučni skup

## **moNGeometrija 2008**

**Publisher | Izdavač**

**Faculty of Architecture and Civil Engineering in Niš  
Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu**

Serbian Society for Geometry and Graphics  
Srpsko udruženje za geometriju i grafiku  
**SUGIG**

**Title of Publication | Naziv publikacije**

PROCEEDINGS | ZBORNIK RADOVA

**Reviewers | Recenzenti**

Hranislav Anđelković, PhD  
Miroslav Marković, PhD  
Biserka Marković, PhD  
Ljubica Velimirović, PhD

**Editor-in-Chief | Glavni urednik**

Biserka Marković, PhD

**Co-Editor | Zamenik urednika**

Sonja Krasić, PhD

**Text formatting | Tehnička obrada teksta**

Vladan Nikolić

**ISBN 978-86-80295-83-1**

Number of copies printed | Tiraž: 100 primeraka / CDs  
Printing | Štampa: M-COPS Niš

Izdavač zadržava sva prava. Reprodukција pojedinih delova ili celine ove publikacije nije dozvoljena.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced without either the prior written permission of the publisher.

**Scientific committee | Naučni odbor**

Stachel Hellmuth, PhD  
Weiss Gunter, PhD  
Natasha Danilova, PhD  
Hubert Gollek, PhD

**Organization committee | Organizacioni odbor**

Biljana Predić, PhD  
Dragan Aranđelović, PhD  
Jovan Mandić, architect  
Mića Stanković, PhD  
Mihailo Đurđanović, PhD  
Ljiljana Radović, PhD  
Ljubica Velimirović, PhD  
Hranislav Anđelković, PhD  
Miroslav Marković, PhD  
Biserka Marković, PhD

**Executive committee | Izvršni odbor**

Biserka Marković, PhD  
Hranislav Anđelković, PhD  
Miroslav Marković, PhD  
Sonja Krasić, PhD  
Ljubica Velimirović, PhD  
Ljiljana Radović, PhD  
Mihailo Đurđanović, PhD

## CONTENTS | SADRŽAJ

Foreword   Predgovor .....	13
<b>Aleksandar Čučaković, Magdalena Dimitrijević</b> NAČIN ODREĐIVANJA TANGENTI U SINGULARNOJ TAČKI PROSTORNE KRIVE 4.REDA .....	16
ONE PROCEDURE FOR DETERMINATION OF TANGENTS IN THE SINGULAR (DOUBLE) POINT OF SPATIAL CURVE OF 4 <sup>TH</sup> ORDER (english summary).....	24
<b>Aleksandar Čučaković, Magdalena Dimitrijević</b> VARIJANTE MEĐUSOBNOG POLOŽAJA DIREKTRISA KOSOG JEDNOGRANOG ELIPTIČKOG HIPERBOLOIDA .....	25
VARIETIES OF SPATIAL SETTING OF DIRECTRICES OF OBLIQUE ELLIPTICAL HYPERBOLOID(english summary).....	37
<b>Marija Ćirić</b> GRAPHICAL PRESENTATION OF SOME CONSTANT MEAN CURVATURE SURFACES.....	38
GRAFIČKI PRIKAZ NEKIH POVRŠI KONSTANTNE SREDNJE KRIVINE (rezime na srpskom) .....	47
<b>Natasha K. Danailova</b> FRACTAL GEOMETRY - SYNTHESIS OF ART AND SCIENCE .....	48
FRAKTALNA GEOMETRIJA - SINTEZA UMETNOSTI I NAUKE (rezime na srpskom) .....	60
<b>Hubert Gollek</b> PROJECTIVE DUALS OF NULL CURVES.....	61
PROJEKTIVNI DUALI NUL KRIVA (rezime na srpskom) .....	75
<b>Lozica Ivanović, Danica Josifović, Zoran Ivanović</b> MODELIRANJE I VIZUELIZACIJA GEROTORSKIH PUMPI .....	76
MODELING AND VISUALIZATION OF THE GEROTOR PUMPS (english summary).....	86

<b>Milorad Janić, Dragomir Grujović, Gordana Djukanović</b> PRIMENA INŽENJERSKE GRAFIKE U PEJZAŽNOM PROJEKTOVANJU .....	87
USAGE OF ENGINEERING GRAPHICS IN LANDSCAPE PROJECTION (english summary).....	94
<b>Milorad Janić, Dragomir Grujović, Gordana Djukanović</b> MODELOVANJE ELEMENATA PEJZAŽNOG PROJEKTOVANJA .....	95
MODELLING OF ELEMENTS IN LANDSCAPE PROJECTION (english summary).....	103
<b>Marijana Kalabić</b> KONUSNA ANAMORFOZA .....	104
CONE ANAMORPHOSES (english summary).....	116
<b>Vladimir Kubet, Milena Krklješ, Ksenija Hiel</b> GEOMETRIJA UGAONIH OBJEKATA MODERNE U NOVOM SADU .....	117
GEOMETRY OF CORNER BUILDINGS FROM MODERNA PERIOD IN NOVI SAD (english summary).....	123
<b>Sonja Krasić, Vladan Nikolić</b> DETERMINATION OF ABSOLUTE CONIC FIGURE IN GENERAL COLLINEAR SPACES .....	124
ODREĐIVANJE SLIKE APSOLUTNE KONIKE U OPŠTE KOLINEARNIM POLJIMA (rezime na srpskom) .....	135
<b>Sonja Krasić, Vladan Nikolić</b> MAPPING A SPHERE INTO A SPHERE WITH THE AID OF THE ABSOLUTE CONIC OF SPACE IN THE GENERAL COLLINEAR SPACES .....	136
PRESLIKAVANJE SFERE U SFERU POMOĆU APSOLUTNE KONIKE PROSTORA U OPŠTE KOLINEARNIM PROSTORIMA (rezime na srpskom) .....	143

<b>Sonja Krasić, Vladan Nikolić</b> MAPPING OF A SPHERE INTO A ROTATIONAL ELLIPSOID WITH THE AID OF THE ABSOLUTE CONIC OF SPACE IN GENERAL COLLINEAR SPACES .....	144
PRESLIKAVANJE SFERE U ROTACIONI ELIPSOID POMOĆU APSOLUTNE KONIKE PROSTORA U OPŠTE KOLINEARNIM PROSTORIMA (rezime na srpskom) .....	154
<b>Biserka Marković, Marija Jevrić, Vladan Nikolić</b> DETERMINING THE CHARACTERS OF INFINITELY DISTANT POINTS OF 4 <sup>th</sup> ORDER CURVE MADE BY THE SQUARE TRANSFORMATION IN AFFINED PENCIL OF CONIC IH .....	155
OREĐIVANJE KARAKTERE BESKONAČNO DALEKIH TAČAKA KRIVE 4. REDA NASTALE KVADRATNOM TRANSFORMACIJOM U AFINOM PRAMENU KONIKA IH (rezime na srpskom).....	168
<b>Slobodan Mišić, Marija Obradović</b> KONKAVNA KUPOLA NAD HENDEKAGONALNOM OSNOVOM .....	169
CONCAVE CUPOLA WITH HENDECAGONAL BASE (english summary) .....	179
<b>Branko Malešević</b> APPLICATIONS OF GROEBNER BASES IN COMPUTER GRAPHICS .....	180
PRIMENA BAZISA GROEBNER U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI (rezime na srpskom) .....	186
<b>Milan Mitić, Biljana Jović, Aleksandar Čučaković</b> PREDLOZI ZA UNAPREĐENJE PRIMENE NACRTNE GEOMETRIJE U NASTAVNOM PROCESU NA ODSEKU ZA PEJZAŽNU ARHITEKTURU, ŠUMARSKOG FAKULTETA, UNIVERZITETA U BEOGRADU .....	187
SUGGESTIONS FOR IMPROVED APPLYING OF DESCRIPTIVE GEOMETRY THROUGH TEACHING AT DEPARTMENT FOR LANDSCAPE ARCHITECTURE, FACULTY OF FORESTRY, UNIVERSITY OF BELGRADE (english summary) .....	197



<b>Miodrag Nestorović, Aleksandar Čučaković, Biljana Jović</b> GEOMETRIJSKA KORELACIJA NABORANIH PROSTORNIH STRUKTURA U FUNKCIJI BIONIKE .....	198
GEOMETRICAL CORRELATION FOLDED SPACE STRUCTURES IN FUNCTION OF BIONIC (english summary) .....	208
<b>Marija Obradović, Slobodan Mišić</b> PREVOĐENJE KONKAVNIH KUPOLA DRUGE VRSTE U TRIDIMENZIONALNE KONSTRUKTIVNE SISTEME - PROSTORNE REŠETKE .....	209
TRANSPOSING THE CONCAVE CUPOLAE OF SECOND SORT INTO TRIDIMENSIONAL SPATIAL STRUCTURES - SPACE FRAMES (english summary) .....	221
<b>Marija Obradović, Maja Petrović</b> PROSTORNA INTERPRETACIJA HÜGELSCHÄFFER-OVE KONSTRUKCIJE JAJASTE KRIVE .....	222
THE SPATIAL INTERPRETATION OF HÜGELSCHÄFFER'S CONSTRUCTION OF THE EGG CURVE (english summary) .....	232
<b>Ratko Obradović, Branislav Beljin</b> MODELING TRANSITIONAL DEVELOPABLE SURFACES IN COMPUTER GRAPHICS - TRANSITION FROM POLYGON TO POLYGON .....	233
MODELIRANJE PRELAZNIH RAZVOJNIH POVRŠI U KOMPJUTERSKOJ GRAFICI - PRELAZ SA POLIGONA NA POLIGON (rezime na srpskom).....	243
<b>Branislav Popkonstantinović, Zorana Jelić, Vladimir Čalić</b> KONSTRUKTIVNA GEOMETRIJA I KINEMATIKA MEHANIČKIH ČASOVNIKA .....	244
THE CONSTRUCTIVE GEOMETRY AND KINEMATICS OF MECHANICAL CLOCKS (english summary).....	259

<b>Branislav Popkonstantinović, Dragan Petrović</b> OSNOVNI PRINCIPI I KONSTRUKTIVNA REŠENJA KOMPENZACIJE TEMPERATурсKE DILATACIJE KLATNA .....	260
BASIC PRINCIPLES AND CONSTRUCTIVE SOLUTIONS OF THE COMPENSATION OF THE PENDULUM TEMPERATURE DILATATION (english summary)	270
<b>Branislav Popkonstantinović, Nikola Mladenović</b> EVOLUCIJA ZAPREČNO-IMPULSNIH MEHANIZAMA KROZ VEKOVE.	271
THE ESCAPEMENT MECHANISMS EVOLUTION THROUGH THE CENTURIES (english summary).....	287
<b>Branislav Popkonstantinović, Aleksandar Čučaković</b> PROJEKAT I KONSTRUKCIJA VELIKOG WESTMINSTERSKOG ČASOVNIKA .....	288
THE PROJECT AND CONSTRUCTION OF THE GREAT CLOCK OF WESTMINSTER (english summary).....	304
<b>Ljiljana Radović, Slavik Jablan</b> VIZUELNA KOMUNIKACIJA KROZ VIZUELNU MATEMATIKU .....	305
VISUAL COMMUNICATION THROUGH VISUAL MATHEMATICS.....	315
<b>Zoran Rastović, Radovan Štulić, Radovan Jelača</b> STRUKTURA NASTAVE CAD-A METODOM MINIMALNO GEOMETRIJE MAKSIMALNO TIPSKIH FORMI U OSNOVNIM I SREDNJIM ŠKOLAMA I GIMNAZIJAMA .....	316
THE STRUCTURE OF THE CAD-LECTURES - THE USE OF THE METHOD "MINIMUM OF GEOMETRY AND MAXIMUM OF THE FEATURES" IN PRIMARY, SECONDARY AND GRAMMAR SCHOOLS (english summary).....	326
<b>Vesna Stojaković, Predrag Šiđanin</b> STRUKTURALIZACIJA I OBRADA ATRIBUTA ARHITEKTONSKOG OBJEKTA RADI KREIRANJA IDEALIZOVANOG 3D MODELA .....	327
STRUCTURING AND PROCESSING ARCHITECTURE OBJECT ATTRIBUTES IN PURPOSE OF CREATING IDEALIZED 3D MODEL (english summary).....	335

<b>Tima Segedinac, Milan Segedinac</b> KONSTRUKTIVNA GEOMETRIJA U FUNKCIJI OBRADE SLIKE NA RAČUNARU .....	336
DESCRIPTIVE GEOMETRY AND FINISHING PICTURE ON THE COMPUTER (english summary).....	343
<b>Predrag S. Stanimirović, Marko D. Petković, Milan Zlatanović</b> VISUALIZATION IN OPTIMIZATION WITH MATHEMATICA .....	344
VIZUALIZACIJA I OPTIMIZACIJA U PROGRAMSKOM PAKETU MATHEMATICA (english summary).....	355
<b>Radovan B. Štulić, Vesna Z. Stojaković</b> ON POSSIBLE MODIFICATIONS OF DESCRIPTIVE GEOMETRY TOPICS - ARCHITECTURAL CURRICULA BASED UPON COMPETENCES AND LEARNING OUTCOMES .....	356
O MOGUĆIM MODIFIKACIJAMA NASTAVE NACRTNE GEOMETRIJE U SKLADU SA NASTAVNIM PLANOM STUDIJA ARHITEKTURE ZASNOVANIM NA KOMPETENCIJAMA I ISHODIMA UČENJA (rezime na srpskom).....	364
<b>Risto Taševski</b> PROJEKCIJE 4D POVRŠI .....	365
PROJECTIONS OF 4D SURFACES (english summary).....	373
<b>Bojana Todorović</b> CONSTRUCTION OF MINIMAL SURFACES .....	374
KONSTRUKCIJA MINIMALNIH POVRŠI (rezime na srpskom).....	382
<b>Ljubica Velimirović, Svetozar Rančić, Milan Zlatanović</b> GRAPHICAL PRESENTATIONS OF INFINITESIMAL BENDING OF CURVES .....	383
GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE BESKONAČNO MALOG SAVIJANJA NEKIH KRIVIH (rezime na srpskom).....	393
<b>Ljubica Velimirović, Milica Cvetković</b> DEVELOPABLE SURFACES AND APPLICATIONS .....	394
RAZVOJNE POVRŠI I PRIMENE (rezime na srpskom).....	403

<b>Ljubica Velimirović, Predrag Stanimirović, Milan Zlatanović</b> GEOMETRY USING PROGRAM PACKAGE <i>MATHEMATICA</i> .....	404
<b>GEOMETRIJA UZ KORIŠĆENJE PAKETA</b> <i>MATHEMATICA</i> (rezime na srpskom).....	413
<b>Gunter Weiss</b> DESCRIPTIVE GEOMETRIC MAPPINGS - A TOOL FOR ELEGANT PROOFS .....	414
<b>PRESLIKAVANJA IZ NACRTNE GEOMETRIJE -</b> ALAT ZA ELEGANTNE DOKAZE (rezime na srpskom).....	425
<b>Biljana Jović, Branislav Popkonstantinović,</b> <b>Aleksandar Čučaković, Marija Jevrić</b> KLASIFIKACIJA STEREOGRAMA .....	426
CLASSIFICATION OF STEREOGRAMS (english summary).....	435
<b>Hellmuth Stachel</b> THE INFLUENCE OF THE GEOMETRY ON RIGIDITY OR FLEXIBILITY (english summary).....	436
<b>UTICAJ GEOMETRIJE NA KRUTOST I</b> FLEKSIBILNOST(rezime na srpskom).....	436
<b>Ivana Marcikić</b> NASTAVA GEOMETRIJE NA FAKULTETU PRIMENJENIH UMETNOSTI U BEOGRADU .....	437
<b>Ivana Marcikić</b> MESTO NACRTNE GEOMETRIJE I PERSPEKTIVE U VISOKOM ŠKOLSTVU - BOLONJSKA DEKLARACIJA I POSLEDICE .....	439

## FOREWORD

There is almost four decades long tradition in organizing scientific conferences on descriptive geometry, all the way since the year 1953. The national conferences were held under different titles and organized by, then Yugoslav and later on Serbian, national societies for descriptive geometry. The conferences have been held, as a rule, once in a two years period.

The city of Nis hosted 10<sup>th</sup> conference in 1975. while celebrating 10<sup>th</sup> anniversary of University of Nis. In the year 2000. Nis hosted the conference again, this time celebrating 35<sup>th</sup> anniversary of the University. Upon foundation of Yugoslav society for descriptive geometry (JUNGIG), organization of scientific conferences has become one of the primary tasks for its members. The scope of activities was, and has remained, quite broad: education issues, human resources, the status of descriptive geometry in educational system. However, the first of all tasks remained to be presenting scientific achievements in the field of descriptive geometry.

Year by year, there is increasing number of fields that are supported by applied descriptive geometry, while submitted conference papers cover ever longer list of topics. Thus significance, actuality and longevity of descriptive geometry are being confirmed all over again. Its methods and graphical representations remain applicable even today. New software packages rely on the principles of descriptive geometry and help us visualize solutions to numerous technical problems.

Our publishing activities have begun by circulating assorted papers in the form of abstracts, followed by release of national conference Proceedings. In order to push our achievements and communication over national level, and to open wide our issues to international community, here we are with Proceedings of The First International Conference organized by Serbian Society for Descriptive Geometry.

Hereby we express our gratitude to members of Scientific Board, particularly our foreign colleagues for their understanding, support and cooperation.

Editor,  
Prof Biserka Markovic, Ph.D.

## PREDGOVOR

Tradicija održavanja stručno-naučnih skupova za nacrtanu geometriju duga je skoro četiri decenije, od 1953. godine do danas. Pod različitim nazivima, najpre u okviru bivše jugoslovenske, zatim državne zajednice Srbije i Crne Gore, danas kao aktivnost srpskog udruženja, UNGIG, za nacrtanu geometriju i kompjutersku grafiku, skup se po pravilu održava svake druge godine.

Niš je, 1975. godine, između ostalih, bio domaćin jubilarnog X Savetovanja, u godini proslave jubileja Univerziteta u Nišu - 15 godina visokoškolske nastave i 10 godina Univerziteta u Nišu. Sticajem okolnosti, 2000. godine, poklopila su se tri jubileja: XX Savetovanje, 40 godina visokoškolske nastave u Nišu i 35 godina Univerziteta u Nišu.

Po osnivanju jugoslovenskog udruženja, JUNGIG-a, ovo postaje jedna od stručnih aktivnosti udruženja. Sadržaj rada je bio i ostaje kompleksan: problemi edukacije, kadrovska pitanja, status nactne geometrije, ali pre svega saopštavanje stručnih i naučnih dostignuća.

Iz godine u godinu širi se spektar oblasti u kojima je geometrija našla svoju primenu i prezentuju radovi sa različitom tematikom. Tako se potvrđuje značaj, stalna aktuelnost i opravdava trajanje ove naučne discipline. Tradicionalno dugovečna geometrija, njena grafička-nacrtna praksa, naučno utemeljena, široko je primenljiva. Stoji pred novim kompjuterskim programima, koje treba da svojim rešenjima predvodi, kontroliše i u određenim segmentima koristi, kako bi pomogla da imaginacija tehničkih problema dobije što verniju vizuelizaciju.

Istorijat izdavaštva radova ovih naučnih skupova počinje od separatnih tekstova, štampanih u izvodima, nekad u celini, preko, relativno skromnih brošura, do Zbornika radova nacionalnog značaja sa međunarodnim učešćem. Odgovarajući potrebi da naše stvaralaštvo i komunikacije prerastu nacionalne okvire i što šire se otvore prema međunarodnim tokovima, ovo je Zbornik radova prve međunarodne Konferencije srpskog Udruženja.

Najsrdahnije zahvaljujemo članovima Naučnog odbora, pre svega cenjenim inostranim kolegama, za razumevanje, podršku i saradnju.

Urednik,  
prof. dr Biserka Marković

## PREVOĐENJE KONKAVNIH KUPOLA DRUGE VRSTE U TRIDIMENZIONALNE KONSTRUKTIVNE SISTEME - PROSTORNE REŠETKE

Marija Obradović<sup>1</sup>  
Slobodan Mišić<sup>2</sup>

### Rezime

*Cilj istraživanja ovog rada je bio da se iznađu geometrijska rešenja za formiranje prostornih rešetki nad pravilnim poligonalnim osnovama, tako da se postigne prostorna struktura koja ispunjava zahteve rigidnosti datog sklopa, po osnovi geometrijske stabilnosti trougla kao ravne figure. Takođe, težnja je bila i da se nađe što jednostavnije rešenje, sa upotrebom minimalnog broja različitih štapova u samoj konfiguraciji prostorne rešetke. U tom smislu, moguće je primeniti nekoliko varijanti rasporeda štapova. Najekonomičnije od njih se svodi upravo na geometriju konkavnih kupola druge vrste, budući da se radi o jednakoivičnim poliedrima kao osnovama za dalju nadogradnju tridimenzionalnih struktura. Omotač konkavnih kupola druge vrste nastaje nabiranjem ravne mreže, a prevođenjem ivica ovog omotača u sistem štapova, uz dodavanje minimalnog broja različitih tipskih štapova razupirača, dobijamo strukturu kompozitnog poliedra prostorne rešetke..*

Ključne reči: prostorna rešetka, štap, kupola, poliedar, transformacija

---

<sup>1</sup> Marija Obradović, dr, docent, Građevinski fakultet, Beograd, Srbija

<sup>2</sup> Slobodan Mišić, mr, asistent, Građevinski fakultet, Beograd, Srbija

## 1. UVOD

Prostorne rešetke<sup>3</sup> ili prostorne, tridimenzionalne strukture su lake rigidne strukture sačinjene od međusobno povezanih štapova, spregnutih po određenom geometrijskom obrascu. Prostorni ramovi obično koriste spregu više pravaca rasprostiranja napona i često su su primenjivani u svrhu postizanja velikih raspona sa što manje oslonaca. Njihova jačina i otpornost potiču od inherentne rigidnosti triangularnog rama. Momenti savijanja prenose se kao naponi zatezanja i pritiska duž svakog štapa u konstrukciji.

Najčešće, njihova geometrija bazirana je na geometriji Platonovih tela. Najjednostavnija forma je horizontalna ploča formirana od međusobno povezanih četvorostranih pravih, pravilnih piramida, od aluminijumskih ili čeličnih štapova. Čvršća i čistija forma je komponovana od međusobno povezanih tetraedara, gde je svaki štap u strukturi jednake dužine  $a$ . Ovo se odnosi na izotropnu vektorsku matricu, ili - ako posmatramo jediničnu ćeliju strukture - na *oktet*<sup>4</sup> vezu.

Kompleksnije varijacije uključuju i veći broj različitih dužina jediničnih štapova unutar konstrukcije, da bi se dobile zakrivljene ili složenije forme, pri čemu se u sam geometrijski sklop prostorne rešetke, mogu inkorporirati i drugi geometrijski oblici, figure i poliedarske forme.

---

<sup>3</sup> Prostorne rešetke su nezavisno razvijane, razrađivane i istraživane od strane dvojice čuvenih naučnika i inženjera: A.G. Bela (početkom XX veka) i B. Fulera (50-tih godina istog veka). Belova istraživanja bila su prevashodno vezana za pronalaženje rigidnih struktura pogodnih u nautičkom i aeronautičkom inženjerstvu, dok je fokus radova Bakminstera Fulera bio pomeren ka arhitektonskim strukturama i imao je daleko veći uticaj na današnje forme prostornih rešetki

<sup>4</sup> Oktet (oktaedar-tetraedar, termin uveden od strane B. Fulera) najčešće primenjivana prostorna rešetka, ali ona je pogodna za ravne (i to horizontalne?) površine. Svaka zakrivljenost ili složenost površina, iziskuje novo rešenje, pa će se pojaviti i rešetke sa više tipova štapova - u zavisnosti od oblika konstrukcije i statičkih zahteva.



Prostorne rešetke postaju sve uobičajeniji vid konstrukcija u arhitekturi, naročito za velike krovne raspone u modernističkim komercijalnim i industrijskim zgradama.

Ideja rada je da se forma konkavnih kupola prevede u formu prostornih rešetki, kako bi se ove geometrijske strukture iskoristile kao oblik koji bi mogao da zasvodi gabarite njima srodnih, poligonalnih bazisa, koristeći se ovom prostornom formom kao konstruktivnim sistemom.

## 2. TRANSPONOVANJE KONKAVNIH KUPOLA I VRSTE U PROSTORNE REŠETKE

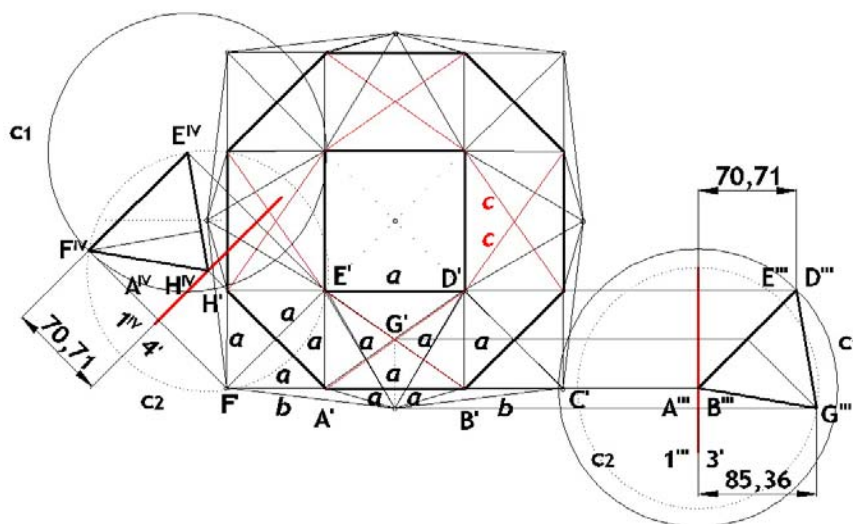
Konkavne kupole prve vrste, nastaju augmentacijom Džonsonovih tela J3, J4 i J5. Njihova geometrija se zasniva na geometriji Platonovih i Arhimedovih tela, koja je dobro poznata. Inkavernacijom manjeg bazisa ka centru konkavne bikupole I vrste, nastaje toroidni deltaedar, poliedar sačinjen isključivo od jednakostraničnih trouglova. Ako bismo posmatrali formu toroidnih deltaedara, budući da su čitava tela sklopljena isključivo od trouglova, samo telo bi bilo potpuno rigidno i kao takvo bi se moglo smatrati prostornom rešetkom. Međutim, ako bismo izbacili unutrašnje jezgro, ostao bi samo omotač, takođe sklopljen od jednakostraničnih trouglova, što čini sklop podesnim za pretvaranje u prostornu rešetku, pogotovu što u ovoj matrici figuriše samo jedan jedini tip štapova. Ono što se javlja kao problem jeste poligon bazisa (gornjeg i donjeg), jer za svaki poligon sa brojem temena većim od 3, javlja se porast stepena slobode mehaničkog kretanja, tako da bi rigidni omotač garantovao nepromenljivost oblika bazisnih poligona. To će se pokušati rešiti pomoću prevodjenja poliedarske površi omotača ovih kupola u prostorne rešetke.

### 2.1. Formiranje prostornih rešetki koje koriste geometriju Platonovih tela

Polazeći od konkavnih kupola I vrste, kao bazičnih struktura koje su augmentacijama Džonsonovih kupola dobile formu konkavnih deltaedarskih omotača, možemo lako uočiti fragmente Platonovih tela, oktaedra i tetraedra, čija temena možemo povezati novim štapovima i tako zatvoriti rigidnu strukturu sklopljenu od trougaonih površina. Javiće se dva tipa štapova:  $a$  i  $b$ , od kojih je tip  $a$  jednak ivici poligona osnove gornjeg i donjeg bazisa) češći, dok štapovi tipa  $b$

povezuju ispupčena temena oktaedara i tetraedara. Za ukrućenje kvadratnih površina polazne kupole, mogu se po potrebi dodati i štapovi tipa c, veličine dijagonale datog kvadrata.

Na slici 1 dat je konstruktivno - geometrijski postupak, zasnovan na transformaciji, koji prikazuje određivanje položaja i visina temena ovakve prostorne strukture za omotač TD1-4<sup>5</sup>: nad kvadratnim stranama dodate su polovine oktaedara, a nad trougaonim, tetraedri. Ivice ovakve strukture su sve identične i iznose  $a$ . Dodavanjem veznih štapova dužine  $b$  koji spajaju temena oktaedara i tetraedara, zatvaramo konstrukciju prostorne rešetke. Na crtežu su date i vrednosti visinskih koordinata temena, u odnosu na usvojenu ivicu  $a = 100$ . Poluprečnik kruga  $c_1$  iznosi  $a$ , a poluprečnik kruga  $c_2$  iznosi  $a\sqrt{3}/2$ .

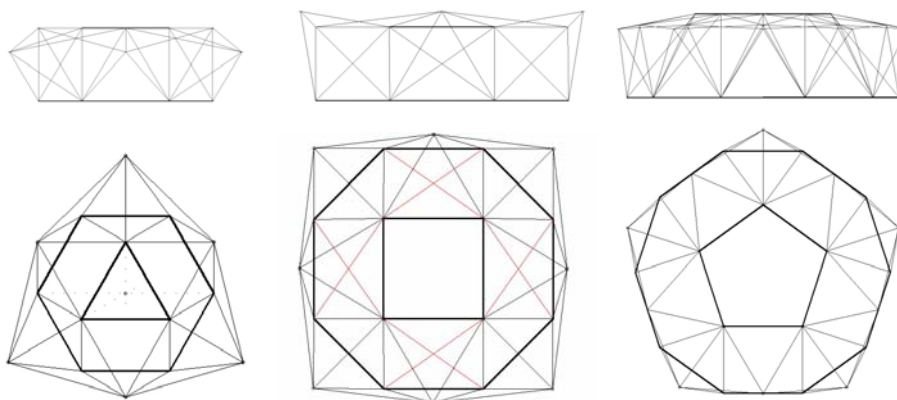


Slika 1

Primenom ovog metoda, moguće je formirati jasno geometrijski definisane prostorne rešetke i nad trougaonim, kao i nad pentagonalnom osnovom, za omotače konkavnih kupola prve vrste. Ilustracije osnova i izgleda ovako dobijenih prostornih rešetki date su

<sup>5</sup> Toroidni deltaedar prve vrste nad kvadratnom osnovom; v. „Konstruktivno - geometrijska obrada toroidnih deltaedara sa pravilnom poligonalom osnovom” - M. Obradović

na slici 2, a aksonometrijski prikazi ovih tridimenzionalnih struktura, na slici 3.



*Osnove i izgledi Konkavnih kupola I vrste, prevedenih u prostorne rešetke*

**Slika 2**



*Aksonometrijski prikazi konkavnih kupola I vrste, prevedenih u prostorne rešetke*

**Slika 3**

### **3. TRANSPONOVANJE KONKAVNIH KUPOLA II VRSTE U PROSTORNE REŠETKE**

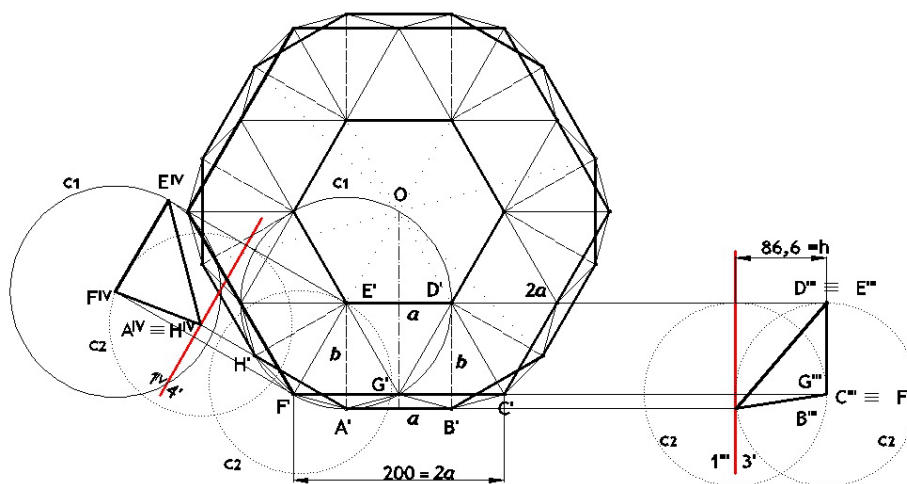
Konkavne kupole II vrste nastaju prateći morfologiju konkavnih kupola I vrste, ali ne koristeći se geometrijom Platonovih tela, jer bazisi osnova sada mogu biti i heksagonalni, heptagonalni, oktagonalni, nonagonalni i dekaagonalni. Njihov omotač nastaje nabiranjem ravne triangularne mreže od dvostruke trake trouglova,

pa položaji temena i uglovi među susednim stranama tela imaju samosvojnu geometriju.

Po ugledu na formiranje prostorne rešetke od omotača kupola I vrste, pokušaćemo da isto to uradimo i sa konkavnim kupolama II vrste. Sada, međutim, rastojanje koje povezuje temena donjeg i gornjeg bazisa, prevazilazi ivicu  $a$  samih bazisa. S tim u vezi, možemo da razmišljamo na više načina, u smislu pretvaranja ovih struktura u prostorne rešetke, sa ciljem da u sklopu same konstrukcije upotrebimo što manji broj različitih štapova i što manji broj različitih čvornih veza u temenima.

### 3.1. Oktet prostorna rešetka za heksagonalnu osnovu

Geometrija heksagona i njemu koncentričnog ekvilateralnog dodekagona, uz uvođenje i jednog heksagona dvostruko veće ivice  $2a$ , dozvoljava obrazovanje oktet veze i formiranje prostorne rešetke potpuno po ugledu na konkavne kupole I vrste, iako heksagonalna osnova ne spada u njihovu kategoriju.

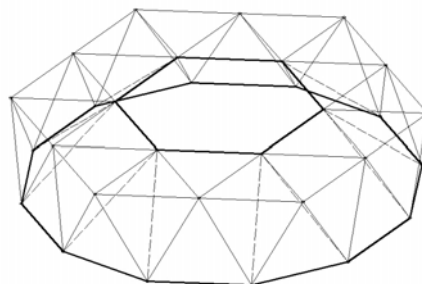
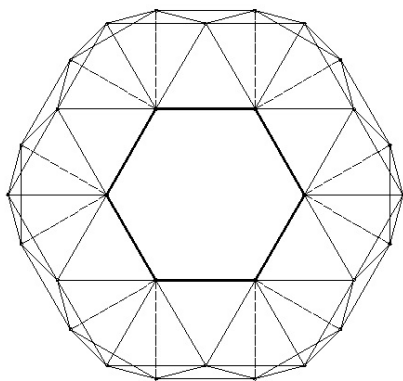


Slika 4

Na slici 4 vidimo konstruktivno - geometrijski postupak, zasnovan na transformaciji, kao i u prethodnom primeru, koji prikazuje određivanje položaja temena ovakve prostorne strukture. Može se primetiti da su heksagoni ivica  $a$  i  $2a$  u istoj horizontalnoj

ravni, dok ih sa bazisnim dodekagonom spajaju nizovi jednakostraničnih trouglova. Ivice ovakve strukture su sve identične i iznose  $a$ , osim štapova koji spajaju bazisne poligone, koji su dužine  $b$ . Njih ukupno ima 12, dok štapova tipa  $a$  ima 60.

**Slika 5** prikazuje ortogonalne projekcije i aksonometrijski izgled ovakve prostorne tridimenzionalne strukture.



a) Ortogonalne projekcije

b) Aksonometrijski izgled

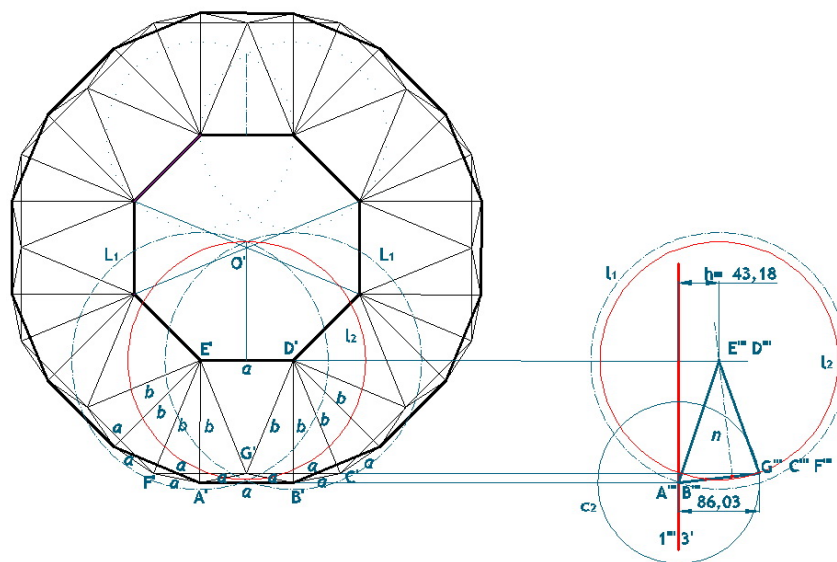
**Slika 5- a) i b)**

Dati model formiranja prostorne rešetke, međutim, nije primenjiv na ostale osnove konkavnih kupola II vrste. Po ugledu na prikazani postupak, možemo formirati analogne strukture i nad osnovama sa brojem temena  $7 \leq n \leq 10$ , s tim što će se u ovakvim varijantama pojaviti veći broj različitih štapova (3-4), a visine samih konstrukcija neće odgovarati visinama konkavnih kupola II vrste.

### 3.2. Prostorne rešetke nad osnovama $7 \leq n \leq 10$ formirane po ugledu na oktet veze

Primera radi (slika 6) i nad oktagonalnom osnovom moguće je formirati prostornu rešetku sa dva tipa različitih štapova. Da bismo to postigli, posegnućemo za identičnim obrascem kao u prethodnom

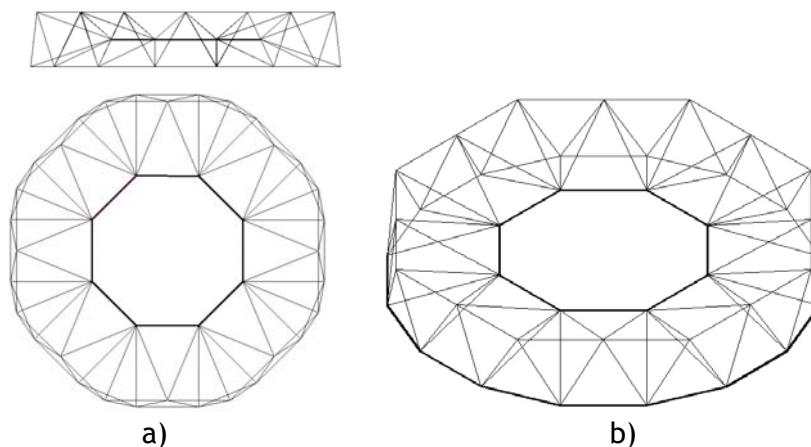
slučaju heksagonalne osnove. Uveščemo koaksijalni oktagon ivice  $2a$ , na središtima čijih strana će se nalaziti temena poluoktaedarskih jedinica. Sa tom pretpostavkom, u transformacijskoj ravni  $3'''$  lako određujemo visinsku koordinatu oktagona ivice  $2a$ , ako usvojimo da na pr. koaksijalni šesnaestougao nik leži u horizontalnici. Dovoljno je krugom  $c_2$  rotacije temena  $G$ , dotaći zračnu vertikalnu ravan postavljenu kroz jednu ivicu ( $2a$ ) oktagona. Da bismo pronašli visinu bazisnog oktagona ivice  $a$ , iz težišta zračno viđenog trougla  $FAG$  u  $3'''$ , postavimo normalu  $n$  na ravan ovog trougla.



Slika 6

Ova normala sadržace centar  $E$  lopte  $L_1$ , koji mora ležati na vertikali postavljenoj kroz teme  $E'$ . Na toj lopti, zatim na podjednakoj udaljenosti  $b$  od datog centra  $E$ , ležace temena  $F$ ,  $A$  i  $G$ . Odstojanje od  $E'''$  do  $G'''$  mora odgovarati visini trougla  $EDG$ , tj. poluprečniku kruga  $l_2 = b\sqrt{3}/2$ , dok odstojanje od tačkaka  $E'''$  i  $A'''$  mora odgovarati ivici  $b$ , tj. poluprečniku velikog kruga  $l_1$  lopte  $L_1$ .

Na slici 7 prikazan je ortogonalan (a) i aksonometrijski (b) izgled ovako dobijene prostorne rešetke nad oktaagonalnom osnovom.

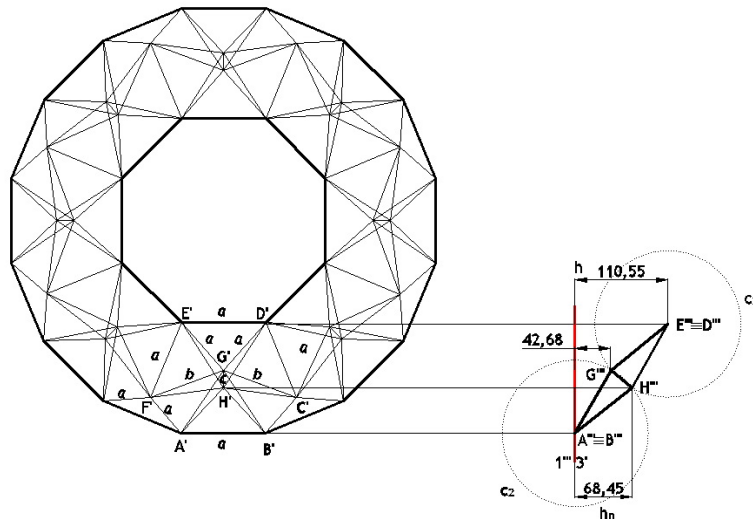


*Slika 7- a) i b)*

### 3.3. Prostorne rešetke nad osnovama $7 \leq n \leq 10$ formirane nad konkavnim kupolama II vrste

Rešenje koje uvažava sve najosnovnije kriterijume koje smo u početku definisali (minimalni broj različitih štapova, krutost strukture, minimalni utrošak materijala, geometrijska definisanost) zasniva se upravo na geometriji konkavnih kupola II vrste i poštovaće njihove parametre, visinske koordinate i položaje tačaka.

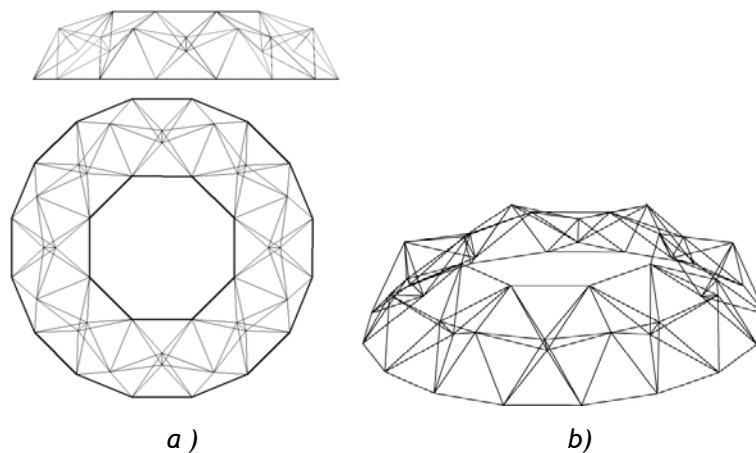
Suština metoda je u tome da se trouglovi ABG i EDG iz položaja u kojem zatvaraju prostorni šestotemenik ABCDEFG sa centralnim udubljenim temenom u tački G, dovedu u položaj ispupčenog centralnog temena G, kao što vidimo na slici 8, ovo uzevši oktagonalnu osnovu konkavne kupole kao primer. Međutim, kako su visine kupola za ta dva varijeteta položaja temena G različite, to nije moguće da svih 6 jednakostraničnih trouglova prostornog šestotemenika budu ispupčeni nad ovim prostornim sklopom. Zbog toga, preostala 4 trougla (AFG, BCG, CDG, EFG) neće biti jednakostranična, već će biti jednakokraka, sa ivicama  $a, a, b$ . Da bi ovakva struktura imala dodatnu stabilnost, umetnuti su i razupirači  $c$  između dva položaja temena G, udubljenog i ispupčenog. Na taj način dobijamo rigidni sklop omotača kupole.



Slika 10

Ortogonalni (a) i aksonometrijski (b) izgled ovakve prostorne rešetke, dat je na slici 11.

Na identičan način, poštovanjem svih utvrđenih parametara konkavnih kupola II vrste, moguće je oformiti prostorne rešetke nad bilo kojom osnovom od  $n=3$  do  $n=10$ . Ovaj metod pokazuje se kao najekonomičniji, jer daje najmanji utrošak materijala potrebnog za štapove, uz postignutu najveću rigidnost sklopa, s obzirom da u strukturi figurišu samo trouglovi.



Slika 11



#### 4. PRIMENA PROSTORNIH REŠETKI GEOMETRIJE KONKAVNIH KUPOLA II VRSTE U POKRIVANJU POLIGONALNIH OSNOVA

Kombinacijom i multipliciranjem ovih rešetki, mogu se dobiti najrazličitije prostorne forme, od izložbenih paviljona, preko konstrukcija koje pokrivaju tribine na sportskim stadionima, do tornjeva, ukoliko ove strukture ređamo vertikalno (slika 12). Takođe, postoji i mogućnost korišćenja standardnih oktet rešetki, kao elemenata koji bi ucestvovali umesto trougaone ravne ploče, čime bi smo mogli da značajno povećamo raspone osnova koje data kupola može da premosti (slika 13).

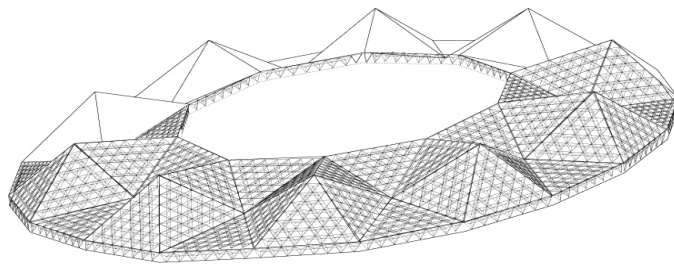
#### 5. ZAKLJUČAK

Konkavne kupole I i II vrste moguće je transponovati u prostorne rešetke, zahvaljujući njihovoj triangularnoj prostornoj matrici. Dobijena rešenja se mogu primeniti u cilju dobijanja prostornih rešetki sa što ekonomičnijim utroškom materijala, uz dobre statičke osobine, a uz izbegavanje velikog broja različitih tipova i veličina štapova, što je najčešća praksa kada su u pitanju osnove koje teže krugu i izbegavaju ortogonalnu ili triangularnu matricu. Takođe, ovaj rad otvara i niz pitanja za dalja istraživanja:

- Rešavanje čvornih veza u spojevima štapova - tj. temenima kupola
- Istraživanje statičkih i dinamičkih osobina ovih konstrukcija
- Mogućnosti kombinovanja i uklapanja više prostornih rešetki i dobijanja kompozitnih tridimenzionalnih struktura.



**Slika 12**



**Slika 13**

## LITERATURA

1. Obradović M. : *Konstruktivno - geometrijska obrada toroidnih deltaedara sa pravilnom poligonalnom osnovom*, Doktorska disertacija, Arhitektonski fakultet, Beograd, 2006.
2. Nestorović M, : *Konstruktivni sistemi, principi konstruisanja i oblikovanja*, Arhitektonski fakultet, Beograd, 2000.
3. Fuller B.: *Synergetics: Explorations in the geometry of Thinking*, MacMillan publishing Co. New York City, USA 1975.
4. Johnson N.W.: *Convex Solids with Regular Faces*, Canadian Journal of mathematics, 18, division of University of Toronto Press, Toronto, Canada, 1966.

## TRANSPOSING THE CONCAVE CUPOLAE OF SECOND SORT INTO TRIDIMENSIONAL SPATIAL STRUCTURES - SPACE FRAMES

Marija Obradović<sup>1</sup>  
Slobodan Mišić<sup>2</sup>

### Rezime

*The intention of this research was finding a geometrical solutions on forming space frames over regular polygonal basis, so to acheive spatial structure which fulfills the rigidity requests of the given truss, using geometrical stability of triangle as a plane figure. Also, the aspiration was to discover the most simple solution, using the minimal number od different stubs in the configuration of the space frame. Considering this, it is possible to apply several varieties of stubs dispositions. The most economical would be the one which comes up to geometrical matrix of concave cupolae of the second sort, since these solids are isotoxal (edge - transitive) and are the purest basic form for superstruction into tridimensional space frames. The envelope of concave cupola of second sort is derived by wrinkling the planar triangular net, and by transposing the edges of this envelope into the stub system while adding the minimal number of different unit stubs, we obtain the composite polyhedral structure of a space frame.*

Key words: space frame, stub, cupola, polyhedron, transformation

---

<sup>1</sup> Marija Obradović, PhD, Lecturer, Faculty of Civil Engineering, Belgrade University

<sup>2</sup> Slobodan Mišić, MSc, assistant, Faculty of Civil Engineering, Belgrade University