

---

**UNIVERZITET U BEOGRADU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET**

---

**mr Boško B. Furtula, dipl.grad.inž**

**GRANIČNA STANJA ARMIRANOBETONSKIH  
MONTAŽNIH DVOPOJASNIH NOSAČA  
OD BETONA VISOKIH ČVRSTOĆA**

*-Doktorska disertacija -  
(rad ima 162 lista)*



**Beograd, 2013. godine**

**Mentori:**

**Prof. dr Mirko Aćić**, dipl.građ.inž.  
Redovni profesor Građevinskog fakulteta  
Univerziteta u Beogradu

**Prof. dr Mihajlo Đurđević**, dipl.građ.inž.  
Vanredni profesor Građevinskog fakulteta  
Univerziteta u Beogradu

Datum odbrane : \_\_\_\_\_

## ZAHVALNOST

Zahvaljujem mentorima **prof. dr Mirku Aćiću, dipl. građ. inž.**, i **prof. dr. Mihajlu Đurđeviću, dipl. građ. inž.** na korisnim savetima, uputstvima i bezrezervnoj pomoći i podršci u svim fazama izrade disertacije. Osim kao profesionalnu, ovu pomoć sam doživljavao i kao prijateljsku, što mi je pričinjavalo posebnu čast.

U pripremi i realizaciji eksperimentalnog dela istraživanja, imao sam svesrdnu pomoć kolega sa Građevinskog fakulteta u Podgorici, gde je ceo eksperiment i realizovan, pa koristim ovu priliku da se na tome zahvalim tadašnjem dekanu **prof.dr Dušku Lučiću**, prodekanu **prof.dr Milošu Kneževiću** i rukovodiocu laboratorije **prof.dr Radmiru Zejaku**.

Takođe, se zahvaljujem Građevinskom fakultetu u Podgorici i preduzeću "Nexan" iz Nikšića na materijalnoj i tehničkoj podršci u toku izrade eksperimentalnog dela disertacije. Zahvalnost upućujem i **Draganu Čaliću, Dimitriju Đuroviću** i **Zoranu Aleksiću** koji su mi pružili direktnu pomoć pri postavljanju i očitavanju mernih mesta.

Zahvalnost dugujem i Visokoj poslovno tehničkoj školi iz Užica na učešću u finansiranju dela eksperimenta.

Takođe, koristim priliku da se zahvalim **prof. dr Živojinu Prašćeviću** na podršci i korisnim savetima.

Posebnu zahvalnost dugujem preminulom **prof.dr. Miloradu Ivkoviću** sa kojim sam sarađivao na projektovanju i izvođenju dvopojasnih konstrukcijskih sistema i koji me je uveo u projektovanje tih sistema.

**Autor**

# SADRŽAJ

<b>1. UVOD</b> .....	1
<b>2. BETONI VISOKE ČVRSTOĆE</b> .....	5
<b>3. PRIMENA BETONA VISOKIH ČVRSTOĆA U SVETU</b> .....	22
<b>4. RAZVOJ I PRIMENA DVOPOJASNIH KONSTRUKCIJSKIH SISTEMA</b> .....	31
<b>5. EKSPERIMENTALNA ISTRAŽIVANJA DVOPOJASNIH KROVNIH NOSAČA</b> .....	45
5.1. Karakteristike modela i šeme opterećenja.....	45
5.2. Merenja deformacija nosača.....	51
5.2.1. Opšte deformacije.....	51
5.2.2. Lokalne deformacije.....	51
5.2.3. Raspored mernih mesta.....	52
5.3. Materijali.....	54
5.3.1. Mehaničke karakteristike armature.....	54
5.3.2. Karakteristike komponenti betonske mešvine.....	55
5.4. Izrada dvopojasnih nosača.....	61
5.5. Program eksperimentalnih istraživanja dvopojasnih nosača.....	67
5.5.1. Merenja na nosačima A i B pod opterećenjem.....	68
5.5.2. Rezultati ispitivanja kontrolnih betonskih tela.....	68
5.6. Oprema za ispitivanje i merna tehnika.....	69
5.6.1. Način nanošenja opterećenja do loma.....	69
5.6.2. Oprema za ispitivanje kontrolnih betonskih tela.....	69
5.6.3. Merna tehnika.....	72
5.6.4. Ostala merenja.....	72
5.6.5. Tok eksperimenta.....	73
5.6.6. Rezultati ispitivanja.....	76
<b>6. ANALIZA TEORIJSKIH REZULTATA PONAŠANJA DVOPOJASNIH SISTEMA</b> .....	83
6.1. Analiza statičkih utućaja.....	83
6.2. Analiza granične nosivosti .....	85

6.3. Analiza stanja napona .....	86
6.4. Deformacije dvopojasnog krovnog nosača.....	96
6.5. Analiza graničnog stanja dvopojasnih nosača. Kontinualno rešenje .....	100
6.5.1. Diferencijalne jednačine sistema.....	100
6.6. Numerički postupak.....	102
6.6.1. Diferencijalne jednačine kretanja.....	103
6.6.2. Integracija diferencijalnih jednačina kretanja.....	104
6.6.3. Sopstvene kružne učestanosti i sopstveni vektori sistema.....	105
6.6.4. Numerička analiza modela primenom MKE.....	107
6.6.5. Pojednostavljeni način proračuna.....	111
<b>7. ODREĐIVANJE FAKTORA GRANIČNOG OPTEREĆENJA PRIMENOM LINEARNOG PROGRAMIRANJA.....</b>	<b>114</b>
<b>8. UPOREDNA ANALIZA.....</b>	<b>141</b>
<b>9. ZAKLJUČAK.....</b>	<b>151</b>
<b>10. FOTODOKUMENTACIJA.....</b>	<b>154</b>
<b>11. LITERATURA.....</b>	<b>164</b>

# GRANIČNA STANJA ARMIRANOBETONSKIH MONTAŽNIH DVOPOJASNIH NOSAČA OD BETONA VISOKE ČVRSTOĆE

## ABSTRAKT

U ovoj disertaciji izvršena je teorijska i eksperimentalna analiza linijskog montažnog armiranobetonskog nosača sa čeličnim zategama. Da bi se potvrdile teorijske postavke proračuna, unapredila tehnologija građenja i omogućilo praćenje ponašanja ovih sistema u svim naponsko-deformacijskim stanjima, izvršena su eksperimentalna istraživanja sa betonom visoke čvrstoće na pritisak. Eksperimentalno su ispitivana i analizirana dva nosača (modela) "A" i "B", raspona 20.00 m u prirodnoj veličini koji su izrađeni od betona visokih čvrstoća od 75 MPa i 78 MPa, respektivno.

U uvodnom delu je navedeno da ovakvi nosači u velikoj meri zadovoljavaju zahteve savremene tehnologije građenja u koje spadaju: znatna redukcija sopstvene težine, brza i laka montaža i izbegavanje potreba za betoniranjem na licu mesta. Pored toga, ispunjeni su svi zahtevi u pogledu stabilnosti, funkcionalnosti i trajnosti ovakvih nosača. Kratkotrajno statičko opterećenje, nanošeno je u sedam faza, a osma faza je izvršena tako što je nosač izložen udaru u sleme pod punim opterećenjem sedme faze slobodnim padom tega od 5.00 kN sa visine 6.00m.

U poglavlju 2 je prikazan pregled najznačajnijih svojstava betona visoke čvrstoće, metode projektovanja betonske mešavine, pregled radnih dijagrama betona u pojedinim zemljama i njihovo poređenje sa odgovarajućim analizama.

U poglavlju 3 dat je pregled najznačajnijih objekata od betona visoke čvrstoće koji su realizovani u svetu sa osnovnim karakteristikama i recepture za beton na nekim objektima.

Pregled primene dvopojasnih sistema, uglavnom u našoj zemlji, prikazan je u poglavlju 4. Ovi konstrukcijski sistemi su nastali i unapređeni na Građevinskom fakultetu u Beogradu, što je rezultiralo njihovom velikom primenom u našoj zemlji. Dat je pregled realizovanih objekata sa karakterističnim detaljima autora sa ovog fakulteta i nekih detalja koje je autor disertacije realizovao, sam ili u saradnji sa njima.

Peto poglavlje daje opis eksperimentalnih istraživanja: pripremu, izradu probnih mešavina, pravljenje modela u prirodnoj veličini i nanošenje opterećenja sa merenjima opštih i lokalnih deformacija nakon svake faze opterećenja.

U šestom poglavlju daje se teorijska analiza ovih dvopojasnih sistema. Izložena je analiza stanja napona i deformacija, zatim analiza graničnih stanja ovih sistema u obliku integro-diferencijalnih jednačina. Ukratko je prikazan jedan metod dvojice kiniskeh autora, koji predstavlja uprošćenje metoda koji su predložili naši autori Ivković, Perišić, Ačić i Pakvor. Izvršena je teorijska analiza ponašanja nosača usled dejstva udara i razvijen je poseban računarski program na bazi konačnih elemenata i upoređeni mereni i teorijski rezultati koji se dobro slažu.

U sedmom poglavlju prikazuje se metodologija određivanja faktora graničnog opterećenja koje nosač dovodi u stanje granične ravnoteže za aplicirano i jednako podeljeno opterećenje na gornjem pojasu. Primenjeni postupak određivanja faktora graničnog opterećenja i mehanizma loma je zasnovan na dualitetu statičkih i kinematičkih veličina, i primenom linearnog programiranja određene karakteristične statičke i kinematičke veličine i formulisani zaključci. Za ova opterećenja je izvršena analiza ponašanja sistema prema teoriji I i II reda za elastično ponašanje nosača.

U osmom poglavlju je izvršena završna uporedna analiza, tj. poređenje teorijskih i eksperimentalnih rezultata i konstatovano njihovo dobro slaganje.

**Ključne reči:** beton visoke čvrstoće, dvopojasni konstruktivni sistemi, faktor opterećenja, granična ravnoteža.

# LIMIT STATES OF REINFORCED HIGH STRENGTH CONCRETE PREFABRICATED TWO-CHORD STRUCTURES

## SUMMARY

In this PhD thesis is carried out theoretical and experimental analysis of linear, prefabricated reinforced concrete structures with a lower steel chord. To confirm the theoretical calculations, improve construction technology and to enable monitoring of the behavior of these systems in all stress-strain states was carried out an experimental research with concrete of high compressive strength. Two girders (models) "A" and "B" are investigated experimentally in life-size, made of high strengths concrete with a compressive strength 75 MPa and 78 MPa.

In the introductory chapter states that these structures largely meet the requirements of modern construction technology which include: significant reduction of its own weight, quick and easy assemblage, avoiding the need for concreting on site, and in addition met all the requirements in terms of stability, functionality and durability of these structural systems. The short-term static load was applied in seven stages, and in the eighth stage the ridge of the loaded structure was exposed to the impact of the weight free fall 5.00 kN from a height 6.00 m.

In Chapter 2 is given an overview of the most important features of high-strength concrete, methods of concrete admixture design, review of operating diagrams for concrete in certain countries and their comparison with the corresponding analysis.

In Chapter 3 is given an overview of the most important buildings constructed of high strength concrete that have been realized in the world with the basic characteristics and admixtures of concrete on some of these buildings.

Through Chapter 4 provides an overview of application of two-chord structural systems, mainly in our country. These systems are created and developed in Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, which led to their wide application in our country. The review of the executed projects and characteristic details designed by authors from this faculty and some of the details that the author has realized, either alone or in collaboration with them, is presented.

The fifth chapter mostly describes experimental research, preparation, making of test mixtures, creating a life-size models, applying loads with measurements of general and local deformation after each load stage.

The sixth chapter gives a theoretical analysis of the two-chord structures. Provides a stress and strain analysis, and then the limit state analysis of the system in the form of integro-differential equations. One method, given by two Chinese authors, that represents simplification of the method for analysis of these systems, proposed earlier by Ivkovic, Perišić, Ačić and Pakvor, is shortly explained.

The seventh chapter presents a methodology for determining the factor of limit load that leads the structural system into a state of limit equilibrium for the applied load and equally distributed load all along upper chord. Procedure for determining the factor of limit load and mechanism of collapse is based on the duality of characteristic static and kinematic quantities. Applying Linear programming these quantities are determined successfully and corresponding conclusion are formulated. For all mentioned loadings, an analysis for elastic behaviour of investigated structures according to the theory of the first and second order is carried out.

A comparative analysis, i.e. comparison of theoretical and experimental results, is performed in Chapter 8, and good agreement is found between these results.

**Keywords:** high strength concrete, two-chord structures, load factor, limit equilibrium

## 1. UVOD

U poslednjih dvadeset i pet godina primena i razvoj betona visokih čvrstoća je doživela u svetu veliku ekspanziju. U početku je ta primena bila samo na objekte sa posebnim zahtevima, a ubrzano se prelazi i na ostale, uobičajene građevine. Postizanje čvrstoće betona od 100 MPa i više ne predstavlja teškoće, i spravljanje betona ovih čvrstoća sve više se širi po raznim gradilištima kod nas i u svetu.

Beton je u upotrebi preko 9000 godina. Pod iz toga doba u Yiftah EL u Izraelu ima čvrstoću na pritisak od 35 do 40 MPa. Beton visokih čvrstoća je upotrebljavan za posebne namene skoro ceo vek. Plovila od betona izgrađena devedesetih godina prošlog veka u Engleskoj imaju čvrstoću na pritisak betona od 75 do 120 MPa. U SAD se kod gradnje visokih objekata upotrebljavao beton čvrstoće na pritisak oko 60 MPa, a kasnije je čvrstoća betona na pritisak bila 70 MPa, da bi krajem prošlog veka počela primena betona čvrstoće na pritisak preko 100 MPa.

Naziv beton visokih čvrstoća ( High Strength Concrete – HSC ) upotrebljava se za betone koji imaju čvrstoću na pritisak veću od određene vrednosti koja se vremenom povećavala. U početku je to bilo preko 30MPa, a danas je u većini zemalja, pa i kod nas 60MPa i više.

Beton visokih čvrstoća ima veliku čvrstoću na pritisak, ali ima i ostale mehaničke osobine koje doprinose većoj trajnosti i većoj otpornosti na sve agresivnije uticaje okoline. Povećanje primene ovih betona je ne samo zbog velike čvrstoće na pritisak, već i zbog dobre zaštite armature, povećane otpornosti na mraz i habanje, što sve doprinosi većoj trajnosti betonskih konstrukcija. Takođe, lakša ugradljivost i smanjena sopstevna težina konstruktivnih elemenata doprinosi proširenju primene ovih betona.

Zbog poboljšanih osobina ovih betona u odnosu na tzv. normalne betone, u Francuskoj se ovi betoni zovu još betoni visokih sposobnosti ( High Performance Concrete – HPC ). Svedoci smo činjenice da su objekti od običnog betona u jako lošem stanju zbog brojnih uticaja okoline, iako se dugo smatrao većitim materijalom, pa je pravi odgovor upotreba betona visokih čvrstoća.

Visoka čvrstoća betona omogućuje smanjenje dimenzija nosača, što dovodi do smanjenja sopstvene težine konstrukcije, smanjenja inercijalnih sila pri dejstvu zemljotresa, a takođe, omogućava povećanje raspona konstrukcija. Dobijanje većih ranih čvrstoća sa smanjenjem sopstvene težine otvara nove mogućnosti u montažnoj gradnji, naročito industrijskih objekata.

Većina nacionalnih propisa za beton daje najveću čvrstoću na pritisak od 50 do 60 MPa, a kod nas je 60MPa. Ovo znatno usporava primenu betona visokih čvrstoća. Istovremeno, neke zemlje kao što su: Nemačka, Holandija, Norveška i Finska u nacionalnim propisima daju najveću vrednost i preko 100MPa. U SAD-u i Kanadi nema ograničenja čvrstoće na pritisak betona.

Prema našem Pravilniku za beton i armirani beton iz 1987. godine, koji i danas važi, najveća vrednost čvrstoće na pritisak betona je 60 MPa. Prema EC-2, najveća čvrstoća na pritisak betonasko kocke stranice 15cm je 105MPa. Proračuni u stanju granične nosivosti i graničnim stanjima upotrebljivosti armirano betonskih konstrukcijakod nas su razvijeni na betonima sa čvrtoćom pri pritisku manjom od 60 MPa.



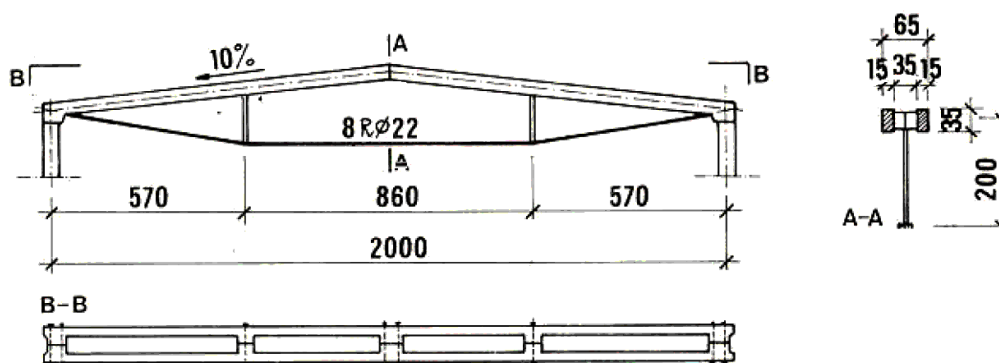
Težnja građevinskih konstruktera je usmerena na razvoj i praktičnu primenu konstrukcijskih sistema, kojima se, uz primenu postojećih i novih materijala, omogućava proširenje polja primene odgovarajućih konstrukcija po rasponu, nameni objekta ili drugim kriterijumima vrednovanja projekta.

Uz primenu postojećih ili novih tehnologija građenja kojima se olakšava izvođenje, skraćuje vreme izgradnje, olakšava eksploatacija i održavanje uz druge prednosti, moguće je ostvarenje nedostignutih dometa. Takođe, izboru optimalnog rešenja konstrukcije prethodi i analiza sa tehničkog i ekonomskog stanovišta.

Profesor Milorad Ivković, kao i profesori Mirko Ačić, Života Peišić i Aleksandar Pakvor su sa svojim saradnicima osmislili, projektovali i u praksu uveli novi dvopojasni konstrukcijski sistem. To je, ustvari, konstrukcijski spregnuti sistem, sa čeličnim elementima van betonskog dela preseka.

Ovakvi sistemi, kao prefabrikovani krovni nosači, uspešno su primenjeni na većem broju industrijskih, javnih i drugih objekata. Izvedeno je preko dva i po miliona kvadratnih metara površine krovnih konstrukcija ovog tipa. Primena ovih nosača je u uzlaznoj liniji, jer su u praksi pokazali znatna preimućstva u odnosu na armiranobetonske i prethodno napregnute pune i rešetkaste nosače. Danas se i u mostogradnji, posebno pri sanaciji, izvode prethodno napregnute konstrukcije sa kablovima izvan armiranobetonskog preseka, tj. bez spoja kablova sa betonom betonskog preseka.

Uopšte, kod dvopojasnih sistema, gornji pojas je izložen relativno velikim silama pritiska i malim momentima savijanja, a donji pojas, koji je na odstojanju od gornjeg pojasa i sa njim spojen preko pritisnutih vestriskala – razupirača je izložen velikim silama zatezanja.



*Slika 1 - Izgled jednog dvopojasnog nosača [5]*

Na slici 1 prikazano je jedno rešenje dvopojasnog armiranobetonskog nosača raspona 20.00m kod koga donji pojas čini 8R $\Phi$ 22.[5]

Savremena tehnologija građenja zahteva od konstruktera projektovanje konstrukcija sa manjom sopstvenom težinom, lakom i brzom montažom, prefabrikacijom svih elemenata i skraćenje ukupnog vremena građenja. Istovremeno, zahteva se da budu ispunjeni i uslovi stabilnosti, funkcionalnosti i trajnosti svih elemenata konstrukcije.

Linijski, montažni, armiranobetonski dvopojasni nosači su ustvari, nosači sa zategom, projektovani kao elementi krovne konstrukcije, ispunjavaju u velikoj meri navedene uslove. Kod ovih nosača je izvršena značajna redukcija sopstvene težine, pa su samim tim omogućeni lakši transport i montaža.

Nosači su sastavljeni od montažnih delova koji se međusobno spajaju u celinu visokovrednim ili običnim zavrtnjevima. Donji pojas se postavlja van betonskog dela preseka nosača i izvodi od običnog čelika ili od kablova za prethodno naprezanje ukoliko se radi o većim rasponima ( $l \geq 35.00\text{m}$ ).

U ovoj disertaciji izvršena je teorijska i eksperimentalna analiza armiranobetonskog montažnog dvopojasnog nosača raspona 20.00m, sa gornjim pojasom od betona visoke čvrstoće i donjim zategnutim pojasom od običnog čelika. Teorijska analiza obuhvata analizu statičkih uticaja u elementu, analizu stanja napona i deformacija u presecima, analizu graničnog stanja, deformacija i prslina.

Ovaj eksperiment treba da potvrdi teorijske postavke proračuna, da ocenu spojeva i veza i omogući praćenje ovih nosača u svim naponsko-deformacijskim stanjima koji su od interesa za teoriju i praksu. Takođe, analiziraće se prednosti upotrebe betona visokih čvrstoća u ovakvim sistemima s obzirom na smanjenje težine nosača, manje dimenzije preseka, lakšu montažu i transport, veće raspone kao i značajno povećanje trajnosti ovih konstrukcija u odnosu na konstrukcije sa običnim betonima.

Izvršena je i dinamička analiza ovog sistema i eksperiment sa udarom tega od 5.00kN, slobodnim padom sa visine od 6.0m u sleme nosača. Treba da se vidi kako beton visoke čvrstoće, pravilnim izborom preseka, dobrim konstruisanjem veza i detalja utiče na sigurnost, stabilnost i trajnost ovih nosača.

Izvršeno je analiziranje nosača konačnim elementima, i to zategnutog donjeg pojasa grednim elementima, a gornjeg pritisnutog pojasa 3D izoparametarskim elementima. Urađen je softver za analizu dvopojasnih nosača korišćenjem MKE koji obuhvata i dinamičku analizu. Pri tome, moguće je u pojedinim trenucima vremena- intervalima pratiti ponašanje ovog nosača pri dinamičkim dejstvima. Softver je razvijen u institutu " BIOIRC " u Kragujevcu.

Cilj eksperimentalne analize je praćenje ponašanja nosača u eksploataciji i u fazi loma nosača kao i poređenje merenih uticaja u nosaču sa računski dobijenim uticajima. Vršeno je merenje dilatacija u karakterističnim presecima gornjeg i donjeg pojasa, merenje ugiba duž nosača i snimana pojava i stanje prslina na gornjem pojasu i završna pojava loma nosača.

Analizom uticaja dobijen je koeficijent sigurnosti od loma 2.012, zatim vrednosti sile u donjem pojasu, veličine ugiba, slika prslina, završna figura loma.

Eksperimenti su u celosti izvršeni u laboratoriji Građevinskog fakulteta u Podgorici u leto i jesen 2008.godine. Tu su urađene i probne mešavine za beton visokih čvrstoća, kompletiran nosač, i postavljen na oslonce gde je i opremljen za ispitivanje.

Uvodni deo disertacije sadrži ocenu da ovakvi nosači u velikoj meri zadovoljavaju zahteve savremene tehnologije građenja. Konstatuje se da ovakvi nosači ispunjavaju sve zahteve u pogledu stabilnosti, funkcionalnosti i trajnosti.

Drugo poglavlje prikazuje najznačajnija svojstva betona visoke čvrstoće, metode projektovanja betonske mešavine, pregled radnih dijagrama betona u pojedinim zemljama i njihovo poređenje sa odgovarajućim analizama.

Treće poglavlje daje pregled najznačajnijih objekata od betona visoke čvrstoće koji su realizovani u svetu sa osnovnim karakteristikama i recepture za beton na nekim objektima.

Pregled primene dvopojasnih sistema, uglavnom u našoj zemlji, prikazan je u poglavlju 4. Ovi konstrukcijski sistemi su nastali i unapređeni na Građevinskom fakultetu u Beogradu, što je rezultiralo njihovom velikom primenom u našoj zemlji. Dat je pregled realizovanih objekata sa karakterističnim detaljima autora sa ovog fakulteta i nekih detalja koje je autor disertacije realizovao, sam ili u saradnji sa njima.

Peto poglavlje daje opis eksperimentalnih istraživanja: pripremu, izradu probnih mešavina, pravljenje modela u prirodnoj veličini i nanošenje opterećenja sa merenjima opštih i lokalnih deformacija nakon svake faze opterećenja.

U šestom poglavlju daje se teorijska analiza ovih dvopojasnih sistema. Izložena je analiza stanja napona i deformacija, zatim analiza graničnih stanja ovih sistema u obliku integro-diferencijalnih jednačina. Prikazan je uprošćeni postupak dvojice kiniskeh autora, koji predstavlja uprošćenje metoda koji su predložili naši autori Ivković, Perišić, Ačić i Pakvor. Izvršena je teorijska analiza ponašanja nosača usled dejstva udara i razvijen je poseban računarski program na bazi konačnih elemenata i upoređeni mereni i teorijski rezultati koji se dobro slažu.

U sedmom poglavlju prikazuje se metodologija određivanja faktora graničnog opterećenja koje nosač dovodi u stanje granične ravnoteže za aplicirano i jednako podeljeno opterećenje na gornjem pojasu. Primenjeni postupak određivanja faktora graničnog opterećenja i mehanizma loma je zasnovan na dualitetu statičkih i kinematičkih veličina, i primenom linearnog programiranja određene karakteristične statičke i kinematičke veličine i formulisani zaključci. Za ova opterećenja je izvršena analiza ponašanja sistema prema teoriji I i II reda za elastično ponašanje nosača.

U osmom poglavlju je izvršena završna uporedna analiza, tj. poređenje teorijskih i eksperimentalnih rezultata i konstatovano njihovo dobro slaganje.

## 2. BETONI VISOKE ČVRSTOĆE

### 2.1. UVOD

Zahvaljujući vrlo intenzivnom razvoju tehnologije betona, stalno je rastao nivo mehaničkih čvrstoća, pa se danas u dobro organizovanim i opremljenim pogonima može dobiti beton čije čvrstoće na pritisak nakon 28 dana premašuju 100 MPa. Istraživači na polju tehnologije betona dali su doprinos stalnoj težnji građevinskog konstruktora za osvajanjem novih materijala znatno boljih mehaničkih i drugih karakteristika. Tako je nastao beton znatno većih mehaničkih karakteristika u odnosu na svojstva primenjivanog betona-običnog betona [9].

Polovinom dvadesetog veka čvrstoća betona na pritisak se kretala od 30-40 MPa, pa su krajem prošlog veka dostignute vrednosti od 60 MPa. Porastu mehaničkih karakteristika betona postupkom uobičajene proizvodnje, značajno su doprinele kvalitetne komponente materijala koje ulaze u sastav betonske mešavine, naročito pojava novih vrsta aditiva.

Pod pojmom *beton visoke čvrstoće* podrazumeva se beton koji ima čvrstoću na pritisak veću od određene vrednosti dobijene uobičajenim postupkom proizvodnje. Ova granica se vremenom menjala. Obično, s obzirom na čvrstoću na pritisak, betone delimo na obične – normalne betone, betone visoke čvrstoće ( High strength concrete ), betone vrlo visoke čvrstoće ( Ultra High strength concrete ) i specijalne betone, tabela 2.1.

**Tabela 2.1.** Podela betona prema čvrstoći na pritisak

Betoni normalne čvrstoće	20-60 MPa
Betoni visoke čvrstoće	60-100 MPa
Betoni vrlo visoke čvrstoće	100-150 MPa
Specijalni betoni (betoni ultravisoke čvrstoće)	>150 MPa

Najčešća definicija betona visokih čvrstoća je prema American Concrete Institute, da je to beton takvih posebnih osobina koji se može dobiti uobičajenim postupcima proizvodnje, ugradnje i nege betona [35]. Prema nekim autorima beton visoke čvrstoće je beton sa vodom cementnim faktorom  $\leq 0.40$  [10].

Prema Evrokodu 2 betoni su svrstani u klase (tabela 2.2), gde se beton do klase C55/60 smatra običnim, a iznad te klase su betoni visoke čvrstoće.

**Tabela 2.2. Podela betona na klase čvrstoća prema Evrokodu 2**

Klase čvrstoća betona														Analički izraz/objašnjenje	
$f_{ck}$ (MPa)	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	
$f_{ck, cube}$ (MPa)	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	
$f_{cm}$ (MPa)	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	$f_{cm} = f_{ck} + 8$ (MPa)
$f_{ctm}$ (MPa)	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	$f_{ctm} = 0,30 \times f_{ck}^{2/3} \leq C50/60$ $f_{ctm} = 2,12 \ln(1 + (f_{cm}/10)) > C50/60$
$f_{ctk, 0.05}$ (MPa)	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	$f_{ctk, 0.05} = 0,7 \times f_{ctm}$ 5 % fractile
$f_{ctk, 0.95}$ (MPa)	2,0	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6,0	6,3	6,6	$f_{ctk, 0.95} = 1,3 \times f_{ctm}$ 95 % fractile
$f_{cm}$ (MPa)	27	29	30	31	33	34	35	36	37	38	39	41	42	44	$E_{cm} = 22 [(f_{cm}/10)^{0.3}]$ ( $f_{cm}$ u MPa)
$\epsilon_{c1}$ (%)	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,25	2,3	2,4	2,45	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	Videti sliku 3.2 $\epsilon_{c1} (\%) = 0,7 f_{cm}^{0.31} < 2.8$
$\epsilon_{cu1}$ (%)	3,5								3,2	3,0	2,8	2,8	2,8	Videti sliku 3.2 za $f_{ck} \geq 50$ Mpa $\epsilon_{cu1} (\%) = 2,8 + 27[(98-f_{cm})/100]^4$	
$\epsilon_{c2}$ (%)	2,0								2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	Videti sliku 3.3 Za $f_{ck} \geq 50$ Mpa $\epsilon_{c2} (\%) = 2,0 + 0,085(f_{ck} - 50)^{0.53}$	
$\epsilon_{cu2}$ (%)	3,5								3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	Videti sliku 3.3 za $f_{ck} \geq 50$ Mpa $\epsilon_{cu2} (\%) = 2,6 + 35[(90-f_{ck})/100]^4$	
$n$	2,0								1,75	1,6	1,45	1,4	1,4	za $f_{ck} \geq 50$ Mpa $n = 1,4 + 23,4[(90-f_{ck})/100]^4$	
$\epsilon_{c3}$ (%)	1,75								1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	Videti sliku 3.4 za $f_{ck} \geq 50$ Mpa $\epsilon_{cu3} (\%) = 1,75 + 0,55[(f_{ck} - 50)/40]$	
$\epsilon_{cu3}$ (%)	3,5								3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	Videti sliku 3.4 za $f_{ck} \geq 50$ Mpa $\epsilon_{cu3} (\%) = 2,6 + 35[(90-f_{ck})/100]^4$	

Betoni visoke čvrstoće imaju i druge, poboljšane osobine kao što su trajnost i otpornost na agresivne uticaje sredine. Visoka trajnost ovih betona, dobra zaštita armature, dobra ugradljivost betona, dobra otpornost na habanje i dejstvo mraza, često su razlog više za primenu ovih betona, a ne samo čvrstoća betona na pritisak. Zato se ovi betoni u Francuskoj zovu betoni visokih svojstava ( High Performance Concrete ).

Običan beton se dugo smatrao većitim materijalom, ali smo svedoci da su mnogi objekti izgrađeni običnim betonom u veoma lošem stanju, pa se postavlja pitanje opravdanosti njihove primene u agresivnim sredinama. Kao materijal koji može uspešno odgovoriti zahtevima

nosivosti, trajnosti, funkcionalnosti i ekonomičnosti nameće se beton visoke čvrstoće. S početkom razmatranja trajnosti konstrukcija, počinje i primena betona visokih čvrstoća, kao doprinos većoj trajnosti, naročito ako se gradi u agresivnim sredinama. Zapažena je primena betona visoke čvrstoće za razne objekte.

Kod tunelskih konstrukcija je prednost primene ovih betona zbog izraženih prednosti pri izradi torkret betona. Poznat je tunel Frasdorf sewage (Bavarija) od betona visoke čvrstoće sa silikatnom prašinom [9]. Zatim, prednost primene ovih betona je kod stubova visokih objekata, naftnih platformi u Norveškoj, mostova velikih raspona i mnogih drugih objekata. Primena betona visokih čvrstoća ogleda se u njegovoj ekonomičnosti, smanjenju dimenzija poprečnog preseka, što dovodi do smanjenja sopstvene težine. Ovo ima za posledicu bržu gradnju, dobijanje vitkih konstrukcija, mogućnost savladavanja velikih raspona, veću otpornost na agresivne uticaje sredine i manje deformisanje u toku vremena, zbog redukcije tečenja kod ovih betona. [60]

Još uvek ne postoje evropske norme ili preporuke za betone visoke čvrstoće i betone visokih performansi. U Americi je izvršena podela prema kategorijama u odnosu na mehanička svojstva betona i uslove trajnosti. Takva podela je prikazana u tabeli 2.3 [35].

**Tabela 2.3.** Podela betona visokih čvrstoća prema Federal Highway Administration (SAD) [35]

Svojstvo	Merna jedinica	Metoda ispitivanja	Podela betona visokih čvrstoća prema kategorijama		
			1	2	3
Otpornost na delovanje ciklusa smrzavanja i odmrzavanja	% - odnos dinamičkih modula elastičnosti nakon 300 ciklusa i na početku ispitivanja	ASTM C 66 AASHTO	$70\% \leq E_{300}/E_0 < 80\%$	$80\% \leq E_{300}/E_0 < 90\%$	$90\% \leq E_{300}/E_0$
Otpornost na delovanje ciklusa mraza i soli za odmrzavanje (SR)	Vizuelno oštećenje nakon 50 ciklusa	ASTM C 672	$3,0 \geq SR > 2,0$	$2,0 \geq SR > 1,0$	$1,0 \geq SR \geq 0,0$
Otpornost na abraziju (AR)	mm – meri se dubina oštećenja	ASTM C 944	$2,0 > AR \geq 1,0$	$1,0 > AR \geq 0,5$	$0,5 > AR$
Otpornost jona hlora (CP)	Coulomb	AASHTO T 227 ASTM C 1202	$2.500 \geq CP > 1.500$	$1.500 \geq CP > 500$	$500 \geq CP$
Otpornost na alkalno-silikatnu reakciju (ASR)	% - ekspanzije nakon 56 dana	ASTM C 141	$0,20 \geq ASR > 0,15$	$0,15 \geq ASR > 0,10$	$0,10 \geq ASR$
Otpornost na sulfate (SR)	% - ekspanzija	ASTM C 1202	$SR \leq 0,10$ nakon 6 meseci	$SR \leq 0,10$ nakon 12 meseci	$SR \leq 0,10$ nakon 18 meseci
Konzistencija (SL-sleganje, SF – rasprostiranje)	mm	AASHTO T 119 ASTM C 143	$SL > 190$ $SF > 500$	$500 \leq SF \leq 600$	$600 < SF$
Čvrstoća na pritisak ( $f_c$ )	MPa	AASHTO T 22 ASTM C 39	$55 \leq f_c < 69$	$69 \leq f_c < 97$	$97 < f_c$
Modul elastičnosti (E)	GPa	ASTM C 469	$34 \leq E_c < 41$	$41 \leq E_c < 48$	$48 < E_c$

			41	48	
Skupljanje (S)	%	AASHTO T 160 ASTM C 157	800 > S ≥ 600	600 > S ≥ 400	400 > S
Puzanje (C)	% / MPa	ASTM C 512	75 ≥ C > 55	55 ≥ C > 30	30 ≥ C

## 2.2. KOMPONENTE BETONSKE MEŠAVINE

Pri izboru komponenata za beton visoke čvrstoće potrebna je veća pažnja nego pri spravljanju betona obične čvrstoće. Komponente betona su cement, agregat, voda, hemijski i mineralni dodaci. Prve tri komponente su obavezne, a hemijski i mineralni dodaci se razlikuju u zavisnosti od osobina koje želimo postići. Razlika u odnosu na obične betone je što kod betona visoke čvrstoće obavezno imamo superplastifikator. Posebno je važno utvrditi međusobnu usaglašenost između cementa, hemijskih i mineralnih dodataka. Ovo se, uglavnom, proverava probnim mešavinama.

Može se reći da betoni visoke čvrstoće zahtevaju veću količinu cementa ( $\geq 400\text{kg/m}^3$ ) i manji vodocementni faktor. U pogledu granulometrijskog sastava postoji dobra sličnost sa običnim betonom, ali sa većim učešćem sitnijih frakcija agregata. Kada su u pitanju aditivi, obavezno se dodaju superplastifikatori ili/i razni drugi dodaci u zavisnosti od osobina koje želimo postići. Osobine cementa kao što su klasa čvrstoće, hemijski i mineralni sastav i finoća mliva ukazuju na pogodnost primene ovog cementa za izradu betona visoke čvrstoće. Kao mineraloški dodatak najviše je u upotrebi silicijumska prašina ( $\text{SiO}_2$ ). Ovaj materijal sadrži 85-98% silicijum dioksida i najfinija zrna prečnika manjeg od  $0.1\mu\text{m}$ . Silicijumska prašina je vrlo aktivna, tako da 1kg silicijumske prašine zamenjuje 3-4kg cementa pri čemu se čvrstoća betona ne menja.

Beton se posmatra kao trofazni sistem koji čini cementni kamen, agregat i tranzitna zona (inter-face) između agregata i cementnog kamena. Slom betona je uvek po najslabijoj od ove tri faze. Da bi se dobila veća čvrstoća betona na pritisak potrebno je da svaka od ovih faza bude što kvalitetnija i homogenija. Treba težiti što boljoj vezi cementa i agregata koja se obično smatra najslabijim mestom u betonu. Boljom vezom cementnog kamena i agregata može se dogoditi da najslabije mesto u betonskom kompozitu bude agregat, pa tada treba ugraditi kvalitetan i čist agregat. U zavisnosti od osobina koje želimo postići kod betona visoke čvrstoće i visokih performansi zavisi i izbor komponenti, posebno cementa i tipa superplastifikatora.

Prethodno treba dokazati međusobnu usaglašenost ove dve komponente. U odnosu na obične betone, kod betona visoke čvrstoće treba ići sa cementima veće finoće mliva, što je nepovoljno sa stanovišta reologije. Upotreba mineralnih dodataka betonu je opravdana ako se dobijaju bolje osobine svežeg i očvrslog betona i ako su ekonomski i ekološki prihvatljivi. Sa superplastifikatorima postizemo bolju ugradljivost betona uz istu ili manju količinu vode. Poželjno je upotrebljavati superplastifikatore novije generacije, jer su stariji razvijeni pre upotrebe betona visoke vrstoće. Pojedine vrste superplastifikatora za isti cement nemaju istu efikasnost. Ako hoćemo veće trajne čvrstoće, potrebna je veća količina superplastifikatora i najmanja količina vode. Za bolju ugradljivost betona treba najveća količina vode sa kojom postizemo zahtevanu čvrstoću, a količinu superplastifikatora određujemo kako bismo dobili potrebnu ugradljivost betona. Uglavnom se upotrebljavaju superplastifikatori u tečnom stanju zbog lakše dozaže i razgradljivosti.

Pored silikatne prašine upotrebljava se leteći pepeo i zgura. Leteći pepeo se obično upotrebljava u iznosu oko 15% od težine cementa za betone čvrstoće na pritisak do 100 MPa. Zgura se dozira od 10-30% od težine cementa uz kombinaciju sa 10% SiO<sub>2</sub>. Zgura i leteći pepeo zamenjuju jedan deo ukupne količine cementa.

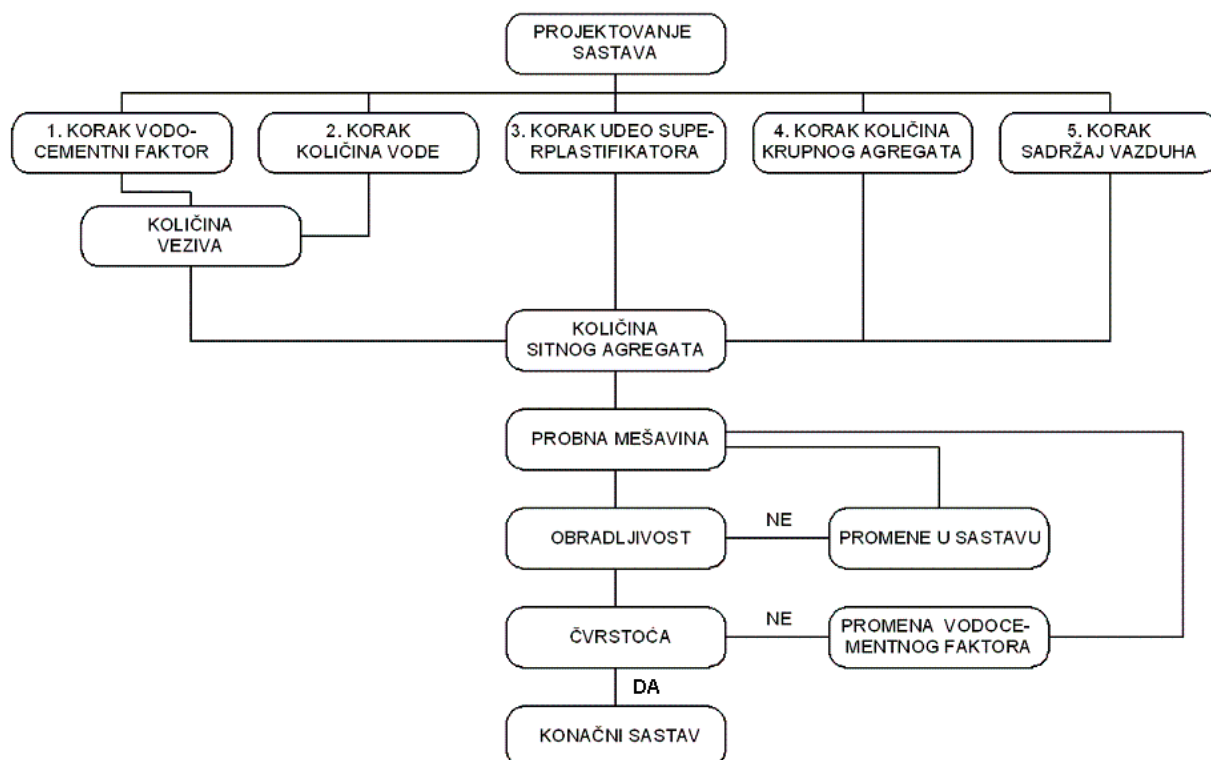
Agregat kao komponenta sa najvećim učešćem u sastavu betona, značajno utiče svojim karakteristikama na osobine betona. Izborom agregata kod betona visoke čvrstoće značajno se utiče na krajnje čvrstoće betona. Agregat na osobine očvrstlog betona utiče svojim poreklom (prirodni, rečni, drobljeni), oblikom, teksturom, granulometrijskim sastavom, mineraloškim sastavom i fizičko-mehaničkim karakteristikama. Mnogobrojnim istraživanjima došlo se do saznanja da se, primenom drobljenog agregata, postižu bolji rezultati u pogledu dostizanja visoke čvrstoće betona. Veće čvrstoće na pritisak se dobijaju sa drobljenim agregatom za 30-40% u odnosu na ostale agregate [62].

Dobrom granulometrijskom sastavu agregata mora se posvetiti posebna pažnja, naročito odnosu krupnog i sitnijeg agregata. Za veće čvrstoće na pritisak značajan je izbor krupnog agregata. Kod većeg učešća krupnijeg zrna agregata smanjuje se količina cementnog kamena, a dolazi i do povećanja poroznosti i heterogenosti na kontaktu cementnog kamena i agregata. Za spravljanje betona visoke čvrstoće jednako su dobri agregati od krečnjaka, dolomita ili granita, ukoliko je dobar granulometrijski sastav, oblik i tekstura zrna [12].

Sa povećanjem čvrstoće na pritisak, povećava se i krtost betona. Prema istraživanjima nekih istraživača se vidi da, sa porastom čvrstoće na pritisak do karakteristične čvrstoće 70-80 MPa raste i duktilnost [80a]. Uzorci gde je dostignuta karakteristična čvrstoća veća od 70-80 MPa pokazali su smanjenu duktilnost. Mnogi propisi kao američki (ACI-propisi) obezbeđuju duktilnost ograničenjem koeficijenta armiranja zategnutom armaturom, a Evrokod 2 ograničava visinu pritisnutog dela betona za različite klase betona. Kod elemenata napregnutih na savijanje, pritisnuta armatura pojačava pritisnutu zonu betona, odnosno omogućava da se zatežuća armatura plastično deformiše pre sloma betona. Problem krtosti betona može se ublažiti i mikroarmiranjem vlaknima. Za povećanje duktilnosti, čvrstoće na savijanje i sigurnosti na pojavu prslina betona visokih čvrstoća, upotrebljavaju se čelična vlakna, a za povećanje otpornosti na požar polimerna vlakna.

U upotrebi je više metoda za projektovanje betonske mešavine betona visoke čvrstoće, ali je najčešće u primeni metoda razvijena na univerzitetu u Sherbrookeu u Kanadi i prikazana je na slici 2.1.



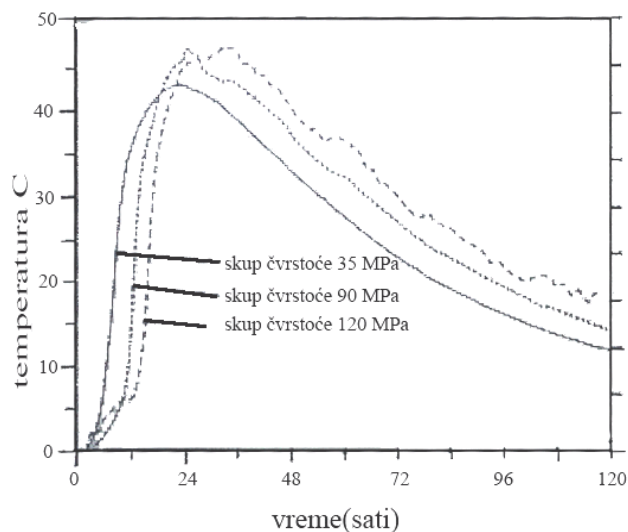


*Slika 2.1. Dijagram toka za projektovanje mešavine betona visoke čvrstoće prema metodi razvijenoj u Kanadi [10]*

Za projektovanje mešavine betona visoke čvrstoće postoji više metoda. U SAD se koristi metoda koju je predložio ACI-jev tehnički odbor 363, a u Francuskoj se upotrebljava De Larradova metoda. Od metoda koje su u upotrebi, značajna je metoda prema Mehti i Aitcinu [61].

### 2.3. OSOBINE SVEŽEG BETONA VISOKE ČVRSTOĆE

Kao i kod običnog betona i ovde se proveravaju osobine betona: temperatura, gustina, konzistencija i sadržaj uvučenog vazduha. Poželjno je ovu kontrolu vršiti na fabrici betona i na gradilištu, neposredno pre ugrađivanja. Ovom kontrolom betona u svežem stanju stvaraju se dobri uslovi za kvalitet betona nakon očvršćavanja. Reologija sveže betonske mase betona visoke čvrstoće je specifična i uopšte se može reći da je dostizanje zadovoljavajućih reoloških osobina sveže betonske mase za beton visoke čvrstoće, pitanje njegove izrade. Gustina ovih betona je veća nego kod običnih betona zbog veće količine cementa, a manje vode. Što je manja količina uvučenog vazduha lakše je postići čvrstoću na pritisak ovih betona. Količina uvučenog vazduha za nearmirani beton visoke čvrstoće je 1-3%. Tako je za vodocementni faktor veći od 0.30 količina uvučenog vazduha 1-1.5%, a za vodocementni faktor manji od 0.30 uvučenog vazduha ima 1.5-2% [10]. Merenje konzistencije se vrši kao i kod običnih betona. Kada se radi o mikroarmiranom betonu najčešće se konzistencija ispituje rasprostiranjem. U slučaju samozbijajućih betona sa sleganjem većim od 25cm, konzistencija se ispituje posebnim metodama za samozbijajuće betone. Pri merenju, temperatura sveže betonske mase treba da bude 15-20 °C, a praktično je prihvatljivo od 10-25°C. Na sledećoj slici 2.2. prikazan je dijagram razvoja temperature za tri uzorka sa betonom čvrstoće 35, 90 i 120 MPa.



**Slika 2.2.** Razvoj temperature u težištu uzorka od betona normalne i visoke čvrstoće [10]

Prethodni dijagram razvoja temperature prikazuje rezultate Aiticina i saradnika [10]. Ispitana su tri uzorka- stuba dimenzija 1x1x2m od betona čvrstoće 35, 90 i 120 MPa. Količine cementa su bile 355, 470 i 540 kg/m<sup>3</sup>, vodocementni faktor 0.45, 0.31 i 0.25. Na slici se vidi da uzorak čvrstoće 35 MPa ima najveća rana, a uzorak čvrstoće 120 MPa najmanja rana temperaturna napreznja [10, 70], a ipak, se maksimalna temperatura razvija u uzorku čvrstoće 120MPa, a najmanja u uzorku čvrstoće 35MPa.

Iz ovih eksperimenata se zaključilo da prirast temperature unutar elementa ne zavisi od ukupne količine veziva-cementa, već od količine veziva koje završi proces hidratacije, zatim vrste cementa, početne temperature, temperature okoline i oblika i dimenzija konstruktivnog elementa.

## 2.4. OSOBINE OČVRSLOG BETONA VISOKE ČVRSTOĆE

### 2.4.1. MEHANIČKE I REOLOŠKE OSOBINE BETONA VISOKE ČVRSTOĆE

Kod betona visoke čvrstoće se podrazumeva i očekuje da pored visoke čvrstoće na pritisak ima i ostale povećane i kvalitetnije karakteristike u odnosu na obične betone. Neke osobine su posebno značajne, jer prave razliku u mehaničkim osobinama običnog i betona visokih čvrstoća i performansi. Mehaničke osobine agregata kod običnih betona nemaju veliki uticaj na mehaničke osobine betona, jer one kod običnog betona, uglavnom, zavise od vodocementnog faktora i čvrstoće cementnog kamena koji je završio hidrataciju, odnosno od njegove veze s agregatom. Zahvaljujući ovome, kod običnih betona je jednostavnije doći do odnosa čvrstoće betona na pritisak i ostalih mehaničkih osobina.

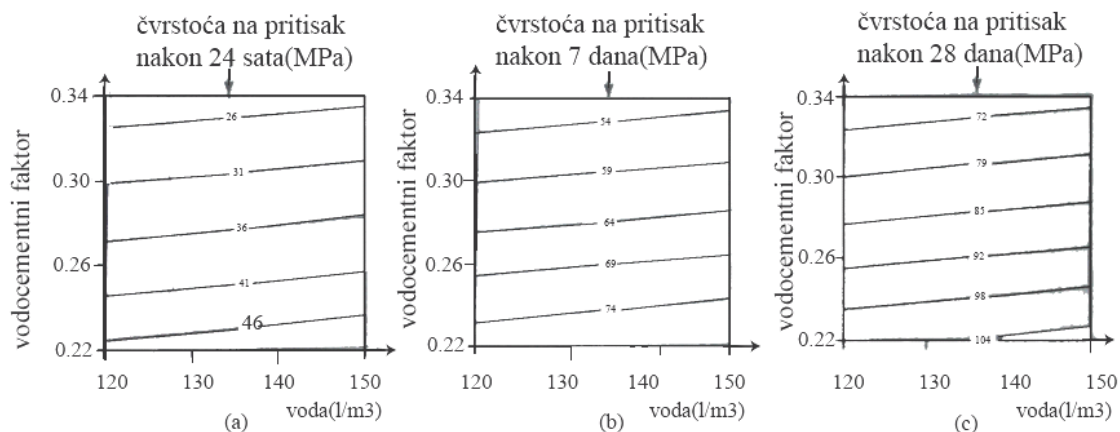
U slučaju betona visokih čvrstoća i performansi u zavisnosti od komponenata koje ulaze u sastav betona, veza cementnog kamena i agregata nije uvek najslabije mesto, pa veza/odnos između čvrstoće betona na pritisak i ostalih mehaničkih osobina nije ista kao kod običnih betona.

Poznato je da npr. kod ubrzanog očvršćavanja običnog betona, sa zaparivanjem, dobijamo veće rane čvrstoće koje su manje nakon 28 dana nego kod betona sa normalnim očvršćavanjem. Kod betona visokih čvrstoća ovo nije slučaj. Za ove betone je veoma značajna neza betona u prvih 24 sata (više nego kod običnih betona). Pomanjkanje neza kod tih betona u prvih 24 sata može dovesti do smanjenja čvrstoće na pritisak očvršlog betona. U sledećoj tabeli 2.4. i na slici 2.3.

daju se vrednosti čvrstoće na pritisak nakon 28 dana u zavisnosti od vodocementnog faktora i količine vode.

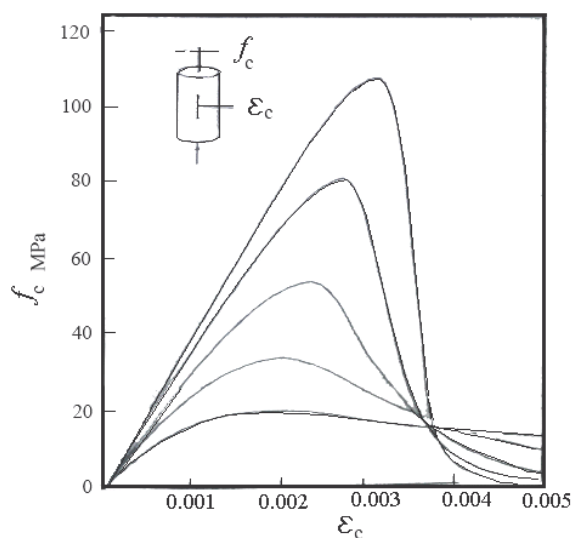
**Tabela 2.4.** Zavisnost visoke čvrstoće betona na pritisak i vodocementnog faktora [10]

Vodocementni faktor	Raspon čvrstoće na pritisak (MPa)
0,40 - 0,35	50 -75
0,35 - 0,30	75 – 100
0,30 - 0,25	100- 125
0,25 -0,20	> 125



**Slika 2.3.** Zavisnost čvrstoće na pritisak betona visoke čvrstoće od vodocementnog faktora i količine vode [10]

Beton visoke čvrstoće je homogeniji materijal od običnog betona, ima veći modul elastičnosti, pri čemu je brzina rasta čvrstoće na pritisak veća od brzine rasta modula elastičnosti. Radni dijagram ovih betona je približno linearan, skoro do čvrstoće na pritisak. Zato kod vitkih elemenata od ovih betona, izloženih velikim naponima dolazi i do velikih deformacija. Na slici 2.4. je dat dijagram  $\sigma_c - \epsilon_c$  pri opterećenju na pritisak za razne betone.



**Slika 2.4.** Zavisnost napon – deformacija pri opterećenju na pritisak za različite čvrstoće betona [70]

Ima predloga da se zbog malog odnosa w/c ovih betona, njihova čvrstoća na pritisak ispituje nakon 56 i/ili 90 dana umesto 28, kao kod običnih betona. Zbog mogućnosti upoređenja i čvrstoća na pritisak betona visokih čvrstoća se ispituje nakon 28 dana. Mnogi empirijski obrasci dati za obične betone ne važe za betone visokih čvrstoća. Tako, kod betona visoke čvrstoće za istu vrednost čvrstoće na pritisak, vrednost čvrstoće na savijanje i čvrstoće na zatezanje pri cepanju mnogo više se menjaju nego kod običnih betona.

Često se koriste sledeći izrazi za odnos čvrstoće na pritisak  $f_c$  i čvrstoće na zatezanje pri savijanju  $f_s$  :

$$f_s = 0.94 \cdot f_c^{1/2} \text{ [MPa]} \quad (2.1)$$

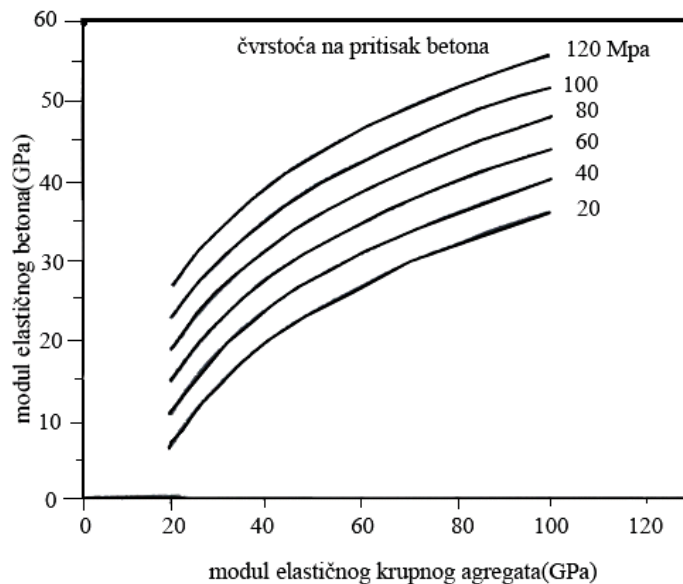
$$f_s = 0.23 + 0.12 f_c - 2.18 \cdot 10^{-4} f_c^2 \text{ [MPa]} \quad (2.2)$$

Veza čvrstoće betona na zatezanje pri cepanju  $f_{sp}$  i čvrstoće na pritisak  $f_c$  betona visokih čvrstoća je:

$$f_{sp} = 0.273 \cdot f_c^{2/3} \text{ [MPa]} \quad (2.3)$$

$$f_{sp} = 0.59 \cdot f_c^{0.55} \text{ [MPa]} \quad (2.4)$$

Za betone visokih čvrstoća, sa različitim agregatom, utvrđeno je da se moduli elastičnosti menjaju za iste odnose vrednosti čvrstoće betona na pritisak [10]. Na slici 2.5. se daju dijagrami na osnovu kojih se iz poznate čvrstoće na pritisak i modula elastičnosti krupnog agregata može proceniti modul elastičnosti betona visoke čvrstoće.



**Slika 2.5.** Zavisnost modula elastičnosti betona visoke čvrstoće od čvrstoće na pritisak betona visoke čvrstoće i modula elastičnosti krupnog agregata [10]

Veza modula elastičnosti i čvrstoće na pritisak za betone visoke čvrstoće je:

$$E_c = 10 \cdot \sqrt[3]{f_{ck} + 8} \quad [\text{MPa}] \quad (2.5)$$

$$E_c = 5 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}} \quad [\text{MPa}] \quad (2.6)$$

$f_{ck}$  -

Poissonov koeficijent za betone visoke čvrstoće je, uglavnom, isti kao i za obične betone [10, 70]. Za dobijanje krive napon – dilatacija upotrebljavaju se razni uprošćeni izrazi u obliku parabole drugog reda i prave ili pravougaonika. Postoje težnje da se ovi dijagrami prilagode za betone visoke čvrstoće, a ima i novih predloga za proračun elemenata od betona visoke čvrstoće. Tako su opšti izraz koji je predložio Popovics 1973.god., kasnije 1987.god. dopunili Thorenfeldt, Tomaszewicz i Jensen za betone visokih čvrstoća vezu napon-dilatacija u obliku:

$$\frac{\sigma_c}{f_{ck}} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cu}} \cdot \frac{n}{n-1 + (\epsilon_c / \epsilon_{cu})^{nk}} \quad (2.7)$$

Koeficijente „k“ i „n“ dali su Collins, Porasz i Mitchell [19]

$k = 1.00$  za  $\epsilon_c / \epsilon_{cu} \leq 1.00$

$k = 0.67 + f_{ck} / 0.62$  za  $\epsilon_c / \epsilon_{cu} > 1.00$ ,  $f_{ck}$  u  $\text{N/mm}^2$

$n = 0.80 + f_{ck} / 17$ ,  $f_{ck}$  u  $\text{N/mm}^2$

Kada je poznat početni modul elastičnosti, dilatacija betona koja odgovara čvrstoći  $f_{ck}$ , može se izračunati iz izraza:

$$\epsilon_{cu} = \frac{f_{ck}}{E_c} \cdot \frac{n}{n-1} \quad (2.8)$$

Ovi autori predlažu i izraz za modul elastičnosti za betone visoke čvrstoće:

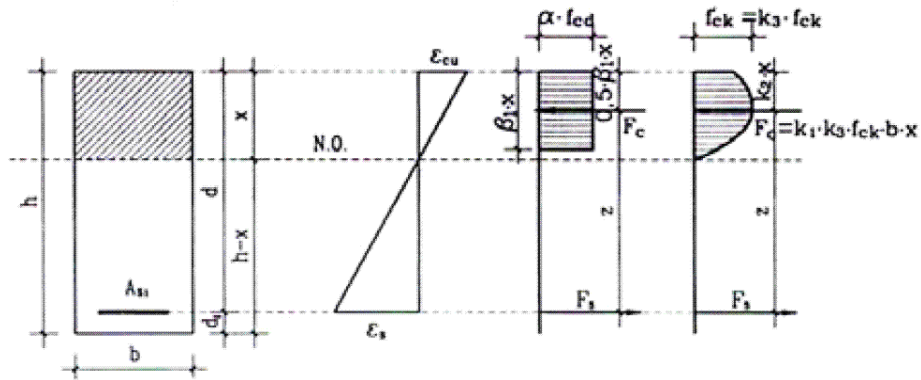
$$E_c = 3320 \cdot \sqrt{f_{ck}} + 6900 \quad [f_{ck} \text{ u } \text{N/mm}^2] \quad (2.9)$$

gde je  $f_{ck}$  čvrstoća betona betonske kocke stranice 15cm.

ACI-ja [11] za dijagram napon – dilatacija predlažu pravougaonik ili krivolinijski dijagram ( slika 2.6. ) za čvrstoće cilindra 15/30cm do 50 MPa. Koeficijent  $\alpha$  ima vrednost 0.85, a koeficijent redukcije visine prema izrazu:

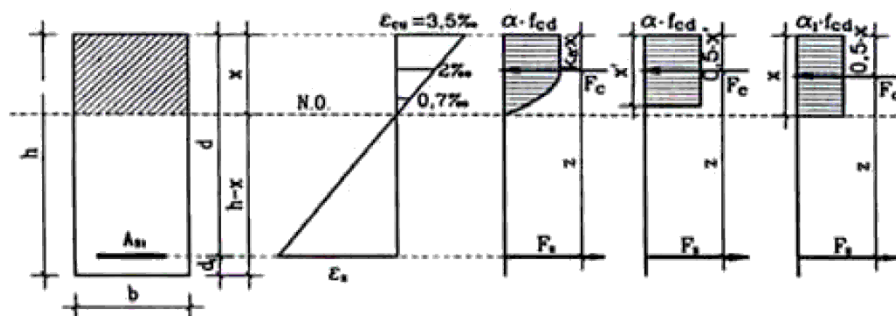
$$0,65 \leq \beta_1 = 1,05 - 0,05 \cdot \frac{f_{ck}}{6,9} \leq 0,85 \quad (2.10)$$

Za čvrstoće betonskog cilindra preko 55 MPa predlaže se dijagram u obliku pravougaonika sa vrednošću  $\alpha = 0.85$  i  $\beta_1 = 0.65$ .



Slika 2.6. Predlog ACI-ja za radni dijagram betona visoke čvrstoće [11]

Evrokod 2 [27] za dijagram napon – dilatacija predlaže parabolu drugog reda plus pravougaonik ili samo pravougaonik (obični betoni) za čvrstoće na pritisak do 60 MPa ( slika 2.7.).



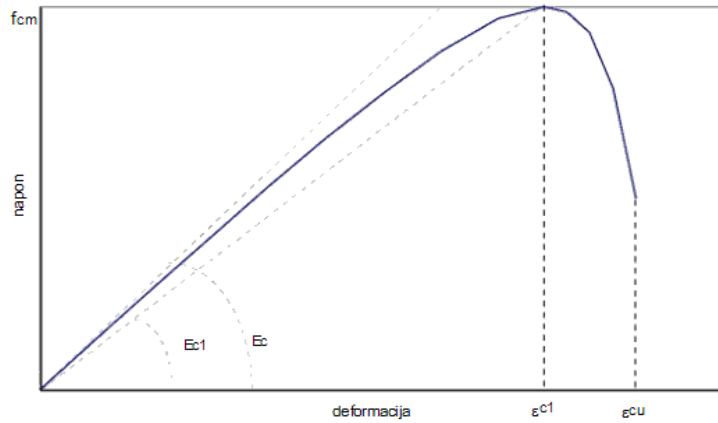
Slika 2.7. Predlog EC2 i CEB/FIP za radni dijagram betona [27]

Vrednost koeficijenta  $\alpha = 0.85$  važi za sve oblike pritisnutog dela preseka osim za preseke kod kojih se širina smanjuje prema pritisnutij ivici ( trougao ) kada je  $\alpha = 0.80$ . Kod betona visoke čvrstoće prema CEB/FIP Bulletinu od 1990.god. se, kao radni dijagram predlaže parabola plus prava pri čemu je:

$$\alpha = 0.6 + 10/f_{ck} \leq 0.85$$

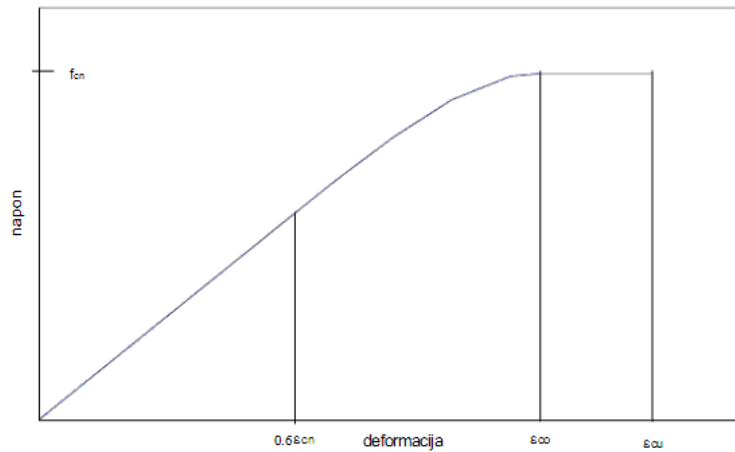
U slučaju kada je radni dijagram u obliku pravougaonika do neutralne linije, koeficijent  $\alpha$  se menja od 0.782 za čvrstoće do 20 MPa do 0.578 za čvrstoće do 80MPa.

Način dimenzionisanja armiranobetonskih preseka po teoriji graničnih stanja ( granična stanja nosivosti ) uglavnom je jednak za betone visokih čvrstoća i obične betone. Na narednim slikama prikazani su oblici radnog dijagrama betona preuzetih iz pravilnika zemalja koje u svojim pravilnicima imaju obuhvaćene i betone visokih čvrstoća.



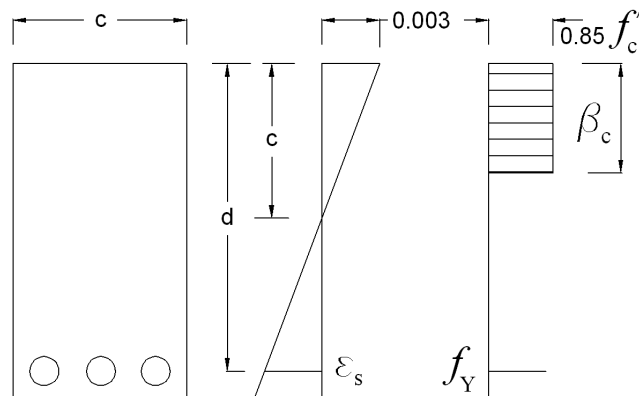
**Slika 2.8.** Izgled radnog dijagrama betona prema CEB-FIP MC“90[20]

Najmanja klasa betona prema ovom predlogu je C12, a najveća C80.



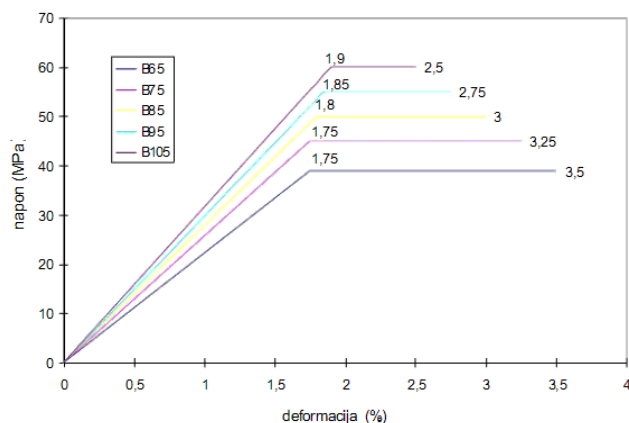
**Slika 2.9.** Izgled radnog dijagrama betona prema Norveškom pravilniku NS 3473 (1992)

Prema norveškim propisima najveća vrednost karakteristične čvrstoće betona pri pritisku je 105MPa. Za čvrstoće do 55MPa koristi se dijagram parabola + prava, a za čvrstoće do 85MPa dati su izrazi za modul elastičnosti i deformacije  $\epsilon_{co}$  i  $\epsilon_{cu}$ , a za veće čvrstoće određivanje ovih vrednosti se utvrđuje eksperimentalno.



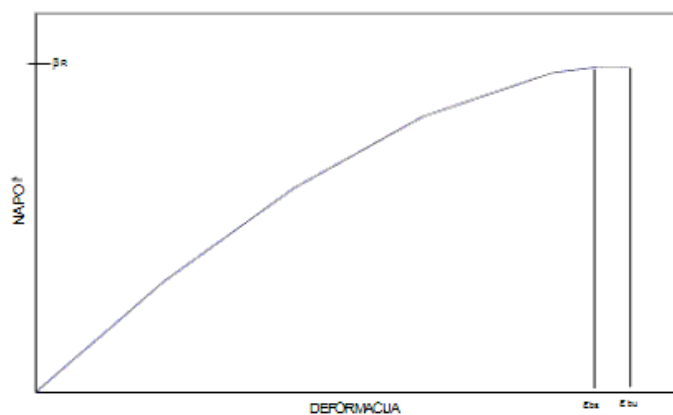
**Slika 2.10.** Izgled radnog dijagrama betona prema ACI 318-89 (SAD)[13]

Prema ACI nije ograničena najveća vrednost čvrstoće betona na pritisak. Vrednost koeficijenta  $\beta$  je 0.85 za betone čvrstoće  $f_{cc} \leq 27.60\text{MPa}$ , a najmanja vrednost ovog koeficijenta je 0.65. Ovaj koeficijent se smanjuje sa povećanjem čvrstoće betona pri pritisku, zbog toga što je dijagram napon – dilatacija za betone visokih čvrstoća bliži trouglu, nego pravougaoniku.



**Slika 2.11.** Izgled radnog dijagrama prema Holandskom pravilniku

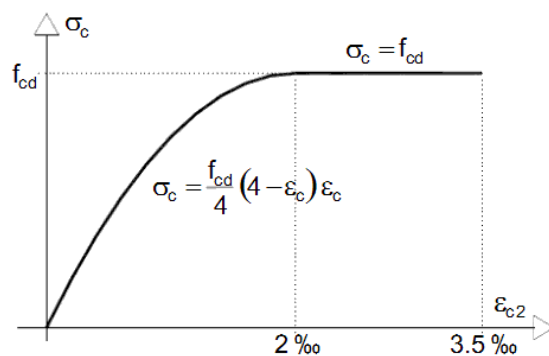
Najveća čvrstoća na pritisak prema Holandskom pravilniku je 105MPa. Računska čvrstoća se računa po posebnom obrascu.



**Slika 2.12.** Izgled dijagrama napon-dilatacija prema DIN-u 1045-1 (1996.)

Prema DIN-u 1045-1 najveća klasa čvrstoće betona pri pritisku nakon 28 dana je C100/115. Zavisnost između napona i dilatacija je data po posebnim izrazima.

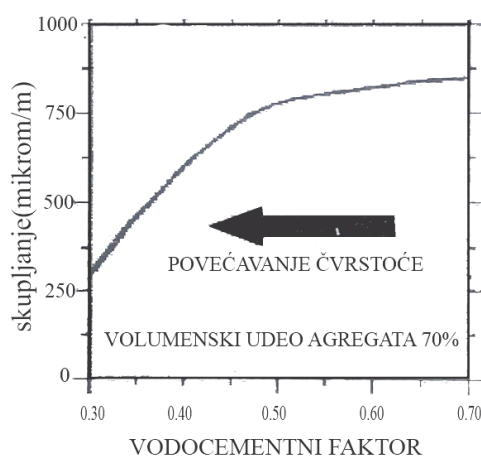




**Slika 2.13.** Izgled radnog dijagrama  $\sigma_c$ -  $\epsilon_c$  prema PBAB 87, DIN 1045 i EC 2

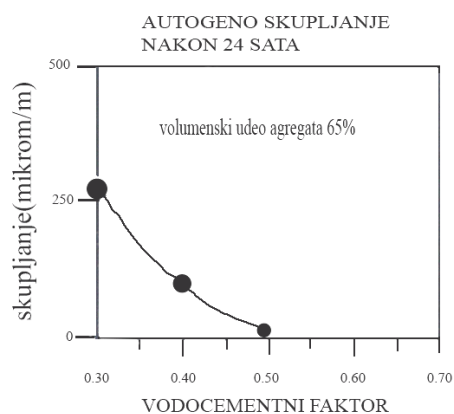
Dijagram napon –dilatacija za beton čvrstoće do 60MPa dat je na slici 2.13. Sastoji se od parabole drugog stepena do dilatacije od 2‰ i pravca između dilatacija od 2‰ do 3.5‰.

Skupljanje betona visokih čvrstoća, kao deformacije nezavisne od opterećenja, sastoji se od skupljanja betona usled temperaturnih promena, skupljanja od isušivanja i autogenog skupljanja. Kod ovih betona ukupno skupljanje je manje nego kod običnih betona, što se vidi na slici 2.14.



**Slika 2.14.** Zavisnost ukupnog skupljanja betona i w/c faktora [10]

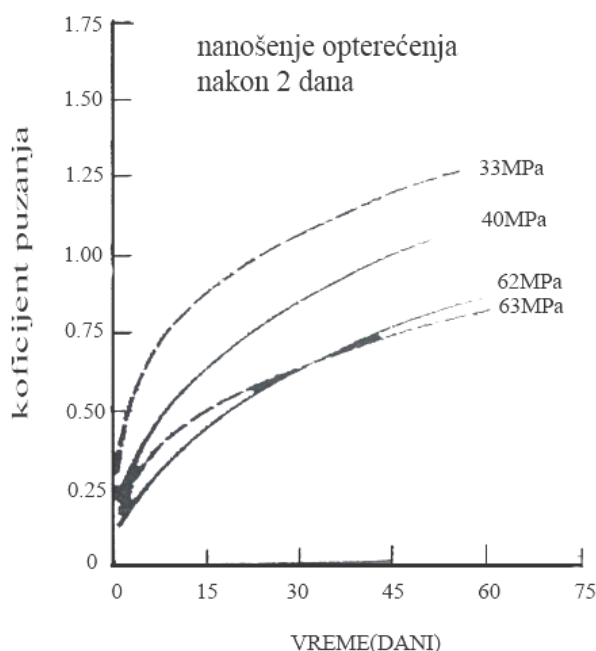
Sam mehanizam skupljanja kod ovih betona je drugačiji u odnosu na obične betone. Betoni visoke čvrstoće imaju manje kapilarnih pora, međusobno nepovezanih, a količina vode je nedovoljna za hidrataciju, pa je dominantno autogeno skupljanje. Ovo skupljanje je posledica manje zapremine produkata hidratacije od zapremine elemenata koji ulaze u proces hidratacije, a veće je kod betona sa nižim vodocementnim faktorom, što se vidi na slici 2.15 [10].



**Slika 2.15.** Odnos autogenog skupljanja i w/c faktora pri starosti betona od 24 sata [10]

Autogeno skupljanje počinje odmah nakon otpočinjanja procesa hidratacije. Ispitivanja su pokazala da je ovaj oblik skupljanja naročito izražen ako u sastav betona ulazi silikatna prašina i vrlo fini cementi. Smanjenje autogenog skupljanja se postiže dobrom negom i/ili upotrebom aditiva koji smanjuju skupljanje. Sa negom betona treba početi odmah, nakon 3-5 sati i treba da traje što duže.

Tečenje betona visokih čvrstoća je manje nego kod običnih betona, slika 2.16.



**Slika 2.16.** Dijagram poređenja koeficijenta tečenja-puzanja za razne napone [70]

Ista saznanja u pogledu tečenja koja važe za obične betone, važe i za betone visokih čvrstoća. Ovi betoni imaju veću krutost, odnosno modul elastičnosti, pa im je veća i čvrstoća na zamor usled cikličnog opterećenja [61]. Poroznost je takođe, manja u odnosu na obične betone,

a manje su kapilarna i ukupna poroznost. Pore su međusobo nepovezane, a to u velikoj meri doprinosi većoj trajnosti ovih betona. [61]

Ima saznanja da se korozija armature od uticaja hlorida i okolne sredine može značajno usporiti povećanjem zaštitnog sloja betona do armature i upotrebom betona visokih performansi-svojstava. Otpornost na dejstvo mraza je veća u odnosu na obične betone. Dosadašnja iskustva u primeni ovih betona ( preko 30 godina ) za izgradnju naftnih platformi u Severnom moru, mostova u Kanadi, Portugaliji, Nemačkoj i objekata u Japanu i Australiji, pokazuju da ovaj beton ima dobre osobine u pogledu trajnosti objekata.

Kod betona visoke čvrstoće (visokih performansi) je zbog manjeg vodocementnog faktora, homogenije strukture i upotrebe silikatne prašine, manja je kapilarna i ukupna poroznost. Naročito je poboljšana veza cementnog kamena i agregata. Cement koji nije hidratizao, u povoljnim uslovima okolne sredine (vlaga) će naknadno hidratizovati i tako uticati na zatvaranje mikroprrslina i manjih širina prslina ( $a_{pk} \leq 0.20\text{mm}$ )

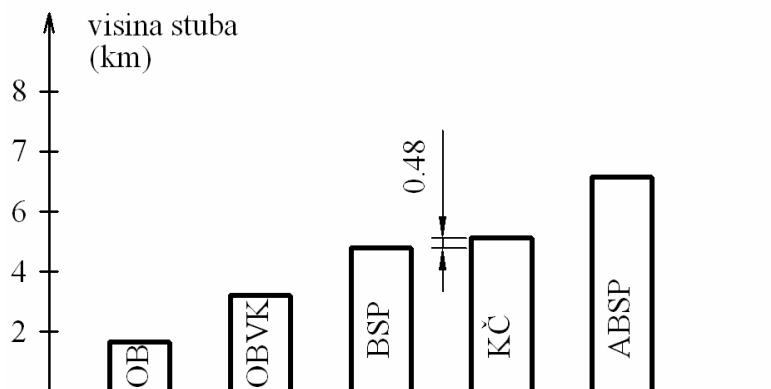
Proizvodnja betona visokih čvrstoća je skuplja od proizvodnje običnog betona. Očekivati je da zbog toga uvek više u upotrebi bude običan beton. Međutim, zbog svojih izuzetnih svojstava postoje objekti koje je ekonomski opravdano graditi betonom visokih čvrstoća. Takvi objekti su naftne platforme, neboderi, mostovi, razni konstrukcijski elementi inženjerskih objekata, gde je potrebna povećana otpornost na štetno dejstvo okolne sredine, objekti gde se želi postići što veća trajnost i savladati veliki rasponi.

Kod betona visokih čvrstoća gustina (zapreminska masa) nešto je veća od gustine običnih betona, pa se kod njih dobijaju visoke vrednosti odnosa  $\rho = \frac{\text{čvrstoća}}{\text{gustina}}$ , što ima veliki značaj za primenu ovog betona kao konstrukcionog materijala [60].

U tabeli 2.5. prikazani su prosečni odnosi čvrstoće i gustine za beton visoke čvrstoće, a paralelno s tim prikazane su vrednosti  $\rho$  za jedan običan beton i jedan konstrukcioni čelik srednjih mehaničkih čvrstoća.

**Tabela 2.5.** Prosečni odnosi čvrstoće i gustine za BVČ, jedan običan beton i konstrukcioni čelik[60]

Vrsta materijala	Čvrstoća pri pritisku $\beta_p$ (MPa)	Zapreminska masa $\gamma$ (kg / m <sup>3</sup> )	$\rho = \beta_p / \gamma$ (m <sup>2</sup> / sec <sup>2</sup> )
Običan beton (OB)	40	2400	16.700
Običan beton visokog kvaliteta (OBVK)	80	2500	32.000
Beton sa silikatnom prašinom (BSP)	120	2600	46.200
Autoklavan beton sa silikatnom prašinom (ABSP)	200	2800	71.400
Konstrukcioni čelik (KČ)	400	7850	51.000



**Slika 2.17.** Pregled visine stubova koji bi se izveli od materijala iz tabele 2.5.[60]

Na slici 2.17. daje se pregled visine stubova pravougaonog poprečnog preseka koji bi se mogli izvesti od materijala iz tabele 2.5, a da su izloženi delovanju samo sopstvene težine sa iskorišćenim graničnim naponima pritiska. Sa slike 2.17. se vidi da su odnosi  $\rho$  za konstrukcioni čelik i beton visoke čvrstoće sa dodatkom  $\text{SiO}_2$  skoro istog reda veličine. Ovo znači da su u pogledu konstrukcionih karakteristika ova dva materijala skoro izjednačena.

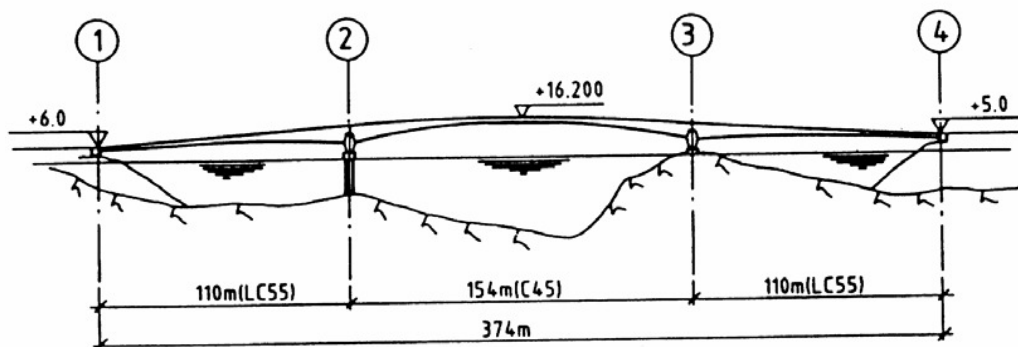
S obzirom na značajna istraživanja u svetu, može se reći da je primena betona visokih čvrstoća i performansi (svojstava) konkurentna i opravdana. Konstrukcije od ovog materijala mogu se projektovati i zadovoljiti sve uslove nosivosti, sigurnosti, trajnosti i funkcionalnosti, pa i racionalnosti.

### 3. PRIMENA BETONA VISOKIH ČVRSTOĆA U SVETU

U ovom delu disertacije daje se kraći pregled primene betona visokih čvrstoća u svetu. Jedna od prvih primena betona visokih čvrstoća bila je kod izgradnje naftnih platformi. Tako, npr. pri eksploataciji nafte u Severnom moru ( Norveška ), između 1955-1960 god. naglo se proširila primena ovog betona, ne samo kod gradnje naftnih platformi, već i kod gradnje mostova većih raspona kao i drugih značajnijih objekata. Kao materijal nametnuo se beton visoke čvrstoće. Primenu betona visokih čvrstoća sve više počinju da prate i eksperimentalna istraživanja, kako bi se na bazi tih istraživanja doneli nacionalni propisi. ( Norveška, NS 3479 iz 1989.god. )

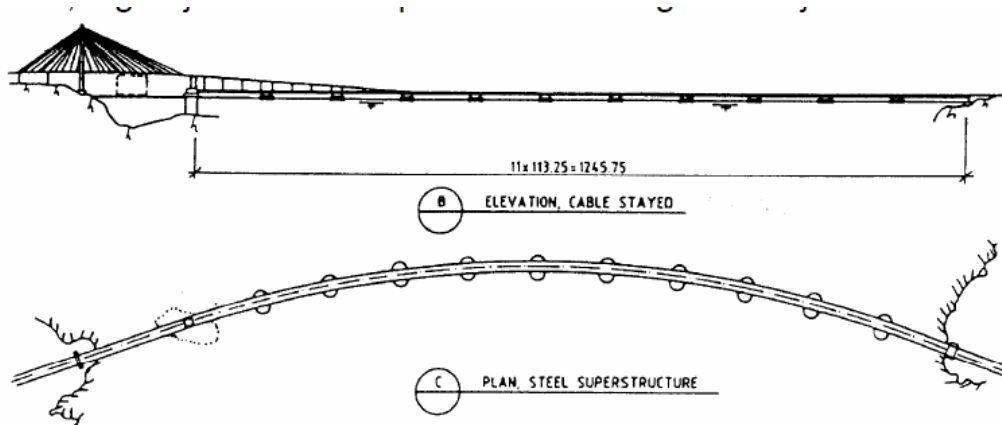
U dosadašnjem periodu od ovog betona izgrađen je znatan broj naftnih platformi, a stroge zahteve u pogledu trajnosti koje mora da ispuni materijal za gradnju naftnih platformi, može da ispuni samo beton visoke čvrstoće. Svi ovi objekti su izloženi agresivnom uticaju morske vode, jakim udaru visokih talasa, uticaju vetra, niskim temperaturama i potresima. Zahtevi za dobru obradljivost i izuzetnu trajnost betona za ove objekte su vrlo visoki. Uobičajena čvrstoća betona ostvarena na ovim objektima je 65-75 MPa. Prosečna potrošnja cementa za ove betone je 420kg/m<sup>3</sup> a vodocementni faktor 0.38. Takođe, počelo se sa skromnom primenom i lakog betona visoke čvrstoće.

Most **Sandhornya** u Norveškoj je među prvim mostovima izgrađenim od lakog betona visoke čvrstoće. Most je građen od 1988- 1989. godine. Ukupna dužina mosta je 374 m, a sastoji se od tri raspona dužina 110-154-110 m.



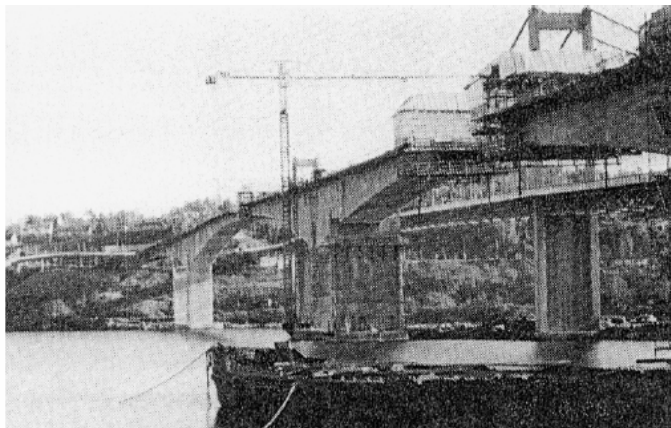
Sika 3.1. Most Sandhornya u Norveškoj [96]

U Norveškoj je sagrađen i most **Salhus** krajem 1993. godine. Nosači i kolovozna ploča izgrađeni su od lakog betona visoke čvrstoće sa zapreminskom težinom od 1900 kg/m<sup>3</sup>. Ostvarene čvrstoće na pritisak lakog betona su bile oko 70 MPa, dok je modul elastičnosti lakog betona bio 20 GPa.



*Sika 3.2. Most Salhus u Norveškoj[96]*

Takođe, i most **Varodd** je izgrađen krajem 1994. godine. Ukupna dužina mosta je 660 m a sastoji se od pojedinačnih raspona dužine 120 – 260 - 200 - 80 m. Beton visoke čvrstoće je odabran iz dva razloga. Prvi razlog je smanjenje količine betona i armature, a drugi razlog je bio dobra zaštita armature u ovakvom betonu.

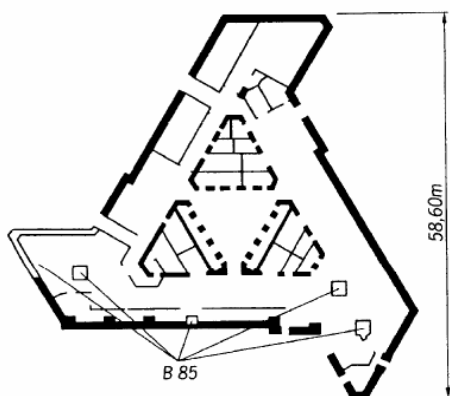


*Sika 3.3. Most Varodd u Norveškoj [96]*

### BfG zgrada, Frankfurt na Majni, Nemačka

U Nemačkoj je pri gradnji **BfG zgrade, Frankfurt na Majni**, prvi put upotrebljen beton visoke čvrstoće. Zgrada je visoka 186 m i ima 47 nadzemnih i 4 podzemne etaže. Za deo objekta, stubove i deo zida upotrebljen je beton čvrstoće pri pritisku od 85MPa, a ostali delovi objekta u višim etažama rađeni su sa običnim betonima. Objekat je sagrađen 1992. god.

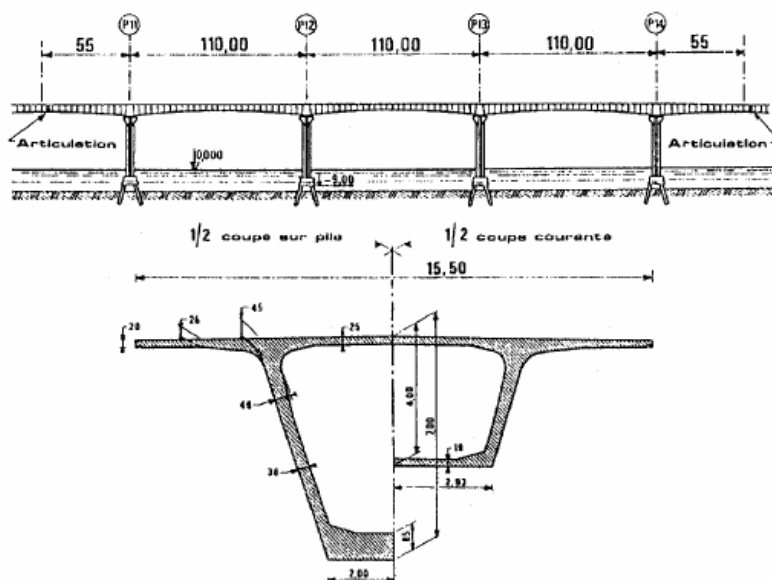
Model elastičnosti betona 85 00 01 a.



*Sika 3.4. Zgrada u Nemačkoj od betona visoke čvrstoće[91], [92]*

U Francuskoj se umesto betona visokih čvrstoća upotrebljava naziv beton visokih svojstava (High Performance Concrete- HPC), jer se ne uzima u obzir samo visoka čvrstoća betona već i ostale poboljšane osobine ovog materijala. U početku upotrebe betona visokih čvrstoća u Francuskoj (1984-1988 ) kao osnovni razlozi za primenu su bili njegova trajnost, visoka otpornost na uticaj morske vode i otpornost na niske temperature, zatim visoke rane čvrstoće betona.

Most **Ile de Ré** je građen u periodu od 1986-1988. god. Dužine je oko 3000m sa rasponima od 110m. Projektom predviđena klasa betona je bila 35MPa, dok je ostvarena bila 60MPa. Ovde su postignute rane čvrstoće betona od 15MPa pri starosti od 10 sati, što je omogućilo znatno bržu gradnju, naročito montažnih elemenata, a značajan razlog za primenu veće čvrstoće betona je i dobra otpornost na morsku vodu.





*Slika 3.5. Most Ile de Ré u Francuskoj [95]*

Viseći most **Normandie**, sa kosim zategama, ima glavni raspon od 856 m i drugi je po rasponu most na svetu. Ukupna dužina mosta je 2141 m. Širina koovozne ploče je 21.20 m. Postignuta marka betona na pritisak je MB60MPa.



*Slika 3.6. Most Normandie u Francuskoj [95]*

U Danskoj je 1998. god. došlo do primene betona visokih čvrstoća pri izgradnji dva železnička tunela ispod mora kao i dva mosta za ostvarivanje veze između Danske i skandinavskih zemalja (**most i tunel Veliki Belt (Great Belt)**). Glavni razlog primene betona visokih čvrstoća kod ovih impozantnih objekata leži u trajnosti ovog betona i dobroj zaštiti od hemijskog delovanja morske vode. Projektovana čvrstoća betona na pritisak za pojedine delove mostova i tunela bila je 65MPa. U cilju smanjenja mikroprslina u betonu projektom je zahtevano da razlika temperature pri hidrataciji cementa u odnosu na temperaturu sredine ne bude veća od 20° C.





*Slika 3.7. Most i tunel Veliki Belt (Great Belt), u Danskoj [91], [92]*

U Belgiji je upotrebljen beton visoke čvrstoće pri izgradnji garaže od 24 sprata. Beton visoke čvrstoće upotrebljen je kod izrade prefabrikovanih stubova, a projektovana je MB80. Ova čvrstoća je postignuta sa  $450 \text{ kg/m}^3$  cementa,  $45 \text{ kg/m}^3$  silicijumske prašine, superplastifikatora  $12.8 \text{ l/m}^3$ , peska  $790 \text{ kg/m}^3$  i šljunka  $1080 \text{ kg/m}^3$ . Kao glavni razlozi upotrebe ovakvog betona navedeni su smanjenje poprečnog preseka stubova, smanjenje količine armature, brzina gradnje kao i jeftinija gradnja. Objekat je završen 1992.god.

U SAD i Kanadi oko 1965.god. upotrebljavan je beton sa čvrstoćom na pritisak od 60 do 75 MPa za razne vojne građevine. Količina upotrebljenog cementa je oko  $650 \text{ kg/m}^3$ , a vodocementni faktori su bili niski. Rađeno je bez aditiva. Zbog velike količine cementa pri očvršćavanju betona razvijala se velika temperatura, koja je uslovlila posebne mere nege mladog betona. Danas je u upotrebi i beton sa čvrstoćama pri pritisku do 140MPa.

Veća visoka čvrstoća betona, najviše se upotrebljava kod izgradnje visokih zgrada, mostova, robnih kuća, garaža, naftnih platformi i sl. U narednim tabelama daje se kraći prikaz objekata izgrađenih od betona visoke čvrstoće sa recepturama za pojedine objekte.

*Tabela 3.1.- Prikaz objekata izgrađenih od betona visoke čvrstoće [91], [93]*

Građevina	Mesto	Godina	Čvrstoća [MPa]	Primedbe
Helmsley Palace Hotel	New York	1978	55.2	68 spratova
Trump Tower	New York		55.2	68 spratova
City Center Project	Minneapolis	1981	55.2	52 sprata
Collins Place	Melbourne		55.2	44 sprata
499 Park Avenue	New York		58.6	27 spratova

Royal Bank Plaza	Toronto	1975	60.7	110 MPa za godinu dana, 43 sprata
Richmond-Adelaid Centre	Toronto	1978	60.7	33 sprata
300 West Monroe	Chicago	1973	62.1	
Midcontinental Plaza	Chicago	1972	62.1	50 spratova
Frontier Towers	Chicago	1973	62.1	55 spratova
Water Tower Place	Chicago	1975	62.1	h=262 m, 75 spratova, 69000 m <sup>3</sup> lakog betona
River Plaza	Chicago	1976	62.1	56 spratova, 75.8 MPa
Mercantile Exchange	Chicago	1982	62.1	40 spratova 96.5 MPa
Columbia Center	Seattle	1984	65.5	76 spratova
Interfirst Plaza	Dallas	1983	69.0	73 sprata
Dain Bosworth Tower	Minneapolis		96.5	47 spratova
Scotia Plaza Tower	Toronto	1988	70.0	68 spratova
BCE Place	Toronto	1991	70.0	52000 m <sup>3</sup>
Jack Davies Building	Victoria	1993	70.0	300 m <sup>3</sup>
Paine Plaza	Chicago	1976	75.8	
Concordia University		1990	85.0	
Bay-Adelaide Building	Toronto	1989	85.0	20000 m <sup>3</sup>
900 North Michigan Garage	Chicago	1986	96.5	
Concordia University	Canada	1990	100.0	

Upotrebljene recepture (po m<sup>3</sup>) i ostvarene čvrstoće betona za neke građevine:

*Tabela 3.2.- Neke recepture za betone visoke čvrstoće [91], [93]*

	<b>Water Tower Place, Chicago 1975.</b>	<b>La Laurentienne Building, Montreal 1984.</b>	<b>Scotia Plaza Toronto 1987.</b>	<b>Two Union Square, Seattle 1988.</b>
voda (kg)	195	135	145	130
cement (kg)	505	500	315	513
leteći pepeo (kg)	60			
zgura (kg)			137	
silicijumska prašina (kg)		30	36	43
krupni agregat (kg)	1030	1100	1130	1080
sitni agregat (kg)	630	700	745	685
plastifikator (l)	0.975		9.0	
usporivač (l)		1.8		
superplastifikator (l)		14	5.9	15.7
vodocementni faktor	0.35	0.27	0.31	0.25
f <sub>c</sub> ' 28 dana (Mpa)	65	93	83	119
f <sub>c</sub> ' 91 dan (Mpa)	79	107	93	145

U Tajlandu toranj **Baiyoke-2 Tower** ( Bangkok) ima 90 etaža i sagrađen je 1993. godine. Pumpani beton visoke čvrstoće ugrađen je u ploče i stubove jezgra tornja. Čvrstoća betona do 65 etaže bila je 60MPa, a za ostali deo je 50 MPa.



*Slika 3.8. Toranj Baiyoke-2 Tower Bangkok u Tajlandu [91], [92]*

Zgrada u Maleziji sa visinom od 450m je među najvećim u svetu. Niži delovi objekta su projektovani od betona čvrstoće od 80MPa, a viši delovi sa čvrstoćom od 60MPa i 40MPa. Količina upotrebljenog cementa je 520kg/ m<sup>3</sup>, vodocementni faktor 0.27 uz superplastifikator i silicijumsku prašinu. Modul elastičnosti je 35.5 GPa, a temperatura svežeg betona nije bila veća od 35 °C, pri čemu je sleganje svežeg betona oko 20 cm zbog ugradnje betonskim pumpama.

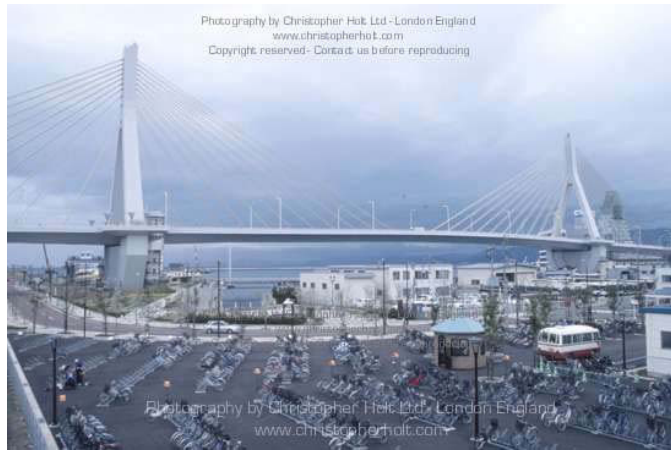


*Slika 3.9. Zgrada u Maleziji [93]*

U Japanu, na Univerzitetu u Tokiju dobijen je beton MB102 već 1940 godine. Ova čvrstoća je postignuta sa mešavinom za obični beton, ali sa vodocementnim faktorom 0.22 i primenom pritiska od 10 MPa za vreme prvog dana očvršćavanja betona.

Danas se u Japanu upotrebljava beton visokih čvrstoća najčešće u montažnim elementima koji se proizvode u fabričkim halama, u neposrednoj blizini fabrika betona i kasnije montiraju na gradilištima. Čvrstoće betona od 60 do 70 MPa se dobijaju od mešavina kao za običan beton, ali sa posebnim merama ugradnje i tretmanom svežeg betona i niskim vodocementnim faktorom. U poslednje vreme beton visokih čvrstoća dobija se uz upotrebu superplastifikatora i silicijumske prašine.

Most **Aomori** je viseći most s rasponom od 240 m i stubovima visine 82.00 m, a postignuta čvrstoća na pritisak je 60 MPa. Vodocementni faktor ugrađenog betona je 0.35, a količina cementa se kretala u količini od 386 - 400 kg/m<sup>3</sup> betona.

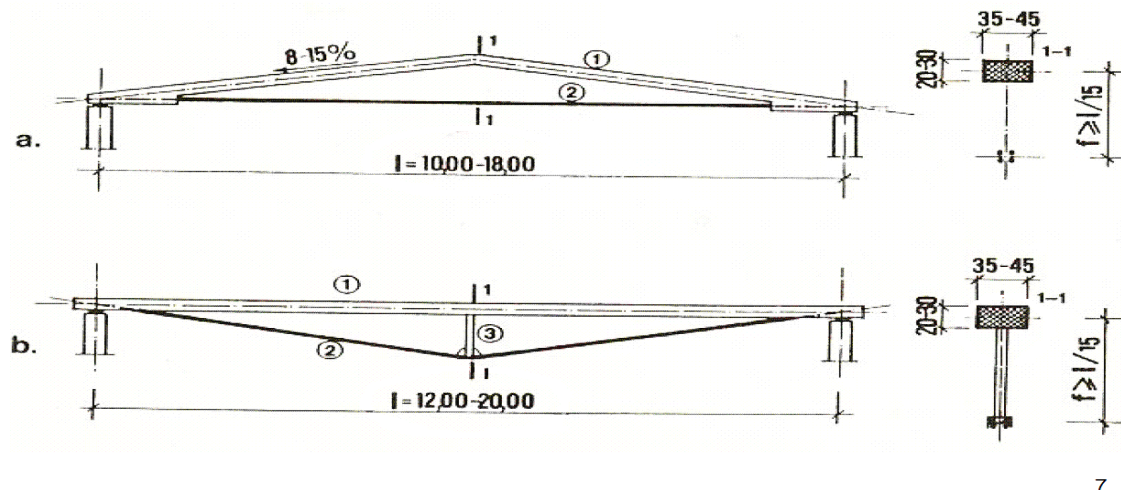


*Slika 3.10. Most Aomori [94]*

#### 4. RAZVOJ I PRIMENA DVOPOJASNIH KONSTRUKCIJSKIH SISTEMA

Prva primena dvopojasnih konstrukcijskih sistema sa gornjim pojasom od običnog armiranog betona i zategom, takođe, od armiranog betona realizovana je na objektu robnih kuća "Beograd" u periodu od 1983-1984.god. Autori sistema ovih konstrukcija profesori: M. Ivković, M. Ačić, Ž. Perišić i A. Pakvor su nakon ove realizacije primenili ih na velikom broju industrijskih, sportskih, skladišnih i drugih objekata. Jedan deo objekata je radilo preduzeće "Jablanica" iz Valjeva koje je uspešno realizovalo više hiljada kvadratnih metara koristeći ove sisteme za krovne konstrukcije raspona do 30.00m.

Primena ovih sistema se naglo širila i izgađeni su mnogi objektu u Beogradu, Pančevu, Valjevu, Užicu, Tuzli, Arilju, Požegi i mnogim drugim mestima. Sa povećanjem primene ovih sistema, radilo se na unapređenju koncepcije ovih konstrukcija, postupku proračuna, tehnologiji građenja ovih vrlo lakih i vitkih konstrukcijskih sistema od armiranog i prethodno napregnutog betona. Za donji pojas-zategu se obično koriste čelični profili, armatura ili kablovi za prethodno naprezanje sa betonom ili bez njega. Ovi sistemi sve više pokazuju svoje prednosti, naročito za prefabrikovane betonske elemente, kako linijske tako i površinske. Na slici 4.1 daju se osnovni podaci o ovim sistemima za manje i srednje rasponne koje su autori ovog sistema koristili kod mnogih objekata.[5]



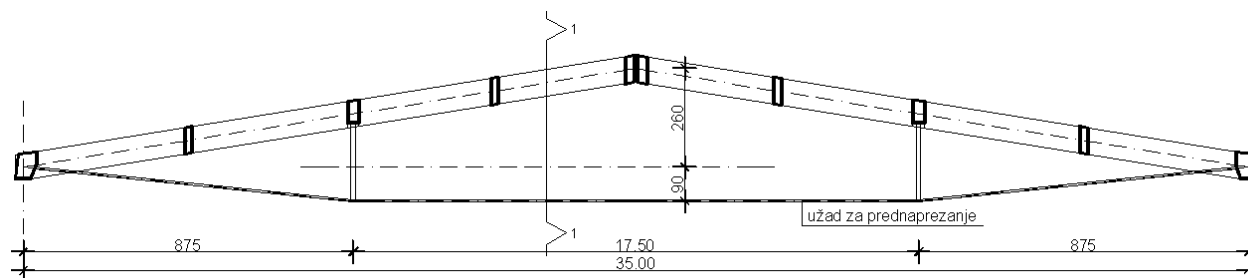
*Slika 4.1. Dvopojasni nosači sa zategnutim pojasom- zategom od običnog čelika[5]*

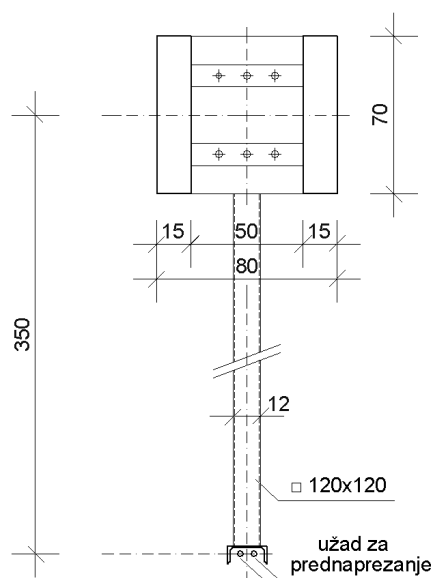
Za rasponne do 30.00m, kod ovih lakih prefabrikovanih sistema, po pravilu se kao zatega koristi običan čelik, a za veće rasponne čelik za prethodno naprezanje. Kod oba slučaja moguće je ostaviti željeni stepen prethodnog naprezanja. Izbor poprečnog preseka gornjeg pojasa je različit i postoji velika sloboda u projektovanju. U cilju obezbeđenja stabilnosti ovih linijskih sistema, sprečavanja izvijanja u ravni upravnoj na ravan nosača, najčešće se rade, za veće rasponne, dvojnog poprečnog preseka, sa dva "obraza" koji su međusobno povezani prečkama-dijafrazmama.

Interesantna je primena ovih sistema kada se kablovi za prethodno naprezanje ( ili užad ) provlače kroz čeličnu cev kružnog ili kvadratnog preseka. Ova metalna cev služi za injektiranje kablova u cilju zaštite od korozije, a istovremeno preuzima deo (ili sve) uticaje od snega i vetra. Na ovaj način je urađena hala u Sevojnu ( M.Ivković, Ž.Praščević, B.Furtula) raspona 2x25.00m. Kod ovog objekta ( slika 4.2) je čelična cev kroz koju se provlače kablovi, bila “montažna” tako da se njeno fiksiranje vršilo nakon utezanja kablova i nanošenja kompletnog stalnog opterećenja. Čelična cev se onda fiksirala i služila ( tako i računata ) za prijem uticaja od snega i vetra. Ovo se pokazalo kao vrlo ekonomično rešenje. U istom sistemu urađena je i proizvodna hala u Užicu (RO “Cveta Dabić”) raspona 35.00m. Projektanti su bili M.Ivković, Ž.Praščević i B.Furtula. (Slika 4.3). Zatim je urađeno više projekata za poljoprivredne objekte raspona 25.0m u Tuzli, takođe, u istom sistemu (M.Ivković, Ž.Praščević i B.Furtula). U Lunovom Selu kod Užica urađena je proizvodna hala raspona 30.00m od dvopojasnih sistema sa donjim pojasom od običnog čelika (B.Furtula) i više hladnjača u Požegi i okolini raspona 20.0m sa donjim pojasom-zategom od običnog čelika (B.Furtula). Kod svih ovih sistema, gornji pojas je bio udvojen, pravougaonog preseka mestimično spojen prečkama-dijafragmama. Na slici 4.4 se prikazuju neki od primenjenih sistema sa udvojenim gornjim pojasom.



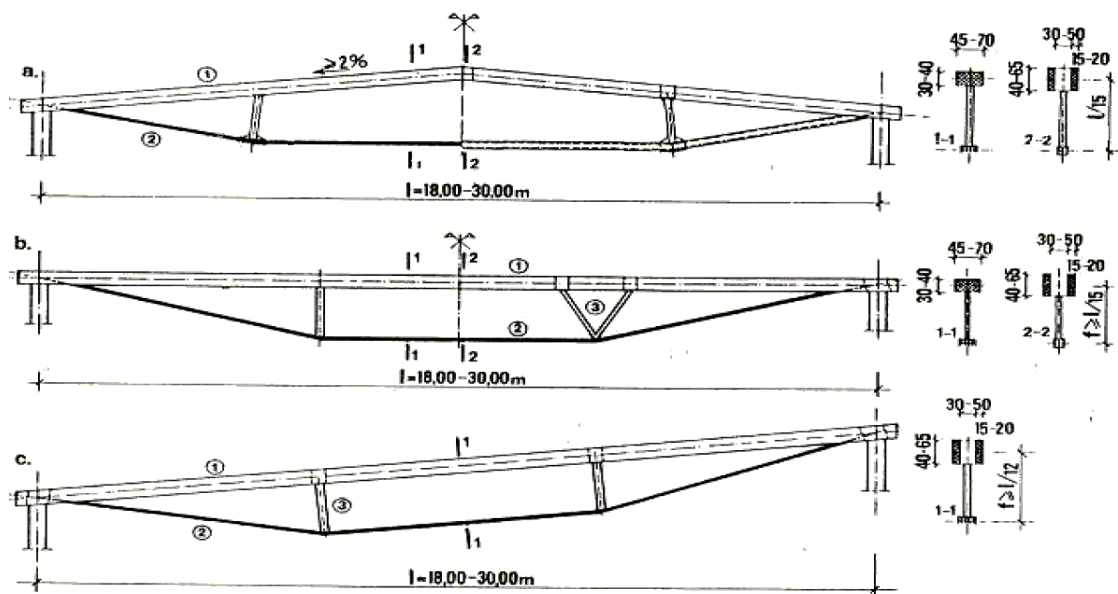
*Slika 4.2. Dvopojasni nosači sa donjim pojasom u vidu zatege za halu u Sevojnu*





**PRESEK 1-1**

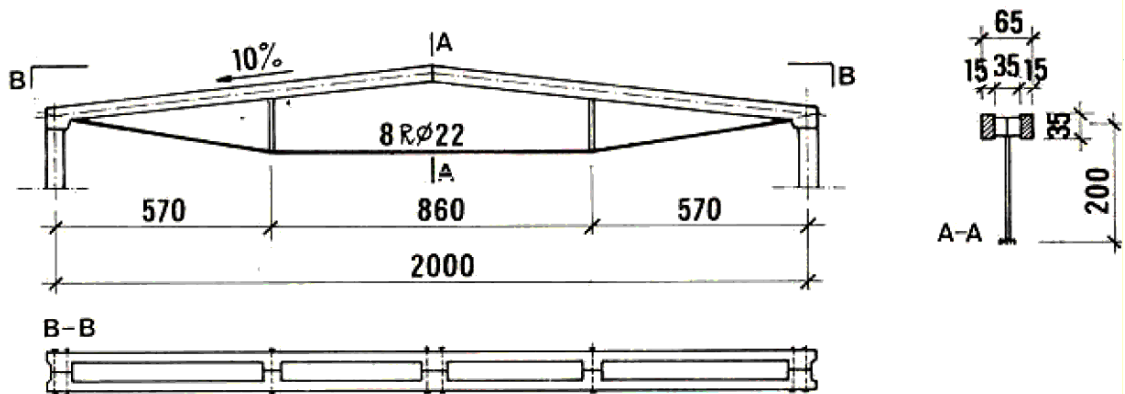
**Slika 4.3.** Dvopojasni nosač sa donjim pojansom-zategom od užadi za halu “ Cveta Dabić” u Užicu



**Slika 4.4.** Dvopojasni nosači sa čeličnom zategom i udvojenim gornjim pojansom[5]

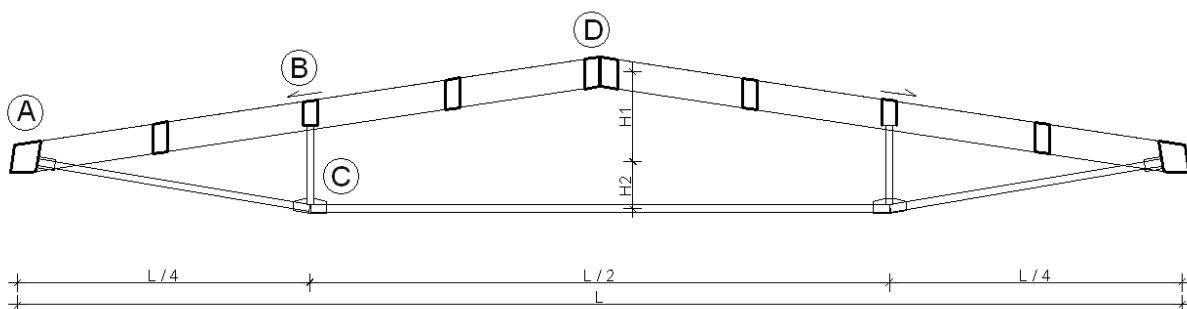
Kod većih raspona moraju se zadovoljiti i uslovi transporta, pa se ovi nosači mogu konstruisati iz dva ili više prefabrikovanih elementa. Povezivanje ovih elementa je standardnim ili vv zavrtnjevima. To je jako pogodno, naročito god gradnje montažno-demontažnih objekata, kad su: privremeni objekti, vojni i razni drugi objekti. Na slici 4.5 se vidi jedan takav nosač, podužno spojen zavrtnjevima.





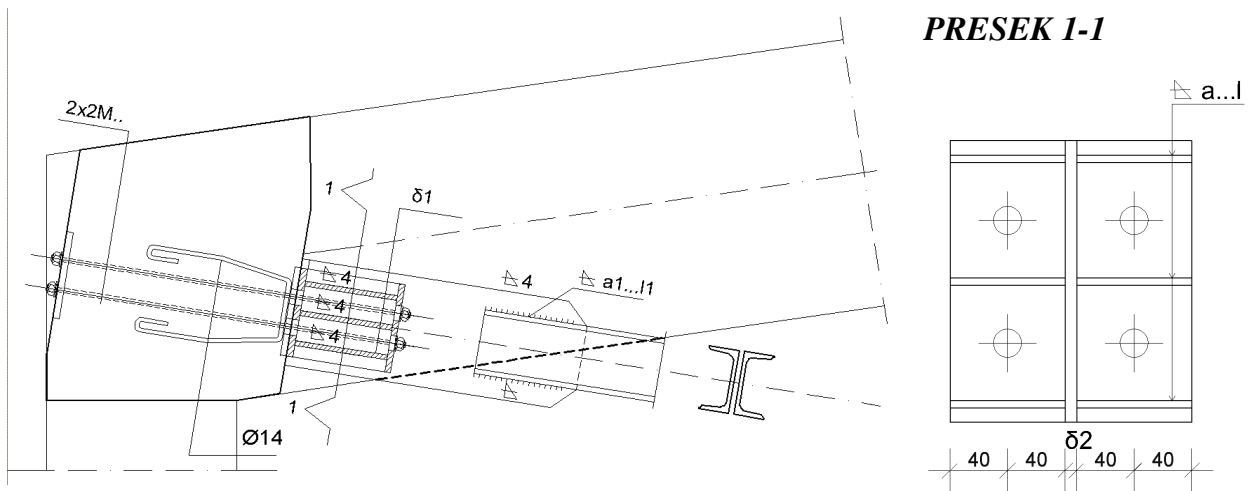
**Slika 4.5.** Dvopojasni nosači sa udvojenim gornjim pojasom, podužno spojeni[5]

Velike su mogućnosti prefabrikacije ovakvih sistema, pa se oni mogu podužno i poprečno spajati, najčešće u zavrtanjima. Veze se ostvaruju suvim postupkom. Dimenzije pojedinih elemenata nosača se prilagođavaju uslovima montaže i transporta. Na slikama od 4.7 do 4.17 vide se neke od mogućnosti montažnih veza i načina spajanja elemenata.[5][46][47]

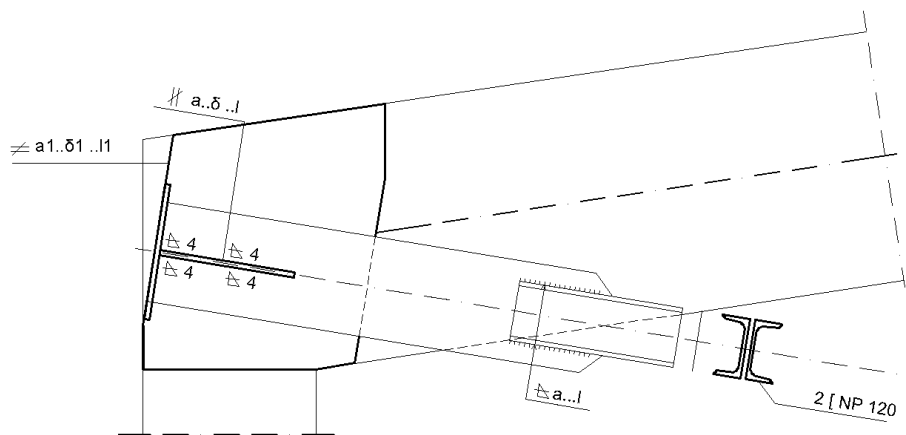


**Slika 4.6.** Podužni presek jednog glavnog nosača

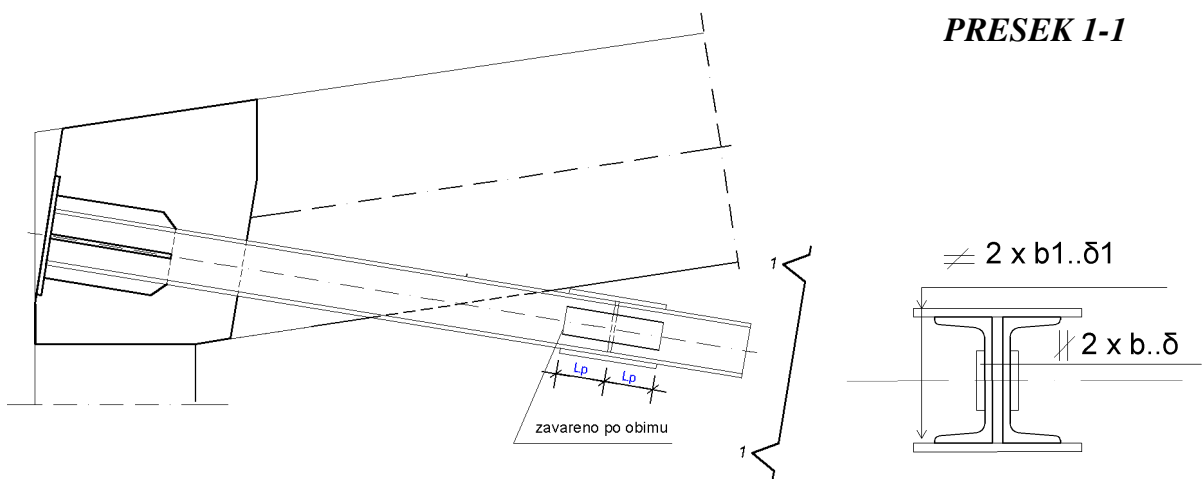
Sve prikazane veze na slikama 4.7 do 4.14, autor ove disertacije je više puta primenjivao u praksi.



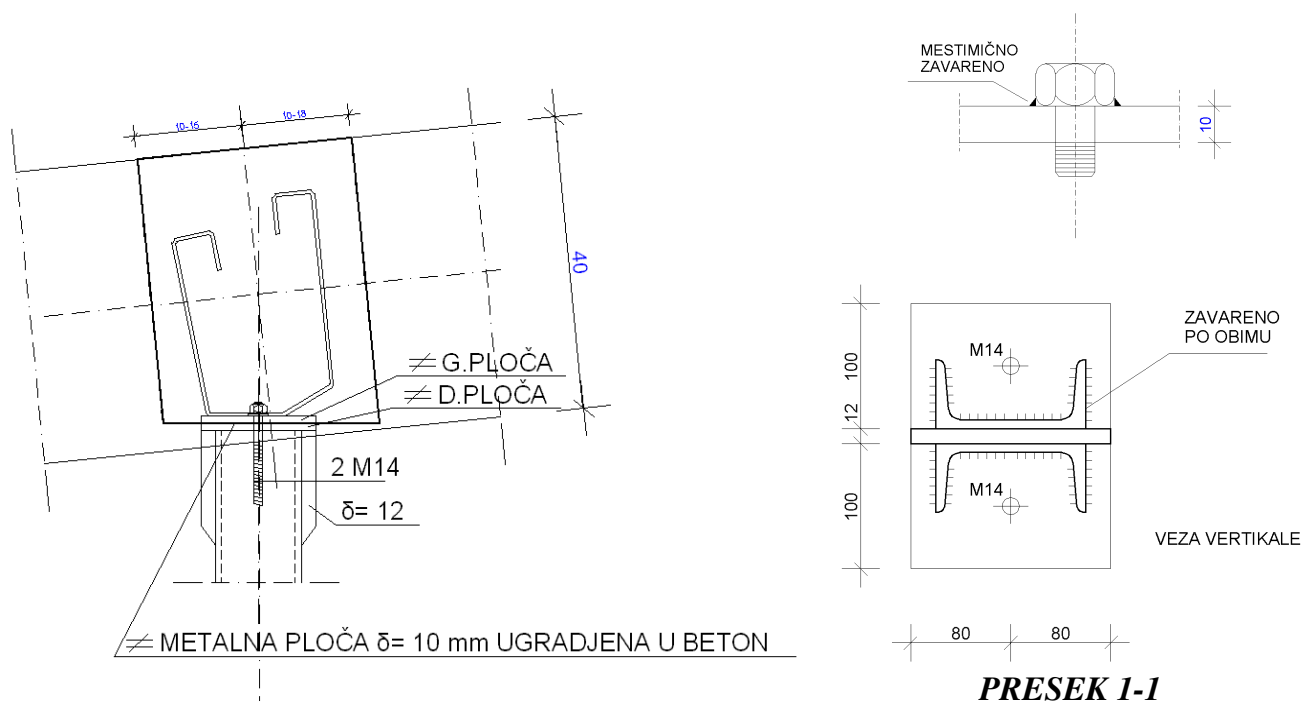
Slika 4.7. Jedan način oslonačke veze-veza donjeg i gornjeg pojasa



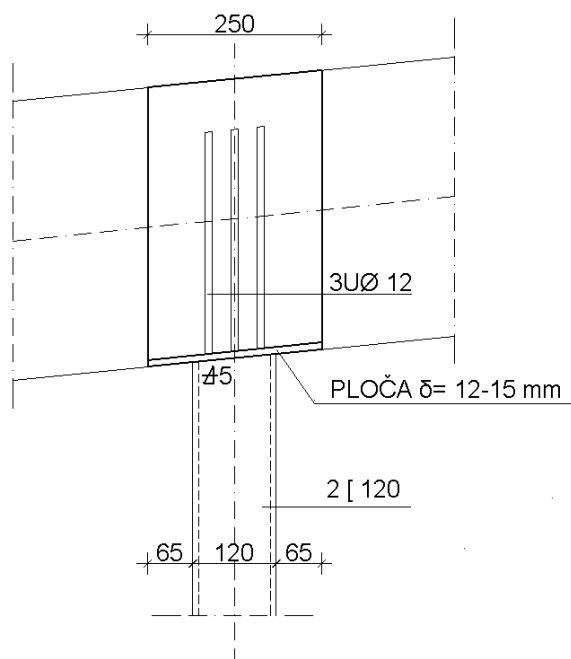
Slika 4.8. Veza gornjeg i donjeg pojasa



Slika 4.9. Veza gornjeg i donjeg pojasa krovno nosača

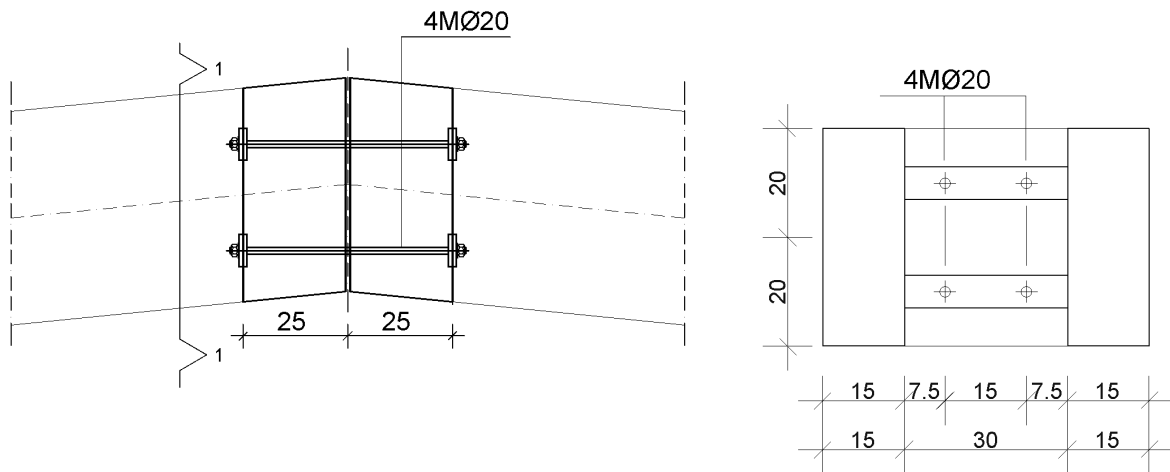


*Slika 4.10. Primer montažne veze gornjeg pojasa i razupirača*

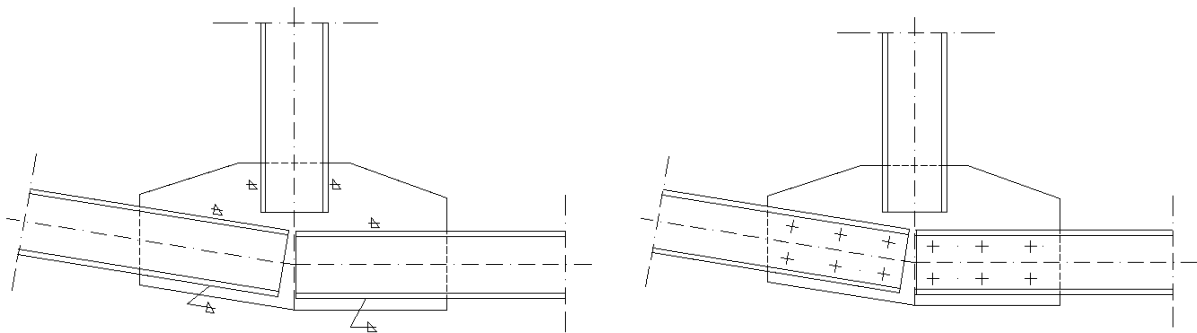


*Slika 4.11. Drugi način montažne veze gornjeg pojasa i razupirača*

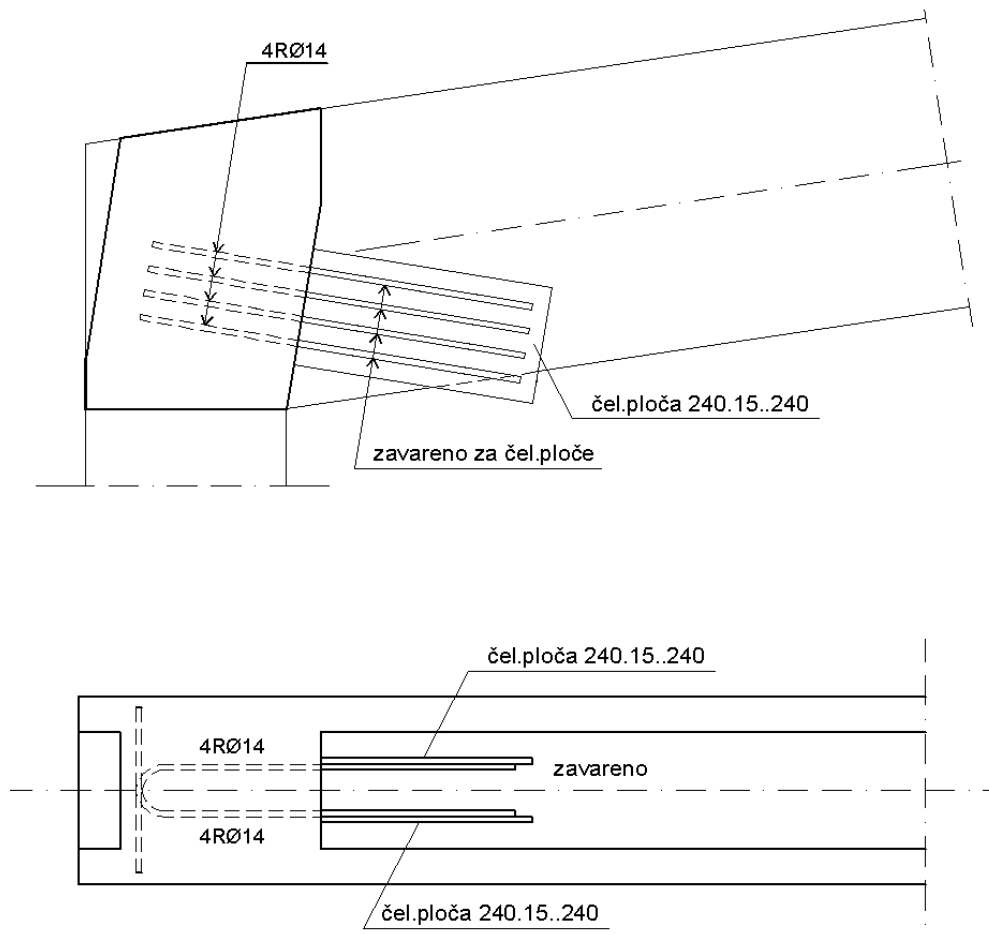
**PRESEK 1-1**



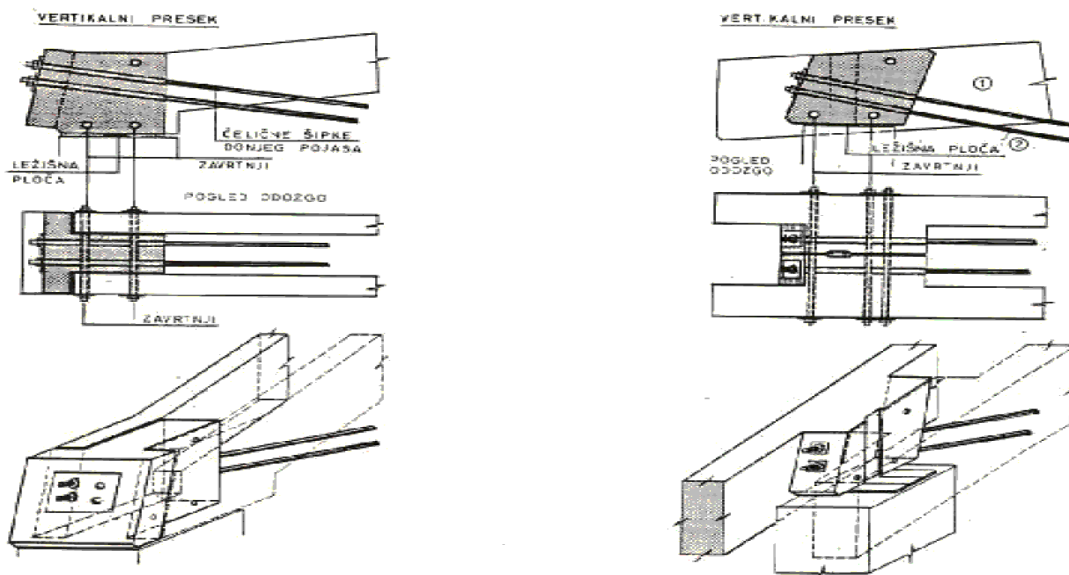
*Slika 4.12. Dvopojasni sistem-montažna veza u slemenu pomoću zavrtnjeva sposobna da primi M, N i T-sile*



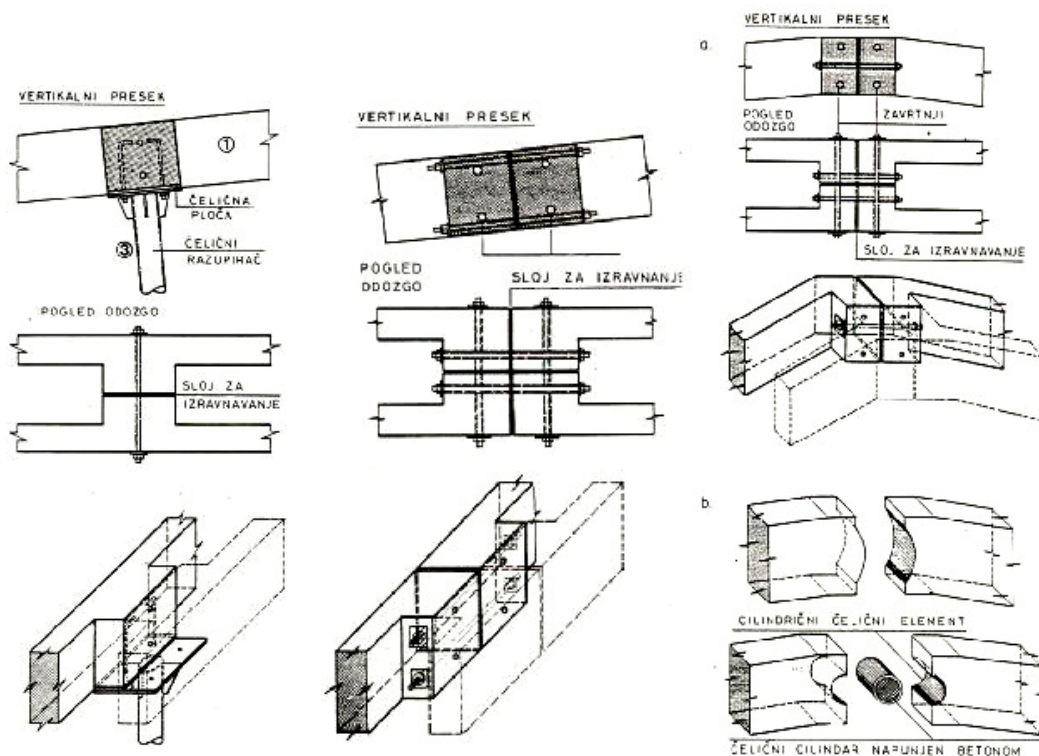
*Slika 4.13. Detalj veze donjeg pojasa i razupirača u čeliku dvopojasnog sistema-nosača*



*Slika 4.14. Jedan od načina oslonačke veze, gornjeg i donjeg pojasa*



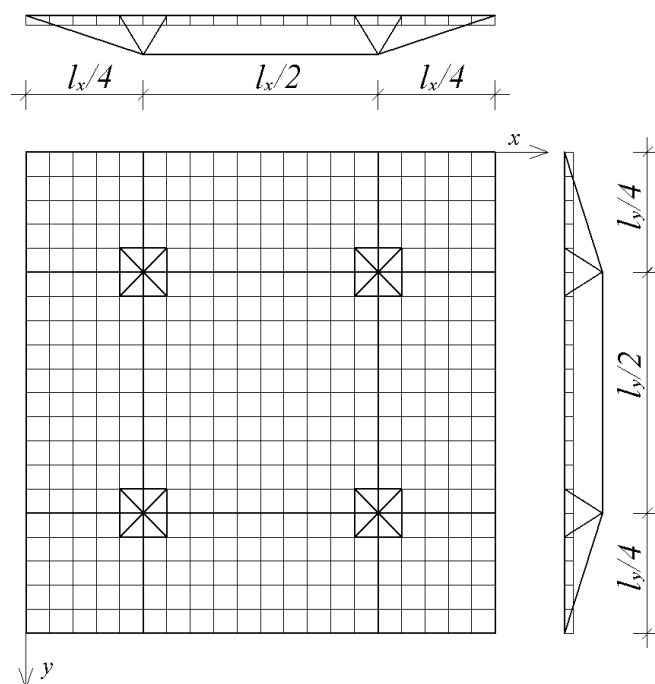
*Slika 4.15. Primeri oslonačkih montažnih spojeva elemenata dvopojasnih sistema [5],[46],[47]*



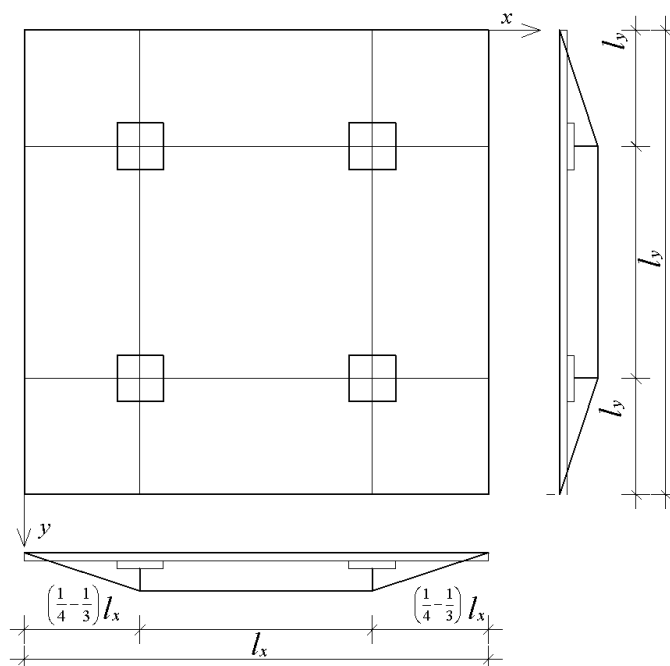
**Slika 4.16.** Razni detalji spoja elemenata kod montažno-demontažne gradnje dvopojasnih sistema[5], [47] i, [46]

Ovi nosači većeg raspona se najčešće rade sa montažnom vezom u slemenu i to tako da veza može prihvatiti momente savijanja, normalne i transverzalne sile. Međutim, može se raditi i zglobna veza u slemenu, pri čemu ulogu zgloba preuzima čelični valjak, čelični cilindar napunjen betonom ili cilindar od betona visoke čvrstoće (slika 4.16).

Značajna mogućnost primene dvopojasnih sistema je i za površinske nosače gde se u kombinacijama sa prefabrikacijom, sprežanjem betona različite starosti i sprežanjem sa lakim betonima mogu dobiti elegantne i ekonomične konstrukcije koje imaju i estetsku vrednost. Na slici 4.17 se vidi predlog krovne roštiljne konstrukcije oslonjene na četiri tačke u polju, a na slici 4.18 prefabrikovana armiranobetonska pečurkasta tavanica. Obe ove konstrukcije su elastično oslonjene na zategnute elemente u dva ortogonalna pravca [46],[46].

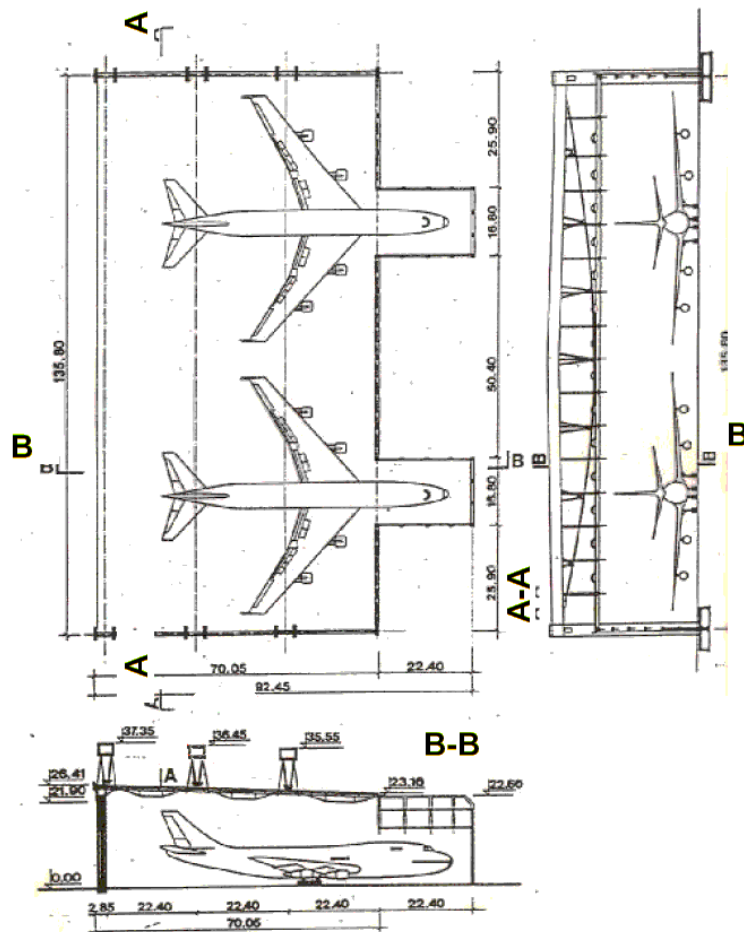


**Slika 4.17.** Primer dvopojasne roštiljne konstrukcije[46],[47]



**Slika 4.18.** Primer pečurkaste AB tavanice[46],[47]

Kao primeri projektovanih i izvedenih konstrukcija u ovom sistemu koji imaju izuzetan značaj za teoriju i praksu armiranobetonskih i prethodno napregnutih konstrukcija navodi se projekat konstrukcije hangara na aerodromu “Nikola Tesla” (Surčin) u Beogradu. (slika 4.19.)



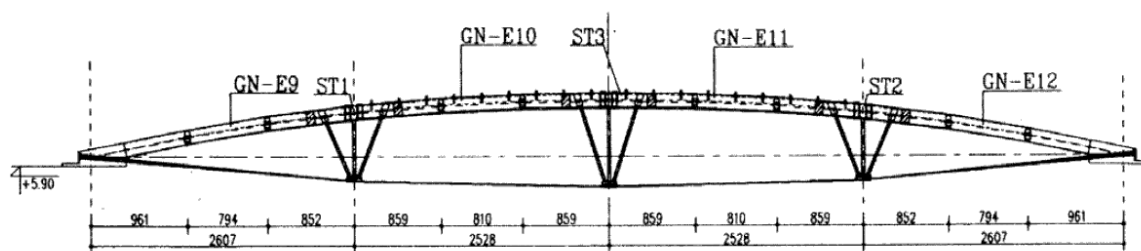
**Slika 4.19.** Nosač hangara JAT-a na aerodromu “Nikola Tesla” (Surčin) u Beogradu [34],[45],[90]

Glavni prethodno napregnuti armiranobetonski nosači krova hangara su dvopojasni raspona 135.80m sa strelom od 9.70m. Gornji pritisnuti pojas je armiranobetonski konstantnog sandučastog preseka rađen od betona MB45. Donji pojas čine užad za prethodno naprezanje ( **po tri kabla 11Ø15.2mm**). Poligonalnu konfiguraciju kablova obezbeđuje sedam piramidalnih “stolica“ od metalnih cevi. Zatezanjem kablova elastično se podupire gornji armiranobetonski pojas.

S obzirom na specifičnosti konstrukcije glavnog nosača, programom ispitivanja obuhvaćena su merenja i opažanja u toku izvođenja objekta , a zatim u periodu njegove eksploatacije. Vršeno je registrovanje relativnih i apsolutnih pomeranja glavnog nosača kao i merenje specifičnih deformacija na kablovima, čeličnim stolicama i armiranobetonskom nosaču. Postavljanje mernih mesta je izvršeno tako da se u toku prve faze odredi gubitak sile u kablovima koji je posledica utezanja drugih kablova. Kod ovih ispitivanja odstupanja merenih vrednosti od teorijskih su bila u granicama 4%.

Poseban doprinos teoriji konstrukcija i tehnologiji gradnje, autori ovog sistema su ostavili kod projektovanja Beogradske Arene. ( slika 4.20).





*Slika 4.20. Nosač beogradske arene u Novom Beogradu*

Kao izuzetno originalan konstruktivni sistem, krovna konstrukcija je na kongresu za prednapregnuti beton – FIP 94 u Vašingtonu 1994. gde je bila predstavljena, izazvala veliko interesovanje najvećih svetskih eksperata za predhodno napregnute konstrukcije. Glavna krovna konstrukcija Arene je „roštilj“ sa tri podužna i četiri poprečna dvopojasna glavna nosača. Gornji pojas je od armiranog betona a donji od kablova za prednaprezanje, razmak između njih formira 11 obrnutih piramidalnih stolica sa devijatorima za ukrštanje kablova. Navedena konstrukcija do sada nije izvedena nigde u svetu i za takvo konstruktorsko rešenje nije postojalo nikakvo građevinsko iskustvo. Tehnologije građenja koje se danas najčešće primenjuju za ovakve tipove objekata su tehnologije koje teže industrijalizaciji građenja odnosno prefabrikaciji elemenata. U ovom slučaju rasponi glavnih krovnih nosača Arene u ortogonalnim pravcima su 132,7×102,7 m. Glavni nosači su lučni, blizni preseka 2x40/140 cm, sa strelom 12,00 m. Ukupna težina glavne krovne konstrukcije je 3200 t, a u glavne nosače je ugrađeno 1220 m<sup>3</sup> betona, 275 t armature i 4100 kg čeličnih profila i flahova. Predhodno naprezanje je rađeno sa po **9 kablova u svakom nosaču sa po 11 užadi 15,8 mm**. Kod oba objekta, Hangara i Arene, je pored doprinosa razvoju teorije konstrukcija dat izvanredan doprinos i tehnologiji građenja ovakvih sistema. Glavni projektanti konstrukcije ovih objekata su autori ovih konstrukcijskih sistema: M.Ivković, M.Ačić, Ž.Perišić i A.Pakvor.

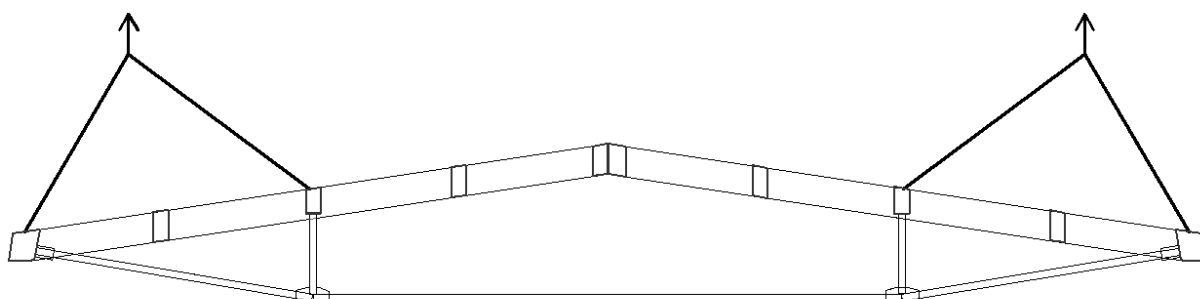
Iz prakse autora dvopojasnih sistema konstrukcija i izvedenih objekata, kao i izvedenih objekata autora ove disertacije može se dati orijentacioni pregled utroška materijala za glavne AB nosače dvopojasnih sistema. Potrošnja osnovnih konstrukcionih materijala : betona 0.075m<sup>3</sup>/m<sup>2</sup> površine objekta, RA400/500 je 12.00kg/m<sup>2</sup>, GA240/360 je 6.50kg/m<sup>3</sup>, a **čelika 4.50kg/m<sup>3</sup>**.

Posebnu pažnju treba obratiti kod montaže dvopojasnih sistema, bilo da su sa zategom samo od običnog čelika, samo od kablova za prethodno naprezanje ili AB klasična ili prethodno napregnuta AB zatega. Zatega nosača ima malu aksijalnu krutost, pa pogrešno “hvatanje“ nosača u toku montaže može dovesti do unošenja sile pritiska u zategu, pri čemu nastupa njeno izvijanje, tj. umesto sile zatezanja u njoj se pojavljuje sila pritiska. (slika 4.21)

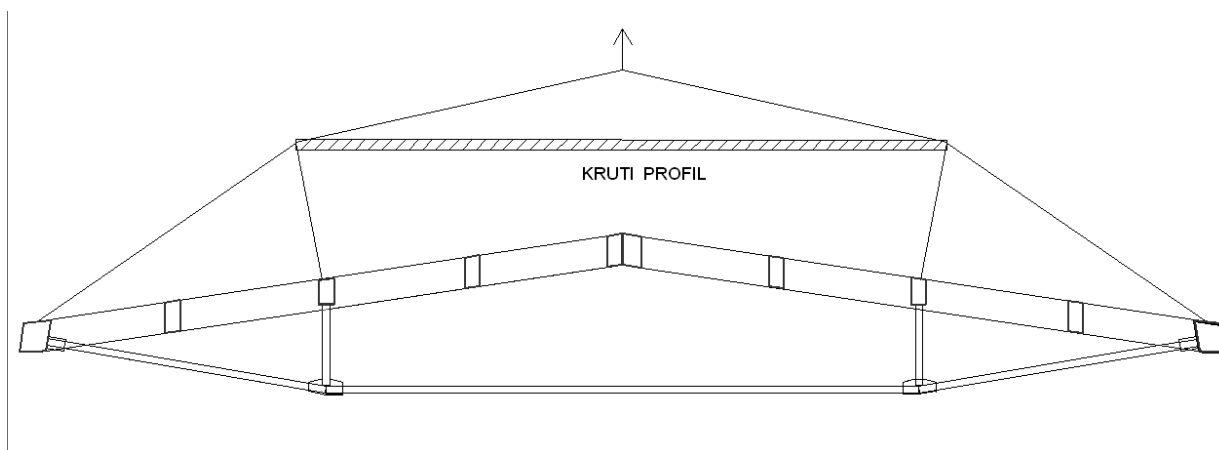


**Slika 4.21.** Pogrešno “hvatanje” nosača dovodi do izvijanja zatege

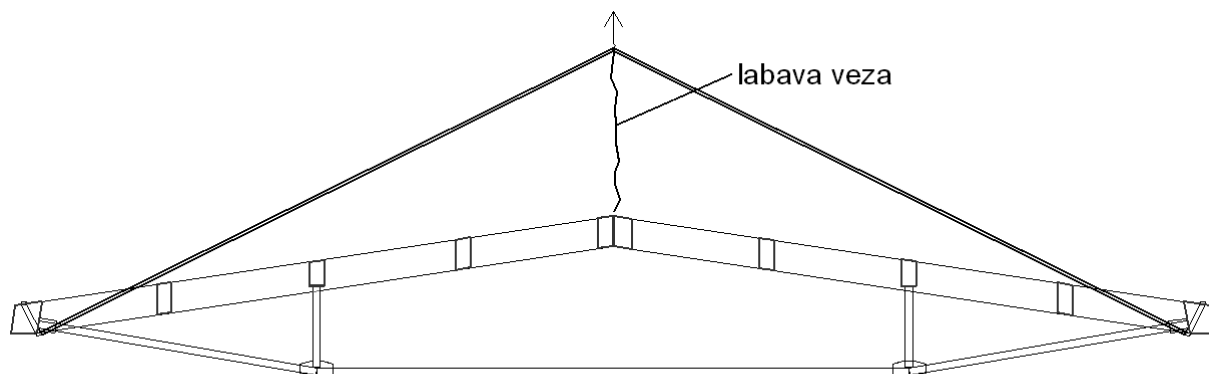
Hvatište užadima za nosač u fazi montaže, mora biti tako određeno, da se u zatezi nikad ne pojavi sila pritiska. Jedan od načina “kačenja” nosača u fazi montaže prikazan je na slikama 4.22 do 4.24.



**Slika 4.22.** Jedan od mogućih načina “hvatanja” nosača u fazi montaže



**Slika 4.23.** Način dizanja nosača u fazi montaže sa krutim profilom



**Slika 4.24.** Dizanje nosača u fazi montaže sa hvatištem užadi na osloncima

Značajne prednosti ovih konstrukcijskih sistema u pogledu lake montaže, jednostavne prefabrikacije, male težine, malog rada na licu mesta, na gradilištu, daju i manju cenu ovih konstrukcija. U odnosu na uobičajene sisteme konstrukcija, ovi sistemi su za preko 30% jeftiniji i ekonomski prihvatljiviji. Posebno, sve ove prednosti treba da dođu do punog izražaja upotrebom betona visoke čvrstoće u ovim konstrukcijskim sistemima.

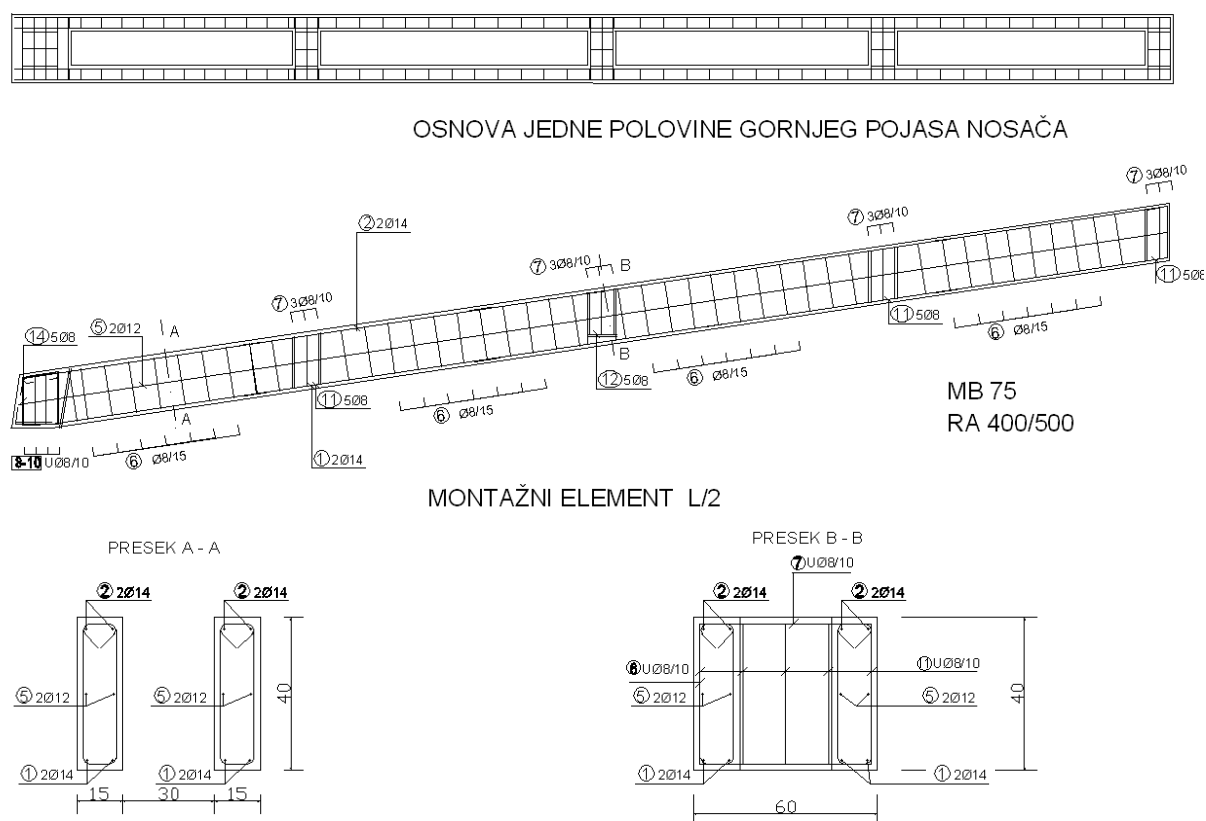
## 5. SOPSTVENA EKSPERIMENTALNA ISTRAŽIVANJA PONAŠANJA DVOPOJASNIH KROVNIH NOSAČA

### 5.1. KARAKTERISTIKE NOSAČA I FAZE OPTEREĆENJA

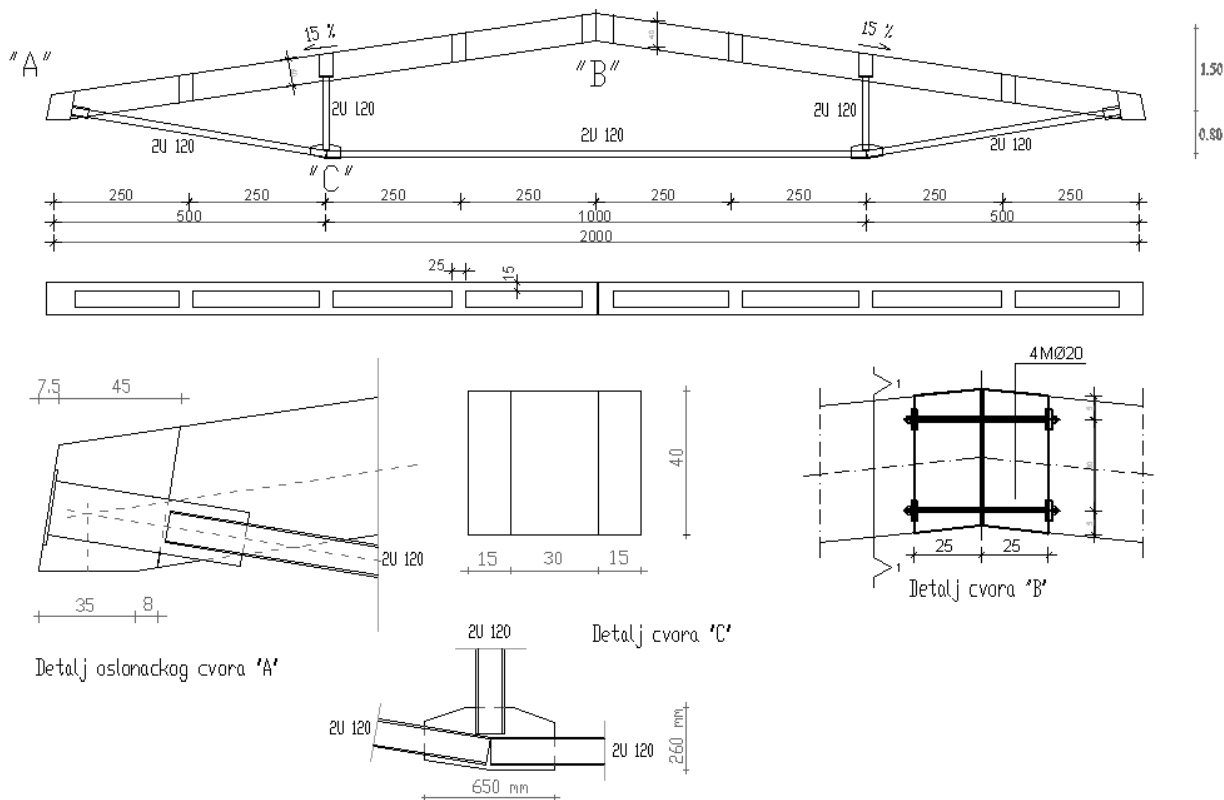
Do ovih eksperimenata se došlo nakon havarije krovni nosača raspona 20.00m preduzeća “Nexan“ iz Nikšića. Naime, trebalo je na osnovu eksperimenta na Građevinskom fakultetu u Podgorici dati ocenu stabilnosti – nosivosti ovakvog dvopojasnog nosača od običnog-normalnog betona nakon sanacije. Izvršena je eksperimentalna analiza za nosač raspona 20.00m nakon sanacije i tu su dobijena dragocena iskustva za eksperimentalnu analizu ovakvog nosača od betona visoke čvrstoće.

Modeli – nosači su bili u prirodnoj veličini, raspona 20.00m. Za eksperimentalnu analizu za ovu disertaciju, urađena su dva nosača-modela, model **A** i model **B** raspona po 20.00m, u svemu po geometriji i detaljima identični.

Planovi oplata, detalji armiranja i karakteristični preseki prikazani su na *slici 5.1* i *slici 5.2*.



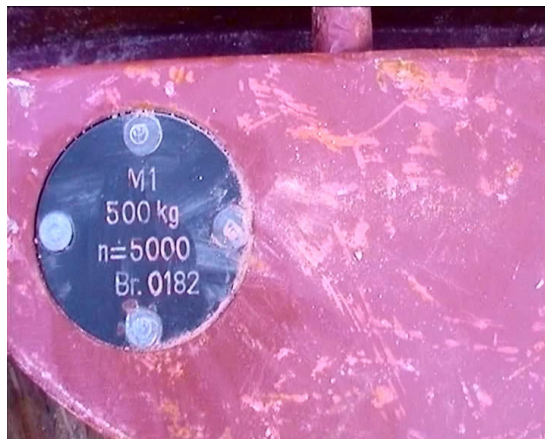
*Slika 5.1. Plan armature gornjeg pojasa eksperimentalno ispitivanih nosača A i B*



**Slika 5.2.** Plan oplata gornjeg AB pojasa ispitivanih dvopojasnih krovnih nosača

Ispitivanje dvopojasnih nosča je obavljeno na platou ispred laboratorije Građevinskog fakulteta u Podgorici. Nosači su postavljeni na armiranobetonske temelje visine  $h = 2.30$  m, pa se tako od donjeg pojasa do platoa dobila visina od 1.45m.

Apliciranje opterećenja je vršeno pomoću tegova "obešenih" o užad po gornjem pojasu nosača-modela. Užad i priveznice (omče na krajevima užadi za "hvatanje" tega) su proizvodnje UNIS-USHA-fabrika čeličnih užadi iz Višegrada. Razmak užadi za "kačenje" tegova je 2.50m, što odgovara razmaku rožnjača. Tegovi su cilindričnog oblika, prečnika 40cm i visine 50cm, težine 5.00kN, za ovu priliku pozajmljeni od železare iz Nikšića ( slika 5.3.)



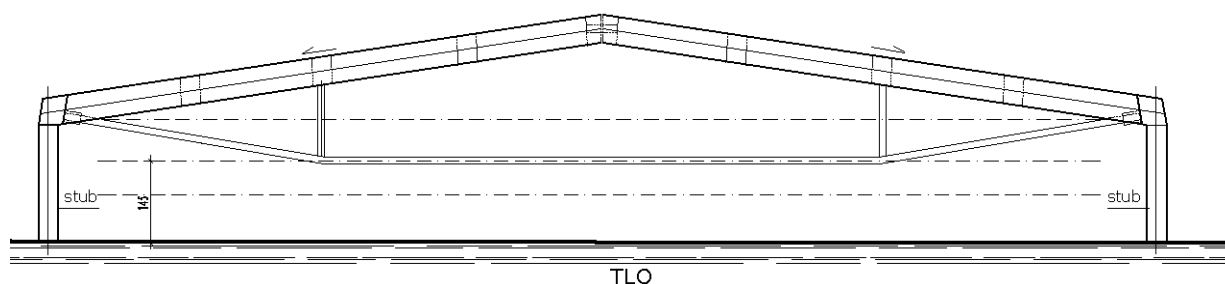
**Slika 5.3.** Izgled tegova za nanošenje opterećenja

Nanošenje tegova je vršeno uz pomoć viljuškara, a u pojedinim fazama autodizalicom. Opterećenje je nanošeno ravnomerno-simetrično, od oslonaca prema slemenu. U nedostatku tegova, a da bi se eksperiment priveo kraju, korišćene su kao opterećenje i četiri armiranobetonske ploče debljine 40cm, širine 80cm i dužine 400cm, po dve sa svake strane slemena u kombinaciji sa tegovima. Svaka armiranobetonska ploča je težine 35kN. Zadnja faza opterećenja je udar tegom od 5kN, slobodnim padom sa visine 6.00m u sleme, pod punim opterećenjem sedme faze opterećenja.

U toku ispitivanja merenja su vršena za sledeće faze opterećenja:

### I – faza opterećenja – sopstvena težina, $g=7.50\text{kN/m}$

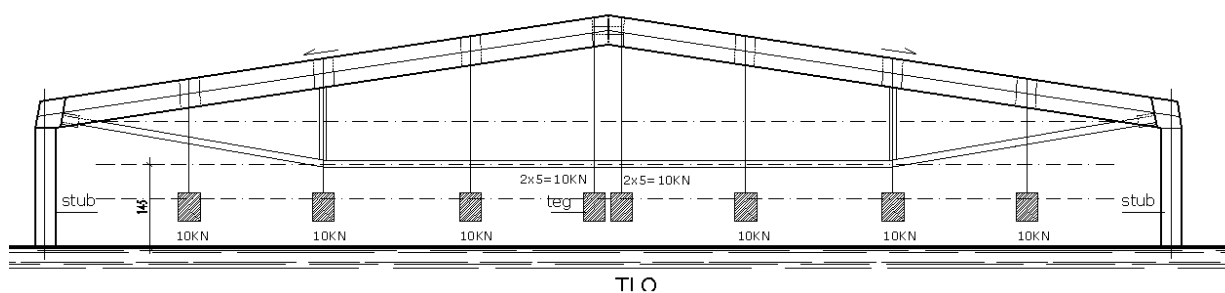
Nosač je prethodno poduprt u slemenu i na mestu vertikala i tako očitano nulto stanje, pa onda uklonjeni pomoćni oslonci i očitavanje vršeno za sopstvenu težinu.



*Slika 5.4. Opterećenje I faze, sopstvena težina nosača*

### II – faza opterećenja

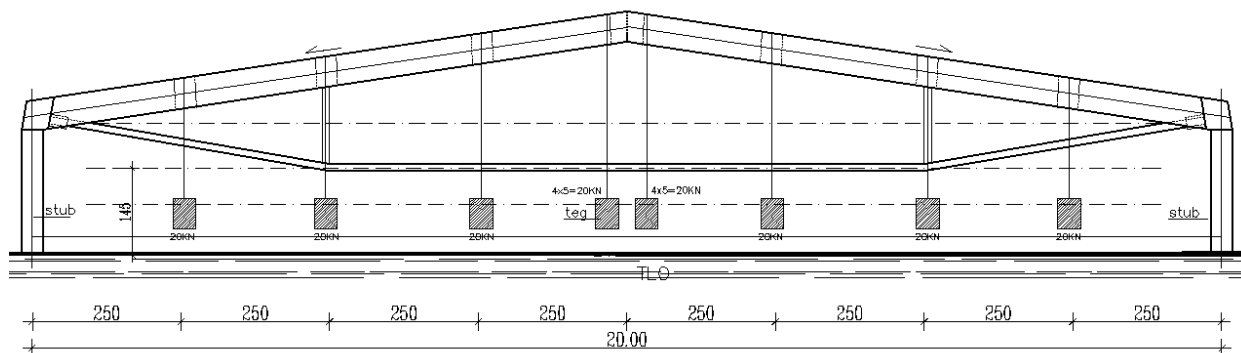
( sopstvena težina + tegovi  $2 \times 5\text{kN}$  (obešeni o gornji pojas), na rastojanju 2.50m  
Ukupno:  $g + 8 \times 10.00 = g + 80.00\text{kN}$ , slika 5.5.



*Slika 5.5. Opterećenje II faze*

### III – faza opterećenja

( sopstvena težina + tegovi  $4 \times 5\text{kN}$  ( obešeni po gornjem pojasu )  
Ukupno:  $g + 8 \times 20.0 = g + 160.00\text{kN}$



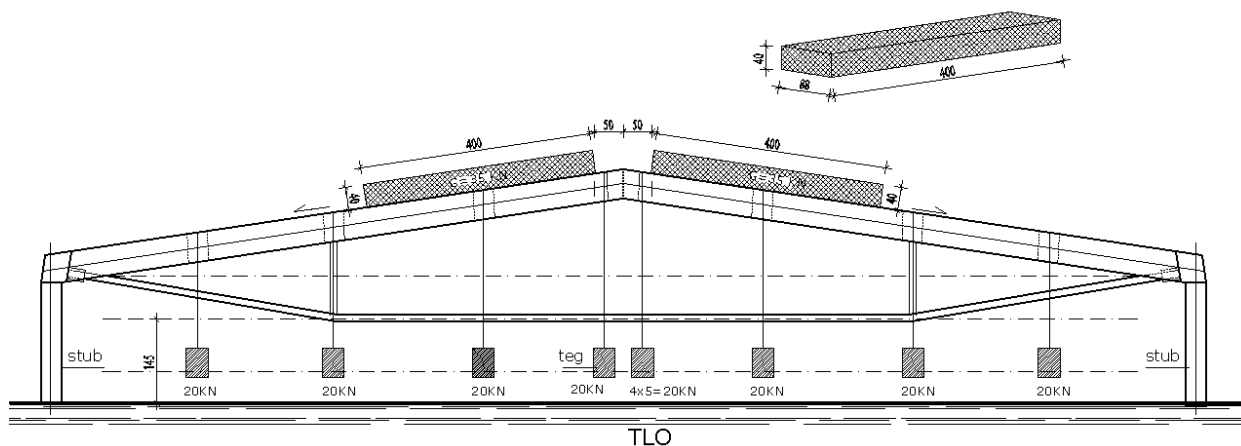
*Slika 5.6. Opterećenje III faze*

#### **IV - faza opterećenja**

( sopstvena težina + tegovi  $4 \times 5 \text{ kN}$  ( obešeni po gornjem pojasu )

plus dve armiranobetonске ploče po  $35 \text{ kN}$

Ukupno:  $g+160.00 \text{ kN}+8.80 \text{ kN/m}$  (ploča )



*Slika 5.7. Opterećenje IV faze*

#### **V - faza opterećenja (stanje eksploatacije)**

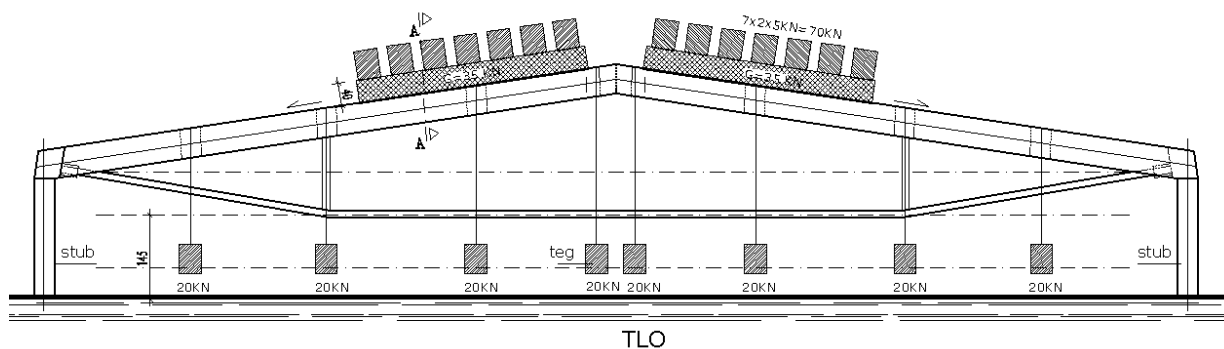
( sopstvena težina + tegovi  $4 \times 5 \text{ kN}$  ( obešeni po gornjem pojasu )

plus dve armiranobetonске ploče po  $35 \text{ kN}$  plus tegovi po ploči

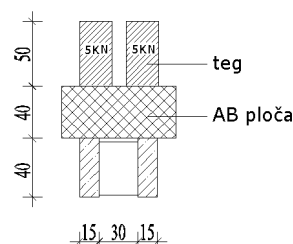
u dva reda  $2 \times 7 \times 5 \text{ kN}$

Ukupno:  $g+160.00 \text{ kN}+2 \times 8.80 \text{ kN/m}$  (ploča) +  $2 \times 70.00 \text{ kN}$  (po ploči)

Ovo opterećenje je uzeto kao opterećenje u stanju eksploatacije, jer najpribližnije odgovara stvarnom stanju u eksploataciji (nešto veće).



PRESEK A-A:

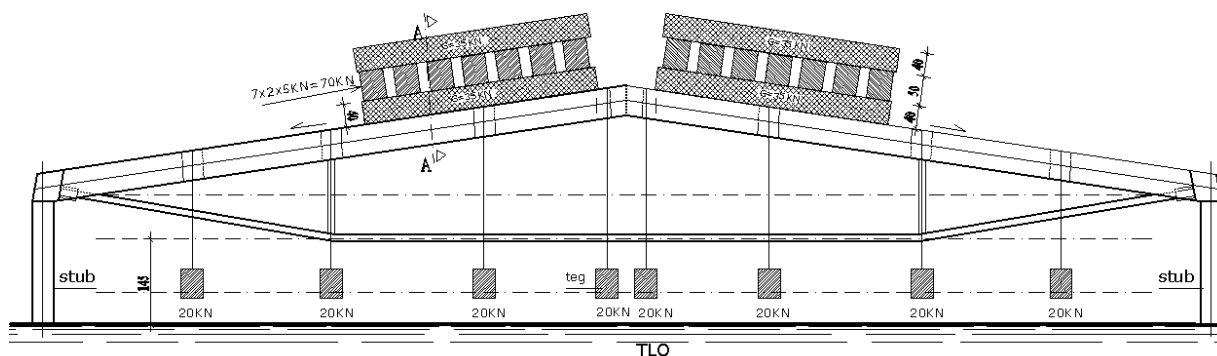


Slika 5.8. Opterećenje V faze

### VI - faza opterećenja

( sopstvena težina + tegovi 4x5kN ( obešeni po gornjem pojasu )  
plus dve armiranobetonske ploče po 35kN plus tegovi po ploči  
u dva reda 2x7x5kN plus dve ab ploče po 35kN

Ukupno:  $g+160.00kN+2x8.80kN/m(\text{ploča})+2x70.00kN(\text{po ploči})+2x8.80kN/m(\text{ploča})$



Slika 5.9. Opterećenje VI faze

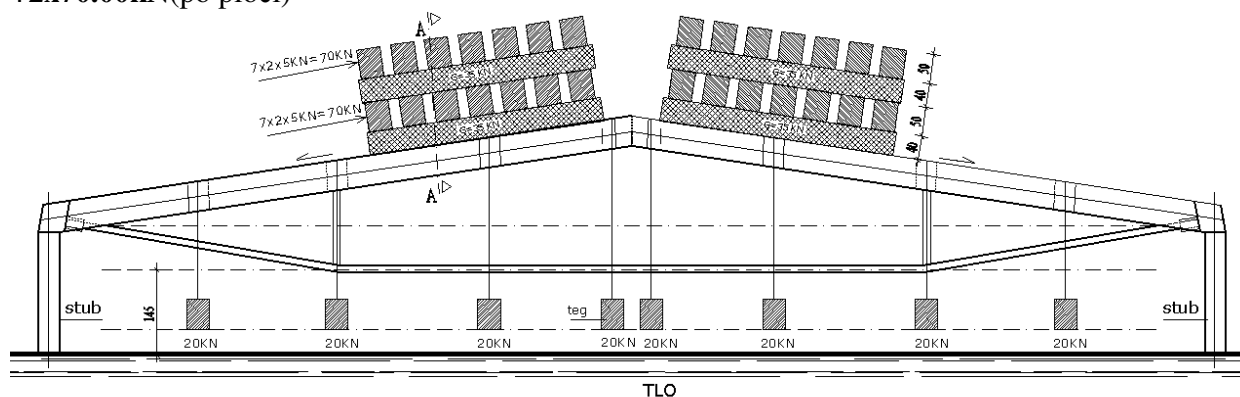
### VII - faza opterećenja

( sopstvena težina + tegovi 4x5kN ( obešeni po gornjem pojasu )  
plus dve armiranobetonske ploče po 35kN, plus tegovi po ploči  
u dva reda 2x7x5kN, plus dve ab ploče po 35kN, plus tegovi  
po armiranobetonskoj ploči u dva reda 2x7x5kN

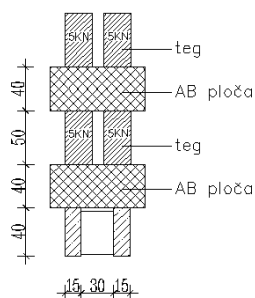
Ukupno:  $g+160.00kN+2x8.80kN/m(\text{ploča})+2x70.00kN(\text{po ploči})+2x8.80kN/m(\text{ploča})+$



**+2x70.00kN(po ploči)**



PRESEK A-A:

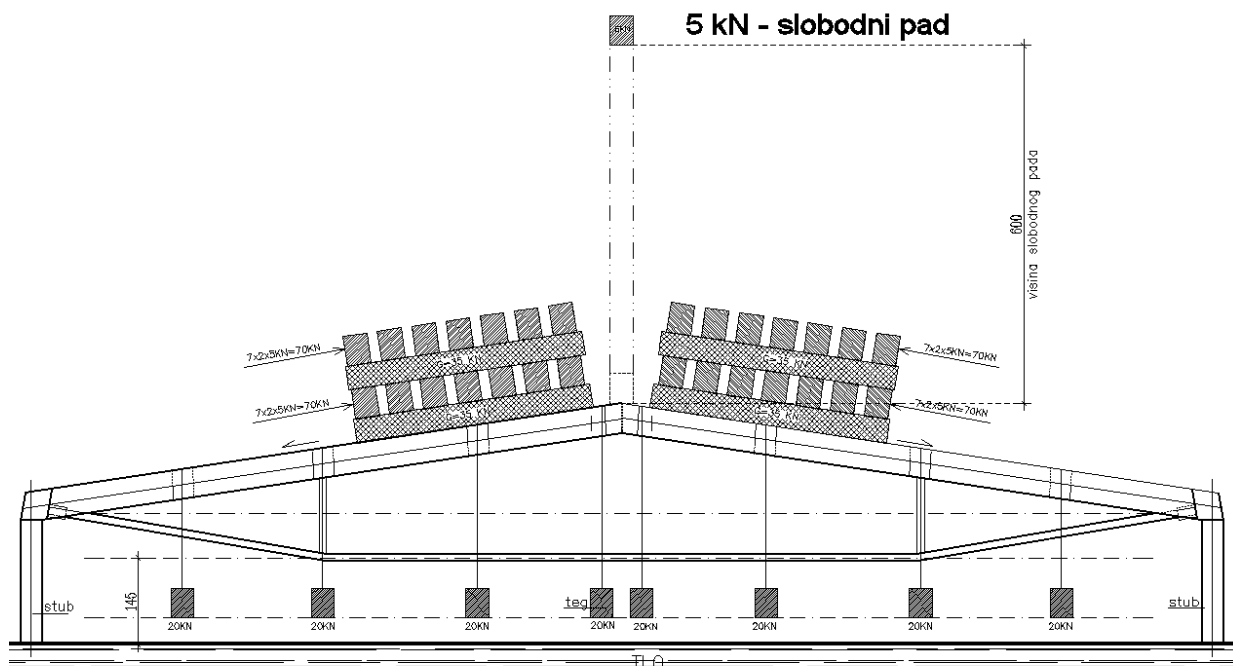


*Slika 5.10. Opterećenje VII faze*

### VIII - faza opterećenja

( sopstvena težina + tegovi 4x5kN ( obešeni po gornjem pojasu )  
 plus dve armiranobetonke ploče po 35kN, plus tegovi po ploči  
 u dva reda 2x7x5kN, plus dve ab ploče po 35kN, plus tegovi  
 po armiranobetonskoj ploči u dva reda 2x7x5kN, plus udar tegom  
 od 5kN slobodnim padom u sleme sa visine 6.00m

**Ukupno: g+160.00kN+2x8.80kN/m(ploča)+2x70.00kN(po ploči)+2x8.80kN/m(ploča)+  
 +2x70.00kN(po ploči) + udar tegom od 5.00kN**



*Slika 5.11. Opterećenje VIII faze*

## 5.2. MERENJA DEFORMACIJA NOSAČA

### 5.2.1. OPŠTE DEFORMACIJE

Broj i raspored mernih mesta (*slika 5.2.1*) je usvojen tako da se na osnovu rezultata merenja mogu pouzdano nacrtati liije deformacija modela **A** i modela **B**. Na osnovu toga je mereno:

- pomeranja na mestu opterećenja, kačenja tegova ( $U_{i,A}$  i  $U_{i,B}$ )

### 5.2.2. LOKALNE DEFORMACIJE

Za merenje lokalnih deformacija (dilatacija) u betonu korišćene je deformator PFENDER na bazi od 100 mm i podatkom od  $10 \times 10^{-6}$  mm/mm. Merenje lokalnih deformacija u zatezi vršeno je mernim trakama sa podatkom od  $1 \times 10^{-6}$  mm/mm.

Za merenje lokalnih deformacija i određivanje napona broj i raspored mernih mesta je određen tako da se obuhvate karakteristični preseći betonskog dela nosača, zatega i vertikala- razupirača. U karakterističnim presećima, ovako izabranim, broj i raspored mernih mesta je određen po principu "opasivanja preseka". Na osnovu toga, merenja su vršena u sledećim opasanim presećima:

- Na betonu gornjeg pojasa, u zoni "ulaska" zatega u beton, preseći  $I_{A(B)}-I_{A(B)}$  i  $IX_{A(B)}-IX_{A(B)}$
- U sredini između oslonca i vertikale (razupirača), preseći  $II_{A(B)}-II_{A(B)}$  i  $VIII_{A(B)}-VIII_{A(B)}$
- Iznad vertikala, razupirača, preseći  $III_{A(B)}-III_{A(B)}$  i  $VII_{A(B)}-VII_{A(B)}$
- U sredini između slemena i vertikale, razupirača, preseći  $IV_{A(B)}-IV_{A(B)}$  i  $VI_{A(B)}-VI_{A(B)}$

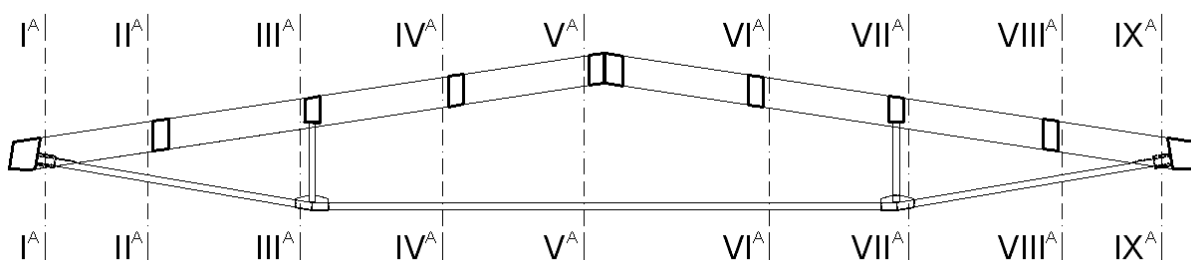
- Na mestu sastava betonskih elemenata (sleme), preseči  $V_{A(B)}-V_{A(B)}$

Pri tome prvi indeks (indeks A), se odnosi na nosač A, a indeks u zagradi (indeks B) na nosač B.

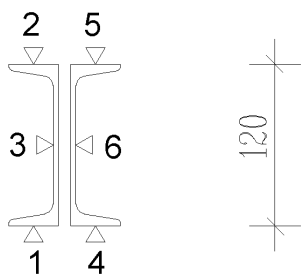
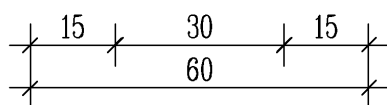
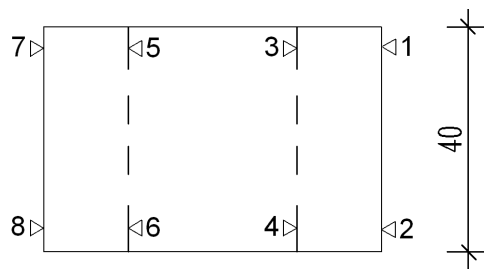
Pored merenja na gornjem pojasu- betonskom delu nosača, vršena su merenja na donjem pojasu i vertikalama, što je obuhvaćeno presecima:

- Na kosom delu zatege, preseči  $X_{A(B)} - X_{A(B)}$  i  $XII_{A(B)} - XII_{A(B)}$ ,
- Na horizontalnom delu zatege, preseči  $XI_{A(B)} - XI_{A(B)}$ ,
- Na vertikalama-razupiračima, preseči  $XIII_{A(B)} - XIII_{A(B)}$  i  $XIV_{A(B)} - XIV_{A(B)}$ ,

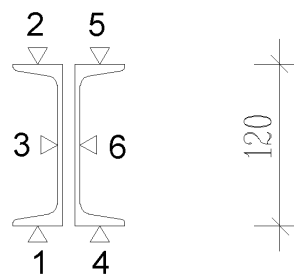
### 5.2.3. RASPORED MERNIH MESTA NA DVOPOJASNOM NOSAČU A i B



Gornji pojas



- Donji pojas



- Vertikale

*Slika 5.2.3. Raspored mernih mesta*

Potpuno isti raspored mernih mesta je i na nosaču B. Nosači su u svemu identični samo je kod nosača A armiranobetonski gornji pojas od betona visoke čvrstoće 75MPa, a nosač B od 78MPa.

## 5.3. MATERIJALI

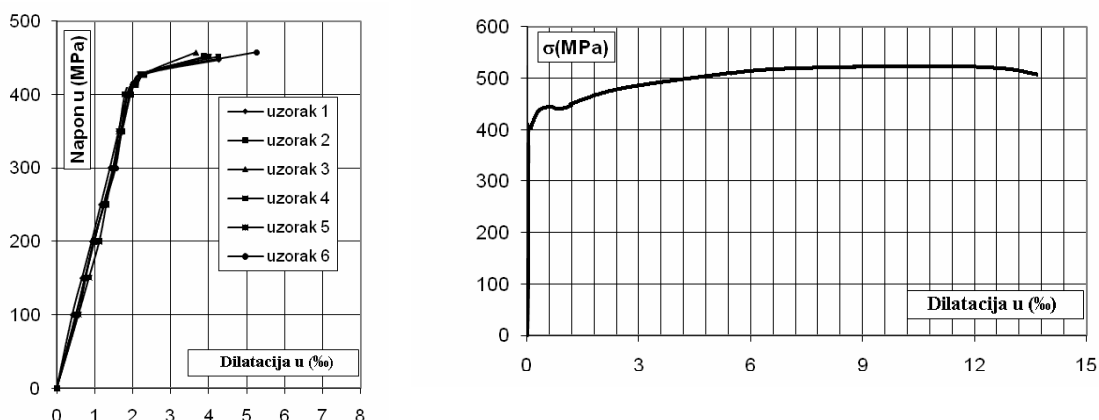
### 5.3.1. MEHANIČKE KARAKTERISTIKE ARMATURE

Za armiranje nosača kao glavna podužna armatura korišćena je rebrasta armatura RA 400/500, a za poprečnu armaturu - uzengije korišćena je glatka armatura GA 240/360. Upotrebljeni betonski čelik je uzet iz železare "Nikšić". Korišćeni su profili 8, 10,12 i 14mm. Osnovne karakteristike ove armature dobijene su iz železare "Nikšić", ali su ispitane i u laboratoriji Građevinskog fakulteta u Podgorici. U tabeli 5.3.1.1. su prikazane osnovne mehaničke karakteristike korišćenih profila.

*Tabela 5.3.1.- Karakteristike upotrebljenog betonskog čelika*

RA 400/500	$\Phi$ (mm)	$\Phi$ (mm)	$E_s$ (GPa)	$\sigma_{vs}$ (MPa)	$\sigma_s$ (MPa)	$\delta_m$ (%)
	10	14	201	435	525	10.6
GA 240/360	$\Phi$ (mm)	$E_s$ (Gpa)	$\sigma_{vs}$ (MPa)	$\sigma_s$ (MPa)	$\delta_m$ (%)	
	6	206	265	380	24.6	

Karakteristični radni dijagrami ( $\sigma_s - \epsilon_s$ ) korišćenog rebrastog betonskog čelika prikazani su na slici 5.3.1.1. Ovi dijagrami su dobijeni ispitivanjem na reprezentativnom statističkom uzorku respektujući metode teorije verovatnoće i matematičke statistike. Veličina statističkog uzorka  $n=33$ , za odgovarajuću vrstu betonskog čelika.



*Slika 5.3.1. Dijagrami  $\sigma_a - \epsilon_a$  rebraste armature a) Radni dijagram RA 400/500*

*b) Zapis RD na kidalici za RØ14mm*

### 5.3.2. KARAKTERISTIKE KOMPONENTI BETONSKE MEŠAVINE

Za dobijanje betona visokih čvrstoća uglavnom postoje dva osnovna načina:

1. Uobičajenom (klasičnom) tehnologijom spravljanja betona gde se utiče na povećanje zbijenosti betona smanjivanjem sadržaja vode uz dodatak superplastifikatora u cilju poboljšanja ugradljivosti betona. Takođe se primenjuju i posebni postupci za efikasno kompaktiranje betona u toku ugrađivanja.
2. Spravljanje betona uz primenu posebnih dodataka kao što je silikatna prašina (Silica Fume) kojom se pospešuje hidratizacija cementa i čiji posebni hemizmi daju doprinos visokim čvrstoćama. Takođe, i kod ovog načina se utiče na povećanu kompaktnost betona

Za izradu modela- nosača u ovom radu primenjen je prvi način za spravljanje betona visokih čvrstoća. Vodilo se računa da količina upotrebljenog cementa ne bude veća od 600 kg/m<sup>3</sup>, jer se tako povećava količina superplastifikatora, a veća količina cementa daje veće skupljanje i tečenje betona.

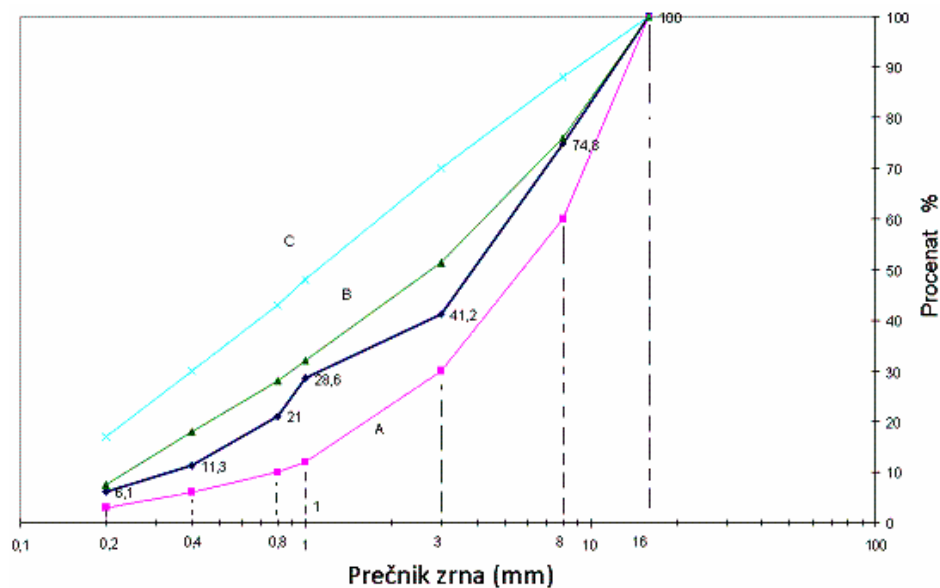
Agregat za beton je korišćen iz reke Morače sa lokacije "Ponari" udaljene oko 12 km od Podgorice. Agregat je ispiran, drobljen i separisan u frakcije (0-4; 4 -8; i 8 -16 ) u fabrici betona.

Za svaku frakciju agregata, pre proizvodnje betonske mešavine, uzimani su reprezentativni uzorci i vršena su standardna ispitivanja fizičko-mehaničkih karakteristika agregata.

Granulometrijska kriva agregata ispitana je suvim prosejavanjem kroz seriju sita i prikazana na slici 5.3.2.1.

Učešće pojedinih frakcija po težini je:

- 0/4 mm	40%
- 4/8 mm	33%
- 8/16 mm	37%



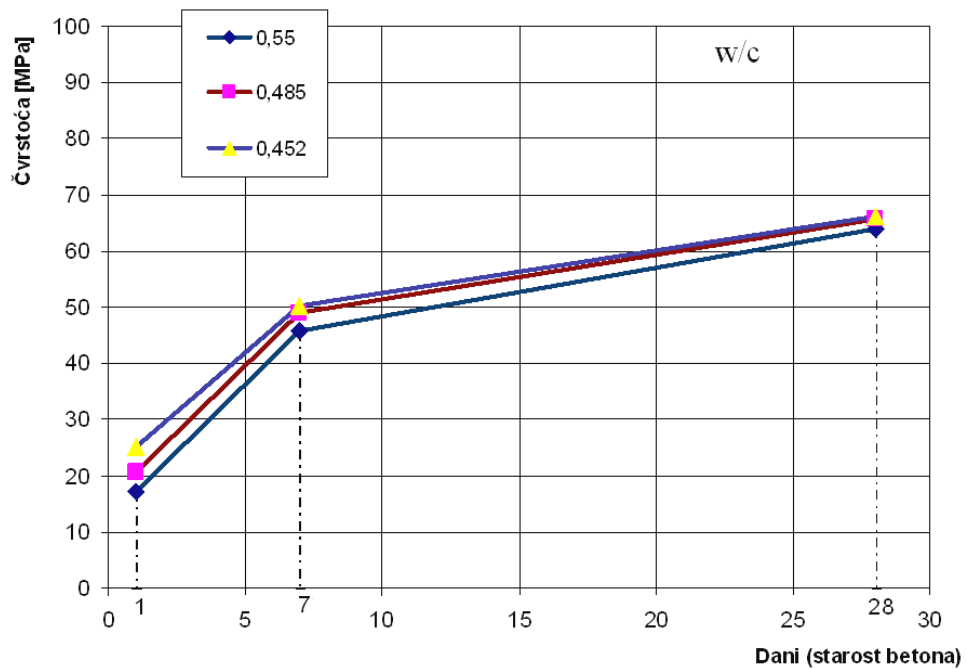
Slika 5.3.2.1. Granulometrijska kriva agregata

S obzirom da se nije raspolagalo sa tačnim recepturama za spravljanje betona, napravljene su probe sa različitim količinama cementa i različitim vodocementnim faktorom. Rezultati ispitivanja čvrstoće na pritisak za različite mešavine betona prikazane su u tabeli 5.3.2.1.

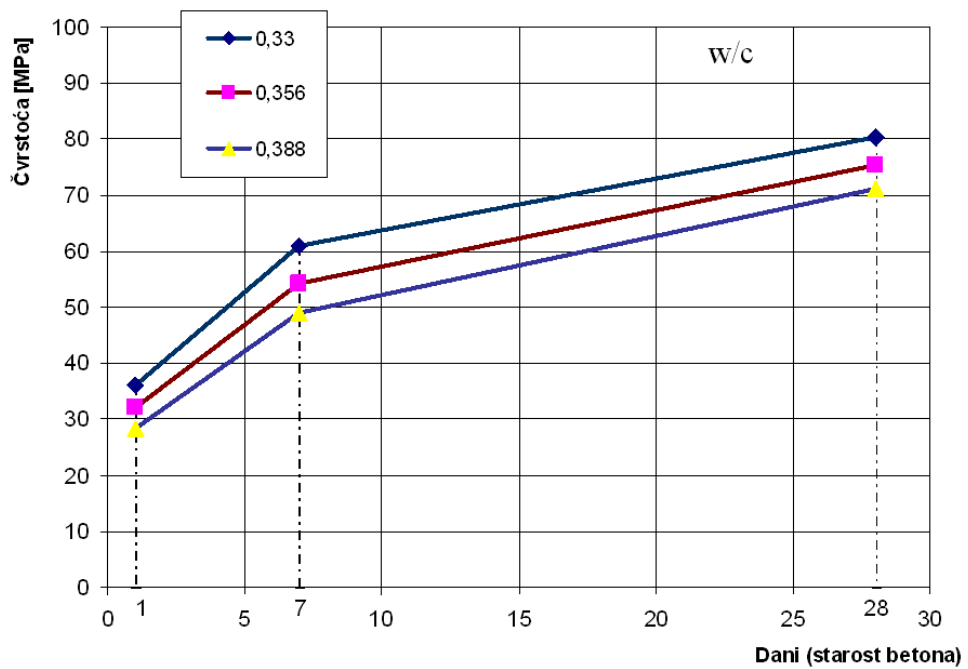
Tabela 5.3.2.1. Čvrstoća betona na pritisak [MPa]

MEŠAVINA I	količina cementa 350 kg/m <sup>3</sup> betona				
	w / c		0.550	0.485	0.452
	starost uzorka u danima	1	17.25	20.65	25.12
		7	45.80	48.96	50.14
28		63.84	65.76	66.25	
MEŠAVINA II	količina cementa 450 kg/m <sup>3</sup> betona				
	w / c		0.330	0.356	0.388
	starost uzorka u danima	1	36.00	32.16	28.25
		7	61.00	54.18	49.10
28		80.35	75.25	71.10	
MEŠAVINA III	količina cementa 550 kg/m <sup>3</sup> betona				
	w / c		0.315	0.355	0.348
	starost uzorka u danima	1	41.00	36.40	30.12
		7	65.60	60.15	56.42
28		81.00	78.16	74.24	

Iz ovih ispitivanja se vidi da vodocementni faktor ima veliki uticaj na rane čvrstoće betona, a kasnije je taj uticaj manji. Rezultati ovih ispitivanja prikazani su na sledećim dijagramima za različite količine cementa.

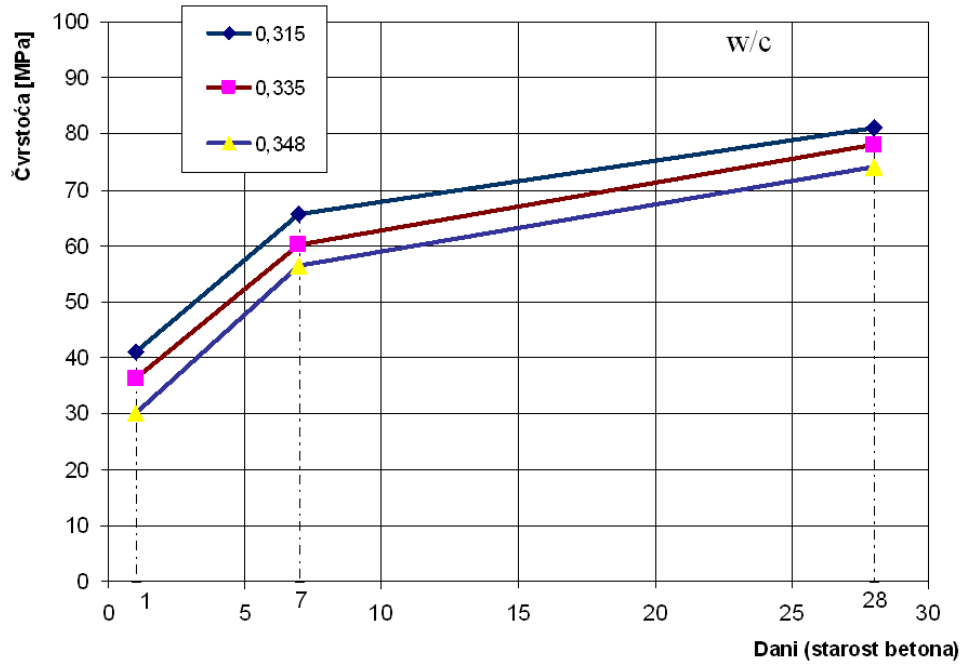


Slika 5.3.2.2. Zavisnost čvrstoće betona na pritisak od starosti betona pri količini cementa 350 kg/m<sup>3</sup> betona

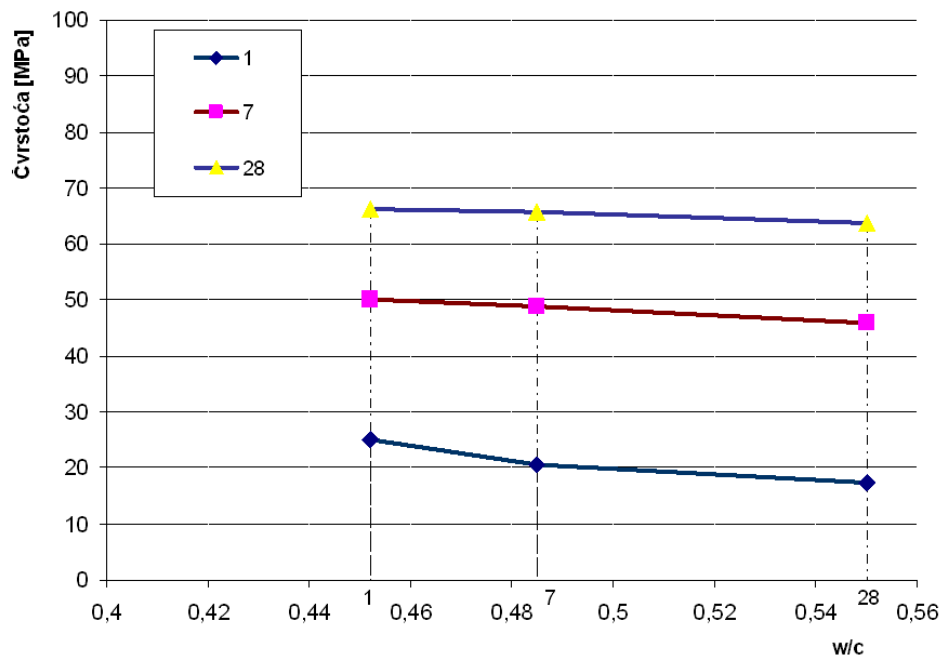


Slika 5.3.2.3. Zavisnost čvrstoće betona na pritisak od starosti betona pri količini cementa 450 kg/m<sup>3</sup> betona

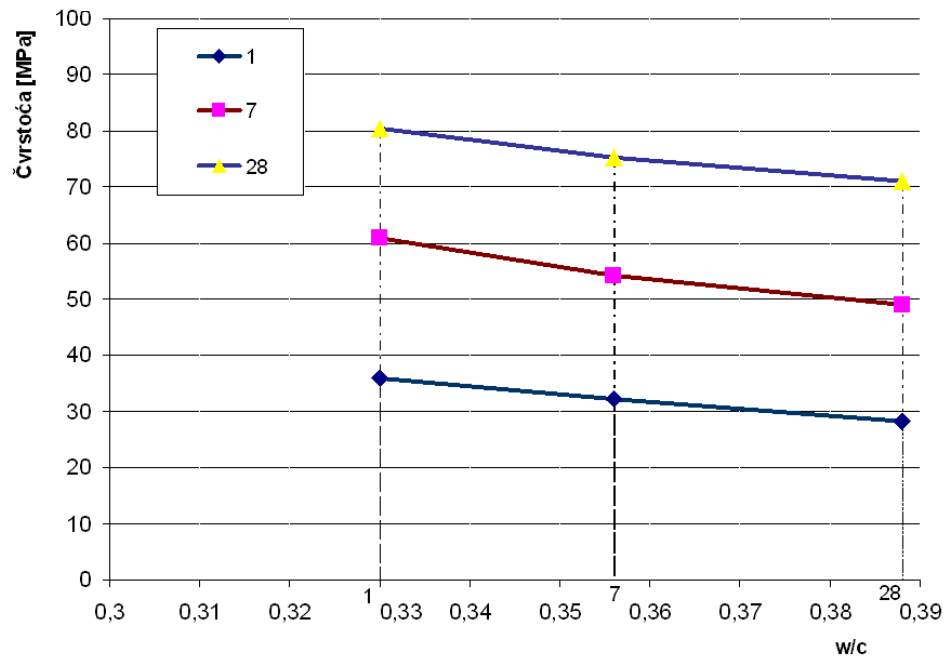




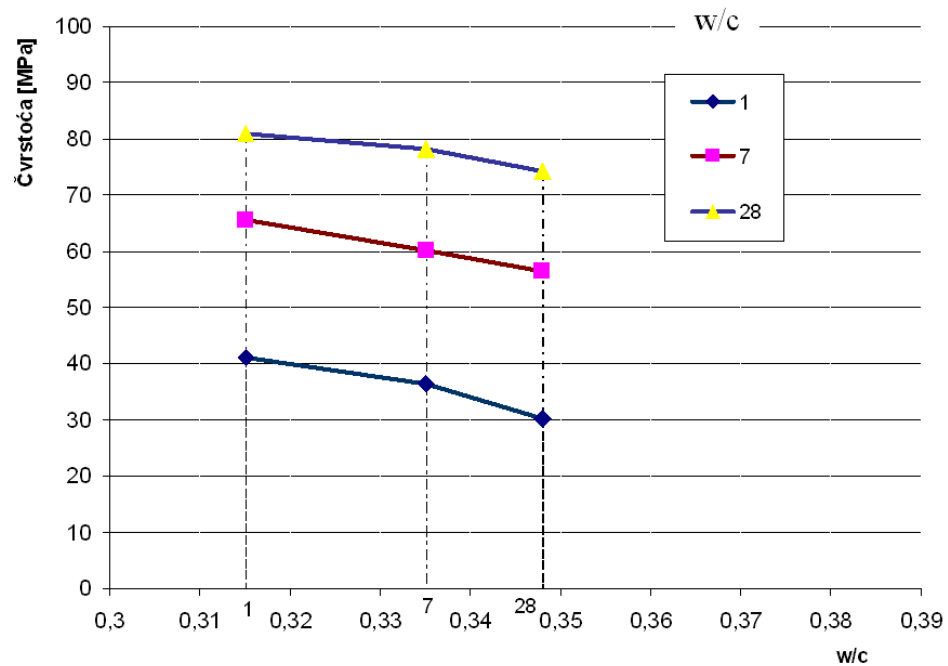
*Slika 5.3.2.4. Zavisnost čvrstoće betona na pritisak od starosti betona pri količini cementa  $550 \text{ kg/m}^3$  betona*



*Slika 5.3.2.5. Zavisnost čvrstoće betona od vodocementnog faktora pri količini cementa  $350 \text{ kg/m}^3$  betona*



Slika 5.3.2.6. Zavisnost čvrstoće betona pri pritisku od vodocementnog faktora pri količini cementa 450 kg/m<sup>3</sup> betona



Slika 5.3.2.7. Zavisnost čvrstoće betona pri pritisku od vodocementnog faktora pri količini cementa 550 kg/m<sup>3</sup> betona

Rezultati ostalih karakteristika upotrijebljenog agregata prikazani su u tabeli 5.3.2.2.

Cement koji je upotrijebljen za spravljanje betonske mešavine, za betoniranje eksperimentalnih modela, uzet je od proizvođača cementa "Kosijerić", sa oznakom PC 55.

**Tabela 5.3.2.2. Karakteristike upotrebljenog rečnog agregata**

Frakcije agregata (mm)	0-4	4-8	8-16
Specifična masa (kg/m <sup>3</sup> )	2615	2665	2676
Zapreminska masa u rastresitom stanju (kg/m <sup>3</sup> )	1486	1426	1382
Zapreminska masa u zbijenom stanju (kg/m <sup>3</sup> )	1815	1620	1525
Upijanje vode (%)	0.87	0.20	0.20
Oblik zrna po Fery-u		0.38	
Sadržaj slabih zrna		nema	
Sadržaj grudvi gline		nema	
Sadržaj lakih čestica		nema	
Sadržaj organskih materija		nema	
Habanje po Los Angeles-u		23.5	
Drobljivost u cilindru		24.0	
Sadržaj čestica ispod 0.09mm	7.80	1.25	0.20

Rezultati ispitivanja fizičko-mehaničkih karakteristika upotrebljenog cementa prikazani su u tabeli 5.3.2.3. Konačno, za spravljanje betona je dozirano 485 kg cementa po m<sup>3</sup> betona sa vodocementnim faktorom W/C=0.35 za oba nosača.

**Tabela 5.3.2.3. Karakteristike upotrebljenog cementa**

Fizičko-mehaničke karakteristike	Rezultati
Voda za standardnu konzistenciju (%)	27.2
Početak vezivanja (minuta)	172
Kraj vezivanja (minuta)	410
Stalnost zapremine (da/ne)	da
Finoća mliva po Blaine-u (cm <sup>2</sup> /gr)	3200
Čvrstoća pri pritisku poslije 28 dana (MPa)	37.5
Čvrstoća na zatezanje pri savijanju poslije 28 dana (MPa)	7.4

Za spravljanje betonske mešavine za izvođenje eksperimentalnih modela upotrebljena je voda za piće iz gradskog vodovoda, pa nije vršena hemijska analiza.

## 5.4. IZRADA DVOPOJASNIH NOSAČA

Beton za izradu nosača je spravljan u Fabrici betona "Cijevna-komerc" u Podgorici, koja je udaljena oko 3 km. Transport svežeg betona je obavljen automikserom do platoa ispred laboratorije na Građevinskom fakultetu - Podgorica gde su betonirani elementi nosača i kontrolnih betonskih tela (*slika 5.4.3.*). Za zbijanje betona je korišćen pervibrator sa prečnikom igle od 50 mm. Svi elementi konstrukcije nosača kao i kontrolna tela izbetonirani su u jednom danu. Prethodno su izbetonirani oslonački elementi za postavljanje nosača u položaj za ispitivanje. Kontrolna tela su urađena u sledećim serijama: četiri kocke ivice 20 cm, četiri kocke ivice 15 cm, četiri cilindra 15/30 cm i šest prizmi 12/12/36 cm.



*Slika 5.4.1. Dispozicija oba nosača ispred laboratorije GF u Podgorici*



*Slika 5.4.2. Oplata i armatura za jedan model-nosač*

Sva prethodna i kontrolna tela su izbetonirana u standardnim čeličnim kalupima, a za ugrađivanje betona u kalupe korišćen je pervibrator sa prečnikom igle od 30 mm.



*Slika 5.4.3. Oprema i kontrolna tela u laboratoriji*

Betonska mešavina za izradu modela-nosača i prethodnih kontrolnih tela je projektovana sa istim karakteristikama u pogledu granulometrijskog sastava, vrste i količine cementa kao i vodocementnog faktora. Konzistencija svežeg betona kontrolisana je na mestu ugrađivanja i konstatovana je plastična konzistencija sa sleganjem konusa 8 do 9 cm.

Svaki od nosača- modela radi se iz dva dela, pa nakon očvršćavanja i postizanja zahtevane MB vrši se njegovo spajanje u slemenu zavrtnjevima i postavljanje donjeg pojasa-čelične zatege sa razupiračima. Ovo kompletiranje nosača vrši se na posebnim jarmovima na kojima se elementi za formiranje nosača geodetski doteruju u pravac, a jarmovima se obezbeđuje tačna geometrija nosača, nagib i položaj zatege. Ugrađivanje betona je izvršeno u pripremljenim kalupima od "blažujke" - oplata debljine  $d=20$  mm (slika 5.4.2.). Oplata delova nosača je bila fiksirana za pod platoa i geodetski nivelisana kako bi se izbegao uticaj nepovoljne ekscentričnosti na nosačima. Inače, nosač je spoljno statički određen.



*Slika 5.4.4. Izgled formiranog nosača na privremenim osloncima*

Nosači su montažni, spojeni u slemenu prednapregnutim vijcima 2x2M20, a ova veza je osposobljena i za prihvatanje momenata savijanja i normalnih i transverzalnih sila prema slici 5.4.5.



*Slika 5.4.5. Izgled veze nosača u slemenu*

Nakon ugrađivanja, beton je održavan 24 sata u uslovima visoke relativne vlažnosti i na temperaturi od oko 15 °C, nakon čega su modeli oslobođani od bočnih oplata. U narednih 7 dana

nastavljeno je negovanje izbetoniranih nosača, nakon čega je izvršeno njihovo "opremanje" mernim mestima.

Nosači nakon spajanja AB elemenata u slemenu, zavrtnjevima i fiksiranjem zatege i vertikalna formiraju jednu celinu. Ovo se obavlja preko privremenih oslonaca na kojima se vrši kompletiranje nosača. ( *slika 5.4.6.* )



*Slika 5.4.6. Izgled kompletnog nosača na privremenim osloncima nakon montaže elemenata nosača*

Nakon formiranja nosača na privremenim osloncima, oni se, autodizalicom, dižu i postavljaju na pripremljene betonske oslonce, prema *slici 5.4.7.*

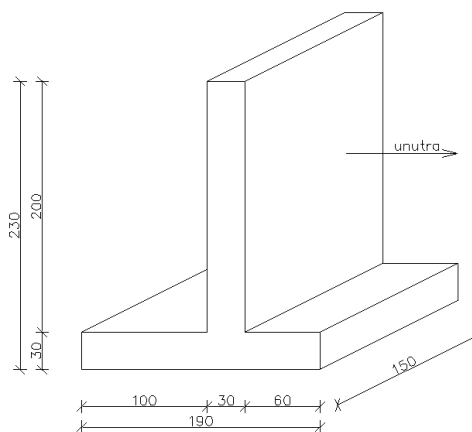


*Slika 5.4.7. Izgled nosača na betonskim osloncima pre merenja i nanošenja faza opterećenja*

Ovi betonski oslonci su visine 230cm, tako da od zatege do platoa imamo visinu 145cm. Prethodno je na ove oslonce postavljena metalna ploča za ravnomernije naleganje debljine 12mm.

Betonski oslonci na koje naležu izbetonirani nosači dati su na slici 5.4.9.

Postavljanjem nosača na betonske oslonce



*Slika 5.4.9. Izgled oslonca za nosače*

pristupa se izradi potrebne radne skele i "opremanju" nosača mernom tehnikom (slika 5.4.10)





*Slika 5.4.10. Opremanje nosača mernom tehnikom*

Kada se završilo sa opremanjem nosača mernom tehnikom, postavljaju se priveznice za kačenje tegova. Opterećenje nosača i kačenje tegova vršeno je pomoću autodizalice ( *slika 5.4.11.* )



*Slika 5.4.11. Deo opterećenja na nosaču*

## 5.5. PROGRAM EKSPERIMENTALNIH ISTRAŽIVANJA DVOPOJASNIH NOSAČA

Za svaki nosač-model ( model A i model B ) radi se program eksperimentalnih istraživanja koji sadrži dispoziciju modela, mernih mjesta i opterećenja, kao i način registrovanja mernih podataka i predstavlja poseban dokument programa. Osim toga, programom eksperimentalnih istraživanja obuhvaćeno je, takođe:

- Probno ispitivanje nosača od običnog betona – saniranog na mestu ulaska zatege u oslonački deo nosača. Ispitivanje realizovano u 2008. godini. Ovde se radi o ispitivanju nosača koji je saniran na delu ulaska zatege u oslonački deo. Naime, na jednom objektu je došlo do rušenja nosača zbog izvlačenja zetege iz oslonačkog dela, pa je cela serija nosača sanirana (*slika 5.5.1*). Raspon ovog nosača je, takođe, 20.00m



*Slika 5.5.1. Sanirani nosač u oslonačkom delu*

Cilj ovog eksperimenta je:

- Istraživanje ponašanja saniranog nosača kako bi se mogla uspešno izvršiti sanacija velikog broja srušenih nosača pod teretom snega,
- provera funkcionisanja dela opreme i merne tehnike za ispitivanje,
- utvrđivanje karaktera i vrste loma na nosaču,
- analiza mogućnosti realizacije ovakvog eksperimenta.

Inače:

- Ispitivanje je sprovedeno na dva modela u prirodnoj veličini, raspona 20.00m (model **A** i model **B** ) sa nanošenjem kratkotrajnog opterećenja do loma, pri starosti betona većoj od 35dana. Ispitivanje realizovano u 2008. godini.

- Ispitivanje serije standardnih kontrolnih betonskih tela (*kocke, prizme, cilindri*) pod dejstvom kratkotrajnog opterećenja za određivanje svih relevantnih naponsko-deformacijskih karakteristika betona.
- Ispitivanje serije standardnih kontrolnih epruveta armature, koja će se koristiti u eksperimentu, za određivanje relevantnih naponsko-deformacijskih karakteristika armature.

Oba nosača – modela ( model **A** i model **B** ) sa kratkotrajnim opterećenjem se ispituju na platou ispred laboratorije za materijale i konstrukcije Građevinskog fakulteta u Podgorici. Sva kontrolna merenja na epruvetama od betona i armature obavljena su u istoj laboratoriji.

### **5.5.1. MERENJA NA NOSAČIMA A i B POD OPTEREĆENJIMA**

Za svaki nosač se vrše vrlo obimna merenja u toku procesa opterećivanja do loma:

- Dilatacije u podužnoj armaturi nosača se mere mehaničkim deformetrom "Pfender" tačnosti 1/1000 mm i baze 100 mm, prema utvrđenoj šemi,
- Dilatacije u betonu na utvrđenim mestima-presecima deformetrom "Pfender" tačnosti 1/1000 mm i baze 100 mm,
- Deformacija nosača (*ugib*) geodetskim instrumentom-preciznim nivelmanom.

Merenja se vrše nakon nanošenja opterećenja u inkrementima, sve do loma, prema ranije utvrđenim fazama opterećenja.

### **5.5.2. REZULTATI ISPITIVANJA KONTROLNIH BETONSKIH TELA**

Eksperimentalna istraživanja prati serija standardnih kontrolnih uzoraka za utvrđivanje mehaničkih karakteristika ugrađenog betona i armature, koji se izrađuju pri betoniranju svakog od nosača A i B. Ispitivanja na betonu su vršena u vreme ispitivanja ovih nosača. Ispitivanja su obuhvatila:

#### **beton:**

- čvrstoća betona pri pritisku
- čvrstoća betona na zatezanje pri savijanju
- modul elastičnosti betona
- radni dijagram betona

#### **armatura:**

- karakteristična granica razvlačenja
- karakteristična čvrstoća pri zatezanju
- modul elastičnosti
- radni dijagram čelika

Ova ispitivanja su urađena po posebnom programu koji je utvrđen pre početka betoniranja modela i kontrolnih betonskih tela. Ovaj program istraživanja je u potpunosti realizovan.

## 5.6. OPREMA ZA ISPITIVANJE I MERNI TEHNIKA

### 5.6.1. NAČIN NANOŠENJA OPTEREĆENJA DO LOMA

Za ispitivanje nosača pod dejstvom opterećenja urađeni su metalni jarmovi koji prate geometriju nosača i na njih se nanose dizalicom elementi, koji se nakon doterivanja u tačan geometrijski oblik spajaju u jednu celinu. Spajanje se vrši zavrtnjevima u slemenu, a nakon toga se vrši fiksiranje zatege i vertikalna-razupirača. Kad se izvršilo kompletiranje nosača, dizalicom se nosač premešta na mesto za ispitivanje i apliciranje opterećenja.

Mesto za nanošenje opterećenja po pojedinim fazama je konstruisano od drvene skele sa mogućnošću nesmetanog nanošenja tegova i mogućnosti sigurnog pristupa svim mernim mestima.

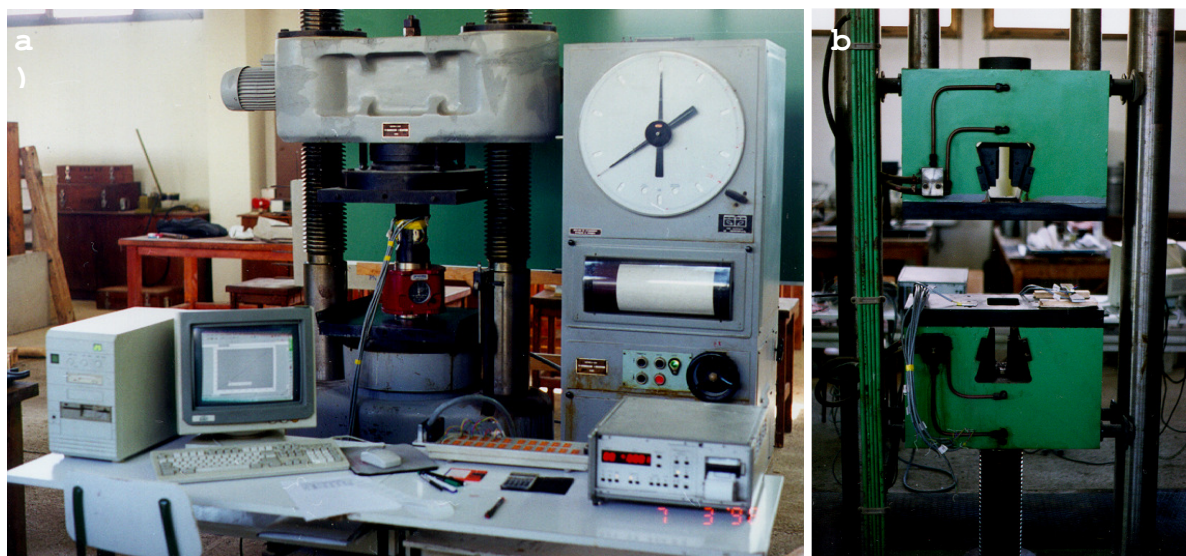


*Slika 5.6.1.1. Izgled nosača spremnog za nanošenje opterećenja*

Skela je data radi zadržavanja nosača u slučaju krtoeg iznenadnog loma i radi lakšeg pristupa mernim mestima na nosaču. Ona je niža od donje ivice gornjeg pojasa 10-tak cm.

### 5.6.2. OPREMA ZA ISPITIVANJE KONTROLNIH BETONSKIH TELA

Za određivanje mehaničkih karakteristika na kontrolnim betonskim telima (*čvrstoća pri pritisku, čvrstoća na zatezanje pri savijanju, radni dijagram betona, modul elastičnosti*) korišćena je hidraulična presa nosivosti 250 tona (slika 5.6.2.1.).



*Slika 5.6.2.1. Hidraulična presa i kidalica u laboratoriji*

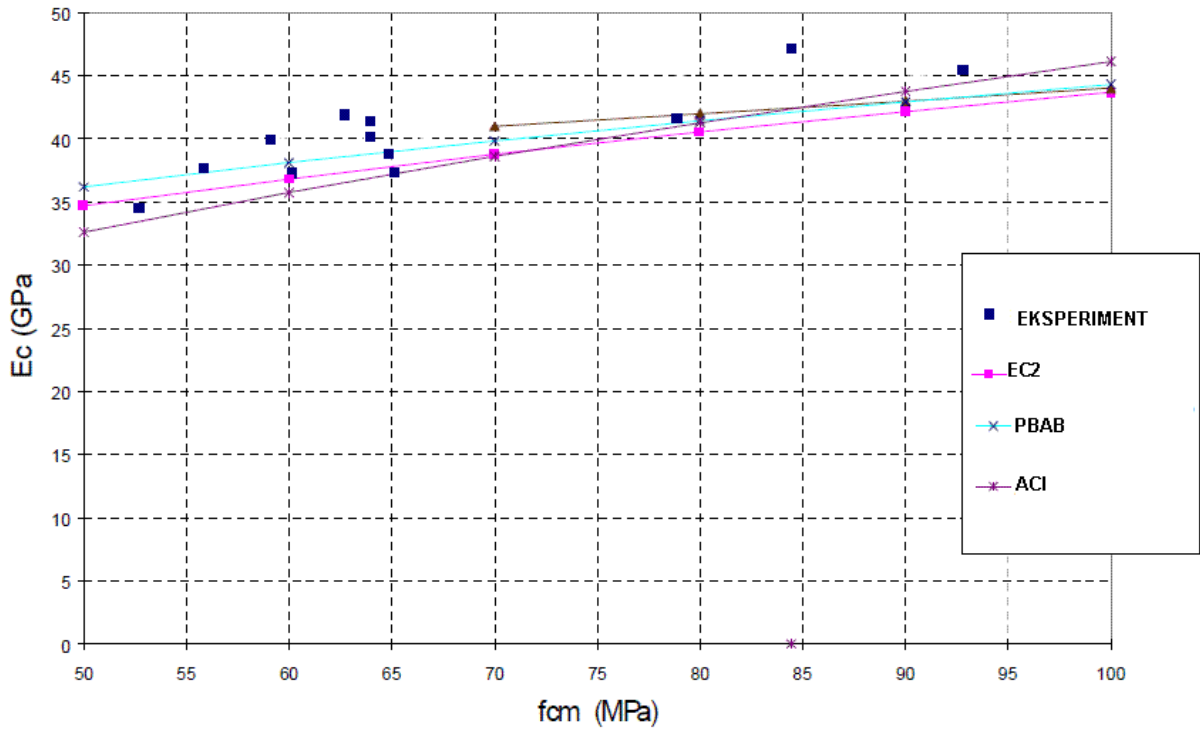
Za određivanje mehaničkih karakteristika na kontrolnim uzorcima armature (*granica velikih izduženja, granica kidanja, radni dijagram čelika, modul elastičnosti*) korišćena je laboratorijska kidalica kapaciteta 100 tona (slika 5.6.2.1.). Karakteristične vrednosti i radni dijagram čelika RA400/500, koji su dobijeni ispitivanjem kontrolnih uzoraka, prikazana je na slici 5.3.1.1.

Najvažnije karakteristike betona dobijene statističkom obradom rezultata ispitivanja na kontrolnim betonskim telima prikazani su u tabeli 5.6.2.1.

*Tabela 5.6.2.1. Vrednosti dobijene na kontrolnim betonskim telim, dobijene pri starosti betona od 28 dana*

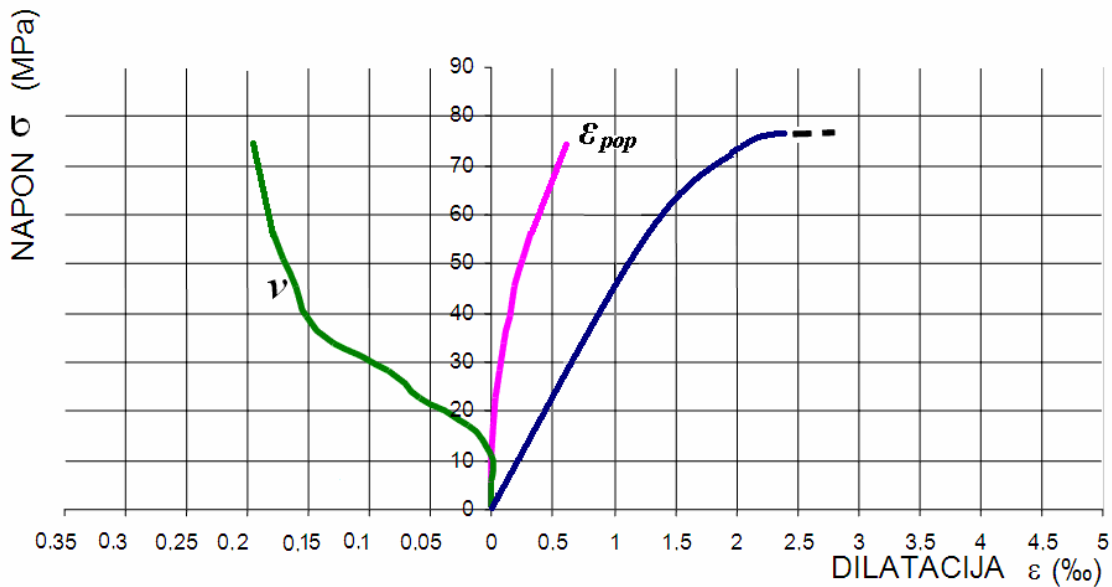
MEŠAVINA BETONA		I	II	III
Čvrstoća betona pri pritisku	$f_b$ (MPa)	65.18	75.57	78.12
Čvrstoća betona na zatezanje pri savijanju	$f_{bzs}$ (MPa)	4.96	5.15	5.45
Modul elastičnosti betona	$E_b$ (GPa)	37.68	39.21	40.56
Poison-ov koeficijent pri $\sigma/f_b=0.5$	$\nu$	0.195	0.210	0.220

Modul elastičnosti betona ispitivan je na betonskim prizmama 12 x 12 x 36 cm. Zavisnost napona i deformacija je prava linija za opterećenje koje ne prelazi 50% opterećenja loma, pa važi linearna teorija tečenja. Na slici 5.6.2.2. dat je uporedni pregled zavisnosti modula elastičnosti i čvrstoće betona prema PBAB, EC2, ACI i rezultatima ispitivanja. Ova ispitivanja su sprovedena pri jednakoj starosti betona, koja je iznosila 28 dana.



Slika 5.6.2.2. Zavisnost modula elastičnosti i čvrstoće betona pri pritisku

Na sledećoj slici 5.6.2.3 daje se radni dijagram betona za čvrstoću betona na pritisak od 75MPa u trenutku ispitivanja nosača A i B, pri starosti betona od 35 dana.ε



Slika 5.6.2.3. Radni dijagram betona RDB ( $\sigma_b$ - $\varepsilon_b$ ), zatim  $\sigma_b$ - $\varepsilon_{pop}$  i Poission-ov koeficijent  $\nu$

Računska čvrstoća betona pri pritisku zavisi od karakteristične čvrstoće betona. Usled razlike čvrstoće betona u nosačima i kontrolnim telima, zbog uslova okoline, načina ugradnje

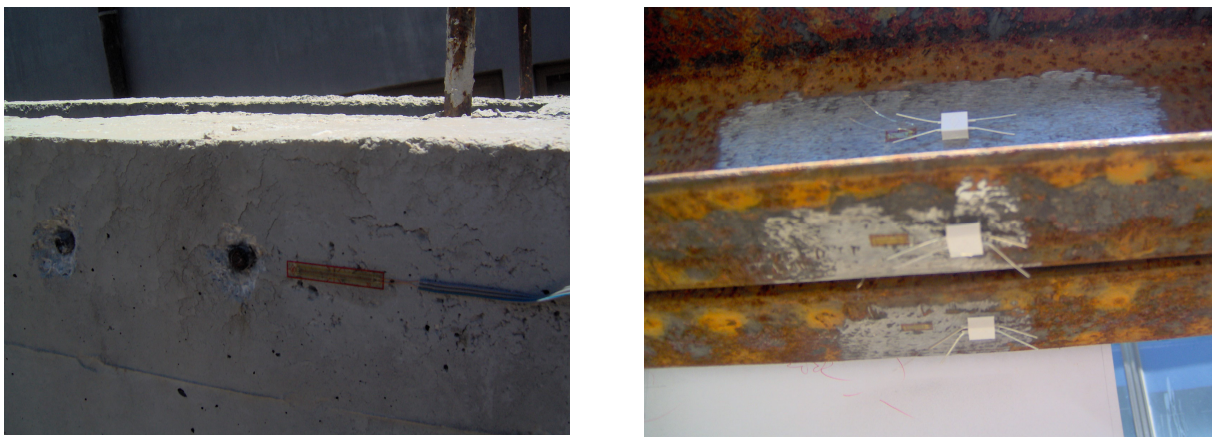
betona, načina opterećenja i drugo vrši se smanjenje čvrstoće betona sa karakteristične na računsku čvrstoću betona.

### 5.6.3. MERNA TEHNIKA

Merenje dilatacija u betonu i podužnoj armaturi obavljena su mehaničkim deformetrima tipa "Pfender", sa tačnošću čitanja od 1/1000 mm i bazom od 100 mm. Ova merna mjesta su ravnomjerno raspoređena po nosaču-modelu. Merna mesta na armaturi su postavljena indirektno preko navarenih "izvoda" koji "prodiru" kroz zaštitni sloj betona. Pri tome su ovi "izvodi" (*delovi glatke armature prečnika 8mm*) odvojeni od okolnog betona navlačenjem gumenih prstenova koji se nakon očvršćavanja betona uklanjaju. Za fiksiranje mernih mesta na površini betona i armaturnih izvoda korišćen je specijalni dvokomponentni lepak proizvođača "Hotinger" iz Nemačke.

Merenje ugiba vršeno je preciznim nivelmanskim instrumentom. Na zidovima susedne laboratorije ugrađeni su i reperi za registrovanje ovih pomeranja. Prethodno su na nosaču ugrađeni metalni držači za letvu koja se na njih postavljala prilikom očitavanja ugiba za svaku fazu opterećenja

Osnovna šema i raspored mernih mesta na podužnoj armature gornjeg pojasa, zatezi, vertikalama i površini betona prikazani su na *slici 5.6.3.2.*



*Slika 5.6.3.1. Izgled mernih mesta na betonu i zatezi*

### 5.6.4. OSTALA MERENJA

Na nosačima je pored merenja dilatacija i ugiba merena i širina prslina. Registrovanje pojave i širine prslina vršeno je na modelima u inkrementima za svaku fazu opterećanja. Merenje širine prslina vršeno je lupom sa tačnošću od 0.025 mm.

### 5.6.5. TOK EKSPERIMENTA

Nosači se nakon opremanja mernom tehnikom postavljaju na oslonce za ispitivanje, koji su za ovu svrhu posebno izbetonirani. Završetkom opremanja nosača i postavljanjem užadi sa specijalnim priveznicama za "kačenje" tereta, izvršen je detaljan pregled nosača, kao i kontrola veza i spojeva elemenata na nosaču i izvršeno prvo "nulto" očitavanje dilatacija i ugiba nosača.



*Slika 5.6.5.1. Izgled nosača bez opterećenja (samo sopstvena težina)*

Inače, redosled nanošenja opterećenja i očitavanja instrumenata bio je:

1. Merenje i očitavanje na svim mernim mestima, za sopstvenu težinu nosača. U toku čitanja instrumenata temperatura vazduha je iznosila 26°C.
2. Nanošenje opterećenja II faze i čitanje na svim mernim mestima. U toku čitanja temperatura vazduha je iznosila  $t = 25^{\circ}\text{C}$  (pregled nosača)



3. Nanošenje opterećenja III faze i čitanje na svim mernim mestima. U toku čitanja temperatura vazduha je iznosila  $t = 27^{\circ}\text{C}$  ( pregled nosača )

4. Nanošenje opterećenja IV faze i čitanje na svim mernim mestima. U toku čitanja temperatura vazduha je iznosila  $t = 24^{\circ}\text{C}$   
Ukupno opterećenje ove faze je  $g + 160.00\text{kN} + 8.80\text{kN/m}$  ( ploča )  
Kod ovog opterećenja uočena je prva prslina

5. Nanošenje opterećenja V faze i čitanje na svim mernim mestima sa detaljnim pregledom konstrukcije. U toku čitanja temperatura vazduha je iznosila  $t = 26^{\circ}\text{C}$

6. Nanošenje opterećenja VI faze i očitavanje na svim mernim mestima sa detaljnim pregledom konstrukcije, montažnih veza, stanja geometrije nosača. U toku čitanja temperatura vazduha je iznosila  $t = 26^{\circ}\text{C}$

7. Nanošenje opterećenja VII faze i očitavanje na svim mernim mestima. U toku čitanja temperatura vazduha je iznosila  $t = 26^{\circ}\text{C}$ . Izvršen detaljan pregled konstrukcije i registrovanje uočenih prslina.

8. Nanošenje opterećenja VIII faze i očitavanje na svim mernim mestima. U toku čitanja temperatura vazduha je iznosila  $t = 27^{\circ}\text{C}$

Inače, ispitivanje jednog nosača trajalo je četiri dana, pri praktično konstantnoj temperaturi vazduha od  $24$  do  $27^{\circ}\text{C}$ . Kompletiranje jednog nosača (*slika 5.4.7.*) i postavljanje na mesto za ispitivanje trajalo je jedan dan - 10 sati, a nanošenje opterećenja do loma trajalo je narednih četiri dana uzimajući u obzir pomeranje dizalice i viljuškara kao i skučen prostor za rad ovih mašina. Ipak, može se smatrati da je aplicirano opterećenje kratkotrajnog karaktera.

Brzina nanošenja opterećenja po inkrementu-fazi, je iznosila 60min. Merenja su počela da se vrše oko 15 minuta nakon nanošenja opterećenja zbog eventualnog stabilizovanja deformacija. Mesto i položaj ispitivanja oba nosača su prikazani na *slici 5.6.5.2.*



*Slika 5.6.5.2. Izgled nosača A i B ispred laboratorije GF u Podgorici*

Nosači A i B su istovremeno betonirani, pa su im i kontrolna betonska tela ista. Prvo je ispitivan nosač A, pa odmah za njim nosač B, jer nije bilo dovoljno tegova za nanošenje opterećenja istovremeno na oba nosača. Vremenski razmak između ispitivanja nosača je osam dana. Zbog toga što su nosači ispitivani pri starosti od 35 dana, nije uziman u obzir prirast čvrstoće betona na pritisak nakon 28 dana.

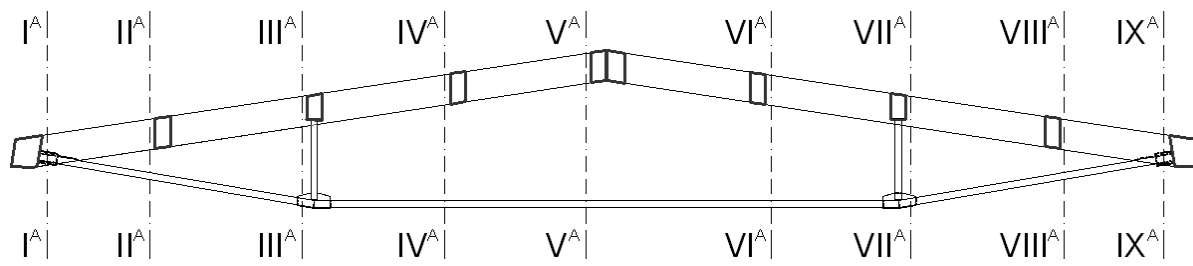
Svi podaci su direktno unošeni u računar, pa su se u toku eksperimenta mogle pratiti relevantne zavisnosti u vidu dijagrama na monitoru.

Na slici 5.6.5.3. se vidi deo opterećenog nosača kao i način "kačenja" tegova.

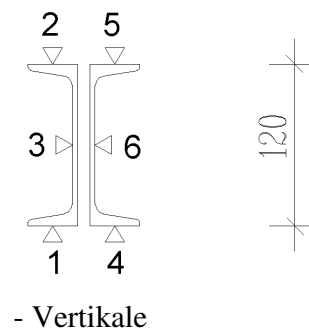
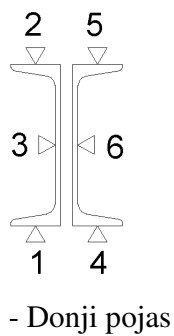
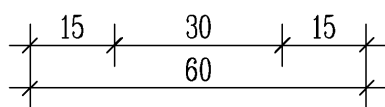
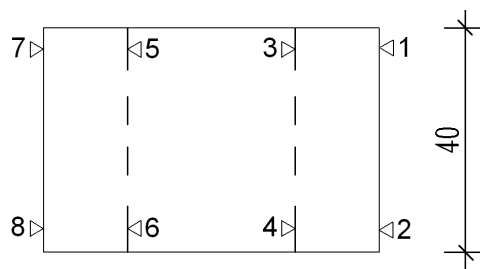


*Slika 5.6.5.3. Izgled nosača u toku ispitivanja pri III fazi opterećenja*

### 5.6.6. REZULTATI MERENJA NOSAČA A



Gornji pojas

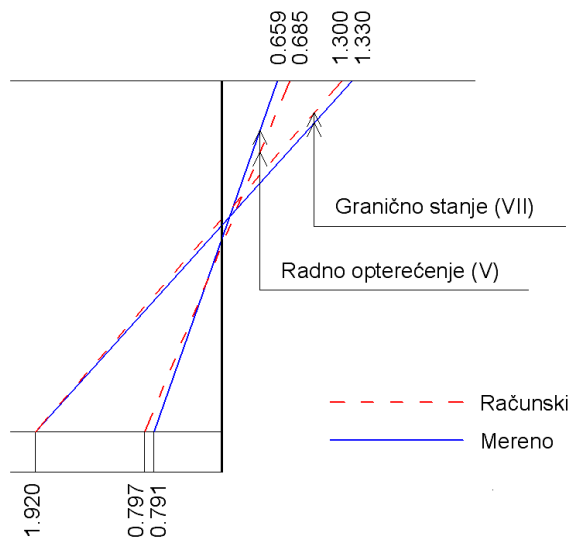


Slika 5.6.6.1. Raspored mernih mesta

*Tabela 5.6.6.1.- Vrednosti merenih dilatacija za pojedine nivoe opterećenja  
 $[\varepsilon] \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$*

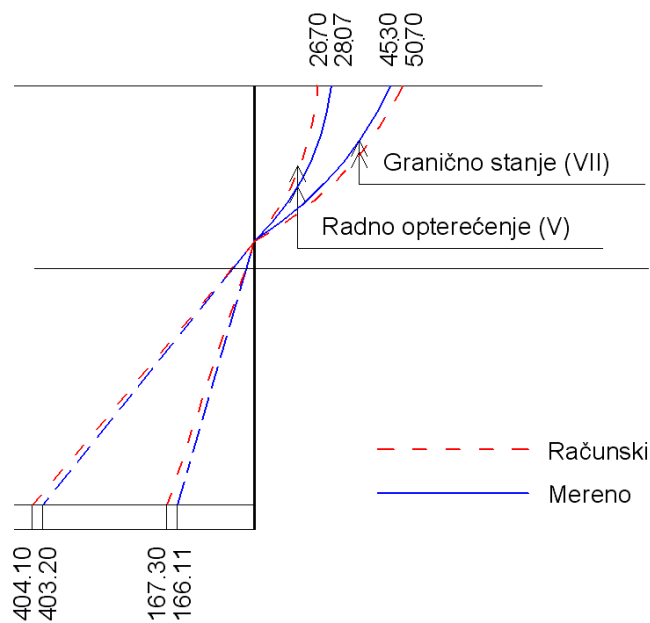
NOSAČ	PRESECI	MERNO MESTO	ŠEMA OPTEREĆENJA						
			I	II	III	IV	V	VI	VII
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
"A"	I <sup>A</sup> -I <sup>A</sup>	1	0205	213	217	223	231	238	245
		2	0222	211	213	221	228	234	244
		3	0208	209	215	214	232	224	228
		4	0228	210	216	215	231	226	230
	II <sup>A</sup> -II <sup>A</sup>	1	0600	125	186	194	232	268	310
		2	-0472	-0965	-136	-0576	0114	0488	0948
		3	0595	126	184	196	234	270	312
		4	-0474	-0964	-138	-0573	0116	0490	0950
		5	0610	124	185	195	236	274	314
		6	-0479	-0966	-134	-0576	0115	0492	0950
		7	0615	122	187	197	238	272	316
		8	-0479	-0962	-136	-0578	0118	0494	0952
	III <sup>A</sup> -III <sup>A</sup>	1	0512	0866	120	138	185	202	248
		2	-0230	-0128	-0785	0285	0761	0931	151
		3	0510	0862	122	136	184	205	250
		4	-0226	-0126	-0787	0287	0763	0934	153
		5	0506	0864	124	138	188	207	252
		6	-0232	-0124	-0790	0288	0766	0936	153
		7	0508	0868	122	140	186	210	254
		8	-0224	-0122	-0789	0290	0764	0939	155
	IV <sup>A</sup> -IV <sup>A</sup>	1	0628	128	210	335	538	722	986
		2	-0582	-116	-215	-438	-795	-1300	-1890
		3	0626	126	212	338	536	725	988
		4	-0580	-114	-213	-440	-795	-1320	-1.920
		5	0632	124	214	338	538	727	930
		6	-0584	-116	-216	-440	-798	-1340	-1.940
		7	0634	126	212	340	540	729	992
		8	-0586	-118	-218	-441	-800	-1330	-1.930

NOSAČ	PRESECI	MERNO MESTO	ŠEMA OPTEREČENJA						
			I	II	III	IV	V	VI	VII
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
"A"	V <sup>A</sup> -V <sup>A</sup>	1	- 00710	0290	0800	144	261	320	441
		2	0408	0486	0250	0825	- 0286	- 0528	- 102
		3	- 00715	0292	0810	146	263	322	443
		4	0406	0488	0230	0850	- 0284	- 0530	- 104
			00708	0294	0845	146	265	324	445
		6	0406	0490	0250	0840	- 0288	- 0532	- 106
		7	- 00712	0292	0840	148	268	245	447
		8	0408	0488	0240	0870	- 0286	- 0534	- 105
	VI <sup>A</sup> -VI <sup>A</sup>	1	0638	129	208	332	536	720	982
		2	- 0581	- 115	- 214	- 437	- 788	- 1290	- 1892
		3	0628	131	210	334	537	724	984
		4	- 0582	- 113	- 216	- 435	- 786	- 1305	- 1894
		5	0630	128	212	336	535	726	986
		6	- 0583	- 117	- 217	- 439	- 790	- 1300	- 1895
		7	0632	127	215	339	538	725	989
		8	- 0584	- 119	- 214	- 440	- 792	- 1310	- 1897
	VII <sup>A</sup> -VII <sup>A</sup>	1	0510	0862	121	136	182	210	249
		2	- 0231	- 0126	- 0785	0283	0760	0932	151
		3	0511	0860	124	134	184	212	246
		4	- 0234	- 0124	- 0788	0286	0762	0934	155
		5	0507	0859	125	137	185	214	250
		6	- 0235	- 0127	- 0791	0284	0764	935	154
		7	0509	0862	127	135	187	216	254
		8	- 0228	- 0129	- 0790	0289	0766	937	155
	VIII <sup>A</sup> -VIII <sup>A</sup>	1	0598	121	184	193	231	231	305
		2	- 0471	- 0961	- 134	- 0574	0113	0487	0946
		3	0600	124	186	195	233	233	309
		4	- 0475	- 0963	- 136	- 0571	0115	0485	0950
		5	0605	123	185	192	235	235	312
		6	- 0478	- 0965	- 133	- 0572	0114	0484	0952
		7	0608	125	183	194	237	237	316
		8	- 0480	- 0964	- 135	- 0575	0116	0488	0954
	IX <sup>A</sup> - IX <sup>A</sup>	1	0210	294	298	303	312	318	327
		2	0216	284	287	293	301	307	316
		3	0213	267	266	267	267	268	269
		4	0214	277	278	278	279	281	279



$[\epsilon] \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$

*Slika 5.6.6.2 –Dijagram merenih i računskih dilatacija za radno opterećenje (V faza) i granično stanje nosivosti (VII) u preseku IV<sub>A</sub>-IV<sub>A</sub>*

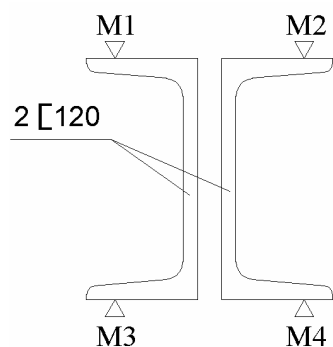


$\sigma \text{ [MPa]}$

*Slika 5.6.6.3 –Dijagram merenih i računskih napona za računsko opterećenje (V faza) i granično stanje nosivosti (VII) u preseku IV<sub>A</sub>-IV<sub>A</sub>*

### 5.6.7 NAPONI U ZATEZI-DONJI POJAS NOSAČA ( kosi deo)PRI RADNOM OPTEREĆENJU-V FAZA OPTEREĆENJA

Daju se dijagrami merenih napona u donjem pojasu-zatezi za presek na kosom delu zatege. Takođe, daju se naponi i sila u donjem pojasu od udara tega u sleme nosača, slobodnim padom sa 6.00m visine. Merenja vršena odmah nakon udara tega i 30 minuta nakon udara tega.



$$A = 34 \text{ cm}^2$$

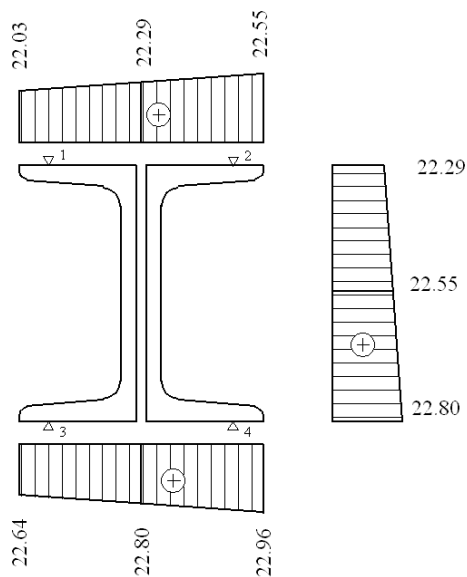
$$E = 2.1 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\Delta_{sr} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} ; p = 1 \cdot 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

$$\varepsilon = p \cdot \Delta_{sr}$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = 2.10 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta_{sr}$$

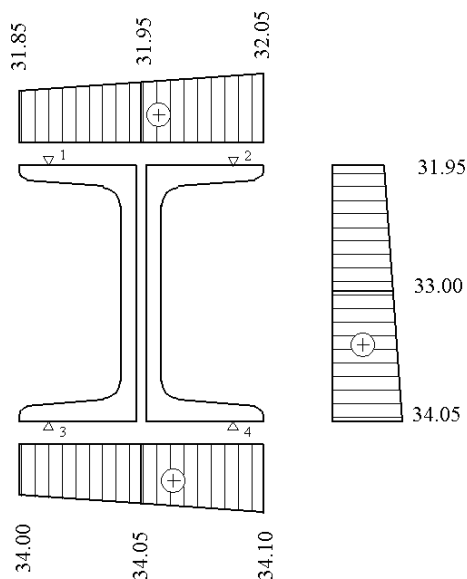
$$\sigma = 0.021 \cdot \Delta_{sr} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



$$\text{Sila u zatezi: } Z_M = A \cdot \sigma_{sr} = 34.0 \cdot 18.86 = 641.24 \text{ kN}$$

**Slika 5.6.7.1-** Dijagram normalnih napona u donjem pojasu- zatezi za eksploataciono opterećenje (V faza) - mereni

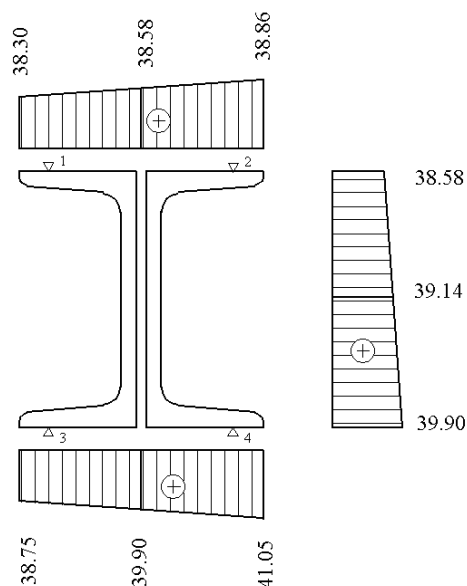
VII – ŠEMA OPTEREĆENJA-GRANIČNO STANJE NOSIVOSTI NOSAČA "A"



Sila u zatezi:  $Z_M = A \cdot \sigma_{sr} = 34.0 \cdot 33.00 = 1122,00 \text{ kN}$

Slika 5.6.7.2- Dijagram normalnih napona u zatezi (kosi deo) za granično stanje nosivosti (VII)-mereni

NAPONI U ZATEZI ODMAH NAKON UDARA TEGA

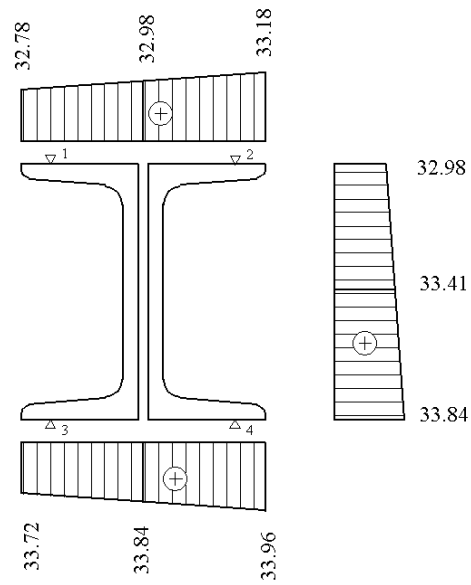


Sila u zatezi:  $Z_M = A \cdot \sigma_{sr} = 34.0 \cdot 39.14 = 1330,76 \text{ kN}$

Slika 5.6.7.3- Dijagram normalnih napona u zatezi odmah nakon udara tega-mereno



NAPONI U ZATEZI 30 min NAKON UDARA TEGA



Sila u zatezi:  $Z_M = 34.0 \cdot 33.41 = 1136.00 \text{ kN}$

Slika 5.6.7.4- Dijagram normalnih napona u zatezi 30 min nakon udara tega-mereno

## 6. ANALIZA TEORIJSKIH REZULTATA PONAŠANJA DVOPOJASNIH SISTEMA

### 6.1. ANALIZA STATIČKIH UTICAJA

Izvršena je teorijska analiza ponašanja dvopojasnog, i istovetnog kao u sprovedenom eksperimentu nosača raspona  $L=20.00\text{m}$  za razne nivoe opterećenja, za nosač "A" i "B". Analiza je izvršena u programu SAP 2000. Oba nosača su računata za iste šeme opterećenja. postoji neznatna razlika u postignutoj čvrstoći betona. Nosači su ispitivani pri starosti od 35 dana, jedan nosač je sa betonom od MB75MPa, a drugi sa MB78MPa. U tabeli 6.1. daje se pregled statičkih uticaja oba nosača, za pojedine faze opterećenja.

*Tabela 6.1. - Pregled statičkih uticaja za oba nosača*

Nosač	Faze opterećenja	Presek	M [kNm] Gornji pojas	N [kN] Gornji pojas	Z [kN] Donji pojas	V [kN] Vertikale	ugibi [mm]	Nosač	M [kNm] Gornji pojas	N [kN] Gornji pojas	Z [kN] Donji pojas	V [kN] Vertikale	ugibi [mm]	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Nosač „A“	I faza opterećenja	I - I	0,00	-	-	-	0,00	Nosač „B“	0,00	-	-	-	0,00	
		II - II	14,00	95,91	-	-	5,70		13,90	95,10	-	-	5,75	
		III - III	11,48	96,91	-	-	9,10		11,70	95,77	-	-	9,22	
		IV - IV	14,82	95,00	-	-	10,40		13,88	94,12	-	-	10,35	
		V - V	-8,67	94,00	-	-	10,30		-8,92	93,05	-	-	10,38	
		X - X	-	-	95,24	-	-		-	-	94,10	-	-	
		XIII - XIII	-	-	-	15,83	-		-	-	-	-	12,77	-
	II faza opterećenja	I - I	0,00	-	-	-	0,00		0,00	-	-	-	-	0,00
		II - II	28,83	198,92	-	-	8,70		28,10	197,86	-	-	-	8,85
		III - III	18,26	201,92	-	-	14,20		17,98	201,12	-	-	-	14,38
		IV - IV	30,58	198,62	-	-	16,70		29,45	197,36	-	-	-	16,65
		V - V	-4,00	196,70	-	-	16,80		-3,50	196,05	-	-	-	16,90
		X - X	-	-	199,34	-	-		-	-	198,87	-	-	-
		XIII - XIII	-	-	-	31,08	-		-	-	-	-	30,78	-
	III faza opterećenja	I - I	0,00	-	-	-	0,00		0,00	-	-	-	-	0,00
		II - II	43,00	302,31	-	-	11,70		42,10	303,25	-	-	-	11,74
		III - III	25,05	306,84	-	-	19,20		23,16	306,10	-	-	-	19,28
		IV - IV	49,63	302,48	-	-	23,10		47,28	301,96	-	-	-	23,15
		V - V	12,48	298,24	-	-	23,40		11,97	297,88	-	-	-	23,51
		X - X	-	-	303,45	-	-		-	-	303,91	-	-	-
		XIII - XIII	-	-	-	48,43	-		-	-	-	-	48,00	-

Nosáč		Faze opterećenja	Presek	M [kNm] Gornji pojas	N [kN] Gornji pojas	Z [kN] Donji pojas	V [kN] Vertikale	ugibi [mm]	Nosáč		M [kNm] Gornji pojas	N [kN] Gornji pojas	Z [kN] Donji pojas	V [kN] Vertikale	ugibi [mm]				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14						
Nosáč „A „		IV faza opterećenja						I - I	0,00	-	-	-	0,00	0,00	-	-	-	0,00	
								II - II	43,30	414,62	-	-	14,20	42,12	414,10	-	-	-	14,24
								III - III	23,38	424,08	-	-	24,30	21,26	423,96	-	-	-	24,40
								IV - IV	79,43	419,61	-	-	30,40	78,87	418,77	-	-	-	30,48
								V - V	26,40	410,18	-	-	31,30	25,89	409,66	-	-	-	31,35
								X - X	-	-	416,20	-	-	-	-	415,98	-	-	-
								XIII - XIII	-	-	-	67,49	-	-	-	-	66,87	-	-
		V faza opterećenja						I - I	0,00	-	-	-	0,00	0,00	-	-	-	0,00	
								II - II	42,59	637,00	-	-	19,00	40,12	636,80	-	-	-	19,20
								III - III	22,94	656,04	-	-	34,10	23,12	658,25	-	-	-	34,18
								IV - IV	125,42	643,51	-	-	44,70	137,96	643,88	-	-	-	44,62
								V - V	54,33	631,61	-	-	46,60	53,85	632,48	-	-	-	46,54
								X - X	-	-	639,46	-	-	-	-	637,39	-	-	-
								XIII - XIII	-	-	-	105,24	-	-	-	-	104,96	-	-
		VI faza opterećenja						I - I	0,00	-	-	-	0,00	0,00	-	-	-	0,00	
								II - II	42,23	752,55	-	-	21,40	40,18	754,60	-	-	-	21,52
								III - III	23,24	747,80	-	-	39,10	28,16	-	-	-	39,35	
								IV - IV	168,22	757,95	-	-	51,90	169,50	758,38	-	-	-	51,82
								V - V	68,26	743,56	-	-	54,40	70,33	756,43	-	-	-	54,58
								X - X	-	-	752,21	-	-	-	-	754,28	-	-	-
								XIII - XIII	-	-	-	124,30	-	-	-	-	124,87	-	-
VII faza opterećenja						I - I	0,00	-	-	-	0,00	0,00	-	-	-	0,00			
						II - II	41,52	974,94	-	-	26,10	43,75	975,00	-	-	-	26,25		
						III - III	19,00	1005,12	-	-	49,90	20,00	1014,15	-	-	-	48,96		
						IV - IV	230,25	1095,88	-	-	66,40	235,00	1008,20	-	-	-	66,54		
						V - V	96,18	965,00	-	-	70,10	98,16	971,00	-	-	-	70,48		
						X - X	-	-	975,47	-	-	-	-	978,21	-	-	-		
						XIII - XIII	-	-	-	162,05	-	-	-	-	164,48	-	-		
		Nosáč „B „																	

## 6.2. ANALIZA GRANIČNE NOSIVOSTI

Kao radno, eksploataciono opterećenje usvojeno je projektovano opterećenje po šemi opterećenja V. Najveći uticaji u nosaču za radno opterećenje su u gornjem pojasu, u preseku IV-IV:

$$M = 125,42 \text{ kNm}$$

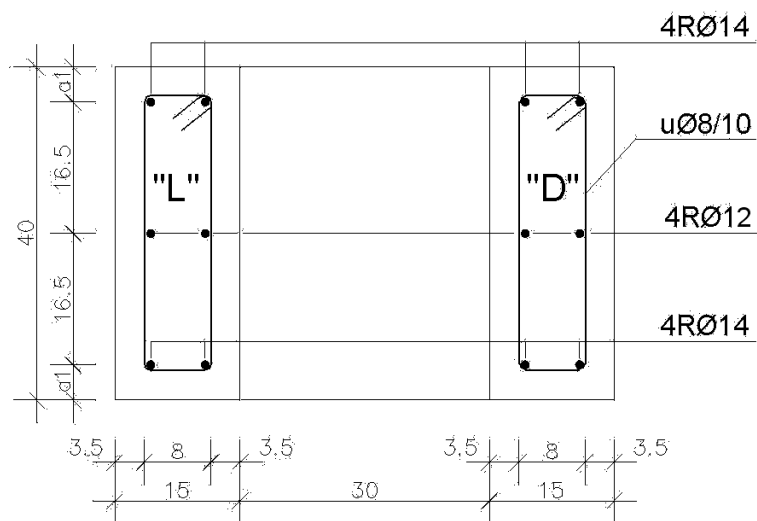
$$N = 643,51 \text{ kNm}$$

$$Z = 639,40 \text{ kNm}$$

Sa koeficijentima sigurnosti  $\gamma = \gamma_M = \gamma_N = 1,80$ , uticaji M, N i Z usled radnog opterećenja (faza opterećenja V) ne prekoračuju nosivost preseka prema teoriji loma.

$$m_u = \frac{\gamma \cdot M}{b \cdot d^2 \cdot f_B} = \frac{1,8 \cdot 125,42 \cdot 10^2}{30 \cdot 40^2 \cdot 4} = 0,1175$$

$$n_u = \frac{\gamma \cdot N}{b \cdot d \cdot f_B} = \frac{1,8 \cdot 643,51}{30 \cdot 40 \cdot 4} = 0,2413$$



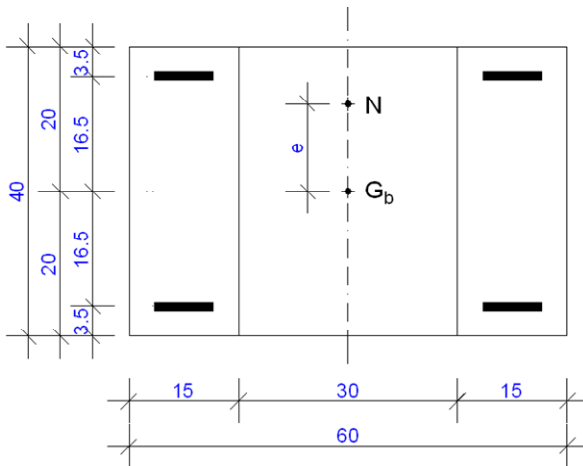
Slika 6.2.1. -.Usvojen poprečni presek gornjeg pojasa

### 6.3. ANALIZA STANJA NAPONA

U proračunu se daje analiza stanja napona u preseku IV-IV za stanje eksploatacije i VII fazu opterećenja, a za ostale faze opterećenja rezultati su prikazani u tabeli 6.3.1.

#### V – FAZA OPTEREĆENJA

##### - PRESEK IV - IV



$$M = 125.42 \text{ kNm} ; \quad N = 643.51 \text{ kN}$$

$$e = \frac{M}{N} = \frac{125.42}{643.51} = 19.48 \text{ cm}$$

$$e_{a1} = 20 + 19.48 - 3.50 = 35.98 \text{ cm}$$

$$e_{a2} = 19.48 - (20 - 3.50) = 2.98 \text{ cm}$$

$$A = 3 \cdot \left( \frac{e_{a1}}{h} - 1 \right) = 3 \cdot \left( \frac{35.98}{36.50} - 1 \right) = -0.0427$$

$$B = 6 \cdot 5.38 \cdot \left( \frac{35.98}{36.50} \cdot 0.56 + \frac{2.98}{36.50} \cdot 0.56 \right) \cdot 10^{-2} = 0.193$$

$$C = -6 \cdot 5.38 \cdot \left( \frac{35.98}{36.50} \cdot 0.56 + \frac{2.98}{36.50} \cdot 0.56 \cdot 0.096 \right) \cdot 10^{-2} = -0.179$$

$$s^3 - 0.0427s^2 + 0.193s - 0.179 = 0 ; \quad s = 0.462$$

$$J_{IIb} = \frac{0.462^2}{2} \left( 1 - \frac{0.462}{3} \right) = 0.09028$$

$$M_a = 125.42 + 643.51 \left( \frac{0.40}{2} - 0.035 \right) = 231.59 \text{ kNm}$$

$$\sigma_b = \frac{231.59 \cdot 10^{-2}}{30 \cdot 36.50^2} \cdot \frac{0.462}{0.09028 + 5.38 \cdot 0.56 \cdot 10^{-2} \cdot (0.462 - 0.096) \cdot (1 - 0.096)} =$$

$$\sigma_b = 2.67 \frac{kN}{cm^2} = 26.7 MPa$$

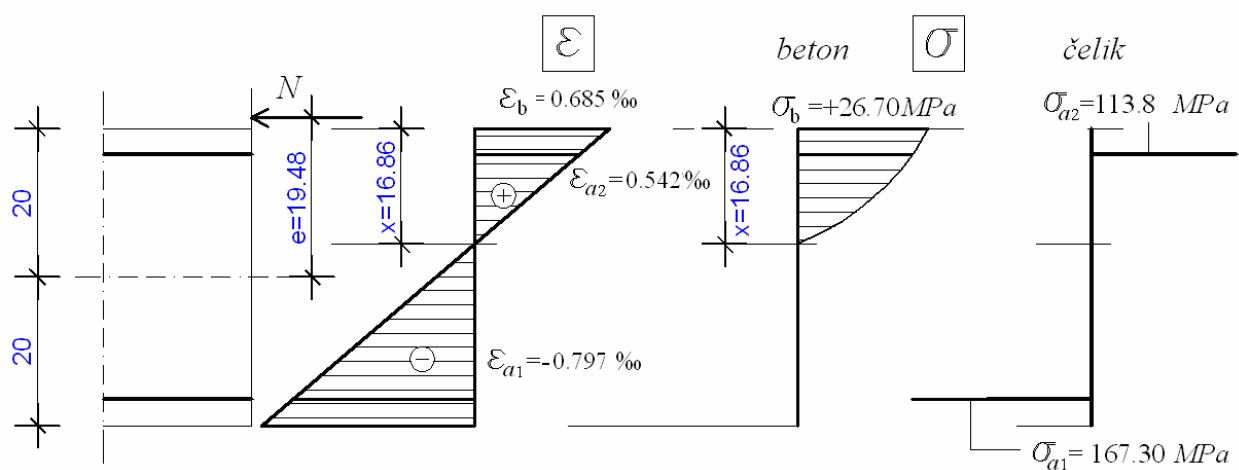
$$\sigma_{a1} = \mu \sigma_b \cdot \frac{1-s}{s} = 5.38 \cdot 2.67 \cdot \frac{1-0.462}{0.462} = 16.73 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma_{a2} = \mu \sigma_b \cdot \frac{s-\alpha_2}{s} = 5.38 \cdot 3.06 \cdot \frac{0.462-0.096}{0.425} = 11.38 \frac{kN}{cm^2}$$

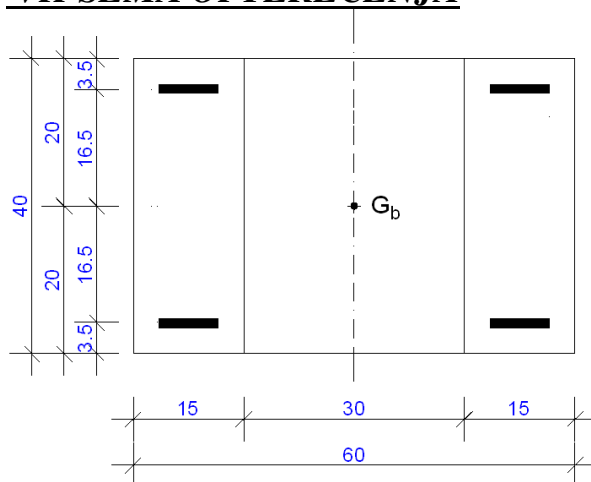
$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{2.67}{3.90 \cdot 10^3} = 0.685 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{a1} = \frac{\sigma_{a1}}{E_h} = \frac{16.73}{21 \cdot 10^3} = 0.797 \text{ ‰};$$

$$\varepsilon_{a2} = \frac{\sigma_{a2}}{E_h} = \frac{11.38}{21 \cdot 10^3} = 0.542 \text{ ‰}$$



## VII ŠEMA OPTEREĆENJA



### - PRESEK IV - IV

$$M = 230.25 kNm ; \quad N = 1000 kN$$

$$e = \frac{M}{N} = \frac{230.5}{1000} = 23 \text{ cm}$$

$$e_{a1} = 23 + 20 - 3.50 = 39.5 \text{ cm}$$

$$e_{a1} = 23 - 20 + 3.50 = 6.50 \text{ cm}$$

$$A = 3 \cdot \left( \frac{39.50}{36.50} - 1 \right) = 0.246; \quad B = 6 \cdot 5.38 \cdot \left( \frac{39.50}{36.50} \cdot 0.56 + \frac{6.50}{36.50} \cdot 0.56 \right) \cdot 10^{-2} = 0.228$$

$$C = -6 \cdot 5.38 \cdot \left( \frac{39.50}{36.50} \cdot 0.56 + \frac{6.50}{36.50} \cdot 0.56 \cdot 0.096 \right) \cdot 10^{-2} = -0.198$$

$$s^3 + 0.246s^2 + 0.2285s - 0.195 = 0; \quad s = 0.403$$

$$J_{\text{Ib}} = \frac{0.403^2}{2} \left( 1 - \frac{0.403}{3} \right) = 0.0703$$

$$M_a = 230 + 1000 \left( \frac{0.40}{2} - 0.035 \right) = 395.25 \text{ kNm}$$

$$\sigma_b = \frac{395.25 \cdot 10^{-2}}{30 \cdot 36.50^2} \cdot \frac{0.403}{0.0703 + 5.38 \cdot 0.56 \cdot 10^{-2} \cdot (0.403 - 0.096) \cdot (1 - 0.096)} = 5.07 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{a1} = \mu \sigma_b \cdot \frac{1-s}{s} = 5.38 \cdot 5.07 \cdot \frac{1-0.403}{0.403} = 40.41 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{a2} = \mu \sigma_b \cdot \frac{s-\alpha_2}{s} = 5.38 \cdot 5.07 \cdot \frac{0.403-0.096}{0.403} = 20.78 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{5.07}{3.90 \cdot 10^3} = 1.30 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{a1} = \frac{\sigma_{a1}}{E_h} = \frac{40.41}{21 \cdot 10^3} = 1.92 \text{ ‰};$$

$$\varepsilon_{a2} = \frac{\sigma_{a2}}{E_h} = \frac{20.78}{21 \cdot 10^3} = 0.989 \text{ ‰}$$

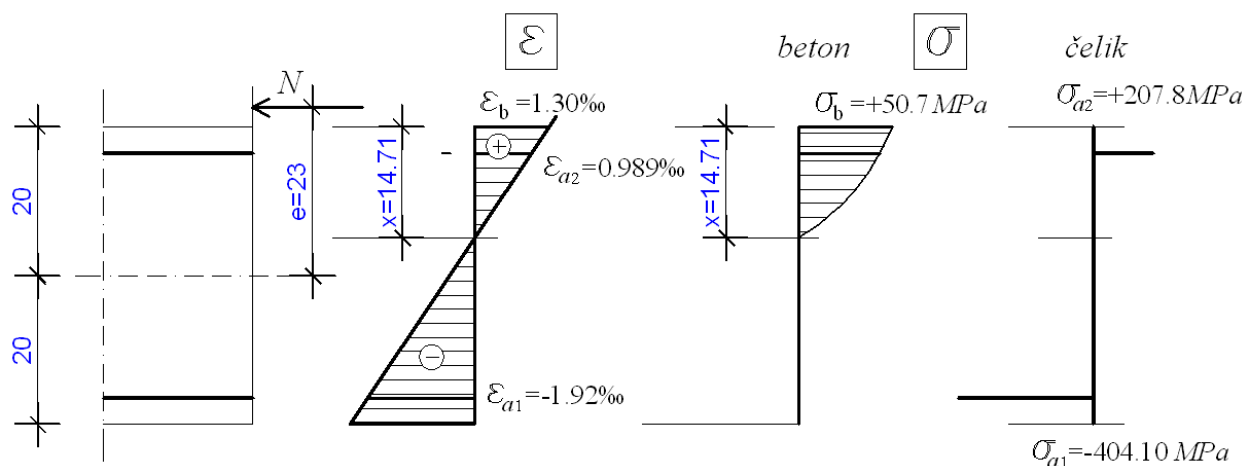
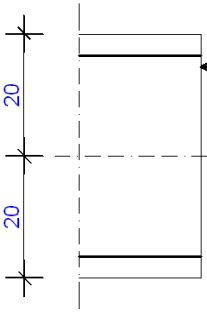


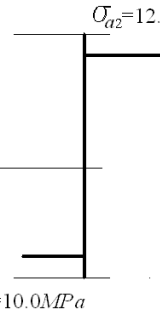
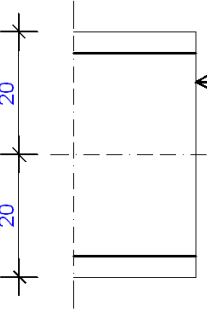


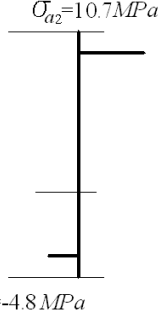
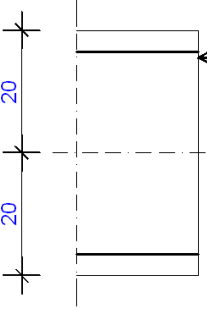
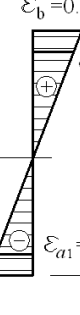

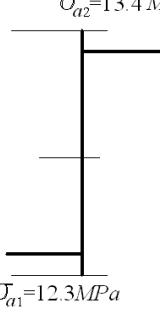


Tabela 6.3.1– Analiza stanja napona po preseku za šeme opterećenja

noslač	šema opterećenja	preseki	Vrednosti napona i dilatacija			
Noslač "A"	I Šema opterećenja	II - II	$M=14 \text{ kNm}; N=95.91 \text{ kN}$ 	$\epsilon_b = 0.0718\%$ $\epsilon_{a2} = 0.0605\%$ $\epsilon_{a1} = -0.0476\%$ 	$\sigma_b = 2.8 \text{ MPa}$ 	$\sigma_{a2} = 12.7 \text{ MPa}$ $\sigma_{a1} = 10.0 \text{ MPa}$ 
		III - III	$M=11.48 \text{ kNm}; N=96.91 \text{ kN}$ 	$\epsilon_b = 0.0589\%$ $\epsilon_{a2} = 0.0509\%$ $\epsilon_{a1} = 0.0228\%$ 	$\sigma_b = 2.3 \text{ MPa}$ 	$\sigma_{a2} = 10.7 \text{ MPa}$ $\sigma_{a1} = 4.8 \text{ MPa}$ 
		IV - IV	$M=14.82 \text{ kNm}; N=95.0 \text{ kN}$ 	$\epsilon_b = 0.0769\%$ $\epsilon_{a2} = 0.0638\%$ $\epsilon_{a1} = 0.0586\%$ 	$\sigma_b = 3.0 \text{ MPa}$ 	$\sigma_{a2} = 13.4 \text{ MPa}$ $\sigma_{a1} = 12.3 \text{ MPa}$ 



noslač	Šema opterećenja	presek
Noslač "A"	I Šema opterećenja	<p style="text-align: center;"><i>Vrednosti napona i dilatacija</i></p> <p><math>M = -8.76 \text{ kNm}; N = 94.0 \text{ kN}</math> <math>\epsilon</math></p> <p style="text-align: right;">beton <math>\sigma</math>      čelik</p> <p style="text-align: right;"><math>\sigma_{a2} = 1.5 \text{ MPa}</math> <math>\sigma_{a1} = 8.6 \text{ MPa}</math></p>
	II - II	<p><math>M = 28.83 \text{ kNm}; N = 198.92 \text{ kN}</math> <math>\epsilon</math></p> <p style="text-align: right;">beton <math>\sigma</math>      čelik</p> <p style="text-align: right;"><math>\sigma_{a2} = 26.2 \text{ MPa}</math> <math>\sigma_{a1} = 20.4 \text{ MPa}</math></p>
	III - III	<p><math>M = 18.26 \text{ kNm}; N = 201.92 \text{ kN}</math> <math>\epsilon</math></p> <p style="text-align: right;">beton <math>\sigma</math>      čelik</p> <p style="text-align: right;"><math>\sigma_{a2} = 18.2 \text{ MPa}</math> <math>\sigma_{a1} = 2.76 \text{ MPa}</math></p>
	IV - IV	<p><math>M = 30.58 \text{ kNm}; N = 198.62 \text{ kN}</math> <math>\epsilon</math></p> <p style="text-align: right;">beton <math>\sigma</math>      čelik</p> <p style="text-align: right;"><math>\sigma_{a2} = 27.8 \text{ MPa}</math> <math>\sigma_{a1} = -24.8 \text{ MPa}</math></p>

nosáč		Vrednosti napona i dilatacija	
Šema opterećenja			
presek			
Nosáč "A"	II Šema opterećenja	<p><math>M = -4 \text{ kNm}; N = 196.70 \text{ kN}</math></p>	<p>beton <math>\sigma</math> čelik</p>
	III - III	<p><math>M = 26.05 \text{ kNm}; N = 306.84 \text{ kN}</math></p>	<p>beton <math>\sigma</math> čelik</p>
	III - II	<p><math>M = 43 \text{ kNm}; N = 302.31 \text{ kN}</math></p>	<p>beton <math>\sigma</math> čelik</p>
	IV - IV	<p><math>M = 49.63 \text{ kNm}; N = 302.48 \text{ kN}</math></p>	<p>beton <math>\sigma</math> čelik</p>

nosáč		Šema opterećenja		presek		Vrednosti napona i dilatacija		
Nosáč "A"	III	Šema opterećenja	V - V	$M=12.48 \text{ kNm}; N=298.24 \text{ kN}$				beton $\sigma$ čelik
	II	Šema opterećenja	II - II	$M=43.3 \text{ kNm}; N=414.62 \text{ kN}$				beton $\sigma$ čelik
	IV	Šema opterećenja	III - III	$M=23.38 \text{ kNm}; N=424.08 \text{ kN}$				beton $\sigma$ čelik
	IV	Šema opterećenja	IV - IV	$M=79.43 \text{ kNm}; N=419.61 \text{ kN}$				beton $\sigma$ čelik

nosáč	Šema opterećenja	presek
Nosáč "A"	IV Šema opterećenja	<p style="text-align: center;"><i>Vrednosti napona i dilatacija</i></p> <p><math>M=26.4 \text{ kNm}; N=410.18 \text{ kN}</math> <math>\epsilon</math> <span style="margin-left: 150px;">beton <math>\sigma</math></span> <span style="margin-left: 100px;">čelik</span></p> <p><math>\epsilon_b = 0.164\text{‰}</math> <math>\sigma_b = 6.4 \text{ MPa}</math> <math>\sigma_{a2} = 31.3 \text{ MPa}</math></p> <p><math>\epsilon_{a2} = -0.149\text{‰}</math> <math>x = 38.87</math> <math>\sigma_{a1} = 2.10 \text{ MPa}</math></p> <p><math>\epsilon_{a1} = 0.01\text{‰}</math></p>
	II - II	<p><math>M=42.59 \text{ kNm}; N=637 \text{ kN}</math> <math>\epsilon</math> <span style="margin-left: 150px;">beton <math>\sigma</math></span> <span style="margin-left: 100px;">čelik</span></p> <p><math>\epsilon_b = 0.259\text{‰}</math> <math>\sigma_b = 10.11 \text{ MPa}</math> <math>\sigma_{a2} = 49.40 \text{ MPa}</math></p> <p><math>\epsilon_{a2} = 0.235\text{‰}</math> <math>x = 38.25</math> <math>\sigma_{a1} = 24.9 \text{ MPa}</math></p> <p><math>\epsilon_{a1} = -0.0118\text{‰}</math></p>
	III - III	<p><math>M=22.94 \text{ kNm}; N=656.04 \text{ kN}</math> <math>\epsilon</math> <span style="margin-left: 150px;">beton <math>\sigma</math></span> <span style="margin-left: 100px;">čelik</span></p> <p><math>\epsilon_{b2} = 0.199\text{‰}</math> <math>\sigma_{b2} = 7.77 \text{ MPa}</math> <math>\sigma_{a2} = 39.30 \text{ MPa}</math></p> <p><math>\epsilon_{a2} = 0.187\text{‰}</math> <math>x = 47.16</math> <math>\sigma_{a1} = 16.10 \text{ MPa}</math></p> <p><math>\epsilon_{a1} = 0.0767\text{‰}</math> <math>\epsilon_{b1} = 0.0648\text{‰}</math> <math>\sigma_{b1} = 2.53 \text{ MPa}</math></p>
	IV - IV	<p><math>M=125.42 \text{ kNm}; N=634.51 \text{ kN}</math> <math>\epsilon</math> <span style="margin-left: 150px;">beton <math>\sigma</math></span> <span style="margin-left: 100px;">čelik</span></p> <p><math>\epsilon_b = 0.685\text{‰}</math> <math>\sigma_b = +26.70 \text{ MPa}</math> <math>\sigma_{a2} = 113.8 \text{ MPa}</math></p> <p><math>\epsilon_{a2} = 0.600\text{‰}</math> <math>x = 16.86</math> <math>\sigma_{a1} = 167.30 \text{ MPa}</math></p> <p><math>\epsilon_{a1} = -0.797\text{‰}</math></p>

nosáč	Šema opterećenja	Vrednosti napona i dilatacija		
	V Šema opterećenja			
Nosáč "A"	V - V	$M=54.33 \text{ kNm}; N=631.61 \text{ kN}$ 	$\epsilon$ 	$\sigma$ 
	III - III	$M=23.24 \text{ kNm}; N=747.8 \text{ kN}$ 	$\epsilon$ 	$\sigma$ 
	IV - IV	$M=168.22 \text{ kNm}; N=757.95 \text{ kN}$ 	$\epsilon$ 	$\sigma$ 
	VI Šema opterećenja	II - II	$M=42.23 \text{ kNm}; N=752.55 \text{ kN}$ 	$\epsilon$ 

nosáč	Šema opterećenja	presek
Nosáč "A"	VI Šema opterećenja	<p style="text-align: center;"><i>Vrednosti napona i dilatacija</i></p> <p><math>M=68.26 \text{ kNm}; N=743.56 \text{ kN}</math> <math>\varepsilon</math></p> <p style="text-align: center;">beton <math>\sigma</math> <span style="margin-left: 100px;">čelik</span></p> <p style="text-align: center;"><math>\sigma_b = 14.30 \text{ MPa}</math> <span style="margin-left: 100px;"><math>\sigma_{a2} = 68.50 \text{ MPa}</math></span></p> <p style="text-align: center;"><math>\sigma_{a1} = -11.20 \text{ MPa}</math></p>
	II - II	<p><math>M=41.52 \text{ kNm}; N=974.94 \text{ kN}</math> <math>\varepsilon</math></p> <p style="text-align: center;">beton <math>\sigma</math> <span style="margin-left: 100px;">čelik</span></p> <p style="text-align: center;"><math>\sigma_{b2} = 12.40 \text{ MPa}</math> <span style="margin-left: 100px;"><math>\sigma_{a1} = 20.0 \text{ MPa}</math></span></p>
	III - III	<p><math>M=19 \text{ kNm}; N=1002 \text{ kN}</math> <math>\varepsilon</math></p> <p style="text-align: center;">beton <math>\sigma</math> <span style="margin-left: 100px;">čelik</span></p> <p style="text-align: center;"><math>\sigma_{b2} = 10.06 \text{ MPa}</math> <span style="margin-left: 100px;"><math>\sigma_{a1} = 32.80 \text{ MPa}</math></span></p>
	IV - IV	<p><math>M=230.25 \text{ kNm}; N=1000 \text{ kN}</math> <math>\varepsilon</math></p> <p style="text-align: center;">beton <math>\sigma</math> <span style="margin-left: 100px;">čelik</span></p> <p style="text-align: center;"><math>\sigma_b = +50.7 \text{ MPa}</math> <span style="margin-left: 100px;"><math>\sigma_{a2} = +207.8 \text{ MPa}</math></span></p> <p style="text-align: center;"><math>\sigma_{a1} = -404.10 \text{ MPa}</math></p>

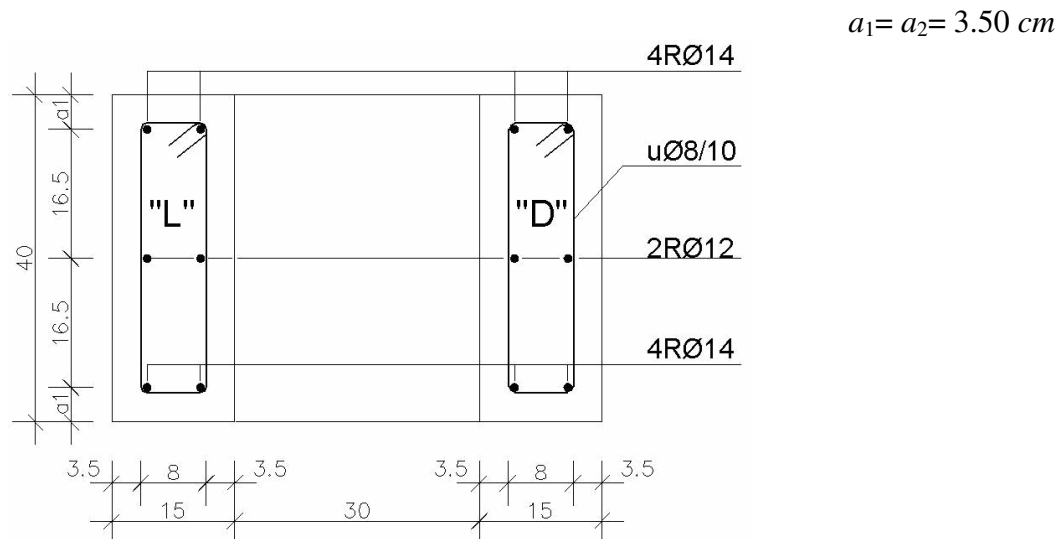
nosáč	Šema opterećenja	presek	Vrednosti napona i dilatacija		
Nosač "A"	VII Šema opterećenja	V - V	$M=96.18 \text{ kNm}; N=965.0 \text{ kN}$ 	beton	čelik

## 6.4. DEFORMACIJE DVOPOJASNOG KROVNOG NOSAČA

### 6.4.1. GRANIČNO STANJE PRSLINA

PRESEK IV-IV – eksploataciono opterećenje – V šema opterećenja

\* *Geometrijske karakteristike preseka*



\* *Rastojanje između prslina*

$M = 125.42 \text{ kNm}, N = 643.51 \text{ kN}$

$$l_{ps} = 2 \cdot \left( a_0 + \frac{e_0}{10} \right) + k_1 \cdot k_2 \cdot \frac{\varnothing}{\mu_{Z1,ef}}$$

$$a_0 + 0.1 \cdot e_{\emptyset} = 2.8 + 0.1 \cdot 8.0 = 3.60 \text{ cm}$$

$$A_{a1} = 4 \cdot 1.54 = 6.16 \text{ cm}^2$$

$$h_{bZ,ef} = 3.50 + 7.50 \cdot 1.40 = 14.0 \text{ cm}$$

$$A_{bZ,ef} = 30.0 \cdot 14.0 = 420 \text{ cm}^2$$

$$\mu_{1Z,ef} = \frac{6.16}{420} = 1.467 \text{ ‰}$$

$$l_{ps} = 2 \cdot 3.60 + 0.40 \cdot 0.125 \frac{1.40}{1.467 \cdot 10^{-2}} = 11.97 \text{ cm}$$

$$e = \frac{125.41}{643.51} = 19.48 \text{ cm}; \quad e_{a1} = 19.48 + \frac{40}{2} - 3.50 = 35.98 \text{ cm}$$

$$N_{pr} = \frac{-0.311 \cdot 10^4}{\frac{1}{0.30 \cdot 0.40} - \frac{0.195 \cdot 6}{0.30 \cdot 0.40^2}} = 193.83 \text{ kN}$$

$$M_{pr} = 193.83 \cdot 0.195 = 37.79 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{ap} = \frac{193.83 \cdot 35.98}{0.9 \cdot 36.50 \cdot 6.16} - \frac{193.83}{6.16} = 3.00 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_a = 9.96 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$a_{pk} = 1.7 \cdot 11.97 \cdot \frac{9.96}{21 \cdot 10^3} \cdot \left[ 1 - 0.5 \cdot \left( \frac{3.00}{9.96} \right)^2 \right] = 0.093 \text{ mm}$$



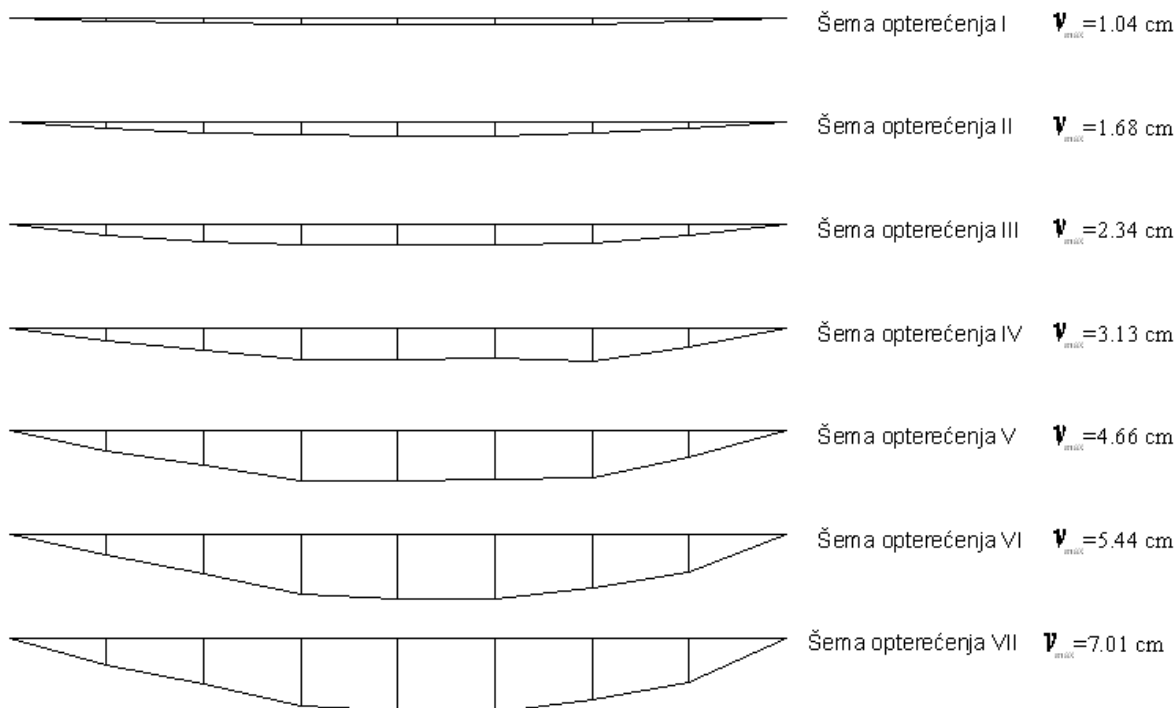
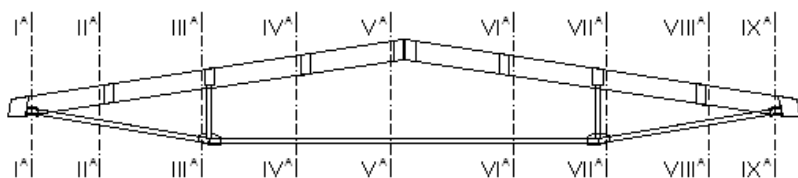
## 6.4.2. ANALIZA GRANIČNOG STANJA UGIBA

a) homogen presek

$$E_b J_b \theta = \int \int M_{(\alpha)} d_x d_\alpha$$

b) presek sa prslinama

$$E_b J_{ef} v = \int \int M_{(\alpha)} d_\alpha d_x$$



**Tabela 6.4.2.1** - Vrednosti računskih ugiba  $v$  (cm) za pojedine šeme opterećenja po preseccima

presek	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
šema opterećenja I	0.00	0.57	0.91	1.04	1.03	1.04	0.91	0.57	0.00
šema opterećenja II	0.00	0.87	1.42	1.67	1.68	1.67	1.42	0.87	0.00
šema opterećenja III	0.00	1.17	1.92	2.31	2.34	2.31	1.92	1.17	0.00
šema opterećenja IV	0.00	1.42	2.43	3.04	3.13	3.04	2.43	1.42	0.00
šema opterećenja V	0.00	1.9	3.41	4.47	4.66	4.47	3.41	1.9	0.00
šema opterećenja VI	0.00	2.14	3.91	5.19	5.44	5.19	3.91	2.14	0.00
šema opterećenja VII	0.00	2.61	4.89	6.64	7.01	6.64	4.89	2.61	0.00

**Tabela 6.4.2.2** – Merene vrednosti ugiba v (cm) za pojedine šeme opterećenja po preseccima

<i>preseki</i>	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>	<i>IX</i>
<i>šema opterećenja I</i>	0.00	0.52	0.86	1.00	0.99	0.98	0.88	0.51	0.00
<i>šema opterećenja II</i>	0.00	0.81	1.39	1.62	1.65	1.60	1.40	0.83	0.00
<i>šema opterećenja III</i>	0.00	1.12	1.88	2.27	2.30	2.29	1.90	1.14	0.00
<i>šema opterećenja IV</i>	0.00	1.40	2.38	3.00	3.09	2.98	2.40	1.39	0.00
<i>šema opterećenja V</i>	0.00	1.85	33.40	4.52	4.69	4.54	3.43	1.87	0.00
<i>šema opterećenja VI</i>	0.00	2.09	3.89	5.12	5.39	5.15	3.87	2.12	0.00
<i>šema opterećenja VII</i>	0.00	2.56	4.91	6.66	7.15	6.68	4.90	2.58	0.00

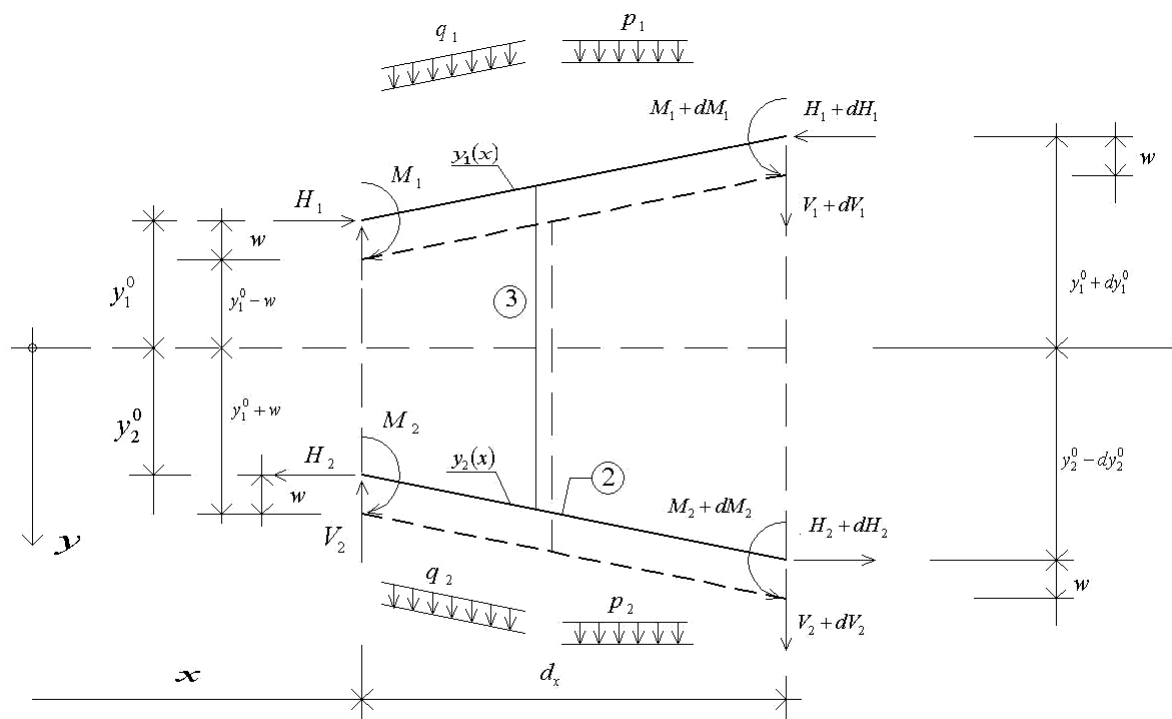
## 6.5. ANALIZA GRANIČNIH STANJA DVOPOJASNIH NOSAČA KONTINUALNO REŠENJE

Kod proračuna dvopojasnih sistema uglavnom, postoje dva aktualna pristupa proračunu. Jedan pristup je preko integracije osnovnih diferencijalnih jednačina – kontinualno rešenje, čisto numerički postupak i jedno uprošćeno, za praksu dovoljno tačno, rešenje.

### 6.5.1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SISTEMA

Pretpostavlja se da je veza između pojaseva nosača takva da obezbeđuje jednaka pomeranja u vertikalnom i horizontalnom pravcu. Oba pojasa imaju pored aksijalne krutosti i krutost na savijanje, u proračun se uvode i efekti skupljanja i tečenja (reološki efekti) kada je u pitanju beton.

Na sl.6.5.1. prikazan je jedan diferencijalni elemenat dvopojasnog sistema sa oznakama fizičkih i geometrijskih veličina, spoljnim dejstvima i unutrašnjim silama [43].



Slika 6.5.1. Diferencijalni elemenat dvopojasnog sistema [43]

Veza između napona i deformacija uzeta je obliku Valtera-ine integralne jednačine II vrste. Takođe je razrađen i jedan prostiji postupak koji koristi algebarske veze napona i deformacija, Trost-Bažantov postupak (AAEMM) koji je pogodniji za praktične proračune. Jednačina (6.5.1) daje vezu između napona  $f_c(\tau)$  i deformacije  $\epsilon_c(t)$  u obliku integralne jednačine, a jednačina (6.5.2) algebarsku vezu napona i deformacija [16]

$$\epsilon_c(t) = \frac{f_c(t)}{E_c(t)} + \int_{\tau}^t K(t, \tau) \frac{f_c(\tau)}{E_c(\tau)} d\tau + \epsilon_{sh}(t) + \alpha_i \theta(t) \quad (6.5.1)$$

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{sh}(t) - \alpha_t \theta(t) = \frac{f_c(\tau)}{E_c(\tau)} a_t + \frac{f_c(t) - f_c(\tau)}{E_c(\tau)} b_t \quad (6.5.2)$$

gde su :

- $\varepsilon_{sh}(t)$  - skupljanje betona
- $\alpha_t$  - termički koeficijent
- $\theta_t$  - termičko polje kao funkcija vremena
- $E_c(\tau)$  - modul elastičnosti betona
- $a_t = 1 + \varphi_t$  ,  $b_t = 1 + \chi_t \varphi(t)$
- $\varphi_t$  - koeficijent tečenja
- $\chi_t$  - koeficijent starenja
- $K(t, \tau)$  - jezgro integralne jednačine druge vrste

Uz pretpostavku  $y_1 = y_1^0 + w$ ;  $y_2 = y_2^0 + w$ , a pod uslovom da za krivinu važi

$$k(x, t) = \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2} = -\frac{M(\alpha, t)}{E_c(\tau) I(x, t)} \quad (6.5.3)$$

i da je  $I(x, t) = I(x, \tau)$ , jednačine ravnoteže uz uzimanje u obzir relacija (6.5.1), (6.5.2) i (6.5.3), daju

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{d^2 M_2}{dx^2} - (H_1 - H_2) \frac{d^2 w}{dx^2} + H_1 \frac{d^2 y_1^0}{dx^2} + H_2 \frac{d^2 y_2^0}{dx^2} + \\ q_1 \frac{ds_1}{dx} + q_2 \frac{ds_2}{dx} + p_1(x) + p_2(x) = 0 \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

ili u obliku integro – diferencijalne jednačine

$$\frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} + \int_{\tau}^t \frac{d^4 w}{dx^4} R(t, \tau) d\tau + (K_1^2 - K_2^2) \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2} - \varphi(x) = 0 \quad (6.5.5)$$

gde su  $K_1^2 = \frac{H_1}{R_1 + R_2}$ ;  $K_2^2 = \frac{H_2}{R_1 + R_2}$ ;  $R_1 = E_1 I_1$ ;  $R_2 = E_2 I_2$ ;

$$\varphi(x) = \frac{d^2 y_1^0}{dx^2} + \frac{d^2 y_2^0}{dx^2} + q_1 \frac{ds_1}{dx} + q_2 \frac{ds_2}{dx} + p_1(x) + p_2(x)$$

Kod algebarske veze napon – deformacija dobijamo uslov ravnoteže

$$\frac{1}{b_t} \frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} - \frac{a_t - b_t}{b_t} \frac{d^4 w(\alpha, \tau)}{dx^4} + (K_{1t}^2 + K_{2t}^2) \frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} - \varphi(x) = 0 \quad (6.5.6)$$

Ako je  $t = \tau$ ,  $\varphi_t = 0$ , jednačine (6.5.5) i (6.5.6) daju bikvadratnu diferencijalnu jednačinu sa kvazikonstantnim koeficijentima oblika.

$$\frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} + (K_{1t}^2 + K_{2t}^2) \frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} - \varphi(x) = 0 \quad (6.5.7)$$

Jednačina (6.5.7) predstavlja trenutno elastično rešenje.

Integro – deformacijska jednačina (6.5.5) i diferencijalne jednačine (6.5.6) i (6.5.7) sa odgovarajućim graničnim uslovima daju mogućnost određivanja pomeranja  $w(x,t)$  kao funkcije parametara horizontalnih sila  $H_1$  i  $H_2$  u poprečnom preseku pojaseva, slika 6.5.1.

Za kompletno određivanje stanja napona i deformacija neophodno je postaviti još dva uslova, u ovom slučaju to su promene dužine pojaseva nakon dejstva spoljašnjih sila, a ta dva uslova su dovoljna za određivanje sila  $H_1$  i  $H_2$ .

Ako je,  $L_{i0} + \Delta L_{i0} = L_i$  koristeći ranije date uslove  $y_1 = y_1^0 + w$  i  $y_2 = y_2^0 + w$ , tada

kompletni uslovi dužine, dobijaju oblik

$$\left[ H_i + \int_{\tau}^t H_i K(t, \tau) d\tau \right] \frac{3L_{i0} - 2l}{A_i E_i} - \int_0^l \frac{dy_i^0}{dx} \frac{dw(x,t)}{dx} dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \frac{dw(x,t)}{dx} \right]^2 dx = 0 \quad (6.5.8)$$

gde je  $A_i$  – površina poprečnog preseka pojaseva  $i = 1, 2$  a  $l$  – horizontalno rastojanje oslonaca sistema.

## 6.6. NUMERIČKI POSTUPAK

Ovaj postupak se odnosi na diskretizovane sisteme, sastavljene od pravih konačnih elemenata- štapova kojima se aproksimira geometrijska konfiguracija konstrukcije. U ovom slučaju konstrukcija se predstavlja kao skup konačnog broja pravih štapova koji se u čvorovima, uslovima kompatibilnosti, povezuju. Problem se formuliše u vidu velikog broja nelinearnih algebarskih jednačina. Metoda deformacije se ovde uzima za analizu konstrukcija u ravni i u prostoru.

Na Građevinskom fakultetu u Beogradu razvijen je kompjuterski program sa kompletnim algoritmima za proračunavanje štapa u ravni i u prostoru, rešena dinamička stanja konstrukcija, kao i stabilnost odgovarajućih konstrukcija [76]. Program je više puta korišćen, a i autor ovog rada ga je u nekoliko navrata ranije koristio.

U ovoj doktorskoj disertaciji, za dvopojasni sistem sa gornjim pojasom od betona visoke čvrstoće – dvodelnim poprečnim presekom, mestimično spojenim prečkama i donjim pojasom u vidu zatege od čeličnih profila urađen je softver za statičku i dinamičku analizu samo ovog tipa nosača datih u ovom radu. Konstrukcija je modelirana pomoću MKE korišćenjem grednih elemenata za zategu, a 3D izoparametarskih konačnih elemenata za gornji pojas.

Izoparametarski elementi predstavljaju opšti i mnogo primenjivan koncept u MKE. Način sračunavanja osnovnih karakteristika izoparametarskih elemenata, matrice krutosti i vektora opterećenja u čvorovima sličan je kao i za klasične elemente. Ovaj 3D izoparametarski konačni element koristi se za modeliranje trodimenzionalnih tela opšteg oblika-3D kontinua. Obično element ima više čvorova, uobičajeno 8 do 21 i ima šest površi koje ograničavaju element. [15], [54], [81].

Konstitutivna matrica elastičnosti  $\mathbf{C}$  odgovara 3D uslovima, a vektor napona  $\boldsymbol{\sigma}$  ima šest komponenti, u skladu sa redosledom komponenti deformacije  $\mathbf{e}$ . Matrica krutosti elementa  $\mathbf{K}$  ima dimenzije  $3N \times 3N$ , tj.

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (6.6.1)$$

$3N \times 3N$                        $3N \times 6$   $6 \times 6$   $6 \times 3N$

a vektor sila u čvorovima  $\mathbf{F}^u$  ima  $3N$  komponenti,

$$\mathbf{F}^u = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (6.6.2)$$

$3N \times 1$                        $3N \times 6$   $6 \times 1$                        $3N \times 3N$   $3N \times 1$

Integracija po zapremini elementa vrši se numerički.

Postupak izvođenja matrice krutosti izoparametarskog grednog elementa sa promenljivim brojem čvorova detaljno je opisan u literaturi [15], [54], [81].

Ona se može izvesti i direktnim metodom. Ova metoda podrazumeva korišćenje diferencijalnih jednačina koje opisuju deformisanje nosača i uslova ravnoteže kako bi se povezale generalisane sile i pomeranja u čvorovima, a ove relacije predstavljaju matricu krutosti konačnog elementa [54].

U softveru koji je sastavni deo ove disertacije (eksperimenta ) korišćen je navedeni način formulisanja matrice krutosti. Prethodno definisana matrica krutosti i jednačine ravnoteže odgovaraju statičkim uslovima.

### 6.6.1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA

Softverom je osim statičke obuhvaćena i dinamička analiza dvopojasnog sistema. U odnosu na statičku analizu gde su spoljašnji uticaji i sve naponsko-deformacijske veličine nezavisne od vremena, u dinamičkoj analizi spoljašnji uticaji su funkcije od vremena. Pretpostavlja se da su vremenski uticaji (skupljanje i tečenje betona) mali i zanemarljivi. Obuhvaćeno je delovanje sila na sistem koje se menjaju u toku vremena, pa pomeranja pojedinih tačaka zavise od vremena. Takođe, uzete su u obzir i inercijalne karakteristike nosača pri izračunavanju kretanja. U slučaju dinamičkog opterećenja postavljaju se diferencijalne jednačine kretanja čijom integracijom nalazimo pomeranja, brzinu i ubrzanje pojedinih tačaka konstrukcije.

Diferencijalne jednačine kretanja mogu se izvesti korišćenjem Lagranževih jednačina II vrste ili primenom D'alambertovog principa prema literaturi Kojić ( 1991 ), Kojić i dr. ( 1988 ) i Bathe (1982 ). Ovde je diferencijalna jednačina kretanja kontinuma, podeljenog na konačne elemente, prema sl.4 izvedena korišćenjem principa virtualnog rada,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (6.6.1)$$

Gde je  $\mathbf{M}$  - matrica masa konačnog elementa, koja se definiše izrazom

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (6.6.2)$$

Vektor  $\mathbf{F}(t)$  predstavlja spoljašnje sile koje deluju u čvorovima konačnog elementa, a obuhvata površinske, zapreminske i koncentrisane sile, u opštem slučaju zavisne od vremena.

Često se u konstrukcijama (materijalima) javljaju sile otpora (disipacije) koje su proporcionalne brzinama kretanja tačaka. Uzimanjem u obzir ovih sila, prema [15] i [54] kao dopunske zapreminske sile, dobijamo jednačinu kretanja konačnog elementa

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (6.6.3)$$

gde je sa  $\mathbf{B}$  označena matrica prigušenja,

$$\mathbf{B} = \int_V \mathbf{b}\mathbf{H}^T\mathbf{H}dV \quad (6.6.4)$$

Matrica prigušenja  $\mathbf{B}$  i matrica masa  $\mathbf{M}$ , imaju iste dimenzije kao i matrica krutosti elementa  $\mathbf{K}$ , pa se primenjuje isti postupak za raspoređivanje članova svih matrica, pri formiranju matrice masa i matrice prigušenja konstrukcije.

Poznato je izvođenje matrice krutosti i interpolacija za pomeranje pravog štapa sa dva čvora.

## 6.6.2. INTEGRACIJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA KRETANJA

Sistemi jednačina (6.6.2) i (6.6.3) koji opisuju kretanje materijalnog sistema predstavljaju sisteme običnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Ukoliko se radi o linearnoj analizi, koeficijenti matrica  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{B}$  su konstantni, dok u nelinearnoj analizi koeficijenti mogu biti funkcije nepoznatih pomeranja, brzina ili ubrzanja [15],[54],[81]. Za rešavanje sistema jednačina (6.6.2) i (6.6.3) postoji veći broj klasičnih metoda koje podrazumevaju određivanje analitičkih zavisnosti pomeranja, brzina i ubrzanja od vremena. Klasične metode nisu pogodne za sisteme jednačina kakve srećemo u MKE u dinamici konstrukcija, gde se javljaju sistemi diferencijalnih jednačina vrlo visokog reda stepeni slobode kretanja.

Mnogo veću primenu u MKE imaju približne numeričke metode direktne integracije sistema diferencijalnih jednačina, koje, umesto analitičkih rešenja, za bilo koji trenutak vremena  $t$ , daju rešenje u pojedinim diskretnim trenucima vremena  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ . Ukupan period vremena  $T$ , u kome nas interesuje rešenje sistema diferencijalnih jednačina, podeli se na  $n$  intervala  $\Delta t = T/n$ . Postupak se sastoji u tome što se, na osnovu poznatog rešenja, u trenutku  $t$  na početku intervala  $\Delta t$ , traži rešenje u trenutku  $t + \Delta t$ , na kraju koraka. Pritom se uvode pretpostavke za promenu pomeranja, brzine i ubrzanja unutar intervala  $\Delta t$ .

Izbor vremenskog koraka  $\Delta t$  je vezan za željenu tačnost rešenja a manje za stabilnost, pošto se kod ovih metoda može postići bezuslovna stabilnost.

Ovde je korišćena Njumarkova metoda implicitne direktne integracije koja se najčešće koristi pri integraciji sistema diferencijalnih jednačina, Kojić (1991).

### 6.6.3. SOPSTVENE KRUŽNE UČESTANOSTI I SOPSTVENI VEKTORI SISTEMA

U cilju sagledavanja što tačnijeg ponašanja konstrukcije izložene dinamičkim silama neophodno je poznavanje sopstvenih kružnih učestanosti (frekvencija) i sopstvenih oblika oscilovanja.

Sistem bez prigušenja i dejstva spoljašnjih sila, odnosno, homogeni sistem običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, može da se napiše u obliku

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (6.6.5)$$

Rešenje dobijenog sistema jednačina, obzirom na osobine trigonometrijskih funkcija, možemo da predstavimo u sledećem obliku

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} \sin(\omega t + \alpha) \quad (6.6.6)$$

gde  $\bar{\mathbf{U}}$  predstavlja vektor amplituda,  $\omega$  kružnu učestanost slobodnih oscilacija sistema, a  $\alpha$  je fazno ugaono pomeranje. Dvostrukim diferenciranjem izraza (6.6.6) i zamenom u (6.6.5) dobijamo sledeći homogeni sistem od  $n$  algebarskih jednačina po nepoznatim amplitudama  $\bar{\mathbf{U}}$ .

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (6.6.7)$$

Da bi homogeni sistem (6.6.7) imao netrivialno rešenje, potrebno je da determinanta sistema bude jednaka nuli, odnosno da je

$$p(\omega^2) = \det|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (6.6.8)$$

Jednačina (6.6.8) predstavlja polinom reda  $2n$  po  $\omega$  odnosno reda  $n$  po  $\lambda = \omega^2$ , i u literaturi je poznata kao karakteristična jednačina sistema.

Rešavanjem jednačine (6.6.8) po  $\omega$  odnosno  $\omega^2$ , dobijamo sopstvene učestanosti sistema  $\omega_i^2$ , kojih u opštem slučaju ima  $n$ , i ređamo ih po rastućem redu;  $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_n^2$ . Pošto u opštem slučaju, u zatvorenom obliku možemo da rešimo jednačinu (6.6.8) do trećeg reda za sistem  $n$ -tog reda je neophodno primeniti numeričke postupke za određivanje korena  $\lambda_i = \omega_i^2$ , kao što je pokazano u literaturi Bathe (1982).

Za svaku kružnu učestanost  $\omega_i^2$  iz sistema jednačina (6.6.7) možemo da odredimo sopstveni vektor  $\bar{\mathbf{U}}_i$ , pa kažemo da  $\omega_i^2$  i  $\bar{\mathbf{U}}_i$  predstavljaju sopstveni par. Obzirom da se radi o homogenom sistemu algebarskih jednačina, to iz sistema (6.6.7) ne možemo da odredimo apsolutne vrednosti amplituda već samo njihove odnose na taj način što jednu od jednačina izostavljamo iz sistema. Vrednosti amplituda u vektoru  $\bar{\mathbf{U}}_i$  normiramo tako što usvajamo da je jedna amplituda jednaka jedinici ili da je norma vektora  $\|\bar{\mathbf{U}}_i\|$  jednaka jedinici, kao što je uobičajeno u literaturi Kojić (1988), Bathe (1982).

Članovi sopstvenog vektora  $\bar{\mathbf{U}}_i$  ustvari predstavljaju odnose amplituda pomeranja pojedinih masa u slučaju kada sve mase osciluju sa istom kružnom učestanošću  $\omega_i$ .



Ako definišemo vektor sila  $\bar{\mathbf{F}}_i$ , proporcionalan sopstvenom vektoru  $\bar{\mathbf{U}}_i$  na sledeći način,

$$\mathbf{F}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{U}}_i \quad (6.6.9)$$

onda jednačinu (6.6.5) možemo da napišemo u obliku

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{U}}_i = \mathbf{F}_i \quad (6.6.10)$$

Iz poslednje jednačine sledi da ako je vektor sila dat sa (6.6.9) onda je rešenje sistema (6.6.10) takođe sopstveni vektor  $\bar{\mathbf{U}}_i$ , što se često koristi u numeričkim postupcima.

Sopstveni vektori imaju bitnu osobinu ortogonalnosti u odnosu na matricu masa i matricu krutosti koja može matrično da se prikaže sledećim relacijama

$$\bar{\mathbf{U}}_i^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{U}}_j = \delta_{ij} \quad (6.6.9)$$

i

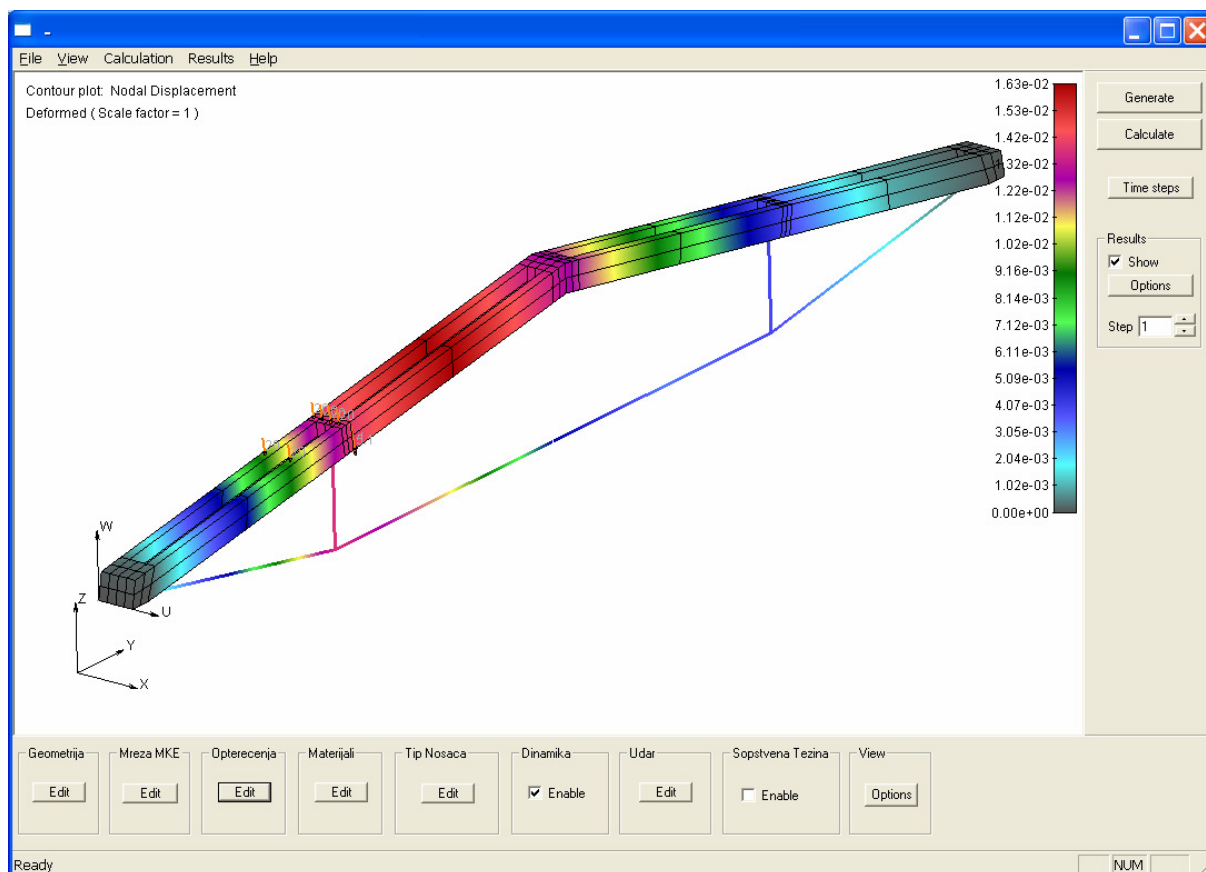
$$\bar{\mathbf{U}}_i^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{U}}_j = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (6.6.10)$$

Na ponašanje konstrukcija dominantan uticaj imaju najniže sopsstvene učestanosti pa se, u praktičnoj primeni MKE, određuje samo nekoliko kružnih učestanosti, a za velike sisteme i nekoliko stotina sopstvenih učestanosti.

Razvijen je veći broj numeričkih postupaka i kompjuterskih programa za rešavanje problema sopstvenih vrednosti kao što su: Jakobijeva metoda, Stodola, iterativna metoda na potprostoru sopstvenih vektora (subspace iteration method), Lančos (Lanczos) metod i dr. Ovaj problem u ovom radu je rešen programom PAK prema metodologiji izloženoj u knjizi Bathe (1982).

#### 6.6.4. NUMERIČKA ANALIZA MODELA PRIMENOM MKE

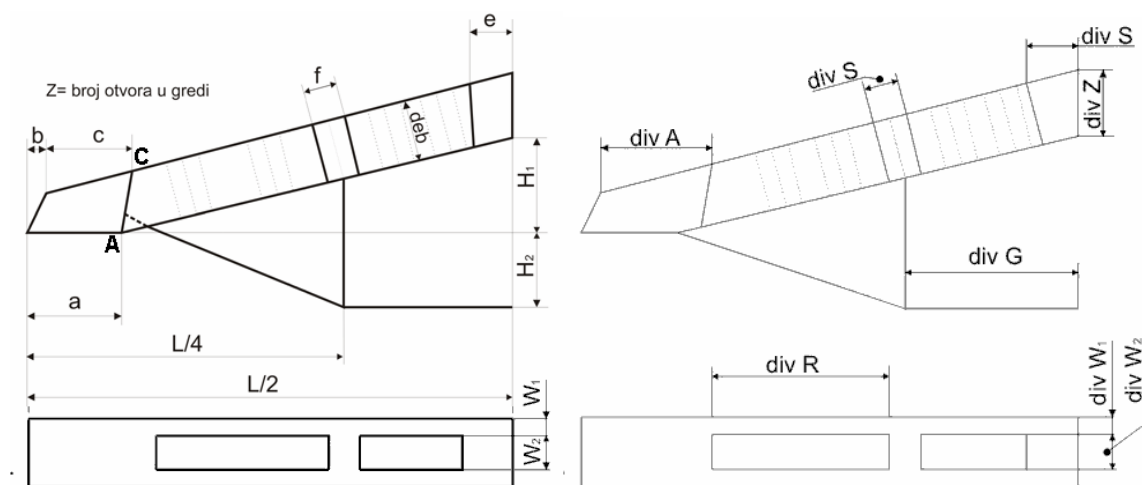
Numerička analiza dvopojasnih sistema primenom MKE je urađena korišćenjem programskog paketa PAK-S, koji je nastao u okviru dugogodišnjeg istraživanja u Centru za naučna istraživanja SANU i u Istraživačko-razvojnom centru za bioinženjering BioIRC u Kragujevcu. Za potrebe generisanja modela i analize dobijenih rezultata, u IR centru BioIRC je razvijen interfejs softver prikazan na slici 6.6.4.1



*Slika 6.6.4.1. Grafički interfejs softver za pre- i post-procesiranje rezultata dobijenih u programskom paketu PAK-S koji rešava deformisanje solida primenom metode konačnih elemenata.*

U interfejs softveru (slika 6.6.4.1) vrši se parametarsko generisanje modela (pre-procesiranje), pri čemu je omogućeno korišćenje različitih geometrija modela i zadavanje različitih vrsta opterećenja. Parametri geometrije konstrukcije i mreže konačnih elemenata, korišćeni pri generisanju numeričkog modela su prikazani na slici 6.6.4.2.

**Tipovi konačnih elemenata.** Za armiranobetonski gornji pojas dvopojasnog nosača se koristi izoparametarski 3D konačni element, dok se za donji pojas-čeličnu zategu koristi konačni element grede nedeformabilnog preseka, prema (Kojic et al. 1996, 2008). Ovde treba napomenuti da se kosi deo zatege, modeliran pomoću grednog elementa, vezuje za središnji čvor betonske konstrukcije koji se nalazi na rastojanju koje je jednako 1/3 rastojanja između tačaka A i C (slika 6.6.4.2, levo).



*Slika 6.6.4.2. Parametri geometrije (levo) i mreže konačnih elemenata (desno) korišćeni u grafičkom interfejs softveru, za generisanje numeričkog modela.*

**Tipovi opterećenja.** U numeričkom modelu je moguće koristiti dva tipa opterećenja koja deluju na konstrukciju: koncentrisana i kontinualna opterećenja. Koncentrisano opterećenje se definiše preko tri parametra:  $L_y$  – rastojanje od koordinatnog početka (u pravcu ose  $y$ ) na kome deluje sila,  $F_y$  – komponenta sile u pravcu ose  $y$ , i  $F_z$  – komponenta sile u pravcu ose  $z$ . Pri generisanju MKE modela ova sila se primenjuje na čvorove konačnih elemenata koji su najbliži rastojanju  $L_y$ , pri čemu se sila raspoređuje na sve čvorove gornje strane modela koji su na rastojanju  $L_y$ . Kontinualno opterećenje se definiše pomoću sledećih parametara:  $L_1$  – početna tačka, mereno od koordinatnog početka, kontinualnog opterećenja (u pravcu ose  $y$ ),  $L_2$  – krajnja tačka kontinualnog opterećenja (u pravcu ose  $y$ ),  $P_z$  – vrednost kontinualnog opterećenja koje deluje na jedinicu površine. Pri generisanju MKE modela kontinualno opterećenje se predstavlja kao površinski pritisak koji deluje na gornje stranice svih konačnih elemenata koji su sa gornje strane modela i nalaze se između rastojanja  $L_1$  i  $L_2$ .

**Materijali.** Usvojeno je da i beton i čelik imaju linearno elastične materijalne karakteristike, tako da je u MKE analizi korišćen linearno elastičan materijalni model. U grafičkom interfejsu se posebno definišu materijalni parametri betona i čelika, pri čemu je svaki materijal definisan preko tri parametra: Jangovog modula elastičnosti, Poasonovog koeficijenta (koeficijent smicanja) i gustine materijala.

**Tip donjeg pojasa-zatege.** Grafički interfejs obezbeđuje korišćenje sledećih podtipova U profila: 2x U8, 2x U10, 2x U12, 2x U14, 2x U16, 2x U18, 2x U20, 2x U22 i 2x U24, pri čemu je svaki od profila određen sledećim podacima:  $A$  –površina poprečnog preseka,  $I_y$  –centralni moment inercije za lokalnu osu  $y$ ,  $I_z$  – centralni moment inercije za lokalnu osu  $z$ ,  $W_y$  –polarni moment inercije za lokalnu osu  $y$ ,  $W_z$  – polarni moment inercije za lokalnu osu  $z$ .

**Udar.** Udar se definiše preko tri parametra: dužina na kojoj deluje udar (od  $L_1$  do  $L_2$ ),  $m$  – masa tela koje pada na konstrukciju, i  $H$  – visina sa koje telo pada (visina je predstavljena u odnosu na tačku udara). Pri generisanju MKE modela uticaj udara se predstavlja zadavanjem početnih brzina u svim čvorovima gornjih strana konačnih elemenata, koji se nalaze između rastojanja  $L_1$  i  $L_2$ . Početna brzina se izračunava preko:

$$V_z = -\sqrt{2gH} \quad (6.6.4.1)$$

gde je  $g$  - ubrzanje usled gravitacije, a  $H$  - visina sa koje telo pada. Uticaj mase tela koje pada se ravnomerno prenosi na konačne elemente sa gornje strane konstrukcije koji su u zoni između  $L_1$  i  $L_2$ , na način da se uvodi novi materijalni model za te elemente. Novi materijalni model ima sve iste karakteristike osim gustine, koja se računa prema sledećem obrascu:

$$\rho_{imp} = \rho_{con} + m / V_{imp} \quad (6.6.4.2)$$

gde je:  $\rho_{con}$  - gustina betona,  $m$  - masa tela koje pada na konstrukciju, a  $V_{imp}$  - ukupna zapremina konačnih elemenata koji se nalaze na gornjoj strani konstrukcije između  $L_1$  i  $L_2$ .

**Sopstvena težina.** U numeričkoj analizi je moguće uključiti sopstvenu težinu konstrukcije. Sopstvena težina se definiše tako što se prilikom numeričke integracije jednačine konačnog elementa, u svakoj Gausovoj tački dodaje sila usled gravitacije koja je jednaka:

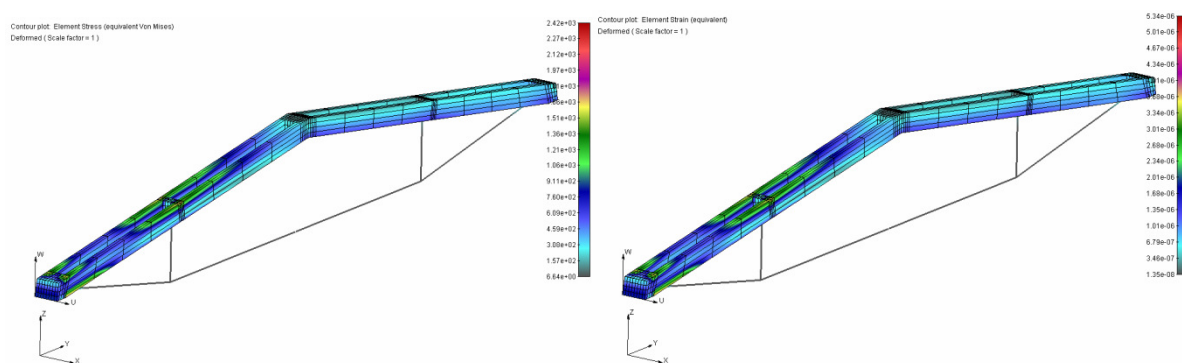
$$\Delta F_g = \rho \cdot g \cdot \Delta V \quad (6.6.4.3)$$

gde je:  $\rho$  - gustina,  $g$  - ubrzanje usled gravitacije, a  $\Delta V$  - zapremina koja odgovara Gausovoj tački.

**Tip analize.** U numeričkom modelu je omogućeno korišćenje statičkog i dinamičkog proračuna. U okviru dinamičke analize moguće je pratiti deformacije grede u toku vremenskog perioda. Treba napomenuti da je koncept udara moguće koristiti samo u okviru dinamičke analize.

**Ograničenja modela.** Pretpostavka numeričkog modela grede je da je oslonac označen dužinom  $a$  sa slike 6.6.4.2. ograničen u pogledu pomeranja i rotacija u sva tri koordinatna pravca. Usvojeno je i da je središna linija poprečnog preseka nosača ograničena po pomeranju u pravcu ose  $H$ , a isto važi i za sve čvorove grednih elemenata. U cilju određivanja otpora oslonaca pomoću programa PAK-S, umesto ograničenja čvorova na osloncu  $a$  grede, u tim čvorovima se zadaju pomeranja koja su jednaka nuli u pravcu osa  $Y$  i  $Z$ .

**Proračun i analiza rezultata.** Kada je izvršeno definisanje ulaznog modela, u grafičkom interfejsu se pokreće opcija Calculate (slika 6.6.4.1) usled čega se generiše ulazni \*.dat fajl i pokreće proračun u programu PAK-S. Po završetku proračuna vrši se automatsko učitavanje i prikaz rezultata u grafičkom interfejsu (post-procesiranje). Osim polja pomeranja moguće je prikazati raznovrsne rezultate kao što su na primer naponi i deformacije u konačnim elementima konstrukcije (slika 6.6.4.3).

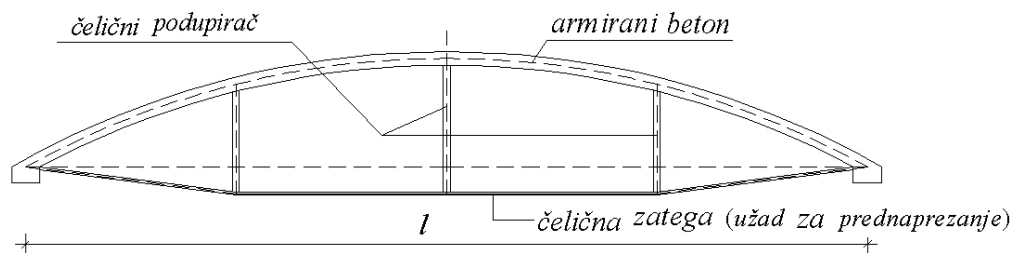


*Slika 6.6.4.3. Polje napona (levo) i polje doformacija (desno) za osnovni primer grafičkog interfejs softvera.*

## 6.6.5. POJEDNOSTAVLJENI METOD ZA ANALIZU DVOPOJASNIH SISTEMA

Dvopojasnu konstrukciju koju čini gornji pojas od armiranog betona i donji pojas od čelika ili čelika za prednaprezanje možmo i jednostavnije proračunati jednom iterativnom metodom.

Posmatrajmo jedan dvopojasni sistem prema sl.6.6.5.1.



Slika 6.6.5.1. Šema dvopojasnog nosača

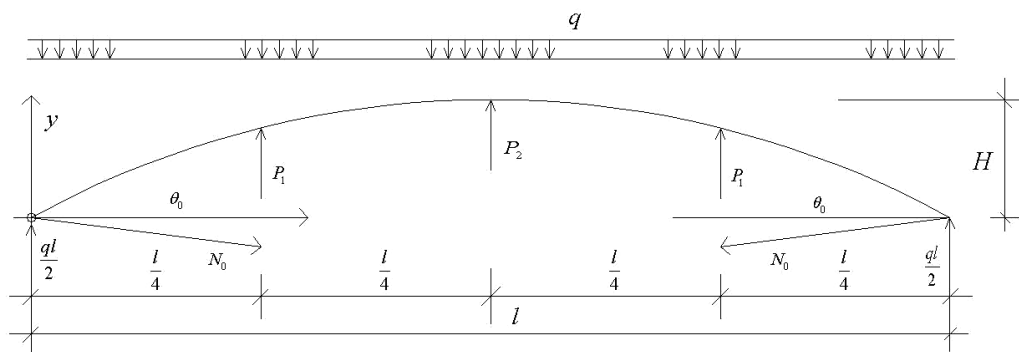
### 6.6.5.1. DVOPOJASNI NOSAČI

Sa podupiračima ( vertikalama ) postizemo željenu konfiguraciju sistema. Krak unutrašnjih sila dvopojasnog sistema je znatno veći nego kod klasičnih konstrukcija sa istim rasponima, betonski deo preseka je znatno smanjen, pa je i težina konstrukcije znatno manja, posebno ako je upotrebljen beton visoke čvrstoće.

Analiza ovih sistema je zasnovana na teoriji II reda, što zahteva rešenje kompleksnih integro – diferencijlnih jednačina IV reda, a ovaj uprošćen metod je pogodan za praktičnu primenu i zasnovan je na teoriji građevinske mehanike.

Kod ovih sistema gornji pojas je izložen momentima savijanja i aksijalnoj sili, a donji pojas samo aksijalnoj sili zatezanja sa najčešće zanemarljivom krutošću na savijanje. Razupore – podupirači obezbeđuju konfiguraciju sistema i izloženi su aksijalnoj sili pritiska.

Ako posmatramo gornji pojas odvojeno od konstrukcije nosača i ako donji pojas i vertikale (podupirači) deluju kao spoljnje sile na gornji pojas, analiza konstrukcije se uprošćava, pa se posmatra samo gornji pojas kao što je prikazano na slici 6.6.5.1 [55]



Slika 6.6.5.2. Uprošćeni model proračuna dvopojasne konstrukcije

Na slici se vidi, da ako su poznata opterećenja, sila prednaprezanja i konfiguracija konstrukcije, unutrašnje sile u gornjem pojasu se mogu lako sračunati.

Na primer, unutrašnje sile u poprečnom preseku u sredini nosača ( $\frac{l}{2}$ ) iznose :

$$M = \frac{ql^2}{8} + \frac{P_1 l}{4} - N_0 \left( H \cos \theta + \frac{l}{2} \sin \theta \right) \quad (6.6.5.1)$$

$$V = N_0 \sin \theta - P_1 \quad (6.6.5.2)$$

$$N = N_0 \cos \theta \quad (6.6.5.3)$$

gde su  $M$ ,  $V$  i  $N$  moment savijanja, transversalna i normalna sila u gornjem pojasu nosača..

Iz poznate relacije  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$  ;  $\rho$  – poluprečnik krivine, sa odgovarajućim uprošćenjima dolazimo do diferencijalne jednačine elastične linije

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \quad (6.6.5.4)$$

Za konstrukciju prikazanu na slici 6.6.5.1. jednačine momenata duž raspona iznose:

$$M_x = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} - N_0 (h_x \cos \theta + x \sin \theta) ; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{4} \quad (6.6.5.5)$$

$$M_x = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} + P_1 \left( x - \frac{l}{4} \right) - N_0 (h_x \cos \theta + x \sin \theta) ; \quad \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (6.6.5.6)$$

gde se sa  $h_x$  obeležava rast gornjeg pojasa duž raspona  $h_x \in (0, H)$

Jednačina elastične linije dobija se integracijom jednačine momenta. Na primer, ako gornji pojas nije zakrivljen već prava greda, jednačina elastičnih linija dobija se integracijom diferencijalne jednačine, pa će biti :

$$y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{N_0 \sin \theta}{6} x^3 + C_1 x + C_2 ; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{4} \quad (6.6.5.7)$$

$$y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{N_0 \sin \theta}{6} x^3 - \frac{P_1 \cdot x^3}{6} + \frac{P_1 x^2}{8} + C_3 x + C_4 ; \quad \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (6.6.5.8)$$

gde su sa  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$  integracione komponente koje se dobijaju iz graničnih uslova

$$C_1 = \frac{P_1 l^2}{32} + \frac{ql^3}{24} - \frac{N_0 \sin \theta}{8} l^2 ; \quad C_2 = 0 \quad (6.6.5.9)$$

$$C_3 = \frac{ql^3}{24} - \frac{N_0 \sin \theta}{8} l^2 ; \quad C_4 = \frac{P_1 l^3}{384} \quad (6.6.5.10)$$

Ovde će se ugib konstrukcije dobiti prilično veliki zbog male krutosti gornjeg pojasa što će usloviti veliko izduženje donjeg pojasa. Izduženje u zatezi nije uzeto u obzir u prethodnom proračunu, pa bi se pojavile veće greške u rezultatima proračuna. U cilju dobijanja veće preciznosti postupiti po sledećem iterativnom metodu proračuna:

1. Jednačina  $M_x$  se računa saglasno spoljašnjem opterećenju i sa početnom silom prednaprezanja  $N_0$
2. Jednačina elastične linije računa na osnovu jednačine momenta  $M_x$
3. Izduženje i povećanje prednaprezanja  $\Delta N$  zatege se računa u skladu sa poznatom jednačinom elastične linije  $y$
4. Ako povećanje prednaprezanja  $\Delta N$  ne daje dovoljnu preciznost – tačnost, onda korake 1-3 treba ponoviti sa  $N_0' = N_0 + \Delta N/2$  sve dok se ne postigne zadovoljavajuća tačnost.



## 7. ODREĐIVANJE FAKTORA GRANIČNOG OPTEREĆENJA PRIMENOM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

### 7.1. UVOD

U ovom poglavlju se prikazuje metodologija određivanja faktora graničnog opterećenja koje ravni nosač dovodi u stanje granične ravnoteže. Stanje granične ravnoteže je moguće ravnotežno stanje konstrukcijskog sistema kada još uvek postoji ravnoteža spoljašnjih i unutrašnjih sila u sistemu pri kojem su iscrpljeni kapaciteti nosivosti u njegovim kritičnim presecima. Daljim povećanjem koeficijenta-faktora sa kojim se množi spoljašnje opterećenje formiraju se plastični zglobovi u kritičnim presecima, koji su izloženi momentima savijanja, odnosno velika izduženja ili gnječanja u ovim presecima koji su izloženi zatezanju ili pritisku. Sistem prelazi u kinematički lanac ili mehanizam, na kojem je dalje nemoguće održavati ravnotežu spoljašnjih i unutrašnjih sila. To je, dakle, stanje destrukcije sistema u kojem on ne može dalje vršiti svoju funkciju. U analizama konstrukcijskih sistema, kao što je poznato u praksi, se opterećenja određuju u skladu sa tehničkim propisima (stalna, pokretna, povremena, opterećenja od vetra, snega, uticaja seizmičkih sila i dr.) koja se množe sa odgovarajućim koeficijentima da bi se dobilo merodavno proračunsko opterećenje u graničnom, odnosno, limitnom stanju. U teoriji konstrukcija, pri proračunima konstrukcijskih sistema i njihovih elemenata nastoji se da se što realnije uzmu u obzir reološka stanja materijala (elastičnost, elastoplastičnost, plastičnost, kao i dugotrajni uticaji u koje spadaju viskoelastičnost, tečenje (puzanje) i skupljanje, odnosno bubrenje).

Prva potpuniya teorijska i eksperimentalna istraživanja ponašanja elemenata betonskih konstrukcija u oblasti granične ravnoteže u nas je izvršio M. Ivković (1962). On je predložio osnovne postavke (teoreme) i razvio matematičke procedure za određivanje tzv. statičkih i kinematičkih polja i njima odgovarajućih opterećenja koja određuju stanja sistema u oblasti granične ravnoteže. Takođe je definisao uslove plastičnosti betona za složena naponska stanja. Ova istraživanja su kasnije eksperimentalno i teorijski nastavili i dalje razvili njegovi saradnici i sledbenici M. Ačić (1968, 1987), R. Vukotić (1968, 1987), S. Marinković (2001), R. Zejak (2003) i dr.

Za određivanje koeficijenta-faktora graničnog opterećenja u teoriji linijskih nosača primenjuju se dva karakteristična postupka. Prvi postupak se zasniva na varijacionom računu i formulisanju odgovarajućih funkcionala, koji za elastične sisteme predstavljaju odgovarajući elastični ili plastični potencijal, odnosno disipaciju energije u zavisnosti od ponašanja materijala. U oblasti plastičnog ponašanja materijala utvrđuju se prethodno karakteristični ili kritični preseki u kojima može doći do iscrpljenja kapaciteta nosivosti preseka i formiranja odgovarajućih plastičnih zglobova. Na ovaj način se formira, u zavisnosti od strukture sistema, veći broj mogućih mehanizama loma, za koje se definiše plastični potencijal, odnosno disipacija energije u funkciji od faktora graničnog stanja (faktora loma). Merodavan je onaj mehanizam loma za koji je ova disipacija najmanja.

Drugi postupak je zasnovan na dualitetu između statičkih i kinematičkih veličina. Statičko rešenje problema se zasniva na ravnoteži spoljašnjih i unutrašnjih sila u izabranim karakterističnim presecima. Za kinematičko rešenje se koriste uslovi kompatibilnosti između unetih diskontinuiteta u sistemu prilikom konstruisanja mehanizama loma i generalisanih deformacija (obrtanja). Za konačno rešenje problema koriste se metode matematičkog programiranja (linearnog ili nelinearnog), tako što se za statičku formulaciju problema, za funkcija cilja, uzima da traženi faktor opterećenja ima maksimalnu, a za kinematičku formulaciju da disipacija energije, koja predstavlja zbir proizvoda unutrašnjih sila (momenata savijanja ili normalnih sila) i odgovarajućih generalisanih pomeranja (obrtanja ili izduženja, odnosno skraćenja), ima minimalnu vrednost. Na taj način se formulišu dva

dualna problema matematičkog programiranja čijim se rešavanjem dobijaju odgovarajuća rešenja statičkog i kinematičkog problema. Uslovi ravnoteže u statičkom problemu predstavljaju uslove ograničenja prvog problema matematičkog programiranja, a uslovi kompatibilnosti za kinematičko rešenje predstavljaju uslove ograničenja dualnog problema matematičkog programiranja. Koristeći teoriju dualiteta u matematičkom programiranju, iz rešenja statičkog problema, veoma se lako dobijaju rešenja dinamičkog problema i obratno. Ako se pretpostavi da se materijal u oblasti stanja granične ravnoteže ponaša kao idealno plastičan i zanemare prethodne elastične ili elastoplastične deformacije, onda se problem rešava primenom linearnog programiranja sa linearnim funkcijama cilja i linearnim uslovima ograničenja. Ako se uzima u obzir prethodne elastično ponašanje materijala, a u oblasti granične ravnoteže on smatra da je idealno plastičan, onda se problem rešava primenom kvadratnog programiranja sa kvadratnom funkcijom cilja i linearnim uslovima ograničenja. Za nelinearne veze između napona i deformacija, što predstavlja teorijski i numerički znatno složeniji problem, mnogi autori su formulisali odgovarajuća teorijska rešenja i razvili odgovarajuće kompjuterske programe.

A. Charnes i H. J. Greenberg su 1951. god. za rešetkaste sisteme uspostavili ekvivalenciju između primarnog i dualnog problema linearnog programiranja i „statičkih“ i „kinematičkih“ principa plastičnog kolapsa, koji su definisali M. R. Horne (Horn) 1950. god. i H. J. Greenberg, W. Prager i D. C. Drucker (1952). Proširenje ove teorije na okvirne nosače sa elementima izloženim savijanju su izvršili A. Charnes, C. E. Lemke i O. C. Zienkiewicz 1959. god. Problemi optimalnog dimenzionisanja konstrukcijskih sistema primenom metoda linearnog i nelinearnog programiranja su matematički formulisali i rešavali, kako navode: D. Lloyd Smith i Ž. Praščević (1990), J. Heyman (1951), W. Prager (1953), J. D. Foulkels (1954), R. Livsley (1956), C. Massonet i R. Save (1956), G. Mayer (1969), J. Munro i D. Lloyd Smith (1972,1974, 1978) i drugi autori. Određivanje mehanizama loma i faktora graničnog opterećenja za elastoplastično ponašanje materijala, primenjujući kvadratno programiranje, razmatrali su D. Lloyd Smith i J. Munro (1978), J. A. Teixeira de Freitas and D. Lloyd Smith i drugi autori. Rešenja raznosvrskih problema analize konstrukcijskih sistema primenom metoda matematičkog programiranja data su sa neophodnim teorijskim osnovama u dve obimne publikacije čiji su editori bili M. Z. Cohn i G. Mayer (1979) i D. Lloyd Smith (1990).

Ovde će biti prikazan postupak određivanja faktora graničnog opterećenja i mehanizma loma koristeći dualitet statičkih i kinematičkih veličina primenom linearnog programiranja, koji će biti primenjeni na ispitivane dvopojasne nosače. Numerički rezultati dobijeni primenom ove teorijske metodologije biti će upoređeni sa merenim eksperimentalnim rezultatima i formulisani odgovarajući zaključci.

Treba istaći, da koliko je autoru poznato, u veoma bogatoj literaturi iz ove oblasti nema mnogo radova u kojima su upoređivani eksperimentalni sa teorijskim rezultatima dobijeni ovim putem. Ovde treba istaći eksperimentalno istraživanje ponašanja dvopojasnih armiranobetonskih sistema sa čeličnim elementima van glavnog betonskog preseka (donji pojas nosača), koje su vršili M. Aćić i D. Ostojić 1984. god. u okviru naučno-istraživačkog projekta „Teorijsko i eksperimentalno istraživanje aktuelnih problema armiranobetonskih, prethodno napregnutih i spregnutih konstrukcija“ koji je realizovan pod rukovodstvom M. Ivkovića na Građevinskom fakultetu u Beogradu. Rezultati ovih interesantnih i korisnih istraživanja su prikazani u radu M. Aćića i D. Ostojića (1986).

## 7.2. PROBLEM LINEARNOG PROGRAMIRANJA (Linearni program)

Ovde će biti ukratko prikazane formulacije problema linearnog programiranja i neki najvažniji stavovi bez posebnih dokazivanja, koji se mogu naći u veoma bogatoj domaćoj i svetskoj literaturi o linearnom programiranju (videti na primer knjigu Ž. Praščević, N. Praščević (2009)).

*Primarni problem linearnog programiranja* ili *primarni program* se definiše kao nalaženje minimalne vrednost linearne forme (funkcionala), koja se naziva *funkcija cilja*

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (7.2.1)$$

uz ispunjavanje uslova ograničenja

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.2.2)$$

Ovaj problem se može pisati i u vektorsko-matričnoj formi

$$\min z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (7.2.1-a)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (7.2.2-a)$$

Elementi vektora  $\mathbf{x}$  su  $x_j$ , vektora  $\mathbf{c}$  su  $c_j$ , vektora  $\mathbf{b}$  su  $b_i$ , matrica  $\mathbf{A}$  ima elemente  $a_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$ ). Gornji indeks T označava da su vektor ili matrica pisani u transponovanoj formi.

Uslovi ograničenja (7.2.2) u Euklidovom vektorskom prostoru realnih brojeva  $R^n$  definišu skup dopustivih rešenja problema  $D_x \subset R^n$ , tako da svaka tačka čiji je vektor položaja  $\mathbf{x}$  koja zadovoljava ove uslove predstavlja dopustivo ili moguće rešenje problema. Zadatak linearnog programiranja je da se između svih tih tačaka pronađe ona tačka (ili one tačke, ako rešenje nije jednoznačno) za koje funkcija cilja  $z$  ima maksimalnu vrednost. Vektor položaja te tačke obeležava se ovde sa  $\mathbf{x}^*$ , a njegove komponente sa  $x_j^*$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ).

Za rešavanje ovog problema koristi se poseban metod koji je prvi predložio 1947. god. američki matematičar G. Dantzig, koji je on nazvao *Simplex metod*, za koji postoji više različitih varijanti i veliki broj kompjuterskih programa.

Ako se svakom od ograničenja (7.2.2) pridruži nova promenljiva  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) i formira nova funkcija cilja  $w$  za koju treba naći minimum

$$\min w = \sum_{i=1}^m b_i y_i, \quad (7.2.3)$$

sa novim uslovima ograničenja

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7.2.4)$$

dobija se novi problem koji se naziva *dualni problem linearnog programiranja* ili *dualni program* u odnosu na primarni problem (7.2.1) i (7.2.2).

Dualni problem se može formulisati u vektorsko-matričnoj formi

$$\min w = \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \quad (7.2.3-a)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (7.2.4-a)$$

Skup tačaka  $D_y$  čiji je vektor položaja  $\mathbf{y}$  u Euklidovom prostoru  $R^m$  ( $D_y \subset R^m$ ), predstavlja moguća rešenja dualnog problema. Između svih tih tačaka traži se ona tačka ili one tačke za koje funkcija cilja  $w$  ima minimalnu vrednost. Vektor položaja te tačke obeležava se ovde sa  $\mathbf{y}^*$ , a njegove komponente sa  $y_i^*$  ( $i=1,2,\dots,m$ ).

U teoriji linearnog programiranja, koja se bazira na linearnoj algebri, postoji nekoliko važnih teorema koje se odnose na primarni i dualni problem linearnog programiranja, koje će ovde biti izložene bez dokazivanja, a koje će biti neophodne za teorijsku formulaciju ponašanja konstrukcijskih sistema u oblasti idealne plastičnosti.

1. Za bilo koja moguća rešenja primarnog problema  $\mathbf{x} \in D_x$  i dualnog problema  $\mathbf{y} \in D_y$ , koja ne moraju biti optimalna, važi da su funkcije cilja  $z(\mathbf{x}) \leq w(\mathbf{y})$ , odnosno

$$z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y} = w(\mathbf{y}) \quad (7.2.5)$$

2. Ako su  $\mathbf{x}^*$  i  $\mathbf{y}^*$  moguća rešenja primarnog i dualnog problema respektivno za koje važi

$$z(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = w(\mathbf{y}^*) \quad (7.2.6)$$

onda je  $\mathbf{x}^*$  optimalno rešenje primarnog problema sa maksimalnom vrednošću funkcije cilja  $z$ , a  $\mathbf{y}^*$  optimalno rešenje dualnog problema sa minimalnom vrednošću funkcije cilja  $w$

$$z(\mathbf{x}^*) = \max z, \quad w(\mathbf{y}^*) = \min w. \quad (7.2.7)$$

3. Ako primarni problem ima optimalno rešenje  $\mathbf{x}^*$ , onda dualni problem ima optimalno rešenje  $\mathbf{y}^*$ , i obratno, čije su vrednosti funkcija cilja

$$\max z = \min w. \quad (7.2.8)$$

4. Za optimalna rešenja primarnog  $\mathbf{x}^*$  i dualnog problema  $\mathbf{y}^*$  važe uslovi komplementarnosti

$$y_i^* \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad x_j^* \left( c_j - \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i^* \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.2.9)$$

ili

$$\mathbf{y}^{*T} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^{*T} (\mathbf{A}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}. \quad (7.2.9-a)$$

5. Ako u primarnom problemu promenljive  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) nemaju ograničenja u znaku i mogu biti veće, manje ili jednake nuli, onda ograničenja u dualnom problemu čine sistem jednačina

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} y_i = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7.2.10)$$

ili pisano kraće

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}. \quad (7.2.10-a)$$

6. Važi i obrnut stav, ako dualne promenljive  $y_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) neaju ograničenja u znaku, onda ograničenja u primarnom problem čine sistem jednačina

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.2.11)$$

ili pisano kraće

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (7.2.11-a)$$

Ovakvi slučajevi se pojavljuju analizi konstrukcijskih sistema uz primenu linearnog programiranja, gde su, kako će to biti pokazano, nepoznate veličine unutrašnje sile u presecima koje nemaju ograničenja u znaku.

### 7.3. OSNOVNE TEOREME

Metode elasto-plastične analize okvirnih konstrukcija, kako navode Charnes, Lemke i Zienkiewicz (1959), se baziraju na tri teoreme ili principa koje su formulisali Horne (1952) i Greenber i Prager (1952), koji se ovde navode bez dokazivanja. Dokazi ovih teorema mogu se naći u bogatoj literaturi iz teorije plastičnosti.

1. Ako za dati okvirni sistem i skup proporcionalnih opterećenja intenziteta  $P_s$ , koji se može izraziti i nekim faktorom opterećenja  $\gamma$ , postoji raspodela momenata savijanja koja je statički moguća (t. j. koja zadovoljava uslove statičke ravnoteže) i ni u jednom preseku moment savijanja po veličini ne prevazilazi plastični moment (moment nosivosti ili kapacitet) tog preska, onda je opterećenje  $P_s$ , odnosno faktor opterećenja  $\gamma_s$ , manje ili jednako od opterećenja loma (kolapsa) sistema  $P_c$ , odnosno faktora loma  $\gamma_c$

$$P_s \leq P_c, \text{ odnosno } \gamma_s \leq \gamma_c. \quad (7.3.1)$$

2. Ako je pretpostavljen mogući mehanizam loma za zadati okvirni sistem i nađen odgovarajući intenzitet opterećenja  $P_k$ , odnosno faktor opterećenja  $\gamma_k$ , onda je to opterećenje veće ili jednako od opterećenja loma (kolapsa) sistema  $P_c$ , odnosno faktora loma  $\gamma_c$ , t.j.

$$P_k \geq P_c, \text{ odnosno } \gamma_k \geq \gamma_c. \quad (7.3.2)$$

3. Ako za neki zadati okvirni sistem može biti nađen intenzitet opterećenja  $P$ , odnosno faktor loma  $\gamma$  i za koji je moguća pojava mehanizma loma i kojem odgovara statički dopustiva i sigurna raspodela momenata savijanja, onda će odgovarajuće opterećenje  $P$  biti jednako opterećenju loma (kolapsa) sistema t.j.

$$P = P_c, \text{ odnosno } \gamma = \gamma_c. \quad (7.3.3)$$

Ove teoreme se nazivaju *statička*, *kinematička* i *teorema jedinstvenosti*. Teoreme 1 i 2 na izgled su međusobno nezavisne, dok je teorema 3 njihova posledica. Ni jedna od ovih teorema ne implicira niti dokazuje postojanje opterećenja loma (kolapsa) sistema, mada je iz fizikalnih razloga on verovatno moguć. Pošto su statička i kinematička teorema direktna posledica jedna drugoj (zbog treće teoreme), tako da tvrdnja o važenju jedne implicira zadovoljavanje druge. To znači, da postoji veza između teorema 1 i 2, koja se dokazuje primenom linearnog programiranja, odnosno teorijom dualiteta primarnog i dualnog problema linearnog programiranja.

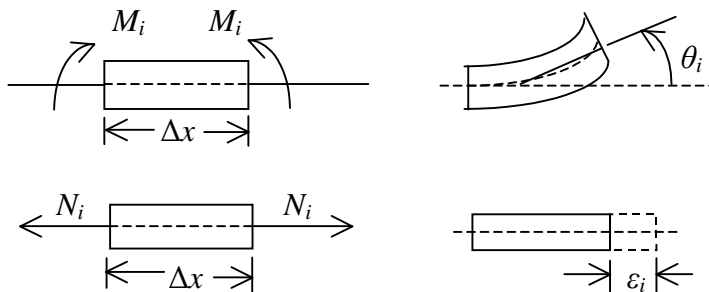
Nejednačine (12) i (13) se mogu pisati u obliku

$$P_s \leq P_c \leq P_k, \text{ odnosno } \gamma_s \leq \gamma_c \leq \gamma_k. \quad (7.3.4)$$

### 7.4. GENERALISANE SILE I DEFORMACIJE ELEMENATA LINIJSKOG SISTEMA

Deo proizvoljne male dužine  $\Delta x$  isčen iz nekog elementa linijskog sistema prikazan je na slici 1. Momenti savijanja  $M_i$  i normalne sile  $N_i$ , kao rezultante unutrašnjih napona u presecima, izazivaju obrtanja  $\theta_i$  i dilatacije (izduženja ili skraćenja) duž ose nosača  $\epsilon_i$ . Uticaj transferzalnih sila  $T_i$  se ne uzima u obzir. U čeličnim elementima analiziranog dvopojasnog sistema koji pripadaju donjem pojasu i verikalnim elementima uticaj momenata savijanja se

zanemaruje, tako da su oni zategnuti (donji pojas) ili pritisnuti (vertikalni elementi). Armiranobetonski elementi gornjeg pojasa su izloženi momentima savijanja i normalnim silama pritiska usled dejstva spoljašnjeg opterećenja. Pozitivni znaci momenata i normalnih sila su prikazani na slici 1. U daljim izlaganjima će se momenti savijanja i normalne sile nazivati *generalisane unutrašnje sile* u nekom preseku  $i$  označavati sa  $R_i$ , a uglovi obrtanja kao *generalisane deformacije* i obeležavati sa  $\theta_i$ .



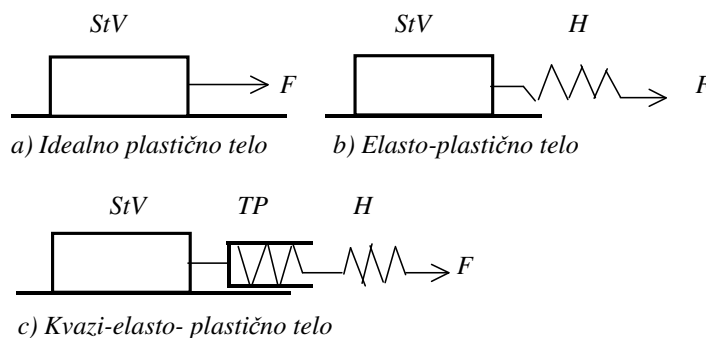
**Slika 1.** Unutrašnje sile i deformacije

## 7.5. OSNOVNE PRETPOSTAVKE I REOLOŠKI MODELI

U analizi konstrukcijskog sistema u oblasti graničnih stanja se polazi od sledećih pretpostavki:

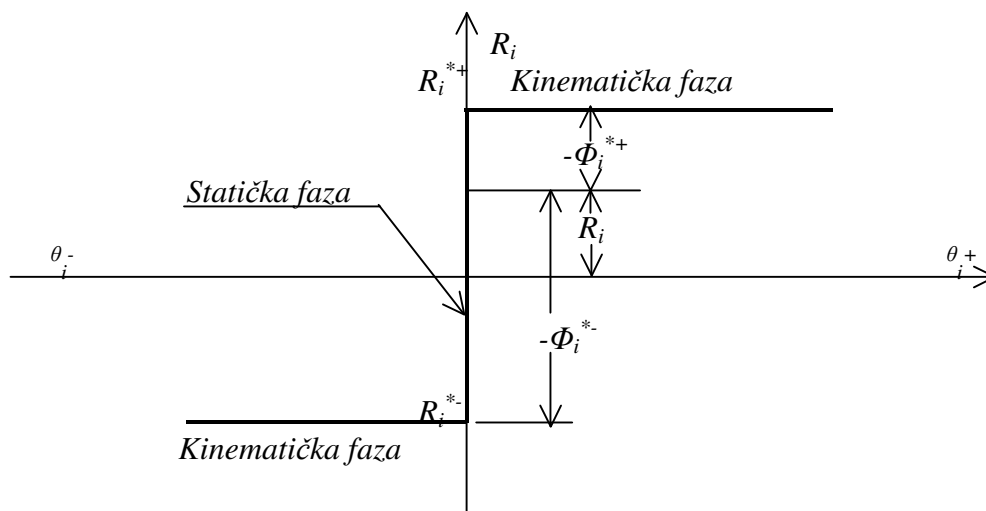
1. Materijal od kojeg je sistem sačinjen tretira se u stanju granične ravnoteže kao idealno plastičan;
2. Važi Bernoulli-eva hipoteza o ravnosti poprečnih preseka posle izvršene deformacije;
3. Primenjuje se princip superpozicije uticaja opterećenja;
4. Istorija (redosled) opterećenja nije značajna za ponašanje sistema u oblasti granične ravnoteže.

Reološki model idealno plastičnog materijala poznat je kao Saint Venant-ovo telo (*StV*) prikazan je na slici 2-a, i sastoji se od prizmatičnog tela koje se nalazi na hrapavoj podlozi sa odgovarajućim koeficijentom trenja. Na ovo telo deluje sila  $F$  i ono je nepokretno sve dok sila ne postane dovoljno velika da može da savlada silu otpora trenja  $F^*$ . Posle toga prizmatično telo se ravnomerno pomera u smeru dejstva sile  $F$  bez njenog daljeg povećanja. Idealno plastično telo se ponaša kao kruto nedeformabilno telo dok stanje napona ne dostigne uslov plastičnosti, a zatim pod dejstvom napona se ostvaruje plastično tečenje materijala.



**Slika 2.** Reološki modeli

Dijagram generalisane sile  $R_i$  (momenta savijanja ili normalne sile) i generalisanog pomerjenja (ugla obrtanja preseka ili dilatacije, tj. izduženja ili skraćenja) linijskog elementa konstrukcijskog sistema za idealno plastično ponašanje materijala prikazan je na slici 3.



**Slika 3.** Idealno plastično telo

Vrednosti  $R_i^{*+}$  i  $R_i^{*-}$  označavaju plastične kapacitete generalisanih sila u posmatranom preseku  $i$ , tako da za generalisanu silu  $R_i$  važi

$$-R_i^{*-} \leq R_i \leq R_i^{*+}; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (7.5.1)$$

gde je  $m$  broj izabranih karakterističnih preseka u konstrukcijskom sistemu.

G. Maier (1969) je uveo *plastične potencijale* preseka  $\Phi_i^+$  i  $\Phi_i^-$ , koji predstavljaju razlike

$$\Phi_i^+ = R_i - R_i^{*+} \leq 0, \quad \Phi_i^- = -R_i - R_i^{*-} \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, np. \quad (7.5.2)$$

Ako je  $\Phi_i^+ = 0$  onda je ispljen kapacitet preseka  $i$  u odnosu na generalisanu silu  $R_i$  sa pozitivnim predznakom, a ako je  $\Phi_i^- = 0$ , onda je ispljen kapacitet preseka  $i$  u odnosu na generalisanu silu  $R_i$  sa negativnim predznakom.

Ako su plastični potencijali u preseku  $\Phi_i^+ < 0$  ili  $\Phi_i^- < 0$ , onda su prema (7.5.2),  $R_i \neq R_i^{*+}$  ili  $R_i \neq -R_i^{*-}$ , pa se materijal u tome preseku ponaša kao nedeformabilan, tako da je generalisana deformacija u tom preseku  $\theta_i^+ = 0$ , odnosno  $\theta_i^- = 0$ . Na osnovu toga se može pisati da su proizvodi plastičnih potencijala i generalisanih deformacija jednaki nuli, tj.

$$\Phi_i^+ \theta_i^+ = 0 \quad \text{i} \quad \Phi_i^- \theta_i^- = 0; \quad i = 1, 2, \dots, np. \quad (7.5.3)$$

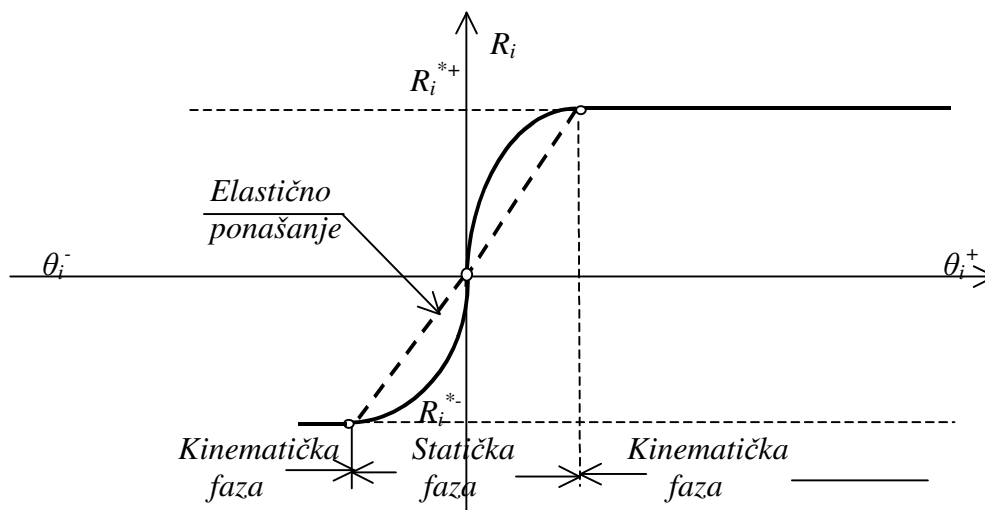
Komponente  $R_i, R_i^{*-}, R_i^{*+}$  ( $i=1, 2, \dots, np$ ) formiraju vektore generalisanih sila  $\mathbf{R}$  i plastičnih kapaciteta  $\mathbf{R}^{*+}$  i  $\mathbf{R}^{*-}$  karakterističnih preseka konstrukcijskog sistema. Isto tako, komponente generalisanih deformacija  $\theta_i^+$  i  $\theta_i^-$  formiraju vektore generalisanih deformacija karakterističnih preseka sistema  $\boldsymbol{\theta}^+$  i  $\boldsymbol{\theta}^-$ , tako da se izrazi (7.5.1), (7.5.2) i (7.5.3) mogu pisati u vektorskom obliku

$$-\mathbf{R}^* \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^*, \quad (7.5.1-a)$$

$$\Phi^+ = \mathbf{R} - \mathbf{R}^{*+} \leq \mathbf{0}, \quad \Phi^- = -\mathbf{R} - \mathbf{R}^{*-} \leq \mathbf{0}. \quad (7.5.2-a)$$

$$\Phi^+ \theta^+ = \mathbf{0}, \quad \Phi^- \theta^- = \mathbf{0}. \quad (7.5.3-a)$$

Uslovi (7.5.2), odnosno (7.5.2-a) su uslovi plastičnog tečenja.



**Slika 4.** Elasto plastično i kvazi elasto plastično telo

Model elasto-plastičnog tela koji je sastavljen od idealno elastičnog Sen Venant-ovog tela (*StV*) i elastičnog Hooke-ovog (Hukovog) tela *H*, koji su redno povezani, prikazan je na slici 2-b. Pod dejstvom sile *F* odmah počinje da se izdužuje elastična opruga, koja predstavlja Hook-ovo telo. Kada sila *F* dostigne vrednost  $F^*$ , odnosno kada se savlada sila trenja između prizme i podloge, prizma počinje da se kreće i na taj način se ostvaruju plastične deformacije modela. Posle prestanka dejstva sile *F*, elastične deformacije su u potpunosti povratne, jer opruga zauzima svoj prvobitni položaj, dok su plastične deformacije u potpunosti nepovratne jer prizma ne može zbog uticaja trenja da zauzme svoj prvobitni položaj.

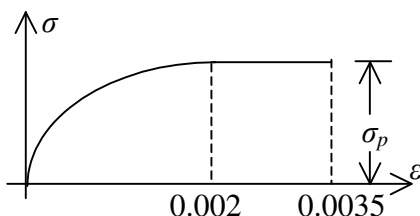
Dijagram generalisane sile  $R_i$  (momenta savijanja ili normalne sile) i generalisanog pomerjenja (ugla obrtanja preseka ili dilatacije, tj. izduženja ili skraćenja) linijskog elementa konstrukcijskog sistema za elasto-plastično ponašanje materijala prikazan je na slici 4. Elastično ponašanje je prikazano isprekidanom kosom linijom, dok su horizontalnim linijama prikazane plastične deformacije. Ovakav reološki model se veoma često koristi u teoriji i proračunima konstrukcija za prikaz ponašanja materijala.

Nešto složeniji reološki model tzv. kvazi elasto-plastičnog tela prikazan je na slici 2-c. On se sastoji od Sent Venant-ovog tela (*StV*), Toroja-Paez –ovog (Toroha-Paec) modela kvazielastičnog tela. Toroja-Paezov reološki model se sastoji od elastične spirale (*TP*) umetnute u metalni cilindar i elastične opruge (*H*). Elastična spirala je u dodiru sa unutrašnjošću metalnog cilindra, tako da postoji trenje između nje i cilindra, koje otežava njeno kretanje kroz cilindar. Toroja-Paecov model opisuje kvazi-elastične deformacije, koje su delimično povratne, jer se jedan deo energije utroši na savladjivanje trenja između opruge i cilindra.

Dijagram generalisane sile  $R_i$  (momenta savijanja ili normalne sile) i generalisanog pomerjenja (ugla obrtanja preseka ili dilatacije, tj. izduženja ili skraćenja) linijskog elementa konstrukcijskog sistema za kvazi elasto-plastično ponašanje materijala prikazan je punim linijama na slici 4. Kvazi elastično ponašanje materijala je izraženo krivom linijom,



generalisana deformacija  $\theta_i$  – generalisana sila  $R_i$ . Ovaj reološki model se, takođe, veoma često koristi u teoriji konstrukcija, naročito armiranobetonskih. On je primenjen za konstitutivnu vezu između dilatacije  $\varepsilon$  napona pritiska  $\sigma$  u betonu za dimenzionisanje armirano betonskih nosača i analizu armiranobetonskih konstrukcija. Prema našem *Pravilniku o tehničkim merama i uslovima za beton i armirani beton*, kao i prema *Evropskim normama za armiranobetonske konstrukcije*, preložena je parabolična zavisnost napona  $\sigma$  od dilatacije  $\varepsilon$  za  $0 \leq \varepsilon \leq 0.002$  i plastična deformacija pri naponu plastičnog tečenja koji je jednak čvrstoći normne betonske prizme  $\sigma_p$  za  $0.002 \leq \varepsilon \leq 0.0035$ , kako je to prikazano na slici 5.

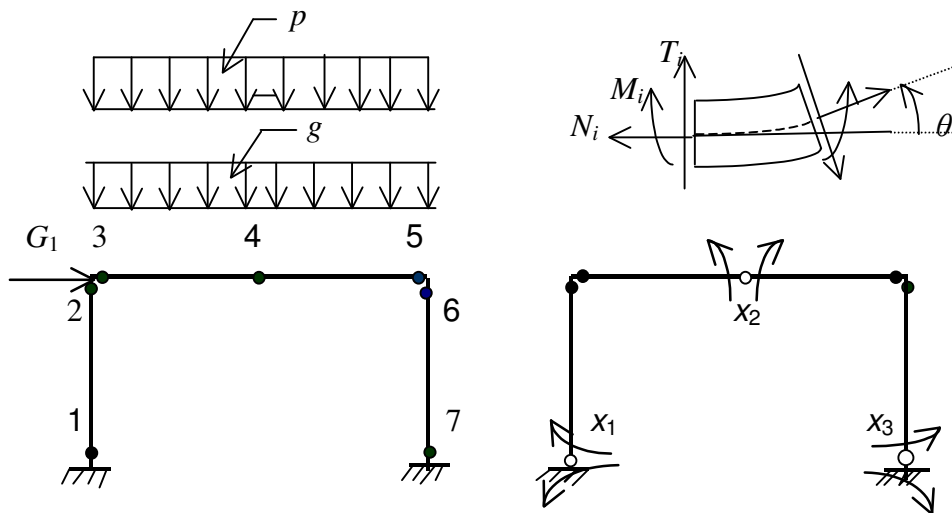


**Slika 5.** Dijagram  $\sigma - \varepsilon$  za beton

Kvazi elasto-plastičnim reološkim modelom se realnije opisuje ponašanje betona nego elasto-plastičnim modelom. Sa slike 4 se može zaključiti da se u statičkoj fazi materijal u konstrukcijskom sistemu ponaša kvazi elastično, a u nekim kritičnim presecima naponi dostižu granicu plastičnosti, odnosno iscrpljuje se kapacitet nosivosti preseka, i sistem se nalazi u stanju granične ravnoteže.

#### **7.6. ODREĐIVANJE FAKTORA GRANIČNOG OPTEREĆENJA (LOMA) I MEHANIZMA LOMA LINIJSKOG KONSTRUKCIJSKOG SISTEMA**

Razmatra se neki linijski konstrukcijski sistem, koji je prikazan na sl. 6a, koji je  $\alpha$  puta statički neodređen uz pretpostavku da materijalu odgovara Saint Venant-ov reološki model prikazan na sl. 2a, kao i da važe ostale pretpostavke navedene na početku prethodnog odeljka. U sistemu se bira  $m$  karakterističnih ili kritičnih preseka u kojima može doći do iscrpljenja nosivosti preseka, odnosno pojave plastičnih zglobova. Sistem se prvo analizira za statički moguće ravnotežno stanje (statička faza), a zatim za stanje kada se formira mehanizam loma (kinematička faza). Sistem se tretira kao orijentisan graf (kako je to prikazano na sl. 4), da bi se mogli odrediti pozitivni smerovi unutrašnjih sila  $N_i$ ,  $T_i$  i  $M_i$  i ugla obrtanja  $\theta_i$  u preseku  $i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ).



Slika 6. Konstrukcijski i osnovni sistem

### 7.6.1 STATIČKI MOGUĆE GRANIČNO RAVNOTEŽNO STANJE.

Za određivanje ovog ravnotežnog stanja primenjuje se metoda koja je slična metodi sila u teoriji elastičnih linijskih sistema i koja se u engleskoj literaturi (Lloyd Smith and Munro, 1978) naziva *mesh method* (metoda mreže).

Formira se "osnovni" statički sistem, tako što se za  $\alpha$  prekobrojnih nepoznatih statičkih veličina u nekim od kritičnih preseka isključuju odgovarajuće veze i umeću nove veze (zglobovi ili drugi diskontinuiteti) i umesto njih se uključuje  $\alpha$  parova nepoznatih sila, koje mogu biti momenti savijanja, normalne ili transverzalne sile i koje se obeležavaju sa  $x_1, x_2, \dots, x_\alpha$ . Za jedinične veličine ovih sila  $x_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, \alpha$ ) se svakom od kritičnih preseka  $j = 1, 2, \dots, m$  određuju karakteristične ili merodavne unutrašnje sile  $b_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, \alpha$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ), koje formiraju matricu **B**. Ako je u nekom preseku  $j$  merodavan momenat  $M_j$ , onda je  $b_{ij} = \overline{M}_{ij}$ , ako je merodavna normalna sila  $N_j$ , onda je  $b_{ij} = \overline{N}_{ij}$ , gde su  $\overline{M}_{ij}$  i  $\overline{N}_{ij}$  momenat savijanja, odnosno normalna sila u preseku  $j$  usled dejstva jedinične sile  $x_j = 1$ .

Za poznato stalno podeljeno opterećenje  $g$ , odnosno koncentrisane sile  $G_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) i promenljivo podeljeno opterećenje  $p$  i promenljive koncentrisane sile  $P_l$  ( $l = 1, 2, \dots, s$ ) na isti način se određuju merodavne unutrašnje sile u kritičnim presecima  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) koje se ovde obeležavaju sa  $b_i^g$  za stalno i  $b_i^p$  za promenljivo opterećenje.

Primenjujući princip superpozicije uticaja, koji važi u statičkoj fazi ponašanja sistema, merodavni moment savijanja ili merodavna normalna sila u preseku  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), koji se ovde obeležavaju sa  $R_i$  su

$$R_i = \sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij} x_j + b_i^g + \gamma b_i^p, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.6.1)$$

Koeficijent  $\gamma$  predstavlja faktor graničnog stanja, odnosno loma sistema, sa kojim se množi promenljivo opterećenje da bi sistem došao u još uvek moguće statičko stanje granične ravnoteže, zbog dostizanja kapaciteta nosivosti, odnosno plastifikacije u odedenom broju preseka. To je stanje između statičke i kinematičke faze sistema, ali se sistem održava u ravnotežnom stanju i sa takoreći minimalnim povećanjem povremenog opterećenja sistem prelazi u mehanizam (kinematički lanac), odnosno dolazi do njegovog kolapsa. Da bi sistem

došao u ovo stanje neophodno je da minimalan broj kritičnih preseka  $n_k$  u kojima dolazi do dostizanja kapaciteta nosivosti preseka bude

$$n_k = \alpha + 1. \quad (7.6.2)$$

Prema tome, što je veća statička neodređenost sistema to je potrebno da se pojavi plastifikacija u većem broju kritičnih poprečnih preseka, a samim tim je veći i faktor graničnog stanja sistema i njegova nosivost za zadato opterećenje. Statički određeni sistemi imaju statičku neodređenost  $\alpha = 0$ , pa je dovoljno da se plastifikuje samo jedan od kritičnih preseka i da sistem dođe u stanje granične ravnoteže. Zbog toga je njihova otpornost u ovom pogledu znatno manja od otpornosti višestruko statički neodređenih sistema.

Kapacitet nosivosti sistema u nekom kritičnom preseku  $i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) zavisi od veličine sila u tom preseku, koje predstavljaju rezultante napona,  $M_i$ ,  $N_i$  i  $T_i$  i njihovih smerova. Stoga se za svaki izabrani kritični presek  $i$  sračunavaju prema veličinama mogućih kritičnih sila u preseku dve vrednosti kapaciteta nosivosti preseka, koje se ovde obeležavaju sa  $R_{*i}^+$  i  $R_{*i}^-$ , za koje važi

$$R_{*i}^+ \geq 0, \quad R_{*i}^- \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.6.3)$$

U statičkoj fazi ponašanja sistema vrednosti merodavne sile  $R_i$  u svakom preseku  $i$  moraju se nalaziti u sledećim intervalima

$$-R_{*i}^- \leq R_i \leq R_{*i}^+, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (7.6.4)$$

Ili kada se uzme u obzir izraz (7.6.1), dobija se

$$-R_{*i}^- \leq \sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij} x_j + b_i^g + \gamma b_i^p \leq R_{*i}^+, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.6.5)$$

Ovaj sistem nejednačina se posle sređivanja može pisati u sledećoj formi:

$$\sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij} x_j + \gamma b_i^p \leq R_{*i}^+ - b_i^g, \quad -\sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij} x_j - \gamma b_i^p \leq R_{*i}^- + b_i^g, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.6.6)$$

Da bi se problem rešio treba, prema prvoj osnovnoj teoremi i nejednačini (7.3.1) odrediti maksimalnu vrednost faktora graničnog opterećenja sa kojim treba pomnožiti promenljivo opterećenje da bi sistem došao u statičko stanje granične ravnoteže, i da merodavne sile u  $R_i$  presecima  $i = 1, 2, \dots, m$  po svojim vrednostima ne prevaziđu kapacitete nosivosti, tj. da ostanu u intervalima (7.6.4). Treba, dakle, odrediti maksimalnu vrednost funkcije cilja  $z$

$$z = \max \gamma \quad (7.6.7)$$

Na ovaj način je rešavanje problema određivanja faktora graničnog opterećenja  $\gamma$  i odgovarajućih nepoznatih sila  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,\alpha$ ) formulisano kao rešavanje zadatka linearnog programiranja (LP), koje je ukratko opisano u odeljku 1 ovog poglavlja, sa funkcijom cilja (7.6.7) i uslovima ograničenja (7.6.6). Ova funkcija cilja i uslovi ograničenja mogu se pisati kraće u vektorsko-matričnoj formi

$$z = \max [\mathbf{0}^T \mathbf{x} + \gamma] \quad (7.6.8)$$

sa uslovima ograničenja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b}^p \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{b}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \gamma \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R}_*^+ - \mathbf{b}^g \\ \mathbf{R}_*^- + \mathbf{b}^g \end{bmatrix}. \quad (7.6.9)$$

gde su vektori pisani u transponovanoj formi, koja je označena sa  $T$  u gornjem indeksu

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T &= [x_1, x_2, \dots, x_\alpha], & \mathbf{0}^T &= [0, 0, \dots, 0] \\
\mathbf{b}^{g,T} &= [b_1^g, b_2^g, \dots, b_m^g], & \mathbf{b}^{p,T} &= [b_1^p, b_2^p, \dots, b_m^p] \\
\mathbf{R}_*^{+,T} &= [R_1^+, R_2^+, \dots, R_m^+], & \mathbf{R}_*^{-,T} &= [R_1^-, R_2^-, \dots, R_m^-].
\end{aligned} \tag{7.6.10}$$

Matrica  $\mathbf{B}$  je tipa  $[m \times \alpha]$  i sadrži, kako je već rečeno, elemente  $b_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ;  $j=1,2,\dots,\alpha$ ).

Pošto nepoznate promenljive  $x_i$  nemaju ograničenja u znaku, a kompjuterski programi koji se koriste za rešavanje zadataka linearnog programiranja prema simpleks algoritmu su razvijeni za nenegativne vrednosti  $x_j \geq 0$  ( $j=1,2,\dots,\alpha$ ), to se ove promenljive izražavaju kao razlike dveju nenegativnih promenljivih

$$x_j = x_j^+ - x_j^-; \quad x_j^+ \geq 0, \quad x_j^- \geq 0; \quad x_j^+ x_j^- = 0; \quad j = 1, 2, \dots, \alpha. \tag{7.6.11}$$

Uslovi ograničenja (7.6.6) sada imaju formu

$$\sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij} (x_j^+ - x_j^-) + \gamma b_i^p \leq R_{*i}^+ - b_i^g, \quad - \sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij} (x_j^+ - x_j^-) - \gamma b_i^p \leq R_{*i}^- + b_i^g, \quad i=1, 2, \dots, m; \tag{7.6.12}$$

ili pisano u vektorsko-matričnoj formi sa funkcijom cilja

$$z = \max[\mathbf{0}^T \mathbf{x}^+ - \mathbf{0}^T \mathbf{x}^- + \gamma] \tag{7.6.13}$$

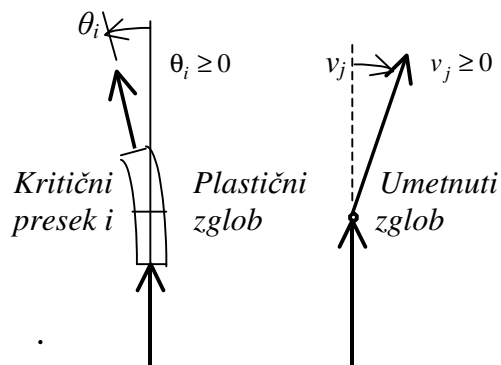
i uslovima ograničenja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{B} & \mathbf{b}^p \\ -\mathbf{B} & \mathbf{B} & -\mathbf{b}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^+ \\ \mathbf{x}^- \\ \gamma \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R}_*^+ - \mathbf{b}^g \\ \mathbf{R}_*^- + \mathbf{b}^g \end{bmatrix}. \tag{7.6.14}$$

Kada se primenom simpleks metode, odnosno odgovarajućeg računarskog programa, odrede nepoznate veličine  $x_j^+ \geq 0$  i  $x_j^- \geq 0$ , ( $j=1,2,\dots,\alpha$ ) i koeficijent graničnog stanja (loma) sistema  $\gamma = \gamma_c$  sračunavaju se prema formuli (7.6.11) tražene nepoznate sile  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,\alpha$ ), a zatim prema izrazu (7.6.1) merodavne unutrašnje sile u kritičnim presecima sistema u statičkom stanju granične ravnoteže.

## 7.6.2. KINEMATIČKO MOGUĆE STANJE GRANIČNE RAVNOTEŽE

U teoriji plastičnosti zbog plastifikacije materijala u odgovarajućem broju kritičnih preseka nastaju plastični zglobovi usled momenata savijanja, velika izduženja, odnosno skraćanja zbog normalnih sila. Ovakvi plastični zglobovi, koji je prikazani na slici 7 (D. Lloyd Smith, 1972) razlikuju se od klasičnih zglobova, koji se nalaze u sistemu kao njegovi sastavni elementi, što oni mogu prenositi u preseku  $i$  moment savijanja pune plastičnosti  $M_i^*$  (N. Hajdin, 1975). Klasični zglobovi, kako je to poznato iz statike konstrukcija, ne mogu ni u jednoj fazi opterećenja moment savijanja  $M_i$ .



*Slika 7. Plastični zglob i umetnuti (fiktivni) zglob*

Kada se u kritičnim presecima konstrukcijskog sistema pojavi dovoljan broj plastičnih zglobova, sistem prelazi u granično kinematičko stanje, odnosno mehanizam, koji ustvari odgovara kolapsu, tj. lomu sistema. Broj plastičnih zglobova, odnosno plastifikovanih kritičnih preseka  $r$  koji prevode konstrukcijski sistem u mehanizam je

$$r = \alpha + 1,$$

gde je  $\alpha$  statička neodređenost konstrukcijskog sistema.

Broj mogućih mehanizama  $n_m$  koji se mogu formirati u  $\alpha$  puta statički neodređenom konstrukcijskom sistemu je (Lloyd Smith, Prascevic, 1990)

$$n_m = \binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!} \quad (7.6.15)$$

Za svaki od ovih mehanizama ( $k$ ) se određuju odgovarajuća pomeranja i obrtanja preseka i zatim primenjuje ekstremalni princip, tako što se za mala pomeranja mehanizama loma sračunavaju radovi spoljašnjih sila  $W_e(\gamma_k)$  i radovi unutrašnjih sila  $W_u(\gamma_k)$  absorbovanih u plastičnim zglobovima, odnosno izduženjima ili skraćenjima sistema, zavisno od toga da li je u kritičnom preseku merodavan momenat ili normalna sila. U stanju granične ravnoteže ti radovi su jednaki

$$W_e(\gamma_c) = W_u(\gamma_c). \quad (7.6.16)$$

Ovde je  $\gamma_k$  faktor opterećenja bilo kojeg od razmatranih mehanizama, a  $\gamma_c$  faktor opterećenja loma (kolapsa) sistema.

Prema Drugoj osnovnoj graničnoj teoremi i nejednačini (7.3.2) je  $\gamma_k \geq \gamma_c$ . Zbog toga, za merodovni mehanizam loma treba uzeti onaj mehanizam za koji faktor opterećenja  $\gamma_k$  ima najmanju vrednost, tj.

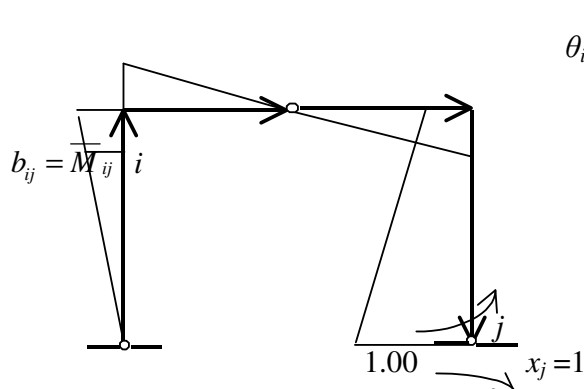
$$\gamma_c = \min \gamma_k. \quad (7.6.17)$$

Pošto je broj mehanizama za složenije sisteme sa većim brojem kritičnih preseka računat prema formuli (7.7.1) veliki, za dobijanje stvarnog mehanizma se vrši kombinovanje tzv. osnovnih ili nezavisnih mehanizama loma. Oni se dobijaju tako što se u izabranom osnovnom sistemu u nekom od izabranih kritičnih preseka pretpostavi da se pojavila plastifikacija, odnosno da je u njemu nastao plastičan zglob ili plastično izduženje ili skraćenje zavisno od merodavne unutrašnje sile.

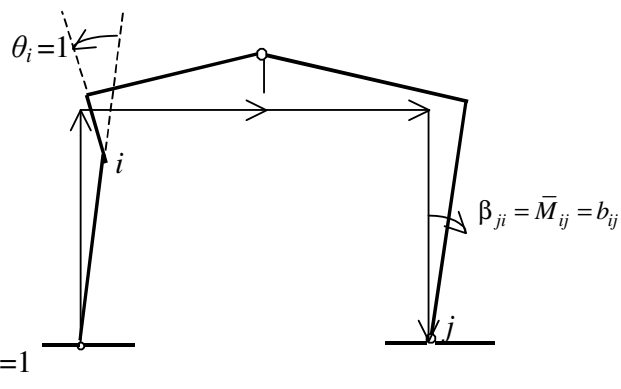
Broj osnovnih mehanizama je

$$n_{om} = m - \alpha. \quad (7.6.18)$$

Na slici 8 prikazan je osnovni sistem tri puta statički neodređenog okvira sa slike 6 sa dijagramom momenata savijanja  $\bar{M}_j$  usled dejstva momenta  $x_j=1$  u preseku  $j$ , dok je na slici 9 prikazan osnovni mehanizam ovog sistema koji nastaje zbog plastifikacije materijala odnosno pojave plastičnog zgloba u preseku  $i$  i obrtanja preseka za jedinični ugao  $\theta_i=1$ .



**Slika 8.** Osnovni sistem



**Slika 9.** Osnovni mehanizam

Prema principu virtualnih pomeranja je

$$\bar{M}_{ij}\theta_i = x_j\beta_{ji}$$

$\bar{M}_{ij}$  je moment savijanja u preseku  $i$  zbog dejstva koncentrisanog momenta  $x_j=1$  u preseku  $j$ , dok je  $\beta_{ji}$  obrtanje preseka  $j$  izazvano jediničnim obrtanjem preseka  $\theta_i=1$ .

Pošto su  $x_j=1$  i  $\theta_i=1$ , dobija se s obzirom da je  $\bar{M}_{ij}$  ranije označeno kao  $b_{ij}$ , tj. ( $\bar{M}_{ij}=b_{ij}$ )

$$\beta_{ji} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, \alpha. \quad (7.6.19)$$

Generalisano pomeranje  $v_j$  u preseku  $j$  osnovnog mehanizma u kojem su fiktivno uključeni diskontinuiteti u vidu zglobova, da bi se dobio osnovni statički sistem, može se na mehanizmu izraziti pomoću obrtanja u plastificiranim presecima  $\theta_i$  i obrtanja u umetnutim zglobovima  $\beta_{ji}$  pomoću sledeće formule

$$v_j = \sum_{i=1}^m \beta_{ji}\theta_i = \sum_{i=1}^m b_{ij}\theta_i; \quad j = 1, 2, \dots, \alpha.$$

Pošto diskontinuiteti  $v_j$  ustvari ne postoje, onda su  $v_j=0$  ( $j=1, 2, \dots, \alpha$ ), pa ove jednačine imaju formu

$$\sum_{i=1}^m b_{ij}\theta_i = 0; \quad j = 1, 2, \dots, \alpha. \quad (7.6.20)$$

Ako na sistem deluje neka sila  $P_i$  koja u kritičnim presecima osnovnog sistema izaziva momente savijanja  $\bar{M}_i^p$  ili normalne sile  $\bar{N}_i^p$ , u zavisnosti od toga šta je u tom preseku merodavno, koje su ovde obeležene sa  $b_i^p$ , i ako je  $\delta_i$  pomeranje preseka  $i$  u mehanizmu u smeru dejstva sile  $P_i$ , a  $\theta_i$  generalisano obrtanje ovog preseka, onda je zbog jednakosti radova spoljašnjih i unutrašnjih sila na odgovarajućim pomeranjima

$$P_i \delta_i = b_i^p \theta_i.$$

Kada se uzmu u obzir sve spoljašnje sile koje deluju na sistem koje zajedno izazivaju unutrašnje sile u preseccima  $b_i^p$  ( $i=1,2,\dots,m$ ), onda će biti radovi svih spoljašnjih i unutrašnjih sila u mehanizmu biti jednaki, tj.

$$\Delta = \sum P_i \delta_i = \sum_{i=1}^m b_i^p \theta_i .$$

Pošto se za plastične mehanizme ne mogu jednoznačno odrediti pomeranja i obrtanja preseka, kao što je to slučaj u teoriji elastičnih konstrukcijskih sistema, to je faktor  $\Delta$  neodređen, pa se njegova vrednost može uzeti  $\Delta = 1$ , tako da ova jednačina postaje

$$\sum_{i=1}^m b_i^p \theta_i = 1. \quad (7.6.21)$$

Pošto generalisana obrtanja kritičnih preseka nemaju ograničenja u predznaku i mogu biti pozitivna, negativna ili jednaka nuli, to se ona mogu izraziti kao razlike nenegativnih veličina

$$\theta_i = \theta_i^+ - \theta_i^-; \quad \theta_i^+ \geq 0; \quad \theta_i^- \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (7.6.22)$$

za koje važe uslovi komplementarnosti

$$\theta_i^+ \theta_i^- = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.6.23)$$

Kada se izrazi za  $\theta_i$  uvrste u jednačine (7.6.20) i (7.6.21), one postaju

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} \theta_i^+ - \sum_{i=1}^m b_{ij} \theta_i^- = 0; \quad j = 1, 2, \dots, \alpha. \quad (7.6.24)$$

$$\sum_{i=1}^m b_i^p \theta_i^+ - \sum_{i=1}^m b_i^p \theta_i^- = 1. \quad (7.6.25)$$

Ove jednačine se mogu pisati u vektorsko-matričnoj formi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & -\mathbf{B}^T \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^+ \\ \boldsymbol{\theta}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.6.26)$$

Disipicaja energije  $D$  u mehanizmu sistema  $k$  do koje dolazi usled dejstva spoljašnjih sila  $P_i$  koje su izazvale dostizanje kapaciteta nosivosti  $R_i^{*+}$  ili  $R_i^{*-}$  u kritičnim preseccima, uzimajući uticaj sila od stalnog opterećenja  $G_l$  je prema izrazima (7.6.1) i (7.6.6)

$$D_k = \sum_{i=1}^m (R_i^{*+} - b_i^g) \theta_i^+ + \sum_{i=1}^m (R_i^{*-} + b_i^g) \theta_i^-$$

Od svih mogućih mehanizama u sistemu merodavan je onaj mehanizam za koji je disipacija energije najmanja, tj. za koji funkcija cilja

$$w = \min D_k = \min \left[ \sum_{i=1}^m (R_i^{*+} - b_i^g) \theta_i^+ + \sum_{i=1}^m (R_i^{*-} + b_i^g) \theta_i^- \right] \quad (7.6.27)$$

ili u vektorskoj formi

$$w = \min \left[ (\mathbf{R}^{*+} - \mathbf{b}^g) \boldsymbol{\theta}^+ + (\mathbf{R}^{*-} + \mathbf{b}^g) \boldsymbol{\theta}^- \right], \quad (7.6.28)$$

gde su vektori

$$\boldsymbol{\theta}^+ = [\theta_1^+, \theta_2^+, \dots, \theta_m^+] \text{ i } \boldsymbol{\theta}^- = [\theta_1^-, \theta_2^-, \dots, \theta_m^-]. \quad (7.6.29)$$

Funkcija cilja (7.6.27) sa uslovima ograničenja (7.6.20) i (7.6.21) čini linearni program za određivanje generalisanih obrtanja usled plastifikacije materijala u kritičnim preseccima merodavnog mehanizma loma. Uslovi ograničenja i funkcija cilja su prikazani u vektorsko-matričnoj formi (7.6.26) i (7.6.28). Rešavanjem ovog dualnog programa dobijaju se uglovi obrtanja  $\theta_i^+$  i  $\theta_i^-$ , zatim prema izrazu (7.6.22) generalisana obrtanja (rezultante deformacija)  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

## 7.7. STATIČKO-KINEMATIČKI DUALITET

Ako se ovaj linearni program uporedi sa linearnim programom u statičkoj fazi sa funkcijom cilja (7.6.13) i uslovima ograničenja (7.6.14), može se odmah zaključiti prema stavovima iz prvog odeljka, da je linearni program za kinematičku fazu dualni program linearnog (primarnog) programa za statičku fazu. Matrica ograničenja u dualnom linearnom programu za kinematičku fazu formira se transponovanjem matrice ograničenja primarnog linearnog programa za prvu fazu. Vektor funkcije cilja u primarnom programu jednak je vektoru slobodnih članova u ograničenjima u dualnom programu. Fizikalna priroda nepoznatih je različita u primarnom i dualnom programu. U primarnom programu (statička faza) nepoznate su sile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  na mestima gde su ukinuti neki oslonci i uvedeni diskontinuiteti da bi se dobio statički određen sistem, a u dualnom programu su nepoznata generalisana obrtanja  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  u kritičnim preseccima. Ovim se izražava statičko-kinematički dualitet statičkih i kinematičkih veličina. Uslovi ograničenja u primarnom programu (7.6.6), odnosno (7.6.9), predstavljaju uslove ravnoteže, dok uslovi (7.6.20) u dualnom programu predstavljaju uslove kinematičke kompatibilnosti pomeranja i deformacija.

Iako u teorijskim formulacijama statička i kinematička faza plastične analize konstruktivnog sistema se formulišu nezavisno na različitim principima, algebarske formulacije su povezane preko statičko kinematičkog dualiteta između spoljašnjih  $x_j$  i unutrašnjih sila  $R_i$  u statičkoj fazi i zadatih pomeranja na mestima uklonjenih sila veze  $v_j$  i uglova obrtanja  $\theta_i$  u izabranim preseccima.

Postupci konstruisanja mehanizama konstrukcijskih sistema i određivanje opterećenja odnosno faktora loma su opisani u svetskoj i domaćoj literaturi (P. G. Hodge, 1959, M. Ivković, 1962, N. Hajdin, 1975, M. Ačić, 1968, 1978 i drugi autori). Postupak konstruisanja mehanizama složenih sistema i određivanje relevantnih parametara koji se odnose na generalisana pomeranja mehanizma sistema i dalje sračunavanje radova spoljašnjih i unutrašnjih sila i parametara loma je često složeno i podložno mogućim greškama. J. Munro i D. Lloyd Smith (1972), D. Lloyd Smith (1972) su polazeći od statičko-kinematičkog dualiteta, koji postoji između statičkih veličina koje predstavljaju spoljašnje i unutrašnje sile i kinematičkih veličina koje predstavljaju generalisana pomeranja, formulisali rešavanje ovog problema kao primarni i dualni zadatak linearnog programiranja. Rešavanjem primarnog problema se, kako je već pokazano, u statičkoj fazi određuju opterećenje loma i unutrašnje sile u fazi granične ravnoteže, dok se rešavanjem odgovarajućeg dualnog problema linearnog programiranja određuju generalisana pomeranja, bez potrebe da se posebno konstruiše veći broj mehanizama sistema. Na osnovu dobijenih generalisanih pomeranja dobija se merodavni mehanizam loma koji zadovoljava uslov (7.6.13). Ovaj postupak je prikazan, takođe u radovima (D. Lloyd Smith i Ž. Praščević, 1990 i Ž. Praščević, i N. Praščević, 2009). Kompjuterski programi za linearno programiranje su pisani tako da daju rešenja i primarnog i dualnog linearnog programa, ovde je korišćen program za rešenje primarnog i dualnog problema koji su razvili Ž. Praščević i N. Praščević.

Konačne formulacije određivanja faktora opterećenja za statičku fazu i mehanizma loma za dinamičku fazu u stanju granične ravnoteže date su u vektorsko-matričnoj formi u sledećoj tabeli:

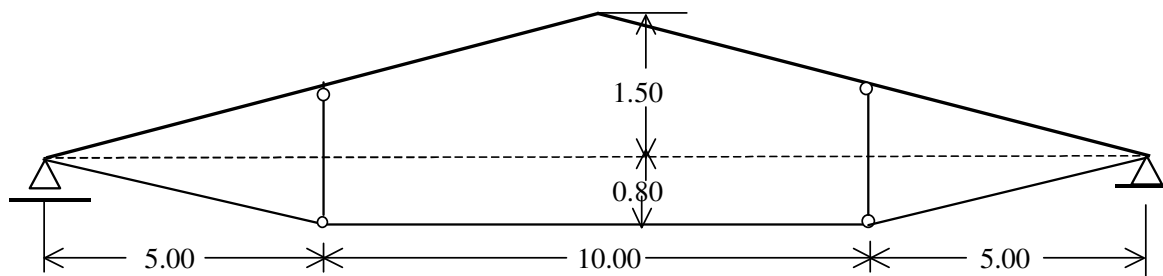


Statička faza	Kinematička faza
Primarni linearni program	Dualni linearni program
$z = \max[\mathbf{0}^T \mathbf{x} + \gamma].$ $\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b}^p \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{b}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \gamma \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{R}_*^+ - \mathbf{b}^g \\ \mathbf{R}_*^- + \mathbf{b}^g \end{bmatrix},$ $\mathbf{x} (\geq, =, \leq) \mathbf{0}, \quad \gamma > 0.$	$w = \min[(\mathbf{R}^{*+} - \mathbf{b}^g)\boldsymbol{\theta}^+ + (\mathbf{R}^{*-} + \mathbf{b}^g)\boldsymbol{\theta}^-],$ $\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & -\mathbf{B}^T \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^+ \\ \boldsymbol{\theta}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix},$ $\boldsymbol{\theta}^+ \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\theta}^- \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\theta}^+ \boldsymbol{\theta}^- = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^+ - \boldsymbol{\theta}^-.$
$\max z = \min w$	

(7.7.1)

## 7.8. ANALIZA PONAŠANJA DVOPOJASNOG SISTEMA

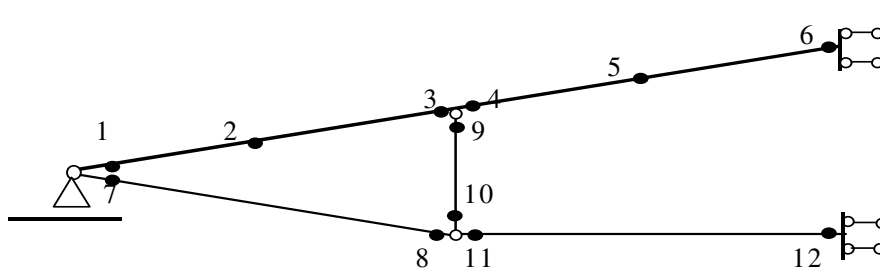
Na slici 10 je prikazana statička šema ispitivanog dvopojasnog montažnog sistema, koji je detaljno opisan u prethodnim odeljcima. Gornji pojas je urađen od armiranog betona, a donji od čeličnih U profila.



*Slika 10. Dvopojasni krovni konstrukcijski sistem*

Pošto su nosač i opterećenje simetrični u odnosu na vertikalnu osu (simetrični u svim fazama), u daljoj analizi, radi skraćivanja proračuna razmatraće se, kako je to uobičajeno u statičkoj konstrukciji, polovina nosača sa odgovarajućim vezama, koja je prikazana na slici 11.

Posmatrana polovina nosača je povezana sa osloncima i njegovom drugom polovinom vezama prikazanim na slici 11, tako da se nosač u sljemenu (presek 6) može pomerati vertikalno i primati moment savijanja. Na levom osloncu (pored preseka 1 i 2) nosač se može pomerati samo horizontalno i ne može primati momente savijanja. Elastičnom analizom ovog sistema sa krutim spojevima čeličnih profila (zategnuti elementi donjeg pojasa i vertikalni elementi) pokazalo se da su za sva opterećenja dominantne normalne sile zatezanja, a momenti savijanja veoma mali u odnosu na momente savijanja u armiranobetonskim elementima gornjeg pojasa koji imaju znatno veću krutost. Zbog toga su pretpostavljene zglobne veze na krajevima čeličnih elemenata.



**Slika 11.** Levi deo dvopojasnog sistema sa označenim kritičnim presecima

Na posmatranoj polovini nosača izabrano je 12 karakterističnih preseka, koji su označeni punim krugovima. Pošto su u armiranobetonskom delu nosača (gornji pojas) značajni momenti savijanja i normalne sile, to su kapaciteti nošenja  $R_i^{*+}$  i  $R_i^{*-}$  u presecima  $i$  ( $i=1,2,\dots,6$ ) toga dela nosača računati kao za ekscentrično pritisnute armiranobetonske preseke uzimajući u obzir moment savijanja  $M_i$  i normalnu silu  $N_i$ . Kapaciteti nosivosti preseka  $i$  ( $i=7,8,\dots,12$ ) čeličnih elemenata računati su prema normalnoj sili  $N_i$ , pošto je moment savijanja, kako je već rečeno, zanemarljiv. Vrednosti ovih kapaciteta su sračunate u odeljku 6.3 ovog rada. U presecima armiranobetonskih elemenata koji se pod dejstvom opterećenja plastifikuju, pojavljuju se uglovi obrtanja  $\theta_i$ , dok u karakterističnim presecima čeličnih elemenata nastaju plastična izduženja  $\varepsilon_{pl}$ , koja će biti obeležavana u skladu sa matematičkim formulacijama problema (7.6.30), sa  $\theta_i = \varepsilon_{pl}$ .

## 7.8.1 STATIČKA FAZA PRORAČUNA

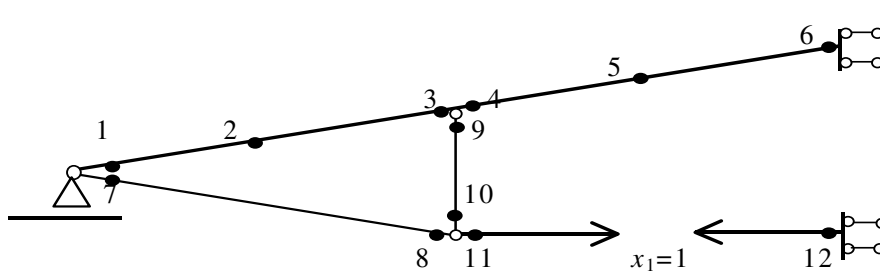
### 7.8.1.1. Izbor osnovnog sistema

Dvopojasni nosač prikazan na slici 10, odnosno njegov levi deo prikazan na slici 11, je jedanput unutrašnje statički neodređen. Isključivanjem elementa sa presecima (11)-(12), sistem postaje statički određen, kako je to prikazano na slici 12. Umesto isključenog štapa, kao što je to poznato iz metode sila, uključuju se sile biakcije  $x_1 = 1$ . Ove sile izazivaju u karakterističnim presecima sistema normalne sile  $\bar{N}_i$  i momente savijanja  $\bar{M}_i$  ( $i = 1,2,\dots,12$ ). Na osnovu ovih veličina i u zavisnosti da li je u kritičnom preseku merodavan moment savijanja ili normalna sila, birane su vrednosti  $b_{i1}$  ( $i = 1,2,\dots,12$ ). Ove vrednosti su elementi matrice  $\mathbf{B}$ , koja se u ovom slučaju kada je samo jedna nepoznata statička veličina  $x_1$ , sastoji iz vektora  $\mathbf{b}_1$ . Sve ove veličine ovih sila prikazane su u tabeli 1.

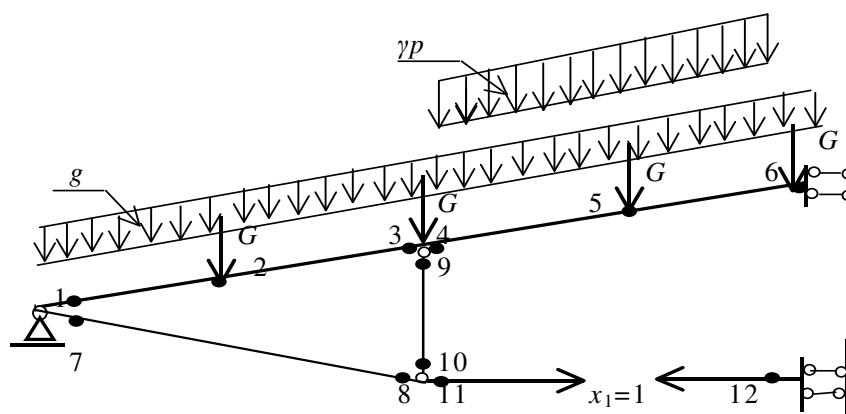
### 7.8.1.2. Unutrašnje sile u presecima osnovnog sistema zbog opterećenja $G$ i $g$

Opterećenje dvopojasnog nosača je vršeno u sedam faza. Način nanošenja opterećenja i ispitivanja nosača je opisan u petom poglavlju disertacije. Opterećenje prve faze se odnosi na sopstvenu težinu nosača  $g = 7.50 \text{ kN/m}'$ . U drugoj fazi opterećenja su pored stalne težine naneti tegovi obešeni po gornjem pojasu od po  $5.0 \text{ kN}$ , a u trećoj fazi opterećenja su dodati tegovi od još  $5.0 \text{ kN}$ . Konačno računsko opterećenje od sopstvene težine  $g$  i težine tegova iznosi  $G$ :

$$g = 7.50 \text{ kN/m}' \quad \text{i} \quad G = 10,00 + 10,00 = 20,00 \text{ kN}.$$



Slika 12. Osnovni sistem leve polovine nosača



Slika 13. Opterećenje na levoj polovini nosača

Uticaji ovog opterećenja su označeni sa gornjim indeksom  $g$ . U sledećim fazama ispitivanja ovo se opterećenje nije menjalo, pa su za njega određivani momenti  $M_i^g$  i normalne sile  $N_i^g$  u karakterističnim presecima osnovnog sistema i u zavisnosti da li je u kritičnom preseku merodavan momenat ili normalna sila, birane vrednosti  $b_i^g$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ), koji su elementi vektora  $\mathbf{b}^g$ . Sve ove vrednosti su prikazane u tabeli 1.

U četvrtoj fazi opterećenja su na delu gornjeg pojasa dodavane po dve armiranobetonske ploče kao opterećenje  $p = 9.00 \text{ kN/m}^2$ . Uticaji ovog opterećenja su označeni sa gornjim indeksom  $p$ . Za ovo opterećenje, kao bazično promenljivo opterećenje sračunate su normalne sile  $N_i^p$  i momenti savijanja  $M_i^p$  u kritičnim presecima  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ), a zatim izabrane vrednosti  $b_i^p$ , koje su elementi vektora  $\mathbf{b}^p$ . Sve ove vrednosti su date u tabeli 1. U sledećim fazama je ovo opterećenje povećavano i iznosilo je  $26.50 \text{ kN/m}$  u petoj fazi,  $35.30 \text{ kN/m}$  u šestoj fazi i  $53.0 \text{ kN/m}$  u sedmoj fazi. Međutim, ni pod ovim opterećenjem nije došlo to loma nosača, pa je u osmoj fazi, pored opterećenja iz sedme faze, izvršeno udar tegom (slobodni pad) od  $5.00 \text{ kN}$  u sleme nosača sa visine od  $6.00 \text{ m}$ . Pošto je opterećenje  $p$  bilo promenljivo, to se ono množi sa faktorom loma  $\gamma$ , koji treba odrediti, kao i odgovarajuću silu zatezanja u elementu donjeg pojasa (11) i (12).

Tabela 1. Merodavne veličine u kritičnim presecima osnovnog sistema.

Krit Pres	Od sile $x_1=1$			Od opter. $G i g$			Od opter $p=9kN/m$			$R_i^{*+}=R_i^*$
	$\bar{N}_i$	$\bar{M}_i$	$b_{i1}$	$N_i^s$	$M_i^s$	$b_i^s$	$N_i^p$	$M_i^p$	$b_i^p$	
$i$	$kN$	$kNm$		$kN$	$kNm$		$kN$	$kNm$		
1	-0.97	0	<b>0</b>	-23.07	0	<b>0</b>	-5.40	0	<b>0</b>	<b>0</b>
2	-0.97	-0.78	<b>-0.78</b>	-20.27	369.81	<b>369.81</b>	-5.40	91.29	<b>91.29</b>	<b>230.25</b>
3	-0.99	-1.55	<b>-1.55</b>	-14.50	642.39	<b>642.39</b>	-5.40	182.55	<b>182.55</b>	<b>230.25</b>
4	-0.99	-1.55	<b>-1.55</b>	-11.18	642.39	<b>642.39</b>	-5.40	182.55	<b>182.55</b>	<b>230.25</b>
5	-0.99	-1.93	<b>-1.93</b>	-8.38	811.80	<b>811.80</b>	-2.70	255.49	<b>255.49</b>	<b>230.25</b>
6	-0.99	-2.30	<b>-2.30</b>	-0.36	874.79	<b>874.79</b>	0	273.71	<b>273.71</b>	<b>230.25</b>
7	1.012	0	<b>1.01</b>	0.11	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	<b>1360.0</b>
8	1.012	0	<b>1.01</b>	0.11	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	<b>1360.0</b>
9	-0.16	0	<b>-0.16</b>	2.40	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	<b>1360.0</b>
10	-0.16	0	<b>-0.16</b>	2.00	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	<b>1360.0</b>
11	1.00	0	<b>1.00</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	<b>1360.0</b>
12	1.00	0	<b>1.00</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	<b>1360.0</b>

### 7.8.1.3. Određivanje nepoznate sile $x_1$ , faktora loma $\gamma$ , momenata savijanja i normalnih sila u stanju granične ravnoteže dvopojasnih nosača

Sile  $x_1$  i faktor loma  $\gamma$  u odnosu na promenljivo opterećenje  $p$ , određuju se, kako je to već rečeno, rešavanjem primarnog linearnog programa (7.7.1). Prema podacima iz tabele 1, u ovom programu su matrice i vektori pisani u tranponovanoj formi:

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{b}_1^T = [0, -0.78, -1.55, -1.55, -1.93, -2.30, 1.012, 1.012, -0.16, -0.16, 1.00, 1.00],$$

$$\mathbf{b}^{s,T} = [0, 369.81, 642.39, 642.39, 811.80, 874.79, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

$$\mathbf{b}^{p,T} = [0, 91.29, 182.55, 182.55, 255.49, 273.71, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

$$\mathbf{R}^{*+} = \mathbf{R}^{*-} = [0, 230.25, 230.25, 230.25, 230.25, 230.25, 1360, 1360, 1360, 1360, 1360, 1360],$$

$$\mathbf{c} = [0, 1], \quad \mathbf{x} = [x_1].$$

Primenom kompjuterskog programa zasnovanog na Dantzigovoj simplex metodi dobijeni su rezultati:

Sila u elementu (11) – (12) je  $x_1 = 1343.75 \text{ kN}$ , faktor loma  $\gamma = 7.875$ .

Ovako sračunato opterećenje loma je  $p_{loma} = \gamma p = 7.875 \times 9.00 = 70.875 \text{ kN/m}$

$p_{loma} = 1.34 p_{max}$ , gde je  $p_{max} = 53.00 \text{ kN/m}$ .

Ispitivani nosači, kako je već rečeno, se nisu polomili u VII fazi opterećenja, koje dalje nije bilo moguće povećavati.

Unutrašnje sile u kritičnim presecima ispitivanog dvopojasnog nosača za računsko statičko opterećenje loma, koje u ispitivanju nije dostignuto, su date u tabeli 2. U ovoj tabeli su date i razlike  $\Delta_i$  između kapaciteta nosivosti  $R_i^*$  preseka i apsolutne vrednosti merodavne sile  $R_i$  preseku  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ), koja je u presecima gornjeg pojasa moment savijanja  $M_i$ , a u presecima ostalih elemenata sistema normalna sila  $N_i$ , tj. Ova razlika predstavlja rezervu nosivosti nosača u tom preseku.

$$\Delta_i = R_i^* - |R_i|, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.8.1)$$

Ove vrednosti sa suprotnim predznakom predstavljaju Mayerove plastične potencijale u preseku  $i$ , koji su izraženi jednačinom (7.5.2)

$$\Delta_i = -\Phi_i \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.8.2)$$

U preseku  $i$  u kojem je došlo do plastifikacije materijala je  $\Delta_i = 0$ . Pored ovih značajnih podataka, u tabeli 2 su, radi upoređenja, prikazane vrednosti normalnih sila i momenata savijanja u kritičnim presecima prema teoriji elastičnosti pod dejstvom celokupnog opterećenja od koncentrisanih sila  $G$  i jednako podeljenih opterećenja  $g$  i  $p_{loma} = 70.875 \text{ kN/m}'$ .

Tabela 2. Unutrašnje sile za stanje granične ravnoteže, elastično rešenje i rezerve kapaciteta

Kritič. Presek	Norm. Sila $N_i$	Monent $M_i$	Merod.vr. $R_i$	Kapacitet $R_i^*$	Rezerva $\Delta_i$	Elastično $N_i^e$	rešenje $M_i^e$
$I$	$kN$	$kNm$	$kNm(kN)$	$kNm(kN)$	$kNm(kN)$	$kN$	$kNm$
1	-1369.0	0	0	230.25	230.250	-1356.0	
2	-1366.2	40.56	40.56	230.25	189.69	-1353.1	48.350
3	-1387.4	-2.91	-2.91	230.25	227.38	-1347.3	-1.280
4	-1384.0	-2.91	-2.91	230.25	227.38	-1380.0	-1.280
<b>5</b>	<b>-1360.0</b>	<b>230.25</b>	<b>230.25</b>	<b>230.25</b>	<b>0.000</b>	<b>-1353.8</b>	<b>268.830</b>
6	-1330.7	-60.48	-60.48	230.25	169.77	-1323.8	-19.820
<b>7</b>	<b>1360.0</b>	<b>0</b>	<b>1360.0</b>	<b>1360.0</b>	<b>0</b>	<b>1358.0</b>	<b>0</b>
<b>8</b>	<b>1360.0</b>	<b>0</b>	<b>1360.0</b>	<b>1360.0</b>	<b>0</b>	<b>1358.0</b>	<b>0</b>
9	-212.6	0	-212.6	1360.0	1147.4	-226.0	0
10	-213.0	0	-213.0	1360.0	1147.0	-226.0	0
11	1343.8	0	1343.8	1360.0	16.2	1338.6	0
12	1343.8	0	1343.8	1360.0	16.2	1338.6	0

Iz rezultata prikazanih u tabeli 2 može se konstatovati sledeće:

1. Pod opterećenjem koje dovodi ovaj konstrukcijski sistem u stanje granične ravnoteže, došlo je do plastifikacije u kritičnom preseku (5) gornjeg pojasa sistema i presecima (7) i (8) donjeg pojasa. U tim presecima su iscrpljeni kapaciteti nosivosti preseka  $R_5^*$ ,  $R_7^*$  i  $R_8^*$ .
2. U preseku (5) gornjeg pojasa, u kojem deluju moment savijanja  $M_5$  i velika normalna sila  $N_5$ , dolazi do plastičnog obrtanja preseka, dok se elemenat donjeg pojasa na čijim se krajevima nalaze preseki (7) i (8) plastično izdužuje, jer u njemu deluje velika normalna sila  $N_{7-8}$  zanemarljivi momenti savijanja.
3. Da bi se dostiglo stanje granične ravnoteže, pored dejstva koncentrisanih sila  $G$  i jednako podeljenog opterećenja  $g$ , nosač treba opteretiti sa velikim jednako podeljenim promenljivim opterećenjem  $p_{loma} = 70.875 \text{ kN/m}'$ , odnosno velikim faktorom loma  $\gamma = 7.875$ , kojim treba pomnožiti polazno jednako podeljeno opterećenje  $p = 9.00 \text{ kN/m}'$ .
4. Nosač se nije polomio pod ovako nanošenim statičkim opterećenjem VII faze, jer ono iz praktičnih razloga njegovog nanošenja i ispitivanja nije moglo biti veće od  $53.00 \text{ kN/m}'$ , koliko je postignuto u ovoj fazi opterećivanja, što iznosi 75% od opterećenja loma.
5. Kada se uporede rezultati analize nosača po teoriji elastičnosti i teoriji graničnih stanja za teorijsko opterećenje loma, može se uočiti da su normalne sile sračunate po jednoj i drugoj teoriji skoro jednake (maksimalno relativno odstupanje iznosi 0.44%). Ta odstupanja u momentima savijanja u armiranobetonskim presecima gornjeg pojasa su znatno veća. U kritičnom preseku (5) relativno odstupanje iznosi 14.35%, tako da je moment savijanja sračunat po teoriji elastičnosti iznosi  $M_5^e = 1.17M_5$  sračunatog po teoriji graničnih stanja. Ovo je savim logično, kada je nosivost donjeg pojasa napravljenog od čeličnih profila velika. Kada zbog povećanja opterećenja dođe do plastifikacije u kritičnom preseku (5), taj presek ne može dalje da prenosi dodatno

opterećenje, jer se u njemu formirao plastični zglob. Daljim povećanjem opterećenja dolazi do preraspodele napona u nosaču, tako što se povećavaju naponi u čeličnim elementima donjeg pojasa, sve dok ne se ne dostigne granica velikih izduženja u čeliku elementa (7)-(8). Pošto je sistem jedanput statički neodređen, to je dovoljno da se formiraju u sistemu dva plastična zglobova, odnosno jedan plastični zglob i jedno plastično izduženje elementa sistema, pa da sistem dođe u stanje granične ravnoteže. U teoriji elastičnosti nema takvih ograničenja, sa povećanjem opterećenja povećavaju se srazmerno deformacije i unutrašnje sile u sistemu.

- Na osnovu ove analize može se konstatovati da ovakvi, jedanput statički neodređeni sistemi imaju mnogo manje «rezerve» ili kapaciteta prenošenja opterećenja u odnosu na višestruko statički neodređene sisteme. Kod višestruko statički neodređenih sistema treba da se formira kritičan broj od  $\alpha+1$  plastičnih zglobova ili plastifikacija preseka ( $\alpha$  je statička neodređenost), da bi sistem došao u stanje granične ravnoteže i počeo da se formira mehanizam loma sistema. Prilikom formiranja prvog plastičnog zgloba, pri daljem opterećivanju dolazi do preraspodele unutrašnjih sila u kritičnim presecima, jer u preseku u kojem je došlo do formiranja ovog zgloba, povećavaju se plastične deformacije, dok se unutrašnje sile ne mogu povećavati, a plastični zglob se formira u drugom kritičnom preseku i proces nastavlja dok se ne formira kritičan broj plastičnih zglobova. Zbog ovoga višestruko statički neodređeni sistemi imaju veću otpornost, odnosno «žilavost» na dejstvo spoljašnjih sila i uticaja.

#### 7.8.1.4 Upoređenje normalnih sila u donjem pojasu sračunatih iz merenih dilatacija i sila sračunatih po teoriji elastičnosti i plastičnosti

Pored ove analize, izvršena je još i elastična analiza po teoriji prvog i drugog reda, koristeći računarski program koji je ranije razvio Ž. Prašćević (1979). Razlike u dobijenim rezultatima po ove dve teorije su neznatne i zanemarljive i veće su za veće faze opterećenja. Tako da za maksimalne apsolutne vrednosti momenata savijanja u kritičnom preseku (5) za VII fazu iznose 3.6%, za VI fazu 2.7%, za VI fazu 1.9%, za IV fazu 0.7%, a za ostale faze manje od 0.1%. Razlike u maksimalnim vrednostima normalnih sila u preseku 1 su jos manje i iznose za VII fazu 0.35%, za VI fazu 0.17%, a za ostale faze opterećenja manje od 0.12%. Nešto veće vrednosti se dobijaju po teoriji drugog reda.

Normalne sile  $N_{7-8}^e$  u elementu donjeg pojasa (7)-(8) dobijene analizom po teoriji elastičnosti su upoređene sa silama sračunatim na osnovu rezultata merenja  $N_{7-8}^m$  i prikazane za faze V, VII i za uticaj opterećenja loma (faza VIII) u tabeli 3.

Tabela 3. Upoređenje merenih i računatih normalnih sila u elementu (7)-(8)

Faza opter.	$N_{7-8}^e$	$\epsilon_{7-8}^e$	$N_{7-8}^{pl}$	$\epsilon_{7-8}^{pl}$	$N_{7-8}^m$	$\epsilon_{7-8}^{pl}$	$\frac{N_{7-8}^m}{N_{7-8}^e}$	$\frac{N_{7-8}^m}{N_{7-8}^{pl}}$
-	kN	%	kN	%	kN	%	-	-
V	747.30	0.1047	-	-	766.70	0.1038	1.026	-
VII	1100.00	0.1541	-	-	1122.00	0.1571	1.020	-
VIII	1367.53	0.1915	1360.00	0.1904	1330.00	0.1864	0.973	0.978

Iz rezultata, prikazanih u ovoj tabeli, može se konstatovati sledeće:

- Razlike između veličina normalnih sila sračunatih na osnovu merenja i prema teoriji elastičnosti i plastičnosti su veoma male i iznose od 2 do 2.6 %.

2. U fazama I do VI sistem se ponaša kao elastičan sistem.
3. U fazi VII elementi donjeg pojasa se još uvek ponašaju elastično, dok se u gornjem pojasu u preku 5 pojavljuje plastičan zglob, ali sistem još nije prešao u mehanizam.
4. Teorijski sistem počinje da prelazi u mehanizam zbog početka pojave velikih izduženja u čeličnom elementu (7)-(8) pod opterećenjem  $p_{loma} = 70.875$  kN.
5. Pošto opterećenje nije dalje moglo da se povećava, apliciran je udar na sistem koji je izazvao velika izduženja u pomenutom elementu. Sila u ovom elementu sračunata na osnovu merenih dilatacija je veoma bliska sili koja je sračunata po teoriji loma i teoriji elastičnosti.

### 7.8.1.5 Analiza za ukupno jednako podeljeno opterećenje u periodu eksploatacije

Radi potpunijeg sagledavanja nosivosti i upotrebljivosti dvopojasnih nosača, izvršena je analiza na osnovu teorije plastičnosti za sopstvenu težinu nosača  $g = 7.50$  kN/m' i jednako podeljeno opterećenje na svim elementima gornjeg pojasa  $p = 22.30$  kN/m', koje potiče od rožnjača pokrivača, snega i vetra.

Ovde su u osnovnom sistemu, kao i u prethodnom slučaju elementi matrice **B**

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{b}_1^T = [0, -0.78, -1.55, -1.55, -1.93, -2.30, 1.012, 1.012, -0.16, -0.16, 1.00, 1.00],$$

Faktor loma se računa za ukupno opterećenje  $q = 7.50 + 22.30 = 29.80$  kN/m', tako da su merodavne veličine u kritičnim presecima od oba ova opterećenja

$$\mathbf{b}^{q,T} = [0, 635.42, 1089.1, 1089.1, 1361.0, 1451.8, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

$$\mathbf{b}^{p,T} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

$$\mathbf{R}^{*+} = \mathbf{R}^{*-} = [0, 41.52, 19.0, 19.0, 230.25, 96.18, 1360, 1360, 1360, 1360, 1360, 1360],$$

$$\mathbf{c} = [0, 1], \quad \mathbf{x} = [x_1].$$

Primenom kompjuterskog programa zasnovanog na Dantzigovoj simpleks metodi dobijeni su rezultati:

Sila u elementu (11) – (12) je  $x_1 = 1343.9$  kN, faktor loma  $\gamma = 2.012$ .

Ovako sračunato opterećenje loma je  $q_{loma} = \gamma q = 2.012 \times 29.80 = 59.958$  kN/m'

Pošto je faktor loma za ukupno opterećenje  $\gamma > 1.80$ , to u skladu sa važećim propisima, ispitivani nosači imaju zadovoljavajući faktor sigurnosti, koji je za 12% veći od minimalnog propisanog faktora koji iznosi 1.80.

Normalne sile  $N_i$  i momenti savijanja  $M_i$  usled dejstva opterećenja koje je izazvalo lom sistema, kao i rezerve kapaciteta nošenja  $\Delta_i$  u kritičnim presecima koje su izračunate ovim postupkom po teoriji plastičnosti, date u tabeli 4.

U ovoj tabeli su prikazane veličine normalnih sila  $N_i^e$  i momenata savijanja  $M_i^e$  sračunate prema teoriji elastičnosti za opterećenje  $q_{loma} = 59.958$  kN/m'. Iz dobijenih rezultata može se konstatovati sledeće:

1. Pod opterećenjem koje dovodi ovaj konstrukcijski sistem u stanje granične ravnoteže, došlo je do plastifikacije u kritičnom preseku (2) gornjeg pojasa sistema i presecima (7) i (8) donjeg pojasa. U tim presecima su iscrpljeni kapaciteti nosivosti preseka  $R_2^*$ ,  $R_7^*$  i  $R_8^*$ .
2. I za ovaj slučaj opterećenja razlika između normalnih sila sračunatih prema teoriji plastičnosti  $N_i$  i teoriji elastičnosti  $N_i^e$ , za opterećenje koje izaziva lom sistema  $q_{loma}$  je mala i najviše 2.5% u preseku (3). Razlike između momenata savijanja u kritičnim presecima su znatno veće i iznose u preseku (5) 65%, dok su u ostalim presecima manje i iznose ispod 10%. Uglavno se po teoriji elastičnosti dobijaju veće apsolutne vrednosti normalnih sila i momenata savijanja u kritičnim presecima.

Tabela 4. Unutrašnje sile za stanje granične ravnoteže, elastično rešenje i rezerve kapaciteta

Kritič. Presek	Norm. Sila $N_i$	Monent $M_i$	Merod.vr. $R_i$	Kapacitet $R_i^*$	Rezerva $\Delta_i$	Elastično $N_i^e$	Rešenje $M_i^e$
$I$	$kN$	$kNm$	$kNm(kN)$	$kNm(kN)$	$kNm(kN)$	$kN$	$kNm$
1	-1393.4	0	0	230.25	230.250	-1428.8	0
<b>2</b>	<b>-1370.9</b>	<b>230.25</b>	<b>230.25</b>	<b>230.25</b>	<b>0.00</b>	<b>-1396.5</b>	<b>250.84</b>
3	-1375.3	108.28	108.28	230.25	121.97	-1374.1	125.02
4	-1370.8	108.28	108.28	230.25	121.97	-1406.8	125.02
5	-1352.8	104.67	104.67	230.25	125.58	-1384.5	173.49
6	-1330.3	-169.87	-169.87	230.25	60.38	-1362.1	-154.69
<b>7</b>	<b>1360.0</b>	<b>0</b>	<b>1360.00</b>	<b>1360.0</b>	<b>0.00</b>	<b>1394.9</b>	<b>0</b>
<b>8</b>	<b>1360.0</b>	<b>0</b>	<b>1360.00</b>	<b>1360.0</b>	<b>0.00</b>	<b>1394.9</b>	<b>0</b>
9	-215.0	0	-215.00	1360.0	1145.00	-220.4	0
10	-215.0	0	-215.00	1360.0	1145.00	-220.4	0
11	1343.9	0	1343.90	1360.0	16.10	1377.3	0
12	1343.9	0	1343.90	1360.0	16.10	1377.3	0

3. Normalne sile  $N_i^q$  i momenti savijanja  $M_i^q$  u kritičnim presecima  $i$  ( $i=1,2,\dots,12$ ) za ukupno računsko opterećenje  $q = 29.80 \text{ kN/m}$  sračunate prema izrazima  $N_i^q = N_i^e/\gamma$  i  $M_i^q = M_i^e/\gamma$  iznose u kritičnim presecima (2) i (7):  $N_2^q = 1370.9/2.012 = 681.36 \text{ kN}$ ,  $M_2^q = 250.84/2.012 = 124.67 \text{ kNm}$ ,  $N_7^q = 1394.9/2.012 = 693.29 \text{ kN}$ ,  $M_7^q = 0 \text{ kNm}$ . Pošto su najveće vrednosti normalnih sila  $N_i^q$  i momenata savijanja  $M_i^q$  dva ili više puta manje od kapaciteta nošenja  $R_i^*$  sračunatih prema teoriji plastičnosti, to je opravdano, kako se to radi u praksi, odrediti unutrašnje sile u presecima prema teoriji elastičnosti. Zatim treba, koristeći ovde izloženu proceduru, odrediti faktor loma celokupnog sistema i preseke u kojima je došlo do pojave plastifikacije.

### 7.8.2 KINEMATIČKA FAZA PRORAČUNA DVOPOJASNIH SISTEMA

Parametari mehanizma loma  $\theta_i^+$  i  $\theta_i^-$  ( $i = 1,2,\dots,12$ ), koji predstavljaju elemente vektora  $\theta^+$  i  $\theta^-$ , odgovarajućeg mehanizma loma nosača u kinematičkoj fazi određuju se rešavanjem dualnog problema (7.7.1) za poznate vrednosti vektora i matrica iz primarnog problema primenom kompjuterskog programa zasnovanog na simpleks metodi. Ta rešenja su:

$$\theta^+ = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.00389 \ 0 \ 0.00789 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$\theta^- = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

tako da je vektor plastične deformacije (obrtnja i izduženja) prema izrazu (7.6.22)

$$\theta = \theta^+ - \theta^- = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.00389 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Plastično obrtnje preseka (5) iznosi  $\theta_5 = 0.00789$  i izduženje elementa donjeg pojasa (7) – (8) iznosi  $\theta_7 = \varepsilon_{pl,7} = 0.00789$ .

U ovim presecima su merodavni momenat savijanja

$$M_5 = R_5^* = 230.25 \text{ kNm} \text{ i normalna sila } N_7 = R_7^* = 1360 \text{ kN}.$$

Pošto su kapaciteti nosivosti elemenata u ovim presecima u potpunosti iscrpljeni, to su prema (7.8.1) rezerve nosivosti  $\Delta_5 = \Delta_7 = 0$ .

Dobijene vrednosti parametara mehanizma loma, koji u ovom slučaju predstavljaju obrtnje preseka ili izduženje elementa zbog plastičnog tečenja materijala treba shvatiti u relativnim odnosima u odnosu na neku izabranu referentnu vrednost  $\theta_r = 1$ . U proračunima po teoriji elastičnosti, kao što je poznato, sračunate vrednosti deformacija sistema su precizne



vrednosti u odnosu na ulazne podatke koji se odnose na opterećenje i parametre svojstava materijala.

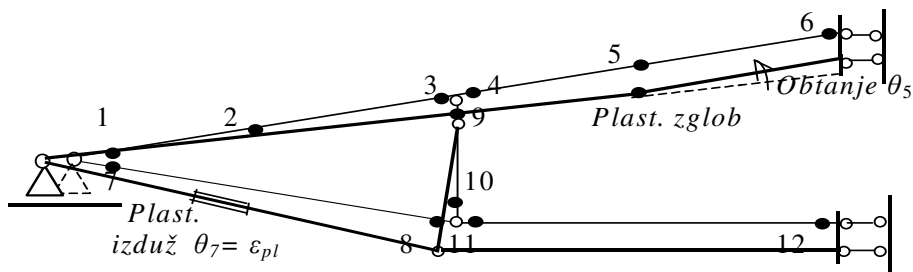
Za parametre mehanizma loma  $\theta_i$  i rezervi nosivosti  $\Delta_i$  u kritičnom preseku  $i$  važe, s obzirom na izraze (7.5.3) i (7.8.2) uslovi komplementarnosti ovih veličina

$$\Delta_i \theta_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.8.3)$$

Ovi uslovi su posledica uslova komplementarnosti primarnih statičkih veličina  $x_i$  koje predstavljaju nepoznate statičke veličine i od kojih zavisi rezerva nosivosti  $D_i$ , i dualnih kinematičkih veličina  $\theta_i$ , koje izražavaju plastične deformacije nosača u posmatranom preseku  $i$ .

*Ako je u preseku  $i$  plastična deformacija  $\theta_i$  različita od nule, onda je iscrpljena nosivost preseka, pa je rezerva nosivosti  $\Delta_i$ , tj. Mayerov plastični potencijal  $\Phi_i$ , jednaka nuli. Ako je u preseku  $i$  plastična deformacija  $\theta_i$  jednaka 0, onda nije došlo do plastifikacije preseka i nije iscrpljen kapacitet njegove nosivosti, pa je rezerva nosivosti  $\Delta_i$  različita od nule.*

Uslovi komplementarnosti primarnih i dualnih promenljivih, koji su izraženi jednačinama (7.2.9) ili (7.2.9-a) povezuju statičko i kinematičko rešenje, koja nisu zbog toga međusobno nezavisna, iako se ona formulišu odvojeno jedno od drugoga.



Slika 14. Mehanizam loma leve polovine dvopojasnog nosača

Za drugi slučaj jednako podeljenog opterećenja  $q = 29.8 \text{ kN/m}$  na svim elementima gornjeg pojasa rešavanjem odgovarajućeg dualnog problema linearnog programiranja, dobijen je vektor parametara loma (obrtnja i izduženja) u presecima u kojima je došlo do plastifikacije

$$\theta^+ = [0 \quad 0.00157 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.00121 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$\theta^- = [0 \quad 0.00157 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.00121 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

tako da je vektor plastične deformacije (obrtnja i izduženja) prema izrazu (7.6.22)

$$\theta = \theta^+ - \theta^- = [0 \quad 0.00157 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.00121 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

Plastično obrtanje preseka (5) iznosi  $\theta_2 = 0.00157$  i izduženje elementa donjeg pojasa (7) – (8) iznosi  $\theta_7 = \varepsilon_{pl,7} = 0.00121$ .

U ovim presecima su merodavni momenat savijanja

$$M_2 = R_2^{*+} = 230.25 \text{ kNm} \text{ i normalna sila } N_7 = R_7^* = 1360 \text{ kN}.$$

## 7.9. KONSTATACIJE

Na osnovu izvršenih istraživanja, merenja, teorijskih analiza i upoređivanja rezultata dobijenih eksperimentalnim i teorijskim postupcima može se zaključiti sledeće:

1. Prikazani postupak koji je zasnovan na teoriji linearnog programiranja i za određivanje faktora loma i mehanizma loma konstrukcijskog sistema kao celine sastavljenih od linijskih elemenata je veoma efikasan i ima prednosti nad postupcima u kojima se

konstruiše više mogućih mehanizama loma sistema i izjednačavanjem radova spoljašnjih i unutrašnjih sila na tim mehanizmima određuje opterećenje ili faktor opterećenja loma i merodavni mehanizam loma.

2. Pored uobičajenih analiza i proračuna sistema na bazi teorije elastičnosti, treba primenjivati i ovaj postupak za određivanje faktora loma sistema u celini i odgovarajućih mehanizama loma za njegova zadata opterećenja.
3. Koristeći statičko-kinematički dualitet generalisanih sila i generalisanih pomeranja, opterećenje, odnosno faktor loma za stanje granične ravnoteže sistema, dobija se rešavanjem primarnog problema, a generalisana pomeranja zbog plastifikacije u kritičnim presecima, koja odgovaraju merodavnom mehanizmu loma, se dobijaju rešavanjem odgovarajućeg dualnog problema linearnog programiranja.
4. Pošto rešavanje ova dva problema matematički i programski predstavlja jednu celinu, to određivanje ovih parametara stanja granične ravnoteže predstavlja, takođe, jednu celinu.
5. Upoređujući veličine unutrašnjih sila i pomeranja u izabranim kritičnim presecima sistema dobijenih za elastično ponašanje sistema sa veličinama ovih sila dobijenih na osnovu merenja na ispitivanim nosačima, došlo se do zaključka da su se čelični elementi donjeg pojasa sistema ponašali elastično u svih VII faza opterećenja. Razlike između veličina normalnih sile sračunatih na osnovu merenja i prema teoriji elastičnosti su veoma male i iznose od 2 do 2.6 %.
6. U fazama I do VI sistem se ponaša kao elastičan sistem. U fazi opterećenja VII došlo je do plastifikacije sistema u presecima (5) armiranobetonskih elemenata gornjeg pojasa, ali ne i do pojave mehanizma loma, jer su se čelični elementi donjeg pojasa ponašali elastično.
7. Pod opterećenjem koje dovodi ovaj konstrukcijski sistem u stanje granične ravnoteže, došlo je do plastifikacije u kritičnom preseku (5) gornjeg pojasa sistema i presecima (7) i (8) donjeg pojasa. U tim presecima su iscrpljeni kapaciteti nosivosti preseka  $R_5^*$ ,  $R_7^*$  i  $R_8^*$ .
8. U stanju granične ravnoteže u preseku (5) gornjeg pojasa, u kojem deluju moment savijanja  $M_5$  i velika normalna sila  $N_5$ , dolazi do plastičnog obrtanja preseka, dok se čelični elemenat donjeg pojasa na čijim se krajevima nalaze preseki (7) i (8) plastično izdužuje, jer u njemu deluje velika normalna sila  $N_{7-8}$  zatezanja i zanemarljivi momenti savijanja.
9. Da bi se teorijski dostiglo stanje granične ravnoteže, pored dejstva koncentrisanih sila  $G$  i jednako podeljenog opterećenja  $g$ , nosač treba opteretiti sa velikim jednako podeljenim promenljivim opterećenjem  $p_{loma} = 70.875 \text{ kN/m}^2$ , odnosno velikim faktorom loma  $\gamma = 7.875$ , kojim treba pomnožiti polazno jednako podeljeno opterećenje  $p = 9.00 \text{ kN/m}^2$ .
10. Merena sila u donjem pojasu, koja je nastala pod dejstvom udara tega od 5 kN (VIII faza) i koja je izazvala mehanizam loma sistema, je za samo 2% manja od sile loma pod opterećenjem loma  $p_{loma} = 70.875 \text{ kN/m}^2$ , koje je sračunato primenom ovog postupka na bazi linearnog programiranja.
11. Iz upoređivanja rezultati analize nosača po teoriji elastičnosti i teoriji graničnih stanja za teorijsko opterećenje loma, može se uočiti da su normalne sile sračunate po jednoj i drugoj teoriji skoro jednake (maksimalno relativno odstupanje iznosi 0.44%). Ta odstupanja u momentima savijanja u armiranobetonskim presecima gornjeg pojasa su znatno veća. U kritičnom preseku (5) relativno odstupanje iznosi 14.35%, tako da je moment savijanja sračunat po teoriji elastičnosti iznosi  $M_5^e = 1.17M_5$  sračunatog po teoriji graničnih stanja.

12. Ovakvi jedanput unutrašnje statički neodređeni sistemi imaju manju «rezervu» ili kapacitet prenošenja opterećenja u odnosu na višestruko statički neodređene sisteme. Kod višestruko statički neodređenih sistema treba da se formira kritičan broj od  $\alpha+1$  plastičnih zglobova ili plastifikacija preseka ( $\alpha$  je statička neodređenost), da bi sistem došao u stanje granične ravnoteže i počeo da se formira mehanizam loma sistema.
13. Sistem je analiziran i za ukupno jednako podeljeno stalno opterećenje od sopstvene težine nosača, rožnjača, krovnog pokrivača, snega i vetra ukupnog intenziteta  $q = 29.80 \text{ kN/m}$ . Nosači nisu eksperimentalno ispitivani na ovu vrstu opterećenja.
14. Pod ovim ukupnim opterećenjem koje bi dovelo ovaj konstrukcijski sistem u stanje granične ravnoteže, došlo bi do plastifikacije u kritičnom preseku (2) gornjeg pojasa sistema i presecima (7) i (8) donjeg pojasa.
15. Faktor loma za ovo opterećenje je  $\gamma = 2.012$ , pri maksimalnoj sili velikih izduženja u kosim elementima donjeg pojasa  $1360 \text{ kN}$ .
16. I za ovaj slučaj opterećenja razlika između normalnih sila sračunatih prema teoriji plastičnosti  $N_i$  i teoriji elastičnosti  $N_i^e$ , za opterećenje koje izaziva lom sistema  $q_{loma}$  je mala i najviše 2.5% u preseku (3). Razlike između momenata savijanja u kritičnim presecima su znatno veće i iznose u preseku (5) 65%, dok su u ostalim presecima manje i iznose ispod 10%. Uglavnom se po teoriji elastičnosti dobijaju veće apsolutne vrednosti normalnih sila i momenata savijanja.
17. Iz rezultata uporedne statičke analize na bazi teorije elastičnosti po teoriji prvog i drugog reda može se zaključiti da su razlike u momentima savijanja, normalnim silama i pomeranjima u presecima sistema veoma male. Nešto veće, ali ne mnogo značajne, dobijaju se razlike u nekim presecima za veća opterećenja u fazi VII, odnosno za opterećenja koja bi izazvala lom sistema.
18. Parametri kinematičkog mehanizma loma i njegov oblik dobijen teorijskim putem rešavanjem dualnog problema linearnog programiranja odgovaraju ostvarenom mehanizmu loma prilikom ispitivanja ovih dvopojasnih nosača.
19. Ispitivani dvopojasni nosači imaju visok faktor loma, odnosno koeficijent sigurnosti, kako za opterećenja sa kojima su ispitivani, tako i za jednako podeljeno opterećenje, koji je veći od minimalnog, propisanog koeficijenta.

## 8. UPOREDNA ANALIZA TEORIJSKIH I EKSPERIMENTALNO DOBIJENIH REZULTATA O PONAŠANJU DVOPOJASNIH NOSAČA

Iz rezultata eksperimentalne i teorijske analize, se vidi da do loma preseka dolazi u gornjem pojasu, i to po armaturi. Naime, kvalitet zatege je relativno visok, od čelika S355 sa dopuštenim naponom od 265Mpa. U nivou opterećenja VII (faza VII), dostiže se granica razvlačenja po armaturi gornjeg pojasu. Do ovog stanja dolazi u preseku IV-IV ( VI- VI ), odnosno u preseku 5 prema analizi u sedmom poglavlju disertacije. Znači, da za ovako odabrane materijale, sa betonom MB75MPa u gornjem AB pojasu i donjim pojasom-zategom od čelika S355, prag tečenja neće biti dostignut u donjem pojasu, već u gornjem, betonskom delu nosača.

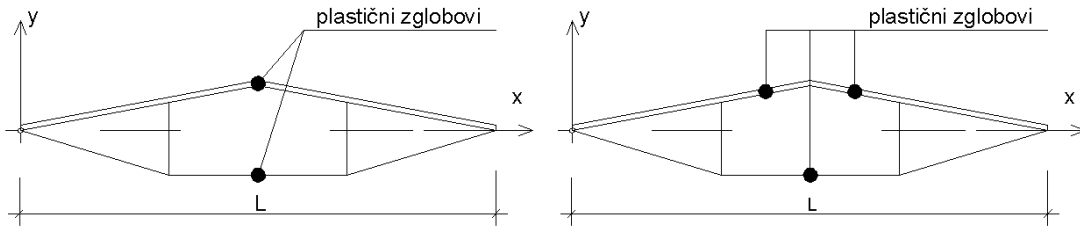
Zbog relativno visokog kvaliteta betona, čvrstoća betona nije dostignuta, a granica razvlačenja rebraste armature je dostignuta. Računski i mereni rezultati se dobro slažu, a dalje nanošenje opterećenja nije bilo moguće zbog opasnosti od nekontrolisanog pada nosača i oštećenja merne tehnike. Dostignuta dilatacija čelika za armiranje je 1.92‰, što praktično predstavlja granicu razvlačenja. Napon u betonu je u graničnom stanju je  $\sigma_b=45.30\text{MPa}$ , a dilatacija  $\varepsilon_b=1.33\text{‰}$ , dok je dostignuti napon u armaturi  $\sigma_{a1}=404.10\text{MPa}$  ( RA 400/500 ). Mehanizam loma nije dostignut.( objašnjeno u poglavlju 7).

Ovo navodi na zaključak, da se kod ovih sistema sa visokim kvalitetom betona u gornjem pojasu i donjim pojasom od kvalitetnog, jakog čelika zatege, treba dati veći procenat armiranja gornjeg pojasu, da bi se i beton gornjeg pojasu i čelik zatege bolje iskoristili kao konstrukcioni materijali; mogli bi prihvatiti znatno veće opterećenje , a samim tim dostići znatno veći koeficijent sigurnosti, odnosno faktor loma.

Granično stanje nosivosti kod dvopojasnih nosača može nastati na više načina. Kada će biti dostignut lom, odnosno kada će biti dostignuti uslovi granične ravnoteže zavisi od više faktora. Najviše utiče konfiguracija sistema, način delovanja i veličina spoljnih sila. Uopšte, kod ovih sistema, granično stanje nosivosti može biti dostignuto u gornjem ili donjem pojasu, ili u oba istovremeno. Kod dvopojasnih nosača sa zategom od običnog čelika, prag tečenja u donjem pojasu-zatezi se može lako definisati. U slučaju zatege od visokovrednog čelika, za uslov loma treba unapred odrediti neku uslovnu granicu koja je u zavisnosti od veličine deformacija konstrukcije.

Kada se stanje loma očekuje u gornjem pojasu, ili je simultani lom, za simetrično opterećenje, dolazi do formiranja dva simetrično postavljena zgloba. Kod nesimetričnog opterećenja dolazi do formiranja samo jednog zgloba [5],[46]. Ako dođe do formiranja plastičnog zgloba u gornjem pojasu koji može preneti normalnu silu, a donji zategnuti pojas nije dostigao prag tečenja, nema mehanizma loma. Konstrukcija i u ovom slučaju može da prima dopunsko opterećenje, i to sve do dostizanja velikih izduženja u donjem pojasu (dostizanja praga tečenja ). U ovom slučaju je veoma bitno da su plastični zglobovi u gornjem pojasu tako armirani da su sposobni da prime i prenesu normalne sile pritiska.

Na slici 8.1 prikazani su slučajevi dostizanja stanja loma za jedan dvopojasni linijski sistem.



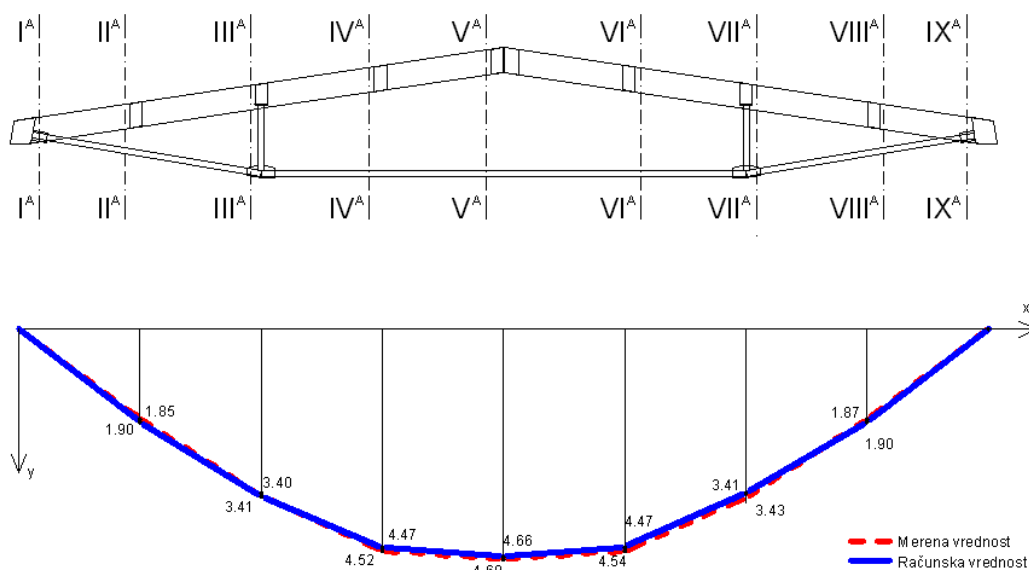
**Slika 8.1.** *Moguća mesta formiranja plastičnih zglobova[46]*

Ovaj sistem konstrukcije može preći u mehanizam kada se formira kritičan broj plastičnih zglobova, a da u donjem pojasu nije dostignut uslov loma. Kada dođe do velikih izduženja u donjem pojasu, ili se dostigne neka unapred definisana uslovna vrednost ( bez obzira na način nastajanja plastičnih zglobova), konstrukcija prelazi u mehanizam, tj. stanje loma.

Računski model za određivanje graničnog opterećenja ili graničnog stanja loma koji se najviše koristi je elastoplastičan ili plastično krut model, kod betonskih elemenata ili uslov tečenja za čelične elemente. Pri ovoj analizi obično se koriste metode “ Lmit analyse “ (poglavlje 7).

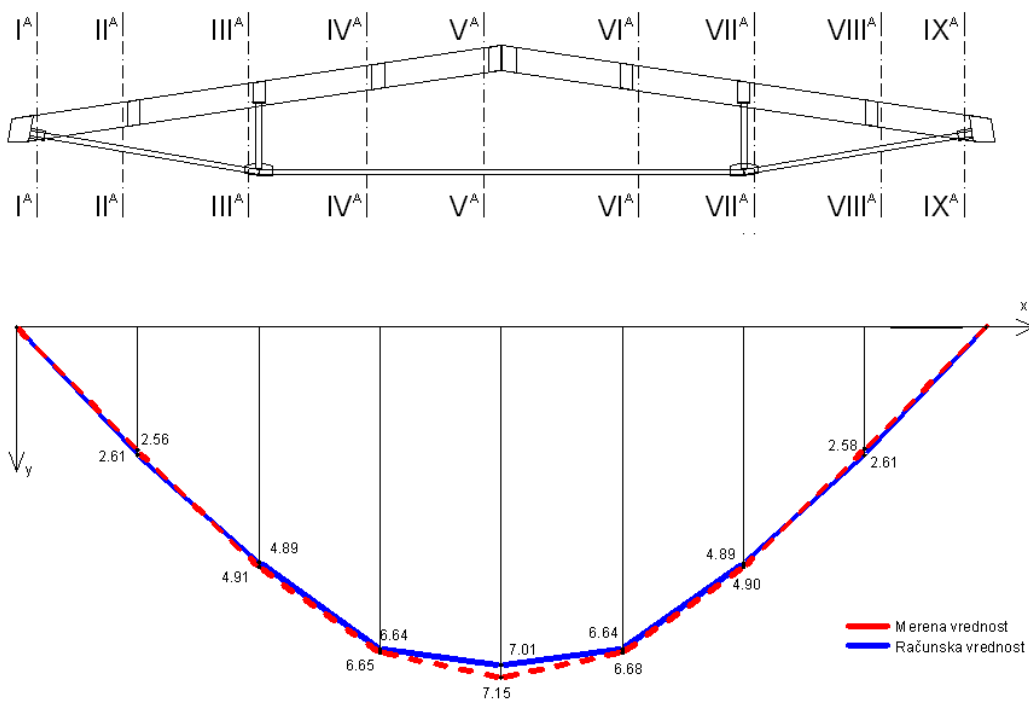
Iz poređenja teorijskih i eksperimentalnih rezultata se vidi da se oni dobro slažu, uz minimalne razlike. Oba nosača daju rezultate sa neznatnim razlikama i lom u istom preseku, po podužno zategnutoj armaturi gornjeg AB pojasa. Razlike između računskih i merenih vrednosti ugiba su male, a nastale su zbog toga što su ugibi računati po metodi Bransona sa efektivnom krutošću isprskalog preseka duž čitavog raspona. Ovakav način je na strani sigurnosti. Isto tako, i kvalitet betona nije ujednačen po svim presecima.

Dijagram ugiba ( slika 8.2 ) pokazuje da se merene vrednosti ugiba i računске vrednosti ugiba neznatno razlikuju za više nivoe opterećenja i za radno opterećenje.

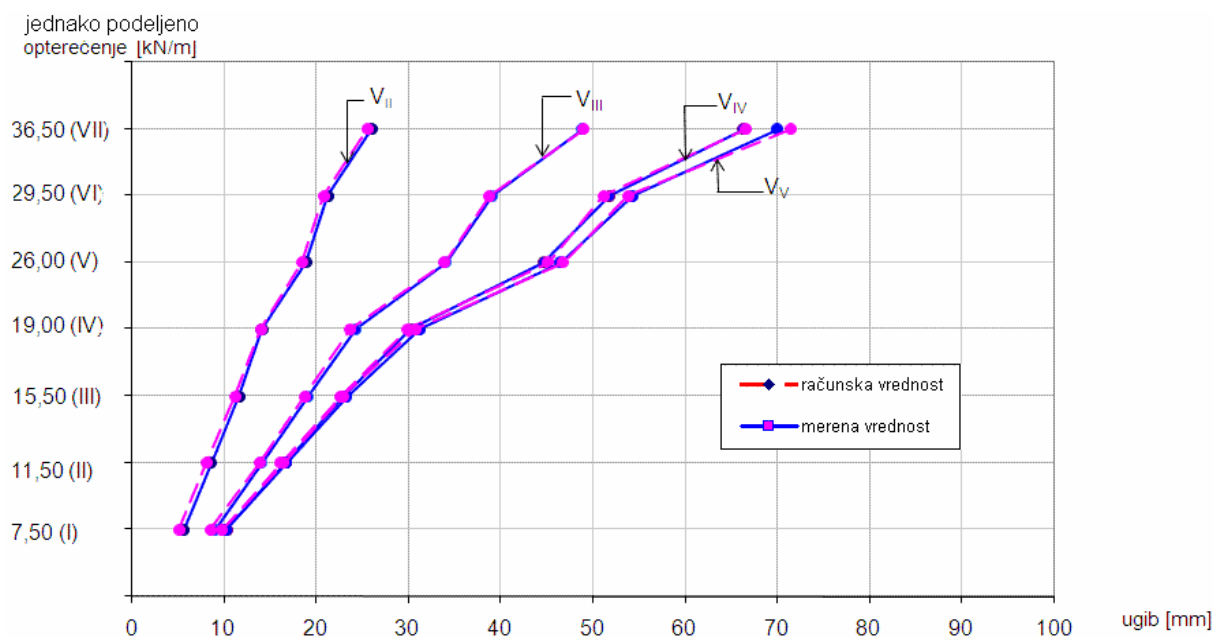


Slika 8.2. Dijagram ugiba za radno-eksploataciono opterećenje (V faza opterećenja)-nosáč A

Za granično opterećenje dijagram ugiba (slika 8.3) pokazuje da su razlike između merenih vrednosti ugiba i računskih vrednosti neznatne.

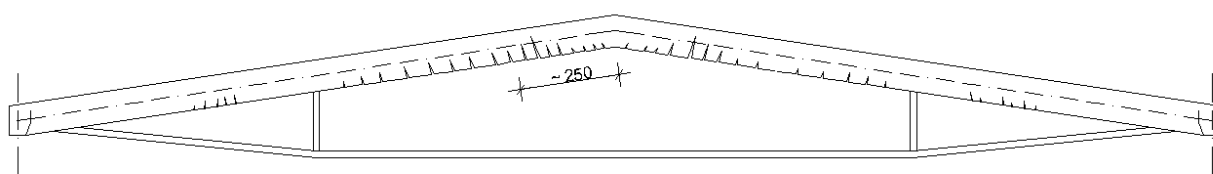


Slika 8.3 –Dijagram ugiba za granično stanje (VII nivo opterećenja) -nosáč A



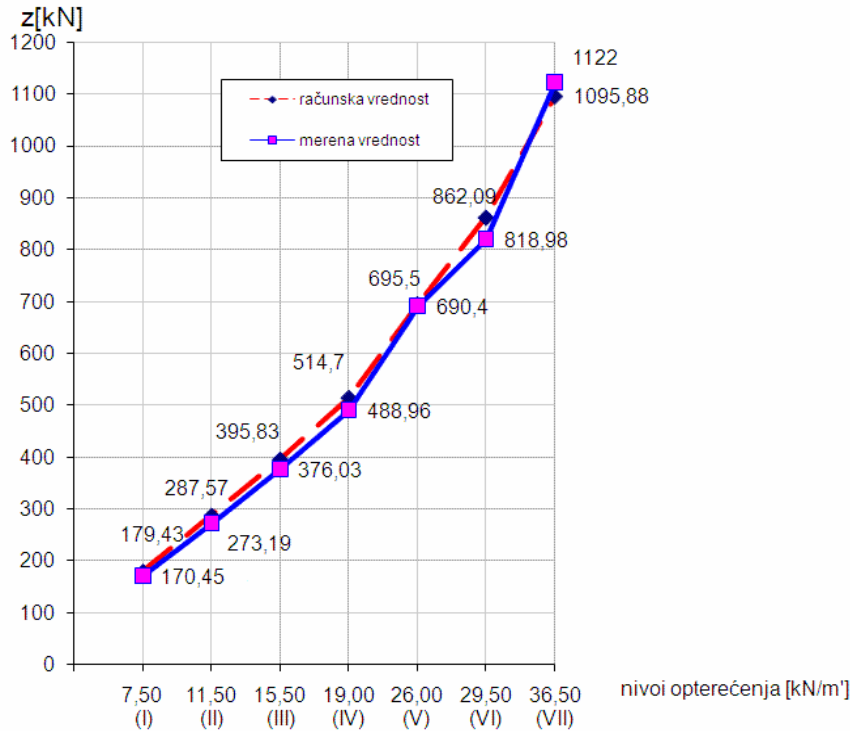
**Slika 8.4** – Dijagram opterećenje – ugib za preseke II-II, III-III, IV-IV i V-V za razne faze opterećenja

Pojava prvih prslina je registrovana pri opterećenju koje je iznosilo oko 1/3 eksploatacionog opterećenja u zoni najvećih momenata ( presek IV-IV ili preseku 5 po analizi u poglavlju 7). Za nivo eksploatacionog opterećenja prsline su fino raspoređene i nisu prelazile širinu od 0.10mm. U graničnom stanju ( faza opterećenja VII) prsline nisu prelazile vrednost od 0.50mm. Prsline su registrovane u srednjem delu nosača u zoni najvećih momenata, a na delu od oslonca do vertikala su bile neznatne i skoro da nisu prelazile zonu zaštitnog sloja. Najveće su na rastojanju ~ 2.50m od slemena, levo i desno.



**Slika 8.5** - Šematski prikaz prslina u zoni najvećih momenata

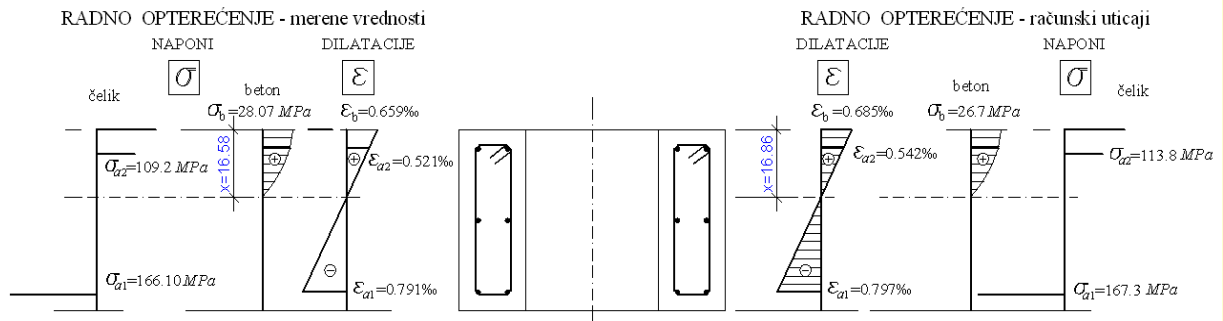
Dijagram promene sile u zatezi (slika 8.6) pokazuje manje razlike između merenih vrednosti sile u zatezi i računskih vrednosti za sve faze opterećenja. Te razlike se kreću od 2% do 5.5%.



**Slika 8.6** - Dijagram promene sile u zetezi za razne nivoe opterećenja (računska i merena vrednost)

Na osnovu rezultata eksperimenta došlo se do zaključka da se nosači ponašaju praktično elastično za projektovano eksploataciono opterećenje. Kod nivoa opterećenja većih od eksploatacionog iz uporedne analize se vidi da su razlike između računskih i merenih vrednosti i dalje male. Na slici 8.7 i 8.8 se vide dijagrami dilatacija za radno opterećenje i granično stanje nosivosti – računске i merene vrednosti.

#### PRESEK IV - IV

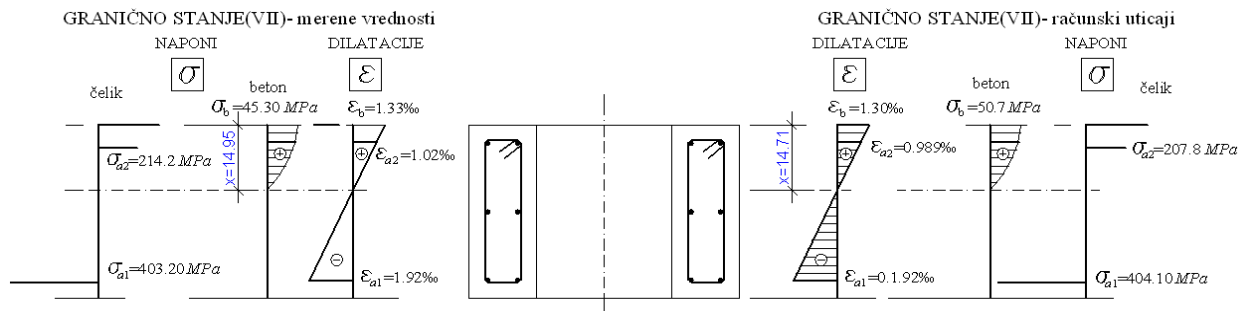


**Slika 8.7** – Uporedni dijagram računskih i merenih napona i dilatacija za radno opterećenje



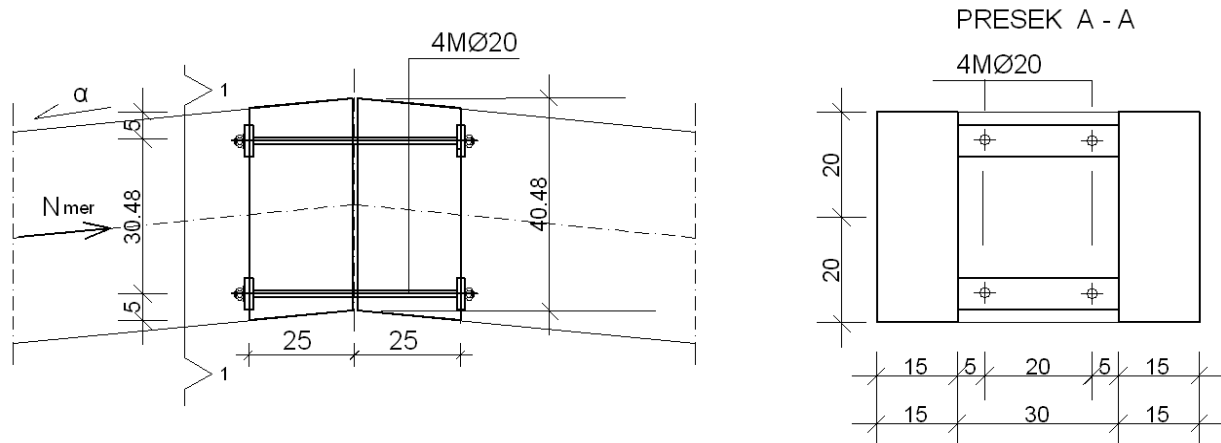
(V faza opterećenja)

PRESEK IV - IV



Slika 8.8 – Uporedni dijagram računskih i merenih napona i dilatacija za granično stanje nosivosti (VII faza opterećenja)

Montažni spojevi i veze na montažnim nosačima su se ponašali kvazielastično za sve faze apliciranog opterećenja. Montažna veza u slemenu je izvedena sa vijcima prema slici 8.9. Izvršeno je pritezanje vijaka na vrednost 20% dopuštene sile zatezanja. Oprema za merenje utezanja na vijcima je postavljena, ali se greškom nije moglo vršiti očitavanje dilatacija. Međutim, s obzirom da za sve faze opterećenja u području slemena nije bilo nikakvih prslina, navodi na zaključak o kvazielastičnom ponašanju veze.



Slika 8.9. – Montažna veza u slemenu nosača

$$\alpha = 8.53^\circ, \quad \cos \alpha = 0.988$$

$$M_{\text{mer}} = 115.12 \text{ kNm}$$

$$N_{\text{mer}} = 1065.98 \text{ kN}$$

$$z = 0.9 \cdot 35.48 = 31.93 \text{ cm}$$

$$N_{\text{mer}} \cdot \cos \alpha = 1065.98 \cdot 0.988 = 1053.19 \text{ kN}$$

$$Z = \frac{1}{31.93} \left[ 115.12 \cdot 10^2 - 1053.19 \left( \frac{40.48}{2} - 5 \right) \right] = 142.14 \text{ kN}$$

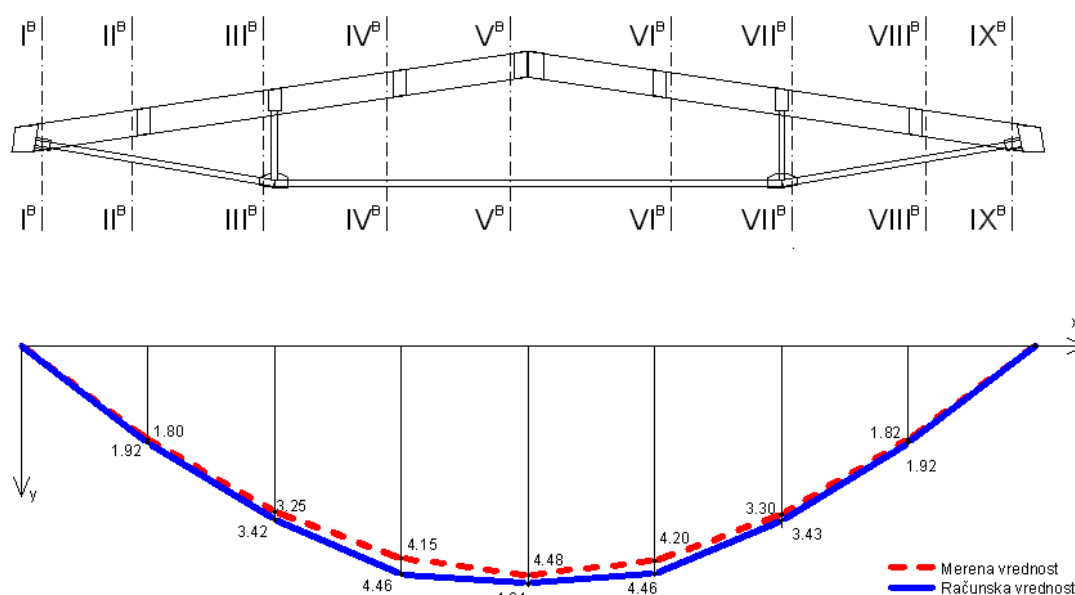
Usvojeni neobrađeni vijci **2 x 2M20 .....** 8.8

$$A_s = 2.45 \text{ cm}^2$$

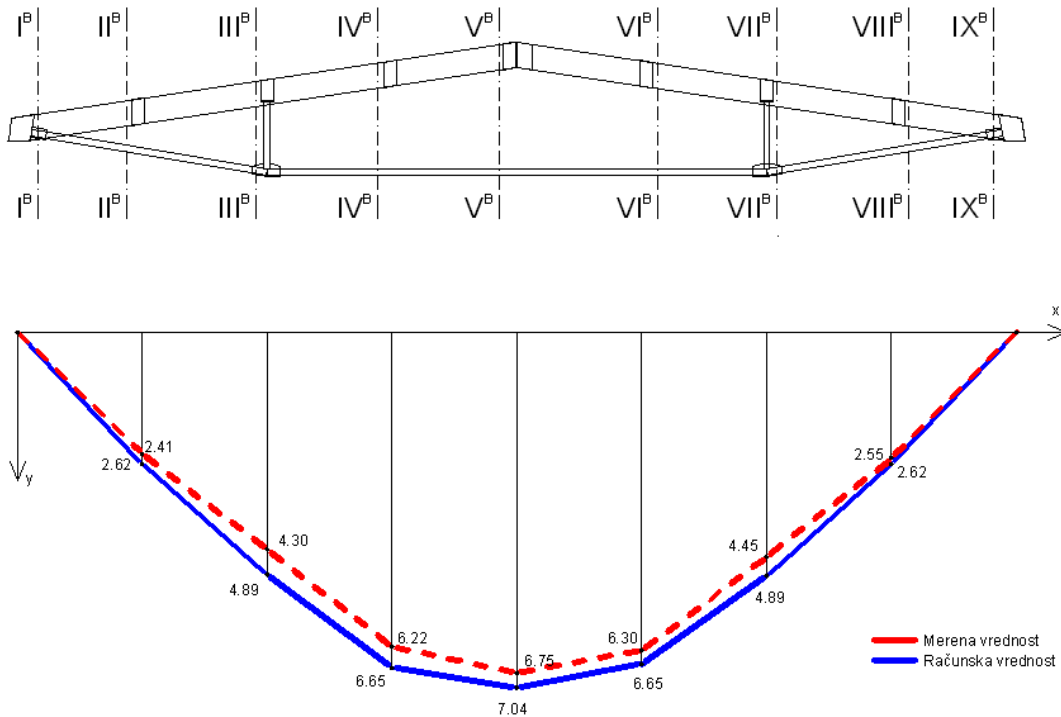
$$\sigma_z = \frac{142.14}{2 \cdot 2.45} = 29.00 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Nosač B je ispitivan nakon završenog ispitivanja nosača A zbog nedostatka tegova. Pošto je nosač A ispitivan pri starosti betona od 35 dana i njegovo ispitivanje trajalo desetak dana, to je nosač B ispitivan pri starosti od 45 dana. Proračun prirasta čvrstoće pri pritisku nakon 28 dana nije vršen, jer se radilo o malom prirastu čvrstoće. Na sledećim slikama se daju uporedne vrednosti ugiba za nosač B, za eksploataciono opterećenje (V faza) i za granično stanje (VII faza). Takođe, daje se dijagram promene sile u zatezi za razne faze opterećenja. Isto tako, dati su dijagrami napona i dilatacija za presek IV-IV, za eksploataciono opterećenje i za granično stanje.

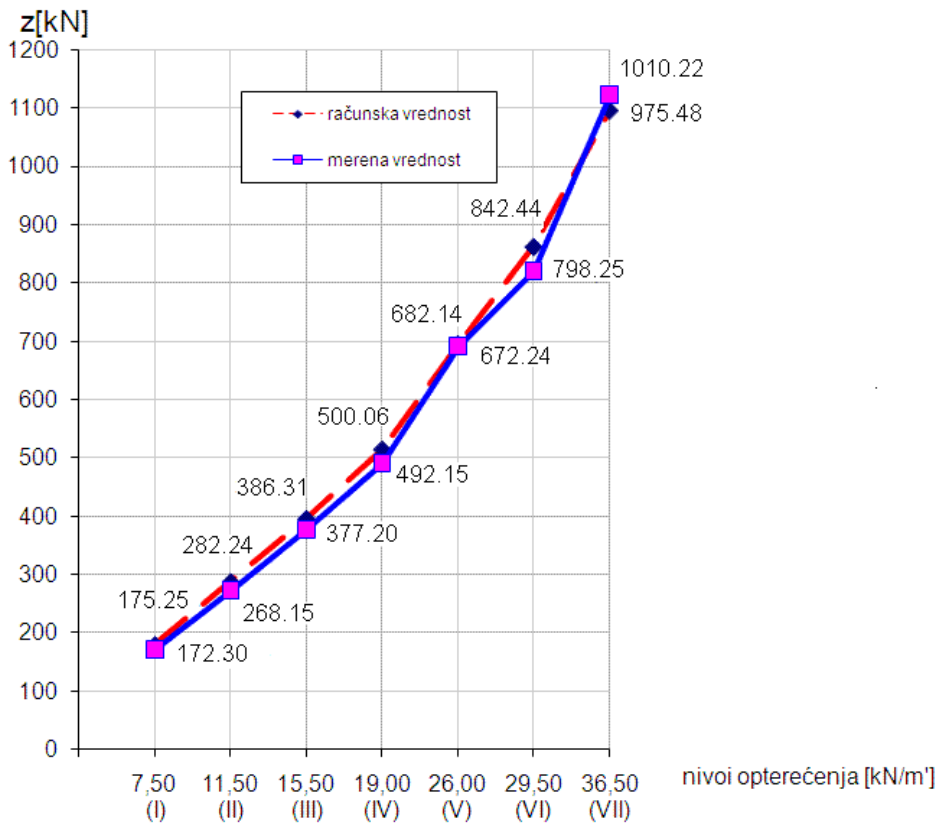
Ispitivanje nosača B pokazuje da u istom preseku dolazi do dostizanja graničnog stanja, ali su naponi u betonu i zategnutoj podužnoj armature manji nego za nosač B. To je posledica nešto veće čvrstoće betona pri pritisku (MB78), a i neznatnog prirasta čvrstoće pri pritisku. Nosač B nije ispitivan na udar, jer je procena bila da zavareni spoj na zatezi nije u kavalitetu kao kod nosača A, pa bi moglo doći do iznenadnog prekida zatege i nekontrolisanog pada nosača. Ipak, može se reći da se rezultati ispitivanja oba nosača dobro slažu.



**Slika 8.10.** Dijagram ugiba za radno-eksploataciono opterećenje (V faza opterećenja)-nosač B

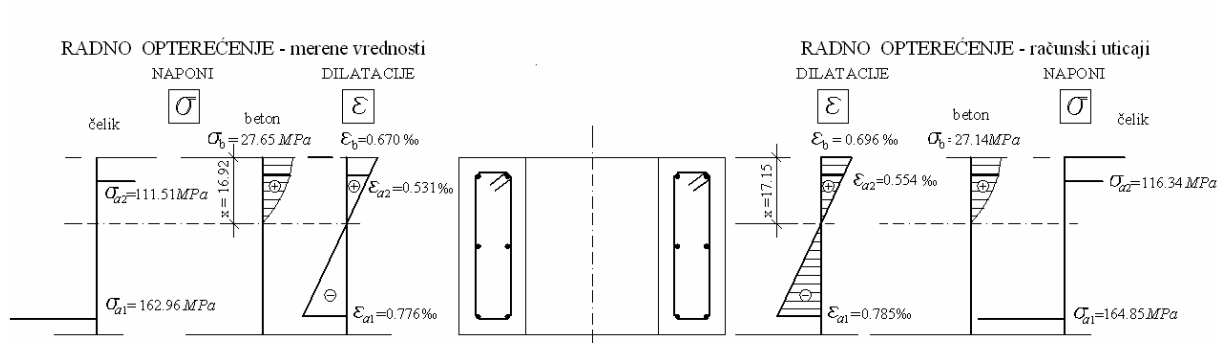


Slika 8.11 –Dijagram ugiba za granično stanje (VII nivo opterećenja)-nosач B



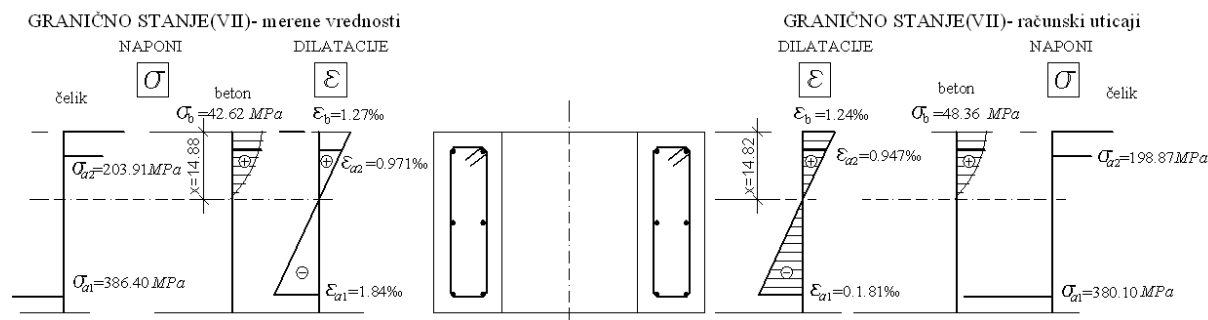
**Slika 8.12** - Dijagram promene sile u zetezi za razne nivoe opterećenja (računska i merena vrednost) -nosač B

PRESEK IV - IV



**Slika 8.13** – Uporedni dijagram računskih i merenih napona i dilatacija za radno opterećenje (V faza opterećenja) -nosač B

PRESEK IV - IV



**Slika 8.14** – Uporedni dijagram računskih i merenih napona i dilatacija za granično stanje nosivosti (VII faza opterećenja) -nosač B

Pokazalo se da proračun po teoriji "I" reda daje za praksu sasvim zadovoljavajuće rezultate. Uticaj vremenskih deformacija ( skupljanje i tečenje ) dvopojasnih sistema nije od većeg značaja, naročito kod montažne gradnje, koja se sa ovim sistemima u većini slučajeva i primenjuje.

Merenjem je ustanovljeno da je dostignuta granica razvlačenja u armaturi u preseku IV-IV, od 403.20 MPa, a dostignuti napon u betonu svega 45.30MPa na odstojanju 7.50m od oslonca i odgovara računskom položaju maksimalnog momenta savijanja. Po svom karakteru, lom nosača spada u grupu lomova po armaturi, dakle duktilan lom.

Uopšte, eksperimentalni rezultati pokazuju da beton visokih čvrstoća ima svoje specifičnosti i da bi naš novi pravilnik za betonske konstrukcije trebao sadržati i odredbe za beton visokih čvrstoća. Tako bi se uklonila velika prepreka proširenju upotrebe betona visokih čvrstoća

## 9. ZAKLJUČCI

Na osnovu dobijenih eksperimentalnih rezultata i teorijske analize u prethodnim poglavljima, dat je i kritički osvrt na dobijene rezultate. Iz analize svih tih rezultata mogu se dati sledeći zaključci:

1. Merenja opštih i specifičnih deformacija na oba nosača vršena su u istim presecima po istom redosledu, istom mernom tehnikom, pod istim uslovima i sa istom ekipom za ispitivanje. Opterećenje je bilo kratkotrajno za oba nosača i nanošeno u istim inkrementima za oba nosača, a pri starosti betona većoj od 35 dana. Postignuta čvrstoća betona na pritisak je 75MPa (nosač A) i 78Mpa (nosač B) pri starosti betona od 28 dana..
2. Rezultati eksperimentalnog ispitivanja ovih nosača pokazali su dobro slaganje sa teorijski dobijenim rezultatima, u svim fazama opterećenja, uključujući i granično stanje loma.
3. Kod dvopojasnih nosača raspona do 25.00m, sa donjim pojasom-zategom od običnog čelika, (obični U profili) naponi i deformacije sračunati po teoriji prvog i drugog reda neznatno se razlikuju. Kod upotrebe kablova za prednaprezanje u donjem pojasu i pri smanjenoj krutosti gornjeg, pritisnutog pojasa, neophodna je primena teorije drugog reda [6],[43].
4. Kod dvopojasnih sistema nosača, predodređenih da se izvode kao montažni, uticaji od skupljanja i tečenja betona su neznatni, jer je dobar deo skupljanja obavljen. Od uticaja tečenja betona, sila u zatezi se ne smanjuje kroz vreme, već dolazi do blagog povećanja. Sila u zatezi se usled tečenja i skupljanja ne smanjuje i praktično ne zavisi od vremena [7],[76].
5. Dvopojasne sisteme nosača treba uvek projektovati tako da se granično stanje u nekom preseku dostigne iscrpljenjem granične nosivosti na zatezanje u zategnutoj armaturi gornjeg pritisnutog pojasa, pre nego dođe do plastifikacije u zatezi. Dostizanjem velikih izduženja u zatezi na samo jednom mestu, formira se mehanizam loma.
6. Konstrukcijske sisteme sa gornjim pojasom od betona visoke čvrstoće i donjim pojasom od čelika, najbolje je projektovati tako da se granično stanje loma uvek dostigne u gornjem pojasu po zategnutoj podužnoj armaturi, gde se može dozvoliti nastajanje jednog plastičnog zgloba armiranog da može preneti i normalnu silu. Dostizanjem velikih izduženja u donjem pojasu na bilo kom mestu dolazi do nastajanja mehanizma i kolapsa konstrukcije.
7. Razlog za projektovanje jačeg donjeg pojasa (u čeliku) je taj što se na taj način dobija elastična konstrukcija. To se vidi iz dinamičke analize izvedene udarom tega u sleme nosača pod punim opterećenjem ( stanje granične ravnoteže ). Nakon udara tega, zatega je bila rlo blizu granici tečenja, ali se vrlo brzo "vratila" u elastično područje, a istovremeno zbog visoke čvrstoće betona u gornjem pojasu, nije došlo do drobljenja tj. krtog loma.
8. Nivo naprezanja u donjem pojasu treba odrediti u zavisnosti od čvrstoće betona na pritisak u gornjem pojasu i od količine armature u gornjem pojasu. Naime, što je veća čvrstoća na pritisak gornjeg pojasa i količina armature u njemu, potrebno je pravilno izbalansirati odnos napona u odnosu na zategu, i dati zategu tako da u njoj napon ne dostigne granicu razvlačenja.

9. Upotrebom betona visoke čvrstoće u gornjem pojasu dvopojasnih konstrukcijskih sistema, a u cilju što većeg iskorišćenja čvrstoće na pritisak betona, nameće se potreba da se donji pojas projektuje od kablova za prednaprezanje. Pri ovom treba projektovati racionalne dimenzije betonskog preseka (njihovu redukciju u odnosu na običan beton) sa simetričnim armiranjem. Racionalna upotreba ovih sistema, sa redukovanim poprečnim presekom betona, u gornjem pojasu i prednaprezanjem donjeg pojasa je za raspone preko 30.00 (za veće raspone). Proračun bi trebalo sprovesti po teoriji drugog reda, iako je razlika u proračunima po teoriji prvog reda i teoriji drugog reda obično ispod 10%.

10. Konstrukcijskim sistemima sa gornjim pojasom od betona visoke čvrstoće i donjim zategnutim pojasom od običnog čelika, ili kablova za prethodno naprezanje, postiže se znatno smanjenje momenta savijanja u odnosu na uobičajene sisteme nosača i približno istog kraka unutrašnjih sila. Takođe, postiže se znatna redukcija sopstvene težine, što se odražava na projektovanje ostalih elemenata konstrukcije, transport i montažu. Međutim, ovi sistemi sa visokim čvrstoćama betona, dakle sa manjim poprečnim presecima gornjeg pojasa, postaju vrlo osetljivi na izvijanje.

11. Zbog smanjenje duktilnosti betona visoke čvrstoće treba svakako izbeći lom po betonu, već po zategnutoj podužnoj armaturi. To pravilo važi i za obične betone. Duktilnost betona se može povećati npr. mikroarmiranjem ili na neki drugi način. Ovo neznatno poskupljuje cenu betona, a inače, cena betona visoke čvrstoće je nešto veća od cene običnog betona.

12. Kod oblikovanja poprečnog preseka gornjeg pojasa postoji velika sloboda u projektovanju. Kako bi se obezbedila stabilnost ovakvih linijskih sistema za vreme transporta i montaže, obično se izvode udvojenog pravougaonog preseka (sandučasti preseki se izvode za vrlo velike raspone), na određenim mestima međusobno povezani prečkama, na mestu oslanjanja rožnjača. Time se otklanja opasnost od izvijanja nosača u ravni upravnoj na ravan nosača.

13. Konstrukcijski sistemi sa gornjim pojasom od betona visoke čvrstoće sadrže u sebi sve prednosti u odnosu na običan beton kada su naponi u betonu u dovoljnoj meri iskorišćeni. U sopstvenom eksperimentu, u stanju eksploatacije (V faza opterećenja), u preseku sa najvećim momentom savijanja (presek IV-IV) izmeren je napon u betonu od 28.07MPa (računski 26.70MPa). U istom preseku u graničnom stanju nosivosti izmereni napon u betonu je 45.30MPa (računski 50.70MPa). Vidi se da bi naponi u betonu u stanju eksploatacije mogli biti veći, do oko  $0.5f_B$ . Znači, dimenzije gornjeg pojasa su mogle biti manje, a nosač lakši i jeftiniji. Primena betona visoke čvrstoće ima znatne prednosti; poprečni preseki gornjeg AB pojasa su manji, nosači su lakši i ekonomičniji. Međutim, treba imati u vidu da je ovaj beton vrlo krto i treba projektovati nosače koji se dovode u granično stanje nosivosti otkazom zategnute podužne armature, a nikako po pritisnutom betonu. Dostizanje granične nosivosti po donjem zategnutom pojasu (zatezi) treba izbegavati, jer dolazi do velikog izduženja zatege, pa tako ubrzo ceo sistem nosača otkazuje.

14. Prikazani konstrukcioni sistem je vrlo efikasan i ekonomičan za primenu. Mala sopstvena težina, mala količina materijala, lak transport, brza i laka montaža, mogućnost demontaže (spajanje VV vijcima) daju znatne tehničke i ekonomske prednosti nad trenutno primenjivanim linijskim sistemima. Sam beton visoke čvrstoće je predodređen za montažnu i polumontažnu gradnju pritisnutih, prethodno napregnutih i spregnutih nosača.

15. Prikazani postupak koji je zasnovan na teoriji linearnog programiranja ( sedmo poglavlje) i za određivanje faktora loma i mehanizma loma konstrukcijskog sistema kao celine sastavljenih od linijskih elemenata je veoma efikasan i ima prednosti nad postupcima u kojima se konstruiše više mogućih mehanizama loma sistema i izjednačavanjem radova spoljašnjih i unutrašnjih sila na tim mehanizmima određuje opterećenje ili faktor opterećenja loma i merodavni mehanizam loma.

16. Upoređujući veličine unutrašnjih sila i pomeranja u izabranim kritičnim presecima sistema dobijenih za elastično ponašanje sistema sa veličinama ovih sila dobijenih na osnovu merenja na ispitivanim nosačima, došlo se do zaključka da su se čelični elementi donjeg pojasa sistema ponašali elastično u svih VII faza opterećenja. Razlike između veličina normalnih sile sračunatih na osnovu merenja i prema teoriji elastičnosti su veoma male i iznose od 2 do 2.6 %.

17. U fazama I do VI sistem se ponaša kao elastičan sistem. U fazi opterećenja VII došlo je do plastifikacije sistema u presecima (5), odnosno IV-IV (presek 5 I IV-IV je isti presek), armiranobetonskih elemenata gornjeg pojasa, ali ne i do pojave mehanizma loma, jer su se čelični elementi donjeg pojasa ponašali elastično.

18. Iz upoređivanja rezultata analize nosača po teoriji elastičnosti i teoriji graničnih stanja za teorijsko opterećenje loma, može se uočiti da su normalne sile sračunate po jednoj i drugoj teoriji skoro jednake (maksimalno relativno odstupanje iznosi 0.44%). Ta odstupanja u momentima savijanja u armiranobetonskim presecima gornjeg pojasa su znatno veća. U kritičnom preseku (5) (odnosno IV-IV), relativno odstupanje iznosi 14.35%, tako da je moment savijanja sračunat po teoriji elastičnosti iznosi  $M_5^e = 1.17M_5$  sračunatog po teoriji graničnih stanja.

19. Ovakvi jedanput unutrašnje statički neodređeni sistemi imaju manju «rezervu» ili kapacitet prenošenja opterećenja u odnosu na višestruko statički neodređene sisteme. Kod višestruko statički neodređenih sistema treba da se formira kritičan broj od  $\alpha+1$  plastičnih zglobova ili plastifikacija preseka ( $\alpha$  je statička neodređenost), da bi sistem došao u stanje granične ravnoteže i počeo da se formira mehanizam loma sistema.

20. Parametri kinematičkog mehanizma loma i njegov oblik dobijen teorijskim putem rešavanjem dualnog problema linearnog programiranja odgovaraju ostvarenom mehanizmu loma prilikom ispitivanja ovih dvopojasnih nosača.

21. Dalja ispitivanja ovih konstrukcijskih sistema bi trebalo nastaviti sa betonima visoke i ultra visoke čvrstoće, a sa zategom od čelika za prethodno naprezanje. Očekivati je da će ovakvi konstrukcioni sistemi biti vrlo blizu po težini i čvrstoćama čeličnim konstrukcijama.



## 10. FOTODOKUMENTACIJA



*Slika 10.1 – Mesto izvođenja eksperimenta*



*Slika 10.2 – Dispozicija nosača ispred laoboratorije*



*Slika 10.3 – Nosač na privremenim osloncima*



*Slika 10.4 – Izgled nosača na betonskim osloncima*



*Slika 10.5 – Treća faza opterećenja*



*Slika 10.6 – Nanošenje opterećenja za četvrtu fazu*



*Slika 10.7 – Četvrta faza opterećenja*



*Slika 10.8 – Nanošenje opterećenja za petu fazu*



*Slika 10.9 – Nanošenje opterećenja*



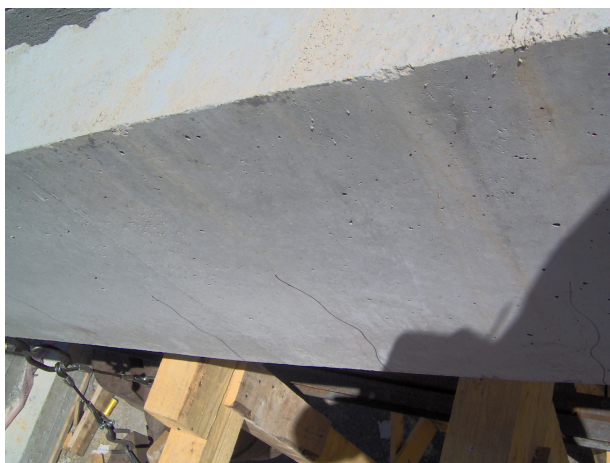
*Slika 10.10 – Nanošenje opterećenja za šestu fazu*



*Slika 10.11 – Nanošenje opterećenja za šestu fazu*



*Slika 10.12 – Nanošenje opterećenja*



*Slika 10.13 – Raspored prslina duž nosača u zoni max momenta*



*Slika 10.14 – Merno mesto na armaturi*



*Slika 10.15 – Priprema nosača*



*Slika 10.16 – Deo opreme u laboratoriji*



*Slika 10.17 – Merno mesto na zatezi*



*Slika 10.18 – Izgled veze vertikalne i gornjeg pojasa*



*Slika 10.19 – Otpuštanje tega*



*Slika 10.20– Slobodan pad tega*



*Slika 10.21 – Priprema za udar tega*



*Slika 10.22– Snimanje prslina*



*Slika 10.23 – Sklanjanje nosača*



*Slika 10.24 – Sklanjanje nosača*





*Slika 10.25 – Nosač u trećoj fazi opterećenja*



*Slika 10.26 – Deo nosača sa pomoćnom skelom*



*Slika 10.27 – Pogled na nosač odozgo*



**Slika 10.28** – *Nosač spreman za nanošenje opterećenja*



**Slika 10.29** – *Izgled tegova obešenih o nosač*

## 10. LITERATURA

- [1] AĆIĆ, M., PAKVOR, A., PERIŠIĆ, Ž.: "Teorija armiranobetonskih i prethodno napregnutih konstrukcija", Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, "Naučna knjiga", Beograd, 1986.
- [2] AĆIĆ MIRKO, "Primena teorije plastičnosti u betonskim konstrukcijama", "Izgradnja", Beograd, 1991., 7. str.
- [3] AĆIĆ MIRKO, "Granična ravnoteža zidnih nosača od armiranog betona", Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, magistarska teza, Beograd, 1968.
- [4] AĆIĆ MIRKO, "Prilog rešenju problema graničnih stanja zidnih nosača od armiranog betona", Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, doktorska disertacija, Beograd, 1978.
- [5] AĆIĆ MIRKO, "Savremene betonske konstrukcije", monografija posvećena sedamdesetogodišnjici života prof.dr Milorada Ivkovića, Građevinski fakultet, Beograd, 1994.
- [6] AĆIĆ M., OSTOJIĆ D., "Eksperimentalno istraživanje ponašanja armiranobetonskih nosača sa zategom", Simpozijum JUDIMK-e, Zbornik radova, treća knjiga, Portorož, 1986.
- [7] AĆIĆ M., NAJDANOVIĆ D., OSTOJIĆ D., "Rešenje krovne konstrukcije za kompleks objekata " UTVA " Pančevo", publikacija VIII kongresa SDGKJ, Cavtat, april 1987.
- [8] AĆIĆ, M., ZEJAK, R., FURTULA, B., "Analiza graničnih stanja dvopojasnih AB nosača od betona visoke čvrstoće ", Drugi internacionalno stručni skup " Građevinarstvo-nauka i praksa ", Žabljak 2008.
- [9] AĆIĆ, M., ULIĆEVIĆ, M., SINĐIĆ-GREBOVIĆ, R.: " Betoni visokih čvrstoća ", Monografija povodom 50 godina Građevinskog fakulteta u Beogradu, 1999.god., str. 13- 32.
- [10] AITCIN, P.C., : " High – Performance Concrete ", E&FN SPON, London, 1998
- [11] ACI Committee 318-95, Building Code Requirements for Structural Concrete, American Concrete Institute, Detroit, 1995
- [12] AITCIN, P.C., and NEVILLE, A.: " High-performance concrete demystified ", Concrete International, January 1993, pp 21-26
- [13] ACI COMMITTEE 318, : Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-95) and Commentary ACI 318 R-95, American Concrete Institute, Detroit, 1995.,353pp.
- [14] BATHE K.J., " Finite Element Procedures in Engineering Analysis " Prentice-Hall, Englewood Cliffs,N.J. 1982.
- [15] BATHE K.J., "Finite Element Procedures ", Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [16] BETON I ARMIRANI BETON '87.: "Priručnik za primenu pravilnika o tehničkim normativima za beton i armirani beton-BAB '87", "Građevinska knjiga", Beograd, 1991.

- [17] CHARMERS, A., LEMKE, C. E., and ZIENKIEWICZ, O. C. „Virtual work, linear programming and plastic limit analysis“, *Proc. Of the Royal Society of London*, series A, Math. And. Phis. Sciences, Vol. 251, No 164, 1959, pp. 110-116.
- [18] COHN, M. Z. and MAIER, G. (editors), „*Engineering Plasticity by Mathematical Programming*“, Pergamon Press New York, 1978.
- [19] COLLINS, M. P., MITCHELL, D., MAC GREGOR, J.G., : “ Structural Design Considerations for High-Strength Concrete “, *Concrete Internacional*, Vol.15, No.5, May 1993, 27-34
- [20] CEB/FIP – "Model Code 1990",: First Draft ,Bulletin d'Information 195,196,198, Comite Euro-International du Beton, Mars-Septembre 1990.
- [21] CEB/FIP – "Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete", CEB Bulletin d'Information No. 215, Laussane , March, 1983., 297 pp.
- [22] DAVID LLOYD S., PRAŠČEVIĆ Ž., “ Primena fuzzy matematičkog programiranja za rešavanje nekih problema analiz i optimizacije konstrukcijskih sistema” Časopis Izgradnja, Beograd
- [23] DAVID LLOYD S., PRAŠČEVIĆ Ž., " Optimal plastic design of reinforced concrete frames ", *Savremene betonske konstrukcije*, Beograd 1994. [24] DILGER W.H., "Methods of Structural Creep Analysis", *Creep and Shrinkage in Concrete Structures*, Chapter 9, Chichester, John Wiley&Sons, New York, 1982., 305-339 pp.
- [25] DUNICA,Š., KOLUNDŽIJA,B.: "Nelinearna analiza konstrukcija", Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, "Naučna knjiga", 1986.
- [26] DIN 1045,:"Beton und stahlbeton bemessung und ausfuehrung", Deutsches Institutfur Normung, 1988.
- [27] EVROCOD 2, Proračun betonskih konstrukcija , deo 1-1: Opšta pravila i pravila za zgrade, Beograd 2006
- [28] EVROKOD 2, "Proračun betonskih konstrukcija" (prevod sa engleskog), Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 1994., 348 str.
- [29] FRANC,G.: "Teorija armiranobetonskih konstrukcija", "Građevinska knjiga", Beograd.
- [30] FURTULA,B., Analiza na napreznjata i deformacije na spregnuti armiranobetonski konstrukciji so elementi od lesnoagregatni betony", 7-mi međunarodni simpozijum DGKM, Ohrid, 1997.
- [31] FURTULA, B., ARSOVIĆ, D., " Analiza smičuće sile na spoju prefabrikovanog nosača i lakoagregatne ploče sa uzimanjem u obzir dugotrajnih deformacija betona", Simpozijum, Ocena stanja, održavanje i sanacija građevinskih objekata i naselja, Zlatibor 2005.god.
- [32] FURTULA,B., RADIVOJEVIĆ, S., " Damage and rehabilitation of the part of AB construction on the medical scool in Užice",
- [33] GILBERT R.I., "Time Effects in Concrete Structures", Elseiver Science Publishers B.V., Amsterdam, 1988., 321 pp.
- [34] Grupa autora: "HANGAR 2-JAT na aerodromu Beograd", monografija SGITS, Beograd,maj 1986.

- [35] HPC Technology Delivery Team: "High Performance Concrete Structural Designer's ", Guide, CD, 2005
- [36] HAJDIN, N., "Proračun linijskih nosača prema stadijumu loma", Čelične konstrukcije- posebno izdanje, Izgradnja, 1974, str.3-13.
- [37] HODGE, P. G., Plastic Analysis of Structures, McGraw Hill, New York, 1959.
- [38] IVKOVIĆ M., RADOSAVLJEVIĆ Ž., PERIŠIĆ Ž., PAKVOR A., AČIĆ M., "Aktuelni problemi teorije betonskih konstrukcija, II deo, Granična stanja upotrebljivosti, Građevinski kalendar 1985., Beograd, 1985., 408 str.
- [38<sub>a</sub>] IVKOVIĆ, M., "Ponašanje betona u oblasti granične ravnoteže", Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd, 1962.
- [39] IVKOVIĆ, M., PRAŠČEVIĆ Ž.: "Problemi stabilnosti armiranobetonskih konstrukcija", Simpozijum Saveza društava građevinskih konstruktora Jugoslavije, Trogir, 1980.
- [40] IVKOVIĆ, M., RADOJIČIĆ, T., AČIĆ, M.: "Granična stanja betonskih konstrukcija", Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, "Naučna knjiga", Beograd, 1986.
- [41] IVKOVIĆ MILORAD, "Betonske konstrukcije II", Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1981., 224 str.
- [42] IVKOVIĆ M., AČIĆ M., PERIŠIĆ Ž. PAKVOR A., "Reološke osobine očvrslog betona", Seminar: Beton-svojtva i tehnologija, Arandelovac 1984., 21 str.
- [43] IVKOVIĆ M., PERIŠIĆ Ž., AČIĆ M., PAKVOR A., " Granična stanja prethodnonapregnutih betonskih nosača sa kablovima van poprečnog preseka", Mehanika, materijli i konstrukcije, SANU, Beograd 1975.
- [44] IVKOVIĆ M., RADOJIČIĆ T., "Reologija i opšta teorija loma betona", "Naučna knjiga", Beograd, 1987., 183 str.
- [45] IVKOVIĆ M., AČIĆ M., PERIŠIĆ Ž., PAKVOR A., "Concrete structures with steel elements outside the concrete section ", IABSE Congress, Vancouver, 1984.
- [46] IVKOVIĆ M., AČIĆ M., PERIŠIĆ Ž., PAKVOR A., "Konstrukcijski sistemi sa čeličnim elementima van betonskog dela preseka", Prvi kongres DGKH, Plitvička jezera, 1984.
- [47] IVKOVIĆ M., AČIĆ M., PERIŠIĆ Ž., PAKVOR A., "Demountable concrete structures with steel elements outside the concrete srction ", International Symposium, Rotterdam, 1985.
- [48] IVKOVIĆ M., PERIŠIĆ Ž., "External prestressing in two-chord large span structural systems", ACI Symposijum, Houston, 1988.
- [49] IVKOVIĆ M., PRAŠČEVIĆ Ž., "Analiza ravnih visećih konstrukcijskih sistema ", Simpozijum Teorija konstrukcija, Kopaonik 1993. [50] IVKOVIĆ M., PRAŠČEVIĆ Ž., KLEM N., "Prilog analizi visećih krovova uz primenu elektronskog računara", XIV kongres racionalne i primenjene mehanike, Portorož, 1978.
- [51] IVKOVIĆ M., PERIŠIĆ Ž., ĐURĐEVIĆ M., ALENDAR V., "Neki problemi konstrukcijskih sistema velikih raspona sa kablovima van poprečnog preseka "Časopis Građevinar br.40, Zagreb, 1988.
- [52] IVKOVIĆ M., RADOSAVLJEVIĆ Ž., PERIŠIĆ Ž., PAKVOR A., AČIĆ M., "Aktuelni problemi teorije betonskih konstrukcija, II deo, Granična stanja upotrebljivosti, Građevinski kalendar 1985., Beograd, 1985., 408 str.
- [53] IVKOVIĆ, M., RADOJIČIĆ, T., AČIĆ, M.: "Granična stanja betonskih konstrukcija", Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, "Naučna knjiga", Beograd, 1986.

- [54] KOJIĆ M., "Metod konačnih elemenata I" Kragujevac 1998.
- [55] LIU HANG, LIU CHEN-GUANG., "Simplified Method to Analyze Two-Chord Large Span External Prestressing Structural System", fib Symposium 1999, Prague
- [56] LLOYD SMITH, D., "*Plastic Limit Analysis and Synthesis of Structures by Linear Programming*", PhD Thesis, Imperial College, University of London, 1972.
- [57] LLOYD SMITH, D. I PRAŠČEVIĆ, Ž., „Limit analiza ravnih okvirnih sistema“, *Izgradnja*, 2, 1990, str. 5-14.
- [58] LLOYD SMITH, D. And MUNRO, J., On Uniqueness in the Elastoplastic Analysis of Frames“, *Journ. of structural Mechanics*, 6 (1), 1978, pp. 85-106.
- [59] LLOYD SMITH, D. (editor), „*Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity*“, Springer Verlag, Wien- New York, 1990.
- [60] MURAVLJOV, M., JEVTIĆ, D.: “Betoni vrlo visokih čvrstoća i neki aspekti njihove primene u prednapregnutim konstrukcijama“, III savetovanje o savremenim dostignućima u našem građevinarstvu u oblasti prethodnonapregnutog betona i prednaprežanja, JDP; Beograd, 1985.
- [61] MEHTA, P.K., AITCIN, P.C.: “Principles underlying production of high-performance concrete“, *Cement, Concrete and Aggregates*, 12(2), Winter 1990, 70-78
- [62] MURAVLJOV, M., KOVAČEVIĆ, T.: “Mogućnosti dobijanja betona visokih čvrstoća od rečnog i drobljenog agregata“, Monografija povodom 70 godina života M.Ivkovića, Građevinski fakultet Beograd, 1995.god., str. 165-168
- [63] MOLMAN H., “Analisis of hanging roofs by the finite displacement method“, Polyteknisk Forlag, Lingby 1974.
- [64] MILAŠINOVIĆ D., IVANOV, D., FURTULA, B., BORKOVIĆ, A., "Large displacement stability of columns using the harmonic coupled Finite-Strip Method ", The thirteenth International conference on Civil structural and environmental engineering computing which will take place in chanih Crete, Greece, 2011.
- [65] MILAŠINOVIĆ D. DRAGAN, "The Finite Strip Method in Computational Mechanics", Faculty of Civil Engineering Subotica, Novi Sad, Budapest, Belgrade, Subotica 1997., 414 pp.
- [66] MILAŠINOVIĆ D. DRAGAN, "Rheological-dynamical analogy: prediction of buckling curves of columns" *International Journal of Solids and Structures* 37, 2000, 3965-4004 pp.
- [67] MAIER, G., „Some Theoremes for Plastic Strain Rates and Plastic Strains“, *Journal de Mechanique*, 8, No 1, pp 5-19, 1969.
- [68] MARINKOVIĆ, S., “Granična nosivost pri probijanju montažnih prethodno napregnutih ploča u oblasti ivičnih stubova“, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, doktorska disertacija, Beograd, 2001.
- [69] MUNRO, J and LLOYD SMITH, D., "Linear Programming in Plastic Analysis and Synthesis", *Proc. of Int. Symposium on Computer Aided Design*, University of Warwick, 1972.
- [70] NAWY, E.: „Fundamentals of high-performance concrete“, Second edition, John Wiley&Sons, Inc., New York, 2001

- [71] NILSON,A.H., WINTER,G.: "Design of Concrete Structures", McGraw-Hill, 1986.
- [72] OSTOJIĆ, D., AĆIĆ, M., FURTULA, B., ZEJAK, R., " Primer sanacije krovnih nosača industrijske hale " SGITS, Ocena stanja, održavanje i sanacija građevinskih objekata i naselja, Savetovanje, Zlatibor 2007.
- [73] PBAB '87, "Priručnik sa priložima za primenu pravilnika o tehničkim normativima za beton i armirani beton", Građevinska knjiga, 1991., Knjiga I-770 str., Knjiga II 702 str.
- [74] PRELOG, E., " Metoda konačnih elementov ", Univerza v Ljubljani, Ljubljana 1975.
- [75] PRAŠČEVIĆ ŽIVOJIN, " Operaciona istraživanja u građevinarstvu", Građevinski fakultet u Beogradu 1992.
- [76] PRAŠČEVIĆ ŽIVOJIN, " Analysis of Plane Reinforced Concrete Structures with Creep and Shrinkage Effects ", Savremene betonske konstrukcije, Beograd 1994.
- [76<sub>a</sub>] PRAŠČEVIĆ, Ž., "Nelinearna teorija armiranobetonskog štapa", Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd, 1979.
- [77] PERIŠIĆ ŽIVOTA, "Analiza uticaja tečenja i skupljanja u betonskim konstrukcijama sa prslinama primenom idealizovanog preseka sa korigovanim efektivnim modulom betona", "Naše građevinarstvo" br.38, Beograd, 1984., 1165-1170. str.
- [78] PRAŠČEVIĆ, Ž. PRAŠČEVIĆ, N., „Operaciona istraživanja u građevinarstvu“, Čugura print, Beograd, 2009.
- [79] RADOJKOVIĆ MILAN, "Ispitivanje konstrukcija", Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1979., 237 str.
- [80] RŽANICIN A. R., "Teorija puženja materijala", Građevinska knjiga, Beograd, 1974., 358 str.
- [81] SEKULOVIĆ,M. "Metod konačnih elemenata", Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, "Građevinska knjiga", Beograd, 1984., 592 str. [82] STEVANOVIĆ SRETEN, "Granična nosivost linijskih nosača – prilog rešenju problema", Građevinski fakultet Univerziteta u Nišu, doktorska disertacija, Niš, decembar
- [83] TEIXEIRA De FERITAS, J. A. and LLOYD SMITH, D. „A general methodology for nonlinear structural analysis by mathematical programming“, *Engineering Structures*, **6**, 1984., pp. 52-61.
- [84] VUKOTIĆ, R., “ Prilog rešenju graničnog stanja betonskih nosača napregnutih savijanjem i torzijom “, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, magistarska teza, Beograd 1968.
- [85] ZEJAK, R. : "Osnovne postavke za eksperimentalnu analizu koso savijanih vitkih AB stubova ", 10. kongres JDGK, Vrnjačka Banja, 8-10. jun 1998.g. R-11, str. 61-66.
- [86] ZEJAK, R. : "Eksperimentalna analiza vitkih AB stubova sa kosim savijanjem", Simpozijum 2000, Vrnjačka Banja, 1-3. novembar 2000.g., str. 6.
- [87] ZEJAK R.: Eksperimentalna analiza vitkih AB stubova sa kosim savijanjem, Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Istraživanja, Monografija, Podgorica 2000., str. 185-198.

- [88] ZEJAK R.: Eksperimentalna analiza vitkih AB stubova sa pravougaonim presjekom, Međunarodni simpozijum INDIS, Novi Sad 2000, str. 1-8.
- [88<sub>a</sub>] ZEJAK R., "Prilog analizi vitkih armiranobetonskih konstrukcija", Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd, 2003.
- [89] ZHEN,G., SHEN,D., DING,D.: "A Study on Slender Reinforced Lightweight Concrete Columns with Rectangular Section under Biaxially Eccentric Loads", International symposium on concrete engineering, Nanjing, 1991.
- [90] Grupa autora., "Sto godina nastave iz armiranog betona na Građevinskom fakultetu" Univerziteta u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd, 2012.
- [91] CEB Bulletin d'Information 222, November 1994
- [92] G J. Walraven HIGH-STRENGTH CONCRETE: A STRUCTURAL MATERIAL FOR THE FUTURE
- [93] G. C. Hoff UTILIZATION OF HIGH STRENGTH CONCRETE IN NORTH AMERICA High Strength Concrete 1993, Symposium in Lillehammer, Norway, 27-38.
- [94] S. Ikeda UTILISATION OF HIGH-STRENGTH CONCRETE IN JAPAN FIP notes 1993/4, 9-13.
- [95] CEB Bulletin d'Information 228, July 1995. HIGHPERFORMANCE CONCRETE
- [96] G. Köning, H. Bergner, R. Grimm, G. Simsch UTILISATION OF HIGH-STRENGTH CONCRETE IN EUROPE (PART 2) FIP notes 1994/1, 4-6.



## 12. BIOGRAFIJA AUTORA

Mr Boško B. Furtula, dipl.građ.inž. rođen je u Višegradu, Republika Srpska, gde je završio osnovnu školu “ Petar Kočić” i Građevinsku tehničku školu u Sarajevu sa odličnim uspehom. Građevinski fakultet u Sarajevu, odsek za konstrukcije je završio 1978.god. i odbranio diplomski rad iz Betonskih mostova.

Stručni ispit je položio 1980.god. Poslediplomske studije, odsek Betonskih konstrukcija je upisao u Sarajevu, položio sve ispite odbranivši magistarski rad pod naslovom: “Sprezanje prethodno napregnutih konstrukcija sa elementima lakoagregatnih betona” pod mentorstvom prof. dr Milorada Ivkovića 1991.god.

Od diplomiranja 1978.god. radio je u Zavodu za urbanizam i projektovanje u Užicu na random mestu projektant konstrukcija, a kasnije odgovorni projektant konstrukcija. Kraće vreme radi u sektoru investicija i nadzora SIZ-a stanovanja u Užicu. Od 1984.god. do 1990.god. radi u GP “Zlatibor”, uglavnom na poslovima projektovanja raznih sistema konstrukcija. U tom periodu projektovani su značajni objekti u Užicu, Tuzli, N. Sadu, Beogradu, Baru, Podgorici i mnogim drugim mestima gde je izvođač radova bio GP “Zlatibor”. Uglavnom, su to bili stambeni objekti, industrijski objekti i poljoprivredni objekti, kao i manji i srednji objekti mostogradnje.

Od 1990. god do danas radi kao Viši predavač na Visokoj poslovno-tehničkoj školi u Užicu gde izvodi nastavu iz predmeta: Betonske konstrukcije, Betonski mostovi, Spregnute konstrukcije i Tehnologija građenja.

Kao projektant je projektovao ili učestvovao u projektovanju na preko 50 značajnijih objekata, bio vršilac tehničke kontrole (revizije) na više destina projekata i vodio stručni nadzor na mnogim objektima.

Objavio je preko deset radova koji su saopšteni na domaćim i međunarodnim konferencijama i štampani u zbornicima radova sa tih konferencija.

Član je Inženjerske komore Srbije, Društva građevinskih konstruktera Srbije I Društva za ispitivanje materijala I konstrukcija Srbije.

Služi se ruskim i engleskim jezikom.

Oženjen je, otac troje dece. Živi i radi u Užicu.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а \_\_\_\_\_ мр Бошко Фуртула, дипл.граф.инж.

број индекса \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

ГРАНИЧНА СТАЊА АРМИРАНОБЕТОНСКИХ МОНТАЖНИХ  
ДВОПОЈАСНИХ НОСАЧА ОД БЕТОНА ВИСОКИХ ЧВРСТОЋА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора \_\_\_\_\_ мр Бошко Фуртула, дипл.грађ.инж.

Број индекса \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_

Наслов рада \_\_ ГРАНИЧНА СТАЊА АРМИРАНОБЕТОНСКИХ МОНТАЖНИХ  
ДВОПОЈАСНИХ НОСАЧА ОД БЕТОНА ВИСОКИХ ЧВРСТОЋА \_\_\_\_\_

Ментор Проф.др Мирко Аћић, дипл.грађ.инж и  
Проф.др Михајло Ђурђевић, дипл.грађ.инж

Потписани/а \_\_\_\_\_ мр Бошко Фуртула, дипл.грађ.инж.

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

### Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

---

ГРАНИЧНА СТАЊА АРМИРАНОБЕТОНСКИХ МОНТАЖНИХ  
ДВОПОЈАСНИХ НОСАЧА ОД БЕТОНА ВИСОКИХ ЧВРСТОЋА

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.