

XIX JUGOSLOVENSKO SAVETOVANJE ZA NACRTNU
GEOMETRIJU I INŽENJERSKU GRAFIKU

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka

MonGEometrija 97

Naučni skup za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku
Novi Sad, 27-28. septembar 1997. godine

ZBORNIK RADOVA

JUGOSLOVENSKO UDRUŽENJE ZA NACRTNU
GEOMETRIJU I INŽENJERSKU GRAFIKU
JUNGIG

IZDAVAČ:

Jugoslovensko udruženje za nacrtnu geometriju i inženjersku grafiku

NAZIV PUBLIKACIJE:

ZBORNİK RADOVA

IZDAVAČKI SAVET:

prof. dr Hranislav Anđelković
prof. dr Miroslav Marković
prof. dr Lazar Dvniković
prof. dr Nenad Grujić
prof. dr Milan Janić

REDAKCIJA:

prof. dr Lazar Dvniković
doc. dr Radovan Štulić
asist. mr Ratko Obradović

Urednik:

prof. dr Lazar Dvniković

Tehnička obrada:

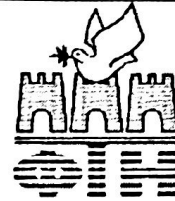
asist. mr Ratko Obradović
doc. dr Radovan Štulić

SADRŽAJ

RAD	AUTOR	Str.
• α -konveksne oblasti za α - paralelni vez	• Dragan Acketa • Lidija Litričin	1
• Centralno projektovanje n-dimenzionalnog Euklidovog prostora	• Milan Janić	7
• Grafičko rešavanje sistema nekih linearnih jednačina	• Milan Janić	11
• Primjena meditacije u procesu učenja Nacrtna geometrije	• Jelisava Kalezić	15
• Određivanje pridruženih identičnih pramenova u kolokalnim opšte-kolinearnim poljima	• Sonja Krasić	19
• Određivanje pridruženih identičnih nizova u kolokalnim opšte-kolinearnim poljima	• Sonja Krasić	22
• Određivanje četvorostrukih fokusa Kasinijevog ovala metodom komplementarnih konika	• Goran Radnović • Branislav Popkonstantinović	25
• Projektovanje objektno orijentisanog softvera u kompjuterskoj grafici	• Branislav Popkonstantinović • Marija Obradović	29
• Deskriptivno-geometrijske metode u objektno-orijentiranom modelu sintetičkog aktera	• Sofija Sidorenko	35
• Kompjuterski program za predstavljanje 4D objekata	• Risto Taševski • Tome Joleski	41
• Stereometrijsko projektovanje 3D i 4D objekata u različitim krivolinijskim projektivnim prostorima	• Risto Taševski • Vladimir Dukovski	45
• Jedan način za iscertavanje perspektivnih slika nastalih projiciranjem istog objekta iz različitih očnih tačaka podjednako udaljenih od likoravni	• Aleksandar Čučaković	51
• Kompjutersko generisanje hiperboličkog paraboloida	• Ratko Obradović • Zoran Jandrić	57
• Metoda odstojanja kao pomoćna metoda centralnog projektovanja	• Branko Malešević • Ratko Obradović	61
• Podnožnice i autorulete	• Momčilo Bjelica	65
• Uloga i značaj standardizacije terminologije u inženjerskoj grafici	• Bogoljub Nedimović • Branko Nedimović	67
• Otkrivanje obrtnih konusa zadatih ravnim presekom po elipsi i pravcem ravni kružnog preseka	• Marija Obradović • Aleksandar Čučaković	71

SPISAK UČESNIKA SAVETOVANJA

- dr Lazar Dovniković**, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu
dr Hranislav Anđelković, redovni profesor Građevinskog fakulteta u Nišu
dr Nenad Grujić, redovni profesor Arhitektonskog fakulteta u Beogradu
dr Miroslav Marković, redovni profesor Građevinskog fakulteta u Nišu
dr Dragan Acketa, redovni profesor Prirodno matematičkog fakulteta u Novom Sadu
dr Tome Joleski, redovni profesor Mašinskog fakulteta u Skoplju
dr Vladimir Dukovski, redovni profesor Mašinskog fakulteta u Skoplju
dr Bogoljub Nedimović, redovni profesor Tehničkog fakulteta u Zrenjaninu
dr Aleksandra Jovanović-Zdravković, vanredni profesor Arhitektonskog fakulteta u Beogradu
dr Biserka Marković, vanredni profesor Građevinskog fakulteta u Nišu
dr Radojka Gligorić, vanredni profesor Poljoprivrednog fakulteta u Novom Sadu
dr Momčilo Bjelica, vanredni profesor Tehničkog fakulteta u Zrenjaninu
dr Aleksandar Čučaković, docent Građevinskog fakulteta u Beogradu
dr Milan Janić, docent Tehničkog fakulteta u Boru
dr Radovan Štulić, docent Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu
dr Jelisava Kalezić, docent Građevinskog fakulteta u Podgorici
mr Risto Taševski, asistent Mašinskog fakulteta u Skoplju
mr Sofija Sidorenko, asistent Mašinskog fakulteta u Skoplju
mr Ratko Obradović, asistent Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu
mr Dorde Dorđević, asistent Arhitektonskog fakulteta u Beogradu
mr Branislav Popkonstantinović, asistent Mašinskog fakulteta u Beogradu
mr Marija Obradović, asistent Građevinskog fakulteta u Beogradu
Branko Malešević, asistent Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu
Goran Radnović, asistent Mašinskog fakulteta u Beogradu
Sonja Krasić, asistent pripravnik Građevinskog fakulteta u Nišu
Zoran Jandrić, asistent pripravnik Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu
Lidija Litričin, asistent pripravnik Prirodno matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Aleksandar Jocić, asistent pripravnik Arhitektonskog fakulteta u Beogradu
Slobodan Mišić, asistent pripravnik Građevinskog fakulteta u Beogradu
Magdalena Dimitrijević, asistent pripravnik Građevinskog fakulteta u Beogradu



OTKRIVANJE OBRRTNIH KONUSEVA ZADATIH RAVNIM PRESEKOM PO ELIPSI I PRAVCEM RAVNI KRUŽNOG PRESEKA

mr Marija Obradović, Građevinski Fakultet,
Bulevar Kralja Aleksandra 73, Beograd, Srbija

dr Aleksandar Čučaković, Građevinski Fakultet,
Bulevar Kralja Aleksandra 73, Beograd, Srbija

Apstrakt: Neka je poznata proizvoljna elipsa i položaj ravni P kružnog preseka konusa. Na pravoj p ravni P , koja prolazi centrom elipse, postoji cirkularna involucija, kojom su određeni kružni preseki čitavog pramena konuseva koji prolaze zadatom elipsom, a ravan P pripada jednom od njihova dva sistema ravni kružnih preseka. Njihovi vrhovi nalaze se na hiperboli čije su asimptote određene osama krajnjih konuseva-oblica ovog pramena. Svi konusevi iz ovog pramena seku se, osim po datoj elipsi, po krugovima paralelnim datoj ravni P . Obrtni konusevi u ovom pramenu nalaziće se u preseku pomenute hiperbole i hiperbole određene vrhovima obrtnih konuseva koji prolaze temenima elipse A i B , a čije su asimptote: prava p ravni P i pravac osa obrtnih konuseva, ortogonalan na nju. Ukoliko ove dve hiperbole imaju 4 realne presečne tačke, postojaće i dva realna obrtna konusa u datom pramenu.

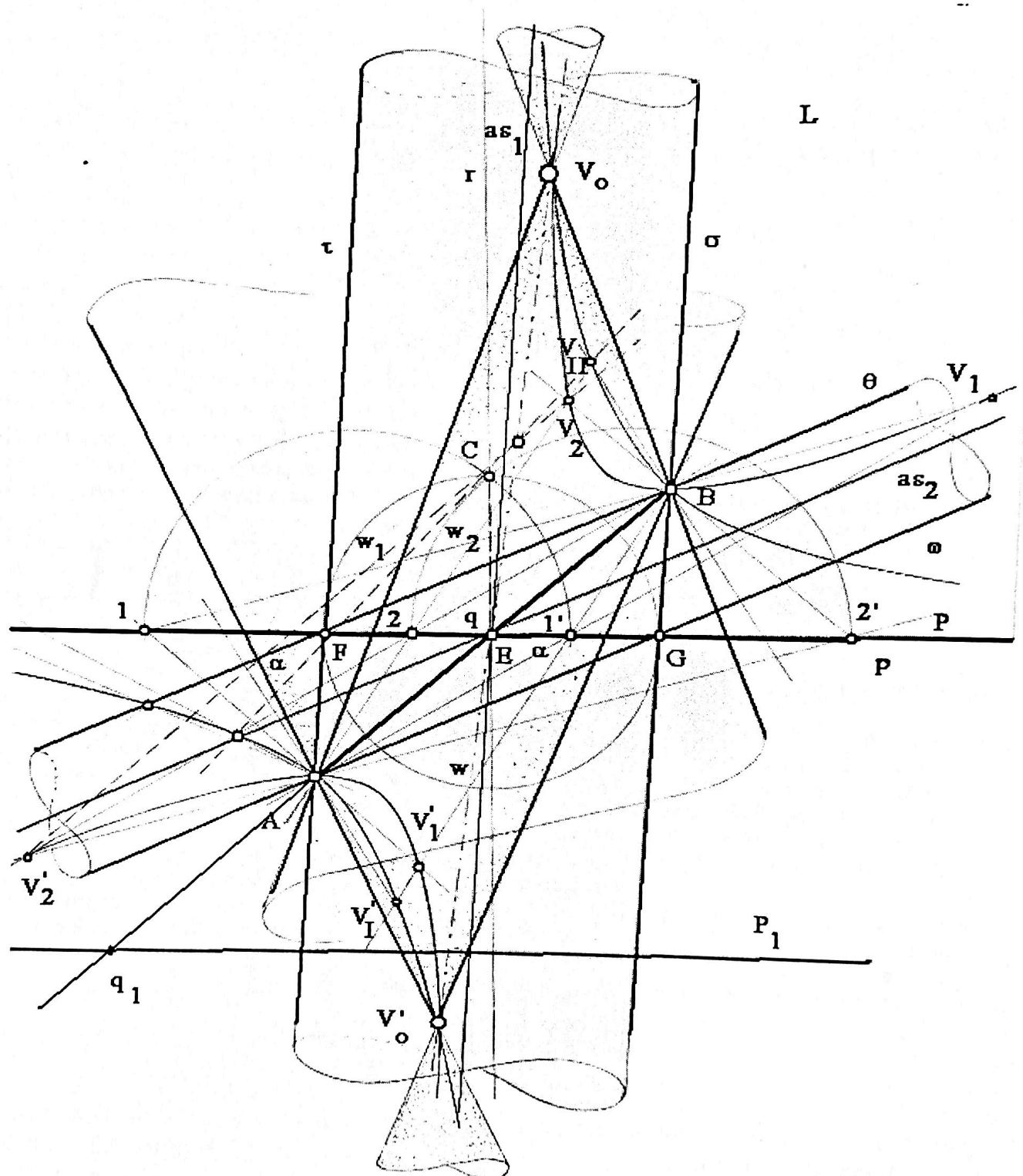
Ključne reči: pramen konuseva, cirkularna involucija, elipsa, hiperbola

Abstract: There is known an arbitrary taken ellipse and a position of the plane P which circle intersects the cone. On the straight line p of the plane P which passes through the center of the ellipse, there is a circular involution that determines the circle intersections of the whole pencil of cones which passes through the assigned ellipse, and the plane P belongs to one of two systems of circle intersecting planes. Their vertices are set on a hyperbola which asymptote are determined by the axes of the extreme cones - cylinders of the pencil. Each cone of the pencil intersect, except on the ellipse, also on the circles parallel to the plane P . The rotating cones of the pencil will be set in the intersections of the mentioned hyperbola, and a hyperbola obtained by the vertices of the rotating cones that passes through the vertices A and B of the ellipse, and which asymptotes are: the straight line p of the plane P , and the course of the axes of the rotating cones, perpendicular to it. If these two hyperbolas consist 4 real intersecting points, there will exist the two real rotating cones in the former pencil.

Key words: pencil of the cones, circular involution, ellipse, hyperbola

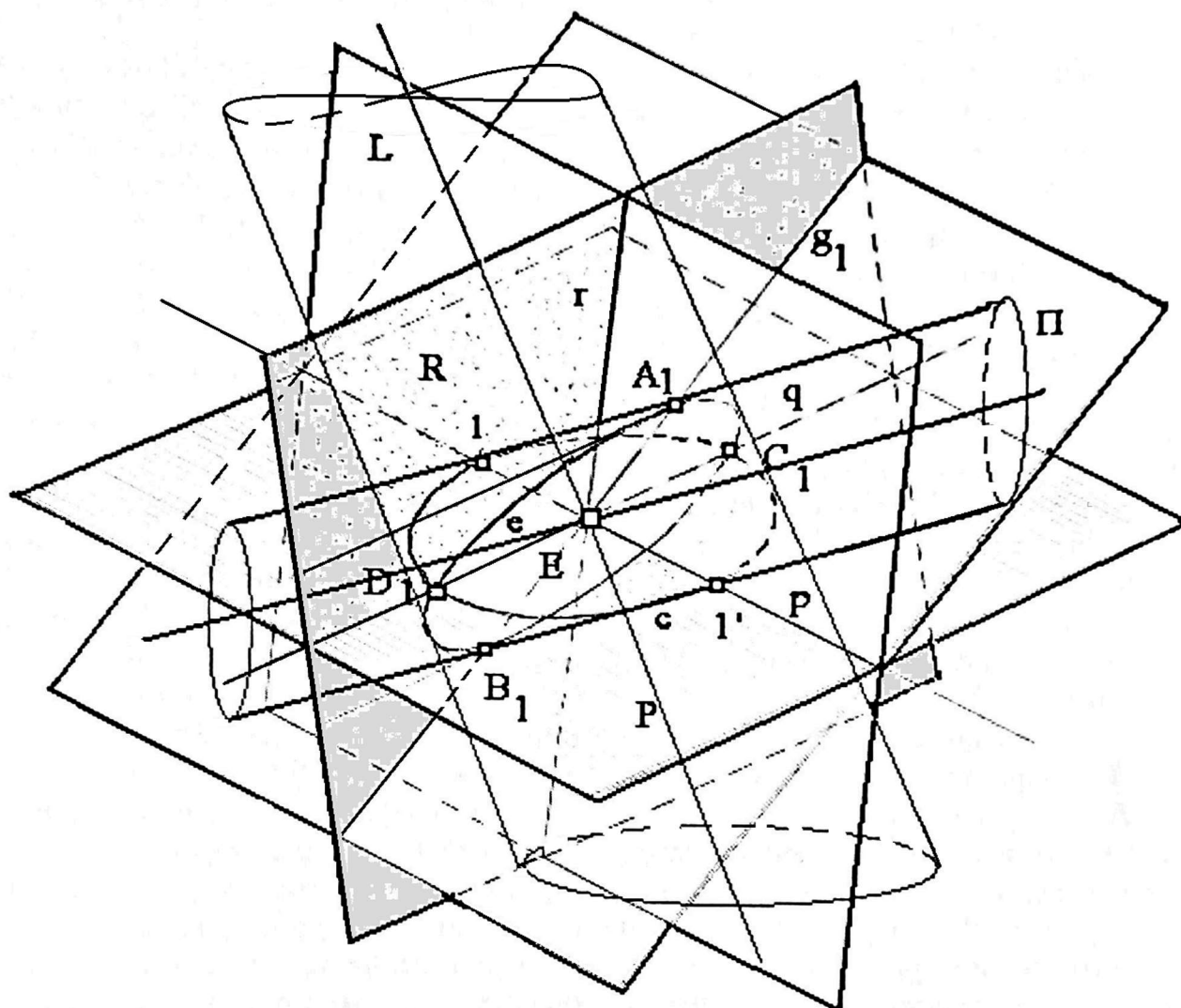
U opštem slučaju, dva konusa, kao površi drugog stepena, seku se međusobno po prostornoj krivoj četvrtog stepena. Ta kriva se može uzeti za temeljnu krivu čitavog pramena površi drugog stepena (kvadraka). Međutim, moguće je, ukoliko bi ova dva konusa imala dve tangencijalne ravni, bilo realne ili konjugovano imaginarne, da se takva kriva raspadne na dve konike. Ovaj rad razmatra onaj slučaj kada su te dve konike - elipsa i krug.

Neka je data elipsa u ravni R , osama AB i CD , i ravan P_1 u kojoj će ležati kružni presek konusa koji prolazi datom elipsom. Ravni R i P_1 seku se po presečnici q_1 . Projektovanje ćemo vršiti na ravan L koja je normalna na presečnicu q_1 , tako da ćemo ravni R i P_1 videti zračno kao prave. Takođe, radi veće jasnoće, uzet je, u konkretnom slučaju, takav položaj elipse, gde se njena velika osa AB u zračnoj ravni R vidi u pravoj veličini.



Sl. 1

Kroz središte E ove zračno videne elipse postavićemo ravan P, paralelnu ravni P_1 . Presek ravni R i P je prava q na kojoj leži i mala osa elipse, CD. Nadimo pramen



konuseva koji će prolaziti datom elipsom, a koje će ravan P (odnosno P_1) seći po krugovima. Svi ti mogući krugovi, seći će se sa elipsom u tačkama C i D . To znači da u ravni P postoji i neka prava p koja prolazi središtem elipse E , a koja je nosač cirkularne involucije, koju određuju kružni preseki svih konuseva iz pramena. Ta prava p je normalna na pravu q , odnosno, u ravni L se vidi u pravoj veličini. Lagerove tačke ove cirkularne involucije, biće upravo tačke C i D . Geometrijsko mesto vrhova svih konuseva iz ovog pramena određenog elipsom $ABCD$ i cirkularnom involucijom na pravoj p , ležaće na jednoj hiperboli, koju ćemo označiti sa h . Pogledajmo sliku 1: Krug koji za centar ima samo središte involucije ($E=S$), seče pravu p u tačkama F i G i sa elipsom $ABCD$ određuje dve oblice - prvu sa tangencijalnim ravnima τ ($AF \in \tau$) i σ ($BG \in \sigma$) i drugu sa

tangencijalnim ravnima θ ($FB \in \theta$) i ω ($AG \in \omega$). Osovina prve oblice biće paralelna sa AF i BG , a osovina druge oblice sa FB i AG . Te ose su ujedno i asimptote hiperbole na kojoj će ležati vrhovi svih konuseva iz pramena. Ostali parovi tačaka cirkularne involucije (na primer: $11-$, $22-$, $33-$...), spojeni sa tačkama A i B , odrediće u ravni L , konturne izvodnice parova konusa, što je sasvim dovoljno za iznalaženje njihovih vrhova: $1A \cap 1B = V_{1-}$, $1-A \cap 1B = V_1$; $2A \cap 2-B = V_2$, $2-A \cap 2B = V_2-$ itd... U ovom pramenu konuseva moguće je potražiti i obrtne konuse. Za to moramo prethodno naći geometrijsko mesto vrhova obrtnih konuseva koje će ravan P seći po krugovima, a čije će konturne izvodnice u ravni L prolaziti tačkama A i B zadate elipse. (jasno je da konusevi iz ovog pramena ne sadrže elipsu $ABCD$, tj. tačke C i D , osim dva koja traža da nađemo, a čiji će se vrhovi

nalaziti ujedno i na hiperboli h prethodnog pramena). Primetićemo da parovi odgovarajućih konturnih izvodnica obrtnih konuseva iz pramena, moraju da zaklapaju jednake ugkove α prema ravni P . To ukazuje da će vrhovi konuseva ovog novog pramena, ležati takođe na jednoj novoj hiperboli x , čije će asimptote biti pravaca: p ($\alpha=0$) i pravca r ortogonalnog na p ($\alpha=90^\circ$). Asimptote takođe prolaze središtem E elipse.

Vrhovi tražena dva obrtna konusa, koji prolaze elipsom $ABCD$, a ravan P (kao i P_1) ih ih seče po krugovima, nalaziće se u preseku ove dve hiperbole h i x . S obzirom na to da dve presečne tačke ovih hiperbola - A i B već poznajemo, druge dve presečne tačke, tražene vrhove konuseva, dobijamo jednostavno primenom Vejrove teoreme (metodom Vejrovih konika).

Dakle, dve presečne tačke, različite od A i B , hiperbola koje predstavljaju geometrijska mesta vrhova dva pramena konuseva koja se seku sa sistemom ravni P_n po krugovima, i to: jednog u kojem kosi konusevi prolaze elipsom $ABCD$ i drugog u kojem obrtni konusevi prolaze tačkama elipse A i B , predstavljaju vrhove obrtnih konuseva koji prolaze elipsom $ABCD$ i seku se sa ravni P_1 po krugovima.

S obzirom na to da je jedna od ove dve hiperbole, x , pravougla, a ona druga može biti sa različitim uglom između asimptota, presečne tačke ovih koncentričnih hiperbola mogu biti, osim tačaka A i B koje su poznate i uvek realne - i par konjugovano imaginarnih tačaka. U tom slučaju, datom elipsom ne prolaze realni konusi koji će datu ravan P_1 seći po krugu. Očigledan primer za ovaj slučaj bio bi \pm problem² u kojem bi data elipsa $ABCD$ i sama bila krug. Znamo da je realan obrtan konus nemoguće preseći po krugu sa dva različita sistema paralelnih ravni. Primenjeno na prethodno opisani konstruktivni postupak, prva hiperbola h vrhova kosih konuseva koji prolaze krugom $ABCD$, a i krugovima iz cirkularnog involutornog niza na ravni P , bila bi takođe pravougla. Presek ove dve pravougla hiperbole h i x ne može dati 4 realne tačke,

već samo dve, čime se dokazuje prethodna tvrdnja.

Za slučaj da je data elipsa $ABCD$ u takvom položaju da se u ravni L njena velika osa ne vidi u pravoj veličini, već se cela elipsa vidi kao duž u nekom skraćanju, (sl. 2.) za relevantne se uzimaju tačke A_1 i B_1 kao krajnje tačke duži zračno viđene elipse. Za rastojanje između Lagerovih tačaka L i L_1 , uzima se veličina prečnika $C_1 D_1$ elipse, spregnutog prečniku $A_1 B_1$. Sada će osovine cilindara koje predstavljaju asimptote hiperbole h_1 određivati ravan π u kojoj će ležati i sama hiperbola h_1 . Ravan π prolazi pravom p , nosačem cirkularne involucije, ali sada nije upravna na sistem ravni P_n , već je pod određenim uglom φ , pod kojim je i prečnik $A_1 B_1$ nagnut prema ravni P , što sve ne utiče na konstruktivni postupak prilikom rečavanja zadatka, jedino ćemo sliku u ravni L videti u skraćanju $1: \sin\varphi$.

Na ovaj način, moguće je restitucijom pronaći obrtne konuse i ako je poznat samo jedan ravan presek po elipsi i na pr. pravac ose konuseva, postavljanjem ravni P normalno na pravac date ose. Takođe, moguće je primenom ovog konstruktivnog postupka, naći i centar projektovanja iz kojeg će se data elipsa na datu ravan projektovati kao krug i pri čemu se, dakle, dobijaju dva rešenja, ili nema realnih.

LITERATURA:

1. Jefimov N. V. Viša geometrija, Beograd, 1949.
2. Niče Vilko: *Uvod u Sintetičku Geometriju*, Zagreb, 1956.
3. Prvanović Mileva: *Projektivna geometrija*, Beograd, 1986.