

EVALUATION OF NORMAL HEIGHTS BY THE MEANS OF GLOBAL NAVIGATION SATELLITE SYSTEMS AND GLOBAL GEOPOTENTIAL MODEL

OLEG ODALOVIC¹, DANILO JOKSIMOVIC^{1*}, SANJA GREKULOVIC¹, MILJANA TODOROVIC-DRAKUL¹, JOVAN POPOVIC¹

¹*University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering, Belgrade – Department for Geodesy and Geoinformatics, Bulevar Kralja Aleksandra, 11000 Belgrade, Serbia*

Abstract: This paper presents geometrically and physically defined height systems, along with their evaluation by the means of Global Navigation Satellite Systems (GNSS) and Global Geopotential Models (GGM). The paper defines ellipsoid heights as an instance of geometrically defined heights; with physically defined heights being represented by definitions of orthometric and normal heights. Methods of normal heights calculation by the means of ellipsoid heights are presented in detail, as determined using the GNSS and height anomalies calculated from the GGM application. Apart from the above, numerical part of the paper evaluates normal height values and compares them to their conditionally accurate values at 1073 points with relatively uniform distribution over the entire territory of Serbia. Conditionally accurate values had been determined by the means of classical geodetic terrestrial methods. Under the procedure of evaluating normal height values, GGM – GGM05C was used, as created in 2016 by the Center for Space Research, University of Texas at Austin. In order to evaluate the quality of applying the model above, data on normal heights evaluation were also presented, using the GGM EGM96, created in 1996 by the National Imagery and Mapping Agency (NIMA), Goddard Space Flight Center (GSFC – NASA) and Ohio State University, presently being the most commonly used model. The comparison above indicates that application of the GGM05C model provides 50 % greater quality of normal heights evaluations against the ones obtained using the EGM96 model.

Keywords: Geometric Heights, Physical Heights, Global Geopotential Models, Global Navigation Satellite Systems

Introduction

When solving the problem of positioning, i.e. the problem of determining coordinates of points on the physical surface of Earth, the GNSS is presently being the most commonly used technology (Hofmann-Wallenhof et al., 1994).

From the standpoint of the GNSS technology users, the procedure of coordinates' determination is relatively simple. Pursuant to the agreed rules (Rulebook on Basic Geodetic Works, 2012), it is sufficient to place a GNSS receiver over the point P for which the coordinates are being determined (Figure 1), wait for a given period needed to collect and process the data received from the satellites, the orthogonal point coordinates X , Y and Z are obtained. The coordinates obtained are commonly determined in geocentric coordinate system of the European Terrestrial Reference System 1989 – ETRS89 (IERS Conventions, 2010), presented in meter units.

* E-mail: odalovic@grf.bg.ac.rs

Article history: Received 23.03.2016 ; Accepted 01.04.2016

The support of this study was made through Ministry of Education, Science and Technological Development of the Republic of Serbia (Project No. TR 36020).

The ETRS89 itself is being established through the European Terrestrial Reference Frame – ETRF, which is being implemented per epochs due to the Earth's crust masses movement and array of other influences. Due to the reasons above, the determined coordinates of points also contain the designation of reference frame. For instance, the coordinates presently determined in Serbia by the means of GNSS are linked to the ETRS89, in implementation reference frame ETRF2000, epoch 2010.63 (Rulebook on Basic Geodetic Works, 2012).

Geocentric coordinates of point P may be unambiguously transformed into geodetic coordinates (Heiskanen and Moritz, 1967):

- *geodetic latitude B* ,
angle in the plane of point P meridian, from the equator to the normal on the ellipsoid, values ranging from 0 to 90, to the North and South from the equator,
- *geodetic longitude L* ,
angle in the equatorial plane from the starting meridian to the meridian of point P , values ranging from 0 to 180, to the East and West from the starting meridian, and
- *ellipsoid height h* ;
section of normal line against ellipsoid, to the point P .

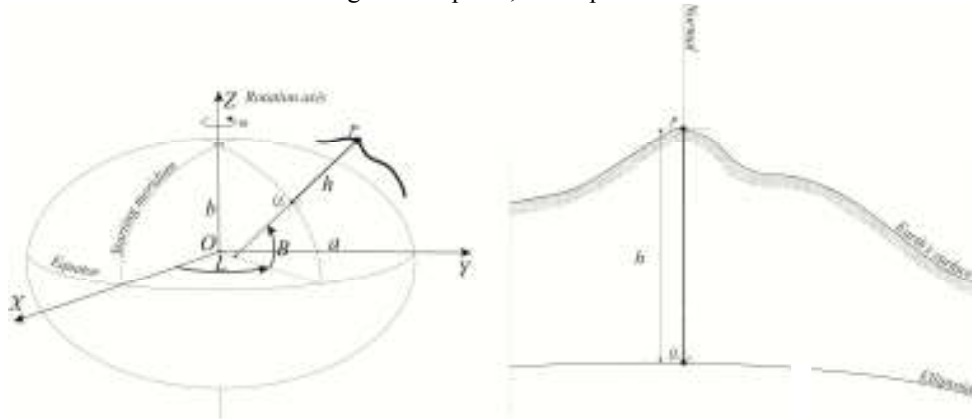


Figure 1. Ellipsoid in geocentric coordinate system and ellipsoid height

Said transformation is possible after assigning a reference ellipsoid to the ETRS89, with presently most common ellipsoid being the Geodetic Reference System 1980 – GRS80 ellipsoid (Moritz, 1984). After assigning an ellipsoid, transformation may be done using the following expressions (Hofmann-Wallenhof et al., 1994):

$$B = \operatorname{arctg} \frac{z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta}, \quad (1)$$

$$L = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (2)$$

$$h = \frac{p}{\cos B} - N, \quad (3)$$

where N is radius of cross-section curve on first vertical

$$N = \frac{a^2}{b(1 + e'^2 \cos^2 B)^{1/2}} \quad (4)$$

and where p and θ are auxiliary values

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5)$$

$$\theta = \arctg \frac{za}{pb}, \quad (6)$$

and a , b , e and e' are minor and major axis, and first and second numeric eccentricity of the GRS80 system ellipsoid, respectively.

Ellipsoid height obtained through the transformation above is purely geometrically defined value, which significantly differs from the altitudes over the sea level. For the planet Earth, these differences reach ± 100 m (Lemoine, 1998), and for the territory of Serbia, differences range from 40 m to 47 m (Odalovic, 2005). This fact significantly limits application of GNSS technologies for determining heights.

Height systems

A set of all agreements, algorithms, parameters and measuring methods providing for ellipsoid heights determination is named *geometric heights system*. Term “geometric system” is being used essentially due to the method of ellipsoid height determination, and the fact that the ellipsoid height is fully free of the gravity field influence. In the other words, due to their fully geometric definition, ellipsoid heights, for instance, do not provide the answer to the question if two points in the gravity field are at the same altitude over the sea level.

In order to overcome this property of ellipsoid heights, the *physical height systems* are being used, with their definition being based on the gravity potential (Heiskanen and Moritz, 1967):

$$W = W(x_p, y_p, z_p) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{l} dx dy dz + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (7)$$

where x_p, y_p, z_p and x, y, z are the coordinates of relevant points in the orthogonal geocentric coordinate system, ETRS89 system for instance, G is universal gravitation constant, ρ is Earth body density, ω is angular velocity of Earth's rotation, and l is the distance between relevant points of integration:

$$l = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}. \quad (8)$$

The basic measurement value for establishing physically defined heights is *geopotential unit* or *geopotential benchmark* (Figure 2).

$$C_P = dW = -(W_P - W_0) = -\int_P^{P_0} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{h} = \int_{P_0}^P \mathbf{g} \cdot d\mathbf{h}. \quad (9)$$

where dW is potential difference, W_P is the potential value at level surface of a point P , W_0 is potential value at geoid, \mathbf{g} is gravity, and $d\mathbf{h}$ is altitude difference.

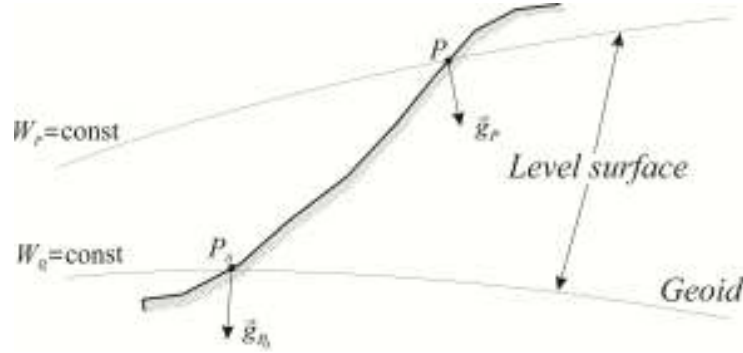


Figure 2. Level surfaces

In practical works, geopotential benchmark is being realized by the means of geometric leveling and gravity measurement results:

$$C_P = \int_{P_0}^P \mathbf{g} \cdot d\mathbf{h} \approx \sum_{k=A}^B \mathbf{g}_k \cdot \Delta h. \quad (10)$$

where Δh is the result of height difference leveling, and \mathbf{g}_k is the mean value of gravity intensity calculated using the expression

$$\mathbf{g}_k = \frac{\mathbf{g}_{P_0} + \mathbf{g}_P}{2}. \quad (11)$$

Although the geopotential benchmark is *the only way* of determining the height difference of points, its unit is m^2/s^2 instead of m, and it lacks geometric interpretation, thus making practical works that much harder.

In order to establish height system with meter unit and geometric interpretation, *orthometric height system* and *normal height system* are being created, i.e. *orthometric* and *normal height*.

Orthometric height² is defined by the relation

$$H^o = \frac{C_P}{\bar{g}}, \quad (12)$$

²Orthometric height is commonly called height above the sea level.

and normal height

$$H^N = \frac{C_p}{\bar{\gamma}}, \quad (13)$$

where \bar{g} is mean gravity value along the orthometric height itself, and $\bar{\gamma}$ is mean value of normal potential along the normal height itself. Both of the heights noted are being expressed in meters and have geometric interpretation (Figure 3 and Figure 4). Reference surface for orthometric heights is *geoid*, being one of the infinite number of level surfaces of gravity acceleration, in particular the one which, in classical definitions, matches the surface of ideally calm seas and oceans. Unlike the orthometric heights with level reference surface, normal heights have *quasigeoid* for reference surface, being the surface that has no constant potential.

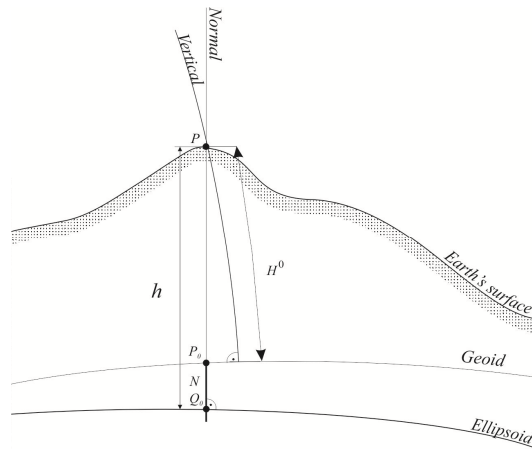


Figure 3. Orthometric height

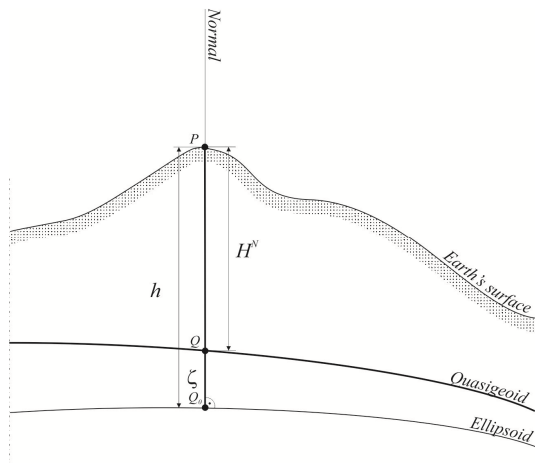


Figure 4. Normal height

Orthometric and normal heights are related to geometrically defined ellipsoid heights through:

$$h = H^O + N, \quad (14)$$

$$h = H^N + \zeta. \quad (15)$$

where N designates *geoid undulation* of point P , and ζ designates *height anomaly* of point P .

Geoid undulation is ellipsoid height of geoid point, and height anomaly is ellipsoid height of quasigeoid point.

Moreover, the last two relations were the only way to determine ellipsoid heights in the past, before emergence of the GNSS. Orthometric and normal heights were determined by the means of geometric leveling and gravimetric measurements, and geoid undulations and height anomalies were determined by the means of astronomic measurements and gravimetric survey data.

Geoid and quasigeoid

Definition of orthometric and normal heights had resolved the issue of unambiguous determination of points' heights while accounting for the gravity field. However, practical establishment of said height systems is very complicated and demanding.

For instance, Serbia has leveling network with over 4000 points (benchmarks) on which the point heights were determined during the past century in both height systems (Figure 5) (Bratuljevic, 1995). Several thousand kilometers of leveling network lines needed to be leveled by the means of geometric leveling, with determination of gravity by the means of the appropriate gravimetric methods at all network benchmarks. Leveling activities were performed from 1971 to 1973, followed by several years of gravimetric measurements, with heights being formally calculated as late as the last decade of the past century, since there was the need to wait for the tide gauges on the Adriatic shore to determine the mean sea level for the period of 18.6 years. Although all of the works were completed successfully late in past century, the network was never properly maintained or densified, thus the heights remained known on the network lines only. Determining heights outside the lines requires performance of additional leveling and gravimetric measurements.

Emergence of GNSS significantly changes the situation regarding ellipsoid heights determination. Ellipsoid heights are being determined relatively easy and very fast, independent from orthometric heights and geoid undulations or normal heights and height anomalies.

Although the GNSS had brought up some improvements regarding orthometric and normal heights, when determining benchmark position for instance; however, the majority of activities for multiannual establishing of a new leveling network are still the same as for establishing the network shown in Figure 5.

To practically extend all advantages brought up by the GNSS regarding positioning to the points' altitude, instead of coordinates only, the problem of orthometric and normal altitudes determination may be viewed in a completely different manner, also through relations (14) and (15) written as follows:



Figure 5. High accuracy leveling network

$$H^O = h - N, \quad (16)$$

$$H^N = h - \zeta. \quad (17)$$

Relations in this form provide a simple conclusion that orthometric or normal heights may be determined directly, without any sort of leveling network, at an arbitrary point in Serbia, using GNSS, providing that geoid or quasigeoid shape is known over the territory of Serbia.

Geoid and quasigeoid determination

Geoid determination involves determination of geoid undulations at a given number of points on the physical surface of the Earth, continent, territory of a country or local territory, for instance area of 10×10 km. Present determinations may be categorized as determinations with centimeter accuracy.

Number and layout of points where undulations are being determined define the geoid *resolution*, which needs to be such that it provides for interpolation of undulation in any given point from undulations determined, also with centimeter accuracy. Geoid determined under the conditions above is called *high-resolution geoid with centimeter accuracy*, with similar definition to be given to the *high-resolution quasigeoid*, when height anomalies are being considered instead of undulations.

Methodology of geoid or quasigeoid determination, i.e. a set of methods to be used in geoid determination, depends on the data at disposal at the time of determination, and determination methods may be classified as terrestrial and satellite methods, considering data source.

Terrestrial methods include (Vaniček, 1988)

- astro-geodetic leveling (combination of astronomic and geodetic determinations)
- gravimetric method, method using Stokes' formula (or Molodenski's orders when determining quasigeoid),

and satellite methods include the methods based on the results of

- altimetry observations,
- gradiometry observations, or
- results of satellite trajectory observations.

Integrated model deserves special place, providing for use of any available data, regardless of origin.

Combination of methods above defines and utilizes *combined* undulations determination methods, which are in fact being the most commonly used today when geoid undulations or height anomalies determination with centimeter accuracy.

The most common combined method is remove-compute-restore (Forsberg, 1993) (RCR) method. This method combines nearly all types of data available:

- global geopotential models;
- digital models of topographic masses (Earth's crust masses above the geoid); and
- data obtained from a set of terrestrial methods, commonly gravimetric measurements.

There are two official solutions presently in Serbia: the preliminary geoid of Serbia from 2008 (Odalovic, 2008) and the quasigeoid of Serbia from 2011 (Agren et al., 2011). Both solutions were determined using the RCR method, using various input data, with the accuracy up to 5 cm.

Global geopotential models (GGM) and its implementation

One of the most important steps in the procedure of geoid or quasigeoid determination is selection of the appropriate GGM and its proper application under the RCR method.

GGM's are sets of coefficients of spherical harmonic development of gravity potential. Using theoretically defined expressions below, height anomalies can be determined in an arbitrary point (GOCE Level 2 Product Data Handbook, 2010)

$$W(r, \theta, \lambda) = \frac{GM^{REF}}{a^{REF}} \sum_{n=0}^{N_{max}} \left(\frac{a^{REF}}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \left(\bar{C}_{nm}^{ELL} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^{ELL} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) + \frac{1}{2} \left(\omega^{REF} \right)^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (18)$$

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{GM^{REF}}{a^{REF}} \left(\sum_{n=0(2)}^8 \left(\frac{a^{REF}}{r} \right)^{n+1} \bar{C}_n^{REF} \bar{P}_n(\cos \theta) \right) + \frac{1}{2} (\omega^{REF})^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (19)$$

where

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm}^{ELL} \\ \bar{S}_{nm}^{ELL} \end{Bmatrix} = \left(\frac{GM^{GGM}}{GM^{REF}} \right) \left(\frac{a^{GGM}}{a^{REF}} \right)^n \begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm}^{GGM} \\ \bar{S}_{nm}^{GGM} \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

$$T = W - U, \quad (21)$$

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} \quad (22)$$

GM is the product of gravitation constant and Earth's mass, a is major semi-axis – mean radius of Earth's equator, n and m are degree and order of GGM, N_{\max} is the maximum degree of GGM, r , θ and λ are spherical coordinates, \bar{P}_{nm} and \bar{P}_n are fully normalized Legendre's functions, \bar{C}_{nm} and \bar{S}_{nm} are coefficient of spherical-harmonic and ω is angular velocity of Earth's rotation. Values designated with REF are related to the adopted reference system (GRS80 in this paper), values designated with GGM are related to the GGM adopted, and values designated with ELL refer to the values pertaining to spherical-harmonic coefficients after adjusting to scale, as shown in the equation (20). In the equation (21), T is anomaly potential that represents the difference between real (W) and normal (U) potential.

The International Association of Geodesy – IAG publishes all available global models over the International Centre for Global Earth Models – ICGEM. At the official ICGEM webpage, there are 153 GGM's available for download, with the oldest one dating back from 1966, and the newest one being from 2016. The models are downloaded in the form of textual files containing archived estimates of \bar{C}_{nm} and \bar{S}_{nm} coefficients and accuracy of their determination.

```

norm                fully_normalized
errors              formal
tide_system         tide_free

url                 http://www.itag.tugraz.at/research/goco

key  L  M  C  S  sigma C  sigma S
end_of_head =====
gfc  0  0  1.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00
gfc  1  0  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00
gfc  1  1  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.000000000000e+00
gfc  2  0  -4.84165036927e-04  0.000000000000e+00  4.406099050689e-13  0.000000000000e+00
gfc  2  1  -2.35679302228e-10  1.467214971653e-09  4.326546083831e-13  4.561241825607e-13
gfc  2  2  2.439338868803e-06  -1.400276608538e-06  8.792467436219e-13  8.967975528161e-13
gfc  3  0  9.571979407643e-07  0.000000000000e+00  2.137892582968e-13  0.000000000000e+00
gfc  3  1  2.030464598070e-06  2.481927474706e-07  2.044613121584e-13  2.132179624290e-13
gfc  3  2  9.047887848982e-07  -6.189962125057e-07  2.541764762015e-13  2.620104953798e-13
gfc  3  3  7.212818355569e-07  1.414377301843e-06  5.933137845862e-13  5.890413434343e-13
gfc  4  0  5.400035352379e-07  0.000000000000e+00  8.604427732526e-14  0.000000000000e+00

```

Figure 6. Part of the textual file storing data on global geopotential model

Figure 6 shows part of the textual file containing data on the GGIM, with second and third column showing the model degree and order, respectively, with fourth, fifth, sixth and seventh column showing model coefficients, together with the accuracy of their determination.

Normal heights determination by the means of GNSS and GGM05C global geopotential model

For determination of normal heights using (17), as noted above, there are 153 publicly available Global Geopotential Models, and it was decided to use the GGM05C (Ries et al., 2016) in this research, for two reasons:

- GGM05C is the latest model published by the ICGEM
- it is the model with 360 degree and order, which provides direct comparison to the applications of previously most commonly used EGM96 model (Lemoine et al., 1998), having the same degree and order.

The model is applied based on the expressions (18) – (22), at 1073 points over the territory of Serbia (Agren et al., 2011) (Figure 7), for which the ellipsoid heights were determined by the means of GNSS. Apart from that, normal heights are known at the points, as determined by the means of classical geodetic method. This fact provided for normal height determination quality comparison using (17), considering terrestrially determined normal heights to be conditionally accurate values. The quality itself was quantified by creating the basic statistic data of the set of differences R^{GGM05C} determined from the following relation:

$$\left(R^{\text{GGM05C}}\right)_i = \left(H_{\text{GGM05C}}^N\right)_i - H_i^N \quad (23)$$

where H_{GGM}^N is the normal height value obtained from the Global Geopotential Model, and H^N are conditionally accurate normal height values determined terrestrially, with i ranging sequentially from 1 to 1073.

Along with establishing R^{GGM05C} set of differences, R^{EGM96} set of differences was also established when using the EGM96 model, in the identical manner as when using the GGM05C model.

Basic statistical data for all determinations are shown in Table 1, general shape of difference surfaces are shown in Figure 8, and histograms of differences in Figure 9.

Table 1. Basic statistical data for R_i

Designation	Number	Minimum	Maximum	Mean value	Standard deviation
R^{GGM05C} [m]	1073	-0.42	0.62	0.01	0.18
R^{EGM96} [m]	1073	-2.03	0.39	-0.87	0.59

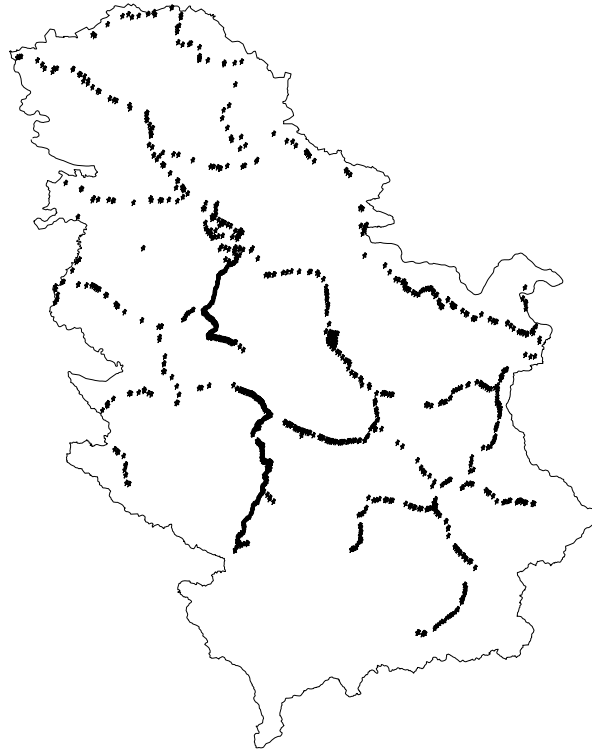


Figure 7. Spatial layout of points over the territory of Serbia where ellipsoid and normal heights were determined

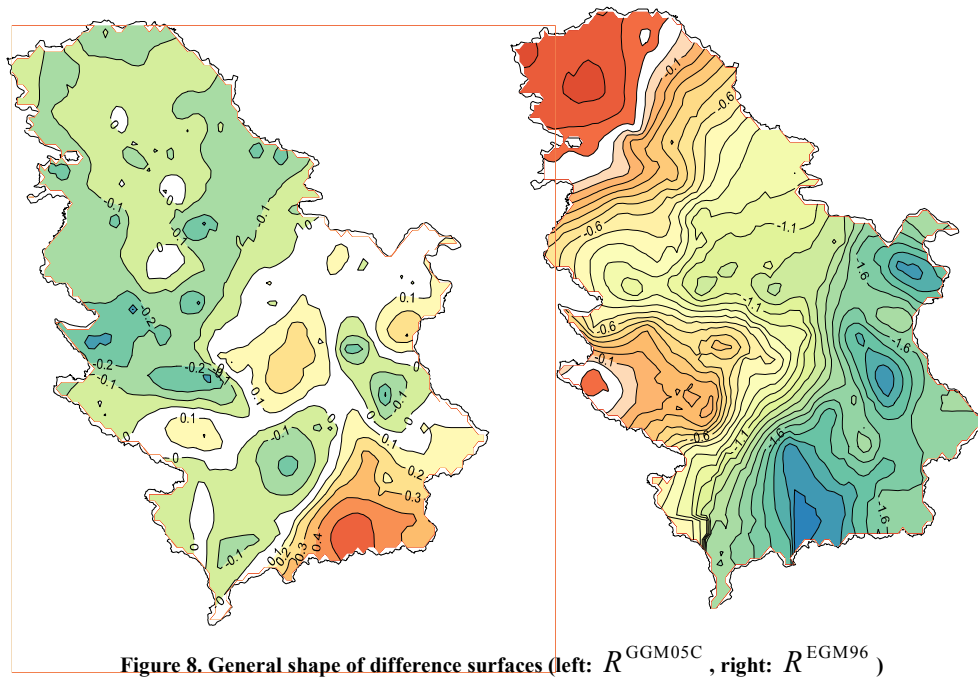


Figure 8. General shape of difference surfaces (left: R^{GGM05C} , right: R^{EGM96})

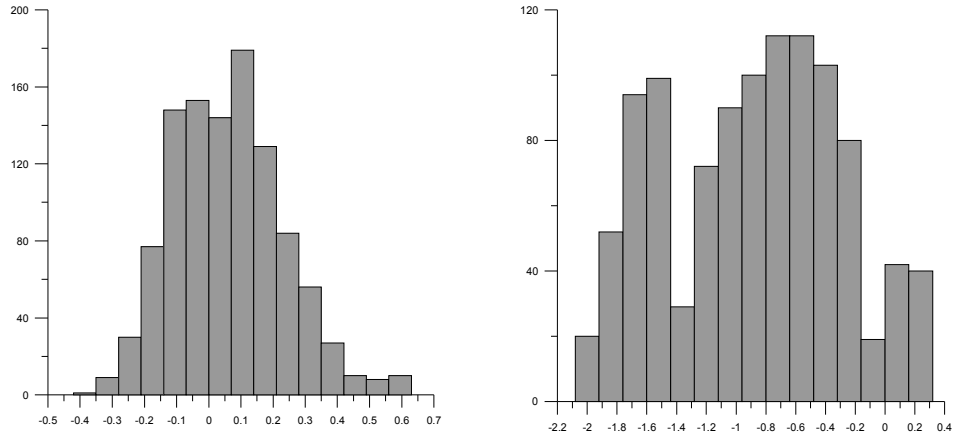


Figure 9. Histogram of differences (left: R^{GGM05C} , right: R^{EGM96})

Basic statistical data shown and general shape of difference surface for R^{GGM05C} provide for the following conclusions:

- minimum value is -0.42 cm, maximum is 0.62 cm, with mean value of 0.01 m and standard deviation of 0.18 m,
- in the northern part of Serbia, over the territory of Vojvodina, quality of normal heights determination ranges at ± 10 cm,
- over the territory of prominent topographic masses (masses above the geoid), on the territory of Zlatibor bordering Bosnia and Herzegovina, differences reach minimum extremes from -45 cm to -40 cm,
- maximum positive value of 60 cm is reached in the southern part of Serbia, bordering Macedonia and Albania,
- in central part of Serbia, nearby Velika Morava River, the majority of differences have the values close to zero, and it is obvious that in that area the value does not exceed the limit of ± 10 cm (shown in white in Figure 8).

Comparison of R^{GGM05C} set of differences and R^{EGM96} set of differences indicates that the GGM05C global model provides significantly greater quality of normal heights evaluation:

- range of R^{EGM96} set of differences is 2.42 m being 1.38 m greater range than for R^{GGM05C} set,
- comparison of the histograms of differences (Figure 9) indicates that the histogram of the set of differences is asymmetric, and that the differences are grouped into three parts: around -1.6 m, -0.6 m and 0.2 m, while for the R^{GGM05C} histogram of differences has clearly notable symmetry of differences distribution grouped around the mean value of 0.01 m.

Everything noted indicates that the new model provides significantly better evaluation of normal heights against the commonly used EGM96 model. Sole comparison of the range of differences indicates that the improvement exceeds 50 %.

Conclusions

The paper presents evaluation of normal heights by the means of GNSS and GGM at 1073 points, with relatively uniform distribution over the territory of Serbia, with normal heights being previously determined by the means of classical geodetic terrestrial methods. When evaluating the normal heights, ellipsoid heights determined by the means of GNSS and height anomalies determined by the means of GGM GGM05C were used. Overview of comparison shown indicates that estimates of normal heights deviate from the conditionally accurate values by a minimum of -0.42 m, maximum of 0.62 cm, with mean value of 0.01 m and standard deviation of 0.18 m.

Apart from application of the GGM05C model, the EGM96 model was also used for evaluation of normal heights. The results of comparison between applications of the two models indicate that application of the GGM05C model provides higher quality of normal heights evaluation in excess of 50 %.

References

- Agren, J., Djalovic, S., Skrgun, J., (2011). Plan for the Future Determination of a National Geoid Model for Serbia. Tech. rep., Republic Geodetic Authority, Belgrade, Serbia.
- Bratuljević, N., R. Mrkić, V. Milovanović, S. Delčev, D. Blagojević, V. Vasiljev, (1995). Geodetske referentne mreže, Institut za Geodeziju, Beograd.
- Forsberg, R., 1993. Modelling the fine-structure of the geoid: Methods, data requirements and some results. *Surveys in Geophysics* 14 (4), 403-418.
- GOCE Level 2 Product Data Handbook, Doc. Nr: GO-MA-HPF-GS-0110, Issue: 4.3, Date: 09.12.2010, Page 77.
- Heiskanen, W., Moritz, H., (1967). *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Co., San Francisco.
- Hofmann-Wallenhof et al. (1994), *Global Positioning System – Theory and Practice*, Springer-Verlag, Wien New York.
- IERS Conventions (2010). Gérard Petit and Brian Luzum (eds.). (IERS Technical Note; 36) Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. 179 pp., ISBN 3-89888-989-6.
- J. Ries, S. Bettadpur, R. Eanes, Z. Kang, U. Ko, C. McCullough, P. Nagel, N. Pie, S. Poole, T. Richter, H. Save and B. Tapley, (2016), *The Combination Global Gravity Model GGM05C*, Center for Space Research – The University of Texas at Austin, Texas, CSE-TM-16-01.
- Lemoine, F. G., S.C. Kenyon, J.K. Factor, R.G. Trimmer, N.K. Pavlis, C.M. Cox, S.M. Klosko, S.B. Luthcke, M.H. Torrence, Y.M. Wang, R.G. Williamson, E.C. Pavlis, R.H. Rapp, and T.R. Olson, “The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96”, NASA/TP-1998-206861, July, 1998.
- Moritz, H., (1984). Geodetic reference system 1980. *Bulletin Geodesique* 58 (3), 388-398.
- The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96
- Odalović O., (2005). Metodologija određivanja geoida visoke rezolucije centimetarske tačnosti za teritoriju republike Srbije, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.
- Odalović, O., (2008). Preliminary geoid for Serbia. Tech. rep., Republic Geodetic Authority, Belgrade, Serbia.
- Rulebook for Basic Geodetic Works (2012), “Official Gazette RS”, number 19/12.
- Vaniček P., (1988) *Geodesy, the Concepts*, North-Holland Publishing Company – Amsterdam – New York – Oxford.

ОЦЕНА НОРМАЛНИХ ВИСИНА ПРИМЕНОМ ГЛОБАЛНИХ НАВИГАЦИОНИХ САТЕЛИТСКИХ СИСТЕМА И ГЛОБАЛНИХ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИХ МОДЕЛА

ОЛЕГ ОДАЛОВИЋ¹, ДАНИЛО ЈОКСИМОВИЋ¹, САЊА ГРЕКУЛОВИЋ¹, МИЉАНА ТОДОРОВИЋ-ДРАКУЛ¹, ЈОВАН ПОПОВИЋ¹

¹ *Универзитет у Београду, Грађевински факултет у Београду – Одсек за геодезију и геоинформатику, Булевар Краља Александра, 11000 Београд, Србија*

Сажетак: У оквиру рада приказани су геометријски и физички дефинисани системи висина, као и њихова оцена применом глобалних навигационих сателитских система (GNSS) и глобалних геопотенцијалних модела (GGM). У раду је дата дефиниција елипсоидних висина као представника геометријски дефинисаних висина, а у погледу физички дефинисаних висина приказане су дефиниције ортометријских и нормалних висина. Детаљно су представљени начини рачунања нормалних висина применом елипсоидних висина, које су одређене применом GNSS и аномалија висина које следе из примене GGM. Поред наведеног у нумеричком делу рада оцењене су вредности нормалних висина и упоређене са њиховим условно тачним вредностима и то у 1073 тачке које су релативно правилно распоређене по читавој територији Србије. Условно тачне вредности одређене су применом класичних геодетских терестричких метода. У поступку оцене вредности нормалних висина коришћен је GGM GGM05C који је креиран 2016. године од стране Центра за космичка истраживања у Тексасу (Center for Space Research, University of Texas at Austin). У циљу оцене квалитета примене наведеног модела приказани су и подаци оцене нормалних висина при примени GGM EGM96 који је креиран 1996. године од стране Националне агенције за дигиталну обраду слика и картирање (National Imagery and Mapping Agency - NIMA), Центра за космичке летове Националне космичке агенције (Goddard Space Flight Center – GSFC - NASA) и америчког Универзитета Охајо (Ohio State University), који до данас представља најчешће коришћени модел. Из наведеног упоређења следи да се применом модела GGM05C добијају 50% квалитетније оцене нормалних висина од оних које следе из примене модела EGM96.

Кључне речи: геометријске висине, физичке висине, глобални геопотенцијални модели, глобални навигациони сателитски системи

Увод

При решавању проблема позиционирања, односно проблема одређивања координата тачака на физичкој површи Земље или у њеној непосредној околини, данас се у највећој мери користе GNSS (Hofmann-Wallendorf et al., 1994).

Посматрано од стране корисника GNSS технологије, поступак одређивања координата релативно је једноставан. Сагласно договореним правилима (Правилник за основне геодетске радове, 2012), довољно је поставити GNSS пријемник изнад тачке P чије се координате одређују (Слика 1) и након одређеног времена, потребног за прикупљање и обраду података припелих са сателита, добијају се правоугле координате тачке X , Y и Z . Добијене координате су најчешће одређене у геоцентричном координатном систему Европског терестричког референтног система 1989. године (European Terrestrial Reference System 1989 – ETRS89) (IERS Conventions, 2010) и изражене су у јединицама метра.

Сам ETRS89 успоставља се путем Европског терестричког референтног оквира (European Terrestrial Reference Frame – ETRF), који се због померања маса Земљине коре и низа других утицаја, реализује по епохама. Из наведених разлога одређене координате тачака носе са собом и ознаку оквира. Примера ради, данас се у Србији координате одређене применом GNSS односе на ETRS89 у реализацији оквира ETRF2000, епоха 2010.63 (Правилник за основне геодетске радове, 2012).

Геоцентричне координате тачке P могуће је једнозначно трансформисати у геодетске координате (Heiskanen and Moritz, 1967):

- *геодетску латитуду B* ,
угао у равни меридијана тачке P , од екватора до нормале на елипсоид и може имати вредности од 0 до 90, северно и јужно од екватора,
- *геодетску лонгитуду L* ,
угао у равни екватора од почетног меридијана до меридијана тачке P и може имати вредности од 0 до 180, источно и западно од почетног меридијана,
- и *елипсоидну висину h* ;
одсечак нормале на елипсоид од елипсоида до тачке P .

Слика 1. Елипсоид у геоцентричном координатном систему и елипсоидна висина

Наведена трансформација могућа је тек након придруживања ETRS89 неког референтног елипсоида, а данас се најчешће користи елипсоид Геодетског референтног система 1980 (Geodetic Reference System 1980 – GRS80) (Moritz, 1984). Након придруживања елипсоида за трансформацију могу се користити следећи изрази (Hofmann-Wallenhof et al., 1994):

$$B = \operatorname{arctg} \frac{z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta}, \quad (1)$$

$$L = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (2)$$

$$h = \frac{p}{\cos B} - N, \quad (3)$$

где је N полупречник кривине пресека по првом вертикалу

$$N = \frac{a^2}{b(1 + e'^2 \cos^2 B)^{1/2}} \quad (4)$$

и где су p и θ помоћне величине

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5)$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{za}{pb}, \quad (6)$$

а a , b , e и e' мала и велика оса и први и други бројни ексцентрицитет елипсоида система GRS80, респективно .

Елипсоидна висина добијена наведеном трансформацијом је чисто геометријски дефинисана величина и значајно се разликује од висина изнад нивоа мора. За планету Земљу разлике висина досежу вредности од ± 100 m (Lemoine, 1998), а на територији Србије разлике се налазе у интервалу од приближно 40 m па до 47 m (Одаловић, 2005). Ова чињеница у значајној мери ограничава примену GNSS технологије у погледу одређивања висина.

Системи висина

Скуп свих договора, алгоритама, параметара и метода мерења који омогућава да се одреде елипсоидне висине назива се *геометријски систем висина*. Име геометријски систем користи се у основи због начина дефиниције елипсоидне висине али и због чињенице да је елипсоидна висина у потпуности ослобођена утицаја поља Земљине теже. Другим речима због своје чисто геометријске дефиниције коришћењем елипсоидних висина није могуће, примера ради, одговорити на питање да ли су две тачке у пољу Земљине теже на истој висини изнад нивоа мора.

Да би се превазишла наведена особина елипсоидних висина користе се *физички системи висина*, а њихово дефинисање заснива се на потенцијалу убрзања Земљине теже (Heiskanen and Moritz, 1967):

$$W = W(x_p, y_p, z_p) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{l} dx dy dz + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (7)$$

где су x_p, y_p, z_p и x, y, z координате релевантних тачака у правоуглом геоцентричном координатном систему, примера ради систему ETRS89, G универзална гравитациона константа, ρ густина масе тела Земље, ω угаона брзина Земљине ротације, а l растојање између релевантних тачака интеграције:

$$l = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}. \quad (8)$$

Основна мерна величина за успостављање физички дефинисаних висина је *геопотенцијална јединица* или *геопотенцијална кота* (Слика 2)

$$C_p = dW = -(W_p - W_0) = -\int_P^{P_0} g \cdot dh = \int_{P_0}^P g \cdot dh. \quad (9)$$

где је dW разлика потенцијала, W_p вредност потенцијала на нивоској површи тачке P , W_0 вредност потенцијала на геоиду, g убрзање Земљине теже, а dh разлика висина.

Слика 2. Нивоске површи

У практичним радовима геопотенцијална кота се реализује применом геометријског нивелмана и резултатима мерења убрзања Земљине теже:

$$C_p = \int_{P_0}^P g \cdot dh \approx \sum_{k=A}^B g_k \cdot \Delta h. \quad (10)$$

где је Δh резултат нивелања висинске разлике, а g_k средња вредност интензитета убрзања која се рачуна применом израза

$$g_k = \frac{g_{P_0} + g_P}{2}. \quad (11)$$

Иако је геопотенцијална кота *једини начин* да се одреди висинска разлика између тачака она нема јединицу m, већ m^2/s^2 , а поред тога она нема геометријску интерпретацију што у значајној мери отежава практичне радове.

У циљу креирања система висина који има метарску јединицу и геометријску интерпретацију креирају се *ортометријски систем висина* и *нормални систем висина*, односно *ортометријска* и *нормална висина*.

Ортометријска висина² дефинише се релацијом

$$H^o = \frac{C_p}{\bar{g}}, \quad (12)$$

а нормална

$$H^N = \frac{C_p}{\bar{\gamma}}, \quad (13)$$

где је \bar{g} средња вредност убрзања Земљине теже дуж саме ортометријске висине, а $\bar{\gamma}$ средња вредност нормалног потенцијала дуж саме нормалне висине. Обе наведене висине изражавају се у метрима и имају геометријску интерпретацију (Слика 3 и Слика 4). Референтна површ ортометријских висина је *геоид*, који је само једна од бесконачно много нивоских површи потенцијала убрзања Земљине теже и то она која се, у класичним дефиницијама, поклапа са површином идеално мирних мора и океана. За разлику од ортометријских висина чија је референтна површ нивоска, нормалне висине имају за референтну површ *квазигеоид*, односно површ на којој потенцијал није константан

Слика 3. Ортометријска висина

Слика 4. Нормална висина

Са геометријски дефинисаном елипсоидном висином ортометријска и нормална висина повезане су релацијама:

$$h = H^o + N, \quad (14)$$

$$h = H^N + \zeta. \quad (15)$$

где је са N обележена *ундулација геоида* тачке P , а са ζ *аномалија висине* тачке P .

Ундулација геоида је елипсоидна висина тачке геоида, а аномалија висине је елипсоидна висина тачке квазигеоида.

Шта више, последње две релације су биле једини начин за одређивање елипсоидних висина у прошлости све до појаве GNSS. Ортометријске и нормалне висине одређиване су применом геометријског нивелмана и гравиметријских мерења, а ундулације геоида и аномалије висина применом астрономских мерења и подацима гравиметријских премера.

² Ортометријска висина се често назива надморском висином или висином изнад нивоа мора.

Геоид и квазигеоид

Дефинисањем ортометријских и нормалних висина решен је проблем једнозначног одређивања висина тачака у присуству поља убрзања Земљине теже. Међутим, практично успостављање наведених система висина веома је компликовано и захтевно.

Примера ради, у Србији постоји нивелманска мрежа са преко 4000 тачака (репера) у којима су у прошлом веку одређене све висине тачака у оба наведена система (Слика 5) (Братуљевић, 1995). Више хиљада километара линија нивелманске мреже било је потребно изнивелати применом геометријског нивелмана, а такође одговарајућом гравиметријском методом одредити и убрзање Земљине теже на свим реперима мреже. Сама нивелања извођена су од 1971. године па до 1973. године, гравиметријска мерења у наредних неколико година, а формално висине су срачунате тек у последњој деценији прошлог века, јер је било неопходно чекати да мареографи на Јадранској обали одреде средњи ниво мора за период од 18.6 година. Иако су сви радови успешно завршени, крајем прошлог века, мрежа није никада адекватно одржавана нити прогушћавана па су висине остале познате само на линијама саме мреже. Да би се одредиле висине ван линија неопходно је изводити додатна нивелманска и гравиметријска мерења.

Слика 5. Мрежа нивелмана високе тачности

Појавом GNSS ситуација се у значајној мери мења у погледу одређивања елипсоидних висина. Елипсоидне висине се одређују релативно лако и веома брзо и то независно од ортометријских висина и ундулација геоида или од нормалних висина и аномалија висина.

Међутим, у погледу ортометријских и нормалних висина GNSS је донео нека унапређења, примера ради у погледу одређивања положаја репера, али већи део активности за вишегодишње успостављање неке нове нивелманске мреже и даље је у потпуности исти као и код успостављања мреже приказане на слици 5.

Да би се све предности који GNSS доноси у погледу позиционирања и практично омогућиле и за висине тачака, а не само за координате, проблем одређивања ортометријских и нормалних висина може се посматрати на један сасвим други начин, такође путем релација (14) и (15) записаних у облику:

$$H^O = h - N, \quad (16)$$

$$H^N = h - \zeta. \quad (17)$$

Из овако записаних релације једноставно је закључити да се ортометријске или нормалне висине могу директно одредити, без било какве нивелманске мреже и то у произвољној тачки Србије, применом GNSS, али под условом да је на територији Србије познат облик геоида или квазигеоида.

Одређивање геоида и квазигеоида

Одређивање геоида подразумева одређивање ундулација геоида у одређеном броју тачака на физичкој површи Земље, континента, територије неке државе или неког локалног подручја, примера ради површине $10 \times 10 \text{ km}$. Данашња одређивања могу се сврстати у одређивања са центиметарском тачношћу.

Број и распоред тачака на којима се ундулације одређују дефинишу *резолюцију* геоида, а она мора бити таква да се на основу одређених ундулација може одредити ундулација у било којој другој тачки применом интерполације, такође са тачношћу центиметарског нивоа.

Геоид одређен под наведеним условима назива се *геоидом високе резолуције центиметарске тачности*, а на исти начин могуће је дефинисати и *квазигеоид високе резолуције*, када се уместо ундулације геоида разматрају аномалије висина.

Методологија одређивања геоида или квазигеоида, односно скуп метода које ће при одређивању геоида бити примењене, зависи од података са којима се у тренутку одређивања располаже, а саме методе одређивања могуће је поделити с обзиром на порекло података на: терестричке и сателитске методе.

Код терестричких метода могу се издвојити (Vaniček, 1988)

- астро-геодетски нивелман, (комбинација астрономских и геодетских одређивања)
- гравиметријска метода, метода примене Стоксове формуле (или редова Молоденског при одређивању квазигеоида),

а код сателитских метода методе, које се базирају на резултатима

- алтиметријских опажања,
- градиометријских опажања,
- или резултатима опажања путања сателита.

Посебно се издваја интегрални модел путем којег је могуће искористити све расположиве податке без обзира на њихово порекло.

Комбинацијом поменутих метода дефинишу се и користе *комбиноване* методе одређивања ундулација и управо се оне данас најчешће користе при одређивањима ундулација геоида или аномалија висина са тачношћу центиметарског нивоа.

Најраспрострањенија комбинована метода је *remove-compute-restore* (Forsberg, 1993) (RCR) метода, односно метода отклањања-предикције-враћања. У оквиру метода се комбинују готово све врсте расположивих података:

- глобални геопотенцијални модели,
- дигитални модели топографских маса (маса Земљине коре изнад геоида),
- и подаци које следе из низа терестричких метода, најчешће гравиметријска мерења убрзања Земљине теже.

У Србији до данас постоје званично два решења: прелиминарни геоид Србије из 2008. године (Odalović, 2008) и квазигеоид Србије из 2011. Године (Agren et al., 2011). Оба решења одређена су путем RCR, а применом различитих улазних података, са тачношћу не већом од 5 cm.

Глобални геопотенцијални модели (GGM) и њихова примена

Један од најзначајнијих корака у поступку одређивања геоида или квазигеоида је избор адекватног GGM и његова правилна примена у оквиру RCR.

GGM представљају скуп коефицијената сферно хармонијског развоја потенцијала Земљине теже. Применом следећих теоријски дефинисаних израза могуће је у произвољној тачки одредити аномалије висина (GOCE Level 2 Product Data Handbook, 2010)

$$W(r, \theta, \lambda) = \frac{GM^{REF}}{a^{REF}} \sum_{n=0}^{N_{\max}} \left(\frac{a^{REF}}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \left(\bar{C}_{nm}^{ELL} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^{ELL} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) + \frac{1}{2} \left(\omega^{REF} \right)^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (18)$$

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{GM^{REF}}{a^{REF}} \left(\sum_{n=0(2)}^8 \left(\frac{a^{REF}}{r} \right)^{n+1} \bar{C}_n^{REF} \bar{P}_n(\cos \theta) \right) + \frac{1}{2} \left(\omega^{REF} \right)^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (19)$$

где је

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm}^{ELL} \\ \bar{S}_{nm}^{ELL} \end{Bmatrix} = \left(\frac{GM^{GGM}}{GM^{REF}} \right) \left(\frac{a^{GGM}}{a^{REF}} \right)^n \begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm}^{GGM} \\ \bar{S}_{nm}^{GGM} \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

$$T = W - U, \quad (21)$$

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} \quad (22)$$

GM је производ гравитационе константе и масе Земље, a је велика полуоса – средњи полупречник екватора Земље, n и m су степен и ред GGM, N_{\max} је максимални степен GGM, r , θ и λ су сферне координате, \bar{P}_{nm} и \bar{P}_n ортонормиране Лежандрове функције, \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} коефицијенти сферно-хармонијског и ω угаона брзина Земљине ротације. Вредности које у ознаци имају REF односе се на усвојени референтни систем (у овом раду GRS80), вредности са ознаком GGM се односе на усвојени GGM, а вредности са ознаком ELL означавају вредности које се односе на сферно-хармонијске коефицијенте након узрамеравања, као што је приказано у једначини (20). У једначини (21) T је аномалијски потенцијал који представља разлику реалног (W) и нормалног (U) потенцијала.

Међународно удружење за геодезију организација за геодезију (International Association of Geodesy – IAG), публикује све расположиве глобалне моделе преко Међународног центра за глобалне моделе Земље (International Centre for Global Earth Models - ICGEM). Тренутно се са званичне интернет стране ICGEM може преузети 153 GGM, од којих први датира из 1966. године, а за сада последњи већ из 2016. године. Модели се преузимају у облику текстуалних датотека у којима су архивирани оцене коефицијената \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} и тачност њиховог одређивања.

Слика 6. Део текстуалне датотеке у којој су смештени подаци о глобалном геопотенцијалном моделу

Са слике 6 се може видети део текстуалне датотеке у којој су садржани подаци о GGM, где се у другој и трећој колони налазе ознаке за степен и ред модела, респективно, док су у четвртој, петој, шестој и седмој колони дати коефицијенти модела заједно са тачношћу њиховог одређивања.

Одређивање нормалних висина применом GNSS и глобалног геопотенцијалног модела GGM05C

За одређивање нормалних висина применом (17), као што јер већ наведено, постоји 153 јавно доступних глобалних геопотенцијалних модела, а у овим истраживањима одлучено је да се употреби модел GGM05C (Ries et al., 2016) из два разлога:

- GGM05C је најновији модел публикован од стране ICGEM
- и модел је степена и реда 360, што омогућава директно упоређење са применама најчешће до сада коришћеног модела EGM96 (Lemoine et al., 1998) који је такође истог степена и реда.

Модел је примењен на основу израза (18)-(22) и то у 1073 тачке на територији Србије (Agren et al., 2011) (Слика 7) за које су путем GNSS одређене елипсоидне висине. Поред тога, у истим тим тачкама познате су и саме нормалне висине одређене класичним геодетским методама. Ова чињеница омогућила је проверу квалитета одређивања нормалних висина применом (17) сматрајући терестрички одређене нормалне висине условно тачним вредностима. Сам квалитет квантитативно је одређен креирањем основних статистичких података скупа разлика R^{GGM05C} који је одређен применом следеће релације:

$$\left(R^{GGM05C}\right)_i = \left(H_{GGM05C}^N\right)_i - H_i^N \quad (23)$$

где је H_{GGM}^N вредност нормалне висине добијене из глобалног геопотенцијалног модела, а H^N условно тачне вредности нормалних висина одређених терестричким путем, при чему i узима редом вредности од 1 па до 1073.

Поред формирања скупа разлика R^{GGM05C} формиране је и скуп разлика R^{EGM96} при примени модела EGM96 на идентичан начин као и у случају примене модела GGM05C.

Слика 7. Просторни распоред тачака на територији Србије у којима су одређене вредности елипсоидних и нормалних висина

Основни статистички подаци свих одређивања приказани су у табели 1, општи облици површи разлика приказани су на слици 8, а хистограми разлика на слици 9.

Табела 1. Основни статистички подаци R_i

Слика 8. Општи облик површи разлика (лево R^{GGM05C} , десно R^{EGM96})

Слика 9. Хистограм разлика (лево R^{GGM05C} , десно R^{EGM96})

Из приказаних основних статистичких података и општог облика површи разлика R^{GGM05C} може се закључити следеће:

- минимална вредност износи -0.42 m, максимална 0.62 m, са средњом вредношћу од 0.01 m и стандардном девијацијом 0.18 m,
- у северном делу Србије, на територији Војводине квалитет одређивања нормалних висина налази се у распону ± 10 m,
- на територији изражених топографских маса (маса изнад геоида), на подручју Златибора на граници са Босном и Херцеговином, разлике достижу минималне екстремне вредности од -45 m до -40 m,
- максималну позитивну вредност од 60 m разлике достижу у јужном делу Србије, односно на граници са Македонијом и Албанијом,
- у централном делу Србије у непосредној близини тока реке Велике Мораве велики број разлика има вредност блиску нули и очигледно да у тим подручјима нигде не прелази границу од ± 10 m (на слици 8 подручја обележена белом бојом).

Упоређењем скупа разлика R^{GGM05C} са скупом разлика R^{EGM96} следи да се са глобалним моделом GGM05C постиже далеко квалитетнија оцена нормалних висина:

- распон скупа разлика R^{EGM96} износи 2.42 m што је за 1.38 m већи распон од скупа R^{GGM05C} ,
- упоређењем хистограма разлика (слика 9) може се уочити да је хистограм скупа разлика асиметричан као и то да се разлике групишу у три дела, око вредности -1.6 m, затим -0.6 m и 0.2 m, док у случају хистограма разлика R^{GGM05C} јасно је уочљива симетрија распореда разлика који се групишу око средње вредности чија је вредност 0.01 m.

Из свега наведеног може се рећи да нови модел даје значајно бољу оцену нормалних висина у односу на често коришћени модел EGM96. Само из упоређења распона разлика може се рећи да је унапређење веће од 50%.

Закључак

У раду је приказана оцена нормалних висина применом GNSS и GGM у 1073 тачке, које су релативно правилно распоређене на територији Србије и чије су нормалне висине претходно одређене класичним геодетским терестричким методама. При оцени нормалних висина коришћене су елипсоидне висине одређене применом GNSS и аномалија висина одређених применом GGM GGM05C. Из приказаног упоређења може се рећи да оцене нормалних висина одступају од условно тачних вредности за минимално -0.42 m, максимално 0.62 m, средњом вредношћу од 0.01 m са стандардном девијацијом од 0.18 m.

Поред примене модела GGM05C за оцену нормалних висина примењиван је и модел EGM96. Резултати упоређења примене наведена два модела указују да се применом модела GGM05C добијају квалитетније оцене нормалних висина за више од 50%.

Литературу видети на страни 115.