

Зоран Мишковић¹
Синиша Саватовић²

УПОРЕДНА АНАЛИЗА МЕРЕНИХ И РАЧУНСКИХ МОДАЛНИХ ОБЛИКА МОДЕЛА ЧЕЛИЧНОГ НОСАЧА

Резиме: У раду је приказана упоредна анализа рачунских и експериментално одређених вредности сопствених фреквенција и облика осциловања модела носача статичког система греде са два препуста. Мерене вредности одређене су на основу регистрованих убрзања у тачкама на оси носача. Регистровани записи убрзања су анализирани применом Fourier-ове трансформације на основу којих су одређени модални облици који су упоређени са одговарајућим рачунским вредностима.

Кључне речи: Модална анализа, облици осциловања, убрзања, гредни носач

COMPARATIVE ANALYSIS OF EXPERIMENTAL AND COMPUTATIONAL MODAL FORMS OF STEEL BEAM MODEL

Abstract: The paper presents comparative analysis of experimental and computational values of modal frequencies and modal shapes of steel beam model with two overhangs. Experimental results determined based on acceleration measurement at test points along the beam axis. Recorded accelerations analysed by application of Fourier's transform, and extracted modal forms and frequencies are compared with corresponding computed values.

Keywords: Modal frequency, modal shapes, accelerations, beam structure

1. UVOD

Динамичка анализа конструкција неопходна је у случајевима када су исте током експлоатације изложене оптерећењима која се током времена брзо мењају по интензитету, што за последицу има појаву инерцијалних ефеката у конструкцији који се не могу занемарити [1]. Таква оптерећења се јављају услед рада машина, деловања земљотреса, услед саобраћаја, кретања људи, и др. Да би се сагледао одговор конструкције услед деловања динамичког оптерећења, потребно је познавати динамичке параметре оптерећења и конструкције.

Специфичност деловања динамичког оптерећења огледа се у чињеници да утицаји у конструкцији не зависе само од интензитета оптерећења, већ и од његових динамичких карактеристика, као и динамичких карактеристика конструкције, [1]. Ниме, уколико је фреквенција динамичког оптерећења блиска некој од сопствених фреквенција конструкције, долази до амплификације утицаја услед инерцијалних ефеката. Из тог разлога, потребно је познавати динамичке карактеристике посматране конструкције које се могу одредити на основу

¹ др Зоран Мишковић, дипл.инж.грађ., Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Булевар краља Александра, телефон: +381 11 3370 108, е – mail: mzoran@imk.grf.bg.ac.rs

² Синиша Саватовић, маг.инж.грађ., Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Булевар краља Александра, телефон: +381 11 3218 622, е – mail: sinisasavatovic@gmail.com

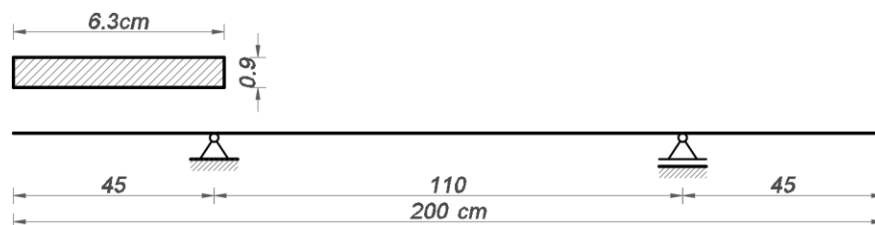
основних релевантних података о конструкцији за динамичке прорачуне, а то су крутост конструкције, пригушење и маса која се ангажује при конкретном оптерећењу.

На свакој конструкцији, (елементу) се могу уочити тачке које имају своју масу и правце могућих осциловања. Када све тачке осцилују истим фреквенцијама, само на одређеним вредностима оне ће осциловати синхроно и синфазно, односно све тачке ће пролазити кроз нулти положај истовремено. У случају одређених фреквенција конструкција осцилује у карактеристичном облику осциловања – модалном облику, па је познавање сопствених фреквенција и облика осциловања неопходно за добијање јасне представе о динамичким карактеристикама конструкције и одговору исте на динамичка оптерећења.

У раду је приказано експериментално одређивање својствених фреквенција и модалних облика модела носача статичког система греде са два препуста као и поређење са прорачунским вредностима.

2. ПРОРАЧУН МОДАЛНИХ КАРАКТЕРИСТИКА

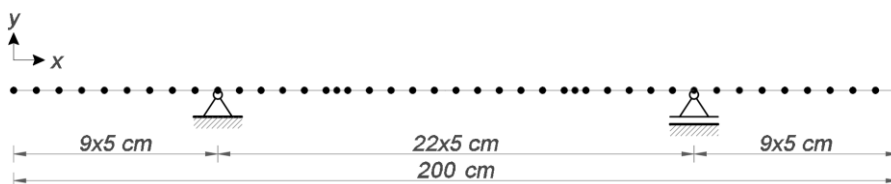
Анализиран је конкретан случај модела носача статичког система греде са два препуста правоугаоног попречног пресека, како је приказано на слици 1. Тачно решење модалних облика и фреквенција је тешко добити јер постоји доста граничних услова које функција померања треба да задовољи [2] и [3].



Слика 1 – Диспозиција анализираног гредног носача

Прорачунске вредности динамичких карактеристика одређене су применом софтвера за статичку и динамичку анализу конструкција SAP2000 на бази методе коначних елемената.

Усвојена је дискретизација носача на 42 елемента са 43 концентрисане масе, односно 41 степеном слободе померања, посматрајући линијски модел и занемарена померања у подужном x правцу, што представља довољно тачно решење.



Слика 2 – Дискретизација носача у прорачунском моделу у програмском пакету SAP2000

Тражене вредности се добијају на основу следећг израза:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{A} = 0 \quad (1)$$

где су:

\mathbf{K} - матрица крутости конструкције,

ω - кружна сопствена фреквенција ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{41}$), $\omega_i = 2\pi f_i$,

f_i - i -та техничка сопствена фреквенција конструкције [Hz],

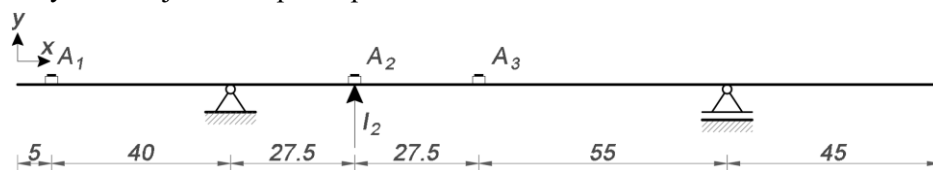
\mathbf{M} - матрица маса,

\mathbf{A} - вектор облика осциловања – модалних облика.

Решавањем проблема својствених вредности, из услова да је детерминанта $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})$ једнака нули, одређене су вредности одговарајућих сопствених кружних фреквенција, односно одговарајуће вредности сопствених техничких фреквенција система, а затим и одговарајући сопствени модални облици. Од интереса су само првих неколико својствених фреквенција и модалних облика, а одговарајуће рачунске вредности износе: 11.53; 21.45; 37.1; 85.09 и 153.14 Hz.

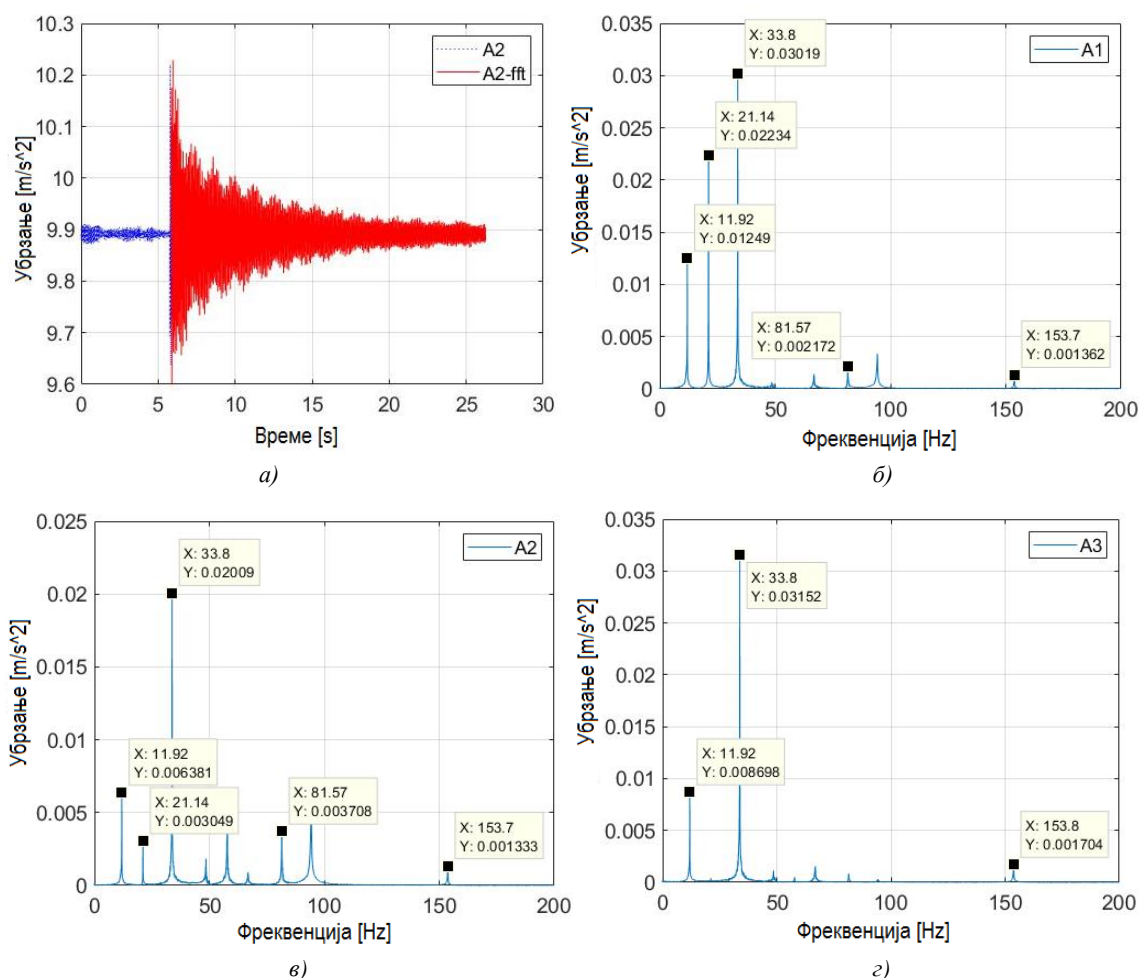
3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ ФРЕКВЕНЦИЈА И МОДАЛНИХ ОБЛИКА

Експериментално одређивање својствених фреквенција спроведено је на основу резултата регистровања убрзања на моделу конструкције. Коришћени су осетљиви акцелерометри на мерним местима како је приказано на слици 3. Модел је побуђен на осциловање ударом импулсног облика I_2 на месту положаја акцелерометра A_2 .



Слика 3 – Положај акцелерометара током експеримента

Изабрано је место A_2 да би бар прва три модална облика била регистрована мерењем на сва три мерна места.



Слика 4 – Регистровани запис убрзања на месту A_2 и одређене својствене фреквенције на основу мерења на сва три мерна места

На слици 4а), приказан је запис регистрованог убрзања на мерном месту A_2 , при чему су регистровани записи на друга два мерна места квалитативно слични. Спроведена је *Fast Fourier*–ова трансформација у програмском пакету *MATLAB* дела регистрованих убрзања на мерним местима A_1 , A_2 , A_3 , и добијени су одговарајући дијаграми приказани на сликама 4б), 4в) и 4г), респективно. Део који је разматран у анализи је део непосредно после удара до краја записа. У том делу се крију побуђене сопствене фреквенције и њима одговарајући модални облици.

Усвојена брзина узорковања износила је 400 Hz, како би се могле одредити фреквенције до 200 Hz. Увојена је дужина записа убрзања за примену *Fast Fourier*–ове трансформације краћа од укупне дужине регистрованих убрзања, а из разлога да би се искључио из разматрања почетни део где је утицај аплицираног импулса значајан, односно, разматран је временски период од 20.39 sec, што одговара резолуцији фреквентног спектра која је одређена једначином (2),

$$\frac{f_s}{N} = \frac{400\text{Hz}}{8156} = 0.049\text{Hz} \quad (2)$$

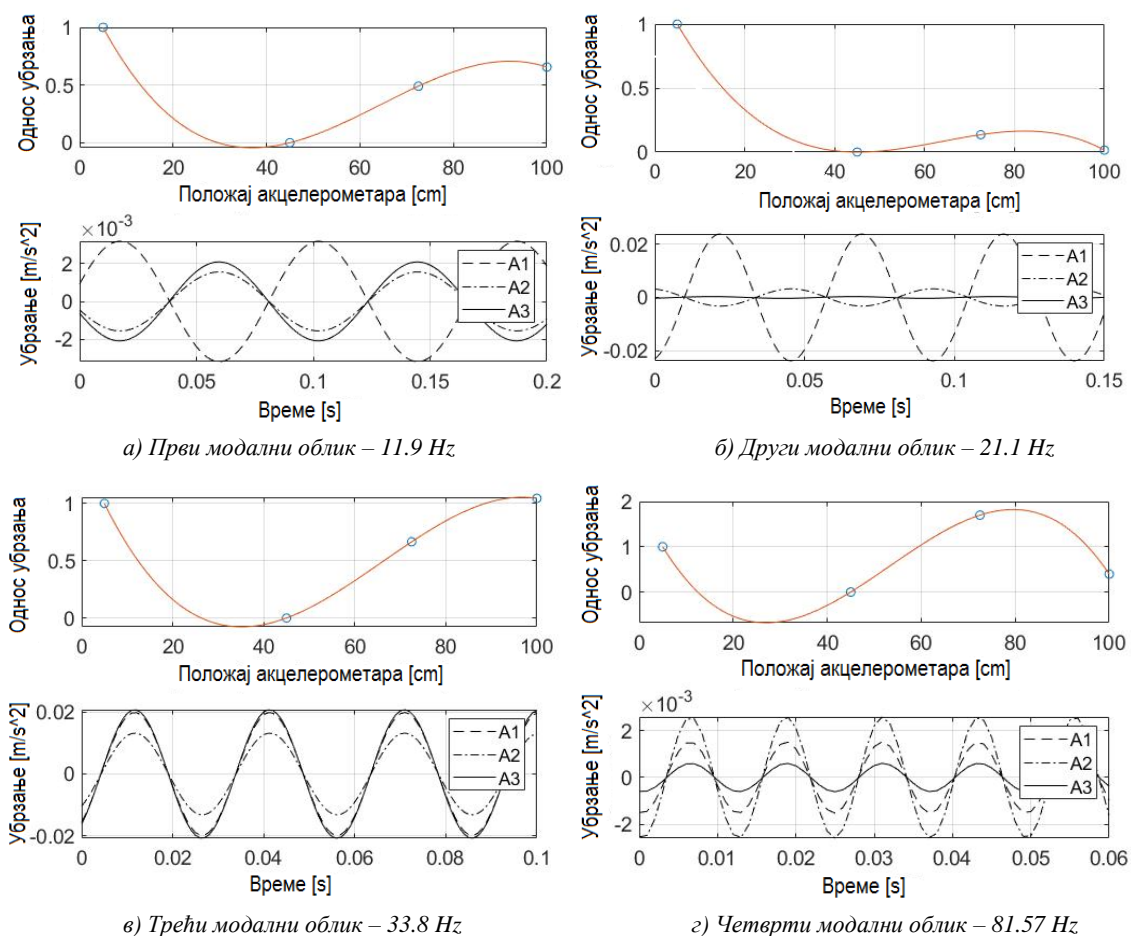
где су:

f_s - фреквенција узорковања [Hz],

N - број чланова разматраног низа

На сликама 4б), 4в) и 4г) се могу уочити изразити 'пикови' који одговарају вредностима сопствених фреквенција и то су: 11.9; 21.1; 33.8; 81.57 и 153.7 Hz. Остали 'пикови' који се могу уочити су последица осциловања/померања ослонаца, што је накадно утврђено.

Модални облици се могу проценити анализом регистрованих записа сва три акцелерометра трансформисаних у фреквентни домен за карактеристичне (исте) фреквенције – а које одговарају претходно регистрованим карактеристичним 'пиковима', при чему одговарајуће амplitude представљају компоненте одговарајућих модалних вектора за одговарајуће модалне фреквенције.



Слика 5 – Разлучена прва четири модална облика на основу мерења убрзања

Fourier-овом трансформацијом, улазни низ регистрованих убрзања у временском домену, трансформише се у суму од N тригонометријских функција $y(i)$, $i=0,2,\dots,N-1$ дефинисаних једначином (3),

$$y(i) = B(i) \sin(2\pi f(i) \cdot t + \varphi(i)) \quad (3)$$

где су:

$B(i)$ - i -та амплитуда [m/s^2],

$\varphi(i)$ - i -ти фазни заостатак [rad]

Fourier-ова трансформација записа регистрованог сваким појединачним акцелерометром дефинисана је изразом (4),

$$x(i) = \sum_{n=0}^{N-1} A(n) e^{-j2\pi ni/N} \quad (4)$$

Амплитуде $B(i)$ и фазно кашњење одређују се сходно изразима (5),

$$B(i) = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{x(i)\} + \operatorname{Im}^2\{x(i)\}}; \quad \varphi(i) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re}\{x(i)\}}{\operatorname{Im}\{x(i)\}} \quad (5)$$

где су;

n, i - бројачи који узимају вредности $n=1,2,\dots,N-1$ / $k=1,2,\dots,N-1$,

$A(i)$ - i -ти члан улазног низа који може бити $A_1(i)$, $A_2(i)$ или $A_3(i)$

На слици 5 су приказана прва четири модална облика. Горњи део графика на слици 5 представља однос амплитуда у тачкама на удаљењу $x=[5 \ 45 \ 76.5 \ 100]$ [cm] од координатног почетка модела, слика 3, што представља само прву половину модела. Тачке су спојене функцијом *spline* у циљу боље визуелне интерпретације. Ординате тих односа су увек позитивне а одговарају поменутиим местима и износе:

$$z = [1 \ 0 \ B_2(i)/B_1(i) \ B_3(i)/B_1(i)] \quad (6)$$

Усвојено је да је $B_1(i)$ референтна вредност па је први члан увек 1. Друга тачка је ослонац и нема померања, трећа и четврта тачка одговарају положајума другог и трећег акцелерометра. На основу овако рашчлањеног улазног низа – израази (3) и (4) и преведеног у фреквентни домен могуће је одредити односе (6) које одговарају свим израчунатим фреквенцијама *Fourier*-овом трансформацијом и на основу познатих фазних заостатака закључити какви модални облици постоје. Карактеристично је то што су модални облици најјаснији они који одговарају фреквенцијама на којима су изражени пикови, слика 4, а поасматране тачке на којима се налазе акцелерометри осцилују у фази или са закашњењем π што дефинише у потпуности модални облик. Тачке могу да осцилују или у фази или са фазним заостатком π , други случајеви нису реални што може лако да се види на доњим деловима на слици 5 јер је тај график добијен на основу израза (3) за сваки акцелерометар – посматрану тачку.

На слици 5 а) је приказан први модални облик. На фреквенцији од 11.9 Hz јасно се види да тачка на месту акцелерометра A_1 осцилује са фазним закашњењем π у одноду на остала два (две тачке). На слици 5 б) тачке A_1 и A_2 осцилују са фазним закашњењем π док се тачка A_3 не помера. На слици 5 в) сва мерна места – тачке осцилују у фази што значи да је нацртани облик на тој слици баш такав. Могуће је одредити модалне облике које одговарају максималној фреквенцији од $f_s/2$ што је 200 Hz јер је амплитудски спектар $B(i)$ парна функција – израз (5).

4. ПОРЕЂЕЊЕ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИХ И ПРОРАЧУНСКИХ РЕЗУЛТАТА

За поређење резултата посматраће се само тачке – мерна места где се налазе акцелерометри и први ослонац односно прва половина модела. Модални облици на другој половини носача су

претпостављени на основу симетрије и антисиметрије која важи у овом случају јер је носач симетричан.

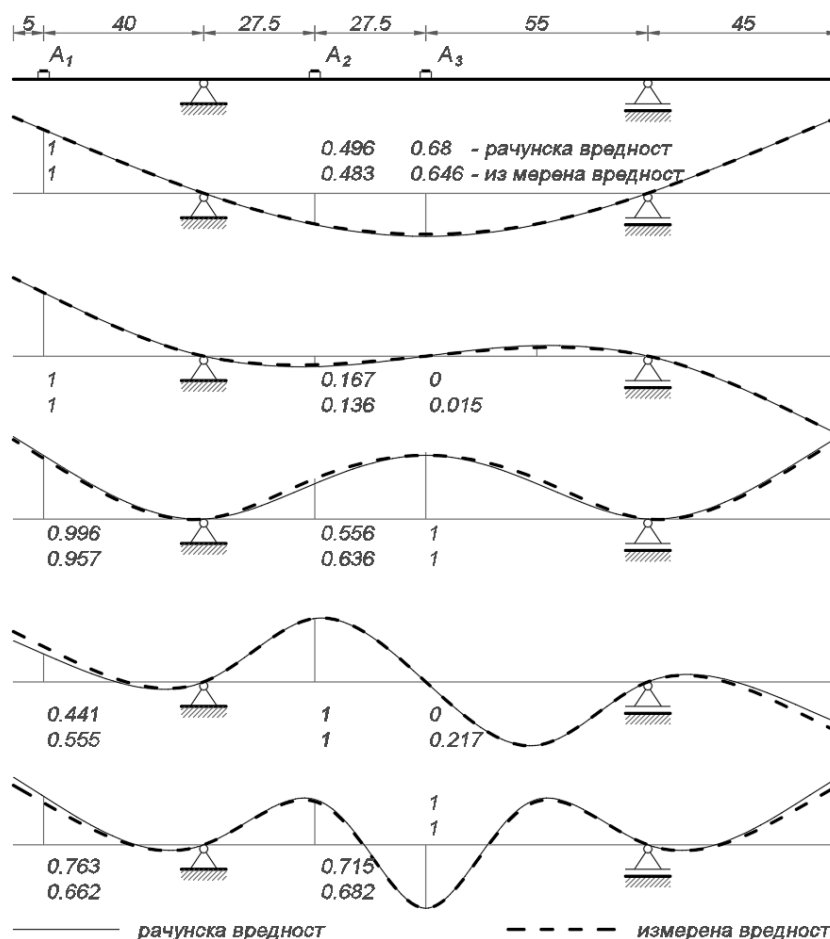
Максимална могућа измерена фреквенција је 200 Hz па ће се посматрати првих пет модалних облика и својствених фреквенција, иако у пракси, код реалних конструкција, првих неколико модалних облика има знатно ниже фреквенције него код посматраног модела у овом раду.

У табели 1 су дате измерене и рачунске вредности својствених фреквенција као и њихов међусобни однос изражен у процентима.

Табела 1- Својствене фреквенције

Место	I	II	III	IV	V
Прорачунски [Hz]	11.54	21.45	37.10	85.09	153.14
Експериментално [Hz]	11.9	21.10	33.8	81.57	153.70
Одступање [%]	3.10	1.63	8.90	4.10	0.36

На слици 6 су приказани модални облици, уз усвојену вредност највеће ординате од 1.0, при чему је евидентно да је регистровано првих пет модалних облика осциловања греде. Функције облика осциловања могу бити парне или непарне па су мерени непарни облици кориговани да пролазе кроз првобитни равнотежни положај у средини модела. Посматране четири тачке спојене су глатком кривом (*spline*) због јасније визуелне интерпретације и пресликане парно или непарно.

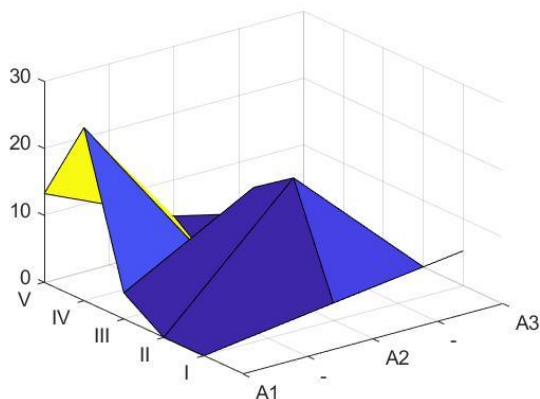


Слика 6 – Модални облици одређени експериментално и прорачунски

На слици 7 је дат графички приказ одступања првих пет експериментално одређених модалних облика од прорачунских, изражено у процентима. На x- осу су приказани модови (I, II, III, IV и V)

а на у- осе положаји мерних места (A_1 , A_2 и A_3). На вертикалној осе су приказана процентуална одступања.

Одређене прорачунске вредности нису у потпуности тачне јер је коришћена метода коначних елемената са концентрацијом маса, али се могу усвојити као довољно тачне због усвојене мале величине коначних елемената. Усвојен је модул еластичности од 200GPa, и постоји у извесној мери одступање геометрије стварног модела од рачунског. Разлог одступања приказаних у табели 1 и на сликама 6 и 7 је и тај што је врло тешко измерити апсолутно тачне вредности. На слици 4 се види постојање „цурења“ спектра фреквенција који се јавља када резолуција одређивања истих није довољно велика како би се одредила тачна тражена вредност. То утиче и на величину амплитуда, односно на ординате облика осциловања. Такође, шум који је увек присутан, којег карактеришу мале амплитуде и широк спектар фреквенција, тзв. „бели шум“ који утиче на тачност резултата као и класа тачности примењених инструмената – акцелерометра.



Слика 7 – Процентуална одступања посматране три тачке првих пет модалних облика

Ослонци модела нису идеално крути и при побуђивању модела импулсном побудом ће одреаговати што се такође инструментима региструје.

5. ЗАКЉУЧАК

Поред свих набројаних фактора који утичу на експериментално одређене вредности, одступања која постоје су ипак прихватљива и резултати се могу сматрати довољно тачни, с тим што су одступања већа при одређивању модалних облика. Стварне осцилације су пригушене и сваки модални облик карактерише одговарајуће пригушење што у раду није узето у обзир а цео одговор модела на побуду је рашћлањен на суму тригонометријских функција које су константне у времену. Практично, највећа потреба код динамичких испитивања је за одређивањем фреквенција, а у комбинацији - контроли са рачунским – математичким моделом конструкције може се закључити о каквим је модалним облицима реч.

Када се анализирају конструкције код којих није могуће формирати поуздан рачунски модел приказана метода може представљати велику помоћ при испитивању модалних карактеристика, јер на мерене резултате може утицати и околина, односно у снимљеним записима се могу наћи многе фреквенције које нису од интереса у конкретном случају па се не може са сигурношћу тврдити да ли се ради о сопственој фреквенцији или о неком другом фактору. Контролом облика осциловања на посматраној фреквенцији тај проблем се у већини случајева лако решава.

Начин одређивања модалних облика приказан у овом раду подразумева да су синхронизовани инструменти – истовремено се врши снимање убрзања на свим мерним местима, и да су постављени на довољном броју места да се може регистровати жељени број модова. Ова метода се може применити како на једноставним тако и на сложеним линијским, површинским или просторним конструкцијама.

ЗАХВАЛНИЦА

Истраживање приказано у раду је спроведено у оквиру научног пројекта ТР-36048: „Истраживање стања и метода унапређења грађевинских конструкција са аспекта употребљивости, носивости, економичности и одржавања“ којег финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. Аутори се захваљују Министарству просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије за финансијску подршку кроз пројекат развоја технологије ТР-36048.

РЕФЕРЕНЦЕ

- [1] Салатић Р: *Динамика конструкција и земљотресно инжењерство*, Практикум за предмет Динамика конструкција и основе земљотресног инжењерства, Грађевински факултет у Београду, Београд 2015, стр. од 2 до 18
- [2] Wang Q., Wang D., He m., Yhang L., Qian H; *Some Wualitative of the Vibration Modes of the Continues System of a Beam with One or Two Overhanges*, Jurnal of Engineering Mechanics, August 2012.
- [3] Skobar A., Žigulić R., Braut S., Blažević S.; *Dynamic Response to harmonic Transverse Excitation of Cantilever Euler-Bernulli Beam Carring a point Mass*, 2017.