

GRAĐEVINSKI FAKULTET
UNIVERZITETA U BEOGRADU

Dejana Đorđević

**Numeričko modeliranje tokova koje karakteriše
nagla lokalna promena dubine i protoka**

- magistarski rad -

BEOGRAD
FEBRUAR 1998.

Mentor:

van.prof.dr Miodrag Jovanović

Članovi komisije:

van.prof.dr Marko Ivetić
doc.dr Ljubodrag Savić

Numerical modelling of discontinuous flows

Abstract

Discontinuous flows are the flows in which large gradients arise in both the flow depth and the discharge due to specific external and/or internal boundary conditions. With reference to the discontinuity and through the discontinuity itself, the basic hypotheses, upon which the Saint-Venant shallow water equations are based, are violated. The problems in mathematical and numerical modelling of discontinuous flows arising from this violation, and the specific structure of the appropriate numerical schemes used in solving such problems are discussed in this Thesis.

Three approaches to mathematical modelling of discontinuous flows: shock-fitting, through method and pseudoviscosity method, are presented first. They are followed by a review of numerical methods used in numerical modelling of free-surface flows with discontinuities: the Method of characteristics, the Godunov method, the Finite Difference Methods based on the flux-splitting technique, and the Finite Element Method. Close attention is paid to the approach and the scheme that allows for weak solutions, i.e. to the through method and the Finite Difference Method based on the explicit MacCormack scheme.

The proposed scheme is verified using:

- 1° the analytical solutions,
- 2° the author's measurement performed on a laboratory rig and
- 3° the available measurements of the other authors.

Since the quality of the computational results highly depends on:

- 1° the form under which the governing equations are written (conservation or non-conservation form),
- 2° the conservative property of the numerical scheme used, and
- 3° the diffusive/dispersive character of the scheme,

great attention is paid to the analysis of the conservation property of the MacCormack scheme and the problems regarding the quasi-physical effects of the scheme, such as spurious oscillations in the vicinity of the discontinuity.

Finally, a case study is included to indicate the performance of the proposed model in the engineering practice.

Key words: Discontinuous flows, Through method, Weak solutions, Conservation form, Conservative property, Numerical dissipation, Numerical dispersion

Sadržaj

1. Uvod	1
2. Konzervativni oblik parcijalnih diferencijalnih jednačina i svojstvo konzervativnosti računskih shema	5
3. Matematički modeli otvorenih tokova	11
3.1 Linijski tokovi	11
3.2 Ravanski tokovi	18
3.2.1 Jednačina održanja mase	18
3.2.2 Jednačine održanja količine kretanja	21
4. Numerički modeli otvorenih tokova	27
4.1 Pregled numeričkih metoda za proračun tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka	27
4.1.1 Metoda karakteristika	28
4.1.2 Metoda Godunova	32
4.1.3 Metoda konačnih razlika bazirana na postupku razdvajanja fluksova	33
4.1.4 Metoda konačnih elemenata	36
4.2 Računska shema MacCormack	39
4.2.1 Linijski problemi	41
4.2.1.1 Diskretizacija osnovnih jednačina	41
4.2.1.2 Granični uslovi	42
4.2.2 Ravanski problemi	48
4.2.2.1 Diskretizacija jednačina napisanih u konzervativnom obliku	48
4.2.2.2 Diskretizacija jednačina napisanih u nekonzervativnom obliku	50
4.2.2.3 Granični uslovi	51
4.2.3 Stabilnost računске sheme	53
4.3 Filtracija numeričkog rešenja primenom koncepta veštačke viskoznosti	65
5. Provera numeričkog modela	70
5.1 Linijski modeli	70
5.1.1 Pregled objavljenih rezultata testiranja linijskog modela	70
5.1.2 Verifikacija numeričkog modela	73
5.1.2.1 Analiza tečenja preko tri široka praga u prizmatičnom laboratorijskom kanalu	73
5.1.2.1.1 Opis laboratorijske instalacije	73
5.1.2.1.2 Uslovi pod kojima su izvedeni eksperimenti	75
5.1.2.1.3 Numerička simulacija tečenja preko širokih pragova u burnom režimu	77
5.1.2.2 Analiza prostiranja talasa sa strmim čelom u prizmatičnom laboratorijskom kanalu	79
5.2. Ravanski modeli — problemi konzervativnosti i oscilatornih rešenja	81
5.2.1 Analiza svojstva konzervativnosti računске sheme	81

5.2.2 Analiza uticaja faktora veštačke viskoznosti na veličinu amplitude numeričkih oscilacija i brzinu prostiranja talasa sa strmim čelom	83
5.3 Provera modela na jednom prirodnom vodotoku	87
6. Zaključci	92
Spisak programa	95
Literatura	97
Prilozi	99

Spisak slika

Slika 3.1: Elementi poprečnog preseka	12
Slika 3.2: Kontrolna zapremina za koju se ispisuju jednačine matematičkog modela (a); Shema sila koje deluju na kontrolnu zapreminu (b)	14
Slika 3.3: Kontrolna zapremina na koju se primenjuju zakon održanja mase i zakon održanja količine kretanja	19
Slika 4.1: Računska mreža — Lagrange-ijanski pristup	28
Slika 4.2: Nastanak talasa sa strmim čelom u trenutku t_A i njegovo prostiranje	31
Slika 4.3: Metoda Galerkina	37
Slika 4.4: Interpolacione funkcije za disipativnu metodu Galerkina	38
Slika 4.5: Računske tačke za proračun uzvodnog i nizvodnog graničnog uslova u mirnom režimu (metoda karakteristika)	43
Slika 4.6: Računske tačke za proračun nizvodnog graničnog uslova u burnom režimu (metoda karakteristika)	46
Slika 4.7: Računske tačke za proračun unutrašnjeg graničnog uslova	47
Slika 4.8: Deo računске mreže	48
Slika 5.1a: Linija nivoa pri odnosu $h_u / h_n = 2$	71
Slika 5.1b: Uzdužni dijagram promene brzine duž kanala za $h_u / h_n = 2$	71
Slika 5.2a: Linija nivoa pri odnosu $h_u / h_n = 20$	72
Slika 5.2b: Uzdužni dijagram promene brzine duž kanala za $h_u / h_n = 20$	72
Slika 5.3a: Linija nivoa pri odnosu $h_u / h_n = 200$	72
Slika 5.3b: Uzdužni dijagram promene brzine duž kanala za $h_u / h_n = 200$	72
Slika 5.4: Prostiranje talasa izazvanog naglim spuštanjem ustave na nizvodnom kraju kanala	72
Slika 5.5: Laboratorijska instalacija	74
Slika 5.6: Shematski prikaz mehanizma laboratorijskog kanala	74
Slika 5.7: Kriva protoka za uzvodni prag pri $S_0 = 7.84\%$	76
Slika 5.8: Kriva protoka za nizvodni prag pri $S_0 = 7.84\%$	76
Slika 5.9: Ustaljeno tečenje preko širokih pragova u burnom režimu	78
Slika 5.10: Uzvodni granični uslov — nivogram na uzvodnom pragu	78
Slika 5.11: Nizvodni granični uslov — nivogram na nizvodnom pragu	79
Slika 5.12: Nivogram u profilu u kome se nalazi ustava — uzvodni granični uslov	80
Slika 5.13: Poređenje izmerenih i sračunatih linija nivoa	80
Slika 5.14: Hipotetički slučaj trenutnog delimičnog rušenja brane — računska oblast	82
Slika 5.15: Shema laboratorijske instalacije za analizu prostiranja talasa sa strmim čelom	84
Slika 5.16: Rešenje uređenja Sektora "Kamičak"	88
Slika 5.17: Osnovne dimenzije i dispozicija napera	89
Slika 5.18: Poprečni presek na Sektoru "Kamičak"	89
Slika 5.19: Promena dubine po širini poprečnog preseka	90

Spisak priloga

Prilog 1: Jednparametarske površi i dvoparametarske krive "amplitudne" i "fazne" greške za $C_r=0.5$	101
Prilog 2: Jednparametarske površi i dvoparametarske krive "amplitudne" i "fazne" greške za $C_r=0.75$	103
Prilog 3: Jednparametarske površi i dvoparametarske krive "amplitudne" i "fazne" greške za $C_r=1.0$	105
Prilog 4: Jednparametarske površi i dvoparametarske krive "amplitudne" i "fazne" greške za $C_r=1.5$	107
Prilog 5: Jednparametarske površi i dvoparametarske krive "amplitudne" i "fazne" greške za $C_r=2.0$	109
Prilog 6: Dvoparametarske krive "amplitudne" i "fazne" greške dobijene u preseku površi (4.126) i ravni $\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} = \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y}$, odnosno površi (4.132) i ravni $\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} = \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y}$	111
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu)	112
Prilog 8: Promena relativne greške zapremine u funkciji broja računskih koraka (vremena) kada se koriste homogene diskretizacione jednačine u nekonzervativnom obliku	127
Prilog 9: Promena relativne greške zapremine u funkciji broja računskih koraka (vremena) kada se koriste homogene diskretizacione jednačine u konzervativnom obliku	128
Prilog 10: Promena relativne greške zapremine u funkciji broja računskih koraka (vremena) kada se koriste nehomogene diskretizacione jednačine u nekonzervativnom obliku	129
Prilog 11: Promena relativne greške zapremine u funkciji broja računskih koraka (vremena) kada se koriste nehomogene diskretizacione jednačine u konzervativnom obliku	130
Prilog 12a: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.02$	131
Prilog 12b: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.05$	132
Prilog 12c: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.10$	133
Prilog 12d: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.15$	134
Prilog 12e: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.24$	135

Prilog 12f: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.25$	136
Prilog 12g: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.26$	137
Prilog 13a: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku za $k=0.0$	138
Prilog 13b: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku za $k=0.02$	139
Prilog 13c: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku za $k=0.05$	140
Prilog 13d: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku za $k=0.10$	141
Prilog 13e: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku za $k=0.15$	142
Prilog 14: Prostiranje talasa u xOy ravni — numerički model sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku	143
Prilog 15: Prostiranje talasa u xOy ravni — numerički model sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku	144
Prilog 16: Površina vodenog ogledala, izolnije dubina i vektori brzina u trenutku $t=0.4s$	147
Prilog 17: Topografija dna i gornjeg špica Podgoričke ade	150
Prilog 18: Polje brzina u blizini napera sa glavom	151

Spisak oznaka

A	– površina poprečnog preseka
\bar{A}	– matrica koeficijenata u metodi konačnih elemenata
A_{m_x, m_y}	– amplituda m -te komponente tačnog rešenja
\hat{A}_{m_x, m_y}	– amplituda m -te komponente približnog rešenja
$\hat{\mathbf{A}}_{m_x, m_y}$	– matrica amplituda m -te komponente približnog rešenja
B	– širina pravougaonog preseka
b	– širina vodenog ogledala
β_{m_x, m_y}	– zbir ugaonih frekvenci za x i y -pravac tačnog rešenja
$\hat{\beta}_{m_x, m_y}$	– zbir ugaonih frekvenci za x i y -pravac približnog rešenja
c	– brzina prostiranja talasa
C	– koncentracija
C_r	– Courant-ov broj
C_{r_x}, C_{r_y}	– Courant-ovi brojevi za x i y -pravac
\mathbf{E}	– vektor fluksova za x -pravac (jednačine u konzervativnom obliku)
ϵ	– parametar kojim se definiše nivo disipacije (metoda konačnih elemenata)
\mathbf{F}	– vektor fluksova za y -pravac (jednačine u konzervativnom obliku)
g	– gravitaciono ubrzanje
\mathbf{G}	– matrica amplifikacije
η	– vertikalno rastojanje mereno od najniže tačke poprečnog preseka
h	– dubina
\mathbf{I}	– jedinična matrica
I_1	– statički momenat površine poprečnog preseka
I_2	– priraštaj statičkog momenta površine poprečnog preseka usled neprizmatičnosti korita
I_{G_x}	– impuls komponente sile težine u x -pravcu
I_{G_y}	– impuls komponente sile težine u y -pravcu
I_{P_x}	– impuls komponente sile pritiska u x -pravcu
I_{P_y}	– impuls komponente sile pritiska u y -pravcu

I_{T_x}	– impuls komponente sile trenja u x -pravcu
I_{T_y}	– impuls komponente sile trenja u y -pravcu
\mathbf{k}	– faktor veštačke viskoznosti
l	– karakteristična dužina (metoda pseudoviskoznosti)
λ_i	– sopstvena vrednost matrice \mathbf{M}
$\lambda_{m_x}, \lambda_{m_y}$	– talasne dužine m -te komponente tačnog rešenja u x i y -pravcu
$\hat{\lambda}_{m_x}, \hat{\lambda}_{m_y}$	– talasne dužine m -te komponente približnog rešenja u x i y -pravcu
$2L_x$	– dužina računskog domena u x -pravcu
$2L_y$	– dužina računskog domena u y -pravcu
\mathbf{M}	– Jakobijan vektora fluksova \mathbf{E}
$\tilde{\mathbf{M}}$	– približna vrednost Jakobijana \mathbf{M}
\mathbf{M}_P	– Jakobijan matrice fluksova \mathbf{P}
\mathbf{M}_R	– Jakobijan matrice fluksova \mathbf{R}
ΔM_x	– priračtaj količine kretanja u x -pravcu
ΔM_y	– priračtaj količine kretanja u y -pravcu
$2m_x, 2m_y$	– broj računskih polja u x i y -pravcu
$M_{f_{xx}}$	– proticaj količine kretanja u x -pravcu kroz površine sa normalom u pravcu x -ose
$M_{f_{xy}}$	– proticaj količine kretanja u x -pravcu kroz površine sa normalom u pravcu y -ose
$M_{f_{yx}}$	– proticaj količine kretanja u y -pravcu kroz površine sa normalom u pravcu y -ose
$M_{f_{yy}}$	– proticaj količine kretanja u y -pravcu kroz površine sa normalom u pravcu y -ose
n	– Manning-ov koeficijent otpora
n_e	– broj konačnih elemenata računске mreže
N_j	– interpolaciona funkcija (Galerkinova metoda)
N_*	– interpolaciona funkcija (disipativna metoda Galerkina)
\mathbf{N}	– matrica baznih funkcija
N_i	– bazna funkcija
\mathbf{P}	– vektor fluksova za x -pravac (jednačine u nekonzervativnom obliku)
Q	– protok
q	– pseudoviskoznost

ρ	– gustina
\mathbf{R}	– vektor fluksova za y -pravac (jednačine u nekonzervativnom obliku)
R_1	– "amplitudna" greška
R_2	– "fazna" greška
R_H	– hidraulički radijus
\mathbf{S}	– vektor "izvora"/"ponora" (jednačine u konzervativnom obliku)
$\sigma(x, \eta)$	– širina poprečnog preseka na rastojanju η
S_{0x}	– nagib dna u x -pravcu
S_{0y}	– nagib dna u y -pravcu
S_{fx}	– nagib linije energije u x -pravcu
S_{fy}	– nagib linije energije u y -pravcu
S_{Hx}	– nagib površine vodenog ogledala u x -pravcu
S_{Hy}	– nagib površine vodenog ogledala u y -pravcu
$\sigma_{m_x}, \sigma_{m_y}$	– talasni brojevi m -te komponente tačnog rešenja u x i y -pravcu
$\hat{\sigma}_{m_x}, \hat{\sigma}_{m_y}$	– talasni brojevi m -te komponente približnog rešenja u x i y -pravcu
t	– vreme
Δt	– vremenski korak
\mathbf{T}	– vektor "izvora"/"ponora" (jednačine u nekonzervativnom obliku)
T_{m_x}, T_{m_y}	– periode u x i y -pravcu
u	– brzina u x -pravcu
u_0	– brzina konvektivnog transporta u x -pravcu
\mathbf{U}	– vektor zavisno promenljivih (jednačine u konzervativnom obliku)
v	– brzina u y -pravcu
v_0	– brzina konvektivnog transporta u y -pravcu
\mathbf{V}	– vektor zavisno promenljivih (jednačine u nekonzervativnom obliku)
\mathbf{V}_v	– vektor brzina
w	– brzina u z -pravcu
w_T	– brzina prostiranja talasa sa strmim čelom
x	– koordinata u x -pravcu
ξ	– bezdimenziona dužina
Δx	– prostorni korak u x -pravcu
y	– koordinata u y -pravcu
Δy	– prostorni korak u y -pravcu
z_d	– kota dna

1. Uvod

Otvoreni tokovi koje karakteriše nagla lokalna promena dubine i protoka već dvadeset godina predstavljaju predmet interesovanja brojnih istraživača iz oblasti računске hidraulike. Ovi tokovi se javljaju i u uslovima ustaljenog i u uslovima neustaljenog tečenja (stacionaran hidraulički skok kod ustaljenog tečenja i talasi sa strmim čelom kod neustaljenog tečenja).

Nagle lokalne promene dubine i protoka nastaju kao posledica specifičnih graničnih uslova kao što su, na primer, naglo povećanje ili smanjenje protoka na krajevima kanala (spoljašnji granični uslovi) i/ili prisustva različitih vrsta prepreka u toku, kao što su, na primer: široki pragovi, mostovska suženja, zagati, prelazne deonice, itd. (unutrašnji granični uslovi).

U stručnoj literaturi pisanoj na engleskom jeziku za ovu vrstu tokova koristi se termin *discontinuous flows*. Doslovan prevod ovog izraza glasio bi *diskontinualni (prekidni) tokovi*, što ne odgovara stvarnoj prirodi fenomena. Kod ovakvih tokova se, u fizičkom smislu, ne javljaju prazni prostori neispunjeni fluidom na šta bi ovaj naziv, na prvi pogled, asocirao. Ni u matematičkom smislu termin *diskontinualan tok* nije sasvim prihvatljiv, zato što pravi diskontinuitet zavisno promenljivih — dubine i protoka — ne postoji. Gradijenti dubine i/ili protoka su samo u jednoj uskoj oblasti za nekoliko redova veličine veći nego u ostalom delu toka i ne može se reći da teže beskonačnosti. Izuzetak bi predstavljao primer naglog, trenutnog rušenja brane, jer u tom slučaju pre proloma diskontinuitet u liniji nivoa, definisan početnim uslovom, zaista postoji.

Za zonu sa velikim gradijentima osnovnih veličina toka karakteristična su izražena vertikalna ubrzanja i velika zakrivljenost strujnica što za posledicu ima nehidrostatički raspored pritiska. U njoj su, dakle, narušene najbitnije pretpostavke na kojima je baziran klasičan matematički model neustaljenog tečenja sa slobodnom površinom — model zasnovan na Saint-Venant-ovim (parcijalnim diferencijalnim) jednačinama za plitke otvorene tokove. Nasuprot diferencijalnim jednačinama, za rešavanje osnovnih jednačina toka napisanih u integralnom obliku nije bitno da li su funkcije zavisno promenljivih unutar razmatrane kontrolne zapremine neprekidne ili skokovite (prekidne, diskontinualne), zato što rešenje integralnih jednačina zavisi samo od konturnih uslova. Stoga bi pri matematičkom modeliranju tokova koje karakteriše nagla lokalna promena dubine i protoka trebalo koristiti

integralni pristup. Međutim, Lax je još 1954. godine pokazao da diferencijalne jednačine, koje su direktno izvedene iz integralnih jednačina dobijenih primenom zakona održanja mase i količine kretanja, daju rešenja koja su ekvivalentna rešenjima polaznih jednačina (tzv. "slaba rešenja") i da se, stoga, i diferencijalne jednačine mogu primeniti za modeliranje talasa sa strmim čelom i hidrauličkog skoka.

U zavisnosti od toga koje se jednačine koriste za modeliranje strmog čela/hidrauličkog skoka (integralne ili diferencijalne), u računskoj hidraulici se razlikuju tri pristupa matematičkom modeliranju tokova koje karakteriše nagla lokalna promena dubine i protoka. Prema jednom od njih čelo talasa i skok se modeliraju odvojeno od preostalog dela toka u kome je tečenje blago promenljivo. U zoni sa velikim gradijentima dubine i protoka koristi se integralni pristup. Izvan te zone primenjuju se Saint-Venant-ove jednačine. Ovaj postupak je u literaturi pisanoj na engleskom jeziku poznat pod nazivom *shock-fitting*. Prevod na srpski jezik mogao bi da glasi: *postupak kojim se strmo čelo/hidraulički skok modelira nezavisno od ostalog dela toka*.

Drugi pristup, tzv. *through approach*, podrazumeva korišćenje diferencijalnih jednačina napisanih u divergentnom obliku¹. Prevod sa engleskog mogao bi da glasi: *direktan pristup*, jer se integracijom jednog sistema jednačina dobijaju rešenja za ceo tok. Ovakva rešenja se nazivaju *slaba rešenja*.

U trećoj varijanti se, takođe, koriste jednačine u diferencijalnom obliku, s tim što se dinamičkoj jednačini dodaje još jedan član u kome figuriše tzv. pseudoviskoznost. Ova metoda matematičkog modeliranja nastala je kao rezultat potrebe da se stabilizuju numerička rešenja dobijena primenom neodgovarajućih ("nedisipativnih") računskih shema.

Metode numeričke integracije, koje se koriste za rešavanje jednačina navedena tri modela, mogu se svrstati u tri klase. To su: metode karakteristika, metode konačnih razlika i metoda konačnih elemenata. Kvalitet svake metode ocenjuje se prema univerzalnosti njene primene. To podrazumeva da se utvrdi da li se računskim modelom zasnovanim na toj metodi i sa kakvom tačnošću mogu simulirati složeni tokovi kao što su tokovi sa jednovremenim prisustvom burnog i mirnog režima, talasna kretanja za izraženim strmim čelom i tokovi u složenim geometrijskim uslovima.

Poznato je da **metoda karakteristika** ima prvenstveno teorijski značaj i da se koristi kao referentna metoda za ocenu tačnosti svih ostalih računskih postupaka. Njena primena u analizi tokova koje karakteriše nagla lokalna promena dubine i protoka ograničena je isključivo na tzv. "shock-fitting" pristup. U uslovima složene geometrije — neprizmatičnim kanalima, gde tokom prostiranja talasa sa strmim čelom dolazi do višestrukog odbijanja nailazećeg talasa o obale, formiranja novih, reflektovanih talasa i njihove superpozicije, metoda karakteristika je praktično neprimenljiva [32].

U rešavanju praktičnih problema iz oblasti hidraulike otvorenih tokova, za sada se najviše primenjuju **metode konačnih razlika**. Razlozi za to su sledeći:

- 1^o metode konačnih razlika imaju relativno jednostavne algoritme koje je lako primeniti prilikom rešavanja jednačina matematičkog modela,
- 2^o omogućavaju proračun u koritima sa složenom geometrijom (poprečni preseki nepravilnog oblika) kao i
- 3^o u uslovima složene geometrije u planu (krivine, meandri), jer se bez većih problema može preći sa pravolinijskih na krivolinijske koordinate.

¹ Ovaj pojam biće detaljnije objašnjen u Poglavlju 2.

U ovoj grupi nalaze se metode čija je glavna osobina mogućnost reprodukcije strmog čela/hidrauličkog skoka bez uvođenja posebnog algoritma za njegovo otkrivanje i praćenje.

Metoda konačnih elemenata još uvek se masovno ne primenjuje za proračun tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka. Razlozi za to leže u sledećem: primenom ove metode ne mogu se dobiti rešenja koja odgovaraju vrednosti Froude-ovog broja većoj od jedan, što onemogućava proračun u uslovima burnog režima tečenja, kao i u slučaju kada se dva režima naizmenično smenjuju [27]. Originalna metoda Galerkina ima izrazito nedisipativni karakter, tako da je nemoguće reprodukovati strmo čelo talasa ili hidraulički skok. Činjeni su pokušaji (Katopodes 1984, Akanbi i Katopodes 1988) da se pomenuti nedostaci pogodnom modifikacijom originalne metode otklone. Dobijeni su izuzetno složeni algoritmi koji su testirani samo na nekoliko hipotetičkih primera.

Ovde bi trebalo pomenuti još dve grupe metoda koje se koriste u rešavanju sličnih problema iz oblasti aerodinamike i gasne dinamike. To su **metode konačnih razlika zasnovane na postupku razdvajanja fluksova** (*flux-splitting techniques*) i **metode Godunova** koje se zasnivaju na metodi karakteristika. Poslednjih desetak godina se radi na njihovom prilagođavanju kako bi se mogle primeniti u hidraulici otvorenih tokova [19], [32], [36].

Kriterijumi koji opredeljuju da li će neka računaska shema, koja poseduje sve kvalitete u pogledu željene tačnosti i mogućnosti simulacije složenih tokova, biti korišćena u inženjerskoj praksi ili ne, svakako su njena efikasnost i jednostavnost. Metoda karakteristika, kao što je već rečeno, zahteva uvođenje posebnog algoritma za otkrivanje i praćenje čela talasa ("shock-fitting" pristup) i praktično je neprimenljiva u uslovima složene geometrije. S obzirom na njen teorijski značaj, u ovom radu će se opisati samo osnovni principi na kojima se zasniva ova metoda. Za metodu konačnih elemenata, metodu razdvajanja fluksova i metode Godunova biće prikazana samo suština proračuna bez ulaženja u strukturu računskih shema. Težište rada biće stavljeno na metode konačnih razlika i to na računsku shemu MacCormack koja se zasniva na principu etapnog rešavanja problema. Ona ne zahteva uvođenje posebnog algoritma za otkrivanje i praćenje čela talasa i omogućava dobijanje slabih rešenja. Ima tačnost drugog reda u prostoru i vremenu i relativno jednostavan algoritam, tako da je poslednjih desetak godina postala popularna u analizi problema prostiranja talasa sa strmim čelom.

Cilj ovog rada je izrada računskog modela i softvera za proračun blago i naglo promenljivog neustaljenog tečenja u otvorenim tokovima. Model je baziran na računskoj shemi MacCormack.

Postupak verifikacije izabrane numeričke metode obuhvatiće poređenje rezultata računskog modela sa:

- 1° odgovarajućim analitičkim rešenjem (za pojednostavljene slučajeve),
- 2° rezultatima sopstvenih meranja na fizičkom modelu i
- 3° dostupnim rezultatima meranja drugih istraživača.

Pošto kvalitet dobijenih rezultata za tokove sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka zavisi:

- 1° od izbora oblika u kome su napisane jednačine matematičkog modela,
 - 2° od toga da li primenjena računaska shema poseduje svojstvo konzervativnosti ili ne i
 - 3° od toga da li računaska shema pripada grupi tzv. disipativnih ili nedisipativnih shema,
- prilikom provere modela posebna pažanja biće posvećena analizi svojstva konzervativnosti MacCormack-ove računске sheme i analizi problema oscilatornih rešenja.

Na kraju će se na primeru jednog prirodnog vodotoka sagledati mogućnost primene modela u rešavanju problema iz hidrotehničke prakse.

U nastavku sledi kratak pregled sadržaja ovog Magistarskog rada.

Imajući u vidu da su pojmovi *konzervativni oblik* i *svojstvo konzervativnosti* ključni pojmovi za shvatanje problema matematičkog i numeričkog modeliranja tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka, u Poglavlju 2 će, pre bilo kakvog dubljeg ulaženja u problematiku modeliranja, biti podvučena razlika između ova dva termina.

Matematički modeli linijskog i ravanskog neustaljenog tečenja u otvorenim tokovima biće prikazani u Poglavlju 3. Na primeru modela linijskog tečenja prodiskutovaće se rešenja koja se dobijaju primenom jednačina u konzervativnom i nekonzervativnom obliku.

Sistematizacija do sada korišćenih numeričkih metoda za simulaciju tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka, detaljan opis računске sheme MacCormack, linearna analiza stabilnosti i prikaz postupka numeričke filtracije rešenja primenom koncepta veštačke viskoznosti biće dati u Poglavlju 4.

Provera predloženog numeričkog modela izvršiće se u Poglavlju 5. Potpoglavlje 5.1 posvećeno je verifikaciji linijskog modela. U njemu će prvo biti prikazani rezultati poređenja sa analitičkim rešenjima objavljenim u literaturi (Garcia, Kahawita 1986 i Jha, Akiyama, Ura 1994), a potom slede poređenja rezultata numeričke simulacije sa rezultatima merenja. Simulirani su: tečenje sa pojavom hidrauličkog skoka i prostiranje talasa sa strmim čelom. Potpoglavlje 5.2 posvećeno je problemima konzervativnosti i oscilatornih rešenja pri numeričkom modeliranju ravanskih tokova. Prvo je izvršena provera svojstva konzervativnosti računске sheme MacCormack na hipotetičkom primeru rušenja brane. Potom je, na primeru numeričke simulacije jednog laboratorijskog eksperimenta, analizirana tačnost rezultata koji se dobijaju primenom jednačina u konzervativnom i nekonzervativnom obliku. U Potpoglavlju 5.3 razmatra se mogućnost primene predloženog računskog modela u rešavanju praktičnih problema.

U poslednjem, šestom Poglavlju izvršiće se sumiranje najvažnijih zaključaka do kojih se došlo tokom izrade ovog Magistarskog rada.

2. Konzervativni oblik parcijalnih diferencijalnih jednačina i svojstvo konzervativnosti računskih shema

Pojmovi "*konzervativni oblik*" i "*divergentni oblik*" su sinonimi i odnose se na način pisanja parcijalnih diferencijalnih jednačina. Za ove jednačine se kaže da su napisane u konzervativnom obliku ako su koeficijenti uz parcijalne izvode ili konstante ili se, u slučaju da nisu konstante, njihovi izvodi ne pojavljuju u jednačini [7]. U jednačinama koje predstavljaju matematičku formulaciju zakona održanja neke fizičke veličine (mase, količine kretanja, energije i entropije) napisanim u konzervativnom obliku može se uočiti divergencija te veličine. U Mehanici fluida tipičan primer predstavlja jednačina održanja mase. Njen divergentni oblik je:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

Zbir poslednja tri člana predstavlja divergenciju veličine $\rho \mathbf{V}_v$, pa se prethodna jednačina može napisati na sledeći način:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}_v) = 0 \quad (2.2)$$

gde je: ρ gustina fluida, \mathbf{V}_v vektor brzine toka, x , y i z su prostorne koordinate, a t je vreme.

Nekonzervativni ili nedivergentni oblik jednačine održanja mase dobija se kada se izvodi poslednja tri člana u jednačini (2.1) napišu u razvijenom obliku:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

Jednačine (2.1) i (2.3) su matematički gledano ekvivalentne ako i samo ako su sve promenljive i funkcije tih promenljivih bar jedanput diferencijabilne. Ukoliko je, međutim, funkcija neke promenljive skokovita, korišćenje jednačina napisanih u nekonzervativnom obliku može dovesti, kao što će se u nastavku pokazati, do grubih grešaka prilikom numeričke integracije tih jednačina.

Parcijalna diferencijalna jednačina predstavlja zakon održanja neke veličine u tački, a diskretizaciona jednačina metode konačnih razlika aproksimaciju parcijalne diferencijalne jednačine u okolini² te tačke. Ako u proizvoljnoj kontrolnoj zapremini koja može da obuhvati čitavu razmatranu oblast ili bilo koji njen deo, pri bilo kojoj gustini računске mreže zakon održanja razmatrane veličine ostane nenarušen, primenjena računska shema poseduje svojstvo konzervativnosti. Ova osobina računске sheme matematički se dokazuje primenom Gauss-ove teoreme o jednakosti zapreminskog i površinskog integrala:

$$\int_{V_{\Omega}} \nabla(\rho \mathbf{V}_v) dV_{\Omega} = \int_{A_{\Omega}} (\rho \mathbf{V}_v) \vec{n} dA_{\Omega} \quad (2.4)$$

Pri tom se integral zamenjuje sumom a parcijalni izvodi konačnim razlikama.

Provera konzervativnosti biće ilustrovana na primeru računске sheme kod koje se izvod po prostoru zamenjuje konačnim razlikama unazad, a izvod po vremenu konačnom razlikom unapred. Zbog jednostavnosti se razmatra linijsko tečenje, uz napomenu da se isti postupak može vrlo lako sprovesti za ravansko i prostorno tečenje dodavanjem još jedne odnosno, dve sume.

Jednačina kontinuiteta za linijsko tečenje u konzervativnom obliku glasi:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial(uh)}{\partial x} \quad (2.5)$$

Diskretizacioni oblik prethodne jednačine dat je sledećim izrazima:

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = - \frac{(uh)_i^n - (uh)_{i-1}^n}{\Delta x}, \quad u_i > 0 \text{ za } \forall i \quad (2.6a)$$

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = \begin{cases} - \frac{(uh)_i^n - (uh)_{i-1}^n}{\Delta x}, & u_i > 0 \text{ za } I_1 \leq i \leq l \\ - \frac{(uh)_{i+1}^n - (uh)_i^n}{\Delta x}, & u_i < 0 \text{ za } l < i \leq I_2 \end{cases} \quad (2.6b)$$

gde su I_1 i I_2 granični profili neke konačne oblasti Ω .

Kao što se vidi, pri zameni parcijalnih izvoda konačnim razlikama treba voditi računa o znaku brzine u , i shodno tome korigovati konačne razlike po prostoru.

Prvo će se razmotriti slučaj kada je $u > 0$ u celoj oblasti strujanja. Sumiranjem izraza (2.6a) po svim profilima oblasti Ω dobija se:

² Okolina obuhvata nekoliko susednih računskih tačaka.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^n \Delta x \right] &= \sum_{i=I_1}^{I_2} - \frac{(uh)_i^n - (uh)_{i-1}^n}{\Delta x} \Delta x = \\ &= \sum_{i=I_1}^{I_2} (uh)_{i-1}^n - (uh)_i^n \end{aligned} \quad (2.7)$$

Da bi se skratilo pisanje, u sumi sa desne strane jednakosti izostaviće se vremenski indeks n koji je isti za sve članove, a potom će se izvršiti sabiranje:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=I_1}^{I_2} (uh)_{i-1} - (uh)_i = \quad (2.8) \\ &= (uh)_{I_1-1} - (uh)_{I_1} \quad i = I_1 \\ &\quad + (uh)_{I_1} - (uh)_{I_1+1} \quad i = I_1+1 \\ &\quad \quad + (uh)_{I_1+1} - (uh)_{I_1+2} \quad i = I_1+2 \\ &\quad \quad \quad + \dots \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ &+ \dots \\ &\quad + (uh)_{I_2-3} - (uh)_{I_2-2} \quad i = I_2-2 \\ &\quad \quad + (uh)_{I_2-2} - (uh)_{I_2-1} \quad i = I_2-1 \\ &\quad \quad \quad + (uh)_{I_2-1} - (uh)_{I_2} = \quad i = I_2 \\ &= (uh)_{I_1-1} - (uh)_{I_2} \end{aligned}$$

Jednačina (2.7) tada postaje:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^n \Delta x \right] = (uh)_{I_1-1}^n - (uh)_{I_2}^n \quad (2.9)$$

Član $(uh)_{I_1-1}$ predstavlja ulaz, a član $(uh)_{I_2}$ izlaz mase iz kontrolne zapremine V_Ω kroz njene granice. Suma po svim profilima razmatrane deonice (analog zapreminskom integralu) jednaka je razlici ulaza i izlaza (analog površinskom integralu), što znači da je zadovoljena Gauss-ova teorema. Drugim rečima, primenjena računaska shema poseduje svojstvo konzervativnosti.

Sada će se razmotriti slučaj u kome su diskretizacione jednačine bazirane na jednačinama napisanim u konzervativnom obliku, ali se smer brzine u razmatranoj oblasti

menja: $u_i > 0$ za $I_1 \leq i \leq l$ i $u_i < 0$ za $l < i \leq I_2$. Koristi se izraz (2.6b). Sumiranjem po svim profilima oblasti Ω dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^n \Delta x \right] &= \sum_{i=I_1}^l - \frac{(uh)_i^n - (uh)_{i-1}^n}{\Delta x} \Delta x + \sum_{i=l+1}^{I_2} - \frac{(uh)_{i+1}^n - (uh)_i^n}{\Delta x} \Delta x = \\ &= \sum_{i=I_1}^l (uh)_{i-1}^n - (uh)_i^n + \sum_{i=l+1}^{I_2} (uh)_i^n - (uh)_{i+1}^n \end{aligned} \quad (2.10)$$

Kao i u prethodnom primeru, u sumama sa desne strane znaka jednakosti izostaviće se gornji indeks n (zajednički za sve sabirke), a potom će se izvršiti sabiranje:

$$\begin{aligned} \sum_{i=I_1}^l (uh)_{i-1} - (uh)_i - \sum_{i=l+1}^{I_2} (uh)_i - (uh)_{i+1} &= \\ &= (uh)_{I_1-1} - (uh)_{I_1} && i = I_1 \\ &\quad + (uh)_{I_1} - (uh)_{I_1+1} && i = I_1+1 \\ &\quad \quad + (uh)_{I_1+1} - (uh)_{I_1+2} && i = I_1+2 \\ &\quad \quad \quad + \dots \\ &\quad \quad \quad \quad \vdots \\ &+ \dots \\ &\quad + (uh)_{l-2} - (uh)_{l-1} && i = l-1 \\ &\quad \quad + (uh)_{l-1} - (uh)_l && i = l \\ &\quad \quad \quad + (uh)_{l+1} - (uh)_{l+2} && i = l+1 \\ &\quad \quad \quad \quad + (uh)_{l+2} - (uh)_{l+3} && i = l+2 \\ &\quad \quad \quad \quad \quad + \dots \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \\ &+ \dots \\ &\quad + (uh)_{I_2-2} - (uh)_{I_2-1} && i = I_2-2 \\ &\quad \quad + (uh)_{I_2-1} - (uh)_{I_2} && i = I_2-1 \\ &\quad \quad \quad + (uh)_{I_2} - (uh)_{I_2+1} = && i = I_2 \\ &= (uh)_{I_1-1} - (uh)_{I_2+1} - (uh)_l + (uh)_{l+1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Jednačina (2.10) tada postaje:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^n \Delta x \right] = (uh)_{I_1-1}^n - (uh)_{I_2+1}^n - (uh)_I^n + (uh)_{I+1}^n \quad (2.12)$$

Prva dva člana sa desne strane znaka jednakosti predstavljaju ulaz mase u kontrolnu zapreminu V_Ω , a treći i četvrti član tzv. "grešku nekonzervativnosti". Pošto je $u_i > 0$, a $u_{l+1} < 0$, poslednja dva člana se mogu napisati na sledeći način:

$$-(uh)_I + (uh)_{I+1} = -u_I h_I - u_{I+1} h_{I+1} = -[|u_I| h_I + |u_{I+1}| h_{I+1}] \quad (2.13)$$

Zamenom (2.13) u (2.12) dobija se:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^n \Delta x \right] = (uh)_{I_1-1}^n - (uh)_{I_2+1}^n - [|u_I^n| h_I^n + |u_{I+1}^n| h_{I+1}^n] \quad (2.14)$$

Uslovi Gauss-ove teoreme u ovom slučaju nisu zadovoljeni, što znači da je svojstvo konzervativnosti računске sheme narušeno. Pošto je dubina h uvek pozitivna veličina, greška (2.13) ima karakter veštačkog (numeričkim putem izazvanog) "ponora", tj. izaziva veštačko smanjenje zapremine fluida u Ω . Kod ravanskog tečenja greška se javlja samo ako komponenta brzine u pravcu u kome se računaju konačne razlike menja znak [31]. To znači da će se kod računanja razlika u pravcu y greška javiti ako je $v_{i,j} > 0$ a $v_{i,j+1} < 0$ (gde je v komponenta brzine u pravcu y). Međutim, ako se računaju konačne razlike u pravcu x , različiti smerovi komponente brzine u pravcu y ($v_{i,j} > 0$ i $v_{i+1,j} < 0$) neće izazvati grešku nekonzervativnosti [31].

Prethodna analiza je pokazala da se prilikom korišćenja jednačina u konzervativnom obliku svi "unutrašnji" članovi međusobno potiru kada je $u_i > 0$, $\forall i \in [I_1, I_2]$, a da se u slučaju kada je $u_i > 0$, $I_1 \leq i \leq l$ i $u_i < 0$, $l+1 \leq i \leq I_2$ potiru svi "unutrašnji" članovi osim dva člana u profilima u kojima brzina menja znak. Ista analiza će se sprovesti i za slučaj kada je diskretizaciona jednačina bazirana na jednačini kontinuiteta napisanoj u nekonzervativnom obliku:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.15)$$

Zamenom parcijalnih izvoda konačnim razlikama dobija se:

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = -u_i^n \frac{h_i^n - h_{i-1}^n}{\Delta x} - h_i^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (2.16)$$

Izvršiće se sumiranje izraza (2.16) po svim profilima konačne oblasti Ω ograničene profilima I_1 i I_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^n \Delta x \right] &= \sum_{i=I_1}^{I_2} -u_i^n \frac{h_i^n - h_{i-1}^n}{\Delta x} \Delta x + \sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \Delta x = \\ &= \sum_{i=I_1}^{I_2} u_i^n (h_{i-1}^n - h_i^n) + \sum_{i=I_1}^{I_2} h_i^n (u_{i-1}^n - u_i^n) \end{aligned} \quad (2.17)$$

I ovde će se, u sumama sa desne strane znaka jednakosti, u cilju skraćivanja pisanja, izostaviti gornji indeks n . Obe sume će se napisati u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} \sum_{i=I_1}^{I_2} (u_i h_{i-1} - u_i h_i) - \sum_{i=I_1}^{I_2} (u_{i-1} h_i - u_i h_i) &= \\ &= (u_{I_1} h_{I_1-1} - u_{I_1} h_{I_1}) + (u_{I_1-1} h_{I_1} - u_{I_1} h_{I_1}) + & i = I_1 \\ &+ (u_{I_1+1} h_{I_1} - u_{I_1+1} h_{I_1+1}) + (u_{I_1} h_{I_1+1} - u_{I_1+1} h_{I_1+1}) + & i = I_1 + 1 \\ &+ (u_{I_1+2} h_{I_1+1} - u_{I_1+2} h_{I_1+2}) + (u_{I_1+1} h_{I_1+2} - u_{I_1+2} h_{I_1+2}) + & i = I_1 + 2 \\ &+ (u_{I_1+3} h_{I_1+2} - u_{I_1+3} h_{I_1+3}) + (u_{I_1+2} h_{I_1+3} - u_{I_1+3} h_{I_1+3}) + & i = I_1 + 3 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

Uočava se da se, za razliku od slučaja kada su jednačine napisane u konzervativnom obliku, parovi koji odgovaraju protoku mase kroz granice unutrašnjih profila međusobno ne potiru jer je:

$$u_{I_1+2} h_{I_1+1} - 2u_{I_1+1} h_{I_1+1} + u_{I_1} h_{I_1+1} = (u_{I_1+2} - 2u_{I_1+1} + u_{I_1}) h_{I_1+1} \neq 0 \quad (2.19)$$

osim u slučaju kada je $u_i = \text{const}$. Gauss-ova teorema, očigledno, nije zadovoljena. Time je dokazano da matematički analog parcijalne diferencijalne jednačine napisane u nekonzervativnom obliku kod koga su izvodi zamenjeni konačnim razlikama ne poseduje svojstvo konzervativnosti.

Na osnovu iznetog može se zaključiti da na svojstvo konzervativnosti računске sheme podjednako utiču i njena struktura i oblik u kome su napisane jednačine matematičkog modela.

3. Matematički modeli otvorenih tokova

U ovom delu biće prikazani modeli linijskog i ravanskog neustaljenog tečenja sa slobodnom površinom. Kao što je već rečeno, u računskoj hidraulici se razlikuju tri pristupa matematičkom modeliranju tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka. Oni će biti opisani na primeru linijskog tečenja. Značaj korišćenja jednačina napisanih u konzervativnom obliku u rešavanju problema prostiranja talasa sa strmim čelom biće istaknuta takođe na primeru linijskog tečenja. Pošto je ovaj rad posvećen metodama koje daju *slaba rešenja*, detaljno će biti objašnjen postupak izvođenja jednačina ravanskog toka koje predstavljaju osnovu direktnog pristupa (*through approach*). Postupak izvođenja jednačina linijskog modela neće biti prikazan. On se može naći u literaturi [7].

3.1 Linijski tokovi

Linijsko neustaljeno tečenje sa slobodnom površinom opisuje se Saint-Venant-ovim jednačinama. Jednačine su dobijene primenom zakona o održanju mase i zakona o održanju količine kretanja na kontrolnu zapreminu smeštenu između dva proizvoljno izabrana poprečna preseka. Prilikom njihovog izvođenja pošlo se od sledećih pretpostavki:

- 1° tok je izrazito linijski, pa se može smatrati da je raspored brzine u poprečnom preseku ravnomeran,
- 2° vertikalna ubrzanja fluidnih delića su mala i zakrivljenost strujnica je mala, što za posledicu ima hidrostatički raspored pritiska po vertikali,
- 3° nagib dna kanala je relativno mali, tj. $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ i $\cos\alpha \approx 1$ i
- 4° linijski gubici (usled trenja) mogu se računati pomoću empirijskih izraza za ustaljeno tečenje.

Vektorski oblik Saint-Venant-ovih jednačina dat je sledećim izrazom:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{E}_x = \mathbf{S} \quad (3.1a)$$

gde je:

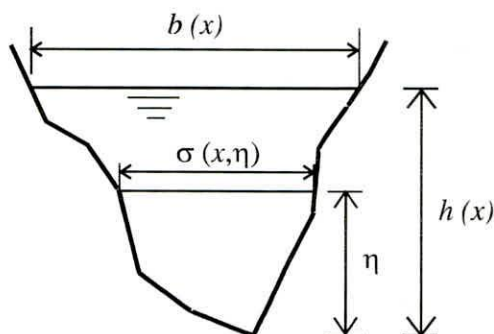
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) + gI_2 \end{bmatrix} \quad (3.1b)$$

Indeksi x i t u jednačini (3.1a) predstavljaju, redom, skraćene oznake za parcijalni izvod po vremenu i parcijalni izvod po prostoru. Površina poprečnog preseka A i protok Q su zavisno promenljive. Veličina označena sa I_1 predstavlja statički moment površine poprečnog preseka u odnosu na površinu vodenog ogledala i računa se prema sledećem izrazu:

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \sigma(x, \eta) d\eta \quad (3.2)$$

gde je: $h(x)$ — dubina vode u profilu, η — vertikalno odstojanje mereno od najniže tačke poprečnog preseka, $\sigma(x, \eta)$ — širina poprečnog preseka na rastojanju η ($\sigma(x, h(x)) = b(x)$),

Slika 3.1). Za kanal pravougaonog poprečnog preseka $I_1 = \frac{1}{2} b(x) h(x)$.



Slika 3.1: Elementi poprečnog preseka

Veličina I_2 predstavlja priraštaj statičkog momenta površine poprečnog preseka usled neprizmatičnosti korita i definisan je izrazom:

$$I_2 = \int_0^{h(x)} \frac{\partial \sigma(x, \eta)}{\partial x} (h(x) - \eta) d\eta \quad (3.3)$$

Kod prizmatičnih kanala $I_2=0$.

Nagib dna označen je sa S_0 :

$$S_0 = - \frac{dz_d}{dx} \quad (3.4)$$

gde je z_d kota dna, a nagib linije energije sa S_f . On je definisan Manning-ovom formulom:

$$S_f = \frac{n^2 Q |Q|}{A^2 R_H^{4/3}} \quad (3.5)$$

gde je n Manning-ov koeficijent.

Ukoliko se umesto $Q(x,t)$ i $A(x,t)$ za zavisno promenljive izaberu brzina u i dubina h , tada se, imajući u vidu da je: $Q = uA(h)$, $B = b(h)$, $\partial A / \partial h = B$ i $\frac{\partial}{\partial x} (gI_1) = gA(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x} + gI_2$, vektorska jednačina (3.1a), posle odgovarajućih transformacija, svodi na sledeći oblik:

$$\mathbf{V}_t + \mathbf{P}_x = \mathbf{T} \quad (3.6a)$$

gde je:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} uh \\ \frac{1}{2}u^2 + gh \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(S_0 - S_f) \end{bmatrix} \quad (3.6b)$$

Vektorske jednačine (3.1) i (3.6) predstavljaju sisteme nehomogenih nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina hiperboličkog tipa. U oba slučaja jedino su jednačine održanja mase homogene.

Poznato je da se pri određenim početnim i graničnim uslovima rešavanjem nelinearnih jednačina, kojima se opisuje blago i naglo promenljivo neustaljeno tečenje u otvorenim tokovima, dobijaju dvoznačni rezultati. Stoga se za numeričku integraciju jednačina (3.1) i (3.6) mogu primeniti metode koje daju slaba rešenja, tj. rešenja koja pokrivaju i oblast u kojoj su funkcije osnovnih veličina toka kontinualne i diferencijabilne i oblast u kojoj se javlja njihov diskontinuitet.

Ako se u (3.1) i (3.6) stavi da je $\mathbf{S}=0$ i $\mathbf{T}=0$, tada se dobijaju sistemi homogenih nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina koji su detaljno matematički proučeni i za koje je utvrđeno sledeće. Slaba rešenja dobijena numeričkom integracijom homogenih jednačina sistema (3.1) fizički su realna i odgovaraju diskontinualnim rešenjima integralnih jednačina izvedenih primenom zakona o održanju mase i zakona o održanju količine kretanja [7]. Korišćenjem ovih jednačina obezbeđuje se zadovoljenje najvažnijeg uslova kojeg je potrebno ispuniti pri modeliranju tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka, a to je očuvanje količine kretanja (očuvanje ravnoteže sila, jer je dinamička jednačina, zapravo, jednačina ravnoteže sila). Rešavanjem sistema homogenih jednačina (3.6) takođe se mogu dobiti slaba rešenja. Ova rešenja, međutim, odgovaraju potpuno drugom

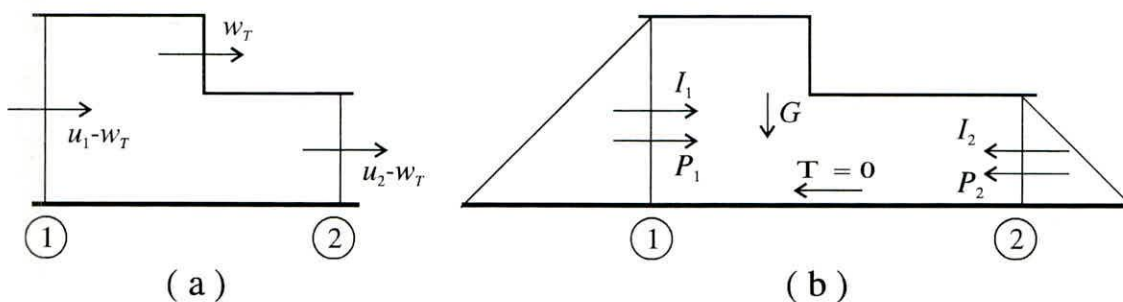
diskontinualnom rešenju — rešenju dobijenom korišćenjem integralnih jednačina koje su zasnovane na zakonu održanja energije [7]. Pošto zadovoljenje zakona održanja energije obavezno ne implicira i zadovoljenje zakona održanja količine kretanja, za dobijena rešenja se ne može tvrditi da su apsolutno pouzdana.

Nehomogeni sistemi nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina još uvek nisu detaljno matematički proučeni. Za sada se pretpostavlja da je uticaj slobodnih članova u odnosu na ostale članove u dinamičkoj jednačini relativno mali i da bitno ne menja osnovne osobine parcijalnih diferencijalnih jednačina [7].

Za homogene jednačine sistema (3.1) kaže se da su napisane u punom konzervativnom obliku, a za homogene jednačine sistema (3.6) da su napisane u nekonzervativnom obliku. U Poglavlju 2 je pokazano da oblik u kome su ispisane jednačine matematičkog modela pri numeričkoj integraciji tih jednačina značajno utiče na svojstvo konzervativnosti izabrane računске sheme. Korišćenjem jednačina u nekonzervativnom obliku za matematičko modeliranje tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka u nekim slučajevima mogu se dobiti naizgled fizički realna rešenja i to samo zahvaljujući maloj promeni pojedinih članova u jednačinama [7]. Međutim, upotreba ovakvih modela se ne preporučuje, jer uvek sa sobom nosi opasnost ili da se dobiju nepouzdana slaba rešenja, ili da se diskontinualno rešenje i ne dobije. Nejednakost rešenja dobijenih primenom homogenih jednačina (3.1) i (3.6) biće pokazana nešto kasnije na primeru prostiranja talasa sa strmim čelom.

Opisani matematički model predstavlja osnovu *direktnog pristupa* problemu modeliranja tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka.

Postupak u kome se čelo talasa/hidraulički skok modelira korišćenjem posebnog sistema jednačina pripada tzv. *shock-fitting* pristupu. Jednačina kontinuiteta i dinamička jednačina ispisuju se za kontrolnu zapreminu smeštenu između preseka uzvodno i nizvodno od strmog čela (Slika 3.2a). Pretpostavlja se da se posmatrač kreće zajedno sa čelom talasa i da su preseki dovoljno udaljeni od strmog čela, tj. da je u njima raspored pritiska po dubini hidrostatički. S obzirom na to da u razmatranoj zoni dominiraju inercijalni uticaji, u dinamičkoj jednačini se zanemaruje sila trenja. Zbog pretpostavke o malom nagibu dna ($\cos\alpha \approx 1$) zanemaruje se i komponenta sile težine u pravcu toka (Slika 3.2b).



Slika 3.2: (a) Kontrolna zapremina za koju se ispisuju jednačine matematičkog modela; (b) Shema sila koje deluju na kontrolnu zapreminu

Jednačina kontinuiteta i dinamička jednačina imaju sledeći oblik:

$$Q_1 - w_T A_1 = Q_2 - w_T A_2 \quad (3.7a)$$

$$gI_{1,1} + \frac{Q_1^2}{A_1} = gI_{1,2} + \frac{Q_2^2}{A_2} \quad (3.7b)$$

U prethodnim izrazima w_T predstavlja brzinu prostiranja talasa, a $I_{1,1}$ i $I_{1,2}$, redom, statički moment površine poprečnog preseka 1 i statički moment površine poprečnog preseka 2 u odnosu na površinu vodenog ogledala. Deo toka van zone strmog čela modelira se korišćenjem Saint-Venant-ovih jednačina.

Veliki gradijenti osnovnih veličina toka u blizini strmog čela kod nekih računskih shema izazivaju teškoće pri numeričkoj integraciji parcijalnih diferencijalnih jednačina sistema (3.1) i (3.6). One se ogledaju ili u pojavi veštačkih (numeričkim putem izazvanih) oscilacija u liniji nivoa, nivogramima i hidrogramima, ili u potpunom rasturanju proračuna posle svega nekoliko računskih koraka³. Stoga se došlo na ideju da se jednačinama (3.1) i (3.6) doda još jedan član u kome figuriše tzv. veštačka viskoznost (pseudoviskoznost). Uloga novododatog člana je da veštačkim (numeričkim) putem ublaži (smanji) velike gradijente i na taj način omogući proračun. Ovaj pristup matematičkom modeliranju tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka u literaturi je poznat pod nazivom metoda pseudoviskoznosti ili eksplicitna metoda veštačke viskoznosti i treba ga shvatiti kao varijantu direktnog pristupa kojom se unapred pokušavaju da reše problemi koji se mogu javiti tokom rešavanja jednačina sistema (3.1) i (3.6).

Koncept eksplicitne veštačke viskoznosti prvi su uveli von Neumann i Richtmayer 1950. godine i on je uglavnom korišćen u rešavanju problema iz oblasti gasne dinamike. Preissmann i Cunge su 1961. godine ovaj postupak prilagodili i primenili u hidraulici otvorenih tokova. Struktura dopunskog člana je izabrana tako da se korekcija numeričkog rešenja vrši samo u oblastima sa oštrim (velikim) gradijentima. Postupak je bio primenjen na homogene jednačine u nekonzervativnom obliku:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} = 0 \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.8b)$$

U novododatom članu (poslednjem članu u jednačini 3.8b) figuriše veštačka viskoznost (pseudoviskoznost) q koja je definisana na sledeći način:

$$q = \begin{cases} l^2 h \left(\frac{\partial u}{\partial h} \right)^2, & \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \\ 0, & \frac{\partial u}{\partial x} > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

³ O ovim problemima detaljno će biti reči u Poglavljima 4 i 5.2.

gde je $l=a\Delta x$ karakteristična dužina, tj. dužina koja pokazuje koliko će (najmanje) računskih polja dužine Δx zahvatati čelo talasa u dobijenom numeričkom rešenju. Preissmann i Cunge su preporučili da to budu dva ili tri polja ($a=2$ ili $a=3$).

Prilagođeni oblik originalne metode von Neumann-a i Richtmayer-a ovde je prikazan zbog svog istorijskog značaja. S obzirom da je postupak primenjen na jednačine u nekonzervativnom obliku pitanje je da li su dobijena rešenja bila fizički realna. O veštačkoj viskoznosti biće još govora u Poglavlju 4.

Prilikom opisivanja direktnog pristupa matematičkom modeliranju tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka istaknuto je da u analizi problema ove vrste ne bi trebalo koristiti jednačine napisane u nekonzervativnom obliku. Ova tvrdnja će i formalno biti dokazana na primeru prostiranja talasa sa strmim čelom.

Osnovu za izvođenje dokaza predstavljaju teorema o ekvivalenciji rešenja integralnih⁴ i odgovarajućih parcijalnih diferencijalnih jednačina i definicija slabog rešenja. Teorema glasi: "Neka su \mathbf{U}_1 i \mathbf{U}_2 rešenja homogenog sistema (3.1) čije su oblasti definisanosti u $x0t$ ravni odvojene glatkom krivom. Vektori \mathbf{U}_1 i \mathbf{U}_2 su rešenja integralnih jednačina (3.10) i (3.11) ako i samo ako je lokalni nagib krive koja razdvaja njihove oblasti definisanosti $dx/dt=w_T$ i ako vrednosti vektora \mathbf{U}_1 i \mathbf{U}_2 zadovoljavaju uslov:

$$w_T [\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1] = [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] \quad (3.12)$$

Rešenje homogenih jednačina (3.1) koje zadovoljava jednačine (3.10), (3.11) i (3.12) zove se slabo rešenje diferencijalnih jednačina.

Razmatraće se pojednostavljeni slučaj — tečenje idealnog fluida u horizontalnom prizmatičnom kanalu pravougaonog poprečnog preseka širine $B=1m$. Vektori \mathbf{U} i \mathbf{E} u jednačini (3.1) u ovom slučaju dobijaju sledeći oblik:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

a vektori \mathbf{V} i \mathbf{P} iz jednačine (3.6):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} uh \\ \frac{u^2}{2} + gh \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

⁴ Integralne jednačine iz kojih se izvode homogene parcijalne diferencijalne jednačine sistema (3.1) napisane u formi integrala duž zatvorene konture [7] su:

$$\oint [A dx + Q dt] = 0 \quad (3.10)$$

$$\oint \left[Q dx + \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) dt \right] = 0 \quad (3.11)$$

Prvo će biti analizirana rešenja konzervativnih jednačina (3.13), a potom i rešenja nekonzervativnih jednačina (3.14)

Primenom jednačine (3.12) na vektore (3.13) dobija se sledeći sistem jednačina:

$$w_T (h_2 - h_1) = (u_2 h_2 - u_1 h_1) \quad (3.15a)$$

$$w_T (u_2 h_2 - u_1 h_1) = \left[\left(u_2^2 h_2 + \frac{g h_2^2}{2} \right) - \left(u_1^2 h_1 + \frac{g h_1^2}{2} \right) \right] \quad (3.15b)$$

koji treba rešiti po nepoznatoj brzini prostiranja talasa w_T . Kombinovanjem jednačina (3.15a) i (3.15b) može se eliminisati brzina w_T i utvrditi veza između brzina u_1 i u_2 i dubina h_1 i h_2 sa različitih strana strmog čela:

$$u_1 - u_2 = \pm (h_2 - h_1) \left(g \frac{1}{h_1 h_2} \frac{h_1 + h_2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

Kada se prethodna jednačina reši po u_1 i rešenje zameni u jednačinu (3.15a), dobija se izraz za računanje brzine prostiranja talasa:

$$w_T = u_2 \pm \left[g \frac{h_1}{h_2} \frac{h_1 + h_2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

Do iste relacije se dolazi i rešavanjem integralnih jednačina sistema (3.7), što znači da su rezultati dobijeni primenom jednačina napisanih u konzervativnom obliku fizički realni.

Ukoliko se jednačina (3.12) primeni na vektore (3.14), sistem jednačina koji treba rešiti po nepoznatoj brzini prostiranja w_T izgleda ovako:

$$w_T (h_2 - h_1) = (u_2 h_2 - u_1 h_1) \quad (3.18a)$$

$$w_T (u_2 - u_1) = \left[\left(\frac{u_2^2}{2} + g h_2 \right) - \left(\frac{u_1^2}{2} + g h_1 \right) \right] \quad (3.18b)$$

I ovde će se kombinovanjem jednačina (3.18a) i (3.18b) najpre eliminisati brzina w_T , a potom utvrditi veza između brzina u_1 i u_2 i dubina h_1 i h_2 (sa različitih strana čela talasa). Ona je definisana sledećom jednačinom:

$$u_1 - u_2 = \pm (h_2 - h_1) \left(\frac{2g}{h_1 + h_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

Izraz za brzinu prostiranja w_T izvodi se na taj način što se prethodna jednačina reši po u_1 i dobijeno rešenje zameni u jednačinu (3.18a). Rezultat ovih algebarskih transformacija je:

$$w_T = u_2 \pm \left(\frac{2gh_1^2}{h_1 + h_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

Uočava se da se rešenje proizašlo iz jednačina napisanih u nekonzervativnom obliku razlikuje od rešenja koje se dobija primenom jednačina napisanih u konzervativnom obliku. (Izuzetak predstavlja slučaj kada je $h_1 = h_2$, što odgovara jednolikom tečenju.) Rezultati numeričke integracije nekonzervativnih jednačina, dakle, nisu fizički realni. Time je dokazano da je u analizi problema prostiranja talasa sa strmim čelom i uopšte, u analizi tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka osnovni preduslov za dobijanje pouzdanih rešenja korišćenje jednačina u konzervativnom obliku.

Matematička formulacija problema, pored ispisivanja jednačina (3.1), (3.6), (3.7) ili (3.8), podrazumeva i definisanje početnih i graničnih uslova bez kojih bi rešavanje ovih jednačina bilo nemoguće. Početnim uslovima definiše se raspored dubina i protoka duž kanala u trenutku $t=0$. Promena zavisno promenljivih tokom vremena u najuzvodnijem i najnižvodnijem profilu definiše se graničnim uslovima. Poznato je da broj graničnih uslova koji se zadaju na površinama kroz koje voda ulazi u razmatranu oblast i izlazi iz nje zavisi od režima tečenja i dimenzionalnosti problema. Kod linijskog tečenja u mirnom režimu u najuzvodnijem i najnižvodnijem profilu treba zadati po jedan granični uslov: $Q(t)$, $h(t)$ ili $Q(h)$. Linijsko tečenje u burnom režimu zahteva da se u najuzvodnijem profilu zadaju oba granična uslova ($h(t)$ i $Q(t)$). Definisane graničnog uslova u najnižvodnijem profilu nije potrebno.

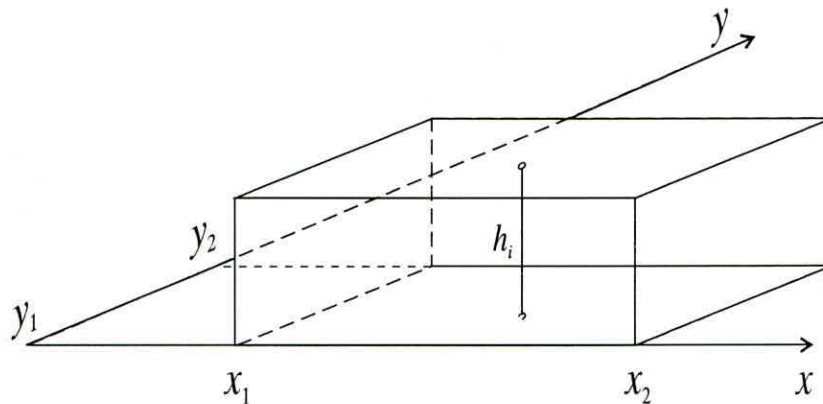
3.2 Ravanski tokovi

Kod ravanskog (u horizontalnoj ravni dvodimenzionog) tečenja, pored komponente brzine u pravcu glavnog toka (u), postoji i komponenta brzine u poprečnom pravcu (v). Zbog toga je pretpostavku o ravnomernom rasporedu brzine u poprečnom preseku, koja je korišćena pri izvođenju jednačina linijskog toka, u ovom slučaju potrebno korigovati. Ona treba da glasi: raspored obe komponente brzine po dubini toka je ravnomeran. Sve ostale pretpostavke na kojima je baziran model ravanskog tečenja identične su pretpostavkama na kojima se zasniva model linijskog toka.

Jednačine matematičkog modela ravanskog toka koje se korise u direktnom pristupu biće izvedene iz integralnih jednačina napisanih za kontrolnu zapreminu prizmatičnog oblika (Slika 3.3).

3.2.1 Jednačina održanja mase

Prema zakonu održanja mase priraštaj mase u nekoj izabranoj zapremini V u intervalu vremena $\Delta t = t_2 - t_1$ jednak je razlici između ulaza i izlaza mase kroz površinu koja ograničava tu zapreminu. Priraštaj mase u posmatranoj zapremini iznosi:



Slika 3.3: Kontrolna zapremina na koju se primenjuju zakon održanja mase i zakon održanja količine kretanja

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} [(\rho h)_{t_2} - (\rho h)_{t_1}] dy dx \quad (3.21)$$

Razlika između ulaza i izlaza kroz površine sa normalom u pravcu x -ose definisana je sledećim integralom:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} [(\rho uh)_{x_1} - (\rho uh)_{x_2}] dy dt \quad (3.22)$$

a razlika između ulaza i izlaza kroz površine sa normalom u pravcu y -ose integralom:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} [(\rho vh)_{y_1} - (\rho vh)_{y_2}] dx dt \quad (3.23)$$

Izjednačavanjem izraza (3.21) sa zbirom integrala (3.22) i (3.23), posle deljenja sa ρ dobija se jednačina održanja mase koja glasi:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} [(h)_{t_2} - (h)_{t_1}] dy dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} [(uh)_{x_1} - (uh)_{x_2}] dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} [(vh)_{y_1} - (vh)_{y_2}] dx dt \quad (3.24)$$

Jednačina važi nezavisno od toga da li su podintegralne veličine neprekidne i diferencijabilne ili nisu. Ukoliko dubina h i jedinični protoci u x i y -pravcu (uh i vh) zadovoljavaju sve potrebne uslove u pogledu neprekidnosti i diferencijabilnosti, članovi

$(h)_{t_2}$, $(uh)_{x_2}$ i $(vh)_{y_2}$ mogu se razviti u Teylor-ov red u okolini tačke (x_1, y_1, t_1) :

$$(h)_{t_2} = (h)_{t_1} + \frac{\partial h}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \quad (3.25a)$$

$$(uh)_{x_2} = (uh)_{x_1} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 (uh)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \quad (3.25b)$$

$$(vh)_{y_2} = (vh)_{y_1} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 (vh)}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2} + \dots \quad (3.25c)$$

Kada se u prethodnim jednačinama zadrže samo prvi izvodi i novoformirani izrazi zamene u (3.24), dobija se integralna jednačina za čije članove u graničnom slučaju ($t_1 \rightarrow t_2$) važi:

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} [(h)_{t_2} - (h)_{t_1}] dy dx &= \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial h}{\partial t} (t_2 - t_1) \right] dy dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] dt dy dx \end{aligned} \quad (3.26a)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} [(uh)_{x_2} - (uh)_{x_1}] dy dt &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial (uh)}{\partial x} (x_2 - x_1) \right] dy dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial (uh)}{\partial x} \right] dx dy dt \end{aligned} \quad (3.26b)$$

$$\begin{aligned} \lim_{y_2 \rightarrow y_1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} [(vh)_{y_2} - (vh)_{y_1}] dx dt &= \lim_{y_2 \rightarrow y_1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial (vh)}{\partial y} (y_2 - y_1) \right] dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial (vh)}{\partial y} \right] dy dx dt \end{aligned} \quad (3.26c)$$

Jednačina kontinuiteta se tada transformiše u:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} \right] dy dx dt = 0 \quad (3.27)$$

Ona važi za prouzvoljnu kontrolnu zapreminu. Skraćivanjem vremenskog intervala ($t_1 \rightarrow t_2$) i smanjivanjem dimenzija kontrolne zapremine ($x_1 \rightarrow x_2$ i $y_1 \rightarrow y_2$) dobija se diferencijalni oblik jednačine održanja mase:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (3.28)$$

3.2.2 Jednačine održanja količine kretanja

Zakon održanja količine kretanja (drugi Newton-ov zakon) glasi: "Priraštaj količine kretanja u jedinici vremena jednak je delujućoj sili". Saglasno ovom zakonu priraštaj količine kretanja u proizvoljno izabranoj zapremini V u intervalu vremena $\Delta t = t_2 - t_1$ jednak je razlici ulaza i izlaza količine kretanja kroz površinu koja omeđuje tu zapreminu uvećanoj za sumu impulsa spoljašnjih sila koje na tu zapreminu deluju tokom intervala Δt .

Priraštaj količine kretanja u x -pravcu u posmatranoj zapremini u razmatranom vremenskom intervalu može se izraziti sledećom relacijom:

$$\Delta M_x = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} [(\rho uh)_{t_2} - (\rho uh)_{t_1}] dy dx \quad (3.29)$$

Razlika između ulaza i izlaza količine kretanja u x -pravcu kroz površine sa normalom u pravcu x -ose iznosi:

$$M_{f_{xx}} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} [(\rho uh \cdot u)_{x_1} - (\rho uh \cdot u)_{x_2}] dy dt \quad (3.30)$$

a kroz površine sa normalom u pravcu y -ose:

$$M_{f_{xy}} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} [(\rho uh \cdot v)_{y_1} - (\rho uh \cdot v)_{y_2}] dx dt \quad (3.31)$$

Pošto je reč o kontrolnoj zapremini prizmatičnog oblika, statički momenat elementarne površine ($dy h$) u odnosu na površinu vodenog ogledala je $0.5h^2 dy$. Imajući to u vidu, impuls sile pritiska u intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$ može se predstaviti sledećim integralom:

$$I_{P_x} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\rho \frac{h^2}{2} \right)_{x_1} - \left(\rho \frac{h^2}{2} \right)_{x_2} \right] dy dt \quad (3.32)$$

Impuls komponente sile težine u x -pravcu tokom vremena Δt iznosi:

$$I_{G_x} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho g h S_{0x} dy dx dt \quad (3.33)$$

gde je:
$$S_{0x} = - \frac{\partial z_d}{\partial x} \quad (3.34)$$

pad dna u x -pravcu, a impuls komponente sile trenja u x -pravcu T_x :

$$I_{T_x} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho g h S_{fx} dy dx dt \quad (3.35)$$

gde je:
$$S_{fx} = \frac{n^2 (uh) \sqrt{(uh)^2 + (vh)^2}}{h^{10/3}} \quad (3.36)$$

pad linije energije u x -pravcu, a n Manning-ov koeficijent.

Zakon održanja količine kretanja matematički se iskazuje sledećom relacijom:

$$\Delta M = M_{f_{xx}} + M_{f_{xy}} + I_{P_x} + I_{G_x} - I_{T_x} \quad (3.37)$$

ili u razvijenom obliku, uzimajući da je gustina konstantna:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} [(uh)_{t_2} - (uh)_{t_1}] dy dx &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} [(u^2 h)_{x_1} - (u^2 h)_{x_2}] dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} [(uvh)_{y_1} - (uvh)_{y_2}] dx dt + \\ &+ g \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{h^2}{2} \right)_{x_1} - \left(\frac{h^2}{2} \right)_{x_2} \right] dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} gh S_{0x} dy dx dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} gh S_{fx} dy dx dt \end{aligned} \quad (3.38)$$

Primenom istog postupka kao i u slučaju jednačine održanja mase — razvijanjem podintegralnih veličina u Teylor-ov red, prethodna jednačina postaje:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right) + \frac{\partial (uvh)}{\partial y} + gh (S_{0x} - S_{fx}) \right] dy dx dt = 0 \quad (3.39)$$

U graničnom slučaju — kada $t_1 \rightarrow t_2$, $x_1 \rightarrow x_2$ i $y_1 \rightarrow y_2$ dobija se diferencijalna jednačina održanja količine kretanja za x -pravac:

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 h + \frac{1}{2} gh^2 \right) + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} = -gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (3.40)$$

Postupak izvođenja jednačine održanja količine kretanja za y -pravac identičan je sa postupkom koji je primenjen prilikom izvođenja jednačine održanja količine kretanja za x -pravac. Članovi u relaciji kojom je matematički iskazan zakon održanja količine kretanja u ovom slučaju definisani su sledećim izrazima:

$$1^\circ \Delta M_y = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} [(\rho v h)_{t_2} - (\rho v h)_{t_1}] dy dx \quad (3.41)$$

$$2^\circ M_{f_{yx}} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} [(\rho v h \cdot u)_{x_1} - (\rho v h \cdot u)_{x_2}] dy dt \quad (3.42)$$

$$3^\circ M_{f_{yy}} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} [(\rho v h \cdot v)_{y_1} - (\rho v h \cdot v)_{y_2}] dx dt \quad (3.43)$$

$$4^\circ I_{P_y} = g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\rho \frac{h^2}{2} \right)_{y_1} - \left(\rho \frac{h^2}{2} \right)_{y_2} \right] dx dt \quad (3.44)$$

$$5^\circ I_{G_y} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho gh S_{0y} dy dx dt \quad (3.45)$$

$$\text{gde je: } S_{0y} = -\frac{\partial z_d}{\partial y} \quad (3.46)$$

$$6^\circ I_{T_y} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho gh S_{fy} dy dx dt \quad (3.47)$$

$$\text{gde je: } S_{fy} = \frac{n^2 (vh) \sqrt{(uh)^2 + (vh)^2}}{h^{10/3}} \quad (3.48)$$

Integralni oblik jednačine održanja količine kretanja za y -pravac može se napisati na sledeći način:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(v^2 h + \frac{1}{2} gh^2 \right) + gh(S_{0y} - S_{fy}) \right] dy dx dt = 0 \quad (3.49)$$

U graničnom slučaju — kada $t_1 \rightarrow t_2$, $x_1 \rightarrow x_2$ i $y_1 \rightarrow y_2$ dobija se diferencijalni oblik ove jednačine:

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(v^2 h + \frac{1}{2} gh^2 \right) = -gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (3.50)$$

Jednačine (3.28), (3.40) i (3.50) obrazuju sistem nehomogenih nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina kojima se opisuju ravanski otvoreni tokovi. U njemu su sve jednačine napisane u konzervativnom obliku. Radi kraćeg pisanja, ovaj sistem jednačina se može predstaviti sledećom matričnom jednačinom:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{E}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{S} = 0 \quad (3.51a)$$

gde je:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + \frac{1}{2} gh^2 \\ uvh \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2 h + \frac{1}{2} gh^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ -gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (3.51b)$$

Ukoliko se umesto zakona održanja količine kretanja na izabranu kontrolnu zapreminu primeni zakon održanja energije, tada se primenom napred opisanog postupka dobija sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

1° jednačina održanja mase:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.52)$$

2° jednačina održanja energije za x -pravac:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} = -g(S_{0x} - S_{fx}) \quad (3.53)$$

3° jednačina održanja energije za y-pravac:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = -g(S_{0y} - S_{fy}) \quad (3.54)$$

koji se u skraćenom obliku može predstaviti matricnom jednačinom:

$$\mathbf{V}_t + \mathbf{P}_x + \mathbf{R}_y + \mathbf{T} = 0 \quad (3.55a)$$

gde je:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} h \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} uh \\ \frac{1}{2}u^2 + gh \\ uv \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} vh \\ uv \\ \frac{1}{2}v^2 + gh \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(S_{ox} - S_{fx}) \\ -g(S_{oy} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (3.55b)$$

Jednačine (3.52), (3.53) i (3.54) napisane su u nekonzervativnom obliku.

Za sisteme jednačina (3.51) i (3.55) važi isto što je rečeno za jednačine (3.1) i (3.6), tako da se to ovde neće ponavljati.

I u slučaju ravanskih tokova korektna formulacija problema pored ispisivanja jednačina matematičkog modela podrazumeva definisanje početnih i graničnih uslova. Početnim uslovima definiše se prostorni raspored zavisno promenljivih (h , u , v) u razmatranoj kontrolnoj zapremini u trenutku $t=0$.

Graničnim uslovima definiše se promena određenih zavisno promenljivih na granicama kontrolne zapremine tokom vremena. Razlikuju se otvorene i čvrste granice. Otvorene granice su one površine kroz koje voda nesmetano ulazi u razmatranu oblast strujanja i izlazi iz nje. Broj graničnih uslova koji se zadaju na otvorenim granicama zavisi od režima tečenja i dimenzionalnosti problema. Ukupan broj graničnih uslova za ravanske probleme je tri.

Kod ravanskog tečenja u mirnom režimu problem je dobro strukturiran ako se na ulaznoj granici zadaju dva granična uslova (npr. obe komponente brzine $u(t)$ i $v(t)$ ili $h(t)$ i $u(t)$), a na izlaznoj jedan (npr. nivoogram — $h(t)$).

Ravansko tečenje u burnom režimu zahteva da se na ulaznoj granici zadaju sva tri granična uslova ($h(t)$, $u(t)$ i $v(t)$), dok na izlaznoj granici definisanje graničnog uslova nije potrebno. Međutim, zahtevi diskretizacije pri numeričkoj integraciji parcijalnih diferencijalnih jednačina nameću potrebu da se na izlaznoj granici zada granični uslov čisto numeričke prirode — na primer u obliku nule prvih izvoda zavisno promenljivih:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.56)$$

Primenom ovog uslova obezbeđuje se "slobodni prolaz" kroz otvorenu granicu. Da bi se izbegao uticaj eventualne greške nizvodnog graničnog uslova na rezultate proračuna, nizvodnu granicu bi trebalo postaviti dovoljno daleko od oblasti koja je od interesa.

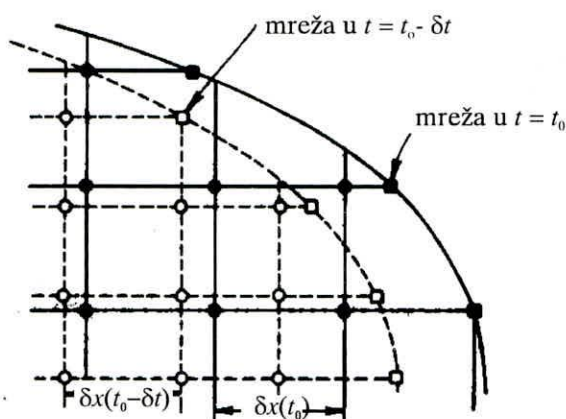
Pošto se prikazanim matematičkim modelom ne modelira turbulencija, granični uslov na čvrstoj konturi podrazumeva da je komponenta brzine upravna na tu konturu jednaka nuli.

4. Numerički modeli otvorenih tokova

Generalno gledano, razlikuju se dva pristupa numeričkom modeliranju fizičkih pojava i procesa — Euler-ijanski i Lagrange-ijanski. Kod Euler-ijanskog pristupa se posmatra razvoj procesa u fizičkom domenu koji je prekriven fiksnom računskom mrežom, tj. mrežom čiji oblik i položaj tokom celog proračuna ostaju nepromenjeni. Kod Lagrange-ijanskog pristupa računaska mreža se generiše, prilagođava i pomera u skladu sa razvojem analiziranog procesa (Slika 4.1). Stoga je kod Lagrange-ijanskog pristupa neophodno izvršiti transformaciju originalnih jednačina koje važe u fiksnom koordinatnom sistemu (Euler-ijanski pristup). Nove nezavisno promenljive treba izabrati tako da se obezbedi pomeranje računskih polja u skladu sa, na primer, kretanjem fluidnih delića (jedna nezavisno promenljiva je strujna funkcija [36]), ili promenom nivoa vode u kanalu (nezavisno promenljiva je relativna promena kote nivoa z/H , gde je H dubina vode [34]). Iako su otvoreni tokovi koje karakteriše nagla lokalna promena dubine i protoka hidrauličke pojave koje bi se mogle analizirati primenom Lagrange-ijanskog pristupa, u razmatranju ovih fenomena za sada se još uvek koristi Euler-ijanski pristup. U dostupnoj literaturi nađen je jedan primer primene Lagrange-ijanskog pristupa i to u analizi ravanskih ustaljenih tokova kod kojih se javlja hidraulički skok [36] i jedan primer primene mešovito Euler-Lagrange-ijanskog pristupa u proračunu ravanskog (u vertikalnoj ravni dvodimenzionog) neustaljenog tečenja izazvanog naglim spuštanjem ustave na nizvodnom kraju kanala [34]. Preostali deo izlaganja odnosiće se isključivo na Euler-ijanski pristup numeričkom modeliranju neustaljenog tečenja sa slobodnom površinom.

4.1 Pregled numeričkih metoda za proračun tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka

U uvodu je rečeno da se sve metode koje se u računskoj hidraulici koriste za analizu tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka mogu svrstati u neku od sledećih pet klasa: 1° metode karakteristika, 2° metode konačnih razlika, 3° metoda konačnih elemenata, 4° metode Godunova i 5° metode razdvajanja fluksova. Pri tom je istaknuto da se kvalitet



Slika 4.1: Računska mreža — Lagrange-ijanski pristup [25]

svake metode ocenjuje prema univerzalnosti njene primene, a to, kao što je već rečeno, podrazumeva da se utvrdi da li se tom metodom i sa kakvom tačnošću mogu simulirati složeni tokovi kao što su tokovi sa jednovremenim prisustvom burnog i mirnog režima, talasna kretanja sa izraženim strmim čelom i tokovi u složenim geometrijskim uslovima. U nastavku će u osnovnim crtama biti opisana suština proračuna za svaku od navedenih pet klasa metoda. Razmatranja će se ograničiti samo na linijske tokove. Ukoliko je metoda primenjivana i u analizi ravanskih tokova, naznačiće se reference u kojima se može naći detaljniji opis računskog postupka za ravanske probleme. Nakon toga, sledi detaljan prikaz računске sheme MacCormack, koja, kao što je već rečeno, pripada klasi metoda konačnih razlika.

4.1.1 Metoda karakteristika

Suština metode karakteristika zasniva se na činjenici da parcijalne diferencijalne jednačine hiperboličkog tipa poseduju u prostoru nezavisno promenljivih tzv. karakteristične putanje ("karakteristike") duž kojih se prostiru poremećaji. Kod linijskih tokova karakteristike su linije u (x, t) ravni, a kod ravanskih tokova to su konoidi — površi u prostoru (x, y, t) . U matematičkom smislu poremećaji predstavljaju diskontinuitete u izvodima zavisno promenljivih i fizičkih parametara koji se pojavljuju u jednačinama, a ne diskontinuitete samih zavisno promenljivih [7]. Poremećaj može, na primer, biti diskontinuitet u nagibu površine vodenog ogledala $(\partial y/\partial x)$ ili diskontinuitet gradijenta brzine $(\partial u/\partial x)$. Brzina njihovog prostiranja odgovara brzini prostiranja talasa u plitkoj vodi. U slučaju linijskog tečenja ona iznosi:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{g \frac{A}{b}} = u \pm c \quad (4.1)$$

Znak "plus" se uzima kada se posmatraju poremećaji koji se prostiru nizvodno (duž pozitivne karakteristike), a znak "minus" kada se posmatraju poremećaji koji se prostiru uzvodno (duž negativne karakteristike).

Metoda karakteristika za ravanske tokove naziva se još i metoda bikarakteristika. Zbog složenosti njenog algoritma, ona se praktično i ne koristi u analizi ravanskih tokova. Opis metode bikarakteristika može se naći u [25] i [26].

U literaturi ([7], [32]) se najčešće nailazi na jednačine metode karakteristika koje su izvedene korišćenjem parcijalnih diferencijalnih jednačina napisanih u nekonzervativnom obliku. Primenom jednačina u nekonzervativnom obliku dobijaju se četiri obične diferencijalne jednačine od koji dve predstavljaju jednačine karakteristika (4.1), a preostale dve, tzv. uslove kompatibilnosti. Uslovi kompatibilnosti su, zapravo, totalni izvodi linearne kombinacije zavisno promenljivih:

$$\frac{D}{Dt} (u + 2c) = g(S_0 - S_f) - \frac{uc}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (4.2a)$$

$$\frac{D}{Dt} (u - 2c) = g(S_0 - S_f) + \frac{uc}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (4.2b)$$

Jednačina (4.2a) važi duž pozitivne, a jednačina (4.2b) duž negativne karakteristike. Primenom metode karakteristika problem rešavanja dve parcijalne diferencijalne jednačine svodi se, dakle, na nešto lakši problem rešavanja četiri obične diferencijalne jednačine.

S obzirom na to da će se u ovom radu analiza linijskih tokova zasnivati na jednačinama napisanim u konzervativnom obliku, u nastavku će biti opisan postupak izvođenja jednačina metode karakteristika za sistem jednačina (3.1). Pretpostaviće se da se radi o prizmatičnom kanalu ($I_2 = 0$) pravougaonog poprečnog preseka širine B

$$(I_1 = 0.5 gBh^2).$$

Jednačina (3.1) može se napisati u razvijenom obliku na sledeći način:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} gBh^2 \right) = gBh(S_0 - S_f) \quad (4.3b)$$

Ako se drugi i treći sabirak sa leve strane znaka jednakosti napišu u razvijenom obliku, tada se, imajući u vidu da je za kanal pravougaonog poprečnog preseka $gA/B = gh$, jednačina (4.3b) može prikazati na sledeći način:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + B \left[- \left(\frac{Q}{A} - \sqrt{gh} \right) \left(\frac{Q}{A} + \sqrt{gh} \right) \right] \frac{\partial h}{\partial x} = gA(S_0 - S_f) \quad (4.4)$$

U izrazima iz uglaste zagrade prepoznaju se brzine prostiranja talasa u plitkoj vodi — ($u-c$)

i ($u+c$). (Brzina prostiranja elementarnog talasa je: $c = \sqrt{gA/B} = \sqrt{gh}$.)

Jednačina kompatibilnosti koja važi duž negativne karakteristike:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{A} - c \quad (4.5)$$

dobija se tako što se jednačina (4.3a) pomnoži sa: $B \left(\frac{Q}{A} + \sqrt{gh} \right)$ i oduzme od jednačine (4.4). Rezultat je:

$$\begin{aligned} C^-: \quad & \frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{Q}{A} - \sqrt{gh} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} + \\ & + B \left(-\frac{Q}{A} + \sqrt{gh} \right) \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{Q}{A} - \sqrt{gh} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = gA(S_0 - S_f) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Jednačina kompatibilnosti koja važi duž pozitivne karakteristike:

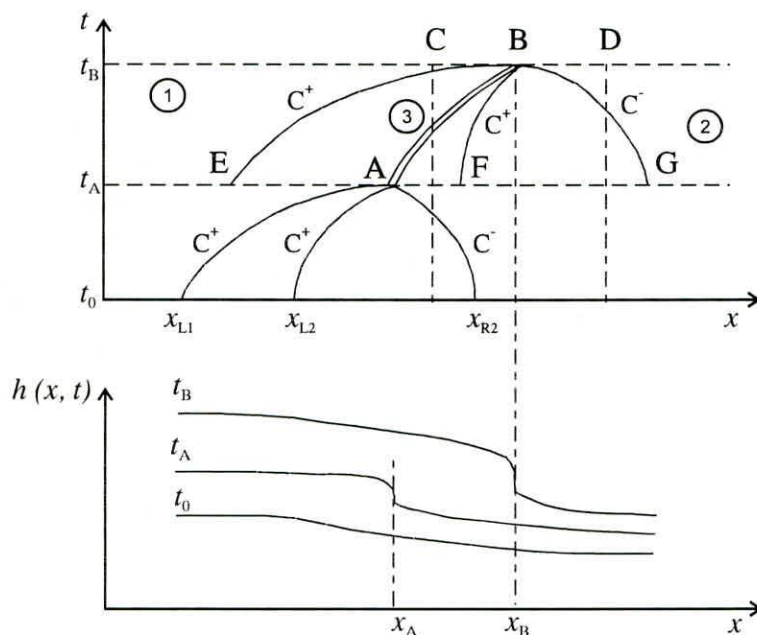
$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{A} + c \quad (4.7)$$

dobija se na taj način što se jednačina (4.3a) pomnoži sa $-B \left(\frac{Q}{A} - \sqrt{gh} \right)$ i sabere sa jednačinom (4.4). Rezultat je:

$$\begin{aligned} C^+: \quad & \frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{Q}{A} + \sqrt{gh} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} + \\ & + B \left(-\frac{Q}{A} + \sqrt{gh} \right) \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{Q}{A} + \sqrt{gh} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = gA(S_0 - S_f) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Uslovi kompatibilnosti (4.6) i (4.8) po svojoj formi ne potsećaju na izraze (4.2) koji su izvedeni primenom jednačina napisanih u nekonzervativnom obliku. Korišćenjem veze između protoka i srednje profilske brzine: $Q = uA$ i izraza za brzinu elementarnog talasa: $c = \sqrt{gh}$, može se pokazati da se jednačine (4.6) i (4.8), posle određenih algebarskih transformacija, svode na oblik dat izrazima (4.2).

Osnovi uslov koji mora da bude ispunjen da bi se metoda karakteristika mogla primeniti u proračunu linijskih i ravanskih tokova je neprekidnost zavisno promenljivih — dubine i protoka. Tada ne dolazi do međusobnog ukrštanja karakteristika iz iste familije i rešenja se nalaze u preseku familija pozitivnih i negativnih karakteristika. Međutim, ako je reč o toku sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka, tada se fluidni delići iz preseka sa većom dubinom h_2 (Slika 4.2) prostiru većom brzinom od fluidnih delića iz preseka sa manjom dubinom h_1 i u nekom trenutku t_A ih sustižu formirajući na taj način strmo čelo talasa. Strmo čelo talasa prostire se brzinom w_T koja je manja od brzine prostiranja fluidnih delića uzvodno od čela ($u+c$), a veća od odgovarajuće brzine fluidnih delića nizvodno od čela ($u-c$). U ovom slučaju, kao što se vidi, dolazi do međusobnog presecanja karakteristika iz iste familije ($L_2 A$ i $L_1 A$), pa se do rešenja može doći samo primenom postupka izolovanja strmog čela od ostalog dela toka (shock-fitting pristup). Jednačine održanja mase i održanja količine kretanja (3.7) napisane za kontrolnu zapreminu koja se kreće brzinom w_T i jednačina putanje strmog čela u (x, t) ravni:



Slika 4.2: Nastanak talasa sa strmim čelom u trenutku t_A i njegovo prostiranje.
 (1) neporemećena oblast uzvodno od strmog čela, (2) neporemećena oblast nizvodno od strmog čela, (3) putanja poremećaja

$$\frac{dx}{dt} = w_T \tag{4.9}$$

nisu dovoljne za rešavanje ovog problema, jer je broj nepoznatih dva puta veći od broja raspoloživih jednačina. Nepoznate su: dubine i protoci sa uzvodne i nizvodne strane čela (h_1, Q_1, h_2, Q_2), njegov položaj x_B u trenutku $t_B = (n+1)\Delta t$ i brzina prostiranja w_T . Pošto brzina w_T zadovoljava uslov:

$$c_1 + u_1 > w_T > c_2 + u_2 \tag{4.10}$$

u razmatranje se mogu uzeti i jednačine karakteristika koje u trenutku t_B prolaze kroz tačku sa apscisom x_B — to su pozitivne karakteristike EB i FB i negativna karakteristika GB — i odgovarajući uslovi kompatibilnosti. Na taj način se dobija sistem od devet nelinearnih algebarskih jednačina sa devet nepoznatih koji se može rešiti, na primer, primenom Newton-Rhapson-ovog postupka.

U neprizmatičnim koritima, gde dolazi do odbijanja talasa o obale i njihove superpozicije, otkrivanje i praćenje velikog broja talasa primenom opisanog postupka postaje praktično nerešiv problem [32]. Stoga se metoda karakteristika ne koristi za analizu tečenja u prirodnim tokovima. Pošto su karakteristike, po definiciji, putanje duž kojih se prenose poremećaji — informacije sa uzvodnog kraja ka nizvodnom i obrnuto (kod mirnog tečenja) ili samo sa uzvodnog kraja ka nizvodnom (kod burnog tečenja), metoda karakteristika predstavlja jedini ispravan postupak za određivanje onih zavisno promenljivih koje u graničnim profilima nisu zadate graničnim uslovom.

4.1.2 Metoda Godunova

Metoda Godunova pripada metodama čiji se algoritmi zasnivaju na metodi karakteristika (*characteristics-based methods*). Reč je o postupku kod koga se rešavaju integralne, a ne diferencijalne jednačine kao što je to slučaj kod ostale četiri klase metoda. U Poglavlju 3 je istaknuto da korišćenje integralnih jednačina obezbeđuje očuvanje mase i količine kretanja i u slučajevima kada su funkcije zavisno promenljivih diskontinualne. Integracija po vremenu vrši se između vremenskih nivoa t^n i t^{n+1} , a integracija po prostoru između preseka sa apscisama $x_{j-1/2}$ i $x_{j+1/2}$. Jednačine koje treba rešiti imaju sledeći oblik:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dx dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial [\mathbf{E}(\mathbf{V})]}{\partial x} dx dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{V}, x, t) dx dt \quad (4.11)$$

Primenom Gauss-ove teoreme prethodna jednačina se transformiše u:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{V}(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{V}(x, t^n) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ \mathbf{E} \left[\mathbf{V} \left(x_{j+1/2}, t \right) \right] - \mathbf{E} \left[\mathbf{V} \left(x_{j-1/2}, t \right) \right] \right\} dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{V}, x, t) dx dt \quad (4.12)$$

Ako se prva dva integrala sa leve strane znaka jednakosti izraze preko srednje vrednosti vektora \mathbf{V} nad intervalom $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$:

$$\langle \mathbf{V} \rangle_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{V}(x, t^{n+1}) dx$$

$$\langle \mathbf{V} \rangle_j^n = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{V}(x, t^n) dx$$

$$\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2} \quad (4.13)$$

a integrali fluksova i izvornog člana preko srednjih vrednosti nad intervalom Δt :

$$\bar{\mathbf{F}}_{j \pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{E} \left[\mathbf{V} \left(x_{j \pm 1/2}, t \right) \right] dt \quad (4.14)$$

$$\bar{S}_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} S(\mathbf{V}, x, t) dx dt \quad (4.15)$$

tada jednačina (4.12) postaje:

$$\langle \mathbf{V} \rangle_j^{n+1} = \langle \mathbf{V} \rangle_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \left(\bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta t \bar{S}_j^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.16)$$

Jednačinama (4.14), (4.15) i (4.16) definisan je postupak proračuna po metodi Godunova. On se sastoji iz dva koraka. U prvom koraku — koraku prediktora se određuju približne vrednosti fluksova u tačkama $x_{j-1/2}$ i $x_{j+1/2}$ i vrednost izvornog člana u tački x_j prema izrazima (4.14) i (4.15). U drugom koraku — koraku korektora ili tzv.

konzervativnom koraku — računaju se srednje vrednosti vektora $\langle \mathbf{V} \rangle_j^{n+1}$ u tačkama sa celobrojnim koordinatama ($x_j = j\Delta x$) prema izrazu (4.16). Određivanje približne vrednosti

fluksova $\bar{F}_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ predstavlja najosetljiviju fazu proračuna u metodi Godunova, jer od tačnosti

procene integrala (4.14) zavisi tačnost konačnih rezultata — jednačina (4.16). Za numeričko rešavanje integrala (4.14) koriste se različiti postupci koji se zasnivaju na metodi karakteristika. Neki od njih detaljno su opisani u literaturi [32].

Kao i u slučaju metode razdvajanja fluksova i kod metode Godunova istraživanja koja se sprovode u ciju unapređenja proračuna prostiranja talasa sa strmim čelom u otvorenim tokovima još uvek se nalaze u početnoj fazi. To podrazumeva određivanje optimalnog postupka izračunavanja integrala (4.14) i (4.13) i testiranje računskog modela na hipotetičkim primerima.

4.1.3 Metoda konačnih razlika bazirana na postupku razdvajanja fluksova

Metoda razdvajanja fluksova, kao i metoda karakteristika, koristi činjenicu da parcijalne diferencijalne jednačine hiperboličkog tipa sadrže u sebi ugrađenu informaciju o smeru prostiranja poremećaja. U metodi karakteristika jednačine matematičkog modela se međusobno kombinuju da bi se dobili uslovi kompatibilnosti koji važe duž pozitivnih i duž negativnih karakteristika. Nasuprot tome, u metodi razdvajanja fluksova polazne jednačine

(3.1) se transformišu sa ciljem da se uticaji koji se prenose nizvodno razdvoje od uticaja koji se prenose uzvodno. To kasnije (prilikom numeričke integracije tih jednačina) obezbeđuje pravilnu zamenu parcijalnih izvoda konačnim razlikama. Ukoliko se radi o uticajima koji se prenose u nizvodnom smeru, koriste se konačne razlike unazad, a ako je reč o uticajima koji se prenose u uzvodnom smeru, koriste se konačne razlike unapred. Pravilna zamena parcijalnih izvoda konačnim razlikama posebno je važna za simulaciju tokova sa jednovremenim prisustvom mirnog i burnog režima i tokova kod kojih se ovi režimi naizmenično smenjuju.

U nastavku će, u najosnovnijim crtama, biti opisan postupak razdvajanja fluksova. Razmatranje će biti ograničeno na prizmatične kanale. Radi lakšeg praćenja, prepisaće se jednačina (3.1):

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{E}_x = \mathbf{S} \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) \end{bmatrix} \quad (3.1b)$$

Za transformaciju jednačine (3.1) iskoristiće se veza između vektora \mathbf{E} i vektora zavisno promenljivih \mathbf{V} : $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{V})$. Drugi član u jednačini (3.1) se tada može napisati na sledeći način:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \quad (4.17)$$

gde je \mathbf{M} Jakobijan vektora \mathbf{E} :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{Q}{A}\right)^2 + g\frac{A}{B} & \frac{2Q}{A} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Za dalje razmatranje potrebno je izvršiti dijagonalizaciju matrice \mathbf{M} . To se postiže na sledeći način:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (u+c) & -(u-c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(u-c) & 1 \\ -(u+c) & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

gde je $c = \sqrt{gA/B}$, $u = Q/A$, a λ_1 i λ_2 su sopstvene vrednosti matrice \mathbf{M} :

$$\lambda_1 = u + c \quad , \quad \lambda_2 = u - c \quad (4.20)$$

Zapaža se da sopstvene vrednosti, zapravo, definišu pravce pozitivnih (λ_1) i negativnih (λ_2) karakteristika. Da bi se sprečilo eventualno mešanje informacija koje dolaze sa različitih krajeva kanala, potrebno je izvršiti razdvajanje matrice \mathbf{M} na dve komponente — pozitivnu \mathbf{M}^+ , koja važi duž pozitivne i negativnu \mathbf{M}^- , koja važi duž negativne karakteristike:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^+ + \mathbf{M}^- \quad (4.21)$$

Postupak razdvajanja se zasniva na sledećem principu:

$$\begin{aligned} \text{pozitivni deo sopstvene vrednosti } \lambda_i: \quad \lambda_i^+ &= \max(\lambda_i, 0) \\ \text{negativni deo sopstvene vrednosti } \lambda_i: \quad \lambda_i^- &= \lambda_i - \lambda_i^+ \end{aligned} \quad (4.22)$$

Jednačina (3.1) može se sada ispisati u formi razdvojenih fluksova na sledeći način:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{M}^+ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{M}^- \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} - \mathbf{S} = 0 \quad (4.23)$$

Parcijalni izvod uz pozitivnu komponentu matrice \mathbf{M} predstavlja informaciju koja dolazi sa uzvodnog kraja, pa se, kao što je već pomenuto, može aproksimirati konačnom razlikom unazad. Informacija koja dolazi sa nizvodnog kraja predstavljena je parcijalnim izvodom uz negativnu komponentu Jakobijana \mathbf{M} . Ovaj parcijalni izvod može se aproksimirati konačnom razlikom unapred.

Jednačina (4.23) za razliku od jednačine (3.1) nije napisana u konzervativnom obliku. U Poglavlju 3 je pokazano da se primenom jednačina u nekonzervativnom obliku pri modeliranju tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka dobijaju rezultati koji nisu fizički realni. Svojstvo konzervativnosti koje obezbeđuje konzervativni oblik polazne jednačine (3.1) moguće je sačuvati pogodnom aproksimacijom Jakobijana u jednačini (4.23). U metodi razdvajanja fluksova koristi se postupak kojeg je definisao Roe [19]. Suština ovog postupka sastoji se u određivanju približne vrednosti Jakobijana $\tilde{\mathbf{M}}$ u tačkama $i-1/2$ i $i+1/2$ koje su za $\Delta x/2$ pomerene u odnosu na razmatrani čvor. Parcijalni izvod vektora \mathbf{E} se primenom koncepta konzervativnog razdvajanja može predstaviti na sledeći način:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \tilde{\mathbf{M}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \tilde{\mathbf{M}}_{i-\frac{1}{2}}^+ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \tilde{\mathbf{M}}_{i+\frac{1}{2}}^- \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \quad (4.24)$$

$$\text{gde je: } \tilde{\mathbf{M}}_{i\pm\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{M}}\left(\mathbf{V}_{i\pm\frac{1}{2}}\right) = \mathbf{M}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i\pm 1}) \quad (4.25)$$

Kao što se vidi, određivanje približne vrednosti Jakobijana $\tilde{\mathbf{M}}$ svodi se na utvrđivanje vrednosti brzine prostiranja talasa (c) i brzine (u) u tačkama $i-1/2$ i $i+1/2$. Izrazi na osnovu kojih se računaju brzine c i u i opis računске sheme mogu se naći u literaturi [19].

Metoda razdvajanja fluksova je testirana na nekoliko hipotetičkih primera prostiranja talasa izazvanih rušenjem brane i na hipotetičkom primeru prostiranja talasa nastalog naglim spuštanjem ustave na nizvodnom kraju kanala. Svi primeri su se odnosili na tečenje u

prizmatičnom kanalu sa horizontalnim dnom. S obzirom da je reč o metodi koja je pre dve-tri godine počela da se primenjuje u hidraulici otvorenih tokova, ne raspolaže se informacijama o rezultatima eventualne verifikacije računskog modela ili o njegovoj primeni u rešavanju konkretnih problema iz hidrotehničke prakse. Prvi rezultati ukazuju da bi u simulaciji složenih tokova metoda konačnih razlika bazirana na postupku razdvajanja fluksova mogla da bude konkurentna metoda nekim drugim metodama iz grupe metoda konačnih razlika (kao što su, na primer, tzv. λ -scheme [19]).

4.1.4 Metoda konačnih elemenata

Prilikom numeričke integracije jednačina otvorenih tokova korišćenjem Metode konačnih elemenata razmatrana oblast se deli na konačan broj pravolinijskih ili krivolinijskih elemenata. Elementi unutar jedne mreže mogu biti različite veličine i različitih oblika, što omogućava znatno bolju aproksimaciju realnog fizičkog domena nego što je to slučaj kod ostalih računskih metoda. (Ovde se pre svega misli na metode konačnih razlika.)

Standardni računski postupak zasniva se na metodi Galerkina kod koje se približno rešenje za svaki element traži u vidu linearne kombinacije interpolacionih funkcija. One se biraju tako da u najvećem delu oblasti budu identički jednake nuli, a na preostalom delu oblasti (nad elementima L_{i-1} i L_i Slika 4.3a) opisuju se polinomima. U slučaju linijskog tečenja interpolacione funkcije definisane se sledećim izrazima:

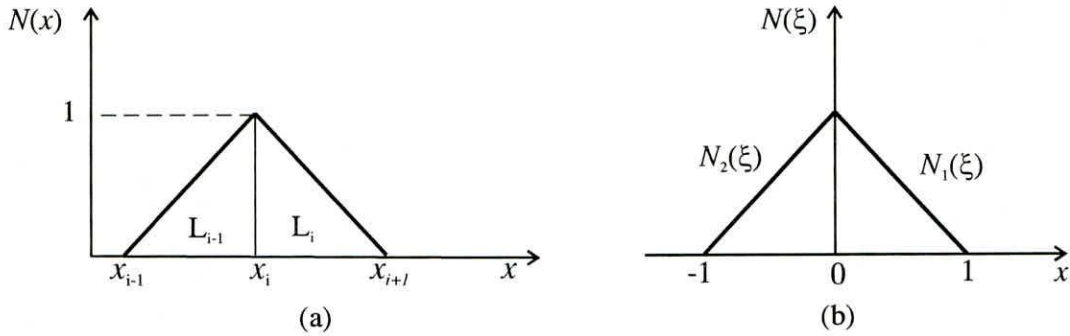
$$N_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_j] \wedge x \notin [x_j, x_{j+1}] \end{cases}, \quad j = 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.26)$$

Uočava se da su funkcije N_j nad elementima $[x_{j-1}, x_j]$ i $[x_j, x_{j+1}]$ neprekidne linijske funkcije (Slika 4.3a). Elementi istog tipa se izoparametarskom transformacijom mogu preslikati na tzv. referentni element (Slika 4.3b). Interpolacione funkcije se tada zamenjuju baznim funkcijama (Slika 4.3b).

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad (4.27)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (4.28)$$

gde je $\xi \in [-1, 1]$. Bazna funkcija N_1 definisana je nad intervalom $[-1, 0]$, a bazna funkcija N_2 nad intervalom $[0, 1]$. Približno rešenje za razmatrani element određuje se prema sledećem izrazu:



Slika 4.3: Metoda Galerkina. (a) konačni element i interpolacione funkcije; (b) referentni element i bazne funkcije [27]

$$\mathbf{V} = \mathbf{N} \{ \mathbf{V} \} \tag{4.29}$$

gde su vitičastom zagradom $\{ \}$ označene vrednosti zavisno promenljivih u čvoru sa apscisom $\xi = 0$ i to za dva slučaja — kada čvor pripada elementu $[-1, 0]$ i kada pripada elementu $[0, 1]$.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad \{ \mathbf{V} \} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

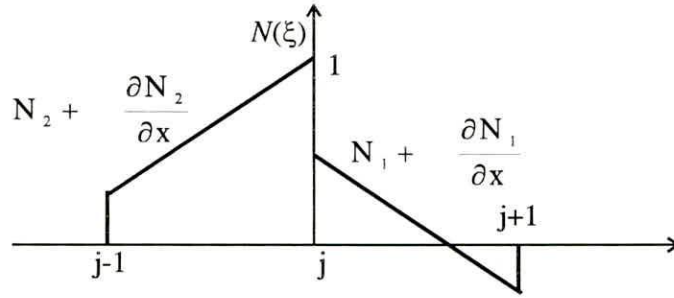
Pri tom se zahteva da greška koja se čini zamenom tačnog rešenja približnim rešenjem bude ortogonalna na interpolacionu funkciju. Interpolaciona funkcija je u ovom slučaju identična sa baznom funkcijom. Rešenje homogenog sistema (3.1) za celu razmatranu oblast, uz pretpostavku da se radi o prizmatičnom kanalu pravougaonog poprečnog preseka, određuje se iz sledećeg uslova:

$$\sum_{n=1}^{n_e} \int_L \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \bar{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \right) dx = 0 \tag{4.31a}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \tag{4.31b}$$

gde je n_e ukupan broj elemenata računске mreže, a L je dužina elementa.

Metoda Galerkina ne daje rešenja za vrednosti Froude-ovog broja veće od jedan, pa se ne može primeniti za simulaciju: tokova u burnom režimu i tokova sa jednovremenim prisustvom burnog i mirnog režima. Zbog izrazito nedisipativnog karaktera, ova metoda se ne može primeniti ni za proračun prostiranja talasa sa strmim čelom [27].



Slika 4.4: Interpolacione funkcije za disipativnu metodu Galerkina [27]

Katopodes (1984) je, polazeći od Dandy-jeve ideje o diskontinualnoj interpolacionoj funkciji (Slika 4.4), izvršio modifikaciju originalne metode Galerkina uvođenjem diskontinualne interpolacione funkcije sledećeg oblika:

$$\mathbf{N}_* = \mathbf{N} + \epsilon \bar{\mathbf{A}}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \quad (4.32)$$

ili u razvijenom obliku:

$$\mathbf{N}_* = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \epsilon(c^2 - u^2) \frac{\partial N_1}{\partial x} & \epsilon(c^2 - u^2) \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \epsilon \frac{\partial N_1}{\partial x} & \epsilon \frac{\partial N_2}{\partial x} & N_1 + 2\epsilon u \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_2 + 2\epsilon u \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

gde je ϵ parametar kojim se definiše nivo disipacije, a N_1 i N_2 su bazne funkcije iz originalne metode Galerkina. Uslov (4.31a) u ovom slučaju postaje:

$$\sum_{n=1}^{n_e} \int_L \mathbf{N}_*^T \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \bar{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (4.34)$$

Opisana metoda je poznata pod nazivom disipativna metoda Galerkina. Postupak numeričkog izračunavanja integrala u jednačini (4.34) i rešavanja sistema nelinearnih jednačina ovde neće biti prikazivan. On se može naći u literaturi [27]. Disipativna metoda Galerkina za ravanske tokove detaljno je opisana u literaturi [1].

Na ovom mestu biće istaknute samo najznačajnije posledice Katopodes-ovih izmena:

- 1— Uvođenjem diskontinualne interpolacione funkcije implicitno se stvara mogućnost da se dobiju diskontinualna rešenja. Na taj način postalo je moguće simulirati tokove sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka, što nije bio slučaj kod originalne metode Galerkina.
- 2— Analiza stabilnosti disipativne metode Galerkina je pokazala da prisustvo parametra ϵ u izrazima za interpolacione funkcije (4.32) i (4.33) izaziva prigušenje amplitude visoko frekventnih numeričkih oscilacija u zoni sa velikim gradijentima dubine i protoka. Uvođenjem parametra ϵ stabilizuje se proračun u slučaju pojave talasa sa strmim čelom.

3— Preporučuje se da se vrednost parametra ϵ određuje na osnovu sledećeg izraza [27]:

$$\epsilon = \frac{\Delta x}{|u + c| \sqrt{15}} \quad (4.35)$$

gde je $|u + c|$ spektralni radijus matrice koeficijenata $\bar{\mathbf{A}}$. Međutim, kao i u većini slučajeva, do optimalne vrednosti parametra ϵ dolazi se probanjem.

- 4— Imajući u vidu zaključke iznete u prve dve tačke, može se reći da novodobijena računaska shema objedinjuje najbolje osobine računskih shema (iz grupe metoda konačnih razlika) koje se primenjuju u analizi tokova sa naglom lokalnom promenom dubine i protoka [27].
- 5— Numerički eksperimenti su pokazali da je prilikom korišćenja linearnih linijskih elemenata vreme potrebno za proračun primenom disipativne metode Galerkina približno jednako vremenu koje se utroši kada se isti problem rešava implicitnom metodom konačnih razlika [27].

U literaturi su do sada objavljeni samo rezultati (primene disipativne Galerkinove sheme) za nekoliko hipotetičkih primera linijskih tokova [27] i za jedan primer ravanskog neustaljenog toka izazvanog rušenjem brane [1].

4.2 Računska shema MacCormack

U ovom potpoglavlju će biti detaljno opisana eksplicitna računaska shema MacCormack koja je prvobitno razvijena za rešavanje problema iz oblasti gasne dinamike. Ona pripada grupi metoda koje daju slaba rešenja. Činjenica da ne zahteva korišćenje posebnog algoritma za otkrivanje i praćenje diskontinuiteta koji se javljaju u problemima gasne dinamike krajem osamdesetih godina privukla je pažnju hidrauličara koji se bave analizom prostiranja usamljenog talasa sa strmim čelom u otvorenim tokovima. Dosadašnja iskustva različitih autora [9], [10], [11], [12], [15], [17] i [18], [22], [23], [24] i [33], su pokazala da je eksplicitna računaska shema MacCormack veoma efikasna u rešavanju ovih problema. Pri rešavanju jednačina linijskog tečenja metoda daje identične rezultate kao modifikovana shema Lax-Wendroff-a.

Primenom sheme MacCormack osnovne jednačine se na svakom vremenskom nivou rešavaju u dve etape. U prvoj etapi — etapi "prediktor", predviđaju se vrednosti zavisno promenljivih na novom vremenskom nivou na osnovu poznatih vrednosti sa prethodnog vremenskog nivoa. U drugoj etapi — etapi "korektor" koriguju se vrednosti iz prethodne etape. Nova vrednost se dobija osrednjavanjem vrednosti sa prethodnog vremenskog nivoa i korigovane vrednosti.

Jednačine numeričkog modela linijskog toka baziranog na shemi MacCormack glase:

— Etapa "prediktor" (početna vrednost)

$$\mathbf{U}_i^p = \mathbf{U}_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{3}_x \mathbf{E}_i^k - \Delta t \mathbf{S}_i^k \quad 2 \leq i \leq N \quad (4.36)$$

— Etapa "korektor" (korigovana vrednost)

$$\mathbf{U}_i^c = \mathbf{U}_i^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{F}_x \mathbf{E}_i^p - \Delta t \mathbf{S}_i^p \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.37)$$

— Nova vrednost

$$\mathbf{U}_i^{k+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^k + \mathbf{U}_i^c) \quad (4.38)$$

Indeks i u prethodnim jednačinama predstavlja redni broj profila.

U slučaju ravanskog toka MacCormack-ova shema koristi računsku mrežu kod koje su sve tri zavisno promenljive definisane u težištu polja mreže i smatraju se prosečnim vrednostima za to računsko polje (kontrolnu zapreminu). Za mrežu koja se sastoji od $N \times M$ polja jednačine numeričkog modela baziranog na shemi MacCormack glase:

— Etapa "prediktor"

$$\mathbf{U}_{ij}^p = \mathbf{U}_{ij}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathfrak{Z}_x \mathbf{E}_{ij}^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} \mathfrak{Z}_y \mathbf{F}_{ij}^k - \Delta t \mathbf{S}_{ij}^k \quad 2 \leq i \leq N, \quad 2 \leq j \leq M \quad (4.39)$$

— Etapa "korektor"

$$\mathbf{U}_{ij}^c = \mathbf{U}_{ij}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{F}_x \mathbf{E}_{ij}^p - \frac{\Delta t}{\Delta y} \mathcal{F}_y \mathbf{F}_{ij}^p - \Delta t \mathbf{S}_{ij}^p \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq M-1 \quad (4.40)$$

— Nova vrednost

$$\mathbf{U}_{ij}^{k+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{ij}^k + \mathbf{U}_{ij}^c) \quad (4.41)$$

Indeksi i i j predstavljaju celobrojne koordinate računskog polja u koordinatnom sistemu xOy .

U jednačinama numeričkog modela linijskog i ravanskog toka \mathbf{U}^k je vektor zavisno promenljivih sa prethodnog vremenskog nivoa, \mathbf{U}^p i \mathbf{U}^c su odgovarajući vektori početnog i korigovanog rešenja sračunati u prediktor odnosno, korektor etapi, a \mathbf{U}^{k+1} vektor rešenja na sledećem — $(k+1)$ -om vremenskom nivou.

Operatori prostorne diskretizacije iz jednačina (4.36), (4.37), (4.39) i (4.40) su jednostrani, što znači da predstavljaju ili razliku unazad \mathfrak{Z} ili razliku unapred \mathcal{F} .

a) Razlike unazad:

$$\mathfrak{Z}_x \mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}_{ij} - \mathbf{E}_{i-1,j} \quad \text{ili} \quad \mathfrak{Z}_x \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_{i-1} \quad (\text{za linijski tok}) \quad (4.42)$$

$$\mathfrak{Z}_y \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{ij} - \mathbf{F}_{i,j-1} \quad (4.43)$$

b) Razlike unapred:

$$\mathcal{F}_x \mathbf{E}_{i,j} = \mathbf{E}_{i+1,j} - \mathbf{E}_{i,j} \quad \text{ili} \quad \mathcal{F}_x \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i+1} - \mathbf{E}_i \quad (\text{za linijski tok}) \quad (4.44)$$

$$\mathcal{F}_y \mathbf{F}_{i,j} = \mathbf{F}_{i,j+1} - \mathbf{F}_{i,j} \quad (4.45)$$

Tabela 4.1: Redosled konačnih razlika

Vremenski korak	Prediktor		Korektor	
	x	y	x	y
1	\mathfrak{z}	\mathfrak{z}	\mathcal{F}	\mathcal{F}
2	\mathcal{F}	\mathcal{F}	\mathfrak{z}	\mathfrak{z}
3	\mathfrak{z}	\mathcal{F}	\mathcal{F}	\mathfrak{z}
4	\mathcal{F}	\mathfrak{z}	\mathfrak{z}	\mathcal{F}

Važno je naglasiti da se u korektor etapi uvek koristi operator suprotan onom koji je korišćen u prediktor etapi. Ovakvim etapnim rešavanjem zadatka i simetričnom izmenom operatora postiže se tačnost drugog reda u prostoru i vremenu. Redosled operatora konačnih razlika može se u svakom koraku alternativno menjati po koordinatnim pravcima (Tabela 4.1). U slučaju ravanskog tečenja ukupno ima $2^2=4$ različite mogućnosti, te se redosled operatora ponavlja posle svakog četvrtog vremenskog (računskog) koraka. Kod linijskog tečenja broj raspoloživih opcija je $2^1=2$. Ova ciklična izmena redosleda operatora po vremenu i po koordinatnim pravcima (kod ravanskog tečenja) predstavlja još jedno važno obeležje računске sheme MacCormack, jer omogućava da se, u slučaju jednovremene pojave oba režima tečenja, utvrdi smer iz koga pristiže informacija bez uvođenja dopunskih pretpostavki o smeru prostiranja uticaja, koje bi mogle dovesti do grubih grešaka. Zahvaljujući ovoj osobini, opisana metoda se može primeniti i kada se režimi duž kanala naizmenično smenjuju, kao i u slučajevima nastanka i prostiranja izolovanog talasa sa strmim čelom.

4.2.1 Linijski problemi

4.2.1.1 Diskretizacija osnovnih jednačina

Kada se u skladu sa prethodno opisanim principima parcijalni izvodi u jednačinama matematičkog modela zamene konačnim razlikama, dobijaju se diskretizacione jednačine za svaku etapu proračuna. Diskretizacione jednačine su, kao što je već rečeno, algebarske jednačine iz kojih se mogu direktno sračunati vrednosti zavisno promenljivih.

Izrazi prediktor i korektor etape biće prikazani samo za prvu kombinaciju operatora iz Tabele 4.1 (posmatraju se samo operatori za pravac x).

Prediktor

$$A_i^p = A_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_i^k - Q_{i-1}^k) \quad (4.46)$$

$$Q_i^p = Q_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)_i^k - \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)_{i-1}^k \right] + \Delta t g A_i^k (S_0 - S_f)_i^k + \Delta t g (I_2)_i^k \quad (4.47)$$

Korektor

$$A_i^c = A_i^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{i+1}^p - Q_i^p) \quad (4.48)$$

$$Q_i^c = Q_i^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)_{i+1}^p - \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)_i^p \right] + \Delta t g A_i^p (S_0 - S_f)_i^p + \Delta t g (I_2)_i^p \quad (4.49)$$

Nove vrednosti

$$A_i^{k+1} = \frac{1}{2} (A_i^k + A_i^c) \quad (4.50)$$

$$Q_i^{k+1} = \frac{1}{2} (Q_i^k + Q_i^c)$$

Posle svake etape računaju se vrednosti primitivnih varijabli. Srednja profilska brzina se određuje iz izraza:

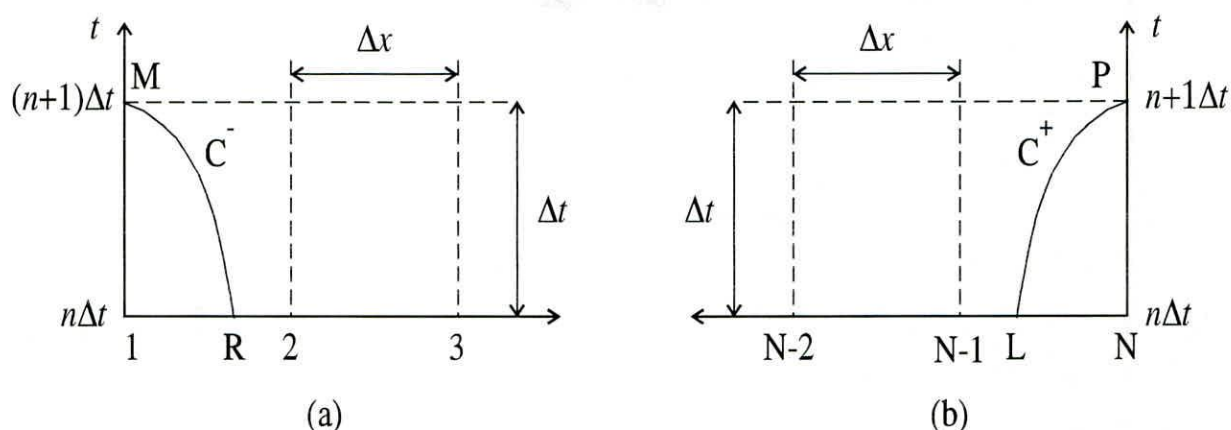
$$v_i^* = \frac{Q_i^*}{A_i^*} \quad (4.51)$$

gde se oznaka "*" odnosi na tekuću etapu proračuna. Dubina h se određuje na osnovu poznate zavisnosti $A=f(h)$.

4.2.1.2 Granični uslovi

U poglavlju u kome se govori o matematičkom modeliranju linijskih i ravanskih tokova rečeno je da je razmatrani problem valjano definisan ako su ispisane jednačine matematičkog modela i ako su zadati početni i granični uslovi. Takođe je naveden i broj graničnih uslova koje treba zadati na otvorenim granicama (u najuzvodnijem i najizvodnijem profilu) u mirnom i burnom režimu tečenja. Ostalo je otvoreno pitanje određivanja onih zavisno promenljivih koje nisu definisane tim uslovima.

Pri numeričkom modeliranju linijskih tokova pouzdan prenos informacija u razmatranu oblast strujanja i iz nje može se obezbediti jedino primenom metode karakteristika [7], [18], [32].



Slika 4.5: Računske tačke za proračun uzvodnog (a) i nizvodnog (b) graničnog uslova u mirnom režimu (metoda karakteristika)

Pošto je u ovom radu korišćena fiksna računске mreža, u (x, t) ravni — fiksni profili u x -parvcu i unapred određen vremenski korak Δt — primenjen je Hartee-ijev metod [18]. Reč je o iterativnom postupku kod koga se položaj "baze" karakteristike (tačke R i L na Slikama 4.5, 4.6 i 4.7) i vrednosti nepoznate zavisno promenljive na $(n+1)$ -vom vremenskom nivou sukcesivno popravljaju sve dok razlika vrednosti zavisno promenljive u dve uzastopne iteracije ne postane manja od neke unapred usvojene granične vrednosti ε . Postupak proračuna biće opisan na primeru uzvodnog graničnog uslova u mirnom režimu tečenja (Slika 4.5a). Posmatraće se prizmatični kanal ($I_2 = 0$) pravougaonog poprečnog preseka širine B ($I_1 = 0.5gBh^2$).

Vrednosti zavisno promenljivih poznate su u svim profilima (tačkama) na vremenskom nivou $n\Delta t$. Da bi se u tački M, na $(n+1)$ -vom vremenskom nivou, odredila vrednost zavisno promenljive koja nije zadata graničnim uslovom, iz te tačke se "povlači" negativna karakteristika do preseka sa nivoom $n\Delta t$. Mesto preseka označeno je sa R i naziva se "baza" karakteristike. Položaj tačke R i vrednosti zavisno promenljivih u toj tački — h_R i Q_R — određuje se u iterativnom postupku čiji opis sledi.

Prvi korak

1^o— Iz jednačine negativne karakteristike (4.5) korišćenjem vrednosti iz tačke $(1, n\Delta t)$ odredi se početni položaj tačke R (x_R):

$$x_R = x_M - \left(\frac{Q}{A} - \sqrt{gh} \right)_1^n \Delta t \tag{4.52}$$

i proveriti da li je $x_1 < x_R < x_2$.

2^o— Ukoliko je prethodni uslov ispunjen, vrednosti Q_R i h_R u "bazi" karakteristike određuju se linearnom interpolacijom između tačaka 1 i 2:

$$Q_R = Q_2^n - (Q_2^n - Q_1^n) \frac{x_2 - x_R}{\Delta x} \tag{4.53}$$

$$h_R = h_2^n - (h_2^n - h_1^n) \frac{x_2 - x_R}{\Delta x} \quad (4.54)$$

Ako je $x_2 < x_R < x_3$, interpolacija se vrši između preseka 2 i 3, a ako je $x_R > x_3$ treba promeniti prostorni korak (Δx) ili vremenski korak (Δt).

3^o— Veza između dve promenljive (zadate i nepoznate) uspostavlja se korišćenjem uslova kompatibilnosti duž negativne karakteristike (4.6). Nakon zamene parcijalnih izvoda konačnim razlikama, jednačina (4.6) postaje:

$$Q_M - Q_R + \left(-\frac{QB}{A} - B\sqrt{gh} \right)_R (h_M - h_R) = \Delta t [gA(S_0 - S_f)]_R \quad (4.55)$$

Ukoliko je uzvodni granični uslov zadat u vidu funkcije $h(t)$, tada se nepoznata vrednost protoka određuje prema izrazu:

$$Q_M = A_1 h_M + B_1 \quad (4.56)$$

gde je:

$$A_1 = \left(\frac{QB}{A} + B\sqrt{gh} \right)_R \quad (4.57)$$

$$B_1 = Q_R + h_R \left(-\frac{QB}{A} - B\sqrt{gh} \right)_R + g \Delta t [A(S_0 - S_f)]_R \quad (4.58)$$

Ako je, umesto dubine, graničnim uslovom zadata promena protoka tokom vremena — $Q(t)$, tada se jednačina (4.6) rešava po h_M :

$$h_M = \frac{BB_1}{AA_1} - \frac{Q_M}{AA_1} \quad (4.59)$$

gde je:

$$AA_1 = - \left(\frac{QB}{A} + B\sqrt{gh} \right)_R \quad (4.60)$$

$$BB_1 = h_R + \frac{g \Delta t [A(S_0 - S_f)]_R + Q_R}{AA_1} \quad (4.61)$$

Time je upotpunjena informacija koja se prenosi kroz uzvodni profil i završen prvi računski korak.

Drugi i svi naredni koraci

1' — Položaj "baze" karakteristike — tačke R preciznije se određuje na osnovu izraza:

$$x_R = x_M - \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{Q}{A} - \sqrt{gh} \right)_M + \left(\frac{Q}{A} - \sqrt{gh} \right)_R \right] \quad (4.62)$$

2' — Vrednosti Q_R i h_R u "bazi" karakteristike određuju se linearnom interpolacijom na isti način kao i u prvom koraku.

3' — Vrednosti zavisno promenljivih preračunavaju se korišćenjem osrednjenih vrednosti koeficijenata uz izvod po vremenu i slobodnog člana. Za osrednjavanje se koriste vrednosti zavisno promenljivih iz tačke R i odgovarajuće vrednosti iz tačke M iz prethodnog računskog koraka:

$$\begin{aligned} Q_M - Q_R + \frac{h_M - h_R}{2} \left[\left(-\frac{QB}{A} - B\sqrt{gh} \right)_M + \left(-\frac{QB}{A} - B\sqrt{gh} \right)_R \right] = \\ = \frac{\Delta t}{2} \{ [gA(S_0 - S_f)]_M + [gA(S_0 - S_f)]_R \} \end{aligned} \quad (4.63)$$

4' — Koeficijenti u jednačinama (4.56) i (4.59) u ovom slučaju imaju sledeći oblik:

a) kada je zadato $h(t)$:

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{QB}{A} + B\sqrt{gh} \right)_M + \left(\frac{QB}{A} + B\sqrt{gh} \right)_R \right] \quad (4.64)$$

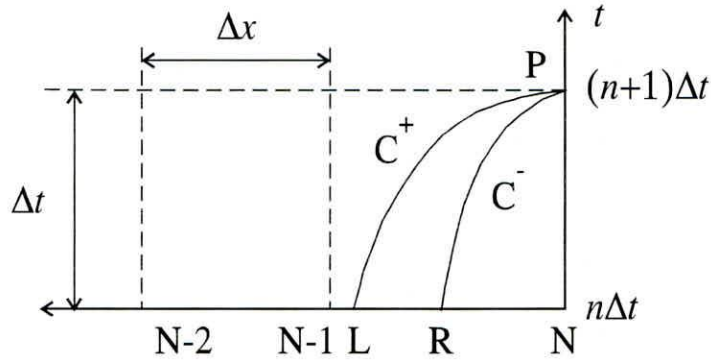
$$\begin{aligned} B_1 = Q_R + \frac{h_R}{2} \left[\left(-\frac{QB}{A} - B\sqrt{gh} \right)_M + \left(-\frac{QB}{A} - B\sqrt{gh} \right)_R \right] + \\ + \frac{g\Delta t}{2} \{ [A(S_0 - S_f)]_M + [A(S_0 - S_f)]_R \} \end{aligned} \quad (4.65)$$

b) kada je zadato $Q(t)$:

$$AA_1 = \left(-\frac{QB}{A} - B\sqrt{gh} \right)_M + \left(-\frac{QB}{A} - B\sqrt{gh} \right)_R \quad (4.66)$$

$$BB_1 = h_R + \frac{1}{AA_1} \{ 2Q_R + g\Delta t [A_M(S_0 - S_f)_M + A_R(S_0 - S_f)_R] \} \quad (4.67)$$

Koraci 1' do 4' se ponavljaju sve dok se postigne zahtevana tačnost.



Slika 4.6: Računske tačke za proračun nizvodnog graničnog uslova u burnom režimu (metoda karakteristika)

Isti postupak se primenjuje za određivanje nepoznate vrednosti zavisno promenljive u tački P najnižvodnijeg profila (Slika 4.5b), s tim što se umesto jednačina negativne karakteristike i odgovarajućeg uslova kompatibilnosti koriste jednačina pozitivne karakteristike (4.7) i uslov kompatibilnosti (4.8).

Ukoliko je tečenje u kanalu burno, u uzvodnom profilu treba zadati obe zavisno promenljive. Nizvodni profil ostaje "slobodan". Nepoznate Q i h određuju se primenom iterativnog postupka koji se od prethodno opisanog razlikuje po tome što se umesto rešavanja jedne algebarske jednačine (4.55) ili (4.63) rešava sistem jednačina kojeg čine uslovi kompatibilnosti duž pozitivne i negativne karakteristike:

$$Q_P - Q_L + \left(-\frac{QB}{A} + B\sqrt{gh} \right)_L (h_P - h_L) = \Delta t [gA(S_0 - S_f)]_L \quad (4.68)$$

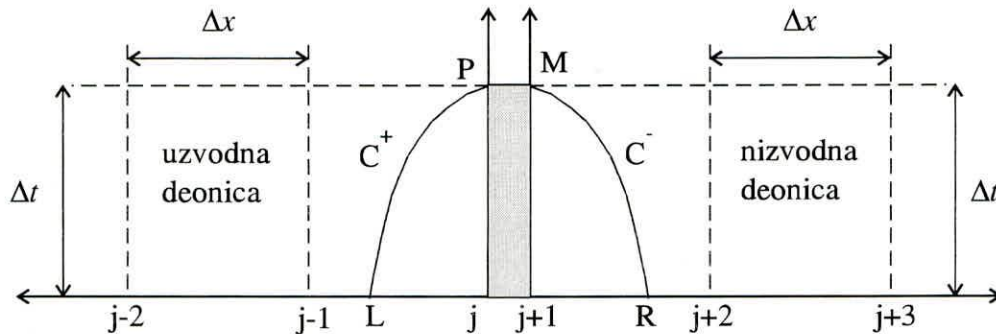
$$Q_P - Q_R + \left(-\frac{QB}{A} - B\sqrt{gh} \right)_R (h_P - h_R) = \Delta t [gA(S_0 - S_f)]_R \quad (4.69)$$

Za određivanje položaja tačaka L i R ("baza" pozitivne i negativne karakteristike), kao i veličina Q_R , h_R , Q_L , i h_L primenjuje se opisana interpolaciona shema koju treba prilagoditi novim uslovima tečenja saglasno Slici (4.6)

Nagla lokalna promena dubine i protoka na početku ili kraju razmatrane deonice zahteva korišćenje jednačine (3.7) za proračun graničnog uslova, zato što se metoda karakteristika može primeniti samo u slučajevima kada su funkcije $Q(x,t)$ i $h(x,t)$ neprekidne. Eliminisanjem brzine prostiranja talasa w_T iz jednačina (3.7a) i (3.7b) dobija se tzv. jednačina skoka:

$$\left(\frac{Q_1}{Bh_1} - \frac{Q_2}{Bh_2} \right)^2 = (h_2 - h_1)^2 \frac{g(h_1 + h_2)}{2h_1h_2} \quad (4.70)$$

Indeksi 1 i 2 označavaju, redom, vrednosti zavisno promenljivih uzvodno i nizvodno od čela talasa.



Slika 4.7: Računske tačke za proračun unutrašnjeg graničnog uslova (prag se nalazi između uzvodne i nizvodne deonice)

Ukoliko do nagle lokalne promene dubine i protoka dođe na početku razmatrane deonice, gde se graničnim uslovom zadaje promena protoka tokom vremena $Q_1(t)$, tada se na osnovu poznatih početnih uslova Q_2 i h_2 i poznate vrednosti Q_1 primenom jednačine (4.70) može odrediti nepoznata visina talasa h_1 . Mirno tečenje uzvodno od strmog čela omogućava da se posle nekoliko računskih koraka za proračun graničnog uslova primene jednačina negativne karakteristike (4.5) i odgovarajući uslov kompatibilnosti (4.6). Međutim, ako je tečenje uzvodno od čela talasa burno, za određivanje vrednosti zavisno promenljive koja nije zadata graničnim uslovom, tokom celog proračuna treba koristiti jednačinu (4.70).

Prisustvo prepreka u toku kao što su, na primer: ustave, kanalska suženja, široki pragovi itd., zahteva da se takvi objekti tretiraju kao unutrašnji granični uslov. Unutrašnji granični uslov se razmatra na isti način kao i spoljašnji. Kao primer može da posluži tečenje preko širokog praga. Kraj uzvodne deonice tretira se kao nizvodni, a početak nizvodne deonice kao uzvodni granični uslov (Slika 4.7).

Za određivanje: nepoznatih Q_P , h_P , Q_M i h_M na $(n+1)$ -vom vremenskom nivou i položaja tačaka L i R potrebno je ispisati šest jednačina.

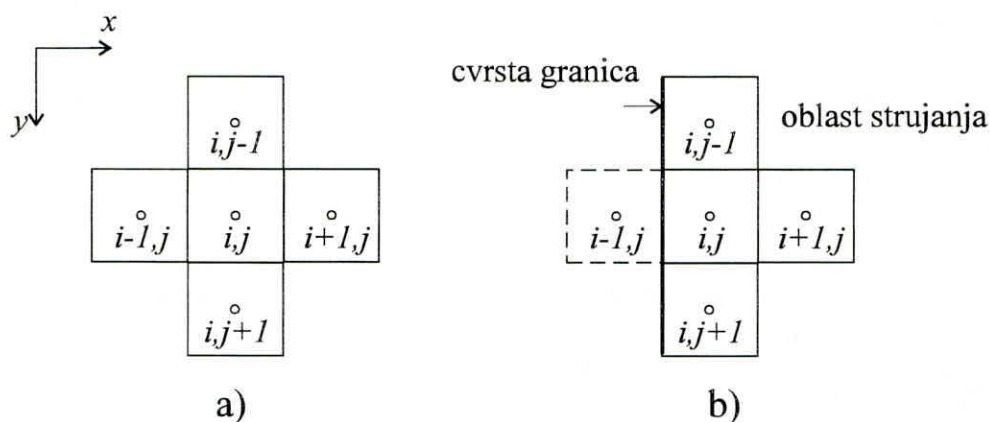
Kada sa obe strane prepreke vlada miran režim četiri od šest jednačina su: jednačina pozitivne karakteristike sa odgovarajućim uslovom kompatibilnosti sa uzvodne strane i jednačina negativne karakteristike sa odgovarajućim uslovom kompatibilnosti sa nizvodne strane. Preostale dve jednačine su jednačina održanja mase, prema kojoj protoci sa obe strane praga moraju biti isti i energetska jednačina za preseke uzvodno i nizvodno od praga. Kada je tečenje nizvodno od praga burno, "baza" negativne karakteristike više ne leži između profila $(j+1)$ i $(j+2)$ — $x_R < x_{j+1}$, pa u preseku $(j+1)$ treba zadati dopunski granični uslov, na primer, kritičnu dubinu [18]. Iako se kritična dubina ne javlja u preseku na kraju praga, smatra se da se uvođenjem navedene pretpostavke bitno ne narušava kvalitet dobijenih rezultata.

Kontinualno praćenje režima tečenja (računanje Froude-ovog broja) i ispitivanje potopljenosti kada je tečenje duž cele deonice mirno, omogućava automatsku izmenu graničnih uslova i odgovarajućeg sistema jednačina.

4.2.2 Ravanski problemi

Algebarske jednačine numeričkog modela ravanskog toka biće napisane samo za prvu kombinaciju operatora iz Tabele 4.1. Prvo će se izvršiti diskretizacija jednačina napisanih u konzervativnom obliku, a potom i diskretizacija jednačina napisanih u nekonzervativnom obliku.

Na slici 4.8a shematski je prikazan deo mreže sa poljem (i,j) — u čijem težištu se računaju nepoznate vrednosti zavisno promenljivih — i četiri okolna polja. (Vrednosti dubine h i brzina u i v iz težišta ovih polja koriste se za računanje konačnih razlika).



Slika 4.8: Deo računске mreže: a) unutrašnja polja mreže; b) polja na čvrstoj granici

4.2.2.1 Diskretizacija jednačina napisanih u konzervativnom obliku

Prediktor

$$h_{i,j}^p = h_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(uh)_{i,j}^k - (uh)_{i-1,j}^k \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[(vh)_{i,j}^k - (vh)_{i,j-1}^k \right] \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} (uh)_{i,j}^p &= (uh)_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i,j}^k - \left(u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i-1,j}^k \right] - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[(uvh)_{i,j}^k - (uvh)_{i,j-1}^k \right] + \Delta t g h_{i,j}^k (S_{ox} - S_{fx})_{i,j}^k \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} (vh)_{i,j}^p &= (vh)_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\left(v^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i,j}^k - \left(v^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i,j-1}^k \right] - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(uvh)_{i,j}^k - (uvh)_{i-1,j}^k \right] + \Delta t g h_{i,j}^k (S_{oy} - S_{fy})_{i,j}^k \end{aligned} \quad (4.73)$$

Korektor

$$h_{i,j}^c = h_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(uh)_{i+1,j}^p - (uh)_{i,j}^p \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[(vh)_{i,j+1}^p - (vh)_{i,j}^p \right] \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} (uh)_{i,j}^c &= (uh)_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i+1,j}^p - \left(u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i,j}^p \right] - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[(uvh)_{i,j+1}^p - (uvh)_{i,j}^p \right] + \Delta t g h_{i,j}^p (S_{ox} - S_{fx})_{i,j}^p \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} (vh)_{i,j}^c &= (vh)_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\left(v^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i,j+1}^p - \left(v^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i,j}^p \right] - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(uvh)_{i+1,j}^p - (uvh)_{i,j}^p \right] + \Delta t g h_{i,j}^p (S_{oy} - S_{fy})_{i,j}^p \end{aligned} \quad (4.76)$$

Nove vrednosti

$$h_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (h_{i,j}^k + h_{i,j}^c)$$

$$(uh)_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} \left[(uh)_{i,j}^k + (uh)_{i,j}^c \right] \quad (4.77)$$

$$(vh)_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} \left[(vh)_{i,j}^k + (vh)_{i,j}^c \right]$$

Vrednosti primitivnih varijabli se računaju posle svake etape na sledeći način:

$$h_{i,j}^* = h_{i,j}^*$$

$$u_{i,j}^* = \frac{(uh)_{i,j}^*}{h_{i,j}^*} \quad (4.78)$$

$$v_{i,j}^* = \frac{(vh)_{i,j}^*}{h_{i,j}^*}$$

gde se oznaka "*" odnosi na tekuću etapu proračuna.

4.2.2.2 Diskretizacija jednačina napisanih u nekonzervativnom obliku

Kod diskretizacionih jednačina baziranih na jednačinama u konzervativnom obliku kao zavisno promenljive se javljaju jedinični protoci, te je posle svake etape potrebno računati vrednosti primitivnih varijabli kako bi se omogućio proračun u sledećem računskom koraku. Kod diskretizacionih jednačina baziranih na jednačinama u nekonzervativnom obliku primitivne varijable (h , u , v) su zavisno promenljive, tako da je prilikom programiranja broj računskih operacija manji nego u prethodnom slučaju, pa je i vreme proračuna kraće.

Jednačine prediktor i korektor etape imaju sledeći oblik:

Prediktor

$$h_{i,j}^p = h_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i,j}^k (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^k (h_{i,j}^k - h_{i-1,j}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta y} h_{i,j}^k (v_{i,j}^k - v_{i,j-1}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^k (h_{i,j}^k - h_{i,j-1}^k) \quad (4.79)$$

$$u_{i,j}^p = u_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^k (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta x} g (h_{i,j}^k - h_{i-1,j}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^k (u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k) + \Delta t g (S_{ox} - S_{fx})_{i,j}^k \quad (4.80)$$

$$v_{i,j}^p = v_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^k (v_{i,j}^k - v_{i,j-1}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta y} g (h_{i,j}^k - h_{i,j-1}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^k (v_{i,j}^k - v_{i-1,j}^k) + \Delta t g (S_{oy} - S_{fy})_{i,j}^k \quad (4.81)$$

Korektor

$$h_{i,j}^c = h_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i,j}^p (u_{i+1,j}^p - u_{i,j}^p) - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^p (h_{i+1,j}^p - h_{i,j}^p) - \frac{\Delta t}{\Delta y} h_{i,j}^p (v_{i,j+1}^p - v_{i,j}^p) - \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^p (h_{i,j+1}^p - h_{i,j}^p) \quad (4.82)$$

$$u_{i,j}^c = u_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^p (u_{i+1,j}^p - u_{i,j}^p) - \frac{\Delta t}{\Delta x} g (h_{i+1,j}^p - h_{i,j}^p) - \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^p (u_{i,j+1}^p - u_{i,j}^p) + \Delta t g (S_{ox} - S_{fx})_{i,j}^p \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned}
v_{i,j}^c = v_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^p (v_{i,j+1}^p - v_{i,j}^p) - \frac{\Delta t}{\Delta y} g (h_{i,j+1}^p - h_{i,j}^p) - \\
- \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^p (v_{i+1,j}^p - v_{i,j}^p) + \Delta t g (S_{oy} - S_{fy})_{i,j}^p
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Nove vrednosti

$$\begin{aligned}
h_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{2} (h_{i,j}^k + h_{i,j}^c) \\
u_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{2} (u_{i,j}^k + u_{i,j}^c) \\
v_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{2} (v_{i,j}^k + v_{i,j}^c)
\end{aligned} \tag{4.85}$$

4.2.2.3 Granični uslovi

Kod ravanskih tokova se, kao što je već pomenuto, razlikuju otvorene i čvrste granice.

Za razliku od modeliranja linijskih tokova, gde u pogledu proračuna graničnih uslova na otvorenim granicama postoji jedinstveni stav prema kome je za obezbeđivanje pouzdanog prenosa informacija u razmatranu oblast strujanja i iz nje neophodno korišćenje metode karakteristika, kod modeliranja ravanskih tokova po ovom pitanju u literaturi ne postoji saglasnost. Tako se, na primer, smatra [35] da se, u slučaju kada je tečenje na ulazu izrazito linijsko (u jednom od koordinatnih pravaca), umesto metode karakteristika za ravanske tokove mogu koristiti diskretizacione jednačine računске sheme MacCormack.

Granični uslov na čvrstoj granici podrazumeva da je, u slučaju kada se ne modelira turbulencija, komponenta brzine u pravcu upravnom na konturu jednaka nuli. Da bi ovaj uslov bio ispunjen i da bi se mogle formirati konačne razlike za polja koja se nalaze neposredno uz čvrstu granicu, računskoj mreži se dodaje red "fiktivnih" polja (Slika 4.8b). "Fiktivno" polje fizički ne pripada oblasti strujanja. Za vrednosti nepoznatih u njegovom težištu uzimaju se odgovarajuće vrednosti iz polja unutar oblasti strujanja koje sa fiktivnim, u odnosu na razmatrano polje, formira "lik u ogledalu". Pri tom se komponenta brzine upravna na konturu uzima sa suprotnim znakom. Na taj način se postiže uslov refleksije. U nastavku će, radi ilustracije, biti ispisane diskretizacione jednačine za oba modela — model sa jednačinama napisanim u konzervativnom obliku i model sa jednačinama u nekonzervativnom obliku — i to samo za prediktor etapu u kojoj se u oba koordinatna pravca računaju razlike unazad. Razmatra se polje prikazano na Slici 4.8b.

— Jednačine u konzervativnom obliku

$$h_{i,j}^p = h_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(uh)_{i,j}^k + (uh)_{i+1,j}^k \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[(vh)_{i,j}^k - (vh)_{i,j-1}^k \right] \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} (uh)_{i,j}^p &= (uh)_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i,j}^k - \left(u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i+1,j}^k \right] - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[(uvh)_{i,j}^k - (uvh)_{i,j-1}^k \right] + \Delta t g h_{i,j}^k (S_{ox} - S_{fx})_{i,j}^k \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} (vh)_{i,j}^p &= (vh)_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\left(v^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i,j}^k - \left(v^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_{i,j-1}^k \right] - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(uvh)_{i,j}^k + (uvh)_{i+1,j}^k \right] + \Delta t g h_{i,j}^k (S_{oy} - S_{fy})_{i,j}^k \end{aligned} \quad (4.88)$$

— Jednačine u nekonzervativnom obliku

$$\begin{aligned} h_{i,j}^p &= h_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} h_{i,j}^k (u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^k (h_{i,j}^k - h_{i+1,j}^k) - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} h_{i,j}^k (v_{i,j}^k - v_{i,j-1}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^k (h_{i,j}^k - h_{i,j-1}^k) \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} u_{i,j}^p &= u_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^k (u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta x} g (h_{i,j}^k - h_{i+1,j}^k) - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^k (u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k) + \Delta t g (S_{ox} - S_{fx})_{i,j}^k \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} v_{i,j}^p &= v_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{i,j}^k (v_{i,j}^k - v_{i,j-1}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta y} g (h_{i,j}^k - h_{i,j-1}^k) - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i,j}^k (v_{i,j}^k - v_{i+1,j}^k) + \Delta t g (S_{oy} - S_{fy})_{i,j}^k \end{aligned} \quad (4.91)$$

4.2.3 Stabilnost računске sheme

U slučaju valjano definisanog početnog problema stabilnost, prema Lax-ovoj teoremi, predstavlja potreban i dovoljan uslov za konvergenciju neke konsistentne računске sheme. Postojeći matematički aparat, za sada, omogućava da se stabilnost demonstrira samo na primeru linearnih jednačina⁷. Pri tom se pretpostavlja da su rezultati linearne analize stabilnosti dobar početni pokazatelj primenljivosti neke računске sheme. To, drugim rečima, znači da se od računске sheme, za koju je ovom analizom utvrđeno da ne zadovoljava uslove konvergencije na pojednostavljenom modelu, ne može očekivati da će dati konvergentne rezultate kada se primeni na nekom složenijem (nelinearnom) modelu.

Stabilnost MacCormack-ove računске sheme biće demonstrirana primenom von Neumann-ovog postupka. U ovom postupku analizira se isključivo početni problem — modelska jednačina sa početnim uslovom. Granični uslovi se ne razmatraju. U literaturi ([2], [7] i [31]) se najčešće nailazi na rezultate analize koji se odnose na linijske probleme i oni ovde neće biti prikazivani. Razmatraće se samo ravanski problemi.

von Neumann-ova analiza stabilnosti za računsku shemu MacCormack sprovedeće se na primeru jednačine ravanske konvekcije:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_0 \frac{\partial C}{\partial x} + v_0 \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (4.92)$$

$$C(x, y, t=0) = C_0(x, y) \quad (4.93)$$

gde je: C bilo koja veličina (na primer koncentracija zagađivača), u_0 je komponenta brzine konvektivnog transporta (v) u x -pravcu, a v_0 je komponenta brzine konvektivnog transporta (v) u y -pravcu.

Cilj ove analize je da se odrede "amplitudna" (R_1) i "fazna" (R_2) greška primenjene numeričke sheme. "Amplitudna" greška (R_1) definiše se kao odnos apsolutne vrednosti faktora amplifikacije⁸ približnog rešenja i apsolutne vrednosti faktora amplifikacije tačnog rešenja. "Fazna" greška (R_2) definiše se kao odnos brzine prostiranja⁸ m -te komponente približnog rešenja i brzine prostiranja m -te komponente tačnog rešenja. von Neumann-ov postupak biće prvo primenjen na tačno rešenje linearne parcijalne diferencijalne jednačine (4.92) i (4.93), a zatim i na približno (numeričko) rešenje.

Pošto je razmatrana jednačina linearna, početno rešenje se može predstaviti u vidu Fourier-ovog niza kod kojeg su trigonometrijske funkcije zamenjene ekvivalentnim eksponencijalnim funkcijama:

$$C(x, y, 0) = \sum_{m_x=-M_x}^{M_x} \sum_{m_y=-M_y}^{M_y} A_{m_x, m_y} e^{i\sigma_{m_x} x} e^{i\sigma_{m_y} y} \quad (4.94)$$

⁷ Linearne jednačine predstavljaju specijalan ili, bolje rečeno, idealizovani oblik nelinearnih jednačina kojima se opisuju fizičke pojave i procesi.

⁸ Pojmovi faktor amplifikacije i brzina prostiranja m -te komponente rešenja biće objašnjeni u daljem tekstu.

gde je A_{m_x, m_y} — amplituda, a σ_{m_x} i σ_{m_y} su talasni brojevi u x i y -pravcu komponente m_x, m_y (m -te komponente). Talasni brojevi su definisani sledećim izrazima:

$$\sigma_{m_x} = \frac{2\pi}{\lambda_{m_x}} \quad \text{i} \quad \sigma_{m_y} = \frac{2\pi}{\lambda_{m_y}} \quad (4.95)$$

Veličine λ_{m_x} i λ_{m_y} predstavljaju, redom, talasne dužine m -te komponente u x i y -pravcu:

$\lambda_{m_x} = \frac{2L_x}{m_x}$, $\lambda_{m_y} = \frac{2L_y}{m_y}$, gde su $2L_x$ i $2L_y$ dužine razmatrane oblasti, a $2m_x$ i $2m_y$ brojevi računskih polja u x i y -pravcu.

Rešenje u bilo kom trenutku t može se takođe predstaviti u vidu linearne kombinacije komponenata Fourier-ovog niza. To omogućava da se analiza sprovede posmatranjem ponašanja (tokom vremena) samo jedne komponente:

$$C_{m_x, m_y}(x, y, t) = A_{m_x, m_y} e^{i\sigma_{m_x} x} e^{i\sigma_{m_y} y} e^{-i\beta_{m_x, m_y} t} \quad (4.96)$$

Ukupno rešenje se dobija sabiranjem svih komponenata. Prve dve eksponencijalne funkcije u izrazu (4.96) definišu prostorni raspored m -te komponente, a treća predstavlja faktor amplifikacije (porasta) po vremenu. Veličina β_{m_x, m_y} predstavlja zbir ugaonih frekvenci za

x i y -pravac: $\beta_{m_x, m_y} = \beta_{m_x} + \beta_{m_y}$. Ugaone frekvence su: $\beta_{m_x} = \frac{2\pi}{T_{m_x}}$ i $\beta_{m_y} = \frac{2\pi}{T_{m_y}}$, gde je T_{m_x}

perioda u x -pravcu, a T_{m_y} perioda u y -pravcu.

Da bi se odredila brzina prostiranja m -te komponente tačnog rešenja, treba naći vezu između σ_{m_x} , σ_{m_y} i β_{m_x, m_y} . Stoga će se (4.96) zameniti u polaznu jednačinu (4.92). Kada se izvrši diferenciranje izraza (4.96) po x , y i t i kada se dobijeni izrazi zamene u jednačinu (4.92), posle sređivanja se dobija:

$$A_{m_x, m_y} e^{i\sigma_{m_x} x} e^{i\sigma_{m_y} y} e^{-i\beta_{m_x, m_y} t} \left[(-i\beta_{m_x, m_y}) + u_0(i\sigma_{m_x}) + v_0(i\sigma_{m_y}) \right] = 0 \quad (4.97)$$

Iz prethodne jednačine sledi da je:

$$\beta_{m_x, m_y} = u_0 \sigma_{m_x} + v_0 \sigma_{m_y} \quad (4.98)$$

što zapravo predstavlja uslov da $C_{m_x, m_y}(x, y, t)$ bude rešenje jednačine (4.92). Ako se u

razmatranje uvede rezultujuća brzina prostiranja: $v = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$ i odnos brzina prostiranja

u x i y -pravcu označi sa: $(u_0/v_0 = a, a \in \mathbb{R})$, jednačina (4.98) postaje:

$$\frac{\beta_{m_x, m_y}}{a \sigma_{m_x} + \sigma_{m_y}} \sqrt{1 + a^2} = v \quad (4.99)$$

Pošto su σ_{m_x} , σ_{m_y} i brzina (v) realni brojevi, sledi da je i β_{m_x, m_y} realan broj. Izraz (4.99)

definiše brzinu prostiranja komponente C_{m_x, m_y} tačnog rešenja kroz vreme. Ona je ista za sve komponente rešenja (ne zavisi od m) što znači da takvo rešenje zadržava isti oblik koji je imalo na početku proračuna (za $t=0$).

Za određivanje "amplitudne" greške potrebno je utvrditi apsolutnu vrednost faktora

amplifikacije $|e^{-i\beta_{m_x, m_y} t}|$. Ona ukazuje na to da li će početna amplituda tokom vremena rasti ili opadati (rasplinjavati se).

$$|e^{-i\beta_{m_x, m_y} t}| = |e^{-i\theta}| = \sqrt{R_e^2(e^{-i\theta}) + I_m^2(e^{-i\theta})} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 \quad (4.100)$$

Apsolutna vrednost faktora amplifikacije (pojačanja) indentički je jednaka jedinici za bilo koju komponentu C_{m_x, m_y} . To znači da se bilo koja komponenta, pa, prema tome, i njihov zbir ($C(x, y, t)$) neće tokom vremena ni pojačavati ni rasplinjavati.

Sada će se razmotriti približno (numeričko) rešenje koje se dobija kada se parcijalni izvodi u jednačini (4.92) zamene količnicima konačnih razlika prema shemi prikazanoj u Tabeli 4.1 i jednačinama (4.39) — (4.41). Analiza stabilnosti biće sprovedena samo za drugu kombinaciju operatora iz Tabele 4.1:

Etapa prediktor:

$$\hat{C}_{k,j}^p = \hat{C}_{k,j}^n - \frac{u_0 \Delta t}{\Delta x} (\hat{C}_{k+1,j}^n - \hat{C}_{k,j}^n) - \frac{v_0 \Delta t}{\Delta y} (\hat{C}_{k,j+1}^n - \hat{C}_{k,j}^n) \quad (4.101)$$

Konačno rešenje:

$$\hat{C}_{k,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\hat{C}_{k,j}^n + \hat{C}_{k,j}^p - \frac{u_0 \Delta t}{\Delta x} (\hat{C}_{k,j}^p - \hat{C}_{k-1,j}^p) - \frac{v_0 \Delta t}{\Delta y} (\hat{C}_{k,j}^p - \hat{C}_{k,j-1}^p) \right] \quad (4.102)$$

Kada se $C_{k,j}^p$ iz (4.101) zameni u (4.102) i unesu u odgovarajuće zamene za $C_{k-1,j}^p$ i $C_{k,j-1}^p$, posle sređivanja se dobija da je:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{k,j}^{n+1} = & \hat{C}_{k,j}^n - \frac{C_{r_x}}{2} (\hat{C}_{k+1,j}^n - \hat{C}_{k-1,j}^n) - \frac{C_{r_y}}{2} (\hat{C}_{k,j+1}^n - \hat{C}_{k,j-1}^n) + \\
& + \frac{C_{r_x} C_{r_y}}{2} [(\hat{C}_{k,j+1}^n - \hat{C}_{k-1,j+1}^n) + (\hat{C}_{k+1,j}^n - \hat{C}_{k+1,j-1}^n) + \\
& + (\hat{C}_{k-1,j}^n - \hat{C}_{k,j}^n) + (\hat{C}_{k,j-1}^n - \hat{C}_{k,j}^n)] + \\
& + \frac{C_{r_x}^2}{2} (\hat{C}_{k+1,j}^n - 2\hat{C}_{k,j}^n + \hat{C}_{k-1,j}^n) + \frac{C_{r_y}^2}{2} (\hat{C}_{k,j+1}^n - 2\hat{C}_{k,j}^n + \hat{C}_{k,j-1}^n)
\end{aligned} \tag{4.103}$$

gde su $C_{r_x} = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ i $C_{r_y} = v_0 \frac{\Delta t}{\Delta y}$ Courant-ovi brojevi za x i y -pravac. Jednačina (4.103) je aproksimativna jednačina (4.102) napisana u razvijenom obliku.

Približno rešenje $\hat{C}(x_k, y_j, t^n) = \hat{C}_{k,j}^n$ će se, kao i tačno rešenje predstaviti pomoću Fourier-ovog niza:

$$\hat{C}_{k,j}^n = \sum_{m_x=-M_x}^{M_x} \sum_{m_y=-M_y}^{M_y} \hat{A}_{m_x, m_y} e^{i\hat{\sigma}_{m_x} k \Delta x} e^{i\hat{\sigma}_{m_y} j \Delta y} e^{-i\hat{\beta}_{m_x, m_y} n \Delta t} \tag{4.104}$$

gde je: \hat{A}_{m_x, m_y} — amplituda m -te komponente,
 $e^{i\hat{\sigma}_{m_x} k \Delta x}$ — početni raspored u x -pravcu,
 $e^{i\hat{\sigma}_{m_y} j \Delta y}$ — početni raspored u y -pravcu, i
 $e^{-i\hat{\beta}_{m_x, m_y} n \Delta t}$ — faktor amplifikacije po vremenu.

I ovde će se posmatrati samo m -ta komponenta približnog rešenja $(\hat{C}_{k,j}^n)_m$. Da bi se skratilo pisanje, u svim izrazima koji slede biće izostavljen indeks " m ". Svako \hat{C} u jednačini (4.103) može se predstaviti na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{k,j}^n &= \hat{A} e^{i\hat{\sigma}_x k \Delta x} e^{i\hat{\sigma}_y j \Delta y} e^{-i\hat{\beta} n \Delta t} \\
\hat{C}_{k,j}^{n+1} &= \hat{A} e^{i\hat{\sigma}_x k \Delta x} e^{i\hat{\sigma}_y j \Delta y} e^{-i\hat{\beta} (n+1) \Delta t} \\
\hat{C}_{k-1,j}^n &= \hat{A} e^{i\hat{\sigma}_x (k-1) \Delta x} e^{i\hat{\sigma}_y j \Delta y} e^{-i\hat{\beta} n \Delta t} \\
\hat{C}_{k-1,j+1}^n &= \hat{A} e^{i\hat{\sigma}_x (k-1) \Delta x} e^{i\hat{\sigma}_y (j+1) \Delta y} e^{-i\hat{\beta} n \Delta t} \\
\hat{C}_{k+1,j}^n &= \hat{A} e^{i\hat{\sigma}_x (k+1) \Delta x} e^{i\hat{\sigma}_y j \Delta y} e^{-i\hat{\beta} n \Delta t} \\
\hat{C}_{k+1,j-1}^n &= \hat{A} e^{i\hat{\sigma}_x (k+1) \Delta x} e^{i\hat{\sigma}_y (j-1) \Delta y} e^{-i\hat{\beta} n \Delta t}
\end{aligned} \tag{4.105}$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{k,j-1}^n &= \hat{A} e^{i\hat{\sigma}_x k \Delta x} e^{i\hat{\sigma}_y (j-1)\Delta y} e^{-i\hat{\beta} n \Delta t} \\ \hat{C}_{k,j+1}^n &= \hat{A} e^{i\hat{\sigma}_x k \Delta x} e^{i\hat{\sigma}_y (j+1)\Delta y} e^{-i\hat{\beta} n \Delta t}\end{aligned}\quad (4.105)$$

Kao i u slučaju tačnog rešenja prvo će se utvrditi veza između $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ i $\hat{\beta}$. Izrazi (4.105) zameniće se u jednačinu (4.103), koja se, nakon skraćivanja i pregrupisanja članova, može napisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}e^{-i\hat{\beta} \Delta t} &= 1 - \frac{C_{r_x}}{2} (e^{i\hat{\sigma}_x \Delta x} - e^{-i\hat{\sigma}_x \Delta x}) - \frac{C_{r_y}}{2} (e^{i\hat{\sigma}_y \Delta y} - e^{-i\hat{\sigma}_y \Delta y}) + \\ &+ \frac{C_{r_x} C_{r_y}}{2} [(1 - e^{-i\hat{\sigma}_x \Delta x}) (e^{i\hat{\sigma}_y \Delta y} - 1) + (1 - e^{-i\hat{\sigma}_y \Delta y}) (e^{i\hat{\sigma}_x \Delta x} - 1)] + \\ &+ \frac{C_{r_x}^2}{2} (e^{i\hat{\sigma}_x \Delta x} + e^{-i\hat{\sigma}_x \Delta x} - 2) + \frac{C_{r_y}^2}{2} (e^{i\hat{\sigma}_y \Delta y} + e^{-i\hat{\sigma}_y \Delta y} - 2)\end{aligned}\quad (4.106)$$

Korišćenjem veza: $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$ i $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2i \cos \theta$ i Euler-ove formule, jednačina (4.106) se transformiše u:

$$\begin{aligned}e^{-i\hat{\beta} \Delta t} &= 1 - C_{r_x}^2 [1 - \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x)] - C_{r_y}^2 [1 - \cos(\hat{\sigma}_y \Delta y)] - \\ &- C_{r_x} C_{r_y} [1 - \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x) - \cos(\hat{\sigma}_y \Delta y) + \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x + \hat{\sigma}_y \Delta y)] - \\ &- i [C_{r_x} \sin(\hat{\sigma}_x \Delta x) + C_{r_y} \sin(\hat{\sigma}_y \Delta y)]\end{aligned}\quad (4.107)$$

a to, zapravo, predstavlja uslov koji treba da bude zadovoljen da bi $(\hat{C}_{k,j}^n)_m$ bilo rešenje približne jednačine. Iz jednačine (4.107) se jasno ne vidi da li je $\hat{\beta}$ realan ili kompleksan broj, pa će se nadalje, radi opštosti razmatranja pretpostaviti da je $\hat{\beta}$ kompleksan broj $\hat{\beta} = R_e(\hat{\beta}) + I_m(\hat{\beta})$. Pošto je brzina prostiranja realan broj, ona će se, u slučaju približnog rešenja, definisati kao:

$$\frac{R_e(\hat{\beta})}{a \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y} \sqrt{1 + a^2}\quad (4.108)$$

Izraz (4.107) napisaće se u izmenjenom obliku:

$$e^{-i[R_e(\hat{\beta}) + iI_m(\hat{\beta})]\Delta t} = R_e(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y) - iI_m(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y)\quad (4.109)$$

gde je:

$$R_e(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y) = 1 - C_{r_x}^2 [1 - \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x)] - C_{r_y}^2 [1 - \cos(\hat{\sigma}_y \Delta y)] - \\ - C_{r_x} C_{r_y} [1 - \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x) - \cos(\hat{\sigma}_y \Delta y) + \\ + \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x + \hat{\sigma}_y \Delta y)] \quad (4.110a)$$

$$I_m(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y) = C_{r_x} \sin(\hat{\sigma}_x \Delta x) + C_{r_y} \sin(\hat{\sigma}_y \Delta y) \quad (4.110b)$$

Kada se Euler-ova formula primeni na član sa leve strane znaka jednakosti, dobija se:

$$\{ \cos [R_e(\hat{\beta}) \Delta t] - i \sin [R_e(\hat{\beta}) \Delta t] \} e^{I_m(\hat{\beta}) \Delta t} = R_e(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y) - \\ - i I_m(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y) \quad (4.111)$$

Kompleksni brojevi su jednaki ako su im jednaki realni i imaginarni delovi, a to u ovom slučaju znači da je:

$$\cos [R_e(\hat{\beta}) \Delta t] e^{I_m(\hat{\beta}) \Delta t} = R_e(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y) \quad (4.112)$$

$$\sin [R_e(\hat{\beta}) \Delta t] e^{I_m(\hat{\beta}) \Delta t} = I_m(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y) \quad (4.113)$$

Kada se jednačina (4.113) podeli sa (4.112) dobija se:

$$\operatorname{tg} [R_e(\hat{\beta}) \Delta t] = \frac{R_e(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y)}{I_m(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y)} \quad (4.114)$$

Realni deo ugaone frekvence približnog rešenja sada se lako određuje iz izraza:

$$R_e(\hat{\beta}) = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{arctg} \left[\frac{R_e(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y)}{I_m(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y)} \right] \quad (4.115)$$

Sa ovako sračunatim $R_e(\hat{\beta})$, brzina prostiranja m -te komponente približnog rešenja iznosi:

$$\frac{R_e(\hat{\beta})}{a \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y} \sqrt{1+a^2} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y} \frac{1}{\Delta t} \operatorname{arctg} \left[\frac{R_e(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y)}{I_m(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y)} \right] \quad (4.116)$$

ili

$$\frac{R_e(\hat{\beta})}{a \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y} \sqrt{1+a^2} = f \left(C_{r_x}, C_{r_y}, \frac{\hat{\lambda}_x}{\Delta x}, \frac{\hat{\lambda}_y}{\Delta y}, \Delta x, \Delta y \right) \quad (4.117)$$

Iz prethodnog izraza se vidi da će se svaka komponenta \hat{C}_m približnog rešenja prostirati različitom brzinom, jer je brzina prostiranja, između ostalog, i funkcija talasnih dužina, a one su za svaku komponentu različite. To znači da će u približnom rešenju postojati "fazno" pomeranje ili "fazna" greška u odnosu na početno rešenje. Ova greška se ispoljava kroz tzv. numeričke oscilacije.

Potrebno je još odrediti i apsolutnu vrednost faktora amplifikacije m -te komponente približnog rešenja. Iz (4.107) sledi da je:

$$|e^{-i\hat{\beta}\Delta t}| = \sqrt{R_e^2(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y) + I_m^2(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y)} \quad (4.118)$$

Približno rešenje će biti stabilno ako je $|e^{-i\hat{\beta}\Delta t}| < 1$, tj. ako je ispunjen sledeći uslov:

$$R_e^2(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y) + I_m^2(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y) < 1 \quad (4.119)$$

ili u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} & 1 - \left\{ C_{r_x} [1 - \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x)] + C_{r_y} [1 - \cos(\hat{\sigma}_y \Delta y)] \right\}^2 + \\ & + \left\{ C_{r_x}^2 [1 - \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x)] + C_{r_y}^2 [1 - \cos(\hat{\sigma}_y \Delta y)] + \right. \\ & \quad \left. + C_{r_x} C_{r_y} [1 - \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x) - \cos(\hat{\sigma}_y \Delta y) + \right. \\ & \quad \left. + \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x + \hat{\sigma}_y \Delta y)] \right\}^2 < 1 \end{aligned} \quad (4.120)$$

Pošto je $\hat{\sigma}_{m_x} \Delta x = \frac{2\pi}{\hat{\lambda}_{m_x}} \Delta x = \frac{2\pi}{\frac{2L_x}{m}} \Delta x = \frac{m\pi}{L_x} \Delta x = l\pi$, posmatraće se samo karakteristični

slučajevi:

$$1^\circ \quad \hat{\sigma}_{m_x} \Delta x = 2\pi \quad \text{i} \quad \hat{\sigma}_{m_y} \Delta y = 2\pi$$

Uslov (4.120) je zadovoljen za svako C_{r_x} i C_{r_y} .

$$2^\circ \quad \hat{\sigma}_{m_x} \Delta x = \frac{3\pi}{2} \quad \text{i} \quad \hat{\sigma}_{m_y} \Delta y = \frac{3\pi}{2}$$

Uslov (4.120) se svodi na:

$$-(C_{r_x} + C_{r_y})^2 + (C_{r_x} + C_{r_y})^4 \leq 0 \quad (4.121)$$

Ako se uvede smena $t = (C_{r_x} + C_{r_y})^2$, uslov (4.121) postaje:

$$t(t - 1) \leq 0$$

odakle sledi Corant-Friederichs-Lewy-ijev uslov stabilnosti za slučaj ravanske konvekcije:

$$C_r = C_{r_x} + C_{r_y} = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} + v_0 \frac{\Delta t}{\Delta y} < 1 \quad (4.122)$$

što je ekvivalentno sa:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{u_0}{\Delta x} + \frac{v_0}{\Delta y}} \quad (4.123)$$

3° Za $\hat{\sigma}_{m_x} \Delta x = 3\pi$ i $\hat{\sigma}_{m_y} \Delta y = 3\pi$ dobija se isto ograničenje vremenskog koraka kao i u slučaju 2°.

U nastavku će se odrediti prvo, "amplitudna", a zatim i "fazna" greška računске sheme MacCormack.

"Amplitudna" greška R_1 definisana je sledećim izrazom:

$$R_1 = \frac{|e^{-i\hat{\beta}\Delta t}|}{|e^{-i\beta_{m_x, m_y} t}|} = \frac{|e^{-i\hat{\beta}\Delta t}|}{1} = \sqrt{R_e^2(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y) + I_m^2(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y)} \quad (4.124)$$

Pošto je $\hat{\sigma}_{m_x} \Delta x = \frac{2\pi}{\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x}}$, $\hat{\sigma}_{m_y} \Delta y = \frac{2\pi}{\frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y}}$ i $C_r = C_{r_x} + C_{r_y}$ može se napisati da je:

$$R_1 = f_1 \left(C_r, \frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x}, \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y} \right) \quad (4.125)$$

Za različite vrednosti Corant-ovog broja dobijaju se jednoparametarske površi:

$$R_1' = f_1' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x}, \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y} \right) \quad (4.126)$$

"Fazna" greška MacCormack-ove računске sheme definisana je sledećim izrazom:

$$R_2 = \frac{R_e(\hat{\beta})}{a \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y} \sqrt{1+a^2} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y} \frac{1}{c} \frac{1}{\Delta t} \operatorname{arctg} \left[\frac{R_e(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y)}{I_m(C_{r_x}, C_{r_y}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \Delta x, \Delta y)} \right] \quad (4.127)$$

Za $u_0 = av_0$ rezultujuća brzina prostiranja m -te komponente je: $v = v_0 \sqrt{1+a^2}$, pa se izraz (4.122) može napisati na sledeći način:

$$C_r = av_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} + v_0 \frac{\Delta t}{\Delta y} = v_0 \Delta t \left(\frac{a}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \right) = \frac{v}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} (a \Delta y + \Delta x) \quad (4.128)$$

Iz prethodnog izraza se može odrediti rezultujuća brzina prostiranja (v) m -te komponente približnog rešenja:

$$v = C_r \sqrt{1+a^2} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x + a \Delta y} \frac{1}{\Delta t} \quad (4.129)$$

Kada se (4.129) zameni u (4.127), nakon sređivanja se dobija:

$$R_2 = \frac{\hat{\lambda}_{m_x} \hat{\lambda}_{m_y}}{2 \pi C_r} \frac{\Delta x + a \Delta y}{a \hat{\lambda}_{m_x} + \hat{\lambda}_{m_y}} \operatorname{arctg} \left[\frac{R_e \left(C_r, \frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x}, \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y} \right)}{I_m \left(C_r, \frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x}, \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y} \right)} \right] = f_2 \left(C_r, \frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x}, \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y}, \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \quad (4.130)$$

Ako se posmatra uniformna računska mreža $\Delta x/\Delta y = \text{const}$ tada je:

$$R_2' = f_3 \left(C_r, \frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x}, \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y} \right) \quad (4.131)$$

I u ovom slučaju se za različite vrednosti Courant-ovog broja dobijaju jednoparameterske površi, ali ovoga puta to su:

$$R_2'' = f_3' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x}, \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y} \right) \quad (4.132)$$

U Prilozima 1 do 5 prikazane su jednoparameterske površi "amplitudne" i "fazne" greške računске sheme MacCormack za kvadratnu računsku mrežu i pet vrednosti Courant-ovog broja C_r {0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0} u slučaju kada je $u_0/v_0 = 1$. Za svaku od pet vrednosti Courant-ovog broja nacrtane su i odgovarajuće dvoparameterske krive

$R_1'' = f_1'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$ i $R_2''' = f_3'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$ koje se dobijaju u preseku površi "amplitudne"/"fazne"

greške i ravni $\hat{\lambda}_{m_y} / \Delta y = \text{const}$. Pošto je reč o površima koje su simetrične u odnosu na ravan

$\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} = \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y}$, dvoparametarske krive $R_1'' = f_1'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y} \right)$ i $R_2''' = f_3'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y} \right)$ za $\hat{\lambda}_{m_x} / \Delta x = \text{const}$

identične su odgovarajućim krivama za $\hat{\lambda}_{m_y} / \Delta y = \text{const}$. U Prilozima su prikazane i krive

koje se dobijaju u preseku površi $R_1' = f_1' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x}, \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y} \right)$ i ravni $\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} = \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y}$ i u preseku površi

$R_2'' = f_3' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x}, \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y} \right)$ i ravni $\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} = \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y}$.

Dvoparametarske krive "amplitudne" greške $R_1'' = f_1'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$, $\hat{\lambda}_{m_y} / \Delta y = \text{const}$ (Prilozi 1b, 2b, 3b, 4b, 5b i 6a) pokazuju da se sa povećanjem gustine računске mreže (povećanjem $\hat{\lambda}_{m_x} / \Delta x$ i $\hat{\lambda}_{m_y} / \Delta y$), pri svim vrednostima Courant-ovog broja, vrlo brzo dostiže granična vrednost $R_1 = 1$. **To znači da će pri dovoljno gustoj računskoj mreži "rasplinjavanje"⁹ numeričkog rešenja u odnosu na tačno rešenje biti praktično zanemarljivo.**

Dvoparametarske krive "fazne" greške $R_2''' = f_3'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$, $\hat{\lambda}_{m_y} / \Delta y = \text{const}$ pokazuju da pri vrednostima Courant-ovog broja manjim od jedan smanjivanje prostornih koraka Δx i Δy izaziva povećanje "fazne" greške odnosno povećanje intenziteta numeričkih oscilacija (Prilozi 1d, 2d, 3d i 6b). **S druge strane, povećanje vrednosti Courant-ovog broja iznad jedan ($C_r = 1.5$ i $C_r = 2.0$), uz istovremeno smanjenje gustine računске mreže stabilizuje proračun, jer se smanjuje "fazno" pomeranje komponenti približnog rešenja u odnosu na komponente tačnog rešenja** (Prilozi 4d, 5d, 6b).

Kao što se vidi, promena gustine računске mreže različito utiče na vrednosti "amplitudne" i "fazne" greške. Numeričke oscilacije su prisutne u približnom rešenju bez obzira na usvojenu prostornu diskretizaciju, odnosno usvojenu vrednost Courant-ovog broja. Za razliku od "fazne" greške "amplitudna" greška se može eliminisati iz rešenja pogodnim izborom: prostornih koraka Δx i Δy i usvajanjem odgovarajuće vrednosti Courant-ovog broja. Na ovom mestu je, takođe, važno istaći da se, bez obzira što je reč o eksplicitnoj računskoj shemi, stabilni rezultati mogu dobiti i pri vrednostima Courant-ovog broja većim od jedan ($C_r = 1.5$ i $C_r = 2.0$), što nije slučaj kod većine ostalih eksplicitnih numeričkih shema.

⁹ Rasplinjavanje numeričkog rešenja u odnosu na pravo rešenje naziva se numerička difuzija.

Do uslova stabilnosti za ravanske tokove, opisane jednačinama (3.51) i (3.55), dolazi se analizom stabilnosti linearizovanog sistema homogenih parcijalnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = 0 \quad (4.133)$$

gde je:

$\mathbf{V} = [h \ u \ v]^T$ vektor zavisno promenljivih ,

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{V}} = \mathbf{M}_P = \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

Jakobijan vektora fluksova \mathbf{P} (jednačina 3.55a), a

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{V}} = \mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} v & 0 & h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

Jakobijan vektora fluksova \mathbf{R} (jednačina 3.55a).

Kao i u prethodnom primeru (primeru ravanske konvekcije), posmatraće se samo početni problem (modelska jednačina sa početnim uslovom):

$$\mathbf{V}_t + \mathbf{M}_P \mathbf{V}_x + \mathbf{M}_R \mathbf{V}_y = 0 \quad (4.136a)$$

$$\mathbf{V}(x, y, t = 0) = \mathbf{V}_0(x, y) \quad (4.136b)$$

Približno rešenje sistema (4.136) na $(n+1)$ -vom vremenskom nivou za drugu kombinaciju operatora iz Tabele 4.1 računa se iz aproksimativne (matrične) jednačine:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}_{k,j}^{n+1} = & \hat{\mathbf{V}}_{k,j}^n - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} \mathbf{M}_P^2 (\hat{\mathbf{V}}_{k+1,j}^n - \hat{\mathbf{V}}_{k-1,j}^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} \mathbf{M}_R^2 (\hat{\mathbf{V}}_{k,j+1}^n - \hat{\mathbf{V}}_{k,j-1}^n) + \\ & + \frac{(\Delta t)^2}{2 \Delta x \Delta y} \mathbf{M}_P \mathbf{M}_R [(\hat{\mathbf{V}}_{k,j+1}^n - \hat{\mathbf{V}}_{k-1,j+1}^n) - (\hat{\mathbf{V}}_{k,j}^n - \hat{\mathbf{V}}_{k-1,j}^n)] + \\ & + \frac{(\Delta t)^2}{2 \Delta x \Delta y} \mathbf{M}_R \mathbf{M}_P [(\hat{\mathbf{V}}_{k+1,j}^n - \hat{\mathbf{V}}_{k+1,j-1}^n) - (\hat{\mathbf{V}}_{k,j}^n - \hat{\mathbf{V}}_{k,j-1}^n)] + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \mathbf{M}_P^2 (\hat{\mathbf{V}}_{k+1,j}^n - 2\hat{\mathbf{V}}_{k,j}^n + \hat{\mathbf{V}}_{k-1,j}^n) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 \mathbf{M}_R^2 (\hat{\mathbf{V}}_{k,j+1}^n - 2\hat{\mathbf{V}}_{k,j}^n + \hat{\mathbf{V}}_{k,j-1}^n) \end{aligned} \quad (4.137)$$

I u ovom slučaju približno rešenje $\hat{\mathbf{V}}(x_k, y_j, t^n) = \hat{\mathbf{V}}_{k,j}^n$ će se predstaviti pomoću Fourier-ovog niza:

$$\hat{\mathbf{V}}_{k,j}^n = \sum_{m_x=-M_x}^{M_x} \sum_{m_y=-M_y}^{M_y} \hat{\mathbf{A}}_{m_x, m_y} e^{i\hat{\sigma}_{m_x} k \Delta x} e^{i\hat{\sigma}_{m_y} j \Delta y} e^{-i\hat{\beta}_{m_x, m_y} n \Delta t} \mathbf{I} \quad (4.138)$$

gde je:

$$\hat{\mathbf{A}}_{m_x, m_y} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{m_x, m_y} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}_{m_x, m_y} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{m_x, m_y} \end{bmatrix}$$

matrica amplituda m -te komponente približnog rešenja,

- \mathbf{I} — jedinična matrica,
- $e^{i\hat{\sigma}_{m_x} k \Delta x}$ — početni raspored u x -pravcu,
- $e^{i\hat{\sigma}_{m_y} j \Delta y}$ — početni raspored u y -pravcu, i
- $e^{-i\hat{\beta}_{m_x, m_y} n \Delta t}$ — faktor amplifikacije po vremenu.

Posmatraće se samo m -ta komponenta približnog rešenja $(\hat{\mathbf{V}}_{k,j}^n)_m$. Vektori $\hat{\mathbf{V}}$ u matricnoj jednačini (4.137) mogu se predstaviti izrazima koji su analogni izrazima (4.105) za skalare \hat{C} . U njima umesto skalara \hat{A} (iz (4.105)) treba da figuriše matrica $\hat{\mathbf{A}}$, a početni rasporedi u x i y -pravcu i faktor amplifikacije množe se jediničnom matricom \mathbf{I} . Na primer:

$$\hat{\mathbf{V}}_{k+1, j-1}^n = \hat{\mathbf{A}} e^{i\hat{\sigma}_x (k+1) \Delta x} e^{i\hat{\sigma}_y (j-1) \Delta y} e^{-i\hat{\beta} n \Delta t} \mathbf{I} \quad (4.139)$$

Posle zamene vektorâ $\hat{\mathbf{V}}$ u (4.137) prema shemi prikazanoj izrazom (4.139) i odgovarajućih algebarskih transformacija, jednačina (4.137) postaje:

$$\mathbf{G} \equiv e^{i\hat{\beta} \Delta t} \mathbf{I} = \mathbf{R}_e(\mathbf{G}) + i \mathbf{I}_m(\mathbf{G}) \quad (4.140)$$

gde je:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e(\mathbf{G}) = & \mathbf{I} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \mathbf{M}_P^2 [1 - \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x)] \mathbf{I} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 \mathbf{M}_R^2 [1 - \cos(\hat{\sigma}_y \Delta y)] \mathbf{I} - \\ & - \frac{(\Delta t)^2}{\Delta x \Delta y} (\mathbf{M}_P \mathbf{M}_R + \mathbf{M}_R \mathbf{M}_P) [1 - \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x) - \cos(\hat{\sigma}_y \Delta y) + \\ & + \cos(\hat{\sigma}_x \Delta x + \hat{\sigma}_y \Delta y)] \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.141a)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_m(\mathbf{G}) = & \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{M}_P \sin(\hat{\sigma}_x \Delta x) \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\Delta y} \mathbf{M}_R \sin(\hat{\sigma}_y \Delta y) \mathbf{I} + \\
& + \frac{(\Delta t)^2}{\Delta x \Delta y} (\mathbf{M}_P \mathbf{M}_R - \mathbf{M}_R \mathbf{M}_P) [\sin(\hat{\sigma}_x \Delta x) - \sin(\hat{\sigma}_y \Delta y) - \\
& - \sin(\hat{\sigma}_x \Delta x - \hat{\sigma}_y \Delta y)] \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{4.141b}$$

Matrica \mathbf{G} predstavlja matricu amplifikacije, a matrice $\mathbf{R}_e(\mathbf{G})$ i $\mathbf{I}_m(\mathbf{G})$ su njen realni i imaginarni deo.

Približno rešenje će biti stabilno ako apsolutna vrednost najveće sopstvene vrednosti matrice amplifikacije (tzv. spektralni radijus matrice amplifikacije) ω_{\max} ispunjava uslov [2]:

$$|\omega_{\max}| \leq 1 \tag{4.142}$$

Ograničenje vremenskog koraka za računsku shemu MacCormack u slučaju ravanskog neustaljenog tečenja dobija se iz prethodnog uslova i ono glasi [2]:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} \tag{4.143}$$

4.3 Filtracija numeričkog rešenja primenom koncepta veštačke viskoznosti

U potpoglavlju 4.2 je istaknuto da računaska shema MacCormack, zahvaljujući etapnom rešavanju problema i simetričnoj izmeni operatora prostorne diskretizacije u etapama prediktora i korektora, ima tačnost drugog reda po prostoru i vremenu (vodeći član Teylorovog ostatka sadrži neparne izvode — izvode trećeg reda). To znači da je reč o nedisipativnoj računskoj shemi, tj. shemi koja u rešenju ne uvodi veštačku — numeričkim putem izazvanu difuziju. Ova osobina MacCormack-ove sheme dokazana je u prethodnom poglavlju primenom von Neumann-ove analize stabilnosti. Do istog zaključka se može doći sledećim razmatranjem.

Radi kraćeg pisanja, analiziraće se parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda za opisivanje prostiranja linearnog talasa koji se kreće konstantnom brzinom c :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{4.144}$$

Diskretizacione jednačine računске sheme MacCormack u ovom slučaju imaju sledeći oblik:

$$u_i^p = u_i^k - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^k - u_i^k) \quad (4.145)$$

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{2} \left[u_i^k + u_i^p - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^p - u_{i-1}^p) \right] \quad (4.146)$$

Za profil $i-1$ jednačina prediktora glasi:

$$u_{i-1}^p = u_{i-1}^k - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^k - u_{i-1}^k) \quad (4.147)$$

Zamenom izraza (4.145) i (4.147) u (4.146) nakon sređivanja se dobija da je:

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \frac{c \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^k - u_{i-1}^k) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2 \Delta x^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) \quad (4.148)$$

Svi članovi jednačine (4.148) razviće se u Teylor-ov red u okolini tačke (i,k) :

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^k + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^k + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_i^k + o(\Delta t^4) \quad (4.149)$$

$$u_{i+1}^k = u_i^k + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^k + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^k + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i^k + o(\Delta x^4) \quad (4.150)$$

$$u_{i-1}^k = u_i^k - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^k + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^k - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i^k + o(\Delta x^4) \quad (4.151)$$

Potrebno je još naći i vezu između parcijalnog izvoda drugog reda po vremenu i parcijalnog izvoda po prostoru. Iz jednačine (4.144) sledi da je:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.152)$$

Ako se ova jednačina još jednom diferencira po t , zameni redosled diferenciranja i jednačina (4.152) ponovo iskoristi kao veza između izvoda po vremenu i izvoda po prostoru dobija se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.153)$$

Zamenom izraza (4.149), (4.150) i (4.151) u (4.148), nakon sređivanja se dobija:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\Delta t^2) + \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(\Delta x^2) \quad (4.154)$$

Kada se parcijalni izvod drugog reda po vremenu definisan izrazom (4.153) zameni u prethodnu jednačinu, ona dobija sledeći oblik:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{c^2 \Delta t}{2} - \frac{c^2 \Delta t}{2} \right) + o(\Delta t^2) + o(\Delta x^2) \quad (4.155)$$

ili

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = o(\Delta t^2) + o(\Delta x^2) \quad (4.156)$$

Nakon zanemarenja beskonačno malih $o(\Delta x^2)$ i $o(\Delta t^2)$, diskretizaciona jednačina (4.156) se svodi na polaznu parcijalnu diferencijalnu jednačinu, dakle, jednačinu koja ne sadrži član kojim se modelira difuzija kao fizički proces. Time je na još jedan način dokazano da računaska shema MacCormack ne unosi u rešenje numeričku anomaliju poznatu pod nazivom veštačka difuzija, jer je tzv. koeficijent veštačke viskoznosti (član uz izvod drugog reda po prostoru $\partial^2 u / \partial x^2$) jednak nuli.

Međutim, kao i većina drugih nedisipativnih shema drugog reda tačnosti i MacCormack-ova shema u problemima za koje je karakteristična pojava skoka u liniji nivoa, pri vrednosti Courant-ovog broja manjoj od jedan, izaziva numeričke oscilacije u neposrednoj blizini diskontinuiteta (vidi potpoglavlje 4.2.3). Intuitivno je jasno da kod tokova sa naglim lokalnim promenama dubine i protoka Courant-ov broj ne može istovremeno biti jednak jedinici u svim poljima računске mreže. von Neumann-ova analiza stabilnosti je pokazala da različite vrednosti Courant-ovog broja uslovljavaju i različite brzine prostiranja Fourier-ovih komponenti (jednačine (4.117) i (4.130)), tako da tokom vremena dolazi do njihovog rasipanja — disperzije, faznog pomeranja. Ovakva, numeričkim putem izazvana, distorzija rešenja manifestuje se kroz pomenute numeričke oscilacije. Ukoliko su gradijenti osnovnih veličina toka veći, utoliko su oscilacije izraženije, tako da posle nekoliko računskih koraka može doći do potpunog rasturanja proračuna. Da bi se iskoristile dobre osobine ove računске sheme (o kojima je bilo reči u potpoglavlju 4.2) i omogućio proračun, pri numeričkom modeliranju diskontinualnih tokova diskretizacionim jednačinama se dodaje poseban član čiji je "zadatak" da ublaži velike gradijente i smanji amplitude oscilacija.

Dodatni član u diskretizacionim jednačinama računске sheme MacCormack definiše se korišćenjem eksplicitne metode veštačke viskoznosti koju je formulisao Jameson sa svojim saradnicima [15], [19]. Reč je o selektivnom postupku u kome se korekcija dobijenog numeričkog rešenja vrši samo u oblastima sa ostrim (velikim) gradijentima. Operator veštačke disipacije ili veštačke difuzije \mathbf{D} kojim se vrši korigovanje dobijenog rešenja predstavlja zbir operatora veštačke disipacije za pravace x i y :

$$\mathbf{D}\mathbf{U} = \mathbf{D}_x \mathbf{U} + \mathbf{D}_y \mathbf{U} \quad (4.157)$$

Operator \mathbf{D}_x definisan je sledećim izrazom:

$$\mathbf{D}_x \mathbf{U} = \left[\epsilon_{x_{i \pm \frac{1}{2}, j}} (\mathbf{U}_{i+1, j} - \mathbf{U}_{i, j}) - \epsilon_{x_{i - \frac{1}{2}, j}} (\mathbf{U}_{i, j} - \mathbf{U}_{i-1, j}) \right] \quad (4.158)$$

gde je ϵ_x parametar koji se definiše korišćenjem normalizovanog oblika gradijenta dubine v'_x :

$$v'_{x_{i,j}} = \frac{|h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}|}{|h_{i+1,j}| + |2h_{i,j}| + |h_{i-1,j}|} \quad (4.159)$$

$$\epsilon_{x_{i \pm \frac{1}{2}, j}} = \mathbf{k} \frac{\Delta x}{\Delta t} \max \left(v'_{x_{i \pm 1, j}}, v'_{x_{i, j}} \right) \quad (4.160)$$

U prethodnom izrazu \mathbf{k} predstavlja tzv. "konstantu disipacije", ili "faktor veštačke viskoznosti". Variranjem njegove vrednosti reguliše se nivo numeričke difuzije. Na ovom mestu je važno istaći da izbor najpovoljnije vrednosti faktora \mathbf{k} zavisi od konkretnog problema koji se rešava. Pri tom uvek treba nastojati da se izabere ona vrednost kojom se postiže kompromis između dva podjednako poželjna rešenja, a to su: rešenje sa što je moguće manjom "debljinom" čela talasa (sa što manjim rasplinjavanjem) i rešenje sa što manjom amplitudom oscilacija na čelu i iza čela talasa, koje se, zapravo, nikada u potpunosti ne mogu eliminisati [31].

Operator disipacije za pravac y definisan je po istom principu kao i operator \mathbf{D}_x :

$$\mathbf{D}_y \mathbf{U} = \left[\epsilon_{y_{i, j \pm \frac{1}{2}}} (\mathbf{U}_{i, j+1} - \mathbf{U}_{i, j}) - \epsilon_{y_{i, j - \frac{1}{2}}} (\mathbf{U}_{i, j} - \mathbf{U}_{i, j-1}) \right] \quad (4.161)$$

$$v'_{y_{i,j}} = \frac{|h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}|}{|h_{i,j+1}| + |2h_{i,j}| + |h_{i,j-1}|} \quad (4.162)$$

$$\epsilon_{y_{i, j \pm \frac{1}{2}}} = \mathbf{k} \frac{\Delta y}{\Delta t} \max \left(v'_{y_{i, j \pm 1}}, v'_{y_{i, j}} \right) \quad (4.163)$$

Za polja koja se nalaze neposredno uz čvrstu granicu izrazi (4.159) i (4.162) se modifikuju saglasno definiciji "fiktivnog" polja. U primeru prikazanom na Slici 4.8b treba korigovati samo gradijent u pravcu x :

$$v'_{x_{i,j}} = \frac{|h_{i+1,j} - h_{i,j}|}{|h_{i+1,j}| + |h_{i,j}|} \quad (4.164)$$

U oblastima sa blagim promenama zavisno promenljivih gradijenti v'_x i v'_y su ili jednaki nuli, ili su zanemarljivo mali, pa se u tim oblastima ne vrši korekcija novodobijenog rešenja. Zbog toga se može reći da se u ovom slučaju radi o postupku "numeričke filtracije" rešenja

dobijenog primenom MacCormack-ove sheme. Novodobijene vrednosti zavisno promenljivih do kojih se došlo rešavanjem jednačina numeričkog modela koriguju se korišćenjem sledećeg izraza:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{k+1} = \mathbf{U}_{i,j}^{k+1} + \mathbf{D}_x \mathbf{U}_{i,j}^{k+1} + \mathbf{D}_y \mathbf{U}_{i,j}^{k+1} \quad (4.165)$$

5. Provera numeričkog modela

Uobičajeni postupak provere nekog numeričkog modela podrazumeva sledeće korake: testiranje modela na pojednostavljenim primerima linijskog tečenja za koje postoje analitička rešenja, testiranje modela na hipotetičkim primerima linijskog/ravanskog tečenja, verifikaciju numeričkog modela korišćenjem rezultata merenja na fizičkom modelu i razmatranje mogućnosti primene predloženog modela u rešavanju različitih problema hidrotehničke prakse.

5.1 Linijski modeli

5.1.1 Pregled objavljenih rezultata testiranja linijskog modela

U literaturi [17] i [19] izvršeno je poređenje rezultata dobijenih primenom predloženog numeričkog modela (modela zasnovanog na MacCormack-ovoj računskoj shemi) sa analitičkim rešenjima i to za slučajeve potpunog trenutnog rušenja brane ([17] i [19]) i naglog spuštanja ustave na nizvodnom kraju kanala [19]. Rezultati dobijeni primenom računске sheme MacCormack upoređeni su i sa rezultatima dobijenim primenom: metode karakteristika [17], metode razdvajanja fluksova [19] i Gabutti-jeve računске sheme [19]. U svim primerima su zanemarene sila gravitacije i sila trenja.

Ovde će, da bi se upotpunilo izlaganje, biti prikazani samo rezultati i izneti najbitniji zaključci koje su objavili Jha, Akiyama i Ura (1994). Oni su poredili rezultate simulacije dobijene primenom: metode razdvajanja fluksova, računске sheme MacCormack i Gabutti-jeve sheme sa analitičkim rešenjima za slučajeve naglog — trenutnog rušenja brane i naglog spuštanja ustave na nizvodnom kraju kanala. Kao što je već pomenuto, sila gravitacije i sila trenja bile su zanemarene. Numerički eksperimenti za slučaj prostiranja talasa sa strmim

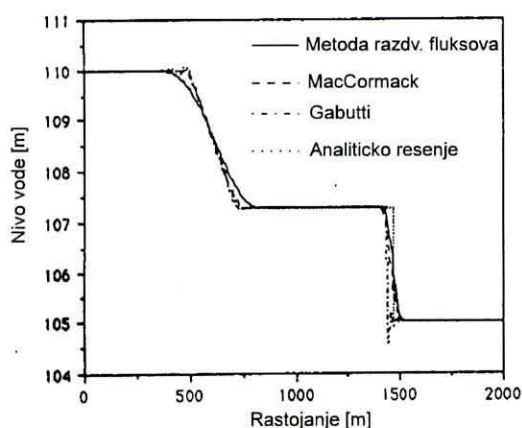
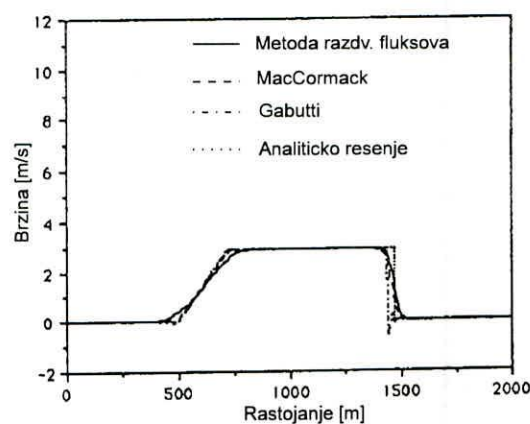
Tabela 5.1: Vrednosti faktora veštačke viskoznosti (k)

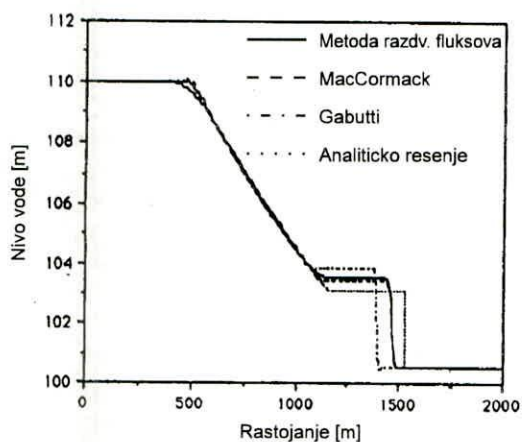
h_u / h_n [/]	MacCormack	Gabutti
2	0.50	0.60
20	0.75	0.95
200	0.90	nestabilna za svako k

čelom (izazvanog trenutnim rušenjem brane) sprovedeni su za tri vrednosti početnog odnosa dubina uzvodno i nizvodno od brane $h_u / h_n = \{2, 20, 200\}$. Pri tom je utvrđeno da pri odnosu $h_u / h_n > 2$ računski shema MacCormack i Gabutti-jeva shema ne daju rezultate ukoliko se, primenom metode veštačke viskoznosti, u rešenje ne unese odgovarajuća "količina" numeričke difuzije. Takođe je utvrđeno da je pri $h_u / h_n \geq 200$ Gabutti-jeva shema bezuslovno nestabilna, tj. da ne funkcioniše bez obzira na usvojenu vrednost faktora veštačke viskoznosti (k). U Tabeli 5.1 prikazane su vrednosti faktora k koje su korišćene za "numeričku filtraciju" rešenja dobijenih primenom MacCormack-ove i Gabutti-jeve računski sheme za sve tri vrednosti odnosa h_u / h_n .

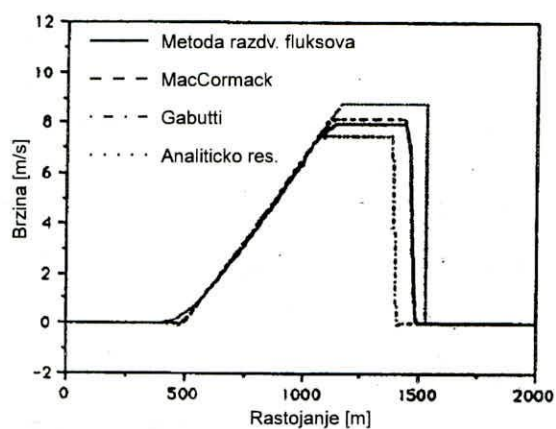
Slike 5.1a, 5.2a i 5.3a pokazuju linije nivoa, a slike 5.1b, 5.2b i 5.3b uzdužne dijagrame promene brzine duž kanala ($50\Delta t$)s posle naglog — trenutnog rušenja brane. Rezultati prikazani na Slici 5.1 odnose se na primer u kome je početna vrednost odnosa dubina uzvodno i nizvodno od pregrade (brane) iznosila $h_u / h_n = 2$, rezultati sa Slike 5.2 odgovaraju odnosu $h_u / h_n = 20$, a rezultati sa Slike 5.3 odnosu $h_u / h_n = 200$. Uočava se da računski shema MacCormack za sve tri vrednosti početnog odnosa h_u / h_n daje rezultate koji najmanje odstupaju od analitičkog rešenja. Jedini nedostatak u odnosu na metodu razdvajanja fluksova leži u činjenici da je za dobijanje stabilnih rešenja kod računski sheme MacCormack neophodna primena koncepta veštačke viskoznosti.

Na Slici 5.4 prikazani su rezultati numeričkog eksperimenta u kome je analizirano prostiranje talasa sa strmim čelom u pravougaonom kanalu sa horizontalnim dnom. Talas je izazvan naglim spuštanjem ustave na nizvodnom kraju kanala. Pre spuštanja ustave ($t=0$), tečenje u kanalu je bilo ustaljeno — dubina i srednja profilski brzina su u svim presecima

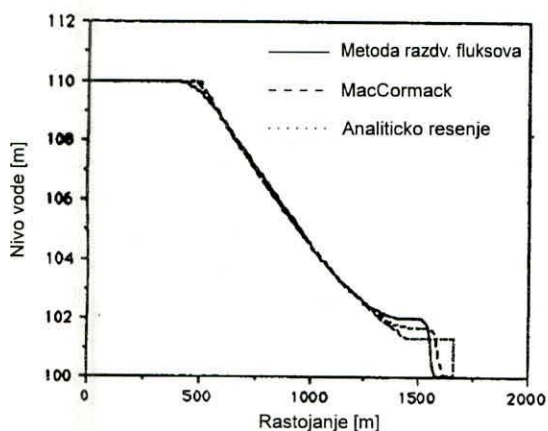
**Slika 5.1a:** Linija nivoa pri odnosu $h_u / h_n = 2$ [19]**Slika 5.1b:** Uzdužni dijagram promene brzine duž kanala za $h_u / h_n = 2$ [19]



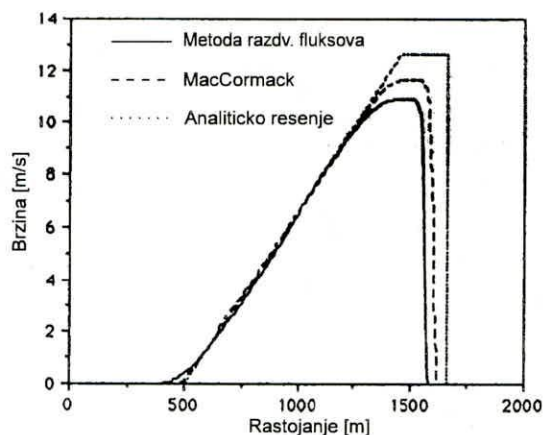
Slika 5.2a: Linija nivoa pri odnosu $h_u/h_n = 20$ [19]



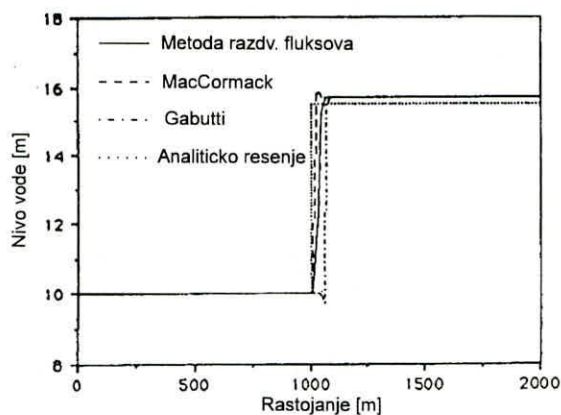
Slika 5.2b: Uzdužni dijagram promene brzine duž kanala za $h_u/h_n = 20$ [19]



Slika 5.3a: Linija nivoa pri odnosu $h_u/h_n = 200$ [19]



Slika 5.3b: Uzdužni dijagram promene brzine duž kanala za $h_u/h_n = 200$ [19]



Slika 5.4: Prostiranje talasa izazvanog naglim spuštanjem ustave na nizvodnom kraju kanala [19]

bile iste: $h=10\text{m}$ i $u=4.952\text{m/s}$. Slika 5.4 pokazuje položaj čela talasa u trenutku $t=(111\Delta t)\text{s}$. Vrednosti faktora veštačke viskoznosti za MacCormack-ovu računsku shemu iznosila je $k=0.95$, a za Gabutti-jevu shemu $k=2.0$. I pored relativno visoke vrednosti faktora k oscilacije u neposrednoj blizini čela talasa nisu eliminisane. Bez obzira na to, jasno se vidi da računska shema MacCormack najbolje reprodukuje brzinu prostiranja talasa.

Rezultati testiranja računске sheme MacCormack na različitim hipotetičkim primerima linijskog i ravanskog tečenja mogu se naći u sledećoj literaturi: [9], [10], [15], [17], [18], [22] i oni ovde neće biti prikazivani.

5.1.2 Verifikacija numeričkog modela

Za verifikaciju numeričkog modela linijskog tečenja poslužili su podaci iz dva laboratorijska eksperimenta. U jednom je analizirano tečenje preko širokih pragova u burnom režimu¹⁰, a u drugom prostiranje talasa sa strmim čelom¹¹.

5.1.2.1 Analiza tečenja preko tri široka praga u prizmatičnom laboratorijskom kanalu

Za tečenje preko širokog praga u burnom režimu karakteristična je nagla lokalna promena dubine uzvodno od praga odnosno, pojava hidrauličkog skoka. Kada se nalazi na početku i na kraju razmatrane deonice široki prag u hidrauličkom smislu predstavlja "čist" spoljašnji granični uslov — veza između dubine na pragu i protoka je u ovom slučaju jasno definisana, tako da se merenjem dubine na pragu vrlo lako može odrediti nepoznata vrednost protoka. Ukoliko se, međutim, prag nalazi između najuzvodnijeg i najnižvodnijeg profila, on se tretira kao unutrašnji granični uslov (videti potpoglavlje 4.2.1.2). Imajući sve ovo u vidu, došlo se do zaključka da bi tečenje preko širokih pragova moglo dobro da posluži i za verifikaciju računске sheme MacCormack i za analizu unutrašnjeg graničnog uslova. Stoga je, u Hidrauličkoj laboratoriji Instituta za hidrotehniku Građevinskog fakulteta u Beogradu napravljen fizički model koji se sastojao od tri široka praga pričvršćena za dno laboratorijskog kanala (Slika 5.5).

U nastavku će prvo biti opisana laboratorijska instalacija i uslovi pod kojima su izvedeni eksperimenti, a potom će se izvršiti poređenje rezultata numeričke simulacije sa rezultatima merenja na fizičkom modelu.

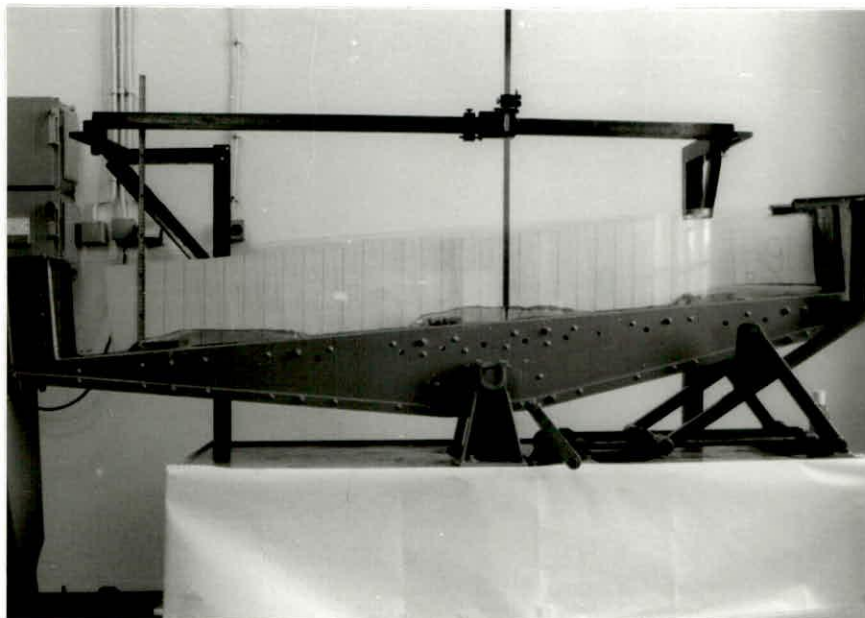
5.1.2.1.1 Opis laboratorijske instalacije

Elementi instalacije su:

- 1° Uzvodni rezervoar čelične konstrukcije sa zmijolikim oštroičnim prelivom. Rezervoar je visinski tako postavljen da obezbeđuje konstantan dotok vode u kanal. Zahvaljujući tome, na celoj dužini kanala moguće je ostvariti kavaziustaljeno tečenje.

¹⁰ Eksperiment izveden tokom izrade ovog Magistarskog rada.

¹¹ Eksperiment D. Komatine [28].



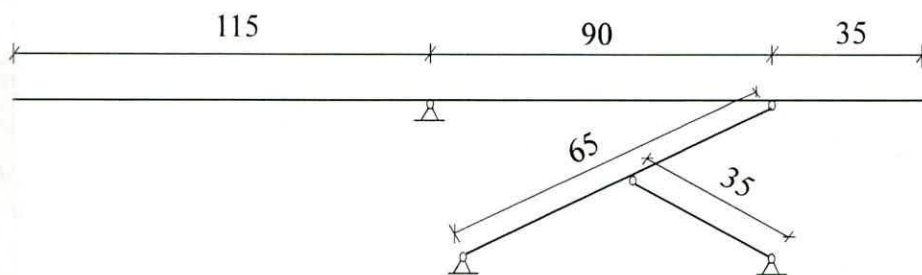
Slika 5.5: Laboratorijska instalacija

2° Laboratorijski kanal čelične konstrukcije. Shematski prikaz mehanizma kanala dat je na slici 5.6. Poprečni presek kanala je pravougaonog oblika. Njegove dimenzije su: $B \times h = 12 \times 24.5$ cm. Dužina kanala iznosi $L_k = 240$ cm. Zidovi su stakleni, a dno je izrađeno od čelika.

3° Mesingani lenjir dužine 150 cm sa mernom iglom koja po njemu klizi iznad dna kanala.

4° Nizvodni rezervoar čelične konstrukcije sa Thomson-ovim prelivom za merenje protoka.

Položaj pragova dimenzija: dužine (u pravcu toka) $L = 9$ cm, širine $B = 12$ cm i visine $P = 3$ cm, je izabran tako da domen strujanja koji je od interesa za ovu analizu — od preseka na uzvodnom pragu do preseka na nizvodnom pragu — "padne" u dohvat merne igle (dužina od 140 cm). Referentna ravan se nalazi iznad dna kanala i odgovara koti "nule" merne igle. Tačnost merne igle 0.1 mm.



Slika 5.6: Shematski prikaz mehanizma laboratorijskog kanala

Nakon fiksiranja pragova ponovo su izmerene njihove visine. Utvrđeno je da je srednja vrednost visine uzvodnog praga $P_u = 3.065\text{cm}$, srednjeg $P_s = 2.998\text{cm}$, a nizvodnog $P_n = 3.033\text{cm}$. Rastojanje između pragova iznosilo je $L_{pu} = L_{pn} = 58.5\text{cm}$.

5.1.2.1.2 Uslovi pod kojima su izvedeni eksperimenti

Preliminarnim ispitivanjima je utvrđeno da je u opsegu od 0.2 l/s do približno 1.0 l/s na opisanom fizičkom modelu, za svaki od pragova, zadovoljen uslov: $0.08 \leq h_1/L \leq 0.33$ ¹².

Merenja su bila podeljena u dve grupe. Eksperimenti prve grupe odnose se na ustaljeno, a eksperimenti druge grupe na neustaljeno tečenje. Za merenja u ustaljenom hidrauličkom režimu korišćene su merna igla na mesinganom lenjiru i merna igla na Thomson-ovom prelivu. Eksperimenti u neustaljenom hidrauličkom režimu zabeleženi su VHS video-kamerom čija je brzina snimanja 25 kvadrata u sekundi. U oba slučaja merenja su sprovedena za tri vrednosti nagiba dna: $S_0 = 7.84\%$, $S_0 = 3.32\%$ i $S_0 = 0.61\%$. Ovi nagibi dna odgovaraju, redom: nepotopljanom prelivanju u burnom režimu, nepotopljenom prelivanju u mirnom režimu i potopljenom prelivanju. U ovom radu biće prikazani samo eksperimenti koji se odnose na tečenje u burnom režimu $S_0 = 7.84\%$, jer tada uzvodno od pragova dolazi do formiranja hidrauličkog skoka. Rezultati ostalih eksperimenata mogu se naći u [11].

Ispitivanja ustaljenog tečenja preko širokih pragova sprovedena su za nekoliko vrednosti protoka iz opsega (0.2; 1.0)l/s. Sa promenom protoka menja se i položaj kritičnog preseka na pragu. Da bi se broj mogućih grešaka prilikom kasnijeg očitavanja video-snimaka smanjio, odlučeno je da se dubine na uzvodnom i nizvodnom pragu mere u fiksnim presecima i da se, zatim, na osnovu tih opdataka formiraju krive protoka koje će poslužiti za proračun graničnih uslova prilikom numeričke simulacije eksperimenata u neustaljenom režimu.

Na Slikama 5.7 i 5.8 prikazane su krive protoka za uzvodni i nizvodni prag pri $S_0 = 7.84\%$. Statistička analiza rezultata merenja je pokazala da se eksperimentalne vrednosti najbolje prilagođavaju stepenoj zavisnosti:

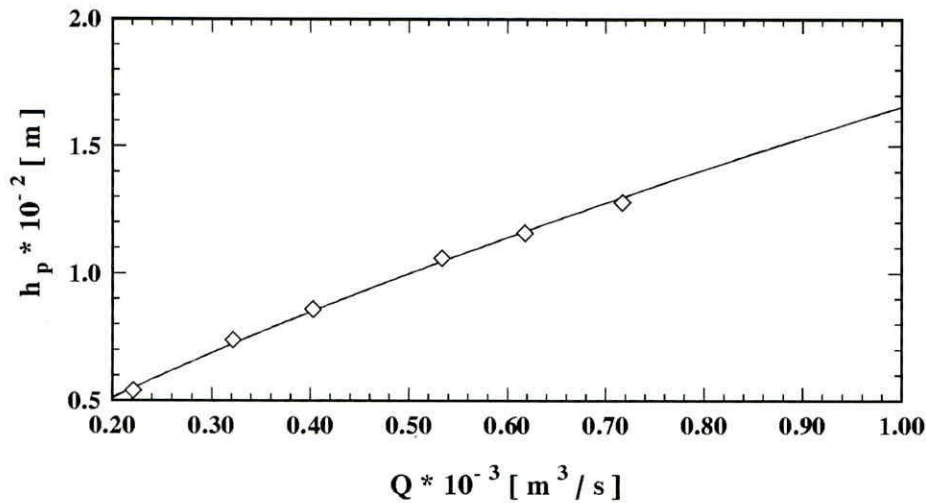
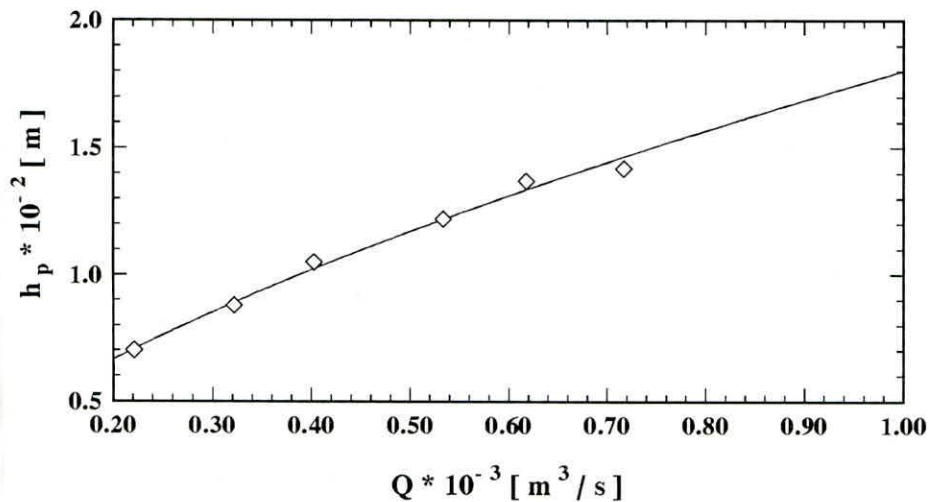
$$Q = a h_p^b \quad (5.1)$$

Vrednosti koeficijenata a i b , određene primenom metode najmanjih kvadrata, date su u Tabeli 5.2.

Tabela 5.2 Vrednosti koeficijenata iz (5.1) za $S_0 = 7.84\%$

	a	b
uzvodni prag	0.3400	1.4160
nizvodni prag	0.7672	1.6497

¹² Uslov koji treba da bude ispunjen da bi se široki prag tretirao kao kratki objekat.

Slika 5.7: Kriva protoka za uzvodni prag pri $S_0 = 7.84\%$ Slika 5.8: Kriva protoka za nizvodni prag pri $S_0 = 7.84\%$

Merenja u ustaljenom hidrauličkom režimu poslužila su i za određivanje ekvivalentne vrednosti Manning-ovog koeficijenta otpora (n). Pošto su dno kanala i zidovi izrađeni od različitih materijala (čelik i staklo), za određivanje tzv. kompozitne rapavosti primenjen je postupak kojeg su definisali Vannoni i Brooks [16]. Utvrđeno je da je vrednost ovog koeficijenta $n_e = n = 0.009 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$.

Prilikom ispitivanja u neustaljenom režimu protok je u svakom eksperimentu manevrom zatvarača na uzvodnom kraju kanala (Slika 5.5) povećavan od neke (početne) vrednosti Q_p do neke (krajnje) vrednosti Q_k . Pri tom se vodilo računa da vrednosti Q_p i Q_k budu iz intervala $[0.2; 1.0] \text{ l/s}$. Na Thomson-ovom prelivu je tokom svakog eksperimenta, radi kontrole, meren nivo, tj. praćena je promena protoka. Na taj način je bilo moguće utvrditi kada je u kanalu ponovo uspostavljeno kvaziustaljeno tečenje.

Svi opiti iz druge grupe su, kao što je već pomenuto, zabeleženi video-kamerom. Očitavanja su izvršena pomoću sistema za analizu video-snimaka. Korišćenjem ovog uređaja određeni su nivogrami u presecima na uzvodnom i nizvodnom pragu (uzvodni i nizvodni granični uslov) i presecima između pragova. Podaci su očitavani sa prostornim korakom

$\Delta x = 5\text{cm}$. Vremenski korak prilikom očitavanja iznosio je $\Delta t = 0.2\text{s}$ — očitavan je svaki peti kvadrat video-trake. Na osnovu zabeleženih nivograma rekonstruisani su položaji linije nivoa u različitim vremenskim trenucima.

5.1.2.1.3 Numerička simulacija tečenja preko širokih pragova u burnom režimu

Pre nego što se opišu uslovi pod kojima je izveden laboratorijski eksperiment i pre nego što se rezultati numeričke simulacije uporede sa rezultatima merenja na fizičkom modelu, ukazaće se na jedan problem. On će biti ilustrovan na hipotetičkom primeru ustaljenog tečenja preko tri široka praga u burnom režimu¹³. Sva tri praga su iste visine ($P = 0.25\text{m}$) i nalaze se na jednakom međusobnom rastojanju ($\Delta L = 300\text{m}$). Poprečni presek kanala je pravougaonog oblika širine 6m . Nagib dna kanala je $S_0 = 0.3\%$. U najuzvodnijem profilu protok je konstantan i iznosi $Q = 20\text{m}^3/\text{s}$, a dubina je jednaka kritičnoj dubini $h_k = 1.04\text{m}$. Početni uslov je: $Q(x, 0) = 20\text{m}^3/\text{s}$ i $h(x, 0) = 2\text{m}$. Ovakav granični uslov ne odgovara ustaljenom tečenju u kanalu pri $S_0 = 0.3\%$ i $Q = 20\text{m}^3/\text{s}$. Ukoliko je primenjena metoda konvergentna, posle određenog broja računskih koraka trebalo bi da se dobije rešenje kod koga se uzvodno od svakog praga formira hidraulički skok i kod koga dubina nizvodno od svakog praga teži normalnoj dubini¹⁴ $h_n = 0.76\text{m}$.

Razmatrana su dva slučaja. U prvom slučaju nije zadato nikakvo ograničenje u pogledu minimalne dozvoljene dubine ($h_{min} = 0$) [18]. Imajući u vidu elementarne principe hidraulike, po kojima dubina u burnom režimu pri $h_k > h_n$ ne može biti manja od normalne dubine, u drugom primeru je usvojeno da je $h_{min} = h_n = 0.76\text{m}$.

Na Slici 5.9 prikazane su linije nivoa koje odgovaraju ustaljenom tečenju preko širokih pragova u burnom režimu. Slika 5.9a odgovara prvom ($h_{min} = 0$), a Slika 5.9b drugom primeru ($h_{min} = h_n = 0.76\text{m}$). Ukoliko se ne zada fizički realno ograničenje u pogledu minimalne dozvoljene dubine, u rešenju se ispred i iza skoka javljaju intenzivne oscilacije (Slika 5.9a) kada se dubina u kanalu približi normalnoj dubini. U slučaju kada je $h_{min} = h_n$ oscilacije ispred skoka još uvek su prisutne, ali su znatno manje izražene nego kada je $h_{min} = 0$. Oscilacije iza skoka su praktično zanemarljive.

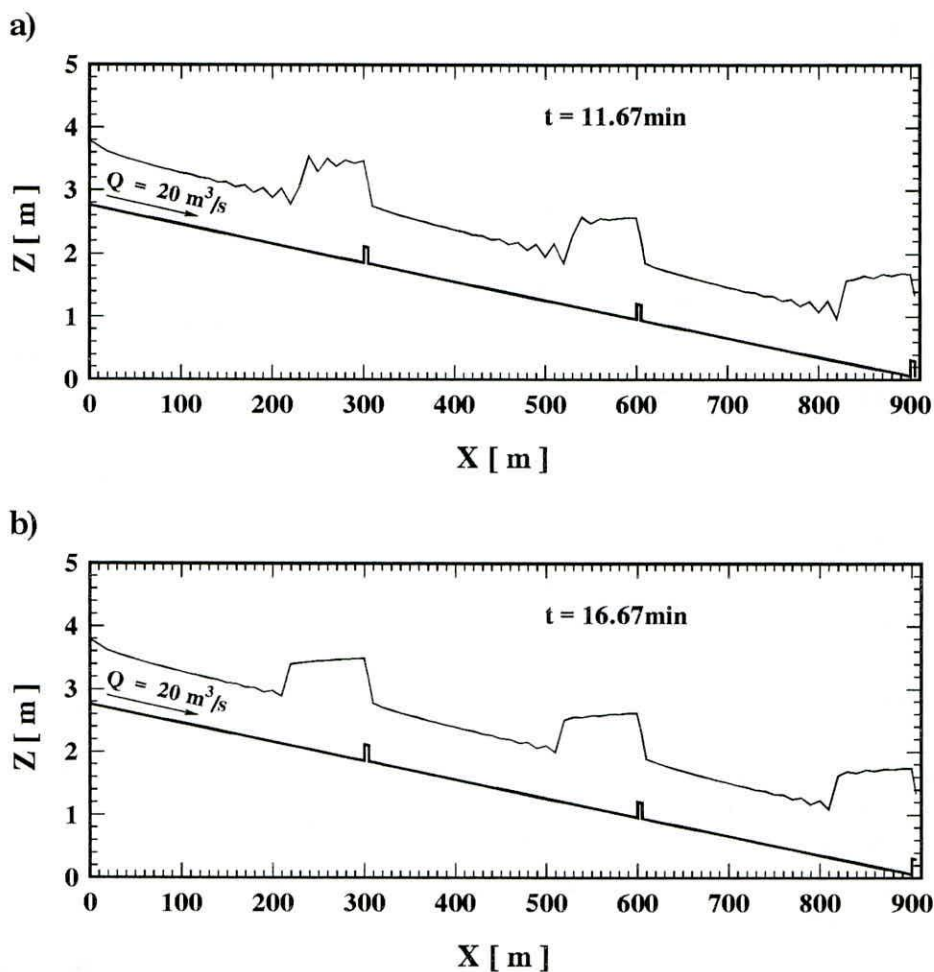
Na osnovu ovog primera može se zaključiti sledeće: da bi se pri simulaciji tečenja u burnom režimu ($h_k > h_n$ i $S_0 > S_{0,kr}$) dobili stabilni rezultati, neophodno je zadati fizički realno ograničenje u pogledu minimalne dozvoljene dubine, tj. zadati da je $h_{min} = h_n$.

U nastavku će biti prikazani rezultati numeričke simulacije laboratorijskog eksperimenta u kome je nagib dna iznosio $S_0 = 7.84\%$. Granični uslovi — nivogrami na uzvodnom i nizvodnom pragu — prikazani su na slikama 5.10 i 5.11. Minimalna dubina je tokom proračuna bila jednaka normalnoj dubini. Usvojeno je da se minimalna (normalna) dubina menja u skladu sa promenom protoka na uzvodnom kraju kanala. Izmerene i sračunate linije nivoa date su u Prilogu 7.

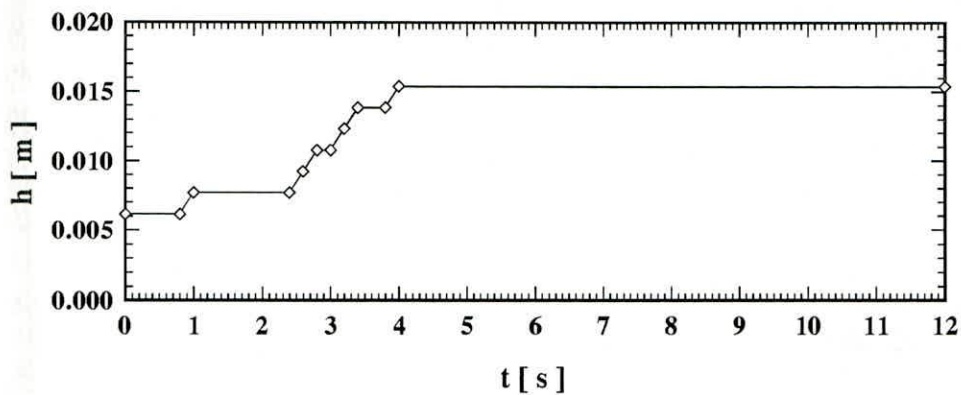
Pre početka laboratorijskog eksperimenta i tokom prvih 0.8s od početka pokretanja zatvarača na uzvodnom kraju kanala, tečenje u kanalu je još uvek ustaljeno. Kvantitativnim poređenjem sračunatih i izmerenih nivoa utvrđeno je da maksimalna razlika u ovom

¹³ Primer je preuzet od Garcia-Navarro et.al [18].

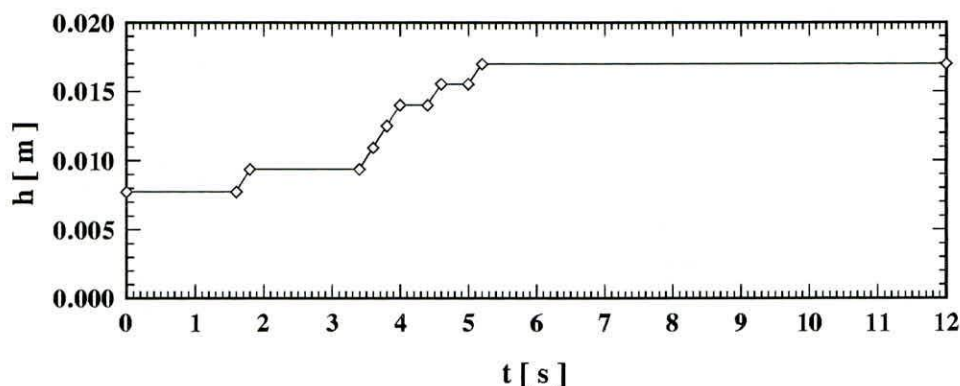
¹⁴ Iz elementarne hidraulike je poznato da dubina u kanalu teži normalnoj dubini kada je $h_k > h_n$ i kada je $S_0 > S_{0,kr}$



Slika 5.9: Ustaljeno tečenje preko širokih pragova u burnom režimu; (a) $h_{min} = 0 \text{ m}$ [18],
 (b) $h_{min} = h_n = 0.76 \text{ m}$



Slika 5.10: Uzvodni granični uslov — nivogram na uzvodnom pragu



Slika 5.11: Nizvodni granični uslov — nivogram na nizvodnom pragu

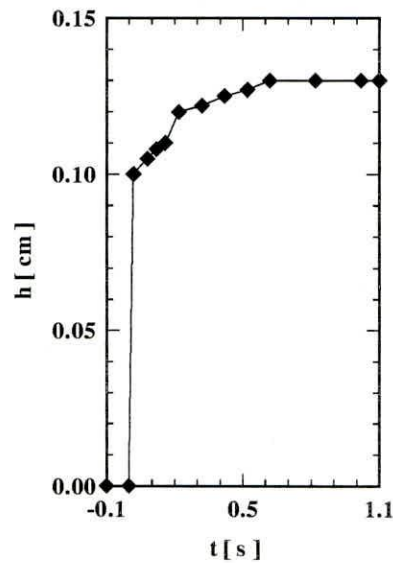
vremenskom intervalu ne prelazi 3.5%. Tokom simulacije u neustaljenom hidrauličkom režimu ova razlika postepeno raste: u intervalu $t \in [1.0; 3.6]$ s ona je još uvek manja od 10%, a na kraju intervala $t \in [3.8; 7.0]$ s iznosi 26.3%. Sedam sekundi posle početka eksperimenta tečenje u kanalu postaje kvaziustaljeno. Sa dijagrama se vidi da su razlike između sračunatih i izmerenih nivoa najveće u preseccima u kojima se ostvaruje prelazak iz burnog u miran režim, tj. u preseccima u kojima se javlja hidraulički skok. Računske linije nivoa u mirnom režimu (uzvodno od pragova) ne odstupaju mnogo od izmerenih — greške u proceni dubine ne prelaze 6%. Bez obzira što je pri protocima većim od približno 0.7 l/s greška u proceni dubine sa nizvodne strane hidrauličkog skoka relativno velika, dijagrami pokazuju da računaska shema MacCormack pri svim protocima tačno locira položaj skoka.

5.1.2.2 Analiza prostiranja talasa sa strmim čelom u prizmatičnom laboratorijskom kanalu

Eksperiment koji je poslužio za verifikaciju opisane računaska sheme izveden je u laboratorijskom kanalu sa promenljivim nagibom dna i staklenim zidovima prekrivenim kvadratnom mrežom ($\Delta x = \Delta z = 1$ cm) [28]. Dužina kanala je 4.5m, a širina 0.15m. Uzvodni deo kanala pregrađen je tablastom ustavom i predstavlja rezervoar. Nizvodni deo kanala dužine 2.25m korišćen je za analizu prostiranja talasa sa strmim čelom koji je izazvan naglim podizanjem ustave. Dubine su merene pomoću membranskih sonde tipa "Druck", a registrovane pomoću elektronskog sistema za prikupljanje i obradu podataka. Sonde su bile postavljene na rastojanju $x = \{0.75, 1.25, 1.75, 2.25\}$ m od ustave. Prostiranje talasa zabeleženo je fotoaparatom čija je brzina snimanja 5snimaka/s. Postojanje kvadratne mreže na zidovima kanala omogućilo je da se dubine sa fotografija očitaju na svakih 5cm.

Ekvivalentna vrednost Manning-ovog koeficijenta određena je kalibracijom u uslovima ustaljenog tečenja i iznosi $n = 0.009 \text{m}^{-1/3} \text{s}$.

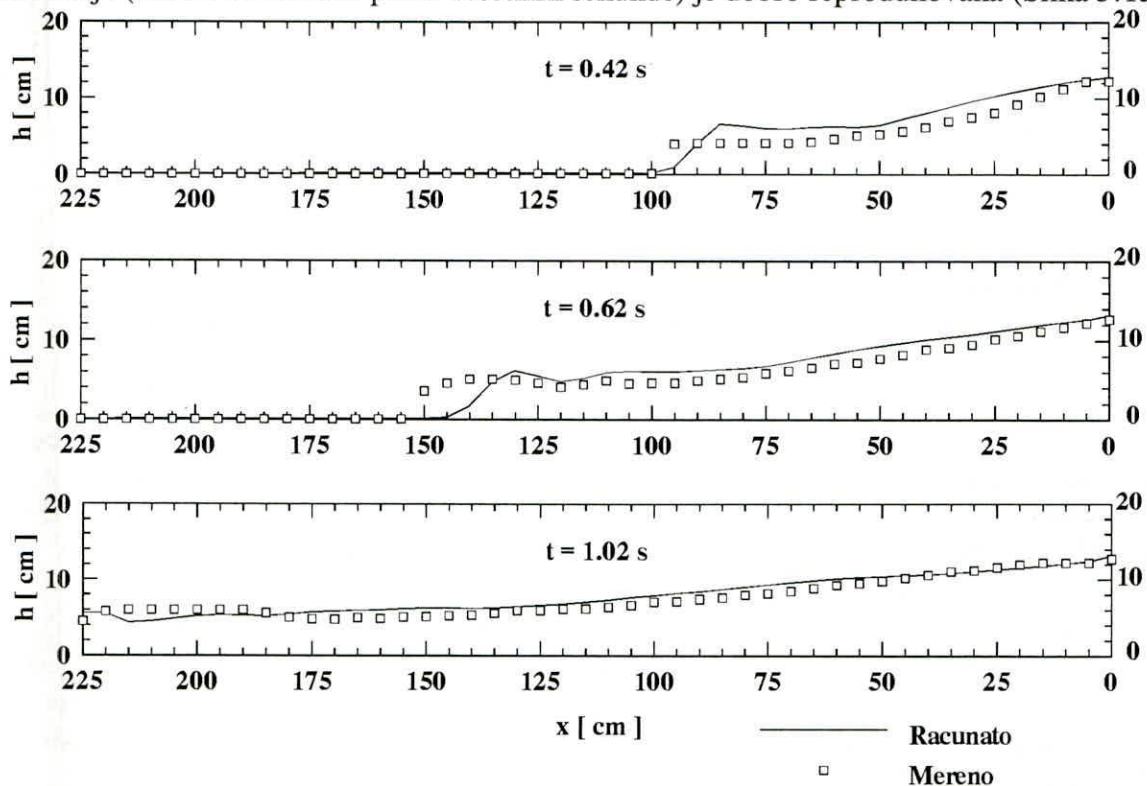
Računski je simuliran eksperiment u kome je početna dubina u rezervoaru iznosila $H = 0.3$ m, a nagib dna kanala 0.1%. Rezultati merenja i proračuna prikazani su na slici 5.13. Uzvodni granični uslov definisan je u skladu sa zakonom podizanja ustave (Slika 5.12). Protok je na ovom kraju računat korišćenjem jednačine skoka. Nizvodni granični uslov definisan je u obliku tzv. "otvorenog" graničnog uslova $\partial Q / \partial x = 0$, a to znači da su vrednosti protoka u poslednja dva polja jednake. Radi lakšeg poređenja sa rezultatima merenja, tokom



Slika 5.12: Nivogram u profilu u kome se nalazi ustava — uzvodni granični uslov

simulacije je korišćen konstantan vremenski korak $\Delta t = 0.01$ s kome odgovara maksimalna vrednost Courant-ovog broja $Cr = 0.6$.

U prvih pet desetinki sekunde računski talas kasni za snimljenim talasom (čelo računskog talasa se nalazi dva polja uzvodno), pa su i razlike dubina ova dva talasa relativno velike (ispod 50%). Kada se položaji čela računskog i snimljenog talasa poklope, razlike dubina u proseku iznose 12%. Dubina na čelu računskog talasa veća je od dubine na čelu snimljenog talasa za 10% što je u granicama tolerancije (Slika 5.13). Brzina prostiranja poremećaja (izuzev u nekoliko prvih desetinki sekunde) je dobro reprodukovana (Slika 5.13).



Slika 5.13: Poređenje izmerenih i sračunatih linija nivoa

5.2 Ravanski modeli — problemi konzervativnosti i oscilatornih rešenja

Problemi konzervativnosti i oscilatornih rešenja pri numeričkom modeliranju ravanskih tokova biće analizirani na hipotetičkom primeru rušenja brane u prizmatičnom kanalu i na primeru numeričke simulacije jednog laboratorijskog eksperimenta [21].

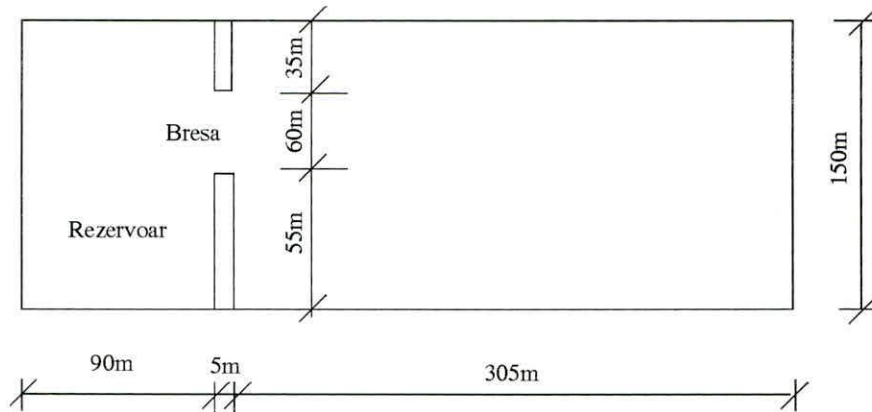
5.2.1 Analiza svojstva konzervativnosti računске sheme

U poglavlju u kome se govori o matematičkom modeliranju ravanskog neustaljenog tečenja rečeno je da jednačine održanja količine kretanja nemaju pun konzervativan oblik zato što sadrže slobodne članove (kojima su obuhvaćene sila gravitacije i sila trenja). Takođe je rečeno da se pretpostavlja da je uticaj ovih članova u odnosu na ostale članove jednačine relativno mali i da bitno ne utiče na svojstvo konzervativnosti računске sheme.

U praktičnim proračunima svojstvo konzervativnosti primenjene sheme se proverava praćenjem promene zapremine (mase) fluida u razmatranoj oblasti strujanja. Isticanje vode iz rezervoara izazvano naglim podizanjem ustave ili trenutnim rušenjem dela brane predstavlja tipičan primer za analizu ove vrste. Naime, zapremina vode u čitavoj računskoj oblasti (koja obuhvata rezervoar uzvodno od pregrade i deo kanala nizvodno od pregrade) u svakom trenutku (sve dok talas ne stigne do izlaznog profila) mora da bude jednaka početnoj zapremini vode u rezervoaru. Međutim, ovaj uslov pri numeričkom modeliranju nije moguće ispoštovati prvo, zbog neizbežne greške zaokruživanja i drugo, zbog prisustva slobodnih članova u jednačinama. Stoga prilikom korišćenja modela baziranog na jednačinama napisanim u konzervativnom obliku treba očekivati neku, u granicama tolerancije prihvatljivu grešku. Kod modela zasnovanog na jednačinama napisanim u nekonzervativnom obliku, shodno onome što je pokazano u Poglavlju 2, treba očekivati znatno veće greške, koje vrlo brzo prekoračuju granice tolerancije (preko 5–10% od početne zapremine).

Provera svojstva konzervativnosti MacCormack-ove sheme sprovedena je na hipotetičkom primeru delimičnog rušenja brane čija dužina iznosi 150m. Pretpostavlja se da je došlo do trenutnog formiranja breše na dužini od 60m (Slika 5.14). Dubina vode u rezervoaru iznosila je $h_1 = 3\text{m}$. Dubina vode nizvodno od brane — h_2 varirana je u opsegu od 0.001m do 2m. pri čemu je odnos dubina h_1/h_2 bio {1.5; 2; 3; 6; 10; 15; 20; 30; 60; 100; 150; 200; 300; 600; 1000; 1500; 3000}. Dno kanala nizvodno od brane je horizontalno. Razmatrana su dva slučaja. U prvom slučaju rešavani su sistemi homogenih jednačina (zanemarene su sila trenja i sila težine), a u drugom sistemi nehomogenih jednačina. Usvojena vrednost Manning-ovog koeficijenta u drugom slučaju iznosila je $n = 0.04\text{m}^{-1/3}\text{s}$.

Razmatrana oblast "prekrivena" je kvadratnom mrežom sa 2400 polja. Korišćen je prostorni korak $\Delta x = \Delta y = 5\text{m}$. Vremenski korak je tokom proračuna bio promenljiv, a računat je iz uslova stabilnosti (4.143). U početnom trenutku obe komponente brzine u svim poljima su jednake nuli osim u profilu otvora gde je komponenta brzine normalna na uzdužnu osovinu pregrade zadata na osnovu teorijskog rešenja linijskog problema: $u = 8/27 \sqrt{gh_1}$, i $v = 0$. Početna dubina u profilu otvora takođe je zadata na osnovu teorijskog rešenja: $(4/9)h_1$.



Slika 5.14: Hipotetički slučaj trenutnog delimičnog rušenja brane — računaska oblast

Slike u Prilozima 8 do 11 prikazuju zakon promene relativne greške zapremine ($\Delta V/V = (V_0 - V_i)/V_0$) u funkciji broja računskih koraka (vremena proteklog od trenutka rušenja dela brane) za različite početne odnose dubina uzvodno i nizvodno od brane (h_1/h_2). Zavisnosti $\Delta V/V = f(\text{NDT})$ su nacrtane samo do trenutka u kome talas stiže do nizvodnog profila. Kada čelo talasa zahvati poslednji niz polja nizvodna granica počinje da utiče na rezultate proračuna, a samim tim i na relativnu grešku zapremine, pa dobijeni rezultati nisu više merodavni za analizu svojstva konzervativnosti računске sheme.

Prilozi 8 i 10 se odnose na rezultate dobijene primenom diskretizacionih jednačina u nekonzervativnom obliku, a Prilozi 9 i 11 na rezultate dobijene primenom jednačina u konzervativnom obliku. Kada se rešava sistem nehomogenih jednačina, proračun u slučaju korišćenja diskretizacionih jednačina u nekonzervativnom obliku nije moguć pri vrednostima početnog odnosa $h_1/h_2 > 600$. U svim ostalim slučajevima gornja granica je $h_1/h_2 = 3000$.

Relativna greška zapremine u proračunima baziranim na rešavanju jednačina u nekonzervativnom obliku iz koraka u korak (kako vreme odmiče) progresivno raste. Greška raste i sa povećanjem vrednosti početnog odnosa h_1/h_2 , ali samo do vrednosti $h_1/h_2 = 100$ za sistem homogenih jednačina (Prilog 8a — maksimalna greška za $h_1/h_2 = 100$ je oko 12%) odnosno, do vrednosti $h_1/h_2 = 150$ za sistem nehomogenih jednačina (Prilog 10a — maksimalna greška za $h_1/h_2 = 150$ je oko 17%). Nakon toga, greška se smanjuje (Prilozi 8b i 8c — maksimalna greška ne prelazi 11.5% i Prilog 10b — maksimalna greška za $h_1/h_2 = 200$ je oko 14%). Pri vrednostima odnosa $h_1/h_2 > 100$ relativna greška zapremine za sistem homogenih jednačina je praktično nezavisna od vrednosti odnosa h_1/h_2 . Pri početnoj vrednosti $h_1/h_2 < 15$ za sistem homogenih jednačina (Prilog 8), odnosno pri početnoj vrednosti $h_1/h_2 < 3$ za sistem nehomogenih jednačina (Prilog 10) greška se tokom celog proračuna nalazi u granicama tolerancije (ispod 10%). Za vrednosti h_1/h_2 veće od petnaest, odnosno veće od tri greška je samo u početku u dozvoljenim granicama. Maksimalna greška je uvek veća od 10%.

U proračunima baziranim na rešavanju jednačina u konzervativnom obliku maksimalna vrednost relativne greške zapremine, i u slučaju korišćenja homogenih i u slučaju korišćenja nehomogenih jednačina, ne premaša granice tolerancije ni za jednu vrednost početnog odnosa h_1/h_2 . Pri odnosu $h_1/h_2 > 30$ greška u jednom vremenskom intervalu (između pedesetog i devedesetog računskog koraka) opada (sistem homogenih jednačina — Prilog 9b), a zatim

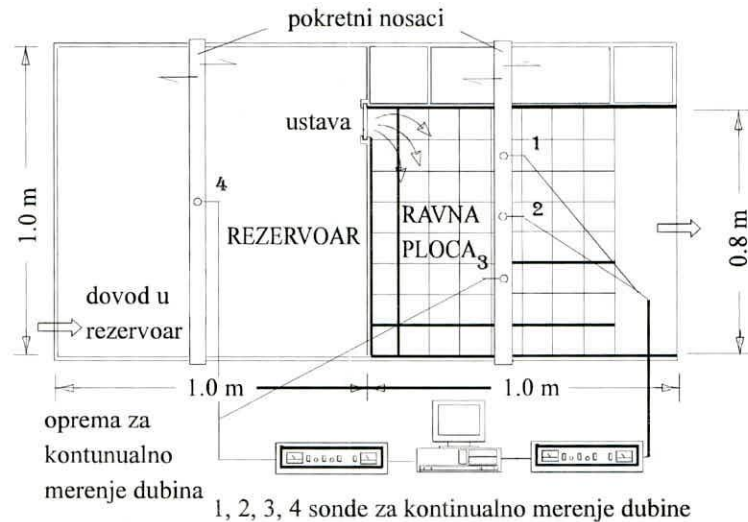
ponovo raste. Pri odnosu $h_1/h_2 > 3$ dijagrami relativne greške, koji se dobijaju rešavanjem sistema nehomogenih jednačina, imaju i granu stagnacije duž koje je vrednost greške približno konstantna. Kao i u slučaju primene jednačina u nekonzervativnom obliku, relativna greška raste sa povećanjem vrednosti početnog odnosa dubina u rezervoaru i nizvodno od brane i to do $h_1/h_2 = 100$ za sistem homogenih jednačina (Prilog 9b — $\max \Delta V/V = 2.8\%$ za $h_1/h_2 = 100$), odnosno do $h_1/h_2 = 200$ za sistem nehomogenih jednačina (Prilog 11b — $\max \Delta V/V = 5.2\%$ za $h_1/h_2 = \{200; 300; 600\}$). Nakon toga, greška se smanjuje (Prilog 9c — $\max \Delta V/V \sim 2\%$ za $h_1/h_2 = 3000$ i Prilog 11c — $\max \Delta V/V = 3.8\%$ za $h_1/h_2 = \{1000; 1500; 3000\}$). Takođe se zapaža da je u opsezima $h_1/h_2 \in (200, 600)$ i $h_1/h_2 \in (1000, 3000)$ relativna greška zapremine, koja se dobija rešavanjem nehomogenih jednačina, praktično nezavisna od vrednosti odnosa h_1/h_2 .

Rezultati numeričkog eksperimenta pokazuju da se korišćenjem nehomogenih jednačina matematičkog modela, tj. uzimanjem u obzir sile trenja u dinamičkim jednačinama, dobija nešto veća relativna greška promene zapremine nego u slučaju primene jednačina u punom konzervativnom obliku. Maksimalna greška prilikom rešavanja diskretizacionih jednačina u nekonzervativnom obliku veća je za približno 5%, a prilikom rešavanja diskretizacionih jednačina u konzervativnom obliku za 2%. Rezultati, takođe, nedvosmisleno ukazuju da, u problemima u kojima pojam tačnosti, tj. pouzdanosti rešenja pre svega podrazumeva očuvanje (konzervaciju) zapremine (mase) fluida u razmatranoj oblasti strujanja, jedino korišćenje numeričkog modela baziranog na diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku može da obezbedi postizanje zahtevane tačnosti.

5.2.2 Analiza uticaja faktora veštačke viskoznosti na veličinu amplitude numeričkih oscilacija i brzinu prostiranja talasa sa strmim čelom

Za pomenutu analizu korišćeni su rezultati merenja na fizičkom modelu [21] (Slika 5.15). Model se sastojao od rezervoara dimenzija $1.1 \times 1.0 \text{ m}^2$ i horizontalne ploče nizvodno od rezervoara, čije su dimenzije $0.8 \times 1.0 \text{ m}^2$. U gornjem desnom uglu horizontalne ploče, u ravni zida (kojim je rezervoar odvojen od ploče) nalazio se otvor širine 0.1m. Za zatvaranje otvora korišćena je tablasta ustava. Naglim podizanjem ustave omogućeno je isticanje vode iz rezervoara i formiranje talasa sa strmim čelom. Dubine su u izabranim tačkama merene pomoću kapacitivnih sondi prečnika 2mm. Zbog efekta stojećeg talasa, koji se u burnom režimu formira neposredno ispred sonde, pre merenja je izvršena njihova kalibracija u laboratorijskom kanalu. Prostiranje talasa sa strmim čelom zabeleženo je fotografskim aparatom.

Numerički je simuliran eksperiment u kome je dubina vode u rezervoaru iznosila $h_1 = 0.15 \text{ m}$, a rapavost dna $n = 0.01 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$. Horizontalna projekcija razmatrane oblasti strujanja — rezervoara i ploče nizvodno od rezervoara prekrivena je računskom mrežom sa 3360 polja. Dimenzije polja — prostorni koraci u x i y pravcu iznosili su $\Delta x = \Delta y = 0.025 \text{ m}$. Na čvrstim konturama graničnim uslovom je zadato da je komponenta brzine upravna na konturu jednaka nuli ($u = 0$ za konturu koja se pruža u y pravcu odnosno, $v = 0$ za konturu koja se pruža u x pravcu). U početnom trenutku komponente brzine u x i y pravcu — u i v su u svim poljima, izuzev u poljima koja se nalaze u profilu otvora, jednake nuli. U profilu otvora komponenta brzine upravna na uzdužnu osu otvora (y pravac) zadata je na osnovu teorijskog rešenja linijskog problema: $u = 8/27 \sqrt{gh_1}$, dok je komponenta u pravcu y : $v = 0$.



Slika 5.15: Shema laboratorijske instalacije za analizu prostiranja talasa sa strmim čelom [24]

Početna vrednost dubine u profilu otvora takođe je zadata na osnovu teorijskog rešenja: $(4/9)h_1$, a u svim poljima koja pripadaju ploči nizvodno od rezervoara, iz razloga čisto numeričke prirode, zadata je neka minimalna vrednost dubine od 0.001m.

Numerička simulacija je sprovedena u dve etape. U prvoj etapi korišćene su diskretizacione jednačine u konzervativnom obliku, a u drugoj, diskretizacione jednačine u nekonzervativnom obliku. Utvrđeno je da za datu vrednost početnog odnosa dubina u rezervoaru i nizvodno od rezervoara — $h_1/h_2=150$ proračun zasnovan na korišćenju jednačina u konzervativnom obliku nije moguć bez "dodavanja" veštačke difuzije. Vrednost faktora veštačke viskoznosti k , kojim se reguliše nivo numeričke disipacije (difuzije), varirana je u granicama od 0.01 do 0.3. Rezultati su "filtrirani" posle svaka četiri računski koraka. Pokazalo se da je za vrednosti $k < 0.02$, $k \in [0.16; 0.22]$ i $k > 0.26$ proračun već posle nekoliko računskih koraka nemoguć. U opsegu od $k=0.02$ do $k=0.15$ dobijena rešenja su nestabilna na šta jasno ukazuju oscilacije na nivogramima u Prilozima 12a, 12b, 12c i 12d (položaji izabranih polja u xOy ravni prikazani su u Prilozima 14 i 15). Sa povećanjem vrednosti faktora k amplituda oscilacija se tokom vremena smanjuju, ali se amplituda početne oscilacije povećava (u polju 621 za $k=0.02$ visina čela talasa iznosi oko 0.020m, za $k=0.05$ približno 0.024m, za $k=0.10$ takođe 0.024m, a za $k=0.15$ visina čela je 0.025m). Na nivogramima je, takođe, uočljivo i tzv. "podbacivanje" u oceni dubine nekoliko trenutaka pre nailaska čela talasa.

Nivogrami u Prilozima 12e, 12f i 12g pokazuju da je za $k = \{0.24; 0.25; 0.26\}$ dubina u izabranim poljima posle prolaska čela talasa dobro reprodukovana (maksimalne greške po apsolutnoj vrednosti se javljaju u poljima 613 i 1253 i iznose, redom, oko 13% odnosno, 16%; u ostalim poljima greške su ispod 6%). Pre nailaska čela talasa, međutim, u svim poljima, izuzev polja 613, dolazi do blagog povećanja dubine. Ovo povećanje je čisto numeričke prirode, tj. posledica je uvođenja u model veštačke disipacije koja teži da dobijeno rešenje što više rasplina. Oscilacije nivoa na čelu talasa, kao što je rečeno u potpoglavlju 4.3, nije moguće eliminisati.

U nastavku će se prvo izvršiti kvalitativna analiza uticaja faktora veštačke viskoznosti na visinu čela talasa za k iz intervala $[0.02; 0.15]$. Potom će se odrediti greška u proceni visine čela talasa samo za vrednosti k koje daju stabilna rešenja — $k = \{0.24; 0.25; 0.26\}$.

Poređenjem nivograma koji pripadaju istom poprečnom profilu¹⁵ (Prilozi 12a do 12d) za $k \in (0.02; 0.15)$ i međusobnim poređenjem nivograma po poprečnim profilima konstatuje se sledeće:

- 1° U profilu udaljenom 0.3m od uzdužne ose otvora povećanje faktora k u intervalu od $0.02 \div 0.15$ ne utiče na povećanje visine čela talasa samo u polju 933.
- 2° U poprečnom profilu udaljenom 0.5m od uzdužne ose otvora povećanje faktora k preko vrednosti 0.05 utiče na povećanje amplitude početne oscilacije samo u poljima 941, 1261 i 1581.
- 3° U poprečnom profilu udaljenom 0.7m od uzdužne ose otvora povećanje faktora k preko 0.05 utiče na povećanje visine čela talasa samo u poljima 1269 i 1389.

Na osnovu prethodnih konstatacija može se zaključiti da je uticaj promene vrednosti faktora k na visinu čela talasa u poljima sa manjom koordinatom y (poljima koja se nalaze bliže podužnoj osi otvora) manji ukoliko je koordinata x tog polja (udaljenost od otvora u pravcu x) veća.

Greške u proceni visine čela talasa u izabranim poljima za tri vrednosti faktora veštačke viskoznosti date su u Tabeli 5.3.

Tabela 5.3

Polje	$100 (h_{cela}^{mer} - h_{cela}^{rac}) / h_{cela}^{mer} \quad [\%]$		
	$k=0.24$	$k=0.25$	$k=0.26$
613	-36	-46	-48
933	-151	-146	-252
1253	-305	-279	-293
1573	-295	-273	-250
621	-126	-134	-141
641	-189	-206	-207
1261	-254	-234	-236
1581	-230	-242	-238
629	-161	-192	-177
949	-249	-342	-265
1269	-333	-418	-365
1589	-269	-291	-321

Vrednosti iz prethodne tabele pokazuju da greška u proceni visine čela talasa raste sa povećanjem udaljenosti polja od poprečne ose otvora.

Računski talas se prostire većom brzinom od talasa na modelu (Prilozi 12e, 12f i 12g i Prilog 14). Slike u Prilogu 14 prikazuju prostiranje talasa u xOy ravni. Vidi se da je računski talas izduženiji — brzina njegovog prostiranja u longitudinalnom — x -pravcu veća je od odgovarajuće brzine prostiranja talasa na modelu. U tačkama koje leže na x -osi talas

¹⁵ Dijagrami pod 1), 2) i 3) u Prilozima 12 i 13 predstavljaju nivograme u tačkama poprečnih profila udaljenih, redom, 0.3m, 0.5m i 0.7m od poprečne ose otvora (x -pravac).

dobijen numeričkom simulacijom prednjači za 0.1s ispred čela talasa na modelu (položaj tačke računskog talasa na x -osi u $t_{rac}=0.3s$ poklapa se sa položajem tačke snimljenog talasa na x -osi u trenutku $t_{mer}=0.4s$). Brzina prostiranja računskog talasa u lateralnom — y -pravcu tokom vremena se smanjuje. U y -pravcu talas najpre prednjači za 0.2s (položaj tačke na y -osi u $t_{rac}=0.1s$ talasa dobijenog numeričkom simulacijom poklapa se sa položajem tačke modeliranog talasa u $t_{mer}=0.3s$), brzina se potom smanjuje i on prednjači za 0.1s, da bi pri $t_{rac}=0.6s$ kasnio za oko 0.05s za talasom na modelu.

U drugoj etapi, u kojoj su za numeričku simulaciju korišćene diskretizacione jednačine u nekonzervativnom obliku, pokazalo se da je proračun moguć i bez uvođenja veštačke difuzije. Da bi se mogla izvršiti analiza uticaja faktora veštačke viskoznosti na osnovne karakteristike talasa sa strmim čelom, proračun je sproveden i za četiri vrednosti faktora k : {0.02; 0.05; 0.10; 0.15}. Nivogrami u izabranim tačkama prikazani su u Prilogu 13. Odmah se uočava da su računске dubine u svim poljima posle prolaska čela talasa manje od izmerenih. Najveće razlike u proceni dubine (po apsolutnoj vrednosti) su u poljima 1573, 1581 i 1589, tj. u najudaljenijem redu polja paralelnom sa poprečnom osom otvora. U njima su pri manjim vrednostima faktora veštačke viskoznosti — $k=0.0$ i $k=0.02$ — uočljive oscilacije nivoa posle prolaska čela talasa. Zbog toga su i greške u oceni dubine veće — kreću se i do 50%. Pri većim vrednostima faktora k oscilacije se postepeno prigušuju (pri $k=0.10$ se potpuno gube), pa su i greške u proceni dubine manje — ispod 15%. U ostalim poljima greške ne prelaze 13%. Oscilacije na čelu talasa se ne mogu eliminisati. U narednoj tabeli su date greške u proceni visine čela talasa u izabranim poljima.

Tabela 5.4

Polje	$100 (h_{cela}^{mer} - h_{cela}^{rac}) / h_{cela}^{mer} \quad [\%]$				
	$k=0.0$	$k=0.02$	$k=0.05$	$k=0.10$	$k=0.15$
613	-49	-1	-6	-118	-52
933	-175	-155	-214	-265	-253
1253	-302	-280	-321	-357	-331
1573	-241	-267	-291	-306	-372
621	-14	-15	-89	-111	-85
641	-170	-383	-296	-168	-381
1261	-111	-79	-289	-270	-260
1581	-213	-173	-277	-281	-256
629	-48	-95	-216	-166	-249
949	-185	-209	-138	-295	-286
1269	-45	-185	-244	-231	-272
1589	-309	-265	-363	-363	-306

Neki opštiji zaključak o uticaju faktora veštačke viskoznosti na visinu čela talasa s obzirom na položaj polja u xOy ravni u ovom slučaju se ne može dati. Na osnovu rezultata analize prikazanih u Tabeli 5.4 i nivogramima u Prilogu 13 može se jedino konstatovati da su posledice povećanja faktora k najveće u poljima 941, 1253, 1573 i 1589.

Talas dobijen numeričkom simulacijom uz korišćenje diskretizacionih jednačina u nekonzervativnom obliku kasni za snimljenim talasom. Prilozi 13 i 15 pokazuju da greška

u proceni položaja čela talasa raste sa povećanjem udaljenosti polja od poprečne ose otvora. Zaostajanje za snimljenim talasom se smanjuje pri većim vrednostima faktora k . Grafički prikaz prostiranja talasa u xOy ravni (Prilog 15) pokazuje da su, neposredno posle podizanja ustave, brzine prostiranja računskog talasa u longitudinalnom — x -pravcu i lateralnom — y -pravcu približno jednake ($c_x/c_y=1\div 1.25$), tj. da oblik talasa u horizontalnoj projekciji približno odgovara četvrtini kružnice. Tokom vremena vrednost odnosa c_x/c_y se povećava — projekcija talasa u xOy ravni postaje izduženija.

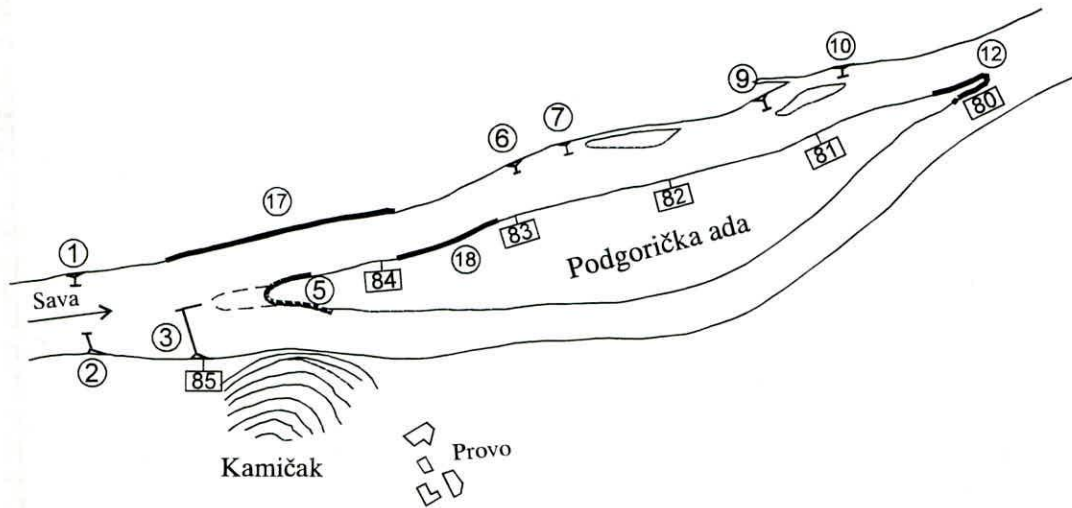
U Prilogu 16 prikazane su površina vodenog ogledala, izolinije dubina i vektori brzina u trenutku $t=0.4s$ za numerički model baziran na jednačinama u konzervativnom i numerički model baziran na jednačinama u nekonzervativnom obliku. Njihovim poređenjem sa fotografijom talasa na fizičkom modelu koja, takođe, odgovara trenutku $t=0.4s$, zaključuje se da model baziran na jednačinama u konzervativnoj formi u pogledu položaja i oblika talasa u xOy ravni daje fizički realna rešenja.

Na osnovu svega iznetog, može se zaključiti da se korišćenjem diskretizacionih jednačina u nekonzervativnom obliku izaziva ne samo veći gubitak zapremine (mase) fluida, već se i fizički potpuno pogrešno reprodukuje prostiranje talasa sa strmim čelom. Rezultati numeričke simulacije su potvrdili stav iznet u teorijskom delu po kome upotreba jednačina u nekonzervativnom obliku može da da diskontinualna rešenja, ali ta rešenja nisu fizički realna.

5.3 Provera modela na jednom prirodnom vodotoku

Svi prethodni primeri odnosili su se na proračun u uslovima pojednostavljene geometrije (pravolinijske deonice, pravougaoni poprečni preseki i horizontalno ili blago nagnuto dno). Trasa prirodnog vodotoka je nepravilnog oblika što izaziva teškoće pri korišćenju pravougaonih/kvadratnih računskih mreža. (Da bi se što bolje aproksimirala kontura nepravilnog oblika (krivine, rukavci), potrebno je koristiti male prostorne korake Δx i Δy .) Pored toga, konfiguracija rečnog dna može biti veoma složena (velike varijacije kota dna i u poprečnim i u uzdužnim presecima), što predstavlja izuzetno težak numerički test za bilo koji numerički model ravanskog (u horizontalnoj ravni dvodimenzionog) toka. Stoga će se u ovom potpoglavlju sagledati mogućnost primene predloženog računskog modela u rešavanju problema iz hidrotehničke prakse na primeru jednog prirodnog vodotoka. Analiziraće se strujanje u blizini napera sa glavom izgrađenog na sektoru "Kamičak" u donjem toku reke Save.

Sektor "Kamičak" (km 80—86) je poznat kao najnepovoljniji sektor za plovidbu u ovom delu toka. On se nalazi nizvodno od Šapca i pripada tzv. Šabačkom plićaku koji se prostire od Drenovačke do Podgoričke ade (km 80—109). Sektor je dobio naziv po brdu Kamičak koji se nalazi na desnoj obali reke u zoni gornjeg špica Podgoričke ade (Slika 5.16). Podgorička ada deli rečni tok na dva rukavca dužine oko 5km. Na uzvodnom kraju jednog rukavca korito je delimično formirano u stenskom masivu (krečnjak i pešćar), tako da je ovaj rukavac morfološki stabilan. Korito levog rukavca formirano je u litološkim članovima sačinjenim od peska i sitnih frakcija šljunka, tako da je, zavisno od hidroloških prilika i režima protoka, podložno deformaciji.



Slika 5.16: Rešenje uređenja sektora "Kamičak" [20]

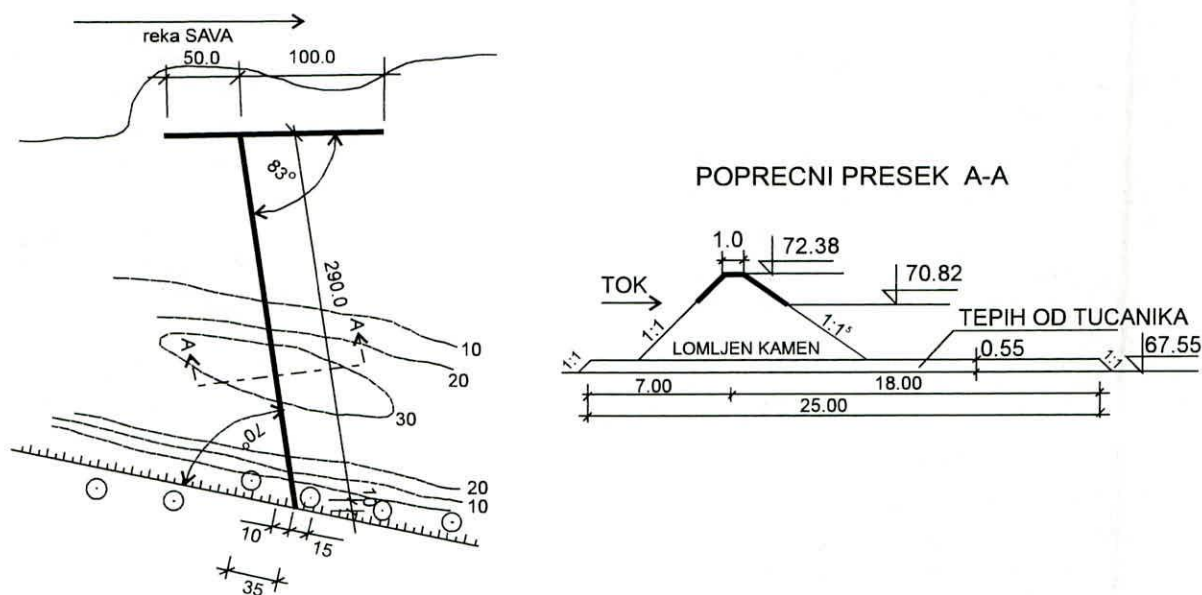
Plovidba se do skoro odvijala kroz desni rukavac. Međutim, zbog nepovoljnih plovidbenih uslova u periodu malih voda, odlučeno je da se plovni put izmesti iz desnog u levi rukavac. Regulaciona trasa na sektoru "Kamičak" prikazana je na Slici 5.16.

Pri protocima koji odgovaraju vodostajima nižim od 1m iznad niskog plovidbenog nivoa (EN) naper sa glavom (u zoni gornjeg špica Podgoričke ade — građevina 3 na Slici 5.16) obezbeđuje koncentrisanje toka u levi rukavac. Osnovne dimenzije i dispozicija ove građevine prikazane su na Slici 5.17.

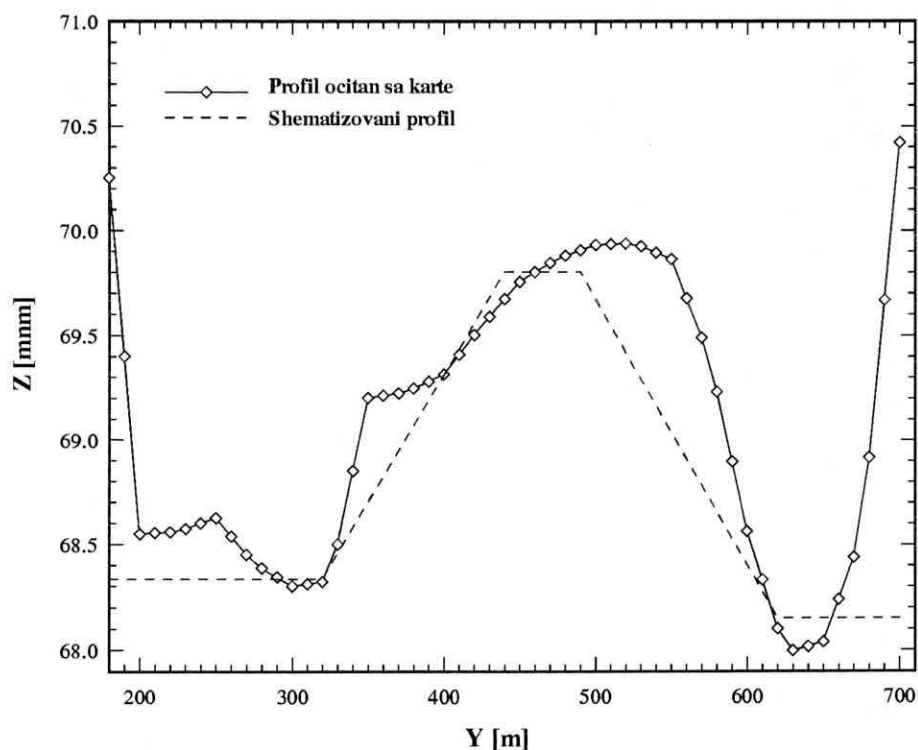
U ovom radu je analizirano ravansko ustaljeno tečenje na deonici dužine 600m (320m uzvodno i 280m nizvodno od napera). Računska mreža je postavljena tako da se trup građevine poklapa sa pravcem y -ose. Mreža ima 3374 polja. Dimenzije polja — prostorni koraci u x i y -pravcu iznosili su $\Delta x = \Delta y = 10\text{m}$. Vremenski korak je računat iz uslova stabilnosti (4.143). Topografija dna i gornjeg špica Podgoričke ade prikazani su u Prilogu 17. Pošto se u ovom slučaju radi samo o kvalitativnoj analizi, usvojena je vrednost Manningovog koeficijenta otpora od $0.04\text{m}^{-1/3}\text{s}^{16}$. Na čvrstim konturama graničnim uslovom je zadato da je komponenta brzine upravna na konturu jednaka nuli ($u=0$ za konturu koja se pruža u y -pravcu odnosno, $v=0$ za konturu koja se pruža u x -pravcu). U početnom trenutku komponente brzine u x i y -pravcu — u i v — su u svim poljima jednake nuli. Dubine u trenutku $t=0$ odgovaraju dubinama očitanim sa Situacionog plana Uređenja sektora "Kamičak" za plovidbu km 80—86 (R 1:5000) — Prilog 17. Reč je o dubinama koje su redukovane u odnosu na niski plovni nivo koji odgovara vodostaju od -43cm na vodomernoj stanici Šabac. Protok je u uzvodnom profilu linearno povećavan od $0\text{m}^3/\text{s}$ do $350\text{m}^3/\text{s}$. Primenom programa REKE2¹⁷ određena je raspodela protoka po segmentima ulaznog profila, a potom i komponente brzine u x i y -pravcu (uzvodni granični uslov). Dubine u svim poljima nizvodnog profila se nisu menjale tokom čitavog proračuna (nizvodni granični uslov).

¹⁶ Otpori u aluvijalnim tokovima su reda veličine $0.04\text{m}^{-1/3}\text{s}$

¹⁷ Autor M. Jovanović



Slika 5.17: Osnovne dimenzije i dispozicija napera [20]



Slika 5.18: Poprečni presek na sektoru "Kamičak"

Zbog velikih nagiba u x i y -pravcu u zonama desne i leve obale odnosno, zbog velike varijacije u dubini između susednih računskih polja, proračun u uslovima realne batimetrije nije bio moguć. Stoga je odlučeno da se realno korito aproksimira dvogubim trapeznim koritom sa vertikalnom levom i desnom obalom (Slika 5.18). Prosečni pad u x -pravcu (u

pravcu toka) iznosio je 2%. U ovom slučaju proračun je sproveden bez ikakvih teškoća.

Slike u Prilogu 18 prikazuju polje brzina posle $t=10.7\text{min}$, $t=21.4\text{min}$ i $t=32.2\text{min}$. Vidi se da je tečenje posle $t=21.4\text{min}$ postalo ustaljeno. Prisustvo napera, kao što se i očekivalo, izaziva:

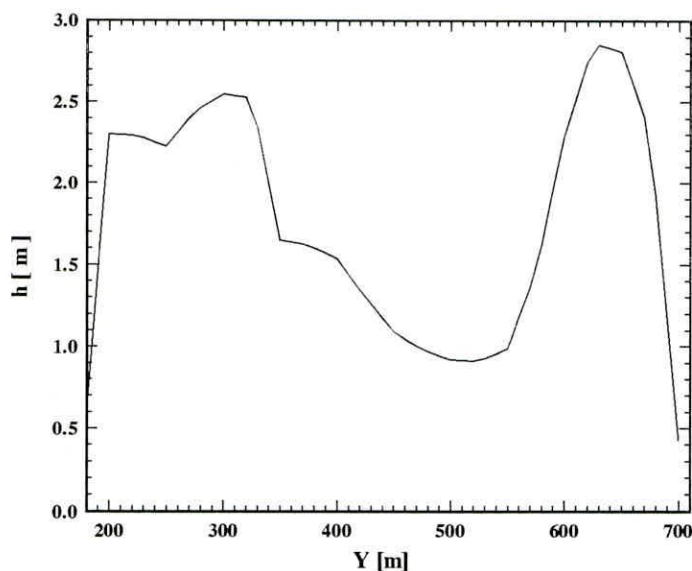
- 1° usporavanje toka ispred napera (mali intenzitet brzine i pojava vrtloga);
- 2° skretanje toka od desne ka levoj obali i
- 3° koncentrisanje toka u levi rukavac (intenzitet vektora brzine u levom rukavcu je nekoliko puta veći od intenziteta brzine u desnom rukavcu).

Dobijeni rezultati pokazuju da se predloženi numerički model zasnovan na računskoj shemi MacCormack, uz odgovarajuće uprošćavanje geometrije (shematizovanje poprečnih preseka), može iskoristiti za kvalitativnu analizu efekata planiranih regulacionih radova.

Razlozi zbog kojih se primenom opisanog modela u uslovima realne batimetrije ne dobijaju stabilna rešenja su sledeći:

- 1° U jednačinama održanja mase (3.28) i (3.52) figuriše dubina h . Njena se promena po širini poprečnog preseka i po dužini toka opisuje poligonálnom — "testerastom" linijom, a ne neizlomljenom — "glatkom" linijom (Slika 5.19) i to predstavlja jedan od uzroka nestabilnosti primenjene računске sheme. Ovaj problem bi se mogao rešiti ukoliko bi se u jednačini kontinuiteta dubina h zamenila apsolutnom kotom $H=h+z$, jer su promene kote H u longitudinalnom i u lateralnom pravcu znatno blaže i mogu se opisati glatkom krivom.
- 2° Numerička nekompatibilnost između članova $0.5gh^2$ u vektorima fluksova \mathbf{E} i \mathbf{F} i nagiba dna S_{0x} i S_{0y} [30].

Pojam "kompatibilnost članova $0.5gh^2$ (kojima se obuhvata uticaj sile pritiska) i članova ghS_{0x} i ghS_{0y} (kojima se obuhvata uticaj sila težine)" objasniće se posmatranjem proizvoljne konačne zapremine fluida koji miruje. To može, na primer, da bude voda u akvarijumu sa dnom nepravilnog oblika. Iz Hidrostatike je poznato da je sila kojom voda deluje na dno jednaka težini vode koja je smeštena između čvrste konture dna i površine vodenog ogledala. Takođe je jasno da do pokretanja — strujanja vode može da dođe samo pod uticajem



Slika 5.19: Promena dubine po širini poprečnog preseka

spoljašnjih sila. Međutim, u dinamičkim jednačinama numeričkog modela — diskretizacionim jednačinama — (4.72), (4.73), (4.75) i (4.76) članovi $\Delta t / \Delta x \cdot \Delta (0.5gh^2)$ i $\Delta t gh S_{0x}$,

odnosno $\Delta t / \Delta y \cdot \Delta (0.5gh^2)$ i $\Delta t gh S_{0y}$ se ne potiru, pa se dobija da su brzine u i v različite od nule, što je fizički nemoguće. U svakom narednom računskom koraku, zbog razlike između ovih članova — njihove numeričke nekompatibilnosti — brzine u i v sve više rastu odnosno, dobija se rešenje koje divergira.

U literaturi [30] se navode dva postupka za prevazilaženje ovog problema. Prvi postupak podrazumeva izdvajanje članova $0.5gh^2$ iz vektora fluksova \mathbf{E} i \mathbf{F} , njihovo diferenciranje i kombinovanje sa članovima S_{0x} i S_{0y} , pri čemu se dobija:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h \\ uvh \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{H_x} - S_{f_x}) \\ gh(S_{H_y} - S_{f_y}) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

gde je:

$$S_{H_x} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{i} \quad S_{H_y} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad (5.3)$$

I u drugom postupku se iz vektora \mathbf{E} i \mathbf{F} izdvajaju članovi $0.5gh^2$. Ovoga puta izdvojeni članovi se diskretizuju nezavisno od članova u^2h i v^2h . Način diskretizacije se bira tako da se ostvari numerička kompatibilnost sa S_{0x} i S_{0y} . U literaturi [30] prikazana je shema za koju se pokazalo da daje dobre rezultate. Prema toj shemi oba člana se aproksimiraju centralnim razlikama.

Dakle, za uspešnu numeričku simulaciju u uslovima realne batimetrije potrebno je:

- 1° modifikovati jednačinu održanja mase tako da u njoj figuriše kota površine vodenog ogledala i
- 2° na prethodno opisani način modifikovati ili dinamičke jednačine matematičkog modela ili odgovarajuće diskretizacione jednačine numeričkog modela.

6. Zaključci

Na kraju će se izvršiti sistematizacija najznačajnijih zaključaka do kojih se došlo proverom numeričkih modela linijskog i ravanskog tečenja.

Linijski tokovi

- 1° Simulacija tečenja preko tri široka praga u prizmatičnom laboratorijskom kanalu u burnom režimu pokazala je da se primenom računске sheme MacCormack može:
 - a) tačno odrediti položaj hidruličkog skoka i
 - b) sa zadovoljavajućom tačnošću sračunati linija nivoa u mirnom režimu uzvodno od praga.
- 2° Za dobijanje stabilnih rezultata pri simulaciji tečenja u burnom režimu ($h_k > h_n$ i $S_0 > S_{0,kr}$) potrebno je zadati fizički realno ograničenje u pogledu minimalne dozvoljene dubine, tj. zadati da je minimalna dubina jednaka normalnoj dubini ($h_{min} = h_n$).
- 3° Proverom linijskog modela na primeru analize prostiranja talasa sa strmim čelom utvrđeno je:
 - a) da je brzina prostiranja talasa, dobijena primenom MacCormack-ove sheme, na početku proračuna manja od brzine prostiranja talasa na fizičkom modelu i
 - b) da se razlika između računске i stvarne brzine prostiranja tokom vremena smanjuje.

Ravanski tokovi

Rezultati numeričkog eksperimenta u kome je razmatran hipotetički slučaj trenutnog delimičnog rušenja brane i poređenja rezultata numeričke simulacije jednog laboratorijskog eksperimenta sa rezultatima merenja doveli su do sledećih zaključaka:

- 1° Jednačine matematičkog i numeričkog modela treba da budu napisane u konzervativnom obliku, jer su:
 - a) gubici zapremine u tom slučaju manji, tj. relativna greška zapremine za sve vrednosti početnog odnosa dubina u rezervoaru i nizvodno od brane ne prelazi granicu tolerancije koja se kreće od 5% do 10%. Prilikom korišćenja jednačina u nekonzervativnom obliku gubici zapremine su samo pri manjim vrednostima odnosa h_1/h_2 (< 15 za sistem homogenih jednačina, a < 3 za sistem nehomogenih jednačina) u granicama tolerancije. Pri većim vrednostima odnosa h_1/h_2 maksimalna relativna greška zapremine višestruko premaša prihvatljive vrednosti (5–10%);
 - b) oblik projekcije talasa u xOy ravni i brzina njegovog prostiranja, generalno gledano, dobro reprodukovani. Primenom jednačina u nekonzervativnom obliku dobija se talas koji se prostire mnogo sporije od snimljenog, tako da su rezultati i u tom pogledu nepouzdati.
- 2° Rešavanjem sistema nehomogenih jednačina dobija se nešto veća relativna greška zapremine nego u slučaju kada se rešava sistem homogenih jednačina, ali maksimalna vrednost relativne greške ni pri jednoj vrednosti početnog odnosa h_1/h_2 ne prekoračuje granicu tolerancije od 10%.
- 3° Za sheme iz familije MacCormack/Lax-Wendroff, simulacija talasa sa strmim čelom uz korišćenje jednačina u konzervativnom obliku nije moguća bez primene metode veštačke viskoznosti koja se zasniva na selektivnoj "filtraciji" numeričkog rešenja.

- 4° Izbor optimalne vrednosti faktora veštačke viskoznosti kojim se reguliše nivo numeričke disipacije zavisi od konkretnog problema.
- 5° Primenom metode veštačke viskoznosti ne mogu se eliminisati oscilacije na čelu talasa, ali se uspešno prigušuju oscilacije nivoa u poljima računске mreže posle njegovog prolaska kroz posmatrano polje.
- 6° Sa povećanjem udaljenosti polja u lateralnom pravcu (pravcu upravnom na pravac glavnog toka), raste greška u proceni visine čela talasa.
- 7° Pokušaj numeričke simulacije ustaljenog ravanskog tečenja u uslovima realne batimetrije pokazao je da predloženi računski model, u sadašnjem obliku, ne daje zadovoljavajuće rezultate ukoliko se prethodno ne uprosti geometrija poprečnih i uzdužnih preseka. Model se, uz odgovarajuću shematizaciju konfiguracije rečnog dna, može koristiti za kvalitativnu hidrauličku analizu efekata planiranih regulacionih radova.
- 8° Da bi se predloženi model mogao koristiti za rešavanje problema u uslovima složene batimetrije, potrebno je na odgovarajući način modifikovati jednačine matematičkog i numeričkog modela.

Spisak programa

U okviru izrade ovog Magistarskog rada napisani su sledeći programi:

1. MAC1MK — program za proračun linijskog neustaljenog tečenja sa slobodnom površinom primenom računске sheme MacCormack, 1993/94.
2. MAC2 — program za proračun ravanskog neustaljenog tečenja primenom računске sheme MacCormack, 1995/96.
3. PROFIPOL, PROFINT, KODIRM — programi za: interpolaciju podataka unutar poprečnog profila računске mreže koja se sastoji od pravolinijskih kvadratnih ili pravougaonih elemenata, interpolaciju između poprečnih profila postojeće računске mreže (umetanje novih profila) i kodiranje nove "progušćene" mreže, 1997.
4. GRAFIM — program za prikaz računске mreže sa upisivanjem rednog broja polja u centar kućice i još dva podatka po želji (kote dna, nagiba dna u x- i y-pravcu, dubine, komponente brzine u x- i y-pravcu), 1997.

Literatura

1. Akanbi, A. A., Katopodes, N.D., *Model for Flood Propagation on Initially Dry Land*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.114, No.7, July, 1988.
2. Anderson, D.A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1984.
3. Bellos, C.V., Sakkas, J.G., *1-D Dam-Break Flood-Wave Propagation on Dry Bed*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.113, No 12., Dec. 1987.
4. Bellos, C.V., Soulis, J.V., Sakkas, J.G., *Experimental Investigation of Two-dimensional Dam-Break Induced Flows*, Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 30, No.1, 1992.
5. Bhallamudi, S.M., Chaudhry, M.H., *Computation of Flows in Open-Channel Transitions*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 30, No. 1, 1992.
6. Bos, M.G., *Discharge Measurement Structures*, International Institute for Land Reclamation and Improvement/ILRI, Wageningen, The Netherlands, 1976.
7. Cunge, J.A., Holly, F.M., Verwey, A., *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman Publishing Limited, London, 1980.
8. Dammuler, D.C., Bhallamudi, S.M., Chaudhry, M.H., *Modeling of Unsteady Flow in Curved Channel*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.115, No.11, Nov. 1989.
9. Đorđević, D., *Primena eksplicitne računске sheme MacCormack za proračun linijskog neustaljenog tečenja u otvorenim tokovima u slučajevima pojave diskontinuiteta toka*, Seminarski rad iz Računske hidraulike, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Novembar, 1993.
10. Đorđević, D., *Numeričko modeliranje diskontinualnih tokova*, Zbornik radova sa XI savetovanja hidrauličara i hidrologa, Beograd, 1994.
11. Đorđević, D., *Analiza tečenja preko tri široka praga u prizmatičnom laboratorijskom kanalu*, Seminarski rad iz Hidraulike hidrotehničkih objekata, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Novembar, 1995.
12. Đorđević, D., *Problemi konzervativnosti i oscilatornih rešenja pri numeričkom modeliranju ravnskih tokova*, Seminarski rad iz Rečne hidraulike, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Juli, 1997.
13. Elliot, R.C., Chaudhry, M.H., *A Wave Propagation Model for Two-Dimensional Dam-Break Flows*, Journal of Hydraulic Research, Vol.30, No.4, 1992.
14. Fennema, R.J., Chaudhry, M.H., *Explicit Numerical Schemes for Unsteady Free-Surface Flows with Shocks*, Water Resources Research, Vol.22, No.13, Dec. 1986.
15. Fennema, R.J., Chaudhry, M.H., *Explicit Methods for 2D Transient Free-Surface Flows*, Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 116, No.8, 1990.
16. French, R.H., *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1986.
17. Garcia, R., Kahawita, R.A., *Numerical Solution of the St. Venant Equations With the MacCormack Finite-Difference Scheme*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, 1986.
18. Garcia-Navarro, P., Saviron, J.M., *McCormack's Method for the Numerical Simulation of One-Dimensional Discontinuous Unsteady Open Channel Flow*, Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 30, No. 1, 1992.
19. Jha, A.K., Akiyama, J., Ura, M., *An Implicit Model Based on Conservative Flux Splitting Technique for One Dimensional Unsteady Flow*, Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol.11, No.2, Jan., 1994.

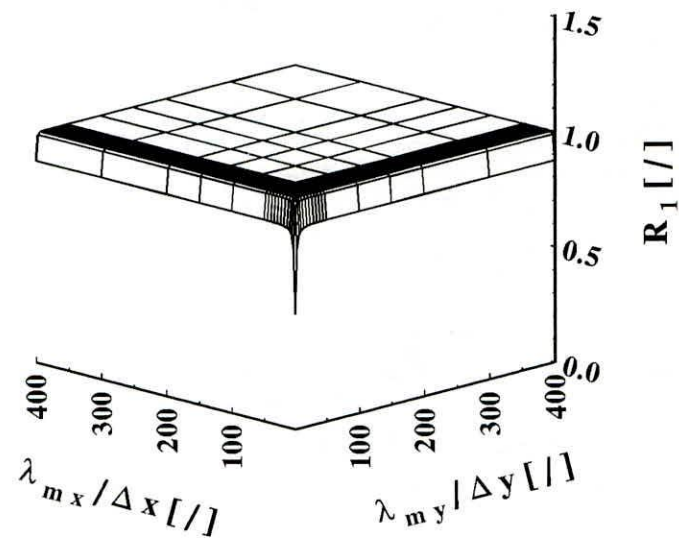
20. Jonić, R., Janićijević, V., *Uređenje Save za plovidbu na sektoru "Kamičak" (km 80-86)*, Vodoprivreda, Br. 150-152, Juli-Decembar, 1994.
21. Jovanović, M., *Analiza dvodimenzionalnog neustaljenog strujanja izazvanog koncentrisanim dotokom*, Magistarska teza, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 1980.
22. Jovanović, M., Đorđević, D., *Neki primeri numeričke simulacije ravanskih tokova*, Vodoprivreda, Br. 141-146, Beograd, 1993.
23. Jovanović, M., Đorđević, D., *Numerical Simulation of 2D Unsteady Open Channel Flows with the MacCormack Finite-Difference Scheme*, HYDROSOFT'94, Porto Carras, Greece, 1994.
24. Jovanović, M., Đorđević, D., *Experimental Verification of the MacCormack Numerical Scheme*, Advances in Engineering Software, Vol.23, Elsevier Science Limited, 1995.
25. Katopodes, N.D., Strelkoff, T., *Computing Two-Dimensional Shallow Water-Wave Models*, Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol.104, No.HY9, Sep. 1979.
26. Katopodes, N.D., Strelkoff, T., *Two-Dimensional Dam-Break Flows*, Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol.105, No.EM2, April, 1979.
27. Katopodes, N.D., *A Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.110, No.4, April, 1984.
28. Komatina, D., *Analiza tečenja gustih mešavina u otvorenim tokovima*, Magistarski rad, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 1993.
29. Miller, S., Chaudhry, H., *Dam-Break Flows in Curved Channel*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.115, No.11, Nov., 1989.
30. Nujić, M., *Efficient Implementation of Non-Oscillatory Schemes for the Computation of Free-Surface Flows*, Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 33, No. 1, 1995.
31. Roache, P.J., *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, 1982.
32. Savić, Lj., *Computation of Open-Channel Discontinuous Flows Using the Modified Godunov Method*, A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the PhD degree in Civil and Environmental Engineering, Graduate College of the University of Iowa, May, 1991.
33. Thandaveswara, B.S., Kumar, A.A., *MacCormack Approach - A Case Study of Narmada River Floods*, Mathematical Modelling in Water Resources, ed. by Russell, I.F., Ewing, R.E., Brebbia, C., Gray, W.G., and Pinder, G.F., Vol. 2, Elsevier, 1992.
34. Tou, S.K.W., *Mixed Eulerian-Lagrangian Finite Element Analysis of Transient Flow with a Moving Boundary*, Engineering Computations, Vol.7, March, 1990.
35. Vreugdenhil, C.B., Booij, N., *Numerical Outflow Boundary Conditions for the Shallow-Water Equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.5, 1985.
36. Yang, J.Y., Hsu, C.A., *Computation of Free-Surface Flows. Part III: Steady Supercritical Flow Using a Generalized Lagrangian Method*, Journal of Hydraulic Research, Vol.34, No.1, 1996.

PRILOZI

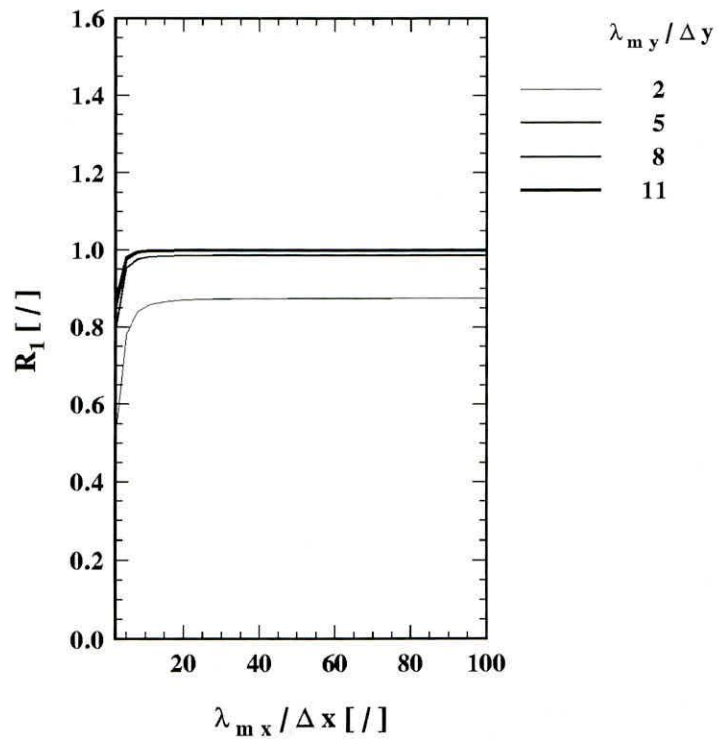
Prilog 1: a) Jednparametarska površ i

b) dvoparametarske krive $R_1'' = f_1'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$ "amplitudne" greške za $C_r=0.5$

a)

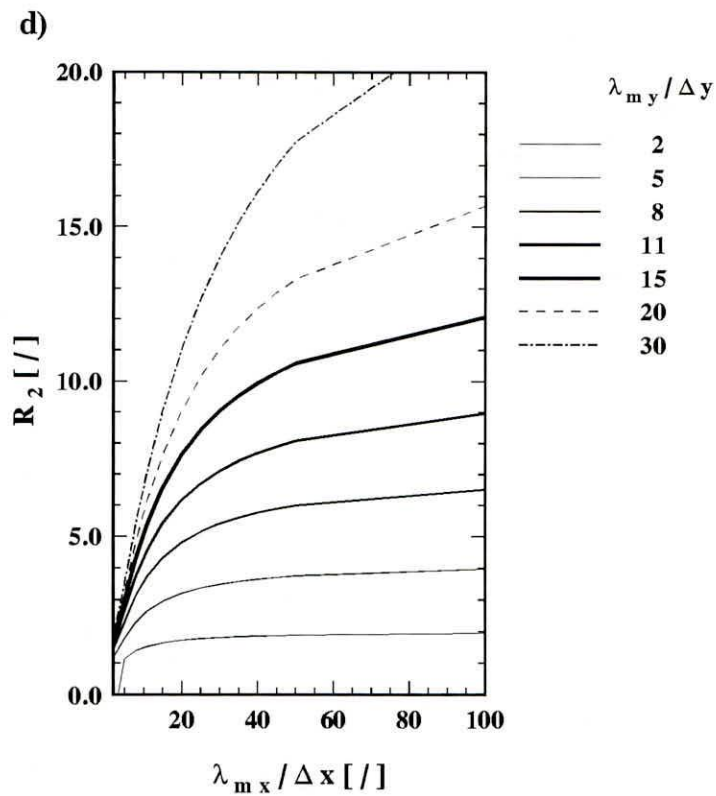
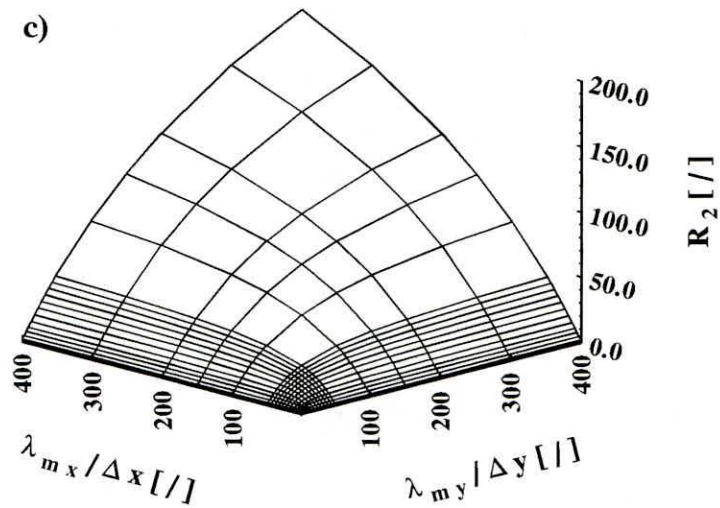


b)



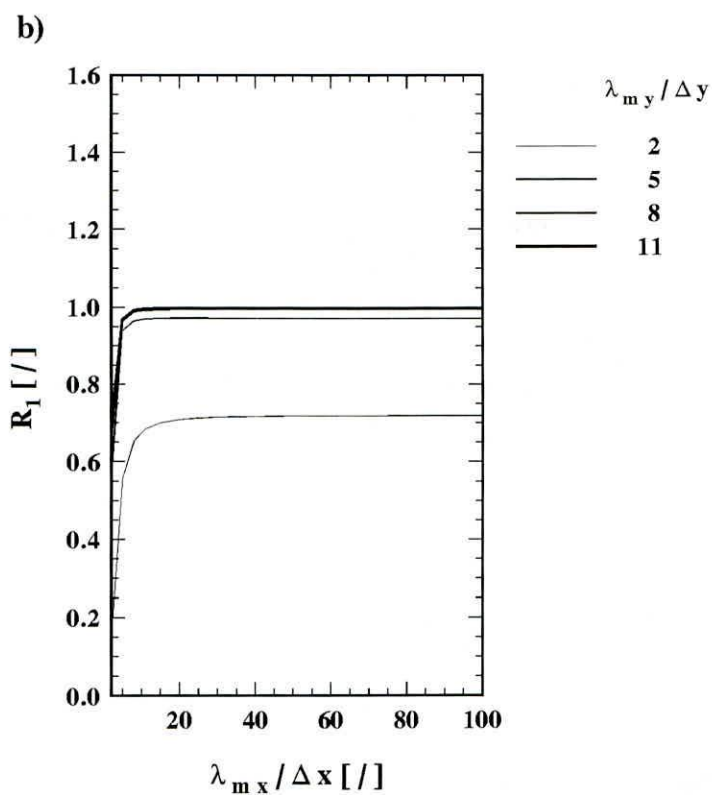
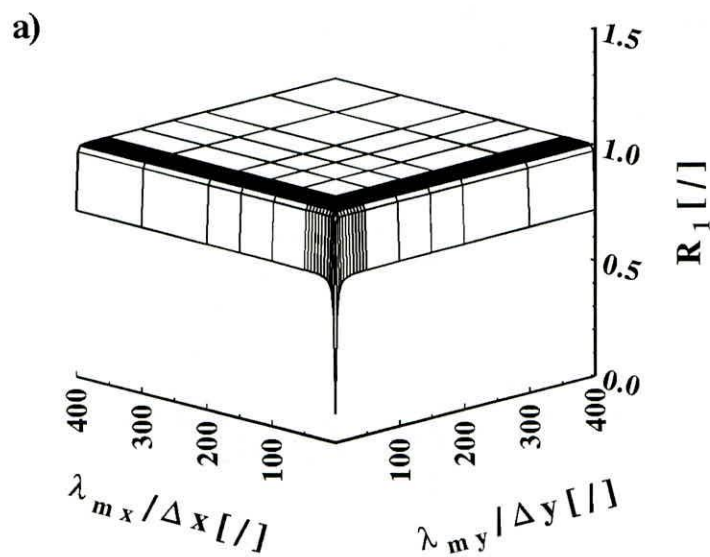
c) Jednoparametarska površ i

d) dvoparametarske krive $R_2''' = f_3'' \left(\frac{\lambda_{m_x}}{\Delta x} \right)$ "fazne" greške za $C_r=0.5$



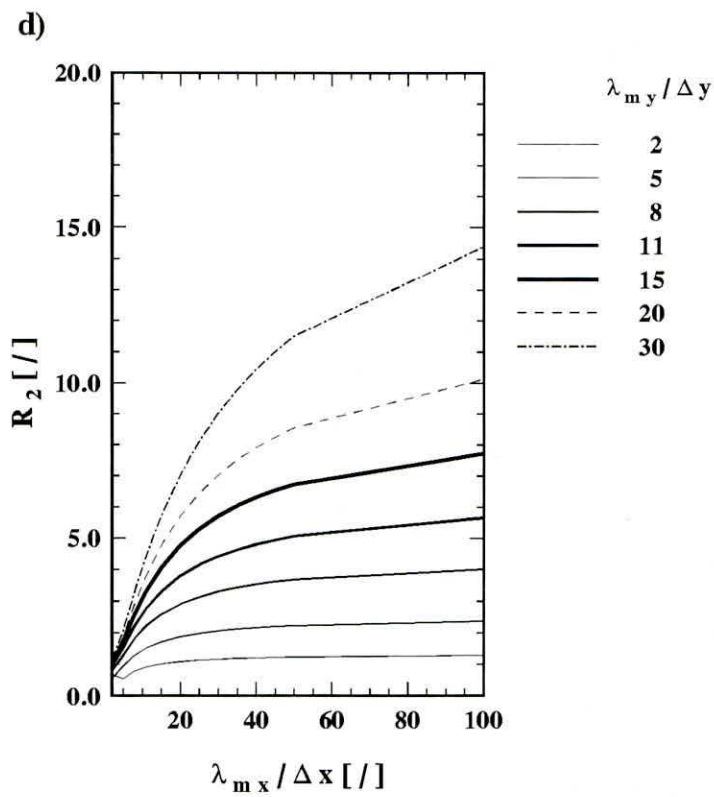
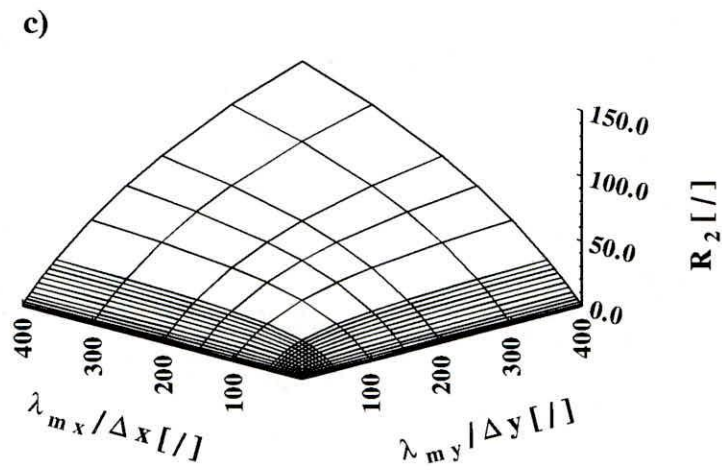
Prilog 2: a) Jednoparametarska površ i

b) dvoparametarske krive $R_1'' = f_1'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$ "amplitudne" greške za $C_r=0.75$



c) Jednoparametarska površ i

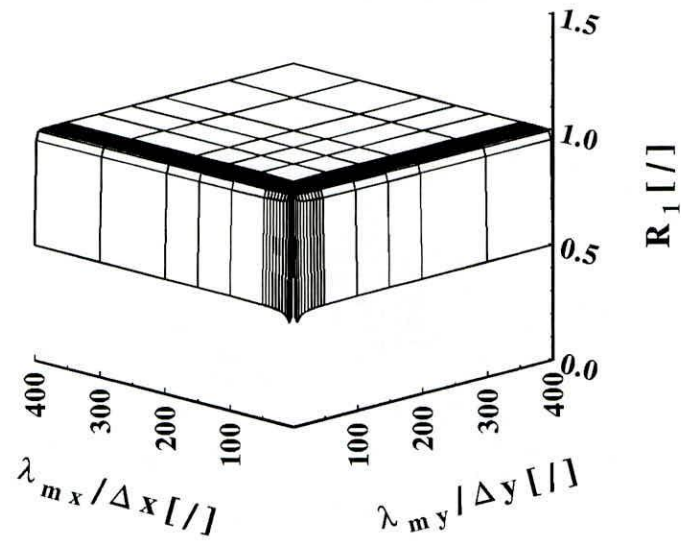
d) dvoparametarske krive "fazne" greške: $R_2''' = f_3'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$ za $C_r = 0.75$



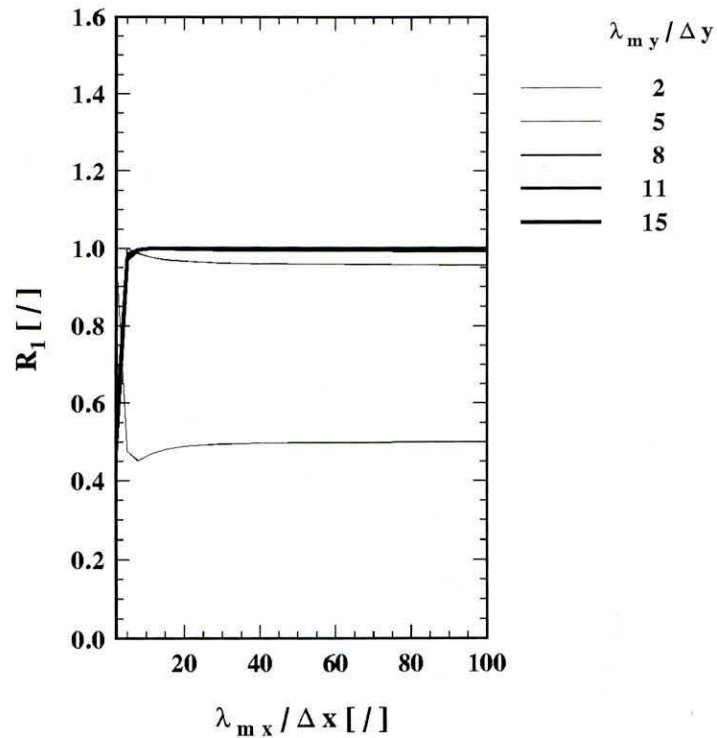
Prilog 3: a) Jednoparametarska površ i

b) dvoparametarske krive $R_1'' = f_1'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$ "amplitudne" greške za $C_r=1.0$

a)

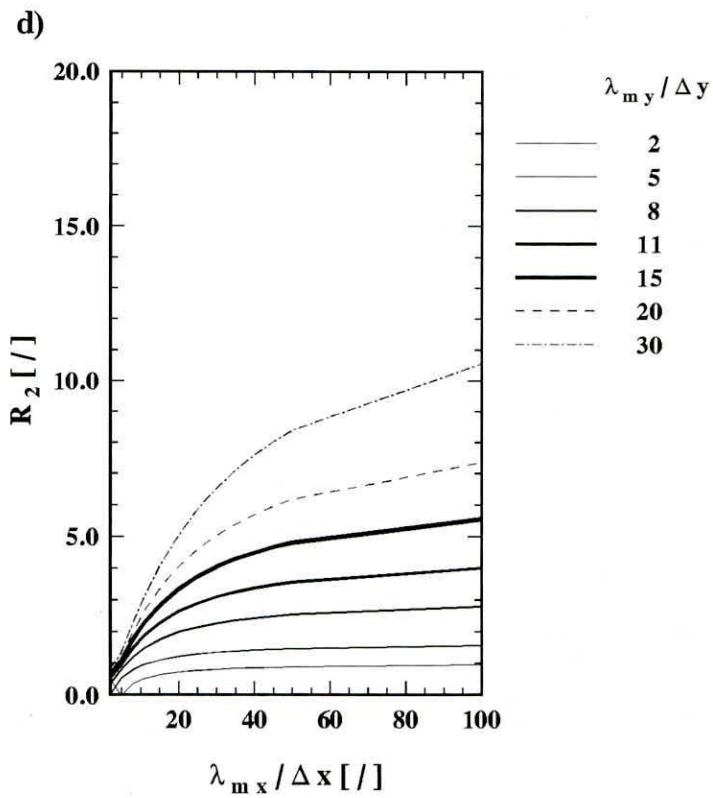
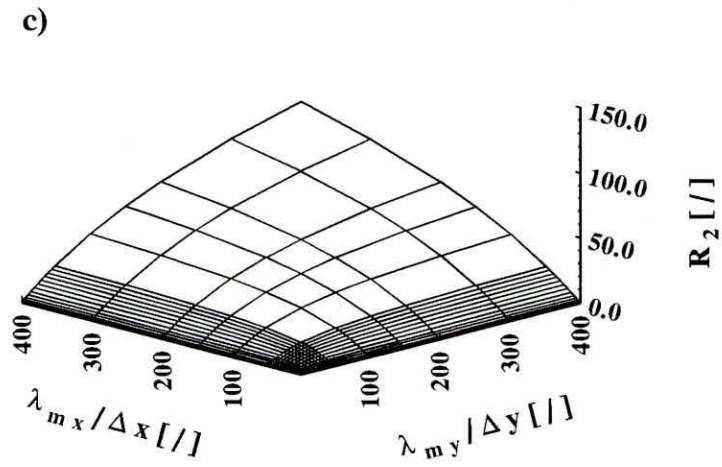


b)



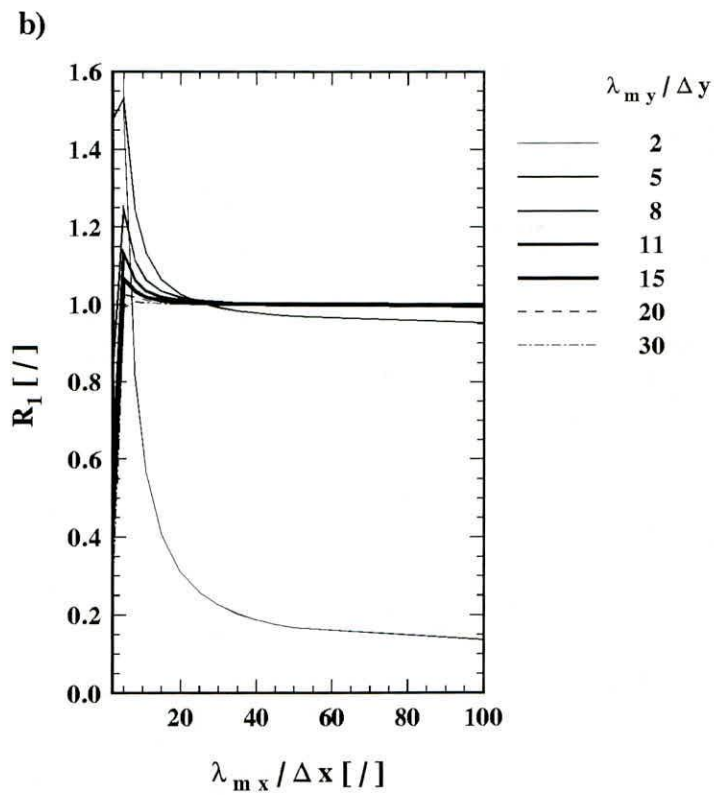
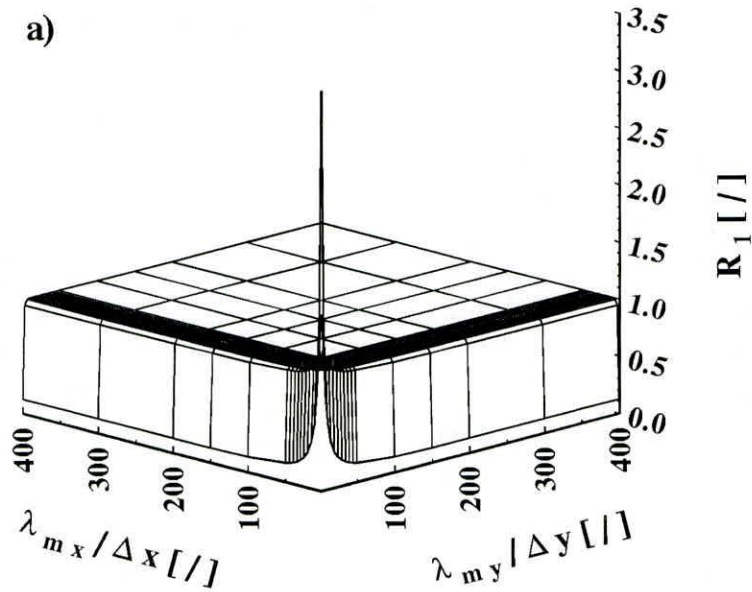
c) Jednoparametarska površ i

d) dvoparametarske krive $R_2''' = f_3'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$ "fazne" greške za $C_r = 1.0$



Prilog 4: a) Jednoparametarska površ i

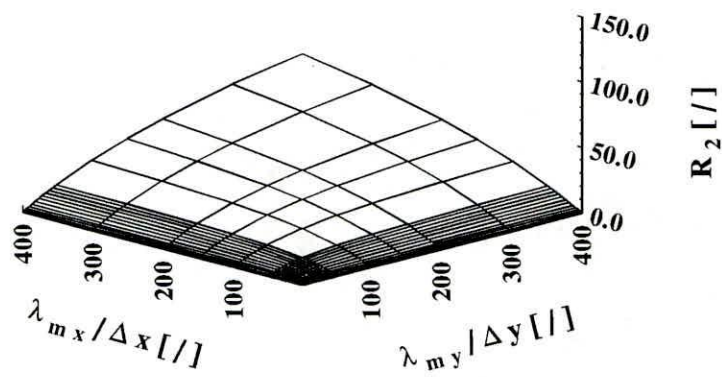
b) dvoparametarske krive $R_1'' = f_1'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$ "amplitudne" greške za $C_r=1.5$



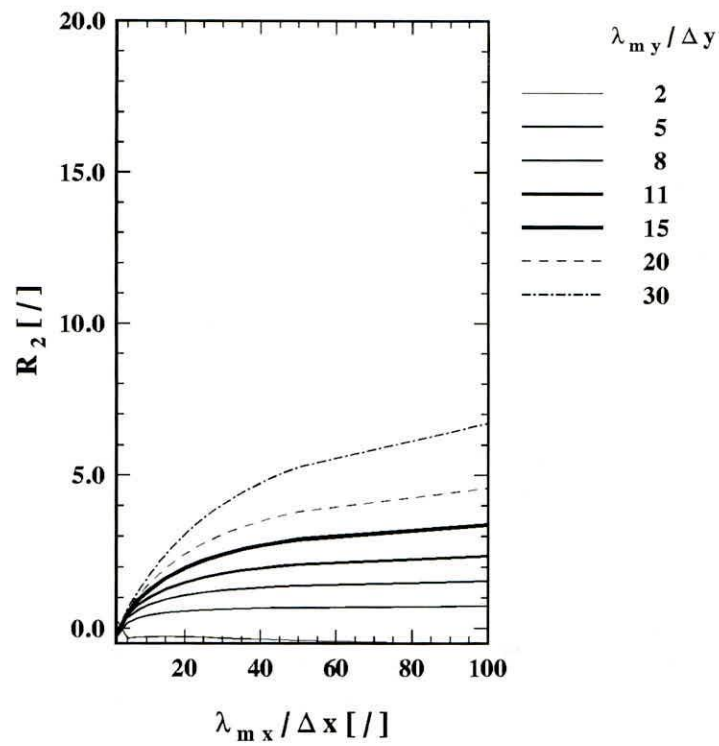
c) Jednoparametarska površ i

d) dvoparametarske krive $R_2''' = f_3'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$ "fazne" greške za $C_r = 1.5$

c)

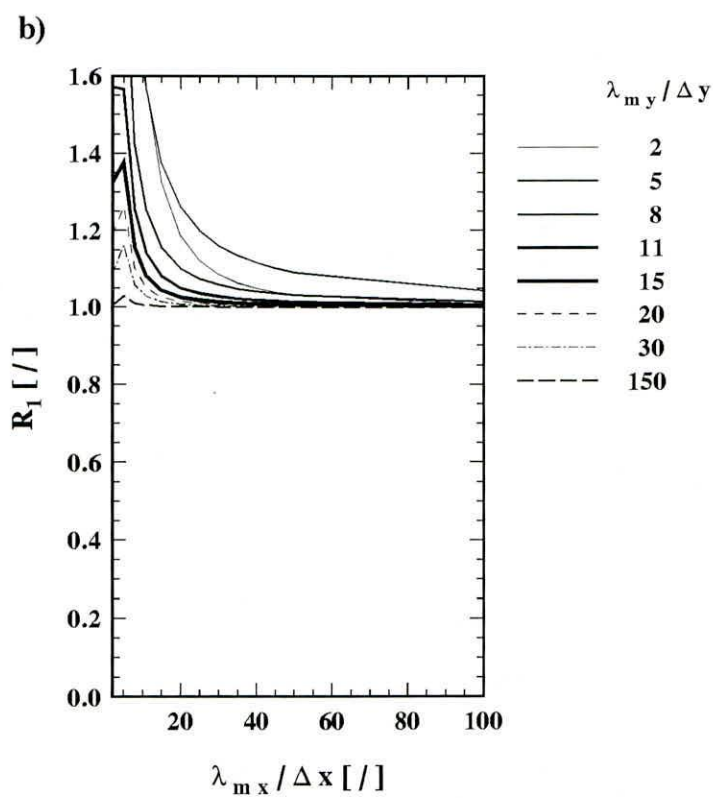
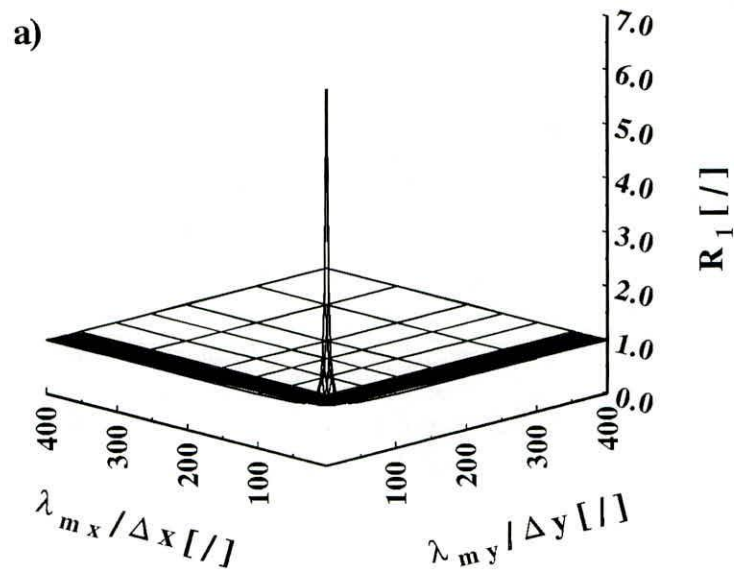


d)



Prilog 5: a) Jednoparametarska površ i

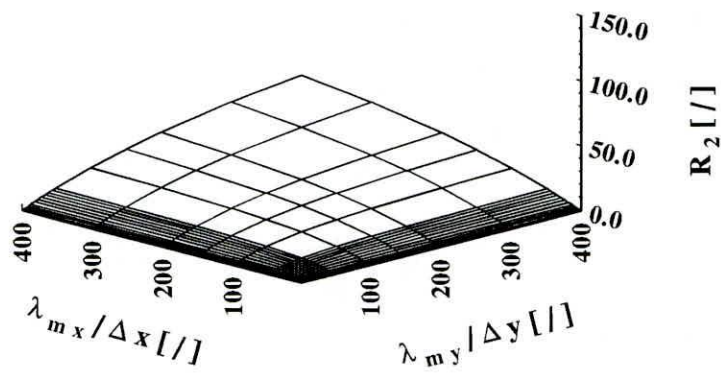
b) dvoparametarske krive $R_1'' = f_1'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$ "amplitudne" greške za $C_r=2.0$



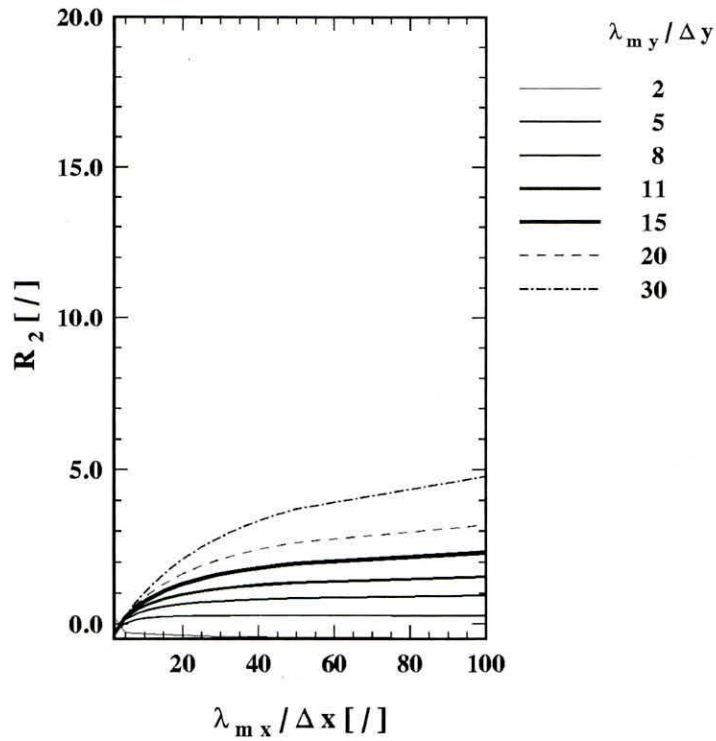
c) Jednparametarska površ i

d) dvoparametarske krive $R_2''' = f_3'' \left(\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} \right)$ "fazne" greške za $C_r=2.0$

c)



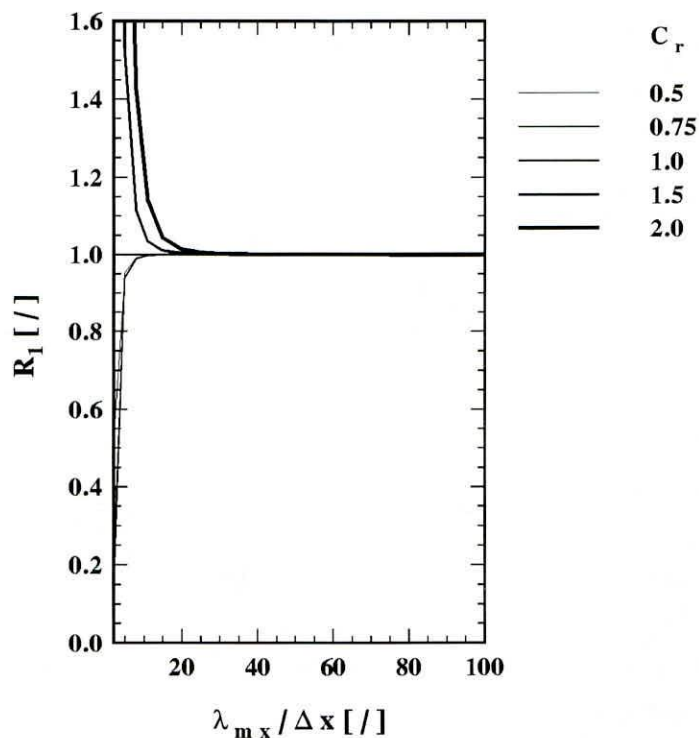
d)



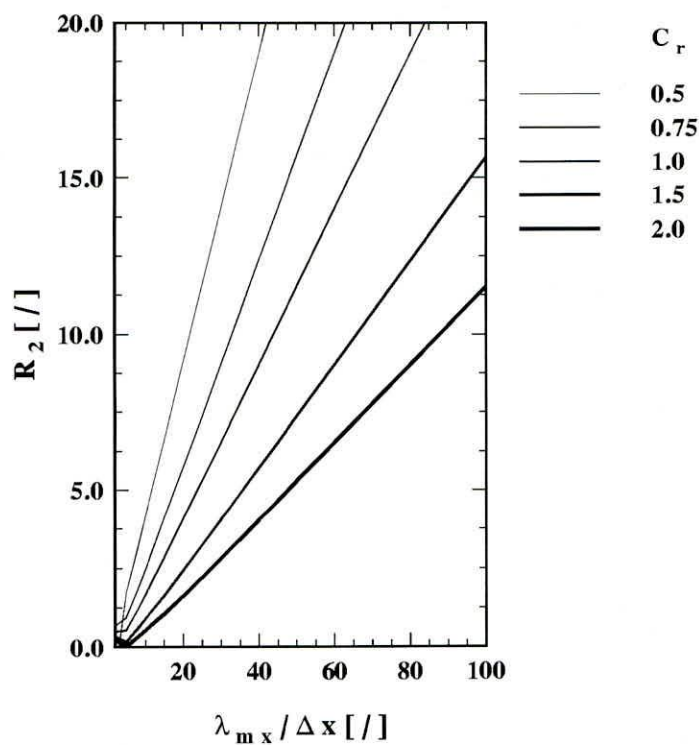
Prilog 6: Dvoparametarske krive a) "amplitudne" i b) "fazne" greške dobijene u

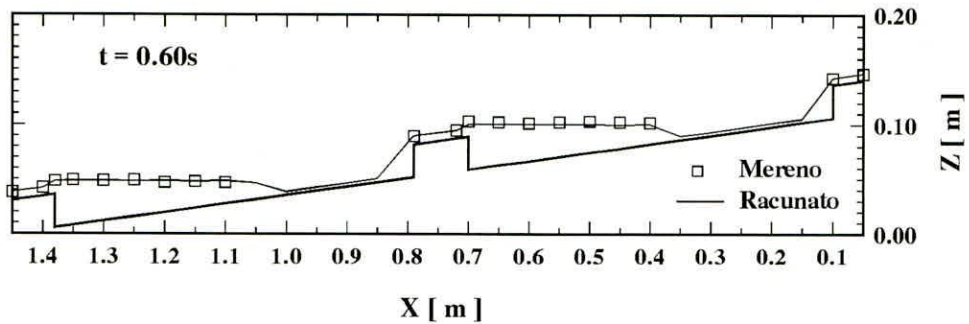
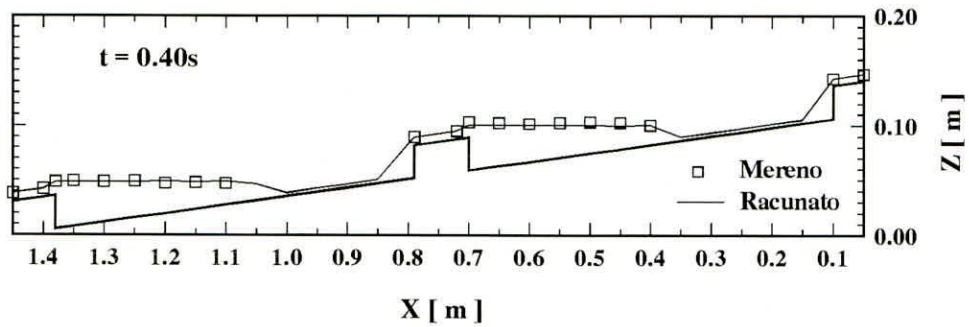
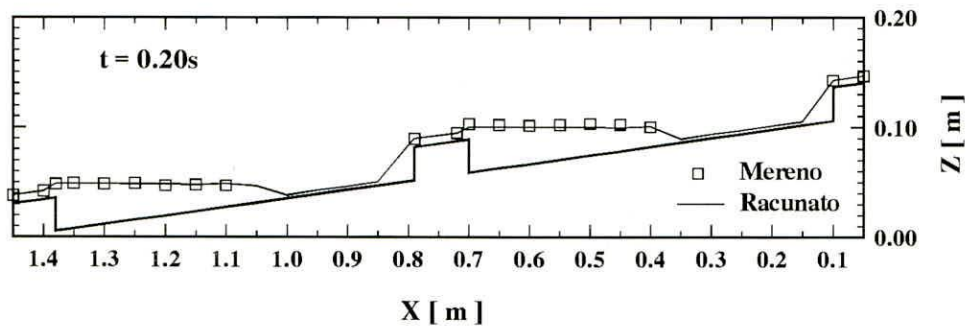
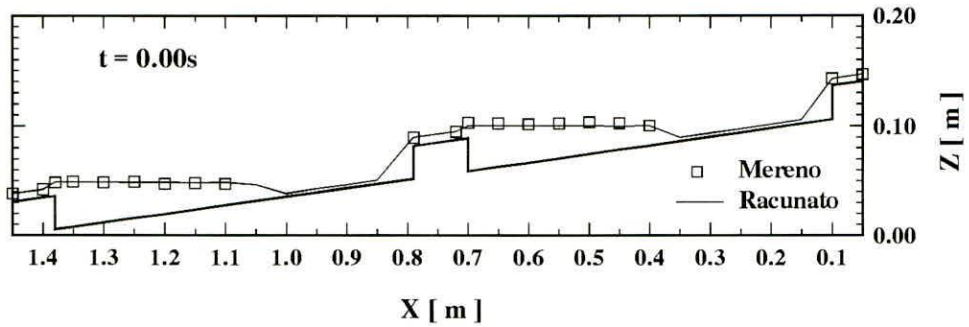
preseku površi (4.126) i ravni $\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} = \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y}$, odnosno površi (4.132) i ravni $\frac{\hat{\lambda}_{m_x}}{\Delta x} = \frac{\hat{\lambda}_{m_y}}{\Delta y}$

a)

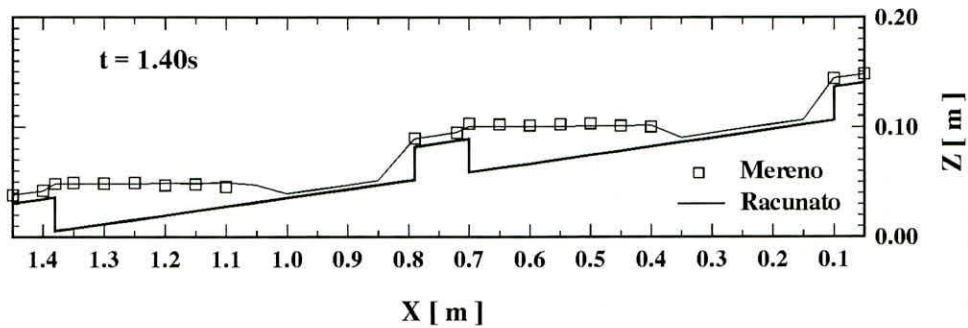
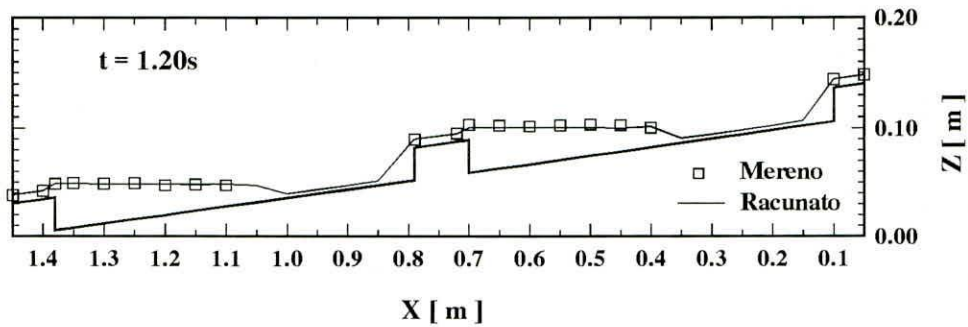
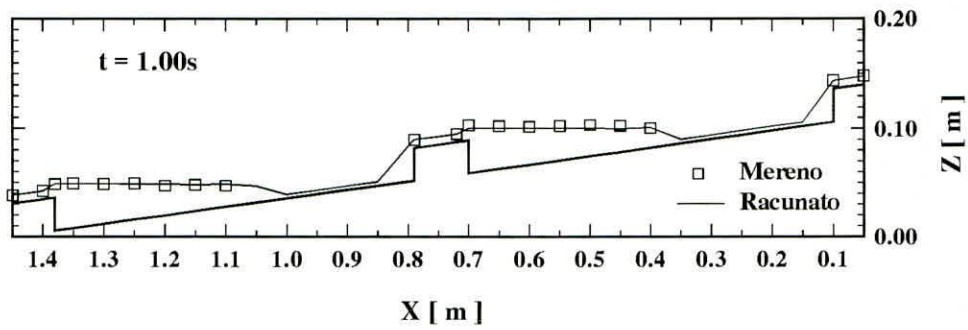
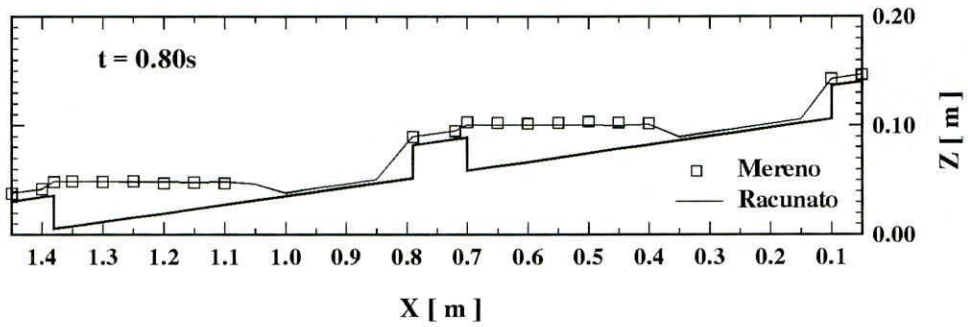


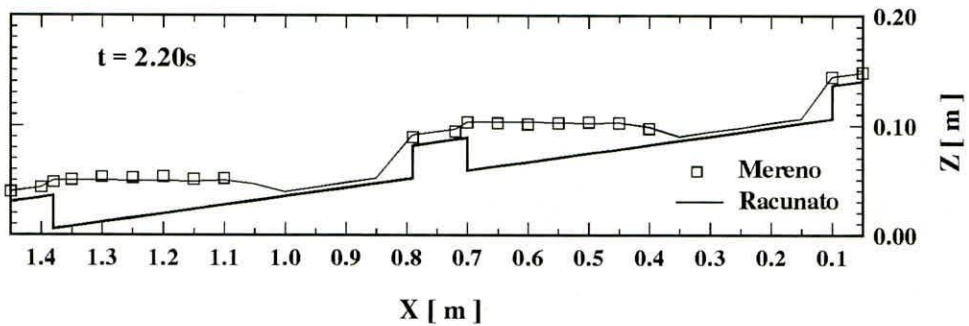
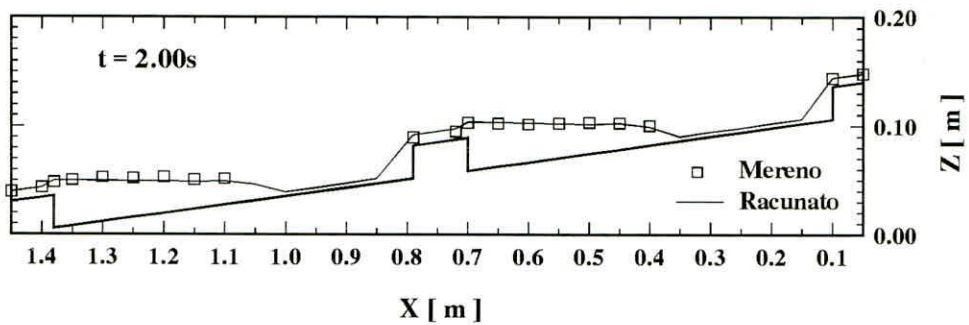
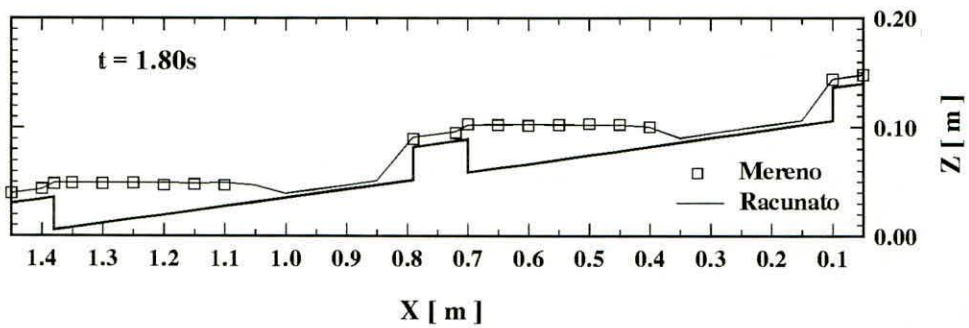
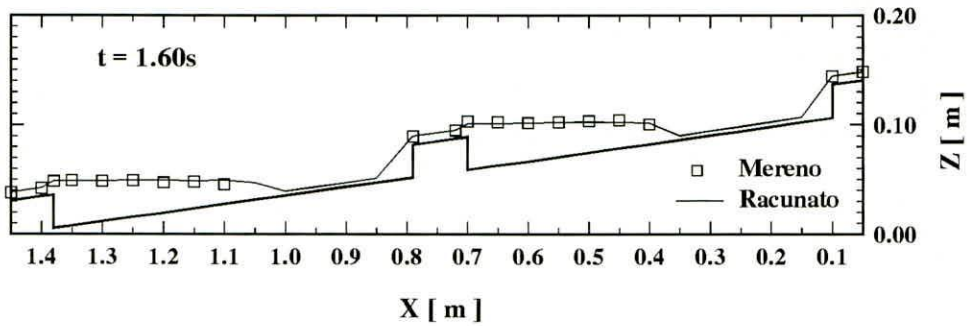
b)



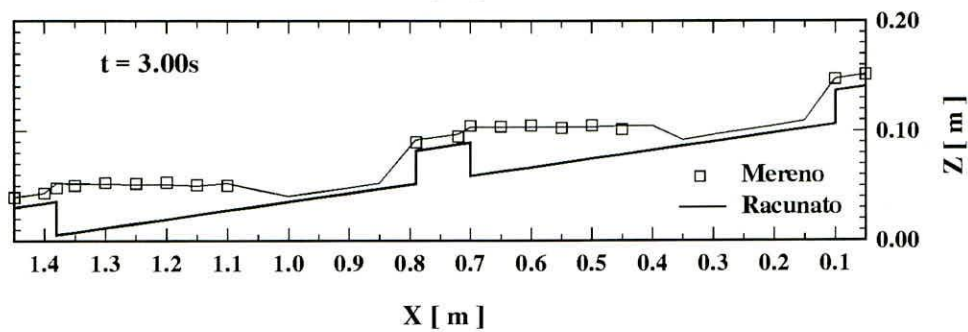
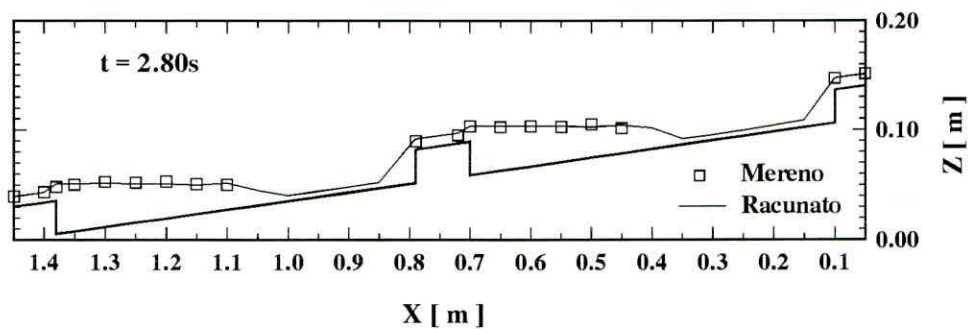
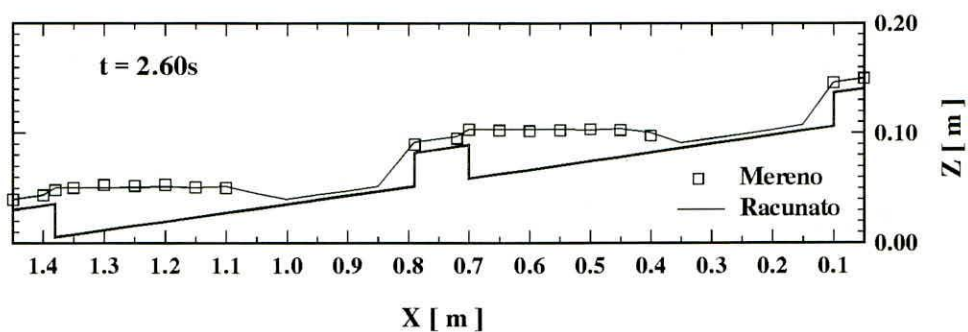
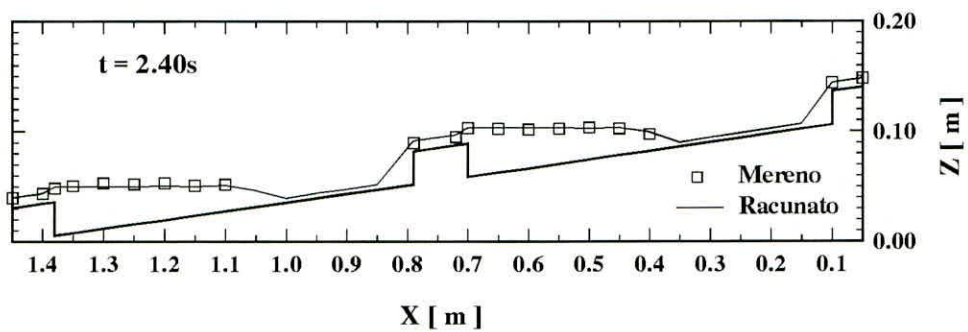
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [0.0 ; 0.6]$ s

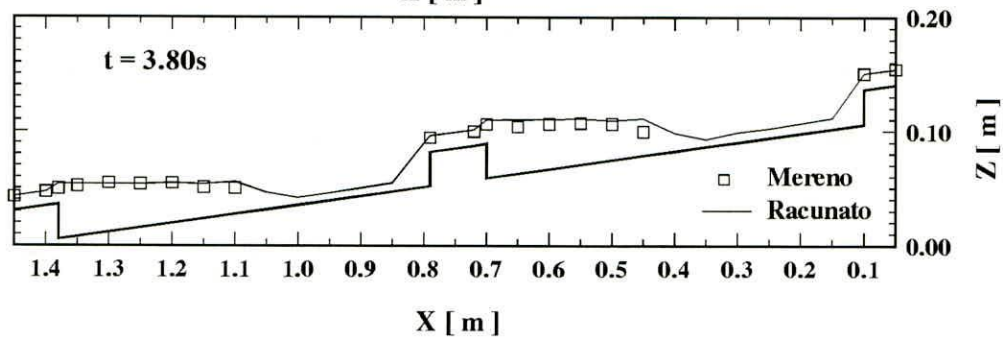
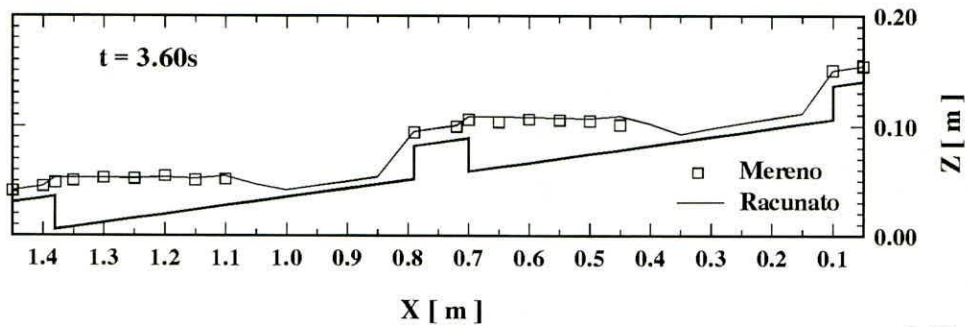
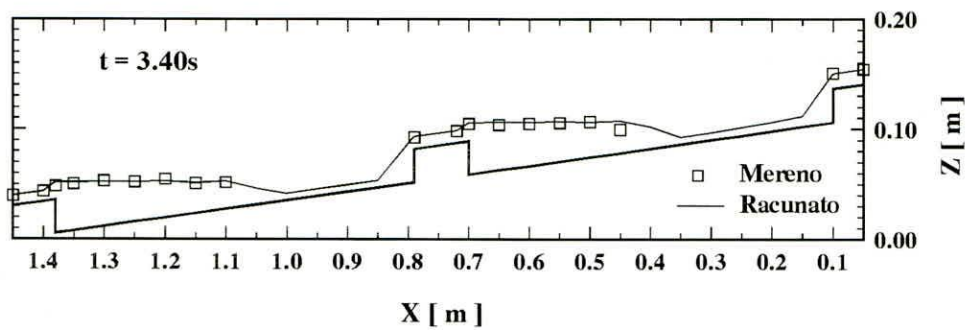
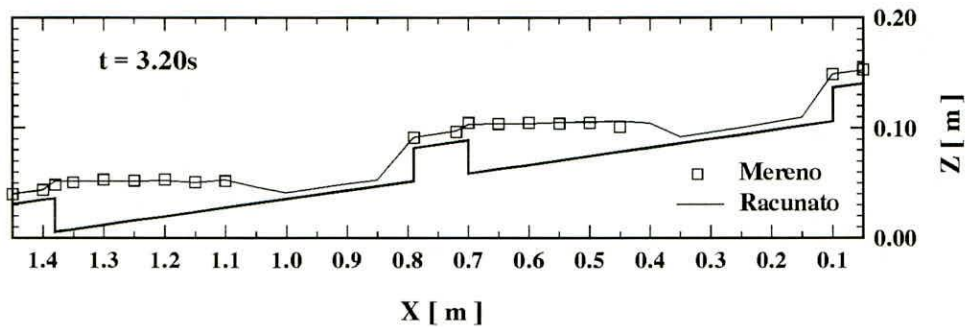
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [0.8; 1.4]$ s



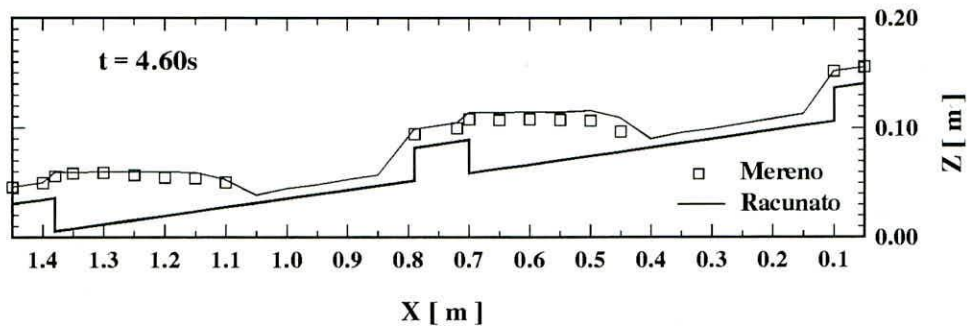
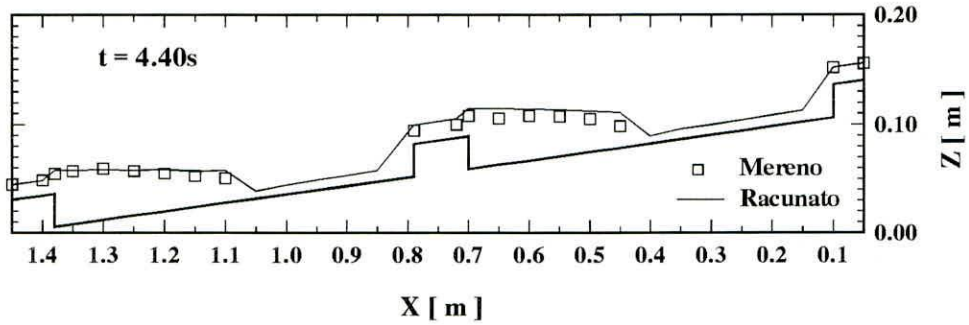
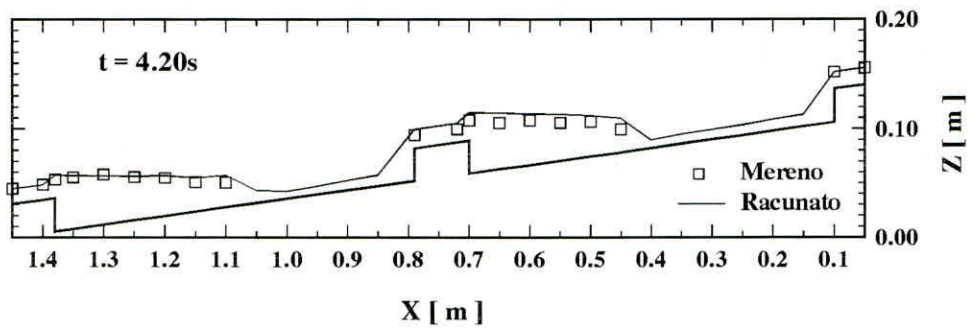
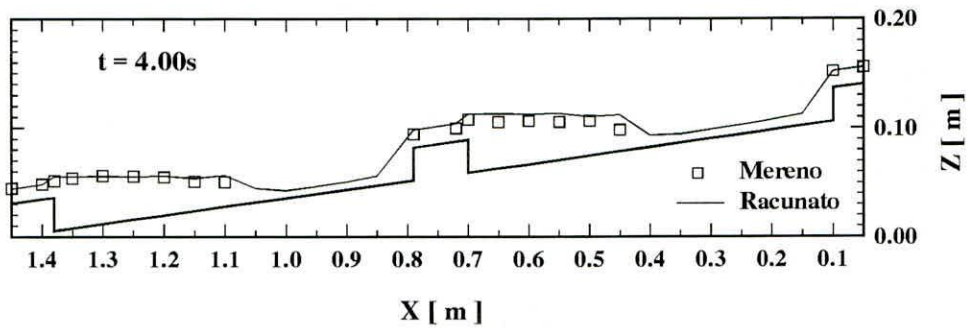
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [1.6; 2.2]$ s

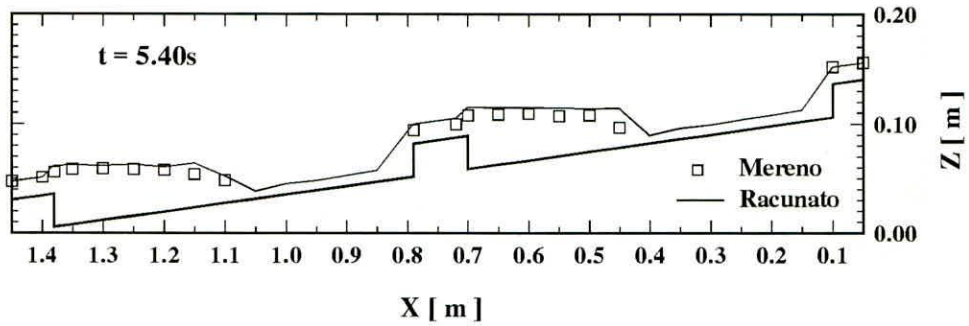
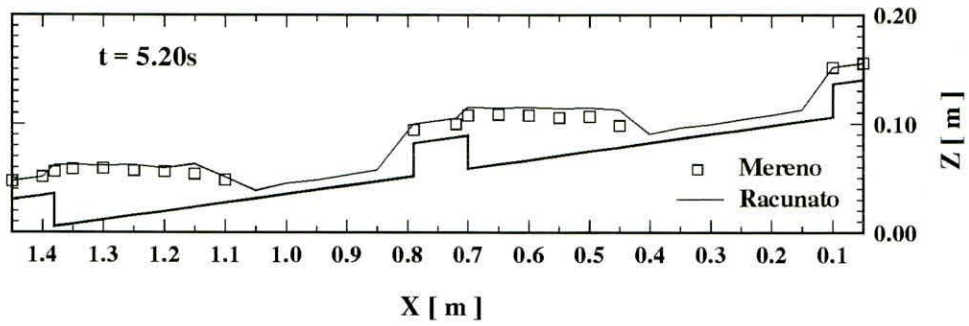
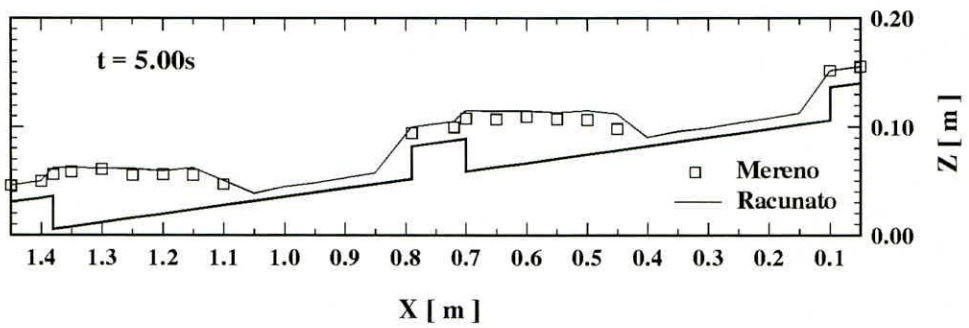
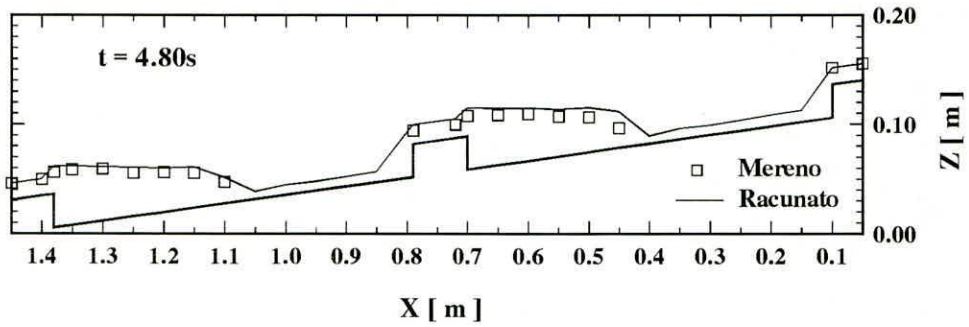
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [2.4 ; 3.0]$ s



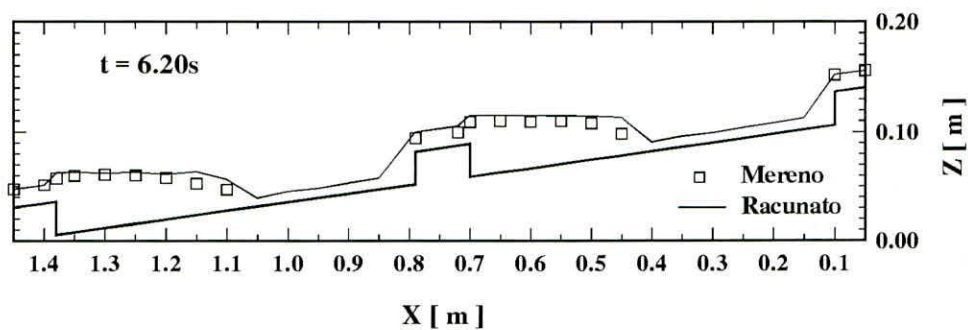
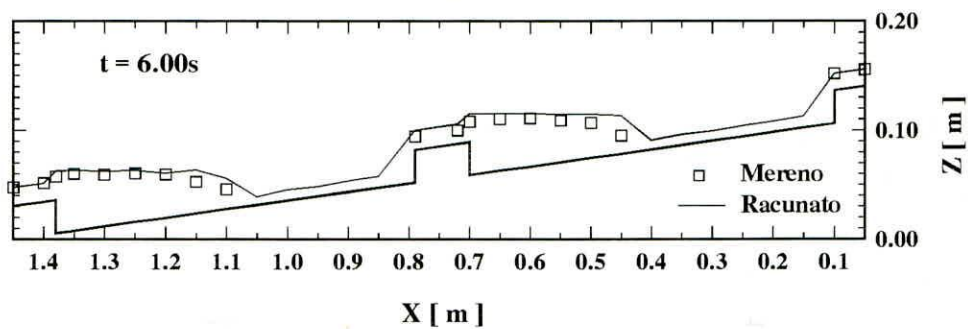
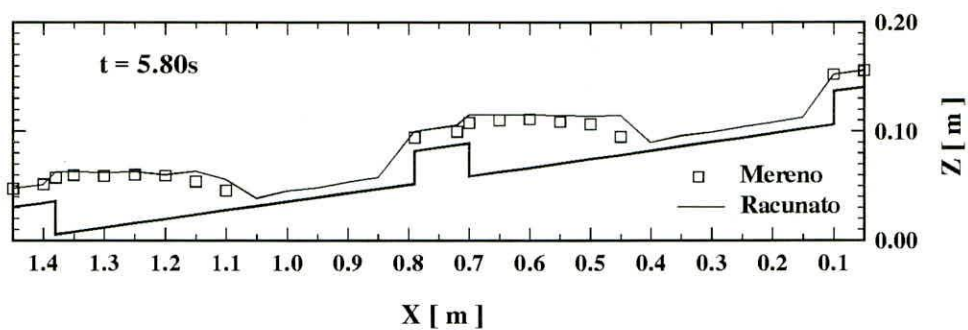
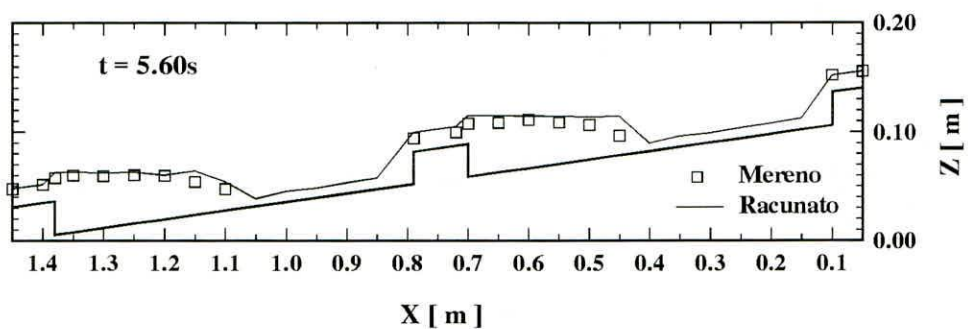
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [3.2 ; 3.8]$ s

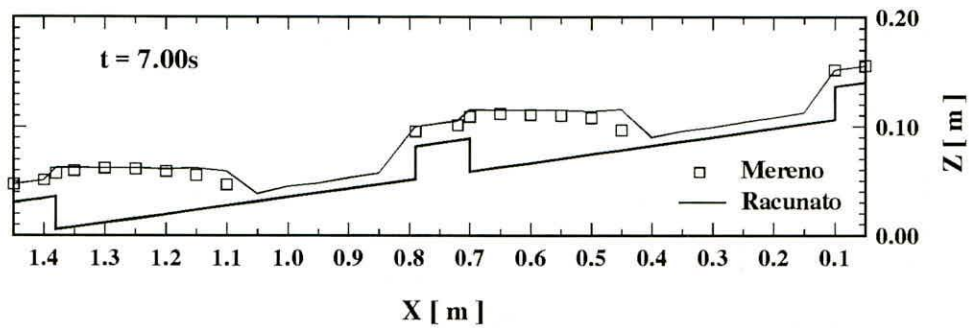
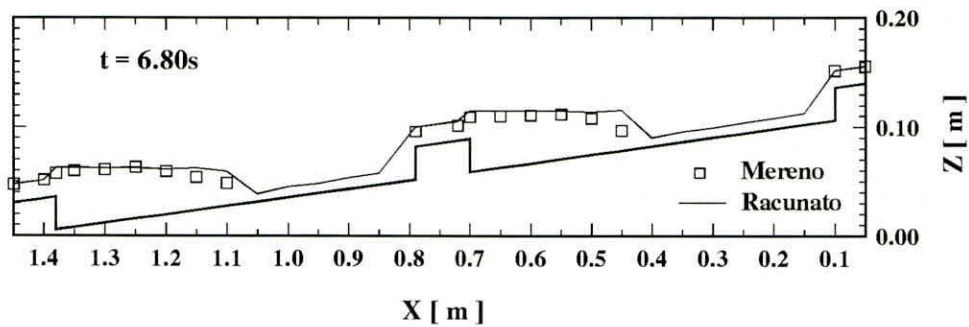
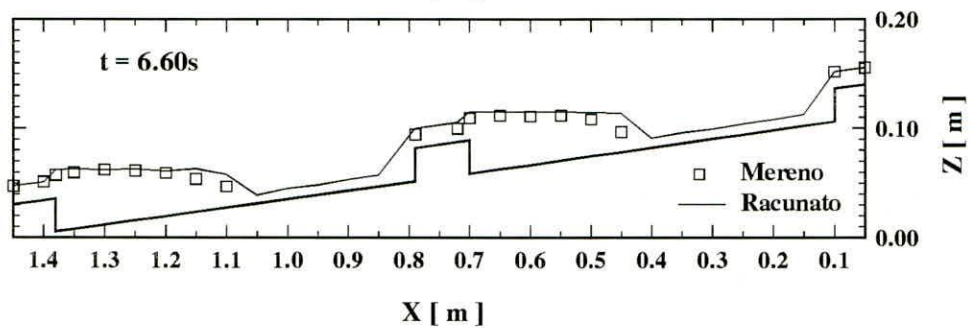
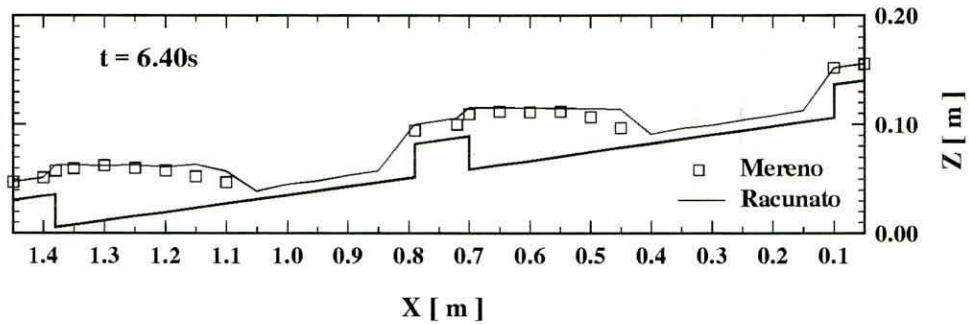
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [4.0 ; 4.6]$ s



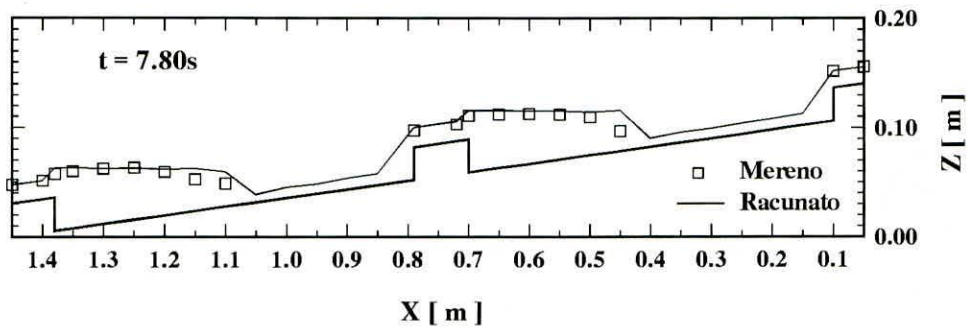
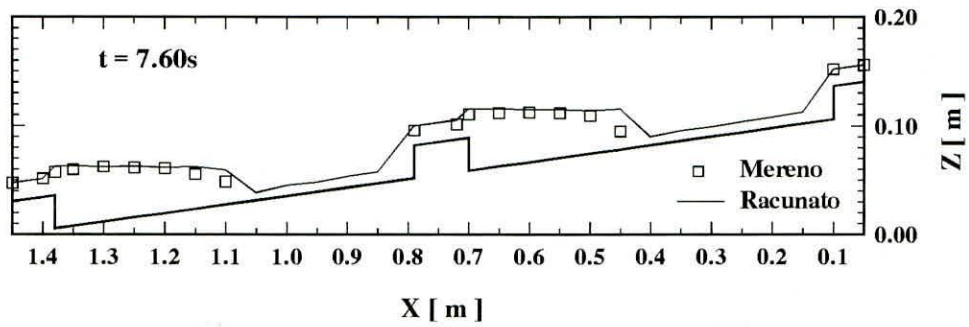
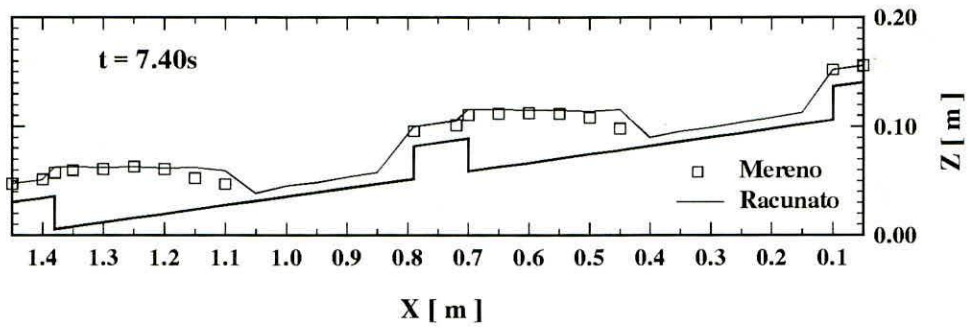
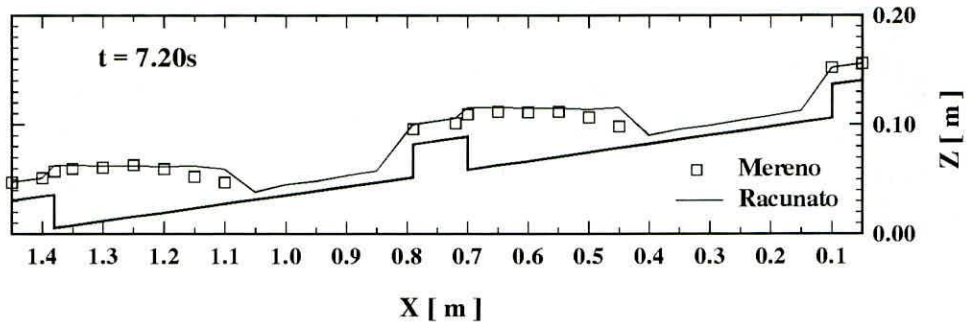
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [4.8 ; 5.4]$ s

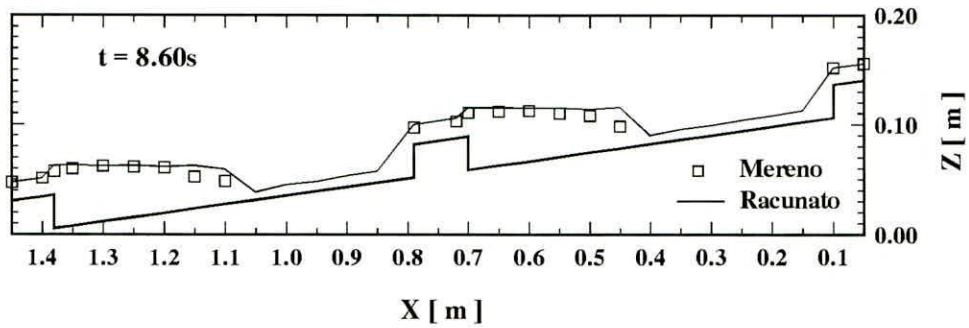
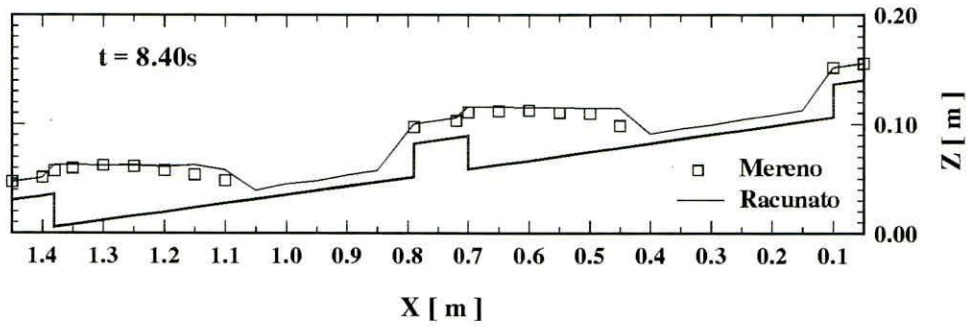
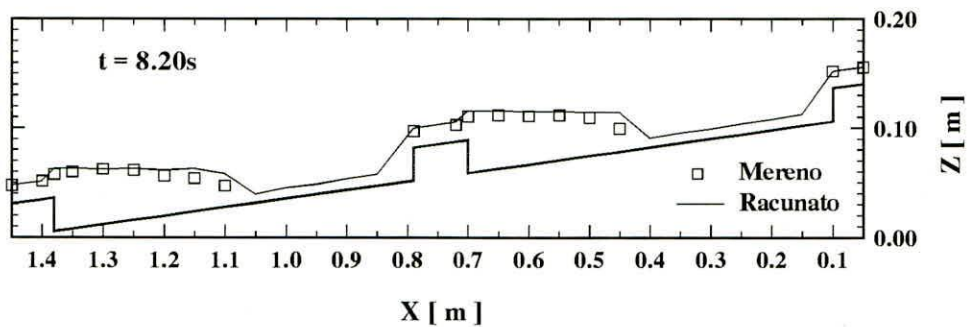
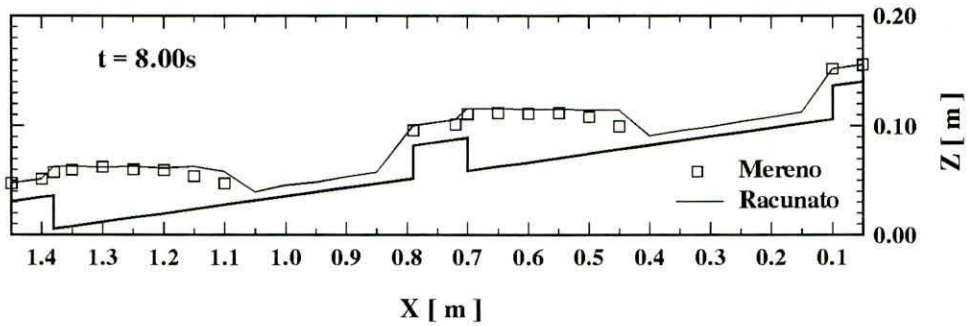
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [5.6 ; 6.2]$ s



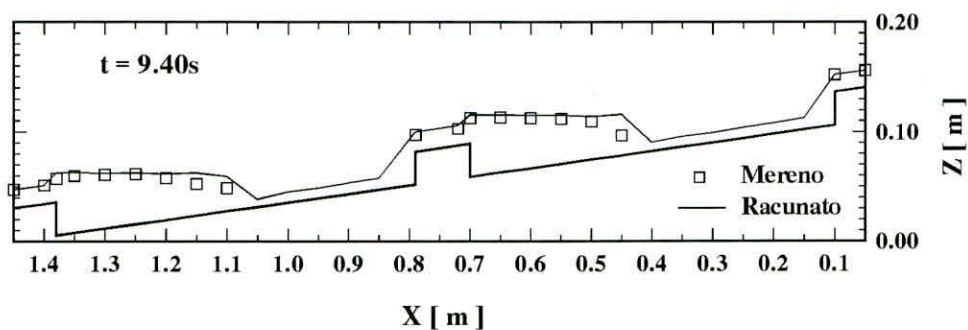
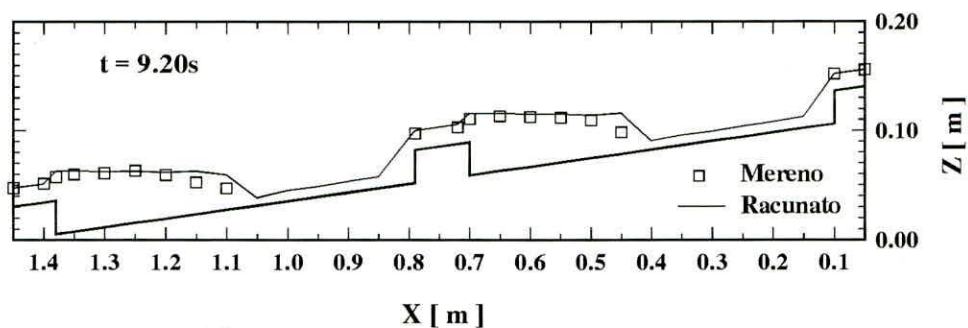
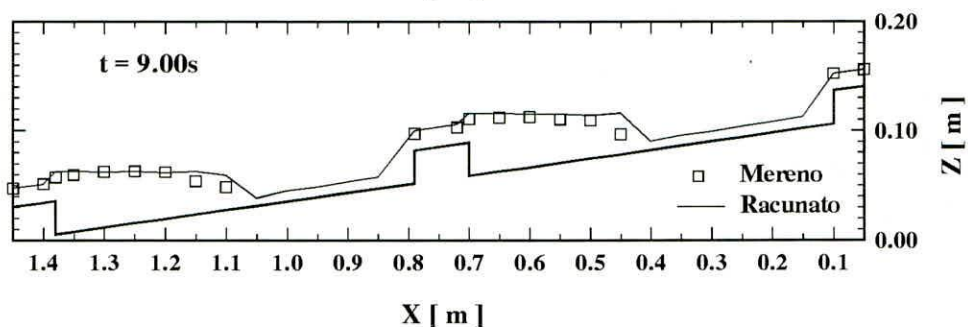
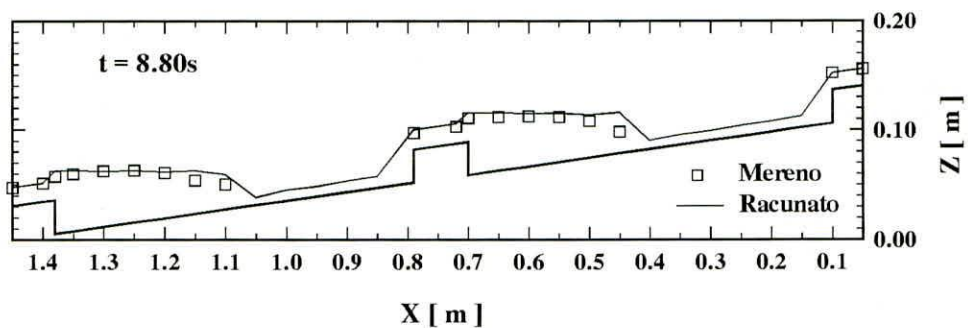
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [6.4 ; 7.0]$ s

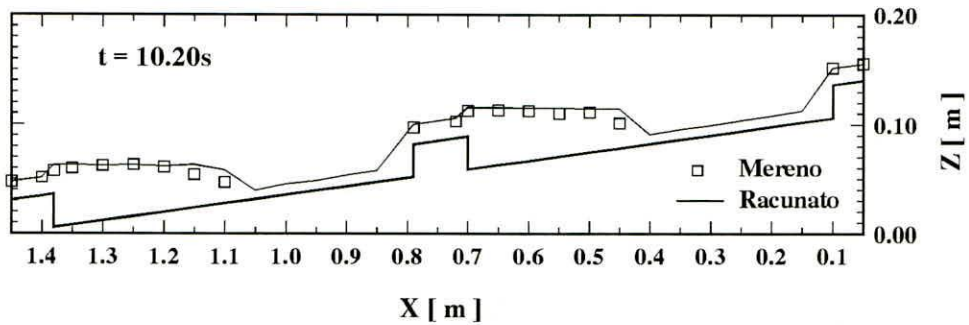
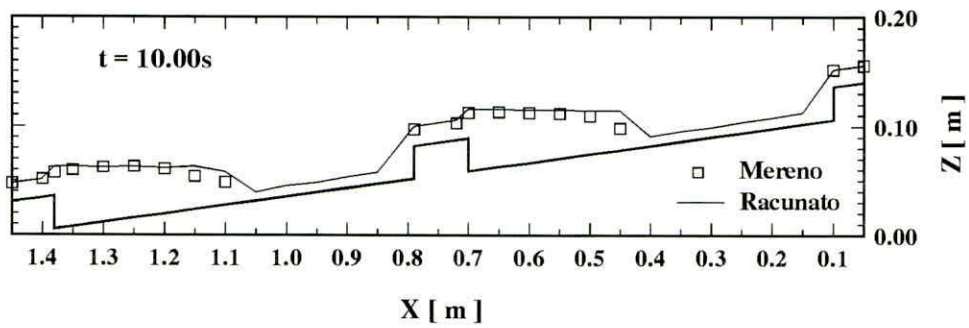
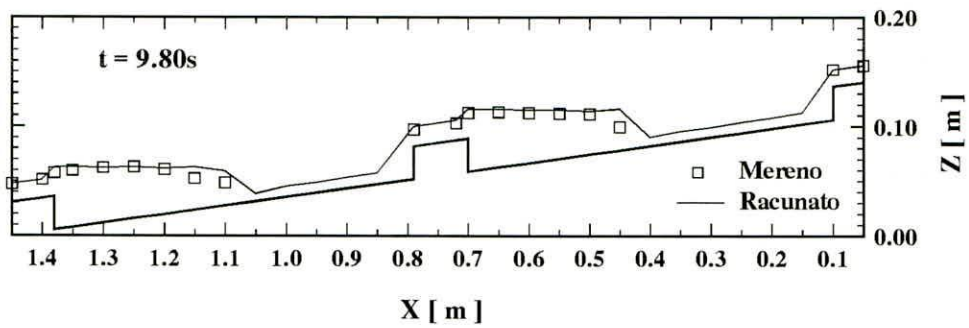
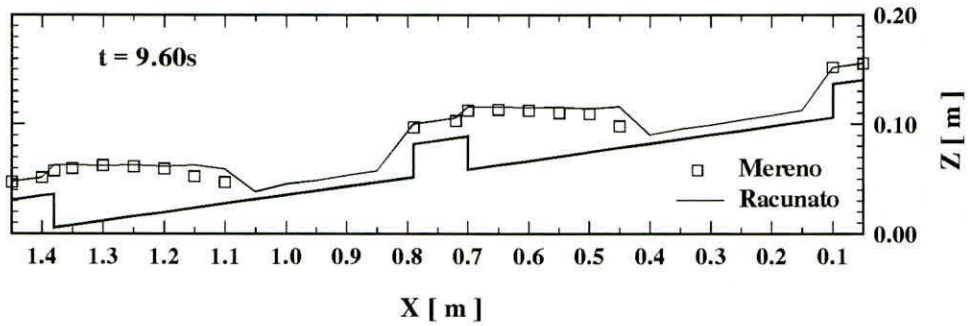
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [7.2 ; 7.8]$ s



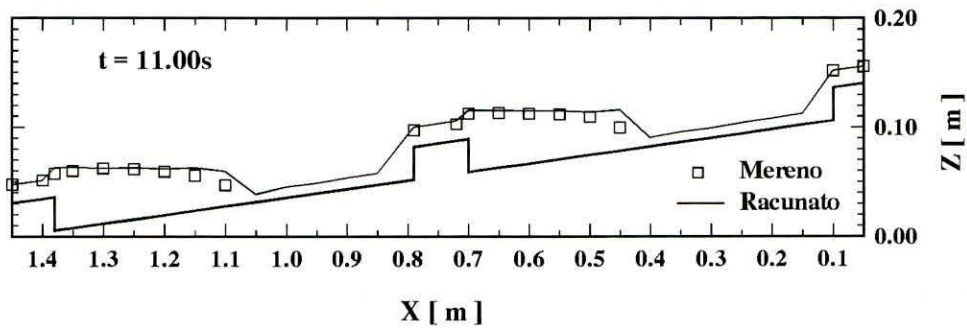
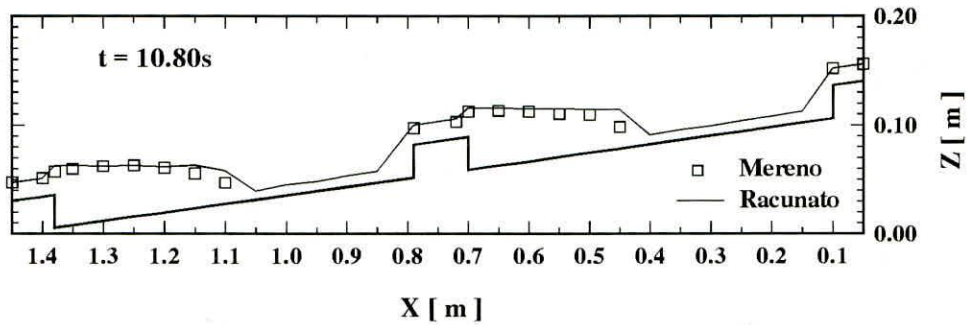
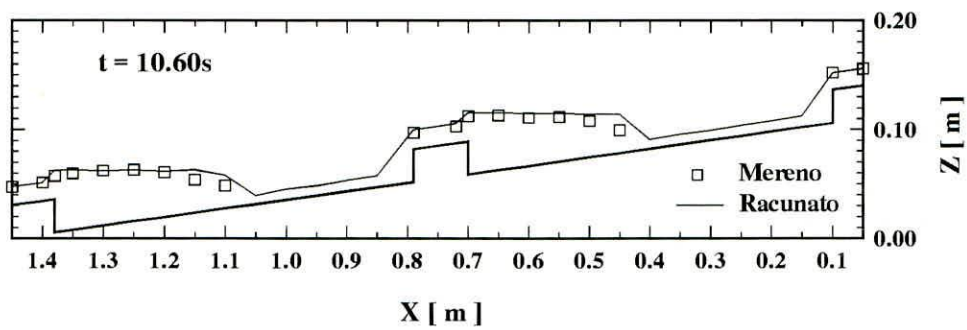
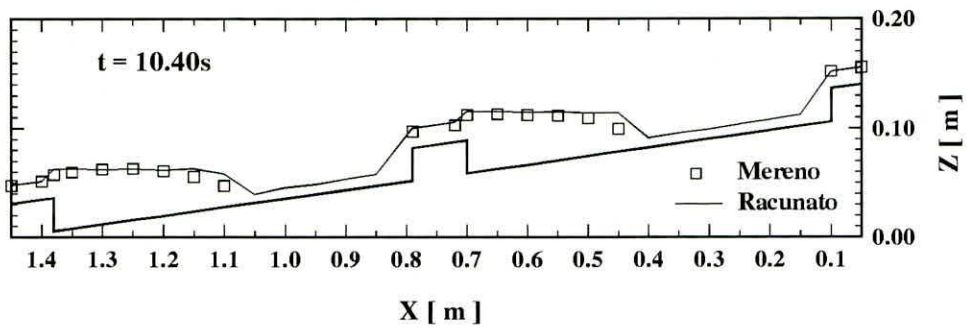
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [8.0 ; 8.6]$ s

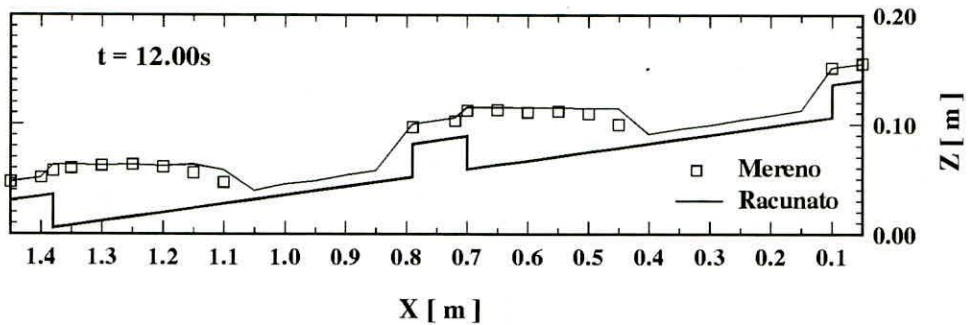
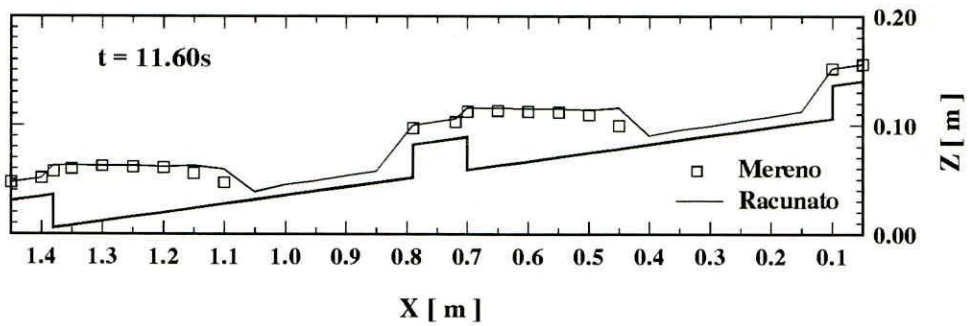
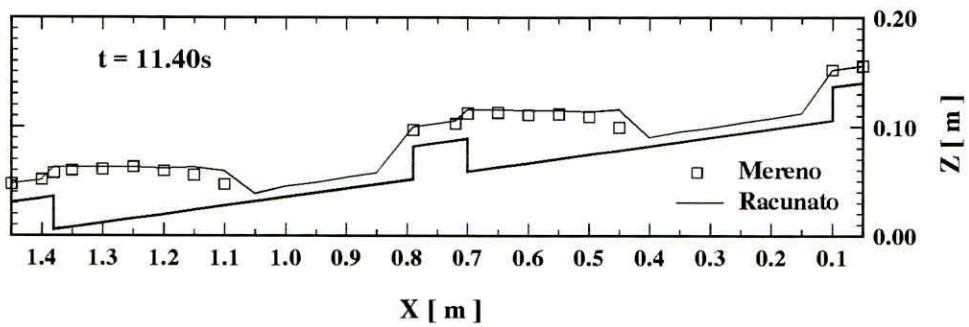
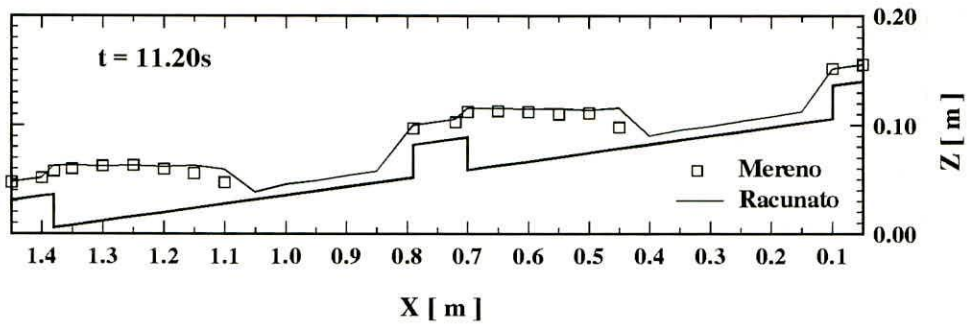
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [8.8 ; 9.4]$ s



Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [9.6 ; 10.20]$ s

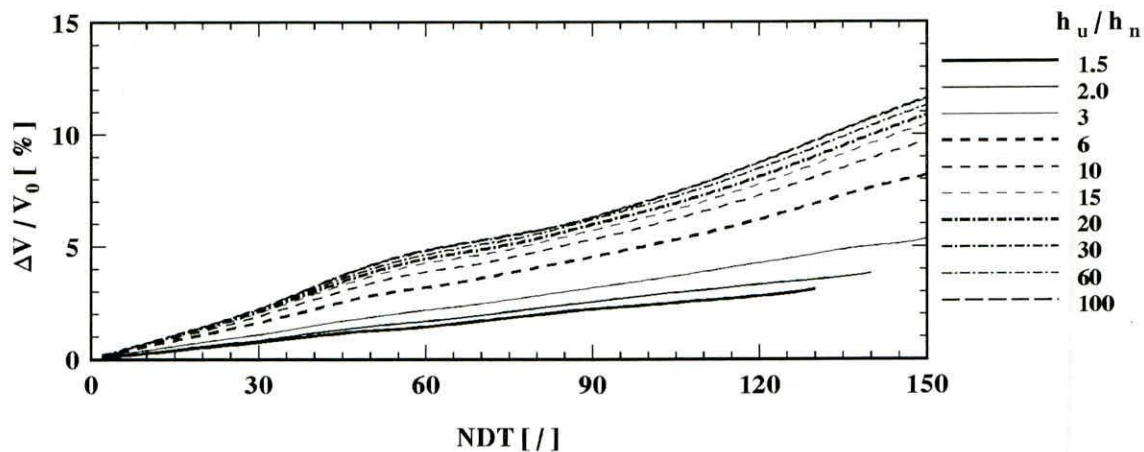
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [10.4 ; 11.0]$ s



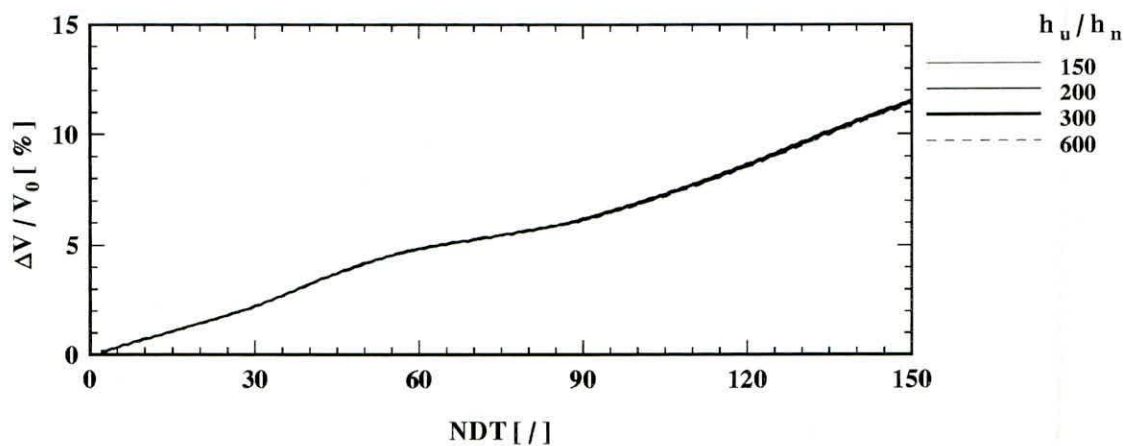
Prilog 7: Izmerene i sračunate linije nivoa (analiza tečenja preko tri široka praga u burnom režimu); $t \in [11.2 ; 12.0]$ s

Prilog 8: Promena relativne greške zapremine u funkciji broja računskih koraka (vremena) kada se koriste homogene diskretizacione jednačine u nekonzervativnom obliku

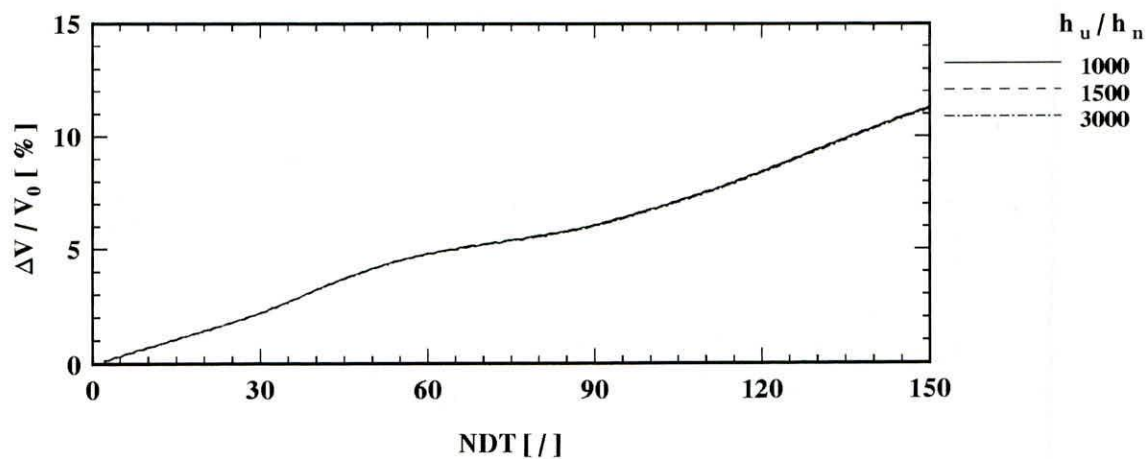
a)



b)

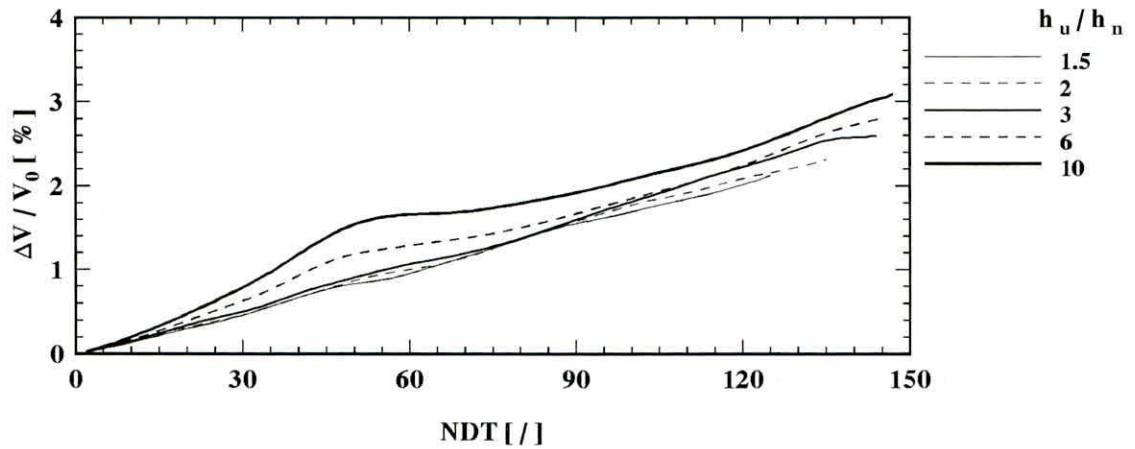


c)

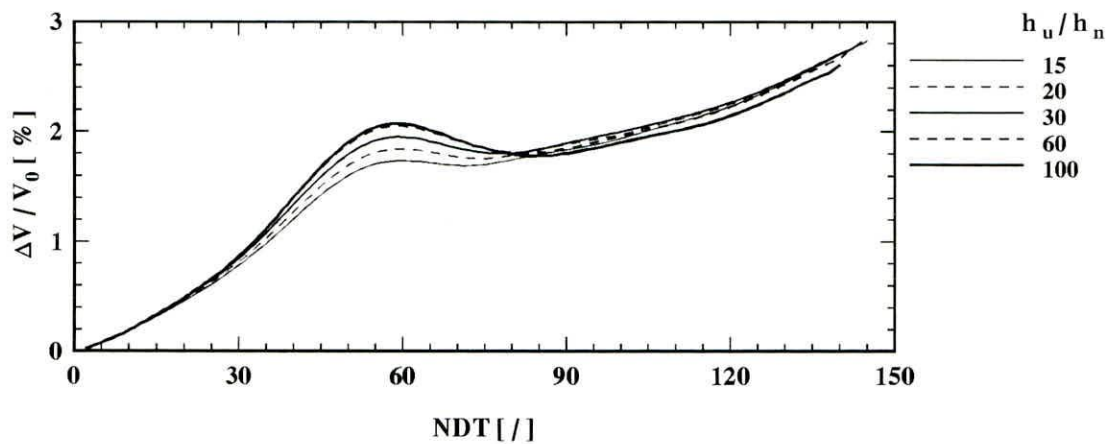


Prilog 9: Promena relativne greške zapremine u funkciji broja računskih koraka (vremena) kada se koriste homogene diskretizacione jednačine u konzervativnom obliku

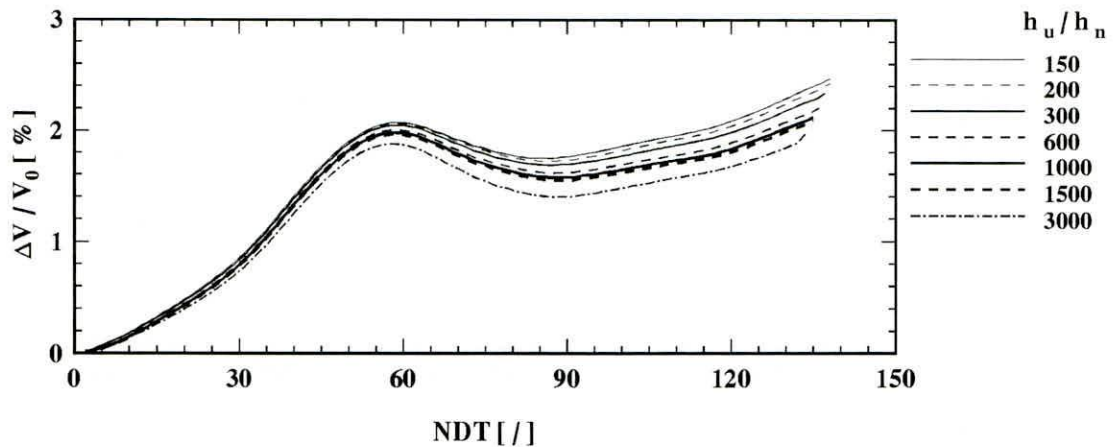
a)



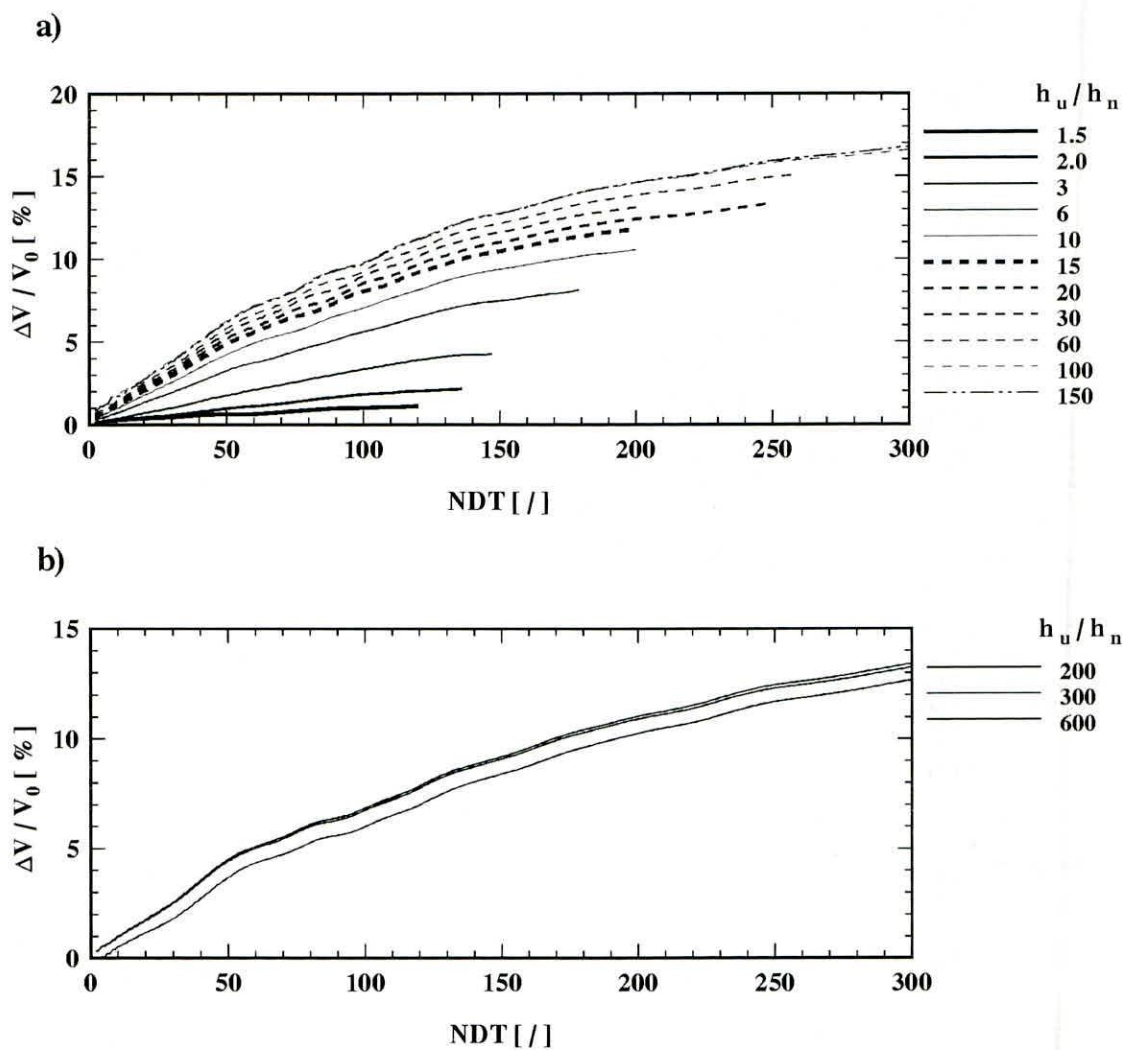
b)



c)

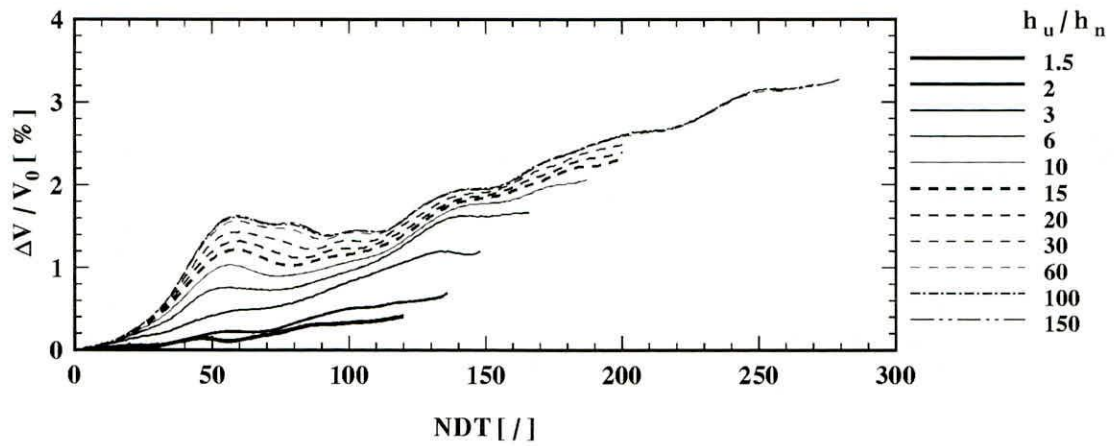


Prilog 10: Promena relative greške zapremine u funkciji broja računskih koraka (vremena) kada se koriste nehomogene diskretizacione jednačine u nekonzervativnom obliku

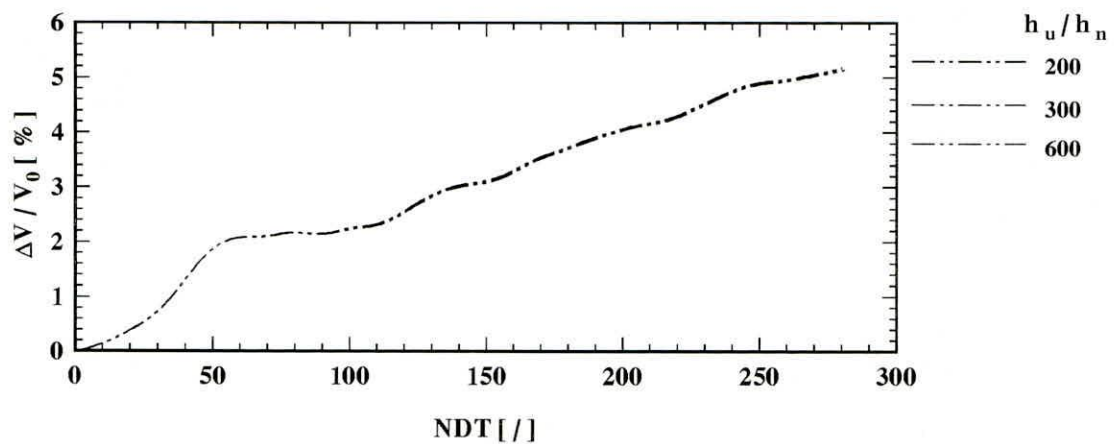


Prilog 11: Promena relativne greške zapremine u funkciji broja računskih koraka (vremena) kada se koriste nehomogene diskretizacione jednačine u konzervativnom obliku

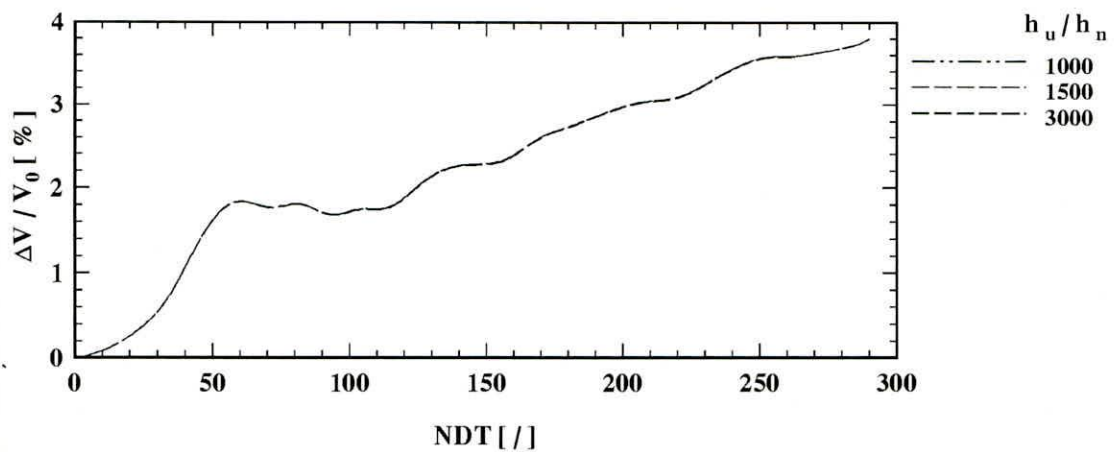
a)



b)

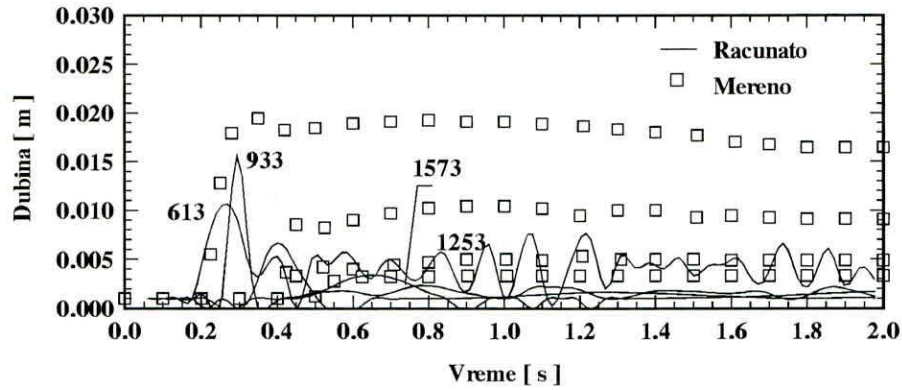


c)

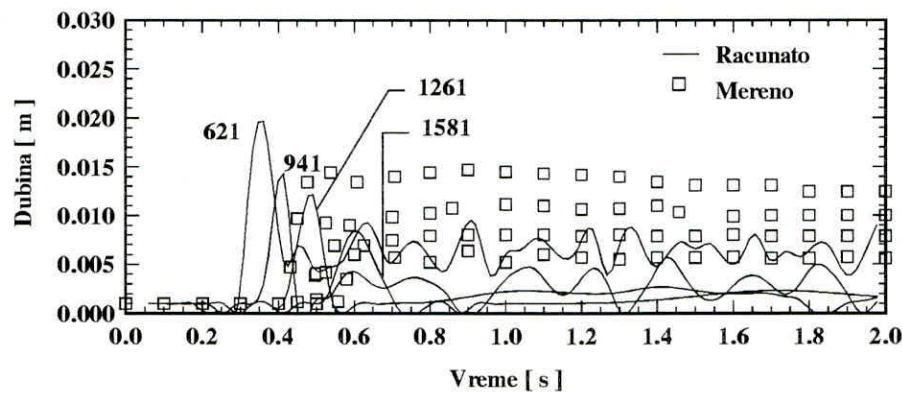


Prilog 12a: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.02$

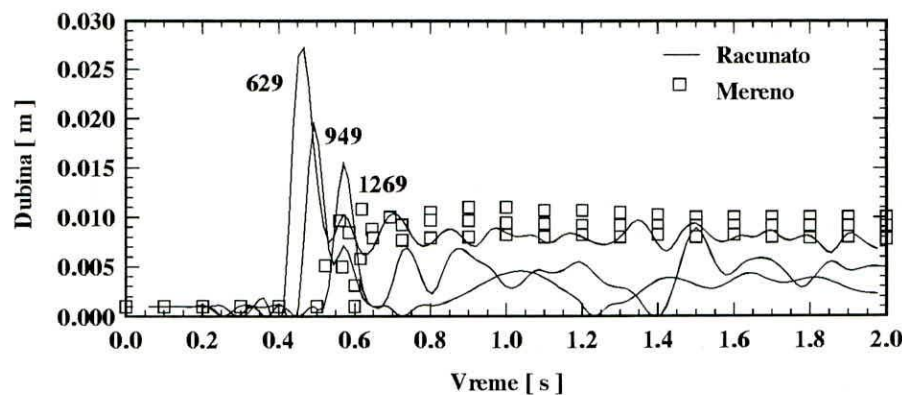
1)



2)

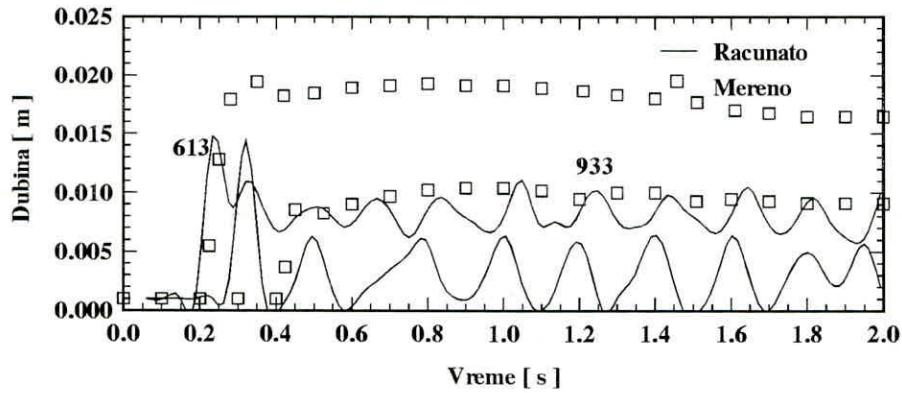


3)

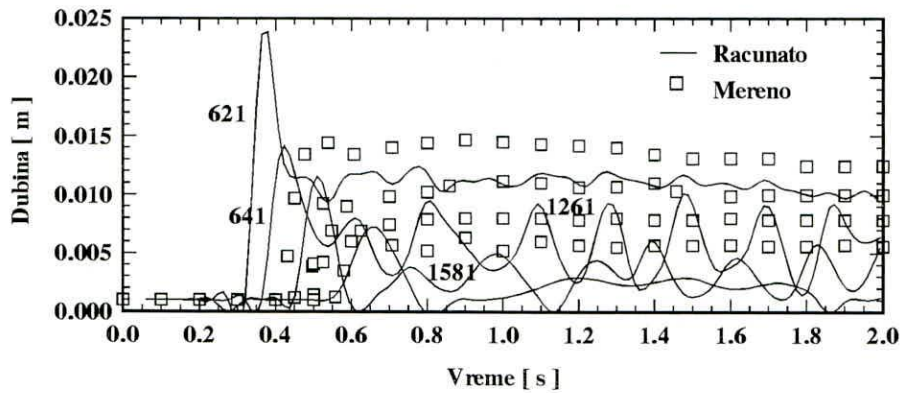


Prilog 12b: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.05$

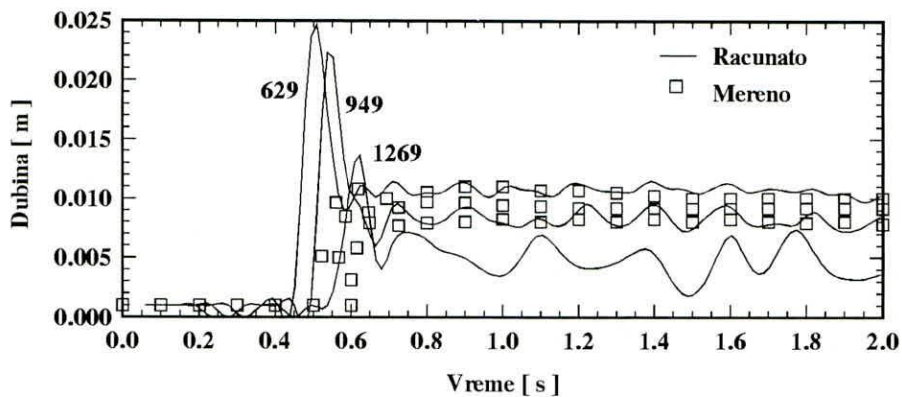
1)



2)

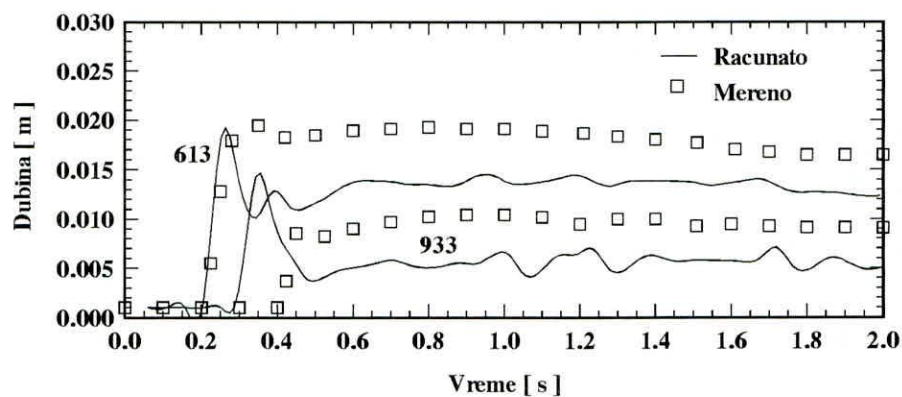


3)

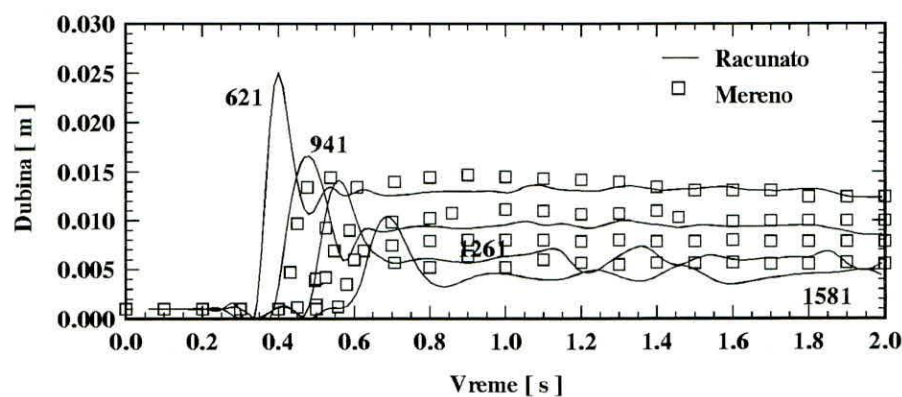


Prilog 12c: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.10$

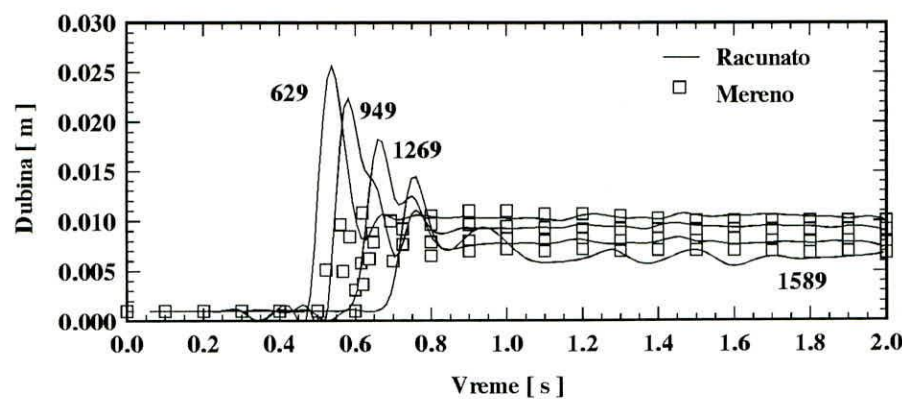
1)



2)

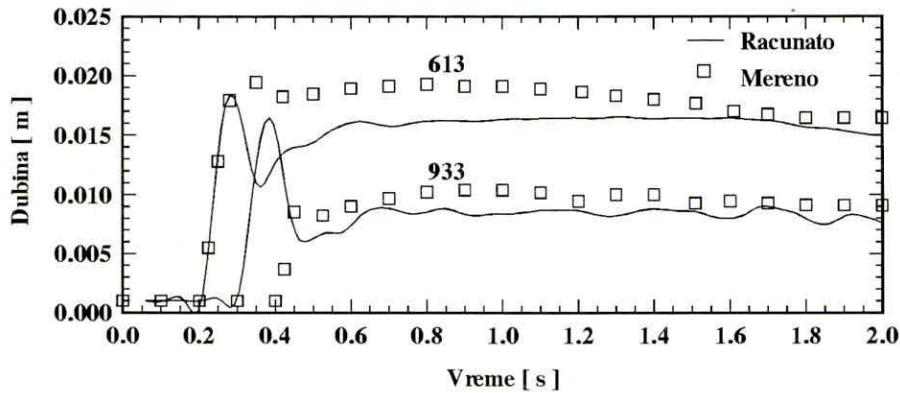


3)

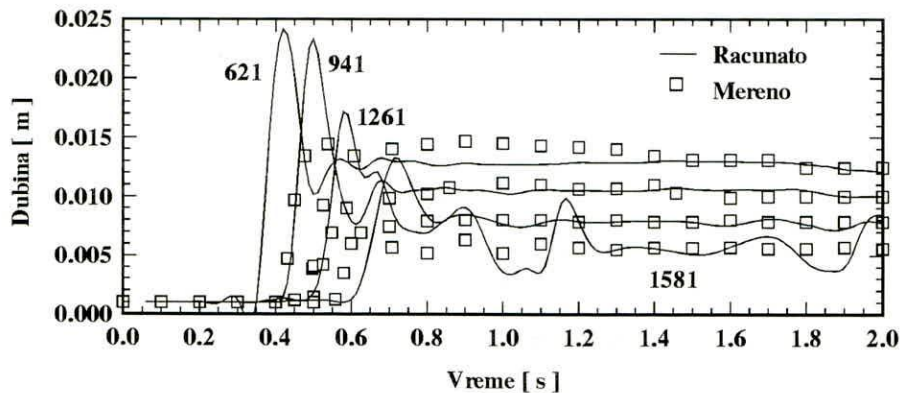


Prilog 12d: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.15$

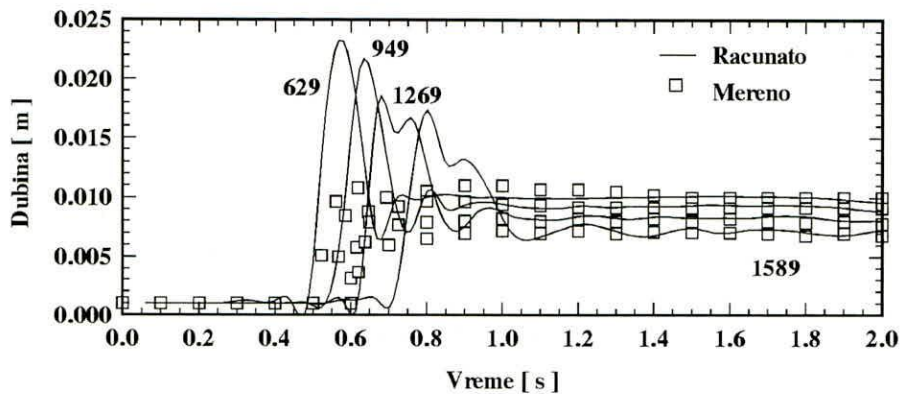
1)



2)

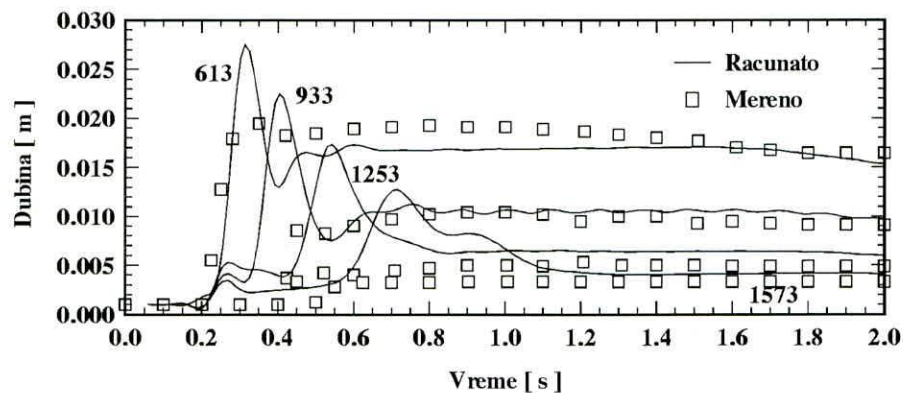


3)

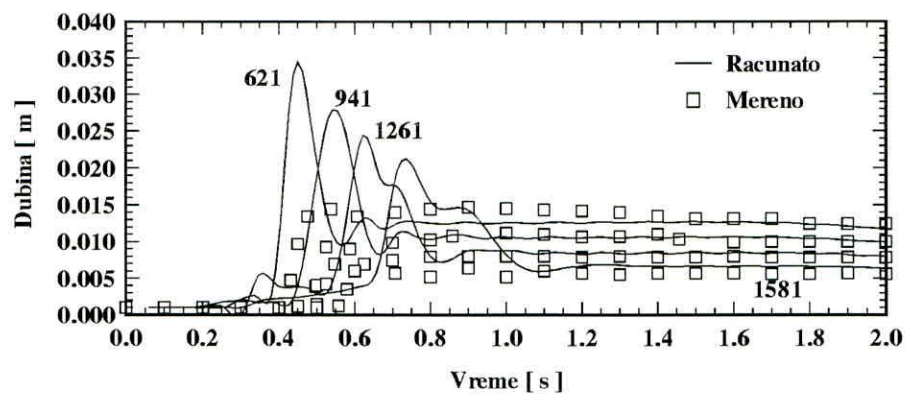


Prilog 12e: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.24$

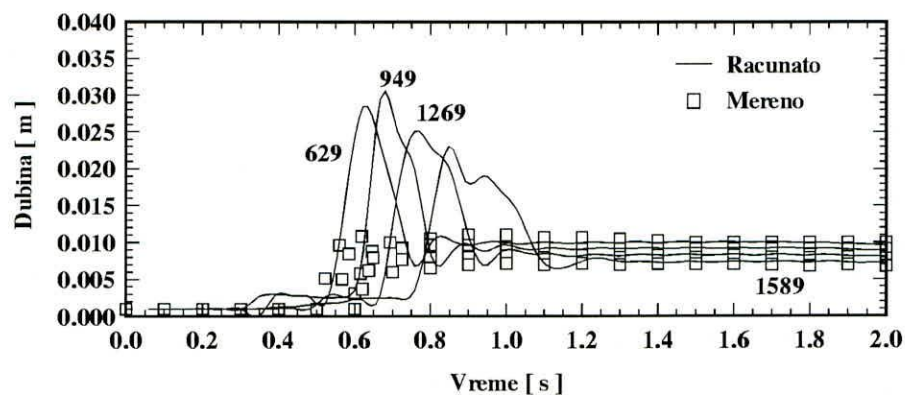
1)



2)

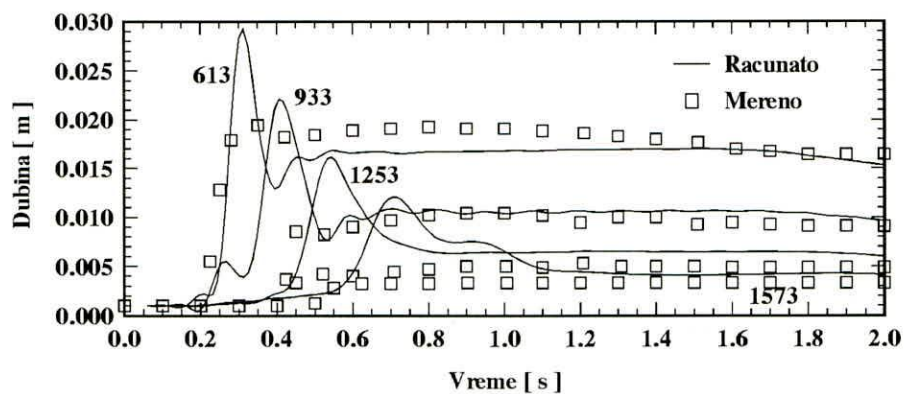


3)

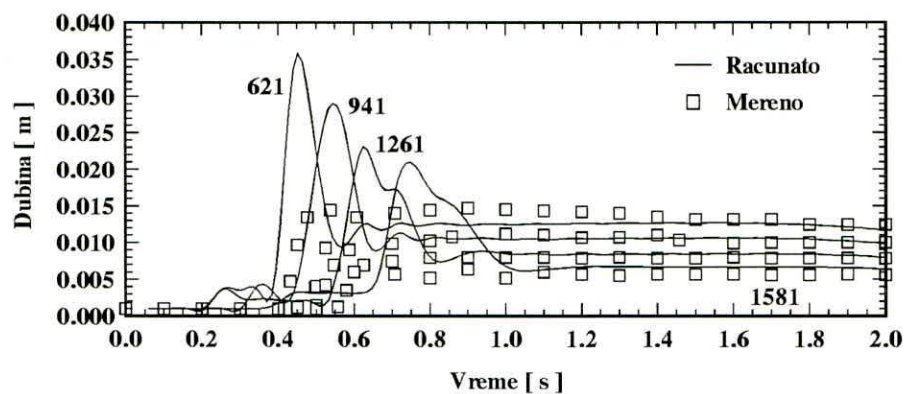


Prilog 12f: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.25$

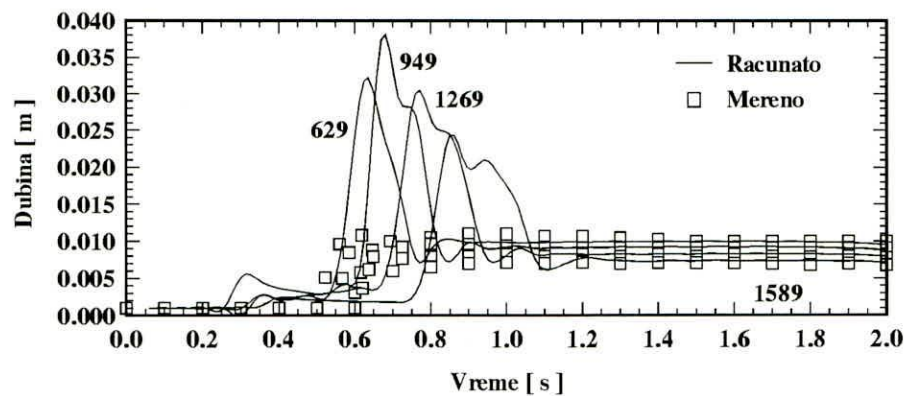
1)



2)

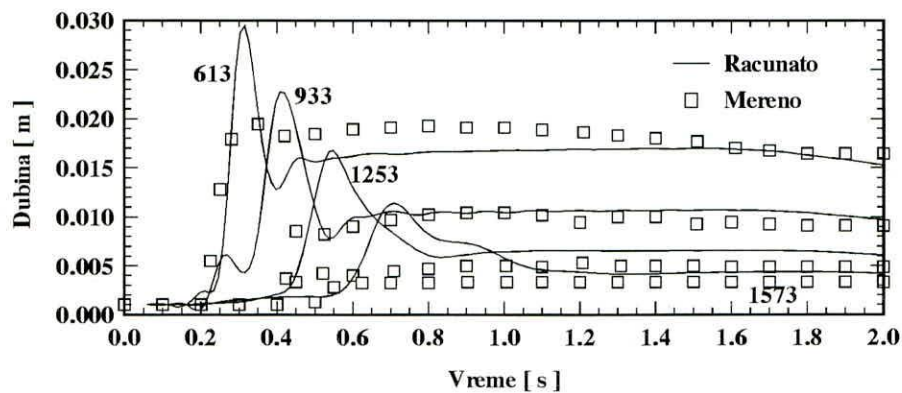


3)

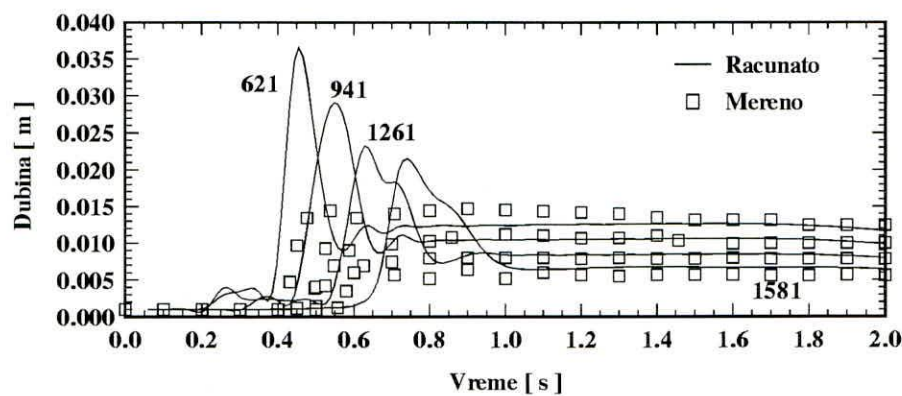


Prilog 12g: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku za $k=0.26$

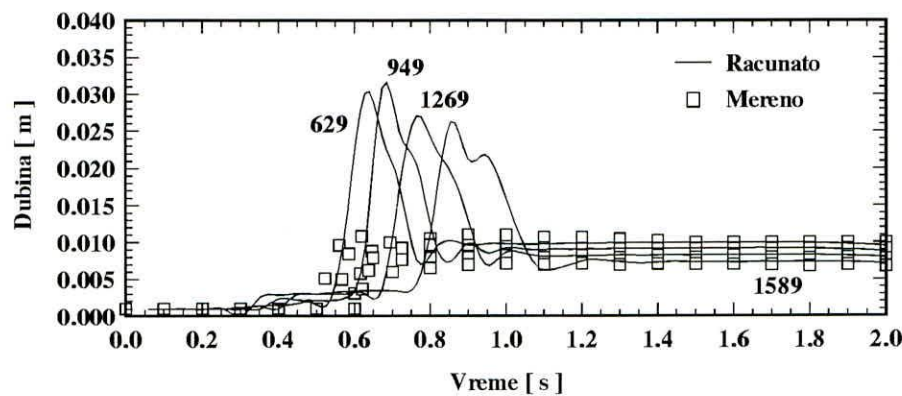
1)



2)

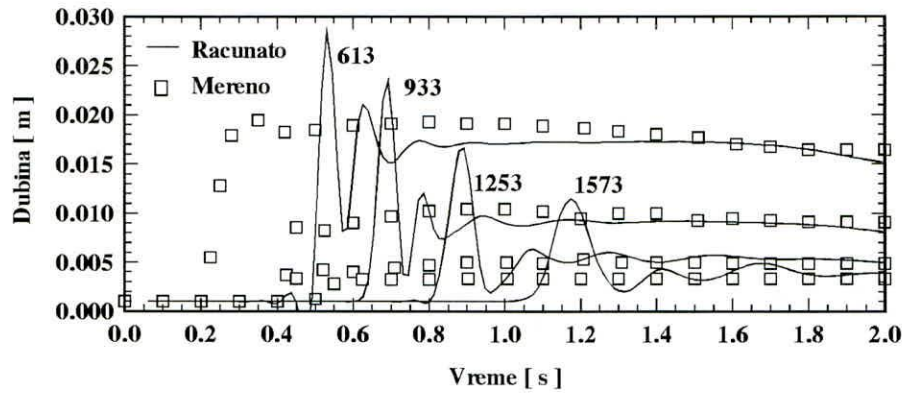


3)

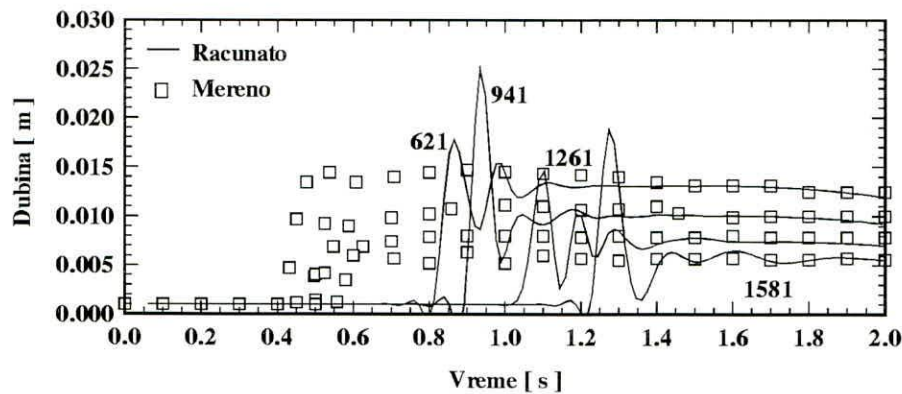


Prilog 13a: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku za $k=0.0$

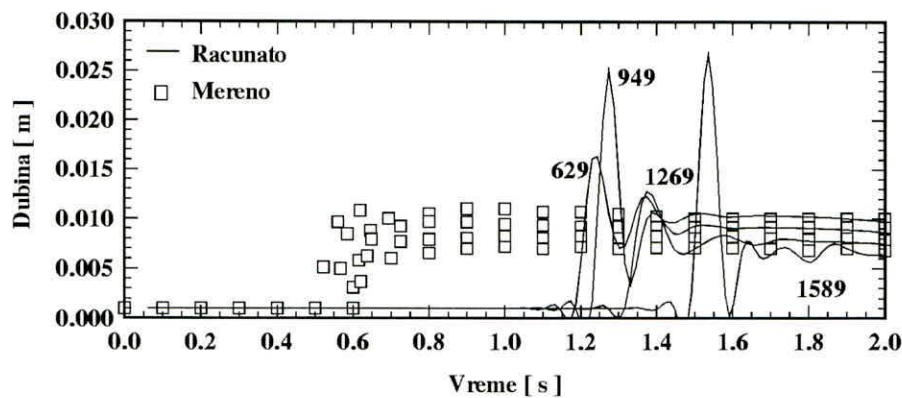
1)



2)

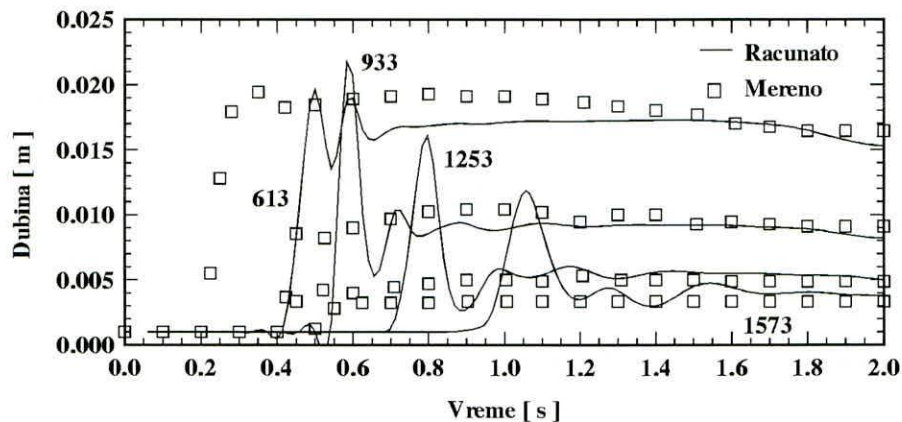


3)

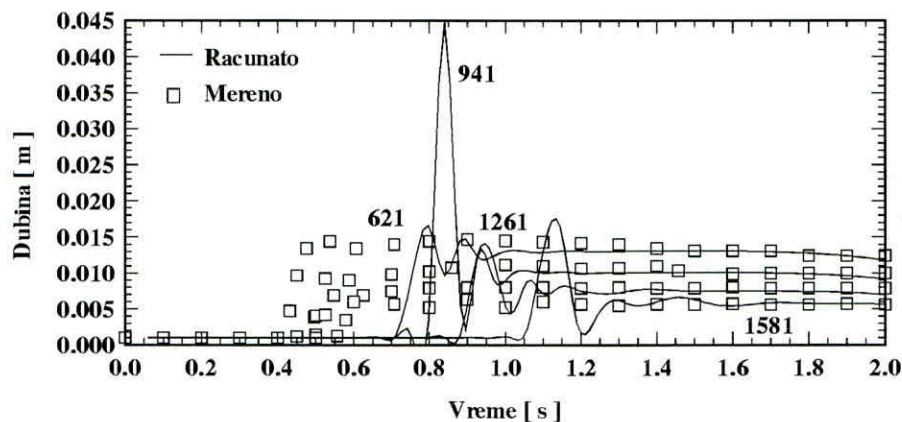


Prilog 13b: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku za $k=0.02$

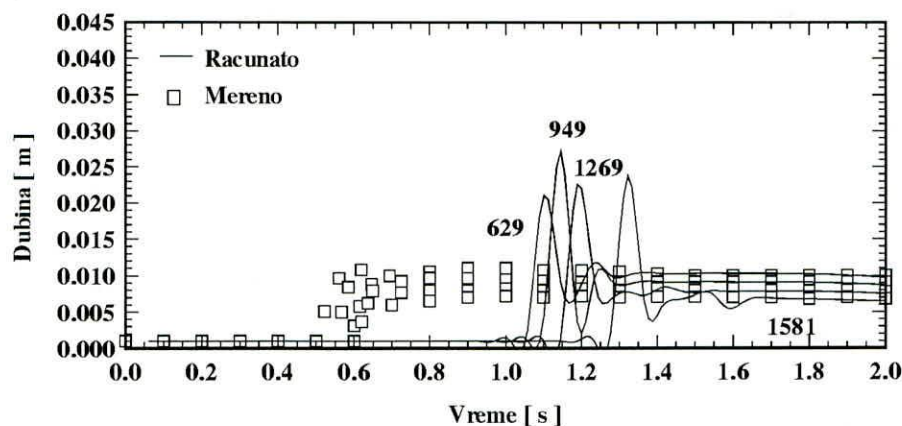
1)



2)

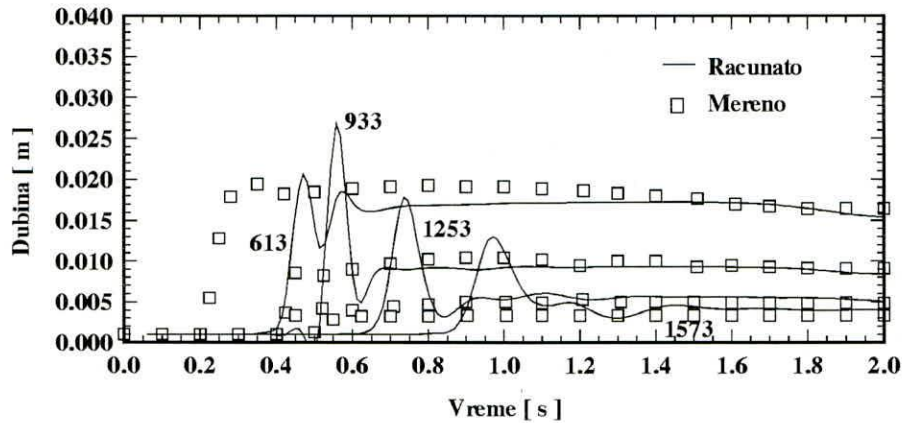


3)

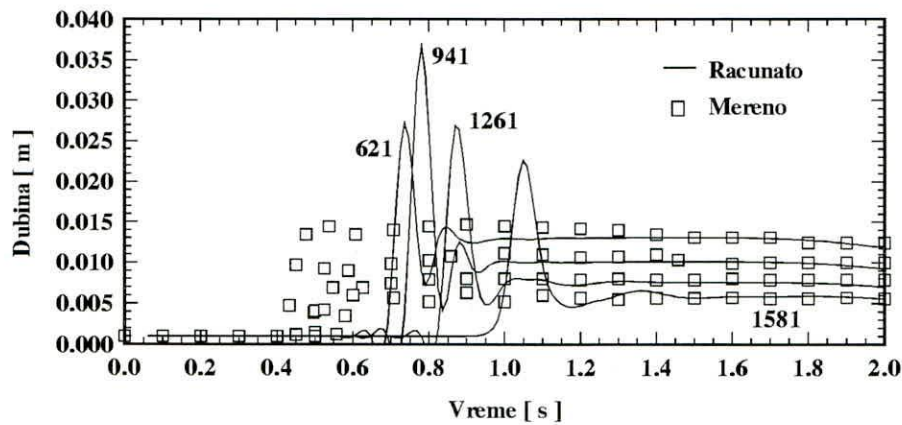


Prilog 13c: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku za $k=0.05$

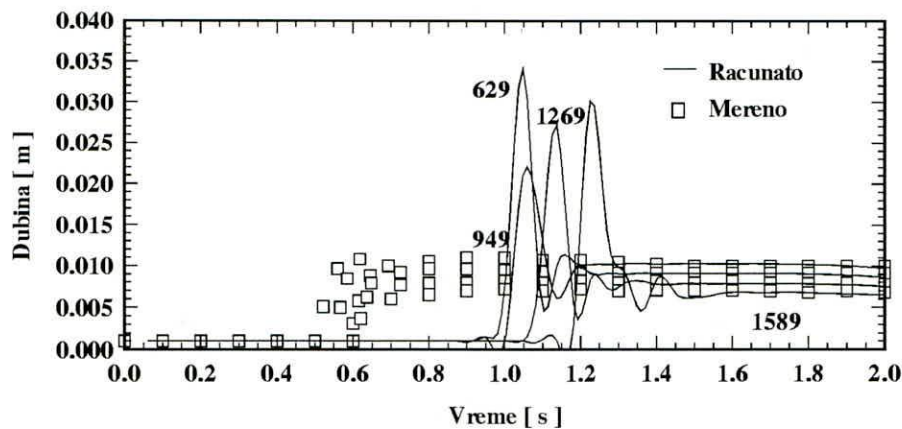
1)



2)

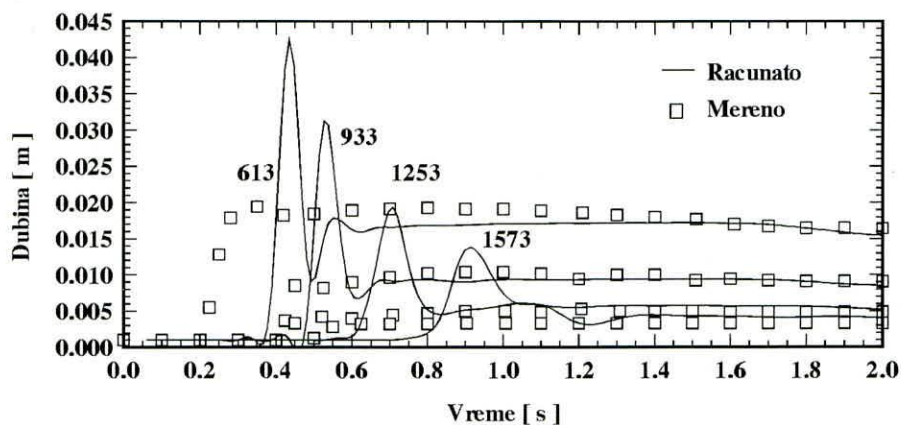


3)

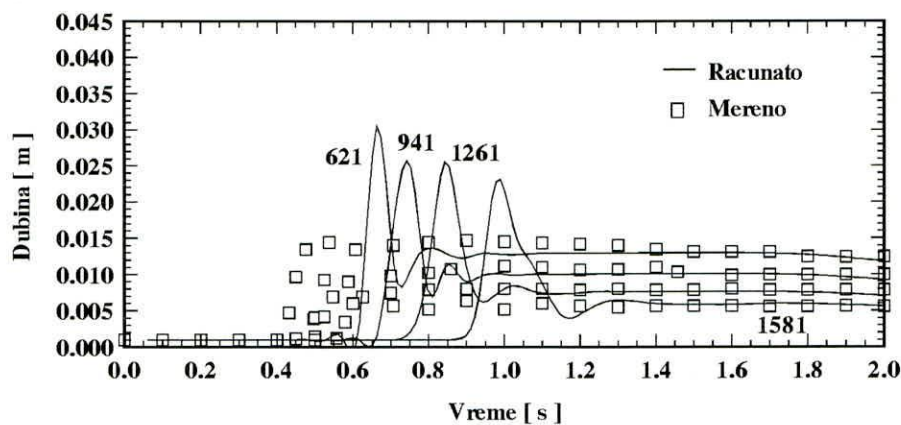


Prilog 13d: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku za $k=0.10$

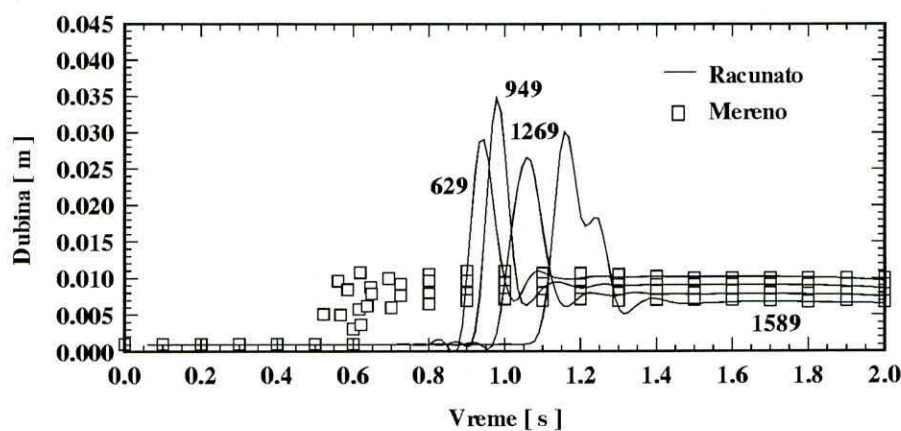
1)



2)

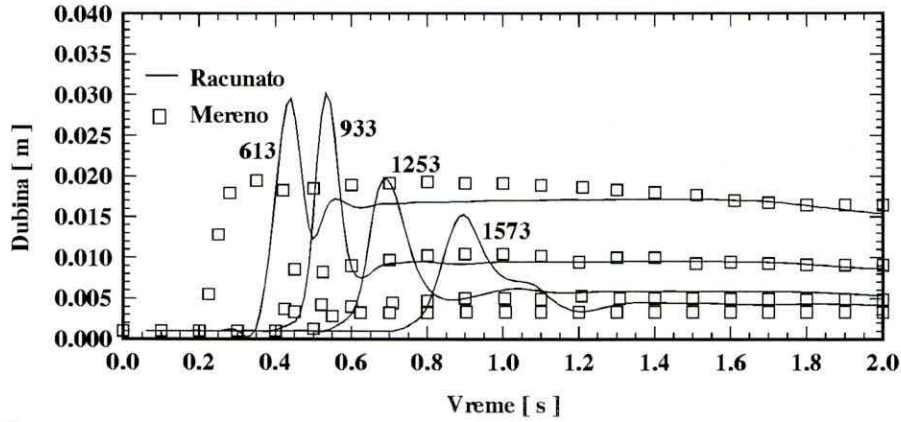


3)

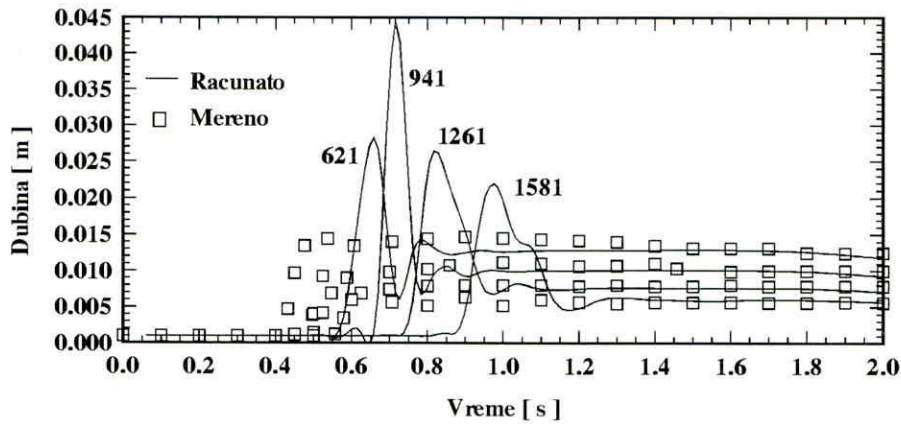


Prilog 13e: Nivogrami u poljima 613, 933, 1253, 1573, 621, 941, 1261, 1581, 629, 949, 1269 i 1589 dobijeni korišćenjem numeričkog modela sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku za $k=0.15$

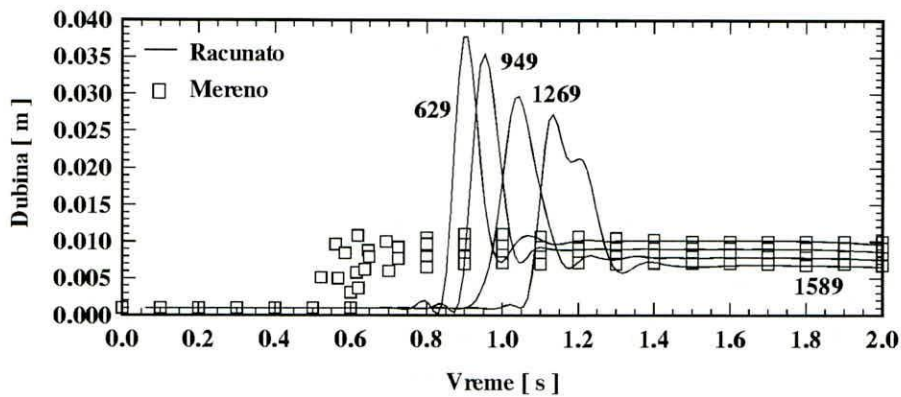
1)



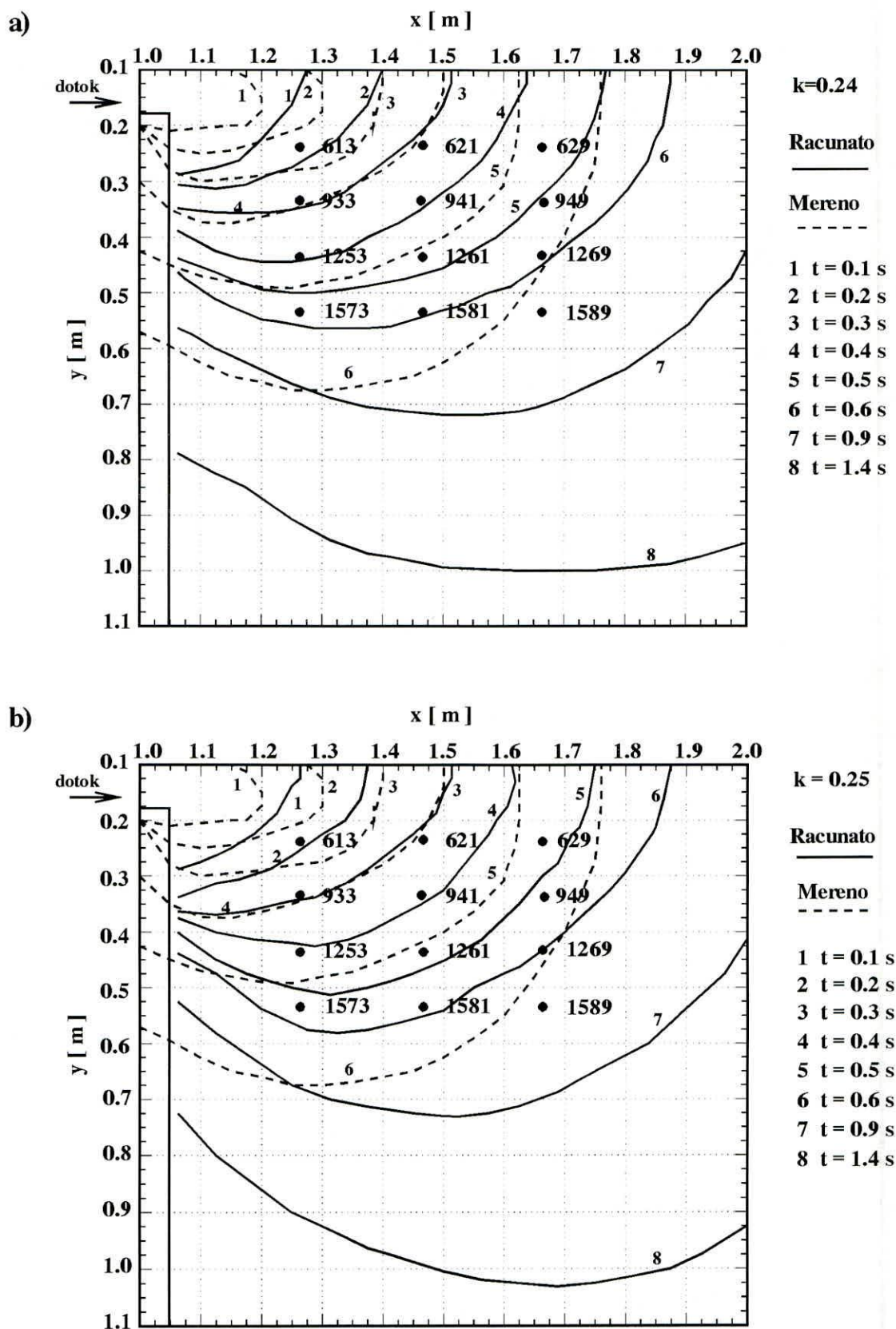
2)

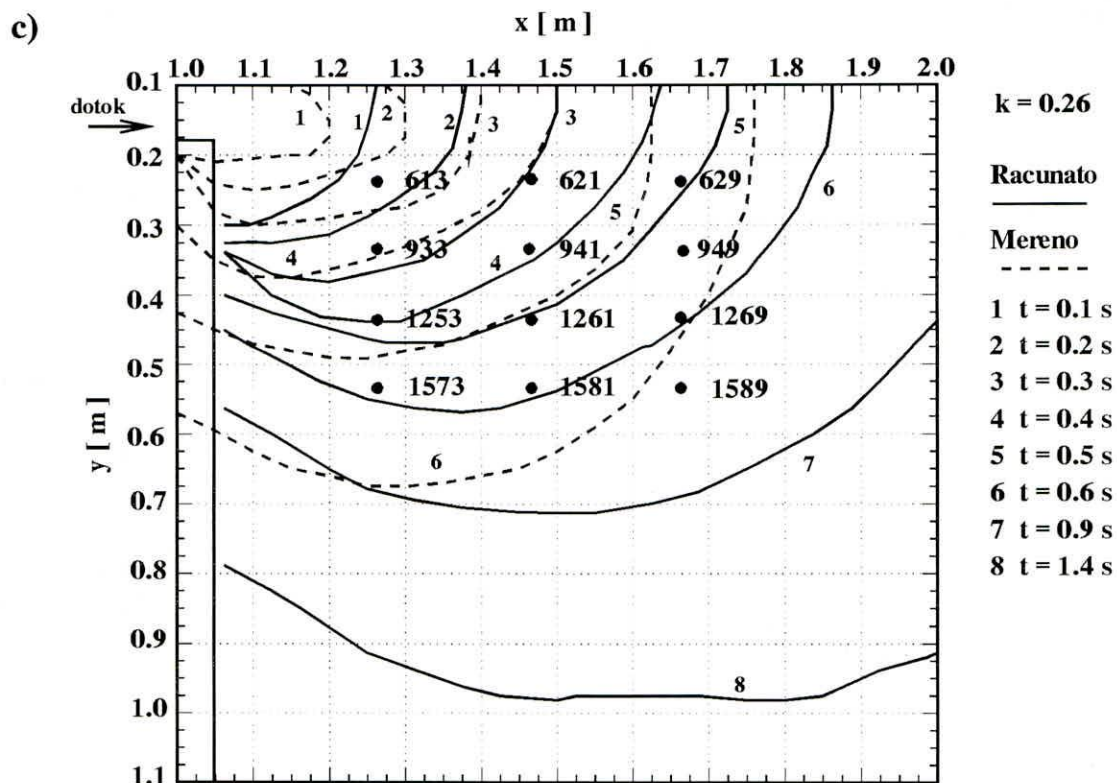


3)

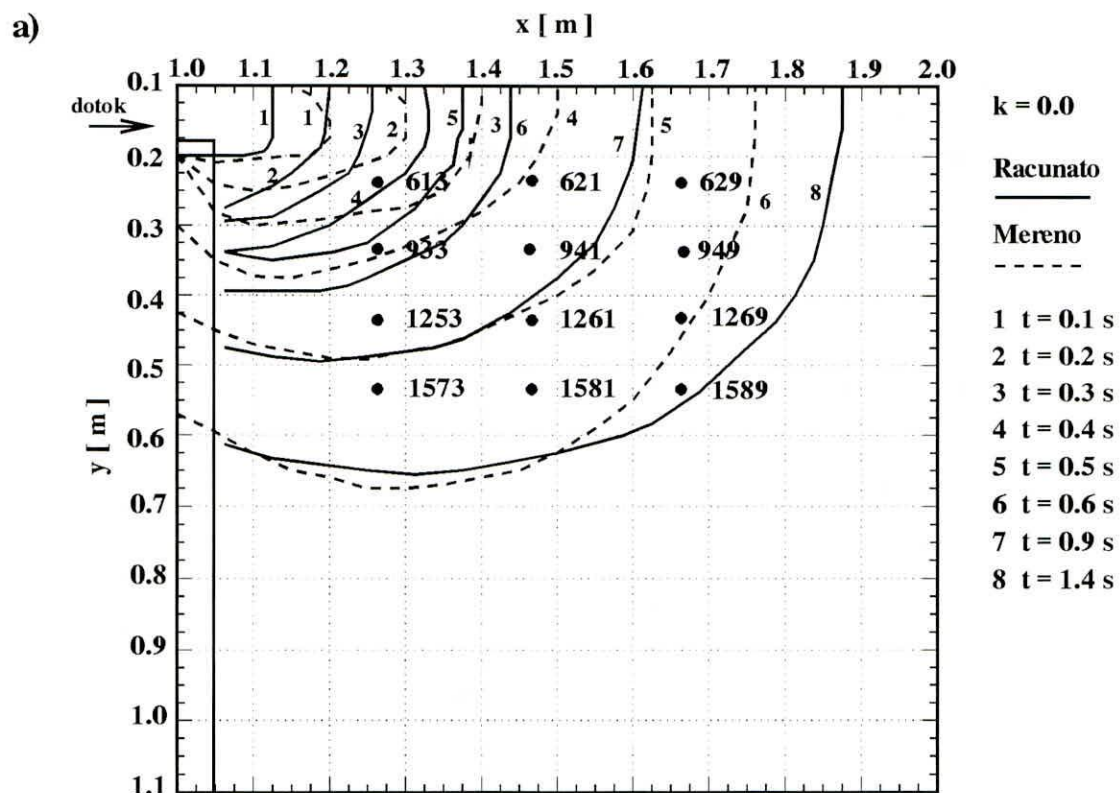


Prilog 14: Prostiranje talasa u xOy ravni — numerički model sa diskretizacionim jednačinama u konzervativnom obliku

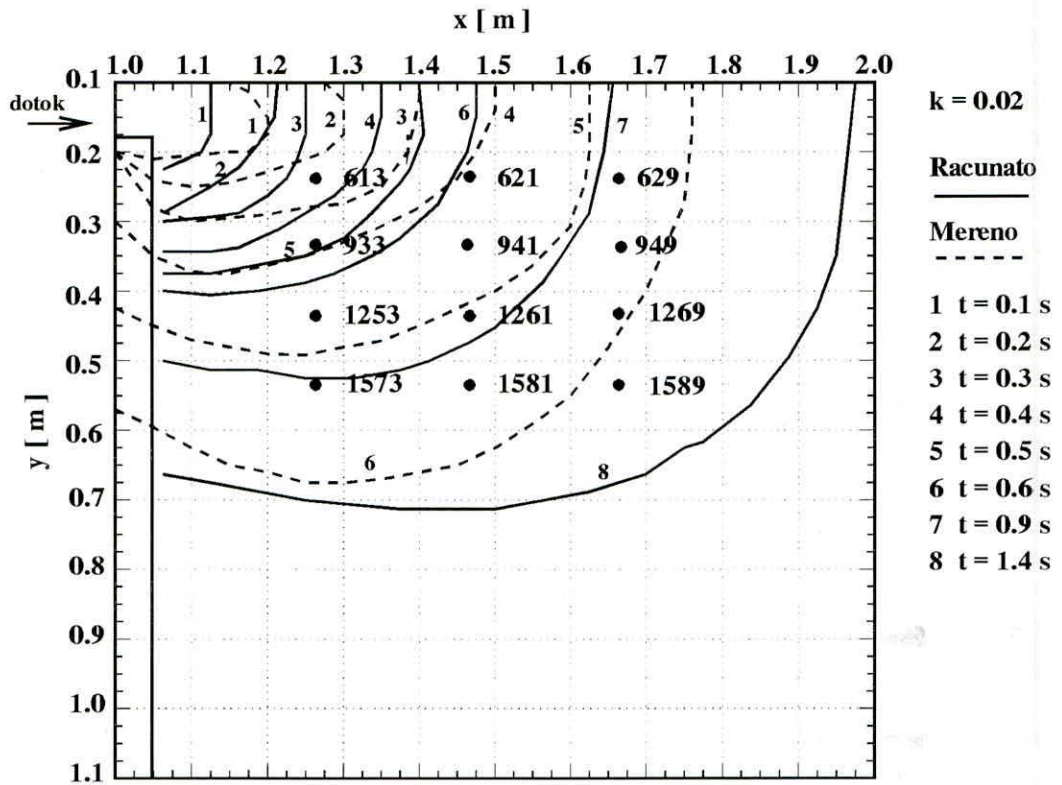




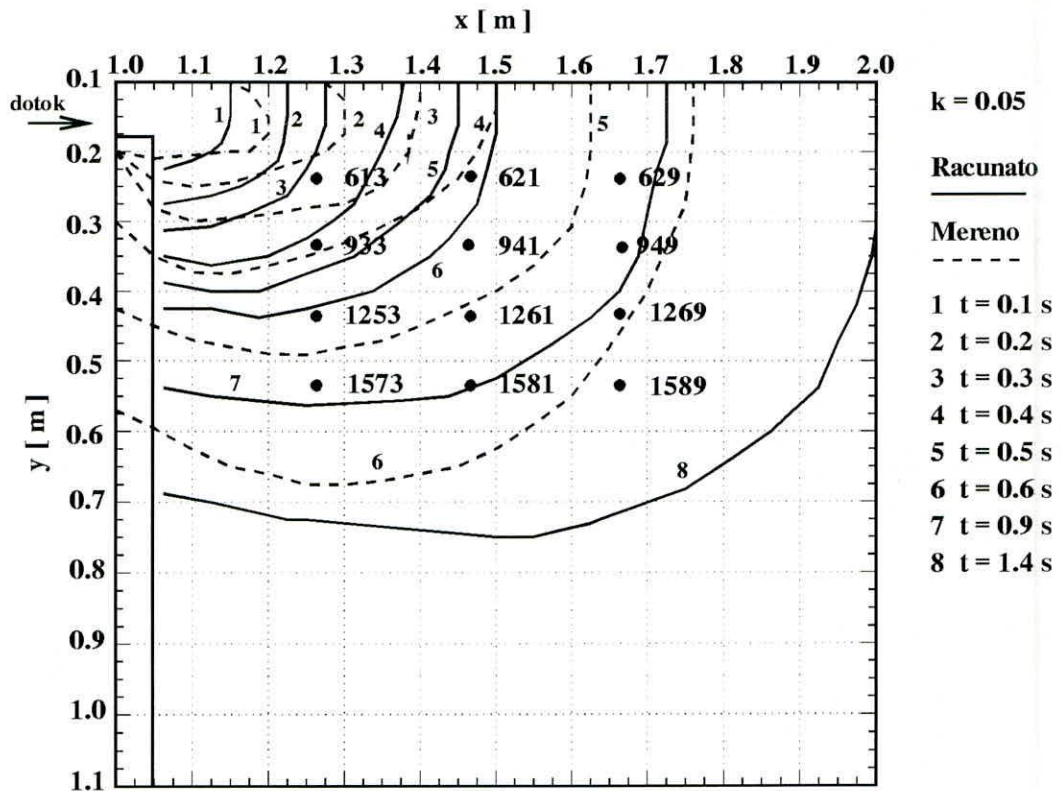
Prilog 15: Prostriranje talasa u xOy ravni — numerički model sa diskretizacionim jednačinama u nekonzervativnom obliku

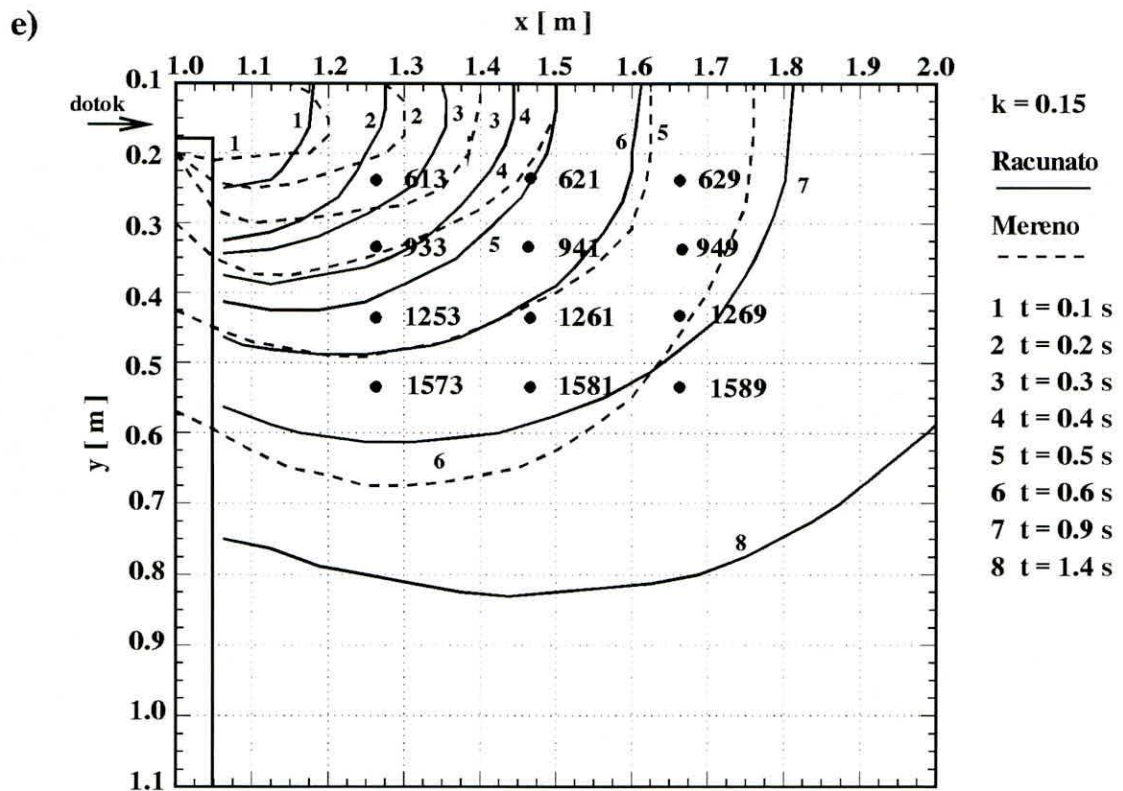
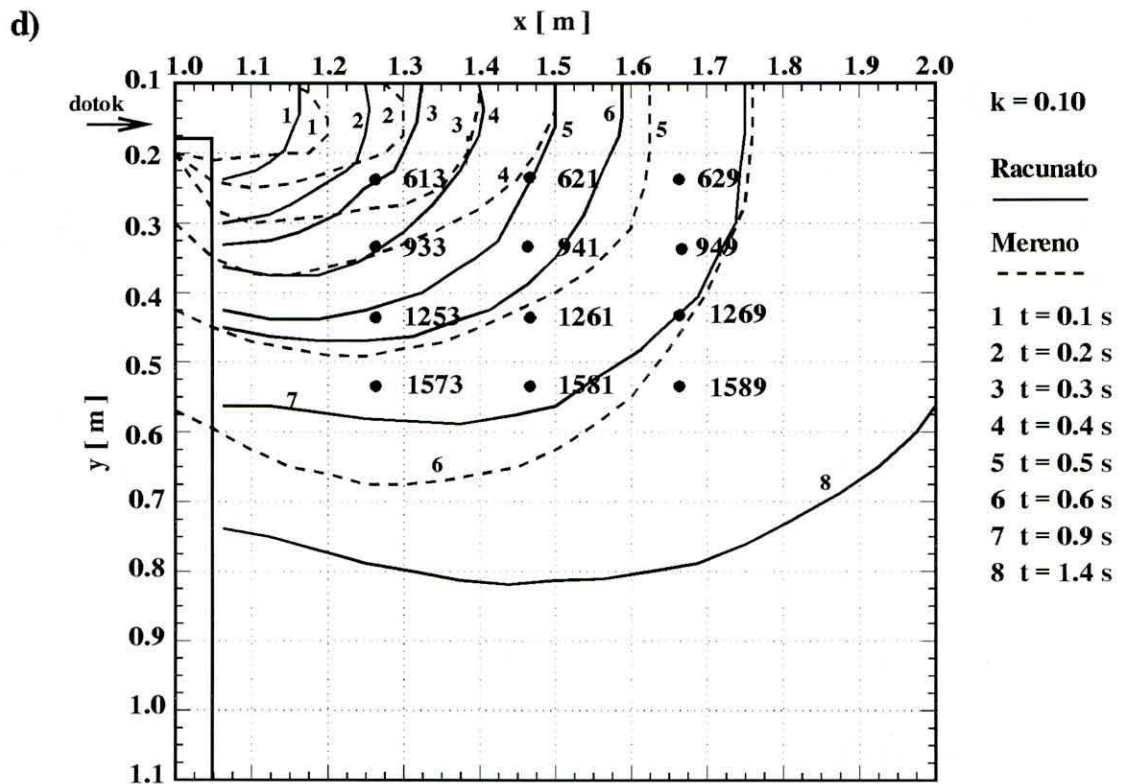


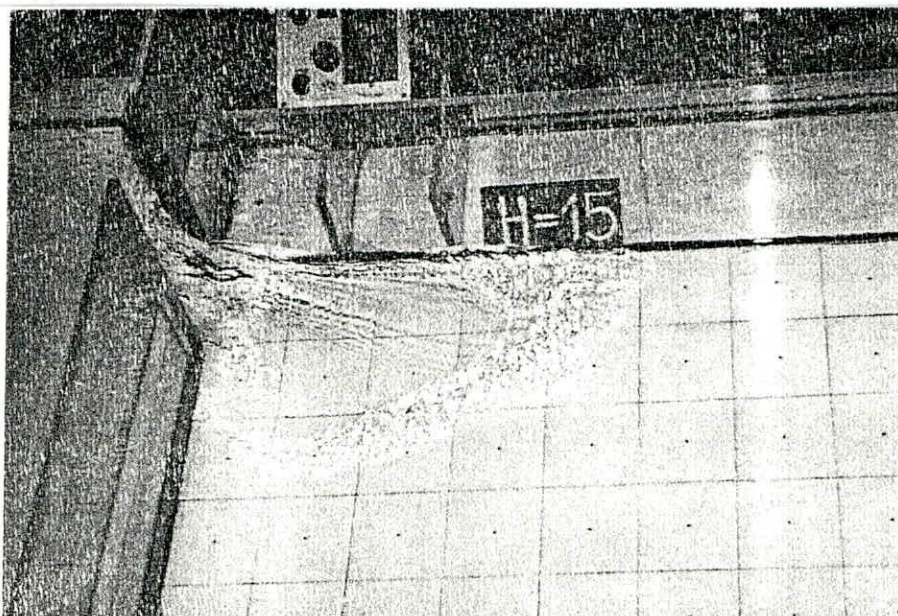
b)

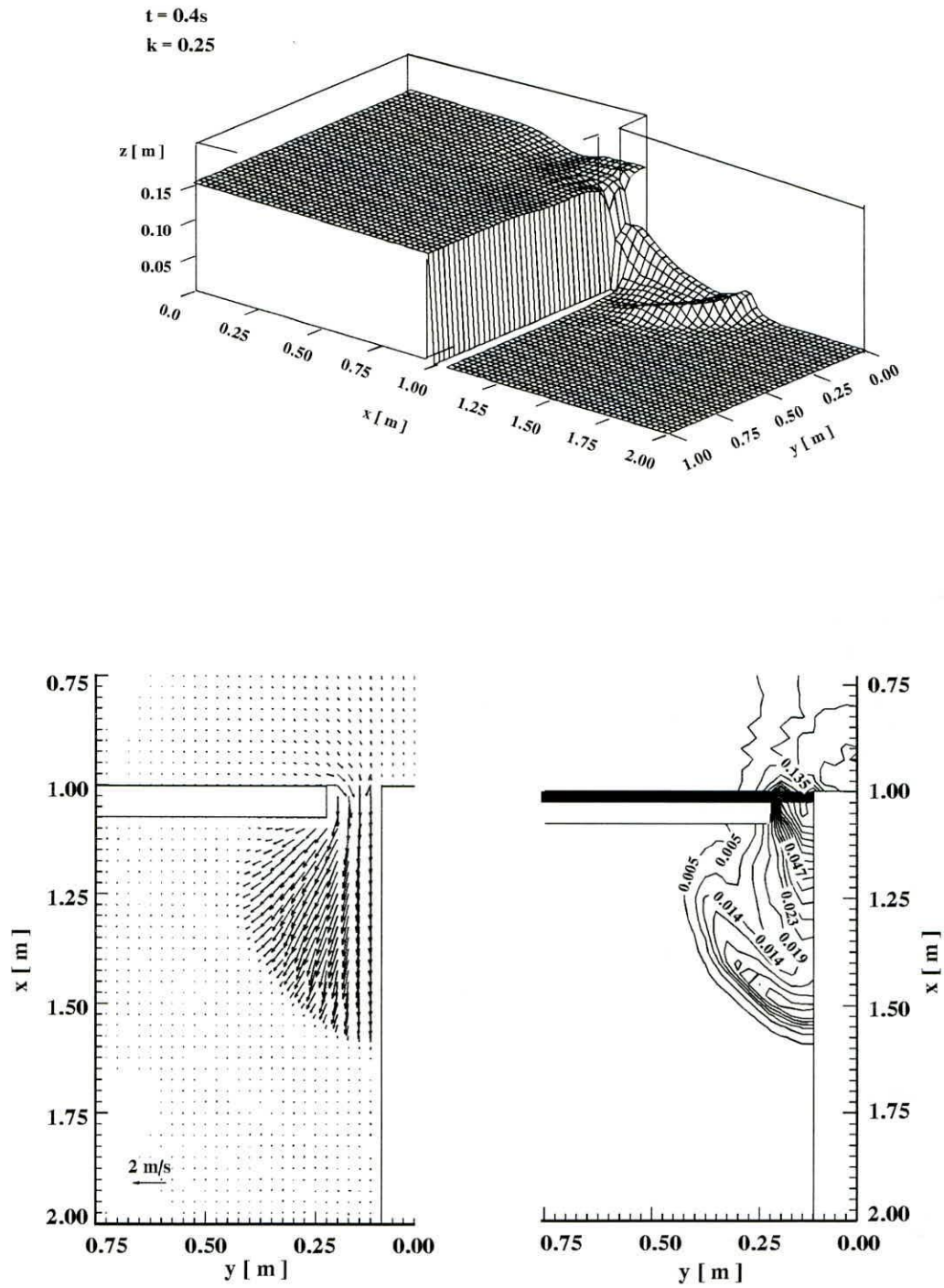


c)

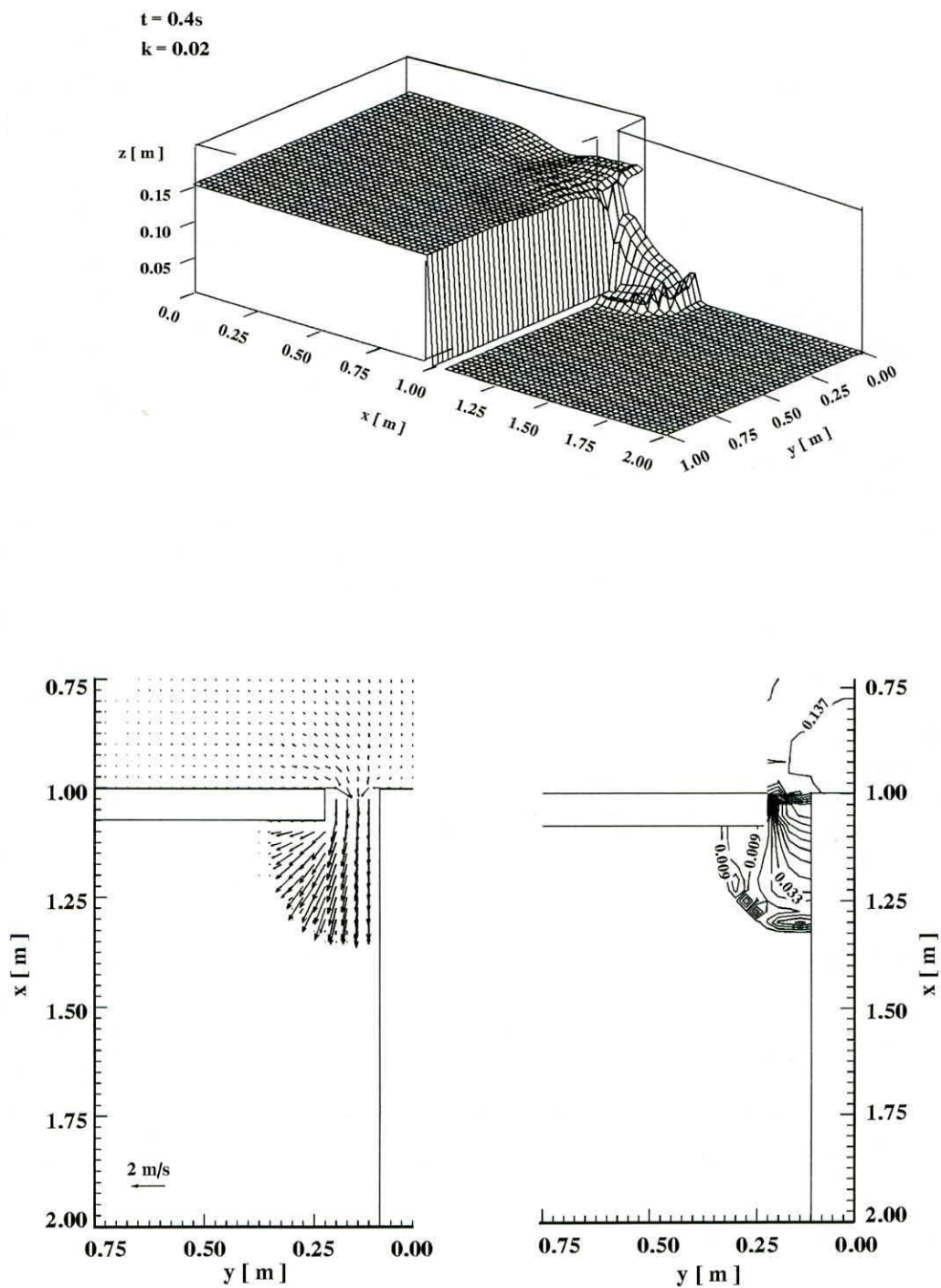




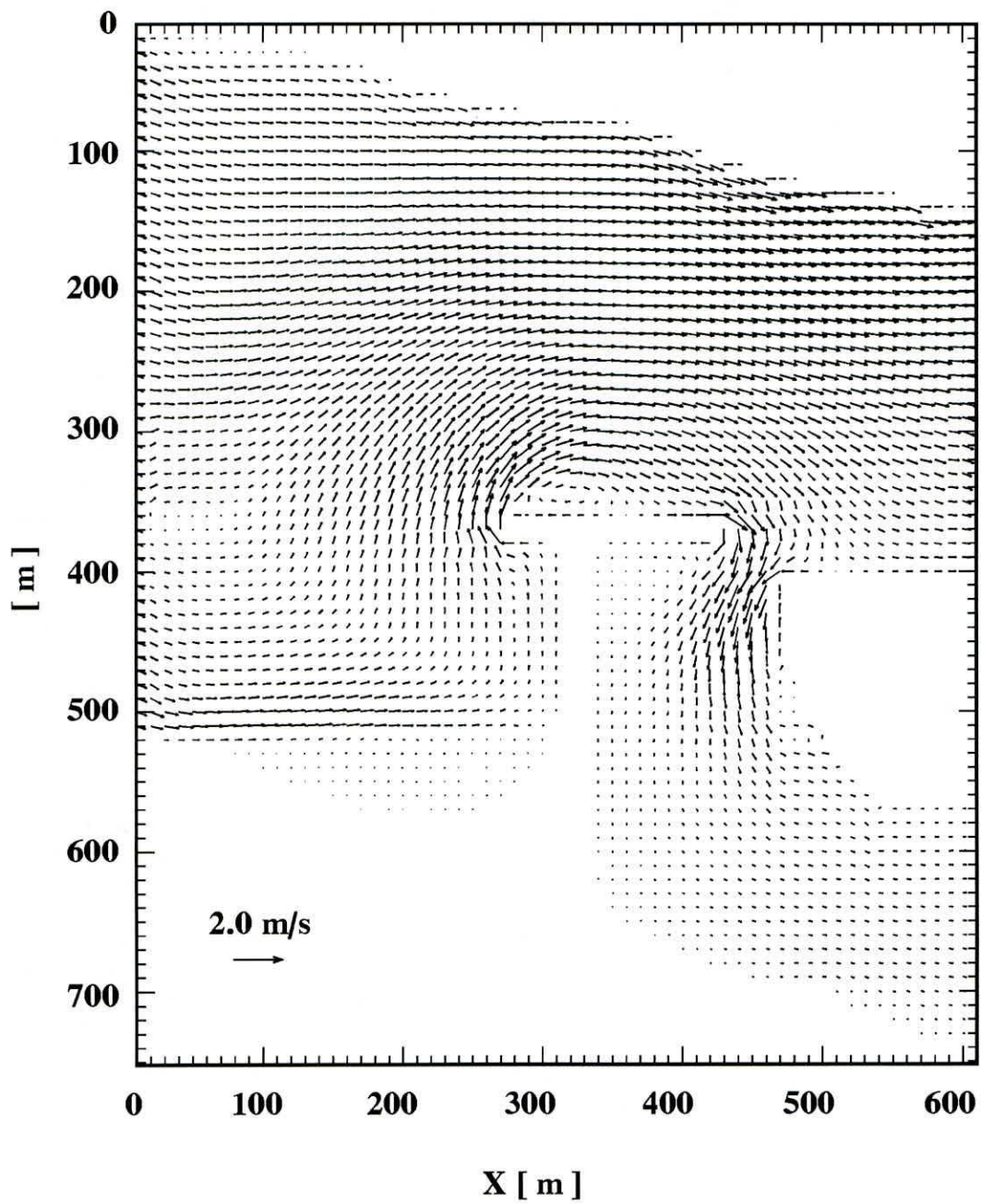
Prilog 16: Površina vodenog ogledala, izolinije dubina i vektori brzina u trenutku $t=0.4s$ **a) fotografija snimljenog talasa**

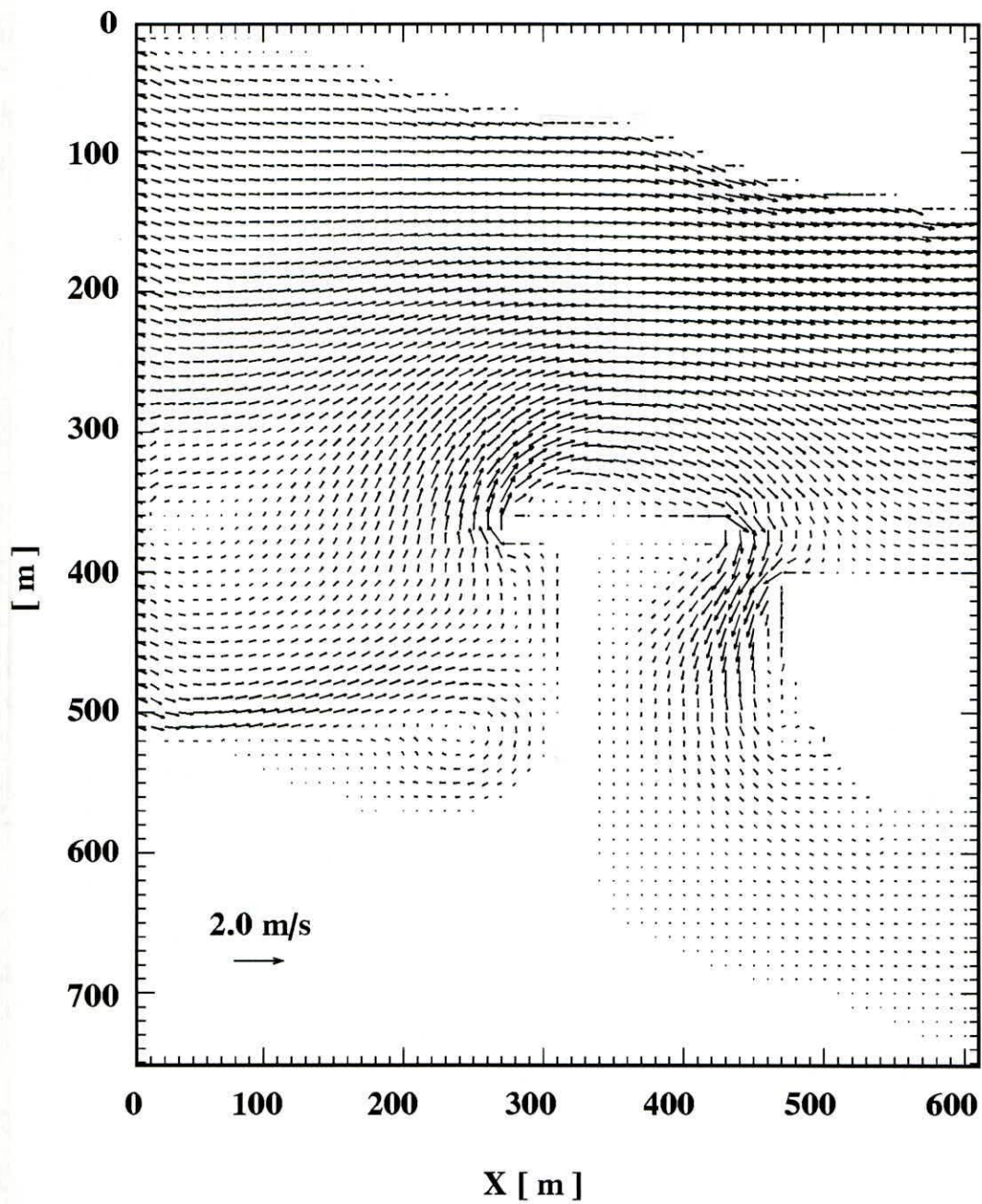
b) talas dobijen numeričkom simulacijom uz korišćenje diskretizacionih jednačina u konzervativnom obliku

c) talas dobijen numeričkom simulacijom uz korišćenje diskretizacionih jednačina u ne-konzervativnom obliku



Prilog 18: Polje brzina u blizini napera sa glavom

a) $t = 10.7\text{min}$ 

b) $t = 21.4\text{min}$ 

c) $t = 32.2\text{min}$

