

# DISKRETNNA KIRCHOFFLJEVA TEORIJA TANKIH ELASTIČNIH LJUSKI IZVEDENA IZ TROUGAONOG KONAČNOG ELEMENTA, II



## DISCRETE KIRCHOFF THEORY OF THIN SHELLS BASED ON TRIANGULAR FINITE ELEMENT, II

UDK: 624.074.001  
Originalni naučni rad

Docent dr Gligor RADENKOVIĆ, dipl. inž. grad.

### REZIME

U ovom radu prikazana je formulacija trougaonog Diskretnog Kirchofovog konačnog elementa u sistemu materijalnih linija koordinata. Promene tangencijalnih komponenti pomeranja i ugiba unutar konačnog elementa opisane su potpunim polinomima drugog odnosno trećeg stepena, dok je geometrija interpolovana linearnom promenom baznih vektora.

Opšte rešenje pretpostavlja zakrivljeni element ljuske u kojem su problem savijanja i membransko naprezanje međusobno spregnuti odakle sledi da je kvadratno polje Mindlin/Raisnerovih rotacija izraženo ne samo preko čvornih nepoznatih savijanja već i tangencijalnih komponenti pomeranja. U slučaju ravnog rešenja (element ploče) ovaj efekat ne postoji pa je samim tim i izbegnuta mogućnost pojave membranskog lockinga.

Diskretni Kirchofljevi trougaoni elementi formulisani u teorijskom delu rada korišćeni su za rešavanje određenog broja primera iz linearne analize. Ovi primeri su dosta specifični i najčešće korišćeni za proveru mogućnosti konačnih elemenata ljuski i ploča. Primeri sadrže kose ploče, 'pinched' cilindar i svernu ljusku opterećenih ravnotežnim sistemom koncentrisanih sila.

**Ključne reči:** ploča, ljuska, diskretna Kirchofljeva teorija, konačni element, krutost.

### SUMMARY

Assuming convected coordinate frame, a three node triangular shell element which uses a discrete Kirchof bending formulation is presented. The tangential components and transverse displacement are approximated by complete quadratic and cubic polynomial, respectively. The thru geometry of a triangular shell element is respresented by linear variation of a base vectors.

The curved shell element incorporates the effects of coupling between membrane and flexural behaviour, while flat solution separate those two state of stresses avoiding membrane locking.

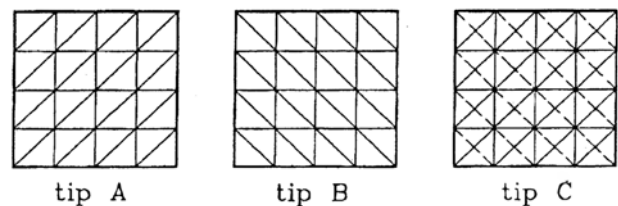
The proposed theory and finite element implementation are evaluated through an extensive set of characteristic plate and shell problems. Numerical examples consist skew plates problem, pinched cylinder and hemispherical shell.

**Key words:** shell, discrete Kirchof theory, finite element, stiffness, plate.

U ovom odeljku biće prikazano nekoliko karakterističnih linearnih rešenja koja služe za proveru mogućnosti formulisanih elemenata u analizi ljuski generalnih formi. Primeri sadrže kose ploče opterećene ravnomerno raspodeljenim opterećenjem, slobodni cilindar prihvaćen koncentrisanim silama kao i hemisferu u uslovima koncentrisanog opterećenja. Navedeni primeri su dosta specifični i gotovo po pravilu zastupljeni u linearnoj teoriji. S druge strane autorima konačnih elemenata ljuski jasno je da se njihove karakteristike otkrivaju još u linearnoj analizi, iz razloga što se prisustvo nekog od lockinga (membranskog ili smičućeg) ili lažnog energetskog modusa (mehanizma) manifestuje već u ovom stadijumu.

Prilikom rešavanja konkretnih zadataka trougaonim elementom ljuske ili ploče takođe mora biti uzet u obzir i efekat orijentacije mreže. Naime, nije sasvim

sve jedno koji će tip mreže (slika 5) biti korišćen za modelisanje posmatrane strukture.

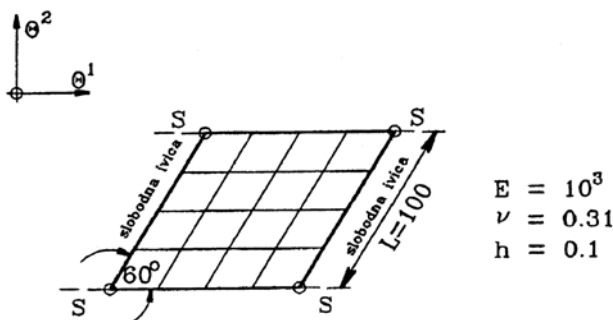


Slika 5

### KOSE PLOČE - "SKEW PLATES" PROBLEM

Kao prva ilustracija analiziraju se dve kose ploče čije nagnute strane zaklapaju sa  $\theta^1$  globalnom linijom uglove od  $60^\circ$  i  $30^\circ$ . Rešavanje prve ploče ne predstavlja težak zadatak dok je druga skopčana sa izvesnim poteškoćama zbog singulariteta u momentima savijanja u ćoškovima ploče.

Adresa autora: Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 11000 Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73



Slika 6

Na slici 6 prikazana je 60° kosa ploča, slobodno oslonjena na dvema naspramnim stranama i slobodnih ivica na preostalim dvema, opterećena ravnomerno raspodeljenim vertikalnim opterećenjem. Razzaquea [6] za rešavanje ovog problema koristi tanke trougaone elemente ploče kao i metod konačnih razlika, rešenje u odnosu na koje su komparisani rezultati dobijeni DKT elementom u ovom radu. Dva jednostavna uslova oslanjanja razmatrana su u ovom primeru: SS1 u kome je  $V^3 = 0$  i SS2 gde je  $V^3 = \theta_2 = 0$ . Nije sasvim jasno koji je od ovih graničnih uslova bio usvojen u radu Razzaquea.

Za slučaj veoma tanke ploče sa odnosom raspon/debljina  $L/h = 10^3$ , krive konvergencije s gustinama mreže 2 x 2, 4 x 4 i 8 x 8 u pogledu centralnog pomeranja prikazane su na slici 7. Rezultati zasnovani na DKT elementu normirani su pomenutim "tačnim" rešenjem dobijeno konačnim razlikama mrežom 16 x 16 gde je  $V_c^3 = 0.007945qL^4/D$ , i dati tabelom 1. Nešto lošiji rezultati u odnosu na Heterosis [7] i Lagrange-ov element [8] posledica su aproksimativnog određivanja ekvivalentnih čvornih sila usled raspodeljenog opterećenja. Kako pri DKT formulaciji ne figuriše eksplicitno interpolacioni polinom za ugib  $V^3$ , vektor čvornih sila korespondentan vertikalnom raspodeljenom opterećenju  $q$  sračunat je kao

$$f^T = \frac{S}{3} [q \ 0 \ 0 \ q \ 0 \ 0 \ q \ 0 \ 0]$$

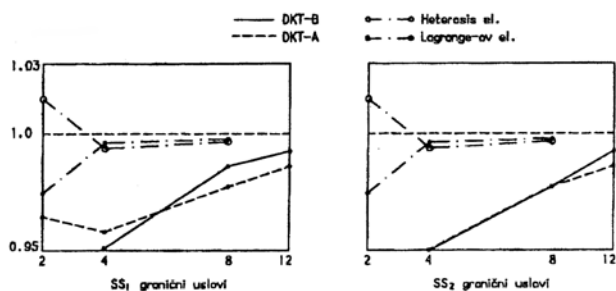
gde je  $S$  ukupna površina elementa.

Tabela 1. Normirano rešenje tanke ploče

Mreža	A		B	
	SS1	SS2	SS1	SS2
2 x 2	0.963	0.920	0.798	0.804
4 x 4	0.958	0.948	0.951	0.947
8 x 8	0.978	0.975	0.987	0.984
12 x 12	0.987	0.985	0.993	0.992

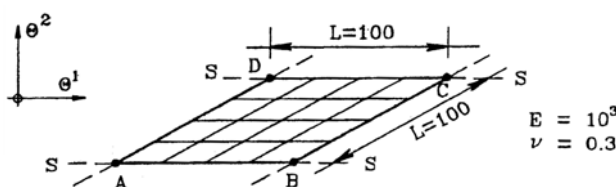
### MORLIJEVA 30° KOSA PLOČA

Kosa ploča pod uglom od 30° u odnosu na globalnu  $\theta^1$  liniju slobodno oslonjena duž svih strana prika-



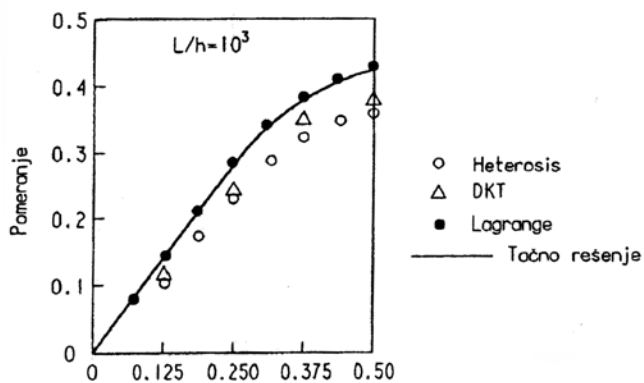
Slika 7

zana je na slici 8. Već je napomenuto da ovaj test predstavlja prilično težak problem zbog pojave singulariteta u momentima savijanja pri čoškovima ploče. Za uslove raspodeljenog opterećenja jedno efikasno rešenje koje se poklapa sa tačnim zasnovanom u teoriji tankih ploča predloženo je od strane Morlija [8].



Slika 8

Kao i u prethodnom slučaju rezultati su dobijeni DKT elementom sa orijentacijom mreže A i B, pri čemu su oni predstavljeni promenom ugiba duž centralne linije upoređeni sa "tačnim" Morlijevim rešenjem kao i rešenjima zasnovanim na Heterosis i Lagrange-ovom elementu, slika 9.



Slika 9

Konvergencija rešenja izražena veličinom centralnog ugiba prikazana je u tabeli 2. Interesantno je primetiti konvergenciju sa različitim strana mreža A i B. Naime, dok se u prvom slučaju tačnom rešenju prilazi sa gornje strane dotle u slučaju orijentacije B prisutno je sporo približavanje ovoj vrednosti sa donje strane.

Tabela 2. Morlijeva kosa ploča

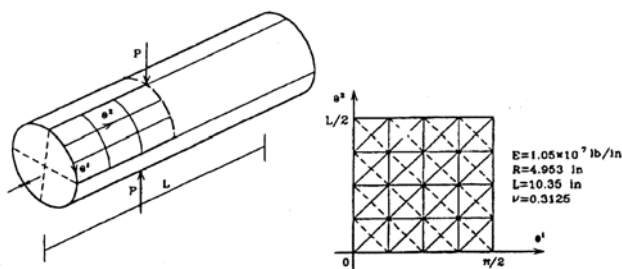
$V_c^3 = (cqL^4/D)10^{-3}$			
c			
Mreža	A	B	QU AD9*
2 x 2	1.005	0.260	–
4 x 4	0.601	0.246	0.381
8 x 8	0.380	0.298	0.361
12 x 12	0.340	0.319	–

Tačno rešenje c = 0.408.

### "Pinched" Cilindar

Otvoren cilindar sa slobodnim ivicama opterećen dvema naspramnim koncentrisanim silama u radialnom pravcu je široko korišćen test problem za dobijanje odgovora kolike su mogućnosti jednostruko zakrivljenog konačnog elementa ljuske u reprezentovanju modusa čistog savijanja. U limitnom slučaju kada  $t/R \rightarrow 0$  deformaciju cilindra karakteriše upravo samo savijanje bez istezanja u srednjoj ravni ljuske.

Materijalne i geometrijske karakteristike posmatrane cilindrične ljuske date su na slici 10. Analiziraju se dva alternativna slučaja: slučaj tankog cilindra debljine  $t = 0.01548 \text{ in}$ , ( $R/t = 320$ ) opterećen silama  $P = 0.1 \text{ lb}$ , i u drugom slučaju cilindar debljine  $t = 0.094 \text{ in}$  ( $R/t = 52.6917$ ) i sile  $P = 100 \text{ lb}$ . S obzirom na višestruku simetriju cilindra za analizu je korišćen samo jedan njegov oktant i modelisan ravnomernim mrežama od 2, 4, 8 i 12 elemenata u kružnom i podužnom pravcu. Ranijim radovima [5] je već pokazano da je rešenje relativno neosetljivo na broj elemenata u podužnom pravcu pa se do gotovo identičnih rezultata dolazi usvajanjem samo jednog intervala u pravcu ose  $\theta_2$ .



Slika 10

Rezultati analize i jednog i drugog cilindra prikazani su tabelarno i normirani u odnosu na 'tačna' rešenja. U slučaju debelog cilindra za tačno rešenje uzeta je vrednost  $V_c^3 = 0.11364 \text{ in}$  dobijena od strane Dawea [9], zasnovano na trougaonom elementu duboke ljuske korišćenjem viših interpolacionih funkcija. Dobijeni rezultati u uslovima tankog cilindra normirani su analitičkim rešenjem Timoshenkoa i Woinowsky-Kriegera [10] koje iznosi  $V_c^3 = 0.02439 \text{ in}$ . Skoro istovetno rešenje dobijeno je i metodom konačnih elemenata od strane Ashwela i Sabira [11].

Tabela 3. "Pinched" debeli cilindar. Normalizovano pomeranje na mestu dejstva koncentrisane sile.

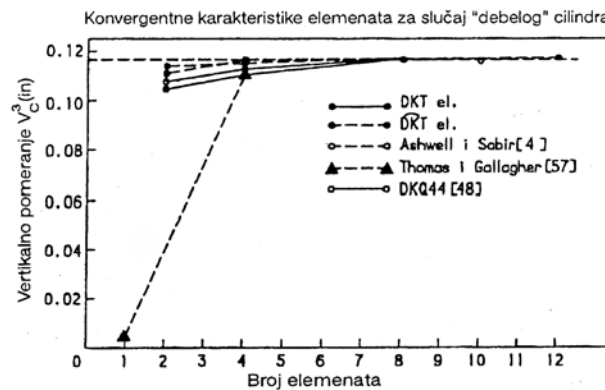
Mreža	DKT		DKT	
	A	B	A	B
2 x 2	0.855	0.847	0.945	0.933
4 x 4	0.986	0.972	1.023	1.005
8 x 8	1.009	0.999	1.016	1.009
12 x 12	1.015	1.002	1.012	1.008

Tabela 4. "Pinched" tanki cilindar. Normalizovano pomeranje na mestu dejstva koncentrisane sile.

Mreža	DKT		DKT	
	A	B	A	B
2 x 2	0.880	0.874	0.967	0.965
4 x 4	0.955	0.964	1.025	1.002
8 x 8	0.989	1.007	0.981	1.021
12 x 12	0.871	1.002	0.911	0.978

Na osnovu tabela 3 i 4 možemo zaključiti da orijentacija mreže B daje bolje rezultate u odnosu na mrežu A, pogotovu u slučaju 'tankog' cilindra gde dolazi do značajnog podbacivanja tačnog rešenja pri gustini mreže 12 x 12. Sem toga da se i primetiti da varijanta Diskretnog Kirchoffljevog trougla sa zakrivljenim membranskim rešenjem DKTmanje ili više pokazuje iste konvergentne karakteristike kao i ravno rešenje DKT.

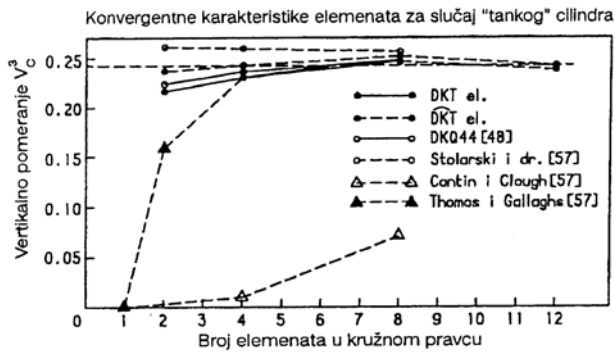
Grafička interpretacija brzine konvergencije rešenja za oba analizirana slučaja u zavisnosti od nekoliko tipova različitih mreža, uključujući i ponašanje nekih od postojećih elemenata skicirana je na slikama 11 i 12.



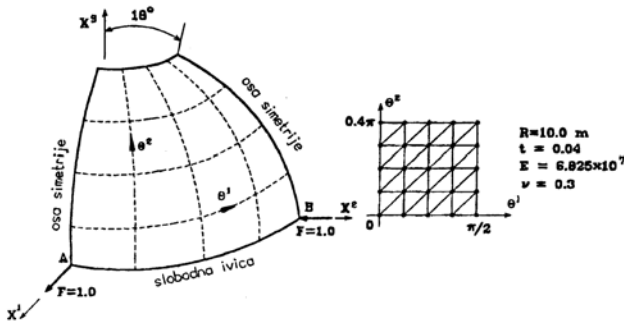
Slika 11

### SFERNA LJUSKA

Tanka hemisfera opterećena ravnotežnim radialnim koncentrisanim silama zasigurno je jedan od najizazovnijih test problema za dvostruko zakrivljene elemente ljuski. Ponašanje ljuske veoma je blisko stanju čistog savijanja karakterisano velikim krutim rotacijama u deformisanoj konfiguraciji, pa je ovaj primer upravo pogodan za kontrolu tačnog predstavljanja modusa krutih rotacija normale u odnosu na srednju površ. Imajući ovo na umu sferna ljuska prikazana na



Slika 12



Slika 13

Tabela 5. Hemisfera. Normalizovano pomeranje na mestu dejstva koncentrisanih sila.

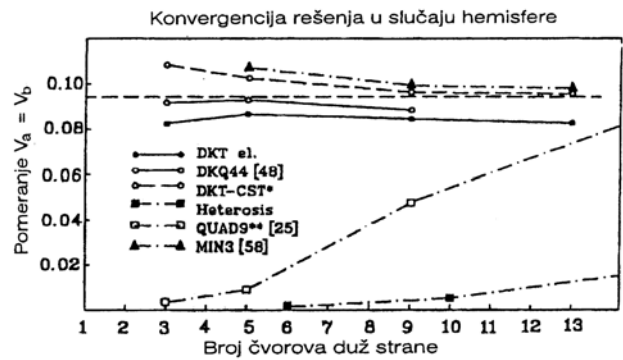
Mreža	A		B		C		
	DKT	DKT	DK-CST	DK-CST*	DKT	DK-CST	DK-CST*
2 x 2	0.864	0.870	0.860	1.135	0.806	0.834	1.058
4 x 4	0.934	0.921	0.940	1.064	0.824	0.845	1.033
8 x 8	0.884	0.901	0.919	1.018	0.832	0.818	1.007
12x12	0.853	0.882	0.902	1.003	0.848	0.825	0.997

slici 13 sa aspekta membranskog napreznja posebno je podložna lociranju i u prethodnim radovima [5, 2] ovaj primer navodi se kao "kritičan slučaj".

Naime, mali je broj onih elemenata, prisutnih u literaturi koji uspešno konvergiraju ka tačnom rešenju pri relativno pristojnim mrežama. Mnogi "dobri" konačni elementi kvadrilateralnog i trougaonog oblika kao što su heterosis, serendipiti ili degenerativni element ljuske generišu značajnu membransku krutost, odnosno dovode do "over stiff" rešenja pri analizi ovog problema.

Usled dvostruke simetrije za analizu je korišćena četvrtina ljuske i modelisana je ravnomernim mrežama konačnih elemenata u pravcu obe  $\theta^\alpha$  linija. Rezultati analize prikazani su na slici 14 i upoređeni sa nekim od poznatih postojećih rešenja. Dobijene vrednosti radialnog pomeranja ispod nanetih sila normirane su 'tačnim' rešenjem MacNeala i Hardera [12],  $V_A^A = V_B^B = 0.094m$  i date tabelom 5, gde su, pored rezultata dobijenih u ovom radu, uključene i vrednosti dobijene DKT-CST i DKT-CST\* elementom prezentirane [13].

DKT-CST varijanta predstavlja superpoziciju DKT elementa ploče i CST elementa ravnog stanja



Slika 14

napona, izostavljajući pri tome rotaciju upravno na površ ljuske čime rezultira konačni element sa 15 stepeni slobode. S druge strane DKT-CST\* sadrži zakrivljeno membransko rešenje koristeći uobičajenu transformaciju između lokalnih i globalnih čvornih nepoznatih inkorporirajući na taj način element sa 18 stepeni slobode.

I pored toga što su i savijanje i membransko napreznje predstavljeni ravnim rešenjem, transformacija lokalnih na globalne 'surface' komponente povlači za sobom ranije već pominjane poteškoće vezane sa modusima krutog tela. Izvesno podbacivanje tačnih vrednosti našim DKT elementom prouzrokovano je prisustvom velikih krutih rotacija koje upravo karakterišu ponašanje posmatrane hemisfere.

## LITERATURA

- [1] Green E.A., Adkins J.E., Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics, Clarendon Press, Oxford, 1960.
- [2] Vukelić S., Radenković G., Tanke elastične ljuske: Teorija i specijalna poglavlja, Gros knjiga, Beograd, 1995.
- [3] Batoz L.J., An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element, Int J. Num. Meth. Engng., 18, 1077-1089, 1982.
- [4] Hughes T.J.R., The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- [5] Radenković G., Ošta nelinearna analiza ljuski zasnovana na trougaonom i generalnom četvorougaoanom konačnom elementu, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd, 1988.
- [6] Razzaque A., Program for triangular bending elements with derivative smoothing, Int J. Num. Meth. Engng., 6, 333-343, 1973.
- [7] Hughes T.J.R. and Cohen M., The "Heterosis" finite element for plate bending, Comput. Structures, 9, 445-450, 1978.
- [8] Huang C.H. Defect-Free Shell Elements, Ph.D Dissertation, University College of Swansea, 1986.
- [9] Dawe J.D., High-order triangular finite element for shell analysis, Int. J. Solids, Struct., 11, 1097-1110, 1975.
- [10] Timošenko S., Vojinovski-Krieger S., Teorija ploča i ljuski, Građevinska knjiga, Beograd, 1962.
- [11] Ashwell G. D. and Sabir B.A., A New Cylindrical Finite Element Based on Simple Independent strain functions, Int. J. Mech. Sci., 14, 171-183, 1972.
- [12] MacNeal R. and Harder R., A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, Proc AIAA Conf. Structures and Struc. Dynam, 1984.
- [13] Carpenter N., Stolarski H. and Belytchko T., Improvements in 3-node triangular shell elements, Int. J. Num. Meth. Engng., 23, 1643-1667, 1986.