DISKRETNA KIRCHOFLJEVA TEORIJA TANKIH ELASTIČNIH LJUSKI IZVEDENA IZ TROUGAONOG KONAČNOG ELEMENTA, I

DISCRETE KIRCHHOFF THEORY OF THIN SHELLS BASED ON TRIANGULAR FINITE ELEMENT, I

UDK: 624.074.001
Originalni naučni rad

Docent dr Gligor RADENKOVIĆ, dipl. inž. građ.

REZIME

U ovom radu prikazana je formulacija trougaonog Diskretnog Kirhofovog konačnog elementa u sistemu materijalnih linija koordinata. Promene tangencijalnih komponenti pomeranja i ugiba unutar konačnog elementa opisane su potpunim polinomima drugog odnosno trećeg stepena, dok je geometrija interpolovana linearnom promenom baznih vektora.

Opšte rešenje pretpostavlja zakrivljeni element ljuske u kojem su problem savijanja i membransko naprezanje međusobno spregnuti odakle sledi da je kvadratno polje Mindlin/Raisnerovih rotacija izraženo ne samo preko čvornih nepoznatih savijanja već i tangencijalnih komponenti pomeranja. U slučaju ravnog rešenja (element ploče) ovaj efekat nepostoji pa je samim tim i izbegnuta mogućnost pojave membranskog lockinga.

Diskretni Kirchofljevi trougaoni elementi formulisani u teorijskom delu rada korišćeni su za rešavanje određenog broja primera iz linearne analize. Ovi primeri su dosta specifični i najčešće korišćeni za proveru mogućnosti konačnih elemenata ljuski i ploča. Primeri sadrže kose ploče, 'pinched' cilindar i svernu ljusku opterećenih ravnotežnim sistemom koncentrisanih sila.

***Ključne reči**: ploča, ljuska, diskretna Kirchofljeva teorija, konačni element, krutost.*

SUMMARY

Assuming convected coordinate frame, a three node triangular shell element which usess a discrete Kirchof bending formulation is presented. The tangential components and transversse displacement are approximated by complete quadratic and cubic polinomial, respectively. The thrue geometry of a triangular shell element is respresented by linear variation of a base vectors.

The curved shell element incorporates the effects of coupling between membrane and flexural behaviour, while flat solution separate those two state of stresses avoiding membrane locking.

The proposed theory and finite element implementation are evaluated through an extensive set of characteristic plate and shell prroblems. Numerical examples consist skew plates problem, pinched cilindar and hemispherical shell.

***Key words**: shell, discrete Kirchof theory, finite element, stiffness, plate.*

UVOD

Trougaoni konačni element ljuske zasnovan na deformacionom modelu korišćenjem Kirchofljevih rotacija i pored usvajanja kompletnog kubnog polinoma za opisivanje promene ugiba V^3 pokazuje nekorektna rešenja. Razlog tome jeste nekompatibilnost rotacija duž strana trougla, odnosno nemogućnost elementa da zadovolji C_1 kontinuitet. Ovaj nedostatak eliminisan je Discretnom Kirchofljevom formulacijom [3], korišćenjem nezavisne interpolacije polja rotacija od ugiba V^3 prevodeći na taj način kontinuitet C_1 u C_0 koji je unapred zadovoljen usvojenim funkcijama oblika.

Kao polazna osnova za formulaciju diskretnih Kirchofljevih (DK) elemenata koristi se Mindlin/Reisnerova teorija debelih ploča gde se za aproksimaciju kinematičkih promenljivih zahteva samo C_0 kontinuitet. Glavne poteškoće u dobijanju pouzdanog i efikasnog Mindlinovog elementa savijanja ploče ili ljuske predstavljaju problemi prevazilaženja lažnih nultih energetskih modusa (mehanizama)i fenomena smičućeg lockinga ukupne diskretizovane strukture. Ovo je od značaja u defomacionom modelu konačnog elementa pri potpunoj, redukcionoj ili optimalno selektivnoj numeričkoj integraciji [4], kao i u mešovitom modelu gde je izbor naponskog polja za aproksimaciju osetljivo pitanje.

DK elementi oslobođeni su navedenih poteškoća iz jednostavnog razloga što se smičuća energija izostavlja u ukupnom balansu potencijalne energije, dok se Kirchofljeva hipoteza o nultim vrednostima smičuće deformacije uvodi na diskretan način duž strana elementa.

U dosadašnjoj litetaruri pristutan je priličan broj DK elemenata, među kojima sigurno najznačajnije mesto zauzima trougaoni element ploče izveden od strane Batoza i dr. [3]. Ovaj element karaktetriše konvergencija ka Kirchofljevom rešenju tankih ploča, re-

Adresa autora: Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 11000 Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73

lativna neosetljivost na njegovu distorziju kao i jednostavno formiranje matrice krutosti. Isti koncept biće korišćen i za formulaciju diskretnog Kirchofovog trougla(DKT)prezentiranog u ovom radu, koji u opštem slučaju pretpostavlja zakrivljeni element ljuske definisan u proizvoljnom sistemu.

INTERPOLACIONE FUNKCIJE POLJA POMERANJA

Promena ugiba V^3 unutar elementa opisana je kompletnim polinomom trećeg stepena, izraženog Tajlorovim razvojem u okolini čvora 1, odnosno

$$V^3 = \bar{V}^3 + \bar{V}^3_{,\alpha}\,\tilde{\xi}^\alpha + \frac{1}{2}\bar{V}^3_{,\alpha\beta}\,\tilde{\xi}^\alpha\,\tilde{\xi}^\beta + \frac{1}{6}V^3_{,\alpha\beta\gamma}\,\tilde{\xi}^\alpha\,\tilde{\xi}^\beta\,\tilde{\xi}^\gamma$$

dok je interpolacija tangencijalnih komponenti za jedan stepen niža

$$V^\alpha = \bar{V}^\alpha + \bar{V}^\alpha_{,\beta}\,\tilde{\xi}^\beta + \frac{1}{2}\bar{V}^\alpha_{,\beta\gamma}\,\tilde{\xi}^\beta\,\tilde{\xi}^\gamma \tag{1}$$

pri čemu nadvučene veličine predstavljaju vrednosti funkcija V^3, V^α i njihovih izvoda u čvoru 1 trougaonog elementa (slika 1).

Slika 1

Usvajanjem konačnog elementa sa čvorovima samo u temenima trougla ukupan broj stepeni slobode koji definiše problem savijanja jednak je devet (tri ugiba i šest rotacija), dok je broj nepoznatih parametara u jednačini (1) deset. Tretirajući stepene slobode savijanja kao zadate granične uslove, devet od deset nepoznatih parametara u Tejlorovom razvoju (1) možemo izraziti u funkciji od čvornih ugiba i rotacija i preostalog parametra. Na taj način, ako mešoviti izvod $\bar{V}^3_{,12}$ odaberemo kao suvišnu nepoznatu, Tejlorov razvoj funkcije V^3 možemo redefinisati kao

$$V^3 = B_3^{3i}\,V_i^3 + B_i^{3\beta}\,\theta^i_\beta + H\bar{V}^3_{,12} \quad (i = 1,2,3) \tag{2}$$

gde su B_3^{3i} i $B_i^{3\beta}$ osnovne ili bazne interpolacije izvedene iz nepotpunog polinoma V^3 (bez $\bar{V}^3_{,12}\,\xi^1\,\xi^2$), dok je H funkcija oblika suvišnog parametra $\bar{V}^3_{,12}$ tretiranog kao stepen slobode konačnog elementa.

Prisutne funkcije oblika u prethodnom izrazu jednake su

$$B_3^{31} = 1 - 3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 2\eta^3$$

$$B_3^{32} = 3\xi^2 - 2\xi^3 \qquad B_3^{33} = 3\eta^2 - 2\eta^3$$

$$B_1^{31} = \tilde{\xi}\,(1 - 2\xi + \xi^2 - \eta^2)$$

$$B_2^{31} = -\tilde{\xi}\xi + \tilde{\xi}\xi^2 \qquad B_3^{31} = \tilde{\xi}\eta^2$$

$$B_1^{32} = \tilde{\eta}\,(1 - 2\eta + \eta^2 - \xi^2)$$

$$B_2^{32} = \tilde{\eta}\xi^2 \qquad B_3^{32} = -\tilde{\eta}\eta + \tilde{\eta}\eta^2$$

$$H = \tilde{\xi}\tilde{\eta}\,(1 - \xi - \eta) \qquad \xi = \tilde{\xi}/\bar{\xi} \qquad \eta = \tilde{\eta}/\bar{\eta} \tag{3}$$

pri čemu ξ i η i predstavljaju bezdimenzionalne koordinate trougla i jednake su njegovim prirodnim koordinatama L_1 i L_2, respektivno [4]. Veličine $\bar{\xi}$ i $\bar{\eta}$ su dužine strana 12 i 13 u pravcu koordinatnih linija $\tilde{\xi}$ i $\tilde{\eta}$ odnosno baznih vektora $\vec{A}_\alpha$ (slika 1).

Komponentalne rotacije θ_α saglasno izrazu (2) interpolovane su kao

$$\theta_\alpha = B^{3i}_{3,\alpha}\,V_i^3 + B^{3\beta}_{i,\alpha}\,\theta^i_\beta + H_{,\alpha}\,\bar{V}^3_{,12} \tag{4}$$

gde je: $H_{,1} = \tilde{\eta}\,(1 - 2\xi - \eta)$; $H_{,2} = \tilde{\xi}\,(1 - \xi - 2\eta)$.

Lako se može uočiti da su funkcije oblika (3) duž svake strane trougla identične Hermiteovim polinomima prve vrste, pa odatle zaključujemo da se interpolacija ugiba V^3 duž proizvoljne strane poklapa sa egzaktnom interpolacijom grednog elementa, odnosno

$$V^3 = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)V_i^3 + (2\xi^2 - 2\xi^3)\,V^3_{i+} +$$
$$+ l_{ii+}\,(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\,\varphi^i + l_{ii+}\,(\xi^3 - \xi^2)\,\varphi^{i+} \tag{5}$$

gde su φ^i rotacije u pravcu stranu ii_+, l_{ii+} njihove dužine. Takođe, na osnovu istih izraza možemo uočiti da funkcije oblika B_3^{3i} i $B_i^{3\beta}$ zadovoljavaju kontinuitet C_0, ali ne i kontinuitet C_1 što ima za posledicu nekompatibilnost rotacija duž zajedničke strane dva susedna elementa. Ista svojstva pokazuje i interpolacija H nepoznatog parametra $\bar{V}^3_{,12}$ odnosno njeni izvodi $H_{,1}$ i $H_{,2}$.

Usvajanjem nekog drugog parametra kao nepoznatog načelno formulišemo iste funkcije oblika sa istim osobinama u pogledu interpolacije ugiba i nekompatibilnosti rotacija duž strana elementa. Na osnovu svega toga možemo zaključiti da i sa kompletnim kubnim polinomom za opisivanje promene ugiba V^3 ne postoji mogućnost formulacije Kirchofljevog konačnog elementa oblika trougla kompatibilnog po osnovu rotacija. Egzistencija skoka u rotacijama duž zajedničkih strana susednih elemenata u manjoj ili većoj meri razmekšava globalnu krutost strukture što dovodi do precenjivanja tačnog rešenja. Bez obzira na sve ove nedostatke mi ćemo ipak na ovom mestu do kraja proslediti postupak formiranja potpunih funkcija oblika.

Iz minimuma potencijalne energije ili jednakosti unutrašnjeg i spoljašnjeg rada pri virtualnoj vrednosti $\delta\bar{V}^3$, nepoznati parametar u Tejlorovom razvoju izražavamo u funkciji od osnovnih čvornih nepoznatih

$$\bar{V}^3 = F_3^{3i}\, V_i^3 + F_i^{3\beta}\,\theta_\beta^i \tag{6}$$

a odatle i ugib V^3, odnosno

$$V^3 = N_3^{3i} V_i^3 + N_i^{3\beta}\,\theta_\beta^i \tag{7}$$

gde su

$$N_3^{3i} = B_3^{3i} + HF_3^{3i} \qquad N_i^{3\beta} = B_i^{3\beta} + F_i^{3\beta} H \tag{8}$$

tražene "potpune" funkcije oblika.

Pri kvadratnoj promeni tangencijalnih komponenti V^α unutar elementa

$$V^\alpha = B^i V_i^\alpha + H^m \bar{V}_m^\alpha \tag{9}$$

gde su osnovne funkcije oblika B^i i H^m jednake

$$B^1 = 1 - \xi - \eta \qquad B^2 = \xi \qquad B^3 = \eta$$

$$H^1 = \frac{1}{2}\,\bar{\xi}^2(\xi^2 - \xi) \quad H^2 = \frac{1}{2}\,\bar{\eta}^2\,(\eta^2 - \eta) \quad H^3 = \tilde{\xi}\tilde{\eta} \tag{10}$$

nepoznate parametre $\bar{V}_m^\alpha = (\bar{V}^\alpha_{,11}, \bar{V}^\alpha_{,22}, \bar{V}^\alpha_{,12})$ u Taylorovom razvoju određujemo na potpuno isti način kao i u slučaju ugiba V^3, odnosno

$$\bar{V}_m^\alpha = F_{mk}^{\alpha i}\, V_i^k + F_{mi}^{\alpha\beta}\,\theta_\beta^i \tag{11}$$

a samim tim i "kompletne" interpolacije tangencijalnih komponenti

$$N_k^{\alpha i} = \delta_k^\alpha B^i + F_{mk}^{\alpha i} H^m \quad N_i^{\alpha\beta} = F_{mi}^{\alpha\beta} H^m \tag{12}$$

pa je konačno

$$V^\alpha = N_k^{\alpha i}\, V_i^k + N_i^{\alpha\beta}\,\theta_\beta^i \tag{13}$$

Iz strukture izraza (7) i (13) uočavamo da su funkcije oblika međusobno spregnute (promena ugiba zavisna je i od tangencijalnih pomeranja i obrnuto) odakle se nameće zaključak da ovako definisane interpolacije predstavljaju neku aproksimaciju elastičnih površi usled jediničnih vrednosti osnovnih čvornih nepoznatih.

FORMULACIJA KONAČNOG ELEMENTA

Kvadratno polje Mindlin/Raisnerovih rotacija β_α u lokalnom sistemu $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ pretpostavićemo nezavisno od ugiba V^3

$$\beta_\alpha = N_i \beta_\alpha^i + N_k \beta_\alpha^k \quad (i = 1,2,3;\ k = 4,5,6) \tag{14}$$

i interpolovaćemo ga sa vrednostima u temenima trougla β_α^i i na sredinama strana β_α^k (slika 2), pri čemu su funkcije oblika N_i i N_k jednake

$$N_1 = (1 - \xi - \eta)\,(1 - 2\xi - 2\eta)$$

Slika 2

$$N_2 = \xi\,(2\xi - 1) \qquad N_3 = \eta\,(2\eta - 1)$$

$$N_4 = 4\xi\,(1 - \xi - \eta) \qquad N_5 = 4\xi\eta$$

$$N_6 = 4\eta\,(1 - \xi - \eta) \tag{15}$$

Pored lokalnog sistema $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ konačnom elementu pridružićemo i jedan promenljiv ortogonalni sistem definisan normalom $\vec{n}$ i tangentom $\vec{m}$ duž svake strane trougla, s baznim vektorima $\vec{\tilde{A}}_\alpha$, gde je $\vec{\tilde{A}}_1 = \vec{\tilde{A}}^1 = \vec{n}$ a $\vec{\tilde{A}}_2 = \partial R/\partial s_{ii_+}$.

Osim lokalnih Mindlin/Raisnerovih β_α i Kirchofljevih θ_α rotacija uvešćemo i njihove odgovarajuće vrednosti samo duž strana trougla a u odnosu na ortogonalni $\vec{\tilde{A}}_\alpha$ sistem označene kao $\vec{\beta}$ i $\vec{\varphi}$, tako da je

$$\beta_\alpha \vec{\tilde{A}}^\alpha = \mathrm{B}_\mu \vec{\tilde{A}}^\mu = \beta_\alpha \Rightarrow \mathrm{B}_\mu \vec{\tilde{A}}^\mu \vec{A}_\alpha = \bar{D}_\alpha^\mu \mathrm{B}_\mu \tag{16}$$

odnosno

$$\varphi_\alpha = D_\alpha^\beta \theta_\beta \qquad D_\alpha^\beta = \vec{A}^\beta \vec{\tilde{A}}_\alpha = (\bar{D}_\beta^\alpha)^{-1} \tag{17}$$

S obzirom da pretpostavljenim elementom modelišemo tanke ljuske i ploče u skladu sa Kirchofljevom teorijom, osnovna hipoteza ove teorije može biti zadovoljena u bilo kojim diskretnim tačkama elementa. Konkretno u ovom slučaju pretpostavljamo temena trougla i sredine strana, odakle sledi da je

$$\beta_\alpha^i = -\,(\theta_\alpha^i + 2V_i^\nu B_{\nu\alpha}) \quad (i = 1,2,3) \tag{18}$$

odnosno

$$\mathrm{B}_1^k = -\,\varphi_1^k - 2\tilde{V}_k^\nu B_{\nu 1}\ (\mathrm{k} = 4,5,6) \tag{19}$$

gde su V_i^ν i $B_{\nu\alpha}$, $\tilde{V}_k^\nu$ i $\tilde{B}_{\nu 1}$ tangencijalne komponente pomeranja i Gaussove krivine elementa u lokalnom $\vec{A}_\alpha$ i ortogaonalnom $\vec{\tilde{A}}_\alpha$ sistemu, respektivno.

Na osnovu uvedenih pretpostavki zaključujemo da je u odnosu na ugib potrebno poznavanje njegove varijacije samo po konturi elementa koju pretpostavljamo u obliku (5), odakle možemo pisati da je

$$\varphi_1^k = -\,\frac{3}{2l_{ii_+}}(V_i^3 - V_{i+}^3) - \frac{1}{4}(\varphi_1^i + \varphi_1^{i+})\ (\mathrm{k} = 4,5,6) \tag{20}$$

Konačno poslednja u nizu pretpostavki vezanih za formulaciju DKT elementa sadrži linearnu promenu B_2 rotacija, odnosno

$$B_2^k = \frac{1}{2}(B_2^i + B_2^{i+}) \tag{21}$$

gde je

$$B_2^i = -\varphi_2^i - 2\tilde{V}_i^\nu \tilde{B}_{\nu 2} \tag{22}$$

Korišćenjem izraza (16) – (22), i imajući na umu da se tangencijalna pomeranja $\tilde{V}^\nu$ transformišu na lokalne V^μ vrednosti kao

$$\tilde{V}^\nu = \bar{D}_\mu^\nu V^\mu$$

β_α rotacije na sredinama strana možemo izraziti u funkciji od osnovnih čvornih nepoznatih

$$\beta_\alpha^k = D_\alpha^{-1}\left\{\frac{3}{2l_{ii_+}}(V_i^3 - V_{i_+}^3) + \frac{1}{4}[(D_1^\beta\theta_\beta)^i + (D_1^\beta\theta_\beta)^{i_+}] - 2(\bar{D}_\gamma^\nu V^\gamma B_{\nu 1})_k\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\bar{D}_\alpha^2[(D_2^\beta\theta_\beta)^i + (D_2^\beta\theta_\beta)^i + 2(\bar{D}_\gamma^\nu V^\gamma \tilde{B}_{\nu 2})_i + 2(\bar{D}_\gamma^\nu V_\gamma \tilde{B}_{\nu 2})_{i_+}] \tag{23}$$

Iz izraza (21) i (22) možemo konstantovati da pretpostavka o linearnoj varijaciji B_2 rotacija podrazumeva i linearnu promenu člana $\tilde{V}^\nu \tilde{B}_{\nu 2}$ duž proizvoljne strane ii_+. Sledstveno tome možemo smatrati da je i varijacija člana $\tilde{V}^\nu \tilde{B}_{\nu 1}$ u izrazu (19) linearna. Zamenom prethodne jednačine u jednačinu (14), polje β_α rotacija definitivno ćemo izraziti preko čvornih stepeni slobode kao

$$\beta_\alpha = -N_i\theta_\alpha^i + N_k\left\{\bar{D}_\alpha^1 \frac{3}{2l_{ii+}}(V_i^3 - V_{i+}^3) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\bar{D}_\alpha^1[(\bar{D}_1^\beta\theta_\beta)^i + (\bar{D}_1^\beta\theta_\beta)^{i+}] - \frac{1}{2}\bar{D}_\alpha^2[(\bar{D}_2^\beta\theta_\beta)^i + (\bar{D}_2^\beta\theta_\beta)^{i+}]\right\}$$

$$-2N_i(V^\nu B_{\nu\alpha})^i - N_k\left\{\bar{D}_\alpha^1[(\bar{D}_\gamma^\nu \tilde{B}_{\nu 1} V^\gamma)^i + (\bar{D}_\gamma^\nu \tilde{B}_{\nu 1} V^\gamma)^{i+}] + \right.$$

$$\left. + \bar{D}_\alpha^2[(\bar{D}_\gamma^\nu \tilde{B}_{\nu 2} V^\gamma)^i + (\bar{D}_\gamma^\nu \tilde{B}_{\nu 2} V^\gamma)^{i+}]\right\} \tag{24}$$

Prethodnim izrazom kao i izrazima (7) i (13) definisan je krivolinijski Diskretni Kirchofljev trougaoni element ljuske. Membransko stanje i stanje savijanja međusobno su spregnuti s obzirom da su spregnute membranske komponente pomeranja i rotacije.

Ovakvo krivolinijsko rešenje po pravilu nosi opasnost od prisustva membranskog lockinga koji dovodi do 'over stiff' rešenja. Iz tih razloga iz jednačine (20) izvešćemo ravno rešenje ljuske, odnosno element ploče. Naime, u tom slučaju Gaussove krivine jednake su nuli a samim tim i sve interpolacije uz tangencijalna čvorna pomeranja pa je promena M/R–ovih rotacija unutar elementa jedanaka

$$\beta_\alpha = -N_i\theta_\alpha^i + N_k\left\{\frac{3}{2l_{ii_+}}\bar{D}_\alpha^1(V_i^3 - V_{i_+}^3) + \frac{1}{4}\bar{D}_\alpha^1[(D_1^\beta\theta_\beta)^i + (D_1^\beta\theta_\beta)^{i_+}] - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\bar{D}_\alpha^2[(D_2^\beta\theta_\beta)^i + (D_2^\beta\theta_\beta)^{i_+}]\right\} \tag{25}$$

Interpolacije $N_3^{\alpha i}$ i $N_i^{\alpha\beta}$ u izrazu (13) takođe su jednake nuli pa tako formulisan element separatno razmatra savijanje od membranskog naprezanja. Treća mogućnost DKT elementa ljuske koju ovde možemo postaviti jeste varijanta između ova dva rešenja. Ona se sastoji u tome da se problem savijanja tretira ravnim DKT elementom a membransko stanje analizira na krivoj realnoj površi. U tom slučaju rotacije β_α nisu funkcija tangencijalnih čvornih pomeranja ali su zato V^α komponente funkcija i ugiba i rotacija.

Ortoganlne bazne vektore, $\vec{\tilde{A}}_\alpha$ koji figurišu u čvorovima i na sredinama strana trougla izvešćemo iz izraza za jedinične vektore tangente i normele [2], odnosno

$$\vec{m} = \pm\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\vec{A}_1 + \nu\vec{A}_2)$$

$$\gamma = A_{11} + 2\nu A_{12} + \nu^2 A_{22}$$

$$\vec{n} = \vec{m} \times \vec{A}_3 \qquad \nu = d\Theta^2/d\Theta^1$$

Kako je dužina elementa luka duž strane 12 jednaka $ds_{12} = \sqrt{A_{11}}d\xi$ vektor normale, odnosno vektor $\vec{\tilde{A}}_1$ dobijamo da je

$$\vec{\tilde{A}}_1 = \vec{\tilde{A}}^1 = -\vec{A}^2/A^{(2)}$$

odnosno

$$\vec{\tilde{A}}_2 = \vec{A}_1 \Rightarrow \vec{\tilde{A}}^2 = \vec{A}_1/A_{11}$$

odakle slede i vrednosti matrica transformacija (16) i (17)

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{A^{(2)}} & \dfrac{A_{12}}{A_{11}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\dfrac{A^{12}}{A^{(2)}} & -A^{(2)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diferencijalnu dužinu luka duž strane 23 možemo izraziti kao $ds_{23} = -\sqrt{\gamma}d\xi$, gde je

$$\gamma = A_{11} - 2\left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}}\right)A_{12} + \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}}\right)^2 A_{22},$$

na osnovu čega definišemo potrebne $\vec{\tilde{A}}_\alpha$ vektore,

$$\vec{\tilde{A}}_1 = \vec{\tilde{A}}^1 = \sqrt{\frac{A}{\gamma}}(\vec{A}^2 + e\vec{A}^1) \qquad e = \frac{\bar{\eta}}{\xi}$$

$$\vec{\tilde{A}}_2 = -(\vec{A}_1 - e\vec{A}_2) \Rightarrow \vec{\tilde{A}}^2 = \frac{1}{\gamma}(\vec{A}_1 - e\vec{A}_2)$$

odnosno matrice transformacije

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{A}{\gamma}}\, e - \frac{1}{\gamma}(A_{11} - e A_{12}) \\ \\ \sqrt{\frac{A}{\gamma}} - \frac{1}{\gamma}(A_{12} - e A_{22}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{A}{\gamma}}\,(A^{12} + eA^{11}) & \sqrt{\frac{A}{\gamma}}\,(A^{22} + eA^{12}) \\ \\ -1 & e \end{bmatrix}$$

Konačno, u slučaju strane 31 imamo da je $ds_{31} = -\sqrt{A_{22}}\, d\tilde{\eta}$, odnosno

$$\vec{A}_1 = \vec{A}^1 = -\vec{A}^1 / A^{(1)}$$

$$\vec{A}_2 = -\vec{A}_2 \Rightarrow \vec{A}^2 = -\vec{A}_2 / A_{22}$$

tako da je

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A^{(1)}} & -\frac{A_{12}}{A_{22}} \\ \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -A^{(1)} & -\frac{A^{12}}{A^{(1)}} \\ \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

GLOBALNI SISTEM–TRANSFORMACIJA LOKALNIH NA GLOBALNE STEPENE SLOBODE

Trougaoni konačni element prikazan na slici 1 opšteg je karaktera i može biti korišćen za modelisanje tankih ljuski proizvoljnog oblika. Međutim sa stanovišta primene najčešće su od značaja forme oblika cilindra, sfere, hiperboličkog paraboloida i eventualno konusa, odnosno ljuske čija srednja ravan pretpostavlja površ drugog reda. Materijalne linije θ^α koje ujedno čine i globalni sistem konačnog elementa u tom slučaju postaju međusobno upravne. Stoga dalje izvođenje trougaonog elementa biće ograničeno na ortogaonalni globalni sistem s baznim vektorima $\vec{\mathrm{A}}_\alpha$ u pravcu θ^α linija.

Veza između lokalnih i globalnih koordinata kao i veza lokalnih i globalnih baznih vektora materijalnih tačaka elementa trougla formuliše se jednostavno i data je izrazima

$$\xi^\alpha = \bar{C}^\alpha_\beta\, \Theta_\beta \qquad \vec{A}_\alpha = C^\beta_\alpha\, \vec{\mathrm{A}}_\beta$$

tako da su elementi matrice $\mathbf{C}$ i njoj inverzne $\overline{\mathbf{C}}$ jednaki

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\theta^1_2}{\bar{\xi}} & \frac{\theta^2_2}{\bar{\xi}} \\ \\ \frac{\theta^1_3}{\bar{\eta}} & \frac{\theta^2_3}{\bar{\eta}} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} \frac{\theta^3}{\bar{\eta}} & -\frac{\theta^2_2}{\bar{\xi}} \\ \\ -\frac{\theta^1_3}{\bar{\eta}} & \frac{\theta^1_2}{\bar{\xi}} \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \tag{26}$$

$$\det C = \frac{1}{\bar{\xi}\bar{\eta}}(\theta^1_2\,\theta^2_3 - \theta^1_3\,\theta^2_2)$$

S obzirom da je vektor u pravcu z koordinate (θ^3 linije) upravan na srednju površ ljuske i jediničnog je intenziteta, sledi da su lokalni i globalni vektori u tom pravcu identični, odnosno

$$\vec{\mathrm{A}}_3 = \vec{\mathrm{A}}^3 = \vec{A}_3 = \vec{A}^3$$

odakle možemo zaključiti da su i komponente pomeranja V^3 i υ^3 međusobno jednake. Lokalne tangencijalne komponente transformisaćemo posmatranjem celokupnog vektora pomeranja

$$\vec{V} = V^\alpha \vec{A}_\alpha + V^3 \vec{A}_3 = \upsilon^\beta\, \vec{\mathrm{A}}_\beta + \upsilon^3 \vec{\mathrm{A}}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^\alpha = \upsilon^\beta\, \vec{\mathrm{A}}_\beta \vec{A}^\alpha = \bar{C}^\alpha_\beta\, \upsilon_\beta, \qquad V^3 = \upsilon^3 \tag{27}$$

Iz prethodnog izraza vidi se da su tangencijalna pomeranja međusobno spregnuta, dok je ugib nezavistan, potpuno analogno elementu ploče u sistemu prostornih koordinata. Ovo je još jedna potvrda izvršene degeneracije trodimenzionalne površi na 2–D kontinum [2].

Za razliku od pomeranja komponente rotacije transformišu se kao

$$\vec{\theta} = \theta_\alpha \vec{A}^\alpha = \bar{\theta}_\beta\, \vec{\mathrm{A}}^\beta \Rightarrow \theta_\alpha = \bar{\theta}_\beta \vec{\mathrm{A}}^\beta \vec{A}_\alpha = (C^\beta_\alpha)\bar{\theta}^\beta \tag{28}$$

pri čemu $\bar{\theta}_\beta$ predstavljaju globalne vrednosti rotacija. Treba skrenuti pažnju da je matrica $\mathbf{C}$ u prethodnom izrazu transpozicija matrice kojom se transformišu globalne na lokalne koordinate. Ova transpozicija posledica je istog zakona transformisanja veličina različitog baznog karaktera. Naime, jedne su kovarijantne a druge kontravarijantne.

Takođe treba istaći da usvojeni lokalni i globalni sistem egzistiraju na realnoj površi ljuske pa su u tom smislu ekvivalentni prostornom 'surface' sistemu [5]. Ovakav sistem omogućava egzaktno zadovoljavanje uslova u pogledu θ_3 rotacije, odnosno $\theta_3 = \bar{\theta}_3 = 0$, čime se definiše konačni element ljuske sa po pet stepeni slobode u svakom čvoru,

$$\mathbf{q}_l^T = \left[V^1, V^2, V^3, \theta_1, \theta_2\right] \quad \mathbf{q}_g^T = \left[\upsilon^1, \upsilon^2, \upsilon^3, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2\right]$$

gde su $\mathbf{q}_l$ i $\mathbf{q}_g$ lokalne i globalne osnovne nepoznate. Značajno je takođe i napomenuti da su lokalni i globalni sistem promenljivi i menjaju se ne samo od elementa do elementa već i od čvora do čvora, s obzirom na promenljivost njihovih baznih vektora. Ovo ima za posledicu da se pri formiranju globalne matrice krutosti celokupna energija ljuske ne posmatra u odnosu na jedan fiksni već konačno mnogo različitih globalnih sistema. Kako su ξ^α linije izvedene kao linearna kombinacija osnovnih materijalnih θ^α linija, napred komentarisani zakoni transformacije pojedinih veličina bez obzira na promenljivost lokalnog i globalnog sistema unutar jednog elementa ostaju konstantni.

U slučaju ravnog rešenja problem transformacije lokalnih veličina na njihove globalne vrednosti bitno se razlikuje. Naime, u tom slučaju modelisana površ ljuske nije više zakrivljena već je poliedarskog oblika sastavljena od niza trougaonih ploča. Materijalne linije $\bar{\xi}^\alpha$ u pravcu strana 12 i 13 postaju prave linije čime određuju da su bazni vektori u njihovom pravcu konstantni unutar celog elementa, pri čemu lokalni $\tilde{\xi}\tilde{\eta}$ sistem dobija fiksni karakter.

Bazne vektore ravnog rešenja u cilju pogodnosti usvojićemo kao jedinične a odredićemo ih iz vektora položaja čvorova trougla kao

$$\vec{d}_\alpha = \frac{1}{\bar{\xi}^\alpha}(\vec{R}_{\alpha+1} - \vec{R}_\alpha)\ (\alpha = 1,2) \qquad (29)$$

pri čemu $\bar{\xi}^\alpha$ predstavljaju stvarne dužine strana 12 i 13 (slika 3). Vektor normale $\vec{d}_3$ odredićemo iz vektorskog proizvoda, odnosno

$$\vec{d}_3 = \vec{d}^3 = \frac{1}{\sqrt{d}}(\vec{d}_1 \,\mathrm{x}\, \vec{d}_2)$$

gde je $d = 1 - d_{12}^2$ determinanta metričkog tenzora $d_{\alpha\beta}$ čije su komponente jednake

$$d_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} \\ d_{12} & 1 \end{bmatrix};\ d_{12} = \cos\chi \Rightarrow \sqrt{d} = \sin\chi \qquad (30)$$

dok je χ ugao kojeg zaklapaju bazni vektori odnosno strane 12 i 13.

Matrice transformacije lokalnih stepeni slobode na globalne formiraćemo iz razmatranja vektora pomeranja i rotacija, odnosno

$$\vec{V} = V^m \vec{d}_m = \upsilon^k \vec{A}_k \Rightarrow V^m = (t_\upsilon)^m_k\, \upsilon^k$$

gde se matricom

$$(t_\upsilon)^m_k = \vec{A}_k \vec{d}^m \qquad (31)$$

lokalna čvorna pomeranja prevode na globalni θ^α sistem. Analogno ovome komponente rotacija transformišu se kao

$$\vec{\theta} = \theta_\alpha \vec{d}^\alpha = \vec{\theta}_\beta \vec{A}^\beta \Rightarrow \theta_\alpha = (t_\theta)^\beta_\alpha\, \bar{\theta}_\beta$$

gde je

$$(t_\theta)^\beta_\alpha = \vec{A}^\beta \vec{d}_\alpha \qquad (32)$$

Nije teško pokazati, analizom izraza (31) i (32) da je matrica $\mathbf{t}_\theta$ transpozicija inverzije submatrice $\mathbf{t}_\upsilon$ trnasformacije tangencijalnih pomeranja. S obzirom da se modelisanjem ravnim elementom odstupa od tačne geometrije, pri transformaciji lokalnih rotacija na realnu površ ljuske (globalni sistem) dolazi do pojave i rotacija u tangencijalnoj ravni. Ovaj iznos u limitu pri dovoljno gustim mrežama u potpunosti iščezava pa je izostavljanje θ_3 rotacije sasvim opravdano. Uvažavajući ranije izrečene tvrdnje da lokalni $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ sistem ima fiksni dok globalni θ^α promenljiv karakter, prilikom formiranja globalne matrice krutosti transformacija lokalnih pomeranja zahteva formiranje matrica $\mathbf{t}_\upsilon$ i $\mathbf{t}_\theta$ u svakom čvoru elementa.

Slika 3

INTERPOLACIJA GEOMETRIJE

Sistem materijalnih linija za razliku od prostornih koordinata omogućava efikasnije opisivanje geometrije ljuske i relativno niskim interpolacijama postiže se zadovoljavajuća tačnost. S druge strane za najčešće primenljive oblike ljuski poznate su nam tačne vrednosti baznih vektora, Christoffelovih simbola i Gausovih krivina u sistemu ortogonalnih θ^α linija. Transformacijom ovih veličina na lokalni $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ sistem u potpunosti se definiše tačna geometrija ljuske bez ikakvih interpolacija.

Linearna promena baznog vektora kao funkcija oblika za interpolaciju geometrije obezbeđuje konstantnu vrednost njegovog izvoda unutar elementa ali ne i konstantne Christofelove simbole. Imajući na umu ovu činjenicu zaključujemo da je varijacija koeficijenata povezanosti prve vrste, odnosno simbola druge vrste unutar elementa proporcionalna promeni baznih i recipročnih baznih vektora, respektivno. Konstantu $\vec{A}_{\alpha,\beta}$ odredićemo iz temenih čvorova trougla, odnosno

$$\vec{A}_{1,1} = \frac{1}{\bar{\xi}}({}_2\vec{A}_1 - {}_1\vec{A}_1)$$

$$\vec{A}_{2,2} = \frac{1}{\bar{\eta}}({}_3\vec{A}_2 - {}_1\vec{A}_2)$$

$$\vec{A}_{1,2} = \frac{1}{\bar{\eta}}({}_3\vec{A}_1 - {}_1\vec{A}_1)$$

$$\vec{A}_{2,1} = \frac{1}{\bar{\xi}}({}_2\vec{A}_2 - {}_1\vec{A}_2) \qquad (33)$$

U opštem slučaju izvodi vektora $\vec{A}_{1,2}$ i $\vec{A}_{2,1}$ su međusobno različiti što povlači za sobom nesimetriju mešovitih Christofelovih simbola i Gausovih krivina.

Ovaj nedostatak eliminiše se simetrizacijom mešovitih izvoda

$$\vec{\bar{A}}^{s}_{1,2} = \vec{\bar{A}}^{s}_{2,1} = \frac{1}{2}(\vec{\bar{A}}_{1,2} + \vec{\bar{A}}_{2,1})$$

pa je onda

$$\Gamma^{\lambda}_{12} = \Gamma^{\lambda}_{21} = \vec{\bar{A}}_{1,2}\vec{A}^{\lambda}$$

$$B_{12} = B_{21} = \vec{\bar{A}}^{s}_{1,2}\vec{A}^{3}$$

$$\Gamma_{12\mu} = \Gamma_{21\mu} = \vec{\bar{A}}^{s}_{1,2}\vec{A}_{\mu}$$

Usvojena linearna interpolacija vektora $\vec{A}_{\alpha}$ implicira kvadratnu promenu komponenata metričkog tenzora dok njoj inverzna funkcija definiše promenu njegovih kontravarijantnih komponenti. Jasno je onda da je polje recipročnih baznih vektora opisano nekom funkcijom hiperboličkog tipa. Ovako definisana geometrija elementa ljuske predstavlja tačniju varijantu linearne interpolacije za razliku od varijante sa konstantnim poljem koeficijenata povezanosti druge vrste.

Na slici 4 data su dva elementa sa zajedničkom stranom koja predstavlja osu $\tilde{\xi}^{2}$ za element *(I)*, odnosno osu $\tilde{\xi}^{1}$ za element *(II)*. Kako je

$${}_{I}\vec{A}_{2} = {}_{I}\vec{\bar{A}}_{2} + {}_{I}\vec{\bar{A}}_{2,2I}\,\tilde{\eta}$$

$${}_{II}\vec{A}_{1} = {}_{II}\vec{\bar{A}}_{1} + {}_{II}\vec{\bar{A}}_{1,1II}\,\tilde{\xi}$$

odnosno

$${}_{I}\vec{\tilde{A}}_{2} = {}_{I}(C^{\beta}_{2})\,\vec{\mathrm{A}}_{\beta} = {}_{I}C^{1}_{2}\,\vec{\mathrm{A}}_{1} + {}_{I}C^{2}_{2}\,\vec{\mathrm{A}}_{2}$$

$${}_{II}\vec{\tilde{A}}_{1} = {}_{II}(C^{\beta}_{1})\vec{\mathrm{A}}_{\beta} = {}_{II}C^{1}_{1}\vec{\mathrm{A}}_{1} + {}_{II}C^{2}_{1}\vec{\mathrm{A}}_{2}$$

S obzirom da je ${}_{I}C^{1}_{2} = {}_{II}C^{1}_{1}$ i ${}_{I}C^{2}_{2} = {}_{II}C^{2}_{1}$ sledi da se vektori ${}_{I}\vec{\bar{A}}_{2}$ i ${}_{II}\vec{\bar{A}}_{1}$ međusobno poklapaju. S druge strane na osnovu izraza $(26)_1$ možemo pisati

Slika 4

$${}_{I}\vec{\bar{A}}_{2,2} = ({}_{I}C^{1}_{2})^{2}\vec{\mathrm{A}}_{1,1} + ({}_{I}C^{2}_{2})^{2}\vec{\mathrm{A}}_{2,2} + 2_{I}(C^{2}_{2}C^{1}_{2})\,\vec{\mathrm{A}}_{1,2}$$

$$\vec{\bar{A}}_{1,1} = ({}_{II}C^{1}_{1})^{2}\vec{\mathrm{A}}_{1,1} + ({}_{II}C^{2}_{1})^{2}\vec{\mathrm{A}}_{2,2} + 2_{II}(C^{1}_{1}C^{2}_{1})\vec{\mathrm{A}}_{2,1}$$

pa imajući na umu prethodnu konstataciju vezanu za elemente matrice transformacije lokalnih na globalne vrednosti, vidi se da su vektori ${}_{I}\vec{\bar{A}}_{2,2}$ i ${}_{II}\vec{\bar{A}}_{1,1}$ identični. Na taj način se pokazuje da se poklapaju i vektori ${}_{I}\vec{A}_{2}$ i ${}_{II}\vec{A}_{1}$ čime se obezbeđuje njihov kontinuitet duž zajedničke strane.

Kao direktna posledica C_0 kontinuiteta, s obzirom na to da se linije ${}_{I}\tilde{\eta}$ i ${}_{II}\tilde{\xi}$ poklapaju, sledi da je

$${}_{I}\vec{A}_{2,2} = {}_{II}\vec{A}_{1,1}$$

odnosno

$${}_{I}(\Gamma^{\lambda}_{22}\vec{A}_{\lambda} + B_{22}\vec{A}_{3}) = {}_{II}(\Gamma^{\mu}_{11}\vec{A}_{\mu} + B_{11}\vec{A}_{3})$$

ili transformisano na globalni sistem i pomnoženo skalarno vektorom $\vec{\mathrm{A}}^{\nu}$ ($\vec{\mathrm{A}}^{3}$) dobijamo

$${}_{I}(\Gamma^{\lambda}_{22}C^{\nu}_{\lambda}) = {}_{II}(\Gamma^{\mu}_{11}\,C^{\nu}_{\mu}) \quad \text{i} \quad {}_{I}B_{22} = {}_{II}B_{11}$$

na osnovu čega možemo zaključiti da linearna interpolacija baznog vektora duž zajedničke strane obezbeđuje kontinuitet i Gausovih krivina, odnosno Christofelovih simbola.

Redifinicijom osnovne interpolacije izražene promenom vektora položaja unutar elementa,

$$\vec{R} = \bar{R} + \bar{R}_{,\alpha}\,\xi^{\alpha} + \frac{1}{2}\bar{R}_{,\alpha\beta}\,\xi^{\alpha}\,\xi^{\beta}$$

ili

$$\vec{A}_{\mu} = \vec{R}_{,\mu} = \bar{R}_{,\alpha}\delta^{\alpha}_{\mu} + \bar{R}_{,\alpha\beta}\delta^{\alpha}_{\mu}\,\delta^{\beta}_{\nu}\,\xi^{\nu} = \bar{A}_{\mu} + \bar{A}_{\mu,\nu}\,\xi^{\nu} \quad (34)$$

vidimo da je linearnom funkcijom oblika $\vec{A}_{\alpha}$ u potpunosti definisana kvadratna površ.

MATRICA KRUTOSTI KONAČNOG ELEMENTA

Zavisnost između presečnih sila (normalne sile i momenti savijanja) i membranske deformacije, odnosno deformacije krivina data je u knjizi [2] i definisana je izrazima (11.61) i (11.62). U njima eksplicitno figurišu kontravarijantni tenzori četvrtog reda čije su komponente funkcija elastičnih konstanti materijala i metrike srednje površi ljuske. S obzirom na složenost ovih izraza mi ih na ovom mestu nećemo navoditi već ćemo prikazati njihovu matričnu formulaciju, odnosno

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}_{m}\varepsilon_{m} + \mathbf{D}_{mb}\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}_{mb}\varepsilon_{m} + \mathbf{D}_{b}\boldsymbol{k}$$

gde su $\mathbf{D}_m$, $\mathbf{D}_{mb}$ i $\mathbf{D}_b$ matrice elastičnosti materijala i jednake su

$$\mathbf{D}_m = \frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} A^{11}A^{11} & A^{12}A^{12}+\nu\bar{A} & A^{11}A^{12} \\ & A^{22}A^{22} & A^{22}A^{12} \\ symetr. & & \frac{1}{2}(F1-\nu\bar{A}) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = A^{11}A^{22} - A^{12}A^{12} \quad F1 = A^{11}A^{22} + A^{12}A^{12}$$

odnosno

$$\mathbf{D}_{mb}=\frac{Eh}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} B^{\lambda}_{\lambda}A^{11}A^{11} \\ -4A^{11}B^{11} & B^{\lambda}_{\lambda}A^{12}A^{12} \\ & -4A^{12}B^{12}+\nu F34 & B^{\lambda}_{\lambda}A^{11}A^{12} \\ & & -2F3 \\ & B^{\lambda}_{\lambda}A^{22}A^{22} & B^{\lambda}_{\lambda}A^{22}A^{12} \\ symetr. & -4A^{22}B^{22} & -2F4 \\ & & \frac{1}{2}(F33-\nu F34) \end{bmatrix}$$

pri čemu je

$$F2 = B^{11}A^{22} + B^{22}A^{11} \quad F3 = B^{12}A^{11} + B^{11}A^{12}$$

$$F4 = B^{12}A^{22} + B^{22}A^{12} \quad F33 = B^{\lambda}_{\lambda}F1 - 4A^{12}B^{12} - 2F2$$

$$F34 = B^{\lambda}_{\lambda}\bar{A} + 4A^{12}B^{12} - 2F2 \quad B^{\lambda}_{\lambda} = B^1_1 + B^2_2 \tag{35}$$

dok je matrica $\mathbf{D}_b = \frac{h^2}{12}\mathbf{D}_m$, gde je h debljina ljuske. Gaussove krivine ravnog rešenja jednake su nuli pa otuda i svi elementi mešovite matrice $\mathbf{D}_{mb}$, što ima za posledicu razdvajanje membranske krutosti od krutosti savijanja.

Vektor membranske deformacije izrazićemo preko kontravarijantnih komponenata pomeranja i njihovih izvoda

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{A}_{\upsilon}\bar{\mathbf{V}}_{\theta} + \boldsymbol{\Gamma}_{\upsilon}\mathbf{V} \tag{36}$$

gde su matrice $\mathrm{A}\upsilon$ i $\Gamma\upsilon$ date kao

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\upsilon} = \begin{bmatrix} \Gamma_{111} & \Gamma_{211} & -B_{11} \\ \Gamma_{122} & \Gamma_{222} & -B_{22} \\ \Gamma_{211}+\Gamma_{112} & \Gamma_{221}+\Gamma_{212} & -2B_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\upsilon} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \\ A_{21} & A_{22} & A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$$

Relacija između vektora promene krivina i polja rotacija i ugiba uspostavljena je kao

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_p - \Gamma_{\beta}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{C}V^3 \tag{37}$$

gde je

$$\boldsymbol{\kappa}_p^T = \left[\beta_{1,1};\ \beta_{2,2};\ \beta_{1,2} + \beta_{2,1}\right],\ \boldsymbol{\beta}^T = \left[\beta_1,\ \beta_2\right] \tag{38}$$

vektor krivina elementa ploče, dok su matrica Γ_{β} i vektor $\mathbf{C}$ jednaki

$$\Gamma_{\beta} = \begin{bmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^2_{11} \\ \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{22} \\ \Gamma^1_{12} & \Gamma^2_{12} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}^T = [C_{11}\, C_{22}\, C_{12}]$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(B^{\gamma}_{\alpha}B_{\gamma\beta} + B^{\gamma}_{\beta}B_{\gamma\alpha})$$

Ravno rešenje matrice Γ_{υ}, Γ_{β}, i vektor $\mathbf{C}$ prevodi u nulu, pa je u tom slučaju izrazima (36) i (37) definisana membranska deformacija i deformacija krivina elementa ploče u proizvoljnom kosouglom sistemu $\tilde{\xi},\tilde{\eta}$.

Na osnovu jednačina (37) možemo zaključiti da u uslovima Diskretne Kirchofljeve formulacije zakrivljenog elementa ljuske u opštem slučaju zahteva se uvođenje polja ugiba V^3 ne samo na konturi već i unutar elementa. Interpolacione funkcije (7) tada mogu biti u potpunosti iskorišćene, mada problem može biti i izbegnut usvajanjem integracione šeme s tačkama numeričke integracije na sredinama strana trougla.

Korišćenjem uvedenih funkcija oblika vektore ε_m i $\boldsymbol{\kappa}$ možemo izraziti i preko osnovnih čvornih nepoznatih

$$\varepsilon_m = \mathbf{B}_m\,\mathbf{q} \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_b\,\mathbf{q} \tag{39}$$

definišući pri tome matrice transformacije deformacija srednje ravni ljuske $\mathbf{B}_m$ i krivina $\mathbf{B}_b$.

Unutrašnji virtualni rad trougaonog elementa ljuske

$$\delta R_i = \int_S (\mathbf{R}^T\delta\varepsilon_m - \mathbf{S}^T\delta\boldsymbol{\kappa})\,dS \tag{40}$$

inkorporacijom naponsko deformacijskih relacija i relacija između deformacija i pomeranja transformiše se na

$$\delta R_i = \mathbf{q}^T\mathbf{K}\delta\mathbf{q} \tag{41}$$

gde je

$$\mathbf{K}=\int_S(\mathbf{B}_m^T\mathbf{D}_m\mathbf{B}_m+\mathbf{B}_b^T\mathbf{D}_{mb}\mathbf{B}_m+\mathbf{B}_m^T\mathbf{D}_{mb}\mathbf{B}_b+\mathbf{B}_b^T\mathbf{D}_b\mathbf{B}_b)dS \tag{42}$$

matrica krutosti konačnog elementa. Elementom ploče dolazi do dekompozicije ove krutosti na membransku

$$\mathbf{K}_m = \int_S \mathbf{B}_m^T\mathbf{D}_m\mathbf{B}_m dS \tag{43}$$

i krutost savijanja

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{K}_{DKT} = \int_S \mathbf{B}_b^T\mathbf{D}_b\mathbf{B}_b dS \tag{44}$$

tako da je $\mathbf{K} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_{DKT}$.

LITERATURA

U radu II, broj 12/2002.