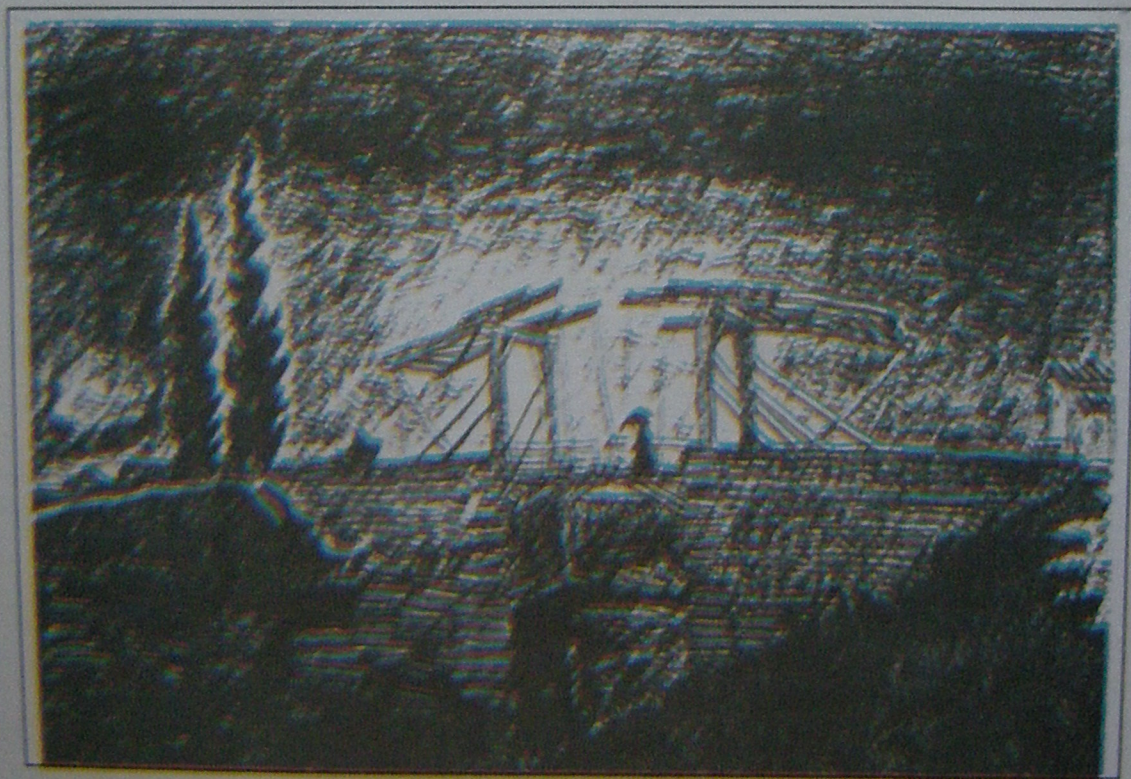
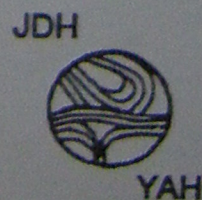


Jugoslovensko društvo za hidraulička  
istraživanja (JDHI) i  
Jugoslovensko društvo za hidrologiju (JDH)  
organizuju:

# 11. SAVETOVANJE HIDRAULIČARA I HIDROLOGA



16.-18. novembar 1994.  
Beograd, Jugoslavija





Organizatori:

Jugoslovensko društvo za hidraulička istraživanja (JDHI)  
Jugoslovensko društvo za hidrologiju (JDH)  
Gradjevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

Organizacioni odbor:

Mr Jelisaveta Muškatirović ("J. Černi")  
prof. Dr Čedo Maksimović (GF Bgd)  
prof. Dr Vojislav Vukmirović (GF Bgd)  
Dr Marko Ivetić (GF Bgd)  
prof. Dr Svetislav Čantrak (Mašinski fakultet, Bgd)  
Dr Ljubodrag Savić (Energoprojekt)  
Dr Zoran Radić (GFBgd)  
Tioslav Petković (Savezni HMZ)  
Mr Bratislav Stišović (Energoprojekt)  
Milivoje Brajković ("J. Černi")  
Mr Miodrag Savić (Republički HMZ)  
Vladimir Taušanović, (BVK)  
Dr Ratomir Živaljević (GF Podgorica)  
Mr Milan Bošković (RHMZ Crne Gore)

Redakcioni odbor:

Dr Marko Ivetić  
Tioslav Petković  
prof. Dr Vojislav Vukmirović  
prof. Dr Čedo Maksimović

Odgovorni i tehnički urednik:

Dr Marko Ivetić

Naslovna strana: Vincent Van Gogh - Most Angloisa u Arlesu, 1888

Štampa: Savezni hidrometeorološki zavod, Beograd

Tiraž: 200



# Sadržaj

	strana
Predgovor	xi
Uvodna predavanja	
1. Savremeni problemi modeliranja u hidraulici <i>Marko Ivetić</i>	3
2. Regionalna statistička analiza maksimalnih kratkotrajnih kiša <i>Vojislav Vukmirović i Dragutin Pavlović</i>	13
3. Integralni pristup problemu planiranja i razvoja vodoprivrednih sistema <i>Bratislav Stišović</i>	22
Hidroinformatika	
1. Automatska akvizicija hidroloških podataka Hidrometeorološkog zavoda Republike Srbije <i>M. Savić, B. Milakara i B. Palmar</i>	33
2. Relaciona baza podataka kao deo hidrometeorološkog informatičnog sistema Srbije <i>Zoran Radić, Miodrag Savić i Bojan Palmar</i>	39
3. PC sistem za obradu podataka u Republičkom hidrometeorološkom zavodu Republike Srbije <i>Bojan I. Palmar i Borjanka P. Palmar</i>	44
4. Hidrološki informacioni sistem Saveznog hidrometeorološkog zavoda <i>Vladimir Dimić, Slobodan Djoković i Dragan Tripković</i>	50
5. Primena AutoCAD-a proširenog sa GIS funkcijama u simulacionim modelima oticanja sa urbanih slivova <i>Dušan Prodanović, Slobodan Djordjević i Čedo Maksimović</i>	58
6. Aerovideografska metoda za prikupljanje podataka u hidrotehnici <i>Borislava Blagojević i Čedo Maksimović</i>	66
7. Edukacioni softver za studente i hidrotehničke stručnjake <i>Čedo Maksimović</i>	72
8. Hidrološki geografski informacioni sistem – principi i metodologija razvoja <i>Zoran Radić</i>	78
9. Hidrološki geografski informacioni sistem – pilot studija za Srbiju <i>Zoran Radić</i>	84



	<i>Djula Fabijan i Georgije Hajdin</i>	
7.	Dinamička opterećenja pri oscilacijama fluida i cevovoda <i>Zdravko Stojanović, Aleksandar Gajić i Stanislav Pejović</i>	272
8.	Merenje i analiza hidrodinamičkih pritisaka u galerijama brodske prevodnice <i>Sava Petković, Miodrag Milovanović i Radomir Kapor</i>	278
9.	Rektifikacija merne opreme za merenje protoka na sistemu za regionalno vodosnabdevanje "Studenčica" <i>Sotir Panovski, Igor Nedelkovski i Cano Joševski</i>	285
10.	Merenje i praćenje protoka rashladne vode za TE Bitola iz hidrosistema "Streževo" <i>Sotir Panovski i Vitomir Stojanovski</i>	290
11.	Primena serijskih pumpi u turbinskom režimu rada u visoko pritisnim pumpnim postrojenjima u cilju smanjenja pogonske snage motora glavne pumpe <i>Miloš Nedeljković, Zoran Protić i Miroslav Benišek</i>	296
12.	Specifičnosti hidrauličkog proračuna postrojenja za prečišćavanje otpadnih voda <i>Dejan Ljubisavljević i Aleksandar Djukić</i>	302
13.	Primena metode kinetičke ravnoteže pri oblikovanju strujnih prostora sa najpovoljnijim strujnim karakteristikama <i>Miroslav Benišek, Svetislav Čantrak, B. Ignjatović i Dubravka Pokrajac</i>	308

## Turbulencija i transportni procesi

1.	Procesi turbulentnog prenosa pri vihornom strujanju u elementima hidropostrojenja <i>Svetislav Čantrak, Miroslav Benišek i Miloš Nedeljković</i>	317
2.	Proračun turbulentnog tečenja u vodotoku sa bočnim ispustom <i>Radomir Kapor, Marko Ivetić i Čedo Maksimović</i>	323
3.	Odredjivanje trajektorija/strujnica za složene strujne slike <i>Dubravka Pokrajac i Ranko Lazić</i>	330
4.	Proračun transporta radioaktivnog zagadjivača <i>Ljubodrag Savić</i>	336
5.	Eksperimentalno ispitivanje neustaljenog tečenja mešavina vode i gline <i>Dejan Komatina</i>	343
6.	Testiranje osetljivosti matematičkog modela za proračun transporta suspendovanog nanosa na promene ključnih parametara <i>Enika Gregorić i Sava Petković</i>	349
7.	Numeričko modeliranje diskontinualnih tokova <i>Dejana Djordjević</i>	355
8.	Uporedna analiza numeričkih modela linijske konvekcije u otvorenim tokovima <i>Dragoslav Stefanović</i>	361





## Numeričko modeliranje diskontinualnih tokova

Dejana Đorđević, dipl. grad. inž.  
Građevinski fakultet, Beograd

### 1. Uvod

Tečenje sa slobodnom površinom u otvorenim tokovima opisuje se sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina (Sent Venant-ovim jednačinama) za čije je numeričko rešavanje, do sada, razvijen veliki broj računskih metoda. One se razlikuju po efikasnosti postupka i tačnosti rešenja. Jedna od metoda je i eksplicitna računaska shema razdvojenih operatora MacCormack koja je prvobitno razvijena za rešavanje problema iz oblasti gasne dinamike. Ona pripada metodama etapnog rešavanja i ima tačnost drugog reda u prostoru i vremenu. Bitne karakteristike sheme MacCormack jesu njena sposobnost da reprodukuje strmo čelo talasa bez uvođenja posebnog algoritma za njegovo otkrivanje i praćenje, kao i mogućnost proračuna kada su, u različitim delovima kanala, istovremeno prisutni i blago, i naglo promenljivo tečenje. Ove osobine čine je posebno privlačnom za primenu u hidraulici otvorenih tokova.

Da bi se prikazala efikasnost izabrane računске metode, kao i mogućnost njene primene u praksi, razmatrana su dva slučaja tečenja u kojima se javlja diskontinuitet toka u vidu talasa sa strmim čelom.

### 2. Matematički model

Linijsko neustaljeno tečenje u otvorenim tokovima opisuje se Sent Venant-ovim jednačinama napisanim za plitke oblasti strujanja. Za prizmatičan kanal pravougaonog poprečnog preseka sa blago nagnutim dnom važe jednačina kontinuiteta i dinamička jednačina napisane u konzervativnom obliku:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(V)}{\partial x} = -\vec{T}(V, x, t) \quad (1)$$



gde je:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} h \\ Q \end{bmatrix} \quad \vec{F}(V) = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} Q \\ \frac{Q^2}{bh} + \frac{1}{b} g b h^2 \end{bmatrix} \quad \vec{T}(V, x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ g b h (S_0 - S_f) \end{bmatrix} \quad (2)$$

U navedenim jednačinama  $x$  i  $t$  su nezavisno promenljive, dok su dubina  $h$  i protok  $Q$  zavisno promenljive. Gravitaciono ubrzanje je označeno sa  $g$ , širina kanala sa  $b$ .  $S_0$  je nagib dna kanala, a  $S_f$  pad linije energije usled gubitaka na trenje i uticaja fluktuacija na glavno strujanje.  $S_f$  se aproksimira Manning-ovom formulom:

$$S_f = n^2 \frac{Q|Q|}{A^2 R^{4/3}} \quad (3)$$

gde je  $n$ -Manning-ov koeficijent,  $A$ -površina poprečnog preseka, a  $R$ -hidraulički radijus.

Sistem jednačina (1), napisan u formi matricne jednačine, zajedno sa izrazom (2), predstavlja sistem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina hiperboličkog tipa. Pošto su jednačine (1) napisane u konzervativnom obliku, za njihovo numeričko rešavanje mogu se primeniti metode koje daju uopštena (slaba) rešenja, to jest rešenja koja pokrivaju kako oblast u kojoj su funkcije osnovnih veličina toka kontinualne i diferencijabilne, tako i oblast u kojoj se javlja njihov diskontinuitet. Korišćenje takvih metoda od velikog je značaja za rešavanje pojedinih problema hidrotehničke prakse, kao što je na primer, talasno kretanje izazvano rušenjem brane ili podizanjem ustave, itd.

### 3. Numerički model

Eksplicitna računaska shema MacCormack pripada klasi metoda uopštenih rešenja i grupi metoda konačnih razlika. Zasniva se na principu razdvajanja operatora po vremenu, a to podrazumeva etapno rešavanje problema. Ova shema ima dve etape:

- Etapa prediktora:

$$V_i^p = V_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{F}(V_i) + \Delta t T_i \quad (4)$$

- Etapa korektora:

$$V_i^c = V_i^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{F}(V_i^p) + \Delta t T_i^p \quad (5)$$

- Konačno rešenje:

$$V_i' = \frac{1}{2} (V_i + V_i^c) \quad (6)$$

U prethodnim jednačinama indeksom  $i$  iznačen je redni broj računskog profila u pravcu strujanja ( $x$ -pravcu). Vektor zavisno promenljivih sa prethodnog vremenskog nivoa



označen je sa  $V_i$ , odgovarajući vektori početnog i korigovanog rešenja sa  $V_i^p$  i  $V_i^c$  respektivno, a vektor konačnog rešenja sa  $V_i'$ .

Operator prostorne diskretizacije je jednostran, što znači da predstavlja ili razliku unazad ( $\mathfrak{B}$ ), ili razliku unapred ( $\mathcal{F}$ ):

$$\mathfrak{B}F(V_i) = F(V_i) - F(V_{i-1}) \quad i \quad \mathcal{F}F(V_i) = F(V_{i+1}) - F(V_i) \quad (7)$$

Pri tom treba naglasiti da se u etapi korektora uvek koristi operator suprotan onom koji je korišćen u etapi prediktora. Ovakvim etapnim rešavanjem zadatka i simetričnom izmenom operatora postiže se tačnost drugog reda u prostoru i vremenu. Redosled smenjivanja operatora  $\mathfrak{B}$  i  $\mathcal{F}$  prikazan je u Tabeli 1.

Tabela 1: Sekvence konačnih razlika

j	Prediktor	Korektor
1	$\mathfrak{B}$	$\mathcal{F}$
2	$\mathcal{F}$	$\mathfrak{B}$

Kao što se vidi, sekvenca operatora se ponavlja nakon svakog drugog koraka. Upravo ovo obeležje računске metode opravdava primenu MacCormack-ove sheme u sličajevima kada su, duž razmatranog kanala, istovremeno prisutna oba režima tečenja, kada se naizmenično smenjuju, kao i u slučajevima formiranja i propagacije izolovanog talasa sa strmim čelom, jer unapred eliminiše bilo kakvu pretpostavku o smeru prostiranja uticaja koja bi, u navedenim slučajevima, dovela do grubih grešaka [1].

Stabilnost numeričke sheme definisana je Courant-Friedrichs-Lewy-evim uslovom:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{(v + c)_{max}} \quad (8)$$

gde je:  $v=Q/A$ , a  $c=\sqrt{gh}$ .

Prema Lax-ovoj teoremi shema je stabilna [2].

#### 4. Primena numeričkog modela

Mogućnost primene opisane računске metode biće ilustrovana na dva primera od kojih je jedan hipotetičan slučaj prstiranja strmih talasa izazvanih dvostepenim dizanjem ustave koja se nalazi na početku kanala, a drugi, simulacija jednog laboratorijskog eksperimenta.

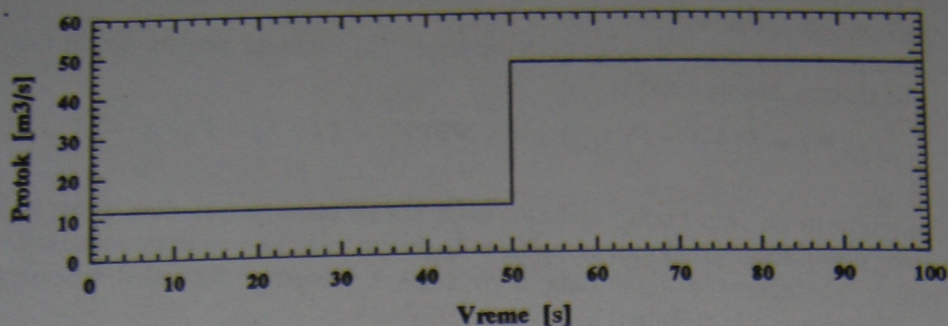
**Prostiranje dva talasa sa strmim čelom koji se pojavljuju u određenom vremenskom razmaku.** U ovom primeru razmatran je slučaj u kome se, u određenom vremenskom razmaku, u kanalu javljaju dva strma talasa.

Kanal je jedinične širine ( $b=1$  m) i dužine 400 m. Dno je horizontalno. Trenje je zanemareno. Prostorni korak je  $\Delta x=20$  m, a vremenski korak je računat tako da maksimalna vrednost  $C_r$  broja bude 0.8.

U početnom trenutku voda u kanalu miruje. Dubina vode je 2 m. Granični uslov na uzvodnom kraju zadat je hidrogramom (slika 1).

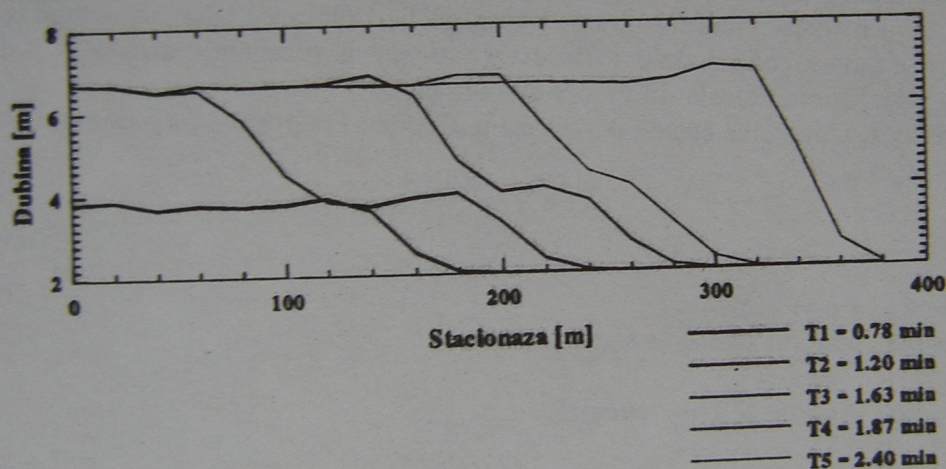
Prvi talas visine 3.7 m izazvan je naglim podizanjem ustave, odnosno trenutnim povećanjem protoka sa  $0 \text{ m}^3/\text{s}$  na  $11.9 \text{ m}^3/\text{s}$  na uzvodnom kraju kanala (slika 2:  $t_1=0.78\text{min}$ ).





Slika 1: Uzvodni granični uslov

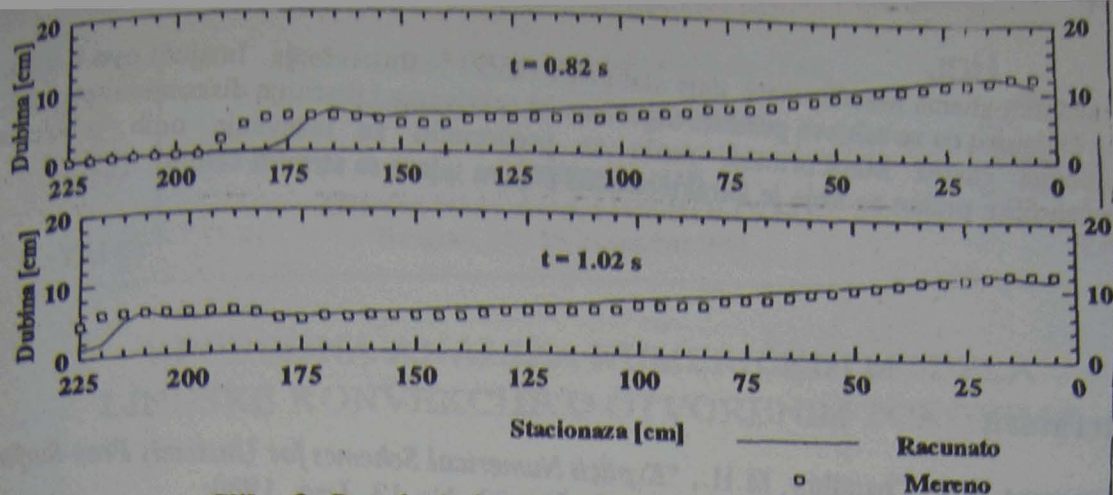
Protok je održavan konstantnim narednih 50 s, a zatim je, dodatnim podizanjem ustave, povećan na  $47.62 \text{ m}^3/\text{s}$ . Ovo naglo povećanje protoka izazvalo je pojavu drugog talasa koji putuje znatno većom brzinom od prvog (slika 2:  $t_2 = 1.20 \text{ min}$ ,  $t_4 = 1.87 \text{ min}$ ). Sa slike 2 vidi se da posle  $t_5 = 2.4 \text{ min}$  drugi talas sustiže prvi, nakon čega zajedno nastavljaju da se kreću nizvodno. Sa svih pet sekvenci jasno se uočava da diskontinuiteti zahvataju svega tri računaska profila, što pokazuje da MacCormack-ova računaska shema vrlo uspešno reprodukuje strmo čelo talasa.



Slika 2: Linije nivoa za slučaj propagacije dva talasa sa strmim čelom zabeležene u nekoliko različitih vremenskih trenutaka

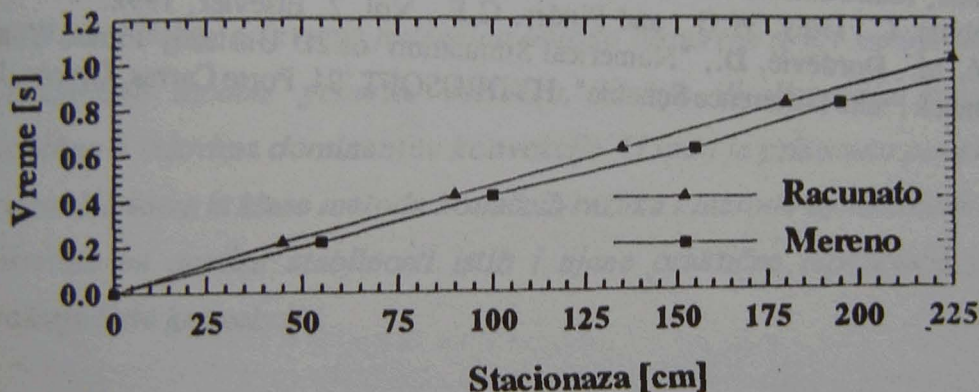
**Numerička simulacija jednog laboratorijskog eksperimenta.** Drugi primer se odnosi na verifikaciju opisane računske sheme pomoću jednog laboratorijskog ekperimenta [4]. Eksperiment je obavljen u labratorijskom kanalu sa staklenim zidovima i promenljivim nagibom dna, dužine  $4.5 \text{ m}$  i širine  $0.15 \text{ m}$ . Uzvodni deo kanala je pregrađen tablastom ustavom i predstavlja rezarvoar. Nizvodni deo kanala, dužine  $2.25 \text{ m}$ , korišćen je za analizu prostiranja talasa sa strmim čelom koji je izazvan naglim podizanjem ustave. Dubine su merene pomoću membranskih sonde tipa "Druck" i registrovane pomoću elektronskog sistema za prikupljanje i obradu podataka.





Slika 3: Poređenje izmerene i sračunate linije nivoa

Simuliran je eksperiment u kome je početna dubina u rezervoaru iznosila  $H=0.3$  m, nagib dna kanala  $0.1\%$ , a Manning-ov koeficijent  $0.009 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ . Rezultati merenja i numeričke simulacije prikazani su na slici 3. Uzvodni granični uslov je definisan u skladu sa zakonom podizanja ustave, a nizvodni u obliku tzv. "otvorenog" graničnog uslova. Radi lakšeg poređenja sa rezultatima merenja, tokom cele simulacije korišćen je konstantan vremenski korak  $\Delta t=0.01$  s. Sa ovom vrednošću  $\Delta t$  zabeležena je maksimalna vrednost Courant-ovog broja  $Cr=0.6$ .



Slika 4: Vremena propagacije

Kvantitativna analiza izmerenih i sračunatih dubina pokazala je da njihova razlika u proseku iznosi  $10\%$ . Uočeno je takođe, da se računski talas kreće nešto sporije od talasa u laboratorijskom kanalu (slike 3 i 4).

Analiza konzervativnosti računске sheme MacCormack pokazala je da, u ovom konkretnom slučaju, maksimalni gubitak odnosno, dobitak zapremine iznosi  $0.4\%$ . Provera konzervativnosti u prirodnim tokovima je takođe pokazala zadovoljavajuće rezultate [6].

## 5. Zaključci

Kvalitativna analiza rezultata numeričke simulacije za slučaj prostiranja dva talasa sa strmim čelom koji se javljaju u određenom vremenskom razmaku, i kvalitativna i kvantitativna analiza rezultata numeričke simulacije laboratorijskog eksperimenta pokazuju



da računska shema MacCormack daje stabilna i fizički realna rešenja. Imajući ovo u vidu, kao i činjenicu da ne zahteva poseban algoritam za otkrivanje i praćenje diskontinuiteta toka, eksplicitna shema MacCormack može se preporučiti za rešavanje onih problema hidrotehničke prakse za koje je karakteristična pojava talasa sa strmim čelom.

## Literatura

1. Fennema, R.J., Chaudhry, M.H., "Explicit Numerical Schemes for Unsteady Free-Surface With Shocks", Water Resources Research, Vol.22, No.13, Dec. 1986.
2. Garcia-Navarro, P., Saviron, J.M., "MacCormack's method for the numerical simulation of one-dimensional discontinuous unsteady open channel flow", Journal of Hydraulic Research, Vol.30, 1992., No.1
3. Hajdin, G., "Mehanika fluida", Beograd 1984.
4. Komatina, D., "Analiza tečenja gustih mešavina u otvorenim tokovima", Magistarska teza, Beograd, 1993.
5. Radojković, M., Klem, N., "Primena računara u hidraulici", Beograd 1988.
6. Thandaveswara, B.S., Kumar, A.A., "MacCormack Approach- A Case Study of Narmada River Floods", Mathematical Modelling in Water Resources, ed. by Russell, I.F., Ewing, R.E., Brebbia, C., Grey, W.G., and Pinder, G.F., Vol. 2, Elsevier, 1992.
7. Jovanović, M., Đorđević, D., "Numerical Simulation of 2D Unsteady Flows With The MacCormack Finite Difference Scheme", HYDROSOFT '94, Porto Carras, Greece, 1994.



UP  
LIND

Dragoslav S

Kod numeričkih  
standardnih m  
posebno u uslo  
računskih šema  
osvrtnom na a  
rešenju čiste ko

Numerical mode  
artificial viscosit  
convective condi  
and methods of  
numerical repercu