

UNIVERZITET U BEOGRADU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Miljan M. Kovačević

**MODEL ZA PROGNOZU I PROCENU
TROŠKOVA IZGRADNJE ARMIRANO-
BETONSKIH DRUMSKIH MOSTOVA**

Doktorska disertacija

Beograd, 2018

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Miljan M. Kovačević

**MODEL FOR FORECASTING AND
ASSESSMENT OF CONSTRUCTION COST
OF REINFORCED-CONCRETE BRIDGES**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2018

Podaci o mentoru i članovima komisije za ocenu i odbranu:

Mentor:

V. prof. dr Nenad Ivanišević, dipl. inž. građ
Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

Članovi komisije:

1. Prof. dr Branislav Ivković, dipl. inž. građ.

Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

2. Prof. dr Miloš Knežević, dipl. inž. građ.

Univerzitet u Podgorici, Građevinski fakultet

Datum odbrane: _____

Autor disertacije posebnu zahvalnost duguje:

Mentoru V.prof. dr Nenadu Ivaniševiću i Katedri za upravljanje projektima Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, na predloženoj temi, stručnim savetima, na velikoj podršci i pomoći pri rešavanju problema vezanih za izradu ove disertacije, bez čije pomoći ona ne bi bila realizovana. Nadam se da ću u budućnosti uspeti da opravdam poverenje koje mi je ukazano.

Zahvaljujem se komisiji, prof. dr Branislavu Ivkoviću i prof. dr Milošu Kneževiću koji su prihvatili predložene istraživačke ideje i detaljno pregledali rad i svojim predlozima i sugestijama uticali na krajnju formu rada.

Posebno se zahvaljujem prof. dr Živojinu Prašćeviću, za veliku pomoć i podršku u prelomnim trenucima mog naučnog i profesionalnog usavršavanja, na savetima i razumevanju koji su imali neprocenljiv značaj za mene i moj životni put.

Zahvalnost dugujem i prof.dr Petru Čoliću čija je nesebična pomoć, podrška, dovela do želje za mojim daljim naučnim usavršavanjem. Zahvaljujem se na velikoj i iskrenoj podršci tokom svih faza mog profesionalnog usavršavanja.

Zahvaljujem se i mojim kolegama na Fakultetu tehničkih nauka u Kosovskoj Mitrovici, prof.dr Velimiru Dutini i v.prof Ljubi Markoviću, što su pomogli da se moja ljubav prema nauci profiliše u ovoj oblasti i pružili podršku mom daljem profesionalnom usavršavanju.

Veliku zahvalnost dugujem svojim roditeljima i svojoj porodici na ljubavi, razumevanju, moralnoj, materijalnoj i svakoj drugoj podršci koju su mi pružili tokom izrade ovog rada.

Naslov disertacije:

MODEL ZA PROGNOZU I PROCENU TROŠKOVA IZGRADNJE ARMIRANO-BETONSKIH DRUMSKIH MOSTOVA

Rezime:

U radu su predstavljene i analizirane najsavremenije tehnike mašinskog učenja koje se mogu primeniti kod procene troškova izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova. Analizirana je primena veštačkih neuronskih mreža, ansambla regresionih stabala, modela zasnovanih na metodi potpornih vektora, Gausovih slučajnih procesa.

Formirana baza podataka o troškovima izgradnje mostova zajedno sa njihovim projektnim karakteristikama predstavljala je osnovu za formiranje modela za procenu. Modeli su formirani na osnovu podataka za 181 armirano-betonski drumski most čija vrednost prevazilazi 100 miliona evra.

Model zasnovan na metodi Gausovih procesa pokazao je najveću tačnost procene troškova izgradnje mostova. Istraživanje je ukazalo da primena ARD funkcija kovarijanse daje modele najveće tačnosti, a pored toga omogućava i sagledavanje značaja koje imaju pojedine ulazne promenljive na tačnost modela. Primenom modela sa ARD funkcijom kovarijanse formirani su i modeli za procenu utroška betona, visokovrednog i rebrastog čelika.

Postignuta je tačnost modela kod procene ugovorenih troškova izgradnje izražena preko srednje apsolutne procentualne greške od 10,86%. Kod modela za procenu utroška ključnih materijala za izgradnju postignuta je tačnost modela čija je gornja granica 11,64% izražena preko srednje apsolutne procentualne greške.

Sprovedeno istraživanje potvrđuje da je u ranim fazama razvoja projekta metodama baziranim na veštačkoj inteligenciji moguća brza i dovoljno precizna procena troškova izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova i utroška ključnih materijala za njihovu gradnju.

Ključne reči:

Upravljanje projektima, procena troškova, veštačka inteligencija, mašinsko učenje, mostovi

Naučna oblast:

Građevinarstvo

Uže naučne oblasti:

Menadžment i tehnologija građenja

UDK broj: 005.22:338.585]:624.2/.8(043.3)

MODEL FOR FORECASTING AND ASSESSMENT OF CONSTRUCTION COSTS OF REINFORCED-CONCRETE BRIDGES

Abstract:

Contemporary machine learning techniques for assessment of construction costs of reinforced-concrete bridges, including artificial neural networks, regression tree ensembles, support vector regression and Gaussian random processes, are proposed and analysed in this dissertation.

The database of construction costs and project characteristics is created, that served as a basis for building the assessment model. Data for 181 reinforced-concrete bridges were used in the database with the total value of over 100 000 000 EUR.

The model based on Gaussian processes has shown the best performance in forecasting the construction costs of bridges. The results have proved that using the Automatic Relevance Determination (ARD) covariance function leads to the best prediction model, and moreover, it enables the assessment of the influence of input variables on the model performance. Models for the assessment of costs of concrete, as well as ribbed steel, were analysed.

The mean absolute percentage error (MAPE) was used as the performance criterion. The best performing model gives MAPE equal to 10,86% for forecasting the contracted construction costs and MAPE equal to 11.64% for quantity estimation of the key construction materials.

The research carried out in this dissertation confirms that the use of artificial intelligence based methods enables fast and accurate forecasting of construction costs of reinforced-concrete bridges, as well as the assessment of quantity estimation of the construction materials, even in early project phases.

Keywords:

Project Management, Cost Assessment, Artificial Inteligency, Machine Learning, Bridges

Scientific area:

Civil Engineering

Specific scientific area:

Building Management and Technology

UDC number: 005.22:338.585]:624.2/.8(043.3)

SADRŽAJ:

1. UVOD.....	1
1.1 Postavka i opis problema.....	1
1.2 Cilj istraživanja i osnovne hipoteze	3
1.3 Naučne metode istraživanja	4
1.4 Naučna opravdanost disertacije, očekivani rezultati i praktična primena rezultata	5
1.5 Struktura disertacije.....	6
2. PROCENA TROŠKOVA GRAĐENJA	9
2.1 Modeli za procenu troškova građenja	11
2.1.1 Gruba procena na osnovu kapaciteta ili veličine objekta.....	12
2.1.2 Procena po elementima – funkcionalnim grupama radova.....	12
2.1.3 Model troškovno značajnih pozicija radova	13
2.1.4 Parametarski (regresioni) model.....	13
2.1.5 Model zasnovan na predmeru i predračunu radova	14
2.1.6 Model zasnovan na aktivnostima i utrošku resursa	14
2.1.7 Probabilističke simulacije i analiza rizika.....	15
2.1.8 Ekspertni sistemi za procenu troškova.....	15
3. VEŠTAČKA INTELIGENCIJA I MAŠINSKO UČENJE.....	16
3.1 Primena tehnika mašinskog učenja u građevinarstvu	17
4. GREDNI I OKVIRNI SISTEMI ARMIRANO-BETONSKIH MOSTOVA	31
4.1 Tehnologija izgradnje mostova	34
4.1.1 Izgradnja rasponske konstrukcije betonskih mostova na fiksnoj, prenosnoj i pokretnoj skeli.....	34
4.1.2 Izgradnja montažno-monolitne (spregnute) rasponske konstrukcije	37

4.1.3	Izgradnja stubova mostova	38
5.	PREDMET ISTRAŽIVANJA: MODEL ZA PROGNOZU I PROCENU TROŠKOVA IZGRADNJE AB DRUMSKIH MOSTOVA.....	40
5.1	Prikaz i statistička analiza podataka.....	41
5.2	Sistemski pristup kod formiranja modela za prognozu i procenu	48
5.3	Ocena kvaliteta modela i kriterijumi tačnosti	51
6.	METODE ZA IZRADU PREDIKTIVNIH MODELA	54
6.1	Veštačke neuronske mreže.....	55
6.1.1	Biološka osnova za veštačke neuronske mreže	55
6.1.2	Modeli veštačkih neuronskih mreža	57
6.1.3	Višeslojni perceptron	60
6.1.4	Metod prostiranja greške unatrag.....	63
6.1.5	Levenberg-Markard algoritam	66
6.1.6	Bajesova regularizacija kod treniranja neuronskih mreža	69
6.2	Metode zasnovane na stablima odlučivanja.....	76
6.2.1	Postupak formiranja modela regresionog stabla.....	78
6.2.2	Bagging metoda	80
6.2.3	Metoda Random Forests	81
6.2.4	Metoda Boosting.....	83
6.3	Metoda potpornih vektora kod problema regresije	88
6.3.1	Linearna regresija metodom potpornih vektora.....	88
6.3.2	Nelinearna regresija metodom potpornih vektora.....	94
6.4	Gausov regresioni proces	99
6.4.1	Pristup u prostoru koeficijenata	99
6.4.2	Pristup u prostoru funkcija.....	103

7. PROCENA KOŠTANJA DRUMSKIH AB MOSTOVA METODAMA ZASNOVANIM NA PRIMENI VEŠTAČKIH NEURONSKIH MREŽA	112
7.1 Modeli neuronskih mreža koji koriste metodu regularizacije.....	115
7.2 Modeli neuronskih mreža koji koriste metodu ranog zaustavljanja.....	116
7.3 Izrada ansambala neuronskih mreža i poboljšanje generalizacije modela.....	119
7.4 Ansambli neuronskih mreža koji koriste metodu regularizacije.....	121
7.5 Ansambli neuronskih mreža koji koriste metodu ranog zaustavljanja.....	127
8. PROCENA KOŠTANJA DRUMSKIH AB MOSTOVA METODAMA ZASNOVANIM NA STABLIMA ODLUČIVANJA.....	133
8.1 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem Bagging metode	133
8.2 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem Random Forests metode.....	138
8.3 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem Boosted Trees metode.....	144
8.3.1 Uporedna analiza rezultata modela zasnovanim na stablima odlučivanja.....	150
9. PROCENA KOŠTANJA DRUMSKIH AB MOSTOVA KORIŠĆENJEM METODE POTPORNIH VEKTORA	151
9.1 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem linearne kernel funkcije.....	151
9.2 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem RBF kernel funkcije.....	155
9.3 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem sigmoidne kernel funkcije.....	159
9.4 Uporedna analiza SVR modela sa različitim kernel funkcijama.....	161
10. PROCENA KOŠTANJA DRUMSKIH AB MOSTOVA MODELOM GAUSOVOG PROCESA.....	164
10.1 Primena različitih funkcija kovarijanse kod modela Gausovog procesa	165
10.1.1 Funkcije kovarijanse koje imaju jedan parametar razmere rastojanja za sve ulazne promenljive	165
10.1.2 Funkcije kovarijanse koje primenjuju različite parametre razmere rastojanja za ulazne promenljive (ARD funkcije kovarijanse)	167

10.2	Uporedna analiza modela Gausovog procesa sa različitim funkcijama kovarijanse kod procene koštanja mostova	170
11.	PROCENA UTROŠKA MATERIJALA KOD AB DRUMSKIH MOSTOVA.....	176
11.1	Procena utroška betona kod drumskih AB mostova modelom Gausovog procesa ..	176
11.1.1	Uporedna analiza modela Gausovog procesa sa različitim funkcijama kovarijanse kod predviđanja ukupne količine armiranog betona	177
11.2	Procena utroška visokovrednog čelika kod drumskih AB mostova modelom Gausovog procesa	183
11.2.1	Uporedna analiza modela Gausovog procesa sa različitim funkcijama kovarijanse kod predviđanja utroška visokovrednog čelika po m ² površine mostova.....	184
11.3	Procena utroška rebrastog čelika kod drumskih AB mostova modelom Gausovog procesa.....	191
11.3.1	Uporedna analiza modela Gausovog procesa sa različitim funkcijama kovarijanse kod predviđanja utroška rebrastog čelika	192
12.	ZAKLJUČAK I PRAVCI DALJIH ISTRAŽIVANJA.....	198
12.1	ZAKLJUČAK.....	198
12.2	Pravci daljih istraživanja	203
	LITERATURA	204
	PRILOZI	215
	PRILOG 1 - SPISAK TABELA I GRAFIČKIH PRILOGA.....	216
	SPISAK TABELA:.....	216
	SPISAK SLIKA:.....	221
	PRILOG 2 – SOFTVERSKA IMPLEMENTACIJA MODELA	229
	Softverska implementacija modela za procenu koštanja AB drumskih mostova	229
	Softverska implementacija modela za procenu utroška betona kod izgradnje AB drumskih mostova.....	232

Softverska implementacija modela za procenu visokovrednog čelika kod izgradnje AB drumskih mostova.....	235
Softverska implementacija modela za procenu količine rebrastog čelika AB drumskih mostova	238

1. UVOD

1.1 Postavka i opis problema

Mostovi predstavljaju značajne objekte na trasama transportnih sistema koji omogućuju ljudima povezivanje i realizaciju različitih ekonomskih aktivnosti. Danas je u svetu preko dva miliona mostova u funkciji [1].

Izgradnja mostova beleži stalni rast tokom vremena kako na nacionalnom nivou, tako i globalno. U celom proteklom milenijumu do 20. veka izrađeno je manje mostova nego što sada bude izgrađeno u jednoj deceniji [2]. Po podacima Američke asocijacije izvođača saobraćajne infrastrukture ARTBA (American Road and Transportation Builders Association) vrednost građevinskih radova vezanih za izgradnju mostova nalazi se u višegodišnjem rastu, pri čemu je vrednost radova za 2014. godinu procenjena na 27 milijardi dolara [3]. U okviru Evropske unije postoje slični trendovi višegodišnjeg rasta ulaganja u putnu infrastrukturu. Prema podacima EUROSTAT za 2015. godinu vrednost je iznosila preko 47,5 milijardi evra [3]. Prema predviđanjima trend povećanja ulaganja u saobraćajnu infrastrukturu će se nastaviti i u narednom periodu [2].

U Srbiji je na istočnom i južnom kraku autoputskog koridora X u periodu od 2009. godine do 2015. godine ugovorena izgradnja gotovo 200 armirano betonskih mostova čija vrednost prevazilazi 100 miliona evra. Pored završavanja autoputa na koridoru X kroz Srbiju, gradi se i autoput E763 (popularno nazvan koridor XI) odnosno autoput Beograd - Južni Jadran koji treba da vodi do granice sa Crnom Gorom, a zatim se produžava dalje do Bara. Kroz Srbiju je u izgradnji deo autoputa od Beograda do Ljiga, puštena je u saobraćaj deonica od Ljiga do Preljine, a ugovorena deonica od Preljine do Požege. Deo od Požege do Boljara je poslednja neugovorena deonica autoputa prema Crnoj Gori na teritoriji Srbije [4], [5]. Cela investicija gradnje autoputa Požega - Boljare se procenjuje na više od 1,5 milijardi evra, pri čemu troškovi izgradnje drumskih armirano-betonskih mostova imaju značajno učešće u pomenutim troškovima .

U disertaciji se analizira problem predviđanja koštanje izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova i količina najzastupljenijih materijala za njihovu gradnju. Cilj je formiranje modela koji će omogućiti u ranim fazama pripreme projekta brzu i preciznu procenu troškova i materijala uzimanjem u obzir osnovnih karakteristika budućih mostova.

U početnim fazama planiranja prema *Barnesu*, kod izrade studije izvodljivosti tačnost procene troškova građenja se kreće u granicama od -40% do +20%, u početnoj fazi tenderske procedure greška procene troškova nalazi se u rasponu -15% do +10%, dok je greška na kraju tenderske procedure u rasponu od -10% do +5% [6]. Ovaj procentualni iznos približno bi trebao da se zadrži do finalnog obračuna radova.

Savremena koncepcija organizacije izgradnje mostova pretpostavlja planiranje aktivnosti i procenu troškova koji su neophodni da bi most bio izgrađen u odgovarajućem roku, odgovarajućeg kvaliteta, uz optimalne troškove izgradnje. Jedan od glavnih problema kod procene troškova izgradnje mostova jeste prekoračenje procenjenih troškova. Kod 9 od 10 realizovanih projekata izgradnje su troškovi podcenjeni odnosno procena troškova je bila značajno manja u odnosu na stvarne troškove [7].

Procena troškova izgradnje mostova predstavlja kompleksan proces koji je praćen velikim brojem uticajnih činilaca, neizvesnošću i nepreciznošću. Složenost samog procesa dovela je do ideje korišćenja savremenih metoda mašinskog učenja. Cilj istraživanja je da se prikaže mogućnost modelovanja procene troškova izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova u ranim fazama razvoja projekta metodama veštačke inteligencije i mašinskog učenja kao i određivanje količina materijala koji naznačajnije utiču na troškove izgradnje mostova.

Pre definisanja samog modela pristupilo se prikupljanju i analizi troškova izgradnje mostova na izgradnji deonice na južnom i istočnom kraku autoputskog koridora X kroz Srbiju. Tokom sprovedenog istraživanja formirana baza podataka o ugovorenim troškovima izgradnje i osnovnim karakteristikama velikog broja mostova. Baza podataka je obuhvatila 181 armirano-betonski most čija ugovorena vrednost radova prelazi sto miliona evra.

Za potrebe procene troškova izgradnje u ranoj fazi se u praksi koristi veći broj metoda kao što su procena na osnovu troškovno značajnih pozicija radova, parametarski modeli, metoda zasnovana na predmeru i predračunu radova, zatim razni oblici ekspertnih sistema, simulacija i sl. Metode koje se koriste za procenu troškova izgradnje zasnivaju se uglavnom na linearnoj regresiji.

Kod drugih metoda kada se koriste nelinearne funkcije polazi se od pretpostavke o obliku te funkcije čije parametre tek treba odrediti. Pretpostavkama o obliku i parametrima funkcije koje usvaja procenitelj, proces procene troškova postaje pristrasan odnosno subjektivan.

1.2 Cilj istraživanja i osnovne hipoteze

Obezbeđenje precizne procene troškova izgradnje mostova u ranim fazama razvoja projekta ima presudan uticaj na sve dalje faze. Formiranje modela za takvu procenu omogućiće osnovu za dalju analizu i vrednovanje tehničkog rešenja projekta sa tehno-ekonomske strane.

Cilj ovog istraživanja je razvoj modela za što precizniju procenu troškova izgradnje mostova u ranim fazama realizacije projekta, kao i razvoj modela za procenu utroška najznačajnijih materijala korišćenjem metoda veštačke inteligencije.

Osnovna hipoteza u disertaciji je da je u ranim fazama razvoja projekta metodama baziranim na veštačkoj inteligenciji moguća brza i dovoljno tačna procena troškova izgradnje i utroška ključnih materijala armirano-betonskih drumskih mostova, na bazi osnovnih karakteristika budućih mostova i baze istorijskih podataka o ugovorenim mostovima na kojoj bi model bio obučavan.

Automatizacijom procesa procene troškova izgradnje, koja bi se postigla primenom modela zasnovanog na veštačkoj inteligenciji smanjio bi subjektivan uticaj ljudskog faktora u proceni troškova i povećala efikasnost procesa.

Za svaki model je pripremljen odgovarajući softver, u okviru koga se unosom podskupa troškovno značajnih uticajnih promenljivih dobija vrednost troškova izgradnje armirano-betonskog mosta.

Pored modela za procenu troškova izgradnje moguće je formirati i model za procenu ključnih materijala za izgradnju armirano betonskih drumskih mostova. Hipoteza je da je moguća izrada modela koji će omogućiti brzu i dovoljno tačnu procenu utroška ključnih materijala, na bazi osnovnih karakteristika budućih mostova primenom metoda veštačke inteligencije. Modeli bi za osnovu imali podatke iz projektne dokumentacije za veliki broj mostova. Razmatrani su modeli za procenu utroška betona, visokovrednog čelika i rebrastog čelika, kao najznačajnijih materijala pri izgradnji drumskih armirano-betonskih mostova.

1.3 Naučne metode istraživanja

U okviru disertacije formiran je niz modela za procenu troškova izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova baziranim na metodama veštačke inteligencije. Baza podataka o troškovima izgradnje i projektним karakteristikama mostova stvorila je osnovu za razvoj modela. Metodama unakrsne validacije određen model sa najvećom tačnošću. Baza podataka obuhvatila je veliki broj armirano-betonskih mostova na koridoru X u našoj zemlji izgrađenih poslednjih nekoliko godina.

U predloženom istraživanju su pored opštih naučnih metoda, korišćene i:

1. Empirijska metoda - metoda kvantitativnog istraživanja sa ciljem identifikacije parametara troškova na projektima izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova.
2. Statističke metode u obradi i prikazu rezultata istraživanja.
3. Metode mašinskog učenja odnosno veštačke inteligencije, koje su korišćene u cilju definisanja različitih modela za procenu troškova.

U okviru istraživanja izvršeno je:

1. prikupljanje podataka,
2. analiza prikupljenih podataka,
3. formiranje relevantne baze podataka o troškovima izgradnje mostova,
4. priprema podataka za potrebe formiranja modela,
5. formiranje modela i
6. komparativna analiza modela.

Analizirana je upotreba sledećih modela:

- Modeli zasnovani na veštačkim neuronskim mrežama,
- Modeli zasnovani na regresionim stablima,
- Modeli zasnovani na metodi potpornih vektora,
- Modeli zasnovani na Gausovim procesima.

Za komparativnu analizu modela korišćeni su statistički pokazatelji:

- Koren srednje kvadratne greške (eng. Root of Mean Squared Error – RMSE),
- Srednja apsolutna greška (eng. Mean Absolute Error – MAE),
- Koeficijent korelacije R (eng. Correlation coefficient),
- Srednja apsolutna procentualna greška (eng. Mean Absolute Percentage Error – MAPE).

1.4 Naučna opravdanost disertacije, očekivani rezultati i praktična primena rezultata

U okviru disertacije je razvijen, analiziran i verifikovan veći broj prediktivnih modela za procenu koštanja izgradnje drumskih armirano–betonskih mostova i modela za procenu utroška ključnih materijala za njihovu izgradnju. Formirana baza podataka o troškovima izgradnje mostova omogućava da se buduće procene troškova vrše sistemski, na naučnoj osnovi, a svako proširivanje baze istorijskih podataka bi se lako moglo ugraditi u model i povećalo bi tačnost modela. Pored baze podataka o troškovima, formirane su i baze podataka vezane za utrošak betona, visokovrednog čelika i rebrastog čelika.

Procena troškova u dosadašnjoj praksi kod nas, a možemo reći čak i u svetu, zasniva se uglavnom na ekspertskoj proceni troškova izgradnje i prethodnom iskustvu eksperta, vrlo često subjektivno, sa značajnim greškama u proceni. Formirani model procene troškova izgradnje armirano–betonskih mostova bio bi analogan ekspertskoj proceni, sa značajnom razlikom u tome što bi prethodno iskustvo bilo generalizovano samim modelom, a proces bio brz, automatizovan, objektivan, značajno precizniji i jeftiniji.

Predmetnim istraživanjem bi se ukazalo na mogućnost primene metoda mašinskog učenja na procenu troškova izgradnje mostova i stvorio bi se novi model i metodološki pristup ranoj fazi procene troškova izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova.

Pored procene koštanja formirani su modeli procene utroška betona, visokovrednog čelika i rebrastog čelika, kao ključnih materijala za izgradnju armirano-betonskih drumskih mostova. Testiranje modela postupkom unakrsne validacije je pokazalo zadovoljavajuće prediktivne karakteristike modela. Formirani modeli omogućuju planiranje u ranim fazama implementacije ovakvih projekata.

Razvijeni modeli bi se mogli primeniti kako od strane investitora, , tako i od strane projektanata, konsultanata, izvođača i drugih zainteresovanih strana. Formirani modeli mogu da se koriste kao koristan alat prilikom donošenja odluka, jer omogućavaju komparaciju različitih varijantnih rešenja kako sa tehničkog gledišta tako i sa ekonomske strane. Sam model bi se mogao koristiti i na inostranom tržištu za koje postoji oformljena baza podataka.

1.5 Struktura disertacije

U prvom poglavlju disertacije data postavka i opis problema koji je razmatran, definisan je cilj i osnovne hipoteze, primenjene naučne metode istraživanja istraživanja, naučna opravdanost disertacije, očekivani rezultati i praktična primena rezultata, struktura disertacije.

U drugom poglavlju je data kratak pregled metoda koje se primenjuju za procenu troškova građenja. Ukazano je na veličinu i razloge odstupanja procene troškova izgradnje mostova i drugih građevinskih objekata. Definisane su tačnosti procene tokom životnog veka projekta. Dat je kratak opis različitih metoda za procenu troškova gradnje koji se primenjuju u praksi.

Treće poglavlje se bavi prethodnom analizom informacija o predmetu istraživanja. Analizirana je primena različitih metoda mašinskog učenja kod sličnih problema, ukazano je na tačnost primenjenih metoda. Pored istraživanja metoda koje se bave sličnom problematikom, razmatrane su i metode koje se metodološki mogu primeniti na predmet disertacije.

U četvrtom poglavlju su definisani tipovi mostova koji su analizirani, objašnjeni su pojedini elementi mostova. U ovom poglavlju je dat kratak opis tehnologije izvođenja rasponske konstrukcije na fiksnoj, prenosnoj i pokretnoj skeli, tehnologije izgradnje montažno-monolitne rasponske konstrukcije, kao i tehnologije izgradnje stubova mostova.

Peto poglavlje se bavi analizom podataka koji su relevantni za predmet istraživanja. Analizira se učešće pojedinih grupa radova u ukupnim troškovima gradnje. Ukazuje se na specifičnosti razmatranih mostova i daje se statistička analiza podataka značajnih za razvoj modela. U završnim delovima poglavlja se objašnjava primenjeni pristup kod formiranja modela, definišu se kriterijumi za ocenu tačnosti modela.

Šesto poglavlje se bavi teorijskim osnovama metoda koje su korišćene za izradu prediktivnih modela. Razmatraju se modeli neuronskih mreža, modeli zasnovani na regresionim stablima, modeli zasnovani na potpornim vektorima, modeli zasnovani na Gausovom procesu, daju se uputstva za primenu ovih metoda i optimizaciju podesivih parametara.

U sedmom poglavlju se razmatra primena modela neuronskih mreža kod procene koštanja mostova. Razmatra se primena neuronskih mreža koje koriste regularizaciju, kao i neuronskih mreža koje koriste rano zaustavljanje na validacionom skupu, kao zaštitu od pretreniranja. Primena ansambala od neuronskih mreža se detaljno analizira i ocenjuje se tačnost modela u odnosu na definisane kriterijume tačnosti.

U osmom poglavlju se razmatra primena modela koji su zasnovani na stablima odlučivanja kod procene troškova izgradnje mostova. Razmatra se primena Bagging, Random Forests i Boosting metode. Kod svake od metoda definišu se prilagodljivi parametri i vrši se njihova optimizacija. Modeli se ocenjuje u odnosu na definisane kriterijume tačnosti.

U devetom poglavlju se analizira primena modela zasnovana na metodi potpornih vektora kod procene troškova izgradnje mostova. Razmatra se primena linearne kernel funkcije, kernel funkcije sa radijalnom bazom, sigmoidne kernel funkcije, analizira se uticaj parametra kernela na tačnost modela, vrši se njihova optimizacija.

U desetom poglavlju se analizira primena modela Gausovog procesa kod procene troškova izgradnje mostova. Razmatra se primena funkcija kovarijanse sa jednim parametrom za sve analizirane ulazne promenljive modela, kao i primena ARD funkcija kovarijanse. Radi se komparativna analiza modela i daje preporuka optimalnog modela.

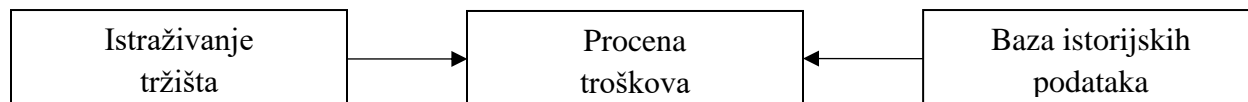
U jedanaestom poglavlju se razmatra utrošak ključnih materijala za izgradnju AB drumskih mostova. Razmatraju se modeli za procenu utroška betona, visokovrednog čelika, rebrastog čelika. Analizira se primena različitih funkcija kovarijanse, određuju se parametri modela, definišu se optimalni modeli za procenu. Daje se analiza relevantnosti pojedinih promenljiva kod modela.

U dvanaestom poglavlju su data zaključna razmatranja, zaključak i pravci dalji istraživanja.

Na samom kraju doktorske disertacije nalaze se Literatura i Prilozi. U priložima se nalazi spisak tabela i slika, predstavljeno je korišćenje softvera u kojima su implementirani modeli, grafički korisnički interfejs (GUI) implementiranih modela.

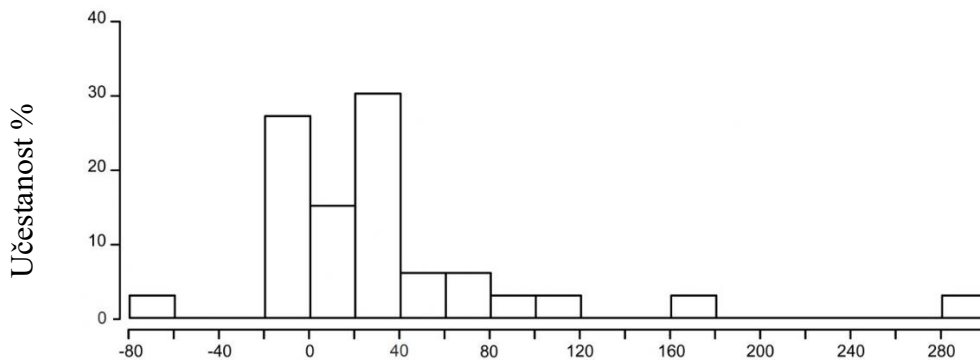
2. PROCENA TROŠKOVA GRAĐENJA

Tehnički deo posla na proceni troškova može se obaviti na više načina, formiranjem i korišćenjem različitih modela troškova. Modeli troškova koji se primenjuju mogu biti bazirani na proizvodu (obračun na osnovu površine ili zapremine objekta, predmer i predračun radova, podela objekta na elemente i slično) i mogu se zasnivati na utrošku resursa za pojedine aktivnosti (mrežno planiranje, statičke metode planiranja i slično). Procena troškova se mora formirati na bazi prethodne analize sličnih projekata i korišćenjem baze istorijskih podataka. Takođe, prilikom procene troškova neophodni su aktuelni podaci sa tržišta na kome se radi projekat [6].



Slika 2.1 Način obezbeđenja informacija neophodnih za procenu troškova [6]

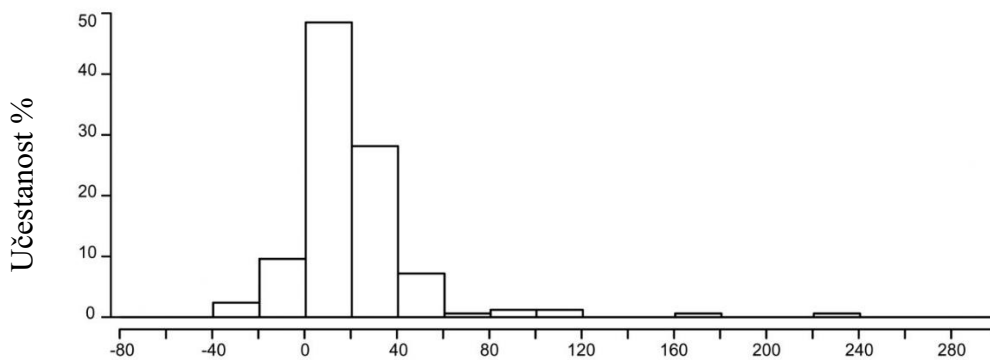
Faza istraživanja tržišta i faza u kojoj formiramo bazu istorijskih podataka imaju zadatak da što detaljnije opišu i simuliraju okolnosti pod kojima će se posao izvoditi u realnosti. Kao glavni nedostatak svih modela za procenu troškova gradnje može se navesti veliko odstupanje procenjenih troškova gradnje od stvarnih, aktuelnih troškova [8]. Pomenuto odstupanje javlja se kod svih vrsta realizovanih projekata saobraćajne infrastrukture.



Slika 2.2 Odstupanje od procenjenih troškova izraženo u % za mostove i tunele [7]

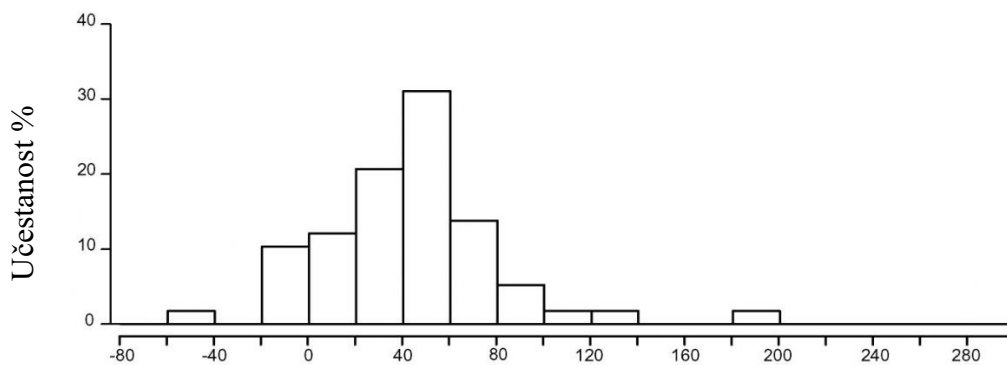
Na Slici 2.2 je prikazano procentualno odstupanje procenjene vrednosti kod projekata drumskih mostova i tunela od stvarne vrednosti na osnovu analize 258 infrastrukturnih projekata ukupne

vrednosti 90 milijardi američkih dolara . Možemo da uočimo da je kod najvećeg broja projekata to odstupanje pozitivno, odnosno da su u najvećem broju projekata troškovi bili veći od procenjenih. Tendencija nedovoljno tačne procene troškova nije karakteristična samo za mostove i tunele, već i za ostale objekte saobraćajne infrastrukture, generalno.



Slika 2.3 Odstupanje od procenjenih troškova izraženo u % za puteve [7]

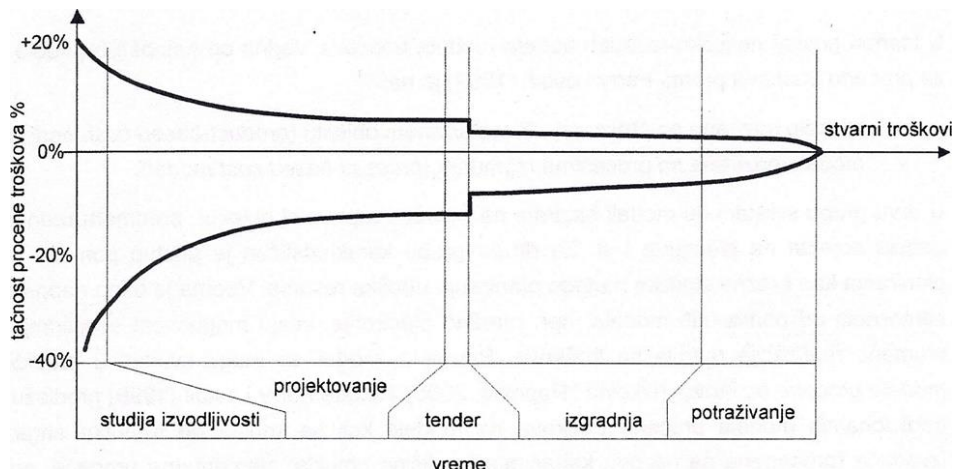
Na Slici 2.3 je prikazano procentualno odstupanje procenjene vrednosti kod saobraćajnica, gde postoji sličan trend koji je uočen kod procene troškova građenja mostova i tunela, a na Slici 2.4 je prikazano procentualno odstupanje troškova kod projekata željeznice.



Slika 2.4 Odstupanje od procenjenih troškova izraženo u % za projekte na željeznici [7]

Analizom odstupanja procenjenih troškova od stvarnih troškova, na prethodnim slikama, može se uočiti da su težišta dijagrama uvek na pozitivnom delu, odnosno da postoji problem podcenjivanja (eng. underestimated) troškova gradnje kod svih vrsta projekata. Projekti koji su analizirani obuhvatali su vremenski period od preko 70 godina, a projekti su realizovani na različitim geografskim područjima. Kao jedini zaključak na koji pomenuta analiza ukazuje jeste na objektivnost procene troškova. Pomenute procene troškova zasnivale su se na znanju

određene grupe eksperata, a analize su zasnovane na isuviše malom broju uzoraka koji bi omogućio sistematičnu statističku analizu. U različitim fazama projekta imamo različitu tačnost procene troškova, pri čemu tačnost procene raste sa povećanjem informacija koje su vezane za projekat.



Slika 2.5 Hronologija tačnosti procene troškova tokom realizacije projekta [6]

Uopšteno kao neke najčešće razloge za povećanje troškova građenja možemo navesti [6], [9]:

- loš kvalitet tenderske dokumentacije i polaznih projektnih rešenja,
- neobučenost radne snage koja izvodi radove,
- propusti podizvođača i dobavljača da svoje radove izvrše u planiranim rokovima,
- iznenadni potezi vlade u zemlji gde se izvode radovi,
- propusti u proučavanju carinskih propisa pri proceni troškova,
- dodatni troškovi transporta zbog loše analize izvorišta materijala,
- nagle promene u ponudi i cenama lokalne radne snage,
- elementarne nepogode,
- dodatni troškovi zbog nedostatka geoloških podloga ili nedovoljno izvršenih istražnih radova itd.

2.1 Modeli za procenu troškova građenja

Najčešće kod procene troškova se koriste sledeći modeli odnosno tehnike [6]:

1. gruba procena na osnovu kapaciteta ili veličine objekta,

2. procena po elementima – funkcionalnim grupama radova,
3. model troškovno značajnih pozicija radova,
4. parametarski (regresioni) model,
5. model zasnovan na predmeru i predračunu radova,
6. model zasnovan na aktivnostima i utrošku resursa,
7. probabilističke simulacije i analiza rizika,
8. ekspertni sistemi za procenu troškova.

2.1.1 Gruba procena na osnovu kapaciteta ili veličine objekta

Kod modela grube procene troškova daje se procena troškova u ukupnom iznosu bez detaljnijeg ulaženja u strukturu. Obično se kao mera radova uzima kapacitet ili površina odnosno zapremina objekta. Kapacitet je direktno povezan sa troškovima gradnje, pri čemu mera kapaciteta može biti npr. broj đaka kod školskih objekata, broj soba u hotelu kod smeštajnih objekata, broj kreveta kod bolničkog stacionara i slično. Poznavanjem troškova po jedinici mere kapaciteta dolazimo do procene troškova. Kao pokazatelj obima radova može se koristiti i površina objekta ili zapremina. U takvom slučaju mora da se usvoji konvencija koja će se primenjivati za određivanje površine (zapremine) i ona se mora konzistentno primenjivati.

Da bi se grubo procenili troškovi na osnovu veličine ili kapaciteta potrebno je imati kvalitetne referentne istorijske troškove za slične već izgrađene objekte. Ovakvo modeliranje troškova koristi se u najranijim fazama procene troškova i po nekim iskustvima tačnost retko prelazi granicu tačnosti od ± 25 -30. Procena ne bi trebalo da zahteva više 8-24 časova angažovanja para iskusnih stručnjaka [6], [10].

2.1.2 Procena po elementima – funkcionalnim grupama radova

Elementi objekta prilikom analize troškova mogu da budu delovi objekta, sistemi u objektu, tehnološki povezane grupe radova ili aktivnosti i slično. Elementi bi trebalo da budu lako uočljivi u tehničkoj dokumentaciji.

Definišu se minimalnih šest elemenata objekta [6]:

1. Fundamenti i etaže u zemlji,
2. Spoljni i unutrašnji zidovi, završno obrađeni,

3. Gornji spratovi sa konstrukcijom i stepeništima, kompletno obrađeno,
4. Krov sa konstrukcijom i završnom obradom,
5. Instalacije u objektu,
6. Aktivnosti na organizaciji gradilišta.

Pored troškova na izgradnji koja se kalkuliše preko definisanih elemenata i njihovih jediničnih cena potrebno je ukalkulisati i indirektno troškove i profit. Nešto detaljniji, ali suštinski isti sistem definisan je od strane engleskog RICS-a (eng. Royal Institute of Chartered Surveyors) koji je razvio javnu bazu podataka o troškovima elemenata BCIS (eng. Building Cost Information Service).

Modeliranje na ovaj način postiže tačnost u proceni troškova od $\pm 20-25\%$. Kod standardnog objekta angažovanje para eksperata je 24-72 sata [10].

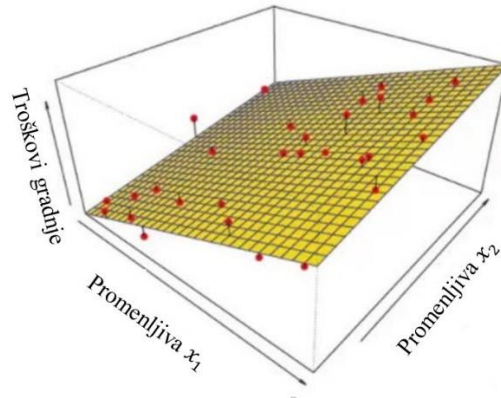
2.1.3 Model troškovno značajnih pozicija radova

Ovaj model zasniva se na pretpostavci da mali broj pozicija iz predmeta i predračuna definiše veliki deo ukupnih troškova. Sama ideja potiče iz XIX veka kada je Vilfredo Pareto, italijanski ekonomista uočio da 20% stanovništva donosi 80% državnog prihoda. Primena ovog modela zahteva određivanje troškovno značajnih pozicija i procenta ukupne cene koji otpada na njih, a implementacija podrazumeva postojanje odgovarajuće baze istorijskih podataka.

Na Građevinskom fakultetu u Beogradu u toku od 1992. do 1994. godine vršena su istraživanja primene ove metode kod procene troškova gradnje cevovoda. Analizom je određeno procentualno učešće pojedinih radova u ukupnim troškovima, određene su troškovno značajne pozicije. Troškovno značajne pozicije nisu izražene direktno u novcu već preko resursa (radne snage, materijala i mehanizacije). Ažuriranjem troškova resursa omogućava se procena troškova u različitim vremenskim presecima. Dobijena je tačnost procene od $\pm 25-35\%$ [6].

2.1.4 Parametarski (regresioni) model

Parametarski model za procenu troškova podrazumeva upotrebu matematičkih jednačina koje povezuju troškove i jednu ili više promenljivih koje utiču na troškove. Do veze između troškova i nezavisnih promenljivih dolazi se statističkim analizama na osnovu baze istorijskih podataka.



Slika 2.6 Primer linearnog parametarskog modela sa dve nezavisne promenljive

Moguća je primena različitih modela linearnih, stepenih, eksponencijalnih, logaritamskih funkcija itd. Nedostatak ove metode je što se usvaja prvo tip funkcije, a zatim se iz podataka određuju njeni parametri, što unosi subjektivnost u proces izrade modela. Najčešće se primenjuje metoda najmanjih kvadrata kod određivanja parametara. Istraživanja primene ovog modela ukazuju da se može postići tačnost od $\pm 15-25\%$ [10].

2.1.5 Model zasnovan na predmeru i predračunu radova

Kod ovog modela za procenu troškova gradnje se definiše obim posla po vrstama radova u formi predmera radova. Osnovna jedinica na kojoj se bazira predmer je pozicija radova. Svaka pozicija predstavlja standardizovani tekstualni opis radova koje treba izvršiti. Za poziciju rada je karakteristična određena jedinica mere. Troškovi treba da budu svedeni na jedinicu mere i treba da uključuju sve direktne troškove kao i indirektno troškove i profit. Analizom troškova po pozicijama i njihovim sumiranjem dobijamo predračun radova. Pošto pojedini indirektni troškovi zavise od trajanja radova poželjno je da se analiziraju i rokovi i time uslovi proračun troškova.

Da bi se model efikasno primenljivao mora postojati dobro razrađena projektna dokumentacija. Smatra se da se tačnost procene kreće u granicama od $\pm 5-8\%$ [10].

2.1.6 Model zasnovan na aktivnostima i utrošku resursa

Model zasnovan na aktivnostima bazira se na tehnici mrežnog planiranja i detaljno razrađenom predmeru i predračunu radova. Ovaj model procene troškova predstavlja nezamenljivo sredstvo za operativno planiranje i kontrolu troškova u fazama uvođenja i naplate posla. Ovim modelom

procene troškova dostiže se tačnost procene od $\pm 5-8\%$ [10]. Procena odštetnih zahteva izvođača teško može biti efikasna bez detaljnog dinamičkog sagledavanja troškova u određenim vremenskim intervalima tokom realizacije projekata.

2.1.7 Probabilističke simulacije i analiza rizika

Možemo reći da su izvestne situacije u građevinarstvu retke. Kod procene troškova, analiza rizika podrazumeva da se svaki važniji uticaj na projekat prouči i odrede najverovatniji, najniži i najviši očekivani troškovi, odnosno da se simulira efekat rizika na troškove gradnje [6].

Jedna od najčešće korišćenih metoda je Monte Karlo simulacija gde se troškovi za pojedine aktivnosti posmatraju probabilistički i imaju vrednosti u određenim granicama. Raspodela troškova za pojedine aktivnosti se usvaja. Na ovaj način se na slučajan način mogu proračunati troškovi svake pozicije koji se zatim sumiraju. Grafickim prikazivanjem sumiranih troškova dolazimo do raspodele ukupnih troškova projekta. Monte Karlo simulacija može da nam da odgovor kolika je verovatnoća određene determinističke procene [6], [10].

2.1.8 Ekspertni sistemi za procenu troškova

Ekspertni sistemi u proceni troškova nastali su sistematizacijom znanja eksperata u oblasti procene troškova gradnje. Ekspertsko znanje predstavlja skup činjenica i iskustvenih pravila koji su reprezentovani u logičnoj, povezanoj i razumljivoj formi. Ekspertni sistem se implementira kroz odgovarajući softver u koji se pomenuta pravila podhranjuju i koji može da interpretira pohranjena pravila. Ekspertni sistemi se najviše koriste u ranim fazama projekta. Jedan od prvih ekspertnih sistema u građevinarstvu, koji se primenjuje kod procene troškova razvijen je od strane engleskog RICS-a devedesetih godina prošlog veka pod nazivom ELSIE. Sistem funkcioniše putem pitanja i sugestija kojima se zahteva da se unesu karakteristike i količine po elementima objekta [6]. Odgovori korisnika memorišu se u vidu promenljivih kojih ima 150. Na bazi generisanih pravila kojih ima oko 2000 u sistemu uspostavlja se veza između troškova gradnje i karakteristika objekta. Korišćenjem ekspertskeg sistema za procenu troškova može se postići tačnost procene od $\pm 5\%$.

3. VEŠTAČKA INTELIGENCIJA I MAŠINSKO UČENJE

Veštačka inteligencija (skraćeno VI) predstavlja oblast računarstva čiji je cilj razvijanje programa koji treba da omoguće računarima da se ponačaju na način koji bi se mogao nazvati inteligentnim. U širem smislu VI označava sposobnost jedna veštačke tvorevine za realizaciju funkcija koje su karakteristične za ljudsko zaključivanje.

VI primenjuje više različitih oblika učenja. Jedan od oblika učenja je učenje na greškama i pokušajima. Jednom pronađeno rešenje problema program može zapamtiti i primeniti u sličnoj situaciji. Pamćenje pojedinih situacija i njima odgovarajućih rešenja poznato je kao mašinsko učenje.

Mašinsko učenje se odnosi na sposobnost kompjuterskog programa da generalizuje na osnovu prethodnog iskustva, pri čemu iskustvo predstavlja skup podataka o razmatranim pojavama koje su predmet učenja, kao i da koristi kreirane generalizacije radi davanja odgovora na pitanja koja se tiču pojava koje softverski sistem pre nije sretao. Za kompjuterski program se kaže da uči iz iskustva E (eng. experience), vezanog za zadatak T (eng. task), i meru performansi P (eng. performance), ukoliko se njegove performanse na zadatku T, merene metrikama P, unapređuju sa iskustvom E.

Mašinsko učenje je počelo da se izučava pedesetih godina prošlog veka kada su analizirane sposobnosti mašina da uče. Prvi programi koji su razvijani su bili adaptivni programi za igranje šaha. Najpoznatiji program iz tog vremena je razvijen od strane Arthur Samuela istraživača firme IBM koji je nastao 1956. godine

Prva praktična primena veštačke neuronske mreže vezuje se za ime Franka Rosenblatta krajem pedesetih godina prošlog veka kada nastaje model perceptrona koji je trebao da imitira način učenja kod čoveka [11]. Rosenblatt je zajedno sa svojim kolegama razvio perceptron sa sposobnošću raspoznavanja uzoraka. Sedamdesetih godina se razvijaju ekspertni sistemi. Intenzivan razvoj algoritama mašinskog učenje vezuje se za osamdesete godine prošlog veka.

Gordon Kass 1980. godine predstavlja CHAID algoritam. CHAID algoritam se koristi za izgradnju stabla odlučivanja kod klasifikacionih problema. Zasnovan je na statističkom hi-kvadrat testu [12]. Ross Quinlan sa Sidnejskog univerziteta 1986. godine predstavlja u svojoj knjizi Machine Learning poznati ID3 algoritam za klasifikaciju korišćenjem stabla odlučivanja [13]. Leo Breiman 1984. godine predstavlja algoritam stabla odlučivanja CART [14]. Algoritam se koristi kako za klasifikacione, tako i za regresione probleme. Konačna forma BP algoritma nastaje 1986. godine za treniranje neuronske mreže koju objavljuju Rumelhart, Hinton i Williams [15].

Devedesete godine promovišu naziv Data Mining (srp. Otkrivanje zakonitosti u podacima) koji objedinjuje sve algoritme i metode iz oblasti mašinskog učenja i statistike koje služe za otkrivanje zakonitosti u podacima. Poznati algoritam Bagging predstavlja Leo Braiman 1996. godine [16]. Sredinom devedesetih godina Vapnik uvodi metodu potpornih vektora – SVM za estimaciju višedimenzionalnih funkcija i povezuje statistiku sa teorijom učenja [17].

Od 2000. godine se razvijaju klasifikatori SVM sa intenzivnom primenom kernel metoda kod treniranja klasifikatora [18], [19]. Ansambl algoritam Random Forests formulisao je Leo Braiman, 2001. godine nadovezivanjem na ideje Boosting i Bagging algoritama [20]. Alex Smola i Bernhard Scholkopf 2004. godine primenjuju SVM algoritam kod problema regresije. Rasmussen i Williams 2006. godine publikuju primenu Gausovih procesa kod klasifikacionih i regresionih problema [21].

3.1 Primena tehnika mašinskog učenja u građevinarstvu

Tehnike mašinskog učenja mogu se primeniti za rešavanje različitih tipova problema kao što su upravljanje proizvodnim procesima, ekonomske i finansijske analize, prepoznavanje govora, izrada prognoznih modela, upravljanje robotima, dijagnostika u medicini, upravljanje projektima itd.

U ovoj disertaciji će biti napravljen pregled literature koji je od značaja za temu i predmet istraživanja disertacije, kao i ona istraživanja koja su metodološki povezana sa temom.

Prvi rad koji se bavi primenom tehnika mašinskog učenja u građevinarstvu je rad Adeli-ja i Yeh-a koji je objavljen 1989. godine [22]. U radu je primenjen model neuronske mreže za projektovanje čeličnih greda. Od tada pa sve do danas napravljen je veliki broj istraživanja koja se tiču primene tehnika mašinskog učenja u građevinarstvu.

Elhag i Boussabaine su 1989. objavili istraživanje o primeni VNM kod procene najniže cene na tenderu za izgradnju školskih objekata [23]. Analizirani su objekti osnovnog i srednjeg obrazovanja. Kao model primenjen je višeslojni perceptron. Ukupno 30 projekata bilo je uključeno u istraživanje. Model je uključivao trinaest uticajnih ulaznih promenljiva: tip projekta, tip ugovora, uslove tržišta, broj učesnika na tenderu, nagib na gradilištu, početne uslove građenja (novi objekat ili rušenje postojećeg), uslove zemljišta, uslove za iskopavanje, prilaz gradilištu, raspoloživi prostor na gradilištu, broj spratova objekta, bruto površinu objekta, trajanje radova. Izlaz iz modela, odnosno zavisna promenljiva je najniža cena ostvarena na tenderu izražena u funtama. Dobijena je tačnost modela od 79,3%. Nakon toga se pristupilo analizi promenljivih i izradi suženog modela koji je uključio samo četiri promenljive i koji je postigao prosečnu tačnost od 82,2%.

Hegazy i Ayed 1998. godine rade na proceni troškova gradnje autoputeva [24]. Bazu podataka sačinjavaju podaci o 18 realizovanih projekata (puteva, mostova, ostalih objekata) realizovanih tokom vremenskog perioda od pet godina u Kanadi. Kao ulazne promenljive analiziraju se sledeće promenljive: tip projekta, obim projekta (rehabilitacija, nov objekat, ostalo), godina izgradnje, godišnje doba, lokacija gradnje, trajanje gradnje, dužina objekta, kapacitet izražen preko broja saobraćajnih traka, pojava vode tokom gradnje, uslovi zemljišta. Zavisna promenljiva je ukupno koštanje projekta. Za određivanje podesivih parametra primenjenih neuronskih mreža tipa višeslojni perceptron primenjuju backpropagation algoritam, simpleks i genetski algoritam. Model treniran backpropagation algoritmom i simpleks algoritmom se pokazao kao najpodesniji za razmatrani problem. Prosečna tačnost modela sa backpropagation algoritmom na trening i test skupu podataka dobijenog modela iznosila je 10,34%.

Yeh 1998. godine koristi model neuronske mreže za rešavanje problema predviđanja kontinualne promenljive [25]. Model neuronske mreže se koristi za predikciju čvrstoće betona visokih

performansi (eng. High Performance Concrete) u zavisnosti od osam promenljivih: količine cementa (kg/m^3), pepela (kg/m^3), šljake visoke peći (kg/m^3), vode (kg/m^3), superplastifikatora (kg/m^3), krupnog agregata (kg/m^3), sitnog agregata (kg/m^3), starosti betona (dan). Baza podataka se sastojala od 727 uzoraka. Tačnost modela je merena koeficijentom korelacije R. Rezultat istraživanja je pokazao zadovoljavajuće rezultate modela. Tačnost modela na trening skupu je imala vrednost koeficijenta korelacije R od 0,917, dok je vrednost koeficijenta korelacije R na test skupu bila 0,814 za serije sa najlošijim pokazateljima tačnosti.

Marcous i drugi 2001. godine rade na istraživanju ključnih materijala za izgradnju mostova preko reke Nil u Egiptu [26]. Skup podataka obuhvata podatke o 22 prethodno-napregnuta armirano-betonska mosta. Za modeliranje utroška materija koristi se model neuronske mreže. Kao ulazne promenljive modela uzimaju se sledeće promenljive: maksimalni raspon (m), tip ugovora, gornji stroj mosta (sandučasti nosač, I nosač), statički sistem, način gradnje mosta. Kao izlazne promenljiva uzete su zapremina betona i težina čelika za prednaprezanje. Analizirani su modeli neuronskih mreža sa različitim brojem neurona u srednjem sloju. Dobijena je tačnost modela, koja je izražena preko veličine greške od 7,5% u pogledu predviđanja količine betona i 11,5% u pogledu predviđanja količine čelika za prednaprezanje.

2001. godine Flyvbjerg i drugi rade na istraživanju primene različitih metoda kod procene koštanja saobraćajnih infrastrukturnih objekata [7]. Analiziraju se objekti železničke infrastrukture, tuneli i mostovi, putevi. Ukupna vrednost analiziranih projekata je preko 90 milijardi američkih dolara. Rezultat je ukazao na značajan procenat greške kod procene troškova građenja svih pomenutih objekata. Prosečna procentualna greška kod procene za mostove i tunele je 33,8%, dok je ukupna prosečna greška za sve analizirane projekte 27,6%.

Attalla i Hegazy 2003. godine istražuju odstupanja troškova u projektima rekonstrukcije korišćenjem neuronskih mreža i statističkih regresionih modela [27]. Bazu podataka sačinjavaju podaci o 50 projekata rekonstrukcije. Analizirana su prekoračenja troškova i troškovi dodatnih radova. Analiziran je uticaj 36 faktora na izlazne vrednosti modela. Modeli su vrednovani korišćenjem koeficijenta korelacije, srednje kvadratne greške, srednje apsolutne greške,

koeficijenta determinacije. Oba modela su pokazala slične performanse, pri čemu je model neuronskih mreža bio nešto osjetljiviji na broj promjenljivih.

2003. godine Mostafa radi na modelu za procenu troškova gradnje mostova i propusta korišćenjem višestruke regresione analize (eng. Multiple Regression Analysis) [28]. Bazu podataka sačinjavaju podaci za 54 mosta i 72 propusta. Rezultujući modeli su dati u vidu jednačina.

Kim i drugi 2004. godine rade na komparativnoj analizi različitih modela za procenu troškova građenja [29]. Analiziraju se modeli višestruke regresione analize, model neuronske mreže i model zaključivanja zavisano od slučaja (eng. Case Based Reasoning - CBR) na skupu od 530 projekata stambenih zgrada. Analiziraju se sledeće ulazne promenljive: godina građenja, bruto površina, broj spratova, broj stambenih jedinica, trajanje radova, vrsta krova, završna obrada, a kao izlazna promenljiva uzeti su stvarni troškovi gradnje objekata. Model neuronskih mreža pokazao je najveću tačnost u pogledu kriterijuma tačnosti MAER (eng. Mean Absolute Error Rate) sa vrednošću od 2,97 .

Istraživanjem relacije između vremena realizacije i koštanja kod 161 građevinskog projekta visokogradnje bavili se Love i drugi 2005. godine [30]. Projekti su realizovani u Australiji. Analiza je obuhvatala vezu između trajanja projekta, tipa projekta, načina realizovanja tendera, bruto površine i broja spratova. Korišćen je metod višestruke regresije. Dobijena je vrednost za prilagođeni koeficijent determinacije R^2 od 0,96 (eng. adjusted R-squared).

Procenom koštanja radova u konceptualnoj fazi korišćenjem SVR (eng. Support Vector Regression) metode bavili su se Cheng i Wu 2005. godine [31]. Analiza je obuhvatala 29 realizovanih građevinskih projekata visokogradnje realizovanih u Tajvanu (Kina) u periodu od 1997. do 2001. godine. Modelirani su troškovi građenja u funkciji 10 promenljivih. Dobijen model je imao grešku predviđanja manju od 10%.

Sodikov je 2005. godine definisao model procene troškova izgradnje autoputeva primenom neuronskih mreža [32]. Analiza i formiranje modela je izvršeno na bazi dva skupa podataka sa različitih lokacija. Prvi skup podataka je formiran na osnovu projekata realizovanih u Poljskoj

(ukupno 315 projekata), a drugi na osnovu projekata realizovanih u Tajlandu (ukupno 123 projekta). Kao ključne parametre (ulaze), za prvi model, koji utiču na troškove realizacije definisao je sledeće: (1) trajanje izvođenja radova [mesec], (2) širina kolovoza [m], (3) širina proširenja [m], (4) uspon/pad terena [m/km], (5) prosečna količina čišćenja terena [m²/km], (6) obim zemljanih radova [m³/km], (7) klasa površine [asfalt ili beton] i (8) osnovni materijal [tucanik ili cementna stabilizacija]. U drugom modelu je značajno smanjen broj ulaznih podataka, ukupno 3, za razliku od prvog modela gde ih je bilo 8. Ulazi za drugi model su: (1) trajanje izvođenja radova [mesec], (2) širina kolovoza [m] i (3) širina proširenja [m]. U oba slučaja baze podataka su podeljene na tri dela: podaci za trening (60%), podaci za validaciju (20%) i podaci za testiranje (20%). Ocenjivanje modela je izvršeno primenom srednje vrednosti relativne greške (eng. Mean Magnitude of Relative Error - MMRE) nakon čega je izvršeno poređenje sa modelom višestruke regresije. U oba slučaja su modeli neuronskih mreža imali veću tačnost, u slučaju podataka iz Poljske je to 25%, a za podatke iz Tajlanda 26%. Sodikov je u zaključnim razmatranjima ukazao da neuronske mreže predstavljaju prikladan alat za rešavanje neizvesnih problema kakva je procena troškova u preliminarnoj fazi.

Procenom koštanja izgradnje zgrada bavili su se Lowe i drugi 2006. godine [33]. U radu je analizirana primena linearnih regresionih modela kod predviđanja koštanja. Istraživanje je obuhvatalo podatke o 286 realizovana projekta u Velikoj Britaniji. Analiziran je uticaj 41 promenljive na koštanje kvadratnog metra objekta. Dobijena je zadovoljavajuća vrednost koeficijenta R^2 i srednja apsolutna procentualna greška MAPE od 19,3%.

Gang-Zhi i drugi 2006. godine razmatraju primenu stabala odlučivanja kod procene tržišne vrednosti kuća u oblasti Singapura [34]. Analizirani su podaci o vrednosti 5589 objekata. Za treniranje modela korišćeno je 75% podataka, a za testiranje modela 25%. Analizirana je upotreba CHAID, CART i C4.5/C5.0 algoritama. Dobijena je vrednost koeficijenta determinacije R^2 za trening skup od 0,887 odnosno 0,885 za test skup podataka.

Garcia i drugi 2008. godine istražuju primenu modela neuronskih mreža i geografskog informacionog sistema kod procene vrednosti nekretnina [35]. Analizirana je upotreba modela višeslojnog perceptrona, neuronskih mreža sa radijalnom funkcijom baze i upotreba Kohonenovih

mapa. Baza podataka je obuhvatala vrednosti koštanja za 591 objekat u gradu Albacete u Španiji. Model višeslojnog perceptrona se pokazao kao najbolji sa vrednošću koeficijenta determinacije R^2 od 0,92 i srednjom relativnom greškom modela od 5,65% (eng. Relative Mean Error).

Primenom neuronskih mreža za izradu prognoznog modela kod vitkih armirano betonskih stubova bave se Knežević i Zejak 2008. godine [36]. Istraživanje obuhvata rezultate eksperimentalnih ispitivanja na 22 modela armirano-betonskih vitkih stubova. Analizirana je primena neuronskih mreža kod izrade prognoznog modela za graničnu silu i maksimalne ugibe u pravcima glavnih centralnih osa inercije u odnosu na šest varirana parametra. Kontrola prognoze je pokazala da je greška prognoze manja od 6%. Istraživanje je pokazalo da neuronska mreža može modelovati nelinearno ponašanje materijala.

Williams i drugi 2009. godine se bave istraživanjem faktora koji su značajni za procenu trajanja građenja [37]. Analiza obuhvata ugovornu dokumentaciju i projektne parametre mostova i puteva. Analizom su obuhvaćena 2225 projekta iz perioda od 2000. do 2007. godine u Virđžiniji u SAD. Kao rezultat israživanja daju se preporuke za usvajanje većeg broja parametara koje treba obuhvatiti kod procene troškova i trajanja sličnih projekata.

Selim 2009. godine radi na modelu za procenu tržišne vrednosti kuća korišćenjem višestruke regresije i neuronskih mreža [38]. Analiza obuhvata podatke o 5741 objektu. Model razmatra 46 uticajne promenljive. U radu se preporučuje upotreba veštačkih neuronskih mreža za procenu vrednosti objekata zbog postojanja nelinearnih veza između promenljivih.

Na modelima za procenu troškova građenja gornjeg stroja mostova rade Fragkakis i drugi 2010. godine [39]. Razmatra se upotreba regresione analize i Bootstrap metode. Baza istraživanja su podaci vezani za realizaciju 68 mostova na autoputu Egnatia u Grčkoj. Analizira se uticaj osnovnih parametara identifikovanih u preliminarnoj fazi na troškove. Procena modela vrši se upotrebom desetostruke unakrsne validacije. Upotrebom pomenutih modela može se postići tačnost iskazana preko vrednosti MAPE do 20%.

U svom radu Cheng i Roy 2010. godine analiziraju upotrebu modela veštačke inteligencije kod problema građevinskog menadžmenta [40]. Analizira se upotreba hibridnih modela koji koriste SVM, fazi logiku i genetske algoritme. Razmatra se model za procenu troškova gradnje stambenih zgrada u konceptualnoj fazi u zavisnosti od 10 definisanih ulaznih parametara objekata. Za treniranje modela koriste se 25 objekata, a procena modela koristi tri test objekta. Rezultat istraživanja preporučuje upotrebu hibridnih modela kod procene troškova građenja.

Upotrebu kompjuterski podržanih modela za procenu troškova gradnje prednapregnutih betonskih drumskih mostova razmatraju Fragkakis i drugi 2010. godine [41]. Razmatraju se mostovi izgrađeni na Egnatia autoputu u Grčkoj. U radu se analizira upotreba regresione analize kod modelovanja. U radu se razmatraju modeli utroška najznačajnijih materijala kod gradnje stubova mostova, zapremine betona i rebrastog čelika. Dobijene su vrednosti koeficijenta determinacije R^2 od 72% kod procene zapremine betona odnosno 85% kod modela utroška čelika.

Upotrebu genetskih algoritama i CBR metode kod preliminarne procene troškova kod gradnje mostova razmatraju Kim i drugi 2010. godine [42]. Troškovi se analiziraju izraženi preko jedinice površine. Za izradu modela koriste se podaci o 216 prethodno-napregnuta mosta izgrađena u periodu od 2000. do 2005. godine u Koreji. Dobijena je tačnost kod primene CBR izražena preko vrednosti MAER (eng. Mean Absolute Error Rate) od 5,989%.

Kontrimas i Verikas 2011. godine analiziraju upotrebu metoda veštačke inteligencije kod modela za masovnu procenu vrednosti nekretnina [43]. U radu se daje komparativna analiza upotrebe regresione analize, SVM metode i neuronske mreže tipa višeslojnog perceptrona. Analiza obuhvata podatke realizovanih transakcija za kuće u okviru perioda od 2005. do 2006. godine u Litvaniji. Veličina baze obuhvata podatke za 100 uzoraka odnosno objekta. Kao kriterijumi za ocenu tačnosti modela koriste se MAPD (eng. Mean Absolute Percentage Difference) i MAE. Upotreba SVM modela kod problema regresije je pokazala zadovoljavajuće performanse sa vrednošću MAPD od 13,62%.

Arafa i Alqedra 2011. godine rade na modelu procene troškova gradnje zgrada u ranim fazama projekta [44]. Kao model za procenu analizira se veštačka neuronska mreža. Baza podataka

obuhvata podatke za 71 projekat. Kao ulazne promenljive se razmatraju: površina prizemlja, površina tipskog sprata, broj spratova, broj stubova, način fundiranja, broj liftova, broj prostorija. Koristi se model višeslojnog perceptrona za izgradnju modela. Dobijena tačnost modela kod ovog istraživanja izražena preko koeficijenta determinacije R^2 je 97%.

Fragkakis i drugi 2011. godine rade na modeliranju utroška čelika i betona za temelje mostova radi sagledavanja troškova u konceptualnoj fazi projekta [45]. U radu se korišćenjem regresione analize definišu modeli koji se vrednuju preko koeficijenta determinacije R^2 čija vrednost prelazi 77% kod analiziranih modela.

Mučenski i drugi 2012. godine rade na modelu neuronske mreže za procenu potrebnih količina betona i armature u višespratnim objektima [46]. U okviru rada je prikazana analiza i formiranje optimalnog modela za predikciju potrebne količine betona i armature na osnovu podataka iz 115 glavnih projekata stambenih zgrada. Kao ulazne promenljive uzete su: ukupna bruto površina, prosečna bruto površina etaže, broj zidova za ukrućenje, podužni raster, poprečni raster i tip međuspratne konstrukcije. Najbolje rezultate je pokazala mreža trenirana BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) algoritmom sa prosečnom greškom (eng. Average Error) od 12,49%.

Lazarevska i drugi 2012. godine rade na prognostičkom modelu za određivanje požarne otpornosti armirano-betonskih stubova [47]. Kao ulazni podaci koriste se: dimenzije stubova, klasa betona, debljina zaštitnog sloja, procenat armiranja, koeficijent opterećenja i tip agregata. Proračun se sprovodi metodom konačnih elemenata u kombinaciji sa vremenskom integracijom korišćenjem programa FIRE. Proračun se za iste podatke modelira i neuronskim mrežama. Vrednosti požarne otpornosti dobijene pomoću programa FIRE i vrednosti dobijene neuronskim mrežama su gotovo iste.

Tsanas i Xifara 2012. godine rade na modelu procene energetske performansi stambenih zgrada korišćenjem tehnika mašinskog učenja [48]. Analiziran je uticaj za osam ulazne promenljive: relativna kompaktnost zgrada, površina fasada, površina zidova, površina krova, prosečna visina zgrada, orijentacija zgrada, obrada fasada, distribucija površina. Kao izlazne promenljive su korišćeni troškovi grejanja i hlađenja. Baza podataka obuhvata je podatke za 768 različitih

stambenih zgrada. Model koji je koristio Random Forests metodu pokazao je najbolje performanse u odnosu na ostale.

Izradom modela za procenu troškova i vremena izgradnje/rekonstrukcije gradskih saobraćajnica primenom veštačke inteligencije bavi se Peško 2013. godine [49]. U radu je analiziran i uticaj ulaznih podataka na izlazne vrednosti modela odnosno njihov uticaj na troškove i vreme. Istraživanje je pokazalo da se primenom modela baziranih na veštačkoj inteligenciji, odnosno modelima neuronskih mreža i modela koji koriste SVM metodu moguća dovoljno tačna procena ukupnih troškova i vremena. Baza podataka je obuhvatala 224 ugovorena i realizovana projekta. U radu su veću preciznost u odnosu na modele neuronskih mreža postigli SVM modeli. Postignuta je tačnost istovremene procene troškova i vremena izražena preko vrednosti MAPE od 18,48%.

Procenom troškova u konceptualnoj fazi kod projekata izgradnje saobraćajnica bavi se Mohamid 2013. godine [50]. Podaci obuhvataju 52 realizovana projekta u Saudijskoj Arabiji. Analizira se upotreba različitih regresionih modela. Kao ulazne promenljive analiziraju se: zapremina zemlje pri iskopu, radovi na posteljici koji su izraženi površinski, završni sloj izražen preko jedinice površine, dužina saobraćajnice, širina saobraćajnice. Dobijene vrednosti kriterijuma MAPE i R^2 koji su korišćeni za ocenu modela su u intervalu od 17,2% do 32,1% i od 0,88 do 0,97, respektivno.

Na izradi predikcionog modela troškova na rehabilitaciji i rekonstrukciji saobraćajnica 2013. godine rade Ćirilović i drugi [51]. Analizirani su podaci za 200 ugovorenih projekata u 14 zemalja Evrope i Azije. Korišćeni su modeli višestruke regresije i veštačke neuronske mreže. Razmatrano je 19 ulaznih promenljivih koje su podeljene u tri grupe i to: parametri povezani sa cenom nafte, parametri specifični za državu odnosno zemlju izvođenja, parametri vezani za projekat. Kao najbolji model pokazao se model neuronskih mreža sa vrednošću koeficijenta R^2 od 0,71 do 0,75.

Holar i drugi 2013. godine rade na istraživanju procene troškova projektovanja vezano sa projektima mostova u Severnoj Karolini u SAD [52]. Analiziraju se troškovi za 461 projekat u periodu od 2001. do 2009. godine. U radu se identifikuju glavni faktori troškova koji su definisani u 16 kategorijskih promenljivih. Za modeliranje se koristi višestruka linearna regresija. Dobijena je tačnost modela izražena preko vrednosti MAPE od 42,7%.

Konceptualnom procenom troškova vezano za saobraćajnice korišćenjem grubih skupova, CBR metode i genetskih algoritama bave se Choi i drugi 2013. godine [53]. Analiziraju se troškovi građenja. Modeli su ocenjeni korišćenjem vrednosti MAPE kao kriterijuma. Kao najbolji model se pokazao CBR model sa vrednošću za MAPE od 16,26%.

Pimenom modela fazi logike, neuronskih mreža i genetskih algoritama kod problema upravljanja kvalitetom betona bavili su se Yuan i drugi 2014. godine [54]. Upotrebljavana su dva hibridna modela i to: višeslojni perceptron neuronska mreža čiji su parametri optimizovani genetskim algoritmom i ANFIS (eng. Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System) model neuronske mreže. Korišćen je eksperimentalni set podataka od 180 uzoraka betona. Modelirana je čvrstoća betona nakon 28 dana. Kao kriterijumi za ocenu tačnosti modela korišćen je koren srednje kvadratne greške RMSE i koeficijent determinacije R^2 . Dobijeni su zadovoljavajući rezultati kod oba modela GA-ANN i ANFIS, čije su vrednosti za RMSE 2,22 odnosno 1,46. Dobijene su vrednosti koeficijenta determinacije R^2 kod modela 0,813 i 0,950, respektivno.

Upotrebu inteligentnih tehnika u procenama troškova gradnje razmatraju Elfaki i drugi 2014. godine [55]. U radu se daju preporuke za definisanja troškovnih faktora i modela za primenu. U radu je dat opšti pregled metoda i uslova za njihovu primenu.

Problemom optimizacije vremena građenja u odnosu na troškove građenja bave se Prašćević i Prašćević 2014. godine [56]. Za rešavanje ovog nelinearnog problema primenjena je metoda optimizacije pomoću čestica rojeva, koju su autori prilagodili za optimizaciju troškova i vremena i razvili odgovarajući računarski program koji je implementiran u programu MATLAB.

Chou i drugi 2015. godine razmatruju upotrebu višestruke regresije, neuronskih mreža i CBR metodu kod procene troškova gradnje [57]. Anizirana je ugovorna cena građenja mostova, a bazu podataka su činili podaci o 275 ugovorena projekta u periodu od 2008. do 2009. godine u Tajvanu. Analiziran je veći broj ulaznih promenljivih. Za procenu predikcionih performansi modela korišćena je desetostruka unakrsna validacija. Modeli su vrednovani u pogledu tačnosti korišćenjem MAPE kriterijuma. Istraživanje je pokazalo da najbolje performanse ima model neuronske mreže sa vrednošću MAPE od 13,09%.

Problemom koštanja gradnje propusta bavili su se Fragkakis i drugi 2015. godine [58]. Baza podataka za izgradnju modela sadržala je podatke o 104 propusta na autoputu Egnatia u Grčkoj. Za svaki propust su registrovani detaljni podaci, koji uključuju potrebne materijale i radove. Kao rezultat istraživanja definisane su regresione jednačine za procenu utroška betona i čelika po dužnom metru propusta. Modeli su testirani korišćenjem desetostruke unakrsne validacije i vrednovani u pogledu kriterijuma MAPE. Rezultat je pokazao tačnost procene u pogledu utrošenog betona i čelika koja iznosi 13,78% i 19,79%, respektivno.

Marineli i drugi 2015. godine rade na modelu za procenu utroška materijala gornjeg stroja kod mostova korišćenjem modela neuronske mreže [59]. Podatke za treniranje modela su sačinjavali podaci 68 izgrađenih mostova u Grčkoj. Korišćen je model neuronske mreže višeslojni perceptron. Modeli su vrednovani preko koeficijenta korelacije R. Dobijene su slične vrednosti kod trening, validacionog i test skupa podataka, čije su vrednosti 0,99937, 0,99288 i 0,99783, respektivno.

Carty i drugi 2015. godine rade na predikcionom modelu za mehaničke karakteristike drvenih kompozita [60]. U radu se modeliraju kontinualne vrednosti izlazne promenljive korišćenjem metoda zasnovanih na regresionim stablima. Baza podataka obuhvata 4307 uzoraka, a ulazne promenljive čini skup od 189 promenljive. Kao kriterijum se koristi vrednost RMSE% koja predstavlja vrednost RMSE koja je izražena kao procenat od srednje vrednosti izlazne promenljive. Analiza različitih modela pokazala je prednost Boosted Trees modela u odnosu na ostale modele pri čemu je vrednost RMSE% u zavisnosti od razmatrane izlazne promenljive koja je modelirana u rasponu od 8,5% do 11,6%.

Primenom modela Boosted Trees kod preliminarne procene troškova građenja zgrada razmatrana je od Shin-a 2015. godine [61]. U radu se daje komparacija modela Boosted Trees sa modelima neuronskih mreža. Podatke za izradu modela sačinjavaju podaci o stvarnim troškovima za 234 realizovana projekta. Kao kriterijum za ocenu tačnosti koristi se MAER. U radu se daje preporuka za upotrebu Boosted Tree modela u odnosu na modele neuronskih mreža.

Upotreba algoritama mašinskog učenja za procenu tržišne vrednosti kuća razmatrana je od Park-a i Bae 2015. godine [62]. Razmatrana je upotreba algoritma C4.5, RIPPER, Naive Bayesian i AdaBoost. Upotreba RIPPER algoritma u ovom radu je pokazala bolje performanse u odnosu na ostale modele. Baza podataka je obuhvatala podatke o 5359 objekta. Kod određivanja performansi modela korišćena je desetostruka unakrsna validacija.

Stvarni troškovi gradnje i utrošak celika i betona kod podvožnjaka, analizirali su Antoniou i ostali 2015. godine [63]. Baza podataka je obuhvatala podatke 28 podvožnjaka u Grčkoj . U radu se ukazuje na prosečne vrednosti utroška materijala i stvarne troškove izgradnje ovakvih objekata koji su izraženi po m².

Upotrebom stabala odlučivanja kod modeliranja problema bezbednosti i zaštite na radu prilikom izvođenja građevinskih objekata bave se Mistikoglu i drugi 2015. godine [64]. U radu se ukazuje na prednost upotrebe stabala odlučivanja kod modeliranja pomenutog problema u odnosu na ostale Data Mining tehnike. Takođe, primenom modela stabala odlučivanja stiče se mogućnost određivanja značaja pojedinih atributa na mogućnost i stepen povreda radnika pri izvođenju radova.

Upotreba modela veštačke inteligencije kod modeliranja čvrstoće HPC (eng. High Performance Concrete) betona analizirana je od Siraj-a i drugih 2016 godine [65]. U radu se ukazuje na mogućnost modeliranja nelinearnih veza između konstituenata i čvrstoće ovog kompleksnog građevinskog materijala korišćenjem neuronskih mreža, FIS modela sa fazi sistemom zaključivanja (eng. Fuzzy Inference System) i ANFIS modela. Modeli sa neuronskim mrežama i ANFIS modeli pokazali su slične vrednosti u pogledu kriterijuma tačnosti MAE, MSE, RMSE i R². Vrednosti pomenutih kriterijuma za model neuronske mreže su neznatno bolje i iznose: 4,03 za MAE; 30,41 za MSE (eng. Mean Squared Error - MSE); 5,51 za RMSE i 0,86 za R².

Antiniou i drugi 2016. godine rade na istraživanju čiji je cilj analitička formulacija troškova gradnje i utroška materijala kod izgradnje nadvožnjaka [3]. U radu se predlaže upotreba linearnih regresionih modela.

Hoang i drugi 2016. godine rade na istraživanju primene različitih modela mašinskog učenja kod predikcije čvrstoće HPC betona korišćenjem modela Gausovog procesa [66]. Skup podataka obuhvata 239 uzoraka. Skup od sedam ulaznih promenljiva je uzet u obzir prilikom formiranja modela. U radu se pored modela Gausovog procesa analizira i upotreba SVM metode kao i primena neuronskih mreža. Primenjena je kvadratna eksponencijalna funkcije kovarijanse. Za ocenu tačnosti modela koriste se RMSE, MAPE i R^2 . U radu se daje preporuka za primenu modela Gausovog procesa koja je nadmašila ostale u pogledu svih definisanih kriterijuma tačnosti modela.

Komparativnom analizom primene ansambla regresionih stabala, kao i modela neuronskih mreža, kod predikcije utroška energije hotela u Španiji odnosno njihove energetske efikasnosti istražena je od Ahmada i drugih 2017. godine [67]. Kao izlazna promenljiva uzeta je potrošnja energije za vreme od jednog sata. Razmatran je veći skup ulaznih promenljiva (temperatura vazduha, temperatura rošenja, relativna vlažnost, brzina vetra, vremenski period u toku dana, dan u nedelji, mesec u godini, broj zauzetih prostorija u objektu itd.). Kao kriterijumi za ocenu tačnosti modela korišćeni su MAPD (eng. Mean Absolute Percent Deviation), MAPE, RMSE i MAD (eng. Mean Absolute Deviation). Istraživanje je dalo preporuku za primenu modela neuronskih mreža kao najtačnijeg.

Primenom Random Forests (RF) modela, Gradient Boosted (GB) modela i Extreme Gradient Boosting (XGB) modela kod problema predikcije kontinualne promenljive u zavisnosti od skupa ulaznih kontinualnih promenljiva bavili su se Torres-Barran i drugi 2017 godine [68]. Primena metoda je ilustrovana na slučaju modeliranja intenziteta vetra i intenziteta sunčevog zračenja. Analizirani su podaci prikupljeni tokom 2011, 2012 i 2013 godine. Tokom svake godine prikupljeno je 2920 trening uzoraka. Kod optimizacije parametara koristi se grid search postupak i postupak unakrsne validacije. Upoređivanjem RF, GB, XGB modela sa modelom neuronske mreže i SVM modelom, istraživanje je ukazalo da za problem predikcije intenziteta vetra najveću tačnost na test skupu dala je primena RF metode, dok je za problem intenziteta sunčevog zračenja na test skupu najtačniji SVR model. Primenom grid search tehnike je kod RF modela optimizovan broj baznih modela ansambla, minimalni broj podataka po listu, broj račvanja, broj promenljivih po kojima vršimo račvanja stabla. Kod SVR metode su optimizovani parametri Gausovog kernela koji je primenjen.

Dimitriou i drugi 2018. godine rade na modelu za procenu utroška ključnih materijala pri građenju drumskih mostova [69]. U radu se razmatra upotreba linearnih regresionih modela i upotreba modela neuronskih mreža. Modelira se utrošak čelika i betona. Koriste se podaci o 68 izgrađenih mosta u Grčkoj. Za ocenu tačnosti modela koristi se vrednost MAPE i R^2 . Kod predikcije utroška betona samo za gornji stroj mosta vrednost MAPE se kreće od 11,48% do 16,12% zavisno od primenjene rasponske konstrukcije, dok se vrednosti za R^2 kreću od 0,979 do 0,995. U pogledu utroška betona i čelika po stubu dobijena vrednost MAPE je 37% , R^2 je 0,962 za beton odnosno MAPE je 31%, R^2 je 0,962 za čelik.

4. GREDNI I OKVIRNI SISTEMI ARMIRANO-BETONSKIH MOSTOVA

Mostovima u širem smislu reči su svi objekti (objekti koji služe za prevođenje puteva i železnice preko vodenih prepreka, viadukti, nadvožnjaci, podvožnjaci) koji služe sigurnom prevođenju puteva preko prirodnih i veštačkih prepreka [1]. U ovoj disertaciji su mostovi tretirani u širem smislu reči.

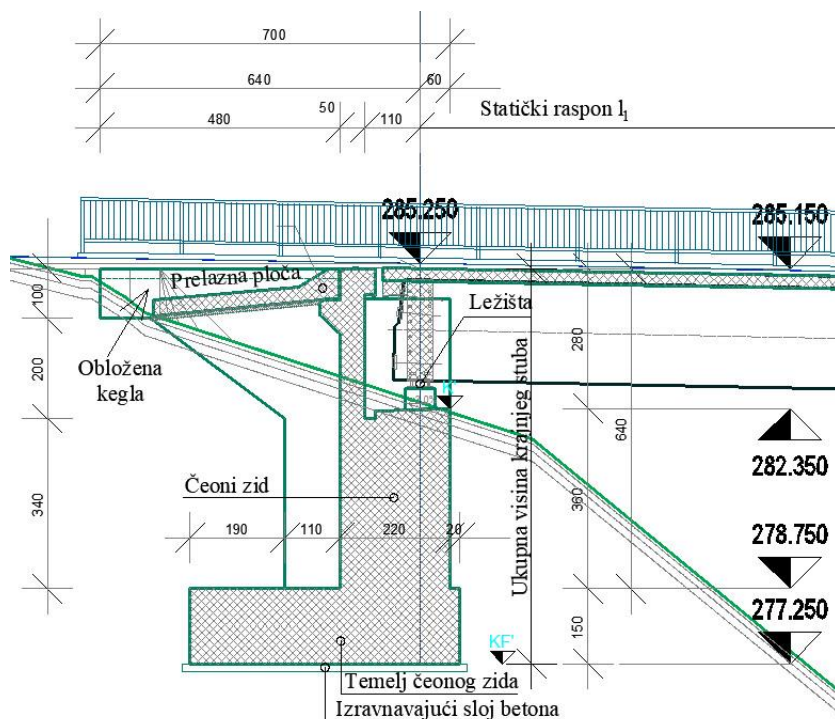
Mostove kao objekte čine tri celine:

- stubovi mostova - potporna konstrukcija,
- rasponske konstrukcije,
- oprema mostova.

Potporna konstrukcija - stubovi mosta su:

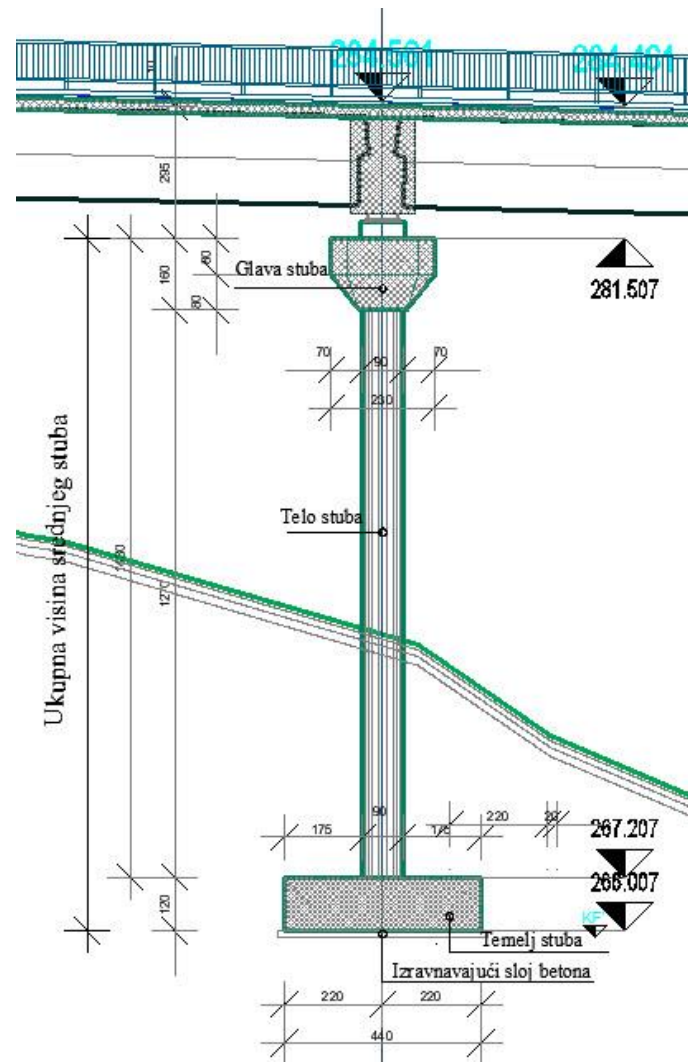
- krajnji - obalni stubovi sa krilnim zidovima,
- srednji - rečni stubovi.

Noseća konstrukcija je zajednički naziv za potpurnu i rasponsku konstrukciju mostova.



Slika 4.1 Krajnji stub sa nazivima pojedinih elemenata

Krajnji stubovi podupiru rasponsku konstrukciju na krajevima objekta i obezbeđuju prelaz sa objekta na telo puta. **Krilni zidovi** su deo konstrukcije krajnjih - obalnih stubova, a služe za bočno ograničavanje tela puta na prelazu sa mosta na telo puta.



Slika 4.2 Srednji stub mosta sa nazivima pojedinih elemenata

Srednji stubovi podupiru rasponsku konstrukciju objekta između krajnjih stubova, ako rasponska konstrukcija ima dva ili više raspona.

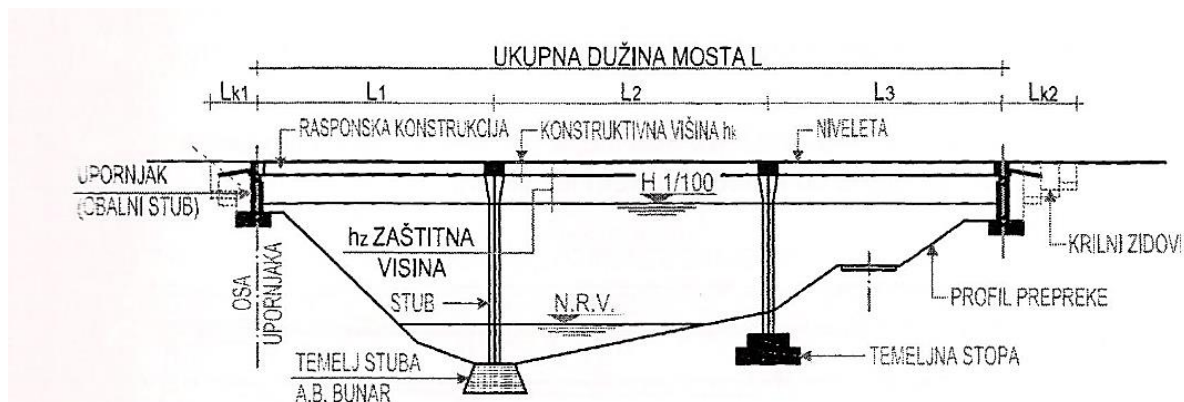
Temeljenje mostova može biti:

- plitko temeljenje do dubine 6,00 m na temeljima samcima ili temeljnim trakama,
- duboko temeljenje na bušenim šipovima i (ili) bunarima na dubinama većim od 6 m.

Ukupna visina krajnjih stubova je visina merena od dna temelja do nivelete objekta.

Ukupna visina srednjih stubova je visina merena od dna temelja do donje ivice rasponske konstrukcije.

Ukupna dužina mosta je odstojanje između osa ležišta krajnjih stubova ili osovina, krajnjih stubova, kod okvirnih konstrukcija bez ležišta.



Slika 4.3 Nazivi na grednoj konstrukciji mosta [1]

Ukupna širina mosta je odstojanje između spoljnih ivica spoljnih venaca.

Ukupna površina mosta je proizvod ukupne dužine i ukupne širine mosta, a služi kao pokazatelj veličine mosta.

Statički rasponi mostova su razmaci između osovina susednih stubova.

Niveleta mosta je identična sa niveletom trase puta na mostu.

Osa puta na mostu je identična sa osom trase puta, stim da nije obavezno identična sa osom rasponske konstrukcije.

Rasponska konstrukcija - RK neposredno preuzima saobraćajno opterećenje i statičke i dinamičke uticaje prenosi na potpurnu konstrukciju mosta. Rasponska konstrukcija može biti od različitih materijala, različitih statičkih sistema i različitih poprečnih preseka.

Opremu mosta čine:

- ležišta i zglobovi,
- dilatazione spojnice na rasponskoj konstrukciji,
- prelazne ploče,
- ograde,
- hidroizolacije kolovozne ploče, hodnika, asfaltni kolovoz,

- odvodnjavanja kolovoza uključujući kanalizirani odvod atmosferskih voda,
- ivični venci, ivičnjaci i hodnici,
- komunalne instalacije,
- oprema za održavanje mostova,
- table za informisanje,
- rasveta mosta.

Gredni sistemi mostova su sistemi kod kojih je rasponska konstrukcija (ploča, nosači, sanduci) odvojena od stubova ležištima.

Okvirni (ramovski) sistemi mostova su sistemi kod kojih je rasponska konstrukcija (ploča, nosači, sanduci) kruto ili zgobovima povezana sa stubovima.

U ovom radu su analizirani gredni i okvirni sistemi mostova.

4.1 Tehnologija izgradnje mostova

Gredni i okvirni mostovi predstavljaju najzastupljeniji tip mostova koji se gradi. Težište ovog poglavlja je na izgradnji monolitnih armirano betonskih i armirano betonskih prednapregnutih mostova.

Izgradnja manjih mostova do 1000 m², kao i mostova kod saobraćajnih petlji gde postoji nešto veća krivina konstrukcije se obično betoniraju na fiksnim skelama koje omogućavaju izvođenje složenije geometrije. Preporuka je korišćenje unificiranih skela i oplata tako da se betoniranje vrši polje po polje, a oplata premešta i višestruko koristi [1].

Korišćenje pokretnih skela se preporučuje kod dužih mostova i vijadukata. U literaturi postoji preporuka da pokretnu skelu koristimo kada je ta dužina preko 500 m i raspon od 25 do 45m [1].

4.1.1 Izgradnja rasponske konstrukcije betonskih mostova na fiksnoj, prenosnoj i pokretnoj skeli

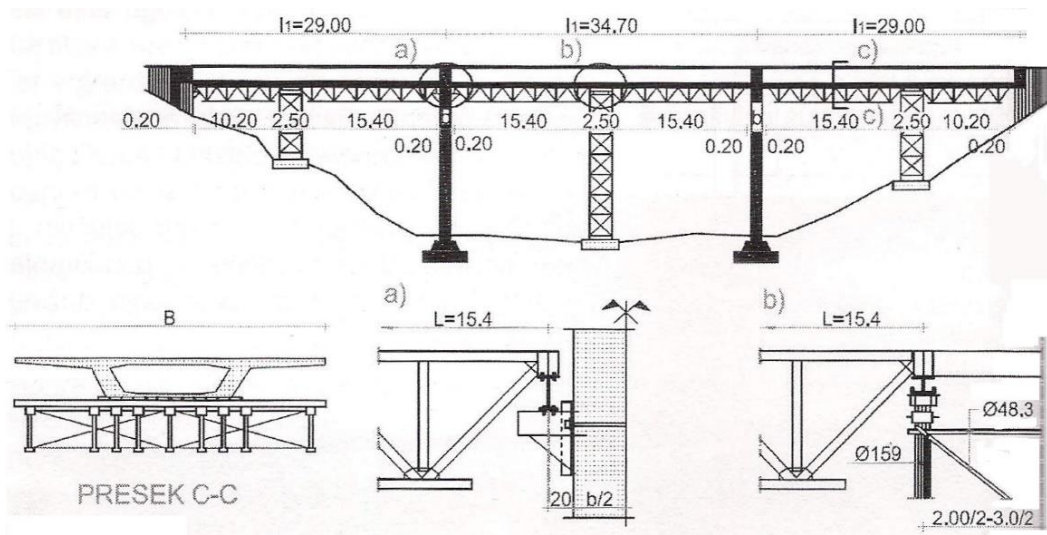
Kod manjih mostova, nadvožnjaka, moguća je primena cevne skele. Čelične cevi ili profili postavljaju se na razmaku 2 m. Radi onemogućavanja izvijanja koriste se dijagonalna ukrućenja.

Vertikalne skele se postavljaju na montažne temelje. Na vrhu skele su podužne i poprečne drvene ili čelične grede.



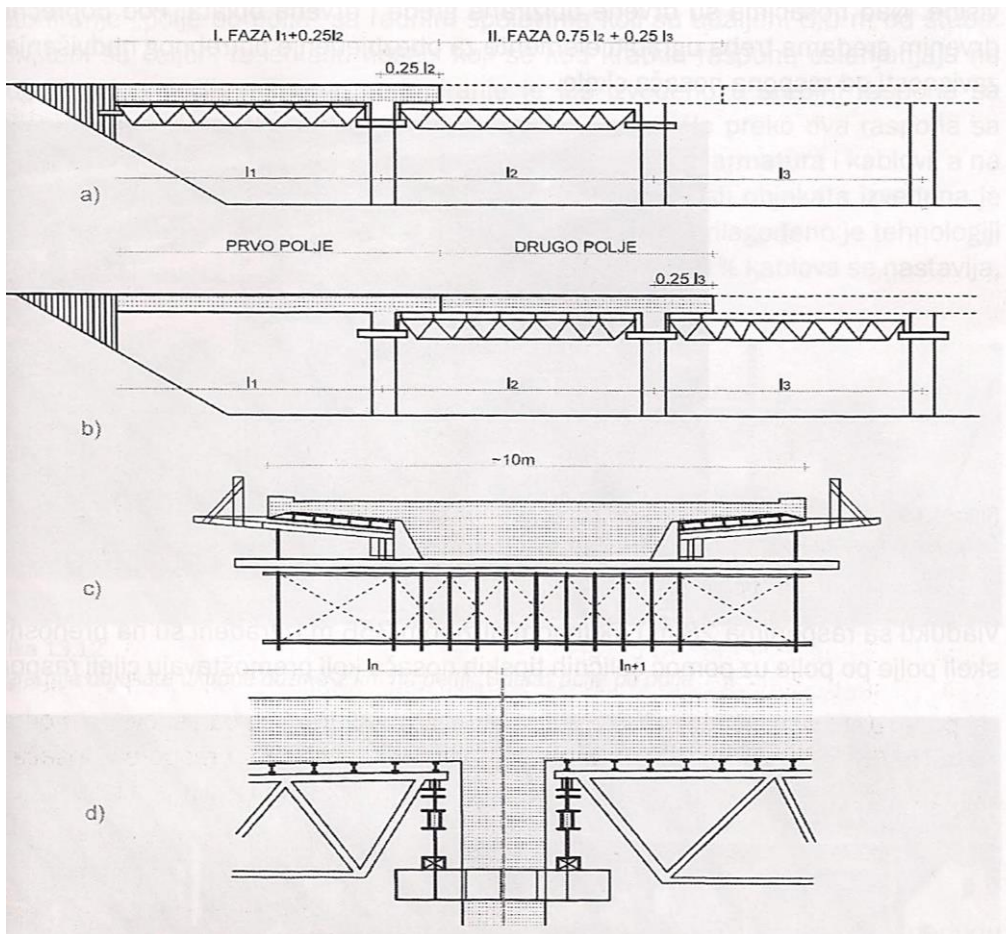
Slika 4.4 Cevna fiksna skela kod betoniranja nadvožnjaka [70]

Za dužine mostova do 100 (150) m preporuka je korišćenje čelične fiksne skele od tipskih nosivih elemenata. Obično se radi o čeličnim rešetkastim nosačima sa osnovnim modulom od 5-10 m. Korišćenjem montažnih veza rešetkasti nosači se nastavljaju. Poprečnim i podužnim spregovima obezbeđujemo prostornu krutost. Rešetkasti nosači se oslanjaju na montažno-demontažne konzole ili tornjeve skele. Na Slici 4.5 je dat primer takve skele.



Slika 4.5 Čelična skela od tipskih nosećih elemenata [1]

Prenosna čelična skela (Slika 4.6) koristi se za raspane 20 do 30 (40) m i ukupne dužine do 500m. Sastoji se od čeličnog rešetkastog nosača dužine 10 do 30 m, koje se oslanjaju na stubove objekta i/ili na privremene oslonce. Broj nosača u poprečnom preseku zavisi od preseka rasponske konstrukcije. Prostorna krutost se obezbeđuje spregovima.



Slika 4.6 Prenosna čelična skela za izgradnju rasponskih konstrukcija polje po polje [1]

- a) Prva faza, betoniranje prvog polja i 0,25 drugog polja
- b) Druga faza, betoniranje drugog polja i 0,25 trećeg polja
- c) Presek rasponske konstrukcije i skele
- d) Detalji oslanjanja tipskih čeličnih rešetki na stubove

U slučaju raspona od 35 do 50 m i kod dužina mostova većih od 500 m preporučuje se upotreba pokretnih čeličnih skela. Pokretna skela (Slika 4.7) se sastoji obično od rešetkastih nosača sa dvostrukom dužinom polja i sistema za sidrenje. U okviru pokretne skele u jednom polju postoje

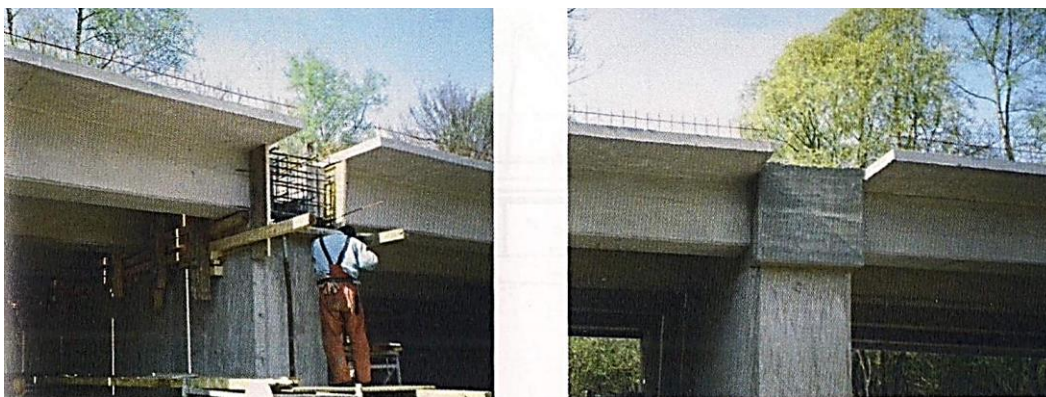
nosači koji su zglobno povezani sa čeličnom oplatom koje otvaramo kada pomeramo skelu, a zatvaramo prilikom betoniranja.



Slika 4.7 Pokretna čelična skela

4.1.2 Izgradnja montažno-monolitne (spregnute) rasponske konstrukcije

Značajan broj mostova analiziran u radu ima montažne glavne nosače od prednapregnutog betona. Većina realizovanih mostova koristi nosače sa T presekom koji omogućavaju betoniranje kolovozne ploče i poprečnih nosača bez skele. Sprezanjem montažnog dela i monolitne ploče ostvaruje se jedinstven presek. Postoji više načina za izgradnju ovih mostova u zavisnosti od karakteristika mosta. Nosači manjih raspona se mogu montirati autodizalicama. Nakon montiranja montažnih (Slika 4.8) prednapregnutih nosača betoniraju se poprečni nosači, nakon čega se armira i betonira kolovozna ploča.



Slika 4.8 Armiranje i betoniranje poprečnih nosača za uspostavljanje kontinuiteta [1]

U slučajevima većih raspona moguća je i primena lansirnih rešetki (Slika 4.9) kod montaže prednapregnutih nosača. Kod nadvožnjaka, vijadukata preko elektrificiranih pruga, autoputeva preporučuje se korišćenje montažno-monolitizirane gradnje za ceo objekat ili deo objekta.



Slika 4.9 Primena montažne lansirne rešetke kod monaže AB prednapregnutog nosača [1]

4.1.3 Izgradnja stubova mostova

Krajnji stubovi mostova betoniraju se na licu mesta. Oplata mora da poseduje odgovarajuću krutost i da obezbedi nedeformabilnost i stabilnost dok beton ne dobije odgovarajuću čvrstoću.



Slika 4.10 Betoniranje stubova konstantnog preseka sa prenosnom skelom u segmentima 3,0 m

Betoniranje srednjih stubova može se izvesti na fiksnoj, prenosnoj i kliznoj oplati. Betoniranje se vrši u kampadama od 3 do 4 m, a može se koristiti prenosna oplata koja se prenosi mehaničkim putem ili klizna oplata gde se pomeranje vrši pomoću hidrauličkih presa.

5. PREDMET ISTRAŽIVANJA: MODEL ZA PROGNOZU I PROCENU TROŠKOVA IZGRADNJE AB DRUMSKIH MOSTOVA

Koridor X je jedan od najvažnijih panevropskih saobraćajnih koridora koji prolazi kroz Srbiju i povezuje Austriju, Mađarsku, Sloveniju, Hrvatsku, Srbiju, Bugarsku, Makedoniju i Grčku. Ovim projektom transportni sistem Republike Srbije postaje kompatibilan sa transportnim sistemom Evropske Unije.



Slika 5.1 Trase koridora X i XI u Srbiji

Glavni krak Koridora X je Salzburg (Austrija) - Ljubljana (Slovenija) - Zagreb (Hrvatska) - Beograd - Niš - Skoplje (Makedonija) - Veles (Makedonija) - Solun (Grčka).

U okviru disertacije su analizirani mostovi koji se nalaze na istočnom i južnom kraku koridora X u Srbiji. Analiza je obuhvatila projektnu i tendersku dokumentaciju za ukupno 181 ugovoren projekat drumskog armirano-betonskog mosta. Prikupljanje podataka i formiranje baze podataka je obuhvatalo podatke o ugovorenim troškovima gradnje, projektnim karakteristikama mostova i utrošku ključnih materijala za gradnju. Navedeni podaci služe kao baza za izgradnju modela za procenu koštanja mostova, kao i za izgradnju modela za procenu utroška betona, visokovrednog i rebrastog čelika. Baze podataka za izgradnju modela za procenu utroška visokovrednog čelika obuhvatila je podatke za 77 mosta kod kojih je primenjeno prednaprezanje.

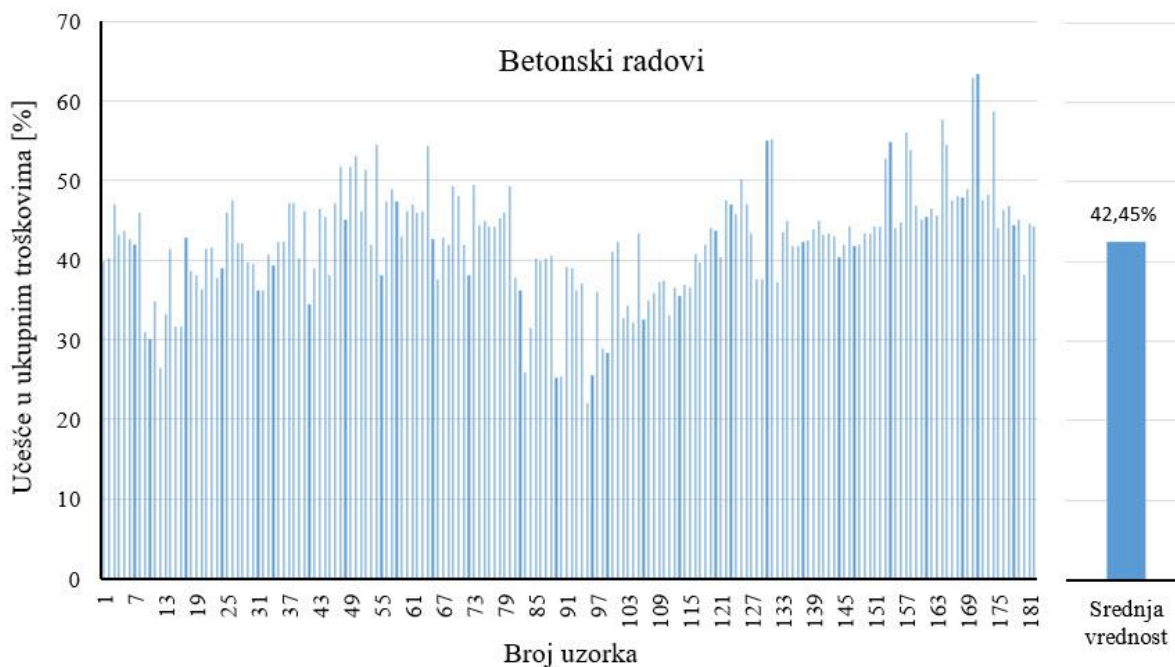
5.1 Prikaz i statistička analiza podataka

Kod primene različitih algoritama mašinskog učenja u cilju definisanja modela za predikciju važno je da se znaju statistički pokazatelji podataka koje smo koristili. Modeli koji se formiraju vrše generalizaciju u okviru podataka na kojima je izvršeno obučavanje modela.

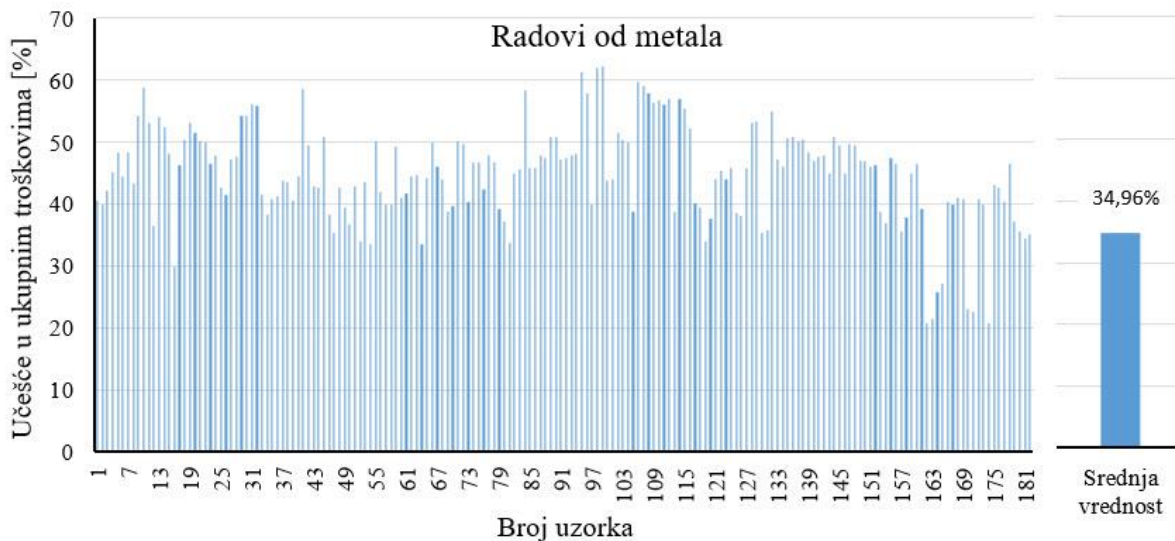
Kako se u istraživanju poseduju podaci za značajan broj mostova u daljoj fazi se pristupilo određivanju troškovno značajnih radova. Određivanjem troškovno značajnih grupa radova može se pojednostaviti postupak procene troškova izgradnje. Analizom predmera i predračuna za ukupno 181 most za koji je postojala ugovorna dokumentacija, došlo se do procentualnog učešća pojedinih radova u odnosu na ukupne troškove. Na osnovu pomenutog uzorka definisane su i srednje procentualne vrednosti pojedinih radova u ukupnim troškovima gradnje. Ova analiza je ukazala da su troškovno najznačajni betonski radovi i radovi od metala i da ove dve grupe radova čine prosečno 77,41% od ukupnih troškova izgradnje. Ostale grupe radova imaju znatno manje učešće u ukupnim troškovima:

Kako betonski radovi i radovi od metala čine troškovno najznačajnije radove, kao ulazne promenljive modela usvojene su promenljive koje su u direktnoj vezi sa količinom betonskih radova i količinom radova od metala. U tom pogledu razmatrane su promenljive: ukupna dužina

mosta, širina mosta, prosečna visina stubova. Kako za istu vrednost ukupne dužine nije svejedno da li imamo veći broj manjih raspona ili manji broj većih raspona bilo je neophodno da se u skup ulaznih promenljiva uzme i srednja vrednost raspona. Količina rebrastog čelika kao i količina visokovrednog čelika prilikom formiranja modela su implicitno uzete u obzir preko prethodno navedenih promenljiva koje reprezentuju dužinu mosta, širinu mosta i prosečnu visinu stubova.



Slika 5.2 Procentualno učešće betonskih radova u ukupnim troškovima izgradnje



Slika 5.3 Procentualno učešće radova od metala u ukupnim troškovima izgradnje

Sagledavanje troškova vezanih za troškove skele neophodne za gradnju mosta, kao i oplate, nije bilo moguće analizom predmera i predračuna gde su ovi troškovi već uzeti u obzir prilikom formiranja cene po odgovarajućoj jedinici mere, a nisu eksplicitno navedeni. Iz tog razloga je uvedena promenljiva koja uzima u obzir tehnologiju koja se primenjuje kod gradnje mostova.

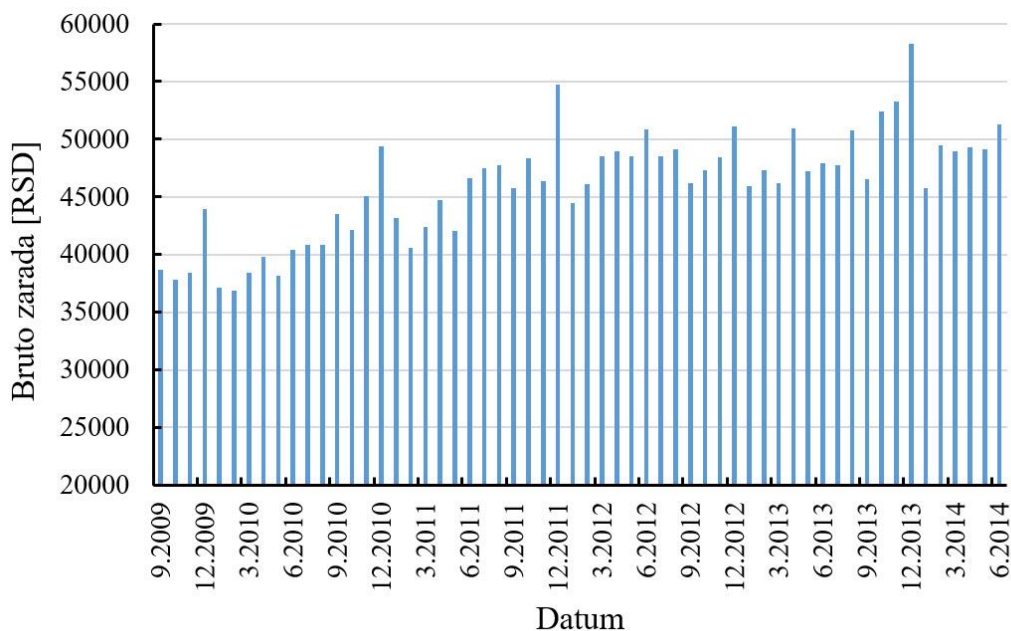
Kod montažno-monolitnih mostova vrši se montaža gotovih nosača bez formiranja skele korišćenjem autodizalica ili toranjskih dizalica. Kod mostova kod kojih se rasponska konstrukcija lije u oplati potrebna je skela za izvođenje radova. Troškovi vezani za oplate i skele prema istraživanjima mogu da iznose i do 20% od ukupnih troškova gradnje [71]. Kako bi se razmotrio potencijalni uticaj ovih troškova u ovom radu je uvedena promenljiva: način gradnje. Promenljivoj način gradnje je dodeljena vrednost 1 kod montažno monolitnih mostova, odnosno kod mostova koji se liju u oplati promenljivoj je dodeljena vrednost 0.

Uticaj troškova koji su vezani za fundiranje mostova uzet je obzir uvođenjem promenljive: način fundiranja. Troškovi fundiranja značajno zavise od vrste fundiranja. Prilikom formiranja modela uslovi fundiranja kod mostova su klasifikovani u dve kategorije: 1) mostove gde imamo primenjeno duboko fundiranje, 2) mostove gde je primenjeno plitko fundiranje. Kod mostova gde je primenjeno duboko fundiranje promenljivoj način fundiranja je dodeljena vrednost 1, odnosno 0 u slučajevima plitkog fundiranja.

Projekti mostova su ugovoreni u periodu od 25.09.2009. godine do 12.06.2014. godine. Za svaki od navedenih ugovora definisan je bazni datum kao i postupak revalorizacije. U ugovornoj dokumentaciji primenjena je indeksna metoda za revalorizaciju cene i definisani su indeksi koji se primenjuju u formuli, kao i izvor indeksa. Ugovorna dokumentacija kod analiziranih projekata prilikom proračunavanja revalorizacije uzima u obzir sledeće :

- Prosečne bruto zarade u građevinarstvu,
- Indeks cene agregata,
- Indeks cene cementa,
- Indeks cene čelika,
- Indeks cene bitumena,
- Indeks cene dizel goriva.

U cilju modeliranja ugovorene cene mostova tehnikama mašinskog učenja u disertaciji je primenjen nešto drugačiji pristup gde su pojedini indeksi razmatrani kao ulazne promenljive modela. Bilo je neophodno da se svi faktori koji utiču na ugovorenu cenu izgradnje svedu na isti vremenski trenutak. U tom pogledu razmatrane su pojedine uticajne komponente troškova gradnje.

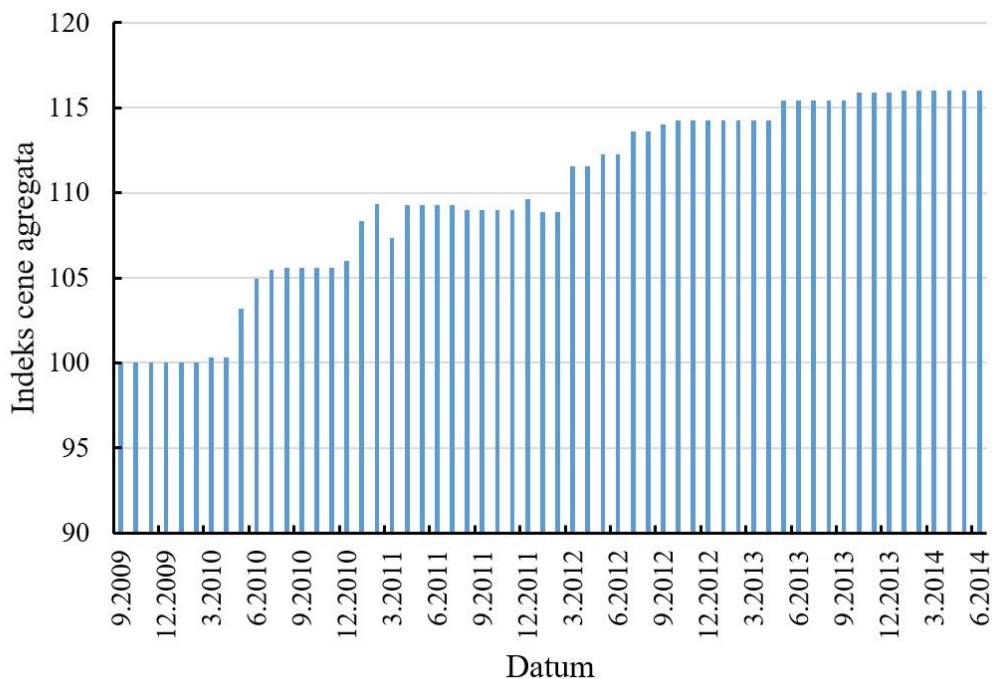


Slika 5.4 Kretanje prosečne bruto zarade u građevinarstvu [72]

U vremenskom rasponu na koji se odnosi ugovorna dokumentacija, a to je period od septembra 2009. godine do juna 2014. godine dolazi do značajnih promena pojedinih komponenti koji utiču na ukupne troškove. Na Slici 5.4 se može uočiti rast prosečne bruto zarade u razmatranom periodu. Prosečna bruto zarada u mesecu septembru je iznosila 38.702,00 dinara, dok je u mesecu junu 2014. godine prosečna bruto zarada iznosila 51.248,00 dinara. Kako bi se prilikom modeliranja cene izgradnje dobio što tačniji model, ova promena u vrednosti bruto zarade, odnosno njeno povećanje od približno 30% moralo je da se uzme u obzir.

Kako vrednost betonskih radova i radova od metala čini prosečno 80% od ugovorene cene razmatrani su samo indeksi vezani za te radove. Betonski radovi predstavljaju troškovno najznačajniju grupu radova čije je prosečno procentualno učešće u ukupnim troškovima izgradnje 42,45%. U cilju sagledavanja troškova betonskih radova analizirana je cena agregata i cementa u

periodu koji obuhvata ugovorna dokumentacija. Cene agregata i cementa su analizirane na osnovu vrednosti statističkih indeksa za agregat i cement. Upoređivanjem indeksa cene agregata i cementa došlo se do zaključka da su ovi indeksi korelisani, pa je prilikom formiranja modela kao ulazna promenljiva uzet indeks cene agregata, pri čemu ova promenljiva sadrži implicitno i informacije o ceni cementa u razmatranom periodu. Razlog uzimanja samo jednog indeksa u vidu ulazne promenljive je što prilikom izrade prediktivnih modela uvođenje neinformativnih promenljiva odnosno prediktora može da dovede do degradacije prediktivnih svojstava modela .

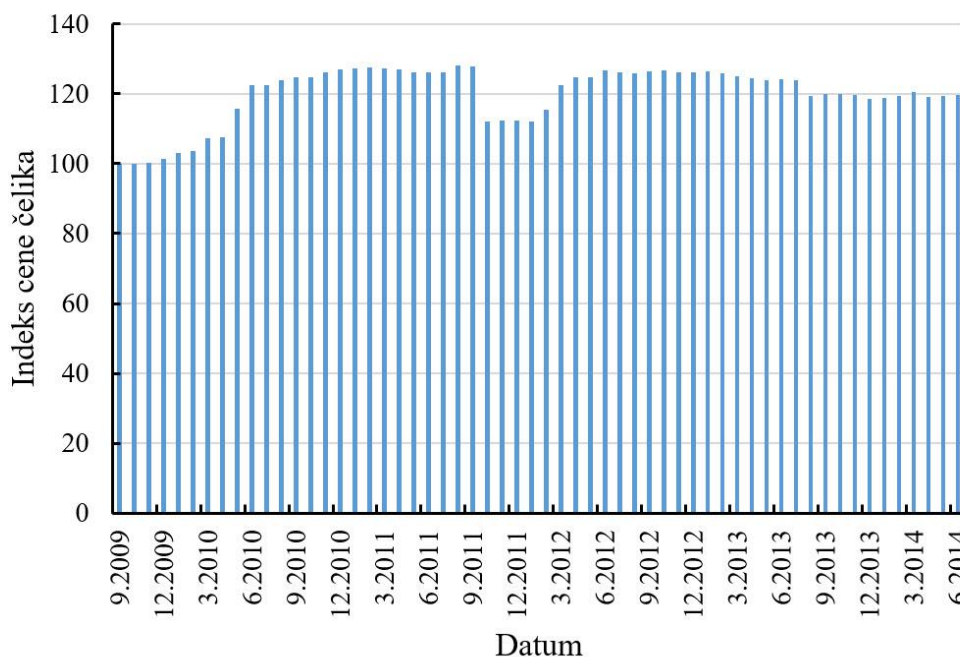


Slika 5.5 Bazni indeks cene agregata [72]

Vrednosti lančanih indeksa cene agregata publikovani od Republičkog zavoda za statistiku su pretvoreni u bazne indekse čija je baza septembar 2009. godine. Na ovaj način se troškovi vezani za betonske radove transformišu na isti vremenski presek i mogu se upoređivati. Analizom indeksa cene agregata došlo se do zaključka da je cena agregata juna 2014. godine u odnosu na septembar 2009. godine bila veća za 15,98%.

Radovi od metala predstavljaju drugu troškovno najznačajniju grupu radova čije prosečno učešće u ukupnim troškovima izgradnje na bazi analizirane ugovorne dokumentacije iznosi 34,96%.

Indeks cene čelika sagledavan je preko indeksa cene za bazične metale, što je na isti način definisano i u ugovornoj dokumentaciji projekata, pri čemu se uzimaju vrednosti publikovane od strane Republičkog zavoda za statistiku [72]. Lančane vrednosti indeksa koje su mesečno publikovane su transformisane u bazni indeks čija je baza septembar 2009. godine. Ovaj bazni indeks je tretiran kao ulazna promenljiva prilikom formiranja modela. Vrednosti cene čelika u septembru 2011.godine dostiže maksimum za razmatrani period pri čemu dostiže povećanje od 27,82% u odnosu na septembar 2009. godine. Vrednost cene čelika u junu 2014. godine je 19,70% veća od cene čelika u septembru 2009.godine. Bazni indeks cene čelika razmatran tretiran je kao ulazna promenljiva prilikom formiranja modela.



Slika 5.6 Bazni indeks cene čelika [72]

U prvoj fazi istraživanja analizirani su modeli za procenu koštanja izgradnje mosta pri čemu su svi troškovi izraženi po m² površine mosta. Analizirana je zavisnost troškova gradnje koja predstavlja zavisnu promenljivu od sledećih promenljiva:

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|
| x_1 – Srednja vrednost raspona, | x_4 – Način gradnje, | x_7 – Bruto zarada, |
| x_2 – Ukupna dužina mosta, | x_5 – Prosečna visina stubova, | x_8 – Indeks cene agregata, |
| x_3 – Širina mosta, | x_6 – Način fundiranja, | x_9 – Indeks cene čelika. |

Prilikom formiranja modela zasnovanih na tehnikama mašinskog učenja primenjen je postupak nadgledanog učenja tako da formirani modeli vrše predviđanja unutar vrednosti koje su upoznali tokom učenja, pa je iz tog razloga važno ukazati na granice pojedinih promenljiva. Vrednosti srednjih, maksimalnih i minimalnih vrednosti numeričkih promenljiva koje su korišćene za formiranje modela su prikazane u Tabeli 5.1 Vrednosti za promenljive koje imaju vrednosti 0 ili 1 i njihove srednje vrednosti nisu prikazane.

Tabela 5.1 Srednje, minimalne i maksimalne vrednosti promenljiva kod modela za procenu troškova izgradnje mostova

Promenljiva	Srednja vrednost	Minimalna vrednost	Maksimalna vrednost
Srednja vrednost raspona [m]	21,25	6,52	49,00
Ukupna dužina mosta [m]	84,24	6,52	628,74
Širina mosta [m]	13,43	7,90	19,91
Prosečna visina stubova [m]	9,60	3,28	35,01
Koštanje izgradnje [€/m ²]	593,65	310,83	1335,39

U ovoj disertaciji su osim modela za procenu koštanja mosta razmatrani i modeli za procenu ukupne količine betona za izgradnju mosta, utroška rebrastog čelika i utroška visokovrednog čelika. Osnovu za izgradnju modela činili su podaci iz projektne dokumentacije.

Kod modela za procenu utroška armiranog betona analizirana je ukupna zapremina armiranog betona različitih marki. Prilikom izrade modela za procenu utroška čelika analizirana je potrebna količina rebrastog čelika RA 400/500-2 , dok je kod modela za procenu utroška visokovrednog čelika razmatran utrošak uži sistema SPB SUPER [73]. Prilikom formiranja modela za procenu utroška rebrastog čelika izlazna promenljiva je izražena u kg/m³ armiranog betona, dok je kod modela za procenu utroška visokovrednog čelika izlazna promenljiva izražena u kg/m² površine mosta. Geometrijske i mehaničke karakteristike uži dati su u Tabeli 5.2.

Tabela 5.2 Geometrijske i mehaničke karakteristike užadi [73]

Skraćeni naziv užadi	Klasa	Nazivne vrednosti			Garantovane vrednosti			Max.re-laksacija pri sili 0,70 Fpk posle 1000h %
		Prečnik Ø mm	Zatezna čvrstoća fpk N/mm ²	Modul Elastičnosti E kN/mm ²	Površina preseka Apk mm ²	Karakteristična prekidna sila Fpk kN	Karakteristična sila pri izduženju 0,1% Fp0,1k kN	
Y1770S7	A	15,2	1770	195	140	248	213	2,5
Y1860S7	B	15,2	1860		140	260	224	
Y1770S7	A	16,0	1770		150	265	228	
Y1860S7	B	16,0	1860		150	279	240	

5.2 Sistemski pristup kod formiranja modela za prognozu i procenu

Cilj definisanja postupka kod formiranja modela je da se ceo postupak formiranja modela podeli u određeni broj koraka, tako da se kod svakog formiranja modela primeni ista procedura i svi modeli formiraju u jednakim uslovima.

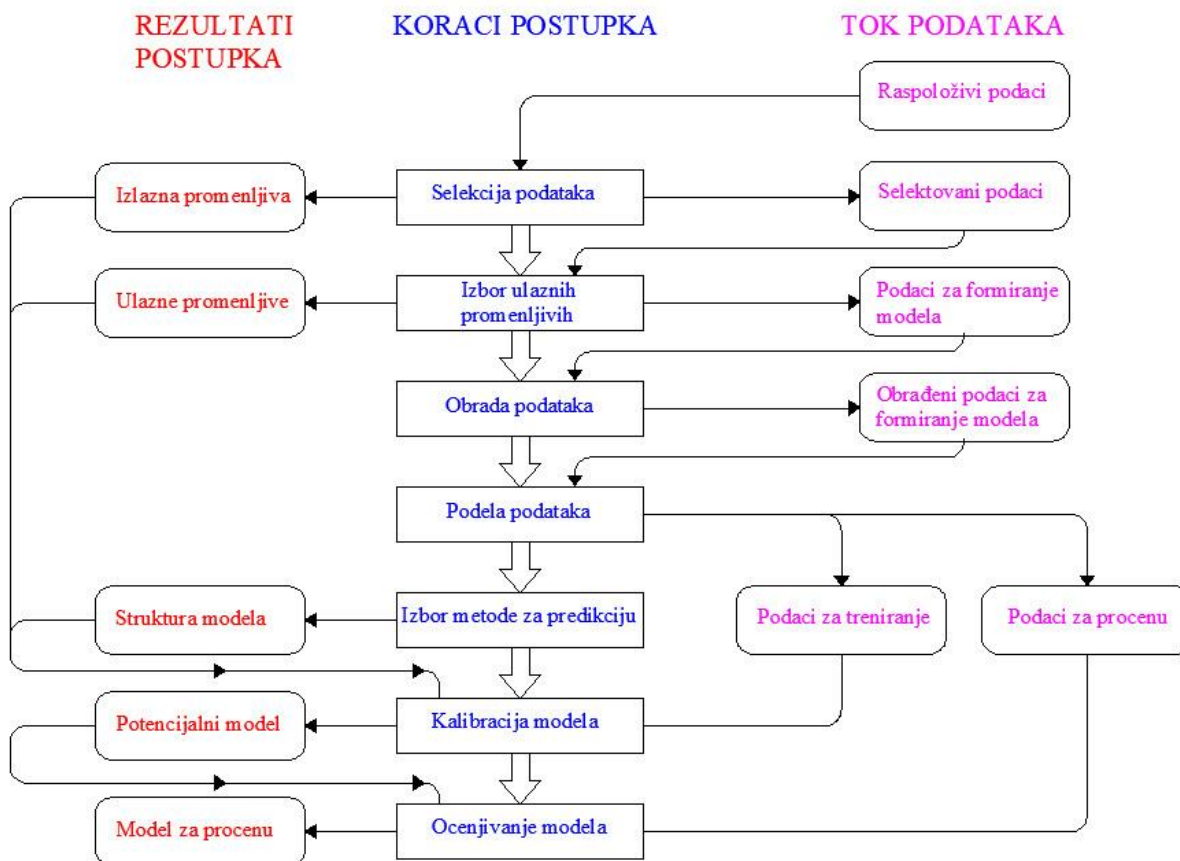
Skup raspoloživih podataka sastoji se od diskretnih vrednosti pojedinih promenljiva, koje smo dobili razmatranjem projektne i ugovorne dokumentacije. Tako definisan skup za jedan analizirani most predstavlja jedan trening uzorak kod formiranja modela.

U prvom koraku kod formiranja modela se definiše cilj modela, odnosno izlazna promenljiva modela, koja predstavlja funkciju ostalih promenljiva. Uopšteno, modeli mogu da imaju i više izlaznih promenljiva. U ovoj disertaciji analizirani su različiti modeli sa jednom izlaznom promenljivom.

U drugom koraku je neophodno da se definiše skup ulaznih promenljivih relevantan za izlaznu promenljivu koju želimo modelirati. Uključivanje prevelikog broja promenljiva je nepoželjno, jer opterećuje model i vrlo često može da dovede do pretreniranja modela. Radi komparacije modela su sve ulazne promenljive svedene na isti vremenski trenutak.

Kako se vrednosti pojedinih promenljiva nalaze unutar različitih raspona u trećem koraku je izvršeno skaliranje promenljivih. Skaliranje je neophodno iz razloga da bi se obezbedila

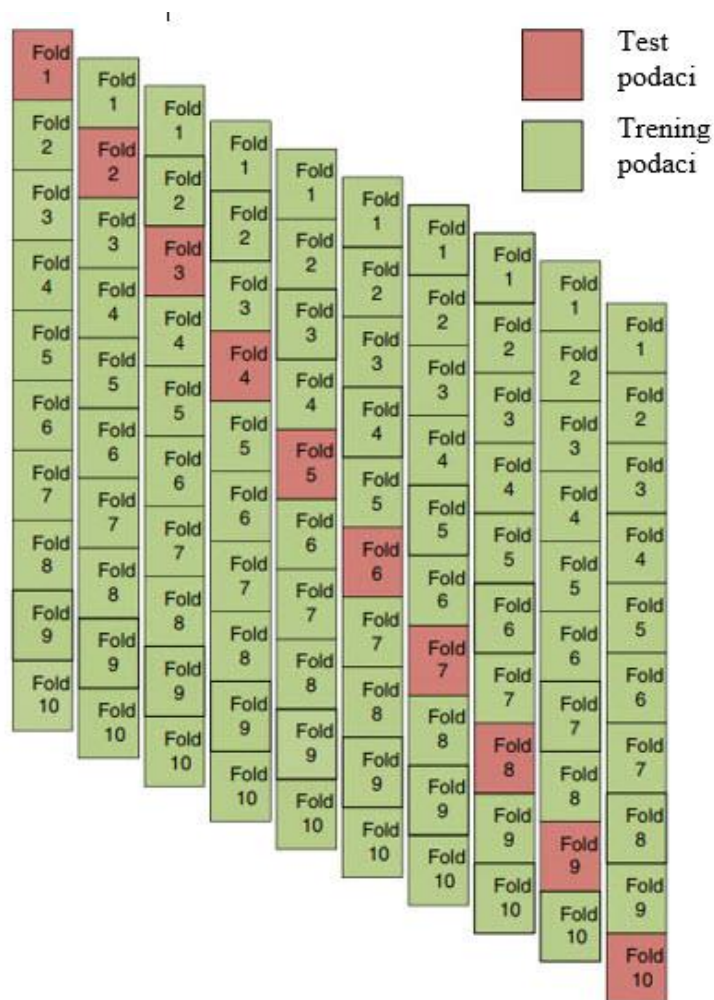
ravnopravnost analiziranih promenljiva, jer apsolutni iznosi često nisu ekvivalentni stvarnom uticaju razmatrane promenljive na izlaznu promenljivu modela. U radu je primenjena linearna transformacija ulaznih promenljiva, pri čemu je postupak primenjen i na izlaznu promenljivu.



Slika 5.7 Postupak formiranja modela za prognozu. Adaptirano [74]

Nakon definisanja ulaznih i izlaznih podataka potrebno je da se podaci u četvrtom koraku podele na skup podataka za treniranje modela i skup podataka za procenu modela. Neophodno je da skup podataka za treniranje sadrži reprezentativne podatke za problem koji se nastoji modelirati, a skup podataka za procenu mora sadržati podatke istih statističkih karakteristika kao skup za treniranje. U disertaciji je primenjen postupak unakrsne validacije modela. Postupak je korišćen iz razloga što se njegovom primenom umanjuje pristrasnost vezana za slučajnu podelu na podatke za treniranje i obuku modela, koji bi načelno trebali biti istih statističkih karakteristika. Na Slici 5.8 je ilustrovan postupak sa desetostrukom unakrsnom validacijom modela. Za primenu unakrsne

validacije u prikazanom slučaju na Slici 5.8 neophodno je da se skup podataka na slučajan način podeli u deset disjunktivnih podskupova iste veličine (eng. 10 folds).



Slika 5.8 Postupak desetostruke unakrsne validacije [57]

Jedan od podskupova se zatim uklanja, a model se trenira korišćenjem preostalih devet podskupova. Primenom usvojenih kriterijuma se zatim ocenjuje tačnost na uklonjenom podskupu koji nismo koristili za treniranje modela odnosno na test podacima.

Postupak se ponavlja deset puta na različitim podacima kod kojih smo uvek uklonili jedan podskup. Na ovaj način čitav skup podataka koristimo za testiranje modela. Tačnost modela je određena srednjom vrednošću formiranih modela po usvojenim kriterijumima.

U petom koraku usvaja se metoda i odgovarajući model koji će biti korišćen za predikciju. Analizirani su različiti modeli zasnovani na tehnikama mašinskog učenja. Sve analizirane modele u ovom radu možemo podeliti na sledeće grupe:

- Modele zasnovani na veštačkim neuronskim mrežama,
- Modele zasnovane na stablima odlučivanja,
- Modele zasnovane na metodi potpornih vektora,
- Modele zasnovane na Gausovom procesu.

Određivanje podesivih parametara razmatranih modela obavljeno je u šestom koraku. U okviru svake metode za procenu analiziran je veći broj modela. U ovom koraku je vršeno određivanje strukture modela odnosno kalibracija modela korišćenjem podataka za treniranje.

Korišćenjem podataka za procenu modela, odnosno u konkretnom slučaju test podataka u sedmom koraku vršeno je ispitivanje modela. Ispitivanjem modela vrši se ocena generalizacijskih karakteristika modela. Ocena karakteristika modela treba da obuhvata više različitih kriterijuma. U disertaciji su korišćeni apsolutni i relativni kriterijumi, a pored toga sprovedena je grafička analiza izlaza modela i poređenje sa stvarnim vrednostima analizirane promenljive.

5.3 Ocena kvaliteta modela i kriterijumi tačnosti

Pre konačnog usvajanja određenog modela potrebno je ispitati generalizacijska svojstva modela. Različite mere tačnosti se koriste kako bi se ocenili različiti vidovi tačnosti modela. Kvalitet modela u radu je ocenjen korišćenjem različitih statističkih kriterijuma.

Kriterijume za ocenu kvaliteta modela možemo podeliti na apsolutne i relativne. Apsolutni kriterijumi su izraženi u istoj jedinici kao i izlazna promenljiva modela, dok su relativni kriterijumi dati u bezdimenzionalnom obliku. Kod ocene kvaliteta modela za preporuku je da se koristi makar po jedan apsolutni i jedan relativni kriterijum tačnosti [75], [76]. Na osnovu samo apsolutnih kriterijuma nije moguće definisani opšte granice prihvatljive odnosno neprihvatljive tačnosti predviđanja, pa se iz tog razloga kombinuju sa relativnim kriterijumima tačnosti.

U ovoj disertaciji za ocenu kvaliteta modela korišćen je koren srednje kvadratne greške (RMSE), srednja apsolutna greška (MAE), Pirsonov (eng. Pearson's Linear Correlation Coefficient) linearni koeficijent korelacije (R) i srednja apsolutna procentualna greška (MAPE).

Srednja kvadratna greška (MSE) definisana izrazom (5.1) predstavlja kriterijum odnosno meru koje se najčešće koristi tokom kalibracije modela, dok ostale kriterijume odnosno mere najčešće koristimo kod procene modela.

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (d_k - o_k)^2 \quad (5.1)$$

gde je:

d_k - stvarna vrednost određene veličine, odnosno ciljana vrednost,

o_k - izlaz odnosno prognoza koju daje model,

N - broj trening uzoraka.

RMSE kriterijum za ocenu tačnosti modela definisan je izrazom (5.2) predstavlja meru opšte tačnosti modela, a izražen je u istim jedinicama kao i veličina koja se želi modelirati.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (d_k - o_k)^2} \quad (5.2)$$

Razlika između ciljane i prognozirane vrednosti je kvadrirana, nakon toga je nađen prosek, a zatim i koren ove vrednosti. Pošto su greške kvadrirane pre nego što je nađen prosek, na vrednost ove mere veoma utiču velike greške u prognozi, tako da je dobar pokazatelj ako se žele izbeći velika neslaganja osmotrene i prognozirane vrednosti. Što je vrednost ovog pokazatelja manja, to je model bolji.

MAE kriterijum je takođe mera apsolutne tačnosti modela i koristi se za predstavljanje srednje apsolutne greške modela prema izrazu (5.3).

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |d_k - o_k| \quad (5.3)$$

MAE računa srednju vrednost apsolutne greške, tako što daje podjednaku vaznost greškama svih ciljanih vrednosti, dok je kod RMSE data veća važnost greškama koje su veće.

Pirsonov linearni korelacioni koeficijent R je definisan izrazom (5.4) i predstavlja relativni kriterijum za ocenu tačnosti modela.

$$R = \sqrt{\left[\sum_{k=1}^N (d_k - \bar{d})(o_k - \bar{o}) \right]^2 \cdot \left[\sum_{k=1}^N (d_k - \bar{d})^2 (o_k - \bar{o})^2 \right]^{-1}} \quad (5.4)$$

gde \bar{o} predstavlja srednju vrednost predikcije dobijenu odgovarajućim modelom, a \bar{d} predstavlja srednju ciljanu vrednost. Vrednosti linearnog koeficijenta korelacije R kreću se od -1 do $+1$, pri čemu pozitivne vrednosti impliciraju postojanje pozitivne korelacije između razmatranih promenljivih i označavaju njihovu srazmernu promenu. Negativne vrednosti impliciraju postojanje negativne korelacije pri čemu kada jedna promenljiva raste, druga opada i obrnuto. Vrednosti koeficijenta korelacije iznad $\pm 0,75$ upućuju na dobru povezanost promenljivih, vrednosti iz intervala $(\pm 0,5, \pm 0,75)$ upućuju na umerenu povezanost, iznosi iz intervala $(\pm 0,25, \pm 0,5)$ upućuju na slabu povezanost, a vrednosti manje od $\pm 0,25$ impliciraju da se radi o promenljivama koje nisu povezane [74].

Srednja apsolutna procentualna greška MAPE (koja se još naziva i srednji apsolutni procenat devijacije MAPD) je mera tačnosti predviđanja modela i definisana je sledećom formulom

$$MAPE = \frac{100}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{d_k - o_k}{d_k} \right| \quad (5.5)$$

Vrednosti razlike između ciljane i modelirane vrednosti je potrebno da se podele sa ciljanom vrednošću. Apsolutna vrednost ovog proračuna sumira se za sve uzorke, a zatim deli sa brojem uzoraka, te dobijena vrednost multiplicira sa 100. MAPE se ne može koristiti kada postoje ciljane vrednosti koje su jednake nuli.

6. METODE ZA IZRADU PREDIKTIVNIH MODELA

Oblici mašinskog učenja se mogu podeliti na sledeća tri osnovna oblika učenja:

- Nadgledano učenje (eng. supervised learning),
- Nenadgledano učenje (eng. unsupervised learning),
- Učenje uz podsticaje (eng. reinforced learning).

Nadgledano učenje predstavlja skup problema i tehnika za njihovo rešavanje u kojima program koji uči dobija skup ulaznih podataka (x_1, x_2, \dots, x_n) i skup željenih (target) vrednosti, tako da za svaki ulazni podatak x_i , imamo željeni/tačan izlaz y_i . Zadatak programa je da “nauči” kako da novom ulaznom podatku dodeli tačnu izlaznu vrednost. Izlazna vrednost može biti: pripadnost određenoj klasi (tj. nominalna vrednost) kada je reč o klasifikaciji, ili izlazna vrednost može biti realan broj kada se radi o regresiji.

Kod nenadgledanog učenja ne postoje informacije o željenoj izlaznoj vrednosti pri čemu program dobija samo skup ulaznih podataka (x_1, x_2, \dots, x_n). Zadatak programa je da otkrije paterne tj. skrivene zakonitosti u podacima.

Učenje uz podsticaje podrazumeva da program (agent) deluje na okruženje izvršavanjem niza akcija, pri čemu ove akcije utiču na stanje okruženja, koje povratno utiče na agenta pružajući mu povratne informacije koje mogu biti “nagrade” ili “kazne”. Cilj agenta je da nauči kako da deluje u datom okruženju, tako da vremenom maksimizira nagrade (ili min. kazne).

U ovoj disertaciji analizirani su algoritmi sa nadgledanim učenjem. Sve analizirane modele u ovom radu možemo podeliti na sledeće grupe:

- Modele zasnovani na veštačkim neuronskim mrežama,
- Modele zasnovane na stablima odlučivanja,
- Modele zasnovane na metodi potpornih vektora,
- Modele zasnovane na Gausovom procesu.

6.1 Veštačke neuronske mreže

Veštačke neuronske mreže, VNM (eng. Artificial Neural Networks) baziraju se na paralelnom procesuiranju različitih informacija po ugledu na ljudski mozak. One sadrže veštačke neurone koji se međusobno povezani u jednu paralelnu strukturu. Snaga VNM leži u tome da su one sposobne da predstavljaju opštu vezu ili funkciju, kao i njihovoj sposobnosti da nauče ove veze direktno iz eksperimentalnih podataka. Zbog toga VNM mogu pomoću analitičkih ili eksperimentalnih podataka, da modeliraju ponašanje složenih sistema sa većim brojem uticajnih veličina, čiji su efekti, kako pojedinačnih tako i sinergijskih uticaja, nepoznati ili teško predvidljivi.

VNM kao proračunske metode, su sposobne da nauče i generalizuju prirodu pojedinih fenomena na osnovu poznatih eksperimentalnih rezultata. One mogu biti pogodne za modeliranje i predviđanje promene funkcionalnih karakteristika posmatranih sistema, s obzirom da mogu biti obučavane da nađu rešenje, prepoznaju modele ponašanja, klasifikuju podatke i predvide buduće događaje [77].

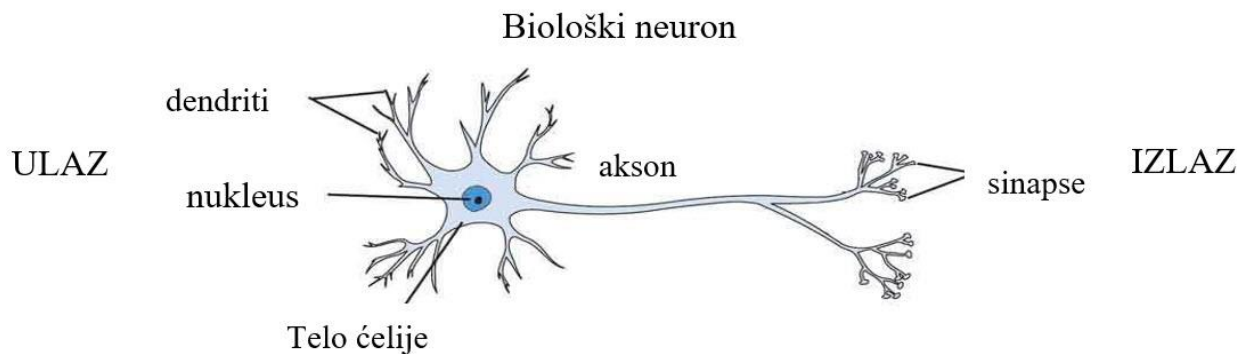
VNM se mogu primeniti u situacijama kada imamo nepotpune i nejasne informacije o određenim pojavama i njihovim uzročno-posledničnim vezama, pri čemu mogu da procesuiraju veliki broj podataka koji su istovremeno nosioci složenih informacija o posmatranoj pojavi zajedno sa "šumom" kao sastavnim delom eksperimentalnih podataka [77].

6.1.1 Biološka osnova za veštačke neuronske mreže

Modeli VNM primenjuju u najrazličitijim oblastima istraživanja kao što su: upravljanje, robotika, planiranje, raspoznavanje govora, sinteza govora, medicinska dijagnostika, prepoznavanje zakonitosti u podacima itd.

Pri modeliranju i upravljanju sistemima i procesima uglavnom se pretpostavlja da opšti, analitički model sistema može da se definiše. Međutim, mnogi sistemi kao i mnogi procesi su toliko komplikovani, da se opšti model retko kada može uspostaviti. U takvim slučajevima VNM se mogu koristiti kao univerzalni aproksimator. VNM predstavljaju alat za podršku donošenju odluka koje integrišu znanje i učenje.

Model VNM je razvijen po uzoru na neuronske mreže ljudskog mozga, jer on sa približno 10^{11} moždanih nervnih ćelija (neurona) realizuje mnoge funkcije inteligentnih sistema kao što su: paralelno procesuiranje informacija, učenje, samoorganizovanje, itd. Biološki neuroni (Slika 6.1) su sporiji u poređenju sa modernim elektronskim kolima, međutim, mozak je brži od bilo kojeg računara zbog velikog broja neurona koji rade paralelno.



Slika 6.1 Struktura nervne ćelije

Prenos signala sa jedne na drugu ćeliju, preko sinapsi, je složen hemijski proces. Dendriti primaju signale od drugih neurona, a akson prenosi neuronsku aktivnost generisanu od strane dendrita na druge nervne ćelije. Električni impulsi koji nastaju kao posledica spoljnih stimulusa, kreću se od dendrita prema aksonu. Ovi električni signali koji se sprovode kroz dendrite su ili ekscitacioni (pobudni - aktivni) ili inhibitorni (neaktivni). Ukoliko je razlika između zbira svih ekscitacionih (pobudnih) i inhibitornih signala koje prima neuron veća od njegovog potencijala mirovanja ili praga aktivacije neurona, doći će do emitovanja neuronskog električnog impulsa koji se zatim prenosi posredstvom sinapsi do susednih neurona.

Po analogiji, sa ovakvim načinom funkcionisanja neurona u ljudskom mozgu, učinjen je pokušaj da se formira veštački neuron, koji će moći da izvršava sličnu aktivnost u neuronskoj mreži. Model VNM predstavlja u visokom stepenu pojednostavljen model ljudskog mozga čiji je samo jedan deo predstavljen na Slici 6.2. VNM, takođe, ima ulazne kanale, koji oponašaju dendrite, i izlazne kanale koji oponašaju aksone. Sinapse su modelirane pomoću podesivih težinskih odnosa između neurona. U modelu VNM svaka jačina ili težina veza menja ulazni signal pre nego što dođe do daljeg slanja (prosleđivanja) signala. Prema tome, svi ulazni signali u jedan neuron su modifikovani težinskim odnosima ili jačinama veze u odnosu na neuron u koji pristižu. Pri tome

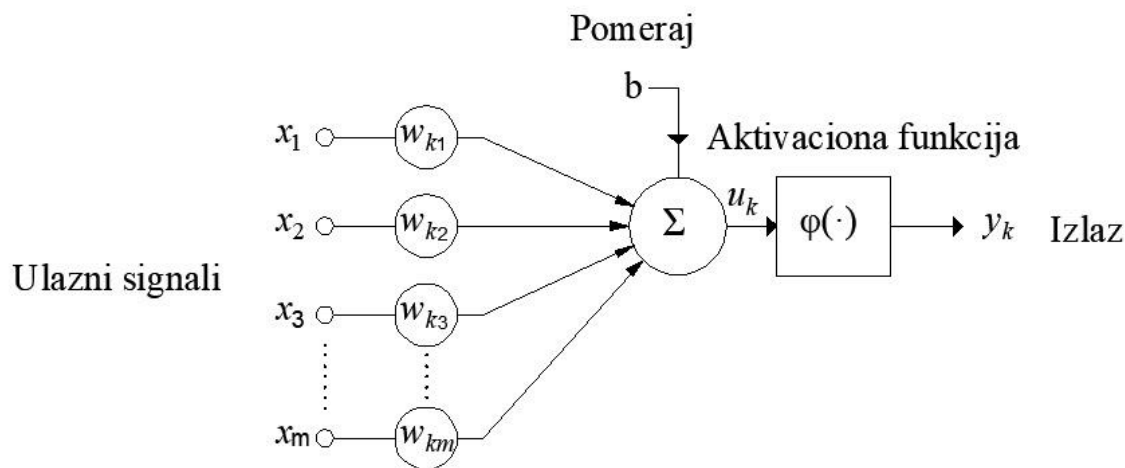
se stvara jedan ukupni ulazni signal u neuron koji se dalje prenosi preko tzv. funkcije prenosa. Upravo jačine veza između neurona i vrsta funkcije prenosa su ono što najviše utiče na ponašanje VNM, a oba ova parametra su podesiva.

Sinapse kojima biološki neuroni regulišu prohodnost određene putanje između aksona i dendrita, kod VNM se ostvaruje modifikacijom težinskih koeficijenata odnosno težina. Modifikacija opterećenja sinapsi, radi dobijanja specifične funkcionalne veze, naziva se algoritam učenja.

Modeli VNM su definisani kao grupa međusobno povezanih procesirajućih elemenata (neurona) čiji je način rada baziran na radu stvarnih ljudskih neurona [78].

6.1.2 Modeli veštačkih neuronskih mreža

Osnovni strukturni element (Slika 6.2) neuronskih mreža je neuron. Model neurona se sastoji od sledećih elemenata [79].



Slika 6.2 Nelinearni model neurona [79]

1. Skup veza (sinapsi) pri čemu svaka veza ima određenu težinu,
2. Sabirač, gde se sabiraju ulazni signali i
3. Aktivaciona funkcija, kojom se ograničava izlaz neurona.

Svaki od ulaznih signala (ulaza) x_j množi se sa odgovarajućom težinom w_{kj} pre dolaska do sabirača, gde se pojedini multiplicirani ulazi sabiraju i dodaje im se pomeraj (bias). Izlaz iz sabirača je ulaz u aktivacionu funkciju. Izlaz aktivacione funkcije je istovremeno i izlaz iz neurona y_k . Kod modela neurona koji je prikazan na Slici 6.2 uključen je pomeraj b_k koji ima funkciju uvećanja ili umanjenja ulaza u aktivacionu funkciju zavisno od toga da li je pozitivan ili negativan. Matematički, to možemo opisati sledećim jednačinama

$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j \quad (6.1)$$

$$y_k = \varphi(u_k + b_k) \quad (6.2)$$

gde su x_1, x_2, \dots, x_m ulazni signali, a $w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{km}$ su odgovarajuće težine za neuron k . Ovaj model se može i modifikovati dodavanjem nove veze koja će imati vrednost ulaznog signala

$$x_0 = +1 \quad (6.3)$$

a čija će težina biti

$$w_{k0} = b_k. \quad (6.4)$$

Tako da dobijamo sledeće izraze:

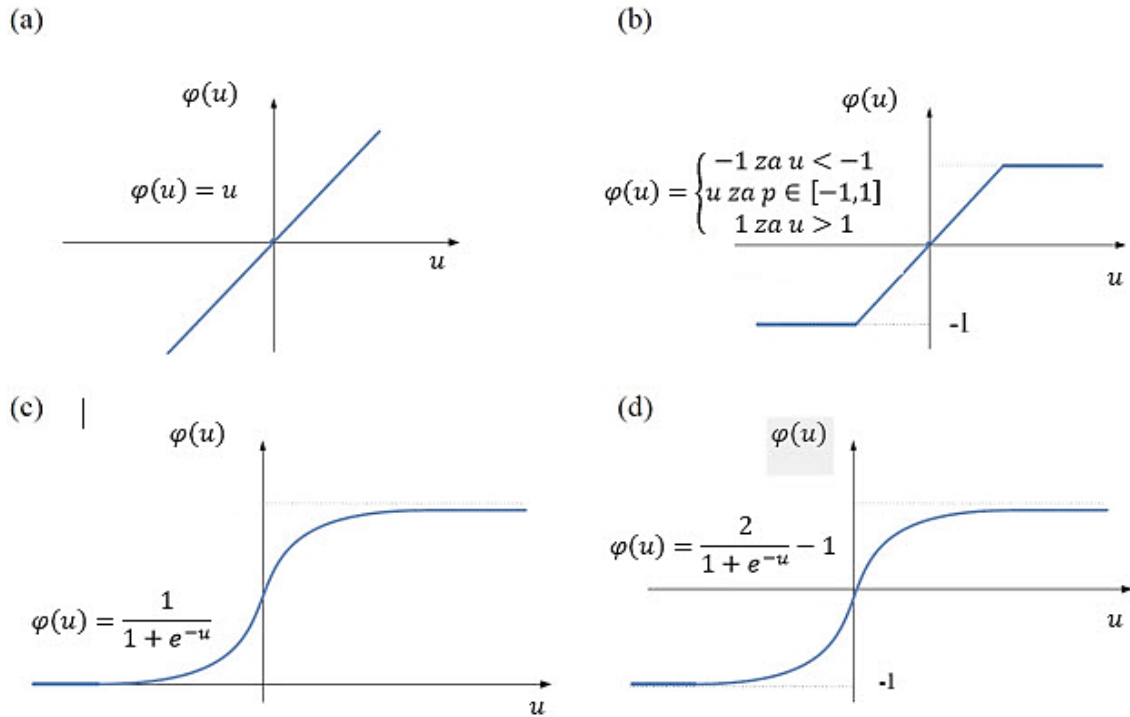
$$u_k = \sum_{j=0}^m w_{kj} x_j, \quad (6.5)$$

$$y_k = \varphi(u_k). \quad (6.6)$$

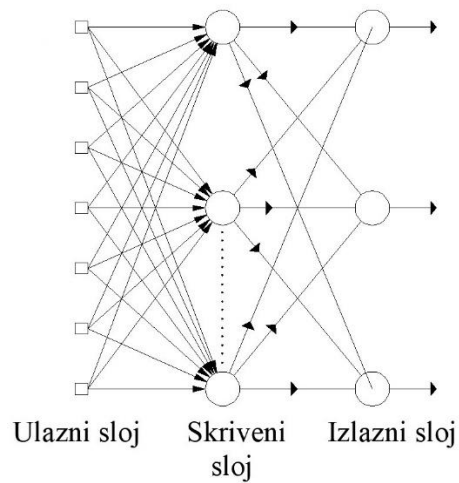
Svojstva mreže zavise od tipa aktivacione funkcije, pa ukoliko se mreža koristi kao univerzalni aproksimator, tada ona mora koristiti nelinearne aktivacijske funkcije u sloju između ulaznog i izlaznog sloja (u tzv. skrivenom sloju), kako bi bila u stanju aproksimirati nelinearne odnose između ulaznih i izlaznih promenljivih. Najčešće korištene aktivacijske funkcije prikazane su na Slici 6.3.

Način na koji su povezani neuroni u skrivenom sloju, ulaznom i izlaznom sloju, kao i u okviru svakog od tih slojeva definiše arhitekturu mreže. Prema arhitekturi neuronske mreže možemo podeliti na:

- Mreže sa prostiranjem signala unapred (eng. feedforward neural networks),
- Rekurentne neuronske mreže.

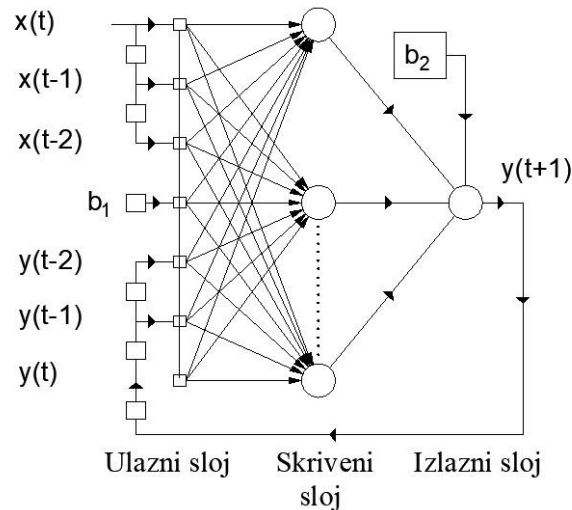


Slika 6.3 Aktivacijske funkcije: (a) linearna, (b) ograničena linearna, (c) unipolarna sigmoidalna, (d) bipolarna sigmoidna



Slika 6.4 Potpuno povezana troslojna mreža sa prostiranjem signala unapred

Kod neuronskih mreža sa prostiranjem signala unapred (Slika 6.4) signal se prenosi u jednom pravcu, od ulaznog sloja ka izlaznom sloju. Ova grupa neuronskih mreža spada u grupu statičkih neuronskih mreža gde ne postoje kašnjenja ulaza ili izlaza koja se uvode u strukturu.

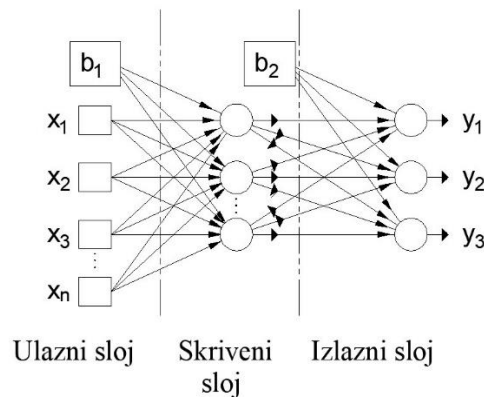


Slika 6.5 Rekurentna mreža tipa NARX. Neuron izlaznog sloja povezan je povratnom vezom sa određenim neuronima u ulaznom sloju

Kod rekurentnih neuronskih mreža (Slika 6.5) signal se prenosi i unapred od ulaznog ka izlaznom sloju, ali i u obrnutom pravcu.

6.1.3 Višeslojni perceptron

Višeslojni perceptron je neuronska mreža sa prostiranjem signala unapred koja se sastoji od najmanje tri sloja neurona: ulaznog, skrivenog i izlaznog sloja.



Slika 6.6 Višeslojni perceptron

U opštem slučaju, svaki neuron jednog sloja je povezan sa svakim neuronom sledećeg sloja, kao što je prikazano na Slici 6.6 za primer troslojne MLP mreže sa n ulaza i tri izlaza. Svojstva mreže zavise od svojstava neurona, odnosno tipu aktivacijske funkcije pa ukoliko se mreža koristi kao univerzalni aproksimator, tada ona mora koristiti nelinearne aktivacijske funkcije u skrivenom sloju, kako bi bila u stanju aproksimirati nelinearne odnose između ulaznih i izlaznih promenljivih [80]. Kada VNM koristimo kao aproksimator aktivacione funkcije se najčešće biraju tako da budu kontinualne i diferencijabilne. Izlazni sloj neurona najčešće koristi linearnu aktivacijsku funkciju.

Model VNM sa jednim skrivenim slojem čiji neuroni imaju bipolarnu sigmoidnu aktivacionu funkciju, dok neuroni izlaznog sloja imaju linearnu aktivacionu funkciju, može aproksimirati proizvoljnu višedimenzionalnu funkciju za dati skup podataka, kada postoji dovoljan broj neurona u skrivenom sloju [80].

Kako je broj ulaznih neurona određen dimenzijama ulaznog vektora, a broj izlaznih neurona dimenzijom izlaznog vektora, ukoliko se koristi MLP arhitektura sa svojstvom univerzalnog aproksimatora, određivanje strukture mreže se svodi na određivanje broja neurona skrivenog sloja. Optimalan broj skrivenih neurona zavisi od mnogo faktora, broja ulaza i izlaza, broja obučavajućih parova, veličine šuma u obučavajućim parovima, složenosti funkcije greške, arhitekture mreže i algoritma obučavanja. Može se reći da je izbor arhitekture zavisano od vrste i složenosti problema koji se proučava. Postoje brojne preporuke u vezi orijentacionog broja neurona u skrivenom sloju pri čemu su neke navedene u Tabeli 6.1.

Tabela 6.1 Preporuke za broj neurona u skrivenom sloju neuronske mreže

	Broj neurona u skrivenom sloju	Referenca
1.	$N_H = (N_i + N_o)/2$	Ripley [81]
2.	$N_H = \sqrt{(N_i + N_o)}$	Kaastra i Boyd [82]
3.	$N_H = 2 \times N_i$	Kannellopulas i Wilkinson [83]
4.	$N_H = \frac{2}{3} \times N_i + N_o$	Heaton [84]
5.	$N_H = (4 \times N_i^2 + 3) / (N_i^2 - 8)$	Sheela [85]

Metoda za precizno i pouzdano određivanje najmanjeg potrebnog broja neurona još nije određena. Ono što je donekle moguće odrediti je gornja granica, odnosno maksimalni broj neurona skrivenog sloja, koji se može koristiti za modeliranje sistema predstavljenog određenim skupom podataka. Predlaže se uvažavanje manjeg iznosa N_H iz skupa nejednakosti (6.7) i (6.8), gdje N_i označava broj ulaza neuronske mreže, a N_s označava broj uzoraka za treniranje.

$$N_H \leq 2 \times N_i + 1 \quad (6.7)$$

$$N_H \leq \frac{N_s}{N_i + 1} \quad (6.8)$$

Prvu nejednačinu je predložio Nielsen (1987) kako bi odredio broj neurona mreže koja će sigurno aproksimirati željenu funkciju, dok drugu nejednačinu uvode Rogers i Dowla (1994) kako bi se odredio broj neurona mreže koja neće biti sklona pretreniranju [86]. Slično ograničenje u pogledu gornje granice za broj neurona u skrivenom sloju daje i Heaton [84]:

$$N_H < 2 \times N_i. \quad (6.9)$$

Sve ove preporuke predstavljaju polaznu tačku koju treba razmotriti. Najčešći pristup za pronalaženje broja neurona u skrivenim slojevima je obučavanje većeg broja mreža sa različitim brojem neurona, uz postepeno povećavanje broja neurona do dostizanja željenog rezultata [76].

Određivanje optimalnog broja neurona skrivenog sloja se i dalje najčešće provodi eksperimentalno, metodom pokušaja i pogreške odnosno trial-and-error pristupom [87]. U tom slučaju je najbolje početi od minimalne strukture, odnosno mreže s jednim neuronom u skrivenom sloju, a potom postepeno povećavati broj neurona i ispitivati postignute rezultate. Nedostatak ove metode je pre svega u velikom broju mreža koje je potrebno istrenirati i testirati.

Optimalan broj neurona skrivenog sloja je jako bitan za ispravan rad modela, jer direktno utiče na generalizacijska svojstva. Prevelikim brojem neurona formirat će se mreža s prevelikim brojem parametara, koja će biti sklona pretreniranju (eng. *overfitting*). Suprotno tome, mreža sa nedovoljnim brojem neurona, neće biti u stanju da aproksimira zadate nelinearne odnose na ispravan način, pa postoji problem nedovoljnog treniranja (eng. *underfitting*).

6.1.4 Metod prostiranja greške unatrag

Metod prostiranja greške unatrag predstavlja postupak treniranja neuronskih mreža promenom težina veza. Pobuđivanjem netrenirane mreže odziv koji mreža daje najčešće je različit od željenog, odnosno model neuronske mreže daje grešku koja je funkcija podesivih parametara mreže odnosno težina između neurona mreže. Kao kriterijum greške može se koristiti vrednost ukupne kvadratne greške (eng. Sum of Squared Error, SSE), srednje kvadratne greške (eng. Mean Squared Error, MSE), srednje apsolutne greške (MAE) ili neke druge funkcije greške. Parametre mreže predstavljaju pomeraji svakog neurona koji su označeni sa w_o (eng. bias) i težinski koeficijenti koji određuju intenzitet međuneuronskih veza (eng. synaptic weights) koji su označeni sa w_{ij} .

Kod treniranja neuronskih mreža moguće je ažuriranje težina između neurona nakon svakog trening uzorka d (eng. stochastic mode) ili nakon što su svi uzorci predstavljeni mreži (eng. batch mode) [88]. U oba slučaja vrednosti težina ažuriramo dodajući vrednost člana zavisnog od greške u toj iteraciji, pa je težina w_{ji} nakon ažuriranja jednaka $w_{ji} + \Delta w_{ji}$. U ovom delu će biti objašnjen prvi slučaj, gde nakon svakog trening uzorka kod ažuriranja težina koristimo sledeći izraz

$$\Delta w_{ji} = -\eta \frac{\partial E_d}{\partial w_{ji}} \quad (6.10)$$

E_d predstavlja grešku kod trening uzorka d , koja je sumirana za sve izlazne neurone u mreži

$$E_d(\vec{w}) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \text{outputs}} (d_k - y_k)^2 \quad (6.11)$$

outputs predstavlja skup neurona izlaznog sloja, d_k predstavlja ciljanu vrednost za neuron k za trening uzorak d , a y_k predstavlja izlaz neurona k za trening uzorak d . Uvešćemo sledeću notaciju:

- x_{ji} predstavlja i -ti ulaz u neuron j ,
- w_{ji} predstavlja parametar težine između i -tog ulaza i neurona j ,
- $u_j = \sum_i w_{ji} x_{ji}$ predstavlja sumu pomnoženih ulaza za neuron j ,
- y_j predstavlja izlaz koji daje neuron j ,
- d_j predstavlja ciljanu vrednost izlaza koji daje neuron j ,

- σ predstavlja sigmoidnu funkciju,
- *Downstream* (j) skup neurona čiji su neposredni ulazi izlazi neurona j .

Težina w_{ji} utiče na preostali deo neuronske mreže preko u_j . Korišćenjem izvoda složene funkcije dobijamo da je

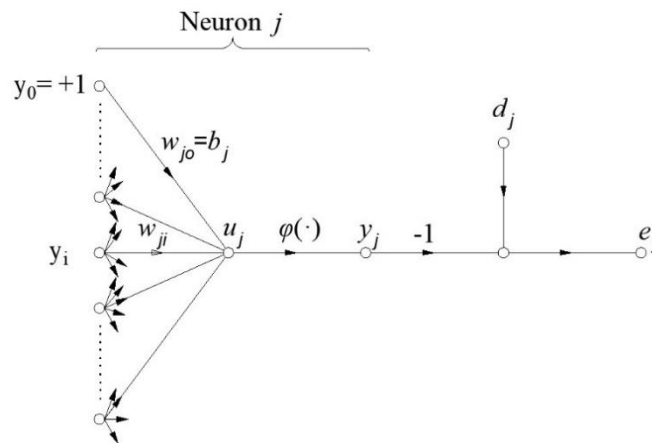
$$\frac{\partial E_d}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial E_d}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial E_d}{\partial u_j} x_{ji}. \quad (6.12)$$

Kod izraza (6.12) neophodno je da se izračuna vrednost člana $\frac{\partial E_d}{\partial u_j}$.

Razmotrićemo dva slučaja i to:

- neuron j je neuron izlaznog sloja,
- neuron j je neuron skrivenog sloja.

a) Kada je neuron j neuron izlaznog sloja (Slika 6.7) tada težina w_{ji} utiče na preostali deo neuronske mreže preko vrednosti u_j , gde vrednost u_j utiče na vrednost izlaza y_k .



Slika 6.7 Grafik prenosa signala za izlaz neurona j [79]

Primenom izvoda složene funkcije dobijamo

$$\frac{\partial E_d}{\partial u_j} = \frac{\partial E_d}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial u_j}. \quad (6.13)$$

Razmotrićemo prvo vrednost prvog člana izraza (6.13),

$$\frac{\partial E_d}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{1}{2} \sum_{k \in \text{outputs}} (d_k - y_k)^2. \quad (6.14)$$

Izvod $\frac{\partial}{\partial y_j} (d_k - y_k)^2$ će biti jednak nuli za sve neurona izlaznog sloja k osim za vrednost $k=j$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_d}{\partial y_j} &= \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{1}{2} \sum_{k \in \text{outputs}} (d_j - y_j)^2 = \frac{1}{2} 2(d_j - y_j) \frac{\partial (d_j - y_j)}{\partial y_j} \\ &= -(d_j - y_j) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Pošto je vrednost izlaza y_j za slučaj sigmoidne funkcije jednaka $y_j = \sigma(u_j)$, izvod $\frac{\partial y_j}{\partial u_j}$ predstavlja izvod sigmoidne funkcije koji je jednak $\sigma(u_j)(1 - \sigma(u_j))$. Na osnovu toga imamo:

$$\frac{\partial y_j}{\partial u_j} = \frac{\partial \sigma(u_j)}{\partial u_j} = y_j(1 - y_j). \quad (6.16)$$

Zamenom prethodnih izraza u izraz za $\frac{\partial E_d}{\partial u_j}$ imaćemo:

$$\frac{\partial E_d}{\partial u_j} = -(d_j - y_j)y_j(1 - y_j). \quad (6.17)$$

odakle dobijamo da je izraz za ažuriranje težina kod neuronske mreže (inkrementalni metod) kod neurona izlaznog sloja

$$\Delta w_{ji} = -\eta \frac{\partial E_d}{\partial w_{ji}} = \eta (d_j - y_j)y_j(1 - y_j)x_{ji}. \quad (6.18)$$

Uvođenjem oznake da je $\delta_j = -\frac{\partial E_d}{\partial u_j} = (d_j - y_j)y_j(1 - y_j)$ dobijamo da je

$$\Delta w_{ji} = -\eta \frac{\partial E_d}{\partial w_{ji}} = \eta \delta_j x_{ji}. \quad (6.19)$$

a) Kada je neuron j neuron skrivenog sloja kod izvođenje pravila za ažuriranje težina w_{ji} mora da se na indirektan način uzme u obzir način na koji w_{ji} utiče na izlaze neuronske mreže, pa prema tome i na E_d . Skup neurona koji se u mreži nalazi neposredno nakon neurona j označićemo sa *Downstream* (j). Može se uočiti da u_j utiče na izlaze iz neuronske mreže samo preko jedinica koje pripadaju skupu *Downstream* (j). Iz tog razloga može se napisati

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_d}{\partial u_j} &= \sum_{k \in \text{Downstream}(j)} \frac{\partial E_d}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial u_j} \\
&= \sum_{k \in \text{Downstream}(j)} -\delta_k \frac{\partial u_k}{\partial u_j} \\
&= \sum_{k \in \text{Downstream}(j)} -\delta_k \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial u_j} \\
&= \sum_{k \in \text{Downstream}(j)} -\delta_k w_{kj} \frac{\partial y_j}{\partial u_j} \\
&= \sum_{k \in \text{Downstream}(j)} -\delta_k w_{kj} y_j (1 - y_j). \tag{6.20}
\end{aligned}$$

Sa obzirom da je $\delta_j = -\frac{\partial E_d}{\partial u_j}$ dobijamo sledeći izraz:

$$\delta_j = y_j (1 - y_j) \sum_{k \in \text{Downstream}(j)} -\delta_k w_{kj}. \tag{6.21}$$

Izraz za ažuriranje težina za slučaj kada je j neuron skrivenog sloja uzimajući u obzir prethodno je

$$\Delta w_{ji} = \eta \delta_j x_{ji}. \tag{6.22}$$

Metoda sa prostiranjem greške unazad spada u lokalne algoritme prvog reda i ona koristi gradijent funkcije greške, odnosno parcijalne izvode po podesivim parametrima mreže. Osim ovog postupka postoje i lokalni algoritmi drugog reda koji se zasnivaju na kvadratnoj aproksimaciji funkcije greške.

6.1.5 Levenberg-Markard algoritam

Funkcija greške $E(\mathbf{w})$ kod modela neuronskih mreža je u opštem slučaju nekonveksna površina sa više lokalnih minimuma, što značajno otežava pronalaženje parametara mreže. Aproksimacijom nekonveksne površine u okolini neke lokalne tačke otvara se mogućnost primene algoritama koji se koriste kod konveksnih optimizacionih problema [89].

Ako se funkcija $E(\mathbf{w})$ razvije u Tejlorov red do drugog člana u okolini tačke w_0 dobijamo

$$\bar{E}(\mathbf{w}) = E(\mathbf{w}_0) + g^T(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^T H(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \quad (6.23)$$

gde je $\bar{E}(\mathbf{w})$ aproksimacija $E(\mathbf{w})$ u okolini tačke \mathbf{w}_0 , $g = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{w}}$ i $H = \frac{\partial^2 E}{\partial^2 \mathbf{w}}$ su prvi i drugi izvod funkcije greške po težini $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0$.

Optimalna vrednost težine dobija se izjednačavanjem gradijenta prethodnog izraza sa nulom odnosno

$$\frac{\partial \bar{E}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = g + H(\mathbf{w}^* - \mathbf{w}_0) = 0. \quad (6.24)$$

Iz jednačine (6.24) dobijamo optimalnu vrednost vektora težina

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}_0 - \mathbf{H}^{-1}g. \quad (6.25)$$

Ova jednačina predstavlja osnovnu formu metoda drugog reda. Metode drugog reda mnogo brže konvergiraju ka minimumu od metoda prvog reda koje se zasnivaju na gradijentu.

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{w}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial w_1^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial w_1 \partial w_2} \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial w_1 \partial w_n} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial w_2 \partial w_1} & \frac{\partial^2 E}{\partial w_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial w_2 \partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E}{\partial w_n \partial w_1} & \frac{\partial^2 E}{\partial w_n \partial w_2} \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial w_n^2} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Hesijan matrica H (6.26) daje informaciju o zakrivljenosti površine funkcije greške i sastoji se od parcijalnih izvoda funkcije greške. Težine u mreži se ažuriraju prema uzrazu:

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \Delta \mathbf{w}_k = \mathbf{w}_k - \mathbf{H}_k^{-1}g_k = \mathbf{w}_k - (\nabla^2 E(\mathbf{w}))^{-1} \cdot \nabla E(\mathbf{w}). \quad (6.27)$$

Ovaj izraz predstavlja Njutnov algoritam. Mnogi optimizacioni algoritmi se zasnivaju na ovom izrazu i nazivaju se zbirno Njutnovskim metodama. Kod ove metode problem predstavlja traženje inverzne Hesijan matrice. U određenim tačkama u kojima je Hesijan matrica singularna ili gotovo singularna, ne možemo naći inverznu matricu i odgovarajući sistem linearnih jednačina ne mora imati rešenje. Takođe, u određenim koracima primene ove metode dešava se da se dobije negativno definitna Hesijan matrica, što dovodi do divergencije u sledećem koraku primene metode. Osim

toga kod velikog broja promenljivih ova metoda zahteva mnogo računskih operacija, pa postaje složena i spora za primenu.

U slučaju kada funkcija kriterijuma kod treniranja neuronske mreže ima oblik kvadratne sume (SSE ili MSE) gradijent i Hesijan matrica imaju poseban oblik. Ako napišemo kriterijumsku funkciju u obliku

$$E(\mathbf{w}) = \varepsilon(\mathbf{w})^T \varepsilon(\mathbf{w}) \quad (6.28)$$

dobijamo da je

$$g = 2J^T \varepsilon(\mathbf{w}) \quad (6.29)$$

i

$$H = 2(J^T J + \frac{\partial J^T}{\partial \mathbf{w}} \varepsilon(\mathbf{w})). \quad (6.30)$$

Jakobijanova matrica (J) definisana je izrazom (6.31), a sastoji se od prvih izvoda funkcije greške po podesivim parametrima mreže.

$$J = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial w_1} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial w_n} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial w_1} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon_N}{\partial w_1} & \frac{\partial \varepsilon_N}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_N}{\partial w_n} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

N predstavlja proizvod broja neurona u izlaznom sloju i broja uzoraka za treniranje, a n predstavlja broj podesivih parametara. Ukoliko se izrazi Jakobijana i Hesijana (gde je u Hesijanu je zanemaren drugi član) zamene u Njutnov izraz (6.27) za ažuriranje težina dobija se izraz koji predstavlja Gaus-Njutnovu metodu

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k - \mathbf{H}_k^{-1} g_k = \mathbf{w}_k - (J^T J)^{-1} J^T \varepsilon(\mathbf{w}). \quad (6.32)$$

Prednost Gaus-Njutnove metode u odnosu na standardni Njutnov metod je to što ne zaheva proračun drugih izvoda. Levenberg-Markardov (LM) algoritam uzima oba člana u izrazu za Hesijan odnosno ceo izraz Hesijana. LM algoritam predstavlja varijaciju Njutnove metode i koristi

se posebno kod problema gde nastojimo da minimiziramo kvadratnu grešku kod nelineranih funkcija. Kod LM algoritma umesto Hesijan matrice koristimo njenu aproksimaciju. Koristi se sledeći izraz za ažuriranje težina

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k - \mathbf{H}_k^{-1} g_k = \mathbf{w}_k - (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda_k \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^T \varepsilon(\mathbf{w}) \quad (6.33)$$

Gde λ_k predstavlja skalar koji kontroliše pravac pretraživanja i veličinu koraka, dok je \mathbf{I} jedinična matrica [90]. Za male vrednosti λ_k Levenberg-Markardov algoritam postaje Gaus-Njutnov algoritam, jer član $\lambda_k \mathbf{I}$ postaje zanemarljiv. Za velike vrednosti λ_k LM algoritam implementira metod najbržeg spusta.

Algoritam počinje obično sa usvojenom malom vrednošću za λ_k (npr. $\lambda_k = 0,01$). Ako u sledećem koraku iterativnog postupka ne dođe do smanjivanja vrednosti $E(\mathbf{w})$, onda se vrednost λ_k u sledećoj iteraciji množi faktorom $\nu > 1$ (npr. $\nu = 10$). Ako pak dođe do smanjenja funkcije $E(\mathbf{w})$ onda se vrednost λ_k deli sa vrednošću ν u narednom koraku tako da algoritam postaje bliži Gaus-Njunovoj metodi koja obezbeđuje bržu konvergenciju.

Integrisanje dva algoritma, Gaus-Njutnovog i algoritma najbržeg pada u strukturu LM algoritma doprinosi tome da ovaj algoritam brzo konvergira i daje dobre rezultate i u slučajevima kada su ulazi problema multikolinearni. Veći broj istraživanja [89] govori u prilog da se LM algoritam pokazao kao najbrži i najprikladniji algoritam kod treniranja neuronskih mreža arhitektura koje imaju do nekoliko stotina podesivih parametara.

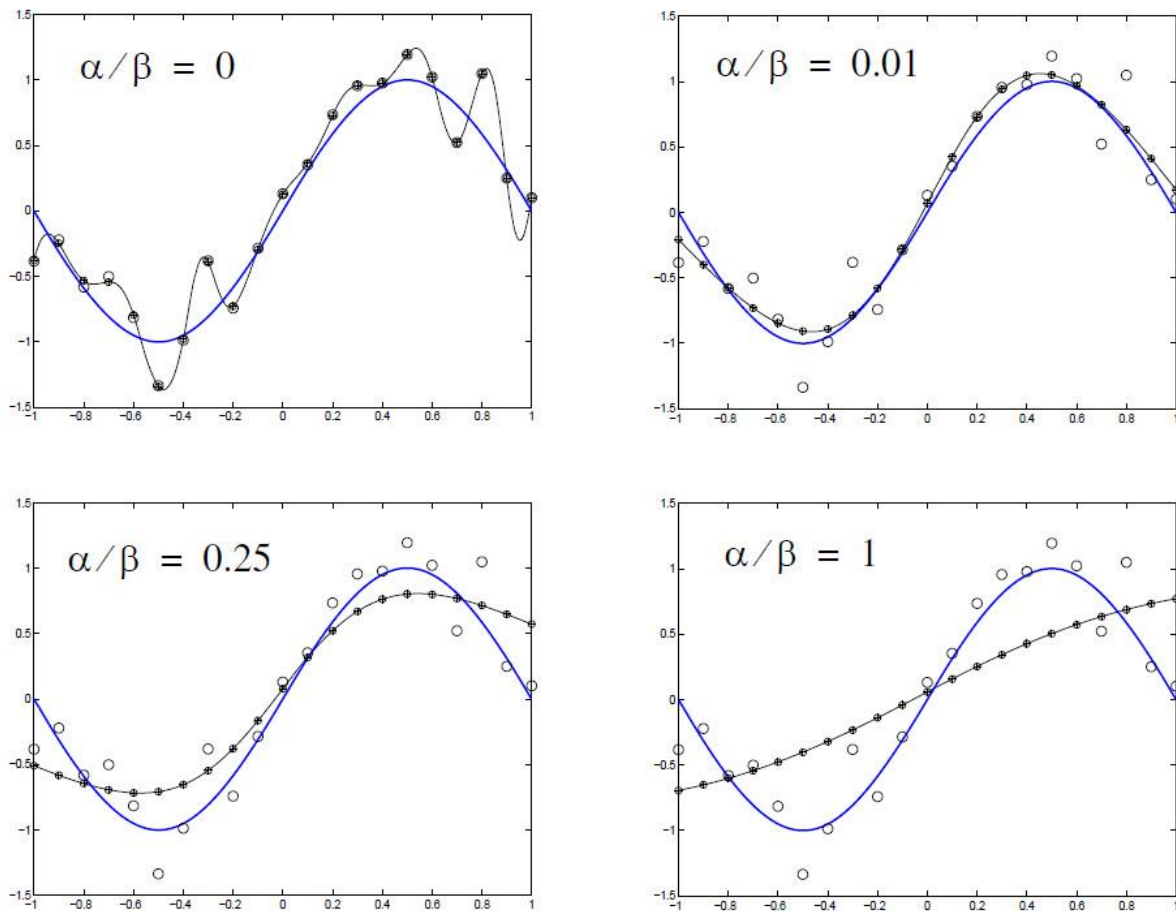
6.1.6 Bajesova regularizacija kod treniranja neuronskih mreža

Primena Bajesove regularizacije kod modela neuronskih mreža, zasniva se na proširenju funkcije cilja. Funkcija cilja koja je predstavljena sumom kvadrata prilikom regularizacije dobija još jedan član kojim se reguliše kompleksnost mreže.

Ovaj koncept je uveden od Tihonova [91], [92], [93]. Dodavanjem ovog regularizacionog člana utiče se na generalizacijska svojstva mreže, odnosno umanjuje mogućnost pretreniranja mreže. Regularizacioni član predstavljen je kao suma kvadrata težina odnosno parametara mreže

$$F(w) = \beta E_D + \alpha E_w = \beta \sum_{q=1}^Q (d_q - y_q)^T (d_k - y_k) + \alpha \sum_{i=1}^n w_i^2. \quad (6.34)$$

Q predstavlja broj uzoraka. Količnik α/β kontroliše složenost mreže. Što je veći ovaj količnik to će funkcija koju želimo da aproksimiramo biti ravnija. Na Slici 6.8 je prikazan efekat regularizacije za neuronsku mrežu kojom je modeliran sinusni talas. Uzorcima za treniranje dodati su podaci sa šumom koji su predstavljeni većim praznim kružičima. Plavom linijom je na Slici 6.8 prikazana prava funkcija, a crnom linijom model koji je dala neuronska mreža. Tačke u kojima model neuronske mreže prolazi označene su manjim kružićem u koji je upisan krstić.



Slika 6.8 Efekat količnika α/β kod regularizacije neuronske mreže [94]

Sa Slike 6.8 uočavamo da količnik $\alpha/\beta=0,01$ ima najbolje slaganje sa pravom funkcijom koju modeliramo. Za količnik koji je veći od 0,01 dobijamo isuviše ravnu funkciju, a za količnik koji je manji od 0,01 dobijamo pretreniran model.

U ovom radu je za određivanje regularizacionog parametra korišten pristup Mekeja [95], [96]. Kod ovog pristupa analiziraju se podesivi parametri mreže odnosno težine u smislu Bajesove statistike. Polazi se od pretpostavke da su težine mreže slučajne promenljive. Zatim se usvajaju one težine koje maksimiziraju uslovnu verovatnoću težina za date podatke. Bajesovo pravilo koristi se za pronalaženje ove funkcije verovatnoće

$$P(\mathbf{w}|D, \alpha, \beta, M) = \frac{P(D|\mathbf{w}, \beta, M)P(\mathbf{w}|\alpha, M)}{P(D|\alpha, \beta, M)} \quad (6.35)$$

U ovom izrazu \mathbf{w} je vektor koji sadrži težine i pomeraje u mreži, D predstavlja skup podataka za treniranje, α i β predstavljaju parametre vezane za funkcije raspodele $P(D|\mathbf{w}, \beta, M)$ i $P(\mathbf{w}|\alpha, M)$, a M predstavlja izabrani model odnosno arhitekturu mreže (broj slojeva i broj neurona u svakom sloju). $P(D|\mathbf{w}, \beta, M)$ predstavlja raspodelu verovatnoće za podatke, za zadati skup težina \mathbf{w} , parametar β i izabrani model M . Ako uzmemo u obzir da su članovi koji sadrže šum međusobno nezavisni i imaju Gausovu raspodelu dobijamo

$$P(D|\mathbf{w}, \beta, M) = \frac{1}{Z_D(\beta)} \exp(-\beta E_D) \quad (6.36)$$

gde je $\beta = \frac{1}{(2\sigma_\varepsilon^2)}$, σ_ε^2 predstavlja varijansu ε_q , E_D predstavlja vrednost kvadratne greške, a vrednost $Z_D(\beta)$ jednaka je:

$$Z_D(\beta) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{N/2} = (\pi/\beta)^{N/2}. \quad (6.37)$$

N predstavlja proizvod broja trening uzoraka i broja neurona u izlaznom sloju, odnosno $N = Q \times S^M$ (kod modela regresije imamo samo jedan neuron u izlaznom sloju pa N predstavlja broj uzoraka). Jednačina 6.36 prikazuje verovatnoću podataka odnosno uzoraka za dati skup težina.

Maksimizacijom izraza dobijamo skup težina koji će imati najveću verovatnoću.

$P(\mathbf{w}|\alpha, M)$ predstavlja apriori raspodelu težina. Pretpostavku da težine imaju male vrednosi koje se kreću oko nule možemo da predstavimo preko Gausove raspodele odnosno izraza

$$P(\mathbf{w}|\alpha, M) = \frac{1}{Z_W(\alpha)} \exp(-\alpha E_W) \quad (6.38)$$

gde je $\alpha = \frac{1}{(2\sigma_w^2)}$, σ_w^2 predstavlja varijansu težina, E_w predstavlja sumu kvadrata težina, n predstavlja ukupan broj težina i pomeraja, a vrednost $Z_w(\alpha)$ jednaka je:

$$Z_w(\alpha) = (2\pi\sigma_w^2)^{n/2} = (\pi/\alpha)^{n/2}. \quad (6.39)$$

$P(D|\alpha, \beta, M)$ predstavlja normalizujuću konstantu koja osigurava da

$$\int P(\mathbf{w}|D, \alpha, \beta, M)dw = 1. \quad (6.40)$$

Uzimajući u obzir prethodne prepostavke možemo napisati izraz (6.35) za posteriornu raspodelu težina kod neuronske mreže na sledeći način:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{w}|D, \alpha, \beta, M) &= \frac{1}{Z_w(\alpha)} \frac{1}{Z_D(\beta)} \frac{\exp(-(\beta E_D + \alpha E_w))}{\text{Normalizujuća konstanta}} \\ &= \frac{1}{Z_F(\alpha, \beta)} \exp(-F(\mathbf{w})) \end{aligned} \quad (6.41)$$

gde je $Z_F(\alpha, \beta)$ funkcija α i β (ali ne i od w), a $F(w)$ predstavlja regularizovani kriterijum tačnosti mreže (6.41). Da bismo našli vrednost težina sa najvećom verovatnoćom potrebna nam je maksimalna posteriorna raspodela težina, odnosno potrebno je da maksimiziramo gore navedeni izraz za $P(\mathbf{w}|D, \alpha, \beta, M)$. To je ekvivalentno minimizaciji $F(w) = \beta E_D + \alpha E_w$.

Iz prethodnog dela možemo da izvučemo i zaključak o fizičkom značenju koji umaju parametri α i β . Parametar β je inverzno proporcionalan varijansi šuma ε_q . Ako je varijansa šuma velika, to znači da je vrednost β mala i regularizacioni odnos α / β će biti veliki. Velika vrednost odnosa α / β u postupku optimizacije (minizacije $F(w) = \beta E_D + \alpha E_w$) kao posledicu ima male vrednosti težina u mreži i funkciju koja je ravnija.

Parametar α je inverzno proporcionalan apriornoj raspodeli težina u neuronskoj mreži. Ako je njegova varijansa velika, onda to znači da postoji mala sigurnost u pogledu vrednosti težina. Parametar α će u tom slučaju da ima malu vrednost i regularizacioni odnos α / β imaće tada malu vrednost. To će u postupku optimizacije da dovede da težine imaju veće vrednosti što će omogućiti da funkcija koju modeliramo neuronskom mrežom ima više varijacija.

Da bismo odredili parametre α i β potrebno je da odredimo raspodelu $P(\alpha, \beta|D, M)$ odnosno da primenimo Bajesovo pravilo

$$P(\alpha, \beta|D, M) = \frac{P(D|\alpha, \beta, M)P(\alpha, \beta|M)}{P(D|M)} \quad (6.42)$$

Izraz (6.42) ima istu formu kao izraz (6.35). Ako se pretpostavi uniformna raspodela $P(\alpha, \beta|M)$ za parametre α i β , onda se problem maksimizacije $P(\alpha, \beta|D, M)$ svodi na problem maksimizacije izraza $P(D|\alpha, \beta, M)$. Ovaj izraz je već u prethodnoj analizi (u izrazu 6.35) definisan kao normalizujući koeficijent. Rešavanjem izraza (6.35) po normalizirajućem članu i uzimanjem u obzir prethodnih već izvedenih izraza (6.36) i (6.38) dobijamo :

$$P(D|\alpha, \beta, M) = \frac{P(D|w, \beta, M)P(w|\alpha, M)}{P(w|D, \alpha, \beta, M)} \quad (6.43)$$

odnosno

$$\begin{aligned} P(D|\alpha, \beta, M) &= \frac{\left[\frac{1}{Z_D(\beta)} \exp(-\beta E_D) \right] \left[\frac{1}{Z_W(\alpha)} \exp(-\alpha E_w) \right]}{P(w|D, \alpha, \beta, M)} \\ &= \frac{\left[\frac{1}{Z_D(\beta)} \exp(-\beta E_D) \right] \left[\frac{1}{Z_{W^*}(\alpha)} \exp(-\alpha E_w) \right]}{\frac{1}{Z_F(\alpha, \beta)} \exp(-F(w))} \\ &= \frac{Z_F(\alpha, \beta)}{Z_D(\beta)Z_{W^*}(\alpha)} \cdot \frac{\exp(-(\beta E_D + \alpha E_w))}{\exp(-F(w))} = \frac{Z_F(\alpha, \beta)}{Z_D(\beta)Z_{W^*}(\alpha)}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Vrednosti $Z_D(\beta)$ i $Z_W(\alpha)$ možemo da izračunamo koristeći prethodno definisane izraze (6.37) i (6.39). Vrednost $Z_F(\alpha, \beta)$ možemo da odredimo razvojem funkcije u Tejlorov red u okolini tačke minimalne vrednosti w^*

$$F(w) \approx F(w^*) + \frac{1}{2} (w - w^*)^T H^* (w - w^*) \quad (6.45)$$

gde je $H = \beta \nabla^2 E_D + \alpha \nabla^2 E_w$ Hesijan matrica $F(w)$, a H^* je matrica sračunata u tački w^* . Ako se ovaj izraz zameni u izraz (6.37) za posteriornu raspodelu dobijamo jednačinu:

$$P(\mathbf{w}|D, \alpha, \beta, M) \approx \frac{1}{Z_F} \exp \left[-F(\mathbf{w}^*) - \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)^T \mathbf{H}^* (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*) \right] \quad (6.46)$$

koja se može napisati u obliku

$$P(\mathbf{w}|D, \alpha, \beta, M) \approx \frac{1}{Z_F} \exp \{ -F(\mathbf{w}^*) \} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)^T \mathbf{H}^* (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*) \right]. \quad (6.47)$$

Ako uzmemo u obzir izraz za Gausovu raspodelu za više promenljiva

$$P(\mathbf{w}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{H}^*|^{-1}}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)^T \mathbf{H}^* (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*) \right) \quad (6.48)$$

i izjednačimo izraze (6.48) i (6.47) dobijamo

$$Z_F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \approx (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det(\mathbf{H}^*))^{\frac{1}{2}} \exp(-F(\mathbf{w}^*)). \quad (6.49)$$

Zamenom poslednjeg dobijenog izraza u izraz (6.41) možemo naći vrednosti parametara α i β u optimalnoj tački. Potrebno je da se ceo izraz zbog jednostavnosti logaritmuje i nađu izvodi i po parametru β i po parametru α . Izjednačavanjem tih izvoda sa nulom dobijamo izraze za vrednosti parametara α i β odnosno dobijamo sledeće izraze:

$$\alpha^* = \frac{\gamma}{2E_W(\mathbf{w}^*)} \quad (6.50)$$

$$\beta^* = \frac{N - \gamma}{2E_D(\mathbf{w}^*)} \quad (6.51)$$

gde je $\gamma = n - 2\alpha^* \text{trag}(\mathbf{H}^*)^{-1}$ i predstavlja takozvani efektivni broj parametara. Ukupan broj parametara u mreži je n . Vrednost efektivnog broja parametra koji koristi mreže može da bude u rasponu od nule do n .

Za primenu algoritma Bajesove regularizacije prilikom određivanja regularizacionih parametara neophodno je proračunati Hesijan matricu za $F(\mathbf{w})$ u tački minimuma \mathbf{w}^* . Za tu namenu može se koristiti Levenberg-Markard algoritam.

Kod određivanja regularizacionih parametara koristi se sledeća procedura [94]

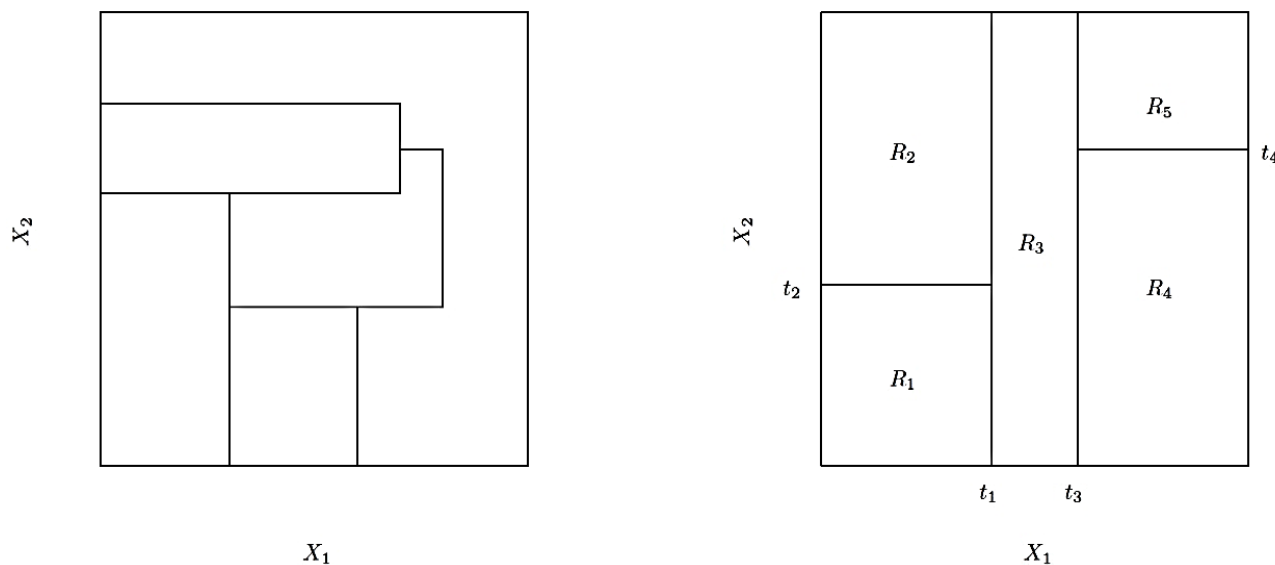
1. Usvajaju se početne vrednosti parametara α i β i početne težine u mreži. Kod usvajanja težina u mreži vrednosti koje se usvajaju mogu biti slučajne. Postavlja se vrednost za $\gamma = n$ i proračunavaju vrednosti parametara α i β korišćenjem izraza (6.50) i (6.51).
2. Primeni se jedan korak Levenberg-Markard algoritma pri čemu se kao kriterijumska funkcija za optimizaciju koristi $F(w) = \beta E_D + \alpha E_w$.
3. Proračunava se efektivan broj parametara $\gamma = n - 2\alpha^* \text{trag}(\mathbf{H}^*)^{-1}$, korišćenjem aproksimacije Hesijan matrice u okviru Levenberg-Markard algoritma $\mathbf{H} = \nabla^2 F(w) \approx 2\beta \mathbf{J}^T \mathbf{J} + 2\alpha \mathbf{I}_n$
4. Proračunavaju se nove vrednosti regularizacionih parametara $\alpha^* = \frac{\gamma}{2E_w(w^*)}$ i $\beta^* = \frac{N-\gamma}{2E_D(w^*)}$
5. Ponavljaju se koraci 2-4 do dostizanja konvergencije.

6.2 Metode zasnovane na stablima odlučivanja

U ovom delu će biti opisane metode zasnovane na stablima odlučivanja koje se mogu primeniti kod problema regresije. Metode zasnovane na stablima odlučivanja (eng. Classification And Regression Trees - CART) koriste segmentaciju prostora ulaznih promenljivih u vidu višedimenzionalnih pravougaonika odnosno tzv. boksova, a zatim primenjuju model gde se višedimenzionalnim pravougaonicima dodeljuje odgovarajuća vrednost.

U daljem delu je opisana CART metoda [97] koji se može primeniti i kod problema regresije, ali i kod problema klasifikacije. Razmotrimo slučaj problema regresije sa kontinualnom promenljivom izlaza Y i slučaj gde imamo samo dva ulaza koje ćemo označiti sa X_1 i X_2 . U konkretnom slučaju (Slika 6.9) možemo da izvršimo segmentaciju prostora ulaza linijama koje su paralelne koordinatnim osama, a zatim u svakom segmentu odnosno pravougaoniku moguće je da se vrednost izlazne promenljive Y modelira odgovarajućom konstantnom vrednošću.

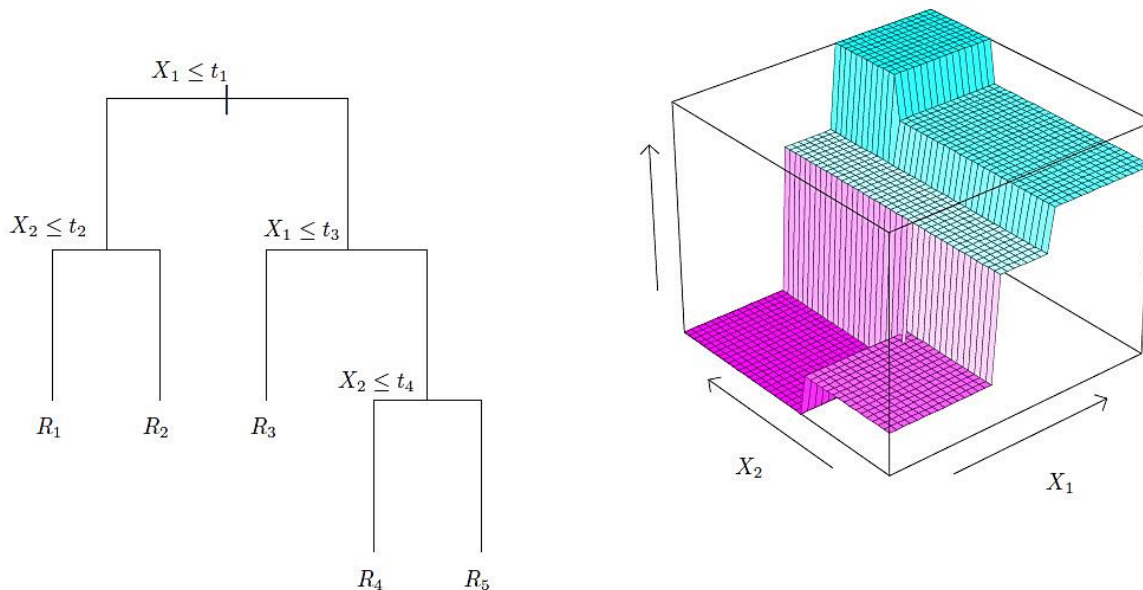
Linije kojima vršimo segmentiranje prostora imaju oblik $X_i = c$, sa napomenom da primenjujemo binarnu segmentaciju prostora.



Slika 6.9 Segmentiranje prostora ulaza [97]

Levi deo Slike 6.9 prikazuje proizvoljno segmentiranje dvodimenzionalnog ulaznog prostora, a desni deo primenu rekurzivnog binarnog segmentiranja. Binarna rekurzivna segmenacija (Slika 6.9 desno) podrazumeva da se u svakom koraku prostor ulaza deli na dva dela i taj se postupak segmentacije ponavlja, pri čemu rezultujuće oblasti odnosno regioni nemaju preklapanja i gde oni treba da pokriju čitav prostor prediktora odnosno ulaznih promenljivih. Kod binarne rekurzivne podele se prvo podeli prostor ulaza na dva regiona i modelira izlaz srednjom vrednošću Y u svakom od tih regiona. Zatim se ti regiona dele na sledeće regione binarnom podelom i proces nastavlja dok se ne zadovolji odgovarajući kriterijum zaustavljanja.

U konkretnom slučaju (Slika 6.10) je prvo pravom $X_1 = t_1$ izvršena podela na dve pravougaone oblasti i to oblast gde je $X_1 \leq t_1$ i oblast odnosno region gde je $X_1 > t_1$. Zatim je oblast gde je $X_1 \leq t_1$ podeljena sa $X_2 = t_2$ na dve podoblasti gde je $X_2 \leq t_2$ i gde je $X_2 > t_2$, a oblast $X_1 > t_1$ podeljena sa $X_1 = t_3$. Na kraju je oblast $X_1 > t_3$ podeljena pravom $X_2 = t_4$. Na ovaj način je izvršena segmentacija ulaznog prostora u pet oblasti R_1, R_2, R_3, R_4 i R_5 koje su prikazane na Slici 6.10 desno.



Slika 6.10 Segmentacija prostora na oblasti (regione) i 3D regresiona površ kod regresionog stabla [97]

Regresioni model u zavisnosti od vrednosti ulaznih promenljivih svakom od pomenutih regiona dodeljuje konstantnu vrednost c_m , koja je jednaka srednjoj vrednosti izlazne promenljive za taj region R_m odnosno u konkretnom slučaju

$$P\hat{f}(X) = \sum_{m=1}^5 c_m I\{(X_1, X_2) \in R_m\}, \quad (6.52)$$

gde $I\{(X_1, X_2) \in R_m\}$ predstavlja indikator funkciju koja ima vrednost jedan u slučaju tačne tvrdnje i nula u svim drugim slučajevima.

Model se može predstaviti binarnim stablom prikazanom na Slici 6.10 levo, gde na samom vrhu stabla polazimo od čitavog skupa podataka, a zatim se opservacije dele na svakom od čvorova u zavisnosti od toga da li zadovoljavaju ili ne konkretne uslove u tom čvoru. Završni čvorovi ili listovi stabla odgovaraju oblastima (regionima) R_1, R_2, R_3, R_4 i R_5 . U konkretnom (Slika 6.10 desno) slučaju koji smo prezentovali vrednosti u pojedinim regionima su sledeće $c_1 = -5, c_2 = -7, c_3 = 0, c_4 = 2, c_5 = 4$.

U slučaju višedimenzionalnih ulaznih promenljivih primenjuje se identičan postupak s time što se u tom slučaju radi o segmentaciji prostora u tzv. hiperboksive.

6.2.1 Postupak formiranja modela regresionog stabla

Neka se skup podataka sastoji od p vrednosti ulaza i jednog izlaza, za svaku od N opservacija odnosno (x_i, y_i) gde je $i = 1, 2, \dots, N$, a $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$. U okviru algoritma za formiranje stabla potrebno je odrediti promenljive (eng. splitting variables) na kojima će se vršiti račvanje i vrednost (eng. split points) na kojoj će se vršiti račvanje.

Pretpostavimo da smo izvršili segmentaciju prostora u M oblasti R_1, R_2, \dots, R_M . Model izlaza sa konstantnom vrednošću c_m za svaki region u ovom slučaju ima sledeći oblik

$$f(x) = \sum_{m=1}^M c_m I(x \in R_m). \quad (6.53)$$

Primenom kriterijuma minimizacije sume kvadrata $\sum(y_i - f(x_i))^2$ dobićemo da je optimalna vrednost \hat{c}_m srednja vrednost y_i za oblast R_m odnosno

$$\hat{c}_m = ave(y_i | x_i \in R_m). \quad (6.54)$$

- *ave* - srednja vrednost (eng.average)

Za određivanje tačke binarne segmentacije ulaznog prostora koristimo Greedy (srp. pohlepan) algoritam [98], [99]. Kod primene ovog algoritma se u svakom koraku njegove implementacije vodi računa samo o tome šta je najbolje u tom konkretnom koraku, ne vodeći računa o daljim koracima implementacije.

Polazeći od čitavog skupa podataka, razmotrimo promenljivu na kojoj će se izvršiti račvanje j , kao i vrednost odnosno tačku račvanja s i definišimo par polu-ravni

$$R_1(j, s) = \{X | X_j \leq s\} \text{ i } R_2(j, s) = \{X | X_j > s\}. \quad (6.55)$$

Potrebno je pronaći promenljivu j kao i vrednost tačke račvanja s koja će da zadovolji sledeći izraz

$$\min_{j,s} \left[\min_{c_1} \sum_{x_i \in R_1(j,s)} (y_i - c_1)^2 + \min_{c_2} \sum_{x_i \in R_2(j,s)} (y_i - c_2)^2 \right]. \quad (6.56)$$

Vrednost u uglastoj zagradi se minimizira usvajanjem srednje vrednosti y za oblast R_1 i srednje vrednosti y za oblast R_2 i nezavisna je od izbora promenljive na kojoj se vrši račvanje j i tačke račvanja s odnosno

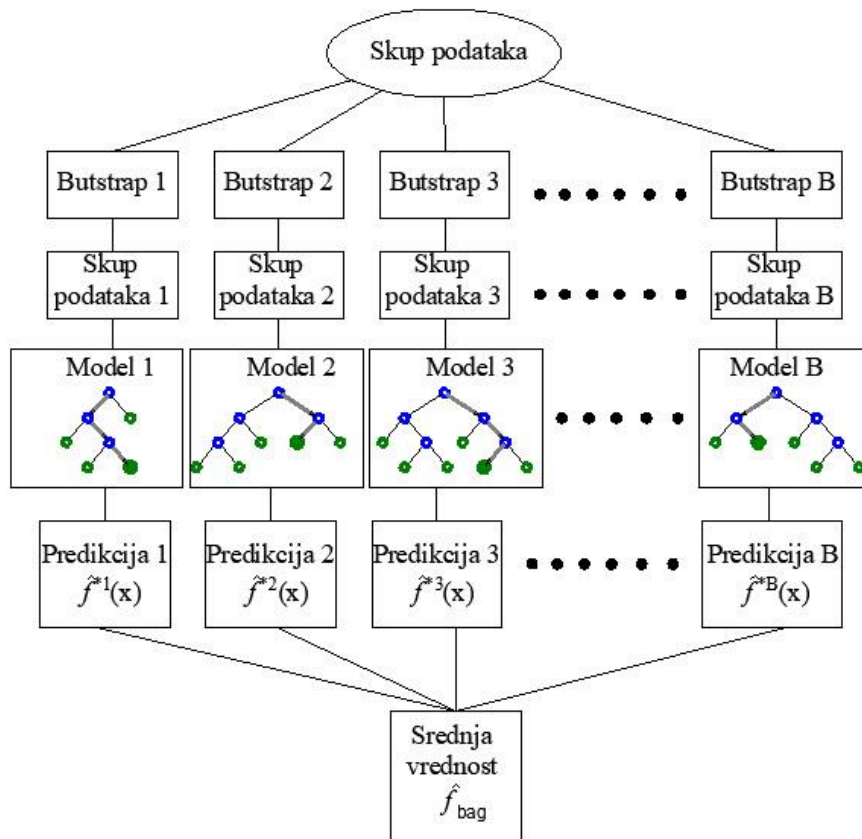
$$\hat{c}_1 = ave(y_i | x_i \in R_1(j, s)) \text{ i } \hat{c}_2 = ave(y_i | x_i \in R_2(j, s)). \quad (6.57)$$

Za svaku promenljivu račvanja, određivanje tačke račvanja se može se uraditi analizom svih ulaznih promenljivih u modelu. Nakon nalaženja najbolje tačke (kojoj odgovara minimalna vrednost izraza (6.57)), postupak nastavljamo daljim račvanjem tih oblasti.

6.2.2 Bagging metoda

Navedenim postupkom formiranja modela regresionog stabla postoji mogućnost da formirano regresiono stablo ima dobre performanse na trening skupu, ali lošu generalizaciju na test skupu podataka. Metoda Butstrap agregacije (eng. Bootsrap aggregation – Bagging) odnosno skraćeno Bagging predstavlja metodu koja nam može omogućiti da pomenuti problem prevaziđemo.

Neka je dat skup od n nezavisnih opservacija Z_1, Z_2, \dots, Z_n , svaki sa varijansom σ^2 , varijansa srednje vrednosti \bar{Z} opservacija će imati vrednost σ^2/n . Da bismo pomenuti postupak i praktično sproveli potrebno je da imamo više trening skupova kako bismo osrednjavanjem umanjili varijansu. Pomenuti problem generisanja većeg broja trening skupova može se prevazići butstrap metodom uzorkovanja odnosno ponavljanjem uzorkovanja u okviru istog (jednog) trening skupa podataka. Bagging metoda primenjuje uzorkovanje sa zamenom [16].



Slika 6.11 Primena Bagging metode kod regresionih stabala

Na ovaj način je moguće da se generiše B različitih butstrap trening skupova, na kojima možemo da obučavamo modele i tako dobijemo B različitih modela regresionih stabala. Ako model obučavan na b -tom butstrap trening skupu ima funkciju predikcije $\hat{f}^{*b}(x)$ u tački x , onda osrednjavanjem svih B modela dobijamo model čija će predikciona funkcija biti određena sledećim izrazom

$$\hat{f}_{bag}(x) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{f}^{*b}(x). \quad (6.58)$$

Broj modela u okviru ansambla obično se kreće od više stotina do više hiljada [97]. Na ovaj način dobijamo model ansambla čija će predikciona svojstva biti bolja ili najmanje jednaka osnovnom (baznom) modelu. Ovaj postupak osrednjavanja se primenjuje kod problema regresije, dok se analogan postupak može primeniti i kod problema klasifikacije, samo se umesto osrednjavanja primenjuje postupak gde je klasa određena većinom pojedinačnih modela ansambla (eng. majority vote), odnosno najučestalijom klasom od B predikcija.

Kod formiranih ansambala regresionih stabala butstrap agregacijom postoji neposredna mogućnost procene test greške modela. Kod formiranja ansambala butstrap metodom se na osnovu uzastopno generisanih podataka formiraju modeli regresionih stabala, pri čemu svako pojedinačno generisano stablo koristi oko $2/3$ opservacija.

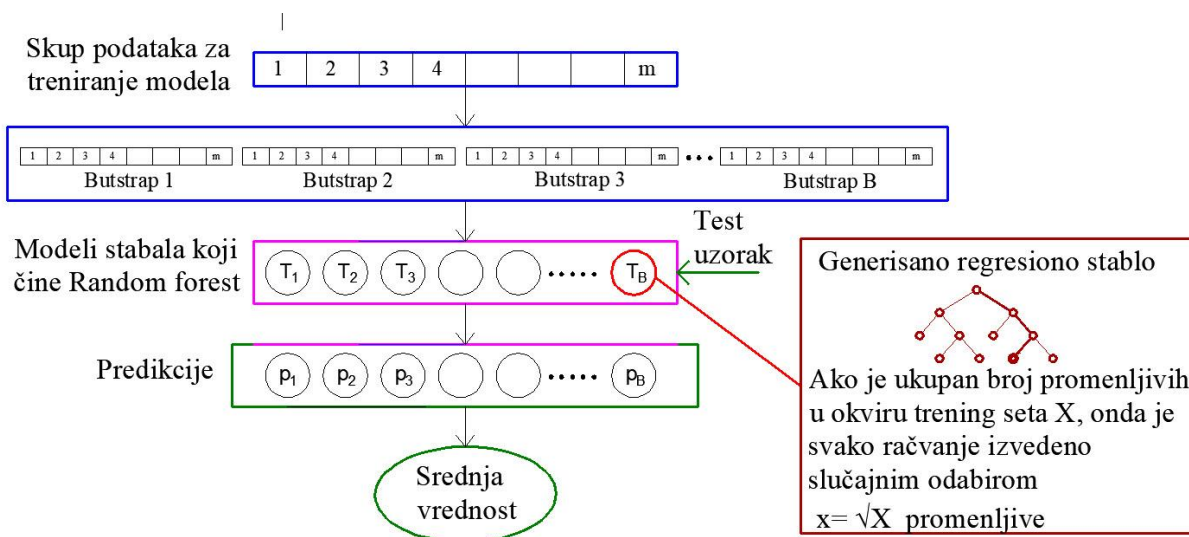
Preostala trećina opservacija koja se ne koristi za generisanje modela označava se OOB (eng. Out of Bag). Ove opservacije mogu se koristiti za testiranje modela. Moguće je uraditi predikciju za i -tu izlaznu promenljivu koristeći svako od stabala za koje je ta opservacija pripada skupu OOB. Na ovaj način dobijamo $B/3$ predikcija za i -tu opservaciju koju osrednjavamo. Osrednjena vrednost može se koristiti za ocenu generalizacionih svojstava modela.

6.2.3 Metoda Random Forests

Metoda Random Forests [100] je dosta slična Bagging metodi, zasniva se na regresionim stablima i segmentaciji ulaznog prostora u jednostavnije oblasti pomoću binarnog rekurzivnog segmentiranja. Kod formiranja stabla koristimo takođe Greedy algoritam i isti postupak određivanja promenljive na kojoj će se vršiti račvanje kao i tačke račvanja.

Random Forests metoda se razlikuje u tome što ne koristi sve promenljive u generisanju modela, odnosno što se u postupku generisanja ansambla nastoji da se formiraju regresiona stabla koja su dekorelisana, što dovodi do smanjenja varijanse kada se rezultati ansambla osrednjavaju odnosno kada nalazimo srednju vrednost za sva stabla u okviru ansambla.

Postupak formiranja različitih modela zasniva se na butstrap metodi pomoću koje formiramo veći broj trening setova za formiranje modela regresionih stabala, međutim, kada formiramo regresiona stabla (Slika 6.12) svaki put vršimo slučajjan izbor samo određenog podskupa promenljivih, umesto da koristimo sve dostupne promenljive odnosno ukupan broj promenljiva. Račvanja u modelu vršimo samo na ovim promenljivama.



Slika 6.12 Formiranje predikcionog modela metodom Random Forests

Pretpostavimo da podaci za trening sadrže jednu značajniju ulaznu promenljivu (prediktor) i nekoliko srednje značajnih ulaznih promenljiva odnosno prediktora. Prilikom generisanja nasumične “šume” većina regresionih stabala će koristiti upravo taj najznačajniji prediktor za grananje u vrhu stabla, što će za posledicu imati da većina stabala u “šumi” liči jedno na drugo. Te će regresiona stabla da budu visoko korelisana.

Osrednjavanje visoko korelisanih regresionih stabala ne dovodi do značajnog smanjenja varijanse, što umanjuje sposobnost generalizacije modela.

Random Forests algoritam umesto toga prilikom generisanja stabala ograničava izbor ulaznih promenljiva odnosno prediktora za svako grananje. Ako je p ukupan broj ulaznih promenljiva odnosno prediktora u podacima za trening, algoritam će prilikom biranja novog prediktora za grananje izbor suziti na $m = \sqrt{p}$, prediktora. Za svako grananje uzima se novi slučajni uzorak prediktora na razmatranje.

Upotrebom ukupnog broja ulaznih promenljiva dobija se model identičan modelu dobijenom Bagging metodom.

Tabela 6.2 Algoritam Random Forests metode kod regresionih stabala [97]

<p>1. Za vrednosti $b=1,2,\dots,B$ gde B predstavlja broj generisanih regresionih stabala</p> <ul style="list-style-type: none"> • Generisati butstrap uzorak veličine N iz skupa za treniranje • Generisati regresiono stablo T_b trenirano na butstrap uzorku, rekurzivno ponavljajući sledeće korake za svaki čvor u stablu • Izabrati m slučajnih promenljiva od p mogućih promenljiva • Pronaći najbolju promenljivu i vrednost podele odnosno tačku račvanja između m izabranih promenljiva • Podeliti čvor u levi i desni.
<p>2. Formirati skup stabala $\{T_b\}_1^B$</p>
<p>3. Prilikom predviđanja kod regresije koristiti osrednjavanje izlaza generisanih stabala</p> $\hat{f}_{RF}(x) = \sum_{b=1}^B T_b(x).$

Random Forests uzimanjem samo određenog broja ulaznih promenljiva odnosno prediktora omogućava slabijim prediktorima da više utiču na odgovor odnosno izlaznu promenljivu modela, smanjuje varijansu modela, ubrzava rad algoritma i povećava preciznost [100].

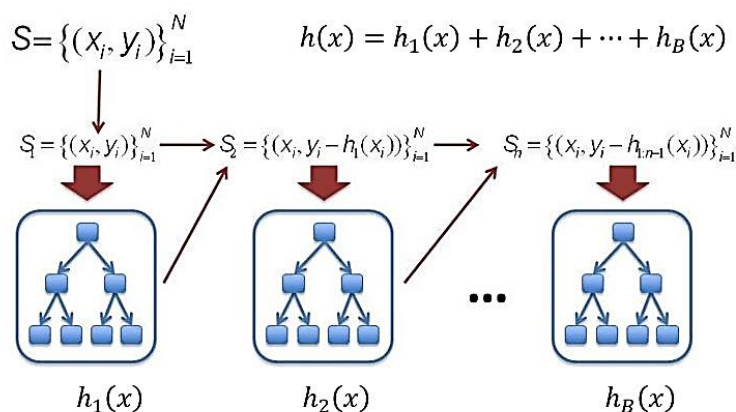
6.2.4 Metoda Boosting

Boosting metoda predstavlja jedan od opštih pristupa koji se može primeniti kako kod problema regresije, tako i kod problema klasifikacije. Ova metoda se zasniva na generisanju većeg broja regresionih stabala i predikciji koja se vrši na osnovu njih. Kod Boosting metode imamo

sekvencijalno treniranje modela, gde svako novo regresiono stablo koje se dodaje ansamblu ima funkciju da poboljša performanse prethodne kolekcije stabala.

U ovom delu rada biće obrađena primena Boosting metode kod regresionih stabala [101].

Kod primene Bagging metode smo generisali više kopija originalnog skupa podataka i formirali model regresionog stabla za svaku od tih kopija. Predikcija kod Bagging metode u stvari predstavlja srednju vrednost predikcije svih pojedinačnih modela.



Slika 6.13 Primena Gradient Boosting metode

Gradient Boosting metod (Slika 6.13) zasniva se na sličnom postupku generisanja modela, sa tom razlikom da se modeli generišu sekvencijalno, pri čemu svako stablo koje se generiše koristi informacije prethodno generisanih stabala.

Boosting metoda koristi iterativni postupak za minimizaciju kriterijumske funkcije kroz dodavanje novih submodela, koji u datoj iterativnoj fazi doprinose redukciji greške. Za slučaj kvadratne kriterijumske funkcije se u svakom sledećem koraku osnovnom modelu dodaju novi submodeli, koji na najbolji način estimiraju rezidualne prethodnog modela. Na ovaj način se dodavanjem modela kroz primenu iterativnog postupka dobija definitivan model, koji u stvari predstavlja ansambl prethodno dobijenih modela. Dodavanjem novih modela ojačavamo (eng.boost) polazni model, pa je metoda nazvana Boosting.

Kod Boosting metode u prvom koraku se formira regresiono stablo kojim se nastoje modelirati vrednosti izlazne promenljive. Između tog prvog modela regresionog stabla i vrednosti izlaza

postojaće izvesna razlika u vrednostima. U drugom koraku generiše se opet regresiono stablo kojim se nastoje modelirati reziduali između vrednosti izlazne promenljive i vrednosti koje nam daje prvi model. U sledećim koracima postupak se ponavlja te sledeće regresiono stablo modelira rezidualne prethodne kolekcije stabala, do dostizanja kriterijuma zaustavljanja modela.

Tabela 6.3 Opšti algoritam Boosting metode kod regresionih stabala [102]

1. Na početku uzmimo da je $\hat{f}(x) = 0$ i uzmimo da je $r_i = y_i$ za sve vrednosti x_i u okviru trening skupa podataka
2. Za vrednosti $b=1,2,\dots,B$ ponovimo sledeće korake:
2.1 Na osnovu trening skupa podataka (x,r) formirajmo regresiono stablo \hat{f}^b sa d račvanja
2.2 Ažurirajmo regresiono stablo \hat{f} dodavanjem redukovano modela novog stabla $\hat{f}(x) \leftarrow \hat{f}(x) + \lambda \hat{f}^b(x)$
2.3 Ažurirajmo vrednosti $r_i \leftarrow r_i - \lambda \hat{f}^b(x_i)$
3. Formirajmo izlazni Boosting model $\hat{f}_{boosted}(x) = \sum_{b=1}^B \lambda \hat{f}^b(x).$

Osnovna ideja metode je da se umesto kompleksnog modela regresionog stable, koje vrlo lako može da bude pretrenirano (eng. overfited), formiramo veći broj jednostavnijih stabala koje ćemo polako (zbog redukcije reziduala parametrom λ) da treniramo. Parametar redukcije $\lambda < 1$ usporava proces treniranja Boosting modela omogućavajući varijabilnost u obliku pojedinačnih stabala koje modeliraju rezidualne. Kod Boosting metode imamo sledeće parametre modela [97]:

1. Broj generisanih stabala B . Kod Boosting metode postoji mogućnost pretreniranja modela kod formiranja prevelikog broja stabala. Potreban broj stabala određujemo primenom unakrsne validacije.
2. Parametar redukcije λ treba da bude mala pozitivna vrednost. Ovaj parametar određuje brzinu treniranja modela. Uobičajene vrednosti su 0,01 i 0,001, a pravi izbor ovog parametra zavisi od konkretnog problema koji se razmatra. Male vrednosti parametra λ

imaju za posledicu da je potreban veliki broj stabala, odnosno vrednost B da bismo dobili zadovoljavajuće performanse modela.

3. Broj račvanja u stablu d . Broj račvanja služi za kontrolu kompleksnosti boosted modela. Vrlo često vrednost $d = 1$ odnosno račvanje samo po jednoj promenljivoj daje dobre rezultate. Vrednost d je zavisna od problema koji se razmatra i vrednost određujemo primenom unakrsne validacije.

U ovom istraživanju je korišćena Gradient Boosting metoda (eng. Gradient Boosting Method - GBM) koja se zasniva na kombinaciji metode najvećeg pada (eng. Gradient Descent) i Boosting metode [97].

U slučaju kada x predstavlja vektor, kod metode najvećeg pada minimizacija funkcije $f(x)$, odnosno pretraživanje optimalnog rešenja vršimo u pravcu suprotnom od pravca gradijenta odnosno koristimo sledeći izraz za i -tu iteraciju j -te dimenzije vektora

$$x_j^{(i)} = x_j^{(i-1)} - \eta \frac{\partial f(x^{(i-1)})}{\partial x_j^{(i-1)}} \quad (6.59)$$

gde η predstavlja korak pretraživanja.

U svakoj iteraciji ažuriramo sve dimenzije vektora x , te se na taj način iterativno približavamo minimumu funkcije $f(x)$ u odnosu na funkciju $h(x)$. Kod GBM je potrebno da se minimizira funkcija

$$f(x) = \sum_{i=1}^N L(y_i, h(x_i)) \quad (6.60)$$

odnosno da se minimizira greška za sve uzorke (x_i, y_i) odnosno sve podatke u okviru skupa podataka. Ukupan broj podataka u skupu podataka iznosi N . Na taj način dobijamo funkciju $h(x)$ koja će na najbolji način aproksimirati funkciju koju želimo da odredimo na osnovu ulaznih podataka. Koristi se funkcija greške koja mora biti diferencijabilna. U ovom istraživanju je korišćena kvadratna funkcija greške koja je definisana sledećim izrazom

$$L = \frac{1}{2} (y_i - h(x_i))^2 \quad (6.61)$$

gde je sa $h(x)$ označena funkcija predikcije koju želimo da odredimo.

Slično kao i kod metode najvećeg pada možemo primeniti iterativni obrazac u postupku pronalaženja najbolje funkcije aproksimacije za zadati skup podataka

$$h^{(i)} = h^{(i-1)} - \eta \frac{\partial L(y_j, h^{(i-1)}(x_j))}{\partial h^{(i-1)}(x_j)}. \quad (6.62)$$

Kod primene kvadratne funkcije greške izvod funkcije greške po nepoznatoj funkciji h jednak je negativnoj vrednosti reziduala

$$r_{ji} = \frac{\partial L(y_j, h^{(i-1)}(x_j))}{\partial h^{(i-1)}(x_j)} = - (y_j - h^{(i-1)}(x_j)). \quad (6.63)$$

Na ovaj način možemo dobiti vrednost r_{ji} za svaku tačku j . Primenom ovog postupka dobijamo skup parova (x_j, r_{ji}) . Ovaj skup podataka koristimo kao trening skup da bismo konstruisali regresiono stablo koje vrši predikciju r_{ji} za zadatu vrednost x_j , odnosno regresionim stablom aproksimiramo negativnu vrednost funkcije gradijenta. Ponavljanjem ovog postupka možemo dobiti brojna regresiona stabla, čijim sumiranjem dobijamo izlazni model.

6.3 Metoda potpornih vektora kod problema regresije

6.3.1 Linearna regresija metodom potpornih vektora

Osnovna ideja metode potpornih vektora (eng. Support Vector Machines - SVM) jeste transformacija prostora ulaza odnosno inputa i primena linearnog modela u novom transformisanom prostoru. Transformacija se sprovodi korišćenjem kernel funkcija implicitno. Metoda SVM može se uz izvesna prilagođavanja koristiti za probleme regresije odnosno aproksimacije vrednosti funkcija [103]. Vrednosti izlaza y_i modela kod SVR metode su realne vrednosti. Problem se može postaviti na sledeći način.

Neka je dat skup podataka za obuku l na osnovu kojih nastojimo da odredimo ulazno-izlaznu zavisnost odnosno preslikavanje f . Skup podataka za treniranje $D = \{[x(i)], y(i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, i = 1, \dots, l\}$ sastoji se od l parova $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_l, y_l)$ gde su ulazi x (eng. inputs) n –dimenzionalni vektori $x \in \mathbb{R}^n$, a odgovori sistema $y \in \mathbb{R}$ kontinualne vrednosti.

Metodom SVM analizira se funkcija aproksimacije koja ima sledeći oblik

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (6.64)$$

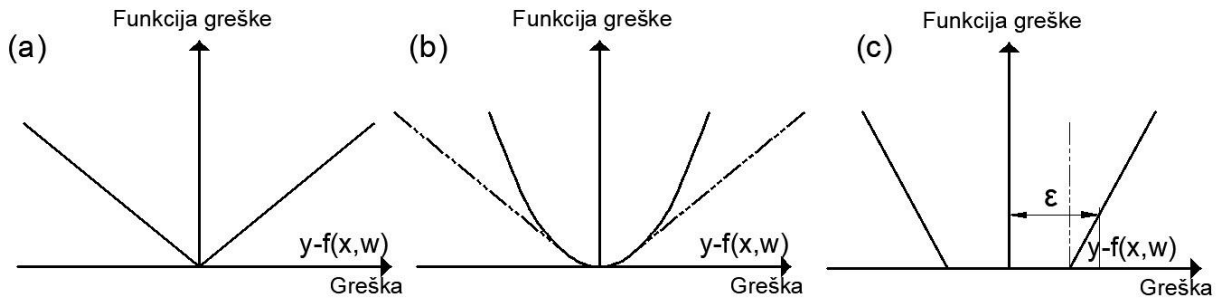
gde funkcije $\varphi_i(x)$ nazivamo atributima. Vrednost bias b nije prikazana eksplicitno, već je uključena u vrednost u vektor težina w . Funkcija $f(x, w)$ je napisana u formi funkcije težina koje je potrebno da se odrede. Ova jednačina predstavlja nelinearni regresioni model, zato što je rezultujuća hiperpovrš nelinearna površ u n dimenzionalnom x prostoru.

Metodu SVR možemo objasniti prvo razmatranjem linearne regresije

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b. \quad (6.65)$$

Kod problema regresije se uvodi tzv. greška aproksimacije pri čemu se koriste različite funkcije greške koje dovode do drugačijeg krajnjeg modela. Dve uobičajene funkcije greške su apsolutna greška (L_1 norma, $|y - f|$), kvadratna greška (L_2 norma, $(y - f)^2$). Pored ovih funkcija greške

koristi se i Vapnikova linearna funkcija greške [104] sa ε –zonom neosetljivosti (eng. *loss function with ε –insensitivity zone*).



Slika 6.14 Različite funkcije greške kod SVR algoritma: a) Absolutna greška (L1 norm), b) Kvadratna (L2 norm) i Huberova greška (isprekidano), c) Vapnikova linearna funkcija greške sa ε –zonom neosetljivosti [18]

Vapnikova linearna funkcija greške definisana je sledećim izrazom [104]:

$$|y - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})|_{\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } |y - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})| \leq \varepsilon \\ |y - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})| - \varepsilon & \text{u drugim slučajevima.} \end{cases} \quad (6.66)$$

Greška je jednaka nuli ako je razlika vrednosti predviđanja $f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ i zapažene vrednosti manja od ε . Vapnikova funkcija greške se može definisati kao ε cilindar ili cev. Ako su vrednosti predikcije unutar cevi, greška je jednaka nuli. Za sve druge vrednosti predikcije izvan cevi, greška je jednaka veličini razlike između vrednosti predikcije i prečnika ε cevi. Na Slici 6.15 je prikazan problem linearne regresije sa relevantnim elementima za određivanje nepoznatih koeficijenata w_i .

Formulisaćemo prvo algoritam za linearni slučaj. Da bismo primenili SVR regresiju uvešćemo funkciju empirijskog rizika:

$$R_{emp}^{\varepsilon}(\mathbf{w}, b) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l |y_i - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b|_{\varepsilon} \quad (6.67)$$

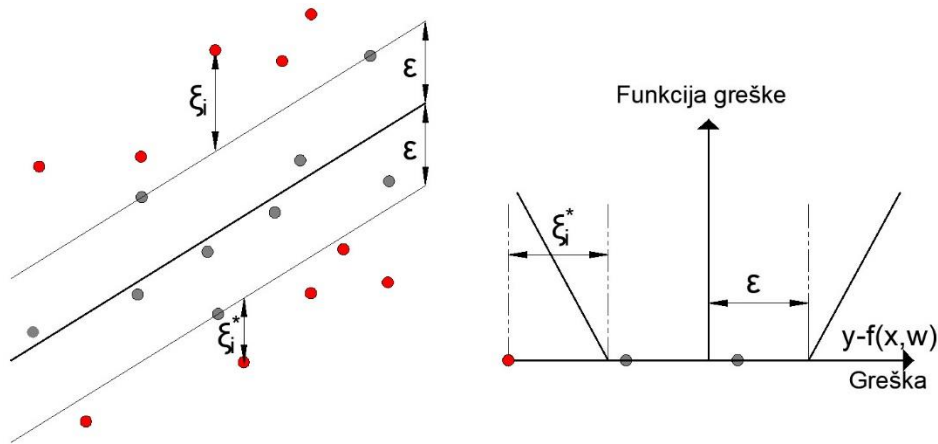
Kod SV algoritma za problem regresije (SVR), cilj je da se minimizira empirijski rizik R_{emp}^{ε} kao i $\|\mathbf{w}\|^2$ vrednost istovremeno. Znači, da bismo odredili hiperravan $f(x, w) = w^T x + b$ kod linearne regresije potrebno je minimizirati

$$R = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^l |y_i - f(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})|_{\varepsilon} \quad (6.68)$$

Na osnovu izraza (6.66) i Slike 6.15 proizilazi da za sve trening podatke koji se nalaze izvan ε cevi

$$|y - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})| - \varepsilon = \xi \text{ za podatke koji se nalaze „iznad“ } \varepsilon \text{ cevi} \quad (6.69)$$

$$|y - f(\mathbf{x}, \mathbf{w})| - \varepsilon = \xi^* \text{ za podatke koji se nalaze „ispod“ } \varepsilon \text{ cevi}$$



Slika 6.15 Primena metode potpornih vektora (SVR) kod linearne regresije

Minimizacija R u izrazu (6.68) je ekvivalentni minimizaciji

$$R_{w,\xi,\xi^*} = \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{w}\|^2 + C \left(\sum_{i=1}^l \xi + \sum_{i=1}^l \xi^* \right) \right], \quad (6.70)$$

sa ograničenjima

$$y_i - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b \leq \varepsilon + \xi, \quad i = 1, l, \quad (6.71)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b - y_i \leq \varepsilon + \xi^*, \quad i = 1, l, \quad (6.72)$$

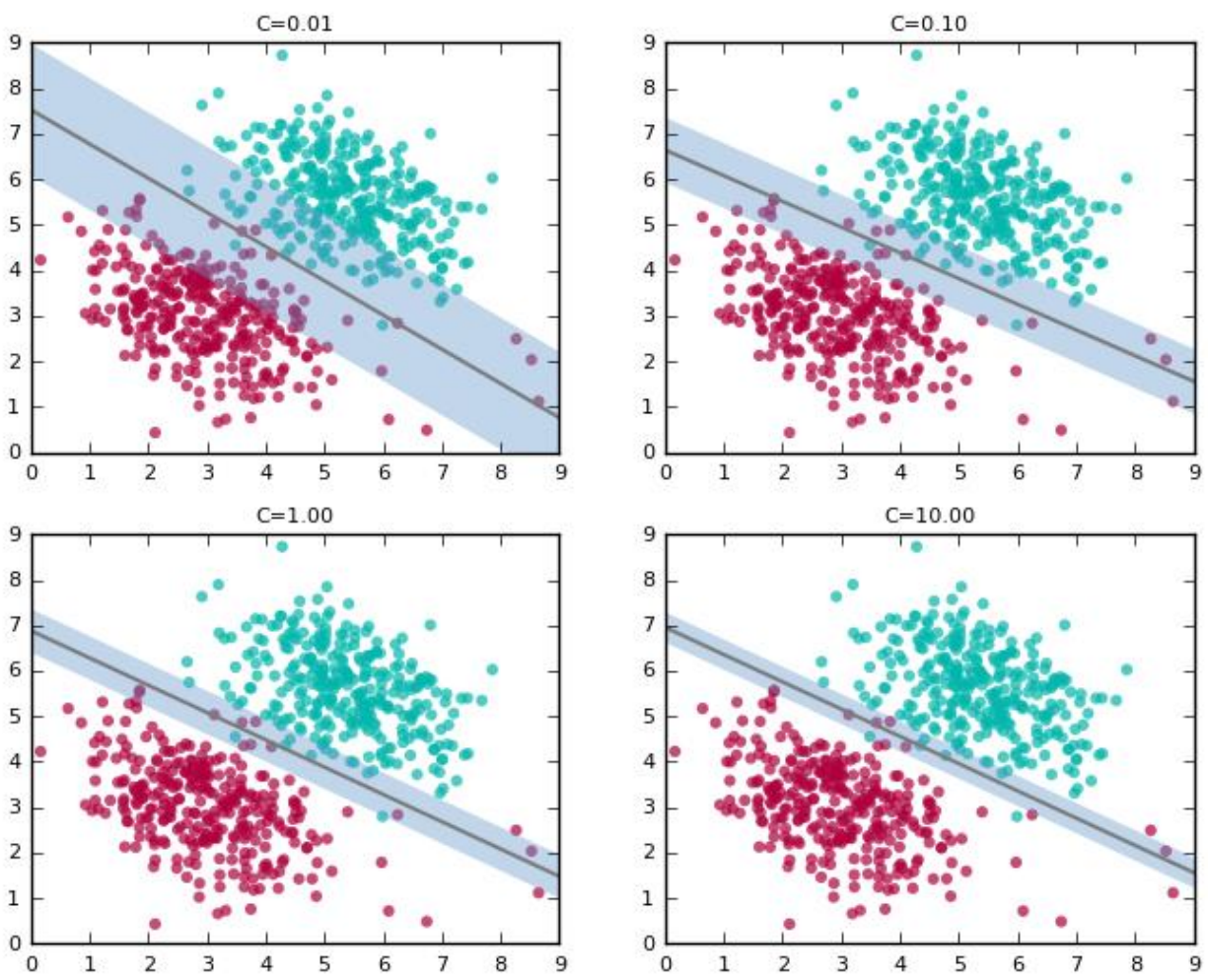
$$\xi \geq 0, \quad i = 1, l, \quad (6.73)$$

$$\xi^* \geq 0, \quad i = 1, l, \quad (6.74)$$

gde su ξ i ξ^* izravnavajuće promenljive, koje su prikazane na Slici 6.15 i služe za određivanja rastojanja iznad i spod ε cevi. Vrednosti ξ i ξ^* su analogne funkciji greške kod tzv. meke margine kod problema klasifikacije [105]. Obe uzravnavajuće promenljive su pozitivne vrednosti.

Lagranžovi multiplikatori α_i i α_i^* odgovaraju promenljivama ξ i ξ^* i biće različiti od nule za trening podatke „iznad“ i „ispod“ ε cevi.

Pošto se podaci ne mogu nalaziti sa obe strane cevi, jedno od α_i ili α_i^* će biti različito od nule. Za podatke koji se nalaze unutar cevi oba multiplikatora će biti jednaka nuli. Konstanta C koja se usvaja ima ulogu balansiranja između greške aproksimacije i norme vektora težina $\|w\|$. Veće vrednosti C kažnjavaju veće vrednosti grešaka, odnosno veće vrednosti promenljivih ξ i ξ^* . Vrednost ε koja definiše prečnik cevi, takođe se usvaja.



Slika 6.16 Uticaj parametra C na svojstva modela kod metode potpornih vektora

Na Slici 6.16 je prikazan uticaj vrednosti C na veličinu greške kod analognog problema klasifikacije, gde sa povećanjem vrednosti C imamo sve tačniju predikciju, međutim, to dovodi do

zmanjivanja širine margine, tako da možemo zmanjiti sposobnost generalizacije modela. Upotrebom unakrsne validacije mogu se odrediti parametri modela.

Ovaj problem predstavlja problem optimizacije sa ograničenjima i rešava se uvođenjem Lagranžiana primalnih promenljivih

$$\begin{aligned}
 L_p(\mathbf{w}, b, \xi, \xi^*, \alpha_i, \alpha_i^*, \beta_i, \beta_i^*) = & \\
 = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} + C \left(\sum_{i=1}^l \xi_i + \sum_{i=1}^l \xi_i^* \right) + \sum_{i=1}^l \alpha_i^* [y_i - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b + \varepsilon + \xi_i^*] & \quad (6.75) \\
 + \sum_{i=1}^l \alpha_i [\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b - y_i + \varepsilon + \xi_i] - \sum_{i=1}^l (\beta_i \xi_i^* + \beta_i \xi_i). &
 \end{aligned}$$

Lagranžian $L_p(w_i, b, \xi, \xi^*, \alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*)$ je potrebno minimizirati u odnosu na primalne varijable $\mathbf{w}, b, \xi, \xi^*$ i maksimizirati u pogledu nenegativnih Lagranžovih multiplikatora $\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*$. Parcijalni izvodi L_p u odnosu na primalne promenljive (w, b, ξ, ξ^*) potrebno je da budu jednaki nuli, odakle dobijamo [19]

$$\partial_b L = \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0 \quad (6.76)$$

$$\partial_w L = \mathbf{w} - \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \alpha_i^*) \mathbf{x}_i = 0 \quad (6.77)$$

$$\partial_\xi L = C - \alpha_i - \beta_i = 0 \quad (6.78)$$

$$\partial_{\xi^*} L = C - \alpha_i^* - \beta_i^* = 0 \quad (6.79)$$

Zamenom poslednja četiri izraza u izraz za Lagranžian (6.75) dobijamo dualni optimizacioni problem

$$\begin{aligned}
 L_d(\alpha, \alpha^*) = -\varepsilon \sum_{i=1}^l (\alpha_i^* + \alpha_i) + \sum_{i=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) y_i & \quad (6.80) \\
 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) (\alpha_i^* - \alpha_j) \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j &
 \end{aligned}$$

sa ograničenjima

$$\sum_{i=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) = 0 \quad (6.81)$$

$$0 \leq \alpha_i^* \leq C, \quad i = 1, l, \quad (6.82)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq C, \quad i = 1, l. \quad (6.83)$$

U poslednja dva izraza (6.82) i (6.83) eliminisane su dualne promenljive β_i i β_i^* uzimajući izraz (6.78) i izraz (6.79) gde su one izražene kao $\beta_i = C - \alpha_i$ odnosno $\beta_i^* = C - \alpha_i^*$, pa je Lagranžian je izražen samo preko Lagranžovih multiplikatora α i α^* . Nepoznato je $2l$ multiplikatora kod linearne regresije.

Kao rezultat dobijamo Lagranžove multiplikatore u vidu parova (α_i, α_i^*) pomoću kojih nalazimo optimalne vrednosti vektora težina kao

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) \mathbf{x}_i, \quad (6.84)$$

kao i optimalnu vrednost za bias b_0

$$b_0 = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{w}_0). \quad (6.85)$$

Dobijamo da je optimalna hiperravan

$$z = f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b = \sum_{i=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) \mathbf{x}_i^T \mathbf{x} + b. \quad (6.86)$$

Iz poslednjeg izraza (6.86) možemo videti da kada izračunamo vrednosti α_i^* i α_i da bismo napravili predikciju, potrebno je da izračunamo vrednost koja zavisi samo skalarnog proizvoda između vrednosti \mathbf{x} i tačaka u trening skupu. Vrednosti α_i^* i α_i će biti jednake nuli kod svih slučajeva osim kod potpornih vektora, tako da će pojedini sabirci u gornjem izrazu za sumu biti jednaki nuli.

6.3.2 Nelinearna regresija metodom potpornih vektora

Analizom dualne forme izraza za slučaj linearnog modela možemo da vidimo da ceo algoritam zavisi od skalarnog proizvoda vektora. Međutim, u mnogim slučajevima postoji nepoznata nelinearna funkcija koju je potrebno da odredimo na osnovu podataka. Podaci često mogu da sadrže takozvane netipične vrednosti (eng.outliers) što može značajno da utiče na tačnost modela. Da bismo prilagodili algoritam i za nelinearne modele kao i umanjili osetljivost modela na izuzetke možemo ulazni prostor problema da preslikamo u novi prostor više dimenzije.

Da bismo formirali SVM model u nelinearnom slučaju potrebno je da preslikamo ulazne vektore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ u vektore \mathbf{z} novog višedimenzionalnog prostora F ($\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$, gde Φ predstavlja preslikavanje $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^f$) i da rešimo problem u ovom novom prostoru

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{z}(\mathbf{x}) = [a_1\varphi_1(\mathbf{x}), a_2\varphi_2(\mathbf{x}), \dots, a_n\varphi_n(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^f. \quad (6.87)$$

Ulazni prostor (x-prostor) ima x_i komponenta ulaznog vektora \mathbf{x} , a novi prostor F (z-prostor) ima komponente $\varphi_i(\mathbf{x})$ vektora \mathbf{z} . Postupak transformisanja ulaznog \mathbf{x} prostora u novi transformisani \mathbf{z} prostor ilustrovaćemo na primeru vektora koji ima tri koordinate ulaznog prostora, a koji se transformiše u prostor sa devet dimenzija odnosno

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1 \ x_2 \ x_3] \\ \mathbf{z} &= [\varphi_1(\mathbf{x}) \ \varphi_2(\mathbf{x}) \ \varphi_3(\mathbf{x}) \ \varphi_4(\mathbf{x}) \ \varphi_5(\mathbf{x}) \ \varphi_6(\mathbf{x}) \ \varphi_7(\mathbf{x}) \ \varphi_8(\mathbf{x}) \ \varphi_9(\mathbf{x})]^T \in \mathbb{R}^9, \end{aligned}$$

gde je $\varphi_i(\mathbf{x})$ dato kao

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{x}) &= x_1, \quad \varphi_2(\mathbf{x}) = x_2, \quad \varphi_3(\mathbf{x}) = x_3, \quad \varphi_4(\mathbf{x}) = (x_1)^2, \quad \varphi_5(\mathbf{x}) = (x_2)^2, \quad \varphi_6(\mathbf{x}) = (x_3)^2, \\ \varphi_7(\mathbf{x}) &= x_1 x_2, \quad \varphi_8(\mathbf{x}) = x_1 x_3, \quad \varphi_9(\mathbf{x}) = x_2 x_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_5 \ w_6 \ w_7 \ w_8 \ w_9] \\ &\times [x_1 \ x_2 \ x_3 \ (x_1)^2 \ (x_2)^2 \ (x_3)^2 \ x_1 x_2 \ x_1 x_3 \ x_2 x_3]^T + b \\ &= w_1 x_1 \ w_2 x_2 \ w_3 x_3 \ w_4 (x_1)^2 \ w_5 (x_2)^2 \ w_6 (x_3)^2 \ w_7 x_1 x_2 \ w_8 x_1 x_3 \ w_9 x_2 x_3 + b. \end{aligned}$$

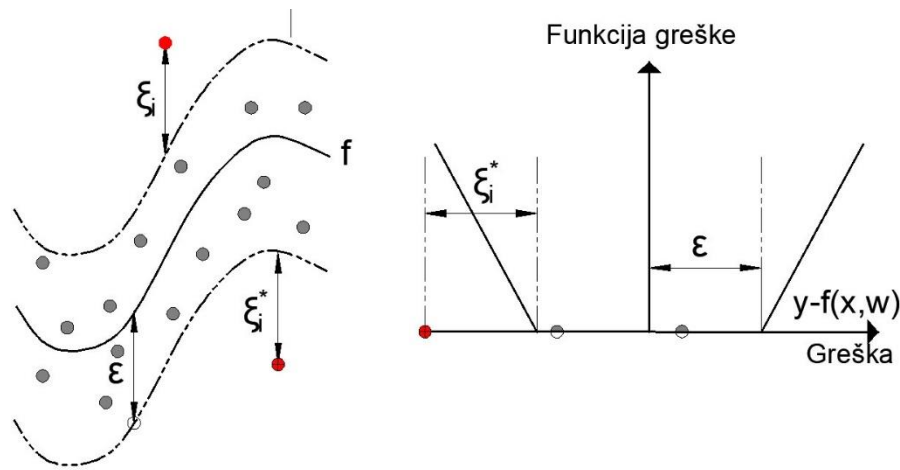
Linearna hiperravan u novom prostoru F odgovara nelinearnoj hiperpovršini u ulaznom prostoru. Međutim, korišćenjem transformacije u vidu polinoma drugog stepena dimenzionalnost novog prostora postaje $f = \frac{n(n+3)}{2}$, gde je n dimenzionalnost ulaznog prostora.

Kod realnih problema gde je dimenzionalnost ulaznog prostora znatno veća, kao i stepen polinoma (kada koristimo transformaciju polinomom odgovarajućeg reda) to dovodi do visoke dimenzionalnosti u transformisanom prostoru z te je teško odrediti $\Phi(\mathbf{x})$. Pošto se u algoritmu ulazni podaci javljaju u vidu skalarnog proizvoda čija je forma $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$ potrebno je da se u izrazima on zameni sa

$$\mathbf{z}^T \mathbf{z}_i = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x})] [\varphi_1(x_i), \varphi_2(x_i), \dots, \varphi_n(x_i)]^T, \quad (6.88)$$

što ćemo nazvati kernel funkcijom i primeniti postupak za linearni model. Na ovaj način se možemo formirati model bez eksplicitnog poznavanja funkcije $\Phi(\mathbf{x})$. Postoji veliki broj kernel funkcija koje se mogu primeniti kod transformacije ulaznog prostora, pri čemu je neophodne da one zadovolje uslove Mercera [18], [19], [106](eng. Mercer conditions).

Neka je data funkcija $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{x})^T \Phi(\mathbf{z})$. $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ je validan kernel, odnosno postoji φ tako da je $K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{x})^T \Phi(\mathbf{z})$, ako i samo ako za bilo koji skup $\{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\}$, ($m < \infty$), je odgovarajuća matrica kernela simetrična i pozitivno semidefinitna. Važi i suprotno [106].



Slika 6.17 Primena metode potpornih vektora kod nelinearne regresije [76]

U slučaju nelinearne regresije (Slika 6.17) možemo da iskoristimo izraze za linearnu regresiju tako što ćemo skalarni proizvod $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$ zameniti sa $\mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \Phi(\mathbf{x}_i)^T \Phi(\mathbf{x}_j)$, tako da možemo da reformulišemo SVR optimizacioni problem kao:

$$\max \left\{ -\varepsilon \sum_{i=1}^l (\alpha_i^* + \alpha_i) + \sum_{i=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) y_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) (\alpha_i^* - \alpha_j) \mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right. \quad (6.89)$$

sa ograničenjima

$$\sum_{i=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) = 0 \quad (6.90)$$

$$0 \leq \alpha_i^* \leq C, \quad i = 1, l, \quad (6.91)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq C, \quad i = 1, l, \quad (6.92)$$

Slično izrazima kod linearne regresije dobijamo

$$w = \sum_{i=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) \Phi(x_i), \quad (6.93)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^l (\alpha_i^* - \alpha_i) \mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b. \quad (6.94)$$

Upotrebom kernela \mathbf{K} nije potrebno eksplicitno određivanje funkcije preslikavanja Φ čije određivanje zbog dimenzionalnosti problema može biti računski jako zahtevno. Optimalno rešenje dobija se kao linearna kombinacija podskupa vektora trening podataka. Upotreba tzv. kernel trika omogućava nam da izvršimo treniranje nelinearnih modela korišćenjem u suštini iste tehnike kao za linearne modele. Postupak formiranja modela metodom potpornih vektora kod nelinearne regresije ima strukturu koja je prikazana na Slici 6.18.

U matričnom obliku problem se može formulisati kao [18]:

Maksimizirati

$$L_d(\alpha) = -0,5\alpha^T H \alpha + f^T \alpha \quad (6.95)$$

Sa ograničenjima

$$\sum_{i=1}^l (\alpha_i^*) = \sum_{i=1}^l (\alpha_i) \quad (6.96)$$

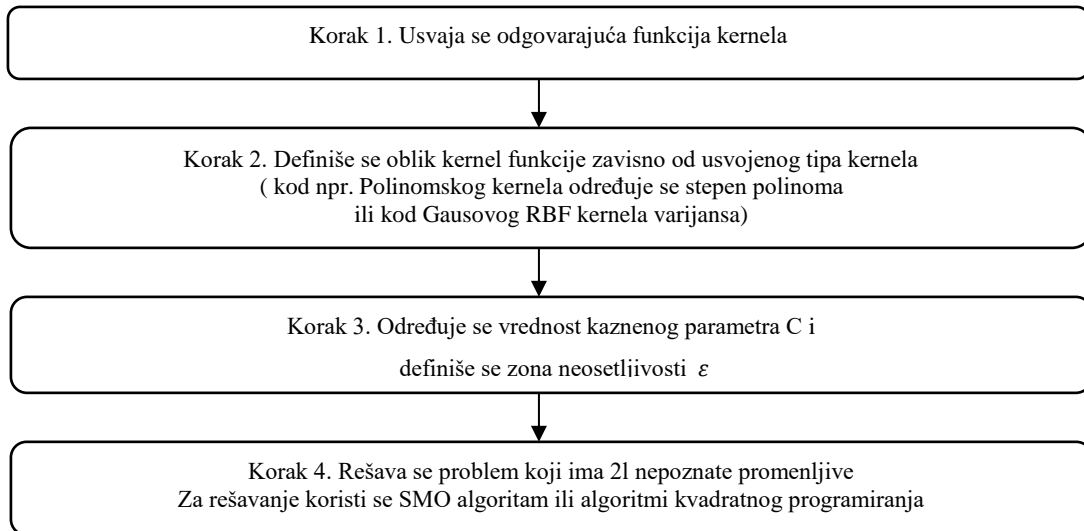
$$0 \leq \alpha_i^* \leq C, \quad i = 1, l,$$

$$0 \leq \alpha_i \leq C, \quad i = 1, l,$$

H predstavlja matricu sastavljenu od odgovarajućih kernel matrica $G(x_k, x_i)$ odnosno

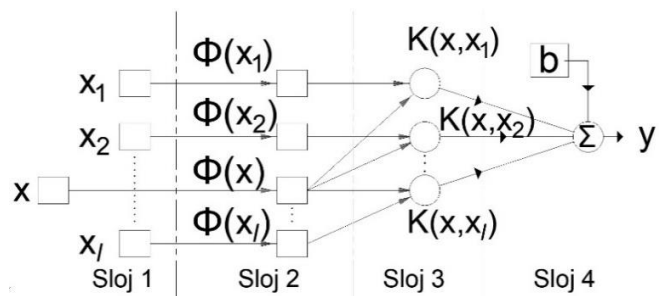
$$H = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix}, \quad (6.97)$$

f predstavlja vektor $f = [\varepsilon - y_1, \varepsilon - y_2, \dots, \varepsilon - y_N, \varepsilon + y_1, \varepsilon + y_2, \dots, \varepsilon + y_N]$.



Slika 6.18 Formiranje modela metodom potpornih vektora kod nelinearne regresije

Zbog veličine matrice H umesto rešavanja problema kvadratnim programiranjem koristi se pristup dekompozicije, gde se umesto pronalaženja svih parametara α optimizacija svodi na pronalaženje samo para ovih vrednosti odnosno samo dve vrednosti α . Problem optimizacije sa dva parametra može se analitički rešiti. Nakon toga se postupak ponavlja sa drugim parovima sve do dostizanja odgovarajuće tačnosti. Ovaj algoritam je poznat pod nazivom sekvencijalna minimalna optimizacija (Sequential Minimal Optimization – SMO) ili kao Platov algoritam [106], [107]. U ovom radu je korišćen je softver LIBSVM sa SMO algoritmom za optimizaciju [108], [109], [110]. Softver LIBSVM je korišćen u okviru programa MATLAB [111].



Slika 6.19 Arhitektura za treniranje regresionog modela pomoću metode potpornih vektora [76]

Na Slici 6.19 je dat grafički prikaz strukture SVR modela koji možemo da primenimo kod nelinearnih modela. U prvom sloju prikazani su trening uzorci, koji se u drugom sloju preslikavaju u transformisani prostor pomoću funkcije Φ drugog sloja. U trećem sloju se računaju skalarni proizvodi koji odgovaraju kernel funkcijama $\mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$. Na kraju se skalarni proizvodi multiplicirani sa težinama $w_i = \alpha_i^* - \alpha_i$ sabiraju i dodaje vrednost b što daje vrednost predikcije za test vektor \mathbf{x} . Za razliku od modela neuronskih mreža čiju arhitekturu treba odrediti (broj slojeva neurona, broj neurona u svakom sloju) kod SVR modela to nije potrebno. Takođe, kod SVR metode ne postoji problem lokalnih minimuma koji je prisutan kod neuronskih mreža.

6.4 Gausov regresioni proces

Gausove regresione procese možemo primeniti kod problema regresije i kod problema klasifikacije. Kod regresije se problem svodi na predikciju kontinualne vrednosti, dok kod klasifikacije se bavimo predikcijom diskretnih vrednosti klasa. Postoji više načina interpretacije Gausovog procesa (GP) kod regresionih modela. Gausov process se može definisati preko distribucije funkcija i zaključivanja direktno u prostoru funkcija što predstavlja *pristup u prostoru funkcija* (eng. function-space view) . Pored ovog pristupa, postoji ekvivalentni *pristup u prostoru koeficijenata* (eng. weight-space view).

6.4.1 Pristup u prostoru koeficijenata

Linearni regresioni modeli gde je izlaz iz modela linearna kombinacija ulaza u model dosta se često koriste i detaljno su analizirani. Prednost ovakvih modela ogleda se u njihovoj jednostavnosti za implementaciju i njihovoj interpretabilnosti. Međutim, njihov veliki nedostatak je njihova ograničena fleksibilnost, kada se relacija između ulaza i izlaza ne može aproksimirati linearnom funkcijom, što dovodi do nepreciznih predikcija modela [21].

Neka raspoložemo trening skupom D od n opservacija, $D = \{(x_i, y_i) | i = 1, \dots, n\}$, gde x označava ulazni vektor dimenzije D , a y označava skalarni izlaz ili ciljanu (target) vrednost (zavisna promenljiva). Vektori kolona ulaza za sve slučajeve kojih ima ukupno n sačinjavaju matricu X dimenzije $D \times n$, a ciljane, izlazne vrednosti sačinjavaju vektor \mathbf{y} , pa to možemo označiti sa $D = (X, \mathbf{y})$. Kod regresione varijante Gausovog procesa izlazne vrednosti su realne vrednosti. Problem se sastoji u određavanju relacije između ulaza i izlaza odnosno uslovnoj distribuciji izlaznih vrednosti za zadate ulaze u model.

6.4.1.1 Standardni linearni model

Izvršićemo Bajesovu analizu standardnog linearnog regresionog modela sa Gausovim šumom

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{w}, \quad y = f(\mathbf{x}) + \varepsilon \quad (6.98)$$

gde je \mathbf{x} ulazni vektor, \mathbf{w} je vektor težina (parametara) linearnog modela, f je vrednost funkcije, a y je osmotrena ciljana vrednost. Obično je slobodan član (bias, pomeraj) izraza uključen dodavanjem ulaznom vektoru \mathbf{x} dodatnog elementa, čija je vrednost uvek jedan, pa ga ne uključujemo eksplicitno u notaciju. Pretpostavljamo da se opažene vrednosti y razlikuju od vrednosti funkcije $f(\mathbf{x})$ za vrednost dodatog šuma, pri čemu pretpostavljamo da šum ima nezavisnu, identično distribuiranu Gausovu raspodelu čija je srednja vrednost nula i varijansa σ_n^2

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma_n^2) \quad (6.99)$$

Pretpostavka šuma zajedno sa modelom dovodi nas do izraza verovatnoće odnosno proizvoda za sve one slučajeve u okviru trening skupa

$$\begin{aligned} p(y|X, \mathbf{w}) &= \prod_{i=1}^n p(y_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{w}) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{w})^2}{2\sigma_n^2}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma_n)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2} |\mathbf{y} - X^T \mathbf{w}|^2\right) = N(X^T \mathbf{w}, \sigma_n^2 I) \end{aligned} \quad (6.100)$$

Gde $|\mathbf{z}|$ označava Euklidsku dužinu vektora \mathbf{z} . Osnovna ideja metode je da odredimo početnu raspodelu parametara tzv. prior, koji izražava našu pretpostavku o parametrima pre samih zapažanja. Pretpostavlja se da početna raspodela težina ima srednju vrednost nula sa matricom kovarijanse Σ_p odnosno

$$\mathbf{w} \sim N(0, \Sigma_p). \quad (6.101)$$

Zaključivanje u Bajesovom modelu je zasnovano da je raspodela težina nakon uzorkovanja - posterior sračunata po sledećem izrazu:

$$\text{Posterior} = \frac{\text{verovatnoća x prior}}{\text{marginalna verovatnoća}}, \quad p(\mathbf{w}|y, X) = \frac{p(y|X, \mathbf{w})p(\mathbf{w})}{p(y|X)} \quad (6.102)$$

gde je $p(y|X)$ marginalna verovatnoća ima funkciju normalizujuće konstante i data je sledećim izrazom

$$p(y|X) = \int p(y|X, w) p(w) dw. \quad (6.103)$$

Naknadna raspodela posterior, kombinuje verovatnoću i prethodnu raspodelu (prior) [21]. Uzimajući u obzir samo verovatnoću i prior dobijamo

$$\begin{aligned} p(w|X, y) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2}(y - X^T w)^T (y - X^T w)\right) \exp\left(-\frac{1}{2} w^T \Sigma_p^{-1} w\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}(w - \bar{w})^T \left(\frac{1}{2\sigma_n^2} X X^T + \Sigma_p^{-1}\right) (w - \bar{w})\right), \end{aligned} \quad (6.104)$$

gde je $\bar{w} = \sigma_n^{-2} (\sigma_n^{-2} X X^T + \Sigma_p^{-1})^{-1} X y$, pa je naknadna forma distribucije takođe Gausova distribucija sa srednjom vrednošću \bar{w} i matricom kovarijanse A^{-1} , gde je $A = \sigma_n^{-2} X X^T + \Sigma_p^{-1}$. Raspodela za predikciju f_* za neki test uzorak x_* dobija se kao srednja vrednost izlaza svih mogućih linearnih modela u odnosu na Gausov posterior [21] odnosno

$$\begin{aligned} p(f_* | x_*, X, y) &= \int p(f_* | x_*, w) p(w|X, y) dw \\ &= N\left(\frac{1}{\sigma_n^2} x_*^T A^{-1} X y, x_*^T A^{-1} x_*\right). \end{aligned} \quad (6.105)$$

Distribucija predikcije je ponovo Gausova distribucija. Varijansa predikcije je kvadratna forma.

6.4.1.2 Projekcija ulaznih vrednosti u višedimenzionalni prostor

U delu 6.4.1.1 rada je analiziran Bajesov linearni model čije su mogućnosti modeliranja ograničene. Ovaj se nedostatak može prevazići projektovanjem ulaza u višedimenzionalni prostor korišćenjem baznih funkcija, a nakon toga primeni linearni model u tom prostoru, umesto direktno u prostoru inputa. Na primer skalarna vrednost ulaza x se može projektovati u prostor stepena od x : $\phi(x) = (1, x, x^2, x^3, \dots)^T$ [21]. Sve dok su projekcije nezavisne od parametara w model je i dalje linearan u pogledu parametara i analitički rešiv. Ovaj postupak čak i kod nekih problema gde promenljive nisu nezavisne daje zadovoljavajuće rezultate. Ova ideja se može primeniti i u slučaju klasifikacije, gde skup podataka nije linearno odvojiv u originalnom prostoru, ali u prostoru više dimenzije može postati separabilan.

Ako sa $\phi(x)$ označimo funkciju koja vrši preslikavanje D -dimenzionalnog vektora ulaza x u N dimenzionalni prostor atributa. Neka $\Phi(x)$ predstavlja agregaciju kolona $\phi(x)$ za sve slučajeve u okviru trening skupa. Model sada ima sledeći oblik

$$f(x) = \phi(x)^T w, \quad (6.106)$$

gde vektor parametara ima dimenziju N . Analiza ovog modela je analogna analizi standardnog linearnog modela, osim toga što je svuda X zamenjeno sa $\Phi(x)$. Distribucija predikcije ima sledeći oblik

$$f_* | x_*, X, y \sim N \left(\frac{1}{\sigma_n^2} \phi(x_*)^T A^{-1} \Phi y, \phi(x_*)^T A^{-1} \phi(x_*) \right), \quad (6.107)$$

gde je $\Phi = \Phi(X)$, a gde je $A = \sigma_n^{-2} \Phi \Phi^T + \Sigma_p^{-1}$.

Da bi odredili predikciju korišćenjem ove jednačine neophodno je da izračunamo inverznu vrednost matrice A dimenzije $N \times N$ što nije jednostavno, ako je broj dimenzija prostora u kome smo napravili projekcije N veliki broj. Međutim, prethodni izraz možemo da napišemo u sledećem obliku

$$f_* | x_*, X, y \sim N \left(\phi_*^T \Sigma_p \Phi (K + \sigma_n^2 I)^{-1} y, \phi_*^T \Sigma_p \phi_* - \phi_*^T \Sigma_p \Phi (K + \sigma_n^2 I)^{-1} \Phi^T \Sigma_p \phi_* \right) \quad (6.108)$$

gde je uvedena oznaka $\phi(x_*) = \phi_*$ i $K = \Phi^T \Sigma_p \Phi$.

Da bismo se uverili u ovo za srednju vrednost krenimo od definicije za A i K odakle imamo $\sigma_n^{-2} \Phi (K + \sigma_n^2 I) = \sigma_n^{-2} \Phi (\Phi^T \Sigma_p \Phi + \sigma_n^2 I) = A \Sigma_p \Phi$. Sada pomnožimo sve sa A^{-1} sa leve strane i sa $(K + \sigma_n^2 I)^{-1}$ sa desne strane odakle dobijamo $\sigma_n^{-2} A^{-1} \Phi = \Sigma_p \Phi (K + \sigma_n^2 I)^{-1}$, što dokazuje ekvivalentnost prethodna dva izraza (6.107) i (6.108) u pogledu njihovih srednjih vrednosti. Na sličan se način može dokazati i ekvivalentnost varijansi prethodna dva izraza.

U izrazu (6.108) moramo da invertujemo matricu veličine $n \times n$ što je mnogo pogodnije kada je $n < N$. Ako analiziramo izraz (6.108) možemo da uočimo da prilikom transformacije ulaza u prostor više dimenzije, prostor atributa ima formu $\Phi^T \Sigma_p \Phi$, $\phi_*^T \Sigma_p \Phi$ ili $\phi_*^T \Sigma_p \phi_*$, odnosno da ove matrice imaju formu $\phi(x)^T \Sigma_p \phi(x')$ gde x i x' pripadaju ili trening skupu ili test skupu.

$$\text{Definišimo } k(x, x') = \phi(x)^T \Sigma_p \phi(x').$$

Veličinu $k(x, x')$ nazivamo funkcijom kovarijanse ili kernelom.

Pošto je Σ_p pozitivno definitna matrica možemo da definišemo $\Sigma_p^{1/2}$ tako da je $(\Sigma_p^{1/2})^2 = \Sigma_p$.

Dalje definišući $\psi(x) = \Sigma_p^{1/2} \phi(x)$, dobijamo u formi skalarnog proizvoda izraz za kernel $k(x, x') = \psi(x)\psi(x')$. Kada je algoritam definisan potpuno u vidu skalarnog proizvoda inputa, on se može transformisati u prostor atributa jednostavno njegovom zamenom sa $k(x, x')$ što predstavlja tzv. kernel trik [21].

6.4.2 Pristup u prostoru funkcija

Alternativni i potpuno ekvivalentni rezultati onima iz prethodnog poglavlja mogu se dobiti ako se razmatranje sprovede direktno u prostoru funkcija. Definišimo prvo formalno Gausov proces (GP):

Definicija: Gausov proces predstavlja skup slučajnih promenljivih, pri čemu svaki konačan podskup tih slučajnih promenljivih ima zajedničku Gausovu distribuciju [21].

Gausov proces je potpuno definisan njegovom funkcijom srednje vrednosti i funkcijom kovarijanse [21]. Definišimo funkciju srednje vrednosti $m(x)$ i funkciju kovarijanse $k(x, x')$ za realni proces $f(x)$ kao

$$m(x) = E[f(x)], \quad (6.109)$$

$$k(x, x') = E[(f(x) - m(x))(f(x') - m(x'))].$$

Gausov proces možemo predstaviti i sledećim izrazom

$$f(x) \sim GP(m(x), k(x, x')). \quad (6.110)$$

U ovom slučaju slučajnu promenljivu predstavlja vrednost funkcije $f(x)$ za vrednost ulaza x . Slučajnim promenljivama $f_i \triangleq f(x_i)$ odgovaraju razmatrani parovi (x_i, y_i) .

Definicija Gausovog procesa implicira zahtev konzistencije (osobina marginalizacije). Ova osobina znači da ako je Gausovim procesom specificirano da je npr. $(y_1, y_2) \sim N(\mu, \Sigma)$, onda takođe mora biti i $y_1 \sim N(\mu_1, \Sigma_{11})$ gde je Σ_{11} relevantna submatrica matrice Σ .

Primer Gausovog procesa može biti izveden iz Bajesovog linearnog regresionog modela $f(x) = \phi(x)^T w$ sa vrednošću $w \sim N(0, k(x, x'))$. Funkcija srednje vrednosti i funkcija varijanse

$$\begin{aligned} E[f(x)] &= \phi(x)^T E[w] = 0, \\ E[f(x)f(x')] &= \phi(x)^T E[ww^T] \phi(x') = \phi(x)^T \Sigma_p \phi(x'). \end{aligned} \quad (6.111)$$

Vrednosti $f(x)$ i $f(x')$ imaju Gausovu distribuciju sa srednjom vrednošću nula, a čija je funkcija kovarijanse definisana sa $\phi(x)^T \Sigma_p \phi(x')$.

U praksi se kao funkcije kovarijanse mogu uzeti različite funkcije, a jedna od češće primenjivanih funkcija kovarijanse je kvadratna eksponencijalna (eng. Squared Exponential Covariance Function - SE) funkcija kovarijanse [21]. Ostale funkcije kovarijanse će u narednim poglavljima biti detaljno razmotrene.

Funkcija kovarijanse određuje kovarijansu između slučajnih promenljivih

$$\text{cov}(f(x_p), f(x_q)) = k(x_p, x_q) = \exp\left(-\frac{1}{2}|x_p - x_q|\right) \quad (6.112)$$

Može se uočiti da je kovarijansa između izlaza (eng. outputs) napisana kao funkcija ulaza (eng. inputs). Za ovu posebnu funkciju kovarijanse može se uočiti da je skoro jednaka vrednosti jedan, između promenljivih čiji korespondentni ulazi (inputs) imaju bliske vrednosti, a opada kako rastojanje između ulaza raste.

Može se pokazati da kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse odgovara Bajesovom linearnom regresionom modelu sa beskonačno mnogo baznih funkcija. Za svaku pozitivno definitnu funkciju kovarijanse postoji (verovatno beskonačna) ekspanzija u smislu baznih funkcija. Kvadratno eksponencijalnu funkciju kovarijanse (SE) možemo dobiti koristeći linearnu kombinaciju beskonačnog broja Gausovih baznih funkcija. Vrsta funkcije kovarijanse implicira distribuciju funkcija [21].

Funkcija kovarijanse se može dodatno parametrizovati sa ciljem poboljšavanja same funkcije. U prethodnom slučaju kvadratno eksponencijalne funkcije možemo umesto $|x_p - x_q|$ napisati izraz

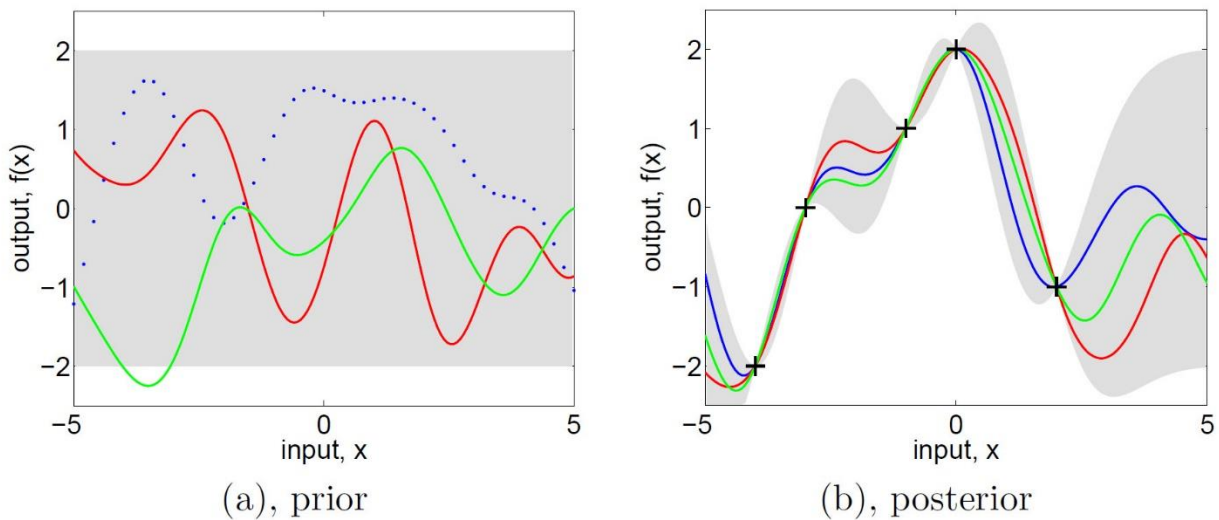
$|x_p - x_q|/l$ pri čemu je l neka pozitivna konstanta. Ako razmeru-rastojanja (eng. length-scale) predstavimo kao rastojanje na koje kada se pomerimo u prostoru ulaza (inputa) dolazi do značajne promene vrednosti funkcija. U izrazu $|x_p - x_q|$ je ta vrednost jednaka jedinici, odnosno u izrazu $|x_p - x_q|/l$ je ta vrednost jednaka l . Varijansa slučajne funkcije se može kontrolisati pomoću pozitivnog množioca ispred izraza eksponencijalne funkcije u kvadratnom eksponencijalnom kernelu.

6.4.2.1 Predikcija sa uzorcima bez šuma

Razmotrimo poseban slučaj gde su uzorci bez šuma, odnosno da znamo vrednosti $\{(x_i, f_i | i = 1, \dots, n)\}$. Zajednička distribucija trening izlaza f i test izlaza f_* (uzimanjem u obzir priora) je

$$\begin{bmatrix} f \\ f_* \end{bmatrix} = N \sim \left(0, \begin{bmatrix} K(X, X) & K(X, X_*) \\ K(X_*, X) & K(X_*, X_*) \end{bmatrix} \right). \quad (6.113)$$

Ako postoji n podataka u okviru trening skupa podataka i n_* test podataka onda $K(X, X_*)$ označava $n \times n_*$ matricu kovarijanse za parove trening i test podataka. Na analogan način objašnjavamo i matrice kovarijanse $K(X, X)$, $K(X_*, X_*)$ i $K(X_*, X)$.



Slika 6.20 Generisanje funkcije korišćenjem GP priora. Deo slike označen sa (a) prikazuje tri funkcije definisane od GP priora. Deo slike (b) prikazuje tri funkcije generisane na osnovu funkcije naknadne raspodele - posteriora odnosno prior je uslovljen (kondicioniran) sa pet zapažanja bez šuma. Na obe slike osenčena površina predstavlja srednju vrednost plus odnosno minus dve standardne devijacije [21].

Da bismo dobili posterior distribuciju funkcija, neophodno je da ograničimo prior distribuciju da sadrži samo one funkcije koje se slažu sa opaženim podacima. Grafički na Slici 6.20 možemo videti generisanje funkcija na osnovu priora i odbacivanje onih koje se ne slažu sa opaženim funkcijama. U probabilističkom smislu ova operacija je jednostavna i odgovara uslovnoj verovatnoći prethodnog izraza odnosno

$$f_*|X_*, X, f \sim N(K(X_*, X)K(X, X)^{-1}f, K(X_*, X_*) - K(X_*, X)K(X, X)^{-1}K(X, X_*)) \quad (6.114)$$

Vrednosti funkcije f_* (koje odgovaraju test vrednostima ulaza) mogu se dobiti na osnovu distribucije preseka nalaženjem srednje vrednosti i matrice kovarijanse na osnovu prethodne jednačine. Na slici su prikazani rezultati ovakvog proračuna za pet zadatih tačaka označenih + simbolima. Ovaj postupak se može primeniti i u slučaju višedimenzionalnog ulaza prilagođavanjem funkcije kovarijanse.

6.4.2.2 Predikcija kod uzoraka sa šumom

U praksi je slučaj da se srećemo sa zapažanjima sa šumom, umesto sa čistim vrednostima funkcija. U tom slučaju vrednosti opažanja su

$$y = f(x) + \varepsilon. \quad (6.115)$$

Pretpostavimo dodati nezavisni identično raspoređen Gausov šum ε sa varijansom σ_n^2 . U ovom slučaju imaćemo da je kovarijanca

$$\text{cov}(y_p, y_q) = k(x_p, x_q) + \sigma_n^2 \delta_{pq} \quad \text{ili} \quad \text{cov}(y) = K(X, X) + \sigma_n^2 I, \quad (6.116)$$

gde je δ_{pq} Kronekerovo delta koje je jednako jedinici ako je $p = q$ ili nula u drugim slučajevima.

U odnosu na prethodni izraz za slučaj uzoraka bez šuma imaćemo sledeći izraz za distribuciju preseka opaženih target vrednosti i vrednosti funkcija na test vrednostima inputa

$$\begin{bmatrix} y \\ f_* \end{bmatrix} = N \sim \left(0, \begin{bmatrix} K(X, X) + \sigma_n^2 I & K(X, X_*) \\ K(X_*, X) & K(X_*, X_*) \end{bmatrix} \right). \quad (6.117)$$

Nalaženjem uslovne distribucije analogno izrazu za predikciju kod uzoraka sa šumom dobijamo

$$f_*|X, y, X_* \sim N(\bar{f}_*, \text{cov}(f_*)), \quad (6.118)$$

gde je

$$\bar{f}_* \triangleq E[f_*|X, y, X_*] = K(X_*, X)[K(X, X) + \sigma_n^2 I]^{-1}y, \quad (6.119)$$

$$\text{cov}(f_*) = K(X_*, X_*) - K(X_*, X)[K(X, X) + \sigma_n^2 I]^{-1}K(X, X_*). \quad (6.120)$$

U slučaju da postoji samo jedna test tačka x_* , možemo napisati da $k(x_*) = k_*$ predstavlja vektor kovarijansi između test tačke i n trening tačaka. Koristeći ovu skraćenu notaciju [21] za slučaj jedne test tačke x_* dobijamo sledeće jednačine

$$\bar{f}_* = k_*^T (K + \sigma_n^2 I)^{-1}y, \quad (6.121)$$

$$V[f_*] = k(x_*, x_*) - k_*^T (K + \sigma_n^2 I)^{-1}k_*.$$

Prethodni izraz za \bar{f}_* predstavlja linearnu kombinaciju zapažanja y . Izraz za \bar{f}_* se može shvatiti i kao linearna kombinacija od n kernela odnosno

$$\bar{f}_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i k(x_i, x_*), \quad (6.122)$$

gde je $\alpha = (K + \sigma_n^2 I)^{-1}y$.

Ovaj rezultat se može shvatiti da iako GP definiše zajedničku Gausovu distribuciju za sve promenljive y , za pravljenje predikcije u tački x_* potrebno je voditi računa o $n + 1$ dimenzionalnoj distribuciji koja je definisana pomoću n trening tačaka i jedne test tačke. Uslovna verovatnoća ove $n + 1$ dimenzionalne distribucije daće nam željenu vrednost predikcije.

Marginalna verovatnoća je integral verovatnoće koja je pomnožena vrednošću priora odnosno

$$p(y|X) = \int p(y|f, X)p(f|X) df. \quad (6.123)$$

Pojam marginalne verovatnoće podrazumeva marginalizaciju preko vrednosti funkcije f . Marginalna distribucija je ponovo faktorisana Gausova distribucija. Integracijom navedenog izraza dolazimo do izraza za log marginalnu verovatnoću funkcije f

$$\log p(f|X) = -\frac{1}{2}f^T K^{-1}f - \frac{1}{2}\log|K| - \frac{n}{2}\log 2\pi, \quad (6.124)$$

a log marginalna verovatnoća promenljive y definisana je izrazom

$$\log p(y|X) = -\frac{1}{2}y^T (K + \sigma_n^2 I)^{-1}y - \frac{1}{2}\log|K + \sigma_n^2 I| - \frac{n}{2}\log 2\pi. \quad (6.125)$$

Praktična implementacija Gausovog procesa kod regresije (GPR) se može predstaviti sledećim algoritmom [21], [112]:

U **prvom koraku** se unose podaci za formiranje modela, usvaja se određena funkcija varijanse, određuje se nivo šuma signala.

U **drugom koraku** vrši se Cholesky dekompozicija [113], [114], matrice $K_y = K + \sigma_n^2 I$. Ovom dekompozicijom matrice ona se transformiše u proizvod dve matrice L i L^T odnosno $K_y = L L^T$.

Nakon dekompozicije u **trećem koraku** se rešava sistem jednačina $m = L^{-1}y$ odnosno $L m = y$. Nakon izračunate vrednosti m , nju koristimo da rešavamo sistem jednačina $\alpha = L^{-T}m$.

U **četvrtom koraku** računamo srednju vrednost \bar{f}_* pomoću vrednosti α i k_*^T odnosno $\bar{f}_* = k_*^T \alpha$. Analogan postupak se koristi kod određivanja funkcije varijanse srednje vrednosti $V[f_*]$. Za višestruke test podatke koraci 4. i 6. se ponavljaju. Log determinanta u okviru koraka 7. se računa na osnovu faktora Koleskog (eng. Cholesky factor)

Algoritam 6.1: Predikcija i log marginalna verovatnoća kod problema regresije

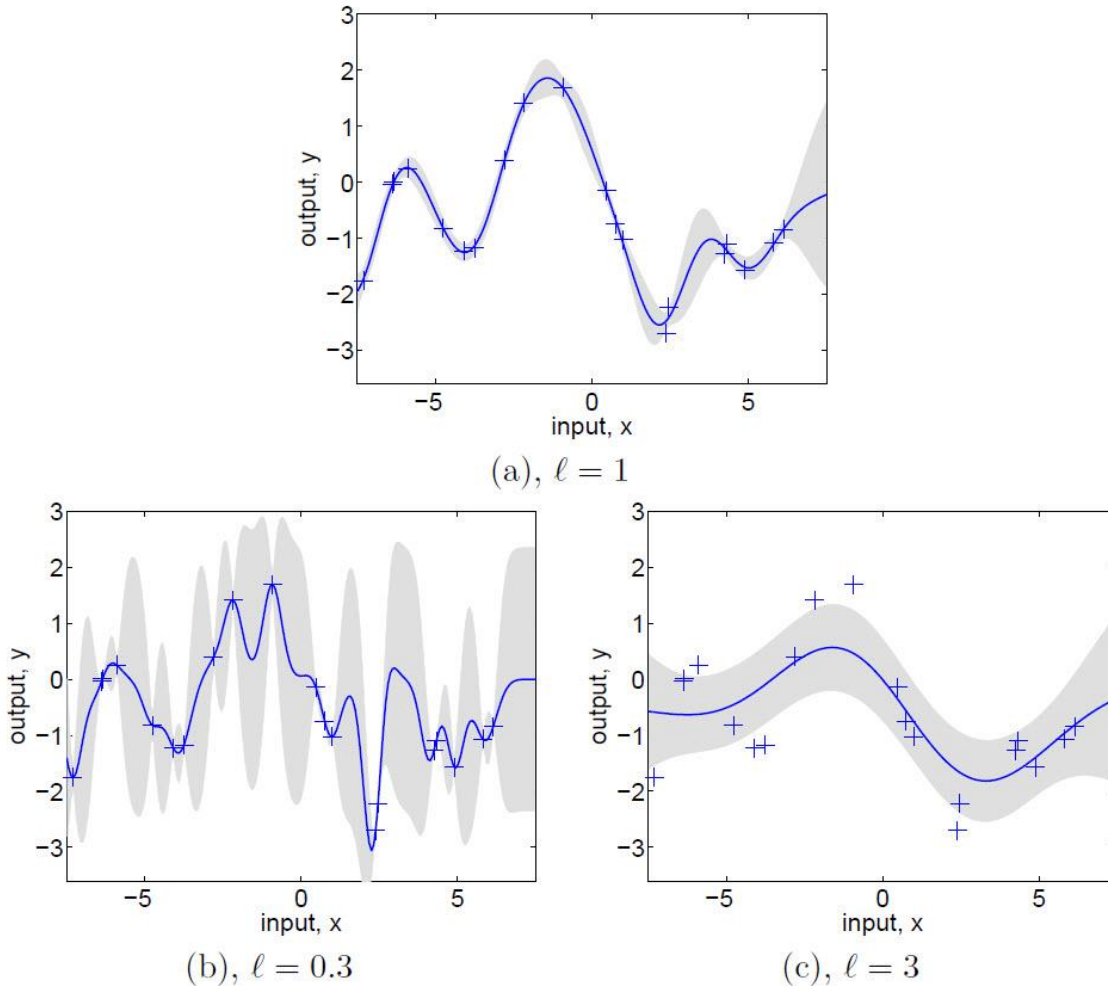
1. Ulaz: X ulazi (inputs), ciljane vrednosti (targets) y , k funkcija kovarijanse (covariance function), σ_n^2 nivo šuma (noise level)
2. $L := \text{cholesky}(K + \sigma_n^2 I)$
3. $\alpha := L^T \backslash (L \backslash y)$
4. $\bar{f}_* := k_*^T \alpha$
5. $v := L \backslash k_*$
6. $V[f_*] := k(x_*, x_*) - v^T v$
7. $\log p(y X) := -\frac{1}{2} y^T \alpha - \sum_i L_{ii} - \frac{n}{2} \log 2\pi$
8. povratak: \bar{f}_* (srednja vrednost), $V[f_*]$ (varijansa), $\log p(y X)$ i (log marginalna verovatnoća)

6.4.2.3 Variranje hiperparametara

Uobičajeno je da funkcije kovarijanse koje koristimo imaju određene slobodne parametre. Kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse je jedna od najčešće korišćenih funkcija i u slučaju jedne dimenzije ima sledeći oblik

$$k_y(x_p, x_q) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{1}{2l^2}(x_p - x_q)^2\right) + \sigma_n^2 \delta_{pq} \quad (6.126)$$

Kovarijansa je označena k_y , pošto se odnosi na vrednosti sa šumom y , a ne na vrednosti funkcija f . Možemo uočiti da razmera rastojanja l , varijansa signala σ_f^2 i varijansa šuma σ_n^2 mogu da variraju. Ove parametre nazivamo hiperparametrima [21].



Slika 6.21 (a) Podaci generisani Gausovim procesom sa hiperparametrima $(l, \sigma_f, \sigma_n) = (1; 1; 0,1)$ označeni znakom +. Koristeći Gausov proces za predikciju dobijamo 95% oblasti poverenja za razmatranu funkciju f (prikazano sivim). Slika (b) i slika (c) pokazuju takođe 95% oblasti poverenja, ali sa vrednostima hiperparametara $(0,3; 1,08; 0,00005)$ i $(3,0; 1,16; 0,89)$ [21]

Uticaj hiperparametara na predikciju GP razmotrićemo na sledećem slučaju [21]. Na slici 6.21 (a) generisan je GP sa kvadratnim eksponencijalnim kernelom sa hiperparametrima $(l, \sigma_f, \sigma_n) =$

(1,1,0.1). Na slici su prikazana odstupanja od srednje vrednosti od dve standardne devijacije. Ako sada postavimo za vrednost razmere rastojanja manju vrednost (Slika 6.21 (b)), a ostale parametre zadržimo nepromenjene, dobićemo grafik koji će mnogo više da osciluje, a vrednost x ose će da bude reskalirana faktorom 0.3. Ostala dva parametra dobijamo optimizacijom marginalne verovatnoće. U ovom slučaju parametar šuma je umanjen na $\sigma_n = 0,00005$, što se može objasniti time da je veća fleksibilnost modela dovela do smanjenja šuma.

Ako sada povećamo parameter razmere rastojanja, na $l = 3$ kao što je prikazano na Slici 6.21 (c). Ostala dva parametra proračunajmo optimizacijom marginalne verovatnoće. U ovom slučaju je nivo šuma povećan na $\sigma_n = 0.89$. Možemo uočiti da se funkcija sporo menja, a da je vrednost šuma značajno veća.

Slučajevi na slikama 6.21 (b) i 6.21 (c) predstavljaju ekstremne slučajeve, gde kod prvog imamo brzo variranje signala sa malim šumom, a kod drugog sporo variranje signala sa velikim šumom. Kod prvog dolazi do modeliranja šuma, a kod drugog imamo gotovo konstantni signal sa dodatim šumom.

U ovom slučaju sa jednom dimenzijom lako je uočiti da je najbolji od analiziranih modela model na Slici 6.21 (a). Marginalna verovatnoća daje jasnu preferenciju za model sa parametrima $(l, \sigma_f, \sigma_n) = (1; 1; 0,1)$, a to je prvi analizirani model.

6.4.2.4 Uključivanje eksplicitnih baznih funkcija u model

Uobičajena je praksa primene GP sa funkcijom srednje vrednosti koja je jednaka nuli. U određenim slučajevima koriste se eksplicitne bazne funkcije kao način da se definiše funkcija srednje vrednosti koja je različita od nule. U većini slučajeva je dovoljno ispitati nekoliko fiksnih baznih funkcija čije koeficijente treba odrediti iz podataka. Razmotrimo izraz

$$g(x) = f(x) + h(x)^T \beta \quad \text{gde je} \quad f(x) \sim GP(o, k(x, x')), \quad (6.127)$$

gde $f(x)$ Gausov proces čija je funkcija srednje vrednosti nula, $h(x)$ predstavlja skup baznih funkcija, a vrednosti β predstavljaju dodatne parametre. Osnovna ideja za primenu baznih

funkcija potiče iz 1975 [115] kada je primenjen Gausov proces da bi se modelirali reziduali polinomne regresije tj. $h(x) = (1, x, x^2, \dots)$.

U postupku formiranja modela, a na osnovu odgovarajućeg skupa podataka kojim raspolažemo, istovremeno sa optimizacijom hiperparametara optimizujemo i vrednosti β [21].

Alternativni postupak je da se krene od pretpostavke da je prvobitna raspodela β Gausova raspodela, $\beta \sim N(b, B)$ [116] odakle dobijamo sledeći izraz za Gausov proces

$$g(x) \sim GP(h(x)^T b, k(x, x') + h(x)^T B h(x')) \quad (6.128)$$

Predikcije dobijamo unosom funkcije srednje vrednosti i funkcije varijanse za $g(x)$ u jednačinu (6.127) i (6.120). Nakon sređivanja dobijamo

$$\bar{g}(X_*) = H_*^T \bar{\beta} + K_* K_y^{-1} (y - H \bar{\beta}) = \bar{f}(X_*) + R^T \bar{\beta} \quad (6.129)$$

$$\text{cov}(g_*) = \text{cov}(f_*) + R^T (B^{-1} + H K_y^{-1} H^T)^{-1} R \quad (6.130)$$

gde je H matrica a sastavljena od vektora $h(x)$ za sve trening podatke (H_* se odnosi na sve test podatke, $\bar{\beta} = (B^{-1} + H K_y^{-1} H^T)^{-1} (H K_y^{-1} y + B^{-1} b)^{-1}$, kao i $R = H_* - H K_y^{-1} K_*$.

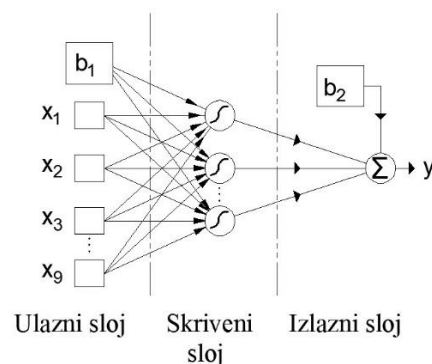
Polazeći od pretpostavke da je početna raspodela Gausova distribucija $\beta \sim N(b, B)$ marginalna verovatnoća ima sledeći izraz [21]

$$\begin{aligned} \log p(y|X, b, B) &= -\frac{1}{2} (H^T b - y)^T (K_y + H^T B H)^{-1} (H^T b - y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \log |K_y + H^T B H| - \frac{n}{2} \log 2\pi \end{aligned} \quad (6.131)$$

7. PROCENA KOŠTANJA DRUMSKIH AB MOSTOVA METODAMA ZASNOVANIM NA PRIMENI VEŠTAČKIH NEURONSKIH MREŽA

Kod analize koštanja mostova analizirana je primena različitih modela neuronskih mreža. Za formiranje modela neuronske mreže za prognozu troškova izgradnje mostova korišćen je tip MLP neuronske mreže. Za modeliranje je analizirana arhitektura troslojne mreže sa jednim ulaznim, skrivenim i izlaznim slojem neurona.

Arhitektura neuronske mreže sa jednim ulaznim, skrivenim i izlaznim slojem neurona (Slika 7.1), pri čemu su neuroni s linearnom aktivacijskom funkcijom korišćeni u izlaznom sloju, a neuroni sa nelinearnom aktivacijskom funkcijom u skrivenom sloju, ima svojstvo univerzalnog aproksimatora. Analizirana je primena tansigmoidne aktivacione funkcije. U konkretnom problemu predikcije koštanja mosta korišćena je arhitektura koja ima jedan neuron u izlaznom sloju.



Slika 7.1 Analiziran model neuronske mreže

Kod svih modela je u postupku vrednovanja modela korišćena desetostruka unakrsna validacija (eng. ten folds cross validation). Da bi se obezbedili apsolutno jednaki uslovi za ocenjivanje modela podešavanja generatora slučajnih brojeva je postavljeno na default vrednost (MATLAB implementacija korišćenjem funkcije `rng default`).

Generisano je deset foldova od kojih je devet foldova korišćeno za treniranje, a deseti za testiranje, te ceo postupak ponovljen deset puta. Na taj način se koristi čitav skup podataka za testiranje modela, a kao rezultat dobijamo skup podataka koju poredimo sa „stvarnim“ odgovorom sistema.

Tabela 7.1 Broj neurona u skrivenom sloju neuronske mreže u razmatranom slučaju

	Broj neurona u skrivenom sloju	Broj neurona u konkretnoj studiji
1.	$N_H = (N_i + N_o)/2$	5
2.	$N_H = \sqrt{(N_i + N_o)}$	≈ 3
3.	$N_H = 2 \times N_i$	10
4.	$N_H = \frac{2}{3} \times N_i + N_o$	7
5.	$N_H = (4 \times N_i^2 + 3) / (N_i^2 - 8)$	4

Kao preporuke za orijentacionu vrednost gornje granice broja neurona u skrivenom sloju daju se sledeće izrazi, pri čemu se predlaže da se usvoji manja vrednost :

$$N_H \leq 2 \times N_i + 1 = 19 \quad (7.1)$$

$$N_H \leq \frac{N_s}{N_i + 1} = 18 \quad (7.2)$$

Određivanje optimalnog broja neurona u skrivenom sloju sprovedeno je eksperimentalno. U konkretnom istraživanju izvršena je analiza polazeći od strukture sa dva neurona, a zatim je postepeno povećavan broj neurona za po jedan i uporedo vrednovana svaka arhitektura u pogledu kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE. Kalibracija modela predstavlja podešavanje parametara modela odnosno treniranje modela.

Analizirani su sledeći modeli:

1. Modeli koji koriste algoritam sa Bajesovom regularizacijom koji ne zahtevaju korišćenje validacionog seta,
2. Modeli koji u postupku treniranja koriste LM algoritam i metodu ranog zaustavljanja, sa podelom podataka na trening, validacioni i test skup podataka.

Pomenuti algoritmi kao početno rešenje uzimaju slučajno odabrane vrednosti parametara mreže, pri čemu se može desiti da dođe do zaglavljivanja u nekom od lokalnih minimuma funkcije. Iz tog razloga je postupak kalibracije parametara modela ponavljan više puta, što je za posledicu imalo da je model treniran korišćenjem različitih početnih uslova.

Svaki model treniran je na 9/10 od ukupnog broja podataka odnosno na 9 foldova, a predikcione karakteristike modela su ocenjivane na preostaloj 1/10 podataka, odnosno na preostalom desetom foldu koji model nije koristio za obuku i koji predstavlja u konkretnom slučaju test skup podataka. Ovaj postupak je ponavljan deset puta. Na ovaj način formirano je deset modela za svaku arhitekturu mreže, čija srednja vrednost RMSE, MAE, R i MAPE je usvajana za komparaciju. Sve promenljive modela su linearno transformisane. Linearnom transformacijom se promenljiva x_i može skalirati tako da se njene vrednosti iz intervala $[x_{min}, x_{max}]$ transformišu u drugi interval $[x_{low}, x_{high}]$, pri čemu se vrednosti skalirane promenljive može izračunati prema izrazu (7.3).

$$x'_i = \frac{x_{high} - x_{low}}{x_{max} - x_{min}} \cdot x_i + \frac{x_{low} \cdot x_{max} - x_{high} \cdot x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \quad (7.3)$$

Skaliranjem promenljivih se primenjuje sa ciljem obezbeđenja ravnopravnosti svih promenljivih iz razloga što apsolutna veličina promenljive ne mora da bude ekvivalentna stvarnom uticaju promenljive. U radu su promenljive transformisane u interval $[-1, 1]$, pri čemu je odgovarajuća minimalna vrednost preslikana u -1, a odgovarajuća maksimalna vrednost u 1, a za vrednosti koje se nalaze između korišćeno je linearno skaliranje. U postupku treniranja modela kod svih arhitektura korišćena su ista standardna podešavanja u okviru programa MATLAB.

Tabela 7.2 Podešavanja parametara kod kalibracije modela u programu MATLAB

Parametar	Vrednost parametra	
	Donja granica	Gornja granica
Broj epoha (epoch)	/	1000
Vrednost MSE (performance)	/	0
Gradijent	/	1.00e-7
Vrednost parametra λ_k (Mu)	0.005	1.00e+10

Značajan problem koji se javlja tokom obučavanja neuronskih mreža jeste pretreniranje modela, odnosno problem gde modeli imaju jako dobre performanse na trening skupu podataka, ali loše performanse na test skupu podataka. U tom slučaju model nema potrebnu generalizaciju u novim situacijama.

7.1 Modeli neuronskih mreža koji koriste metodu regularizacije

Ukupan broj podesivih parametara modela N varira sa brojem neurona u srednjem sloju neuronske mreže i može se izračunati korišćenjem izraza

$$N = N_i \cdot N_H + N_H + N_H \cdot N_o + N_o = N_H \cdot (N_i + 1) + N_o \cdot (N_H + 1). \quad (7.4)$$

U ovom istraživanju je broj neurona ulaza N_i jednak 9, a broj neurona izlaza N_o jednak 1. Brojna istraživanja navedena u prethodnom delu, davala su preporuku za broj neurona u skrivenom sloju N_H , pri čemu se predlaže ispitivanje arhitektura koje imaju do 18 neurona u skrivenom sloju. što predstavlja orijentacionu vrednost gornje granice broja neurona skrivenog sloja u konkretnom istraživanju. U radu je usvojena gornja granica od 18 neurona u skrivenom sloju, a primenom Bajesovog algoritma određen je optimalan broj neurona skrivenog sloja.

Tabela 7.3 Određivanje broja neurona u skrivenom sloju mreže Bajesovom regularizacijom

N_H	MSE	E_w	N	γ
2	$1,2949 \cdot 10^4$	31,6133	23	19,3926
3	$8,4239 \cdot 10^3$	95,6451	34	30,6618
4	$8,2748 \cdot 10^3$	42,2831	45	39,2831
5	$5,6592 \cdot 10^3$	58,6881	56	49,2244
6	$3,2964 \cdot 10^3$	97,5861	67	59,8250
7	$2,6629 \cdot 10^3$	84,4371	78	69,2367
8	$2,0229 \cdot 10^3$	96,9387	89	74,7069
9	$1,8972 \cdot 10^3$	90,7380	100	79,6033
10	$1,5367 \cdot 10^3$	97,5234	111	84,9738
11	$1,6534 \cdot 10^3$	92,5737	122	85,4671
12	$1,6823 \cdot 10^3$	92,5606	133	84,9835
13	$1,5618 \cdot 10^3$	99,5750	144	87,8715
14	$1,4790 \cdot 10^3$	99,0714	155	88,2877
15	$1,4608 \cdot 10^3$	96,6800	166	88,6024
16	$1,4907 \cdot 10^3$	97,2254	177	87,8118
17	$1,4188 \cdot 10^3$	100,5511	188	88,8849
18	$1,4918 \cdot 10^3$	96,3076	198	87,6478

Nakon treniranja svakog modela odgovarajuće arhitekture neophodno je sprovesti kontrolu konvergencije modela prvenstveno u pogledu efektivnog broja parametara modela γ . Ako je

efektivan broj parametara γ blizak broju parametara modela N , postoji mogućnost da model neuronske mreže nije dovoljno fleksibilan da reprezentuje funkciju koja se modelira. U ovom slučaju je neophodno da se modelu doda još neurona u skrivenom sloju i model ponovo trenira. Postupak treba nastaviti dok vrednost γ počne da konvergira [117]. Za svaku od analiziranih arhitektura sračunate su i vrednosti srednje kvadratne greške MSE kao i suma kvadrata podesivih parametara mreže E_w .

U Tabeli 7.3 je data rekapitulacija rezultata treniranja više različitih arhitektura u kojoj se može uočiti da efektivan broj parametara γ postaje gotovo konstantan kod modela sa 14 i više neurona u skrivenom sloju. Kod svake naredne arhitekture broj podesivih parametara mreže povećava se za ukupno 11, a efektivan broj parametara γ praktično se zadržava na vrednosti oko 88, pa možemo zaključiti da arhitektura sa 14 neurona predstavlja minimalnu veličinu mreže koja može adekvatno da reprezentuje analiziranu funkciju koštanja.

Osim vrednosti γ , analizirane su i vrednosti za MSE na trening setu podataka, kao i vrednost sume kvadrata podesivih parametara mreže E_w , koje se za arhitekture sa 14 i više neurona kreću u uskim granicama i to oko vrednosti $1,47 \cdot 10^3$ za MSE i oko vrednosti 98 za E_w . Izvršena je ocena tačnosti usvojenog modela sa 14 neurona u skrivenom sloju mreže u pogledu kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE pri čemu su dobijene sledeće vrednosti

Tabela 7.4. Performanse modela mreže sa Bajesovim algoritmom sa 14 neurona u skrivenom sloju

Arhitektura modela	RMSE	MAE	R	MAPE
NN-9-14-1	216,1142	133,4136	0,6613	25,0872

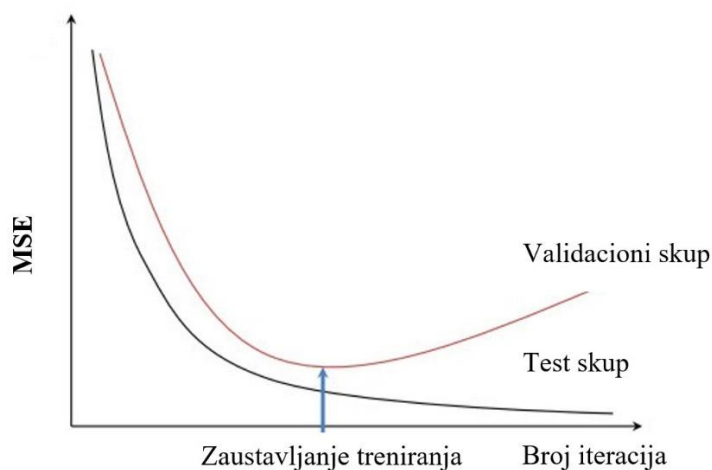
7.2 Modeli neuronskih mreža koji koriste metodu ranog zaustavljanja

Metoda ranog zaustavljanja predstavlja standardni postupak za unapređenje generalizacije neuronskih mreža. U okviru programskog paketa MATLAB koji je korišćen za ovo istraživanje metoda ranog zaustavljanja (eng. early stopping method) predstavlja podrazumevano programsko podešavanje u okviru Neural Network Toolbox-a. U ovom delu istraživanja ispitani su modeli

koji su koristili ovaj postupak za kontrolu pretreniranja neuronskih mreža. U okviru ovog dela istraživanja korišćena je arhitektura koja ima ulazni, jedan skriveni i izlazni sloj neurona kao u prethodnom delu istraživanja. Maksimalni broj neurona u skrivenom sloju je ograničen na 18 neurona.

U okviru metode ukupan skup podataka deli se na tri podskupa. Prvi podskup podataka koristi se za treniranje modela i on se koristi za proračun gradijenata i ažuriranje težinskih parametara i pomeraja neuronske mreže.. Drugi podskup podataka je validacioni skup. Greška na validacionom skupu se prati tokom procesa treniranja modela. Uobičajeno je da greška na validacionom skupu opada tokom inicijalne faze treniranja modela, ali kada mreža počinje da bude pretrenirana greška na validacionom skupu počinje da raste. Kada greška na validacionom skupu raste tokom više uzastopnih iteracija postupak treniranja modela se prekida (Slika 7.2).

Vrednosti pomeraja i težinskih parametara koji odgovaraju minimalnoj greški na validacionom skupu se tada usvajaju za parametre modela. Greška na test skupu podataka se ne koristi kod treniranja modela, ali služi za komparaciju različitih modela. Uobičajena podela podataka je da 70% podataka pripada trening skupu, 30% podataka validacionom i test skupu.



Slika 7.2 Metoda ranog zaustavljanja

U okviru izrade modela za predikciju koštanja mostova a sa obzirom na veličinu podataka kojima smo raspolagali korišćen je postupak sa desetostrukom unakrsnom validacijom. Trening i validacioni set su definisani u okviru devet foldova, a preostali deseti fold je korišćen za testiranje

modela. Postupkom unakrsne validacije postupak je ponovljen deset puta. Srednja vrednost performansi uzeta je kao reprezentativna za konkretni model koji je analiziran.

Tabela 7.5 Određivanje broja neurona u skrivenom sloju mreže bez regularizacije (metoda ranog zaustavljanja)

N_H	RMSE	MAE	R	MAPE
2	153,8324	119,4405	0,5892	21,7548
3	181,5768	135,2872	0,5272	23,5868
4	169,2631	125,4693	0,6077	21,8489
5	176,7074	130,6277	0,6193	23,7957
6	160,3994	121,4197	0,6394	22,2074
7	186,1764	132,5424	0,5414	24,3533
8	162,3029	118,5507	0,6559	21,6963
9	163,3554	129,9319	0,5982	23,5663
10	160,7470	115,4832	0,6969	21,6593
11	171,0806	128,7044	0,6292	22,5553
12	166,8859	122,0774	0,6172	22,4759
13	173,5655	128,5355	0,6184	24,2117
14	169,5811	129,1985	0,6542	25,0188
15	190,4829	133,6552	0,5911	25,2419
16	191,9973	140,8811	0,5504	25,6600
17	198,3943	142,7024	0,5782	24,9693
18	222,0888	142,3034	0,5542	27,1238

Analizom modela sa različitim brojem neurona u skrivenom sloju dobijeno je da je arhitektura koja ima 10 neurona u skrivenom sloju u pogledu tri kriterijuma, MAE, R i MAPE bolja od ostalih modela. U pogledu vrednosti RMSE najbolji je model sa 2. neurona u skrivenom sloju.

7.3 Izrada ansambala neuronskih mreža i poboljšanje generalizacije modela

Uporedna analiza modela koji su koristili metodu regularizacije kao i modela koji su koristili metodu ranog zaustavljanja dala je modele sličnih karakteristika koji se nalaze na granici između dobrih i zadovoljavajućih modela. U daljem delu rada istražene su metode čiji je cilj bio unapređenje generalizacije modela.

U cilju poboljšanja generalizacije modela, a kada imamo podatke sa šumom i manji skup podataka možemo trenirati veći broj neuronskih mreža i naći srednju vrednost njihovih izlaza. Kombinacijom većeg broja modela dobijamo sinergijski efekat. Na ovaj način nastaju **ansambl modeli** dok se pojedinačni modeli koji čine strukturu ansambla nazivaju **baznim modelima** ili submodelima.

U radu je istražen efekat kombinovanja modela neuronskih mreža na tačnost predikcije. Vrednosti relativnih pokazatelja za prethodno analizirane modele, pre svega vrednosti koeficijenta korelacije R čija se vrednost nalazi na granici između modela sa dobrom odnosno umerenom korelacijom izlaza modela sa stvarnim vrednostima izlaza dovele su do toga da se ovaj tip modela usvoji za bazni model u okviru ansambla. Uporedimo grešku srednje vrednosti ansambla sa greškom pojedinačnih modela u ansamblu, pri čemu $y_T(x)$ predstavlja pravu funkciju koju želimo da modeliramo, $y_m(x)$ predstavlja izlaz m-tog modela u okviru ansambla od M modela, $y^{(M)}$ srednju vrednost izlaza ansambla. Očekivana vrednost kvadratne greške srednje vrednosti ansambla je

$$\begin{aligned} E[(y^{(M)} - y_T)^2] &= E\left[\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M y_m - y_T\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (y_m - y_T)\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{M^2} E\left[\left(\sum_m \epsilon_m\right)^2\right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

gde je $\epsilon_m = y_m - y_T$ greška m-tog modela. Košijeva nejednačina definisana je sa izrazom:

$$\left(\sum_m \epsilon_m\right)^2 \leq M \sum_{m=1}^M \epsilon_m^2 \quad (7.6)$$

zamenom Košijeve nejednačine u izraz za očekivanu vrednost kvadratne greške srednje vrednosti ansambla dobijamo

$$\frac{1}{M^2} E \left[\left(\sum_m \epsilon_m \right)^2 \right] \leq \frac{1}{M} E \left[\sum_{m=1}^M \epsilon_m^2 \right] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E[\epsilon_m^2], \quad (7.7)$$

zamenom ovog izraza u izraz (7.5) dobijamo

$$E[(y^{(M)} - y_T)^2] \leq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E[\epsilon_m^2], \quad (7.8)$$

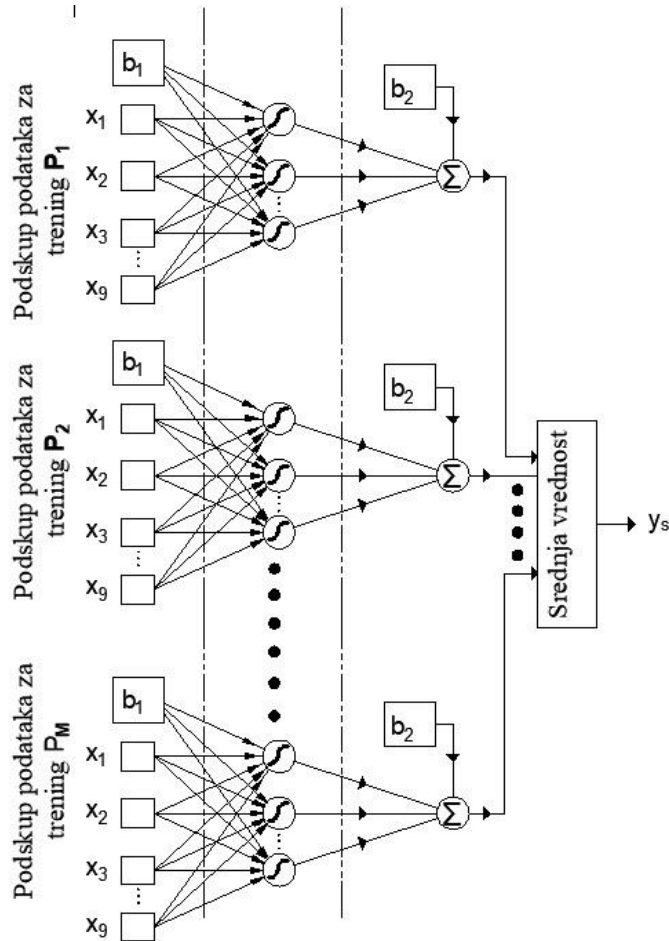
Ovaj izraz dokazuje da je očekivana kvadratna greška srednje vrednosti ansambla, manja ili jednaka srednjoj očekivanoj greški pojedinačnih modela u ansamblu, što je predstavlja osnovu za analizu upotrebe metode ansambla u ovom istraživanju.

Uporedna istraživanja sprovedena na različitim skupovima podataka ukazuju da primenom butstrap agregacije kod neuronskih mreža može doći do značajnog poboljšanja generalizacije modela koji su zasnovani na baznim modelima neuronskih mreža [118]

Analizirana je upotreba baznih modela neuronskih mreža koje u svom srednjem sloju imaju od najmanje 2 do najviše 18 neurona, pri čemu svaki od baznih modela može imati različit broj neurona u skrivenom sloju. Bazni model u tekućoj iteraciji je definisan na osnovu najmanje vrednosti RMSE od 18 generisanih modela u tekućoj iteraciji. Nakon toga postupak se nastavlja do dostizanja ukupnog broja skupova za treniranje M , odnosno generisanja M baznih modela ansambla.

Baza podataka na osnovu koje su trenirani modeli u svakoj iteraciji formirana je Bootstrap metodom [97]. Bootstrap metodom je formiran uzorak iste veličine kao i originalni uzorak. Pošto je kod vrednovanja korišćen postupak sa unakrsnom validacijom sa deset foldova, uzorkovanje je vršeno u okviru devet foldova. Preostali fold je korišćen za testiranje ansambla. Postupak je ponavljan deset puta, tako da je čitav skup podataka korišćen za testiranje ansambla, a ocena predikcije ansambla predstavljena je srednjom vrednošću svih baznih modela odnosno ansambla

u pogledu razmatrane performanse modela. Razmatrani su ansambl koji imaju maksimalno 100 baznih modela.



Slika 7.3 Ansambl neuronskih mreža formiran Bootstrap Aggregating (Bagging) pristupom

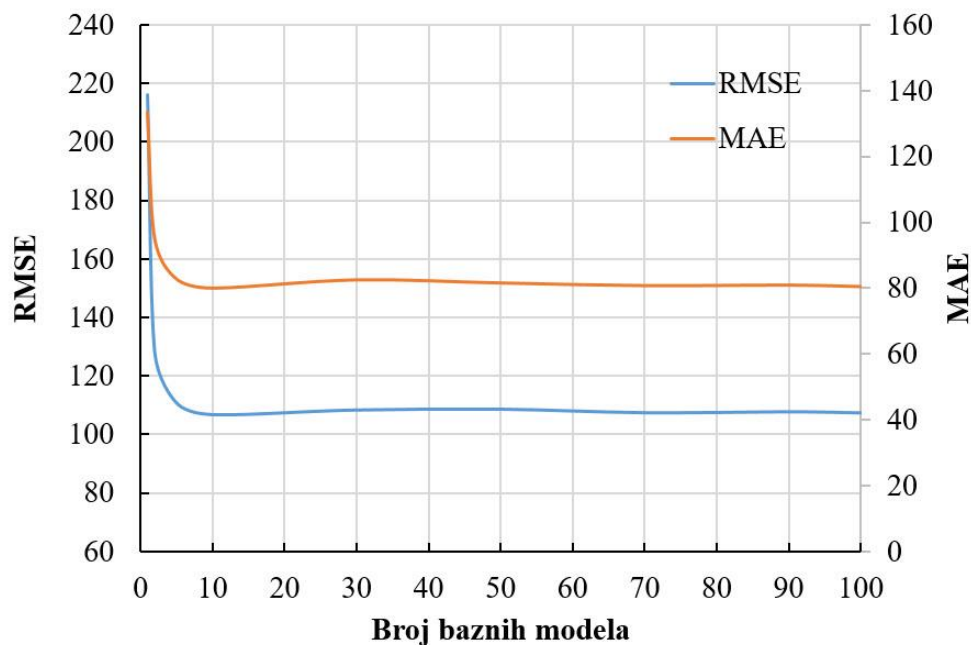
Analizirani su ansambl fomirani od baznih modela koje predstavljaju

1. Modeli neuronskih mreža koji koriste metodu regularizacije
2. Modeli neuronskih mreža koji koriste metodu ranog zaustavljanja

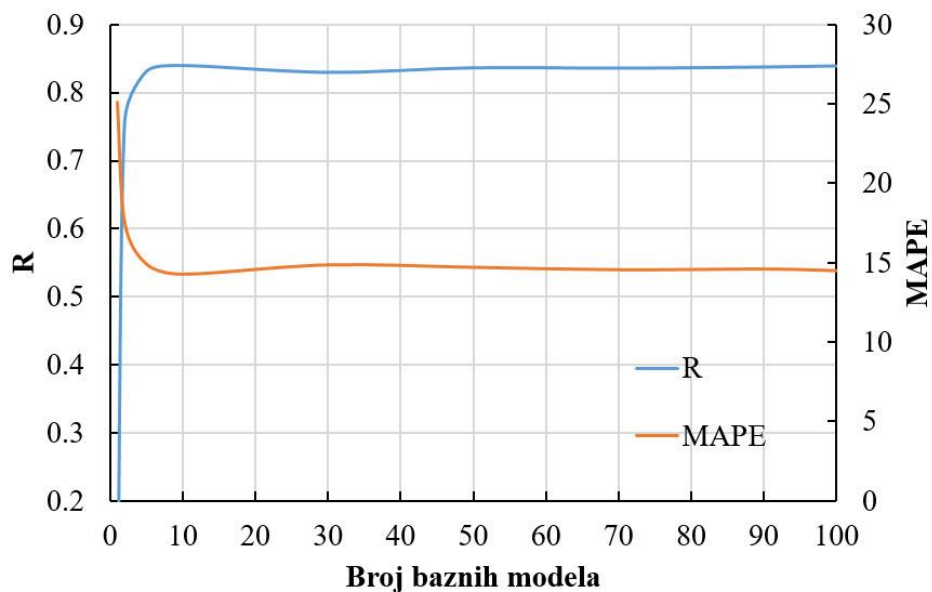
7.4 Ansambl neuronskih mreža koji koriste metodu regularizacije

Kao bazni element kod ove vrste ansambala je MLP neuronska mreža koja koristi Bajesovu regularizaciju . U toku svake iteracije formiran je po jedan butstrap uzorak iste veličine kao i

originalni uzorak i odgovarajući model neuronske mreže. Analizirane su vrednosti svakog ansambla u pogledu kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE.



Slika 7.4 Zavisnost vrednosti RMSE i MAE od broja baznih modela (korišćena regularizacija) u okviru ansambla



Slika 7.5 Zavisnost vrednosti R i MAPE od broja baznih modela (korišćena regularizacija) u okviru ansambla

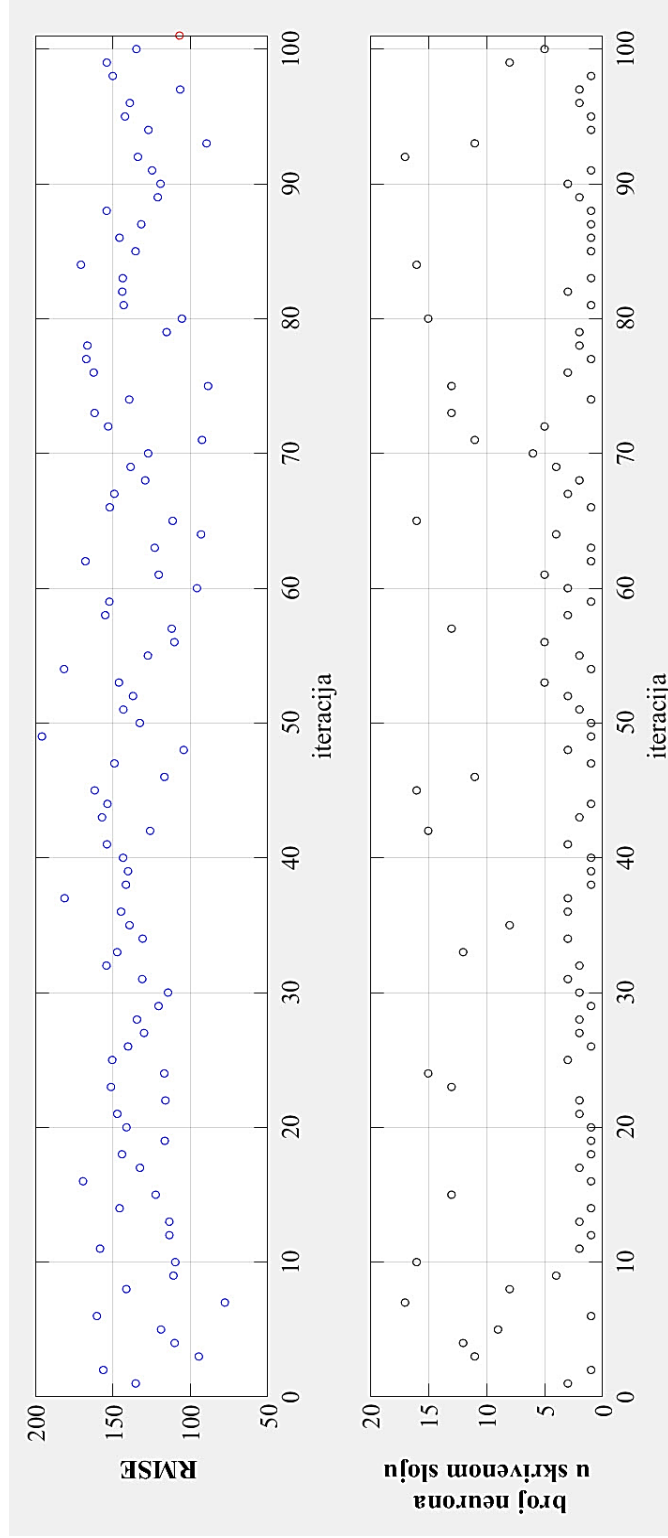
Broj baznih modela u ansamblu je sukcesivno povećavan od 1 do 100. Broj modela je ograničen na 100, iz razloga što dalje povećanje kompleksnosti modela ne bi imalo nikakav praktičan smisao kod problema koji se razmatra. U Tabeli 7.6 su prikazane vrednosti RMSE, MAE, R i MAPE vrednosti za nekoliko modela ansambala sa različitim brojem baznih modela.

Tabela 7.6 Uporedna analiza performansi modela (sa regularizacijom) za ansamble sa 2, 5, 10, 30, 50, 70, 90 i 100 baznih modela kod modela koštanja izgradnje m² mosta

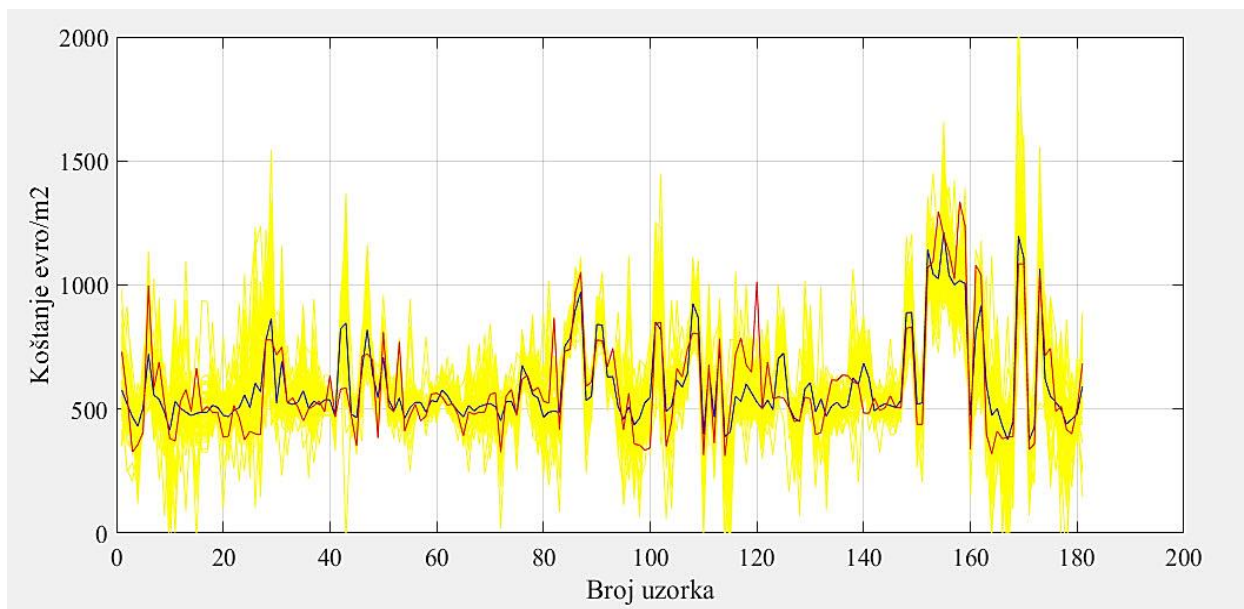
Broj baznih modela	RMSE	MAE	R	MAPE
2	128,4145	94,9447	0,7574	17,5280
5	111,0039	82,7236	0,8311	14,9010
10	106,9294	79,9148	0,8397	14,2630
30	108,5030	82,4242	0,8296	14,8489
50	108,7689	81,4809	0,8363	14,6930
70	107,5888	80,6685	0,8358	14,5404
90	107,5760	80,8243	0,8375	14,5870
100	107,5379	80,3721	0,8391	14,4859

Optimalan broj neurona od potencijalnih razmatranih 18 arhitektura u svakoj iteraciji usvojen je na osnovu kriterijuma minimalne vrednosti RMSE i pridodat je ansamblu, te je postupak sukcesivno ponavljan do željenog broja iteracija.

Sa Slike 7.6 možemo uočiti da optimalan broj neurona u skrivenom sloju varira tokom iteracija. Vrednost RMSE ansambala označena crvenim krugom u odnosu na pojedinačne modele neuronskih mreža čije su vrednosti RMSE označene plavim krugom ukazuje da je tačnost modela u pogledu ove vrednosti značajno poboljšana. To se može objasniti time da se višestrukom iteracijom modela obezbeđuju različiti početni uslovi modela odnosno različita početna tačka tokom implementacije gradijentne metode, kao i time da višestruko ponavljanje butstrap uzorkovanja i veći broj modela formiran nad tim uzorcima u slučaju kada je teško odrediti reprezentativan trening i test skup podataka može značajno poboljšati generalizaciju modela.



Slika 7.6 Optimalan broj neurona u skrivenom (modeli sa regularizacijom) sloju u svakoj iteraciji prikazan je na donjem delu slike, dok je odgovarajuća vrednost RMSE za svaku od iteracija i njoj odgovarajuću arhitekturu prikazana na gornjoj slici. Na gornjoj slici označena vrednost RMSE za bazne modele plavim krugom, dok je RMSE za ansambl označeno crvenim krugom. Prikazane vrednosti se odnose na na jedan od deset ciklusa tokom desetostruke unakrsne validacije.



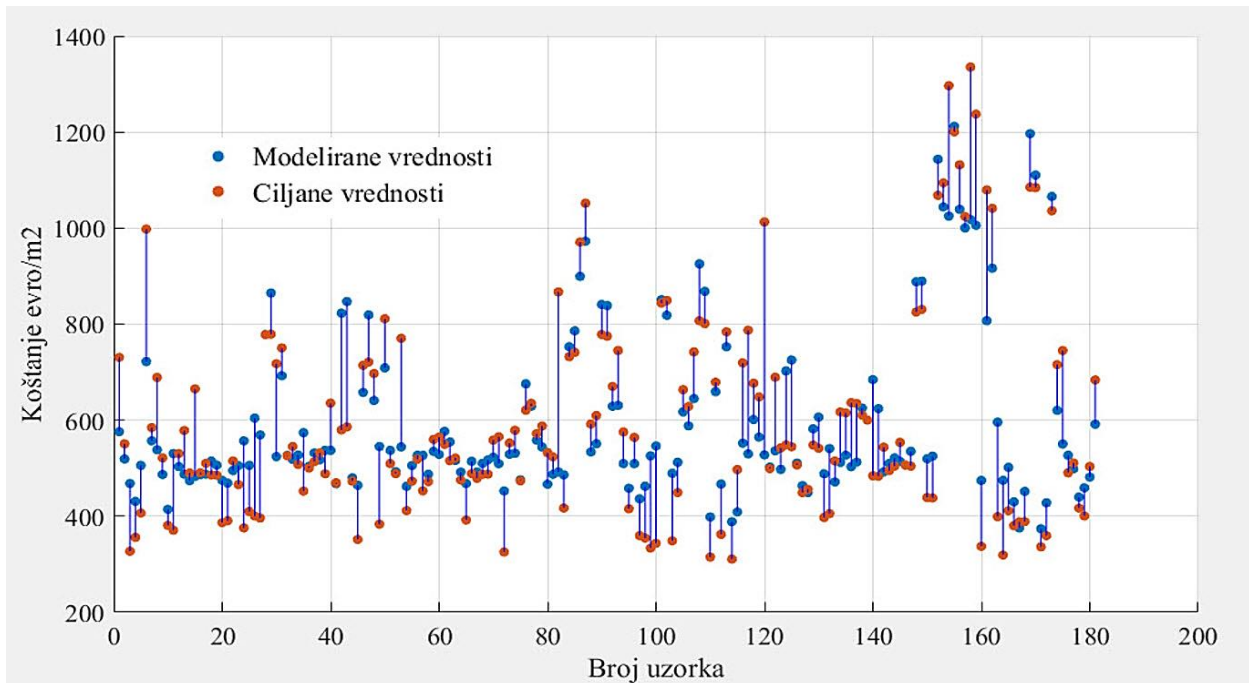
Slika 7.7 Predikcija pojedinačnih neuronskih mreža (žuta boja), predikcija ansambla (tamno-plava boja), stvarne (ciljane) vrednosti (crvena boja) koštanja izražena u evro/m². Bazni modeli sa regularizacijom.

Na Slici 7.7 gde su predikcije pojedinačnih modela neuronskih mreža u okviru ansambla prikazane žutom bojom, a stvarne ciljane vrednosti crvenom bojom možemo videti da formiranjem ansambala (plava boja) od u konkretnom slučaju 100 neuronskih mreža smanjujemo varijansu, odnosno značajno poboljšavamo generalizaciju modela.

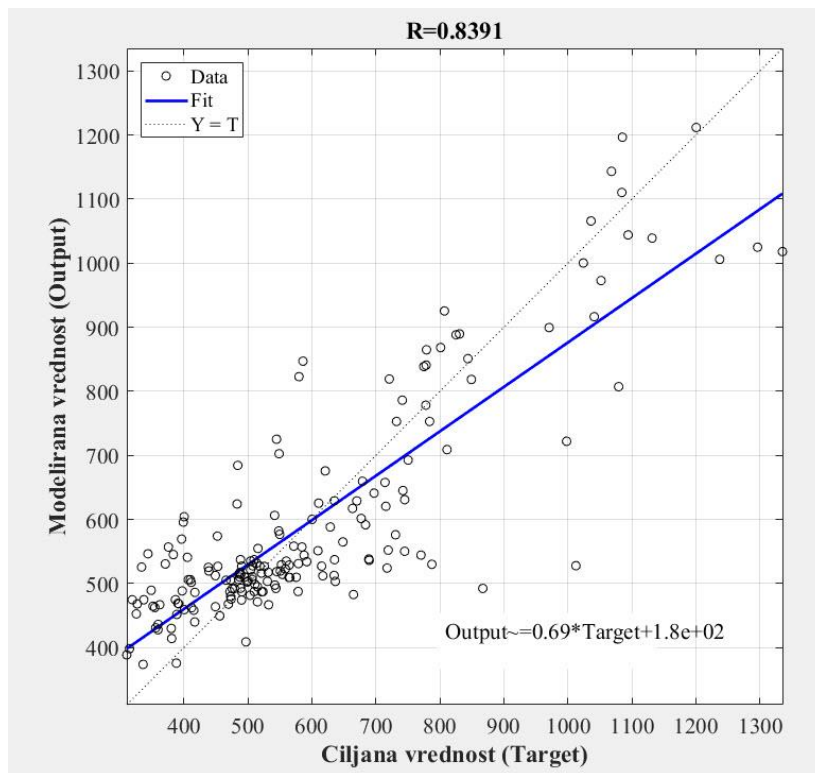
Tabela 7.7 Poredjenje optimalnog pojedinačnog modela neuronske mreže i ansambla (modeli sa regularizacijom) kod modela koštanja izgradnje m2 mosta

Model	RMSE	MAE	R	MAPE
NN-9-14-1	216,1142	133,4136	0,6613	25,0872
Ansambl	107,5379	80,3721	0,8391	14,4859

Primenom ansambla neuronskih mreža (sa regularizacijom) vrednosti RMSE, MAPE u odnosu na pojedinačni optimalni model neuronske mreže su smanjene za približno polovinu, dok je vrednost srednje apsolutne greške MAE smanjena na 60% prethodne vrednosti, vrednost koeficijenta korelacije koja je bila na granici zadovoljavajućeg modela uvećana je za približno 25% u odnosu na pojedinačni model neuronske mreže, Odnos modeliranih i ciljanih vrednosti modela prikazan je na Slici 7.8, a regresioni dijagram je prikazan na Slici 7.9.



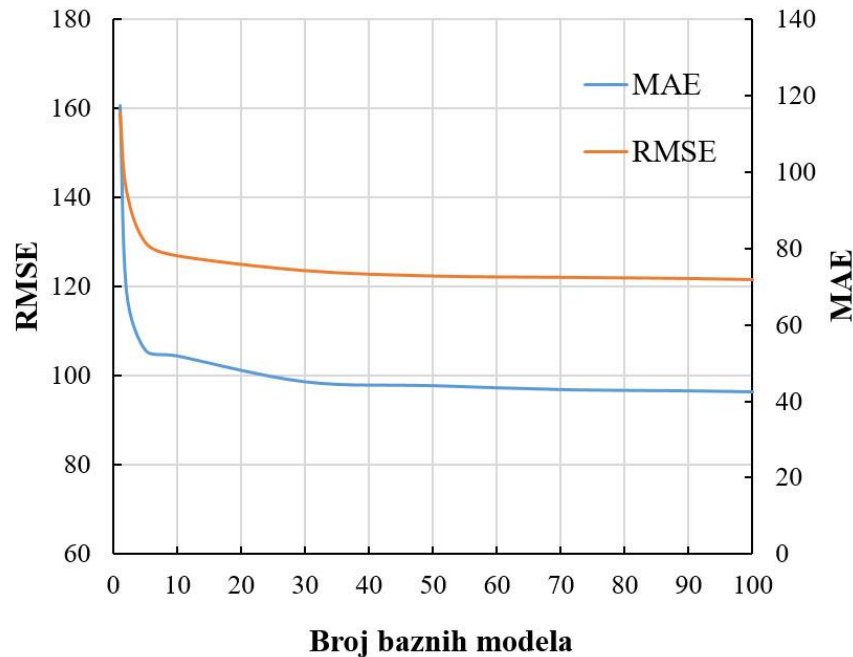
Slika 7.8 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova za model ansambla sa regularizacijom



Slika 7.9 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova za model ansambla sa regularizacijom

7.5 Ansambli neuronskih mreža koji koriste metodu ranog zaustavljanja

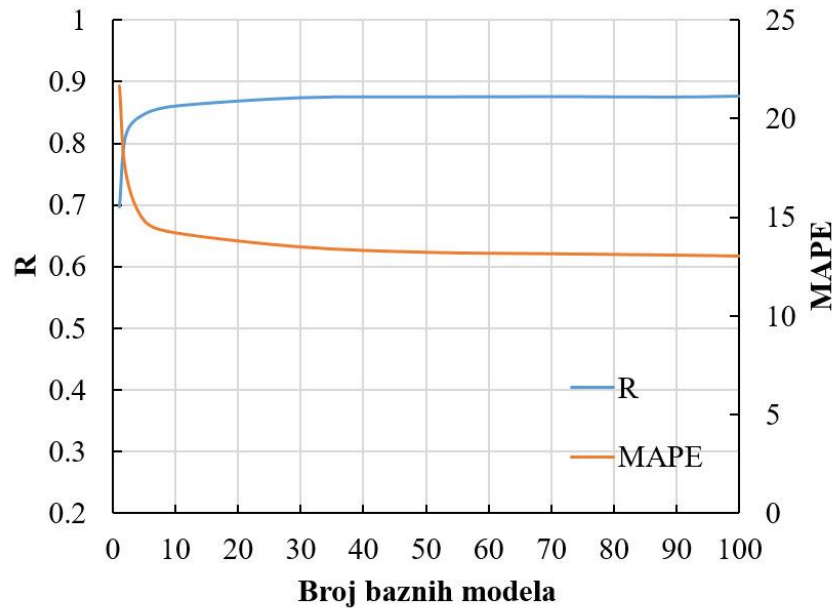
Kao bazni element kod ove vrste ansambala je MLP neuronska mreža koja koristi metodu ranog zaustavljanja . U toku svake iteracije formiran je po jedan butstrap uzorak iste veličine kao i originalni uzorak i odgovarajući model neuronske mreže. Analizirane su vrednosti svakog ansambla u pogledu kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE.



Slika 7.10 Zavisnost vrednosti RMSE i MAE od broja baznih modela (sa metodom ranog zaustavljanja) u okviru ansambla

Broj baznih modela u ansamblu je sukcesivno povećavan od 1 do 100, pri čemu su vrednosti pojedinih kriterijuma prikazane na Slici 7.10 i Slici 7.11. Dalje povećanje kompleksnosti u konkretnom slučaju dovelo bi do zanemarljivog poboljšanja modela.

U Tabeli 7.8 su prikazane vrednosti RMSE, MAE, R i MAPE vrednosti samo za nekoliko modela ansambala sa različitim brojem baznih modela. I u slučaju ansambla formiranih od neuronskih mreža koji koriste metodu ranog zaustavljanja broj od 100 baznih modela pokazao se kao dovoljan. U pogledu sva četiri kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE došlo je konvergencije.



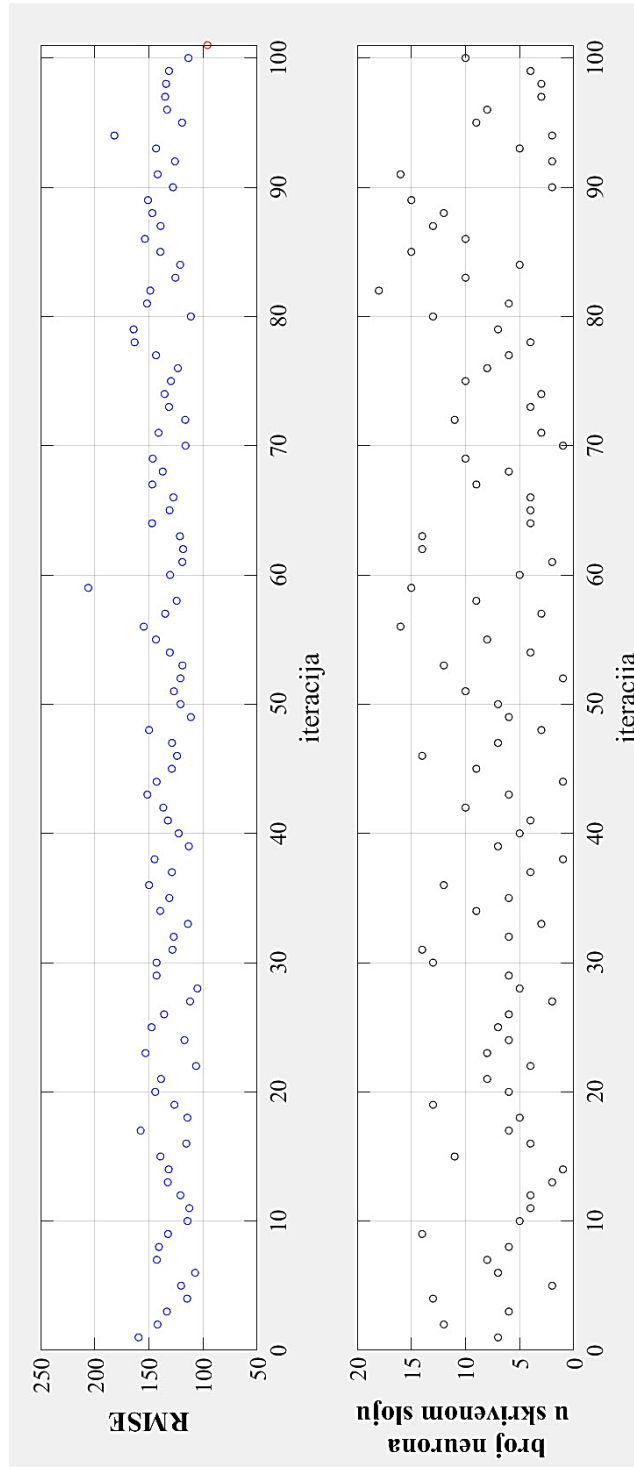
Slika 7.11 Zavisnost vrednosti R i MAPE od broja baznih modela (sa metodom ranog zaustavljanja) u okviru ansambla

Tabela 7.8 Vrednosti kriterijuma tačnosti za ansamble sa 2, 10, 30, 50, 70, 90 i 100 baznih modela

Broj baznih modela	RMSE	MAE	R	MAPE
2	119,0174	94,9443	0,8130	0,1727
5	105,7290	81,3663	0,8480	0,1482
10	104,4886	77,9723	0,8611	14,2152
30	98,6888	74,0681	0,8746	13,5022
50	97,8361	72,6677	0,8759	13,2347
70	96,9571	72,3235	0,8763	13,1602
90	96,6645	72,0082	0,8757	13,0908
100	96,4508	71,7105	0,8771	13,0412

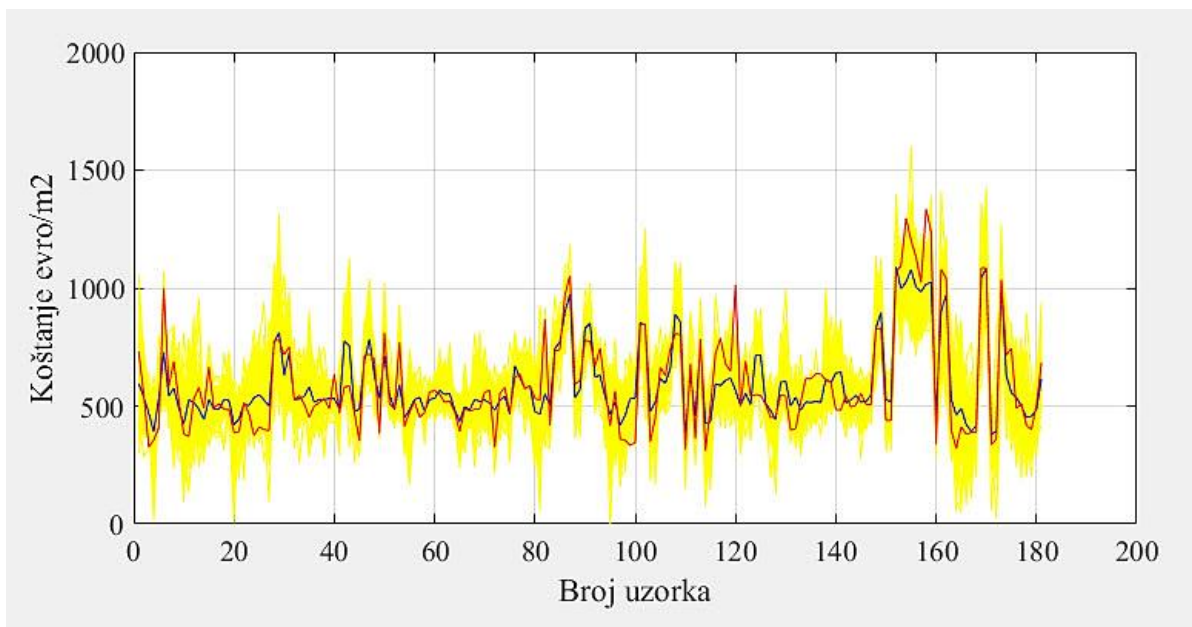
Optimalan broj neurona u skrivenom sloju je kao i u prethodnoj analizi ansambla koji koristi Bajesovu regularizaciju ograničen na maksimalno 18. Od potencijalno razmatranih 18 arhitektura u svakoj iteraciji usvojena je ona arhitektura koja ima minimalnu vrednost RMSE i pridodata je ansamblu te je postupak sukcesivno ponavljan do željenog broja iteracija. Sa Slike

7.12 možemo uočiti da i u ovom slučaju optimalan broj neurona u skrivenom sloju varira tokom iteracija.



Slika 7.12 Optimalan broj neurona u skrivenom (modeli sa metodom ranog zaustavljanja) sloju u svakoj iteraciji prikazan je na donjem delu slike, dok je odgovarajuća vrednost RMSE za svaku od iteracija i njoj odgovarajuću arhitekturu prikazana na gornjoj slici. Na gornjoj slici označena vrednost RMSE za bazne modele plavim krugom, dok je RMSE za ansambl označeno crvenim krugom. Prikazane vrednosti se odnose na na jedan od deset ciklusa, tokom desetostruke unakrsne validacije.

Vrednost RMSE ansambla je označena crvenim krugom, dok je ta ista vrednost za pojedinačne modele neuronskih mreža u okviru ansambla označena plavim krugom. I u ovom slučaju primena ansambla dovela je do poboljšanja generalizacije modela.

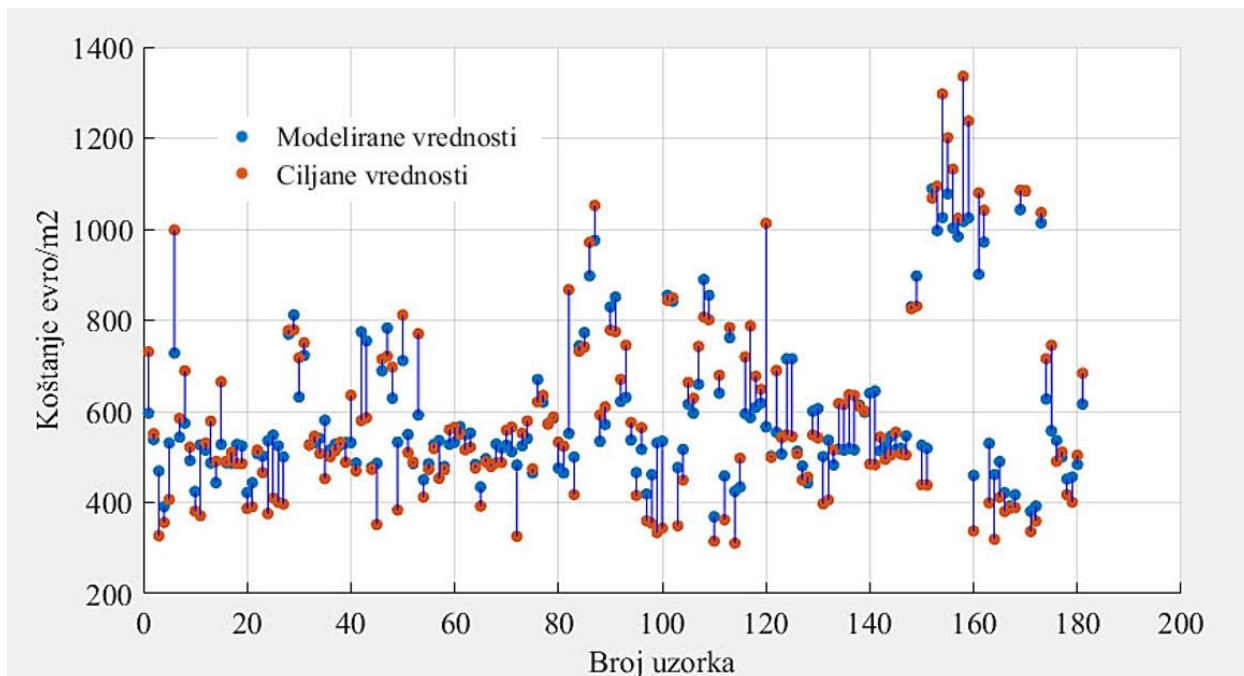


Slika 7.13 Predikcija pojedinačnih neuronskih mreža (žuta boja), predikcija ansambla (tamnoplava boja), stvarne (ciljane) vrednosti (crvena boja) koštanja uzražena u $\text{€}/\text{m}^2$. Bazni modeli bez regularizacije.

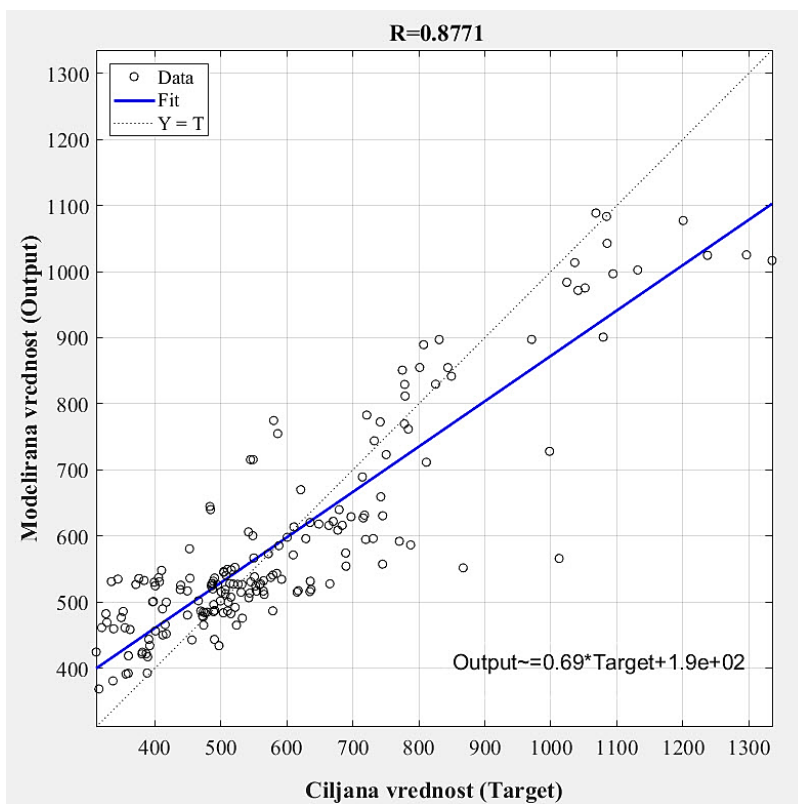
Tabela 7.9 Poređenje optimalnog pojedinačnog modela neuronske mreže i ansambla

Model	RMSE	MAE	R	MAPE
NN-9-10-1	160,7470	115,4832	0,6969	21,6593
Ansambl	96,4508	71,7105	0,8771	13,0412

Primena ansambla neuronskih mreža koji koriste metodu ranog zaustavljanja dovela je do značajnog poboljšanja u pogledu svih kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE, kako u odnosu na optimalni pojedinačni model neuronske mreže sa arhitekturom 9-10-1, tako i u odnosu na ansambl koji je bio sastavljan od neuronskih mreža koje su koristile metodu regularizacije. Poređenje modela ansambla sa optimalnom pojedinalnim modelom mreže dato je u Tabeli 7.9. Vrednost koeficijenta korelacije ansambla je povećana na 0,8771 što predstavlja zadovoljavajuću vrednost.



Slika 7.14 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova za model ansambla sa metodom ranog zaustavljanja



Slika 7.15 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova za model ansambla sa metodom ranog zaustavljanja

U pogledu brzine implementacije su oba modela ansambla analizirana u istom hardverskom okruženju odnosno pod istim uslovima, pri čemu ansambl koji koristi metodu ranog zaustavljanja ima značajnu prednost u pogledu vremena koje je potrebno za implementaciju modela.

8. PROCENA KOŠTANJA DRUMSKIH AB MOSTOVA METODAMA ZASNOVANIM NA STABLIMA ODLUČIVANJA

Kod izrade modela koštanja mostova u cilju dobijanja zadovoljavajućih predikcionih performansi izvršeno je prilagođavanje parametara modela korišćenjem postupka unakrsne validacije.

Analiza koštanja armirano betonskih drumskih mostova izvršena je korišćenjem sledećih metoda:

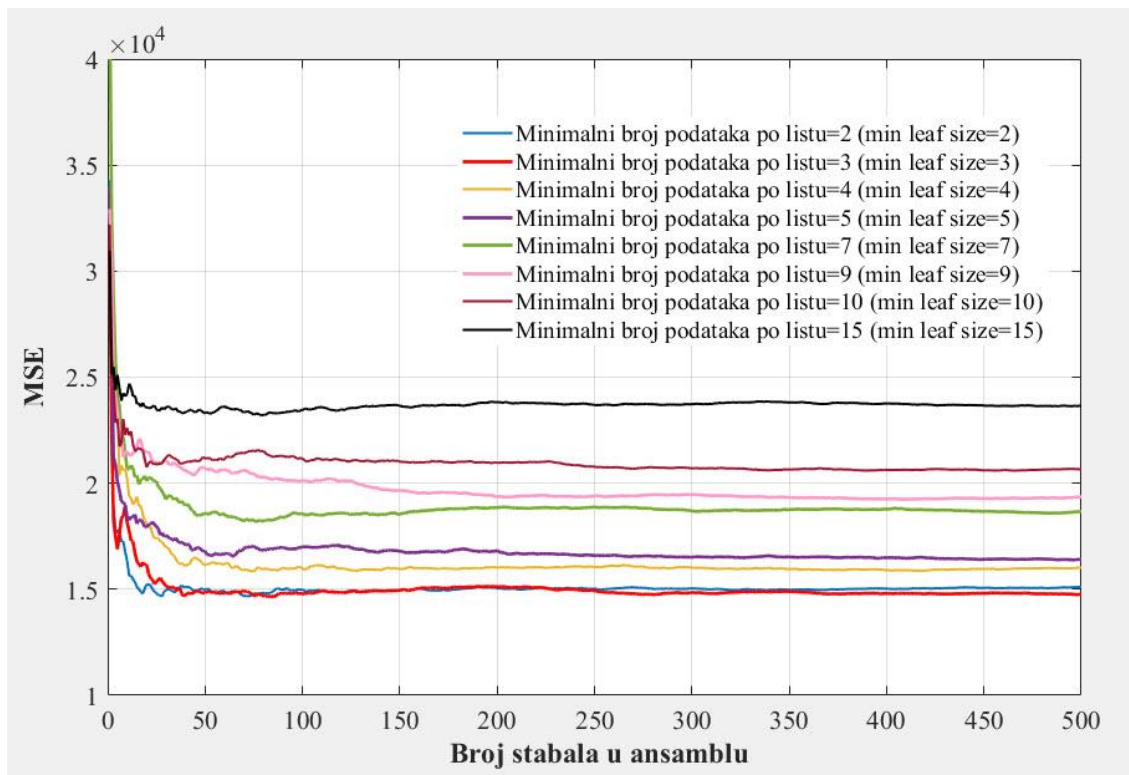
1. Bagging metode (TreeBagger),
2. Random Forests metode,
3. Boosted Trees metode.

8.1 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem Bagging metode

Kod implementacije ove metode analizirane su različite vrednosti prilagodljivih parametara modela i to:

1. **Broj generisanih stabala B .** U okviru ove analize maksimalan broj generisanih stabala je ograničen na 500. Broj generisanih stabala od 100 predstavlja standardno podešavanje u okviru programa MATLAB koji je korišćen kod primene Bagging metode. Vrednosti u pogledu MSE, za sve vrednosti baznih modela generisanog ansambla prikazane su kumulativno. Kod generisanja stabala korišćena je metoda butstrap agregacije pri čemu su formirani uzorci iste veličine kao i originalni uzorci, odnosno pri svakoj iteraciji formiran je ukupno 181 uzorak za generisanje modela stabla. U radu je istražen veći broj regresionih stabala u ansamblu pri čemu je usvojena gornja vrednost od 500 stabala u skladu sa preporukama za primenu Bagging metode [119].
2. **Minimalni broj podataka odnosno uzoraka dodeljen listu (eng. min leaf size) u okviru stabla.** Razmatrane su vrednosti od 2, do 15 uzoraka sa korakom veličine 1 po listu stabla. Standardno podešavanje programa MATLAB kod primene Bagging metode uzima 5 uzoraka po listu stabla kod problema regresije. U okviru istraživanja analiziran je nešto

veći raspon za broj podataka po listu stabla i ispitan je uticaj broja podataka na generalizaciju modela.



Slika 8.1 Zavisnost vrednosti MSE od broja stabala (baznih modela) u okviru ansambla kod Bagging metode

Na Slici 8.1 je prikazana kumulativno zavisnost MSE od broja generisanih regresionih stabala u okviru ansambla. Može se uočiti da je standardno programsko podešavanje MATLAB programa od 100 stabala u okviru ansambla, u ovom istraživanju sa praktičnog aspekta zadovoljavajuće.

U razmatranom slučaju kod modela koji imaju minimalni broj podataka po listu 2, 3, 4 i 5 dobijena vrednost MSE za 100 generisanih stabala u okviru ansambla se neznatno razlikuje od vrednosti MSE ansambala sa znatno većim brojem baznih modela sa istim brojem podataka po listu.

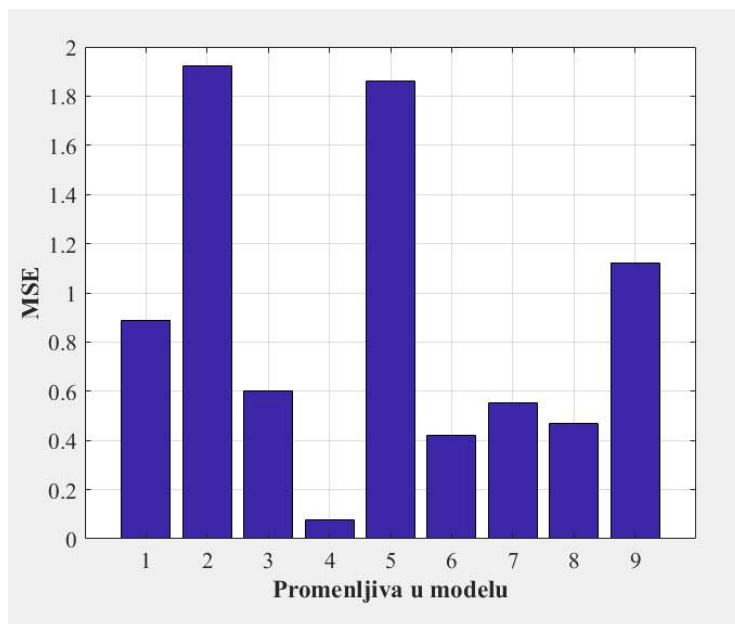
Od analiziranih modela najmanju vrednost MSE ima model kod koga je minimalni broj podataka po listu stabla ograničen na 3 koji je na Slici 8.1 označen svetlijom crvenom bojom. Slične vrednosti u pogledu MSE ima i model koji ima minimalni broj podataka po listu 2. Ostali modeli

imaju znatno veće vrednosti MSE. Analizirane su i vrednosti ansambala u pogledu ostalih kriterijuma. U Tabeli 8.1 su navedene RMSE, MAE, R i MAPE vrednosti za neke od analiziranih modela.

Tabela 8.1 Kumulativne vrednosti RMSE, MAE, R i MAPE u zavisnosti od broja stabala (baznih modela) u ansamblu koji ima minimalni broj podataka po listu 3.

Broj stabala	RMSE	MAE	R	MAPE
100	121,6217	89,4003	0,7976	15,8893
200	122,9336	88,1942	0,8113	15,5809
300	121,8650	88,8363	0,7978	15,7639
400	121,6678	88,4146	0,8047	15,7592
500	121,5035	88,7241	0,8008	15,7611

Primenom Bagging metode moguće je odrediti značajnost promenljivih u generisanom modelu. Predikcija modela treba da se u najvećoj meri oslanja na značajnije promenljive, dok promenljive koje imaju mali značaj vrlo često ne samo da ne doprinose povećanoj generalizaciji modela, već umanjuju tačnost modela.



Slika 8.2 Značaj pojedinih promenljivih u modelu ansambla kod primene Bagging metode

U okviru Bagging metode, rangiranje promenljiva se implementira tako što se u prvom koraku izgradi model ansambla prema podacima odnosno uzorcima sa kojima raspolažemo za treniranje. Podatke koje dobijamo butstrap metodom možemo podeliti na podatke koje koristimo za izgradnju modela tzv. *in bag data* i podatke koje koristimo za testiranje modela tzv. *out of bag data*. Podatke koje koristimo za obuku (in bag data) su podaci koji su izvučeni iz čitavog skupa podataka uzorkovanjem sa zamenom. Podaci koji nisu izvučeni iz čitavog skupa (out of bag data) su test podaci. U toku procesa izgradnje modela računa se out of bag greška (greška na test skupu koji nije korišćen za treniranje modela) nalaženjem razlike između out of bag uzorka i predikcije za taj isti uzorak i ona se memoriše. Postupak ponavljamo za sva stabla u okviru ansambla i nalazimo srednju vrednost te greške.

Da bi odredili značaj j -te promenljive neohodno je da posle obuke odnosno treninga modela vrednosti j -te promenljive permutujemo u okviru trening podataka i ponovo proračunamo out of bag grešku za ovakve permutovane podatke. Značaj promenljive se određuje tako što se izračuna srednja vrednost razlike pre i posle permutacije za sva stabla u okviru ansambla. Ova se vrednost zatim deli sa standardnom devijacijom ovih razlika. Promenljiva kod koje je dobijena veće vrednost u odnosu na ostale rangira se kao značajnija u odnosu na promenljive kod kojih smo dobili manje vrednosti. Postupak koji je primenjen u istraživanju je detaljno opisan u originalnom radu Random Forests autora L. Brajmana [100].

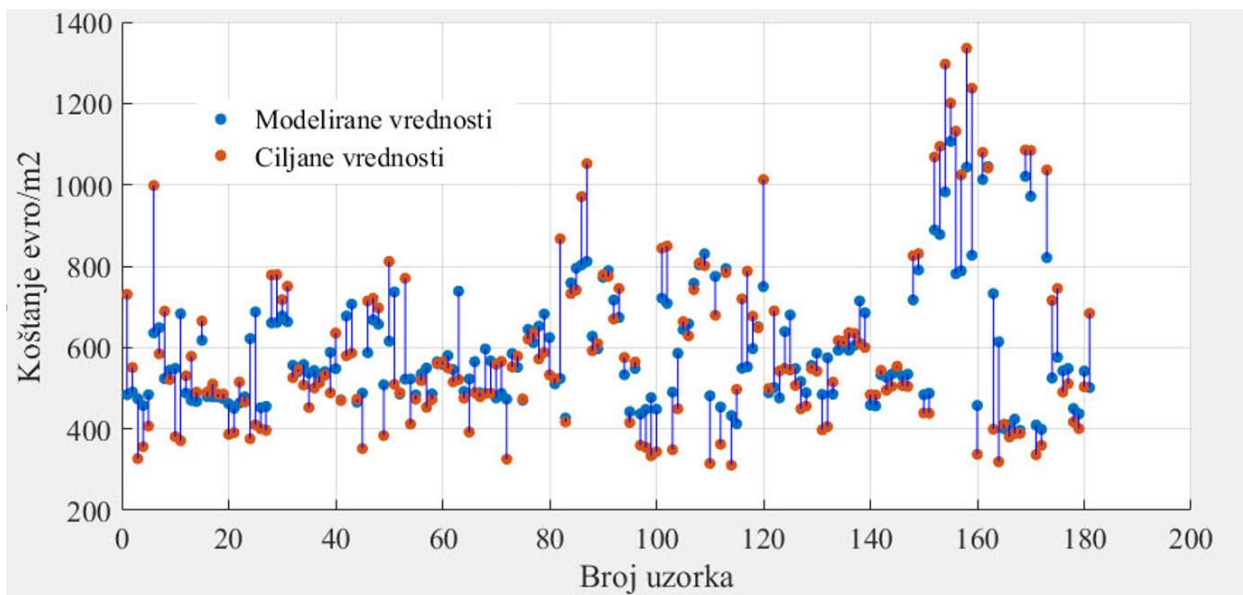
U konkretnom istraživanju na dijagramu su analizirane sledeće promenljive:

x_1 – Srednja vrednost raspona	x_4 – Način gradnje	x_7 – Bruto zarada
x_2 – Dužina mosta	x_5 – Prosečna visina stubova	x_8 – Indeks cene agregata
x_3 – Širina mosta	x_6 – Način fundiranja	x_9 – Indeks cene čelika

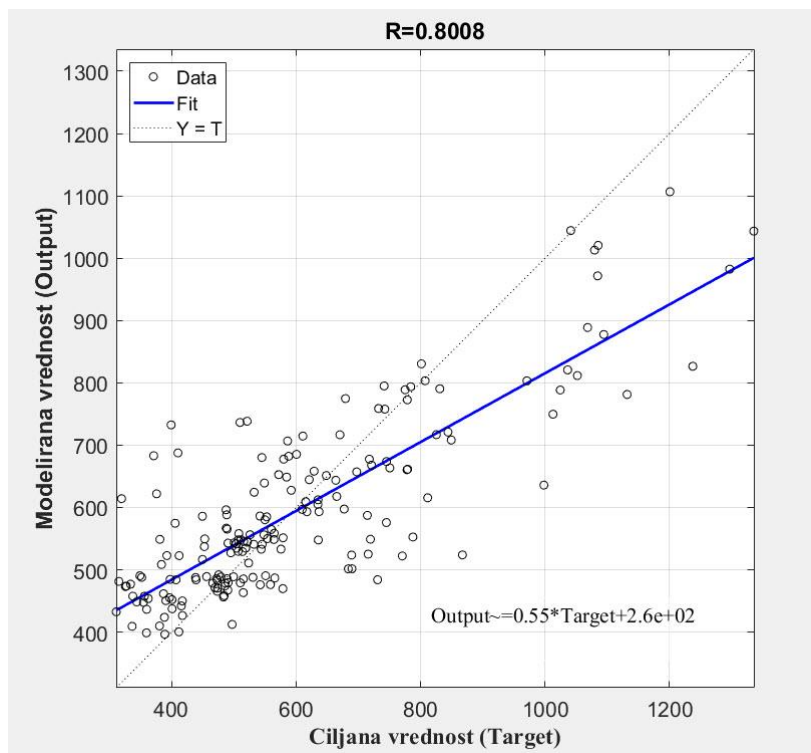
pri čemu je na slici sa 1 označena promenljiva x_1 , sa 2 promenljiva x_2 , sa 3 promenljiva x_3 itd.

Analiza je pokazala da su najznačajnije promenljive u modelu x_2, x_5, x_9, x_1 odnosno dužina mosta, prosečna visina stubova, indeks cene čelika i srednja vrednost raspona. Promenljive x_3, x_7, x_8, x_6 odnosno širina mosta, bruto zarada, indeks cene agregata i način fundiranja predstavljaju sledeću grupu promenljiva po značaju. Promenljiva x_4 odnosno način gradnje ima najmanji značaj u

modelu. Na Slici 8.3 je dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti, a na Slici 8.4. je prikazan regresioni dijagram kod primene Bagging metode.



Slika 8.3 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova kod Bagging metode

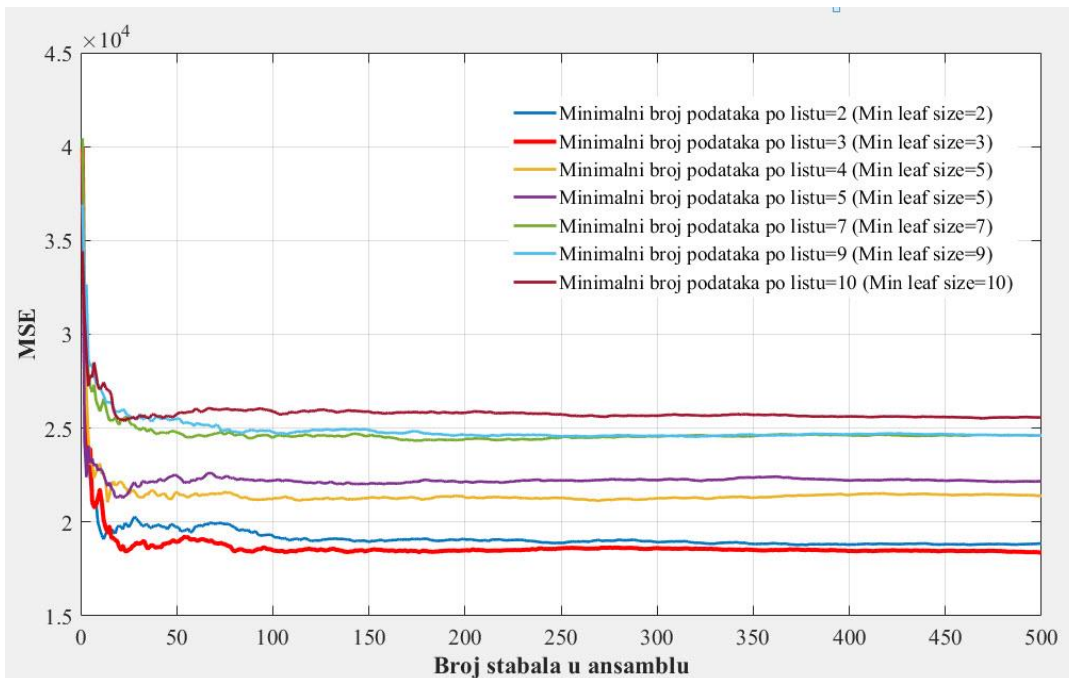


Slika 8.4 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova kod Bagging metode

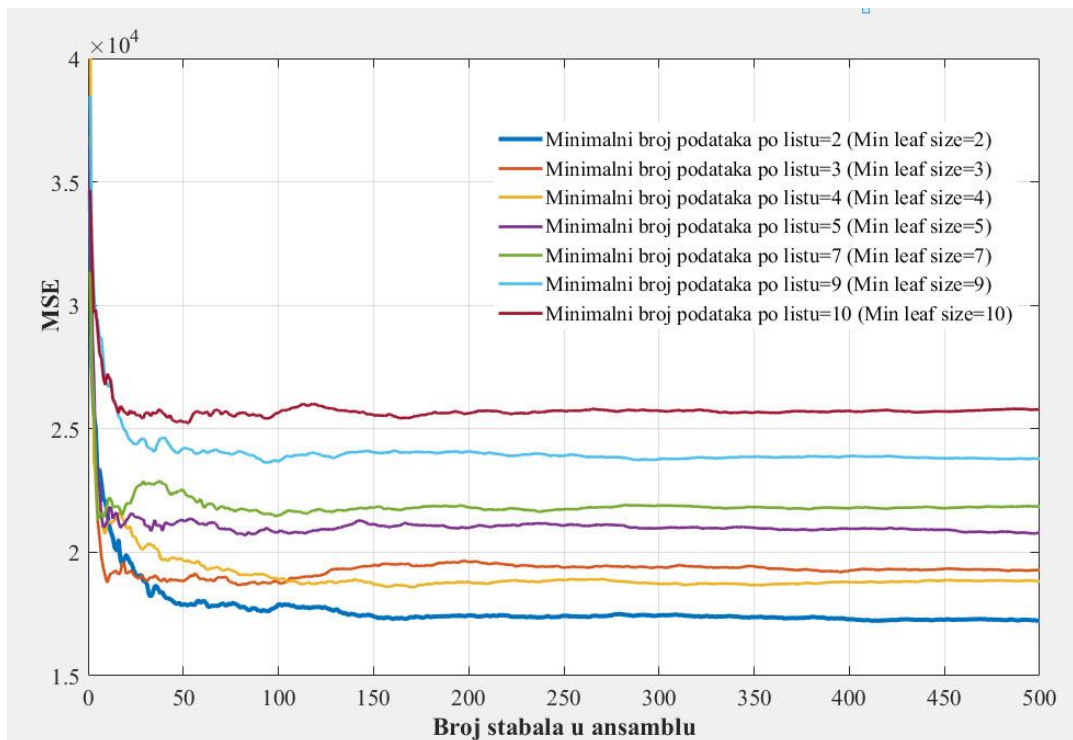
8.2 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem Random Forests metode

Metoda Random Forests na slučajan način bira podskup ulaznih promenljiva na kojima se vrši račvanje u okviru stabla. Kod implementacije ove metode analizirane su različite vrednosti prilagodljivih parametara modela i to:

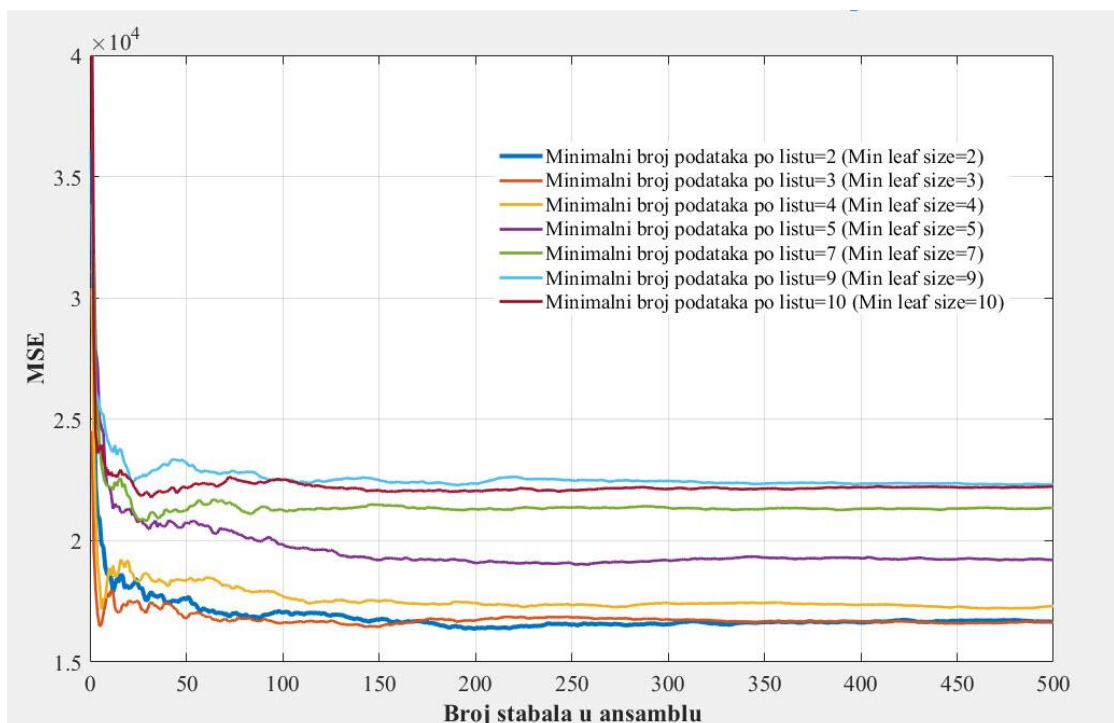
1. **Broj generisanih stabala B .** U okviru ove analize maksimalan broj generisanih stabala je ograničen na 500. Broj generisanih stabala od 100 predstavlja standardno podešavanje u okviru programa MATLAB koji je korišćen kod primene Random Forests metode. Vrednosti u pogledu MSE za sve vrednosti baznih modela generisanog ansambla prikazane su kumulativno. Kod generisanja stabala korišćena je metoda butstrap agregacije pri čemu su formirani uzorci iste veličine kao i originalni uzorci odnosno pri svakoj iteraciji formirano je ukupno 181 uzorak za generisanje modela stabla. U radu je istražen veći broj regresionih stabala u ansamblu pri čemu je usvojena gornja vrednost od 500 stabala u skladu sa preporukama za primenu Random Forests metode [119].
2. **Broj promenljivih na kojima se vrši račvanje u stablu.** U radu Random Forests autora L. Brajmana [100] se daje preporuka da podskup m promenljiva na kojima se vrši račvanje iznosi približno \sqrt{p} odnosno $p/3$ prediktora, zavisno od toga da li se radi o problemu klasifikacije ili o problemu regresije. U ovom istraživanju je broj ulaznih promenljiva odnosno prediktora 9, tako da primenom oba kriterijuma dobijamo da podskup promenljiva na kojima vršimo račvanja jednak 3. U ovom radu je analiziran nešto širi opseg modela, odnosno razmatrani su i modeli u kojima podskup promenljiva na kojima vršimo račvanje ima dve, zatim tri i na kraju četiri promenljive.
3. **Minimalni broj podataka odnosno uzoraka dodeljen listu (eng. min leaf size) u okviru stabla.** Razmatrane su vrednosti od 2 do 10 uzoraka sa korakom 1 po listu stabla. Standardno podešavanje programa MATLAB kod primene Random Forests metode uzima 5 uzoraka po listu stabla kod problema regresije. U okviru istraživanja analiziran je nešto veći raspon za broj podataka po listu stabla .



Slika 8.5 Zavisnost vrednosti MSE od broja stabala (baznih modela) u okviru ansambla kod Random Forests metode gde je za račvanje stabala korišćen podskup od 2 promenljive



Slika 8.6 Zavisnost vrednosti MSE od broja stabala (baznih modela) u okviru ansambla kod Random Forests metode gde je za račvanje korišćen podskup od 3 promenljive



Slika 8.7 Zavisnost vrednosti MSE od broja stabala (baznih modela) u okviru ansambla kod Random Forests metode gde je za račvanje korišćen podskup od 4 promenljive

Na prethodnim slikama prikazana je zavisnost MSE od broja stabala kod modela ansambala kod kojih je prilikom generisanja stabala korišćen podskup od dve (Slika 8.5), zatim tri (Slika 8.6) i na kraju četiri slučajno izabrane promenljive (Slika 8.7).

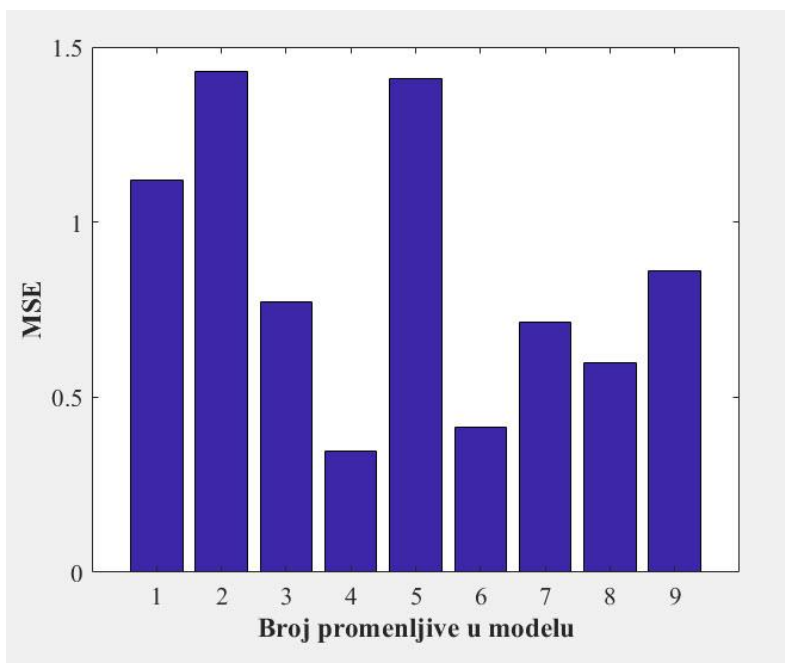
Kod modela ansambla gde su korišćene dve promenljive optimalni model ansambla u odnosu na vrednos MSE dobijen je ograničavanjem minimalnog broja po listu na 3, dok su kod modela gde su korišćene tri i četiri promenljive optimalni modeli imali ograničenje minimalnog broja podataka na 2.

U referencama Brajmanovog rada [100] preporučuje se da broj slučajno izabranih promenljiva po kojima računamo bude jednak približno trećini od ukupnog broja varijabli, što bi u najvećem broju problema trebalo do dovede da zadovoljavajućeg modela. Takve pretpostavke su usvojene i u programskoj implementaciji u MATLAB programu (eng. default settings). U konkretnom slučaju to bi značilo usvajanje modela u kojima bi za generisanje regresionih stabala koristili 3 od ukupno 9 promenljivih, što nije u potpunosti prihvaćeno u ovom istraživanju te je ispitan veći broj modela

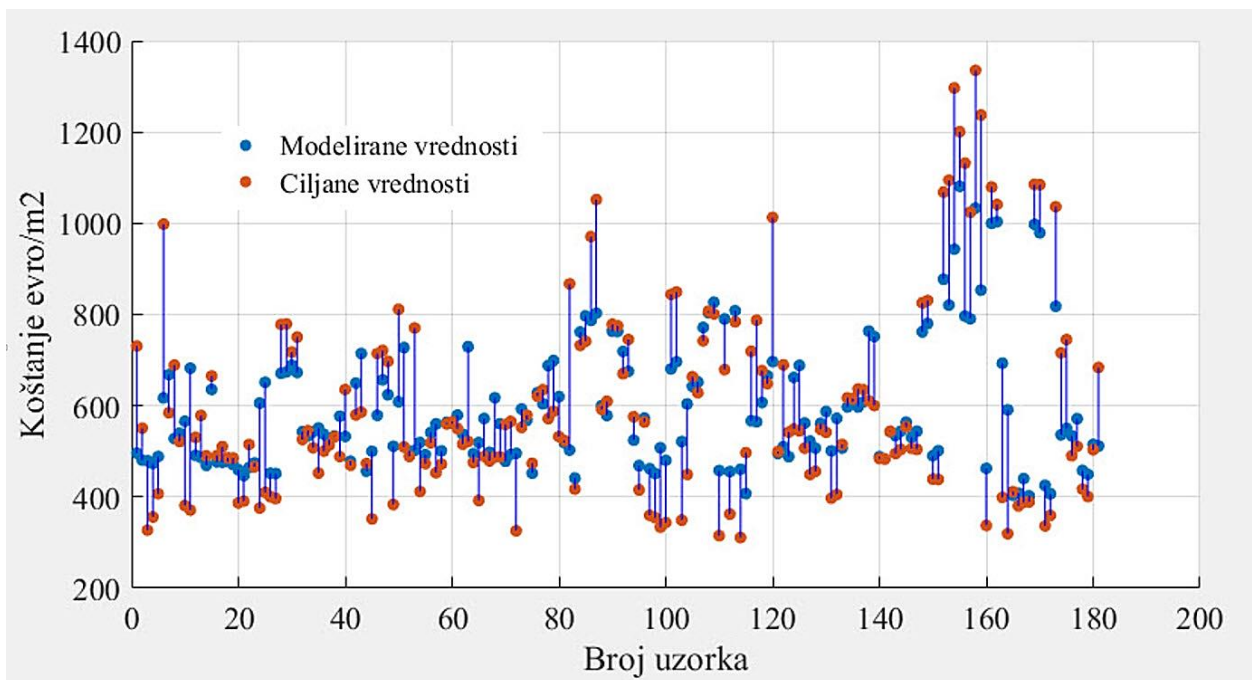
odnosno analizirani su i modeli sa 2 i 4 promenljive, a analiza je obuhvatala vrednovanje modela i po ostalim usvojenim kriterijumima tačnosti (Tabela 8.2) MAE, R i MAPE.

Tabela 8.2 Kumulativne vrednosti RMSE, MAE, R i MAPE u zavisnosti od broja stabala (baznih modela) u ansamblu i broja promenljivih po kojima se vrši račvanje kod metode Random Forests

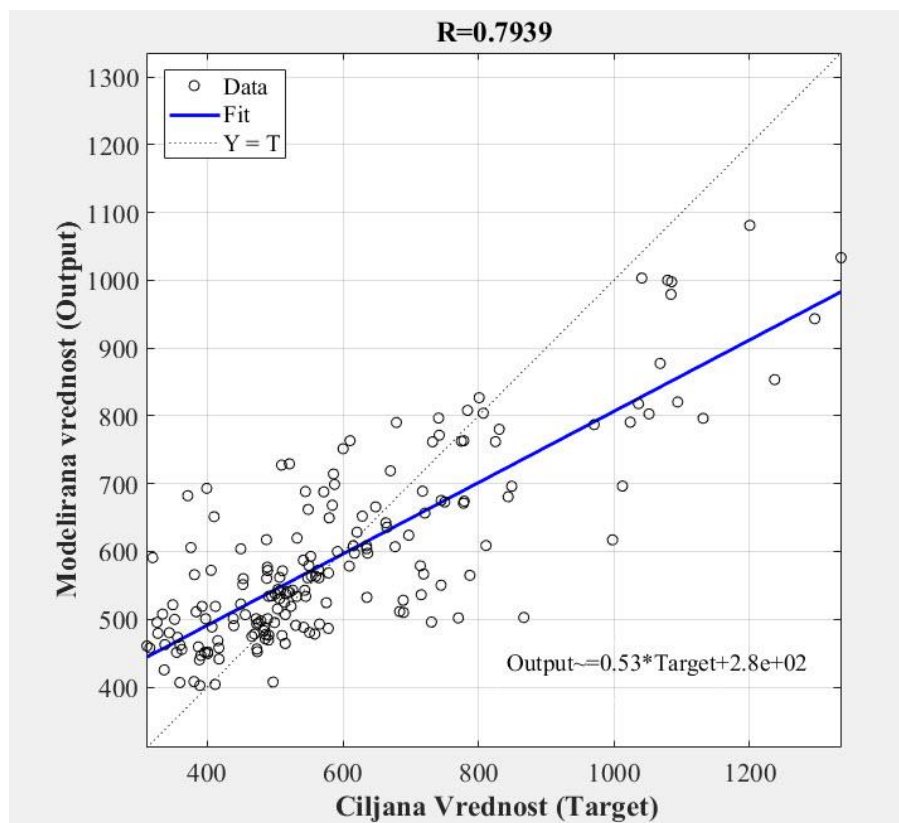
Broj promenljivih m po kojima se vrši račvanje kod generisanja stabala ansambla												
Broj tabala	m=2 min broj podataka po listu=3				m=3 min broj podataka po listu=2				m=4 min broj podataka po listu=3			
	RMSE	MAE	R	MAPE	RMSE	MAE	R	MAPE	RMSE	MAE	R	MAPE
	100	135,9864	106,9456	0,7587	18,8240	133,7513	95,0765	0,7909	16,8020	128,8887	94,9194	0,7860
200	135,9896	104,1571	0,7733	18,2617	132,0808	96,0570	0,7861	17,0787	127,9891	94,2822	0,7874	16,7323
300	136,4222	105,6349	0,7737	18,6092	132,0898	95,7171	0,7919	16,9020	128,6778	93,1609	0,7946	16,4713
400	135,8319	105,6352	0,7644	18,6603	131,4795	95,9563	0,7889	16,9775	128,9564	92,3969	0,7970	16,3955
500	135,5564	105,0174	0,7683	18,5676	131,2537	95,6476	0,7882	16,9151	129,0456	93,5255	0,7939	16,5776



Slika 8.8 Značaj pojedinih promenljiva u modelu ansambla kod primene metode Random Forests metode



Slika 8.9 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova kod Random Forests metode



Slika 8.10 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova kod Random Forests metode

Globalno optimalni model od svih modela u okviru Random Forests metode je model kod koga je račvanje kod generisanja stabala koristilo $m=4$ promenljive i kod koga je minimalni broj podataka po listu ograničen na 2.

Analiza je pokazala da su najznačajnije promenljive u modelu x_2, x_5, x_1, x_9 , odnosno dužina mosta, prosečna visina stubova, srednja vrednost raspona i indeks cene čelika. Promenljive x_3, x_7, x_8 odnosno širina mosta, bruto zarada, indeks cene agregata predstavljaju sledeću grupu promenljiva po značaju. Promenljive x_4, x_6 odnosno način gradnje i način fundiranja imaju najmanji značaj u modelu.

Na Slici 8.9 je prikazan dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti Random Forests modela, a na Slici 8.10 je prikazan regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti Random Forests modela.

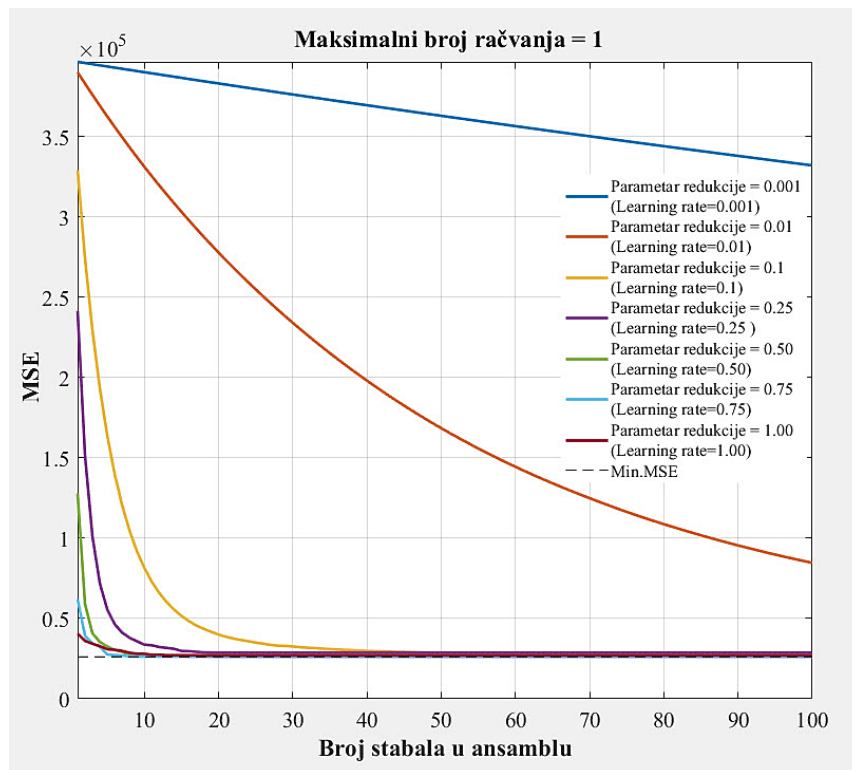
8.3 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem Boosted Trees metode

Kod određivanja parametara optimalnog modela kod Boosting metode kao i kod ostalih modela korišćen je postupak unakrsne validacije.

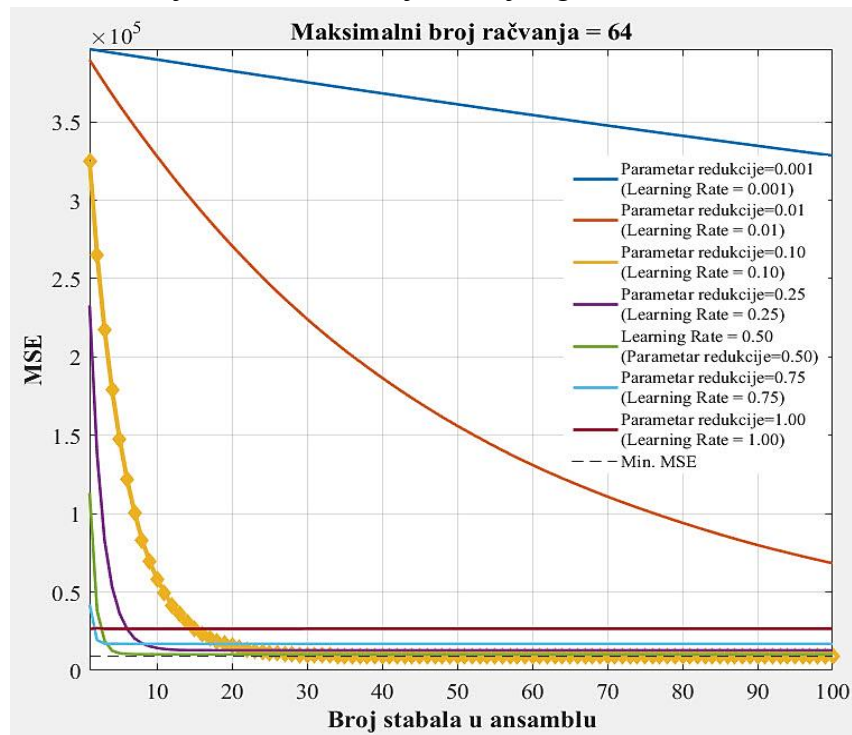
Kod Boosting Trees metode imamo sledeće parametre modela:

1. **Broj generisanih stabala B .** Kod Boosting metode postoji mogućnost pretreniranja modela kod formiranja prevelikog broja stabala. Sa obzirom na veliki broj analiziranih modela u istraživanju je broj stabala (baznih modela) u okviru ansambla ograničen na maksimalno 100.
2. **Parametar redukcije λ (eng. learning rate).** Ovaj parametar određuje brzinu treniranja modela. Iako su uobičajene vrednosti 0,01 i 0,001, u radu je istažen veći broj vrednosti i to: 0,001; 0,01; 0,1; 0,5; 0,75 i 1,0.
3. **Broj račvanja u stablu d .** Anazirane su vrednosti broja račvanja sa eksponencijalnim uvećanjem broja račvanja narednih ansambala. U literaturi se preporučuje da treba ispitati sve vrednosti od 1 (generisano stablo sa jednim račvanjem, eng. decision stump) do $n-1$ u eksponencijalno rastućem poredku, gde n predstavlja broj uzoraka sa kojima raspoložemo. Shodno tome generisani su modeli stabala koji su imali maksimalni broj račvanja od $2^0 = 1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7 = 128$.

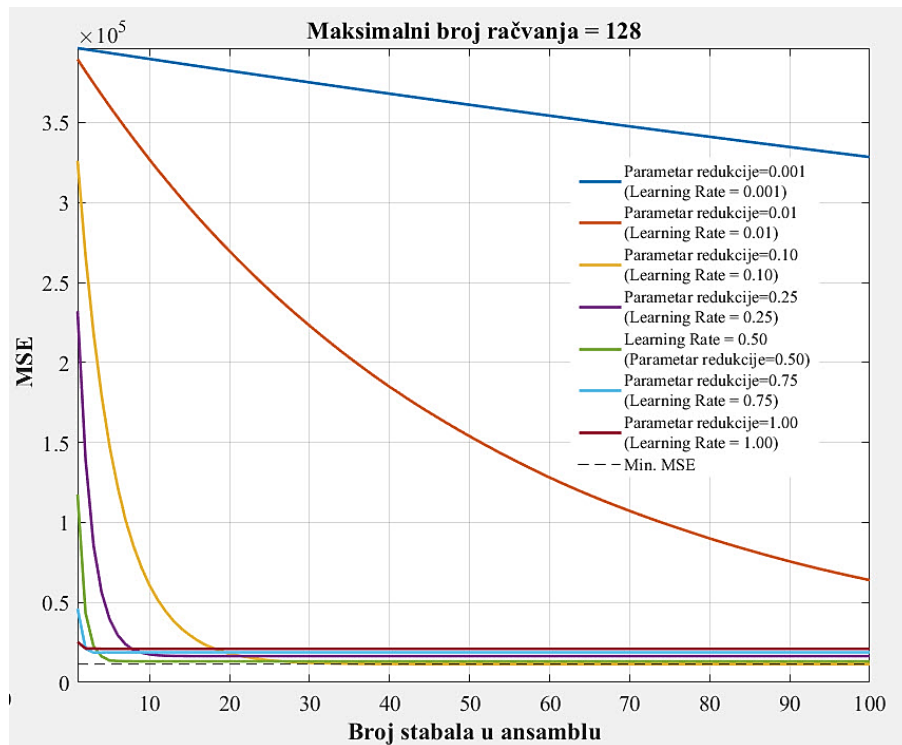
Na Slici 8.11, Slici 8.12 i Slici 8.13 prikazan je uticaj usvojenih parametara na tačnost modela, odnosno uticaj maksimalnog broja račvanja i parametra redukcije na tačnost modela u pogledu vrednosti MSE koja je dobijena unakrsnom validacijom. Model kod koga imamo samo 1 račvanje (eng. decison stump), kao i model sa 128 račvanja predstavljaju granične slučajeve. Optimalni model sa najmanjom vrednošću MSE za analizirani ansambal sastavljen od 100 baznih modela prikazan je na Slici 8.12 i predstavljen je žutom linijom.



Slika 8.11 Zavisnost vrednosti MSE od parametra redukcije i broja stabala (baznih modela) kod Boosted Trees metode kada je maksimalni broj račvanja ograničen na maksimalno 1 račvanje



Slika 8.12 Zavisnost vrednosti MSE od parametra redukcije i broja stabala (baznih modela) kod Boosted Trees metode kada je maksimalni broj račvanja ograničen na maksimalno 64 račvanja



Slika 8.13 Zavisnost vrednosti MSE od parametra redukcije i broja stabala (baznih modela) kod Boosted Trees metode kada je maksimalni broj račvanja ograničen na maksimalno 128 račvanja

Optimalni model dobijen analizom svih gore navedenih modela dobijen je za sledeće vrednosti parametara: parametar redukcije 0,10, maksimalni broj račvanja 64 i minimalni broj podataka po čvoru 11. U pogledu veličine broja podataka po čvoru analizirane su vrednosti od 5 do maksimalno 20 podataka po čvoru sa korakom 1 (eng. min parent size).

Analizom prethodnih slika, može se uočiti da su kod modela kod kojih je parametar redukcije znatno niži, a to su modeli gde su vrednosti parametra 0,001 i 0,01 postoji značajno veća greška MSE u odnosu na ostale modele. Jedan od razloga je i to što je kod tih modela potrebno generisati mnogo veći broj stabala u okviru ansambla da bi došlo do konvergencije rešenja. U ovom slučaju istovremena analiza značajno većeg broja modela (sa različitim brojem parametara redukcije) je isuviše računski zahtevna za praktičnu implemenaciju.

Kod modela gde je parametar redukcije veći, a to su modeli sa vrednošću parametra 0,1; 0,25; 0,50; 0,75 i 1,00 dolazi znatno brže do konvergencije modela, pa sa praktično 100 generisanih stabala kod ovih modela dolazi do konvergencije. Ovi modeli u pogledu tačnosti imaju slične

vrednosti MSE. Tačnost optimalnog modela može se sagledati preko vrednosti kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE koje su date u Tabeli 8.3

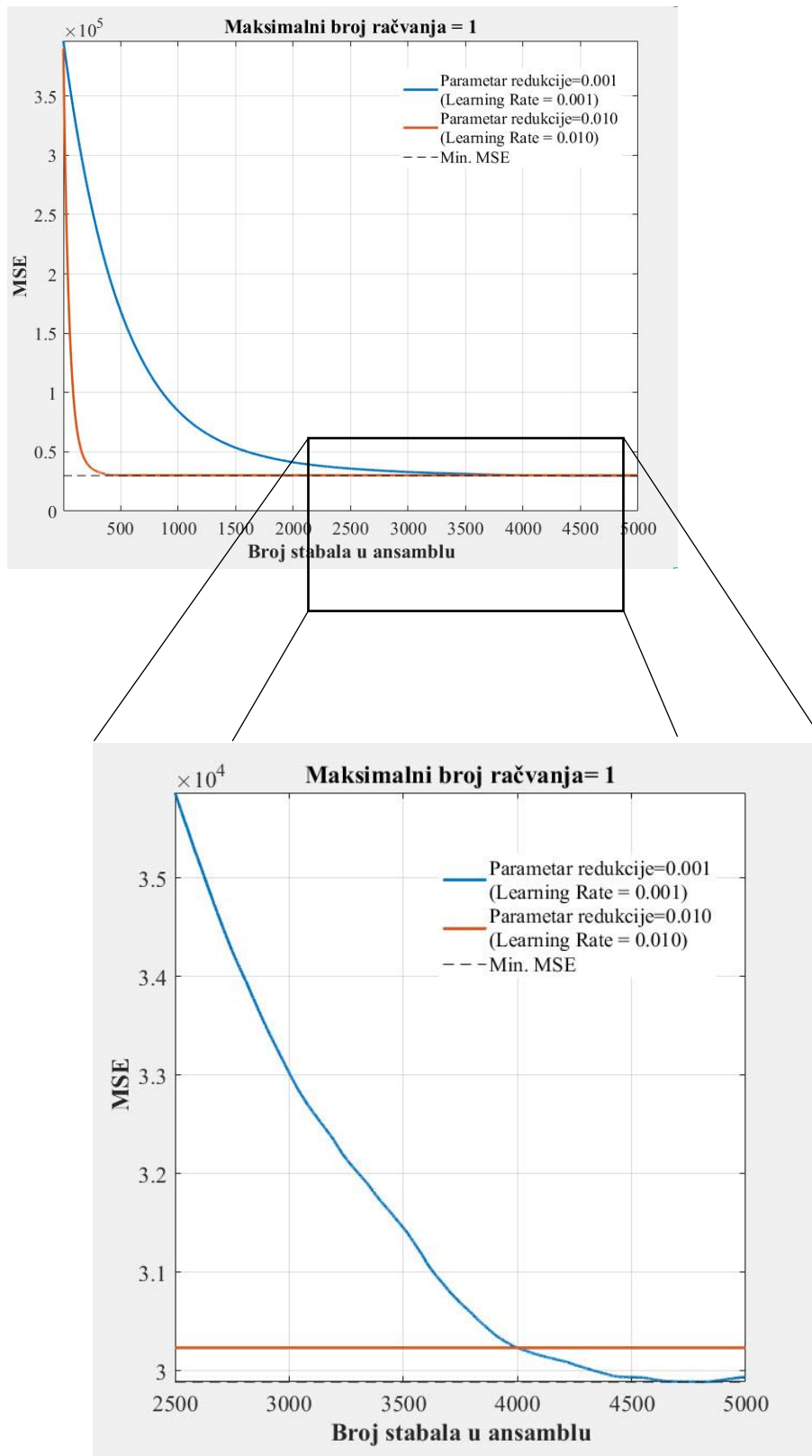
Tabela 8.3 Vrednosti kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE optimalnog modela Boosted Trees metode

Model	RMSE	MAE	R	MAPE
Boosted Trees Parametri: B=100 $\lambda = 0,1$ d=64	96,0318	67,1548	0,8897	11,8718

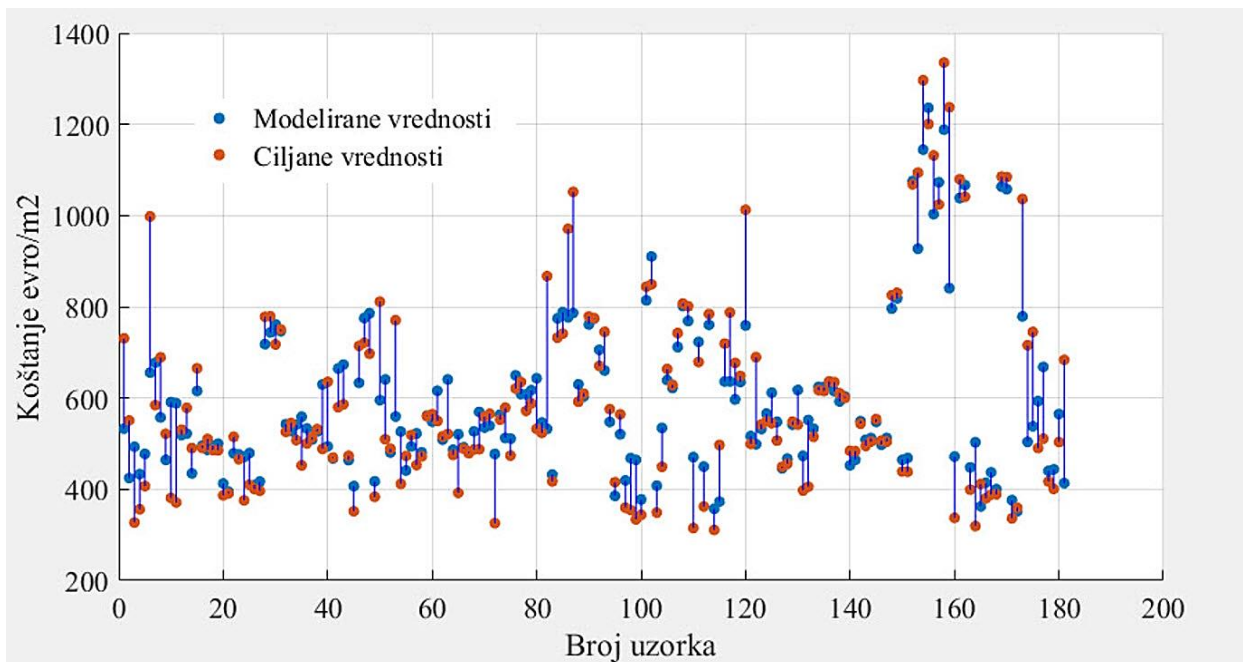
U radu je analizirana i generalizacija modela sa vrednošću parametara redukcije 0,001 i 0,01 gde je kao bazni model u okviru ansambla korišćeno stablo sa jednim čvorom, a ansambl imao značajno veći broj stabala. Upotrebom baznog modela koji ima najmanju moguću kompleksnost odnosno kod koga imamo račvanje samo po jednoj promenljivoj problem računске zahtevnosti se može prevazići. U referencama [97], [120] se preporučuje da broj baznih modela bude od nekoliko stotina do nekoliko hiljada. Broj baznih modela u ansamblu koji je analiziran ograničen je na 5000. Usvojen broj od 5000 baznih modela je dovoljan pošto je u tom intervalu kod oba modela došlo do konvergencije u pogledu vrednosti MSE.

Tabela 8.4 Vrednosti kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE modela sa parametrima redukcije čije su vrednosti 0,01 i 0,001, sa maksimalno jednim račvanjem $d=1$, prilikom generisanja 5000 stabala u ansamblu kod Boosted Trees metode

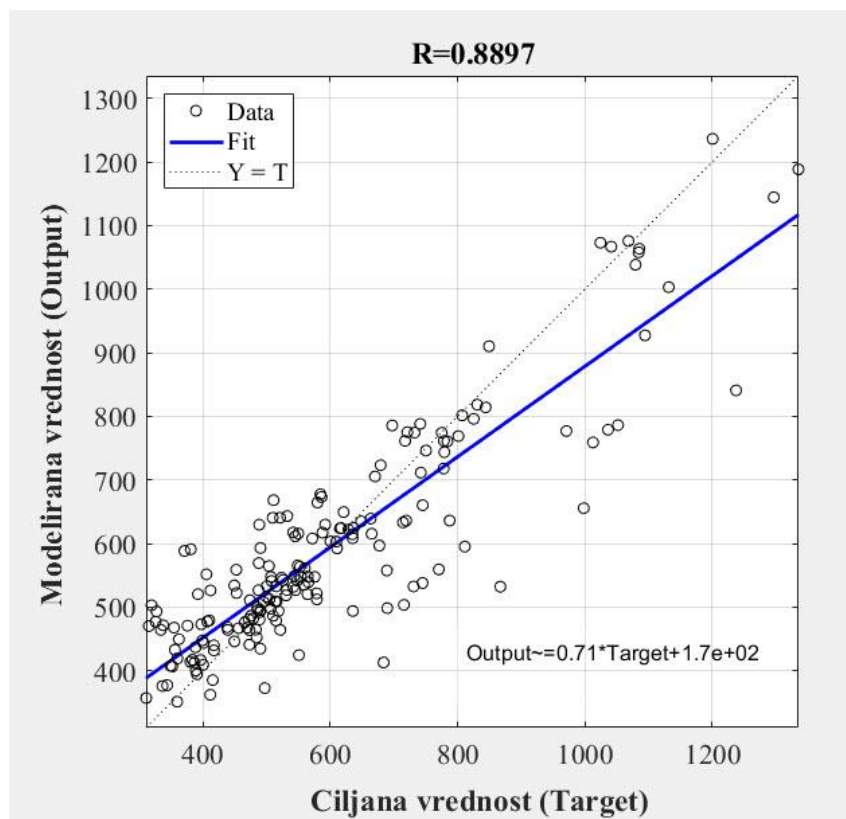
Model	RMSE	MAE	R	MAPE
Boosted Trees Parametri: B=4838 $\lambda = 0,001$ d=1	172,8737	129,2968	0,6179	22,3997
Boosted Trees Parametri: B=492 $\lambda = 0,01$ d=1	173,2258	129,1707	0,6203	22,3893



Slika 8.14 Položaj i vrednost minimuma MSE kod modela sa parametrom redukcije 0,001 i jednim račvanjem stabla ($d=1$) baznog modela u ansamblu kod Boosted Trees metode



Slika 8.15 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova optimalnog modela kod Boosted Trees metode



Slika 8.16 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova optimalnog modela kod Boosted Trees metode

Analiziranjem svih prethodno navedenih modela generisanih korišćenjem različitih parametara, broja stabala, parametra redukcije i broja račvanja dobili smo da je globalno najbolji model kod Boosting metode model sa 100 baznih stabala, sa paramerom redukcije 0,1 i maksimalnim brojem račvanja od 64. Dijagram sa modeliranim i stvarnim koštanjem optimalnog modela kao i regresioni dijagram prikazani su na Slici 8.15 i Slici 8.16 .

8.3.1 Uporedna analiza rezultata modela zasnovanim na stablima odlučivanja

Uporednom analizom svih modela zasnovanim na stablima odlučivanja možemo uočiti da model dobijen primenom Boosted Trees ima najbolje kriterijumske pokazatelje u pogledu svih definisanih kriterijuma. Modeli zasnovani na metodama Bagging i Random Forests pokazali su slične vrednosti u pogledu svih kriterijuma, pri čemu je model kod Bagging metode imao nešto veću tačnost.

Tabela 8.5 Uporedna analiza rezultata kod Bagging, Random Forests i Boosted Trees metode

Metoda	RMSE	MAE	R	MAPE
TreeBager	121,5035	88,7241	0,8008	15,7611
Random Forests	129,0456	93,5255	0,7939	16,5776
Boosted Trees	96,0318	67,1548	0,8897	11,8718

Kod eventualnog značajnijeg proširenja baze podataka mogla bi se analizirati i kompleksnost metode pri čemu modeli kod Bagging i Random Forests metode mogu da budu paralelno procesuirani, što kod metode Boosted Trees nije slučaj gde modele u okviru ansambla obučavamo sekvencijalno.

9. PROCENA KOŠTANJA DRUMSKIH AB MOSTOVA KORIŠĆENJEM METODE POTPORNIH VEKTORA

Da bi korišćenjem metode potpornih vektora dobili dobar regresioni model, potrebno je odabrati odgovarajuću kernel funkciju. Za odabrane kernel funkcije neophodno je da se odrede njihovi parametri, kao i vrednost kaznenog parametra C . Kernel funkcije koje se upotrebljavaju moraju da zadovolje Merserove uslove. Svaka funkcija koja zadovoljava pomenute uslove može da se koristi kao kernel funkcija. Međutim, ne postoji matematički struktuiran pristup koji kaže koji kernel treba koristiti za koju vrstu problema. U ovom radu je stoga istražena upotreba više različitih kernel funkcija sa ciljem pronalaženja najboljeg. U najvećem broju primena metode potpornih vektora preporučuje se upotreba sledećih kernel funkcija odnosno skraćeno kernela [76]:

- Linearna kernel funkcija,
- Sigmoidna kernel funkcija,
- RBF kernel funkcija.

9.1 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem linearne kernel funkcije

Linearni kernel može se koristiti i kod linearnih, ali i kod nelinearnih problema.

Linearna kernel funkcija definisana je sledećim izrazom [18] [19]:

$$K(x_i, x) = \langle x_i, x \rangle. \quad (9.1)$$

Kod linearne kernel funkcije nema nepoznatih parametara same funkcije, a upotreba funkcije se svodi na iznalaženje vrednosti skalarnih proizvoda ulaznih vektora. Međutim, za izradu modela je neophodno odrediti vrednost C kaznenog parametra, kao i vrednosti zone neosetljivosti modela ϵ .

Za određivanje ovih parametara u radu je korišćen postupak sa desetstrukom unakrsnom validacijom.

Kod primene metode izvršena je prethodna priprema podataka odnosno skaliranje podataka. Pošto se različite promenljive kreću u različitim rasponima vrednosti, skaliranje podataka je neophodno kako bi se obezbedila ravnopravnost svih ulaznih promenljivih.

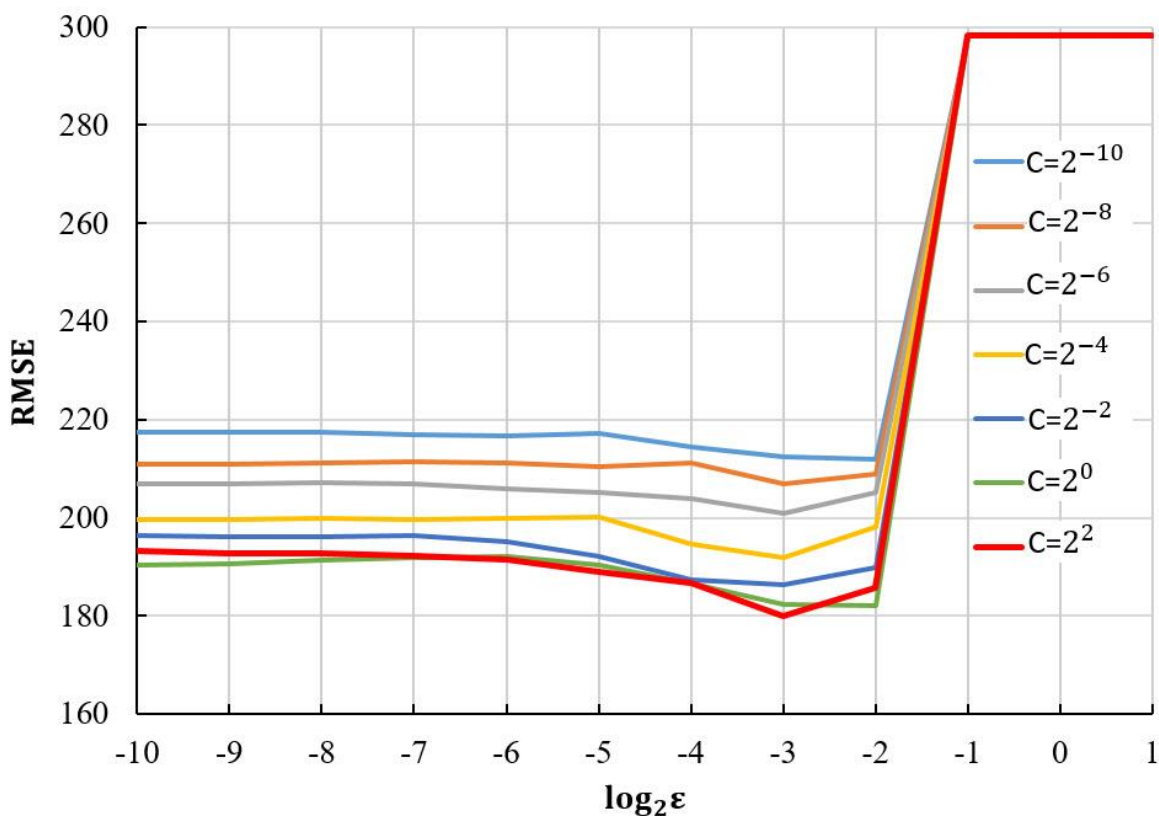
Kod prethodne pripreme podataka su sve vrednosti transformisane u opseg [0,1], odnosno izvršena je linearna transformacija podataka [108]. Vrednosti izlaznog, ciljanog vektora su takođe skalirane. Kod procene modela su vrednosti svih promenljivih reskalirane i određene su performanse modela korištenjem prethodno definisanih kriterijuma tačnosti.

Tabela 9.1 Uticaj parametara modela na vrednost korena srednje kvadratne greške (RMSE) za model sa linearnim kernelom (gruba pretraga parametara)

		Vrednosti parametra ϵ											
		2^{-10}	2^{-9}	2^{-8}	2^{-7}	2^{-6}	2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1
Vrednosti kaznenog parametra C	2^{-10}	217,4	217,5	217,4	216,9	216,7	217,3	214,4	212,5	211,9	298,2	298,2	298,2
	2^{-9}	215,1	214,9	214,7	214,4	213,2	214,3	212	210,1	210,4	298,2	298,2	298,2
	2^{-8}	210,9	210,9	211,1	211,4	211,1	210,3	211,3	206,9	208,9	298,2	298,2	298,2
	2^{-7}	208,8	208,8	208,7	208,4	208,8	208,3	208,3	203,3	207,2	298,2	298,2	298,2
	2^{-6}	206,9	207	207	206,9	205,9	205,1	204	201	205,1	298,2	298,2	298,2
	2^{-5}	203,8	203,8	203,8	204	203,8	202,7	200,2	198,2	199,8	298,2	298,2	298,2
	2^{-4}	199,7	199,6	199,9	199,7	200	200,1	194,6	192	198,1	298,2	298,2	298,2
	2^{-3}	197,3	197,1	196,9	196,9	196,8	196,1	191,3	187,8	195,1	298,2	298,2	298,2
	2^{-2}	196,3	196,2	196	196,4	195,1	192,2	187,3	186,3	189,8	298,2	298,2	298,2
	2^{-1}	193,3	193,1	192,8	192,8	192,9	191,9	185,5	184,7	184,6	298,2	298,2	298,2
	2^0	190,4	190,7	191,3	192	192,1	190,3	186,7	182,4	182,1	298,2	298,2	298,2
	2^1	191,6	191,2	191,1	192,2	191,2	188,7	186,7	180,8	184,1	298,2	298,2	298,2
	2^2	193,2	192,6	192,8	192,2	191,6	189,1	186,7	180,1	185,7	298,2	298,2	298,2
	2^3	193,6	193,4	192,9	191,5	191,1	188,9	186,5	180,4	186,1	298,2	298,2	298,2
	2^4	193,6	193,3	192,5	191,8	191	189	186,3	180,4	185	298,2	298,2	298,2
	2^5	193,6	193,4	192,5	191,8	191,1	188,7	186,3	180,4	184,8	298,2	298,2	298,2
	2^6	193,7	193,3	192,4	191,4	191,1	189	186	180,5	185	298,2	298,2	298,2
2^7	193,8	193,4	192,5	191,4	191	189,4	186,1	181	185,7	298,2	298,2	298,2	
2^8	193,8	193,4	192,4	191,6	191,1	188,8	185,9	180,9	185,1	298,2	298,2	298,2	
2^9	193,7	193,3	192,5	191,7	191	188,9	185,9	180,7	185,3	298,2	298,2	298,2	
2^{10}	193,6	193,2	192,4	191,7	190,9	188,5	186	180,8	185,1	298,2	298,2	298,2	

Postupak određivanja parametara C i ε je sproveden korišćenjem metoda mrežne pretrage (eng. grid search method) koji je i preporučen od autora metode i autora softvera LIBSVM [76]. Postupak je sproveden u dve faze.

U prvoj fazi vrši se gruba pretraga prostora parametara u odgovarajućem opsegu vrednosti. U ovom istraživanju ispitane su vrednosti za parametar C u eksponencijalnom poredku u opsegu $C = [2^{-10}, 2^{-9}, \dots, 2^0, \dots, 2^9, 2^{10}]$, kao i vrednosti za parametar ε u opsegu $\varepsilon = [2^{-10}, 2^{-9}, \dots, 2^0, 2^1]$. Ekvivalentni opseg pretrage u logaritamskom obliku bio bi pretraživanje logaritama kaznenog parametra C za osnovu 2 u rasponu od -10 do vrednosti +10 sa korakom 1. Opseg pretrage za parametar ε u logariamskom obliku za osnovu 2 bio bi od -10 do +1 sa korakom 1. Kao kriterijum za izbor parametara korišćena je vrednost srednje kvadratne greške (MSE), odnosno vrednost korena srednje kvadratne greške (RMSE) za odgovarajuće vrednosti parametara.



Slika 9.1 Dijagram zavisnosti vrednosti RMSE od parametara C i ε kod modela sa linearnim kernelom

Analizirane su sve moguće kombinacije parametara C i ε u okviru gore navedenog opsega. Ukupno je u prvoj fazi grube pretrage parametara analizirano 252 modela. U Tabeli 9.1 je prikazan deo rezultata grube pretrage parametara i njihov uticaj na vrednost RMSE. Vrednosti parametara C i ε koje odgovaraju najmanjoj vrednosti RMSE su označene podebljanim fontom.

Analizom se može uočiti da povećanje kaznenog parametra iznad vrednosti od $C = 2^2$ ne utiče na povećanu tačnost modela. Vrednosti korena srednje kvadratne greške (RMSE) po kolonama tabele (odnosno za iste vrednosti parametra ε) praktično zadržavaju iste vrednosti za vrednost parametra C koja je iznad vrednosti 2^2 . Takođe, vrednosti RMSE se praktično ne menjaju za vrednosti parametra ε koje su veće od vrednosti 2^{-1} . Kao rezultat dobijamo da je optimalno rešenje grube pretrage $C = 2^2$ i $\varepsilon = 2^{-3}$.

U sledećem koraku je izvršena detaljna pretraga u oblasti dobijenog optimalnog rešenja grube pretrage na analogan način, ali sa suženom oblašću pretrage. Donja granica oblasti pretrage dobijena je umanjnjem optimalne vrednosti parametra C iz prethodne iteracije za vrednost koraka iz prethodne iteracije, a gornja granica uvećanjem optimalne vrednosti C iz prethodne iteracije za vrednost koraka iz prethodne iteracije. Isti postupak je sproveden i za parametar ε . Nakon toga izvršena je pretraga ove oblasti i definisano je optimalno rešenje. Tokom svake iteracije vrednost koraka pretrage je smanjivana. Postupak je ograničen na 100 ponavljanja. Nakon navedenog postupka optimizacije dobijene su vrednosti parametara optimalnog modela $C = 3,7545$ i $\varepsilon = 0,1291$. Performanse modela su ocenjene na osnovu prethodno definisanih kriterijuma tačnosti modela i prikazane su u Tabeli 9.2.

Tabela 9.2 Performanse SVR modela sa linearnim kernelom

Model	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
SVR-Linearni kernel	179,3872	134,9719	0,5376	0,2448

9.2 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem RBF kernel funkcije

RBF kernel funkcija predstavlja u najvećem broju istraživanja kod primene metode potpornih vektora prvi izbor [18], [19]. Primena ove kernel funkcije odgovara preslikavanju ulaznog prostora u transformisani prostor beskonačne dimenzije [106]. RBF kernel funkcija definisana je sledećim izrazom:

$$K(x_i, x) = \exp(-\gamma \|x_i - x\|^2), \gamma > 0 \quad (9.2)$$

gde γ predstavlja širinu zvona Gausove krive odnosno parametar RBF kernel funkcije koji treba odrediti. Za izradu modela je u ovom slučaju neophodno odrediti vrednost C kaznenog parametra, vrednosti zone neosetljivosti ε i vrednost parametra γ kernel funkcije. Za određivanje ovih parametara u radu kao u prethodnom slučaju korišćen je postupak sa desetostrukom unakrsnom validacijom. Sve vrednosti podataka transformisane su u opseg $[0,1]$ i primenjena je ista metoda pretrage kao u prethodnom slučaju (grid search).

U fazi grube pretrage prostora parametara ispitane su vrednosti za parametar C u eksponencijalnom poredku u opsegu $C = [2^{-10}, 2^{-9}, \dots, 2^0, \dots, 2^9, 2^{10}]$, vrednosti γ u opsegu $\gamma = [2^{-10}, 2^{-9}, \dots, 2^0, \dots, 2^9, 2^{10}]$ kao i vrednosti za parametar ε u opsegu $\varepsilon = [2^{-10}, 2^{-9}, \dots, 2^0, 2^1]$. Kriterijum za izbor parametara korišćena je vrednost korena srednje kvadratne greške (RMSE) za odgovarajuće vrednosti parametara.

Analizirane su sve moguće kombinacije parametara C , γ , ε u okviru gore navedenog opsega. Ukupno je u prvoj fazi grube pretrage parametara analizirano 5292 modela. U Tabeli 9.3 i Tabeli 9.4 je prikazan deo rezultata grube pretrage parametara i njihov uticaj na vrednost RMSE. Vrednosti parametara C , γ , ε , koje odgovaraju najmanjoj vrednosti RMSE su označene podebljanim fontom.

Vrednosti RMSE se praktično ne menjaju za vrednosti parametra ε koje su veće od vrednosti 2^{-1} .

Kao rezultat dobijeno je optimalno rešenje grube pretrage $C = 2^1$, $\gamma = 2^4$ i $\varepsilon = 2^{-6}$.

U sledećem koraku je izvršena detaljna pretraga u oblasti dobijenog optimalnog rešenja grube pretrage na analogan način, ali sa suženom oblašću pretrage. Donja granica oblasti pretrage dobijena je umanjnjem optimalne vrednosti parametra C iz prethodne iteracije za vrednost koraka iz prethodne iteracije, a gornja granica uvećanjem optimalne vrednosti C iz prethodne iteracije za vrednost koraka iz prethodne iteracije. Analogan postupak je sproveden i za parametre γ i ε . Nakon toga izvršena je pretraga ove sužene oblasti i definisano je optimalno rešenje u toj iteraciji. Tokom svake iteracije vrednost koraka pretrage je smanjivana. Postupak je ograničen na 100 ponavljanja.

Tabela 9.3 Uticaj parametara modela na vrednost korena srednje kvadratne greške (RMSE) za model sa RBF kernelom (gruba pretraga za vrednosti parametra γ od 2^{-10} do 2^0 , C od 2^{-10} do 2^{10} i $\varepsilon = 2^{-6}$)

		Vrednosti parametra γ										
		2^{-10}	2^{-9}	2^{-8}	2^{-7}	2^{-6}	2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0
Vrednosti kaznenog parametra C	2^{-10}	222,7	222,7	222,7	222,6	222,5	222,3	221,9	221,4	220,6	219,4	218,5
	2^{-9}	222,7	222,7	222,6	222,5	222,3	221,9	221,3	220,1	218,1	216,2	215,2
	2^{-8}	222,7	222,6	222,5	222,3	221,9	221,2	219,9	217,5	214,5	213,3	213,1
	2^{-7}	222,6	222,5	222,3	221,9	221,2	219,8	217,1	213,8	212,4	211,1	209,9
	2^{-6}	222,5	222,3	221,9	221,2	219,7	216,9	213,4	212,1	209,1	206,5	205,5
	2^{-5}	222,3	221,9	221,2	219,7	216,7	213,4	211,7	208,9	205,6	203,8	201,7
	2^{-4}	221,9	221,2	219,7	216,7	213,3	211,4	208,8	205,6	202,6	198,5	195,1
	2^{-3}	221,2	219,6	216,7	213,2	211,3	208,9	205,6	202,4	197,0	191,6	188,5
	2^{-2}	219,6	216,6	213,2	211,2	208,8	205,7	203,0	197,4	189,9	185,1	182,3
	2^{-1}	216,7	213,2	211,2	208,8	205,8	203,4	198,3	190,3	183,7	180,9	179,8
	2^0	213,2	211,1	208,8	205,8	203,6	199,0	192,1	184,7	178,7	179,3	171,1
	2^1	211,1	208,8	205,9	203,8	199,4	194,1	186,5	178,7	175,2	174,1	159,9
	2^2	208,9	205,9	203,8	199,5	195,3	189,3	181,3	174,4	175,1	163,9	151,6
	2^3	205,9	203,8	199,7	196,1	192,1	185,7	176,6	172	168,9	155,4	146,7
	2^4	203,8	199,8	196,3	193,8	188,3	180,3	172,6	172,2	159,5	150,1	155,4
	2^5	199,9	196,6	194,5	189,4	185,8	175,6	170,2	165,6	152,4	148,3	187,5
	2^6	196,6	194,8	191,0	188,0	179,2	171,2	170,1	157,2	145,8	161,2	201,7
	2^7	194,9	192,1	189,3	185,4	175,4	169	164	149	142,6	198,5	215,4
	2^8	192,5	190,1	187,2	179,1	170,4	168,1	155,7	143,1	148,8	219,0	246,8
	2^9	190,8	189,0	185,5	175,1	168,1	162,5	147,6	139,2	180,7	239,2	263,1
	2^{10}	189,6	186,8	178,8	170,3	166,6	155,7	142,1	139,2	223,0	270,1	294,5

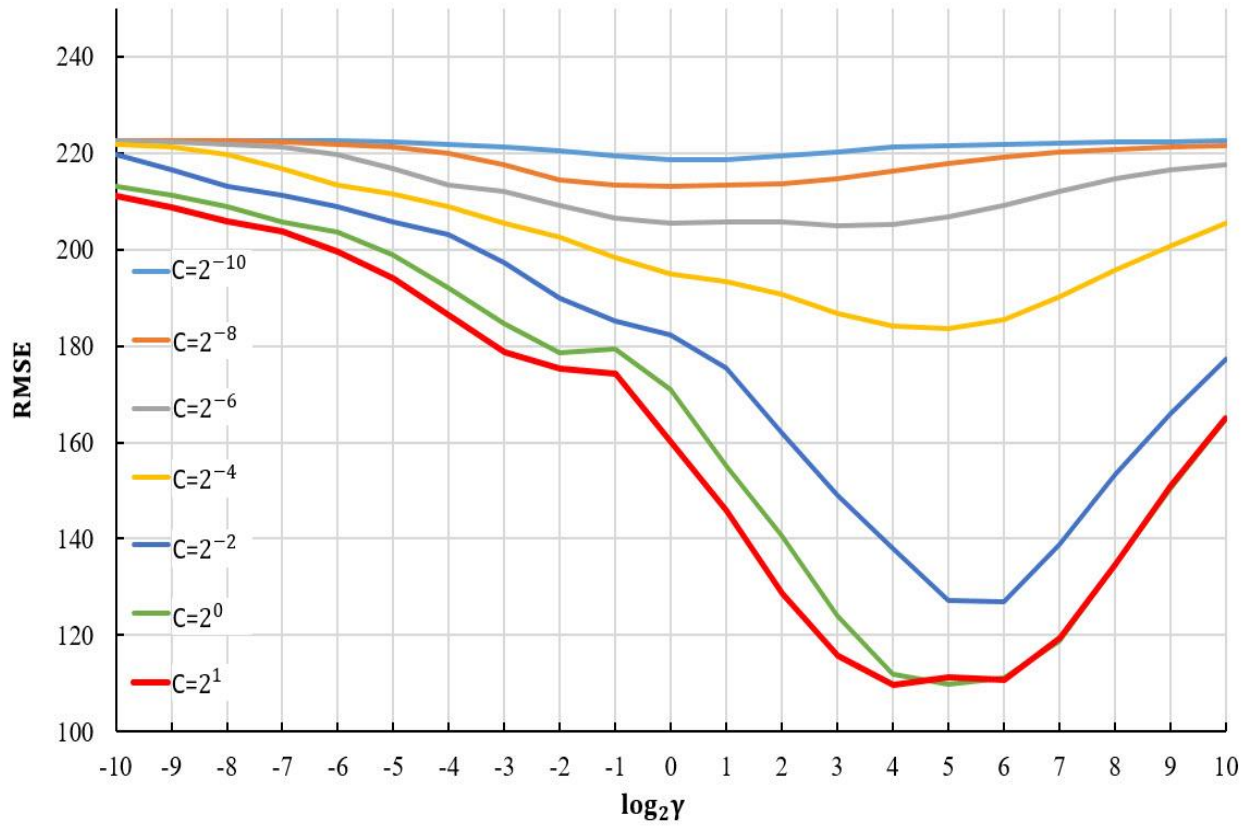
Nakon navedenog postupka optimizacije dobijene su vrednosti parametara optimalnog modela $C = 1,7271$, $\gamma = 18,7334$ i $\varepsilon = 0,0157$. Performanse modela su ocenjene na osnovu prethodno definisanih kriterijuma tačnosti modela i prikazane su u Tabeli 9.5 . Dijagram zavisnosti vrednosti RMSE od parametara C , γ , za dato ε dat je na Slici 9.2.

Tabela 9.4 Uticaj parametara modela na vrednost korena srednje kvadratne greške (RMSE) za model sa RBF kernelom (gruba pretraga za vrednosti parametra γ od 2^0 do 2^{10} , C od 2^{-10} do 2^{10} i $\varepsilon = 2^{-6}$)

		Vrednosti parametra γ										
		2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
Vrednosti kaznenog parametra C	2^{-10}	218,5	218,8	219,3	220,3	221,2	221,6	221,9	222,1	222,3	222,4	222,5
	2^{-9}	215,2	215,4	216,2	217,9	219,5	220,5	221,0	221,4	221,7	221,9	222,1
	2^{-8}	213,1	213,4	213,6	214,6	216,3	218,0	219,2	220,1	220,8	221,3	221,6
	2^{-7}	209,9	210,3	210,1	210,4	212,0	214,0	215,3	217,2	218,7	219,7	220,4
	2^{-6}	205,5	205,7	205,8	205,0	205,2	206,9	209,2	212,2	214,8	216,5	217,7
	2^{-5}	201,7	201,2	200,4	198,6	197,9	197,6	199,3	202,7	206,9	210,4	213,2
	2^{-4}	195,1	193,4	190,7	186,7	184,2	183,5	185,3	190,3	195,7	200,7	205,5
	2^{-3}	188,5	184,9	178,2	168,3	162,4	158,3	160,0	168,4	177,4	185,3	193,0
	2^{-2}	182,3	175,4	162,1	149,0	138,1	127,2	126,8	138,8	153,4	166,0	177,3
	2^{-1}	179,8	168,3	151,5	137,8	122,8	113,7	112,7	120,2	135,7	151,8	165,8
	2^0	171,1	155,2	140,6	124,0	111,9	109,8	111,0	118,9	134,6	150,3	165,0
	2^1	159,9	145,9	128,5	115,7	109,5	111,1	110,7	119,4	134,7	150,8	165,0
	2^2	151,7	138,5	124,3	115,3	110,2	113,6	111,4	119,5	135,0	151,2	165,1
	2^3	146,8	144,8	127,0	116,3	113,0	114,3	111,4	120,2	135,8	151,3	165,2
	2^4	155,4	151,8	133,3	121,0	116,0	114,4	112,3	124,9	138,3	151,7	165,6
	2^5	187,5	162,3	138,9	124,0	120,5	115,0	116,6	142,6	138,4	153,0	166,4
	2^6	201,7	177,8	150,5	128,9	124,1	117,6	133,4	143,3	139,7	156,4	166,4
	2^7	215,5	190,8	166,0	131,4	124,9	125,4	168,5	142,9	142,8	159,7	166,4
	2^8	246,8	218,1	181,8	136,9	128,1	150,0	172,4	144,0	151,2	159,7	166,4
	2^9	263,1	265,6	216,4	154,2	137,4	199,7	172,1	147,5	166,2	159,7	166,4
2^{10}	294,5	341,9	285,8	159,4	160,9	235,8	172,8	158,9	180,5	159,7	166,4	

Tabela 9.5 Performanse SVR modela sa RBF kernelom

Model	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
SVR-Lin.kernel	109,3198	68,2496	0,8591	0,1203



Slika 9.2 Dijagram zavisnosti vrednosti RMSE od parametara C i γ za $\varepsilon = 2^{-6}$ kod modela sa RBF kernel funkcijom

9.3 Izrada modela za prognozu koštanja korišćenjem sigmoidne kernel funkcije

Sigmoidna kernel funkcija definisana je sledećim izrazom [18], [19]:

$$K(x_i, x) = \tanh(\gamma \langle x_i, x \rangle + r), \gamma > 0 \quad (9.3)$$

Kod sigmoidne kernel funkcije u opštem slučaju javljaju se dva nepoznata parametra γ i r . Pored toga za izradu modela je neophodno odrediti vrednost C kaznenog parametra kao i vrednosti zone neosetljivosti modela ε . Standardna podešavanja u softveru LIBSVM koji je korišćen za ovu analizu preporučuju da se usvoji vrednost parametra r nula (default settings) [108], [111]. U ovom radu je vrednost tog parametra usvojena u skladu sa preporukom. Za određivanje ovih parametara u radu je korišćen postupak sa desetostrukom unakrsnom validacijom. Kao i kod prethodnog modela pripremom podataka su sve vrednosti transformisane u opseg $[0,1]$, odnosno izvršena je linearna transformacija podataka.

U fazi grube pretrage prostora parametara ispitane su vrednosti za parametar C u eksponencijalnom poredku u opsegu $C = [2^{-10}, 2^{-9}, \dots, 2^0, \dots, 2^9, 2^{10}]$, vrednosti γ u opsegu $\gamma = [2^{-10}, 2^{-9}, \dots, 2^0, \dots, 2^9, 2^{10}]$ kao i vrednosti za parametar ε u opsegu $\varepsilon = [2^{-10}, 2^{-9}, \dots, 2^0, 2^1]$. Kao kriterijum za izbor parametara korišćena je vrednost korena srednje kvadratne greške za odgovarajuće vrednosti parametara.

Analizirane su sve moguće kombinacije parametara C , γ , ε u okviru gore navedenog opsega. Ukupno je u prvoj fazi grube pretrage parametara analizirano 5292 modela. U Tabeli 9.6 je prikazan deo rezultata grube pretrage parametara i njihov uticaj na vrednost RMSE. Vrednosti parametara C , γ , ε , koje odgovaraju najmanjoj vrednosti RMSE su označene podebljanim fontom. Kao rezultat dobijeno je optimalno rešenje grube pretrage $C = 2^6$, $\gamma = 2^{-5}$ i $\varepsilon = 2^{-3}$. Nakon grube pretrage parametara urađena je detaljna pretraga analogno slučajevima sa linearnom i RBF kernel funkcijom pri čemu je postupak ograničen na 100 ponavljanja.

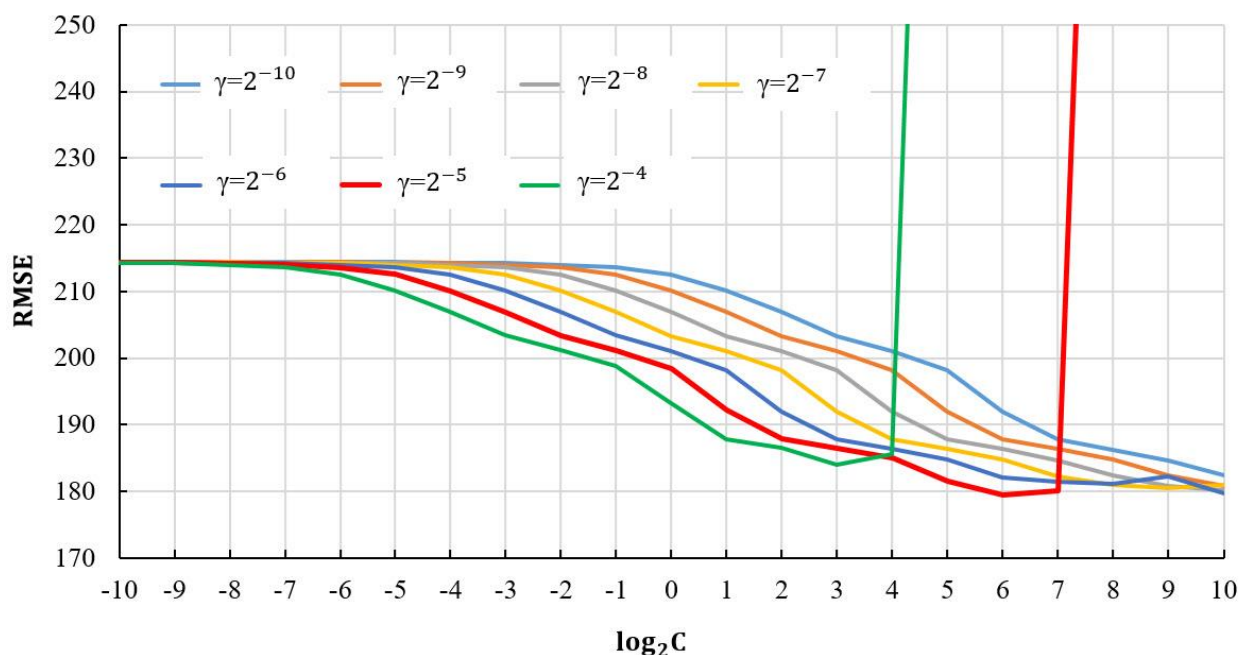
Tabela 9.6 Uticaj parametara modela na vrednost korena srednje kvadratne greške (RMSE) za model sa sigmoidnim kernelom (gruba pretraga za vrednosti parametra γ od 2^{-10} do 2^0 , C od 2^{-10} do 2^{10} i $\varepsilon = 2^{-3}$)

		Vrednosti parametra γ										
		2^{-10}	2^{-9}	2^{-8}	2^{-7}	2^{-6}	2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0
Vrednosti kaznenog parametra C	2^{-10}	214,4	214,4	214,4	214,4	214,4	214,4	214,3	214,2	214,1	214	214,1
	2^{-9}	214,4	214,4	214,4	214,4	214,4	214,3	214,2	214,1	213,8	213,6	213,8
	2^{-8}	214,4	214,4	214,4	214,4	214,3	214,2	214	213,7	213,1	212,6	213,1
	2^{-7}	214,4	214,4	214,4	214,3	214,2	214	213,6	212,7	210,6	209,9	211,4
	2^{-6}	214,4	214,4	214,3	214,2	214	213,6	212,6	210,2	208,2	207,2	209
	2^{-5}	214,4	214,3	214,2	214	213,6	212,6	210,1	207,2	204,8	204	206,3
	2^{-4}	214,3	214,2	214	213,6	212,5	210,1	207	203,9	202,8	203,7	205,8
	2^{-3}	214,2	214	213,6	212,5	210,1	206,9	203,5	202	200,5	208	342,5
	2^{-2}	214	213,6	212,5	210,1	206,9	203,4	201,3	199,6	200	374,7	681,9
	2^{-1}	213,6	212,5	210,1	206,9	203,4	201,1	198,9	195,8	234,8	811,5	1385
	2^0	212,5	210,1	206,9	203,3	201	198,4	193,2	193,3	536,1	1573	2732
	2^1	210,1	206,9	203,3	201	198,2	192,2	187,9	195,9	1017	3226	5507
	2^2	206,9	203,3	201	198,2	192	187,9	186,6	384,3	2169	6500	11072
	2^3	203,3	201	198,2	192	187,8	186,4	184,1	775,7	4437	13086	21995
	2^4	201	198,2	192	187,8	186,4	185,1	185,6	1606	8957	26116	43949
	2^5	198,2	192	187,8	186,3	184,8	181,5	414,4	3240	17909	52108	87878
	2^6	192	187,8	186,3	184,8	182,1	179,4	855,6	6518	35894	1E+05	2E+05
	2^7	187,8	186,3	184,7	182,2	181,4	180	1812	13135	71769	2E+05	4E+05
	2^8	186,3	184,7	182,4	180,9	181,1	396,7	3729	26318	1E+05	4E+05	7E+05
2^9	184,7	182,3	180,9	180,4	182,2	870,7	7480	52382	3E+05	8E+05	1E+06	
2^{10}	182,3	180,8	180,1	181	179,7	1861	15097	1E+05	6E+05	2E+06	3E+06	

Nakon navedenog postupka optimizacije dobijene su vrednosti parametara optimalnog modela $C = 57,9580$, $\gamma = 0,0398$ i $\varepsilon = 0,1222$. Performanse modela su ocenjene na osnovu prethodno definisanih kriterijuma tačnosti modela i prikazane su u Tabeli 9.7. Na Slici 9.3 dat je dijagram zavisnosti vrednosti RMSE od parametara primenjenog kernela.

Tabela 9.7 Performanse SVR modela sa sigmoidnim kernelom

Model	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
SVR-Sig.kernel	176,8263	134,2201	0,5564	0,2367



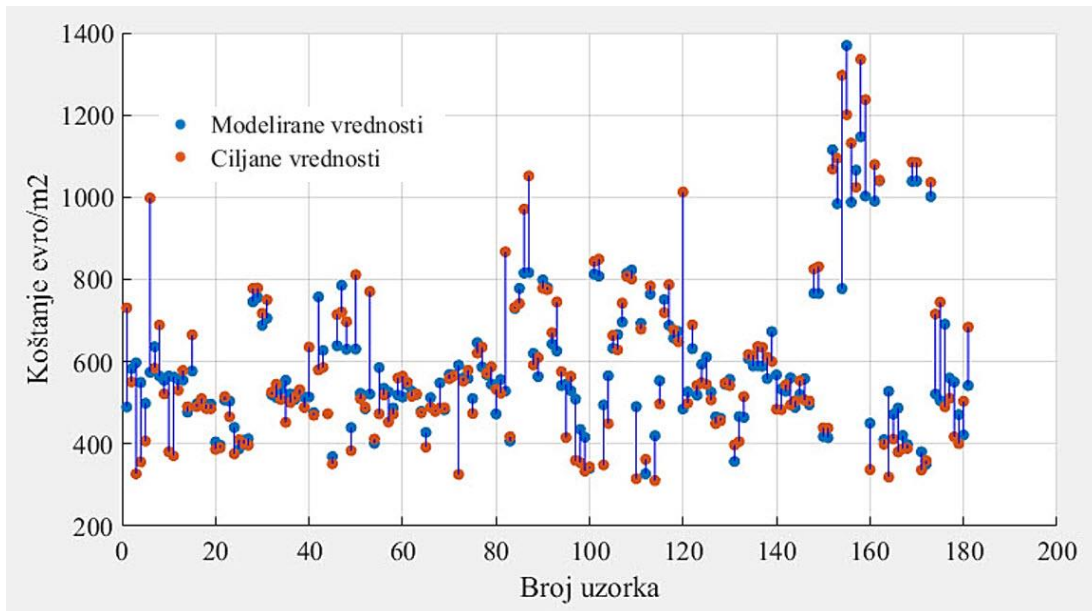
Slika 9.3 Dijagram zavisnosti vrednosti RMSE od parametara C i γ za $\varepsilon = 2^{-3}$ kod modela sa sigmoidnom kernel funkcijom

9.4 Uporedna analiza SVR modela sa različitim kernel funkcijama

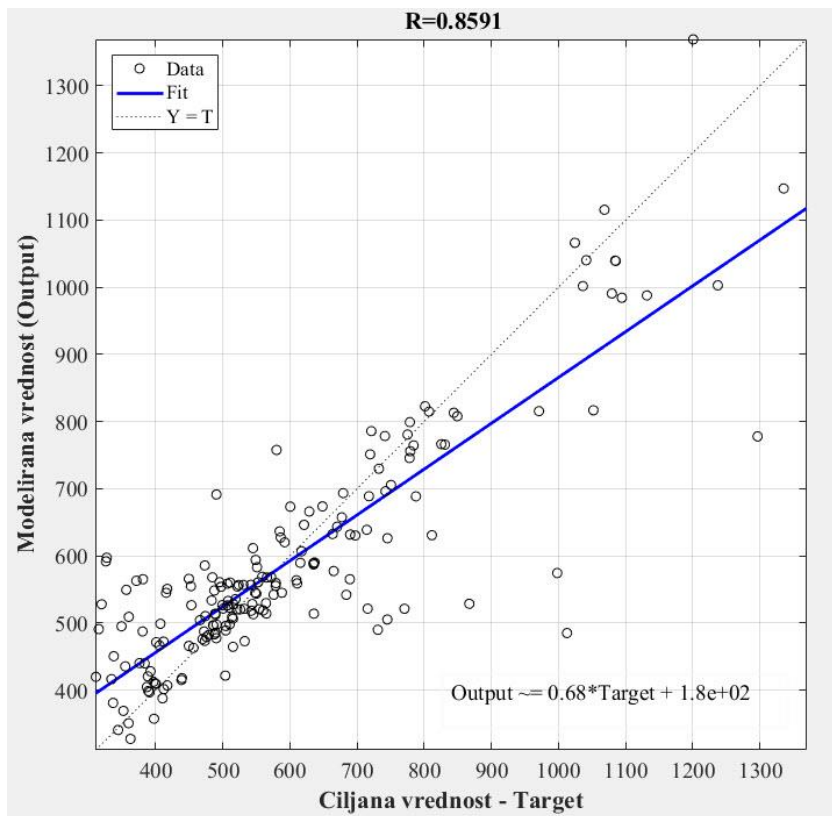
Uporednom analizom različitih SVR modela možemo uočiti da modeli u zavisnosti od kernel funkcije imaju različitu tačnost po usvojenim kriterijumima. Možemo uočiti da modeli sa linearnim i sigmoidnim kernelom imaju sličnu tačnost po različitim kriterijumima. Model sa RBF kernel funkcijom (Tabela 9.8) ima značajno veću tačnost u pogledu svih kriterijumskih funkcija.

Tabela 9.8 Uporedne analiza rezultata različitih SVR modela

Model	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
SVR-Lin. kernel	179,3872	134,9719	0,5376	0,2448
SVR-RBF kernel	109,3198	68,2496	0,8591	0,1203
SVR-Sig. kernel	176,8263	134,2201	0,5564	0,2367



Slika 9.4 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova kod modela sa RBF kernel funkcijom



Slika 9.5 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova kod SVR modela sa RBF kernel funkcijom

Konkretno istraživanje primene RBF kernela kod izrade prognoznog modela koštanja mosta (koštanje po m^2) pokazalo je da i u ovom slučaju RBF kernel predstavlja prvi izbor, što su i preporučivala mnoga istraživanja kod primene SVR metode. Upotreba RBF kernel funkcije u konkretnom slučaju dala je zadovoljavajuće rezultate, dok je primena linearnog i sigmoidnog kernela dala značajno lošije rezultate. Modeli sa linearnom i sigmoidnom kernel funkcijom u pogledu dva kriterijuma MAE i MAPE imaju gotovo dvostruko lošije vrednosti, a vrednost koeficijenta korelacije R je značajno manja u odnosu na RBF model. U pogledu kriterijuma RMSE su modeli sa linearnim i sigmoidnim kernelom , takođe, značajno su lošiji od RBF modela.

10. PROCENA KOŠTANJA DRUMSKIH AB MOSTOVA MODELOM GAUSOVOG PROCESA

Kod procene koštanja mostova analizirana je primena različitih funkcija kovarijanse. Kod svih modela je u postupku vrednovanja modela korišćena desetostruka unakrsna validacija. Da bi se obezbedili apsolutno jednaki uslovi za ocenjivanje modela podešavanja generatora slučajnih brojeva je postavljeno na default vrednost (MATLAB implementacija korišćenjem funkcije `rng default`). Nakon toga je generisano deset foldova od kojih je devet foldova korišćeno za treniranje, a deseti za testiranje, te ceo postupak ponovljen deset puta. Na taj način se koristi čitav skup podataka testiranje modela, a kao rezultat dobijamo predikciju za čitav skup podataka koju poredimo sa „stvarnim“ odgovorom sistema.

U postupku obuke sa nadzorom kod mašinskog učenja odnosno u ovom slučaju problema regresije očekivano je da tačke koje imaju slične vrednosti ulaza (inputa) x_i imaju i slične vrednosti izlaza odnosno odgovora (targets) y_i . U Gausovom procesu funkcije kovarijanse (funkcije kernela) izražavaju meru sličnosti. Funkcije kernela određuju kovarijansu između dve latentne promenljive $f(x_i)$ i $f(x_j)$ gde su oba vektora x_i i x_j dimenzije $d \times 1$. Funkcije kernela određuju koliko na izlaz odnosno odgovor sistema u nekoj tački x_i utiče odgovor sistema u nekoj tački x_j , $i \neq j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Funkcija kovarijanse $k(x_i, x_j)$ može biti definisana korišćenjem različitih kernel funkcija. Takođe, funkcije kovarijanse su parametrizovane, najčešće je to standardna devijacija signala σ_f (izlaza) i parametar razmere rastojanja σ_l (eng. length scale parameter) ili više parametara razmere rastojanja $\sigma_l, l = 1, 2, \dots, m$ ako usvojimo različite parametre razmere rastojanja za različite koordinatne ose.

U opštem slučaju parametrizovanu kernel funkciju označićemo sa $k((x_i, x_j | \theta))$.

Podaci za izradu modela su standardizovani. Postupkom standardizacije koji je sproveden po kolonama izvršen je proračun tzv. Z-skora, odnosno podaci su transformisani da imaju srednju

vrednost nula i varijansu jednaku jedinici, tako da npr. vrednosti koje su bile bliske srednjoj vrednosti postale bliske nuli nakon standardizovanja. Analizirani su modeli sa konstantnom baznom funkcijom.

$$X \text{ normalizovano} = \frac{X \text{ tekuća vrednost} - \text{Srednja vrednost}}{\text{Standardna devijacija}} \quad (10.1)$$

10.1 Primena različitih funkcija kovarijanse kod modela Gausovog procesa

Prilikom izrade modela koštanja analizirane su funkcije kovarijanse koje možemo svrstati u dve grupe i to:

1. Funkcije kovarijanse koje imaju jedan parametar razmere rastojanja za sve ulazne promenljive
2. Funkcije kovarijanse koje primenjuju različite parametre razmere rastojanja za ulazne promenljive (ARD funkcije kovarijanse)

10.1.1 Funkcije kovarijanse koje imaju jedan parametar razmere rastojanja za sve ulazne promenljive

U referencama primene Gausovog procesa funkcije kovarijanse koje imaju jedan parametar razmere rastojanja često predstavljaju prvi izbor u odabiru funkcija [21]. Kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse je najčešće korišćena funkcija kovarijanse u okviru ove grupe funkcija i u okviru programa MATLAB spada u standardna programska podešavanja (default settings) kod primene Gausovog procesa kod problema regresije [21], [119]. U radu su osim ove funkcije kovarijanse ispitane i ostale često primenjivane funkcije (analitički izrazi obrađenih funkcija kovarijanse su dati u Tabeli 10.1) čije su vrednosti parametara prikazane u Tabeli 10.2.

U izrazima koji su navedeni u Tabeli 10.1 σ_l predstavlja parametar razmere rastojanja, parametar r predstavlja Euklidsko rastojanje između tačaka x_i i x_j . Euklidsko rastojanje je definisano u matričnom obliku izrazom 10.2.

$$r = \sqrt{(x_i - x_j)^T (x_i - x_j)} \quad (10.2)$$

Tabela 10.1 Funkcije kovarijanse koje imaju jedan parametar razmere rastojanja sa sve prediktore

	Funkcija kovarijanse	Formula
1.	Eksponecijalna funkcija kovarijanse	$k((x_i, x_j \theta)) = \sigma_f^2 \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{r}{\sigma_l^2}\right]$
2.	Kvadratna-eksponecijalna funkcija kovarijanse	$k((x_i, x_j \theta)) = \sigma_f^2 \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x_i - x_j)^T (x_i - x_j)}{\sigma_l^2}\right]$
3.	Matern 3/2 funkcija kovarijanse	$k((x_i, x_j \theta)) = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}r}{\sigma_l}\right) \exp\left[-\frac{\sqrt{3}r}{\sigma_l}\right]$
4.	Matern 5/2 funkcija kovarijanse	$k((x_i, x_j \theta)) = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{\sqrt{5}r}{\sigma_l} + \frac{5r^2}{3\sigma_l^2}\right) \exp\left[-\frac{\sqrt{5}r}{\sigma_l}\right]$
5.	Racionalna-kvadratna funkcija kovarijanse	$k((x_i, x_j \theta)) = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{r^2}{2a\sigma_l^2}\right)^{-\alpha}$

Tabela 10.2 Parametri funkcija kovarijanse GP modela za procenu koštanja izgradnje m² mosta

Model	Parametri funkcije kovarijanse	
Eksponecijalna funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 251,0918$	$\sigma_f = 2,2044$
Kvadratna eksponecijalna funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 205,2561$	$\sigma_f = 0,4680$
Matern 3/2 funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 0,7093$	$\sigma_f = 210,6274$
Matern 5/2 funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 0,6057$	$\sigma_f = 208,0861$
Racionalna kvadratna funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 0,5018$	$a = 0,5126$

Izvršena je desetostruka unakrsna validacija modela. Vrednosti parametara σ_l i σ_f (kao i parametra a kod racionalne-kvadratne funkcije kovarijanse) dobijene su maksimizacijom marginalne verovatnoće i date su u Tabeli 10.2.

Za svaku od analiziranih kernel funkcija izvršena je ocena predikcionih svojstava modela po definisanim kriterijumima za ocenu tačnosti modela. Vrednosti kriterijuma tačnosti modela za različite funkcije kovarijanse date su u Tabeli 10.3. Analiza je pokazala da je najbolji model u okviru ove grupe funkcija u pogledu svih kriterijuma model sa eksponencijalnom funkcijom kovarijanse.

Tabela 10.3 Performanse GP modela za procenu koštanja izgradnje m^2 mosta sa različitim funkcija kovarijanse

Model	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
Eksponencijalna funkcija kovarijanse	117,9124	75,8949	0,8312	0,1397
Kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse	121,8531	80,0234	0,8205	0,1494
Matern 3/2 funkcija kovarijanse	119,9916	77,2467	0,8250	0,1427
Matern 5/2 funkcija kovarijanse	120,3638	78,0265	0,8241	0,1447
Racio.kvadratna funkcija kovarijanse	118,5427	76,4241	0,8296	0,1409

10.1.2 Funkcije kovarijanse koje primenjuju različite parametre razmere rastojanja za ulazne promenljive (ARD funkcije kovarijanse)

Postoji mogućnost korišćenja različitih parametara rastojanja σ_m za svaki prediktor odnosno svaku promenljivu m , $m = 1, 2, \dots, d$. Korišćenjem ARD funkcije kovarijanse sa različitim parametrima razmere rastojanja (Tabela 10.4) za svaku promenljivu odnosno prediktor stiće se

mogućnost sagledavanja relevantnosti pojedinih promenljiva odnosno prediktora u modelu (eng. Automatic Relevance Retermination - **ARD**).

U razmatranom slučaju modela koštanja mostova za svaki od prethodno definisanih devet prediktora odnosno svaku od prethodno definisanih promenljiva određen je parametar razmere rastojanja σ_m , $m = 1, 2, \dots, 9$. Svaki od ovih σ_m parametara je jednak ili veći od nule. Ova ograničenja su zadovoljena uvođenjem smene

$$\begin{aligned}\Theta_m &= \log \sigma_m, \quad m = 1, 2, \dots, 9 \\ \Theta_f &= \log \sigma_f, \quad f = 10.\end{aligned}\tag{10.3}$$

Vrednosti parametara su određene maksimizacijom log marginalne verovatnoće. Parametre σ_m , $m = 1, 2, \dots, 9$ možemo koristiti za ocenu relevantnosti promenljive u modelu.

Tabela 10.4 Funkcije kovarijanse koje imaju različite parametre razmere rastojanja za prediktore

	Funkcija kovarijanse	Formula
1.	ARD eksponencijalna funkcija kovarijanse	$k((x_i, x_j \Theta)) = \sigma_f^2 \exp(-r)$
2.	ARD kvadratna-eksponencijalna funkcija kovarijanse	$k((x_i, x_j \Theta)) = \sigma_f^2 \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{m=1}^d \frac{(x_{im} - x_{jm})^2}{\sigma_m^2}\right]$.
3.	ARD matern 3/2 funkcija kovarijanse	$k((x_i, x_j \Theta)) = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}r}{\sigma_l}\right) \exp\left[-\frac{\sqrt{3}r}{\sigma_l}\right]$
4.	ARD matern 5/2 funkcija kovarijanse	$k((x_i, x_j \Theta)) = \sigma_f^2 \left(1 + \sqrt{5}r + \frac{5r^2}{3}\right) \exp[-\sqrt{5}r]$
5.	ARD racionalna-kvadratna funkcija kovarijanse	$k((x_i, x_j \Theta)) = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{1}{2\alpha} \sum_{m=1}^d \frac{(x_{im} - x_{jm})^2}{\sigma_m^2}\right)^{-\alpha}$,

Vrednost za parametar r kod ARD Eksponencijalne funkcije, ARD matern 3/2 i ARD matern 5/2 funkcije kovarijanse računa se prema izrazu 10.4:

$$r = \sqrt{\sum_{m=1}^d \frac{(x_{im} - x_{jm})^2}{\sigma_m^2}} \quad (10.4)$$

Tabela 10.5 Parametri funkcija kovarijanse GP ARD modela za procenu koštanja izgradnje m² mosta

Parametri funkcija kovarijanse								
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9
Parametri ARD eksponencijalna funkcija kovarijanse								
1,0196	0,4851	693,0965	945,5437	1,8274	3,4887	2791,1828	2,4465	0,7888
Parametri ARD kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse								
0,2504	0,2073	3,2227	784,9518	0,7876	1,6070	1444,5568	0,5256	0,3457
Parametri ARD matern 3/2 funkcija kovarijanse								
0,0809	2450,9931	3,4946	1034,0576	1,2815	1,6279	1741,5065	4,430	0,1874
Parametri ARD matern 5/2 funkcija kovarijanse								
0,3127	0,2494	3,9442	3017,8449	0,6822	1,6550	2476,8465	0,7609	0,3395
Parametri ARD Racionalna kvadratna funkcija kovarijanse $\alpha = 211,3098$								
0,0493	847,4776	2,5639	3,3565	0,6287	0,565	2,2861	1,2988	911,58

Tabela 10.6 Performanse GP ARD modela za procenu koštanja izgradnje m² mosta sa različitim funkcijama kovarijanse

Funkcija kovarijanse GP modela	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
ARD eksponencijalna	95,5768	63,2487	0,8928	11,6015
ARD kv.eksponencijalna	108,7530	69,2293	0,8583	12,2510
ARD matern 3/2	105,4633	67,7212	0,8679	12,6158
ARD matern 5/2	99,4049	64,8054	0,8837	11,8328
ARD racionalna kvadratna	122,6844	76,8812	0,8163	14,2254

Vrednosti parametara za sve analizirane funkcije kovarijanse date su u Tabeli 10.5. Nakon određivanja parametara kovarijanse izvršena je ocena predikcionih svojstava modela po prethodno definisanim kriterijumima tačnosti modela. Vrednosti kriterijuma tačnosti modela za različite ARD funkcije kovarijanse date su u Tabeli 10.6.

Analiza je pokazala da je najbolji model u okviru ove grupe funkcija u pogledu svih kriterijuma model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse.

10.2 Uporedna analiza modela Gausovog procesa sa različitim funkcijama kovarijanse kod procene koštanja mostova

Uporednom analizom različitih modela Gausovog procesa možemo uočiti da modeli u zavisnosti od funkcije kovarijanse imaju različitu tačnost po usvojenim kriterijumima. Možemo uočiti dve grupe modela različite tačnosti.

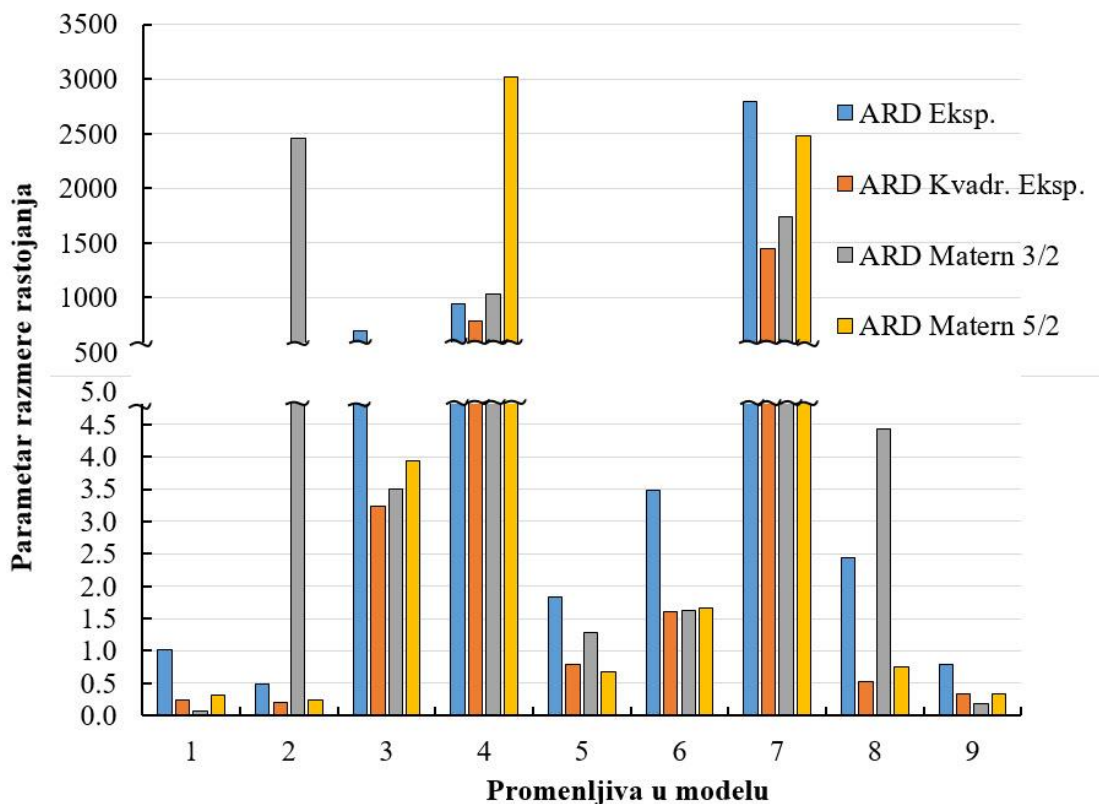
Modeli koji ne koriste različite parametre rastojanja (eksponencijalna funkcija kovarijanse, kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse, matern 3/2 funkcija kovarijanse, matern 5/2 funkcija kovarijanse, racionalna kvadratna funkcija kovarijanse) imaju lošije kriterijumske pokazatelje od modela koji koriste različite parametre rastojanje (ARD eksponencijalna funkcija kovarijanse, ARD kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse, ARD matern 3/2 funkcija kovarijanse, ARD matern 5/2 funkcija kovarijanse, ARD racionalna kvadratna funkcija kovarijanse).

Grupa modela koji ne koriste različite parametre rastojanja ima vrednost kriterijuma RMSE koji se kreće u uskim granicama oko 120. MAE kriterijum ima vrednost između 75-80, vrednosti kriterijuma R je oko 0,82 za sve modele dok je vrednost MAPE oko 0,14.

Druga grupa modela koju čine modeli koji koriste različite parametre rastojanja ima značajno bolje kriterijumske pokazatelje koji značajnije variraju zavisnosti od modela. Vrednosti RMSE kriterijuma se kreću od 95 do 122, kriterijuma MAE od 63 do 76, vrednost koeficijenta korelacije R se kreće od 0,81 do 0,89, dok se vrednost kriterijuma MAPE kreće od 0,11 do 0,14. Izuzetak u drugoj grupi modela je samo ARD racionalna kvadratna funkcija kovarijanse koja po

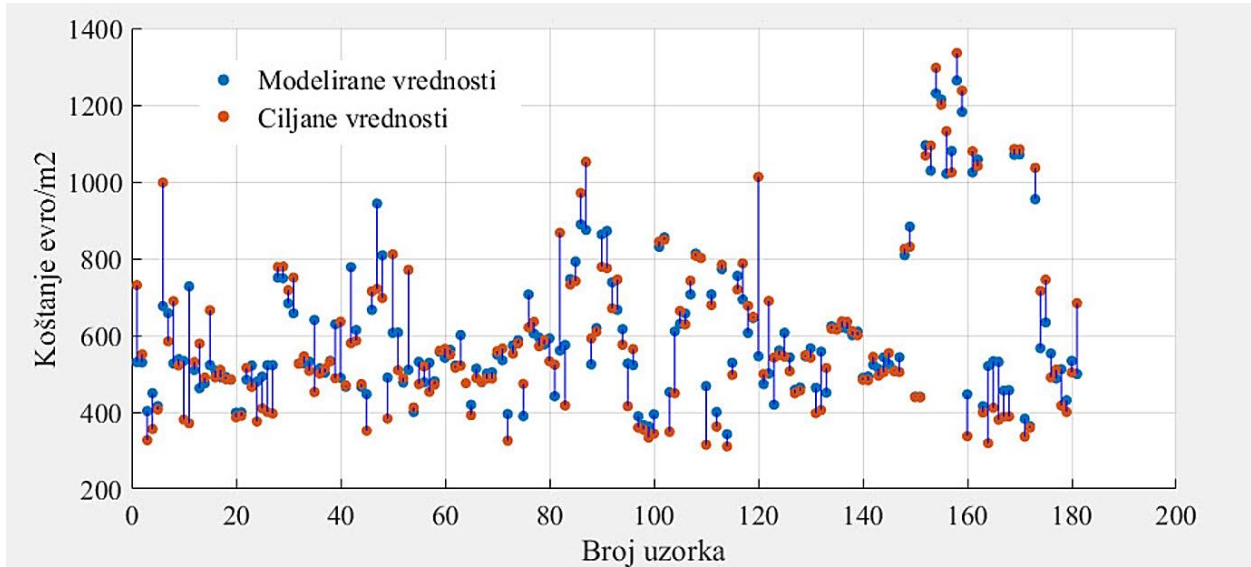
kriterijumima RMSE, R predstavlja globalno najlošiji model, a po kriterijumima MAE i MAPE ima slične pokazatelje kao i modeli koji pripadaju prvoj grupi. Najbolji model predstavlja model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse, koji po svim kriterijumima predstavlja optimalni model. Vrednosti parametara razmere rastojanja za optimalni model mogu se koristiti za ocenu relevantnosti prediktora odnosno promenljive u modelu. U konkretnom slučaju analizu ćemo izvršiti na najboljem modelu. Možemo uočiti (Slika 10.1) da kod optimalnog modela sa ARD eksponencijalnom funkcijom promenljive tri, četiri i sedam imaju značajno veće vrednosti parametara što može da ukazuje na to da su te promenljive manjeg značaja.

U preostala tri modela (izuzet je model sa ARD racionalnom kvadratnom funkcijom kao najlošiji) koje smo svrstali u modele druge grupe sa boljim predikcionim karakteristikama promenljive četiri i sedam imaju znatno veće vrednosti parametara rastojanja što može da ukaže na njihovu manju relevantnost.

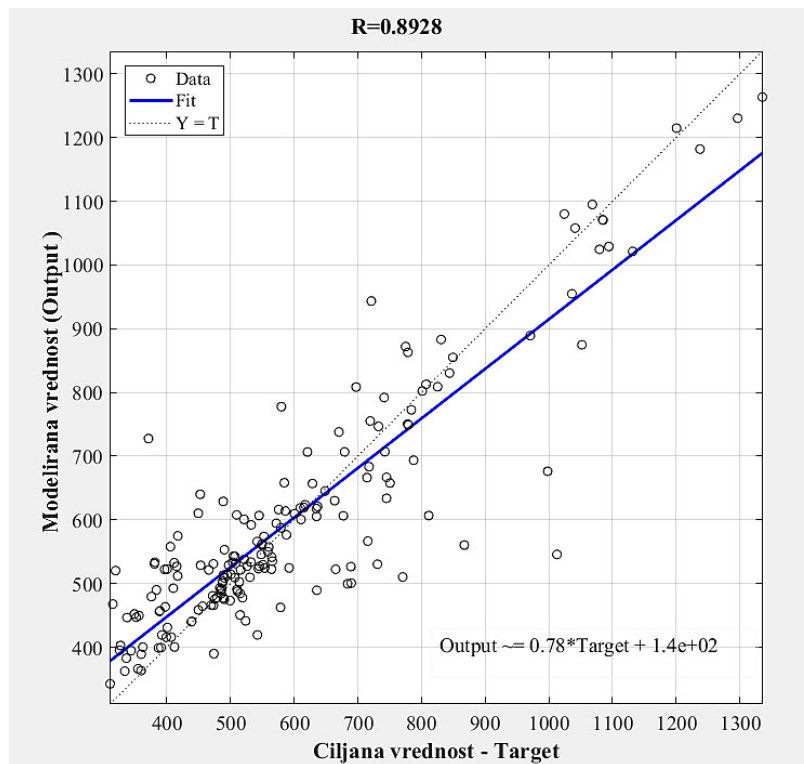


Slika 10.1 Uporedna analiza parametara razmere rastojanja kod modela koštanja mostova

Na osnovu vrednosti parametara promenljive u pogledu relevantnosti koje imaju na model možemo podeliti u dve grupe.



Slika 10.2 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova za model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijance



Slika 10.3 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti za model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijance koštanja mostova

U prvoj grupi se nalaze promenljive koje u pogledu parametara odnosno relevantnosti imaju slične vrednosti kod svih modela i koje je neophodno uzeti u obzir prilikom formiranja modela. Drugu grupu promenljivih sačinjavaju promenljive koje na osnovu parametra razmere rastojanja mogu da imaju značajno manju relevantnost i čiji će uticaj na tačnost modela biti dodatno istražen.

Dalju analizu relevantnosti promenljivih ograničićemo samo na model sa ARD eksponencijalnom funkcijom koji ima najveću preciznost u pogledu razmatranih kriterijuma. Na osnovu ARD eksponencijalnog modela (Slika 10.1) može se uočiti da promenljiva 2 u modelu odnosno ukupna dužina mosta ima najveću relevantnost (parametar rastojanja 0,4851). Promenljive 1, 5 i 9 imaju slične vrednosti parametara razmere rastojanja (vrednosti kreću između 0,7888 do 1,8274.) pa je prema tome njihova relevantnost u modelu slična. Ove promenljive predstavljaju srednju vrednost raspona, prosečnu visinu stubova i indeks cene čelika. Promenljiva 8 koja predstavlja indeks cene agregata ima parametar razmere rastojanja 2,4465, a nešto manju relevantnost (parametar rastojanja 3,4887) ima promenljiva 6 koja predstavlja način fundiranja mosta. Promenljive 1, 5, 6, 8, 9 zajedno sa promenljivom 2 koja ima najveći značaj sačinjavaju prvu grupu promenljivih koja će u daljim analizama biti uključene u svaki analizirani model.

Drugu grupu promenljivih u modelu predstavljaju promenljive 3,4 i 7 koje predstavljaju širinu mosta, način gradnje i bruto zaradu, respektivno. Promenljiva 7 odnosno bruto zarada ima najmanju relevantnost u analiziranom modelu.

U daljoj analizi razmatrani su modeli koji su koristili najrelevantnije promenljive zbog mogućnosti da prisustvo irelevantnih promenljivih može da smanji tačnost modela. Upotrebom suženog skupa promenljivih u određenim slučajevima moguće je dobiti model iste ili veće tačnosti. Takođe, na ovaj način umanjujemo kompleksnost modela i ubrzavamo proces obuke modela.

Dalje su analizirana (Tabela 10.7) tri modela i to:

1. Model koji uključuje promenljive 1, 2, 5, 6, 8 i 9,
2. Model koji uključuje promenljive 1, 2, 5, 6, 8 i 9 iz prve grupe i promenljivu 3 iz druge grupe,

3. Model koji uključuje promenljive 1, 2, 5, 6, 8, 9 iz prve grupe i promenljive 3 i 4 iz druge grupe,
4. Ovaj model je prethodno analiziran i uključuje sve promenljive.

Dobijeni su rezultati koji su prikazani u Tabeli 10.7.

Tabela 10.7 Uporedna analiza modela koštanja sa različitim skupovima ulaznih promenljiva

Model	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RMSE	MAE	R	MAPE
1.	1	1	0	0	1	1	0	1	1	93,5497	61,6237	0,8976	11,3800
2.	1	1	1	0	1	1	0	1	1	92,5128	59,5922	0,8999	10,8627
3.	1	1	1	1	1	1	0	1	1	95,2131	62,6341	0,8935	11,5262
4.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	95,5768	63,2487	0,8928	11,6015

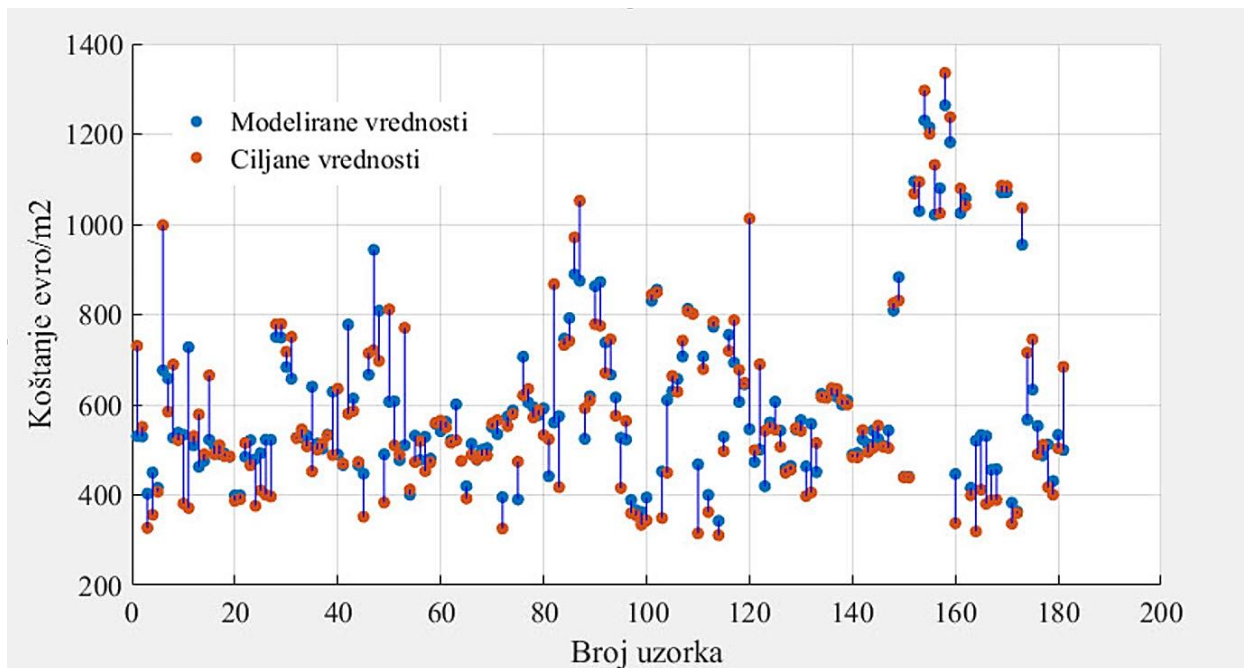
*

x_1 – Srednja vrednost raspona x_4 – Način gradnje x_7 – Bruto zarada
 x_2 – Dužina mosta x_5 – Prosečna visina stubova x_8 – Indeks cene agregata
 x_3 – Širina mosta x_6 – Način fundiranja x_9 – Indeks cene čelika

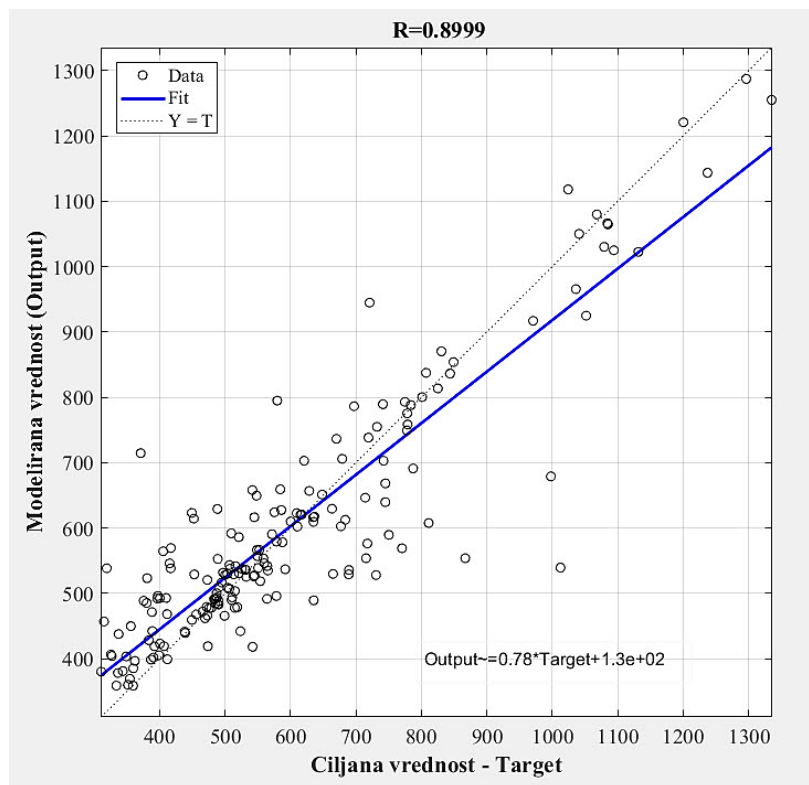
Binarna vrednost (0 ili 1) u tabeli označava da li je određena promenljiva uključena u model ili nije.

Analizom modela sa različitim skupovima ulaznih promenljivih (Tabela 10.7) možemo da uočimo da su i kod modela 1 i kod modela 2 dobijene bolje vrednosti za kriterijume tačnosti modela od modela koji je uključivao sve promenljive. Kod modela 3 dobijene su lošije vrednosti u pogledu svih kriterijumskih funkcija. Optimalni model je model 2. kojim je modelirano koštanje mosta po m^2 u zavisnosti od promenljiva: srednja vrednost raspona, dužina mosta, širina mosta, prosečna visina stubova, način fundiranja, indeks cene agregata, indeks cene čelika, koji po svim kriterijumima ima veću tačnost od ostalih modela.

Analiza je pokazala da je u konkretnom slučaju upotreba suženog skupa promenljivih dala model nešto veće tačnosti, ali je na ovaj način i umanjena kompleksnost modela i ubrzan proces obuke modela.



Slika 10.4 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse za redukovani skup ulaznih promenljivih



Slika 10.5 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse za redukovani skup ulaznih promenljivih

11. PROCENA UTROŠKA MATERIJALA KOD AB DRUMSKIH MOSTOVA

11.1 Procena utroška betona kod drumskih AB mostova modelom Gausovog procesa

Kod analize utroška betona drumskih armirano betonskih mostova analizirana je primena različitih funkcija kovarijanse. Kod svih modela je u postupku vrednovanja modela korišćena desetostruka unakrsna validacija. Da bi se obezbedili apsolutno jednaki uslovi za ocenjivanje modela podešavanja generatora slučajnih brojeva je postavljeno na default vrednost (MATLAB implementacija korišćenjem funkcije rng default).

Podaci za izradu modela su standardizovani. Postupkom standardizacije koji je sproveden po kolonama izvršen je proračun tzv. Z-skora. Analizirani su modeli sa konstantnom baznom funkcijom. Kao ulazne promenljive odnosno prediktori analizirane su sledeće promenljive:

x_1 – Srednja vrednost raspona

x_4 – Način gradnje

x_2 – Dužina mosta

x_5 – Prosečna visina stubova

x_3 – Širina mosta

x_6 – Način fundiranja

Zavisna promenljiva je x_7 – ukupna zapremina armiranog betona (različitih marki betona) ugrađena u most, koja je definisana na osnovu projektne dokumentacije.

Promenljive x_1 , x_2 , x_3 , x_5 su odgovarajuće numeričke vrednosti dobijene iz projektne dokumentacije. Promenljiva x_4 određena je u zavisnosti od primenjenog načina gradnje. Kod svih mostova koji su analizirani i korišćeni za izradu ovog modela primenjena su dva načina gradnje, polumontažni način gradnje ili livenje u oplati. Kod mostova sa polumontažnim načinom gradnje promenljivoj x_4 dodeljena je vrednost 1, dok je kod mostova kod kojih je primenjeno livenje u oplati promenljivoj x_4 dodeljena vrednost 0. Slično tome promenljivoj x_6 koja predstavlja način fundiranja dodeljena je vrednost 1 kod svih onih mostova kod kojih je primenjeno duboko fundiranje (ili kod kojih prevlađujući tip fundiranja predstavlja duboko fundiranje), dok je kod

svih onih mostova gde je primenjeno plitko fundiranje (ili kod kojih preovlađujući tip fundiranja predstavlja plitko fundiranje) promenljivoj x_6 dodeljena vrednost 0.

Predviđanje modela vrši se u okviru podataka koje je model upoznao tokom obučavanja. Za ulazne promenljive x_1, x_2, x_3, x_5 , kao i za zavisnu promenljivu x_7 određene su srednje, maksimalne i minimalne vrednosti i prikazane su u tabeli 11.1. Skup podataka obuhvatao je vrednosti za ukupno 181 drumska armirano-betonska mosta.

Tabela 11.1 Srednje, minimalne i maksimalne vrednosti promenljiva kod modela utroška betona

Promenljiva	Srednja vrednost	Minimalna vrednost	Maksimalna vrednost
Srednja vrednost raspona [m]	21,25	6,52	49,00
Dužina mosta [m]	84,24	6,52	628,74
Širina mosta [m]	13,43	7,90	19,91
Prosečna visina stubova [m]	9,60	3,28	35,01
Ukupna količina betona [m ³]	1700,19	148,00	13444,00

11.1.1 Uporedna analiza modela Gausovog procesa sa različitim funkcijama kovarijanse kod predviđanja ukupne količine armiranog betona

Uporednom analizom različitih modela Gausovog procesa možemo uočiti da modeli u zavisnosti od funkcije kovarijanse imaju različitu tačnost po usvojenim kriterijumima. Sve funkcije kovarijanse koje su analizirane kod predviđanja koštanja mostova, takođe, analizirane su i kod predviđanja ukupne količine armiranog betona. Kod svih analiziranih modela određene su optimalne vrednosti parametara modela i određena je tačnost modela u pogledu kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE.

Parametri modela sa različitim kernel funkcijama prikazani su u Tabeli 11.2 i Tabeli 11.3, dok su vrednosti modela u pogledu definisanih kriterijuma tačnosti dati u Tabeli 11.4 i Tabeli 11.5.

U razmatranom slučaju predviđanja utroška betona za svaku od prethodno definisane šest promenljive odnosno prediktora određen je parametar razmere rastojanja σ_m , $m = 1, 2, \dots, 6$.

Tabela 11.2 Parametri GP modela sa različitim funkcijama kovarijanse kod predviđanja ukupne količine betona

Model	Parametri funkcije kovarijanse		
Eksponencijalna funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 239,8767$		$\sigma_f = 8109,7824$
Kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 1,3436$		$\sigma_f = 2415,2362$
Matern 3/2 funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 3,9954$		$\sigma_f = 3206,8049$
Matern 5/2 funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 2,3238$		$\sigma_f = 2638,9008$
Racionalna kvadratna funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 5,4745$	$a = 0.0291$	$\sigma_f = 6829,7688$

Svaki od ovih σ_m parametara je jednak ili veći od nule. Ova ograničenja su zadovoljena uvođenjem smene

$$\Theta_m = \log \sigma_m, \quad m = 1, 2, \dots, 6$$

$$\Theta_f = \log \sigma_f, \quad f = 7.$$

Parametri funkcija kovarijanse određeni su maksimizacijom log marginalne verovatnoće prema postupku objašnjenom u delu teorijskog objašnjenja metode.

Na osnovu vrednosti kriterijuma kojima ocenjujemo tačnost modela možemo uočiti da modeli koji imaju ARD funkciju kovarijanse imaju bolju tačnost. Vrednosti kriterijuma se kreću u sledećim granicama i to vrednost RMSE od 325,7768 do 348,2953, vrednost kriterijuma MAE od 159,2796 do vrednosti 184,5609, vrednost koeficijenta korelacije je gotovo ista kod svih modela i kreće se u rasponu 0,9884 do 0,9899, dok je vrednost MAPE u intervalu od 11,6461 do 15,7396.

Tabela 11.3 Parametri GP modela sa različitim ARD funkcijama kovarijanse kod predviđanja ukupne količine betona

Parametri funkcija kovarijanse						
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
Parametri ARD eksponencijalna funkcija kovarijanse						
1304,2300	47,6519	1205,8801	919040,1184	192,4708	441,1901	6848,2102
Parametri ARD kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse						
12,4524	0,8378	12,6619	2,9804	0,9687	2,6773	2955,5719
Parametri ARD matern 3/2 funkcija kovarijanse						
14,4937	2,4607	24,7951	16,8131	3,1127	10,3845	3727,8021
Parametri ARD matern 5/2 funkcija kovarijanse						
12,4004	1,5323	17,0303	6,4511	1,6069	5,5196	3125,5647
Parametri ARD kvadratna racionalna funkcija kovarijanse $\alpha = 0,0448$						
14,4928	2,6978	27,3446	21,0616	3,2843	10,7307	6385,5798

Tabela 11.4 Usporedna analiza modela po različitim kriterijumima tačnosti kod predviđanja ukupne količine betona

Funkcija kovarijanse GP modela	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
Eksponecijalna	333,0896	164,2991	0,9895	14,5182
Kvadratna eksponencijalna	411,0802	199,8675	0,9840	23,1864
Matern 3/2	352,1780	167,2727	0,9882	16,2084
Matern 5/2	367,9996	171,6996	0,9871	17,8349
Racionalna kvadratna	342,7649	160,8512	0,9889	15,6785

Tabela 11.5 Uporedna analiza ARD modela po različitim kriterijumima tačnosti kod predviđanja ukupne količine betona

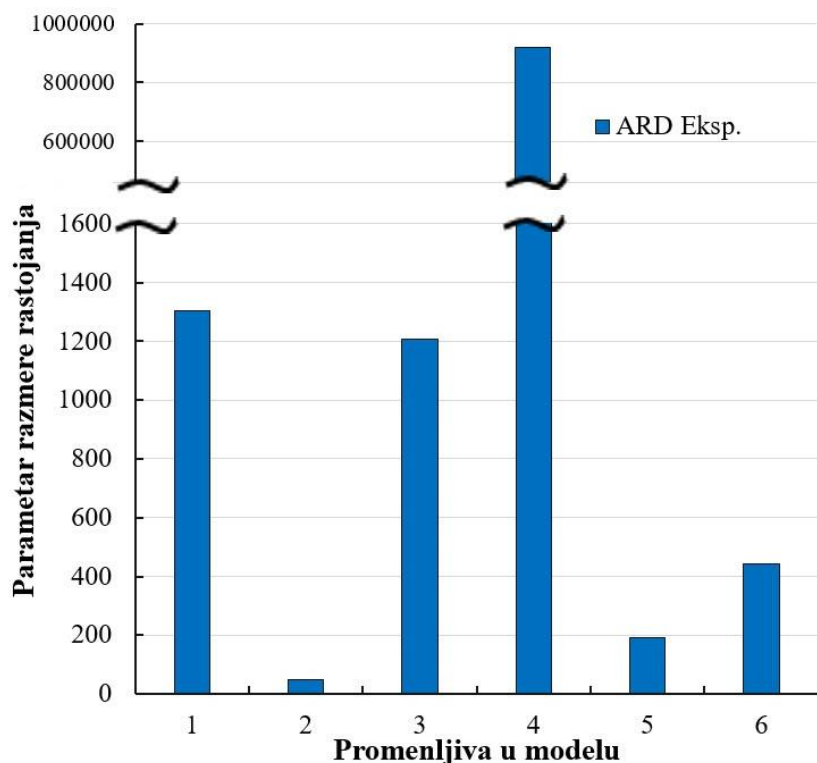
Funkcija kovarijanse GP modela	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
ARD eksponencijalna	325,7768	159,2796	0,9899	11,6461
ARD kvadratna eksponencijalna	348,2953	184,5609	0,9884	15,7396
ARD matern 3/2	339,9148	160,2837	0,9890	13,2015
ARD matern 5/2	346,0292	169,3506	0,9886	14,2016
ARD racionalna kvadratna	339,5615	167,4138	0,9890	14,1101

Na osnovu četiri kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE (Tabela 11.5) model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse se može oceniti kao kao najtačniji. Globalno najlošiji model grupe modela sa ARD funkcijom kovarijanse je model sa kvadratnom eksponencijalnom funkcijom kovarijanse.

Na osnovu modela sa najvećom tačnošću, a na osnovu vrednosti parametara razmere rastojanja možemo sagledati značaj koje pojedine promenljive imaju u modelu. U konkretnom slučaju to znači da ćemo ovu analizu uraditi na modelu sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse.

Sagledavanjem vrednosti parametara razmere rastojanja možemo uočiti da promenljiva x_4 koja predstavlja način gradnje kod modela sa ARD eksponencijalnom funkcijom ima najveću vrednost (značaj promenljive je obrnuto srazmeran vrednosti parametra razmere rastojanja) parametra rastojanja (Slika 11.1) u poređenju sa parametrima rastojanja koji karakterišu ostale promenljive. Promenljiva x_2 – dužina mosta je promenljiva najvećeg značaja za model, dok su ostale promenljive sličnog značaja sa aspekta tačnosti modela.

Dalje je analiziran modela koji uključuje promenljive 1, 2, 3, 5 i 6.



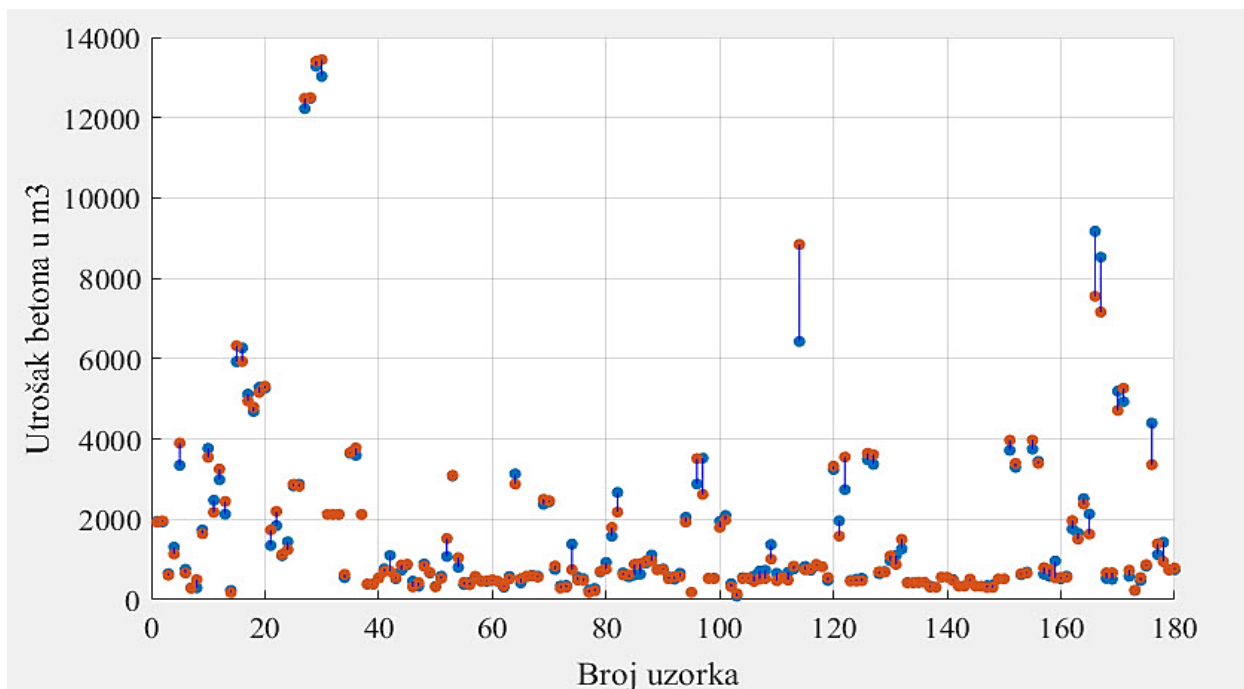
Slika 11.1 Vrednosti parametara razmere rastojanja kod modela sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse kod predviđanja ukupne količine betona

Tabela 11.6 Uporedna analiza modela utroška betona sa različitim skupovima ulaznih promenljiva

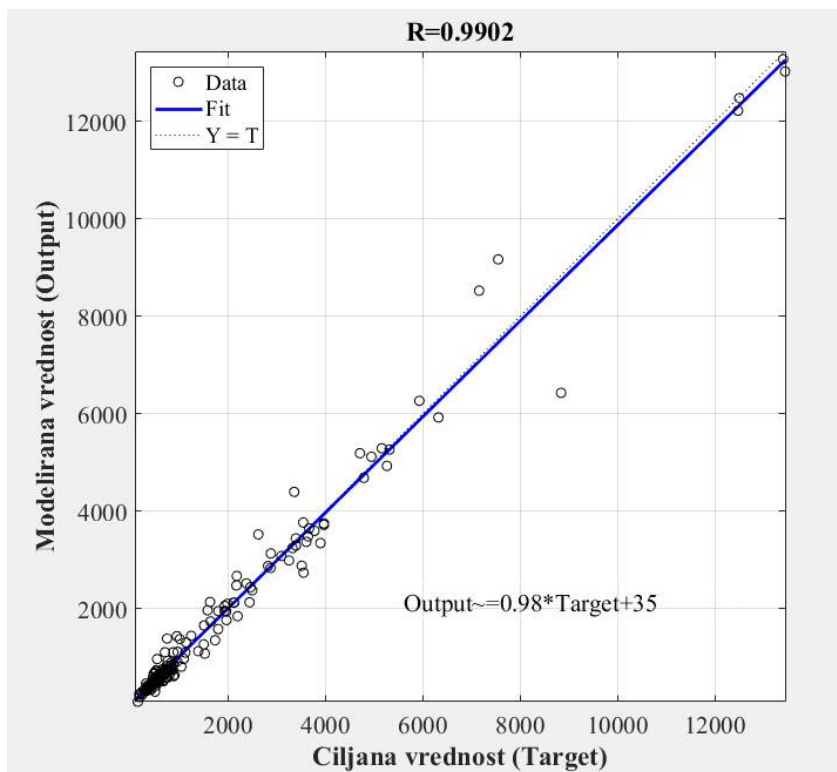
Model	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RMSE	MAE	R	MAPE
1.	1	1	1	0	1	1	321,3378	159,2709	0,9902	11,8484
2.	1	1	1	1	1	1	325,7768	159,2796	0.9899	11.6461

Binarna vrednost (0 ili 1) u tabeli označava da li je određena promenljiva uključena u model ili nije.

Analizom tabele (Tabela 11.6) možemo da uočimo da su kod modela 1 dobijene bolje vrednosti za kriterijume tačnosti RMSE i R modela, dok su za kriterijume MAE i MAPE te razlike zanemarljive. Na Slici 11.2 je dat prikaz modeliranih vrednosti koje su izražene u ukupnoj količini betona izraženoj u m^3 po mostu, u odnosu na ciljane target vrednosti betona. Na Slici 11.3 je prikazan regresioni dijagram pomenutih modeliranih i ciljanih vrednosti ukupne količine betona.



Slika 11.2 Modelirane i ciljane vrednosti utroška betona za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse za redukovani skup ulaznih promenljivih



Slika 11.3 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti utroška betona za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse za redukovani skup ulaznih promenljivih

11.2 Procena utroška visokovrednog čelika kod drumskih AB mostova modelom Gausovog procesa

Kod analize utroška visokovrednog čelika po m^2 površine drumskih armirano betonskih mostova analizirana je primena različitih kernela. Kod svih modela je u postupku vrednovanja modela korišćena petostruka unakrsna validacija. Da bi se obezbedili apsolutno jednaki uslovi za ocenjivanje modela podešavanja generatora slučajnih brojeva je postavljeno na default vrednost (MATLAB implementacija korišćenjem funkcije `rng default`).

Podaci za izradu modela su standardizovani. Postupkom standardizacije koji je sproveden po kolonama izvršen je proračun tzv. Z-skora. Analizirani su modeli sa konstantnom baznom funkcijom.

Kao ulazne promenljive odnosno prediktori analizirane su sledeće promenljive:

x_1 – Maksimalni pojedinačni raspon x_2 – Srednja vrednost raspona x_3 – Dužina mosta
 x_4 – Širina mosta

Zavisna promenljiva je x_5 – masa u kg visokovrednog čelika po m^2 površine mosta definisana je na osnovu projektne dokumentacije.

Promenljive x_1, x_2, x_3, x_4 su odgovarajuće numeričke vrednosti izražene u metrima dobijene iz projektne dokumentacije. Kod svih mostova koji su analizirani i korišćeni za izradu ovog modela primenjena su dva načina gradnje, polumontažni način gradnje ili livenje u oplati.

Predviđanje modela vrši se u okviru podataka koje je model upoznao tokom obučavanja. Za ulazne promenljive x_1, x_2, x_3, x_4 , kao i za zavisnu promenljivu x_5 određene su srednje, maksimalne i minimalne vrednosti i prikazane su u Tabeli 11.7. Skup podataka obuhvatao je vrednosti za ukupno 77 prednapregnuta drumska armirano betonska mosta.

Tabela 11.7 Srednje, minimalne i maksimalne vrednosti promenljiva kod modela za procenu utroška visokovrednog čelika po m² površine mostova*

Promenljiva	Srednja vrednost	Minimalna vrednost	Maksimalna vrednost
Maksimalni raspon [m]	31,58	18,00	49,00
Srednja vrednost raspona [m]	30,74	17,60	44,91
Dužina mosta [m]	161,33	21,20	628,74
Širina mosta [m]	12,81	8,40	17,80

*Samo mostovi od prednapregnutog betona

11.2.1 Uporedna analiza modela Gausovog procesa sa različitim funkcijama kovarijanse kod predviđanja utroška visokovrednog čelika po m² površine mostova

Uporednom analizom različitih modela Gausovog procesa možemo uočiti da modeli u zavisnosti od funkcije kovarijanse imaju različitu tačnost po usvojenim kriterijumima. Sve funkcije kovarijanse koje su analizirane kod predviđanja koštanja mostova, takođe, analizirane su i kod modela za procenu utroška visokovrednog čelika po m² površine mostova.

Kod svih analiziranih modela određene su optimalne vrednosti parametara modela i određena je tačnost modela u pogledu kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE.

Parametri modela sa različitim kernel funkcijama prikazani su u Tabeli 11.8, a parametri modela sa ARD kernel funkcijama dati u Tabeli 11.9. Vrednosti modela u pogledu definisanih kriterijuma tačnosti dati u Tabeli 11.10. i Tabeli 11.11.

U razmatranom slučaju predviđanja utroška visokovrednog čelika po m² površine mostova kod ARD kernel funkcija za svaku od prethodno definisane četiri promenljive odnosno prediktora određen je parametar razmere rastojanja σ_m , $m = 1, 2, 3, 4$. Svaki od ovih σ_m parametara je jednak ili veći od nule.

Ova ograničenja su zadovoljena uvođenjem smene :

$$\Theta_m = \log \sigma_m, \quad m = 1, 2, 3, 4$$

$$\Theta_f = \log \sigma_f, \quad f = 5.$$

Parametri funkcija kovarijance određeni su maksimizacijom log marginalne verovatnoće prema postupku objašnjenom u delu teorijskog objašnjenja metode.

Na osnovu vrednosti kriterijuma (Tabela 11.10 i Tabela 11.11) možemo videti da i u ovom slučaju modeli sa ARD funkcijom kovarijance imaju veću tačnost. Vrednosti kriterijuma se kreću u relativno uskom granicama i to vrednost RMSE od 2,3800 do 3,1297, vrednost kriterijuma MAE od 1,3302 do vrednosti 1,9661, vrednost koeficijenta korelacije se kreće u rasponu 0,7937 do 0,8870. Vrednost MAPE je u intervalu od 8,1541 do 15,5454.

Tabela 11.8 Parametri GP modela sa različitim funkcijama kovarijance kod predviđanja utroška visokovrednog čelika

Model	Parametri funkcije kovarijance		
Eksponecijalna funkcija kovarijance	$\sigma_l = 5,4002$	$\sigma_f = 9,9766$	
Kvadratna eksponecijalna funkcija kovarijance	$\sigma_l = 2,4565$	$\sigma_f = 10,7092$	
Matern 3/2 funkcija kovarijance	$\sigma_l = 5,1291$	$\sigma_f = 13,3442$	
Matern 5/2 funkcija kovarijance	$\sigma_l = 3,6042$	$\sigma_f = 11,8095$	
Racionalna kvadratna funkcija kovarijance	$\sigma_l = 2,6978$	$a = 2,8872$	$\sigma_f = 11,3713$

Na osnovu četiri kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE model sa ARD eksponecijalnom funkcijom kovarijance se može oceniti kao najtačniji. Nešto lošije pokazatelje u grupi modela sa ARD

funkcijom kovarijanse pokazali su modeli sa ARD matern32 i ARD matern52 funkcijom kovarijanse.

Tabela 11.9 Parametri GP modela sa različitim ARD funkcijama kovarijanse kod predviđanja utroška visokovrednog čelika

Parametri funkcija kovarijanse				
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
Parametri ARD eksponencijalna funkcija kovarijanse				
327822.2661	0,4200	8,4734	170,7902	7,9176
Parametri ARD kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse				
3,3532	0,8216	2,8218	11,5585	8,4546
Parametri ARD matern 3/2 funkcija kovarijanse				
0,5812	0,9767	71499.7664	0,1014	5,7735
Parametri ARD matern 5/2 funkcija kovarijanse				
1,8478	0,3117	4243.2352	4,8180	7,1089
Parametri ARD kvadratna racionalna funkcija kovarijanse $\alpha = 0,1673$				
1,6509	0,3324	7441.4850	5.2814	8,8932

Tabela 11.10 Usporedna analiza modela po različitim kriterijumima tačnosti kod predviđanja utroška visokovrednog čelika

Funkcija kovarijanse GP modela	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
Eksponencijalna funkcija	2,6536	1,4834	0,8565	9.1259
Kvadratna eksponencijalna	2,8456	2,0747	0,8396	12,9275
Matern 3/2	3,6520	2,2463	0,7113	13,3066
Matern 5/2	3,1981	2,2096	0,7851	13,2736
Racionalna kvadratna	2,9855	2,0910	0,8180	12,8920

Tabela 11.11 Uporedna analiza ARD modela po različitim kriterijumima tačnosti kod predviđanja utroška visokovrednog čelika

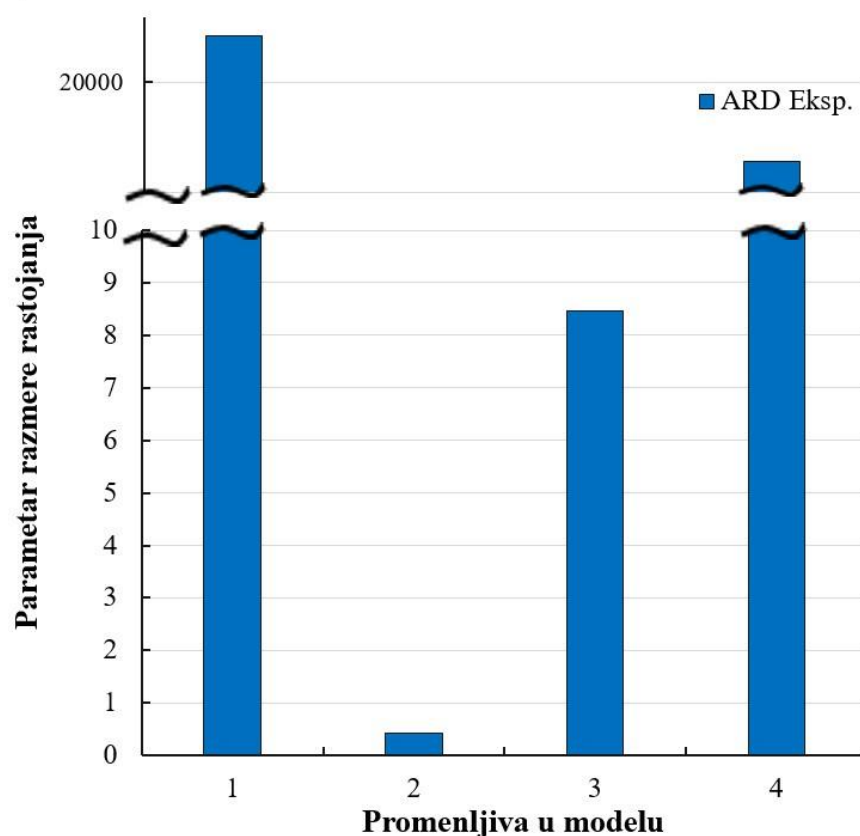
Funkcija kovarijanse GP modela	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
ARD eksponencijalna funkcija kovarijanse	2,3800	1,3302	0,8870	8,1541
ARD kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse	2,4239	1,7913	0,8822	10,9999
ARD matern 3/2 funkcija kovarijanse	3,0418	1,9661	0,8087	12,5454
ARD matern 5/2 funkcija kovarijanse	3,1297	1,9085	0,7937	11,4697
ARD racional.kvadratna funkcija kovarijanse	2,6568	1,7374	0,8565	10,6859

Na osnovu modela sa najvećom tačnosti, može se analizom vrednosti parametara razmere rastojanja sagledati značaj koje pojedine promenljive imaju u modelu. U konkretnom slučaju to znači da ćemo ovu analizu uraditi na modelu sa ARD ekponencijalnom funkcijom kovarijanse.

Sagledavanjem vrednosti parametara razmere rastojanja možemo uočiti da promenljiva x_1 koja predstavlja maksimalni pojedinačni raspon kod modela sa ARD eksponencijalnom funkcijom ima najveću vrednost (značaj promenljive sa aspekta analiziranog modela je obrnuto srazmeran vrednosti parametra razmere rastojanja) parametra razmere rastojanja (Slika 11.4) u poređenju sa parametrima rastojanja koji karakterišu ostale promenljive. To se može objasniti time da se obično mostovi rade sličnih pojedinačnih raspona pri čemu se ti pojedinačni rasponi ne razlikuju mnogo, tako da promenljiva x_2 koja predstavlja srednju vrednost raspona implicitno sadrži i deo informacija o maksimalnom rasponu koji se ne razlikuje mnogo, tako da uzimanjem promenljive x_2 se te informacije uključuju u model. Promenljiva x_3 – dužina mosta je promenljiva sa većom vrednošću parametra razmere rastojanja odnosno manjeg značaja u odnosu na promenljivu x_2 što se može objasniti činjenicom da izlazna promenljiva predstavlja utrošak visokovrednog čelika

izražen po m^2 . Da je izlazna promenljiva npr. ukupna količina visokovrednog čelika značaj promenljive x_3 bi nasuprot tome bio veliki. Analogno objašnjenje se može izvesti i za promenljivu x_4 odnosno za uticaj širine.

Na Slici 11.4 su prikazane vrednosti parametara razmere rastojanja za svaku od ulaznih promenljiva. Sa obzirom na značajnu razliku u veličinama ovog parametra, za pojedine promenljive na gornjem delu slike primenjena je logaritamska razmera.



Slika 11.4 Vrednosti parametara razmere rastojanja kod modela sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse kod modela utroška visokovrednog čelika

U daljoj analizi razmatran je model koji koristi najrelevantnije promenljive . Upotrebom suženog skupa promenljivih u određenim slučajevima moguće je dobiti model iste ili veće tačnosti.

Dalje su analizirana dodatna tri modela i to:

1. Model koji uključuje promenljive 2, 3 i 4,
2. Model koji uključuje promenljive 2, i 3 ,
3. Model koji uključuje samo promenljivu 2 ,
4. Ovaj model je prethodno analiziran i uključuje sve promenljive.

Tabela 11.12 Uporedna analiza modela utroška visokovrednog čelika po m^2 površine mosta sa različitim skupovima ulaznih promenljiva

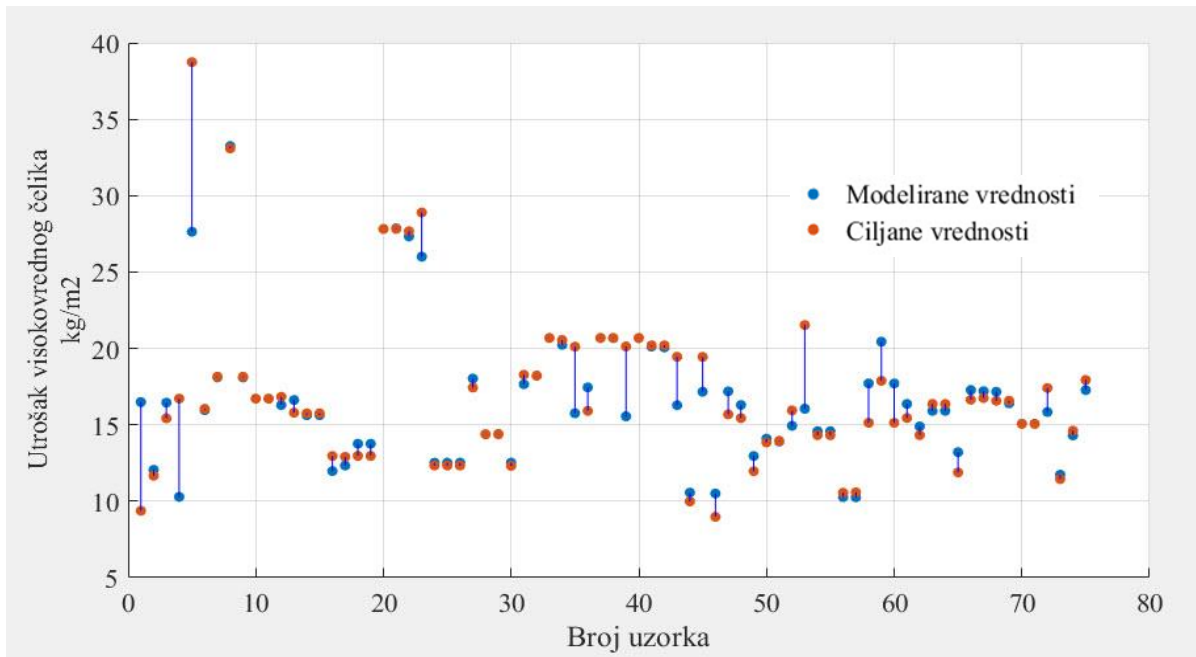
Model	x_1	x_2	x_3	x_4	RMSE	MAE	R	MAPE
1.	0	1	1	1	2,8232	1,3881	0,8368	8,2593
2.	0	1	1	0	2,1676	1,0993	0,9096	6,5537
3	0	1	0	0	3,0318	1,7853	0,8088	10,0922
4.	1	1	1	1	2,3800	1,3302	0,8870	8,1541

Binarna vrednost (0 ili 1) u tabeli označava da li je određena promenljiva uključena u model ili nije.

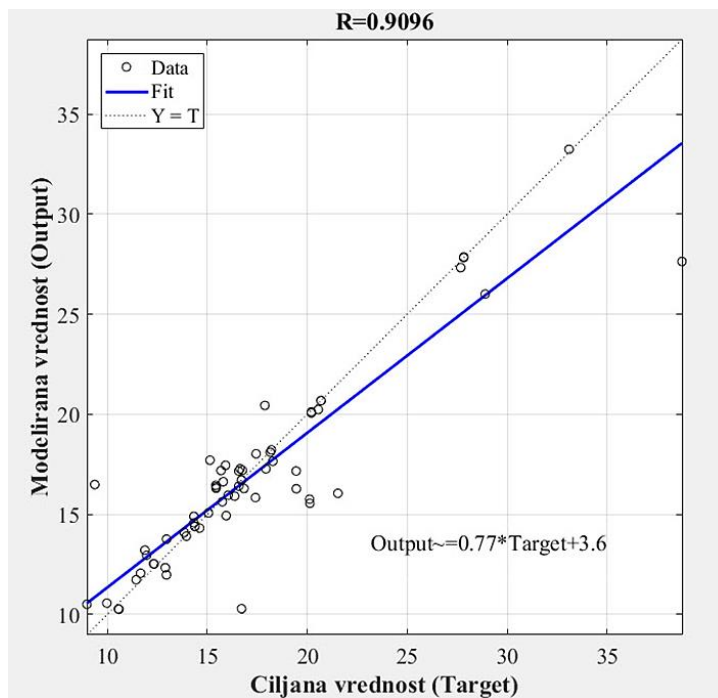
Analizom Tabele 11.12 možemo da uočimo da redukcijom skupa ulaznih promenljiva u konkretnom slučaju možemo da pojednostavimo model kao i da poboljšamo tačnost modela. U analiziranom slučaju procene utroška visokovrednog čelika po m^2 kod modela 2. isključivanjem promenljiva x_1 i x_4 od ukupno četiri analiziranih ulaznih promenljiva dobijene su bolje vrednosti za kriterijume tačnosti RMSE, MAE, MAPE i R u odnosu na model koji uključuje sve promenljive.

Vrednost RMSE i MAE ukazuju na zadovoljavajuću tačnost modela, pri čemu je vrednost RMSE u odnosu na vrednost MAE značajno veća, što ukazuje na nešto manju tačnost kod predviđanja u pogledu ekstremnih vrednosti utroška čelika, dok je u opštem slučaju koji opisuje vrednost MAE model veće tačnosti. Vrednosti R i MAPE, takođe, ukazuju na zadovoljavajuću tačnost modela.

Vrednosti utroška čelika po m^2 površine mosta se kod najvećeg broja analiziranih mostova nalaze između 12,5 i 22 kg/m^2 što je u saglasnosti sa okvirnim vrednostima koje se navode u literaturi [121]. Na Slici 11.5 je dat prikaz modeliranih vrednosti u odnosu na ciljane, target vrednosti za optimalni model. Na Slici 11.6 je prikazan regresioni dijagram pomenutih modeliranih i ciljanih vrednosti kod optimalnog modela.



Slika 11.5 Modelirane i ciljane vrednosti utroška visokovrednog čelika za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijance i redukovani skup ulaznih promenljivih



Slika 11.6 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti utroška visokovrednog čelika za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijance i redukovani skup ulaznih promenljivih

11.3 Procena utroška rebrastog čelika kod drumskih AB mostova modelom Gausovog procesa

Kod analize utroška rebrastog čelika po m^3 ugrađenog betona drumskih armirano betonskih mostova analizirana je primena različitih kernela. Kod svih modela je u postupku vrednovanja modela korišćena desetostruka unakrsna validacija. Da bi se obezbedili apsolutno jednaki uslovi za ocenjivanje modela podešavanja generatora slučajnih brojeva je postavljeno na default vrednost (MATLAB implementacija korišćenjem funkcije `rng default`).

Podaci za izradu modela su standardizovani. Postupkom standardizacije koji je sproveden po kolonama izvršen je proračun tzv. Z-skora. Analizirani su modeli sa konstantnom baznom funkcijom.

Kao ulazne promenljive odnosno prediktori analizirane su sledeće promenljive

x_1 – Srednja vrednost raspona x_2 – Dužina mosta x_3 – Širina mosta

x_4 – Prosečna visina stubova x_5 – Način fundiranja x_6 – Tip mosta

Zavisna promenljiva je x_8 – masa u kg čelika po m^3 zapremine ugrađenog betona definisana je na osnovu projektne dokumentacije.

Promenljive x_1, x_2, x_3, x_4 su odgovarajuće numeričke vrednosti izražene u metrima dobijene iz projektne dokumentacije.

Promenljivoj x_5 je dodeljena vrednost 1 u svim slučajevima kod kojih je primenjeno duboko fundiranje, a vrednost nula je dodeljena ovoj promenljivoj u slučajevima kada je primenjeno plitko fundiranje. Promenljivoj x_6 dodeljena je vrednost 1 kod svih onih mostova gde je primenjena rasponska konstrukcija od prethodno-napregnutog betona, odnosno ova promenljiva ima vrednost nula u svim drugim slučajevima.

Predviđanje modela vrši se u okviru podataka koje je model upoznao tokom obučavanja. Za ulazne promenljive x_1, x_2, x_3, x_4 , kao i za zavisnu promenljivu x_7 određene su srednje, maksimalne i minimalne vrednosti i prikazane su u Tabeli 11.13 Skup podataka obuhvatao je vrednosti za ukupno 181 drumska armirano betonska mosta.

Tabela 11.13 Srednje, minimalne i maksimalne vrednosti promenljiva kod modela za procenu utroška rebrastog čelika po m³ ugrađenog betona

Promenljiva	Srednja vrednost	Minimalna vrednost	Maksimalna vrednost
Srednja vrednost raspona [m]	21,25	6,52	49,00
Dužina mosta [m]	84,24	6,52	628,74
Širina mosta [m]	13,43	7,90	19,91
Prosečna visina stubova [m]	9,60	3,28	35,01
Prosečan utrošak reb. čelika [kg/m ³]	152,71	81,58	249,25

11.3.1 Uporedna analiza modela Gausovog procesa sa različitim funkcijama kovarijanse kod predviđanja utroška rebrastog čelika

Uporednom analizom različitih modela Gausovog procesa možemo uočiti da modeli u zavisnosti od funkcije kovarijanse imaju različitu tačnost po usvojenim kriterijumima. Sve kernel funkcije koje su analizirane kod predviđanja koštanja mostova, takođe, analizirane su i kod modela za procenu utroška rebrastog čelika po m³ ugrađenog betona.

Kod svih analiziranih modela određene su optimalne vrednosti parametara modela i određena je tačnost modela u pogledu kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE.

Parametri modela sa različitim kernel funkcijama prikazani su u Tabeli 11.14 i Tabeli 11.15, dok su vrednosti modela u pogledu definisanih kriterijuma tačnosti dati u Tabeli 11.16 i Tabeli 11.17. Vrednosti parametara određene su maksimizacijom log marginalne verovatnoće postupkom objašnjenim u teorijskom delu.

U razmatranom slučaju predviđanja utroška rebrastog čelika po m³ ugrađenog betona mostova za svaku od prethodno definisane pet promenljive određen je parametar razmere rastojanja σ_m , $m = 1, 2, \dots, 6$. Svaki od ovih σ_m parametara je jednak ili veći od nule. Ova ograničenja su zadovoljena uvođenjem smene

$$\Theta_m = \log \sigma_m, \quad m = 1, 2, \dots, 6$$

$$\Theta_f = \log \sigma_f, \quad f = 7.$$

Tabela 11.14 Parametri GP modela sa različitim funkcijama kovarijanse kod modela utroška rebrastog čelika po m³ ugrađenog betona

Model	Parametri funkcije kovarijanse		
Eksponencijalna funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 0,3443$		$\sigma_f = 34,7740$
Kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 0,1410$		$\sigma_f = 32,9626$
Matern 3/2 funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 0,1990$		$\sigma_f = 33,3042$
Matern 5/2 funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 0,1735$		$\sigma_f = 33,0978$
Racionalna kvadratna funkcija kovarijanse	$\sigma_l = 0,1257$	$a = 0,2250$	$\sigma_f = 37,6388$

Na osnovu vrednosti kriterijuma možemo videti da i u ovom slučaju modeli sa ARD funkcijom kovarijanse imaju bolju tačnost. Vrednosti kriterijuma se kreću u sledećim granicama i to vrednost RMSE od 22,7903 do 25,3731, vrednost kriterijuma MAE od 15,3834 do vrednosti 19,2574, vrednost koeficijenta korelacije R se kreće u rasponu 0,6713 do 0,7472. Vrednost MAPE je u intervalu od 10,6070 do 13,6701.

Model sa ARD matern 3/2 funkcijom kovarijanse je najbolji model u pogledu vrednosti kriterijuma MAE i MAPE, dok je u pogledu vrednosti RMSE i R bolji model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse, pri tome razlika u kriterijumima RMSE i R za ova dva modela su praktično zanemarljive. Pošto je kriterijum RMSE znatno osetljiviji na ekstremne vrednosti, a kriterijum MAE opisuje opštu tačnost modela prednost je data ARD matern 3/2 modelu koji je usvojen za optimalan.

Tabela 11.15 Parametri GP modela sa različitim ARD funkcijama kovarijanse kod modela utroška rebrastog čelika po m³ ugrađenog betona

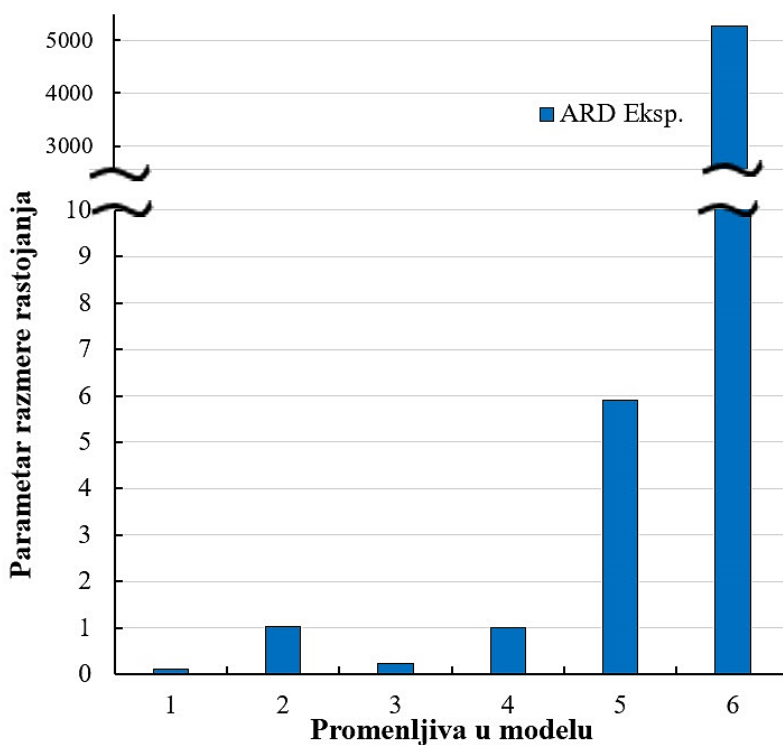
Parametri funkcija kovarijanse						
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
Parametri ARD eksponencijalna funkcija kovarijanse						
0,2207	1,1053	0,3299	2,7632	15,1733	18356.6101	36,7779
Parametri ARD kvadratna eksponencijalna funkcija kovarijanse						
0,5178	0,3894	0,0134	0,4239	1,8089	1,8462	31,7878
Parametri ARD matern 3/2 funkcija kovarijanse						
0,1000	1,0365	0,2244	1,0052	5,9025	5267,0592	35,3783
Parametri ARD matern 5/2 funkcija kovarijanse						
0,0826	1,0020	0,1935	0,8214	4,7965	5843.9013	34,7776
Parametri ARD kvadratna racionalna funkcija kovarijanse $\alpha = 0,7535$						
0,0665	0,5986	0,1445	0,6589	4,4130	19897.8094	35,7063

Tabela 11.16 Usporedna analiza modela po različitim kriterijumima tačnosti kod modela utroška rebrastog čelika po m³ ugrađenog betona

Funkcija kovarijanse GP modela	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
Ekspencijalna funkcija kovarijanse	24,6104	17,6941	0,6981	12,5895
Kvadratna ekspencijalna funkcija kovarijanse	26,6249	20,5433	0,6298	14,6235
Matern 3/2 funkcija kovarijanse	25,6841	18,6488	0,6623	13,1447
Matern 5/2 funkcija kovarijanse	25,8806	18,6999	0,6545	13,1202
Racionalna kvadratna funkcija kovarijanse	23,9135	17,4059	0,7174	12,4426

Tabela 11.17 Uporedna analiza ARD modela po različitim kriterijumima tačnosti kod modela utroška rebrastog čelika po m³ ugrađenog betona

Funkcija kovarijanse GP modela	Kriterijum			
	RMSE	MAE	R	MAPE
ARD eksponencijalna	22,7903	15,3834	0,7472	10,9333
ARD kvadratna eksponencijalna	25,3731	19,2754	0,6713	13,6701
ARD matern 3/2	23,2952	15,2053	0,7325	10,6070
ARD matern 5/2	24,1090	16,1028	0,7112	11,2480
ARD racionalna kvadratna	23,7713	15,5741	0,7205	10,9709



Slika 11.7 Vrednosti parametara razmere rastojanja kod modela sa ARD matern 3/2 funkcijom kovarijanse kod modela utroška rebrastog čelika po m³ ugrađenog betona

Na Slici 11.7 su prikazane vrednosti parametara razmere rastojanja za svaku od ulaznih promenljivih. Sa obzirom na značajnu razliku u veličinama ovog parametra za pojedine promenljive na gornjem delu slike primenjena je logaritamska razmera.

Na osnovu modela sa najvećom tačnosti, može se analizom vrednosti parametara razmere rastojanja sagledati značaj koje pojedine promenljive imaju u modelu. U konkretnom slučaju to znači da ćemo ovu analizu uraditi na modelu sa ARD metarn 3/2 funkcijom kovarijanse.

Sagledavanjem vrednosti parametara razmere rastojanja možemo uočiti da promenljiva x_1 koja predstavlja srednju vrednost raspona kod modela sa ARD funkcijom kod većine modela je identifikovana kao promenljiva koja ima najveći značaj (značaj promenljive sa aspekta analiziranog modela je obrnuto srazmeran vrednosti parametra razmere rastojanja) u poređenju sa parametrima rastojanja koji karakterišu ostale promenljive.

Promenljiva x_6 kod većine analiziranih modela ima nešto veću vrednost parametra razmere rastojanja pa je u sledećoj fazi urađena analiza modela kod koga je ova promenljiva isključena iz skupa ulaznih promenljiva.

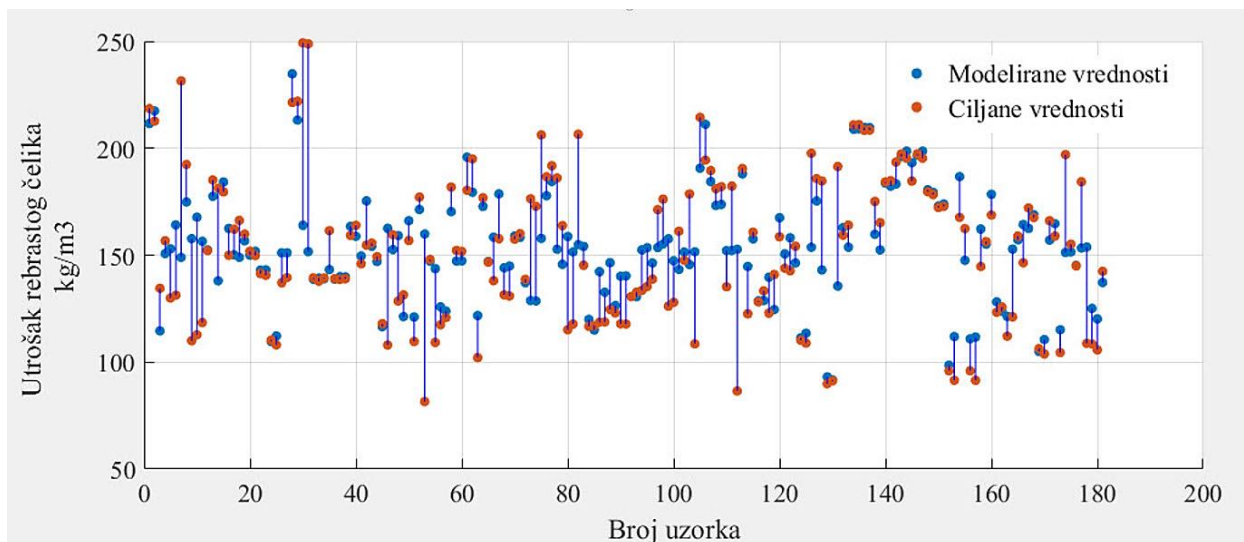
Tabela 11.18 Uporedna analiza modela utroška rebrastog čelika po m^3 ugrađenog betona sa različitim skupovima ulaznih promenljiva

Model	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RMSE	MAE	R	MAPE
1.	1	1	1	1	1	0	23,2978	15,7534	0,7354	11,4458
2.	1	1	1	1	1	1	23,2952	15,2053	0,7325	10,6070

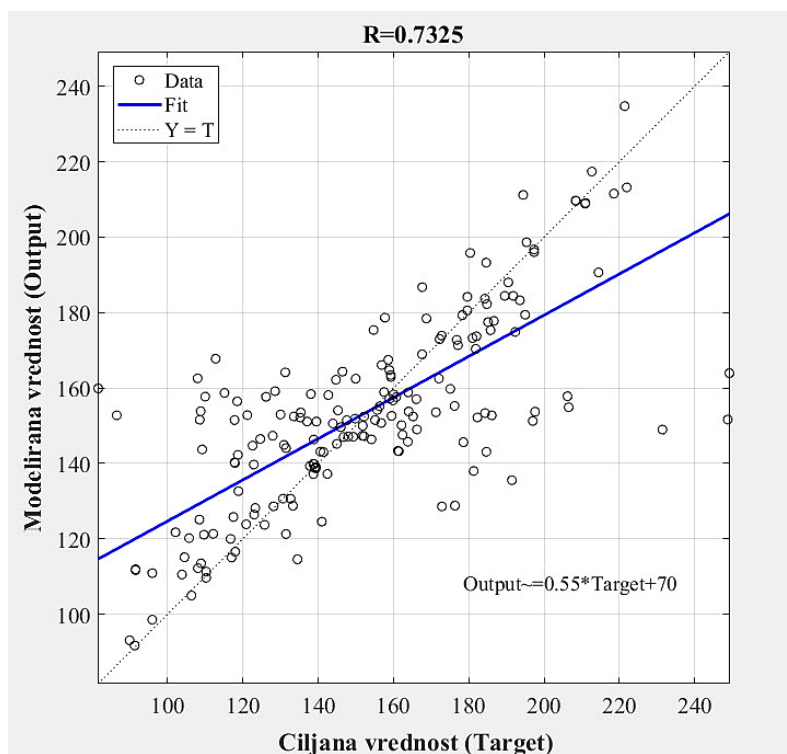
Binarna vrednost (0 ili 1) u tabeli označava da li je određena promenljiva uključena u model ili nije

Analizom tabele (Tabela 11.18) možemo da uočimo da redukcijom skupa ulaznih promenljiva ne dolazi do povećanja tačnosti modela te je potrebno uzeti u obzir sve ulazne promenljive (model 2.) uključujući i promenljivu x_6 .

Dijagrami modeliranih i ciljanih vrednosti utroška rebrastog čelika za optimalni model, kao i regresioni dijagram dati su na Slici 11.84.5 i Slici 11.9.



Slika 11.8 Modelirane i ciljane vrednosti utroška rebrastog čelika po m³ ugrađenog betona za optimalni model sa ARD matern 3/2 funkcijom kovarijanse



Slika 11.9 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti kod predviđanja utroška rebrastog čelika po m³ ugrađenog betona za optimalni model sa ARD matern 3/2 funkcijom kovarijanse

12. ZAKLJUČAK I PRAVCI DALJIH ISTRAŽIVANJA

U ovom poglavlju dat je zaključak, kao i osnovne smernice za dalja istraživanja.

12.1 ZAKLJUČAK

Za donošenje odluke o pristupanju izgradnji armirano betonskog drumskog mosta potrebno je u pripremnoj fazi investicionog projekta izvršiti ranu tehno-ekonomsku analizu koja obavezno sadrži i planirane troškove izgradnje. U okviru disertacije je razvijen, analiziran i verifikovan veći broj prediktivnih modela za ranu procenu troškova građenja drumskih armirano–betonskih mostova kao i modela za procenu utroška ključnih materijala za njihovu izgradnju baziranih na metodama veštačke inteligencije. Kao osnova za formiranje modela za procenu formirana je baza podataka o troškovima izgradnje zajedno sa njihovim projektnim karakteristikama za 181 armirano-betonski drumski most.

Analizom predmera i predračuna za navedene mostove za koji je postojala ugovorna dokumentacija došlo se do procentualnog učešća troškova pojedinih vrsta radova u odnosu na ukupne troškove. Analiza je ukazala da su troškovno najznačajni betonski radovi i radovi od metala i da ove dve grupe radova čine prosečno 77,41% od ukupnih troškova izgradnje. Betonski radovi predstavljaju troškovno najznačajniju grupu radova čije je prosečno procentualno učešće u ukupnim troškovima izgradnje 42,45%. Radovi od metala predstavljaju drugu troškovno najznačajniju grupu radova čije prosečno učešće u ukupnim troškovima izgradnje na bazi analizirane ugovorne dokumentacije iznosi 34,96%. Ostale grupe radova imaju znatno manje učešće u ukupnim troškovima.

U prvoj fazi istraživanja analizirani su modeli za procenu koštanja izgradnje mosta pri čemu su svi troškovi izraženi po m² površine mosta. Analizirana je zavisnost troškova gradnje koja predstavlja zavisnu promenljivu od sledećih promenljivih: srednja vrednost raspona, ukupna dužina mosta, širina mosta, prosečna visina stubova, način fundiranja. Troškovi betonskih radova i radova od metala su direktna posledica vrednosti koje imaju ove promenljive. Zbog uticaja koji imaju troškovi oplata uzeta je promenljiva način gradnje kojom je uzeto u obzir to da li se mostovi liju

u oplati ili se koristi polumontažni način gradnje. Kako bi se svi projekti analizirali u odnosu na isti vremenski presek, uzete su u obzir bruto zarade, indeks cene agregata i indeks cene čelika i unete kao promenljive u model.

Analizirani su različiti modeli zasnovani na tehnikama mašinskog učenja koje se mogu primeniti na razmatrani problem i to:

- Modeli zasnovani na veštačkim neuronskim mrežama,
- Modeli zasnovani na stablima odlučivanja,
- Modeli zasnovani na metodi potpornih vektora,
- Modeli zasnovani na Gausovom procesu.

Svi modeli su trenirani i testirani u jednakim uslovima korišćenjem unakrsne validacije. U disertaciji je za ocenu tačnosti modela korišćen koren srednje kvadratne greške (RMSE), srednja apsolutna greška (MAE), Pirsonov linearni koeficijent korelacije (R) i srednja apsolutna procentualna greška (MAPE).

Primena pojedinačnih modela neuronskih mreža sa regularizacijom ili bez regularizacije, dala je modele koji su imali nezadovoljavajuću tačnost u pogledu svih kriterijuma. Iz tog razloga razmotrena je upotreba ansambala neuronskih mreža. Definisano je ograničenje u pogledu maksimalnog broja neurona skrivenog sloja, dok je broj neurona ulaznog i izlaznog sloja definisan brojem ulaza i izlaza. Razmotrane su dve grupe ansambala koji su formirani od baznih modela sa i bez regularizacije. Analiza je pokazala da se primenom ansambala dobijaju modeli zadovoljavajuće tačnosti, pri čemu se kao najbolji pokazao model bez regularizacije čije su vrednosti kriterijuma sledeće: RMSE=96,4508; MAE=71,7105; R=0,8771; MAPE=13,0412.

Primenom stabala odlučivanja analizirane su metode Bagging, Random Forests i Boosting metoda. Za svaku od metoda definisani su hiperparametri i dat je postupak za njihovu optimizaciju. U poređnom analizom svih modela zasnovanim na stablima odlučivanja, model dobijen primenom metode Boosted Trees imao je najbolje kriterijumske pokazatelje u pogledu svih definisanih kriterijuma pri čemu su dobijene sledeće vrednosti: RMSE=96,0318; MAE=67,1548; R=0,8897; MAPE=11,8718. Modeli zasnovani na metodama Bagging i Random Forests pokazali su slične,

ali značajno lošije vrednosi u pogledu tačnosti, pri čemu je model kod Bagging metode imao nešto veću tačnost.

Primenom SVM metode koja je prilagođena za probleme regresije analizirana je upotreba kernela koji se preporučuju za rešavanje analiziranog problema i to: linearnog, RBF i sigmoidnog kernela. Usporedna analiza različitih SVR modela je pokazala da modeli u zavisnosti od kernel funkcije imaju različitu tačnost po usvojenim kriterijumima. Definisana je postupak za optimizaciju parametara. Optimizacija parametara kroz fazu grube i detaljne pretrage korišćenjem grid search postupka vrlo brzo je rezultirala optimalnim rešenjem. Istraživanje je pokazalo da model sa RBF kernel funkcijom ima značajno veću tačnost u pogledu svih kriterijumskih funkcija pri čemu su dobijene sledeće vrednosti: RMSE=109,3198; MAE=68,2496; R=0,8591; MAPE=0,1203. Analiza je pokazala da RBF kernel predstavlja prvu preporuku kod SVM metode kod rešavanja ovog i sličnih regresionih problema.

U radu je analizirana i primena Gausovog procesa na razmatrani problem prognoze koštanja izgradnje mostova. U tom smislu razmatrana je upotreba različiti funkcija kovarijanse odnosno kernel funkcija. U postupku određivanja parametara funkcija kovarijanse primenjen je postupak maksimizacije log marginalne verovatnoće. Funkcije kovarijanse koje primenjuju različite parametre razmere rastojanja za ulazne promenljive (ARD funkcije kovarijanse) pokazale su superiornost u odnosu na funkcije kovarijanse sa jednim parametrom rastojanja. Istraživanje je pokazalo da je primena ARD eksponencijalne funkcije kovarijanse najbolji izbor za razmatrani problem. Primenom ARD eksponencijalne funkcije kovarijanse postignuta je tačnost RMSE=95,5768; MAE=63,2487; R=0,8928; MAPE=11,6015 što predstavlja najbolji rezultat u pogledu tačnosti svih analiziranih modela. Sagledavanjem relevantnosti pojedinih ulaznih promenljiva, a što nam omogućava primena ARD funkcije kovarijanse je u narednom koraku formiran model sa redukovanim skupom ulaznih promenljiva. Eliminisanjen načina gradnje i bruto zarade radnika dobijen je jednostavniji model veće tačnosti čije su vrednosti kriterijumskih funkcija RMSE=92,5128; MAE=59,5922; R=0,8999; MAPE=10,8627.

Sa obzirom na generalno bolje rezultate koji je ostvario model zasnovan na Gausovom procesu razmotrena je primena istog modela u proceni utroška ukupne količine betona kod gradnje mostova, procene količine visokovrednog čelika i procene količine rebrastog čelika.

Kao ulazne promenljive odnosno prediktori kod procene ukupne količine betona razmatrane su promenljive: srednja vrednost raspona, dužina mosta, širina mosta, način gradnje, prosečna visina stubova, način fundiranja. Analiza je pokazala da primena ARD eksponencijalne funkcije daje najveću tačnost modela. Postignute su sledeće vrednosti u pogledu kriterijuma tačnosti kod optimalnog modela. RMSE=325,7768; MAE=159,2796; R=0,9899; MAPE=11,6461. Vrednosti postignutog koeficijenta korelacije od 98,99% i srednje apsolutne procentualne greške od 11,64% govore u prilog da je postignuto zadovoljavajuće rešenje. Eliminacijom promenljive koja definiše način gradnje dobio se jednostavniji model približno iste tačnosti.

Kod procene utroška visokovrednog čelika razmatrane su promenljive: maksimalni raspon, srednja vrednost raspona, dužina mosta, širina mosta. Najbolje kriterijumske pokazatelje imao je model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse sa sledećim vrednostima kriterijuma RMSE=2,3800; MAE=1,3302; R=0,8870; MAPE=8,1541. Ostvarena tačnost modela se može smatrati zadovoljavajućom. Daljom analizom relevantnosti pojedinih promenljiva isključene su promenljive manje relevantnosti, tako de je uzimanjem u obzir srednje vrednosti raspona mosta i ukupne dužine mosta dobijen model sledeće tačnosti RMSE=2,1676; MAE=1,0993; R=0,9096; MAPE=6,5537.

Kod procene utroška rebrastog čelika po m³ betona kao ulazne promenljive razmatrane su sledeće promenljive: srednja vrednost raspona, dužina mosta, širina mosta, prosečna visina stubova, način fundiranja, tip mosta. Primena ARD matern 3/2 funkcije kovarijanse je dala model sa nešto boljim pokazateljima opšte tačnosti modela sa sledećim vrednostima kriterijuma RMSE=23,2952; MAE=15,2053; R=0,7325; MAPE=10,6070. ARD ekponencijalna funkcija kovarijanse je i u ovom slučaju ostvarila gotovo iste kriterijumske pokazatelje čije su vrednosti RMSE=22,7903; MAE=15,3834; R=0,7472; MAPE=10,9333 , međutim, data je prednost ARD eksponencijalnoj funkciji iz razloga nešto boljih vrednosti u pogledu vrednosti opštih pokazatelja MAE i MAPE.

Model zasnovan na metodi Gausovih procesa pokazao je najveću tačnost procene. Istraživanje je ukazalo da primena ARD funkcija kovarijanse daje modele najveće tačnosti. Zbog toga je preporuka korišćenje ARD eksponencijalne funkcije kovarijanse prilikom formiranja modela za procenu troškova. Predloženi model omogućava rangiranje uticaja pojedinih promenljivih na tačnost modela. Pokazano je da se eliminacijom promenljivih manjeg značaja i upotrebom suženog skupa promenljivih dobija model veće tačnosti. Takođe, na ovaj način umanjena je kompleksnost modela i ubrzan proces obuke modela.

Tačnost modela kod procene ugovorenih troškova izgradnje izražena preko srednje apsolutne procentualne greške iznosi 10,86%, a kod modela za procenu utroška ključnih materijala za izgradnju postignuta je tačnost modela čija je gornja granica 11,64%.

Na bazi predloženog modela u programu MATLAB je razvijen softver s korisničkim interfejsom za unos osnovnih promenljivih, gde se nakon unosa gotovo trenutno dobijaju procenjeni troškovi građenja odnosno količine ključnih materijala.

Osnovna hipoteza, da je u ranim fazama razvoja projekta (kada su poznate samo osnovne karakteristike budućih armirano-betonskih drumskih mostova), moguća brza i dovoljno precizna procena troškova njihove izgradnje metodama baziranim na veštačkoj inteligenciji, je ovim istraživanjem potvrđena.

Na osnovu svega izloženog predložena metoda za ranu procenu troškova može se i u praksi uspešno iskoristiti kao podrška u upravljanju investicionim projektima izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova.

12.2 Pravci daljih istraživanja

Pravci daljih istraživanja moraju da budu usmereni na proširenje postojeće baze naknadno pribavljenim podacima vezanim za izgradnju drugih armirano-betonskih dumskih mostova. Dalje unapređenje modela bi se moglo postići i prikupljanjem podataka o ostvarenim troškovima izgradnje mostova iz konačnih obračuna.

U disertaciji je problem postavljen kao problem predikcije kontinualne promenljive, odnosno problem regresije. U budućnosti se ovaj problem može postaviti i kao klasifikacioni problem na taj način što bi koštanje izgradnje mostova u zavisnosti od iznosa dodelili određenom broju klasa, a zatim bi se primenili algoritmi i tehnike mašinskog učenja za probleme klasifikacije. Nakon toga bi se mogla napraviti komparacija tačnosti tih modela sa regresionim modelima prezentovanim u radu.

Implementacija modela bi mogla da bude istražena i za druga tržišta za koja postoji mogućnost formiranja odgovarajuće baza podataka. Primenjena metodologija u istraživanju bi se uz određena prilagođavanja mogla primeniti i na procenu troškova drugih faza u životnom ciklusu projekta, a takođe i na druge vrste građevinskih objekata.

Značajnijim proširenjem baze podataka za izgradnju modela može se istražiti primena metoda nenadgledanog učenja, gde bi se podaci grupisali u određeni broj klastera, a zatim za svaki od klastera formirali pojedinačni regresioni modeli umesto jednog integralnog modela.

Primena hibridnih modela ansambala koji bi bili istovremeno sastavljeni od modela neuronskih mreža, regresionih stabala, modela saznovanih na metodi potpornih vektora itd. bi takođe mogla biti istražena u narednim istraživanjima.

LITERATURA

- [1] M. Pržulj, Mostovi, Beograd: Izgradnja, 2014.
- [2] G. Locatelli, M. Mikić, M. Kovačević, N. Brookes, N. Ivanišević: "The Successful Delivery of Megaprojects: A Novel Research Method", *Project Management Journal*, Vol. 48, No. 5, pp. 78-94, 2017.
- [3] F. Antoniou, D. Konsantinidis, G. Aretoulis: "Analytical formulation for early cost estimation and material consumption of road overpass bridges", *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Tehnology*, Vol. 12, Issue. 7, pp. 716-725, 2016.
- [4] N. Ivanišević, D. Arizanović, P. Petronijević, M. Miljan: "Aktuelna strategija realizacije izgradnje autoputeva u Republici Srbiji", *14 KONGRES DRUŠTVA GRAĐEVINSKIH KONSTRUKTERA SRBIJE 2014*, Novi Sad, 2014.
- [5] N. Ivanišević, D. Arizanović, P. Petronijević: "Aktuelno stanje realizacije izgradnje autoputeva u Republici Srbiji", *VI internacionalni naučno-stručni skup GRAĐEVINARSTVO - NAUKA I PRAKSA*, Žabljak, Crna Gora, 2016.
- [6] B. Ivković, Ž. Popović: Upravljanje projektima u građevinarstvu, Beograd: Građevinska knjiga, 2005.
- [7] B. Flyvbjerg, H. Skamris, S. Buhl: "Underestimating Costs in Public Works Projects: Error or Lie?", *Journal of the American Planning Association*, Vol. 68, No. 3, pp. 279-295, 2002.
- [8] M. Mikić, J. Ćirilović, N. Vajdić, N. Ivanišević: "Motorway Horgoš - Novi Sad (second phase) Serbia", *Funding and Financing Transport Infrastructure - Business model to Enhance and Enable Financing of Infrastructure in Transport*, London, New York, Taylor and Francis Group, 2018.
- [9] N. Ivanišević, M. Mikić, Z. Petojević: "Critical risks in serbian infrastructure projects", *11th International Conference "Organization, Technology and Management in Construction"*, Dubrovnik, Croatia, 2013.

- [10] P. S. Brandon / (Editor), *Quantity Surveying Techniques-New Directions*, BlackwellScientific Publications, 1992.
- [11] F. Rosenblatt: *Principles of neurodynamics*, Spartan Books, 1962.
- [12] G. V. Kass: "Exploratory technique for investigating large quantities of categorical data", *Applied Statistics*, 1980.
- [13] R. Quinlan: "Induction of decision trees", *Machine Learning*, pp. 81-106, 1986.
- [14] L. Breiman, H. Friedman, R. Olsen, C. J. Stone: *Classification and Regression Trees*, Wadsworth, 1984.
- [15] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, R. J. Williams: *Back Propagation: Theory, Architectures and Applications*, Hillsdale, 1995.
- [16] L. Breiman: "Bagging predictors", *Machine Learning*, Vol. 24, No. 2, pp. 123-140, 1996.
- [17] V. N. Vapnik, V. Vapnik: *Statistical learning theory*, New York: Wiley, 1998.
- [18] V. Kecman: *Learning and Soft Computing: Support Vector Machines, Neural Networks, and Fuzzy Logic Models*, MIT Press, 2001.
- [19] A. J. Smola, B. Sholkopf: "A tutorial on support vector regression", *NeuroCOLT Technical Report TR-98-030*, 2003.
- [20] L. Breiman, Statistics Dept., University California, 2001. [Na mreži]. Available: <https://www.stat.berkeley.edu/~breiman/randomforest2001.pdf>. [Poslednji pristup februar 2018].
- [21] C. E. Rasmussen, C. K. Williams: *Gaussian Processes for Machine Learning*, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2006.
- [22] H. Adeli, C. Yeh: "Perceptron learning in engineering design", *Microcomputers in Civil Engineering*, Vol. 4, Issue 4, pp. 247-256, 1989.
- [23] T. Elhag, A. Boussabaine: "An artificial neural system for cost estimation of construction projects", *14th Annual ARCOM Conference, University of Reading, Association of Researchers in Construction Management*, Vol. 1, pp. 219-226, 1998.

- [24] T. Hegazy, A. Ayed: "Neural Network Model for Parametric Cost Estimation of Highway Projects", *Journal of Construction Engineering and Management*, Vol. 124, Issue 3 , pp. 210-218, 1998.
- [25] I. C. Yeh: "Modeling of strength of high-performance concrete using artificial neural networks", *Cement and Concrete Research*, Vol. 28, Issue 12, pp. 1797-1808, 1998.
- [26] G. Marcous, M. M. Bakhoun, M. A. Taha, M. El-Said: "Preliminary quantity estimate of highway bridges using neural networks", *Proceedings of the Sixth International Conference on the Application of Artificial Intelligence to Civil and Structural engineering*, Stirling, Scotland, 2001.
- [27] M. Attalla, T. Hegazy: "Predicting Cost Deviation in Reconstruction Projects: Artificial Neural Networks versus Regression", *Journal of Construction Engineering and Management*, Vol. 129, No. 4, pp. 405-411, 2003.
- [28] E. M. Mostafa: "Cost analysis for bridge and culvert", *Seventh International Water Technology Conference IWTC7*, Cairo, 2003.
- [29] G.H. Kim, S.H. An, K.I. Kang: "Comparison of construction cost estimating models based on regression analysis, neural networks, and case-based reasoning", *Building and Environment*, Vol. 39, Issue. 10, pp. 1235-1242, 2004.
- [30] P. Love, R. Tse, D. J. Edwards: "Time–Cost Relationships in Australian Building Construction Projects", *Journal of Construction Engineering and Management*, Vol. 131, Issue. 2, pp. 187-194, 2005.
- [31] M.Y. Cheng, Y.W. Wu, „Construction Conceptual Cost Estimates Using Support Vector Machine", *22nd International Symposium on Automation and Robotics in Construction ISARC 2005*, Ferrara, Italy, 2005.
- [32] J. Sodikov: "Cost estimation of highway projects in developing countries: Artificial neural network approach", *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, Vol. 6, pp. 1036 - 1047, 2005.
- [33] D. J. Lowe, M. W. Emsley, A. Harding: "Predicting Construction Cost Using Multiple Regression Techniques", *Journal of Construction Engineering and Management*, Vol. 132, No. 7, pp. 750-758, 2006.

- [34] F. Gang-Zhi, E. O. Seow, C. K. Hian: "Determinants of House Price: A Decision Tree Approach", *Urban Studies*, Vol. 43, No. 12, pp. 2301-2315, 2006.
- [35] N. García, M. Gamez, E. Alfaro: "ANN+GIS: An automated system for property valuation", *Neurocomputing*, Vol.71, Issues 4–6, pp. 733-742, 2008.
- [36] M. Knežević, R. Zejak: "Neuronske mreže - primjena za izradu prognoznog modela eksperimentalnog istraživanja za vitke armirano-betonske stubove", *Materijali i konstrukcije*, Vol. 51, br. 1, pp. 41-56, 2008.
- [37] R. C. Williams, J. C. Hildreth, M. C. Vorster: "Highway Construction Data Collection and Treatment in Preparation for Statistical Regression Analysis", *Journal of Construction Engineering and Management*, Vol. 135, No. 12, pp. 1299-1306, 2009.
- [38] H. Selim: "Determinants of house prices in Turkey: Hedonic regression versus artificial neural network", *Expert Systems with Applications*, Vol. 36, No. 2, pp. 2843-2852, 2009.
- [39] N. Fragkakis, S. Lambropoulos, J.P. Pantouvakis: "A cost estimate method for bridge superstructures using regression analysis and bootstrap", *Organization, technology and management in construction - an international journal*, Vol. 2, No. 2, pp. 182-190, 2010.
- [40] M.Y. Cheng, A. F. Roy: "Evolutionary fuzzy decision model for construction management using support vector machine", *Expert Systems with Applications*, Vol. 37, No. 8, pp. 6061-6069, 2010.
- [41] N. Fragkakis, S. Lambropoulos, J.-P. Pantouvakis: "A computer-aided conceptual cost estimating system for prestressed concrete road bridges", *PM-05 - Advancing Project Management for the 21st Century, "Concepts, Tools & Techniques for Managing Successful Projects"*, Heraklion, Crete, Greece, 2010.
- [42] K. Y. Kim, K. Kim: "Preliminary Cost Estimation Model Using Case-Based Reasoning and Genetic Algorithms", *Journal of Computing in Civil Engineering*, Vol. 24, Issue. 6, pp. 499-505, 2010.
- [43] V. Kontrimas, A. Verikas: "The mass appraisal of the real estate by computational intelligence", *Applied Soft Computing*, Vol. 11, Issue. 1, pp. 443-448, 2011.

- [44] M. Arafa, M. Alqedra: "Early Stage Cost Estimation of Buildings Construction Projects using Artificial Neural Networks", *Journal of Artificial Intelligence*, Vol. 4, Issue. 1, pp. 63-75, 2011.
- [45] N. Fragkakis, S. Lambropoulos, G. Tsiambaos: "Parametric Model for Conceptual Cost Estimation of Concrete Bridge Foundations", *Journal of Infrastructure Systems*, Vol. 17, Issue. 2, pp. 66-74, 2011.
- [46] V. Mučenski, I. Peško, M. Trivunić, J. Dražić, G. Čirović: "Optimizacija neuronske mreže za procenu potrebnih količina betona i armature u višespratnim objektima", *Građevinski materijali i konstrukcije*, Vol. 55, Br. 2, pp. 27-46, 2012.
- [47] M. Lazarevska, M. Knežević, M. Cvetkovska, N. Ivanišević, T. Samardžioska, A. Trombeva-Gavrilovska: "Prognostički model za određivanje požarne otpornosti AB stubova", *Građevinar*, Vol. 64, Issue. 7, pp. 565-571, 2012.
- [48] A. Tsanas, A. Xifara: "Accurate quantitative estimation of energy performance of residential buildings using statistical machine learning tools", *Energy and Buildings*, Vol. 49, pp. 560-567, 2012.
- [49] P. Igor: *Model za procenu troškova i vremena izgradnje gradskih saobraćajnica*, Doktorska disertacija, Novi Sad: Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, 2013.
- [50] I. Mohamid: "Conceptual Cost Estimate of Road Construction Projects in Saudi Arabia", *Jordan Journal of Civil Engineering*, Vol. 7, No. 3, pp. 285-294, 2013.
- [51] J. Cirilovic, N. Vajdić, G. Mladenović, C. Queiroz: "Developing Cost Estimation Models for Road Rehabilitation and Reconstruction: Case Study of Projects in Europe and Central Asia", *Journal of Construction Engineering and Management*, Vol. 140, Issue. 3, 2013.
- [52] D. A. Hollar, W. Rasdorf, M. Liu, J. E. Hummer, I. M. Arocho: "Preliminary Engineering Cost Estimation Model for Bridge Projects", *Journal of Construction Engineering and Management*, Vol. 139, Issue. 9, pp. 1259-1267, 2013.
- [53] S. Choi, D. Y. Kim, S. H. Han, Y. H. Kwak: "Conceptual Cost-Prediction Model for Public Road Planning via Rough Set Theory and Case-Based Reasoning", *Journal of Construction Engineering and Management*, Vol. 140, Issue. 1, 2013.

- [54] C. Yuan, L.N. Wang, X. Ji: "Prediction of concrete compressive strength: Research on hybrid models genetic based algorithms and ANFIS", *Advances in Engineering Software*, Vol. 67, pp. 156-163, 2014.
- [55] A. O. Elfaki, S. Alatawi, E. Abushandi: "Using Intelligent Techniques in Construction Project Cost Estimation: 10-Year Survey", *Advances in Civil Engineering*, Vol. 2014, 2014..
- [56] N. Praščević, Ž. Praščević: "Application of particle swarms for project time-cost optimization", *Građevinar*, Vol. 66, No. 12, pp. 1097-1107, 2014.
- [57] J.S. Chou, C.W. Lin, A.D. Pham, J.Y. Shao: "Optimized artificial intelligence models for predicting project award price", *Automation in Construction*, Vol. 54, pp. 106-115, 2015.
- [58] N. Fragakakis, M. Marinelli, S. Lambropoulos: "Preliminary Cost Estimate Model for Culverts", *Procedia Engineering*, Vol. 123, pp. 153-161, 2015.
- [59] M. Marinelli, L. Dimitriou, N. Fragakakis, S. Lambropoulos: "Non-parametric bill of quantities estimation of concrete road bridges superstructure: an artificial neural networks approach", *Proceedings 31st Annual ARCOM Conference*, Lincoln, United Kingdom, 2015.
- [60] D. M. Carty, T. M. Young, R. L. Zaretski, F. M. Guess, A. Petutschnigg: "Predicting and correlating the strength properties of wood composite process parameters by use of boosted regression tree models", *Forest Products journal*, Vol. 65, No 7/8, pp. 365-371, 2015.
- [61] Y. Shin: "Application of boosting regression trees to preliminary cost estimation in building construction projects", *Computational Intelligence and Neuroscience*, Vol. 2015, 2015.
- [62] B. Park, J. K. Bae: "Using machine learning algorithms for housing price prediction: The case of Fairfax County, Virginia housing data", *Expert Systems with Applications*, Vol. 42, pp. 2928-2934, 2015.
- [63] F. Antoniou, D. Konstantinitis, G. Aretoulis: "Cost analysis and material consumption of highway bridge underpasses", *Eighth International Conference on Construction in the 21st Century (CITC-8)*, "Changing the Field: Recent Developments for the Future of Engineering and Construction", Thessaloniki, Greece, 2015.

- [64] G. Mistikoglu, I. H. Gerek, E. Erdis, M. Usmen, H. Cakan: "Decision tree analysis of construction fall accidents involving roofers", *Expert Systems with Applications*, Vol. 42, pp. 2256-2263, 2015.
- [65] N. B. Siraj, A. R. Fayek, A. A. Tsehayae: "Development and optimization of artificial intelligence-based concrete compressive strength predictive models", *International Journal of Structural and Civil Engineering Research*, Vol. 5, No. 3, pp. 156-167, 2016.
- [66] N.D. Hoang, A.D. Pham, Q.L. Nguyen, Q.T. Pham: "Estimating compressive strength of high performance concrete with Gaussian process regression model", *Advances in Civil Engineering*, Vol. 2016, 2016.
- [67] M. W. Ahmad, M. Mourshed, Y. Rezgui: "Tree vs neurons: Comparison between random forest and ANN for high-resolution prediction of building energy consumption", *Energy and Buildings*, Vol. 147, pp. 77-89, 2017.
- [68] A. Torres-Barran, A. Alonso, J. R. Dorronsoro: "Regression tree ensembles for wind energy and solar radiation prediction", *Neurocomputing*, Vol. 2017, pp. 1-10, 2017.
- [69] L. Dimitriou, M. Marinelli: "Early bill-of-quantities estimation of concrete road bridges- An artificial intelligence-based application", *Public Work Management and Policy*, Vol. 23, No. 2, pp. 127-149, 2018.
- [70] <https://www.peri.rs>, [Na mreži]. Available: <https://www.peri.rs>.
- [71] C. Menn: *Prestressed concrete bridges*, Basel-Boston-Berlin, Birkhauser Verlag, 1990.
- [72] Republika Srbija, Republički zavod za statistiku, [Na mreži]. Available: <http://www.stat.gov.rs/>. [Poslednji pristup jul 2017].
- [73] IMS, "Sertifikat sistema kvaliteta broj 170101, SPB SUPER Sistem za prenaprezanje", IMS, Centar za prenaprezanje, Beograd, 1999.
- [74] P. Matić: *Kratkoročno predviđanje hidrološkog dotoka pomoću umjetne neuronske mreže, doktorska disertacija*, Split: Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, 2014.
- [75] D. R. Legate, J. J. McCabe: "Evaluating the use of "goodness-of-fit" measures in hydrologic and hydroclimatic model validation", *Water Resources Research*, Vol. 35, No. 1, pp. 233-241, 1999.

- [76] M. Kovačević, N. Ivanišević, T. Dašić, Lj. Marković: "Application of artificial neural networks", *Gradjevinar*, Vol. 1, pp. 1-10, 2018.
- [77] Z. Miljković: *Sistemi veštačkih neuronskih mreža u proizvodnim tehnologijama*, Beograd: Mašinski fakultet Beograd, 2003.
- [78] N. Forbes: *Imitation of life, How biology is inspiring computing*, MIT Press, 2004.
- [79] S. S. Haykin: *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Prentice Hall, 2009.
- [80] M. H. Beale, M. T. Hagan, H. B. Demuth: *Neural network toolbox*, The Mathworks, Inc, 2010.
- [81] B. D. Ripley: *Statistical aspects of neural networks*. In: Barndoff-Neilsen OE, Jensen JL, Kendall WS, editors. *Networks and chaos-statistical and probabilistic aspects*, London: Chapman & Hall, 1993.
- [82] I. Kaastra, M. Boyd: "Designing a neural network for forecasting", *Neurocomputing*, Vol.10, br. Issue 3, pp. 215-236, 1996.
- [83] I. Kanellopoulas, G. G. Wilkinson: "Strategies and best practice for neural network image classification", *Int J Remote Sensing*, Vol. 18, pp. 711-725, 1997.
- [84] J. Heaton: *Introduction to Neural Networks for C#*, Second Edition, Publisher: Heaton Research, Inc, 2008.
- [85] K. G. Sheela, S. N. Deepa: "Review on methods to fix number of hidden neurons in neural networks", *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2013, 2013.
- [86] G. B. Kingston: *Bayesian Artificial Neural Networks in Water Resources Engineering, doctoral dissertation*, University of Adelaide, Australia: School of Civil and Environmental Engineering, Faculty of Engineering, 2006.
- [87] H. R. Maier, G. C. Dandy: "Neural networks: a review of modelling issues and applications", *Environmental Modelling & Software*, Vol. 15, pp. 101-124, 2000.
- [88] T. M. Mitchel: *Machine Learning*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1997.
- [89] M. T. Hagan, M. B. Menhaj: "Training Feedforward Networks with Marquardt Algorithm", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 5, No. 6, pp. 989-993, 1994.

- [90] D. S. Oliver, A. C. Reynolds, N. Liu: Inverse theory for petroleum reservoir characterization and history matching, Cambridge University Press, 2008.
- [91] A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin: Solution of Ill-posed Problems, Washington: Winston & Sons, 1977.
- [92] A. N. Tikhonov , A. V. Goncharsky , V. V. Stepanov, A. G. Yagola: Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [93] A. N. Tikhonov , A. S. Leonov, A. G. Yagola: Nonlinear Ill-Posed Problems, Chapman and Hall, 1998.
- [94] M. T. Hagan, H. B. Demuth, M. H. Beale, O. De Jesus: Neural network design, Martin T. Hagan, 2014.
- [95] D. J. MacKay: "Bayesian interpolation", *Neural computation*, Vol. 4, Issue 3, p. 415–447., 1992.
- [96] D. J. MacKay: "A practical Bayesian framework for backpropagation networks", *Neural Computation*, Vol. 4, No. 3, pp. 448-472, 1992.
- [97] T. Hastie, R. Tibsirani , J. Friedman: The Elements of Statistical Learning, Springer, 2009.
- [98] P. E. Black: Dictionary of Algorithms and Data Structures, U.S. National Institute of Standards and Technology (NIST), 2012.
- [99] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein: Introduction to Algorithms, London: The MIT Press, 2009.
- [100] L. Breiman: "Random Forests", *Machine Learning*, Vol. 45, pp. 5-32, 2001.
- [101] Y. Freund, R. E. Schapire: "A Decision-Theoretic Generalization of On-Line Learning and an Application to Boosting:", *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 55, Issue 1, pp. 119-139, 1997.
- [102] G. James, D. Witten , T. Hastie, R. Tibshirani: An Introduction to Statistical Learning, New York, Springer, 2013.
- [103] V. N. Vapnik, S. Golowich, A. Smola: "Support vector method for function approximation, regression estimation, and signal processing", *Advances in neural information processing systems*, Cambridge, MA: MIT Pres, 1997.

- [104] V. Vapnik: *The nature of statistical learning theory*, New York: Springer, 1995.
- [105] C. Cortes, V. N. Vapnik: "Support vector networks", *Machine Learning*, Vol. 20, Issue 3, pp. 273-297, 1995.
- [106] A. Ng: Support vector machines CS229 Lecture notes, Stanford University, 2017. [Na mreži]. Available: cs229.stanford.edu/notes/cs229-notes3.pdf. [Poslednji pristup jul 2017].
- [107] J. Platt: "Sequential minimal optimization: A fast algorithm for training support vector machines", MSR-TR-98-14, " 1999.
- [108] C. C. Chang, C. J. Lin: "LIBSVM : a library for support vector machines", *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, Vol. 2, Issue 3, 2011.
- [109] B. Schölkopf, A. Smola, R. Williamson / P. L. Bartlett, „New support vector algorithms,“ *Neural Computation*, t. 12, pp. 1207-1245, 2000.
- [110] B. Schölkopf, J. Platt, , J. Shawe-Taylor, A. J. Smola, R. C. Williamson: "Estimating the support of a high-dimensional distribution", *Neural Computation*, Vol. 13, pp. 1443-1471, 2001.
- [111] LIBSVM, [Na mreži]. Available: <https://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm/>.
- [112] N. de Freitas: *Machine learning - Gaussian processes*, Course taught in 2013 at The University of British Columbia, 2013.
- [113] D. Dereniowski, M. Kubale: "Cholesky Factorization of Matrices in Parallel and Ranking of Graphs", *5th International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics*, 2004.
- [114] M. Osborne, *Bayesian Gaussian Processes for Sequential Prediction, Optimisation and Quadrature*, University of Oxford, 2010.
- [115] B. J. Blight, L. Ott: "A Bayesian approach to model inadequacy for polynomial regression", *Biometrika*, Vol. 62, No. 1, p. 79–88, 1975.
- [116] A. O. Hagan, J. F. C. Kingman: "Curve Fitting and Optimal Design for Prediction", *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Vol. 40, No. 1, pp. 1-42, 1978.
- [117] D. F. Foresee, M. T. Hagan: "Gauss-Newton approximation to Bayesian learning", *Neural Networks, 1997., International Conference on Neural Networks*, Houston, TX, USA, 1997.

- [118] K. Duh: EE596 - Statistical Learning Course , Bagging Neural Nets for Classification,“ Johns Hopkins University, 2004.
- [119] Statistics and Machine Learning Toolbox™ User's Guide, Natick: The MathWorks, Inc., 2017.
- [120] G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani: An Introduction to Statistical Learning, New York: Springer, 2017.
- [121] J. Radić, Z. Šavor, G. Puž: "Tipizacija mostova za autoceste", *Građevinar*, Vol. 52, br. 6, pp. 321-330, 2000.

PRILOZI

PRILOG 1 - SPISAK TABELA I GRAFIČKIH PRILOGA

SPISAK TABELA:

Tabela 5.1 Srednje, minimalne i maksimalne vrednosti promenljiva kod modela za procenu troškova izgradnje mostova	47
Tabela 5.2 Geometrijske i mehaničke karakteristike užadi	48
Tabela 6.1 Preporuke za broj neurona u skrivenom sloju neuronske mreže	61
Tabela 6.2 Algoritam Random Forests metode kod regresionih stabala	83
Tabela 6.3 Opšti algoritam Boosting metode kod regresionih stabala	85
Tabela 7.1 Broj neurona u skrivenom sloju neuronske mreže u razmatranom slučaju	113
Tabela 7.2 Podešavanja parametara kod kalibracije modela u programu MATLAB.....	114
Tabela 7.3 Određivanje broja neurona u skrivenom sloju mreže Bajesovom regularizacijom ..	115
Tabela 7.4. Performanse modela mreže sa Bajesovim algoritmom sa 14 neurona u skrivenom sloju	116
Tabela 7.5 Određivanje broja neurona u skrivenom sloju mreže bez regularizacije (metoda ranog zaustavljanja)	118
Tabela 7.6 Uporedna analiza performansi modela (sa regularizacijom) za ansamble sa 2, 5, 10, 30, 50, 70, 90 i 100 baznih modela kod modela koštanja izgradnje m ² mosta	123
Tabela 7.7 Poredjenje optimalnog pojedinačnog modela neuronske mreže i ansambla (modeli sa regularizacijom) kod modela koštanja izgradnje m ² mosta	125

Tabela 7.8 Vrednosti kriterijuma tačnosti za ansamble sa 2, 10, 30, 50, 70, 90 i 100 baznih modela	128
Tabela 7.9 Poredjenje optimalnog pojedinačnog modela neuronske mreže i ansambla.....	130
Tabela 8.1 Kumulativne vrednosti RMSE, MAE, R i MAPE u zavisnosti od broja stabala (baznih modela) u ansamblu koji ima minimalni broj podataka po listu 3.....	135
Tabela 8.2 Kumulativne vrednosti RMSE, MAE, R i MAPE u zavisnosti od broja stabala (baznih modela) u ansamblu i broja promenljivih po kojima se vrši račvanje kod metode Random Forests	141
Tabela 8.3 Vrednosti kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE optimalnog modela Boosted Trees metode.....	147
Tabela 8.4 Vrednosti kriterijuma RMSE, MAE, R i MAPE modela sa parametrima redukcije čije su vrednosti 0,01 i 0,001, sa maksimalno jednim račvanjem $d=1$, prilikom generisanja 5000 stabala u ansamblu kod Boosted Trees metode	147
Tabela 8.5 Uporedna analiza rezultata kod Bagging, Random Forests i Boosted Trees metode	150
Tabela 9.1 Uticaj parametara modela na vrednost korena srednje kvadratne greške (RMSE) za model sa linearnim kernelom (gruba pretraga parametara)	152
Tabela 9.2 Performanse SVR modela sa linearnim kernelom	154
Tabela 9.3 Uticaj parametara modela na vrednost korena srednje kvadratne greške (RMSE) za model sa RBF kernelom (gruba pretraga za vrednosti parametra γ od 2^{-10} do 2^0 , C od 2^{-10} do 2^{10} i $\varepsilon = 2^{-6}$).....	156
Tabela 9.4 Uticaj parametara modela na vrednost korena srednje kvadratne greške (RMSE) za model sa RBF kernelom (gruba pretraga za vrednosti parametra γ od 2^0 do 2^{10} , C od 2^{-10} do 2^{10} i $\varepsilon = 2^{-6}$).....	157

Tabela 9.5 Performanse SVR modela sa RBF kernelom	157
Tabela 9.6 Uticaj parametara modela na vrednost korena srednje kvadratne greške (RMSE) za model sa sigmoidnim kernelom (gruba pretraga za vrednosti parametra γ od 2^{-10} do 2^0 , C od 2^{-10} do 2^{10} i $\varepsilon = 2^{-3}$)	160
Tabela 9.7 Performanse SVR modela sa sigmoidnim kernelom	160
Tabela 9.8 Uporedne analiza rezultata različitih SVR modela	161
Tabela 10.1 Funkcije kovarijanse koje imaju jedan parametar razmere rastojanja sa sve prediktore	166
Tabela 10.2 Parametri funkcija kovarijanse GP modela za procenu koštanja izgradnje m^2 mosta	166
Tabela 10.3 Performanse GP modela za procenu koštanja izgradnje m^2 mosta sa različitim funkcija kovarijanse	167
Tabela 10.4 Funkcije kovarijanse koje imaju različite parametre razmere rastojanja za prediktore	168
Tabela 10.5 Parametri funkcija kovarijanse GP ARD modela za procenu koštanja izgradnje m^2 mosta	169
Tabela 10.6 Performanse GP ARD modela za procenu koštanja izgradnje m^2 mosta sa različitim funkcijama kovarijanse	169
Tabela 10.7 Uporedna analiza modela koštanja sa različitim skupovima ulaznih promenljiva .	174
Tabela 11.1 Srednje, minimalne i maksimalne vrednosti promenljiva kod modela utroška betona	177

Tabela 11.2 Parametri GP modela sa različitim funkcijama kovarijanse kod predviđanja ukupne količine betona	178
Tabela 11.3 Parametri GP modela sa različitim ARD funkcijama kovarijanse kod predviđanja ukupne količine betona	179
Tabela 11.4 Uporedna analiza modela po različitim kriterijumima tačnosti kod predviđanja ukupne količine betona	179
Tabela 11.5 Uporedna analiza ARD modela po različitim kriterijumima tačnosti kod predviđanja ukupne količine betona	180
Tabela 11.6 Uporedna analiza modela utroška betona sa različitim skupovina ulaznih promenljiva	181
Tabela 11.7 Srednje, minimalne i maksimalne vrednosti promenljiva kod modela za procenu utroška visokovrednog čelika po m ² površine mostova*	184
Tabela 11.8 Parametri GP modela sa različitim funkcijama kovarijanse kod predviđanja utroška visokovrednog čelika	185
Tabela 11.9 Parametri GP modela sa različitim ARD funkcijama kovarijanse kod predviđanja utroška visokovrednog čelika	186
Tabela 11.10 Uporedna analiza modela po različitim kriterijumima tačnosti kod predviđanja utroška visokovrednog čelika	186
Tabela 11.11 Uporedna analiza ARD modela po različitim kriterijumima tačnosti kod predviđanja utroška visokovrednog čelika	187
Tabela 11.12 Uporedna analiza modela utroška visokovrednog čelika po m ² površine mosta sa različitim skupovina ulaznih promenljiva.....	189

Tabela 11.13 Srednje, minimalne i maksimalne vrednosti promenljiva kod modela za procenu utroška rebrastog čelika po m ³ ugrađenog betona	192
Tabela 11.14 Parametri GP modela sa različitim funkcijama kovarijanse kod modela utroška rebrastog čelika po m ³ ugrađenog betona	193
Tabela 11.15 Parametri GP modela sa različitim ARD funkcijama kovarijanse kod modela utroška rebrastog čelika po m ³ ugrađenog betona	194
Tabela 11.16 Uporedna analiza modela po različitim kriterijumima tačnosti kod modela utroška rebrastog čelika po m ³ ugrađenog betona	194
Tabela 11.17 Uporedna analiza ARD modela po različitim kriterijumima tačnosti kod modela utroška rebrastog čelika po m ³ ugrađenog betona	195
Tabela 11.18 Uporedna analiza modela utroška rebrastog čelika po m ³ ugrađenog betona sa različitim skupovima ulaznih promenljiva.....	196

SPISAK SLIKA:

Slika 2.1 Način obezbeđenja informacija neophodnih za procenu troškova	9
Slika 2.2 Odstupanje od procenjenih troškova izraženo u % za mostove i tunele	9
Slika 2.3 Odstupanje od procenjenih troškova izraženo u % za puteve	10
Slika 2.4 Odstupanje od procenjenih troškova izraženo u % za projekte na železnici	10
Slika 2.5 Hronologija tačnosti procene troškova tokom realizacije projekta	11
Slika 2.6 Primer linearnog parametarskog modela sa dve nezavisne promenljive.....	14
Slika 4.1 Krajnji stub sa nazivima pojedinih elemenata	31
Slika 4.2 Srednji stub mosta sa nazivima pojedinih elemenata	32
Slika 4.3 Nazivi na grednoj konstrukciji mosta	33
Slika 4.4 Cevna fiksna skela kod betoniranja nadvožnjaka	35
Slika 4.5 Čelična skela od tipskih nosećih elemenata	35
Slika 4.6 Prenosna čelična skela za izgradnju rasponskih konstrukcija polje po polje	36
Slika 4.7 Pokretna čelična skela.....	37
Slika 4.8 Armiranje i betoniranje poprečnih nosača za uspostavljanje kontinuiteta	37
Slika 4.9 Primena montažne lansirne rešetke kod monaže AB prednapregnutog nosača	38
Slika 4.10 Betoniranje stubova konstantnog preseka sa prenosnom skelom u segmentima 3,0 m	38

Slika 5.1 Trase koridora X i XI u Srbiji.....	40
Slika 5.2 Procentualno učešće betonskih radova u ukupnim troškovima izgradnje	42
Slika 5.3 Procentualno učešće radova od metala u ukupnim troškovima izgradnje.....	42
Slika 5.4 Kretanje prosečne bruto zarade u građevinarstvu	44
Slika 5.5 Bazni indeks cene agregata	45
Slika 5.6 Bazni indeks cene čelika	46
Slika 5.7 Postupak formiranja modela za prognozu. Adaptirano	49
Slika 5.8 Postupak desetostruke unakrsne validacije	50
Slika 6.1 Struktura nervne ćelije.....	56
Slika 6.2 Nelinearni model neurona	57
Slika 6.3 Aktivacijske funkcije: (a) linearna, (b) ograničena linearna, (c) unipolarna sigmoidalna, (d) bipolarna sigmoidalna	59
Slika 6.4 Potpuno povezana troslojna mreža sa prostiranjem signala unapred	59
Slika 6.5 Rekurentna mreža tipa NARX. Neuron izlaznog sloja povezan je povratnom vezom sa određenim neuronima u ulaznom sloju.....	60
Slika 6.6 Višeslojni perceptron.....	60
Slika 6.7 Grafik prenosa signala za izlaz neurona j	64
Slika 6.8 Efekat količnika α/β kod regularizacije neuronske mreže	70
Slika 6.9 Segmentiranje prostora ulaza	76

Slika 6.10 Segmentacija prostora na oblasti (regione) i 3D regresiona površ kod regresionog stabla [92].....	77
Slika 6.11 Primena Bagging metode kod regresionih stabala.....	80
Slika 6.12 Formiranje predikcionog modela metodom Random Forests	82
Slika 6.13 Primena Gradient Boosting metode.....	84
Slika 6.14 Različite funkcije greške kod SVR algoritma: a) Absolutna greška (L1 norm), b) Kvadratna (L2 norm) i Huberova greška (isprekidano), c) Vapnikova linearna funkcija greške sa ε –zonom neosetljivosti	89
Slika 6.15 Primena metode potpornih vektora (SVR) kod linearne regresije.....	90
Slika 6.16 Uticaj parametra C na svojstva modela kod metode potpornih vektora.....	91
Slika 6.17 Primena metode potpornih vektora kod nelinearne regresije	95
Slika 6.18 Formiranje modela metodom potpornih vektora kod nelinearne regresije.....	97
Slika 6.19 Arhitektura za treniranje regresionog modela pomoću metode potpornih vektora	98
Slika 6.20 Generisanje funkcije korišćenjem GP priora	105
Slika 6.21 Podaci generisani Gausovim procesom sa hiperparametrima $l, \sigma f, \sigma n$	109
Slika 7.1 Analiziran model neuronske mreže	112
Slika 7.2 Metoda ranog zaustavljanja	117
Slika 7.3 Ansambl neuronskih mreža formiran Bootstrap Aggregating (Bagging) pristupom	121
Slika 7.4 Zavisnost vrednosti RMSE i MAE od broja baznih modela (korišćena regularizacija) u okviru ansambla	122

Slika 7.5 Zavisnost vrednosti R i MAPE od broja baznih modela (korišćena regularizacija) u okviru ansambla.....	122
Slika 7.6 Optimalan broj neurona u skrivenom (modeli sa regularizacijom) sloju u svakoj iteraciji.	124
Slika 7.7 Predikcija pojedinačnih neuronskih mreža, predikcija ansambla, stvarne (ciljane) vrednosti koštanja izražena u evro/m ² . Bazni modeli sa regularizacijom.	125
Slika 7.8 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova za model ansambla sa regularizacijom	126
Slika 7.9 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova za model ansambla sa regularizacijom.....	126
Slika 7.10 Zavisnost vrednosti RMSE i MAE od broja baznih modela (sa metodom ranog zaustavljanja) u okviru ansambla.....	127
Slika 7.11 Zavisnost vrednosti R i MAPE od broja baznih modela (sa metodom ranog zaustavljanja) u okviru ansambla.....	128
Slika 7.12 Optimalan broj neurona u skrivenom (modeli sa metodom ranog zaustavljanja) sloju u svakoj iteraciji.	129
Slika 7.13 Predikcija pojedinačnih neuronskih mreža, predikcija ansambla, stvarne (ciljane) vrednosti koštanja uzražena u evro/m ² . Bazni modeli bez regularizacije.....	130
Slika 7.14 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova za model ansambla sa metodom ranog zaustavljanja.....	131
Slika 7.15 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova za model ansambla sa metodom ranog zaustavljanja	131

Slika 8.1 Zavisnost vrednosti MSE od broja stabala (baznih modela) u okviru ansambla kod Bagging metode	134
Slika 8.2 Značaj pojedinih promenljiva u modelu ansambla kod primene Bagging metode	135
Slika 8.3 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova kod Bagging metode	137
Slika 8.4 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova kod Bagging metode.....	137
Slika 8.5 Zavisnost vrednosti MSE od broja stabala (baznih modela) u okviru ansambla kod Random Forests metode gde je za račvanje stabala korišćen podskup od 2 promenljive	139
Slika 8.6 Zavisnost vrednosti MSE od broja stabala (baznih modela) u okviru ansambla kod Random Forests metode gde je za račvanje korišćen podskup od 3 promenljive	139
Slika 8.7 Zavisnost vrednosti MSE od broja stabala (baznih modela) u okviru ansambla kod Random Forests metode gde je za račvanje korišćen podskup od 4 promenljive	140
Slika 8.8 Značaj pojedinih promenljiva u modelu ansambla kod primene metode Random Forests metode.....	141
Slika 8.9 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova kod Random Forests metode	142
Slika 8.10 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova kod Random Forests metode	142
Slika 8.11 Zavisnost vrednosti MSE od parametra redukcije i broja stabala (baznih modela) kod Boosted Trees metode kada je maksimalni broj račvanja ograničen na maksimalno 1 račvanje	145
Slika 8.12 Zavisnost vrednosti MSE od parametra redukcije i broja stabala (baznih modela) kod Boosted Trees metode kada je maksimalni broj račvanja ograničen na maksimalno 64 račvanja	145

Slika 8.13 Zavisnost vrednosti MSE od parametra redukcije i broja stabala (baznih modela) kod Boosted Trees metode kada je maksimalni broj račvanja ograničen na maksimalno 128 račvanja	146
Slika 8.14 Položaj i vrednost minimuma MSE kod modela sa parametrom redukcije 0,001 i jednim račvanjem stabla ($d=1$) baznog modela u ansamblu kod Boosted Trees metode	148
Slika 8.15 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova optimalnog modela kod Boosted Trees metode.....	149
Slika 8.16 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova optimalnog modela kod Boosted Trees metode	149
Slika 9.1 Dijagram zavisnosti vrednosti RMSE od parametara C i ϵ kod modela sa linearnim kernelom	153
Slika 9.2 Dijagram zavisnosti vrednosti RMSE od parametara C i γ za $\epsilon = 2^{-6}$ kod modela sa RBF kernel funkcijom.....	158
Slika 9.3 Dijagram zavisnosti vrednosti RMSE od parametara C i γ za $\epsilon = 2^{-3}$ kod modela sa sigmoidnom kernel funkcijom	161
Slika 9.4 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova kod modela sa RBF kernel funkcijom	162
Slika 9.5 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova kod SVR modela sa RBF kernel funkcijom	162
Slika 10.1 Uporedna analiza parametara razmere rastojanja kod modela koštanja mostova	171
Slika 10.2 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova za model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse.....	172

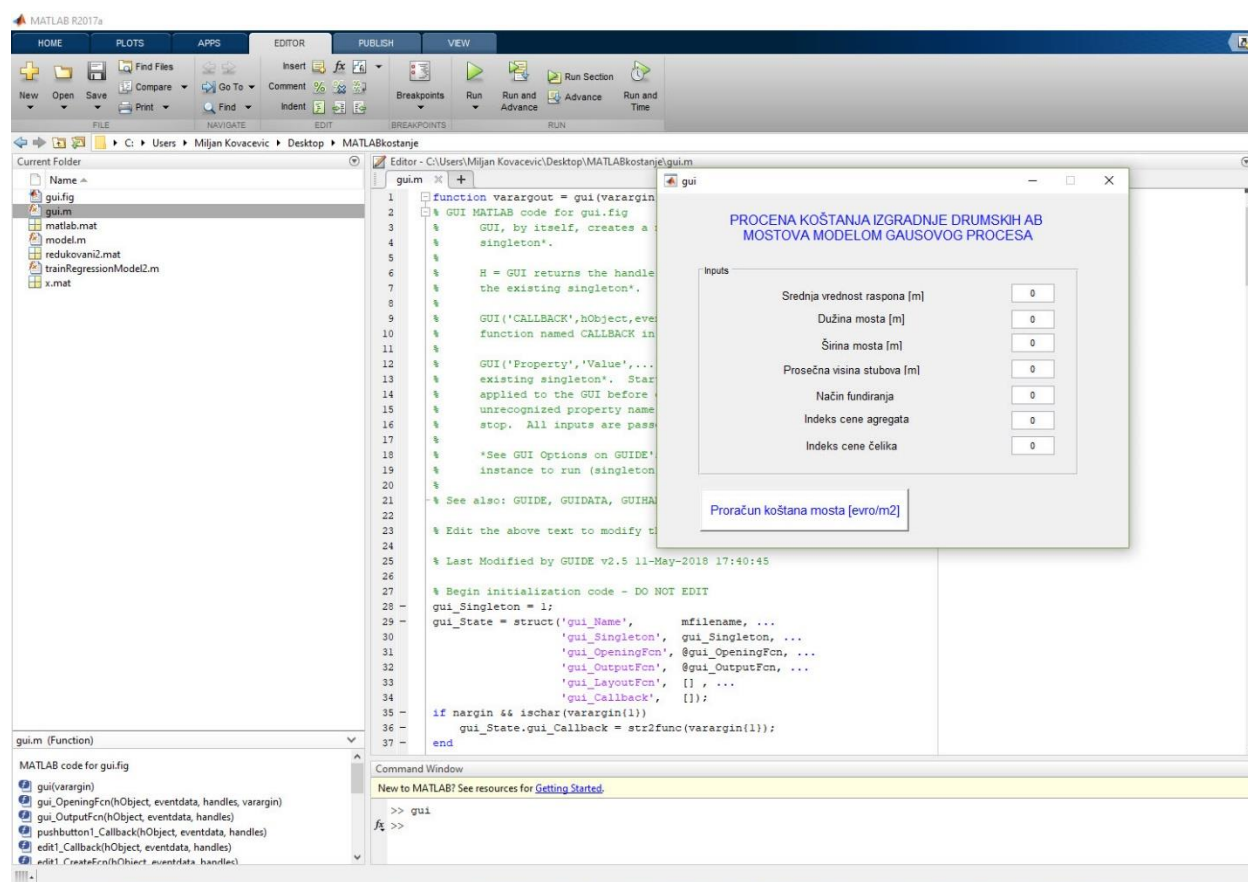
Slika 10.3 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti za model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse koštanja mostova.....	172
Slika 10.4 Modelirane i ciljane vrednosti koštanja mostova za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse za redukovani skup ulaznih promenljivih	175
Slika 10.5 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti koštanja mostova za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse za redukovani skup ulaznih promenljivih	175
Slika 11.1 Vrednosti parametara razmere rastojanja kod modela sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse kod predviđanja ukupne količine betona	181
Slika 11.2 Modelirane i ciljane vrednosti utroška betona za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse za redukovani skup ulaznih promenljivih	182
Slika 11.3 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti utroška betona za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse za redukovani skup ulaznih promenljivih ..	182
Slika 11.4 Vrednosti parametara razmere rastojanja kod modela sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse kod modela utroška visokovrednog čelika.....	188
Slika 11.5 Modelirane i ciljane vrednosti utroška visokovrednog čelika za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse i redukovani skup ulaznih promenljivih	190
Slika 11.6 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti utroška visokovrednog čelika za optimalni model sa ARD eksponencijalnom funkcijom kovarijanse i redukovani skup ulaznih promenljivih.....	190
Slika 11.7 Vrednosti parametara razmere rastojanja kod modela sa ARD matern 3/2 funkcijom kovarijanse kod modela utroška rebrastog čelika po m ³ ugrađenog betona	195
Slika 11.8 Modelirane i ciljane vrednosti utroška rebrastog čelika po m ³ ugrađenog betona za optimalni model sa ARD matern 3/2 funkcijom kovarijanse	197

Slika 11.9 Regresioni dijagram modeliranih i ciljanih vrednosti kod predviđanja utroška rebrastog čelika po m ³ ugrađenog betona za optimalni model sa ARD matern 3/2 funkcijom kovarijanse	197
Slika 12.1 Grafički korisnički interfejs modela za procenu troškova izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova u MATLAB programskom okruženju.....	229
Slika 12.2 Unos podataka u grafički korisnički interfejs kod procene troškova izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova	230
Slika 12.3 Grafički korisnički interfejs modela za procenu ukupne količine betona kod izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova u MATLAB programskom okruženju	232
Slika 12.4 Unos podataka u grafički korisnički interfejs kod procene ukupne količine betona armirano-betonskih drumskih mostova.....	233
Slika 12.5 Grafički korisnički interfejs modela za procenu količine visokovrednog čelika kod izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova u MATLAB programskom okruženju.....	235
Slika 12.6 Unos podataka u grafički korisnički interfejs kod procene količine visokovrednog čelika armirano-betonskih drumskih mostova.....	236
Slika 12.7 Grafički korisnički interfejs modela za procenu količine visokovrednog čelika kod izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova u MATLAB programskom okruženju.....	238
Slika 12.8 Unos podataka u grafički korisnički interfejs kod procene količine rebrestog čelika armirano-betonskih drumskih mostova.....	239

PRILOG 2 – SOFTVERSKA IMPLEMENTACIJA MODELA

Softverska implementacija modela za procenu koštanja AB drumskih mostova

Model za procenu koštanja izgradnje AB drumskih mostova je zasnovan na Gausovom slučajnom procesu kod koga je primenjena ARD eksponencijalna funkcija kovarijanse. Formirani model je analiziran u MATLAB programskom okruženju, a procena tačnosti modela je vršena desetstrukom unakrsnom validacijom. Obučeni model sačuvan je u matlab.mat fajlu kao struktura pod nazivom **trainedModel** (u okviru foldera MATLABkostanje). Za pokretanje modela formiran je grafički korisnički interfejs (GUI) u okviru koga se unose ulazne promenljive modela, a kao rezultat dobija procena troškova izgradnje mosta u jedinici evro/m² mosta.

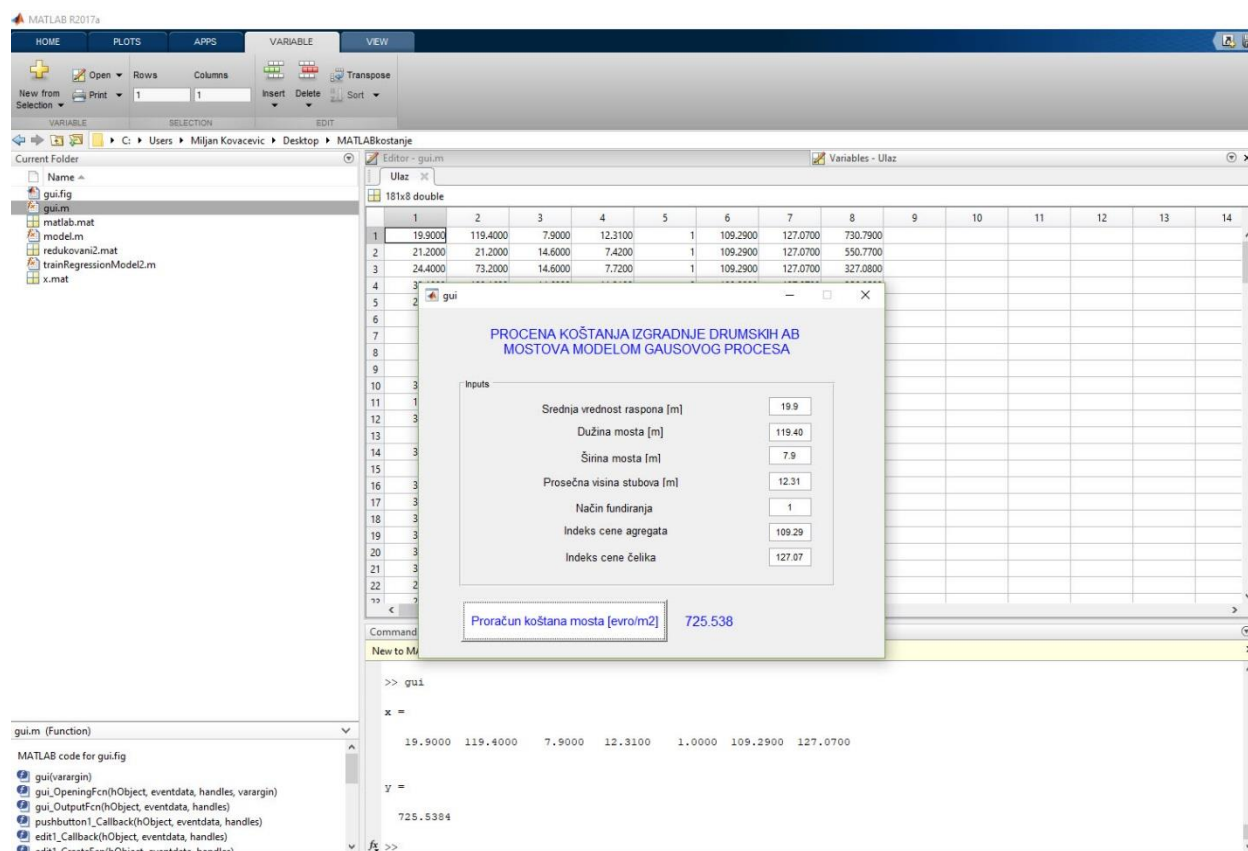


Slika 12.1 Grafički korisnički interfejs modela za procenu troškova izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova u MATLAB programskom okruženju

Za pokretanje programa potrebno je folder MATLABkostanje postaviti za tekući i pokrenuti fajl **gui.m**. Deo programskog koda za formiranje grafičkog korisničkog interfejsa je prikazan na Slici 12.1.

Prve četiri ulazne promenljive modela su izražene u metrima, a njihove decimalne vrednosti unose se korišćenjem decimalne tačke, kretanje kroz polja za unos može se vršiti korišćenjem **tab** tastera na tastaturi. Peta ulazna promenljiva definiše način fundiranja. Ona ima vrednost 1 kod onih mostova kod kojih je primenjeno duboko fundiranje, odnosno 0 kod mostova kod kojih je primenjeno plitko fundiranje. Indeks cene agregata, Indeks cene čelika unose se u poslednja dva polja.

Nakon unosa svih ulaznih promenljivih, klikom na dugme Proračun koštanja mosta [evro/m2] dobijamo procenu koštanja izgradnje.



Slika 12.2 Unos podataka u grafički korisnički interfejs kod procene troškova izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova

U konkretnom slučaju koji je prikazan dobijena je procena koštanja izgradnje mosta čije su karakteristike unete u iznosu od 725.538 evra/m² i ova vrednost je prikazana u okviru gui prozora. Tačna vrednost koštanja ovog mosta prikazana je u okviru baze podataka **Ulaz** u editor prozoru MATLAB programa u prvoj koloni i njena vrednost je 730.79 evra/m².

Procena koštanja se može dobiti i unosom u okviru prozora Command Window u donjem delu slike. Da bismo dobili procenu koštanje bez korišćenja gui prozora neophodno je da se ulazni vektor unese u matričnom obliku na sledeći način:

```
x=[19.9 119.4 7.90 12.31 1 109.29 127.07]
```

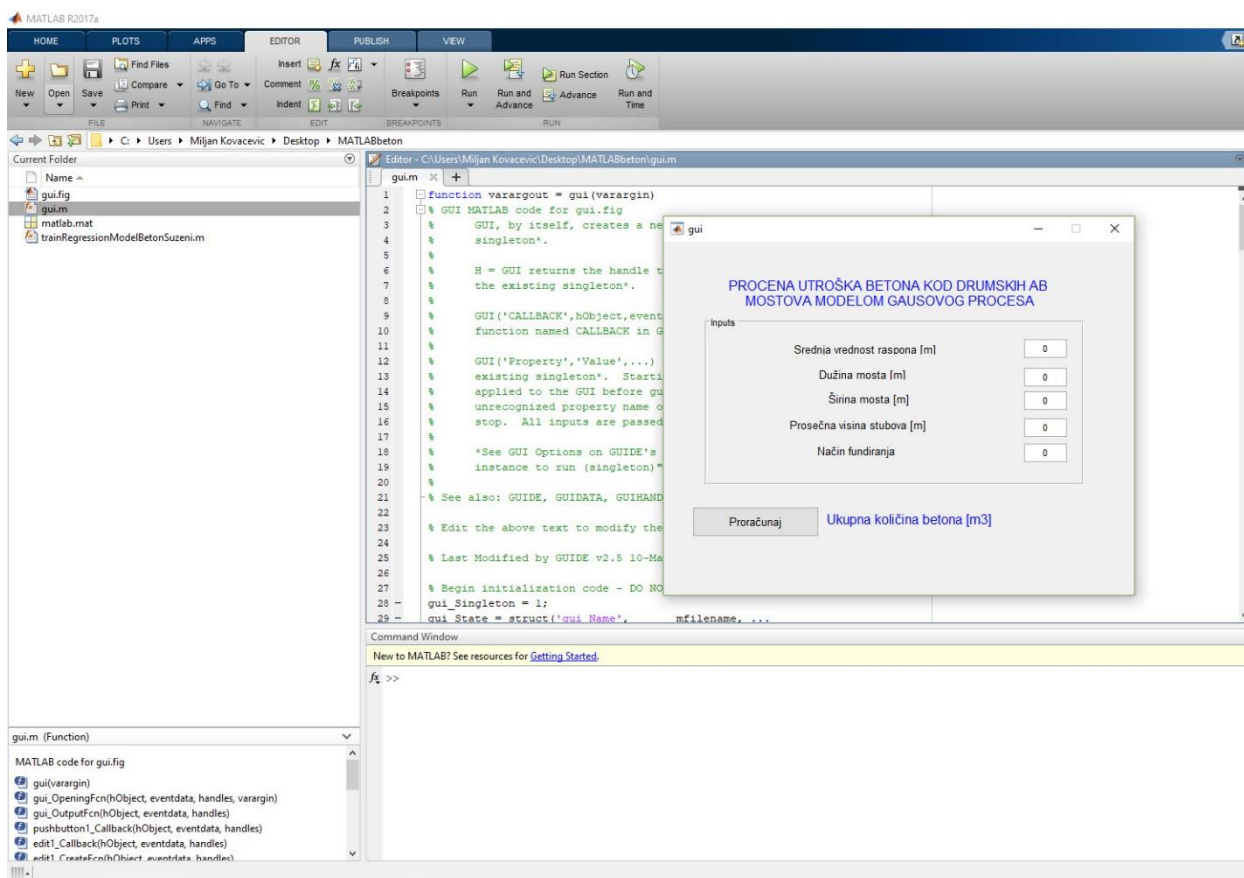
a zatim pokrene funkcija generisanog modela

```
y = trainedModel.predictFcn(x)
```

nakon čega se dobija ista vrednost predikcije kao u gui prozoru.

Softverska implementacija modela za procenu utroška betona kod izgradnje AB drumskih mostova

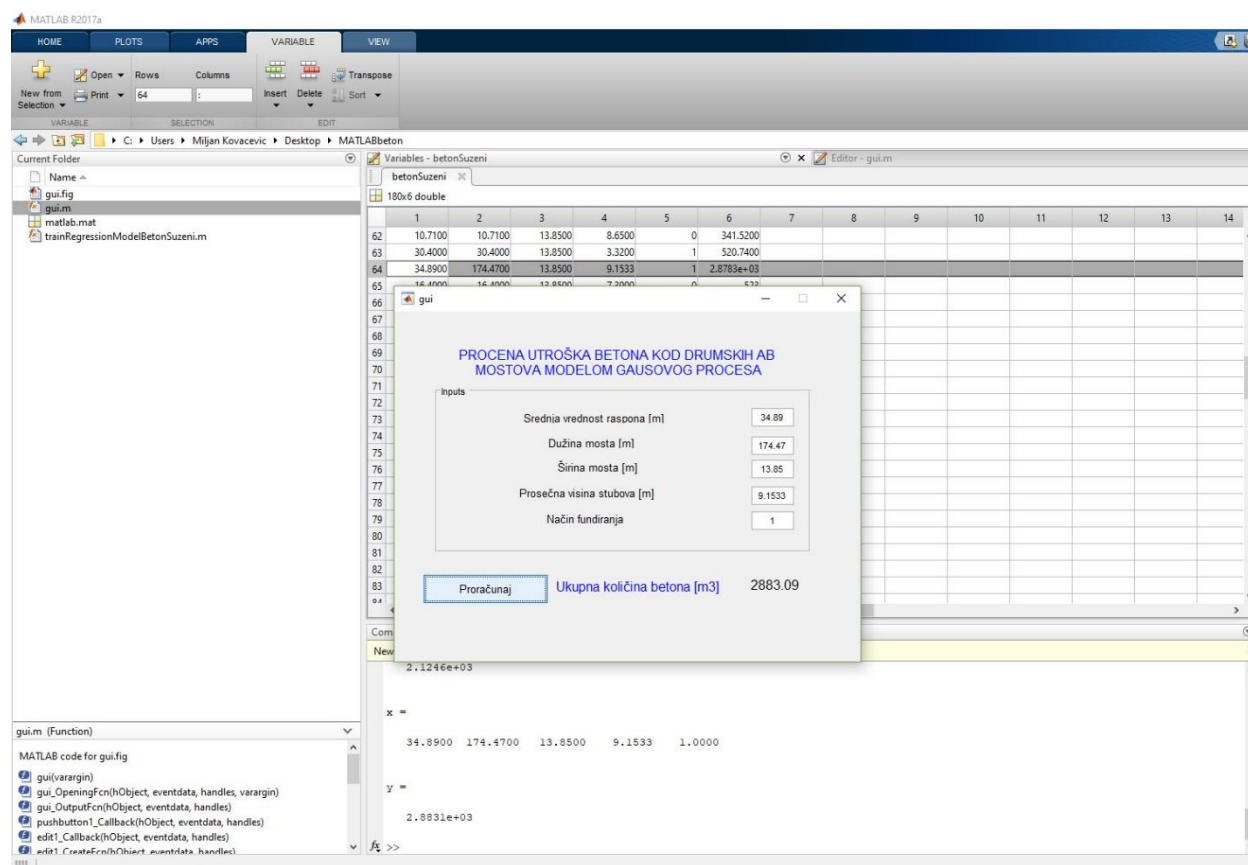
Model za procenu koštanja utroška betona kod izgradnje AB drumskih mostova je zasnovan na Gausovom slučajnom procesu kod koga je primenjena ARD eksponencijalna funkcija kovarijanse. Formirani model je analiziran u MATLAB programskom okruženju, a procena tačnosti modela je vršena desetostrukom unakrsnom validacijom. Obučeni model sačuvan je u matlab.mat fajlu kao struktura pod nazivom **trainedModel** (u okviru foldera MATLABbeton). Za pokretanje modela formiran je grafički korisnički interfejs (GUI) u okviru koga se unose ulazne promenljive modela, a kao rezultat dobija procena ukupne količine betona u jedinici m^3 .



Slika 12.3 Grafički korisnički interfejs modela za procenu ukupne količine betona kod izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova u MATLAB programskom okruženju

Prve četiri ulazne promenljive modela su izražene u metrima, i njihove decimalne vrednosti unose se korišćenjem decimalne tačke, a kretanje kroz polja za unos može se vršiti korišćenjem **tab** tastera na tastaturi. Peta ulazna promenljiva definiše način fundiranja. Ona ima vrednost 1 kod onih mostova kod kojih je primenjeno duboko fundiranje, odnosno 0 kod mostova kod kojih je primenjeno plitko fundiranje. U konkretnom slučaju je implementacija ARD eksponencijalne funkcije kovarijanse omogućila određivanje relevantnosti ulaznih promenljivih i suženje skupa ulaznih promenljivih. Primenom redukovanog skupa od pet promenljivih dobijen je model zadovoljavajuće tačnosti.

Za pokretanje programa potrebno je folder MATLABbeton postaviti za tekući i pokrenuti fajl **gui.m**. Deo programskog koda za formiranje grafičkog korisničkog interfejsa je prikazan na Slici 12.3. Nakon unosa svih ulaznih promenljivih, klikom na dugme Proračunaj dobijamo procenu količine betona.



Slika 12.4 Unos podataka u grafički korisnički interfejs kod procene ukupne količine betona armirano-betonskih drumskih mostova

U konkretnom slučaju koji je prikazan na Slici 12.4 dobijena je procena ukupne količine betona mosta čije su karakteristike u gui prozoru unete u iznosu od 2883.09 m² i ova vrednost je prikazana u okviru gui prozora pored teksta Ukupna količina betona [m³]. Tačna vrednost ukupne količine betona za ovaj most prikazana je u okviru baze podataka u editor prozoru i iznosi 2878.30 m³.

Procena ukupne količine betona se može dobiti i unosom u okviru prozora Command Window u donjem delu slike. Da bismo dobili procenu koštanje bez korišćenja gui prozora neophodno je da se ulazni vektor unese u matičnom obliku na sledeći način:

x=[34.89 174.47 13.85 9.1533 1]

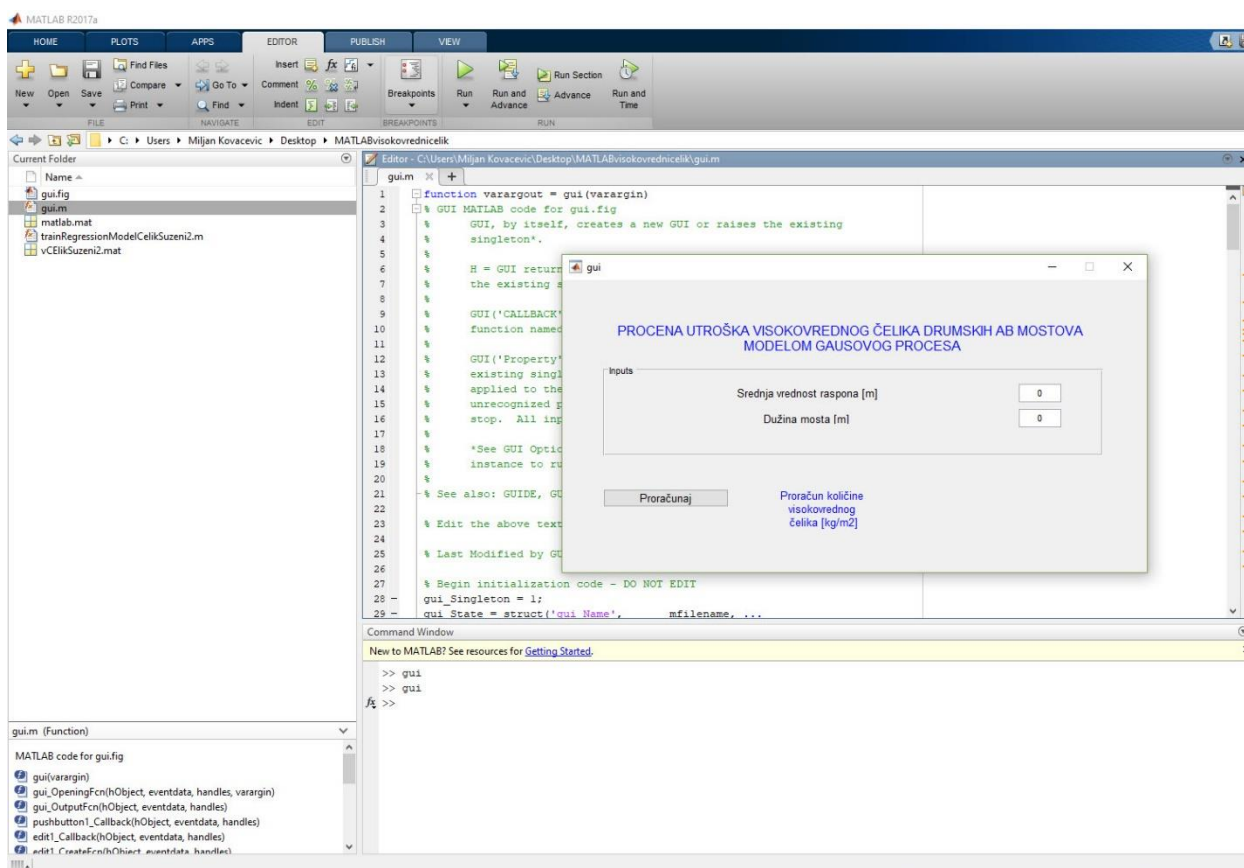
a zatim pokrene funkcija generisanog modela

y = trainedModel.predictFcn(x)

nakon čega se dobija ista vrednost predikcije kao u gui prozoru.

Softverska implementacija modela za procenu visokovrednog čelika kod izgradnje AB drumskih mostova

Model za procenu količine visokovrednog čelika izražene po m^2 površine mosta zasnovan je na Gausovom slučajnom procesu kod koga je primenjena ARD eksponencijalna funkcija kovarijanse. Formirani model je analiziran u MATLAB programskom okruženju, a procena tačnosti modela je vršena petostrukom unakrsnom validacijom. Obučeni model sačuvan je u matlab.mat datjlu kao struktura pod nazivom **trainedModel** (u okviru foldera MATLABvisokovrednicelik). Za pokretanje modela formiran je grafički korisnički interfejs (GUI) u okviru koga se unose ulazne promenljive modela, a kao rezultat dobija količina visokovrednog čelika izrađena u kg/m^2 površine mosta.

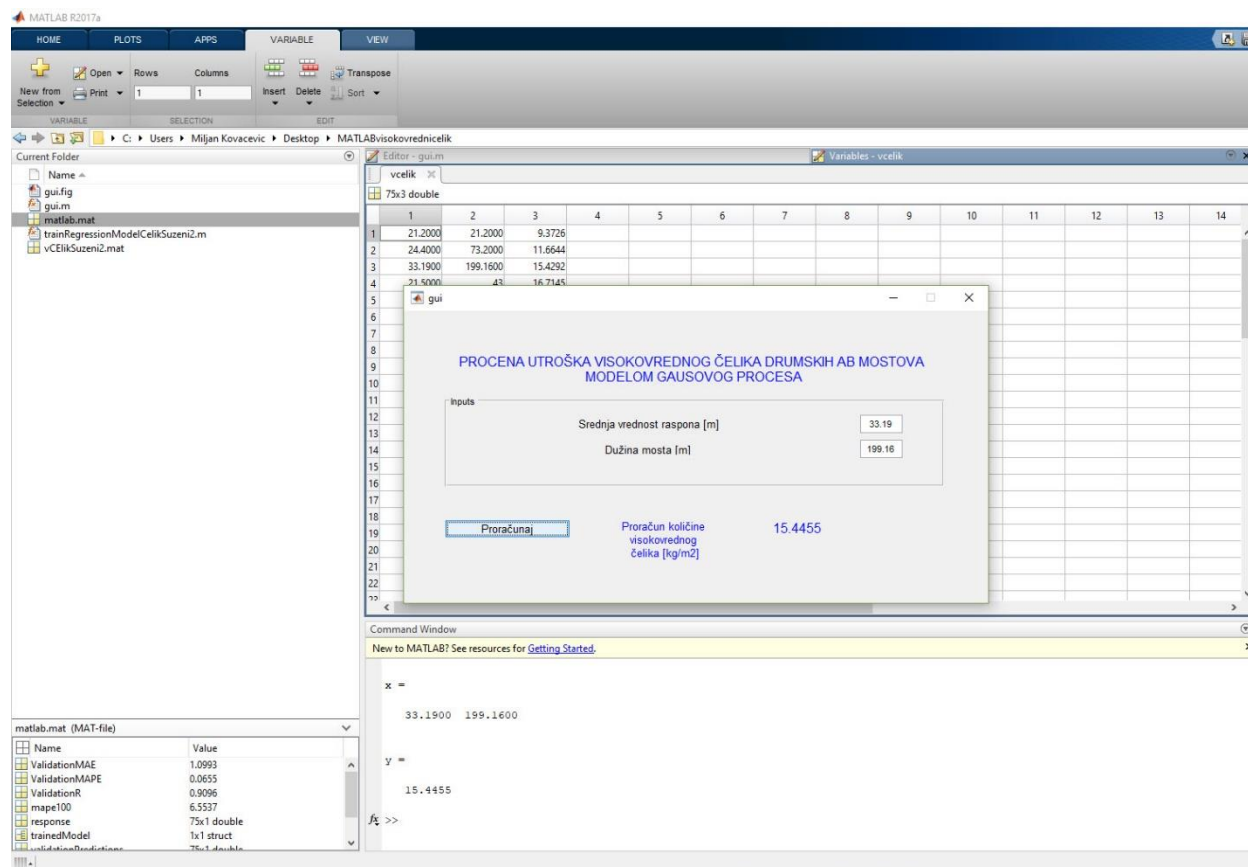


Slika 12.5 Grafički korisnički interfejs modela za procenu količine visokovrednog čelika kod izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova u MATLAB programskom okruženju

U konkretnom slučaju je implementacija ARD eksponencijalne funkcije kovarijanse omogućila određivanje relevantnosti ulaznih promenljivih i suženje skupa ulaznih promenljivih. Primenom redukovano skupa od dve ulazne promenljive dobijen je model zadovoljavajuće tačnosti.

Za pokretanje programa potrebno je folder MATLABvisokovrednicelik postaviti za tekući i pokrenuti fajl **gui.m**. Deo programskog koda za formiranje grafičkog korisničkog interfejsa je prikazan na Slici 12.5.

Nakon unosa svih ulaznih promenljivih, klikom na dugme **Proračunaj** dobijamo procenu količine visokovrednog čelika. .



Slika 12.6 Unos podataka u grafički korisnički interfejs kod procene količine visokovrednog čelika armirano-betonskih drumskih mostova

U konkretnom slučaju koji je prikazan dobijena je procena količine visokovrednog čelika mosta čije su karakteristike unete u gui prozoru u iznosu od 15.4455 kg/m² i ova vrednost je prikazana u okviru gui prozora pored teksta Proračun količine visokovrednog čelika [kg/m²]. Tačna vrednost

količine visokovrednog čelika za ovaj most prikazana je u okviru baze podataka u editor prozoru u trećoj vrsti i iznosi 15.4292 kg/m².

Procena količine visokovrednog čelika se može dobiti i unosom u okviru prozora Command Window u donjem delu slike. Da bismo dobili procenu koštanje bez korišćenja gui prozora neophodno je da se ulazni vektor unese u matričnom obliku na sledeći način:

x=[33.19 199.16]

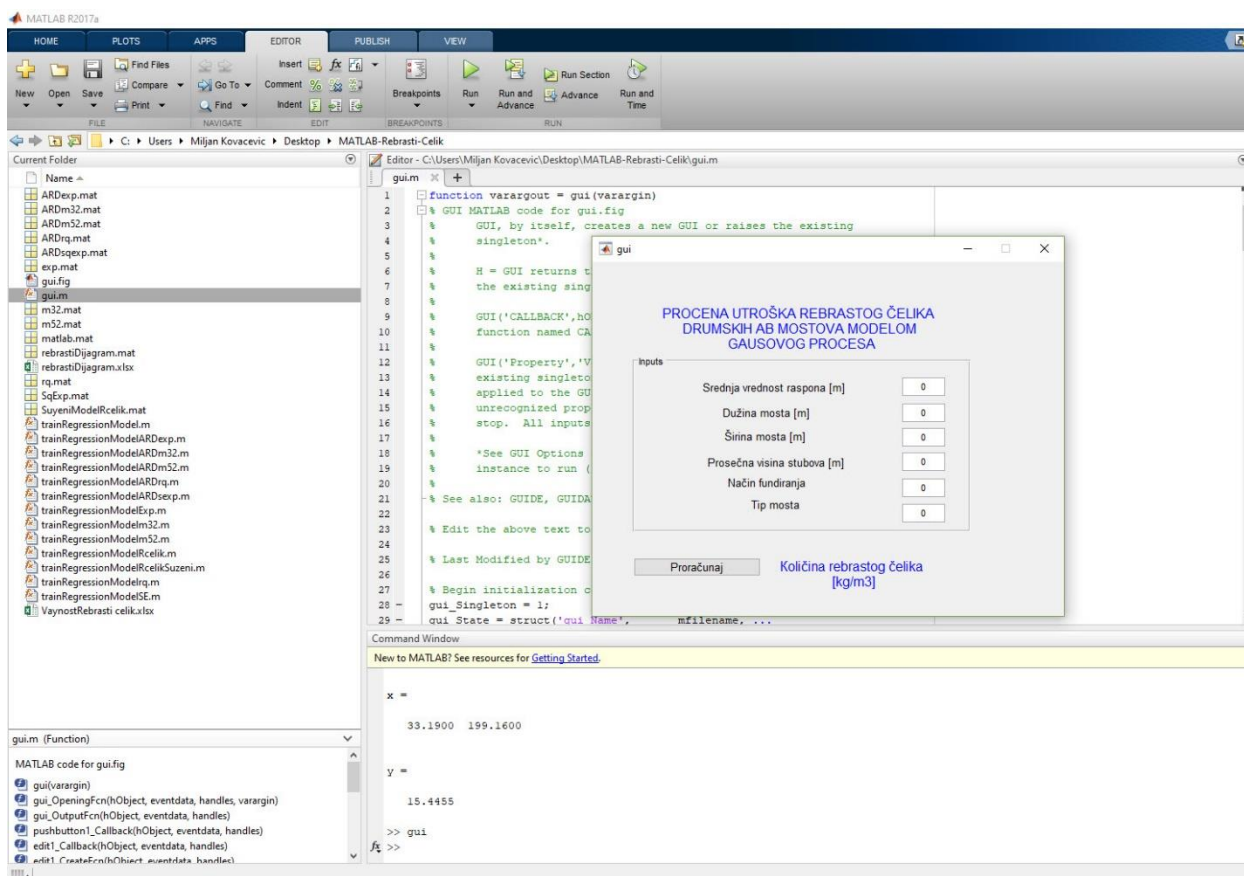
a zatim pokrene funkcija generisanog modela

y = trainedModel.predictFcn(x)

nakon čega se dobija ista vrednost predikcije kao u gui prozoru.

Softverska implementacija modela za procenu količine rebrastog čelika AB drumskih mostova

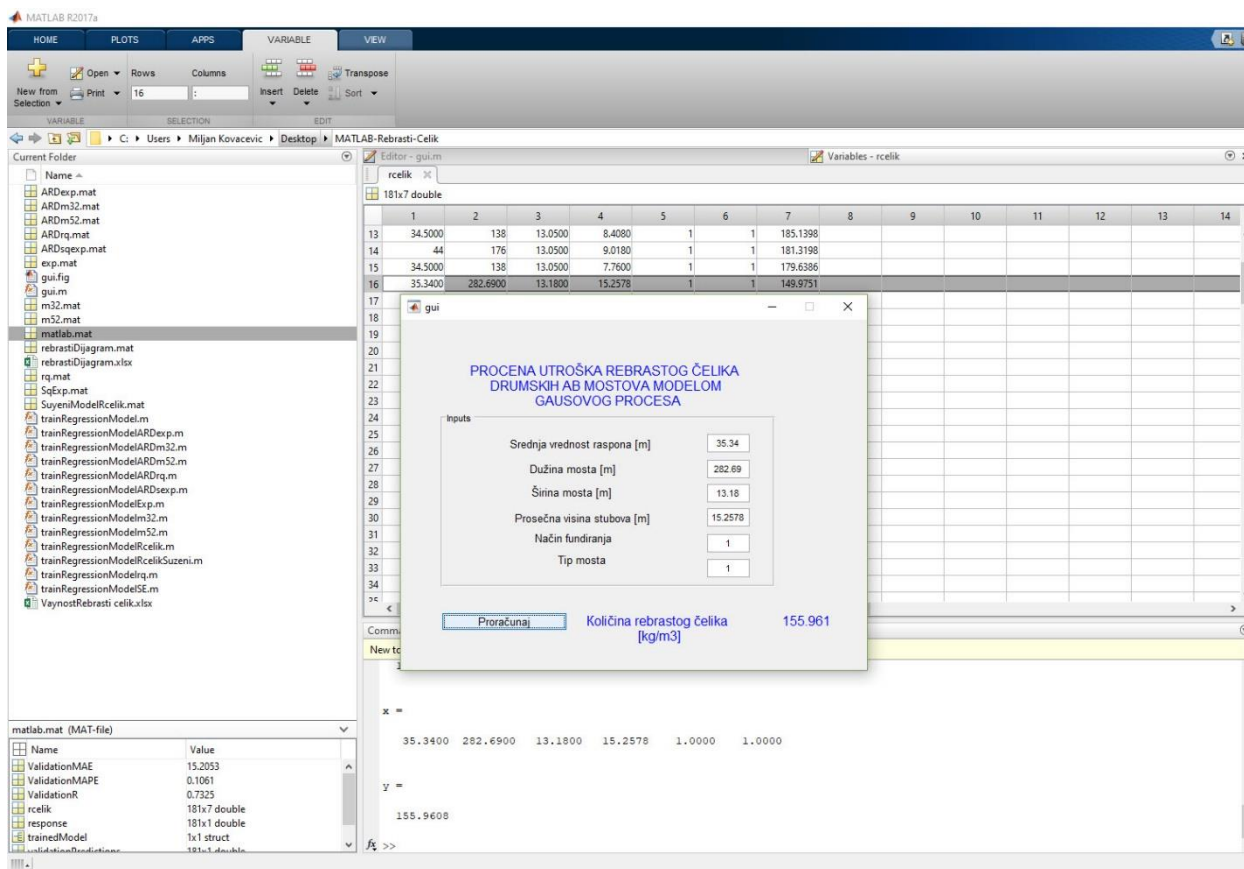
Model za procenu količine rebrastog čelika AB drumskih mostova je zasnovan na Gausovom slučajnom procesu kod koga je primenjena ARD matern 3/2 funkcija kovarijanse. Formirani model je analiziran u MATLAB programskom okruženju, a procena tačnosti modela je vršena desetostrukom unakrsnom validacijom. Obučeni model sačuvan je u matlab.mat fajlu kao struktura pod nazivom **trainedModel** (u okviru foldera MATLAB-Rebrasti-Celik). Za pokretanje modela formiran je grafički korisnički interfejs (GUI) u okviru koga se unose ulazne promenljive modela, a kao rezultat dobija procena količine rebrastog čelika u jedinici kg/m^3 mosta.



Slika 12.7 Grafički korisnički interfejs modela za procenu količine visokovrednog čelika kod izgradnje armirano-betonskih drumskih mostova u MATLAB programskom okruženju

Za pokretanje programa potrebno je folder MATLAB-Rebrasti-Celik postaviti za tekući i pokrenuti fajl **gui.m**. Deo programskog koda za formiranje grafičkog korisničkog interfejsa je prikazan na Slici 12.7.

Prve četiri ulazne promenljive modela su izražene u metrima, i njihove decimalne vrednosti unose se korišćenjem decimalne tačke, a kretanje kroz polja za unos može se vršiti korišćenjem **tab** tastera na tastaturi. Peta ulazna promenljiva definiše način fundiranja. Ona ima vrednost 1 kod onih mostova kod kojih je primenjeno duboko fundiranje, odnosno 0 kod mostova kod kojih je primenjeno plitko fundiranje. Promenljiva tip mosta dodeljena je vrednost 1 kod svih onih mostova gde je primenjena rasponska konstrukcija od prethodno-napregnutog betona, odnosno ova promenljiva ima vrednost 0 u svim drugim slučajevima.



Slika 12.8 Unos podataka u grafički korisnički interfejs kod procene količine rebrastog čelika armirano-betonskih drumskih mostova

U konkretnom slučaju koji je prikazan dobijena je procena količine rebrastog čelika mosta čije su karakteristike unete u gui prozoru u iznosu od 155.961 kg/m^3 i ova vrednost je prikazana u okviru gui prozora pored teksta Količina rebrastog čelika [kg/m³]. Tačna vrednost količine visokovrednog čelika za ovaj most prikazana je u okviru baze podataka u editor prozoru u trećoj vrsti i iznosi 149.9751 kg/m^3 .

Procena količine rebrastog čelika se može dobiti i unosom u okviru prozora Command Window u donjem delu slike. Da bismo dobili procenu koštanje bez korišćenja gui prozora neophodno je da se ulazni vektor unese u matričnom obliku na sledeći način:

$x=[35.34 \ 282.69 \ 13.18 \ 15.2578 \ 1 \ 1]$

a zatim pokrene funkcija generisanog modela

$y = \text{trainedModel.predictFcn}(x)$

nakon čega se dobija ista vrednost predikcije kao u gui prozoru.

BIOGRAFIJA KANDIDATA

Miljan Kovačević je rođen 28. novembra 1977. godine u Uroševcu. Osnovnu školu, a zatim i gimnaziju završio je u Uroševcu, 1996. god. Iste godine upisuje se na Građevinski-ArHITEKTONSKI fakultet u Prištini. Tokom 1999. godine deli sudbinu svojih sugrađana i naroda i prekida na određeno vreme studije. Diplomirao je na konstruktivnom smeru 2006.god , sa prosečnom ocenom 8,77. Diplomski rad radio je iz oblasti Upravljanja projektima i odbranio sa ocenom 10 .

U periodu 2006–2007 god. bio je angažovan na projektima izgradnje stambeno-poslovnih objekata u Kragujevcu i Vrnjačkoj Banji za kompaniju NP Building Group iz Kragujevca.

Nakon toga u periodu do septembra 2008.god. bio je angažovan u projektnom birou kompanije Metal Sistemi iz Kragujevca kao stručni saradnik.

U oktobru 2008. godine izabran je za saradnika na Katedri za građevinski menadžment, Fakulteta tehničkih nauka u Kosovskoj Mitrovici. Kao saradnik u Centru za projektovanje pri Fakultetu tehničkih nauka u Kosovskoj Mitrovici učestvovao je u izradi više glavnih projekata, kao i u planiranju i kontroli realizacije većeg broja projekata.

Doktorske studije na Građevinskom fakultetu u Beogradu upisuje krajem 2013. god. Sve programom predviđene ispite položio je zaključno sa oktobrom 2015.godine, sa prosečnom ocenom 10 i na rang listi studenata za upis 5. semestra školske 2015/2016 rangiran je na prvom mestu kao student sa najboljim rezultatima na doktorskim studijama.

Objavio je sedam rada u naučnim časopisima (jedan u časopisu na SCI listi) i sedam radova na međunarodnim konferencijama.

Trenutno je angažovan kao saradnik na Katedri za građevinski menadžment, Fakulteta tehničkih nauka u Kosovskoj Mitrovici.

Poseduje napredno znanje engleskog i osnovno znanje ruskog jezika.

Oženjen je i ima troje dece.

Izjava 1.

IZJAVA O AUTORSTVU

Ime i prezime autora Miljan Kovačević
Broj indeksa 912/13

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom

**MODEL ZA PROGNOZU I PROCENU TROŠKOVA IZGRADNJE ARMIRANO-
BETONSKIH DRUMSKIH MOSTOVA**

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za sticanje druge diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova;
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih.

Potpis autora

U Beogradu, _____

Izjava 2.

**IZJAVA O ISTOVETNOSTI ŠTAMPANE I ELEKTRONSKE VERZIJE
DOKTORSKOG RADA**

Ime i prezime autora Miljan Kovačević
Broj indeksa 912/13
Studijski program Građevinarstvo
Naslov rada

**MODEL ZA PROGNOZU I PROCENU TROŠKOVA IZGRADNJE ARMIRANO-
BETONSKIH DRUMSKIH MOSTOVA**

Mentor V. prof. dr Nenad Ivanišević, dipl. inž. građ

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predao radi pohranjenja u **Digitalnom repezitorijumu Univerziteta u Beogradu.**

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog naziva doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

Potpis autora

U Beogradu, _____

Izjava 3.

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Svetozar Marković“ da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

MODEL ZA PROGNOZU I PROCENU TROŠKOVA IZGRADNJE ARMIRANO-BETONSKIH DRUMSKIH MOSTOVA

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim priložima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Beogradu i dostupnu u otvorenom pristupu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo (CC BY)
2. Autorstvo – nekomercijalno (CC BY-NC)
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada (CC BY-NC-ND)
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima (CC BY-NC-SA)
5. Autorstvo – bez prerada (CC BY-ND)
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci.

Kratak opis licenci je sastavni deo ove izjave).

Potpis autora

U Beogradu, _____

1. Autorstvo. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.
2. Autorstvo – nekomercijalno. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.
5. Autorstvo – bez prerada. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.