

Олег Одаловић\* , Јелена Гучевић\* , Иван Алексић\*\*

## ПРИМЕНА КОЕФИЦИЈЕНАТА СФЕРНО-ХАРМОНИЈСКОГ РАЗВОЈА У ПОСТУПКУ ОДРЕЂИВАЊА ФУНКЦИОНАЛА АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА

### РЕЗИМЕ

У поступку одређивања функционала аномалијског потенцијала, у оквиру remove-restore методе први корак представља елиминација дуготаласних карактеристика функционала применом коефицијената сферно-хармонијског развоја потенцијала силе Земљине теже односно, применом глобалног геопотенцијалног модела ( ГГМ).

У последње две деценије развијени су ГГМ високог степена и реда, односно степена и реда 360, као што су модели OSU91 (Ohio States University) и EGM96 (Earth Gravity Models). Њихова примена обезбеђује оцену дуготаласне карактеристике функционала аномалијског потенцијала са тачношћу која је у случају аномалијских висина сигурно испод 1m.

У овом раду приказани су математички модели неопходни за теоријско разматрање модела, затим рекурзиони изрази за рачунање Лежандрових функција високог степена и реда, а поменути ГГМ и практично су примењени за територију ширег подручја града Београда.

### ABSTRACT

In the procedure of the determining functionally anomalic power, in the frame of the method remove-restore the first step presents the elimination of the longwave characteristics of the functionally with the application of the coefficients sphericarmonical development of the power gravity, respectively, to the application globale geopotential model(GGM).

Over last two decade are developed GGM of the high degree and order, respectively of the degree and order 360, as like what are the models OSU91(Ohio States University) and EGM96 (Earth Gravity Models). Their application ensures the estimation of the longwave characteristics of the functionally anomalic potential with the acctitude, that is in the case anomalic heights safely less then 1 metre.

In this work are presented mathematical models indispensable for theoretical consideration of the models, afterwards recurrent expressions to the computation of the Legendres functions high degree and order, and mentioned GGM and practically are applied on the territory of the wider region of the town Belgrade.

### УВОД

Потенцијал убрзања силе Земљине теже  $W$  може се представити у облику збира потенцијала убрзања силе теже нормалне Земље (нормалног потенцијала)  $U$  и аномалијског потенцијала  $T$  [5]:

$$W = U + T \quad (1)$$

С друге стране, потенцијал  $W$  и  $U$  могуће је декомпоновати у облике

$$W = V_w + \Phi_w \quad (2)$$

$$U = V_U + \Phi_U \quad (3)$$

па сагласно са 1 следи:

$$T = W - U = V_w + \Phi_w - V_U - \Phi_U \quad (4)$$

\* Mg, Institute of Geodesy of the civil engineering faculty of the Universsity Belgrade

\*\* Dr, Director RGA and Prof. on the Institute of Geodesy of the civil engineering faculty of the Universsity Belgrade

где је:

$V_w$  – потенцијал убрзања гравитационе силе Земље,

$\Phi_w$  – потенцијал убрзања центрифугалне силе Земље

$V_U$  – потенцијал убрзања гравитационе силе нормалне Земље,

$\Phi_U$  – потенцијал убрзања центрифугалне силе нормалне Земље.

По дефиницији нормалног потенцијала у свакој тачки простора испуњено је следеће:

$$\Phi_w = \Phi_U \quad (5)$$

па се аномалијски потенцијал може представити изразом:

$$T = V_w - V_U \quad (6)$$

Како су потенцијали хармонијске функције у простору ван маса следи да је и потенцијал  $T$  хармонијска функција и да се може представити у функцији сферних хармоника [2]:

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{kM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ \frac{(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda +}{+\bar{K}_{nm} \sin m\lambda} \right] \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (7)$$

односно

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{kM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n T_n(\theta, \lambda), \quad (8)$$

где је:

$T_n(\theta, \lambda)$  – површинска хармоника облика

$$T_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n \left[ \frac{(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda +}{+\bar{K}_{nm} \sin m\lambda} \right] \bar{P}_{nm}(\cos\theta)$$

$(r, \theta, \lambda)$  – сферне координате тачке у којој се аномалијски потенцијал одређује,

$kM$  – производ гравитационе константе и масе тела Земље,

$a$  – велика полуоса усвојеног нивоског елипсоида,

$n$  – степен сферно-хармонијског развоја,

$m$  – ред сферно-хармонијског развоја,  
 $\bar{J}_{nm}, \bar{K}_{nm}$  – коефицијенти који следе из развоја потенцијала  $V_w$  у ортонормиране сферне хармонике.

$\bar{J}_{nm}^U$  – коефицијенти који следе из развоја потенцијала  $V_U$  у ортонормиране сферне хармонике,

$\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$  – ортонормирани Лежандрови полиноми

$$\bar{P}_{nm}(t) = \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} 2^{-n} (1-t^2)^{m/2} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} t^{n-m-2k}$$

где је:  $t = \cos\theta$ .

### ФУНКЦИОНАЛИ АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА У ФУНКЦИЈИ СФЕРНИХ ХАРМОНИКА

Сагласно теореме Брунса ундулација геоида  $N$  дефинисана је релацијом:

$$N = \frac{T}{\gamma}, \quad (9)$$

где је  $\gamma$  убрзање силе теже нормалне Земље (нормално убрзање), па с обзиром на (7) следи:

$$N(r, \theta, \lambda) = \frac{kM}{\gamma r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ \frac{(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos m\lambda +}{+\bar{K}_{nm} \sin m\lambda} \right] \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (10)$$

Користећи се дефиницијама осталих функционала (подразумевајући као и у претходном случају сферну апроксимацију нивоског елипсоида терестричком сфером) следе изрази редом за поремећај убрзања, аномалију и компоненте одступања вертикала:

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda), \quad (11) \quad \xi = \frac{kM}{M_r \gamma r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ \frac{(J_{nm} - J_{nm}^U) \cos m\lambda + K_{nm}}{+K_{nm} \sin m\lambda} \right] \frac{P_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (13)$$

$$\Delta g = \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda), \quad (12)$$

$$\eta = -\frac{kM}{N_r \gamma r \cos B} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ -m(J_{nm} - J_{nm}^U) \sin m\lambda + mK_{nm} \cos m\lambda \right] P_{nm}(\cos \theta), \quad (14)$$

**ПРИМЕНА ГЛОБАЛНИХ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИХ МОДЕЛА**

Основни пут којим се долази до вредност глобалних компоненти функционала аномалијског потенцијала је израз за аномалијски потенцијал у функцији ортонормираних сферних хармоника 17.

Заменом знака  $\infty$  у 17. максималним степеном глобалног геопотенцијалног модела  $N_{max}$ , као и непознатих теоријских вредности

коефицијената  $\bar{J}_{nm}$ ,  $\bar{K}_{nm}$  коефицијентима глобалног модела (емпиријских вредности)  $\bar{J}'_{nm}$ ,  $\bar{K}'_{nm}$ , добија се израз за одређивање глобалне компоненте аномалијског потенцијала у произвољној тачки  $P$  која се налази на физичкој површи Земље:

$$T_{GGM} = \frac{kM}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ (\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^N) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (15)$$

Коефицијенте нормалног поља, с обзиром на њихов ред величине, довољно је узимати у обзир закључно до осмог степена развоја,  $n = 8$ .

На основу 15. и теоријски дефинисаних односа аномалијског потенцијала и његових линеарних функција следе изрази за глобалне компоненте функционала. Примера ради:

- аномалија убрзања

$$\Delta g_{GGM} = \frac{kM}{r^2} \sum_{n=2}^{N_{max}} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ (\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^N) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (16)$$

- компонента одступања вертикале у правцу меридијана [1]

$$\xi_{GGM} = \frac{kM}{M_r \gamma r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ (\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^N) \cos m\lambda + \bar{K}'_{nm} \sin m\lambda \right] \frac{\bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta}. \quad (17)$$

- компонента одступања вертикале у правцу првог вертикала [1]

$$\eta_{GGM} = -\frac{kM}{N_r \gamma r \cos \phi} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ -m(\bar{J}'_{nm} - \bar{J}_{nm}^N) \sin m\lambda + m\bar{K}'_{nm} \cos m\lambda \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (18)$$

**ГЛОБАЛНИ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИ  
МОДЕЛИ EGM96 И OSU91A**

Глобални геопотенцијални модел EGM96 (Earth Gravitational Model 96) чија је основна намена подршка координатном систему *WGS84*, као и примена у истраживањима у области океанографије и геофизике, развијен је од стране:

- *NASA – National Aeronautics and Space Agency, USA*
- *NIMA – National Imagery and Mapping Agency, USA*
- *OSU – Ohio State University, USA*

Основни подаци који су коришћени при одређивању коефицијената сферно хармонијског развоја потенцијала убрзања силе Земљине теже су резултати<sup>1</sup>:

- опажања путање кретања преко 20 сателита,
- алтиметријских резултата опажања,
- резултата опажања гравиметријских премера држава које су уступиле своје податке на коришћење ауторима модела.

- док се за описивање утицаја топографских маса користио глобални модел топографских маса (глобални дигитални модел терена) *GTOPO*, такође развијен од стране *NIMA*.

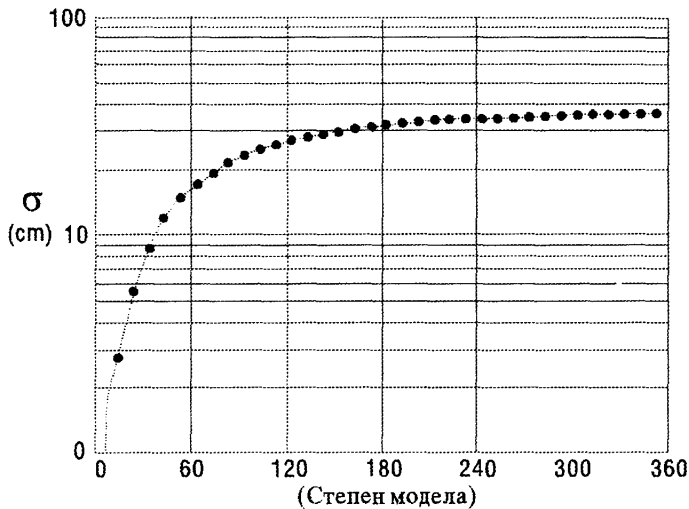
Степен и ред модела су

$N_{max} = M_{max} = 360$ , па је сагласно томе резолуција аномалијског потенцијала и његових линеарних функционала одређених коришћењем модела 0.5 степени. Упоредо са развијањем модела *NASA* и *NIMA* су отвориле и службену *EGM96* интернет страну са које је могуће преузети све податке који су коришћени при развијању модела, као и сам модел који је архивиран у облику текстуалне датотеке. У датотеци модела за сваки пар вредности оцењених коефицијената  $J'_{nm}, K'_{nm}$ , дати су степен и ред коефицијената као и оцена њихових стандардних девијација. Један део датотеке модела приказан је на слици 1. Модел укупно садржи 130676 коефицијената и исто толико оцењених вредности њихових стандардних девијација. Тачност аномалијске висине одређене коришћењем модела *EGM96* у произвољној тачки физичке површи Земље оцењена је од стране аутора модела, и износи 0.36m (слика 2.).

Степен и ред		Коефицијенати		Оцене стандардних девијација	
$n$	$m$	$J'_{nm}$	$K'_{nm}$	$\sigma_{J'}$	$\sigma_{K'}$
2	0	-0.484165371736E-03	0.000000000000E+00	0.35610635E-10	0.00000000E+00
2	1	-0.186987635955E-09	0.119528012031E-08	0.10000000E-29	0.10000000E-29
2	2	0.243914352398E-05	-0.140016683654E-05	0.53739154E-10	0.54353269E-10
3	0	0.957254173792E-06	0.000000000000E+00	0.18094237E-10	0.00000000E+00
3	1	0.202998882184E-05	0.248513158716E-06	0.13965165E-09	0.13645882E-09
3	2	0.904627768605E-06	-0.619025944205E-06	0.10962329E-09	0.11182866E-09
3	3	0.721072657057E-06	0.141435626958E-05	0.95156281E-10	0.93285090E-10
4	0	0.539873863789E-06	0.000000000000E+00	0.10423678E-09	0.00000000E+00
4	1	-0.536321616971E-06	-0.473440265853E-06	0.85674404E-10	0.82408489E-10
4	2	0.350694105785E-06	0.662671572540E-06	0.16000186E-09	0.16390576E-09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

<sup>1</sup> Подаци улазе у прорачун без било каквих хипотеза или пак редукција одакле следи да се применом коефицијената сферно-хармонијског развоја добијају вредности аномалијских висина.

Слика 1.: Део датотеке глобалног геопотенцијалног модела EGM96



Слика 2. Тачност аномалијских висина одређених коришћењем EGM96 (вредност 0.36 cm достиже се при коришћењу свих коефицијената модела)

Графички приказ површи квазигеоида одређеног применом модела EGM96 [4] за територију Београда приказан је на слици 3., а основни статистички подаци на основу којих је слика 3. нацртана као и основни статистички подаци глобалних компонента аномалија слободног ваздуха и компонента аномалија слободног ваздуха и компоненти одступања вертикала приказани су у табели 1.

Статистика	$\zeta_{GGM}$ [m]	$\Delta g_{GGM}$ [mgal]	$\xi_{GGM}$ ["]	$\eta_{GGM}$ ["]
Минимална вредност	43.20	1.79	-1.52	-2.03
Максимална вредност	46.85	53.46	6.15	5.18
Средња вредност	44.17	16.22	1.47	2.34
Стандардна девијација	0.69	9.99	1.58	1.91

Табела 1.: Основни статистички подаци функционала аномалијског потенцијала одређених применом глобалног геопотенцијалног модела EGM96 за територију Београд

Такође коришћењем интернета, тачније интернет стране Међународног сервиса за геод (IGeS), (IAG, Секција III, Међународна комисија за геод XII), могуће је преузети низ глобалних геопотенцијалних модела креираних у предходних неколико деценија овога века од стране разних аутора.

Модел R.H. Papp [3] из 1991. године OSU91, степена је и реда као и модел EGM96,  $N_{\max} = M_{\max} = 360$ . Може се рећи да је OSU91 готово искључиво коришћен при одређивању глобалних компоненти функционала аномалијског потенцијала уз обавезну сагласност аутора модела, све до публикација модела EGM96 и модел OSU91 постаје доступан за све потенцијалне кориснике. Тачност аномалијске висине одређене коришћењем модела OSU91 у произвољној тачки физичке површи Земље оцењена је од стране аутора модела, и износи 0.60m.

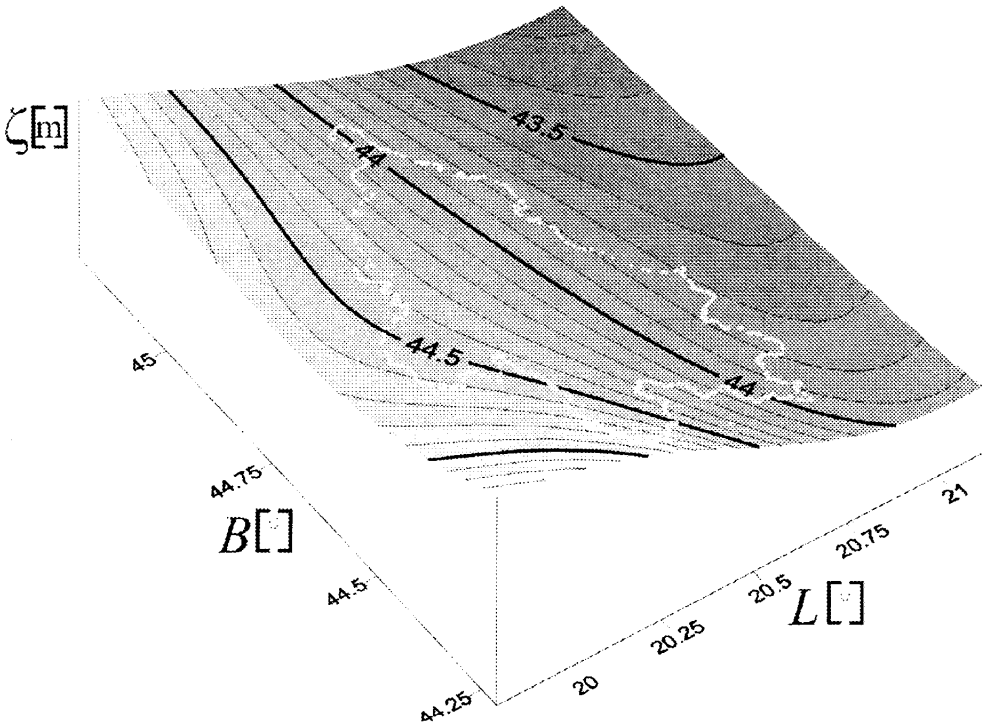
Графички приказ површи квазигеоида одређеног применом модела OSU91 [4] за територију Београда приказан је на слици 4., као и основни статистички подаци глобалних компонента приказани су у табели 2.

Статистика	$\zeta_{GGM}$ [m]	$\Delta g_{GGM}$ [mgal]	$\xi_{GGM}$ ["]	$\eta_{GGM}$ ["]
Минимална вредност	42.80	-3.50	-1.49	-3.52
Максимална вредност	47.52	74.56	9.59	7.66
Средња вредност	43.59	9.14	1.31	2.09
Стандардна девијација	0.66	9.24	1.55	2.29

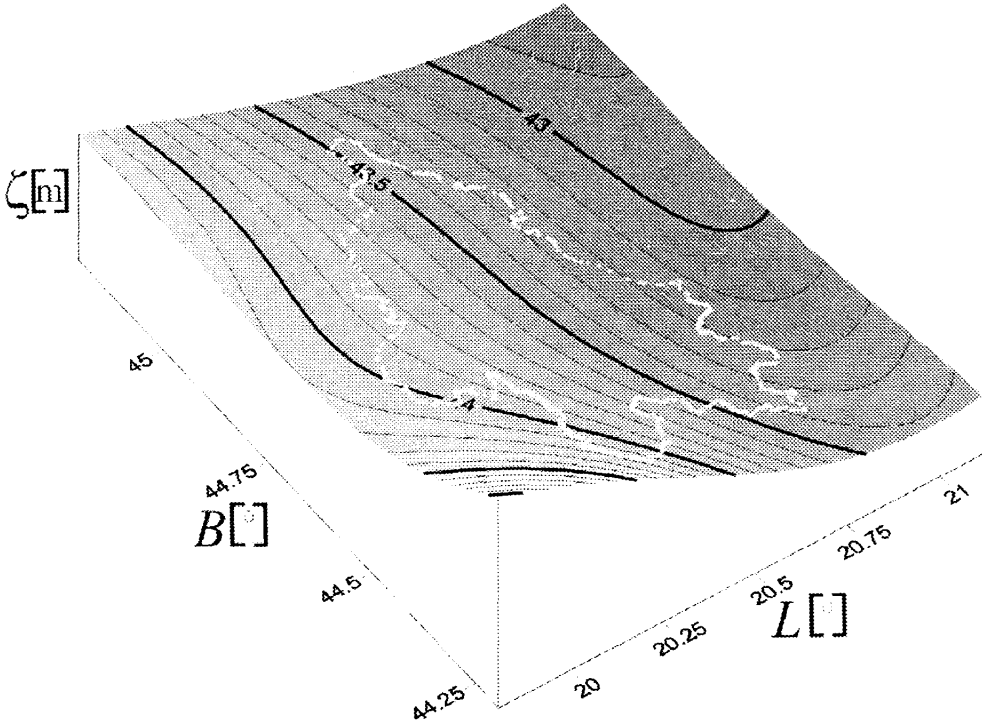
Табела 2.: Основни статистички подаци функционала аномалијског потенцијала одређених применом глобалног геопотенцијалног модела OSU91 за територију Београд

Статистика	$\Delta\zeta$ [m]	$\Delta(\Delta g)$ [mgal]	$\Delta\xi$ ["]	$\Delta\eta$ ["]
Минимална вредност	-0.67	-21.10	-4.24	-5.40
Максимална вредност	1.14	27.16	2.82	2.78
Средња вредност	0.57	7.08	0.16	0.25

Табела 3.: Основни статистички подаци разлика глобалних компоненти функционала аномалијског потенцијала одређених применом EGM96 и OSU91:  $\Delta t = t_{EGM96} - t_{OSU91}$  статистике су одређене на основу 45801 резултата опажања



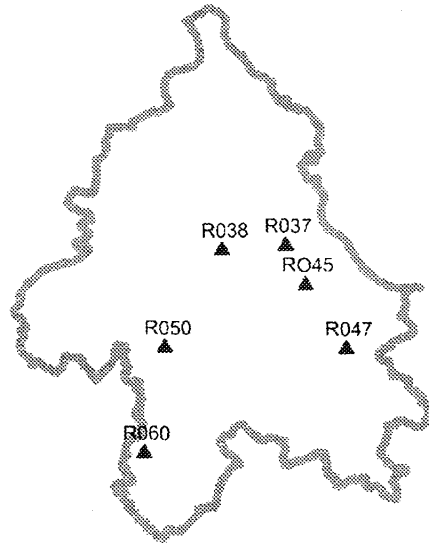
Слика 3. Површ квазигеоида на територији града Београда одређена коришћењем EGM96 (еквијанса 0.1m)



Слика 4. Површ квазигеоида на територији града Београда одређена коришћењем OSU91 (еквијистанца 0.1m)

### УПОРЕЂЕЊЕ ДОБИЈЕНИХ АНОМАЛИЈСКИХ ВИСИНА СА УСЛОВНО ТАЧНИМ ВРЕДНОСТИМА

На територији ширег дела града Београда (ЦКН Београд) постоји укупно 6 тачака Референтне GPS мреже Републике Србије чије су висине применом геометријског нивелмана одређене у систему нормалних висина другог нивелмана високе тачности. Њихов просторни распоред приказан је на слици 5.



Слика 5. Распоред тачака референтне GPS мреже Р.С. на територији града Београда чије су висине применом геометријског нивелмана одређене у систему нормалних висина другог нивелмана високе тачности.

Користећи разлике висина одређених нивелањем и елипсоидних висина поменутих тачака могуће је у грубом сагледати квалитет апроксимације аномалијских висина које следе из примене глобалних геопотенцијалних модела EGM96 и OSU91 (табела 4.).

Бр.	$\zeta_{NVTII}$ [m]	$\zeta_{EGM96}$ [m]	$\zeta_{OSU91}$ [m]	$\Delta\zeta_{EGM96}$ [m]	$\Delta\zeta_{OSU91}$ [m]
R050	44.08	44.32	43.72	-0.24	0.36
R038	44.03	44.09	43.52	-0.06	0.51
R060	44.34	44.57	43.95	-0.23	0.40
R045	43.93	43.92	43.34	0.01	0.59
R047	43.98	43.88	43.30	0.11	0.69
R037	43.92	43.94	43.37	-0.01	0.55

Табела 4.: Аномалијске висине тачака референтне GPS мреже на територији СКН Београд и њихова упоређења са вредностима одређеним из глобалних геопотенцијалних модела EGM96 и OSU91

$$\Delta t = t_{NVTII} - t_{GGM}$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hein, G., and H. Landau, A CONTRIBUTION TO 3D-OPERATIONAL GEODESY, Deutsche Geodätische Kommission, München, 1983.
- [2] Heiskanen, W. A., and H. Moritz., Physical Geodesy, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1967.
- [3] Rapp, H.R., Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulation difference, Journal of Geodesy, 1997.
- [1] Tscherning, C. C., Geoid determination by GRAVSOFT, Персонална комуникација, 1998.
- [5] Ваничек, П., Geodesy, the Concepts, North-Holland Publishing Company - Amsterdam - New York - Oxford, 1982.

**Истраживања рађена у оквиру пројекта Грађевинског факултета Универзитета у Београду: ГЕОДЕТСКИ РЕФЕРЕНТНИ ОКВИР БЕОГРАДА, Министарство за науку, технологију и развој, Република Србија, Београд, 2002.**