



#### **4. INTERNACIONALNI NAUČNO-STRUČNI SKUP GRAĐEVINARSTVO - NAUKA I PRAKSA**

**ŽABLJAK, 20-24. FEBRUARA 2012.**

---

*Veljko Pujević<sup>1</sup>*

### **PRORAČUN TEMELJNE PLOČE NA VIŠESLOJNOM TLU SA SLOJEVIMA U NAGIBU**

#### ***Rezime***

U ovom radu razmatrane su različite metode proračuna temeljnih ploča. Cilj ovog rada je da se prevaziđu nedostaci modela "krute ploče" i Vinklerovog modela, koji se u praktičnim inženjerskim proračunima najviše primenjuju. Primena modifikovanog Vinklerovog modela omogućuje da se kroz nekoliko iteracija, umanje nedostaci ovih jednostavnijih modela i dobije realnija slika ponašanja sistema temeljna ploča-tlo. U većini savremenih programskih paketa za analizu građevinskih konstrukcija ugrađen je Vinklerov model tla. Suština ovog rada je da se prikaže postupak implementacije modifikovanog Vinklerovog modela u programe za analizu konstrukcija.

#### ***Ključne reči***

temeljna ploča, model "krute ploče", Vinklerov model, modifikovani Vinklerov model

### **ANALYSIS OF MAT FOUNDATION ON INCLINED MULTI- LAYER SUBGRADE**

#### ***Summary***

This paper work discusses different types of mat foundation procedures. The goal of this work is to overcome shortcomings of traditional models like "rigid plate model" and Winkler model that are commonly used in design practice. The use of modified Winkler model that follows iterative procedure enables to minimize shortcomings of simpler models and to obtain more realistic behavior of foundation-soil system. The purpose of this work is to present the procedure of implementation of modified Winkler model in software for structure analysis, that are usually supplied with classical Winkler model.

#### ***Key words***

mat foundation, "rigid plate model", Winkler model, modified Winkler model

---

<sup>1</sup> dipl. građ. inž., asistent - student doktorskih studija, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija, [pujevic.veljko@gmail.com](mailto:pujevic.veljko@gmail.com)

## 1. METODE PRORAČUNA TEMELJNIH PLOČA

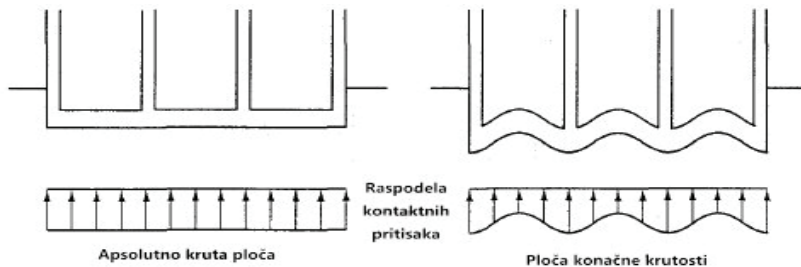
Postoji više postupaka za proračun temeljnih ploča, koji se zasnivaju ili na pretpostavkama o zakonima raspodele pritisaka u kontaktnoj spojnici temeljne ploče ili na pretpostavkama o osobinama i ponašanju tla pod opterećenjem.

### 1.1. MODEL KRUTE PLOČE

Najjednostavniji postupak za proračun temeljnih ploča zasniva se na pretpostavci da je raspodela kontaktnih pritisaka pravolinijska. Pretpostavlja se da je temeljna ploča apsolutno kruta, odnosno mnogo kruća u odnosu na podlogu.

Proračun temeljnih ploča prema ovoj metodi sastoji se u određivanju dimenzija kontaktne spojnice prema veličini dopuštenih pritisaka, određivanju veličine presečnih sila i izboru visine ploče. U statičkom smislu temeljna ploča predstavlja obrnutu međuspratnu konstrukciju, gde su opterećenja od zidova i stubova slična reakcijama oslonaca međuspratne konstrukcije.

Ova metoda daje zadovoljavajuće rezultate za projektovanje temeljnih stopa, ali nije adekvatna za modeliranje temeljnih ploča. S' obzirom na značajno veći odnos  $L(\text{raspon})/d(\text{debljina})$  pretpostavka o apsolutnoj krutosti temeljnih ploča nije na mestu. Delovi ploče ispod stubova i nosećih zidova se sležu više u odnosu na delove ploče između ovih elemenata, što znači da će kontaktni pritisci biti veći ispod jače opterećenih zona.



Slika 1. Raspodele kontaktnih pritisaka za slučaj apsolutno krute temeljne ploče i ploče konačne krutosti

Ova preraspodela kontaktnih pritisaka je naročito izražena kada je tlo značajno veće krutosti u odnosu na ploču. Čak i da je ploča apsolutno kruta, pretpostavka o ravnomernoj raspodeli kontaktnih pritisaka nije tačna – u stvarnosti kontaktni pritisci su veći na ivici a manji u centralnim delovima ploče.

### 1.2. TEMELJNE PLOČE NA ELASTIČNOJ PODLOZI

Metode koje se baziraju na pretpostavkama o osobinama i ponašanju tla pod opterećenjem uzimaju u obzir deformacije savijanja u ploči i njihov uticaj na raspodelu kontaktnih pritisaka. Veličina i raspodela pritisaka u kontaktnoj površini su veoma važni parametri za projektovanje temelja. Od njih zavise veličine unutrašnjih sila u temeljima, pa prema tome i potrebne dimenzije temelja.

Raspodela kontaktnog pritiska ispod temeljne ploče zavisi od mnogo faktora:

- Od prirode tla (homogena masa ili slojevito tlo)
- Od karakteristika tla (deformacijske karakteristike E i  $\nu$ )
- Od krutosti temeljne konstrukcije
- Od krutosti konstrukcije objekta iznad temelja
- Od prirode i intenziteta opterećenja
- Od prisustva susednih objekata
- Od dimenzija ploče

### 1.2.1. Vinklerov model tla

Glavna prednost ovog modela je njegova jednostavnost, tako da se najčešće primenjuje u praktičnim problemima. Vinklerov model tla integrisan je u većini savremenih programskih paketa za analizu građevinskih konstrukcija.

Vinklerova hipoteza kaže da je pritisak u svakoj tački kontaktne površine temelja proporcionalan elastičnom sleganju tla u toj tački.

$$q = K_s x w \quad (1)$$

Faktor proporcionalnosti je koeficijent krutosti podloge  $K_s$ .

Konstitutivne veze za tlo, po pravilu su nelinearne. Međutim, za praktične inženjerske potrebe, obično se postiže zadovoljavajuća tačnost ako se uvede pretpostavka da je tlo elastičan material.

Koeficijent krutosti podloge može se odrediti na sledeće načine:

- Probno opterećenje – Osnovni nedostatak ove metode je u tome što je opitnim blokom opterećena ograničena debljina tla u poređenju sa debljinom tla opterećenom temeljnom pločom.
- Korišćenjem tabela sa karakterističnim vrednostima  $K_s$  za različite tipove tla, koje postoje u literature
- Primenom in-situ testova, kao što su SPT i CPT i korelacija koje postoje sa rezultatima ovih penetracionih opita
- Preko očekivanog sleganja realne konstrukcije. Veličina sleganja  $\delta$  se određuje primenom metoda mehanike tla. Ova procedura omogućava da se uzme u obzir slojevitost tla, odnosno različite karakteristike slojeva tla koji su izloženi različitim nivoima pritiska, što nije moguće primenom prethodno opisanih metoda.

Danas, se za proračun uticaja u samoj ploči najviše primenjuje metod konačnih elemenata. U ovoj metodi ploča se deli na veliki broj konačnih elemenata, pri čemu se za ravne temeljne ploče najviše primenjuju izoparametarski pločasti elementi (plate-bending elements). Elementi ploče su povezani sa tлом preko sistema međusobno nezavisnih verikalnih opruga koje prate Vinklerovu hipotezu (definisane koeficijentom krutosti podloge). Opruge su koncentrisane u čvorovima mreže konačnih elemenata.

Krutost pojedinačnih opruga određuje se srazmerno njihovim pripadajućim površinama

$$K_i = K_u \frac{A_i}{A} \quad (2)$$

$K_u$  – ukupna krutost podloge

$A_i$  – pripadajuća površina čvora i

$A_u$  – ukupna površina ploče

Zavisnost između veličine sleganja čvorova i reaktivnog opterećenja, shodno Vinklerovoj hipotezi može se prikazati u matricnom obliku kao:

$$\{S\} = [F] * \{R\} \quad (3)$$

gde su:

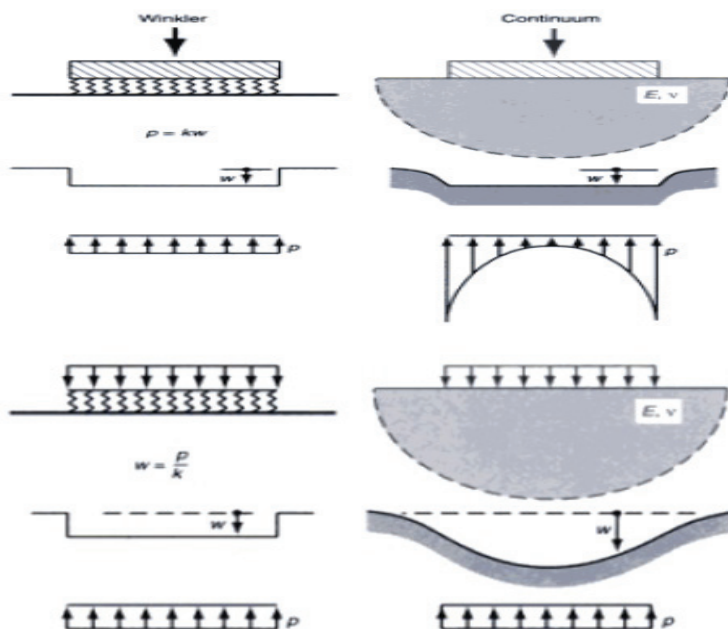
$\{S\}$  – vektor kolona čiji su elementi sleganja tačaka podloge

$[F]$  – matrica fleksibilnosti podloge

$\{R\}$  – vektor kolona čiji su elementi reakcije opruga temeljne ploče

Matrica fleksibilnosti je u ovom slučaju dijagonalna matrica, čiji su svi vandijagonalni elementi jednaki nuli, što znači da sleganja tačaka podloge ne zavise od opterećenja koje deluje u susjednim tačkama.

Nedostaci Vinklerovog modela najbolje se mogu uočiti poredeći kontaktne pritiske i sleganja Vinklerovog modela sa modelom elastičnog, homogenog i izotropnog poluprostora. Za slučaj apsolutno krutih temeljnih stopa, razlike su značajne u veličini i raspodeli kontaktnih pritisaka, dok su kod fleksibilnih temeljnih stopa razlike evidentne u veličini sleganja, za slučaj ravnomerno podeljenog opterećenja.



Slika 2. Kontaktne pritiske i sleganja apsolutno krute i fleksibilne temeljne ploče Vinklerovog modela i modela elastičnog, homogenog i izotropnog poluprostora

Osnovni nedostatak Vinklerovog modela je taj da sleganje neke tačke podloge zavisi samo od opterećenja u toj tački a ne i od opterećenja u susjednim tačkama, što se ogleda i u tome da sleganje podloge postoji samo neposredno ispod temeljne konstrukcije. U realnosti sleganje neke tačke podloge zavisi od opterećenja u svim tačkama, što za posledicu ima i sleganje tla izvan temeljne konstrukcije.

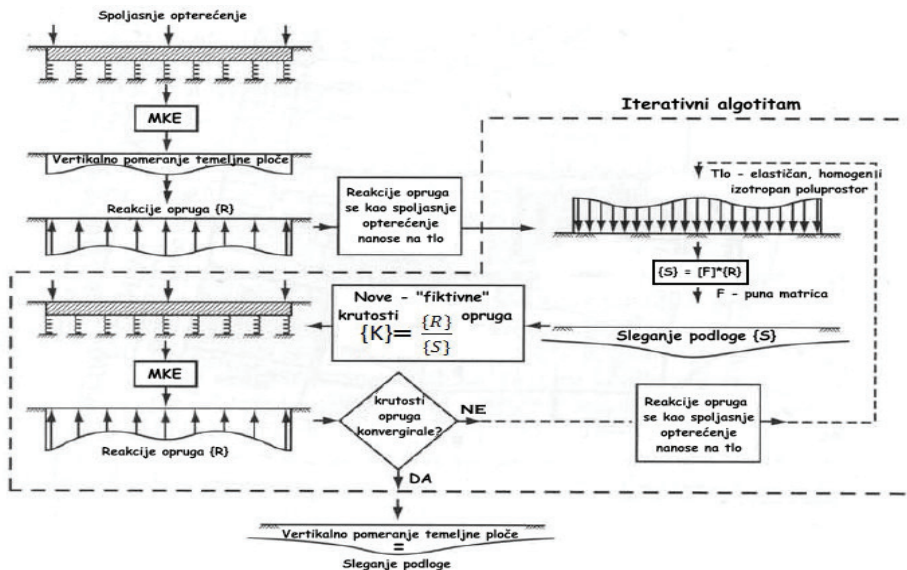
Kako bi se pravazišli gore navedeni nedostaci Vinklerovog modela i dobila realnija slika ponašanja sistema temeljna ploča-tlo, primenjen je modifikovani Vinklerov model.

### 1.2.2. Modifikovan Vinklerov model tla

Analiza interakcije između temeljne ploče i podloge veoma je bitna kako bi se dobio uvid u stvarno stanje napona i deformacija u samoj ploči ali i u tlu. Rešenje ovog problema u zatvorenom obliku postoji samo za najjednostavnije slučajeve. Ukoliko je tlo heterogeno, oblik temeljne ploče proizvoljan i opterećenje komplikovano, rešenje je aproksimativno i može se dobiti samo primenom numeričkih postupaka.

Kod modifikovanog Vinklerovog modela kao i kod Vinklerovog modela, veza ploče sa tlom predstavljena je međusobno nezavisnim oprugama koncentrisanim u čvorovima mreže. Zavisnost (interakcija) između opruga koja realno postoji, ostvarena je zadavanjem odgovarajućih – "fiktivnih" koeficijenata krutosti oprugama.

Problem interakcije između ploče i podloge rešen je modeliranjem temeljne ploče i tla zasebno. Tačno rešenje posmatranog problema se dobija kada se vertikalna pomeranja tj. ordinate elastične površine ploče, izjednače sa sleganjem podloge u čvorovima mreže. To se može postići primenom iterativnog postupka. Reakcije opruga dobijene primenom metode konačnih elemenata nanose se kao spoljašnje opterećenje na elastičan kontinuum kojim smo predstavili tlo, i sračunavaju se pomeranja podloge.



Slika 3. Šema iterativnog postupka u okviru modifikovanog Vinklerovog modela

Stvarna veličina sleganja neke tačke podloge, pored opterećenja koje deluje u toj tački, zavisi i od opterećenja koje se prenosi preko susednih tačaka. U svrhu određivanja veličina sleganja svih tačaka podloge koje se poklapaju sa čvorovima temeljne ploče, formira se matrica fleksibilnosti  $F$ , koja je u ovom slučaju puna matrica. Element matrice fleksibilnosti  $f_{ij}$  predstavlja sleganje tačke  $i$  usled jedinične sile koja deluje u tački  $j$   $R_j=1$ .

$$\{S\} = [F] * \{R\} \quad (4)$$

{S} – vector kolona čiji su elementi ukupne veličine sleganja tačaka podloge

[F] – matrica fleksibilnosti podloge

{R} – vektor kolona čiji su elementi reakcije opruga temeljne ploče

S' obzirom da smo tlo idealizovali i da ga tretiramo kao elastičan kontinuum, možemo primeniti rešenja teorije elastičnosti za proračun veličine sleganja. Procedura proračuna sleganja temelja, koji prenose opterećenja građevinskih objekata na tlo, se sastoji iz sledećih koraka:

1. Određivanje raspodele priraštaja napona u tlu
2. Određivanje raspodele deformacija
3. Numeričko integrisanje deformacija da bi se dobila sleganja temelja

Diskretizacija elastičnog poluprostora izvršena je trodimenzionalnom mrežom i shodno tome primenjena je indeksna notacija za vertikalne napone i deformacije.

Raspodela priraštaja vertikalnih napona na vertikali ispod tačke u kojoj deluje jedinična sila određena je primenom Štajnbrennerovog rešenja.

$$\sigma_{ik} = q \times J_k \quad (5)$$

$$J_k = \frac{q}{2\pi(\tan^{-1} A_1 + A_2)} \quad (6)$$

$$A_1 = \frac{k}{t} \quad A_2 = \frac{A_1(m+n+2)}{(m+1)(n+1)} \quad k = \frac{ab}{z^2} \quad m = \frac{a^2}{z^2} \quad n = \frac{b^2}{z^2} \quad t = (m+n+1)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Raspodela priraštaja vertikalnih napona u slučaju kada sila ne deluje u posmatranoj tački određena je primenom Businesskovog rešenja za dejstvo koncentrisane sile na površini.

$$\sigma_{ijk} = \frac{3P_{jzk}^3}{2\pi \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + z_k^2 \right]^{\frac{5}{2}}} \quad (8)$$

Raspodela vertikalne deformacije određena je primenom rešenja teorije elastičnosti.

$$\varepsilon_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{M_{vk}} \quad M_{vk} = \frac{E_k(1-\nu_k)}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)} \quad (9)$$

gde su:

$M_{vk}$  – modul stišljivosti sloja k

$E_k$  – modul elastičnosti sloja k

$\nu_k$  – Poasonov koeficijent sloja k

Konačno, veličina sleganja čvora **i** dobija se numeričkom integracijom vertikalnih deformacija pretpostavljajući ravnomernu raspodelu specifične deformacije u sloju **k**.

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ik} * H_k \quad S_i = \sum_{j=1}^n S_{ij} \quad (10)$$

Sa ovako određenim stvarnim veličinama sleganja čvorova, određuju se fiktivni koeficijenti krutost opruga (shodno Vinklerovij hipotezi) na sledeći način:

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} R \\ S \end{Bmatrix} \quad (11)$$

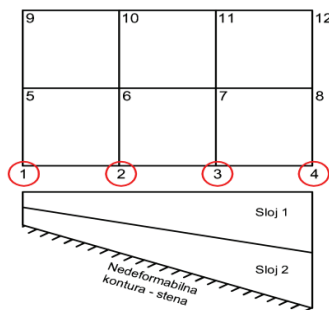
{S} – vektor kolona čiji su elementi ukupne veličine sleganja tačaka podloge

{K} – vektor kolona čiji su elementi koeficijenti krutost opruga

{R} – vektor kolona čiji su elementi reakcije opruga temeljne ploče

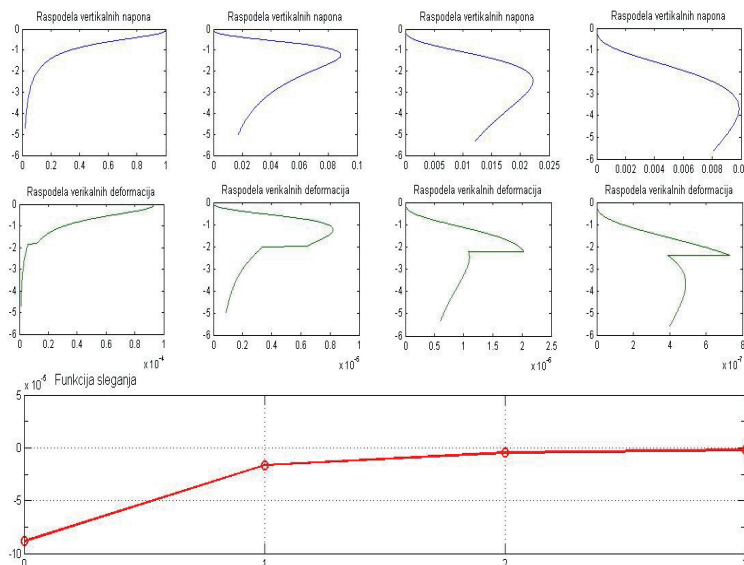
Ovakvo određeni koeficijenti krutosti opruga mogu da se primene u rešenju ploče metodom konačnih elemenata putem iterativnog algoritma.

Da bi se bolje sagledala gore navedena procedura i poboljšane mogućnosti modifikovanog Vinklerovog modela prikazan je primer jednostavnog modela temeljne ploče, mreže 3x2, oslonjene na višeslojnom, heterogenom tlu sa slojevima u nagibu.



Slika 9. Primer - temeljna ploča mreže 3x2 sa poprečnim presekom terena

Na sledećoj slici dati su dijagrami raspodele vertikalnih napona i deformacija u tačkama 1,2,3,4 kao i funkcija sleganja, za slučaj kada jedinična sila deluje u čvoru 1, dobijeni primenom programskog paketa Matlab.



Slika 10. Primer – dijagrami raspodele napona i deformacija i funkcija sleganja

Sa dijagrama raspodele lako se može uočiti da su slojevi u nagibu, odnosno da se visina deformabilnih slojeva tla postepeno povećava. Posmatrajući funkciju sleganja zaključuje se da doprinos ukupnom sleganju neke tačke podloge od opterećenja koje deluje u susednim tačkama vrlo brzo opada udaljavajući se od posmatrane tačke.

Kao što smo već napomenuli, matrica fleksibilnosti je u ovom slučaju puna matrica koja u konkretnom primeru višeslojnog, heterogenog tla čiji su slojevi u nagibu, ima sledeći oblik:

|                |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                | 0.8860 | 0.1544 | 0.0411 | 0.0156 | 0.1544 | 0.0832 | 0.0321 | 0.0135 | 0.0411 | 0.0321 | 0.0182 | 0.0094 |
|                | 0.1633 | 0.8994 | 0.1633 | 0.0449 | 0.0895 | 0.1633 | 0.0895 | 0.0352 | 0.0352 | 0.0449 | 0.0352 | 0.0202 |
|                | 0.0488 | 0.1717 | 0.9110 | 0.1717 | 0.0384 | 0.0956 | 0.1717 | 0.0956 | 0.0223 | 0.0384 | 0.0488 | 0.0384 |
|                | 0.0212 | 0.0524 | 0.1789 | 0.9206 | 0.0186 | 0.0415 | 0.1011 | 0.1789 | 0.0132 | 0.0244 | 0.0415 | 0.0524 |
|                | 0.1544 | 0.0832 | 0.0321 | 0.0135 | 0.8860 | 0.1544 | 0.0411 | 0.0156 | 0.1544 | 0.0832 | 0.0321 | 0.0135 |
| F = 1.0e-004 * | 0.0895 | 0.1633 | 0.0895 | 0.0352 | 0.1633 | 0.8994 | 0.1633 | 0.0449 | 0.0895 | 0.1633 | 0.0895 | 0.0352 |
|                | 0.0384 | 0.0956 | 0.1717 | 0.0956 | 0.0488 | 0.1717 | 0.9110 | 0.1717 | 0.0384 | 0.0956 | 0.1717 | 0.0956 |
|                | 0.0186 | 0.0415 | 0.1011 | 0.1789 | 0.0212 | 0.0524 | 0.1789 | 0.9206 | 0.0186 | 0.0415 | 0.1011 | 0.1789 |
|                | 0.0411 | 0.0321 | 0.0182 | 0.0094 | 0.1544 | 0.0832 | 0.0321 | 0.0135 | 0.8860 | 0.1544 | 0.0411 | 0.0156 |
|                | 0.0352 | 0.0449 | 0.0352 | 0.0202 | 0.0895 | 0.1633 | 0.0895 | 0.0352 | 0.1633 | 0.8994 | 0.1633 | 0.0449 |
|                | 0.0223 | 0.0384 | 0.0488 | 0.0384 | 0.0384 | 0.0956 | 0.1717 | 0.0956 | 0.0488 | 0.1717 | 0.9110 | 0.1717 |
|                | 0.0132 | 0.0244 | 0.0415 | 0.0524 | 0.0186 | 0.0415 | 0.1011 | 0.1789 | 0.0212 | 0.0524 | 0.1789 | 0.9206 |

Zaokruženi elementi matrice fleksibilnosti na glavnoj dijagonali su redom sleganja čvorova 1,2,3 i 4 kada jedinična sila deluje neposredno u tim tačkama. Može se приметiti da se veličine sleganja idući od čvora 1 do čvora 4 postupno povećavaju, što je posledica povećanja visine deformabilnih slojeva. Vrednosti vandijagonalnih elemenata matrice fleksibilnosti predstavljaju doprinose ukupnom sleganju pojedinih tačaka, od opterećenja u susednim tačkama.

Dešava se, da primenom punih matrica fleksibilnosti veličine sleganja budu prenaplašene, odnosno znatno veći nego u stvarnosti. Kako bi se prevazišao ovaj problem, usvaja se uticajni radijus koji opisuje kružnu oblast oko tačke čije se pomeranje traži. Doprinos ukupnom sleganju posmatrane tačke daće opterećenje svih tačaka koje se nalaze unutar ove oblasti.

## LITERATURA

- [1] S. Stevanovic: "Fundiranje"
- [2] Joseph E. Bowles: "Foundation Analysis and Design"
- [3] J.A.Hemsley : "Design Applications of Raft Foundations"
- [4] Donald P. Coduto: "Foundation Design, Principles and Practices"