

REŠAVANJE JEDNAČINA KRETANJA FLUIDA METODOM ZASNOVANOM NA PRAĆENJU FLUIDNIH DELIĆA (SPH METODA)

Nikola ROSIĆ, Ljubodrag SAVIĆ, Dejana ĐORĐEVIĆ
Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

REZIME

U ovom radu se opisuje numerička metoda za rešavanje jednačina kretanja fluida zasnovana na praćenju fluidnih delića, koja se na engleskom jeziku naziva *Smoothed Particle Hydrodynamics* (skraćeno SPH). Predstavljene su teorijske osnove SPH metode kao i rezultati primene ove numeričke metode u numeričkom modeliranju problema tečenja vode usled rušenja brane i odbijanja talasa od nepokretne granice. Rezultati dobijeni korišćenjem standardnog oblika SPH metode po kojem se voda tretira kao blago stišljiv fluid (WCSPH) su upoređeni sa rezultatima eksperimenta na fizičkom modelu, kako bi se dala ocena tačnosti SPH metode u predviđanju izrazito neustaljenog strujanja sa slobodnom površinom.

Ključnereči: Računska dinamika fluida, Lagranžov pristup, interpolaciona teorija, veštačka stišljivost, problem rušenja brane.

1. UVOD

U proučavanju strujnog polja kod otvorenih tokova mogu se koristiti dva pristupa; jedan u kome se prate promene fizičkih veličina kroz vreme u unapred zadatim fiksnim tačkama, pomoću kojih se diskretizuje fluidni kontinuum (Ojlerov pristup) i drugi, u kom se iste promene prate u ograničenom broju fluidnih delića (Lagranžov pristup). Sa numeričke tačke gledišta, prvi pristup se vezuje za metode koje zahtevaju unapred definisan raspored računskih tačaka u prostoru u vidu računске mreže, dok se kod numeričkih metoda zasnovanih na Langranžovom pristupu ne zahteva definisanje računске mreže (eng. Mesh-free methods), ali je neophodno da svaki fluidni delić bude nosilac čitavog niza promenljivih kao što su masa, količina kretanja, položaj, itd. U hidrotehnici se standardno primenjuju metode koje zahtevaju formiranje računskih mreža [1], [2], [3].

Metoda koja se opisuje u ovom radu pripada grupi metoda zasnovanih na Langranžovom pristupu, iz čega proističu njene značajne prednosti u odnosu na konvencionalne metode sa računskim mrežama pri rešavanju problema koje karakterišu nagle promene oblika slobodne površine kroz vreme i fragmentacija strujnog polja. Naime, u takvim slučajevima metode sa računskim mrežama zahtevaju česte promene izgleda računске mreže tokom proračuna, što veoma komplikuje računski algoritam. SPH metoda nema taj problem, jer se kontinuum diskretizuje pomoću fluidnih delića bez fiksne povezanosti, što daje veću slobodu u modeliranju naglo promenljivih tokova. SPH metoda ima i neke druge prednosti koje upravo proističu iz zasnovanosti postupka na Lagranžovom pristupu: (a) svojstva fizičkog sistema u celini lako se utvrđuju praćenjem čestica; (b) konvekcija se direktno određuje bez numeričke difuzije; (c) komplikovane i fragmentirane oblasti strujanja (kao na primer kod lomećih talasa), kao i oblasti sa spajanjem i mešanjem tokova, relativno se lako modeliraju. Ipak, čak i za rešavanje relativno malih računskih oblasti potrebno je generisati veoma veliki broj računskih delića, pa praktična upotreba SPH metode najčešće zahteva „paralelizaciju” izvršenja računskog postupka.

Bitna odlika standardnog SPH postupka je uvođenje veštačke stišljivosti u matematički model strujanja fluida čime se znatno pojednostavljuje računski algoritam [4]. Rezultati modeliranja tečenja nestišljivih fluida SPH metodom su zato najčešće praćeni neprirodnim oscilacijama pritisaka dok se sa zadovoljavajućom tačnošću sračunava položaj slobodne granice fluida. SPH metod ima i izvesne nedostatke koje su posledica problema sa numeričkom konzistencijom usled tzv. kernel i čestične aproksimacije, koje predstavljaju osnovne postupke za prostornu diskretizaciju računskog domena. Poseban problem predstavlja i definisanje graničnih uslova o čemu se, takođe, govori u ovom radu.

U radu se prvo predstavljaju teorijske osnove SPH metode da bi se zatim predstavili rezultati primene ove metode u simuliranju problema rušenja brane i odbijanja talasa od nepokretne granice.

2. TEORIJSKE OSNOVE

2.1 Aproksimacija proizvoljne funkcije

Prvi korak u SPH metodi je opisivanje razmatrane funkcije i njenih izvoda u kontinualnoj formi preko interpolacione funkcije koja se naziva *kernel* funkcija, pa se zato ovaj korak obično naziva *kernel* aproksimacija [4]. Primena kernel funkcije zasnovana je na sledećoj jednakosti:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \tag{1}$$

gde je $f(\mathbf{x})$ funkcija vektora položaja \mathbf{x} , Ω oblast integracije a $\delta(\mathbf{x})$ Dirakova delta funkcija koja se definiše na sledeći način:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \end{cases} \tag{2}$$

Ukoliko se umesto delta funkcije uvede kontinualna funkcija $W(\mathbf{x})$ koja mora da zadovolji određene uslove kako bi metoda bila konzistentna, dobija se prva aproksimacija u postupku primene SPH metode:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \tag{3}$$

Funkcija $W(\mathbf{x})$ se naziva kernel funkcija a operator $\langle \rangle$ označava da se radi o aproksimaciji funkcije. Parametar h određuje granicu za koju važi da je:

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = 0 \text{ za } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \geq \kappa h, \tag{4}$$

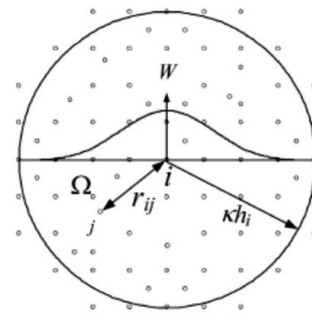
gde je κ proizvoljna konstanta. Parametar h tj. vrednost κh određuje širinu uticaja vrednosti funkcije $f(\mathbf{x})$ u određenoj tački u prostoru na vrednosti iste funkcije u drugim tačkama računskog domena (što je ilustrovano na slici 1) i obrnuto. Uslov (4) je neophodan kako bi proračun vrednosti funkcije u određenoj tački imao lokalni karakter. Pored prikazane osobine za funkciju $W(\mathbf{x})$ bi trebalo da važe i sledeće jednakosti:

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 1, \tag{5}$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0, \tag{6}$$

koje redom predstavljaju uslove za tačnost prvog i drugog reda kernel aproksimacije u odnosu na parametar h . Naime, razvojem funkcije $f(\mathbf{x}')$ u Tejlorov red u okolini \mathbf{x} , može se dati ocena tačnosti kernel aproksimacije:

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}) \rangle &= \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + r((\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2)] \cdot W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &= f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' + \\ &f'(\mathbf{x}) \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' + r(h^2). \end{aligned} \tag{7}$$



Slika 1. Oblast uticaja jedne čestice

Ukoliko važe obe jednakosti, (5) i (6), može se napisati da je:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x}) + r(h^2). \tag{8}$$

Aproksimacija funkcije $\nabla \cdot f(\mathbf{x})$ se obavlja tako što se u izrazu (3) $f(\mathbf{x})$ zameni sa $\nabla \cdot f(\mathbf{x})$, pa važi da je:

$$\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} \nabla \cdot f(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \tag{9}$$

Korišćenjem Gausove teoreme i pravila diferenciranja dobija se:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \rangle &= \int_S f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \cdot \bar{\mathbf{n}} dS - \\ &- \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}', \end{aligned} \tag{10}$$

gde je $\bar{\mathbf{n}}$ jedinični vektor normale na površinu S koja predstavlja granicu računskog domena Ω . Za sve tačke u prostoru koje su na većem rastojanju od κh od granice S vrednost kernel funkcije je, s obzirom na izraz (4),

jednaka nuli, pa za aproksimaciju izvoda važi sledeća jednakost:

$$\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \cdot \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (11)$$

Analogno izvođenju uslova (5) i (6), mogu se izvesti uslovi za konzistenciju kernel aproksimacije izvoda:

$$\int_{\Omega} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0, \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 1, \quad (13)$$

gde prva jednakost predstavlja potreban uslov za aproksimaciju izvoda prvog reda tačnosti (zadovoljena je ukoliko je *kernel* funkcija simetrična) a druga potreban uslov za aproksimaciju izvoda drugog reda tačnosti.

Drugi korak u metodi SPH podrazumeva prostornu diskretizaciju fluidne sredine konačnim brojem čestica. Svakoj čestici se pridružuje određena masa m_i i gustina ρ_i , pa na osnovu toga čestica zauzima zapreminu $\Delta V_i = m_i / \rho_i$. Tako se diskretizacijom izraza (3) i (11) dobija konačan izraz za aproksimaciju proizvoljne funkcije i odgovarajućih izvoda:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h), \quad (14)$$

$$\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \rangle = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \nabla \cdot W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h), \quad (15)$$

s tim da se korišćenjem naredne dve jednakosti:

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot (\rho f(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x}) \cdot \nabla \rho], \quad (16)$$

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}) = \rho \left[\nabla \cdot \left(\frac{f(\mathbf{x})}{\rho} \right) + \frac{f(\mathbf{x})}{\rho^2} \cdot \nabla \rho \right], \quad (17)$$

dobijaju simetrični i asimetrični oblik aproksimacije izvoda koji se najčešće koriste u SPH metodi:

$$\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j=1}^N m_j [f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)] \cdot \nabla_i W_{ij} \right], \quad (18)$$

$$\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}_i) \rangle = \rho_i \left[\sum_{j=1}^N m_j \left[\left(\frac{f(\mathbf{x}_j)}{\rho_j^2} \right) + \left(\frac{f(\mathbf{x}_i)}{\rho_i^2} \right) \right] \cdot \nabla_i W_{ij} \right], \quad (19)$$

gde je $W_{ij} = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$.

Iz izraza (18) i (19) sledi da se vrednosti izvoda proizvoljne funkcije koja se vezuje za česticu fluida označenu sa i računaju na osnovu vrednosti iste funkcije u okolnim česticama fluidne sredine (česticama koje su na rastojanju manjem od κh i koje su označene sa j) i na osnovu vrednosti *kernel* funkcije.

Uslovi za tačnost prvog odnosno drugog reda SPH metode u diskretnoj formi su:

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij} = 1, \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = 0, \quad (21)$$

dok su uslovi konzistencije aproksimacije izvoda:

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij}' = 0, \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij}' (x_i - x_j) = 1, \quad (23)$$

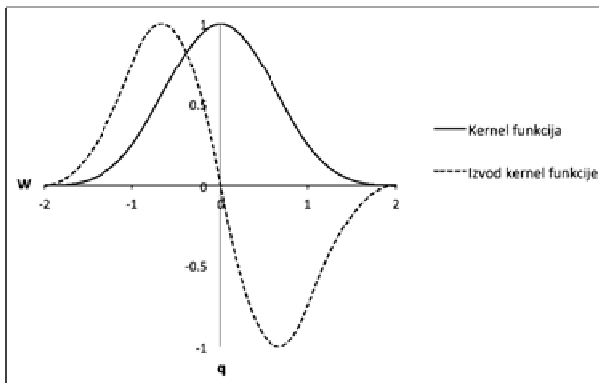
Kao kernel funkcije najčešće se koriste kubni polinom (slika 2) definisan izrazom:

$$W_{ab} = 1/(\pi h^3) \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-q)^3 & 1 \leq q \leq 2, \\ 0 & q \geq 2 \end{cases} \quad (24)$$

gde je $q = \frac{|r_{ij}|}{h}$, i tzv. Wendland funkcija za koju se smatra da omogućava najbolji kompromis između tačnosti i vremena utrošenog na računске operacije:

$$W_{ab}(q, h) = 7 / (8\pi h^3) (1 - \frac{q}{2})^4 (2q + 1). \quad (25)$$

Obe funkcije zadovoljavaju potrebne uslove za tačnost drugog reda *kernel* aproksimacije. Pored navedenih uslova, pravilo je da *kernel* funkcije budu pozitivne kako bi se dobile fizički realne vrednosti promenljivih i da budu blago promenljive kako se ne bi javljale neprirodne oscilacije vrednosti fizičkih veličina.



Slika 2. Kubni polinom kao *kernel* funkcija

2.2 Jednačine strujanja u SPH metodi

Strujanje fluida može da se opiše korišćenjem materijalnih izvoda na sledeći način:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g} + \mathbf{\Pi} \end{array} \right. , \quad (26)$$

Gde su \mathbf{v} - vektor brzine, P - pritisak, \mathbf{g} - gravitaciono ubrzanje, $\mathbf{\Pi}$ - difuzioni član i ρ - gustina. Korišćenjem predstavljenih pravila za aproksimaciju funkcija, u SPH metodi prikazani materijalni izvodi se računaju se na sledeći način:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{D\rho_i}{Dt} \right\rangle = \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \nabla W_{ij} \\ \left\langle \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} \right\rangle = - \sum_j m_j \left(\frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2} + \mathbf{\Pi}_{ij} \right) \nabla W_{ij} + \mathbf{g} \end{array} \right. , \quad (27)$$

gde je $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$. Za proračun promene položaja čestica koristi se tzv. XSPH postupak po kojem je [4]:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right\rangle = \mathbf{v}_i + \varepsilon \sum_j \frac{m_j}{\bar{\rho}_{ij}} \mathbf{v}_{ji} W_{ij}, \quad (28)$$

gde je ε parametar koji uzima vrednosti od 0 do 1 (najčešće se uzima $\varepsilon = 0,5$) dok je $\bar{\rho}_{ij} = (\rho_i + \rho_j) / 2$. Drugi član u izrazu (28) se koristi kako bi se dobio pravilniji raspored čestica.

U izrazu (26) se za aproksimaciju gradijenta pritiska koristi simetrični oblik *kernel* aproksimacije. Ukoliko je i difuzioni član simetričan, međusobni uticaji različitih čestica su po intezitetu jednaki ali su suprotnog znaka zbog asimetričnosti prostornih izvoda funkcije W . Ovim se postiže automatsko zadovoljavanje održanja količine kretanja. Asimetrični oblik aproksimacije gradijenta pritiska se dobija primenom izraza (18):

$$\left\langle -\frac{\nabla P}{\rho} \right\rangle = - \sum_{j=1}^N m_j \left[\frac{P_j - P_i}{\rho_i \rho_j} \right] \cdot \nabla_i W_{ij}. \quad (29)$$

Primećuje se da se korišćenjem ovog izraza gradijent pritiska računa tačno u delovima strujnog polja gde je pritisak konstantan što ne mora biti slučaj sa simetričnim oblikom aproksimacije. Sa druge strane, kod asimetričnog oblika aproksimacije gradijenta pritiska nije automatski zadovoljen uslov održanja količine kretanja.

Kako bi se računski algoritam pojednostavio, u standardnoj varijanti SPH metode uvodi se veštačka stišljivost. Tako je proračun pritiska „razdvojen” od proračuna brzina i obavlja se na osnovu sračunate gustine iz jednačine kontinuiteta, korišćenjem *jednačine stanja*:

$$P = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right], \quad (30)$$

gde su $\gamma=7$ (obično), $B=c_0^2\rho_0/\gamma$, ρ_0 (referentna gustina fluida), dok je c_0 brzina prostiranja zvuka u fluidu koji ima gustinu ρ_0 . Obično se uzima da je vrednost brzine zvuka u fluidu manja od realne, kako bi vrednost vremenskog računskog koraka bila prihvatljiva. Najčešće se uzima da je brzina prostiranja zvuka 10 puta veća od najveće (procenjene) brzine fluida. Smatra se da je, s jedne strane, ova vrednost dovoljno „mala“ da omogućava prihvatljivu vrednost vremenskog koraka i dovoljno „velika“, s druge strane, da obezbedi prihvatljivo male vrednosti neprirodnih oscilacija gustine odnosno pritiska.

Preko difuzionog člana Π_{ij} se može predstaviti uticaj „stvarnih“ viskoznih napona (laminarno strujanje) ili se mogu opisati turbulentni tokovi. Kod izrazito neustaljenih fenomena, preko difuzionog člana se uvodi veštačka viskoznost kako bi se proračun stabilizovao. Tako Monaghan predlaže sledeću formulaciju difuzionog člana, baziranu na veštačkoj viskoznosti:

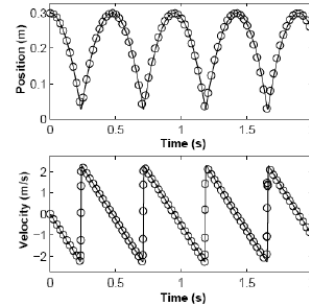
$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0, \\ 0 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} > 0, \end{cases} \quad (31)$$

gde su: $\mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} + 0.01h^2}$; $\bar{c}_{ij} = (c_i + c_j)/2$; α je parametar koji se određuje probanjem.

Standardni oblik SPH metode karakteriše odsustvo algoritma za „praćenje“ slobodne površine. Sa obzirom da je metoda bazirana na Lagranžovom pristupu praćenja fluidnih delića, zapravo i ne postoji potreba za kinematičkim uslovom u računskom modelu. Sa druge strane nepostojanje dinamičkog uslova je nedostatak koji utiče na tačnost proračuna fizičkih veličina u blizini granice [5].

U standardnoj varijanti metode, definisanje graničnih uslova se vezuje samo za uslov nepropusnosti čvrste granice. Tako se čvrsta granica oblasti strujanja može predstaviti, isto kao i fluidna sredina, česticama za koje važe iste jednačine kao i za čestice fluida s tim da im je brzina predefinisana (npr. nula za nepokretnu granicu). Navedeno znači, da se za čestice granice ne računa promena položaja, već se na osnovu relativne promene

položaja ovih čestica u odnosu na fluidne čestice iz jednačine kontinuiteta računa promena njihove gustine, a iz jednačine stanja promena pritiska. Ovim se stvara odbojni mehanizam koji je ilustrovan na slici 3 gde je prikazana promena položaja i promena brzine jedne čestice na koju deluje gravitaciona sila (i odbojna sila granice).



Slika 3. Odbijanje čestice od čvrstu granicu [6]

Za integraciju jednačina (26) i (27) po vremenu standardno se koristi *Verlet* shema po kojoj se, na osnovu aproksimativnog proračuna izvoda brzine F_i , gustine D_i i vektora položaja V_i , vrednosti odgovarajućih fizičkih veličina u prvom vremenskom koraku računaju na sledeći način:

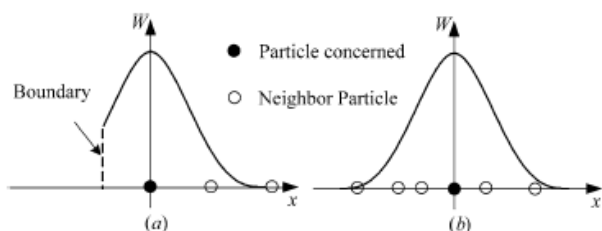
$$\begin{aligned} v_i^1 &= v_i^0 + \Delta t F_i^0; \\ \rho_i^1 &= \rho_i^0 + \Delta t D_i^0; \\ r_i^0 &= r_i^1 + \Delta t V_i^0 + 0,5 \Delta t^2 F_i^0, \end{aligned} \quad (32)$$

dok se u ostalim računskim koracima računaju korišćenjem sledećih izraza:

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} &= v_i^{n-1} + 2\Delta t F_i^n; \\ \rho_i^{n+1} &= \rho_i^{n-1} + 2\Delta t D_i^n; \\ r_i^{n+1} &= r_i^n + \Delta t V_i^n + 0,5 \Delta t^2 F_i^n. \end{aligned} \quad (33)$$

2.3 Problem nekonzistentije u SPH metodi

Uslovi konzistentosti SPH metode nisu zadovoljeni za čestice fluidne sredine koje su na manjem rastojanju od κh od čestica granice. Čak i za čestice fluidne sredine koje se nalaze „dovoljno daleko“ od granice strujanja nisu nužno zadovoljeni uslovi od (20) do (23). Uzrok može biti ili neuniforman raspored ili nedovoljan broj čestica.



Slika 4. Nepotpunost kernel funkcije i neuniforman raspored čestica

Da bi se ostvarila konzistencija računskog postupka, računski postupak se mora korigovati. Tako se za proračun gustine alternativno, može koristiti izraz (14):

$$\langle \rho \rangle = \sum_{j=1}^N m_j W(x - x_j, h), \quad (34)$$

koji se koriguje na sledeći način (Šepardov filter) [6]:

$$\langle \rho \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \frac{W(x - x_j, h)}{\sum_{j=1}^N \frac{m_j W_{ij}}{\rho_j}}, \quad (35)$$

čime se uspostavlja tačnost prvog reda u aproksimaciji gustine bez obzira na to da li je zadovoljena jednakost definisana izrazom (20).

Slično, ukoliko funkcija može da se razvije u Tejlorov red, može se izvesti konzistentan oblik aproksimacije izvoda (prikazani izraz odgovara slučaju linijskog tečenja) [7]:

$$\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \left[\frac{\sum_{j=1}^N m_j [f(x_j) - f(x_i)] \cdot \nabla_i W_{ij}}{\sum_{j=1}^N \frac{m_j W_{ij}'(x_i - x_j)}{\rho_j}} \right], \quad (36)$$

koji je drugog reda tačnosti. Ipak, kako se u literaturi navodi a potvrđuje i iskustvo autora ovog teksta, korišćenje poslednjeg izraza, iako teorijski opravdano, daje rezultate manje tačnosti u odnosu na rezultate korišćenja standardnog (nekonzistentnog) SPH modela. Ovakvi rezultati se mogu objasniti time da se u numeričkom modeliranju strujanja fluida javljaju funkcionalne zavisnosti koje se ne mogu prikazati pomoću Tejlorovog reda kao i time što se prikazanom korekcijom za proračun izvoda narušava simetričnost SPH aproksimacija, pa konzervativnosti količine

kretanja nije automatski zadovoljena. Tako se često u literaturi navodi da je konzervativnost postupka, u SPH metodi, važnija od numeričke konzistencije.

3. PRIMENA SPH METODE U MODELIRANJU NAGLO PROMENLJIVIH TOKOVA

SPH metodom se relativno lako modeliraju komplikovane i fragmentirane oblasti strujanja, pa je metod pogodan u modeliranju naglo promenljivih tokova. Primena SPH metode na pojave koje karakterišu talasi sa strmim čelom i lomeći talasi, predmet je analize koja je opisana u narednom delu teksta. Radi poređenja sa rezultatima numeričke simulacije, iz literature su preuzeti rezultati eksperimenta na fizičkom modelu u kojem je analiziran problem rušenja brane, sa odbijanjem talasa vode od čvrste granice.

S obzirom da se u standardnoj SPH metodi, vodi zadaje veštačka stišljivost (WCSPH), koja ima uticaj na proračun pritisaka, u radu se ne analizira mogućnost metode u predviđanju dinamičkih uticaja, već se predstavljene rezultati odnose na opisivanje kinematike razmatrane pojave. Ovo „razdvajanje“ dinamike i kinematike u kontekstu primene SPH metode se često sreće u literaturi. Rezultati mnogih istraživanja pokazuju da metoda, iako ne može tačno da proceni polje pritisaka, na sasvim zadovoljavajući način opisuje kinematiku modeliranih pojava [5], [8].

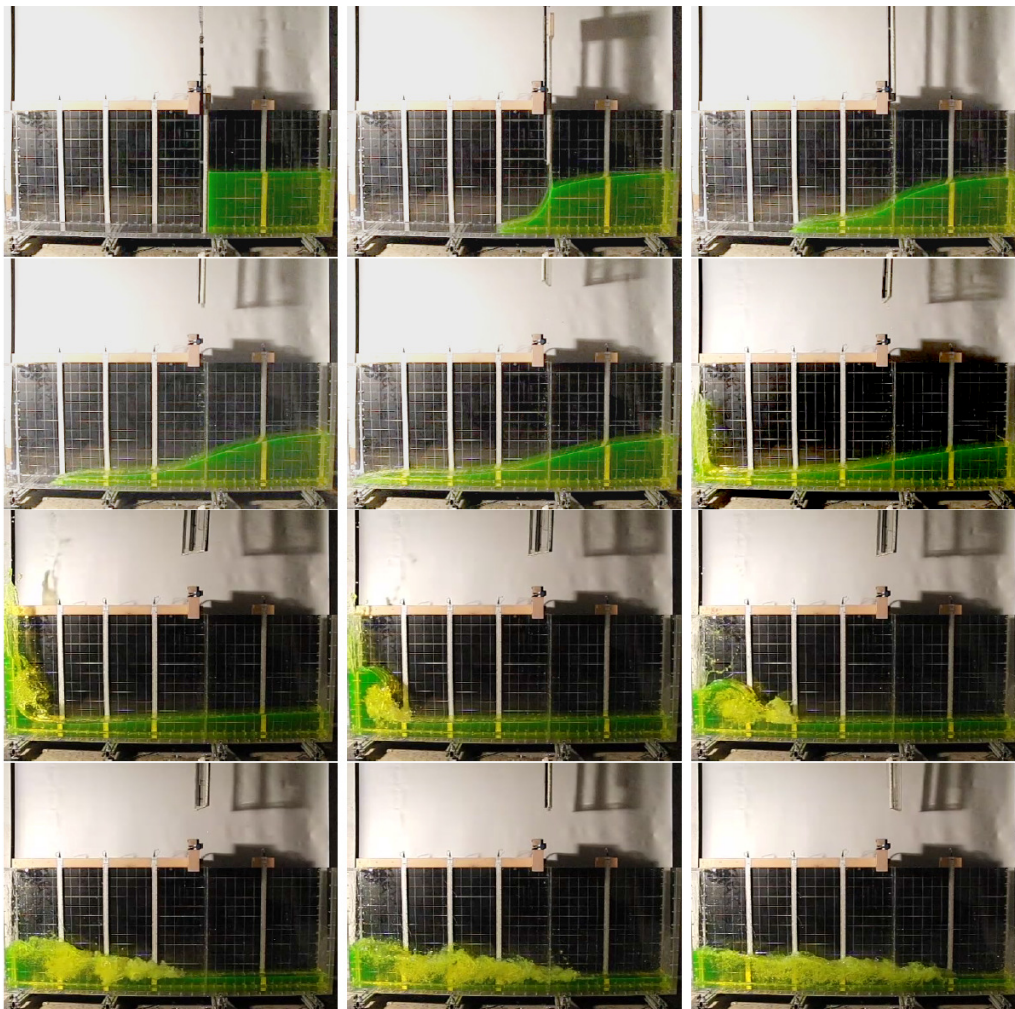
3.1 Laboratorijski ogled

Termin *problem rušenja brane* se u mehanici fluida odnosi na strujanje vode nastalo usled naglog uklanjanja dela granice koja održava vodeni stub u stanju mirovanja. Strujanje karakteriše pojava talasa sa strmim čelom, koji predstavlja "diskontinuitet" u vrednostima fizičkih veličina. U slučaju ravanskog problema postoji teorijsko rešenje problema za idealni fluid [9], po kojem slobodna površina predstavlja paraboličnu krivu dok se brzina čela određuje na osnovu dubine vodenog stuba ($V = 2 \cdot \sqrt{gH}$, gde je g gravitaciono ubrzanje). Teorijsko rešenje se, ako se izuzme čelo talasa, dobro slaže sa eksperimentima. Eksperiment koji se ovde prikazuje dodatno komplikuje odbijanje vode od čvrste granice, koje karakteriše udarni pritisak na granicu i pojava lomećih talasa. Pritisak na granici koji se prilikom udara javlja je i vremenski i prostorno promenljiv a strujna slika nakon odbijanja izrazito nepravilna.



Rezultati laboratorijskog eksperimenta rušenja brane sa odbijanjem od čvrste granice predstavljeni su u radu [10]. Autori su koristili instalaciju koja se sastojala iz rezervoara dužine 1,61 m, visine 0,60 m i širine 0,15 m; ustave kojom se održava vodeni stub u stanju mirovanja; mehanizma za brzo podizanje ustave i senzora za merenje pritiska na čelu rezervoara (slika 5). Prilikom izvođenja eksperimenta strujanje vode se snimalo kamerom koja omogućava beleženje 300 snimaka u sekundi rezolucije 512x384. Postavljena kvadratna mreža na zidu rezervoara omogućila je precizno određivanje položaja slobodne površine sa video snimaka.

Slika 5. Instalacija na kojoj se ispituje problem rušenja brane i udara vode u zid rezervoara [10]

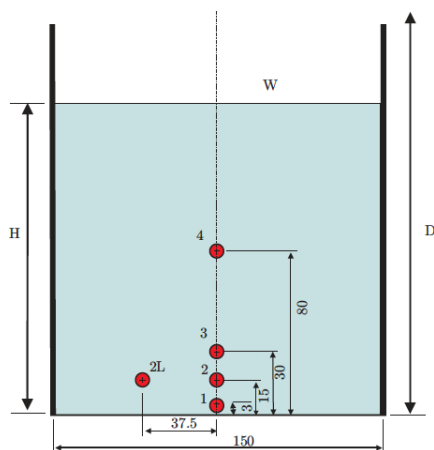


Slika 6. Promena izgleda fluidne struje za vreme eksperimenta [10]

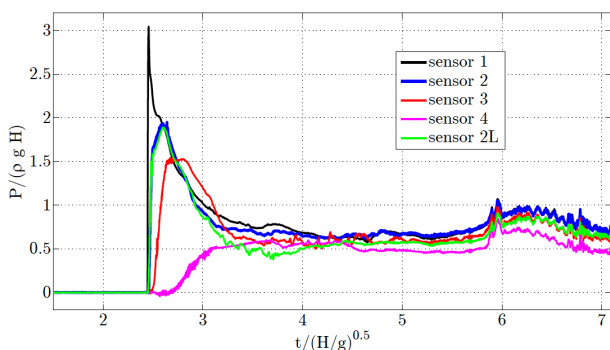
Na slici 6 prikazan je izgled fluidne struje zabeležen za vreme laboratorijskog eksperimenta u kojem je početna visina vodenog stuba iznosila 0,30 m (širina 0,60 m). Sa slike se može zaključiti da vodena struja pre udara u granicu rezervoara predstavlja kompaktnu celinu sa čelom talasa koji menja oblik ("razvlači se"). Nakon udara, vodena struja se prvo kreće vertikalno naviše, a zatim se deli na kompaktnan deo, koji predstavlja odbijeni talas, i deo koji se razbio u više pravaca.

Odbijeni "kompaktni" talas se ubrzo meša sa ostalim delovima struje i dobija se izraženo nepravilan izgled strujne slike.

Pored snimanja fluidne vodene struje u toku eksperimenta se u nekoliko tačaka čvrste granice merio pritisak (raspored senzora je prikazan na slici 7). Na slici 8 prikazana je promena pritiska tokom eksperimenta. Najveća vrednost na prikazanom dijagramu odgovara trenutku udara vodene struje o zid rezervoara (što je i očekivano).



Slika 7. Položaj senzora za merenje pritiska [10]



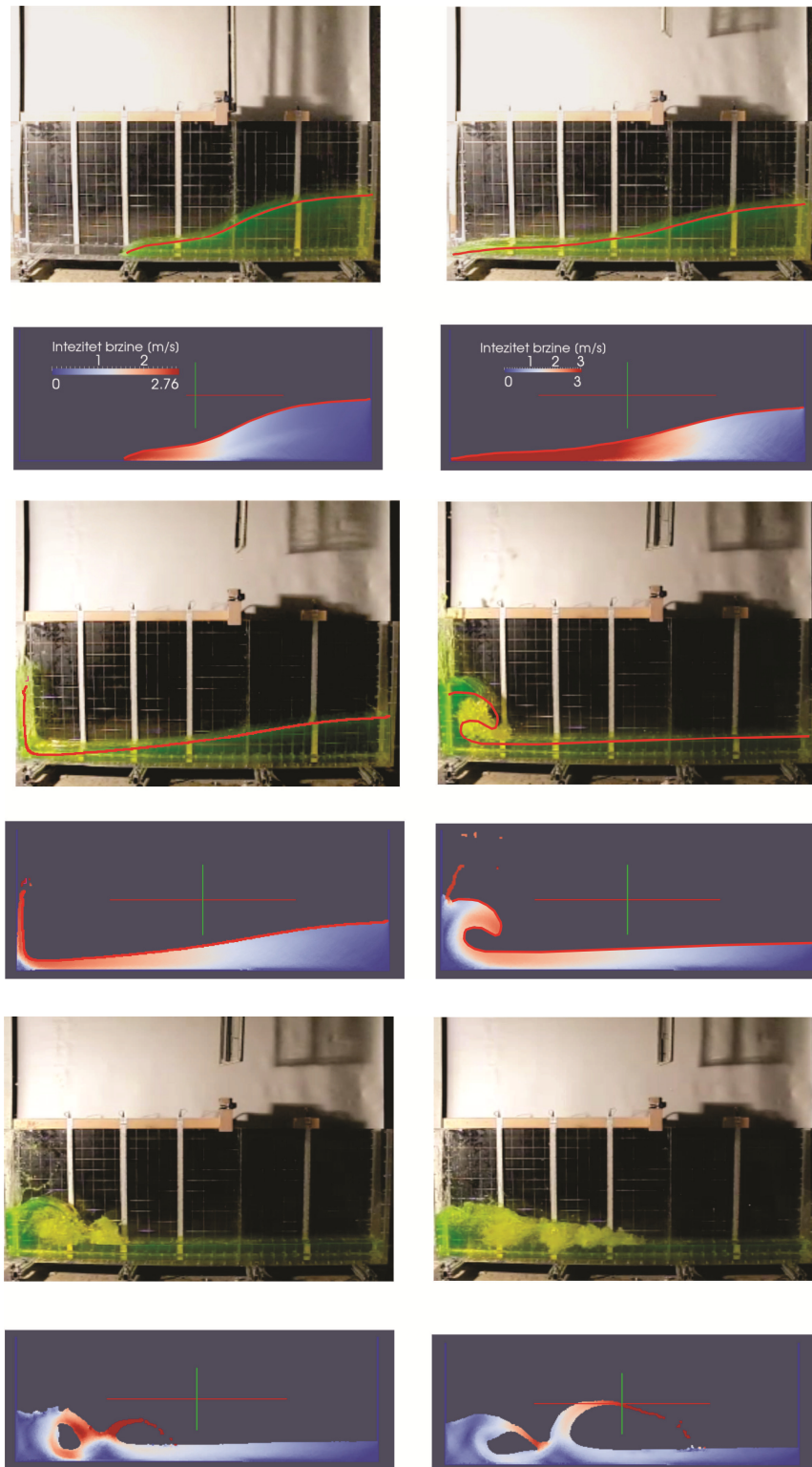
Slika 8. Vrednosti izmerenih pritiska tokom eksperimenta [10]

3. RAČUNSKI EKSPERIMENT

Numerička simulacija prethodno opisane pojave obavljena je primenom WCSPH računске metode pretpostavljajući ravansko strujanje u vertikalnoj ravni. Ovom metodom čelo talasa se ne tretira posebno. Računski postupak je obavljen uz pomoć programskog koda DualSPHysic koji omogućava paralelizaciju proračuna na grafičkim kartama čime se vreme izvršenja koda može znatno ubrzati [11].

U radu su prikazani rezultati dobijeni izborom vrednosti računskih parametara koji su dali „najbolje“ slaganje proračunate i na laboratorijskom eksperimentu zabeležene linije nivoa vode pre udara o zid rezervoara. Napominje se da variranje vrednosti istih parametara nije uticalo natančniju reprodukciju linije nivoa nakon udara. Prikazani rezultati su dobijeni korišćenjem približno 23000 fluidnih čestica što odgovara početnom rastojanju između centara čestica jednakom 2,5 mm. Referentna brzina prostiranja zvuka je standardno bila veća deset puta od najveće procenjene brzine. Vrednost koeficijenta veštačke viskoznosti je iznosila 0,05. Čvrsta granica je modelirana nepokretnim česticama koje imaju u računskom postupku ista svojstva kao i čestice fluida, s tim da im je brzina predefinisana (jednaka nuli za nepokretnu granicu). Vremenski računski korak je bio promenljiv i računao se tako da zadovolji odgovarajući Kurantov uslov [12]. Variranje vrednosti parametra ϵ u XSPH postupku nije bitno uticalo na rezultate.

Na slici 9 dato je poređenje zabeleženih linija nivoa vode na laboratorijskom eksperimentu sa proračunatim linijama nivoa pre udara vode u zid rezervoara (gornji deo slike), neposredno posle udara (srednji deo slike) i izvesno vreme nakon udara (donji deo slike). Može se zaključiti da je korišćeni numerički postupak tačno reprodukovao položaj slobodne površine pre udara. Sličan zaključak se može dati i za period neposredno posle udara kada dolazi do izdizanja vodene struje. Ipak, kao što se vidi na slici, numeričkom simulacijom nije tačno reprodukovano izgled strujne slike nakon udara. Ovo se odnosi pre svega na period posle formiranja odbijenog mlaza koji se u laboratorijskom eksperimentu brzo konsoliduje i nastavlja strujanje u (približno) horizontalnom pravcu, u vidu talasa sa strmim čelom. S obzirom da je strujna slika nakon udara izrazito prostorna, tačna reprodukcija slobodne površine primenom numeričkog modela ravanskog strujanja se nije očekivala. Uz navedeno, treba imati u vidu da se u numeričkom modelu ne uzima u obzir uticaj vazduha čija stišljivost može uticati na vrednost udarnog pritiska.



Slika 9. Poređenje rezultata numeričke simulacije sa eksperimentom

4. ZAKLJUČAK

Standardni oblik SPH metode odlikuje jednostavnost računskog algoritma, koja je posledica toga što metoda ne zahteva postojanje računске mreže kao i uvođenja veštačke stišljivosti. Osim toga što je numerički model jednostavan, u dobre osobine se, sa teorijskog aspekta, može ubrojati i direktno određivanje konvekcije. Sa druge strane, nepotpunost kernel funkcija, pre svega u blizini slobodne granice, utiče na nekozistentnost standardnog oblika SPH metode, što zajedno sa uvođenjem veštačke stišljivosti fluida može negativno uticati na tačnost proračuna vrednosti fizičkih veličina.

Primena SPH metode je analizirana na fenomenu koji se sastoji iz ravanskog problema rušenja brane i problema odbijanja talasa vode od čvrste granice. Prvi problem je uspešno simuliran primenom standardnog oblika SPH metode bez posebnih jednačina za čelo talasa. Numeričkom simulacijom odbijanja talasa, koja je predstavljala drugi deo numeričkog eksperimenta, na zadovoljavajući način je reprodukovana strujna slika neposredno nakon udara. Primenjenim, ravnim modelom strujanja, nije se na zadovoljavajući način simuliralo tečenje posle odbijanja talasa što se tumači izrazito prostornim karakterom strujanja koje je analizirano u laboratorijskom eksperimentu.

ZAHVALNOST

Autor se zahvaljuje Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja na finansiranju projekata TR 37009 i TR37010.

LITERATURA

- [1] Đorđević, D., Uporedna analiza rezultata dobijenih primenom ortogonalnih i neortogonalnih mreža u modelima prorstornog tečenja – deo 1, *Vodoprivreda*, 38:225-233, 2006.
- [2] Jovanović, M., Kapor, R., Zindović, B., Analiza nekih uticaja na životnu sredinu i zgradnje Mosta na Adi, *Vodoprivreda*, 44:258-260, 2012.
- [3] Zindović, B., Jovanović, M., Kapor, R., Prodanović, D., Đorđević, D., Numerička simulacija strujnog polja u blizini vodozahvata, *Vodoprivreda*, 42:246-248, 2010.
- [4] Monaghan, J.J., Simulating free surface flows with SPH, *Journal of Computational Physics*, Elsevier, Vol. 110, 1994.
- [5] Kiara, A., Analysis of the smoothed particle hydrodynamics method for free-surface flows, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2010.
- [6] Crespo, A. J. C., Application of the smoothed particle hydrodynamics model SPH to free-surface hydrodynamics, Ph.D. thesis, University of Vigo, 2008.
- [7] Lu, M. B., Liu, G. R., Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments, *Arch. Comput. Methods Eng.*, 17: 25-76., 2010.
- [8] Gomez-Gesteira, M., Rogers B.D., Crespo, A.J.C., State-of-the-art of classical SPH for free-surface flows, *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, Vol. 48, 2010.
- [9] Ritter, A., Die Fortp anzung de Wasserwellen, *Zeitschrift Verein Deutscher Ingenieure*, 36 (33), 947-954, 1892.
- [10] Lobovsky, L., Botia-Vera, E., Castellana, F., Mas-Soler, J. Souto-Iglesias, A., Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break, *Journal of Fluid Structures*, Vol. 48
- [11] Crespo, A.C.C., Domingez, J. M., Barreiro, A., Gomez-Gesteira, M., Rogers, B.D., GPUs, a New Tool of Acceleration in CFD: Efficiency and Reliability on Smoothed Particle Hydrodynamics Methods, *Plos One*, 6(6), 2011.
- [12] Monaghan, J.J., Kos, A. (1999), Solitary waves on a Cretan beach, *J. Wtrwy. Port, Coastal Engrg.*, 125(3), 145–154

SPH METHOD

by

Nikola ROSIĆ, Ljubodrag SAVIĆ, Dejana ĐORĐEVIĆ
Faculty of Civil Engineering, Belgrade

Summary

The SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) method for solving fluid dynamics equations is presented in this paper. The main aim of this paper is to present theoretical aspects of the method which is used in numerical modelling of rapidly varying free-surface flows. This paper also deals with application of The SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) method in numerical modelling of impact flow on a vertical wall which is generated by the break of a dam. Numerical

results show good agreement with experiments before water impact on the wall and unsatisfactory agreement after the impact. Further study is needed to improve accuracy of the method.

Keywords: Computational Fluid Dynamics, Lagrangian approach, Interpolation theory, artificial compressibility, Dam-break problem.

Redigovano 17.11.2014.