

# NOVA FORMULACIJA ZAKONA OJAČANJA U KONSTITUTIVNIM RELACIJAMA PREKONSOLIDOVANIH GLINA

Sanja Jocković\*, Mirjana Vukićević

\* *Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Bulevar kralja Aleksandra 73, Beograd, [borovina@grf.bg.ac.rs](mailto:borovina@grf.bg.ac.rs)*

## REZIME

Imajući u vidu da je za praktičnu primenu konstitutivnih modela imperativ jednostavna formulacija i jasno fizičko značenje parametara modela, formiran je HASP model za opisivanje mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina, koristeći teoriju kritičnog stanja i koncept granične površi. Formulacijom zakona ojačanja u funkciji parametra stanja i stepena prekonsolidacije, omogućeno je opisivanje brojnih elemenata mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina. Validacija modela je izvršena kroz poređenje sa publikovanim rezultatima triaksijalnih opita na širokom spektru prekonsolidovanih glina.

KLJUČNE REČI: konstitutivni model, zakon ojačanja, prekonsolidovane gline

# NEW FORMULATION OF HARDENING RULE IN CONSTITUTIVE RELATIONS OF OVERCONSOLIDATED CLAYS

## ABSTRACT

Bearing in mind that simple expressions and clear physical meaning of the model parameters are an imperative for practical application of constitutive models, HASP model for describing mechanical behaviour of overconsolidated clays is developed on the basis of the critical state theory and within the concept of bounding surface plasticity. With new formulation of hardening rule in terms of state parameter and overconsolidation ratio it is possible to describe a number of elements of the mechanical behavior of overconsolidated clays. Validation was done against published results of triaxial tests, on the samples with various overconsolidation ratios.

KEY WORDS: constitutive model, hardening rule, overconsolidated clays

## UVOD

Opisati naponsko-deformacijsko ponašanje tla kao nehomogenog i anizotropnog materijala, koji se plastično deformiše od ranih stadijuma opterećivanja, predstavlja izazov sa kojim se geotehnika intenzivno suočava poslednjih decenija. Brojni konstitutivni modeli razvijeni do danas se uz određen nivo aproksimacija primenjuju za različite probleme u geotehnici. Značajan deo u oblasti konstitutivnog modeliranja tla predstavlja opisivanje naponsko-deformacijskih relacija prekonsolidovanih glina. U prirodi su retke normalno konsolidovane gline, što nameće potrebu da se intenzivno razvijaju konstitutivni modeli koji će opisivati mehaničko ponašanje normalno konsolidovanih i prekonsolidovanih glina. Prekonsolidovane gline su u prošlosti bile opterećene vertikalnim efektivnim naponom koji je veći od tekuće veličine vertikalnog efektivnog napona. U poređenju sa normalno konsolidovanim glinama, imaju manji koeficijent poroznosti i veću smičuću čvrstoću. U prirodi su najčešće ispucale, što dovodi do nehomogenog polja deformacija. Iz tog razloga ispoljavaju najsloženiji oblik ponašanja tla pri lomu. Imajući u vidu da je za praktičnu primenu konstitutivnih modela imperativ jednostavna formulacija i jasno fizičko značenje parametara modela, formiran je konstitutivni model za opisivanje mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina, koristeći teoriju kritičnog stanja i koncept granične površi.

## HASP MODEL

Polazna tačka ka formulisanju novog konstitutivnog modela koji bi realnije opisivao mnoge elemente ponašanja prekonsolidovane gline pri različitim stanjima i uslovima opterećivanja je Modifikovani Cam Clay (MCC) model (Roscoe & Burland, 1968). U okviru koncepta granične površi (Dafalias & Herrmann, 1980) izvršena je modifikacija zakona ojačanja koristeći parametar stanja, čime je formulisan novi model nazvan HASP model – **H**Ardening **S**tate **P**arameter model. Granična površ (*bounding surface*) je MCC površ čiju veličinu definiše vrednost maksimalnog srednjeg napona  $\bar{p}'_0$ . Slika 1. Ova površ se može nazvati i površ normalne konsolidacije:

$$\frac{\bar{p}'}{\bar{p}'_0} = \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} \quad (1)$$

gde je  $\eta$  trenutni naponski odnos, a  $M$  nagib linije kritičnog stanja (CSL) u naponskoj ravni. Tačka  $A$  ( $p'$ ,  $q$ ) koja predstavlja trenutno naponsko stanje se nalazi na unutrašnjoj površi tečenja (*loading surface*) čiju veličinu definiše vrednost srednjeg efektivnog napona  $p'_0$ :

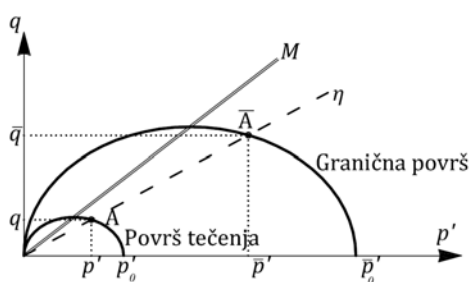
$$\frac{p'}{p'_0} = \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} \quad (2)$$

Pretpostavka na kojoj se zasniva HASP model je da se plastične deformacije razvijaju od početka opterećivanja i tačka  $A$  se uvek nalazi na površi tečenja. Radijalno mapiranje

podrazumeva da tački  $A$  odgovara imaginarna tačka  $\bar{A}(\bar{p}', \bar{q})$  na graničnoj površi, tako da je ispunjeno:

$$\eta = \frac{q}{p'} = \frac{\bar{q}}{\bar{p}'} \quad (3)$$

Važi asocijativni zakon tečenja, odnosno vektor priraštaja plastičnih deformacija je uvek upravan na površ tečenja.



Slika 1. Koncept granične površi  
Figure 1. Bounding surface concept

Granična površ ima sve karakteristike MCC površi: za naponski odnos ispod linije kritičnog stanja dolazi do smanjenja zapremine i površ se širi, dok za naponski odnos iznad linije kritičnog stanja dolazi do povećanja zapremine i površ se skuplja. Sa druge strane, površ tečenja se širi (ojačanje) sve do dostizanja vršne čvrstoće pri naponskom odnosu  $\eta=M_f$ , a zatim se skuplja (omekšanje) do dostizanja kritičnog stanja  $\eta=M$ .

#### ZAKON OJAČANJA HASP MODELA

Zakon ojačanja MCC modela zavisi samo od zapreminske plastične deformacije i pogodan je za normalno konsolidovana tla:

$$dp'_0 = \frac{v}{\lambda - \kappa} p'_0 dc_v^p \quad (4)$$

gde su  $\lambda$  i  $\kappa$  nagibi linije normalne/izotropne konsolidacije (ICL) i linije bubrenja (URL) u  $\ln p' - v$  ravni, Slika 2. Generalni zahtev za prekonsolidovana tla je prelaz iz kompresije u ekspanziju pre dostizanja vršne čvrstoće. Zakon ojačanja opisan izrazom (4) ne omogućava adekvatno opisivanje dilatancije i ojačanja. Da bi površ tečenja nastavila da se širi i za vrednosti naponskog odnosa  $M < \eta < M_f$ , potrebno je koristiti kombinovani zakon ojačanja i formulisati ga u funkciji i plastične smičuće deformacije (Nova & Wood 1979, Yao i dr. 2009) u obliku:

$$dp'_0 = \frac{v}{\lambda - \kappa} p'_0 (d\varepsilon_v^p + \xi d\varepsilon_q^p) \quad (5)$$

Gde je  $\xi$  parametar koji će biti kasnije formulisan, a  $p'_0$  parametar ojačanja MCC modela. Kombinovano ojačanje je ključno za modele kritičnog stanja. U skladu sa Drugim aksiomom teorije kritičnog stanja (Jefferies & Been, 2006), sa povećanjem smičućih deformacija stanje tla se približava kritičnom stanju i plastične smičuće deformacije moraju biti uvrštene u zakon ojačanja. Kombinovani zakon ojačanja utiče i na putanju napona koja prelazi CSL i dostiže se vršna čvrstoća u dreniranim uslovima. U nedreniranim uslovima, kombinovano ojačanje je ključno za predviđanje putanje efektivnih napona "S" oblika. Ako je dilatancija odnos priraštaja zapreminske i smičuće komponente plastične deformacije:

$$d = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_q^p} \quad (6)$$

priraštaj plastičnih smičućih deformacija se može izraziti kao:

$$d\varepsilon_q^p = \frac{d\varepsilon_v^p}{d} \quad (7)$$

i izraz za zakon ojačanja površi tečenja za prekonsolidovana tla je:

$$dp'_0 = \frac{v}{\lambda - \kappa} \bar{p}'_0 d\varepsilon_v^p \left( I + \frac{\xi}{d} \right) \quad (8)$$

Tokom procesa deformisanja, trenutni stepen prekonsolidacije se može definisati kao:

$$R = \frac{\bar{p}'}{p'} = \frac{\bar{q}}{q} = \frac{\bar{p}'_0}{p'_0} \quad (9)$$

Zakon ojačanja površi tečenja tako postaje:

$$dp'_0 = \frac{v}{\lambda - \kappa} p'_0 d\varepsilon_v^p \left( I + \frac{\xi}{d} \right) R = \frac{v}{\lambda - \kappa} p'_0 d\varepsilon_v^p \omega \quad (10)$$

gde je  $\omega$  koeficijent ojačanja (*hardening coefficient*):

$$\omega = \left( I + \frac{\xi}{d} \right) R \quad (11)$$

Kompletne konstitutivne relacije HASP modela mogu se sada predstaviti kao:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{K} + \frac{\lambda - \kappa}{\nu p'} \frac{1}{\omega} \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} & \frac{\lambda - \kappa}{\nu p'} \frac{1}{\omega} \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \\ \frac{\lambda - \kappa}{\nu p'} \frac{1}{\omega} \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} & \frac{1}{3G} + \frac{\lambda - \kappa}{\nu p'} \frac{1}{\omega} \frac{4\eta^2}{(M^2 + \eta^2)(M^2 - \eta^2)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dp' \\ dq \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Posmatrajući izraz (12) može se uočiti da je koeficijent ojačanja  $\omega$  ujedno i koeficijent redukcije plastičnih deformacija, tako da se adekvatnom formulacijom koeficijenta ojačanja mogu značajno redukovati plastične deformacije prekonsolidovane gline u početnoj fazi opterećivanja, kada MCC model predviđa samo elastične deformacije. Na taj način je moguće pretpostaviti da tlo od samog početka opterećivanja trpi i plastične deformacije, koje su tada veoma male. Kako se u procesu deformisanja polako gubi i stepen prekonsolidacije tla, tako se i koeficijent  $\omega$  smanjuje i plastične deformacije postaju dominantne. Pri dostizanju vršne čvrstoće (prelaz iz ojačanja u omekšanje) važi da je  $dp'_0 = 0$  i uočava se maksimalni gradijent promene zapremine – maksimalna dilatancija. Na osnovu izraza (10) može se zaključiti da je tada  $\omega=0$  i da važi relacija:

$$\xi = -d_{max} \quad (13)$$

Sledi da parametar  $\xi$  predstavlja maksimalnu vrednost dilatancije pri vršnoj čvrstoći u dreniranim uslovima (Nova, 2006).

#### PARAMETAR STANJA

U izrazu za koeficijent ojačanja (11) je potrebno definisati odnos  $\xi/d$ . U skladu sa uočenim ponašanjem peska, Wood i dr. (1994), Manzari & Dafalias (1997) i Li & Dafalias (2000) navode da je za kompletan opis dilatancije u relacije modela potrebno uvrstiti i parametar stanja  $\Psi$  (Been & Jefferies, 1985). Parametar stanja predstavlja razliku između trenutne specifične zapremine i specifične zapremine na liniji referentnog stanja pri istom srednjem efektivnom naponu. Ovakav koncept podrazumeva da postoji referentno stanje koje treba da ima jedinstvenu strukturu. Za konstitutivne modele definisane u okviru teorije kritičnog stanja, referentno stanje je upravo kritično stanje, kada se smičuće deformacije razvijaju bez promene zapremine i efektivnog napona. Tako se parametar stanja za trenutnu naponsku tačku, Slika 2, može izraziti kao:

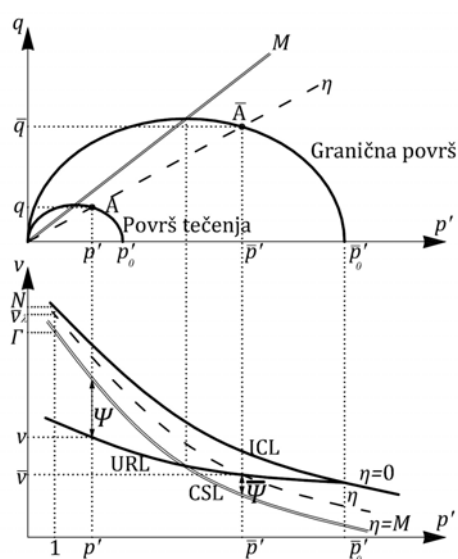
$$\Psi = v + \lambda \ln p' - \Gamma \quad (14)$$

gde je  $\Gamma$  parametar koji definiše položaj CSL u kompresionoj  $p'$ - $v$  ravni. Parametar stanja je negativan za jako prekonsolidovane gline i zbijene peskove, dok je za lako prekonsolidovane i normalno konsolidovane gline i rastresite peskove pozitivan. Parametar stanja za imaginarnu naponsku tačku zavisi od naponskog odnosa u sledećem obliku:

$$\bar{\Psi} = (\lambda - \kappa) \ln \left( \frac{2M^2}{M^2 + \eta^2} \right) \quad (15)$$

Ako se stepen prekonsolidacije definiše kao odnos napona na graničnoj površi i površi tečenja, može se lako pokazati da je stepen prekonsolidacije funkcija parametara stanja:

$$R = \frac{\bar{p}'}{p'} = \frac{\bar{q}}{q} = \exp \left( \frac{\bar{\Psi} - \Psi}{\lambda - \kappa} \right) \quad (16)$$



Slika 2. Parametri stanja za trenutnu i imaginarnu naponsku tačku  
Figure 2. State parameters for current and conjugate stress points

Na osnovu velikog broja triaksijalnih testova na pesku i prekonsolidovanoj glini, Parry (1958) i Been & Jefferies (1985) su pokazali da je parametar stanja linearno proporcionalan dilatanciji pri vršnoj čvrstoći u dreniranim uslovima. U skladu sa navedenim i uzimajući u obzir vezu između parametra stanja i stepena prekonsolidacije, pretpostavljeno je da je maksimalna vrednost dilatancije u direktnoj zavisnosti od  $\bar{\Psi} - \Psi$ . Za naponska stanja ispod CSL dilatancija  $d$  je pozitivna (kompresija), dok je negativna za naponska stanja iznad CSL (ekspanzija). Kada je naponska tačka na CSL dilatancija  $d=0$ . To znači da se dilatancija menja na sličan način kao parametar stanja za imaginarnu tačku  $\bar{\Psi}$ . Razmatrajući prethodno navedene relacije i s obzirom da dilatancija utiče na ponašanje tla duž čitave putanje napona sve do loma, predložen je izraz za koeficijent ojačanja u sledećem obliku:

$$\omega = \left( 1 + \frac{\bar{\Psi} - \Psi}{\bar{\Psi}} \right) R \quad (17)$$

Deo izraza (17) u zagradi određuje znak koeficijenta ojačanja i zajedno sa stepenom prekonsolidacije određuje magnitudu koeficijenta ojačanja, a samim tim i veličinu plastičnih deformacija u skladu sa izrazom (12). Za normalno konsolidovane gline važi da je  $\Psi = \bar{\Psi}$  i koeficijent ojačanja je  $\omega = 1$ . HASP model tada automatski prelazi u MCC model. Za opis kompletne konstitutivne veze potrebno je pet parametara ( $M$ ,  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $\Gamma$ ,  $\mu$ -Poisson-ov koeficijent). Svi parametri se mogu odrediti iz konvencionalnog triaksijalnog opita, opita direktnog smicanja i edometarskog opita.

#### VALIDACIJA HASP MODELA

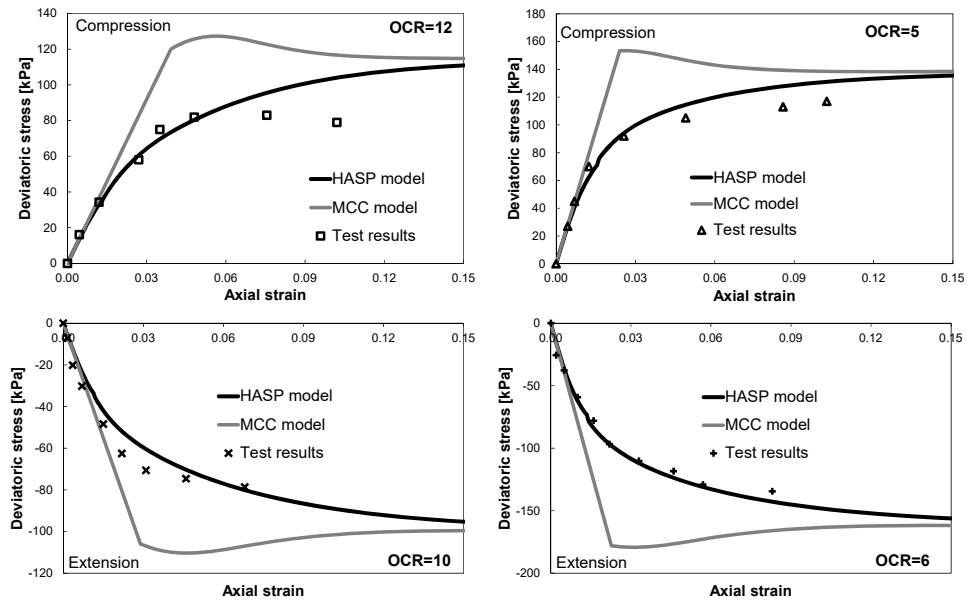
Validacija HASP modela izvršena je poređenjem rezultata simulacije laboratorijskih opita sa eksperimentalnim rezultatima iz literature sa različitim putanjama totalnih napona. U postupku validacije izabrane su gline sa različitim stepenima prekonsolidacije, za koje u literaturi postoje dobro dokumentovana ispitivanja u triaksijalnom aparatu i za koje su već određeni parametri MCC modela, Tabela 1. Navedeni parametri predstavljaju ujedno i parametre HASP modela. Da bi se potvrdila efikasnost novog HASP modela, izvršeno je i poređenje sa predviđanjem MCC modela.

Tabela 1. Parametri MCC i HASP modela  
Table 1. Parameters of MCC model and HASP model

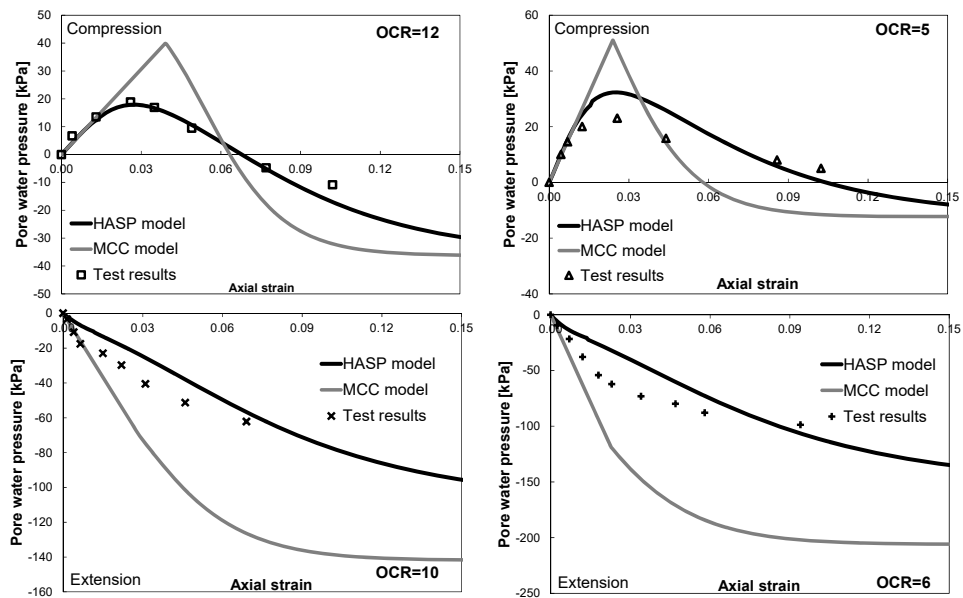
	$\lambda$	$\kappa$	$M_c$	$M_e$	$\Gamma$	$\mu$
Cardiff glina, Banerjee & Stipho (1979), CU opiti	0.140	0.050	1.05	0.85	2.63	0.2
Kaolin glina, Biarez & Hicher (1994), CD opiti	0.230	0.030	0.81	/	3.44	0.2

Na Slikama 3 i 4 prikazani su rezultati dva nedrenirana opita triaksijalne kompresije na prerađenim uzorcima Cardiff gline sa stepenima prekonsolidacije 5 i 12, kao i rezultati dva nedrenirana opita triaksijalne ekstenzije sa stepenima prekonsolidacije 6 i 10 (CU opiti). Naponsko-deformacijske relacije i promene pornog pritiska dobijene HASP modelom pokazuju veoma dobro slaganje sa eksperimentalnim rezultatima, za sve stepene prekonsolidacije pri triaksijalnoj kompresiji i ekstenziji. Može se uočiti da MCC model ne opisuje adekvatno ponašanje prekonsolidovane gline u nedreniranim uslovima. Vrednosti devijatora napona i pornog pritiska su znatno precenjene i odstupanja su veća što je veći stepen prekonsolidacije.

Na Slici 5 su prikazani rezultati dreniranih opita triaksijalne kompresije (CD opiti) na kaolinskoj glini sa stepenima prekonsolidacije 8, 4 i 2. Ponašanje prekonsolidovanih glina tokom ojačanja je veoma dobro opisano HASP modelom. Za uzorke sa stepenima prekonsolidacije 8 i 4, HASP model predviđa pad čvrstoće – omekšanje pri deformacijama većim od oko 10%, Slika 5a. Za jako prekonsolidovane uzorke (OCR=8, 4), nakon početne kompresije uzoraka dolazi do ekspanzije i povećanja zapremine, Slika 5b, što je u skladu sa eksperimentalnim rezultatima i uočava se odlično predviđanje promene zapreminskih deformacija sa promenom smičućih deformacija. Nedostaci MCC modela pri opisu mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina se mogu uočiti i u dreniranim uslovima. Vršna čvrstoća je precenjena i do dva puta.

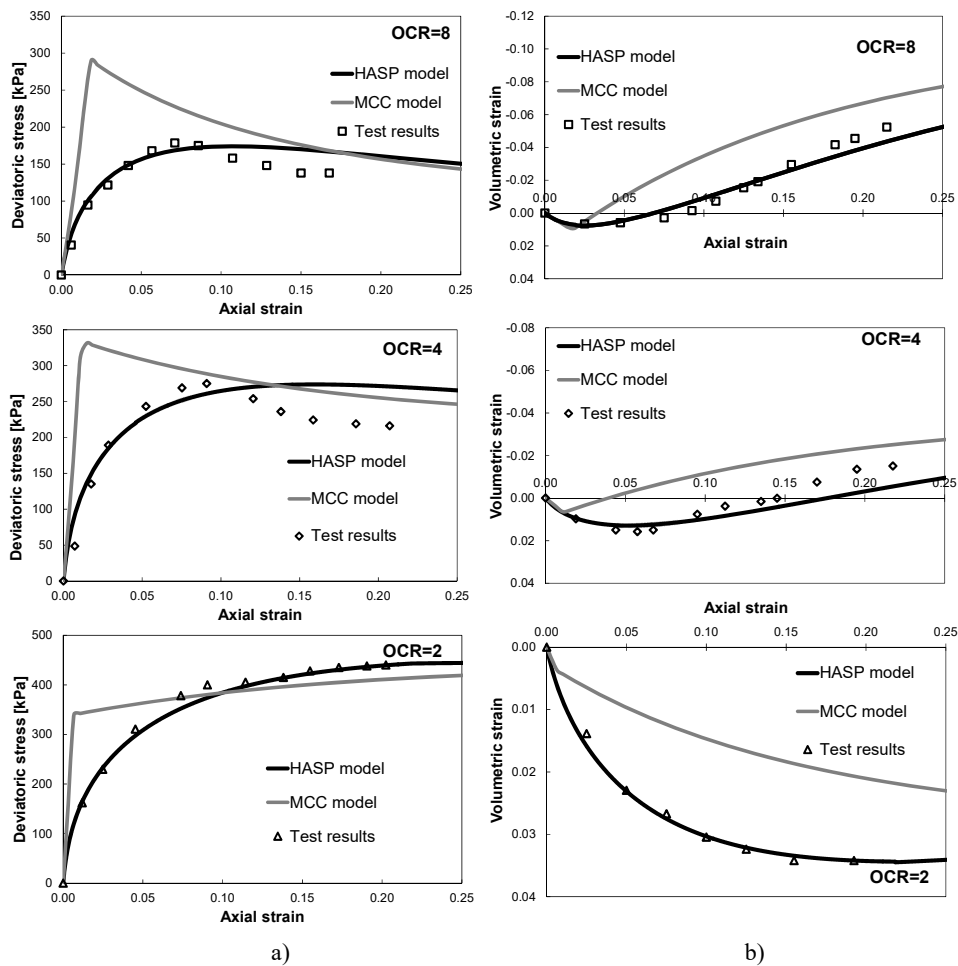


Slika 3. CU opiti, Cardiff glina – naponsko-deformacijske relacije  
 Figure 3. CU tests, Cardiff clay – stress-strain relations



Slika 4. CU opiti, Cardiff glina – promena pornog pritiska  
 Figure 4. CU tests, Cardiff clay – pore water pressure





Slika 5. CD opiti, kaolinska glina a) naponsko-deformacijske relacije b) zapreminske deformacije  
 Figure 5. CD tests, kaolin clay a) stress-strain relations b) volumetric strains

## ZAKLJUČAK

HASP model uspešno prevazilazi mnoge nedostatke MCC modela prilikom opisivanja mehaničkog ponašanja prekonsolidovanih glina, a pri tome je zadržana jednostavnost MCC modela i isti broj parametara. Osnovna ideja je da se unapređenje konstitutivnog modela vrši kroz adekvatno definisanje parametara koji uvode stanje tla kao bitnu odrednicu njegovog mehaničkog ponašanja. Tako je formulisana koeficijent ojačanja u funkciji parametra stanja i stepena prekonsolidacije, koji kontroliše sve aspekte ponašanja prekonsolidovanih glina. U dreniranim uslovima, model predviđa postepen prelaz iz kontrakcije u ekspanziju pre nego što je dostignuta vršna smičuća čvrstoća, kao i postepen

prelaz iz ojačanja u omekšanje bez dodatnog matematičkog opisivanja. U nedreniranim uslovima postoji dobro predviđanje pornog pritiska pri triaksijalnoj kompresiji i ekstenziji. Naponska tačka se uvek nalazi na površi tečenja i na taj način je omogućeno elasto-plastično ponašanje još u ranim fazama opterećivanja. Za normalno konsolidovane gline, HASP model prelazi u Modifikovani Cam Clay model. Prikazani rezultati simulacije opita pri različitim putanjama totalnih napona pokazuju veoma dobro slaganje sa eksperimentalnim rezultatima, za sve stepene prekonsolidacije.

#### LITERATURA

- Banerjee, P.K. & Stipho, A.S.: Elastoplastic model for undrained behavior of heavily overconsolidated clays. *Int J Numer Anal Mech Geomech*; 3(1): 97-103, 1979.
- Been, K. & Jefferies, M.G.: A state parameter for sands. *Géotechnique*, 35(2): 99-112, 1985.
- Biarez, J. & Hicher, P.Y.: *Elementary Mechanics of Soil Behaviour. Saturated Remoulded Soils*. A. A. Balkema, Rotterdam, 1994.
- Dafalias, Y.F. & Herrmann, L.R.: A bounding surface soil plasticity model. *Proc. Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading*, Vol. 1, Swansea, U.K., 335-345, 1980.
- Jefferies, M.G. & Been, K.: *Soil Liquefaction: A critical state approach*. Taylor and Francis, Abingdon, 2006.
- Jocković, S. & Vukićević, M.: Bounding surface model for overconsolidated clays with new state parameter formulation of hardening rule. *Comput Geotech*, 83:16-29, 2017, doi:10.1016/j.compgeo.2016.10.013.
- Li, X.S. & Dafalias, Y.F.: Dilatancy for cohesionless soils. *Géotechnique*, 50:449-60, 2000, doi:10.1680/geot.2000.50.4.449.
- Manzari, M.T., Dafalias, Y.F.: A critical state two-surface plasticity model for sands. *Géotechnique*, 47:255-72, 1997, doi:10.1680/geot.1997.47.2.255.
- Nova, R., Wood, D.M.: A constitutive model for sand in triaxial compression, *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 3: 255-78, 1979.
- Nova, R.: *Modelling of bonded soils with unstable structure*. International Workshop on Modern Trends in Geomechanics – Vienna, Springer, 2006.
- Parry, R.H.G.: Correspondence, *Géotechnique*, 8:183-186, 1958.
- Roscoe, K.H. & Burland, J.B.: On the generalized stress-strain behaviour of wet clay. *Engineering Plasticity*, Cambridge University Press, 535 – 609, 1968.
- Wood, D.M., Belkher, K., Liu, D.F.: Strain softening and state parameters for sand modelling, *Géotechnique*, 44(2):335-339, 1994.
- Yao, Y.P., Hou, W., Zhou, A.N.: UH model: three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays, *Géotechnique*, 59:451-69, 2009, doi:10.1680/geot.2007.00029.