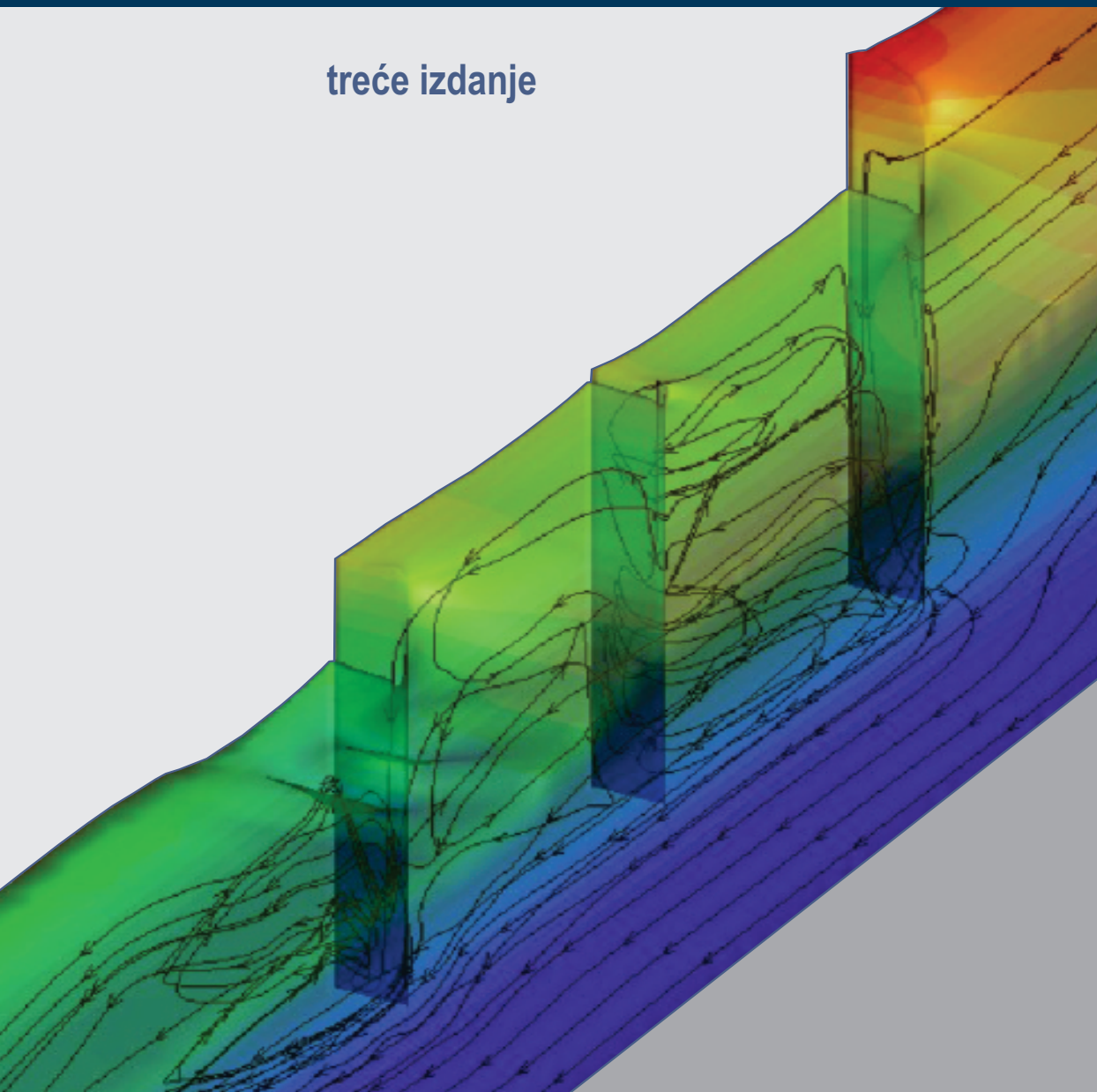


REGULACIJA REKA

Rečna hidraulika i morfologija

Miodrag B. Jovanović

treće izdanje



Univerzitet u Beogradu - Građevinski fakultet

UNIVERZITET U BEOGRADU

Miodrag B. Jovanović

REGULACIJA REKA

Rečna hidraulika i morfologija

treće izdanje



Gradjevinski fakultet
Beograd, 2021.

Miodrag B. Jovanović
REGULACIJA REKA
Rečna hidraulika i morfologija
Treće izdanje

Izdavač
Univerzitet u Beogradu
Gradjevinski fakultet, Beograd, 2021.

Za izdavača
Prof. dr Vladan Kuzmanović, dekan

Recenzenti
Prof. dr Stevan Bruk, dipl. gradj. inž.
Prof. dr Dragutin Muškatirović, dipl. gradj. inž.

Prelom teksta, crteži i korice
Autor

Slika na koricama
Numerička simulacija 3D strujanja između napera.

Knjiga je odobrena za štampu odlukom Nastavno-naučnog veća
Gradjevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu na sednici od 17.06.2021.

© 2021 Gradjevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
Sva prava zadržavaju izdavač i autor.

ISBN 978-86-7518-215-3

*Rekom, kao delom prirode,
ne može se vladati silom
već spoznajom.*

Howard Chang
američki hidrauličar

Predgovor prvom izdanju

Rečni tokovi su među najzagonetnijim tokovima koji se izučavaju u hidrotehnici. Složenost problema kojima se bave rečna hidraulika i morfologija proizilazi iz činjenice da je ponašanje prirodnih vodotoka slično ponašanju živih bića i da svaku prirodnu ili nasilnu promenu graničnih uslova prati reakcija vodotoka u pravcu uspostavljanja ravnoteže između protoka vode, pronosa nanosa i geometrijskog oblika korita. Tu reakciju vodotoka je često teško predvideti.

Ako se ima u vidu značaj koji reke imaju u životu ljudi, nije čudno da su predmet izučavanja od davnina. Naučna istraživanja u oblasti rečne hidraulike i morfologije, obavljena u drugoj polovini dvadesetog veka, prevazilaze po obimu istraživanja u svim drugim hidrauličkim disciplinama. Međutim, čini se da postignuti rezultati ne odgovaraju u potpunosti uložnim naporima. Proces koji se odvijaju u prirodnim vodotocima su tako složeni da opšta teorijska rešenja nisu moguća. Objašnjenje za to daje poznati naučnik Leopold (Leopold, 1960) kratkom konstatacijom: „Rečni tokovi su arhitekta sopstvene geometrije” [107].

Složenost procesa kojima se bavi rečna hidraulika najbolje je opisao Kenedi (Kennedy, 1983) na sledeći način [92]. Ako se pretpostavi da je strujanje vode pod pritiskom u pravoj cevi kružnog poprečnog preseka najjednostavniji vid turbulentnog strujanja, tečenje sa slobodnom površinom u prizmatičnom koritu pripada sledećoj kategoriji tokova po analitičkoj složenosti, jer položaj slobodne površine nije unapred poznat i zavisi od geometrijskih i konturnih uslova. Problem dodatno komplikuju fenomeni kao što su hidraulički skok, razne vrste translatornih talasa i dr. Kod prirodnih tokova je situacija još složenija, jer su im *sve granice pokretne*. Čak i pod pretpostavkom da obale nisu podložne eroziji, problem je dovoljno složen samom činjenicom da se površina vode i površina rečnog dna kontinualno menjaju u prostoru i vremenu.

U pokušaju kvantitativnih analiza prirodnih tokova inženjeri su suočeni sa brojnim neizvesnostima. Hidraulička rapavost, koja zavisi od krupnoće nanosa i dimenzija nanosnih formacija, nije unapred poznata, jer zavisi od brzine toka. Pored toga, prirodni vodotoci su *dvofazni tokovi*, čija čvrsta faza – rečni nanos, svojom koncentracijom utiče na fizičke karakteristike fluida, veličinu otpora i raspored brzine. Takva sprega različitih uticaja nameće potrebu raznih uprošćenja u fazi konceptualnog razvoja analitičkih modela, a iterativnih numeričkih postupaka u fazi njihove primene.

I pored svega, u oblasti rečne hidraulike i morfologije je učinjen značajan napredak razvojem računarskih tehnologija, numeričkih metoda i eksperimentalne opreme. Posebno je značajno što širenjem personalnih računara i internet tehnologija, rezultati naučnih istraživanja i nove metode proračuna postaju dostupni širem krugu inženjera – korisnika, što ubrzava unapredjenje hidrotehničke struke. U tom kontekstu, autorova je želja da ovom knjigom bar donekle umanja nedostatak literature na našem jeziku iz oblasti rečne hidraulike i morfologije. Odabrani sadržaji čine teorijsku podlogu Regulacije reka kao inženjerske discipline. Posebna knjiga biće posvećena regulacionim radovima i gradjevinama.

Ova knjiga je prvenstveno namenjena studentima Odseka za hidrotehniku Gradjevinskog fakulteta u Beogradu. Njom su obuhvaćeni i određeni sadržaji koji su interesantni za studente poslediplomske nastave na pomenutom fakultetu. Podrazumeva se da čitaoci poseduju solidno predznanje iz mehanike fluida i hidraulike. U knjigu je uvršćen veći broj računskih primera u cilju lakšeg razumevanja materije. Ovi primeri mogu korisno poslužiti i inženjerima u praksi.

Autor je čitaocima stavio na raspolaganje izvestan broj originalnih kompjuterskih programa čiji se spisak nalazi u Dodatku A, a koji se mogu bez nadokande preuzeti sa sajta: <http://www.grf.bg.ac.yu/mjovanovic/>.

Autor je zahvalan recenzentima - profesorima Stevanu Bruku i Dragutinu Muškatiroviću, kao i kolegama - Dejani Djordjević, Ljubodragu Saviću i Slobodanu Djordjeviću, na pažljivom čitanju teksta i korisnim sugestijama. Izdavanje ove knjige su finansijski pomogli: Energoprojekt-Hidroinženjering, Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi” i JVP „Srbijavode” iz Beograda.

Beograd, mart 2002.

Autor

Predgovor drugom izdanju

Prvo izdanje knjige, štampano u tiražu od 250 primeraka, koristile su četiri generacije studenata Građevinskog fakulteta u Beogradu, a nadam se, i mnogi inženjeri u praksi. Manji broj primeraka stigao je i do drugih građevinskih fakulteta u zemlji, kao i do susednih zemalja bliskog govornog područja.

U drugom izdanju su unete sledeće izmene i dopune:

- poglavlja 2 (elementi teorije graničnog sloja) i 3 (linijski otpori u koritu sa nepokrenim dnom) dopunjena su boljim definisanjem veze empirijskih koeficijenata trenja i relativne rapavosti;
- poglavlje 5 (neustaljeno tečenje u prirodnim vodotocima) dopunjeno je primerima numeričke simulacije ravanskih tokova, sa namerom da se ukaže na velike mogućnosti savremenih višedimenzionih računskih modela i na njihovu sve veću primenu u praksi;
- poglavlje 9 (pokretanje nanosa) je prošireno detaljnijim objašnjenjem koncepta kritične brzine i tumačenjem veze između kritične brzine i kritičnog tangencijalnog napona;
- u poglavljima 10 (vučeni nanos) i 11 (suspendovani i ukupni nanos) prošireni su delovi teksta koji se odnose na terenska merenja, prikazom savremenih mernih uređaja i tehnologija;
- poglavlje 13 (fizički modeli) je u celini preradjeno, sa težištem na rečnim fizičkim modelima u potpunoj i nepotpunoj sličnosti;
- izvršena je ponovna redakcija celokupnog teksta, uz otklanjanje uočenih štamparskih i drugih grešaka. Poboľšan je izgled većeg broja crteža i dijagrama. Na jednom broju dijagrama decimalni znak je tačka, što je posledica korišćenja komercijalnog grafičkog softvera.

I pored uložnog truda na pripremi, tehničkoj obradi i redakciji teksta, autor je svestan da ni ovo drugo izdanje neće biti bez nedorečenosti i štamparskih grešaka. Zato će biti zahvalan čitaocima ako mu na njih ukažu.

Nadam se da će ova knjiga i dalje koristiti studentima za lakše savladavanje nastavnog programa, a inženjerima za uspešno rešavanje složenih zadataka u praksi.

Beograd, februar 2008.

Autor

Predgovor trećem izdanju

Drugo izdanje ove knjige našlo je put do mnogih čitalaca u našoj zemlji i u inostranstvu. Iako je ova knjiga napisana prvenstveno za potrebe nastave iz predmeta Regulacija reka na Građevinskom fakultetu u Beogradu, autor je imao priliku da se i lično uveri da se njegova knjiga koristi u svakodnevnoj inženjerskoj praksi.

Treće izdanje ove knjige se u pogledu sadržaja ne razlikuje od drugog (izmenjenog i dopunjenog) izdanja. Samo su izpravljene uočene štamparske greške. U nameri da se studentima što pre obezbedi novo izdanje knjige, nije razmatrana mogućnost dopune sadržaja, niti unapredjenja tehničke obrade (štampe u boji).

Ovo, treće izdanje knjige dostupno je u papirnom formatu i u digitalnom formatu na internet stranici www.grf.bg.ac.rs/~mjovanovic/.

Beograd, jun 2021.

Autor

Sadržaj

Spisak oznaka

1	Geomorfološke karakteristike prirodnih vodotoka	1
1.1	Uvodna razmatranja	1
1.1.1	Nastanak prirodnih vodotoka i njihova podela	2
1.1.2	Slivno područje	3
1.1.3	Rečna dolina i rečni tok	3
1.1.4	Topologija hidrografske mreže	5
1.2	Geomorfološke promenljive	5
1.3	Hidraulička geometrija rečnog korita	9
1.3.1	Oblici u horizontalnoj projekciji	9
1.3.2	Uzdužni profil	11
1.3.3	Poprečni profili	14
1.3.4	Konfiguracija rečnog dna	14
1.4	Meandrirajući aluvijalni vodotoci	14
1.4.1	Mehanizam formiranja meandrirajućih vodotoka	14
1.4.2	Klasifikacija meandrirajućih vodotoka	15
1.4.3	Veza između oblika korita u planu i u poprečnom profilu	16
1.5	Rečna ušća	21
1.6	Dinamika aluvijalnih vodotoka	23
1.6.1	Reka kao adaptivni dinamički sistem	23
1.6.2	Granična geomorfološka stanja	24

1.6.3	Stabilno korito aluvijalnog vodotoka	26
1.7	Završne napomene	27
2	Elementi teorije graničnog sloja	29
2.1	Pojam graničnog sloja	29
2.2	Turbulentne karakteristike razvijenog graničnog sloja	30
2.3	Raspored tangencijalnog napona po dubini otvorenog toka	32
2.4	Komponente tangencijalnog napona	34
2.5	Modeliranje turbulentnih napona	35
2.6	Raspored brzine po dubini toka	37
2.7	Opšti logaritamski raspored brzine	42
2.8	Ajnštajnova varijanta logaritamskog zakona	45
2.9	Osrednjavanje brzine po dubini	46
2.10	Prošireni logaritamski zakon	47
2.11	Teorijski raspored u obliku stepene funkcije	49
2.12	Raspored koeficijenta turbulentne viskoznosti po dubini toka	50
2.13	Raspored tangencijalnog napona po poprečnom preseku	52
2.14	Raspored brzine po poprečnom preseku	53
3	Linijski otpori u koritu sa nepokretnim dnom	57
3.1	Empirijski izrazi za otpore trenja	57
3.2	Ocena vrednosti koeficijenata trenja	58
3.3	Linijski otpori usled vegetacije	63
3.4	Neuniformni raspored rapavosti po poprečnom preseku	69
3.5	Koeficijent otpora deonice	71
4	Nanosne formacije i aluvijalni otpori	75
4.1	Tipovi nanosnih formacija	75
4.2	Pojam aluvijalnog otpora	78

<i>Sadržaj</i>	xi
4.3 Procena vrste nanosnih formacija	80
4.4 Procena dimenzija nanosnih formacija	85
4.5 Procena veličine aluvijalnog otpora	86
4.6 Odredjivanje krive protoka na osnovu aluvijalnog otpora	87
5 Neustaljeno tečenje u prirodnim vodotocima	93
5.1 Podela neustaljenih tokova	93
5.2 Jednačine linijskog neustaljenog tečenja	95
5.3 Konturni uslovi	102
5.4 Numeričko rešavanje osnovnih jednačina	103
5.4.1 Metoda karakteristika	104
5.4.2 Metoda konačnih razlika	108
5.5 Uprošćene metode	123
5.5.1 Kriva protoka	124
5.5.2 Model kinematičkog talasa	126
5.5.3 Model difuzionog talasa	128
5.5.4 Metode zasnovane na funkciji zapremine korita	129
5.6 Ravanski tokovi	143
6 Ustaljeno tečenje u prirodnim vodotocima	149
6.1 Podela ustaljenih tokova	149
6.2 Jednačine linijskog ustaljenog tečenja	152
6.3 Geometrijski elementi poprečnog preseka	155
6.4 Hidraulički parametri složenog preseka	156
6.5 Normalna i kritična dubina u koritu složenog preseka	158
6.6 Proračun linije nivoa	162
6.6.1 Miran i buran režim tečenja	162
6.6.2 Mešoviti režim tečenja	163

6.7	Odredjivanje vrednosti koeficijenta otpora	166
6.8	Rečna ušća	170
6.9	Mostovska suženja	172
6.9.1	Karakter tečenja u mostovskim suženjima	172
6.9.2	Proračun uspora usled mostovskog suženja	173
6.10	Mreže otvorenih tokova	186
7	Sekundarna strujanja	193
7.1	Strujanje u krivini	193
7.1.1	Osnovne jednačine	194
7.1.2	Raspored radijalne brzine po dubini	198
7.1.3	Poprečni nagib linije nivoa	199
7.1.4	Raspored radijalne brzine po širini korita	202
7.1.5	Helikoidno strujanje	203
7.1.6	Raspored radijalnog napona	204
7.1.7	Energetski gubici u krivini	205
7.1.8	Neke praktične posledice strujanja u krivini	206
7.2	Sekundarno strujanje u zoni mostovskih stubova	207
7.3	Ostali vidovi sekundarnih strujanja	209
8	Poreklo i fizička svojstva rečnog nanosa	213
8.1	Nastanak i podela rečnog nanosa	213
8.2	Fizička svojstva rečnog nanosa	214
8.2.1	Fizička svojstva pojedinačnog zrna	214
8.2.2	Fizička svojstva mešavine nanosa	221
9	Pokretanje rečnog nanosa	233
9.1	Dimenziona analiza	233
9.2	Vučeni nanos. Determinističke metode	237

9.2.1	Kritična brzina	237
9.2.2	Kritični tangencijalni napon. Šildsov dijagram	239
9.2.3	Uslov pokretanja izveden iz ravnoteže sila koje deluju na pojedinačno zrno	243
9.2.4	Veza kritične brzine i kritičnog napona	248
9.2.5	Korekcije kritičnog tangencijalnog napona	249
9.3	Stohastički model pokretanja nanosa	252
9.4	Početak formiranja suspenzije	257
10	Vučeni nanos	259
10.1	Mehanizam kretanja vučenog nanosa	259
10.2	Transportni kapacitet vodotoka	260
10.3	Metode proračuna pronosa vučenog nanosa	261
10.3.1	Pristup zasnovan na kritičnoj brzini	263
10.3.2	Pristup zasnovan na kritičnom naponu	265
10.3.3	Pristup zasnovan na koncentraciji nanosa	271
10.3.4	Energetski pristup	273
10.3.5	Stohastički pristup	275
10.4	Problemi izučavanja vučenog nanosa	283
10.5	Hidrografska merenja	287
10.5.1	Merenje geometrije rečnog korita („batimetrija”)	287
10.5.2	Merenje polja brzine	291
10.5.3	Merenje pronosa vučenog nanosa	293
11	Suspendovani i ukupni nanos	305
11.1	Pronos suspendovanih čestica turbulentnom difuzijom	306
11.1.1	Turbulentna struktura rečnih tokova	306
11.1.2	Osnovne pretpostavke u teoriji turbulentne difuzije	306
11.1.3	Koncentracija nanosa	307

11.1.4	Rejnoldsova analogija	308
11.1.5	Raspored difuzionog koeficijenta za nanos	309
11.2	Jednačina održanja mase suspendovanog nanosa	309
11.3	Raspored koncentracije u stabilnoj suspenziji	311
11.4	Referentno odstojanje i referentna koncentracija	320
11.5	Proračun pronosa suspendovanog nanosa	321
11.5.1	Integracija izmerenih profila brzine i koncentracije	321
11.5.2	Ajnštajnova metoda i njoj srodne metode	322
11.5.3	Metode kod kojih se referentna koncentracija definiše korela- cionim zavisnostima	328
11.6	Tokovi sa visokom koncentracijom nanosa	335
11.7	Energetski pristup u analizi suspendovanog nanosa	338
11.8	Kretanje suspendovanog nanosa u neravnotežnim uslovima	343
11.9	Metode proračuna ukupnog (totalnog) pronosa	344
11.10	Merenje pronosa suspendovanog nanosa	348
11.10.1	Način merenja i merni uređaji	349
11.10.2	Problemi zahvatanja uzoraka i tačnost merenja	352
11.10.3	Obrada rezultata merenja	352
12	Deformacija rečnog korita	357
12.1	Jednačina kontinuiteta za nanos	357
12.2	Opšta deformacija rečnog korita	361
12.2.1	Matematički modeli opšte deformacije	362
12.2.2	Opšta erozija rečnog korita	370
12.3	Lokalna deformacija rečnog korita	377
12.3.1	Erozija oko mostovskih stubova	378
12.3.2	Erozija u zoni poprečnih gradjevina	386
12.3.3	Erozija nizvodno od prelivnih objekata	389

12.4 Primeri uticaja regulacionih radova na deformaciju korita	391
13 Fizički modeli	397
13.1 Uvodne napomene	397
13.2 Razmere i zakoni sličnosti	398
13.3 Rečni fizički modeli sa nepokretnim dnom	399
13.4 Rečni fizički modeli sa pokretnim dnom	404
13.4.1 Rečni modeli u potpunoj sličnosti	404
13.4.2 Rečni modeli u nepotpunoj sličnosti	409
13.5 Efekti razmere	413
14 Morfološke analize prirodnih vodotoka	415
14.1 Teorija režima	416
14.2 Racionalni pristup u određivanju stabilnog korita	420
14.2.1 Hipoteze ekstremnih uslova	421
14.2.2 Računski model	422
14.3 Statistička analiza morfoloških podataka	424
14.3.1 Prikupljanje podloga	425
14.3.2 Obrada podataka	425
14.4 Morfološke analize u sklopu uređenja aluvijalnih vodotoka	432
14.4.1 Određivanje prosečnog pronosa vučenog nanosa	433
14.4.2 Izbor regulacionih elemenata	436
14.4.3 Analiza efekata regulacionih radova	438
Literatura	439
Dodaci	451
Registar autora	461
Registar pojmova	463

Spisak oznaka

A	konstanta, funkcija standardne normalne raspodele
A	aktivna površina poprečnog preseka [m ²]
A_d	površina poprečnog preseka za procenu deformacije [m ²]
A_o	neaktivna (retenziona) površina poprečnog preseka [m ²]
A_*	Ajnštajnova konstanta u analizi vučenog nanosa [-]
a	koeficijent, referentno odstojanje od dna [m]
a_r	centrifugalno ubrzanje [m/s ²]
B	integraciona konstanta
B	širina vodenog ogleдалa [m]
B_v	aktivna širina pronosa vučenog nanosa [m]
B_*	Ajnštajnova konstanta u analizi vučenog nanosa [-]
b	koeficijent, širina u dnu trapeznog preseka [m]
b_h	širina otvora hvatača za vučeni nanos [m]
b_M	širina propusta u mostovskoj prilaznoj konstrukciji [m]
b_m	širina mostovskog otvora u glavnom koritu [m]
b_s	širina mostovskog stuba [m]
C	Šezijev koeficijent [m ^{1/2} /s]
C	zapreminska koncentracija [-]
C_D	koeficijent otpora [-]
C_F	bezdimenziona sila [-]
C_a	referentna zapreminska koncentracija [-]
C_m	masena koncentracija [kg/m ³]
C_g	težinska koncentracija [N/m ³]
C_o	srednja koncentracija nanosa u pokretnom sloju dna [-]
C_{max}	najveća koncentracija nanosa na dnu [-]
C_τ	koeficijent tangencijalnog napona [-]
C_{Q1}	koeficijent protoka nepotopljenog preliivanja [-]
C_{Q2}	koeficijent protoka potopljenog preliivanja [-]
Cr	Kurantnov broj [-]
c	konstanta, brzina prostiranja talasa [m/s]
c_b	brzina prostiranja peščanih talasa [m/s]
c_m	koeficijent meandriranja u izrazu za otpor deonice [-]
c_w	brzina prostiranja zvuka kroz vodu [m/s]
c_{db}	konstanta u izrazu Di Bojsa za vučeni nanos
c_{mp}	empirijski faktor u metodi Majer-Petera i Milera

D/Dt	operator materijalnog izvoda
D	difuzioni koeficijent [m^2/s], prečnik cilindričnog stuba [m]
d	totalni diferencijal
d	prečnik zrna [mm]
\bar{d}	srednji prečnik mešavine [mm]
d_E	Ajnštajnov karakteristični prečnik mešavine [mm]
d_a	srednji prečnik zrna u armirajućem sloju [mm]
d_o	prečnik zrna u referentnom profilu [mm]
d_s	merodavni prečnik zrna u metodi fan Rejna [mm]
d_*	bezdimenzioni prečnik zrna [-]
d_{amax}	najkrupnije zrno u armirajućem sloju [mm]
E	kota energije [mnm], modul elastičnosti [Pa]
e	osnova prirodnih logaritama
e	faktor ekscentričnog položaja mostovskog otvora u odnosu na osovinu toka
F	funkcija (raspodele, kumulativne frekvencije)
F	intenzitet hidrodinamičke sile [N]
\vec{F}_A	površinska sila
\vec{F}_V	zapreminska sila
F_c	intenzitet centrifugalne sile [N]
F_g, F_{gc}	bezdimenzioni parametri u metodi Akersa i Vajta [-]
F_s	intenzitet hidrodinamičke sile na stub [N]
F_x	komponenta hidrodinamičke sile u x pravcu [N]
F_z	komponenta hidrodinamičke sile u z pravcu [N]
F_1, F_2	funkcije u rasporedu radijalne brzine po Rozovskom
F_A, F_B	funkcije u rasporedu radijalne brzine po Kikavi i dr.
f	funkcija frekvencije (gustine raspodele)
f	funkcija, frakcija granulometrijskog sastava, koeficijent trenja čvrstih materijala u suvom [-]
f'	koeficijent trenja čvrstih materijala pod vodom [-]
f_n	funkcija normalne dubine [m^3/s]
f_o	frekvencija emitovanja ultrazvučnog signala [-]
f_s	funkcija skoka („specifična sila”) [m^3]
f_D	frekvencija prijema ultrazvučnog signala [-]
f_ω	empirijska funkcija proširenog logaritamskog zakona
Fr	Frudov broj [-]
Fr'	Frudov broj složenog korita [-]
Fr_c	kritični Frudov broj za pokretanje zrna [-]
G	intenzitet sile težine [N]
g	gravitaciono ubrzanje [m/s^2]
G_*	bezdimenzioni parametar zrna [-]
G_x	komponenta sile težine u x pravcu [N]
G_z	komponenta sile težine u z pravcu [N]
H	srednja profilska dubina [m]

h	dubina toka [m]
h_a	debljina armirajućeg sloja [m]
h_e	eroziona dubina u proračunu armirajućeg sloja [m]
h_k	kritična dubina [m]
h_n	normalna dubina [m]
h_s	dubina eroziona jame [m]
h_{se}	terminalna dubina eroziona jame [m]
h_v	prosečna visina trave [m]
I	moment inercije [m ⁴], intenzitet inercijalne sile [Pa]
I_d	uzdužni nagib dna po talvegu [-]
I_k	kritični uzdužni nagib dna [-]
I_r	radijalni (poprečni) nagib nivoa u krivini [-]
I_{do}	lokalni nagib dna u referentnom profilu [-]
I_{dr}	lokalni poprečni nagib dna u krivini [-]
I_{Π}	uzdužni nagib linije nivoa [-]
I_e	uzdužni nagib linije energije [-]
I_e^k	dopunski nagib linije energije u krivini [-]
I_r	poprečni (radijalni) nagib linije nivoa [-]
I_1, I_2	integrali u Ajnštajnovoj analizi suspendovanog nanosa
i	indeks
it	broj iteracije
J	Jakobijan matrica
J	Rimanova invarijanta [m/s]
j	indeks
K	modul protoka [m ² /s], parametar metode Maskingam [sati]
K_b	koeficijent gubitka energije usled mostovskog suženja [-]
K_m	koeficijent ukupnog gubitka energije u profilu mosta [-]
k	oznaka vremenskog nivoa, apsolutna rapavost [m]
k_s	ekvivalentna peščana rapavost [m]
k_v	apsolutna rapavost trave [m]
k_W	eksponent u izrazu za efektivnu brzinu taloženja [-]
k_{sa}	ekvivalentna aluvijalna peščana rapavost [m]
k_0, k_1, k_2, k_3, k_4	korekcionni koeficijenti Šildsovog broja
L	dužina deonice [m]
L_a	karakteristična morfološka razmera [m]
L_e	dužina poprečne gradjevine [m]
L_s	dužina mostovskog stuba [m]
l	dužina mešanja u modelu Prandtl [m]
M	faktor suženja korita, oznaka major korita
m	koeficijent nagiba kosine (ctg α_s)
m	eksponent teorijskog rasporeda brzine, masa [kg]
N	broj elemenata u nizu, red vodotoka
n	Maningov koeficijent rapavosti [m ^{-1/3} s]
n_e	ekvivalentni Maningov koeficijent [m ^{-1/3} s]

n_s	broj stubova
O	okvašeni obim [m], red aproksimacije
P	funkcija raspodele - verovatnoća
\bar{P}	sila pritiska [N]
p	pritisak u tački [Pa], zastupljenost
Q	protok vode [m ³ /s]
Q_v, Q_{vm}, Q_{vt}	ponos vučenog nanosa u profilu: <i>zapreminski</i> [m ³ /s], <i>maseni</i> [kg/s], <i>težinski</i> [N/s]
Q_s, Q_{sm}, Q_{st}	ponos suspendovanog nanosa u profilu: <i>zapreminski</i> [m ³ /s], <i>maseni</i> [kg/s], <i>težinski</i> [N/s]
Q_u, Q_{um}, Q_{ut}	ponos ukupnog (totalnog) nanosa u profilu: <i>zapreminski</i> [m ³ /s], <i>maseni</i> [kg/s], <i>težinski</i> [N/s]
q	jedinični protok vode [m ³ /(s m)]
q_v, q_{vm}, q_{vt}	jedinični pronos vučenog nanosa: <i>zapreminski</i> [m ³ /(s m)], <i>maseni</i> [kg/(s m)], <i>težinski</i> [N/(s m)]
q_s, q_{sm}, q_{st}	jedinični pronos suspendovanog nanosa: <i>zapreminski</i> [m ³ /(s m)], <i>maseni</i> [kg/(s m)], <i>težinski</i> [N/(s m)]
q_u, q_{um}, q_{ut}	jedinični pronos ukupnog (totalnog) nanosa: <i>zapreminski</i> [m ³ /(s m)], <i>maseni</i> [kg/(s m)], <i>težinski</i> [N/(s m)]
R	hidraulički radijus [m], rezultanta sila koje deluju na zrno [N]
R_a	koeficijent autokorelacije [-]
R_k	poluprečnik krivine [m]
R_{ko}	poluprečnik krivine do osovine toka [m]
r	radijalno odstojanje [m]
r_k	zakrivljenost ($1/R_k$) [m ⁻¹]
Re	Rejnoldsov broj [-]
Re_δ	Rejnoldsov broj na granici viskoznog podsloja [-]
Re_*	smičući Rejnoldsov broj [-]
Re_W	Rejnoldsov broj zrna i njegove brzine tonjenja [-]
S	faktor sinusoidnosti
S	izvorni član [m/s ²]
S_f	faktor sferičnosti zrna nanosa [-]
S_g	geometrijski koeficijent asimetrije raspodele krupnoće zrna [-]
S_p	faktor oblika zrna nanosa [-]
S_r	brzina erozionog procesa [kg/(sm ²)]
S_u	koeficijent uniformnosti zrna [-]
s	krivolinijsko odstojanje [m], relativna gustina [-]
St	Struhalov broj [-]
T	bezdimenzioni parametar smičućeg napona [-]
T	vremenski period [s], troškovi [din], intenzitet sile trenja [N]
T_b	perioda kretanja dina [s]
T_s	perioda oscilatornog toka u mostovskom suženju [s]
t	vreme [s]
t_p	trajanje rastuće grane hidrograma [s]

U	brzina u definiciji debljine graničnog sloja [m/s]
u	trenutna lokalna brzina u x pravcu [m/s]
u_b	prosečna brzina peščanih talasa (dina) [m/s]
u_d	lokalna brzina toka na visini zrna na dnu [m/s]
u_c	lokalna kritična brzina [m/s]
u_o	prosečna brzina pokretnog sloja na dnu [m/s]
u_s	brzina sloja u metodi Di Bojsa, brzina čestice nanosa [m/s]
u_{dc}	kritična lokalna brzina pokretanja zrna na dnu [m/s]
u'	lokalna fluktuaciona brzina u x pravcu [m/s]
u_*	lokalna smičuća brzina u x pravcu [m/s]
u_{*c}	lokalna kritična smičuća brzina u x pravcu [m/s]
\bar{u}	vremenski osrednjena lokalna brzina u x pravcu [m/s]
\tilde{u}	srednja brzina po dubini u x pravcu [m/s]
u_{\max}	najveća brzina u posmatranoj vertikali [m/s]
V	srednja profilska brzina toka [m/s]
V_a	brzina neporemećenog toka uzvodno od mosta [m/s]
V_o	brzina u zoni mostovskog stuba [m/s]
V_*	srednja profilska smičuća brzina [m/s]
V_{*c}	kritična smičuća brzina [m/s]
v	lokalna komponenta brzine u y pravcu, ili r pravcu [m/s]
v_r	radijalna relativna brzina koju meri ADCP uređaj [m/s]
v'	lokalna komponenta fluktuacione brzine u y pravcu [m/s]
v_*	lokalna smičuća brzina u y pravcu [m/s]
W	brzina tonjenja zrna u mirnoj vodi [m/s]
W'	brzina ometanog taloženja, efektivna brzina tonjenja [m/s]
w	lokalna komponenta brzine u z pravcu [m/s]
w'	lokalna komponenta fluktuacione brzine u z pravcu
X	parametar u metodi Maskingam, slučajna veličina
X'	korekcionni faktor u Ajnštajnovom rasporedu brzine [-]
x	koordinatni pravac glavnog toka
x_g	položaj težišta oblaka obeleživača [m]
x_o	referentno (početno) odstojanje u x pravcu [m]
Y	korekcionni koeficijent u Ajnštajnovoj metodi [-]
y	koordinatni pravac u ravni poprečnog preseka
z	vertikalni koordinatni pravac
z	promenljiva standardne normalne raspodele [-]
z_d	kota dna [mnm]
z_o	referentno odstojanje od dna [m]
Z	kota slobodne površine [mnm]
Z_p	kota krune preлива [mnm]
Z_k	kota nivoa vode u retenziji [mnm]
Z^*	suspenzioni broj [-]
$Z^{*'} $	korigovani suspenzioni broj u metodi fan Rajna [-]

Grčki simboli:

α	težinski faktor, koeficijent neravnomernosti brzine u popr. preseku
α_d	ugao koji linija dna zaklapa sa horizontalom
α_h	koeficijent neravnomernosti brzine po dubini toka [-]
α_r	ugao poprečnog nagiba dna u krivini [-]
α_s	ugao koji kosina obale zaklapa sa horizontalom
α_1	empirijski koeficijent u izrazu Šoklića [-]
α_2	empirijski koeficijent - „specifična abrazija” [m ⁻¹]
β	koeficijent količine kretanja, ugao, odnos koeficijenata mešanja za nanos i vodu [-]
β_e	korekcionni faktor u Ajnštajnovoj metodi [-]
β_1, β_2	koeficijenti korelacije
γ_v	ugao između vektora brzine u krivini i osovine toka
γ_τ	ugao između pravca smičućeg napona u krivini i osovine toka
Δ	diferencni operator, priraštaj (konačna razlika), relativna gustina nanosa [-]
ΔA_d	deformacija poprečnog preseka [m ²]
ΔE	Ajnštajnova apsolutna rapavost mešavine [m]
ΔK_p	koeficijent gubitka energije kod mostovskih stubova [-]
ΔK_e	koeficijent gubitka energije kod mostovskih otvora [-]
ΔZ	nadvišenje nivoa u krivini, denivelacija [m]
Δ_b	visina peščanih talasa [m]
Δp	zastupljenost frakcije [%]
Δt	vremenski korak [s]
Δx	prostorni korak u x pravcu [m]
Δy	prostorni korak u y pravcu [m]
Δh_1	uspor neposredno uzvodno od mosta [m]
Δh_r	uspor na proizvoljnom odstojanju uzvodno od mosta [m]
Δz_d	vertikalna deformacija u poprečnom preseku [m]
δ	debljina graničnog sloja [m], Kronekerov simbol
δ_o	debljina pokretnog sloja vučenog nanosa [m]
δ_s	debljina pojedinih slojeva u metodi Di Boa [m]
δ_v	debljina viskoznog podsloja [m]
ϵ	mala vrednost, pokazatelj efekata razmere
ϵ_s	difuzioni koeficijent (koeficijent mešanja) čestica nanosa [m ² /s]
η	bezdimenziono odstojanje od dna [-]
η_a	referentno bezdimenziono odstojanje [-]
η_v	koeficijent efikasnosti toka za pronos vučenog nanosa [-]
η_s	koeficijent efikasnosti toka za pronos suspendovanog nanosa [-]
η'_s	koeficijent transportnog kapaciteta za suspendovani nanos [kg s ² /m ⁴]
η'^{\pm}	granične vrednosti koeficijenata transportnog kapaciteta [kg s ² /m ⁴]
Θ	bezdimenzioni tangencijalni napon (Šildsov broj)
Θ_c	bezdimenzioni kritični tangencijalni napon (kritični Šildsov broj)

θ	težinski faktor
κ	fon Karmanova konstanta
Λ	talasna dužina [m]
Λ_b	talasna dužina pešćanih formacija [m]
Λ_m	talasna dužina meandra [m]
λ	Darsi-Vajsbahov koeficijent [-], sopstvena vrednost
λ_o	poroznost [-]
μ	koeficijent viskoznosti [N s/m^2], eksponent rasporeda brzine
μ_m	dinamički koeficijent viskoznosti mešavine [N s/m^2]
μ'	faktor ometanog taloženja [-]
ν	kinematički koeficijent viskoznosti [m^2/s]
ν_t	koeficijent turbulentne (vrtložne) viskoznosti [m^2/s]
ξ	koeficijent lokalnog gubitka, redukcionni faktor τ napona [-]
	korekcionni koeficijent u Ajnštajnovoj metodi [-]
ξ_s	koeficijent lokalnog gubitka u suženju [-]
ξ_p	koeficijent lokalnog gubitka u proširenju [-]
ρ	gustina vode [kg/m^3]
ρ_a	gustina vazduha [kg/m^3]
ρ_m	gustina mešavine vode i nanosa [kg/m^3]
ρ_s	gustina nanosa [kg/m^3]
ρ_z	zapreminska masa nanosa u suvom [kg/m^3]
ρ'_z	zapreminska masa nanosa pod vodom [kg/m^3]
σ	standardna devijacija, korekcionni faktor
σ_e	efektivni normalni napon u pokretnom sloju dna [Pa]
τ	lokalni tangencijalni napon [Pa]
τ_o	tangencijalni napon na dnu [Pa]
τ_r	tangencijalni napon u krivini, u radijalnom pravcu [Pa]
τ_s	tangencijalni napon u krivini, u tangencijalnom pravcu [Pa]
	tangencijalni napon na kosini obale [Pa]
τ_t	turbulentni (Rejnoldsov) napon [Pa]
τ_v	viskozni smičući napon [Pa]
τ_1	granična nosivost u Bingamovom reološkom modelu [Pa]
τ_{ac}	kritični napon za najkrupnije zrno armirajućeg sloja [Pa]
τ_{oc}	kritični tangencijalni napon [Pa]
τ_{or}	tangencijalni napon na dnu u radijalnom pravcu [Pa]
Π	koeficijent snage vrtložnog traga, bezdimenzioni broj
Φ	bezdimenzioni pronos vučenog nanosa, intenzitet transporta [-]
ϕ	ugao unutrašnjeg trenja u suvom [$^\circ$], proizvoljna morfološka veličina
ϕ'	ugao unutrašnjeg trenja pod vodom [$^\circ$]
φ	empirijski koeficijent u izrazu Gončarova [-], ugao između osovine toka i mostovskog stuba ili građevine u koritu [$^\circ$]
χ	faktor linearne kombinacije
Ψ	parametar intenziteta smicanja (Θ^{-1}) [-]

- ψ korekcionni faktor suspenzionog broja u metodi fan Rejna [-],
empirijska funkcija u metodi Karima i Kenedija
- Ω površina vodenog ogledala u planu [m²]
- ω centralni ugao [°], faktor podrelaksacije [-]

Specijalni simboli:

- \mathcal{B} Beta funkcija
- \mathcal{D} faktor distorzije fizičkih modela [-]
- \mathcal{E} specifična energija po jedinici težine fluida [m]
- \mathcal{F} pomoćna funkcija u metodi fan Rejna [-]
- \mathcal{R} vektor ostataka
- \mathcal{R} ostatak (rezidual), odnos srednje profilske koncentracije i koncentracije u referentnoj tački [-]
- \forall zapremina [m³]
- ' fluktuaciona veličina, odstupanje od srednje vrednosti, deo otpora usled apsolutne rapavosti, pomoćna/korigovana vrednost, vrednost u vlažnom stanju
- " deo otpora oblika usled nanosnih formacija
- osrednjavanje po vremenu, osrednjavanje po dužini vodotoka, aritmetička sredina, poznata vrednost
- ~ osrednjavanje po dubini toka
- ~ osrednjavanje po poprečnom preseku
- ^ naznaka težišnog odstojanja
- * razmera

1

Geomorfološke karakteristike prirodnih vodotoka

U ovom poglavlju se razmatraju geomorfološki oblici i opšte zakonitosti formiranja prirodnih, pre svega aluvijalnih vodotoka. Aluvijalni vodotok je reka čije se geometrijske karakteristike – uzdužni profil i poprečni profili, kao i oblici korita u horizontalnoj projekciji, menjaju tokom vremena u zavisnosti od protoka vode, vrste i količine rečnog nanosa, kao i od vrste materijala od koga su formirane obale. Rečni nanos, koji potiče od raspadnutih stena i koji se posredstvom vodotoka taloži preko ranijih geoloških naslaga, zove se *aluvijum*¹, pa otuda i naziv „aluvijalni vodotok”.

Kako je protok u reci posledica meteoroloških i hidroloških uslova koji su slučajnog (stohastičkog) karaktera, to se i geometrijske karakteristike rečnog korita menjaju na posve slučajni način. Korito aluvijalnog vodotoka je u procesu stalnog prilagodjavanja promenama protoka vode i nanosa, kao i promenama vodnog režima koje su izazvane ljudskom delatnošću.

1.1 Uvodna razmatranja

Geomorfologija je nauka o oblicima zemljine kore. U kontekstu prirodnih vodotoka, geomorfologija se bavi odnosom rečne doline i rečnog korita i geoloških, odnosno fiziografskih karakteristika slivnog područja.

Geomorfološki razvoj prirodnih vodotoka je uslovljen brojnim faktorima, od kojih su tri najznačajnija faktora: katastrofalni događaji (tektonski poremećaji, klizišta, poplave i dr.), otpornost tla na eroziju (koja zavisi od prisustva vegetacije na slivnom području) i ljudska delatnost (promene namene zemljišta, urbanizacija, uređenje vodotoka itd.).

¹Na latinskom, glagol „luere” znači spirati.

1.1.1 Nastanak prirodnih vodotoka i njihova podela

Prirodni vodotoci – reke, nastaju kao posledica oticaja vode koja dospeva na zemljinu površinu u vidu padavina, ili iz podzemlja. *Hidrografska mreža* obuhvata sve površinske tokove slivnog područja.

Razni su načini podele prirodnih vodotoka. Po mestu nastanka, reke se dele na one koje izvire iz podzemlja, one koje ističu iz jezera i one koje nastaju topljenjem glečera. Reke se mogu ulivati u druge, veće reke, u jezera ili more, a reke ponornice uviru u podzemlje.

Prema hidrauličkim karakteristikama, reke se dele na bujične, planinske i ravničarske reke. *Bujični vodotoci*, koji se javljaju u višim delovima sliva, mogu biti stalni ili povremeni (efemerni). Karakterišu ih velike varijacije protoka, odnosno nagle i kratkotrajne poplave, pri čemu se pokreće velika količina materijala iz rečnog korita².

Planinske reke, kao i bujice, karakterišu veliki uzdužni nagibi korita, sa pojavom silovitog režima tečenja. Obiluju krupnim nanosom.

Ravničarske reke se javljaju u nižim delovima sliva, gde je uzdužni nagib korita manji, a intenzitet hidroloških i hidrauličkih promena slabije izražen. Ove reke odlikuje miran režim tečenja i sitan peščani nanos.

Opisanu podelu treba shvatiti uslovno, jer ista reka u gornjem delu sliva obično ima bujični, a u donjem delu, ravničarski karakter. Mnogim rekama je režim izmenjen ljudskom delatnošću. To su na primer vodotoci čija je dužina skraćena prosecanjem krivina, kanalisane reke koje su pregradjene nizom „stepenica” – brana, kao i reke u čijem je gornjem toku formirana akumulacija pomoću koje se diktira režim protoka i nivoa u donjem toku.

Sa geološke tačke gledišta, prirodni vodotoci se dele na mlade, zrele i stare. *Mladi vodotoci* su karakteristični za početnu fazu formiranja korita koje tok useca u pokretnom ili nepokretnom raspadnutom stenskom materijalu. Primer mladih vodotoka su planinski i bujični vodotoci.

Zreli vodotoci imaju šire korito od mladih vodotoka i blaže uzdužne nagibe dna. Njihovo korito je u postepenom razvoju, sa povremenim stanjima dinamičke ravnoteže, kada je energija toka dovoljna da ponese sav raspoloživi nanos.

Stari vodotoci odražavaju nastavak razvoja zrelih vodotoka pod uticajem erozionih procesa. Karakterišu ih široke doline, mali uzdužni nagibi dna, prisustvo aluvijalnih naslaga (terasa) i ostataka napuštenih delova korita.

²Kod nas se bujični tokovi vezuju za slivne površine ispod 100 km² (što je uslovni kriterijum). Odnos velikih i malih voda kod ovih vodotoka je reda veličine 10³ (dok je kod velikih aluvijalnih reka, taj odnos reda veličine 10). Oko 70% ukupnog godišnjeg pronosa nanosa naših bujičnih vodotoka odvija se prilikom kratkotrajnih bujičnih poplava.

1.1.2 Slivno područje

Rečni, *orografski sliv* je teritorija sa koje se površinske vode slivaju u jedan prirodni vodotok. *Geološki sliv*, pored površinskih, obuhvata i podzemne vode koje prihranjuju dati vodotok. Granice orografskog i geološkog sliva se ne moraju poklapati. *Vododelnica* (razvodje) je granica dva susedna slivna područja.

Uticađ topografskih, geoloških, pedoloških, bioloških, klimatsko-meteoroloških i drugih karakteristika sliva na režim površinskih i podzemnih voda (Tabela 1.1), predmet je izučavanja raznih disciplina, kao što je na primer hidrologija [88].

Tabela 1.1: *Uticađ oblika sliva na karakteristike površinskog oticaja*

Karakteristike oticaja	Oblik sliva			
	Lepezasti	Izduženi	Trougaoni	Pravougaoni
Koncentracija	nagla	spora	nagla	spora
Trajanje	kratko	duĝo	duĝo	duĝo
Intenzitet	veliki	mali	veliki	veliki

Režim voda i nanosa je uslovljen *erozionim procesima* u slivu. Eroziĝa mođe biti posledica dejstva vetra („eolska eroziĝa”) i vode. Eroziĝa tla vodom se deli na eroziĝu pod dejstvom kiše („pluvijalna eroziĝa”), reĝnog toka („fluvijalna eroziĝa”) i gleĝera („glacijalna eroziĝa”). Mehaniĝko, toplotno i hemijsko razaranje stena je praĝeno pojavama „denudacije” i „akumulacije”, od kojih prva predstavlja spiranje raspadnutog stenskog materijala površinskim oticajem, a druga, zaustavljanje i nagomilavanje ovog materijala.

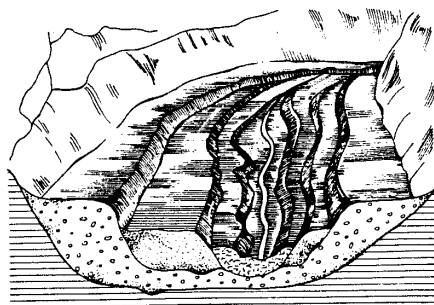
Regresivna eroziĝa je termin koji opisuje teŝnju reĝnih tokova da formiraju stabilni uzdužni profil korita, pri kome se uspostavlja ravnoteđa između erozionog potencijala toka i otpornosti korita na eroziĝu. Ovo ravnotežno stanje se u geomorfologiji zove „*eroziona terminanta*”.

1.1.3 Reĝna dolina i reĝni tok

Reĝna dolina je prirodna kotlina duđ koje se prostire reĝni tok. Nastala je kao posledica fluvijalne eroziĝe, a različite etape njenog razvoja mogu se istorijski pratiti prouĝavanjem *reĝnih terasa* (Slika 1.1). Svaka terasa oznaĝava jedan period geomorfološkog razvoja³ korita u kome je ono bilo u stanju privremene ravnoteđe.

Reĝni tok se od izvora do ušĝa mođe podeliti na tri dela (Slika 1.2). *Gornji tok* karakteriše veliki uzdužni nagibi dna korita (iznad 1%). Hidrološko-hidrauliĝke promene su velikog intenziteta. Izražen je intenzitet dubinske eroziĝe, usled velike energije toka. Reĝni nanos je krupan. U svom gornjem toku reka ima bujiĝni karakter, relativno malo krivuda, a dolina je uska, sa strmim stranicama.

³Geomorfološki ciklus predstavlja dugotraĝni evolutivni proces zemljine površine, tokom koga se pod uticajem eroziĝe, masivi kopna spiraju do baznog (morskog) nivoa.



Slika 1.1: Rečna dolina sa terasama u raznim fazama geomorfološkog razvoja [121].

Srednji tok karakterišu blaži uzdužni nagibi dna ($0.05 \div 0.5\%$) i umerenije hidrološko-hidrauličke promene u odnosu na gornji tok. Rečno korito je često razudjeno, a smanjenjem uzdužnog nagiba, sve više pokazuje tendenciju krivudanja. Dolina je šira nego u gornjem toku, a njene kosine su blaže. Rečni nanos je sitniji. Srednji tok ponekad nije jasno izražen.

Donji tok karakteriše mali uzdužni nagib korita ($< 0.1\%$), koje se stalno izdiže usled taloženja sitnog (peščanog) nanosa. Usled usputnog povećanja protoka, u donjem toku se po pravilu uspostavljaju uslovi za višenamensko korišćenje vodotoka (proizvodnja električne energije, plovidba, navodnjavanje itd.). Na ušću u more se formira delta.

Uzdužni profil aluvijalnih vodotoka generalno pokazuje tendenciju smanjenje nagiba dna u nizvodnom smeru (Slika 1.2).



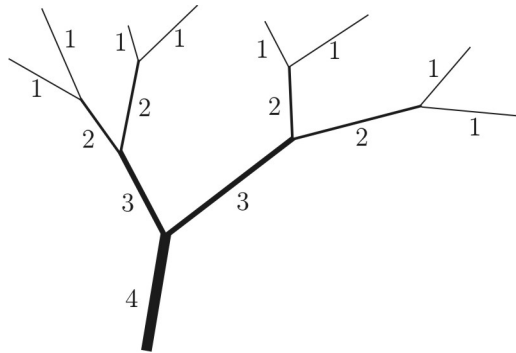
Slika 1.2: Rečni sistem i njegova podela.

Gornji tok predstavlja „oblast produkcije nanosa”, koju karakteriše erozija, ili degradacija korita. Srednji tok je „oblast transporta nanosa”, u kojoj su istovremeno prisutni erozija i zasipanje. Donji tok predstavlja „oblast zasipanja”

(izdizanja, ili agradacije korita). U prirodi međjutim, lokalni geološki uslovi dovode do toga da se i u gornjem toku mogu javiti kratke zone zasipanja, a u donjem toku, zone erozije. Aluvijalni vodotok, ili neka njegova deonica, nalazi se u *dinamičkoj ravnoteži* ako je sumarni efekat erozije i zasipanja takav da se korito u višegodišnjem periodu neznatno menja.

1.1.4 Topologija hidrografske mreže

Jedan od načina da se opiše sliv je numeracija hidrografske mreže, vodeći računa o veličini i povezivanju vodotoka. Hortonov (Horton, 1945) morfometrički sistem, koji daje informacije o hijerarhijskoj strukturi vodotoka, predviđa da su najmanje reke prvog reda. Spajanjem dve reke prvog reda dobija se vodotok drugog reda (Slika 1.3) itd. Definicija najmanjeg vodotoka je donekle proizvoljna i zavisi od razmere u kojoj se hidrografska mreža prikazuje na situacionoj karti.



Slika 1.3: Jedan primer Hortonove mreže ($N_1 = 8$, $N_2 = 4$, $N_3 = 2$, $N_4 = 1$; $N_1/N_2 = N_2/N_3 = N_3/N_4 = 2$.)

Ukupni broj vodotoka prvog, drugog i višeg reda (N_1 , N_2 , $N_3 \dots$) daje uvid u stepen grananja (bifurkacije) hidrografske mreže. Velike vrednosti odnosa N_1/N_2 , N_2/N_3 itd. ukazuju na to da je u slivu puno malih, a malo velikih vodotoka. U tom slučaju su hidrografi oticaja razvučeniji nego kod sliva sa malim vrednostima bifurkacionog odnosa. Mreža vodotoka sa konstantnim vrednostima bifurkacionih odnosa, zove se Hortonova mreža. Varijacije pomenutih vrednosti su po slivovima relativno male ($2 \div 5$) i odražavaju specifične geološke uslove i oblike sliva [76].

1.2 Geomorfološke promenljive

Ako se ostave po strani fizičke veličine kao što su gravitaciono ubrzanje, temperatura, gustina i viskoznost vode, osnovne geomorfološke promenljive koje utiču na razvoj rečnog korita su:

- protok vode Q ;
- krupnoća materijala iz rečnog dna d ;

- protok („pronos“) rečnog nanosa Q_u ;
- uzdužni nagib vodotoka I_d ;
- odnos širine i dubine poprečnog preseka B/H , koji opisuje njegov oblik;
- odnos dužine vodotoka i dužine doline S , koji opisuje oblik vodotoka u planu.

Prve dve veličine su nezavisno promenljive, a poslednje dve, zavisno promenljive. Kao što će se videti u nastavku, za pronos nanosa i uzdužni nagib dna, postoje određeni uslovi koje prethodno treba precizirati.

Razmotriće se najpre protok vode, kao ključna nezavisna promenljiva. Prirodne vodotoke karakterišu velike varijacije protoka vode i pronosa nanosa (Tabela 1.2), što otežava definisanje jednog protoka koji bi bio reprezentativan za formiranje rečnog korita. Postoji više predloga za „dominantni“, ili „koritoformirajući“ protok [28, 54], ali se većina autora slaže da je to protok kome odgovara ispunjeno osnovno korito i najveći pronos nanosa⁴.

U gornjem toku je uzdužni nagib doline i vodotoka isključivo posledica geološkog sastava, tako da se nagib dna I_d može smatrati nezavisno promenljivom sa stanovišta morfologije vodotoka. To znači da je u gornjem toku neke reke pronos nanosa Q_u zavisno promenljiva, uslovljena veličinama Q , d i I_d . U donjem toku međjutim, nezavisne promenljive postaju Q , Q_u i d , a zavisne promenljive, I_d , B/H i S .

Ovo pitanje se može razmatrati i u kontekstu vremenske razmere u kojoj se posmatra evolucija rečnog korita. Naime, definicija nezavisno promenljivih, kao „uzroka“ geomorfoloških promena i zavisno promenljivih, kao „posledica“ tih promena, zavisi od dužine posmatranog vremenskog perioda. U kratkoj vremenskoj razmeri (dani) može se smatrati da je morfološko stanje vodotoka ustaljeno. U dugoj vremenskoj razmeri (stotine godina), morfologija korita se menja oko nekog ravnotežnog stanja, dok u veoma dugoj vremenskoj razmeri (milioni godina), ima smisla govoriti samo o geološkim promenama rečnih dolina. U kratkom vremenskom periodu (ustaljeno morfološko stanje korita), pronos nanosa je zavisna promenljiva, a protok vode je nezavisna promenljiva. Protok Q je uzrok, a pronos nanosa Q_u je posledica. U veoma dugoj vremenskoj razmeri, obe veličine postaju nezavisne varijable, određene raznim faktorima u slivu (Tabela 1.3), a geometrija korita, posebno njegov uzdužni nagib, prilagođavaju se nametnutom režimu vode i nanosa u pravcu ustpostavljanja ravnotežnog stanja.

⁴Zapravo, dominantni protok se vezuje za neki izabrani parametar; na primer, Akers (Ackers) i Čarlton (Charlton) ga definišu u zavisnosti od dužine meandra: „Dominantni protok ustaljenog tečenja se verovatno nalazi u skupu periodično promenljivih protoka koji proizvode registrovanu dužinu meandra“ [133]. Razlog za uvođenje reprezentativne vrednosti protoka, bez obzira u odnosu na koji se parametar definiše, leži u tome što kod računskih modela nije moguće zatvoriti sistem jednačina bez smanjenja broja zavisno promenljivih, a kod fizičkih modela nije jednostavno zadovoljiti uslove sličnosti za ceo dijapazon protoka. Međjutim, vrednost dominantnog protoka, definisana za jednu deonicu u prirodnim uslovima, ne mora biti reprezentativna za istu deonicu i nakon njene regulacije.

Tabela 1.2: Protok vode i pronos nanosa velikih svetskih i naših reka [54, 76]

Reka	Profil	Površina sliva [10 ⁶ km ²]	Srednji višegod. protok [m ³ /s]	$\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}}$ [-]	Srednji godišnji pronos nanosa [10 ⁶ t/god]
Amazon	ušće	7,00	100 000		900
Misisipi	ušće	3,90	18 000	23,5	300
Kongo	ušće	3,70	44 000		70
La Plata/Parana	ušće	3,00	19 000		90
Ob	ušće	3,00	12 000		16
Nil	delta	2,90	3 000	48,5	80
Jenisej	ušće	2,60	17 000		11
Lena	ušće	2,40	16 000		12
Amur	ušće	2,10	11 000		15
Jangce	ušće	1,80	22 000	22,1	500
Volga	ušće	1,50	8 400	32,0	26
Misuri	ušće	1,40	2 000		200
Zambezi	ušće	1,30	16 000		100
Niger	ušće	1,10	5 700		40
Gang	delta	1,00	14 000	34,6	1 500
Ind	ušće	0,96	6 400	53,0	400
Orinoko	ušće	0,95	25 000		90
Dunav	ušće	0,82	6 400	14,3	67
Mekong	ušće	0,80	15 000	35,3	80
Dnjeper	ušće	0,46	1 600		1,2
Rajna	delta	0,36	2 200		0,7
Rona	ušće	0,096	1 700	38,0	10
Po	ušće	0,070	1 500		15

Reka	Profil vod.stanica	Površina sliva [km ²]	Srednji višegod. protok [m ³ /s]	$\frac{Q_{mes,max}}{Q_{mes,min}}$ [-]	Srednji godišnji pronos nanosa [10 ⁶ t/god]
Dunav	Bezdan	210 250	2 263	1,86	6,7
Dunav	V.Gradište	570 375	5 466	2,14	14,5
Tisa	Novi Bečej	145 415	766	3,53	4,4
Sava	S.Mitrovica	87 996	1 532	3,44	3,0
Drina	Kozluk	17 493	371	4,29	2,5
Lim	Priboj	3 684	96	4,05	1,2
Kolubara	Draževac	3 588	21	6,83	0,5
V.Morava	Lj. Most	37 320	230	5,01	2,8
Z.Morava	Jasika	14 721	106	4,26	1,1
J.Morava	Mojsinje	15 390	97	6,44	2,0
Ibar	Kraljevo	7 925	63	4,32	0,7
Nišava	Niš	3 974	24	5,27	0,5
Timok	Tamnić	4 191	29	12,5	0,9

Tabela 1.3: Promenljive aluvijalnih vodotoka i vremenske razmere; N – nezavisno promenljiva, Z – zavisno promenljiva; X – „prelazna” promenljiva [145].

Promenljiva	Tip promenljive		
	Vremenska razmera		
	Kratka	Duga	Veoma duga
Geologija	N	N	N
Paleontološka klima	N	N	N
Paleontološka hidrologija	N	N	Z
Dolina: nagib, širina, dubina	N	N	Z
Klima	N	N	X
Vegetacija: vrsta i gustina	N	N	X
Srednji protok vode	N	N	X
Srednji dotok nanosa	N	N	X
Morfologija korita	N	Z	X
Hidraulički parametri toka	Z	X	X

U veoma dugoj vremenskoj razmeri, nagib rečne doline je nezavisno promenljiva veličina, jer je period formiranja doline neuporedivo duži od perioda formiranja rečnog korita. Medjutim, za period u kome se obavljaju inženjerske aktivnosti, nagib rečne doline je konstanta, dok je uzdužni nagib korita zavisno promenljiva veličina. Imajući u vidu navedene konstatacije, može se reći da je kratka vremenska skala – „hidraulička”, duga vremenska skala – „morfološka”, a veoma duga vremenska skala – „geološka”.

U kontekstu geomorfoloških promenljivih, treba razmotriti i pitanje materijala u kome je formirano korito. Rečni nanos obuhvata takozvani „koritiformirajući” nanos koji značajno utiče na oblik i dimenzije poprečnog preseka, uzdužni profil korita i njegov oblik u planu, kao i „tranzitni” nanos od vrlo sitnih čestica (gline), koji u prirodnom režimu protoka nema uticaj na formiranje korita. Količine nanosa se povećavaju u periodu velikih voda. Povećanje koritiformirajućeg nanosa generalno umanjuje stabilnost korita, jer se formiraju sprudovi i skreće tok. S druge strane, povećanje tranzitnog nanosa ima za posledicu da se, zadržavanjem dela ovog nanosa na obalama, uvećava sadržaj gline u materijalu obala, a time povećava otpornost obala na fluvijalnu eroziju.

Krupnoća koritiformirajućeg nanosa značajno utiče na uzdužni nagib korita. Vodotoci sa šljunkovitim i peskovitim koritima imaju nagibe dna koji se, pri približno istim vrednostima dominantnog protoka i ulaznog dotoka nanosa, razlikuju za čitav red veličine. Zbog toga se srednja krupnoća zrna može smatrati nezavisnom promenljivom. Lista nezavisno promenljivih se može proširiti i drugim veličinama, kao što su na primer geomehanički sastav obala i vegetacija, ali time analiza postaje znatno složenija.

1.3 Hidraulička geometrija rečnog korita

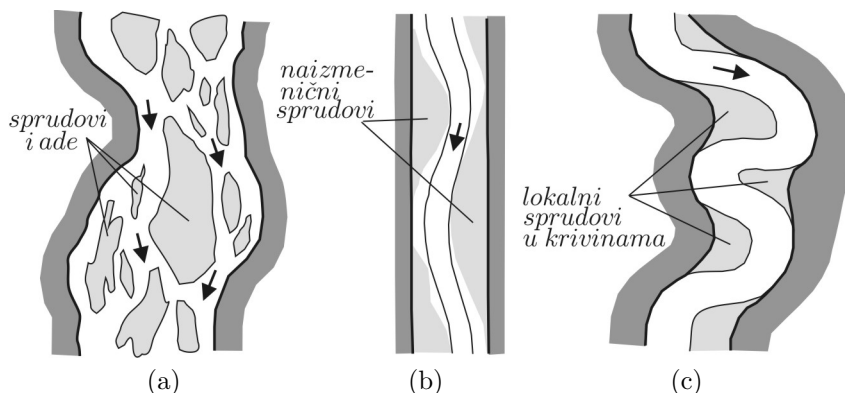
„Hidrauličku geometriju” rečnog korita čine:

- oblici korita u horizontalnoj projekciji;
- uzdužni profil;
- poprečni profili;
- konfiguracija rečnog dna (nanosne formacije).

Neki autori umesto konfiguracije rečnog dna, kao sastavni deo hidrauličke geometrije uzimaju karakteristike materijala u kome su formirane obale.

1.3.1 Oblici u horizontalnoj projekciji

Prema izgledu korita u horizontalnoj ravni, prirodni vodotoci se dele na *razudjene*, *pravolinijske* i *meandrirajuće*. Navedeni oblici se ne odnose na vodotok u celini, već na njegove pojedine deonice. Često nema jasne granice izmedju pojedinih oblika, a moguće su i njihove kombinacije.



Slika 1.4: Tipovi vodotoka prema oblicima korita u horizontalnoj projekciji: (a) razudjen, (b) pravolinijski i (c) meandrirajući [54, 110, 146].

Razudjeni vodotok ima dva ili više korita i mnoštvo aluvijalnih sprudova i ada (Slika 1.4-(a)). Složeni oblici „isprepletanih” korita nastaju pod uticajem dva prirodna faktora. Prvi je veliki dotok nanosa koji izaziva zasipanje korita i formiranje sprudova. Reakcija vodotoka u pravcu uspostavljanja ravnoteže u pronosu nanosa, manifestuje se kroz povećanje uzdužnog nagiba dna i brzine toka, a smanjenje dubine. To pogoduje daljem proširenju korita, sve dok se ne uspostavi ravnotežni pronos nanosa.

Prema nekim empirijskim istraživanjima, odnos nagiba dna razudjenog i nerazudjenog vodotoka se kreće u rasponu $1,2 \div 2,3$, a odnos odgovarajućih širina korita, $1 \div 2$ [54].



Slika 1.5: Erozijski rečni obala koje su formirane od glinovitog i šljunkovitog materijala (reke Lugomir i Resava, pritoke Velike Morave).

Drugi faktor je sastav materijala od koga su formirane obale; ako je taj materijal pokretan, sa malim sadržajem gline, obale su podložne eroziji (Slika 1.5), što dovodi do povećanje širine korita u periodu velikih voda.

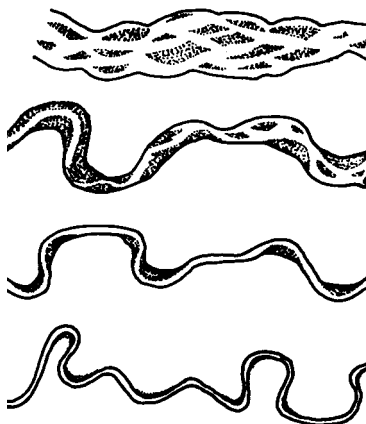
Pravolinijski vodotok se u prirodi retko sreće na dužini većoj od 10 širina punog korita [109]. Čak i na pravolinijskoj deonici, linija najveće dubine (koja se menja sa protokom) – „talveg” – ima krivolinijski izgled, naizmenično se približavajući čas jednoj, čas drugoj obali (Slika 1.4-(b)). Deponije nanosa koje se na taj način formiraju, zovu se „naizmenični sprudovi” (videti četvrto poglavlje). U pravolinijskom koritu dubina nije konstantna po širini korita.

Meandrirajući vodotok⁵ se sastoji od niza naizmeničnih krivina (Slika 1.4-(c)). Kvantitativni pokazatelj stepena meandriranja je *faktor sinusoidnosti* (S), koji predstavlja odnos dužine osnovnog korita po talvegu i dužine rečne doline. Tipične vrednosti ovog faktora su $S \approx 1,5$, a najveće, $2,4 \div 2,8$ [109].

Prema klasifikaciji Brajsa (Brice, 1983), zasnovanoj na aerofotogrametrijskoj dokumentaciji, prirodni vodotoci se mogu svrstati u četiri klase (Slika 1.6).

Pravolinijske razudjene vodotoke karakterišu veliki uzdužni nagibi dna, krupan nanos, nestabilne obale i brojni rukavci. Smanjenjem uzdužnog nagiba dna, tok se sve više koncentriše, a korito prolazi kroz različite faze razvoja, od meandrirajućeg razudjenog korita, preko meandrirajućeg korita sa lokalnim sprudovima u krivinama, do meandrirajućeg korita u obliku kanala (Slika 1.7).

⁵Termin „meander” potiče od imena reke Meandros u Turskoj, koja je poznata po svom vijugavom koritu.



Slika 1.6: Oblici aluvijalnih vodotoka u horizontalnoj projekciji prema klasifikaciji Brajsa; odozgo na dole, smanjenjem uzdužnog nagiba dna: pravolinijski razudjeni, meandrirajući razudjeni, meandrirajući sa lokalnim sprudovima u krivinama i meandrirajući u obliku kanala [20].

Navedeni oblici su posledica niza faktora, od kojih su, pored uzdužnog nagiba dna, naznačajniji režim protoka vode, krupnoća nanosa, vrsta materijala od koga su formirane obale i stepen njihove obraslosti vegetacijom.

Neki sinusni oblici meandrirajućih vodotoka ukazuju na sistematsko nizvodno pomeranje meandera. Drugi oblici opet ukazuju na periodično samoprosecanje krivina, o čemu će još biti reči u nastavku. Međutim, uprkos dinamičkim promenama, ukupna dužina meandrirajućih vodotoka se vremenom malo menja. Povremeno skraćenje trase usled spontanog ili veštačkog prosecanja krivina po pravilu biva nadoknadjeno postepenim produženjem ostalih krivina.

1.3.2 Uzdužni profil

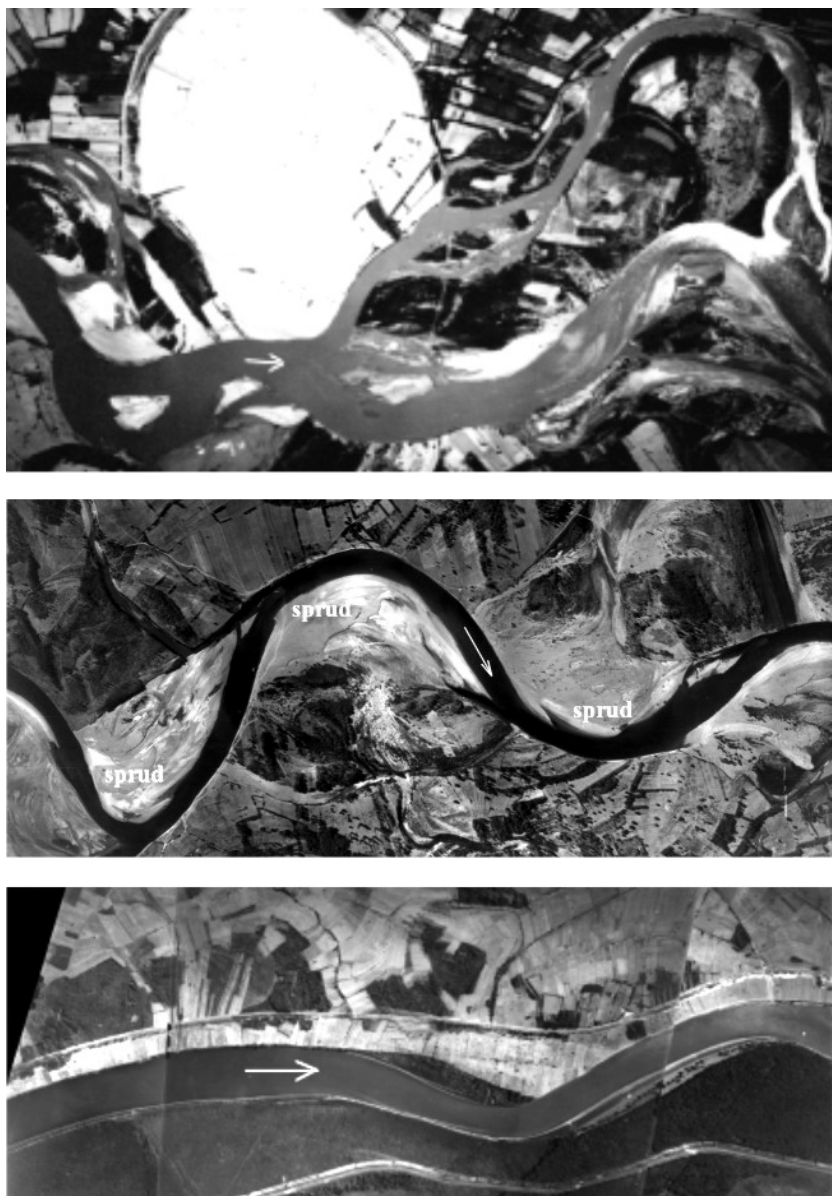
Uzdužni nagib korita, koji zavisi od protoka vode, pronosa nanosa i njegove krupnoće, opada u nizvodnom smeru. Taj nagib se može matematički opisati izrazom Šokliča (Schoklitsch, 1930) [76]:

$$I_d(x) = I_{do} \cdot e^{-\alpha_1 x}, \quad (1.1)$$

gde je $I_{do} = I_d(x = 0)$ – nagib u referentnom profilu, a α_1 – empirijski koeficijent.

Funkcija (1.1) opisuje prosečni nagib dna u prirodnim uslovima, zanemarujući lokalne „poremećaje” uzdužnog profila usled pritoka, oštih krivina itd. Za opadajući karakter funkcije (1.1) ima nekoliko objašnjenja, koja se navode u nastavku.

(i) Smanjenje nagiba je delimično posledica smanjenja krupnoće materijala od koga je formirano rečno korito usled *segregacije* i *abrazije*. Segregacija rečnog



Slika 1.7: Razni oblici meandrirajućeg korita se mogu uočiti i na pojedinim deonicama istog votoka; snimci donjeg toka Drine prikazuju odozgo na dole: meandrirajuće razudjeno korito (Račanski sektor), meandrirajuće korito sa lokalnim sprudovima na unutrašnjim (konveksnim) obalama krivina i meandrirajuće korito u obliku kanala (sektor Banja Koviljača).

nanosa predstavlja razdvajanje zrna po krupnoći, što je posledica činjenice da se krupnija zrna teže pokreću od sitnijih. Abrazija predstavlja proces mehaničkog usitnjavanja nanosa pod dejstvom toka, habanjem, udarom i glačanjem zrna. Do usitnjavanja dolazi i usled temperaturnih promena i hemijskih uticaja, kada se zrna povremeno nadju van vode, na sprudovima i obalama. Usitnjavanje nanosa abrazijom analitički je opisao Sternberg (Sternberg) još 1875. godine [76]:

$$d(x) = d_o \cdot e^{-\alpha_2 x}, \quad (1.2)$$

gde je $d_o = d(x = 0)$ – početni srednji prečnik zrna, a α_2 – empirijski koeficijent koji se zove „specifična abrazija” [m^{-1}]. Vrednosti ovog koeficijenta zavise od mineralnog sastava; na primer, za krečnjak je $\alpha_2 = 1,0 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$, a za granit, $\alpha_2 = 0,5 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$. Može se primetiti da postoji analogija između izraza (1.1) i (1.2).

Smanjenjem krupnoće zrna duž vodotoka, sve više nanosa se kreće u vidu suspenzije, pa je vodotoku dovoljan manji uzdužni nagib. Ovome ide u prilog i činjenica da protok raste ka ušću, pa koncentracija nanosa (udeo čvrstih čestica u jedinici zapremine rečne vode) opada, što iziskuje manji utrošak energije toka, a time i manji nagib dna. U donjem toku se kontinualno odvija proces taloženja nanosa i izdizanja korita (agradacija), što se manifestuje smanjenjem uzdužnog nagiba.

(ii) Nizvodno od ušća svake pritoke, nagib dna opada, što je posledica istaložavanja krupnog nanosa iz pritoke.

(iii) Usled abrazije, u donjem toku raste učešće najsitnijih, glinovitih čestica. Povećanje udela ovih čestica u materijalu od koga su formirane obale povećava otpornost obala na fluvijalnu eroziju, pa se tok koncentriše u relativno stabilnom koritu. Iz tog razloga je pri istoj propusnoj moći za nanos, u donjem toku potreban manji nagib dna nego u gornjem i srednjem toku.

■ **Primer 1.1.** Izvesti izraz za prognozu kote dna $z_d(x = L) = z_{dL}$, gde je L – odstojanje od referentnog profila ($x = x_o$). Pretpostaviti da su poznate početne vrednosti $I_d(x_o) = I_{do}$ i $z_d(x_o) = z_{do}$, kao i vrednost parametra α_1 .

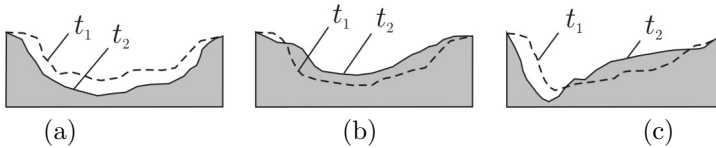
Rešenje. Kako kote dna opadaju sa porastom odstojanja x : $dz_d/dx < 0$, da bi nagib dna bio pozitivan broj, treba staviti: $I_d = -dz_d/dx$, pa se integracijom izraza (1.1) dobija:

$$-\int_{z_{do}}^{z_{dL}} dz_d = I_{do} \cdot \int_o^L e^{-\alpha_1 x} dx,$$

odnosno, $z_{dL} = z_{do} - I_{do} \cdot \alpha_1^{-1} (1 - e^{-\alpha_1 \cdot L})$.

1.3.3 Poprečni profili

Dimenzije i oblik poprečnih profila zavise od režima oticaja vode i produkcije nanosa u slivu, kao i od njegovog mineralnog sastava. Promene geometrije rečnog korita su vezane za periode velikih voda, a manifestuju se periodičnim proširenjem i suženjem korita (Slika 1.8). Medjutim, njegovo sistematsko proširenje ili suženje može nastati kao posledica trajne izmene režima voda i nanosa usled promena u slivu ili nakon izvedenih regulacionih radova.



Slika 1.8: Karakteristične promene poprečnih profila: (a) povećanje površine usled erozije dna i obala; (b) smanjenje površine usled zasipanja nanosom (pravolinijska deonica) (c) promena oblika profila u krivini erozijom spoljašnje (konkavne) obale, a zasipanjem unutrašnje (konveksne) obale.

1.3.4 Konfiguracija rečnog dna

Konfiguraciju rečnog dna odredjuju specifični tipovi nanosnih formacija koji će biti prikazani u četvrtom poglavlju. Medjusobni uticaj geometrije rečnog korita, hidrauličkih otpora i ukupne energije toka je veoma teško odrediti. Otpori se menjaju sa protokom i rezultat su kombinovanog dejstva trenja koje zavisi od apsolutne rapavosti (krupnoće nanosa) i otpora oblika, koji zavise od tipa i veličine nanosnih formacija. Uticaj ovih formacija je uslovljen veličinom protoka (brzinom toka), fizičkim karakteristikama nanosa i prethodnom „istorijom” tečenja. Taj uticaj nije lako definisati, jer se veličina otpora ne menja jednoznačno sa brzinom toka. Pored toga, na otpore utiče i vegetacija u rečnom koritu i na obalama.

Korita formirana u krupnom šljunčanom nanosu imaju sasvim drugačiju (često stabilniju) topografiju od onih formiranih u peščanom materijalu. Usled segregacije nanosa po krupnoći, kod šljunčanog dna dolazi do „samopopločavanja” – spontanog formiranja zaštitnog („armirajućeg”) sloja od krupnog šljunka iznad sitnijeg materijala.

1.4 Meandrirajući aluvijalni vodotoci

1.4.1 Mehanizam formiranja meandrirajućih vodotoka

Vodotok je meandrirajući kada je vrednost faktora sinusoidnosti veća od 1,5. Po definiciji, meandar obuhvata dve susedne krivine suprotnog smera, kao i pravolinijsku prelaznu deonicu izmedju njih (ako ova postoji).

Mehanizam formiranja meandrirajućeg vodotoka nije potpuno rasvetljen. Postoji više teorija za objašnjenje ovog prirodnog fenomena⁶.

(i) Teorije zasnovane na dejstvu *sekundarnih strujanja* obuhvataju uticaj poprečnih strujanja u odnosu na glavni tok. Neka od ovih strujanja, koja će biti predmet izučavanja u sedmom poglavlju, posledica su zapreminskih sila, kao što je centrifugalna sila u rečnoj krivini i Koriolisova sila usled zemljine rotacije. Zajedničko za poprečna strujanja je to da izazivaju neravnomeran raspored brzine i pritiska u poprečnom preseku, kao i pojavu poprečnog nagiba linije nivoa, čime se stvaraju uslovi za eroziju spoljašnje obale u krivini i produženje meandra.

(ii) Teorije *viška energije vodotoka* zasnovane su na pretpostavci da je proces meandriranja u direktnoj vezi sa energijom vodotoka. Prema Šokliću, formiranje meandra nastaje usled viška kinetičke energije toka, odnosno prevelikog uzdužnog nagiba korita koji nije uslaglašen sa krupnoćom rečnog nanosa [54]. Hipoteza je da meandriranje predstavlja „sredstvo” za neutralisanje viška energije toka u širem opsegu protoka. Efikasnost tog neutralisanja zavisi od krupnoće nanosa, količine vode i nanosa i brzine kojom se te količine menjaju. S druge strane, treba imati u vidu da rečna krivina predstavlja u hidrauličkom smislu lokalni gubitak i da je, prema empirijskim istraživanjima, taj gubitak najmanji za vrednosti $R_k/B = 2 \div 3$ [54], gde je R_k – poluprečnik krivine, a B – širina korita. To upućuje na zaključak da je razvoj meandrirajućeg korita odraz tendencije uspostavljanja minimuma energije toka.

(iii) Teorije *poremećaja* se zasnivaju na pretpostavci da neki poremećaj na uzvodnom kraju pravolinijske deonice, neminovno izaziva promenu položaja i oblika korita na nizvodnom sektoru. Uzroci „poremećaja” mogu biti različiti; na primer, to može biti istaložavanje nanosa iza neke prepreke u koritu, vrtložno strujanje koje izaziva oscilovanje nivoa itd. Dovoljno je da se na uzvodnom kraju formira jedna krivina pa da to, samo po sebi, bude „poremećaj” koji inicira nizvodne morfološke promene.

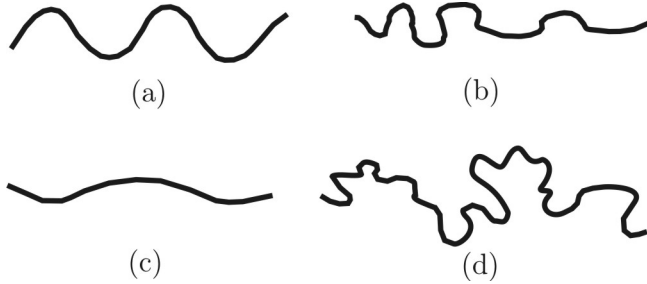
Šta god da je dominantan uzrok meandriranja (a očito se radi o kombinovanom uticaju raznih faktora), za sada ne postoji način da se sigurno predvidi oblik vodotoka u horizontalnoj projekciji. Pouzdana kvantitativna procena razvoja meandera za sada nije moguća, pa se za definisanje njegove geometrije koriste empirijske relacije. Laboratorijska istraživanja fundamentalnog karaktera su u toku [116, 124, 180].

1.4.2 Klasifikacija meandrirajućih vodotoka

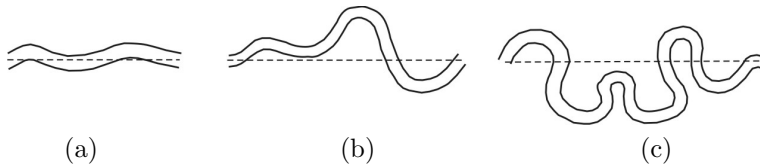
Postoji više klasifikacija meandrirajućih vodotoka. Prema jednoj od njih, meandri mogu biti *pravilni*, *nepravilni*, *prosti* i *složeni* [54]. Pravilni meandri se sastoje od niza krivina približno istog poluprečnika i učestalosti, dok su nepravilni me-

⁶Meandriranje ima karakter univerzalne pojave koja je uočena u morima i okeanima (Golfska struja), pri kretanju glečera, kao i vazдушnih masa u višim slojevima atmosfere.

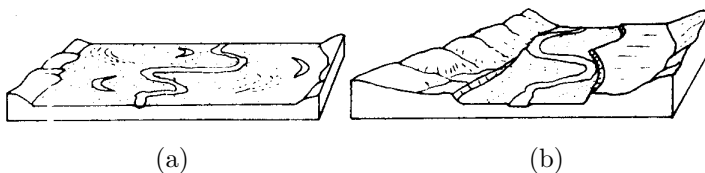
andri deformisanog oblika, promenljive amplitude i učestalosti. Prosti meandri imaju jedan poluprečnik krivine, dok se krivine složenih meandra mogu opisati nizom kružnih lukova, sa različitim vrednostima poluprečnika i centralnih uglova (Slika 1.9). Na Slikama 1.9-1.11 su prikazani razni načini klasifikacije meandri-
rajućih vodotoka prema obliku, stepenu sinusoidnosti i karakteristikama doline.



Slika 1.9: *Klasifikacija meandera prema obliku: (a) pravilan; (b) неправиlan; (c) prost; (d) složen.*



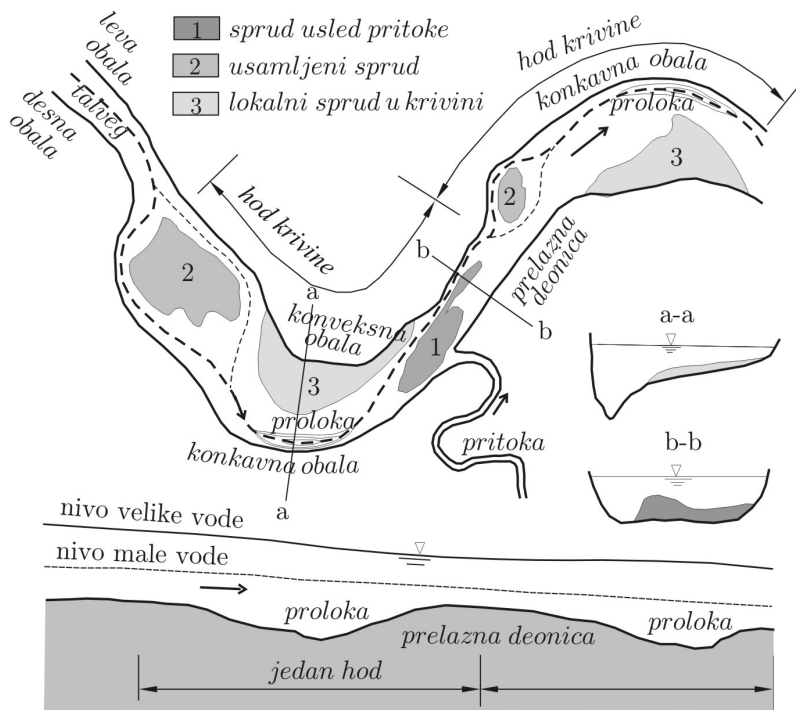
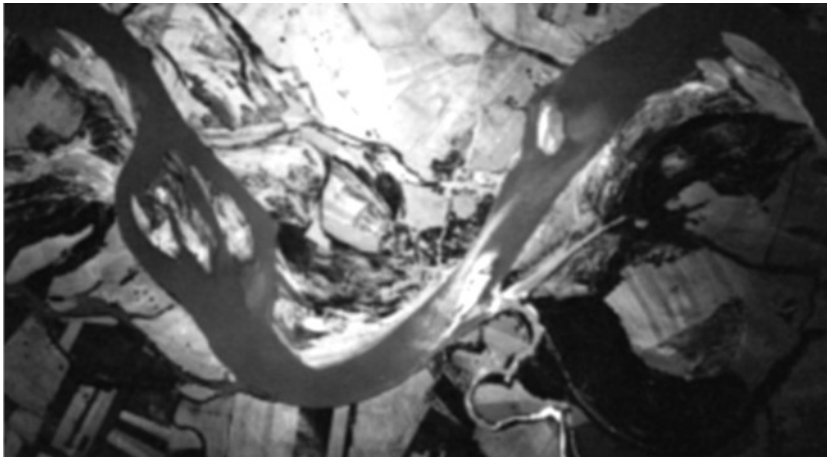
Slika 1.10: *Klasifikacija meandera prema stepenu sinusoidnosti: (a) nizak ($S = 1,0 \div 1,3$); (b) umeren ($S = 1,3 \div 2,0$); (c) visok ($S > 2,0$).*



Slika 1.11: *Klasifikacija prema karakteristikama rečne doline: (a) meandrirajuće korito čiji razvoj nije ograničen širinom doline; (b) meandrirajuće korito ograničeno aluvijalnim terasama [110, 146].*

1.4.3 Veza izmedju oblika korita u planu i u poprečnom profilu

Na Slici 1.12 prikazan je primer meandrirajućeg korita, sa karakterističnim poprečnim profilima i uzdužnim profilom po talvegu.



Slika 1.12: Primer meandrirajućeg korita sa raznim vrstama sprudova (donji tok Drine, sektor Banja Koviljača).

Oblik trase meandrirajućeg vodotoka je retko kad geometrijski pravilan, a vrednosti poluprečnika krivina variraju u širokim granicama. (U pravcima je ta vrednost beskonačna). Smatra se da postoji izvesna zavisnost izmedju poluprečnika krivine i širine punog osnovnog korita. Ako je korito formirano u nevezanom materijalu, tipične su vrednosti $R_k/B = 4 \div 5$, a u vezanom materijalu, $2 \div 3$ [100].

Oblici korita prikazani na Slici 1.12 odraz su složenih prirodnih procesa. Prostorno trodimenziono – spiralno strujanje u krivini (o kome će biti reči u sedmom poglavlju), izaziva produbljenje korita uz spoljašnju – konkavnu obalu u vidu „proloka”, a formiranje obalnog spruda od iskopanog materijala duž unutrašnje – konveksne obale.

Kratke pravolinijske prelazne deonice izmedju suprotnih krivina („infleksije”) su karakteristične po malim dubinama, usled istaložavanja nanosa. Ta pojava je posledica opadanja intenziteta spiralnog strujanja koje se održava na određenoj dužini nizvodno od krivine. Usled opisanih procesa, poprečni presek na deonicama u krivini ima karakteristični trougaoni oblik, a na prelaznim deonicama, približno pravougaoni oblik.

Brojni autori su se bavili uspostavljanjem veza izmedju geometrijskih karakteristika korita i elemenata krivine. Klasičan primer su istraživanja francuskog inženjera Farga (Fargue) na deonici dužine 22 km reke Garone (Garonne) [49, 108]. Ova autor je 1868. godine formulisao šest zakona, od kojih je najvažniji onaj o proporcionalnosti uzdužnog nagiba dna i zakrivljenosti trase:

$$\frac{dz_d}{dx} = a \cdot \frac{dR_k}{dx}, \quad (1.3)$$

gde je: z_d – najniža kota dna u poprečnom preseku, x – odstojanje duž toka, a – empirijska konstanta, R_k – poluprečnik krivine.

Fargovi zakoni, koji danas imaju samo istorijski značaj, decenijama su bili inspiracija u proučavanju morfologije prirodnih vodotoka u cilju njihovog uređenja⁷.

Analizom brojnih vodotoka, takodje je utvrđeno je da postoji izvesan odnos izmedju širine korita i *hoda* krivine (Slika 1.12) i da se vrednosti tog odnosa kreću od 1:8 do 1:12 [49, 121]. Hodovi predstavljaju dužine izmedju pličaka i proloka (dubokih delova korita), a broj hodova je morfološko svojstvo vodotoka.

⁷U tom kontekstu treba spomenuti nekadašnjeg profesora Građevinskog fakulteta u Beogradu R. Popovića, koji je utvrdio da na Velikoj Moravi postoji direktna proporcionalnost odnosa srednje i maksimalne dubine u krivini $h_{\max}/H = 1,50 \div 1,75$ i odnosa dužine krivine i srednjeg poluprečnika $\Lambda_m/\bar{R}_k = 0,15 \div 0,30$ [130].

Kod dinamički stabilnih reka je hod krivina ujednačen⁸. Primera radi, u donjim tokovima naših reka dužine hodova iznose: Velika Morava $1200 \div 1300$ m, Sava ≈ 4000 m, Tisa ≈ 2000 m.

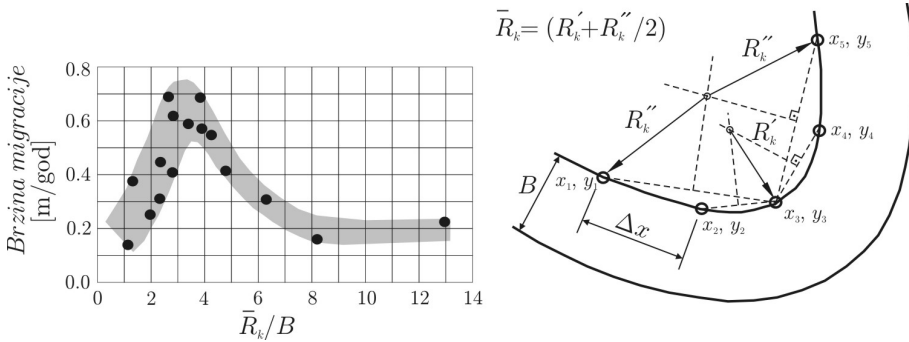
Posledice erozije konkavnih obala (Slika 1.13) su pomeranje korita upravno na glavni tok i nizvodno pomeranje meandera, poznato kao *migracija meandera*. Brzina migracije zavisi od konkretnih uslova. Zabeležena je ekstremna brzina od 800 m/god [100]. Istraživanja pomeranja meandera na vodotocima u Kanadi pokazuju da je brzina migracije najveća za vrednost $\bar{R}_k/B \approx 3$ (Slika 1.14).



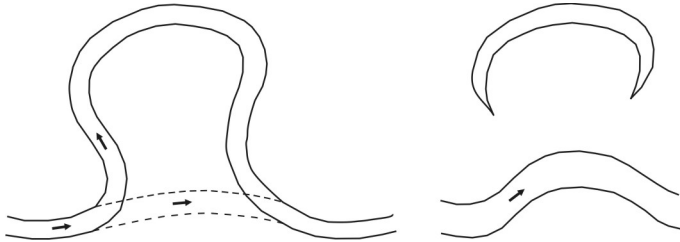
Slika 1.13: Tipičan primer deformacije korita u krivini – erozije konkavne obale i formiranje spruda uz konveksnu obalu (reka Resava).

Razvoj meandra se manifestuje u povećanju dužine. Taj razvoj kulminira u trenutku kada je vodotoku potrebno manje energije da formira novo – kraće korito, nego da savlada otpore trenja na velikoj dužini zrelog meandra. Spontano „samoprosecanje” krivine u periodu velikih voda i formiranje novog korita (Slika 1.15), označava početak sledećeg ciklusa u razvoju meandra (Slike 1.16 i 1.17).

⁸U svojoj knjizi [121], profesor Nešić to slikovito opisuje na sledeći način: „Dužina hoda je pri dinamičkoj ravnoteži rezultat dejstva svih hidroloških i geomorfoloških faktora jedne doline. U hodu reke izražava se njen ritam onako isto, kao što se taj ritam vidi u hodu svakog čoveka. Kao što čovek kod svakog svog koraka prenosi težište tela sa jedne noge na drugu, tako isto reka, u svom dugom putu, prenosi svoju vodenu masu sad bliže jednoj sad bliže drugoj obali... Ritam u hodu jedne reke izražava se udarom u stalnom intervalu i posledica toga udara je dubina, ali ta dubina ne mora uvek biti vezana za pojavu krivine. Krivine su samo zgodna oduška koja se javlja uz dubine kad god se za to imaju povoljni uslovi u pogledu materijala od koga su obale sastavljene, ali dubina može isto tako i u istom intervalu da se javi i u pravim delovima ako su se obale iz kojih bilo razloga oduprle bočnoj eroziji, a dno nije ...”



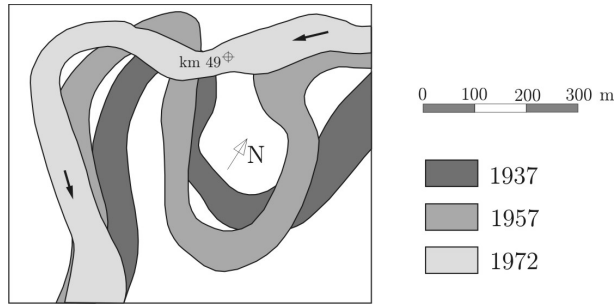
Slika 1.14: Brzina migracije meandera u funkciji relativne zakrivljenosti \bar{R}_k/B ; za određivanje srednjeg poluprečnika krivine preporučuje se korak diskretizacije $\Delta x \approx B$, gde je B – širina punog osnovnog korita [119].



Slika 1.15: Shematski prikaz samoprocenjanja krivine; novo korito se vremenom širi, a staro zaisipa, da bi na kraju ostao samo zabareni deo starog korita (,starača)



Slika 1.16: Faze u razvoju jednog meandra u donjem toku Drine, koje pokazuju napuštene delove korita, nakon ponovljenih samoprocenjanja.

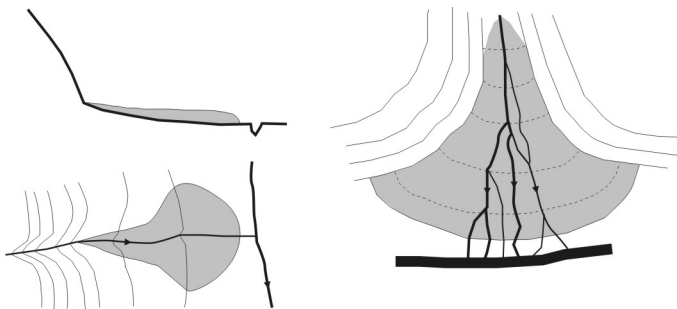


Slika 1.17: Razvoj korita reke Hernad u Madjarskoj, koja je poznata po velikim količinama nanosa i eroziji rečnih obala, formiranih od slabo vezanog materijala; do samoprosecanja je došlo u toku poplave, 1965. godine, pri čemu je novo korito zadržalo širinu starog korita ($50 \div 60$ m); brzina pomeranja meandera na ovoj reci je $5 \div 10$ m/god [58].

1.5 Rečna ušća

Velika je razlika u morfološkom smislu između ušća bujičnih vodotoka i ušća aluvijalnih reka u veće reke i mora. Te razlike su posledica niza faktora, kao što su količine voda i nanosa, mogućnost istovremene pojave (koincidencije) velikih voda, fizička svojstva nanosa itd.

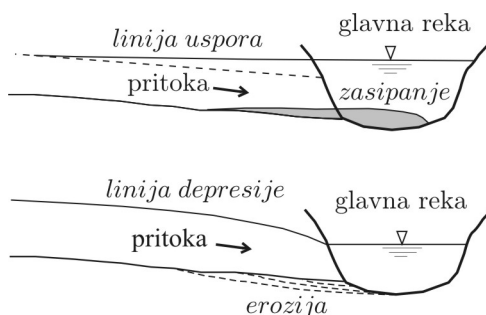
Ušća bujičnih vodotoka prate karakteristične kupaste „plavine” od nanosa (Slika 1.18). Reč je o nanosnim deponijama koje se formiraju na prelazu iz planinskog u ravničarski predeo, usled naglog smanjenja uzdužnog nagiba doline i promene hidrauličkog režima tečenja. Veličina, oblik i sastav aluvijalnih plavina zavisi od erozionog intenziteta na slivnom području, kao i od niza regionalnih klimatskih, tektonskih i drugih faktora [128].



Slika 1.18: Kupaste i lepezaste plavine od nanosa.

Na ušćima velikih aluvijalnih reka, mogu se javiti složeni hidrološko-hidraulički uslovi, a pritoke imaju značajan uticaj na režim vode i nanosa reke recipijenta.

Na Slici 1.19 su shematski prikazana dva slučaja; prvi prikazuje koincidenciju velikih voda oba vodotoka, pri čemu se pritoka nalazi pod delimičnim usporom; drugi slučaj prikazuje male vode u glavnoj reci, a velike vode u pritoci, kada se javlja depresiona linija nivoa u pritoci.



Slika 1.19: Medjusobni uticaj reke i pritoke.

U prvom slučaju dolazi do istaložavanja nanosa iz pritoke u zoni ušća, pri čemu je ovaj nanos po pravilu krupniji od nanosa reke recipijenta. U drugom slučaju je brzina pritoke povećana, tako da dolazi do regresivne erozije korita pritoke. Nizvodno od ušća se u matičnoj reci može očekivati taloženje nanosa iz pritoke, koji, delimično ili u celosti, biva odnet u periodu velikih voda. Opisani fenomeni zavise i od ugla pod kojim se uliva pritoka, pri čemu je, zbog izražene deformacije korita, nepovoljno ulivanje pod pravim uglom (Slike 1.12 i 1.19).

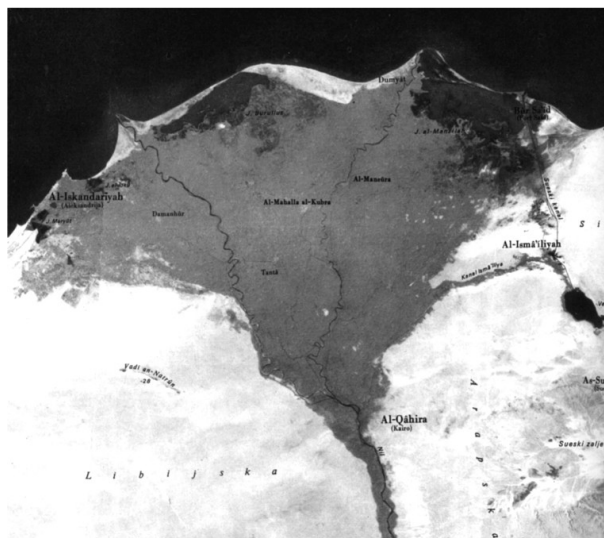
Na ušćima reka u mora i okeane se formiraju delte⁹. Reč je o granatoj strukturi korita usećenog u naslagama peščanog i glinovitog materijala. Delta se formira u dugom vremenskom periodu, kao posledica opadanja brzine toka i njegovog kapaciteta za transport nanosa, kao i usled nedovoljne snage morskih talasa i struja da taj nanos odvuku dalje od ušća¹⁰.

Pored uticaja talasa i oscilacija nivoa usled plime i oseke, na formiranje delte utiču i klimatske osobenosti podneblja [113]. U oblastima umerene klime, gde su količine vode i nanosa uglavnom ravnomerno rasporedjene u toku godine, korito je relativno stabilno. U sušnim regionima sa velikom razlikom izmedju najvećeg i najmanjeg protoka, velike količine vode i nanosa se slivaju ka moru u kratkom vremenskom periodu, pa se razudjena struktura delte prilagodjava količini vode i nanosa. Ako je nanos krupan, postoji tendencija širenja i lutanja korita, a ako je sitan i kreće se u vidu suspenzije, korito je uže i dublje, a delta je u celini, stabilnija.

⁹Ime „delta” odražava karakterističan granati oblik korita koji podseća na grčko slovo „ Δ ”, a potiče od istoričara Herodota, koji je tako nazvao ušće Nila oko 450. godine pre nove ere.

¹⁰Reka Nil u Egiptu je nekada (pre izgradnje brane kod Asuana) svake godine pomerala svoje ušće za oko 12 m; ušće reke Po u Italiji se pomera za oko 15 m, a ušće reke Misisipi u SAD, za oko 90 m [121].

Izmena režima nanosa usled izgradnje brane u gornjem ili srednjem toku može drastično uticati na promenu veličine i oblika delte. Poznat je primer delte Nila (Slika 1.20), gde je izgradnja brane kod Asuana poremetila režim nanosa i uticala da morske struje počnu da erodiraju i odnose naslage nanosa, skraćujući dužinu delte.



Slika 1.20: Satelitski snimak delte Nila; tamna površina predstavlja plodnu dolinu nizvodno od Kaira, dužine oko 200 km.

Interesantno je da veličina delte zavisi i od razlike gustina rečne i morske vode; što je ova razlika veća, manja je pokretljivost suspendovanog nanosa i veličina delte je manja [100]. Krupnoća materijala opada u pravcu toka, ka moru, a sa porastom amplitude plime i oseke raste tendencija formiranja morskih sprudova i ostrva u zoni delte.

1.6 Dinamika aluvijalnih vodotoka

1.6.1 Reka kao adaptivni dinamički sistem

Dimenzije i oblici rečnog korita u sve tri projekcije menjaju se tokom vremena, prilagođavajući se hidrauličkim silama koje deluju na dno korita i na obale. Prirodni vodotok je složen, višedimenzioni *dinamički sistem*, koga, kao što je pokazano u tački 1.2, karakteriše niz ulaznih – nezavisno promenljivih veličina i niz izlaznih – zavisno promenljivih veličina. Za ulazne veličine (kao što su protok vode i pronos nanosa), kaže se da su „kontrolne” sa stanovišta geomorfoloških procesa. Izlazne veličine (kao što su širina, dubina, uzdužni nagib dna i oblik korita u planu,

označene su kao „stepeni slobode” sa stanovišta geomorfološkog razvoja rečnog korita. U opštem slučaju je *najmanje* četiri stepena slobode i to su upravo navedene izlazne veličine. Lista promenljivih se može proširiti, obuhvatajući krupnoću nanosa, vegetaciju, brzinu deformacije obala itd., ali to dodatno otežava analizu već vrlo komplikovanog sistema.

Funkcionalne relacije između kontrolnih promenljivih i stepeni slobode je teško utvrditi, jer je reč o višedimenzionim *nelinearnim* vezama. Pored toga, vrlo je teško razdvojiti uticaje pojedinih kontrolnih promenljivih. Trenutno stanje sistema utiče, u povratnoj sprezi, na ulazne parametre. Zato se rečni sistem s pravom može svrstati u red najstroženijih, takozvanih samoregulacionih, „*adaptivnih*” sistema. Problem postaje još složeniji ako se rečni sistem posmatra kao podsistem slivnog područja, gde se javljaju klimatološki, hidrološki, geološki, tektonski i drugi uticaji.

1.6.2 Granična geomorfološka stanja

Reakcija vodotoka na promenu vrednosti kontrolnih promenljivih manifestuje se u promenama geometrije korita, a te promene se najbrže uočavaju nakon regulacionih radova. Na primer, stabilizacija korita izgradnjom regulacionih gradjevina na jednom rečnom potezu može se odraziti na brzinu migracije meandera daleko uzvodno i nizvodno od mesta intervencije.

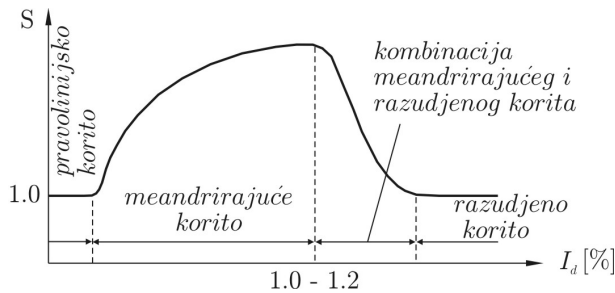
Procesi ka uspostavljanju ravnotežnog morfološkog stanja se po pravilu odvijaju postepeno, ali ponekad promene korita započinju naglo, kada vrednost jedne od nezavisnih promenljivih dostigne određenu graničnu vrednost. Na primer, relativno male klimatske promene, ili promene u nameni zemljišta, ponekad su dovoljne za naglu izmenu morfoloških karakteristika rečnog korita. Tim pitanjima se bavi teorija *graničnih geomorfoloških stanja* [145].

Kvantifikacija graničnih stanja je zasnovana na empirijskim istraživanjima. Tipičan primer je kriterijum Lejna (Lane, 1957) [100]:

$$I_d \cdot Q^{1/4} \begin{cases} \leq 0,0007 & \text{meandrirajući vodotok} \\ \geq 0,004 & \text{razudjeni vodotok,} \end{cases} \quad (1.4)$$

gde je I_d – prosečni uzdužni nagib dna, a Q – dominantni protok. (Između navedenih graničnih vrednosti, vodotok je u prelaznom režimu.)

Rezultati laboratorijskih istraživanja veze između uzdužnog nagiba dna i tipa rečnog korita prikazani su na Slici 1.21. Opisani kriterijumi mogu biti od koristi u proceni efekata regulacionih radova. Na primer, postavlja se pitanje može li prosecanje krivina i povećanje uzdužnog nagiba dna dovesti u pitanje stabilnost korita i postoji li opasnost da ono postane razudjeno? I obratno, može li se razudjen nestabilan vodotok, regulacionim radovima na smanjenju uzdužnog nagiba dna, preobraziti u stabilan, meandrirajući vodotok?



Slika 1.21: Karakter korita u funkciji uzdužnog nagiba dna, pri konstantnom protoku; pri određenoj graničnoj vrednosti uzdužnog nagiba, vodotok prelazi iz kategorije meandrirajućih vodotoka (miran režim tečenja, umeren pronos nanosa) u kategoriju razudjenih vodotoka (buran režim, velike količine nanosa) [145].

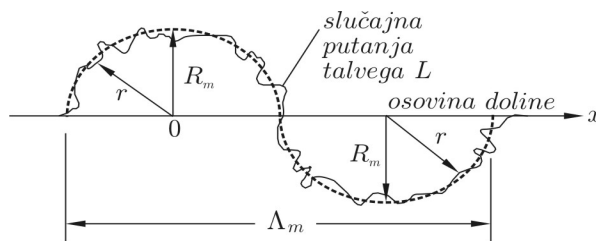
Koristeći obiman fond terenskih merenja, neki autori predlažu da osnovni kriterijum oblika korita aluvijalnih reka u planu bude vrednost faktora sinusoidnosti [41]. Ovaj pristup se poziva na opšte načelo da svaki prirodni sistem u ustaljenim uslovima teži maksimumu svoje entropije¹¹ kako bi dostigao ravnotežno stanje:

$$E(r) = \int_0^{R_m} f(r) \cdot \ln f(r) dr \rightarrow \max. \tag{1.5}$$

Funkcija gustine raspodele poluprečnika krivine $f(r)$ zadovoljava uslov:

$$\int_0^{R_m} f(r) dr = 1, \tag{1.6}$$

pri čemu je slučajna promenljiva r – odstojanje talvega od centra krivine, a R_m – najveće odstojanje r , upravo na osovinu doline (Slika 1.22).



Slika 1.22: Talveg kao slučajna putanja u stohastičkom modelu zakrivljenosti aluvijalnih vodotoka [41].

¹¹U teoriji informacija, entropija je numerički pokazatelj stepena neodređenosti sistema ili procesa i definiše se kao suma proizvoda verovatnoća različitih stanja sistema i logaritama tih verovatnoća.

Rešenje uslova (1.5): $f(r) = 1/R_m$ ukazuje na uniformnost funkcije gustine raspodele $f(r)$, što znači da je teorijski oblik meandra koji odražava ravnotežno stanje *polukružni luk* i da se meander u tom slučaju karakteriše sa dve, alternativno usmerene kružne krivine, poluprečnika $r = R_m$, sa centrima na osovini doline.

To znači da je:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_m &= 4 \cdot R_m \\ L &= 2\pi \cdot R_m \\ S &= L/\Lambda_m = \pi/2 = 1,57. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Zaključak je da se korito aluvijalnog vodotoka pod određenim lokalnim i graničnim uslovima spontano menja u pravcu dinamički ravnotežnog stanja, kome odgovara maksimum entropije sa vrednošću $S = 1,57$. Taj zaključak opisuje ishod promene oblika korita u planu koji ima najveću verovatnoću pojave.

Usled raznih faktora koji usporavaju dostizanje ravnotežnog stanja, složenosti vodnog režima i promena graničnih uslova, korito jedne rečne deonice prolazi kroz niz evolutivnih faza, ali vrednost $S = 1,57$ ostaje reper konačnog stabilnog stanja.

Prema izloženoj teoriji, pravolinijski vodotoci su svi oni vodotoci koji imaju vrednost $S < 1,57$, a meandrirajući vodotoci su oni sa vrednošću $S > 1,57$. U kontekstu ovakve podele, može se smatrati da je korito pravolinijskog vodotoka kod koga je vrednost faktora S bliska vrednosti $1,57$ stabilnije od korita meandrirajućeg vodotoka kod koga vrednost S znatno prevazilazi vrednost $1,57$. Korito meandrirajućeg vodotoka je najstabilnije ako je $S \approx 1,57$. Takvo korito je stabilnije od pravolinijskog korita kod koga je $S \approx 1,0$.

Opisani racionalni pristup pomaže u otklanjanju mnogih kontroverznih tumačenja uslova pod kojim se ostvaruje stabilnost rečnog korita. Istovremeno, to upućuje na praktičan zaključak da projektovana trasa regulisanog korita treba da obezbedi vrednost faktora sinusoidnosti S koja je bliska $1,57$.

1.6.3 Stabilno korito aluvijalnog vodotoka

Problem dinamičke ravnoteže korita se može razmatrati iz raznih uglova, u zavisnosti od profila istraživača. Geolozi i geomorfolozi taj fenomen analiziraju u veoma dugom vremenskom periodu, u kontekstu evolucije rečnih dolina. Po njima je rečno korito u ravnoteži kad njegov uzdužni nagib omogući „... raspoloživim protokom vode i predominantnom geometrijom korita onu brzinu toka koja obezbeđuje transport celokupnog nanosa sa slivnog područja” [158].

Hidrotehnički inženjeri su započeli istraživanja ravnoteže korita u kontekstu projektovanja stabilnih neobloženih kanala, koji ne bi bili podložni eroziji ili zasipanju. Odgovarajuća empirijska izučavanja su u literaturi sistematizovana pod imenom „teorija režima” [54, 76, 100, 146]. Njeni protagonisti smatraju da je aluvijalna reka „u režimu” ako je njeno korito dostiglo stabilnost širine, dubine i uzdužnog

nagiba dna – osnovnih elemenata koji čine hidrauličku geometriju korita¹². Teoriju režima čine empirijske veze hidrauličke geometrije korita i protoka. Reč je o korelacijama koje nemaju univerzalni karakter, ali ukazuju na neke opšte prirodne tendencije ka uspostavljanju stabilnog korita [110, 145, 146]:

- dubina je srazmerna protoku vode, a obrnuto srazmerna pronosu nanosa;
- širina korita i dužina meandra rastu sa protokom vode i količinom nanosa;
- odnos širine i dubine u poprečnom preseku je proporcionalan pronosu nanosa;
- uzdužni nagib korita je srazmeran pronosu nanosa i krupnoći zrna, a obrnuto srazmeran protoku vode;
- stepen sinusoidnosti korita je srazmeran uzdužnom nagibu doline, a obrnuto srazmeran količini nanosa.

Metodama pomoću kojih se navedene veze mogu analitički uspostaviti, a geometrija stabilnog korita prognozirati, bavi se poslednje, četrnaesto poglavlje.

1.7 Završne napomene

Na početku je data definicija aluvijalnog vodotoka kao prirodnog ili veštačkog vodotoka čije je korito (uključujući obale), sačinjeno od sopstvenog aluvijalnog, sitnog, peščanog i šljunčanog, potpuno pokretnog materijala. Vraćanje pojmu aluvijalnog vodotoka na ovom mestu je uputno, da bi se ponovo ukazalo na objektivna *ograničenja znanja* i izvesna uprošćenja koja su nužna u rečnoj hidraulici i morfologiji.

Prvo, kategoriji aluvijalnih vodotoka najviše odgovaraju *srednji tokovi* velikih ravnicačkih reka. Strogo uzevši, to ne može biti slučaj sa njihovim gornjim tokovima koji imaju bujični karakter, kao ni sa njihovim donjim tokovima, zbog istaložavanja glinovitih i koloidnih materijala u blizini ušća.

Drugo, u inženjerskoj praksi se prećutno podrazumeva da je korito aluvijalnog vodotoka u *ravnatežnom stanju* („u režimu“). Ovo treba shvatiti u relativnom smislu, jer „ravnateža“ korita zavisi od dužine vremenskog perioda u kome se razmatra. U geološkoj vremenskoj razmeri (hiljade godina) nema ravnateže – prisutan je jednoznačni proces izdizanja rečnih dolina sa promenom položaja rečnog korita. Takođe nema ravnateže ni u vrlo kratkom periodu od nekoliko godina, u kome dolazi periodično do zasipanja i erozije korita. Samo u vremenskoj razmeri inženjerske delatnosti (50÷100 godina), može se smatrati da je korito aluvijalnog vodotoka u ravnateži, što znači da ima praktično konstantne *statističke* morfološke pokazatelje.

Iz svega proizilazi da je definicija aluvijalnog vodotoka samo *shematizacija* koja ne obuhvata svu složenost prirodnih uslova. Zanimaruje se niz uticajnih faktora, kao

¹²Ovom definicijom stabilnog korita nisu obuhvaćeni oblici korita u horizontalnoj projekciji, tako da meandriraajući vodotok, stabilan sa stanovišta teorije režima, ne mora biti stabilan sa stanovišta geometrijskih oblika u planu.

što su: raznorodnost geološkog sastava, kohezija materijala usled prisustva gline, priliv krupnog materijala iz pritoka itd. Međutim, smisao izučavanja hipotetičkog aluvijalnog vodotoka je u tome što mnoge reke (u celini ili na dužim deonicama) imaju obeležje „kvazi-aluvijanih” vodotoka u statističkom smislu. Pored toga, koncept aluvijalnog vodotoka ima i svoje teorijsko opravdanje, jer omogućava analizu veoma složenog sadejstva vode i pokretnog korita na relativno jednostavan način.

2

Elementi teorije graničnog sloja

U ovom poglavlju se definiše pojam graničnog sloja i analizira njegova struktura. Razmatra se raspored tangencijalnog napona i brzine po dubini toka, kao i po poprečnom preseku. Posebna pažnja je posvećena teorijskim funkcijama rasporeda brzine, koeficijenata turbulentne viskoznosti i difuzije, s obzirom na značaj koji te funkcije imaju u izučavanju rečnog nanosa. Potpuniji prikaz teorije graničnog sloja može se naći u brojnoj literaturi [5, 42, 43, 131, 139].

2.1 Pojam graničnog sloja

Razmatra se ustaljeni tok sa uniformnim rasporedom brzine po vertikali na ulazu u kanal širokog pravougaonog poprečnog preseka (Slika 2.1). Od interesa je raspored brzine u proizvoljnoj vertikalnoj ravni (x, z) koja je daleko od obala kanala. Prisustvo čvrste granice – dna kanala, izaziva poremećaj profila brzine, jer trenje pri dnu „koči” i usporava kretanje fluidnih delića. Oblast usporenog kretanja fluidnih delića zove se *granični sloj*. Debljina graničnog sloja δ predstavlja odstojanje između čvrste granice i tačke u kojoj je brzina jednaka 99% brzine ispred ulaza u kanal. Ova debljina se povećava u smeru toka [43]:

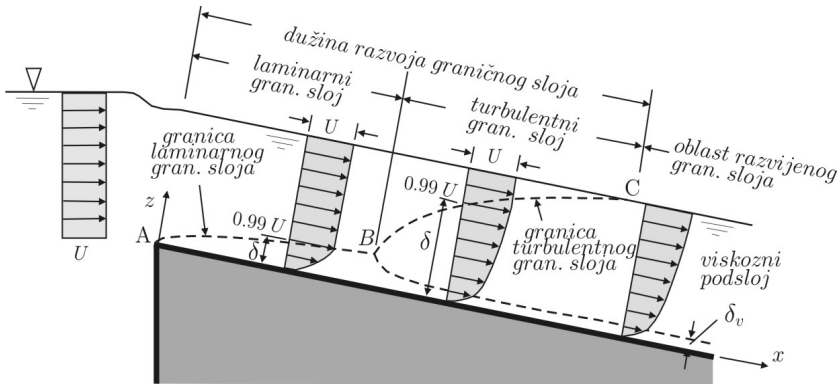
$$\frac{\delta}{x} = \begin{cases} 5,0 \cdot \text{Re}_x^{-0,5} & - \text{laminarni tok} \\ 0,4 \cdot \text{Re}_x^{-0,2} & - \text{turbulentni tok,} \end{cases} \quad (2.1)$$

gde je: $\text{Re}_x = U \cdot x/\nu$ - lokalna vrednost Rejnoldsovog broja¹, a ν - *kinematički koeficijent viskoznosti vode*².

Laminarni granični sloj postaje nestabilan za vrednost $\text{Re}_x = 5 \times 10^5$, što odgovara vrednosti Rejnoldsovog broja graničnog sloja: $\text{Re}_\delta = U \cdot \delta/\nu \approx 2000$. Za praksu je interesantan isključivo potpuno razvijeni *turbulentni granični sloj* (Slika 2.2).

¹Osborne Reynolds (1842-1912), engleski naučnik, bavio se eksperimentalnim izučavanjem tečenja u cevima, kavitacije i uslova sličnosti koji se primenjuju kod fizičkih modela.

²Pregled osnovnih fizičkih svojstava vode dat je Dodatku B.



Slika 2.1: Formiranje graničnog sloja u širokom kanalu; oblast poremećaja raste u nizvodnom smeru; tečenje u graničnom sloju je najpre laminarno, da bi nizvodno, najpre postalo nestabilno (tačka B), a zatim, turbulentno. Dužina prelazne zone između laminarnog i turbulentnog režima zavisi od rapavosti površine, brzine ulaznog toka i intenziteta turbulencije.

U slučaju turbulentnog graničnog sloja koji zahvata ceo tok po dubini, pri dnu se zadržava tanak *viskozni podsloj*, čija je debljina (δ_v), kao što će se kasnije videti, uslovljena brzinom toka i rapavošću podloge.

■ **Primer 2.1.** Odrediti odstojanje na kome će debljina graničnog sloja biti jednaka dubini toka $h = 5$ m, ako je: $U = 1$ m/s i $\nu = 1,0 \times 10^{-6}$ m²/s.

Rešenje: $x = 743$ m.

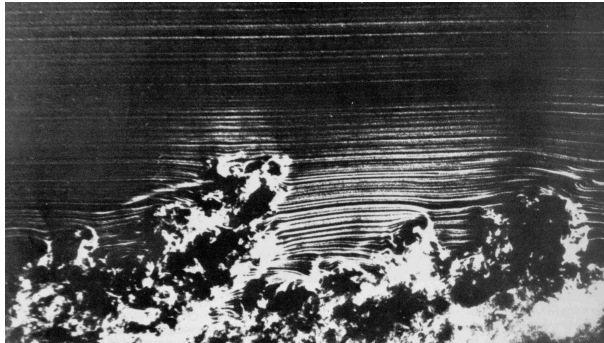
2.2 Turbulentne karakteristike razvijenog graničnog sloja

Rečni tok je primer potpuno razvijenog graničnog sloja. U njemu je tečenje turbulentno (Slika 2.2), što znači da sve veličine imaju slučajan raspored u prostoru i vremenu. Neka su u, v, w – komponente vektora brzine u koordinatnim pravcima (x, y, z) , pri čemu je x – pravac glavnog toka, a z – vertikalni pravac. Razmotriće se komponenta brzine u pravcu glavnog toka. Njena lokalna *trenutna* vrednost se sastoji od *vremenski osrednjene* komponente \bar{u} i *fluktuacione* komponente u' (Slika 2.3):

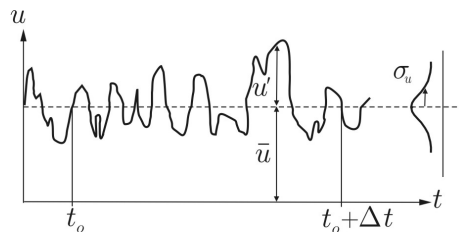
$$u = \bar{u} + u'. \quad (2.2)$$

Osrednjena komponenta se određuje integracijom po vremenu [63]:

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} u(t) dt. \quad (2.3)$$



Slika 2.2: Formiranje turbulentnog graničnog sloja duž ravne ploče koja je postavljena u vazдушnom tunelu ($Re = 3500$); vidljivost vrtloga je ostvarena upuštanjem dima u vazдушnu struju i naročitim osvetljenjem [163].



Slika 2.3: Podjela trenutne brzine u proizvoljnoj tački fluidnog prostora.

U dovoljno dugom intervalu Δt , vremenski osrednjena fluktuaciona komponenta $\overline{u'}$ je jednaka nuli.

Lokalni intenzitet turbulencije toka se kvantifikuje varijansom:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_o}^{t_o+\Delta t} (u' - \overline{u'})^2 dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_o}^{t_o+\Delta t} u'^2 dt = \overline{u'^2}, \quad (2.4)$$

odnosno, standardnom devijacijom:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u'^2}}. \quad (2.5)$$

Za strujanje u vertikalnoj (x, z) ravni, od interesa su dve fluktuacione komponente – ona u pravcu glavnog toka u' i ona u vertikalnom pravcu³ w' . Ako se pretpostavi da su komponente u' i w' istog reda veličine i da medju njima postoji određena

³Jasno je da je vremenski osrednjena brzina $\overline{w} = 0$, jer nema tečenja u vertikalnom pravcu, ali fluktuacije brzine u tom pravcu postoje, $w' \neq 0$.

korelacija, onda se kao indikator turbulentnosti u vertikalnoj ravni može koristiti kovarijansa:

$$\sigma_{uw}^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_o}^{t_o+\Delta t} (u' - \overline{u}') (w' - \overline{w}') dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_o}^{t_o+\Delta t} u' \cdot w' dt = \overline{u' w'}, \quad (2.6)$$

odnosno, odgovarajuća standardna devijacija:

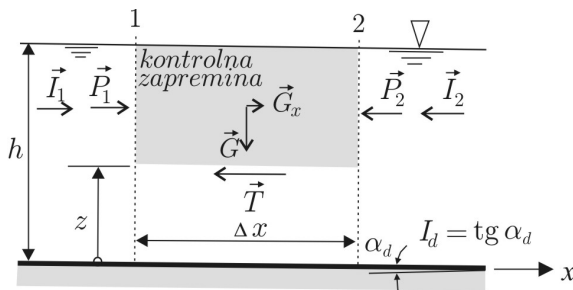
$$\sigma_{uw} = \sqrt{\overline{u' w'}}. \quad (2.7)$$

Pored brzina, fluktuirajući karakter imaju i druge fizičke veličine, kao što su sile, pritisci, tangencijalni naponi itd. Kada se neka prirodna pojava razmatra kao slučajni proces (na primer, pokretanje rečnog nanosa), neophodno je uzeti u obzir trenutne vrednosti koje u sebi sadrže fluktuacioni doprinos. Međutim, to nije uvek jednostavno, pa se rešenja većine problema klasične hidraulike zasnivaju na vremenski osrednjenim veličinama.

2.3 Raspored tangencijalnog napona po dubini otvorenog toka

Svaki tok je podvrgnut smičućoj sili, čiji intenzitet određuje brzinu deformacije fluida. Takvoj neprekidnoj deformaciji suprotstavlja se molekularna viskoznost fluida („unutrašnje trenje“). U razvijenom turbulentnom graničnom sloju, na veličinu smičućeg (tangencijalnog) napona presudan uticaj ima intenzitet fluktuacionih kretanja. Uticaj viskoznosti je od sekundarnog značaja.

Razmatrajući ravnotežu sila koje deluju na elementarnu kontrolnu zapreminu u uslovima *jednolikog* tečenja (Slika 2.4), može se pokazati da je raspored tangencijalnog napona po dubini toka *linearan*.



Slika 2.4: Sile koje deluju na fluid unutar kontrolne zapremine.

Sile pritiska \vec{P}_1 , \vec{P}_2 i inercijalne sile \vec{I}_1 , \vec{I}_2 međusobno su uravnotežene, pa u razmatranju ostaju samo sile težine i trenja.

Intenzitet komponente težine u pravcu toka je:

$$G_x = \rho \cdot g \cdot \Delta x \cdot \Delta y (h - z) \sin \alpha_d. \quad (2.8)$$

Intenzitet sile trenja je:

$$T = \tau(z) \Delta x \cdot \Delta y, \quad (2.9)$$

gde je τ - tangencijalni napon [$\text{N/m}^2 = \text{Pa}$], $\rho = 1 \text{ t/m}^3$ - gustina vode, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ - gravitaciono ubrzanje, Δx , Δy - dužine kontrolne zapremine u odgovarajućim koordinatnim pravcima, a α_d - ugao koji linija dna zaklapa sa horizontalom.

Iz uslova jednakosti sila G_x i T (granično stanje), a imajući u vidu da je za mali nagib dna, $\sin \alpha_d \approx \text{tg } \alpha_d = I_d$, dobija se izraz za raspored tangencijalnog napona po dubini toka:

$$\tau(z) = \rho \cdot g (h - z) I_d. \quad (2.10)$$

Najveća vrednost napona se javlja se pri dnu:

$$\tau(0) \equiv \tau_o = \rho \cdot g \cdot h \cdot I_d, \quad (2.11)$$

dok je na slobodnoj površini, pod uslovom da je uticaj vetra zanemarljiv, $\tau(h) = 0$.

Podrazumeva se, s obzirom na pretpostavku o jednolikom tečenju, da se u jednačinama (2.10) i (2.11) umesto nagiba dna može uzeti nagib linije nivoa vode I_{Π} , odnosno nagib linije energije I_e .

Izraz (2.10) važi bez obzira da li je tok laminaran ili turbulentan. Medjutim, nema laminarnih rečnih tokova, pa se podrazumeva da izraz (2.10) predstavlja raspored vremenski osrednjenog tangencijalnog napona u turbulentnom rečnom toku.

Umesto lokalnog smičućeg napona, u rečnoj hidraulici se često koristi odgovarajuća *smičuća brzina*:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad [\text{m/s}]. \quad (2.12)$$

Smisao uvodjenja ove veličine sa kinematičkim obeležjem je u mogućnosti formiranja bezdimenzionog broja u/u_* .

2.4 Komponente tangencijalnog napona

Primenjujući postupak vremenskog osrednjavanja koji dovodi do „Rejnoldsovih jednačina” [63], može se pokazati da je u vertikalnoj (x, z) ravni, tangencijalni napon $\tau = \tau_{xz}$ jednak:

$$\tau(z) = \rho \cdot \nu \frac{d\bar{u}}{dz} - \rho \cdot \overline{u'w'}, \quad (2.13)$$

pri čemu prvi član na desnoj strani predstavlja „viskozni” napon (τ_v), a drugi, „turbulentni (Rejnoldsov) napon” (τ_t).

Viskozni napon zavisi od vrste fluida (molekularne viskoznosti) i od brzine deformacije (klizanja), koja se opisuje gradijentom brzine $d\bar{u}/dz$.

Turbulentni („Rejnoldsov”) napon:

$$\tau_t = -\rho \cdot \overline{u'w'} \quad (2.14)$$

je posledica vremenskog osrednjavanja zavisno promenljivih u jednačini održanja količine kretanja. Ova veličina nije napon u fizičkom smislu, već predstavlja prenos („transport”) količine kretanja posredstvom fluktuacionih brzina [63]. Radi se o dejstvu zamišljenih napona kojima fluktuacije deluju na glavno strujanje. Pripisivanje kovarijanse $-\rho \overline{u'w'}$ kao napona opravdava se lakšim istraživanjem i dobijanjem ispravnih rezultata proračuna.

Primenom (2.10), sledi da je (Slika 2.5):

$$\tau(z) = \rho \cdot \nu \frac{d\bar{u}}{dz} - \rho \cdot \overline{u'w'} = \tau_o \left(1 - \frac{z}{h}\right). \quad (2.15)$$

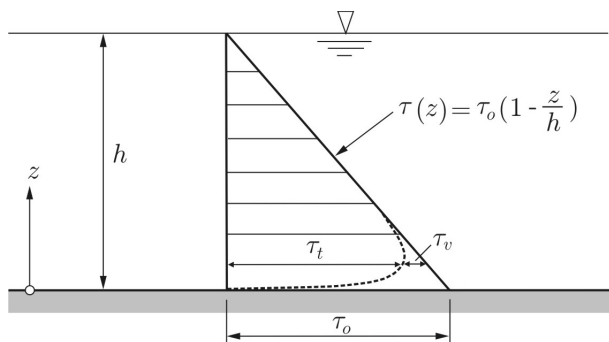
Merenjem je utvrđeno da tangencijalni napon pri dnu, u sloju debljine oko $0,1 h$, ima približno konstantnu vrednost τ_o . Grafički prikaz na Slici 2.5 sugerise da u prirodnim tokovima nezatni deo tangencijalnog napona proizilazi iz molekularne viskoznosti, a najveći deo, iz turbulentne strukture toka.

To dozvoljava da se na osnovu (2.12) i (2.14), u analizama koristi i ova zavisnost:

$$u_*^2 = -\overline{u'w'}. \quad (2.16)$$

■ **Primer 2.2.** Pokazati da je viskozni tangencijalni napon zanemarljivo mali u odnosu na turbulentni napon, ako se zna da je $u' = w' = 0,1 \bar{u}$, a $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Rešenje. Turbulentni deo tangencijalnog napona je jednak $\tau_t \approx -0,01 \rho \bar{u}^2$, a viskozni napon je reda veličine $\tau_v = -\rho \nu \bar{u}/h$. Odnos ovih napona je $\tau_t/\tau_v = 0,01 \cdot \bar{u} h/\nu$. Kako je $\bar{u} h/\nu > 1 \times 10^6$, to sledi da je $\tau_t/\tau_v > 10^4$.



Slika 2.5: Komponente tangencijalnog napona; turbulentni tangencijalni napon τ_t je dominantan po dubini, jer su prirodna korita hidraulički rapava, što pogoduje stvaranju vrtloga; izuzetno se u slučaju hidraulički glatkih podloga pri dnu može pojaviti tanak „viskozni podsloj” u kome su turbulentne fluktuacije prigušene.

2.5 Modeliranje napona turbulencije

Da bi teorija našla primenu u praksi, potrebno je da se definiše turbulentni napon $-\rho \overline{u'w'}$. Za to je razvijen niz analitičkih postupaka – „modela turbulencije” [139]. Ovdje se ukratko opisuju dva klasična modela zasnovana na pretpostavci prostorne izotropnosti vrtložnih kretanja (iste karakteristike u svim pravcima), pri čemu, strogo uzevši, ova pretpostavka važi samo za male vrtloge. Modelima turbulencije se opisuje uticaj fluktuacija na glavno strujanje.

Model zasnovan na koeficijentu turbulentne viskoznosti. Prema konceptu Businesska⁴ iz 1877. godine, turbulentni napon se definiše po analogiji sa viskozim naponom, što znači da je proporcionalan gradijentu brzine:

$$\tau_t = \rho \cdot \nu_t \frac{d\bar{u}}{dz}, \quad (2.17)$$

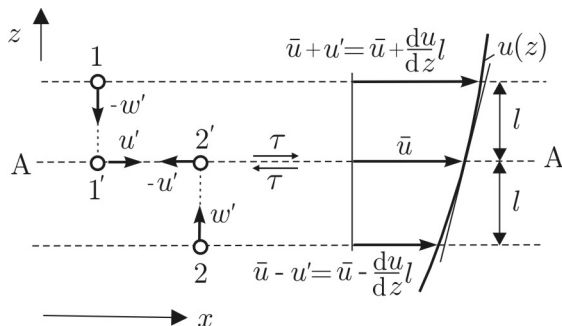
gde je ν_t - koeficijent *turbulentne, vrtložne viskoznosti*. Za razliku od koeficijenta molekularne viskoznosti, ovaj parametar ne opisuje fizičko svojstvo fluida, već intenzitet turbulencije toka. Vrednosti parametra ν_t , koje su lokalno promenljive i zavise od vrste strujanja, određuju se za svaki konkretan slučaj tako da se usklade rezultati proračuna i merenja.

Model zasnovan na dužini mešanja. Prema teoriji Prandtla⁵, fluktuacione brzine u' i w' se mogu definisati pomoću *dužine mešanja* „ l ”, koja predstavlja

⁴Joseph Boussinesq (1842–1929), francuski hidrauličar, dao je značajan doprinos u teoriji tokova sa izraženom zakrivljenošću strujnica.

⁵Ludwig Prandtl (1875–1953), nemački naučnik, smatra se ocem teorijske i eksperimentalne mehanike fluida; osnivač je čuvenog istraživačkog centra u Getingenu (Göttingen), koji je imao vodeću ulogu u razvoju teorije graničnog sloja.

tipičnu dužinu putanje fluidnog delića koju ovaj prevali pre nego što preda višak količine kretanja okolnim delićima. Na Slici 2.6 je prikazan trenutni položaj dva fluidna delića koji se kreću različitim brzinama.



Slika 2.6: Dužina mešanja.

Fluktuacije toka u vertikalnom pravcu izazivaju mešanje delića i promenu njihove količine kretanja. Delić označen brojem 1 dospeva pod uticajem brzine w' u ravan A-A, gde teži da ubrza okolne deliće, jer mu je brzina veća za u' . Suprotno važi za delić koji je označen brojem 2, jer on dolazi iz zone sa manjom brzinom i teži da uspori okolne deliće. Fizički, opisana pojava izaziva napon smicanja u ravni A-A.

Prandtl je pretpostavio da su komponente u' i w' istog reda veličine i proporcionalne gradijentu brzine:

$$u' = l \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right|; \quad w' = l \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right|. \quad (2.18)$$

Zamenom u (2.14) dobija se:

$$\tau_t = \rho \cdot l^2 \cdot \frac{d\bar{u}}{dz} \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right|. \quad (2.19)$$

Upoređujući izraze (2.19) i (2.17) može se konstatovati da postoji veza između dužine mešanja i koeficijenta turbulentne viskoznosti u obliku:

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right|. \quad (2.20)$$

Ta veza nije samo formalnog karaktera, već ima fizičko utemeljenje u činjenici da se koeficijent turbulentne viskoznosti može shvatiti kao koeficijent *mešanja* fluidnih delića u procesu koji se naziva *turbulentna difuzija*, a koji prosto rečeno, predstavlja

slučajno rasprostiranje fluidnih delića pod uticajem fluktuacionih brzina. U tom kontekstu, veličina $\overline{u'w'}$ predstavlja pronos (transport) količine kretanja turbulentnom difuzijom u vertikalnoj ravni (x, z). Za njeno definisanje je neophodno pretpostaviti da postoji *korelacija* između fluktuacionih brzina u' i w' . Ako se u izrazu za koeficijent korelacije, koji u ovom slučaju po definiciji ima oblik:

$$\beta_1 = \frac{\sigma_{uw}^2}{\sigma_u \cdot \sigma_w} = \frac{\overline{u'w'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \cdot \sqrt{\overline{w'^2}}} \quad (2.21)$$

zameni $\sigma_u = \sqrt{\overline{u'^2}}$ prema izrazu (2.18), dolazi se do relacije:

$$\overline{u'w'} = \underbrace{-|\beta_1| \cdot \sigma_w \cdot l}_{-\nu_t} \cdot \frac{d\bar{u}}{dz}, \quad (2.22)$$

koja pokazuje strukturu parametra ν_t , kao *difuzionog koeficijenta* količine kretanja. Negativni znak ukazuje na to da je smer prenosa količine kretanja suprotan gradijentu vremenski osrednjene brzine. Tako se na drugi način dolazi do izraza (2.17):

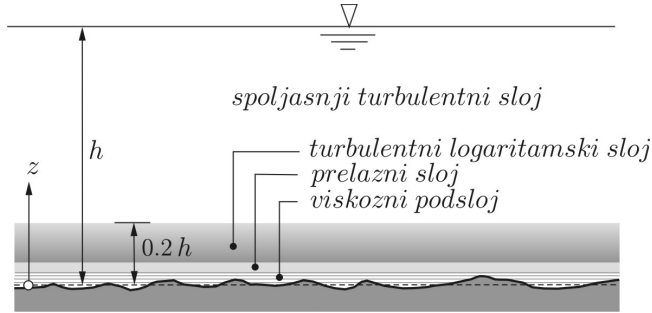
$$\tau = -\rho \overline{u'w'} = -\rho (-\nu_t) \frac{d\bar{u}}{dz} = \rho \cdot \nu_t \frac{d\bar{u}}{dz},$$

što pokazuje da intuitivna Busineskova hipoteza na bazi analogije sa molekularnom viskoznošću, nalazi potvrdu u statističkom opisu turbulencije kao slučajnog procesa.

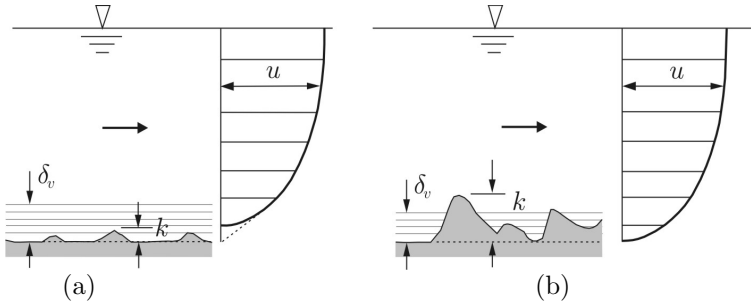
Opisani modeli imaju niz zamerki; pretpostavka o analogiji vrtložnih i molekularnih kretanja nije fizički opravdana, jer se vrtlozi deformišu, a njihova dužina mešanja nije mala u odnosu na strujnu oblast. Šta više, najveći deo prenosa i razmene količine kretanja se obavlja posredstvom velikih vrtloga, za koje ne važe polazne pretpostavke. Pored toga, oba modela su isuviše „gruba” za većinu prirodnih tokova, jer ne uzimaju u obzir „istoriju” turbulentnih kretanja. Međutim, iako se danas koristi mnoštvo složenijih (i tačnijih) modela [139], opisani klasični pristupi nisu izgubili na aktuelnosti, jer omogućavaju da se u inženjerskoj praksi relativno lako dodje do upotrebljivih rezultata. Napominje se da je koncept turbulentne vrtložnosti i difuzije prisutan i u nizu složenijih matematičkih modela.

2.6 Raspored brzine po dubini toka

Na Slici 2.7 prikazana je konceptualna podela razvijenog turbulentnog graničnog sloja na više podslojeva, pri čemu za svaki podsloj postoji teorijski izraz za raspored brzine po vertikali.



Slika 2.7: Podela turbulentnog graničnog sloja.



Slika 2.8: Turbulentno tečenje po hidraulički (a) glatkom i (b) rapavom dnu.

Kod *hidraulički glatkog dna*, apsolutna rapavost k je manja od debljine viskoznog podsloja δ_v (Slika 2.8-(a)), a na raspored brzine utiče isključivo viskoznost fluida. Kod *hidraulički rapavog dna*, viskozni podsloj je razbijen (Slika 2.8-(b)), tako da se vrtlozi stvaraju pri samom dnu, uticaj viskoznosti je zanemarljiv, a na raspored brzine utiče isključivo apsolutna rapavost. Ukoliko su debljina viskoznog podsloja i apsolutna rapavost istog reda veličine, tok je u *hidraulički prelaznom režimu*. U spoljašnjem turbulentnom sloju je uticaj apsolutne rapavosti neznatan, jer su vrtlozi sa dna već apsorbovani u turbulentnoj strukturi toka.

Uticaj apsolutne rapavosti prvi je u sistemima pod pritiskom ispitivao Nikuradze⁶. U cilju prenošenja njegovih rezultata na prirodne provodnike sa nejednolikom rapavošću, uveden je pojam *ekvivalentne peščane rapavosti* (k_s). Reč je o „prirodnoj“ rapavosti koja daje isti otpor kao Nikuradzeova rapavost. Iako je sa stanovišta sličnosti ova zamena problematična, iskustvo pokazuje da je to prihvatljivo za praktične potrebe [64].

⁶Johann Nikuradse (1894–?) je jedan iz grupe slavni nemačkih istraživača okupljenih u Getingenu. Počev od 1933. godine, razmatrao je otpore trenja u cevima koje su iznutra bile obložene peskom jednolike krupnoće. Varirajući protok, prečnik cevi i krupnoću peska (apsolutnu rapavost), formulisao je opšte zavisnosti koje su i danas aktuelne.

Indikator uticaja apsolutne rapavosti je smičući Rejnoldsov broj Re_* , koji predstavlja odnos ekvivalentne peščane rapavosti k_s i *razmere* za debljinu viskoznog podsloja ν/u_* . Granične vrednosti ovog broja za *turbulentno* tečenje iznose:

$$Re_* = \frac{u_* k_s}{\nu} \begin{cases} < 5 & - \text{hidraulički glatka podloga;} \\ 5 \div 70 & - \text{prelazna zona;} \\ > 70 & - \text{hidraulički rapava podloga.} \end{cases} \quad (2.23)$$

U literaturi se može naći više predloga za definiciju ekvivalentne peščane rapavosti rečnog korita. Ta rapavost se vezuje za određenu krupnoću nanosa na rečnom dnu. Krupnoće se opisuju karakterističnim prečnicima zrna: d_{90} , d_{65} , d_{50} itd., pri čemu indeks označava koliko je procentualno zrna sa manjim prečnikom. Nekoliko primera dato je u Tabeli 2.1

Tabela 2.1: Definicija ekvivalentne peščane rapavosti.

Autor	k_s	Oblast primene
Engelund (Engelund, 1966)	$2 d_{65}$	sitan pesak
Mahmud (Mahmood, 1971)	$5 d_{84}$	
Akers i Uajt (Ackers, White, 1973)	$1, 25 d_{35}$	
Kamfuis (Kamphuis, 1974)	$2, 5 d_{90}$	$h/d_{90} > 10, B/h > 3$
fan Rejn (van Rijn, 1982, 1984)	$3 d_{90}$	ravno peščano dno
fan Rejn (van Rijn, 1982)	d_{90}	ravno šljunčano dno
Mejnord (Maynord, 1991)	$2 d_{90}$	$h/d_{90} > 2, d_{90} = 7 \div 70 \text{ mm}$
Samer (Summer, 1996)	$(1, 5 \div 21) d_{50}$	$d_{50} = 0, 13 \div 3 \text{ mm}$
Djulien (Julien, 2002)	$6, 8 d_{50}$	
Merenja raznih autora	$1 - 10 \text{ mm}$	betonska podloga

Viskozni podsloj. U ovom sloju dominira viskozni tangencijalni napon τ_v . Pretpostavljajući da je taj napon konstantan i jednak najvećoj vrednosti τ_o , može se napisati⁷:

$$\tau(z) \equiv \tau_v = \rho \cdot \nu \frac{du}{dz} = \tau_o, \quad (2.24)$$

odakle sledi:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\tau_o}{\rho\nu} = \frac{u_*^2}{\nu}. \quad (2.25)$$

Integracijom, uz granični uslov $u(0) = 0$, dobija se izraz za *linearni* raspored brzine po vertikali u viskoznom podsloju koji je prikazan na Slici 2.8-(a):

$$u(z) = \frac{u_*^2}{\nu} z. \quad (2.26)$$

⁷Oznaka vremenskog osrednjavanja se nadalje izostavlja.

Prelazni sloj. Za ovaj sloj, koji je definisan vrednostima $5 < Re_* < 70$, ili $5 < u_* z / \nu < 30$, predloženi su različiti izrazi za raspored brzine, ali se ovde ne navode, jer nisu u široj upotrebi.

Turbulentni logaritamski sloj. U ovoj oblasti se može zanemariti uticaj viskoznosti, a raspored brzine definisati na osnovu Prandtlovog modela dužine mešanja. Pretpostavljajući da se u blizini rečnog dna dužina mešanja linearno menja sa odstojanjem:

$$l = \kappa \cdot z, \quad (2.27)$$

gde je parametar $\kappa = 0,4$ - fon Karmanova⁸ konstanta, dobija se na osnovu (2.19) i (2.27):

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z}. \quad (2.28)$$

Integracijom po dubini, može se izvesti jednačina teorijskog rasporeda brzine u turbulentnom logaritamskom sloju koji, kako pokazuju merenja, važi do odstojanja $z = 0,1 h \div 0,2 h$:

$$\frac{u(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln z + A. \quad (2.29)$$

Eliminacija integracione konstante A iz (2.29) obavlja se pomoću graničnog uslova koji je definisan na dnu, ili na površini.

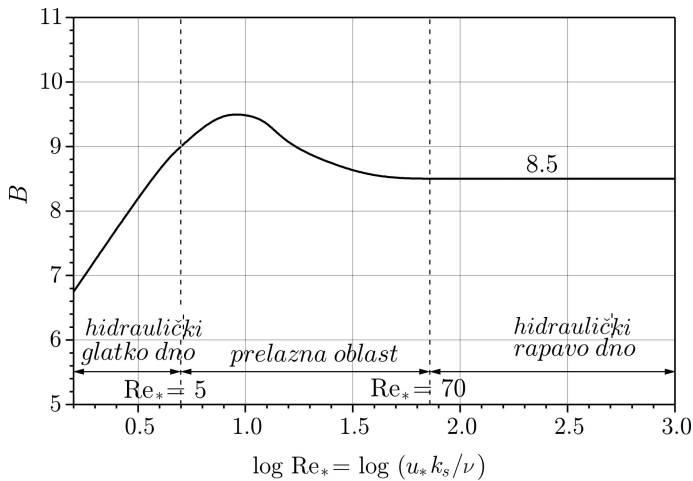
(a) *Granični uslov na dnu* zahteva da se konstanta A izrazi preko ekvivalentne peščane rapavosti, odnosno da se izvrši transformacija zavisnosti (2.29):

$$\frac{u(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{k_s} \right) + B, \quad (2.30)$$

gde je „nova” konstanta $B = A + \frac{1}{\kappa} \ln k_s$, čije se vrednosti mogu očitati sa eksperimentalno utvrđenog dijagrama na Slici 2.9, ili sračunati pomoću izraza:

$$B = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} \ln(Re_*) + 5,5 & \text{za } Re_* < 5; \\ 8,5 & \text{za } Re_* \geq 70. \end{cases} \quad (2.31)$$

⁸Theodor von Kármán (1881–1963), takodje jedan iz grupe naučnika okupljenih u Getingenu, bavio se problemima otpora, rečnog nanosa, a prvi je uspostavio analogiju izmedju zvučnih i gravitacionih talasa.



Slika 2.9: Pomoćni dijagram za određivanje logaritamskog rasporeda [146].

Zamenom (2.31) u (2.30), dobijaju se sledeći izrazi za raspored brzine u turbulentnom logaritamskom sloju:

$$\frac{u(z)}{u_*} = \begin{cases} \text{– hidraulički glatko dno :} \\ \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_* z}{\nu} \right) + 5,5 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{0,11 \frac{\nu}{u_*}} \right) \\ \text{– hidraulički rapavo dno :} \\ \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{k_s} \right) + 8,5 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{30z}{k_s} \right). \end{cases} \quad (2.32)$$

(b) *Granični uslov na površini* definiše se polazeći od pretpostavke da je na površini brzina najveća: $u(h) = u_{\max}$, tako da izraz (2.29) daje:

$$\frac{u_{\max}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(h) + A. \quad (2.33)$$

Oduzimanjem (2.29) od (2.33), eliminiše se konstanta A i dobija se *zakon deficita brzine*:

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{h}{z} \right), \quad (2.34)$$

koji se može koristiti ako su poznate vrednosti u_{\max} i u_* .

Spoljašnji turbulentni sloj. U ovoj oblasti je brzina skoro uniformna po vertikali, što je posledica vrtloga koji izazivaju značajno mešanje fluidnih delića. Međutim, obično se pretpostavlja da je i u ovoj oblasti raspored brzine logaritamski i da se može definisati izrazom (2.29), iako ovaj, strogo uzevši, važi samo pri dnu ($z < 0, 2h$).

Debljina viskozno podslaja. Izjednačavajući teorijske izraze za raspored brzine u viskoznom podslaju (2.26) i u turbulentnom toku po glatkom dnu (2.32) za vrednost $z = \delta_v$, može se dobiti jednačina po promenljivoj $\text{Re}_\delta = (u_* \delta_v)/\nu$:

$$\ln \text{Re}_\delta - 0,4 \cdot \text{Re}_\delta + 2,2 = 0, \quad (2.35)$$

čije je rešenje $\text{Re}_\delta = 11,6$. Odavde sledi da je debljina viskozno podslaja:

$$\delta_v = \frac{11,6 \cdot \nu}{u_*} \quad (\text{Re}_* < 70). \quad (2.36)$$

S druge strane, ako se za prelaznu zonu i oblast hidraulički rapavog dna podje od uslova $\text{Re}_* = u_* k_s/\nu = 70$ i ako se na osnovu (2.36) uzme da je $u_*/\nu \approx 11,6/\delta_v$, može se doći do alternativnog izraza za debljinu viskozno podslaja:

$$\delta_v = \frac{k_s}{6} \quad (\text{Re}_* \geq 70). \quad (2.37)$$

■ **Primer 2.3.** Ako je u uslovima ustaljenog jednolikog tečenja dubina $h = 4$ m, a piježometarski nagib $0,1$ promil, odrediti debljinu viskozno podslaja, kao i vrednost apsolutne rapavosti koja odgovara granici turbulentnog tečenja po rapavom dnu. ($\nu = 1,0 \times 10^{-6}$ m²/s).

Rešenje.

$$u_* = \sqrt{gh I_\Pi} = \sqrt{9,81 \cdot 4 \cdot 0,0001} = 0,063 \text{ m/s}$$

$$\delta_v = 11,6 \cdot 1,0 \times 10^{-6} / 0,063 \approx 0,2 \text{ mm}$$

Iz uslova $\text{Re}_* = 70$, sledi: $k_s = 1,2$ mm.

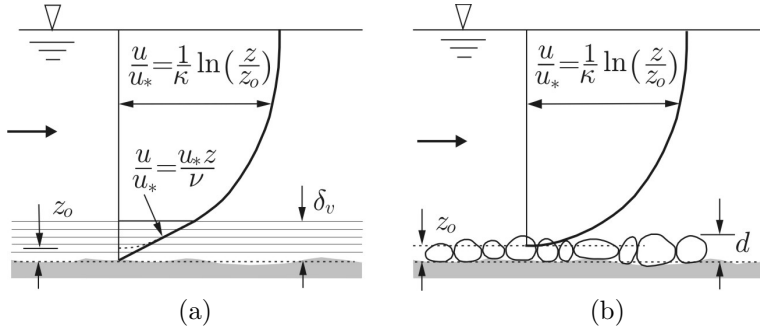
2.7 Opšti logaritamski raspored brzine

Ovaj zakon je rezultat želje da se raspored brzine po dubini opiše jedinstvenom logaritamskom funkcijom za hidraulički glatko i rapavo dno.

Funkcija u obliku:

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_o} \right), \quad (2.38)$$

dobijena je tako što je u jednačinu (2.29) uvedeno referentno odstojanje z_o , na kome je brzina efektivno ravna nuli (Slika 2.10). Ovu veličinu treba shvatiti kao računsku kategoriju, odnosno kao parametar modela, čija se vrednost u konkretnom slučaju može odrediti na osnovu izmerenog profila brzine.



Slika 2.10: Raspored brzine za hidraulički (a) glatku i (b) rapavu podlogu. Po nekim autorima je $z_o \approx 0,75 d$, gde je d – srednji prečnik zrna nanosa na dnu [164].

Da bi se teorijske funkcije rasporeda brzine mogle koristiti, potrebno je prethodno odrediti vrednosti parametara pomoću izmerenog profila brzine. Tada se teorijski raspored može koristiti ne samo za predviđanje vrednosti brzine u bilo kojoj tački posmatrane vertikale, već i za proračun niza drugih veličina koje nisu merene, ili čije vrednosti treba proceniti ili proveriti. Evo primera.

■ **Primer 2.4.** Odrediti teorijski raspored brzine po formuli (2.38), koristeći podatke merenja iz prve i treće kolone Tabele 2.2.

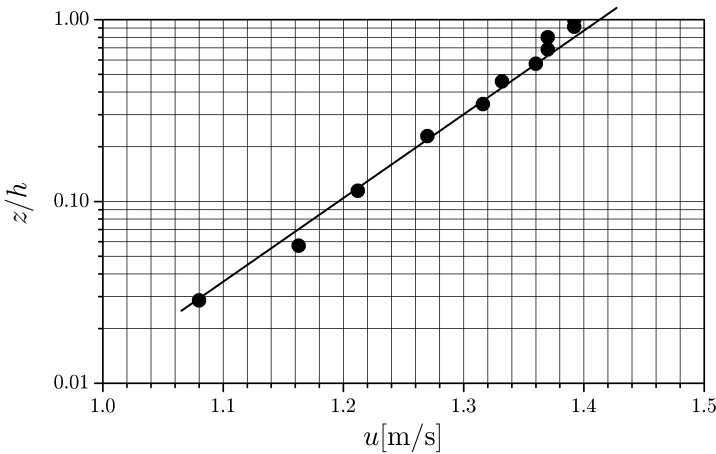
Tabela 2.2: Izmereni raspored brzine $u_e(z)$ i sračunati teorijski raspored $u(z)$.

z [m]	z/h [-]	u_e [m/s]	u [m/s]	$\frac{ u_e - u }{u_e} \times 100$ [%]
0,00	0,000	0,000	0,000	0,00
0,10	0,029	1,080	1,072	0,74
0,20	0,057	1,163	1,138	2,15
0,40	0,114	1,212	1,204	0,66
0,80	0,229	1,270	1,270	0,00
1,20	0,343	1,316	1,309	0,53
1,60	0,457	1,332	1,337	0,38
2,00	0,571	1,360	1,358	0,15
2,40	0,686	1,370	1,375	0,36
2,80	0,800	1,370	1,390	1,46
3,20	0,914	1,392	1,403	0,79
3,50	1,000	1,392	1,412	1,44

Rešenje. Opšti zakon (2.38) se može shvatiti kao dvoparametarski analitički model, čiji se parametri u_* i z_o kalibrišu pomoću izmerenog profila brzine. Postupak se zasniva na činjenici da funkcija (2.38), napisana u obliku:

$$u = 5,75 \cdot u_* \cdot \log\left(\frac{z}{h}\right) + 5,75 \cdot u_* \cdot \log\left(\frac{h}{z_o}\right) \quad (2.39)$$

predstavlja pravu na dijagramu u logaritamskoj podeli, kao što je pokazano na Slici 2.11.



Slika 2.11: Određjivanje vrednosti parametara logaritamskog modela.

Težišna prava se povlači kroz sistem mernih tačaka do odstojanja $z/h < 0,2$, jer je logaritamska zavisnost u toj oblasti „najjača”. Pomoću ove prave se očitavaju vrednosti dve karakteristične brzine $u(z/h)$:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(1) = 0 + 5,75 \cdot u_* \cdot \log\left(\frac{h}{z_o}\right) \\ u_2 &= u(0.1) = -5,75 \cdot u_* + 5,75 \cdot u_* \cdot \log\left(\frac{h}{z_o}\right). \end{aligned}$$

Oduzimanjem druge jednačine od prve, najpre se računa vrednost:

$$u_* = \frac{u_1 - u_2}{5,75},$$

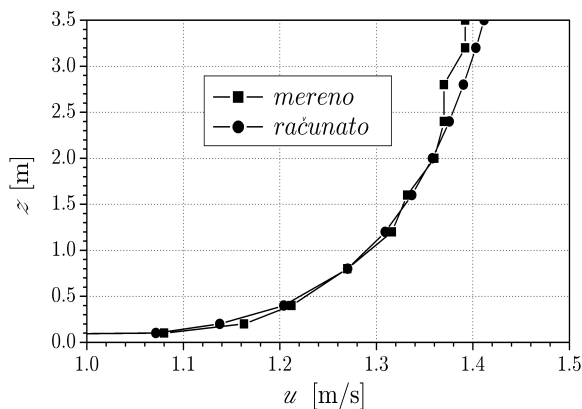
a zatim, iz izraza

$$u_1 = 5,75 \cdot u_* \cdot \log\left(\frac{h}{z_o}\right),$$

vrednost drugog parametra z_o :

$$z_o = h \cdot 10^{-u_1/(5,75 u_*)}. \quad (2.40)$$

U konkretnom slučaju je: $u_1 = 1,41$ m/s, $u_2 = 1,19$ m/s, $u_* = 0,038$ m/s i $z_o = 1,4 \times 10^{-6}$ m. Raspored brzine, sračunat pomoću izraza (2.38), dat je u pretposlednjoj koloni Tabele 2.2, a grafički je prikazan na Slici 2.12.



Slika 2.12: Raspored brzine po dubini toka.

Na osnovu teorijskog rasporeda, mogu se proceniti vrednosti niza veličina koje se teško mogu izmeriti, kao što su na primer:

- lokalni nagib linije energije: $I_e = u_*^2/(gh) = 0,00111$;
- lokalni tangencijalni napon: $\tau_o = \rho u_*^2 = 0,0383$ kPa;
- debljina viskozno podsoja: $\delta_v = 11,6 \cdot \nu/u_* = 0,31$ mm ($Re_* = 86 > 70$);
- lokalne vrednosti koeficijenta turbulენტne viskoznosti, kao i neke druge veličine o kojima će biti reči u narednom poglavlju.

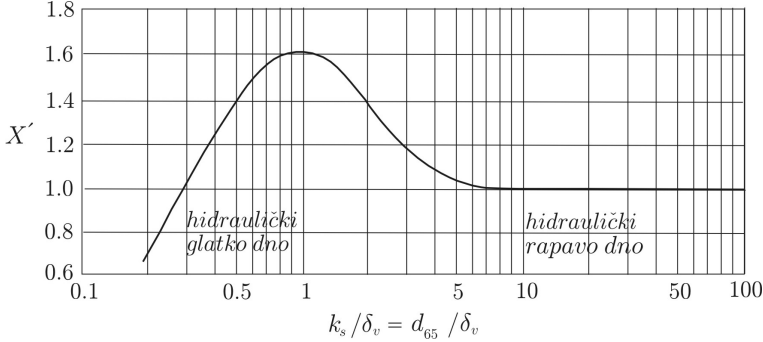
2.8 Ajnštajnova varijanta logaritamskog zakona

Uzimajući u obzir činjenicu da se na rečnom dnu nalazi mešavina peščanog ili šljunčanog materijala različite krupnoće, Ajnštajn⁹ je definisao apsolutnu rapavost *mešavine* nanosa izražavajući ekvivalentnu pešчанu rapavost k_s pomoću karakterističnog prečnika d_{65} :

$$\Delta_E = \frac{k_s}{X'} = \frac{d_{65}}{X'}, \quad (2.41)$$

⁹Hans Albert Einstein (1912-1968), sin čuvenog švajcarskog fizičara, autora teorije relativiteta, Alberta Einsteina i novosadske matematičarke Mileve Marić, dao je izvanredan doprinos teoriji rečnog nanosa, uvodeći u ovu oblast račun verovatnoće i metode matematičke statistike.

Vrednost empirijskog korekcionog faktora X' određuje se pomoću grafikona na Slici 2.13.



Slika 2.13: Pomoćni dijagram za određivanje vrednosti korekcionog faktora X' u Ajnštajnovom logaritamskom rasporedu brzine [44].

Transformacijom opšteg izraza za hidraulički rapavo dno (2.32) i prelazeći sa prirodnog na dekadni logaritam, Ajnštajn je predložio izraz u obliku [44]:

$$\frac{u(z)}{u_*} = 5,75 \cdot \log \left(\frac{30z}{\Delta E} \right). \quad (2.42)$$

2.9 Osrednjavanje brzine po dubini

U praksi se najčešće računa sa srednjom brzinom po dubini, pri čemu se osrednjavanje obavlja integracijom:

$$\tilde{u} = \frac{1}{h} \int_{\delta_v}^h u(z) dz. \quad (2.43)$$

Ako se podintegralna funkcija definiše nekim od teorijskih rasporeda, integracija se može obaviti analitički, uz uobičajenu pretpostavku da je dno hidraulički rapavo, a $\delta_v \approx 0$. Ako je podintegralna funkcija definisana empirijskim rasporedom (na osnovu izmerenih vrednosti brzine u nizu tačaka jedne vertikale), integral u izrazu (2.43) se rešava numeričkim putem.

Iz logaritamskih funkcija za hidraulički „rapavo dno” (2.32), (2.34), (2.38) i (2.42), izvedeni su ovi izrazi za srednju brzinu po dubini:

$$\frac{\tilde{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(12 \frac{h}{k_s} \right) = 5,75 \cdot \log \left(12 \frac{h}{k_s} \right) \quad (2.44)$$

$$\frac{\tilde{u}}{u_*} = \frac{u_{\max}}{u_*} - \frac{1}{\kappa} \quad (2.45)$$

$$\frac{\tilde{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{z_o}{h} + \ln \left(\frac{h}{z_o} \right) - 1 \right] \quad (2.46)$$

$$\frac{\tilde{u}}{u_*} = 5,75 \cdot \log \left(12 \frac{h}{\Delta_E} \right). \quad (2.47)$$

Izjednačavanjem izraza (2.32) i (2.44) lako se može pokazati da je kod logaritamskog rasporeda vrednost srednje brzine po dubini jednaka vrednosti brzine u tački koja se nalazi na odstojanju $z = 0,4h$ od dna: $\tilde{u} = u(0,4h)$.

Navedeni teorijski rasporedi brzine po dubini mogu se formulisati preko odgovarajućih srednjih brzina. Na primer, kombinovanjem izraza (2.34) i (2.45) dobija se zavisnost:

$$u(z) = \tilde{u} + \frac{u_*}{\kappa} \left[1 - \ln \left(\frac{z}{h} \right) \right], \quad (2.48)$$

a kombinovanjem izraza (2.38) i (2.46):

$$u(z) = \left[\frac{\tilde{u}}{\frac{z_o}{h} + \ln \left(\frac{h}{z_o} \right) - 1} \right] \ln \left(\frac{z}{z_o} \right). \quad (2.49)$$

2.10 Prošireni logaritamski zakon

Utica j turbulencije na raspored brzine po dubini toka može se bolje uzeti u obzir ako se uvede „prošireni” logaritamski zakon, u obliku deficita brzine [36]:

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = \left[\left(-\frac{2,3}{\kappa} \log \frac{z}{h} \right) + \frac{2\Pi}{\kappa} \right] - \frac{\Pi}{\kappa} \cdot f_{\omega} \left(\frac{z}{h} \right), \quad (2.50)$$

gde je u – lokalna vremenski osrednjena brzina, u_{\max} – najveća brzina u posmatranoj vertikali, Π – koeficijent snage *vertložnog traga* u razvijenom turbulentnom graničnom sloju, a f_{ω} – neka empirijska funkcija.

Jednačina (2.50) u potpunosti opisuje profil brzine po dubini toka, za izuzetkom viskoznog podsloja. Prvi član sa desne strane jednakosti predstavlja klasični Prantl-Karmanov zakon deficita brzine (2.34), dok članovi u kojima figuriše parametar Π obuhvataju uticaje vrtloženja u spoljašnjem turbulentnom sloju. U literaturi se za razne vrste tokova mogu naći empirijski izrazi za funkciju f_{ω} [36, 122].

Poslednji član u izrazu (2.50) se može izostaviti pri dnu (kada $z \rightarrow 0$). Članovi u velikim zagradama predstavljaju asimptotski slučaj, koji omogućava da se odrede vrednosti parametara κ i Π . Naime, ako se vrednosti leve strane (2.50), sračunate na osnovu izmerenih brzina, nanesu u funkciji relativne dubine z/h (u logaritamskoj skali), vrednost fon Karmanove konstante se može sračunati na osnovu nagiba regresione prave. Ova prava se povlači isključivo kroz tačke u oblasti $z/h < 0,2$, gde izvorno važi logaritamski raspored i gde se član $f_\omega(z/h)$ može zanemariti.

Rezultati nekih laboratorijskih ispitivanja upućuju na zaključak da vrednost fon Karmanove konstante $\kappa = 0,4$ ima *univerzalni karakter* i to ne samo za tokove čiste vode, već i za tokove u kojima se u suspenziji nalazi izvesna količina čvrste materije [36]. (Kasnije će se videti da ovaj zaključak nije opšte prihvaćen u literaturi.)

Vrednost parametra Π se određuje ekstrapolacijom spomenute regresione prave do slobodne površine ($z/h=1$) i očitavanjem vrednosti odsečka te prave:

$$\Pi = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{u_{\max} - u}{u_*} \right]_{z/h=1}. \quad (2.51)$$

Vrednosti Π zavise od nivoa turbulencije unete kroz uzvodni granični profil. Za otvorene tokove je obično $\Pi < 0,5$.

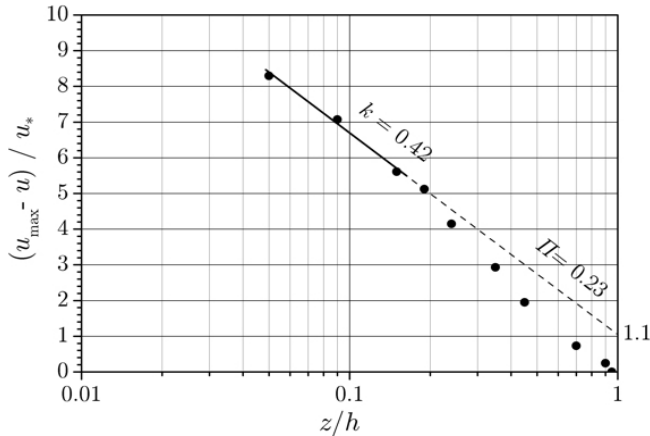
Uvodjenje parametara koji eksplicitno reprezentuju turbulentna svojstva razvijenog graničnog sloja predstavlja pokušaj da se smanje odstupanja izmerenih brzina od teorijskog logaritamskog rasporeda u središnjoj zoni i pri površini toka. Eksperimentalni rezultati pokazuju da se klasičan logaritamski zakon može koristiti kada je tečenje *jednoliko* (ili približno jednoliko), jer je tada „doprinosa“ funkcije vrtloženja relativno mali, dok je prošireni logaritamski zakon prikladniji za *nejednoliko* tečenje sa izraženim gradijentima brzine i pritiska.

■ **Primer 2.5.** U prva dva reda Tabele 2.3 date su vrednosti izmerenih brzina u funkciji relativnog odstojanja od dna. Odrediti vrednosti parametara κ i Π proširenog logaritamskog rasporeda (2.50). Najveća brzina iznosi $u_{\max} = 1,06$ m/s, a smičuća brzina, $u_* = 0,041$ m/s.

Tabela 2.3: Podaci za primer 2.5

z/h	0,05	0,09	0,15	0,19	0,24	0,35	0,45	0,70	0,90	0,95
u [m/s]	0,72	0,77	0,83	0,85	0,89	0,94	0,98	1,03	1,05	1,06
$\frac{u_{\max} - u}{u_*}$	8,293	7,073	5,610	5,122	4,146	2,927	1,951	0,732	0,244	0,00

Rešenje. Na osnovu sračunatih vrednosti leve strane jednačine (2.50), koje su date u trećem redu Tabele 2.3, nacrtan je dijagram na Slici 2.14.



Slika 2.14: Određivanje vrednosti parametara proširenog logaritamskog rasporeda brzine.

Nagib regresione prave u oblasti $z/h < 0,2$ (prve 4 tačke) iznosi $-5,47$, a ekstrapolacijom se za $z/h = 1$ očitava vrednost $1,1$. Odavde sledi: $\kappa = 2,303/5,47 = 0,42$ i $\Pi = 0,42 \cdot 1,1/2 = 0,23$.

2.11 Teorijski raspored u obliku stepene funkcije

Umesto logaritamske funkcije, čiji je osnovni nedostatak singularitet u tački dna ($z=0$), može se koristiti stepena funkcija oblika:

$$\frac{u(z)}{u_*} = \frac{m+1}{\kappa} \left(\frac{z}{h}\right)^{1/m}, \quad (2.52)$$

gde je m - empirijski koeficijent, čija se vrednost kreće u granicama $2 \div 10$, a najčešće iznosi oko 6.

Ako je poznata brzina pri površini $u(h) = u_{\max}$, može se koristiti jednostavan izraz tipa:

$$\frac{u(z)}{u_{\max}} = \left(\frac{z}{h}\right)^{1/m}. \quad (2.53)$$

Srednja brzina po dubini je:

$$\frac{\tilde{u}}{u_*} = \frac{m+1}{\kappa} \cdot \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right)^{1/m} dz = \frac{m}{\kappa}. \quad (2.54)$$

Može se lako pokazati da je za $m = 6$, kao kod logaritamskog zakona, $\tilde{u} = u(0,4h)$.

Upoređenjem izraza (2.44) i (2.54), može se uspostaviti veza između logaritamskog i stepenog zakona:

$$m = \ln \left(12 \frac{h}{k_s} \right) = \ln \left(12 \frac{h}{d} \right). \quad (2.55)$$

U ovom izrazu, apsolutna rapavost k_s se definiše karakterističnim prečnikom zrna $d = d_{90}$, $d = 6,8 d_{50}$ itd. (Tabela 2.1), dok odnos h/d predstavlja *relativnu rapavost*.

Stepeni raspored (2.52), formulisan preko srednje brzine, ima oblik:

$$\frac{u(z)}{\tilde{u}} = \frac{m+1}{m} \cdot \left(\frac{z}{h} \right)^{1/m}. \quad (2.56)$$

Za $z = h$, sledi: $u_{\max}/\tilde{u} = (m+1)/m$.

2.12 Raspored koeficijenta turbulentne viskoznosti po dubini toka

U analizi turbulentnih karakteristika toka, a naročito u uslovima kada taj tok nosi i čestice nanosa, javlja se potreba definisanja rasporeda koeficijenta turbulentne viskoznosti po dubini. Polazeći od linearnog rasporeda tangencijalnog napona:

$$\tau(z) = -\rho \overline{u'w'} = \rho u_*^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right),$$

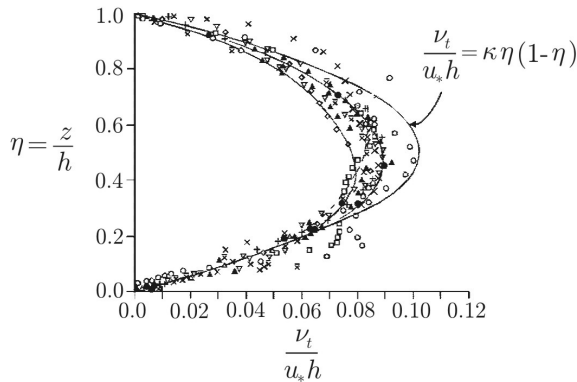
i primenjujući Businesskovu hipotezu (2.17), dolazi se do opšteg izraza:

$$\nu_t(z) = \frac{u_*^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)}{\frac{du}{dz}}, \quad (2.57)$$

čija je konkretnija formulacija moguća ako se definiše izvod du/dz . Na primer, logaritamskom rasporedu brzine (2.28), odgovara *parabolički* raspored koeficijenta turbulentne viskoznosti:

$$\frac{\nu_t(z)}{u_* \cdot h} = \kappa \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h} \right) = \kappa \eta (1 - \eta), \quad (2.58)$$

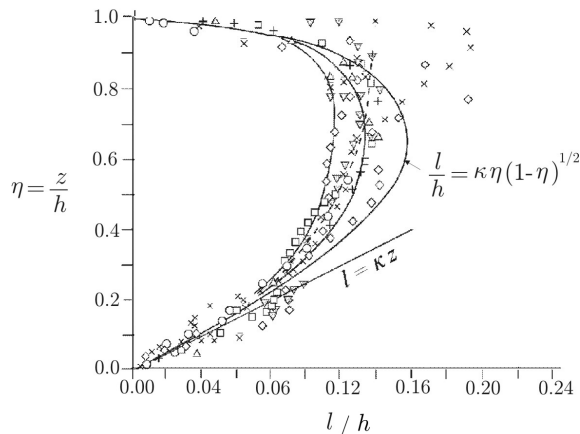
gde je $\eta = z/h$ - relativno odstojanje od dna (Slika 2.15).



Slika 2.15: Raspored koeficijenta turbulentne viskoznosti po dubini, sračunat tako što su vrednosti izvoda du/dz numerički određene na osnovu izmerenog polja brzine [122].

Na isti način se može pokazati da u spoljašnjem turbulentnom sloju, logaritamskom rasporedu brzine odgovara nelinearni raspored dužine mešanja (Slika 2.16):

$$\frac{l(z)}{h} = \kappa \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{1/2} = \kappa \eta (1 - \eta)^{1/2}. \quad (2.59)$$



Slika 2.16: Raspored dužine mešanja u zavisnosti od brzine toka; zbog blage promene brzine pri površini, izvodi brzine se ne mogu pouzdano odrediti, pa nije sigurno da dužina mešanja u toj oblasti teži nuli [122].

Nedostatak paraboličnog rasporeda je u tome što ne daje fizički realnu sliku, jer ispada da nema difuzionog mešanja fluidnih čestica u blizini površine.

Pokušaj da se dobiju fizički realniji rezultati proračuna i ostvari njihovo bolje slaganje sa rezultatima merenja, predstavlja *parabolično-konstantni* raspored [165, 167, 168]:

$$\frac{v_t}{u_* h} = \begin{cases} \kappa \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right) = \kappa \eta (1 - \eta) & \text{za } z/h < 0,5 \\ 0,25 \kappa & \text{za } z/h \geq 0,5. \end{cases}, \quad (2.60)$$

Ako se umesto logaritamskog, usvoji stepeni raspored brzine (2.52), biće:

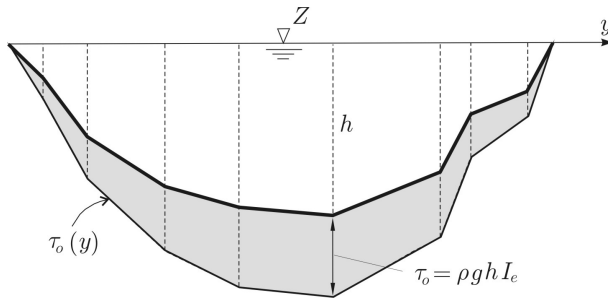
$$\frac{du}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\frac{u_*}{\kappa} (m+1) \left(\frac{z}{h}\right)^{1/m} \right] = \frac{u_*}{\kappa} \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{m}-1} \cdot \frac{1}{h}, \quad (2.61)$$

pa se zamenom u (2.57) dolazi do rasporeda turbulentne viskoznosti u obliku:

$$\frac{v_t}{u_* h} = \kappa \left(\frac{m}{m+1}\right) \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(\frac{z}{h}\right)^{1-\frac{1}{m}} = \kappa \left(\frac{m}{m+1}\right) (1 - \eta) \eta^{1-\frac{1}{m}}. \quad (2.62)$$

2.13 Raspored tangencijalnog napona po poprečnom preseku

Za hidrotehničku praksu je interesantan raspored tangencijalnog napona u poprečnom preseku pri datom protoku, odnosno datoj koti nivoa (Sika 2.17).

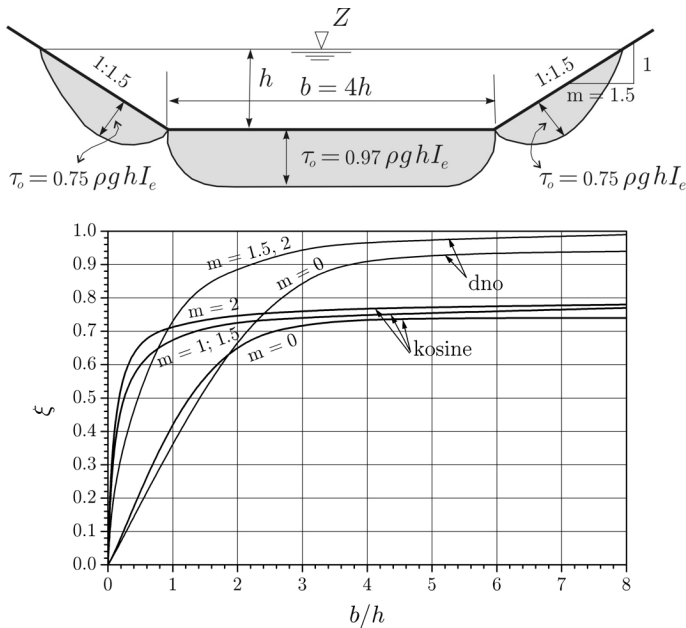


Slika 2.17: Raspored $\tau_o(y)$ na osnovu vrednosti napona sračunatih u nizu vertikala.

Lokalni napon u trapeznom poprečnom preseku može se odrediti pomoću izraza:

$$\tau_o = \xi \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot I_e, \quad (2.63)$$

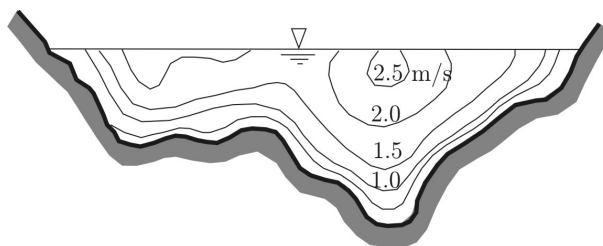
gde je ξ – empirijski koeficijent, čije vrednosti zavise od nagiba kosine 1:m i odnosa b/h (Slika 2.18).



Slika 2.18: Vrednosti korekcionog faktora za tangencijalni napon na dnu kanala trapeznog poprečnog preseka; u slučaju $b/h > 2$ i $m=1,5 \div 2,0$, može se smatrati da je na dnu kanala $\xi \approx 1,0$, a na kosinama $\xi \approx 0,75$ [33, 53].

2.14 Raspored brzine po poprečnom preseku

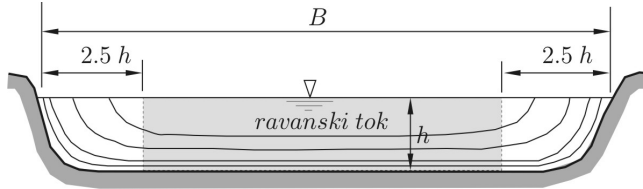
Na Slici 2.19 prikazan je primer izmerenog rasporeda brzine u poprečnom preseku vodotoka. Taj raspored je uslovljen oblikom profila, rapavošću korita i njegovom zakrivljenošću.



Slika 2.19: Linije jednakih brzina („izotahe“) u poprečnom preseku prirodnog vodotoka.

U analizama kretanja vode i nanosa vrlo često se, u cilju lakšeg proračuna, razmatra strujanje u proizvoljnoj vertikalnoj ravni (x, z) koja je dovoljno udaljena od obala da se njihov uticaj ne oseti. To podrazumeva da je korito široko, sa

uniformnom rapavošću po okvašenom obimu i sa pravilnim rasporedom izotaha u centralnoj zoni, kao što je prikazano na Slici 2.20. Takvi uslovi se ostvaruju kada je odnos širine korita i dubine relativno velik: $B/h > 5$ [33, 176]. Kaže se tada da je problem „ravanski”.



Slika 2.20: Široko korito.

Ako se pretpostave konstantne vrednosti uzdužnog nagiba dna i rapavosti po širini korita, može se uspostaviti veza između srednje brzine u proizvoljnoj vertikali i srednje brzine u poprečnom profilu:

$$\frac{\bar{u}}{V} = \left(\frac{h}{R}\right)^{2/3}. \quad (2.64)$$

U specijalnom slučaju širokog pravougaonog korita je: $h \approx R$ i $\bar{u} = V$.

Zbog neravnomernosti brzine po poprečnom preseku prirodnog korita, u hidrauličkim proračunima se uvodi određena korekcija za sve veličine koje se definišu preko srednje profilske brzine. Tako se na primer veličina $V^2/(2g)$, koja predstavlja kinetičku energiju po jedinici težine fluida, množi „koeficijentom kinetičke energije”, ili *Koriolisovim* (Coriolis) koeficijentom: $\alpha \geq 1$ [33].

Za definisanje koeficijenta α , razmatra se masa fluida koji prodje u jedinici vremena kroz poprečni presek: $(\rho \cdot V \cdot \int_A dA)$. Kinetička energija ovog fluida je:

$$(\rho \cdot V \cdot \int_A dA) \cdot \frac{\alpha V^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \alpha \cdot V^3 \int_A dA. \quad (2.65)$$

S druge strane, kinetička energija se može definisati na osnovu elementarnih veličina; masa fluida koji prodje u jedinici vremena kroz elementarnu površinu je: $\rho \cdot u \cdot dA$, a kroz poprečni presek: $\rho \cdot u \cdot \int_A dA$. Shodno tome, kinetička energija se može definisati izrazom:

$$(\rho \cdot u \int_A dA) \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \int_A u^3 dA. \quad (2.66)$$

Izjednačavajući (2.65) i (2.66), dobija se:

$$\alpha = \frac{\int_A u^3 dA}{V^3 \int_A dA}. \quad (2.67)$$

Sledeći isti princip, količina kretanja u jedinici vremena kroz elementarni presek dA isnosi: $(\rho \cdot u \cdot dA) \cdot u$, a kroz ceo presek: $\rho \cdot \int_A u^2 dA$. Ako se prenos količine kretanja u jedinici vremena definiše preko srednje profilne brzine, biće: $(\rho \cdot V \cdot \int_A dA) \cdot \beta \cdot V$, gde je β - korekcionni (Businesskov) koeficijent količine kretanja, koji se uvodi zbog neravnomernosti brzine po poprečnom preseku. Izjednačavanjem navedenih veličina, dobija se:

$$\rho \cdot \beta \cdot V^2 \cdot \int_A dA = \rho \cdot \int_A u^2 dA, \quad (2.68)$$

odakle sledi:

$$\beta = \frac{\int_A u^2 dA}{V^2 \int_A dA}. \quad (2.69)$$

■ **Primer 2.6.** Izvesti izraze za koeficijente kinetičke energije i količine kretanja za slučaj kada je raspored brzine u kanalu širokog pravougaonog poprečnog preseka definisan stepenom funkcijom (2.53).

Rešenje. Ako se posmatra jedinična širina ovog profila, površina A se može zameniti dubinom: $A = 1 \cdot h$, odnosno $dA = 1 \cdot dz$. Na osnovu izraza (2.53) i (2.56) se dobija:

$$\alpha = \frac{\int_0^h u^3 dz}{\tilde{u}^3 \int_0^h dz} = \frac{\int_0^h [u_{\max} (z/h)^{1/m}]^3 dz}{\left[u_{\max} \left(\frac{m}{m+1} \right) \right]^3 \int_0^h dz} = \frac{(m+1)^3}{m^2 (m+3)}, \quad (2.70)$$

odnosno,

$$\beta = \frac{\int_0^h u^2 dz}{\tilde{u}^2 \int_0^h dz} = \frac{\int_0^h [u_{\max} (z/h)^{1/m}]^2 dz}{\left[u_{\max} \left(\frac{m}{m+1} \right) \right]^2 \int_0^h dz} = \frac{(m+1)^2}{m(m+2)}. \quad (2.71)$$

Za vrednost $m = 6$, dobija se: $\alpha = 1,06$, $\beta = 1,02$.

3

Linijski otpori u koritu sa nepokretnim dnom

Ovo poglavlje je posvećeno proračunu otpora trenja u prirodnim i veštačkim vodotocima. Razmatra se struktura raznih empirijskih izraza koji se u tu svrhu koriste i daju uputstva za određivanje vrednosti koeficijenata trenja, posebno u slučaju kada rapavost u poprečnom preseku ima neuniformni raspored.

3.1 Empirijski izrazi za otpore trenja

U praksi se linijski otpori (trenja) definišu izrazima koji važe za uslove jednolikog tečenja, a obično se koriste i u proračunima ustaljenog nejednolikog i neustaljenog tečenja. Tri najpoznatija izraza nose imena:

- Šezija¹:

$$\frac{V}{V_*} = \frac{C}{\sqrt{g}} \quad (3.1)$$

- Maninga²:

$$\frac{V}{V_*} = \frac{R^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (3.2)$$

¹Antoine Chézy (1718-1798) francuski inženjer, učenik, profesor i upravnik slavne „Škole za mostove i puteve” (Ecole des Ponts et Chaussées), izučavao je otpore trenja u cilju dimenzionisanja kanala za vodosnabdevanje Pariza; uveo je u proračun odnos površine preseka i okvašenog obima, koji će docnije biti nazvan „hidraulički radijus”.

²Robert Manning (1816–1897) irski inženjer, bavio se projektovanjem luka i plovnih puteva. Obrazac koji nosi njegovo ime, predložio je zapravo francuski inženjer Gokler (Philippe Gaspard Gauckler, 1826-1905); Maning je predložio i alternativni – dimenziono homogen izraz, koji međjutim nikada nije prihvaćen u praksi.

- Darsi³ -Vajsbaha⁴:

$$\frac{V}{V_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}. \quad (3.3)$$

Navedeni bezdimenzioni izrazi daju vezu izmedju hidrauličkih parametara toka (srednje profilske brzine V , hidrauličkog radijusa R) i otpora trenja, izraženog preko srednje profilske smičuće brzine $V_* = \sqrt{\tau_o/\rho} = \sqrt{g \cdot R \cdot I_e}$.

Koeficijenti n , C i λ odražavaju uticaje turbulencije toka. Koeficijenti Šezija i Maninga imaju dimenzije: $[C] = \text{m}^{1/2}/\text{s}$, $[n] = \text{m}^{-1/3}\text{s}$, dok je koeficijent Darsi-Vajsbaha bezdimenzioni koeficijent. Njihove medjusobne veze proizilaze iz jednačina (3.1)–(3.3):

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad (3.4)$$

$$n = \frac{1}{C} R^{1/6} = \sqrt{\frac{\lambda}{8g}} R^{1/6} \quad (3.5)$$

$$\lambda = \frac{8g}{C^2} = \frac{8g \cdot n^2}{R^{1/3}}, \quad (3.6)$$

dok veza sa bezdimenzionim koeficijentom tangencijalnog napona

$$C_\tau = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2}\rho V^2}, \quad (3.7)$$

ima ovaj oblik:

$$C_\tau = \frac{\lambda}{4} = \frac{2g}{C^2} = \frac{2g \cdot n^2}{R^{1/3}}. \quad (3.8)$$

3.2 Ocena vrednosti koeficijenata trenja

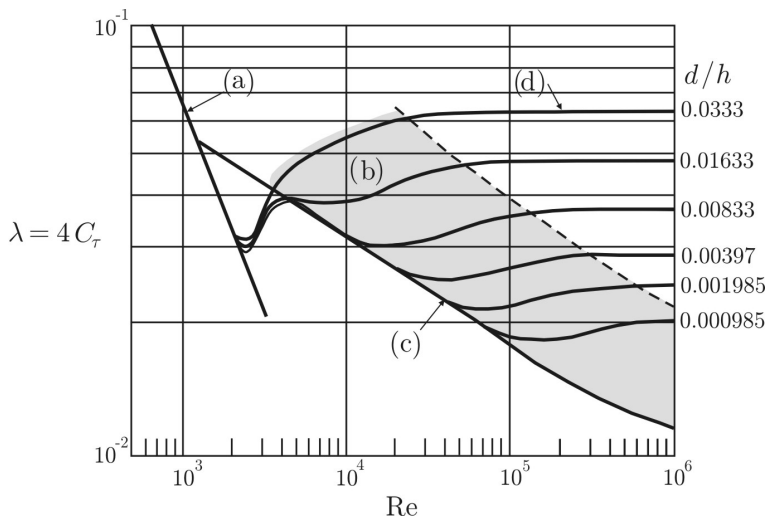
Vrednosti koeficijenata trenja odredjuju se na osnovu rezultata terenskih merenja, kao što će se videti u šestom poglavlju. Medjutim, za grube procene mogu se

³Henry Philibert Gaspard Darcy (1803-1858), francuski naučnik, poznat je po ispitivanjima tečenja vode u poroznom tlu i u cevima. Njegov naučni rad je iniciran izgradnjom sistema za vodosnabdevanje rodnog grada Dižona.

⁴Julius Weisbach (1806-1871), nemački naučnik i inženjer, dao je značajan naučni doprinos u nizu oblasti, počev od primenjene matematike i mehanike, do geodezije i hidraulike (tečenje u zatvorenim i otvorenim provodnicima, stabilnost plovećih objekata, merenje protoka i otpora).

koristiti obrasci koji su izvedeni na osnovu pretpostavljenog rasporeda brzine po dubini, a koji po pravilu sadrže relativnu rapavost h/d .

Koeficijenti C_τ i λ . Za procenu vrednosti ovih bezdimenzionih koeficijenata može se koristiti dijagram na Slici 3.2, koji je konstruisan za otvorene tokove po analogiji sa poznatim dijagramom za tečenje u cevima.



Slika 3.1: Zavisnost bezdimenzionih koeficijenata trenja od Reynoldsovog broja i relativne rapavosti: (a) laminarno tečenje; (b) prelazna oblast; turbulentno tečenje po hidraulički (c) glatkom dnu i (d) rapavom dnu [89].

Kombinacijom izraza (2.44) i izraza (3.3), izraženim preko lokalnih vrednosti \tilde{u} i u_* , dolazi se do logaritamske funkcije za Darsi-Vajsbahov koeficijent u obliku:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\kappa \sqrt{8}} \ln \left(12 \frac{h}{d} \right) = 2 \log \left(12 \frac{h}{d} \right), \quad (3.9)$$

gde je d – karakteristični prečnik zrna koji reprezentuje apsolutnu rapavost.

Kada se u proračunima koriste srednje profilske vrednosti, dubina (h) u izrazu (3.9) zamenjuje se srednjom dubinom ili hidrauličkim radiusom (R). U tom slučaju, koeficijent λ predstavlja parametar poprečnog preseka. U literaturi se može naći veći broj empirijskih izraza koji su zasnovani na opštoj zavisnosti (3.9), a prilagodjeni određenim karakteristikama vodotoka. Primer je obrazac Breja (Bray, 1979), namenjen bujičnim tokovima sa krupnim šljunkom na dnu korita [19]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,248 + 2,36 \log \left(\frac{R}{d_{50}} \right). \quad (3.10)$$

Kako su promenljive λ i R međusobno zavisne, a jednačina nelinearna, rešenje po λ se mora tražiti iterativno, u sprezi sa jednačinom jednolikog tečenja (3.3).

■ **Primer 3.1.** Odrediti dubinu u vodotoku koja odgovara protoku $Q = 100 \text{ m}^3/\text{s}$, ako su dati ovi podaci: poprečni presek je trapeznog oblika, sa širinom u dnu $b = 40 \text{ m}$ i nagibom obala 1:2 ($m=2$). Uzdužni nagib dna iznosi $I_d = 0,1\%$. Korito je prizmatično⁵ i formirano u krupnom šljunku srednje krupnoće $d_{50} = 50 \text{ mm}$. Tečenje je jednoliko.

Rešenje. Normalna dubina se dobija iterativnim rešavanjem jednačine (3.3), napisane u obliku:

$$\underbrace{\frac{\lambda}{8g} \frac{Q^2}{A^2 R}}_{f_1(h)} - I_d = 0, \quad (3.11)$$

u kojoj je koeficijent λ definisan izrazom (3.10):

$$\lambda = [0,248 + 2,36 \log(R/d_{50})]^{-2},$$

a površina, okvašeni obim i hidraulički radijus, izrazima za trapezni presek⁶:

$$A = h(b + m \cdot h) \quad (3.12)$$

$$O = b + 2h\sqrt{1 + m^2} \quad (3.13)$$

$$R = A/O. \quad (3.14)$$

Rezultati proračuna su dati u Tabeli 3.1. (Usvojen je kriterijum konvergencije $f_1(h) < 1,0 \times 10^{-4}$).

Tabela 3.1: Proračun normalne dubine u primeru 3.1

iter.	h [m]	A [m ²]	O [m]	R [m]	V [m/s]	Fr [-]	λ [-]	n [m ^{-1/3} s]	$f_1(h)$
1	1,0	42,00	44,47	0,94	2,38	0,605	0,0941	0,0343	0,006198
2	1,5	64,50	46,71	1,38	1,55	0,175	0,0751	0,0327	0,000666
3	1,7	73,78	47,60	1,55	1,36	0,119	0,0704	0,0322	0,000064

* * *

⁵Prizmatično korito ima poprečni presek proizvoljnog oblika čije se dimenzije ne menjaju duž toka.

⁶Obratiti pažnju na razliku u oznakama: m – kotangens ugla koji kosina obale zaklapa sa horizontalom, m – eksponent u izrazu za raspored brzine po dubini toka.

Logaritamski zakon (3.9) može se transformisati u ekvivalentni stepeni zakon:

$$\frac{\tilde{u}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = a \left(\frac{h}{d} \right)^\mu, \quad (3.15)$$

gde su a , b i μ – parametri modela. Transformacija podrazumeva jednakost funkcija i njihovih prvih izvoda:

$$a \left(\frac{h}{d} \right)^\mu = a_1 \ln \left(b_1 \frac{h}{d} \right) \quad (3.16)$$

$$a \cdot \mu \left(\frac{h}{d} \right)^{\mu-1} = a_1 \left(\frac{h}{d} \right)^{-1}, \quad (3.17)$$

odakle se definišu parametri:

$$a = \frac{a_1}{\mu} \left(\frac{h}{d} \right)^{-\mu} \quad (3.18)$$

$$\mu = \frac{1}{\ln \left(b_1 \frac{h}{d} \right)}. \quad (3.19)$$

Ako se pretpostavi da je vrednost koeficijenta $b_1=12$, dolazi se do veze ekponenata u funkcijama za raspored brzine i raspored koeficijenta trenja:

$$\mu = \frac{1}{m} = \frac{1}{\ln \left(12 \frac{h}{d} \right)}. \quad (3.20)$$

S druge strane, upoređujući izraze (2.54), (3.1), (3.2) i (3.3), može se uspostaviti veza između parametra stepenog rasporeda brzine i koeficijenata trenja:

$$m = \kappa \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \kappa \frac{C}{\sqrt{g}} = \kappa \frac{h^{1/6}}{n \sqrt{g}}. \quad (3.21)$$

Šezijev koeficijent C. Iz logaritamskog zakona brzine sledi obrazac za Šezijev koeficijent trenja u oblasti hidraulički rapavog dna ($Re_* = u_* k_s / \nu > 70$):

$$C = 18 \log \left(12 \frac{h}{k_s} \right). \quad (3.22)$$

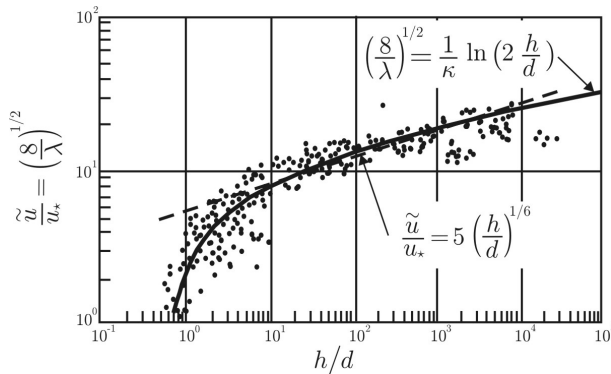
Kao što je već napomenuto, dubina se zamenjuje hidrauličkim radijusom ukoliko koeficijent trenja treba da bude reprezentativan za poprečni presek.

Maningov koeficijent n . Za procenu vrednosti ovog koeficijenta, koji isključivo važi za oblast razvijenog turbulentnog tečenja po hidraulički rapavom dnu, mogu se koristiti empirijski izrazi zasnovani na opštoj zavisnosti $n \propto d^{1/6}$ do koje je laboratorijskim ispitivanjem došao Štrickler (Strickler, 1923) [53, 54, 146]:

$$n = \begin{cases} \frac{d_{90}^{1/6}}{26} & \text{Majer – Peter i Miler (Mayer – Peter, Muller, 1948)} \\ \frac{d_{50}^{1/6}}{21} & \text{Garde i Radju (Garde, Raju, 1978)} \\ \frac{d_{50}^{1/6}}{16} & \text{Djulien (Julien, 2002).} \end{cases} \quad (3.23)$$

U navedenim izrazima d_{50} je srednji, a d_{90} , najveći prečnik zrna na dnu rečnog korita. Može se primetiti da je u ovom slučaju koeficijent trenja definisan pomoću apsolutne rapavosti.

Oblast primene obrazaca za koeficijente trenja prikazana je na Slici 3.2. Podaci se odnose na turbulentno tečenje po hidraulički rapavom dnu.



Slika 3.2: Eksperimentalna zavisnost koeficijenta trenja od relativne rapavosti ($h/d = h/d_{50}$) za prirodne vodotoke [89]; može se primetiti da težišna kriva u obliku logaritamske funkcije dobro opisuje rezultate merenja u čitavom opsegu relativnih rapavosti, a Maningova jednačina, sa koeficijentom $n = d_{50}^{1/6}/16$, samo u opsegu $10 \div 10^4$. To znači da Maningova jednačina nije pogodna za vrlo plitke bujične tokove ($h < 10 d$) i duboke ravničarske tokove sa peščanim dnom ($h > 10000 d$).

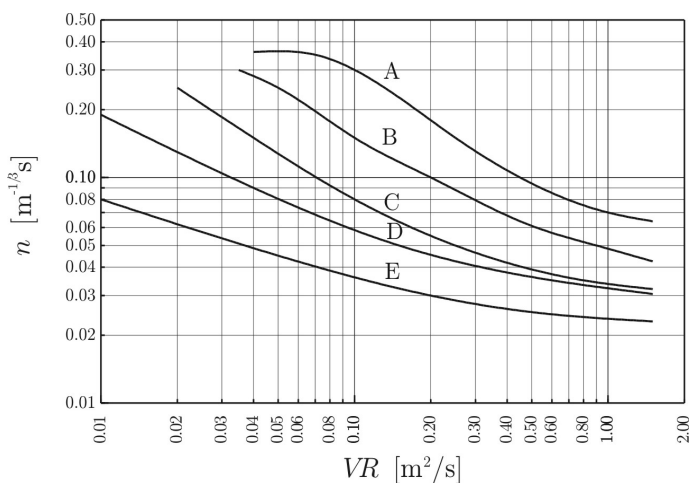
3.3 Linijski otpori usled vegetacije

Za hidrotehničku praksu je važno pitanje uticaja vegetacije na linijske otpore. Taj uticaj je bitan kada se razmatra tečenje po inundacijama u periodu velikih voda, ili kada se računa propusna moć zatravljenih odvodnih kanala (Slika 3.3).



Slika 3.3: Zatravljeni drenažni kanal u priobalju Tamiša

Za definisanje otpora biljnog pokrivača može se koristiti bilo koji od do sada navedenih koeficijenata, samo je problem odrediti odgovarajuće vrednosti. Klasičan pristup je zasnovan na eksperimentalno utvrđenim zavisnostima $n = f(VR)$ koje su prikazane na Slici 3.4 [33, 53, 100].



Slika 3.4: Vrednosti Manningovog koeficijenta pri različitom „stepenu usporenja toka” koji, u zavisnosti od karakteristika biljnog pokrivača, može biti: A – vrlo visok, B – visok, C – umeren, D – nizak i E – vrlo nizak; zavisnosti važe za relativno male kanale $VR < 2$ [66, 100].

Kriterijum „stepena usporenja toka” je iskustveno formulisan u zavisnosti od visine i gustine trave (Tabela 3.2).

Tabela 3.2: Tip krive odredjen preko „stepena usporenja toka” i vrednosti dozvoljenog napona τ_o sa stanovišta opstanka biljnog pokrivača [100, 152].

Prosečna visina trave [cm]	Stepen usporenja toka		Dozvoljeni napon τ_o [Pa]
	Gust zasad	Umereno gust zasad	
>75	A	B	270
25÷60	B	C	150
15÷25	C	D	75
5÷15	D	D	45
<5	E	E	25

S obzirom na medjusobnu zavisnost promenljivih n i V , korišćenje dijagrama na Slici 3.4 se obavlja u sklopu iterativnog računskog postupka, što će se ilustrovati primerom.

■ **Primer 3.2.** Odrediti propusnu moć zatravljenog kanala trapeznog poprečnog preseka, ako su dati sledeći podaci: širina u dnu $b = 5$ m, dubina $h = 0,75$ m, nagib kosina 1:2, uzdužni nagib dna $I_d = 0,002$. Visina trave je $h_v = 15$ cm, a procenjuje se da stepenu usporenja toka odgovara kriva D na Slici 3.4.

Rešenje. Postupak proračuna je iterativan.

(1) Najpre se računaju vrednosti površine, okvašenog obima i hidrauličkog radijusa: $A = 4,88$ m², $O = 8,36$ m, $R = 0,58$ m.

(2) Pretpostavlja se vrednost $n = 0,04$ m^{-1/3}s, kojoj sa krive D odgovara vrednost $VR = 0,3$ m²/s, pa je: $V = 0,3/0,58 = 0,52$ m/s.

(3) S druge strane je iz jednačine jednolikog tečenja:

$$V' = n^{-1} R^{2/3} I_d^{1/2} = (1/0,04) \cdot 0,58^{2/3} \cdot 0,002^{1/2} = 0,78 \text{ m/s} > 0,52 \text{ m/s.}$$

Korake (2)–(3) treba ponoviti sa korigovanim vrednostima koeficijenta n , sve dok se ne slože vrednosti V i V' ; na primer, za $n = 0,03$ m^{-1/3}s, dobija se $VR \approx 0,6$, $V = 1,03$ m/s, $V' = 0,89$ m/s, a za $n = 0,037$ m^{-1/3}s, $VR \approx 0,49$, $V = 0,84$ m/s, $V' = 0,84$ m/s, što je konačno rešenje. Propusna moć kanala iznosi: $Q = (1/0,037) \cdot 4,88 \cdot 0,58^{2/3} \cdot 0,002^{1/2} = 4,1$ m³/s.

* * *

Osnovne mane izloženog pristupa su u tome što je kriterijum „stepena usporenja” subjektivan i što zavisnosti $n = f(VR)$ ne moraju biti jednoznačne. Zato su savremeni računski modeli zasnovani na definisanju relativne rapavosti u funkciji biomehaničkih karakteristika biljnog pokrivača [39, 40, 102, 103, 155], kao što se ukratko prikazuje u nastavku.

Dimenzionom analizom se može pokazati da tangencijalni napon na dnu kod tokova sa dubinom koja je značajno veća od visine travnog pokrivača, primarno zavisi od tri bezdimenziona broja [103]:

$$C_\tau = f_3 \left\{ \frac{h}{(MEI/\tau_o)^{1/4}}, \frac{k_v}{h_v}, \frac{k_v}{h} \right\} \quad (3.24)$$

gde je C_τ - koeficijent tangencijalnog napona [-], k_v - apsolutna rapavost trave [m], h_v - prosečna visina trave u uspravnom položaju [m], h - normalna dubina [m], MEI - parametar globalne krutosti trave [$N m^2$], a τ_o - tangencijalni napon na dnu [Pa].

Vrednost apsolutne rapavosti k_v se teško definiše, jer zavisi od stepena povijenosti trave pod uticajem toka. Zbog toga se uvodi parametar „relativnog povijanja” k_v/h_v ; na primer, vrednost ovog parametra 0,5 označava da je list trave savijen do polovine svoje dužine. Relativna rapavost k_v/h se takodje menja sa povijanjem trave i zavisi od njenih biomehaničkih svojstava, od kojih su najbitnija: visina, krutost i gustina.

Parametar MEI odražava *globalnu krutost* travnog pokrivača i predstavlja proizvod gustine M (broj listova trave po jedinici površine) i krutosti pojedinačnog lista EI , gde je E - modul elastičnosti [Pa], a I - drugi moment površine poprečnog preseka [m^4]. Korelacija izmedju parametra MEI i prosečne visine trave [103]:

$$MEI = \begin{cases} \text{sveža : } & 319 \cdot h_v^{3,30} \\ \text{uvela : } & 25,4 \cdot h_v^{2,26} \end{cases} \quad [N m^2], \quad (3.25)$$

pokazuje da se globalna krutost povećava sa visinom trave. Ovaj, naizgled paradoksalan zaključak objašnjava se time što se povijanjem listova povećava gustina travnog pokrivača, a ovaj efekat prevladava efekat manje pojedinačne krutosti dugačkih listova (povećanje vrednosti faktora M nadoknađuje smanjenje vrednosti faktora EI).

Veza izmedju apsolutne rapavosti, biomehaničkih karakteristika trave i hidrauličkog režima (članovi na desnoj strani izraza (3.24)) je takodje empirijskog karaktera [102, 103]:

$$k_v = 0,14 h_v \left[\frac{(MEI/\tau_o)^{0,25}}{h_v} \right]^{1,59} \quad (3.26)$$

Funkcija f_3 se može predstaviti u obliku logaritamske zavisnosti Darsi-Vajzbahovog koeficijenta trenja od relativne rapavosti:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_v + B_v \ln\left(\frac{h}{k_v}\right), \quad (3.27)$$

gde su A_v i B_v empirijski parametri.

Savijanje trave pod uticajem toka vode je slično „talasanju” žita pod uticajem veta; kada brzina toka dostigne određenu kritičnu vrednost, polegla trava formira relativno „glatku” kompaktnu podlogu, tako da se daljim povećanjem brzine, tangencijalni napon pri dnu vrlo malo menja.

Listovi trave se svojim položajem prilagođavaju strujnicama, tako da se u globalu efekat povećanja brzine nadoknadjuje smanjenjem apsolutne rapavosti⁷. Svaka biljna vrsta dakle, ima određenu konstantnu vrednost „kritične smičuće brzine” u_{*c} [103]:

$$u_{*c} = \min \begin{cases} 0,028 + 6,33 \cdot MEI \\ 0,23 \cdot MEI^{0,106} \end{cases} \quad [\text{m/s}], \quad (3.28)$$

pri čemu se prvi izraz odnosi na nisku travu koja se u potpunosti vraća u uspravan položaj (elastična deformacija), a drugi, na vegetaciju sa dugim i krutim listovima, koja se ne vraća u prvobitni uspravan položaj (zaostala, plastična deformacija). U proračunu se kao merodavna, uzima manja vrednost.

Vrednosti parametara A_v i B_v , eksperimentalno definisane u zavisnosti od odnosa stvarne i kritične smičuće brzine, date su u Tabeli 3.3. Sa sračunatim vrednostima koeficijenta trenja, propusna moć zatravljenog kanala može se odrediti iterativnim postupkom poput onog kod „ $n - VR$ ” metode.

Tabela 3.3: Vrednosti parametara A_v i B_v [103].

Položaj lista trave	Kriterijum	Vrednost parametara	
		A_v	B_v
uspravan	$u_*/u_{*c} \leq 1,0$	0,15	1,85
povijen	$1,0 < u_*/u_{*c} \leq 1,5$	0,20	2,70
povijen	$1,5 < u_*/u_{*c} \leq 2,5$	0,28	3,08
povijen	$2,5 < u_*/u_{*c}$	0,29	3,50

Mehanička svojstva trave se ne mogu direktno utvrditi, već se posredno definišu poredjenjem sa poznatim mehaničkim svojstvima veštačke podloge sa savitljivim elementima od plastike, koja se u strujnom polju ponaša slično prirodnoj travi⁸. Izrazi (3.25), (3.26) i (3.28), kao i brojne vrednosti parametara A_v i B_v , su rezultat eksperimentalnog rada sa veštačkim podlogama, koje omogućavaju kontrolisane i ponovljive laboratorijske eksperimente. Detalji terenskog postupka za određivanje vrednosti parametra MEI mogu se naći u literaturi [103].

⁷Ovaj fenomen se vidi na „ $n - VR$ ” krivama, gde se uočava smanjenje vrednosti n sa povećanjem vrednosti VR .

⁸Eksperimentalno korišćenje veštačke umesto prirodne trave ima isti smisao kao korišćenje ekvivalentne peščane rapavosti. U tom kontekstu se parametar MEI može shvatiti kao „ekvivalentna krutost plastike”.

Opisani računski model omogućava i analizu stabilnosti zatravljenog korita pri velikim brzinama toka, pri čemu se parametar MEI može koristiti za izbor vrste trave (ukoliko nisu presudni klimatološki ili neki drugi faktori).

■ **Primer 3.3.** Odrediti propusnu moć kanala iz primera 3.2 ako se pretpostavi da je prosečna visina lista sveže trave 15 cm.

Rešenje. Rezultati proračuna su dati u Tabeli 3.4 [81], dok su rezultati analize osetljivosti rezultata na vrednosti parametara modela prikazani na Slici 3.5.

Tabela 3.4: Rezultati proračuna u primeru 3.3

Q [m ³ /s]	h [m]	A [m ²]	B [m]	O [m]	R [m]	V [m/s]	Fr [-]	n [m ^{-1/3} s]
2,00	0,52	3,12	7,07	7,31	0,43	0,64	0,095	0,039
5,00	0,75	4,88	8,00	8,36	0,58	1,02	0,175	0,030
8,00	0,92	6,29	8,68	9,11	0,69	1,27	0,227	0,027
10,00	1,01	7,13	9,06	9,54	0,75	1,40	0,255	0,026
15,00	1,21	9,02	9,86	10,43	0,87	1,66	0,308	0,024

- krutost trave: $MEI = 0,6094 \text{ Nm}^2$;

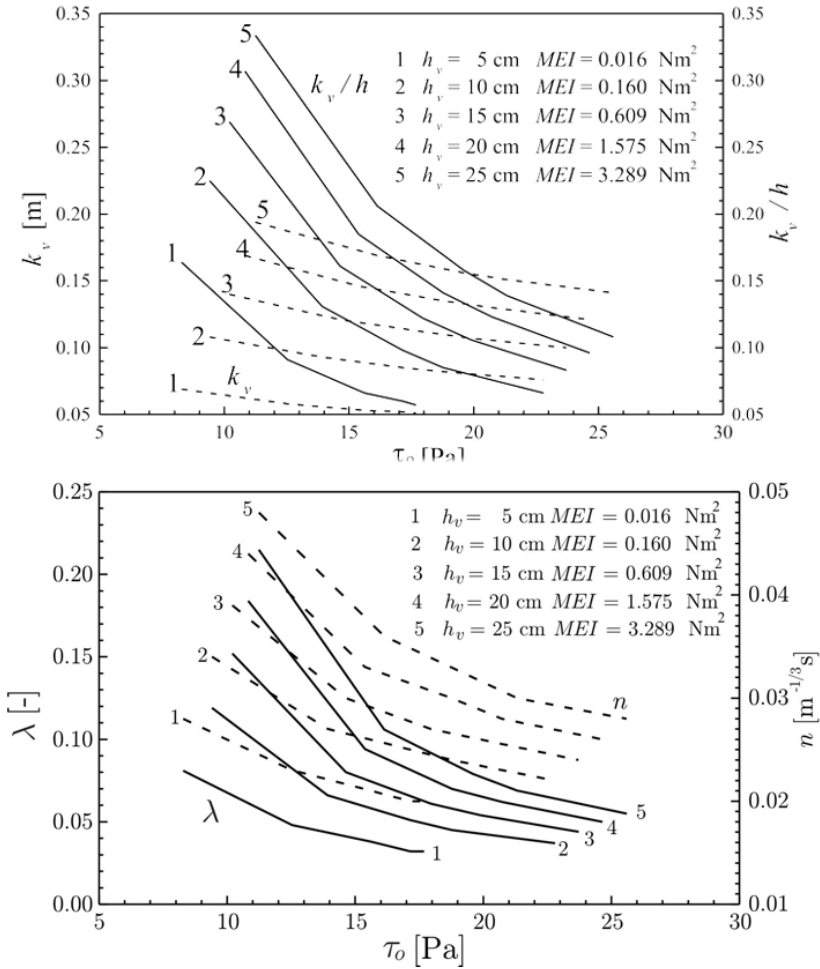
- kritična smičuća brzina: $u_{*c} = 0,218 \text{ m/s}$.

Q [m ³ /s]	h [m]	u_* [m/s]	A_v [-]	B_v [-]	k_v [m]	λ [-]	broj iteracija
2,00	0,52	0,101	0,15	1,85	0,140	0,152	16
5,00	0,75	0,121	0,15	1,85	0,121	0,080	16
8,00	0,92	0,134	0,15	1,85	0,112	0,061	16
10,00	1,01	0,141	0,15	1,85	0,107	0,054	16
15,00	1,21	0,154	0,15	1,85	0,100	0,044	16

Najveća brzina u zatravljenim kanalima. Dopuštena brzina toka za opstanak biljnog pokrivača zavisi od vrste trave, vrste tla i uzdužnog nagiba dna (Tabela 3.5). U projektovanju zatravljenih kanala takodje treba imati u vidu iskustvenu preporuku po kojoj brzina u kanalu može biti najviše 120÷130% veća od dozvoljene brzine u odgovarajućim neobloženim kanalima.

■ **Primer 3.4.** Odrediti uzdužni nagib dna obodnog kanala za zaštitu naselja od poplave, koji je dimenzionisan na 10-godišnju veliku vodu od 80 m³/s; poprečni presek je trapezni sa širinom u dnu $b = 8 \text{ m}$ i nagibom kosina 1:4 (koji omogućava lako košenje trave). Visina sveže trave je $h_v = 0,15 \text{ m}$. Trava je zubača, a tlo malo podložno eroziji.

Rešenje. Problem se rešava iterativno, probanjem različitih vrednosti nagiba I_d , dok se ne zadovolje kriterijumi: (a) dozvoljene brzine, koja u ovom slučaju iznosi 2,4 m/s (Tabela 3.5) i (b) dozvoljenog tangencijalnog napona, koji za datu visinu trave iznosi 45 Pa (Tabela 3.2). Usvojenom faktorom sigurnosti 1,5, odgovara vrednost dozvoljenog napona od 30 Pa.



Slika 3.5: Uopšteni rezultati proračuna u primeru 3.3; gornji dijagram daje vezu između tangencijalnog napona i apsolutne/relativne rapavosti trave, u zavisnosti od njene visine; donji dijagram tu vezu prikazuje preko vrednosti koeficijenta trenja [81].

Tabela 3.5: Dozvoljene brzine vode u zatravljenim kanalima [100]

Vrsta trave	Uzdužni nagib kanala [%]	Najveća brzina [m/s]	
		tlo malo podložno eroziji	tlo podložno eroziji
Zubača (troskot, Bermudska trava) (<i>Cynodon dactylon</i>)	0÷5	2,4	1,8
	5-10	2,1	1,5
	>10	1,8	1,2
Livadarka (<i>Buchloë dactyloides</i>)	0÷5	2,1	1,5
	5÷10	1,8	1,2
	>10	1,5	0,9
Mešavine	0÷5	1,5	1,2
	5÷10	1,2	0,9
	>10	ne preporučuje se	
Detelina (<i>Alfalfez</i>)	0÷5	1,1	0,8
	>5	ne preporučuje se	

Iz rezultata proračuna koji su dati u Tabeli 3.6 proizilazi da su vrednosti tangencijalnog napona za pretpostavljene nagibe: $\rho \cdot u_*^2 = 38,8, 23,4$ i $31,3$ Pa. Ovaj poslednji približno odgovara dozvoljenom tangencijalnom naponu, tako da se nagib dna od 1,5 promila može usvojiti kao definitivno rešenje. Brzina u kanalu je prihvatljiva: $2,26 \text{ m/s} < 2,40 \text{ m/s}$.

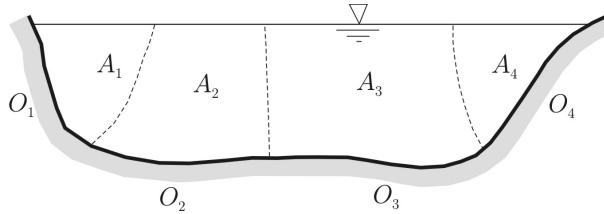
Tabela 3.6: Rezultati proračuna u primeru 3.4
($MEI = 0,6094 \text{ N m}^2$, $u_{*c} = 0,218 \text{ m/s}$)

I_d [-]	Q [m ³ /s]	h [m]	A [m ²]	B [m]	O [m]	R [m]	V [m/s]	Fr [-]	n [m ^{-1/3} s]
0,0020	80,00	1,98	31,54	23,84	24,33	1,30	2,54	0,496	0,021
0,0010	80,00	2,38	41,76	27,06	27,64	1,51	1,92	0,242	0,022
0,0015	80,00	2,14	35,42	25,11	25,64	1,38	2,26	0,369	0,021

I_d [-]	Q [m ³ /s]	h [m]	u_* [m/s]	A_v [-]	B_v [-]	k_v [m]	λ [-]	broj iteracija
0,0020	80,00	1,98	0,197	0,15	1,85	0,082	0,027	16
0,0010	80,00	2,38	0,153	0,15	1,85	0,101	0,028	16
0,0015	80,00	2,14	0,177	0,15	1,85	0,089	0,028	16

3.4 Neuniformni raspored rapavosti po poprečnom preseku

Jedan pristup u rešavanju problema neuniformnog rasporeda rapavosti po poprečnom preseku je iznalaženje *ekvivalentne* vrednosti Manningovog koeficijenta. Poprečni profil se deli na segmente različitih rapavosti, kao što je prikazano na Slici 3.6.



Slika 3.6: Podela preseka na delove (segmente) različite rapavosti.

Pretpostavljajući da je nagib linije energije isti u svim segmentima, može se za svaki segment, označen indeksom $j = 1, 2, \dots$, napisati:

$$Q_j = \frac{1}{n_j} \cdot O_j \cdot R_j^{5/3} \cdot I_e^{1/2}. \quad (3.29)$$

Iz uslova $Q = \sum_j Q_j$, proizilazi izraz za ekvivalentni Manningov koeficijent:

$$n_e = \frac{O \cdot R^{5/3}}{\sum_j \left(\frac{O_j \cdot R_j^{5/3}}{n_j} \right)}, \quad (3.30)$$

gde je $O = \sum_j O_j$ - ukupni okvašeni obim, a R - hidraulički radijus celog preseka.

■ **Primer 3.5.** Odrediti normalnu dubinu u koritu trapeznog poprečnog preseka za protok $Q = 7 \text{ m}^3/\text{s}$, ako su dati sledeći podaci: dno širine 2 m je peščano, sa vrednošću Manningovog koeficijenta $n_1 = 0,020 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. Kosine u nagibu $m = 1,5$ su zaštićene od erozije kamenom srednje krupnoće $d_{50} = 150 \text{ mm}$. Uzdužni nagib dna je $I_d = 0,002$.

Rešenje. Na osnovu izraza (3.23), vrednosti Manningovog koeficijenta za kosine iznose: $n_2 = n_3 = 0,15^{1/6}/21 = 0,035 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$.

Normalna dubina h se dobija iterativnim rešavanjem jednačine jednolikog tečenja:

$$\underbrace{\left(\frac{n_e \cdot Q}{O \cdot R^{5/3}} \right)^2}_{f_4(h)} - I_d = 0, \quad (3.31)$$

pri čemu se u proračunu vrednosti funkcije $f_4(h)$ koriste izrazi (3.12)-(3.14). Rezultati proračuna su dati u Tabeli 3.7. Početna pretpostavka je $h=1,0 \text{ m}$, a kriterijum konvergencije $f_4(h) < 1,0 \times 10^{-4}$.

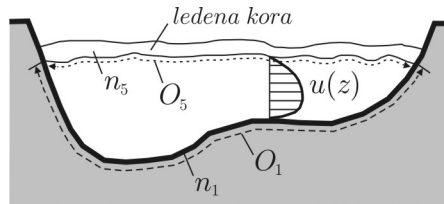
Tabela 3.7: Proračun normalne dubine na osnovu ekvivalentne rapavosti.

iter.	h [m]	O_1 [m]	$O_{2,3}$ [m]	O [m]	A_1 [m ²]	$A_{2,3}$ [m ²]	A [m ²]	R_1 [m]	$R_{2,3}$ [m]	R [m]	n_e [m ^{-1/3} s]	$f_4(h)$ [-]
1	1,00	2,00	1,80	5,61	2,00	0,75	3,50	1,00	0,42	0,62	0,0206	0,00119
2	1,10	2,00	1,98	5,97	2,20	0,91	4,02	1,10	0,46	0,67	0,0208	0,00024
3	1,12	2,00	2,02	6,04	2,24	0,94	4,12	1,12	0,47	0,68	0,0209	0,00009

Poseban slučaj neuniformnog rasporeda rapavosti u poprečnom preseku nastaje zimi, kada površina reke može biti delimično ili u potpunosti pokrivena ledenom korom (Slika 3.7). U tom slučaju se vrednost ekvivalentnog koeficijenta rapavosti može sračunati pomoću izraza [53]:

$$n_e = n_1 \left[1 + \frac{O_5}{O_1} \left(\frac{n_5}{n_1} \right)^{3/2} \right]^{2/3}, \quad (3.32)$$

gde je indeks „1” označava korito, a indeks „5” led.



Slika 3.7: Poprečni presek vodotoka sa ledenom korom na površini.

Vrednosti koeficijenta trenja za led se menjaju tokom zime; u početnoj fazi, dok se led nije konsolidovao, te vrednosti iznose: $n_5 = 0,02 \div 0,06 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. Nakon konsolidacije leda, njegova se rapavost smanjuje: $n_5 = 0,008 \div 0,015 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. U poznom zimskom periodu se vrednosti povećavaju usled formiranja nabora (visine i do 30 cm) po donjoj površini ledene kore: $n_5 = 0,02 \div 0,03 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$.

3.5 Koeficijent otpora deonice

Kada se posmatra rečna deonica, Manningov koeficijent dobija šire značenje, jer pored trenja usled apsolutne rapavosti zrna, uključuje i niz drugih faktora koji doprinose ukupnom otporu, kao što su: nanosne formacije, neprizmatičnost korita, gradjevine u koritu, vegetacija i meandriranje. Manningov koeficijent otpora deonice može se prikazati kao zbir koeficijenata parcijalnih otpora [33]:

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4) c_m, \quad (3.33)$$

pri čemu je objašnjenje pojedinih članova dato u Tabeli 3.8.

Tabela 3.8: Koeficijenti parcijalnih otpora.

Oznaka	Vrsta otpora	Tipične vrednosti [m ^{-1/3} s]
n_0	trenje u pravolinijskom prizmatičnom koritu; zavisi od apsolutne rapavosti dna (krupnoće nanosa)	
n_1	uticaj nanosnih formacija na rečnom dnu	0,005 ÷ 0,020
n_2	uticaj neprizmatičnosti korita	0,005 ÷ 0,015
n_3	lokalni uticaji (gradjevine, mostovski stubovi itd.)	0,010 ÷ 0,060
n_4	uticaji vegetacije u koritu	0,02 ÷ 0,100
c_m	koeficijent meandriranja	1,0 ÷ 1,3

Vrednosti koeficijenata trenja (koje važe za profil) i koeficijenata otpora (koje važe za deonicu) menjaju se sa protokom, odnosno vodostajem. Vrednosti koeficijenta otpora za deonicu se određuju pomoću snimljenih linija nivoa i izmerenih brzina, o čemu će biti reči u šestom poglavlju. U nedostatku rezultata terenskih merenja, ili u preliminarnim analizama, vrednosti Maningovog koeficijenta otpora se mogu proceniti na osnovu podataka iz literature, koji su opisnog karaktera (Tabela 3.9), ili u vidu fotografija (Slike 3.8 i 3.9). Ovi podaci su rezultat prethodne kalibracije Maningovog koeficijenta pomoću obavljenih terenskih merenja i proračuna.

Tabela 3.9: Vrednosti Maningovog koeficijenta za prirodne vodotoke [33].

Opis korita	Vrednosti n [m ^{-1/3} s]
Ravničarski (aluvijalni) tokovi	
Čista, pravolinijska deonica, bez tišaka	0,025 ÷ 0,033
Isto kao prethodno, sa više kamena i trave u koritu	0,030 ÷ 0,040
Čista krivudava deonica sa plićacima i tišacima	0,033 ÷ 0,045
Isto kao prethodno, sa više kamena i trave u koritu	0,035 ÷ 0,050
Deonica obrasla vegetacijom, sa dubokim tišacima	0,050 ÷ 0,080
Deonica veoma obrasla, sa ostacima korenja od drveća	0,075 ÷ 0,150
Planinski (bujični) tokovi	
Šljunkovito korito, bez vegetacije, strmih obala	0,030 ÷ 0,050
Korito pokriveno šljunkom i velikim kamenjem	0,040 ÷ 0,070
Veliki rečni tokovi širine preko 30 m	
Pravilna deonica bez vegetacije i kamenja u koritu	0,025 ÷ 0,060
Neppravilna deonica, eventualno sa kamenjem u koritu	0,035 ÷ 0,100
Inundacione površine	
Pašnjaci sa niskom travom, bez žbunja	0,025 ÷ 0,035
Pašnjaci sa visokom travom, bez žbunja	0,030 ÷ 0,050
Obradjene, požnjene površine	0,020 ÷ 0,040
Kulture sejane u redovima	0,025 ÷ 0,045
Kulture koje se ne seju u redovima	0,030 ÷ 0,050
Površine pod korovom, sa retkim žbunjem	0,035 ÷ 0,070
Retko žbunje i drveće	0,040 ÷ 0,080
Gusto žbunje	0,070 ÷ 0,160
Šuma, gust vrbak	0,110 ÷ 0,200
Očišćen teren sa ostacima panjeva	0,030 ÷ 0,050
Gusta šuma, sa granama van domašaja velike vode	0,080 ÷ 0,120
Isto kao prethodno, sa granama koje doseže velika voda	0,100 ÷ 0,160

$$n = 0.029 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$$



$$n = 0.030 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$$



$$n = 0.035 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$$



Slika 3.8: Odozgo na dole: neobložen kanal iskopan u aluvijalnom peskovitom i glinovitom materijalu, sa zatravljenim kosinama; šljunkovito korito bujičnog vodotoka; veliki aluvijalni vodotok sa obraslim obalama [33].

$$n = 0,024 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$$



$$n = 0,033 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$$



$$n = 0,036 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$$



Slika 3.9: Odozgo na dole: reka Dunav kod Apatina ($Q_{sr} \approx 3500 \text{ m}^3/\text{s}$, $d_{50} = 0,3 \text{ mm}$); reka Velika Morava kod Svilajнца ($Q_{sr} \approx 220 \text{ m}^3/\text{s}$, $d_{50} = 20 \text{ mm}$); reka Jadar kod mesta Komirić ($Q_{sr} \approx 8 \text{ m}^3/\text{s}$, $d_{50} = 30 \text{ mm}$).

4

Nanosne formacije i aluvijalni otpori

U rekama su sve granice pokretne – nivo vode i korito se stalno menjaju, samo je brzina tih promena različita. Karakterističan naboran ili talasast izgled peščanog dna velikih aluvijalnih vodotoka je posledica *nanosnih formacija*. Njihovo prisustvo (ili odsustvo) određuje *konfiguraciju rečnog dna*. U ovom poglavlju se najpre definišu tipovi nanosnih formacija u zavisnosti od brzine toka i krupnoće nanosa i opisuju metode za predviđanje tipa i veličine nanosne formacije. Zatim se uvodi pojam „aluvijalnog otpora” i pokazuje kako ovaj otpor utiče na propusnu moć rečnog korita.

4.1 Tipovi nanosnih formacija

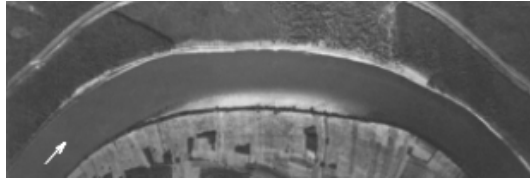
Klasifikacija nanosnih formacija se zasniva na njihovoj veličini, koja zavisi od brzine toka i krupnoće nanosa.

Sprudovi. Reč je o nanosnim formacijama velikih dimenzija, čija je dužina uporediva sa širinom korita, a visina, sa dubinom toka. Pri niskim vodostajima, sprudovi se vide iznad vodene površine. Podsetiće se na tipove sprudova koji su navedeni u prvom poglavlju (Slika 1.12).

Pojedinačni (lokalni) sprudovi su deponije peščanog ili šljunčanog materijala, koje se javljaju na konveksnim obalama rečnih krivina (Slika 4.1). Ovi sprudovi su posledica karakterističnog strujanja u krivini. Ne kreću se i ne menjaju mnogo oblik u zavisnosti od protoka.

Naizmenični sprudovi imaju, kao što njihovo ime kaže, naizmeničan raspored u odnosu na obale. Po pravilu im je širina manja od širine korita. Sporo se pomeraju *nizvodno*, prateći migraciono kretanje meandera. Prelazni potez između susednih sprudova ovog tipa karakteriše pličak, koji na plovnim rekama može ometati plovidbu u periodu malih voda.

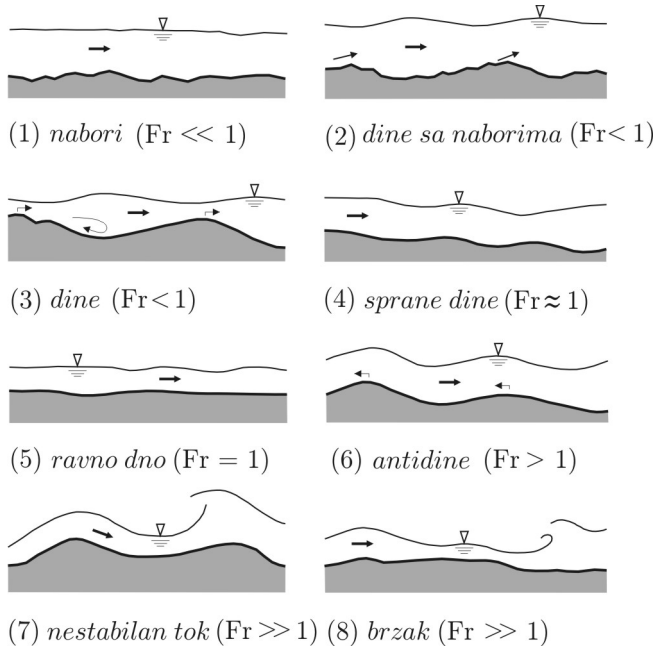
Poprečni sprudovi zauzimaju skoro u potpunosti širinu korita i javljaju se bilo u vidu usamljenih sprudova, ili u vidu periodičnih nanosnih formacija. Kao i naizmenični sprudovi, kreću se *nizvodno*.



Slika 4.1: Tipičan sprud u krivini (donji tok Drine).

Sprudovi koje formiraju pritoke javljaju se neposredno nizvodno od ušća, kao posledica istaložavanja krupnijeg nanosa iz pritoke, koga matična reka nije u stanju da odnese.

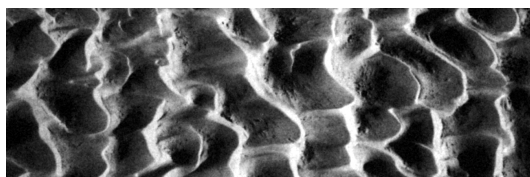
Nabori, dine i antidine. Tipovi nanosnih formacija čije su dimenzije manje od sprudova, shematski su prikazani u zavisnosti od brzine toka na Slici 4.2.



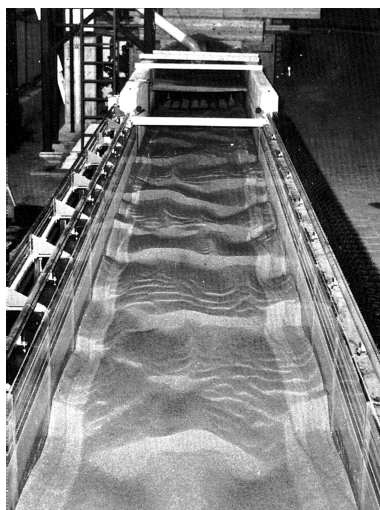
Slika 4.2: Shematski prikaz vrsta pešćanih nanosnih formacija [146, 148].

Nabori („ripple”) su nanosni oblici malih dimenzija, talasne dužine $15 \div 30$ cm, a visine, $1 \div 3$ cm (Slika 4.3). U uzdužnom preseku, nabori mogu imati trougaoni oblik (sa nizvodnom kosinom pod uglom unutrašnjeg trenja), ili sinusoidni oblik.

Dine su po dimenzijama veće od nabora (Slike 4.2 i 4.4). Kreću se *nizvodno*. Kao prelazni oblik između nabora i dina, javljaju se „dine sa naborima”.

Slika 4.3: *Nabori.*

Ukoliko je visina dina značajna u odnosu na dubinu toka i utiče na oblik slobodne površine, talasi na površini su fazno neusaglašeni sa talasima dina na dnu. U uzdužnom preseku, dine su trougaonog ili sinusoidnog oblika. Javljaju se u mirnom režimu, kada su vrednosti Frudovog¹ broja $Fr < 1$. Povećanjem brzine toka, visina dina se smanjuje i one, pri $Fr \approx 1$, postaju „sprane dine”.



Slika 4.4: *Ispitivanje nanosnih formacija se po pravilu obavlja u laboratorijskim kanalima sa peščanim dnom; snimak pokazuje dine.*

Ravno dno se javlja u konačnoj fazi prelaznog režima ($Fr \approx 1$), nakon nestanka spranih dina (Slika 4.2).

Antidine („peščani stojeći talasi”) se javljaju u uslovima burnog tečenja ($Fr > 1$). Fazno su usaglašeni sa gravitacionim talasima na površini, ali im je amplituda manja. Antidine mogu biti nepokretne, ili se kreću *uzvodno*. U uzdužnom profilu, njihov oblik zavisi od karakteristika toka i nanosa, a menja se od trougaonog do sinusoidnog. Pri vrednostima $Fr \geq 3$, antidine nestaju, linija nivoa se „lomi” i tok postaje hidraulički nestabilan (Slika 4.2).

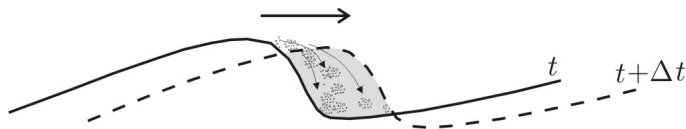
¹William Froude (1810-1879), engleski naučnik, poznat je po eksperimentalnim ispitivanjima otpora trenja kod brodova.

Brzaci i tišaci se javljaju pri velikim uzdužnim nagibima dna korita i pri značajnom pronosu nanosa. Brzake – izrazito strme deonice sa burnim režimom tečenja, prate tišaci – deonice sa manje burnim, ili čak mirnim režimom tečenja.

Na osnovu izloženog, karakter tečenja se može definisati u skladu sa vrstom nanosnih formacija:

- miran („donji”) režim tečenja sa naborima i dinamama;
- prelazni režim sa spranim dinamama;
- buran („gornji”) režim sa ravnim dnom i antidinama.

Navedene oblasti se razlikuju i u pogledu nanosa; u donjoj oblasti je količina nanosa u pokretu relativno mala. Njegova koncentracija (udeo mase nanosa u jediničnoj zapremini mešavine vode i nanosa) obično ne prelazi $1000 \div 2000$ mgr/L. Zrna peska se kreću kotrljanjem preko vrha dine (Slika 4.5), dok u podnožju (talasnoj dolji) dine, zrna miruju neko vreme, tako da je kretanje nanosa *prekidno*.



Slika 4.5: Kretanje peščanih zrna i pomeranje dine u nizvodnom smeru.

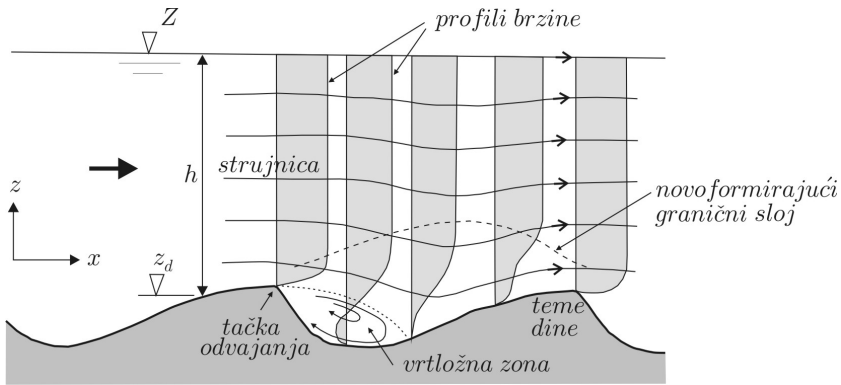
U gornjoj oblasti, koju karakteriše pojava ravnog dna ili antidina, količina nanosa u pokretu je veoma velika (koncentracije iznad 2000 mgr/L), a kretanje zrna je *neprekidno*.

4.2 Pojam aluvijalnog otpora

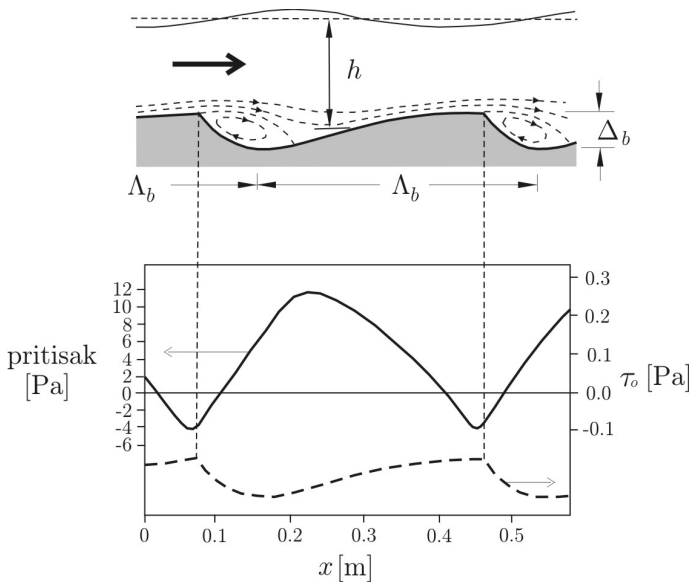
Termin „aluvijalni otpor” označava silu koja se protivi tečenju, a koja je posledica prisustva nanosnih formacija. Reč je o *otporu oblika*, koji nastaje usled razlike u pritisku uzvodno i nizvodno od svakog nabora ili dine², odnosno usled deformacije profila brzine, kao što prikazuju Slike 4.7 i 4.6.

Kako se promenom brzine rečnog toka menja otpor oblika, to se menja i karakter nanosnih formacija, u zavisnosti od režima tečenja. Medjutim, za razliku od otpora usled krupnoće zrna (otpora trenja), aluvijalni otpori se ne povećavaju sa brzinom toka, već se naprotiv, smanjuju, u zavisnosti od visine nanosnih formacija.

²Otpor „trenja” u suštini je takodje otpor oblika, ali na nivou pojediničnih zrna; aluvijani otpor je otpor oblika koji prouzrokuju nanosne formacije koje deluju kao elementi „rapavosti” velikih dimenzija. Radi se o istoj pojavi, ali u različitim razmerama.



Slika 4.6: Profili brzine u zoni dine; teme dine predstavlja tačku odvajanja strujnice, a povratni tok iza dine – oblast izražene turbulencije; u novoformirajućem graničnom sloju nizvodno od vrtloga, ponovo se uspostavlja logaritamski profil brzine [167].



Slika 4.7: Skica prikazuje promenu pritiska i tangencijalnog napona u zoni dine [166, 167]; na uzvodnom kraju i pri vrhu dine strujnice se medjusobno primiču, što ukazuje na lokalno povećanje brzine, a smanjenje pritiska; na nizvodnom kraju dine dolazi do vrtloženja, smanjenja brzine, a povećanja pritiska; usled razlike u pritisku, javlja se otpor oblika, koji se zove „aluvijalni otpor”.

Podela ukupne sile otpora ima za posledicu podelu energije toka koja je potrebna za njeno savladavanje:

$$I_e = I'_e + I''_e. \quad (4.1)$$

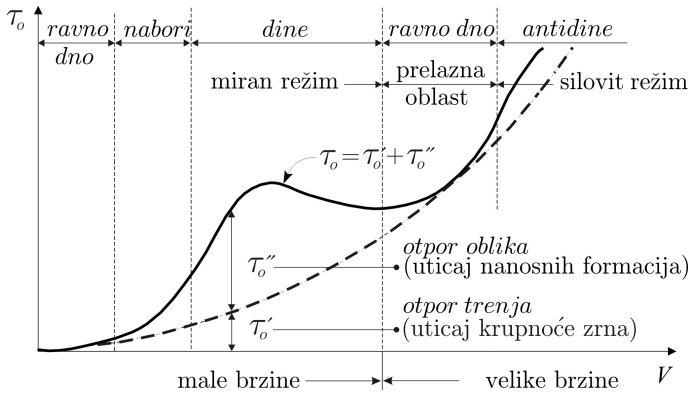
Član I'_e pokazuje utrošak energije na savladavanje otpora trenja usled apsolutne rapavosti (krupnoće zrna) na ravnom rečnom dnu, a član I''_e , na utrošak energije na savladavanje otpora oblika usled nanosnih formacija, na „talasastom” rečnom dnu. Iz (4.1) proizilazi i ovakva podela:

$$\tau_o = \tau'_o + \tau''_o \quad (4.2)$$

$$V_* = V'_* + V''_* \quad (4.3)$$

$$R = R' + R''. \quad (4.4)$$

Na Slici 4.8 shematski je prikazana podela tangencijalnog napona i zavisnost napona od brzine toka.

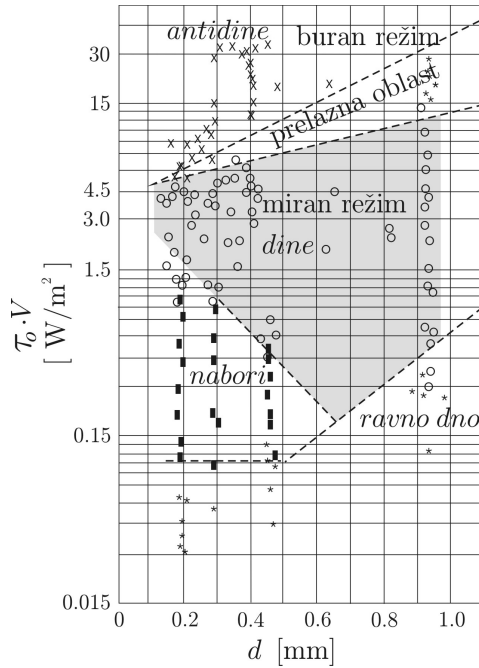


Slika 4.8: Podela tangencijalnog napona koja proizilazi iz podele ukupnog otpora na otpor trenja i aluvijalni otpor.

4.3 Procena vrste nanosnih formacija

Mnoštvo naučnih radova koji se bave nanosnim formacijama dokaz su značaja koji ove imaju u izučavanju hidrauličkog i morfološkog režima aluvijalnih vodotoka. Opsežna istraživanja upućuju na ideju da su nanosni oblici odraz nekog poremećaja koji se prostire kroz nevezani peščani materijal, kao što se talasi prostiru na vodenoj površini. (Jedno objašnjenje nastanka nanosnih formacija zasnovano je upravo na talasnoj teoriji [176].) Pa ipak, do danas nema univerzalno prihvaćenog analitičkog modela nastanka i ponašanja nanosnih formacija. Zbog toga se praksa oslanja na rezultate eksperimentalnih ispitivanja u obliku uopštenih dijagrama i empirijskih izraza za prognozu tipa i dimenzija nanosnih formacija.

Na Slici 4.9 prikazan je klasičan dijagram Sajmonsa i Ričardsona (Simons, Richardson, 1961), koji prikazuje vezu između vrste nanosnih formacija, srednjeg prečnika zrna i *jedinične snage toka*: $\tau_o \cdot V$ [29, 54, 146]. Ova snaga predstavlja rad toka (promenu njegove energije) na savladivanju otpora u jedinici vremena, po jedinici površine dna [$N \cdot m/m^2s=W/m^2$].

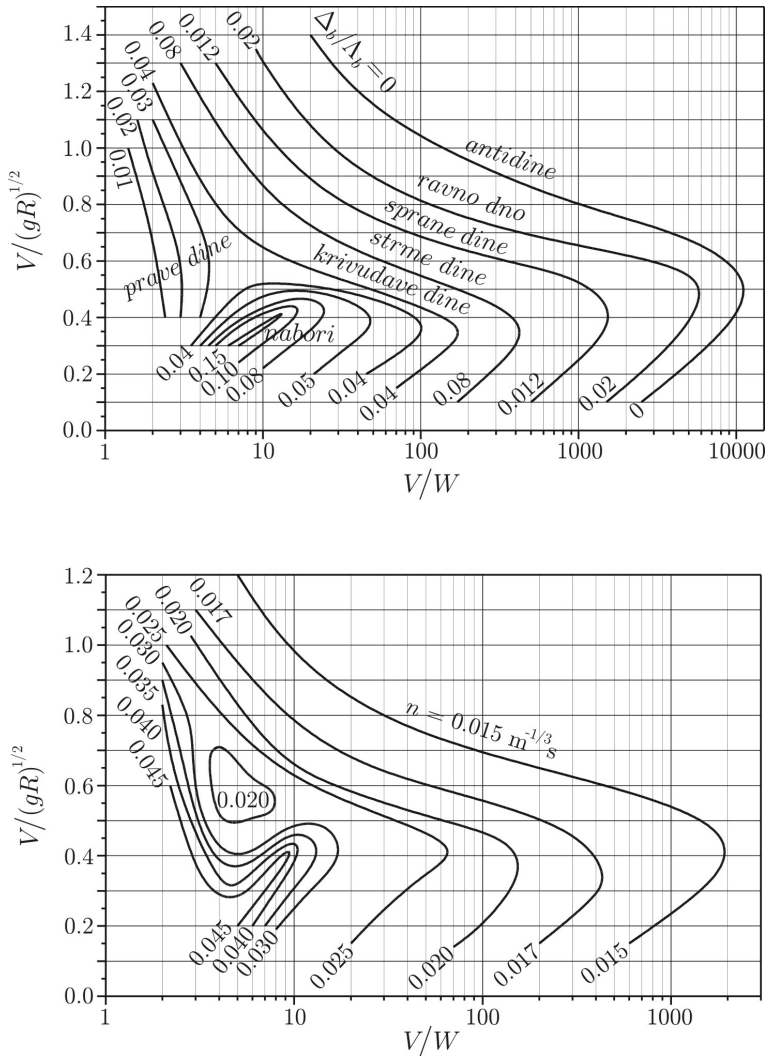


Slika 4.9: Rezultati istraživanja na Univerzitetu države Kolorado (1961 – 1965) koji obuhvataju oko 400 eksperimenata u laboratorijskim kanalima širine 0,2 ÷ 1,0 m, kao i merenja na nekoliko prirodnih vodotoka; dijagram važi za sitnozrni pesak krupnoće manje od 1 mm [146].

U istočnoj Evropi se za procenu tipa nanosnih formacija, njihovih dimenzija i vrednosti Maningovog koeficijenta koji obuhvata aluvijalni otpor, najviše koriste dijagrami Znamenskaje (1969), prikazani na Slici 4.10.

■ **Primer 4.1.** Odrediti vrstu nanosnih formacija i vrednost Maningovog koeficijenta za vodotok čije je korito prizmatično, trapeznog poprečnog preseka, širine u dnu 50 m i nagiba kosina 1:2. Uzdužni nagib dna iznosi 0,001, a protok, 100 m³/s. Karakteristični prečnici peščanog nanosa su $d_{90}=5$ mm i $d_{50}=2$ mm. Zrno d_{50} ima brzinu tonjenja $W=0,3$ m/s (videti tačku 8.2.1.4).

Rešenje. Problem se rešava iterativno. U prvoj iteraciji se pretpostavlja da je vrednost Maningovog koeficijenta isključivo posledica apsolutne rapavosti, pa je



Slika 4.10: Dijagrami Znamenskaje za procenu tipa nanosnih formacija, njihovih dimenzija i veličine aluvijalnog otpora; karakteristike nanosa su definisane „faktorom pokretljivosti” – odnosom V/W , gde je V – srednja profilska brzina, a W – brzina tonjenja zrna (videti tačku 8.2.1.4), dok su karakteristike toka definisane vrednošću Frudovog broja V/\sqrt{gR} ; dimenzije nabora, dina i antidina su određene odnosom visine Δ_b i dužine Λ_b ; Manningov koeficijent obuhvata otpor trenja i aluvijalni otpor [22].

$n = d_{50}^{1/6} / 21 = 0.017 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. Proračunom jednolikog tečenja dolazi se do podataka koji su neophodni za korišćenje dijagrama Znamenskaje. Detalji proračuna su dati u Tabeli 4.1; pretpostavljene vrednosti Maningovog koeficijenta date su u koloni (2), a vrednosti očitane sa dijagrama, u koloni (9).

Tabela 4.1: Odredjivanje Maningovog koeficijenta u primeru 4.1

iter.	n [m ^{-1/3} s]	h [m]	R [m]	V [m/s]	V/\sqrt{gR} [-]	V/W [-]	tip nanosne formacije	n (dijagram)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0,017	1,04	0,99	1,85	0,60	6,17	prave dine	0,02
2	0,020	1,14	1,09	1,67	0,51	5,60	prave dine	0,02

Može se konstatovati da se pri datim uslovima javljaju dine (tečenje je u mirnom režimu $h = h_n > h_k = 0,73 \text{ m}$, $Fr < 1$). Za odredjivanje vrednosti Maningovog koeficijenta koji obuhvata i aluvijalni otpor, dovoljna je jedna iteracija. (Kriterijum konvergencije: pretpostavljena vrednost n približno jednaka vrednosti koja se očitava sa dijagrama na Slici 4.10). Odnos visine i dužine dina iznosi u ovom slučaju $0,03 \div 0,04$.

* * *

Prema istraživanjima holandskog naučnika fan Rejna (van Rijn, 1984), konfiguracija rečnog dna prvenstveno zavisi od režima takozvanog *vučenog nanosa* [166, 167], koji se kreće po dnu korita, kotrljanjem, klizanjem i skokovito. (Ovoj vrsti nanosa je posvećeno deseto poglavlje.)

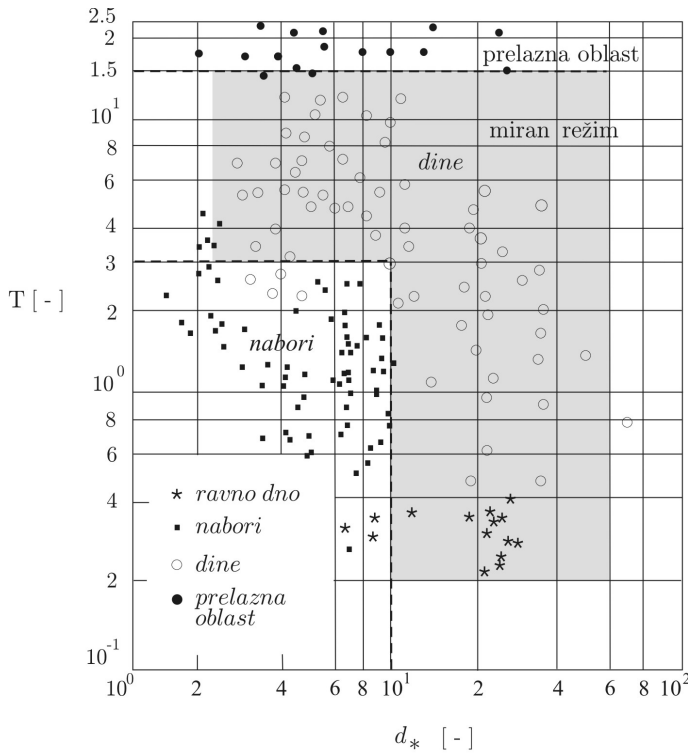
Dijagram na Slici 4.11 prikazuje tipove nanosnih formacija u mirnom režimu i prelaznoj oblasti, u zavisnosti od dva bezdimenziona broja. Prvi broj – „prečnik smicanja”, objedinjuje fizička svojstva nanosa – krupnoću zrna: $d = d_{50}$ i relativnu gustinu: $\Delta = \rho_s - \rho / \rho = 1,65$ (videti tačku 8.2.1.1), sa fizičkim svojstvom fluida – molekularnom viskoznošću ν i sa uticajem gravitacije:

$$d_* = d \left(\frac{g \cdot \Delta}{\nu^2} \right)^{1/3}. \quad (4.5)$$

Drugi bezdimenzioni broj:

$$T = \frac{\tau'_o - \tau_{oc}}{\tau_{oc}} = \frac{(V'_*)^2 - (V_{*c})^2}{(V_{*c})^2}, \quad (4.6)$$

predstavlja relativni „višak” tangencijalnog napona τ'_o u odnosu na neku njegovu „kritičnu” vrednost τ_{oc} pri kojoj dolazi do masovnog pokretanja zrna na rečnom dnu (videti deveto poglavlje). Izraz (4.6) pokazuje da se umesto tangencijalnog napona, mogu koristiti odgovarajuće smičuće brzine.



Slika 4.11: Klasifikacija nanosnih formacija prema fan Rejnu [166], zasnovana na eksperimentalnim rezultatima i terenskim merenjima (reke Rio Parana, Misisipi, kao i više reka u Holandiji i Japanu); u trenutku pokretanja je $\tau'_o = \tau_{oc}$, pa vrednost $T = 0$ označava početak formiranja nabora pri krupnoćama $d_* < 10$ ($d < 0,45$ mm); nabori nestaju pri vrednostima $T > 3$; najveća visina dina se javlja pri $T \approx 5$; prelazna oblast je definisana opsegom $15 < T < 25$, a ravno dno, $T > 25$; pri velikim brzinama toka ($\tau'_o \gg \tau_{oc}$, $T > 15$), nanos se podiže visoko sa dna, pa se dine najpre smanjuju („spiraju”), zatim potpuno iščezavaju, a dno postaje ravno.

Smičuća brzina V'_* odražava apsolutnu rapavost dna i računa se pomoću Šezijeve jednačine u obliku [166]:

$$V'_* = \frac{\sqrt{g} \cdot V}{C'} = \frac{\sqrt{g} \cdot V}{18 \log(12 R_b/k_s)}, \quad (4.7)$$

gde je C' – Šezijev koeficijent koji obuhvata samo apsolutnu rapavost k_s , a R_b – hidraulički radijus koji je približno jednak srednjoj dubini toka.

Kritična smičuća brzina V'_{*c} ima konstantnu vrednost za zrno određene krupnoće. (Način na koji se ta vrednost određuje, biće razmatran u devetom poglavlju.)

Prednost fan Rejnovog kriterijuma je u tome što je utemeljen na velikom broju podataka za prirodne vodotoke, a nedostatak mu je osetljivost parametra T na grešku u određivanju kritičnog smičućeg napona, odnosno kritične smičuće brzine.

4.4 Procena dimenzija nanosnih formacija

U literaturi postoji veliki broj empirijskih izraza za određivanje dimenzija nanosnih formacija [54, 92, 166, 176]. Prema tumačenju Jalina (Yalin, 1964), dine su odraz vrtloga velikih razmera, a talasna dužina dina Λ_b , kao i razmera velikih vrtloga, proporcionalna je dubini:

$$\Lambda_b = \begin{cases} (4 \div 7) h & \text{Lorsen (Laursen, 1958)} \\ 2\pi \cdot h & \text{Jalin (Yalin, 1964).} \end{cases} \quad (4.8)$$

Regresioni izrazi fan Rejna (1984) za dine imaju ovakav oblik [166]:

$$\frac{\Delta_b}{h} = 0,11 \left(\frac{d}{h}\right)^{0,3} (1 - e^{-0,5T})(25 - T) \quad (4.9)$$

$$\frac{\Delta_b}{\Lambda_b} = 0,015 \left(\frac{d}{h}\right)^{0,3} (1 - e^{-0,5T})(25 - T), \quad (4.10)$$

pri čemu odnos Δ_b/h predstavlja relativnu aluvijalnu rapavost, odnos Δ_b/Λ_b – parametar nagiba dine, a $d = d_{50}$ – srednji prečnik zrna. Navedeni izrazi se mogu primeniti i na nabore. Deljenjem (4.9) sa (4.10), dobija se za dužinu dina $\Lambda_b = 7,3h$, koja je u saglasnosti sa izrazima (4.8).

Što se tiče antidina, smatra se da je njihov nastanak posledica inercijalnih efekata u pronosu nanosa. Pronos nanosa „reaguje sa zakašnjenjem” na promene brzine i tangencijalnog napona. To dovodi do poremećaja na dnu u vidu antidina [127]. Za procenu talasne dužine antidina mogu se koristiti sledeće formule [31]:

$$\frac{\Lambda_b}{h} = \begin{cases} \frac{2\pi}{h} \cdot \frac{V^2}{2g} = \pi \cdot Fr^2 & \text{Kenedi (Kennedy, 1963)} \\ 11 \cdot Fr^{3.5} & \text{Šanson (Chanson, 1995),} \end{cases} \quad (4.11)$$

gde je Frudov broj dat u obliku: $Fr = V/\sqrt{gh}$. Navedeni izrazi važe u burnom režimu, sve dok tečenje ne postane nestabilno pri vrednosti $\Delta_b/\Lambda_b = 0,14$ [92]. Interesantno je da godišnje doba, odnosno temperatura vode, utiče na dimenzije nanosnih formacija. One su veće u letnjem, a manje u zimskom periodu, što znači da je i vrednost aluvijalnog otpora sezonski promenljiva. Ovo se objašnjava time što sa porastom temperature opada viskoznost vode, a raste brzina tonjenja suspendovanih čestica, tako da ove u većem broju dospevaju na dno, gde uvećavaju demenzije nanosnih formacija.

4.5 Procena veličine aluvijalnog otpora

Pokazano je kako se veličina aluvijalnog otpora može ustanoviti pomoću nekog nomograma, kao što je onaj Znamenskaje. To se međutim može i računski postići preko dimenzija nanosnih formacija.

Metoda fan Rejna se zasniva na konceptu „aluvijalne ekvivalentne peščane rapavosti” [166]:

$$k_{sa} = 3 d_{90} + 1,1 \Delta_b \left(1 - e^{-2,5\Delta_b/\Lambda_b}\right), \quad (4.12)$$

koja obuhvata apsolutnu rapavost (prvi član na desnoj strani) i „doprinos” nanosnih formacija (drugi član). Proračun se obavlja iterativno, kao što pokazuje sledeći primer.

■ **Primer 4.2.** Odrediti karakter i dimenzije nanosnih formacija za vodotok iz primera 4.1, kao i vrednost Maningovog koeficijenta. Vrednost kritične brzine smicanja za zrno krupnoće $d_{50} = 2$ mm iznosi $V_{*c} = 0,036$ m/s. Relativna gustina nanosa je $\Delta = 1,65$, a vrednost koeficijenta viskoznosti vode, $\nu = 1 \times 10^{-6}$ m²/s.

Rešenje. Proračun se obavlja iterativno i najpre se (kao u primeru 4.1) pretpostavlja vrednost Maningovog koeficijenta $n = 0,017$ m^{-1/3}s i određuju hidraulički parametri toka: $h = h_n = 1,04$ m, $V = 1,85$ m/s, $R_b = 1,04$ m; u prvoj iteraciji je $k_{sa} = k_s = 3 d_{90} = 3 \cdot 5 = 15$ mm.

Sledeća iteracija sadrži tri etape; u prvoj se računaju uticaji apsolutne rapavosti, odnosno krupnoće zrna (4.7):

$$\begin{aligned} C' &= 18 \log \left(\frac{12 R_b}{k_{sa}} \right) = 18 \log \left(\frac{12 \cdot 1,04}{0,015} \right) = 52,56 \\ n' &= \frac{R_b^{1/6}}{C'} = \frac{1,04^{1/6}}{52,56} = 0,019 \text{ m}^{-1/3}\text{s}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$V'_* = \sqrt{g} V / C' = 3,13 \cdot 1,85 / 52,56 = 0,11 \text{ m/s}.$$

U drugoj etapi se određuje tip nanosne formacije na osnovu izraza (4.5), (4.6) i dijagrama na Slici 4.11, a zatim dimenzije nanosnih formacija pomoću jednačina (4.9) i (4.10). Dobijaju se sledeći rezultati:

$$d_* = 0,002 \left[\frac{9,81 \cdot 1,65}{(1 \times 10^{-6})^2} \right]^{1/3} = 50,59$$

$$T = \frac{0,11^2 - 0,036^2}{0,036^2} \approx 8,3 \quad (\text{dine})$$

$$\Delta_b = 1,04 \cdot 0,11 \left(\frac{0,002}{1,04} \right)^{0,3} (1 - e^{-0,5 \cdot 8,3}) (25 - 8,3) = 0,29 \text{ m}$$

$$\Lambda_b = 7,3 \cdot 1,04 = 7,59 \text{ m.}$$

U trećoj etapi se koriguje vrednost k_s pomoću izraza (4.12), kao i vrednosti Šezijevog, odnosno Maningovog koeficijenta:

$$k_{sa} = 3 \cdot 0,005 + 1,1 \cdot 0,29 \left(1 - e^{-2,5 \cdot 0,29/7,59} \right) = 0,044 \text{ m}$$

$$C = 18 \log \left(\frac{12 \cdot 1,04}{0,044} \right) = 44,15$$

$$n = \frac{1,04^{1/6}}{44,15} = 0,023 \text{ m}^{-1/3}\text{s.}$$

Sa ovim vrednostima se može preći na sledeću iteraciju, sve dok razlika u rezultatima dve iteracije ne bude zanemarljivo mala.

4.6 Odredjivanje krive protoka na osnovu aluvijalnog otpora

Kriva protoka u aluvijalnim vodotocima se može odrediti koristeći koncept podele otpora (4.1) - (4.4). Razmotriće se dva klasična postupka.

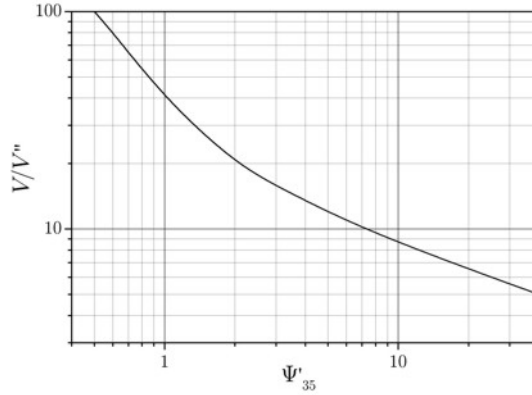
Metoda Ajnštajna i Barbarose. Ovi autori (Einstein, Barbarossa, 1952) su pošli od logaritamskog rasporeda brzine (2.47), u kome figurišu srednje profilske veličine V , V'_* i R' , kao i empirijski parametar X' sa Slike 2.13 [45]:

$$\frac{V}{V'_*} = 5,75 \log \left(12 \frac{R'}{k_s} X' \right). \quad (4.14)$$

Smičuća brzina koja odražava aluvijalne otpore, definisana je pomoću empirijske zavisnosti $V/V'_* = f(\Psi'_{35})$ na Slici 4.12, pri čemu je Ψ'_{35} - bezdimenzioni parametar („intenzitet smicanja”):

$$\Psi'_{35} = \frac{\Delta \cdot d_{35}}{R' I_e}. \quad (4.15)$$

Može se primetiti da ovaj parametar daje vezu između karakteristika toka (hidrauličkog radijusa R' i nagiba linije energije I_e) i karakteristika nanosa (merodavne



Slika 4.12: Dijagram Ajnštajna za određivanje aluvijalne smičuće brzine; kriva je dobijena na osnovu rezultata terenskih merenja na američkim rekama Misuri, Salinas i dr. [29, 44, 54, 146].

krupnoće d_{35} i gustine Δ (videti tačku 8.2.1.1.)). Računski postupak biće ilustriran primerom na kraju ovog poglavlja.

Metoda Engelunda i Hansena. Prema ovim autorima (Engelund, Hansen, 1967), gubici energije usled prisustva dina mogu se tretirati po analogiji sa gubicima na proširenju (formula Borda) [47]:

$$\Delta E_b = \alpha \left(\frac{\Delta_b}{h} \right)^2 \frac{V^2}{2g}, \quad (4.16)$$

tako da se nagib I''_e u izrazu (4.1) može definisati na ovaj način:

$$I''_e = \alpha \left(\frac{\Delta_b}{R} \right)^2 \cdot \frac{1}{\Lambda_b} \cdot \frac{V^2}{2g}. \quad (4.17)$$

Kako je $I_e = \tau_o / (\rho \cdot g \cdot R)$, može se napisati izraz koji pokazuje podelu energije toka:

$$\underbrace{\frac{\tau_o}{\rho g R}}_{I_e} = \underbrace{\frac{\tau'_o}{\rho g R'}}_{I'_e} + \underbrace{\alpha \left(\frac{\Delta_b}{R} \right)^2 \frac{1}{\Lambda_b} \frac{V^2}{2g}}_{I''_e}, \quad (4.18)$$

odnosno izraz koji pokazuje podelu bezdimenzionog tangencijalnog napona Θ :

$$\frac{\tau_o}{g(\rho_s - \rho)d} = \frac{\tau'_o}{g(\rho_s - \rho)d} + \frac{\tau''_o}{g(\rho_s - \rho)d}. \quad (4.19)$$

Veza izmedju bezdimenzionih veličina Θ' i hidrauličkog radijusa R' je:

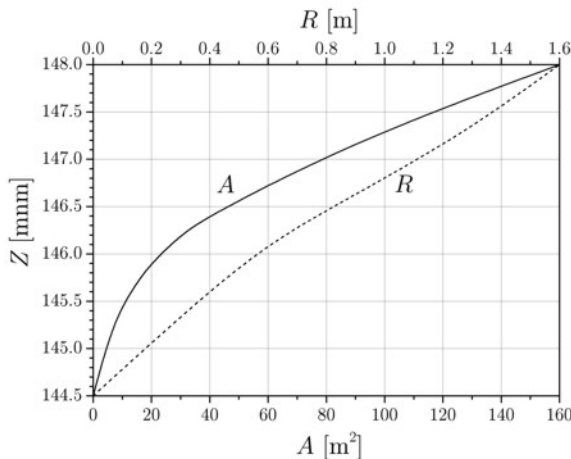
$$\Theta' = \frac{R' \cdot I_e}{\Delta \cdot d}, \quad (4.20)$$

gde je $d = d_{50}$ - srednji prečnik zrna.

Zavisnost izmedju veličina Θ' i Θ je empirijskog karaktera [21, 47]:

$$\Theta = \begin{cases} 1,581 \sqrt{\Theta' - 0,06} & \text{za } \Theta' < 0,55 \\ \Theta' & \text{za } 0,55 < \Theta' < 1 \\ [1,425 (\Theta')^{-1,8} - 0,425]^{1/1,8} & \text{za } \Theta' > 1. \end{cases} \quad (4.21)$$

■ **Primer 4.3.** Na Slici 4.13 prikazane su zavisnosti $A(Z)$ i $R(Z)$ dobijene na osnovu izmerenih vodostaja u jednom profilu.



Slika 4.13: Ulazni podaci za primer 4.3

Određiti krivu protoka uzimajući u obzir aluvijalne otpore, ako se zna da je korito formirano od nevezanog peščanog materijala čija je relativna gustina $\Delta = 1,65$, a karakteristične krupnoće $d_{35}=0,29$ mm, $d_{50}=0,31$ mm i $d_{65}=0,35$ mm. Smatrati da je tečenje jednoliko, $I_e = 0,00105$. ($\nu = 1,0 \times 10^{-6}$ m²/s).

Rešenje. Rezultati, dobijeni primenom metode Ajnštajna i Barbarose, dati su u Tabeli 4.2.

Tabela 4.2: Proračun po metodi Ajnštajna i Barbarose u primeru 4.3

R' [m]	V'_* [m/s]	δ_v [mm]	k_s/δ_v [-]	X' [-]	Δ_E [mm]	V [m/s]	Ψ'_{35} [-]	V/V'_* [-]	V''_* [m/s]	R'' [m]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0,15	0,04	0,290	1,21	1,59	0,220	0,90	3,07	16	0,06	0,35
0,60	0,08	0,145	2,41	1,28	0,273	2,04	0,77	55	0,04	0,16
1,20	0,11	0,105	3,33	1,15	0,304	2,96	0,38	150	0,02	0,04

(nastavak)

R [m]	Z [mm]	A [m ²]	Q [m ³ /s]
(12)	(13)	(14)	(15)
0,50	145,9	20,0	18
0,76	146,4	39,5	81
1,24	147,2	90,1	267

Objašnjenje (po kolonama):

- (1) pretpostavljena vrednost dela hidrauličkog radijusa R' ;
- (2) brzina smicanja usled krupnoće zrna: $V'_* = (g \cdot R' \cdot I_e)^{1/2}$;
- (3) debljina laminarnog podsloja: $\delta_v = 11,6 \cdot \nu/V'_*$;
- (4) odnos u kome je po hipotezi Ajnštajna $k_s = d_{65}$;
- (5) $X' = f(k_s/\delta_v)$ - korekcionni faktor (dijagram na Slici 2.13);
- (6) $\Delta_E = k_s/X'$ - apsolutna rapavost mešavine;
- (7) srednja profilska brzina, prema izrazu (4.14);
- (8) bezdimenzioni intenzitet smicanja $\Psi'_{35} = \Delta \cdot d_{35}/(R' \cdot I_e)$;
- (9) bezdimenziona veličina očitana sa dijagama na Slici 4.12;
- (10) V''_* - brzina smicanja usled nanosnih formacija, na osnovu kolona (7) i (9);
- (11) $R'' = (V''_*)^2/(g I_e)$ - deo hid. radijusa koji zavisi od aluvijalnog otpora;
- (12) vrednost ukupnog hidrauličkog radijusa: $R = R' + R''$;
- (13) kota nivoa dobijena interpolacijom zadate funkcije $R(Z)$;
- (14) površina preseka dobijena interpolacijom zadate funkcije $A(Z)$;
- (15) vrednost protoka $Q = V \cdot A$.

* * *

Primenom metode Engelunda i Hansena, dobijaju se sledeći rezultati za pretpostavljenu vrednost $R' = 0,15$ m:

$$V'_* = \sqrt{g \cdot R' \cdot I_e} = \sqrt{9,81 \cdot 0,15 \cdot 0,00105} = 0,039 \text{ m/s};$$

$$k_s = 2 \cdot d_{65} = 2 \cdot 0,00035 = 0,0007 \text{ m (Tabela 2.1)};$$

Pod pretpostavkom logaritamskog rasporeda brzine i širokog korita:

$$V = \frac{V_*}{\kappa} \ln \left(12 \frac{R'}{k_s} \right) = \frac{0,039}{0,4} \ln \left(12 \frac{0,15}{0,0007} \right) = 0,76 \text{ m/s};$$

$$\Theta' = \frac{R' \cdot I_e}{\Delta \cdot d_{50}} = \frac{0,15 \cdot 0,00105}{1,65 \cdot 0,00031} = 0,308 < 0,55 \quad (\text{miran režim});$$

$$\Theta = 1,581 \sqrt{\Theta' - 0,06} = 1,581 \sqrt{0,308 - 0,06} = 0,787;$$

$$R = \frac{\Theta \cdot \Delta \cdot d_{50}}{I_e} = \frac{0,787 \cdot 1,65 \cdot 0,00031}{0,00105} = 0,38 \approx 0,4 \text{ m};$$

Očitavanjem sa dijagrama na Slici 4.13:

$$R = 0,4 \text{ m} \Rightarrow Z = 145,6 \text{ mm}; \Rightarrow A \approx 14 \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$Q = V \cdot A = 0,76 \cdot 14 = 10,5 \text{ m}^3/\text{s}.$$

* * *

Opisane metode su odraz težnje da se na osnovu izmerenih vodostaja u profilu, snimljenih nagiba linije nivoa i utvrđene krupnoće nanosa, računskim putem definiše kriva protoka, uzimajući u obzir i uticaj nanosnih formacija. Principijelna zamerka ovom pristupu je što je zanemaren uticaj koncentracije (odnosno pronosa) nanosa na brzinu toka, a time i na krivu protoka.

5

Neustaljeno tečenje u prirodnim vodotocima

Prirodne vodotoke karakteriše turbulentno, prostorno trodimenziono, a vremenski promenljivo – *neustaljeno* tečenje. U cilju lakše analize, ovi tokovi se, osrednjavanjem po dubini, svode na *ravanske* (u horizontalnoj ravni dvodimenzione) tokove, a ovi, daljim osrednjavanjem po širini korita, na *linijske* (prostorno jednodimenzione) tokove. Kako je dužina rečnog korita dominantna u odnosu na njegovu dubinu i širinu, pretpostavka o linijskom karakteru tečenja je opravdana u većini problema rečnog uredjenja, što znači da se hidraulički proračuni mogu zasnivati na brzinama toka koje su osrednjene po poprečnom preseku. U ovom poglavlju se najpre formulišu jednačine linijskog neustaljenog tečenja u prirodnim vodotocima i opisuju metode njihovog numeričkog rešavanja. Zatim se razmatra mogućnost i opravdanost primene uprošćenih metoda proračuna. Na kraju se daju primeri numeričkog modeliranja složenih ravanskih strujanja.

5.1 Podela neustaljenih tokova

Neustaljeno – „talasno” kretanje vode karakteriše promenljivost hidrauličkih veličina (protoka, kota nivoa, brzine itd.) u prostoru i vremenu. Ako je brzina promene velika, radi se o „*naglo promenljivim*” neustaljenim tokovima. Tipični primeri su talasi izazvani rušenjem brana ili ispuštanjem vode iz hidroelektrana ili brodskih prevodnica, kao i poplavni talasi bujičnih vodotoka.

S druge strane, poplavne talase velikih aluvijalnih reka karakterišu relativno spore promene, pa je reč o „*blago promenljivim*” neustaljenim tokovima.

Najpre se navode neki opšti pojmovi u vezi sa talasnim kretanjem. Talas je definisan dužinom, amplitudom i periodom. Talasi se dele na *oscilatorne* kod kojih ne postoji prenos mase u pravcu talasnog kretanja i na *translatorne*, kod kojih taj prenos postoji. Translatorni talasi se mogu kretati u vidu usamljenih talasa, ili u vidu niza talasa – talasnog sistema.

Naglo promenljivo neustaljeno tečenje se manifestuje u obliku talasa sa *strmim* čelom (Slika 5.1). Ako je, gledajući u smeru talasnog kretanja, dubina iza čela talasa veća od dubine toka ispred njega, za talas kažemo da je *pozitivan*. U suprotnom, reč je o *negativnom* talasu.



Slika 5.1: Donji tokovi reka koje se ulivaju u mora ili okeane nalaze se pod uticajem plime i oseke. Slika prikazuje talasni front plime koji se kreće rekom Severn u Engleskoj. Ovo je primer talasa sa *strmim* čelom [163].

Talasi se dalje klasifikuju prema odnosu dužine i amplitude. Talase u „*plitkoj vodi*”, ili „*duge talase*”, karakteriše velika talasna dužina u odnosu na amplitudu¹. U plitkoj vodi se poremećaj oseća po celoj dubini poprečnog preseka, dok je u dubokoj vodi poremećaj ograničen samo na površinske slojeve, tako da trenje ima vrlo mali uticaj.

Brzina talasnog kretanja se definiše na dva načina; *relativna* brzina talasa, ili brzina prostiranja talasnog poremećaja (c), izražava se u odnosu na srednju brzinu osnovnog toka ($V = Q/A$), dok se *apsolutna* brzina talasa ($V \pm c$) izražava u odnosu na neku referentnu tačku na obali. (Znak je „+” ako je talas pozitivan, a „-”, ako je negativan.)

Zanemarujući viskozne uticaje i površinske napone, opšti izraz za brzinu talasa male amplitude je [66]:

$$c = \sqrt{\frac{g\Lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\Lambda}}, \quad (5.1)$$

gde je Λ – talasna dužina, h – dubina, a g – gravitaciono ubrzanje.

U „*dubokoj vodi*” odnos h/Λ je relativno veliki, $\tanh(2\pi h/\Lambda) \rightarrow 1$, pa se izraz (5.1) svodi na oblik:

$$c = \sqrt{\frac{g\Lambda}{2\pi}}. \quad (5.2)$$

¹Za *duge talase* važi kriterijum $\Lambda/h \gg 20$, gde je Λ – talasna dužina, a h – prosečna dubina toka; kako su kod velikih reka tipične vrednosti Λ i h reda veličine 100 km, odnosno 10 m, navedeni uslov je uvek ispunjen.

U „plitkoj vodi” je odnos h/Λ mali, $\tanh(2\pi h/\Lambda) \rightarrow 2\pi \cdot h/\Lambda$, pa je:

$$c = \sqrt{gh}, \quad \text{ili,} \quad c \approx \sqrt{g(A/B)}. \quad (5.3)$$

5.2 Jednačine linijskog neustaljenog tečenja

Jednačine linijskog neustaljenog tečenja, poznate kao San Venanove² jednačine, opisuju zakone održanja mase i količine kretanja pod sledećim uslovima:

- (1) fluid je nestišljiv, homogene gustine, njutnovski (linearna veza smičućih napona i brzine klizanja [63]);
- (2) tečenje je linijsko, blago promenljivo, u vidu „dugih talasa”;
- (3) zanemarena su vertikalna ubrzanja fluidnih delića u odnosu na gravitaciono ubrzanje, što znači da je raspored pritiska po dubini hidrostatički, a nivo vode u poprečnom preseku horizontalan;
- (4) otpori trenja se mogu definisati empirijskim izrazima izvedenim za ustaljeno jednoliko tečenje;
- (5) uzdužni nagib dna je mali, a korito nije podložno deformaciji;
- (6) zanemareni su uticaji sekundarnih strujanja, kao što su na primer vrtložna strujanja.

Jednačina održanja mase. Ova jednačina, koja se zove i „jednačina kontinuiteta” (neprekidnosti mase), izvodi se iz uslova da je integral materijalnog izvoda mase po kontrolnoj zapremini jednak nuli [63]:

$$\int_{\forall} \frac{D}{Dt}(\rho d\forall) \equiv \int_{\forall} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\forall + \int_{\forall} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} d\forall = 0, \quad (5.4)$$

gde je D/Dt oznaka materijalnog izvoda, a \forall , kontrolne zapremine.

Gausova³ integralna teorema daje vezu izmedju zapreminskog i površinskog integrala[63]:

$$\int_{\forall} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} d\forall = \int_A \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} dA, \quad (5.5)$$

gde površinski integral predstavlja protok mase kroz kontrolnu površinu A ; protok je pozitivan ako su vektor brzine i ort spoljne normale istog smera: $\vec{u} \cdot \vec{n} > 0$.

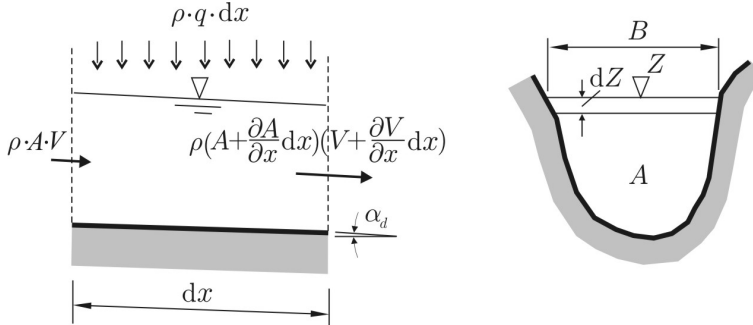
²Jean-Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886), francuski naučnik, dao je značajne doprinose u teoriji elastičnosti i mehanici fluida. Uveo je pojam brzine prostiranja talasa, kao i pojam kritičnog nagiba dna, na osnovu koga je podelio vodotoke na spore (aluvijalne) i brze (bujične).

³Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nemački matematičar, jedan od najvećih matematičara svih vremena, postavio je osnove teorije brojeva i diferencijalne geometrije, a u svojim zrelim godinama se bavio geodezijom, magnetizmom, elektricitetom i statistikom.

Zamenom (5.5) u (5.4), dolazi se do jednačine kontinuiteta u integralnom obliku:

$$\int_{\forall} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_A \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} dA, \quad (5.6)$$

koja kaže da je povećanje mase unutar kontrolne zapremine jednako razlici ulazne mase i izlazne mase kroz kontrolnu – graničnu površinu.



Slika 5.2: Kontrolna zapremina u izvodjenju jednačine kontinuiteta.

Sada će se zakon održanja mase (5.6) formulisati za elementarnu kontrolnu zapreminu $dV = A \cdot dx$, koja je prikazana na Slici 5.2. Smatrajući da je gustina konstantna, može se napisati:

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} dx = \rho \cdot V \cdot A - \rho \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) + \rho \cdot q \cdot dx. \quad (5.7)$$

Leva strana ove jednačine predstavlja promenu mase u elementarnoj zapremini u jedinici vremena. Prvi član na desnoj strani predstavlja dotok mase, a drugi (proizvod veličina u zagradama), oticaj mase u jedinici vremena. Poslednji član na desnoj strani predstavlja bočni dotok mase u kontrolnu zapreminu i definisan je na osnovu jediničnog bočnog dotoka vode q [$\text{m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$].

Množenjem i izostavljanjem beskonačno malih veličina drugog reda, dobija se:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0. \quad (5.8)$$

Kako je površina poprečnog preseka funkcija kote nivoa Z i širine vodenog ogledala B (Slika 5.2):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial t} = B \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad (5.9)$$

to se jednačina (5.8) može alternativno formulisati preko kote nivoa:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{q}{B} = 0. \quad (5.10)$$

Jednačina održanja količine kretanja. Poznato je iz mehanike fluida da je integral materijalnog izvoda količine kretanja po kontrolnoj zapremini jednak zbiru površinskih i zapreminskih sila koje deluju na fluid u toj zapremini [63]:

$$\int_{\forall} \frac{D}{Dt} (\rho \vec{u} d\forall) \equiv \int_{\forall} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} d\forall + \int_{\forall} \vec{u} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial x} d\forall = \sum \vec{F}_A + \sum \vec{F}_{\forall}. \quad (5.11)$$

Ova jednačina predstavlja integralni oblik dinamičke jednačine za konačnu zapreminu \forall . Za pravac kretanja (x) se može napisati:

$$\int_{\forall} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} d\forall = - \int_A \rho \cdot u \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} dA + \sum F_{Ax} + \int_{\forall} \rho \cdot g_x d\forall, \quad (5.12)$$

gde je A – površina koja ograničava posmatranu zapreminu, F_{Ax} – komponenta površinske sile u pravcu toka, a g_x – intenzitet gravitacionog ubrzanja u pravcu toka.

Leva strana jednačine (5.12) predstavlja priraštaj količine kretanja u kontrolnoj zapremini u jedinici vremena. Prvi član na desnoj strani predstavlja razliku ulazne i izlazne količine kretanja kroz kontrolnu površinu u jedinici vremena. Drugi član predstavlja zbir površinskih sila u pravcu toka, a treći, komponentu težine fluida – jedinu zapreminsku silu.

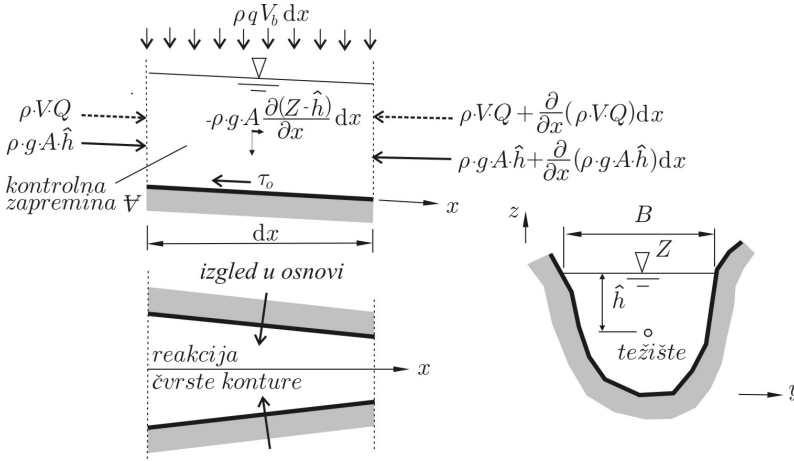
Sada će se zakon održanja količine kretanja (5.12) formulisati za elementarnu kontrolnu zapreminu koja je prikazana na Slici 5.3, pri čemu će se smatrati da je gustina vode konstantna. Priraštaj količine kretanja u kontrolnoj zapremini u jedinici vremena može se u slučaju linijskog toka definisati na ovaj način:

$$\int_{\forall} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} d\forall \Rightarrow \rho \int_x^{x+dx} \frac{\partial V}{\partial t} \cdot A \cdot dx = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx, \quad (5.13)$$

a razlika ulazne i izlazne količine kretanja u jedinici vremena:

$$\begin{aligned} \int_A \rho \cdot u \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} dA &\equiv \int_{\forall} \vec{u} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial x} d\forall \Rightarrow \rho \int_x^{x+dx} V \frac{\partial V}{\partial x} A dx - \rho \cdot q \cdot V_b \cdot dx = \\ &= \rho \frac{\partial(QV)}{\partial x} dx - \rho \cdot q \cdot V_b \cdot dx, \end{aligned} \quad (5.14)$$

gde je V_b - komponenta brzine bočnog dotoka u pravcu x .



Slika 5.3: Kontrolna zapremina u izvodjenju dinamičke jednačine.

Površinske sile se sastoje od:

(i) sila hidrostatičkog pritiska u poprečnim presecima:

$$\rho \cdot g \cdot A \cdot \hat{h} - \left[\rho \cdot g \cdot A \cdot \hat{h} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot g \cdot A \cdot \hat{h}) dx \right],$$

gde je \hat{h} - odstojanje težišta površine A od nivoa slobodne površine (Slika 5.3).

(ii) sile kojom čvrsta kontura deluje na fluid unutar kontrolne zapremine, a koja predstavlja reakciju u pravcu toka na silu hidrostatičkog pritiska na čvrstu konturu (uticaj neprizmatičnosti korita): $\rho \cdot g \cdot \hat{h} \cdot (\partial A / \partial x) dx$;

(iii) sile trenja: $\rho \cdot g \cdot A \cdot I_e \cdot dx$.

Zapreminska sila je komponenta težine fluida u pravcu toka: $-\rho g A [\partial(Z - \hat{h}) / \partial x] dx$; (negativan znak ukazuje na to da kote nivoa, kao i težišta preseka, opadaju u pozitivnom smeru x ose).

Zbir svih površinskih i zapreminskih sila je: $-\rho \cdot g \cdot A \cdot (\partial Z / \partial x + I_e) dx$.

Imajući u vidu sve navedene izraze, konačno se može napisati jednačina održanja količine kretanja u diferencijalnom obliku:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + g \cdot A \cdot I_e = 0. \quad (5.15)$$

Nagib linije energije usled trenja obično se definiše Manningovom formulom:

$$I_e = \frac{n^2 \cdot Q |Q|}{A^2 R^{4/3}} = \frac{Q |Q|}{K^2}, \quad (5.16)$$

u kojoj se stavljanjem znaka apsolutne vrednosti uzima u obzir smer tečenja.

Sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina (5.10) i (5.15) je hiperboličkog tipa i mora se, uz odgovarajuće početne i granične uslove, numerički rešavati po zavisno promenljivim Q i Z . Na osnovu vrednosti ovih promenljivih, računaju se vrednosti ostalih hidrauličkih veličina: A , B , R , V itd.

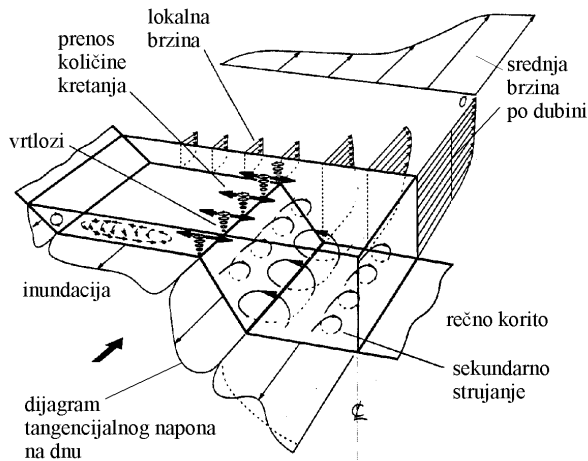
* * *

U periodu prolaska poplavnih talasa, kada protok premaši propusnu moć glavnog (osnovnog) korita, voda se izliva i plavi priobalne površine – *inundacije* (Slika 5.4). Korito za prijem velikih voda, koje obuhvata glavno korito i inundacije, zove se *složeno (major) korito*.



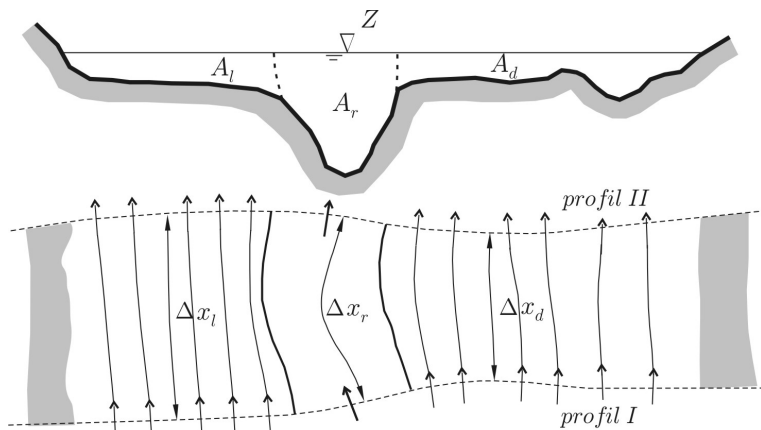
Slika 5.4: Tečenje u inundaciji reke Tamiš kod Sečnja (1999).

Tečenje u složenom koritu je prostorno *trodimenziono*, sa intenzivnim prenosom količine kretanja iz glavnog korita u inundacije i obrnuto, posredstvom sistema vrtloža koji su shematski prikazani na Slici 5.5.



Slika 5.5: Konceptualni model strukture toka na granici između glavnog korita i inundacija; ta struktura najviše zavisi od odnosa dubina u inundaciji i glavnom koritu (tipične vrednosti su oko 0,2) [7].

Ovako složena struktura tečenja se ne može opisati jednačinama linijskog toka. Međutim, za inženjersku praksu to i nije neophodno, jer su od interesa globalni pokazatelji transformacije poplavnog talasa duž vodotoka (najveće kote nivoa i odgovarajući protoci, brzina prostiranja talasa, hidrogrami i nivogrami u pojedinim profilima). Zato je prihvatljiv pristup po kome se pretpostavlja linijsko tečenje po pojedinim delovima složenog korita, kao što je prikazano na Slici 5.6.



Slika 5.6: Podela složenog korita za veliku vodu na glavno korito i inundacije.

Tako zamišljeno tečenje u složenom koritu može se opisati proširenim San Venanovim jednačinama:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta \cdot Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + I_e \right) = 0, \quad (5.18)$$

gde je β - Businesskov korekcionni koeficijent količine kretanja. (U ovim jednačinama je izostavljen bočni dotok.)

Imajući u vidu da se otpori u inundacijama bitno razlikuju od onih u glavnom koritu, poprečni presek se deli na više hidraulički homogenih delova. Najgrublja podela podrazumeva tri dela: glavno korito i dve inundacije (Slika 5.6).

Površina složenog preseka se dobija sabiranjem parcijalnih površina:

$$A = A_l + A_r + A_d, \quad (5.19)$$

gde indeks „r” označava osnovno korito, a indeksi „l” i „d” - „levu”, odnosno „desnu” inundaciju. Shodno tome, modul protoka složenog korita K u jednačini

(5.16) se sastoji od tri komponente:

$$K = K_r + K_l + K_d \quad (5.20)$$

$$K_r = A_r R_r^{2/3} / n_r \quad (5.21)$$

$$K_l = A_l R_l^{2/3} / n_l \quad (5.22)$$

$$K_d = A_d R_d^{2/3} / n_d. \quad (5.23)$$

Podela poprečnog preseka na više delova shodno rapavosti, predstavlja osnovno obeležje proračuna tečenja vode u složenom, prirodnom koritu⁴.

Korekcionni koeficijent količine kretanja se definiše prema izrazu (2.68), koji se u datom slučaju može napisati na sledeći način:

$$\beta = \frac{K_l^2/A_l + K_r^2/A_r + K_d^2/A_d}{K^2/A}. \quad (5.24)$$

Zbog različite dužine toka po glavnom koritu (talvegu) i po inundacijama, postavlja se problem definisanja računskog odstojanja između profila. Ovo odstojanje, označeno Δx , mora biti tako definisano da se obezbedi očuvanje zapremine. To se može postići na dva načina.

Prvi način se zasniva na ponderisanju dužina prema protoku [159]:

$$\Delta x = \frac{\Delta x_l \cdot \bar{Q}_l + \Delta x_r \cdot \bar{Q}_r + \Delta x_d \cdot \bar{Q}_d}{\bar{Q}_l + \bar{Q}_r + \bar{Q}_d}, \quad (5.25)$$

gde su Δx_l , Δx_d , Δx_r - odstojanja po inundacijama i po glavnom koritu (Slika 5.6), a \bar{Q}_l , \bar{Q}_r i \bar{Q}_d - srednji protoci između susednih profila po inundacijama i po glavnom koritu, na primer, $\bar{Q}_r = (Q_{rI} + Q_{rII})/2$.

Drugi način je da se uvede faktor sinusoidnosti (odnos dužine toka po osnovnom koritu i po inundacijama) i da se vrednost tog faktora ponderiše u funkciji kote nivoa, odnosno površine poprečnog preseka [52]:

$$S_M = \frac{\sum_{j=2}^M \Delta A_{rj} \cdot S_j + \Delta A_{lj} + \Delta A_{dj}}{A_{rj} + A_{lj} + A_{dj}}, \quad (5.26)$$

gde je $\Delta A = A_{j+1} - A_j$, a S_j se odnosi na deo korita između nivoa „j” i „j + 1”.

⁴U narednom poglavlju će se videti da se i glavno korito i inundacije mogu dalje izdeliti na proizvoljan broj delova - „segmenta”.

Faktorom S_M se množe veličine koje figurišu u izvodima po vremenu u jednačinama (5.17) i (5.18), a hidraulički modul glavnog korita se koriguje na sledeći način:

$$K_r = A_r R_r^{2/3} / (n_r \cdot S_M^{1/2}). \quad (5.27)$$

5.3 Konturni uslovi

Za rešavanje jednačina (5.8)-(5.15), odnosno (5.17)-(5.18), neophodno je zadati određene konturne uslove, koji se sastoje od početnih i graničnih uslova.

Početni uslovi. Početnim uslovima se definišu vrednosti zavisno promenljivih duž toka u početnom trenutku (t_o), odnosno zadaju se vrednosti funkcija $Q(x, t_o)$ i $Z(x, t_o)$, u računskim profilima na unapred zadatim odstojanjima x duž toka.

Postoje dve vrste graničnih uslova – spoljašnji i unutrašnji.

Spoljašnji granični uslovi se definišu u profilima na uzvodnom i nizvodnom kraju računске oblasti. Na uzvodnom kraju ($x = x_1$) se kao granični uslov može zadati hidrogram: $Q(x_1, t) = Q_1(t)$, ili nivogram: $Z(x_1, t) = Z_1(t)$, a na nizvodnom kraju ($x = x_N$), hidrogram: $Q(x_N, t) = Q_N(t)$, nivogram: $Z(x_N, t) = Z_N(t)$ ili kriva protoka: $Z(x_N, Q) = Z_N(Q)$.

Broj spoljašnjih uslova zavisi od režima tečenja, kao što je dato u Tabeli 5.1.

Tabela 5.1: Broj spoljašnjih graničnih uslova u proračunu linijskih tokova

Miran režim		Buran režim	
ulaz	izlaz	ulaz	izlaz
1	1	2	0

Unutrašnji granični uslovi se zadaju u profilima gde postoji neki „prekid” toka (ušće, brana, bočni preliv itd.). Definišu se pomoću jednačine održanja mase i jednačine održanja energije ustaljenog tečenja – Bernulijeve (Bernoulli) jednačine⁵. Evo dva primera.

(i) *Ušće* (Slika 5.7-(a))

- jednačina kontinuiteta:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2; \quad (5.28)$$

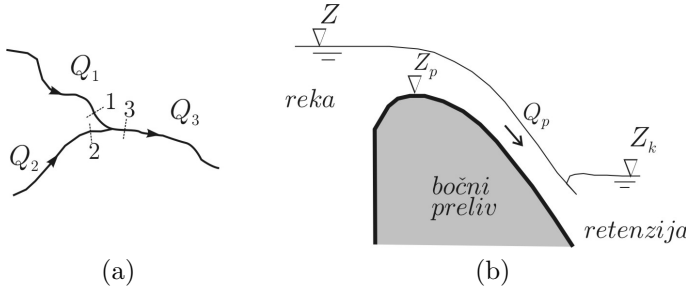
- jednačina energije u kojoj su zanemareni gubici:

$$Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} = Z_3 + \frac{V_3^2}{2g}, \quad (5.29)$$

⁵Videti šesto poglavlje.

odnosno, ako se zanemare i brzinske visine (velike reke):

$$Z_1 = Z_2 = Z_3. \quad (5.30)$$



Slika 5.7: Primeri unutrašnjih graničnih uslova: (a) ušće; (b) bočni preliv.

(ii) *Bočni preliv* (Slika 5.7-(b)); reč je o objektu koji omogućava da se u periodu poplava voda iz reke ispusti u namenski rezervisan akumulacioni prostor u inundaciji koji se zove „retenzija”. Hidraulička veza između osnovnog rečnog korita i reteniže definisana je izrazima za nepotopljeno ili potopljeno prelivanje, u funkciji trenutnih kota nivoa u reci (Z) i reteniži (Z_k), geometrijskih karakteristika bočnog preliva: dužine L_p i kote njegove krune (Z_p), kao i odgovarajućih koeficijenata protoka (C_{Q1} , ili C_{Q2}):

- nepotopljeno prelivanje:

$$\left. \begin{aligned} Q_p &= C_{Q1} \cdot L_p \sqrt{2g} (Z - Z_p)^{3/2} \\ Z_k - Z_p &\leq \frac{2}{3} (Z - Z_p) \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

- potopljeno prelivanje:

$$\left. \begin{aligned} Q_p &= C_{Q2} \cdot L_p \sqrt{2g} (Z_k - Z_p) (Z - Z_k)^{1/2} \\ Z_k - Z_p &> \frac{2}{3} (Z - Z_p) \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Uvodjenje nove nepoznate Z_k zahteva dodatnu jednačinu, a to je jednačina kontinuiteta za retenižu. Ova jednačina se može lako rešiti ako se pretpostavi da je nivo u reteniži u svakom trenutku horizontalan i ako se unapred definiše zavisnost zapremine reteniže od kote nivoa (videti tačku 5.5.4.1).

5.4 Numeričko rešavanje osnovnih jednačina

Numeričkim rešavanjem diferencijalnih jednačina se dolazi do njihovog približnog rešenja. Numeričko rešavanje podrazumeva *diskretizaciju* računске oblasti, tako da

se rešenje traži samo u konačnom broju računskih tačaka (profila) i u konačnom broju vremenskih preseka.

Za rešavanje jednačina neustaljenog tečenja koriste se ove numeričke metode:

- metoda karakteristika;
- metoda konačnih razlika;
- metoda konačnih elemenata.

Ovde će se razmatrati numerički postupci iz prve dve kategorije.

5.4.1 Metoda karakteristika

Metodu karakteristika je, kao opštu metodu za rešavanje diferencijalnih jednačina, formulisao francuski naučnik Monž (Monge) još 1789. godine, a prvi pokušaj njenog korišćenja u analizi otvorenih tokova datira od 1889. godine. Ova metoda je nezaobilazna u računskoj hidraulici, posebno za rešavanje problema neustaljenog tečenja pod pritiskom i tečenja sa slobodnom površinom u prizmatičnim provodnicima [1, 38, 104, 110, 175]. Iako se za prirodne vodotoke radje primenjuju druge metode, metoda karakteristika je korisna za razumevanje talasnog kretanja, kao i za definiciju graničnih uslova u eksplicitnim varijantama metode konačnih razlika.

Za primenu metode karakteristika, poželjno je da se osnovne jednačine formulišu preko brzine i dubine neustaljenog toka u prizmatičnom koritu [38, 104, 110]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I_d - I_e), \quad (5.34)$$

gde je $V(x, t)$ – srednja profilska brzina, $h(x, t)$ – dubina, a $H = A/B$ – srednja (hidraulička) dubina.

Množenjem jednačine (5.33) nekim faktorom χ i sabiranjem sa (5.34), dobija se, nakon grupisanja članova⁶:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t} + (V + \chi \cdot H) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \chi \left[\frac{\partial h}{\partial t} + (V + \frac{g}{\chi}) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = g(I_d - I_e). \quad (5.35)$$

Upoređenjem ove jednačine sa izrazima za totalne izvode zavisno promenljivih:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (5.36)$$

⁶Navedena jednačina predstavlja rezultat *linearne kombinacije* polaznih jednačina u obliku $L = L_1 + \chi L_2$; bilo koje dve realne vrednosti faktora χ daju jednačine po V i h koje odražavaju fizička svojstva originalnih jednačina L_1 i L_2 i mogu ih u potpunosti zameniti.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad (5.37)$$

može se zaključiti da će izrazi u zagradama jednačine (5.35) postati totalni izvodi ako je:

$$V + \chi \cdot H = V + \frac{g}{\chi} = \frac{dx}{dt}, \quad (5.38)$$

odnosno,

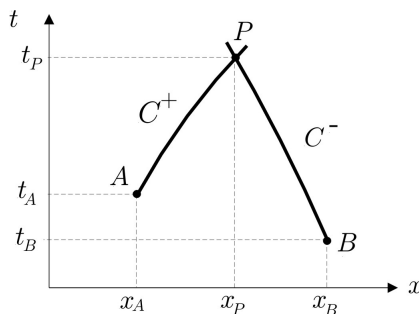
$$\chi_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{H}} = \pm \sqrt{g \frac{B}{A}} = \pm \frac{g}{c}. \quad (5.39)$$

Na taj način se, uvodeći brzinu prostiranja poremećaja c i eliminacijom prostorne promenljive x , sistem parcijalnih jednačina svodi na sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dV}{dt} \pm \frac{g}{c} \cdot \frac{dh}{dt} = g(I_d - I_e) \quad (5.40)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \pm c. \quad (5.41)$$

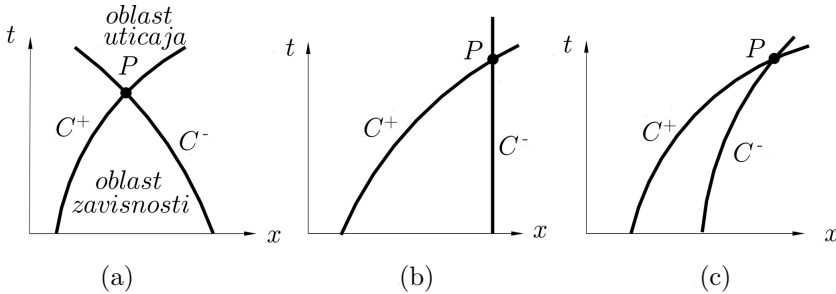
Jednačine (5.40), poznate kao „jednačine kompatibilnosti”, važe samo ako istovremeno važe i jednačine (5.41), čiji grafički prikaz u (x, t) ravni predstavlja *karakteristične krive* ili *karakteristike*, od kojih jedna ima pozitivan, a druga, negativan nagib (Slika 5.8).



Slika 5.8: Pozitivna C^+ i negativna C^- karakteristika u (x, t) ravni.

Treba uočiti da polazni sistem jednačina (5.33)-(5.34) važi za bilo koje vrednosti nezavisno promenljivih x, t , dok transformisane jednačine (5.40) važe isključivo duž karakteristika čiji je nagib definisan izrazima (5.41).

Ranije je definisana apsolutna brzina talasa $V \pm c$. U zavisnosti od odnosa brzina V i c , poremećaj se može prostirati u uzvodnom i nizvodnom smeru u mirnom režimu ($Fr = V/c < 1$), ili samo u nizvodnom smeru u burnom režimu ($Fr = V/c > 1$). U prvom slučaju postoje dve familije karakteristika – pozitivne i negativne, a u drugom slučaju, samo familija pozitivnih karakteristika. U uslovima kritičnog tečenja, nagib jedne od karakteristika je jednak nuli (Slika 5.9).



Slika 5.9: Karakteristike u (a) mirnom, (b) kritičnom i (c) burnom režimu. Poremećaj koji je nastao u trenutku t_P u tački P , prostire se nizvodno i uzvodno, duž pozitivne i negativne karakteristike, a oblast između ovih putanja se zove „oblast uticaja”; s druge strane, na stanje u tački P pre trenutka t_P , utiču uslovi iz oblasti koja se zove „oblast zavisnosti”.

U matematičkom smislu se karakteristike mogu shvatiti kao putanje diskontinuiteta funkcija izvoda (prvog i višeg reda) zavisno promenljivih i fizičkih parametara koji figurišu u osnovnim jednačinama, ali ne i diskontinuiteta funkcija samih promenljivih [1, 38]. Na primer, diskontinuitet izvoda $\partial h / \partial x$ prostire se duž karakteristika brzinom poremećaja $c = \sqrt{gh}$, ali se diskontinuitet funkcije $h(x, t)$, koji predstavlja strmo čelo talasa, kreće brzinom koja se razlikuje od brzine c .

Razmotriće se sada rešavanje problema linijskog tečenja. Ako su u tačkama A i B na Slici 5.8 poznate veličine: (x_A, t_A, V_A, c_A) i (x_B, t_B, V_B, c_B) , nepoznate u tački P su: x_P, t_P, V_P i c_P .

Integracijom (5.41) dobija se:

$$\int_{x_A}^{x_P} dx = \int_{t_A}^{t_P} (V + c) dt \quad (5.42)$$

$$\int_{x_B}^{x_P} dx = \int_{t_B}^{t_P} (V - c) dt, \quad (5.43)$$

a integracijom (5.40) duž karakteristika AP i BP:

$$\int_{x_A}^{x_P} dV + \int_{x_A}^{x_P} \frac{g}{c} dh = g \int_{t_A}^{t_P} (I_d - I_e) dt \quad (5.44)$$

$$\int_{x_B}^{x_P} dV - \int_{x_B}^{x_P} \frac{g}{c} dh = g \int_{t_A}^{t_P} (I_d - I_e) dt. \quad (5.45)$$

Integracija se može eksplicitno obaviti ako se u jednačinama (5.42) – (5.45) pretpostavi da vrednosti V i h , poznate u tački A , ostaju nepromenjene duž karakteristike AP , a vrednosti poznate u tački B , duž karakteristike BP . Reč je o aproksimaciji prvog reda, ili približnoj integraciji pravougaonim pravilom. U tom slučaju je:

$$x_P - x_A = (V_A + c_A)(t_P - t_A) \quad (5.46)$$

$$x_P - x_B = (V_B - c_B)(t_P - t_B), \quad (5.47)$$

gde su c_A i c_B poznate vrednosti.

Rezultat integracije jednačina kompatibilnosti je:

$$V_P - V_A + \left(\frac{g}{c}\right)_A (h_P - h_A) = g(I_d - I_e)_A (t_P - t_A) \quad (5.48)$$

$$V_P - V_B - \left(\frac{g}{c}\right)_B (h_P - h_B) = g(I_d - I_e)_B (t_P - t_B), \quad (5.49)$$

ili u kompaktnom obliku:

$$V_P = C_1 - C_A \cdot h_P \quad (5.50)$$

$$V_P = C_2 + C_B \cdot h_P, \quad (5.51)$$

gde je (grupisanjem poznatih vrednosti):

$$C_1 = V_A + C_A \cdot h_A + g(I_d - I_e)_A (t_P - t_A) \quad (5.52)$$

$$C_2 = V_B - C_B \cdot h_B + g(I_d - I_e)_B (t_P - t_B) \quad (5.53)$$

$$C_A = \left(\frac{g}{c}\right)_A \quad (5.54)$$

$$C_B = \left(\frac{g}{c}\right)_B. \quad (5.55)$$

Konačno rešenje u tački P se dobija rešavanjem sistema algebarskih jednačina (5.46), (5.47), (5.50) i (5.51).

Izloženi postupak daje rešenje u mreži nepravilno raspoređenih tačaka u (x, t) ravni. U praksi se radje koristi alternativni postupak sa unapred definisanim položajem računskih tačaka, koje formiraju pravougaonu računsku mrežu. Detalji ovog pristupa mogu se naći u literaturi [38, 175].

Ako je korito pravougaonog poprečnog preseka, a širina B konstantna, moguće je sledeće uprošćenje:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{gA}{B} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{c} \cdot \frac{dh}{dt}, \quad (5.56)$$

tako da se jednačine kompatibilnosti svode na oblik:

$$\frac{d}{dt}(V \pm 2c) = S, \quad (5.57)$$

gde je izvorni član $S = g(I_d - I_e)$.

Ako je kanal horizontalan ($S = 0$) i ako se zanemari trenje, sledi:

$$V \pm 2c = J^\pm, \quad (5.58)$$

gde veličine J^+ i J^- nose naziv „Rimanove⁷ invarijante”. Vrednost J^+ , odnosno J^- , konstantna je duž karakteristike. (Vrednosti J^\pm se međjutim menjaju po karakteristikama.) Rimanove invarijante se ne mogu izvesti za neprizmatično korito zbog dodatnih članova koji se javljaju u S [38], što je osnovni razlog što se metoda karakteristika retko koristi u proračunima neustaljenog režima prirodnih vodotoka.

5.4.2 Metoda konačnih razlika

Metoda konačnih razlika (MKR) je zasnovana na *diskretizaciji* neprekidne oblasti (x, t) , tako da se vrednosti zavisno promenljivih računaju po vremenu u nizu diskretnih tačaka (profila). Aproksimacijom izvoda konačnim razlikama, parcijalne diferencijalne jednačine se svode na diferencne - algebarske jednačine, a problem diferencijalnog računa postaje algebarski problem.

Zamena izvoda konačnim razlikama se može obaviti na razne načine, od kojih svaki predstavlja jednu „numeričku shemu”. Kvalitet sheme zavisi od toga u kojoj meri približno (numeričko) rešenje aproksimira tačno (analitičko) rešenje diferencijalne jednačine.

5.4.2.1 Aproksimacija izvoda konačnim razlikama

Neka je $u(x)$ funkcija nezavisno promenljive x i neka je vrednost ove funkcije $u(x_0)$ poznata.

⁷Nemački naučnik Riman (Riemann) je 1860. godine koristio metodu karakteristika za izučavanje prostiranja ravanskih zvučnih talasa, 29 godina pre nego što je ova metoda našla primenu u hidraulici otvorenih tokova.

Razvojem u Tajlorov (Taylor) red u okolini tačke x_0 , može se napisati:

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \frac{du(x_0)}{dx} \Delta x + \frac{d^2u(x_0)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + O(\Delta x)^3, \quad (5.59)$$

gde ostatak $O(\Delta x)^3$ sadrži sve članove trećeg i višeg reda po Δx .

Na isti način se može razviti funkcija $u(x_0 - \Delta x)$:

$$u(x_0 - \Delta x) = u(x_0) - \frac{du(x_0)}{dx} \Delta x + \frac{d^2u(x_0)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - O(\Delta x)^3. \quad (5.60)$$

Ako se u izrazima (5.59) i (5.60) zadrži samo prvi izvod, na primer:

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \frac{du(x_0)}{dx} \Delta x + O(\Delta x)^2, \quad (5.61)$$

može se lako pokazati da je:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} - O(\Delta x), \quad (5.62)$$

odnosno,

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_0} = \frac{u(x_0) - u(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (5.63)$$

Zanemarujući članove $O(\Delta x)$ dobija se diferencna aproksimacija:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \quad (5.64)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{u(x_0) - u(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (5.65)$$

Izrazi (5.64) i (5.65) pokazuju kako se izvodi mogu aproksimirati *konačnim razlikama* (priraštajima). Izraz (5.64) definiše konačnu razliku *unapred*, a izraz (5.65), konačnu razliku *unazad*. U oba slučaja su izostavljeni članovi prvog reda po Δx (na šta ukazuje oznaka $O(\Delta x)$), pa se zato za aproksimacije razlikama unapred i unazad kaže da su tačnosti *prvog reda*.

Ako se jednačina (5.60) oduzme od jednačine (5.59) dobija se:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2, \quad (5.66)$$

a zanemarenjem poslednjeg člana:

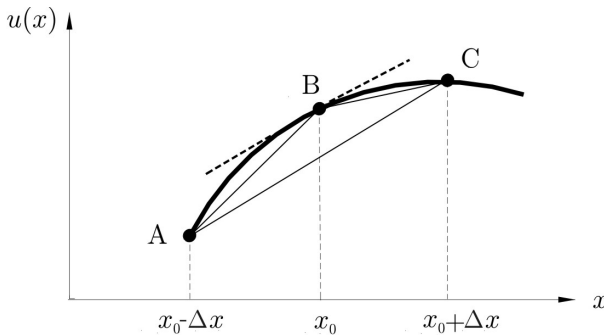
$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (5.67)$$

Ova aproksimacija koristi *centralnu konačnu razliku* sa ostatkom reda $(\Delta x)^2$, tako da je tačnost *drugog reda*.

U opštem slučaju je red tačnosti aproksimacije određen najnižim stepenom faktora $(\Delta x)^m$ izostavljenih članova Tajlorovog reda.

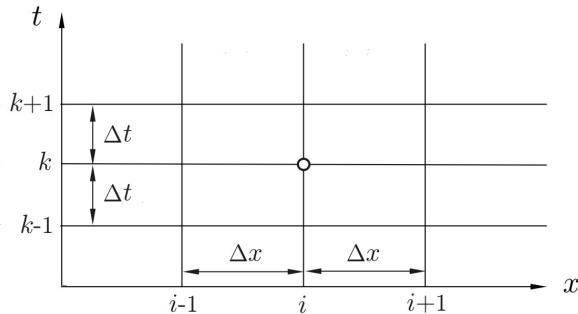
Greška koja nastaje aproksimacijom izvoda konačnom razlikom predstavlja razliku izvoda i njegove diferencne aproksimacije. Oznake $O(\Delta x)$, odnosno $O(\Delta x)^2$, ukazuju na red veličine greške, ali ništa ne govore o njenoj vrednosti. Ovo je dovoljno za procenu kvaliteta aproksimacije u relativnom smislu; na primer, može se očekivati da je aproksimacija sa $O(\Delta x)^2$ tačnija od one sa $O(\Delta x)$, ali u oba slučaja apsolutna vrednost greške zavisi od veličine Δx i smanjuje se sa smanjenjem ovog priraštaja.

Na Slici 5.10 data je geometrijska interpretacija konačnih razlika prvog i drugog reda tačnosti.



Slika 5.10: Aproksimacija konačnim razlikama; razlikom unapred se nagib tangente u tački B zamenjuje nagibom tetive BC, a razlikom unazad, nagibom tetive AB; centralnom konačnom razlikom se ovaj nagib definiše nagibom tetive AC, što predstavlja tačnije rešenje od predhodna dva.

Razmotriće se sada aproksimacija *parcijalnih* izvoda konačnim razlikama. Neka je $u(x, t)$ funkcija dve nezavisno promenljive x i t . Ravan (x, t) se može podeliti mrežom konačnih razlika, kao što je prikazano na Slici 5.11. Dužina intervala Δx i Δt određuje gustinu računске mreže, pri čemu ova može biti *uniformna*, ako su intervali konstantni, ili *neuniformna*, ako se veličina intervala menja u određenim delovima računске oblasti, u cilju postizanja veće tačnosti.



Slika 5.11: Mreža konačnih razlika; intervali Δx i Δt mogu biti konstantni ili promenljivi; simbol „ i ” označava položaj računskog čvora (profila) na odstojanju $x = i \cdot \Delta x$, a simboli „ $i+1$ ” i „ $i-1$ ”, čvorove (profile) na odstojanjima $x = (i+1)\Delta x$ i $x = (i-1)\Delta x$; simbol „ k ” označava trenutak $t = k \cdot \Delta t$, a simboli $k+1$ i $k-1$, trenutke $t = (k+1)\Delta t$ i $t = (k-1)\Delta t$; prostorna i vremenska pripadnost pojedinih promenljivih definiše se pomoću indeksa „ i ” i „ k ”; na primer, Q_i^k označava protok u trenutku $t = k \cdot \Delta t$, u profilu koji se nalazi na odstojanju $x = i \cdot \Delta x$.

Vrednosti zavisno promenljivih su poznate na vremenskom nivou „ k ” (u trenutku $t = k \cdot \Delta t$) iz prethodnog računskog koraka, ili iz zadatih početnih uslova ($k=0$, $t=0$), a proračunom se određuju za vremenski nivou „ $k+1$ ” (koji odgovara trenutku $t = (k+1)\Delta t$).

Vrednosti zavisno promenljivih ili njihovih funkcionalnih zavisnosti koje se zadaju u graničnim profilima računске oblasti čine spoljašnje granične uslove, dok se nagle geometrijske promene unutar razmatrane oblasti obuhvataju pomoću raznih tipova unutrašnjih graničnih uslova.

Brojne su mogućnosti aproksimacije parcijalnih izvoda. Ako se za aproksimaciju prostornih izvoda koriste vrednosti zavisno promenljivih samo sa „poznatih” vremenskih nivoa (k , $k-1$), za računsku shemu se kaže da je *eksplicitna*, a ako se koriste i vrednosti sa „nepoznatog” nivoa ($k+1$), za shemu se kaže da je *implicitna*. Tipične aproksimacije izvoda $\partial u / \partial x$ u tački (i, k) date su u nastavku.

EksPLICITNE konačne razlike:

$$- \text{ unazad : } \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta x}; \quad (5.68)$$

$$- \text{ unapred : } \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{\Delta x}; \quad (5.69)$$

$$- \text{ centralne : } \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x}. \quad (5.70)$$

Implicitne konačne razlike:

$$- \text{ unazad : } \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{\Delta x}; \quad (5.71)$$

$$- \text{ unapred : } \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1}}{\Delta x}; \quad (5.72)$$

$$- \text{ centralne : } \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x}. \quad (5.73)$$

Aproksimacija vremenskih i prostornih izvoda konačnim razlikama rezultira algebarskom, „diskretizacionom” jednačinom. Primena konačnih razlika se ne sme obavljati formalistički, na proizvoljan način; neadekvatna diskretizacija vremenskog izvoda može dovesti do *numeričke nestabilnosti*, a neadekvatna diskretizacija prostornih izvoda, do rešenja čija je tačnost umanjena parazitskim efektima numeričke prirode, o čemu će u nastavku biti reči.

5.4.2.2 Konzistencija, konvergencija, stabilnost

Primenom MKR, kontinualno strujno polje se diskretizuje konačnim nizom tačaka, a diferencijalni operatori zamenjuju diferencnim operatorima. Parcijalna diferencijalna jednačina (PDJ) se na taj način transformiše u algebarsku jednačinu konačnih razlika (JKR), sa greškom (TE) čiji je red veličine definisan u opštem slučaju kao $O[(\Delta t)^{m_1}, (\Delta x)^{m_2}]$.

Konzistencija. Numerička shema je konzistentna ako se gubi razlika između diferencijalnog i odgovarajućeg diferencnog operatora, kada konačne razlike Δx i Δt teže nuli:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} (\text{PDJ} - \text{JKR}) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} TE = 0. \quad (5.74)$$

To znači da se kod konzistentnih shema približno (numeričko) rešenje približava tačnom (analitičkom) rešenju sa smanjenjem računskog koraka, odnosno povećanjem broja tačaka mreže. Brzina ovog približavanja je određena redom vodećeg člana u ostatku Tajlorovog reda. Konzistencija sheme je preduslov za stabilnost i konvergenciju numeričkog rešenja.

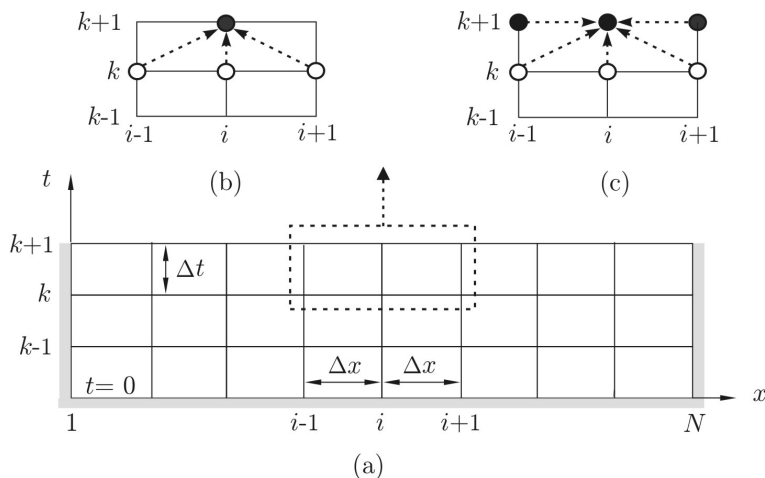
Konvergencija. Ako je računaska shema konzistentna i stabilna, približno rešenje će *konvergirati* tačnom rešenju pri istim početnim i graničnim uslovima, sa smanjenjem računskog koraka (Laksova (Lax) teorema [6]).

Stabilnost. Za računsku shemu se kaže da je stabilna ako greška – razlika između tačnog i približnog rešenja, ima ograničenu vrednost tokom proračuna. Kod nestabilnih shema greška *neograničeno raste*, tako da su rezultati neupotrebljivi ⁸.

5.4.2.3 Principi formiranja diferencnih jednačina

Rečeno je da MKR počiva na aproksimaciji izvoda konačnim razlikama, tako da se osnovni sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina svede na sistem diferencnih, algebarskih jednačina. U zavisnosti od toga koji se operator konačnih razlika (5.68)-(5.73) primenjuje, zavisi da li će računaska shema biti „eksplicitna” ili „implicitna”.

EksPLICITNE sheme su karakteristične po tome što se nepoznate Z_i^{k+1} i Q_i^{k+1} računaju direktno iz diferencnih (algebarskih) jednačina održanja mase i količine kretanja, isključivo na osnovu poznatih (već sračunatih, ili početnim uslovom zadatih) vrednosti u tačkama na prethodnom vremenskom nivou (k , ili još eventualno $k - 1$, Slika 5.12-(b)). Pri tome se proračun odvija čvor po čvor (profil po profil).



Slika 5.12: (a) Računska mreža i shematski prikaz računskog postupka kod (b) eksplicitnih i (c) implicitnih varijanti MKR; pune tačke su one u kojima se računaju vrednosti nepoznatih (Q , Z).

Implicitne metode su zasnovane na principu da se zamena parcijalnih izvoda konačnim razlikama i formulacija diferencnih jednačina, obavlja tako da se, pored poznatih vrednosti sa prethodnih vremenskih nivoea, koriste i nepoznate iz okolnih tačaka na istom vremenskom nivou, $k + 1$ (Slika 5.12-(c)).

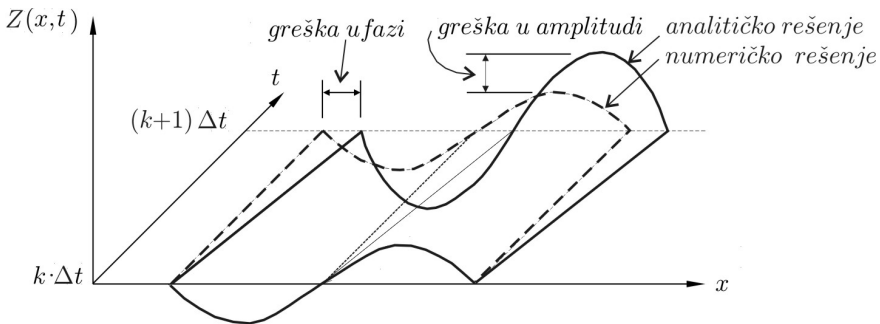
⁸Za ispitivanje numeričke stabilnosti računskih shema koristi se tzv. „spektralna” metoda, bazirana na razvoju funkcije greške u Furijeov (Fourier) red. Ova metoda omogućava da se unapred utvrde uslovi pod kojima će računaska shema biti stabilna [6, 78, 110, 138].

Promenljive Q_i^{k+1} i Z_i^{k+1} se ne mogu direktno sračunati kao kod eksplicitnih shema. Međutim, ako se uzmu u obzir svi čvorovi na vremenskom nivou $k + 1$, uključujući i čvorove na granicama sa zadatim vrednostima, moguće je formirati *sistem algebarskih jednačina*, čijim se rešavanjem istovremeno dobijaju nepoznate vrednosti u svim čvorovima, u trenutku $t = (k + 1)\Delta t$.

Kako je dobijeni sistem algebarskih jednačina *nelinearan*, primena implicitnih računskih shema iziskuje iterativno rešavanje, pa stoga i veći utrošak računarskih resursa nego u slučaju eksplicitnih shema. Međutim, to se kompenzuje korišćenjem dužih računskih koraka Δt , o čemu će još biti reči.

Kvalitet računskih shema. Pri izboru računске sheme, mora se voditi računa o njenoj stabilnosti, tačnosti i univerzalnosti. Stabilnost podrazumeva da greška aproksimacije izvoda konačnim razlikama ne sme neograničeno da raste tokom proračuna.

Tačnost sheme podrazumeva da rezultati numeričke simulacije moraju biti fizički realni sa stanovišta oblika talasa, brzine njegovog prostiranja i stepena usputnog ublaženja. Greške u fazi i amplitudi smatraju se „parazitskim” efektima numeričkog modeliranja (Slika 5.13). Numerički izazvano smanjenje vrha talasa naziva se *numerička disipacija*, promena oblika talasa (uključujući parazitske oscilacije), *numerička disperzija*, a kombinovani efekti numeričke disipacije i disperzije, *numerička difuzija* [1, 6, 38, 110].



Slika 5.13: Greška numeričkog rešenja.

Univerzalnost računске sheme podrazumeva da ova mora biti dovoljno opšta da se različite vrste tokova mogu simulirati prostom izmenom početnih i graničnih uslova.

5.4.2.4 Eksplicitna shema Laks-Vendrof

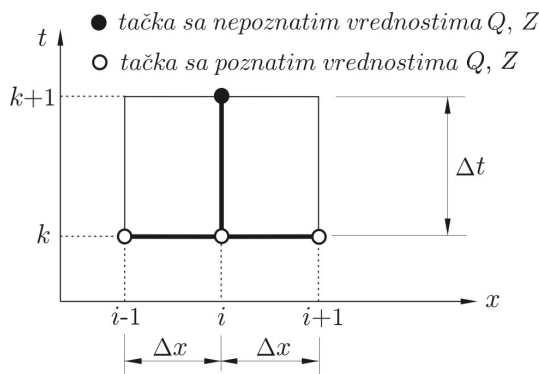
Nagli razvoj računarske tehnologije omogućio je proveru brojnih eksplicitnih i implicitnih postupaka u hidrotehničkoj praksi. Jedna od eksplicitnih shema koja je izdržala test vremena je shema Laks-Vendrof (Lax-Wendroff, 1960) [38, 110]. Dobro su se pokazale i njoj srodne računске sheme.

Principi diskretizacije. „Računski molekul” ove sheme prikazan je na Slici 5.14. Izvodi po vremenu i prostoru se definišu na sledeći način [110]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left\{ f_i^{k+1} - \left[\theta \cdot f_i^k + (1 - \theta) \frac{f_{i+1}^k + f_{i-1}^k}{2} \right] \right\} \quad (0 < \theta < 1) \quad (5.75)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1}^k - f_{i-1}^k}{2 \Delta x}, \quad (5.76)$$

gde je opštom oznakom „ f ” obuhvaćena bilo koja zavisno promenljiva.



Slika 5.14: Računska shema Laks-Vendrof.

Vrednost težinskog koeficijenta θ se usvaja kalibracijom računskog modela. Za vrednost $\theta = 0$, shema daje netačna, „razvučena” rešenja (Laksova „difuzivna” shema), a za $\theta = 1$, shema postaje nestabilna. Prostorni izvod se, kao što pokazuje izraz (5.76), aproksimira centralnom razlikom, što znači da je ova shema u prostoru drugog reda tačnosti.

Početni uslovi. Proračun počinje na osnovu definisanog početnog stanja, tako što su u svim računskim čvorovima (profilima) zadate vrednosti $Z(x, t_o)$ i $Q(x, t_o)$, gde je t_o početni trenutak.

Granični uslovi. Na uzvodnoj granici se rešenje dobija tako što je jedna zavisno promenljiva definisana zadatim uzvodnim graničnim uslovom (recimo, protok je definisan ulaznim hidrogramom), dok se druga promenljiva računa iz jednačine negativne karakteristike. Na nizvodnoj granici se koristi zadati nizvodni granični uslov (recimo, kriva protoka, ili nivogram) i jednačina pozitivne karakteristike. Ovim je opisan slučaj mirnog režima tečenja, sa po jednim uslovom na svakoj granici (Tabela 5.1). Korišćenje jednačina karakteristika ima za cilj da se greška uneta graničnim uslovom ne prenese unutar računске obalsti.

Uslov stabilnosti. Računski korak po vremenu je kod eksplicitnih shema, pa prema tome i sheme Laks-Vendrof, ograničen uslovom stabilnosti [38, 110]:

$$Cr = \frac{(V \pm c)_{\max}}{\Delta x / \Delta t} < 1, \quad (5.77)$$

gde je Cr - Kurantov (Courant) broj, koji predstavlja odnos stvarne i računске brzine prostiranja talasa. Na osnovu (5.77) dobija se, za unapred usvojenu dužinu prostornog koraka Δx , granična vrednost vremenskog koraka koja obezbeđuje stabilno rešenje:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{(V \pm c)_{\max}}. \quad (5.78)$$

Izraz (5.78) je poznat u literaturi kao „Kurant-Fridrih-Levijev uslov” (Courant-Friedrichs-Levy), ili kraće „Kurantov uslov” [1, 38, 110]. (Oznaka „max” ukazuje na najveću vrednost apsolutne talasne brzine, sračunate u profilima.)

■ **Primer 5.1.** Napisati algebarske jednačine koje omogućavaju da se, primenom računске sheme Laks-Vendrof, odredi kota nivoa i protok u „i” - tom poprečnom profilu, u trenutku $t = (k + 1) \Delta t$.

Rešenje. Ako se u osnovnim jednačinama (5.8) i (5.15) zanemari bočni dotok, a izvodi zamene konačnim razlikama prema izrazima (5.75) i (5.76), dolazi se do algebarskih jednačina u obliku:

$$Z_i^{k+1} = \theta Z_i^k + (1 - \theta) \frac{Z_{i+1}^k + Z_{i-1}^k}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{Q_{i+1}^k - Q_{i-1}^k}{B_i^k} \quad (5.79)$$

$$Q_i^{k+1} = \theta Q_i^k + (1 - \theta) \frac{Q_{i+1}^k + Q_{i-1}^k}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1}^k - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i-1}^k \right] + g \cdot A_i^k (Z_{i+1}^k - Z_{i-1}^k) + g \cdot A_i^k \cdot \Delta x \frac{Q_i^k |Q_i^k|}{(K_i^k)^2} \right\}. \quad (5.80)$$

Izloženi principi diskretizacije se mogu primeniti i ako razmak između profila nije uniforman ($\Delta x \neq \text{const.}$), s tim što se dobijaju nešto glomazniji izrazi.

5.4.2.5 Implicitna shema Prajsmana

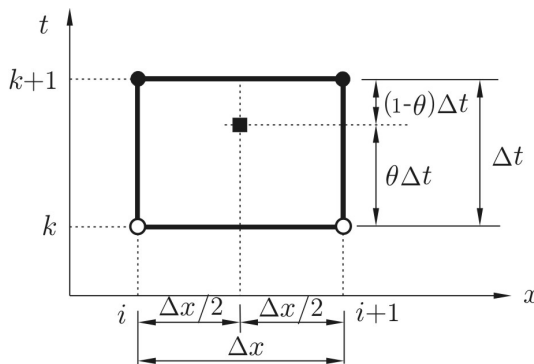
Prajsmanova (Preissmann, 1961) shema, poznata i kao „shema 4 tačke” [38, 110], danas je standardna metoda za proračun prostiranja poplavnih talasa u prirodnim vodotocima, jer je teorijski bezuslovno stabilna i omogućava lako i precizno obuhvatanje graničnih uslova.

Principi diskretizacije. Parcijalni izvodi se aproksimiraju konačnim razlikama prema shemi koja obuhvata četiri tačke, kao što je prikazano na Slici 5.15:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{f_i^{k+1} + f_{i+1}^{k+1}}{2} - \frac{f_i^k + f_{i+1}^k}{2} \right) \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \theta \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_i^{k+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x}, \quad (5.82)$$

gde oznaka „ f ” predstavlja bilo koju zavisno promenljivu.



Slika 5.15: Praismanova računaska shema.

Veličine koje nisu pod izvodima (na primer I_e), aproksimiraju se na ovaj način:

$$f(x, t) \approx \theta \left(\frac{f_i^{k+1} + f_{i+1}^{k+1}}{2} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{f_i^k + f_{i+1}^k}{2} \right). \quad (5.83)$$

Vrednosti težinskog faktora se kreću u granicama $0,5 < \theta < 1$. Iskustveno je ustanovljeno da vrednosti $\theta = 0,6 \div 0,7$ obično daju rezultate sa najnižim stepenom numeričke difuzije.

Primenom izraza (5.81)-(5.83), osnovne jednačine se transformišu u sistem algebarskih (diferencnih) jednačina, čiji je opšti oblik:

$$a_1 Q_i^{k+1} + a_2 Z_i^{k+1} + a_3 Q_{i+1}^{k+1} + a_4 Z_{i+1}^{k+1} = \underbrace{d_1 Q_i^k + d_2 Z_i^k + d_3 Q_{i+1}^k + d_4 Z_{i+1}^k}_{a_5} \quad (5.84)$$

$$b_1 Q_i^{k+1} + b_2 Z_i^{k+1} + b_3 Q_{i+1}^{k+1} + b_4 Z_{i+1}^{k+1} = \underbrace{e_1 Q_i^k + e_2 Z_i^k + e_3 Q_{i+1}^k + e_4 Z_{i+1}^k}_{b_5}. \quad (5.85)$$

Prva predstavlja jednačinu kontinuiteta, a druga, dinamičku jednačinu. Reč je o kvazi-linearim jednačinama, jer su u koeficijentima $a_1 \dots a_4$ i $b_1 \dots b_4$ sadržane nepoznate kote nivoa i protoci (Q_i^{k+1} , Z_i^{k+1} , Q_{i+1}^{k+1} i Z_{i+1}^{k+1}), što znači da su jednačine (5.84)-(5.85) u suštini *nelinearne*, tako da se moraju iterativno rešavati. Veličine iz prethodnog vremenskog nivoa su grupisane na desnim stranama navedenih jednačina i mogu se voditi kao koeficijenti a_5 i b_5 , čije su vrednosti poznate.

Iz izloženog proizilazi da svakom paru profila na odstojanju Δx odgovaraju dve jednačine sa četiri nepoznate: Q_i^{k+1} , Z_i^{k+1} , Q_{i+1}^{k+1} i Z_{i+1}^{k+1} . Za deonicu sa N profila i $N-1$ intervala Δx , na raspolaganju je $2(N-1)=2N-2$ jednačina. S druge strane, broj nepoznatih u svakom profilu je 2, tako da je ukupno $2N$ nepoznatih. Da bi sistem bio zatvoren, nedostaju još 2 jednačine. One se obezbeđuju graničnim uslovima.

Granični uslovi. Rečeno je da se u mirnom režimu zadaju dva granična uslova, po jedan na svakom kraju deonice. Na uzvodnom kraju je to najčešće hidrogram $\bar{Q}(t)$, a na nizvodnom, nivogram $\bar{Z}(t)$, ili kriva protoka $\bar{Z}(\bar{Q})$, pri čemu crta označava zadate funkcije. Opšta formulacija graničnog uslova je tada:

$$g_1 \cdot Q_i^{k+1} + g_2 \cdot Z_i^{k+1} = g_3, \quad (5.86)$$

pri čemu indeks „ i ” ima vrednost 1 ili N . Na primer, za ulazni hidrogram je: $g_1=1$, $g_2=0$, $g_3 = \bar{Q}$, $Q_1^{k+1} = \bar{Q}$, a za krivu protoka na nizvodnoj granici: $g_1=0$, $g_2=1$, $g_3 = \bar{Z}(\bar{Q})$, odnosno, $Z_N^{k+1} = \bar{Z}(Q_N)$.

Rešavanje sistema algebarskih jednačina. Struktura sistema algebarskih jednačina tipa (5.84), (5.85) i (5.86) prikazaće se na primeru deonice sa 4 računski profila ($N=4$):

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & & & & & & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & & & & & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & & & & & & & \\ & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & & & & \\ & & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & & & & & \\ & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & & & \\ & & & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & & & & \\ & & & & g_1 & g_2 & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Z_1 \\ Q_2 \\ Z_2 \\ Q_3 \\ Z_3 \\ Q_4 \\ Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_3 \\ a_5 \\ b_5 \\ a_5 \\ b_5 \\ a_5 \\ b_5 \\ g_3 \end{bmatrix}. \quad (5.87)$$

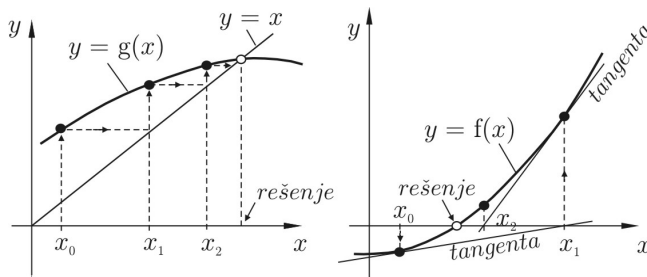
Ovom matričnom jednačinom, simbolički je prikazano da matricu na levoj strani čine koeficijenti $a_1 \dots a_4$ i $b_1 \dots b_4$, da vektor nepoznatih čine veličine Q i Z , a vektor slobodnih članova, koeficijenti a_5 , b_5 i g_3 . Može se primetiti da je matrica koeficijentata *trakasta*, jer su elementi čija je vrednost različita od nule, grupisani oko glavne dijagonale.

Za rešavanje sistema sa trakastom matricom koeficijenata primenjuju se posebni postupci na bazi Gausove eliminacije koji omogućavaju racionalno korišćenje memorije i skraćenje računskog vremena [132, 135].

Rešenje sistema (5.87) predstavlja rešenje u jednoj iteraciji. Naime, nelinearni problem se iterativno rešava kao niz linearnih problema, sve dok se ne ispuni zahtevani kriterijum konvergencije. Prikaz metoda za rešavanje nelinearnih problema (posebno metode „dvostrukog prolaza”, koja je optimalna za sisteme sa opisanom strukturom), može se naći u brojnoj specijalizovanoj literaturi [38, 110, 132]. U nastavku se daje kratak osvrt na neke standardne metode.

Metoda sukcesivne zamene. Algoritam ove metode sadrži sledeće korake koji dovode do rešenja za trenutak $k + 1$:

- (1) U prvoj iteraciji nepoznatim Q_i i Z_i ($i = 2, 3, \dots, N - 1$) se dodeljuju poznate vrednosti iz prethodnog trenutka k i računaju vrednosti koeficijenata a_5 i b_5 .
- (2) Interpolacijom zadatih graničnih uslova, definišu se vrednosti nepoznatih na granicama računске deonice; to znači u mirnom režimu: Q_1 ili Z_1 , odnosno Q_N ili Z_N (u zavisnosti od tipa zadatog graničnog uslova).
- (3) Računaju se koeficijenti $a_1 \dots a_4$ i $b_1 \dots b_4$ na osnovu vrednosti Q i Z iz tekuće iteracije.
- (4) Rešava se sistem linearnih jednačina (5.87) po Q_i^{it} i Z_i^{it} , gde je „it” oznaka tekuće iteracije.
- (5) Proverava se konvergencija rešenja: $|Z_i^{it} - Z_i^{it-1}|_{\max} < \varepsilon$, gde je ε – unapred zadata mala vrednost (recimo 1 mm). (Oznaka „max” ukazuje da se kao merodavna, uzima najveća vrednost od onih koje su sračunate po profilima.) Ako je uslov konvergencije zadovoljen, rešavanje nelinearnog problema je završeno na datom vremenskom nivou i može se preći na sledeći; u protivnom, povratkom na korak (3), započinje sledeća iteracija ($it + 1$). Iterativni postupak traje sve dok se ne ispuni kriterijum konvergencije, ili ne premaši unapred zadati – dozvoljeni broj iteracija (Slika 5.16).



Slika 5.16: Grafička interpretacija rešavanja nelinearne jednačine metodom sukcesivne zamene (levo) i metodom Njutna (desno).

Metoda Njutn-Rafson (Newton-Raphson). Ova metoda je u pogledu broja iteracija efikasnija od prethodne, pod uslovom da početne vrednosti nisu „daleko“ od konačnog rešenja.

Jednačine (5.84) i (5.85) mogu se predstaviti u implicitnom obliku:

$$\left. \begin{aligned} F_i(Q_i^{k+1}, Z_i^{k+1}, Q_{i+1}^{k+1}, Z_{i+1}^{k+1}) &= 0 \\ H_i(Q_i^{k+1}, Z_i^{k+1}, Q_{i+1}^{k+1}, Z_{i+1}^{k+1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 2, 3, \dots, N-1) \quad (5.88)$$

Ukupan broj ovih, nelinearnih, jednačina je $2(N-1)$, a broj nepoznatih Q i Z je $2N$. Nedostajuće dve jednačine se formiraju na osnovu zadatih graničnih uslova, recimo hidrograma na ulazu i krive protoka na izlazu posmatrane deonice:

$$\left. \begin{aligned} G_1(Q_1^{k+1} - \bar{Q}(t^{k+1})) &= 0 \\ D_N(Z_N^{k+1} - \bar{Z}(Q_N^{k+1})) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.89)$$

gde su \bar{Q} i \bar{Z} vrednosti zadate graničnim uslovom.

Sušтина metode Njutn-Rafsona je u tome da se rešavanje sistema nelinearnih jednačina svede na sukcesivno rešavanje sistema linearnih jednačina. Postupak je iterativan. U prvoj iteraciji se može pretpostaviti da su vrednosti nepoznatih Q i Z u trenutku $k+1$ jednake vrednostima iz trenutka k . Sa tim vrednostima desna strana jednačina (5.88) neće biti jednaka nuli, već nekom ostatku („rezidualu“) \mathcal{R} . Tako se razmatrani sistem jednačina u iteraciji broj „ it “ može predstaviti u obliku:

$$\left. \begin{aligned} G_1(Q_1^{it}, Z_1^{it}) &= \mathcal{R}_1^{it} \\ F_1(Q_1^{it}, Z_1^{it}, Q_2^{it}, Z_2^{it}) &= \mathcal{R}_2^{it} \\ H_1(Q_1^{it}, Z_1^{it}, Q_2^{it}, Z_2^{it}) &= \mathcal{R}_3^{it} \\ \vdots &\vdots \\ F_i(Q_i^{it}, Z_i^{it}, Q_{i+1}^{it}, Z_{i+1}^{it}) &= \mathcal{R}_{2i}^{it} \\ H_i(Q_i^{it}, Z_i^{it}, Q_{i+1}^{it}, Z_{i+1}^{it}) &= \mathcal{R}_{2i+1}^{it} \\ \vdots &\vdots \\ D_N(Q_N^{it}, Z_N^{it}) &= \mathcal{R}_{2N}^{it}. \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

U sledećoj iteraciji se nove vrednosti zavisno promenljivih dobijaju popravkom:

$$Q_i^{it+1} = Q_i^{it} + \Delta Q_i \quad (5.91)$$

$$Z_i^{it+1} = Z_i^{it} + \Delta Z_i. \quad (5.92)$$

Vrednosti korekcija ΔQ_i i ΔZ_i se dobijaju rešavanjem sistema od $2N$ algebarskih jednačina, koje su rezultat razvoja jednačina (5.88) u Tajlorov red:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial Q_1} \Delta Q_1 + \frac{\partial G_1}{\partial Z_1} \Delta Z_1 &= -\mathcal{R}_1^{it} \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} \Delta Q_1 + \frac{\partial F_1}{\partial Z_1} \Delta Z_1 + \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} \Delta Q_2 + \frac{\partial F_1}{\partial Z_2} \Delta Z_2 &= -\mathcal{R}_2^{it} \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial Q_i} \Delta Q_i + \frac{\partial F_i}{\partial Z_i} \Delta Z_i + \frac{\partial F_i}{\partial Q_{i+1}} \Delta Q_{i+1} + \frac{\partial F_i}{\partial Z_{i+1}} \Delta Z_{i+1} &= -\mathcal{R}_{2i}^{it} \\ \frac{\partial H_i}{\partial Q_i} \Delta Q_i + \frac{\partial H_i}{\partial Z_i} \Delta Z_i + \frac{\partial H_i}{\partial Q_{i+1}} \Delta Q_{i+1} + \frac{\partial H_i}{\partial Z_{i+1}} \Delta Z_{i+1} &= -\mathcal{R}_{2i+1}^{it} \\ &\vdots \\ \frac{\partial D_N}{\partial Q_N} \Delta Q_N + \frac{\partial D_N}{\partial Z_N} \Delta Z_N &= -\mathcal{R}_{2N}^{it}. \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

Koeficijenti navedenog sistema su parcijalni izvodi čije se vrednosti računaju diferenciranjem odgovarajuće jednačine i zamenom vrednosti Q i Z iz tekuće iteracije. U matricnom obliku sistem jednačina (5.93) se može prikazati jednačinom:

$$\mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{Z} = -\mathcal{R}, \quad (5.94)$$

gde je \mathbf{J} - Jakobijan matrica čiji su članovi parcijalni izvodi, $\Delta \mathbf{Z}$ - vektor korekcija koji sadrži nepoznate ΔQ i ΔZ , a \mathcal{R} - vektor ostataka.

Opisani iteracioni postupak se ponavlja sve dok najveća apsolutna vrednost korekcija ne postane manja od unapred zadate male vrednosti. Grafička interpretacija metode Njutn-Rafsona data je na Slici 5.16.

Metoda linearizacije. Ova metoda se često koristi u računskoj hidraulici, pa se može primeniti i kada je reč o Prajsmanovoj shemi [38, 110]. Suština ovog pristupa je da se sve funkcije $f(Z, Q)$, za koje se smatra da su neprekidne i diferencijabilne, razviju u Tajlorov red:

$$f_i^{k+1} = f_i^k + \Delta f = f_i^k + \frac{\partial f_i}{\partial Z_i} \cdot \Delta Z_i + \frac{\partial f_i}{\partial Q_i} \cdot \Delta Q_i + \dots, \quad (5.95)$$

gde su ΔZ_i i ΔQ_i - priraštaji zavisno promenljivih u vremenskom intervalu Δt . Izostavljanjem članova višeg reda, i zamenom u osnovne diferencne jednačine, dolazi se do sistema nelinearnih algebarskih jednačina po nepoznatim priraštajima ΔZ_i , ΔQ_i , ΔZ_{i+1} i ΔQ_{i+1} za par tačaka $(i, i+1)$:

$$\left. \begin{aligned} A \Delta Z_{i+1} + B \Delta Q_{i+1} + C \Delta Z_i + D \Delta Q_i + G &= 0 \\ A' \Delta Z_{i+1} + B' \Delta Q_{i+1} + C' \Delta Z_i + D' \Delta Q_i + G' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.96)$$

Za N tačaka (profila) postoji sistem od $2N-2$ jednačina sa $2N$ nepoznatih. Ovaj sistem se zatvara sa dodatne 2 jednačine graničnih uslova. Na osnovu poznatih vrednosti ΔZ_i^k i ΔQ_i^k ($i = 1, 2, \dots, N$), računaju se koeficijenti A, B, C, \dots, G' , rešava se linearizovani sistem (5.96) napisan za N tačaka i dobija se novo približno rešenje u trenutku $t = (k+1)\Delta t$. (U prvoj iteraciji $\Delta Z_i = \Delta Q_i = 0$.) Zatim se ponovo računaju koeficijenti A, B, C, \dots, G' itd., ali su u većini slučajeva rezultati već u drugoj iteraciji dovoljno tačni, tako da se sistem jednačina rešava *samo jednom* na svakom Δt računskom nivou. Rešavanje problema linearizacijom predstavlja prvu iteraciju punog Njutn-Rafsonovog postupka. Praksa je pokazala da je ovaj pristup optimalan zbog svoje brzine, pri čemu se tačnost rezultata može povećati smanjenjem računskog koraka Δt .

* * *

Na kraju, nekoliko napomena i sugestija u vezi sa primenom Prajsmanove metode u praksi.

(i) Ova metoda je namenjena mirnom režimu tečenja i vodotocima sa umerenim uzdužnim nagibima dna.

(ii) Neograničen računski korak po vremenu nesumnjivo daje implicitnim shemama, pa i Prajsmanovoj, veliku prednost u odnosu na eksplicitne sheme, zbog racionalnijeg utroška računarskih resursa. To je razumljivo ako se zna da poplavni talasi u slivovima velikih reka traju više nedelja (pa i mesec-dva dana), a da je tipična dužina računskog koraka kod eksplicitnih shema reda veličine nekoliko sekundi ili minuta. Medjutim, iako bez teorijskog ograničenja, računski korak se i kod implicitnih metoda ograničiti zbog graničnih uslova. Naime, vrednosti najvećih kota i protoka neće biti tačno sračunate ako se usled isuviše velikog koraka Δt „preskoči” vrh ulaznog hidrograma ili ulaznog nivograma.

(iii) Broj raspoloživih poprečnih profila je obično nedovoljan za stabilnost proračuna, na koju utiče stepen neprizmatičnosti korita. Praksa pokazuje da je stabilnost Prajsmanove sheme obezbeđena ako stepen neprizmatičnosti, određen odnosom površina poprečnog preseka dva susedna profila, nije veći od $1,7 \div 2,0$. To znači da se između snimljenih profila, po potrebi mora interpolovati određeni broj računskih profila⁹. Nije retko da se na deonici od desetak kilometara u proračunu mora koristiti nekoliko stotina profila, od kojih većinu čine interpolovani profili.

(iv) Da bi se račun ubrzao, za sve profile se mogu unapred sračunati tablične vrednosti niza osnovnih veličina za opseg proizvoljno zadatih kota nivoa (uredjeni parovi $A(Z), B(Z), O(Z), R(Z)$ itd.), tako da se ove veličine u toku iterativnog proračuna neustaljeno tečenja ne računaju, već određuju interpolacijom tabličnih vrednosti.

⁹U svakom konkretnom slučaju, za usvojenu vrednost koraka Δt , ograničenje koraka Δx u smislu zadovoljenja navedenog iskustvenog kriterijuma može se izraziti preko neke granične vrednosti Kurantovog broja (5.77), koja kod implicitnih shema može biti veća od jedan.

5.5 Uprošćene metode

Ako se kota nivoa u jednačini (5.15) izrazi preko kote dna i dubine: $Z = z_d + h$, može se napisati:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial z_d}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = -I_d + \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (5.97)$$

pa dinamička jednačina (5.15) dobija ovaj oblik ($\beta = 1$):

$$\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} - \underbrace{gA I_d + gA I_e = 0}_{\substack{\text{ustaljeno jednoliko} + (5.8) \Rightarrow \text{kinematički talas} \\ \text{ustaljeno nejednoliko} + (5.8) \Rightarrow \text{difuzioni talas}}} }_{\text{neustaljeno} + (5.8) \Rightarrow \text{dinamički talas}} = 0 \quad (5.98)$$

Izostavljanjem pojedinih članova u gornjoj jednačini, dolazi se do prostijih računskih modela. *Model kinematičkog talasa* se sastoji od jednačine kontinuiteta (5.8) i jednačine ustaljenog, jednolikog tečenja, *model difuzionog talasa*, od jednačine kontinuiteta i jednačine ustaljenog, nejednolikog tečenja, a *model dinamičkog talasa*, od kompletnih San Venanovih jednačina.

Opravdanje za navedena uprošćenja nalazi se u činjenici da su članovi u dinamičkoj jednačini veoma neujednačeni po veličini. Prema navodima Hendersona (Henderson), vrednost konvektivnog ubrzanja na jednom australijskom vodotoku je 100 puta manja od vrednosti uzdužnog nagiba dna, a vrednost lokalnog ubrzanja, je čak 500 puta manja [66]. Analizom neustaljenog tečenja na Velikoj Moravi, ustanovljeno je da je vrednost lokalnog ubrzanja oko 100 puta manja od vrednosti prosečnog nagiba dna¹⁰.

Sledeći nivo uprošćenja podrazumeva potpuno izostavljanje dinamičke jednačine. Proračun neustaljenog režima se bazira isključivo na jednačini kontinuiteta, dok dinamičku jednačinu zamenjuje funkcija zapremine rečnog korita. Na tom principu je zasnovan veći broj „hidroloških” metoda, od kojih se neke razmatraju u nastavku.

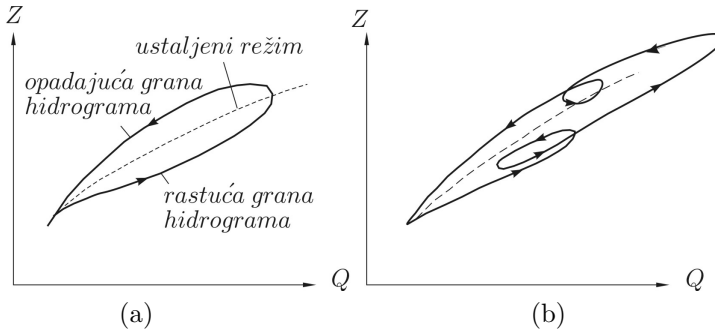
Prednost uprošćenih metoda je u tome što omogućavaju da se brzo dodje do rezultata. Naravno, ti rezultati su manje tačnosti od onih koji se dobijaju rešavanjem kompletnih jednačina, ali su za praksu često prihvatljivi, posebno u preliminarnim

¹⁰Čak i u slučajevima naglo promenljivog neustaljenog tečenja, kao što je na primer ono koje nastaje usled rušenja brane, uticaj lokalnog ubrzanja slabi sa odstojanjem, tako da se u određenoj fazi proračuna član ovog ubrzanja može isključiti iz dinamičke jednačine, bez posledica po tačnost rezultata [143].

analizama ili u slučajevima kada nema dovoljno snimljenih poprečnih profila za ozbiljnije proračune. Medjutim, primena uprošćenih modela zavisi od mogućnosti njihove kalibracije, koja zahteva registrovane hidrograme ili obeležene tragove velikih voda iz prošlosti. Pre nego što se ovom pitanju posveti više pažnje, razmotriće se uticaj neustaljenosti na krivu protoka.

5.5.1 Kriva protoka

Kriva protoka opisuje vezu izmedju kote nivoa (ili vodostaja) i protoka u datom profilu. Usled neustaljenosti tečenja, u prirodnim vodotocima ova veza nije jednoznačna, što znači da istoj koti nivoa mogu odgovarati različite vrednosti protoka, u zavisnosti od toga da li je poplavni talas u fazi porasta ili opadanja. To daje krivju protoka karakteristični oblik „petlje” (Slika 5.17).



Slika 5.17: Usled neustaljenosti, krive protoka imaju oblik petlji koje zavise od karakteristika poplavnih talasa; (a): prosta petlja odgovara hidrogramu sa jednim vrhom; (b): složena petlja odgovara hidrogramu sa više vrhova, ili odražava uticaje uspora; težišna linija odgovara ustaljenom režimu.

Pojava petlje („histerezisa”) može se objasniti pomoću jednačine (5.98). Deljenjem faktorom $g \cdot A \cdot I_d$, a imajući u vidu da je pri istoj dubini i rapavosti $I_e/I_d = (Q/Q_n)^2$, navedena jednačina se može napisati u obliku:

$$Q = Q_n \sqrt{1 - \frac{1}{I_d} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{1}{g A} \frac{\partial Q}{\partial t} \right)}, \quad (5.99)$$

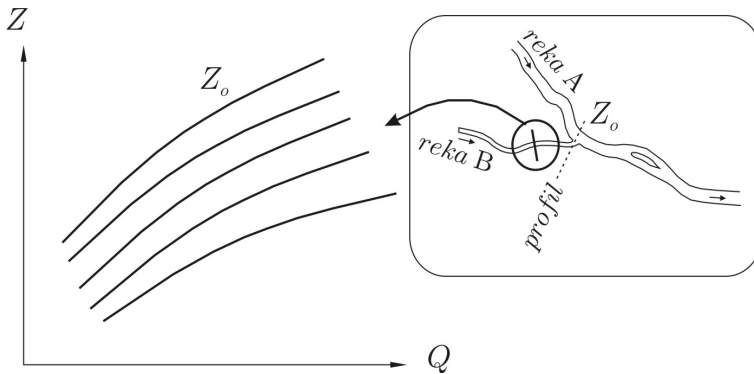
gde je Q_n - protok u jednolikom režimu.

U periodu nailaska poplavnog talasa (rastuća grana hidrograma), vrednosti hidrauličkih veličina (protoka, brzine, dubine) su na uzvodnom kraju posmatrane deonice veće od onih na njenom nizvodnom kraju. Imajući u vidu da koordinata x raste u nizvodnom smeru, vrednosti izvoda po x u jednačini (5.99) su negativne. Vrednost izvoda po vremenu je pozitivna, ali je, kao što je pokazano, mnogo manja

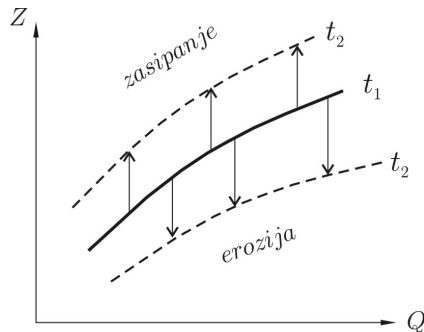
od ostalih vrednosti, pa se može zanemariti. Tako ostaje da su drugi i treći član pod korenom u jednačini (5.99) pozitivni, te da je $Q > Q_n$, što je u skladu sa skicom na Slici 5.17. Na isti način se može pokazati i obrnuto, da je u periodu opadanja poplavnog talasa $Q < Q_n$.

* * *

Korisno je na ovom mestu ukazati na neke specifičnosti krivih protoka u prirodnim vodotocima. Ove krive mogu biti *parametarske* i mogu se vremenom menjati. Parametarske krive su odraz uticaja hidrološkog režima reke u koju se posmatrana reka uliva (Slika 5.18). „Sezonske krive protoka” odražavaju promene koje nastaju sa godišnjim dobom. Te promene su naročito izražene zimi, poremećajem hidrauličkog režima usled leda. Krive protoka se vremenom mogu menjati i u zavisnosti od deformacije rečnog korita, kao što je shematski prikazano na Slici 5.19.



Slika 5.18: Primer parametarske krive protoka; profil u kome se definiše kriva protoka nalazi se na deonici pritoke B koja je u zoni uticaja vodostaja reke A; iz familije krivih se kao merodavna uzima ona, kojoj odgovara trenutna vrednost parametra Z_0 , pri čemu je Z_0 – kota nivoa reke A na ušću.



Slika 5.19: Pomeranje krive protoka usled deformacije rečnog korita.

5.5.2 Model kinematičkog talasa

Prema (5.98), ovaj model čine jednačina kontinuiteta neustaljenog tečenja i jednačina ustaljenog, jednolikog tečenja:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{Q^2}{K^2} - I_d &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.100)$$

Poslednja jednačina dozvoljava da se protok smatra jednoznačnom funkcijom kote nivoa Z , odnosno površine preseka A : $Q = Q(A)$, ili $A = A(Q)$. Primenjujući lančano pravilo diferenciranja, prvi član u jednačini kontinuiteta se može ovako transformisati:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{dA}{dQ} \Big|_{x=x_0}, \quad (5.101)$$

pa se dobija talasna jednačina oblika:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (5.102)$$

gde je $c = dQ/dA$ - brzina prostiranja kinematičkog talasa.

Parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda (5.102), poznata u literaturi kao „jednačina čiste konvekcije” ili „jednačina kinematičkog talasa”, rešava se po protoku $Q = Q(x, t)$, uz zadate konturne uslove.

Ako je brzina prostiranja c konstantna, jednačina je linearna, a njeno opšte rešenje, koje je još krajem osamnaestog veka formulisao D'alambert¹¹ ima oblik:

$$Q = f(x - ct), \quad (5.103)$$

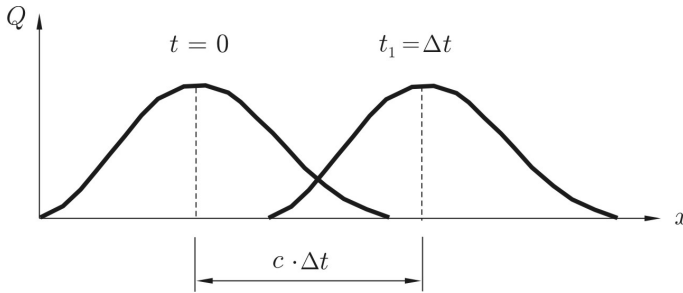
gde je f - proizvoljna neprekidna funkcija, diferencijabilna po x i t .

Za $t = 0$, početni uslov je $Q(0, x) = f(x)$. Ova funkcija predstavlja raspored protoka po dužini toka (Slika 5.20). U trenutku $t_1 = c \cdot \Delta t$ dobija se rešenje $f(x - c \cdot t_1)$. Ako se zamisli pokretni koordinatni sistem $\xi = x - ct$, rešenje postaje nezavisno od vremena i ima uvek oblik funkcije $Q = f(\xi)$.

¹¹Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) je medju prvima koristio diferencijalni račun u razmatranju problema iz mehanike fluida i mehanike čvrstih tela; poznat je ne samo po svojim kapitalnim naučnim delima, već i po tome što je saradjivao sa Dideroom (Diderot) na izdavanju „Enciklopedije nauke i umetnosti”, koja je, sa svojih 17 tomova teksta i 18 tomova skica i tabela, predstavljala vrhunac filozofske misli tog vremena.

Proizilaze dva važna zaključka:

- (i) kinematički talas se prostire isključivo u *nizvodnom* smeru;
- (ii) oblik talasa se ne menja i nema usputnog ublaženja talasa, što znači da je reč o čistoj translaciji ulaznog hidrograma (Slika 5.20).



Slika 5.20: Prostiranje kinematičkog talasa.

Ako brzina prostiranja c nije konstantna, jednačina (5.102) postaje nelinearna, a oblik talasa se može nizvodno menjati, u zavisnosti od promene brzine c , odnosno protoka Q . Naime, porastom brzine c povećava se nagib čela talasa, pa se menja i oblik hidrograma. Brzina prostiranja se može odrediti na osnovu registrovanih hidrograma, ili na osnovu nagiba tangente na krivu protoka u datom profilu:

$$c = \frac{dQ}{dA} = \frac{1}{B} \frac{dQ}{dZ}, \quad (5.104)$$

gde je $B = B(Z)$ - širina vodenog ogledala.

Rešavanje jednačine (5.102) može biti analitičko ili numeričko. U ovom drugom slučaju se javlja promena oblika talasa i uočava njegovo usputno ublaženje, ali je to isključivo posledica numeričke disperzije ili neadekvatnog računskog koraka.

Iz navedenih svojstava kinematičkog modela, proizilazi da se ovaj ne može preporučiti za analizu poplavnih talasa u prirodnim vodotocima, jer se njime ne mogu obuhvatiti efekti uspora, koji se neizbežno javljaju usled neprizmatičnosti korita, prisustva objekata, pritoka itd.

■ **Primer 5.2.** Dokazati da izraz (5.103) predstavlja opšte rešenje jednačine kinematičkog talasa (5.102).

Rešenje. Pod uslovom da je proizvoljna funkcija $f(x, t)$ neprekidna i diferencijabilna, a brzina talasa c , konstantna, mogu se napisati izrazi za parcijalne izvode: $\partial f / \partial t = -c f'(x - ct)$ i $\partial f / \partial x = f'(x - ct)$; identitet koji rezultira njihovom zamenom u (5.102) dokazuje ono što se zadatkom traži.

5.5.3 Model difuzionog talasa

Prema (5.98), ovaj model čine jednačina kontinuiteta neustaljenog tečenja i jednačina ustaljenog, nejednolikog tečenja:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{Q^2}{K^2} - I_d &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.105)$$

Ako se prva jednačina diferencira po x imajući na umu da je $\partial A/\partial x = B \cdot \partial h/\partial x$, a druga diferencira po t , dobija se:

$$B \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (5.106)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} + \frac{2Q}{K^2} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2Q^2}{K^3} \frac{\partial K}{\partial t} = 0. \quad (5.107)$$

Eliminacijom mešovitog izvoda $\partial^2 h/\partial t \partial x$ sledi:

$$\frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{2Q}{K^2} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q^2}{K^3} \frac{\partial K}{\partial t} = 0. \quad (5.108)$$

U ovom izrazu treba definisati izvod $\partial K/\partial t$. To će se uraditi najpre primenom lančanog diferenciranja:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dK}{dA} \Big|_{x=x_0} \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} \right), \quad (5.109)$$

a zatim pretpostavljajući da je $Q = Q_n = K\sqrt{I_d}$, odnosno:

$$\frac{dQ}{dA} = \sqrt{I_d} \frac{dK}{dA}, \quad (5.110)$$

sledi:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{I_d}} \frac{dQ}{dA} \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad (5.111)$$

Zamenom u izraz (5.108), dobija se:

$$\frac{2BQ}{K^2} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2BQ^2}{K^3 \sqrt{I_d}} \frac{dQ}{dA} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}. \quad (5.112)$$

Množenjem obe strane jednačine (5.112) faktorom $K^2/(2BQ)$ i vodeći računa da još uvek važi pretpostavka $Q = Q_n = K\sqrt{I_d}$, dobija se posle sredjivanja, „konvekciono-difuziona jednačina“:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (5.113)$$

gde je $c = dQ/dA$ - brzina talasnog prostiranja, a $D = Q/(2B I_d)$ - difuzioni koeficijent [m^2/s]. Poredjenjem jednačina (5.102) i (5.113), može se konstatovati da se one razlikuju samo po članu na desnoj strani (5.113), koji kontroliše stepen usputnog rasplinjavanja poplavnog talasa.

Podešavanje vrednosti parametara c i D u modelu difuzionog talasa obavlja se na osnovu registrovanih hidrograma. Na taj način se posredno uvode uticaji trenja i drugih otpora, kao i retenzione karakteristike računске deonice.

Pod odredjenim pretpostavkama, jednačina (5.113) ima analitičko rešenje. Optimalni numerički postupci za rešavanja konvekciono-difuzione jednačine opisani su u brojnoj literaturi [6, 129, 138].

5.5.4 Metode zasnovane na funkciji zapremine korita

Jedan od pojednostavljenih pristupa proračunu neustaljenog tečenja zasniva se isključivo na jednačini kontinuiteta, dok se izostavljena dinamička jednačina zamenjuje zavisnošću zapremine korita od kote nivoa, odnosno protoka. Ta zavisnost se zove „kriva zapremine“. Na ovom pristupu je zasnovano više metoda koje se tradicionalno označavaju kao „hidrološke metode“ proračuna transformacije poplavnih talasa. One se međusobno razlikuju po formulaciji jednačine kontinuiteta i po načinu na koji se definiše kriva zapremine.

5.5.4.1 Metoda kvazi-ustaljenog tečenja

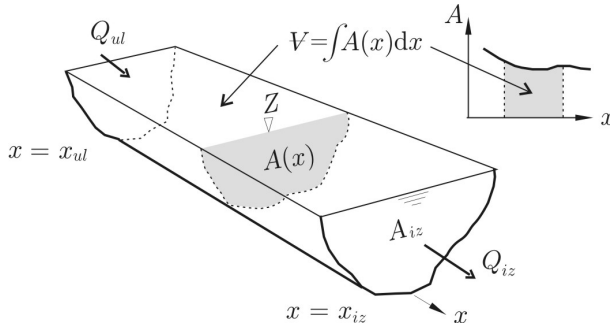
Posmatra se deonica na Slici 5.21. Integracijom jednačine kontinuiteta (5.8), dobija se:

$$\int_{x_{ul}}^{x_{iz}} \frac{\partial A(t, x)}{\partial t} dx + \int_{x_{ul}}^{x_{iz}} \frac{\partial Q(t, x)}{\partial x} dx = 0, \quad (5.114)$$

ili,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{ul}}^{x_{iz}} A(x, t) dx + Q_{iz}(t) - Q_{ul}(t) = 0, \quad (5.115)$$

pri čemu indeksi „ ul “ i „ iz “ označavaju ulazni (uzvodni), odnosno izlazni (nizvodni) profil. Integral u jednačini (5.115) predstavlja zapreminu korita $\forall(t)$.



Slika 5.21: Računska deonica čija kriva zapremine, definisana preko poprečnih profila, određuje retenzioni kapacitet deonice za ublaženje poplavnog talasa.

Jednačina kontinuiteta može se napisati kao obična diferencijalna jednačina prvog reda:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{ul} - Q_{iz}. \quad (5.116)$$

Za rešavanje početnog problema definisanog jednačinom (5.116), neophodno je zadati početni uslov: $V(t=0) = V_o$.

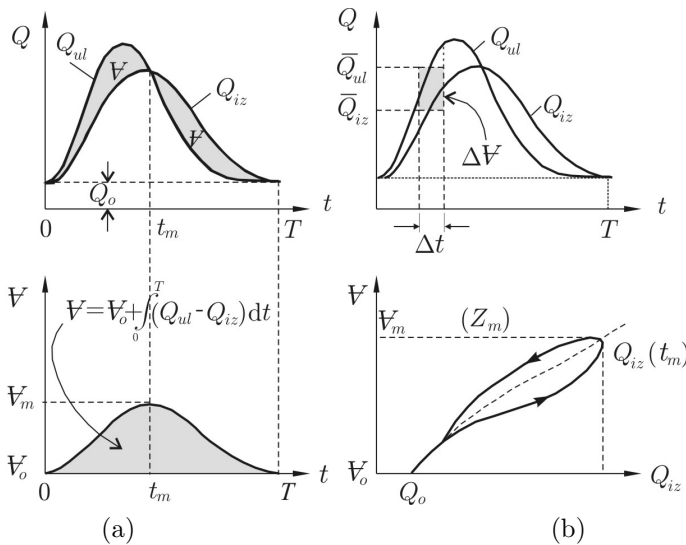
U opštem slučaju, zapremina korita je funkcija oba protoka, ulaznog i izlaznog: $V = V(Q_{ul}, Q_{iz})$. Radi lakšeg računa, u metodi kvazi-ustaljenog tečenja se uvodi pretpostavka da je zapremina isključivo funkcija izlaznog protoka: $V = V(Q_{iz})$. Ako se ova zavisnost unapred definiše za posmatranu deonicu, početni problem (5.116) se može rešavati po izlaznom protoku, što je i cilj proračuna.

Diferencijalna jednačina (5.116) se može svesti na algebarsku jednačinu:

$$\frac{V^{k+1} - V^k}{\Delta t} = \frac{1}{2} (Q_{ul}^{k+1} + Q_{ul}^k) - \frac{1}{2} (Q_{iz}^{k+1} + Q_{iz}^k), \quad (5.117)$$

koja se ne može direktno rešavati jer sadrži dve nepoznate: Q_{iz}^{k+1} i V^{k+1} , čija je međjusobna zavisnost nelinearna. Postupak iterativnog rešavanja uz pomoć unapred definisane veze $V(Q_{iz})$, zavisi od toga da li se proračun obavlja „ručno“ ili pomoću računara; u prvom slučaju se jednačina može rešavati probanjem, ili grafoanalitički, kao što je pokazano u primeru koji sledi. U drugom slučaju se račun algoritamski zasniva na nekom od numeričkih postupaka za rešavanje nelinearnih jednačina, kao što su na primer metoda Njutna ili metoda polovljenja intervala [132, 135].

Grafička interpretacija rezultata proračuna transformacije poplavnog talasa she-matski je prikazana je na Slici 5.22-(a).



Slika 5.22: (a) Transformacija poplavnog talasa na rečnoj deonici; šrafirana površina između ulaznog hidrograma $Q_{ul}(t)$ i izlaznog hidrograma $Q_{iz}(t)$ predstavlja retenzionu zapreminu deonice; iz jednačine kontinuiteta se vidi da je u trenutku t_m : $Q_{ul} = Q_{iz}$, $dV/dt=0$, što je uslov za pojavu maksimuma funkcije zapremine (V_m); kako je zapremina proporcionalna izlaznom protoku, to sledi da je u istom trenutku $dQ_{iz}/dt = 0$, što znači da se vrh izlaznog hidrograma mora naći u presečnoj tački funkcija $Q_{ul}(t)$ i $Q_{iz}(t)$; (b) Određivanje krive zapremine pomoću registrovanih hidrograma.

Određivanje krive zapremine. Za određivanje krive zapremine neophodno je raspolagati hidrogramima registrovanim u graničnim profilima posmatrane deonice. Ti hidrogrami pokazuju stepen usputne transformacije (ublaženja) talasa. Zapremina korita koja „prihvata” talas određena je površinom između registrovanog ulaznog i izlaznog hidrograma. Ova površina se može približno odrediti numeričkom integracijom, tako što se sumiraju priraštaji ΔV po vremenskim intervalima Δt , kao što je shematski prikazano na Slici 5.22 - (b). Dobijena kriva ima izgled petlje, čiji oblik zavisi od konkretnog poplavnog talasa. U proračunima se petlja (ili više petlji, ako je na raspolaganju više registrovanih talasa), zamenjuje osrednjenom krivom i koristi tako dobijena jednoznačna zavisnost (Slika 5.22-(b)).

■ **Primer 5.3.** U Tabeli 5.2 i na Slici 5.23 su dati hidrogrami registrovani na početku i na kraju jedne rečne deonice. Početna zapremina korita (pre nailaska talasa) iznosila je $66,5 \times 10^6 \text{ m}^3$. Odrediti krivu zapremine za ovaj poplavni talas i pomoću nje prognozirati transformaciju talasa koji je definisan u Tabeli 5.3.

Rešenje. Da bi se primenila metoda kvazi-ustaljenog tečenja, mora se najpre odrediti kriva zapremine. To je uradjeno u Tabeli 5.4. Iz grafičkog prikaza ove krive na Slici 5.24, može se konstatovati da ima oblik petlje.

Tabela 5.2: *Registrovani hidrogrami.* [33]

Datum	Ulazni protok [m ³ /s]	Izlazni protok [m ³ /s]	Datum	Ulazni protok [m ³ /s]	Izlazni protok [m ³ /s]
mart 23	638	518	mart 31	2013	2710
24	1007	826	april 1	1590	1806
25	4438	2646	2	1263	1406
26	7549	5914	3	1044	1120
27	7510	7582	4	918	952
28	5298	6420	5	829	851
29	3623	4718	6	745	784
30	2598	3352	7	675	734

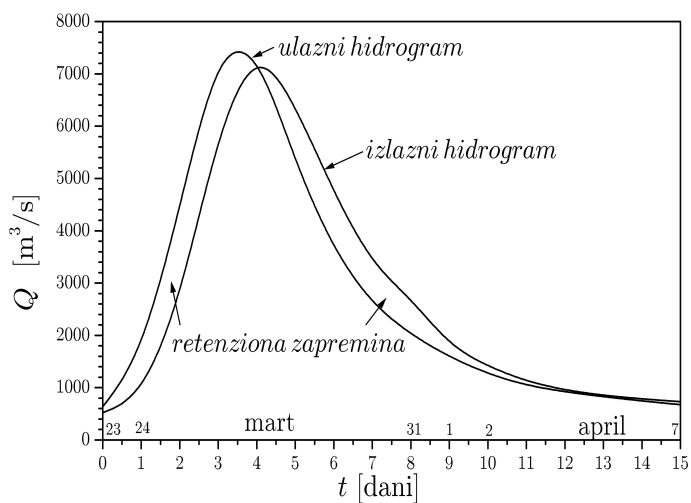
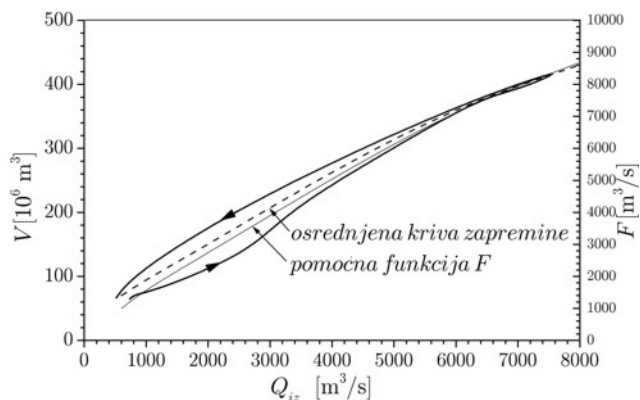
Slika 5.23: *Registrovani hidrogrami pomoću kojih se određuje kriva zapremine.*Slika 5.24: *Kriva zapremine i pomoćna funkcija $F(\nabla, Q_{iz})$*

Tabela 5.3: *Ulazni hidrogram*

t [dani]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Q [m ³ /s]	560	3170	5040	1988	1134	896	700	630	560	532	490

Tabela 5.4: *Proračun krive zapremine u primeru 5.3*

Datum	Protok		Srednji protok		Promena zapr.	Kumul. zapr.
	Ulaz Q_{ul}	Izlaz Q_{iz}	\bar{Q}_u	\bar{Q}_i	$\Delta V \times 10^6$	$V \times 10^6$
	[m ³ /s]	[m ³ /s]	[m ³ /s]	[m ³ /s]	[m ³]	[m ³]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
mart 23	638	518				66,5
24	1605	826	1122	672	38,9	105,4
25	4438	2646	3022	1736	111,1	216,5
26	7549	5914	5994	4280	148,1	364,6
27	7510	7582	7530	6748	67,6	432,2
28	5298	6420	6404	7001	-51,6	380,6
29	3623	4718	4461	5569	-95,7	284,9
30	2598	3352	3111	4035	-79,8	205,7
31	2013	2710	2306	3031	-62,6	143,1
april 1	1590	1806	1802	2258	-39,4	103,7
2	1263	1406	1427	1606	-15,5	88,2
3	1044	1120	1154	1263	- 9,4	78,8
4	918	952	981	1036	- 4,7	74,1
5	829	851	874	902	- 2,4	71,7
6	745	784	787	818	- 2,7	69,0
7	675	734	710	759	- 4,2	64,8

Tabela 5.5: *Pomoćna funkcija $F(V, Q_{iz})$*

Q_{iz}	$V \times 10^6$	$Q_{iz}/2$	$V/\Delta t$	F
[m ³ /s]	[m ³]	[m ³ /s]	[m ³ /s]	[m ³ /s]
1000	95	500	1099,5	1599,5
2000	150	1000	1736,1	2736,1
4000	265	2000	3067,1	5067,1
6000	365	3000	4224,5	7224,5
7500	425	3750	4919,0	8669,0

Usvaja se računski korak $\Delta t = 1$ dan = 86400 s. Za „ručni“ način proračuna je pogodno formirati pomoćnu funkciju $F = F(\forall, Q_{iz})$, grupisanjem nepoznatih veličina na levoj strani diskretizovane jednačine kontinuiteta:

$$\underbrace{\frac{\forall^{k+1}}{\Delta t} + \frac{Q_{iz}^{k+1}}{2}}_{\text{funkcija } F} = \underbrace{\frac{Q_{ul}^k + Q_{ul}^{k+1}}{2}}_{\bar{Q}_{ul}} - \frac{Q_{iz}^k}{2} + \frac{\forall^k}{\Delta t}. \quad (5.118)$$

Vrednosti ove funkcije sračunate su u Tabeli 5.5, a njen grafički prikaz dat je na Slici 5.24. Pomoćna kriva $F(\forall, Q_{iz})$ olakšava rešavanje osnovne jednačine tako što se sa nje mogu očitati vrednosti zapremine za svaku pretpostavljenu vrednost izlaznog protoka. Q_{iz}^{k+1} . Kompletan proračun je dat u Tabeli 5.6, a grafički prikaz rezultata, na Slici 5.25.

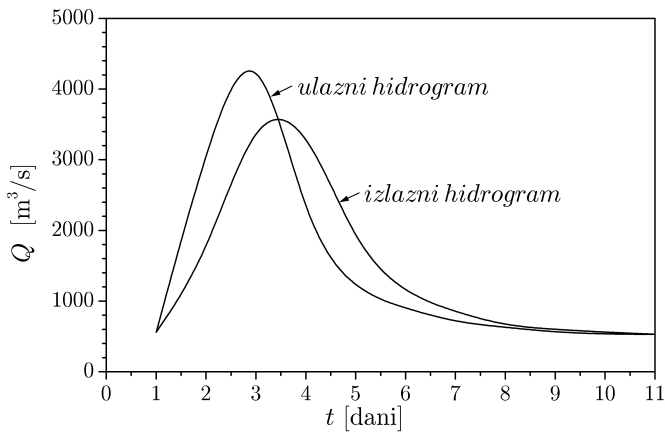
Tabela 5.6: Proračun izlaznog hidrograma; vrednosti u zagradi u koloni (8) su dobijene numeričkim rešavanjem osnovne jednačine. (Korišćena je metoda polovljenja intervala [135].)

Vreme [dani]	Ulazni protok [m ³ /s]			Izlazni protok [m ³ /s]			
	Q_{ul}^k	Q_{ul}^{k+1}	\bar{Q}_{ul}	$Q_{iz}^k/2$	$\forall^k/\Delta t$	$F(Q_{iz}^k)$	Q_{iz}^{k+1}
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)=(4)-(5)+(6)	(8)
1	560	3170	1865	280	752	2337	1600 (1829)
2	3170	5040	4105	800	1505	4810	3750 (3786)
3	5040	1988	3514	1875	2893	4532	3550 (3552)
4	1988	1134	1561	1775	2778	2564	1750 (1840)
5	1134	896	1015	875	1563	1703	1100 (1114)
6	896	700	798	550	1157	1405	850 (774)
7	700	630	665	425	984	1224	650 (642)
8	630	560	595	325	868	1138	600 (585)
9	560	532	546	300	810	1056	560 (538)
10	532	490	511	280	752	983	530 (505)

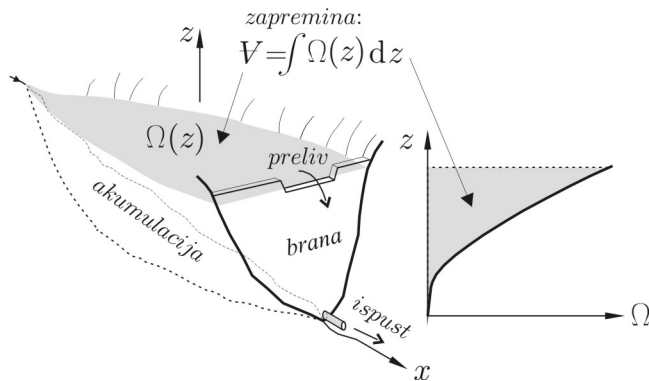
Transformacija poplavnih talasa u akumulaciji. U slučaju akumulacija i retenzija koje su snabdevene evakuacionim objektima u vidu preliva i temeljnih ispusta, pogodno je osnovnu jednačinu (5.116) formulisati preko kote nivoa, odnosno rešavati početni problem u obliku:

$$\left. \begin{aligned} \Omega(Z) \frac{dZ}{dt} &= Q_{ul} - Q_{iz} \\ Z(0) &= Z_o \end{aligned} \right\} \quad (5.119)$$

gde je Z – kota nivoa u akumulaciji, Ω – površina vodenog ogledala, a Z_o – kota nivoa u trenutku $t = 0$. Za proračun je neophodno prethodno odrediti zavisnost $\Omega = \Omega(z)$ (Slika 5.26).



Slika 5.25: Rezultati proračuna transformacije poplavnog talasa u primeru 5.3.



Slika 5.26: Zapremina i površina akumulacije u zavisnosti od apsolutne kote.

Desna strana jednačine (5.119) predstavlja funkciju vremena; $Q_{ul}(t)$ je zadati ulazni hidrogram u akumulaciju, a $Q_{iz}(t)$ je izlazni hidrogram u profilu brane, koji se računa na osnovu nivograma u akumulaciji i na osnovu tipa i karakteristika evakuacionih objekata. Za preliv bez ustava je $Q_{iz} = f_1(Z^{3/2})$ (slobodno prelivanje), a za temeljni ispust, $Q_{iz} = f_2(Z^{1/2})$ (isticanje). Rešavanje jednačine (5.119) se obično obavlja pomoću računara, nekom od numeričkih metoda za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina [132, 135].

■ **Primer 5.4.** Pregradjivanjem manjeg vodotoka, formirana je retenzija za ublaženje poplavnih talasa, čija je kriva površine data u Tabeli 5.7.

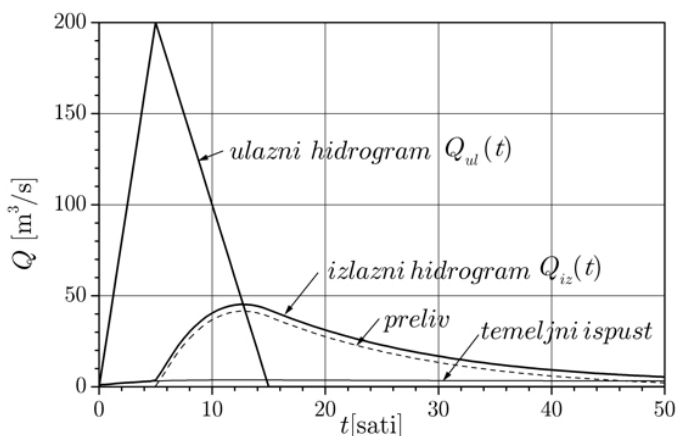
Evakuacione objekte na brani čine: (a) preliv dužine 10 m, sa kotom krune 405,00 mm i koeficijentom protoka 0,35 i (b) temeljni ispust prečnika 1,0 m,

Tabela 5.7: Kriva površine retenzije.

z [mm]	400	402	405	407	409	411	413	415
Ω [ha]	0	25	75	200	250	300	500	500

sa kotom osovine 400,40 mm i koeficijentom protoka 0,42. Ulazni hidrogram ima trougaoni oblik, sa vremenskom bazom od 15 sati i vrhom od $200 \text{ m}^3/\text{s}$ u petom satu. Odrediti izlazni hidrogram ako je početna kota nivoa u akumulaciji 401,00 mm.

Rešenje. Rezultati proračuna sa korakom $\Delta t = 180 \text{ s}$ prikazani su na Slici 5.27.



Slika 5.27: Transformacija poplavnog talasa u primeru 5.4.

5.5.4.2 Metoda Maskingam

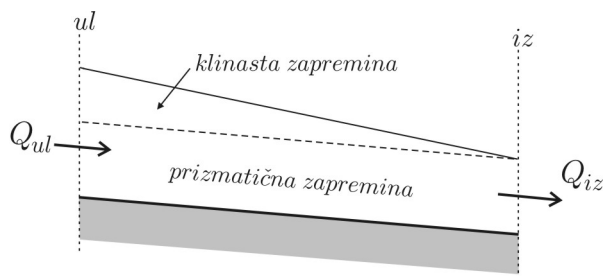
Ova metoda je prvi put korišćena u analizi prostiranja poplavnih talasa na reci Maskingam (Muskingum) u slivu reke Ohajo (SAD) 1934. godine i jedna je od najčešće korišćenih metoda u hidrologiji.

Kriva zapremine. Metoda Maskingam se bazira na jednačini kontinuiteta i empirijski određenoj funkciji zapremine, koja se, za razliku od metode kvazi-ustaljenog tečenja, predstavlja u obliku linearne kombinacije *ulaznog* i *izlaznog* protoka:

$$\forall(t) = K [X Q_{ul}(t) + (1 - X) Q_{iz}(t)]. \quad (5.120)$$

Parametar K ima dimenziju vremena i predstavlja vreme putovanja talasa duž posmatrane deonice. To je razmak između vrhova ulaznog i izlaznog hidrograma. Parametar $0 < X \leq 0,5$ je težinski faktor kojim se podešava veza između zapremine korita date deonice i protoka na njenim krajevima.

Hidrološka interpretacija parametara modela Maskingam počiva na ideji da se zapremina korita može podeliti na „prizmatičnu” i „klinastu” zapreminu (Slika 5.28). Prva odgovara jednolikom, a druga, nejednolikom režimu. Iz linearne zavisnosti (5.120) sledi da se član $K Q_{iz}$ odnosi na prizmatičnu, a član $K X (Q_{ul} - Q_{iz})$, na klinastu zapreminu. Bezdimenzioni težinski faktor X opisuje uticaj klinaste zapremine, odnosno predstavlja pokazatelj intenziteta neustaljenosti toka.



Slika 5.28: Prizmatična i klinasta zapremina.

Vrednosti parametara X i K se određuju na osnovu poplavnih talasa registrovanih u graničnim profilima posmatrane deonice. Te vrednosti se smatraju *konstantama* za deonicu.

Računski postupak. Na osnovu (5.120) se može napisati za vremenske preseke k i $k + 1$, na razmaku Δt :

$$\begin{aligned} \forall^k &= K [X Q_{ul}^k + (1 - X) Q_{iz}^k] \\ \forall^{k+1} &= K [X Q_{ul}^{k+1} + (1 - X) Q_{iz}^{k+1}]. \end{aligned}$$

Zamenom u osnovnu diferencnu jednačinu (5.117) i njenim rešavanjem po nepoznatom izlaznom protoku, dobija se:

$$Q_{iz}^{k+1} = C_1 Q_{ul}^{k+1} + C_2 Q_{ul}^k + C_3 Q_{iz}^k, \quad (5.121)$$

gde je:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= (-K X + \Delta t/2)/C_4 \\ C_2 &= (K X + \Delta t/2)/C_4 \\ C_3 &= (K(1 - X) - \Delta t/2)/C_4 \\ C_4 &= K(1 - X) + \Delta t/2. \end{aligned} \right\} \quad (5.122)$$

Algoritam proračuna je sledeći: za usvojene vrednosti Δt , K i X , najpre se pomoću (5.122) računaju vrednosti koeficijenata, pri čemu one moraju biti pozitivne i zadovoljiti uslov: $C_1 + C_2 + C_3 = 1$. Ako neki od koeficijenata ima negativnu vrednost, potrebno je smanjiti veličinu računskog koraka Δt . Primenom izraza (5.121)

računaju se vrednosti izlaznog protoka. Računski parametri K i Δt moraju biti izraženi u *istim* vremenskim jedinicama, koje ne moraju biti jednake vremenskoj jedinici za protok.

Podešavanje vrednosti parametara. Vrednosti parametara X i K se mogu odrediti pomoću izraza:

$$K = \frac{0.5 \Delta t [(Q_{ul}^k + Q_{ul}^{k+1}) - (Q_{iz}^k + Q_{iz}^{k+1})]}{X (Q_{ul}^{k+1} - Q_{ul}^k) + (1 - X) (Q_{iz}^{k+1} - Q_{iz}^k)} = \frac{BR}{IM}, \quad (5.123)$$

koji se dobija rešavanjem jednačine (5.121) po K . Veličine Q_{ul} i Q_{iz} u trenucima k i $k + 1$ su očitane sa registrovanih hidrograma. Brojilac BR u izrazu (5.123) predstavlja priraštaj zapremine u intervalu Δt , a imenilac IM , težinski izbalansiran doticaj i oticaj. Da se dobiju optimalne vrednosti X i K za datu deonicu, treba za niz pretpostavljenih vrednosti $X \in [0 \div 0,5]$, formirati dijagrame koji prikazuju zavisnosti između *kumulativnih* vrednosti BR i IM . Ove zavisnosti imaju oblik petlji. Usvaja se kao merodavna, ona vrednost X kojoj odgovara „najuža” petlja. Ta petlja se zamenjuje pravom (da bi veza bila jednoznačna), a nagib prave daje, prema (5.123), vrednost parametra K .

■ **Primer 5.5.** U prve tri kolone Tabele 5.8 dati su podaci o protocima registrovanim na ulazu i izlazu jedne rečne deonice [18]. Odrediti vrednosti parametara K i X za ovu deonicu i prognozirati transformaciju talasa koji je definisan u prva dva reda Tabele 5.9.

Rešenje. Rezultati proračuna prema izrazu (5.123) dati su u Tabeli 5.8 za tri vrednosti parametra X : 0,15, 0,25 i 0,40. Znakom „ Σ ” obeleženo je kumulativno sabiranje. Rezultati su grafički prikazani na Slici 5.29. Može se konstatovati da vrednost $X = 0,25$ odgovara „najužoj” petlji, koja se praktično svodi na pravu. Nagib ove prave iznosi $K = 8,4$ h.

Usvojenim vrednostima parametara $X = 0,25$, $K = 9$ h i $\Delta t = 6$ h, odgovaraju na osnovu (5.122) vrednosti koeficijenata $C_1 = 0,0769$, $C_2 = 0,5385$ i $C_3 = 0,3846$. Izlazni hidrogram, sračunat pomoću jednačine (5.121), dat je u Tabeli 5.9. Grafički prikaz rezultata dat je na Slici 5.30.

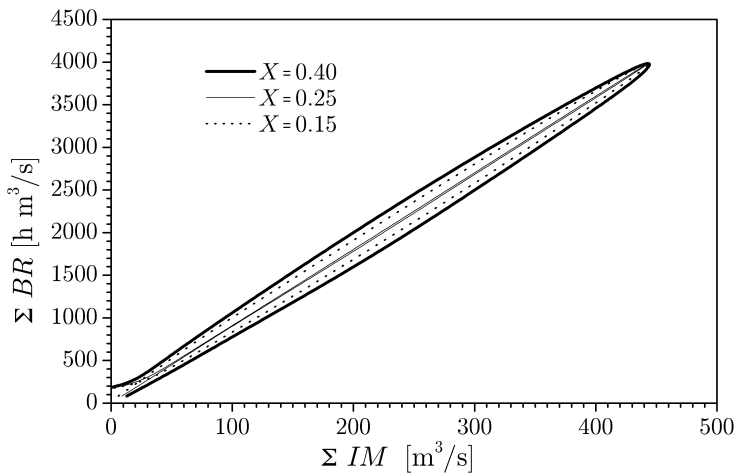
U korišćenju metode Maskingam treba voditi računa o tome da se optimizirane vrednosti parametara mogu koristiti za prognozu transformacije isključivo onih talasa koji su po svojim karakteristikama (protocima i zapreminama) *slični* talasima koji su poslužili za kalibraciju modela. U tome se sastoji ozbiljno ograničenje primene metode Maskingam i njoj sličnih metoda.

5.5.4.3 Metoda Maskingam-Kenž

Rečeno je da se u metodi Maskingam vrednosti parametara X i K smatraju konstantnim za datu deonicu. Francuski hidrauličar Kenž (Cunge, 1969) je pokazao

Tabela 5.8: Optimizacija vrednosti parametara metode Maskingam.

t	Protok		BR	ΣBR	X = 0.15		X = 0.25		X = 0.40	
	Q _{ul}	Q _{iz}			IM	ΣIM	IM	ΣIM	IM	ΣIM
[h]	[m ³ /s]		[h m ³ /s]		[m ³ /s]					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	30	30	84	84	6	6	9	9	13	13
6	60	32	282	366	28	34	32	41	37	50
12	120	54	525	891	53	87	58	98	64	114
18	210	101	774	1665	86	173	90	188	96	210
24	330	181	873	2538	96	269	95	284	94	305
30	420	278	756	3294	87	356	84	368	79	384
36	480	370	540	3834	64	420	60	428	54	438
42	510	440	210	4044	30	450	23	450	12	450
48	480	480	-165	3879	-13	437	-19	431	-27	423
54	420	475	-477	3402	-48	388	-53	378	-61	362
60	330	434	-762	2640	-81	307	-86	293	-92	270
66	210	360	-873	1767	-98	210	-97	196	-95	174
72	120	261	-750	1017	-87	122	-84	112	-79	95
78	60	169	-534	483	-64	58	-60	52	-54	41
84	30	99	-285	198	-37	22	-32	20	-26	15
90	30	56	-78	120	-52	-30	-50	-30	-46	-30



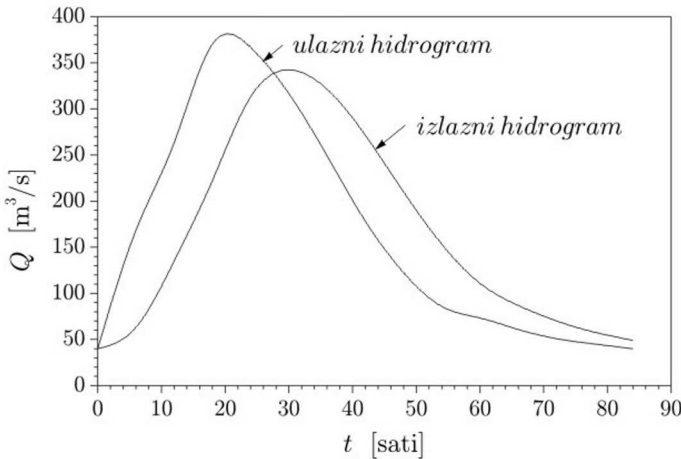
Slika 5.29: Grafičko određivanje vrednosti koeficijena metode Maskingam.

Tabela 5.9: Rezultati proračuna transformacije poplavnog talasa pomoću metode Maskingam.

t [h]	6	12	18	24	30	36	42
Q_u [m ³ /s]	40	180	250	400	370	320	250
Q_i [m ³ /s]	40,00	50,77	135,68	217,57	327,53	349,82	326,08

(nastavak)

t [h]	48	54	60	66	72	78	84	90
Q_u [m ³ /s]	175	120	80	75	60	50	45	40
Q_i [m ³ /s]	273,49	208,65	151,02	106,93	86,13	69,28	57,03	49,24



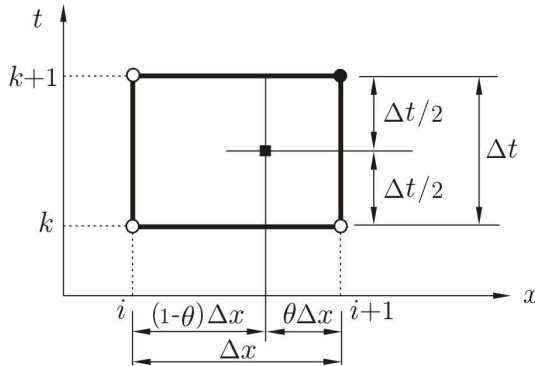
Slika 5.30: Rezultati proračuna transformacije poplavnog talasa pomoću metode Maskingam.

da je metoda Maskingam specijalni slučaj diskretizovane jednačine kinematičkog talasa. Formuliseo je izraze za parametre X i K u zavisnosti od karakteristika rečnog korita, tako da se vrednosti tih parametara menjaju duž toka i računaju u svakom trenutku po profilima, kao ostale hidrauličke veličine [37].

Aproksimacijom izvoda u jednačini kontinuiteta (5.102) (Slika 5.31):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{\theta(Q_i^{k+1} - Q_i^k) + (1 - \theta)(Q_{i+1}^{k+1} - Q_{i+1}^k)}{\Delta t} \quad (5.124)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{(Q_{i+1}^k + Q_{i+1}^{k+1}) - (Q_i^k + Q_i^{k+1})}{2 \Delta x}, \quad (5.125)$$



Slika 5.31: Diskretizacijska shema za metodu Maskingam-Kenž.

dobija se posle sredjivanja, izraz identičan izrazu (5.121):

$$Q_{i+1}^{k+1} = C_1 Q_i^{k+1} + C_2 Q_i^k + C_3 Q_{i+1}^k, \quad (5.126)$$

s tom razlikom što se ovde koristi notacija: $Q_i^k = Q_{ul}^k$, $Q_i^{k+1} = Q_{ul}^{k+1}$, $Q_{i+1}^k = Q_{iz}^k$, $Q_{i+1}^{k+1} = Q_{iz}^{k+1}$ i što izrazi za koeficijente imaju ovaj oblik:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= (-\theta \Delta x/c + \Delta t/2)/C_4 \\ C_2 &= (\theta \Delta x/c + \Delta t/2)/C_4 \\ C_3 &= ((1-\theta) \Delta x/c - \Delta t/2)/C_4 \\ C_4 &= (1-\theta) \Delta x/c + \Delta t/2, \end{aligned} \right\} \quad (5.127)$$

gde je θ - težinski faktor (Slika 5.31), a $c = \sqrt{gA/B}$ - talasna brzina.

Upoređujući izraze (5.122) i (5.127), može se konstatovati da su identični za $X = \theta$ i $K = \Delta x/c$. Sada postaje jasno zašto parametar K predstavlja vreme prostiranja talasa.

Razvojem izraza (5.126) u Tajlorov red i poredjenjem sa jednačinom difuzionog talasa (5.113), može se izvesti ovakav izraz za parametar X (odnosno θ):

$$X = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Q_o}{2 \cdot I_d \cdot B \cdot c \cdot \Delta x} \right), \quad (5.128)$$

gde je Q_o - proizvoljan protok, I_d - lokalni nagib dna, a B - širina ogleđala. Iz (5.128) se vidi da parametar X (odnosno θ) predstavlja faktor ublaženja talasa, jer je preko geometrije i trenja fizički vezan za karakteristike vodotoka.

Kako se vrednosti oba parametra metode Maksingam-Kenž prilagodjavaju tokom proračuna uslovima tečenja i karakteristikama deonice, ova metoda ima opštiji karakter od originalne metode Maskingam sa fiksnim vrednostima koeficijenata. Računski algoritam ima sledeći tok:

- (1) Proračunom izvoda dQ/dA za ustaljeno jednoliko tečenje, sračuna se zavisnost $c = c(Q_o)$, za niz proizvoljno zadatih protoka Q_o . Rezultati, memorisani u tabelarnom obliku, predstavljaju pripremu za proračun neustaljenog tečenja, kada se za bilo koju trenutnu vrednost protoka, interpolacijom lako može odrediti odgovarajuća vrednost brzine c .
- (2) Za izabrani korak Δt računaju se u svakom profilu vrednosti θ i c (odnosno X i K), na bazi tekuće vrednosti protoka/kote nivoa u tom profilu.
- (3) Računaju se vrednosti koeficijenata (5.127), pri čemu ove moraju biti pozitivne, a njihov zbir jednak jedinici.
- (4) Primenom formule (5.126), računaju se vrednosti protoka u nizvodnom profilu, na osnovu poznate (već sračunate) vrednosti u uzvodnom profilu.
- (5) Kote nivoa se računaju iz diskretizovane jednačine kontinuiteta (5.10), prema sledećoj shemi konačnih razlika:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} \approx \frac{Z_{i+1/2}^{k+1} - Z_{i+1/2}^k}{\Delta t} \quad (5.129)$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{\frac{1}{2}(Q_{i+1}^k + Q_{i+1}^{k+1}) - \frac{1}{2}(Q_i^k + Q_i^{k+1})}{B_{i+1/2}^k \Delta x}, \quad (5.130)$$

odakle sledi:

$$Z_{i+1/2}^{k+1} = Z_{i+1/2}^k - \frac{Q_{i+1}^{k+1} + Q_{i+1}^k - Q_i^{k+1} - Q_i^k}{2 B_{i+1/2}^k \Delta x} \Delta t. \quad (5.131)$$

Kako indeks „ $i + 1/2$ ” označava profil na polovini odstojanja Δx između profila „ i ” i „ $i + 1$ ”, proizilazi da se kota nivoa računa na sredini kontrolne zapremine, dok se protoci računaju na njenim granicama¹².

Metoda Maksingam-Kenž je pogodna za proračun neustaljenog tečenja u *silovitom* režimu, bez uticaja uspora usled pritoke, brane itd. Ova metoda se može uspešno koristiti za bujične vodotoke sa nagibom dna $I_d > 1\%$ i poplavne talase sa strmom, kratkotrajnom uzlaznom granom hidrograma (30÷60 min).

¹²Pristup po kome se koriste dve „smaknute” računске mreže – jedna za protok, a druga za kotu nivoa, ima određene prednosti u pogledu očuvanja mase i karakterističan je za takozvane „konzervativne” računске sheme [78].

Proračun je stabilan za vrednosti $0 < \theta < 0,5$, pri čemu se ublaženje talasa povećava sa smanjenjem vrednosti θ ; za $\theta = 0,5$, nema ublaženja, talas se translatorno pomera duž vodotoka. Najveći razmak profila Δx određuje se iz uslova da vrednost θ ne sme biti negativna, ili na osnovu iskustvenog kriterijuma [52]:

$$\Delta x \leq c \frac{t_p}{2\theta}, \quad (5.132)$$

gde je t_p - vreme dostizanja maksimalnog ulaznog protoka. Za usvojenu vrednost Δx , vremenski korak se usvaja iz uslova $Cr < 1 \div 2$ [37].

■ **Primer 5.6.** Odrediti pod kojim uslovima će metoda Maskingam-Kenž dati identične rezultate kao metoda kinematičkog talasa.

Rešenje. Ako se u jednačine kefcijenata (5.127) zamene vrednosti težinskog faktora $\theta = 0,5$ i broja $Cr = c\Delta t/\Delta x = 1$, dobija se: $C_1=0$, $C_2=1$, $C_3=0$, a iz (5.126) sledi: $Q_{i+1}^{k+1}=Q_i^k$. Ova jednakost opisuje model kinematičkog talasa, po kome nema ublaženja talasa duž rečne deonice.

* * *

Na osnovu datog prikaza uprošćenih metoda proračuna neustaljenog tečenja, može se konstatovati da ove metode imaju opravdanje u preliminarnim analizama, u situacijama kada je potrebno brzo doći do rezultata, ili u slučajevima kada nema topografskih i drugih podloga koje zahteva model sa kompletnim jednačinama.

5.6 Ravanski tokovi

Kada nema privilegovanog pravca tečenja, kao na primer pri tečenju po inundacijama (Slika 5.32), ili kada se želi preciznija strujna slika u okolini nekog objekta u koritu, primenjuju se računski modeli ravanskog (prostorno dvodimenzionog) tečenja.



Slika 5.32: *Poplava na Tamišu kod Tomaševca (1999).*

Jednačine ravanskog tečenja mogu se izvesti *osrednjavanjem brzine po dubini* [78]. Ove jednačine se mogu shvatiti kao rezultat proširenja originalnih San Venanovih jednačina na još jednu prostornu dimenziju (pravac y). Sistem, koji čine jednačine održanja mase i količine kretanja u pravcima (x, y) , može se prikazati u vektorskom obliku:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad (5.133)$$

ili u skraćenoj notaciji:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{E}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad (5.134)$$

gde je:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{Bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{Bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{Bmatrix} \quad (5.135)$$

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -gh(I_{ox} - I_{tx}) \\ -gh(I_{oy} - I_{ty}) \end{Bmatrix} \quad (5.136)$$

$$I_{dx} = \frac{\partial z_d}{\partial x}; \quad I_{dy} = \frac{\partial z_d}{\partial y} \quad (5.137)$$

$$I_{ex} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}; \quad I_{ey} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}. \quad (5.138)$$

Sistem (5.133), odnosno (5.134) rešava se po dubini h (odnosno koti nivoa Z) i jediničnim protocima uh i vh , što predstavlja rešenje strujnog polja u *horizontalnoj ravni*. Lokalni nagibi dna u oba pravca (I_{dx}, I_{dy}) računaju se na osnovu zadate topografije korita.

Navedeni način formulisanja osnovnih jednačina pogodan je i za proračun talasa sa strmim čelom. Jedna od numeričkih shema metode konačnih razlika koja se često koristi u analizi ravanskih tokova, posebno onih sa naglim promenama protoka i nivoa, je eksplicitna shema Mak Kormak (MacCormack) [78]. Ova shema ima dve etape. U prvoj „prediktor” etapi se (kao što naziv kaže) predviđaju vrednosti zavisno promenljivih na osnovu poznatih vrednosti sa prethodnog vremenskog nivoa. U drugoj, „korektor” etapi se koriguju vrednosti iz „prediktor” etape. Definitivno rešenje se dobija osrednjavanjem, kao što pokazuju izrazi u nastavku.

- Prediktor:

$$\mathbf{U}_{i,j}^* = \mathbf{U}_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \nabla_x \mathbf{E}_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} \nabla_y \mathbf{F}_{i,j}^k - \Delta t \mathbf{S}_{i,j}^k \quad (5.139)$$

$$(2 \leq i \leq N; \quad 2 \leq j \leq M)$$

- Korektor:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{**} = \mathbf{U}_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_x \mathbf{E}_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta y} \Delta_y \mathbf{F}_{i,j}^* - \Delta t \mathbf{S}_{i,j}^* \quad (5.140)$$

$$(1 \leq i \leq N - 1; \quad 1 \leq j \leq M - 1)$$

- Nove vrednosti:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{i,j}^k + \mathbf{U}_{i,j}^{**}) \quad (5.141)$$

U navedenim izrazima je $\mathbf{U}_{i,j}$ vektor poznatih vrednosti sa vremenskog nivoa (k), $\mathbf{U}_{i,j}^*$ i $\mathbf{U}_{i,j}^{**}$ su vektori vrednosti iz etapa prediktor i korektor, a $\mathbf{U}_{i,j}^{k+1}$ je vektor rešenja na vremenskom nivou ($k+1$). Računska mreža se sastoji od $N \times M$ čvorova.

Operatori prostorne diskretizacije u jednačinama (5.139) i (5.140) su jednostrani i predstavljaju:

(a) razlike unazad:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_x \mathbf{U}_{i,j} &= \mathbf{U}_{i,j} - \mathbf{U}_{i-1,j} \\ \nabla_y \mathbf{U}_{i,j} &= \mathbf{U}_{i,j} - \mathbf{U}_{i,j-1} \end{aligned} \right\} \quad (5.142)$$

(b) razlike unapred:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x \mathbf{U}_{i,j} &= \mathbf{U}_{i+1,j} - \mathbf{U}_{i,j} \\ \Delta_y \mathbf{U}_{i,j} &= \mathbf{U}_{i,j+1} - \mathbf{U}_{i,j} \end{aligned} \right\} \quad (5.143)$$

U etapi korektora se uvek koristi operator konačnih razlika suprotan onom iz etape prediktora. Redosled operatora se može menjati u svakom vremenskom koraku po pravcima x, y ; u Tabeli 5.10 je prikazana jedna sekvenca izmene operatora koja se ponavlja nakon svaka četiri računski koraka. Smisao izmene operatora po pravcima i po vremenu je u tome što se na taj način automatski „prati” pravac i smer prenosa informacija, tako da se istovremeno mogu obuhvatiti *oba režima*

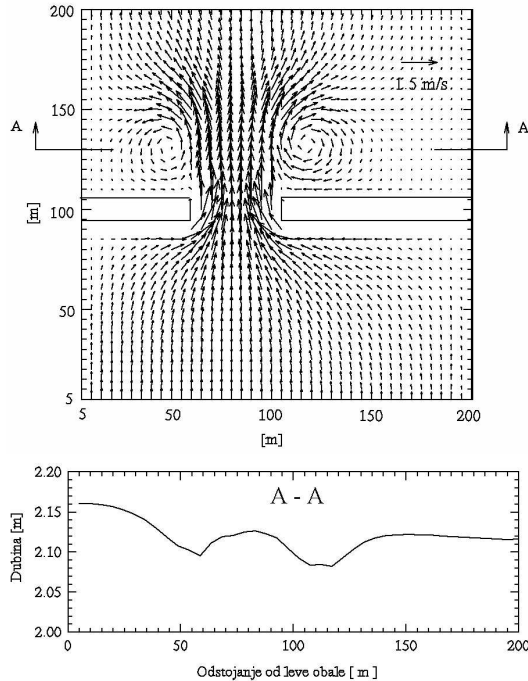
Tabela 5.10: Redosled operatora kanačnih razlika

Vrem. korak	Prediktor		Korektor	
	x	y	x	y
1	∇	∇	Δ	Δ
2	Δ	Δ	∇	∇
3	∇	Δ	Δ	∇
4	Δ	∇	∇	Δ

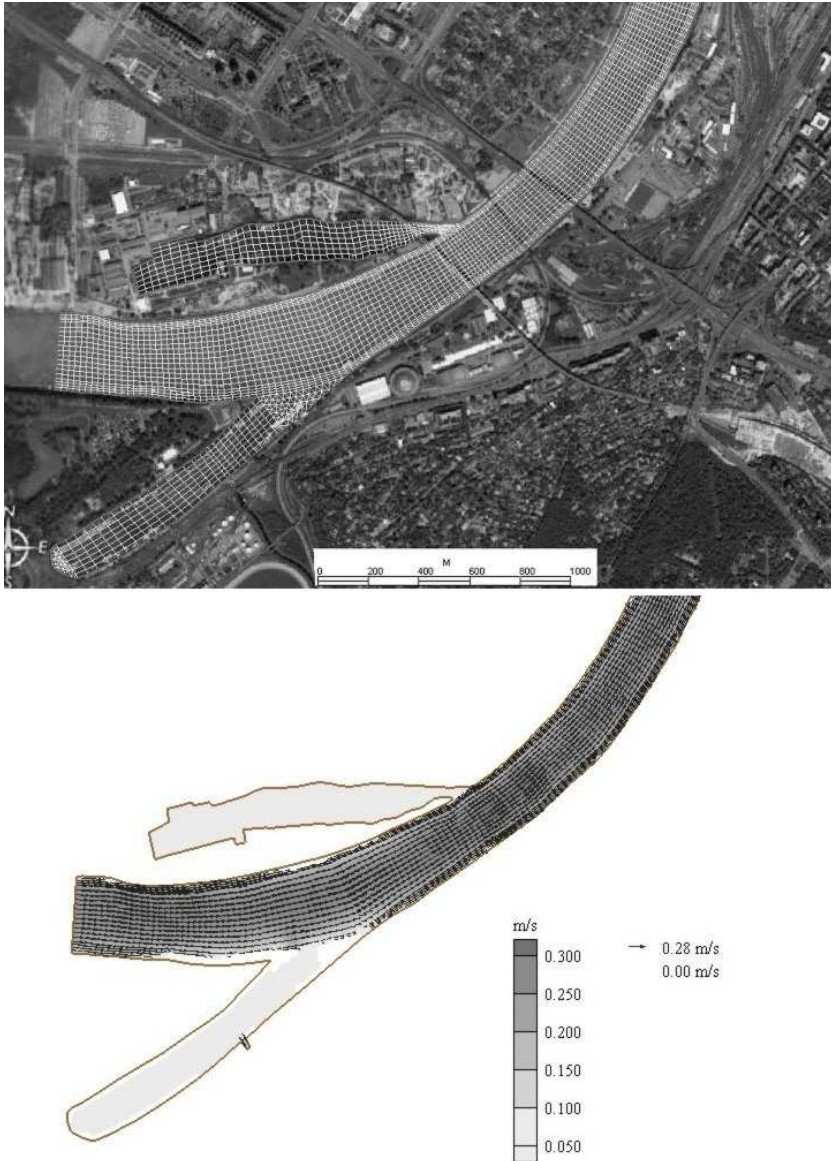
tečenja. Ova sposobnost čini metodu pogodnom za proračun naglo promenljivih tokova (na primer, talasa nastalih rušenjem brana) i tečenja u blizini gradjevina u rečnom koritu (Slika 5.33).

Drugi pristup u rešavanju jednačina ravanskih tokova je zasnovan na metodi konačnih elemenata [78]. Prednost ove metode je u mogućnosti lakšeg i tačnijeg obuhvatanja geometrijski složenih računskih oblasti, kao mogućnost lakog lokalnog povećanja gustine računске mreže u zonama od interesa, kao što se može videti iz primera na Slikama 5.34 i 5.35.

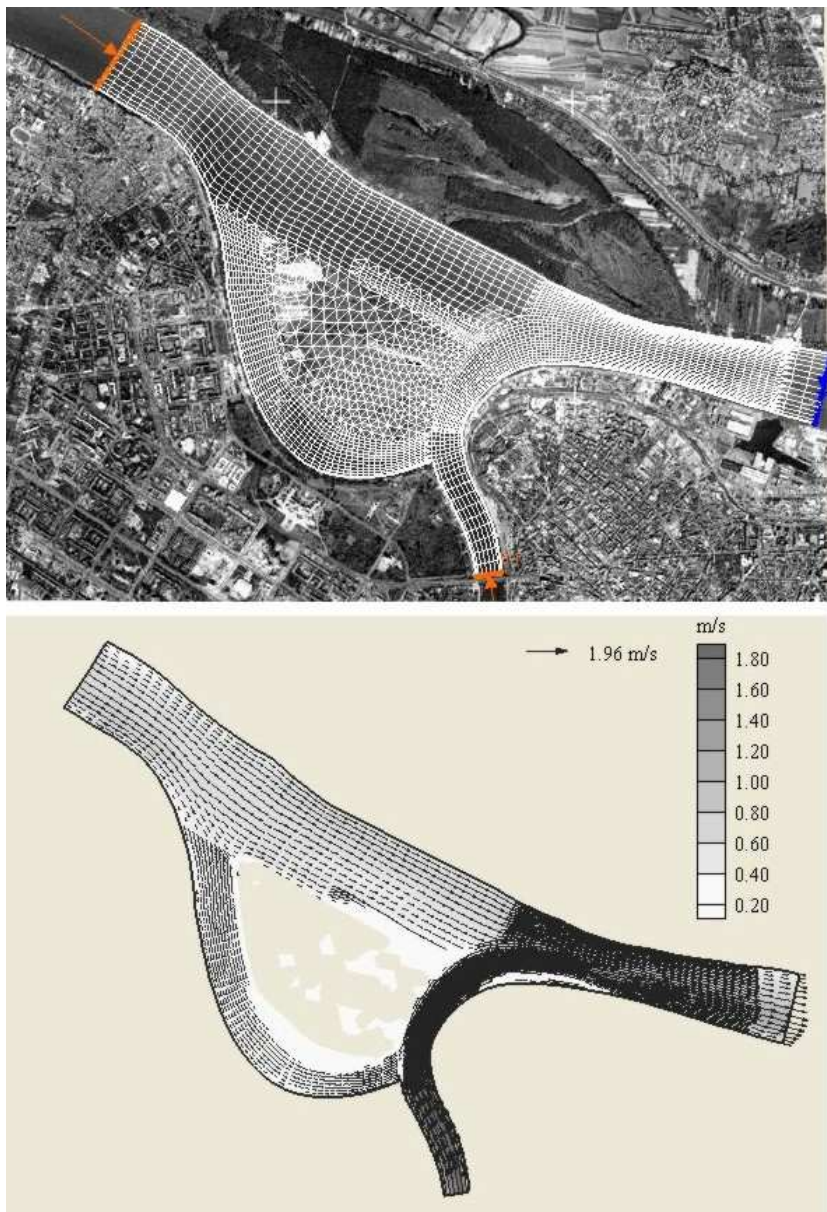
Treba napomenuti da se u novije vreme u praksi sve više koriste i modeli prostornog (trodimenzionog) tečenja za proračun lokalnih strujnih polja.



Slika 5.33: Ravansko tečenje kroz mostovsko suženje [78, 80].



Slika 5.34: Primer korišćenja modela ravanskog tečenja na reci Savi kod Beograda. Gornja slika prikazuje mrežu konačnih elemenata koja je prilagodjena složenom obliku računске oblasti, a njena gustina podešena mestima od posebnog interesa. Donja slika prikazuje sračunato polje brzine, koje se može koristiti za analize transporta zagadjivača, pronosa nanosa, stabilnosti korita, kao i za projektovanje regulacionih radova i ocenu njihovih efekata [85].



Slika 5.35: *Primena modela ravanskog tečenja u proračunu strujnog polja na ušću Save u Dunav, u Beogradu. Numerički model omogućava da se, zadavanjem raznih kombinacija protoka ovih reka, relativno brzo ispita njihov međusobni uticaj na morfološke promene korita [83].*

6

Ustaljeno tečenje u prirodnim vodotocima

U projektovanju regulacionih radova i gradjevina, proračuni se najčešće obavljaju pod pretpostavkom ustaljenog tečenja. U ovom poglavlju se razmatraju metode proračuna linijskih ustaljenih tokova i u tom kontekstu, niz specifičnih problema vezanih za složeni presek korita, kalibraciju otpora, prisustvo gradjevina i grananje tokova.

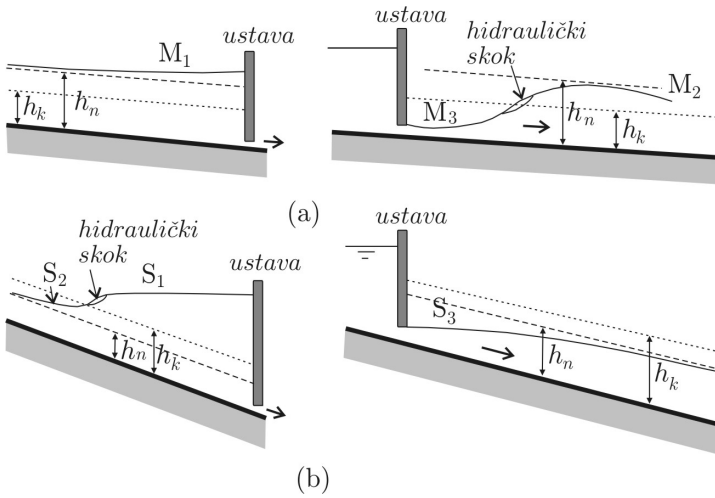
6.1 Podela ustaljenih tokova

Ako se u nekom vremenskom periodu hidrauličke veličine sporo menjaju, može se pretpostaviti da je u tom periodu tečenje *ustaljeno*. U zavisnosti od prostornog rasporeda hidrauličkih veličina, ustaljeno tečenje može biti *jednoliko* (uniformno), ili *nejednoliko* (neuniformno).

Jednoliko tečenje podrazumeva da nema hidrauličkih promena duž toka. Može se ostvariti samo ako je korito dugačko i prizmatično, a uzdužni nagib dna konstantan. Iako je takvo tečenje retko u prirodnim vodotocima, u rečnoj hidraulici (posebno u teoriji rečnog nanosa), često se, radi lakšeg proračuna, pretpostavlja jednolik režim tečenja.

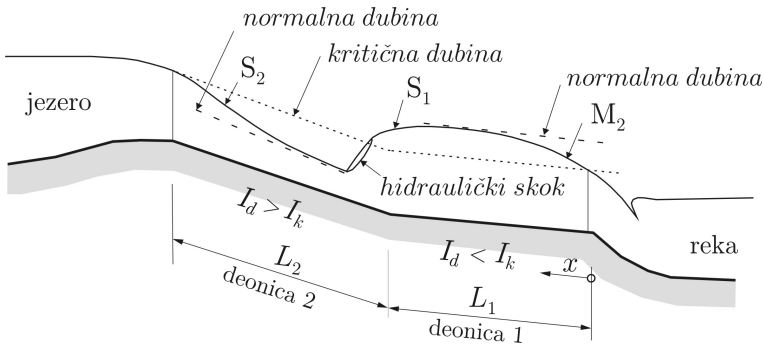
Nejednoliko ustaljeno tečenje podrazumeva da se vrednosti hidrauličkih parametara menjaju duž toka. U zavisnosti od intenziteta promene, može biti „*naglo promenljivo*”, ili „*blago promenljivo*”. Oblik linije nivoa pri datom protoku zavisi kod nejednolikog tečenja od uzdužnog nagiba dna i od graničnih uslova. Na primer, uticaj ustave na oblik linije nivoa u prikazan je na Slici 6.1.

Ako je uzdužni nagib korita manji od kritičnog nagiba ($I_d < I_k$), vlada *mirno* tečenje i normalna dubina je veća od kritične: $h_n > h_k$. Ako je uzdužni nagib veći od kritičnog nagiba ($I_d > I_k$), tečenje je *burno* ($h_n < h_k$). Kritičnom nagibu dna (I_k) odgovara *kritičan* režim tečenja ($h_n = h_k$). Pored navedenih slučajeva, u prirodi se mogu javiti i slučajevi horizontalnog dna ($I_d = 0$) i negativnog nagiba ($I_d < 0$). Sve mogućnosti sumirane su na Slici 6.3 [33, 53].

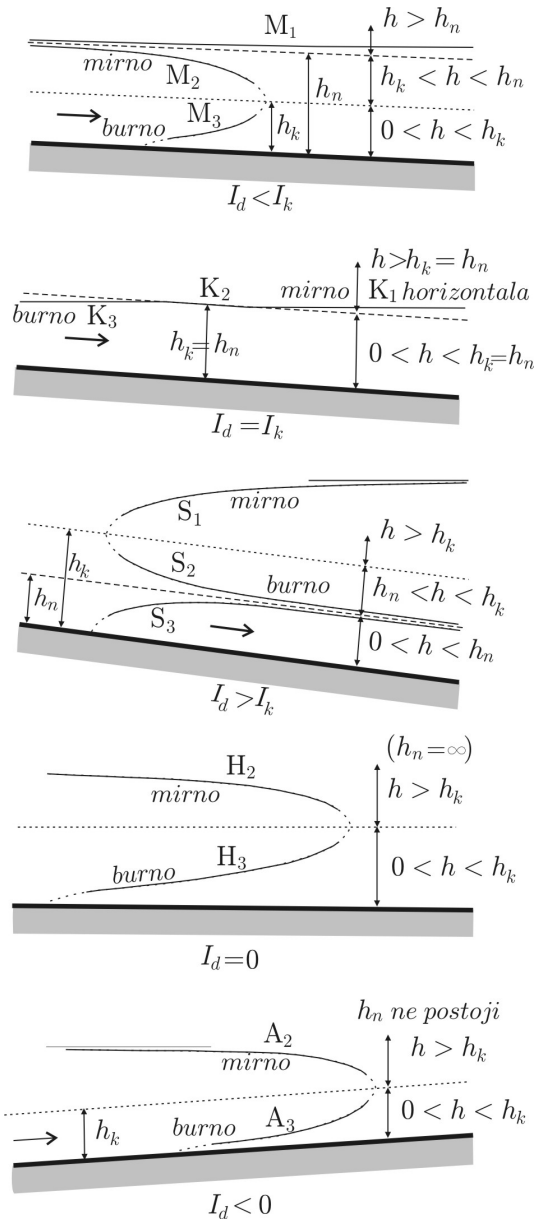


Slika 6.1: Osnovni oblici linija nivoa u (a) mirnom režimu ($I_d < I_k$, $h_n > h_k$) i (b) burnom režimu ($I_d > I_k$, $h_n < h_k$).

Pri proračunima linija nivoa u prirodnim vodotocima, treba voditi računa o spajanju linija nivoa i eventualnoj pojavi hidrauličkog skoka. Tipičan primjer je prikazan na lici 6.2.



Slika 6.2: Primjer spajanja različitih tipova linija nivoa; pre proračuna se mora imati predstava o oblicima linija nivoa po pojedinim deonicama, kao i o tome gdje se može očekivati pojava kritične dubine i hidrauličkog skoka.



Slika 6.3: Pregled linija nivoa u zavisnosti od uzdužnog nagiba dna [33, 53].

6.2 Jednačine linijskog ustaljenog tečenja

Pretpostavka da je tečenje ustaljeno podrazumeva da otpada izvod po vremenu u jednačini (5.15), pa se ova svodi na oblik:

$$\frac{1}{gA} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{dZ}{dx} + I_e = 0. \quad (6.1)$$

Za proračun ustaljenog tečenja u prirodnim vodotocima, uobičajeno je da se umesto diferencijalne jednačine održanja količine kretanja (6.1), rešava algebarska jednačina održanja energije – Bernulijeva¹ jednačina, jer je tada proračun manje osetljiv na neprizmatičnost korita i dopušta duži računski korak.

Prelaz sa jednačine količine kretanja na jednačinu energije se lako ostvaruje, jer je prvi član u izrazu (6.1) ekvivalentan: $d(V^2/2g)/dx$, a ako se uvede korekcija za neravnomernost brzine po poprečnom preseku: $d(\alpha \cdot V^2/2g)/dx$, jednačina (6.1) se svodi na:

$$\frac{d}{dx} \left(Z + \frac{\alpha V^2}{2g} \right) + I_e = \frac{dE}{dx} + I_e = 0, \quad (6.2)$$

gde je $E = Z + \alpha V^2/(2g)$ – ukupna energija toka po jedinici težine fluida.

Integracijom od profila x_i do profila x_{i+1} (Slika 6.4), dobija se:

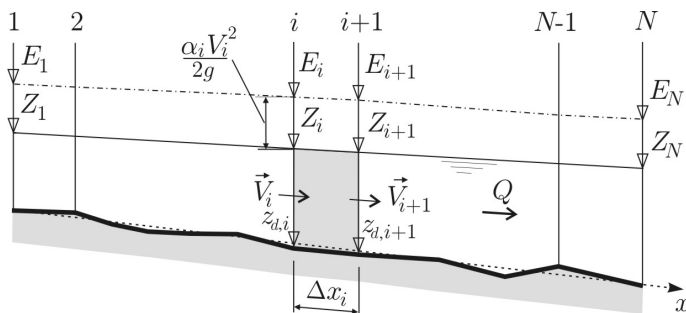
$$E_i = E_{i+1} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} I_e dx \approx E_{i+1} + \bar{I}_e \cdot \Delta x_i, \quad (6.3)$$

gde je \bar{I}_e – srednji nagib linije energije izmedju datih profila, a $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, razmak tih profila.

Osrednjavanje nagiba linije energije može se obaviti pravilom aritmetičke, geometrijske ili harmonijske sredine:

$$\bar{I}_e = \begin{cases} \frac{1}{2} [(I_e)_i + (I_e)_{i+1}] = 1/2 [(Q/K)_i^2 + (Q/K)_{i+1}^2] \\ \sqrt{(I_e)_i \cdot (I_e)_{i+1}} = \sqrt{(Q/K)_i^2 \cdot (Q/K)_{i+1}^2} \\ \frac{2(I_e)_i \cdot (I_e)_{i+1}}{(I_e)_i + (I_e)_{i+1}} = \frac{2(Q/K)_i^2 \cdot (Q/K)_{i+1}^2}{(Q/K)_i^2 + (Q/K)_{i+1}^2}. \end{cases} \quad (6.4)$$

¹Daniel Bernoulli (1700 - 1782), švajcarski matematičar i hidrauličar, jedan je od utemeljivača hidrodinamike. Njegov otac i učitelj, Johann Bernoulli, bio je takodje slavan matematičar. D. Bernuli je osvojio 10 nagrada francuske Akademije nauka (prvu sa 24 godine), za radove iz astronomije i pomorske hidraulike. Autor je prve knjige iz hidrodinamike, koja je napisana i 1738. godine izdata u Sankt Petersburgu, za vreme njegovog višegodišnjeg boravka u Rusiji, gde je predavao matematiku.



Slika 6.4: Oznake koje se primenjuju u Bernulijevoj jednačini.

Alternativno se može koristiti ovakav izraz [72]:

$$\bar{I}_e = \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{K}} \right)^2 = \left(\frac{Q_i + Q_{i+1}}{K_i + K_{i+1}} \right)^2. \quad (6.5)$$

Ako se primeni pravilo aritmetičke sredine, Manningov koeficijent shvati kao koeficijent otpora deonice i pretpostavi da nema usputne promene protoka, može se za bilo koji par susednih profila napisati Bernulijeva jednačina (6.3) u razvijenom obliku:

$$Z_i + \frac{\alpha_i V_i^2}{2g} = Z_{i+1} + \frac{\alpha_{i+1} V_{i+1}^2}{2g} + \frac{(nQ)^2}{2} \left[\frac{1}{A_i^2 R_i^{4/3}} + \frac{1}{A_{i+1}^2 R_{i+1}^{4/3}} \right] \Delta x_i. \quad (6.6)$$

Poslednji član na desnoj strani ove jednačine predstavlja *linijski* gubitak energije ΔE_t . Da bi se obuhvatili i *lokalni* gubici energije usled neprizmatičnosti korita, desnoj strani jednačine (6.6) se može dodati član:

$$\Delta E_l = \xi \left| \frac{\alpha_{i+1} V_{i+1}^2}{2g} - \frac{\alpha_i V_i^2}{2g} \right|, \quad (6.7)$$

u kome je ξ – koeficijent lokalnog gubitka (Tabela 6.1).

Tabela 6.1: Vrednosti koeficijenta lokalnog gubitka energije ξ [72]; u „suženju” korita nizvodna brzinska visina $V^2/(2g)$ je veća od uzvodne, a u „proširenju” je obrnuto.

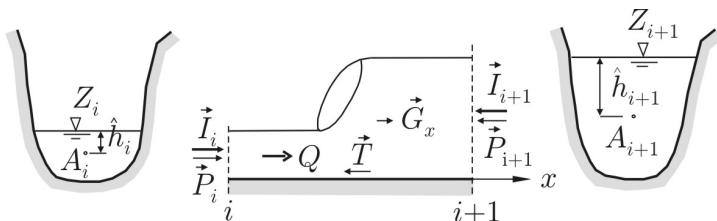
Tip geometrijske promene	Suženje	Proširenje
postepen prelaz	0,1	0,3
tipični mostovski profil	0,3	0,5
nagli prelaz	0,6	0,8

Energetska jednačina (6.6) se koristi za određivanje svih tipova linija nivoa koji su prikazani na Slici 6.3, u mirnom ili burnom režimu tečenja. Međutim, ne može se koristiti u slučaju nagle promene kote nivoa, kao na primer kod hidrauličkog skoka, kaskada i drugih objekata u koritu, gde nije zadovoljen osnovni uslov Bernulijeve jednačine – *paralelnost strujnica* i *hidrostatički raspored pritiska* po dubini. Kada ovaj uslov nije zadovoljen, mora se primeniti jednačina *ravnoteže sila*, odnosno jednačina održanja količine kretanja u pogodno napisanom obliku.

Ravnoteža sila koje deluju u pravcu toka na fluid unutar kontrolne zapremine, izabrane tako da obuhvati hidraulički skok (Slika 6.5), opisuje se jednačinom:

$$\rho \cdot Q \cdot (\beta_i V_i - \beta_{i+1} V_{i+1}) + P_i - P_{i+1} + G_x - T = 0, \quad (6.8)$$

u kojoj prvi član predstavlja razliku intenziteta inercijalnih sila ($I_i - I_{i+1}$), sledeća dva člana, razliku sila pritiska, a poslednja dva, komponentu težine vode u pravcu toka i silu trenja po obimu kontrolne zapremine.



Slika 6.5: Kontrolna zapremina u analizi hidrauličkog skoka.

Ako se zanemare uzdužni nagib dna i trenje (radi se o kratkoj deonici) i pretpostavi $\beta_i = \beta_{i+1} \approx 1,0$, dolazi se do izraza:

$$\frac{Q^2}{g A_i} + A_i \cdot \hat{h}_i = \frac{Q^2}{g A_{i+1}} + A_{i+1} \cdot \hat{h}_{i+1}, \quad (6.9)$$

koji pokazuje da su vrednosti *funkcije skoka* ispred i iza skoka jednake. Kako ova funkcija obuhvata uticaj sile inercije (dinamička komponenta) i sile pritiska (statička komponenta), nije čudno da se u literaturi na engleskom jeziku za veličinu:

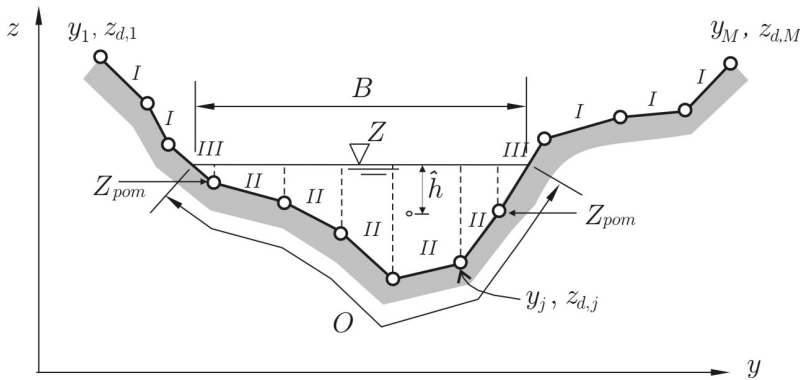
$$f_s = \frac{Q^2}{g A} + A \cdot \hat{h}, \quad (6.10)$$

koristi termin „*specifična sila*” [13, 117].

Kombinovanim korišćenjem jednačina (6.6) i (6.9) mogu se rešavati sve vrste blago promenljivih i naglo promenljivih ustaljenih tokova.

6.3 Geometrijski elementi poprečnog preseka

Poprečni profili prirodnih vodotoka su zamišljene ravni postavljene upravno na strujnice. Proizvoljnog su oblika, koji je određen nizom tačaka sa zadatim koordinatama (y, z_d) . Vrednosti geometrijskih veličina koje ulaze u proračun linije nivoa određuju se u svakom profilu na osnovu njegovih koordinata i poznate kote nivoa Z . U zavisnosti od položaja nivoa vode, moguća su tri tipa „geometrijskih segmenata” – delova poprečnog preseka između zamišljenih vertikalna povučениh iz koordinatnih tačaka (Slika 6.6).



Slika 6.6: Poprečni presek prirodnog vodotoka i tipovi geometrijskih segmenata: I - segment iznad kote nivoa, II - segment ispod kote nivoa, III - „granični” segment.

Ako se između susednih tačaka pretpostavi linearna promena kote dna z_d , geometrijske veličine poprečnog preseka se dobijaju sabiranjem po segmentima [135]:

$$B = \sum_{j=1}^{M-1} B_j; \quad B_j = \begin{cases} I: & 0 \\ II: & y_{j+1} - y_j \\ III: & (y_{j+1} - y_j) \frac{Z - Z_{pom}}{|(z_d)_{j+1} - (z_d)_j|} \end{cases} \quad (6.11)$$

$$A = \sum_{j=1}^{M-1} A_j; \quad A_j = \begin{cases} I: & 0 \\ II: & B_j \left\{ Z - \frac{1}{2} [(z_d)_j + (z_d)_{j+1}] \right\} \\ III: & B_j \frac{1}{2} (Z - Z_{pom}) \end{cases} \quad (6.12)$$

$$O = \sum_{j=1}^{M-1} O_j; \quad O_j = \begin{cases} I: & 0 \\ II: & \sqrt{B_j^2 + [(z_d)_{j+1} - (z_d)_j]^2} \\ III: & \sqrt{B_j^2 + (Z - Z_{pom})^2} \end{cases} \quad (6.13)$$

Hidraulički radijus profila je jednak $R = A/O$.

Tip segmenta se određuje iz uslova (Slika 6.6):

$$I: \quad (Z - (z_d)_j)(Z - (z_d)_{j+1}) > 0 \quad Z < (z_d)_j;$$

$$II: \quad (Z - (z_d)_j)(Z - (z_d)_{j+1}) > 0 \quad Z > (z_d)_j;$$

$$III: \quad (Z - (z_d)_j)(Z - (z_d)_{j+1}) \leq 0,$$

pri čemu se pomoćna kota Z_{pom} za tip *III* definiše na ovaj način:

$$Z_{pom} = \begin{cases} (z_d)_{j+1} & (z_d)_j \geq (z_d)_{j+1} \\ (z_d)_j & (z_d)_{j+1} > (z_d)_j \end{cases} \quad (6.14)$$

Odstojanje težišta preseka do slobodne površine se računa po izrazu:

$$\hat{h} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^{M-1} A_j \cdot \hat{h}_j, \quad (6.15)$$

gde je \hat{h}_j - težišno odstojanje segmenta.

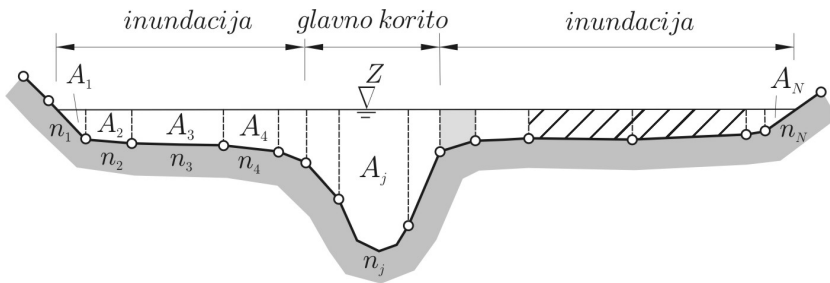
6.4 Hidraulički parametri složenog preseka

U prethodnom poglavlju je pokazano da složeni presek, koji obuhvata glavno korito i inundacije, predstavlja tri hidraulički izdvojena dela po kriterijumu rapavosti. U opštem slučaju, poprečni presek prirodnog korita može biti izdvojen na proizvoljan broj hidraulički homogenih delova – „hidrauličkih segmenata” (Slika 6.7), kako bi se što tačnije obuhvatio uticaj neravnomernosti protoka i brzine koji proizilazi iz neuniformnog rasporeda rapavosti po okvašenom obimu.

Broj hidrauličkih segmenata zavisi od procene, kao i obima i kvaliteta ulaznih podataka. Najgrublja podela podrazumeva dva ili tri segmenta – glavno korito i jednu, odnosno dve inundacije. Najfinija podela je kada su geometrijski segmenti istovremeno i hidraulički segmenti, pa ih je ukupno $M - 1$, gde je M broj tačaka kojima je definisan profil (segment između dve susedne tačke). Između ta dva ekstremna slučaja, broj segmenata se usvaja u zavisnosti od položaja onih tačaka u kojima se menja rapavost korita (Slika 6.7).

Pretpostavljajući da je nivo u poprečnom profilu *horizontalan*, a uzdužni nagib linije energije *isti* za sve segmente², može se zamisliti da je protok u profilu jednak

²Ove pretpostavke proizilaze iz uslova da računski model linijskog toka ne može obuhvatiti izmenu količine kretanja u poprečnom (y) pravcu. Drugim rečima, kroz zamišljene vertikalne granice segmenata nema prenosa tangencijalnog napona, niti te granice ulaze u proračun okvašenog obima i hidrauličkog radijusa.



Slika 6.7: Podela poprečnog preseka na segmente; puna šrafura: geometrijski segment je istovremeno hidraulički segment; kosa šrafura: hidraulički segment, određen prema rapavosti korita, obuhvata dva geometrijska segmenta.

zbiru protoka po njegovim delovima:

$$Q = \sum_{j=1}^{M-1} Q_j = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{1}{n_j} A_j R_j^{2/3} I_e^{1/2} = \sum_{j=1}^{M-1} K_j \cdot I_e^{1/2}. \quad (6.16)$$

Podelom na segmente, omogućava se proračun vrednosti korekcionih koeficijenata α i β , koji su teorijski definisani izrazima (2.67) i (2.69):

$$\alpha = \frac{\sum_j V_j^3 A_j}{V^3 A} = \frac{\sum_j K_j^3 / A_j^2}{K^3 / A^2} \quad (6.17)$$

$$\beta = \frac{\sum_j V_j^2 A_j}{V^2 A} = \frac{\sum_j K_j^2 / A_j}{K^2 / A}, \quad (6.18)$$

gde je $V = Q/A$, $A = \sum_j A_j$ i $K = \sum_j K_j$.

Kinetička energija po jedinici težine fluida definisana je u poprečnom preseku složenog oblika na osnovu srednje profilske brzine: $\alpha \cdot V^2/(2g)$, pa je ukupna energija po jedinici težine fluida, kao što je na početku tačke 6.2 pokazano:

$$E = Z + \alpha \frac{V^2}{2g}. \quad (6.19)$$

■ **Primer 6.1.** U Tabeli 6.2 su date koordinate jednog poprečnog profila Velike Morave (km 179+680, Slika 6.10). Protoku od $180 \text{ m}^3/\text{s}$ odgovara u ovom profilu kota nivoa $Z = 111,23 \text{ mm}$. Nagib linije energije iznosi $0,00024$. Presek je podeljen tako da se hidraulički segmenti poklapaju sa geometrijskim segmentima (ukupno 12). U prva tri segmenta (s leva udesno) vrednosti koeficijenta rapavosti

iznose: $0,035 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$, u sledećih šest segmenata: $0,025 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$, a u preostala tri: $0,033 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. Odrediti raspored protoka po segmentima, vrednost koeficijenta α , kao i kotu energije u ovom profilu.

Tabela 6.2: Geometrija profila u primeru 6.1

y [m]	0	20	75	90	110	125
z_d [mmm]	113,00	112,47	110,12	109,66	108,66	107,66

(nastavak)

136	145	150	155	150	220	300
107,56	107,66	108,66	109,66	114,36	114,45	115,00

Rešenje. Rezultati proračuna rasporeda protoka po segmentima su prikazani u Tabeli 6.3. Aktivni segmenti imaju različite energetske kote. Smisao koeficijenta α je da se kota energije za ceo presek odredi pomoću srednje profilske brzine. Na osnovu (6.17) je:

$$\alpha = \frac{(0,278 \times 10^3)^3/14,42^2 + \dots + (0,274 \times 10^2)^3/1,31^2}{(0,163 \times 10^5)^3/221,38^2} = 1,26,$$

a na osnovu (6.19): $E = 111,23 + 1,26 \cdot 0,034 = 111,27 \text{ mmm}$.

Tabela 6.3: Raspored protoka po segmentima u primeru 6.1

Seg.	A [m ²]	B [m]	O [m]	R [m]	n [m ^{-1/3} s]	K [m ³ /s]	Q [m ³ /s]	V [m/s]	E [mmm]
2	14,42	25,98	26,00	0,55	0,035	0,278E+03	3,06	0,21	111,232
3	20,10	15,00	15,01	1,34	0,035	0,698E+03	7,68	0,38	111,237
4	41,40	20,00	20,02	2,07	0,025	0,269E+04	29,59	0,71	111,256
5	46,05	15,00	15,03	3,06	0,025	0,389E+04	42,78	0,93	111,274
6	39,82	11,00	11,00	3,62	0,025	0,376E+04	41,35	1,04	111,285
7	32,58	9,00	9,00	3,62	0,025	0,307E+04	33,83	1,04	111,285
8	15,35	5,00	5,10	3,01	0,025	0,128E+04	14,10	0,92	111,273
9	10,35	5,00	5,10	2,03	0,025	0,664E+03	7,31	0,71	111,255
10	1,31	1,67	2,29	0,57	0,033	0,274E+02	0,30	0,23	111,233
Σ :	221,38	107,65	108,56			0,163E+05	180,00		

6.5 Normalna i kritična dubina u koritu složenog preseka

U analizi nejednolikog režima tečenja, posebno pri definisanju graničnih uslova, neophodno je poznavati vrednosti normalne i kritične dubine, odnosno odgovarajućih kota nivoa.

Normalna dubina se određuje iterativnim rešavanjem jednačine:

$$f_n = Q - K(Z) \sqrt{I_d} = 0, \quad (6.20)$$

gde je I_d - lokalni nagib dna, između posmatranog profila i njemu prvog uzvodnog, odnosno nizvodnog profila. Ako je $I_d \leq 0$, normalna dubina se ne može definisati.

Kritična dubina se, kao što je poznato, određuje iz uslova minimuma specifične energije toka. Karakteristično je za korito složenog preseka da funkcija specifične energije:

$$\mathcal{E} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g A^2}, \quad (6.21)$$

kao i funkcija ukupne energije (6.19), može u zavisnosti od protoka, imati jedan ili više minimuma. Jedan minimum se javlja kada je tok koncentrisan u glavnom koritu ili kada je velika dubina u inundacijama, a više minimuma, kada je, na početku izlivanja vode iz glavnog korita, dubina u inundacijama relativno mala.

Određivanje kritične dubine na osnovu minimuma specifične energije nije jednostavno i ne garantuje tačno rešenje u slučaju složenog korita. Ova dubina se radje računa iz uslova da je vrednost Frudovog broja jednaka jedinici, mada ne postoji opšta saglasnost o tome kako definisati Frudov broj složenog korita. Evo tri predloga.

(i) Najjednostavniji oblik uslova za pojavu kritične dubine je:

$$\text{Fr} = \frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot B}{g \cdot A^3} = 1. \quad (6.22)$$

(ii) Polazeći od uslova minimuma funkcije specifične energije:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{dA}{dh} + \frac{Q^2}{2g A^2} \frac{d\alpha}{dh} = 0, \quad (6.23)$$

a imajući u vidu da je $dA/dh = B$, može se izvesti uslov:

$$\text{Fr}' = \frac{\alpha Q^2 B}{g A^3} - \frac{Q^2}{2g A^2} \frac{d\alpha}{dh} = 1, \quad (6.24)$$

gde je Fr' - Frudov broj složenog korita.

Sve veličine u izrazu (6.24) rutinski se računaju po profilima u sklopu proračuna linije nivoa. To se odnosi i na numerički proračun izvoda: $d\alpha/dh \approx \Delta\alpha/\Delta h$, uz

korišćenje izraza (6.17). U literaturi [13] je pomenuti izvod definisan na sledeći način:

$$\frac{d\alpha}{dh} = \frac{A^2 \sigma_1}{K^3} + \sigma_2 \left(\frac{2AB}{K^3} - \frac{A^2 \sigma_3}{K^4} \right), \quad (6.25)$$

gde je:

$$\sigma_1 = \sum_j \left[\left(\frac{K_j}{A_j} \right)^3 \left(3B_j - 2R_j \frac{dO_j}{dh} \right) \right], \quad (6.26)$$

$$\sigma_2 = \sum_j \left(\frac{K_j^3}{A_j^2} \right), \quad (6.27)$$

$$\sigma_3 = \sum_j \left[\left(\frac{K_j}{A_j} \right) \left(5B_j - 2R_j \frac{dO_j}{dh} \right) \right]. \quad (6.28)$$

Primena navedenih izraza zahteva da se izvod okvašenog obima odredi numerički: $dO/dh \approx \Delta O/\Delta h$. Kada se (6.25) zameni u (6.24) dobija se izraz:

$$Fr' = \frac{Q^2}{2g K^3} \left(\frac{\sigma_2 \cdot \sigma_3}{K} - \sigma_1 \right). \quad (6.29)$$

U literaturi [13, 153] su prikazani rezultati laboratorijske provere izraza (6.29), koji pokazuju da uslov (6.24), odnosno (6.29), daje tačnije vrednosti kritične dubine od uslova (6.22).

(iii) Predlog da se Frudov broj složenog korita definiše osrednjavanjem:

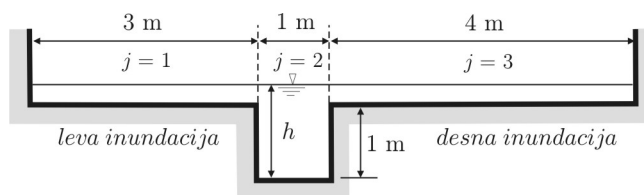
$$\bar{Fr} = \frac{1}{K} \sum_j (K_j \cdot Fr_j) \quad (6.30)$$

nije za preporuku [13], naročito u slučaju kada postoji više od jedne kritične dubine.

Proračun kritične dubine u koritu složenog poprečnog preseka ilustrovaće se sledećim primerom.

■ **Primer 6.2.** Odrediti kritičnu dubinu u prizmatičnom koritu čiji je složeni presek prikazan na Slici 6.8, ako je protok: $Q = 2,5 \text{ m}^3/\text{s}$, a vrednosti Manningovog koeficijenata: $0,027 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ za glavno korito i $0,030 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ za inundacije.

Rešenje. Rezultati proračuna su dati u Tabelama 6.4 i 6.5.



Slika 6.8: Poprečni presek korita u primeru 6.2

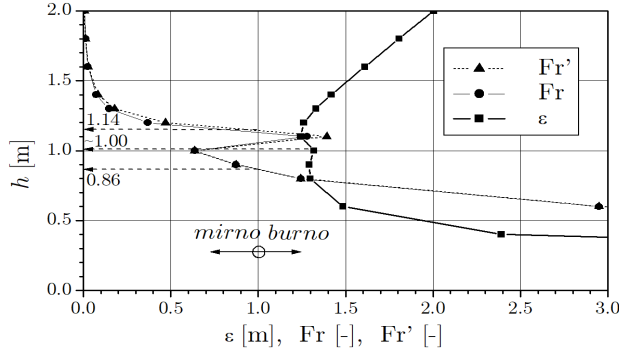
Tabela 6.4: Raspodela praotoka na glavno korito i inundacije.

h [m]	Leva inundacija j = 1				Glavno korito j = 2				Desna inundacija j = 3			
	A [m ³ /s]	O [m]	R [m]	K [m ³ /s]	A [m ³ /s]	O [m]	R [m]	K [m ³ /s]	A [m ³ /s]	O [m]	R [m]	K [m ³ /s]
0,0					0,0	1,0	0,00	0,00				
0,2					0,2	1,4	0,14	2,02				
0,4					0,4	1,8	0,22	5,44				
0,6					0,6	2,2	0,27	9,35				
0,8					0,8	2,6	0,31	13,50				
0,9					0,9	2,8	0,32	15,64				
1,0	0,00	3,0	0,00	0,00	1,0	3,0	0,33	17,81	0,00	4,0	0,00	0,00
1,1	0,30	3,1	0,10	2,11	1,1	3,0	0,37	20,87	0,40	4,1	0,10	2,83
1,2	0,60	3,2	0,19	6,55	1,2	3,0	0,40	24,13	0,80	4,2	0,19	8,83
1,3	0,90	3,3	0,27	12,62	1,3	3,0	0,43	27,57	1,20	4,3	0,28	17,08
1,4	1,20	3,4	0,35	19,98	1,4	3,0	0,47	31,20	1,60	4,4	0,36	27,17
1,6	1,80	3,6	0,50	37,80	1,6	3,0	0,53	38,97	2,40	4,6	0,52	51,85
1,8	2,40	3,8	0,63	58,89	1,8	3,0	0,60	47,43	3,20	4,8	0,67	81,40
2,0	3,00	4,0	0,75	82,55	2,0	3,0	0,67	56,53	4,00	5,0	0,80	114,90

Tabela 6.5: Određivanje kritične dubine u složenom preseku.

B [m]	A [m ²]	K [m ³ /s]	V [m/s]	α [-]	\mathcal{E} [m]	Fr [-]	σ_1 [m ⁴ /s ³]	σ_2 [m ⁵ /s ³]	σ_3 [m ² /s]	Fr' [-]
1,0	0,0	0,00								
1,0	0,2	2,02	12,50	1,00	8,164	79,638	2518,0	207,4	44,823	79,638
1,0	0,4	5,44	6,25	1,00	2,391	9,955	5296,6	1003,6	55,863	9,955
1,0	0,6	9,35	4,17	1,00	1,485	2,950	7214,3	2267,3	60,888	2,950
1,0	0,8	13,50	3,13	1,00	1,298	1,244	8509,9	3848,0	63,626	1,244
1,0	0,9	15,64	2,78	1,00	1,293	0,874	8998,3	4724,1	64,551	0,874
1,0	1,0	17,81	2,50	1,00	1,319	0,637	9408,4	5645,0	65,287	0,637
8,0	1,8	25,80	1,39	1,46	1,244	1,279	17553,6	7758,6	308,240	1,393
8,0	2,6	39,51	0,96	1,27	1,260	0,369	37223,7	11610,9	436,262	0,470
8,0	3,4	57,27	0,74	1,13	1,331	0,146	65265,7	18342,8	533,073	0,179
8,0	4,2	78,34	0,60	1,06	1,419	0,073	99194,6	28862,2	610,969	0,083
8,0	5,8	128,62	0,43	1,01	1,610	0,026	177281,7	63985,3	729,784	0,028
8,0	7,4	187,72	0,34	1,00	1,806	0,013	260249,8	121053,8	815,503	0,013
8,0	9,0	253,98	0,28	1,00	2,004	0,007	341119,3	202475,0	878,737	0,007

Iz grafičkog prikaza rezultata na Slici 6.9 može se konstatovati da datom protoku odgovaraju tri kritične dubine: 0,86 m, 1,0 m i 1,14 m. Funkcija specifične energije ima dva lokalna minimuma kojima odgovaraju dubine 0,86 m i 1,14 m, a lokalni maksimum kome odgovara kritična dubina od 1,0 m. To pokazuje da jedna od tri kritične dubine ne bi bila određena da se primenio isključivo kriterijum minimuma specifične energije.



Slika 6.9: Funkcije specifične energije i Frudovog broja kod složenog korita.

6.6 Proračun linije nivoa

6.6.1 Miran i buran režim tečenja

Jednačina (6.6) se koristi za oba režima tečenja.

(i) U mirnom režimu ($Fr < 1$), zadaje se *nizvodni* granični uslov – kota nivoa u profilu „N” (Slika 6.4), koja odgovara protoku Q . Proračun po koti Z se obavlja od profila do profila, u *uzvodnom* smeru ($Z_N \rightarrow \dots \rightarrow Z_1$).

(ii) U burnom režimu ($Fr > 1$), zadaje se *uzvodni* granični uslov - kota nivoa u profilu „1” (Slika 6.4). Ova kota obično odgovara koti kritične dubine u tom profilu. Proračun se obavlja u *nizvodnom* smeru ($Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_N$).

U oba slučaja se jednačina (6.6) rešava *iterativno*, najčešće metodom sukcesivne zamene (Slika 5.16), ili metodom polovljenja intervala [132, 135].

Postupak sukcesivne zamene je pogodan za miran režim tečenja i blago promenljivu liniju nivoa. Na osnovu (6.6) i (6.7) može se napisati jednačina:

$$Z_i = Z_{i+1} + \frac{\alpha_{i+1} V_{i+1}^2}{2g} - \frac{\alpha_i V_i^2}{2g} + \frac{(nQ)^2}{2} \left[\frac{1}{A_i^2 R_i^{4/3}} + \frac{1}{A_{i+1}^2 R_{i+1}^{4/3}} \right] \Delta x_i + \xi_i \left(\frac{\alpha_{i+1} V_{i+1}^2}{2g} - \frac{\alpha_i V_i^2}{2g} \right). \quad (6.31)$$

Vrednosti svih članova sa indeksom „ $i + 1$ ” su poznate, jer se proračun obavlja u uzvodnom smeru. Jednačina je implicitna, jer veličine V_i , A_i i R_i na njenoj desnoj strani zavise od nepoznate Z_i i nelinearna, jer te zavisnosti imaju složen oblik.

Iteracioni algoritam se sastoji od sledećih koraka:

- (1) U početnoj iteraciji se pretpostavlja $Z_i = Z_{i+1}$.
- (2) Sa ovom kotom se računaju veličine A_i , R_i , $A_i R_i^{2/3}$, V_i , α_i , $V_i^2/2g$.
- (3) Računa se desna strana jednačine (6.31) i dobija neka vrednost Z'_i .
- (4) Ako je razlika $\delta_Z = |Z'_i - Z_i| \leq \varepsilon$, gde je ε - unapred usvojena mala vrednost (prihvatljiva greška, recimo 1 mm), iteracioni postupak je završen, jednakost (6.31) je približno zadovoljena i može se preći na sledeći (uzvodni) profil.
- (5) Ako je $\delta_Z > \varepsilon$, treba staviti $Z_i = Z'_i$ i vratiti se na korak (2).

Metoda zamene je osetljiva na vrednost parametra Δx . Ako su promene kota nivoa male, konvergencija rešenja se brzo postiže, najviše u $2 \div 3$ iteracije. Ako je zakrivljenost linije nivoa izražena (na primer, depresiona linija M_2), neophodno je interpolacijom profila smanjiti računski korak Δx . (U tom slučaju može biti racionalnije koristiti metodu polovljenja intervala [135].)

Interesantno je da se za rešavanje nejednolikog tečenja može postaviti i *sistem* Bernulijevih jednačina čijim se rešavanjem odjednom dobijaju nepoznate kote nivoa u svim profilima. Medjutim, ovaj pristup se retko praktikuje, jer je rešavanje sistema nelinearnih jednačina složeno, a konvergencija rešenja nije uvek zagarantovana.

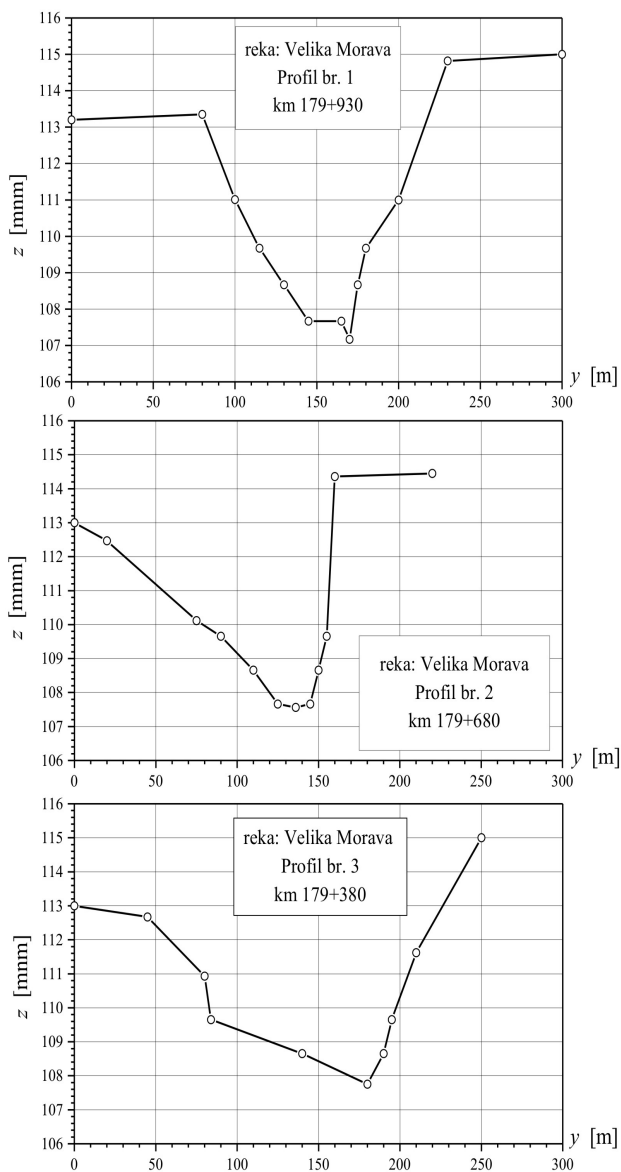
■ **Primer 6.3.** U Tabeli 6.6 su date koordinate (y, z_d) za tri poprečna profila Velike Morave (Slika 6.10). Sračunati liniju nivoa za protok $Q = 180 \text{ m}^3/\text{s}$. Kota nivoa u profilu (3) koja odgovara ovom protoku, iznosi $Z = 111,18 \text{ mm}$. Vrednost koeficijenta otpora deonice je $n = 0,032 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. Lokalni gubici se zanemaruju.

Rešenje. Kompletni rezultati proračuna su dati u Tabeli 6.7, a sračunata linija nivoa je prikazana na Slici 6.11.

6.6.2 Mešoviti režim tečenja

Kao što je rečeno, smer proračuna i položaj graničnog uslova zavise od režima tečenja. Termin „mešoviti režim” označava istovremeno postojanje mirnog i burnog režima tečenja, uz pojavu hidrauličkog skoka.

Za proračun linije nivoa u mešovitom režimu istovremeno se moraju koristiti jednačine održanja energije (6.6) i količine kretanja (6.9). Princip proračuna je da se posebno računaju linije nivoa u mirnom i burnom režimu primenom Bernulijeve jednačine (6.6), vodeći računa o smeru proračuna i graničnim uslovima.



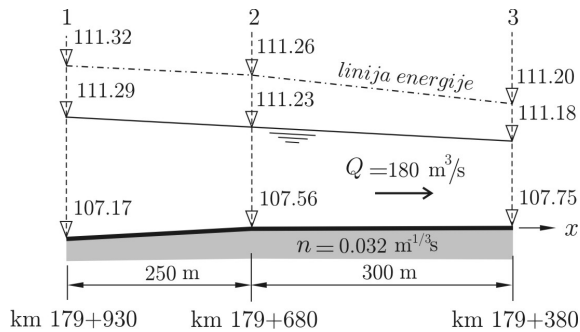
Slika 6.10: Računski profili u primeru 6.3

Tabela 6.6: Koordinate poprečnih profila

Profil br. 1 km 179+930		Profil br. 2 km 179+680		Profil br. 3 km 179+380	
y [m]	z _d [mnm]	y [m]	z _d [mnm]	y [m]	z _d [mnm]
0	113,20	0	113,00	0	113,00
80	113,35	20	112,47	45	112,67
100	111,01	75	110,12	80	110,93
115	109,67	90	109,66	84	109,65
130	108,67	110	108,66	140	108,65
145	107,67	125	107,66	180	107,75
165	107,67	136	107,56	190	108,65
170	107,17	145	107,66	195	109,65
175	108,67	150	108,66	210	111,62
180	109,67	155	109,66	250	115,00
200	111,00	160	114,36		
230	114,82	220	114,45		
300	115,00				

Tabela 6.7: Rezultati proračuna linije nivoa na deonici Velike Morave (linijski i lokalni gubici energije nose oznake „ ΔE_t ” i „ ΔE_l ”)

Profil St. [km]	Z [mnm]	A [m ²]	B [m]	R [m]	h [m]	I _e [-]	V [m/s]	ΔE_t [m]	E [mnm]
	Q [m ³ /s]	K [m ³ /s]	O [m]	n	h _k [m]	I _d [-]	V ² /2g	ΔE_l [m]	Fr
3	111,180	284,79	131,68	2,16	3,43	0,147E-03	0,632	-	111,200
179,380	180,00	0,149E+05	132,10	0,032	1,53	-0,633E-03	0,020	-	0,0188
2	111,228	221,17	107,60	2,04	3,67	0,262E-03	0,814	0,0614	111,262
179,680	180,00	0,111E+05	108,51	0,032	1,64	-0,156E-02	0,034	0,0000	0,0329
1	111,291	231,90	104,68	2,20	4,12	0,215E-03	0,776	0,0597	111,321
179,930	180,00	0,123E+05	105,23	0,032	1,87	0,200E-02	0,031	0,0000	0,0277



Slika 6.11: Računska linija nivoa u primeru 6.3

Položaj hidrauličkog skoka se određuje pomoću jednačine (6.9). Kote nivoa/dubine neposredno ispred i iza skoka („konjugovane” kote/dubine), se iterativno računaju, sve dok jednakost (6.9) ne bude zadovoljena³. Princip proračuna se, radi lakšeg razumevanja, ilustruje primerom u kome je uprošćena geometrija korita.

■ **Primer 6.4.** Odrediti položaj hidrauličkog skoka proračunom linije nivoa u prizmatičnom kanalu pravougaonog poprečnog preseka, čiji je uzdužni profil prikazan na Slici 6.2. Ulazni podaci: $B = 8$ m, $n = 0,013$ m^{-1/3}s, $Q = 50$ m³/s, $L_1 = 1000$ m, $(I_d)_1 = 0,0012$, $L_2 = 400$ m, $(I_d)_2 = 0,0033$.

Rešenje. Pri datom protoku, kritična dubina za obe deonice iznosi $h_k = 1,585$ m. Normalna dubina prve deonice iznosi 1,99 m, a druge, 1,41 m. Proračun linije nivoa se obavlja rešavanjem energetske jednačine, a način rešavanja je prilagodjen prizmatičnom koritu tako što se za *zadate* dubine određuju odgovarajuća odstojanja:

$$\Delta x_i = \frac{[h + V^2/(2g)]_{i+1} - [h + V^2/(2g)]_i}{I_d - \bar{I}_e}, \quad (6.32)$$

pri čemu indeks „*i*” raste u smeru proračuna. Osrednjeni nagib energetske linije usled trenja \bar{I}_e se računa pomoću srednje dubine $(h_i + h_{i+1})/2$. (Za pravougaoni poprečni presek je $\alpha = 1,0$).

Na deonici 1, u mirnom režimu, smer proračuna je uzvodni, počev od kritične dubine kao nizvodnog graničnog uslova: $h(x = 0) = h_k$, a tip linije nivoa je M_2 (Slika 6.2). Na deonici 2 vlada buran režim, pa je smer proračuna nizvodni, opet počev od kritične dubine, kao uzvodnog graničnog uslova: $h(x = 1400) = h_k$. Tip linije nivoa je S_2 . Na nizvodnom kraju deonice 2 je potrebno računati liniju S_1 (miran režim) da bi se odredio položaj hidrauličkog skoka.

Rezultati su prikazani u Tabeli 6.8. Interpolacijom vrednosti funkcije skoka f_s , određen je položaj skoka: $x = 1035$ m (Slika 6.12).

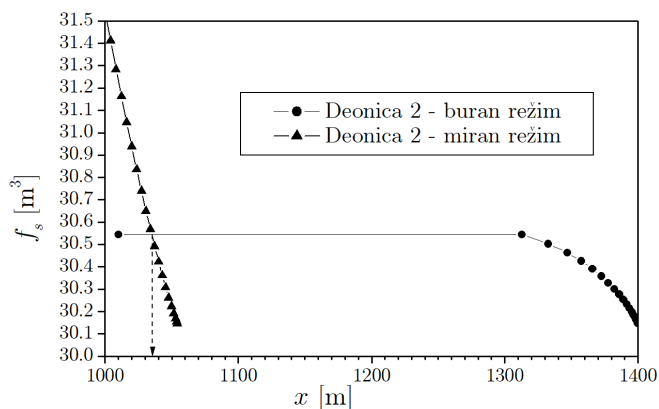
6.7 Odredjivanje vrednosti koeficijenta otpora

Ranije uvedeni termin „koeficijent otpora deonice” označava Manningov koeficijent u kome je sadržano mnoštvo raznih uticaja (apsolutna i aluvijalna rapavost, neprizmatičnost i zakrivljenost korita, vegetacija itd.). Vrednosti ovako definisanog koeficijenta se određuju na osnovu poznatih protoka i odgovarajućih snimljenih linija nivoa. Razmotriće se tri postupka.

³Nove generacije kompjuterskih programa imaju mogućnost proračuna mešovitog režima, tako da se deonice u mirnom i burnom režimu obuhvataju u *istom* računskom prolazu. Rešenje je algoritamski zahtevno zbog potrebe da se stalno ispituje niz uslova i kriterijuma (identifikacija profila koji pripadaju jednom, odnosno drugom režimu, izbor smera proračuna i graničnih uslova po deonicama, ispitivanje vrednosti funkcije f_s da bi odredio položaj skoka itd.).

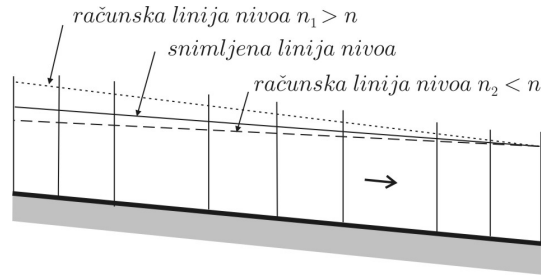
Tabela 6.8: Rezultati proračuna u primeru 6.4

Deonica 1 - miran režim			Deonica 2 - miran režim			Deonica 2 - buran režim		
x [m]	h [m]	f_s [m ³]	x [m]	h [m]	f_s [m ³]	x [m]	h [m]	f_s [m ³]
0,00	1,600	30,150	1000,00	1,953	31,546	1400,00	1,585	30,147
0,12	1,604	30,151	1004,16	1,931	31,412	1399,92	1,576	30,148
0,27	1,607	30,153	1008,24	1,912	31,284	1399,68	1,567	30,151
0,44	1,611	30,155	1012,24	1,893	31,163	1399,26	1,557	30,156
0,64	1,615	30,157	1016,14	1,874	31,047	1398,64	1,548	30,163
0,88	1,618	30,160	1019,94	1,855	30,938	1397,79	1,539	30,173
1,14	1,622	30,163	1023,64	1,836	30,836	1396,69	1,530	30,184
1,43	1,625	30,166	1027,21	1,817	30,740	1395,31	1,521	30,198
⋮	⋮	⋮	1030,66	1,798	30,650	1393,59	1,511	30,214
16,09	1,702	30,303	1033,97	1,779	30,568	1391,50	1,502	30,232
17,28	1,705	30,313	1037,12	1,761	30,492	1388,96	1,493	30,253
18,53	1,709	30,323	1040,09	1,742	30,423	1385,90	1,484	30,276
19,83	1,713	30,333	1042,88	1,723	30,362	1382,21	1,474	30,301
21,19	1,716	30,343	1045,44	1,704	30,308	1377,76	1,465	30,328
502,42	1,935	31,436	1047,77	1,685	30,261	1372,34	1,456	30,358
549,43	1,938	31,462	1049,82	1,666	30,223	1365,69	1,447	30,390
607,99	1,942	31,487	1051,55	1,647	30,192	1357,40	1,438	30,425
685,10	1,945	31,513	1052,92	1,628	30,169	1346,81	1,428	30,463
796,88	1,949	31,539	1053,87	1,609	30,154	1332,76	1,419	30,502
996,69	1,953	31,566	1054,31	1,590	30,147	1312,96	1,410	30,545
1000,00	1,953					1010,00	1,410	30,545



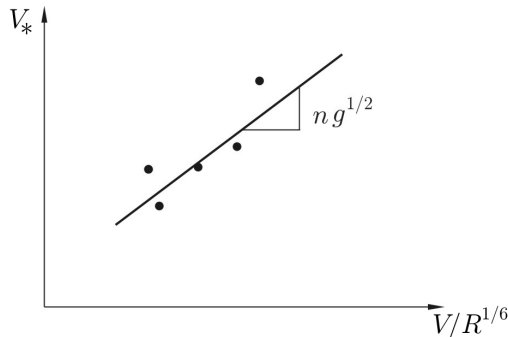
Slika 6.12: Određivanje položaja hidrauličkog skoka.

Metoda probanja. Za nekoliko pretpostavljenih vrednosti koeficijenta otpora, računaju se linije nivoa i upoređuju sa snimljenom linijom. Optimalna je ona vrednost koja daje najbolje slaganje računске i snimljene linije nivoa. Ocena slaganja se može bazirati na metodi najmanjih kvadrata odstupanja po poprečnim profilima, ali je za praktične potrebe dovoljna vizuelna ocena (Slika 6.13).



Slika 6.13: Određjivanje vrednosti koeficijenta otpora metodom probanja; pretpostavljena vrednost n_1 je veća od stvarne vrednosti, jer se računska linija nivoa nalazi iznad snimljene linije; suprotno se može zaključiti za vrednost n_2 ; vrednosti n se variraju dok se ne postigne najbolje poklapanje računске i snimljene linije nivoa.

Metoda regresije. U uslovima blago promenljivog nejednolikog tečenja, vrednost koeficijenta otpora se može proceniti na osnovu korelacije zavisnosti veličina V_* i $V/R^{1/6}$ koja proizilazi iz Manningove jednačine (3.2). Ako je ta veza linearna, vrednost koeficijenta otpora se računa na osnovu nagiba regresione prave (Slika 6.14).



Slika 6.14: Statističko određivanje vrednosti koeficijenta otpora; metoda nije pouzdana kada je broj tačaka (profila) mali.

Direktni postupak. Neka oznake Z_1, \dots, Z_N na Slici 6.4, predstavljaju geodetski snimljene kote nivoa. Vrednost koeficijenta otpora na posmatranoj deonici može se direktno sračunati iz vrednosti $AR^{2/3}$ koje odgovaraju datim kotama nivoa i

razlike energetskih kota $E_1 - E_N = \sum_i \Delta E_i$. Pretpostavljajući da nema usputne promene protoka, niti lokalnih gubitaka energije, tražena vrednost koeficijenta otpora je:

$$n = \frac{1}{Q} \left\{ \frac{E_1 - E_N}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{1}{(AR^{2/3})_i^2} + \frac{1}{(AR^{2/3})_{i+1}^2} \right] \Delta x_i} \right\}^{1/2}. \quad (6.33)$$

■ **Primer 6.5.** Ako se pretpostavi da je linija nivoa sračunata u primeru 6.3 identična snimljenoj liniji nivoa pri protoku $Q = 180 \text{ m}^3/\text{s}$, pokazati pomoću direktnog postupka da je vrednost koeficijenta otpora $n = 0,032 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$.

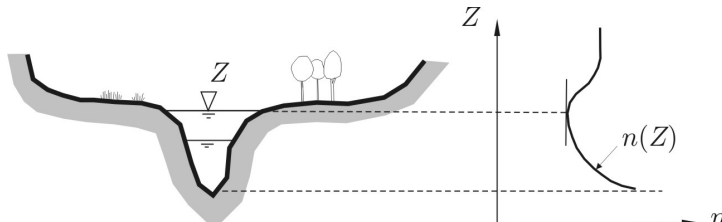
Rešenje. Na osnovu poznatih kota nivoa iz Tabele 6.7, mogu se sračunati vrednosti: $A_1 R_1^{2/3} = 392 \text{ m}^{8/3}$, $A_2 R_2^{2/3} = 356 \text{ m}^{8/3}$ i $A_3 R_3^{2/3} = 476 \text{ m}^{8/3}$.

Primenom izraza (6.33) sledi:

$$n = \frac{1}{180} \left\{ \frac{111,32 - 111,20}{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{392^2} + \frac{1}{356^2} \right] \cdot 250 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{356^2} + \frac{1}{476^2} \right] \cdot 300} \right\}^{1/2} = 0,032 \text{ m}^{-1/3}\text{s}.$$

* * *

Imajući u vidu faktore koji utiču na vrednosti koeficijenta otpora deonice, jasno je da se ove vrednosti menjaju sa protokom, odnosno vodostajem. Na Slici 6.15 prikazan je tipični oblik zavisnosti $n = n(Z)$. Da bi se ovakva zavisnost utvrdila, neophodno je raspolagati sa više snimljenih linija nivoa.



Slika 6.15: Zavisnost koeficijenta otpora od vodostaja; pri niskom vodostaju je veliki uticaj apsolutne rapavosti; sa porastom dubine, taj uticaj opada, tako da najmanjoj vrednosti n odgovara kota nivoa punog glavnog korita; izlivanjem vode u inundacije, otpori trenja ponovo rastu zbog uticaja vegetacije.

6.8 Rečna ušća

Proračun ustaljenog tečenja u zoni rečnih ušća obavlja se na dva načina. Prvi, koji se zasniva na korišćenju jednačine održanja energije, ne uzima u obzir ugao pod kojim se tokovi spajaju. Drugi način, koji taj ugao uzima u obzir, zasniva se na jednačini održanja količine kretanja, odnosno ravnoteže sila.

Primena jednačina energije. U mirnom režimu se proračun linije nivoa obavlja po glavnom vodotoku uzvodno, do profila koji se nalazi neposredno nizvodno od ušća (Slika 6.16-(a), profil 3-3). Zatim se, iterativnim rešavanjem dve Bernulijeve jednačine, napisane shodno oznakama na Slici 6.16-(a):

$$Z_1 + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = Z_3 + \frac{\alpha_3 V_3^2}{2g} + \Delta x_{13} \cdot \bar{I}_{e13} + \xi_{13} \left| \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} - \frac{\alpha_3 V_3^2}{2g} \right| \quad (6.34)$$

$$Z_2 + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} = Z_3 + \frac{\alpha_3 V_3^2}{2g} + \Delta x_{23} \cdot \bar{I}_{e23} + \xi_{23} \left| \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} - \frac{\alpha_3 V_3^2}{2g} \right|, \quad (6.35)$$

dolazi do kota nivoa u glavnoj reci Z_1 i pritoci Z_2 . Pri tome se podrazumeva da su vrednosti protoka u jednačini kontinuiteta:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 \quad (6.36)$$

poznate, kao i vrednosti koeficijenata lokalnih gubitaka ξ_{13} i ξ_{23} . Uticaj trenja je definisan na ranije opisan način, osrednjavanjem nagiba energetskih linija:

$$\bar{I}_{e13} = (I_{e1} + I_{e3})/2 \quad (6.37)$$

$$\bar{I}_{e23} = (I_{e2} + I_{e3})/2, \quad (6.38)$$

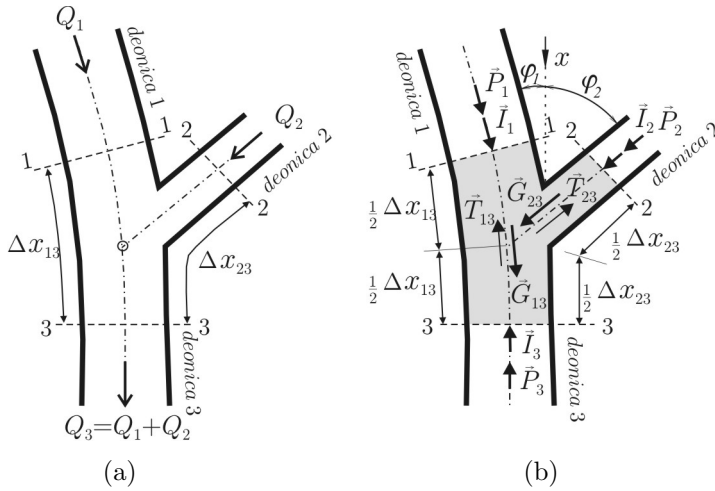
gde je $I_{e1} = (Q_1/K_1)^2$, $I_{e2} = (Q_2/K_2)^2$ i $I_{e3} = (Q_3/K_3)^2$.

Ako se pretpostavi da su razmatrani profili na kratkim odstojanjima i da se gubici energije mogu zanemariti, jednačine (6.34) i (6.35) se svode na uslov:

$$Z_1 + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} = Z_3 + \frac{\alpha_3 V_3^2}{2g}, \quad (6.39)$$

a ako su još i brzine male, na uslov: $Z_1 = Z_2 = Z_3$.

Primena jednačine ravnoteže sila. U slučaju burnog tečenja, proračun linija nivoa u glavnoj reci i pritoci se obavlja u nizvodnom smeru do ušća, gde se mora primeniti jednačina ravnoteže sila. Pored toga, ova jednačina se mora primeniti, bez obzira koji je režim tečenja u pitanju, ako se proceni da ugao pod kojim se pritoka uliva značajno utiče na kote nivoa u zoni ušća.



Slika 6.16: Shematski prikaz ušća: (a) skica uz objašnjenje za primenu energetske jednačine; (b) skica uz objašnjenje za primenu jednačine sile.

Imajući u vidu oznake na Slici 6.16-(b), jednačina ravnoteže sile koje deluju u x pravcu na fluid unutar kontrolne (šrafrane) zapremine ima ovaj oblik:

$$-(I_3 + P_3) + (I_1 + P_1) \cos \varphi_1 + (I_2 + P_2) \cos \varphi_2 - T_{13} - T_{23} + G_{13} + G_{23} = 0, \quad (6.40)$$

gde su inercijalne sile i sile pritiska:

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho \cdot Q_1^2 / A_1; & P_1 &= \rho \cdot g \cdot \hat{h}_1 \cdot A_1 \\ I_2 &= \rho \cdot Q_2^2 / A_2; & P_2 &= \rho \cdot g \cdot \hat{h}_2 \cdot A_2 \\ I_3 &= \rho \cdot Q_3^2 / A_3; & P_3 &= \rho \cdot g \cdot \hat{h}_3 \cdot A_3, \end{aligned} \quad (6.41)$$

sile trenja (na osnovu: $T = \tau \cdot O \cdot \Delta x = \rho g I_e \cdot A \cdot \Delta x$):

$$T_{13} = \left(\rho \cdot g \cdot \bar{I}_{e13} \cdot A_1 \frac{\Delta x_{13}}{2} \right) \cos \varphi_1 + \left(\rho \cdot g \cdot \bar{I}_{e13} \cdot A_3 \frac{\Delta x_{13}}{2} \right) \left(\frac{Q_1}{Q_3} \right) \quad (6.42)$$

$$T_{23} = \left(\rho \cdot g \cdot \bar{I}_{e23} \cdot A_2 \frac{\Delta x_{23}}{2} \right) \cos \varphi_2 + \left(\rho \cdot g \cdot \bar{I}_{e23} \cdot A_3 \frac{\Delta x_{23}}{2} \right) \left(\frac{Q_2}{Q_3} \right), \quad (6.43)$$

a komponente težine fluida u pravcu toka:

$$G_{13} = \left(\rho \cdot g \cdot I_{d13} \cdot A_1 \frac{\Delta x_{13}}{2} \right) \cos \varphi_1 + \left(\rho \cdot g \cdot I_{d13} \cdot A_3 \frac{\Delta x_{13}}{2} \right) \left(\frac{Q_1}{Q_3} \right) \quad (6.44)$$

$$G_{23} = \left(\rho \cdot g \cdot I_{d23} \cdot A_2 \frac{\Delta x_{23}}{2} \right) \cos \varphi_2 + \left(\rho \cdot g \cdot I_{d23} \cdot A_3 \frac{\Delta x_{23}}{2} \right) \left(\frac{Q_2}{Q_3} \right). \quad (6.45)$$

U navedenim izrazima korekcionim faktorima Q_1/Q_3 i Q_2/Q_3 se redukuje površina nizvodnog A_3 shodno učešću protoka reke, odnosno njene pritoke, u zbirnom protoku Q_3 . Time se otklanja mogućnost da se dva puta uzme ista okvašena površina u proračunu sile trenja, odnosno ista zapremina u proračunu sile težine. U analizi je zanemarena sila kojom čvrsta kontura deluje na fluid.

Korišćenje jednačine ravnoteže sila (6.40) uslovljeno je pretpostavkom: $Z_1=Z_2$, koja je realna ako su profili na kratkom odstojanju. U mirnom režimu proračun napreduje uzvodno deonicom 3, do kote Z_3 , a zatim se, iterativnim rešavanjem jednačine (6.40), određuju kote $Z_1 = Z_2$. U burnom režimu, linije nivoa se računaju u nizvodnom smeru deonicama 1 i 2, do kota Z_1 i Z_2 , a zatim se iterativnim rešavanjem jednačine (6.40) dobija kota Z_3 .

Opisani računski postupci se mogu primeniti i na bifurkaciju – mesto razdvajanja toka na dve grane.

6.9 Mostovska suženja

Izgradnja mosta sa prilaznim konstrukcijama koje pregradjuju inundacije može dovesti do značajne deformacije linije nivoa u odnosu na prirodno stanje, naročito u vreme poplava, kada mostovski profil može predstavljati „usko grlo” za evakuaciju velikih voda, usporavajući tok na uzvodnim deonicama. Izdizanje nivoa uzvodno od mosta zavisi od stepena suženja, karakteristika obalnih oporaca, kao i broja, veličine i oblika mostovskih stubova u koritu.

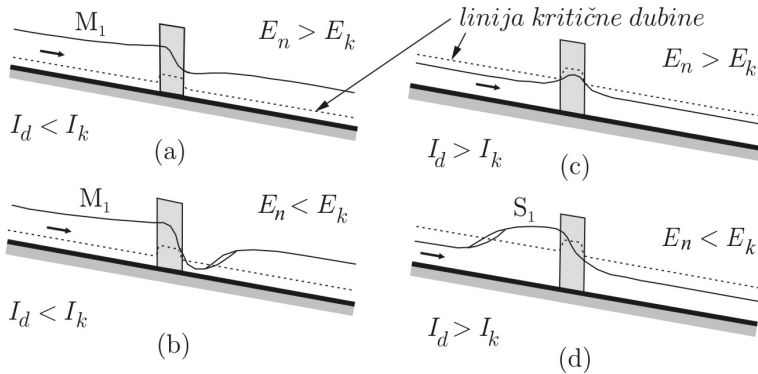
6.9.1 Karakter tečenja u mostovskim suženjima

Pod suženjem se podrazumeva kratka deonica na kojoj se, nakon izgradnje mostovskih oporaca i stubova u glavnom koritu, odnosno prilaznih konstrukcija u inundacijama, javlja naglo smanjenje površine proticajnog preseka (Slika 6.17).



Slika 6.17: *Primer mostovskog otvora nedovoljne propusne moći za evakuaciju velikih voda (reka Lepenica kod mesta Gradac).*

Uticaј suženja na tok zavisi od geometrijskih uslova i protoka vode. Tok u suženju može biti u mirnom ili burnom režimu. Na Slici 6.18 prikazan je slučaj *kratkog* suženja u prizmatičnom koritu u kome, daleko od mosta, vlada jednoliko tečenje.



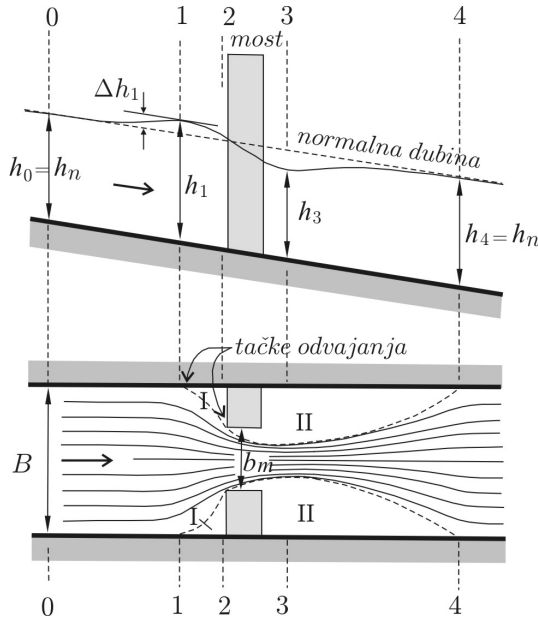
Slika 6.18: Hidraulički poremećaji izazvani kratkim suženjem u uslovima jednolikog tečenja; (a) u mirnom režimu se javlja uspor uzvodno od suženja, u suženju je mirno tečenje, a nizvodno se na relativno kratkom odstojanju uspostavlja normalna dubina; (b) slučaj mirnog režima sa kritičnom dubinom u suženju i hidrauličkim skokom nizvodno; (c) u burnom režimu dolazi do lokalnog izdizanja nivoa u suženju, ali se poremećaj ne prenosi uzvodno; (d) ako je stepen suženja tako veliki da važi uslov: $E_n < E_k$, na kratkom odstojanju uzvodno od suženja dolazi do zagušenja i formiranja hidrauličkog skoka.

Kontrolni presek se može formirati u suženju, ali ne mora, što zavisi od odnosa energije jednolikog toka izvan suženja E_n i energije kritičnog toka u suženju E_k . Ako se kontrolni presek javi u suženju, može biti na uzvodnom, ili na nizvodnom kraju, u zavisnosti od režima tečenja (Slika 6.18). Kod većih vodotoka je najčešće stepen suženja takav da vlada miran režim tečenja, pa se u nastavku isključivo razmatra ovaj slučaj.

6.9.2 Proračun uspora usled mostovskog suženja

6.9.2.1 Presek prostog oblika

Razmatra se najjednostavniji slučaj korita pravougaonog poprečnog preseka u kome vlada jednolik, *miran* režim tečenja. U zoni mosta dolazi do poremećaja strujne slike, kao što je prikazano na Slici 6.19. Uzvodno i nizvodno od mosta tečenje je blago nejednoliko, dok je u samom suženju, naglo promenljivo. Proračun tečenja u samom suženju nije moguć, jer je reč o prostornom strujanju sa prisutnim vertikalnim ubrzanjima i složenom turbulentnom strukturom. U praksi je međjutim najvažnije odrediti veličinu najvećeg uspora: $\Delta h_1 = h_1 - h_n$. To se radi primenom jednačina održanja mase i održanja energije.



Slika 6.19: Strujna slika u zoni mostovskog suženja; strujnice se „skupljaju” do profila 3, a „šire” između profila 3 i 4, uz formiranje vrtložnih zona I i II. U profilu 4 se ponovo uspostavlja jednoliki režim tečenja. Najveća dubina se javlja neposredno uzvodno od mosta, u zoni odvajanja strujnica. Povećanje dubine uzvodno od mosta predstavlja „akumulaciju” potencijalne energije za savladavanje otpora u suženju.

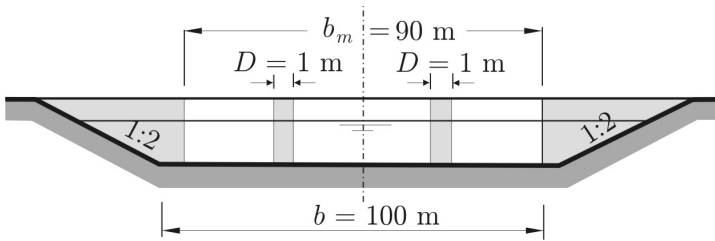
Koriste se presezi 3 i 4, odnosno 1 i 3, u kojima se pretpostavlja da su strujnice paralelne i da vlada hidrostatički raspored pritiska. Zbog kratkog odstojanja se obično izostavlja trenje, a uzimaju se u obzir samo lokalni gubici energije na suženju i proširenju (Tabela 6.1), kao što će biti pokazano na jednom primeru.

■ **Primer 6.6.** Odrediti veličinu maksimalnog uspora koji se formira uzvodno od mosta pri protoku od $Q = 1276 \text{ m}^3/\text{s}$. Most preseca pravolinijsko, prizmatično korito trapeznog poprečnog preseka sa širinom u dnu 100 m i nagibom kosina 1:2 (Slika 6.20). Uzdužni nagib dna iznosi $I_d = 0,0005$. Korito nije podložno eroziji. Vrednost Maningovog koeficijenta iznosi $n = 0,018 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. U koritu se nalaze dva cilindrična stuba prečnika $D = 1 \text{ m}$.

Rešenje. Na osnovu datih podataka, normalna dubina iznosi $h_n = h_4 = 4 \text{ m}$ ($A_4 = 432 \text{ m}^2$, $V_4 = 2,95 \text{ m/s}$). Zanemarujući kontrakciju mlaza oko stubova i oporaca mosta, efektivna širina toka je: $b_3 \approx b_m - 2 \cdot D = 88 \text{ m}$.

Zanemarujući trenje, Bernulijeva jednačina za preseke 3 i 4 (Slika 6.19) ima oblik:

$$h_3 + \frac{V_3^2}{2g} = h_4 + \frac{V_4^2}{2g}(1 + \xi_p), \quad (6.46)$$



Slika 6.20: Skica za brojni primer 6.6

a usvajajući vrednost koeficijenta lokalnog gubitka na proširenju $\xi_p = 0,5$:

$$h_3 + \frac{82986}{h_3^2(88 + 2h_3)^2} - 4,67 = 0. \quad (6.47)$$

Iterativnim rešavanjem ove jednačine, dobija se $h_3 = 4,15$ m ($A_3 = 399,65$ m², $V_3 = 3,19$ m/s). Tečenje u suženju je mirno, jer je sračunata dubina veća od kritične dubine koja iznosi: $h_k = (q^2/g)^{1/3} = [(1276/88)^2/9,81]^{1/3} = 2,78$ m.

Bernulijeva jednačina za preseke 1 i 3 (Slika 6.19) ima oblik:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_3 + \frac{V_3^2}{2g}(1 + \xi_s), \quad (6.48)$$

odnosno, usvajajući vrednost koeficijenta gubitka na suženju $\xi_s = 0,3$:

$$h_1 + \frac{82986}{h_1^2(90 + 2h_1)^2} - 4,82 = 0. \quad (6.49)$$

Iterativnim rešavanjem se dobija $h_1 = 4,40$ m, što znači da je visina najvećeg uspora $\Delta h_1 = h_1 - h_n = 0,40$ m.

* * *

Da bi se izbeglo iterativno rešavanje, u praksi se često koriste pojednostavljeni direktni postupci, uz korišćenje pomoćnih dijagrama. Ti dijagrami su rezultat eksperimentalnih ispitivanja sledećih uticajnih faktora [27, 33, 53]:

- (i) stepena suženja, koji se definiše odnosnom $M = A_m/A$, gde je A_m - deo površine poprečnog preseka koji se odnosi na mostovski otvor, a A - površina celog poprečnog preseka;
- (ii) karakteristika mostovskih oporaca (dužine, nagiba kosine, oblika završnog dela i rapavosti površine);
- (iii) broja, dimenzija i oblika stubova u koritu;

(iv) položaja mostovskog otvora u odnosu na osovину korita;

(v) ugla koji osovina mosta zaklapa sa osovinom toka.

Jedna od poznatih direktnih metoda za određivanje najvećeg uspora usled mosta potiče od američkog Biroa za javne puteve (engl. *Bureau of Public Roads*) [27]. Prema ovoj metodi, ta vrednost se može sračunati pomoću izraza:

$$\Delta h_1 = K_m \frac{V_a^2}{2g}, \quad (6.50)$$

gde je V_a - fiktivna brzina jednolikog tečenja u koritu pravougaonog poprečnog preseka čija je širina jednaka širini mostovskog suženja:

$$V_a = \frac{Q}{b_m \cdot h_n}, \quad (6.51)$$

a K_m - empirijski koeficijent. Ovaj koeficijent sadrži tri člana:

$$K_m = K_b + \Delta K_p + \Delta K_e, \quad (6.52)$$

od kojih prvi obuhvata uticaj oblika oporaca (Slika 6.21), drugi, uticaj stubova (Slika 6.22), a treći, uticaj položaja mostovskog otvora u odnosu na osovину korita (Slika 6.23). Ako ugao koji osovina mosta zaklapa sa osovinom toka u znatnoj meri odstupa od 90° , rezultati se moraju korigovati za uticaj napadnog ugla. Podaci za ovu korekciju mogu se naći u literaturi [27, 33, 53].

■ **Primer 6.7.** Za most iz primera 6.6 odrediti zavisnost visine maksimalnog uspora od protoka koristeći pomoćne dijagrame na Slici 6.21. Most je projektovan upravno na osovину vodotoka, sa oporcima tipa 2. Pretpostaviti da u koritu nema stubova.

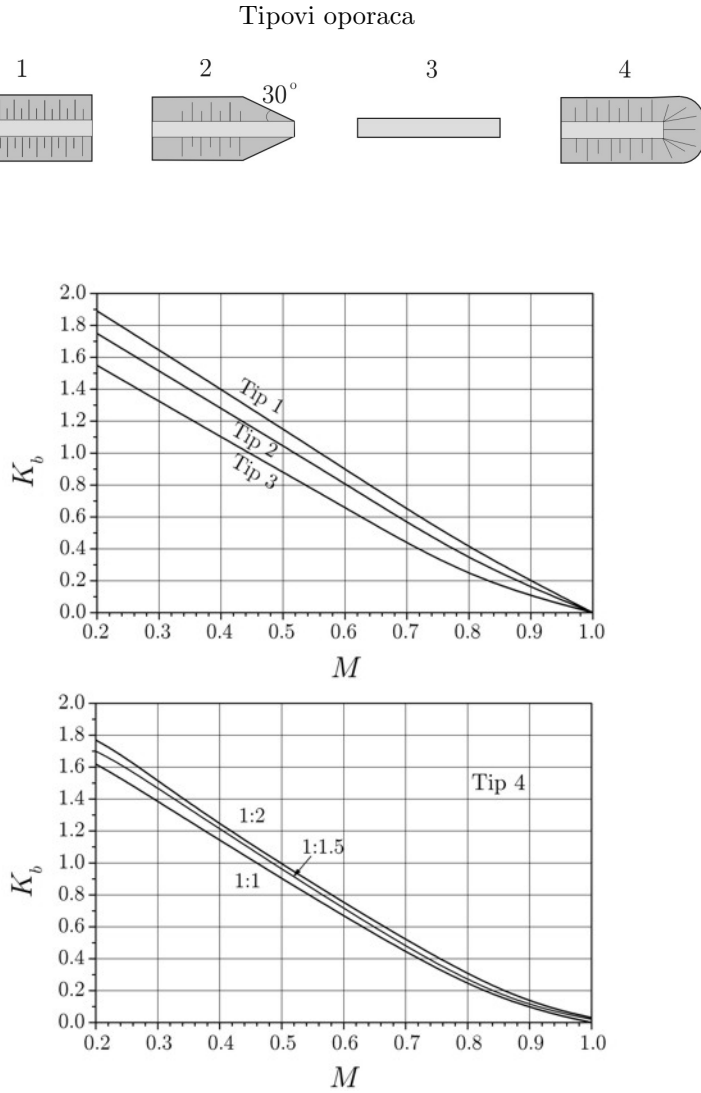
Rešenje. Za usvojene vrednosti normalne dubine h_n , računa se propusna moć korita:

$$Q = \frac{1}{n} A^{5/3} O^{-2/3} I_d^{1/2}.$$

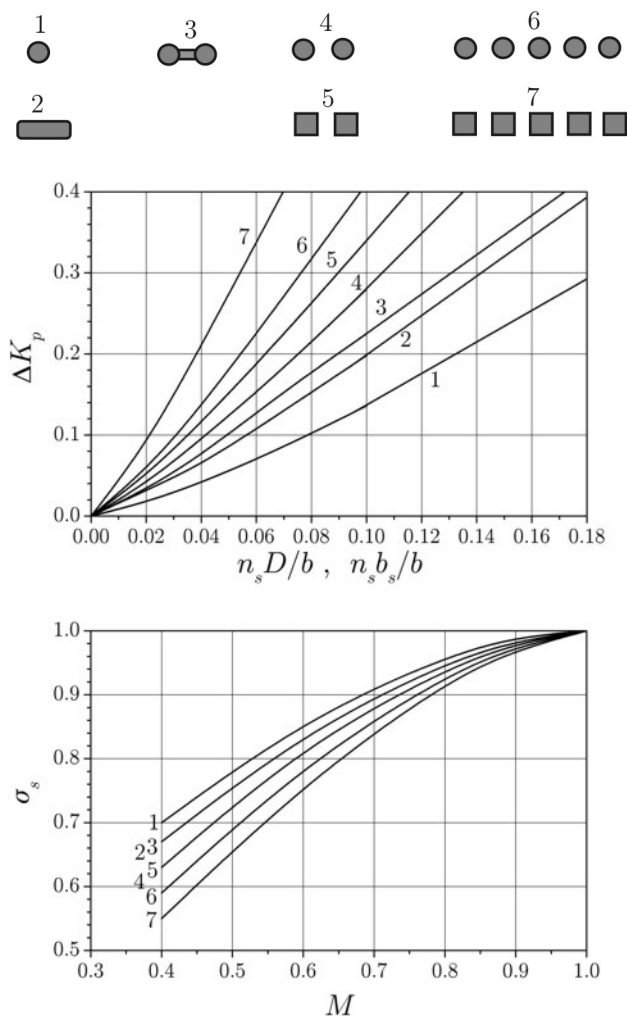
Pretpostavljajući miran režim tečenja u mostovskom suženju (Slika 6.19), vrednost faktora suženja se može grubo sračunati na sledeći način:

$$M = \frac{A_m}{A} = \frac{b_m \cdot h_n}{A}.$$

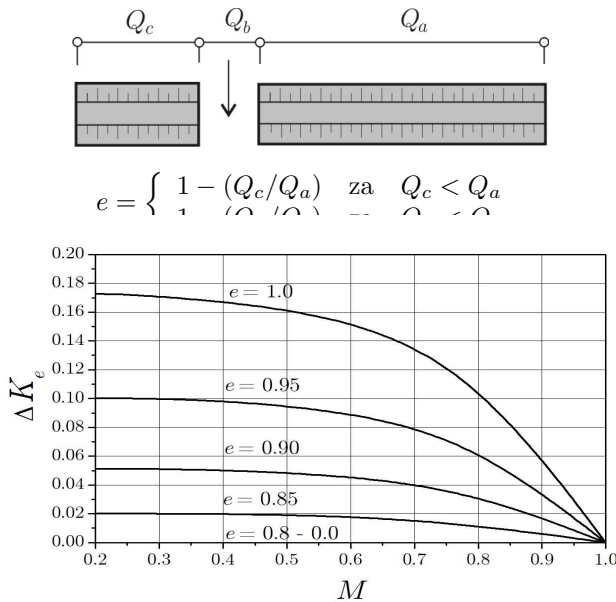
Vrednost koeficijenta $K_m = K_b$ ($\Delta K_p = \Delta K_e = 0$) se određuje pomoću dijagrama na Slici 6.21. Najveća visina uspora Δh_1 računa se pomoću izraza (6.50). Rezultati proračuna za vrednost otvora $b_m = 90$ m dati su u Tabeli 6.9.



Slika 6.21: Pomoćni dijagrami za određivanje vrednosti lokalnog gubitka energije na mostovskom suženju, u zavisnosti od oblika oporaca [27].



Slika 6.22: Dijagram za određivanje vrednosti lokalnog gubitka usled stubova; dija-gram daje vrednosti $\Delta K_p = \Delta K_{p1}$ za $M = 1$ (nema suženja) u funkciji parametra $n_s D/b$, odnosno $n_s b_s/b$, gde je n_s - broj stubova, D - prečnik cilindričnog stuba, b_s - širina stuba pravougaone osnove, b - širina korita u dnu. Za $M \neq 1$, vrednosti ΔK_p se množe faktorom σ_s [27].



Slika 6.23: Pomoćni dijagram za određivanje vrednosti lokalnog gubitka energije usled ekscentrično postavljene mostovskog otvora u odnosu na osovину korita [27].

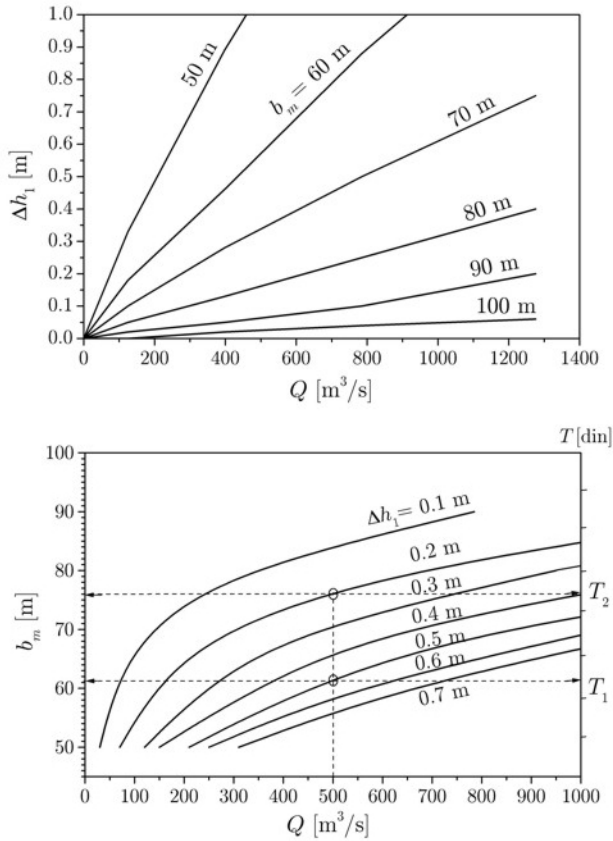
Tabela 6.9: Proračun najveće visine uspora za otvor širine $b_m = 90$ m.

h_n [m]	A [m ²]	O [m]	Q [m ³ /s]	A_m [m ²]	M [-]	K_m [-]	V_a [m/s]	$V_a^2/(2g)$ [m]	Δh_1 [m]
1,0	102	104,47	124,70	90	0,88	0,19	1,39	0,10	0,02
2,0	208	108,94	397,66	180	0,87	0,21	2,21	0,25	0,05
3,0	318	113,42	785,49	270	0,85	0,23	2,91	0,43	0,10
4,0	432	117,89	1275,57	360	0,83	0,31	3,54	0,64	0,20

Ponavljanje proračuna za različite vrednosti otvora b_m omogućava formiranje parametarske zavisnosti $\Delta h_1(Q, b_m)$ (Slika 6.24), koja pomaže projektantu da usvoji optimalnu veličinu mostovskog otvora za dati merodavni protok i prihvatljiv stepen izdizanja nivoa.

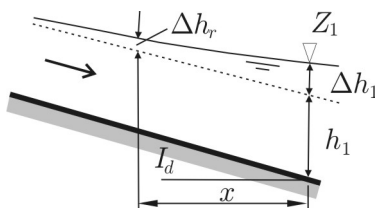
Za donošenje odluke o optimalnoj veličini mostovskog otvora, pogodno je formirati i dijagram troškova izgradnje objekta u funkciji protoka određene verovatnoće, veličine otvora i visine uspora, što je takodje prikazano na Slici 6.24. Takav dijagram daje predstavu o ceni koju iziskuje ograničenje uspora.

Napomena: ako je presek proizvoljnog oblika, u proračunu se umesto dubina koriste apsolutne kote nivoa.



Slika 6.24: Prvi dijagram daje zavisnost najvećeg uspora od protoka i širine mostovskog otvora, a drugi omogućava da se odredi optimalna vrednost mostovskog otvora za evakuaciju određenog protoka, sa cenama koštanja svake varijante. Na primer, ako se dozvoli uspor $\Delta h_1 = 0,5$ m pri merodavnom protoku $Q = 500$ m³/s, može se očitati veličina otvora $b_m = 61$ m, sa troškom izgradnje T_1 . Ako se želi smanjiti uspor pri istom protoku na $\Delta h_1 = 0,2$ m, veličina otvora će se povećati na 76 m, sa troškom izgradnje T_2 .

Za praksu je pored najviše kote uspora, značajno odrediti i dužinu uspora uzvodno od mosta (miran režim). Ova dužina se određuje proračunom nejednolikog tečenja, polazeći od zadanog nizvodnog graničnog uslova – kote Z_1 (Slika 6.25). Proračun se zaustavlja tamo gde je dubina približno jednaka normalnoj dubini.



Slika 6.25: Skica za približno određivanje dužine uspora.

U preliminarnim analizama se dužina uspora može brzo proceniti na osnovu uprošćene metode prema kojoj se visina uspora Δh_r na odstojanju x uzvodno od mosta (Slika 6.25) definiše na osnovu poznate vrednosti Δh_1 i eksponencijalne zavisnosti:

$$\Delta h_r = \Delta h_1 \cdot e^{-x/x_o}, \quad (6.53)$$

gde je [123]:

$$x_o = 0,3 \frac{h_1}{I_d} (1 - Fr_o). \quad (6.54)$$

Vrednost Frudovog broja Fr_o se računa na osnovu parametara jednolikog režima. Iz relacije (6.53) proizilazi da je na odstojanju $x = x_o$, $\Delta h_r = 0,37 \Delta h_1$; na odstojanju $x = 2,3 x_o$, visina uspora opada na desetinu početne vrednosti, a na odstojanju $x = 2 \cdot 2,3 x_o = 4,6 x_o$, na stoti deo početne (najveće) vrednosti.

■ **Primer 6.8.** Proceniti dužinu uspora za most iz primera 6.6.

Rešenje. $Fr_o = Q^2 b / (g \cdot A^3) = 1276^2 \cdot 100 / (9,81 \cdot 432^3) = 0,21$;
 $x_o = 2,086$ m; za $\Delta h_r = \Delta h_1 / 100 = 0,004$ m: $x = 4,6 \cdot x_o = 9594$ m.

6.9.2.2 Presek složenog oblika

U ovom slučaju je problem mnogo komplikovaniji nego kod prostog preseka, zbog složenog rasporeda brzine po poprečnom preseku i izmene količine kretanja između glavnog korita i inundacija. Veličina najvećeg uspora se ne može precizno sračunati⁴. Rešavanje podrazumeva određene pretpostavke i uprošćenja.

⁴Ni primena fizičkih modela u ovom slučaju ne može dati pouzdane rezultate. Kao što će se videti u trinaestom poglavlju, radi se o problemu razmera; da bi se dobila realna raspodela protoka na glavno korito i inundacije, model mora biti dovoljno dugačak, a da bi se verno reprodukovalo tečenje u mostovskom suženju, neophodno je da dubine ne budu isuviše male; model koji bi pomirio oba zahteva bio bi, zbog krupne razmere, veoma skup.

U slučaju da tečenje u inundacijama nije izraženo usled male dubine ili velikih otpora izazvanih gustom vegetacijom, može se smatrati da inundacije deluju kao retenzije, pa se njihov uticaj u proračunu uspora može zanemariti, pretpostavljajući da je protok koncentrisan u glavnom koritu.

Ako je tečenje u inundacijama intenzivno, one se moraju smatrati *aktivnim* delovima proticajnog profila, pa pri projektovanju mostova treba imati u vidu da postoji nekoliko mogućnosti.

- (i) Presecanje rečne doline saobraćajnicom je tako rešeno da je, obezbeđenjem adekvatnih propusta kroz prilazne konstrukcije, očuvana prirodna raspodela protoka na glavno korito i inundacije.
- (ii) Protok u inundacijama je smanjen usmerenjem toka ka glavnom koritu.
- (iii) Protok je u potpunosti koncentrisan na glavno korito, isključenjem inundacija.
- (iv) Protok u glavnom koritu je smanjen, usmeravanjem toka ka inundacijama (suprotno varijantama (ii) i (iii)).

Navedene varijante treba razmotriti sa hidrauličkog, morfološkog i ekonomskog stanovišta.

Hidraulička analiza obuhvata određivanje raspodele protoka po delovima složenog korita i utvrđivanje usporenog nivoa. (Ovom analizom se često obuhvata i deformacija korita u zoni mosta, o čemu će biti reči u dvanaestom poglavlju.) Koja će se od četiri navedene varijante konačno usvojiti zavisi od rezultata ekonomske analize. Kriterijum je odnos troškova izgradnje propusta u prilaznim konstrukcijama koje presecaju inundacije i troškova izgradnje mostovske konstrukcije u glavnom koritu. Ti troškovi su međusobno zavisni, jer su konstruktivne karakteristike mosta (raspon, visina, broj stubova itd.) uslovljene brojem i veličinom otvora u inundacijama. U bilo kojoj varijanti, rešenje ne sme dovesti u pitanje stabilnost rečnog korita.

U nastavku će se razmatranje ograničiti na određivanje najvećeg uspora u *složenom* koritu. Najjednostavniji pristup se zasniva na pretpostavci da nema poprečnog tečenja između glavnog korita i inundacija i da se ti delovi mogu nezavisno razmatrati. Linija nivoa u složenom preseku je horizontalna. Veličina najvećeg uspora se može sračunati za glavno korito kao u primeru 6.7, a propusti u inundacijama se dimenzionišu na deo ukupnog protoka koji otpada na inundacije, smatrajući da je veličina uspora ista kao u glavnom koritu.

Postupak će se ilustrovati na konkretnom primeru.

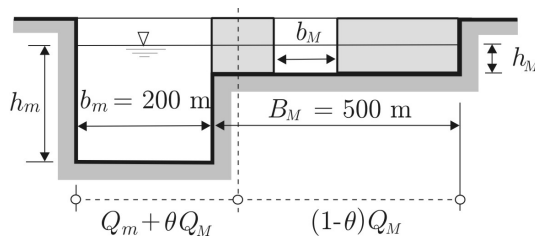
■ **Primer 6.9.** Analizirati veličinu mostovskog otvora u glavnom koritu i otvora propusta u prilaznom nasipu koji preseca inundaciju na Slici 6.26. Širina glavnog korita $B_m = 200$ m, a širina inundacije $B_M = 500$ m.

Pre izgradnje mosta, pri merodavnom protoku $Q=3750 \text{ m}^3/\text{s}$, glavnim koritom protiče 80% protoka ($Q_m=3000 \text{ m}^3/\text{s}$), a inundacijom 20% ($Q_M=750 \text{ m}^3/\text{s}$), pri čemu su odgovarajuće dubine 6 m, odnosno 1,5 m.

Rešenje. Pregradjivanjem profila, propusna moć je uslovljena širinom mostovskog otvora b_m i širinom propusta u inundaciji b_M (Slika 6.26), tako da je raspodela protoka:

$$Q = Q_m + \theta \cdot Q_M + (1 - \theta) \cdot Q_M, \quad (6.55)$$

gde je $\theta < 1$ - težinski faktor. (Pre izgradnje mosta je $\theta = 0$).



Slika 6.26: Složeno korito u primeru 6.9

Princip proračuna je sledeći. Za usvojene širine otvora b_m i b_M , zasebno se određuju zavisnosti $\Delta h_{1m}(\theta)$ i $\Delta h_{1M}(\theta)$. Presečne tačke tako dobijenih krivih definišu vrednost najvećeg uspora Δh_1 za svaku varijantu širine otvora (Slika 6.27). Jedna od varijanti, po kojoj je širina glavnog otvora jednaka širini minor korita $b_m = B_m = 200 \text{ m}$, prikazana je na Slici 6.26. Radi lakšeg računa, pretpostaviće se da u minor koritu nema stubova. Algoritamski se proračun uspora, koji dovodi do dijagrama na Slici 6.27, može ovako prikazati:

(1) Glavni otvor (minor korito):

$$Q_1 = Q_m + \theta Q_M$$

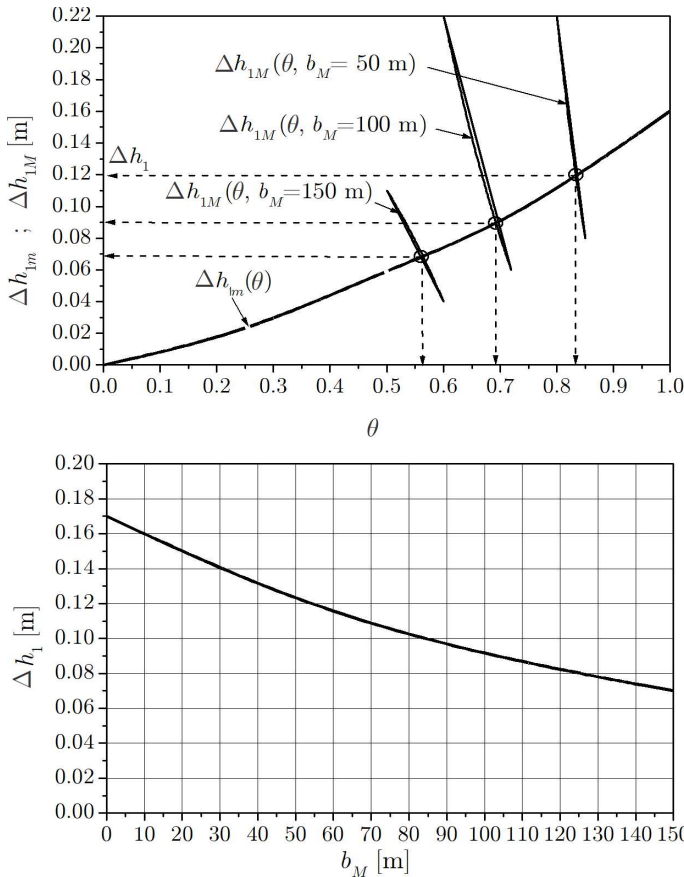
$$\left. \begin{aligned} M_1 &= Q_m/Q_1 &\Rightarrow K_{b1} & \quad (\text{tip 2}) \\ V_{a1} &= Q_1/(b_m h_m) &\Rightarrow V_{a1}^2/(2g) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta h_{1m} = K_{b1} \frac{V_{a1}^2}{2g}.$$

(2) Pomoćni otvor (inundacija):

$$Q_2 = (1 - \theta) Q_M$$

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= Q_M(b_m/B_M)/Q_2 &\Rightarrow K_{b2} & \quad (\text{tip 2}) \\ V_{a2} &= Q_2/(b_M h_M) &\Rightarrow V_{a2}^2/(2g) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta h_{1M} = K_{b2} \frac{V_{a2}^2}{2g}.$$

Radi lakšeg računa, izostavljen je uticaj ekscentričnosti ($\Delta K_e = 0$), koji je više izražen što je manja veličina otvora b_M . Na Slici 6.27 prikazana je zavisnost najvećeg uspora od širine otvora u inundaciji za usvojenu vrednost $b_m = 200$ m. Opisani postupak treba ponoviti za više vrednosti b_m , kako bi se dobila familija krivih $\Delta h_1(b_m, b_M)$, na osnovu koje se, kao u primeru 6.7, utvrđuje optimalno rešenje.



Slika 6.27: Određivanje najvećeg uspora za složeno korito u varijanti $b_m = 200$ m i zavisnost najvećeg uspora od širine otvora u inundaciji za istu varijantu.

6.9.2.3 Sila na mostovski stub

Intenzitet hidrodinamičke sile koja deluje na mostovski stub zavisi od hidrauličkih uslova (brzine i dubine), dimenzija i oblika stuba, a kod stubova sa pravougaonim horizontalnim presekom, zavisi i od ugla koji tok zaklapa sa uzdužnom osovinom stuba.

U opštem slučaju je intenzitet ove sile:

$$F_s = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_D \cdot A_s \cdot V_o^2, \quad (6.56)$$

gde je C_D – koeficijent otpora čija vrednost zavisi od oblika stuba (Tabela 6.10), A_s – površina projekcije stuba na vertikalnu ravan čija je normala kolinearna sa osovinom toka, a V_o – merodavna (lokalna) brzina u zoni stuba.

Tabela 6.10: Vrednosti koeficijenta otpora za stubove različitog oblika [72].

Oblik stuba u osnovi	C_D
Kružni	1,20
Pravougaoni	2,00
Izduženi sa polukružnim krajevima	1,33
Eliptični sa odnosom dužine i širine 2:1	0,60
Eliptični sa odnosom dužine i širine 4:1	0,32
Eliptični sa odnosom dužine i širine 8:1	0,29
Trougaoni krajevi pod uglom od 30°	1,00
Trougaoni krajevi pod uglom od 60°	1,39
Trougaoni krajevi pod uglom od 90°	1,60
Trougaoni krajevi pod uglom od 120°	1,72

■ **Primer 6.10.** Projektom je predviđeno da mostovski stubovi, čija je osnova kvadratnog oblika dimenzija $b_s = L_s = 2$ m, budu tako postavljeni u rečnom koritu da sila toka koja na njih deluje pri dubini $h = 10$ m bude najmanja. Odrediti optimalan položaj stubova i odgovarajući intenzitet sile koja na njih deluje, ako je raspored brzine po dubini definisan izrazom:

$$u(z) = \frac{6u_*}{\kappa} \left(\frac{z}{h} \right)^{1/6}.$$

Lokalna vrednost smičuće brzine je $u_* = 0,08$ m/s.

Rešenje. Stub kvadratne osnove može biti postavljen na dva načina:

- osovina toka je upravna na stranicu kvadrata;
- osovina toka je upravna na dijagonalu kvadrata.

U prvom slučaju je na osnovu podataka iz Tabele 6.10 usvojena vrednost koeficijenta otpora $C_D = 2,00$, a u drugom, $C_D = 1,60$.

Kako je u oba slučaja brzina toka ista, na intenzitet sile isključivo utiče vrednost proizvoda $C_D \cdot A_s$. U prvom slučaju ova vrednost iznosi: $2,0 \cdot b_s \cdot h$, a u drugom slučaju: $1,6 \cdot b_s \sqrt{2} \cdot h = 2,26 \cdot b_s \cdot h$. Povoljniji je dakle slučaj (a).

Elementarna sila dF_s na dužini dz iznosi: $dF_s = (1/2) \cdot \rho \cdot 2 \cdot b_s \cdot u^2 dz$, odnosno:

$$dF_s = \rho \cdot b_s \cdot \frac{36 u_*^2}{\kappa^2} \left(\frac{z}{h}\right)^{1/3} dz.$$

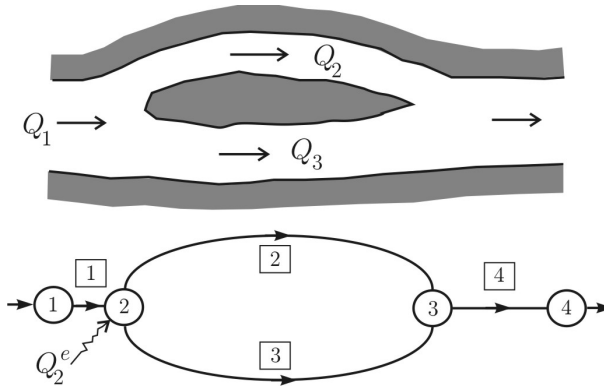
Integracijom po dubini se dobija:

$$F_s = 36 \cdot \rho \cdot b_s \cdot \left(\frac{u_*}{\kappa}\right)^2 \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right)^{1/3} dz = 36 \cdot \rho \cdot b_s \cdot \left(\frac{u_*}{\kappa}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} h = 21,6 \text{ kN}.$$

Komentar: U slučajevima kada se očekuje nestabilnost korita i pomeranje matice toka, preporučuju se cilindrični stubovi, jer imaju konstantnu vrednost koeficijenta otpora, koja ne zavisi od napadnog ugla.

6.10 Mreže otvorenih tokova

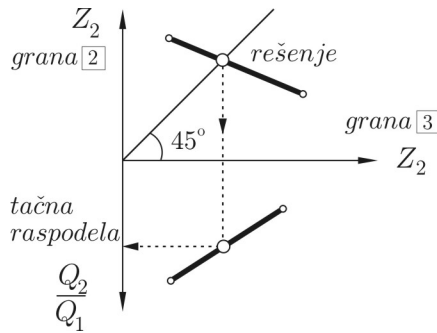
U praksi se često rešava problem račvanja toka. Tipičan uzrok je prisustvo rečne ade (Slika 6.28).



Slika 6.28: Račvanje toka usled prisustva ade. Računska mreža obuhvata 4 čvora – profila (oznaka krug) i 4 deonice – grane (oznaka kvadrat).

Razmatra se ustaljeno tečenje u *mirnom* režimu. Problem raspodele protoka se može rešavati probanjem. Sračuna se linija nivoa od čvora 4 do čvora 3. Pretpostave se vrednosti protoka Q_2 i Q_3 , vodeći računa o jednačini kontinuiteta: $Q_1 = Q_2 + Q_3$. Polazeći od kote nivoa u čvoru 3 i zanemarujući lokalne gubitke, računaju se linije nivoa uzvodno po granama 2 i 3. Ako se u čvoru 2 dobije ista (ili približno ista) kota energije po jednoj i po drugoj grani, raspodela protoka je dobro pretpostavljena.

U protivnom, račun se ponavlja sa drugim vrednostima Q_2 i Q_3 , sve dok se navedeni uslov ne ispuni⁵. Na osnovu dve pretpostavke, približno rešenje se može naći interpolacijom kao što prikazuje dijagram na Slici 6.29.

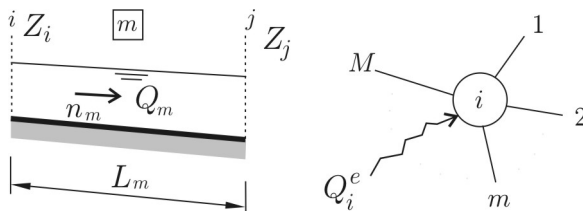


Slika 6.29: Određjivanje raspodele protoka interpolacijom.

Izloženi postupak se ne može primeniti ako se tok deli na više grana. U tom slučaju se moraju uzeti u obzir kote energije u svim čvorovima mreže *istovremeno*, kao što se to radi u proračunima vodovodnih mreža [175]. To znači da se mora formirati sistem jednačina. Broj jednačina mora biti jednak broju čvorova. Princip rešavanja će se izložiti pomoću primera na Slici 6.28.

Bernulijeva jednačina održanja energije za bilo koju granu mreže „ m ” može se, zanemarujući lokalne gubitke, a koristeći oznake na Slici 6.30, napisati u obliku:

$$\begin{aligned}
 E_i &= E_j + \frac{1}{2} [(I_e)_{mi} + (I_e)_{mj}] L_m = \\
 &= E_j + \frac{(n Q)_m^2}{2} \left[\frac{1}{(A^2 R^{4/3})_{mi}} + \frac{1}{(A^2 R^{4/3})_{mj}} \right] L_m.
 \end{aligned}
 \tag{6.57}$$



Slika 6.30: Oznake za granu i čvor računске mreže.

⁵Ako su brzine male, tako da se brzinske visine mogu zanemariti, kriterijum raspodele protoka se svodi na jednakost kota nivoa u uzvodnom profilu.

Ako se radi kraćeg pisanja uvede oznaka $a = 1/(A^2 R^{4/3})$, navedena jednačina se može formulisati po protoku:

$$Q_m - \frac{1}{n_m} \left[\frac{2(E_i - E_j)}{L_m} \right]^{1/2} (a_{mi} + a_{mj})^{-1/2} = 0. \quad (6.58)$$

Za svaki čvor mreže se može napisati jednačina kontinuiteta u obliku:

$$(Q_e)_i + \sum_{m=1}^M Q_m = 0, \quad (6.59)$$

gde je $(Q_e)_i$ spoljašnji („eksterni“) doticaj/oticaaj u čvoru, a M - ukupni broj grana koje se stiču u tom čvoru (Slika 6.30). Prema usvojenoj konvenciji, doticaj u čvor se uzima sa pozitivnim, a oticaaj, sa negativnim znakom.

Problem se matematički formuliše tako što se za svaki čvor mreže napiše jednačina kontinuiteta (6.59) u kojoj se protoci izraze preko jednačine energije (6.58). Na taj način se kombinuju osnovni zakoni održanja mase i energije i formira sistem jednačina u kome su nepoznate kote energije u čvorovima. U nastavku se navode jednačine za primer na Slici 6.28.

Čvor 1:

$$(Q_e)_1 - Q_1 = 0 \quad (6.60)$$

ili, u razvijenom obliku:

$$F_1 = (Q_e)_1 - \frac{1}{n_1} \left[\frac{2(E_1 - E_2)}{L_1} \right]^{1/2} (a_{11} + a_{12})^{-1/2} = 0. \quad (6.61)$$

Čvor 2:

$$(Q_e)_2 + Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \quad (6.62)$$

odnosno,

$$\begin{aligned} F_2 = (Q_e)_2 &+ \frac{1}{n_1} \left[\frac{2(E_1 - E_2)}{L_1} \right]^{1/2} (a_{11} + a_{12})^{-1/2} - \\ &- \frac{1}{n_2} \left[\frac{2(E_2 - E_3)}{L_2} \right]^{1/2} (a_{22} + a_{23})^{-1/2} - \\ &- \frac{1}{n_3} \left[\frac{2(E_2 - E_3)}{L_3} \right]^{1/2} (a_{32} + a_{33})^{-1/2} = 0. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Čvor 3:

$$(Q_e)_3 + Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0 \quad (6.64)$$

odnosno,

$$\begin{aligned} F_3 = (Q_e)_3 &+ \frac{1}{n_2} \left[\frac{2(E_2 - E_3)}{L_2} \right]^{1/2} (a_{22} + a_{23})^{-1/2} + \\ &+ \frac{1}{n_3} \left[\frac{2(E_2 - E_3)}{L_3} \right]^{1/2} (a_{32} + a_{33})^{-1/2} - \\ &- \frac{1}{n_4} \left[\frac{2(E_3 - E_4)}{L_4} \right]^{1/2} (a_{43} + a_{44})^{-1/2} = 0. \end{aligned} \quad (6.65)$$

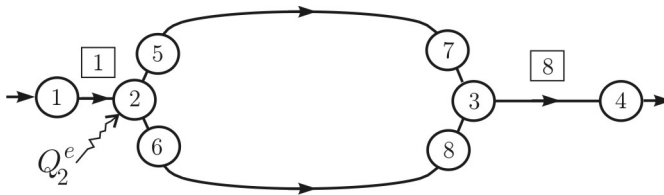
Čvor 4:

$$Q_4 - (Q_e)_4 = 0. \quad (6.66)$$

Kako je za mirno tečenje kontrolni presek na nizvodnom kraju, to se granični uslovi zadaju u čvoru 4: protok $(Q_e)_4 = Q_4$ i odgovarajuća kota nivoa Z_4 , čime je definisana kota energije $E_4 = Z_4 + Q_4^2/(2gA_4^2)$.

Nepoznate kote E_1, E_2 i E_3 se određuju rešavanjem jednačina (6.61), (6.63) i (6.65). Na osnovu ovih kota, pomoću izraza tipa (6.58), mogu se sračunati nepoznati protoci Q_2 i Q_3 .

Ako se proceni da je neophodno, u proračun se mogu uvrstiti i lokalni gubici uvodjenjem dodatnih čvorova na uzvodnom i nizvodnom kraju ade, kao što je prikazano na Slici 6.31.



Slika 6.31: Računska mreža u slučaju da se obuhvataju lokalni gubici energije.

Lokalni gubici se obuhvataju vezom tipa:

$$E_i = E_j + \xi_m \cdot \frac{Q_m^2}{2g} \left(\frac{1}{A_{mi}^2} - \frac{1}{A_{mj}^2} \right), \quad (6.67)$$

što znači da se sistem sastoji od jednačina tipa:

$$Q_m = [2g(E_i - E_j)]^{1/2} \left[\xi_m \left(\frac{1}{A_{mi}^2} - \frac{1}{A_{mj}^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (6.68)$$

gde je ξ - koeficijent lokalnog gubitka energije.

Kako je sistem jednačina nelinearan, za njegovo rešavanje se mora primeniti neka iterativna metoda. Metoda Njutn-Rafsona je optimalna jer omogućava brzu („kvadratnu“) konvergenciju ako su početne, pretpostavljene vrednosti nepoznatih bliske konačnom rešenju. Kao što je ranije pokazano, ova metoda se zasniva na razvoju funkcije u Tajlorov red:

$$F_j(E_1, \dots, E_N) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial E_i} \Delta E_i = 0 \quad (j = 1, \dots, N), \quad (6.69)$$

i iznalaženju korekcija ΔE u svakoj iteraciji. Matricna formulacija sistema iz primera na Slici 6.28 je:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial E_1} & \frac{\partial F_1}{\partial E_2} & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial E_1} & \frac{\partial F_2}{\partial E_2} & \frac{\partial F_2}{\partial E_3} \\ 0 & \frac{\partial F_3}{\partial E_2} & \frac{\partial F_3}{\partial E_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta E_1 \\ \Delta E_2 \\ \Delta E_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ -F_3 \end{Bmatrix}, \quad (6.70)$$

odnosno,

$$\mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{E} = -\mathbf{F}, \quad (6.71)$$

gde je \mathbf{J} - Jakobijan matrica, $\Delta \mathbf{E}$ - vektor korekcija, a \mathbf{F} - vektor slobodnih članova (ostataka).

Umesto rešavanja originalnog sistema nelinearnih jednačina po energetskim kotama E_1, E_2 i E_3 , rešava se u svakoj iteraciji linearni sistem jednačina (6.70) po korekcijama $\Delta E_1, \Delta E_2$ i ΔE_3 , primenom standardnog Gausovog postupka [135]. Matrica koeficijenata (Jakobijan) je trakasta matrica, a njeni elementi u vidu parcijalnih izvoda računaju se analitički [144], ili numerički. Vrednosti nepoznatih se u svakoj iteraciji koriguju:

$$E_i^{it+1} = E_i^{it} + \omega \cdot \Delta E_i^{it+1}, \quad (6.72)$$

gde je it - oznaka (broj) iteracije, a ω - empirijski faktor podrelaksacije, pomoću koga se kontroliše stabilnost proračuna ($\omega \leq 1$).

7

Sekundarna strujanja

U prethodna dva poglavlja je pokazano da se linijsko strujanje pri određenom protoku opisuje nizom hidrauličkih veličina koje se vezuju za poprečni presek – kotom nivoa, srednjom profilskom brzinom, hidrauličkim radijusom itd. Strujanje koje je definisano rasporedom pomenutih veličina duž vodotoka zove se „*glavno strujanje*”. U specifičnim geometrijskim uslovima, u vodotoku se pod uticajem zapreminskih i površinskih sila, mogu javiti lokalno ograničena strujanja, koja su po intenzitetu znatno slabija od glavnog strujanja i koja se stoga zovu „*sekundarna strujanja*”.

Najvažnije sekundarno strujanje je ono koje se javlja u krivini, kao posledica centrifugalnog ubrzanja fluidnih delića. To strujanje utiče na raspored brzine i tangencijalnog napona u poprečnom preseku i izaziva poprečni nagib linije nivoa. Specifičan hidraulički režim u krivini reflektuje se na režim nanosa i morfologiju korita; poprečni presek dobija karakteristični trougaoni oblik usled poprečnog kretanja vučenog nanosa i deformacije obala. Zato je izučavanje strujanja u krivini važno za razumevanje evolucije rečnog korita, izbor regulacionih elemenata i projektovanje regulacionih gradjevina.

Pored strujanja u krivini, u ovom poglavlju se ukratko opisuju i neki drugi vidovi sekundarnih strujanja koji mogu biti interesantni za praksu.

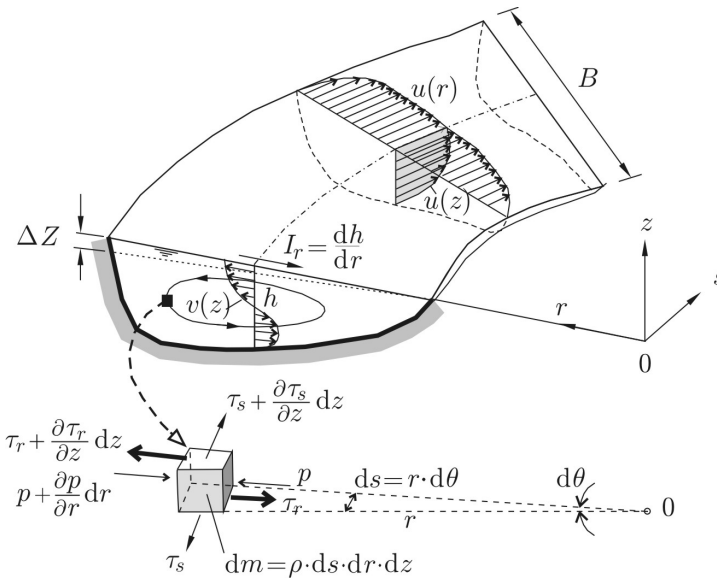
7.1 Strujanje u krivini

Pod uticajem centripetalne sile kao akcije, odnosno centrifugalne sile kao reakcije, u rečnim krivinama vlada složeno prostorno strujanje, koje karakteriše neravnomernost brzine i količine kretanja u poprečnom preseku. Kombinacijom glavnog i sekundarnog strujanja u krivinama se javlja *spiralno* ili *helikoidno* strujanje. Njegov intenzitet je promenljiv; na početku krivine intenzitet spiralnog strujanja počinje da raste, na njenom kraju slabi, ali se oseća i nizvodno od krivine na određenoj dužini. Tok u krivini je *potpuno razvijen* kada se njegove karakteristike više ne menjaju od profila do profila.

Da bi se razvijeni tok u krivini mogao formirati, neophodno je da neprizmatičnost korita bude umerena i da je krivina dovoljno dugačka. Analitičko opisivanje strujanja u krivini je moguće samo pod pretpostavkom potpuno razvijenog toka i širokog korita, bez uticaja obala.

7.1.1 Osnovne jednačine

Slika 7.1 prikazuje rečnu deonicu u krivini. U analizi krivolinijskog strujanja koristi se cilindrični koordinatni sistem (r, θ, z) . Vektor brzine fluidnog delića \vec{V} ima tri komponente: \vec{u} , \vec{v} i \vec{w} , od kojih je prva – tangencijalna komponenta, u pravcu glavnog toka s , druga - radijalna komponenta, u poprečnom pravcu (u odnosu na glavni tok) r , a treća - vertikalna komponenta, u pravcu z .



Slika 7.1: Raspored brzine u krivini i sile na elementarnu zapreminu $ds \cdot dr \cdot dz$, gde je $ds = r \cdot d\theta$; ugaona brzina fluidnih delića je: $\omega = d\theta/dt = (1/r) ds/dt = u/r$.

Problem se sastoji u definisanju rasporeda radijalne komponente $v(r, z)$ i odredjivanju veličine poprečnog nagiba linije nivoa I_r , koji zavisi od intenziteta radijalne brzine, odnosno poluprečnika krivine.

Jednačine održanja mase. U opštem obliku se ova jednačina svodi na uslov [63]:

$$\text{div} \vec{V} = 0. \tag{7.1}$$

Po definiciji divergencije vektora u cilindričnim koordinatama sledi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot v)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (7.2)$$

odnosno,

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (7.3)$$

Jednačine održanja količine kretanja. Iz drugog Njutnovog zakona proizilazi da je elementarna sila jednaka proizvodu elementarne mase i ubrzanja:

$$d\vec{F} = dm \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt}. \quad (7.4)$$

Ubrzanje je jednako materijalnom izvodu brzine: $D\vec{V}/Dt$. Komponente ubrzanja u cilindričnim koordinatama su:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u v}{r} \quad (7.5)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u^2}{r}. \quad (7.6)$$

Vektor $d\vec{F}$ u izrazu (7.4) predstavlja rezultantu elementarnih zapreminskih i površinskih sila.

Zapreminske sile se sastoje od centrifugalne sile i težine fluida. Centrifugalna sila po jedinici mase obuhvaćena je poslednjim članovima na desnoj strani jednačina (7.5) i (7.6). Težina fluida po jedinici mase jednaka je g , a njena komponenta u pravcu glavnog toka (s) je: $g \cdot I_s = g \cdot I_d$.

Površinske sile se mogu definisati posmatrajući elementarnu zapreminu koja je prikazana na Slici 7.1.

(i) u pravcu glavnog toka dominantna je smičuća sila:

$$\left[(\tau_s + \frac{\partial \tau_s}{\partial z} dz) - \tau_s \right] ds dr = \frac{\partial \tau_s}{\partial z} dz ds dr, \quad (7.7)$$

koja se, izražena po jedinici mase (deljenjem sa $dm = \rho \cdot dz \cdot ds \cdot dr$), svodi na: $(1/\rho) \partial \tau_s / \partial z$. Ostale površinske sile se zanemaruju.

(ii) u radijalnom pravcu se uzimaju u obzir smičuća sila:

$$\left[(\tau_r + \frac{\partial \tau_r}{\partial z} dz) - \tau_r \right] ds dr = \frac{\partial \tau_r}{\partial z} dz ds dr \quad (7.8)$$

i razlika sila hidrostatičkog pritiska koja nastaje usled poprečnog nagiba nivoa vode u krivini:

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial r} dr \right) \right] dz ds = - \frac{\partial p}{\partial r} dz ds dr. \quad (7.9)$$

Svedene na jedinicu mase, navedene površinske sile zbirno daju:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_r}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_r}{\partial z} - g \cdot I_r, \quad (7.10)$$

gde je I_r – poprečni nagib linije nivoa.

Imajući u vidu izraze (7.4)–(7.10), mogu se formulisati jednačine održanja količine kretanja za pravce s i r u obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{uv}{r} + g \cdot I_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_s}{\partial z} \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{u^2}{r} - g \cdot I_r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_r}{\partial z}. \quad (7.12)$$

Ako se pretpostavi da su vertikalna ubrzanja fluidih delića zanemarljivo mala u odnosu na gravitaciono ubrzanje, jednačina za vertikalni pravac se redukuje na izraz koji opisuje hidrostatički raspored pritiska:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g = 0. \quad (7.13)$$

Uvodeći sledeće pretpostavke:

- (a) tečenje je ustaljeno, $\partial()/\partial t = 0$;
- (b) tok u krivini je u potpunosti razvijen, zanemaruju se konvektivna ubrzanja: $\partial()/\partial s = 0$;
- (c) radijalna komponenta v je mala u odnosu na brzinu glavnog toka u ;
- (d) komponenta u vertikalnom pravcu w se može zanemariti,

osnovne jednačine (7.11) - (7.12) se transformišu u obične diferencijalne jednačine:

$$g \cdot I_s + \frac{1}{\rho} \frac{d\tau_s}{dz} = 0 \quad (7.14)$$

$$\frac{u^2}{r} - g \cdot I_r + \frac{1}{\rho} \frac{d\tau_r}{dz} = 0. \quad (7.15)$$

Izraz (7.14) opisuje ustaljeno jednoliko tečenje kod koga je komponenta težine u pravcu toka uravnotežena silom trenja.

Izraz (7.15), koji opisuje poprečno strujanje, može se dalje razviti samo ako se analitički definišu („modeliraju“) drugi i treći član na levoj strani ovog izraza.

Ako se u izrazu (7.15) za trenutak zanemari trenje (treći član), centrifugalna sila je u ravnoteži sa diferencijalnom silom pritiska, pa se poprečni nagib nivoa može modelirati u obliku:

$$I_r = \frac{1}{gr} \int_0^h u^2 dz \approx \alpha_h \frac{\tilde{u}^2}{gr}, \quad (7.16)$$

gde je koeficijent neravnomernosti brzine po dubini toka [33]:

$$\alpha_h = 1 + \frac{g}{\kappa^2 C^2}. \quad (7.17)$$

Vrednosti ovog koeficijenta su bliske jedinici; na primer, za $C=50 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, $\alpha_h=1,025$.

Za definisanje poslednjeg člana u jednačini (7.15), može se primeniti ranije opisani Businesskov model zasnovan na koeficijentu turbulentne viskoznosti:

$$\frac{1}{\rho} \tau_r = \nu_t(z) \cdot \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (7.18)$$

pri čemu se jednostavnosti radi, pretpostavlja da je ν_t skalarna veličina.

Uvodeći izraze (7.16) i (7.18) u jednačinu (7.15), ova se svodi na običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda po z :

$$\frac{u^2(z)}{r} - \frac{\alpha_h \cdot \tilde{u}^2}{r} + \frac{d}{dz} \left(\nu_t(z) \cdot \frac{dv}{dz} \right) = 0. \quad (7.19)$$

Kao što je već rečeno, prvi član na levoj strani ove jednačine opisuje centrifugalno ubrzanje, drugi, uticaj poprečnog nagiba nivoa, a poslednji, uticaj turbulencije. Da bi se jednačina mogla rešiti po $v(z)$, moraju se prethodno definisati funkcije $u(z)$ i $\nu_t(z)$. Na primer, može se usvojiti logaritamski raspored brzine, kome odgovara parabolični raspored turbulentne viskoznosti.

Integracione konstante se određuju iz graničnih uslova:

- na površini: $\partial v / \partial z = 0$;
- na dnu: $v = u = 0$.

Raspored brzine $v(z)$ mora biti takav da nema jediničnog protoka vode u poprečnom pravcu:

$$q_r = \int_0^h v \, dz = 0. \quad (7.20)$$

7.1.2 Raspored radijalne brzine po dubini

Ruski naučnik Rozovski (1957) je izveo izraz za raspored radijalne komponente brzine integracijom jednačine (7.19) u koju je uveo logaritamski raspored brzine u obliku¹:

$$\frac{u}{\tilde{u}} = 1 + \frac{\sqrt{g}}{\kappa \cdot C} (1 + \ln \eta), \quad (7.21)$$

gde je \tilde{u} – po dubini osrednjena brzina glavnog strujanja, $\kappa = 0,4$ – fon Karmanova konstanta, C – Šezijev koeficijent, a $\eta = z/h$ – relativno odstojanje ($0 \leq \eta \leq 1$).

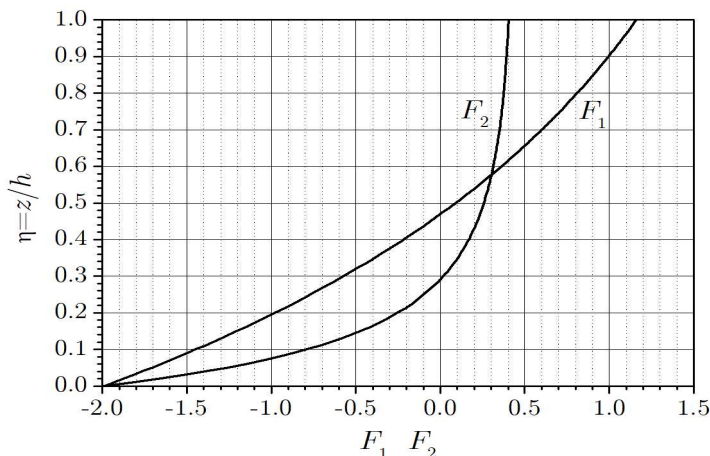
Rezultat integracije jednačine (7.19) je [141]:

$$\frac{v}{\tilde{u}} = \begin{cases} \frac{1}{\kappa^2} \cdot \frac{h}{r} \left[F_1(\eta) - \frac{\sqrt{g}}{\kappa \cdot C} F_2(\eta) \right] \\ \frac{1}{\kappa^2} \cdot \frac{h}{r} \left\{ F_1(\eta) - \frac{\sqrt{g}}{\kappa \cdot C} [F_2(\eta) + 0,8(1 + \ln \eta)] \right\}, \end{cases} \quad (7.22)$$

pri čemu su pomoćne funkcije $F_1(\eta)$ i $F_2(\eta)$ date u grafičkom obliku na Slici 7.2. Prvi izraz važi za hidraulički glatko, a drugi, za hidraulički rapavo dno. Navedeni izrazi važe za potpuno razvijeni tok u krivini, u širokom koritu ($B/h > 5$), bez uticaja obala.

Da bi potvrdio svoje teorijske rezultate i proverio pretpostavke pod kojima su ti rezultati dobijeni, Rozovski je obavio opsežne eksperimente u zakrivljenom kanalu pravaugaonog poprečnog preseka, kao i terenska merenja. Zaključio je da se računom ne može dobiti prihvatljiv raspored radijalne brzine ako se raspored brzine glavnog toka definiše paraboličnom ili stepenom funkcijom. Pokazao je da se promenom rapavosti profil brzine $v(r, \eta)$ vrlo malo menja, osim neposredno pri dnu. Zapazio je takodje da do odvajanja strujnica od unutrašnje (konveksne) obale u krivini kanala dolazi pri vrednostima parametra $R_{ko}/B = 1$ i $B/h < 5$, gde je B – širina vodenog ogleдалa, h – dubina, a R_{ko} – poluprečnik krivine po osovini toka (Slika 7.3).

¹Raspored brzine u ovom obliku se lako može izvesti iz izraza (2.48) i Šezijeve jednačine: $\tilde{u}/u_* = C/\sqrt{g}$.



Slika 7.2: Pomoćne funkcije Rozovskog [141].

Treba međutim ukazati na izvesna ograničenja teorije Rozovskog koja proizilaze iz činjenice da je eksperimentima obuhvaćen slučaj *jedne* krivine sa uniformnim rasporedom brzine na ulazu i da je većina tih eksperimenata obavljena pri vrednostima Rejnoldsovog broja koje su niže od onih u prirodi.

Dvadesetak godina nakon Rozovskog, japanski istraživači Kikava (Kikkawa, 1976) i dr. su teorijskim i eksperimentalnim ispitivanjima došli do izraza koji je sličan izrazu (7.22) [99]:

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{\tilde{u}}{V}\right)^2 \cdot \frac{h}{r} \cdot \frac{1}{\kappa} \left[F_A(\eta) - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{V_*}{V} \cdot F_B(\eta) \right], \quad (7.23)$$

pri čemu je V – srednja profilska brzina, V_* – srednja profilska smičuća brzina, a F_A i F_B , pomoćne funkcije:

$$F_A(\eta) = -15(\eta^2 \ln \eta - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{15}{54}) \quad (7.24)$$

$$F_B(\eta) = \frac{15}{2}(\eta^2 \ln^2 \eta - \eta^2 \ln \eta + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{19}{54}). \quad (7.25)$$

7.1.3 Poprečni nagib linije nivoa

Zanemarujući trenje u radijalnom pravcu i imajući u vidu oznake na Slici 7.3, može se napisati izraz za ravnotežu sila:

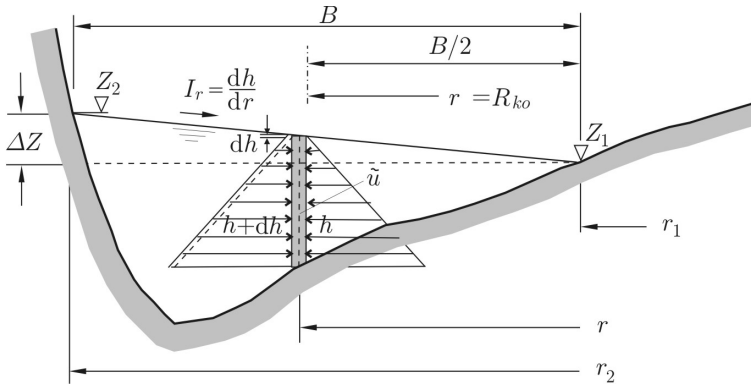
$$\frac{\alpha_h \cdot \tilde{u}^2}{r} \cdot \rho \cdot h \cdot dr \cdot ds = \left[\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g(h + dh)^2 - \frac{1}{2} \rho g h^2 \right] ds, \quad (7.26)$$

čiju levu stranu predstavlja centrifugalna sila ($a_r \cdot dm$), a desnu, diferencijalna sila pritiska. Zanemarujući beskonačno male veličine višeg reda, diferencijalna sila pritiska se svodi na: $\rho \cdot g \cdot h \cdot dh \cdot ds$, a jednačina (7.26), na izraz:

$$\frac{dh}{dr} = I_r = \frac{\alpha_h \cdot \tilde{u}(r)^2}{g \cdot r}, \quad (7.27)$$

koji je identičan izrazu (7.16).

Ovim je definisan *lokalni* poprečni nagib nivoa, na mestu posmatrane vertikale koja je na odstojanju r od centra krivine, a u kojoj je srednja brzina glavnog toka \tilde{u} . Uticaj radijalnog odstojanja je dominantan, tako da je poprečni nagib nivoa najveći pri unutrašnjoj (konveksnoj) obali, a najmanji, pri spoljašnjoj (konkavnoj) obali.



Slika 7.3: Poprečni nagib nivoa u krivini.

Najveće izdizanje nivoa u krivini (Slika 7.3), dobija se integracijom funkcije (7.27) uz pretpostavku da je $\alpha_h = 1$:

$$\Delta Z = Z_2 - Z_1 = \int_{r_1}^{r_2} I_r dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tilde{u}^2}{g r} dr \approx \frac{V^2 B}{g R_{ko}}. \quad (7.28)$$

Treba napomenuti da na veličinu poprečnog nagiba nivoa i nadvišenja u krivini malo utiče raspored brzine glavnog toka po širini korita $u(r)$, kada je odnos $R_{ko}/B > 1$ [179].

■ **Primer 7.1.** Odrediti raspored radijalne brzine u krivini Velike Morave, u profilu koji je definisan koordinatama u Tabeli 7.1. Protoku $Q=180 \text{ m}^3/\text{s}$ odgovara u ovom profilu srednja kota nivoa $Z = 111,40 \text{ mm}$. Nagib linije energije usled trenja iznosi: $I_e = 2,2 \times 10^{-4}$.

Tabela 7.1: Reka Velika Morava - poprečni profil km 180+180.

z [mm]	113	109,7	108,5	108	107,7	109,50	112
y [m]	0	5	10	20	30	60	140

Tabela 7.2: Položaj vertikalna i vrednosti odgovarajućih srednjih brzina.

Vertikalna	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
y [m]	10	30	60
\tilde{u} [m/s]	0,90	0,98	0,67

Tabela 7.3: Vrednosti radijalne komponente brzine po metodi Rozovskog.

$\eta = z/h$ [-]	$F_1(\eta)$ [-]	$F_2(\eta)$ [-]	v [m/s]		
			Vert. <i>I</i>	Vert. <i>II</i>	Vert. <i>III</i>
0,00	-	-	0,000	0,000	0,000
0,01	-1,93	-1,82	-0,061	-0,092	-0,037
0,05	-1,71	-1,26	-0,069	-0,104	-0,042
0,10	-1,45	-0,79	-0,066	-0,099	-0,039
0,20	-0,98	-0,25	-0,050	-0,076	-0,030
0,40	-0,22	0,17	-0,016	-0,024	-0,010
0,60	0,36	0,31	0,014	0,020	0,008
0,80	0,81	0,37	0,037	0,056	0,022
1,00	1,16	0,40	0,056	0,084	0,033

Tabela 7.4: Vrednosti radijalne komponente brzine po metodi Kikava i dr.

$\eta = z/h$ [-]	$F_A(\eta)$ [-]	$F_B(\eta)$ [-]	v [m/s]		
			Vert. <i>I</i>	Vert. <i>II</i>	Vert. <i>III</i>
0,00	-	-	0,000	0,000	0,000
0,01	-4,16	-2,62	-0,098	-0,160	-0,043
0,05	-4,04	-2,41	-0,095	-0,157	-0,043
0,10	-3,75	-2,03	-0,090	-0,147	-0,040
0,20	-2,90	-1,23	-0,071	-0,117	-0,032
0,40	-0,77	0,07	-0,021	-0,034	-0,009
0,60	1,29	0,79	0,030	0,050	0,014
0,80	2,78	1,07	0,069	0,113	0,031
1,00	3,33	1,11	0,083	0,137	0,037

U Tabeli 7.2 su date vrednosti srednjih brzina po dubini u tri izabrane vertikale. Vrednost poluprečnika krivine po osovini toka je $R_{ko} = 220$ m. Odrediti prosečni poprečni nagib nivoa vode u ovom profilu.

Rešenje. Na Slici 7.4 prikazan je dati poprečni profil. Koti $Z = 111,40$ mm odgovaraju sledeće vrednosti: $B \approx 118$ m, $A = 222,45 \text{ m}^2$, $O = 119,13$ m, $R = A/O = 1,87$ m, $V = Q/A = 0,81$ m/s, $V_* = \sqrt{gRI_e} = 0,0635$ m/s. Vrednost Šezijevog koeficijenta je $C = V\sqrt{g}/V_* = 40 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$.

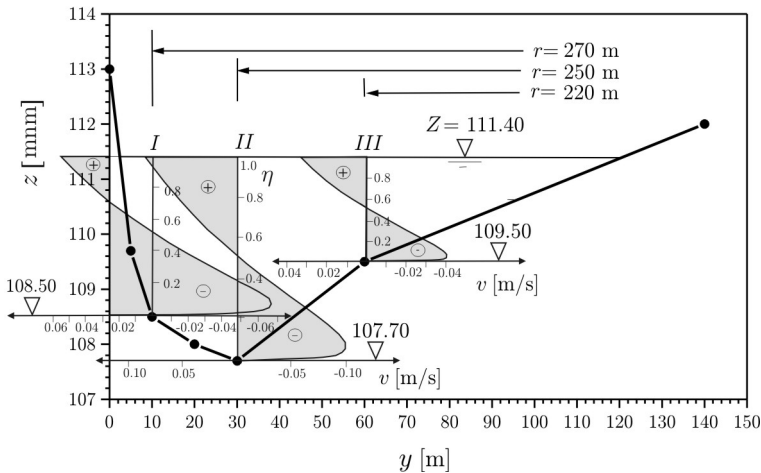
Dubine u vertikalama *I*, *II* i *III*, iznose 2,90, 3,70 i 1,90 m. Vertikalama *III* približno odgovara radijalno odstojanje do centra krivine $r = R_{ko} = 220$ m, a vertikalama *II* i *I*, odstojanja $r = 250$ i 270 m. Primenom jednačine (7.22) i uz pomoć dijagrama na Slici 7.2, sračunat je raspored $v(\eta)$ po metodi Rozovskog u Tabeli 7.3 i grafički je prikazan na Slici 7.4. U Tabeli 7.4 dati su poredjenja radi, rezultati po metodi čiji su autori Kikava i dr.

Razlika kota nivoa na levoj i desnoj obali je na osnovu (7.28):

$$\Delta Z = (0,81^2 \cdot 118)/(9,81 \cdot 220) = 0,036 \text{ m,}$$

a prosečni poprečni nagib vodenog ogledala:

$$I_r = \Delta Z/B = 0,036/118 = 3,05 \times 10^{-4}.$$

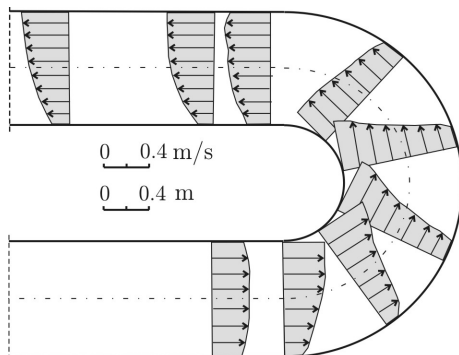


Slika 7.4: Raspored radijalne komponente brzine u primeru 7.1

7.1.4 Raspored radijalne brzine po širini korita

Poprečni nagib nivoa je najveći u blizini unutrašnje (konveksne) obale, jer je tu poluprečnik krivine manji nego na spoljašnoj (konkavnoj) obali. Ova činjenica

utiče na raspored brzine u krivini, kao što prikazuju rezultati laboratorijskih merenja Rozovskog na Slici 7.5.



Slika 7.5: Raspored srednje radialne brzine po širini pravougaonog korita $\tilde{v}(y)$ [141]; veće brzine u blizini unutrašnje, konveksne obale u krivini su posledica izraženijih poprečnih i uzdužnih nagiba nivoa (manji poluprečnik krivine, kraća putanja, manja dubina); izlaskom iz krivine, opisani trend se pomera ka spoljašnjoj - konkavnoj obali, tako da je nizvodno od krivine raspored brzine suprotan onom u krivini. Prikazana strujna slika zavisi od vrednosti odnosa B/h i R_{ko}/h (odnosno R_{ko}/B), a ne zavisi od Frudovog broja ako je $Fr \ll 1$.

7.1.5 Helikoidno strujanje

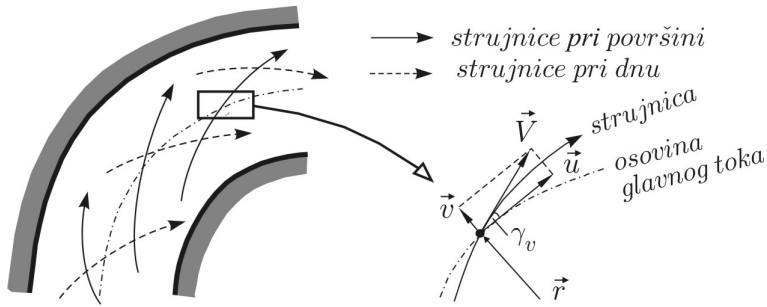
Superpozicijom poprečnog – sekundarnog strujanja i glavnog strujanja, nastaje takozvano *helikoidno* (spiralno, zavojno) strujanje u krivini, koje ima veliki značaj za morfologiju rečnog korita. Usled poprečne komponente, vektor brzine \vec{V} ima pravac koji odstupa od tangencijalnog pravca za određeni ugao, kao što je prikazano na Slici 7.6. Ovaj ugao se može teorijski definisati kombinacijom izraza (7.21) i (7.22):

$$\operatorname{tg} \gamma_v = \frac{v}{u} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{h}{r} \frac{F_1(\eta) - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} [F_2(\eta) + 0,8(1 + \ln \eta)]}{1 + \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} (1 + \ln \eta)}, \quad (7.29)$$

dok se pri dnu može primeniti približan izraz:

$$\operatorname{tg} \gamma_v \approx (10 - 11) \frac{h}{r}, \quad (7.30)$$

koji je potvrđen merenjima u prirodi [141].



Slika 7.6: Helikoidno strujanje u krivini.

Intenzitet spiralnog strujanja zavisi od odnosa B/h i h/r . Izraženije je pri nižim vrednostima odnosa B/h (najintenzivnije je za $B/h=1$), slabi sa povećanjem vrednosti B/h , a postaje nezavisno od vrednosti ovog odnosa za $B/h > 12$ [179]. S druge strane, što je manja vrednost odnosa h/r to su slabije izraženi efekti helikoidnog strujanja, što se vidi iz navedenih izraza. Kod velikih reka kao što su na primer Dunav i Sava, širine korita, dubine i poluprečnici krivina su toliko veliki da se uticaj centrifugalnog strujanja može zanemariti.

■ **Primer 7.2.** Odrediti veličinu ugla odstupanja od tangencijalnog pravca za vertikalu broj II iz prethodnog primera, na relativnoj dubini $\eta = z/h = 0,8$ i $0,1$.

Rešnje. Iz Tabele 7.3 se uzimaju vrednosti $F_1(0,8) = 0,81$, $F_2(0,8) = 0,37$, $F_1(0,1) = -1,45$ i $F_2(0,1) = -0,79$. Vrednost konstante $\sqrt{g}/(\kappa C)$ iznosi $0,196$. Primenom izraza (7.29) dobija se za $\eta = 0,8$: $\text{tg } \gamma_v = 0,049$, $\gamma_v = 2,8^\circ$, a za $\eta = 0,1$: $\text{tg } \gamma_v = -0,136$, $\gamma_v = -7,7^\circ$. Znak ugla u odnosu na tangencijalni pravac pokazuje da li je vektor brzine \vec{V} usmeren ka spoljašnjoj - konkavnoj, ili ka unutrašnjoj - konveksnoj obali, u skladu sa usmerenjem strujnica pri površini i pri dnu. Primenom približnog izraza (7.30) dobija se za $\eta = 0,1$ vrednost ugla $\gamma_v \approx -9^\circ$.

7.1.6 Raspored radijalnog napona

Kao što se u analizi strujanja u krivini vektor brzine razlaže na tangencijalnu i radijalnu komponentu, tako se i smičući napon može razložiti na odgovarajuće komponente. Definisanje rasporeda radijalne komponente $\tau_r(r, h)$ je bitno jer ovaj napon utiče na raspored brzine $v(r, \eta)$, na poprečni nagib dna u profilu, kao i na kretanje nanosa upravno na glavni tok, a time i na oblik poprečnog profila u krivini.

Integracijom jednačine (7.15) po dubini, može se izvesti izraz za radijalni napon na dnu [76]:

$$\tau_{or}(r) = -\rho \cdot \frac{h}{r} \cdot \tilde{u}^2 \left[2 \left(\frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \right)^2 - 2 \left(\frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \right)^3 \right], \quad (7.31)$$

gde je C – Šezijev koeficijent trenja.

Ako se ima u vidu da je smičući napon u pravcu glavnog toka: $\tau_{os} \equiv \tau_o = \rho g V^2 / C^2$, može se definisati ugao koji rezultujući smičući napon zaklapa sa osovinom toka:

$$\operatorname{tg} \gamma_\tau = \frac{\tau_{or}}{\tau_{os}} = -\frac{2}{\kappa^2} \cdot \frac{h}{r} \left(1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa \cdot C} \right). \quad (7.32)$$

Ugao γ_τ (kao i ugao γ_v), najviše zavisi od odnosa h/r .

U literaturi [48] se mogu naći i drugačiji izrazi za definisanje napona τ_{or} i ugla γ_τ izvedeni na bazi stepenog rasporeda brzine glavnog toka. Bez obzira koji se pristup primeni, vrednosti radijalnog smičućeg napona su neophodne za prognozu poprečnog nagiba dna u krivini.

■ **Primer 7.3.** Koristeći podatke iz primera 7.1 odrediti veličinu radijalne komponente tangencijalnog napona na dnu i ugao koji određuje pravac rezultujućeg tangencijalnog napona u odnosu na osovinu toka.

Rešenje. U datom slučaju je karakteristična vrednost $\sqrt{g}/(\kappa C) = 0,196$, a srednja brzina: $\tilde{u}=0,81$ m/s. Primenom izraza (7.31) i (7.32) sračunate su vrednosti napona i uglova u zadatim vertikalama, kao što pokazuje Tabela 7.5.

Tabela 7.5: Rezultati proračuna radijalne komponente tangencijalnog napona

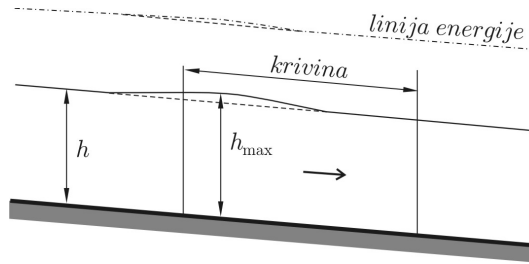
Vertikala	h [m]	r [m]	h/r [-]	τ_{or} [Pa]	$\operatorname{tg} \gamma_\tau$ [-]	γ_τ [°]
I	2,90	270	0,011	-0,45	-0,111	-6,33
II	3,70	250	0,015	-0,61	-0,151	-8,59
III	1,90	220	0,009	-0,37	-0,090	-5,17

7.1.7 Energetski gubici u krivini

Rečna krivina je uzrok lokalnog gubitka energije. Uticaj krivine se manifestuje na sličan način kao povećanje vrednosti koeficijenta otpora na pravolinijskoj deonici iste dužine [33]. Utrošak energije toka na savladjivanje otpora u krivini je veći od onog kod odgovarajuće pravolinijske deonice, pri istoj dubini, brzini i rapavosti korita (Slika 7.7).

Ovo se pripisuje uticajima sekundarnog strujanja: (a) većem unutrašnjem trenju i otporima na dnu usled poprečnog tangencijalnog napona i (b) vrtložnim zonama usled odvajanja toka od konveksne obale u ostrim krivinama.

Dopunski nagib linije energije usled sekundarnog strujanja može se proceniti na osnovu izraza koji je predložio Rozovski (1957) za potpuno razvijeni tok u krivini



Slika 7.7: Linije nivoa i energije u krivini; u mirnom režimu dolazi do izdizanja nivoa i usporenja toka na ulazu u krivinu; ovaj uspor predstavlja akumulisanje potencijalne energije da bi se savladali povećani otpori usled sekundarnog strujanja.

širokog pravougaonog korita [141]:

$$I_e^k = \left(12 \frac{\sqrt{g}}{C} + 30 \frac{g}{C^2} \right) \left(\frac{h}{R_{ko}} \right)^2 \text{Fr.} \quad (7.33)$$

U navedenom izrazu je h - dubina uzvodno od krivine, R_{ko} - radijus krivine po osovini toka, a $\text{Fr} = V^2/(gh)$ - Frudov broj.

Prvi član u zagradi na desnoj strani jednačine predstavlja gubitak energije na savladivanju unutrašnjeg trenja izazvanog poprečnim smičućim naponom τ_r , a drugi član, gubitak energije usled dopunskog trenja na dnu. Navedeni izraz pokazuje da je pri određenoj vrednosti Fr broja, lokalni gubitak energije usled zakrivljenosti korita obrnuto proporcionalan poluprečniku krivine i rapavosti korita.

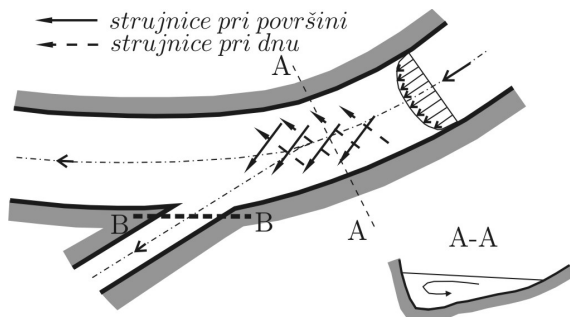
7.1.8 Neke praktične posledice strujanja u krivini

Najvažnije posledice strujanja u krivini su morfološke promene korita, koje su opisane u prvom poglavlju i o kojima će još biti reči u dvanaestom poglavlju. U nastavku biće reči o onim aspektima centrifugalnog strujanja koji su interesantni sa stanovišta projektovanja i eksploatacije vodozahvatnih objekata.

Funkcionalne karakteristike vodozahvata zavise od količine vode, namene (navodnjavanje, energetska korišćenje, plovidba) i od režima nanosa. Konceptualno su moguća dva rešenja. „Statički vodozahvat” podrazumeva pregradjivanje korita pomoću brane ili praga i formiranje akumulacionog bazena iz koga se voda bočno kontrolisano ispušta pomoću ustava. „Dinamički vodozahvat” podrazumeva izgradnju kanala, čija se osovina što više poklapa sa tangentom na osovini toka u krivini (Slika 7.8). Ulaz kanala se nalazi na konkavnoj obali da bi se smanjilo taloženje nanosa i iskoristile veće dubine.

Dispoziciono rešenje ovog tipa vodozahvata omogućava da se iskoristi helikoidno tečenje, pri čemu površinske strujnice skreću ka konkavnoj obali, a strujnice pri

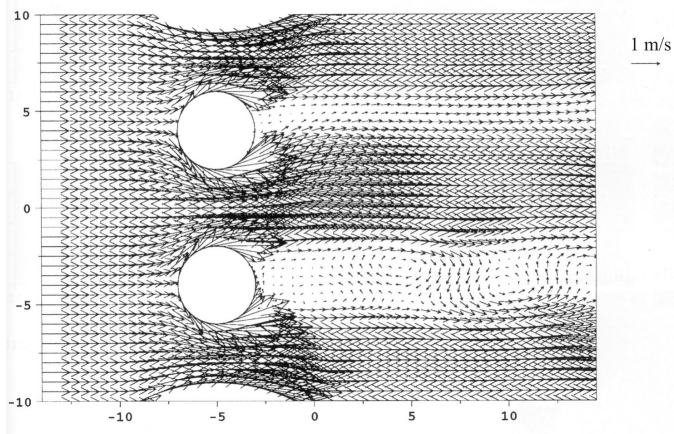
dnu, ka suprotnoj – konveksnoj obali, odvlačeći nanos od ulaza u zahvatni kanal. Povoljan efekat helikoidnog strujanja dodatno se može pojačati izgradnjom praga na ulazu u kanal (presek B-B), što sprečava uvlačenje nanosa koji se kreće po dnu.



Slika 7.8: Vodozahvatni kanal na konkavnoj obali.

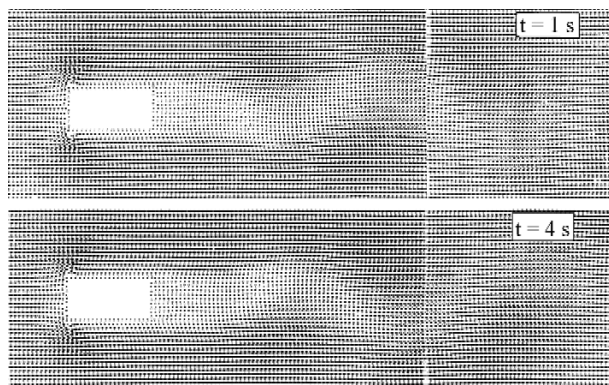
7.2 Sekundarno strujanje u zoni mostovskih stubova

U prethodnom poglavlju je pokazano kako mostovski oporci i stubovi utiču na liniju nivoa. Pod izvesnim uslovima, tečenje između mostovskih stubova može postati nestabilno. Ta nestabilnost se manifestuje u vidu *oscilatornog* vrtložnog traga iza mostovskih stubova (Slike 7.9 i 7.10).



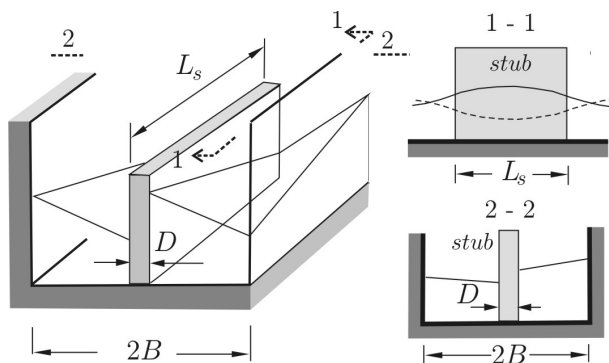
Slika 7.9: Rezultati numeričke simulacije vrtložnog strujanja nizvodno od cilindričnih mostovskih stubova. Proračun ravanskog (prostorno dvodimenzionog) tečenja obavljen je metodom konačnih elemenata [67].

Perioda oscilacija T_s zavisi od širine korita (B) i od vrednosti Struhalovog (Strouhal) broja $St = b_s / (V_o T_s)$, gde je b_s – širina stuba, a V_o – srednja profilska brzina neporemećenog toka uzvodno od stuba.



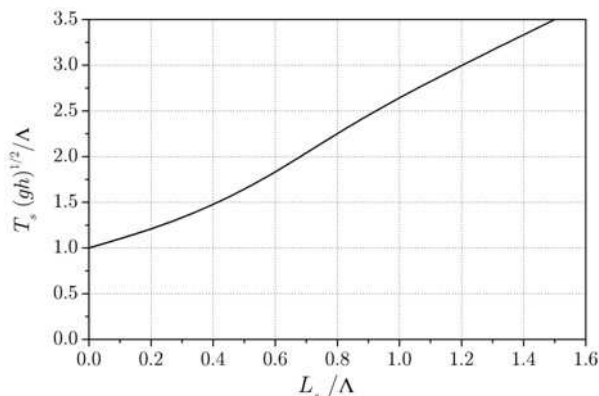
Slika 7.10: Rezultati numeričke simulacije sekundarnog strujanja nizvodno od mostovskog stuba („Karmanovih vrtloga”). Proračun je obavljen rešavanjem jednačina ravanskog neustaljenog tečenja metodom konačnih razlika, sa modelom turbulencije zasnovanim na dužini mešanja. Vrtložni „trag” ima oblik sinusoide čija se amplituda povećava u nizvodnom smeru. ($V_o = 1,2$ m/s, $b_s = 1$ m, $B = 6$ m, $T_s = 4,6$ s, $St = 0,18$) [78].

Otkidanje vrtloga nizvodno od mostovskih stubova izaziva oscilovanje nivoa između stubova. Ovo se ispoljava u vidu dva fazno suprotstavljena talasa sa svake strane stuba, što je karakteristično za uske otvore, dok se kod širih otvora pod određenim uslovima mogu javiti i poprečne oscilacije nivoa (Slika 7.11).



Slika 7.11: Oscilatorno sekundarno strujanje u zoni mostovskih stubova.

Eksperimentalno je utvrđeno da se oscilacije nivoa mogu očekivati pri vrednostima $St \approx 0,32$, da dostižu najveći intenzitet pri vrednosti $St \approx 0,22$, a nestaju, pri vrednostima $St \approx 0,2$ [111]. Dijagram na Slici 7.12 se može koristiti za predviđanje potencijalno nestabilnog toka u profilu mosta.



Slika 7.12: Zavisnost bezdimenzionirane talasne dužine i bezdimenzionirane periode oscilovanja nivoa vode oko mostovskog stuba; oznake: $\Lambda = 4B/n_s$, $2B$ – širina korita, n_s – broj stubova; L_s – dužina stuba; T_s – perioda; h – dubina neporemećenog toka. Dijagram važi u opsegu vrednosti: $L_s/b_s > 2$ i $Fr < 0,4$ [111].

■ **Primer 7.4.** U sredini pravougaonog korita širine $2B = 8$ m, nalazi se mostovski stub dimenzija $b_s = 1$ m, $L_s = 4$ m. Proceniti pri kojim uslovima će tok biti nestabilan u zoni ovog mosta.

Rešenje. Koristeći dijagram na Slici 7.12, može se odrediti karakteristična dužina: $\Lambda = 4B/n_s = 16$ m; za $L_s/\Lambda = 4/16 = 0,25$ sa dijagrama na Slici 7.12 se očitava vrednost $T_s \sqrt{gh}/\Lambda \approx 1,2$, odakle sledi da je perioda $T_s = 19,2/\sqrt{gh}$. Na osnovu kritične vrednosti Struhalovog broja:

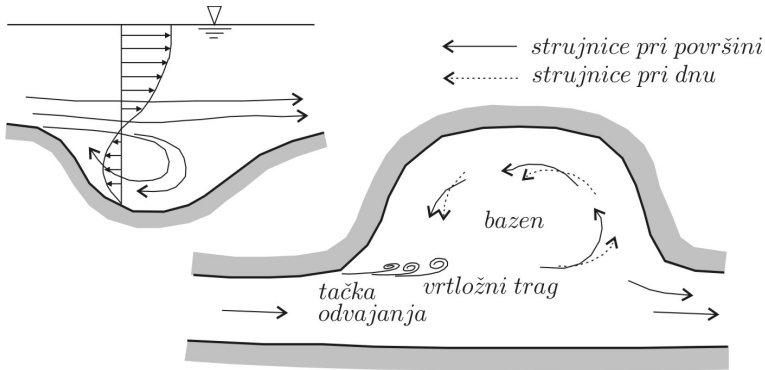
$$St = \frac{\sqrt{gh}}{19,2 V_o} = 0,32,$$

dobija se vrednost $Fr = V_o/\sqrt{gh} = 0,16$, pri kojoj se može očekivati nestabilnost toka u profilu mosta.

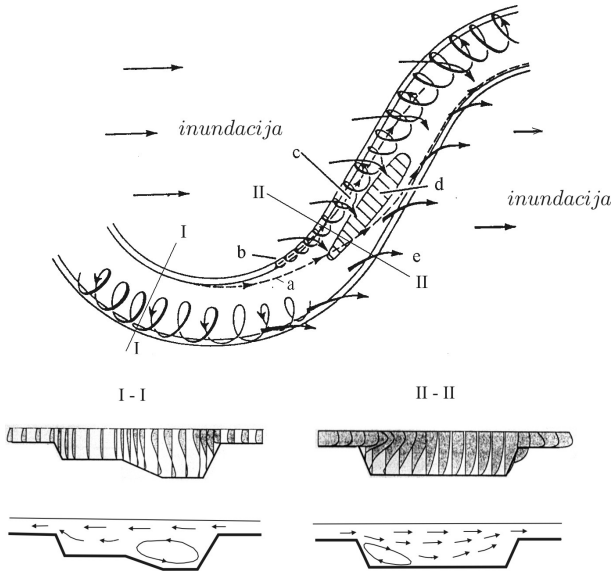
Da bi se smanjile ili otklonile oscilacije nivoa, na raspolaganju su dva rešenja: (a) izmena sopstvene periode oscilatora - promena dužine stuba i (b) izmena frekvencije naizmeničnih vrtloga promenom oblika stuba.

7.3 Ostali vidovi sekundarnih strujanja

Nagle promene geometrije korita, bilo u uzdužnom profilu ili u planu, dovode do odvajanja strujnica i pojave vrtloga sa horizontalnom ili vertikalnom osovinom (Slika 7.13). Posredstvom ovih vrtloga dolazi do prenosa količine kretanja iz glavnog u sekundarno strujanje, čiji se intenzitet postepeno smanjuje usled trenja.



Slika 7.13: Primeri vrtložnih sekundarnih strujanja izazvanih odvajanjem strujnica na mestima nagle promene uzdužnog profila dna (proloka, skica levo), ili u planu (naglo proširenje u vidu bazena, skica desno); u ovom drugom slučaju se unutar bazena javlja kružeće (recirkulaciono) strujanje koje pogoduje zasipanju bazena nanosom.



Slika 7.14: Shematski prikaz strujnog polja u periodu velikih voda: a - odvajanje strujnice; b - zona formiranja vrtložnog traga; c - jaki vrtlozi formirani poniranjem strujnica iz inundacije; d - zona intenzivnog priliva vode iz inundacije u glavno korito; e - zona intenzivnog izlivanja vode iz glavnog korita u inundaciju. U presecima I-I i II-II je prikazan raspored poprečne komponente brzine i vrtložno sekundarno strujanje [7].

U zavisnosti od turbulentne strukture, ovakva sekundarna strujanja nose razna imena: „vrtložno”, „kompenzaciono”, „strujanje Žukovskog” itd.

Na Slici 7.14 su prikazani rezultati laboratorijskih ispitivanja sekundarnih strujanja u složenom meandrirajućem koritu. Ispitivanje je obavljeno na fizičkom modelu uzdužnog nagiba dna 0,1%, sa vrednošću faktora sinusoidnosti 1,37 [7]. Može se konstatovati veoma složena strujna slika koja je posledica kombinovanog dejstva primarnog i sekundarnog tečenja.

Interesantno je napomenuti da se sekundarna strujanja javljaju i u pravolinijskom prizmatičnom koritu pravougaonog ili trapeznog poprečnog preseka, na spoju dna sa obalama [33]. Ova pojava nije dovoljno razjašnjena. Sa praktičnog stanovišta, takva strujanja nisu značajna jer im intenzitet nije veći od 1-2% srednje brzine glavnog toka.

U sekundarna strujanja spadaju i kretanja površinskih slojeva vode usled vetra, kao i strujanje koje nastaje usled mešanja voda različitih gustina na ušću reke u more. Najzad, tu je i efekat zapreminske Koriolisove sile usled rotacije Zemlje, koji je sličan efektu centrifugalne sile u krivini. Uticaji Koriolisove sile se obično zanemaruju u praksi.

Poreklo i fizička svojstva rečnog nanosa

Analiza režima rečnog nanosa nije moguća bez poznavanja porekla i fizičkih svojstava nanosa. Ta svojstva se utvrđuju obradom uzoraka nanosa koji se zahvataju iz rečnog korita. U ovom poglavlju biće reči o osnovnim fizičkim osobinama rečnog nanosa koje su važne za izučavanje psamološkog i morfološkog režima vodotoka.

8.1 Nastanak i podela rečnog nanosa

Rečni nanos nastaje kao posledica erozionih procesa u slivu. Reč je o razaranju tla pod uticajem fizičkih pojava kao što su padavine, sezonske promene temperature, površinski oticaj itd.

Erozija tla usled kiše – „pluvijalna erozija”, zavisi od brojnih faktora: intenziteta kiše, ukupne energije kišnih kapi, otpornosti tla, obima i vrste vegetacije.

Erozija tla usled površinskog oticaja, koja nastaje u periodu kada je intenzitet kiše veći od intenziteta upijanja vode u tlo, deli se na površinsku i dubinsku eroziju.

Površinska erozija predstavlja spiranje površinskog sloja tla na nekom slivnom području. Materijal koji na taj način dospe u rečno korito, vrlo je sitan po krupnoći i kreće se nošen tokom, u vidu suspenzije. Otuda i naziv „*suspendovani nanos*”. Deo ovog nanosa koji nikada ne dospeva do rečnog dna, predstavlja „*tranzitni*” nanos, a deo koji se povremeno istaložava i aktivno učestvuje u formiranju rečnog dna, zove se „*koritiformirajući*” suspendovani nanos. Interesantno je da je krupnoća čestica suspendovanog nanosa manje-više uniformna za sve deonice jednog vodotoka, kao i za većinu vodotoka istog podneblja.

Dubinska erozija. Ova j vid erozije nastaje kao posledica koncentracije površinskog oticaja u obliku jaruga (Slika 8.1), potoka i reka, a proizvodi krupan nanos, koji se kreće po dnu rečnog korita kotrljanjem, klizanjem, ili u vidu skokova, pa se stoga zove „*vučeni nanos*”.

Dakle, moguća su dva načina podele rečnog nanosa: prema poreklu, nanos se deli na tranzitni nanos i koritiformirajući nanos (vučeni i deo suspendovanog), a prema načinu kretanja, deli se na vučeni i suspendovani nanos.



Slika 8.1: *Posledice dubinske erozije kod Velikog Gradišta.*

Od ukupne količine materijala koji nosi aluvijalni vodotok, oko 85÷95% otpada na suspendovani, a svega 5÷15% na vučeni nanos. Međutim, podelu rečnog nanosa, koja je proizašla iz potrebe da se lakše analiziraju složeni prirodni procesi, treba uslovno shvatiti, jer se iste čestice mogu kretati u vidu suspendovanog ili vučenog nanosa, u zavisnosti od trenutnih hidrauličkih uslova.

Fizička svojstva rečnog nanosa, kao i pojave vezane za njegovo sadejstvo sa rečnim tokom, podvode se pod termin „*režim nanosa*”. Njime je obuhvaćena raspodela krupnoće čestica – „*granulometrijski sastav*”, količina nanosa u pokretu – „*pronos nanosa*” i bilans nanosa na datoj deonici u nekom vremenskom periodu – „*deformacija rečnog korita*”. Režim nanosa se definiše na osnovu terenskih istražnih radova i hidrauličkih proračuna.

8.2 Fizička svojstva rečnog nanosa

Osobine rečnog nanosa se mogu razmatrati sa geološkog i hidrauličkog stanovišta. U prvom slučaju je reč o analizi porekla nanosa, njegove mineralne strukture i otpornosti na razne mehaničke, termičke i hemijske uticaje. Za hidrotehničku struku su bitne samo one osobine nanosa koje utiču na hidrauličke karakteristike toka i na morfološke karakteristike korita.

Razlikuju se dve vrste materijala od kojih je sastavljen nanos: (i) *vezani* (koherentni) materijali obuhvataju vrlo sitne čestice prašine i gline, a (ii) *nevezani* (nekoherentni) materijali obuhvataju zrna peska i šljunka. U nastavku se razmatra prvenstveno materijal iz ove druge kategorije.

Karakteristike nanosa se mogu definisati na nivou pojedinačnog zrna i na nivou grupe zrna koja čine mešavinu nanosa. Naučna disciplina koja se time bavi, zove se „*psamologija*”.

8.2.1 Fizička svojstva pojedinačnog zrna

Osnovna fizička svojstva pojedinačnog zrna su: gustina, krupnoća, oblik i brzina tonjenja („*hidraulička krupnoća*”).

8.2.1.1 Gustina

Gustina zrna rečnog nanosa je uslovljena mineralnim sastavom. Pretežno je prisutan *kvarc*, a mogu u određenoj meri biti zastupljeni i minerali veće gustine, kao što su magnetit, hornblenda i drugi. Dunavski pesak na primer, sadrži 25 minerala, od kojih su najzastupljeniji kvarc i amfibolit.

Vrednosti gustine nanosa kreću se u uskom opsegu od $2,6 \div 2,7 \text{ t/m}^3$, a u proračunima se najčešće usvaja prosečna vrednost $\rho_s = 2,65 \text{ t/m}^3$. U teorijskim razmatranjima se kao pogodna bezdimenziona veličina, koristi *relativna gustina* nanosa (u odnosu na gustinu vode):

$$s = \frac{\rho_s}{\rho} = 2,65, \text{ ili,} \quad (8.1)$$

$$\Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} = 1,65. \quad (8.2)$$

Gustina zrna bitno utiče na njihovu pokretljivost u rečnom toku; upoređujući zrna istih dimenzija, ona sa većom gustinom se teže pokreću sa rečnog dna, a ako su u suspenziji, imaju veću brzinu tonjenja.

8.2.1.2 Krupnoća

Pretpostavljajući da je zrno sfernog oblika, krupnoća nanosa se opisuje karakterističnim prečnicima i karakterističnim brzinama tonjenja.

Karakteristični prečnici su:

- *Nominalni prečnik* – prečnik lopte koja ima istu masu i gustinu, odnosno zapreminu, kao zrno nanosa.
- *Prečnik na situ* – prečnik zrna koje prolazi kroz kvadratni otvor sita određenih dimenzija, ali ne i kroz manji otvor sledećeg sita iz kompleta sita sa otvorima standardizovanih dimenzija (videti tačku 8.2.2.1).
- *Prečnik taloženja* – prečnik kvarcnog zrna sfernog oblika koje ima istu brzinu tonjenja kao prirodno zrno nepravilnog oblika, u istom fluidu, pod istim uslovima.
- *Standardni prečnik tonjenja* – prečnik lopte koja ima istu gustinu kao čestica nanosa ($2,65 \text{ t/m}^3$) i istu uniformnu brzinu tonjenja u mirnoj destilovanoj vodi neograničene zapremine, pri temperaturi od 24°C .

Karakteristične brzine su:

- *Brzina taloženja* – uniformna brzina tonjenja pojedinačne čestice u mirnoj vodi neograničene zapremine.
- *Standardna brzina tonjenja* – uniformna brzina tonjenja pojedinačne čestice u mirnoj destilovanoj vodi neograničene zapremine, na temperaturi od 24°C .

Karakteristične brzine tonjenja se koriste za definisanje krupnoće sitnih čestica (ispod 0,062 mm), koje se ne mogu prosejati (videti tačku 8.2.2.1).

Krupnoća zrna se u dinamičkim uslovima rečnog toka menja u prostoru i vremenu, usled mehaničkih, toplotnih, hemijskih i drugih uticaja. Mehaničko usitnjavanje zrna – abrazija, odvija se postepeno, habanjem, ili naglo, udarom krupnih komada. Taj proces je uslovljen nizom faktora, kao što su mineralni sastav, sila trenja, sila udara, količina nanosa, neravnomernost krupnoće itd.

8.2.1.3 Oblik zrna

Definicija oblika zrna je važna za analizu ponašanja nanosa u hidrodinamičkim uslovima. Pokazatelji oblika:

- faktor sferičnosti :
$$S_f = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)} \quad (8.3)$$

- faktor oblika :
$$S_p = \frac{c}{\sqrt{a \cdot b}}, \quad (8.4)$$

definisani su pomoću tri međusobno ortogonalne dužine (a, b, c), od kojih je a – najveća, b – srednja, a c – najmanja.

Oblik zrna se menja tokom vremena. Zavisi od mineralnog sastava i dužine prevladanog puta na kome je zrno izloženo raznim mehaničkim, hemijskim i toplotnim uticajima.

8.2.1.4 Brzina tonjenja

Razmatra se relativno kretanje čestice pod uticajem gravitacije, u neograničenoj zapremini mirne vode gustine ρ i viskoznosti μ . Čestica ima prečnik d , gustinu ρ_s i faktor oblika S_p .

U početku je tonjenje čestice ubrzano, ali nakon kratkog vremena postaje jednoliko, a brzina tonjenja W konstantna. Ova brzina se može definisati pomoću dimenzione analize, polazeći od implicitne zavisnosti veličina koje opisuju razmatranu pojavu:

$$f(\rho, \mu, \rho_s, d, S_p, g, W) = 0. \quad (8.5)$$

Izborom tri veličine koje reprezentuju masu, dužinu i vreme: ρ , d i W za osnovne veličine, kao i primenom Bakingamove (Buckingham) „II-teoreme” [63], 7 dimenzionih veličina iz (8.5) se svodi na $7 - 3 = 4$ bezdimenzione veličine:

$$\Pi_\mu = \frac{\mu}{\rho W d}, \quad \Pi_{\rho_s} = \frac{\rho_s}{\rho} \text{ ili } \frac{\rho_s - \rho}{\rho}, \quad \Pi_{S_p} = S_p, \quad \Pi_g = \frac{g d}{W^2}, \quad (8.6)$$

od kojih prva i poslednja predstavljaju recipročne Rejnoldsove i Frudove brojeve zrna. Polazna zavisnost (8.5) se sada može formulisati u bezdimenzionom obliku:

$$\Pi_g = f_1 (\Pi_\mu, \Pi_{S_p}, \Pi_{\rho_s}), \text{ odnosno,} \quad (8.7)$$

$$\frac{g \cdot d}{W^2} = f_2 \left(\frac{\mu}{\rho W d}, S_p \right) \cdot \Delta, \quad (8.8)$$

gde je $\Delta = (\rho_s - \rho)/\rho$ - relativna bezdimenziona gustina zrna.

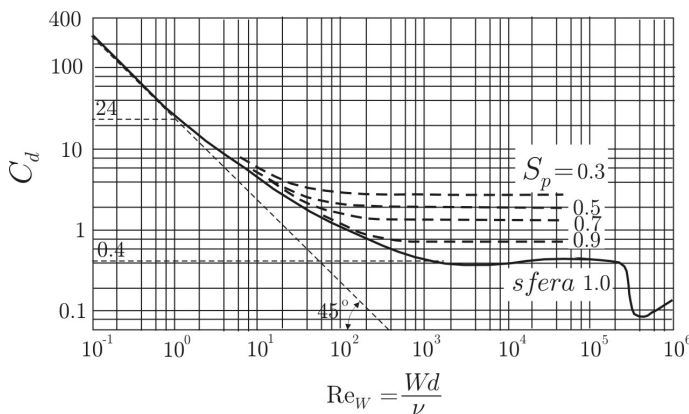
Funkcija f_2 u izrazu (8.8) opisuje promenu *koeficijenta sile otpora*:

$$C_d = C_d (\text{Re}_W, S_p). \quad (8.9)$$

Sila otpora je hidrodinamička sila koja se protivi tonjenju čestice. Uvodeći koeficijent otpora C_d , zavisnost (8.8) se može uopšteno formulisati po brzini:

$$W = W (C_d, \Delta \cdot g \cdot d). \quad (8.10)$$

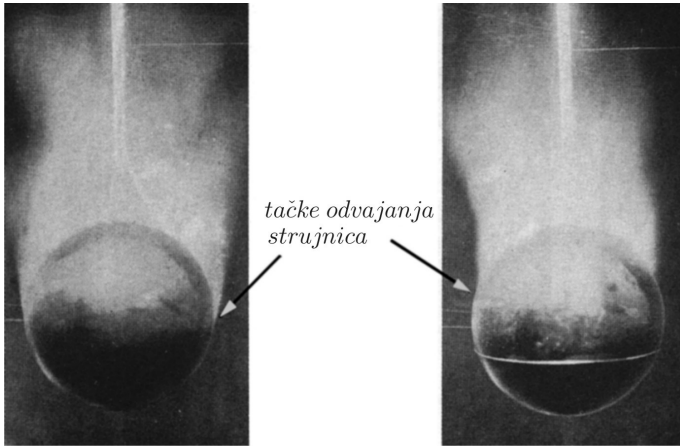
Oblik funkcije (8.9) je utvrđen eksperimentalno, kao što je prikazano na Slici 8.2.



Slika 8.2: Vrednosti koeficijenta otpora u funkciji Rejnoldsovog broja zrna i njegovog faktora oblika [176].

Vrednosti koeficijenta C_d odražavaju karakter opstrujavanja zrna. Vrlo sitna zrna se nalaze u *laminarnom* režimu opstrujavanja, a sila otpora je posledica isključivo trenja po površini zrna. Dominiraju uticaji viskoznosti, pa je koeficijent otpora linearna funkcija Rejnoldsovog broja: $C_d = C_d (\text{Re}_W)$. Ova oblast, poznata kao „Stoksova” (Stokes), važi za vrednosti $\text{Re}_W < 1$ (po nekim autorima, $\text{Re}_W < 0,1$).

Kod krupnijih zrna koja imaju veću brzinu tonjenja, dolazi do odvajanja graničnog sloja u laminarnom režimu. Daljim povećanjem brzine (odnosno krupnoće zrna), opstrujavanje postaje *turbulentno* (vrtložno), uspostavlja se razlika pritiska oko zrna u vertikalnom pravcu, tako da se javlja otpor oblika (Slika 8.3).



Slika 8.3: Fotografije eksperimentalnog ispitivanja opstrujavanja tela sfernog oblika; telo je zakačeno žicom i izloženo dejstvu ustaljene vazdušne struje; (da bi se struktura toka mogla jasnije snimiti, u vazdušnu struju je ubrizgavan dim); može se konstatovati da se sa povećanjem brzine, tačke odvajanja strujnica pomeraju unazad i da se intenzivira vrtložni trag iza tela [131].

Oblast u kojoj je otpor oblika istog reda veličine kao otpor trenja, zove se *prelazna oblast* i njene granice su grubo određene vrednostima $1 < Re_W < 1000$ (Slika 8.2). U toj oblasti je $C_d = C_d(Re_W, S_p)$.

Daljim povećanjem krupnoće zrna, brzina tonjenja u turbulentnoj oblasti se povećava, a uticaji viskoznosti smanjuju, tako da je konačno sila otpora isključivo posledica oblika: $C_d = C_d(S_p)$. Ovaj slučaj odgovara konstantnim vrednostima parametra C_d na dijagramu Slike 8.2 ($Re_W > 1000$). Pri vrednosti $Re_W \approx 2 \times 10^5$, kod sfernih zrna se uočava naglo smanjenje otpora, što je posledica otkidanja vrtloga iza zrna.

Izraz za brzinu tonjenja sfernog zrna se u opštem slučaju može izvesti iz osnovnih Navie-Stoksovih (Navier-Stokes) jednačina [51]. Zakon održanja količine kretanja (drugi Njutnov zakon) kaže da je vertikalno ubrzanje zrna koje tone, jednako zbiru svih vertikalnih sila po jedinici mase:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\sum F}{m_o} = \frac{-G + P_z + F_z}{m_o}. \quad (8.11)$$

Oznake u navedenoj jednačini imaju sledeće značenje:

$$\begin{aligned}
 m_o &= \rho_s \cdot \forall_o && - \text{masa zrna;} \\
 \forall_o &= d^3 \pi / 6 && - \text{zapremina zrna;} \\
 G &= m_o \cdot g && - \text{težina zrna;} \\
 P_z &= \rho \cdot g \cdot \forall_o = m_o \cdot g \cdot \rho / \rho_s && - \text{sila potiska;} \\
 F_z &= C_d \cdot \rho \cdot (d^2 \pi / 4) \cdot W^2 / 2 && - \text{komponenta hidrodinamičke sile.}
 \end{aligned}$$

Ako se uzme da je vertikalna koordinata suprotno usmerena u odnosu na smer kretanja zrna, jednačina (8.11) se može napisati u razvijenom obliku:

$$\frac{dW}{dt} = -g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right) + \frac{\frac{1}{8} C_d \cdot \rho \cdot d^2 \cdot \pi \cdot W^2}{\frac{1}{6} \cdot \rho_s \cdot d^3 \cdot \pi}, \quad (8.12)$$

a zanemarenjem inercijalnih uticaja (ustaljeno kretanje, $dW/dt=0$), sledi:

$$W = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{C_d} \cdot \Delta \cdot g \cdot d}. \quad (8.13)$$

Specijalni slučajevi su:

- Stoksova oblast ($\text{Re}_W < 1$): $W = \frac{g(\rho_s - \rho) d^2}{18\mu}; \quad C_d = \frac{24}{\text{Re}_W}$ (8.14)

- Njutnova oblast ($\text{Re}_W > 10^3$): $W = 1,83\sqrt{g \cdot \Delta \cdot d}; \quad C_d = 0,4$. (8.15)

U opštem slučaju, vrednosti brzine tonjenja se mogu odrediti na dva načina:

(i) iterativnim rešavanjem opšteg izraza (8.13), uz pomoć dijagrama na Slici 8.2;

(ii) pomoću empirijskih obrazaca [162]:

$$G_* = \begin{cases} \leq 10 & \dots \text{Re}_W = 0,0556 & G_* \\ 10 - 300 & \dots \text{Re}_W = 0,0784 & G_*^{0,85} \\ 300 - 67000 & \dots \text{Re}_W = 0,1711 & G_*^{0,713} \\ > 67000 & \dots \text{Re}_W = 1,826 & G_*^{0,5} \end{cases} \quad (8.16)$$

gde je $G_* = g \cdot \Delta \cdot d^3 / \nu^2$ – bezdimenzioni parametar zrna. Ovaj parametar je jednak „prečniku smicanja” na treći stepen: $G_* = d_*^3$ (videti izraz (4.5)). Na osnovu sračunate vrednosti Re_W , sledi brzina tonjenja $W = \text{Re}_W \cdot \nu / d$.

Za zrna čiji oblik nije sferni, preporučuju se razni empirijski izrazi [167, 89]:

$$W = \begin{cases} g \cdot \Delta \cdot d^2 / (18\nu) & : d = 0,001 \div 0,1 \text{ mm} \\ \frac{10\nu}{d} \left[\left(1 + \frac{0,01 \cdot g \cdot \Delta \cdot d^3}{\nu^2} \right)^{1/2} - 1 \right] & : d = 0,1 \div 1 \text{ mm} \\ 1,1 (g \cdot \Delta \cdot d)^{1/2} & : d > 1 \text{ mm.} \end{cases} \quad (8.17)$$

$$W = \left[\left(13,95 \frac{\nu}{d} \right)^2 + 1,09 \Delta d \right]^{1/2} - 13,95 \frac{\nu}{d} \quad : d = 0,01 \div 10 \text{ mm.} \quad (8.18)$$

$$W = \frac{8\nu}{d} \left[\left(1 + \frac{d^3}{72} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (8.19)$$

Vrednosti brzine tonjenja, sračunate pomoću navedenih izraza za opseg prečnika zrna $d = 0.01 \div 10$ mm, date su u Dodatku C.

■ **Primer 8.1.** Sračunati brzinu tonjenja u mirnoj vodi za zrna čiji su prečnici dati u drugoj koloni Tabele 8.1. Zrna su sfernog oblika. Ostali podaci: $\rho_s = 2,65 \text{ t/m}^3$, $\nu(20^\circ) = 1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Rešenje. Rezultati proračuna su dati u Tabeli 8.1.

Tabela 8.1: Proračun brzine tonjenja; vrednosti W_{f1} i W_{f2} su dobijene pomoću empirijskih obrazaca (8.16) i (8.17), a vrednosti W_{it} , Re_W i C_d , iterativnim postupkom.

No.	d [mm]	W_{f1} [m/s]	W_{f2} [m/s]	W_{it} [m/s]	Re_W [-]	C_d [-]
1	0,417	0,0633	0,0616	0,0735	0,3057E+02	0,1668E+01
2	0,208	0,0260	0,0272	0,0281	0,5823E+01	0,5705E+01
3	0,104	0,0089	0,0084	0,0086	0,8911E+00	0,3045E+02

* * *

Pored karakteristika zrna, na brzinu njegovog tonjenja utiče i niz drugih faktora, kao što su temperatura vode, koncentracija čestica i turbulencija rečnog toka.

Temperatura vode. Vrednost kinematičkog koeficijenta viskoznosti opada sa povećanjem temperature T ($^\circ\text{C}$), kao što pokazuje empirijski izraz [167]:

$$\nu = [1,14 - 0,031(T - 15) + 0,00068(T - 15)^2] \times 10^{-6}. \quad (8.20)$$

Koncentracija nanosa. Brzina tonjenja jednog zrna se menja u prisustvu drugih zrna; „oblak” sitnih zrna ima veću brzinu tonjenja od jednog zrna, ali ako je broj

zrna velik (odnosno ako je koncentracija suspendovanog nanosa velika), brzina tonjenja je, usled međusobne interakcije zrna, značajno manja od brzine tonjenja pojedinačnog zrna. Ova pojava, nazvana „ometano taloženje”, ispitivana je eksperimentalno i postoji više izraza za korekciju brzine W , od kojih se ovde navodi jedan koji važi za *homogene* suspenzije [167]:

$$W' = (1 - 2,15 \cdot C) (1 - 0,7 \cdot C^{0,33}) W, \quad (8.21)$$

gde je W' – brzina ometanog tonjenja, a C – zapreminska koncentracija (količnik zapremine suspendovanog nanosa i zapremine uzorka mešavine vode i čvrste materije).

Turbulencija toka. Iako su mnogi autori istraživali efekte vremenske i prostorne razmere turbulencije na brzinu tonjenja čestica različitih karakteristika, ovaj uticaj još uvek nije dovoljno izučen.

8.2.2 Fizička svojstva mešavine nanosa

Osnovna fizička svojstva mešavine čestica su granulometrijski sastav, poroznost, zapreminska masa i ugao unutrašnjeg trenja.

8.2.2.1 Granulometrijski sastav

Mešavina rečnog nanosa se sastoji od zrna različitih krupnoća čija raspodela ima slučajan karakter. Klasifikacija po krupnoći je data u Tabeli 8.2.

Zahvatanje uzoraka. Materijal koji se kopanjem zahvata sa rečnog dna predstavlja „*poremećeni*” uzorak nanosa. Kako se krupnoća nanosa menja u prostoru (duž toka i po dubini korita) i vremenu (sa protokom u reci), neophodno je da se zahvati što više uzoraka, kako bi se mogla izvršiti statistička analiza krupnoća.

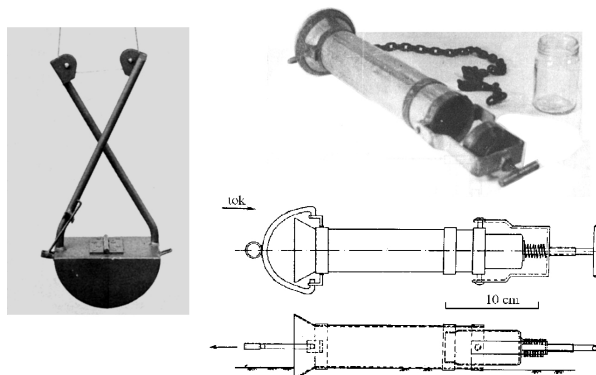
Zahvatanje uzoraka se obavlja različitim mehaničkim uređajima (Slika 8.4). Za peščane materijale se koriste razni tipovi mehaničkih grabilica i usisnih uređaja (vakuum pumpi). Nedostatak grabilica je u tome što se najsitnije čestice nanosa ispiraju i gube prilikom izvlačenja. Ako je rečno korito formirano od krupnog šljunka, zahvatanje grabilicom se obavlja po unapred definisanom rasporedu tačaka tako da uzorak čini najmanje 100 komada kamena [54].

Treba napomenuti da se pored nanosa iz rečnog korita, mogu zahvatati i uzorci vučenog nanosa u pokretu. Zahvatanje ovakvih, „*neporemećenih*” uzoraka, obavlja se posebnom opremom o kojoj će biti reči u desetom poglavlju. O zahvatanju uzoraka vrlo finog nanosa koji se kreće u vidu suspenzije biće govora u jedanaestom poglavlju.

Odredjivanje krupnoće pojedinačnih komada. Za nanos čiji je prečnik veći od 64 mm (vrlo krupan šljunak, obluci, gromade), odredjuje se krupnoća *pojedinačnih komada*. Ova krupnoća se definiše pomoću nominalnog prečnika, koji se

Tabela 8.2: Skala krupnoće zrna [54].

Naziv	Klasa	Krupnoća [mm]	
Gromade	vrlo velike	4096÷2048	
	velike	2048÷1024	
	srednje veličine	1024÷512	
	male	512÷256	
Obluci	veliki	256÷128	
	mali	128÷64	
Šljunak	vrlo krupan	64÷32	
	krupan	32÷16	
	srednje krupnoće	16÷8	
	fini	8÷4	
	vrlo fini	4÷2	
Pesak	vrlo krupan	2÷1	
	krupan	1÷1/2	1,0000÷0,5000
	srednje krupnoće	1/2÷1/4	0,5000÷0,2500
	fini	1/4÷1/8	0,2500÷0,1250
Prašina	vrlo fini	1/8÷1/16	0,1250÷0,0625
	krupna	1/16÷1/32	0,0625÷0,0313
	srednje krupnoće	1/32÷1/64	0,0313÷0,0156
	fini	1/64÷1/128	0,0156÷0,0078
Glina	vrlo fina	1/128÷1/256	0,0078÷0,0039
	krupna	1/256÷1/512	0,0039÷0,0020
	srednje krupnoće	1/512÷1/1024	0,0020÷0,0010
	fini	1/1024÷1/2048	0,0010÷0,0005
	vrlo fini	1/2048÷1/4096	0,0005÷0,0002



Slika 8.4: Primeri uređaja za vertikalno i horizontalno zahvatanje nanosa sa rečnog dna; mehaničkom grabilicom (levo) može se zahvatiti do 5 kg nanosa iz površinskog sloja debljine 15 cm; metalni cilindar sa staklenom bocom (desno) vuče se po dnu, zahvatajući uzorak do 1 kg iz sloja debljine 5 cm [54, 76].

određuje indirektno, uranjanjem komada u vodu i merenjem njegove zapremine. Kod krupnih komada je relativno izražena sferičnost, što znači da je nominalni prečnik približno jednak dužini srednje osovine.

Određivanje krupnoće prosejavanjem. Ova metoda se primenjuje za materijal iz kategorije peska i šljunka (krupnoće od $1/16=0,062$ do 16 mm). Krupniji (šljunčani) nanos se prosejava u vlažnom stanju, a sitniji (peščani) se suši pre prosejavanja. Minimalna masa peščanog uzorka je 0,5 kg.

Prosejavanje se vrši kroz sita od pletene žice, sa kvadratnim otvorima standardnih dimenzija¹. Sita se postavljaju jedno na drugo tako što se veličine otvora smanjuju geometrijskom progresijom, od 5 do 0,04 mm, sa faktorom $\sqrt[4]{2}$ (američki standard), odnosno $\sqrt[10]{10}$ (evropski standard). Kompleti se sastoje od 20÷30 sita, pri čemu svako sito ima svoj identifikacioni broj. Kolona sita se na dnu završava sudom za prihvatanje najfinijih čestica koje prolaze kroz sva sita. U praksi se ne mora uvek koristiti komplet sita. Broj sita i veličine otvora se mogu tako izabrati da se ujednače ostaci na situ. Trajanje prosejavanja zavisi od načina na koji se sita „tresu” i od mase uzorka. Što je veći uzorak, potrebno je duže prosejavanje. Primenom mehaničkog uredjaja za trešenje kolone sita, period od 15÷20 min je obično dovoljan.

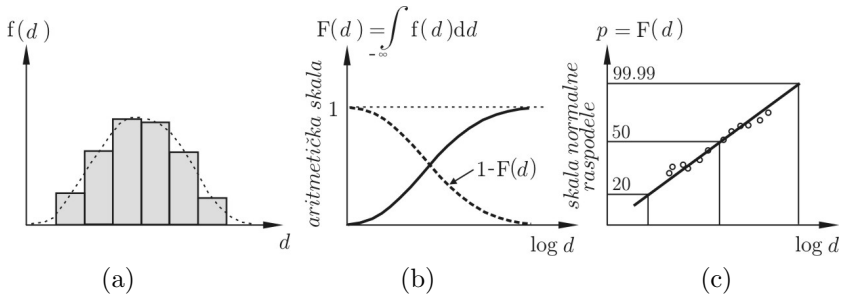
Obrada rezultata. Kako prečnik zrna predstavlja slučajnu veličinu, za obradu rezultata prosejavanja se koriste statističke metode. Način prikazivanja može biti u vidu histograma, krivih frekvencije i sumarnih krivih.

Histogrami. Bazni podaci prosejavanja su količine nanosa zadržane na sitima (ostaci prosejavanja). Veličine otvora sita određuju klasne intervale – „frakcije”. Svaka frakcija je karakterisana reprezentativnim (srednjim) prečnikom i masom ostatka. Ako se ova masa izrazi relativno u odnosu na ukupnu masu uzorka, dobija se relativni ostatak. Raspodela relativnih ostataka može se prikazati histogramom (Slika 8.5-(a)).

Krive frekvencije. Smanjenjem klasnih intervala, histogram relativnih frekvencija se transformiše u krivu frekvencije, kao što je prikazano na Slici 8.5-(a). U statističkom smislu, kriva frekvencije predstavlja empirijsku gustinu raspodele krupnoće nanosa.

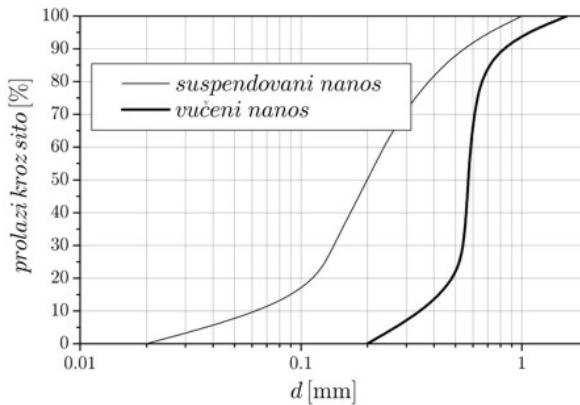
Sumarne krive frekvencije. Sumarne krive frekvencije se dobijaju kumulativnim sabiranjem relativnih frekvencija krupnoće (relativnih ostataka na situ), tako da se dobija kriva $F(d)$ koja je prikazana na Slici 8.5-(b). Ova kriva, koja ima oblik razvučenog slova „S” i teži vrednosti 1,0, pokazuje učešće zrna čiji je prečnik veći od nekog datog prečnika („kriva krupnije od”). Njoj komplementarna sumarna kriva $1-F(d)$ pokazuje učešće zrna sitnijih od datog prečnika („kriva sitnije od”). U statističkom smislu, obe krive predstavljaju empirijske raspodele i zovu se „granulometrijske krive”.

¹Za vrlo krupan materijal se umesto sita mogu koristiti *rešeta* od lima sa kružnim otvorima.



Slika 8.5: (a) Histogram krupnoće zrna; klasni intervali su definisani veličinom otvora na situ, odnosno odgovarajućim srednjim prečnicima d_i ($i = 1, 2, \dots, N$) i relativnim frekvencijama pojave $f_i = f(d_i)$. (b) Sumarna kriva pokazuje stepen učešća prečnika većih/manjih od datog prečnika; sa ove krive, koja se zove „kriva granulometrijskog sastava”, mogu se očitati vrednosti karakterističnih prečnika: d_{35} , d_{50} , d_{65} , d_{90} itd. (c) Sumarna kriva, prikazana na dijagramu verovatnoće, ima pravolinijski oblik ako se empirijska raspodela krupnoće zrna dobro prilagođava izabranoj teorijskoj raspodeli.

Ako su na ordinati vrednosti nanete u procentima, sumarne krive se zovu i *krive zastupljenosti* krupnoća. Granulometrijske sumarne krive se obično prikazuju u semi-logaritamskoj podeli (Slika 8.6).



Slika 8.6: Tipične granulometrijske krive dunavskog peščanog nanosa, određene prosejavanjem uzoraka zahvaćenih kod Apatina [60].

Ako se umesto aritmetičke podele, na ordinati prikaže skala nekog teorijskog zakona raspodele (verovatnoće) i ako se na većem delu dijagrama konstatuje *pravolinijska* zavisnost (Slika 8.5-(c)), onda to znači da usvojena teorijska funkcija verovatnoće dobro aproksimira stvarnu, empirijsku raspodelu.

Na primer, granulometrijska kriva se može opisati funkcijom normalne (Gausove) raspodele:

$$F(d) = \frac{1}{\sigma_d \sqrt{2\pi}} \int \exp \left[-\frac{(d - \bar{d})^2}{2 \sigma_d^2} \right] dd. \quad (8.22)$$

pri čemu se vrednosti parametara ove raspodele – srednjeg prečnika:

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^N f_i \cdot d_i \quad (8.23)$$

i standardne devijacije:

$$\sigma_d = \sqrt{\sum_{i=1}^N f_i (d_i - \bar{d})^2} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (8.24)$$

određuju podelom uzorka nanosa na klasne inetervale (frakcije) i određivanjem odgovarajućih prečnika d_i i frekvencija f_i .

Kod normalne raspodele, srednja vrednost, medijana i mod imaju identične vrednosti [86, 171], a standardna devijacija se može definisati preko karakterističnih prečnika:

$$\sigma_d = \begin{cases} d_{84} - d_{50} \\ d_{50} - d_{16}, \end{cases} \quad (8.25)$$

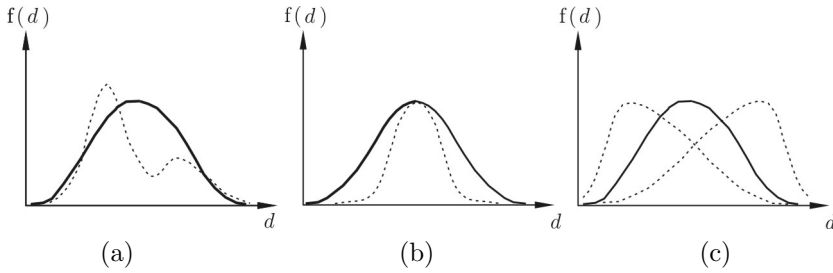
što znači da kod mešavina sa normalnom raspodelom, 68% čestica se nalaze u opsegu $\pm \sigma_d$.

Iskustveno je utvrđeno da granulometrijske krive većine rečnih nanosa dobro aproksimira *log-normalna* (Galtonova) funkcija raspodele [54]. U tom slučaju je podela na apscisi logaritamska (nezavisna promenljiva je $\log d$), a na ordinati je skala normalne raspodele².

Empirijske raspodele krupnoće se opisuju statističkim ocenama centralne tendencije, rasipanja (disperzije) i asimetrije.

Oblik. Krive gustine raspodele mogu biti unimodalne, bimodalne ili polimodalne, u zavisnosti od broja maksimuma – vrhova (Slika 8.7-(a)). Krive peščanog nanosa su najčešće simetrične i unimodalne, dok su krive mešavina u kojim prevladjuje šljunak, bimodalne (redje polimodalne).

²Ako granulometrijski sastav mešavine ima log-normalnu raspodelu, onda je i raspodela brzine tonjenja log-normalna, ali sa drugom vrednošću standardne devijacije (σ_W).



Slika 8.7: Karakteristični oblici empirijskih funkcija frekvencije krupnoća: (a) unimodalne i bimodalne krive; (b) krive sa različitim stepenom rasipanja oko srednje vrednosti; (c) simetrične i asimetrične krive.

Ocene centralne tendencije. Drugo važno svojstvo mešavine nanosa je tendencija jedne frakcije da bude zastupljenija od drugih. Ova dominantna frakcija se zove „glavni sastojak granulometrije”, dok ostale frakcije čine „dodatak” mešavini. Ocene centralne tendencije su:

- *Mod* (d_{mod}) – prečnik čestice sa najvećom frekvencijom pojave;
- *Medijana* (d_{50}) – prečnik koji ima zastupljenost od 50%;
- *Aritmetička sredina* (\bar{d}) – težišno odstojanje površine ispod krive frekvencije u odnosu na ordinatu. Ako se koriste histogrami, aritmetički srednji prečnik se računa kao:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i \cdot \Delta p_i}{\sum \Delta p_i} = \frac{\sum d_i \cdot \Delta p_i}{100}, \quad (8.26)$$

gde je Δp_i – procentualna zastupljenost prečnika d_i .

- *Geometrijska sredina*:

$$\log d_g = \frac{\sum \log d_i \cdot \Delta p_i}{100}. \quad (8.27)$$

Kod log-normalne raspodele sve mere centralne tendencije imaju istu vrednost: $d_{\text{mod}} = d_{50} = \bar{d} = d_g$.

Ocene rasipanja. Krive gustine raspodele mogu imati iste srednje vrednosti, ali različit stepen rasipanja krupnoća oko srednje vrednosti (Slika 8.7-(b)). Što je nanos uniformnijeg granulometrijskog sastava, to je stepen rasipanja manji. Ocene rasipanja su:

- *Aritmetička standardna devijacija*: (σ_d) – veličina koja je ranije definisana kao parametar normalne raspodele;

- *Geometrijska standardna devijacija* (σ_g) – veličina koja se kod log-normalne raspodele može definisati na više načina:

$$\sigma_g = \begin{cases} \sqrt{\frac{d_{84}}{d_{16}}} \\ \frac{d_{84}}{d_{50}} = \frac{d_{50}}{d_{16}} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d_{84}}{d_{50}} + \frac{d_{50}}{d_{16}} \right). \end{cases} \quad (8.28)$$

Ocene asimetrije. Krive frekvencije mogu biti simetrične, pozitivno ili negativno asimetrične (Slika 8.7-(c)), što se kvantifikuje vrednošću *geometrijskog koeficijenta asimetrije*:

$$S_g = \sqrt{\frac{d_{75} \cdot d_{25}}{d_{50}^2}} \quad (8.29)$$

koja kod simetričnih krivih, iznosi $S_g = 1$.

Ocene uniformnosti. Za opisivanje granulometrijskog sastava mešavine koriste se razni specifični pokazatelji uniformnosti, kao što su na primer, *koeficijenti uniformnosti* Kramera i Hazena [54]:

$$S_u = \begin{cases} \frac{\sum_0^{50} d_i \cdot \Delta p_i}{\sum_{50}^{100} d_i \cdot \Delta p_i} \\ \frac{d_{60}}{d_{10}}. \end{cases} \quad (8.30)$$

■ **Primer 8.2.** U prve tri kolone Tabele 8.3 dati su podaci prosejavanja uzorka rečnog nanosa mase 820 gr. Gustina nanosa je $\rho_s=2,65 \text{ t/m}^3$. Analizirati granulometrijski sastav ovog uzorka.

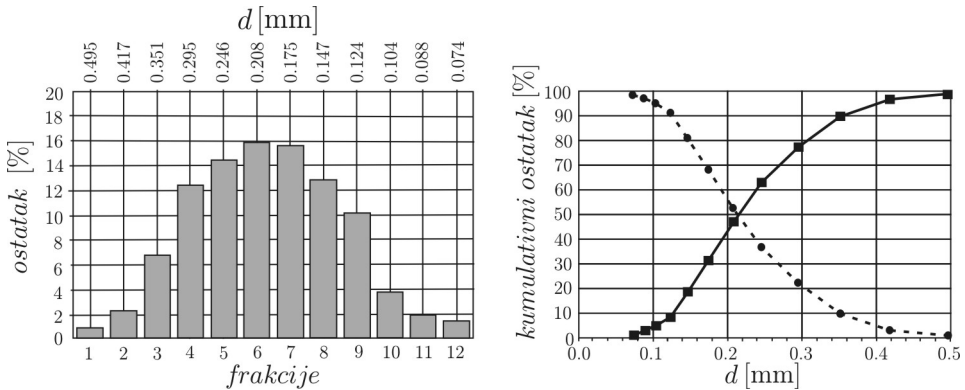
Rešenje: U kolonama 4-7 Tabele 8.3 sračunati su elementi za crtanje histograma relativne frekvencije i kumulativnih granulometrijskih krivih, koje su prikazane na Slici 8.8.

Sa granulometrijske krive koja je nacrtana u log-normalnoj podeli (Slika 8.9), mogu se odrediti vrednosti statističkih pokazatelja ove raspodele:

$$\begin{aligned} d_{50} &= 0,21 \text{ mm}; \\ \sigma_g &= \sqrt{d_{84}/d_{16}} = \sqrt{0,32/0,14} = 1,51; \\ S_u &= d_{60}/d_{10} = 0,24/0,13 = 1,85. \end{aligned}$$

Tabela 8.3: Rezultati prosejavanja u primeru 8.2

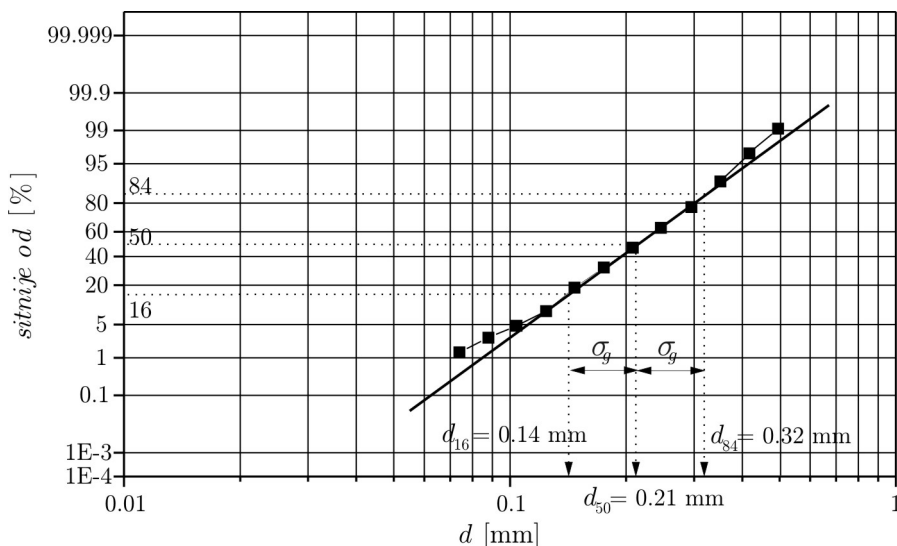
Br. sita	Otvor sita [mm]	Ostatak na situ [gr]	Ostatak na situ [%]	Kumul. ostat. [gr]	Krupnije od [%]	Kumul. ostat. [gr]	Sitnije od [%]
1	0,495	7,5	0,91	7,5	0,91	812,5	99,09
2	0,417	18,5	2,26	26,0	3,17	794,0	96,83
3	0,351	55,6	6,78	81,6	9,95	738,4	90,05
4	0,295	102,2	12,46	183,8	22,41	636,2	77,59
5	0,246	118,7	14,48	302,5	36,89	517,5	63,11
6	0,208	130,2	15,88	432,7	52,77	387,3	47,23
7	0,175	128,4	15,66	561,1	68,43	258,9	31,57
8	0,147	105,3	12,84	666,4	81,27	153,6	18,73
9	0,124	83,6	10,20	750,0	91,46	70,0	8,54
10	0,104	31,0	3,78	781,0	95,24	39,0	4,76
11	0,088	16,1	1,96	797,1	97,21	22,9	2,79
12	0,074	11,9	1,45	809,0	98,66	11,0	1,34
	Ostalo:	11,0	1,34				
	Ukupno:	820,0	100,00				



Slika 8.8: Histogram relativnih frekvencija i kumulativne granulometrijske krive.

Nanošenjem vrednosti brzine tonjenja iz primera 8.1 na dijagram na Slici 8.9, čitalac se može uveriti da je i tada u intervalu $\pm\sigma_g$ veza linearna, što znači da brzina tonjenja ima takodje log-normalnu raspodelu. Vrednost geometrijske standardne devijacije iznosi u tom slučaju 1,88.

Odredjivanje krupnoće vrlo sitnih zrna. Za analizu uzorka mešavine izraženo neuniformnog granulometrijskog sastava, neophodno je najpre izvršiti *razdvajanje uzorka* na krupne frakcije koje se ispituju na nivou pojedinačnih zrna (komada), na frakcije koje se mogu prosejavati i na najsitnije frakcije (krupnoće ispod 0,062 mm), koje se moraju ispitati posebnim metodama. Sušenje najsitnijih frakcija pre granulometrijske analize nije dozvoljeno, jer slepljivanje čestica nepovoljno utiče na rezultate analize.



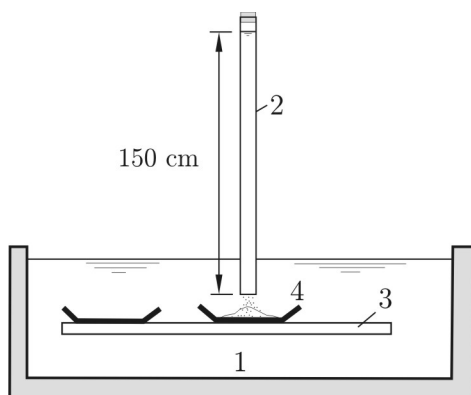
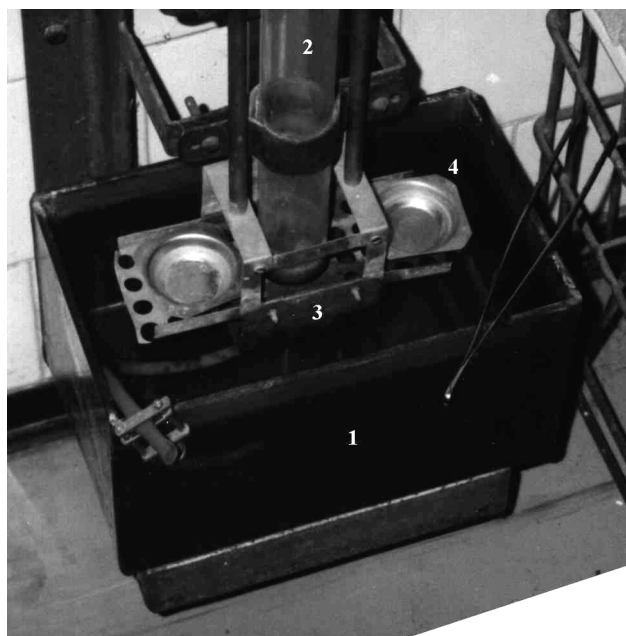
Slika 8.9: Kumulativna kriva relativnih frekvencija prikazana na dijagramu normalne raspodele (verovatnoće); može se konstatovati da je veza skoro u potpunosti linearna, što znači da se stvarna, empirijska raspodela dobro aproksimira log-normalnom teorijskom raspodelom.

Krupnoća vrlo sitnog nanosa iz kategorije sitnog peska i prašine, izražava se preko hidrauličke krupnoće, koja se određuje metodama kumulativnog i frakcionog taloženja.

Metoda kumulativnog taloženja zahteva aparaturu koja se sastoji od vertikalne staklene cevi ispunjene destilovanom vodom, na čijem donjem kraju se nalazi metalna ploča, na koju se čestice talože. Ploča je ustvari tas precizne vage pomoću koje se meri povećanje mase istaloženog materijala tokom vremena. Na taj način se može utvrditi sumarna kriva taloga u apsolutnom ili relativnom smislu, kao i kriva relativnih frekvencija, po vremenskim intervalima. Kako su odgovarajuće srednje brzine taloženja W jednake odnosu dužine cevi i datih vremenskih intervala, lako se mogu definisati funkcije empirijske raspodele $F(W)$ i $f(W)$ i sprovesti statističke analize.

Za *metodu frakcionog taloženja* kod nas se koristi frakciometar³ prikazan na Slici 8.10 [59], pomoću koga se meri brzina taloženja krupnog suspendovanog nanosa ($d > 0,062$ mm). Za određivanje krupnoće najsitnijih čestica iz kategorije prašinih i glinovih materijala koriste se specifične geomehaničke metode (dekantacija, areometrisanje), o kojima se ovde neće govoriti.

³Ovaj instrument, kao i neke druge instrumente za merenje nanosa koji se opisuju u ovoj knjizi, konstruisao je tehn. V. Antić iz Instituta za vodoprivredu „Jaroslav Černi”.



Slika 8.10: *Frakciometar konstruisan i izradjen u Institutu za vodoprivredu „Jaroslav Černi“; čestice uzorka tonu u staklenoj cevi dužine 150 cm (2), koja je ispunjena vodom i uronjena donjim krajem u rezervoar (1). Ispod cevi se nalazi postolje (3) sa kasetama (4). Kada se jedna kasetna ispuni istaloženim nanosom, zamenjuje se praznom kasetom. Sadržaj jedne kasete predstavlja frakciju. Njena relativna frekvencija se dobija kao odnos prikupljene mase i ukupne mase uzorka, dok je odgovarajuća srednja brzina taloženja jednaka odnosu visine cevi (150 cm) i vremena punjenja kasete. Merenje traje dok se ne istaloži ceo uzorak. Obuhvatanjem svih frakcija dobija se histogram relativnih frekvencija i funkcija $f(W)$.*

Problemi granulometrijskih analiza. Konstatovano je da se granulometrija rečnog nanosa određuje na razne načine, u zavisnosti od krupnoće zrna. Jedan deo uzorka mešavine se nakon prosejavanja opisuje krivom raspodele $F(d)$, dok se drugi deo, koji obuhvata najsitniji nanos koji se ne može prosejavati, opisuje krivom raspodele $F(W)$.

Postavlja se pitanje ima li smisla preračunavanje navedenih zavisnosti, kako bi se odredila jedinstvena granulometrijska kriva $F(d)$, odnosno $F(W)$, za ceo uzorak. Odgovor je negativan. Razlog je u tome što kod rečnih nanosa ne postoji jednoznačna (deterministička) veza između veličina d i W , već je to statistička (korelativna) veza, što znači da postoji matematičko očekivanje brzine taloženja za neki prečnik i obrnuto. Korišćenje neke determinističke formule kao što je na primer ona za Stoksovu oblast, može dovesti do velikih grešaka. Zaključak je da nije uputno mešati rezultate merenja brzine taloženja sa rezultatima prosejavanja.

Promena granulometrije duž toka. Generalno, nanos postaje sve sitniji duž rečnog toka usled segregacije i abrazije, tako da se procentualno učešće sitnih frakcija nizvodno povećava, a krupnih, smanjuje. Na ušćima pritoka međutim, može se registrovati lokalno povećanje učešća krupnih frakcija, jer po pravilu pritoke unose krupniji nanos.

8.2.2.2 Poroznost

Poroznost je udeo zapremine pora ili šupljina (V_e) u zapremini uzorka (V):

$$\lambda_o = \frac{V_e}{V} \times 100 \text{ [\%]}. \quad (8.31)$$

Na poroznost utiču brojni faktori: granulometrijski sastav, oblik zrna, zbijenost itd. Sitnozrni nanos ima veću poroznost od krupnozrnog. Razlikuje se *ukupna* i *efektivna* poroznost. Prva podrazumeva sve pore, a druga, samo međusobno povezane pore. Tabela 8.4 prikazuje zavisnost između efektivne poroznosti i krupnoće nanosa.

Tabela 8.4: *Efektivna poroznost rečnog nanosa* [54].

Vrsta materijala	Efektivna poroznost [%]
Krupnozrni pesak	36-40
Pesak srednje krupnoće	41-48
Sitnozrni pesak	44-49
Peskovita glina	50-54

Za nekonsolidovane zasićene materijale, poroznost se može proceniti na osnovu prečnika zrna d_{50} [mm], pomoću empirijskog obrasca Komure [54]:

$$\lambda_o = 0,245 + 0,086 (0,1 \cdot d_{50})^{-0,2}. \quad (8.32)$$

8.2.2.3 Zapreminska masa

Zapreminska masa mešavine ρ_z predstavlja odnos mase uzorka nanosa (sa šupljinama) i njegove zapremine. Može se izraziti preko gustine nanosa i ukupne poroznosti na sledeći način:

$$\left. \begin{aligned} \rho_z &= (1 - \lambda_o) \cdot \rho_s && \text{(u suvom)} \\ \rho'_z &= \lambda_o \cdot \rho + (1 - \lambda_o) \cdot \rho_s && \text{(pod vodom)} \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

Zapreminska masa krupnog peščanog i šljunčanog nanosa se kreće u granicama $1,5 \div 2,00 \text{ t/m}^3$.

■ **Primer 8.3.** Odrediti zapreminsku masu peščane mešavine u suvom i pod vodom, ako je $\rho = 1,0 \text{ t/m}^3$, $\rho_s = 2,65 \text{ t/m}^3$, a $\lambda_o = 38 \%$.

Rešenje. Primenom izraza (8.33) dobija se: $\rho_z = 1,64 \text{ t/m}^3$, $\rho'_z = 2,02 \text{ t/m}^3$.

8.2.2.4 Ugao unutrašnjeg trenja

Ovaj ugao se vezuje za stanje granične ravnoteže materijala, odnosno za ono naponsko stanje pri kome zrna, usled narušene ravnoteže, postaju nestabilna. Razlikuje se ugao unutrašnjeg trenja suvog (ϕ) i vlažnog materijala (ϕ'). Vrednosti ovih uglova se povećavaju sa stepenom nepravilnosti oblika zrna. Kod peščanog nanosa je $\phi = 26 \div 34^\circ$ u suvom, a $\phi' = 15 \div 25^\circ$ u vlažnom stanju. Za projektovanje stabilnog korita, fan Rejn predlaže vrednosti date u Tabeli 8.5.

Tabela 8.5: Vrednosti ugla unutrašnjeg trenja [167].

d [mm]	$\phi' [^\circ]$	
	zrna sfernog oblika	zrna nepravilnog oblika
< 1	30	35
5	32	37
10	35	40
50	37	42
>100	40	45

Kod mešavine nanosa, ugao unutrašnjeg trenja se nakon prosejavanja određuje za svaku frakciju.

Veličina $f = \text{tg } \phi$ zove se „koeficijent trenja” i predstavlja količnik tangencijalne i normalne komponente napona u uslovima graničnog naponskog stanja. Odnos koeficijentata trenja vlažnog i suvog materijala je: $f' = \text{tg } \phi' = 2/3 f$.

Kada se nanos kreće po rečnom dnu, koeficijent f' predstavlja trenutni odnos tangencijalnog i normalnog naprežanja tekuće granularne mase i ima obeležje *dinamičkog* koeficijenta trenja.

9

Pokretanje rečnog nanosa

Izučavanje pokretanja rečnog nanosa ima veliki značaj ne samo za definisanje psamološkog režima vodotoka, već i za projektovanje stabilnog regulisanog korita. U razmatranju pokretanja nanosa u ovom poglavlju se polazi od dimenzione analize koja omogućava da se merodavne fizičke veličine grupišu u određen broj bezdimenzionih brojeva. Zatim se govori o uspostavljanju korelativnih veza između bezdimenzionih brojeva. Te veze služe za kvantitativno definisanje graničnog stanja stabilnosti čestica nanosa pri datim hidrauličkim uslovima. Pored determinističkog pristupa u definisanju graničnog stanja, opisuje se i stohastički pristup, koji pokretanje nanosa tretira kao slučajnu pojavu.

9.1 Dimenziona analiza

Posmatra se *ustaljeno, jednoliko, ravansko* tečenje. Ravanski problem podrazumeva da se kretanje nanosa analizira u širokom koritu (Slika 2.20). Takodje se pretpostavlja da je dno *ravno* - bez nanosnih formacija. Nanos je *nevezan* (bez kohezije), *uniformne* krupnoće¹, a zrna su *sfernog* oblika.

Lista fizičkih veličina koje su merodavne za analizu uslova pokretanja nanosa sadrži sledeće parametre:

- voda: ρ, μ, q , ili ρ, ν, \tilde{u}, h ;
- nanos: ρ_s, d, g, q_v , ili $(\rho_s - \rho), d, g, C$.

Veličine q i q_v su zapreminski jedinični protoci vode i vučenog nanosa, a $C = q_v/q$ je zapreminska koncentracija nanosa.

Opšta dimenziona zavisnost ima oblik:

$$f(\rho, \tilde{u}, h, \nu, \rho_s - \rho, d, g, q_v) = 0. \quad (9.1)$$

¹Radi se o uprošćenju; strogo uzevši, trebalo bi razmatrati gustinu raspodele krupnoća sa odgovarajućim ocenama centralne tendencije, disperzije i asimetrije.

Izborom osnovnih veličina ρ, \tilde{u}, h , osam dimenzionih veličina iz jednačine (9.1) može se, primenom Bakingamove „II-teoreme”, svesti na $8 - 3 = 5$ bezdimenzionih brojeva [63]:

$$f_1 \left(\underbrace{\frac{\nu}{\tilde{u}h}}_{\text{(I)}}, \underbrace{\frac{\rho_s - \rho}{\rho}}_{\text{(II)}}, \underbrace{\frac{d}{h}}_{\text{(III)}}, \underbrace{\frac{gh}{\tilde{u}^2}}_{\text{(IV)}}, \underbrace{\frac{q_v}{\tilde{u}h}}_{\text{(V)}} \right) = 0. \quad (9.2)$$

Članovi (I) i (IV) u ovom izrazu su recipročni Rejnoldsovi i Frudovi brojevi, a član (V) je koncentracija vučenog nanosa $C = q_v/q$.

U nastavku će se videti da na pokretanje zrna ključnu ulogu ima sila trenja po jedinici površine, koja je srazmerna odnosu:

$$\frac{g(\rho_s - \rho)d^3}{d^2} = g(\rho_s - \rho)d.$$

Da bi se ova veličina uvela u razmatranje i dobio odgovarajući bezdimenzioni broj, pomnožiće se brojevi (II), (III) i (IV):

$$\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \cdot \frac{d}{h} \cdot \frac{gh}{\tilde{u}^2} = \frac{g \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) d}{\tilde{u}^2}.$$

Ovaj novi broj se može uvesti umesto jednog od brojeva čijom kombinacijom je izveden; ako se na primer uvrsti umesto broja (II) i ako se d/h zameni sa h/d , dobija se:

$$f_2 \left(\frac{\nu}{\tilde{u}h}, \frac{g \Delta d}{\tilde{u}^2}, \frac{h}{d}, \frac{gh}{\tilde{u}^2}, \frac{q_v}{\tilde{u}h} \right) = 0. \quad (9.3)$$

Prvi i pretposlednji argument funkcije (9.3) mogu se izostaviti iz daljeg razmatranja iz sledećih razloga:

(i) uticaj viskoznosti je zanemarljiv, jer se prirodni tokovi nalaze u oblasti razvijenog turbulentnog režima i hidraulički rapavog dna;

(ii) kod jednolikog tečenja je sila trenja jednaka komponenti težine u pravcu toka, pa se jedna od ovih sila može izostaviti; izostavljanje komponente težine je ekvivalentno izostavljanju Frudovog broja, jer je njegova vrednost srazmerna pomenutoj sili².

²To je opravdano samo ako na dnu nema većih nanosnih formacija, kao što su dine ili antidine; njihovo prisustvo u plitkom toku dovodi do poremećaja linije nivoa koja prima „talasast” oblik, pa se u tom slučaju, uticaj gravitacije, izražen preko Frudovog broja, ne sme izostaviti iz razmatranja.

Konačno, izraz (9.3) postaje:

$$f_3 \left(\frac{g \Delta d}{\tilde{u}^2}, \frac{h}{d}, \frac{q_v}{\tilde{u}h} \right) = 0. \quad (9.4)$$

Bezdimenzioni brojevi u izrazu (9.4) predstavljaju osnovu za empirijsko određivanje uslova pokretanja i pronosa vučenog nanosa, kao što će se videti u nastavku.

* * *

Sada će se razmotriti nešto drugačiji oblik bezdimenzionih brojeva. Izraz (9.3) se alternativno može napisati tako što se umesto srednje brzine po dubini (\tilde{u}) uvede odgovarajuća smičuća brzina $u_* = \sqrt{\tau_o/\rho}$, pretpostavljajući ravnomeran raspored tangencijalnog napona po širini korita³:

$$f_4 \left(\frac{\nu}{u_*h}, \frac{g \Delta d}{u_*^2}, \frac{h}{d}, \frac{g h}{u_*^2}, \frac{q_v}{u_*h} \right) = 0, \quad (9.5)$$

ili,

$$f_5 \left(\underbrace{\frac{\nu}{h\sqrt{\tau_o/\rho}}}_{(I)}, \underbrace{\frac{g(\rho_s - \rho)d}{\tau_o}}_{(II)}, \underbrace{\frac{h}{d}}_{(III)}, \underbrace{\frac{\rho gh}{\tau_o}}_{(IV)}, \underbrace{\frac{q_v}{h\sqrt{\tau_o/\rho}}}_{(V)} \right) = 0. \quad (9.6)$$

Izraz (9.6) se može dalje modifikovati na sledeći način:

(i) U članovima (I) i (V) dubina h se može zameniti prečnikom d , jer je za dimenzionu analizu svejedno koja se od te dve veličine koristi. Tada prvi član dobija oblik Reynoldsovog broja zrna: $Re_* = u_*d/\nu$. Za razliku od „običnog” Reynoldsovog broja u izrazu (9.3), broj Re_* se ne sme izostaviti, jer odražava uslove na dnu koji su bitni za pokretanje nanosa.

(ii) Član (II) predstavlja odnos težine čestice pod vodom i sile trenja.

(iii) Član (III) se u ovoj varijanti bezdimenzionih brojeva može izostaviti, jer je implicitno sadržan u članu (II). Treba uočiti međjutim, da se ovaj broj nije smeo izostaviti iz izraza (9.4), jer je tamo dubina (zajedno sa brzinom), bitna za definisanje jednolikog toka.

(iv) Član (IV), napisan u obliku $\tau_o/(\rho gh)$, predstavlja nagib pijeometarske linije I_{Π} (jednoliko tečenje: $I_{\Pi} = I_e = I_d$). Može se pokazati da je u slučaju jednolikog

³Iako se radi o zameni fizički različitih veličina, formalno se sa stanovišta dimenzione analize ništa ne menja, jer veličine \tilde{u} i u_* imaju iste dimenzije [m/s].

tečenja $2 I_{\Pi}/C_{\tau} = Fr$, a ovaj broj se, iz ranije navedenih razloga, može izostaviti iz daljeg razmatranja.

Imajući u vidu sve što je rečeno, izraz (9.6) se svodi na oblik:

$$f_6 \left(\frac{d\sqrt{\tau_o/\rho}}{\nu}, \frac{\tau_o}{g(\rho_s - \rho)d}, \frac{q_v}{d\sqrt{\tau_o/\rho}} \right) = 0, \quad (9.7)$$

a ako se iz poslednjeg broja eliminiše veličina τ_o tako što se ovaj pomoži sa korenom pretposlednjeg broja:

$$\frac{q_v}{d\sqrt{\tau_o/\rho}} \cdot \frac{\sqrt{\tau_o}}{\sqrt{g(\rho_s - \rho)d}} = \frac{q_v}{\sqrt{g \cdot \Delta \cdot d^3}}$$

dobija se konačno:

$$f_7 \left(\frac{d\sqrt{\tau_o/\rho}}{\nu}, \frac{\tau_o}{g(\rho_s - \rho)d}, \frac{q_v}{\sqrt{g \cdot \Delta \cdot d^3}} \right) = 0. \quad (9.8)$$

Prvi broj u ovom izrazu predstavlja Rejnoldsov broj zrna $Re_* = d \cdot u_* / \nu$. Drugi broj, koji se obeležava Θ , predstavlja bezdimenzioni tangencijalni napon i zove se „*parametar pokretanja*”, ili „*Šildsov broj*”, po imenu naučnika Šilda (Shields). Treći broj, koji se obeležava Φ , zove se „*parametar transporta*”, ili „*intenzitet transporta*”.

Oblik funkcije

$$f_7 = (Re_*, \Theta, \Phi) = 0, \quad (9.9)$$

kao i funkcije (9.4), utvrđuje se na osnovu laboratorijskih eksperimenata i prezentira se u vidu korelacionih dijagrama. U psamološkim analizama se često koristi i bezdimenzioni broj:

$$\Psi = \Theta^{-1} = \frac{g(\rho_s - \rho)d}{\tau_o}, \quad (9.10)$$

koji se naziva „*intenzitet smicanja*”, tako da je alternativni oblik izraza (9.9):

$$f_8 = (Re_*, \Psi, \Phi) = 0. \quad (9.11)$$

Uslovi pokretanja čestica na rečnom dnu definišu se empirijskim vezama između prva dva broja u izrazima (9.4), (9.9), odnosno (9.11), dok se treći broj ne uzima

u obzir ($q_v = 0$, $\Phi = 0$). Međutim, pronos vučenog nanosa se, kao što će se videti u narednom poglavlju, definiše empirijskim vezama između poslednja dva broja u navedenim izrazima, dok se prvi broj izostavlja.

9.2 Vučeni nanos. Determinističke metode

Dva su osnovna pristupa u definisanju granične stabilnosti zrna u trenutku njegovog pokretanja: *deterministički* i *stohastički*. Postoji više determinističkih kriterijuma baziranih na konceptu *kritične brzine toka* i *kritičnog tangencijalnog napona*.

9.2.1 Kritična brzina

Za definisanje kritične brzine pokretanja zrna istražuje se empirijska veza prva dva bezdimenziona broja u jednačini (9.4):

$$\frac{\tilde{u}_c}{\sqrt{g \cdot \Delta \cdot d}} = f\left(\frac{h}{d}\right), \quad (9.12)$$

gde je \tilde{u}_c – kritična brzina.

U literaturi (naročito ruskoj) može se naći veliki broj formula za određivanje kritične brzine, u kojima se, ponekad uz izvestan napor, može prepoznati struktura opšteg izraza (9.12). Ilustracije radi, evo nekih primera [57, 154, 120]:

$$\tilde{u}_c = 4,6 \cdot \sqrt{d_{50}} \left(\frac{h}{d_{50}}\right)^{1/6} \quad - \text{Šamov (1959)} \quad (9.13)$$

$$\tilde{u}_c = 0,535 \cdot \log\left(\frac{8,8h}{d_{95}}\right) \cdot \sqrt{2g \cdot \Delta \cdot d_{50}} \quad - \text{Gončarov (1962)} \quad (9.14)$$

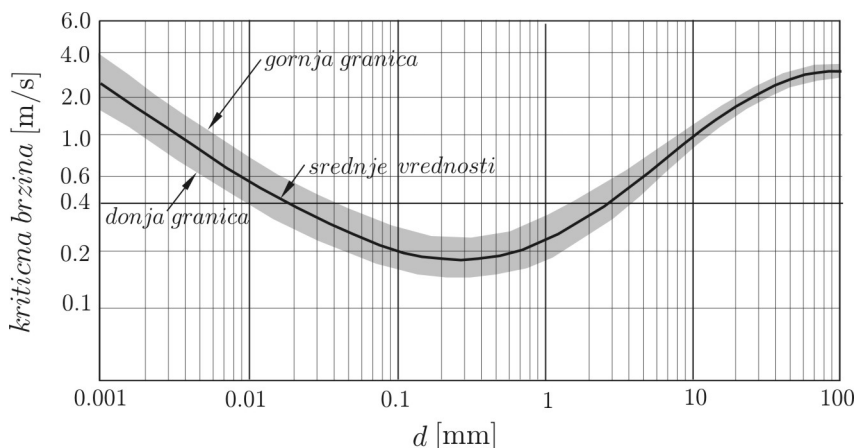
$$\tilde{u}_c = 1,6 \left(\frac{h}{d_{50}}\right)^{1/10} \sqrt{g \cdot \Delta \cdot d_{50}} \quad - \text{Nil (1967)}. \quad (9.15)$$

U slučaju širokog pravougaonog korita, u navedenim izrazima se može koristiti srednja profilska dubina ($h = R \approx A/B$), pa tražena brzina postaje srednja profilska kritična brzina (V_c).

Pored empirijskih obrazaca, u inženjerskoj praksi se koriste i razni dijagrami, kao što je na primer onaj na Slici 9.1, ili podaci o najvećoj dozvoljenoj brzini kod neobloženih kanala (Tabela 9.1).

■ **Primer 9.1.** Odrediti kritičnu brzinu pokretanja kvarcnog zrna vučenog nanosa srednjeg prečnika $d_{50} = 5$ mm, najvećeg pečnika $d_{95} = 10$ mm, pri dubini toka od $h = 1,5$ m ($\Delta=1,65$).

Rešenje. Obrasci (9.13)-(9.15) daju ove vrednosti: Šamov: 0,84 m/s, Gončarov: 0,67 m/s, Nil: 0,80 m/s. Sa dijagrama na Slici 9.1 očitana je prosečna vrednost 0,60 m/s, koja pomnožena faktorom $k_v = (1,5/1,0)^{1/6} = 1,07$, daje konačnu vrednost brzine 0,64 m/s. Najveća dozvoljena brzina za sitan šljunak u čistoj vodi iznosi prema Tabeli 9.1, 0,75 m/s.



Slika 9.1: Kritična brzina pokretanja kvarcnog nanosa; dijagram daje vrednosti za dubinu toka $h_1=1$ m; ako je zadata dubina $h_2 \neq h_1$, očitanu vrednost brzine treba množiti korekcionim faktorom $k_v = (h_2/h_1)^{1/6}$, odnosno $(R_2/R_1)^{1/6}$. Ovaj faktor predstavlja odnos brzina V_2/V_1 izražen preko Maningove jednačine, uz grubu pretpostavku da su vrednosti tangencijalnog napona i koeficijenta trenja u oba slučaja iste[29].

Tabela 9.1: Najveće dozvoljene brzine za pravolinijske neobložene kanale [29].

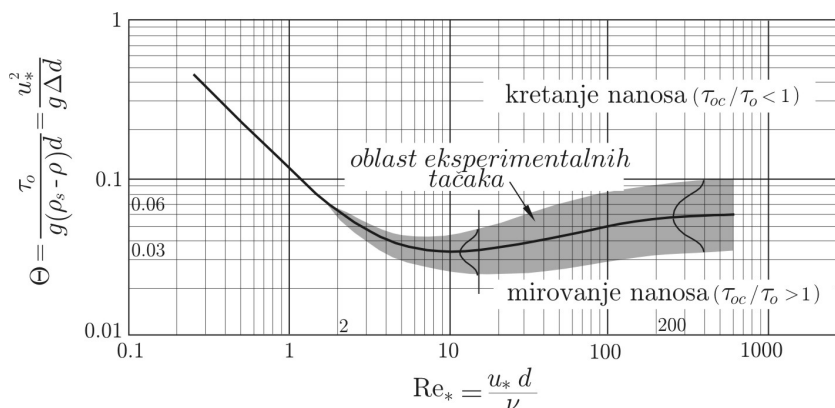
Materijal	Manningov koeficijent n [$\text{m}^{-1/3}\text{s}$]	V_{\max} [m/s]	
		Cista voda	Voda sa koloidnim česticama
Fini pesak, koloidni	0,020	0,45	0,75
Peščana glina, nekoloidna	0,020	0,53	0,75
Prašinasta glina, nekoloidna	0,020	0,60	0,90
Aluvijalna prašina, nekoloidna	0,020	0,60	1,00
Tvrda glina	0,020	0,75	1,00
Vrlo tvrda glina	0,025	1,14	1,50
Aluvijalna prašina, koloidna	0,025	1,14	1,50
Škriljci	0,025	1,80	1,80
Sitan šljunak	0,020	0,75	1,50
Krupan šljunak, nekoloidni	0,025	1,20	1,80
Vrlo krupan šljunak	0,035	1,50	1,70

9.2.2 Kritični tangencijalni napon. Šildsov dijagram

Izostavljanjem poslednjeg člana u jednačini (9.9) dobija se:

$$\Theta = \frac{\tau_o}{g(\rho_s - \rho)d} = \frac{u_*^2}{g \cdot \Delta \cdot d} = f(\text{Re}_*), \quad (9.16)$$

gde je Θ - bezdimenzioni tangencijalni napon („Šildsov broj”), a Re_* - Rejnoldsov broj zrna. Zavisnost (9.16), koju je eksperimentalno definisao Šilds⁴, prikazana je na Slici 9.2 [151].



Slika 9.2: Šildsov dijagram; oblasti kretanja i mirovanja nanosa razdvojene su korelacionim poljem tačaka, što znači da je reč o slučajno promenljivim veličinama sa određenom raspodelom. Kod mernih veličina obično se pretpostavlja normalna raspodela. Puna linija, kojoj odgovara 50%-tna verovatnoća pokretanja čestica, označava kritični bezdimenzioni tangencijalni napon $\Theta_c = \Theta_c(\text{Re}_*)$.

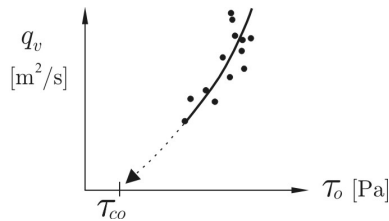
Šildsov dijagram se može podeliti na tri oblasti. U prvoj ($\text{Re}_* \leq 2$), zavisnost je pravolinijska i odražava uslove turbulentnog tečenja po hidraulički glatkoj podlozi. Zrna nanosa su u potpunosti „uronjena” u viskozni podsloj: $d < \delta_v$.

U drugoj, prelaznoj oblasti ($2 < \text{Re}_* \leq 200$), zavisnost je krivolinijska i prolazi kroz minimum: $\Theta_c \approx 0,03$. Ako se Rejnoldsov broj zrna shvati kao odnos prečnika zrna i debljine viskoznog podsloja $\text{Re}_* = u_* d / \nu = 11,6 d / \delta_v$, onda najmanjoj vrednosti broja $\Theta_c \approx 0,03$ odgovara vrednost $\text{Re}_* \approx 10$. To znači da je prečnik zrna približno jednak debljini viskoznog podsloja: $d \approx \delta_v$, pa su stvoreni uslovi za pokretanje nanosa, jer turbulentna zona „zahvata” česticu. Uticaji viskoznosti i turbulencije su istog reda veličine.

⁴Teško da se u literaturi iz rečne hidraulike može naći više citirano ime od imena američkog mašinskog inženjera Šildsa (Albert Frank Shields 1908–1974), autora preko 200 patenata iz procesnog mašinstva, a samo dva rada iz hidraulike, od kojih je onaj o pokretanju nanosa, doktorska disertacija koju je odbranio na Tehničkoj visokoj školi u Berlinu, 1936. godine.

U trećoj oblasti ($Re_* > 200$), vrednosti Šildsovog broja postaju konstantne $\Theta_c = 0,056 \approx 0,06$. Činjenica da te vrednosti više ne zavise od broja Re_* ukazuje na to da su viskozni uticaji zanemarljivi u odnosu na uticaje turbulencije i da je $d \gg \delta_v$. Ostvaruje se turbulentno tečenje po hidraulički rapavom dnu. Kako je broj eksperimentalnih tačaka u ovoj oblasti mali, a njihovo rasipanje relativno veliko, nije moguće precizno odrediti brojnu vrednost Θ_c ; najčešće se koriste vrednosti $\Theta_c = 0,056$ i $0,06$, a u našoj praksi se koristi i vrednost $0,047$, koju su na osnovu opsežnih eksperimentalnih istraživanja, predložili švajcarski autori Majer-Peter i Miler (Mayer-Peter, Muller, 1948) [114].

Treba imati u vidu da tačne vrednosti kritičnog broja Θ_c i odgovarajućeg kritičnog tangencijalnog napona τ_{oc} nije lako odrediti, jer do pokretanja zrna ne dolazi odjednom, već postepeno. Naime, najpre dolazi do sporadičnog pokretanja zrna, da bi tek sa dovoljnim porastom brzine toka, kretanje zrna primilo masovni karakter. Šilds je eksperimentisao sa vrednostima τ_o dva puta većim od kritičnih, pa se pretpostavlja da je vrednosti τ_{oc} odredio indirektno, ekstrapolacijom krive izmerenog pronosa nanosa (Slika 9.3).



Slika 9.3: Odredjivanje kritičnog tangencijalnog napona ekstrapolacijom.

Direktno korišćenje Šildsovog dijagrama je moguće samo tako što se za dati prečnik zrna d i poznatu vrednost smičuće brzine u_* , sračunaju vrednosti parametara Re_* i Θ , nanese tačka na dijagram i proveri da li „pada” u oblast kretanja ili mirovanja.

Ako je međjutim, potrebno odrediti kritičnu vrednost broja Θ_c (odnosno promenljivih u_{*c} ili τ_{oc}) za pokretanje zrna krupnoće d , direktno korišćenje Šildsovog dijagrama nije moguće, već se problem mora rešavati *iterativno*, sukcesivnim aproksimacijama.

Isto važi i ako se podje od poznatih hidrauličkih uslova obuhvaćenih smičućom brzinom u_{*c} , a traži se krupnoća zrna d koja će se pri datim uslovima pokrenuti („kritični prečnik”). Samo ako se unapred usvoji oblast hidraulički rapave podloge (što realno i jeste najčešći slučaj u prirodi), problem se može direktno rešiti, jer iz uslova: $\tau_o = \tau_{oc}$, odnosno $\rho \cdot g \cdot R \cdot I_d = 0,056 g (\rho_s - \rho) d$ i $\rho_s = 1,65 \text{ t/m}^3$, sledi:

$$d \approx 11 \cdot R \cdot I_d. \quad (9.17)$$

■ **Primer 9.2.** Projektuje se neobložen kanal u peskovitom materijalu ($n = 0,02 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$) za protok $Q = 7 \text{ m}^3/\text{s}$. Kanal je trapeznog poprečnog preseka, širine u dnu $b = 4 \text{ m}$, nagiba kosina 1:2 i uzdužnog nagiba dna $I_d = 0,0003$. Proveriti projektno rešenje sa stanovišta stabilnosti korita, ako je srednji prečnik zrna $d = 1,5 \text{ mm}$. Pretpostaviti da je tečenje u kanalu jednoliko. ($\rho_s = 2,65 \text{ t/m}^3$; $\nu = 1,11 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$).

Rešenje. Datom protoku i geometriji kanala odgovara normalna dubina $h = 1,32 \text{ m}$. ($A = 8,77 \text{ m}^2$, $B = 9,28 \text{ m}$, $O = 9,90 \text{ m}$, $R = 0,89 \text{ m}$, $V = 0,80 \text{ m/s}$). Veličine merodavne za pokretanja nanosa imaju ove vrednosti:

$$\tau_o = 0,0026 \text{ kPa}; \quad V_* = 0,051 \text{ m/s}; \quad \text{Re}_* \approx 69; \quad \Theta = 0,11.$$

Nanošenjem tačke (69, 0,11) na dijagram na Slici 9.2, može se konstatovati da ova „pada” u oblast kretanja, što znači da korito projektovanog kanala neće biti otporno na eroziju pri datim hidrauličkim i geometrijskim uslovima.

U drugoj iteraciji se smanjuje uzdužni nagib kanala na $I_d = 0,0001$, a širina u dnu povećava na $b = 6 \text{ m}$. Sada je normalna dubina $h = 1,5 \text{ m}$. ($A = 13,46 \text{ m}^2$, $B = 11,99 \text{ m}$, $O = 12,69 \text{ m}$, $R = 1,06 \text{ m}$, $V = 0,52 \text{ m/s}$). Sledi:

$$\tau_o = 0,001 \text{ kPa}; \quad V_* = 0,032 \text{ m/s}; \quad \text{Re}_* = 43; \quad \Theta = 0,041.$$

Tačka (43, 0,041) se nalazi na granici pokretanja, što znači da je rešenje na granici prihvatljivosti.

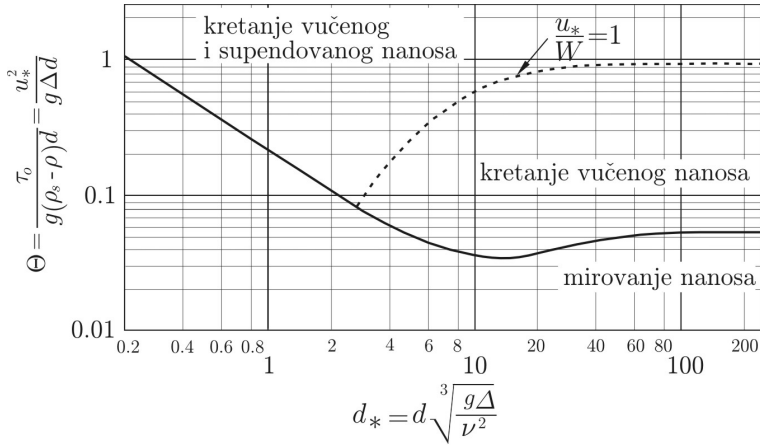
Modifikovan Šildsov dijagram. Da bi se račun uprostito, Šildsov dijagram je modifikovan tako da omogući direktno određivanje smičuće brzine u_{*c} . Kombinacijom parametara Θ i Re_* može se eliminisati smičuća brzina:

$$\Theta \cdot \text{Re}_*^{-2} = \frac{u_*^2}{g \cdot \Delta \cdot d} \cdot \left(\frac{\nu}{u_* \cdot d} \right)^2 = \frac{\nu^2}{g \cdot \Delta \cdot d^3}, \quad (9.18)$$

pa se dobija nova promenljiva umesto broja Re_* :

$$d_* = d \left(\frac{g \cdot \Delta}{\nu^2} \right)^{1/3}.$$

Ova promenljiva predstavlja bezdimenzioni prečnik zrna i zove se „parametar zrna” ili „prečnik smicanja” (videti izraz (4.5), kao i empirijske izraze za brzinu tonjenja (8.16), u kojima figuriše broj $G = d_*^3$). Zavisnost $\Theta = \Theta(d_*)$ je prikazana na Slici 9.4.



Slika 9.4: Modifikovani Šildsov dijagram [8].

Koristeći parametar zrna kao promenljivu, Šildsova zavisnost se može definisati u analitičkom obliku [164]:

$$\Theta_c = \begin{cases} 0,24 \cdot d_*^{-1} & \dots & 1 < d_* \leq 4 \\ 0,14 \cdot d_*^{-0,64} & \dots & 4 < d_* \leq 10 \\ 0,04 \cdot d_*^{-0,1} & \dots & 10 < d_* \leq 20 \\ 0,013 \cdot d_*^{0,29} & \dots & 20 < d_* \leq 150 \\ 0,056 & \dots & d_* > 150 \end{cases} \quad (9.19)$$

ili, ako se uzme u obzir još i ugao unutrašnjeg trenja [89]:

$$\Theta_c = \begin{cases} 0,5 \cdot \text{tg} \phi' & \dots & d_* \leq 0,3 \\ 0,25 \cdot d_*^{-0,6} \cdot \text{tg} \phi' & \dots & 0,3 < d_* \leq 19 \\ 0,013 \cdot d_*^{0,4} \cdot \text{tg} \phi' & \dots & 19 < d_* \leq 50 \\ 0,06 \cdot \text{tg} \phi' & \dots & d_* > 50. \end{cases} \quad (9.20)$$

Šildsova kriva može se definisati i jedinstvenim regresionim izrazom [91]:

$$\Theta_c = 0,009148/\text{Re}_* + 0,05449 [1 - \exp(-0,5661 \cdot \text{Re}_*^{0,5224})]. \quad (9.21)$$

Izrazi (9.19)-(9.21) su pogodni za formiranje kompjuterskih modela u kojima se uslov pokretanja vučenog nanosa zasniva na Šildsovom dijagramu.

■ **Primer 9.3.** Odrediti maksimalnu dubinu u koritu jednog vodotoka pri kojoj neće doći do erozije dna. Široko pravougaono korito ($h \approx R$), čiji je uzdužni nagib dna $I_d = 0,05\%$, formirano je u pokretnom peščanom materijalu krupnoće $d=2,5$ mm. Ostali podaci: $\Delta = 1,65$, $\phi' = 33^\circ$, $\nu(10^\circ\text{C}) = 1,306 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Rešenje. Problem se može direktno rešiti primenom dijagrama na Slici 9.4, pri čemu je:

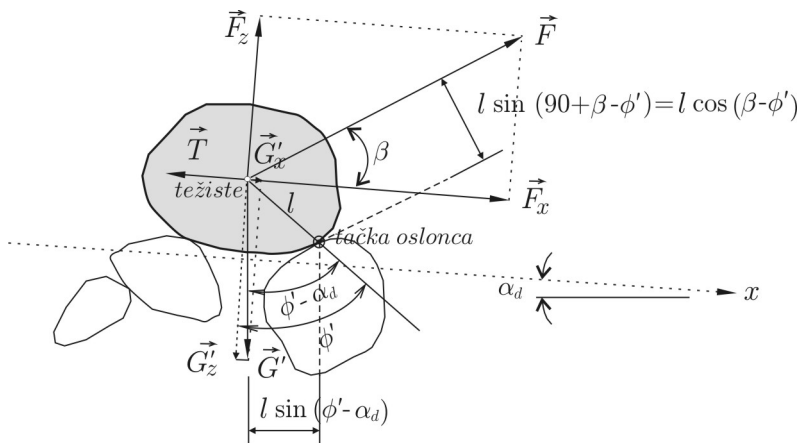
$$d_* = d (g \Delta / \nu^2)^{1/3} = 0,0025 (9,81 \cdot 1,65 / 1,7 \times 10^{-12})^{1/3} \approx 53.$$

Ovoj vrednosti odgovara vrednost kritičnog Šildsovog broja $\Theta_c \approx 0,05$, odnosno kritičnog tangencijalnog napona $\tau_{oc} = 0,0020$ kPa.

Tražena dubina biće: $h = 0,0020 / (1,0 \cdot 9,81 \cdot 0,0005) = 0,4$ m. Ako se primeni izraz (9.19), dobija se: $\Theta_c = 0,041$, $\tau_{oc} = 0,0017$ kPa, $h = 0,35$ m, dok je prema izrazu (9.20), $\Theta_c = 0,039$.

9.2.3 Uslov pokretanja izveden iz ravnoteže sila koje deluju na pojedinačno zrno

Na Slici 9.5 prikazane su sile koje deluju na zrno prečnika d . Pretpostavlja se da je nanos *nevezan* i da je tečenje jednoliko. Razmatraju se *vremenski osrednjene* brzine i sile. Za pokretanje zrna merodavna je *lokalna brzina* na odstojanju (od nepokretnog dna) koje je jednako prečniku zrna: $u_d = u(z = d)$.



Slika 9.5: Sile koje deluju na pojedinačno zrno nanosa; na stabilnost zrna značajno utiče odnos ugla uzdužnog nagiba dna (α_d) i ugla unutrašnjeg trenja (ϕ').

Hidrodinamička sila. Sila \vec{F} kojom tok deluje na zrno ima komponente \vec{F}_x, \vec{F}_z , a intenzitet navedenih sila je proporcionalan kvadratu lokalne brzine toka:

$$F = C_F \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_0 \cdot d^2 \cdot u_d^2 \tag{9.22}$$

$$F_x = F \cdot \cos \beta = C_{Fx} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_1 \cdot d^2 \cdot u_d^2 \tag{9.23}$$

$$F_z = F \cdot \sin \beta = C_{Fz} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_3 \cdot d^2 \cdot u_d^2. \tag{9.24}$$

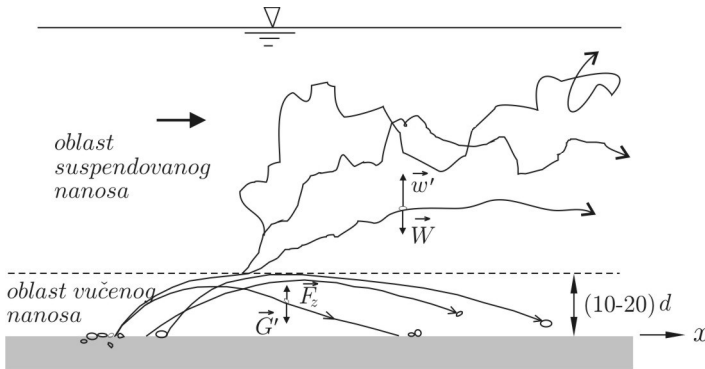
U datim izrazima, β označava vremenski osrednjen napadni ugao, a C_F , C_{Fx} i C_{Fz} su empirijski koeficijenti. Članovi $c_0 \cdot d^2$, $c_1 \cdot d^2$ i $c_3 \cdot d^2$ predstavljaju površine projekcija zrna na ravni koje stoje upravno na pravce delovanja sila, pri čemu vrednosti koeficijenata c_0 , c_1 i c_3 zavise od oblika zrna. Za zrno sfernog oblika je: $c_0 = c_1 = c_3 = \pi/4$.

Teorijski, vrednosti koeficijenta hidrodinamičke sile i napadnog ugla zavise od Rejnoldsovog broja zrna $Re_d = u_d \cdot d/\nu$ i relativnog položaja zrna z/d :

$$C_F = \frac{F}{\rho \cdot d^2 \cdot u_d^2} = C_F \left(Re_d, \frac{z}{d} \right) \quad (9.25)$$

$$\beta = \beta \left(Re_d, \frac{z}{d} \right). \quad (9.26)$$

Međutim, eksperimentalno je utvrđeno da vrednost koeficijenta C_{Fx} na vrlo kratkom odstojanju od dna postaje konstantna, a vrednost koeficijenta C_{Fz} naglo teži nuli već na odstojanju $z = 1,5d$ od dna⁵. Pri dovoljno velikom intenzitetu hidrodinamičke sile toka dolazi do pokretanja zrna, pri čemu njegoa putanja nizvodno može imati različit karakter, kao što je prikazano na Slici 9.6.



Slika 9.6: *Moguće putanje zrna nakon njegovog podizanja sa dna; skokovito („saltaciono”) kretanje je karakteristično za režim vučenog nanosa, sa „determinističkim” putanjama zrna i najvećom visinom skoka $(10 \div 20) d$; sitna zrna mogu biti lansirana dovoljno visoko da dospeju pod uticaj turbulentnih fluktuacija i da se nadju u režimu suspendovanog nanosa, kada je $w' \approx W$. Putanja zrna u tom slučaju ima slučajajan („probabilistički”) karakter [164, 176].*

⁵Pri opstrujavanju zrna koje miruje, lokalna brzina toka neposredno iznad zrna je povećana, što dovodi do razlike u pritisku iznad i ispod zrna i podizanja zrna sa dna. Udaljavanjem zrna od dna, smanjuje se pomenuta razlika brzina, pritisak iznad i ispod zrna se izjednačava, a uticaj vertikalne sile slabi. Kad intenzitet te sile postane manji od težine zrna, ono počinje da pada ka dnu. Nakon perioda mirovanja zrna na dnu, opisani redosled događaja se ponavlja.

Kritična brzina. Za određivanje ove brzine mogu se koristiti uslovi granične stabilnosti zrna, pri čemu je u trenutku njegovog pokretanja: $u_d = u_{dc}$. Razmatra se stabilnost zrna na klizanje i na preturanje oko tačke oslonca (Slika 9.5).

(i) *Stabilnost na klizanje – bilans sila u pravcu x :*

$$F_x + G'_x - T = 0, \quad (9.27)$$

gde je:

$$F_x = \frac{\rho}{2} \cdot C_{Fx} \cdot c_1 \cdot d^2 \cdot u_{dc}^2 \quad (9.28)$$

$$G'_x = G' \sin \alpha_d = g(\rho_s - \rho) c_2 \cdot d^3 \sin \alpha_d \quad (9.29)$$

$$T = G'_z \cdot f' = G' \cos \alpha_d \cdot \operatorname{tg} \phi' = g(\rho_s - \rho) c_2 \cdot d^3 \cos \alpha_d \cdot \operatorname{tg} \phi' \quad (9.30)$$

U opštem slučaju, zapremina zrna je: $c_2 \cdot d^3$ (za zrno sfernog oblika $c_2 = \pi/6$), a koeficijent komponente hidrodinamičke sile:

$$C_{Fx} = \varphi_1(\operatorname{Re}_d, z/d) = \varphi_1(\operatorname{Re}_d, c_4), \quad (9.31)$$

gde je $\operatorname{Re}_d = u_d d / \nu$ – Reynoldsov broj zrna.

Zamenom u jednačinu (9.27) i nakon sredjivanja, dobija se:

$$\frac{u_{dc}^2}{2g \cdot \Delta \cdot d} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \phi'}{\varphi_1(\operatorname{Re}_d, c_4)} \cdot k_1, \quad (9.32)$$

odnosno:

$$u_{dc} = \varphi_2(\operatorname{Re}_d, c_5, \phi') \cdot \sqrt{k_1} \sqrt{2g \cdot \Delta \cdot d}, \quad (9.33)$$

gde koeficijent c_5 objedinjuje koeficijente c_1 , c_2 i c_4 , a parametar:

$$k_1 = \cos \alpha_d - \frac{\sin \alpha_d}{\operatorname{tg} \phi'} \quad (9.34)$$

odražava uticaj uzdužnog nagiba dna. Kada je nagib mali (manji od 1 %), $k_1 = 1$.

Konačno, kritična brzina pokretanja zrna se može predstaviti u najopštijem obliku:

$$u_{dc} = a_1 \sqrt{2g \cdot \Delta \cdot d}, \quad (9.35)$$

gde empirijski parametar a_1 obuhvata razne pomenute uticaje: turbulentnost toka, karakteristike zrna (oblik, ugao unutrašnjeg trenja) i uzdužni nagib dna.

U literaturi se može naći veliki broj obrazaca koji imaju strukturu izraza (9.35). Najpoznatiji od njih je obrazac Izbaša (Izbash) [75], koji vrednost parametra a_1 definiše u zavisnosti od intenziteta turbulencije:

$$a_1 = \begin{cases} 0,85 & \text{– izrazito turbulentan tok} \\ 1,20 & \text{– umereno turbulentan tok} \end{cases} \quad (9.36)$$

(ii) *Stabilnost na preturanje oko tačke oslonca* (Slika 9.5):

$$F \cdot l \cos(\beta - \phi') - G' \cdot l \sin(\phi' - \alpha_d) = 0, \quad (9.37)$$

pri čemu je:

$$F = \frac{\rho}{2} \cdot C_F \cdot c_0 \cdot d^2 \cdot u_{dc}^2 \quad (9.38)$$

$$C_F = \varphi_3(\text{Re}_d, c_4). \quad (9.39)$$

Primenjujući momentnu jednačinu (9.37) i nakon sredjivanja, dobija se:

$$\frac{u_{dc}^2}{2g \cdot \Delta \cdot d} = \frac{c_2}{c_0} \cdot \frac{1}{\varphi_3(\text{Re}_d, c_4)} \cdot \frac{\sin(\phi' - \alpha_d)}{\cos(\beta - \phi')}, \quad (9.40)$$

odnosno, u opštem obliku:

$$u_{dc} = a_2 \sqrt{2g \cdot \Delta \cdot d}. \quad (9.41)$$

Imajući u vidu izraze (9.35) i (9.41) može se zaključiti da je struktura obrasca za kritičnu brzinu pokretanja zrna: $\text{const} \sqrt{2g \cdot \Delta \cdot d}$, bez obzira da li se izvodi iz uslova stabilnosti na klizanje ili na preturanje. Oba uslova su važna jer se nanos na dnu korita može pokrenuti klizanjem i kotrljanjem. Razlika je samo u vrednosti konstante. Činjenica da se jednom konstantom obuhvata niz raznorodnih uticaja, ukazuje na značajno uprošćenje ovog pristupa i njegovu ograničenu tačnost.

Kritični tangencijalni napon. U izvodjenju kritičnog tangencijalnog napona uzeće se u obzir samo sile u pravcu toka (9.27), smatrajući da su preko empirijskih koeficijenata posredno uzeti u obzir i uticaji u vertikalnom pravcu. Ponovo se koriste sile definisane izrazima (9.28) – (9.30). Pretpostavljajući logaritamski raspored brzine po dubini (2.30):

$$u_d = u(d) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{d}{k_s} \right) + B \left(\frac{u_* \cdot k_s}{\nu} \right),$$

a imajući u vidu podatke iz Tabele 2.1 koji daju zavisnosti tipa: $k_s = c_6 \cdot d$, gde je c_6 – konstanta, može se brzina u izrazu (9.28) prikazati u opštem obliku:

$$u_d = u_* \cdot \varphi_4 \left(\frac{u_* \cdot d}{\nu}, c_6 \right) = u_* \cdot \varphi_4(\text{Re}_*, c_6), \quad (9.42)$$

a u trenutku granične stabilnosti zrna:

$$u_{dc} = u_{*c} \cdot \varphi_4(\text{Re}_*, c_6). \quad (9.43)$$

Na ovaj način je izvršen prelaz sa kritične brzine toka na kritičnu smičuću brzinu, odnosno kritični smičući napon. Slično se može postupiti i u transformaciji koeficijenta C_{Fx} u izrazu (9.28). Kombinacijom jednačinom (9.31) i (9.42) sledi:

$$C_{Fx} = \varphi_1 \left(\frac{u_d \cdot d}{\nu}, c_4 \right) = \varphi_1 \left(\frac{u_* \cdot \varphi_4(\text{Re}_*, c_6) \cdot d}{\nu}, c_4 \right), \quad (9.44)$$

pa je:

$$F_x = \frac{\rho}{2} \cdot c_1 \cdot d^2 \cdot \varphi_1 \left(\frac{u_{*c} \cdot \varphi_4(\text{Re}_*, c_6) \cdot d}{\nu}, c_4 \right) \cdot u_{*c}^2 \cdot \varphi_4^2(\text{Re}_*, c_6) = \quad (9.45)$$

$$= \rho \cdot d^2 \cdot u_{*c}^2 \cdot \varphi_5(\text{Re}_*, c_1, c_4, c_6). \quad (9.46)$$

Primenjujući uslov (9.27), posle sredjivanja, dolazi se do opšte zavisnosti:

$$\frac{u_{*c}^2}{g \cdot \Delta \cdot d} = \frac{c_2 \cdot \text{tg } \phi'}{\varphi_5(\text{Re}_*, c_1, c_4, c_6)} \cdot k_1, \quad (9.47)$$

ili konačno,

$$\frac{u_{*c}^2}{g \cdot \Delta \cdot d} \equiv \Theta_c = \varphi_6(\text{Re}_*) \cdot k_1. \quad (9.48)$$

Ovaj izraz predstavlja Šildsovu zavisnost, s tim što faktor k_1 omogućava korekciju kritičnog Šildsovog broja kada je izražen uzdužni nagib dna. Ako je ovaj nagib mali ($k_1 = 1$), izraz (9.48) opisuje originalnu Šildsovu zavisnost koja je prikazana na Slici 9.2.

Još se lakše može izvesti izraz (9.48) ako se hidrodinamička sila izrazi preko smičućeg napona τ_o : $F_x = \tau_o \cdot c_1 \cdot d^2$. Uslov granične stabilnosti zrna (9.27) daje izraz za kritični tangencijalni napon ($\tau = \tau_c$):

$$\tau_{oc} = \frac{c_2}{c_1} \cdot g (\rho_s - \rho) \cdot d \cdot \text{tg } \phi' \left(\cos \alpha_d - \frac{\sin \alpha_d}{\text{tg } \phi'} \right) = c_7 \cdot g (\rho_s - \rho) \cdot d \cdot \text{tg } \phi' \cdot k_1, \quad (9.49)$$

odnosno,

$$\frac{\tau_{oc}}{g(\rho_s - \rho)d} \equiv \Theta_c = \frac{u_{*c}^2}{g \cdot \Delta \cdot d} = c_7 \cdot \text{tg } \phi' \cdot k_1. \quad (9.50)$$

Prepoznaje se izraz za kritični Šildsov broj u oblasti hidraulički rapavog dna: $\Theta_c = \text{const.}$

9.2.4 Veza kritične brzine i kritičnog napona

Kombinacijom izraza (2.44):

$$\tilde{u} = u_* \cdot 5,75 \cdot \log \left(12 \frac{h}{k_s} \right)$$

i izraza za bezdimenzioni tangencijalni napon (Šildsov broj):

$$u_* = \sqrt{\Theta \cdot g \cdot \Delta \cdot d_{50}}$$

može se uspostaviti veza između kritične brzine (\tilde{u}_c) i kritičnog tangencijalnog napona (u_{*c}):

$$\tilde{u}_c = 5,75 \sqrt{\Theta_c \cdot g \cdot \Delta \cdot d_{50}} \cdot \log \left(12 \frac{h}{k_s} \right). \quad (9.51)$$

Ovim izrazom je definisana kritična brzina u jednoj vertikali, pri čemu se za određivanje vrednosti kritičnog Šildsovog broja (Θ_c) mogu koristiti dijagrami na Slikama 9.2 ili 9.4, a za vrednost apsolutne rapavosti (k_s), podaci iz Tabele 2.1.

Interesantno je upoređenje opšteg izraza (9.51) sa izrazom Gončarova (9.14). Opšti izraz se može svesti na obrazac Gončarova pod uslovom da je apsolutna rapavost $k_s = 1,36 d_{95}$ i da je: $5,75 \sqrt{\Theta_c} / \sqrt{2} = 0,535$, odakle sledi da je $\Theta_c = 0,0173 \approx 0,02$. Imajući u vidu da je najmanja vrednost na Šildsovom dijagramu $\Theta_c \approx 0,03$, ova analiza pokazuje da, uzimanjem vrednosti Θ_c nešto ispod donje granice, obrazac Gončarova daje rezultate koji su na strani sigurnosti. Naime, vrednosti $\Theta_c = 0,03$ odgovarala bi vrednost konstante u izrazu Gončarova 0,70, iz čega proizilazi da je u ovom izrazu implicitno sadržan „koeficijent sigurnosti” $0,70/0,535=1,3$.

Opravdanost uvodjenja izvesnog stepena sigurnosti zasniva se i na činjenici da na pokretanje zrna presudno utiče trenutna brzina sa svojom fluktuacionom komponentom. Eksperimentalno je utvrđeno da pri ekstremno intenzivnoj turbulenciji, fluktuaciona komponenta brzine može dostići čak 75 % vremenski osrednjene

brzine: $u' = 0.75 \bar{u}$, što znači da je trenutna brzina: $u(t) = 1.75 \bar{u}$. Obrazac Gončarova bi se stoga mogao interpretirati tako da implicitno dozvoljava da trenutna kritična brzina bude 1,3 puta veća od vremenski osrednjene kritične brzine.

Može se takodje pokazati da se parametar a_1 lokalne kritične brzine pri dnu (u_{dc}), definisane izrazom (9.35), može dovesti u vezu sa vrednostima na Šildsovom dijagramu. Ako se u izrazima za logaritamski raspored brzine (2.32) ili (2.42) stavi: $z = k_s$ ili $u(k_s) = u_d$, dolazi se do istog rezultata:

$$u_d = 8,5 u_* \quad (9.52)$$

Kada je zrno na granici stabilnosti: $u_{dc} = 8,5 u_{*c}$, pa sledi:

$$a_1 \sqrt{2g \cdot \Delta \cdot d_{50}} = 8,5 \sqrt{\Theta_c \cdot g \cdot \Delta \cdot d_{50}}, \quad (9.53)$$

odnosno,

$$a_1 = \frac{8,5 \sqrt{\Theta_c}}{\sqrt{2}} \approx 6 \sqrt{\Theta_c}. \quad (9.54)$$

Zavisnost $a_1(\Theta_c)$ data je u Tabeli 9.2.

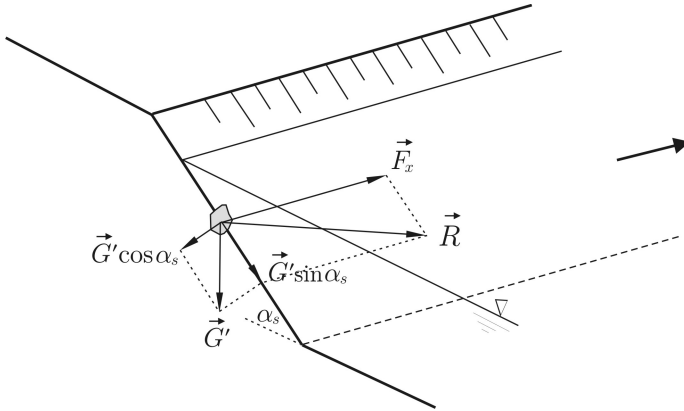
Tabela 9.2: Zavisnost parametra kritične brzine i kritičnog tangencijalnog napona

Θ_c	0,02	0,03	0,04	0,047	0,056	0,06
a_1	0,85	1,04	1,20	1,30	1,42	1,47

Navedeni podaci samo potvrđuju ono što je intuitivno jasno, da su pri velikom intenzitetu turbulencije merodavne manje vrednosti kritičnog tangencijalnog napona – zrno se „lakše“ pokreće. Tako vrednosti $a_1 = 0,85$, koju Izbaš vezuje za „izrazito turbulentan tok“ (9.36), odgovara najmanja vrednost $\Theta_c=0,02$, dok vrednosti $a_1 = 1,20$, koja se vezuje za „umereno turbulentan tok“ (9.36), odgovara vrednost $\Theta_c=0,04$. Ova analiza pomaže da se bolje razume struktura pojedinih empirijskih obrazaca i sagledaju uslovi njihove primene.

9.2.5 Korekcije kritičnog tangencijalnog napona

Do sada je bilo govora o zrnu nanosa na rečnom dnu. Sada će se razmotriti dejstvo sila na zrno koje se nalazi na kosini obale. U obzir se mora uzeti uticaj poprečnog nagiba α_s (Slika 9.7). Sila trenja (\vec{T}) suprotstavlja se rezultanti hidrodinamičke sile intenziteta $R = \sqrt{(\tau_s c_1 d^2)^2 + (G' \sin \alpha_s)^2}$, gde je τ_s – tangencijalni napon na kosini, a α_s – ugao koji kosina zaklapa sa horizontalom.



Slika 9.7: Sile koje deluju na pojedinačno zrno na kosini obale.

Iz uslova $R = T$ može se lako izvesti izraz:

$$\tau_s = \frac{G' \cos \alpha_s}{c_1 \cdot d^2} \cdot \operatorname{tg} \phi' \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_s}{\operatorname{tg}^2 \phi'}}, \quad (9.55)$$

na osnovu koga sledi da je odnos tangencijalnog napona na kosini i na rečnom dnu:

$$k_2 = \frac{\tau_s}{\tau_o} = \cos \alpha_s \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_s}{\operatorname{tg}^2 \phi'}} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_s}{\sin^2 \phi'}}. \quad (9.56)$$

To znači da se kritični Šildsov broj za zrno na kosini obale može dobiti tako što se vrednost ovog broja, određena za rečno dno, pomnoži korekcionim faktorom $k_2 = k_2(\alpha_s, \phi')$.

■ **Primer 9.4.** Odrediti krupnoću kamena koji se neće pokrenuti sa obale rečnog korita, ako su dati ovi podaci: $\alpha_s = 27^\circ$, $R = 1,90$ m, $I_d = 0,005$, $\Delta = 1,65$, $\phi' \approx 38^\circ$.

Rešenje. Usvaja se vrednost kritičnog Šildsovog broja na dnu: $\Theta_c = 0,06$.

$$k_2 = \sqrt{1 - (\sin^2 27^\circ / \sin^2 38^\circ)} \approx 0,68;$$

$$\Theta'_c = 0,06 \cdot 0,68 = 0,041;$$

$$V_* = \sqrt{9,81 \cdot 1,90 \cdot 0,005} = 0,305 \text{ m/s};$$

$$d = V_*^2 / (g \cdot \Delta \cdot \Theta'_c) = 0,093 / (9,81 \cdot 1,65 \cdot 0,041) = 0,014 \text{ m}.$$

* * *

Do sada su navedena dva korekciona faktora kritičnog Šildsovog broja; faktor k_1 , koji obuhvata uticaj uzdužnog nagiba dna, mora se uzeti u obzir u analizama strmih brdskih vodotoka, a faktor k_2 , koji obuhvata uticaj nagiba obale, mora se uvesti u proračun zaštitnih obaloutvrda. Međutim, postoje pokušaji da se i drugi uticaji obuhvate preko odgovarajućih korekcionih faktora.

Uticaj male potopljenosti. Šildsova teorija polazi od pretpostavke da je relativna rapavost mala i da važi logaritamski raspored brzine u turbulentnom graničnom sloju. Eksperimentalno je ustanovljeno da pri maloj potopljenosti zrna: $h/d = 1 \div 10$, njegova pokretljivost značajno opada. U tom slučaju, za korekciju broja Θ_c predložen je empirijski izraz [8]:

$$\Theta'_c = \Theta_c \cdot \left(1 + 0,67 \sqrt{\frac{d}{h}} \right) = \Theta_c \cdot k_3 \quad (\alpha_d \leq 5\%). \quad (9.57)$$

Uticaj neuniformnog granulometrijskog sastava. U prirodnim vodotocima se retko sreće uniforman granulometrijski sastav nanosa. Neujednačenost krupnoće značajno utiče na pokretljivost zrna. Sitnije frakcije su „skrivene” među kripnijim, pa je njihova pokretljivost manja. U opštem slučaju se vrednost „faktora skrivanja” k_4 može definisati izrazom tipa [8]:

$$k_{4j} = \left(\frac{d}{d_j} \right)^b, \quad (9.58)$$

gde indeks „j” označava frakciju, d , srednju krupnoću mešavine, a $b < 1$ je empirijski eksponent. Korekcija kritičnog Šildsovog broja se obavlja po frakcijama: $\Theta'_{cj} = \Theta_{cj} \cdot k_{4j}$. U literaturi [150] je dat modifikovani Šildsov dijagram za mešavine nanosa, formiran na osnovu laboratorijskih ispitivanja.

Uticaj samopopločavanja dna. Kao posledica lakšeg odnošenja sitnih frakcija, u prirodi nastaje spontana segregacija nanosa po krupnoći, tako da na površini rečnog dna ostaju krupne frakcije, formirajući „armirajući sloj” ili „popločano dno” (Slika 9.8). Ova pojava nije samo prisutna kod vodotoka čije je korito formirano u krupnom šljunkovitom materijalu, već i kod reka sa sitnim, peščanim nanosom⁶. Uslovi pokretanja se u slučaju takozvanog „statičkog” samopopločavanja moraju definisati karakteristikama čestica koje su efektivno prisutne na dnu. Samopopločavanje će biti detaljnije razmatrano u tački 9.3, kao i u dvanaestom poglavlju koje je posvećeno deformaciji rečnog korita.

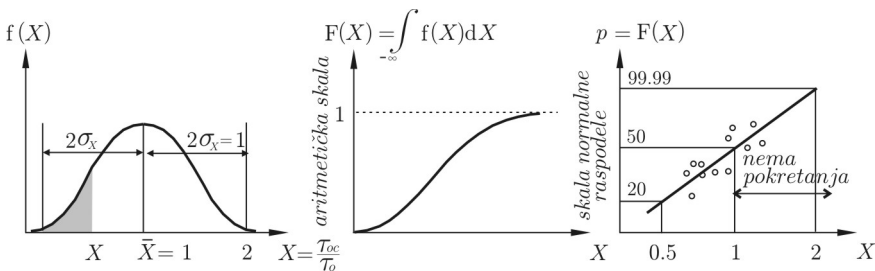
⁶Interesantan je primer reke Nil u Egiptu, gde je režim nanosa diktiran ispuštanjem vode kroz branu kod Asuana; to je dovelo do formiranja zaštitnog sloja od peščanog materijala krupnoće reda veličine 1 mm, dok je srednji prečnik za dva reda veličine manji.



Slika 9.8: Krupni šljunčani materijal u armirajućem sloju i sitniji materijal ispod armirajućeg sloja.

9.3 Stohastički model pokretanja nanosa

Šildsova kriva odražava verovatnoću pokretanja od 50%, pod pretpostavkom da se raspodela bezdimenzionog broja Θ_c dobro aproksimira normalnom raspodelom. Neka je $X = \tau_{oc}/\tau_o$ slučajna promenljiva pomoću koje se definiše pokretanje, odnosno mirovanje zrna na dnu. Pri tome je τ_o - vremenski osrednjeni smičući napon, a τ_{oc} - odgovarajući kritični napon, kome odgovara određena vrednost Θ_c (0,047, 0,056, ili 0,06). Promenljiva X zavisi preko τ_{oc} od prečnika zrna: $X = X(d)$. Vrednosti $X < 1$ padaju u oblast kretanja (iznad Šildsove krive), a vrednosti $X > 1$, u oblast mirovanja (ispod krive), dok za samu krivu važi $X = 1$ (Slika 9.2). Raspodela promenljive X je normalna⁷ (Slika 9.9), pri čemu je $\bar{X} = 1$ i $\sigma_X = 0,57$ [55].



Slika 9.9: Raspodela slučajne promenljive $X = \tau_{oc}/\tau_o$; shematski je prikazana kriva gustine raspodele (frekvencije), sumarna kriva (empirijske verovatnoće) sa aritmetičkom podelom na ordinati i teorijska kriva verovatnoće sa skalom normalne raspodele na ordinati.

⁷Kako je $X = X(d)$, to znači da se implicitno smatra da je i raspodela krupnoće zrna normalna (ili log-normalna), ali sa vrednošću standardne devijacije koja se razlikuje od σ_X .

Verovatnoća da vrednost promenljive X bude manja ili jednaka datoj vrednosti X_a je:

$$F(X_a) = P\{X \leq X_a\} = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{X_a} \exp\left[-\frac{(X - \bar{X})^2}{2\sigma_X^2}\right] dX. \quad (9.59)$$

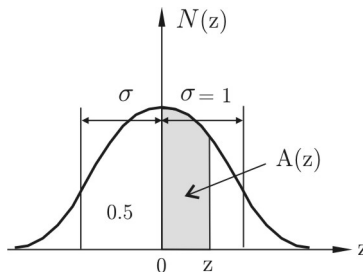
Neka je to „verovatnoća mirovanja zrna”. Za $X_a = \bar{X} = 1$ je: $F(1) = 0,5$ (Šildsova kriva).

Da bi se lakše računale verovatnoće $F(X)$, koristi se u statistici uobičajeni pristup prelaska na „standardizovanu normalnu promenljivu” [86]:

$$z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma_X} = \frac{X - 1}{0,57}, \quad (9.60)$$

i korišćenja „standardne normalne raspodele” (Slika 9.10):

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_a} \exp(-z^2/2) dz. \quad (9.61)$$



Slika 9.10: Shematski prikaz standardne normalne raspodele $N(0,1)$; srednjoj vrednosti $\bar{X} = 1$, odgovara vrednost $\bar{z} = 0$, a vrednosti $X = \bar{X} + \sigma_X$, $z=1$.

U Dodatku D je data pomoćna tabela vrednosti standardne normalne raspodele, za razne vrednosti normalizovane promenljive z .

Može se konstatovati da je $\Phi(0) = F(1) = 0,5$. Za $X = 2$ je $z = (2-1)/0,57 = 1,7544$, $\Phi(1,7544) = 0,96$, što znači da kada je kritični tangencijalni napon dvostruko veći od stvarnog napona, verovatnoća da se zrno neće pokrenuti iznosi 96%, a da će se pokrenuti, samo 4%.

Stohastički pristup u analizi pokretanja nanosa dolazi do punog izražaja ako je granulometrijski sastav ovog materijala izrazito neuniforman. Već je bilo reči o formiranju „armirajućeg sloja” ili „samopopločavanju” korita. Za praksu je od

interesa odrediti granulometrijski sastav armirajućeg sloja koji se može očekivati pri merodavnim hidrauličkim uslovima. U nastavku se opisuje postupak Geslera (Gessler, 1971) [55].

Neka je verovatnoća mirovanja $P_m = F(X) = \Phi(z)$ i neka je početna granulometrija definisana emirijskom raspodelom F_o . Verovatnoća da krupnoća zrna bude manja ili jednaka nekoj krupnoći d_a , po definiciji iznosi:

$$F_o(d_a) = P\{d \leq d_a\} = \int_{d_{min}}^{d_a} f_o(d) dd, \quad (9.62)$$

gde je f_o - funkcija frekvencije početnih krupnoća, a d_{min} - najsitnije zrno početne granulometrije. (Najkrupnije zrno je d_{max} .)

Ako se istovremeno postavi uslov da zrno d_a bude u sastavu armirajućeg sloja (nepokrenuto), onda je shodno definiciji uslovne verovatnoće:

$$F_a(d_a) = P_m(d_a) \cdot F_o(d_a) = \int_{d_{min}}^{d_a} P_m \cdot f_o(d) dd. \quad (9.63)$$

Da bi ovako definisana verovatnoća pripadanja armirajućem sloju bila jednaka jedinici za slučaj $d_a = d_{max}$, mora se izvršiti normiranje izraza (9.63):

$$F_a(d_a) = \frac{\int_{d_{min}}^{d_a} P_m \cdot f_o dd}{\int_{d_{min}}^{d_{max}} P_m \cdot f_o dd} \approx \frac{\sum_{d_{min}}^{d_a} P_m \cdot \Delta F_o}{\sum_{d_{min}}^{d_{max}} P_m \cdot \Delta F_o}, \quad (9.64)$$

pri čemu su podelom početne granulometrije na klase (frakcije) ΔF_o , integrali aproksimirani sumama.

Srednji prečnik zrna u armirajućem sloju dobija se tako što se kriva raspodele armirajućeg sloja F_a podeli na M klasa – frakcija ΔF_a , pa se osrednjavanje obavlja po frakcijama:

$$\bar{d}_a = \frac{\sum_{i=1}^M d_i \cdot \Delta F_{ai}}{\sum_{i=1}^M \Delta F_{ai}} = \sum_{i=1}^M d_i \cdot \Delta F_{ai}. \quad (9.65)$$

S druge strane, od interesa može biti i određivanje granulometrijskog sastava materijala koji će biti odnet, pa se neće naći u armirajućem sloju. U tom slučaju se koristi verovatnoća $1-P_m$, kao što će biti ilustrovano sledećim primerom.

■ **Primer 9.5.** U prve tri kolone Tabele 9.3 data je početna granulometrija nanosa sa rečnog dna. Nanos ima log-normalnu raspodelu, sa vrednostima parametara: $d_{50}=2$ mm i $\sigma_g = 4$. Odrediti granulometrski sastav armirajućeg sloja, kao

i odgovarajući srednji prečnik, ako je merodavni tangencijalni napon $\tau_o=9,123$ Pa. Odrediti i granulometrijski sastav odnetog materijala.

Rešenje. Rezultati proračuna su dati u Tabelama 9.3 i 9.4.

Tabela 9.3: Proračun granulometrijskog sastava armirajućeg sloja.

i	d[mm]	F _o	ΔF _o	τ _{oc} [Pa]	X	z	A(z)	P _m = Φ(z)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
		0						
1	0,20	0,05	0,10	0,152	0,017	-1,725	0,4577	0,042
2	0,48	0,15	0,10	0,365	0,040	-1,684	0,4539	0,046
3	0,79	0,25	0,10	0,601	0,066	-1,639	0,4494	0,051
4	1,17	0,35	0,10	0,890	0,098	-1,583	0,4433	0,057
5	1,68	0,45	0,10	1,278	0,140	-1,509	0,4343	0,066
6	2,38	0,55	0,10	1,811	0,198	-1,406	0,4202	0,080
7	3,41	0,65	0,10	2,594	0,284	-1,256	0,3954	0,105
8	5,09	0,75	0,10	3,872	0,424	-1,010	0,3437	0,156
9	8,41	0,85	0,10	6,398	0,701	-0,524	0,1999	0,300
10	19,56	0,95	0,10	14,881	1,631	1,107	0,3660	0,866

(nastavak)

i	P _m ΔF _o	ΔF _a	F _a	dΔF _a
	(10)	(11)	(12)	(13)
			0	
1	0,0042	0,0239	0,0239	0,005
2	0,0046	0,0261	0,0500	0,013
3	0,0051	0,0286	0,0786	0,023
4	0,0057	0,0321	0,1106	0,038
5	0,0066	0,0372	0,1478	0,062
6	0,0080	0,0452	0,1930	0,107
7	0,0105	0,0592	0,2521	0,202
8	0,0156	0,0884	0,3405	0,450
9	0,0300	0,1697	0,5103	1,428
10	0,0866	0,4897	1,0000	9,579
Σ:	0,1768			11,905

Objašnjenja u vezi sa Tabelom 9.3:

- kol. 4: klase ne moraju biti uniformne veličine;
- kol. 5: u proračunu usvojena vrednost $\Theta_c = 0,047$;
- kol. 6: slučajna promenljiva $X = \tau_{oc}/\tau_o$;
- kol. 7: standardizovana promenljiva $z = (X - 1)/0,57$;
- kol. 8: vrednosti površine A(z) date u pomoćnoj tabeli (Dodatak C);
- kol. 9: Verovatnoća mirovanja $\Phi(z) \approx 0,5 \pm A(z)$, pri čemu je znak „+” ako je $z > 0$, a znak „-” ako je $z < 0$. (Savremeni „spread-sheet” programi imaju ugrađenu funkciju standardne normalne raspodele, što čini tablice nepotrebnim, a kolona (8) se može izostaviti);

- kol. 10: uslovna verovatnoća mirovanja početne granulacije;
 kol. 11: vrednosti iz kol. 10 podeljene sumom iz iste kolone;
 kol. 12: granulometrijski sastav armirajućeg sloja;
 kol. 13: parcijalne vrednosti čiji zbir daje srednji prečnik armirajućeg sloja.

Tabela 9.4: *Granulometrijski sastav odnetog materijala.*

i	d[mm]	$P_p=1-P_m$	$P_p \Delta F_o$	ΔF_p	F_p	$d \Delta F_p$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
					0	
1	0,20	0,958	0,0958	0,1163	0,1163	0,0233
2	0,48	0,954	0,0954	0,1159	0,2322	0,0556
3	0,79	0,949	0,0949	0,1153	0,3476	0,0911
4	1,17	0,943	0,0943	0,1146	0,4622	0,1341
5	1,68	0,934	0,0934	0,1135	0,5757	0,1907
6	2,38	0,920	0,0920	0,1118	0,6874	0,2660
7	3,41	0,895	0,0895	0,1088	0,7962	0,3709
8	5,09	0,844	0,0844	0,1025	0,8987	0,5217
9	8,41	0,700	0,0700	0,0850	0,9837	0,7150
10	19,56	0,134	0,0134	0,0163	1,0000	0,3184
		\sum :	0,8232			2,6868

Objašnjenja u vezi sa Tabelom 9.4:

- kol. 3: verovatnoća pokretanja (ne pripadanja armirajućem sloju);
 kol. 4: uslovna verovatnoća da zrno pripada početnoj granulometriji i da je pokrenuto;
 kol. 5: vrednosti podeljene sumom iz prethodne kolone;
 kol. 6: granulometrija pokrenutih zrna (sumarna kriva);
 kol. 7: parcijalne vrednosti čiji zbir na kraju daje srednji prečnik pokrenutih zrna.

* * *

Na kraju evo i jedne empirijske formule koja ima praktični značaj u određivanju najvećeg tangencijalnog napona koga data granulometrija po log-normalnoj distribuciji može da „podnese”, a da se zrna ne pokrenu [112]:

$$\tau_{ac} = g (\rho_s - \rho) d_{50} [0,0292 \cdot \sigma_g^{1,62} + 0,042 \cdot e^{-0,65 \sigma_g}]. \quad (9.66)$$

Oznake su: d_{50} - medijana krupnoće zrna iz uzorka (u metrima), σ_g - geometrijska standardna devijacija uzorka, a τ_{ac} - kritični tangencijalni napon za najkrupnije zrno armirajućeg sloja. Ovom naponu odgovara krupnoća zrna: $d_{amax} = \tau_{ca} / [0,047 g (\rho_s - \rho)]$.

■ **Primer 9.6.** Koristeći podatke iz prethodnog primera odrediti maksimalni tangencijalni napon pri kome će opstati armirajući sloj.

Rešenje. Prema datim podacima: $d_{50} = 2$ mm, $\sigma_g = 4$, dobijaju se ovi rezultati: $\tau_{ac} = 9$ Pa, $d_{amax} = 11,8$ mm, što je skoro jednako prečniku d_{95} početne granulometrije.

9.4 Početak formiranja suspenzije

Već je rečeno da se sa povećanjem brzine toka i smičućeg napona povećava broj zrna koja se kreću kotrljanjem, klizanjem, skokovito („saltaciono”), a dužina skokova i njihova visina se povećava sve dok se u određenom trenutku „oblak” podignutih čestica ne nadje u suspenziji. Tada kažemo da se nanos kreće u režimu suspendovanog nanosa. Početak uspostavljanja suspenzije nije lako definisati (kao što uostalom, to nije slučaj ni sa početkom kretanja vučenog nanosa). Međutim, gruba procena se može dati na osnovu krupnoće zrna i njegove brzine tonjenja. Naime, kao što će se pokazati u narednim poglavljima, zrno u suspenziji je izloženo uticaju gravitacije preko brzine tonjenja W i uticajima turbulencije, preko fluktuacionih brzina toka. Eksperimenti pokazuju da je vertikalna fluktuaciona komponenta brzine toka koja diže zrno ka površini, istog reda veličine kao smičuća brzina toka V_* . Stoga su brojni autori formulisali kriterijume formiranja suspenzije u vidu odnosa $V_*/W = \text{const.}$ (Tabela 9.5).

Tabela 9.5: Kriterijumi za formiranje suspenzije.

Autor	Kriterijum
Bagnold (Bagnold, 1966)	$\frac{V_*}{W} > 1$ početak formiranja suspenzije
Nikitin (1967)	$\frac{W}{V_*} \begin{cases} < 0,05 \\ = 0,05 \div 3,15 \\ = 3,15 \div 5d/\delta_v \\ > 5d/\delta_v \end{cases}$ tranzitni suspendovani nanos koritoform. suspendovani nanos vučeni nanos popločano (nepokretno) dno
fan Rejn (van Rijn, 1984)	$\frac{V_*}{W} \begin{cases} > 4/d_* \\ > 0,4 \end{cases}$ $1 < d_* \leq 10$ ($d = d_{50}$) $d_* > 10$
Rodkivi (Raudkivi, 1990)	$\frac{V_*}{W} \begin{cases} > 0,5 \\ > 1,2 \end{cases}$ početak formiranja suspenzije dominantan pronos suspen. nanosa
Džulien (Julien, 1995)	$\frac{V_*}{W} \begin{cases} > 0,2 \\ > 2,5 \end{cases}$ početak formiranja suspenzije dominantan pronos suspen. nanosa
Samer i dr. (Sumer, 1996)	$\Theta > 2$ $0,13 < d < 3$ mm

Na osnovu ovih kriterijuma, može se generalno zaključiti da do formiranja suspenzije i početka pronosa suspendovanog nanosa dolazi ako je:

$$\frac{V_*}{W} > 0,2 \div 2,0. \quad (9.67)$$

■ **Primer 9.7.** Proveriti da li postoje uslovi za kretanje suspendovanog nanosa u kanalu iz primera 9.2.

Rešenje. Pre proširenja kanala, smičuća brzina je u datom primeru iznosila $V_* = 0,051$ m/s, a posle proširenja, $V_* = 0,032$ m/s. Kako je brzina tonjenja za česticu krupnoće 1,5 mm, $W = 0,0027$ m/s, u oba slučaja postoje uslovi za pronos suspendovanog nanosa, jer je $V_*/W \approx 19$, odnosno 12.

■ **Primer 9.8.** Dati su sledeći elementi jednog poprečnog preseka: $R = 1,8$ m, $V = 0,5$ m/s, $n = 0,025$ m^{-1/3}s. Odrediti dubinu vode pri obali, pri kojoj se može očekivati zamuljivanje obale - istaložavanje čestica suspendovanog nanosa sitnijih od 0,1 mm. ($\Delta = 1,65$; $\nu(15^\circ\text{C}) = 1,1 \times 10^{-6}$ m²/s).

Rešenje. Pretpostavljajući jednoliko tečenje i uniformnost koeficijenta trenja po poprečnom preseku, može se napisati Manningova jednačina u funkciji lokalne dubine (uz obalu) i lokalne brzine:

$$\frac{\tilde{u}}{h^{1/6}} = \frac{u_*}{n \sqrt{g}}. \quad (9.68)$$

Ako se za granično stanje imaju u vidu kriterijumi iz Tabele 9.5, može se usvojiti da je $u_* \approx W$, pri čemu čestici krupnoće 0,1 mm odgovara brzina tonjenja $W = 0,007$ m/s. Tada je:

$$\tilde{u}/h^{1/6} = W/(n \sqrt{g}) = 0,089.$$

Kako iz jednačine ustaljenog tečenja proizilazi da je $\tilde{u} \propto h^{2/3}$ i $V \propto R^{2/3}$, lokalna srednja brzina po dubini se može izraziti preko srednje profilske brzine (videti izraz (2.64)):

$$\tilde{u} = V (h/R)^{2/3},$$

$$\text{pa je: } V (h/R)^{2/3}/h^{1/6} = 0,089.$$

Sledi rešenje zadatka:

$$h = 0,089^2 \cdot R^{4/3}/V^2 = 0,089^2 \cdot 1,8^{4/3}/0,5^2 = 0,7 \text{ m.}$$

10

Vučeni nanos

U ovom poglavlju se razmatraju metodološki pristupi u određivanju transportnog kapaciteta vodotoka za vučeni nanos. Svi pristupi polaze od nekog kriterijuma za pokretanja zrna. Različite su teorijske složenosti, počev od prostih korelacionih zavisnosti izmedju karakterističnih bezdimenzionih brojeva, preko poluempirijskih zavisnosti koje su izvedene na pretpostavkama intuitivnog karaktera, do komplikovanih stohastičkih teorija koje pokušavaju da kretanje nanosa povežu sa fluktuacionim karakteristikama turbulentnog toka. Veliki broj metoda je odraz složenosti pojave i nemogućnosti da se ona tačno analitički opiše.

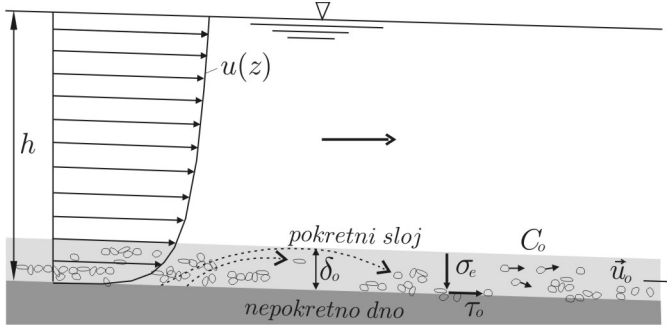
Umesto pregleda koji bi pretendovao da obuhvati što veći broj raznih obrazaca, ovde je prednost data tumačenju pojedinih pristupa, smatrajući da je za praksu presudno razumevanje *ograničenja* koja postoje u proračunima vučenog nanosa. Naveden je samo poneki obrazac koji dobro reprezentuje kategoriju metoda kojoj pripada. Komentarisana je međjusobna veza pojedinih obrazaca. Na kraju su opisane metode terenskih merenja pronosa vučenog nanosa.

10.1 Mehanizam kretanja vučenog nanosa

Kada tangencijalni napon toka premaši određenu kritičnu vrednost, nevezani aluvijalni materijal počinje da se kreće po rečnom dnu. U zavisnosti od hidrauličkih uslova, krupnoće i gustine nanosa, to kretanje se odvija na različite načine: kotrljanjem, klizanjem, ili u vidu skokova. Skokovito – saltaciono kretanje pojedinačnih zrna javlja se pri malim koncentracijama vučenog nanosa, a „masovno” kretanje u vidu kotrljanja i klizanja zrna nastaje pri većim brzinama toka i koncentracijama vučenog nanosa.

Kada je reč o saltacionom kretanju vučenog nanosa, treba naglasiti da je reč je o prekidnom procesu, kod koga periode kretanja smenjuju periodi mirovanja. Saltaciono kretanje je uglavnom svojstveno peščanom materijalu sa relativno velikom brzinom tonjenja. Najsitnije čestice, pre svega one koje pripadaju koherentnom glinovitom materijalu, kreću se u vidu suspenzije i spadaju u kategoriju suspendovanog nanosa.

U razmatranju vučenog nanosa uvodi se pojam *pokretnog sloja* pri dnu (Slika 10.1), koji se opisuje *prosečnom debljinom* δ_o i *prosečnom koncentracijom* nanosa C_o .



Slika 10.1: *Pokretni sloj* vučenog nanosa na ravnom dnu; težina zrna u pokretu po jedinici površine dna prenosi se kao normalni napon na zrna u nepokretnom dnu.

Koncentracija se u opštem slučaju definiše kao zapreminski, maseni ili težinski udeo čvrste materije u jedinici zapremine *mešavine* vode i te materije. Zapreminska koncentracija je bezdimenziona veličina. Veza izmedju različitih oblika u kojima se izražava koncentracija, uspostavlja se preko gustine čvrste materije i gravitacionog ubrzanja:

$$C_m = \rho_s \cdot C \quad [\text{kg/m}^3] \quad (10.1)$$

$$C_g = g \cdot \rho_s \cdot C \quad [\text{N/m}^3], \quad (10.2)$$

gde su C , C_m i C_g oznake zapreminske, masene i težinske koncentracije.

Strogo uzevši, koncentracija utiče na veličinu tangencijalnog napona na dnu. Naime, ako se ima u vidu da je *efektivni normalni napon* (Slika 10.1):

$$\sigma_e \propto \rho \cdot g \cdot \Delta \cdot C_o \cdot \delta_o \cdot \cos \alpha_d, \quad (10.3)$$

onda proizilazi da je stvarni tangencijalni napon na nivou nepokretnih zrna:

$$\tau_o = \tau_{oc} + \sigma_e \cdot \text{tg } \phi', \quad (10.4)$$

gde je ϕ' - ugao unutrašnjeg trenja potopljenog materijala. Za peščani materijal je $f' = \text{tg } \phi' \approx 0,6$. Efektivni napon ima najveću vrednost kada su zrna sfernog oblika, a $C_o = C_{\text{max}} = 0,65$.

10.2 Transportni kapacitet vodotoka

Termin „pronos nanosa” označava količinu materijala nošenog tokom u jedinici vremena. Može se iskazati zapreminski $[\text{m}^3/\text{s}]$, ili preko odgovarajuće mase $[\text{kg}/\text{s}]$,

odnosno težine [N/s]. *Jedinični pronos* nanosa je pronos izražen po jedinici širine toka [m³/(s m), kg/(s m), N/(s m)].

U uslovima ustaljenog, jednolikog, ravanskog strujanja, opšti izraz za zapreminski jedinični pronos vučenog nanosa ima oblik:

$$q_v = \int_0^{\delta_o} C(z) \cdot u_s(z) dz = \delta_o \cdot C_o \cdot u_o \quad [\text{m}^3/(\text{s m})], \quad (10.5)$$

gde je u_s – brzina zrna, δ_o – visina pokretnog sloja, C_o – prosečna zapreminska koncentracija, u_o – prosečna brzina nanosa u pokretnom sloju.

Imajući u vidu različite načine izražavanja koncentracije (10.1)-(10.2), jasno je da se sa zapreminskog pronosa lako može preći na maseni, odnosno težinski pronos, ali je pri tome neophodno precizirati da li je reč o pronosu suvog ili vlažnog (poptopljenog) materijala (Tabela 10.1).

Tabela 10.1: *Veza zapreminskog jediničnog pronosa q_v [m³/(s m)] i masenog, odnosno težinskog jediničnog pronosa suvog i vlažnog materijala.*

Jedinični pronos			
suvog materijala		vlažnog materijala	
maseni [kg/(s m)]	težinski [N/(s m)]	maseni [kg/(s m)]	težinski [N/(s m)]
$q_{vm} = \rho_s \cdot q_v$	$q_{vt} = g \cdot \rho_s \cdot q_v$	$q'_{vm} = (\rho_s - \rho) \cdot q_v$	$q'_{vt} = g (\rho_s - \rho) \cdot q_v$

„*Transportni kapacitet*“ ili „*transportna sposobnost*“ vodotoka za nanos predstavlja najveću količinu nanosa koju vodotok može poneti pri datom protoku, u *ravnotežnim uslovima*, kada nema ni erozije, ni zasipanja. Transportni kapacitet podrazumeva da je vodotok potpuno *zasičen* nanosom, što je moguće samo ako je korito formirano od istog materijala kao nanos u pokretu. Ako je korito delimično formirano od nepokretnog materijala, pronos nanosa će biti manji od transportnog kapaciteta, jer vodotok pri datom protoku ne može dostići stanje zasićenosti.

Medjutim, režim nanosa i stabilnost neke rečne deonice ne zavise samo od njenog transportnog kapaciteta, već i od *graničnih uslova*. Ako dotok nanosa u posmatranu deonicu premaši njen transportni kapacitet u datim hidrauličkim uslovima, višak nanosa će biti redukovano usputnim istaložavanjem – zasipanjem korita. Obrnuto, ako je dotok nanosa manji od transportnog kapaciteta, manjak će se nadoknaditi materijalom iz korita, što znači da će doći do erozije. Ovo pitanje biće detaljnije razmatrano u poglavlju koje je posvećeno deformaciji rečnog korita.

10.3 Metode proračuna pronosa vučenog nanosa

Mnogo je pokušaja da se pronos vučenog nanosa dovede u vezu sa hidrauličkim uslovima toka i karakteristikama nanosa. Uspostavljene zavisnosti se uglavnom

zasnivaju na laboratorijskim ispitivanjima, jer su merenja u prirodi skopčana sa brojnim teškoćama.

Tačnost terenskih merenja je ograničena iz više razloga. Na primer, ako je materijal sitan, zahvaćeni uzorak vučenog nanosa može delimično sadržati i suspendovani nanos. Usled fluktuacija, pronos vučenog nanosa se u mernom profilu menja tokom vremena, pri čemu odstupaja trenutnih vrednosti od prosečne vrednosti mogu iznositi 300-500% [54]. Pored toga, pronos nije uniforman duž toka ako postoje dine, tako da nije svejedno u kom poprečnom profilu se obavljaju merenja. Ako se tome doda i još uvek nedovoljno izučen problem aluvijalnih otpora, jasno je da formiranje analitičkog modela za pronos vučenog nanosa počiva na brojnim neizvesnostima i ograničenjima.

Sa konceptualnog stanovišta, metode za proračun pronosa vučenog nanosa se zasnivaju na:

- korišćenju parametara graničnog stanja - kritične brzine ili napona;
- direktnoj proceni koncentracije vučenog nanosa u pokretnom sloju;
- razmatranju energetskih odnosa u rečnom toku;
- razmatranju stohastičke prirode procesa.

Bez obzira na teorijski pristup, većina metoda uključuje na neki način empirijsku zavisnost bezdimenzionih brojeva Θ (ili Ψ) i Φ , ili odgovarajućih brojeva u kojima figuriše brzina toka. Kako nije redak slučaj da se rezultati dobijeni primenom pojedinih obrazaca razlikuju za čitav red veličine, nije na odmet da se u kritičkoj analizi tih rezultata imaju u vidu sledeće činjenice:

(i) Većina korelacionih izraza je izvedena na osnovu laboratorijskih ispitivanja u uslovima jednolikog režima tečenja, za nevezani nanos uniformne (ili skoro uniformne) krupnoće; pronos koji se dobija predstavlja transportnu sposobnost nanosom zasićenog vodotoka, u ravnotežnim uslovima.

(ii) Neophodan preduslov primene bilo kog obrasca je merenje pronosa u prirodi, kako bi se utvrdile vrednosti empirijskih parametara za konkretni vodotok. Originalne vrednosti parametara u nekom obrascu važe isključivo za laboratorijske uslove pod kojima je taj obrazac izveden.

(iii) Čak i nakon podešavanja vrednosti parametara, rezultate proračuna treba sa rezervom prihvatiti. Obrasci opisuju veoma složenu pojavu uprošćeno, malim brojem parametara, te je iluzorno očekivati veliku tačnost rezultata. Srećom, u praksi rezultati proračuna često nisu toliko bitni u apsolutnom, već u relativnom smislu, kao sredstvo za uporedjenje stanja vodotoka u različitim uslovima (na primer, pre i posle regulacionih radova), kao i za kvalitativne procene i uočavanje odredjenih tendencija. Pored toga, sami obrasci su korisni jer iskazuju medjusobne odnose parametara koji opisuju kretanje nanosa. Sa puno razloga se može pretpostaviti da ovi odnosi u dobroj meri važe i u prirodi, samo će se brojne vrednosti parametara razlikovati [59].

10.3.1 Pristup zasnovan na kritičnoj brzini

Postoji veliki broj izraza koji uspostavljaju vezu između jediničnog pronosa vučenog nanosa i kinematičkih karakteristika toka. Neki od njih predstavljaju čiste korelacione veze bezdimenzionih brojeva u jednačini (9.4), dok se drugi zasnivaju na poluempirijskim razmatranjima različite teorijske složenosti. Tipični primeri iz ove kategorije su obrasci ruskih autora, od kojih je kod nas najčešće u upotrebi izraz Gončarova [57, 59, 73].

Polazeći od pretpostavke da je hidrodinamička struktura toka poznata, ovaj autor izražava prosečnu debljinu pokretnog sloja, koncentraciju i brzinu kretanja nanosa u izrazu (10.5) preko dve promenljive – srednje brzine toka (\tilde{u}) i kritične brzine (\tilde{u}_c) koja je definisana izrazom (9.14).

Prosečnu debljinu pokretnog sloja Gončarov opisuje relacijama intuitivno-empirijskog karaktera:

$$\delta_o \propto \frac{w' - W}{W} \propto \frac{\tilde{u} - \tilde{u}_c}{\tilde{u}_c}, \quad (10.6)$$

koje su zasnovane na pretpostavljenom ponašanju pojedinačnog zrna u turbulentnoj fluidnoj sredini. Naime, autor pretpostavlja da zrno u toku saltacije lebdi u struji vode i da se njegova sopstvena inercija može zanemariti. Ova pretpostavka odgovara malim koncentracijama vučenog nanosa i sporadičnom pokretanju zrna, a ne odgovara velikoj koncentraciji i neprekidnom masovnom kretanju vučenog nanosa klizanjem i kotrljanjem.

S druge strane, prosečna koncentracija u pokretnom sloju zavisi od smičućeg napona, odnosno rasporeda koncentracije po visini tog sloja. Imajući u vidu da je $\tau_o \propto \tilde{u}^2$, Gončarov uvodi pretpostavku:

$$C_o \propto \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_c} \right)^2, \quad (10.7)$$

što je aproksimacija prirodnih uslova, jer se smatra da je koeficijent hidrodinamičke sile uzgona konstanta i da kritična brzina ne zavisi od koncentracije pri dnu.

Na kraju, Gončarov definiše srednju brzinu kretanja vučenog nanosa u pokretnom sloju empirijskim izrazom:

$$u_o \propto \tilde{u} \left[1 - \left(\frac{\tilde{u}_c}{\tilde{u}} \right)^3 \right]. \quad (10.8)$$

Imajući u vidu navedene pretpostavke, izraz za jedinični zapreminski pronos

vučenog nanosa ima sledeću strukturu:

$$q_v \propto \underbrace{\frac{\tilde{u} - \tilde{u}_c}{\tilde{u}_c}}_{\delta_o} \cdot \underbrace{\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_c}\right)^2}_{C_o} \cdot \underbrace{\tilde{u} \left[1 - \left(\frac{\tilde{u}_c}{\tilde{u}}\right)^3\right]}_{u_o} \propto \tilde{u}_c \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_c} - 1\right) \left[\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_c}\right)^3 - 1\right]. \quad (10.9)$$

Odgovarajući izraz koji se koristi u praksi prilagodjen je rezultatima eksperimentalnih merenja i ima oblik:

$$q_{vm} = \rho_s \cdot 2(1 + \varphi) \cdot d \cdot \tilde{u}_c \cdot \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_c} - 1\right) \left[\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_c}\right)^3 - 1\right] \quad [\text{kg}/(\text{s m})], \quad (10.10)$$

pri čemu se kritična brzina računa pomoću izraza (9.14), a vrednost empirijskog koeficijenta φ , koja zavisi od krupnoće nanosa, očitava iz Tabele 10.2.

Tabela 10.2: Vrednosti koeficijenta φ u izrazu Gončarova.

$d = d_{50}$ [mm]	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,5
φ	7,30	3,25	2,09	1,67	1,42	1,25	1,15	1,02

Obrazac Gončarova, prema kome je $q_v \propto \tilde{u}^4$, namenjen je vodotocima sa sitnim peščanim nanosom krupnoće ispod 1,5 mm. Kod nas je puno korišćen u proračunima za Dunav [59, 83].

■ **Primer 10.1.** Za jedan dunavski sektor je utvrđena granulometrijska kriva prikazana na Slici 8.6. Karakteristične krupnoće su $d_{50} = 0,56$ mm i $d_{90} = 0,80$ mm. Odrediti transportni kapacitet za vučeni nanos. Ostali podaci: $I_e = 0,00005$, $h = 8$ m, $\tilde{u} = 1$ m/s, $\Delta = 1,65$.

Rešenje. Kritična brzina je na osnovu izraza (9.14) iznosi:

$$\tilde{u}_c = 0,535 \cdot \log\left(\frac{8,8 \cdot 8,0}{0,8 \times 10^{-3}}\right) \sqrt{19,62 \cdot 1,65 \cdot 0,56 \times 10^{-3}} = 0,36 \quad \text{m/s.}$$

Interpolacijom podataka iz Tabele 10.2, dobija se vrednost $\varphi = 1,75$, pa je jedinični maseni pronos:

$$q_{vm} = 14,575 \cdot 0,56 \times 10^{-3} \cdot 0,36 \cdot \left(\frac{1,0}{0,36} - 1\right) \left(\frac{1,0^3}{0,36^3} - 1\right) = 0,1 \text{ kg}/(\text{s m}),$$

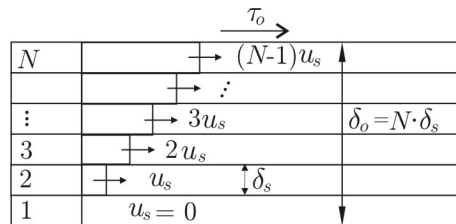
a zapreminski pronos: $q_v = 0,1/2650 = 4,0 \times 10^{-5} \text{ m}^3/(\text{s m})$.

10.3.2 Pristup zasnovan na kritičnom naponu

Karakteristično je za obrasce iz ove kategorije da definišu pronos vučenog nanosa u srazmeri sa *efektivnim* tangencijalnim naponom, odnosno razlikom stvarnog i kritičnog napona $\tau_o - \tau_{oc}$.

Obrazac Di Boa (du Boys, 1879). Ovaj obrazac se navodi zato što je od istorijskog značaja¹, kao prvi pokušaj da se kretanje nanosa po rečnom dnu fizički opiše i kvantifikuje uvodjenjem kritičnog tangencijalnog napona. Taj pristup je poslužio kao osnova za mnoge istraživače u kasnijem periodu.

Osnovna ideja je da se nanos uniformne krupnoće kreće u slojevima, čija je debljina δ_s istog reda veličine kao prečnik zrna (Slika 10.2).



Slika 10.2: *Koncept slojevitog kretanja vučenog nanosa.*

Brzina kretanja slojeva se linearno menja po dubini. Zapreminski jedinični pronos se dobija kao proizvod prosečne brzine slojeva i njihove ukupne debljine:

$$q_v = \frac{1}{2}(N-1) \cdot u_s \cdot N \cdot \delta_s \quad [\text{m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})]. \quad (10.11)$$

Pretpostavljajući jednoliko tečenje, tangencijalni napon na dnu je u trenutku pokretanja izjednačen sa silom trenja po jedinici površine:

$$\tau_o = g(\rho_s - \rho) \cdot N \cdot \delta_s \cdot f'. \quad (10.12)$$

Početak kretanja jednog sloja $N=1$ vezan je za uslov $\tau_o = \tau_{oc}$:

$$\tau_{oc} = g(\rho_s - \rho) \delta_s \cdot f', \quad (10.13)$$

tako da se odnos stvarnog i kritičnog napona može predstaviti u obliku:

$$\frac{\tau_o}{\tau_{oc}} = \frac{g(\rho_s - \rho) \cdot N \cdot \delta_s \cdot f'}{g(\rho_s - \rho) \cdot \delta_s \cdot f'} = N. \quad (10.14)$$

¹Paul François du Boys (1847-1924), francuski hidrauličar.

Zamenom u izraz (10.11), dobija se:

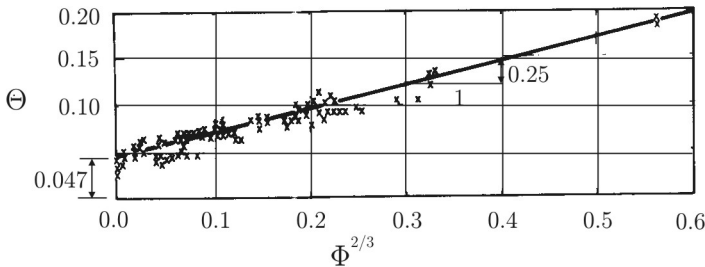
$$\begin{aligned} q_v &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_o}{\tau_{oc}} - 1 \right) u_s \left(\frac{\tau_o}{\tau_{oc}} \right) \delta_s = \frac{u_s \cdot \delta_s}{2 \cdot \tau_{oc}^2} \tau_o (\tau_o - \tau_{oc}) = \\ &= c_{db} \cdot \tau_o (\tau_o - \tau_{oc}). \end{aligned} \quad (10.15)$$

Vidi se da je pronos vučenog nanosa srazmeran „višku” tangencijalnog napona $(\tau_o - \tau_{oc})$. Koeficijent proporcionalnosti zavisi od karakteristika nanosa i hidrauličkih uslova, a njegova vrednost se za peščane materijale može, prema laboratorijskim ispitivanjima Štrauba (Straub, 1935), sračunati na osnovu izraza: $c_{db} = 0,17/d_{50}^{3/4}$.

Metoda Majer-Peter i Milera (Meyer-Peter, Muller, 1948). Ova metoda švajcarskih istraživača (skraćeno „MPM”) je bez sumnje najviše korišćena metoda u našoj praksi, pa zaslužuje detaljniji opis. Zasnovana je na laboratorijskim ispitivanjima u kanalima širine $0,15 \div 2,0$ m, sa dubinama toka u rasponu $0,01 \div 1,2$ m i nagibima dna $0,4 \div 20$ promila [114]. U eksperimentima su korišćeni prirodni i veštački materijali krupnoće od $0,4 \div 30$ mm, gustine $s = \rho_s / \rho = 1,25 \div 4$. Granulometrija mešavine je reprezentovana srednjim prečnikom $d = \sum d_i \cdot \Delta p_i / 100$.

Autori su utvrdili *linearnu* zavisnost izmedju intenziteta transporta $\Phi^{2/3}$ i Šildsovog broja Θ (Slika 10.3):

$$\Theta = \underbrace{0,047}_{\Theta_c} + \underbrace{0,25}_a \cdot \Phi^{2/3}. \quad (10.16)$$



Slika 10.3: Korelaciona zavisnost brojeva Φ i Θ prema laboratorijskim ispitivanjima Majer-Petera i Milera; nagib regresione prave iznosi $a = 0,25$, a odsečak na ordinati daje vrednost kritičnog Šildsovog broja $\Theta_c = 0,047$ [114].

Bezdimenzioni pronos je izražen preko težinskog jediničnog pronosa *vlažnog* materijala (nanos je meren bez prethodnog sušenja):

$$\Phi = \frac{q'_{vt}}{g (\rho_s - \rho) \sqrt{g \cdot \Delta \cdot d^3}} = \frac{q'_{vt} \sqrt{\rho}}{[g (\rho_s - \rho) d]^{3/2}}. \quad (10.17)$$

Bezdimenzioni izraz (10.16) može se napisati u razvijenom, opštem obliku:

$$\frac{\tau_o}{g(\rho_s - \rho)d} = \Theta_c + a \cdot \frac{(q'_{vt})^{2/3} \cdot \rho^{1/3}}{g(\rho_s - \rho)d}. \quad (10.18)$$

Ako se ova jednačina reši po q'_{vt} i ako se, shodno relacijama iz Tabele 10.1, predje na maseni jedinični pronos *suvo*g materijala, dobija se:

$$q_{vm} = c_{mp} (\tau_o - \tau_{oc})^{3/2} \quad [\text{kg}/(\text{sm})], \quad (10.19)$$

gde je konstanta:

$$c_{mp} = \frac{a^{-3/2}}{g \cdot \sqrt{\rho}} \left(\frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} \right) \quad [\text{s}^2(\text{m}/\text{t})^{1/2}], \quad (10.20)$$

a kritični tangencijalni napon:

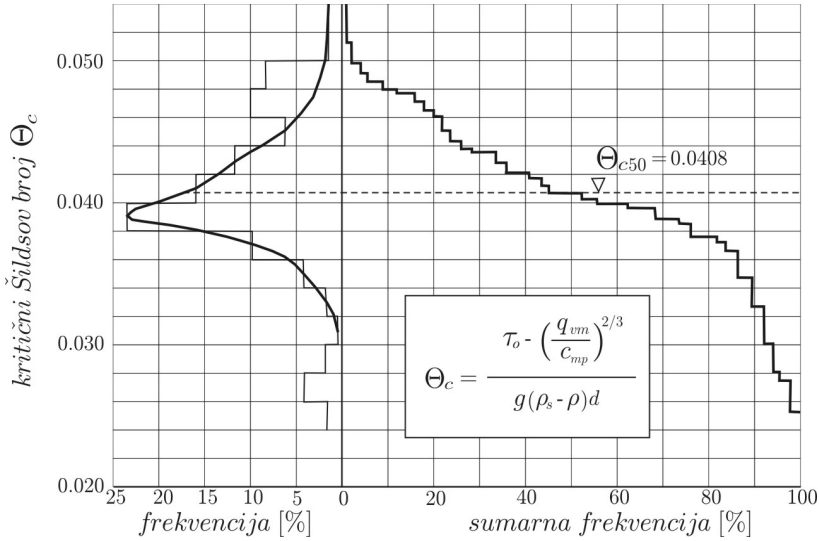
$$\tau_{oc} = \Theta_c \cdot g(\rho_s - \rho)d \quad [\text{Pa}]. \quad (10.21)$$

Može se primetiti sličnost izraza MPM (10.19) sa izrazom Di Boa (10.15). Oba izraza upućuju na zaključak da je jedinični pronos vučenog nanosa proporcionalan efektivnom tangencijalnom naponu $\tau_o - \tau_{oc}$.

Treba naglasiti da vrednosti parametara u originalnom obrascu MPM – kritičnog Šildsovog broja $\Theta_c = 0,047$ i nagiba regresione prave $a = 0,25$, *nisu univerzalne konstante*, već važe isključivo za laboratorijske uslove pod kojima je obrazac izveden. Za svaki konkretni vodotok, vrednosti navedenih parametara moraju se odrediti na osnovu izmerenog pronosa (Slika 10.4). Tek tako kalibrisan obrazac može se zatim koristiti u prognostičke svrhe.

Ukupni pronos vučenog nanosa u poprečnom profilu dobija se množenjem vrednosti jediničnog pronosa „aktivnom širinom” B_v , koja je određena delom okvašenog obima na kome je $\tau_o > \tau_{oc}$ (Slika 10.5). U pronosu vučenog nanosa efektivno „učestvuje” redukovani hidraulički radijus: $R_r = A_r/B_v$. Imajući u vidu proporcionalnost: $R_r/R \propto A_r/A \propto Q_r/Q$, sledi da je: $R_r = (Q_r/Q)R$. To znači da u izrazu za računski tangencijalni napon treba da figuriše redukcioni faktor hidrauličkog radijusa $Q_r/Q < 1$, odnosno: $\tau_o = \rho \cdot g \cdot (Q_r/Q)R \cdot I_e$.

Medjutim, navedena korekcija tangencijalnog napona nije jedina. Potrebno je uvesti i korekciju nagiba energetske linije I_e , jer treba isključiti utrošak energije na savladjivanje aluvijalnih otpora. Kao što je pokazano u tački 4.2, reč je o otporima oblika usled nanosnih formacija. Kako se disipacija energije kroz vrtloge koji nastaju usled visine nanosnih naslaga, odvija znatno iznad oblasti kretanja



Slika 10.4: Primer određivanja vrednosti kritičnog Šildsovog broja statističkom analizom merenja pronosa vučenog nanosa na reci Dravi kod Ormoža [59].

vučenog nanosa, proizilazi da na pronos vučenog nanosa može uticati samo otpor trenja usled apsolutne rapavosti (krupnoće zrna). To znači da u obrascu MPM treba da figuriše tangencijalni napon τ'_o , shodno podeli napona koja je prikazana na Slici 4.8. Naponu τ'_o odgovara nagib linije energije I'_e .

Ako se ima vidu proporcionalnost: $\tau_o/\tau'_o \propto I_e/I'_e \propto (n/n_r)^2$, gde je n – globalni Maningov koeficijent, a $n_r = d_{90}^{1/6}/26$ – Maningov koeficijent trenja na osnovu najvećeg zrna na dnu, sledi da je: $I'_e = (n_r/n)^2 I_e$, ili, kao što pokazuju eksperimenti: $I'_e = (n_r/n)^{3/2} I_e$. Uzimajući u obzir sve navedene korekcije, izraz (10.19) se može napisati u obliku:

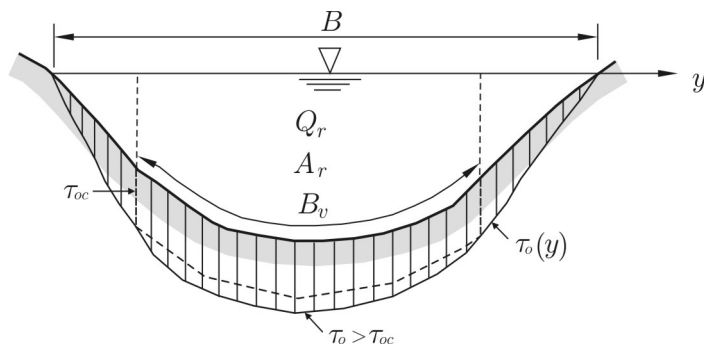
$$q_{vm} = c_{mp} (\tau'_o - \tau_{oc})^{3/2}, \quad (10.22)$$

gde je:

$$\tau'_o = \rho \cdot g \cdot \underbrace{\left(\frac{Q_r}{Q}\right) \cdot R}_{R_r} \cdot \underbrace{\left(\frac{n_r}{n}\right)^{3/2} \cdot I_e}_{I'_e} = \left(\frac{Q_r}{Q}\right) \left(\frac{n_r}{n}\right)^{3/2} \cdot \tau_o. \quad (10.23)$$

Na kraju, dva komentara u vezi sa primenom opisane metode:

(i) Obrazac MPM je prikladan za reke sa krupnim nanosom (srednjeg prečnika iznad 2 mm). Za velike aluvijalne reke sa sitnim peščanim nanosom (Dunav, Sava, Tisa i dr.), treba koristiti neku drugu metodu.



Slika 10.5: Aktivna širina za pronos vučenog nanosa u poprečnom preseku B_v je deo okvašenog obima na kome je stvarni tangencijalni napon veći od kritičnog; širini B_v odgovara redukovana površina poprečnog preseka A_r , proporcionalna redukovanom protoku Q_r .

(ii) U praksi se proračun po metodi MPM ponekad obavlja po frakcijama, što znači da se granulometrijska kriva aproksimira histogramom, pri čemu svakom intervalu zastupljenosti Δp_i odgovara reprezentativni prečnik d_i (Slika 10.11). Jedinični pronos se posebno računa za svaku frakciju, a ukupni pronos se dobija sabiranjem N parcijalnih pronosa [172]:

$$q_{vm} = \sum_{i=1}^N (q_{vm})_i \cdot \Delta p_i. \quad (10.24)$$

Ovaj pristup ima smisla samo ako disperzija krupnoća nije prevelika, pri čemu je kriterijum: $\sigma_g < 2,5$. Naime, kod veoma neuniformnog granulometrijskog sastava, sve frakcije ne učestvuju ravnopravno u pronosu zbog efekta „skrivanja” sitnih čestica među krupnijim, pa proračun po frakcijama nije pouzdan.

■ **Primer 10.2.** U Tabeli 10.3 su dati rezultati merenja u jednom rečnom profilu, na osnovu kojih treba odrediti vrednosti parametara obrasca MPM, a zatim, pretpostavljajući da se vrednosti navedenih parametara malo menjaju sa protokom, sračunati dnevni pronos vučenog nanosa u ovom profilu za protok $Q=730 \text{ m}^3/\text{s}$. Karakteristični prečnici su $d_{50}=5 \text{ mm}$ i $d_{90}=10 \text{ mm}$, a gustina $\rho_s=2,65 \text{ t/m}^3$. Pretpostaviti da se nanos kreće po celom okvašenom obliku ($B_v = B$, $Q_v/Q=1$).

Rešenje. Za datu granulometriju je $n_r = 0,010^{1/6}/26 = 0,018 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. Proračun vrednosti bezdimenzionih brojeva prikazan je u Tabeli 10.4. Dobijeni rezultati grafički su prikazani na Slici 10.6. Povlačenjem regresione prave mogu se odrediti tražene vrednosti parametara $\Theta_c = 0,044$ i $a = 0,386$.

Protoku od $730 \text{ m}^3/\text{s}$ odgovaraju ove vrednosti:

$$k_o = (n_r/n)^{3/2} = (0,018/0,023)^{3/2} = 0,692;$$

$$\tau_o = 1,0 \cdot 9,81 \cdot 2,15 \cdot 0,000619 = 13,056 \times 10^{-3} \text{ kPa};$$

$$\tau_{oc} = 0,044 \cdot 9,81 \cdot 1,65 \cdot 0,005 = 3,561 \times 10^{-3} \text{ kPa};$$

$$c_{mp} = 9,81^{-1} \cdot 0,386^{-1,5} \cdot 1,60 \cdot 1,0^{-1/2} = 0,68 \text{ m}^{1/2}\text{s}^2/\text{t}^{1/2};$$

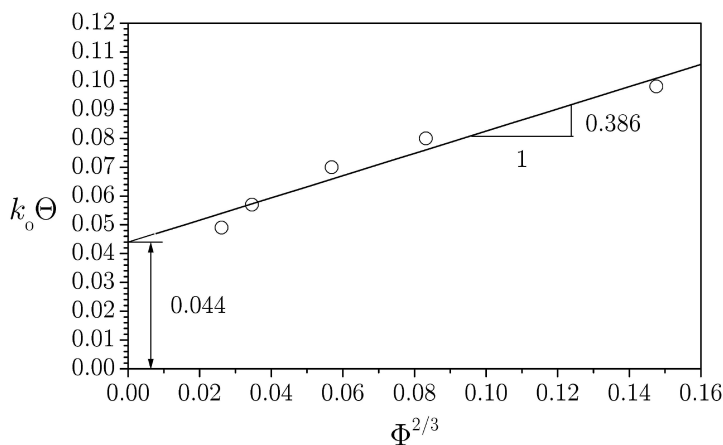
$$q_{vm} = 0,68 (0,692 \cdot 0,013056 - 0,003561)^{3/2} = 0,275 \text{ kg}/(\text{s}\cdot\text{m}).$$

Tabela 10.3: Rezultati merenja pronosa vučenog nanosa

i	Q [m ³ /s]	Z [mm]	n [m ^{-1/3} s]	B [m]	R [m]	I_e [%]	q_{vm} [kg/(sm)]
1	350	112,17	0,027	150	1,99	0,420	0,019
2	395	112,32	0,026	153	2,13	0,435	0,029
3	502	112,65	0,025	158	2,35	0,459	0,061
4	612	113,02	0,024	162	2,22	0,518	0,108
5	698	113,20	0,023	219	2,15	0,618	0,255
6	730	113,22	0,023	221	2,15	0,619	?

Tabela 10.4: Rezultati proračuna po obrascu MPM

i	$\tau_o \times 10^{-3}$ [kPa]	$k_o = (n_r/n)^{3/2}$ [-]	$k_o \cdot \Theta$ [-]	$q'_{vt} \times 10^{-3}$ [kN/(sm)]	$\Phi^{2/3}$ [-]
1	8,199	0,544	0,049	0,117	0,0261
2	9,089	0,576	0,057	0,179	0,0346
3	10,582	0,611	0,070	0,377	0,0569
4	11,281	0,650	0,080	0,667	0,0832
5	13,035	0,692	0,098	1,576	0,1476



Slika 10.6: Odredjivanje vrednosti parametara u obrascu MPM.

Pronos vučenog nanosa u datom profilu iznosi:

$$Q_{vm} = q_{vm} \cdot B_v = 0,275 \cdot 221 \approx 61 \text{ kg/s}.$$

10.3.3 Pristup zasnovan na koncentraciji nanosa

Ove metode, koje takodje koriste kritični tangencijalni napon, svode se na direktnu procenu veličina koje opisuju pokretni sloj pri dnu (Slika 10.1): debljine sloja δ_o , srednje brzine kretanja zrna u_o i njihove prosečne koncentracije C_o ². U literaturi postoji više poluempirijskih obrazaca zasnovanih na ovom pristupu, ali rezultati koje daju, nisu konzistentni.

Metoda holandskog autora fan Rejna (van Rijn, 1984) se smatra najpouzdanijom metodom iz ove kategorije, jer je zasnovana na bazi eksperimentalnih podataka raznih autora [164].

Zaključak autorovih razmatranja je da na kretanje vučenog nanosa dominantan uticaj ima sila gravitacije, a na kretanje suspendovanog nanosa sile turbulencije toka. Trajektorije saltacionog kretanja su deterministički određene, sa jasno definisanom dužinom i amplitudom. Uslov saltacionog kretanja je $u_*/W < 1$. Izostavljajući sile turbulencije, fan Rejn je postavio jednačine kretanja individualnog zrna i njihovim rešavanjem je odredio dužinu i visinu skokova. Računski model je proveren pomoću eksperimenata sa peskom i sitnim šljunkom. Snimanjem kretanja čestica pomoću kamere, autor je konstatovao da je prosečna visina skokova reda veličine $10 d_{50}$.

Prosečna koncentracija nanosa u pokretnom sloju je određena merenjem pronosa, a rezultati su izraženi u funkciji krupnoće zrna i hidrauličkih parametara toka. Rezultat fan Rejnovih istraživanja su korelacije bezdimenzionih parametara pokretnog sloja [164]:

$$\frac{\delta_o}{d} = 0,3 \cdot d_*^{0,7} \cdot T^{0,5} \quad (10.25)$$

$$\frac{C_o}{C_{\max}} = 0,18 \cdot d_*^{-1} \cdot T \quad (10.26)$$

$$\frac{u_o}{\sqrt{g \cdot \Delta \cdot d}} = 1,5 \cdot T^{0,6}, \quad (10.27)$$

gde je $d = d_{50}$, $d_* = d_{50} \sqrt[3]{g \Delta / \nu^2}$, a $C_{\max} = 0,65$.

Efektivni bezdimenzioni tangencijalni napon:

$$T = \frac{\tau'_o - \tau_{oc}}{\tau_{oc}}$$

²S obzirom da se koncentracija može izraziti odnosom jediničnih protoka nanosa i vode, svaki obrazac za proračun pronosa vučenog nanosa se može formulisati preko koncentracije; na primer, obrazac Gončarova se može napisati u obliku:

$$C_o = \frac{q_v}{u \cdot h} = 2(1 + \varphi) \cdot \frac{d}{h} \cdot \frac{u_{oc}}{\tilde{u}} \cdot \left(\frac{\tilde{u}}{u_{oc}} - 1 \right) \left[\left(\frac{\tilde{u}}{u_{oc}} \right)^3 - 1 \right].$$

definisan je u skladu sa idejom da pronos vučenog nanosa isključivo zavisi od dela tangencijalnog napona koji otpada na apsolutnu rapavost dna, izraženu preko prečnika zrna d_{90} :

$$\tau'_o = \rho (u'_*)^2 = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{\tilde{u}}{C'} \right)^2 \quad (10.28)$$

$$C' = 18 \cdot \log \left(\frac{12h}{3d_{90}} \right), \quad (10.29)$$

dok se kritični napon: $\tau_{oc} = \Theta_c \cdot g (\rho_s - \rho) d_{50}$ određuje pomoću Šildsovog dijagrama.

Za proračun prosečne brzine čestica u pokretnom sloju, umesto obrasca (10.27), može se koristiti jednostavniji izraz:

$$u_o \approx 7 u'_*. \quad (10.30)$$

Navedene zavisnosti važe pod uslovima: $d = 0,1 \div 2,0$ mm, $u_* = 0,04 \div 0,14$ m/s, $h > 0,1$ m, $Fr < 0,9$.

Izrazi fan Rejna su izvedeni na osnovu rezultata 600 eksperimenata mnogih istraživača. U 80% eksperimenata, vrednosti odnosa računskog i izmerenog pronosa kretale su se u granicama $0,5 \div 2$. Imajući u vidu da i rezultati merenja pokazuju znatno rasipanje koje se meri faktorom 2 ($\pm 100\%$), fan Rejn zaključuje da je tačnost rezultata proračuna vučenog nanosa u najboljem slučaju u granicama $\pm 100\%$!

■ **Primer 10.3.** Sračunati jedinični pronos vučenog nanosa za dunavski profil iz primera 10.1 ($\nu = 1 \times 10^{-6}$ m²/s).

Rešenje.

$$\tilde{u} = 1,0 \text{ m/s};$$

$$d_* = 0,56 \times 10^{-3} (9,81 \cdot 1,65 / (1 \times 10^{-6})^2)^{1/3} = 14,17;$$

$$C' = 18 \cdot \log [12 \cdot 8,0 / (3 \cdot 0,8 \times 10^{-3})] = 82,84 \text{ (izraz (10.29))};$$

$$u'_* = \sqrt{9,81 \cdot 1,0 / 82,84} = 0,038 \text{ m/s (izraz (10.28))};$$

$$\tau'_o = (u'_*)^2 \cdot \rho = 0,0014 \text{ kPa};$$

$$\Theta_c = 0,04 \cdot d_*^{-0,1} = 0,031 \text{ (izraz (9.19))};$$

$$\tau_{oc} = 9,81 (2,65 - 1,0) 0,56 \times 10^{-3} \cdot 0,031 = 0,00028 \text{ kPa};$$

$$T = (0,0014 - 0,00028) / 0,00028 = 4,14;$$

$$C_o = 0,65 \cdot 0,18 \cdot 14,17^{-1} \cdot 4,14 = 0,034 \text{ (izraz (10.26))};$$

$$\delta_o = 10 \cdot d_{50} = 0,0056 \text{ m (izraz (10.25) daje } \delta_o = 0,0022 \text{ m)};$$

$$u_o = 1,5 \sqrt{9,81 \cdot 1,65 \cdot 0,56 \times 10^{-3} \cdot 4,14^{0,6}} = 0,335 \text{ m/s (izraz (10.27))};$$

$$q_v = C_o \cdot \delta_o \cdot u_o = 0,034 \cdot 0,0056 \cdot 0,335 = 6,41 \times 10^{-5} \text{ m}^3 / (\text{s m}); q_{vm} = 0,17 \text{ kg} / (\text{s m}).$$

10.3.4 Energetski pristup

Energetski pristup Bagnolda³ (1965) zasniva se na određivanju veze između količine vučenog nanosa i energije toka koja je neophodna da se ta količina održi u pokretu [10]. Ova energija iznosi obično oko desetak procenata ukupne energije toka. Najpre evo nekih opštih pojmova.

Snaga rečnog toka po jedinici površine dna izražava se proizvodom tangencijalnog napona na dnu i srednje profilske brzine: $\tau_o \cdot V$. To je energija toka u jedinici vremena, po jedinici površine dna [$\text{J}/(\text{s m}^2) = \text{W}/\text{m}^2$].

Bagnoldov izraz za jedinični težinski pronos vlažnog materijala ima ovaj oblik u uslovima jednolikog toka:

$$q'_{vt} \cdot f' = \tau_o \cdot V \cdot \eta_v, \quad (10.31)$$

gde je f' - „dinamički” koeficijent trenja koji obuhvata uticaj vertikalne komponente hidrodinamičke sile, a η_v - koeficijent koji pokazuje koji deo snage toka se troši na održavanje vučenog nanosa u pokretu.

Veličina na levoj strani jednačine (10.31) predstavlja rad u jedinici vremena koji pokrenuta zrna nanosa izvrše na *jediničnom* odstojanju. Sila koja pokreće zrna i obavlja taj rad jednaka je sili trenja – proizvodu težine uronjenog zrna i koeficijenta trenja.

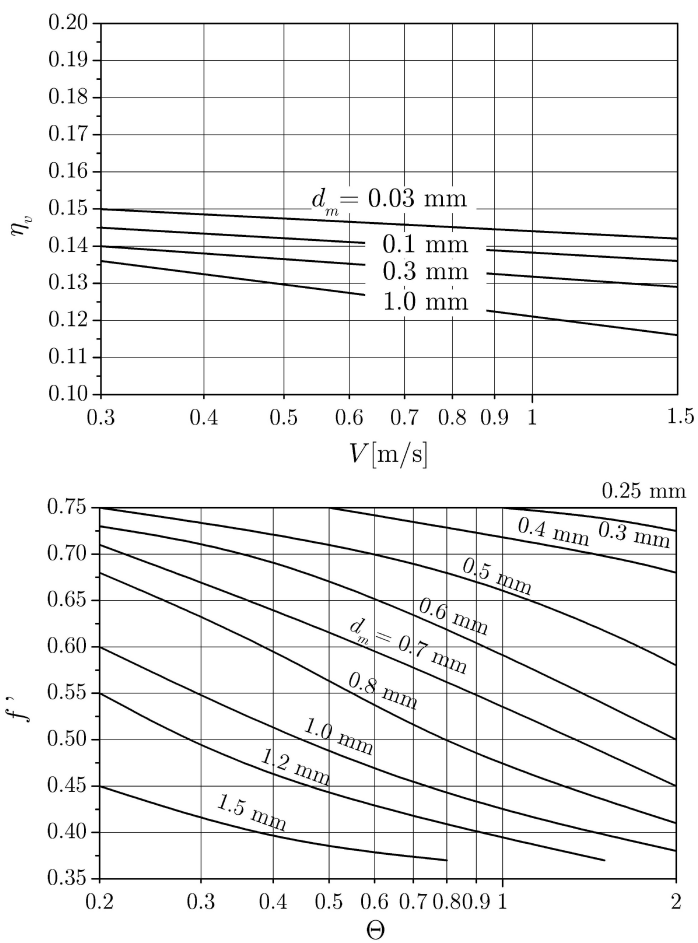
Veličina na desnoj strani jednačine (10.31) predstavlja raspoloživu snagu toka za održavanje nanosa u pokretu. Drugim rečima, to je deo ukupne energije toka koji se utroši u jedinici vremena na održavanje nanosa u pokretu.

Iz relacije (10.31) sledi da parametar η_v predstavlja odnos snage toka koja je potrebna za pokretanje vučenog nanosa i ukupne snage toka, po jedinici površine dna. Ovaj parametar se stoga može shvatiti kao „koeficijent korisnog dejstva” („efikasnosti”) rečnog toka sa stanovišta pronosa vučenog nanosa. Na Slici 10.7 dati su pomoćni dijagrami autora koji omogućavaju da se obrazac (10.31) koristi u praksi.

Interesantno je pitanje kakva je veza između energetskog pristupa i pristupa na bazi kritičnog tangencijalnog napona? Ta veza se može uspostaviti ako se veličina na desnoj strani jednačine (10.31) zameni veličinom $(\tau_o - \tau_{oc}) u_d$, gde je u_d - lokalna brzina toka na odstojanju od dna koje je reda veličine prečnika zrna vučenog nanosa ($z \approx d \approx k_s$). Pokazano je da iz logaritamskog zakona sledi tražena brzina:

$$u_d = u(k_s) = 8,5 \cdot u_* = 8,5 \sqrt{\tau_o / \rho}.$$

³Ralph Alger Bagnold (1896-1988), engleski hidrauličar i profesor, član Kraljevske akademije, počeo je svoju naučnu karijeru izučavanjem vetrom izazvanog kretanja pustinjskog peska u obliku dina, a poznat je i po istraživanjima uticaja talasa na konfiguraciju peščanog dna.



Slika 10.7: Pomoćni dijagrami za metodu Bagnolda[146].

Konačno je prema Bagnoldu:

$$q'_{vt} \propto \sqrt{\tau_o} (\tau_o - \tau_{oc}) = \tau_o^{3/2} \left(1 - \frac{\tau_{oc}}{\tau_o} \right). \quad (10.32)$$

S druge strane, obrazac MPM se može predstaviti u obliku⁴:

$$q'_{vt} \propto (\tau_o - \tau_{oc})^{3/2} = \tau_o^{3/2} \left(1 - \frac{\tau_{oc}}{\tau_o} \right)^{3/2} \approx \tau_o^{3/2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_{oc}}{\tau_o} \right) \right], \quad (10.33)$$

iz čega se može zaključiti da postoji sličnost obrazaca Bagnolda i Majer-Petera, iako su polazne osnove njihovog izvodjenja različite.

■ **Primer 10.4.** Sračunati pronos vučenog nanosa pomoću metode Bagnolda za dunavski profil iz prethodnog primera.

Rešenje.

$$\tau_o = 1,0 \cdot 9,81 \cdot 8,0 \cdot 0,00005 = 0,0039 \text{ kPa};$$

$$\Theta = 0,0039 / (9,81 \cdot 1,65 \cdot 0,56 \times 10^{-3}) = 0,43;$$

$$f' \approx 0,7 \text{ (očitano sa dijagrama na Slici 10.7);}$$

$$\eta_v \approx 0,125 \text{ (očitano sa dijagrama na Slici 10.7);}$$

$$q_v = \frac{\tau_o \cdot \tilde{u} \cdot \eta_v}{f' \cdot g (\rho_s - \rho)} = \frac{0,039 \cdot 1,0 \cdot 0,125}{0,7 \cdot 9,81 \cdot 1,65} = 4,3 \times 10^{-5} \text{ m}^3/(\text{s m}).$$

U Tabeli 10.5 je dato poredjene rezultata dobijenih pomoću metoda koje imaju slične opsege primenljivosti (primeri 10.1, 10.3, 10.4). Može se zaključiti da su u ovom slučaju razlike u prihvatljivim granicama.

Tabela 10.5: *Poredjenje računskih rezultata*

Metoda:	Gončarov	fan Rejn	Bagnold
$q_v \text{ [m}^3/(\text{s m})]$:	$4,0 \times 10^{-5}$	$6,4 \times 10^{-5}$	$4,3 \times 10^{-5}$

10.3.5 Stohastički pristup

Prethodno opisani deterministički pristupi implicitno podrazumevaju da je struktura toka turbulentna, ali koriste osrednjene vrednosti hidrodinamičkih veličina, a kritične brzine ili kritične tangencijalne napone tretiraju kao empirijske zavisnosti.

⁴Transformacija obrasca MPM na dati oblik se obavlja razvojem u Tajlorov red funkcije:

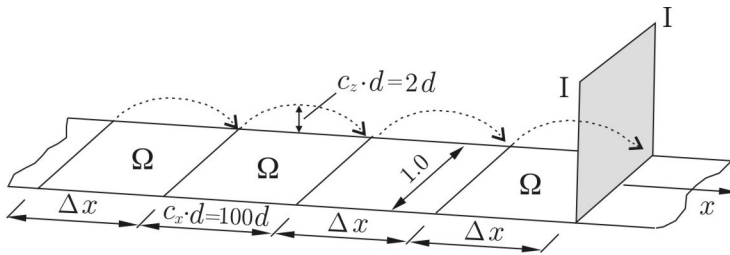
$$\left(1 - \frac{\tau_{oc}}{\tau_o} \right)^{3/2} \approx 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_{oc}}{\tau_o} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_{oc}}{\tau_o} \right)^2 + \dots,$$

i zadržavanjem prva dva člana ovog reda.

Stohastički pristup, čiji su glavni protagonisti H.A. Ajnštajn (1950) u Americi [44] i M.A. Velikanov (1955) u Rusiji [169], zasnovan je na *verovatnoći* pokretanja nanosa. Razmatraju se dve karakteristične verovatnoće:

(a) P_1 - verovatnoća da će neko zrno biti bar jednom pokrenuto sa dna u određenom vremenskom intervalu Δt . To je verovatnoća da će vertikalna komponenta *trenutne* hidrodinamičke sile premašiti težinu zrna. Ova verovatnoća se može dovesti u vezu sa hidrodinamičkim karakteristikama toka ako se pretpostavi da je koncentracija nanosa mala i da je vrednost koeficijenta vertikalne sile uzgona, konstantna.

(b) P_k - verovatnoća da će zrno u periodu Δt biti pokrenuto *najmanje* k puta, da će napraviti bar k skokova i prevaliti odstojanje *ne manje* od $k \cdot \Delta x$ (Slika 10.8).



Slika 10.8: Shematski prikaz lamele rečnog dna jedinične širine, izdvojene na k deonica Δx koje odgovaraju prosečnoj dužini skoka zrna; prema Ajnštajnu, prosečna dužina i visina skokova je proporcionalna prečniku zrna ($c_x = 100$, $c_z = 2$). Karakteristična površina $\Omega = \Delta x \cdot 1,0$ je dovoljno velika u odnosu na površinu naleganja zrna $c_1 \cdot d^2$, da se prisustvo, odnosno odsustvo zrna na toj površini može tretirati kao slučajaj događaj. Ukupan broj zrna na karakterističnoj površini iznosi $\Omega/(c_1 \cdot d^2)$.

Dužina vremenskog intervala Δt za koje se definišu verovatnoće P_1 i P_k , mora biti dovoljno velika da nema korelacije između kretanja pojedinih zrna u dva uzastopna intervala, ili drugim rečima, da trenutno stanje nekog zrna ne zavisi od istorije njegovog kretanja. U tom slučaju stohastički proces je *stacionaran*. Dakle verovatnoća pokretanja zavisi isključivo od fizičkih svojstava zrna (krupnoće, oblika, težine) i od hidrauličkih karakteristika toka.

Zrna nanosa se kreću povremeno, što znači da periode kretanja smenjuju periodi mirovanja. Kretanje zrna je saltaciono. Svako pokretanje zrna znači skok određene dužine. Dužina skoka Δx ima verovatnoću P_1 , dužina $2 \Delta x$, verovatnoću $P_1 \cdot P_1 = P_1^2$ itd. U opštem slučaju je: $P_k = P_1 \cdot P_1 \cdot \dots = P_1^k$. Skokovi predstavljaju međusobno nezavisne događaje, pa otuda važi zakon proizvoda verovatnoća.

Ukupan broj zrna koja se pokrenu sa površine Ω u vremenskom intervalu Δt iznosi: $P_k \cdot \Omega/(c_1 d^2)$, a ukupan broj pokrenutih zrna koja u istom, dovoljno dugom

vremenskom intervalu prodju kroz vertikalnu ravan I-I na Slici 10.8, iznosi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k \frac{\Omega}{c_1 d^2} = \frac{\Omega}{c_1 d^2} \sum_{k=1}^{\infty} P_k = \frac{\Omega}{c_1 d^2} \cdot \frac{P_1}{1 - P_1}. \quad (10.34)$$

Navedena relacija proizilazi iz sume geometrijskog (stepenog) reda koji je konvergentan za $P_1 \in (0, 1)$ [12].

Jedinični zapreminski pronos se dobija kada se ukupni broj zrna pomnoži zapreminom jednog zrna $c_3 \cdot d^3$ i podeli vremenskim intervalom:

$$q_v = \frac{c_3 \cdot d^3}{\Delta t} \left(\frac{\Delta x \cdot 1, 0}{c_1 \cdot d^2} \cdot \frac{P_1}{1 - P_1} \right) = c_4 \cdot d \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \frac{P_1}{1 - P_1}. \quad (10.35)$$

Može se konstatovati da jedinični pronos zavisi od oblika i krupnoće zrna ($c_4 = c_3/c_1, d$), prosečne brzine njihovog kretanja ($\Delta x/\Delta t$) i verovatnoće pokretanja (P_1). Da bi navedene veličine doveo u vezu sa hidrodinamičkim karakteristikama toka, Ajnštajn je, pored standardnih premisa o ustaljenom, jednolikom tečenju i ravnotežnim uslovima transporta (nema deformacije korita), uveo još i ove pretpostavke:

(i) Prosečna dužina skoka je proporcionalna prečniku zrna: $\Delta x = c_x \cdot d$, pri čemu je $c_x \approx 100$. Ova pretpostavka nema valjanu potvrdu i najviše je kasnije osporavana od brojnih istraživača.

(ii) Karakteristični period kretanja Δt ne zavisi od trenutne vrednosti smičućeg napona, već od visine skokova (koja je proporcionalna prečniku zrna) i brzine tonjenja:

$$\Delta t = c_W \cdot \frac{d}{\sqrt{g \cdot \Delta \cdot d}}, \quad (10.36)$$

gde je c_W - empirijski koeficijent.

(iii) Verovatnoća da će pokrenuto zrno ponovo pasti na dno ista je za sva mesta na rečnom dnu i zavisi od krupnoće zrna i lokalnih uslova toka.

Uvodeći navedene pretpostavke, izraz (10.35) postaje:

$$q_v = \frac{c_4 \cdot c_x}{c_W} \cdot \sqrt{g \cdot \Delta \cdot d^3} \cdot \frac{P_1}{1 - P_1}, \quad (10.37)$$

odnosno, grupisanjem konstanti, isti izraz se može formulisati u bezdimenzionom

obliku:

$$\frac{c_W}{\underbrace{c_4 \cdot c_x}_{A_*}} \cdot \frac{q_v}{\underbrace{\sqrt{g \cdot \Delta \cdot d^3}}_{\Phi}} = \frac{P_1}{1 - P_1}. \quad (10.38)$$

Uočljiva je direktna veza verovatnoće P_1 i bezdimenzionog parametra transporta Φ :

$$P_1 = \frac{A_* \cdot \Phi}{1 + A_* \cdot \Phi}, \quad (10.39)$$

koja međutim iziskuje poznavanje vrednosti konstante A_* .

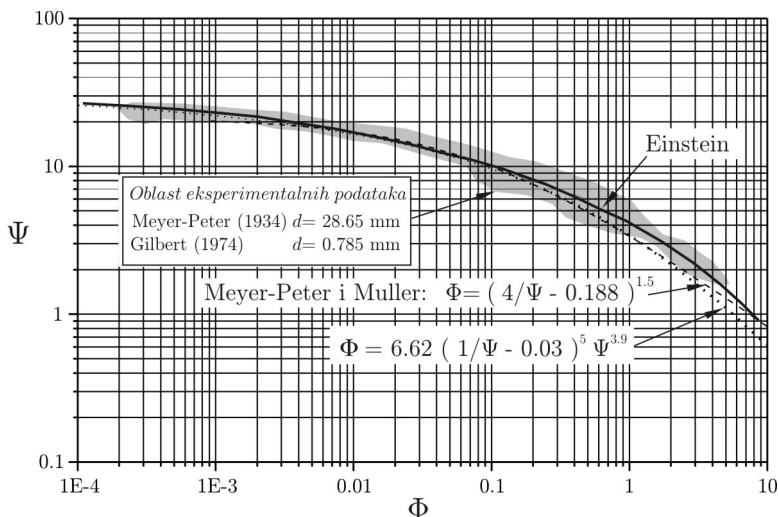
Uvodeći komplementarnu verovatnoću $1 - P_1$, da se zrno neće pokrenuti u intervalu Δt i dovodeći ovu verovatnoću u vezu sa Šildsovim brojem, odnosno bezdimenzionim parametrom Ψ , Ajnštajn je izveo opšti izraz [44]:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-(B_* \Psi' + \frac{1}{\eta_o})}^{B_* \Psi' - \frac{1}{\eta_o}} e^{-t^2} dt = \frac{A_* \Phi}{1 + A_* \Phi}. \quad (10.40)$$

Ne ulazeći u detalje ovog izvodjenja, napomenuće se samo da su originalne vrednosti konstanti: $A_* = 43,5$, $B_* = 0,143$ i $\eta_o = \sqrt{2\sigma} = 0,5$ određene na osnovu podataka laboratorijskih merenja raznih autora, uključujući Majer-Petera. Konstanta A_* odražava karakteristike zrna i proporcionalnost perioda kretanja sa brzinom tonjenja. Konstanta B_* opisuje oblik zrna, a konstanta η_o , fluktuacije brzine toka, odnosno sile uzgona koja deluje na zrno. Grafički prikaz zavisnosti (10.40) dat je na Slici 10.9.

Korekzioni faktori Ajnštajnovne metode. Ograničenja stohastičkog pristupa proizilaze iz činjenice da se verovatnoće mogu definisati samo na nivou jednog izdvojenog zrna. Model kretanja nanosa zasnovan na verovatnoći da trenutna hidrodinamička sila uzgona premaši težinu zrna, odnosno verovatnoći da vertikalna komponenta fluktuacione brzine w' premaši brzinu tonjenja W , predstavlja odraz pojednostavljene predstave fizičkog procesa, jer se zanemaruju uticaji inercije zrna na njegovo kretanje, kao i uticaji okolnih zrna.

Zavisnost (10.35) u svojoj biti ne odgovara velikim koncentracijama i ne obuhvata klizanje, kotrljanje i sudaranje čestica, odnosno inercijalne efekte takvog kretanja. Zato jednačine tipa (10.35) i (10.40) mogu postati praktično primenljive samo uz „ugradjivanje” određenih empirijskih elemenata i kalibracionih parametara. To dodatno komplikuje računski postupak i iziskuje niz pomoćnih dijagrama.



Slika 10.9: Ajnštajnova funkcija pronosa vučenog nanosa [44].

Ajnštajnov pristup zahteva da se najpre izvrši podela tangencijalnog napona, odnosno hidrauličkog radijusa: $R = R' + R''$ na način koji je opisan u četvrtom poglavlju⁵. Ponovo se ističe da je ova podela odraz shvatanja da je za pronos vučenog nanosa merodavan isključivo otpor usled apsolutne rapavosti (krupnoće zrna), jer se energija toka za savladjivanje aluvijalnih otpora troši kroz vrtloge izvan zone u kojoj se kreće vučeni nanos.

Proračun pronosa se obavezno obavlja *po frakcijama*, pri čemu se jedinični pronos i -te frakcije:

$$(q_{vm})_i = \Delta p_i \cdot \Phi_i \cdot \rho_s \sqrt{g \cdot \Delta \cdot d_i^3} \quad (10.41)$$

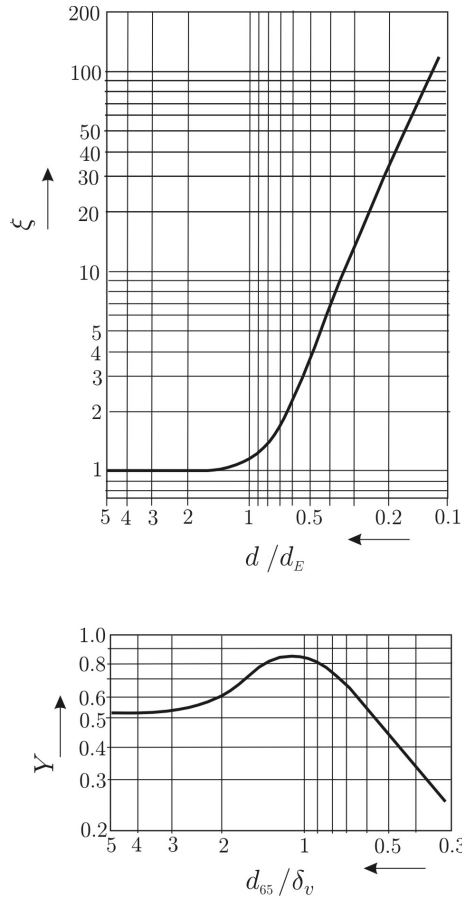
određuje na osnovu vrednosti bezdimenzionog intenziteta transporta Φ_i koja se očitava sa dijagrama na Slici 10.9, u funkciji bezdimenzionog intenziteta smicanja:

$$\Psi'_i = \xi_i \cdot Y \cdot \beta_e \cdot \frac{\Delta \cdot d_i}{R' \cdot I_e}. \quad (10.42)$$

Korekcionni faktori ξ , Y i β_e obuhvataju uticaje neuniformnosti granulometrijskog sastava.

⁵Tada je bezdimenzioni „intenzitet smicanja” definisan u funkciji komponente hidrauličkog radijusa R' i karakteristične krupnoće d_{35} :

$$\Psi'_{35} = \frac{\Delta d_{35}}{R' I_e}.$$



Slika 10.10: Korekcionni faktori Ajnštajnovne metode [44].

Faktor „skrivanja” zrna ξ_i zavisi od odnosa d_i/d_E , gde je d_E karakteristični prečnik mešavine (Slika 10.10):

$$d_E = \begin{cases} 0,77 \Delta_E & \text{za } \Delta_E/\delta_v > 1,8 \quad (\text{hidraulički rapavo dno}) \\ 1,39 \delta_v & \text{za } \Delta_E/\delta_v \leq 1,8 \quad (\text{hidraulički glatko dno}). \end{cases} \quad (10.43)$$

Ranije je pokazano da je debljina viskoznog podsloja $\delta_v = 11,6 \nu/V'_*$ (tačka 2.6), a karakteristična apsolutna rapavost mešavine $\Delta_E = k_s/X' = d_{65}/X'$ (tačka 2.8).

Korekcionni faktor Y obuhvata promenu koeficijenta vertikalne hidrodinamičke sile C_{Fz} (tačka 9.2.3) u zavisnosti od rapavosti mešavine d_{65}/δ_v (Slika 10.10). Vertikalna sila je proporcionalna kvadratu brzine pri dnu, na odstojanju $z = 0,35 d$,

pa se iz logaritamskog zakona (2.44) može izvesti izraz za korekcionni faktor:

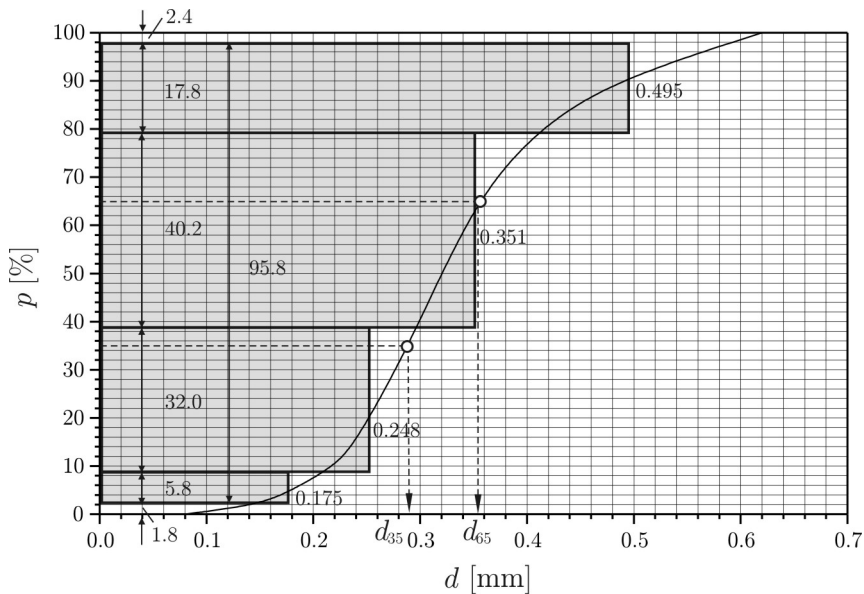
$$\beta_e = [\log 10,6 / \log(10,6 d_E / \Delta_E)]^2. \quad (10.44)$$

■ **Primer 10.5.** Koristeći podatke iz primera 4.3 i granulometrijsku krivu na Slici 10.11, sračunati pronos vučenog nanosa pomoću Ajnštajnovne metode za protok od $267 \text{ m}^3/\text{s}$.

Rešenje. Data granulometrijska kriva će se zameniti histogramom sa 4 računске frakcije (Tabela 10.6, Slika 10.11).

Tabela 10.6: *Reprezentativne krupnoće po frakcijama.*

Klasni intervali (frakcije) [mm]	Zastupljenost Δp [%]	Reprezentivna krupnoća [mm]
$d > 0,59$	2,4	-
$0,59 > d > 0,42$	17,8	0,50
$0,42 > d > 0,30$	40,2	0,35
$0,30 > d > 0,21$	32,0	0,25
$0,21 > d > 0,15$	5,8	0,18
$0,15 > d$	1,8	-



Slika 10.11: *Granulometrijska kriva u primeru 10.5 [146].*

Reprezentivna krupnoća svake frakcije je geometrijska sredina graničnih vrednosti; na primer, za prvu frakciju je: $d_1 = (0,59 \cdot 0,42)^{1/2} = 0,498 \approx 0,5 \text{ mm}$.

Vrednosti korekcionih faktora Y i β_e date su u Tabeli 10.7, pri čemu su vrednosti u prve 4 kolone preuzete iz primera 4.3, gde se mogu naći i ostali hidraulički elementi proračuna (vrednosti kota nivoa, okvašenog obima, hidrauličkog radijusa itd.). Vrednosti u koloni (7) su očitane sa pomoćnog dijagrama na Slici 10.10. U Tabeli 10.8 je prikazan postupak proračuna pronosa po frakcijama, dok su u Tabeli 10.9 date vrednosti ukupnog jediničnog pronosa u funkciji protoka.

Tabela 10.7: Odredjivanje vrednosti korekcionih faktora Y i β_e

R' [m]	δ_v [mm]	k_s/δ_v [-]	Δ_E [mm]	Δ_E/δ_v [-]	d_E [mm]	Y [-]	β_e [-]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0,15	0,290	1,21	0,220	0,76	0,403	0,84	0,64
0,60	0,145	2,41	0,273	1,88	0,210	0,56	1,28
1,20	0,105	3,33	0,304	2,89	0,234	0,52	1,28

Tabela 10.8: Proračun pronosa po frakcijama.

frakc. i	d_i [mm]	Δp_i [-]	R' [m]	Ψ [-]	d_i/d_E [-]	ξ_i [-]	Ψ'_i [-]	Φ_i [-]	$(q_{vm})_i$ [kg/(sm)]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	0,50	0,178	0,15	5,24	1,24	1,08	3,04	1,8	0,038
			0,60	1,31	2,38	1,00	0,94	8,2	0,174
			1,20	0,65	2,14	1,00	0,43	18,5	0,393
2	0,35	0,402	0,15	3,67	0,87	1,29	2,55	2,4	0,067
			0,60	0,92	1,67	1,00	0,66	12,0	0,337
			1,20	0,46	1,50	1,00	0,31	26,0	0,730
3	0,25	0,320	0,15	2,62	0,62	2,25	3,10	1,7	0,023
			0,60	0,65	1,19	1,07	0,50	16,0	0,216
			1,20	0,33	1,07	1,13	0,25	34,0	0,459
4	0,18	0,058	0,15	1,89	0,45	5,40	5,49	0,57	0,001
			0,60	0,47	0,86	1,33	0,45	17,5	0,026
			1,20	0,24	0,77	1,50	0,24	35,0	0,052

Objašnjenje po kolonama Tabele 10.8:

- (1) – (3) broj frakcije, reprezentativna krupnoća i zastupljenost;
- (4) komponenta hidrauličkog radijusa;
- (5) $\Psi = \Delta d / (R' I_e)$;
- (6) karakteristični prečnik mešavine d_E prema (10.43);
- (7) očitane vrednosti sa pomoćnog dijagrama na Slici 10.10;
- (8) sračunato pomoću izraza (10.42);
- (9) očitano sa osnovnog dijagrama na Slici 10.9;
- (10) sračunato pomoću izraza (10.41).

Domen primene Ajnštajnovne metode. Za umeren pronos ($1 < \Psi < 10$), zavisnosti Ajnštajna i Majer-Peter i Milera se malo razlikuju⁶, što nije čudno, jer je u razvoju svog modela, Ajnštajn koristio ekperimentalne podatke Majer-Petera. Obe metode daju dobre rezultate za krupan nanos.

⁶Obrazac MPM (10.16) se može lako svesti na oblik:
 $\Phi = [4(1/\Psi - 0,047)]^{3/2} = (4/\Psi - 0,188)^{3/2}$, koji definiše krivu sličnu Ajštajnovoj (Slika 10.9).

Tabela 10.9: Vrednosti sumarnog jediničnog pronosa u funkciji protoka.

Q [m ³ /s]	Z [mm]	R' [m]	R'' [m]	R [m]	q _{vm} [kg/(sm)]
18	145,9	0,15	0,35	0,50	0,129
81	146,4	0,60	0,16	0,76	0,753
267	147,2	1,20	0,04	1,24	1,634

Modifikacije Ajnštajnovog modela. Pretpostavke originalnog modela mnogi autori osporavaju. Osnovna zavisnost (10.40) je doživela više modifikacija. Pomenuće se dve.

U metodi Ajnštajn-Brauna (Einstein-Brown, 1950) [54, 146]:

$$\Phi = \begin{cases} 40 \left(\frac{1}{\Psi}\right)^3 & \text{za } \Psi \leq 5,5 \text{ (ili } \Theta \geq 0,182) \\ 2,15 \cdot \exp(-0,391 \cdot \Psi) & \text{za } \Psi > 5,5, \end{cases} \quad (10.45)$$

bezdimenzioni brojevi Φ i Ψ se definišu u funkciji prečnika d_{50} , a broj Φ se množi korekcionim faktorom zbog uticaja ometanog taloženja:

$$\mu' = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36 \cdot \nu^2}{g \cdot \Delta \cdot d^3}} - \sqrt{\frac{36 \cdot \nu^2}{g \cdot \Delta \cdot d^3}}. \quad (10.46)$$

Prva jednačina sistema (10.45) opisuje intenzivni, a druga, umereni pronos vučenog nanosa, dok je za oblast $\tau_o \approx \tau_{oc}$, odnosno $\Psi^{-1} \approx \Theta_c$, predložen izraz sličan izrazu Di Boa:

$$\Phi = 40 \left(\frac{\tau_o}{\tau_{oc}} - 1\right)^3. \quad (10.47)$$

Druga modifikacija Ajnštajnovе zavisnosti predstavlja njenu ekstrapolaciju na oblast strmih planinskih vodotoka sa nanosom od krupnog šljunkovitog materijala ($0,03 < \Theta < 0,1$, odnosno $d > 16$ mm) [29]:

$$\Phi = 6,62 \left(\frac{1}{\Psi} - 0,03\right)^5 \Psi^{3,9}. \quad (10.48)$$

Ova zavisnost je grafički prikazana na Slici 10.9.

10.4 Problemi izučavanja vučenog nanosa

U izučavanju vučenog nanosa, a posebno u određivanju njegovog pronosa, javljaju se brojni problemi. U nastavku se navode neki od njih, da bi se naglasili razlozi

zbog kojih se metode i rezultati proračuna moraju kritički analizirati i oprezno prihvatati.

Način kretanja. Za opisivanje kretanja vučenog nanosa korišćeni su termini „skakutanje”, „klizanje”, „kotrljanje”, „saltaciono kretanje” itd. Pokazalo se da ovi termini, pored toga što živopisno karakterišu jednu pojavu, odražavaju različitost konceptualnog pristupa u analitičkom tumačenju ove pojave. Naime, različiti pristupi u matematičkom modeliranju kretanja vučenog nanosa posledica su, između ostalog, i činjenice da pojedini autori ne podrazumevaju isti fenomen pod istim imenom.

Gončarov, Velikanov i Ajnštajn smatraju da se vučeni nanos kreće u dugim skokovima – letovima, koje prate periodi mirovanja. Periodi leta su po pravilu mnogo kraći od perioda mirovanja (po nekim istraživanjima, 1000 puta). Ovakav režim *prekidnog* kretanja podrazumeva da je za vreme saltacije, nanos suspendovan u struji vode i takvo stanje traje sve dok je ispunjen uslov $w' > W(C)$. Pri tome je inercija čestica u saltacionom kretanju zanemaljiva. Ovakav pristup odgovara malo do umerenoj koncentraciji nanosa i omogućava primenu stohastičkog modela i statističke obrade (Velikanov i Ajnštajn).

Bagnoldov koncept kretanja vučenog nanosa je zasnovan na ideji da je saltacija posledica trenutnih impulsa koje zrno prima u trenutku odlepljivanja od dna, a da je karakteristična trajektorija skoka uslovljena vektorskim slaganjem početnog impulsa, brzine toka i brzine tonjenja zrna. Ovaj koncept podrazumeva *skoro neprekidno* kretanje vučenog nanosa, koji dugotrajno ne gubi kontakt sa dnom. To je kretanje u vidu skakutanja, kotrljanja i klizanja, koje je svojstveno krupnijem nanosu. U takvim uslovima koncentracija vučenog nanosa je značajna, a kretanje intenzivno, pa dolazi do čestog sudaranja zrna i njihovog skretanja. U takvim uslovima, inercija zrna nije zanemarljiva.

Treba napomenuti da saltaciono kretanje vučenog nanosa zavisi od odnosa inercijalnih efekata zrna i viskoznosti fluidne sredine. Granična krupnoća zrna koje se može saltaciono kretati određena je stanjem kada sile viskoznosti neutrališu (premaše) sile inercije zrna. To stanje se načelno može definisati nekom kritičnom vrednošću Rejnoldsovog broja (Re_d ili Re_*). (Po nekim autorima, saltacija se ne javlja kod zrna sitnijih od $0,1 \div 0,2$ mm.)

Turbulencija toka. U svim do sada opisanim metodama koristi se vremenski osrednjen kritični tangencijalni napon, a zanemaruje njegova fluktuaciona komponenta. Čak i u stohastičkom pristupu Ajnštajna koji formalno uvodi trenutnu hidrodinamičku silu, bezdimenzioni kritični tangencijalni napon Ψ'_{35} je vremenski osrednjena veličina. Ako se vrednosti računskog i kritičnog tangencijalnog napona uzimaju kao konstante, onda ispada da je za pokretanje nanosa svejedno da li nastaje pri malo dubini i strmom nagibu, ili pri velikoj dubini i blagom nagibu, a jasno je da turbulentne karakteristike toka u ova dva slučaja nisu iste. Drugim rečima, pronos vučenog nanosa nije jednoznačno određen vrednošću tangenci-

jalnog napona. Sigurno je da u veličini pronosa turbulentna struktura toka ima značajnog udela, ali se ona u većini obrazaca eksplicitno ne uzima u obzir.

Nanosne formacije. Prisustvo nanosnih formacija na rečnom dnu je drugi razlog što tangencijalni napon ne može jednoznačno karakterisati kretanje vučenog nanosa. U četvrtom pogavlju je pokazano da se uslovi tečenja pri dnu menjaju jer otpor zavisi od visine i oblika nanosnih formacija. Dijagram na Slici 4.8 pokazuje da vrednost tangencijalnog napona ne raste uvek sa brzinom toka, već naprotiv, opada u prelaznoj oblasti ka burnom režimu, sa prelaskom dina u ravno dno. Drugim rečima, istoj vrednosti tangencijalnog napona mogu odgovarati različite brzine i različiti režimi kretanja vučenog nanosa. Upravo zato se i prišlo podeli tangencijalnog napona na komponente, pa je izdvojen samo deo ovog napona (τ'_o) koji efektivno učestvuje u pronosu vučenog nanosa (metode MPM, fan Rejna, Ajnštajna) od dela koji u tome ne učestvuje (τ''_o). Medjutim, tu podelu nije jednostavno izvršiti, niti povući jasnu granicu izmedju uticaja apsolutne rapavosti (komponente τ'_o) i aluvijalnog otpora (komponente τ''_o).

Treba naglasiti da čak i pod pretpostavkom ravnog dna (odsustva nabora i dina), postoji znatan stepen neizvesnosti. Naime, pri intenzivnom transportu kada se vučeni nanos kreće kotrljanjem i klizanjem po horizontalnom dnu, on, pored sopstvene težine, prenosi i tangencijalna (smičuća) naprezanja od fluida na nepokretno dno. Odnos smičućih i normalnih napona na kontaktu pokretnog sloja i nepokretnog dna predstavlja „*dinamički koeficijent trenja*”, koji je pomenut u okviru Bagnoldove analize, kada je pokazano da je reč o empirijskom koeficijentu.

Difuzija. Difuziono kretanje čvrste materije pod uticajem fluktuacija turbulentnog toka je pojava svojstvena prirodnim slučajnim procesima. Difuzija vučenog nanosa *u vertikalnoj ravni*, koja predstavlja izmenu i mešanje čvrstih čestica iz pokretnog sloja na dnu i fluidne sredine iznad njega, od interesa je za definisanje uslova pod kojim, s jedne strane dolazi do taloženja suspendovanog nanosa, a s druge strane, do njegovog vraćanja u stanje suspenzije („resuspenzije”).

Difuzija *u ravni kretanja vučenog nanosa* je od interesa za izučavanje ponašanja nanosa u krivinama. Teorijski, ovaj difuzioni proces se može tretirati statističkim metodama svojstvenim za turbulentni tok, ali je problem u tome što difuzioni procesi vučenog nanosa ne zavise u potpunosti od difuzionih procesa u fluidu. Zato je po svemu sudeći, jedini mogući pristup da se pokretni sloj tretira kao dvofazni granularni fluid – *mešavina* i da se uspostave eksperimentalne veze izmedju parametara difuzionog modela i fluktuacionih kretanja mešavine.

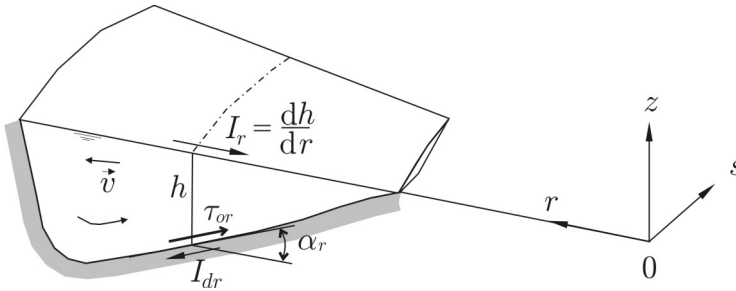
Sekundarna strujanja. Analitički je kretanje vučenog nanosa opisano na osnovu zapažanja u pravolinijskim laboratorijskim kanalima. Medjutim, u realnim uslovima, gde su duge pravolinijske deonice retkost, kretanje nanosa ima složeniji karakter, jer su u krivinama zrna podvrgnuta uticajima sekundarnog, centrifugalnog strujanja. U krivinama se pored pronosa u pravcu glavnog toka, javlja i pronos u poprečnom pravcu, usled izraženog poprečnog nagiba dna i radijalne

komponente brzine. Ta dva pronosa se superponiraju, ali se rezultujući pronos ne može pouzdano sračunati.

Iako uticaj krivine na kretanje nanosa još uvek nije dovoljno izučen, neki rezultati daju mogućnost kvalitativne analize. U uslovima potpuno razvijenog toka u krivini i ravnotežnog psamološkog režima (bez deformacije korita), radijalna smičuća sila po jedinici površine dna je u lokalnoj ravnoteži sa komponentom težine nanosa u radijalnom pravcu [48]:

$$\tau_{or} = g (\rho_s - \rho) \cdot \delta_o \cdot (1 - \lambda_o) \cdot \sin \alpha_r, \quad (10.49)$$

gde je α_r – ugao nagiba dna u radijalnom pravcu (Slika 10.12), λ_o – poroznost, a δ_o – debljina pokretnog sloja.



Slika 10.12: Poprečni nagib korita u krivini.

Ako se ova debljina definiše izrazom Karima (Karim, 1981) [94]:

$$\delta_o = d \frac{u_*}{u_{*c}}, \quad (10.50)$$

lokalna smičuća brzina izrazom Darsi-Vajzbaha (3.3), a lokalna kritična smičuća brzina preko kritičnog Šildsovog broja (9.50), lako se zamenom u (10.49) može pokazati da je poprečni nagib dna rečnog korita u krivini:

$$I_{dr} = \operatorname{tg} \alpha_r \approx \sin \alpha_r = \frac{\Theta_r}{(1 - \lambda_o)} \cdot \operatorname{Fr}_d^{-1} \cdot \sqrt{\frac{8 \Theta_c}{\lambda}}, \quad (10.51)$$

gde je $\Theta_r = \tau_{or} / [g (\rho_s - \rho) d]$ – bezdimenzioni radijalni tangencijalni napon (videti tačku 7.1.6), a $\operatorname{Fr}_d = \tilde{u} / \sqrt{g \cdot \Delta \cdot d}$ – Frudov broj zrna, čiji je prečnik $d = d_{50}$.

U zakrivljenom koritu se usled sekundarnog strujanja uočava tendencija premeštanja zrna vučenog nanosa *od konkavne ka konveksnoj obali*. Ova pojava ima niz posledica, kao što su: segregacija nanosa po krupnoći, erozija konkavne obale, formiranje spruda na konveksnoj obali, promena širine profila.

Bezdimenzioni pronos nanosa u radijalnom pravcu se može definisati opštim izrazom Parkera (Parker, 1984) [127]:

$$\frac{\Phi_r}{\Phi} = \operatorname{tg} \gamma_v - \frac{1 + (C_{Fz}/C_{Fx}) \cdot \operatorname{tg} \phi'}{\operatorname{tg} \phi'} \cdot \sqrt{\frac{\Theta_c}{\Theta}} \cdot I_{dr}, \quad (10.52)$$

gde je $\Phi_r = q_{vr}/\sqrt{g \cdot \Delta \cdot d^3}$ – bezdimenzioni pronos vučenog nanosa u radijalnom pravcu, C_{Fz} i C_{Fx} su koeficijenti komponenti hidrodinamičke sile, ϕ' – ugao unutrašnjeg trenja, a I_{dr} – poprečni nagib dna.

Prvi član na desnoj strani jednačine (10.52) odražava uticaj skretanja vektora brzine *pri dnu* za ugao γ_v u odnosu na osovину toka (Slika 7.6). Ovaj član doprinosi „penjanju” zrna uz strmu ravan dna u smeru konveksne obale. Drugi član, koji odražava skretanje putanje zrna usled poprečnog nagiba I_{dr} , izaziva kotrljanje zrna niz strmu ravan dna u smeru konkavne obale. Pronos nanosa u poprečnom pravcu je rezultat sabiranja navedenih uticaja.

10.5 Terenska merenja

Merenja vučenog nanosa se obavljaju kao deo hidrometrijskih aktivnosti, koje obuhvataju:

- definisanje geometrije rečnog korita („batimetrije”);
- merenje polja brzine;
- merenje pronosa vučenog nanosa.

Ova merenja obično uključuju i merenje koncentracije suspendovanog nanosa, o čemu će biti reči u narednom poglavlju.

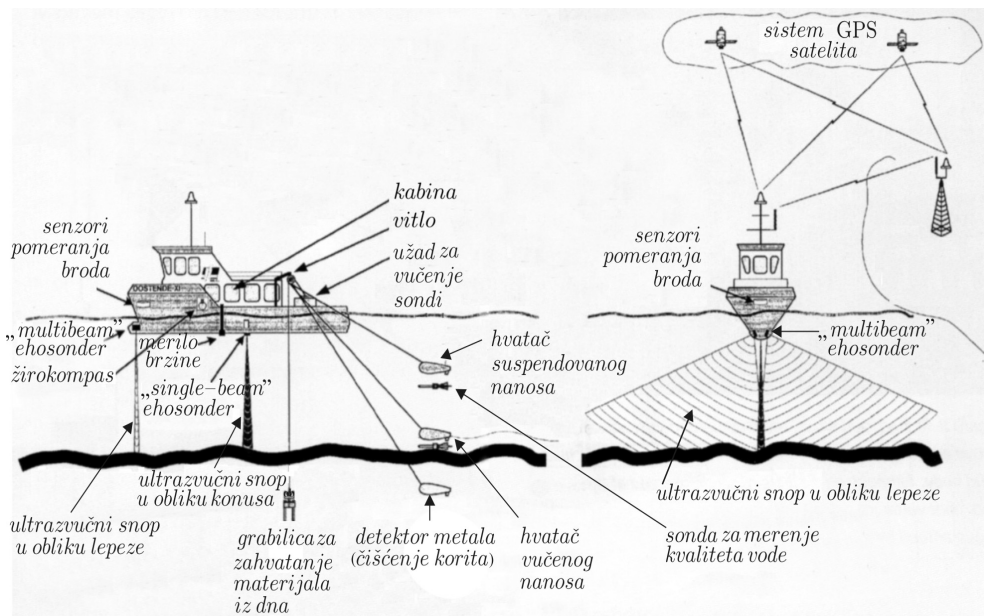
Na osnovu izmerenih podataka, može se sračunati protok vode i odgovarajući pronos vučenog nanosa u profilu, u periodu merenja.

Na malim vodotocima, oprema za merenje brzine i zahvatanje nanosa postavlja se na čamcima, a na velikim vodotocima, koriste se specijalizovani brodovi sa odgovarajućom hidrometrijskom opremom. Shematski prikaz takvog broda sa raznim mernim uređajima dat je na Slici 10.13.

10.5.1 Merenje geometrije rečnog korita („batimetrija”)

Karta sa prostornim prikazom rečnog korita predstavlja osnovnu topografsku podlogu za sve hidrauličke i psamološke proračune. Ova karta se izrađuje na osnovu podataka koje prikuplja *ehosonder* – uređaj za merenje dubine pomoću ultrazvuka. Reč je o uređaju koji sa broda emituje zvučne talase⁷ i meri vreme za koje

⁷Frekvencija emitovanog zvuka je znatno iznad čujne frekvencije (20 KHz), pa otuda naziv „ultrazvuk”.



Slika 10.13: Shematski prikaz hidrometrijskog broda sa opremom

ti talasi prevale odstojanje do dna i vrate se nazad. Ovo odstojanje jednako je proizvodu izmerenog vremena i „konstantne” brzine zvuka u vodi ($c_w=1483$ m/s na temperaturi od 20°C).

Postoje dva tipa ehosondera, kao što je shematski prikazano na Slici 10.13. Ehosonder koji emituje zvučni zrak u obliku uskog izduženog konusa (engl. „*single-beam*”) meri dubinu u vertikali direktno ispod uređaja. Položaj merne vertikale određen je položajem broda i definiše se horizontalnim koordinatama (x, y), a položaj tačke na dnu, vertikalnom koordinatom (z_d) koja se računa na osnovu izmerene dubine.

Drugi tip ehosondera emituje zvučni zrak u obliku lepeze (engl. „*multibeam*”) i registruje dubine ne samo u jednoj vertikali ispod broda, već na širem prostoru ispod broda i oko njega, kao što se vidi na Slici 10.13. Na taj način se merenje obavlja relativno brzo, jer se u jednom prolazu snima pojas širine do 200 m. Brzina merenja je naročito značajna kada su u pitanju duge deonice plovinih vodotoka.

Ehosonderi su složeni uređaji, čije su glavne komponente: akustičke sonde za emitovanje i prijem zvučnog signala (keramički senzori), pojačala, pretvarači zvučnog signala u digitalni signal, senzori za merenje pomjeranja broda, računari i njihovi periferni uređaji. Tačnost merenja ehosondera zavisi od materijala na dnu, a za reke sa peščanim dnom i dubine do 23 m, iznosi od ± 5 cm do ± 20 cm [160].

Interpolacijom kota dna snimljenih tačaka može se odrediti kota dna u proizvoljnoj tački rečnog korita, pa time i u čvorovima izabrane računске mreže (Slika 10.14). Pored linearne interpolacije, u praksi se često koristi „metoda inverznog odstojanja”:

$$z_d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{z_{d,i}}{l_i}, \quad (10.53)$$

gde je z_d – kota dna [mnm], N – broj okolnih tačaka, a l – odstojanje izmedju okolne i interpolovane tačake [m].

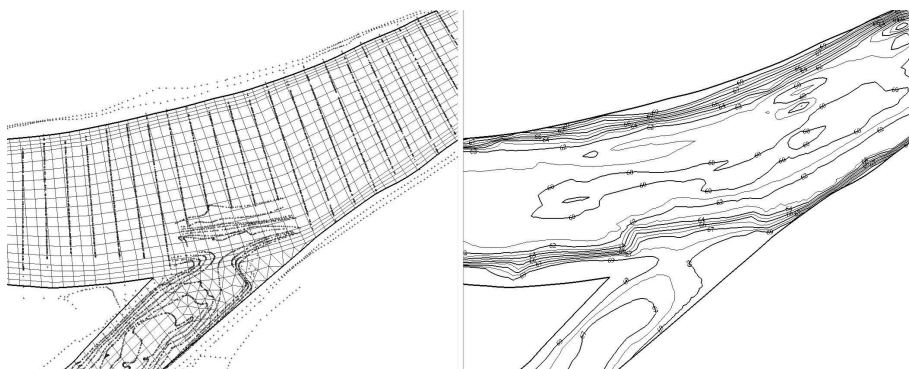
Geometrija korita se može grafički prikazati „izobatama” – linijama koje povezuju tačke na dnu sa istom apsolutnom kotom (Slika 10.14), ili alternativno, sa istom dubinom, u odnosu na nivo vode u trenutku merenja. Na osnovu istih podataka može se formirati i *digitalni model* rečnog korita (Slika 10.15).

Položaj hidrometrijskog broda određuje se u svakom trenutku pomoću satelitskog sistema globanog pozicioniranja GPS (engl. *Global Positioning System*). Reč je o danas standardnom načinu određivanja koordinata bilo koje tačke na površini naše planete.

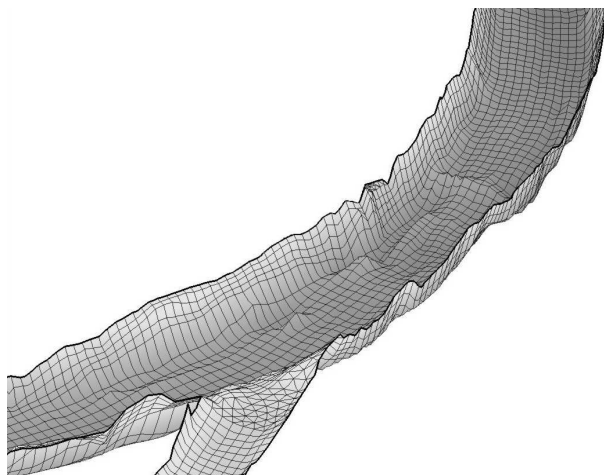
GPS uređaj na brodu (Slika 10.13) meri vremensku razliku izmedju trenutka odašiljanja i trenutka prijema radio signala sa geostacionarnih satelita na orbitama udaljenim oko 20000 km od Zemlje. Odstojanja izmedju ovog uređaja i najmanje četiri satelita računaju se množenjem izmerenog vremena i poznate (konstantne) brzine prostiranja elektromagnetskih talasa, koja je jednaka brzini svetlosti (299,792 km/s). Ovo je moguće pod uslovom da su na satelitu i prijemu sinhronizovani časovnici. Korekcija greške u merenju vremena, zahteva da se (pored tri satelita za tri koordinate), koristiti najmanje još jedan (četvrti) satelit. Ustvari, što je dostupno više satelita i što duže brod stoji u jednoj tački, greška je manja. Za korekciju GPS čitanja zbog zakrivljenosti Zemlje i neravnomernosti gravitacije, pored satelita, može se koristiti i jedna stalna GPS stanica na kopnu, sa kojom brod uspostavlja radio vezu. Metodom trilateracije⁸ računaju se koordinate GPS prijemnika na brodu.

Ehosonderi i GPS uređaji, koji spadaju u kategoriju opreme za tzv. „daljinsku detekciju”, omogućavaju da se još u toku merenja kontinualno obavlja obrada podataka o izmerenoj dubini i putanji broda, uz vizuelni i grafički prikaz rezultata.

⁸Trilateracija je postupak određivanje relativnog položaja nekog objekta. Za razliku od triangulacije, koja se zasniva na merenju uglova uz najmanje jedno poznato odstojanje, trilateracija koristi poznat položaj dve ili više referentnih tačaka i izmereno odstojanje objekta do *svake* referentne tačke. Za jednoznačno određivanje položaja objekta u ravni trilateracijom, neophodne su najmanje tri referentne tačke.



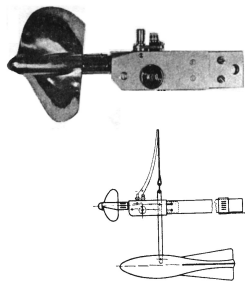
Slika 10.14: *Primer batimetrijskih rezultata [85]. Crtež levo prikazuje skup „rasutih“ tačaka u kojima su kote dna određene merenjem pomoću ehosondera, duž poprečnih profila, ili u nepravilnom rasporedu. Na istom crtežu je prikazana i računaska mreža pomoću koje se interpolacijom računaju „izobate“ prikazane na crtežu desno.*



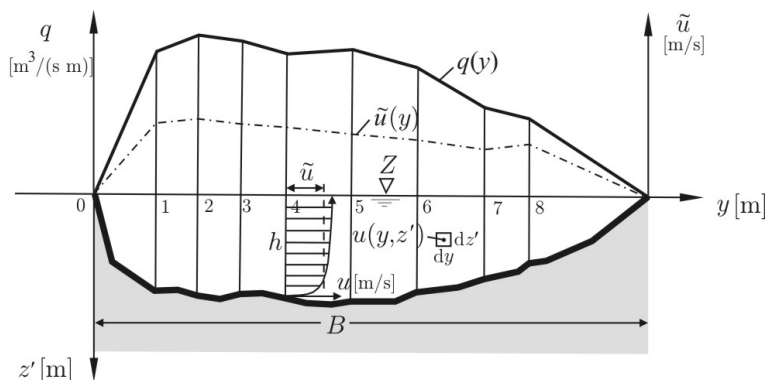
Slika 10.15: *Primer digitalnog modela rečnog korita [85]. (Razmera u vertikalnom pravcu je deset puta veća od razmera u horizontalnim pravcima.)*

10.5.2 Merenje polja brzine

Tradicionalna metoda. Poznato je da se merenje lokalne brzine (u tački) može obaviti pomoću hidrometrijskog krila (Slika 10.16). Merne tačke se nalaze duž izabrane vertikale, na standardom definisanim odstojanjima od površine vode, odnosno od dna. Broj mernih vertikala zavisi od širine korita i takodje je propisan standardima [87].



Slika 10.16: Hidrometrijsko krilo i shematski prikaz krila na sajli, zategnutoj pomoću tega u obliku torpeda, mase 5 kg. Broj obrtaja krila proporcionalan je brzini toka, što se određuje kalibracijom krila u laboratorijskom kanalu i definiše „jednačinom krila“.



Slika 10.17: Određivanje protoka u profilu na osnovu rasporeda brzine.

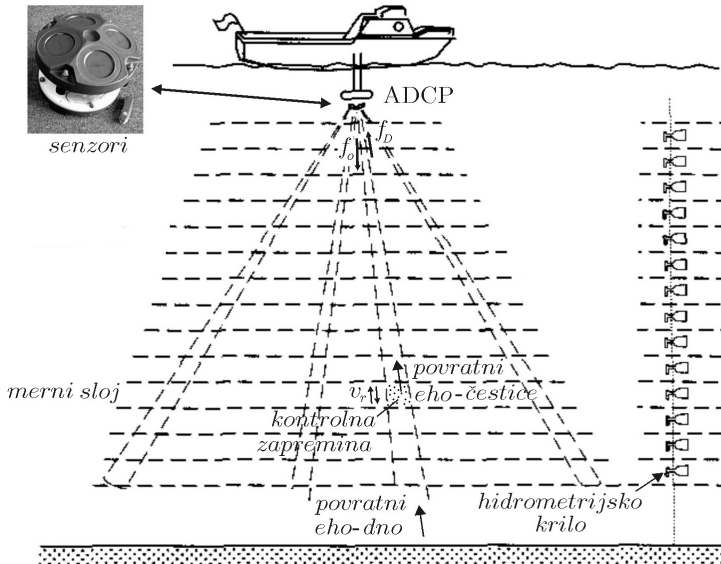
Na osnovu izmerenih vrednosti brzine u nizu tačaka jedne vertikale, određuje se najpre vrednost srednje brzine u toj vertikali (\tilde{u}), a zatim i odgovarajuća vrednost jediničnog protoka: $q = \tilde{u} \cdot h$. Ukupni protok u profilu dobija se integracijom jediničnog protoka po širini korita, kao što je prikazano na Slici 10.17:

$$\begin{aligned}
 Q &= V \cdot A = \int_0^B \int_0^h u(y, z') dz' dy = \int_0^B \underbrace{\frac{1}{h} \int_0^h u(y, z') dz'}_{\tilde{u}(y)} \cdot h dy = \\
 &= \int_0^B \tilde{u} \cdot h dy = \int_0^B q(y) dy.
 \end{aligned} \tag{10.54}$$

ADCP metoda. Savremeni ADCP (ili ADP) uređaj (engl. „*Acoustic Doppler Current Profiler*“) služi za neinvazivno merenje polja brzine i protoka. Primopredajnik ovog uređaja sastoji se od 2, 3, 4 ili više keramičkih senzora (Slika 10.18), koji rade u vodi slično zvučnicima u vazduhu; emituju kratke „pakete“ zvučnih signala određene frekvencije ($300 \text{ KHz} < f_o < 5\text{MHz}$, od 1 do 100 paketa svake sekunde) u različitim, ali poznatim pravcima.

Odbijanjem zvuka o mnoštvo lebdećih materija u vodi (čvrstih čestica, vazdušnih mehurića, planktona itd.), kao i od dna rečnog korita, nastaje povratni eho koga, usled Doplerovog efekta⁹, uređaj registruje sa promenjenom frekvencijom (f_D).

Razlaganjem eha na više vremenski sukcesivnih segmenata, određuju se frekvencije f_D u određenom broju kontrolnih zapremina, koje proizilaze iz podele strujnog polja u vertikalnom i horizontalnom pravcu (Slika 10.18).



Slika 10.18: Shematski prikaz rada ADCP uređaja. Uređaj ima i pojačivač, precizan časovnik, termometar, žirokompas, memoriju, procesor digitalnih signala i druge komponente. Za određivanje 3 komponente brzine, neophodna su najmanje 3 akustička snopa u različitim pravcima, dok se četvrti koristi za ocenu greške. Skica sugeriše da ADCP uređaj zamenjuje veliki broj hidrometrijskih krila.

Za svaku kontrolnu zapreminu može se, uz određene pretpostavke i vremensko osrednjavanje, definisati radijalna relativna brzina između ADCP uređaja na

⁹Doplerov efekat je pojava da, usled kretanja prijemnika ili predajnika, dolazi do promene frekvencije talasa, na strani prijemnika. Ako se prijemnik i predajnik kreću jedan ka drugom, frekvencija raste, a ako se prijemnik i predajnik udaljavaju jedan od drugog, frekvencija opada.

brodu i lebdećih materija u toj kontrolnoj zapremini:

$$v_r = \frac{c_w f_D}{2 f_o}, \quad (10.55)$$

gde je c_w – brzina prostiranja zvuka kroz vodu.

Komponente brzine toka dobijaju se rotiranjem radijalnih relativnih brzina iz lokalnog koordinatnog sistema ADCP senzora u zemaljski koordinatni sistem, pomoću žirokompasa ugrađenog u ADCP uređjaj. Na Slici 10.19 prikazani su rezultati jednog merenja.

Iz kratkog opisa ADCP uređjaja može se zaključiti da je reč o savremenoj tehnologiji koja omogućava da se relativno kratkotrajnim merenjem odrede sve tri komponente lokalne brzine strujnog polja i profili brzine po širini korita, na osnovu kojih se, automatski računa protok. Pored toga, ADCP uređjaj istovremeno meri dubine (kao svaki ehosonder), kao i brzinu kretanja broda.

10.5.3 Merenje pronosa vučenog nanosa

Merenje pronosa (transporta) vučenog nanosa treba posmatrati u kontekstu analize režima nanosa, pri čemu se fizičke i kinematičke karakteristike nanosa (količina, granulometrijski sastav, brzina kretanja, godišnji pronos itd.), dovode u vezu sa hidrološko–hidrauličkim režimom vodotoka i morfološkim promenama rečnog korita. Cilj merenja može biti i izučavanje načina kretanja nanosa, kao i određivanje vrednosti parametara nekog obrasca, da bi se ovaj mogao koristiti za predviđanje pronosa u hidrauličkim uslovima koji nisu obuhvaćeni merenjem, ili u uslovima koji su izmenjeni regulacionim radovima.

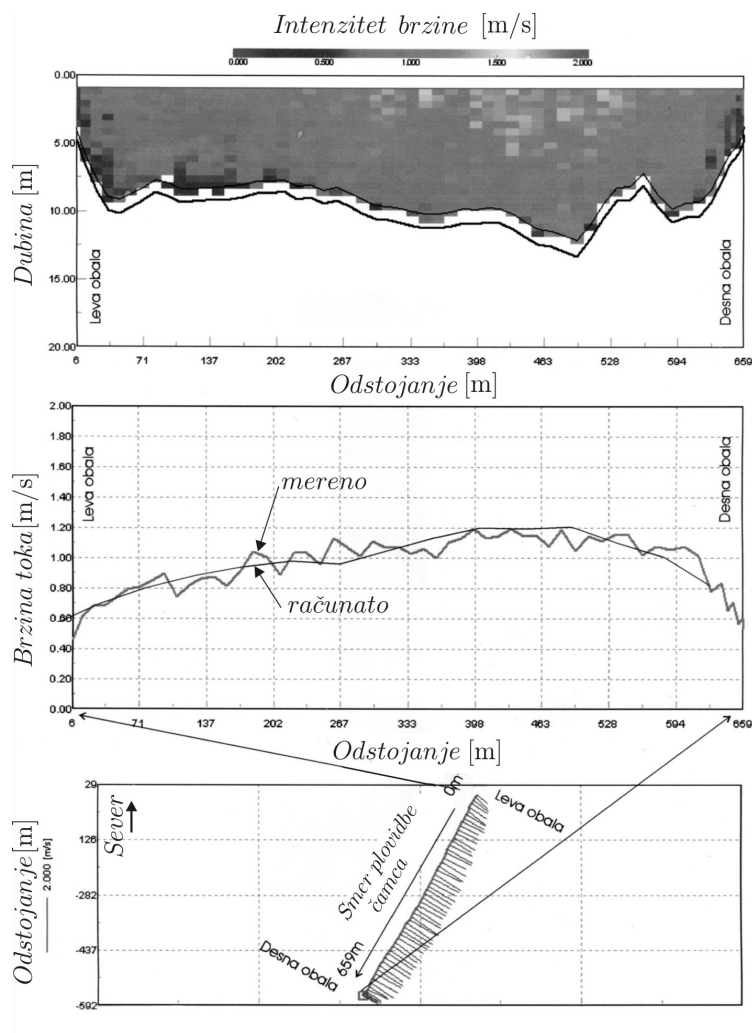
Metode merenja pronosa vučenog nanosa se mogu podeliti u tri osnovne grupe:

- Metode u kojima se koriste *mehanički hvatači*;
- Metode u kojima se koriste razne vrste *obeleživača*, ili „*trase*“;
- Specijalne metode.

Bez obzira na izbor metode, merenja predstavljaju dugotrajan i skup posao, jer moraju biti opsežna da bi se obuhvatio ceo opseg protoka, što bolje sagledao psamološki režim i smanjio uticaj neizvesnosti i grešaka. Iako bi psamološka merenja morala biti sastavni deo svakog ozbiljnog projekta regulacije vodotoka, to u praksi nažalost nije uvek slučaj, zbog oskudice materijalnih sredstava i činjenice da je reč o poslu koji nije rutinski i koji zahteva specifičnu opremu i dobro obučeni radni tim.

10.5.3.1 Merenje pomoću mehaničkih hvatača

U osmom poglavlju je rečeno da se uzorci rečnog nanosa mogu horizontalno ili vertikalno zahvatati iz rečnog korita pomoću raznih uređjaja, kao što su metalni cilindri, grabilice, vakuum pumpe itd.



Slika 10.19: Primer rezultata dobijenih pomoću ADCP uređaja na Dunavu. Crteži prikazuju (odozgo na dole): poprečni profil sa velikim brojem kontrolnih zapremina, u kojima je različitom bojom prikazan intenzitet izmerene brzine; raspored po porečnom preseku izmerene, vremenski osrednjene brzine glavnog toka, kao i raspored računске brzine, dobijen primenom modela ravanskog (2D) tečenja; trajektorija broda i izmereni pravci vektora brzine.

Reč je o „poremećenim uzorcima” koji se koriste za analize granulometrijskog sastava. Zahvatanje vučenog nanosa mehaničkim hvatačima ne remeti strukturu materijala na rečnom dnu i predstavlja uzimanje „neporemećenih” uzoraka, koji se koriste za određivanje pronosa vučenog nanosa i njegovog granulometrijskog sastava.

Konstruktivne karakteristike hvatača. Mehanički hvatači se izrađuju kao pomerljivi uređjaji, u obliku metalnih ploča i kutija, ili u vidu šahtova koji se ukopaju u rečno dno. Ovde će se razmatrati samo pomerljivi hvatači u obliku kutija.

Izrađeni od žice ili lima, ovi hvatači na prednjoj strani imaju otvor kroz koji nanos ulazi kada se uređjaj položi na rečno dno. Voda slobodno struji u unutrašnjosti hvatača, ali se brzina toka smanjuje, a nanos zadržava. Nakon određenog perioda, uređjaj se sa nanosom vadi iz reke, a zahvaćeni uzorak, meri. Zahvatanje se obavlja u više vertikalna jednog profila.

Dvadesetak tipova hvatača koji su u svetu do sada razvijeni [54, 59, 71, 76], mogu se podeliti na one koji se koriste za krupan nanos i one koji su namenjeni sitnom peščanom materijalu. Hvatači iz prve kategorije imaju zidove od žičane mreže sa otvorima veličine $3 \div 4$ mm (Slika 10.20). Hvatači iz druge kategorije imaju pune zidove, od lima. U našoj zemlji se koristi jedna verzija Karoljijevog hvatača (Slika 10.21). Ovak uređjaj je pogodan za merenje pronosa kako sitnog, tako i krupnog nanosa.

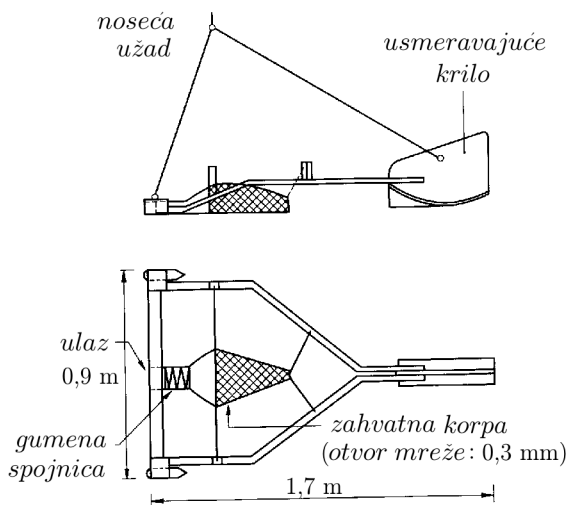
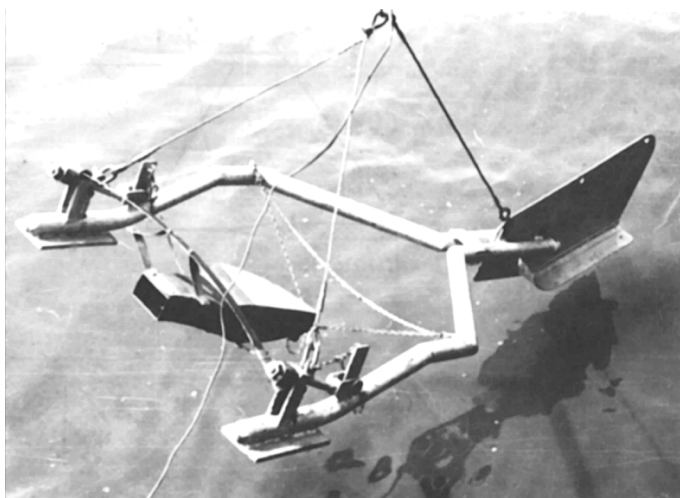
Prisustvo hvatača na dnu lokalno remeti strujnu sliku, povećava otpor i menja brzinu toka, tako da se efektivno zahvati svega oko $40 \div 60\%$ nanosa u pokretu. Efikasnost uređjaja zavisi i od drugih faktora, kao što su stabilnost, kontakt sa dnom i stepen ispunjenosti hvatača.

Korišćenje hvatača se ne može zamisliti bez prethodne kalibracije, koja se obavlja ispitivanjem modela hvatača (ili što je zbog efekata razmere bolje, prototipa hvatača) u laboratorijskom kanalu u kome je pronos nanosa poznat. Za svaki uređjaj se definiše vrednost „koeficijenta korisnog dejstva” – odnosa izmerenog i stvarnog pronosa. Za većinu hvatača, ta vrednost ne prelazi 50% .¹⁰

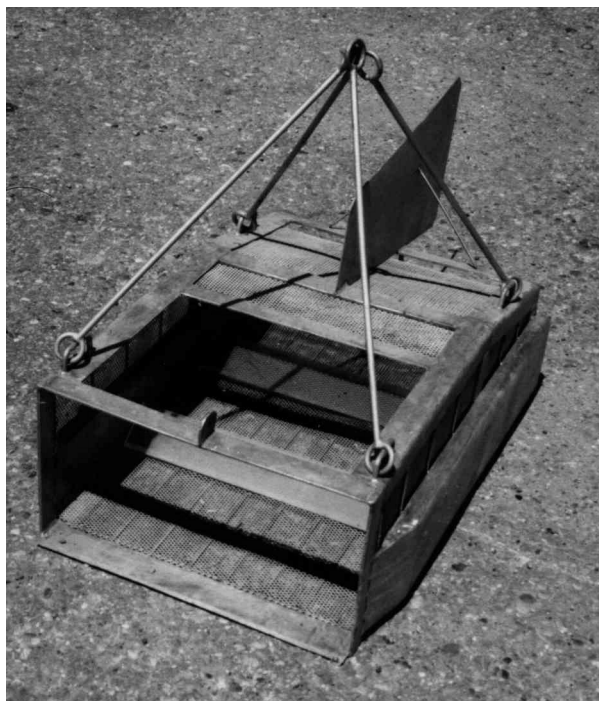
Mehanički hvatači imaju sledeće nedostatke:

- *Ograničena tačnost.* Relativno niska efikasnost je posledica više uzroka: značajnog lokalnog poremećaja strujne slike, lošeg kontakta hvatača sa dnom ili njegove nepovoljne orijentacije u odnosu na strujnice (sitne čestice prolaze izpod hvatača ili ga zaobilaze), poremećaja koji nastaju rukovanjem, gubitka sitnih frakcija koje se ispiraju prilikom izvlačenja uređjaja na površinu itd.

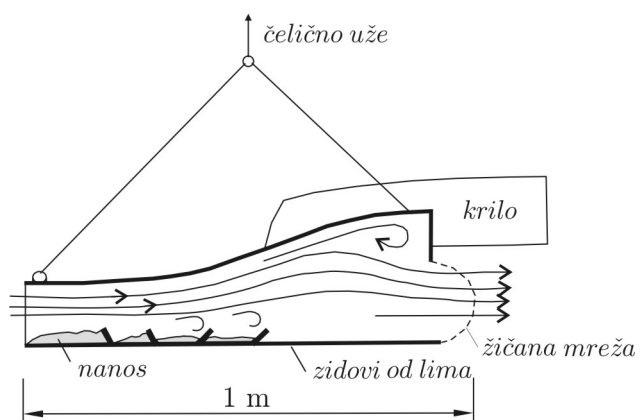
¹⁰Imajući u vidu stohastički karakter pojave i promenljivost efikasnosti hvatača, umesto poredjenja prosečnih vrednosti stvarne i zahvaćene količine nanosa, preporučuje se poredjenje raspodela verovatnoće stvarnog i izmerenog pronosa [76].



Slika 10.20: *Holandski hvatač tipa Arnhem; mrežasti zahvatni deo je savitljiv da bi se lakše prilagodio neravninama rečnog dna; nedostatak mrežastih hvatača je što otvori mreže ne smeju biti jako mali jer je onda otežano strujanje vode kroz uređaj, a otvori se lako zapuše [76].*



(a)



(b)

Slika 10.21: (a) Mehanički hvatač domaće proizvodnje (Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi“); (b) Shematski prikaz jedne varijante Karoljijevog hvatača.

- *Osetljivost na pristustvo dina.* Ako je peščano dno formirano u vidu dina, izvjesno je veliko rasipanje rezultata merenja, jer ovi zavise od položaja hvatača u odnosu na čelo dina. Zato je pre merenja pronosa, poželjno ehosonderom snimiti podužni profil korita i odrediti talasnu dužina dina.
- *Dugotrajnost merenja.* Stohastička priroda kretanja nanosa takodje uslovljava značajno rasipanje mernih rezultata. Da bi se rezultati statistički obradili, neophodno je ponoviti merenje u svakoj vertikali¹¹, a da bi se definisala raspodela pronosa po poprečnom preseku, neophodno je obuhvatiti više vertikala.
- *Složenost rukovanja.* Masa i dimenzije mehaničkih hvatača iziskuju stabilne plovne objekte sa dizalicama, a položaj hvatača na dnu se teško kontroliše.

Organizacija i način merenja. Izbor mernih profila mora da zadovolji dva osnovna uslova: (a) rečna deonica mora biti stabilna, a uticaj neustaljenosti na pronos i formu rečnog dna ne sme tokom merenja biti jako izražen i (b) mora postojati mogućnost pouzdanog merenja hidrauličkih elemenata toka (dubine, brzine itd.).

Zahvatanje uzorka vučenog nanosa u pokretu započinje od trenutka kada hvatač dospe na rečno dno. Vreme zahvatanja zavisi od količine nanosa i kreće se od 0,5÷15 min. Nanos se u jednoj vertikali zahvata više puta. Uzorci krupnog materijala se u vlažnom stanju prosejavaju kroz sita sa veličinom otvora 3÷50 mm i mere na decimalnoj vagi. Sitni materijal krupnoće ispod 3 mm, se suši pre prosejavanja kroz sita sa veličinom otvora 0,13÷2 mm. Za ovaj materijal se mora koristiti precizna vaga.

Obrada rezultata. Kao rezultat zahvatanja uzoraka, dobijaju se granulometrijske krive nanosa u pokretu. Jedinični pronos vučenog nanosa računa se pomoću jednačine:

$$q_{vm} = \frac{\sum m_v}{b_h \cdot \sum \Delta t} \quad [\text{kg}/(\text{s m})] \quad (10.56)$$

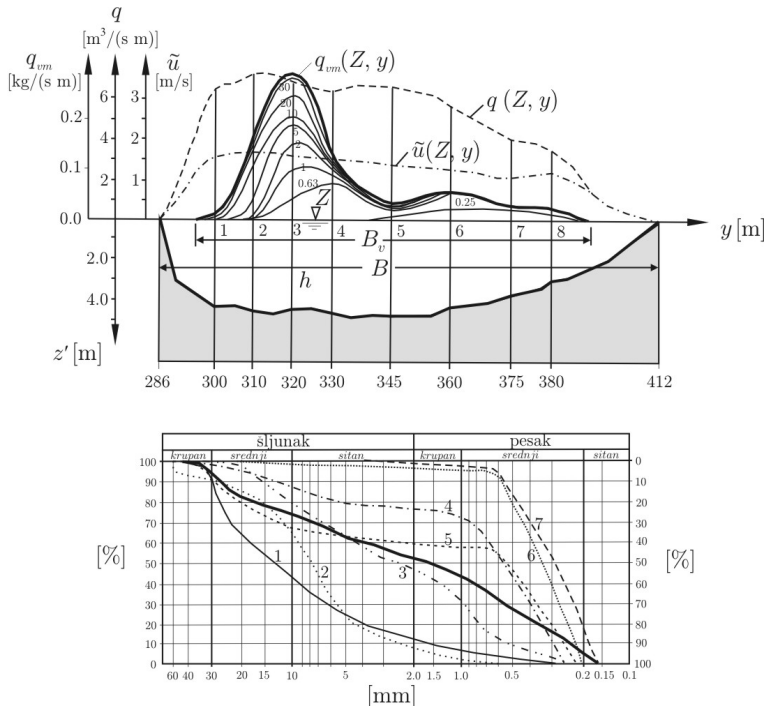
gde je $\sum m_v$ – ukupna masa zahvaćenog materijala, b_h – širina ulaznog otvora hvatača, a $\sum \Delta t$ – ukupno trajanje zahvatanja.

Pored rasporeda jediničnog pronosa po širini korita, na Slici 10.22 je dat i dijagram parcijalnih jediničnih pronosa po frakcijama. Pronos vučenog nanosa u profilu dobija se integracijom po širini korita:

$$Q_{vm} = \int_0^{B_v} q_{vm}(y) dy \quad [\text{kg/s}] \quad (10.57)$$

¹¹Za eliminaciju slučajnih grešaka, potrebno je prema holandskom iskustvu obaviti bar 10 merenja u jednoj vertikali, kako bi se ustanovila raspodela mernih podataka i odredile odgovarajuće statistike [76].

gde je B_v - širina pojasa kretanja vučenog nanosa (Slike 10.4 i 10.22). Ovaj pronos predstavlja površinu ispod dijagrama jediničnog pronosa.



Slika 10.22: Rezultat obrade merenja pronosa i granulometrijskog sastava vučenog nanosa u jednom profilu Velike Morave [87]. Parametarske krive na gornjem dijagramu označavaju pronos frakcija čija je krupnoća manja od označenog prečnika (u mm). Može se primetiti da je širina pojasa kretanja vučenog nanosa manja od širine vodnog ogledala. Na osnovu granulometrijskih krivih u nizu vertikala, definiše se prosečna kriva za ceo profil (deblja linija na donjem dijagramu). Pored pokretnog materijala o kome je ovde reč, granulometrijskom analizom se po pravilu obuhvata i nepokretan materijal iz rečnog korita.

10.5.3.2 Merenje pomoću obeleživača

Princip ove tehnike merenja je da se zrna nanosa, obeležena materijama koje se zovu „obeleživači” ili „traseri”, uključe u prirodni transportni proces i da se njihovim praćenjem stekne uvid u kinematičke karakteristike vučenog nanosa (što nije moguće kada se koriste mehanički hvatači). Realizacija ove ideje zahteva da obeležena zrna po svojim karakteristikama i načinu kretanja odgovaraju neobeleženom materijalu, da njihovo upuštanje bitno ne poremeti transportni proces i da praćenje njihovog kretanja bude efikasno. Tu je i zahtev da ispitivanja budu finansijski prihvatljiva, a zagađenje okoline, u dozvoljenim granicama.

Vrste obeleživača. U zavisnosti od karakteristika nanosa i drugih uslova, koriste se dve vrste obeleživača:

(i) *Fluorescentni obeleživači* su specijalne boje koje se vide pod ultraljubičastim osvetljenjem. Ove boje se nanose na zrna peska ili šljunka, pa se tako obeležni materijal unosi u rečni tok. Uzorci se uzimaju nizvodno od mesta upuštanja i određuje se koncentracija (udeo obeleženih zrna u ukupnom broju zrna koja čine uzorak). Ovaj tip obeleživača nije pogodan za vrlo sitan nanos i nanos sa značajnim sadržajem glinovitih čestica.

Vadjenje uzoraka je veoma zametan posao, što je osnovni nedostatak ove tehnike. Ako se zahvatanje obavlja grabilicom, mora se voditi računa da se materijal uzme iz površinskog sloja koji je mali u odnosu na visinu dina. Uzorci se mogu zahvatati i pomoću hvatača za vučeni nanos.

Tačnost merenja zavisi od krupnoće zrna i veličine uzorka. Razvijeno je nekoliko tipova elektronskih „brojača” za određivanje broja obeleženih zrna u uzorku, uz mogućnost razlikovanja koncentracije po frakcijama [76].

(ii) *Radioaktivni obeleživači* su radioaktivni izotopi – izvori γ -zraka, sa vremenom poluraspada od nekoliko dana do nekoliko meseci¹². Obeležavanje prirodnog materijala koji je uzet sa rečnog dna se vrši hemijskim postupkom, adsorpcijom po površini zrna. Kvalitet rezultata se povećava ako se izvrši obeležavanje frakcija različitim radioaktivnim traserima. Ponekad je pogodnije da se umesto rečnog nanosa koristi veštački materijal – drobljeno stako, u čiji hemijski sastav ulaze određeni elementi (iridijum, skandijum) koji posle ozračivanja postaju radioaktivni. Za krupan šljunčani nanos se koristi tehnika ugradjivanja radioaktivne žice, sa zatvaranjem otvora parafinom ili cementom.

Organizacija i način merenja. Stepem radioaktivnosti se meri iz broda, pri čemu se merni uređaj nalazi na brodu ili na saonicama koje brod vuče po dnu. Za merenje se koriste Gajger-Milerovi (Geiger-Mueller) i scintilacioni brojači¹³. Da bi se traser u potpunosti izmešao sa neobeležanim nanosom, merenja se obavljaju na dovoljno velikom odstojanju (nekoliko talasnih dužina dina), nizvodno od mesta ispuštanja obeleživača. Radioaktivni traseri ne iziskuju vadjenje uzoraka i u principu su efikasnije sredstvo za izučavanje kinematike vučenog nanosa od fluorescentnih trasera, ali je njihovo korišćenje skopčano sa opasnostima radioaktivnog zagađenja.

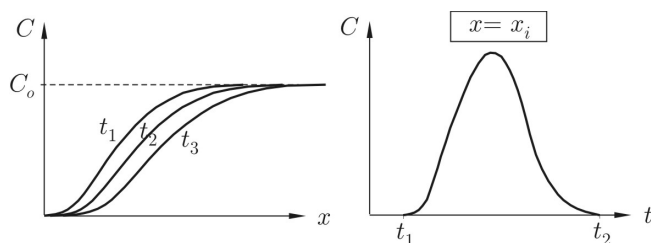
¹²Najčešće se koriste skandijum 46 (⁴⁶Sc), hrom 51 (⁵¹Cr), tantal 182 (¹⁸²Ta), iridijum 192 (¹⁹²Ir) i zlato 198 (¹⁹⁸Au), pri čemu se vodi računa o stepenu prirodne radioaktivnosti i propisima radiološke zaštite na području gde se obavljaju merenja.

¹³Metode registrovanja nuklearnih zračenja su zasnovane na jonizaciji ili pobudjivanju atoma pri prolasku zračenja kroz materiju; jonizacioni efekat čini osnovu Gajger-Milerovih brojača, dok osobina da pobudjeni atomi ispuštaju iskre ultraljubičaste ili vidljive svetlosti („scintiluju”), čini osnovu scintilacionih brojača, kod kojih se svetlosni impuls pretvara kalibracijom u intenzitet radioaktivnog zračenja.

Obrađa rezultata. Kvalitativna analiza vremenske i prostorne raspodele obeleženog nanosa obavlja se primenom *modela disperzije*¹⁴ i to najčešće pojednostavljenih modela koji daju samo opšte karakteristike transportnog procesa. Ključna pretpostavka ovih modela je *prostorna homogenost* transportnog procesa, što znači da se on odvija na isti način po celoj dužini vodotoka.

Najjednostavniji model podrazumeva *ustaljeni* pronos, koji se ne menja tokom vremena (Slika 10.23). U pokretni sloj nanosa pri dnu, čiji je jedinični pronos q_v , u referentnom profilu ($x=0$) se *kontinualno* unosi određena količina trasera, tako da je njegov jedinični pronos q_t . Posle dovoljno dugog vremena, na dovoljno velikom odstojanju od referentnog profila, ostvaruje se potpuno mešanje trasera sa prirodnim materijalom i uspostavlja ravnotežna koncentracija $C_o = q_t/q_v$. Merenjem vrednosti C_o , a na osnovu poznatog pronosa q_t , računa se nepoznata, vremenski osrednjena vrednost q_v . Opisani linijski model se može proširiti na ravanski tok, lokalnim („tačkastim”) upuštanjem obeleživača.

Metoda integracije po vremenu se bazira na kontinualnom merenju koncentracije u nekom profilu ($x = x_i$, Slika 10.23), koji je dovoljno udaljen od mesta *trenutnog* upuštanja trasera ($x = 0$), tako da je ispunjen uslov potpunog mešanja trasera sa prirodnim materijalom¹⁵.



Slika 10.23: Dijagrami koji opisuju metodu linijskog ustaljenog transporta (koja podrazumeva merenje koncentracije duž toka) i metodu integracije po vremenu (koja podrazumeva kontinualno praćenje koncentracije u jednom profilu).

Pronos vučenog nanosa se dobija integracijom:

$$q_v = \frac{(\nabla_t \cdot C)_{x=0}}{\left[\int_{t_1}^{t_2} C(t) dt \right]_{x=x_i}}, \quad (10.58)$$

¹⁴Termin „turbulentna difuzija” označava slučajno rasprostiranje čestica pod uticajem fluktuacionih brzina nosećeg fluida. Termin „turbulentna disperzija” označava rasprostiranje čestica usled kombinovanog uticaja konvekcije toka u pravcu glavnog strujanja i poprečne turbulentne difuzije, upravo na pravac glavnog strujanja.

¹⁵U zavisnosti od brzine procesa, ovaj uslov može iziskivati vrlo dug vremenski period u kome postoji mogućnost promene graničnih uslova (ulaznog protoka i količine nanosa), kada su narušene pretpostavke na kojima počiva ova metoda.

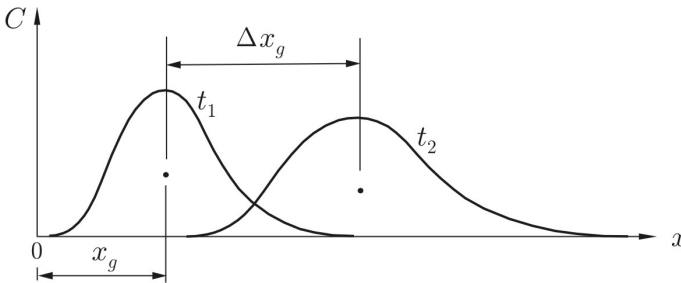
gde je \forall_t poznata zapremina unetog obeleživača (po jedinici širine korita), a C njegova koncentracija.

Metoda prostorne integracije zahteva merenje koncentracije po dužini toka, u određenim vremenskim razmacima. Trenutni položaj težišta „oblaka” obeleživača u linijskom toku (Slika 10.24), nalazi se pomoću izraza:

$$x_g = \frac{\int_0^{\infty} x \cdot C(x, t) dx}{\int_0^{\infty} C(x, t) dx}, \quad (10.59)$$

a brzina kretanja obeleženog nanosa:

$$u_o = \frac{dx_g}{dt} \approx \frac{\Delta x_g}{\Delta t}. \quad (10.60)$$



Slika 10.24: Dijagram koji opisuje metodu prostorne integracije; brzina kretanja nanosa se određuje na osnovu pomeranja težišta „oblaka” obeleženog materijala u odnosu na uzvodni referentni profil.

Jedinični pronos vučenog nanosa se određuje iz opšteg izraza: $q_v = u_o \cdot C_o \cdot \delta_o$, što znači da se mora proceniti prosečna debljina pokretnog sloja, što nije lako. Može se pretpostaviti da je ta debljina približno jednaka prosečnoj visini nabora, odnosno dina [87]. Prednost metode prostorne integracije se sastoji u tome što za određivanje odstojanja x_g , odnosno Δx_g , nisu neophodne apsolutne vrednosti koncentracije, već su dovoljne relativne vrednosti. Nedostaci ove metode su u tome što iziskuje vrlo opsežna (skupa) merenja i što se male koncentracije na velikom odstojanju ne mogu pouzdano izmeriti.

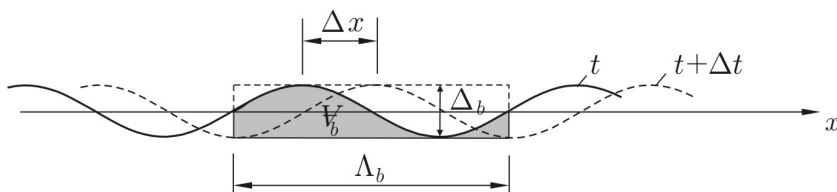
Bez obzira koja metoda integracije se primeni, određivanje pronosa vučenog nanosa u profilu: $Q_v = q_v \cdot B_v$, iziskuje procenu širine pojasa kretanja nanosa B_v pomoću traserskih merenja. Treba naglasiti da merenja pronosa vučenog nanosa moraju biti sistematska, obimna i dugotrajna, kako bi se uspostavila korelacija pronosa vučenog nanosa Q_v i protoka vode Q . Konvencionalne metode zasnovane na mehaničkim hvatačima i obeleživačke metode su komplementarne.

10.5.3.3 Specijalne metode

Od brojnih specifičnih metoda za procenu pronosa vučenog nanosa, ovde se pominju metoda merenja pomeranja dina i metoda zvučne, odnosno vizuelne detekcije.

Metoda merenja pomeranja dina. Ova metoda je primenjiva ako je korito formirano u peščanom materijalu, a zasniva se na merenju dimenzija dina i praćenju njihove migracije pomoću ehosondera. Dobra strana ove metodologije je što u potpunosti eliminiše fluktuacije pronosa po vremenu, a mana joj je što iziskuje opsežna merenja¹⁶.

■ **Primer 10.6.** Sračunati prosečni pronos vučenog nanosa, ako se pretpostavi da su dine peščani talasi sinusoidnog oblika, koji se tokom pomeranja dina ne menja. Neka je talasna dužina dina $\Lambda_b = 2$ m, amplituda $\Delta_b = 0,15$ m (Slika 10.25), a brzina pomeranja: $u_b = \Delta x / \Delta t = 0,1$ m/min (0,0017 m/s). Zapreminska masa nanosa je $\rho_z = 1,65$ t/m³.



Slika 10.25: Shematski prikaz kretanja dina uporedjenjem uzdužnih profila rečnog dna, snimljenih po unapred fiksiranoj trasi u dva vremenska preseka.

Rešenje. Perioda kretanja dina iznosi: $T_b = \Lambda_b / u_b = 2,0 / 0,0017 \approx 1200$ s. Kako je sinusna funkcija neparna, zapremina materijala po jedinici širine korita, sadržana u jednoj talasnoj dužini (šrafirana površina na Slici 10.25), iznosi: $\forall_b = \Lambda_b \cdot \Delta_b / 2 = 2,0 \cdot 0,075 = 0,15$ m³/m.

Zapreminski i maseni jedinični pronosi iznose:

$$q_v = \forall_b / T_b = 0,15 / 1200 = 0,125 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / (\text{s m}),$$

$$q_{vm} = \rho_z \cdot q_v = 1650 \cdot 0,125 \times 10^{-3} \approx 0,21 \text{ kg} / (\text{s m}).$$

Metoda zvučne detekcije. Ova metoda se zasniva na merenju učestalosti udara zrna nanosa na metalnu ploču koja je postavljena na rečno dno. Intenzitet zvučnog signala (šuma) registruje se pomoću magnetofona, a kalibracijom se dovodi u linearnu vezu sa količinom nanosa u pokretu. Proces kalibracije je vrlo složen i dugotrajan, jer je neophodno eliminisati („filtrirati“) parazitske šumove. Ova metoda nije našla širu primenu u praksi.

¹⁶ Merenje koje je ekipa iz Instituta za vodoprivredu „Jaroslav Černi“ obavila na Dunavu kod Smedereva, potvrđuje da se ova metoda može uspešno primeniti u praksi [59].

Metoda snimanja. Kada se kretanje vučenog nanosa ispiti u laboratorijskim kanalima, moguće je kontinualno snimanje pojave video kamerom. Kompjuterska obrada slike sastoji se u određivanju intenziteta svetlosti u nekom rasteru polja („piksela”). Dodeljivanju svakom polju određene brojne vrednosti, slika se pretvara u digitalni zapis. Poređenjem serija zapisa u prostoru i vremenu, određuje se broj pokrenutih zrna. Statistički se može utvrditi i brzina pomeranja zrna između pojedinih snimaka [98]. Kvalitet ovog pristupa je u tome što omogućava da se istovremeno prate i turbulentne karakteristike toka i tako prouči mehanizam pokretanja zrna.

11

Suspendovani i ukupni nanos

Suspendovani („lebdeći“) nanos je deo rečnog nanosa koji sa vodom kao nosećim fluidom, formira suspenziju. Mehanizam održanja čestica u suspenziji obuhvata s jedne strane, uticaj gravitacionog polja koje izaziva kretanje čestica ka dnu, a s druge, uticaje turbulentnih fluktuacija, koje vraćaju čestice ka površini. Održanje suspenzije je rezultat uravnoteženog delovanja navedenih uticaja. Turbulentnost toka je dakle neophodan uslov za održanje i kretanje suspendovanog nanosa. (U laminarnom toku ne postoji suspendovanje čestica.)

Podela rečnog nanosa na „vučeni“ i „suspendovani“ (pri čemu krupnije čestice spadaju u prvu, a sitnije u drugu kategoriju), uslovnog je karaktera, jer ista čestica može biti „sitna“ u jednim, a „krupna“ u drugim uslovima. To naročito važi za oblast pri dnu, gde podela nanosa nije jasno izražena i gde se čestice, u zavisnosti od trenutnih hidrauličkih uslova, kreću u vidu suspendovanog ili vučenog nanosa.

Izučavanje suspendovanog nanosa je od izuzetnog značaja, jer je njegov udeo u ukupnoj količini nanosa dominantan. Na primer, 90% ukupnog nanosa Velike Morave otpada na suspendovani nanos, a u suspenziji se nadje čak 30-50% čestica iz koritiformirajućeg materijala na dnu. U Tabeli 11.1 su date prosečne godišnje količine suspendovanog nanosa na našim najvećim rekama.

Tabela 11.1: *Približne vrednosti prosečnih godišnjih količina nanosa na našim najvećim rekama (u milionima tona)*

Dunav	Sava	Tisa	V. Morava
14	3	4	3

U analizi režima koritiformirajućeg suspendovanog nanosa (izostavlja se tranzitni nanos), postoje dva pristupa: (a) pristup zasnovan na teoriji turbulentne difuzije i (b) pristup baziran na energetskim odnosima. U ovom poglavlju biće razmotrena oba pristupa, pri čemu se onaj prvi zasniva na fundamentalnim postavkama mehanike fluida i teorije graničnog sloja. Prikazaće se metode proračuna i merenja pronosa suspendovanog nanosa.

11.1 Pronos suspendovanih čestica turbulentnom difuzijom

11.1.1 Turbulentna struktura rečnih tokova

Režim suspendovanog nanosa presudno zavisi od turbulentne strukture toka. Turbulencija je vrtložno kretanje fluida koje pri visokim vrednostima Reynoldsovog broja sadrži široki spektar veličina vrtloga i odgovarajućih fluktuacionih frekvencija. Najveći vrtlozi, kojima odgovaraju nisko frekventne fluktuacije, određeni su graničnim uslovima i njihova veličina ima razmere strujne oblasti. Veličina najmanjih vrtloga, kojima odgovaraju visoko frekventne fluktuacije, zavisi od viskoznosti fluida. Veliki vrtlozi crpu kinetičku energiju glavnog (osrednjenog) toka sa kojim se kreću. Ta energija se delom utroši na trenje i transformiše u toplotu, a delom za formiranje novih, manjih vrtloga, sve dok se posredstvom viskoznosti i taj deo ne transformiše u toplotu [63]. Proces energetske disipacije od većih vrtloga ka manjim, naziva se „energetska kaskada“.

Skalarne veličine, kao što su na primer koncentracija materije i toplota, prenose se konvekcijom glavnog toka (vremenski osrednjenom brzinom) i turbulentnom difuzijom – posredstvom fluktuacionih brzina.

11.1.2 Osnovne pretpostavke u teoriji turbulentne difuzije

Prva pretpostavka je da se na rečni tok može primeniti *model dvofaznog kontinuuma*. Radi se o dvofaznoj fluidnoj sredini u kojoj su tečna i čvrsta faza istovremeno prisutne u svakoj elementarnoj zapremini, što znači da su obe faze *neprekidno* rasporedjene u prostoru. To u prirodi nije realno, jer se u istoj tački ne mogu jednovremeno naći fluidni delić i zrno nanosa, ali ako se „tačka“ shvati kao elementarna zapremina u kojoj su sve veličine *osrednjene*, model dvofaznog kontinuuma omogućava da se formulišu osnovni zakoni održanja u diferencijalnom obliku.

Druga pretpostavka je da su koncentracije suspendovanog nanosa u aluvijalnim tokovima relativno *male*. Zapreminski udeo čvrste materije u ukupnoj zapremini se naziva „zapreminska koncentracija“ C . Udeo tečne faze je $(1 - C)$. Zapreminska koncentracija je bezdimenziona veličina, a može se iskazati u procentima. Veličina $C_m = \rho_s \cdot C$ predstavlja masenu koncentraciju [kg/m^3], a $C_t = g \cdot \rho_s \cdot C$ - težinsku koncentraciju [N/m^3]. Shodno modelu kontinuuma, pretpostavlja se da je funkcija koncentracije neprekidna u prostoru i vremenu.

U aluvijalnim tokovima se najveće koncentracije suspendovanog nanosa kreću u granicama od $3 \div 6 \%$ ¹, a prosečne vrednosti su obično ispod 1%. Na primer, prosečna koncentracija u Dunavu iznosi oko 0,04% ($1 \text{ kg}/\text{m}^3$), a u Velikoj Moravi, $0,2 \div 0,3\%$ ($5 \div 10 \text{ kg}/\text{m}^3$).

¹Poredjenja radi, najveće koncentracije čvrstih materijala (peska, rude, uglja) u hidrauličkom transportu cevima, iznose $20 \div 30 \%$.

Na osnovu koncentracije se definiše gustina *mešavine* nanosa i vode:

$$\rho_m = \rho_s C + \rho(1 - C) = \rho + (\rho_s - \rho) C. \quad (11.1)$$

Tipične vrednosti za aluvijalne tokove su: $\rho_m = 1,05 \div 1,10 \text{ t/m}^3$. S obzirom da je usled malih koncentracija $\rho_m \approx \rho = 1 \text{ t/m}^3$, rečni tokovi se mogu svrstati u „njutnovske fluide“ [63], koji se opisuju jednačinama klasične mehanike fluida.

Treća važna pretpostavka u razmatranju suspendovanog nanosa je da su čestice *sitne*. To znači da su u potpunosti integrisane u turbulentnu strukturu toka, da prate pulzaciona kretanja toka i svojim prisustvom ne utiču na njegove hidrodinamičke karakteristike. Čestice se mogu smatrati „sitnim“ ako se nalaze u Stoksovoj oblasti brzine tonjenja i ako je: $W/V_* \ll 3$ [24].

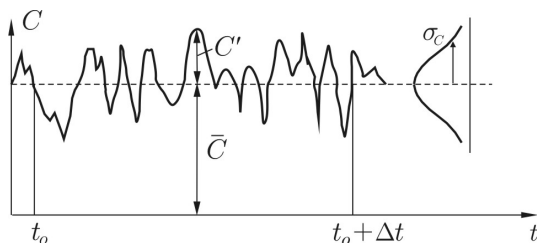
11.1.3 Koncentracija nanosa

Osnovna veličina u analitičkom razmatranju suspendovanog nanosa je koncentracija, a podela njene trenutne vrednosti na vremenski osrednjenu i fluktuacionu komponentu:

$$C = \bar{C} + C', \quad (11.2)$$

$$\bar{C} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_o}^{t_o + \Delta t} C(t) dt. \quad (11.3)$$

prikazana je na Slici 11.1.



Slika 11.1: Trenutna koncentracija u proizvoljnoj tački strujnog polja je zbir vremenski osrednjene koncentracije \bar{C} i fluktuacione koncentracije C' . Uočava se analogija sa podelom trenutne brzine (tačka 2.2, Slika 2.3).

Statistički pokazatelji intenziteta fluktuacija su varijansa:

$$\sigma_C^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_o}^{t_o + \Delta t} (C' - \bar{C}')^2 dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_o}^{t_o + \Delta t} C'^2 dt = \overline{C'^2} \quad (11.4)$$

i standardna devijacija $\sigma_C = \sqrt{\overline{C'^2}}$.

11.1.4 Rejnoldsova analogija

Pronos („transport“) koncentracije turbulentnom difuzijom u vertikalnom pravcu definiše se preko veličine $\overline{C'w'}$, gde je w' – vertikalna fluktuaciona komponenta brzine². Imajući u vidu da su čestice nanosa jako sitne, realno je smatrati da fluktuacije $\pm w'$ „prate“ fluktuacije $\pm C'$. To znači da su veličine C' i w' korelisane, pri čemu je po definiciji koeficijent korelacije:

$$\beta_2 = \frac{\sigma_{Cw}^2}{\sigma_C \cdot \sigma_w} = \frac{\overline{C'w'}}{\sqrt{\overline{C'^2}} \cdot \sqrt{\overline{w'^2}}}. \quad (11.5)$$

Usvajajući Prandtlov model dužine mešanja, može se staviti da je:

$$\sigma_C = \sqrt{\overline{C'^2}} = l_2 \left| \frac{d\overline{C}}{dz} \right|, \quad (11.6)$$

gde je l_2 – dužina mešanja suspendovanih čestica, a $d\overline{C}/dz$ – gradijent vremenski osrednjene koncentracije u vertikalnom pravcu.

Kombinacijom izraza (11.5) i (11.6), definiše se kovarijansa $\overline{C'w'}$ koja predstavlja transport koncentracije turbulentnom difuzijom:

$$\overline{C'w'} = \underbrace{-|\beta_2| \cdot l_2 \cdot \sigma_w}_{-\varepsilon_s} \cdot \frac{d\overline{C}}{dz}. \quad (11.7)$$

Veličina ε_s predstavlja *difuzioni koeficijent nanosa*, ili *koeficijent mešanja* čvrstih čestica. Negativan znak ukazuje na to da je transport turbulencijom usmeren suprotno gradijentu vremenski osrednjene koncentracije. Kao što će se nešto kasnije pokazati, koncentracija opada od dna ka površini, tako da proces turbulentne difuzije deluje u smeru povećanja koncentracije od donjih slojeva pri dnu (gde postoji „višak“ koncentracije), ka gornjim slojevima pri površini (gde postoji „manjak“ koncentracije).

Upoređenjem izraza (11.7) i (2.22), može se konstatovati njihova sličnost, zbog koje se za izraz (11.7) kaže da predstavlja „Rejnoldsovu analogiju“. Odnos koeficijenta mešanja na osnovu navedenih relacija daje:

$$\frac{\varepsilon_s}{\nu_t} = \frac{|\beta_2|}{|\beta_1|} = \beta, \quad (11.8)$$

²Ovo proizilazi iz osrednjavanja po vremenu:

$$\overline{Cw} = \overline{(\overline{C} + C')(\overline{w} + w')} = \overline{C\overline{w}} + \overline{C'w} + \overline{\overline{C}w'} + \overline{C'w'} = \overline{C'w'}.$$

odnosno,

$$\varepsilon_s = \beta \cdot \nu_t, \quad (11.9)$$

što ukazuje na proporcionalnost difuzionih koeficijenata, koja proizilazi iz Rejnoldsove analogije.

11.1.5 Raspored difuzionog koeficijenta za nanos

Na osnovu relacija (11.9) i (2.57) proizilazi da logaritamskom rasporedu brzine i linearnom rasporedu tangencijalnog napona odgovara parabolični raspored difuzionog koeficijenta za nanos:

$$\frac{\varepsilon_s}{\beta \cdot \kappa \cdot u_* \cdot h} = \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right) = \eta(1 - \eta), \quad (11.10)$$

čiji je grafički prikaz sličan onom na Slici 2.15.

Nedostatak paraboličnog rasporeda je da daje nultu koncentraciju na slobodnoj površini. Zato se uvode modifikovani rasporedi navedeni u tački 2.12, u koje treba uvesti korekcionni parametar β . Međutim, zbog nedostatka merenja na osnovu kojih bi se kalibrisala vrednost ovog parametra, obično se usvaja $\beta = 1$.

11.2 Jednačina održanja mase suspendovanog nanosa

Imajući u vidu polazne pretpostavke, mogu se za elementarnu zapreminu dvofaznog turbulentnog toka napisati jednačine održanja mase, količine kretanja i energije. Jednačine napisane za mešavinu su vrlo komplikovane i ne dovode do inženjerski upotrebljivih rešenja. Jednostavniji pristup je da se ove jednačine formulišu posebno za tečnu i čvrstu fazu, pri čemu je za praktičnu primenu dovoljno razmotriti zakone održanja mase:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(1 - C)] + \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho(1 - C)u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (11.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s C) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_s C u_{si}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (11.12)$$

U navedenim izrazima su promenljive: C – zapreminska koncentracija, u_i – lokalna brzina vode i u_{si} – lokalna brzina čestica nanosa u pravcima $i=1,2,3$. Gustine vode ρ i nanosa ρ_s su konstante i nadalje se mogu izostaviti.

Ponavljjanje indeksa u izrazima (11.11) i (11.12) znači po konvenciji sabiranje.

Uvodeći poddelu trenutne brzine i koncentracije na vremenski osrednjene i fluktuacione komponente:

$$u = \bar{u} + u'; \quad u_s = \bar{u}_s + u'_s; \quad C = \bar{C} + C' \quad (11.13)$$

i primenjujući pravila osrednjavanja [63], mogu se izvesti vremenski osrednjene, Rejnoldsove jednačine održanja mase za vodu i nanos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - \bar{C}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(1 - \bar{C}) \bar{u}_i - \overline{u'_i C'} \right] = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (11.14)$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{C} \cdot \bar{u}_{si} + \overline{u'_{si} C'} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (11.15)$$

Konvektivni članovi u jednačini (11.15) predstavljaju pronos suspendovanih čestica u jednici vremena osrednjenim strujanjem i turbulentnim pulzacijama (difuzijom).

Sabiranjem jednačina (11.14) i (11.15) otpada član $\partial \bar{C} / \partial t$ i dobija se izraz:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\bar{C} (\bar{u}_{si} - \bar{u}_i) + \bar{u}_i \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u'_{si} C'} - \overline{u'_i C'}) = 0. \quad (11.16)$$

Iz pretpostavke o sitnim česticama i malim koncentracijama sledi zaključak da čestice u potpunosti prate pulzaciona kretanja fluida: $\overline{u'_{si} C'} = \overline{u'_i C'}$. Medjutim, njihova srednja brzina se razlikuje od brzine fluida: $\bar{u}_{si} - \bar{u}_i = \bar{W}_i$, gde je \bar{W}_i – relativna brzina čestica u odnosu na fluid. Kako od zapreminskih sila deluje samo težina, relativna brzina se javlja u vertikalnom pravcu $i=3$ i može se, s obzirom na male koncentracije, smatrati da je jednaka brzini neometanog taloženja usamljene čestice W . Dakle, komponente brzine čestica u horizontalnoj ravni ($i = 1, 2$) jednake su odgovarajućim komponentama brzine vode, a komponenta u vertikalnom pravcu ($i=3$) zavisi od brzine taloženja:

$$\bar{u}_{si} = \bar{u}_i - \delta_i \cdot W, \quad (11.17)$$

gde je Kronekerov simbol:

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \text{za } i = 1, 2 \\ 1 & \text{za } i = 3. \end{cases} \quad (11.18)$$

Posledica uvedenih pretpostavki je da se jednačina kontinuiteta (11.16) svodi na jednostavan oblik:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_3} (W \bar{C}) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (11.19)$$

Imajući u vidu izraze (11.17) i (11.19), jednačina kontinuiteta za nanos (11.15) se može dovesti na oblik:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} - (1 + \bar{C}) \frac{\partial(\bar{C}W)}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u'_{si}C'}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (11.20)$$

a s obzirom na male koncentracije $\bar{C} \ll 1$, sledi:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} - W \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u'_{si}C'}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (11.21)$$

Primenom Businesskovog koncepta, odnosno Rejnoldsove analogije, može se uvesti „model turbulencije” u obliku:

$$\overline{u'_{si}C'} = -\varepsilon_{s(i)} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i}, \quad (11.22)$$

gde je ε_s – kinematički difuzioni koeficijent za nanos [m^2/s], čija vrednost zavisi od intenziteta turbulencije. Ovaj parametar je vektorska veličina, ali je indeks koji označava pravac u zagradi da se ne bi primenilo pravilo po kome ponavljanje indeksa znači sabiranje. Konačno je:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} - W \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{s(i)} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (11.23)$$

11.3 Raspored koncentracije u stabilnoj suspenziji

U opštem slučaju analitičko rešenje jednačine (11.23) ne postoji. Približno numeričko rešenje je moguće ako je poznat raspored brzine $u_i(x_i)$ i raspored difuzionog koeficijenta $\varepsilon_{si}(x_i)$ i ako su zadati odgovarajući granični uslovi. Problem postaje jednostavniji ako se fenomen razmatra u *vertikalnoj ravni* (1,3) ili (x, z) , pri čemu je prelaskom na nove oznake:

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= z, \\ u_1 &= u, & u_2 &= v = 0, & u_3 &= w = 0, \\ \varepsilon_{s1} &= \varepsilon_{sx}, & \varepsilon_{s2} &= \varepsilon_{sy} = 0, & \varepsilon_{s3} &= \varepsilon_{sz}. \end{aligned}$$

Ako se zanemari difuzija u pravcu toka: $\varepsilon_{sx}=0$, ostaje samo koeficijent $\varepsilon_{sz} = \varepsilon_s(z)$. Ako se još pretpostavi da je tečenje ustaljeno: $\partial()/\partial t = 0$, jednačina (11.23), biva značajno uprošćena³:

$$\tilde{u} \frac{\partial C}{\partial x} - W \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_s(z) \frac{\partial C}{\partial z} \right). \quad (11.24)$$

³Nadalje se izostavlja simbol vremenskog osrednjavanja.

Radi se o „konvekciono-difuzionoj” diferencijalnoj jednačini paraboličnog tipa, koja se rešava numerički po $C = C(x, z)$ za poznato polje brzine $\tilde{u} = \tilde{u}(x)$ i poznatu vrednost brzine taloženja W , uz sledeće granične uslove:

(a) U ulaznom profilu posmatrane deonice ($x = x_o$) zadaje se raspored koncentracije po dubini $C(x_o, z)$;

(b) Neto fluks⁴ čvrste materije kroz površinu vode jednak je nuli:

$$\left(\varepsilon_s \frac{\partial C}{\partial z} + C W \right)_{z=h} = 0. \quad (11.25)$$

(c) Neto fluks čvrste materije na rečnom dnu jednak je:

$$\left(\varepsilon_s \frac{\partial C}{\partial z} \right)_{z=0} = S, \quad (11.26)$$

pri čemu je ovde fluks definisan na isti način kao pod (b), s tim što je na dnu $W=0$. Ako je izvorni član $S = 0$, radi se o *čistom taloženju*, a ako je $S > 0$, reč je o *taloženju sa resuspenzijom*, što znači da se čestice pod uticajem turbulentnih pulzacija podižu sa dna i ponovo vraćaju u tok. Granični uslov koji opisuje resuspenziju teško se definiše, najčešće pomoću empirijskih izraza koji uzimaju u obzir pokretni sloj vučenog nanosa [164]. Napominje se da za rešavanje paraboličnih problema nije potrebno definisanje graničnog uslova na izlaznom profilu deonice, jer taj uslov ne utiče na stanje unutar razmatrane oblasti [78].

U *ravnotežnim uslovima* pronosa, sve istaložene čestice se vraćaju u suspenziju, tako da se koncentracija ne menja duž toka $\partial C / \partial x = 0$ (nema taloženja, ni erozije), pa se problem dodatno uprošćava, jer promenljiva C postaje funkcija samo jedne (vertikalne) koordinate:

$$\frac{d}{dz} \left(\varepsilon_s \frac{dC}{dz} + W C \right) = 0. \quad (11.27)$$

Integracijom ove jednačine se dobija:

$$\varepsilon_s \frac{dC}{dz} + W C = A_1, \quad (11.28)$$

a usvajanjem vrednosti integracione konstante $A_1 = 0$ (na površini je $\varepsilon_s = 0$, $W = 0$):

$$W C = -\varepsilon_s \frac{dC}{dz}. \quad (11.29)$$

⁴Termin „fluks” označava količinu materije koja prodje kroz jediničnu površinu u jedinici vremena.

Ova jednačina opisuje slučaj *stabilne suspenzije*. Član na levoj strani predstavlja fluks čestica u vertikalnom pravcu ka dnu usled gravitacije, a član na desnoj strani (modelirani oblik veličine $\overline{u'_s C'}$), fluks čestica od dna ka površini usled turbulentne difuzije. Može se primetiti da vertikalni turbulentni transport koncentracije, zavisi od gradijenta koncentracije dC/dz . Postojanje ovog gradijenta ukazuje na neujednačenost koncentracije po vertikali. Prirodna težnja da se ona ujednači pomeraњem čestica iz oblasti veće, u oblast manje koncentracije, čini suštinu mehanizma koji održava rečni nanos u suspenziji. Jednačina (11.29) pokazuje da je u uslovima stabilne suspenzije *neto* fluks u vertikalnom pravcu jednak nuli.

Raspored koncentracije po dubini može se dobiti integracijom jednačine ravnotežnog stanja (11.29) u granicama od izabrane referentne dubine pri dnu $z = a$ u kojoj je poznata koncentracija C_a , do površine $z = h$:

$$\int_a^h \frac{1}{C} dC = -W \int_a^h \frac{1}{\varepsilon_s(z)} dz$$

$$C(z) = C_a \cdot \exp \left(-W \int_a^h \frac{1}{\varepsilon_s(z)} dz \right). \quad (11.30)$$

Funkcija (11.30) predstavlja opšti raspored koncentracije suspendovanog nanosa po dubini toka. Iz eksponencijalnog karaktera ove funkcije se vidi da koncentracija raste ka dnu (Slika 11.2).

Raspored zasnovan na logaritamskoj funkciji brzine. Kombinacijom izraza (11.10) i (11.30), dobija se raspored koncentracije:

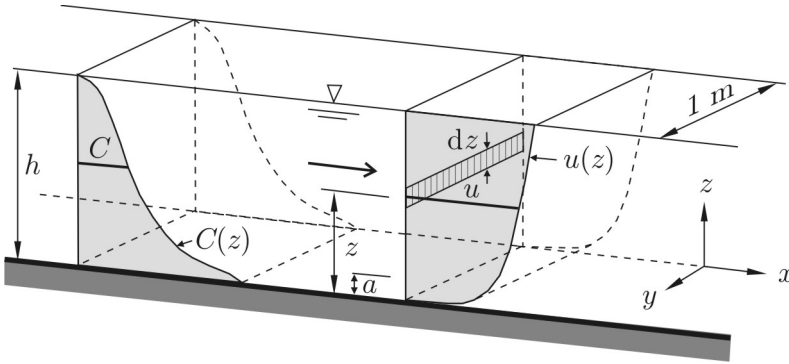
$$\frac{C(z)}{C_a} = \left(\frac{h-z}{z} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^{Z^*} \quad (11.31)$$

u kome je bezdimenzioni eksponent – „*suspension* broj”:

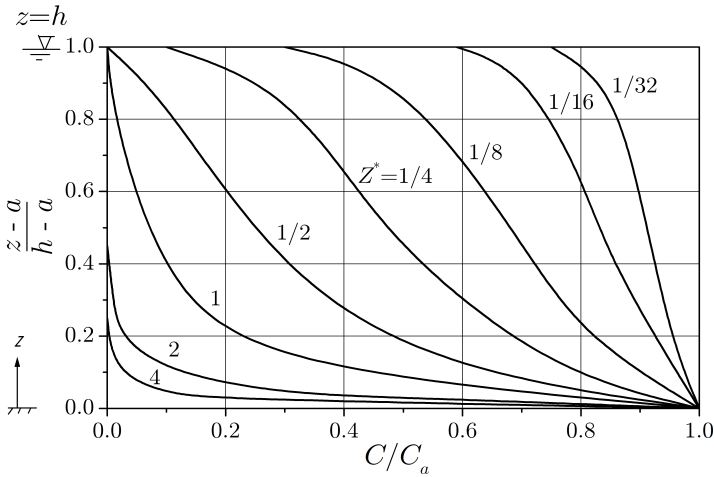
$$Z^* = \frac{W}{\beta \cdot \kappa \cdot u_*}. \quad (11.32)$$

Zavisnost (11.31), poznata kao „Rausova⁵ jednačina”, grafički je prikazana na Slici 11.3.

⁵Hunter Rouse (1912-1996), renomirani američki naučnik, jedan od pionira fundamentalnih istraživanja iz oblasti rečnog nanosa koja su pre Drugog svetskog rata započeta na Kalifornijskom univerzitetu u SAD.



Slika 11.2: Rasporedi koncentracije i brzine i referentno odstojanje



Slika 11.3: Teorijski raspored koncentracije suspendovanog nanosa po dubini toka [24, 29, 54, 146, 165]; neujednačenost ovog rasporeda se povećava sa porastom vrednosti Z^* . Za datu dubinu i nagib dna, vrednosti Z^* zavise od brzine tonjenja, odnosno krupnoće nanosa. Krupan nanos karakteriše neuniforman raspored (čestice se koncentrišu pri dnu, tok u gornjim slojevima izgleda bistar, a u donjim zamućen). Obrnuto, sitnim česticama odgovara uniforman raspored koncentracije. S druge strane, pri datoj krupnoći nanosa, vrednost parametra Z^* se smanjuje sa povećanjem vrednosti smičuće brzine u_* , odnosno nagiba dna. Zato se u strmim bujičnim vodotocima javlja skoro uniforman raspored koncentracije po dubini.

Analizom izraza (11.31) mogu se izvući dva važna zaključka:

(i) raspored koncentracije je dat u relativnom smislu, u odnosu na neku referentnu koncentraciju, što iziskuje poznavanje vrednosti te koncentracije i položaja tačke u kojoj je ona definisana;

(ii) vrednost koncentracije teži beskonačnosti sa smanjenjem odstojanja od dna, što fizički nije realno⁶; singularitet funkcije koncentracije u tački dna je direktna posledica singulariteta logaritamske funkcije brzine.

Ako se umesto paraboličnog rasporeda (11.10), za integraciju osnovne jednačine (11.30) koristi parabolično-konstantni zakon, dobija se ovakav raspored koncentracije [165, 168]:

$$\frac{C}{C_a} = \begin{cases} \left(\frac{h-z}{z} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^{Z^*} & \text{za } z/h < 0,5 \\ \left(\frac{a}{h-a} \right)^{Z^*} \exp[-4 Z^* (z/h - 1/2)] & \text{za } z/h \geq 0,5. \end{cases} \quad (11.33)$$

Pri istim vrednostima računskih parametara, ovaj profil koncentracije se razlikuje od onog po formuli (11.31) samo u oblasti neposredno ispod slobodne površine toka, gde daje vrednosti koncentracije veće od nule.

Raspored zasnovan na stepenoj funkciji brzine. Primenjujući isti postupak kao u slučaju Rausove jednačine, ali sa rasporedom brzine u obliku stepene funkcije (2.51) i rasporedom difuzionog koeficijenta ε_s koji je analogan funkciji (2.61):

$$\frac{\varepsilon_s}{\beta \kappa u_* h} = \frac{m^2}{m+1} \cdot \frac{u_*}{\tilde{u}} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(\frac{z}{h}\right)^{1-\frac{1}{m}} = \frac{m^2}{m+1} \cdot \frac{u_*}{\tilde{u}} (1-\eta) \eta^{1-\frac{1}{m}} \quad (11.34)$$

dolazi se složenijim izvodenjem (razvojem u red) do rasporeda u obliku:

$$\frac{C(\eta)}{C_a} = \exp \left\{ -Z^* \eta^{1/m} [m - \ln(1-\eta)] \right\}, \quad (11.35)$$

gde suspensioni broj ima oblik:

$$Z^* = \left(\frac{m+1}{m} \right) \frac{W}{\beta \cdot \kappa \cdot u_*}. \quad (11.36)$$

⁶Pod pretpostavkom „tesno pakovanih” sfernih zrna peščanog nanosa sa vrednošću poroznosti oko 0,35, maksimalna vrednost koncentracije iznosi $C=0,65$.

Ovaj raspored omogućava da se izbegne singularitet u tački dna i fizička nelo-
gičnost beskonačne koncentracije pri dnu⁷.

Odredjivanje vrednosti suspenzionog broja. Parametar Z^* je pokazatelj
transportnog kapaciteta vodotoka i energije koju tok troši na održanje suspenzije.
Vrednost Z^* je proporcionalna vrednosti odnosa W/u_* , koja se, kao što je pokazano
u tački 9.4, koristi kao kriterijum stabilnosti suspenzije. U primeru koji sledi opisan
je postupak odredjivanja vrednosti parametra Z^* .

■ **Primer 11.1.** U Tabeli 11.2 su dati merni podaci o rasporedu po vertikali
brzine i koncentracije suspendovanog nanosa [100]. Vrednosti dubine, nagiba linije
energije i temperature vode su: $h=2,4$ m, $I_e=0,00012$ i $T = 7^\circ\text{C}$. Krupnoća nanosa
je u opsegu $0,074\div 0,105$ mm. Odrediti vrednost Z^* .

Tabela 11.2: Izmerene brzine i koncentracije po dubini toka u primeru 11.1.

z [m]:	0,21	0,27	0,37	0,43	0,52	0,67	0,80	0,88
u [m/s]:	1,31	1,37	1,41	1,45	1,47	1,56	1,62	1,65
C_m [mg/l]:	411	380	305	299	277	238	217	-
$C \times 10^{-4}$ [-]:	1,551	1,434	1,151	1,128	1,045	0,898	0,819	-

(nastavak)

z [m]:	0,98	1,04	1,13	1,28	1,46	1,77	2,07	2,40
u [m/s]:	1,65	1,65	1,68	1,71	1,71	1,74	1,81	-
C_m [mg/l]:	196	-	184	-	148	130	-	-
$C \times 10^{-4}$ [-]:	0,740	-	0,694	-	0,558	0,491	-	-

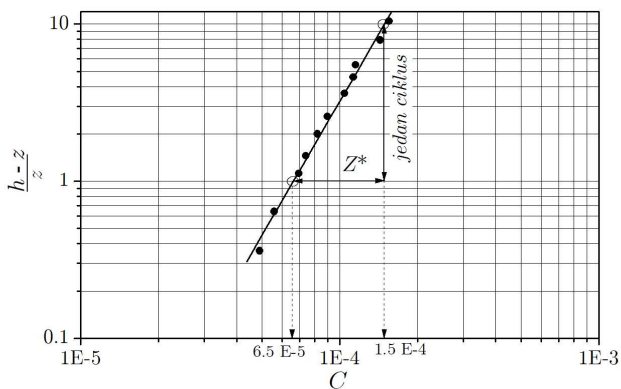
Rešenje. Na osnovu Rausove jednačine proizilazi: $C(z) \propto [(h-z)/z]^{Z^*}$, pa se
logaritmovanjem dobija:

$$Z^* = \frac{\log C}{\log\left(\frac{h-z}{z}\right)}. \quad (11.37)$$

Oдавde sledi da parametar Z^* predstavlja nagib regresione prave na dijagramu
koji se crta u logaritamskoj podeli (Slika 11.4):

$$Z^* = \frac{\log(1,5 \times 10^{-4}) - \log(6,5 \times 10^{-5})}{\log 10,0 - \log 1,0} = 0,36.$$

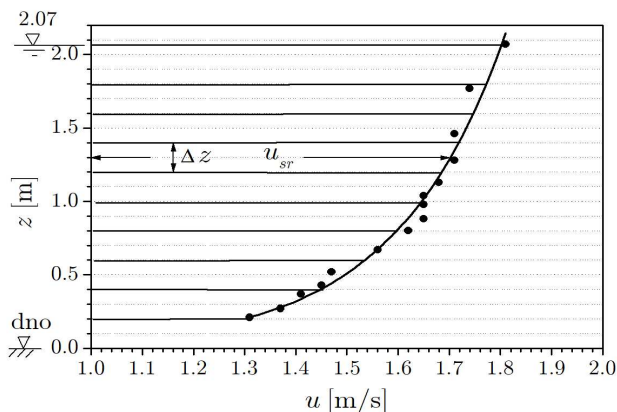
⁷Uprskos prednostima, navedeni raspored koncentracije, koga su izveli naučnici fon Karman
(von Kármán) i Ippen (Ippen) u isto vreme kad je Raus izveo svoj raspored, nije šire prihvaćen
zbog komplikovanosti izvodenja i integracije profila koncentracije po dubini.



Slika 11.4: Zavisnost izmerene koncentracije od relativne dubine toka; određivanje nagiba težišne prave je lako ako se po vertikali koristi jedan logaritamski ciklus.

Vrednost Z^* se može proveriti pomoću izraza (11.32), ako se veličine u_* , κ i W sračunaju na osnovu mernih podataka. Pretpostaviće se da je $\beta=1$. Vrednost smičuće brzine je: $u_* = \sqrt{9,81 \cdot 2,4 \cdot 0,00012} = 0,053$ m/s.

Vrednost parametra κ se određuje pomoću izmerenog profila brzine koji je grafički predstavljen u aritmetičkoj i logaritamskoj podeli na Slikama 11.5 i 11.6. Linearna zavisnost na ovoj drugoj slici ukazuje da se izmereni profil brzine može aproksimirati logaritamskim zakonom. Srednja brzina po dubini se računa numeričkom integracijom pomoću trapeznog pravila, kao što je prikazano u Tabeli 11.3. Rezultat je: $\tilde{u} = 3,075/1,87 = 1,64$ m/s. Slična vrednost se očitava sa dijagrama na Slici 11.6 za odstoianie $z/h=0.4$ koje teorijski odgovara srednjoj brzini.



Slika 11.5: Izmereni raspored brzine i podela dijagrama na intervale u cilju numeričke integracije trapezним pravilom.

Tabela 11.3: Integracija brzine trapeznim pravilom.

interval [m]	Δz [m]	u_{sr} [m/s]	$\Delta z \cdot u_{sr}$ [m ² /s]
0,2÷0,4	0,2	1,39	0,278
0,4÷0,6	0,2	1,50	0,300
0,6÷0,8	0,2	1,57	0,314
0,8÷1,0	0,2	1,62	0,324
1,0÷1,2	0,2	1,67	0,334
1,2÷1,4	0,2	1,71	0,342
1,4÷1,6	0,2	1,74	0,348
1,6÷1,8	0,2	1,76	0,352
1,8÷2,07	0,27	1,79	0,483
Σ :			3,075

Ako se poznate brzine u izabranim tačkama „1” i „2” na odstojanjima z_1 i z_2 od dna, izraze pomoću logaritamske funkcije (2.47), pa oduzmu, dobija se izraz iz koga se računa vrednost κ :

$$u_2 - u_1 = u(z_2) - u(z_1) = \frac{2,3 u_*}{\kappa} \cdot \log \left(\frac{z_2}{z_1} \right).$$

Za $u_1 = u(0,3) = 1,4$ m/s i $u_2 = u(2,0) = 1,80$ m/s, dobija se: $\kappa = 0,25$. Do istog rešenja se moglo doći i očitavanjem nagiba prave na Slici 11.6, koji je jednak:

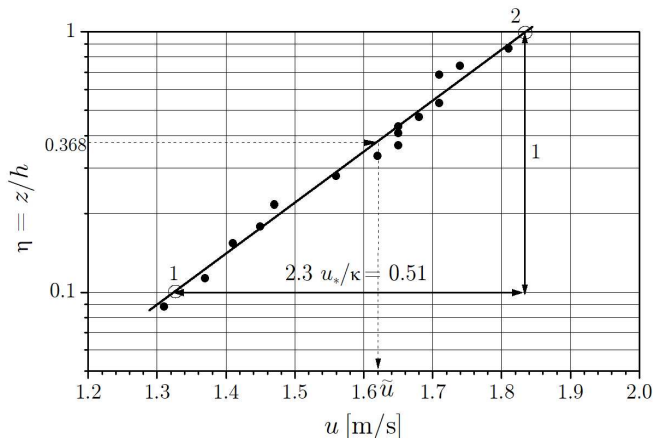
$$\frac{2,3 u_*}{\kappa} = \frac{u_2 - u_1}{\log \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)}. \quad (11.38)$$

Može se primetiti da je ranije vrednost $\kappa = 0,4$ smatrana univerzalnom konstantom. Medjutim, kod tokova sa značajnom koncentracijom suspendovanog nanosa, fon Karmanova „konstanta” se može tretirati kao kalibracioni parametar, o čemu će kasnije biti više reči. Kalibracijom se obično dobijaju vrednosti $\kappa = 0,2 \div 0,4$.

Brzina taloženja W se računa za zrno prečnika: $d = \sqrt{0,074 \cdot 0,105} = 0,09$ mm (geometrijska sredina). Pretpostavljajući Stoksovu oblast i vrednost kinematičke viskoznosti $\nu(7^\circ\text{C}) = 1,45 \times 10^{-6}$, dobija se brzina tonjenja: $W = 0,0048$ m/s. ($\text{Re}_W = 0,29 < 1$.) Konačno je:

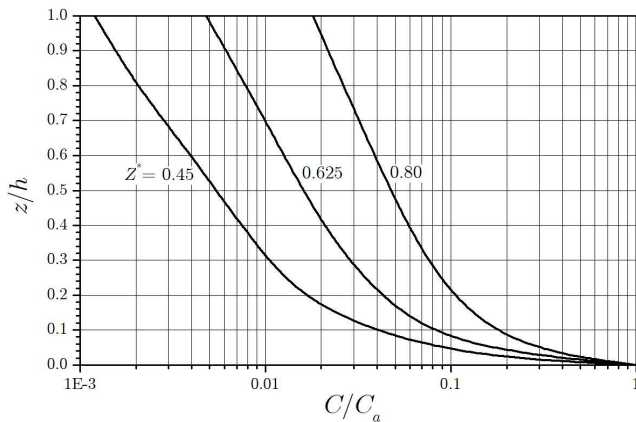
$$Z^* = \frac{W}{\kappa \cdot u_*} = \frac{0,0048}{0,25 \cdot 0,053} = 0,36.$$

Ova vrednost ($\approx 1/2,8$) ukazuje da je izmereni profil koncentracije u oblasti srednje uniformnih rasporeda prikazanih na Slici 11.3.



Slika 11.6: Aproximacija izmerenog rasporeda brzine logaritamskim rasporedom; za određivanje nagiba prave koristi se jedan logaritamski ciklus.

Greške u proceni veličina u_* , κ , W i β (koje su reda veličine najmanje $\pm 25\%$ [168]), značajno utiču na vrednost Z^* , a time i na profil koncentracije (Slika 11.7). Ove greške nastaju usled složene turbulentne strukture pri dnu (naróito ako su izražene nanosne formacije), teškoća u određivanju nagiba I_e , kao i nedovoljno poznatog mehanizma taloženja u taluóoi vodi.



Slika 11.7: Uticaj greške u proceni vrednosti parametra Z^* na profil koncentracije. Može se konstatovati da razlika od oko 25% u vrednosti Z^* ($Z^* = 0,625 \pm 0,175$) daje na sredini dubine razlike u vrednostima koncentracije koje se mere faktorom 3 [168].

Napominje se da su teorijski rasporedi koncentracije definisani isključivo na osnovu kinematičkih relacija; dinamički odnosi (sila) uvode se posredno preko graničnih uslova, referentne koncentracije C_a i oblika funkcije $\varepsilon_s(z)$.

11.4 Referentno odstojanje i referentna koncentracija

Izražavanje koncentracije u relativnom smislu (u odnosu na poznatu, referentnu koncentraciju), formalno ne nameće bilo kakvo ograničenje u pogledu izbora referentnog odstojanja i referentne koncentracije. U principu, to može biti bilo koje odstojanje i njemu odgovarajuća poznata koncentracija. Međutim, sa fizičkog stanovišta, izbor referentnog odstojanja nije proizvoljan. Izborom debljine pokretnog sloja na dnu za referentno odstojanje: $a = \delta_o$ i srednje koncentracije u ovom sloju za referentnu koncentraciju: $C_a = C_o$, uspostavlja se neophodna veza između vučenog i suspendovanog nanosa. To međutim, u praksi nije jednostavno. Merenje koncentracije pri dnu je vrlo teško. S druge strane, računski procena na osnovu zavisnosti:

$$C_a = C_o = \frac{q_v}{\delta_o \cdot u_o} \quad (11.39)$$

iziskuje poznavanje pronosa vučenog nanosa i primenu raznih empirijskih izraza za procenu veličina δ_o i u_o , što ne garantuje pouzdanost rezultata. Jedini ispravan pristup je da se račun u što većoj meri osloni na merenja, što je uostalom opšta preporuka kada je u pitanju rečni nanos.

Evo nekoliko predloga za definisanje referentnog odstojanja.

- (i) Iskustveni kriterijum [168]: $a = (0,01 \div 0,05) h$.
- (ii) Kriterijum Ajnštajna [44, 54]: $a = \delta_o \approx 2 d$, gde je δ_o - prosečna debljina pokretnog sloja dna, a d - merodavna krupnoća vučenog nanosa.
- (iii) Kriterijum fan Rejna [164]: $a = \delta_o \approx 10 d_{50}$.
- (iv) Referentno odstojanje je ono na kome logaritamski raspored brzine daje nultu brzinu [54]; iz (2.47) se, za $z = a$ i $u(a) = 0$, lako izvodi izraz za bezdimenziono referentno odstojanje:

$$\eta_a = \frac{a}{h} = \exp \left(-\frac{\kappa \tilde{u}}{u_*} - 1 \right). \quad (11.40)$$

- (v) Odstojanje a se dobija na osnovu dve poznate vrednosti koncentracije, od kojih je jedna izmerena na sredini dubine $C_{h/2}$, a druga, na samom dnu C_{\max} ; iz Rausovog teorijskog rasporeda, izraženog preko relativnog odstojanja $\eta = z/h$:

$$\frac{C(\eta)}{C(\eta_a)} = \left(\frac{1-\eta}{\eta} \cdot \frac{\eta_a}{1-\eta_a} \right)^{Z^*}, \quad (11.41)$$

dobija se za $\eta=1/2$: $C(1/2) = C_{h/2}$ i $C(\eta_a) = C_{\max}$:

$$\frac{C_{h/2}}{C_{\max}} = \left(\frac{\eta_a}{1 - \eta_a} \right)^{Z^*}, \quad (11.42)$$

odakle, imajući u vidu da je $\eta_a \ll 1$, sledi [54]:

$$\eta_a = \frac{a}{h} = \left(\frac{C_{h/2}}{C_{\max}} \right)^{1/Z^*}. \quad (11.43)$$

11.5 Proračun pronosa suspendovanog nanosa

Jedinični pronos suspendovanog nanosa se dobija integracijom funkcije $C(z) \cdot u(z)$ po dubini toka:

$$q_s = \int_a^h C(z) \cdot u(z) dz \quad [\text{m}^3/(\text{s m})]. \quad (11.44)$$

Kao kod vučenog nanosa, jedinični pronos se može iskazati u raznim jedinicama, u zavisnosti od toga kako je definisana koncentracija i da li je reč o suvom ili vlažnom materijalu. Ukupni pronos u profilu se dobija integracijom jediničnog pronosa po širini korita.

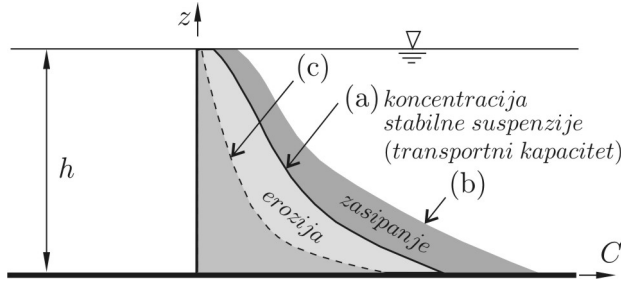
Ako se raspolože *izmerenim* profilima brzine i koncentracije po dubini, jedinični pronos se dobija numeričkom integracijom.

Ako se koriste teorijske funkcije $C(z)$ kao što su na primer (11.31) ili (11.33), rezultat integracije predstavlja transportni kapacitet vodotoka za suspendovani nanos. To je pronos u ravnotežnim uslovima (Slika 11.8), kada nema usputnog taloženja ili erozije (stabilna suspenzija). U zavisnosti od oblika teorijskih funkcija $C(z)$ i $u(z)$ pod integralom (11.44), razvijeno je nekoliko postupaka proračuna transportnog kapaciteta za suspendovani nanos.

11.5.1 Integracija izmerenih profila brzine i koncentracije

Tačnost proračuna u ovom slučaju zavisi od tačnosti merenja brzine i koncentracije, kao i tačnosti numeričke metode koja se koristi za rešavanje jednačine (11.44). Na tačnost merenja najviše utiče oblast pri dnu iz koje se nanosom „prihranjuju” gornji slojevi toka.

■ **Primer 11.2.** Sračunati jedinični pronos suspendovanog nanosa koristeći podatke iz primera 11.1.



Slika 11.8: Profili koncentracije u ravnotežnim i neravnotežnim uslovima: (a) dotok nanosa sa uzvodne deonice je jednak transportnom kapacitetu (jednoliki režim, stabilna suspenzija); (b) dotok nanosa je veći od transportnog kapaciteta, „višak“ koncentracije dovodi do usputnog taloženja (nejednoliki režim, nestabilna suspenzija); (c) dotok nanosa je manji od transportnog kapaciteta, „manjak“ koncentracije se nadomešta usputnom erozijom.

Rešenje. Za primenu trapeznog pravila formira se određeni broj intervala Δz (Slika 11.5) i odrede odgovarajuće geometrijski osrednjene vrednosti koncentracije C_{sr} i brzine u_{sr} . Sumiranje parcijalnih vrednosti pronosa $\Delta q_s = C_{sr} \cdot u_{sr} \cdot \Delta z$ prikazano je u Tabeli 11.4.

Tabela 11.4: Proračun jediničnog pronosa u primeru 11.2

Interval	C_{sr} [kg/m ³]	u_{sr} [m/s]	$C_{sr} \cdot u_{sr}$ [kg/(m ² s)]	Δz [m]	Δq_{sm} [kg/(s m)]
0,21÷0,37	0,354	1,36	0,481	0,16	0,077
0,37÷0,52	0,291	1,44	0,419	0,15	0,063
0,52÷0,80	0,245	1,54	0,377	0,28	0,106
0,80÷0,98	0,206	1,63	0,336	0,18	0,060
0,98÷1,13	0,190	1,66	0,315	0,15	0,047
1,13÷1,46	0,165	1,70	0,281	0,33	0,093
1,46÷1,77	0,139	1,73	0,240	0,31	0,074
Σ :				1,56	0,520

Ukupni pronos iznosi: $q_{sm}=0,520$ kg/(s m).

11.5.2 Ajnštajnova metoda i njoj srodne metode

Reč je o tradicionalnim metodama koje su zasnovane na nekom od logaritamskih zakona i na Rausovoj jednačini za raspored koncentracije. Ne postoje posebni uslovi za izbor referentnih veličina; to može biti bilo koja izmerena koncentracija po dubni toka, uključujući i koncentraciju u sloju vučenog nanosa. Metoda Ajnštajna (1950), koja sa ranije opisanom stohastičkom metodom za proračun vučenog nanosa čini celinu [44, 54, 100, 146], polazi od nekoliko pretpostavki.

(i) Raspored brzine po dubini je logaritamski, prema izrazu (2.44):

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \log \frac{z}{k_s} = 5,75 \log \left(\frac{30z}{\Delta_E} \right).$$

(ii) Raspored koncentracije je definisan jednačinom (11.31).

(iii) Referentna koncentracija se određuje merenjem na terenu, ili se definiše pomoću izraza (11.39), u kom slučaju Ajnštajn predlaže: $a = \delta_o = 2d_{50}$. (Ova pretpostavka je po drugim autorima sporna, jer može važiti samo za ravno dno, bez nanosnih formacija.)

(iv) Smičuća brzina po konceptu razdvajanja otpora obuhvata samo uticaj apsolutne rapavosti (krupnoće zrna): $u_* \equiv u'_* = \sqrt{g \cdot h' \cdot I_e}$.

(v) Usvajaju se vrednosti $\beta=1$ i $\kappa=0,4$, tako da je: $Z^* = W/(0,4 \cdot u'_*)$.

Uvodjenjem relativnih odstojanja $\eta_a = a/h$ i $\eta = z/h$, može se pokazati da se osnovna jednačina:

$$q_s = \int_a^h C_a \left(\frac{h-z}{z} \cdot \frac{a}{h-a} \right)^{Z^*} \cdot 5,75 \cdot u'_* \cdot \log \left(\frac{30z}{\Delta_E} \right) dz \quad (11.45)$$

svodi na oblik [54]:

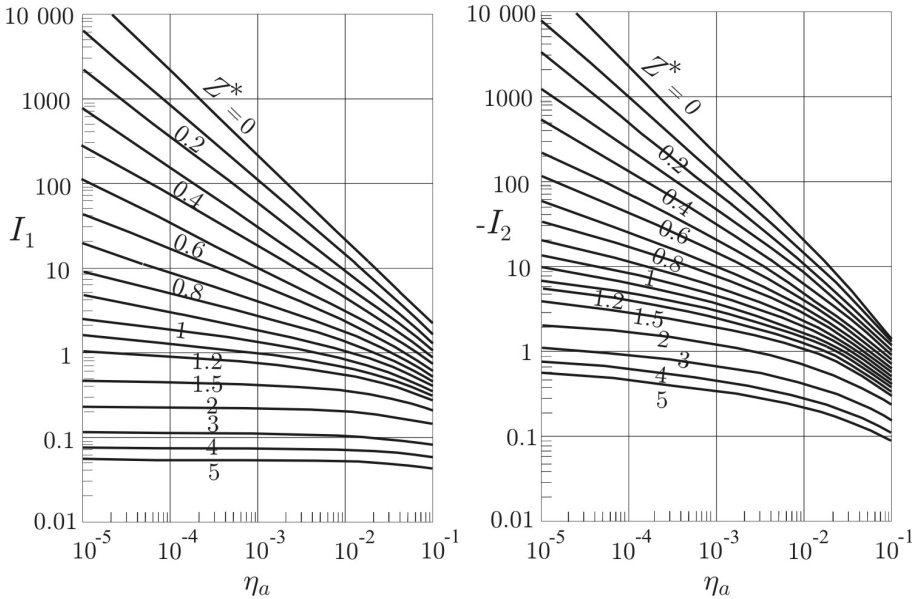
$$\begin{aligned} q_s &= \int_{\eta_a}^1 h \cdot C(\eta) \cdot u(\eta) d\eta = \\ &= 5,75 C_a u'_* h \left(\frac{\eta_a}{1-\eta_a} \right)^{Z^*} \int_{\eta_a}^1 \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^{Z^*} \log \left(\frac{30\eta}{\Delta_E/h} \right) d\eta = \\ &= 11,6 u'_* C_a a \left[2,303 \log \left(\frac{30h}{\Delta_E} \right) I_1 + I_2 \right], \end{aligned} \quad (11.46)$$

gde su pomoćne funkcije:

$$I_1 = 0,216 \frac{\eta_a^{(Z^*-1)}}{(1-\eta_a)^{Z^*}} \int_{\eta_a}^1 \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^{Z^*} d\eta \quad (11.47)$$

$$I_2 = 0,216 \frac{\eta_a^{(Z^*-1)}}{(1-\eta_a)^{Z^*}} \int_{\eta_a}^1 \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^{Z^*} \ln \eta d\eta \quad (11.48)$$

prikazane na Slici 11.9.



Slika 11.9: Pomoćni dijagrami za Ajnštajnovu metodu [44].

Jednačina (11.46) se primenjuje po frakcijama. Izmerena koncentracija na proizvoljnoj dubini toka se „raspodeljuje” na frakcije prema zastupljenosti, tako da svaka frakcija ima svoju referentnu koncentraciju:

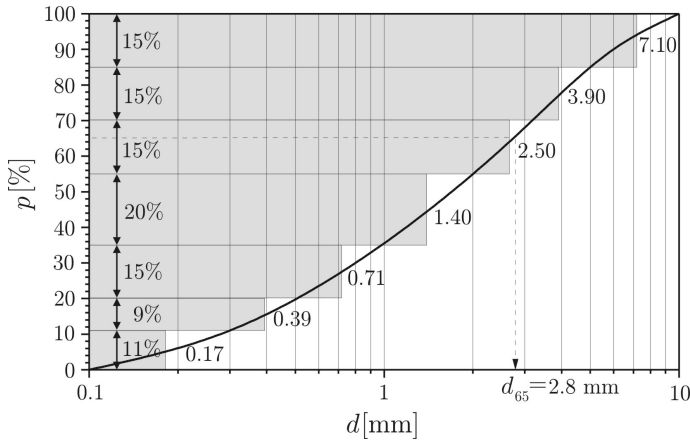
$$(C_a)_i = \frac{\Delta p_i \cdot q_v}{a \cdot u_o}, \quad (11.49)$$

gde je i – oznaka frakcije, Δp_i – njena zastupljenost, q_v – jedinični pronos svih frakcija vučenog nanosa, a – referentno odstojanje i $u_o = 11,6 u'_*$ – srednja brzina kretanja vučenog nanosa.

■ **Primer 11.3.** Sračunati pronos suspendovanog nanosa primenom Ajnštajnovе metode, ako je dubina $h = 3$ m, nagib linije energije $I_e = 0,001$, a koncentracija na referentnom odstojanju od dna $a = 10$ cm: $C_a = 40$ g/m³.

Granulometrijska kriva je prikazana na Slici 11.10. Ostali podaci: $\rho_s = 2,65$ t/m³, $\nu = 1,0 \times 10^{-6}$ m²/s.

Rešenje. Granulometrijska kriva se zamenjuje histogramom sa 7 klasa – frakcija, kao što je prikazano na Slici 11.10. Proračun po frakcijama je dat u Tabeli 11.5.



Slika 11.10: Podela granulometrijskog sastava na frakcije u primeru 11.3.

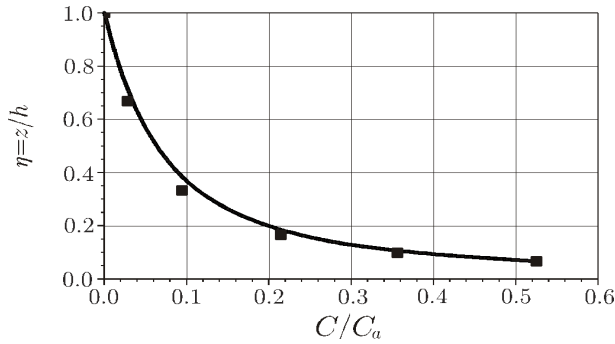
Tabela 11.5: Proračun pronosa suspendovanog nanosa po metodi Ajnštajna.

Broj frak.	frakcija [mm]	Δp [%]	d [mm]	W [cm/s]	Z^* [-]	C_a [kg/m ³]	I_1 [-]	I_2 [-]	q_s [kg/sm]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	0,1÷0,3	11	0,17	1,54	0,23	4,4	3,00	-3,5	24,0
2	0,3÷0,5	9	0,39	6	0,88	3,6	0,70	-1,5	4,0
3	0,5÷1,0	15	0,71	11	1,62	6,0	0,25	-0,6	2,4
4	1,0÷2,0	20	1,40	23	3,38	8,0	0,09	-0,25	1,1
5	2,0÷3,0	15	2,50	34	5,00	6,0	0,05	-0,16	0,4
6	3,0÷5,0	15	3,90	46	6,76	6,0	0,04	-0,11	0,3
7	5,0÷10	15	7,10	63	9,26	6,0	0,03	-0,08	0,2
Σ :		100				40,0			32,4

Objašnjenje po kolonama:

- (1), (2), (3) broj frakcije, krupnoća zrna, zastupljenost frakcije;
- (4) srednji prečnik: na primer, za frakciju br. 2: $d = \sqrt{0,3 \cdot 0,5} = 0,39$ mm;
- (5) brzina tonjenja; na primer, za $d=0,39$ mm, $G_* = 960$, $Re_w = 23$, $W = 0,06$ m/s;
- (6) vrednosti suspenzionog broja $Z^* = W/(0,4 \cdot u'_*)$ po frakcijama, pri čemu je:
 $u'_* = \sqrt{g \cdot h \cdot T_e} = \sqrt{9,81 \cdot 3,0 \cdot 0,001} = 0,17$ m/s;
- (7) referentna koncentracija frakcije, određena njenom zastupljenošću, na primer za frakciju br. 2: $C_a = 0,09 \cdot 40 = 3,6$ kg/m³; na Slici 11.11 prikazan je profil relativne koncentracije za ovu frakciju, sračunat pomoću Rausove jednačine sa $Z^* = 0,88$.
- (8)-(9) vrednosti integrala očitane sa dijagrama na Slici 11.9;
- (10) jedinični maseni pronos, sračunat pomoću izraza (11.46).

U proračunu se koriste ove vrednosti: $\delta_v = 11,6 \cdot \nu / u'_* = 0,07$ mm, $k_s = d_{65} = 2,8$ mm, $k_s / \delta_v = 40$, $X' = 1$, $\Delta_E = d_{65} = 2,8$ mm, $\eta_a = a/h = 0,033$. Ukupni pronos suspendovanog nanosa iznosi $q_s = 32,4$ kg/(s m).



Slika 11.11: Računski profil relativne koncentracije za frakciju 0,3 ÷ 0,5 mm.

* * *

U literaturi postoji nekoliko računskih postupaka koji su srodni Ajnštajnovom, a omogućavaju jednostavniji proračun. Na primer, ako se za raspored brzine uzme izraz (2.47), definisan preko relativne dubine $\eta = z/h$, biće:

$$\begin{aligned} q_s &= h \int_0^1 C(\eta) \cdot u(\eta) \, d\eta = \\ &= h \cdot C_a \int_0^1 \left(\frac{1-\eta}{\eta} \cdot \frac{\eta_a}{1-\eta_a} \right)^{Z^*} \left[\tilde{u} + \frac{u_*}{\kappa} (1 + \ln \eta) \right] \, d\eta, \end{aligned} \quad (11.50)$$

gde je $\eta_a = a/h$, a $C_a = C(\eta_a)$.

Množenjem i sredjivanjem, dolazi se do izraza u obliku:

$$\frac{q_s}{q} = C_a \left(\frac{\eta_a}{1-\eta_a} \right)^{Z^*} \left[I'_1 + \frac{u_*}{\kappa \tilde{u}} (I'_1 + I'_2) \right], \quad (11.51)$$

gde je $q = \tilde{u} \cdot h$ – jedinični protok vode, a integrali:

$$I'_1 = \int_0^1 \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^{Z^*} \, d\eta \quad (11.52)$$

$$I'_2 = \int_0^1 \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^{Z^*} \ln \eta \, d\eta. \quad (11.53)$$

Ako se referentna koncentracija uzme na polovini dubine: $C_a = C(\eta = 1/2) = C_{h/2}$, dobija se:

$$\frac{q_s}{q} = C_{h/2} \left[I'_1 + \frac{u_*}{\kappa \tilde{u}} (I'_1 + I'_2) \right]. \quad (11.54)$$

Ova jednačina pokazuje da se srednja koncentracija po dubini (q_s/q) može odrediti korekcijom koncentracije na polovini dubine toka. Za vrednosti $Z^* < 1$, integrali I'_1 i I'_2 imaju analitičko rešenje na bazi specijalnih Beta funkcija [61]:

$$I'_1 = \frac{Z^* \cdot \pi}{\sin(Z^* \cdot \pi)} \quad (11.55)$$

$$I'_2 = -I'_1 \cdot \mathcal{B}(Z^*), \quad (11.56)$$

gde je:

$$\mathcal{B}(Z^*) = 0,4228 - \ln(2 - Z^*) + \frac{1}{(1 - Z^*)} + \frac{1}{2(2 - Z^*)} + \frac{1}{24(2 - Z^*)^2}. \quad (11.57)$$

■ **Primer 11.4.** U kolonama 2 i 3 Tabele 11.6, date su lokalne vrednosti izmerenih brzina i koncentracije na jednom vodotoku [61]. U periodu snimanja, dubina je iznosila $h = 2,7$ m, a nagib linije energije $I_e = 0,00072$. Sračunati jedinični pronos suspendovanog nanosa primenom izraza (11.51) i rezultat uporediti sa pronosom koji se dobija na osnovu podataka merenja.

Tabela 11.6: *Ulazni podaci za primer 11.4*

η [-]	u [m/s]	C_m [kg/m ³]	$u \cdot C_m$ [kg/(m ² s)]	$(u C_m)_{sr}$ [kg/(m ² s)]	$\Delta\eta$ [-]	Δq_{sm} [kg/(sm)]	$\sum q_{sm}$ [kg/(sm)]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0,000			0,000			0,000	0,000
0,037	1,64	24,90	40,836	20,418	0,037	0,755	0,755
0,100	1,86	20,30	37,758	39,297	0,063	2,476	3,231
0,200	2,10	19,80	41,580	39,669	0,100	3,967	7,198
0,300	2,31	17,10	39,501	40,541	0,100	4,054	11,252
0,400	2,46	16,00	39,360	39,431	0,100	3,943	15,195
0,436	2,50	15,64	39,100	39,230	0,036	1,412	16,607
0,600	2,74	14,00	38,360	38,730	0,164	6,352	22,959
0,800	2,96	12,20	36,112	37,236	0,200	7,447	30,406
0,963	3,11	8,14	25,315	30,714	0,163	5,006	35,413
1,000			0,000	12,658	0,037	0,468	35,881
						$q_{sm} =$	96,88

Rešenje. Primenjujući postupak koji je opisan u primeru 11.1, određena je vrednost srednje brzine $\tilde{u} = u(\eta = 0,368) = 2,41$ m/s, jediničnog protoka vode: $q = \tilde{u} \cdot h = 6,507$ m³/(sm), smičuće brzine: $u_* = 0,138$ m/s, kao i koeficijenta: $\kappa = 0,27$, $Z^* = 0,155$.

Primenom izraza (11.57), (11.55) i (11.56), dobijene su vrednosti: $\mathcal{B} = 1,277$, $I'_1 = 1,0406$ i $I'_2 = -1,3289$. Numeričkom integracijom (Tabela 11.6, kolone 5-8), dobijena je vrednost jediničnog pronosa 96,88 kg/(sm). Uzimajući za referentnu koncentraciju svaku od izmerenih vrednosti (kolona 3), sa odgovarajućim referentnim

odstojanjem (kolona 1), u Tabeli 11.7 su sračunate pomoću izraza (11.51) vrednosti jediničnog pronosa, kao i vrednosti relativnih razlika izmerenih i računskih vrednosti, δq_{sm} .

Tabela 11.7: Rezultati proračuna u primeru 11.4

η_a [-]	0,037	0,100	0,200	0,300	0,400	0,436	0,600	0,800	0,963
$\eta_a/(1 - \eta_a)$ [-]	0,038	0,111	0,250	0,429	0,667	0,773	1,500	4,000	26,027
C_a [kg/m ³]	24,90	20,30	19,80	17,10	16,00	15,64	14,00	12,20	8,14
q_{sm} [kg/(s m)]	95,76	92,04	101,79	95,57	95,76	95,78	95,01	96,39	85,98
δq_{sm} [%]	1,16	5,00	-5,07	1,35	1,15	1,13	1,92	0,50	11,25

Može se zaključiti da su razlike male u središnjem delu toka, a veće pri površini i pri dnu. To je, prema očekivanju, posledica veće greške merenja u ovim zonama, kao i „anomalija” teorijskih funkcija na granicama računске oblasti. U ovom slučaju može se preporučiti referentno odstojanje $\eta = 1/2$, jer je tu uticaj graničnih uslova najmanje izražen.

11.5.3 Metode kod kojih se referentna koncentracija definiše korelacionim zavisnostima

Ukazano je u više navrata na nedostatke klasičnog pristupa koji proizilaze iz matematičkih singulariteta, kao i iz teškoća u definisanju referentnih vrednosti. Početkom osamdesetih godina došlo je do značajnog pomaka u pravcu otklanjanja navedenih nedostataka, jer su računari omogućili efikasnu obradu ogromnog fonda eksperimentalnih podataka, koji su decenijama sticani na raznim krajevima sveta. S druge strane, razvoj mernih uređaja (elektronske i laserske tehnologije), omogućio je da se unapredi kvalitet merenja i poveća obim informacija u pravcu bolje spoznaje fizike problema. Metode koje se opisuju u nastavku odraz su takvog tehnološkog napredka.

Metoda fan Rejna (van Rijn, 1984). Ova metoda je unela niz teorijskih novina, pre svega u definisanju rasporeda difuzionog koeficijenta i u povezivanju referentne koncentracije sa pronosom vučenog nanosa. Ova metoda, čije se teorijsko obrazloženje može naći u literaturi [9, 79, 165, 167, 168] primenjiva je na velike aluvijalne vodotoke, u opsegu vrednosti: $V = 0,4 \div 1,6$ m/s, $h < 25$ m i $d_{50} = 0,18 \div 0,7$ mm.

Autor polazi od sledećih pretpostavki:

- raspored brzine je definisan u obliku opšteg logaritamskog zakona (2.38);
- raspored koeficijenta difuzije je parabolično-konstantan (2.60);
- raspored koncentracije po dubini je definisan izrazom (11.33).

Razlike u vrednostima difuzionih koeficijenata za vodu i nanos fan Rejn uzima u obzir preko koeficijenta:

$$\beta = 1 + 2 \left(\frac{W}{u_*} \right)^2, \quad (11.58)$$

čija vrednost raste sa krupnoćom čestica. Za sitne čestice i male koncentracije ispunjen je kriterijum: $0,1 < W/u_* < 1$, tako da je $\beta < 3$, a po preporuci autora, u proračune treba uvesti ograničenje $\beta < 2$ [167].

Za koncentracije $C > 0,1\%$, vrednosti suspenzionog broja Z^* se koriguju zbog prigušenja turbulentnih fluktuacija:

$$Z^{*'} = Z^* + \psi, \quad (11.59)$$

pri čmu je u oblasti $0,01 \leq W/u_* \leq 1$, korekcionni faktor definisan pomoću empirijskog izraza:

$$\psi = 2,5 \left(\frac{W}{u_*} \right)^{0,8} \left(\frac{C_a}{C_{\max}} \right)^{0,4} \quad (11.60)$$

u kome je C_a – referentna, a $C_{\max} = 0,65$ – najveća koncentracija.

Za referentno odstojanje fan Rejn uzima $a = \delta_o \approx 10 d_{50}$, na osnovu snimaka saltacije zrna, načinjenih u toku laboratorijskih eksperimenata. Alternativno se može uzeti: $a = (0,01 \div 0,05) h$, a za dno u formi dina: $a \approx 1/2 \Delta_b$, gde je Δ_b – visina dina. Na osnovu teorijskih razmatranja i analize eksperimentalnih podataka, autor je predložio izraz za referentnu koncentraciju:

$$C_a = 0,015 \cdot \frac{d_{50}}{a} \cdot \frac{T^{1,5}}{d_*^{0,3}}, \quad (11.61)$$

gde je d_* – bezdimenzioni prečnik smicanja, d_{50} – srednji prečnik zrna, a T – bezdimenzioni parametar tangencijalnog napona (videti tačku 4.3, izraz (4.6)). Veličine d_* , d_{50} i T odnose se na zrna *vučenog* nanosa. Uvodjenjem parametra T i referentne koncentracije u obliku (11.61) uspostavlja se veza između vučenog i suspendovanog nanosa.

Zapreminski jedninični pronos definisan je integralom:

$$q_s = \frac{u_* C_a}{\kappa} \left(\frac{a}{h-a} \right)^{Z^{*'}} \left[\int_a^{0,5h} \left(\frac{h-z}{z} \right)^{Z^{*'}} \ln \left(\frac{z}{z_o} \right) dz + \right. \\ \left. + \int_{0,5h}^h \exp \left\{ -4 Z^{*'} \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right) \right\} \ln \left(\frac{z}{z_o} \right) dz \right], \quad (11.62)$$

koji nema analitičko rešenje. Međutim, njegovo približno rešenje sa greškom do 25% može se dobiti pomoću izraza:

$$q_s = \mathcal{F} \cdot \tilde{u} \cdot h \cdot C_a \quad [\text{m}^3/(\text{s m})], \quad (11.63)$$

gde je pomoćna funkcija:

$$\mathcal{F} = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^{Z^{*'}} - \left(\frac{a}{h}\right)^{1,2}}{\left[1 - \left(\frac{a}{h}\right)\right]^{Z^{*'}} (1,2 - Z^{*'})}. \quad (11.64)$$

Izrazi (11.63) i (11.64) važe za opseg vrednosti $Z^{*'} = 0,3 \div 3,0$, i $a/h = 0,01 \div 0,1$.

■ **Primer 11.5.** Odrediti pronos suspendovanog nanosa primenom metode fan Rajna za dunavski profil iz primera 10.1 i 10.3.

Rešenje. Iz primera 10.1 preuzimaju se sledeći podaci: $h=8$ m, $\tilde{u}=1$ m/s, $I_e=0,00005$ i $\Delta=1,65$. Koristeći granulometrijsku krivu *suspendovanog* nanosa koja je data na Slici 8.6, dolazi se do srednje krupnoće zrna: $d_{50}=0,2$ mm.

Iz primera 10.3 u kome je ilustrovana primena metode fan Rajna u proračunu pronosa vučenog nanosa, preuzimaju se sledeći podaci: $d_{50}=0,56$ mm (vučeni nanos), $d_*=14,17$, $T=4,14$ i $\nu=1,0 \times 10^{-6}$ m²/s.

Proračun pronosa suspendovanog nanosa:

$$d_* = 5,06 \text{ (za zrno suspendovanog nanosa, } d_{50} = 0,2 \text{ mm)};$$

$$G_* = d_*^3 = 129,49 \text{ (izraz (8.16)); } \text{Re}_W = 4,895;$$

$$W = 0,024 \text{ m/s};$$

$$u_* = \sqrt{g \cdot h \cdot I_e} = 0,0626 \text{ m/s};$$

$$W/u_* = 0,024/0,0626 = 0,391 \text{ (} \in [0,01, 1,0]);$$

$$\beta = 1,305 \text{ (izraz (11.58));}$$

$$a = 0,01 h = 0,08 \text{ m (nema podataka o visini dina)};$$

$$C_a = 0,015 \cdot (0,56 \times 10^{-3}) \cdot 4,14^{1,5} / (0,08 \cdot 14,17^{0,3}) = 0,0004;$$

(referentna koncentracija se računa sa podacima za vučni nanos!);

$$Z^* = 0,024 / (1,305 \cdot 0,4 \cdot 0,0626) = 0,748;$$

$$\psi = 2,5 \cdot 0,391^{0,8} \cdot (0,0004/0,65)^{0,4} = 0,061 \text{ (izraz (11.60));}$$

$$Z^{*'} = 0,748 + 0,061 = 0,809 \text{ (izraz (11.59));}$$

$$a/h = 0,01;$$

$$\mathcal{F} = 0,0138 \text{ (izraz (11.64));}$$

$$q_s = 0,0138 \cdot 1,0 \cdot 8,0 \cdot 0,0004 = 4,4 \times 10^{-5} \text{ m}^3/(\text{s m});$$

$$q_{sm} = 2650 \cdot 4,4 \times 10^{-5} = 0,117 \text{ kg}/(\text{s m}).$$

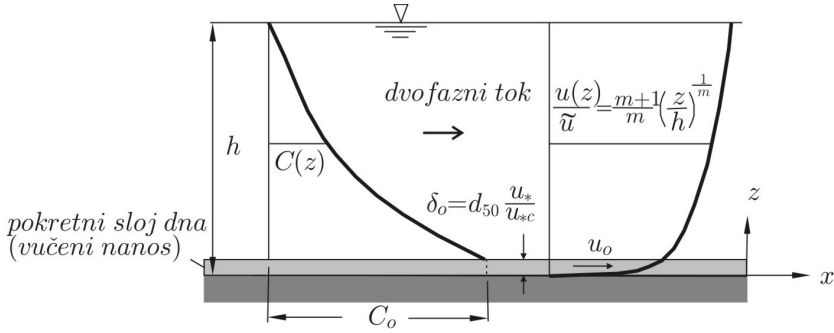
Metoda Karima i Kenedija (Karim, Kennedy, 1983). Obično se pretpostavlja da vrednost koeficijenta trenja ne zavisi od pronosa (ili koncentracije) suspendovanog nanosa. To znači da je kriva protoka takodje nezavisna od koncentracije nanosa. Ova pretpostavka je fizički problematična. Naime, laboratorijska merenja pokazuju da koncentracija može bitno uticati na vrednost koeficijenta trenja i na raspored brzine po dubini toka [94]. Pri većim koncentracijama (a jednakim svim ostalim uslovima), brzina toka se povećava⁸. Stoga se pronos nanosa mora uzeti kao *nezavisna* promenljiva, jer se koeficijent trenja (odnosno profil brzine) ne može jednoznačno odrediti samo na osnovu protoka i nagiba energetske linije. Naime, razne kombinacije veličina \tilde{u} i h daju istu vrednost protoka $q = \tilde{u} \cdot h$, ali je prava kombinacija samo ona koja omogućava realizaciju zadanog pronosa q_s i q_v .

I pored velikog broja laboratorijskih eksperimenata i terenskih merenja, još uvek ne postoji pouzdan način da se formuliše opšta zavisnost izmedju protoka vode, koncentracije nanosa i hidrauličkih otpora, jer dodatne teškoće unosi niz faktora kao što su neuniformnost krupnoće nanosa, zakrivljenost korita, temperatura vode itd. Ustvari, psamološki režim prirodnih vodotoka je toliko složen da su klasični analitički pristupi „fragmentarni”, jer daju rešenja samo pojedinih delova celine. Metoda Karima i Kenedija predstavlja pokušaj da se izadje iz postojećih okvira i da se zahvaljujući savremenoj računarskoj tehnologiji, učini pomak u pravcu sveobuhvatnijeg rešenja.

Polazne pretpostavke ove metode su:

- (a) raspored brzine po dubini je u obliku stepene funkcije (2.51);
- (b) vrednost koeficijenta trenja zavisi od koncentracije suspendovanih čestica; drugim rečima, raspored brzine po dubini toka zavisi od pronosa suspendovanog nanosa, a računski i izmereni profili brzine se mogu složiti podešavanjem vrednosti fon Karmanove „konstante”;
- (c) raspored difuzionog koeficijenta za nanos je u obliku funkcije (2.61), a raspored koncentracije po dubini opisuje funkcijom (11.35);
- (d) referentno odstojanje je jednako debljini pokretnog sloja vučenog nanosa: $a = \delta_o$ (Slika 11.12), a referentna koncentracija je jednaka prosečnoj koncentraciji

⁸Reke prilagodjavaju svoju konfiguraciju dna (time i aluvijalnu rapavost) u smeru smanjenja uticaja koji nastaju sa promenom protoka. Pri niskim i srednjim protocima stvaraju se nabori i dine koje povećavaju aluvijalne otpore, a sa njima i dubine toka. Obrnuto, pri velikim protocima dolazi do spiranja dina, izravnjanja dna i smanjenja otpora, a time i dubina toka. Ova prilagodljivost vodotoka spoljašnjim uticajima predstavlja izvanredan prirodni mehanizam, koji medjutim znatno komplikuje matematičko modeliranje rečnih tokova. Eksperimenti pokazuju da se aluvijalna rapavost prilagodjava i pronosu nanosa, odnosno njegovoj koncentraciji. Povećanje količine nanosa pri konstantnom protoku ima za posledicu povećanje brzine toka da bi se zadovoljio transportni kapacitet vodotoka u pogledu nanosa, dok obrnuti trend važi u slučaju smanjenja koncentracije. Zaključak: otpori u koritu sa pokretnim dnom ne samo da zavise od protoka vode, već i od pronosa, tj. koncentracije nanosa [94, 95, 97, 106].



Slika 11.12: Shema za model Karima i Kenedija [94, 96].

vučenog nanosa $C_a = C_o$. Veličine δ_o i C_o autori su definisali na osnovu izuzetnog obimnog fonda eksperimentalnih podataka.

Ključni element računskog modela je uspostavljanje veze između stepenog rasporeda brzine (2.56):

$$\frac{u(z)}{\tilde{u}} = \frac{m+1}{m} \left(\frac{z}{h}\right)^{1/m}$$

i Darsi-Vajsbahovog koeficijenta trenja λ (3.21):

$$m = \kappa \cdot \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \kappa \cdot \frac{\tilde{u}}{u_*}$$

Fon Karmanova „konstanta” κ ima ovde ulogu kalibracionog parametra. Njene vrednosti, koje se kreću u granicama $\kappa = 0, 2 \div 0, 4$, zavise od koncentracije nanosa i intenziteta turbulencije. Smatra se da disipacija energije toka usled kretanja čestica u sloju vučenog nanosa ima ključnu ulogu u prigušenju turbulencije toka, što je uzrok smanjenja vrednosti κ . (U narednoj tački videće se da postoje i drugačija shvatanja.)

Polazeći od Bagnoldovih energetskih razmatranja, autori pretpostavljaju da je smanjenje vrednosti κ proporcionalno koeficijentu transportne efikasnosti za vučeni nanos (odnosu snage potrebne za održavanje nanosa u pokretu i ukupne snage po jedinici površine):

$$\kappa \propto 0,4 - \eta_v \propto 0,4 - \psi \left(\frac{q'_{vt} \cdot f'}{\tau_o \cdot \tilde{u}} \right) \propto 0,4 - \psi \left(\frac{g(\rho_s - \rho) \cdot C_o \cdot u_o \cdot \delta_o \cdot \text{tg}\phi'}{\rho \cdot g \cdot h \cdot I_e \cdot \tilde{u}} \right), \quad (11.65)$$

gde veličine C_o , δ_o i u_o opisuju pokretni sloj vučenog nanosa, koeficijent trenja je $f' = \text{tg}\phi' \propto u_*/W$, a ψ je empirijska funkcija.

Na osnovu eksperimentalnih podataka utvrđena je zavisnost oblika [96]:

$$\kappa = 0,4 - 0,18 \log \left[1 + 60,6 \frac{\Delta (C_o \cdot u_o \cdot \delta_o) \cdot u_*}{(\tilde{u} \cdot h) \cdot I_e \cdot W} \right]. \quad (11.66)$$

Pokretni sloj na dnu se definiše kao oblast u kojoj je interakcija zrna izraženija od turbulentne difuzije. Njegova debljina:

$$\delta_o = d_{50} \frac{u_*}{u_{*c}}, \quad (11.67)$$

se može sračunati preko kritične smičuće brzine $u_{*c} = \sqrt{g \Delta d_{50} \Theta_c}$ i Šildsovog dijagrama.

Brzina vučenog nanosa je približno jednaka lokalnoj brzini toka u slučaju vrlo sitnog nanosa ($W/u_* < 1$):

$$u_o = \tilde{u} \left(\frac{\delta_o}{h} \right)^{1/m}. \quad (11.68)$$

U slučaju krupnog nanosa ($W/u_* \geq 1$), vrednost dobijena pomoću izraza (11.68) se množi faktorom $(W/u_*)^{-1/2}$. Time se obuhvata efekat trenja između zrna vučenog nanosa, jer pokretni sloj postaje manje „fluidan” sa povećanjem vrednosti odnosa W/u_* .

Kako se referentna koncentracija teško meri pri dnu, autori predlažu da se ova koncentracija proceni na osnovu empirijskog izraza do koga su došli analizom 615 izmerenih vrednosti, od kojih se 103 podatka odnose na prirodne vodotoke⁹.

Računski algoritam je *iterativan*, jer se proračun pronosa i koeficijenta trenja obavlja istovremeno. Kriterijum konvergencije je ona kombinacija brzine \tilde{u} i dubine h koja omogućava zadovoljenje transportnog kapaciteta za vučeni nanos.

⁹Višestrukom korelacijom 20 bezdimenzionih grupacija koje obuhvataju karakteristike toka i fizička svojstva vode i nanosa, dobijena je zavisnost oblika [96]:

$$\log C_o = -4,44 + 3,57 V_1 + 1,23 V_2 - 2,87 V_3 + 1,58 V_5 V_6 - 1,40 V_1 V_4 + 0,41 V_4 V_6 - 0,85 V_2 V_3 V_4 + 0,65 V_2 V_5 V_6 - 5,43 V_1 V_3 V_5 + 2,19 V_3 V_5 V_6 - 1,27 V_1 V_5 V_6, \quad (11.69)$$

gde je:

$$\begin{aligned} V_1 &= \log(\tilde{u}/\sqrt{g \cdot \Delta \cdot d_{50}}); & V_2 &= \log(I_e \cdot 10^3); & V_3 &= \log(u_*/W); \\ V_4 &= \log(W \cdot d_{50}/\nu); & V_5 &= \log|(u_* - u_{*c})/\sqrt{g \cdot \Delta \cdot d_{50}}|; & V_6 &= \log(h/d_{50}). \end{aligned} \quad (11.70)$$

Može se staviti principijelna zamerka ovoj „recepturi” za proračun referentne koncentracije, jer je nudjenje univerzalne zavisnosti u suprotnosti sa načelom da je svaki vodotok slučaj za sebe, čije specifičnosti zahtevaju zasebna istraživanja.

Računsko podešavanje dubine i brzine trenutnoj količini nanosa podražava proces prilagodjavanja koji se dešava u prirodi kao reakcija toka na izmenu graničnog uslova u pogledu dotoka nanosa sa uzvodne deonice.

Korekcija parametara m i κ dovodi do merodavnog rasporeda brzine, dok se raspored koncentracije po dubini određuje na osnovu izraza (11.35), u funkciji parametra m i broja Z^* , koji je definisan izrazom (11.36). Na kraju se integracijom funkcije $C \cdot u$ dolazi do jediničnog pronosa nanosa¹⁰.

■ **Primer 11.6.** Prognozirati raspored brzine i koncentracije metodom Karima i Kenedija, koristeći sledeće podatke iz primera 11.4: $h=2,7$ m, $\tilde{u}=2,41$ m/s, $I_e=0,00072$, $d=0,09$ mm, $\nu=1,45 \times 10^{-6}$ m²/s. Izmerena referentna koncentracija na dnu iznosi: $C_m=24,9$ kg/m³, što odgovara koncentraciji $C_o=0,0094$.

Rešenje. Koristeći date podatke, najpre se računaju konstantne veličine:

$$q = 2,7 \cdot 2,41 = 6,51 \text{ m}^2/\text{s};$$

$$u_* = \sqrt{9,81 \cdot 2,7 \cdot 0,00072} = 0,138 \text{ m/s};$$

$$W = 9,81 \cdot 1,65 \cdot 0,00009^2 / (18 \cdot 1,45 \times 10^{-6}) = 0,0050 \text{ m/s};$$

$$\text{Re}_W = 0,0050 \cdot 0,00009 / 1,45 \times 10^{-6} = 0,31 < 1;$$

$$W/u_* = 0,0050 / 0,138 \approx 0,04;$$

$$d_* = 0,00009 \sqrt[3]{9,81 \cdot 1,65 / (1,45 \times 10^{-6})^2} = 1,777;$$

$$\Theta_c = 0,24 \cdot 1,777^{-1} = 0,135;$$

$$u_{*c} = \sqrt{9,81 \cdot 1,65 \cdot 0,00009 \cdot 0,135} = 0,014 \text{ m/s};$$

$$\delta_o = 0,00009 \cdot 0,138 / 0,014 = 0,00089 \approx 0,0009 \text{ m}.$$

Zatim se vrednost κ određuje iterativno (Tabela 11.8), koristeći izraze (11.5), (11.68) i (11.66). Kriterijum konvergencije je slaganje pretpostavljene i računске vrednosti, a konačan rezultat je: $\kappa = 0,30$ i $m = 5,24$.

Na osnovu dobijenih rezultata, može se sračunati vrednost koeficijenta trenja: $\lambda = 0,026$ ($C = 55 \text{ m}^{1/2}\text{s}$, $n = 0,022 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$).

U Tabeli 11.9 su dati rezultati proračuna rasporeda brzine i koncentracije prema izrazima (2.51) i (11.35), pri čemu je $Z^* = 0,144$. Poredjenjem računskih i izmerenih vrednosti može se konstatovati izvanredno slaganje profila brzine (razlike su ispod 10%, u proseku 3,6%), dok je slaganje profila koncentracije slabije (do 30%, u proseku 23,1%).

¹⁰Integral nema analitičko rešenje, ali se njegovo približno numeričko rešenje, za zadate vrednosti m i Z^* , može efikasno dobiti primenom savremenih matematičkih softverskih alata, kao što je na primer MATHEMATICA[©] ili DERIVE[©].

Tabela 11.8: Iterativno određivanje vrednosti parametra κ .

Iteracija br.	κ pretpostavljeno	m [-]	u_o [m/s]	$q_v = C_o u_o \delta_o$ [m ³ /(s m)]	κ prema (9.27)
1	0,40	6,98	0,76	$6,36 \times 10^{-6}$	0,28
2	0,35	6,11	0,65	$5,40 \times 10^{-6}$	0,29
3	0,30	5,24	0,52	$4,34 \times 10^{-6}$	0,30

Tabela 11.9: Poređenje računskih i izmerenih profila brzine i koncentracije.

η [-]	u [m/s]		C_m [kg/m ³]		Razlike [%]	
	merenja	račun	merenja	račun	δu	δC_m
0,000		0,00				
0,037	1,64	1,53	24,90	16,60	6,76	33,35
0,100	1,86	1,85	20,30	15,15	0,59	25,37
0,200	2,10	2,11	19,80	13,95	-0,51	29,57
0,300	2,31	2,28	17,10	13,11	1,27	23,35
0,400	2,46	2,41	16,00	12,41	2,05	22,46
0,436	2,50	2,45	15,64	12,17	2,02	22,18
0,600	2,74	2,60	14,00	11,12	4,98	20,55
0,800	2,96	2,75	12,20	9,66	7,08	20,85
0,963	3,11	2,85	8,14	7,33	8,37	9,99
1,000		2,87				

11.6 Tokovi sa visokom koncentracijom nanosa

Aluvijalni tokovi našeg podneblja se ponašaju u saglasnosti sa pretpostavkom o malim koncentracijama, što omogućava primenu opisanih analitičkih metoda. Međutim, bujični tokovi imaju izrazito neujednačen režim protoka, a u poplavnim periodima nose velike količine vučenog i suspendovanog nanosa, tako da su usled visokih koncentracija narušene osnovne pretpostavke na kojima počivaju do sada opisane metode.

Pored toga, određeni splet geografskih, geoloških, klimatoloških, hidroloških i drugih faktora, utiče na to da su neki vodotoci u svetu poznati po izuzetno velikim količinama suspendovanog nanosa. Takav je na primer slučaj sa Žutom rekom u Kini, gde je tokom jedne poplavne epizode zabeležena koncentracija od 964 kg/m³ (većim delom tranzitnog nanosa), dok je u toku drugog poplavnog događaja zabeležena erozija korita od oko 9 m za 72 sata [173], što govori o složenosti psamološkog režima pojedinih vodotoka.

Izneta zapažanja provociraju brojna pitanja, kao što su na primer: (a) u kojoj meri se u uslovima povećanih koncentracija menjaju fizička svojstva fluida? (b) kako koncentracija suspendovanih čestica utiče na turbulenciju toka? (c) da li se na dvofazne tokove sa većom koncentracijom čvrste faze mogu primeniti standardni izrazi za linijske otpore, kao što su Šezijev ili Maningov izraz?

Odgovore nije lako dati, pogotovo što su tokovi raznih vrsta mešavina tek u fazi istraživanja u svetu i kod nas [101, 173]. Ne ulazeći detaljnije u ovu problematiku, navešće se samo neki osnovni pojmovi koje treba imati u vidu prilikom razmatranja suspendovanog nanosa.

Gustina mešavine. Kod tokova sa izuzetno visokom koncentracijom čvrstih čestica, u definiciji tangencijalnog napona treba koristiti „*efektivnu integralnu gustinu*” [36]:

$$\rho_i = \rho + \frac{\rho_s - \rho}{h - z} \int_z^h C(z) dz. \quad (11.71)$$

Viskoznost mešavine. Visoke koncentracije povećavaju molekularnu viskoznost mešavine, a taj fenomen se može kvantifikovati nizom empirijskih izraza [31, 36]:

$$\mu_m = \begin{cases} \mu(1 + 2,5C) & \text{Ajnštajn (Einstein, 1906, 1911)} \\ \mu(1 + 2,5C + 6,25C^2) & \text{Graf (Graf, 1971)} \\ \mu(1 - 1,4C)^{-2,5} & \text{Uan, Uang (Wan, Wang, 1994),} \end{cases} \quad (11.72)$$

gde je $\mu = \mu(T)$ – koeficijent viskoznosti čiste vode (Dodatak B).

Brzina taloženja. U analizama suspendovanog nanosa se obično koristi idealna brzina taloženja usamljene čestice u mirnoj vodi neograničene zapremine. Stvarna brzina tonjenja zavisi od niza faktora (videti tačku 8.2.1.4). Istovremeno taloženje velikog broja čestica zavisi od međusobne udaljenosti tih čestica (koncentracije). Poseban vid ovog fenomena predstavlja takozvano „taloženje u oblaku” čestica različitih krupnoća. Pri velikim koncentracijama, javlja se fenomen „ometanog taloženja”, kada treba koristiti *efektivnu brzinu taloženja* [31, 165]:

$$W' = W(1 - C)^{k_W}, \quad (11.73)$$

gde vrednosti parametra k_W iznose $4 \div 5$ za čestice krupnoće $0.05 \div 0.5$ mm. (Slične rezultate daje i obrazac (8.19) kada su u pitanju homogene mešavine.) Interesantno je da se uticaji koncentracije na brzinu tonjenja ispoljavaju već pri vrednostima $C = 0,1\%$ ($C_m = 2,65 \text{ kg/m}^3$ suve mase po jedinici zapremine) [165].

Medjutim, najveće neizvesnosti nastaju u razmatranju brzine taloženja u tekućoj vodi. O uticajima koncentracije na turbulentnu strukturu dvofaznog toka se relativno malo zna.

Reološke zavisnosti. Mešavine nanosa i vode (nosećeg fluida), ponašaju se do određene koncentracije kao čista voda. Takve, „*njutnovske*” fluide karakteriše *linearna reološka*¹¹ zavisnost između tangencijalnog napona i deformacije (brzine

¹¹Reologija je nauka koja se bavi vezama između napona i deformacija.

klizanja):

$$\tau = \mu \frac{du}{dz}.$$

Fluidi kod kojih to nije slučaj, zovu se „*nenjutnovski*” [63] i opisuju se takozvanim „konstitutivnim jednačinama” (reološkim modelima). U opštem slučaju, za homogene suspenzije sitnih čestica važi relacija:

$$\tau = \tau_1 + \mu_m \frac{du}{dz}, \quad (11.74)$$

u kojoj konstanta τ_1 predstavlja „*graničnu nosivost*” – smičući napon pri kome mešavina počinje da teče. Fluidi koji zadovoljavaju jednačinu (11.74) zovu se *Bingamovi* (Bingham) *fluidi* i koriste se za opisivanje rečnih tokova sa izuzetno velikim koncentracijama suspendovanog nanosa [173].

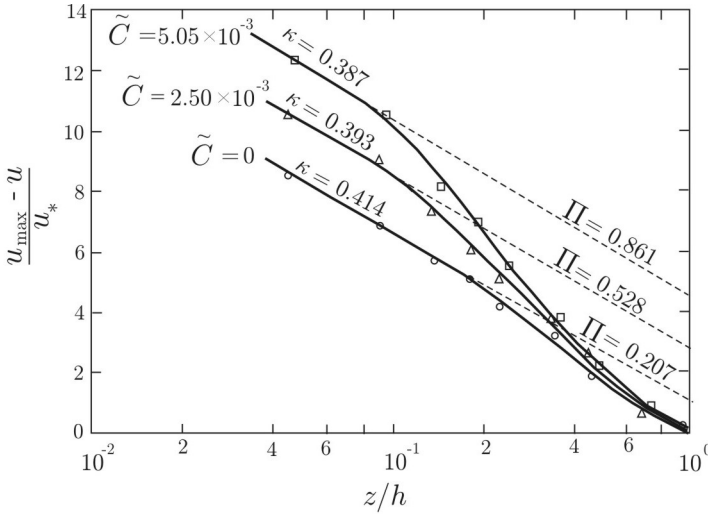
Za definisanje parametra τ_1 postoje brojni empirijski izrazi, na primer [31]:

$$\tau_1 = \left. \begin{array}{l} 0,1 \exp [3 (C - 0,05)] \quad (\text{peskovi}) \\ 0,1 \exp [13 (C - 0,05)] \quad (\text{prašina (95\%) i glina (5\%)}) \\ 0,1 \exp [23 (C - 0,05)] \quad (\text{prašina (70\%) i glina (30\%)}) \end{array} \right\} \quad (11.75)$$

Eksperimenti pokazuju da mešavine dobijaju nenjutnovska svojstva pri koncentracijama $C > 10\%$ [31, 101].

Raspored brzine i koeficijent trenja. Uobičajeno korišćeni izrazi Darsi-Vajsbaaha, Šezija i Maninga važe pri niskim koncentracijama ($C < 10\%$), sve dok se fluid nalazi u oblasti kvadratnog zakona otpora.

Sa povećanjem koncentracije povećava se unutrašnje trenje (viskoznost), pa se menja raspored i intenzitet brzine. S tim u vezi je i već pomenuto kontroverzno pitanje vrednosti fon Karmanove konstante. Naime, u teoriji dvofaznih tokova je prisutno shvatanje da vrednost ove konstante opada sa porastom koncentracije čvrstih čestica [36, 54]. Ovo proizilazi iz laboratorijskih eksperimenata, na osnovu kojih su podešene vrednost parametra κ tako da su složeni izmereni i teorijski profili brzine. Već je rečeno da su dobijene vrednosti u rasponu $\kappa = 0,2 \div 0,4$. Navedenom mišljenju je suprotstavljen stav po kome je promenljivost vrednosti κ isključivo posledica toga što klasični logaritamski zakon ne opisuje na pravi način spoljašnji turbulentni sloj [36]. Ako se koristi prošireni logaritamski zakon (2.50), koeficijent intenziteta vrtloženja Π dobija ulogu kalibracionog parametra, a fon Karmanova „konstanta” postaje prava univerzalna konstanta $\kappa = 0,4$, bez obzira na stepen koncentracije čvrste faze (Slika 11.13).



Slika 11.13: Zavisnost parametara κ i Π od srednje koncentracije \tilde{C} čestica krupnoće $d = 0,105$ mm; vrednosti κ se kreću u granicama $0,39 \div 0,41$ (koje su uobičajene za merenja u čistoj vodi), što upućuje na zaključak da koncentracija nema uticaja na vrednosti koeficijenta κ [36].

11.7 Energetski pristup u analizi suspendovanog nanosa

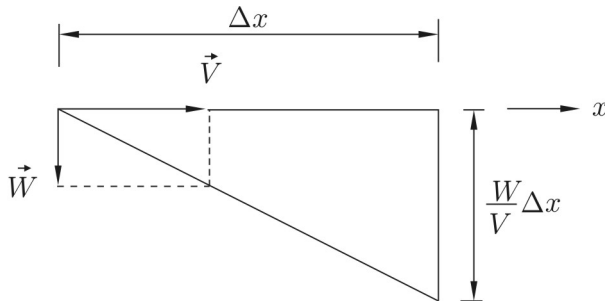
Za proračun transporta suspendovanog nanosa nekad je dovoljno samo proceniti koji deo energije toka podmiruje održanje čestica u suspenziji, ne ulazeći u rešavanje jednačine energije dvofaznog toka. Najpoznatiji predstavnici ovog pristupa su Bagnold (1966) i Velikanov (1954).

Metoda Bagnolda. Energetska razmatranja Bagnolda (1966) baziraju se na proceni raspoložive snage toka za održanje čestica u pokretu [10]. U prethodnom poglavlju je prikazana primena Bagnoldove teorije na vučeni nanos. Na sličan način je formulisana i osnovna energetska zavisnost za suspendovani nanos:

$$q'_{st} \cdot \frac{W}{V} = \tau_o \cdot V \cdot (1 - \eta_v) \eta_s. \quad (11.76)$$

Leva strana ove jednačine predstavlja proizvod težine uronjenih čestica sa jedinične površine i *vertikalnog* odstojanja koje one prevale u jedinici vremena (Slika 11.14). Drugim rečima, to je rad koje čestice suspendovanog nanosa obave u jedinici vremena, na odstojanju duž toka $\Delta x = 1$ m.

Desna strana izraza (11.76) predstavlja raspoloživu snagu toka za održanje suspenzije, po jedinici površine. Ili, može se reći da je to deo energije toka koja se utroši



Slika 11.14: Putanja čestice u idealnim uslovima taloženja

u jedinici vremena na pronos količine suspendovanog nanosa koja je sadržana na jediničnoj površini $[W/m^2]$. Koeficijenti η_v i η_s pokazuju koliki je udeo snage toka $\tau_o \cdot V$ potreban za održanje u pokretu vučenog, odnosno suspendovanog nanosa. Za transport vučenog nanosa je angažovano $\tau_o \cdot V \cdot \eta_v$ snage toka, tako da za transport suspendovanog nanosa ostaje na raspolaganju $\tau_o \cdot V \cdot (1 - \eta_v)$. Prema Bagnoldu, vrednost koeficijenta transportne sposobnosti iznosi: $(1 - \eta_v) \eta_s = 0,01$, što znači da se za kretanje suspendovanog nanosa troši svega 1% snage toka.

Metoda Velikanova. Pristup Velikanova¹² (1954) [169], poznat kao „*gravitaciona teorija*”, u osnovi je sličan pristupu Bagnolda. Još petnaestak ruskih istraživača je na istim principima baziralo svoje formule koje se najviše razlikuju po vrednostima empirijskih parametara [115].

Velikanov polazi od činjenice da se za održanje suspenzije troši određena energija toka posredstvom turbulentnih flukutacija. Tu energiju naziva „*energijom suspendovanja*”. Energetski bilans vodotoka u pogledu pronosa suspendovanog nanosa može se prikazati relacijom:

$$g(\rho_s - \rho) Q_s \cdot \frac{W}{V} \cdot \Delta x \propto g \cdot \rho_m \cdot Q_m \cdot \Delta E. \quad (11.77)$$

Na levoj strani ovog izraza figuriše proizvod težinskog pronosa suspendovanog nanosa $g(\rho_s - \rho) Q_s$ [N/s] i prevaljenog vertikalnog odstojanja $(W/V) \Delta x$ (Slika 11.14). To je rad suspendovanih čestica u jedinici vremena, ekvivalentan energiji toka utrošenoj u jedinici vremena na pronos suspendovanih čestica, na deonici dužine Δx [Nm/s=J/s=W].

Na desnoj strani istog izraza figuriše proizvod težinskog pronosa mešavine vode i nanosa $g \cdot \rho_m \cdot Q_m$ [N/s] i razlike energetskih kota¹³ na odstojanju Δx .

¹²Velikanov Mihail Andrejevič (1879 - 1964), ruski hidrolog i hidrauličar, akademik (1939), osnivač hidrometeorološke službe; bavio se inženjerskom praksom (uredjenjem sibirskih vodotoka Oba i Jeniseja, projektovanjem i izvodjenim velikih hidrotehničkih objekata), pedagoškim radom, kao i naučnim istraživanjima (vodni bilans, hidrodinamika prirodnih tokova, rečni nanos).

¹³U Bernulijevoj jednačini kota energije označava ukupnu energiju toka po jedinici težine fluida.

Drugim rečima, desna strana jednačine (11.77) označava ukupni utrošak energije toka mešavine u jedinici vremena, na odstojanju Δx .

Odnos energije suspendovanja i ukupno utrošene energije:

$$\eta_s = \frac{Q_s (\rho_s - \rho) W \cdot \Delta x}{Q_m \cdot \rho_m \cdot V \cdot \Delta E} \quad (11.78)$$

predstavlja koeficijent transportne sposobnosti vodotoka za suspendovani nanos.

Kako je $Q_s/Q_m = C$ - zapreminska koncentracija koja odgovara transportnom kapacitetu vodotoka (najveća koncentracija ostvariva u datim hidrauličkim uslovima), a imajući u vidu da za aluvijalne vodotoke važi aproksimacija $\rho_m \approx \rho$ i da je za jednoliko tečenje:

$$\frac{\Delta x}{\Delta E} = \frac{1}{I_e} = \frac{gR}{V^2} \left(\frac{V}{V_*} \right)^2, \quad (11.79)$$

to se energetski parametar η_s može predstaviti u vidu proizvoda pet bezdimenzionih brojeva:

$$\eta_s = C \cdot \Delta \cdot \frac{W}{V} \cdot \frac{gR}{V^2} \cdot \left(\frac{V}{V_*} \right)^2. \quad (11.80)$$

Prva tri broja na desnoj strani opisuju nanos (koncentracija, relativna gustina, inercija/krupnoća zna), a poslednja dva broja opisuju rečni tok (Frudov broj, koeficijent trenja).

S druge strane, kombinacijom izraza (11.78) i (11.79) može se izraziti zapreminska koncentracija kojoj odgovara transportni kapacitet vodotoka:

$$C = \eta_s \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{V}{W} \cdot I_e. \quad (11.81)$$

Ovaj izraz se dalje može transformisati na razne načine, u zavisnosti od toga kako se definiše nagib energetske linije; na primer, ako se primeni Šezijeva formula i predje na masenu koncentraciju, dobija se izraz u obliku:

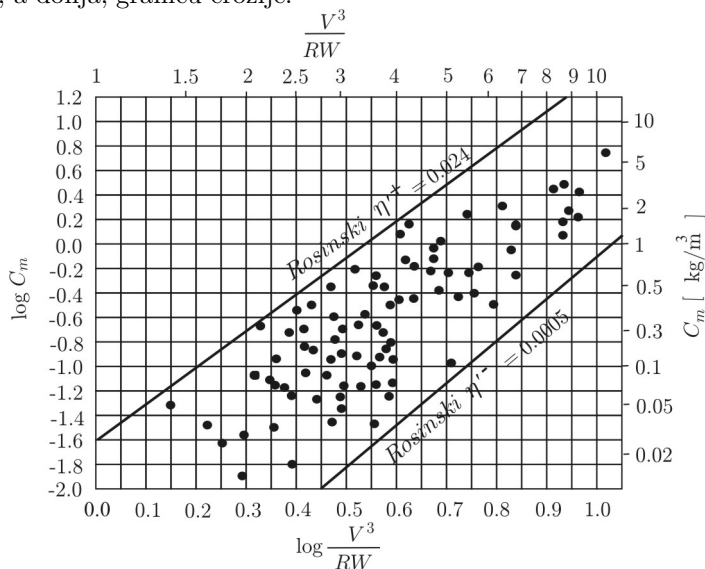
$$C_m = \frac{\rho_s \cdot \eta_s}{\Delta \cdot C^2} \cdot \frac{V^3}{RW} = \eta'_s \frac{V^3}{RW} \quad [\text{kg/m}^3], \quad (11.82)$$

pri čemu su dimenzije novog koeficijenta η'_s [kg s²/m⁴].

U ruskoj literaturi postoji veliki broj izraza tipa (11.82), koji se mogu svesti na opšti oblik:

$$C_m = \eta'_s \frac{V^{a_1}}{R^{a_2} W^{a_3}}, \quad (11.83)$$

sa raznim vrednostima empirijskih parametara η'_s , a_1 , a_2 i a_3 [115]. Na osnovu podataka ruskih autora, srednja vrednost parametra η'_s iznosi 0,013, što je u skladu sa nalazima Bagnolda. Analizirajući zavisnost koncentracije od hidrauličkih uslova, ruski autori Rosinski i Kuzmin (1964) su rezultate mnogobrojnih merenja na raznim rekama (Amu Darja, Jangce, Hoangho, Eufkrat itd.) prikazali dijagramom na Slici 11.15. Na isti dijagram su kasnije uneti i rezultati merenja na nekim našim rekama [24]. Sve tačke se nalaze unutar oblasti koja je ograničena sa dve prave; gornja predstavlja granicu taloženja (zasićenosti vodotoka suspendovanim nanosom), a donja, granicu erozije.



Slika 11.15: Granične linije oblasti sa mernim tačkama označavaju ekstremna stanja vodotoka u pogledu pronosa suspendovanog nanosa [16, 24]; gornja granica predstavlja prag zasićenja vodotoka na deonicama pod usporom, a $\eta'_s +$ označava najmanju vrednost parametra η'_s pri kojoj počinje taloženje (dotok nanosa veći od transportnog kapaciteta); donja granica ukazuje na granično stanje za početak erozije, a $\eta'_s -$ označava najveću vrednost parametra η'_s pri kojoj počinje erozija (dotok nanosa manji od transportnog kapaciteta); između granica vlada ravnotežno stanje, ali se ne može tačno odrediti koncentracija toka, jer ona zavisi od ulazne količine nanosa. Može se primetiti da je rasipanje tačaka veliko, jer se podaci odnose na reke iz različitih geografskih područja. Poželjno je formirati sličan dijagram samo za jedan vodotok, odnosno za jednu njegovu deonicu..

Granična linija taloženja ili zasićenosti definisana je izrazom:

$$C_m = 0,024 \frac{V^3}{RW}, \quad (11.84)$$

što znači da je prema Rosinskom i Kuzminu, $\eta_s'^+ = 0,024 \text{ kgs}^2/\text{m}^4$. Odgovarajuća vrednost energije suspendovanja zavisi od vrednosti koeficijenta trenja¹⁴.

Protoci graničnih stanja definišu se na osnovu graničnih koncentracija:

$$Q_{sm}^+ = C_m^+ \cdot Q = \eta_s'^+ \cdot \frac{V^3}{WR} \cdot Q \quad (11.85)$$

$$Q_{sm}^- = C_m^- \cdot Q = \eta_s'^- \cdot \frac{V^3}{WR} \cdot Q. \quad (11.86)$$

Ako je stvarni pronos $Q_{sm} > Q_{sm}^+$, na deonici će doći do taloženja, a ako je $Q_{sm} < Q_{sm}^-$, doći će do erozije. Pretpostavka da su koeficijenti η_s i η_s' konstante, odraz je uprošćenja složenih prirodnih uslova i može se opravdati potrebom da se uspostave jednostavni odnosi pogodni za proračune u praksi.

Veličine koje figurišu na dijagramima poput onog na Slici 11.15, relativno lako se mogu izmeriti (koncentracija, krupnoća zrna), ili sračunati (srednja profilska brzina, srednja brzina tonjenja, hidraulički radijus), što je dobra strana opisanog pristupa. Međutim, da bi se za konkretni vodotok utvrdile granične vrednosti $\eta_s'^+$ i $\eta_s'^-$, neophodno je sprovesti sistematska, opsežna i dovoljno dugotrajna merenja, kako bi se obuhvatili periodi zasipanja i erozije korita. Terenski istražni radovi, koji obuhvataju:

- topografska snimanja predmetne deonice;
- snimanja linija nivoa pri različitim protocima;
- merenja profila brzine i koncentracije u nizu poprečnih preseka;
- zahvatanje uzoraka za određivanje granulometrijskog sastava,

nisu nimalo jednostavni, jer se sinhronizovano mora obaviti merenje brzine i zahvatanje uzoraka nanosa. Zapremina tih uzoraka mora biti dovoljna da se pouzdano odrede granulometrijske krive i sračuna pronos po frakcijama.

Posebno je teško konstatovati granična stanja zasićenosti i erozije, da bi se mogle odrediti vrednosti $\eta_s'^+$ i $\eta_s'^-$. U tom cilju potrebno je analizirati razvoj nanosnih formacija, promenu srednjeg prečnika zrna i opštu deformaciju korita. Vrednosti parametara η_s' se mogu proceniti i na osnovu uzdužnih profila rečnog korita koji su snimljeni u određenim vremenskim intervalima. To se postiže tako što se u

¹⁴Ako se pretpostavi da je vrednost Šezijevoeg koeficijenta $C = 60 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, dobija se: $\eta_s = \eta_s' \cdot \Delta \cdot C^2/\rho_s = 0,024 \cdot 1,65 \cdot 60^2/2650 = 0,054$, što znači da pri graničnoj zasićenosti toka, energija suspendovanja iznosi svega oko 5% ukupno utrošene energije.

proračunima opšte deformacije korita (videti naredno poglavlje) probaju razne vrednosti navedenih parametara, sve dok se računski uzdužni profili korita ne usklade sa snimljenim profilima.

Osnovni nedostatak izloženog pristupa je u tome što je udeo energije suspendovanja u ukupnoj utrošenoj energiji toka veoma mali (najviše nekoliko procenata), pa su moguće velike greške u proceni vrednosti η'_s . Te vrednosti zavise i od intenziteta turbulencije, jer se veličina energije suspendovanja menja sa energijom turbulentnih fluktuacija. To znači da su pri istim hidrauličkim uslovima moguće različite koncentracije i da pronos suspendovanog nanosa nije u jednoznačnoj vezi sa hidrauličkim parametrima osrednjenog strujanja.

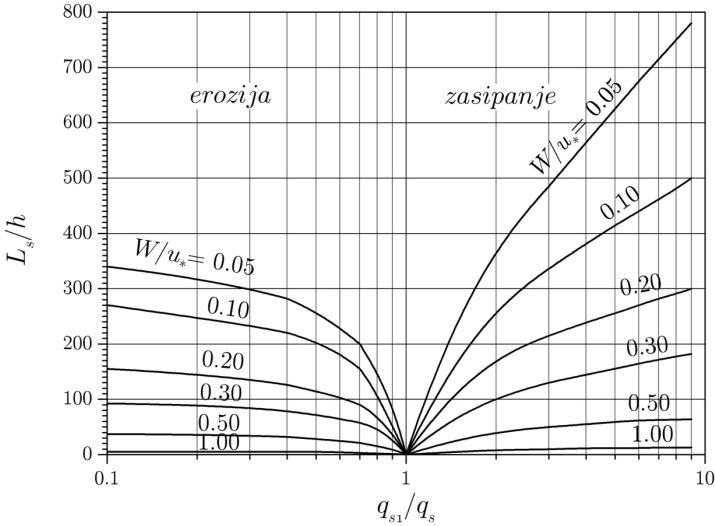
11.8 Kretanje suspendovanog nanosa u neravnotežnim uslovima

Pronos („transport“) suspendovanog nanosa duž rečnog toka određen je lokalnim hidrauličkim uslovima i količinom nanosa koju tok donosi sa uzvodne deonice. Prethodno je razmatrano ravnotežno stanje, kada je priliv nanosa izjednačen sa transportnim kapacitetom tako da nema deformacije korita. Kada to nije slučaj (videti Sliku 11.8), može se očekivati deformacija korita na dužini koja zavisi od brzine kojom vodotok uspe da uspostavi ravnotežu u pronosu nanosa, odnosno lokalno uskladi priliv nanosa sa transportnim kapacitetom. U tom smislu može se govoriti o „dužini prilagodjavanja“ koja je neophodna za uspostavljanje ravnotežnog stanja.

Hidrodinamička dužina prilagodjavanja (L_h) predstavlja dužinu potrebnu da se hidrodinamički uslovi „vrate“ u stanje lokalne ravnoteže, posle nekog naglog poremećaja. Ova dužina približno iznosi $L_h \approx 25h$, a u većini primera iz prakse je: $L_h = (20 \div 40)h$, gde je h – lokalna dubina toka.

Psamološka dužina prilagodjavanja (L_s) predstavlja dužinu neophodnu da se povećani pronos suspendovanog nanosa usled nekog naglog poremećaja (q_{s1}), prilagodi lokalnom transportnom kapacitetu (q_s). Proračuni dužine prilagodjavanja uopšteni su dijagramom na Slici 11.16.

■ **Primer 11.7.** Za potrebe formiranja pristanišnog bazena, rečno korito se u blizini obale bageruje pomoću refulera – bagera koji usisava mešavinu vode i peščanog materijala sa dna. Izbagerovani materijal se transportuje kroz cevovod na plovcima do izabranog nizvodnog profila, gde se ispušta u maticu reke. Ispušta se oko 200 kg/s nanosa srednje krupnoće zrna 0,08 mm. U profilu ispuštanja, lokalni nagib dna iznosi 5×10^{-5} . Ako je u periodu bagerovanja prosečna dubina u datom profilu 7 m, a transportni kapacitet za suspendovani nanos 95 kg/s, odrediti na kojoj će se dužini nizvodno „osećati“ uticaj ispuštanja izbagerovanog materijala.



Slika 11.16: Psamološka dužina prilagodjavanja u funkciji relativnog „opterećenja” vodotoka suspendovanim nanosom i parametra suspenzije W/u_* [167]; može se primetiti da vrednost odnosa L_s/h raste sa smanjenjem vrednosti odnosa W/u_* , odnosno da je psamološka dužina prilagodjavanja veća što je krupoća zrna manja.

Rešenje. Prosečno „opterećenje” vodotoka suspendovanim nanosom nizvodno od mesta ispuštanja iznosi: $q_{s1}/q_s = 0,9 \times 200 = 180/95 = 1,89 \approx 2$. Pod pretpostavkom jednolikog tečenja, sledi:

$$u_* = \sqrt{9,81 \cdot 7,0 \cdot 5 \times 10^{-5}} \approx 0,06 \text{ m/s};$$

$$d_{50} = 0,08 \text{ mm} \Rightarrow W = 0,003 \text{ m/s};$$

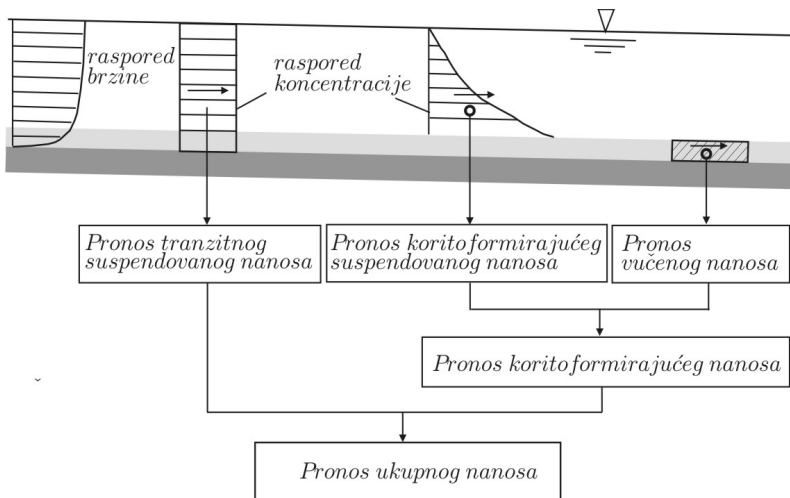
$$W/u_* = 0,003/0,06 = 0,05.$$

Za vrednosti $q_{s1}/q_s=2$ i $W/u_*=0,05$, sa dijagrama na Slici 11.16 može se očitati vrednost $L_s/h \approx 350$. To znači da je dužina prilagodjavanja, odnosno dužina na kojoj se nizvodno od mesta ispuštanja „oseća” uticaj bagerovanja: $L_s = 350 \cdot 7 = 2450 \text{ m}$, ili oko 2,5 km.

11.9 Metode proračuna ukupnog (totalnog) pronosa

Na osnovu konceptualne podele rečnog nanosa, koja je shematski prikazana na Slici 11.17, proizilazi da se ukupni (totalni) pronos rečnog nanosa može odrediti sabiranjem posebno sračunatih pronosa vučenog i suspendovanog nanosa (bez tranzitnog nanosa):

$$q_u = q_v + q_s = C_o \int_0^{\delta_o} u_s(z) dz + \int_{\delta_o}^h C(z) \cdot u(z) dz \quad [\text{m}^3/(\text{s m})]. \quad (11.87)$$



Slika 11.17: Komponente pronosa rečnog nanosa.

Komponente ukupnog pronosa se određuju pomoću neke izabrane metode (Ajnštajna, fan Rejna, Karima i Kenedija i dr.). Poznavanje pronosa tranzitnog nanosa je nužno samo ako se razmatraju deonice vodotoka pod usporom, gde se zbog drastičnog smanjenja brzine može očekivati intenzivno istaložavanje (akumulacije, ušća, pristanišni bazeni).

U slučaju velikih aluvijalnih vodotoka u kojima dominira sitan peščani materijal koji se kreće u vidu suspendovanog nanosa, mogu se koristiti i obrasci koji daju *ukupni pronos*. Takvi obrasci, (bez podele nanosa), pogodni su za primenu u sklopu proračuna opšte deformacije, jer se svode na izraze u kojima je ukupni pronos u profilu proporcionalan veličinama koje se lako mogu sračunati: srednjoj profilskoj brzini, hidrauličkom radijusu itd. U nastavku se primera radi, ukratko opisuju dva poznata obrasca iz ove kategorije [54, 146].

Obrazac Engelunda i Hansena (Engelund, Hansen, 1967). Ovaj obrazac (skraćeno EH) je pogodan kada je srednja krupnoća zrna ispod 1 mm, a rečno dno formirano u obliku dina [47]. Može se primeniti i za ravno dno, kao i za dno sa naborima, ako je srednja krupnoća nanosa $d > 0,15$ mm. U bezdimenzionom obliku, obrazac EH ima oblik:

$$C_\tau \cdot \Phi = 0,1 \cdot \Theta^{5/2}, \quad (11.88)$$

gde je C_τ – bezdimenzioni koeficijent trenja.

Obrazac EH se može napisati u sledećem dimenzionom obliku:

$$q_u = 0,05 \frac{\tilde{u}^5}{\sqrt{g} \cdot \Delta^2 \cdot d \cdot C^3} \quad [\text{m}^3/(\text{s m})], \quad (11.89)$$

gde je d – srednji prečnik zrna sa dna, a $C = (2g/C_\tau)^{1/2} - \check{S}$ ezijev koeficijent (videti izraz (3.8)).

Interesantno je uporediti obrazac EH sa nekim od prethodno razmatranih obrazaca za suspendovani nanos. Imajući u vidu da je prosečna koncentracija:

$$C_m = \rho_s \cdot (q_u/q) = \rho_s \cdot [q_u/(\tilde{u} \cdot h)]$$

i prelazeći na srednje profilske veličine, obrazac EH se može formulisati i na ovaj način:

$$C_m = \frac{0,05 \cdot \rho_s}{\sqrt{g} \cdot \Delta^2 \cdot C^3} \left(\frac{V^4}{d \cdot R} \right) \quad (11.90)$$

ili, ako se koristi Maningov koeficijent otpora:

$$C_m = \frac{0,05 \cdot \rho_s \cdot n^3}{\sqrt{g} \cdot \Delta^2} \left(\frac{V^4}{d R^{3/2}} \right). \quad (11.91)$$

Grupacija ispred zagrade na desnoj strani izraza (11.90) i (11.91) odgovara koeficijentu η'_s , a $d \propto W^2$, pa se može zaključiti da je obrazac EH u skladu sa formulama ruskih predstavnika energetskog pristupa. Razlika je samo u tome što umesto srednje brzine tonjenja W u izrazima ruskih autora, obrazac EH sadrži srednji prečnik zrna sa dna.

S druge strane, to upućuje na zaključak da se formula Rosinskog i Kuzmina može koristiti kao formula za ukupni pronos kod vodotoka sa sitnim peščanim nanosom. Formula Rosinskog i Kuzmina se može prikazati u sledećem obliku [25]:

$$\Phi = a \cdot \eta'_s \cdot \Theta^2, \quad (11.92)$$

gde je $a = (g \cdot \Delta)^{3/2} (\rho_s W)^{-1} d^{1/2} (V/V_*)^4$. Može se primetiti da je vrednost eksponenta broja Θ jednaka 2,0, dok je u obrascu EH ta vrednost 2,5.

■ **Primer 11.8.** Sračunati ukupan pronos nanosa u profilu jednog vodotoka ako su dati sledeći podaci: $Q = 700 \text{ m}^3/\text{s}$, $R = 2 \text{ m}$, $I_e = 0,0004$, $V = 1 \text{ m/s}$. Granulometrijski sastav nanosa je definisan podacima prosejavanja u prve četiri kolone Tabele 11.10. ($\Delta = 1,65$.)

Rešenje. Vrednost Šezijevog koeficijenta je: $C = V/\sqrt{R \cdot I_e} = 35,36 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$. Pri menom obrasca (11.90) mogu se sračunati masene koncentracije po frakcijama. Rezultati su dati u poslednje dve kolone Tabele 11.10. Ukupna masena koncentracija se dobija sabiranjem doprinosa svih frakcija: $C_m = 0,594 \text{ kg/m}^3$, a pronos ukupnog nanosa u datom profilu iznosi: $Q_{um} = C_m \cdot Q \approx 416 \text{ kg/s}$.

Tabela 11.10: Rezultati proračuna po metodi Engelhunda i Hansena.

Frakcija	d [mm]	d_g [mm]	Δp [-]	C_m [kg/m ³]	$\Delta p \cdot C_m$ [kg/m ³]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	0,10 ÷ 0,15	0,122	0,10	1,435	0,144
2	0,15 ÷ 0,25	0,194	0,25	0,908	0,227
3	0,25 ÷ 0,50	0,354	0,30	0,497	0,149
4	0,50 ÷ 1,00	0,707	0,25	0,249	0,062
5	1,00 ÷ 2,00	1,414	0,10	0,124	0,012
Σ :			1,00		0,594

Obrazac Akersa i Uajta (Ackers, White, 1973). Zasnovana na energetskom pristupu Bagnolda, ova metoda (skraćeno „AW“) dovodi u vezu koncentraciju nanosa [2]:

$$C_m = a_1 \cdot \rho_s \cdot \frac{d}{R} \left(\frac{V}{V_*} \right)^{a_2} \left(\frac{F_g - F_{gc}}{F_{gc}} \right)^{a_3}, \quad (11.93)$$

sa bezdimenzionim parametrom pokretljivosti zrna:

$$F_g = \frac{V_*^{a_2}}{\sqrt{g \cdot \Delta \cdot d}} \left[\frac{V}{\sqrt{32} \cdot \log(10 \cdot R/d)} \right]^{1-a_2}, \quad (11.94)$$

pri čemu su a_1 , a_2 i a_3 - empirijski koeficijenti, a F_{gc} je kritična vrednost parametra pokretljivosti zrna. Empirijski izrazi za proračun navedenih parametara dati su u funkciji bezdimenzionog prečnika d_* (Tabela 11.11).

Tabela 11.11: Empirijski parametri u metodi AW [2].

Parametar	$1 < d_* \leq 60$	$d_* > 60$
a_1	$\log a_1 = 2,86 \log d_* - (\log d_*)^2 - 3,53$	0,025
a_2	$1 - 0,56 \log d_*$	0,00
a_3	$9,66/d_* + 1,34$	1,50
F_{gc}	$0,23/\sqrt{d_*} + 0,14$	0,17

Proračun se može sprovesti za srednji prečnik mešavine $d = d_{50}$, ili po frakcijama, u kom slučaju je $d = d_g$ - reprezentativna krupnoća frakcije.

Transport krupnijih čestica u vidu vučenog nanosa pripisuje se jediničnoj snazi toka $\tau'_o \cdot V$, koja je definisana drugim članom na desnoj strani jednačine (11.94). Sitne čestice u suspenziji, podvrgnute uticajima turbulencije koja zavisi od ukupne jedinične snage toka $\tau_o \cdot V$, obuhvaćene su prvim članom na desnoj strani izraza

(11.94). Koeficijent a_2 , koji zavisi od krupnoće čestica, odražava oba vida transporta, s tim da mu je vrednost nula ako je nanos krupan i kreće se isključivo u vidu vučenog nanosa. (U tom slučaju autori preporučuju merodavni prečnik zrna $d = d_{35}$.)

Model AW je kalibrisan na osnovu rezultata oko 1000 laboratorijskih eksperimenata obavljenih sa nanosom krupnoće iznad 0,04 mm, pri vrednostima $Fr < 0,8$ i $1 < d_* \leq 60$. Izvan navedenih granica, metoda AW nije primenjiva.

Rezultati proračuna sa krupnijim materijalom ($d_* > 60$) pokazuju dobro slaganje sa rezultatima merenja u laboratoriji i na terenu [2, 25].

■ **Primer 11.9.** Sračunati pronos ukupnog nanosa po metodi AW za vodotok iz primera 11.8. ($\nu = 1,14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$).

Rešenje. U datom slučaju je $V_* = \sqrt{g \cdot R \cdot T_e} = 0,0886 \text{ m/s}$ i $V/V_* = 11,29$. Rezultati proračuna po frakcijama dati su u Tabeli 11.12.

Tabela 11.12: Rezultati proračuna po metodi AW.

Frak.	d_g [mm]	d_* [-]	Δp [-]	a_1 [-]	a_2 [-]	a_3 [-]	F_{gc} [-]	F_g [-]	C_m [kg/m ³]	$\Delta p \cdot C_m$ [kg/m ³]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
1	0,112	2,60	0,10	0,003	0,768	5,061	0,283	1,662	8,843	0,884
2	0,194	4,50	0,25	0,008	0,634	3,488	0,248	1,129	0,804	0,201
3	0,354	8,21	0,30	0,018	0,488	2,517	0,220	0,751	0,248	0,074
4	0,707	16,39	0,25	0,029	0,320	1,929	0,197	0,480	0,121	0,030
5	1,414	32,78	0,10	0,032	0,151	1,635	0,180	0,315	0,054	0,005
Σ :			1,00							1,195

Masena koncentracija svih frakcija iznosi $C_m = 1,195 \text{ kg/m}^3$. Protok ukupnog nanosa u profilu iznosi $Q_{um} = 836,58 \text{ kg/s}$. Može se konstatovati da je ovaj pronos dva puta veći od onog koji se dobija primenom metode EH.

11.10 Merenje pronosa suspendovanog nanosa

Iako dugotrajna i skupa, merenja su nezaobilazna. Računski rezultati zavise od dobro izmerene referentne koncentracije. Pored toga, treba imati u vidu da tranzitni suspendovani nanos, koji kod nekih vodotoka ima dominantni udeo, nije obuhvaćen postojećim metodama proračuna (osim što je sadržan u uzvodnom graničnom uslovu), tako da se njegov udeo u ukupnom pronosu može proceniti isključivo na osnovu terenskih merenja. Ova merenja obuhvataju:

- zahvatanje uzoraka radi određivanja granulometrijskog sastava;
- određivanje rasporeda koncentracije po poprečnom preseku;
- merenje pronosa suspendovanog nanosa.

11.10.1 Način merenja i merni uređjaji

Zahvatanje uzoraka vode sa suspenodovanim nanosom obavlja se pomoću hvatača („batometara”), čija konstrukcija zavisi od načina zahvatanja, karakteristika toka i koncentracije nanosa. Uzimanje uzorka se obavlja postepenim, kontrolisanim punjenjem boce određene zapremine, koja predstavlja glavni deo svakog hvatača.

Način zahvatanja je određen ciljevima analize; ako je cilj utvrđivanje rasporeda koncentracije po dubini, zahvatanje se obavlja u nizu tačaka jedne vertikale i u tom slučaju se koriste *hvatači za lokalno uzimanje uzoraka*. Za određivanje srednje koncentracije po vertikali se koriste *hvatači-integratori*.

Lokalno zahvatanje uzoraka se može obavljati po utvrđenom redosledu mernih tačaka, ili u više tačaka, odjednom. U obe varijante se istovremeno i u istim tačkama mere brzine. Uzimanje uzorka mora biti dovoljno dugotrajno kako bi se odredila *vremenski osrednjena* koncentracija.

Merenje srednje koncentracije po dubini obavlja se tako što se hvatač-integrator spušta *konstantnom* brzinom od površine do dna (i obratno), „pokrivajući” u jednom prolazu ceo profil koncentracija, od najmanjih pri površini, do najvećih pri dnu. Uzorak se zahvata u bocu ili u plastičnu vrećicu. Neophodno je odrediti odgovarajuću zapreminu boce ili vrećice, usisne cevi i brzine kretanja hvatača, kako se hvatač ne bi prepunio u toku rada. Ako je brzina kretanja hvatača uskladjena sa brzinom toka u svakoj vertikali, kao rezultat korišćenja kalibrisanog hvatača se dobija *po dubini osrednjena* koncentracija.

Imajući u vidu opisane načine zahvatanja uzoraka, proizilazi da u radu moraju biti zadovoljena tri osnovna uslova:

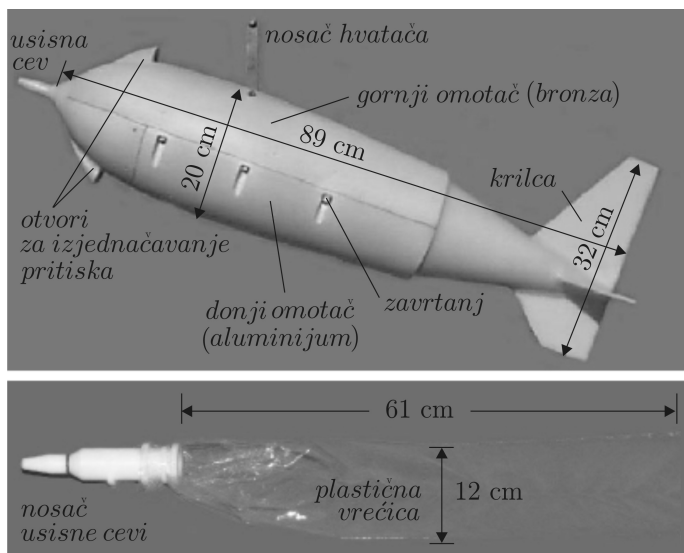
(i) Zahvatanje ne sme remetiti lokalnu strujnu sliku; to podrazumeva da su uređjaji hidrodinamički oblikovani i da omogućavaju „*izokinetičko zahvatanje*”, što znači da je brzina vode koja sa nanosom ulazi u hvatač jednaka brzini toka u tački zahvatanja.

(ii) Zahvatanje mora biti dovoljno dugotrajno, da bi vremensko osrednjavanje bilo moguće i da bi se prikupio dovoljan broj uzoraka.

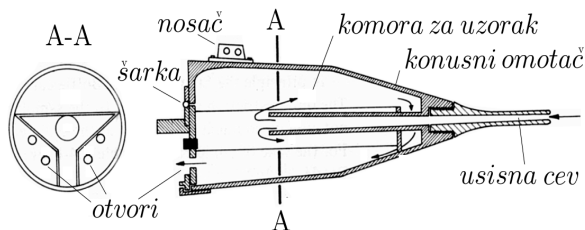
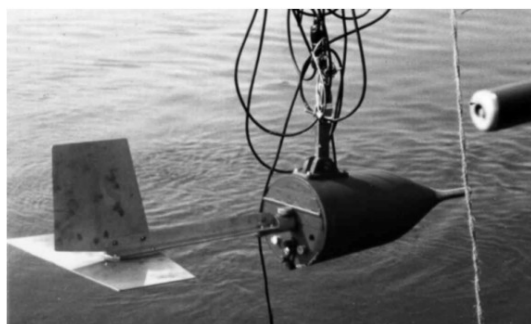
(iii) Zapremina uzoraka mora biti dovoljna za sve analize; naknadno ponovljena merenja, s obzirom na stohastičku prirodu procesa, ne daju iste rezultate.

Merenjima je neophodno obuhvatiti različite hidrološke uslove, kako bi se mogle uspostaviti korelacione zavisnosti protoka vode i pronosa suspendovanog nanosa u mernim profilima.

Hvatači sa bocom ili vrećicom. Neki tipovi ovih uređjaja, koji se primenjuju kod većih koncentracija ($C_m > 0,5$ gr/L), prikazani su na Slikama 11.18 i 11.19. Postoje razna konstruktivna rešenja. Razlikuju se po konstrukciji usisne cevi i po načinu na koji se izjednačava pritisak u hvataču i oko njega.



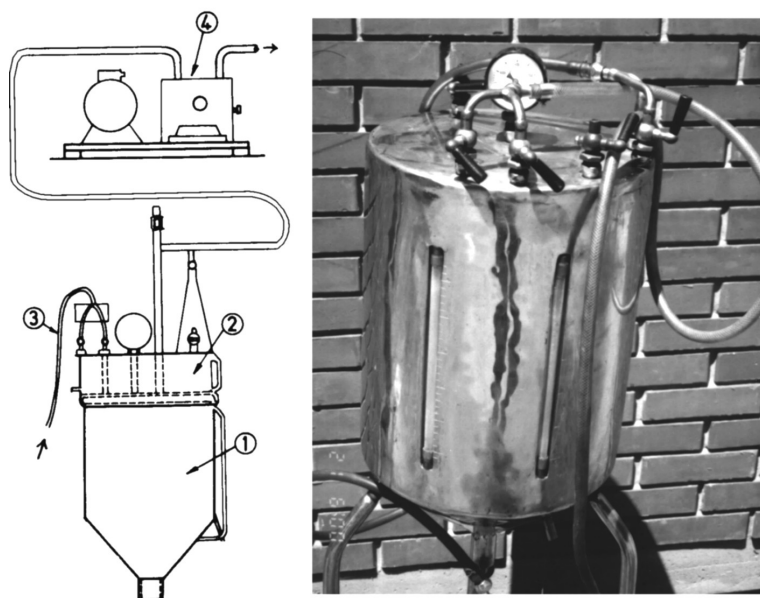
Slika 11.18: Američki hvatač-integrator US D-96 patentiran 2001. Hvatač mase 60 kg zahvata uzorak zapremine 3 L u plastičnu vrećicu, kroz usisnu cev prečnika $4,8 \div 7,9$ mm na dubinama do 30 m. Brzina pomeranja hvatača iznosi 0,4 brzine toka, koja može biti u granicama $0,6 \div 4,6$ m/s. Uzorak se po potrebi koristi i za ispitivanje kvaliteta vode [161].



Slika 11.19: Holandski protočni hvatač poznat pod imenom „Delftska boca” [76].

Stariji tipovi hvatača-integratora koriste boce za zahvatanje uzoraka, a noviji, plastične vrećice. Prvi moraju imati komoru za izjednačavanje pritiska i cev za evakuaciju vazduha, a ovi drugi, imaju samo otvore za izjednačenje pritiska (Slika 11.18), što znači jednostavniju konstrukciju i lakša merenja. Prečnik usisne cevi i brzina kretanja hvatača-integratora bira se tako da odgovara uslovima na terenu. Kako je prečnik usisnih cevi ograničen ($4 \div 8$ mm), ključan je izbor brzine spuštanja/podizanja hvatača. Ta brzina se mora prilagoditi dubini i srednjoj brzini toka na mestu merenja, pri čemu merenje brzine toka prethodi uzimanju uzoraka nanosa. Brzine kretanja hvatača su najčešće $0,25 \div 1,0$ m/s, dok je dubina na mestu merenja ograničena konstruktivnim karakteristikama samog uređaja.

Vakuumni hvatači. Ovi uređaji se koriste u slučaju relativno malih koncentracija ($C_m < 0,5$ gr/L), kada je potrebno zahvatiti uzorak velike zapremine (do 40 L). Na Slici 11.20 prikazan je vakuumni hvatač koji se koristi kod nas.



Slika 11.20: Shematski prikaz vakuumnog hvatača [59, 87]; u početnoj fazi zahvatanja, voda se kroz dovodni sistem (3) upušta u pomoćnu komoru (2), sve dok se ne izjednači brzina zahvatanja sa brzinom toka u mernoj tački. Uzorak se zatim upušta u glavnu komoru (1), čija zapremina iznosi $10 \div 40$ L. Voda se usisava kroz elastično crevo pomoću vakuum pumpe (4). Fotografija prikazuje vakuumni hvatač izrađen u Institutu za vodoprivredu „Jaroslav Černi“.

11.10.2 Problemi zahvatanja uzoraka i tačnost merenja

Dva ključna problema zahvatanja uzoraka su sprečavanje naglog prodiranja vode u hvatač u trenutku otvaranja usisne cevi i podešavanje brzine punjenja. Naglo prodiranje vode je posledica smanjivanja zapremine vazduha u boci, u procesu izjednačenja hidrostatičkog pritiska u tački zahvatanja i pritiska u unutrašnjosti hvatača. Ovaj fenomen traje veoma kratko (manje od jedne sekunde), ali su brzine u ulaznoj cevi jako velike, tako da je koncentracija u zahvaćenom uzorku manja od stvarne. (Ovaj problem se, kao što je rečeno, kod nekih hvatača rešava ugradnjom komore za izjednačenje pritiska, a kod drugih, posebnim otvorima na hvataču.)

Uslovi zahvatanja vode u mernoj tački bitno utiču na kvalitet rezultata. Telo hvatača lokalno usporava tok i izaziva skretanje strujnica, dok čestice suspendovanog nanosa, usled veće inercije, u manjoj meri skreću i zaobilaze usisnu cev hvatača, tako da je krajnji rezultat „manjak” tečne, a „višak” čvrste faze u zahvaćenom uzorku. Dobijena koncentracija je veća od stvarne koncentracije. Obrnuto se javlja ako je brzina zahvatanja veća od brzine toka u datoj tački. Zaključak je da je uzorak reprezentativan samo ukoliko je brzina zahvatanja podešena tako da odgovara brzini toka u mernoj tački. Zato je tačnost određivanja pronosa suspendovanog nanosa na osnovu izmerene koncentracije istog reda veličine kao tačnost određivanja protoka na osnovu izmerenog rasporeda brzine.

Iz svega proizilazi da nije čudno da se pronos suspendovanog nanosa, određen na osnovu izmerenih rasporeda koncentracije i brzine, može veoma mnogo razlikovati od pronosa određenog primenom računskih metoda. Razlike mogu biti 200 % [76].

Na kraju treba ukazati i na problem učestalosti terenskih merenja. Broj mernih kampanja se definiše u svakom konkretnom slučaju, shodno postavljenim ciljevima. Ako je cilj utvrđivanje ukupnog *godišnjeg pronosa*, opšta je preporuka da se meri što češće, naročito u periodu velikih voda (što u uslovima velikih brzina toka nije uvek moguće). Kako postoji izvesna korelacija između protoka vode i pronosa suspendovanog nanosa, plan terenskih merenja se može bazirati na hidrolškim analizama promene vodostaja. Treba međjutim biti svestan činjenice da su moguće velike greške u proceni godišnjeg bilansa nanosa kod vodotoka sa izraženo promenljivim vodnim režimom¹⁵.

11.10.3 Obrada rezultata merenja

Laboratorijske analize uzoraka obuhvataju određivanje koncentracije suspendovanih čestica i njihovog granulometrijskog sastava.

¹⁵Bujični poplavni talas na malom slivnom području može u jednom danu prineti čak 40% ukupne godišnje količine nanosa [87]. Na velikim rekama su zabeleženi slučajevi da je i do 90% ukupne godišnje količine nanosa prineti u toku 10÷20 dana. Interesantno je da najveće koncentracije prethode vrhu poplavnog talasa, što treba imati u vidu pri uzimanju uzoraka.

Odredjivanje koncentracije. Masena koncentracija se odredjuje kao odnos mase čestica nanosa i zapremine uzorka. Za odredjivanje mase čestica koriste se dve metode: isparavanja i filtracije.

Metoda isparavanja zahteva prethodno višednevno istaložavanje čestica iz zahvaćenog uzorka na sobnoj temperaturi. Smisao taloženja (koje se obavlja u specijalnim sudovima iz kojih se lako može izdvojiti čista voda od vode sa talogom), je u tome da se smanji količina vode koja treba da ispari. Talog se suši u sušnici najmanje dva sata na temperaturi od 105°C, a zatim se meri na analitičkoj vagi, čija je tačnost 10^{-4} gr.

Filtracija uzorka, kao metoda za razdvajanje čvrste od tečne faze, zasniva se na korišćenju papirnog filtra koji se stavlja u stakleni levak. Voda prolazi kroz filter, a nanos se na njemu zadržava. Masa nanosa je jednaka razlici mase filtra pre i posle filtracije, pri čemu se posle filtracije filteri suše najpre na vazduhu, a zatim u sušnici na temperaturi od 105°C. Merenje zahteva preciznu analitičku vagu. Nedostatak ove metode je tome što je moguć prolaz kroz pore filtra čestica sitnijih od 0,002 mm, kao i to što na rezultate utiče vlažnost vazduha u trenutku merenja.

Ovde će se ukazati i na dve savremene metode za *kontinualno* praćenje koncentracije suspendovanog nanosa na prirodnim vodotocima. Prva se bazira na korišćenju *radioaktivnih izotopa*, gde se, kao kod vučenog nanosa, meri intenzitet radioaktivnog zračenja. Slabije zračenje odražava veće koncentracije i obrnuto.

Druga metoda se bazira na korišćenju *fotoelektričnog turbidimetra* – uređjaja za kontinualno merenje intenziteta svetlosti pomoću fotoelektrične ćelije smeštene u cevi kroz koju struji voda. Obe tehnike neprekidnog praćenja koncentracije zahtevaju prilično komplikovanu kalibraciju mernih uređjaja.

Odredjivanje granulometrijskog sastava. Prikaz metoda odredjivanja krupnoće sitnih čestica dat je u osmom poglavlju, pa se na ovom mestu neće ponavljati. Dovoljno je podsetiti na činjenicu da se krupnoća finih čestica koje se ne mogu prosejavati, izražava preko brzine tonjenja (hidrauličke krupnoće) i da se raspodela ove brzine odredjuje metodama kumulativnog i frakcionog taloženja. Razdvajanje po krupnoći filtracijom nije moguće kod prašinih i glinovitih materijala, jer se čestice slepljuju prilikom filtracije.

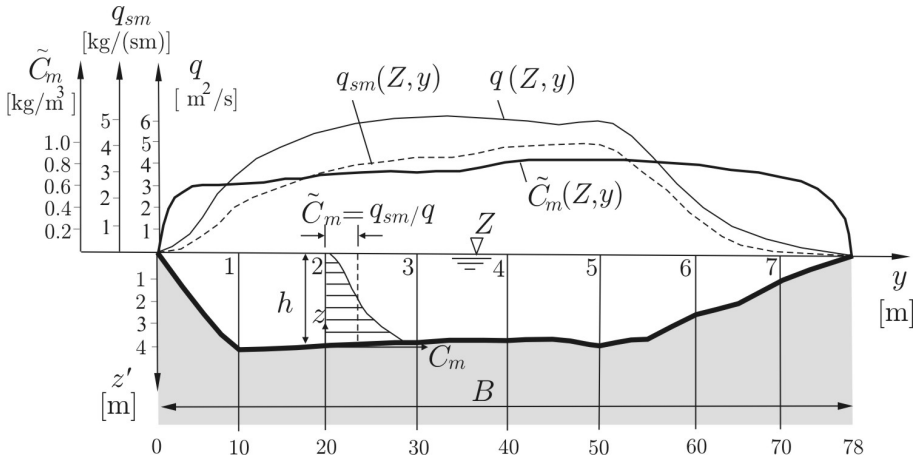
Odredjivanje pronosa suspendovanog nanosa. Neophodno je u profilu istovremeno meriti koncentraciju nanosa i brzinu toka u nizu vertikala, čiji je broj uslovljen veličinom vodotoka (prema propisima), ali zavisi i od svrhe i željene tačnosti merenja.

Jedinični pronos suspendovanog nanosa dobija se osrednjavanjem izmerenih brzina i koncentracija po dubini:

$$q_{sm} = \tilde{u} \cdot h \cdot \tilde{C}_m = q \cdot \tilde{C}_m \quad [\text{kg}/(\text{s m})], \quad (11.95)$$

a ukupni pronos pri datom vodostaju se dobija integracijom po profilu (Slika 11.21):

$$Q_{sm} = \int_0^B q_{sm}(y) dy \quad [\text{kg/s}]. \quad (11.96)$$



Slika 11.21: Rezultat obrade merenja suspendovanog nanosa u jednom profilu Velike Morave [87].

Srednja profilska koncentracija jednaka je:

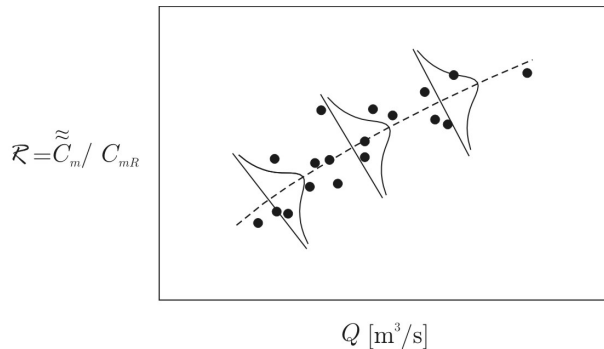
$$\tilde{\tilde{C}}_m = \frac{Q_{sm}}{Q}. \quad (11.97)$$

Kompletna merenja koncentracije po profilu zahtevaju puno vremena i finansijskih sredstava. Da bi se lakše došlo do podataka o pronosu nanosa u profilu, može se na osnovu nekoliko kompletnih merenja odrediti jedna *referentna tačka* u datom profilu, u kojoj je lokalna koncentracija u jednoznačnoj vezi sa srednjom profilskom koncentracijom. Ustvari, na osnovu merenja se određuje korelaciona zavisnost odnosa:

$$\mathcal{R} = \tilde{\tilde{C}}_m / C_m^R, \quad (11.98)$$

(gde je C_m^R - masena koncentracija u referentnoj tački) i neke hidrauličke veličine u posmatranom profilu, najčešće protoka Q (Slika 11.22).

Da bi se ostvarila tražena korelaciona zavisnost, neophodno je da zahvatanje uzoraka bude *svakodnevno*, uvek na isti način i u istoj referentnoj tački. Koncentracija C_m^R se određuje u laboratoriji.



Slika 11.22: Korelacija relativne koncentracije u referentnoj tački i protoka; rasipanje podataka ukazuje da je koeficijent \mathcal{R} slučajna veličina.

Ako se raspolaže dijagramom kao što je onaj na Slici 11.22, očitavanjem vrednosti koeficijenta \mathcal{R} za dati protok Q i merenjem odgovarajuće koncentracije u referentnoj tački C_m^R , može se brzo odrediti pronos suspendovanog nanosa:

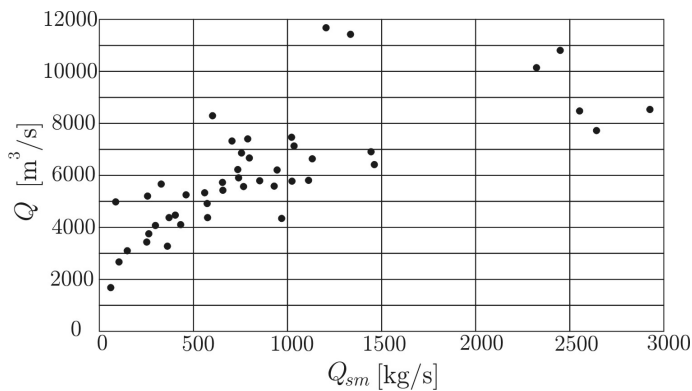
$$Q_{sm}(Q) = \mathcal{R} \cdot C_m^R \cdot Q \quad [\text{kg/s}]. \quad (11.99)$$

Kvalitet rezultata presudno zavisi od izbora položaja referentne tačke. Ovaj položaj mora biti pažljivo izabran. Uzimanje uzoraka u tački pri površini (najlakša varijanta) ima smisla samo kod strmih, bujičnih vodotoka, sa uniformnim rasporedom koncentracije po dubini. I tada se mora voditi računa da merna tačka bude dovoljno udaljena od obala. Površinsko zahvatanje nije uputno kod velikih vodotoka sa izraženim gradijentima koncentracije po dubini i širini, jer to obično dovodi do slabe korelacije.

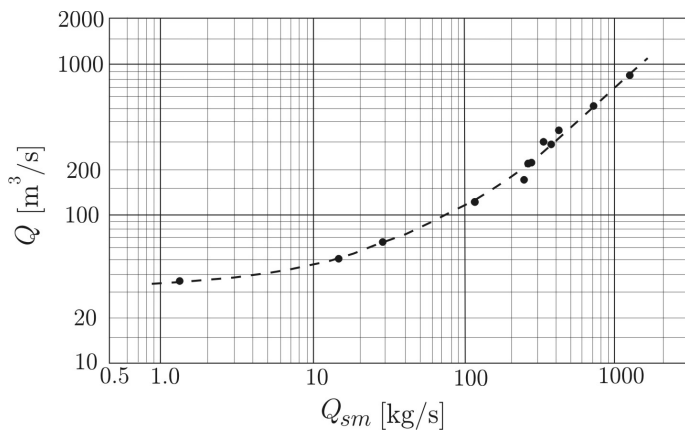
Svrha opisanih merenja je da se utvrde korelacione zavisnosti između pronosa suspendovanog nanosa i protoka vode u datom profilu. Jačina korelacije zavisi od ispunjenosti dva uslova: (a) da je promena granulometrijskog sastava suspendovanog nanosa tokom vremena mala i (b) da je tok dovoljno zasićen nanosom i da je korito stabilno, bez deformacije. Kako su ti uslovi u prirodi retko ostvareni, nije čudno što se na dijagramima poput onog na Slici 11.23 neizbežno javlja rasipanje tačaka.

Iskustvo pokazuje da je za uspostavljanje kvalitetne korelacione veze između protoka vode i pronosa nanosa neophodan veliki broj podataka. Mora se raspolažati rezultatima svakodnevnih merenja koncentracije u periodu od najmanje 3÷5 godina [59]. Preporučuje se uspostavljanje korelacije između *srednjih mesečnih* protoka vode i pronosa nanosa (Slika 11.24).

Srednje mesečne korelacije se mogu koristiti za formiranje krivih trajanja pronosa nanosa na osnovu poznatih krivih trajanja protoka vode, određenih za višegodišnji period.



Slika 11.23: Korelacija merenih protoka vode i nanosa na Dunavu nizvodno od Beograda, u periodu 1957-1967 [59].



Slika 11.24: Korelacija srednjih mesečnih protoka vode i nanosa na Velikoj Moravi u profilu Ljubičevskog mosta, u periodu 1961-1965 [59].

12

Deformacija rečnog korita

Kada se regulacionim radovima, izgradnjom objekata u rečnom koritu, ili na neki drugi način, poremeti ravnoteža hidrauličko-psamološkog režima vodotoka, njegova se reakcija u pravcu uspostavljanja novog ravnotežnog stanja manifestuje deformacijom korita – erozijom ili zasipanjem dna, kao i promenom položaja rečnog korita u horizontalnoj projekciji.

Opšta deformacija se odnosi na dugačke rečne deonice, a *lokalna* deformacija, kao što ime kaže, na kratke poteze, najčešće u zoni objekata koji su izgradjeni u rečnom koritu.

Bez obzira da li je opšteg ili lokalnog karaktera, deformacija korita odražava promene tangencijalnog napona u rečnom toku. Povećanjem ovog napona raste transportni kapacitet za nanos, sve dok ne premaši uzvodni priliv nanosa, kada počinje erozija korita. Obrnuto, smanjenje tangencijalnog napona utiče na opadanje transportnog kapaciteta, a od trenutka kada ovaj postane manji od priliva nanosa, počinje zasipanje korita.

U ovom poglavlju se razmatraju uzroci opšte i lokalne deformacije, kao i mogućnosti njenog kvalitativnog i kvantitativnog predviđanja.

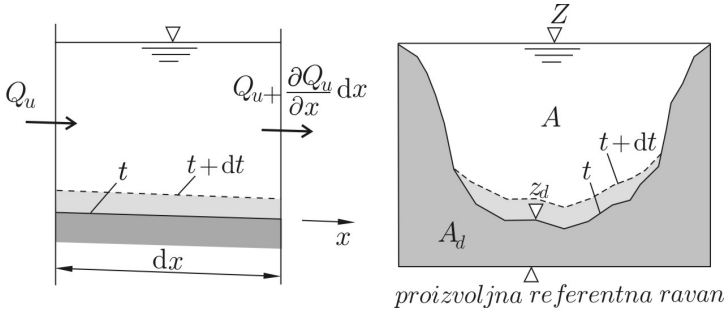
12.1 Jednačina kontinuiteta za nanos

Na Slici 12.1 je prikazana elementarna deonica vodotoka na kojoj vladaju *neravnotežni* uslovi pronosa nanosa.

Promena zapremine čvrste faze u jedinici vremena može se opisati jednačinom:

$$Q_u - \left(Q_u + \frac{\partial Q_u}{\partial x} dx \right) = (1 - \lambda_o) \frac{\partial(A_d \cdot dx)}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{C} \cdot A \cdot dx)}{\partial t}. \quad (12.1)$$

Leva strana ove jednačine predstavlja promenu zapremine ukupnog nanosa na kontrolnoj deonici, u jedinici vremena.



Slika 12.1: Kontrolna zapremina za izvodjenje jednačine kontinuiteta za nanos (levo) i poprečni presek u kome se prikazuje deformacija (desno); povećanje površine A_d , koja se definiše u odnosu na proizvoljnu referentnu ravan, označava zasipanje, a njeno smanjenje, eroziju.

Prvi član na desnoj strani iste jednačine predstavlja promenu zapremine vučenog nanosa u jedinici vremena, pri čemu se odgovarajuća deformacija manifestuje u promeni površine A_d (Slika 12.1). Veličina $(1 - \lambda_o)$, koja se zove „faktor pakovanja” zrna, odražava fizička svojstva materijala na dnu rečnog korita.

Drugi član na desnoj strani jednačine (12.1) predstavlja promenu zapremine suspendovanih čestica u jedinici vremena, definisanu preko srednje profilske koncentracije.

Ako se pretpostavi da se tokom vremena količina suspendovanog nanosa na kontrolnoj deonici malo menja, poslednji član jednačine (12.1) se može izostaviti, pa se, stavljajući $Q_u = Q_v$, dobija Eksnerova (Exner, 1925) jednačina kontinuiteta za nanos:

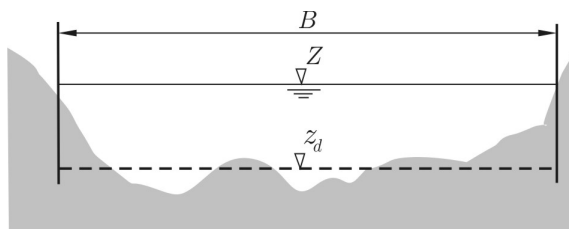
$$(1 - \lambda_o) \frac{\partial A_d}{\partial t} + \frac{\partial Q_v}{\partial x} = 0. \quad (12.2)$$

Desna strana ove jednačine je jednaka nuli kada na posmatranoj deonici nema pritoke.

Odnos pojedinih članova u jednačini (12.2) ukazuje na trendove fizičkog procesa. Kada na deonici poraste pronos nanosa $\partial Q_v / \partial x > 0$, površina A_d mora da se smanji $\partial A_d / \partial t < 0$, što znači da dolazi do erozije. Obrnuto, ako je $\partial Q_v / \partial x < 0$, mora biti $\partial A_d / \partial t > 0$, pa se javlja zasipanje.

U pojednostavljenim analizama se često pretpostavlja da je korito pravougaonog preseka, pa se jednačina kontinuiteta za nanos formuliše preko jediničnog pronosa i prosečne kote dna z_d (Slika 12.2):

$$(1 - \lambda_o) \frac{\partial z_d}{\partial t} + \frac{\partial q_v}{\partial x} = 0. \quad (12.3)$$

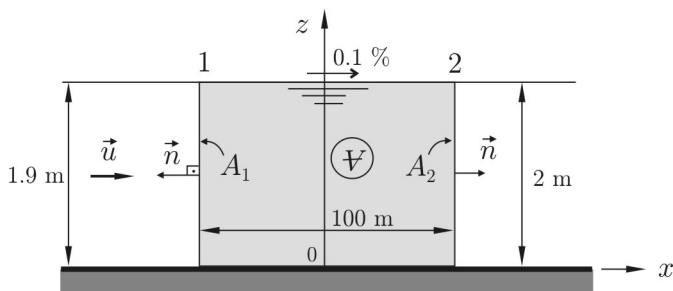


Slika 12.2: Shematizacija poprečnog preseka.

Ako je suspendovani nanos dominantan faktor u formiranju rečnog korita, jednačina (12.1) se može uprostiti tako što se pretpostavi da je korito široko pravougaono, pa se uvede jedinični protok i srednja koncentracija po dubini $\tilde{C} = q_s/q$:

$$(1 - \lambda_o) \frac{\partial z_d}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{C} \cdot h)}{\partial t} + \frac{\partial(q \cdot \tilde{C})}{\partial x} = 0. \quad (12.4)$$

■ **Primer 12.1.** Sračunati priraštaj mase suspendovanog nanosa u jedinici vremena na deonici dužine 100 m koja je pod usporom (Slika 12.3). Problem je ravanski i razmatra se po jedinici širine korita. Protoku $q = 0,4 \text{ m}^3/(\text{s m})$ odgovara nagib linije nivoa 0,1%. U prve tri kolone Tabele 12.1 date su dubine u graničnim profilima i vrednosti koncentracije suspendovanog nanosa izmerene na polovini dubine. Srednji prečnik zrna iznosi 0,15 mm i njegova brzina tonjenja je $W \approx 0,015 \text{ m/s}$ ($\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$).



Slika 12.3: Kontrolna zapremina u primeru 12.1.

Rešenje. Posmatrana deonica predstavlja kontrolnu zapreminu, ograničenu profilima 1 i 2, kao što je prikazano na Slici 12.3. Kako se zadatkom isključivo traži promena mase suspendovanog nanosa u kontrolnoj zapremini, može se jednačina kontinuiteta za nanos napisati u sledećem obliku:

$$\int_{\forall} \frac{\partial(\rho_s C)}{\partial t} d\forall + \int_{\forall} \frac{\partial(\rho_s C)}{\partial x} d\forall = 0. \quad (12.5)$$

Ako se ima u vidu veza između zapreminskog i površinskog integrala, drugi član u jednačini (12.5) se može zameniti integralom: $\int_A \rho_s C \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} dA$, koji predstavlja maseni pronos suspendovanog nanosa kroz proticajnu površinu kontrolne zapremine. U razvijenom obliku jednačina (12.5) izgleda ovako:

$$\begin{aligned} \int_{\forall} \frac{\partial(\rho_s C)}{\partial t} d\forall &= - \int_A \rho_s C \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} dA = \\ &= - \left[- \int_{A_1} \rho_s C \cdot u_1 \cdot n_1 dA + \int_{A_2} \rho_s C \cdot u_2 \cdot n_2 dA \right] = \\ &= (Q_{sm})_1 - (Q_{sm})_2. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Leva strana ove jednačine daje promenu mase nanosa u kontrolnoj zapremini u jedinici vremena, a desna strana, neto protok mase nanosa (ulaz – izlaz). Negativan znak ispred prvog integrala u zagradama označava da ort normale \vec{n} na površinu A_1 i vektor brzine \vec{u}_1 imaju suprotne smerove, kao što je prikazano na Slici 12.3.

Ako se problem posmatra kao ravanski, u jednačini (12.6) će figurisati jedinični protoci suspendovanog nanosa $(q_{sm})_1$ i $(q_{sm})_2$. Za proračun tih protoka pretpostaviće se logaritamski raspored brzine po dubini i raspored koncentracije u obliku Rausove funkcije, pa će se primeniti postupak opisan u tački 11.5.2 (primer 11.4). Rezultati proračuna su dati u Tabeli 12.1.

Tabela 12.1: Ulazni podaci i rešenje u primeru 12.1.

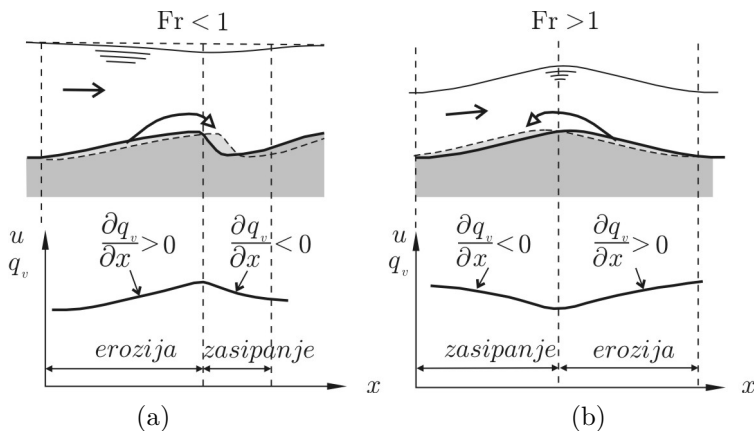
Ulazni podaci			Rezultati proračuna						
Pr.	h	$C_{h/s}$	\tilde{u}	u_*	Z^*	\mathcal{B}	I'_1	I'_2	q_{sm}
	[m]	[-]	[m/s]	[m/s]	[-]	[-]	[-]	[-]	[kg ³ /(s·m)]
1	1,9	0,02	0,21	0,137	0,275	1,56	1,136	-1,772	2,22
2	2,0	0,01	0,20	0,140	0,268	1,54	1,128	-1,739	0,62

Priraštaj mase nanosa u kontrolnoj zapremini je pozitivan i iznosi:

$$(q_{sm})_1 - (q_{sm})_2 = 2,22 - 0,62 = 1,60 \text{ kg/(s·m)}.$$

■ **Primer 12.2.** Objasniti smer kretanja dina i antidina sa stanovišta deformacije dna. Ako je podužni profil dina definisan funkcijom: $z_d(x, t) = f(x - c_b \cdot t)$, gde je c_b - prosečna brzina pomeranja dina, izvesti izraz za pronos vučenog nanosa.

Rešenje. Dine se javljaju u mirnom režimu (Slika 12.4-(a)). Lokalni poremećaj strujne slike se manifestuje smanjenjem dubine, a povećanjem brzine *uzvodno* od vrha dine. Posledica je lokalni porast pronosa vučenog nanosa $\partial q_v / \partial x > 0$, a da bi se zadovoljila jednačina kontinuiteta za nanos (12.3), mora biti $\partial z_d / \partial t < 0$, što znači da na ovom delu mora doći do erozije.



Slika 12.4: Skica uz objašnjenje smera migracije dina i antidina.

Suprotan proces se odvija *nizvodno* od vrha dine, gde se javlja zasipanje (Slika 12.4-(a)). Ovo objašnjava *nizvodni* smer migracije dina. Sledeći istu logiku, lako se može zaključiti da je u slučaju antidina – nanosnih formacija u burnom režimu (Slika 12.4-(b)), *uzvodni* smer kretanja jedino fizički moguć.

Zamenom izvoda $\partial z_d / \partial t = -c_b \cdot f'(x - c_b \cdot t)$ u jednačinu kontinuiteta (12.3), dobija se:

$$\frac{\partial q_v}{\partial x} = c_b \cdot f'(x - c_b \cdot t),$$

a imajući u vidu da je $q_v = q_v(x, t)$ sledi:

$$dq_v = \frac{\partial q_v}{\partial x} dx + \frac{\partial q_v}{\partial t} dt, \text{ odnosno,}$$

$$q_v = \int \frac{\partial q_v}{\partial x} dx + q_{v1}(t) = c_b \int f'(x - c_b t) dx + q_{v1}(t) = c_b \cdot z_d(x, t) + q_{v1}(t),$$

gde je $q_{v1}(t)$ – zadata funkcija dotoka nanosa (granični uslov).

12.2 Opšta deformacija rečnog korita

Analiza opšte deformacije rečnog korita ima za cilj da se predvide morfološke reakcije vodotoka na projektovane regulacione radove i da se osigura funkcija gradjevina u rečnom koritu.

Evo nekoliko problema čije se rešavanje zasniva na proračunima opšte deformacije:

- analiza erozije korita izazvana prolaskom poplavnog talasa;
- prognoza regresivne erozije nizvodno od brane;
- prognoza zasipanja akumulacije;
- analiza deformacije korita u zoni ušća;
- planiranje bagerskih radova na uspostavljanju ili održanju plovidbe, kao i prognoza efekata ovih radova;
- analiza deformacije korita u zoni mostovskih suženja;
- prognoza posledica uzimanja vode iz reke za potrebe navodnjavanja ili vodosnabdevanja naselja.

Fenomen opšte deformacije se može izučavati pomoću matematičkih i fizičkih modela. Prednost matematičkih modela je u tome što omogućavaju da se relativno brzo i na ekonomski prihvatljiv način obuhvate vrlo dugačke deonice, što nije uvek slučaj sa fizičkim modelima. Međutim, korišćenje matematičkih modela, kao što će se videti u nastavku, nije rutinski posao, već zahteva dugotrajne pripreme i angažovanje specijalista.

12.2.1 Matematički modeli opšte deformacije

Deformacija rečnog korita je usled sekundarnih strujanja prostorno trodimenzioni fenomen, ali su na sadašnjem nivou razvoja nauke i računarske tehnologije nužna uprošćenja, tako da se problem rešava kao ravanski (u horizontalnoj ravni, sa brzinama koje su osrednjene po dubini), ili kao linijski problem, sa brzinama koje su osrednjene po porečnom preseku. Ovde će se razmatrati isključivo računski modeli linijskog tečenja.

12.2.1.1 Osnovne pretpostavke, jednačine i konturni uslovi

Pored osnovnih pretpostavki na kojima su bazirane jednačine linijskog neustaljenog tečenja (mali nagib dna, hidrostatički raspored pritiska itd.), u matematičkim modelima deformacije pretpostavlja se da je korito formirano u aluvijalnim naslagama *nevezanog* materijala, *homogenog* sastava. U zavisnosti od izbora metode za proračun transporta nanosa, analiza se obavlja sa srednjim prečnikom zrna, ili po frakcijama¹.

Sistem jednačina matematičkog modela neustaljenog tečenja u koritu sa pokretnim dnom sastoji se od San Venanovih jednačina, jednačine kontinuiteta za nanos i

¹Najsloženiji modeli omogućavaju predviđanje segregacije materijala po krupnoći, odnosno granulometrije armirajućeg sloja [11, 125].

izabrane jednačine za pronos nanosa:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial Z}{\partial x} + g A I_e &= 0 \\ (1 - \lambda_o) \frac{\partial A_d}{\partial t} + \frac{\partial Q_v}{\partial x} &= 0 \\ Q_v &= Q_v(Z, Q). \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Jednačine sistema (12.7) su međusobno povezane zavisno promenljivim $Z(x, t)$ i $Q(x, t)$, kao i kotama dna z_d koje su implicitno sadržane u geometriji profila i površini $A_d(x, t)$. Sistem nelinearnih jednačina (12.7) nema analitičko rešenje, već se rešava numerički, uz zadate početne i granične uslove.

Početni uslovi se sastoje od početne geometrije korita i zadatih vrednosti Q, Z u svim računskim profilima.

Granični uslovi mogu biti spoljašnji i unutrašnji. Ako je L - dužina računске deonice, spoljašnje granične uslove čine:

(a) *uzvodni* granični uslovi:

$$\left. \begin{aligned} Q(x=0) &= f_1(t) && \text{— ulazni hidrogram} \\ Q_u(x=0) &= f_2(t) && \text{— ulazni tovar nanosa (psamogram)} \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

(b) *nizvodni* granični uslovi:

$$\left. \begin{aligned} Z(x=L) &= f_3(t) && \text{— izlazni nivogram, ili} \\ Z(x=L) &= f_4(Q) && \text{— kriva protoka} \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

(c) *geometrijski* granični uslovi:

$$\left. \begin{aligned} z_d(x=L, y) &= f_5(t) && \text{— nizvodni granični profil, ili} \\ z_d(x=0, y) &= f_6(t) && \text{— uzvodni granični profil} \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

Pomoću geometrijskih uslova unapred se zadaju nepromenljive (fiksne) kote dna, ili dubine bagerovanja.

Unutrašnjim graničnim uslovima se obuhvataju lokalni poremećaji, izazvani naglom promenom površine poprečnog preseka, pritokama, ili prisustvom objekata

u rečnom koritu. Po pravilu su neophodna tri uslova kompatibilnosti. Evo dva tipična primera (indeks „ i “, čije vrednosti rastu u nizvodnom smeru, označava profil):

(i) Naglo suženje/proširenje korita:

$$\left. \begin{aligned} Q_{i+1} &= Q_i && - \text{uslov kontinuiteta za vodu} \\ (Q_v)_{i+1} &= (Q_v)_i && - \text{uslov kontinuiteta za nanos} \\ Z_{i+1} + \frac{V_{i+1}^2}{2g} &= Z_i + \frac{V_i^2}{2g} && - \text{jednakost energetskih kota} \end{aligned} \right\}. \quad (12.11)$$

(ii) Ušće:

$$\left. \begin{aligned} Q_{i+1} &= Q_i + Q_2(t) && - \text{uslov kontinuiteta za vodu} \\ (Q_v)_{i+1} &= (Q_v)_i + (Q_v)_2(t) && - \text{uslov kontinuiteta za nanos} \\ Z_{i+1} + \frac{V_{i+1}^2}{2g} &= Z_i + \frac{V_i^2}{2g} && - \text{jednakost energetskih kota} \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

Funkcije $Q_2(t)$ i $(Q_v)_2(t)$ predstavljaju koncentrisani dotok vode i nanosa pritokom. U navedenim izrazima su zanemareni lokalni gubici energije.

12.2.1.2 Dopunski ulazni podaci

Pored ulaznih podataka koje zahtevaju modeli neustaljenog tečenja, za proračun opšte deformacije je neophodno definisati krive granulometrijskog sastava vučenog i/ili suspendovanog nanosa i uzdužne profile korita pomoću kojih se obavlja kalibracija modela i proverava njegova valjanost.

12.2.1.3 Rešavanje sistema jednačina

Za numeričko rešavanje sistema (12.7) po pravilu se koristi metoda konačnih razlika, pri čemu su u načelu moguća dva pristupa: rešavanje kompletnih jednačina i rešavanje uprošćenih jednačina.

Rešavanje kompletnih jednačina. Ovaj pristup je neophodan kada su u pitanju brze promene hidrauličkog i psamološkog režima. Ovde su dalje moguće dve varijante: prva podrazumeva istovremeno rešavanje svih jednačina, a druga, prvo rešavanje hidrodinamičkih jednačina, a potom jednačine kontinuiteta za nanos, što znači da se problem etapno rešava.

(i) *Istovremeno rešavanje svih jednačina* zahteva diskretizaciju parcijalnih diferencijalnih jednačina shodno nekoj izabranoj računskoj shemi. Standardno se primenjuje Praismanova implicitna shema 4 tačke. Ako se primeni linearizacija sistema

zamenom: $f_i^{k+1} = f_i^k + \Delta f_i$ (videti peto poglavlje), dobija se za svaku kontrolnu deonicu između profila „ i ” i „ $i+1$ ”, sistem od 3 linearne algebarske jednačine po ΔZ , ΔQ i ΔA_d . Ovaj sistem se može uopšteno predstaviti u matricnom obliku:

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{X}_{i+1} + \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{X}_i + \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (12.13)$$

gde su \mathbf{A} i \mathbf{B} – matrice koeficijenata reda 3×3 , koje sadrže poznate vrednosti iz prethodnog trenutka, \mathbf{C} je vektor koeficijenata, dok je vektor nepoznatih $\Delta \mathbf{X} = \{\Delta Z, \Delta Q, \Delta A_d\}^T$. (Simbol „ T ” ovde označava transpoziciju.)

Na osnovu određenih vrednosti ΔA_d koriguje se geometrija profila za sledeći računski korak, o čemu će još biti reči u nastavku.

Za deonicu od ukupno N profila, broj nepoznatih iznosi $3N$, a broj jednačina, $3(N-1) = 3N-3$. Nedostajuće jednačine se uvode graničnim uslovima, pri čemu se u mirnom režimu zadaju dva uslova na uzvodnom, a jedan, na nizvodnom kraju. Posebnim geometrijskim uslovom (12.10) se može po potrebi fiksirati geometrija graničnih profila. Sistem (12.13) ima trakastu strukturu matrice koeficijenata i za njegovo rešavanje mogu se primeniti metode koje su detaljno opisane u tački 5.4.2.5.

Na ovom mestu treba ponoviti da je Prajsmanova shema bezuslovno stabilna za vrednosti težinskog koeficijenta $0,5 < \theta < 1,0$ (uz umeren stepen numeričkog prigušenja i disperzije) i teorijski dozvoljava neograničeni računski korak Δt , osim u slučaju kada je zbog linearizacije to ograničenje neophodno. U svom izvornom obliku, ova shema nije primenljiva za silovit i mešoviti režim tečenja.

(ii) *Etapno rešavanje* podrazumeva da se na svakom računskom koraku najpre numerički reše San Venanove jednačine, pri čemu prednost imaju implicitne sheme, kao što je Prajsmanova shema. Rešenjem strujnog polja se završava prva etapa proračuna.

U drugoj etapi se na istom vremenskom nivou računa pronos nanosa u svim profilima, pomoću izabrane formule $Q_v = Q_v(Z, Q)$, a na kraju, Eksnerova jednačina, koja daje promenu geometrije profila preko veličina ΔA_d (odnosno Δz_d). Dobijeni rezultati opisuju prostiranje talasa vode i „talasa nanosa”.

Za numeričko rešenje Eksnerove jednačine, najčešće se primenjuju *eksplicitne* sheme [29, 30, 125], kao što će biti opisano u nastavku. Pored početnog uslova, dovoljno je zadati samo jedan (uzvodni) granični uslov². Primena eksplicitne sheme zahteva ograničenje vremenskog koraka ne samo zbog numeričke stabilnosti, već i stoga što je neophodno da se promena geometrije računskih profila obavlja postepeno.

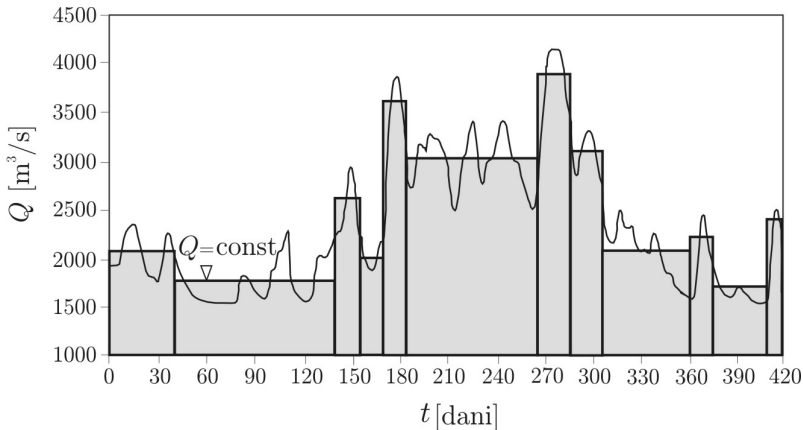
²Eksnerova jednačina je primer parcijalne diferencijalne jednačine koja ima samo jednu familiju pozitivnih karakteristika u (x, t) ravni, što ima fizički smisao u činjenici da se nanos ne može kretati uzvodno.

Model etapnog rešavanja je baziran na pretpostavci da se deformacija korita odvija znatno sporije od promena hidrauličkih veličina. Teorijski se može dokazati da je razdvajanje proračuna deformacije od proračuna strujnog polja opravdano samo u izrazito mirnom ili burnom režimu, a nije dozvoljeno ako je režim tečenja blizak kritičnom [38, 76]. Ako se linije nivoa i dna menjaju uporedivim brzinama, proračun promenljive A_d (ili z_d) nezavisno od drugih nepoznatih nije moguć zbog numeričke nestabilnosti, bez obzira što je računaska shema koja se koristi u prvoj etapi za rešavanje San Venanovih jednačina, bezuslovno stabilna.

Rešavanje uprošćenih jednačina. Ovaj pristup je zasnovan na pretpostavci da su promene hidrauličkog režima blage i da se u dužim vremenskih intervalima može smatrati da je tečenje *kvazi-ustaljeno*. Zanemarenjem lokalnih ubrzanja, sistem osnovnih jednačina (12.7) se značajno uprošćava:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \text{const.} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{2A^2} + gZ \right) + \frac{gQ|Q|}{K^2} &= 0 \\ (1 - \lambda_o) \frac{\partial A_d}{\partial t} + \frac{\partial Q_v}{\partial x} &= 0 \\ Q_v &= Q_v(Z, Q). \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

U hidrauličkom smislu je problem sveden na *nejednoliko ustaljeno* tečenje. Pretpostavka o kvazi-ustaljenosti toka dozvoljava da se ulazni hidrogram aproksimira histogramom (Slika 12.5) i da se za svaki period sa konstantnim protokom, najpre sračuna linija nivoa, a zatim, na osnovu datih hidrauličkih parametara, pronos nanosa i opšta deformacija.



Slika 12.5: Aproximacija ulaznog hidrograma histogramom (reka Dunav, hidrološka stanica Apatin, period 29.09.1978.–18.11.1979)[79].

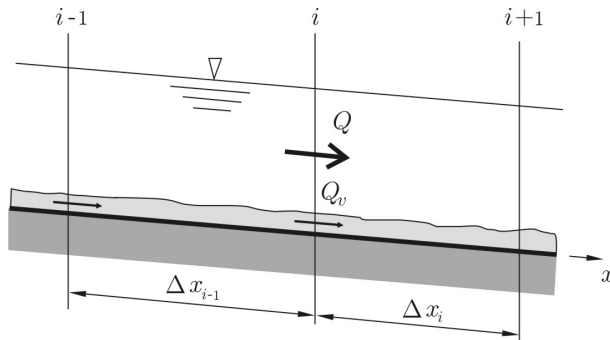
Napominje se da je računski korak Δt za proračun deformacije znatno kraći od perioda u kome se smatra da je protok konstantan. Korak Δt ne samo da je uslovljen numeričkom stabilnošću, već i veličinom promena ΔA_d (odnosno Δz_d), koje moraju biti fizički realne. Optimalna vrednost računskog koraka se određuje probanjem – njegovim smanjivanjem sve dok rešenje ne postane nezavisno od vrednosti Δt [79].

12.2.1.4 Rešavanje jednačine kontinuiteta za nanos

Kao što je rečeno, princip etapnog rešavanja dozvoljava da se jednačina kontinuiteta za nanos (treća jednačina u sistemu (12.7), odnosno (12.14)) izdvojeno numerički rešava, za *prethodno definisano* strujno polje. Ako se primenjuje model neustaljenog tečenja, izvod $(\partial Q_v / \partial x)$ u jednačini kontinuiteta za nanos može se aproksimirati razlikom unazad u prostoru:

$$\left(\frac{\Delta Q_v}{\Delta x} \right)_i = \frac{[(Q_v^k + Q_v^{k+1})/2]_i - [(Q_v^k + Q_v^{k+1})/2]_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}, \quad (12.15)$$

gde indeks „ i ” raste u nizvodnom smeru (Slika 12.6).



Slika 12.6: Raspored profila za proračun opšte deformacije korita.

Promena površine A_d u vremenskom intervalu Δt se dobija rešavanjem diferencne (algebarske) jednačine kontinuiteta za nanos:

$$(\Delta A_d)_i = -\frac{\Delta t}{1 - \lambda_o} \cdot \frac{[(Q_v^k + Q_v^{k+1})/2]_i - [(Q_v^k + Q_v^{k+1})/2]_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}. \quad (12.16)$$

Ako se primenjuje model kvazi-ustaljenog tečenja, protok nanosa se ne menja u računskom intervalu Δt : $(Q_v^k)_i = (Q_v^{k+1})_i$ i $(Q_v^k)_{i-1} = (Q_v^{k+1})_{i-1}$, pa izraz (12.16) dobija jednostavniji oblik:

$$(\Delta A_d)_i = -\frac{\Delta t}{(1 - \lambda_o)} \cdot \left[\frac{(Q_v)_i - (Q_v)_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} \right] = \frac{\Delta t}{(1 - \lambda_o)} \left[\frac{(Q_v)_{i-1} - (Q_v)_i}{\Delta x_{i-1}} \right]. \quad (12.17)$$

U proračunu se može koristiti maseni pronos $Q_{vm} = \rho_s \cdot Q_v$, u kom slučaju se u jednačinama (12.16) i (12.17) javlja zapreminska masa $\rho_z = \rho_s (1 - \lambda_o)$.

Posledica primene razlike unazad u diskretizaciji prostornog izvoda je da promena površine A_d u posmatranom profilu isključivo zavisi od sračunatog transportnog kapaciteta u tom profilu i od dotoka nanosa iz uzvodnog profila. Na taj način se kontrolni profil za nanos postavlja na uzvodnom kraju deonice (suprotno od protoka vode, gde se kontrolni profil u mirnom režimu nalazi na nizvodnom kraju).

Prirodu deformacije određuje znak sračunate promene:

$$(\Delta A_d)_i \begin{cases} > 0 & \text{zasipanje} \\ < 0 & \text{erozija.} \end{cases} \quad (12.18)$$

Za proračun pronosa nanosa (poslednja jednačina sistema (12.7), odnosno (12.14)), preporučuje se neka od jednostavnijih metoda, kao što su metoda MPM za vučeni nanos, ili metoda EH za ukupni nanos.

12.2.1.5 Korigovanje geometrije profila

Kada se u datom vremenskom koraku sračuna promena površine ΔA_d , postavlja se pitanje kako korigovati geometriju profila. Jedan način je da se, zadržavajući nepromenjene vrednosti koordinate y , izmene samo vrednosti vertikalne koordinate z_d tačaka kojima su definisani profili. Korekcija vrednosti z_d se može obaviti proporcionalno lokalnoj dubini [26]:

$$(\Delta z_d)_j = h_j \cdot \frac{\Delta A_d}{A}, \quad (12.19)$$

ili proporcionalno tangencijalnom naponu [29]:

$$(\Delta z_d)_j = \frac{(\tau_{oj} - \tau_{oc})^m}{\sum_B (\tau_{oj} - \tau_{oc})^m \cdot (\Delta y)_j} \cdot \Delta A_d, \quad (12.20)$$

pri čemu je j – broj koordinatne tačke (odnosno vertikale, Slika 12.7), y – njeno horizontalno odstojanje od usvojene referentne tačke, a m – empirijski koeficijent. Vrednosti koeficijenta m se usvajaju i mogu se menjati u svakom računskom koraku tako da nagib linije nivoa bude što više konstantan. Manje vrednosti daju ravnomerniju deformaciju po profilu. Ako se javi zasipanje korita ($\Delta A_d > 0$), u izrazu (12.20) treba staviti $\tau_{oc} = 0$.

■ **Primer 12.3.** Poprečni profil, definisan koordinatama u prve dve kolone Tabele 12.3, nalazi se na sredini deonice dužine 500 m. Protoku $Q=700 \text{ m}^3/\text{s}$ odgovara kota nivoa $Z = 112,95 \text{ mm}$, dok su ostali hidraulički elementi dati u Tabeli 12.2.

Tabela 12.2: Ulazni podaci za primer 12.3

Q	Z	A	B	O	R	n	I_e	V	Fr
[m ³ /s]	[mm]	[m ²]	[m]	[m]	[m]	[m ^{-1/3} s]	[%o]	[m/s]	[-]
700	112,95	427,82	131,85	132,60	3,23	0,023	0,3	1,64	0,084

Transportni kapacitet za nanos srednje krupnoće 2 mm, iznosi u datim hidrauličkim uslovima, 40 kg/s, ili 3456 t/dan. Dotok nanosa sa uzvodne deonice je 20 kg/s, ili 1728 t/dan, što znači da se u datom profilu može očekivati erozija. Sračunati veličinu deformacije u vremenskom intervalu $\Delta t=10$ dana, smatrajući da je u tom periodu protok vode i nanosa konstantan. Ostali podaci: $\rho_s=2,65$ t/m³, $\lambda_o=0,4$.

Rešenje. $\Delta x_{i-1} = 500$ m. Primenom jednačine kontinuiteta za nanos, dobija se $\Delta A_d = - 43,47$ m². Negativan znak označava eroziju. Ova promena se može „raspodeliti” po poprečnom preseku proporcionalno dubini, ili proporcionalno efektivnom smičućem naponu. Oba načina su prikazana u Tabeli 12.3 i na Slici 12.7. Razlike u rezultatima su vrlo male. U proračunu su korišćene vrednosti: $\Theta_c = 0,06$, $\tau_{oc} = \Theta_c g (\rho_s - \rho) d = 0,0019$ kPa, $m=1$.

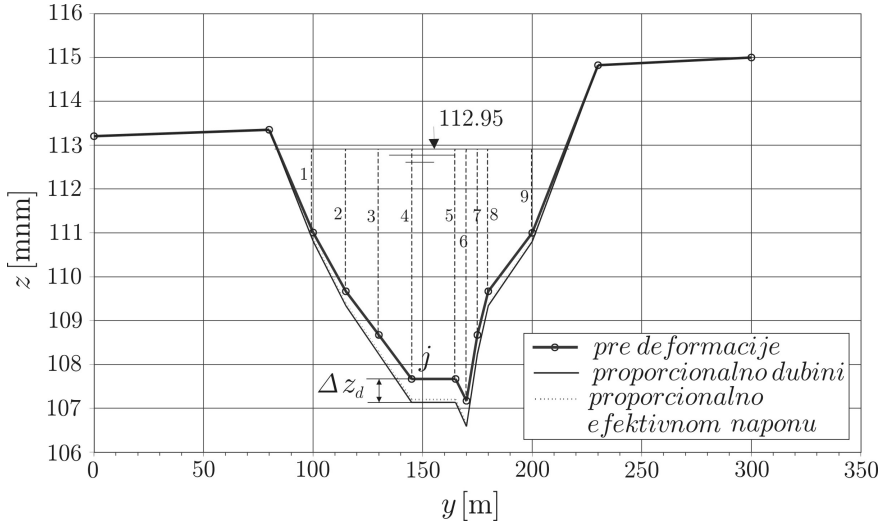
Tabela 12.3: Rezultati proračuna u primeru 12.3

Koordinate		Korigovanje geometrije profila										
profila		proporcionalno dubini					proporcionalno efektivnom naponu $(\Delta\tau)^m = (\tau_o - \tau_{oc})^m$					
y	z_d	j	h	Δz_d	z_d	τ_o	$(\Delta\tau)^m$	Δy	Δy	$(8) \times (10)$	Δz_d	z_d
[m]	[mm]	[-]	[m]	[m]	[mm]	[kPa]	[kPa]	[m]	[m]	[kPa·m]	[m]	[mm]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
0	113,20	-	-	-	113,20	-	-	-	-	-	-	113,20
80	113,35	-	-	-	113,35	-	-	80	-	-	-	113,35
100	111,01	1	1,94	-0,20	110,81	0,0057	0,0038	20	50,0	0,1884	-0,13	110,88
115	109,67	2	3,28	-0,33	109,34	0,0097	0,0077	15	17,5	0,1349	-0,27	109,40
130	108,67	3	4,28	-0,43	108,24	0,0126	0,0107	15	15,0	0,1598	-0,37	108,30
145	107,67	4	5,28	-0,54	107,13	0,0155	0,0136	15	15,0	0,2039	-0,47	107,20
165	107,67	5	5,28	-0,54	107,13	0,0155	0,0136	20	17,5	0,2379	-0,47	107,20
170	107,17	6	5,78	-0,59	106,58	0,0170	0,0151	5	12,5	0,1884	-0,52	106,65
175	108,67	7	4,28	-0,43	108,24	0,0126	0,0107	5	5,0	0,0533	-0,37	108,30
180	109,67	8	3,28	-0,33	109,34	0,0097	0,0077	5	5,0	0,0386	-0,27	109,40
200	111,00	9	1,95	-0,20	110,80	0,0057	0,0038	20	12,5	0,0475	-0,13	110,87
230	114,82	-	-	-	114,82	-	-	30	-	-	-	114,82
300	115,00	-	-	-	115,00	-	-	70	-	-	-	115,00

∑: 1,2526

* * *

Jedna napomena. Imajući u vidu brojne neizvesnosti (na primer, vrednosti parametara u izabranj formuli za pronos nanosa), kao i uprošćenja na kojima je zasnovan model (linijsko tečenje, homogenost i nekoherentnost materijala), postavlja se pitanje opravdanosti napora da se što tačnije izvrši korekcija geometrije poprečnih profila. Opravdanje za to je činjenica da jednostavniji pristup sa osrednjenom kotom dna u izrazu (12.3) nije uvek prihvatljiv.



Slika 12.7: Korigovanje geometrije poprečnog profila.

12.2.1.6 Problemi proračuna opšte deformacije

U proračunima opšte deformacije rečnog korita javlja se više problema, ali su dva od suštinskog značaja. Prvi problem je vezan za definisanje linijskih otpora. U velikim aluvijalnim vodotocima sa sitnim peščanim nanosom, otpori su presudno uslovljeni nanosnim formacijama (dinama), tako da bi za odredjivanje nagiba I_e trebalo koristiti neku od metoda za prognozu aluvijalnih otpora, kao što su metode Ajnštajna i Barbarose, Engelunda i Hansena i dr. To dodatno komplikuje računski model, jer zahteva uvođenje jedne ili više nelinearnih algebarskih jednačina i empirijskih kriterijuma. Broj jednačina u osnovnom sistemu (12.7) se tada povećava, a njegovo, već složeno rešavanje, postaje još složenije.

Drugi problem predstavlja izbor jednačine za pronos nanosa. Već je sugerisano da treba koristiti što jednostavniji obrazac. Međutim, u određenim uslovima mogu se javiti dileme: da li računati samo vučeni nanos, ili samo suspendovani nanos, da li pokušati sa metodama koje podrazumevaju proračun po frakcijama, kao što je metoda Ajnštajna na primer. Taj izbor (na koji obično presudno utiče iskustvo sa nekom od metoda), zahteva da se sa stanovišta tačnosti rezultata, utroška vremena na programiranje, mogućnosti kalibracije i provere modela, prethodno dobro razmotri celishodnost „ugradjivanja” nekog komplikovanog računskog postupka za pronos nanosa.

12.2.2 Opšta erozija rečnog korita

Kao što je već rečeno, opšta erozija rečnog korita nastaje u periodu kada tok nosi manju količinu nanosa od svog transportnog kapaciteta (nanosom nezasićen tok). U nastavku se opisuju glavni uzroci ove pojave i metode za njenu analizu.

12.2.2.1 Erozijski usled poplave

Ovaj vid erozije je rezultat povećanja transportnog kapaciteta vodotoka za nanos usled naglo uvećanih protoka i brzina. Produbljenje korita koje nastaje na ovaj način, može zahvatiti veliku dužinu vodotoka (Slika 12.8).



Slika 12.8: Erozijom potkopana obaloutvrda regulisanog korita nakon prolaska poplavnog talasa (Dulenska reka, pritoka Velike Morave, 1999).

Kod velikih aluvijalnih reka se u periodu opadajućih vodostaja i nakon prolaska poplavnog talasa, korito obično vraća u prethodno stanje, jer se smanjenjem transportnog kapaciteta stvaraju uslovi za istaložavanje nanosa prispelog sa uzvodnog sektora. (Izuzetak su drastične promene, kao što je samoprosecanje korita).

Za objekte u rečnom koritu (mostovski stubovi, podvodni cevovodi itd.), kritičan period sa stanovišta erozije je period koji odgovara vrhu poplavnog talasa i najvećoj erozionoj dubini³.

U nameri da se pojednostavi analiza erozije korita u neustaljenim uslovima tečenja, javila se ideja da se, umesto komplikovanog numeričkog rešavanja sistema diferencijalnih jednačina, primeni samo jednačina kontinuiteta za nanos, na osnovu koje

³U severnoj Kini je 1962. godine zabeležen ekstremno veliki poplavni talas na reci Luanhe, kada je za nekoliko sati protok porastao 100 puta (sa 100 na 10000 m³/s), što je dovelo do spuštanja rečnog dna za 10 m, da bi se nakon prolaska ovog poplavnog talasa korito delimično vratilo u prvobitno stanje [174]. Erozijski koriti su u vezi sa povećanjem koncentracije vučenog i suspendovanog nanosa u plavnim periodima. Velike koncentracije (iznad 300 kg/m³) s jedne strane značajno smanjuju brzinu taloženja suspendovanih čestica tako da ove teže dospevaju na dno, a s druge strane, utiču na povećanje brzine toka. Oba faktora pospešuju eroziju korita. Problem visokokonzentrovanih tokova je veoma izražen u Kini, gde reke nose velike količine lesa (otuda ime „Žuta reka“).

se definiše brzina erozionog procesa [174]:

$$S_r = -\rho_s (1 - \lambda_o) \frac{\partial z_d}{\partial t} = \frac{\partial q_{vm}}{\partial x} \quad [\text{kg}/(\text{sm}^2)]. \quad (12.21)$$

Ako se pretpostavi da obale nisu podložne eroziji, a da u formiranju rečnog dna primarnu ulogu ima vučeni nanos, može se smatrati da je jedinični pronos funkcija Šildsovog broja: $q_{vm} = q_{vm}(\Theta)$, kao što pokazuje na primer obrazac MPM:

$$q_{vm} \propto (a \cdot \Theta - \tau_{oc})^{3/2},$$

u kome su konstantne veličine $a = g(\rho_s - \rho)d$ i τ_{oc} . S druge strane, Šildsov broj je funkcija trenutne brzine i dubine toka: $\Theta = \Theta(\tilde{u}, h)$ (široko pravougaono korito), pa je na osnovu Manningove jednačine:

$$\Theta = \frac{\tau_o}{g(\rho_s - \rho)d} = \frac{h \cdot I_e}{\Delta \cdot d} = \frac{n^2}{\Delta d} \cdot \frac{\tilde{u}^2}{h^{1/3}}. \quad (12.22)$$

Imajući u vidu da je desna strana izraza (12.21):

$$\frac{\partial q_{vm}}{\partial x} = \frac{dq_{vm}}{d\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{dq_{vm}}{d\Theta} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad (12.23)$$

i da se izvodi $\partial \Theta / \partial \tilde{u}$ i $\partial \Theta / \partial h$ mogu definisati diferenciranjem funkcije (12.22), izraz (12.21) dobija konačan oblik:

$$S_r = \frac{3}{2} a (a \cdot \Theta - \tau_{oc})^{1/2} \left[\frac{2\Theta}{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{\Theta}{3h} \frac{\partial h}{\partial x} \right]. \quad (12.24)$$

Da bi se ovaj izraz koristio, neophodno je za dati poplavni talas prethodno definisati hidrauličke zavisnosti $\tilde{u}(t)$, $h(t)$ i $n(t)$ u merodavnom profilu. Zatim se na osnovu tih zavisnosti mogu u svakom trenutku sračunati vrednosti Šildsovog broja Θ , brzine talasa $c = \sqrt{gh}$ i izvoda $\partial \tilde{u} / \partial t$ i $\partial h / \partial t$ (numeričkim diferenciranjem). Izvodi u izrazu (12.24) se tada ovako računaju:

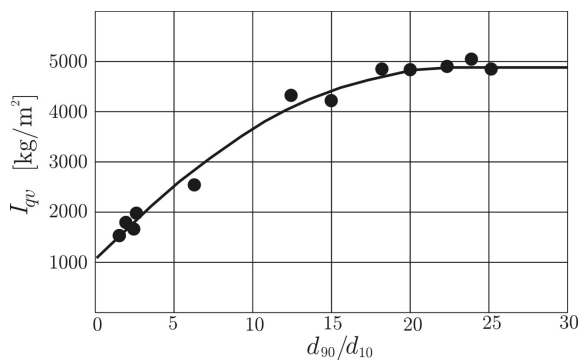
$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}; \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (12.25)$$

Rezultat proračuna je funkcija brzine erozije $S_r = S_r(t)$. Prosečna eroziona dubina u posmatranom profilu iznosi u bilo kom trenutku t_1 :

$$h_s(t_1) = \frac{1}{\rho_s(1 - \lambda_o)} \int_0^{t_1} S_r(t) dt. \quad (12.26)$$

U primeni opisane metode treba biti svestan učinjenih pojednostavljenja i proceniti njihovu opravdanost u svakom konkretnom slučaju. Naime, kod linijskih tokova je realno očekivati da se period erozije rečnog dna poklopi sa periodom rastuće grane hidrograma, a period zasipanja, sa periodom opadajućih protoka. Medjutim, prirodni vodotoci u plavnom periodu često primaju karakter ravanskih (prostorno dvodimenzionih) tokova, pa redosled erozije i zasipanja ne mora biti isti kao kod linijskih tokova. Pored toga, deformacija korita u ostrim krivinama i na ušćima se ne može valjano proceniti opisanim uprošćenim modelom erozije.

Na ovom mestu se može ukazati i na interesantan fenomen *inercije rečnog dna*, koji se ispoljava tako što deformacija korita „kasni” u odnosu na promene protoka i transportnog kapaciteta. Uzroci ove pojave su samopopločavanje, kohezija i dr. Eksperimentalna istraživanja pokazuju da je inercija značajan faktor u morfološkoj dinamici vodotoka, ali da je kvantifikovanje tog uticaja teško i nesigurno. Jedan pokušaj u tom pravcu je eksperimentalna zavisnost U_{anga} (Wang, 1999), prikazana na Slici 12.9, koja daje vezu izmedju faktora inercije I_{qv} i pokazatelja neuniformnosti krupnoće nanosa d_{90}/d_{10} . Prema navedenom autoru, inercija je fizičko svojstvo materijala na rečnom dnu, a njen uticaj se obuhvata tako što se desna strana izraza (12.21), odnosno (12.24), pomnoži empirijskim koeficijentom $k_e(I_{qv})$, čije se vrednosti nalaze u granicama $k_e(\infty) = 0$ i $k_e(0) = 1$.



Slika 12.9: Faktor inercije rečnog korita u funkciji neravnomernosti granulometrijskog sastava [174]; male vrednosti faktora I_{qv} znače da se rečno dno brzo deformiše, a velike, da korito dugo „odoleva” promenama protoka i da je potrebna velika dužina toka da bi ovaj dostigao svoj puni transportni kapacitet.

12.2.2.2 Erozijska nizvodno od brane

Brana u rečnom koritu predstavlja barijeru za kretanje vučenog nanosa i drastično menja psamološki režim na nizvodnom sektoru. U preliminarnim analizama hidrauličkih, morfoloških i ekoloških posledica izgradnje brane neophodno je pre primene složenih matematičkih modela deformacije korita, grubo proceniti stepen erozije („degradacije”) korita, u zavisnosti od hidrauličkih uslova i sastava materijala.

Izbor merodavnog protoka. Za analizu je bitno poznavanje režima ispuštanja vode iz akumulacije, u skladu sa zahtevima njenog višenamenskog korišćenja. Taj režim se definiše hidrogramima, nivogramima i odgovarajućim krivama trajanja. Međutim, u preliminarnim analizama se često usvaja jedan merodavan „dominantni” protok, koji, pod pretpostavkom ustaljenog tečenja, u celini daje iste morfološke promene korita kao skup protoka definisan krivom trajanja. Više je predloga za definisanje dominantnog protoka. Po jednom, to je protok koji ispunjava glavno korito. Po drugom, to je maksimalni protok poplavnog talasa povratnog perioda dve godine [28]. Kod kanalisanih vodotoka, gde je protok diktiran u profilima brana, izvesni autori predlažu da se dominantni protok izjednači sa srednjem dnevnim protokom pri pojavi dvogodišnje velike vode [28].

Granulometrijske karakteristike materijala. Intenzitet erozionog procesa je uslovljen karakteristikama materijala od koga je formirano korito. Značajnu ulogu ima i vrsta materijala od koga su formirane obale, ali je to obično koherentan materijal čiju je otpornost na eroziju teško analitički definisati, pa se po pravilu uticaj obala zanemaruje.

Ako je reč o homogenom, sitnozrnom, pokretnom materijalu, može se smatrati da je potencijalna dubina erozije „neograničena” i da će se erozioni proces zaustaviti dostizanjem stabilnog uzdužnog profila. Ako je međutim u mešavini materijala sa dna prisutna znatna količina krupnog kamena, mora se uzeti u obzir segregacija materijala po krupnoći i formiranje armirajućeg sloja (videti tačku 9.3). Dubinska erozija je u tom slučaju ograničena i odvija se sve dok armirajući sloj ne postane dovoljno otporan da u potpunosti zaustavi erozioni proces. Poseban slučaj je prisustvo stenskog „praga” u rečnom dnu, koji lokalno zaustavlja erozioni proces i u tom smislu deluje kao „kontrolni profil”.

Metode proračuna. Za analizu erozije nizvodno od brane mogu se primeniti dva pristupa, u zavisnosti od toga da li se uzima u obzir mogućnost formiranja armirajućeg sloja, ili ne. Smatra se da postoje uslovi za formiranje armirajućeg sloja („samopopločavanje korita”) kada materijal na rečnom dnu sadrži bar 10% krupnih zrna koja se pri dominantnom protoku ne mogu pokrenuti [28]. Brzina formiranja armirajućeg sloja zavisi od mnogih faktora, a pre svega od režima ispuštanja vode iz akumulacije i raspoložive količine krupnog materijala.

Srednja krupnoća zrna u armirajućem sloju (d_a) može se odrediti iz uslova pokretanja zrna: $k_o \cdot \Theta_c = 0,047$ (MPM), ili $\Theta_c = 0,06$ (Šilds):

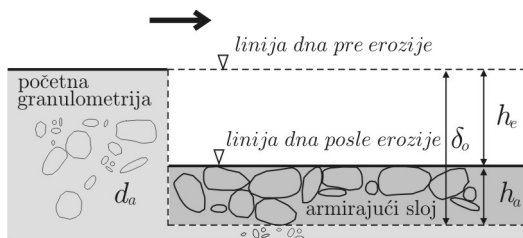
$$d_a = \begin{cases} \left(\frac{d_{90}^{1/6}}{26} \cdot \frac{1}{n} \right)^{3/2} \cdot \frac{h \cdot I_e}{0,047 \cdot \Delta} & \text{(MPM)} \\ \frac{h \cdot I_e}{0,06 \cdot \Delta} & \text{(Šilds).} \end{cases} \quad (12.27)$$

Ovde se podrazumeva da je tečenje jednoliko i da je h – normalna dubina.

Imajući u vidu oznake na Slici 12.10, može se definisati konačna debljina armirajućeg sloja:

$$h_a = \begin{cases} \delta_o - h_e \\ \Delta p \cdot \delta_o, \end{cases} \quad (12.28)$$

gde je δ_o – debljina potencijalno pokretnog sloja, h_e – konačna eroziona dubina, a Δp – zastupljenost prečnika većih od d_a , koja se određuje očitavanjem sa granulometrijske krive uzoraka zahvaćenih iz rečnog dna.



Slika 12.10: Shematizacija eroziona dubine i debljine armirajućeg sloja.

Kombinacijom izraza na desnoj strani jednačine (12.28) dobija se:

$$h_e = h_a \left(\frac{1}{\Delta p} - 1 \right). \quad (12.29)$$

Iskustvo pokazuje da je debljina armirajućeg sloja $h_a = (1 \div 3) d_a$, što obično iznosi oko 15 cm.

Opisani pristup se zasniva na pretpostavci da isti hidraulički uslovi vladaju pre i posle formiranja armirajućeg sloja, što podrazumeva jednakost uzdužnih nagiba dna.

Proces samopopločavanja korita započinje na deonici neposredno nizvodno od brane i napreduje u nizvodnom smeru. Teško se može prognozirati ukupna dužina vodotoka koja će biti zahvaćena erozijom. Ako se pretpostavi isti uzdužni nagib dna pre i posle deformacije, ta dužina se grubo može sračunati na osnovu zapremine odnetog materijala:

$$V_e = V_{\text{god}} \cdot T_e \quad [\text{m}^3], \quad (12.30)$$

gde je V_{god} – procenjena godišnja zapremina odnetog materijala [m^3/god], a T_e – reprezentativni period, koji prema američkim preporukama iznosi 100 godina i jednak je eksploatacionom veku objekta.

■ **Primer 12.4.** Proceniti obim opšte erozije korita nizvodno od brane, ako su ulazni podaci dati u Tabeli 12.4.

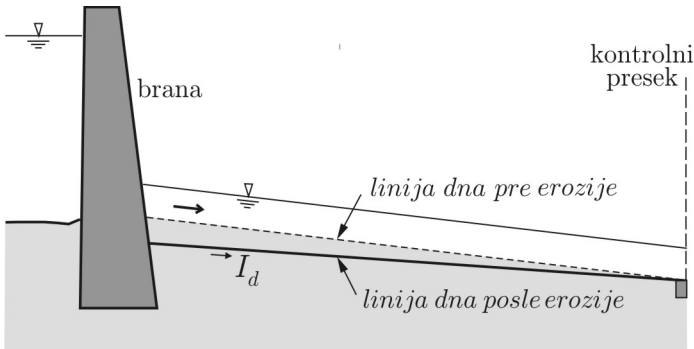
Tabela 12.4: *Ulazni podaci za primer 12.4 [28].*

Q	B	h	V	I_e	n	d_{90}	ρ_s
[m ³ /s]	[m]	[m]	[m/s]	[-]	[m ^{-1/3} s]	[mm]	[t/m ³]
14,2	18,3	1,22	1,04	0,0021	0,030	34	2,65

Rešenje. Srednji prečnik zrna u armirajućem sloju iznosi po obrascu MPM $d_a=21$ mm, a na osnovu Šildsovog dijagrama $d_a=26$ mm. Ako se usvoji srednja vrednost $d_a = 24$ mm, debljina armirajućeg sloja je $h_a = 3 \cdot d_a = 72$ mm. Sa granulometrijske krive materijala iz rečnog korita treba očitati zastupljenost zrna krupnijih od 24 mm. Ako je na primer ta zastupljenost $\Delta p = 17\%$, eroziona dubina biće na osnovu (12.29): $h_e = 0,072(1/0,17-1) = 0,352$ m.

* * *

U slučaju da je količina krupnog materijala nedovoljna za formiranje armirajućeg sloja, eroziona dubina postaje neograničena, a konačna deformacija korita se definiše preko ravnotežnog nagiba dna (Slika 12.11).



Slika 12.11: *Opšta erozija korita nizvodno od brane.*

Određivanje ovog nagiba posredstvom izraza MPM, ili iterativno pomoću Šildsovog dijagrama, biće ilustrirano jednim primerom.

■ **Primer 12.5.** Odrediti ravnotežni uzdužni nagib dna nizvodno od brane ako su ulazni podaci dati u Tabeli 12.5.

Rešenje. Pretpostavljajući jednoliko tečenje i validnost formule MPM, lako se iz uslova (12.27) može definisati ravnotežni uzdužni nagib dna:

$$I_d = \left(\frac{d_{90}^{1/6}}{26} \cdot \frac{1}{n} \right)^{-3/2} \frac{0,047 \cdot \Delta \cdot d_{50}}{h}, \quad (12.31)$$

Tabela 12.5: Ulazni podaci za primer 12.5 [28].

Q [m ³ /s]	B [m]	h [m]	V [m/s]	n [m ^{-1/3} s]	d_{90} [mm]	d_{50} [mm]	ρ_s [t/m ³]
22,1	107	0,32	0,65	0,027	0,96	0,30	2,65

a zamenom brojnih vrednosti iz Tabele 12.5, dolazi se do rešenja $I_d=0,0002$. Rezultati iterativnog proračuna pomoću Šildsovog dijagrama su dati u Tabeli 12.6, pri čemu je usvojena vrednost $\nu = 0,93 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Tabela 12.6: Rezultati proračuna u primeru 12.5.

iter.	I_d (pretp.)	V_* [m/s]	Re_* [-]	Θ_c (sa Šildsovog dijagrama)	I_d $\left(= \frac{\Theta_c \Delta d_{50}}{h} \right)$
1	$1,0 \times 10^{-4}$	0,018	5,8	0,035	$5,4 \times 10^{-5}$
2	$5,4 \times 10^{-5}$	0,013	4,3	0,036	$5,6 \times 10^{-5}$
3	$5,6 \times 10^{-5}$	0,013	4,2	0,036	$5,6 \times 10^{-5}$

* * *

Interesantan primer erozije nizvodno od brane prikazan je na Slici 12.12.

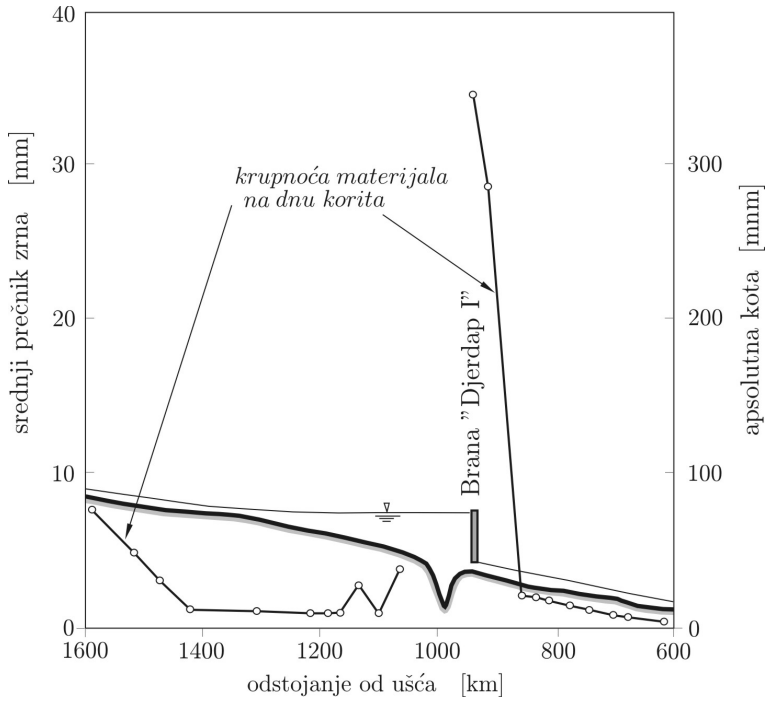
12.2.2.3 Erozijska regulacionim radovima

Prosecanje krivina je tipičan primer regulacionog zahvata koji stvara uslove za regresivnu eroziju korita ⁴ o čemu se mora voditi računa još u fazi projektovanja regulacionih radova. U preliminarnim analizama se mogu koristiti uprošćeni postupci, kao što će biti ilustrovano primerima na kraju ovog poglavlja.

12.3 Lokalna deformacija rečnog korita

Kada se govori o lokalnoj deformaciji rečnog korita, najčešće se ima u vidu *lokalna erozija* koja se javlja oko gradjevina u rečnom koritu. Prisustvo objekta izaziva lokalni poremećaj strujne slike. Strujnice se primiču čvrstoj konturi, pa se lokalno povećava jedinični protok i smičući napon. Time se stvaraju uslovi za intenzivno odnošenje materijala, čemu doprinosi i povećana turbulencija toka oko objekta, naročito u periodu velikih voda. Može se reći da je uzrok lokalne erozije stanje kada *lokalni* transportni kapacitet vodotoka prevazilazi priliv nanosa, a da je njena posledica, produbljivanje proticajnog profila u cilju uspostavljanja novog ravnotežnog stanja.

⁴Drastični primeri negativnih posledica prosecanja krivina su reka Misisipi u 19. veku, čije se korito „spustilo” u proseku za oko 2 m i reka Rajna pre Prvog svetskog rata, gde je erozija dna dovela do sniženja nivoa podzemne vode u priobalju za 1-2 m, sa katastrofalnim ekološkim posledicama.



Slika 12.12: Brana Djerdap I je završena 1970. godine, a posle 10 godina je konstatovano da je erozijom zahvaćen potez od oko 300 km nizvodno od brane. Dijagram prikazuje promenu krupnoće materijala na dnu usled prirodnog popločavanja. Vidi se da je neposredno nizvodno od brane, srednji prečnik zrna povećan 10 puta [137].



Slika 12.13: Primer erozijom korita ogoljenih šipova na kojima su fundirani mostovski stubovi (reka Brenta u Italiji) [3].

12.3.1 Erozijska oko mostovskih stubova

Jedan od problema s kojima se često suočava gradjevinska struka je sprečavanje potkopavanja temelja mostovskih stubova usled lokalne erozije rečnog dna (Slika 12.13).

Decenijama se preduzimaju eksperimentalna istraživanja sa ciljem da se prouči mehanizam lokalne erozije oko mostovskih stubova i stekne mogućnost predviđanja najveće erozije dubine u funkciji hidrauličkih parametara toka, karakteristika nanosa, geometrije i položaja stuba. Ova istraživanja pokazuju da je lokalna erozija posledica složenog vrtložnog strujanja oko stuba (Slika 12.14) i da eroziona dubina vremenom raste do određene konačne – ravnotežne dubine, koja zavisi od uslova pod kojima se erozioni proces odvija.

(i) *Erozija u „čistoj vodi”* podrazumeva da je pokretanje nanosa ograničeno na oblast oko stuba, a da van te oblasti nema kretanja nanosa. Ravnotežna dubina erozije jame je dostignuta u trenutku kada lokalni smičući naponi postanu nedovoljni za izbacivanje nanosa iz erozije jame.

(ii) *Erozija u uslovima opšte pokretnog dna* podrazumeva da je tangencijalni napon svugde veći od kritičnog i da vlada masovni pronos vučenog nanosa duž vodotoka; ravnotežna eroziona dubina je dostignuta u trenutku kada se količina nanosa koja dospe u erozionu jamu izjednači sa količinom nanosa koja se iz nje odnosi.

U oba slučaja se pretpostavlja da je materijal na rečnom dnu u potpunosti pokretan (nekoherentan).

Najveća od mogućih ravnotežnih dubina odgovara prelazu između erozije u čistoj vodi i erozije u uslovima masovnog pronosa. Dubina erozije jame može biti dovoljno velika da utiče na sniženje uspora neposredno uzvodno od mostovskog profila.

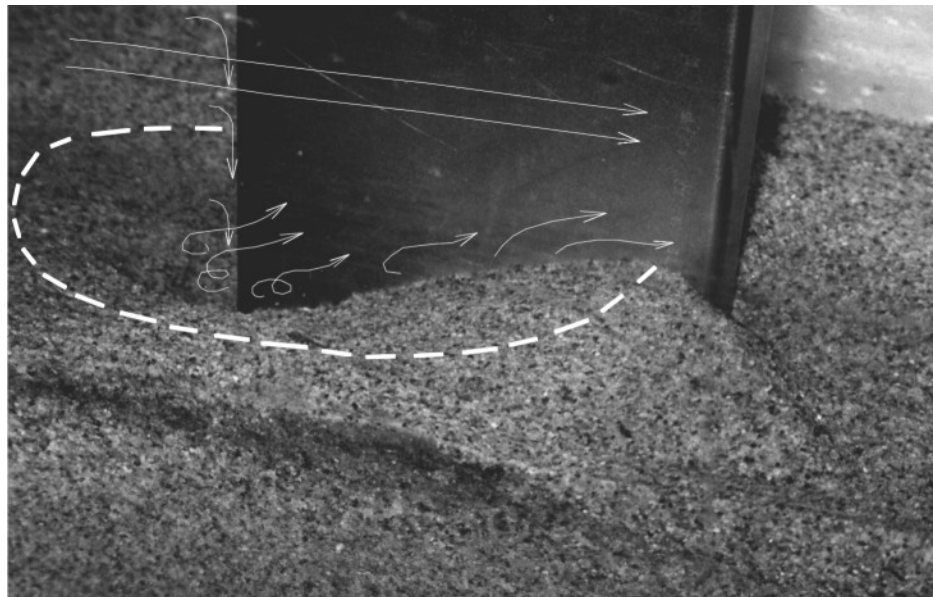
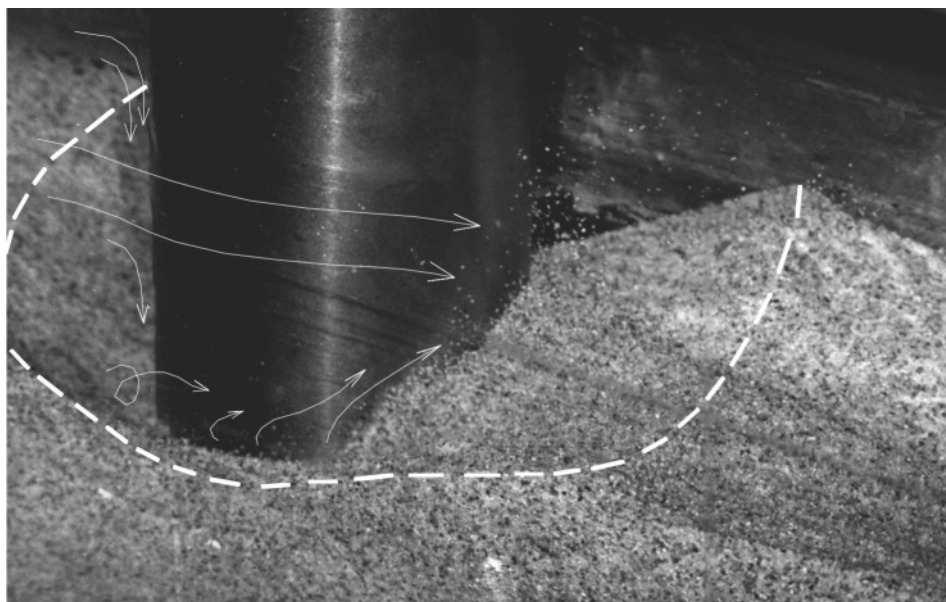
Pretpostavljajući jednoliki režim tečenja, razmatrani fenomen se može opisati empirijskom zavisnošću tipa:

$$f(\mu, \rho, g, \tilde{u}, h, d, \sigma_g, h_s, b_s, \varphi) = 0, \quad (12.32)$$

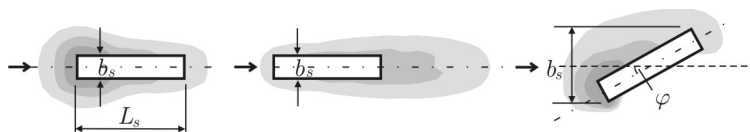
gde je $d = d_{50}$ – srednji prečnik zrna, σ_g – geometrijska standardna devijacija granulometrije, h_s – dubina erozije jame, b_s – efektivna širina stuba, a φ – napadni ugao toka u odnosu na uzdužnu osovinu stuba (Slika 12.15). Ako se za osnovne veličine usvoje gustina ρ , dubina h i odgovarajuća brzina \tilde{u} uzvodno od zone uticaja stuba, dimenzionom analizom se dolazi do zavisnosti tipa:

$$f_1\left(\text{Re}, \text{Fr}, \frac{h_s}{h}, \frac{d}{h}, \sigma_g, \frac{b_s}{h}, \varphi\right) = 0, \quad (12.33)$$

gde je Rejnoldsov broj: $\text{Re} = \tilde{u} h / \nu$, a Frudov broj: $\text{Fr} = \tilde{u}^2 / (g h)$.



Slika 12.14: Lokalna erozija oko modela cilindričnog i paralelopipednog stuba u laboratorijskom kanalu (Građevinski fakultet, Beograd); granica erozije jame oko stuba ima oblik potkovičice, pa se vrtložni sistem zove „potkovičasti vrtložni sistem”.



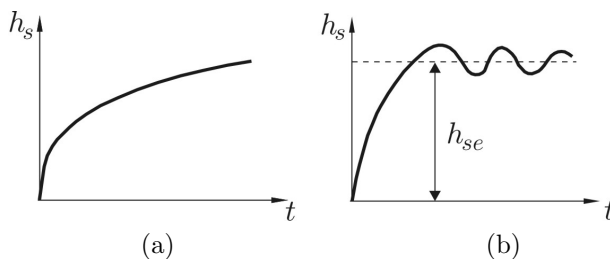
Slika 12.15: Razni oblici erozione jame (potkovičast, izdužen, asimetričan).

Zanemarujući uticaje viskoznosti, pretpostavljajući uniformni granulometrijski sastav materijala i izostavljajući uticaj napadnog ugla, izraz (12.33) se može prikazati u obliku:

$$\frac{h_s}{b_s} = f_2 \left(Fr, \frac{h}{b_s}, \frac{h}{d} \right). \quad (12.34)$$

Relativna rapavost h/d se uzima u obzir samo kod erozije u čistoj vodi, a može se izostaviti kada se lokalna erozija odvija u uslovima opšte pokretnog dna. Naime, u ovom drugom slučaju erozioni proces ne zavisi od uslova pokretanja zrna, već od razlike količine nanosa koja pristiže u erozionu jamu i količine koja iz nje izlazi (sav nanos je u pokretu).

Na Slici 12.16 je prikazan trend razvoja erozione dubine u uslovima lokalno pokretnog dna (erozija u čistoj vodi) i opšte pokretnog dna.



Slika 12.16: Promena erozione dubine u vremenu: (a) u uslovima „čiste vode” potreban je dug vremenski period za dostizanje konačne erozione dubine; (b) u uslovima pronosa vučenog nanosa na celoj deonici, ravnotežna dubina h_{se} se definiše osrednjavanjem, jer nakon početnog naglog porasta, funkcija erozione dubine ima oscilatorni karakter usled prolaska dina.

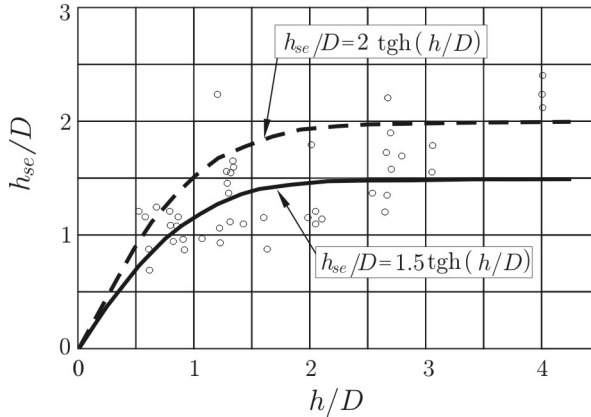
Cilindrični stubovi. Problem lokalne erozije oko cilindričnog stuba se može formulisati empirijskim zavisnostima tipa (12.34), s tim što je u ovom slučaju $b_s = D$, gde je D – prečnik stuba. Opšti izraz za najveću erozionu dubinu ima oblik:

$$\frac{h_{se}}{D} = f_3 \left(Fr, \frac{d}{D}, \frac{h}{D} \right). \quad (12.35)$$

Istraživanja su pokazala da je dominantan uticaj broja h/D . Na Slici 12.17 su prikazani rezultati laboratorijskih merenja na osnovu kojih je definisana zavisnost [123]:

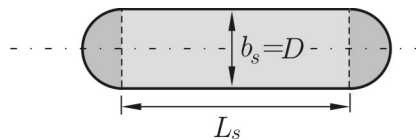
$$\frac{h_{se}}{D} = 1,5 \operatorname{tgh} \left(\frac{h}{D} \right). \quad (12.36)$$

Imajući u vidu rasipanje tačaka, u praksi se iz razloga sigurnosti koristi „zakon dvostrukog prečnika”: $h_{se} = 2D$. Ova jednostavna veza važi ne samo za sitnozrni nevezani materijal (srednjeg prečnika do nekoliko cm), već i za umereno koherentne materijale.



Slika 12.17: Najveća eroziona dubina oko cilindričnog stuba [123].

Necilindrični stubovi. Horizontalni presek mostovskih stubova može biti različitog oblika, a stubovi se često hidrodinamički oblikuju u cilju lakšeg propuštanja velikih voda i leda. U literaturi su objavljeni rezultati brojnih ispitivanja uticaja oblika stuba na dimenzije eroziona jame [50, 146]. Ne ulazeći dublje u ovo pitanje, ovde se navodi samo primer paralelopipednog stuba kome su na uzvodnoj i nizvodnoj strani dodati polucilindrični delovi (Slika 12.18). Efekat ovog rešenja je vrlo povoljan sa stanovišta lokalne erozije, jer se pri napadnom uglu $\varphi = 0^\circ$ ostvaruje zakon dvostrukog prečnika, dok se u slučaju kada nema polucilindričnih dodataka, javlja eroziona dubina $h_{se} \approx 2,6 D$ [123].



Slika 12.18: Hidrodinamičko oblikovanje mostovskog stuba.

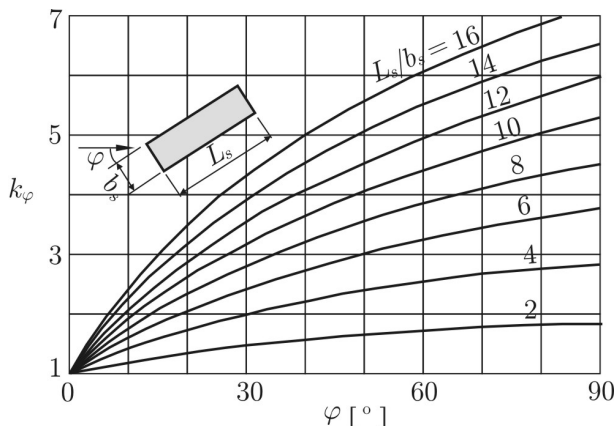
Od brojnih empirijskih izraza za stubove paralelopipednog oblika, ovde se, ilustracije radi, navode najcitiranija dva izraza [29, 77, 84, 146, 147]:

$$\frac{h_{se}}{b_s} = 3,4 \cdot Fr^{2/3} \cdot \left(\frac{h}{b_s}\right)^{1/3} \quad \text{Šen i dr. (Shen, 1969)} \quad (12.37)$$

$$\frac{h_{se}}{h} = C_1 \cdot Fr^{0,43} \left(\frac{b_s}{h}\right)^{0,65} \quad \text{Ričardson (Richardson, 1975),} \quad (12.38)$$

gde je $Fr = \tilde{u} / \sqrt{gh}$, a $C_1 = 2,2$. Izraz (12.38) (koji nosi ime po Univerzitetu iz Kalifornije, CSU), može se koristiti i za grupu cilindričnih stubova poredjanih u nizu duž toka, u kom slučaju je $C_1 = 2,0$.

Pri vrednostima napadnog ugla $\varphi > 0$, erozione dubine se značajno uvećavaju. Sračunatu vrednost h_{se} treba u tom slučaju pomnožiti faktorom $k_\varphi > 1$ (Slika 12.19).



Slika 12.19: Faktor uticaja napadnog ugla na erozionu dubinu [50].

Paralelopipedni stubovi su pogodni samo ako je njihova uzdužna osovina u svim hidrauličkim uslovima kolinearna sa osovnom toka. Ako postoji mogućnost pomeranja matice toka i promene napadnog ugla, preporučuju se cilindrični stubovi, kako sa stanovišta lokalne erozije korita, tako i intenziteta hidrodinamičkih sila koje deluju na stubove.

Treba naglasiti da je većina empirijskih izraza za lokalnu eroziju oko mostovskih stubova izvedena na osnovu laboratorijskih merenja i da u mnogim slučajevima nisu poznati uslovi pod kojima su obavljani eksperimenti. S druge strane, ekstrapolacija rezultata merenja sa fizičkog modela na prototip može biti problematična. Zato nije čudno što se primenom raznih obrazaca dobijaju veoma različiti rezultati. Upoređenje tih rezultata sa rezultatima terenskih merenja upućuje na zaključak

da jedan broj obrazaca uopšte ne daje realne rezultate [77], pa treba biti obazriv pri izboru formule. Pored toga, u razmatranju erozije oko mostovskih stubova treba imati u vidu i niz sekundarnih uticaja, kao što su: nagomilavanje naplava (granje, plivajuća tela itd.) koji povećava efektivne dimenzije stuba, prisustvo dina i sprudova koji menjaju napadni ugao toka ili smanjuju dubinu, neustaljenost hidrauličkog i psamološkog režima itd.

U novije vreme aktuelan je *stohastički pristup* u predviđanju erozije rečnog korita oko mostovskih stubova. Ovaj pristup omogućava uspostavljanje veze između „koeficijenta sigurnosti” projektovane dubine fundiranja temelja stuba i *rizika* od njegovog potkopavanja, odnosno *verovatnoće* da do toga dodje [84].

Zaštita stubova od lokalne erozije. Najjednostavniji način zaštite mostovskih stubova od lokalne erozije sastoji se u postavljanju krupnog kamena oko stuba, kao što je prikazano na Slikama 12.20-(a)-(b) i 12.21.

Potrebna krupnoća kamena može se odrediti iz empirijskih obrazaca za kritičnu brzinu pokretanja u_{dc} , kao što je na primer Izbašov obrazac (9.35)-(9.36). Međutim, rezultat proračuna će biti na strani sigurnosti ako se pretpostavi: $u_{dc} \approx 2\tilde{u}$. Za opravdanje ove grube aproksimacije mogu poslužiti sledeći argumenti:

(a) usled koncentrisanja strujnica uz čvrstu konturu, lokalna brzina oko cilindričnog stuba je značajno veća od brzine neporemećenog toka i

(b) merenja pokazuju da fluktuaciona komponenta brzine može dostići 75% vrednosti vremenski osrednjene komponente, tako da je potencijalno najveća *trenutna* brzina $1,75\tilde{u} \approx 2\tilde{u}$.

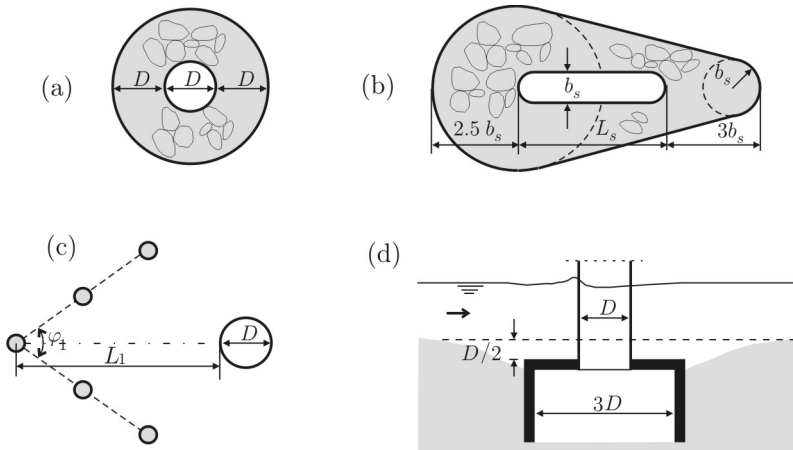
Imajući ove činjenice u vidu, može se na osnovu Izbašovog izraza doći do jednostavnog kriterijuma za ocenu potrebne krupnoće kamena:

$$d \approx \tilde{u}^2/10. \quad (12.39)$$

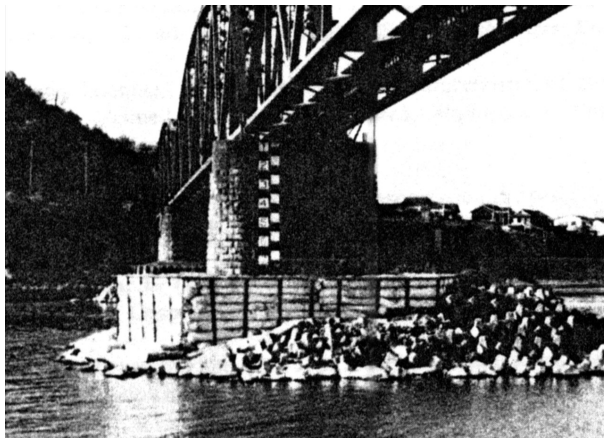
Rezultati eksperimentalne analize stabilnosti zaštitnog kamenog nabačaja mogu se naći u radu [32].

■ **Primer 12.6.** Stub, čiji horizontani presek ima dimenzije $b_s = 1,0$ m, $L_s = 2,0$ m, postavljen je u rečnom koritu tako da njegova uzdužna osovina zaklapa ugao $\varphi = 10^\circ$ sa osovinom toka. Sračunati dubinu erozije jame ako je dubina toka $h = 1,8$ m, a brzina $\tilde{u} = 2,0$ m/s. Odrediti srednji prečnik kamena koji je neophodan za zaštitu korita od erozije.

Rešenje. Na osnovu datih podataka je: $Fr = 0,47$, a primenom obrazaca (12.37) i (12.38) dobijaju se vrednosti $h_{se} = 2,50$ m i 2,0 m. Množenjem ovih vrednosti faktorom $k_\varphi(\varphi = 10^\circ, L_s/b_s = 2) = 1,10$ (Slika 12.19), dobija se po jednom autoru: $h_{se} = 2,75$ m, a po drugom, 2,15 m. Razlika iznosi oko 20%. Prečnik kamena iznosi: $d \approx 0,4$ m.



Slika 12.20: Razni vidovi zaštite stubova od lokalne erozije; (a) i (b) – tepih od kamenog nabačaja čija je debljina najmanje $3d$ [50]; (c) – sistem šipova uzvodno od stuba; ovo rešenje, čija efikasnost zavisi od prečnika šipova, njihovog razmaka, dužine L_1 i ugla φ_1 , ne samo da smanjuje zapreminu erodiranog materijala do 50%, već obezbedjuje i zaštitu stuba od udara broda [123]; (d) – kesonsko fundiranje stuba.

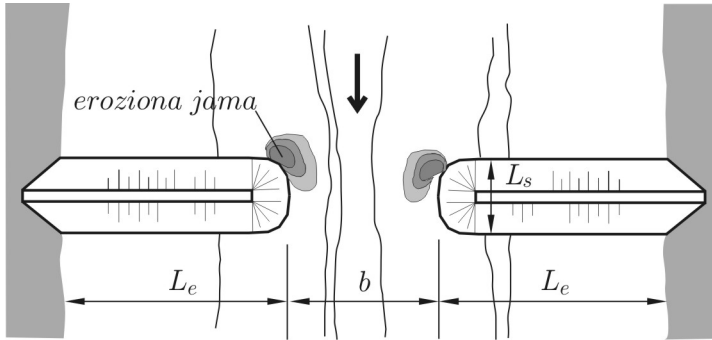


Slika 12.21: Zaštita mostovskog stuba (reka Kino u Japanu) [156].

12.3.2 Erozijska u zoni poprečnih gradjevina

Pristup u analizi lokalne erozije oko poprečnih gradjevina, kao što su mostovski oporci, naperi, prilazne i druge konstrukcije, deli se (kao kod stubova) na razmatranje erozije u „čistoj vodi” i erozije u uslovima opšteg pronosa vučenog nanosa.

U prvom slučaju erozioni proces se zaustavlja u trenutku kada lokalni tangencijalni napon više ne može da pokrene materijal iz erozione jame. Tada je uspostavljena lokalna „statička ravnoteža” korita. U drugom slučaju se nakon relativno kratkog vremenskog perioda izjednačava količina materijala koja dospeva u erozionu jamu sa količinom koja se iz nje odnosi. Tada je uspostavljena lokalna „dinamička ravnoteža” korita.



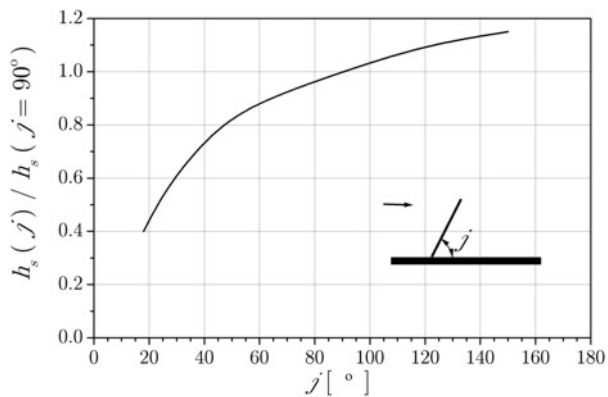
Slika 12.22: Lokalna erozija u zoni poprečnih gradjevina [54].

Za procenu konačne erozione dubine (Slika 12.22) postoji u literaturi veliki broj formula, od kojih se primera radi, navode ove dve [29, 147]:

$$\frac{h_{se}}{h} = \begin{cases} C_2 \left(\frac{L_e}{h} \right)^{2/5} \cdot Fr^{1/3} & \text{– Liu i dr. (Liu, 1961)} \\ 4 Fr^{1/3} & \text{– Ričardson (Richardson, 1975).} \end{cases} \quad (12.40)$$

Prva važi za $L_e/h < 25$, a druga, za $L_e/h \geq 25$. Frudov broj je $Fr = \tilde{u}/\sqrt{gh}$. Vrednosti konstante su: $C_2 = 1,1$ ako su stranice konstrukcije zakošene, a $C_2 = 2,15$ ako su te stranice vertikalne.

Kod dugačkih poprečnih gradjevina dimenzije erozione jame ne samo da zavise od nagiba stranica i oblika završnog dela, već i od ugla pod kojima su te gradjevine postavljene u odnosu na osovину toka (Slika 12.23). U razmatranju erozije u mostovskim suženjima bitna je i dužina suženja. Kod „dugačkog suženja” je ispunjen uslov $L_s/b > 1$, gde su veličine L_s i b definisane na Slici 12.22.



Slika 12.23: Faktor uticaja napadnog ugla na erozionu dubinu u zoni poprečne gradjevine [29, 54].

U takvim suženjima se usled povećane brzine toka javlja „erozija usled suženja” (Slika 12.24). Ovaj vid erozije je nezavisan od prethodno opisane lokalne erozije.



Slika 12.24: Erozijska korita u mostovskom suženju i oštećenje kolovozne konstrukcije prolaskom poplavnog talasa (reka Rača, most na putu Markovac – Lapovo).

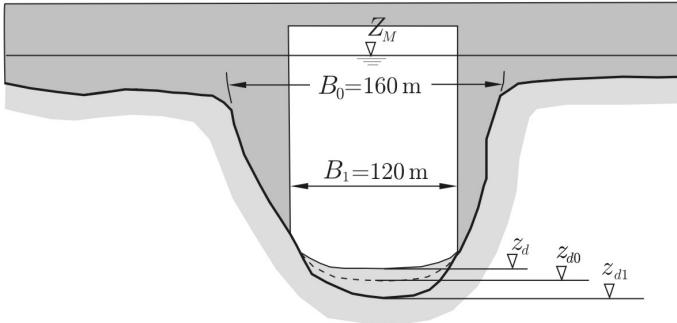
Hidraulika dugačkih suženja je tema za sebe, koja se ovde neće razmatrati. Za grubu procenu efekata suženja na eroziju korita pogodan je modifikovani obrazac Izarda i Bredlija (Izzard, Bradley) [54, 123]:

$$h + h_{se} = 0,73 \cdot \frac{q^{2/3}}{d^{1/6}}, \quad (12.41)$$

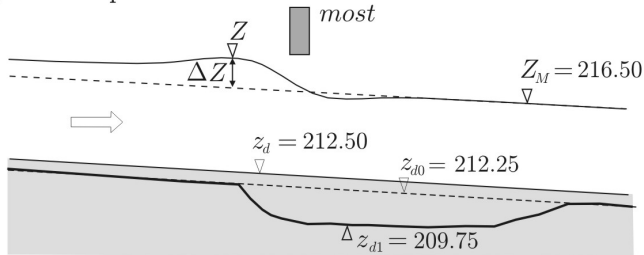
gde je q – jedinični protok u suženju, d – prečnik zrna, a h – dubina pre erozije.

■ **Primer 12.7.** Merodavna velika voda na jednom vodotoku je $Q=600 \text{ m}^3/\text{s}$, pri čemu oko $400 \text{ m}^3/\text{s}$ protiče kroz glavno – minor korito, čija je najveća širina $B_0=160 \text{ m}$ (Slika 12.25). Razmatra se deformacija korita u slučaju izgradnje mosta i suženja minor korita na $B_1 = 120 \text{ m}$. Rečno dno je formirano u nevezanom materijalu srednje krupnoće $d = 1 \text{ mm}$.

(a) poprečni presek



(b) uzdužni presek



Slika 12.25: Erozijska korita u primeru 12.7.

Rešenje. U prirodnim uslovima pre izgradnje mosta, jedinični protok u minor koritu u periodu merodavne velike vode iznosi: $q_0 = Q/B_0 = 400/160 = 2,5 \text{ m}^2/\text{s}$, pa se može očekivati erozija korita, shodno izrazu (12.41):

$$\begin{aligned} z_{d0} &= Z_M - 0,73 \cdot q_0^{2/3} / d^{1/6} = 216,50 - 0,73 \cdot 2,5^{2/3} / 0,001^{1/6} = \\ &= 216,50 - 4,25 = 212,25 \text{ mm}. \end{aligned}$$

U slučaju izgradnje mosta, protok od $600 \text{ m}^3/\text{s}$ bi se koncentrisao kroz mostovski otvor, uvećavajući jedinični protok minor korita za 100%:

$$q_1 = Q/B_1 = 600/120 = 5,0 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Odgovarajuća kота dna je:

$$\begin{aligned} z_{d1} &= Z_M - 0,73 \cdot q_1^{2/3} / d^{1/6} = 216,50 - 0,73 \cdot 5,0^{2/3} / 0,001^{1/6} = \\ &= 216,50 - 6,75 = 209,75 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Sniženje kote dna usled erozije izazvane mostovskim suženjem iznosi:

$$z_{d0} - z_{d1} = 0,73 (q_1^{2/3} - q_0^{2/3}) / d^{1/6} = 2,5 \text{ m.}$$

Ako bi se u koritu našao još i cilindrični stub prečnika $D = 1 \text{ m}$, onda bi gruba procena najniže kote dna usled erozije bila:

$$z_{d\min} = z_{d1} - 2D = 209,75 - 2,0 = 207,75 \text{ mm},$$

o čemu bi trebalo voditi računa prilikom fundiranja stubova i oporaca.

Prikazana analiza je sprovedena pod pretpostavkom da je rečno korito stabilno u planu, što znači da nema erozije obala i premeštanja matice toka. Ako je korito nestabilno, izgradnjom mosta i utvrđivanjem obala u zoni mosta, postiže se samo lokalna stabilizacija korita, koje će i dalje ostati nestabilno uzvodno i nizvodno od mosta. Može se zato dogoditi da matica promeni položaj i da mostovski stub ostane „na suvom”, ili da bude ugrožen promenom napadnog ugla toka. Zato se preporučuju cilindrični stubovi, jer tada erozija ne zavisi od napadnog ugla.

12.3.3 Erozijska nizvodno od prelivnih objekata

Tipični primeri prelivnih objekata za pregradjivanje rečnog korita su kaskade i pregrade (Slika 12.26).

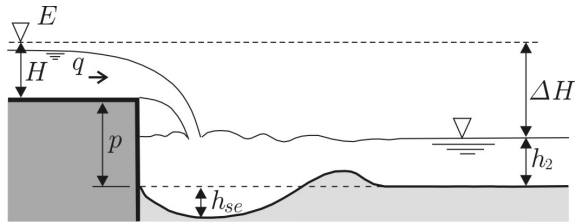


Slika 12.26: Prelivanje kaskade na reci Jasenici.

U slučaju slobodnog preliivanja preko vertikalne kaskade (Slika 12.27), lokalna erozija se opisuje empirijskim funkcijama koje obuhvataju hidrauličke parametre (jedinčni protok q , energetska kotu uzvodno od kaskade E , nizvodnu dubinu h_2), karakteristike objekta (visinu p , ili denivelaciju ΔH) i karakteristike nanosa (krupnoću d i gustinu ρ_s). Tipičan primer je obrazac Šokliča (Schoklitsch) [146]:

$$h_{se} + h_2 = 4,75 \cdot \Delta H^{0,20} \cdot q^{0,57} \cdot d^{-0,32}, \quad (12.42)$$

u kome se vrednost $d = d_{90}$ unosi u milimetrima. U literaturi se može naći nekoliko sličnih izraza, koji daju uporedive rezultate.



Slika 12.27: Vertikalna kaskada sa oznakama veličina koje figurišu u empirijskim izrazima za lokalnu eroziju

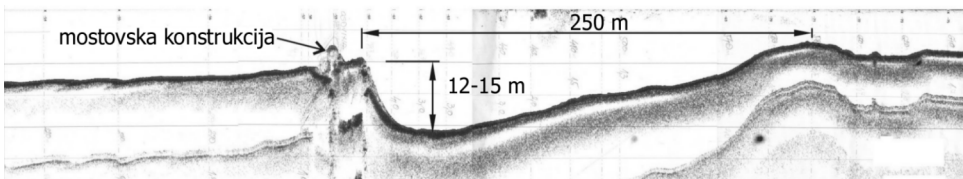
■ **Primer 12.8.** Sračunati ravnotežnu erozionu dubinu ako su dati sledeći podaci: $p=2$ m, $q=2,2$ m²/s, $H=1,45$ m, $h_2=0,4$ m, $d = d_{90}=160$ mm ($\rho_s=2,65$ t/m³).

Rešenje. Na osnovu datih podataka proizilazi da je $\Delta H = 3,05$ m, pa obrazac Šoklića daje vrednost: $h_{se} + h_2=1,83$ m, odnosno, $h_{se}=1,43$ m.

* * *

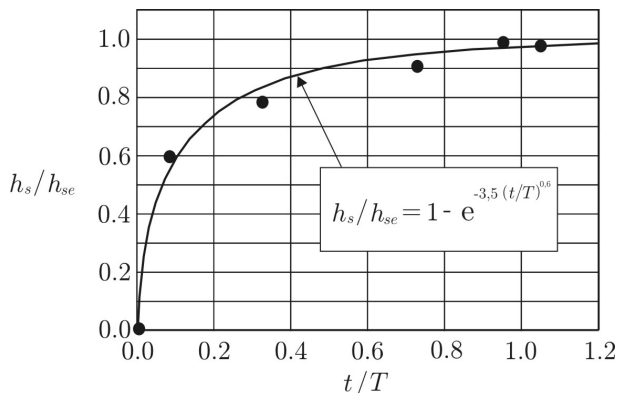
Na ovom mestu se navodi i jedan specifičan primer iz naše prakse. Na Slici 12.28 je prikazan snimljeni uzdužni profil (ehogram) erozione jame koja se formirala neposredno nizvodno od potopljene konstrukcije Žeželjevog mosta u Novom Sadu.

Ovaj most je srušen u toku napada NATO snaga na našu zemlju, aprila 1999. godine. Naglo formirana barijera u vidu praga na dnu dunavskog korita dovela je do velikog poremećaja strujne slike, intenzivne turbulencije u zoni potopljene konstrukcije i erozije korita velikih razmera.



Slika 12.28: Ehogram koji prikazuje erozionu jamu nizvodno od potopljenog Žeželjevog mosta, šest meseci nakon početka erozionog procesa [82].

Profil erozione jame na Slici 12.28, kao i dijagram na Slici 12.29 koji prikazuje brzinu porasta erozione dubine, upečatljivo ilustruju kako veliki aluvijalni vodotoci intenzivno reaguju na veštačku opstrukciju tečenja, prilagodjavajući morfologiju korita novonastalim uslovima.



Slika 12.29: Vremenska zavisnost najveće erozione dubine nizvodno od potopljenog Žeželjevog mosta; vreme dostizanja dinamičke ravnoteže korita iznosi u datom slučaju $T = 500$ dana, sa dubinom erozione jame od oko 15 m [82].

12.4 Primeri uticaja regulacionih radova na deformaciju korita

Pri projektovanju i izvodjenju regulacionih radova koji dovode do sniženja nivoa, povećanja brzine toka i transportnog kapaciteta za nanos, treba voditi računa o posledicama na stabilnost rečnog korita. To podrazumeva da treba shvatiti na koji način rečno korito reaguje na veštački izazvane promene hidrauličkog režima i kakvi se prirodni procesi mogu očekivati u rečnom koritu ka uspostavljanju njegovog novog ravnotežnog stanja. U nastavku se ovo pitanje razmatra kroz tri primera.

Prosecanje krivina. Neka je na deonici izvršeno prosecanje krivina, čime je prvobitna dužina L_0 skraćena na L_1 (Slika 12.30).

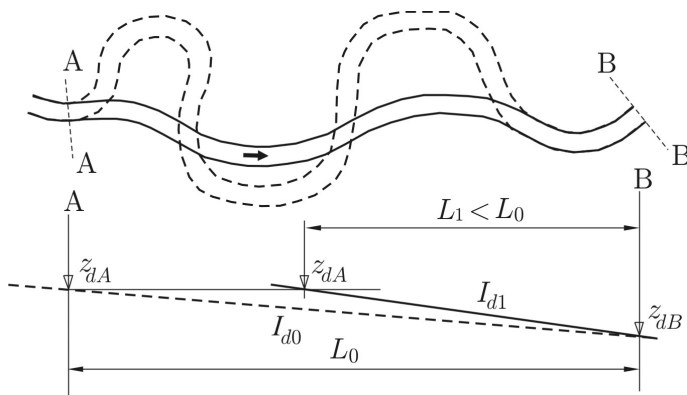
Uzdužni nagib dna je time povećan:

$$I_{d1} = I_{d0} \cdot L_0/L_1, \quad (12.43)$$

gde je $I_{d0} = (z_{dA} - z_{dB})/L_0$ - prvobitni nagib dna pri kome su vladali ravnotežni uslovi kretanja vode i nanosa, a $I_{d1} = (z_{dA} - z_{dB})/L_1$ - nagib dna uspostavljen nakon prosecanja krivina.

Nagib I_{d1} se ne može dugoročno održati, jer će vodotok težiti ponovnom uspostavljanju nagiba I_{d0} . Usled regresivne erozije, može se očekivati produbljenje korita, koje u profilu A-A iznosi:

$$\Delta z_{dA} = (I_{d1} - I_{d0}) L_1 = I_{d0} \left(\frac{L_0}{L_1} - 1 \right) L_1 = I_{d0} (L_0 - L_1). \quad (12.44)$$



Slika 12.30: Prosecanjem krivina skraćuje se trasa i povećava uzdužni nagib dna i transportni kapacitet za nanos; vremenom se regresivnom erozijom nagib postepeno smanjuje dok se ponovo ne uspostave ravnotežni uslovi pronosa nanosa.

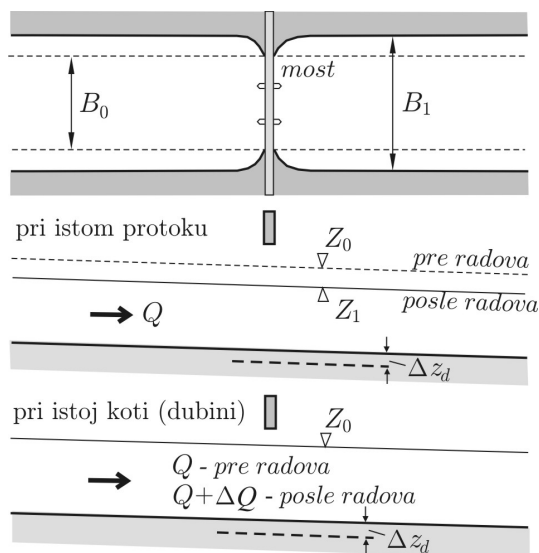
Ukoliko se uzvodno od profila A-A nalazi neki objekat u rečnom koritu (regulaciona građevina, most na stubovima, vodozahvat itd.), proces regresivne erozije može dovesti u pitanje stabilnost ili funkcionalnost te građevine.

Proširenje korita. Radovi na proširenju osnovnog korita se preduzimaju radi povećanja njegove propusne moći. To znači da će pri istoj dubini, regulisano korito moći da propusti veći protok, ili da će pri istom protoku, u regulisanom koritu dubina biti manja. Ako se na regulisanoj deonici nalazi ranije izgrađen most na stubovima (Slika 12.31), od praktičnog je interesa sagledati posledice regulacije na stabilnost ovog objekta. Problem se može razmatrati polazeći od činjenice da nakon proširenja korita pri istom protoku dolazi do sniženja kote nivoa sa Z_0 na Z_1 , pa se promena kote dna u mostovskom suženju (gde je širina korita ostala ista) može grubo proceniti pomoću izraza (12.41):

$$\begin{aligned} \Delta z_d &= z_{d0} - z_{d1} = \\ &= Z_0 - 0,73 (Q/B_0)^{2/3} d^{-1/6} - [Z_1 - 0,73 (Q/B_0)^{2/3} d^{-1/6}] = \\ &= Z_0 - Z_1. \end{aligned} \quad (12.45)$$

Drugi pristup je da se podje od činjenice da će nakon proširenja korita, istoj liniji nivoa odgovarati veći protok $Q_1 > Q$, pa će sniženje kote dna u mostovskom profilu biti:

$$\begin{aligned} \Delta z_d &= z_{d0} - z_{d1} = \\ &= Z_0 - 0,73 (Q/B_0)^{2/3} d^{-1/6} - [Z_0 - 0,73 (Q_1/B_0)^{2/3} d^{-1/6}] = \\ &= \frac{0,73}{d^{1/6}} \left[\frac{Q_1^{2/3} - Q^{2/3}}{B_0^{2/3}} \right]. \end{aligned} \quad (12.46)$$



Slika 12.31: Proširenje osnovnog korita radi povećanja propusne moći (pretpostavljeno je jednoliko tečenje i zanemaren uspor od mosta).

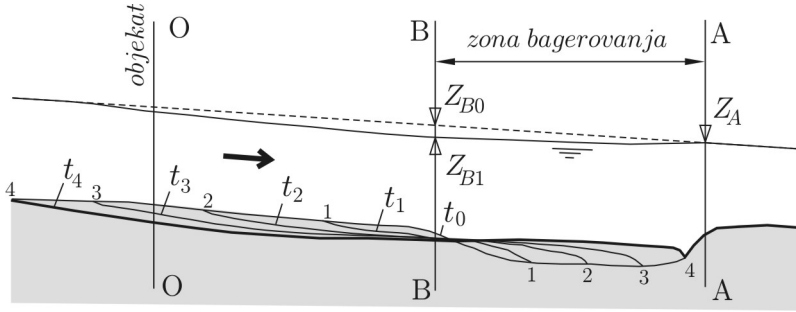
U zavisnosti od veličine sniženja kote dna može se oceniti stepen ugroženosti mostovskih stubova.

Bagerovanje. Uticaj bagerovanja na deformaciju korita zavisi od obima bager-skih radova. Ako se radi o dugotrajnom vadjenju velike količine materijala (sistematskoj eksploataciji peska i šljunka za potrebe građevinarstva), zasigurno se može očekivati regresivna erozija korita.

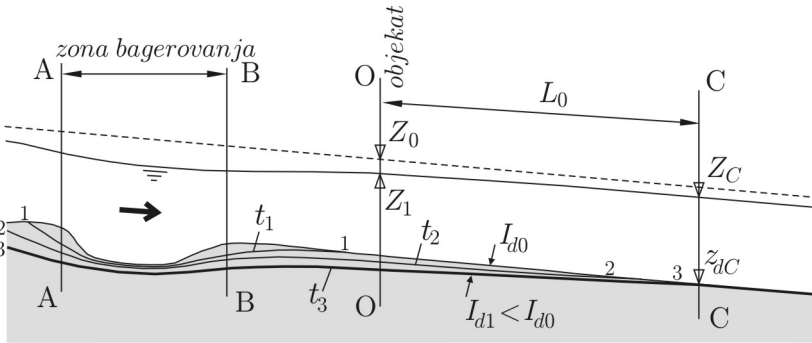
Na Slici 12.32 prikazan je slučaj kada se bagerovanje izvodi *nizvodno* od nekog objekta u rečnom koritu, kao što je regulaciona građevina, mostovski stub, vodozahvatna građevina itd. Pretpostavimo da se materijal vadi po celoj širini korita između profila A-A i B-B, da se kota nivoa Z_A ne menja i da je početna kota nivoa Z_{B_0} bagerovanjem snižena do kote Z_{B_1} (miran režim).

Ako je dužina bagerovanja mala, sniženje nivoa $Z_{B_0} - Z_{B_1}$ neće bitno poremetiti ravnotežno stanje korita. Izbagerovano produbljenje će se progresivno zasipati dok se dno ne izravna, a kote dna u profilu objekta se neće značajno promeniti. Međutim, ako je dužina bagerovanja velika, sniženje nivoa uzvodno od profila B-B biće značajno, čime se stvaraju uslovi za regresivnu eroziju u uzvodnom smeru, koja može ugroziti stabilnost objekta u profilu O-O (Slika 12.32).

Sada će se razmotriti slučaj kada usled bagerovanja dodje do osetnog sniženja nivoa *uzvodno* od profila O-O u kome se nalazi objekat (Slika 12.33). Neka je u stabilnim uslovima srednji godišnji pronos na posmatranoj deonici Q_v^{god} [m^3/god]



Slika 12.32: Regresivna erozija korita izazvana bagerovanjem i sniženjem nivoa nizvodno od posmatranog objekta u rečnom koritu, koji se nalazi u profilu O-O. (Pretpostavlja se da dno nizvodno od profila A-A nije podložno eroziji.)



Slika 12.33: Regresivna erozija korita izazvana bagerovanjem i sniženjem nivoa uzvodno od posmatranog objekta. (Pretpostavlja se da dno nizvodno od profila C-C nije podložno eroziji.)

i neka se sa nje godišnje izbageruje ΔQ_v^{god} [m³] materijala. U novim uslovima se promenom geometrijskih karakteristika korita, reka mora prilagoditi smanjenoj količini vučenog nanosa $Q_v^{god} - \Delta Q_v^{god}$. Ako se pretpostavi da obale nisu podložne eroziji, jedini geometrijski parametar koji se može promeniti je uzdužni nagib dna i on će se smanjivati od I_{d0} do I_{d1} , kada se uspostavlja novi ravnotežni transportni kapacitet za nanos. Nagib „erozione terminante” I_{d1} se može proceniti polazeći od jednačine MPM:

$$Q_v^{god} = \text{const} \cdot B (\rho g H I_d - \tau_{oc})^{3/2}, \quad (12.47)$$

u kojoj je, pretpostavljajući jednoliko tečenje u širokom pravougaonom koritu, srednja dubina $H = A/B$ definisana Manningovim izrazom:

$$H = (n \cdot Q/B)^{3/5} \cdot I_d^{-3/10}. \quad (12.48)$$

Odnos nove i stare godišnje količine nanosa na posmatranoj deonici je:

$$\frac{Q_v^{god} - \Delta Q_v^{god}}{Q_v^{god}} = \left[\frac{a \cdot I_{d1}^{7/10} - \tau_{oc}}{a \cdot I_{d0}^{7/10} - \tau_{oc}} \right]^{3/2}, \quad (12.49)$$

gde je $a = \rho g (nQ/B)^{3/5}$. Odavde sledi da će novi ravnotežni nagib dna biti jednak:

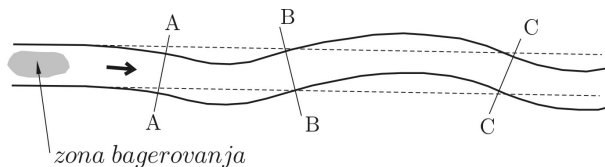
$$I_{d1} = a^{-10/7} \left[\left(\frac{Q_v^{god} - \Delta Q_v^{god}}{Q_v^{god}} \right)^{2/3} (a \cdot I_{d0}^{7/10} - \tau_{oc}) + \tau_{oc} \right]^{10/7}. \quad (12.50)$$

Proces regresivne erozije koji traje godinama, shematski je prikazan na Slici 12.33. Ako se pretpostavi da korito nizvodno od profila C-C (usled geoloških ili nekih drugih uslova) nije podložno eroziji, sniženje kote dna u profilu objekta se može proceniti na osnovu izraza:

$$\Delta z_d = (I_{d0} - I_{d1}) L_0. \quad (12.51)$$

Može se zaključiti da je produbljenje korita veće što je manji nagib I_{d1} , odnosno što je veća zapremina izbagerovanog materijala. Na osnovu veličine Δz_d može se proceniti ugroženost objekta bagerovanjem.

Ako su nizvodno od zone bagerovanja obale podložne eroziji, umesto produbljenja korita, može se javiti tendencija povećanja dužine vodotoka erodiranjem obala i meandriranjem (Slika 12.34). To je brži (i za vodotok ponekad energetski povoljniji) način za uspostavljanje ravnotežnog stanja u odnosu na prethodno opisani proces erozije dna.



Slika 12.34: Meandriranje vodotoka kao posledica bagerovanja i erozije obala; u infleksionim profilima A-A, B-B i C-C, kote dna se malo menjaju u odnosu na prvobitno stanje, jer je smanjenje uzdužnog nagiba dna nadoknađeno povećanjem dužine vodotoka.

13

Fizički modeli

Fizički (hidraulički) modeli se koriste za rešavanje složenih problema koji se ne mogu sa dovoljnim stepenom pouzdanosti rešavati pomoću matematičkih modela, ili kod problema čiji je značaj takav da je poželjno primeniti obe vrste modela. Polazeći od nekih osnovnih pojmova iz teorije sličnosti, u ovom poglavlju se pokazuje kako se razni uslovi sličnosti kombinuju u projektovanju rečnih fizičkih modela, posebno onih sa pokretnim dnom. Objašava se problem istovremenog zadovoljenja hidrauličke i psamološke sličnosti, koji se najčešće ne može rešiti bez umerenog odstupanja od jedne od te dve sličnosti, pod uslovom da su nepovoljni „efekti razmere” u prihvatljivim granicama.

13.1 Uvodne napomene

Fizički – hidraulički modeli se koriste u hidrotehnici kao sredstvo za ispitivanje složenih tokova u laboratoriji. Najčešće su to prostorna strujanja vezana za pribranske objekte kao što su prelive, brzotoci, slapišta, dovodni tuneli, brodske prevodnice i sl. Fizički modeli dugačkih rečnih deonica redje se primenjuju zbog specifičnosti izrade i merenja, kao i visoke cene. Iz tih razloga se problemi rečne hidraulike danas uglavnom rešavaju pomoću numeričkih modela. Medjutim, to nikako ne znači da fizičke modele treba potpuno otpisati, jer oni omogućavaju bolje razumevanje prirodnih procesa i daju mogućnost unapredjenja i kalibracije numeričkih modela. Ustvari, najbolji način rešavanja komplikovanog problema rečne hidraulike jeste sprega fizičkog i numeričkog modela i njihovo uzajamno dopunjavanje.

Ispitivanja pomoću rečnih fizičkih modela imaju za cilj da se:

- bolje razume fizika procesa koji se odvijaju u vodotocima;
- izmeri prostorni i vremenski raspored hidrauličkih i psamoloških veličina;
- utvrdi uticaj graničnih uslova na hidraulički i psamološki režim vodotoka;
- sagledaju efekti regulacionih radova.

13.2 Razmere i zakoni sličnosti

Razmera je odnos neke veličine u prirodi (na „prototipu”) i na modelu [63]. Na primer, razmera za dužinu (L) je:

$$L_* = \frac{L_p}{L_m}, \quad (13.1)$$

gde indeks „*” označava razmeru, a indeksi „p” i „m”, prototip i model.

Kako su prototip i model u istom gravitacionom polju, razmera za gravitaciono ubrzanje je: $g_* = 1$. Ako je na rečnom modelu radni fluid – voda, razmere za gustinu i viskoznost su: $\rho_* = \mu_* = \nu_* = 1$.

Geometrijska sličnost je uprošćeno, sličnost oblika prototipa i modela. Ova sličnost opisuje relativnu veličinu dva Dekartova koordinatna sistema (x, y, z). Potpuna geometrijska sličnost podrazumeva jednakost sve tri koordinatne razmere: $x_* = y_* = z_* \equiv L_*$. U tom slučaju se kaže da je model „nedistordovan”. Nedistordovani modeli se koriste za ispitivanje strujnog polja kod „kratkih” objekata, kao što su na primer, prelive, brzotoci, slapišta i dr. Tipične razmere ovih modela su 40 i 50.

Nedistordovani fizički modeli nisu pogodni za rečne modele. Naime, kod prirodnih vodotoka, dužina rečnog korita je neuporedivo veća od njegove širine i dubine, pa bi se u slučaju jednakosti sve tri koordinatne razmere, na modelu javile veoma male dubine, dovodeći u pitanje turbulentni karakter tečenja i mogućnost pouzdanog merenja. Zbog toga se kod rečnih modela obično usvaja jednakost razmera u horizontalnoj ravni: $x_* = y_* \equiv L_*$, dok je vertikalna razmera $z_* \equiv h_*$ drugačija: $h_* \neq L_*$. Dakle, rečni modeli su po pravilu *distordovani* modeli, sa dve geometrijske razmere: L_* i h_* , koje se biraju tako da na modelu vlada turbulentno tečenje ($Re_m > 1000$). Tipične horizontalne razmere distordovanih modela su 200 i 300, a tipične vertikalne razmere, 50 i 60.

Kinematička sličnost podrazumeva sličnost polja brzine. Strogo uzevši, ova sličnost zahteva da su odgovarajuće lokalne brzine u prirodi i na modelu u određenoj srazmeri. Taj uslov nije moguće ostvariti, ali je dovoljno da postoji sličnost srednjih profilskih brzina¹: $(V)_* = V_p/V_m$.

Imajući u vidu da brzina predstavlja odnos dužine i vremena, kinematička sličnost podrazumeva određenost razmere za dužinu h_* (geometrijska sličnost) i razmere za vreme: $t_* = t_p/t_m$. Odavde sledi razmera za ubrzanje fluidnih delića: $a_* = (V)_*/t_*$.

Dinamička sličnost je sličnost sila. Da bi se ostvarila sličnost ponašanja fluida u dinamičkim uslovima, neophodno je pre svega da su fluidne mase u prirodi

¹Stavljanjem zgrade, daje se do znanja da je reč o *razmeri brzine* $(V)_*$, a ne o smičućoj brzini V_* ; u skadu sa ovim načinom obeležavanja, razmera smičuće brzine biće označena: $(V_*)_*$.

i na modelu u određenoj srazmeri: $M_* = M_p/M_m$. Ako se pretpostavi da je već obezbedjena kinematička sličnost, a to znači da su ubrzanja fluidnih delića u prirodi i na modelu u srazmeri, nužno sledi da i sile moraju biti u srazmeri.

Iz prethodnog objašnjenja se može zaključiti da je geometrijska sličnost uslov kinematičke sličnosti, a kinematička sličnost, uslov dinamičke sličnosti.

Sile koje deluju na fluid unutar neke kontrolne zapremine mogu biti zapreminske (kao što je težina) i površinske (kao što su sile pritiska i smicanja). Rezultanta koja zatvara poligon sila je inercijalna sila. Shodno tome, dinamička sličnost podrazumeva geometrijsku sličnost poligona sila kod prototipa i modela.

Kako se intenzitet neke sile može iskazati relativno u odnosu na silu inercije pomoću vrednosti odgovarajućeg „*bezdimezionog broja*“, dinamička sličnost se definiše razmerom bezdimezionih brojeva. Najčešće se uzimaju u obzir samo Frudov broj i Rejnoldsov broj, od kojih prvi predstavlja odnos težine i inercijalne sile, a drugi, odnos sile viskoznosti i inercijalne sile. Potpuna dinamička sličnost zahteva da Frudova i Rejnoldsova sličnost budu istovremeno zadovoljene:

$$\text{Fr}_* = \frac{(V)_*^2}{g_* h_*} = \frac{(V)_*^2}{h_*} = 1 \quad (13.2)$$

$$\text{Re}_* = \frac{(V)_* h_*}{\nu_*} = (V)_* h_* = 1. \quad (13.3)$$

Oba uslova nije moguće ostvariti sa istim fluidom u prirodi i na modelu, pa se, shodno prirodi problema, zanemaruje manje važna sličnost. Tokovi sa slobodnom površinom nastaju pod uticajem sile težine (zato se i zovu „gravitacioni tokovi“), pa je za njihovo modeliranje nužno da bude zadovoljena Frudova sličnost, dok se Rejnoldsova sličnost može zanemariti, jer su uticaji viskoznosti u razvijenom turbulentnom toku, u oblasti hidraulički rapavog dna, zanemarljivi.

Frudova sličnost² (13.2), odnosno uslov $\text{Fr}_m = \text{Fr}_p$, obezbedjuje sličnost polja brzine i dubine, a time i sličnost dijagrama *specifične energije* prototipa i modela.

Iz uslova (13.2) može se lako utvrditi međusobna veza razmera raznih veličina. Na primer, razmera za brzinu je: $(V)_* = h_*^{1/2}$, za površinu: $A_* = L_* \cdot h_*$, za protok: $Q_* = (V)_* \cdot A_* = L_* \cdot h_*^{3/2}$ itd. Kompletan pregled razmera dat je u Dodatku E.

13.3 Rečni fizički modeli sa nepokretnim dnom

Ovi modeli su izgradjeni u celini od čvrstog materijala, a koriste se za simulaciju ustaljenog i neustaljenog tečenja na izabranoj rečnoj deonici.

²Francuski inženjer Ferdinand Reech (1805–1880) eksperimentalno je izučavao otpore pri kretanju brodova i koristio zakon sličnosti koji danas nosi Frudovo ime.

Eksperimenti ustaljenog tečenja obavljaju se najčešće radi utvrđivanja efekata regulacionih radova, a eksperimenti neustaljenog tečenja, radi utvrđivanja hidrauličkih posledica prostiranja prirodnih poplavnih talasa ili talasa nastalih rušenjem brana. Primeri rečnih modela sa nepokretnim dnom prikazani su na Slikama 13.1 i 13.2.



Slika 13.1: Izgradnja modela deonice reke Sene nizvodno od Pariza u cilju ispitivanja plovidbenih uslova u zoni račvanja toka [46].



Slika 13.2: Fizički model Velike Morave sa nepokretnim dnom, izgradjen u razmeri 1:40/200 u cilju proučavanja efekata prosecanja krivina [118].

Distorzija, koja je nužna kod rečnih modela, prouzrokuje niz problema usled narušene geometrijske, kinematičke i dinamičke sličnosti. Kod distordovanih modela razmera za hidraulički radius nije ista svim poprečnim profilima. Uzdužni nagib modela je po pravilu znatno veći od onog u prirodi. Na primer, za $L_* = 500$ i $h_* = 100$: $I_{d*} = h_*/L_* = 0,2$, pa nagibu dna u prirodi $I_{dp} = 0,1 \%$ odgovara na modelu pet puta veći nagib: $I_{dm} = I_{dp}/I_{d*} = 0,001/0,2 = 0,005$, odnosno $0,5 \%$.

Odnos h_*/L_* zove se „stepen distorzije” i koristi se kao mera distorzije.

Narušena geometrijska sličnost ima za rezultat narušenu kinematičku sličnost, što znači da distordovani fizički modeli ne mogu verno reprodukovati strujno polje prototipa. Na primer, helikoidno strujanje u krivini se ne može reprodukovati pomoću distordovanog modela. S druge strane, distorzija teži da pojača sekundarna strujanja, tako da prenaplašeni efekti sekundarnih strujanja mogu dovesti u pitanje rezultate merenja na fizičkom modelu. Zbog toga se preporučuje ograničenje distorzije na $h_*/L_* < 5$.

Rečni modeli mogu biti sa nepokretnim dnom ako je ispunjen uslov: $\Theta_p < 0,03$. Ovaj uslov znači da nema značajnog pokretanja materijala na dnu prirodnog rečnog korita, jer je bezdimenzioni tangencijalni napon manji od najniže kritične vrednosti na Šildsovom dijagramu ($\Theta_{c,\min} = 0,03$, Slika 9.2). Rečni modeli sa nepokretnim dnom moraju biti tako projektovani da u njima u potpunosti vlada turbulentno tečenje po hidraulički rapavom dnu ($Re_{*m} > 70$), što znači da otpori trenja ne zavise od viskoznosti, već isključivo od relativne rapavosti (h/d). U nastavku biće izveden opšti izraz za Frudovu sličnost koji ispunjava i uslov tečenja po hidraulički rapavom dnu (oblast „kvadratnog zakona otpora”).

Ako se pretpostavi ustaljeno jednoliko tečenje ($I_d \equiv I_e$), smičuća sila toka po jedinici površine (tangencijalni napon na dnu) je u ravnoteži sa otporom trenja po jedinici površine:

$$\rho \cdot g \cdot h \cdot I_d = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_\tau \cdot \tilde{u}^2, \quad \text{odnosno,}$$

$$\frac{\tilde{u}^2}{gh} \equiv Fr = \frac{2}{C_\tau} \cdot I_d = \frac{8}{\lambda} \cdot I_d.$$

Prelaskom na razmere, sledi uslov Frudove sličnosti:

$$Fr_* = \left(\frac{8}{\lambda}\right)_* \cdot I_{d*} = 1. \quad (13.4)$$

Ranije je pokazano da se, koristeći Darsi-Vajsbahovu jednačinu i izraz za logaritamski raspored brzine po dubini, može uspostaviti veza između Darci-Vajsbahovog koeficijenta trenja i relativne rapavosti (videti izraz (3.15)), pa ista veza važi i za odgovarajuće razmere:

$$\left(\frac{8}{\lambda}\right)_* = \left(\frac{h_*}{d_*}\right)^{2\mu}, \quad (13.5)$$

gde je, shodno izrazu (3.20), eksponent $\mu = [\ln(12h/d)]^{-1}$.

Iz jednačina (13.4), (13.5) i razmere za uzdužni nagib dna: $I_* = h_*/L_*$ može se izvesti opšti zakon Frudove sličnosti za rečne modele:

$$\text{Fr}_* = \frac{h_*}{L_*} \left(\frac{h_*}{d_*} \right)^{2\mu} = 1. \quad (13.6)$$

U specijalnom slučaju, za $\mu = 1/6$, iz izraza (13.6) sledi potrebna razmera za apsolutnu rapavost, ako su poznate geometrijske razmere distordovanog modela:

$$d_* = h_*^4/L_*^3. \quad (13.7)$$

Ista zavisnost može se dobiti iz uslova sličnosti otpora trenja, koji nalaže jednakost brojeva (\tilde{u}/u_*) na modelu i prototipu³.

Iz prethodnih objašnjenja se zaključuje da je za projektovanje rečnih modela sa nepokretnim dnom neophodno odrediti tri osnovne razmere: L_* , h_* i d_* . Razmera za dužinu L_* usvaja se na osnovu raspoloživog prostora (koji može biti veoma ograničen ako se model gradi u hali laboratorije), dok se preostale dve razmere – h_* i d_* biraju tako da budu zadovoljeni uslovi (13.6), odnosno (13.7), koji podrazumevaju turbulentno tečenje po hidraulički rapavom dnu.

Na osnovu razmere d_* , može se sračunati potrebna apsolutna rapavost modela: $d_m = d_p/d_*$. Reč je o visini „elemenata rapavosti“ (kamenčića, komada od betona ili nekog drugog materijala), koje cementom ili lepkom treba učvrstiti za dno modela (Slika 13.3), a čiji se raspored određuje probanjem tako da se na modelu verno reprodukuju linije nivoa i ostvare dubine u datoj razmeri.

■ **Primer 13.1.** U Tabeli 13.1 dati su podaci za rečnu deonicu sa šljunkovitim koritom. Odrediti osnovne razmere fizičkog modela ove deonice, ako je dužina raspoloživog prostora u laboratoriji $L_m=15$ m.

Tabela 13.1: *Ulazni podaci za primer 13.1*

L_p [m]	B_p [m]	h_p [m]	V_p [m/s]	d_p [mm]	n_p [m ^{-1/3} s]	Δ_p [-]
1500	20	1,8	0,5	5	0,03	1,65

³Kombinacijom Manningovog izraza, koji je predodređen za kvadratni zakon otpora trenja: $\tilde{u}/u_* = h^{1/6}/(n\sqrt{g})$ i zavisnosti: $n = d^{1/6}/26$, dobija se:

$$\frac{\tilde{u}}{u_*} = \frac{\tilde{u}}{\sqrt{g h I_d}} = \frac{26}{\sqrt{g}} \left(\frac{h}{d} \right)^{1/6}, \quad \text{ili} \quad \frac{26}{\sqrt{g}} \left(\frac{h}{d} \right)^{1/6} \frac{\sqrt{g h I_d}}{\tilde{u}} = 1,$$

odakle, prelazeći na razmere, sledi: $d_* = h_*^4/L_*^3$.



Slika 13.3: Elementi apsolutne rapavosti u koritu rečnog modela [76].

Rešenje: Usvajajući da je $R \approx h = 1,8$ m, za prototip se dobijaju sledeće vrednosti:

$$I_{dp} = (n_p \cdot V_p)^2 / h_p^{4/3} = (0,03 \cdot 0,5)^2 / 1,8^{4/3} = 0,0001$$

$$Q_p = V_p \cdot B_p \cdot h_p = 0,5 \cdot 20 \cdot 1,8 = 18 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Fr}_p = V_p^2 / (g \cdot h_p) = 0,5^2 / (9,81 \cdot 1,8) = 0,014$$

$$\Theta_p = h_p \cdot I_{dp} / (\Delta_p \cdot d_p) = 1,8 \cdot 0,0001 / (1,65 \cdot 0,005) = 0,022 < \Theta_{c,\min} = 0,03.$$

Zaključak: može se koristiti model sa nepokretnim dnom.

Usvaja se razmera za dužine: $L_* = L_p / L_m = 1500 / 15 = 100$.

Ako se u prvoj iteraciji usvoji razmera za dubinu: $h_* = L_* = 100$ (nedistordovan model), slede vrednosti:

$$h_m = h_p / h_* = 1,8 / 100 = 0,018 \text{ m!}$$

$$(V)_* = L_*^{1/2} = 100^{1/2} = 10$$

$$V_m = V_p / (V)_* = 0,5 / 10 = 0,05 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}_m = V_m \cdot h_m / \nu = 0,05 \cdot 0,018 / 1 \times 10^{-6} = 900 < 1000, \text{ laminarno tečenje!}$$

Zaključak: da bi tečenje na modelu bilo turbulentno i da bi se pouzdano mogla meriti dubina, model mora biti distordovan.

U dugoj iteraciji, neka je razmera $h_* = 20$ (stepen distorzije $100/20=5$). Slede vrednosti:

$$h_m = h_p / h_* = 1,8 / 20 = 0,09 \text{ m}$$

$$V_m = V_p / (V)_* = 0,5 / 4,5 = 0,11 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}_m = V_m \cdot h_m / \nu = 0,11 \cdot 0,09 / 1 \times 10^{-6} = 10062 > 1000, \text{ turbulentno tečenje.}$$

Vrednosti ostalih razmera i modelskih veličina date su u Tabeli 13.2.

Tabela 13.2: Rezultati u primeru 13.1

Veličina	Razmera	Model
Nagib	$I_{d*} = h_*/L_* = 0,20$	$I_{dm} = 0,0005$
Protok	$Q_* = L_* h_*^{3/2} = 8944$	$Q_m = 0,0020 \text{ m}^3/\text{s}$
Prečnik zrna	$d_* = h_*^4/L_*^3 = 0,16$	$d_m = 31 \text{ mm}$
Vreme	$t_* = L_*/h_*^{1/2} = 22,36$	

Treba uočiti da se kod modela sa nepokretnim dnom podrazumeva da je vrednost eksponenta u izrazu (13.6) $\mu=1/6$.

13.4 Rečni fizički modeli sa pokretnim dnom

Ovi modeli služe za ispitivanje morfoloških promena rečnog korita. Prvi rečni model sa pokretnim dnom (Slika 13.4) osmislio je i izgradio francuski naučnik Lui Farg (Louis Fargue, 1827-1910), poznat po izučavanju veze između morfoloških oblika u planu i uzdužnog profila korita reke Garone (videti tačku 1.4.3). Rezultati dvadesetak Fargovih eksperimenata iz 1875. i 1876. godine kvalitativnog su karaktera i mogu se sumirati u tri osnovna zaključka:

- (i) Rečni tok se u krivini koncentriše duž spoljašnje (konkavne) obale, dok se istaložavanje nanosa dešava duž unutrašnje (konveksne) obale.
- (ii) Linija najvećih dubina („talveg“) zavisi od zakrivljenosti korita u planu.
- (iii) Pri istoj zakrivljenosti, geometrija poprečnih profila na početku i na kraju krivine se značajno razlikuje.

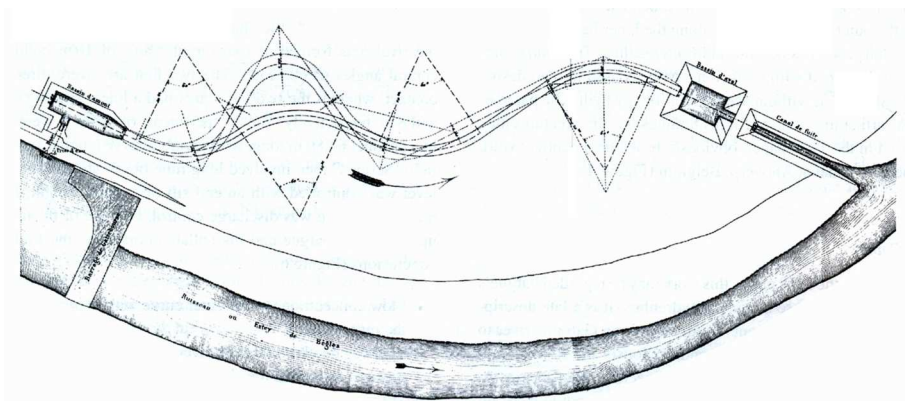
Iako bez kvantifikacije hidrauličkih parametara (protoka, Frudovog broja itd.) rezultati Fargovih eksperimenata su od velikog istorijskog značaja, jer je prvi put rečni fizički model projektovan i korišćen u praktične svrhe.

Od Fargovih eksperimenata do danas, tehnika fizičkog modeliranja je doživela veliki napredak, zahvaljujući teorijskom razvoju rečne hidraulike, unapređenju računskih metoda i merne tehnike. U našoj zemlji stečena su značajna iskustva u korišćenju rečnih fizičkih modela, o čemu govore primeri na Slici 13.5.

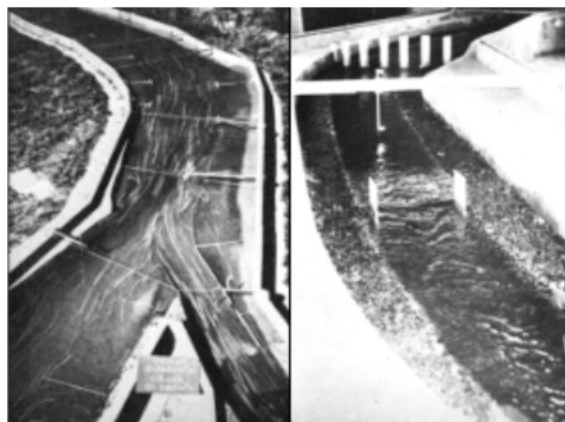
Uslov da rečni model mora biti sa pokretnim dnom je: $\Theta_p > 0,06$, što znači da je stvarni bezdimenzioni tangencijalni napon veći od kritičnog bezdimenzionog napona na Šildsovom dijagramu u oblasti rapavog dna ($\Theta_{c,\max} \approx 0,06$, Slika 9.2).

13.4.1 Rečni modeli u potpunj sličnosti

Pored Frudove sličnosti (13.6), u ovom slučaju mora biti zadovoljena i psamološka (sedimentološka) sličnost, koja obezbeđuje istu meru pokretljivosti nanosa na modelu i u prirodi. Psamološka sličnost se definiše uslovom da razmere veličina



Slika 13.4: Originalni crtež Fargovog modela sa pokretnim dnom iz 1894. godine [62]; model, dužine od oko 60 m i širine 1 m, izgrađen je na otvorenom prostoru, na obali pritoke reke Garone (Estey de Bègles) blizu Bordoia. Korito modela je formirano u pesku iz reke Garone. Na uzvodnom kraju modela je vodozahvatni bazen dimenzija 8×2 m, a na nizvodnom kraju je prag promenljive visine za kontrolu nivoa vode. Osovina modela opisuje četiri kružna luka poluprečnika 10 m, sa centralnim uglom od 60°, pri čemu se prva krivina direktno nastavlja u drugu, a preostale dve krivine imaju pravolinijske prelazne deonice dužine 4 i 8 m. Eksperimenti su obavljeni za opseg protoka 67÷ 209 L/s (površinske brzine 0.29÷0.69 m/s), u trajanju između 45 min i 160 h.



Slika 13.5: Primeri rečnih fizičkih modela; levo: model ušća Drave u Dunav, namenjen ispitivanju efekata suženja korita Dunava na povećanje propusne moći za nanos; desno: model sa pokretnim dnom Vardara u Skoplju, izgrađen u razmeri 1:20/60 radi ispitivanja uticaja regulacionih radova na režim vučenog nanosa [118].

koje figurišu na Šildsovom dijagramu moraju biti jednake:

$$\Theta_* = \frac{\Theta_p}{\Theta_m} = 1, \quad (13.8)$$

$$(\text{Re}_*)_* = \frac{\text{Re}_{*p}}{\text{Re}_{*m}} = 1. \quad (13.9)$$

Osnovne razmere. Imajući u vidu definiciju Šildsovog broja, uslov (13.8) se može formulisati u obliku:

$$\frac{h_* \cdot I_{d_*}}{\Delta_* \cdot d_*} = \frac{h_*^2}{L_* \cdot \Delta_* \cdot d_*} = 1, \quad (13.10)$$

gde je d_* – razmera za prečnik zrna, a Δ_* – razmera za relativnu gustinu nanosa. S druge strane, ako se uzme u obzir veza između bezdimenzionog parametra zrna:

$$d_* = d \left(\frac{g \cdot \Delta}{\nu^2} \right)^{1/3},$$

Šildsovog broja (Θ) i smičućeg Rejnoldsovog broja (Re_*): $\text{Re}_*^2 = \Theta \cdot d_*^3$ (videti tačku 9.2.2, „modifikovan Šildsov dijagram”), uslov (13.9) se može zameniti uslovom:

$$(d_*)_* = \frac{d_{*p}}{d_{*m}} = 1, \quad (13.11)$$

odakle sledi:

$$d_*^3 = \frac{1}{\Delta_*}. \quad (13.12)$$

Istovremeno zadovoljenje jednakosti (13.10) i (13.12) podrazumeva kombinaciju ova dva izraza, što kao rezultat daje razmeru za prečnik zrna:

$$d_* = \frac{L_*^{1/2}}{h_*}. \quad (13.13)$$

Problem istovremenog zadovoljenja Frudove i psamološke sličnosti nalaže da treba odrediti četiri osnovne razmere: L_* , h_* , d_* i Δ_* . Razmera L_* se usvaja prema raspoloživom prostoru, a preostale tri razmere se određuju iz uslova (13.6), (13.10) i (13.12).

Izvedene razmere. Kombinacijom uslova Frudove sličnosti (13.6) i Šildsove sličnosti (13.13), dobijaju se ove zavisnosti:

$$L_* = h_*^{\frac{4\mu+1}{\mu+1}}, \quad (13.14)$$

$$d_* = h_*^{\frac{2\mu-1}{2\mu+2}}. \quad (13.15)$$

Navedeni izrazi uspostavljaju vezu izmedju osnovnih razmera rečnih modela u *potpunoj* sličnosti. Na osnovu tih razmera, mogu se izvesti razmere za druge veličine od interesa. Evo nekih primera.

Razmera za pronos vučenog nanosa izvodi se na osnovu izabranog empirijskog obrasca. Tako je prema obrascu MPM težinski pronos vlažnog materijala: $q'_{vt} \propto (\tau_o - \tau_{oc})^{3/2}$, pa se, imajući u vidu razmeru za tangencijalni napon: $(\tau_o)_* = \rho_* \cdot g_* \cdot h_*^2 \cdot L_*^{-1}$, lako izvodi razmera za jedinični pronos vučenog nanosa:

$$(q'_{vt})_* = h_*^3 \cdot L_*^{-3/2}. \quad (13.16)$$

Odgovarajuća razmera za zapreminski pronos u prifilu biće:

$$(Q_v)_* = \frac{(q'_{vt})_* \cdot L_*}{g_* \cdot \rho_{s*}} = \frac{h_*^3}{\rho_{s*} \cdot L_*^{1/2}}. \quad (13.17)$$

Na sličan način se može postupiti sa suspendovanim nanosom, ali vodeći računa da je za brzinu tonjenja čestica merodavna Rejnoldsova sličnost:

$$(\text{Re}_W)_* = \frac{W_* \cdot d_*}{\nu_*} = 1, \quad (13.18)$$

odakle sledi:

$$W_* = d_*^{-1}. \quad (13.19)$$

Razmera za pronos suspendovanog nanosa se izvodi iz uslova jednakosti supenzionih brojeva na modelu i prototipu, odnosno:

$$\frac{W_*}{(u_*)_*} = \frac{W_*}{(h_* \cdot I_{d*})^{1/2}} = \frac{L_*^{1/2}}{d_* \cdot h_*} = 1. \quad (13.20)$$

Ovaj uslov je identičan uslovu (13.13), što znači da zadovoljenje psamološke – Šildsove sličnosti ne samo da podrazumeva sličnost pokretanja nanosa na dnu,

već i sličnost rasporeda koncentracije po dubini, a time i pronosa suspendovanog nanosa.

Razmere za vreme. Specifičnost rečnih fizičkih modela je da postoje dve vremenske razmere: „hidraulička” i „psamološka” („sedimentološka”). Imajući u vidu zavisnost (13.14), hidraulička razmera za vreme kod rečnih modela je:

$$t_* = L_* \cdot h_*^{-1/2} = h_*^{\frac{4\mu+1}{\mu+1}} \cdot h_*^{-1/2} = h_*^{\frac{7\mu+1}{2\mu+2}}. \quad (13.21)$$

Psamološka razmera za vreme (t_{s*}) zasniva se brzini deformacije korita i izvodi se iz Eksnerove jednačine kontinuiteta za nanos:

$$(1 - \lambda_o) \frac{\partial^2 z_d}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 q_v}{\partial x^2} = 0,$$

odakle sledi: $q_{v*}/L_* = -\lambda_o h_*/t_{s*}$, odnosno: $t_{s*} = \lambda_{o*} h_* L_*/q_{v*}$. Ako se usvoji: $\lambda_{o*} = 1$ i $q_{v*} = 1$, dobija se konačno:

$$t_{s*} = h_* \cdot L_* = h_* \cdot h_*^{\frac{4\mu+1}{\mu+1}} = h_*^{\frac{5\mu+2}{\mu+1}}. \quad (13.22)$$

O razlici vremenskih razmera naročito se mora voditi računa ako se na fizičkom modelu ispituje pronos nanosa ili deformacija korita u uslovima *neustaljenog* tečenja. Ako se na modelu ispituje samo prostiranje poplavnog talasa, ulazni granični uslov u vidu hidrograma se zadaje shodno hidrauličkoj vremenskoj razmeri (13.21), ali ako se ispituje opšta deformacija korita usled prolaska tog poplavnog talasa, onda se ulazni hidrogram mora zadati shodno psamološkoj vremenskoj razmeri (13.22).

Veštački materijali. Medjusobno uskladjivanje razmera, uz ograničenje stepena distorzije modela, može dovesti do velikih problema sa izborom materijala za pokretno dno. Pored toga, radni materijal na fizičkom modelu ne sme biti isuviše sitan, jer je zapaženo da se tada na modelu pojavljuju nabori i dine, narušavajući Frudovu sličnost. Problemi vezani za pojavu dina mogu se izbeći ako se na modelu koriste zrna krupnija od 0,5 mm.

Medjutim, zavisnost (13.12) pokazuje da je razmera za gustinu nanosa obrnuto srazmerna razmeri za prečnik zrna na treći stepen. Zaključak: ako se na modelu koriste krupnija zrna, ona moraju biti lakša i obrnuto. Zbog toga se na rečnim fizičkim modelima često koriste veštački materijali (Tabela 13.3). Pomoću njih se može pokušati da se pomire svi zahtevi u pogledu razmera i izbegnu problemi preterane distorzije i nanosnih formacija. Čak i tada to nije uvek moguće, kao što će se ilustrovati primerima u nastavku.

Tabela 13.3: Veštački materijali kod rečnih modela sa pokretnim dnom [90, 108]

Materijal	Gustina ρ_s [t/m ³]	Krupnoća d [mm]	Komentar
Plastika/Smola	1,03 ÷ 1,05	0,5 ÷ 3,0	teži da ispliva, visoka cena
Bakelit	1,38 ÷ 1,49	0,3 ÷ 4,0	porozan, trošan, teži da ispliva
Ugalj	1,20 ÷ 1,43	0,2 ÷ 4,0	nehomogen, teži segregaciji
Plovućac	1,70	1,0 ÷ 3,0	vrlo porozan

13.4.2 Rečni modeli u nepotpunoj sličnosti

Kada je u datim uslovima nemoguće ostvariti potpunu sličnost, svesno se može, shodno prirodi problema koji se razmatra, „žrtvovati” jedan uslov sličnosti, ako to neće bitno uticati na tačnost i zaključke modelskog ispitivanja. Dve su mogućnosti:

- odstupanje od Frudove sličnosti: $Fr_* \neq 1$ i
- odstupanje od psamološke – Šildsove sličnosti: $(d_*)_* \neq 1$.

U prvom slučaju govori se o rečnom modelu u „kvazi Frudovoj sličnosti”, a u drugom slučaju, o modelu u „kvazi psamološkoj” ili „kvazi Šildsovoj sličnosti”.

Kvazi Frudova sličnost. Odstupanje od potpune Frudove sličnosti nudi mogućnost rada sa prirodnim materijalom (peskom), što je pogodno kada se radi o velikim aluvijalnim vodotocima sa sitnozrnim materijalom na dnu. Tada se insistira na psamološkoj sličnosti $\Theta_* = (d_*)_* = 1$, a tolerišu se nešto veće vrednosti Frudovog broja na modelu nego u prirodi, sve dok je tečenje na modelu i dalje „duboko” u mirnom režimu. Opravdanje za ovaj pristup leži u činjenici da je na velikim rekama hidraulički režim blago promenljiv i da su duž vodotoka vrednosti Frudovog broja male i približno konstantne, tako da nema velikih promena na dijagramu specifične energije. Zbog toga se na modelu mogu dopustiti veće vrednosti Frudovog broja nego u prirodi, sve dok je miran režim tečenja u oba sistema.

Kvazi Frudova sličnost smanjuje broj nepoznatih razmera za jedan. Ako se radi sa prirodnim materijalom ($\Delta_* = 1$), ostaju samo dva uslova: (13.6) i (13.13). Njihovim kombinovanjem, dobija se razmera kvazi Frudove sličnosti:

$$Fr_* = \frac{h_*^{\mu-1/2}}{d_*^{\mu+1}}. \quad (13.23)$$

Ova zavisnost pokazuje da se razmera za Frudov broj menja sa razmerom modela, što znači da se izborom razmera za dubinu i prečnik zrna, može uticati na odstupanje od potpune Frudove sličnosti, a time i na tačnost rezultata koji se mogu očekivati od fizičkog modela. (Sve razmere za rečne modele u kvazi Frudovoj sličnosti date su u Dodatku E.)

■ **Primer 13.2.** Odrediti razmere za rečni distordovani model sa pokretnim dnom, ako je merodavni protok $Q_p=2300 \text{ m}^3/\text{s}$, trajanja $T_p = 10$ dana. Ostali podaci za prototip dati su u Tabeli 13.4. Ograničenje za izradu modela je dužina raspoloživog prostora u laboratoriji $L_m = 50 \text{ m}$. Za pokretni materijal na modelu su na raspolaganju dve frakcije peska, krupnoće 1 mm i 2 mm . Utvrditi koji je materijal pogodniji.

Tabela 13.4: *Ulazni podaci za primer 13.2*

L_p [m]	B_p [m]	h_p [m]	V_p [m/s]	Fr_p [-]	I_{dp} [-]	d_p [mm]	Δ_p [-]
5000	600	8,5	2,5	0,1	5×10^{-5}	0,5	1,65

Rešenje: Kako je vrednost Šildsovog broja prototipa:

$$\Theta_p = h_p \cdot I_{dp} / (\Delta_p \cdot d_p) = 0,52 > \Theta_{c,\min} = 0,03,$$

rečni model mora biti sa pokretnim dnom. Eksponent za definisanje relativne rapavosti prototipa ima vrednost: $\mu = \ln(12 \cdot h_p/d_p)^{-1} = 0,0818$.

Geometrijske razmere L_* i h_* usvojiće se vodeći računa o ograničenju laboratorijskog prostora, kao i o izrazu (13.14) koji objedinjuje zahteve Frudove i Šildsove sličnosti. Ako se usvoji razmera $h_*=50$, biće:

$$h_m = h_p/h_* = 0,17 \text{ m (prihvatljiva dubina za model);}$$

$$L_* = h_*^{\frac{4\mu+1}{\mu+1}} = 121,44;$$

$$L_m = L_p/L_* = 41,17 < 50 \text{ m.}$$

Usvajaju se razmere: $h_* = 50$ i $L_* = 120$ (stepen distorzije $L_*/h_*=2,4$, $L_m \approx 42 \text{ m}$, $\mu=0,0806$). U Tabeli 13.5 dati su rezultati koji su bitni za izbor materijala na dnu modela.

Tabela 13.5: *Karakteristike materijala za pokretno dno iz primera 13.2*

Veličina	Razmera	Model
Prečnik zrna	$d_* = h_*^{\frac{2\mu-1}{2\mu+2}} = 0,219$	$d_m = 2,28 \text{ mm}$
Gustina	$\Delta_* = h_*^{\frac{3-6\mu}{2+2\mu}} = 95,1$	$\Delta_m = 0,0174$

Gustina materijala iznosi: $\rho_{sm}/\rho = \Delta_m + 1=1,017$. Kako ne postoji dovoljno lak veštački materijal sa datom gustinom, potpuna Frudova i psamološka sličnost nije moguća. Rešenje je da se za pokretno dno koristi prirodni pesak, a da se odstupa od potpune Frudove sličnosti, pod uslovom da to odstupanje bude prihvatljivo. U Tabeli 13.6 dati su rezultati za dve krupnoće raspoloživog peščanog materijala.

Tabela 13.6: Analiza raspoloživog peščanog materijala

d_m [mm]	$d_* = d_p/d_m$ [-]	$Fr_* = h_*^{\mu-1/2}/d_*^{\mu+1}$ [-]	$Fr_m = Fr_p/Fr_*$ [-]
1	0,50	0,41	0,244
2	0,25	0,87	0,115

Može se zaključiti da je, bez obzira na krupnoću materijala, tečenje na modelu u mirnom režimu. Međutim, bolje je raditi sa peskom krupnoće 2 mm, jer je u tom slučaju odstupanje od Frudove sličnosti manje – vrednost razmere Frudovih brojeva je bliža jedinici (0,87), a vrednost Frudovog broja na modelu (0,115) je neznatno veća od one u prirodi (0,1). U Tabeli 13.7 date su vrednosti osnovnih razmera i odgovarajućih veličina razmatranog fizičkog modela.

Tabela 13.7: Rezultati u primeru 13.2

Veličina	Razmera	Model
Nagib	$I_{d*} = h_*/L_* = h_*^{-3\mu/(\mu+1)} = 0,4167$	$I_{dm} = I_{dp}/I_{d*} = 1,2 \times 10^{-4}$
Protok	$Q_* = L_* h_*^{3/2} = 42426$	$Q_m = Q_p/Q_* = 0,054 \text{ m}^3/\text{s}$
Brzina	$(V)_* = h_*^{1/2} = 7,071$	$V_m = V_p/(V)_* = 0,35 \text{ m/s}$
Hidr. vreme	$t_* = h_*^{7\mu+1/(2\mu+2)} = 16,97$	$t_m = T_p/t_* = 0,59 \text{ dana}$
Psam. vreme	$t_{s*} = h_*^{5\mu+2/(\mu+1)} = 6000$	$t_{sm} = T_p/t_{s*} = 0,0017 \text{ dana}$

Može se primetiti da je razlika vremenskih razmera veoma izražena. Hidrauličko vreme na modelu iznosi 0,59 dana – približno 14 sati ili 840 min, dok je psamološko vreme na modelu znatno kraće – 0,04 sata ili 2,4 min. Ako je svrha analize opšta deformacija korita pod uticajem zadate velike vode, onda eksperiment treba da traje 2,4 min.

Treba napomenuti da primena kvazi Frudove sličnosti nije prihvatljiva za analizu lokalne deformacije oko objekata u rečnom koritu. Naime, za lokalnu deformaciju veoma je bitna sličnost polja brzine (puna kinematička sličnost), koja podrazumeva punu Frudovu sličnost. Zato se lokalna deformacija po pravilu ispituje na kratkim nedistordovanim modelima.

Kvazi psamološka sličnost. Odstupanje od potpune psamološke (Šildsove) sličnosti ima opravdanje kada su u pitanju bujični vodotoci, u burnom ili mešovitom režimu tečenja. Naime, odstupanje od Frudove sličnosti se kod takvih vodotoka ne može dopustiti, jer su hidrauličke promene nagle, a vrednosti Frudovog broja visoke. Bezuslovno ispunjenje Frudove sličnosti upućuje na to da se rešenje problema razmera mora tražiti u odstupanju od psamološke sličnosti i korišćenju sitnijeg materijala na modelu, ali pod uslovom da je tečenje na modelu u oblasti hidraulički rapavog dna ($Re_{*m} > 70$).

Za rečni model u kvazi psamološkoj sličnosti ključne dve razmere su vezane za izbor radnog materijala. U tu svrhu mogu se koristiti zavisnosti (13.15) i:

$$\Delta_* = h_*^{1-2\mu} \cdot d_*^{2m-1}, \quad (13.24)$$

pri čemu ova druga, predstavlja kombinaciju opštih uslova (13.6) i (13.10). (Sve razmere za rečne modele u kvazi psamološkoj sličnosti date su u Dodatku E.)

■ **Primer 13.3.** Odrediti razmere za fizički model sa pokretnim dnom jednog bujičnog vodotoka čiji su podaci navedeni u Tabeli 13.8. Merodavni protok, trajanja $T_p = 1$ dan, iznosi: $Q_p = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$. Ovom protoku odgovara jedinični pronos vučenog nanosa $q_{vp} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^3/(\text{s m})$. Dužina raspoloživog prostora u laboratoriji je $L_m = 30 \text{ m}$.

Tabela 13.8: *Ulazni podaci za primer 13.3*

L_p [m]	B_p [m]	h_p [m]	V_p [m/s]	Fr_p [-]	$I_{d,p}$ [-]	d_p [mm]	Δ_p [-]
5000	40	4,0	3,0	0,4	2×10^{-3}	60	1,65

Rešenje: Kako je vrednost Šildsovog broja prototipa $\Theta_p = 0,081 > \Theta_{c,\max} = 0,06$, model mora biti sa pokretnim dnom. Odgovarajuća vrednost eksponenta za relativnu rapavosti iznosi: $\mu = \ln(12 \cdot h_p/d_p)^{-1} = 0,1496$.

Puna iskoristivost laboratorijskog prostora postiže se pri razmeri $L_* = 100$. U prvom pokušaju, neka je razmera $h_* = 20$ (stepen distorzije 5, dubina na modelu $h_m = 0,2 \text{ m}$). Razmera za apsolutnu rapavost je u tom slučaju:

$$d_* = h_*^{\frac{2\mu-1}{2\mu+2}} = 0,401,$$

a krupnoća materijala za pokretno dno modela, $d_m = d_p/d_* = 150 \text{ mm}$. Ovako krupan materijal nije pogodan, niti se može koristiti pri datoj dubini vode na modelu. Mora se pribeci modeliranju u nepotpunoj sličnosti. Kako je reč o bujičnom vodotoku sa relativno visokim vrednostima Frudovog broja, ne sme se narušiti Frudova sličnost. Dakle, uslov $Fr_* = 1$ se mora ispuniti, a može se odstupiti od psamološke sličnosti: $(d_*)_* \neq 1$.

Primena kvazi psamološke (sedimentološke) sličnosti praktično dozvoljava da se na modelu može koristiti sitniji materijal, sve dok je tečenje duboko u „kvadratnom zakonu otpora”, odnosno u oblasti hidraulički rapavog dna ($Re_{*m} > 70$).

Ako se u drugom pokušaju usvoji $d_* = 2$ ($d_m = 30 \text{ mm}$), iz uslova Frudove sličnosti (13.6) sledi:

$$h_* = \left(L_* \cdot d_*^{2\mu} \right)^{\frac{1}{2\mu+1}} \approx 40 \text{ (stepen distorzije 2,5),}$$

što daje: $h_m \approx 0,10$ m, $I_{d*} = 0,4$, $I_{dm} = 0,005$, odnosno,

$$V_{*m} = \sqrt{g \cdot h_m \cdot I_{dm}} = 0,07 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}_{*m} = V_{*m} \cdot d_m / \nu \approx 2100 \gg 75.$$

Uslov tečenja u oblasti hidraulički rapavog dna je u potpunosti ispunjen.

Da bi se izvršio izbor materijala, neophodno je odrediti njegovu potrebnu gustinu. Iz jednačine (13.24) sledi: $\Delta_* = 8,186$, $\Delta_m = 0,202$ i $\rho_{sm} = \rho(1 + \Delta_m) = 1,202$. To znači da materijal na modelu mora biti lakši od prirodnog materijala. Imajući u vidu podatke iz Tabele 13.3, može se izabrati plastični materijal ili ugalj. Vrednosti ostalih glavnih razmera i odgovarajućih modelskih veličina date su u Tabeli 13.9.

Tabela 13.9: Rezultati u primeru 13.3

Veličina	Razmera	Model
Protok	$Q_* = L_* h_*^{3/2} = 25298$	$Q_m = Q_p / Q_* = 0,04 \text{ m}^3/\text{s}$
Brzina	$(V)_* = h_*^{1/2} = 6,325$	$V_m = V_p / (V)_* = 0,47 \text{ m/s}$
Hidr. vreme	$t_* = h_*^{2\mu+1/2} / d_*^{2\mu} = 15,5$	$t_m = T_p / t_* = 0,065 \text{ dana}$
Psam. vreme	$t_{s*} = h_*^{3\mu+3/2} \cdot d_*^{-3\mu-1} = 485$	$t_{sm} = T_p / t_{s*} = 0,0021 \text{ dan}$
Pronos nanosa	$q_{v*} = h_*^{1/2-\mu} \cdot d_*^{\mu+1} = 8,08$	$q_{vm} = 3,1 \times 10^{-4} \text{ m}^3/(\text{s m})$

Ako je cilj analize ispitivanje opšte deformacije korita, trajanje laboratorijskog eksperimenta treba usaglasiti sa psamološkim vremenom od 0,0021 dana, što predstavlja približno 0,05 sati ili 3 min. Kao u prethodnom primeru, ovaj model nije pogodan za ispitivanje lokalne deformacije korita.

13.5 Efekti razmere

Greške u rezultatima merenja na fizičkim modelima koje su posledica odstupanja od potpune sličnosti, zovu se „efekti razmere”. Ovi efekti se najviše ispoljavaju kod distordovanih modela, ali su prisutni i kod nedistordovanih modela⁴.

Najčešće se efekti razmere dovode u vezu sa odstupanjem od Frudove sličnosti. Kao što je ranije rečeno, ova sličnost obezbeđuje sličnost gubitaka energije, što znači da je zadovoljen uslov:

$$\left(\frac{V^2}{2g} \right)_* = 1. \quad (13.25)$$

⁴Tipičan primer su nedistordovani modeli cevovoda, tunela i galerija, najčešće izgrađeni od pleksiglasa u razmerama 1:40 ili 1:50, kod kojih, zbog nedovoljne rapavosti, postoji mogućnost tečenja u prelaznoj oblasti, a ne u oblasti kvadratnog zakona otpora.

U literaturi [108] predlaže se kvantifikacija efekata razmere pomoću funkcije odstupanja:

$$\epsilon(\text{Fr}_*) = \left(\frac{\text{Fr}_* - 1}{\text{Fr}_*} \right) \frac{V_p^2}{2g}, \quad (13.26)$$

gde je Fr_* stvarna razmera za Frudov broj, a $V_p^2/(2g)$ – kinetička energija prototipa, po jedinici težine.

Kod rečnih modela, efekti razmere su posledica distorzije i karakteristika radnog materijala. Sitan materijal stvara dine, tako da se na modelu javljaju dopunski otpori oblika, što narušava Frudovu sličnost. Treba naglasiti da se Frudova sličnost može ostvariti samo ako su otpori trenja isključivo posledica apsolutne rapavosti.

S druge strane, postavlja se pitanje da li je moguće na fizičkim modelima ispitivati „talase” nanosnih formacija – nabora, dina i antidina. Odgovor je da geometrijske razmere izvedene iz Frudove sličnosti ne važe za nanosne formacije; razmera talasne dužine dina ne sledi razmeru za dužinu toka: $\Lambda_* \neq L_*$, a razmera za visinu dina odgovara razmeri za dubinu toka: $\Delta_{b*} = h_*$ samo ako je ispunjen uslov $\Theta_* = 1$.

Kako se na fizičkom modelu ne može zadovoljiti potpuna geometrijska sličnost nanosnih formacija, ne može biti ostvarena ni kinematička sličnost, koja je preduslov za ispitivanje brzine kretanja pešćanih talasa.

Morfološke analize prirodnih vodotoka

Na prirodnim vodotocima se sreću deonice koje su podložne kratkotrajnim ili dugotrajnim morfološkim promenama, kao i deonice koje su trajno u ravnotežnom stanju. U prethodnim poglavljima je konstatovano da su hidraulička geometrija, nanosne formacije i hidraulički otpori u stalnom procesu prilagođavanja promenama protoka vode i pronosa nanosa. Mnoštvo različitih uticaja i složenost procesa koji se odvijaju u rečnom koritu čini da su bilo kakva (naročito kvantitativna) predviđanja morfoloških promena veoma nesigurna.

Već je rečeno da su faktori koji utiču na morfologiju rečnog korita:

- protok vode;
- pronos nanosa;
- uzdužni nagib dna;
- krupnoća nanosa koja diktira apsolutnu rapavost;
- nanosne formacije, kao uzrok aluvijalne rapavosti;
- vegetacija;
- ljudski faktor.

Razdvajanje pojedinačnih uticaja je veoma teško, zbog njihove međusobne uslovljenosti. Praktično je nemoguće razviti analitičku metodologiju koja bi istovremeno mogla da uzme u obzir sve navedene uticaje, pa su analize morfologije rečnog korita obično kvalitativnog karaktera. Ove analize se zasnivaju na tri osnovna pristupa:

- (i) uspostavljanju empirijskih korelacija („teorija režima”);
- (ii) primeni hipoteza ekstremnih stanja za predviđanje „stabilnog korita”;
- (iii) statističkoj obradi morfoloških veličina.

U nastavku se razmatraju sva tri pristupa.

14.1 Teorija režima

Za uređenje vodotoka je najvećeg značaja određivanje geometrijskih, hidrauličkih i psamoloških uslova koji obezbeđuju *stabilnost* korita. Korito je u stabilnom, ravnotežnom stanju kada dugoročno nije izražena njegova deformacija. Tradicionalni pristup u definisanju hidrauličkih i geometrijskih odnosa koji obezbeđuju morfološku stabilnost aluvijalnih vodotoka poznat je u svetu pod imenom „teorija režima”¹. Prema ovoj teoriji, rečni tok je „u režimu” ako je korito periodično podložno manjim deformacijama, ali se generalno nalazi u stanju dinamičke ravnoteže. Teorija režima se zasniva na korelacionim zavisnostima „morfometrijskih” karakteristika korita (širine, dubine, nagiba dna), hidrauličkih karakteristika vodotoka (protoka ili brzine) i karakteristika nanosa (prečnika zrna ili pronosa).

Relacije vezane za poprečni profil. Veliki broj izraza raznih autora može se svesti na opšti oblik:

$$B = a_1 \cdot Q^{b_1} \quad (14.1)$$

$$H = a_2 \cdot Q^{b_2} \quad (14.2)$$

$$V = a_3 \cdot Q^{b_3}, \quad (14.3)$$

gde je $H = A/B$ – srednja dubina toka, a a_1, a_2, a_3 , odnosno b_1, b_2 i b_3 su empirijski koeficijenti (Tabela 14.1).

Tabela 14.1: *Prosečne vrednosti empirijskih koeficijenata*

Autor	Vodotok	Merodavni protok	Koeficijenti		
			b_1	b_2	b_3
Leopold (1953)	reke SAD	različiti	0,26	0,40	0,34
Blenč (1957)	kanali, Indija, Pakistan	punog korita	0,50	0,33	0,17
Ribkin (1964)	slivovi Volge i Oke	srednji višegod.	0,57	0,22	0,21

Veza između koeficijenata uspostavlja se jednačinom kontinuiteta:

$$Q = (B \cdot H) \cdot V = (a_1 \cdot Q^{b_1} \cdot a_2 \cdot Q^{b_2}) \cdot a_3 \cdot Q^{b_3}, \quad (14.4)$$

odakle sledi: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1$ i $b_1 + b_2 + b_3 = 1$.

Relacije vezane za uzdužni profil. Teorija režima se koristi i za definisanje kvantitativnih zavisnosti koje obuhvataju uzdužni profil korita.

¹Ova teorija, pomenuta u prvom poglavlju, ponegde se u literaturi naziva „indijska teorija” jer potiče od engleskih inženjera koji su se na Indijskom potkontinentu bavili izučavanjem vodotoka i projektovanjem (neobloženih) kanala za navodnjavanje. Empirijski pristup Lejsija (Lacey), Leopolda (Leopold), Blenča (Blench) i dr. koristili su i drugi naučnici u svetu.

Primeru radi, navode se korelacione jednačine ruskih autora (Kondratjeva i dr.) za reke Volgu i Oku:

$$B = 4,670 \cdot Q^{0,57} \cdot K^{0,13} \cdot I_d^{-0,07} \quad (14.5)$$

$$H = 0,069 \cdot Q^{0,22} \cdot K^{0,50} \cdot I_d^{-0,24} \quad (14.6)$$

gde je Q – srednji višegodišnji protok, K – modularni koeficijent jednak odnosu razmatranog protoka i srednjeg višegodišnjeg protoka (u procentima), a I_d – nagib dna (u promilima).

Treba napomenuti da navedene formule imaju ograničenu primenu. To su uprošćene relacije koje ne obuhvataju sve faktore koji utiču na formiranje rečnog korita (recimo, ne obuhvataju eksplicitno krupnoću materijala iz obala). Vrednosti koeficijenata u empirijskim zavisnostima nisu univerzalne, već isključivo važe za konkretni vodotok, ili neku njegovu deonicu.

Relacije vezane za pronos nanosa. U jedanaestom poglavlju je opisano kako se na razmatranoj deonici vodotoka dugotrajnim merenjem može uspostaviti zavisnost tipa:

$$Q_u = a_4 \cdot Q^{b_4}, \quad (14.7)$$

koja definiše pronos ukupnog nanosa u funkciji protoka vode. Mnoštvo korelacionih zavisnosti iz literature pokazuju da se vrednosti koeficijenta a_4 menjaju u velikom rasponu, dok se vrednosti b_4 nalaze u opsegu $2 \div 3$.

Za kvalitativnu procenu reakcije vodotoka na ljudske delatnosti, pogodna je relacija [29, 54, 110, 146]:

$$Q \cdot I_d \propto Q_u \cdot d_{50}. \quad (14.8)$$

Ova proporcionalnost, koju je prvi formulisao Lejn (Lane, 1955), uspostavlja vezu četiri veličine koje su ključne za ravnotežno stanje vodotoka i omogućava da se u preliminarnim analizama projektnih rešenja sagledaju trendovi morfološkog razvoja (Tabela 14.2). Na osnovu podataka iz ove tabele može se na primer konstatovati da povećanje protoka vode povećava kote nivoa i površine poprečnog preseka, menja nagib linije energije i smanjuje stabilnost korita. Rezultat je promena oblika korita u planu, od meandrirajućeg ka razudjenom obliku.

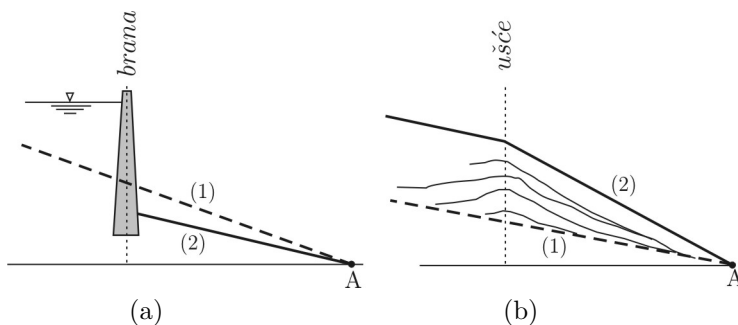
Ako se razmotri slučaj povećanja koncentracije tranzitnih frakcija suspendovanog nanosa, može se konstatovati da ova promena ima za posledicu povećanje efektivne viskoznosti dvofazne mešavine i smanjenje brzine taloženja čestica. To dovodi do povećanja opšteg transportnog kapaciteta za nanos, kao i do bržeg prelaza od nanosnih formacija u mirnom režimu (dina) ka nanosnim formacijama u burnom režimu (antidina). Taj prelaz prati promena hidrauličkih otpora.

Tabela 14.2: Kvalitativna procena reakcije aluvijalnog vodotoka na promene uticajnih faktora; oznake: porast +, smanjenje -, porast ili smanjenje \pm , meandrirajući vodotok M, razudjeni vodotok G [110].

Velicina	Promena	Uticaj na						
		V [m/s]	A [m ²]	Z [mmm]	Hidr. otpori	Nagib dna	Stabilnost korita	Oblik korita
Protok Q	+	+	+	+	\pm	-	-	M→G
	-	-	-	-	\pm	+	+	G→M
Pronos Q_u	+	+	-	-	-	-	+	G→M
	-	-	+	+	+	+	-	M→G
Prečnik d	+	-	+	+	+	+	\pm	M→G
	-	+	-	-	-	-	\pm	G→G
Tranzitni nanos	+	+	-	-	-	-	\pm	
	-	-	+	+	+	+	\pm	
Vegetacija	+	-	+	+	+	-	+	G→M
	-	+	-	-	-	+	-	M→G

Vegetacija takodje može biti značajan faktor u razvoju korita, doprinoseći njegovoj stabilnosti, naročito stabilnosti obala. To je s jedne strane posledica uloge korenog sistema biljaka u vezivanju tla, a s druge strane, povećanja otpora, smanjenja brzine toka i njegovog erozionog potencijala.

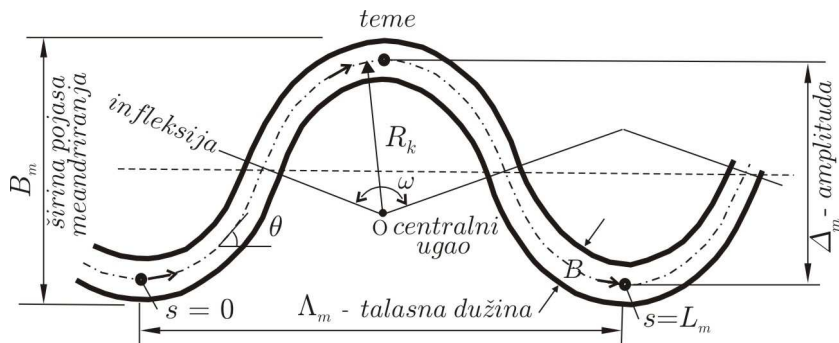
■ **Primer 14.1.** Objasniti pomoću izraza (14.8) kakve se morfološke promene mogu očekivati: (a) izgradnjom brane u rečnom koritu i (b) u slučaju kada pritoka unosi velike količine nanosa (Slika 14.1).



Slika 14.1: Primeri kvalitativnog predviđanja reakcije vodotoka na promene režima nanosa: (a) smanjenje uzdužnog nagiba erozijom nizvodno od brane; (b) povećanje nagiba dna nizvodno od pritoke koja unosi značajne količine nanosa (A – fiksna kota u kontrolnom preseku za deformaciju korita; (1) – početno stanje, (2) – konačno ravnotežno stanje)

Rešenje. (a) Pregradjivanjem vodotoka, smanjuje se pronos nanosa Q_u . Pri istom protoku i krupnoći nanosa, iz relacije (14.8) sledi da se nizvodno od brane mora smanjiti uzdužni nagib dna. Najveće sniženje korita (degradacija) javiće se neposredno nizvodno od brane (Slika 14.1-(a)). U slučaju pod (b), priliv nanosa iz pritoke remeti ravnotežno stanje; da bi se pri određenom protoku i krupnoći zrna, povećao pronos Q_u i uspostavilo novo ravnotežno stanje, mora se nizvodno od ušća pritoke, povećati nagib dna vodotoka (Slika 14.1-(b)). Uvodno od ušća će se zadržati nagib dna početnog ravnotežnog stanja.

Relacije vezane za oblik korita u planu. Shematski prikaz pravilnog meandra dat je na Slici 14.2, sa oznakama osnovnih morfometrijskih veličina u horizontalnoj projekciji: talasne dužine Λ_m , amplitude Δ_m , poluprečnika krivine R_k , centralnog ugla ω , širine punog minor korita B i dužine meandra, merene krivolinijskom koordinatom po osovini toka s .



Slika 14.2: Geometrijski elementi pravilnog razvijenog menadra.

Zakovitosti meandriranja definisane su izrazima Leopolda i Volmana (Leopold, Wolman, 1960) [109]:

$$\Lambda_m \approx 10 B \quad (14.9)$$

$$\Lambda_m \approx 4 R_k \quad (14.10)$$

$$\Lambda_m \approx 10 Q^{0,5} \quad (14.11)$$

$$B \approx Q^{0,5} \quad (14.12)$$

$$R_k \approx 2 B, \quad (14.13)$$

gde je Q – protok punog korita, koji odgovara „dominantnom protoku” za razvoj meandra. Reč o protoku koji daje istu dužinu meandra u uslovima hipotetičkog ustaljenog tečenja, kao čitav dijapazon protoka u stvarnim – neustaljenim uslovima tečenja [76].

Izrazi (14.9)-(14.13) opisuju *razvijene* meandre. Izraz (14.13) je problematičan, jer se u prirodi često sreću vodotoci kod kojih je vrednost $R_k/B > 2$. Objašnjenje je

u činjenici da poluprečnik R_k ne zavisi samo od širine punog korita B , već i od centralnog ugla krivine ω .

U literaturi [29] se navodi da je dužina meandra po *krivolinijskoj koordinati* „ s ” u dobroj korelativnoj vezi sa širinom korita:

$$L_m = 2\pi B. \quad (14.14)$$

Za definisanje talasne dužine meandra Λ_m , pored korelacija tipa (14.9) – (14.11), postoji i poluteorijski pristup zasnovan na fizičkim karakteristikama strujanja u krivini. Tako se na primer Jalinova (Yalin, 1971) teorija zasniva na pretpostavci da su oblici meandra u horizontalnoj projekciji rezultat periodičnosti malih vrtloga, čija tipična talasna dužina odgovara talasnoj dužini meandra [177]:

$$\Lambda_m \approx 2\pi B, \quad (14.15)$$

što u skladu sa korelacionim izrazom (14.14). S druge strane, pristup Andersona (Anderson, 1967) se bazira na oscilatornom karakteru izdizanja nivoa uz konkavnu obalu, usled vremenske i prostorne neravnomernosti poprečne komponente brzine. Perioda oscilovanja nivoa zavisi od mase fluida i „konstante prigušenja” (model matematičkog klatna). Na osnovu eksperimentalnih istraživanja ovaj autor je predložio dve zavisnosti [76, 29, 54]:

$$\Lambda_m = \begin{cases} 72 \cdot A^{1/2} \cdot Fr^{0,52} \\ 39 \cdot Q^{0,39}, \end{cases} \quad (14.16)$$

gde je A – površina poprečnog preseka, a Fr - odgovarajući Frudov broj.

Međutim, navedene relacije nisu potvrđene na većem broju vodotoka, što samo pokazuje da se rezultati laboratorijskih analiza složenih fenomena ne mogu lako ekstrapolovati na prirodne uslove.

14.2 Racionalni pristup u odredjivanju stabilnog korita

U razmatranjima prirodnog režima vodotoka, kao i pri projektovanju regulacionih radova, jako je važno da se predvide morfološki elementi *stabilnog* korita. Reč je o koritu u stanju dinamičke ravnoteže, pri kojoj je pronos nanosa po dužini toka uniforman i jednak njegovom transportnom kapacitetu, a utrošak energije toka za savladjivanje otpora i pronos nanosa, sveden na najmanju meru.

Za razliku od klasične teorije režima bazirane na korelacionim zavisnostima koje nemaju opšti karakter, u novije vreme se za predviđjanje geometrijskih elemenata stabilnog korita koriste rezultati analize fizičkih procesa [15, 29, 68, 127].

Ovakav pristup, koji se ponegde naziva „racionalna teorija režima”, sastoji se u kombinaciji jednačina kretanja vode i nanosa sa nekim od uslova graničnog – ekstremnog morfološkog stanja, o čemu se govori u nastavku.

14.2.1 Hipoteze ekstremnih uslova

Dinamička ravnoteža vodotoka podrazumeva da su dinamičke karakteristike dvofaznog toka i geometrijske karakteristike korita uzajamno saglasne. Analitičko definisanje uslova pod kojima se ostvaruje dinamička ravnoteža vodotoka zasnovano je na sledećim pretpostavkama:

- (a) tečenje je ustaljeno, jednoliko;
- (b) izostavljaju se uticaji sekundarnih strujanja usled meandriranja;
- (c) materijal u kome je formirano korito je nevezan;
- (d) korito je trapeznog/pravougaonog oblika i dovoljno široko da se uticaj obala može zanemariti.

Pri datom protoku vode Q i pronosu nanosa Q_u , rečno korito ima 3 nepoznate („stepena slobode”): širinu b , dubinu h i nagib dna I_d . Za njihovo određivanje, na raspolaganju su dve jednačine koje definišu protok vode i pronos nanosa, dok treća jednačina predstavlja formulaciju jedne od hipoteza ekstremnih uslova – minimuma ili maksimuma funkcije kojom se karakteriše dinamička ravnoteža vodotoka. Nekoliko je takvih hipoteza.

(1) Minimum snage toka po jedinici težine. „U mirnom režimu tečenja, korito aluvijalnog vodotoka prilagođava svoj oblik, rapavost i nagib dna, tako da se najmanjim utroškom snage toka po jedinici težine obezbedi protok određene količine vode i nanosa” [15]:

$$\frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot L \cdot I_d}{\rho \cdot g \cdot B \cdot h \cdot L} = V \cdot I_d \rightarrow \min, \quad (14.17)$$

gde je L – dužina deonice, a V – srednja profilska brzina.

(2) Minimum snage toka po jedinici dužine. „Potreban i dovoljan uslov ravnotežnog stanja korita aluvijalnog vodotoka je da snaga toka po jedinici dužine u datim uslovima bude najmanja” [29]:

$$\rho \cdot g \cdot Q \cdot I_d \rightarrow \min. \quad (14.18)$$

Kako su ρ , g i Q konstante, ovaj uslov se svodi na uslov najmanjeg (minimalnog) nagiba dna.

(3) Minimum gubitka energije. „Rečni sistem je u stanju ravnoteže pri najmanjem utrošku energije u jedinici vremena” [15]:

$$(\rho \cdot g \cdot Q + \rho_s \cdot g \cdot Q_u) L \cdot I_d \rightarrow \min. \quad (14.19)$$

(4) Maksimum linijskih otpora. „Ako je tok po inicijalno ravnoj podlozi u stanju da tu podlogu deformiše tako da ona više nije ravna, onda će kao rezultat ove deformacije doći do povećanja otpora trenja. Deformacija će prestati pri onom obliku korita koji daje lokalni maksimum vrednosti koeficijenta trenja” [15]:

$$\lambda = \frac{8 \cdot g \cdot R \cdot I_d}{V^2} \rightarrow \max, \quad (14.20)$$

pri čemu je ovde, primera radi, uzet Darsi-Vajsbahov koeficijent.

(5) Maksimum pronosa nanosa. „Za dati protok vode i nagib dna, širina korita se menja ka uspostavljanju najvećeg – maksimalnog pronosa nanosa” [149].

Može se pokazati da se uslovi (3) i (5) svode na uslov (2), tako da su samo uslovi (1), (2) i (4) nezavisni uslovi.

14.2.2 Računski model

Neka je dinamička ravnoteža korita definisana uslovom najmanje snage po jedinici dužine toka (14.18). Pretpostavlja se da je korito formirano u šljunkovitom materijalu i da se koeficijent trenja može definisati Brejovom formulom² (3.13):

$$\frac{1}{\lambda^{1/2}} = 0,248 + 2,36 \log \left(\frac{h}{d} \right),$$

a pronos, formulom (10.49):

$$\Phi = 6,62 (\Theta - 0,03)^5 \Theta^{-3,9}.$$

Izbor izraza koji definišu linijske otpore i pronos nanosa zavisi od vrste materijala. Navedene formule su prikladne za šljunkoviti materijal. Geometrija stabilnog korita se može računski odrediti prema sledećem algoritmu:

- (1) definisati ulazne podatke: protok Q , ulazni tovar vučenog nanosa Q_v i karakteristike nanosa ρ_s i d ;
- (2) pretpostaviti širinu stabilnog korita b ;
- (3) pretpostaviti dubinu toka h ;

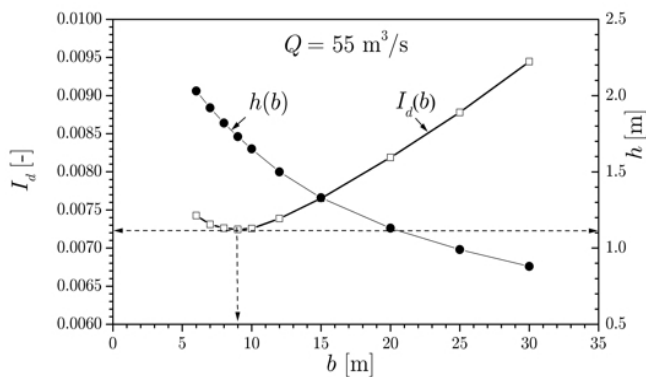
²Ova formula je izvedena na osnovu podataka merenja na 67 vodotoka u Kanadi i važi za sledeće uslove: $I_d < 1\%$, $0,4 < h/d < 15$, gde je $d = d_{50}$.

- (4) sračunati uzdužni nagib dna I_d iz jednačine za pronos nanosa; kako je ova jednačina nelinearna po Θ (odnosno po $I_d = \Theta \cdot \Delta \cdot d/h$), rešava se iterativno;
- (5) sračunati vrednost koeficijenta trenja λ iz Brejove jednačine, a zatim brzinu V iz zavisnosti $V(\lambda)$ na osnovu koje je formulisana uslov (14.20);
- (6) odrediti protok iz jednačine kontinuiteta $Q = V \cdot A(b, h)$;
- (7) ako je sračunati protok jednak zadatom protoku (uz dozvoljeno odstupanje, recimo $\pm 0,5 \text{ m}^3/\text{s}$), problem je rešen, a dobijene vrednosti b, h, I_d predstavljaju geometrijske elemente stabilnog korita; ako navedeni uslov nije zadovoljen, treba korigovati dubinu h i ceo postupak ponoviti od koraka (4).

■ **Primer 14.2.** Srednji višegodišnji protok na jednoj reci je $Q = 55 \text{ m}^3/\text{s}$, a odgovarajući zapreminski pronos vučenog nanosa $Q_v = 0,012 \text{ m}^3/\text{s}$. Korito je formirano u šljunkovitom materijalu, prečnika $d = d_{50} = 90 \text{ mm}$ i gustine $\rho_s = 2,65 \text{ t/m}^3$. Poprečni presek je trapeznog oblika, sa nagibom obala 1:2. Odrediti geometrijske elemente stabilnog korita.

Rešenje. Proračun će se obaviti za niz pretpostavljenih širina: $b = 6 \div 30 \text{ m}$. U Tabeli 14.3 su dati rezultati proračuna za širinu $b = 6 \text{ m}$, sa početnom pretpostavljenom dubinom $h = 1,5 \text{ m}$. Iterativno rešavanje u koraku (4) se može obaviti nekom numeričkom metodom, pri čemu je u Brejovom izrazu dubina h zamenjena hidrauličkim radijusom R . Pored sračunate vrednosti koeficijenta λ u Tabeli 14.3 su date i odgovarajuće vrednosti Maningovog koeficijenta, kao i vrednosti Frudovog broja.

U Tabeli 14.4 su dati samo konačni rezultati za niz pretpostavljenih širina korita. Pomoću grafika funkcije $I_d = I_d(b)$ na Slici 14.3, određen je minimalni nagib dna pri kome je vodotok u stanju dinamičke ravnoteže, kao i odgovarajuća širina korita.



Slika 14.3: Rezultati proračuna geometrije stabilnog korita.

Na osnovu dobijenih rezultata na Slici 14.3, može se izvesti nekoliko interesantnih zaključaka.

Tabela 14.3: Rezultati proračuna za širinu $b = 6$ m u primeru 14.2

Q [m ³ /s]	h [m]	R [m]	V [m/s]	I_d [-]	λ [-]	n [m ^{-1/3} s]	Fr [-]
33,32	1,50	1,062	2,47	0,009469	0,130	0,041	0,414
37,03	1,60	1,119	2,52	0,008990	0,125	0,041	0,403
40,91	1,70	1,175	2,56	0,008562	0,120	0,040	0,393
44,96	1,80	1,230	2,60	0,008178	0,117	0,040	0,383
49,18	1,90	1,284	2,64	0,007832	0,113	0,040	0,374
53,57	2,00	1,338	2,68	0,007516	0,110	0,039	0,366
54,92	2,03	1,354	2,69	0,007427	0,109	0,039	0,363

Tabela 14.4: Konačni rezultati proračuna u primeru 14.2

b [m]	Q [m ³ /s]	h [m]	R [m]	V [m/s]	I_d [-]	λ [-]	n [m ^{-1/3} s]	Fr [-]	Φ [-]	Θ [-]
6	54,92	2,03	1,354	2,69	0,007427	0,109	0,039	0,363	0,018	0,068
7	54,88	1,92	1,335	2,64	0,007311	0,110	0,039	0,369	0,016	0,066
8	54,87	1,82	1,313	2,59	0,007260	0,111	0,039	0,376	0,014	0,064
9	54,89	1,73	1,288	2,55	0,007246	0,113	0,040	0,382	0,012	0,063
10	54,99	1,65	1,263	2,51	0,007255	0,115	0,040	0,388	0,011	0,062
12	54,58	1,50	1,203	2,43	0,007386	0,118	0,040	0,400	0,009	0,060
15	54,60	1,33	1,121	2,32	0,007651	0,125	0,041	0,414	0,007	0,058
20	54,95	1,13	1,004	2,18	0,008187	0,135	0,042	0,431	0,006	0,055
25	55,27	0,99	0,908	2,07	0,008779	0,146	0,042	0,441	0,004	0,054
30	54,97	0,88	0,824	1,97	0,009446	0,158	0,043	0,448	0,004	0,052

(i) Karakter funkcije $I_d = I_d(b)$ odgovara fizici procesa; smanjenjem širine (počev od 30 m), dolazi do postepenog porasta dubine, tako da je potreban sve manji nagib dna da se obezbedi dati protok vode i nanosa. Međutim, nakon određene širine korita, opada transportni kapacitet za nanos usled nedovoljne aktivne širine pronosa, što vodotok mora nadoknaditi povećanjem nagiba dna. Širina koja odgovara najmanjoj vrednosti I_d je širina stabilnog korita.

(ii) Kriva $I_d = I_d(b)$ se blago menja u zoni minimuma, tako da postoji izvesni opseg vrednosti I_d koje su povoljne sa stanovišta stabilnosti korita.

(iii) Rezultati proračuna zavise od primenjenih formula, naročito od one koja definiše pronos nanosa. Međutim, iz primera se vidi da je za određivanje stabilnog korita bitan karakter funkcije $I_d(b)$, a ne apsolutna vrednost pronosa nanosa.

Variranjem ulaznih podataka, opisanim postupkom mogu se formirati zavisnosti tipa $b = b(Q, I_d, d)$, $h = h(Q, I_d, d)$ i $I_d = I_d(Q, Q_v)$, poput klasičnih empirijskih zavisnosti teorije režima.

14.3 Statistička analiza morfoloških podataka

Morfološki oblici rečnog korita se menjaju u prostoru i vremenu, prilagodjavajući se hidrološkom, hidrauličkom i psamološkom režimu vodotoka. Procesi morfoloških promena su stohastičkog karaktera. Opisuju se empirijskim raspedelama karak-

terističnih morfometrijskih veličina, kao što su širina vodenog ogledala, površina poprečnog preseka, najveća dubina, zakrivljenost korita u planu itd. Empirijske raspodele se definišu u funkciji protoka, a u analizi se koriste standardni postupci matematičke statistike [23]. Cilj je da se na taj način *kvantitativno* opiše morfologija rečnog korita, za razliku od deskriptivnog pristupa koji je svojstven nekim drugim strukama. Vrednosti statističkih pokazatelja koje se odrede za jedan vodotok, ili jednu njegovu deonicu, pružaju mogućnost inženjerima da, sagledavajući elemente prirodnog morfološkog stanja, ne pogreše prilikom trasiranja i dimenzionisanja regulisanog korita.

Za primenu statističkog pristupa, bitna su dva preduslova:

- (i) da predmetni vodotok, izgradnjom regulacionih gradjevina ili kanalisanjem (pregradjivanjem), nije prethodno regulisan i
- (ii) da postoji solidna baza morfoloških podataka da bi statističke analize imale smisla, a rezultati tih analiza, bili verodostojni.

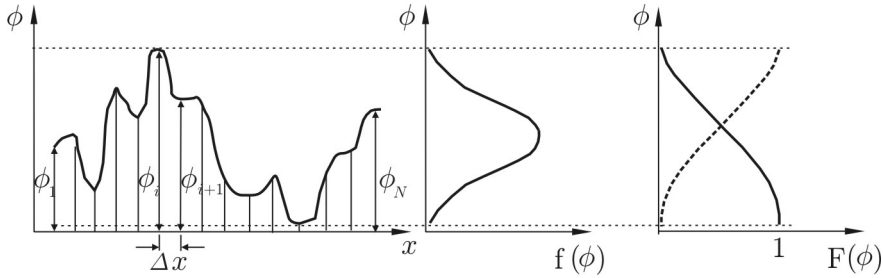
14.3.1 Prikupljanje podloga

Morfološke podloge čine situacioni planovi, uzdužni i poprečni profili korita. Pored standardnih topografskih podloga koje se dobijaju geodetskim snimanjem i ehosondiranjem, u morfološkim analizama se koriste i aerofotogrametrijski snimci. U prikupljanju podloga treba voditi računa o sledećim činjenicama.

- (i) Izbor morfoloških veličina zavisi od ciljeva analize. Prostorni raspored tih veličina se definiše serijama podataka, koje predstavljaju statističke uzorke. Kvalitet statističke obrade zavisi od veličine i homogenosti uzorka, odnosno od broja i kvaliteta podataka prostorne serije.
- (ii) Izbor veličine uzorka se svodi na izbor dužine deonice, koja treba da obezbedi statistički pouzdane rezultate i ispuni tehničke zahteve uredjenja vodotoka.
- (iii) Terenska snimanja su veoma skupa i dugotrajna. Veći broj snimljenih profila daje pouzdanije rezultate analize, ali zahteva veće troškove. Gustina snimanja profila je ekonomska kategorija. Obim podloga koje se prikupljaju na terenu je rezultat kompromisa između zahtevane tačnosti i prihvatljive cene terenskih radova.

14.3.2 Obrada podataka

Jedan od vidova elementarne statističke analize je formiranje *korelacija* između morfoloških i hidrauličkih parametara. Ovaj pristup je karakterističan za „teoriju režima” (tačka 14.1). Složeniji vidovi statističke obrade zasnivaju se na *morfološkim uzdužnim profilima* (Slika 14.4). Ovi profili, formirani na osnovu terenskih snimanja korita i računskih linija nivoa, daju grafički prikaz promene morfometrijskih veličina duž vodotoka. Tipični primeri su funkcije: $B = B(Q, x)$, $A = A(Q, x)$, $h = h(Q, x)$, $r_k = r_k(Q, x)$ itd.



Slika 14.4: Uzdužni profil neke morfološke veličine ϕ i odgovarajuće krive gustine raspodele (frekvencije, učestalosti) $f(\phi)$ i sumarne krive empirijske raspodele (zastupljenosti) $F(\phi)$.

Kao u slučaju vremenskih (hidroloških) serija, elementarna statistička obrada prostornih (morfoloških) serija sastoji se od definisanja empirijskih krivih raspodele (Slika 14.4), kao i određivanja odgovarajućih statističkih pokazatelja centralne tendencije, rasipanja i oblika (srednja vrednost, mod, medijana, standardna devijacija, koeficijenti varijacije i asimetrije). Ovo će u nastavku biti ilustrirano primerima.

■ **Primer 14.3.** U Tabeli 14.5 su date kote nivoa na jednoj deonici Velike Morave, koje odgovaraju protoku od $180 \text{ m}^3/\text{s}$, kao i odgovarajuće širine vodenog ogledala. Izvršiti statističku analizu širina vodenog ogledala na posmatranoj deonici.

Tabela 14.5: Ulazni podaci za primer 14.3

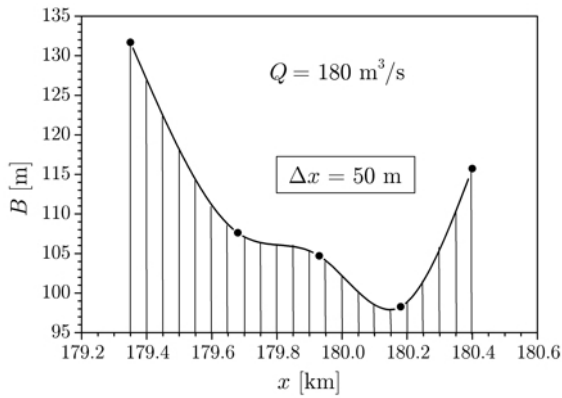
Profil	1	2	3	4	5
x [km]	179,35	179,68	179,93	180,18	180,40
Z [mm]	111,18	111,23	111,29	111,35	111,44
B [m]	131,68	107,62	104,69	98,27	115,73

Rešenje. Na Slici 14.5 prikazan je uzdužni raspored širina vodenog ogledala pri datom protoku. Ako se usvoji konstantan interval očitavanja podataka $\Delta x=50 \text{ m}$, dobija se niz vrednosti $B(x)$ koje su date u Tabeli 14.6.

Za formiranje sumarne krive raspodele (zastupljenosti), vrednosti se uredi po opadajućem redosledu i računaju zastupljenosti: $p = i/N$ [%], gde je i – redni broj podatka, a $N = 22$ – ukupni broj podataka.

Kriva zastupljenosti širina, kao i odgovarajuća kriva frekvencije³ (učestalosti) prikazane su na Slici 14.6. Zaokružene vrednosti statističkih pokazatelja iznose: srednja vrednost 109 m, medijana 106 m, standardna devijacija 9 m. Vrednosti medijane i moda su približno jednake.

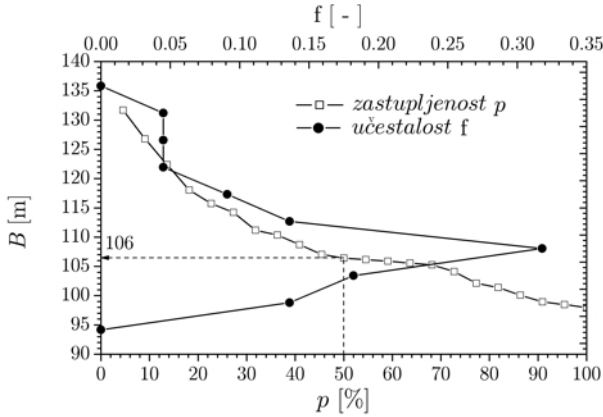
³Ova kriva se može direktno dobiti primenom statističke funkcije FREQUENCY koja je „ugradjena” u popularni program MS Excel©.



Slika 14.5: Dijagram promene širine vodnog ogledala na razmatranoj deonici

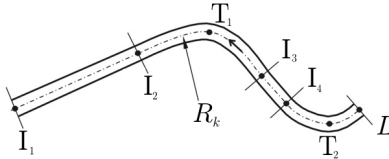
Tabela 14.6: Rezultati proračuna u primeru 14.3

x [km]	B [m]	i [-]	B [m]	p [%]	$f(B)$ [-]
179,35	131,68	1	131,68	4,55	0,000
179,40	126,77	2	126,77	9,09	0,136
179,45	122,36	3	122,36	13,64	0,182
179,50	118,05	4	118,05	18,18	0,318
179,55	114,24	5	115,73	22,73	0,136
179,60	111,17	6	114,24	27,27	0,091
179,65	108,71	7	111,17	31,82	0,045
179,70	107,03	8	110,37	36,36	0,045
179,75	106,43	9	108,71	40,91	0,045
179,80	106,16	10	107,03	45,45	0,000
179,85	105,89	11	106,43	50,00	
179,90	105,28	12	106,16	54,55	
179,95	104,13	13	105,89	59,09	
180,00	102,11	14	105,55	63,64	
180,05	100,07	15	105,28	68,18	
180,10	98,48	16	104,13	72,73	
180,15	97,97	17	102,11	77,27	
180,20	98,92	18	101,40	81,82	
180,25	101,4	19	100,07	86,36	
180,30	105,55	20	98,92	90,91	
180,35	110,37	21	98,48	95,45	
180,40	115,73	22	97,97	100,00	



Slika 14.6: Krive zastupljenosti i učestalosti (relativne frekvencije) u primeru 14.3.

■ **Primer 14.4.** Deonica Velike Morave iz primera 14.3 se sastoji od dva pravolinijska dela i dve krivine (Slika 14.7). Vrednosti poluprečnika krivina, kao i odgovarajuće vrednosti zakrivljenosti su date u Tabeli 14.7. Vrednost faktora razmere za grafički prikaz je 1000, što znači da je: $r_k = 1000/R_k$. Izvršiti statističku analizu zakrivljenosti razmatrane deonice.



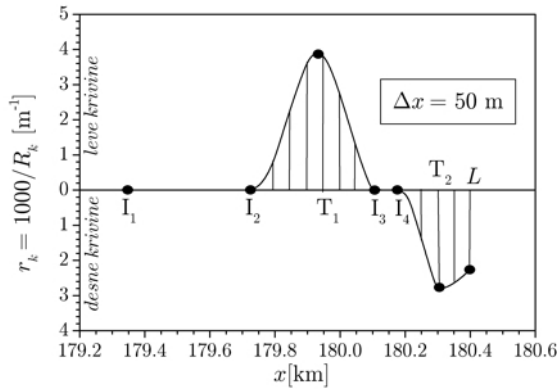
Slika 14.7: Karakteristične tačke za analizu zakrivljenosti

Tabela 14.7: Ulazni podaci za primer 14.4

Tačka	I ₁	I ₂	T ₁	I ₃	I ₄	T ₂	L
x [km]	179,35	179,75	179,95	180,10	180,20	180,30	180,40
R_k [m]	∞	∞	250	∞	∞	357	440
r_k [1/m]	0	0	4,00	0	0	2,86	2,27

Rešenje. Ako se usvoji konstantan interval očitavanja podataka $\Delta x = 50$ m, računom se dobija niz vrednosti $r_k(x)$ koje su date u Tabeli 14.8.

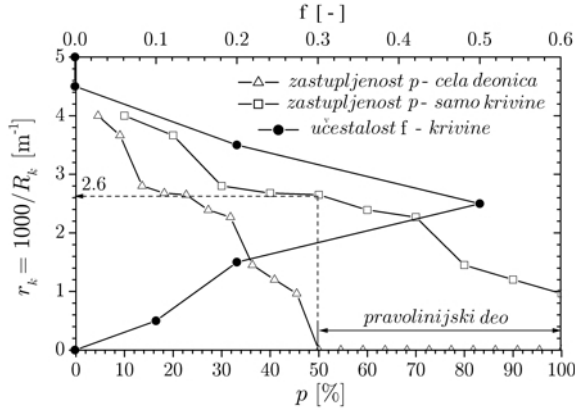
Na Slici 14.8 je prikazan uzdužni profil zakrivljenosti. Primenjujući postupak koji je objašnjen u primeru 14.3, dobijeni su rezultati koji su dati u Tabeli 14.8 i grafički prikazani na Slici 14.9. Najčešće prisutna zakrivljenosti na posmatranoj deonici je $r_k = 2,6 \text{ m}^{-1}$ ($R_k=385$ m).



Slika 14.8: Uzdužni profil zakrivljenosti

Tabela 14.8: Rezultati proračuna u primeru 14.4

Cela deonica					Samo krivine		
x [km]	r_k [m ⁻¹]	i [-]	r_k [m ⁻¹]	p [%]	p [%]	Δr_k [m ⁻¹]	$f(r_k)$ [-]
179,35	0	1	4,000	4,55	10	1,0	0,10
179,40	0	2	3,663	9,09	20	2,0	0,20
179,45	0	3	2,800	13,64	30	3,0	0,50
179,50	0	4	2,680	18,18	40	4,0	0,20
179,55	0	5	2,650	22,73	50	5,0	0,00
179,60	0	6	2,390	27,27	60		
179,65	0	7	2,270	31,82	70		
179,70	0	8	1,451	36,36	80		
179,75	0	9	1,200	40,91	90		
179,80	0,966	10	0,966	45,45	100		
179,85	2,390	11	0,000	50,50			
179,90	3,663	12	0,000	54,55			
179,95	4,000	13	0,000	59,09			
180,00	2,650	14	0,000	63,64			
180,05	1,200	15	0,000	68,18			
180,10	0	16	0,000	72,73			
180,15	0	17	0,000	77,27			
180,20	0	18	0,000	81,82			
180,25	1,451	19	0,000	86,36			
180,30	2,800	20	0,000	90,91			
180,35	2,680	21	0,000	95,45			
180,40	2,273	22	0,000	100,00			

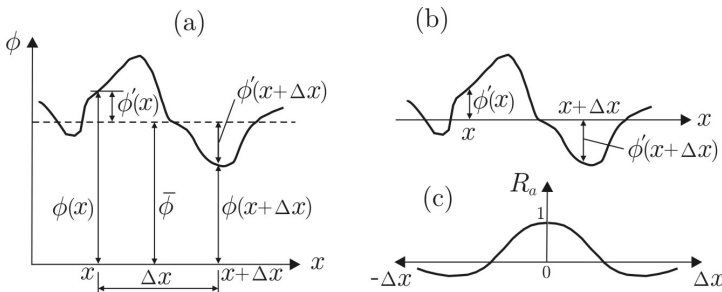


Slika 14.9: Krive zastupljenosti i učestalosti zakrivljenosti

* * *

U analizi „skrivene” periodičnosti funkcija morfoloških veličina može se koristiti autokorelaciona analiza i Furijeova (Fourier) spektralna analiza [14].

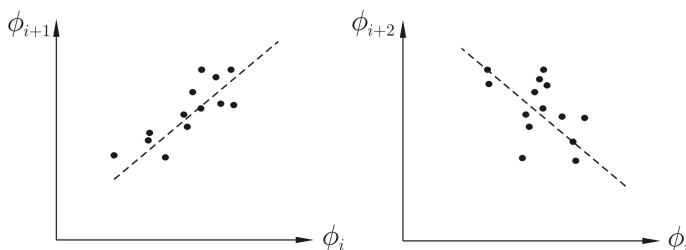
Na Slici 14.10 prikazan je uzdužni profil neke morfološke veličine ϕ . Ovaj profil predstavlja grafički prikaz prostorne serije $\phi(x)$, kao jedne realizacije stohastičkog procesa⁴. Razmatra se korelacija između vrednosti veličine $\phi(x)$ i druge vrednosti iste veličine na izabranom odstojanju $\phi(x + \Delta x)$. Korelacija između raznih stanja jedne te iste veličine zove se *autokorelacija*.



Slika 14.10: Autokorelacija prostornih serija: (a) Vrednosti veličine ϕ očitane na razmaku Δx ; (b) Ako se koordinatni sistem pomeri za $\bar{\phi}$, traži se korelacija odstupanja $\phi'(x)$ i $\phi'(x + \Delta x)$; (c) Opšti oblik autokorelacione funkcije, pri čemu je od interesa samo pozitivna koordinatna osa ($\Delta x \geq 0$).

⁴Prirodna pojava koja evoluira u prostoru i vremenu shodno zakonima verovatnoće naziva se „stohastički proces”. Posebnu klasu ovih procesa čine „stacionarni procesi” kod kojih se podrazumeva stanje „statističke ravnoteže”, što znači da na zakon verovatnoće i na parametre tog zakona ne utiče položaj (pomeranje) koordinatnog početka.

Kod stacionarnih (statistički konstantnih) procesa, autokorelacija zavisi isključivo od usvojenog konstantnog koraka očitavanja podataka (Δx). Način na koji se karakter i jačina autokorelacione veze može menjati sa veličinom ovog koraka prikazan je na Slici 14.11.



Slika 14.11: Korelogrami u zavisnosti od koraka očitavanja podataka.

Jačina autokorelacije kvantifikuje se pomoću *koeficijenta autokorelacije* R_a , čija se statistička ocena definiše odnosom autokovarijanse i varijanse [14]:

$$R_a(k) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (\phi_i - \bar{\phi})(\phi_{i+k} - \bar{\phi})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi_i - \bar{\phi})^2} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} \phi'_i \cdot \phi'_{i+k}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi'_i)^2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (14.21)$$

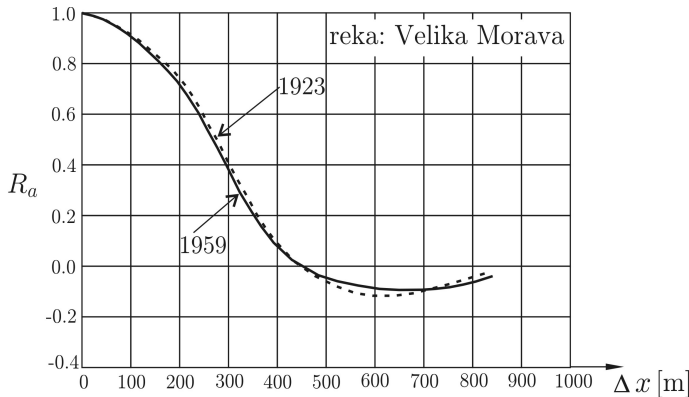
gde je N – ukupni broj podataka, i – redni broj podatka ($i = 1, 2, \dots, N$) a $\bar{\phi} = (1/N) \sum_{i=1}^N \phi_i$ – ocena srednje vrednosti.

Funkcija autokorelacije na Slici 14.10-(c) omedjava konačnu površinu na osnovu koje se definiše karakteristična dužina:

$$L_a = \int_0^{\infty} R_a(\Delta x) d\Delta x. \quad (14.22)$$

Ova dužina – takozvana „morfološka makroskala” vodotoka, ima jasan fizički smisao i može poslužiti za određivanje neophodnog odstojanja između poprečnih profila koje treba snimiti i koristiti u morfološkim i hidrauličkim analizama. Naime, jasno je da su dva profila na bliskom odstojanju međusobno zavisni (jaka autokorelaciona veza, $\Delta x \rightarrow 0, R_a \rightarrow 1$), a da jačina te veze opada sa porastom međusobne udaljenosti ($\Delta x \rightarrow \infty, R_a \rightarrow 0$). Kada se uspostavlja korelacione veze između morfometrijskih veličina (na primer širine i najveće dubine), razmak snimljenih profila ne sme biti kraći od dužine L_a , da bi parovi vrednosti čija se korelacija traži, bili međusobno nezavisni. Isto važi i za profile koji se koriste za proračun linija nivoa. Može se napomenuti i to da dužina L_a ima određenu vezu sa hodom rečnih krivina.

Na Slici 14.12 su prikazani rezultati autokorelacione analize zakrivljenosti minor korita Velike Morave prema snimanjima iz 1923. i 1959. godine. Iz ovog primera može se zaključiti da autokorelaciona funkcija predstavlja *invarijantno obeležje* vodotoka ukoliko ne dodje do drastičnih veštačkih intervencija.



Slika 14.12: *Funkcije koeficijenta autokorelacije zakrivljenosti osnovnog korita Velike Morave su periodične funkcije koje se malo menjaju tokom vremena [17]. Dužina na kojoj postoji izvesna autokorelacija ($0.1 < R_a < 1$) iznosi oko 400 m, pa je ova dužina, poput dužine L_a , merodavna za snimanje poprečnih profila.*

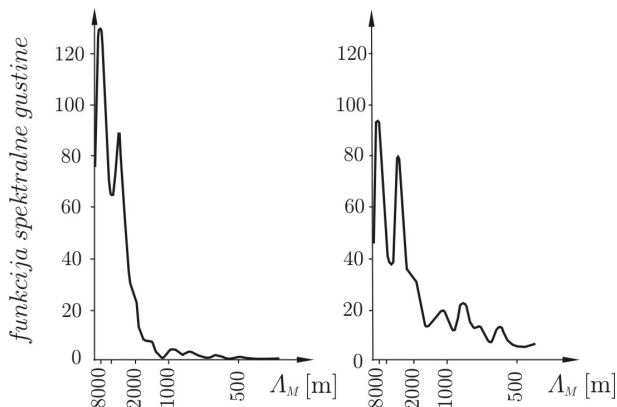
Drugi vid analize periodičnosti vremenskih i prostornih serija zasnovan je na pretpostavci da su ove serije sastavljene od sinusnih i kosinusnih talasa različitih frekvencija. Problem se razmatra u frekventnom domenu, pri čemu treba otkriti i proceniti amplitudu sinusoidne komponente nepoznate frekvencije. Rezultat, koji se dobija primenom matematičke teorije Furijeovih transformacija [14, 132], ima oblik funkcije *spektralne gustine*⁵. Na Slici 14.13 prikazane su takve funkcije jednog meandrirajućeg vodotoka [76].

U primeni spektralne metode osnovni problem predstavlja dužina deonice. Naime, pritoke i regulisani potezi menjaju sliku prirodnog procesa, tako da je retko kad dužina deonice dovoljna da obezbedi prihvatljivu rezoluciju spektra. Rezultati spektralne analize migracije meandera mogu se videti u literaturi [58].

14.4 Morfološke analize u sklopu uredjenja aluvijalnih vodotoka

Raznovrsnost primene morfoloških analiza prisutna je u svim fazama uredjenja vodotoka, počev od projektovanja, realizacije, do analize efekata izvedenih regulacionih radova i gradjevina. U nastavku se navodi nekoliko karakterističnih primera.

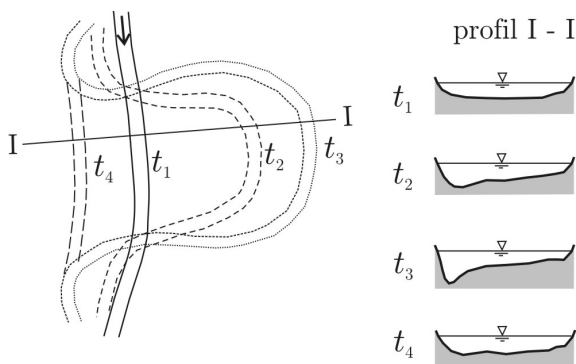
⁵Teorijski, autokorelaciona funkcija i funkcija spektralne gustine su matematički ekvivalentne, jer svaka predstavlja transformaciju one druge [14].



Slika 14.13: Rezultat spektralne analize talasne dužine krivudavog rečnog korita; spektri meandrirajućih deonica u gornjem i donjem toku reke Angabunge na Papui pokazuju da postoje dva vrha, što znači da dve karakteristične talasne dužine mogu istovremeno postojati na istom vodotoku [76].

14.4.1 Odredjivanje prosečnog pronosa vučenog nanosa

Transport vučenog nanosa u profilu zavisi od hidrauličkih parametara toka, koji se vremenom menjaju u zavisnosti od hidrološkog i morfološkog režima. Odredjivanje prosečnog višegodišnjeg pronosa nanosa u profilu iziskuje obuhvatanje niza hidroloških ciklusa i bar jednog morfološkog ciklusa u kome profil prodje sve faze svog morfološog razvoja (Slika 14.14).



Slika 14.14: Evolucija profila u toku jednog morfološkog ciklusa, od trenutka kada na pravoj deonici počinje formiranje meandra do trenutka kada se nakon samo-prosecanja tog meandra, profil ponovo vraća na pravu deonicu.

Trajanje hidroloških ciklusa je relativno kratko (hidrološka godina), a trajanje morfološkog ciklusa, veoma dugo (desetine i stotine godina). U tako dugom vremenskom intervalu nije moguće sprovesti analizu na bazi direktnih merenja pronosa

vučenog nanosa, pa se problem rešava uvodeći pretpostavku da se *prosečni pronos kroz posmatrani profil deonice u određenom periodu, može izjednačiti sa prosečnim transportnim kapacitetom na toj deonici, u jednom trenutku* [17]:

$$\frac{1}{T} \int_0^T Q_{vm}(x_o, t) dt \approx \frac{1}{L} \int_0^L Q_{vm}(x, t_o) dx. \quad (14.23)$$

Leva strana ove jednačine, predstavlja prosečni pronos vučenog nanosa u profilu $x = x_o$ u višegodišnjem periodu T , a desna strana, prosečni pronos na deonici dužine L , u jednom „morfološkom” trenutku⁶ $t = t_o$. Pretpostavka na kojoj se zasniva jednačina (14.23) posledica je rezonovanja da se na dovoljno dugačkoj deonici u jednom trenutku nalaze profili u raznim fazama morfološkog razvoja i da osrednjeni transportni kapacitet takve deonice odgovara osrednjenom transportnom kapacitetu u jednom morfološkom ciklusu profila. Ova hipoteza, koja zahteva da deonica bude dovoljno dugačka (morfološki reprezentativna), nema teorijsku podlogu, ali je našla potvrdu u praksi.

Kada se odredi prosečni pronos nanosa na deonici u funkciji protoka, onda se prosečni višegodišnji pronos vučenog nanosa može sračunati na osnovu poznate krive trajanja protoka za višegodišnji period. To će se ilustrovati primerom.

■ **Primer 14.5.** Transportni kapacitet jednog vodotoka za vučeni nanos definisan je u Tabeli 14.9. Odrediti prosečni godišnji pronos nanosa koristeći krivu trajanja protoka iz Tabele 14.10.

Tabela 14.9: *Transportni kapacitet za vučeni nanos Q_{vm} [kg/s].*

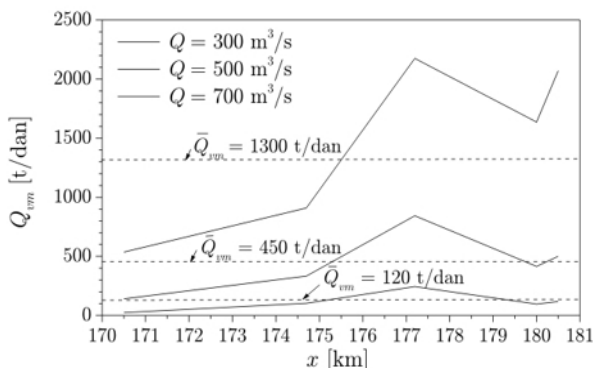
x [km]	170,5	174,7	177,2	180,0	180,5
$Q=300$ m ³ /s	0,28	1,19	2,84	1,12	1,38
$Q=500$ m ³ /s	1,63	3,86	9,77	4,81	5,80
$Q=700$ m ³ /s	6,21	10,52	25,17	18,95	23,96

Tabela 14.10: *Kriva trajanja protoka za višegodišnji period*

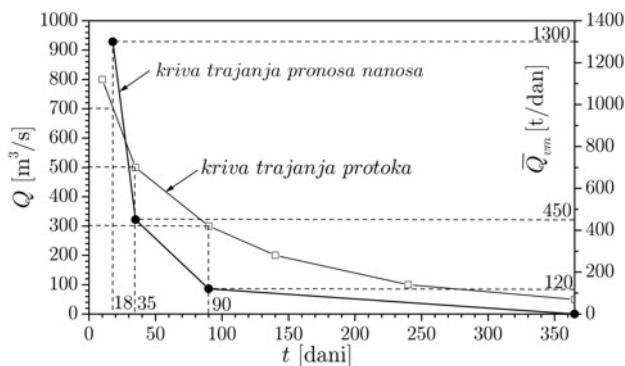
Q [m ³ /s]	800	500	300	200	100	50
t [dani]	10	35	90	140	240	365

Rešenje. Na Slici 14.15 je prikazan uzdužni dijagram transportnog kapaciteta za vučeni nanos, pri čemu je pronos iz Tabele 14.9 izražen u jedinicama [t/dan]. Na istom dijagramu su upisane i prosečne vrednosti pronosa na deonici, dobijene za tri zadata protoka.

⁶Reč je zapravo o kratkom periodu u kome su obavljena topografska snimanja korita, pri čemu je taj period sa morfološke tačke gledišta, zaista „trenutak”.



Slika 14.15: Uzdužni dijagram transportnog kapaciteta za vučeni nanos.



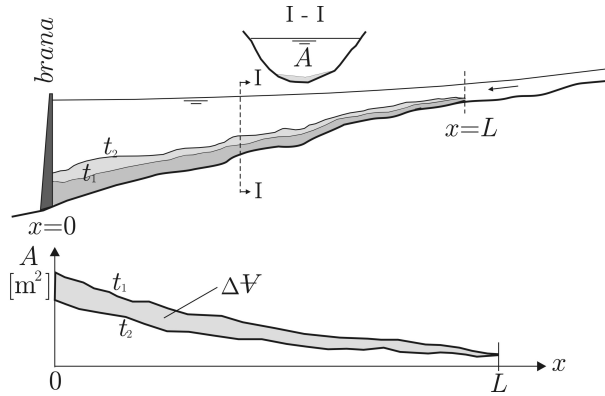
Slika 14.16: Kriva trajanja pronosa vučenog nanosa za višegodišnji period.

Osrednjavanje je obavljeno shodno desnoj strani jednačine (14.23). Na Slici 14.16 prikazana je kriva trajanja pronosa vučenog nanosa za višegodišnji period. Ova kriva je formirana tako što su prosečne vrednosti pronosa na deonici povezane sa trajanjima zadatih protoka. Određivanjem površine ispod krive trajanja, dobija se vrednost prosečnog godišnjeg pronosa vučenog nanosa:

$$Q_{vm}^{god} = \int_0^{365} \bar{Q}_{vm}(t) dt = 70450 \text{ t/god.}$$

* * *

Prosečni pronos nanosa u nekom vremenskom periodu može se odrediti i na osnovu promene zapremine korita, koja se računa na osnovu snimljenih uzdužnih profila korita. Ovaj pristup se standardno koristi u analizama dinamike zasipanja akumulacija (Slika 14.17).



Slika 14.17: Promena zapremine akumulacije usled zasipanja.

Promena zapremine korita na dužini L u periodu $\Delta t = t_2 - t_1$ iznosi:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \int_0^L [A(x, t_2) - A(x, t_1)] dx, \quad (14.24)$$

gde je $A = A(x, t)$ – površina poprečnog preseka. Prosečni pronos ukupnog nanosa koji je dospeo u akumulaciju u periodu između dva snimanja korita iznosi:

$$\bar{Q}_u = \bar{\rho}_z \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (14.25)$$

gde je $\bar{\rho}_z$ – prosečna zapreminska masa istaloženog nanosa, na čiju vrednost utiče niz faktora, od kojih su najznačajniji granulometrijski sastav i konsolidacija⁷.

14.4.2 Izbor regulacionih elemenata

Ključni problem koji se postavlja u projektima uređenja prirodnih vodotoka je izbor regulacionih elemenata. Ne ulazeći u sve aspekte ovog problema, te elemente čine:

- (i) elementi trase regulisanog korita (poluprečnici krivina, dužine, broj hodova i veličine centralnih uglova);
- (ii) elementi korita (poprečni profili sa dimenzijama osnovog korita i korita za veliku vodu, kao i uzdužni profil);
- (iii) elementi regulacionih gradjevina (tipovi, dispozicija, dimenzije i karakteristične kote).

⁷U akumulacijama se, pored vučenog i koritiformirajućeg suspendovanog nanosa, talože i velike količine tranzitnog nanosa; na primer, procenjuje se da se oko 80% ovog nanosa zadrži u akumulaciji HE Djerdap I.

U izboru navedenih elemenata koriste se hidrauličke i morfološke analize. Statističkom obradom morfoloških karakteristika korita (koje su utvrđene topografskim snimanjima u dužem vremenskom periodu), mogu se na datom vodotoku odrediti *ugledne* – stabilne deonice, koje odgovaraju zahtevima regulacije. Geometrijski elementi takve ugledne deonice (širina korita pri srednjem protoku, uzdužni nagib dna) mogu se usvojiti kao rešenje za deonicu koja se reguliše. Međutim, ovaj pristup ne može obezbediti jednakost hidrauličkih uslova i pronosa nanosa u celom dijapazonu protoka.

Bolji pristup je da se rezultati osnovne statističke obrade morfoloških veličina neregulisanog korita direktno koriste za određivanje regulacionih elemenata, kao što je pokazano primerima 14.3 i 14.4. Ako su krive učestalosti i zastupljenosti širina osnovnog korita i njegove zakrivljenosti formirane za protok koji je merodavan za regulaciju vodotoka⁸, onda se modalne vrednosti širina i zakrivljenosti mogu usvojiti kao projektne vrednosti, kao one koje se najčešće javljaju u prirodnim uslovima. Ovo je u skladu sa uverenjem da je uspelo regulaciono rešenje ono rešenje koje u najmanjoj meri narušava prirodni režim vodotoka.

U slučajevima kada empirijska kriva učestalosti nije unimodalna (ima više vrhova), za merodavnu regulacionu vrednost usvaja se vrednost čija je zastupljenosti 50%, jer je to u statističkom smislu „uravnotežen” podatak⁹.

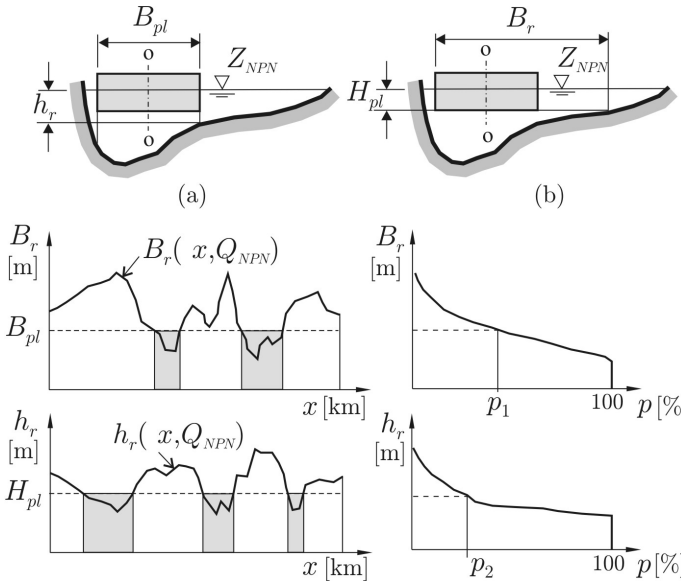
Na Slici 14.18 je shematski prikazano korišćenje morfološke analize u oceni plovnosti vodotoka. U svakom poprečnom profilu se očitava raspoloživa plovna širina B_r i dubina h_r , na osnovu unetog položaja osovine plovnog puta i zahtevanog plovnog gabarita – zahtevane širine B_{pl} i dubine H_{pl} . Merodavni protok je u ovom slučaju protok takozvanog „niskog plovnog nivoa” Q_{NPN} , koji predstavlja tehničko–ekonomsku kategoriju, u čije se određivanje ovde neće ulaziti.

Očitane vrednosti se koriste za formiranje uzdužnih profila raspoloživih plovnih širina $B_r = B_r(x, Q_{NPN})$ i dubina $h_r = h_r(x, Q_{NPN})$, kao i odgovarajućih dijagrama zastupljenosti. Uzdužni dijagrami ukazuju na broj i dužinu deonica na kojima se mora izvršiti proširenje ili produbljenje korita.

Sa dijagrama zastupljenosti, može se konstatovati da plovidba nije moguća zbog nedovoljnih širina na $p_1\%$ analizirane dužine vodotoka, a zbog nedovoljnih dubina, na $p_2\%$ ove dužine. Dobijeni rezultati omogućavaju i preliminarnu procenu obima bagerskih i drugih radova na uredjenju vodotoka u plovidbene svrhe.

⁸U regulaciji reka to je protok „srednje vode”, koji se računa kao srednja vrednost svih protoka u višegodišnjem periodu hidroloških osmatranja.

⁹Iz primera 14.3 i 14.4 (Slike 14.6 i 14.9) proizilazi da bi vrednosti regulacione širine i poluprečnika krivine iznosile 106 m i 385 m, podrazumevajući da je $Q = 180 \text{ m}^3/\text{s}$ protok srednje vode.



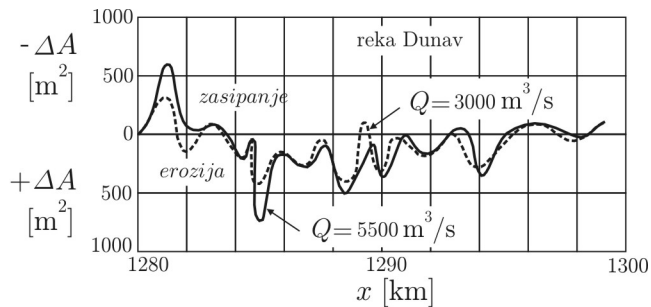
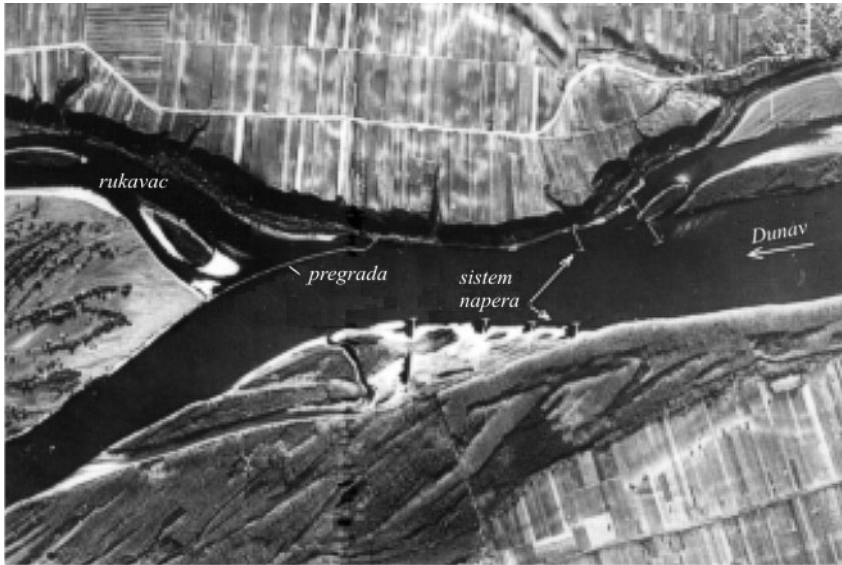
Slika 14.18: Morfološka naliza plovnosti vodotoka: (a) za definisan položaj osovine plovnog puta o-o i zahtevanu vrednost plovne širine B_{pl} , očitava se najmanja raspoloživa dubina h_r ; (b) za zahtevanu vrednost plovne dubine H_{pl} , očitava se raspoloživa širina B_r . Na uzdužnim morfološkim dijagramima su tamno označene deonice sa nedovoljnom plovnom širinom i dubinom.

14.4.3 Analiza efekata regulacionih radova

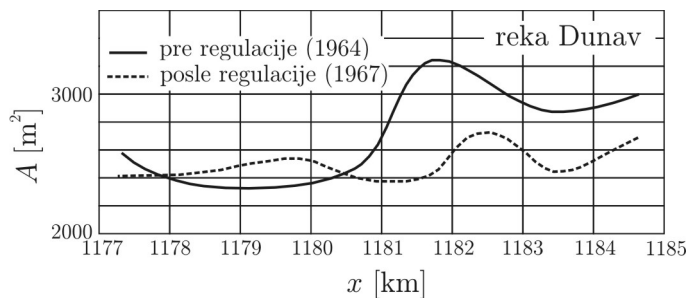
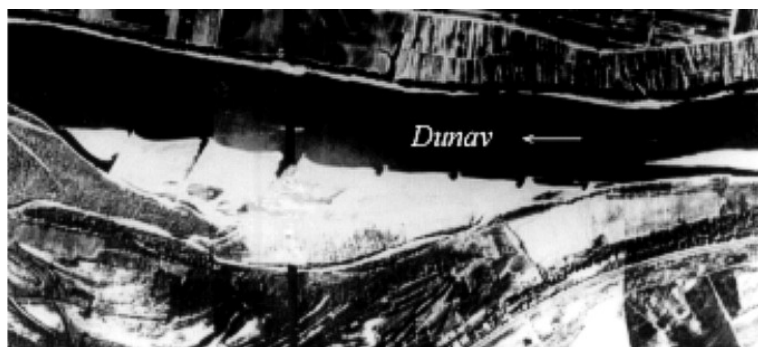
Morfološkom analizom se mogu kvantitativno sagledati promene u rečnom koritu koje su nastale kao posledica regulacionih radova. Na Slikama 14.19 i 14.20 prikazana su dva primera regulacionih zahvata na Dunavu, koji su preduzeti u cilju poboljšanja plovidbenih uslova.

Uzdužni morfološki dijagrami ukazuju na karakter i tendencije razvoja rečnog korita. Tako na primer, dijagram na Slici 14.19 ukazuje na erozioni karakter opšte deformacije po završetku regulacionih radova, čime su postignuti željeni efekti. Pozitivni efekti regulacionih gradjevina se jasno uočavaju u primeru na Slici 14.20, gde su, samo tri godine posle završetka radova, u potpunosti ispunjeni ciljevi regulacije (suzenje korita, povećanje dubine, fiksiranje trase plovnog puta).

Može se zaključiti da su mogućnosti primene morfoloških analiza u praksi izvanredno široke i da ove analize, zajedno sa hidrauličkim analizama, treba da budu osnova svakog ozbiljnog projekta uređenja vodotoka. Morfološke analize omogućavaju praćenje efekata preduzetih radova, kako u pojedinim fazama realizacije projekta, kada se radovi mogu prilagoditi uočenim tendencijama morfološkog razvoja, tako i po završetku radova, kada se mogu oceniti njihovi stvarni efekti.



Slika 14.19: Snimak iz vazduha regulacionih gradjevina na Dunavu, na sektoru Neštín-Susek, km 1285-1295; pregradjivanjem rukavca i izgradnjom sistema poprečnih gradjevina – napera, izvršena je koncentracija protoka u cilju povećanja dubine i fiksiranja trase plovnog puta. Morfološki uzdužni dijagrami opšte deformacije korita ukazuju na povećanje površine poprečnog preseka, odnosno produbljenje korita na datom sektoru, što ide u prilog zahtevima plovidbe [17, 142].



Slika 14.20: Snimak iz vazduha deonice Dunava na sektoru Beljarica kod Zemuna km 1174-1185; suženje korita sistemom napera je motivisano potrebom da se stabilije korito i povećaju dubine. Snimak zasutih medjunaperskih polja i uzdužni dijagram površine poprečnog preseka jasno govore u prilog uspešnosti izvedenih radova [17, 142].

Literatura

- [1] Abbott, M.B., *Computational Hydraulics*, Pitman, London, 1979.
- [2] Ackers, P., White, W.R., *Sediment Transport: New Approach and Analysis*, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 99, No. 4, 1973.
- [3] Agostini, R., Bazzarri, A., Masetti, M., *Ouvrages flexibles pour les tronçons torrentiels*, S.P.A. Officine Maccaferri, Bologna, 1981.
- [4] Агроскин, И.И., Дмитриев, Т.Т., Пискалов, Ф.И., Гидравлика, Энергия Москва, 1964, prevod Tehnička knjiga, Zagreb, 1969.
- [5] Allen, Th., Ditsworth, R.L., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1972.
- [6] Anderson, D.A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Co. New York, 1984.
- [7] Anderson, M.G., Walling, D.E., Bates, P.D. (ed.) *Floodplain Processes*, John Wiley & Sons Ltd., 1996.
- [8] Armanini, A., Scotton, P., *Criteri di dimensionamento e di verifica delle stabilizzazioni di alveo e di sponda con massi sciolti e massi legati*, Univerzitet u Trentu, IDR 1/1995.
- [9] Babić Mladenović, M., *Mogućnosti primene metode L. Van Rijna kod proračuna transporta nanosa u velikim aluvijalnim vodotocima*, seminarski rad, Gradjevinski fakultet, Beograd, 1989.
- [10] Bagnold, R.A., *The flow of cohesionless grains in fluids*, Phil. Trans. Royal Society, A 249, No. 946, London, 1956.
- [11] Bettess, R., White, W.R., *Mathematical simulation of sediment movement in streams*, Proc. Institution of Civil Engineers, Part 2, Vol. 71, Sept. 1981.
- [12] Bertolino, M., *Opšti kurs matematike*, Izdavačko-informativni centar studenata Univerziteta u Beogradu, 1974.
- [13] Blalock, M.E., Sturm, T.W., *Minimum Specific Energy in Compound Open Channel*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 107, No. 6, 1981.
- [14] Box, G., Jenkins, G., *Time Series Analysis - Forecasting and Control*, Holden-Day, 1976.
- [15] Bettess, R., White W.R., *Extremal Hypotheses Applied to River Regime*, Sediment Transport in Gravel-bed Rivers, ed. Thorne, C.R., Bathurst, J.C., Hey R.D., John Wiley, 1987.

- [16] Bogardi, J., *Sediment transport in alluvial streams*, Akadémia Kiadó, Budapest, 1974.
- [17] Božinović, M., *Statističke metode u proučavanju morfoloških karakteristika aluvijalnih vodotoka*, Seminar „Erozija, bujični tokovi i rečni nanos”, Jugoslovenski komitet za međunarodnu hidrološku deceniju, Beograd, 1970.
- [18] Bras, R.L., *Hydrology/An Introduction to Hydrologic Science*, Addison-Wesley Publ.Co., New York, 1990.
- [19] Bray, D.I., *Estimating Average Velocity in Gravel-Bed Rivers*, Journal of Hydraulics Division, ASCE, Vol. 106, No. 9, 1979.
- [20] Brice, J.C., *Planform Properties of Meandering Rivers*, Proceedings of the Rivers '83 Conference ASCE, New Orleans, 1983.
- [21] Brownlie, W.R., *Flow Depth in Sand-Bed Channels*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 109, No. 7, 1983.
- [22] Bruk, S. *Basic Bed-Load Functions*, Seminar on Hydraulics of Alluvial Streams, New Delhi, 1973.
- [23] Bruk, S., *Neke fizičke osnove rečne hidraulike*, doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd, Saopštenja Instituta za vodoprivredu „Jaroslav Černi”, br. 27, 1963.
- [24] Bruk, S., *Teorijska razmatranja u oblasti mehanike kretanja rečnih nanosa*, Seminar „Erozija, bujični tokovi i rečni nanos”, Jugoslovenski komitet za međunarodnu hidrološku deceniju, Beograd, 1970.
- [25] Bruk, S., Pavlović, R., *Neki problemi proračuna pronosa finog nanosa u rekama i kanalima*, Vode Vojvodine, 1982.
- [26] Bruk, S., (ed.) *Methodes de calcul de la sedimentation dans les lacs et les reservoirs*, Unesco, Paris, 1986.
- [27] Bureau of Public Roads, *Hydraulics of Bridge Waterways*, U.S. Dept. of Commerce, Washington, 1960.
- [28] Bureau of Reclamation, *Computing Degradation and Local Scour*, Technical Guidelines, U.S. Dept. of the Interior, Denver, Colorado, 1984.
- [29] Chang, H.H., *Fluvial Processes in River Engineering*, John Wiley & Sons, 1988.
- [30] Chang, H.H., Osmolski, Z., *Fluvial design of river bank protection*, Hydrossoft, Computational Mechanics Publications, Vol. 1, No. 2, 1988.

- [31] Chanson, H., *The Hydraulics of Open Channel Flow - An Introduction*, Arnold, London, 1999.
- [32] Yee-Meng Chiew, *Mechanics of Riprap Failure at Bridge Piers*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 121, No. 9, 1995.
- [33] Chow, V.T., *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, International Student Edition, Tokyo, 1959.
- [34] Crickmore, M.J., Lean, G.H., *The measurement of sand transport by means of radioactive tracers*, Proceedings of the Royal Society, A., Volume 266, London, 1962.
- [35] Croley, T., *Hydrologic and Hydraulic Calculation in BASIC for Small Computers*, University of Iowa, 1980.
- [36] Coleman, N.L., *Velocity Profiles With Suspended Sediment*, Journal of Hydraulic Research, 19, No. 3, 1981.
- [37] Cunge, J.A., *Au sujet d'une méthode de calcul de propagation de crues (Méthode Muskingum)*, Journal of Hydraulic Research, Vol.7, No.2, 1969.
- [38] Cunge, J.A., Holly, F.M., Verwey, A., *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman, 1980.
- [39] Darby, S.D., Thorne, C., *Predicting Stage-Discharge Curves in Channels with Bank Vegetation*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 122, No. 10, 1996.
- [40] Darby, S., Rinaldi, M., Pistoiesi, I., *Effects of Flexible Riparian Vegetation Growth on Discharge Capacity*, Proceedings, XXVII. IAHR Congress, San Francisco, 1997.
- [41] Deng, Z.Q., Singh, V.P., *Mechanism and conditions for change in channel pattern*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 37, No. 4, 1999.
- [42] de Vries, M., *Lecture Notes in Fluid Mechanics*, Delft University, 1985.
- [43] Douglas, J.F., Gasiorek, J.M., Swaffield J.A., *Fluid Mechanics*, Pitman 1979.
- [44] Einstein, H.A., *The Bed Load Function for Sediment Transportation in Open Channels*, Technical Bulletin 1026, U.S. Department of Agriculture, Washington, 1950.
- [45] Einstein, H.A., Barbarossa, N., *River Channel Roughness*, Transactions ASCE, Vol. 117, 1952.
- [46] Electricité de France, Laboratoire National d'Hydraulique, *Rapport d'activité* 1990.

- [47] Engelund, F., Hansen, E., *A monograph on sediment transport in alluvial streams*, Teknisk forlag, Copenhagen, 1967.
- [48] Falcon-Ascanio, M., Kennedy, J.F., *Flow in Alluvial-River Curves*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 133, 1983.
- [49] Fargue, *Etude sur la corrélation entre la configuration du lit et la profondeur d'eau dans les rivières á fond mobile*, Annales des Ponts et Chaussées, Vol./15, 1868.
- [50] Farraday, R.V., Charlton, F.G., *Hydraulic factors in bridge design*, Hydraulics Research, Wallingford, 1983.
- [51] Fortier, A., *Mécanique des suspensions*, Masson & Cie, Paris, 1967.
- [52] Fread, D.L., *The NWS Dam-Break Flood Forecasting Model*, Hydrologic Research Laboratory, Maryland, 1984.
- [53] French, R.H., *Open Channel Hydraulics*, McGraw Hill, New York, 1986.
- [54] Garde, R.J., Raju, R.K.G., *Mechanics of Sediment Transportation and Alluvial Stream Problems*, Wiley Eastern Ltd., 1977.
- [55] Gessler, J., *Beginning and ceasing of sediment motion*, Chapter 7, River Mechanics, Shen, H.W., ed., Fort Collins, 1971.
- [56] Goldman, S.J., Jackson, K., Bursztynsky, T.A., *Erosion & Sediment Control Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1986.
- [57] Гончаров, В.Н., *Основы динамики русловых процессов*, Гидрометеиздат, Л., 1954.
- [58] Gregory, K.J., (ed.) *River Channel Changes*, John Wiley & Sons, Chichester, 1977.
- [59] Grupa autora *Erozija, bujični tokovi i rečni nanos*, Jugoslovenski komitet za međunarodnu hidrološku deceniju, Beograd, 1970.
- [60] Grupa autora *Istražni radovi na Dunavu na sektoru Apatin, km 1405 - km 1400*, Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi”, Beograd, 1980.
- [61] Guo, J., Wood, W.L., *Fine Suspended Sediment Transport Rates*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 121, No. 12, 1995.
- [62] Hager, W.H., *Fargue, founder of experimental river engineering*, Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 41, No. 3, 2003.
- [63] Hajdin, G., *Mehanika fluida*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1983.

- [64] Hajdin, G., *Mehanika fluida – Uvodjenje u hidrauliku*, Gradjevinski fakultet, Beograd, 2002.
- [65] Hajdin, G., Vukmirović, V., *Mogućnosti obrazovanja i primenjivanja formula za računanje vučenog nanosa*, Kongres JDHI, 1978.
- [66] Henderson, F.M., *Open Channel Flow*, Macmillan Publishing Co., New York, 1966.
- [67] Hervouet, J-M., *Hydrodynamics of Free Surface Flows - Modelling with the Finite Element Method*, Wiley, 2007.
- [68] Hey, R.D., Thorne, C.R., *Stable Channels With Mobile Gravel-beds*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 112, No 8, 1986.
- [69] Hey, R.D., *Geometry of River Meanders*, Nature, Vol. 262, August 5, 1976.
- [70] Hickin, B.J., *The Analysis of River-Plainform Responses to Changes in Discharge*, River Channel Changes (ed. Gregory, K.J.), The British Geomorphological Research Group, John Wiley & Sons, 1977.
- [71] Hug, M., *Mécanique des fluides appliquée*, Eyrolles, Paris, 1975.
- [72] Hydrologic Eng. Center *HEC-RAS River Analysis System*, User's Manual, USCOE, Davis, 1995.
- [73] Ибад-Заде, И.А., „Движение наносов в открытых руслах”, Строиздат, Москва, 1974.
- [74] Ikeda, S.J., *Lateral Bed Load Transport on Side Slopes*, (diskusija G. Parkera), Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 110, No. 2, 1984.
- [75] Izbash, S.V., Khaldre, Kh.Yu., *Hydraulics of River Channel Closure*, Butterworths, London, 1970.
- [76] Jansen, P.Ph. i dr. (ed.) *Principles of River Engineering*, Pitman, 1979.
- [77] Johnson, P.A., *Comparison of Pier-Scour Equations Using Field Data*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 121, No. 8, 1995.
- [78] Jovanović, M., *Osnove numeričkog modeliranja ravanskih otvorenih tokova*, Gradjevinski fakultet Beograd, 1998.
- [79] Jovanović, M., Komatina, D., *Primena metode Van Rijna u proračunu opšte deformacije dunavskog korita*, Vodoprivreda 1994/1-3, 1994.
- [80] Jovanović, M., Djordjević, D., *Neki primeri numeričke simulacije ravanskih tokova*, Vodoprivreda 1993/1-6, 1994.

- [81] Jovanović, M., *Odredjivanje propusne moći zatravljenih kanala*, Vodoprivreda (31) 1999/1-6, 1999.
- [82] Jovanović, M., Jonić, R., Špegar, S., Mihajlović, Lj., *Erozija dunavskog korita izazvana rušenjem mostova u Novom Sadu*, Vodoprivreda (32) 2000/4-6, 2000.
- [83] Jovanović, M., Kapor, R., Djordjević, D., *Hidrauličko – morfološka studija Dunava na ušću Save*, Gradjevinski fakultet, Beograd, 2004.
- [84] Jovanović, M., *Ocena rizika od erozije rečnog korita oko mostovskih stubova*, Vodoprivreda 0350-0519, 38(2006), 2006.
- [85] Jovanović, M., Kapor, R., Prodanović, D., Zindović, B. *Numerička simulacija koncentrisanog ispuštanja izbagerovanog nanosa u maticu reke*, „Vodoprivreda”, 0350-0519, 39, 2007.
- [86] Jovanović, S., *Primena metoda matematičke statistike u hidrologiji*, Gradjevinski fakultet, Beograd, 1977.
- [87] Jovanović, S., Bonacci, O., Andjelić, M., *Hidrometrija*, Gradjevinski fakultet, Beograd, 1977.
- [88] Jovanović, S., *Parametarska hidrologija*, Skripta, Gradjevinski fakultet, Beograd, 1976.
- [89] Julien, P.Y., *Erosion and Sedimentation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [90] Julien, P.Y., *River Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [91] Junke, G., *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Discussion, No. 7, 1997.
- [92] Kennedy, J.F., *The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels*, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 16, part 4, 1963.
- [93] Kennedy, J.F., *Reflections on Rivers, Research, and Rouse*, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 109, No. 10, 1983.
- [94] Karim, M.F., Kennedy, J.F., *Velocity and Sediment-Concentration Profiles in River Flows*, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 113, No. 2, 1987.
- [95] Kennedy, J.F., *Computation of River Suspended-Sediment Discharge - Revisited*, *Schweizer Ingenieur und Architekt* Nr. 6, Feb. 1988.
- [96] Karim, M.F., Kennedy, J.F., *Computer-Based Predictors for Sediment Discharge and Friction Factor of Alluvial Streams*, *Institute of Hydraulic Research*, University of Iowa, Reprint No. 645.

- [97] Karim, M.F., Kennedy, J.F., *Menu of Coupled Velocity and Sediment Discharge Relations for Rivers*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 116, No. 8, 1990.
- [98] Keshavarzy, A., Ball, J.E., *An Application of Image Processing in the Study of Sediment Motion*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 37, No. 4, 1999.
- [99] Kikkawa, H., Ikeda, S., Kitagawa, A., *Flow and Bed Topography in Curved Open Channels*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 102, No. HY9, 1976.
- [100] Kinori, B.Z., Mevorach, J., *Manual of Surface Drainage Engineering*, Elsevier, Amsterdam, 1984.
- [101] Komatina, D., Jovanović, M., *Experimental study of steady and unsteady free surface flows with water-clay mixtures*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 35, No. 5, 1997.
- [102] Kouwen, N., Li, R.M., *Biomechanics of Vegetative Channel Linings*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 106, No. HY6, 1980.
- [103] Kouwen, N., *Field estimation of the biomechanical properties of grass*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 26, No. 5, 1988.
- [104] Lai, Ch., *Numerical Modeling of Unsteady Open-Channel Flow*, Advances in Hydroscience, Volume 14-1986, Academic Press, New York, 1986.
- [105] Larras, J.I., *Hydraulique et granulats*, Eyrolles, Paris, 1972.
- [106] Lau, L.Y., *Suspended Sediment Effect on Flow Resistance*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 109, No. 5, 1983.
- [107] Launder, B.E., Spalding, D.B., *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London, 1972.
- [108] Lebreton, J.C., *Dynamique fluviale*, Eyrolles, Paris, 1974.
- [109] Leopold, L.B., Wolman, M.G., *River Meanders*, Geological Society Am. Bulletin, No. 71, 1960.
- [110] Mahmood, K., Yevjevich, V., (ed.) *Unsteady Flow in Open Channels*, Water Resources Publications, Fort Collins, 1975.
- [111] Marvaud, J., Ramette, M., *Etude des oscillations du plan d'eau dans les passes délimitées par des piles en rivière*, VIII^e journée de l'hydraulique SHF, Paris, 1964.
- [112] Maza Alvarez, J.A., *Introduction to River Engineering*, Advanced Course on Water Resources Management, Perugia, 1989.

- [113] McDowell, D.M., O'Connor, B.A., *Hydraulic Behaviour of Estuaries*, Macmillan Press, London, 1977. prevod na ruski: Гидравлика приливных устьев рек, Энергоатомиздат, Москва, 1983.
- [114] Meyer-Peter, E., Muller, R., *Formulas for Bed-Load Transport*, Proceedings of Second Meeting, IAHR, Stockholm, 1948.
- [115] Miloradov, V., *Istraživanja suspendovanog nanosa za potrebe inženjerske prakse*, Seminar „Erozija, bujični tokovi i rečni nanos”, Jugoslovenski komitet za međunarodnu hidrološku deceniju, Beograd, 1970.
- [116] Mizumura, K., Nakagawa, T., *Bend Theory of Stream Meanders on a Smooth Plate*, Computational Modelling of Free and Moving Boundary Problems, Vol. I - Fluid Flow, ed. Wrobel, L.C., Brebbia, C.A., Computational Mechanics Publications, Berlin, N.Y., 1991.
- [117] Molinas, A.M., Yang, C.T., *Generalized Water Surface Profile Computations*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 111, No. 3, 1985.
- [118] Muškatirović, J., *Scale Models in Hydraulic Engineering*, Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi”, Beograd, 1991.
- [119] Nanson, G.C., Hickin, E.J., *Channel Migration and Incision on the Beatton River*, Journal of the Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 109, No. 3, 1983.
- [120] Neill, C.R., *Mean Velocity Criterion for Scour of Coarse Uniform Bed Material*, Proceedings of the Twelfth Congress IAHR, Fort Collins, Colorado, 1967.
- [121] Nešić, M., *Regulisanje reka*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1966.
- [122] Nezu, I., Rodi, W., *Open-Channel Flow Measurements with a Laser Doppler Anemometer*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 112, No. 5, 1986.
- [123] Nicollet, G., *Hydraulique des ouvrages de franchissement des vallées fluviales*, La Houille Blanche, No. 4, 1982.
- [124] Odgaard, A.J., *Meander Flow Model. I: Development, II: Applications*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 112, No. 12, 1986.
- [125] Park, I., Jain, S.C., *Numerical Simulation of Degradation of Alluvial Channel Beds*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 113, No. 7, 1987.
- [126] Parker, G., *Sediment Inertia as Cause of River Antidunes*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 101, No. 2, 1975.
- [127] Parker, G., *Hydraulic Geometry of Active Gravel Rivers*, Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 105, No. 9, 1979.

- [128] Parker, G., *Progress in the modeling of alluvial fans*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 37, No. 6, 1999.
- [129] Peyret, R., Taylor, T.D., *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- [130] Popović, R., *Recherche des facteurs agissant sur la formation des profondeurs des rivières á fond mobile*, Travaux, Oct. 1960.
- [131] Prandtl, L., Tietjens, O.G., *Applied Hydro-and Aeromechanics*, Dover Publications, New York, 1957.
- [132] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1986.
- [133] Prins, A., de Vries, M., *On Dominant Discharge Concepts for Rivers*, Delft University of Technology and Delft Hydraulics Laboratory, Publication No. 92, Delft, 1971.
- [134] Quesnel, B., *Traité d'hydraulique fluviale appliquée*, Eyrolles, Paris, 1963.
- [135] Radojković, M., Klem, N., *Primena računara u hidraulici*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1989.
- [136] Ramette, M., *Surveillance et confortement des fondations d'ouvrages d'art en site aquatique - aspect hydraulique*, La Houille Blanche, No. 1, 1982.
- [137] Raynov, S., Pechinov, D., Kopaliany, Z., *River Response to Hydraulic Structures*, UNESCO, Paris, 1986.
- [138] Roache, P.J., *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, 1972.
- [139] Rodi, W., *Turbulence models and their application in hydraulics*, Institut für Hydromechanik, University of Karlsruhe, 1980.
- [140] Rouse, H., Ince, S., *History of Hydraulics*, Iowa Institute of Hydraulic Research, Iowa City, 1980.
- [141] Розовский, J.Л., *Движение воды на повороте открытого русла*, изд. АН СССР, Киев, 1957.
- [142] Savezna javna ustanova za održavanje i razvoj unutrašnjih plovnih puteva, *Aerofotogrametrijska dokumentacija*, Beograd, 1994.
- [143] Savić, Lj., *Neke mogućnosti za poboljšanje efikasnosti računskog modela za proračun hidrauličkih posledica rušenja brana*, Magistarska teza, Gradjevinski fakultet Beograd, 1988.

- [144] Schulte, A.M., Chaudhry, M.H., *Gradually-varied flows in open-channel networks*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 25, No. 3, 1987.
- [145] Schumm, S.A., *The Fluvial System*, John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [146] Simons, D.B., Şentürk, F., *Sediment Transport Technology*, Water Resources Publications, 1977.
- [147] Simons, D., Lee, *Design Manual for Engineering Analysis of Fluvial Systems*, Arizona Department of Water Resources, Project No. AZ-DWR-05, 1985.
- [148] Simons, D.B., Richardson, E.V., *Form of Bed Roughness in Alluvial Channels*, Trans., ASCE, 87, 1961.
- [149] Singh, B., *Self-adjustment of Alluvial Streams*, Proc. 2nd International Symposium on River Sedimentation, Nanjing, China, 1983.
- [150] Shen, H.W., Lu, J.Y., *Development and Prediction of Bed Armoring*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 109, No. 4, 1983.
- [151] Shields, A., *Anwendung der Ähnlichkeits Mechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebe Bewegung*, Berlin 1936.
- [152] Smith, C.D., *Hydraulic Structures*, University of Saskatchewan, 1995.
- [153] Sturm, T.W., Sadiq, A., *Water Surface Profiles in Compound Channel with Multiple Critical Depths*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 122, No. 12, 1996.
- [154] Шамо́в, Г.И., Речные наносы, Гидрометеиздат, Л., 1959.
- [155] Temple, D.M., *Closure of Velocity Distribution Coefficients for Grass Lined Channels*, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 113, No. 9, 1987.
- [156] Tsujimoto, T., *Distorted Model and Time Scale Evaluation of Multiscale Subjected Fluvial Processes*, Mobile Bed Physical Models, Shen H.W. (ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [157] US Army Corps of Engineers, *River Hydraulics*, Engineer Manual, EM 1110-2-1416, 1993.
- [158] US Army Corps of Engineers, *Channel Stability Assessment for flood Control Projects*, Engineer Manual, EM 1110-2-1418, 1994.
- [159] US Army Corps of Engineers, HEC-RAS - *River Analysis System*, User's Manual, 1998.
- [160] US Army Corps of Engineers, *Hydrographic Surveying*, Engineer Manual, EM 1110-2-1003, 1994.

- [161] US Geological Survey, *The US D-96: An Isokinetic Suspended-Sediment/Water-Quality Collapsible-Bag Sampler*, Report PP, 2001.
- [162] Valembois, J., *Calcul direct de la vitesse de chute d'un grain sphérique dans un fluide*, La Houille Blanche, No.2, 1983.
- [163] Van Dyke, M., (ed.) *An Album of Fluid Motion*, The Parabolic Press, Stanford, California, 1982.
- [164] Van Rijn, L., *Sediment Transport, Part I: Bed Load Transport*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.110, No.10, 1984.
- [165] Van Rijn, L., *Sediment Transport, Part II: Suspended Load Transport*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 110, No. 11, 1984.
- [166] Van Rijn, L., *Sediment Transport, Part III: Bed Forms and Alluvial Roughness*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 110, No. 10, 1984.
- [167] Van Rijn, L., *Handbook: Sediment transport by currents and waves*, Report H 461, Delft Hydraulics, 1989.
- [168] Van Rijn, L., *Mathematical Models for Sediment Concentration Profiles in Steady Flow*, Euromech 192, Munich, 1985.
- [169] Великанов, М.А., „Динамика русловых потоков”, Гидрометеоиздат, Москва, 1954.
- [170] Vreugdenhil, C.B., *Computational Hydraulics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.
- [171] Vukadinović, S., *Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike*, Privredni pregled, Beograd, 1987.
- [172] Vukmirović, V., *Idejni projekat regulacije Vardara kroz Skopje*, Knjiga III: Režim vučenog nanosa na tokovima u Skopskoj kotlini (prirodno stanje), Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi”, Beograd, 1969.
- [173] Wan, Z., Wang, Z., *Hyperconcentrated Flow*, IAHR Monograph, Balkema, Rotterdam, 1994.
- [174] Wang, Z.Y., *Experimental study on scour rate and river bed inertia*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 37, No. 1, 1999 (Discussion: Mosselman, E., Verheij, H.J., Vol. 38, No. 4, 2000.)
- [175] Wylie, B.E., *Water Surface Profiles in Divided Channels*, Journal of Hydraulic Research, Vol.10, No.3, 1972.
- [176] Yalin, M.I., *Mechanics of Sediment Transport*, Pergamon Press, 1977.

- [177] Yalin, M.S., *On the Formation of Dunes and Meanders*, Proceedings of 14th International Congress of the IAHR, Paris, 1971.
- [178] Yalin, M.S., Ferreira da Silva, A.M., *Regime channels in cohesionless alluvium*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 37, No. 6, 1999.
- [179] Yen, B.C., *Characteristics of Subcritical Flow in a Meandering Channel*, Project report no. G-18988, University of Iowa, 1965.
- [180] Zimmermann, C., Naudascher, E., *Sohlausbildung und Sedimentbewegung in Krümmungen alluvialer Gerinne*, Wasserwirtschaft, 69, No. 4, 1979.

Dodatak A

Spisak kompjuterskih programa koji se mogu slobodno preuzeti sa internet adrese:
<http://www.grf.bg.ac.rs/~mjovanovic/>

Ime programa	Opis
TTA.f90	Transformacija poplavnog talasa u akumulaciji
SKor.f90	Hidraulička geometrija stabilnog korita
Kvazis.f90	Metoda kvazi-ustaljenog tečenja
LaksWen.f90	Metoda Laks-Vendrof
MPM.f90	Pronos vučenog nanosa po metodi MPM
Musk.f90	Metoda Maskingam
Reke1.f90	Ustaljeno tecenje u neprizmaticnom koritu
Reke4.f90	Implicitna metoda 4 tačke
Tkanal.f90	Normalna/kritična dubina u prizmatičnom koritu
TravaQh.f90	Propusna moć zatravljenih kanala
Utk.f90	Ustaljeno tečenje u prizmatičnom koritu
VRijn.f90	Pronos nanosa po metodi fan Rejna
WW.f90	Brzina tonjenja čestice u mirnoj vodi

Napomena: Autor nije odgovoran za posledice korišćenja ovih programa, koji su pisani prvenstveno za potrebe nastave.

Dodatak B

Osnovna fizička svojstva vode

Temp. T [°C]	Gustina ρ [kg/m ³]	Viskoznost		Pritisak vodene pare $p_v/(\rho \cdot g)$ [m]
		$\mu \times 10^3$ [N·s/m ²]	$\nu \times 10^6$ [m ² /s]	
0	999.8	1.781	1.785	0.06
5	1000.0	1.518	1.519	0.09
10	999.7	1.307	1.306	0.12
15	999.1	1.139	1.139	0.17
20	998.2	1.002	1.003	0.25
25	997.0	0.890	0.893	0.33
30	995.7	0.798	0.800	0.44
40	992.2	0.653	0.658	0.78
50	988.0	0.547	0.553	1.26
60	983.2	0.466	0.474	2.03
70	977.8	0.404	0.413	3.20
80	971.8	0.354	0.364	4.96
90	965.3	0.315	0.326	7.18
100	958.4	0.282	0.294	10.33

Dodatak C

Brzina tonjenja čestice u mirnoj vodi

$$T = 10^{\circ} \text{ C}$$

$$\nu = 1.319 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\Delta = 1.65$$

d [mm]	W [m/s]		
	(8.17)	(8.18)	(8.19)
0.001	6.82E-07	-	6.82E-07
0.002	2.73E-06	-	2.73E-06
0.003	6.14E-06	-	6.14E-06
0.004	1.09E-05	-	1.09E-05
0.005	1.70E-05	-	1.70E-05
0.006	2.45E-05	-	2.45E-05
0.007	3.34E-05	-	3.34E-05
0.008	4.36E-05	-	4.36E-05
0.009	5.52E-05	-	5.52E-05
0.01	6.82E-05	4.80E-05	6.82E-05
0.02	2.73E-04	1.92E-04	2.73E-04
0.03	6.14E-04	4.31E-04	6.13E-04
0.04	1.09E-03	7.67E-04	1.09E-03
0.05	1.70E-03	1.20E-03	1.70E-03
0.06	2.45E-03	1.72E-03	2.44E-03
0.07	3.34E-03	2.34E-03	3.31E-03
0.08	4.36E-03	3.05E-03	4.29E-03
0.09	5.52E-03	3.85E-03	5.40E-03
0.1	6.00E-03	4.73E-03	6.61E-03
0.2	2.12E-02	1.75E-02	2.25E-02
0.3	3.84E-02	3.38E-02	3.94E-02
0.4	5.40E-02	4.98E-02	5.39E-02
0.5	6.74E-02	6.41E-02	6.63E-02
0.6	7.90E-02	7.67E-02	7.70E-02
0.7	8.93E-02	8.79E-02	8.64E-02
0.8	9.85E-02	9.80E-02	9.49E-02
0.9	1.07E-01	1.07E-01	1.03E-01
1	1.15E-01	1.16E-01	1.10E-01
2	1.98E-01	1.79E-01	1.64E-01
3	2.42E-01	2.24E-01	2.04E-01
4	2.80E-01	2.61E-01	2.37E-01
5	3.13E-01	2.93E-01	2.66E-01
6	3.43E-01	3.22E-01	2.92E-01
7	3.70E-01	3.49E-01	3.16E-01
8	3.96E-01	3.73E-01	3.38E-01
9	4.20E-01	3.96E-01	3.59E-01
10	4.43E-01	4.18E-01	3.78E-01

Dodatak D

Vrednosti standardne normalne raspodele

z	A(z)	z	A(z)	z	A(z)	z	A(z)
0.00	0.00000	0.50	0.19146	1.00	0.34134	1.50	0.43319
0.01	0.00399	0.51	0.19497	1.01	0.34375	1.51	0.43448
0.02	0.00798	0.52	0.19847	1.02	0.34614	1.52	0.43574
0.03	0.01197	0.53	0.20194	1.03	0.34849	1.53	0.43699
0.04	0.01595	0.54	0.20540	1.04	0.35083	1.54	0.43822
0.05	0.01994	0.55	0.20884	1.05	0.35314	1.55	0.43943
0.06	0.02392	0.56	0.21226	1.06	0.35543	1.56	0.44062
0.07	0.02790	0.57	0.21566	1.07	0.35769	1.57	0.44179
0.08	0.03188	0.58	0.21904	1.08	0.35993	1.58	0.44295
0.09	0.03586	0.59	0.22240	1.09	0.36214	1.59	0.44408
0.10	0.03983	0.60	0.22575	1.00	0.36433	1.60	0.44520
0.11	0.04380	0.61	0.22907	1.11	0.36650	1.61	0.44630
0.12	0.04776	0.62	0.23237	1.12	0.36864	1.62	0.44738
0.13	0.05172	0.63	0.23565	1.13	0.37076	1.63	0.44845
0.14	0.05567	0.64	0.23891	1.14	0.37286	1.64	0.44950
0.15	0.05962	0.65	0.24215	1.15	0.37493	1.65	0.45053
0.16	0.06356	0.66	0.24537	1.16	0.37698	1.66	0.45154
0.17	0.06750	0.67	0.24857	1.17	0.37900	1.67	0.45254
0.18	0.07142	0.68	0.25175	1.18	0.38100	1.68	0.45352
0.19	0.07535	0.69	0.25490	1.19	0.38298	1.69	0.45449
0.20	0.07926	0.70	0.25804	1.20	0.38493	1.70	0.45543
0.21	0.08317	0.71	0.26115	1.21	0.38686	1.71	0.45637
0.22	0.08706	0.72	0.26424	1.22	0.38877	1.72	0.45728
0.23	0.09095	0.73	0.26730	1.23	0.39065	1.73	0.45818
0.24	0.09483	0.74	0.27035	1.24	0.39251	1.74	0.45907
0.25	0.09871	0.75	0.27337	1.25	0.39435	1.75	0.45994
0.26	0.10257	0.76	0.27637	1.25	0.39617	1.76	0.46080
0.27	0.10642	0.77	0.27935	1.27	0.39796	1.77	0.46164
0.28	0.11026	0.78	0.28230	1.28	0.39973	1.78	0.46246
0.29	0.11409	0.79	0.28524	1.29	0.40147	1.79	0.46327
0.30	0.11791	0.80	0.28814	1.30	0.40320	1.80	0.46407
0.31	0.12172	0.81	0.29103	1.31	0.40490	1.81	0.46485
0.32	0.12552	0.82	0.29389	1.32	0.40658	1.82	0.46562
0.33	0.12930	0.83	0.29673	1.33	0.40824	1.83	0.46638
0.34	0.13307	0.84	0.29955	1.34	0.40988	1.84	0.46712
0.35	0.13683	0.85	0.30234	1.35	0.41149	1.85	0.46784
0.36	0.14058	0.86	0.30511	1.36	0.41309	1.86	0.46856
0.37	0.14431	0.87	0.30785	1.37	0.41466	1.87	0.46926
0.38	0.14803	0.88	0.31057	1.38	0.41621	1.88	0.46995
0.39	0.15173	0.89	0.31327	1.39	0.41774	1.89	0.47062
0.40	0.15542	0.90	0.31594	1.40	0.41924	1.90	0.47128
0.41	0.15910	0.91	0.31859	1.41	0.42073	1.91	0.47193
0.42	0.16276	0.92	0.32121	1.42	0.42220	1.92	0.47257
0.43	0.16640	0.93	0.32381	1.43	0.42364	1.93	0.47320
0.44	0.17003	0.94	0.32639	1.44	0.42507	1.94	0.47381
0.45	0.17364	0.95	0.32894	1.45	0.42647	1.95	0.47441
0.46	0.17724	0.96	0.33147	1.46	0.42785	1.96	0.47500
0.47	0.18082	0.97	0.33398	1.47	0.42922	1.97	0.47558
0.48	0.18439	0.98	0.33646	1.48	0.43056	1.98	0.47615
0.49	0.18793	0.99	0.33891	1.49	0.43189	1.99	0.47670

Dodatak D

Vrednosti standardne normalne raspodele
(nastavak)

z	A(z)	z	A(z)	z	A(z)	z	A(z)
2.00	0.47725	2.50	0.49379	3.00	0.49865	3.50	0.49977
2.01	0.47778	2.51	0.49396	3.01	0.49869	3.51	0.49978
2.02	0.47831	2.52	0.49413	3.02	0.49874	3.52	0.49978
2.03	0.47882	2.53	0.49430	3.03	0.49878	3.53	0.49979
2.04	0.47932	2.54	0.49446	3.04	0.49882	3.54	0.49980
2.05	0.47982	2.55	0.49461	3.05	0.49886	3.55	0.49981
2.06	0.48030	2.56	0.49477	3.06	0.49889	3.56	0.49981
2.07	0.48077	2.57	0.49492	3.07	0.49893	3.57	0.49982
2.08	0.48124	2.58	0.49506	3.08	0.49896	3.58	0.49983
2.09	0.48169	2.59	0.49520	3.09	0.49900	3.59	0.49983
2.10	0.48214	2.60	0.49534	3.10	0.49903	3.60	0.49984
2.11	0.48257	2.61	0.49547	3.11	0.49906	3.61	0.49985
2.12	0.48300	2.62	0.49560	3.12	0.49910	3.62	0.49985
2.13	0.48341	2.63	0.49573	3.13	0.49913	3.63	0.49986
2.14	0.48382	2.64	0.49585	3.14	0.49916	3.64	0.49986
2.15	0.48422	2.65	0.49598	3.15	0.49918	3.65	0.49987
2.16	0.48461	2.66	0.49609	3.16	0.49921	3.66	0.49987
2.17	0.48500	2.67	0.49621	3.17	0.49924	3.67	0.49988
2.18	0.48537	2.68	0.49632	3.18	0.49926	3.68	0.49988
2.19	0.48574	2.69	0.49643	3.19	0.49929	3.69	0.49989
2.20	0.48610	2.70	0.49653	3.20	0.49931	3.70	0.49989
2.21	0.48645	2.71	0.49664	3.21	0.49934	3.71	0.49990
2.22	0.48679	2.72	0.49674	3.22	0.49936	3.72	0.49990
2.23	0.48713	2.73	0.49683	3.23	0.49938	3.73	0.49990
2.24	0.48745	2.74	0.49693	3.24	0.49940	3.74	0.49991
2.25	0.48778	2.75	0.49702	3.25	0.49942	3.75	0.49991
2.26	0.48809	2.76	0.49711	3.26	0.49944	3.76	0.49992
2.27	0.48840	2.77	0.49720	3.27	0.49946	3.77	0.49992
2.28	0.48870	2.78	0.49728	3.28	0.49948	3.78	0.49992
2.29	0.48899	2.79	0.49736	3.29	0.49950	3.79	0.49992
2.30	0.48928	2.80	0.49744	3.30	0.49952	3.80	0.49993
2.31	0.48956	2.81	0.49752	3.31	0.49953	3.81	0.49993
2.32	0.48983	2.82	0.49760	3.32	0.49955	3.82	0.49993
2.33	0.49010	2.83	0.49767	3.33	0.49957	3.83	0.49994
2.34	0.49036	2.84	0.49774	3.34	0.49958	3.84	0.49994
2.35	0.49061	2.85	0.49781	3.35	0.49960	3.85	0.49994
2.36	0.49086	2.86	0.49788	3.36	0.49961	3.86	0.49994
2.37	0.49111	2.87	0.49795	3.37	0.49962	3.87	0.49995
2.38	0.49134	2.88	0.49801	3.38	0.49964	3.88	0.49995
2.39	0.49158	2.89	0.49807	3.39	0.49965	3.89	0.49995
2.40	0.49180	2.90	0.49813	3.40	0.49966	3.90	0.49995
2.41	0.49202	2.91	0.49819	3.41	0.49968	3.91	0.49995
2.42	0.49224	2.92	0.49825	3.42	0.49969	3.92	0.49996
2.43	0.49245	2.93	0.49831	3.43	0.49970	3.93	0.49996
2.44	0.49266	2.94	0.49836	3.44	0.49971	3.94	0.49996
2.45	0.49286	2.95	0.49841	3.45	0.49972	3.95	0.49996
2.46	0.49305	2.96	0.49846	3.46	0.49973	3.96	0.49996
2.47	0.49324	2.97	0.49851	3.47	0.49974	3.97	0.49996
2.48	0.49343	2.98	0.49856	3.48	0.49975	3.98	0.49997
2.49	0.49361	2.99	0.49861	3.49	0.49976	3.99	0.49997
						4.00	0.49997

Dodatak E

Razmere fizičkih modela (1)

Veličine	Modeli sa nepokretnim dnom			Modeli sa pokretnim dnom		
	Raz- mera	Nedistor- dovani modeli	Distor- dovani modeli	Potpuna sličnost		Nepotpuna sličnost
				$Fr_* = 1$ $\Theta_* = (d_*)_* = 1$	$Fr_* = 1$ $(d_*)_* \neq 1$	$Fr_* \neq 1$ $(d_*)_* = 1$
Geometrijske						
Dubina	h_*	L_*	h_*	h_*	h_*	h_*
Širina	B_*	L_*	L_*	L_*	L_*	L_*
Dužina	L_*	L_*	L_*	$h_*^{\frac{4\mu+1}{\mu+1}}$	$h_*^{2\mu+1} \cdot d_*^{-2\mu}$	$h_*^2 \cdot d_*^2$
Prečnik zrna	d_*	L_*	$h_*^4 \cdot L_*^{-3}$	$h_*^{\frac{2\mu-1}{2\mu+2}}$	d_*	d_*
Površina	A_*	L_*^2	$L_* \cdot h_*$	$L_* \cdot h_*$	$L_* \cdot h_*$	$L_* \cdot h_*$
Zapremina	\forall_*	L_*^3	$L_*^2 \cdot h_*$	$L_* \cdot h_*^{\frac{5\mu+2}{\mu+1}}$	$L_* \cdot h_*^{2\mu+2} \cdot d_*^{-2\mu}$	$L_* \cdot h_*^3 \cdot d_*^2$

Napomena: $x_* = y_* \equiv L_*$, $z_* \equiv h_*$; $\mu = \ln(12 h_p/d_p)^{-1}$.

Dodatak E

Razmere fizičkih modela (2)

Veličine	Modeli sa nepokretnim dnom			Modeli sa pokretnim dnom		
	Raz- mera	Nedistor- dovani modeli	Distor- dovani modeli	Potpuna sličnost	Nepotpuna sličnost	
				$Fr_* = 1$ $\Theta_* = (d_*)_* = 1$	$Fr_* = 1$ $(d_*)_* \neq 1$	$Fr_* \neq 1$ $(d_*)_* = 1$
Kinematičke						
Hidrauličko vreme	t_*	$L_*^{1/2}$	$L_* \cdot h_*^{-1/2}$	$h_*^{\frac{7\mu+1}{2\mu+2}}$	$h_*^{2\mu+1/2} \cdot d_*^{-2\mu}$	$h_*^{2-\mu} \cdot d_*^{\mu+2}$
Psamološko vreme	$t_{s,*}$	–	–	$h_*^{\frac{5\mu+2}{\mu+1}}$	$h_*^{3\mu+3/2} \cdot d_*^{-3\mu-1}$	$h_*^3 \cdot d_*^2$
Brzina	V_*	$L_*^{1/2}$	$h_*^{1/2}$	$h_*^{1/2}$	$h_*^{1/2}$	$h_*^\mu \cdot d_*^{-\mu-1}$
Smičuća brzina	$(V_*)_*$	$L_*^{1/2}$	$h_* \cdot L_*^{-1/2}$	$h_*^{\frac{1-2\mu}{2\mu+2}}$	$h_*^{1/2-\mu} \cdot d_*^{/mu}$	d_*^{-1}
Brzina taloženja	W_*	–	–	$h_*^{\frac{1-2\mu}{2\mu+2}}$	–	d_*^{-1}
Protok	Q_*	$L_*^{5/2}$	$L_* \cdot h_*^{3/2}$	$L_* \cdot h_*^{3/2}$	$L_* \cdot h_*^{3/2}$	$L_* \cdot h_*^{\mu+1} \cdot d_*^{-\mu-1}$
Pronos nanosa	qv_*	–	–	1	$h_*^{1/2-\mu} \cdot d_*^{\mu+1}$	1

Napomena: $x_* = y_* \equiv L_*$, $z_* \equiv h_*$; $\mu = \ln(12 h_p/d_p)^{-1}$.

Dodatak E

Razmere fizičkih modela (3)

Veličine	Modeli sa nepokretnim dnom			Modeli sa pokretnim dnom		
	Raz- mera	Nedistor- dovani modeli	Distor- dovani modeli	Potpuna sličnost	Nepotpuna sličnost	
				$Fr_* = 1$ $\Theta_* = (d_*)_* = 1$	$Fr_* = 1$ $(d_*)_* \neq 1$	$Fr_* \neq 1$ $(d_*)_* = 1$
Dinamičke						
Masa	M_*	L_*^3	$L_*^2 \cdot h_*$	$L_* \cdot h_*^{\frac{5\mu+2}{\mu+1}}$	$L_* \cdot h_*^{2\mu+2} \cdot d_*^{-2\mu}$	$L_* \cdot h_*^3 \cdot d_*^2$
Pritisak	p_*	L_*	h_*	h_*	h_*	h_*
Smičući napon	τ_*	L_*	$L_*^{-1} \cdot h_*^2$	$h_*^{\frac{1-2\mu}{\mu+1}}$	$h_*^{1-2\mu} \cdot d_*^{2\mu}$	d_*^{-2}
Sila	F_*	L_*^3	$L_*^2 \cdot h_*$	$L_* \cdot h_*^{\frac{5\mu+2}{\mu+1}}$	$L_* \cdot h_*^{2\mu+2} \cdot d_*^{-2\mu}$	$L_* \cdot h_*^3 \cdot d_*^2$

Napomena: $x_* = y_* \equiv L_*$, $z_* \equiv h_*$; $\mu = \ln(12 h_p/d_p)^{-1}$.

Dodatak E

Razmere fizičkih modela (4)

Veličine	Modeli sa nepokretnim dnom			Modeli sa pokretnim dnom		
	Raz- mera	Nedistor- dovani modeli	Distor- dovani modeli	Potpuna sličnost		Nepotpuna sličnost
				$Fr_* = 1$ $\Theta_* = (d_*)_* = 1$	$Fr_* = 1$ $(d_*)_* \neq 1$	$Fr_* \neq 1$ $(d_*)_* = 1$
Bezdimenzione						
Nagib	$I_{d,*}$	1	$h_* \cdot L_*^{-1}$	$h_*^{\frac{-3\mu}{\mu+1}}$	$h_*^{-2\mu} \cdot d_*^{2\mu}$	$h_*^{-1} \cdot d_*^{-2}$
Koeficijent trenja	λ_*	1	$h_* \cdot L_*^{-1}$	$h_*^{\frac{-3\mu}{\mu+1}}$	$h_*^{-2\mu} \cdot d_*^{2\mu}$	$h_*^{-2\mu} \cdot d_*^{2\mu}$
Frudov broj	Fr_*	1	1	1	1	$h_*^{\mu-1/2} \cdot d_*^{-\mu-1}$
Rejnoldsov broj	Re_*	$L_*^{3/2}$	$h_*^{3/2}$	$h_*^{3/2}$	$h_*^{3/2}$	$h_*^{\mu+1} \cdot d_*^{-\mu-1}$
Šildsov broj	Θ_*	–	–	1	1	1
Re broj zrna	$(Re_*)_*$	$L_*^{3/2}$	$h_*^5 \cdot L_*^{-7/2}$	1	$h_*^{1/2-\mu} \cdot d_*^{\mu+1}$	1
Prečnik zrna	$(d_*)_*$	–	–	1	$h_*^{\frac{1-2\mu}{3}} \cdot d_*^{\frac{2\mu+2}{3}}$	1
Relativna gustina	Δ_*	–	–	$h_*^{\frac{3-6\mu}{2\mu+2}}$	$h_*^{1-2\mu} \cdot d_*^{2\mu-1}$	d_*^{-3}

Napomena: $x_* = y_* \equiv L_*$, $z_* \equiv h_*$; $\mu = \ln(12 h_p/d_p)^{-1}$.

Registar autora

- Ackers, P., 6, 39, 344
Anderson, A.G., 418
- Bagnold, R.A., 271, 336
Barbarossa, N.L., 87
Bernoulli, D., 152
Blench, N.S., 414
Boussinesq, J., 35, 37, 50, 309
Bradley, J.N., 385
Bray, D.I., 59
Brice, J.C., 10
- Chézy, A., 57
Chanson, H., 85
Cunge, J., 138
- Darcy, H.Ph.G., 58
du Boys, P.F.D., 263
- Einstein, H.A., 45, 87, 273, 282, 283,
318, 320, 343
Engelund, F., 39, 87, 343
Exner, F., 356
- Fargue, 18, 402
Froude, W., 77
- Gauckler, Ph.G., 57
Gauss, C.F., 95
Gessler, J., 252
Gončarov, V.N., 269
Gončarov, V.N., 235, 236, 261
Graf, W.H., 334
- Hansen, E., 87, 343
Henderson, F.M., 123
Horton, R.E., 5
- Izbash, S.V., 244, 382
Izzard, C.F., 385
- Karim, M.F., 328, 343
Kennedy, J.F., 85, 328, 343
Komura, S., 229
Kuzmin, I.A., 339, 344
- Lacey, G., 414
Lane, E.W., 24, 415
Laursen, E.M., 85
Lax, P.D., 114
Leopold, L.B., 414, 416
Liu, H.K., 384
- Mahmood, K., 39
Manning, R., 57
Maynard, 39
Meyer-Peter, Muller, 264
Monge, 104
- Nešić, M., 19
Neill, C.R., 236
Nikuradse, J., 38
- Popović, R., 18
Prandtl, L., 35, 48
Preissmann, A., 116, 362, 363
- Reynolds, O., 29, 39
Richardson, P.D., 381, 384
Riemann, B., 108
Rosinski, K.I., 339, 344
Rouse, H., 311, 318
Rozovski, 196, 204

- Saint-Venant, J-C.B., 95
Schoklitsch, A., 11, 387
Shen, H.W., 381
Shields, A., 234, 237, 240, 250
Sternberg, H., 13
Straub, L.G., 264
Strickler, A., 62
Summer, 39
- Šamov, G.I., 235, 236
- van Rijn, L., 39, 83, 85, 86, 269, 283,
318, 326, 343
Velikanov, M.A., 273, 336, 337
von Kármán, T., 40
- Wan, Z., 334
Wang, Z.Y., 334, 371
Weisbach, J., 58
White, R., 39, 344
Wolman, M.G., 416
- Yalin, S., 85, 418
- Znamenska, 81

Registar pojmova

- Abrazija, 13, 214
ADCP uređaj, 290
Agradacija, 13
Akumulacija, 3, 134, 434
Aluvijalne plavine, 21
Aluvijalni otpori, 78, 86
Aluvijalni vodotok, 1, 27
Amplituda
 antidina, 77
 dina, 85
 meandra, 416
 numeričke greške, 114
 skokova zrna, 242
 talasa, 94
Antidine, 76, 77, 85
Aproksimacija konačnim razlikama, 108, 111
Apsolutna rapavost, 37, 41
 ekvivalentna aluvijalna, 86
 ekvivalentna peščana, 38, 39, 46, 84, 245
 mešavine nanosa, 46
 trave, 65
Armirajući sloj, 14, 249, 251, 372, 373
Autokorelacija, 428

Bagerovanje, 391
Batimetrija, 285, 288
Batometar, 347
Beta funkcija, 325
Bifurkacija, 5, 172
Bingamovi fluidi, 335
Bočni preliv, 103
Brejov obrazac, 60

Brzina
 deformacije, 34
 erozije, 369
 fluktuaciona, 30, 36
 kritična, 235, 261
 kritična, smičuća, 331
 logaritamski raspored, 40, 42, 43, 45, 47, 335
 maksimalna, 67, 235, 236
 ometanog taloženja, 334
 pokretanja zrna, 271
 poremećaja, 105, 127, 141
 pri velikoj koncentraciji, 335
 radijalna, u krivini, 196, 198
 raspored po dubini, 37
 raspored po preseku, 53
 slojevitog kretanja nanosa, 263
 smičuća, 33, 58, 233
 srednja profilska, 58
 srednja, po dubini, 46, 50
 srednja, po vremenu, 31
 stepeni raspored, 49
 talasa, 94
 tonjenja, 213, 214, 327, 334
 trenutna, 31
 vučenog nanosa, 331
 zakon deficita, 41, 48
Businesskov koeficijent, 55
Businesskova hipoteza, 50

Darsi-Vajsbahov koeficijent, 58, 330
Darsi-Vajsbahova jednačina, 58
Deformacija korita
 efekti inercije, 371
 erozija, 368

- lokalna, 375
 - nizvodno od brane, 371
 - numeričko rešenje, 362, 364
 - opšta, 355, 359, 436
 - problemi proračuna, 368
 - uprošćene jednačine, 364
 - usled regulacionih radova, 389
 - zasipanje, 356
- Degradacija korita, 371
- Denudacija, 3
- Difuzija
 - numerička, 114
 - turbulentna, 37, 304
 - vučeni nanos, 283
- Digitalni model rečnog korita, 288
- Dimenziona analiza, 64, 214, 231, 377
- Dinamika vodotoka, 23
 - ravnotežno stanje, 24–26, 418
 - stepeni slobode, 24
 - uticajni faktori, 24
- Dine, 76, 85, 301, 358
- Diskretizacija
 - eksplicitna shema, 114
 - implicitna shema, 116
 - pomoću konačnih razlika, 108
- Dužina mešanja, 35, 36, 40, 51, 306
- Dužina prilagodjavanja
 - hidrodinamička, 341
 - psamološka, 341
- Dubina
 - kritična, 158
 - normalna, 70, 158, 372
- Efektivna brzina taloženja, 334
- Efektivni normalni napon, 258
- Ehosonder, 285, 301
- Energija
 - gubitak u krivini, 203
 - kota u čvoru, 189
 - kota u složenom preseku, 157
 - lokalni gubitak, 153, 189
 - minimum gubitka, 420
 - nagib linije, 33, 99
 - specifična, 159
 - suspendovanja, 337
 - toka, formiranje meandra, 15
 - toka, podela, 80
- Entropija, 25
- Erozija
 - dubinska, 211
 - fluvijalna, 3
 - glacijalna, 3
 - lokalna, 376, 379, 380, 383, 384, 387, 388
 - nizvodno od brane, 371
 - opšta, 368
 - pluvijalna, 3, 211
 - regresivna, 3, 375
 - tla, površinskim oticajem, 211
 - u čistoj vodi, 376, 384
 - usled regulacionih radova, 375
- Eroziona terminanta, 3
- Evakuacioni objekti, 134
- Faktor oblika zrna, 214
- Faktor podrelaksacije, 190
- Faktor sferičnosti srna, 214
- Faktor sinusoidnosti, 10, 25, 101
- Fargovi zakoni, 18
- Filtraciona metoda, 351
- Fizički modeli, 395
 - efekti razmere, 411
 - Frudova sličnost, 397, 399, 411
 - nepotpuna sličnost, 407
 - potpuna sličnost, 402
 - rapavost, 400
 - razmere, 396
 - rečni, sa nepokretnim dnom, 397
 - rečni, sa pokretnim dnom, 402
 - Rejnoldsova sličnost, 397
 - vrste sličnosti, 396
 - stepen distorzije, 399
- Fluks suspendovanog nanosa, 310
- Fluktuacije, 30, 36
- Frudov broj, 85, 159, 162, 181, 377, 384
- Funkcija skoka, 154, 166

- Geometrija
 hidraulička, 413, 418
 poprečnog preseka, 155
- Geometrijska standardna devijacija, 225
- Geomorfologija, 1
 ciklus, 3
 procesi, 24
 promenljive, 5, 8, 24
 vremenska razmera, 6, 8
- GPS uređaj, 287
- Granična geomorfološka stanja, 24
- Granična nosivost, 335
- Granični sloj, 29, 30
- Granični uslovi
 eksplicitna shema, 115
 geometrijski, 361
 implicitna shema, 118
 kritična dubina, 166
 opšta deformacija, 361
 spoljašnji, 102, 361
 unutrašnji, 102, 361
- Granulometrijski sastav, 212, 219, 225, 249, 251, 253, 372
- Gustina mešavine, 305, 334, 337
- Helikoidno strujanje, 18, 191
- Hidraulička geometrija
 definicija, 9
 oblici u planu, 9
 teorija režima, 27
- Hidraulički skok, 149, 154, 163
- Hidrometijsko krilo, 289
- Hvatači sa bocom, 347
- Hvatači za vučeni nanos, 291
- Hvatači-integratori, 347
- Inercija u pronosu nanosa, 371
- Inercijalna sila (videti Sile)
- Infleksija, 18
- Integracija
 brzine, po dubini, 39, 40, 46
 brzine, po vremenu, 31
 brzine, u radialnom pravcu, 195
- duž karakteristika, 107
- energije, po dužini toka, 152
- nanosa, po dužini toka, 300
- nanosa, po dubini, 319
- nanosa, po preseku, 296
- nanosa, po vremenu, 299
- napona u radialnom pravcu, 202
- poprečnog nagiba nivoa, 198
- sile na mostovski stub, 186
- Intenzitet smicanja, 87, 234
- Intenzitet transporta, 234
- Inundacije, 99, 101, 159, 182, 209
- Izbašov obrazac, 244
- Izokinetičko zahvatanje nanosa, 347
- Izotahe, 53
- Izvorni član, 108, 310
- Jednačine
 Šezijeve, 57
 algebarske, sistem, 118, 163, 190, 361
 Bernulijeva, 153
 Darsi-Vajsbahova, 58
 difuzionog talasa, 128
 diskretizaciona, 112
 Eksnerova, 363
 karakteristika, 105
 kinematičkog talasa, 126
 kontinuiteta za nanos, 355, 365
 konvekciono-difuzionog, 129
 kvazi-ustaljenog tečenja, 130
 Maningova, 57, 153
 matrične, 118
 metode Muskingum, 137
 Navie-Stoksove, 216
 neustaljenog tečenja, 95, 99, 123, 143, 363
 održanja energije, 102, 152, 170, 187
 održanja količine kretanja, 97, 152, 193
 održanja mase, 95, 152, 188, 192, 307
 ravnoteže sila, 170

- Rejnoldsove, 34, 308
 San Venanove, 95, 361
 strujanja u krivini, 195
 ustaljenog tečenja, 152
- Kalibracija hvatača za nanos, 293, 347
- Kanal
 rasteretni, 393
 trapeznog preseka, 52, 64, 67, 70
 vodozahvatni, 205
 zatravljen, 64, 67
- Karmanova konstanta, 40, 48, 196, 330, 335
- Koeficijent
 asimetrije, 225
 autokorelacije, 429
 Darsi-Vajsbahov (videti Darsi-Vajsbahov koeficijent)
 difuzioni, 306, 309
 hidrodinamičke sile, 242
 intenziteta vrtloženja, 335
 kinematičke viskoznosti, 30, 218
 kinetičke energije, 54, 157
 količine kretanja, 55, 101, 157
 korekcije Šildsovog broja, 245, 248, 249
 lokalnog gubitka, 190
 Maningov (videti Maningov koeficijent)
 neravnomernosti brzine po dubini, 195
 otpora deonice, 71, 166
 otpora mostovskih stubova, 185
 otpora zrna, 215
 rapavosti, ekvivalentni, 70, 71
 rasporeda tangencijalnog napona, 52
 redukcioni, koncentracije, 352
 snage vrtložnog traga, 47–49, 335
 Šezijev (videti Šezijev koeficijent)
 tangencijalnog napona, bezdimenzioni, 58
 težinski, 115, 136, 143
 transportne sposobnosti, 337, 338
 trenja, 58, 63, 71, 230, 330
 turbulentne viskoznosti, 35, 50
 u izrazu Gončarova, 262
 uniformnosti krupnoće zrna, 225
 viskoznosti, 334
- Konačne razlike, 114, 116, 365
 centralne, 110
 eksplicitne, 111
 implicitne, 112
 unapred, 109
 unazad, 109
- Koncentracija
 čestica, 219
 izmerena, srednja, 347
 masena, 258
 metode merenja, 351
 raspored po dubini, 309
 referentna, 318, 322, 324, 331
 težinska, 258
 trenutna, 305
 zapreminska, 258, 304
- Konfiguracija rečnog dna, 14, 75
- Konturni uslovi, 102
- Konvergencija, 112
- Konzistencija računске sheme, 112
- Korelacije protoka vode i nanosa, 353
- Koriolisov koeficijent, 54
- Kritična brzina, 261
- Kritični nagib dna, 149
- Kritični tangencijalni napon, 254, 263
- Kriva frekvencije, 221, 250, 424
- Kriva protoka, 87, 89, 124, 125
- Kriva zapremine, 129, 130, 136
- Krivina
 helikoidno strujanje, 201
 oblik poprečnog preseka, 18
 poluprečnik, 18, 25, 434
 samoprosecanje, 11, 19
 strujanje, 18
 zakrivljenost, 18
- Kurantov broj, 115, 143
- Linearna kombinacija, 104, 136
- Linijski otpori

- aluvijalni, 78, 368
- u koritu sa nepokretnim dnom, 57, 99
- usled vegetacije, 63
- uslov maksimuma, 420
- Lokalna deformacija (videti Deformacija korita)
- Lokalni otpori, 153, 189
- Lokalno ubrzanje, 123
- Maningov koeficijent, 58, 62, 63, 70, 81, 87
- Maningova jednačina, 57, 99
- Meandri
 - mehanizmi formiranja, 14
 - migracija, 19
 - oblici, 18
 - pomeranje, 11
 - samoprosecanje, 19
 - spektralna analiza, 430
 - teorija režima, 416
 - tipovi, 15
- Metoda
 - Ajnštajna i Barbarose, 87
 - Ajnštajna, 273, 320
 - Akersa i Vajta, 344
 - Bagnolda, 336
 - di Boa, 263
 - Engelunda i Hansena, 87, 343, 366
 - etapnog rešavanja, 363
 - fan Rejna, 269, 326
 - filtracije uzorka, 351
 - frakcionog taloženja, 227
 - isparavanja uzorka, 351
 - karakteristika, 104
 - Karima i Kenedija, 328
 - konačnih elemenata, 104
 - konačnih razlika, 104, 108, 114
 - korelacije, 347, 350, 353, 414, 423
 - kumulativnog taloženja, 227
 - kvazi-ustaljenog tečenja, 129
 - Laks-Vendrof, 114
 - linearizacije, 121
 - Majer-Peter i Milera, 264, 366
 - Maskingam, 136
 - Maskingam-Kenž, 138
 - merenja suspendovanog nanosa, 346
 - merenja vučenog nanosa, 285, 301
 - Njutn-Rafsona, 119, 190
 - polovljenja intervala, 162
 - Prajsmana, 116, 362, 363
 - proračuna deformacije korita, 360, 375
 - proračuna pronosa, 260, 319, 342
 - snimanja nanosa, 302
 - statističke analize, 223, 422
 - sukcesivne zamene, 119, 162
 - Velikanova, 337
 - zvučne detekcije, 301
- Model
 - difuzionog talasa, 128
 - dinamičkog talasa, 123
 - kinematičkog talasa, 126
 - morfološki, statistički, 422
 - opšte deformacije, 360
 - pokretanja nanosa, 250
 - turbulencije, 35, 309
- Morfologija (videti Rečna morfologija)
- Most
 - sekundarno strujanje, 205
 - stubovi, 172, 174, 176, 178, 184, 185, 206, 376, 379
 - suženje, 172, 182, 206
 - uspor, 173, 181, 182
 - zaštita stubova, 382
- Mreža
 - hidrografska, 2, 5
 - Hortonova, 5
 - konačnih razlika, 111
 - otvorenih tokova, 186
 - računska, 107
- Nabori, 76
- Nanos
 - fizička svojstva, 212, 219

- granulometrijski sastav, 219, 221, 229, 249, 251
- gustina, 213
- karakteristični prečnici, 213
- klasifikacija po krupnoći, 219
- koncentracija, 258, 304, 351
- koritoformirajući, 8, 211
- mešavina, 46, 219, 249, 278
- metode merenja, 301, 346, 351
- nastanak i podela, 211
- oblik zrna, 214
- podela po frakcijama, 221, 223, 249, 266, 277
- pokretanje, 231
- poroznost, 229
- prosejavanje, 221
- segregacija, 14, 249
- suspendovani, 211
- tačnost merenja, 350
- transportni kapacitet, 258
- tranzitni, 211, 343, 346
- ugao unutrašnjeg trenja, 230
- ukupni (totalni), 342
- uslov najvećeg pronosa, 420
- vučeni, 211
- zahvatanje uzorka, 219, 293, 296
- zapreminska masa, 230
- Nanosne formacije, 71, 75, 283
 - antidine, 76
 - dimenzije, 85
 - dine, 76, 301, 358
 - nabori, 76
 - plavine, 21
 - podela, 80
- Nenjutnovski fluidi, 335
- Neustaljeni tokovi
 - podela, 93
 - uprošćene metode, 123, 129
- Niski plovni nivo, 435
- Njutnovski fluidi, 305
- Normalna raspodela, 223, 250
- Numerička disipacija, 114
- Numerička disperzija, 114
- Numerička stabilnost, 112
- Obala
 - erozija, 8, 9, 19
 - konkavna, 18, 198, 205, 418
 - konveksna, 18, 196
 - obrasla vegetacijom, 11
 - stabilna, 8
 - stabilnost zrna, 247
- Oblasti zavisnosti i uticaja, 106
- Ometano taloženje, 219, 334
- Osrednjavanje energije, 152
- Otpori oblika, 78
- Parametar pokretljivosti zrna, 345
- Početni uslovi, 115, 361
- Poprečni nagib nivoa, 195, 197, 198
- Poprečni profil
 - deformacija, 14
 - geometrija, 155, 366
 - morfološki razvoj, 431
 - oblik, 14
 - oblik u krivini, 18
 - podela na segmente, 101, 155
 - regulisanog korita, 434
 - teorija režima, 414
- Poroznost, 229, 356
- Prandtl-Karmanov zakon, 48
- Prečnik smicanja, 83, 239
- Prelazni sloj, 40
- Prirodni vodotoci
 - linije nivoa, 149
- Pronos nanosa, 212
 - (videti Nanos)
 - definicija, 258, 319
 - morfološke analize, 431
 - srednji višegodišnji, 421, 432
 - teorija režima, 415
 - uslov maksimuma, 420
- Prosecanje krivina, 389
- Protok
 - dominantni, 6, 371, 418
 - naše reke, 7
 - povećanje, 393
 - svetske reke, 7
 - u složenom koritu, 157

- Psamologija, 212
- Računska shema
 difuzivna, 115
 eksplicitna, 113, 115
 implicitna, 113, 116
 stabilnost, 115, 143
 tačnost, 114
 univerzalnost, 114
- Računski razmak profila, 101
- Racionalna teorija režima, 418
- Radioaktivni obeleživači, 298, 351
- Rapavost
 apsolutna (videti Apsolutna rapavost)
 relativna, 50, 65, 85
- Raspored
 brzine, po dubini, 37, 42, 47, 49, 87, 330, 335
 brzine, po preseku, 53
 difuzionog koeficijenta, po dubini, 307
 dužine mešanja, po dubini, 51
 hidrostatičkog pritiska, 194
 koncentracije, po dubini, 309, 311, 313
 radijalne brzine, po dubini, 196
 radijalne brzine, po preseku, 200
 radijalnog napona, po dubini, 202
 rapavosti, po preseku, 69
 tangencijalnog napona, po dubini, 32
 tangencijalnog napona, po preseku, 52
 turbulentne viskoznosti, po dubini, 50, 52
- Rečna delta, 22
- Rečna dolina, 3, 8
- Rečna krivina (vidi Krivina), 191
- Rečna morfologija
 širina vodenog ogleдалa, 424
 analiza plovnosti, 435
 autokorelacija, 428
 efekti regulacionih radova, 436
 hipoteze ekstremnih uslova, 419
 izbor regulacionih elemenata, 434
 morfološka makroskala, 429
 morfološki ciklus, 431
 podloge, 423
 pronos vučenog nanosa, 431
 stabilno korito, 418
 statistička analiza, 422, 435
 teorija režima, 413, 414
 uticajni faktori, 413
 zakrivljenost trase, 424
- Rečna ušća, 21, 170
- Rečne terase, 3
- Rečni nanos (videti Nanos)
- Rečno korito
 široko pravougaono, 54, 108
 šljunkovito, 8, 14
 bagerovanje, 391
 dinamička ravnoteža, 384
 donji tok, 4, 13
 gornji tok, 3
 kriva zapremine, 123, 129, 130, 136
 morfološka analiza, 434
 neprizmatično, 71
 oblik u krivini, 18
 opšta deformacija, 355
 peskovito, 8, 14
 podela zapremine, 137
 proširenje, 390
 regulisano, 436
 složeno, 99, 156, 159, 166, 181
 srednji tok, 3, 13
 stabilno, 24, 418
 statička ravnoteža, 384
 u režimu, 414
- Režim tečenja, 162
- Referentna koncentracija, 330
- Referentno odstojanje, 42, 271, 318, 327, 330
- Regulacione gradjevine, 435
- Regulacioni radovi, 436
- Rejnoldsov broj, 39, 42, 234, 237, 242, 243, 377

- Rejnoldsova analogija, 306, 307, 309
 Relativna rapavost, 65
 Reološke zavisnosti, 334
 Retenzija, 103, 134
 Rimanove invarijante, 108
- Saltaciono kretanje, 242, 257
 Samopopločavanje korita, 249, 372
 Schoklitsch, A., 11, 387
 Sekundarna strujanja, 283
 Sekundarno strujanje
 definicija, 191
 helikoidno, 201, 205
 razni vidovi, 207
 u krivini, 18, 191, 418
 u složenom koritu, 209
 uticaj na formiranje korita, 15
- Sila
 centrifugalna, 198
 hidrodinamička, 217, 241, 245, 247
 inercijalna, 32, 154, 171
 na mostovski stub, 184
 na zrno, 217, 241
 površinska, 98, 193
 pritiska, 98, 154, 171, 198
 specifična, 154
 težine, 171, 217, 243
 trenja, 33, 98, 154, 171, 243, 247
 usled neprizmatičnosti, 98
 zapreminska, 33, 98, 193
- Sliv, 3
 Slučajni proces, 32, 37
 Snaga toka, 271, 419
 Spektralna analiza, 430
 Sprudovi, 75
 lokalni, 11
 na ušćima, 75
 naizmenični, 10, 75
 pojedinačni, 75
 poprečni, 75
 u krivinama, 11
 usamljeni, 18
- Standardna devijacija, 31, 223, 305
- Standardna normalna raspodela, 251
 Statističke analize
 krupnoće nanosa, 223
 morfoloških veličina, 422
 rezultata prosejavanja, 221
- Stohastički model
 morfologije korita, 422
 pokretanja nanosa, 250
 pronosa vučenog nanosa, 273
 zakrivljenosti trase, 25
- Struhalov broj, 206
 Sumarne krive, 221
 Summer, 39
 Suspendovani nanos
 merenje, 347
 neravnotežni uslovi, 341
 pronos, 319, 327
 transportni kapacitet, 319
 tranzitni, 8, 211, 415
- Suspenzija
 homogena, 219
 početak formiranja, 255
- Suspenzioni broj, 311, 314, 327
- Šezijev koeficijent, 58, 61, 84, 196, 203
 Šezijeva jednačina, 57
 Šildsov broj, 234, 237, 249
- Tačnost
 aproksimacije izvoda, 109
 merenja nanosa, 260, 298
 računske sheme, 114
- Tajlorov red, 108, 112, 141, 190, 273
 Talas
 brzina prostiranja, 127, 141
 difuzioni, 128
 dinamički, 123
 kinematički, 126, 143
 peščani, 77
 poplavni, 93, 124, 134
 pozitivni, negativni, 94
 sa strmim čelom, 93
 u plitkoj vodi, 94

- Talveg, 10, 18, 25, 101
- Tangencijalni napon
 grafički prikaz, 34
 granični, 335
 komponente, 34
 na dnu, 33
 podela, 80, 276
 raspored po dubini, 32
 raspored po preseku, 52
 turbulentni, 34
 viskozni, 34
- Teorija režima, 26, 413, 414, 423
- Tokovi
 ravanski, 54, 143
- Topologija hidrografske mreže, 5
- Transportni kapacitet, 418
 suspendovani nanos, 319
 suspendovanog nanosa, 339
 vučeni nanos, 258, 432
 vučni nanos, 375
- Trenje (videti Linijski otpori)
- Turbulencija
 difuzija, 299, 304, 308
 disipacija energije, 304
 disperzija, 299
 fluktuacije, 30
 granični sloj, 38, 40, 41
 modeliranje, 35
 turbulentni naponi, 35
 uticaj na brzinu tonjenja, 219
- Ugao
 centralni, 434
 hidrodinamičke sile, 241
 kosine obale, 247
 osovine mosta, 176
 smičuće sile u krivni, 203
 unutrašnjeg trenja, 230
 uzdužnog nagiba dna, 33, 243
 vektora brzine u krivini, 201
- Uslovi
 plovidbeni, 436
 pokretanja nanosa, 241
 ravnotežnog pronosa, 310
- Ustaljeni tokovi
 mešoviti režim, 163
 podela, 149
 računski postupci, 162
- Uzdužni profil, 11, 18, 149
 aluvijalnih vodotoka, 4
 plovnih širina/dubina, 435
 ravnotežni, 374
 teorija režima, 414
- Vakuumni hvatači, 349
- Varijansa, 31
- Vegetacija, 8, 14, 63, 65, 71, 416
- Viskozni podsloj, 30, 35, 37, 39, 42
- Viskoznost
 kinematička, 30, 218
 molekularna, mešavine, 334
 turbulentna (vrtložna), 35
- Viskoznost mešavine, 334
- Vododelnica, 3
- Vodotoci
 aluvijalni, 1, 5
 bujični, 2, 3
 dinamika, 23
 klasifikacija, 10, 15
 meandrirajući, 9, 10, 14, 24, 26, 416, 430
 mladi, 2
 planinski, 2
 plovni, 435
 podela, 2
 pravolinijski, 9, 10, 24, 26
 prirodni, 72
 ravničarski, 2
 razudjeni, 9
 stari, 2
 uredjenje, 434
 zreli, 2
- Vodozahvat, 204
- Vremenska razmera
 geološka, 8
 hidraulička, 8
- Vučeni nanos, 211
 energetski pristup, 271

koncentracija, 258
mehanički hvatači, 291
merenje, 285
način kretanja, 242, 257
obeleživači, 297
pokretni sloj, 257, 331
problemi izučavanja, 281
pronos, 258, 260, 262, 277, 296
transportni kapacitet, 258

Zaštita od kamenog nabačaja, 383
Zapreminska masa, 230
Zasipanje korita (videti Deformacija
korita)



Beleška o autoru. Dr Miodrag Jovanović, redovni profesor Gradjevinskog fakulteta u Beogradu u penziji, predavao je na osnovnim studijama predmete Regulacija reka i Plovni putevi i pristaništa, a na doktorskim studijama, predmete Numeričke metode u hidrotehnici, Transportni procesi u hidrotehnici i ekologiji i Zaštita od poplava. Autor je velikog broja naučnih i stručnih radova. Bio je mentor više magistarskih teza i doktorskih disertacija i višegodišnji šef katedre za hidrotehniku i vodno ekološko inženjerstvo Gradjevinskog fakulteta u Beogradu. Član je Akademije inženjerskih nauka Srbije i niza međunarodnih i nacionalnih

www.grf.bg.ac.rs/~mjovanovic/

O knjizi. „...U ovo vreme se struka hidrotehničkog inženjerstva sve više razdvaja u dve komplementarne grane - "hidro-informatičare" koji razvijaju metode i pripremaju sve složenije računarske programe i "hidroinženjere" koji primenjuju sredstva za rešavanje praktičnih inženjerskih zadataka. Kao posledica, oni prvi sve manje imaju neposrednog iskustva, dok onim drugima sve više manjka znanje osnovnih teorijskih stavova. Velika vrlina knjige Profesora M. Jovanovića je u tome što se podjednako obraća i jednoj i drugoj stručnoj kategoriji: budućim i sadašnjim "hidroinformatičarima" daje obrazloženje tehničkog zadatka koga treba rešavati, a "hidroinženjerima" ukazuje na osnove na kojima se zasnivaju hidroinformatičke metode. Takav pristup od neobične je važnosti već u sadašnjem trenutku, a sasvim je izvesno, postaće sve značajnijim svakom godinom koja prolazi ..."

Prof. Stevan Bruk

