



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ - ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ
UNIVERSITY OF BELGRADE - FACULTY OF CIVIL ENGINEERING



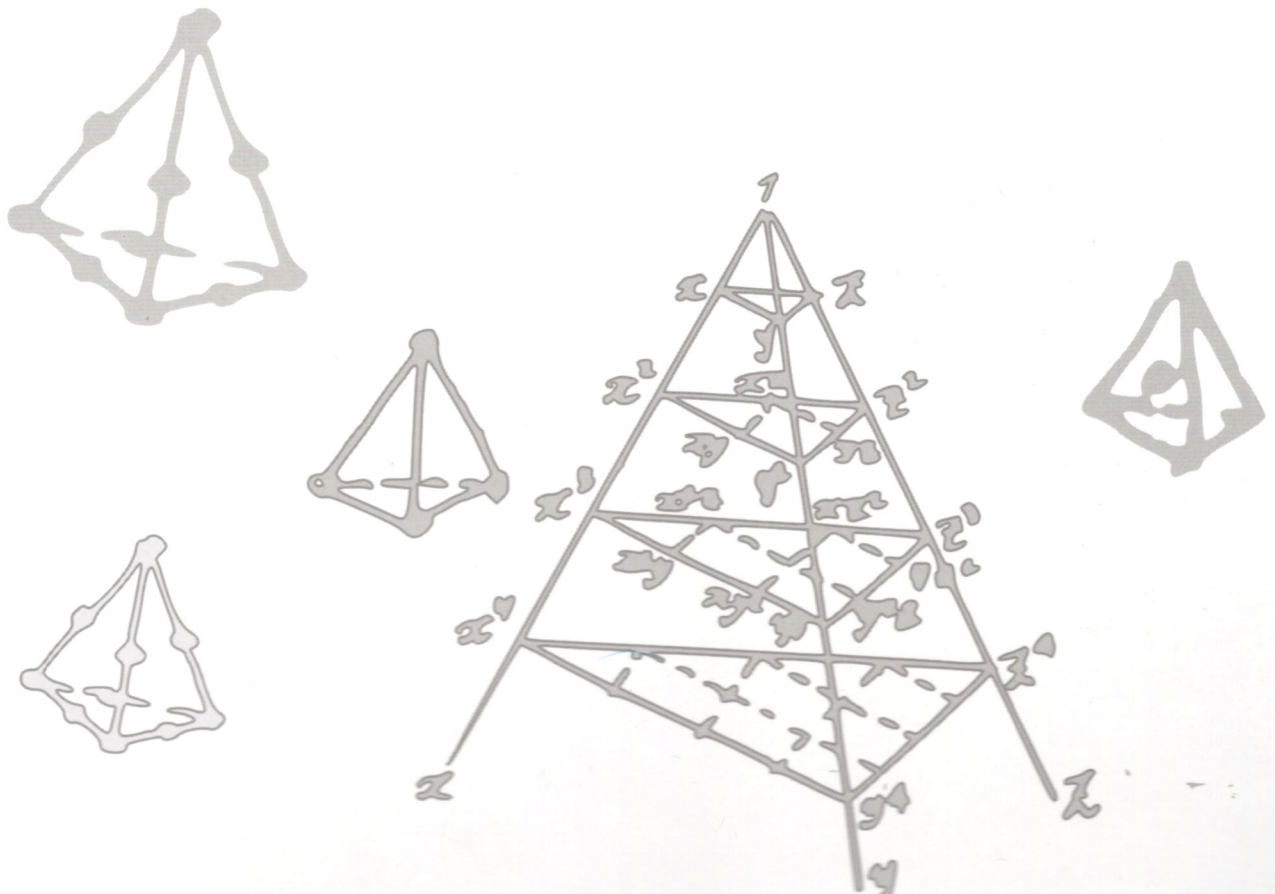
УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ - ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ
UNIVERSITY OF MONTENEGRO - FACULTY OF CIVIL ENGINEERING



АКАДЕМИЈА ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА СРБИЈЕ
ACADEMY OF ENGINEERING SCIENCES OF SERBIA

ТЕОРИЈА ГРАЂЕВИНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА

THEORY OF CIVIL ENGINEERING STRUCTURES





УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ - ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ
UNIVERSITY OF BELGRADE - FACULTY OF CIVIL ENGINEERING



УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ - ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ
UNIVERSITY OF MONTENEGRO - FACULTY OF CIVIL ENGINEERING



АКАДЕМИЈА ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА СРБИЈЕ
ACADEMY OF ENGINEERING SCIENCES OF SERBIA

ТЕОРИЈА ГРАЂЕВИНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА

*Монографија посвећена успомени на
професора Миодрага Секуловића*

THEORY OF CIVIL ENGINEERING STRUCTURES

*Monograph dedicated to the memory of
Professor Miodrag Sekulović*

Уредници / Editors

Проф. др Живојин Прашчевић

Проф. др Раденко Пејовић

В. проф. др Ратко Салатић

В. проф. др Марија Нефовска-Даниловић

Београд, 2019.

Издавачи / Publishers

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ - ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ
UNIVERSITY OF BELGRADE - FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ - ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ
UNIVERSITY OF MONTENEGRO - FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

АКАДЕМИЈА ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА СРБИЈЕ
ACADEMY OF ENGINEERING SCIENCES OF SERBIA

За издавача / For the publisher

Проф. др Владан Кузмановић
Проф. др Марина Ракочевић
Проф. др Бранко Ковачевић

Уредници / Editors

Проф. др Живојин Прашчевић
Проф. др Раденко Пејовић
В. проф. др Ратко Салатић
В. проф. др Марија Нефовска-Даниловић

Рецензенти / Reviewers

Проф. др Ђорђе Лађиновић
Проф. др Александар Прокић

Техничка припрема / Technical preparation

В. проф. др Марија Нефовска-Даниловић
Доц. др Мирослав Марјановић
Емилија Дамњановић
Марија Милојевић

Дизајн корица / Cover design

Доц. др Мирослав Марјановић

Штампа / Printing

Бирограф, Земун

Тираж 300 примерака

Number of copies 300

ISBN 978-86-7518-208-5

САДРЖАЈ / CONTENTS

Миодраг Секуловић – живот и дело

Живојин Прашчевић, Бранислав Пујевић,
Марија Нефовска-Даниловић..... iii

Miodrag Sekulović – life and work

Živojin Praščević, Branislav Pujević,
Marija Nefovska-Danilović..... ix

Нелинеарна анализа челичних рамова са полукрутим везама

Ратко Салатић..... 1

Proposal of optimal model for nonlinear behavior of reinforced concrete frames

Dušan Kovačević..... 11

Оквири са испуном од стакла као укрућење конструкција изложених земљотресу

Рагислав Мандић, Миодраг Несторовић,
Јефто Терзовић..... 23

Енергетски баланс високе лучне бетонске бране „Гранчарево“ при дејству земљотреса

Раденко Пејовић, Радивоје Мрдак,
Јелена Пејовић, Нина Сердар, Иван Мрдак..... 29

Low cycle fatigue in seismically isolated regular bridges

Dragan Milašinović..... 39

Изогеометријски приступ у анализи слободних вибрација просторних Бернули-Ојлерових гредних носача

Милош Јочковић, Глигор Раденковић,
Марија Нефовска-Даниловић..... 47

Динамичка флексибилност тракастог темеља на полупростору

Марко Радишић, Мира Петронијевић..... 55

Примена методе динамичке крутости у анализи слободних вибрација отворених кружних цилиндричних љуски

Марија Нефовска-Даниловић,
Невенка Коларевић..... 65

Damping-based strategies for designing sustainable and serviceable lightweight pedestrian bridges: a case study

Stana Živanović, Ivan M. Díaz,
Carlos M. C. Renedo, Justin Russell..... 73

Mathematical model of asymmetric jumping loading

Vitomir Racić..... 83

Bending analysis of cross-laminated timber (CLT) panels using layered finite elements

Miroslav Marjanović, Emilija Damjanović..... 91

Нелинеарна анализа композитних плоча применом коначног елемента континуума

Марина Тетковић..... 101

Тачна и приближне методе прорачуна спрегнутих греда од челика и бетона

Светлана М. Костић,
Биљана Деретић-Стојановић..... 113

Примјена неуронске мреже за израду прогнозног модела за одређивање угиба и нормалних напона квадратних слојевитих композитних плоча

Марина Ракочевић, Милош Кнежевић,
Ненад Иванишевић..... 121

Прорачун стабилности оквирних носача

Станко Ђорић..... 135

Примјена тачне матрице крутости код анализе просторних линијских носача по теорији другог реда

Љиљана Жугић, Станко Брчић,
Олга Мијушковић, Биљана Шћепановић..... 143

Анализа проблема стабилности и интерактивних дијаграма плоча услед дејства комбинованог оптерећења у равни плоче

Олга Мијушковић, Љиљана Жугић,
Биљана Шћепановић, Бранислав Ђорић..... 153

Станко ЂОРИЋ

ПРОРАЧУН СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА

STABILITY CALCULATION OF THE FRAME STRUCTURES

Станко ЂОРИЋ, дипл. инж. грађ.

доцент Грађевинског факултета Универзитета у Београду

Рођен је 1974. године. Дипломирао је 1999, магистрирао 2006. и докторирао 2013. године на Грађевинском факултету у Београду. Доцент је на групи предмета Техничке механике. Поља научног рада: стабилност конструкција, енергетска ефикасност у зградарству.

Резиме

Последњих неколико деценија значајно су се унапредила сазнања у вези прорачуна стабилности оквирних носача. Зато је у овом раду дат преглед поступака из ове области. Приказане су традиционалне методе које се базирају на теорији изолованог штапа, али и савремене методе које се примењују методу коначних елемената. Посебно је истраживан феномен губитка стабилности оквирних носача у еласто-пластичној области. Тако је нумеричка анализа обављена применом методе тангентног модула, што значи да је константан модул еластичности у матрици крутости замењен тангентним модулом који прати промену крутости штапа у нееластичној области. Матрице крутости су изведене коришћењем тригонометријских интерполационих функција које се односе на тачно решење диференцијалне једначине савијања штапа према теорији другог реда. Приказани прорачун се заснива на анализи глобалне стабилности оквирних носача.

Кључне речи: стабилност конструкција, извијање у нееластичној области, тангентни модул

Summary

In recent decades, there has been a drastic improvement in knowledge about stability analysis of the frame structures. So, this paper presents an overview of the calculation procedures in this field. Traditional methods based on the member that is "isolated" from the structure are presented, as well as modern approaches that use the FEM. Special attention is given to the stability analysis of steel frames in the inelastic domain. In this analysis, the concept of the tangent modulus theory is applied for the numerical investigation. Corresponding stiffness matrices were formulated according to the second-order theory, i.e. they are based upon the trigonometric and hyperbolic interpolation functions of normal forces. The calculation algorithm is based on the global stability analysis of the considered frames, which means that the collapse of the structure occurs when the most loaded columns reach their stability limit.

Keywords: stability of structures, inelastic buckling, tangent modulus

1. УВОД

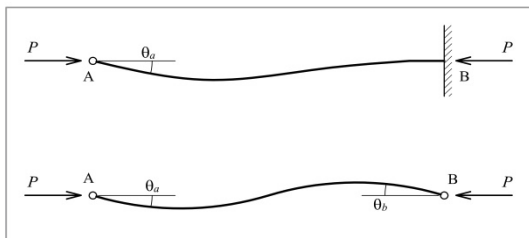
Прорачун стубова оквирних носача захтева испитивање феномена њихове стабилности. Доминантни напони притиска могу проузроковати нестабилност конструкције, губитак њене носивости и на крају колапс конструкције, чак и у случајевима код нису прекорачени допуштени напони. Зато прорачун таквих конструкција, посебно узимајући у обзир њихову стабилност, захтева примену сложених нумеричких метода.

2. ДОСАДАШЊА ИСТРАЖИВАЊА У ОБЛАСТИ СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА

2.1. Стабилност изолованих штапова

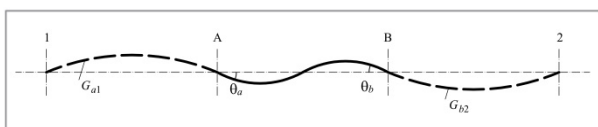
Изучавањем проблема стабилности аксијално притиснутих штапова први се детаљно бавио Euler још средином 18. века. Његова решења, као и истраживања многих других аутора углавном су се заснивала на решавању диференцијалних једначина извијања штапа

изведених према теорији другог реда [1]. Касније, за случај прорачуна сложенијих конструкција истраживачи су вршили одређена упрошћења. Тако су на пример извршили поделу на системе са непомерљивим и померљивим чворовима.



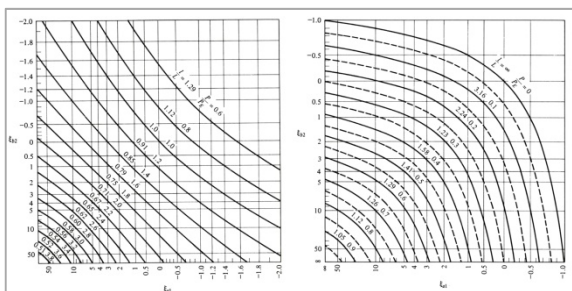
Слика 1. Штапови са непомерљивим и померљивим чворовима

Такође, посебно су анализирани и штапови са еластичним укљештењима на једном или оба краја, и то у комбинацији са еластичним ослонцима или без њих. На Сlici 2 су еластични ослонци приказани преко елемената који замењују утицај конструкције на издвојен штап АВ.



Слика 2. Еластично укљештен штап АВ преко суседних елемената А1 и В2

Нумерички изрази и графички приказ добијених резултата за критично оптерећење дати су, на пример, у [1], као и у препорукама Европске комисије за челичне конструкције [2]. На Сlici 3 су приказани дијаграми који су коришћени за одређивање критичне силе, односно ефективне дужине извијања анализираних штапова. При томе се бедимензиони коефицијенти ξ_{a1} и ξ_{b2} функција крутости стубова и греда који су везани у посматраном чвору.



Слика 3. Критично оптерећење еластично ослоњеног штапа са непомерљивим и померљивим чворовима [1]

Оваква упрошћена решења послужила су затим за формулисање поступака прорачуна вишеспратних оквира. Методе које се најчешће користе у том случају су прорачун коришћењем једначина обртања (slope deflection equations) и коришћењем израза за ротациону крутост (stiffness distribution equations) [1,3].

Наведени поступци могу да се примене за прорачун сложенијих вишеспратних оквирих конструкција. Уколико је то могуће, прво се предлаже да се анализа таквих оквира са више поља сведе на прорачун њима еквивалентних оквира са једним пољем [4,5]. Међутим, често због различитих димензија стубова и ригли, као и различитог оптерећења, вишеспратни оквири са више поља не могу да се замене једним еквивалентним оквиром и да се на тај начин одреди њихово критично оптерећење. Уместо тога, овакви проблеми се могу решити применом енергетског поступка [6]. У том случају вертикална оптерећења у стубовима се замењују одговарајућим хоризонталним силама. Тада се применом линеарне анализе одређује хоризонтално померање сваке етаже и на основу тих резултата је могуће израчунати критично оптерећење читаве конструкције.

Наведена теорија прорачуна изолованог штапа, примењена је како у националним, тако и у европским прописима за прорачун стабилности челични оквира [7-9]. Ти прорачуни се заснивају одређивању коефицијента ефективне дужине извијања k , а на основу њега и носивости читавог носача. Међутим, примена ових прописа указала је да такав прорачун у појединим случајевима доводи до грешака у одређивању коефицијента k , с обзиром да је у питању приближан прорачун [10], тј. зато што се посматрани аксијално притиснути елемент посматра као да је „издвојен“ из конструкције. То значи да се не узима у обзир крутост читаве конструкције, већ само крутост стубова и греда које су везане за њега, а такође на коначан резултат не утиче ни интезитет аксијалне силе у том елементу. Исто тако и у [11] се сугерише да не постоји потврда зависности између анализе „издвојеног“ елемента и елемента који је саставни део носача. Због тога се у последње време чине напори како би се побољшале ове приближне методе прорачуна. Треба споменути истраживање [12] које је имало за циљ да се унапреде улазни параметри који дефинишу крутост рамовског носача, а која се користи као гранични услов при анализи извијања стубова.

2.2. Метода коначних елемената

Метода коначних елемената се данас сматра једном од најефикаснијих нумеричких метода за инжењерске прорачуне, укључујући и оне из домена стабилности конструкција. Самим тим она је и широко примењена код савремених комерцијалних програма који решавају овакве проблеме. Као резултат бројних истраживања, нпр. [13,14] формулисан је стандардни матрични поступак за нумерички прорачун стабилности оквирних носача, који ће овде укратко бити приказан.

Као што је познато, у линеарној теорији првог реда матрица крутости коначног елемента зависи од геометрије елемента и од механичких карактеристика материјала. Кад је у питању проблем стабилности, он не може да се реши према теорији првог реда и потребно је спровести прорачун према теорији другог реда. То има за последицу да је неопходно у прорачун увести матрицу крутости која зависи и од аксијалних сила. Уобичајено упрошћење у овом прорачуну према теорији другог реда је да се проблем аксијалног напрезања и проблем савијања штапа дефинишу независно један од другог. То омогућује да се и одређивање матрице аксијалне и трансверзалне крутости штапа може разматрати раздвојено, као два међусобно независна проблема. Показало се да се до погодног израза за наведене матрице може доћи ако се функције промене померања $u(x)$ и $v(x)$ дуж штапа претпоставе у облику полинома. При томе се померање $u(x)$ у правцу осе штапа описује полиномом првог степена, а померање нормално на правац штапа $v(x)$ полиномом трећег степена.

$$u(x) = b_1 + b_2 x, \quad (1)$$

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (2)$$

Горњи изрази представљају решење диференцијалних једначина за аксијално напрезање и савијање штапа према теорији првог реда. Уобичајеним поступком који се користи у методи коначних елемената, могуће је извести везу између матрице крутости штапа и одговарајућих генералисаних померања q у случају аксијално притиснутог штапа:

$$(K + K_G) \cdot q = 0 \quad (3)$$

Матрична једначина (3) формално је иста као и у теорији првог реда с том разликом што се овде матрица крутости јавља у виду збира две

матрице: конвенционалне матрице крутости K и геометријске матрице крутости K_G . Изрази за обе матрице су добро познати [15] и једино треба истаћи да је геометријска матрица крутости у функцији аксијалне силе у штапу. Важно је нагласити да прорачун критичног оптерећења према овде приказаном поступку даје само приближна (апроксимативна) решења, јер су при извођењу матричне једначине коришћене функције померања према теорији првог реда (1) и (2). Да би се добила тачна решења у овом случају, при формирању мреже коначних елемената стално је потребно је водити рачуна о томе колико је потребно да се усвоји елемената.

Зато ће се у окиру ове анализе приказати и нумерички поступак који даје тачна решења проблема стабилности и у случају када се дуж штапа усвоји само по један коначни елемент. Као што је већ речено, у случају решавања проблема стабилности, користи се диференцијална једначина равнотеже штапа у облику:

$$v^{iv} + k^2 v'' = 0 \quad (4)$$

где је $k = \sqrt{P/EI}$, P је аксијална сила, EI крутост штапа на савијања, док v представља угиб нормалан на првобитну (недеформисану) осу штапа. Једначином (4) дефинисан је према теорији другог реда проблем извијања правог штапа константног попречног пресека, који је притиснут аксијалним силама P на крајевима, где се знак плус односи на аксијалну силу притиска. У случају када делује аксијална сила затезања у једначини (4) је знак минус.

Уместо решења у облику полинома (2), у овом случају се користи тачно решење диференцијалне једначине (4), које је дато у тригонометријском облику:

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 kx + \alpha_3 \sin(kx) + \alpha_4 \cos(kx) \quad (5)$$

Поступак извођења матрица крутости тзв. директним поступком познат је из литературе и приказан је нпр. у [10]. Решење за штап типа „k“ који је оптерећен аксијалном силом притиска приказано је у наставку (6)-(8). Иако до губитка стабилности долази услед сила притиска, могуће је да у оквиру носача који се извија, постоје штапови који су затегнути, тако да је потребно одредити матрицу крутости и за тај случај. Матрица крутости у том случају, као и матрице крутости штапа типа „g“ приказане су у [16].

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3 \Delta} \begin{bmatrix} \omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) & -\omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) \\ \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) & \omega l^2 (\omega - \sin \omega) & \\ & \omega^3 \sin \omega & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) & \\ & & \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) & \end{bmatrix} \quad (6)$$

simetr.

где је

$$\omega = k \cdot l \quad (7)$$

$$\Delta = 2 \cdot (1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega \quad (8)$$

У овом случају критично оптерећење се добија решањем хомогене матричне једначине:

$$\mathbf{K}(\omega) \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (9)$$

где је \mathbf{q} вектор генералисаних померања.

Као што је већ речено, предност оваквог приступа је у томе што даје, условно речено, тачна решења и укупан број коначних елемената је значајно мањи него у традиционалном поступку применом геометријске матрице крутости. Међутим, за разлику од проблема сопствених вредности за чије решавање постоје неколико добро познатих поступака, у овом случају се проблем извијања своди на решавање трансцендентне једначине која је функција, на доста компликован начин, аксијалне силе у стубовима и гредама. Због тога је у овом раду посебна пажња посвећена решавању овог проблема.

У досада наведеној анализи, претпоставља се да је у питању проблем еластичне стабилности. Овакав прорачун се често примењује у инжењерској пракси, зато што се полази од тога да се грађевинске конструкције углавном понашају еластично када су изложене свакодневним експлоатационим оптерећењима. Због тога је и овакав прорачун заступљен у актуелним прописима за анализу стабилности пре свега челичних [7-9], али и бетонских конструкција.

Међутим, у [16] је показано да може да се учини значајна грешка у прорачуну носивости стубова оквирних челичних носача уколико се претпостави да се њихово извијање дешава само у еластичној области. Зато је потребно разматрати и случај када поједини аксијално оптерећени штапови уђу у фазу нелинеарног понашања материјала. Иако су обављена бројна теоријска и експериментална истраживања, проблем извијања оквирних носача у еласто-пластичној анализи још увек није у потпуности

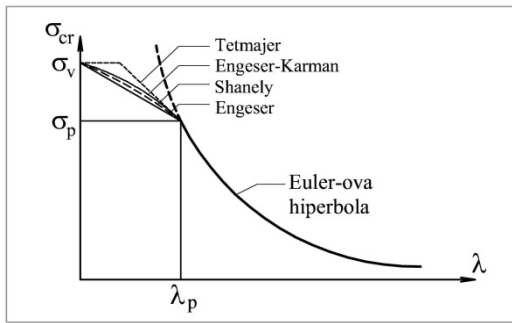
решен. Брзи развој рачунарских технологија у последњим деценијама је омогућио свеобухватно решење овог проблема. Зато се многи аутори и даље баве овом проблематиком, а неки од значајнијих резултата су приказани у [17,18].

У овом раду ће бити примењена теорија тангетног модула, као једна од најактуелнијих метода за решавање проблема извијања аксијално притиснутих штапова у еластопластичној области.

3. ПРИМЕНА ТЕОРИЈЕ ТАНГЕТНОГ МОДУЛА

Као што је већ напоменуто, анализа проблема стабилности заснива се на прорачуну према теорији другог реда. То значи да се разматра геометријски нелинеаран проблем због тога што су услови равнотеже написани на деформисаној конфигурацији носача. То значи да се узима у обзир измењена геометрија носача до које се долази услед деформација насталих под задатим оптерећењем. Међутим, овај прорачун је још компликованији уколико пре достизања критичног оптерећења (σ_{cr}) поједини штапови уђу у фазу нелинеарног понашања материјала. То значи да се у њима јављају напони који су већи од границе пропорционалности (σ_p). Тако овај прорачун добија још један вид нелинеарности зато што постаје и материјално (физички) нелинеаран проблем.

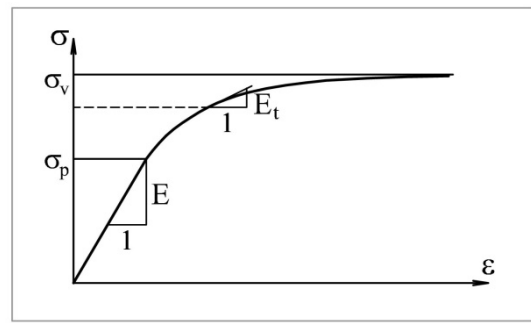
Познато је да израз за Euler-ову критичну силу ($\sigma_{cr} = \pi^2 \cdot E / \lambda_i^2$) важи све док је критични напон мањи од границе пропорционалности (σ_p). Међутим, када се овај напон прекорачи, извијање се дешава у пластичној области. Многи истраживачи су се бавили овом проблематиком и нека од њихових решења за криве извијања у пластичној области су приказана на Слици 4.



Слика 4. Криве извијања у пластичној области

Прва истраживања везана за извијање челичних штапова у пластичној области је обавио Vauschinger. На основу његових резултата и додатних експеримената Tetmajer је касније предложио први израз за везу између напона и виткости у пластичној области. Поред многих других истраживања, важно је истаћи рад Engesser-а [19] који уводи појам тангентног модула. Наиме, он је заменио Young-ов модул еластичности E са тангентним модулом E_t , који представља нагиб тангенте на дијаграму напон-деформације у било којој тачки. Ова теорија је детаљније описана у [20, 21]. Треба напоменути и Ramberg–Osgood-ов поступак [22] који такође успоставља везу између ова два модула.

Да би се спровео прорачун стабилности у нееластичној области, потребно је познавати физичко-механичке карактеристике материјала. Као што је познато, када су у питању грађевински материјали (челик, бетон,...), веза између напона и деформације изнад границе пропорционалности постаје нелинеарна. На бази експерименталних истраживања може се доћи до ове зависности, тј. дијаграма који приказују везу између напона и деформација све до нивоа напрезања када долази до исцрпљења носивости материјала, односно лома носећих елемената конструкције. Типичан дијаграм када је у питању грађевински челик приказан је на Слици 5, где је са σ_p означен граница пропорционалности, а са σ_v напон течења.

Слика 5. σ - ϵ дијаграм грађевинског челика

До границе пропорционалности модул еластичности E има константну вредност и функција је само врсте материјала. Са даљим растом оптерећења, овај модул постаје и функција нивоа напрезања $E_t = f(\sigma)$ и назива се тангентни модул [23].

У овом истраживању користи се емпиријска веза између ова два модула која описује понашање челичних стубова у нееластичном домену. Она је предложена и у многим другим релевантним истраживањима [21,24], при чему се претпоставља да овај израз важи за однос $\sigma/\sigma_p > 0.5$:

$$E_t = 4E \cdot \left[\frac{\sigma}{\sigma_y} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_y} \right) \right] \quad (10)$$

Као што је већ речено, наведени проблем извијања у еластопластичној области решава се применом методе коначних елемената. У случају када се у аксијално притиснутом штапу извијање дешава у еластичној области, за матрицу крутости се користи израз (6). Међутим, за случај нелинеарног понашања материјала потребно је формулисати нове матрице крутости. Оне формално имају исти облик као и матрица (6), али се у суштини битно разликују. Наиме, уместо константног модула еластичности E , примењује се тангентни модул E_t који је завистан од нивоа напрезања у самом елементу. Такође вредности ω и Δ су замењене се ω_t и Δ_t и приказане су у изразима (13) и (14). У случају штапа типа „k“, оптерећеног аксијалном силом притиска, ова матрица гласи:

$$\mathbf{K} = \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \begin{bmatrix} \omega_t^3 \sin \omega_t & \omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) & -\omega_t^3 \sin \omega_t & \omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) \\ \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) & -\omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) & \omega_t l^2 (\omega_t - \sin \omega_t) & \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) \\ \omega_t^3 \sin \omega_t & -\omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) & \omega_t^3 \sin \omega_t & \omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) \\ \text{simetr.} & & \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) & \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

где је:

$$E_t = 4E \cdot \left[\frac{P_{cr,i}}{A \cdot \sigma_v} \cdot \left(1 - \frac{P_{cr,i}}{A \cdot \sigma_v} \right) \right] \quad (12)$$

$$\omega_t = \sqrt{\frac{P_{cr,i}}{E_t \cdot I}} \cdot l = \frac{1}{2} A \cdot \sigma_v \cdot l \cdot \sqrt{\frac{1}{EI(A\sigma_v - P_{cr,i})}} \quad (13)$$

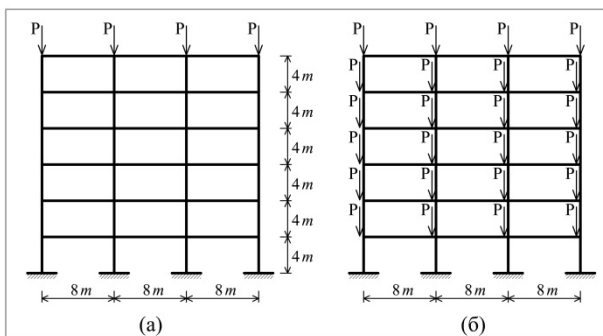
$$\Delta_t = 2 \cdot (1 - \cos \omega_t) - \omega_t \cdot \sin \omega_t \quad (14)$$

док $P_{cr,i}$ представља вредност критичне силе у посматраном штапу када долази до извијања оквирног носача у целини.

Поступак за извођења ове матрице је дат у [16,25]. Матрице крутости за штап типа „g“, као и за штапове који су изложени сили затезања приказани су у [16].

4. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕР

За илустрацију наведеног теоријског приступа, спроведена је одговарајућа нумеричка анализа. Као референтни пример изабран је шестоспрани равански оквир са три поља (тј. четири реда стубова), са геометријом као и у [26]. Прво је разматран случај укљештеног оквира са померљивим чворовима. На Сlici 6 је приказан тај оквир са два случаја оптерећења: када је аксијална сила у стубовима константна и када силе делују на свакој етажи.



Слика 6. Шестоспратни оквир са померљивим чворовима

Анализирани оквирни носачи су од челика са карактеристикама: $E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$ и $\sigma_v = 240,000 \text{ kN/m}^2$. На основу претпостављеног израза за тангентни модул (10) добија се напон на граници пропорционалности: $\sigma_p = 0.5 \cdot \sigma_v = 120,000 \text{ kN/m}^2$. Параметарска анализа је обављена за стубове са неколико различитих попречних пресека (IPB100, IPB140, IPB180, IPB220 и IPB260), док су греде у свим случајевима претпостављене као IPE300.

Прорачун је обављен применом компјутерског програма који написан у C++ програмском језику [16]. С обзиром да се користе тачна решења диференцијалне једначине аксијално оптерећеног штапа по теорији другог реда (5), сваки штап се посматра као један коначан елемент. Решавајући:

$$\det \mathbf{K}(\omega) = 0 \quad (15)$$

добијаја се вредност критичне силе, као и одговарајуће вредности тангентног модула у случају извијања у нееластичној области.

Резултати прорачуна за носач са Сlike 6 (а) су дати у Табели 1.

Табела 1. Вредност P_{cr} (kN) и E_t (kN/m²) за оквир са Сlike 6(а)

пресек	еласт.анал.		нееласт.анал.
	$P_{cr,el}$	$P_{cr,inel}$	E_t
IPB100	525.25	445.48	171,564,770
IPB140	1433.09	869.19	111,653,565
IPB180	2597.58	1399.81	80,135,580
IPB220	3613.95	2003.42	63,771,472
IPB260	4351.28	2631.47	55,267,926

У случају скоковите аксијалне силе, Слика 6 (б), приказана анализа показује другачије понашање стубова у различитим етажама. Добијене вредности критичних оптерећења и одговарајућих модула еластичности, односно тангентних модула, за карактеристичне спратове су приказани у Табелама 2 и 3.

Табела 2.

Вредност P_{cr} (kN) за оквир са Сlike 6(б)

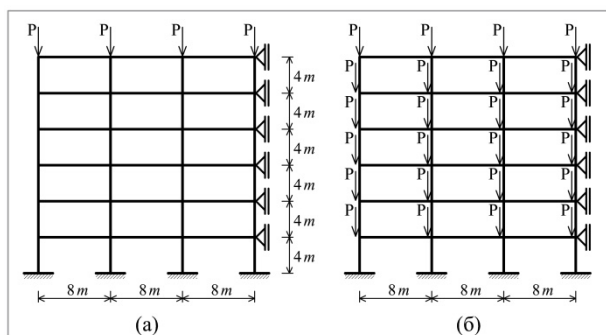
пресек	$P_{cr,el}$	$P_{cr,inel}$
IPB100	95.93	76.08
IPB140	282.91	148.16
IPB180	557.34	238.89
IPB220	829.79	342.77
IPB260	1069.86	451.92

Табела 3. Вредност E_t (kN/m²) за оквир са Сlike 6(б)

пресек	тангентни модул		
	1.спрат	3.спрат	6.спрат
IPB100	164,953,336	209,873,261	210,000,000
IPB140	100,283,751	205,366,416	210,000,000
IPB180	65,629,798	199,888,758	210,000,000
IPB220	46,142,006	196,285,251	210,000,000
IPB260	34,213,200	193,931,804	210,000,000

Ови резултати очигледно показују да стубови са крућим попречним пресецима могу бити изложени већем критичном оптерећењу. Због тога је за њих анализа стабилности у нееластичној области итекакао оправдана. Такође, јасно је да је тренутак достизања критичне силе читавог оквира одређен понашањем најоптерећенијих стубова који се налазе у 1.етажи. Зато може да се догоди да напони у горњим етажама не пређу границу пропорционалности материјала, па њихове карактеристике могу да остану непромењене.

Разматрани оквирни носач са непомерљивим чворовима је приказан на Слици 7. Оквир је исте геометрије и карактеристика као и у претходном примеру, а прорачун је обављен и за оба случаја оптерећења.



Слика 7. Шестоспратни оквир са непомерљивим чворовима

Резултати обављеног прорачуна су приказани у Табелама 4-6.

Табела 4. Вредност P_{cr} (kN) и E_t (kN/m²) за оквир са Слике 7(а)

пресек	еласт.анал.		нееласт.анал.	
	$P_{cr,el}$	$P_{cr,inel}$	E_t	
IPB100	1829.24	579.89	55,181,756	
IPB140	4228.50	992.97	30,564,565	
IPB180	7940.69	1528.75	20,104,996	
IPB220	13958.22	2152.20	12,050,779	
IPB260	23264.87	2792.69	11,469,690	

Табела 5. Вредност P_{cr} (kN) за оквир са Слике 7(б)

пресек	$P_{cr,el}$	$P_{cr,inel}$
IPB100	358.87	97.12
IPB140	918.32	166.26
IPB180	1843.17	255.99
IPB220	3379.18	359.22
IPB260	5753.00	467.64

Табела 6. Вредност E_t (kN/m²) за оквир са Слике 7(б)

пресек	тангентни модул		
	1.спрат	2.спрат	3.спрат
IPB100	51,869,283	144,972,868	197,377,066
IPB140	27,101,155	131,592,892	192,481,190
IPB180	16,424,481	125,744,940	190,242,250
IPB220	10,889,735	122,696,386	189,054,395
IPB260	7,687,822	120,927,723	188,359,143

Ови резултати доводе до сличних закључака као и у претходном примеру са померљивим оквирима. Такође може да се уочи важност примене еластопластичне анализе, посебно у случају крутих конструкција. Наиме, примена уобичајне „еластичне“ анализе може да проузрокује озбиљне грешке у прорачуну. Ови примери су такође показали разлику у понашању померљивих и непомерљивих система у еластопластичној области. Логично је да је код непомерљивих система критична сила знатно већа, па карактеристике материјала, тј. у овом случају модул еластичности, односно тангентни модул имају знатно ниже вредности.

На крају треба напоменути да се добијене вредности могу користити за израчунавање коефицијената ефективне дужине извијања аксијално притиснутих стубова. На основу тога је могуће одредити стварну носивост тако оптерећених челичних штапова помоћу тзв. „кривих извијања“, које представљају модификацију теоријских кривих извијања јер воде рачуна о свим имперфекцијама које се јављају код реалних штапова. Овакав прорачун је детаљно приказан у [16,25].

5. ЗАКЉУЧАК

У овом раду показана је примена једне савремене методе за прорачун стабилности оквирних носача која се базира методи коначних елемената. Такве методе су у предности у односу на традиционалне методе које углавном посматрају елемент који је „издвојен“ из носача, а који је еластично укљештен или ослоњен само на стубове и греде који су везани у његовој непосредној околини. Матрице крутости су изведене применом тригонометријских интерполационих функција. Предложени прорачун се заснива на анализи глобалне стабилности оквирних носача, што значи да се колапс конструкције дешава када

најоптерећенији стубови достигну своје критично оптерећење.

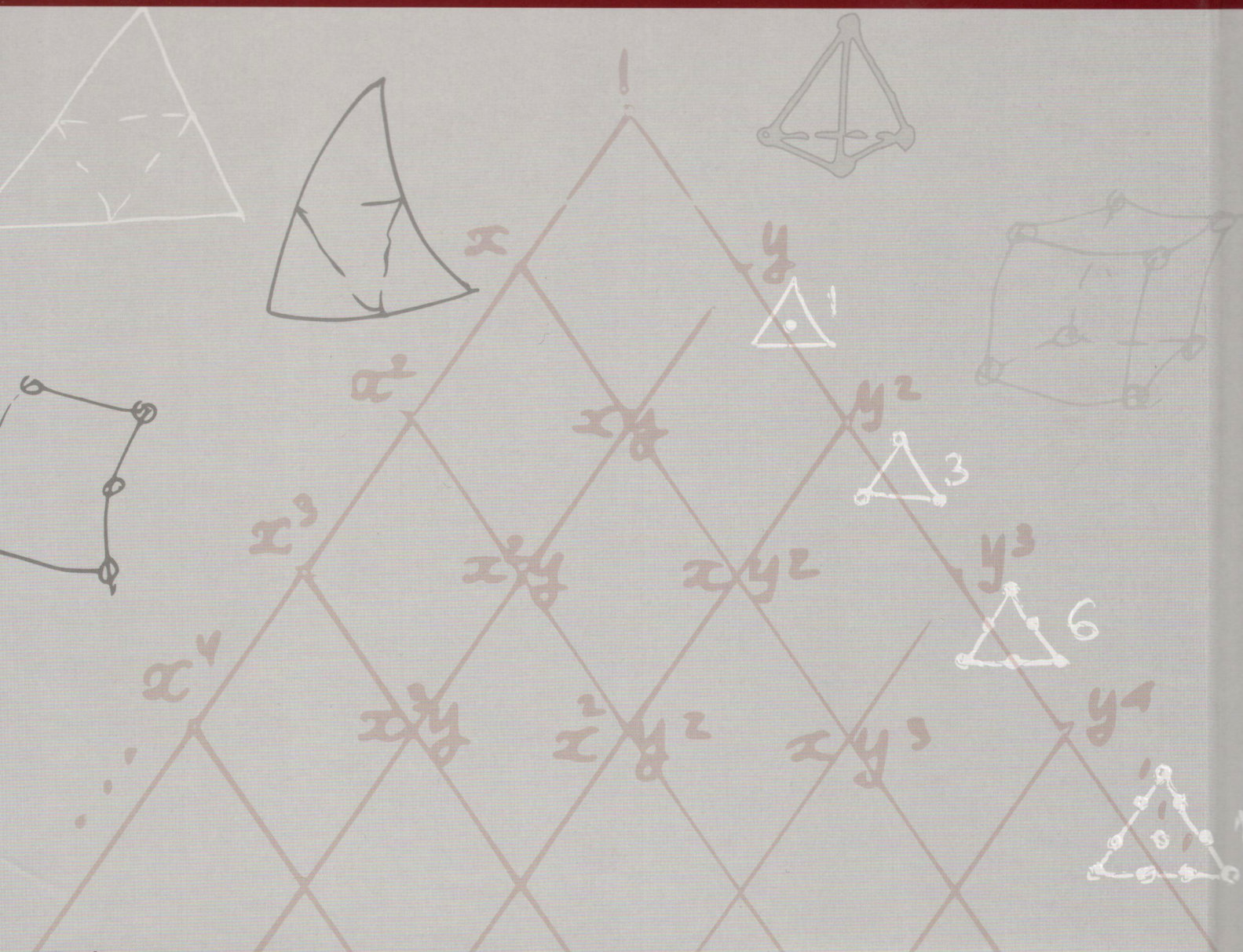
Овакав поступак прорачуна је у овом раду коришћен и за еласто-пластичну анализу када се у прорачун осим геометријске уводи и материјална нелинеарност. Примењена је теорија тангентног модула, тј. изведене су матрице крутости коришћењем тангентног модула који прати промену крутости штапа у нееластичној области.

Неке од могућности таквог прорачуна приказане су на примеру једног вишеспратног челичног оквирног носача. Крутост система је варирана кроз различите попречне пресеке аксијално оптерећених стубова, а обављена је и одвојена анализа система са померљивим и непомерљивим чворовима. Показано је да је код крутих конструкција још значајнији овакав прорачун у нееластичној области. Наиме, примена уобичајне „еластичне“ анализе може да доведе озбиљних разлика у резултатима.

На основу свега наведеног се предлаже примена приказаног поступка који омогућава праћење феномена губитка стабилности оквирних носача у еластопластичној области и одређивање критичног оптерећења, тангентног модула и ефективне дужине извијања аксијално оптерећеног елемента када се конструкција извија.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. P. Timoshenko, J. M. Gere. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [2] European Convention for Constructional Steelwork (ECCS). European recommendations for steel structures, 1978.
- [3] M. R. Horne, W. Merchant. The stability of frames, Pergamon, Oxford, 1965.
- [4] D. White, J. Hajjar. Buckling Models and Stability Design of Steel Frames: a Unified Approach, Journal of Constructional Steel Research, 42 (3), 1997, 171-207.
- [5] D. White, J. Hajjar. Accuracy and simplicity of alternative procedures for stability design of steel frames. Journal of Constructional Steel Research, 42 (3), 1997, 209-261.
- [6] M. R. Horne. An approximate method for calculating the elastic critical loads of multi-story plane frames. Structural Engineer, 56 (6), 1975, 242-248.
- [7] Eurocode 3, Design of Steel Structures - ENV 1993-1-1: 1992, European Committee for Standardization, 1993.
- [8] Eurocode 3, Design of Steel Structures - ENV 1993-1-1: 2005, European Committee for Standardization, 2006.
- [9] Б. Зарић, Д. Буђевац, Б. Стипанић. Челичне конструкције у грађевинарству, Грађевинска књига, Београд, 2000.
- [10] С. Ђорић. Прилог одређивању дужина извијања стубова оквирних носача, магистарски рад, Грађевински факултет Универзитета у Београду, 2006.
- [11] W. F. Chen. Structural stability: from theory to practice, Engineering Structures, 22 (2), 2000, 116-122.
- [12] C. Gantes, G. Mageirou. Improves stiffness distribution factors for evaluation of effective buckling lengths in multi-story sway frames, Engineering Structures, 27 (7), 2005, 1113-1124.
- [13] R. H. Gallagher. Finite Element Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [14] K. J. Bathe. Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.
- [15] М. Секуловић. Метода коначних елемената. Грађевинска књига, Београд, 1988.
- [16] С. Ђорић. Нелинеарна анализа стабилности оквирних носача, докторска дисертација, Грађевински факултет Универзитета у Београду, 2013.
- [17] H. Yoo, D. H. Choi. New method of inelastic buckling analysis for steel frames. Journal of Constructional Steel Research, 64 (7), 2008, 1152-1164.
- [18] B. Farshi B, F. Kooshesh. Buckling analysis of structural steel frames with inelastic effects according to codes. Journal of Constructional Steel Research, 65 (10-11), 2009, 2078-2085.
- [19] F Engesser. Ueber die Knickfestigkeit Gerader Stabe. Zeitschrift fur Architektur und Ingenieurwesen, 35, 1892.
- [20] T. V. Galambos. Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 5th edition, John Wiley and Sons, New York, USA, 1988.
- [21] W. McGuire, R. Gallagher, R. Ziemain R. Matrix Structural Analysis, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York, 2000.
- [22] W. Ramberg, W. R. Osgood Description of stress-strain curves by three parameters. Technical Note No. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington DC, 1943.
- [23] Z. P. Bazant, L. Cedolin. Stability of Structures, Dover Publications, New York, USA, 2003.
- [24] CRC Japan. Handbook of Structural Stability, Corona, Tokyo, 1971.
- [25] S. Ćorić, S. Brčić. Nonlinear stability analysis of the frame structures, Building materials and structures, 59 (3), 2016, 27-44.
- [26] S. Ćorić. Stability analysis of multi-story steel frames subjected to different axial load. Proceedings of 7th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Sremski Karlovci, 2019, S3d:1-10.



Проф. др Миодраг Секуловић био је дугогодишњи професор и декан Грађевинског факултета Универзитета у Београду, професор Грађевинског факултета Универзитета Црне Горе у Подгорици и председник Академије инжењерских наука Србије. Предавао је на дипломским и последипломским студијама предмете из области теорије конструкција на грађевинским факултетима у Београду, Подгорици, Сарајеву, Новом Саду, Нишу, Суботици и Скопљу. Заједно са својим колегама, поставио је темеље примене рачунара у теорији конструкција.

Домен научно-истраживачког рада професора Секуловића везан је за примењену механику, односно за разне области теорије конструкција: танкозидни носачи, нелинеарни проблеми у теорији линијских носача, плоча и љуски, интеракција тла и конструкције, метод коначних елемената. Објавио је 150 научних радова, од којих је 60 објављено у референтним часописима и зборницима међународних научних скупова, као и 15 књига монографског карактера.

Добитник је Октобарске награде града Београда за најбоља научна достигнућа 1982. године, из области математичких и техничких наука. Одликован је Орденом заслуга за народ са сребрном звездом као и Орденом рада са златним венцем.



ISBN 978-86-7518-208-5

$c = \sum F_i(5, 7, 5) x_i$
 $F_i(5, 7, 5) = N_i(3, 7, 5)$
 ИЗОП АРХИТЕКТУРА