

O METODOLOGIJI DVOSTRUKOG OSREDNJAVANJA – PREGLED ISTORIJSKOG RAZVOJA I TEORIJSKE OSNOVE –

Dejana ĐORĐEVIĆ¹, Dubravka POKRAJAC²

¹Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

²School of Engineering, University of Aberdeen

REZIME

U radu se prikazuje metodologija koja je nastala kao rezultat potrebe da se matematički rigorozno opišu pojave i procesi kod prostorno heterogenog strujanja, tj. strujanja u sredinama koje ispunjavaju i tečna i čvrsta faza ili strujanja neposredno iznad elemenata rapavosti bilo da je reč o krupnom nanosu, životinjskim organizmima na dnu ili vodenoj vegetaciji. Reč je o metodologiji dvostrukog osrednjavanja u kojoj se Navije-Stoksove jednačine sukcesivno osrednjavaju po vremenu i prostoru. Kroz istorijski pregled pokazuje se kako se došlo do ideje kombinovanja vremenskog osrednjavanja karakterističnog za turbulentne tokove i prostornog osrednjavanja, karakterističnog za tečenje kroz poroznu sredinu, a potom i do ideje da se metodologija primeni u hidraulici otvorenih tokova za modeliranje tečenja u koritima sa krupnim nanosom (šljunkom, oblucima i gromadama), koritima i kanalima sa potopljenom i nepotopljenom vegetacijom ili preko plavnih površina. Daju se definicije fiktivne i sopstvene prostorno (zapreminski) osrednjene veličine, prikazuju pravila dvostrukog osrednjavanja i pokazuje kako se ona primenjuju da bi se dobile jednačine koje opisuju tečenje preko nepokretnog rapavog dna. Na primeru dvostrukog osrednjavanja količine kretanja iz [23] pokazuje se da redosled osrednjavanja – vremensko pa prostorno, ili prostorno pa vremensko ne utiče na konačni oblik dvostruko osrednjenih Navije-Stoksovih jednačina. Takođe se pokazuje da se matematički rigoroznim postupkom dvostrukog osrednjavanja dobijaju jednačine u kojima figurišu sve relevantne sile / naponi koji se u samo vremenski osrednjene, Rejnoldsove jednačine dodaju *ad hoc* u zavisnosti od problema koji se rešava. Primeri su sila otpora oblika koju stvaraju elementi rapavosti i sila trenja po površini tih elemenata, kao i napon koji je posledica prostorne neravnomernosti rasporeda brzina izazvane prisustvom

elemenata rapavosti – tzv. *napon usled prisustva elemenata rapavosti*. Primena metodologije dvostrukog osrednjavanja prikazuje se na primeru tečenja preko rapavog, poroznog dna sastavljenog od pet slojeva pravino poređanih kuglica. Prikazuju se rasporedi brzine u pravcu glavnog toka između kuglica po dubini poroznog dna i u slobodnom toku iznad rapavog dna, u vertikalnoj ravni paralelnoj sa glavnim tokom i rasporedi po dubini toka ove komponente dvostruko osrednjene brzine, dvostruko osrednjenoj Rejnoldsovoj naponu iz vertikalne ravni i dvostruko osrednjene kinetičke energije turbulencije, koji na prelazu iz poroznog dna u slobodan tok imaju velike gradijente.

Cljučne reči: prostorna heterogenost, statistički reprezentativna zapremina osrednjavanja, poroznost, dvostruko osrednjavanje

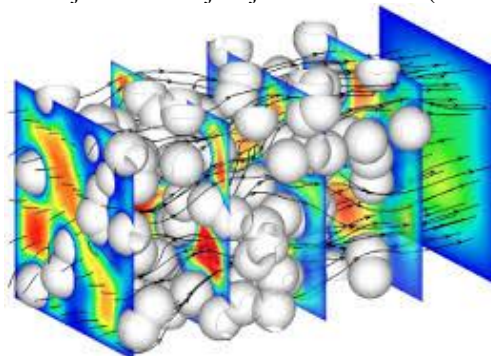
1. UVOD

Cilj ovog rada je da našu naučnu i stručnu javnost upozna sa metodologijom modeliranja prostorno heterogenog strujanja – metodologijom dvostrukog osrednjavanja. Prostorno heterogeno strujanje je strujanje u oblasti koju ispunjavaju i tečna i čvrsta faza ili strujanje preko elemenata rapavosti, kao što su npr. krupan nanos na dnu korita ili podvodna vegetacija. To, dakle, nije samo strujanje u porznoj sredini koje je prva asocijacija svakom inženjeru hidrotehnike (slika 1), već je to i strujanje: 1) u planinskim / bujičnim vodotocima sa krupnim nanosom na dnu gde voda teče između oblutaka i gromada (slika 2a) ili preko šljunkovitog dna (slika 2b), 2) strujanje u koritima vodotoka i kanalima sa potopljenom (slika 3a) i nepotopljenom vodenom vegetacijom (slika 3b) i 3) strujanje preko plavnih površina za vreme velikih voda (slika 4).

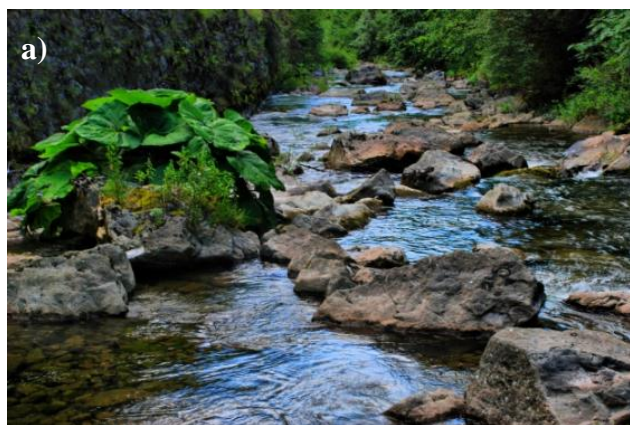
Osim za modeliranje prostorno heterogenog strujanja, primena metodologije dvostrukog osrednjavanja postaje neizbežna u obradi i analizi rezultata direktnih numeričkih simulacija, tj. direktnog rešavanja Navije-Stoksovih jednačina kada se dobija veliki broj podataka koje treba obraditi i prikazati tako da daju upotrebljive informacije. Na slici 5 prikazan je jedan takav primer u kojem se razmatra nastanak i kretanje nanosnih oblika na dnu.

Metodologija dvostrukog osrednjavanja je matematički postupak transformacije jednačina u kojima figurišu trenutne vrednosti zavisno promenljivih veličina (jednačine održanja mase, Navije-Stoksovih jednačina, transportnih jednačina za skalarne veličine kao što su temperatura, pasivne materije i lebdeći nanos). Postupak se sastoji iz dva koraka. U jednom se jednačine

osrednjavaju po prostoru, a u drugom po vremenu, ili po skupu slučajnih realizacija u jednom trenutku (slika 6)¹.



Slika 1. Strujanje u poroznoj sredini: vremenski osrednjeno, prostorno heterogeno strujno polje [4]



Slika 2. Planinski vodotoci. Tečenje: a) između gromada – reka Đetinja [12] i b) preko šljunkovitog dna [10]

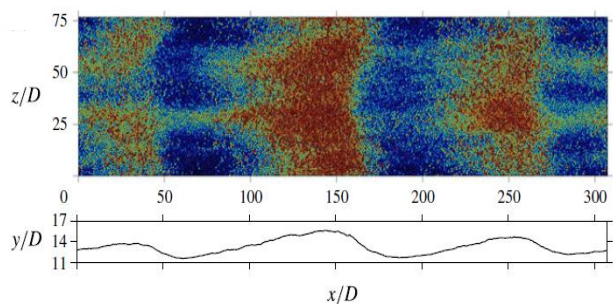


Slika 3. Tečenje a) kroz i preko potopljene vegetacije [11] i b) kroz nepotopljenu vegetaciju [13]

¹ S obzirom na to da su terenska merenja u hidrotehnici složena i skupa, vrlo retko se ponavljaju veliki broj puta da bi se sprovedo osrednjavanje po skupu slučajnih realizacija merenih hidrodinamičkih veličina, već se, uz pretpostavku o stacionarnosti i ergodičnosti slučajnog procesa, sve statistike, pa, dakle, i srednja vrednost dobijaju osrednjavanjem po vremenu podataka prikupljenih tokom jednog merenja [18].



Slika 4. Lonjsko polje za vreme poplava [9]. Lonjsko polje je planski rezervisan prostor namenjen aktivnoj zaštiti od poplava. Ovaj pošumljen prostor služi za prihvatanje dela zapremine talase velike vode.

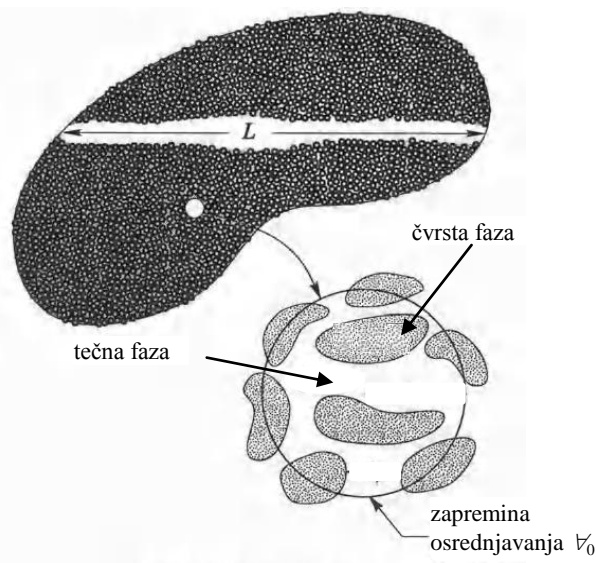


Slika 5. Rezultati direktne numeričke simulacije u analizi nastanka i kretanja nanosnih oblika na dnu [14]. Slika gore prikazuje trenutni položaj pokretnog dna po celoj širini kanala, gde je bojom prikazan visinski položaj zrna pokretnog dna na granici sa tečnom fazom (plava boja odgovara nižim kotama, a crvena višim). Slika dole prikazuje prostorno osrednjen (osrednjen po širini) oblik pokretnog dna duž kanala.

Ideja osrednjavanja po vremenu potiče još od Rejnolds. Međutim, ona je krajem 1930ih zamenjena probablističkim osrednjavanjem, tj. osrednjavanjem po skupu slučajnih realizacija [18]. Ideja prostornog osrednjavanja javila se potpuno nezavisno, više od jednog veka kasnije, tokom 1960ih. Ona je nastala iz potrebe da se opiše laminarno strujanje u dvofaznoj, poroznoj sredini gde su prisutne i čvrsta i tečna faza (slike 1 i 7). Takvo prostorno heterogeno strujanje u slučaju linijskog tečenja opisuje se, kao što je svima poznato, Darsijevim zakonom u kojem figuriše fiktivna brzina. Ova brzina jednaka je proticaju podeljenom sa površinom preseka upravnim na strujanje koja obuhvata i pore i čvrsti materijal.



Slika 6. Osrednjavanje po vremenu i osrednjavanje po skupu slučajnih realizacija [27]. Osrednjavanje po vremenu može se obaviti za svaku realizaciju (ogled ili terensko merenje). Osrednjavanje po skupu slučajnih realizacija sprovodi se u jednom trenutku za sve realizacije iz datog skupa.



Slika 7. Porozna sredina sa uvećanim prikazom zapremine osrednjavanja (prilagodjeno iz [1 i 31])

Darsi je predložio ovaj zakon 1856. godine na osnovu laboratorijskih oglada filtracije, a Vitaker ga je, podstaknut diskusijama sa Slaterijem tokom 1960ih [31], matematički dokazao 1986. godine prostornim osrednjavanjem Navije-Stoksovih jednačina [30]. S obzirom na to da je razmatrano laminarno tečenje, vremensko osrednjavanje zavisno promenljivih nije bilo potrebno. Prostorno osrednjavanje je omogućilo da se

opiše globalno strujanje u poroznoj sredini bez ulaženja u detalje strujanja između čvrstih čestica.

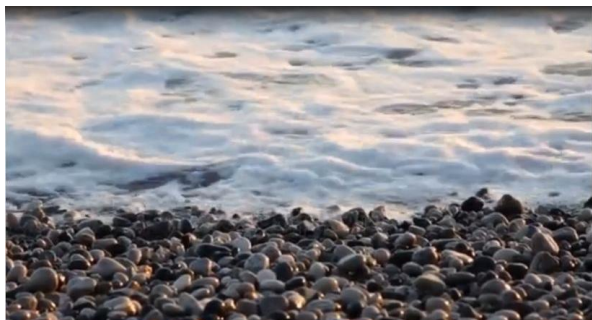
Mogućnost kombinovanja vremenskog i prostornog osrednjavanja u modeliranju turbulentnog strujanja prvi su tokom 1970ih prepoznali mikrometeorolozi². Koristeći klasične modele turbulencije, zasnovane na korišćenju gradijenta brzine (ili Businekovom modelu vrtložne viskoznosti ili Prantlovom modelu dužine mešanja), zaključili su da se ovakvim zatvaranjem vremenski osrednjenih Navije-Stoksovih jednačina (Rejnoldsovih jednačina) ne dobijaju dobra slaganja sa podacima laboratorijskih i terenskih merenja. Štaviše, Vilson i Šo došli su do zaključka da vremensko osrednjavanje nije dovoljno da bi se opisali uočeni procesi razmene količine kretanja prilikom strujanja vazduha preko vegetacije i kroz vegetaciju, pa samim tim ni transportni procesi između biljnog pokrivača i donjih slojeva atmosfere [32]. Razloge tog neslaganja Vilson i Šo pripisali su prostornoj nehomogenosti strujnog polja koje svojim prisustvom stvara vegetacija. Stoga su predložili dodatno osrednjavanje vremenski osrednjenih Navije-Stoksovih jednačina, ovoga puta po prostoru i to po horizontalnim ravnima na površini koja je dovoljno velika da statistički osrednji sve promene usled nejednakog rastojanja između biljnih jedinki i uticaja najvećih vrtloga koji doprinose pronosu količine kretanja [32]. Prema Vilsonu i Šou, ovakvim, matematički rigoroznim postupkom dvostrukog osrednjavanja, najpre u vremenu, a potom u prostoru, dobijaju se jednačine u kojima figurišu sve sile bitne za opisivanje strujanja i pratećih procesa u prostorno nehomogenoj sredini. Te sile dobijaju se, dakle, kao rezultat postupka dvostrukog osrednjavanja, za razliku od Rejnoldsovih jednačina u kojima se, neke od njih, dodaju *ad hoc* u zavisnosti od problema koji se rešava. One se pojavljuju kao novi članovi (biće prikazani i objašnjeni u delu 3 Dvostruko osrednjene Navije-Stoksove jednačine), na sličan način kao što se Rejnoldsovi naponi pojavljuju nakon vremenskog osrednjavanja Navije-Stoksovih jednačina. Vilson i Šo predlažu da se Rejnoldsovi naponi modeliraju transportnim jednačinama za Rejnoldsove napone, a da se za članove dobijene dvostrukim osrednjavanjem primenjuju postupci parametrizacije na osnovu podataka laboratorijskih ili terenskih merenja. Postupak vremenskog i prostornog (dvostrukog) osrednjavanja

Navije-Stoksovih jednačina u oblasti mikrometeorologije dalje su razvijali i unapređivali Raupak i Šo [25], Raupak i saradnici [26] i Finigan [5, 6]. Finigan je 1985. godine predložio da se umesto prostornog osrednjavanja po horizontalnim ravnima postavljenim na malim vertikalnim rastojanjima, Rejnoldsove jednačine osrednjavaju po tankim horizontalnim slojevima (dakle, po zapremini).

Krajem 1990ih i početkom 2000ih primena metodologije dvostrukog osrednjavanja proširena je sa razmatranja laminarnog, na turbulentno tečenje u poroznoj sredini (tečenje pri vrednostima Rejnoldsovog broja u porama porozne sredine $Rep > 300$) [3].

Istovremeno je grupa istraživača koja se bavi izučavanjem tečenja u vodotocima sa krupnim nanosom na dnu, predvođena Vladimirom Nikorom, prepoznala mogućnosti metodologije dvostrukog osrednjavanja u rešavanju problema i zadataka u oblasti hidraulike otvorenih tokova. Jedan od najslikovitijih primera je slučaj tečenja između elemenata rapavosti (oblutaka i gromada, slika 2a) pri niskim vodostojima (u malovodnom periodu), uz napomenu da se primena ove metodologije preporučuje i pri velikim vodama kada su elementi rapavosti potopljeni. Početak primene metodologije dvostrukog osrednjavanja vezan je, kao i u slučaju mikrometeorologije, za osrednjavanje po ravnima paralelnim sa osrednjenom ravni dna [17], ali se sa osnivanjem radne grupe za razvoj i promociju metodologije dvostrukog osrednjavanja u oblasti hidraulike koja se bavi problemima zaštite životne sredine (environmental hydraulics), vrlo brzo prešlo na zapreminsko osrednjavanje, tj. osrednjavanje po tankim slojevima paralelnim sa osrednjenom ravni dna. Član ove grupe bila je i drugi autor ovog rada. Radna grupa se bavila i pitanjem redosleda osrednjavanja Navije-Stoksovih jednačina, tj. pitanjem komutativnosti operatora vremenskog i prostornog osrednjavanja [18]. Nakon detaljnih matematičkih izvođenja, utvrđeno je da su u slučaju nepokretnog dna ili dna kod koga se elementi rapavosti – "zrna" nanosa sporo pomeraju ne menjajući značajno oblik dna, ova dva operatora komutativna. To su slikovito pokazali Pokrajac i saradnici [23] matricom osrednjavanja. Ona će biti prikazana u delu 3 Dvostruko osrednjavanje Navije-Stoksovih jednačina.

² Mikrometeorolozi izučavaju procese razmene toplote, vlažnosti vazduha – vodene pare i kiseonika / ugljen dioksida između biljnog pokrivača i vazduha koji struji u prizemnom sloju atmosfere.



Slika 8. Talasi na morskom žalu – oscilatorno kretanje preko rapavog dna [2]

Metodologija dvostrukog osrednjavanja našla je svoju primenu i u slučaju tečenja po pokretnom rapavom dnu [19 i 24] i talasnog (oscilatornog) kretanja uz morsk obalu gde su morski talasi u stalnoj interakciji sa pokretnim rapavim dnom (slika 8) čija rapavost potiče ili od šljunka i oblutaka ili od nanosnih oblika koji se stvaraju na sitnoznom, peščanom dnu [7].

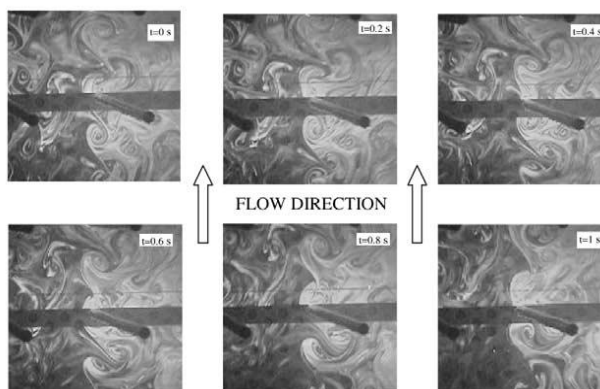
Tečenje u prirodnim vodotocima ili u hidromelioracionim i plovidbenim kanalima (slika 9) može se, kao i strujanje vazduha preko biljnog pokrivača, analizirati primenom metodologije dvostrukog osrednjavanja, budući da na njihovom dnu ili uz obale raste vodena vegetacija koja strujno polje čini prostorno nehomogenim. Inspirisani radovima Raupaka i Finigana, Podi i saradnici [20 i 21] su ispitivali strujnu sliku u laboratorijskom kanalu sa potopljenim krutim cilindrima (slika 10) korišćenjem neinvazivne tehnike merenja brzina (laserskog anemometra za merenje dve komponente brzine, koji radi na principu Doplerovog efekta – LDA sondu). Na osnovu ovih istraživanja utvrdili su kako gustina vegetacije utiče na strukturu turbulencije u slojevima toka koji su pod njenim uticajem i predložili: 1) model za opisivanje turbulencije u tzv. podsloju vegetacije (canopy sublayer – CSL), 2) parametrizaciju za koeficijent otpora oblika skupa potopljenih cilindara i 3) nov model za dužinu mešanja. Tanino i Nepf [28 i 29] su primenile metodologiju dvostrukog osrednjavanja u analizi bočne disperzije unutar slučajno raspoređenog skupa krutih nepotopljenih cilindara i za parametrizaciju koeficijenta otpora oblika koji stvara ovakav skup cilindara. Nikora i saradnici [16] primenili su metodologiju dvostrukog osrednjavanja za analizu izmerenih rasporeda brzina u zatavljenom kanalu i predložili novi, jedinstven izraz za raspored brzine po dubini toka koji objedinjuje sva četiri mehanizma koji utiču na raspored brzine. To su: 1) uticaj vegetacije kroz koju voda teče približno konstantnom



Slika 9. Kanal Bogojevo-Bečej u mreži HMP sistema DTD

brzinom (uniform velocity distribution), 2) mešanje u sloju smicanja pri vrhu vegetacije koje je posledica postojanja tačke infleksije na rasporedu dvostruko osrednjene brzine (mixing layer analogy), 3) turbulencija u graničnom sloju iznad vegetacije sa logaritamskim rasporedom brzine (boundary layer concept) i 4) turbulencija u slobodnom toku izvan graničnog sloja sa vrtlozima različite veličine (wake function concept).

Vegetacija koja raste na plavnim površinama takođe je uzrok nehomogenosti strujnog polja tokom prolaska talasa velikih voda. U tom smislu, metodologija dvostrukog osrednjavanja predstavlja dobru osnovu za planiranje pošumljavanja plavnih površina (slika 4) kao mere za ublažavanje ekonomskih i socijalnih posledica poplava. Primena metodologije dvostrukog osrednjavanja u analizi tečenja preko vegetacijom obraslih plavnih površina predmet je naučnog projekta DoubleVeg iz Programa saradnje srpske nauke sa dijasporom, koji finansira Fond za nauku. Ovaj pregledni rad jedan je od planiranih rezultata ovog projekta.



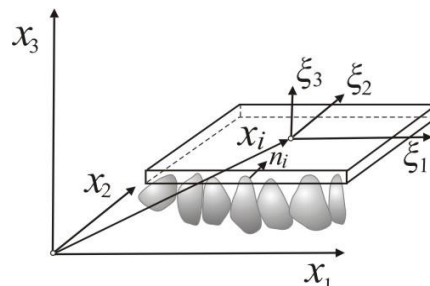
Slika 10. Razvoj vrtloga između potopljenih krutih cilindara [20]

U nastavku se prvo prikazuju teorijske osnove metodologije dvostrukog osrednjavanja, potom se metodologija primenjuje na osrednjavne Navije-Stoksovih jednačina i na kraju se prikazuju neki od rezultata dobijenih primenom ove metodologije.

2. DVOSTRUKO OSREDNJAVANJE – TEORIJSKE OSNOVE

Dvostruko osrednjene Navije-Stoksove jednačine, jednačina održanja mase i transportne jednačine za skalarne veličine kao što su temperatura, pasivne materije i lebdeći nanos, mogu se dobiti na dva načina. Ova dva načina razlikuju se po redosledu osrednjavanja. Prvi podrazumeva da se jednačine najpre osrednje po vremenu, a zatim po prostoru (vremensko-prostorno osrednjavanje), a drugi, da prostorno osrednjavanje prethodi vremenskom osrednjavanju (prostorno-vremensko osrednjavanje). Početkom 2000ih aktivno se polemislalo o tome da li se u oba slučaja dobijaju iste jednačine [3 i 18]. Nikora i saradnici su nakon detaljnih teorijskih razmatranja i izvođenja došli do zaključka da je konačni rezultat nezavisan od redosleda osrednjavanja [18 i 23]. To će biti prikazano nešto kasnije na primeru prostorno osrednjenih napona turbulencije [23].

Prostorno-vremensko osrednjavanje karakteristično je za hidrauliku podzemnih voda i strujanje u poroznoj sredini. Vremensko-prostorno osrednjavanje intuitivno je blisko mikrometeorozima i hidrauličarima otvorenih tokova koji mernim uređajima beleže vremenske serije kinematičkih i skalarnih veličina u diskretnom broju „tačaka”, tj. malih zapremina. Njihovim osrednjavanjem u statistički reprezentativnim intervalima dobijaju se prostorno heterogena polja vremenski osrednjenih brzina i skalarnih promenljivih (slika 1). Ta „polja” se zatim osrednjavaju u prostoru izborom pogodne zapremine tako da se dobiju statistički reprezentativni rezultati (tj. rezultati koji ne zavise od veličine te zapremine). Kod otvorenih tokova sa rapavim dnom statistički reprezentativna zapremina je sloj paralelan sa osrednjenom ravni dna (slika 11). Oblast integracije nalazi se oko tačke x_i , a integracija se obavlja u lokalnom koordinatnom sistemu ξ_j . Kod otvorenih tokova indeks 1 u globalnom koordinatnom sistemu odgovara koordinatnoj osi u pravcu glavnog toka koji je paralelan sa osrednjenom ravni dna, a to je osa x . Indeks 2 odgovara osi u ravni poprečnog preseka usmerenoj ka levoj obali – osi y , a indeks 3, vertikalnoj osi usmerenoj ka slobodnoj površini – osi z . Odgovarajuće komponente brzine su $u_1 \equiv u$, $u_2 \equiv v$ i $u_3 \equiv w$. Kroz elemente rapavosti i neposredno iznad njih



Slika 11. Reprezentativna zapremina za prostorno osrednjavanje u globalnom (x_1, x_2, x_3) i lokalnom koordinatnom sistemu (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Ispod vrhova elemenata rapavosti ona obuhvata i tečnu i čvrstu fazu [19]. Vektor položaja težišta zapremine obeležava se sa x_i , a ort normale na čvrstu granicu usmeren ka fluidu sa n_i .

(gde je oblast strujanja heterogena), slojevi su male debljine, da bi se što bolje opisalo tečenje u oblasti velikih gradijenata brzina. U delu slobodnog toka debljina slojeva, kao što su pokazali Pokrajac i de Lemos [24], može biti veća. To, međutim, zahteva uvođenje novih članova u izraze kojima je definisana teorema osrednjavanja, tj. zahteva proširenje ove teoreme, što za posledicu ima pojavljivanje novih članova u dvostruko osrednjenim jednačinama. Proširena teorema osrednjavanja i dvostruko osrednjene Navije-Stoksove jednačine za promenljive zapremine osrednjavanja definisane su i izvedene u radu [24]. S obzirom na to da opisivanje korišćenja promenljivih zapremina osrednjavanja prevazilazi okvir ovog rada, ovaj postupak se neće prikazivati. Reprezentativnu zapreminu osim njene visine (debljine sloja) određuje i veličina njene projekcije u ravni paralelnoj sa osrednjenom ravni dna. Ta površina mora biti dovoljno velika da u blizini dna obezbedi statistički reprezentativan uzorak prostorno heterogenog strujnog polja – mora da obuhvati sve veličine vrtloga koji nastaju u prisustvu elemenata rapavosti, a istovremeno dovoljno mala da ne obuhvati velike elemente u topografiji rečnog dna kao što su tišaci i brzaci u bujičnim vodotocima [VN2] ili sprudovi u razuđenim vodotocima bilo da je reč o srednjem toku gde je nanos krupniji ili donjem toku, gde je nanos sitniji.

Reprezentativna zapremina \forall_0 u blizini dna, dakle, obuhvata i tečnu i čvrstu fazu. Veličina θ može se osrednjiti po celoj reprezentativnoj zapremini \forall_0 i tada nosi oznaku $\langle \theta \rangle_s$, ili samo u delu te zapremine koju zauzima fluid \forall_f , kada se jednostavno obeležava samo korišćenjem uglaste zagrade $\langle \theta \rangle$. Uglasta zagrada

ukazuje na prostorno osrednjavanje. Donji indeks „s”, koristi se da označi *fiktivnu zapreminski osrednjenu vrednost*, što znači da nije reč o stvarnoj veličini, već o *čisto računskoj kategoriji* (kao što je npr. Darsijeva brzina). U stručnoj literaturi pisanoj na engleskom jeziku za ovako osrednjenu vrednost koristi se pojam *superficial average*, odakle potiče i oznaka „s”. Osrednjavanjem u delu zapremine osrednjavanja koju zauzima fluid \forall_f , dobija se *sopstvena zapreminski osrednjena vrednost*. Za ovako osrednjenu vrednost u engleskom jeziku koristi se pojam *intrinsic average*. U hidraulici otvorenih tokova najčešće se koristi *sopstvena zapreminski osrednjena vrednost* $\langle \theta \rangle$.

Sam postupak prostornog osrednjavanja ekvivalentan je postupku filtriranja podataka i može se predstaviti integralom konvolucije sa odgovarajućom kernel funkcijom. Najjednostavniji filter je onaj koji koristi uniformnu kernel funkciju [18]:

$$\gamma(x_i, t) = \begin{cases} 1, & \text{u delu zapremine ispunjene fluidom} \\ 0, & \text{u preostalom delu zapremine} \end{cases} \quad (1)$$

Tada se fiktivna i sopstvena zapreminski osrednjena vrednost određuju na sledeći način [18]:

$$\langle \theta \rangle_s(x_i, t) = \frac{1}{\forall_0} \int_{\forall_0} \theta(x_i + \xi_i, t) \gamma(x_i + \xi_i, t) d\forall = \quad (2a)$$

$$= \frac{1}{\forall_0} \int_{\forall_f} \theta(x_i + \xi_i, t) d\forall$$

$$\langle \theta \rangle(x_i, t) = \frac{1}{\forall_f} \int_{\forall_0} \theta(x_i + \xi_i, t) \gamma(x_i + \xi_i, t) d\forall = \quad (2b)$$

$$= \frac{1}{\forall_f} \int_{\forall_f} \theta(x_i + \xi_i, t) d\forall$$

Veličina θ može biti skalar, vektor ili tenzor. Za uniformnu kernel funkciju, njena prostorno osrednjena vrednost u delu zapremine osrednjavanja koju zauzima fluid je $\langle \gamma \rangle = 1$. Zapremina fluida \forall_f unutar zapremine osrednjavanja \forall_0 je $\forall_f = \int_{\forall_0} \gamma(x_i + \xi_i, t) d\forall$.

Dva operatora prostornog osrednjavanja međusobno su povezana preko parametra ϕ koji Nikora i sar. tumače ili kao funkciju geometrije elemenata rapavosti ili kao poroznost: $\phi = \forall_f / \forall_0$ [18].

Vrednost neke veličine X u tački može se predstaviti zbirom njene prostorno osrednjene vrednosti $\langle X \rangle$ i odstupanja od prostorno osrednjene vrednosti („prostorne fluktuacije”) $\tilde{X} : X = \langle X \rangle + \tilde{X}$. Kao što je u slučaju vremenskog osrednjavanja srednja vrednost fluktuacije jednaka nuli ($\overline{\tilde{X}} = 0$), tako je i prostorno osrednjena vrednost „prostorne fluktuacije” jednaka nuli: $\langle \tilde{X} \rangle = 0$

Pravila prostornog osrednjavanja za zbir i proizvod ista su kao kod vremenskog (Rejnoldsovog) osrednjavanja:

1. Prostorno osrednjena vrednost zbira jednaka je zbiru osrednjenih vrednosti:

$$\langle X + Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle \quad (4)$$

2. Prostorno osrednjena vrednost proizvoda konstante i vrednosti neke veličine u tački predstavlja proizvod konstante i prostorno osrednjene vrednosti te veličine:

$$\langle aX \rangle = a\langle X \rangle \quad (5)$$

3. Prostorno osrednjena vrednost proizvoda prostorno osrednjene i trenutne vrednosti jednaka je proizvodu prostorno osrednjenih vrednosti:

$$\langle \langle X \rangle Y \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle \quad (6)$$

Da bi ovo pravilo moglo da se primeni, neophodno je da bude ispunjen uslov reprezentativnosti zapremine osrednjavanja [18].

4. Do izraza za prostorno osrednjenu vrednost proizvoda dolazi se na sličan način kao i do vremenski osrednjene vrednosti proizvoda. Pri tome se koriste pravilo (6) i činjenica da je prostorno osrednjena vrednost „prostorne fluktuacije” jednaka nuli:

$$\langle XY \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle + \langle \tilde{X} \tilde{Y} \rangle \quad (7)$$

Prikazano razlaganje veličine na srednju vrednost i prostornu fluktuaciju i pravila 1-4 važe i za trenutnu i za vremenski osrednjenu veličinu, a mogu se čak primeniti i na vremensku fluktuaciju.

Pošto oblast osrednjavanja zavisi od četiri nezavisno promenljive – vremena t i tri prostorne koordinate x_i , operatori prostornog osrednjavanja i diferenciranja nisu komutativni. Stoga pravila prostornog osrednjavanja izvoda zahtevaju uvođenje teorema kojima se uspostavlja veza između prostorno osrednjenih izvoda neke veličine i izvoda te prostorno osrednjene veličine. Postoje dve teoreme – jedna za izvod po vremenu, i druga, za izvod po prostoru. Obe su predložili istraživači koji se bave izučavanjem višefaznih fluida i strujanjem u poroznoj sredini (*multiphase flow*, i *flow in porous medium*) krajem 1960ih. Ove teoreme su se vremenom uobličavale tokom rešavanja različitih problema u ovoj oblasti. Poslednje verzije ovih teorema sa kompletnim izvođenjem mogu se naći u [31].

Teorema o osrednjavanju izvoda neke veličine po vremenu u celoj reprezentativnoj zapremini poznata je pod nazivom *teorema transporta (transport theorem)* i glasi [31 i 18]:

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\rangle_s = \frac{\partial \langle \theta \rangle_s}{\partial t} + \frac{1}{\nabla_0} \iint_{A_{\text{cv.gr.}}} \theta v_i n_i dA \quad (8)$$

U podoblasti ispunjenoj fluidom ona se transformiše u:

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi \langle \theta \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\nabla_f} \iint_{A_{\text{cv.gr.}}} \theta v_i n_i dA \quad (9)$$

Sve veličine u ovim jednačinama osim $A_{\text{cv.gr.}}$ već su objašnjene; $A_{\text{cv.gr.}}$ je površina svih elemenata čvrste faze unutar zapremine osrednjavanja, a n_i je jedinični vektor normale na črstu granicu usmeren ka fluidu. U slučaju nepokretnog dna, koji se razmatra u ovom radu, drugi član u jednačinama (8) i (9) jednak je nuli, jer je brzina pomeranja čvrste granice $v_i = 0$.

Druga teorema odnosi se na izvod po prostoru i poznata je pod nazivom *teorema prostornog osrednjavanja (spatial-averaging theorem)*. Osrednjeni izvod po celoj zapremini definisan je izrazom [31 i 18]:

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right\rangle_s = \frac{\partial \langle \theta \rangle_s}{\partial x_i} - \frac{1}{\nabla_0} \iint_{A_{\text{cv.gr.}}} \theta n_i dA \quad (10)$$

a u podoblasti:

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi \langle \theta \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\nabla_f} \iint_{A_{\text{cv.gr.}}} \theta n_i dA \quad (11)$$

Kao i u slučaju pravila prostornog osrednjavanja 1-4, i ovde veličina θ može biti ili trenutna veličina ili veličina koja je već osrednjena po vremenu, što je bitno za postupak dvostrukog osrednjavanja u kojem vremensko, prethodni prostornom osrednjavanju. Nikora i sar. [18 i 19] predložili su teoreme prostornog osrednjavanja vremenski osrednjenih promenljivih za različite slučajeve tečenja – od tečenja po nepokretnom rapavom dnu, do tečenja po pokretnom rapavom dnu koje je predstavljeno ili nanosom u pokretu ili savitljivom vegetacijom koja se njiše. Ovde se koriste samo teoreme za slučaj nepokretnog dna ($v_i = 0$).

3. DVOSTRUKO OSREDNJENE NAVIJE-STOKSOVE JEDNAČINE

Dvostruko osrednjavanje sprovodi se tako što se postupci vremenskog i prostornog osrednjavanja primenjuju na svaku jednačinu, a zatim se na članove jednačine primenjuju pravila zbira i proizvoda i na kraju, teoreme osrednjavanja. Ovde je važno napomenuti da su sva četiri operatora, koja se koriste pri dvostrukom osrednjavanju, komutativna. To su operatori osrednjavanja (vremenskog i prostornog) i obe fluktuacije (vremenska i prostorna). Trenutna vrednost veličine θ u proizvoljnoj tački prostora može se prema Rejnoldsu razložiti na vremenski osrednjenu vrednost i fluktuaciju: $\theta = \bar{\theta} + \theta'$, a vremenski osrednjena veličina $\bar{\theta}$ može se razložiti na dvostruko osrednjenu vrednost $\langle \bar{\theta} \rangle$ i odstupanje vremenski osrednjene vrednosti u tački od dvostruko osrednjene vrednosti $\tilde{\bar{\theta}}$: $\bar{\theta} = \langle \bar{\theta} \rangle + \tilde{\bar{\theta}}$. Prethodni izraz dobija se kada se generalni izraz za razlaganje veličine u tački (na prostorno osrednjenu veličinu i prostornu fluktuaciju) primeni na vremenski osrednjenu veličinu $\bar{\theta}$. Ovde se još jednom podseća da taj generalni izraz može da se primeni i na trenutnu vrednost, a i na vremensku fluktuaciju.

Nakon dvostrukog osrednjavanja jednačine se ispisuju sa sopstvenim zapreminski osrednjenim vrednostima pojedinih

veličina. Pri tome je važno imati na umu da za nestišljiv fluid važi da je $\rho = \bar{\rho} = \langle \bar{\rho} \rangle = \text{const}$.

Radi lakšeg praćenja, pre početka izvođenja dvostruko osrednjenih jednačina napisace se jednačina održanja mase i Navije-Stoksove jednačine:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (13)$$

Dvostruko osrednjena jednačina održanja mase

Vremenski i prostorno osrednjena jednačina glasi:

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \right\rangle = 0 \quad (14)$$

Imajući u vidu prethodno uvedene pretpostavke, prvi član u jednačini, uz primenu (5), (6) i (9), postaje:

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi \langle \rho \rangle}{\partial t} = \frac{\rho}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (15)$$

a drugi član, sa pravilima (5), (6) i (11):

$$\left\langle \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\phi} \iint_{A_{\text{čv.gr.}}} \rho u_i n_i dA = 0 \quad (16)$$

$$= \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi \rho \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_i} = \frac{\rho}{\phi} \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_i}$$

Dvostruko osrednjena jednačina održanja mase tada glasi:

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (17)$$

Kao što se vidi, u dvostruko osrednjenom jednačini održanja mase umesto gustine ρ figuriše poroznost ϕ . U

slučaju nepokretnog dna koji se razmatra u ovom radu, poroznost se ne menja po vremenu, tako da je prvi član leve strane jednačine (17) jednak nuli. Kada je uz to dno homogeno, poroznost se ne menja po prostoru i dvostruko osrednjena jednačina održanja mase dobija isti oblik kao jednačina kontinuiteta za nestišljiv fluid samo što umesto brzine u tački sadrži dvostruko osrednjenu brzinu.

Dvostruko osrednjena jednačina održanja količine kretanja

Postupak dvostrukog osrednjavanja svih članova jednačine (13), osim člana sa proizvodom brzina ($\partial(u_i u_j) / \partial x_j$), je jednostavan – podrazumeva direktnu primenu pravila osrednjavanja (4)-(7) i teorema dvostrukog osrednjavanja (9) i (11), kao što je to bio slučaj kod jednačine održanja mase. Stoga se prvo objašnjava postupak osrednjavanja ovog člana.

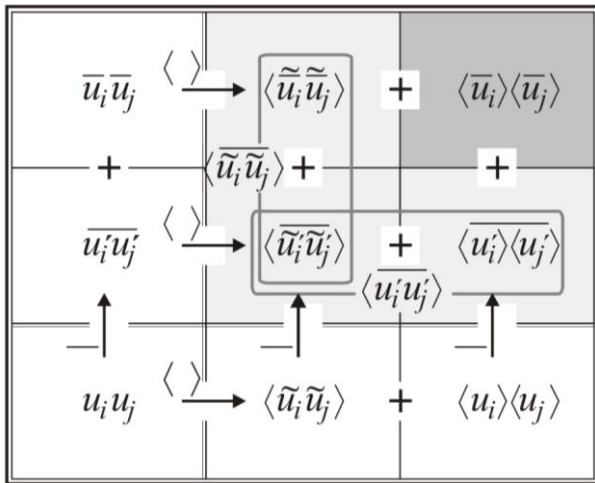
Prostornim osrednjavanjem vremenski osrednjenog proizvoda brzina $\bar{u}_i \bar{u}_j$ (kinematičke varijante protoka ko-

ličine kretanja ρu_i u pravcu j), uz primenu svih pravila vremenskog i prostornog osrednjavanja i uzimajući u obzir komutativnost sva četiri operatora, dobija se:

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{u_i u_j} \right\rangle &= \left\langle \bar{u}_i \bar{u}_j + u'_i u'_j \right\rangle = \left\langle \bar{u}_i \bar{u}_j \right\rangle + \left\langle u'_i u'_j \right\rangle = \\ &= \left\langle \bar{u}_i \right\rangle \left\langle \bar{u}_j \right\rangle + \left\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \right\rangle + \left\langle u'_i u'_j \right\rangle = \\ &= \left\langle \bar{u}_i \right\rangle \left\langle \bar{u}_j \right\rangle + \left\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \right\rangle + \left\langle u'_i \right\rangle \left\langle u'_j \right\rangle + \left\langle \tilde{u}'_i \tilde{u}'_j \right\rangle \end{aligned} \quad (18)$$

Do istog izraza dolazi se i vremenskim osrednjavanjem prostorno osrednjenog proizvoda $\left\langle u_i u_j \right\rangle$:

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{u_i u_j} \right\rangle &= \left\langle \overline{u_i} \right\rangle \left\langle \overline{u_j} \right\rangle + \left\langle \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \right\rangle = \left\langle \overline{u_i} \right\rangle \left\langle \overline{u_j} \right\rangle + \left\langle \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \right\rangle = \\ &= \left\langle \bar{u}_i \right\rangle \left\langle \bar{u}_j \right\rangle + \left\langle \overline{u'_i u'_j} \right\rangle + \left\langle \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \right\rangle = \\ &= \left\langle \bar{u}_i \right\rangle \left\langle \bar{u}_j \right\rangle + \left\langle \overline{u'_i} \right\rangle \left\langle \overline{u'_j} \right\rangle + \left\langle \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \right\rangle + \left\langle \overline{\tilde{u}'_i \tilde{u}'_j} \right\rangle \end{aligned} \quad (19)$$



Slika 12. Matrica dvostrukog osrednjavanja prema [23]. Svi protoci količine kretanja podeljeni su gustinom ρ i pomnoženi sa (-1)

To znači da redosled osrednjavanja – vremensko pa prostorno, ili prostorno pa vremensko ne utiče na konačan rezultat dvostrukog osrednjavanja. Pokrajac i sar. [23] su ovo pravilo pregledno prikazali matricom osrednjavanja prikazanom na slici 12. Proces osrednjavanja počinje u donjem levom uglu gde se nalazi kinematički ekvivalent protoka količine kretanja $u_i u_j$. Vremensko osrednjavanje obavlja se od najniže vrste na gore (\uparrow), a prostorno osrednjavanje, od prve kolone u desno (\rightarrow). Shodno tome, u kolonama ove matrice prikazani su rezultati vremenskog, a u vrstama, rezultati prostornog osrednjavanja. I vremenskim i prostornim osrednjavanjem uvek se dobijaju po dva nova člana u osrednjenju jednačini. Kada se primeni pravilo komutativnosti operatora osrednjavanja i odstupanja od osrednjenih vrednosti, vremenskim osrednjavanjem (\uparrow) u svim kolonama dobijaju se vremenski osrednjen proizvod fluktuacija $\overline{u_i' u_j'}$ i proizvod vremenski osrednjenih vrednosti dva množioca $\overline{u_i} \overline{u_j}$, dok se prostornim osrednjavanjem (\rightarrow) u svim vrstama dobijaju prostorno osrednjen proizvod odstupanja od prostorno osrednjene vrednosti $\langle u_i' \rangle \langle u_j' \rangle$ i proizvod prostorno osrednjenih vrednosti $\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle$ [23].

Kao što se vidi, dvostrukim osrednjavanjem kinematičke varijante protoka količine kretanja $u_i u_j$ dobijaju se četiri člana od kojih jedan predstavlja dvostruko osrednjenu kinematičku varijantu protoka količine kretanja, dok preostala tri člana pomnožena sa $-\rho$

predstavljaju prividne napone koji mogu da se grupišu sa dvostruko osrednjenim viskoznim naponom $\rho v \langle \partial \tilde{u}_j / \partial x_i \rangle$ u tzv. „makroskopski napon“:

$$\tau_{ij}^f = \rho \left(v \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right\rangle - \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle - \langle u_i' \rangle \langle u_j' \rangle - \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' \rangle \right) \quad (20)$$

Prividni napon $-\rho \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle$ posledica je poremećaja rasporeda brzina (osrednjenih po vremenu) usled nepravilnog rasporeda i oblika elemenata rapavosti. Ovaj napon Nikora i sar. nazvali su *form-induced stress* [18], dok se u mikrometeorologiji, hidraulici podzemnih voda i hidraulici višefaznih fluida koristi pojam *dispersive stress* [18 i 23]. U hidraulici otvorenih tokova ova komponenta napona mogla bi na srpskom jeziku da se nazove *naponom usled prisustva elemenata rapavosti*. Kada je strujno polje homogeno, ovaj prividni napon jednak je nuli. Prostorno osrednjeni Rejnoldsov napon $-\rho \langle u_i' u_j' \rangle$, koji je, takođe, prividni napon, ima dve komponente – „makro“ komponentu $-\rho \langle u_i' \rangle \langle u_j' \rangle$ i „mikro“ komponentu $-\rho \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' \rangle$. Pokrajac i sar. [23] daju sledeće tumačenje ove dve komponente. Mikro komponenta $-\rho \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' \rangle$ posledica je kretanja malih vrtloga unutar oblasti osrednjavanja, tj. vrtloga koji su manji od veličine oblasti osrednjavanja. Nasuprot tome, makro komponenta $-\rho \langle u_i' \rangle \langle u_j' \rangle$ posledica je turbulentnih fluktuacija izazvanih vrtlozima koji su veći od zapremine osrednjavanja. Ovi vrtlozi mogu da istisnu celu masu fluida iz zapremine osrednjavanja. Kada se zapremina osrednjavanja smanjuje, u prostorno osrednjenom Rejnoldsovom naponu dominira komponenta koja potiče od vrtloga većih od zapremine osrednjavanja, a kada se zapremina neizmerno povećava, dominira komponenta koja potiče od vrtloga manjih od zapremine osrednjavanja.

Pošto je rešeno pitanje dvostrukog osrednjavanja protoka količine kretanja ρu_i u pravcu j , mogu se napisati dvostruko osrednjene jednačine održanja količine kretanja podeljene sa ρ (Navije-Stoksove jednačine):

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_j}}_{II} = \underbrace{g_i}_{III} - \underbrace{\frac{1}{\rho \phi} \frac{\partial \phi \langle \bar{p} \rangle}{\partial x_i}}_{IV} + \\
 & \underbrace{\frac{1}{\rho \phi} \frac{\partial \phi \tau_{ij}^f}{\partial x_j}}_V \\
 & + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{1}{\phi} \frac{1}{\nabla_f} \iint_{A_{\text{čv.gr.}}} \bar{p} n_i \, dA}_{VI} \\
 & - \underbrace{\frac{1}{\phi} \frac{1}{\nabla_f} \iint_{A_{\text{čv.gr.}}} v \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} n_i \, dA}_{VII}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Odgovarajući naziv dvostruko osrednjenih Navije-Stoksovih jednačina na engleskom jeziku je *double-averaged Navier-Stokes equations* ili, skraćeno, *DANS*.

Zapaža se da se dvostrukim osrednjavanjem Navije-Stoksovih jednačina, tj. uvođenjem još jednog koraka osrednjavanja (prostornog osrednjavanja vremenski osrednjenih i fluktuirajućih veličina), dobijaju novi članovi u jednačini, kao što je Reynolds vremenskim osrednjavanjem ovih jednačina dobio Reynoldsove napone (videti [8]). Pored već pomenutih prividnih napona (tri nova člana) koji sa dvostruko osrednjenim viskoznom naponom ulaze u makroskopski napon (20) sadržan u članu V, tu je i sila trenja između fluida i elemenata rapavosti, po jedinici zapremine, dobijena dvostrukim osrednjavanjem izvoda viskoznog napona (poslednjeg člana u jednačini (13)). Ta sila je predstavljena članom VII. Primenom teoreme dvostrukog osrednjavanja (11) na član kojim je u Navije-Stoksovima jednačinama predstavljena sila pritiska po jedinici mase, dobija se još jedan dodatni član (član VI u izrazu (21)). To je sila otpora oblika elemenata rapavosti po jedinici zapremine, koja se u Reynoldsove jednačine uvodi *ad hoc* u zavisnosti od problema koji se rešava.

Preostali članovi u dvostruko osrednjenom jednačini održanja količine kretanja (21) su: dvostruko osrednjeno

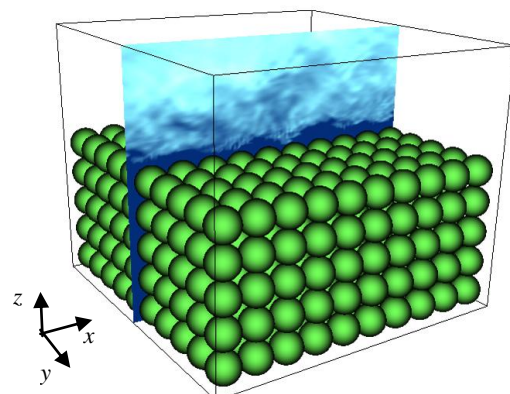
lokalno ubrzanje (član I), dvostruko osrednjen izvod protoka količine kretanja ρu_i po jedinici mase u pravcu j (član II), ubrzanje Zemljine teže (član III) i izvod dvostruko osrednjenog pritiska (član IV). U globalnom bilansu količine kretanja članovi III i IV imaju ulogu izvora (sile koja fluidu daje količinu kretanja), član V je transportni član kojim se stvarna ili prividna sila prenosi između fluidnih slojeva ili različitih oblasti, a članovi VI i VII imaju ulogu ponora koji fluidu oduzima količinu kretanja.

U nastavku se prikazuje primer primene dvostruko osrednjenih jednačina u modeliranju tečenja sa slobodnom površinom u laboratorijskom kanalu sa poroznim, rapavim dnom.

4. PRIMER PRIMENE

Primena dvostrukog osrednjavanja ilustrirana se primerom iz literature [15], koji se odnosi na strujanje u otvorenom toku sa poroznim dnom idealizovane geometrije, pogodna za laboratorijske ogleda i numeričke simulacije. Koristiće se rezultati numeričke simulacije za slučaj koji odgovara laboratorijskim ogledima prikazanim u [22].

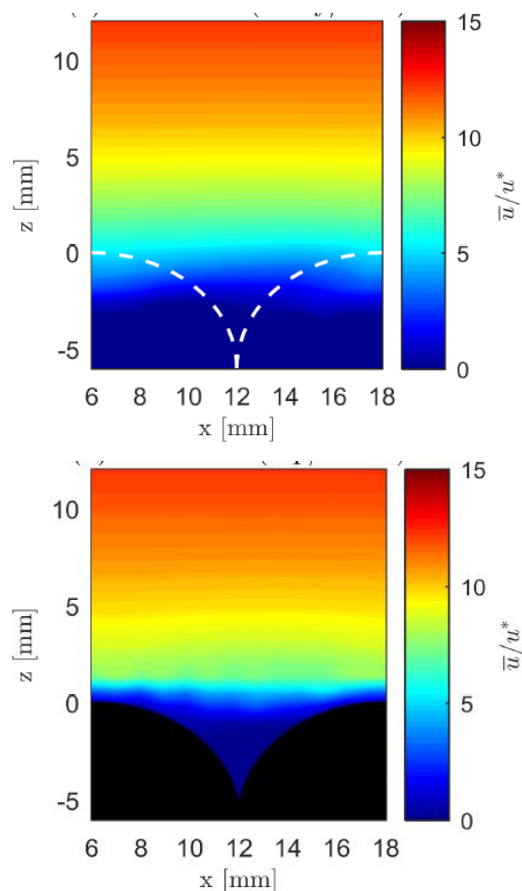
Oblast strujanja sastoji se od poroznog dna načinjenog od kuglica konstantnog prečnika ($D = 12$ mm), poređanih u 5 slojeva tako da su centri susednih kuglica temena kocke, i od otvorenog toka iznad tog dna. Geometrija računске oblasti korišćene za numeričku simulaciju i vizualizacija simuliranog strujanja u centralnoj ravni u jednom trenutku prikazani su na slici 13: računska oblast pokriva 10 kuglica u glavnom pravcu strujanja, x , 5 u pravcu upravnom na slobodnu površinu, y , i 10 u bočnom pravcu, z . Dubina otvorenog toka iznad vrhova najvišeg sloja kuglica je $H = 3.5D$.



Slika 13. Računska oblast za primer primene dvostrukog osrednjavanja

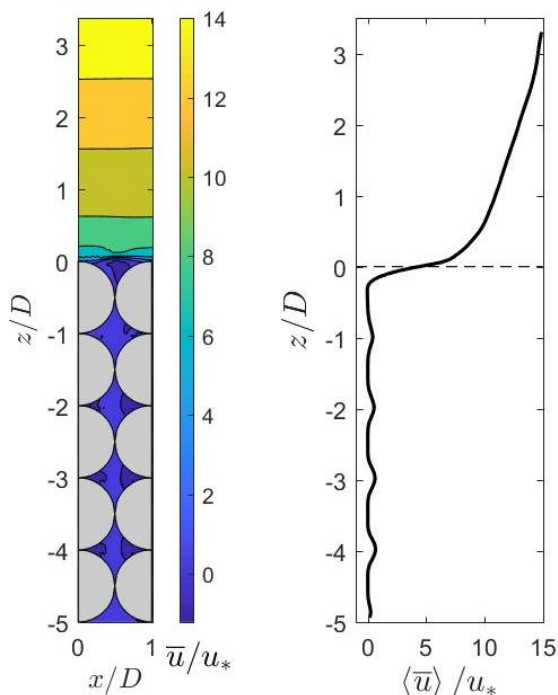
Za simulaciju je korišćen Large Eddy Simulation (LES) solver pogodan za rešavanje strujanja u kompleksnim oblastima i turbulencije u blizini zida poznat kao LES-COAST. Strujanje u blizini zakrivljene površine kuglica simulirano je primenom numetičke metode namenjene proračunima opstrujavanja oko potopljenih tela nepravilnog oblika čiji je naziv na engleskom jeziku *immersed boundary method*. Numerička mreza imala je $256 \times 208 \times 256$ elemenata u x , y , z pravcu. Laboratorijski ogledi [22] su rađeni u kanalu sa nagibom u kome je uspostavljeno jednoliko strujanje tako da se fluid kretao pod dejstvom gravitacije. U numeričkom modelu je umesto gravitacije kao pokretačka sila za fluid zadat gradijent pritiska koji odgovara $g_x = 0,0245 \text{ ms}^{-2}$. Brzina otvorenog toka osrednjena po poprečnom preseku iznosila je $U_b = 0.37 \text{ m/s}$, a odgovarajući globalni Rejnoldsov broj $Re = U_b H / \nu = 14800$. Smičuća brzina, određena linearnom ekstrapolacijom profila smičućeg napona turbulencije na ravan $y = 0$ bila je $u_* = 0,026 \text{ m/s}$. Karakteristike strujanja mogu da se izraze i drugačije, pomoću Rejnoldsovih brojeva definisanih na sledeće načine: $Re_* = u_* H / \nu = 1060$, $Re_D = DH / \nu = 4400$, i $Re_{*D} = u_* D / \nu = 317$.

Primarni rezultati simulacije koje čine vremenske serije brzine i pritiska u svakoj tački računске mreže predstavljaju toliko veliki skup podataka da ih nije praktično zapisivati tokom simulacije (osim, eventualno, za izabrani mali deo oblasti strujanja i kraći vremenski niz). Umesto toga, za svaki čvor mreže direktno se računaju i zapisuju statističke veličine koje su rezultat osrednjavanja po vremenu; na primer, osrednjene brzine, komponente napona turbulencije itd. Čak i tih statističkih veličina ima toliko mnogo da je za njihovu vizuelizaciju potrebno pregledati veliki broj slika. Iako je geometrija poroznog dna pravilna, tako da je polje brzina osrednjenih po vremenu unutar i iznad svakog „stuba“ kuglica (5 kuglica sa centrima na istoj xy lokaciji) identično, i osim toga simetrično u odnosu na x osu, da bi se to polje pregledalo, treba prikazati komponente brzine u velikom broju (u ovom primeru 12) ravni paralelnih sa ravni xz , kao što je centralna ravan prikazana na slici 13. Te paralelne ravni treba da pokriju polovinu jedne kuglice, od ravni koja sadrži njen centar do ravni koja je dodiruje. Da bi se ilustrovalo koliko se u ovom primeru razlikuju brzine u paralelnim ravnima, slika 14 prikazuje brzine u neposrednoj blizini najvišeg sloja kuglica za dve ravni – jednu koja sadrži centre kuglica, i drugu koja ih dodiruje.



Slika 14. Raspored vremenski osrednjene komponente brzine u u blizini gornjeg sloja kuglica, u ravni paralelnoj sa glavnim strujanjem koja prolazi između kuglica (gore) i kroz centre kuglica (dole).

Na slici 15 ilustrovan je postupak određivanja dvostuko osrednjenih brzina za celo stujno polje. Kao što je već napomenuto, dovoljno je razmatrati jedan „stub“ kuglica pošto se strujna slika oko „stubova“ kuglica ponavlja. Polje brzina prikazano je rasporedom osrednjene brzine \bar{u} u ravni paralelnoj sa glavnim pravcem strujanja koja sadrži centre kuglica, uz napomenu da je u osrednjavanje po prostoru potrebno uključiti sve ostale paralelne ravni, u ovom primeru ukupno njih 12, koje (odozgo gledano) pokrivaju prostor iznad jedne polovine kuglice. Prostorno osrednjavanje se, prema tome, obavlja po tankim zapreminama paralelnim sa dnom, čija površina gledano odozgo pokriva polovinu jedne kuglice, odnosno iznosi $0.5D \times D$. Za svaku takvu zapreminu dobija je jedna vrednost dvostuko osrednjene brzine, koja odgovara centru zapremine po kojoj je obavljano osrednjavanje. Kada se sve vrednosti dvostruko osrednjene brzine

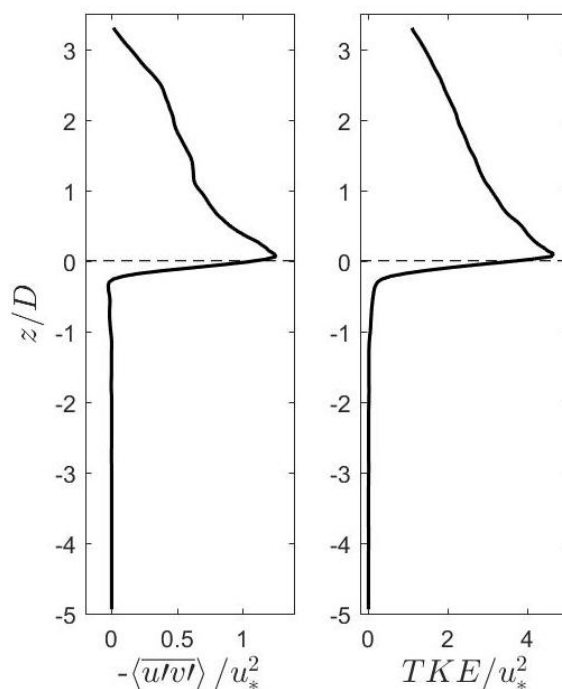


Slika 15. Raspored vremenski osrednjene komponente brzine u između kuglica u ravni paralelnoj sa glavnim strujanjem (levo) i dvostruko osrednjena brzina (desno).

nacrtaju u odgovarajućim tačkama dobija se profil dvostruko osrednjene brzine prikazan na slici 15(desno).

Osrednjavanje vremenski osrednjenih veličina po prostoru značajno smanjuje broj podataka koji treba pregledati da bi se stekla predstava o strujanju. Kao što je već pokazano na primeru brzine, za svaku veličinu od interesa strujanje u celoj oblasti strujanja prikazuje se jednim profilom (jednim rasporedom po dubini), koji daje sažeti prikaz jako velikog broja početnih podataka. Na slici 16 prikazani su profili prostorno osrednjenog smičućeg napona turbulencije i turbulentne kinetičke energije, na kojima se uočava strm nagib izazvan rapavim dnom i vrlo brzo smanjenje turbulencije u zoni najvišeg sloja kuglica, tako da je ona za sve ostale slojeve praktično nula.

Na isti način kao što je Rejnoldsovo osrednjavanje proizvelo pojednostavljenu sliku turbulentnog strujanja osrednjenog po vremenu i omogućilo da se uoče njegove osobine koje se ne uočavaju u pojedinačnim trenucima, osrednjavanje po prostoru proizvodi pojednostavljenu sliku prostorno nehomogenog strujanja.



Slika 16. Profil prostorno osrednjenog smičućeg napona turbulencije i turbulentne kinetičke energije

Postupak dvostrukog osrednjavanja prikazan na ovom primeru može da se primeni i na rezultate detaljnih laboratorijskih ili terenskih merenja. Ovako obrađeni podaci mogu da se iskoriste za određivanje relacija i koeficijenata koji su potrebni da bi se dvostuko osrednjene Navije-Stoksove koristile za razvijanje nove generacije numeričkih modela. Neki od izraza i koeficijenata, na primer za određivanje sile na rapave elemente idealizovane geometrije, mogu se naći u literaturi, dok je pogodna parametrizacija za napon usled prisustva elemenata rapavosti (*form-induced stress*) još uvek nerešen problem.

5. ZAKLJUČCI

Pregled istorijskog razvoja metodologije dvostrukog osrednjavanja, nedvosmisleno ukazuje na prednosti korišćenja dvostruko osrednjenih Navije-Stoksovih (NS) jednačina u prostorno nehomogenim oblastima strujanja u odnosu na Rejnoldsove jednačine dobijene samo njihovim vremenskim osrednjavanjem, a to su:

- 1) eksplicitno obuhvatanje svih sila koje su rezultat postojanja čvrste faze kroz koju ili preko koje voda teče – sile trenja o površinu elemenata rapavosti

(viscous drag), sile otpora oblika elemenata rapavosti (form drag), sile (napona) smicanja usled odstupanja vremenski osrednjene vrednosti brzine u tački od prostorno osrednjene vrednosti zbog nepravilnog oblika elemenata rapavosti (form-induced stress). Za razliku od Rejnoldsovih jednačina u koje se ove sile uvode *ad hoc*, u dvostruko osrednjenim NS jednačinama ove sile se dobijaju neposrednim matematičkim izvođenjem uz korišćenje pravila dvostrukog osrednjavanja i teorema transporta i prostornog osrednjavanja. Teorema transporta pokazuje da prostorno osrednjavanje i diferenciranje po vremenu nisu komutativni ako oblast osrednjavanja zavisi od vremena t . Teorema prostornog osrednjavanja se uvodi zbog toga što operatori prostornog osrednjavanja i diferenciranja po prostoru nisu komutativni kada oblast osrednjavanja zavisi od prostora, odnosno od tri prostorne koordinate x_i ;

- 2) mogućnost preglednog i sažetog prikazivanja prostorno heterogenog strujanja pomoću dvostruko osrednjenih veličina. Takav prikaz omogućava da se izučavaju globalne osobine strujanja na sličan način kao što Rejnoldsovo osrednjavanje omogućava proučavanje vremenski osrednjenog strujanja;
- 3) mogućnost parametrizacije članova u dvostruko osrednjenim jednačinama pomoću dvostruko osrednjenih vrednosti izmerenih promenljivih ili mogućnost njihovog razlaganja na komponente kojima se opisuju pojave različitih nivoa detaljnosti (npr. razlaganje trenutne vrednosti količine kretanja na četiri komponente). Nakon parametrizacije svih novih članova, dvostruko osrednjene jednačine mogu da se koriste za razvoj numeričkih modela.

Zahvaljujući svemu navedenom, dvostruko osrednjene Navije-Stoksove jednačine pogodne su za [18]:

- 1) razvoj numeričkih modela,
- 2) osmišljavanje laboratorijskih i terenskih merenja sa jedne, i numeričkih oglada, sa druge strane,
- 3) razvoj konceptualnih modela za članove u jednačinama koji su se pojavili kao rezultat dvostrukog osrednjavanja ili za njihovu parametrizaciju i
- 4) obradu rezultata merenja i numeričkih simulacija i njihovo tumačenje i
- 5) definisanje modela za zatvaranje osnovnih jednačina.

Ovaj rad je rezultat projekta DoubleVeg koji je odobrio Fond za nauku u okviru programa Saradnja

srpske nauke sa dijasporom (http://fondzanauku.gov.rs/wp-content/uploads/2020/05/Program-Dijaspora_Konacna-lista-svih-odobrenih-projekata.pdf).

LITERATURA

- [1] Bear, J. (1972) *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Elsevier, Amsterdam.
- [2] Bello, A., Pokrajac, D., Leonardi, A. (2020) Spatial Averaging over a variable volume and its implications for simulation of open channel flows over permeable beds, *River Flow 2020: Proc. of the 10th conference on Fluvial Hydraulics*, Delft, the Netherlands, 13 pages.
- [3] de Lemos, M.J.S., and Pedras, M.H.J. (2001). Recent mathematical models for turbulent flow in saturated rigid porous media, *J. Fluids Eng.*, ASME, 123, 935-940.
- [4] data:image/jpeg;base64,/9j/
- [5] Finnigan, J.J. (1985) Turbulent transport in flexible plant canopies, In: *The forest-atmosphere interactions*, B.A. Hutchinson and B.B. Hicks, eds., D. Reidel Publishing Company, 443-480.
- [6] Finnigan, J.J. (2000) Turbulence in plant canopies, *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 32, 519-571.
- [7] Gimenez-Curto, L.A. and Corniero Lera, M.A. (1996) Oscillating turbulent flow over very rough surfaces, *J. Geophys. Res.*, 101(C9), 20,745-20,758.
- [8] Hajdin, G. (198?) *Mehanika fluida*, Građevinski fakultet, Beograd
- [9] <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn%3AANd9GcSDeEVsVFaqx3NJApoIvZdmAmqqf5Q0f9zka&usqp=CAU>
- [10] https://4.bp.blogspot.com/-57wdAxG12hU/W-yRzQoaUgJ35_DY1cQMStx31qwGiQCLcBGAss1600/DSCN6853.jpg
- [11] https://images.squarespace-cdn.com/content/v1/5363b540e4b054843f9bf812/1462665658944-W26C17OY6H97IZ8XMI9E/ke17ZwdGBToddI8pDm48kLKHhjvX3gphN5FUfCFaex57gQa3H78H3Y0txjaiv_0f8dQJ5B5_UOmfcDWklNyB_k2Qojd2wpVPPfTYSBVGAA LYXVbONl_hZyFpVyn4qZhOqpeNLcJ80NK65_fV7S1USVBAocc3hLx5NCxfhEje7Q-6igzGwbdsb88DUlvAu7z2rmoRjJpF MV Bb0CMwp8Fw/image-asset.jpeg?format=1000w

- [12] <https://jelenadilber.files.wordpress.com/2016/03/djetinja-kanjon.jpg?w=560>
- [13] <https://previews.123rf.com/images/salajejan/salajejan1307/salajejan130700222/21458406-water-channel-in-the-danube-delta-with-swamp-vegetation-and-flooded-forest.jpg>
- [14] Kidanemariam, A. G. and Uhlmann, M. (2017): Formation of sediment patterns in channel flow: minimal unstable systems and their temporal evolution, *J. Fluid Mech.*, 818, 716-743.
- [15] Leonardi, A., Pokrajac, D., Roman, F., Zanello, F., Armenio, V. (2018) Surface and subsurface contributions to the build-up of forces on bed particles, *Journal of Fluid Mechanics* 851(25): 558-572.
- [16] Nikora, N., Nikora, V. and O'Donoghue, T. (2013) Velocity profiles in vegetated open-channel flows: combined effects of multiple mechanisms, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 139(10), 1021-1032.
- [17] Nikora, V.I., Goring, D.G., McEwan, I., and Griffiths, G. (2001). Spatially-averaged open-channel flow over a rough bed, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 127(2), 123-133.
- [18] Nikora, V., McEwan, I., McLean, S., Coleman, S., Pokrajac, D., Walters, R. (2007) Double-averaging concept for rough-bed open-channel and overland flows: theoretical background, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE 133(8), 873-883.
- [19] Nikora, V., Ballio, F., Coleman, S., Pokrajac, D., (2013). Spatially-averaged rough beds: definitions, averaging theorems and conservation equations, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE 139(8), 803-811.
- [20] Poggi, D., Katul, G.G., and Albertson, J.D. (2004a) Momentum transfer and turbulent kinetic energy budgets within a dense canopy, *Boundary-Layer Meteorology*, 111, 589-614.
- [21] Poggi, D., Katul, G.G., and Albertson, J.D. (2004b) A note on the contribution of dispersive fluxes to momentum transfer within canopies, *Boundary-Layer Meteorology*, 111, 615-621.
- [22] Pokrajac, D., Manes, C. (2009) Velocity measurements of a free-surface turbulent flow penetrating a porous medium composed of uniform-size spheres, *Transport in Porous Media* 78(3): 367-383.
- [23] Pokrajac, D., McEwan, I. and Nikora, V. (2008) Spatially averaged turbulent stress and its partitioning, *Exp. Fluids*, 45, 73-83.
- [24] Pokrajac, D. and de Lemos, M.J.S. (2015) Spatial Averaging over a variable volume and its application to boundary-layer flows over permeable walls, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE 141(4), 04014087.
- [25] Raupach, M.R., and Shaw, R.H. (1982) Averaging procedures for flow within vegetation canopies, *Boundary-Layer Meteorology*, 22, 79-90.
- [26] Raupach, M.R., Antonia, R.A., and Rajagopalan, S. (1991) Rough-wall turbulent boundary layers, *Appl. Mech. Rev.*, 44(1), 1-25.
- [27] www.astro.cornell.edu (pristupljeno 27.9.2020.)
- [28] Tanino, Y. and Nepf, M.H. (2008) Laboratory investigation of mean drag in random array of rigid, emergent cylinders, *J. Hydraul. Eng.*, ASCE 134(1), 34-41.
- [29] Tanino, Y. and Nepf, M.H. (2008) Lateral dispersion in random cylinder arrays at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, 600, 339-371.
- [30] Whitaker, S. (1986) Flow in porous media I: A theoretical derivation of Darcy's law, *Transport in Porous Media*, 1, 3-25
- [31] Whitaker, S. (1999). *The method of volume averaging*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [32] Wilson, N.R., and Shaw, R.H. (1977) A higher order closure model for canopy flow, *J. Appl. Meteorology*, 16, 1197-1205.

ON THE DOUBLE AVERAGING METHODOLOGY
– HISTORICAL REVIEW AND THEORETICAL BACKGROUND –

by

Dejana ĐORĐEVIĆ¹, Dubravka POKRAJAC²
Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade
²School of Engineering, University of Aberdeen

Summary

A methodology that was developed to provide rigorous mathematical description of spatially heterogeneous flows (multiphase flows, ground water flows or flows over rough beds) and related processes is presented in this paper. This is the double averaging methodology (DAM) in which Navier-Stokes equations are successively averaged in time and space. The DAM emergence and the development are traced back through the historical review. The review reveals the origins of the idea to combine time-averaging of turbulent flows and space-averaging of ground water or multiphase flows and to apply it to rough-bed open channel flows (gravel-bed rivers, vegetated and environmental flows). The review is followed by the DAM basics – definitions of superficial and intrinsic averages, spatial-averaging rules and averaging theorems and procedures, all necessary for the derivation of double-averaged Navier-Stokes (DANS) equations. The fact that the final form of DANS is independent of the averaging sequence (time-space or space-time) is illustrated on the example of nonviscous components of the total fluid stress as

discussed in [23]. It is also accentuated that rigorously derived DANS contain all relevant forces that are added to the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations on the *ad hoc* basis, depending on the problem under consideration. Typical examples are drag and shear forces caused by roughness elements and form-induced stress. The application of DAM to rough-bed flows is presented on the example of flow over permeable bed composed of five layers of spheres packed in the cubic arrangement. Streamwise velocity distributions in the streamwise oriented vertical plane is given to show velocity gradients near the top of spheres at the transition to the free flow layer. Results are presented for the profiles of double-averaged streamwise velocity, spatially-averaged shear Reynolds stress and spatially-averaged TKE, that both exhibit large gradients near the bed.

Key words: spatially heterogeneous flows, representative averaging volume, porosity, double averaging

Redigovano 12.11.2020.