Kostić S.M,Deretić-Stojanović B,(2019) Tačna i približne metode proračuna spregnutih greda od čelika i betona,Teorija građevinskih konstrukcija,Univerzitet u Beogradu–Građevinski fakultet, Univerzitet Crne Gore–Građevinski fakultet, Akademija inženjerskih nauka Srbije, 113–120.

Светлана М. КОСТИЋ, Биљана ДЕРЕТИЋ-СТОЈАНОВИЋ

ТАЧНА И ПРИБЛИЖНЕ МЕТОДЕ ПРОРАЧУНА СПРЕГНУТИХ ГРЕДА ОД ЧЕЛИКА И БЕТОНА

EXACT AND APPROXIMATE METHODS OF ANALYSIS OF STEEL-CONCRETE COMPOSITE BEAMS

др Светлана М. КОСТИЋ, дипл. инж. грађ.
ванредни професор Грађевинског факултета Универзитета у Београду

Рођена је 1978. године. Дипломирала је 2003., магистрирала 2007. и докторирала 2013. године на Грађевинском факултету у Београду. Ванредни професор је на Катедри за техничку механику и теорију конструкција. Поља научног рада: анализа спрегнутих конструкција од челика и бетона, нелинеарна анализа оквирних конструкција.

Др Биљана ДЕРЕТИЋ-СТОЈАНОВИЋ, дипл. инж. грађ.
редовни професор Грађевинског факултета Универзитета у Београду

Рођена је 1955. године. Дипломирала је 1978, магистрирала 1985. и докторирала 1992. године на Грађевинском факултету у Београду. Редовни је професор на Катедри за техничку механику и теорију конструкција. Поље научног рада: анализа спрегнутих конструкција од челика и бетона.

Резиме

У раду су приказане неке од метода прорачуна спрегнутих конструкција од челика и бетона: тзв. тачна метода, упрошћена метода, метода ефективног модула и метода предложена прописом Еврокод 4. Тачна метода је заснована на примени линеарних интегралних оператора код описивања проблема виско-еластичности спрегнутих носача. Упрошћена метода је заснована на тачној методи, с тим што се увођењем претпоставке о линеарној промени генералисаних померања са функцијом течења бетона, знатно поједностављују једначине проблема, тј. уместо интегралних, решавају се алгебарске једначине. Метода ефективног модула и метода предложена Еврокодом 4 су алгебарске методе где се релација између напона и дилатација за бетон, у функцији времена, изражава преко ефективног модула еластичности. На бројном примеру спрегнутог континуалног носача, упоређена је тачност решења добијених применом приближних метода и тачне методе.

Кључне речи: спрегнуте конструкције, вискоеластична анализа, функција течења бетона, линеарни интегрални оператори

Summary

The paper presents four different methods for viscoelastic analysis of steel-concrete composite structures: “exact” analysis method, simplified method, effective modulus method and method proposed by the European design code, Eurocode 4. The exact analysis method uses the mathematical theory of linear integral operators for presenting viscoelastic relations of the steel-concrete composite structures. The simplified analysis method is derived from the exact method. It adopts the assumption that generalized displacements change linearly with the concrete creep function. Due to this assumption, the problem equations transforms from nonhomogeneous integral equations to nonhomogeneous algebraic equations. The effective modulus method and the method proposed by the Eurocode 4 are algebraic methods where stress-strain relations for concrete are expressed through the effective modulus, which depend on time. On the numerical example of continuous steel-concrete beam, the results obtained using the mentioned approximate and the exact method are compared.

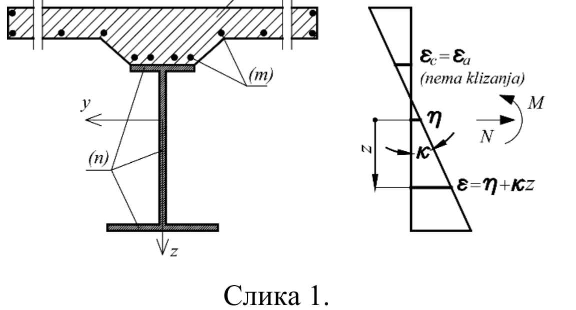
Keywords: steel-concrete composite structures, viscoelastic analysis, concrete creep function, linear integral operators

1. УВОД

Спрегнуте конструкције од челика и бетона се данас све више користе како у мостоградњи тако и у зградарству. Анализа ових конструкција је доста комплекснија у односу на прорачун чисто челичних или армирано-бетонских конструкција због различитих реолошких карактеристика челика и бетона. Током претходних неколико декада, развијено је више метода за прорачун понашања спрегнутих конструкција током времена [1-5]. У математичком смислу, проблем одређивања временских деформација представљен је решавањем система интегралних једначина, због интегралне конститутивне релације за бетон. Генерално, постоје три различита приступа решавању проблема. Код прве групе метода, интегралне релације се, помоћу алгебарских метода, трансформишу у једноставне линеарне алгебарске релације. У ову групу метода спадају метода ефективног модула (EM) [6], метода средњег напона (MS) [7] и метода коригованог ефективног модула (AAEM) [8]. Због своје једноставности, ове методе се најчешће користе у пракси и прописи су углавном базирани на примени ових алгебарских метода (нпр. Еврокод 4 [9]). У другу групу метода спадају нумеричке или корак-по-корак методе где се интервал времена дели на одређени број подинтервала и применом нумеричких метода се унутар сваког од подинтервала интегралне релације априксимирају коначним сумама [10-12]. Са развојем рачунара, ове методе све више добијају на значају. Коначно, трећу групу метода чине тзв. тачне методе где се проблем решава задржавајући интегралне релације, а уводе се само неизоставне апроксимације које су везане за реолошке карактеристике материјала [5]. Дакле, у математичком смислу, нема увођења поједностављења и одатле потиче назив тачне методе. У ову групу метода Mandel [13, 14] је први увео примену линеарних интегро-диференцијалних оператора код линеарне виско-еластичне анализе са особином старења. Huet [15] је ове операторе користио код анализе греде састављене од неколико различитих вискоеластичних материјала са особином старења. Професор Лазић [16-19] је први користио линеарне интегралне операторе код анализе спрегнутих и преднапрегнутих греда, према методи сила. Бројне су предности линеарних интегралних оператора које је увео проф Лазић у односу на Mandel-ове линеарне интегро-диференцијалне операторе: решавање проблема је представљено преко алгебарских операција, могуће је посматрати физичко значење проблема будући да су линеарни интегрални оператори написани у облику у коме су раздвојене функције које описују промену модула еластичности бетона од функција које описују вискоеластичност и особину старења. У својој тези [20], проф Деретић-Стојановић је, користећи операторе проф Лазића, проширила методу применом методе деформација. Код овог приступа, основне непознате су померања и условне једначине су нехомогене интегралне једначине које се у затвореном облику могу решити само за поједине облике функције течења. За функције течења теорије наслеђа и теорије старења, под претпоставком да је модул еластичности бетона непроменљив, ове једначине се могу решити применом Laplace-ових трансформација. У раду [21] предложена је поједностављена метода за вискоеластичну анализу спрегнутих греда од челика и бетона која је базирана на тачној методи уз увођење претпоставке да су непозната померања, кроз време, линеарно зависне од функције течења бетона. Захваљујући овој претпоставци, нехомогене интегралне једначине се трансформишу у лако решиве нехомогене алгебарске једначине, па је стога метода погоднија за примену у пракси.

У овом раду су на конкретном бројном примеру упоређени резултати добијени применом тачне методе, поменуте упрошћене методе, често коришћене EM методе и методе предложене прописом EC4. У даљем тексту, укратко ће бити објашњена свака од претходно наведене четири методе.

2. ОСНОВНЕ РЕЛАЦИЈЕ ТАЧНЕ МЕТОДЕ



Слика 1.
(a) Попречни пресек спрегнутог носача;
(b) Расподела дилатација по висини пресека

Посматра се спрегнута греда чији се попречни пресек, у општем случају, састоји од бетона (c), челичног дела пресека (n) и арматуре (m), Слика 1(a). Основне претпоставке ове методе су да се бетон посматра као линеаран виско-еластичан материјал са особином старења. Деформација течења је функција историје оптерећења и за напоне се примењује Boltzman-Volterra [22, 23] принцип суперпозиције. Пукотине у бетону се занемарују. На нивоу попречног пресека, претпоставља се да важи Bernoulli-јева хипотеза, односно да нема разлике у подужним дилатацијама на споју челичног и бетонског дела пресека, Слика 1(b).

Конститутивна веза напон – дилатација за бетон се у операторском облику може симболички приказати у следећем облику:

$$\varepsilon = \frac{1}{E_{co}} \tilde{F} \sigma_c \tag{1}$$

Решење једначине (1) је:

$$\sigma_c = E_{co} \tilde{R} \varepsilon \tag{2}$$

где су оператори $\tilde{F}$ и $\tilde{R}$ инверзни оператори који задовољавају релацију:

$$\tilde{R}\tilde{F} = \tilde{F}\tilde{R} = \tilde{1} \tag{3}$$

Функција течења бетона F^* и функција релаксације R^* су дефинисане преко следећих интеграла:

$$F^* = \tilde{F} 1^*, \qquad R^* = \tilde{R} 1^* \tag{4}$$

За описивање понашања челичног дела пресека (n) и арматуре (m) усвојене су линеарне релације, према Hook-овом закону:

$$\sigma_k = E_k \varepsilon, \qquad k = n, m \tag{5}$$

На основу Bernoulli-јеве хипотезе о равним пресецима, услова равнотеже спољашњих и унутрашњих сила у попречном пресеку и релација (2) и (5), дилатација у правцу осе штапа $\eta = \eta(x,t,t_0)$ и кривина попречног пресека $\kappa = \kappa(x,t,t_0)$ су дате изразима:

$$\eta = \frac{1}{E_u F_i} \tilde{F}_{11} N + \frac{1}{E_u S_i} \tilde{F}_{12} M \tag{6}$$

$$\kappa = \frac{1}{E_u S_i} \tilde{F}_{12} N + \frac{1}{E_u J_i} \tilde{F}_{22} M \tag{7}$$

где је E_u упоредни модул еластичности, F_i и Ji су површина и момент инерције кореспондентног попречног пресека, а $S_i = \sqrt{F_i J_i}$. Оператори $\tilde{F}_{11}$, $\tilde{F}_{22}$ и $\tilde{F}_{12}$ су елементи операторске матрице $\left[\tilde{F}_{hl}\right]_{2,2}$, са главним вредностима $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$.

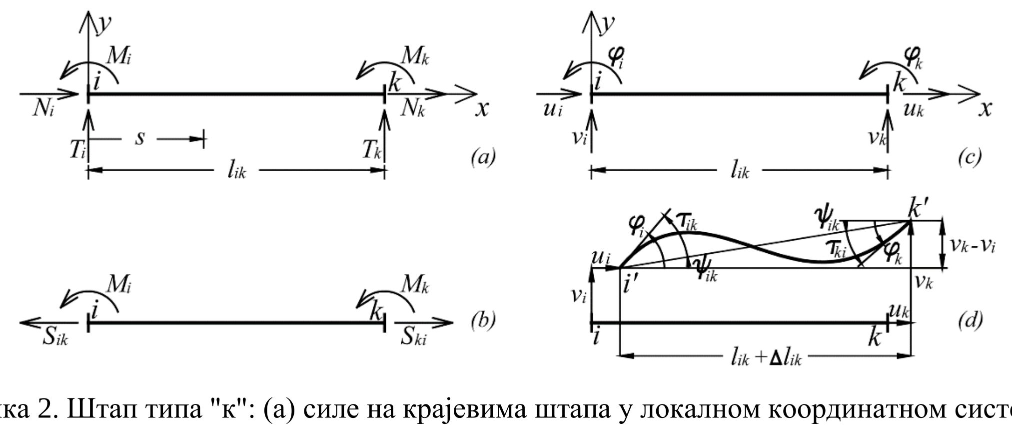
На слици 1 приказан је штап типа “k” и силе на крајевима штапа су груписане у вектор 'Y (Слика 2a):

$$[R]^T = [N_i \; T_i \; M_i \;\; N_k \; T_k \;\; M_k] \tag{8}$$

Основне статички непознате чине компоненте вектора "Y (Слика 2b):

$$[S]^T = [S_{ik} \; M_i \; M_k] \tag{9}$$

Веза између сила на крајевима штапа и основних статички непознатих дата је преко матрице равнотеже ő:



Слика 2. Штап типа "к": (a) силе на крајевима штапа у локалном координатном систему; (b) основне статички непознате; (c) деформацијске величине на крајевима елемента; (d) основне деформацијски независне величине

$$[R]^{T}=[C][S] \tag{10}$$

Ако се деформацијске величине на крајевима штапа групишу у вектор q (Слика 2c)

$$[q]=[u_i \; v_i \; \varphi_i \; u_k \; v_k \; \varphi_k] \tag{11}$$

а основне деформацијски независне величине у вектор d (Слика 1d)

$$[d]^{T}=[\Delta l_{ik} \; \tau_{ik} \; \tau_{ki}] \tag{12}$$

онда се веза између d и q може приказати као:

$$[d]=[C]^{T}[q] \tag{13}$$

где је $[C]^{T}$ матрица компатибилности. Веза између основних статички непознатих S и основних деформацијиски непознатих d се може приказати у стандардном облику:

$$[d]=[\tilde{f}][S] \tag{14}$$

При чему је $[\tilde{f}]$ симетрична операторска базна матрица флексибилности:

$$[\tilde{f}]=\begin{bmatrix} \tilde{d}_{ik-s} & -\tilde{a}_{ik-s} & \tilde{a}_{ki-s} \\ -\tilde{a}_{ik-s} & \tilde{a}_{ik} & -\tilde{b}_{ik} \\ \tilde{a}_{ki-s} & -\tilde{b}_{ik} & \tilde{a}_{ki} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Елементи ове матрице су оператори са особином комутативности [20].

Инверзна матрица операторској матрици флексибилности је симетрична базна операторска матрица крутости $[\tilde{K}_0]$:

$$[\tilde{K}_0]=\begin{bmatrix} \tilde{N}_{ik} & \tilde{S}_{ik} & \tilde{S}_{ki} \\ \tilde{S}_{ik} & \tilde{A}_{ik} & \tilde{B}_{ik} \\ \tilde{S}_{ki} & \tilde{B}_{ik} & \tilde{A}_{ki} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Елементи базне операторске матрице крутости $[\tilde{K}_0]$ су оператори $\tilde{N}_{ik}$, $\tilde{S}_{ik}$, $\tilde{S}_{ki}$, $\tilde{A}_{ik}$, $\tilde{B}_{ik}$ и $\tilde{A}_{ki}$ чије су кореспондентне функције $N^{*}_{ik}(t,t_o)$, $S^{*}_{ik}(t,t_o)$, $S^{*}_{ki}(t,t_o)$, $A^{*}_{ik}(t,t_o)$, $B^{*}_{ik}(t,t_o)$ и $A^{*}_{ki}(t,t_o)$, (t_0 је старост бетона у тренутку првог наношења оптерећења, а t је параметар времена). Ове функције, као што је познато, представљају генералисане силе S услед $\Delta l_{ik}=1^{*}(t,t_o), \tau_{ik}=\tau_{ki}=0$, односно $\Delta l_{ik}=0,\ \tau_{ik}=1^{*}(t,t_o), \tau_{ki}=0$, односно $\Delta l_{ik}=0,\ \tau_{ik}=0, \tau_{ki}=1^{*}(t,t_o)$, респективно.

Дакле, као што се може видети, матрица крутости штапа типа "k" може се написати у облику сличном облику матрице крутости за хомогени штап, с том разликом што су елементи матрице крутости оператори, а не константе.

Након одређивања матрице крутости сваког штапа, даља процедура одређивања непознатих померања прати стандардну методу деформација у методи коначних елемената. Након одређивања вектора чворних сила, трансформације вектора и матрица за елементе из локалног координатног система у глобални координатни систем и формирања матрице крутости система, добија се систем линеарних интегралних једначина у облику:

$$[\tilde{K}_*][q_*]=[S_*] \tag{17}$$

где је $[\tilde{K}_*]$ операторска матрица крутости система, $[q_*]$ је вектор померања и $[S_*]$ је вектор сила који укључује силе у чворовима и силе у чворовима услед оптерећења дуж елемената. Дакле, облик у коме су записане једначине проблема је исти као код конструкција направљених од хомогеног материјала, с том разликом што су, код спрегнутих конструкција, ове једначине интегралне. Решење једначина (17) могуће је добити у затвореном облику само за специјалне облике функције течења (нпр. Maslov-Arutiunyan-ова функција, теорија наслеђа) [18]. Уколико то није случај, вредности интеграла се могу одредити применом нумеричких метода. У случају функције пузања теорије старења и константног модула еластичности бетона, интегралне једначине се могу решити применом Laplace-ових трансформација [18].

3. УПРОШЋЕНА МЕТОДА

Будући да тачна метода, као што је објашњено, захтева решавање система нехомогених интегралних једначина, развијена је упрошћена метода прорачуна [21]. Основна претпоставка ове методе је да се генералисана померања мењају линеарно са функцијом течења бетона F^*, тј:

$$\theta=\theta_0 1^{*}+\Delta\theta\left(F^{*}-1^{*}\right) \tag{18}$$

где је $\theta_0=\theta_0(t_0,t_0)$ вредност деформације у тренутку t_0, а $\Delta\theta$ је прираштај деформације који треба одредити и који је константан за сваки пар аргумената (t, t_0). Bazant је у свом раду користио исту ову претпоставку [8]. Захваљујући уведеној претпоставци, систем условних једначина се мења и у случају штапова константног попречног пресека може се показати [21] да се систем нехомогених интегралних једначина трансформише у систем нехомогених алгебарских једначина са непознатим прираштајима $\Delta\theta$. Тиме је поступак решавања знатно поједностављен, а задржава се висока тачност методе [21].

4. МЕТОДА ЕФЕКТИВНОГ МОДУЛА

Метода ефективног модула (ЕМ метода) је због своје једноставности најчешће коришћена у пракси. Она се заснива на замени интегралне релације између напона и деформација за бетон, алгебарском релацијом коју је предложио Faber (1927.год):

$$\sigma_c(t) = E_{c,eff}(\varepsilon_c - \varepsilon_{cs}) \tag{19}$$

У релацији (19) $E_{c,eff}$ је ефективни модул еластичности бетона који се одређује као:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{co}}{1+\varphi_r} \tag{20}$$

где је φ_r редуковани коефицијент течења бетона, а E_{c0} је модул еластичности бетона у тренутку t_0. У тренутку t_0, редуковани коефицијент течења бетона је $\varphi_r = 0$ и $E_{c,eff} = E_{c0}$. Дакле, према овој методи, утицај течења бетона се у прорачуну узима у обзир једноставно, модификовањем вредности модула еластичности за бетон. Стога је анализа носача у тренутку t истоветна анализи у тренутку t_0 с том разликом што се уместо модула еластичности бетона E_{c0} користи модул еластичности $E_{c,eff}$. Fritz [6] је предложио модификацију методе увођењем фактора корекције ψ у израз за ефективни модул еластичности бетона:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{co}}{1+\psi\varphi_r} \tag{22}$$

Фактор корекције ψ зависи од врсте оптерећења, карактеристика попречног пресека и има вреднот 1.1 при прорачуну утицаја течења, односно, вредност 0.52 при прорачуну утицаја скупљања. Према методи Fritz-а срачунат је велики број спрегнутих конструкција.

5. МЕТОДА ПРЕМА ЕВРОКОДУ 4

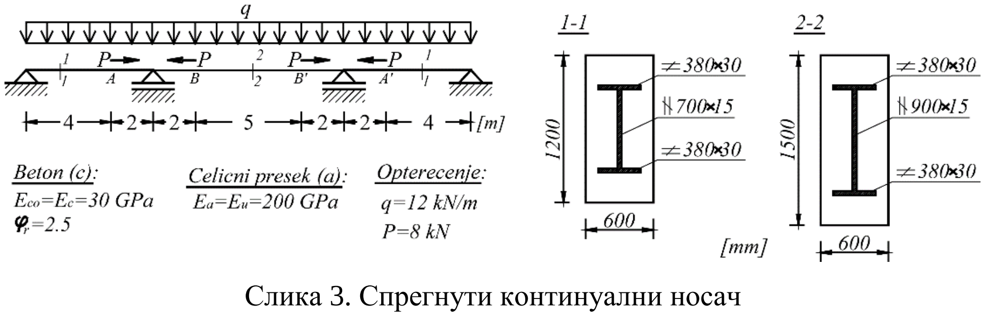
Еврокод 4 је важећи европски стандард за прорачун спрегнутих конструкција. Према овом стандарду, утицаји скупљања и течења бетона се могу узети у обзир применом методе ефективног модула коју је предложио Fritz. При томе, ефективни модул еластичности бетона се рачуна према изразу:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1+\psi_L\varphi_r} \tag{22}$$

где је E_{cm} секантни модул еластичности бетона за краткотрајно оптерећење и усваја се према Еврокоду 2 [24]. Фактор корекције ψ_L зависи од врсте оптерећења и узима следеће три вредности: 1.10 код сталног оптерећења, 0.55 код прорачуна скупљања и 1.50 код претходног напрезања принудним деформацијама.

6. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕР

У нумеричком примеру који следи, биће извршено поређење претходно објашњене четири методе прорачуна, на примеру једноставног спрегнутог континуалног носача приказаног на Слици 3. Носач је оптерећен расподељеним оптерећењем q и



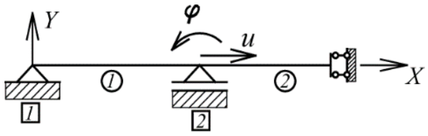
Слика 3. Спрегнути континуални носач

концентрисаним силама P које делују у тачкама A, B i A', B'. Геометријске карактеристике пресека: површина спрегнутог пресека и момент инерције, дати су у Табели 1.

Табела 1. Геометријске карактеристике пресека 1-1 и 2-2

	Пресек 1-1	Пресек 2-2
A_i (cm^2)	1363.05	1658.55
J_i (cm^4)	159077915	302789565

Ради једноставности, а захваљујући симетричности носача и оптерећења, при решавању ћемо посматрати само половину носача. Стога, имамо два непозната генералисана померања: хоризонтално померање u и ротација φ, Слика 4.



Слика 4. Симетрични део носача и непозната генералисана померања

Непозната генералисана померања, у тачној методи, се могу добити као решења следећих интегралних једначина:

$$\begin{aligned} (\tilde{N}_{gk} + \tilde{N}_{is})u &= \frac{P}{9}1^* \\ (\tilde{D}_{gk} + \tilde{E}_{is})\varphi &= q\frac{l_1^2}{8}1^* - q\frac{l_2^2}{12}1^* \end{aligned} \tag{23}$$

У једначини (23a), $\tilde{N}_{gk}$ је елемент (3,3) операторске матрице крутости елемента 1, дужине l_1=6m, а $\tilde{N}_{is}$ је елемент (1,1) операторске матрице крутости елемента 2, дужине l_2=9m. У једначини (23b), $\tilde{D}_{gk}$ је елемент (5,5) операторске метрице крутости елемента 1, док је $\tilde{E}_{is}$ елемент (3,3) операторксе матрице крутости елемента 2. У даљем ћемо усвојити функцију течења бетона према теорији старења и да је модул еластичности бетона константан током времена, како би се решење једначина (23) могло добити применом Laplace-ових трансформација. Дакле, фукнција течења бетона је:

$$F^* = 1^* + \varphi_r \tag{24}$$

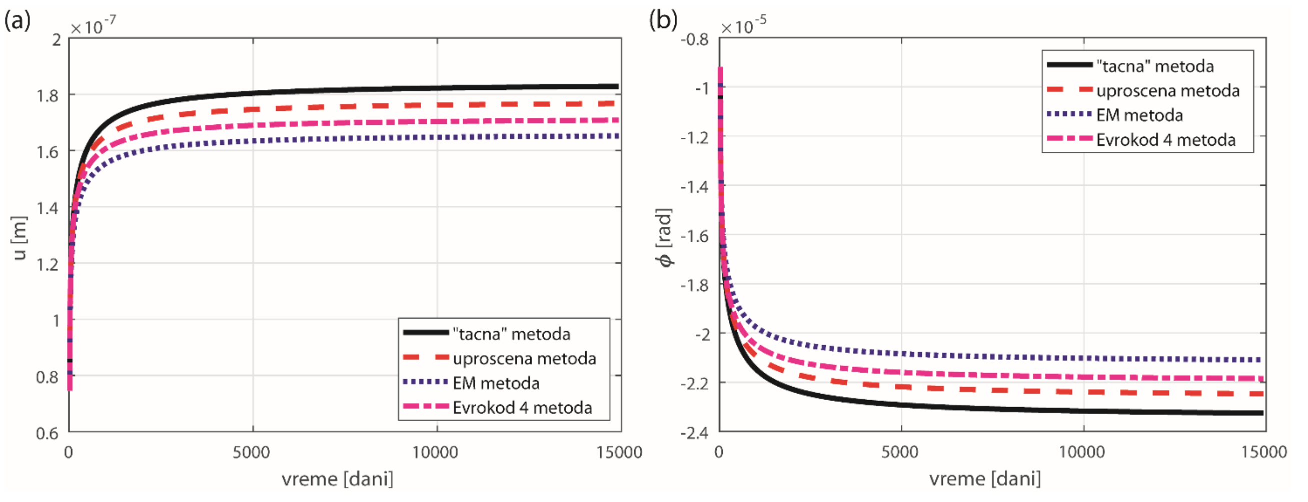
док је одговарајућа функција релаксације бетона:

$$R^* = e^{-\varphi_r} \tag{25}$$

Увођењем претпоставке о линеарној зависности генералисаних померања од функције течења бетона, непозната генералисана померања се у упрошћеној методи добијају као решења следећих једначина:

$$\begin{aligned} (\tilde{N}_{gk} + \tilde{N}_{is})(u_0 1^* + \Delta u(F^* - 1)) &= \frac{P}{9}1^* \\ (\tilde{D}_{gk} + \tilde{E}_{is})(\varphi_0 1^* + \Delta\varphi(F^* - 1)) &= q\frac{l_1^2}{8}1^* - q\frac{l_2^2}{12}1^* \end{aligned} \tag{26}$$

Ако за редуковани коефицијент течења бетона усвојимо функцију предложену Еврокодом 2 ($t_0 = 28$ дана), тј.



Слика 5. Поређење резултата добијених применом различитих метода прорачуна за хоризонтално померање u и ротацију φ

$$j_r(t,t_0) = 2.5\left(\frac{t - t_0}{863 + t - t_0}\right)^{0.3} \quad (27)$$

промена непознатих генералисаних померања током времена за тачну методу, упрошћену методу, ЕМ методу и методу према Евокоду 4 је дата на Слици 5.

Као што се може видети на овом примеру, реултати добијени применом упрошћене методе су најближи резултатима добијеним применом “тачне” методе. Резултати добијени применом ЕМ методе су најмање тачности, док су резултати добијени применом методе предложене Евокодом 4 ближе тачном решењу него решење добијено применом ЕМ методе.

7. ЗАКЉУЧАК

У овом раду су представљене неке од метода за прорачун спрегнутих конструкција од челика и бетона. Тачна метода користи линеарне интегралне операторе и помоћу ње је могуће једначине код одређивања непознатих померања представити формално у истом облику као код конструкција од хомогеног материјала. Недостатак методе је што захтева решавање нехомогених интегралних једначина, а то није погодно за примену у пракси. Овај недостатак превазилази тзв. упрошћена метода која усваја претпоставку о линеарној зависности између непознатих генералисаних померања и функције течења бетона. На овај начин се превазилази проблем решавања диференцијалних једначина будући да се једначине своде на нехомогене алгебарске једначине. Преостале две представљене методе спадају у групу алгебарских метода много једноставнијих за примену, али и метода мање тачности. На конкретном бројном примеру извршено је поређење резултата метода и може се закључити да је метода предложена Еврокодом 4 тачнија у односу на ЕМ методу, али и да упрошћена метода даје резултате најближе решењу тачне методе.

8. ЗАХВАЛНОСТ

Други аутор овог рада се захваљује на подршци Минустарству просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије кроз пројекат ТР36046.

9. ЛИТЕРАТУРА

[1] Chaudhary, S., U. Pendharkar, and A.K. Nagpal, Hybrid Procedure for Cracking and Time-Dependent Effects in Composite Frames at Service Load. Journal of Structural Engineering, 2007. **133**(2): p. 166-175.

[2] Dezi, L., G. Leoni, and A.M. Tarantino, Algebraic Methods for Creep Analysis of Continuous Composite Beams. Journal of Structural Engineering, 1996. **122**(4): p. 423.

[3] Fragiacomo, M., C. Amadio, and L. Macorini, Finite-Element Model for Collapse and Long-Term Analysis of Steel–Concrete Composite Beams. Journal of Structural Engineering, 2004. **130**(3): p. 489-497.

[4] Gilbert, R.I. and M.A. Bradford, Time-Dependent Behavior of Continuous Composite Beams at Service Loads. Journal of Structural Engineering, 1995. **121**(2): p. 319.

[5] Deretić-Stojanović, B. and S.M. Kostić, Time-dependent analysis of composite and prestressed beams using the slope deflection method. Archive of Applied Mechanics, 2014: p. 1-16.

[6] Fritz, B., Verbundträger. 1961: Springer-Verlag.

[7] Djuric, M., Teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija. 1963, Beograd: Naucno delo.

[8] Bazant, Z.P., Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method. Journal of the American Concrete Institute, 1972. **69**: p. 212-217.

[9] CEN, E.-.-. Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. 2004, CEN: Brusseis.

[10] Kwak, H.-G. and Y.-J. Seo, Long-term behavior of composite girder bridges. Computers & Structures, 2000. **74**(5): p. 583-599.

[11] Macorini, L., et al., Long-term analysis of steel–concrete composite beams: FE modelling for effective width evaluation. Engineering Structures, 2006. **28**(8): p. 1110-1121.

[12] Nguyen, Q.-H., M. Hjiaj, and B. Uy, Time-dependent analysis of composite beams with continuous shear connection based on a space-exact stiffness matrix. Engineering Structures, 2010. **32**(9): p. 2902-2911.

[13] Mandel, J., Sur les corps viscoélastiques linéaires dont les propriétés dépendent de l’âge. Comples Rendus de l'Académie des Sciences, 1958. **247**: p. 175-178.

[14] Mandel, J. Un principe de correspondance pour les corps viscoélastiques linéaires vieillissants. in Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies. 1975. Springer-Verlag.

[15] Huet, C. Opérateurs intégrodifférentiels matriciels pour l’étude des systems à réponse ifférée

présentant du vieillirsement. in Comptes Rendus Acad. Sc. Paris. 1974.
[16] Lazic, J.D. and V.B. Lazic, General Theory of Composite and Prestressed Structures. Vol. DXLII. 1982, Belgrade: The Serbian Academy of Sciences and Arts.
[17] Lazić, J.D. and V.B. Lazić, Bending of a composite beam-column. Archive of Applied Mechanics, 1991. **61**(6-7): p. 361-372.
[18] Lazic, V.B., Mathematical Theory of Composite and Prestressed Structures. 2003, Belgrade: Mathematical institute SANU.
[19] Lazić, V.B. and J.D. Lazić, Theory of open thin-walled composite and prestressed beams. Archive of Applied Mechanics, 1991. **61**(8): p. 532-547.
[20] Deretić-Stojanović, B., Proračun spregnutih konstrukcija metodom deformacija, in Katedra za Tehničku mehaniku i otpornost materijala. 1992, Univerzitet u Beogradu: Građevinski fakultet.
[21] Deretić-Stojanović, B. and S.M. Kostić, A simplified matrix stiffness method for analysis of composite and prestressed beams. Steel and Composite Structures, 2017. **24**(1): p. 53-63.
[22] Volterra, V., Theory of Functionals of Integral and Intego-differential Equations. 1959, New York: Dover Publications Inc.
[23] Boltzmann, L., Zur Theorie der elastichen Nachwirkung. Ann. Phys., 1878. **241**(11): p. 430-432.
[24] CEN, E.-. Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1 : General rules and rules for buildings 2004, EUROPEAN COMMITIEE FOR STANDARDIZATION: Brussels.