ODREĐIVANJE OPTEREĆENJA LOMA DVOPOJASNIH SISTEMA PRIMENOM FUZZY (RASPLINUTIH) BROJEVA

Boško Furtula*, Živojin Praščević**, Nataša Praščević**

*Visoka poslovno-tehnička škola, Užice, e-mail: fbosko@ptt.rs
**Građevinski fakultet, Beograd, e-mail zika@grf.bg.ac.rs, natasa@grf.bg.ac.rs

REZIME

U ovome radu se prikazano određivanja faktora graničnog opterećenja loma dvopojasnih nosača od betona i čelika pomoću fuzzy linearnog programiranja sa nepreciznim ulaznim podacima.. Problem je analiziran za eksperimentalne faze opterećenja po teoriji plastičnosti. Za različite mere fuzzifikacije ulaznih podataka određene su sile i faktor loma u karakterističnim presecima za statičko stanje granične ravnoteže. Nađena je dobra saglasnost eksperimentalnih i teorijskih rezultata.

KLJUČNE REČI: granična ravnoteža, fuzzy faktor loma, fuzzy linearno programiranje.

DETERMINATION OF LOAD CAPACITY OF TWO-CHORD SYSTEMS BY FUZZY NUMBERS

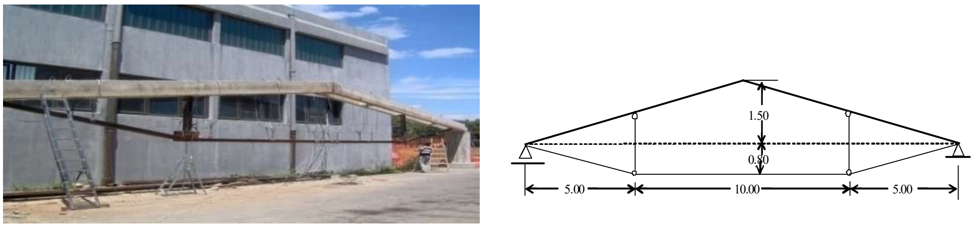
SUMMARY:

In this paper is presented a procedure for determination of the limit load factor of two-chord systems from concrete and steel by fuzzy linear programming with imprecise data. The problem has been analysed for experimental phases of loading according to the theory of plasticity. For different measures of fuzzification of input data are determined internal cross section forces and limit load factor of failure with a good agreement between experimental and theoretical data.

KEY WORDS: limit equilibrium, fuzzy load factor, fuzzy linear programming.

UVOD

Ovaj rad je nastavak istraživanja za određivanje nosivosti montažnih dvopojasnih nosača koje je eksperimentalno i teorijski ispitivao B. Furtula u okviru izrade svoje doktorske disertacije, koja je odbranjena na Građevinskom fakultetu u Beogradu 2013. godine (Furtula, 2013). Ispitivana su dva montažna dvopojasna nosača raspona 20 m u prirodnoj veličini sa gornjim pojasom od armiranog betona velike čvrstoće 75 MPa i 78 MPa i donjim pojasom (zategama) i vertikalnim čeličnim elementima, čija su statička šema i izgled prikazani na slici 1. Ispitivanja su vršena u Laboratoriji za konstrukcije Građevinskog fakulteta Univerziteta Crne Gore u Podgorici. U teorijskoj analizi određivanja faktora graničnog opterećenja i mehanizma loma primenjena je metodologija zasnovana na Linearnom programiranju (LP). Numerički rezultati dobijeni primenom ove teorijske metodologije su upoređeni sa merenim eksperimentalnim rezultatima i formulisani odgovarajući zaključci. Ekspiremintalna i teorijska istraživanja i dobijeni rezultati su detaljno prikazani u pomenutoj disertaciji i radovima (Aćić, Zejak, Furtula, 2008, Furtula i Praščević, 2014, 2015,).



Slika 1- Statička šema i izgled ispitivanih nosača (Furtula,2013)
Figure 1. Statical scheme of investigated systems (Furtula 2013)

U ovim radovima je primenjeno linerno programiranje za određivanje faktora graničnog opterećenja koje ravni dvopojasni nosač dovodi u stanje granične ravnoteže. To je moguće ravnotežno stanje konstrukcijskog sitema kada još uvek postoji ravnoteža spoljašnjih i unutrašnjih sila u sistemu pri kojem su iscrpljeni kapaciteti nosivosti u njegovim kritičnim presecima. Daljim minimalnim povećanjem opterećenja, odnosno faktora sa kojim se množi spoljašnje opterećenje, formiraju se plastični zglobovi u kritičnim presecima, koji su izloženi momentima savijanja, odnosno velika izduženja ili gnječenja u ovim presecima ako su izloženi zatezanju ili pritisku. Sistem prelazi u *kinematički lana*c ili *mehanizam*, na kojem je dalje nemoguće održavati ravnotežu spoljašnjih i unutrašnjih sila.

Metode linearnog programiranja za određivanje statičkih i kinematičkih veličina konstrukcijskih sistema u oblasti granične ravnoteže se primenjuju od pedestih godina XX veka u radovima veoma poznatih autora. U većini radova numeričke vrednosti, koje se odnose na karakteristične geometrijske veličine sistema, aplicirano opterećenje i mehaničke karakteristike materijala su izražene običnim realnim brojevima (egl. *crisp numbers*). Međutim, ove vrednosti u stvarnosti se često ne mogu precizno ostvariti ili odrediti, tako da se u odnosu na projektovana stanja sistema pojavljuju odstupanja, pa u potpunijoj i realnijoj analizi treba smatrati da su ove vrednosti neprecizne i da se mogu nalaziti u određenim intervalima sa različitim stepenima mogućnosti. Zbog toga, ove vrednosti treba izražavati tzv. *rasplinutim* (engl. *fuzzy*) brojevima, koji su elementi jedne posebne vrste skupova, koje je formulisao i uveo u Teoriju skupova Lotfi Zadeh 1956 god. i nazvao *fuzzy sets.*

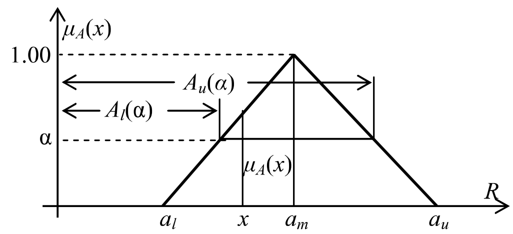
Neka je definisan opšti skup X čiji su elementi x, i neka svakom elementu x odgovara neka funkcija $\mu_A(x)$, onda skup parova x i $\mu_A(x)$ čini u skupu X rasplinuti (fuzzy) skup

$$\widetilde{A} = \{x, \mu_A(x)\},\ 0 \leq \mu_A(x) \leq 1,\ x \in X,\ \widetilde{A} \in X. \tag{1}$$

Funkcija $\mu_A(x)$ naziva se *funkcija pripadnosti* i izražava stepen pripadnosti elementa x fuzzy skupu $\widetilde{A}$. Ako je $\mu_A(x) = 0$ onda element x ne pripada fuzzy skupu $\widetilde{A}$. Ako je $\mu_A(x) = 1$, onda element x u potpunosti pripada fuzzy skupu $\widetilde{A}$. Ako je opšti skup X, skup realnih brojeva R, a element x realni broj, $x \in R$, onda je fuzzy skup $\widetilde{A}$ *fuzzy* (*rasplinuti*) *broj* ako ispunjava još i uslov normalnosti $\sup \mu(x)_{x \in X} = 1$ kao i uslov konveksnosti funkcije pripadnosti tj.

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\},\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Fuzzy skupovi, fuzzy brojevi i ostale fuzzy veličine se obično označavaju talasastim znakom ~.



Slika 2 - Trougaoni fuzzy broj
Figure 2. Triangular fuzzy number

U ovom radu se koristi trougaoni fuzzy broj, koji je prikazan na slici 2 i čija je funkcija pripadnosti

$$\mu(x) = \begin{cases} (x - a_l)/(a_m - a_l) \text{ for } a_l \leq x \leq a_m, \\ (a_m - x)/(a_u - a_m) \text{ for } a_m \leq x \leq a_u, \\ 0 \ \textit{ostalo} \end{cases} \tag{2}$$

Trouglasti fuzzy broj se obično opisuje pomoću tri karateristična realna broja a_l, a_m i a_u

$$\widetilde{A} = (a_l, a_m, a_u),\quad a_l \leq a_m \leq a_u. \tag{3}$$

Čekivana vrednost trougaonog fuzzy broja $\widetilde{A}$ je (Hilpeirn, 1992)

$$a_{\exp} = (a_l + 2a_m + a_u)/4. \tag{4}$$

STATIČKA TEOREMA ELASTO-PLASTIČNE ANALIZE

Metode elasto-plastične analize okvirnih konstrukcija, kako navode Charnes, Lemke i Zienkiewicz (1959), baziraju se na *statičkoj i kinematičkoj teoremi* koje su formulisali Horne (1952) i Greenber i Prager (1952) za nerasplinute (nonfuzzy) karakteristične veličine. U ovom radu su ove teoreme proširene na fuzzy karakteristične veličine.

Ako za dati okvirni sistem i skup proporcinalnih opterećenja fuzzy intenziteta $\widetilde{P}_s$ koji se može izraziti i nekim fuzzy faktorom opterećenja $\widetilde{\gamma}_s$, postoji raspodela momenata savijanja ili normalnih sila koja zadovoljava uslove statičke ravnoteže i ni u jednom preseku moment savijanja ili normalna sila po veličini ne prevazilazi fuzzy plastični moment (moment nosivosti ili kapacitet) tog preska, onda je opterećenje $\widetilde{P}_s$, odnosno faktor opterećenja $\widetilde{\gamma}_s$, manje ili jednako od fuzzy opterećenja loma (kolapsa) sistema $\widetilde{P}_c$, odnosno fuzzy faktotra loma $\widetilde{\gamma}_c$.

$$\widetilde{P}_s \le \widetilde{P}_c \text{ ,odnosno } \widetilde{\gamma}_s \le \widetilde{\gamma}_c . \tag{5}$$

Ako je pretpostavljen mogući mehanizam loma za zadati okvirni sistem i nađen odgovarajući fuzzy intenzitet opterećenja $\widetilde{P}_k$, odnosno faktor opterećenja $\widetilde{\gamma}_k$, onda je to opterećenje veće ili jednako od opterećenja loma (kolapsa) sistema $\widetilde{P}_c$, odnosno faktora loma $\widetilde{\gamma}_c$,, t.j.

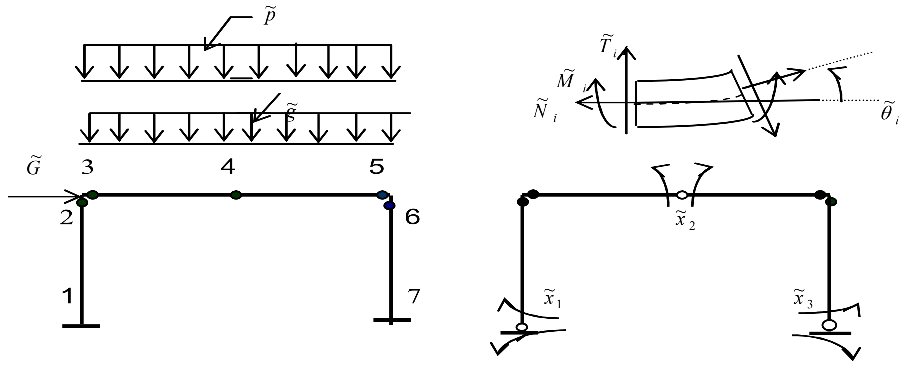
$$\widetilde{P}_k \ge \widetilde{P}_c \text{ , odnosno } \widetilde{\gamma}_k \ge \widetilde{\gamma}_c . \tag{6}$$

Nejednačine (5) i (6) se mogu pisati u obliku

$$\widetilde{P}_s \le \widetilde{P}_c \le \widetilde{P}_k \text{ , odnosno } \widetilde{\gamma}_s \le \widetilde{\gamma}_c \le \widetilde{\gamma}_k . \tag{7}$$

ODREĐIVANJE FAKTORA GRANIČNOG OPTEREĆENJA

Razmatra se neki linijski konsrukcijski sistem, koji je prikazan na slici 3 koji je α puta statički neodređen uz pretpostavku da materijalu odgovara Sen Venant-ov reološki model u kojem se materijal tretira kao krut dok napon ne dostigne fuzzy granicu tečenja, posle čega postaje idealno plastičan. U sistemu se bira *m* karakterističnih ili kritičnih preseka u kojima može doći do iscrpljenja nosivosti preseka odnosno pojave plastičnih zglobova. Sistem se analizira za statički moguće ravnotežno stanje (statička faza). Pozitivni smerovi fuzzy unutrašnjih sila $\widetilde{N}_i, \widetilde{T}_i, \widetilde{M}_i$ i fuzzy ugla obrtanja $\widetilde{\theta}_i$ u preseku *i* (*i=1,2,...,m*) (slika 3).Za određivanje statički mogućeg ravnotežnog stanja sistema primenjuje se metoda koja je slična metodi sila u teoriji elastičnih linijskih sistema kako je to prikazano u radu (Munro and Lloyd Smith, 1972). Formira se "osnovni" statički sistem, tako što se za α prekobrojnih nepoznatih statičkih veličina u nekim od kritičnih preseka isključuju odgovarajuće veze i umeću nove veze (zglobovi ili drugi diskontinuiteti) i umesto njih se uključuje α parova nepoznatih sila, koje mogu biti momenti savijanja, normalne ili transverzalne sile koje se obeležavaju sa $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_\alpha$. Za jedinične veličine ovih sila $\widetilde{x}_i = (x_i, x_i, x_i) = (1,1,1)$, $(i = 1,2,...,\alpha)$, se u svakom od kritičnih preseka j = 1,2,...,m određuju karakteristične ili merodavne unutrašnje sile $\widetilde{b}_{ij} = (b_{ij}, b_{ij}, b_{ij})$ (i=1,2,...,α; j=1,2,...,m), koje formiraju fuzzy matricu $\widetilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B})$. Ako je u nekom preseku j merodavan momenat M_j, onda je $b_{ij} = \overline{M}_{ij}$, ako je merodavna normalna sila N_j, onda je $b_{ij} = \overline{N}_{ij}$, gde su $\overline{M}_{ij}$ i $\overline{N}_{ij}$ moment savijanja, odnosno normalna sila u preseku j usled dejstva jedinične sile x_j =1. Za poznato stalno fuzzy podeljeno opterećenje $\widetilde{g}$, odnosno fuzzy koncentrisane sile $\widetilde{G}_k$ (k=1,2,...,r) i promenljivo podeljeno fuzzy opterećenje $\widetilde{p}$ i promenljive koncentrisane fuzzy sile $\widetilde{P}_l$ (l=1,2,...,s) na isti način se određuju merodavne unutrašnje sile u kritičnim presecima i (i=1,2,...,m) koje se ovde obeležavaju sa $\widetilde{b}_i^g$ za fuzzy stalni i $\widetilde{b}_i^p$ za fuzzy promenljivo opterećenje.



Slika 3 - Konstrukcijski i osnovni system
Figure 3.- Structural and basic system

Primenjujući princip superpozicije uticaja, koji važi u statičkoj fazi ponašanja sistema, *merodavni fuzzy moment savijanja* ili *merodavna fuzzy normalna sila* u preseku i (i=1,2,...,m), koji se ovde obeležavaju sa $\widetilde{R}_i$ su

$$\widetilde{R}_i = \sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij}\widetilde{x}_j + \widetilde{b}_i^g + \widetilde{\gamma}\widetilde{b}_i^p, \quad i = 1,2,...,m. \tag{8}$$

Fuzzy koeficijent $\widetilde{\gamma}$ predstavlja *faktor graničnog stanja*, odnosno *loma sistema*, sa kojim se množi promenljivo opterećenje da bi sistem došao u još uvek moguće statičko stanje granične ravnoteže, zbog dostizanja kapaciteta nosivosti, odnosno plastifikacije u određenom broju preseka. Da bi sistem došao u ovo stanje neophodno je da minimalan broj kritičnih preseka n_k u kojima dolazi do dostizanja kapaciteta nosivosti preseka bude $n_k=\alpha+1$.

Merodavni fuzzy kapacitet nosivosti sistema $\widetilde{R}^{+}_{*i}$ i $\widetilde{R}^{-}_{*i}$ u nekom kritičnom preseku i (i=1,2,...,m) se posebno sračunavaju i za njih važi

$$\widetilde{R}^{+}_{*i} \geq 0,\ \widetilde{R}^{-}_{*i} \geq 0;\ i=1,2,\ldots,m. \tag{9}$$

U statičkoj fazi ponašanja sistema vrednosti merodavne sile $\widetilde{R}_i$ u svakom preseku i moraju se nalaziti u sledećim intervalima

$$\widetilde{R}^{-}_{*i} \leq \widetilde{R}_i \leq \widetilde{R}^{+}_{*i},\quad i=1,2,\ldots,m; \tag{10}$$

ili kada se uzme u obzir izraz (11), dobija se

$$\widetilde{R}^{-}_{*i} \leq \sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij}\widetilde{x}_j + \widetilde{b}_i^{\,g} + \widetilde{\gamma}\widetilde{b}_i^{\,p} \leq \widetilde{R}^{+}_{*i},\quad i=1,2,\ldots,m. \tag{11}$$

Ovaj sistem nejednačina se posle sređivanja može pisati u sledećoj formi:

$$\sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij}\widetilde{x}_j + \widetilde{\gamma}\widetilde{b}_i^{\,p} \leq \widetilde{R}^{+}_{*i} - \widetilde{b}_i^{\,g},\qquad -\sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij}\widetilde{x}_j - \widetilde{\gamma}\widetilde{b}_i^{\,p} \leq \widetilde{R}_{*i} + \widetilde{b}_i^{\,g},\ \text{i}=1,2,\ldots,m. \tag{12}$$

Da bi se problem rešio treba, prema Prvoj osnovnoj teoremi i nejednačini (5) odrediti maksimalnu fuzzy vrednost faktora graničnog opterećenja $\widetilde{\gamma}$ sa kojim treba pomnožiti promenljivo opterećenje da bi sistem došao u statičko stanje granične ravnoteže, i da merodavne fuzzy sile $\widetilde{R}_i$ u presecima i =1,2,...,m po svojim vrednostima ne prevaziđu kapacitete nosivosti, tj. da ostanu u intervalima (10). Treba, dakle, odrediti maksimalnu vrednost *fuzzy funkcije cilja* $\widetilde{\gamma}$

$$\widetilde{z} = \max \widetilde{\gamma}. \tag{13}$$

Na ovaj način je rešavanje problema određivanja fuzzy faktora graničnog opterećenja $\widetilde{\gamma}$ i odgovarajućih nepoznatih fuzzy sila $\widetilde{x}_i = (x_{li}, x_{mi}, x_{ui})$ (i=1,2,...,α) formulisano kao rešavanje zadatka fuzzy linearnog programiranja (FLP), sa fuzzy funkcijom cilja (16) i fuzzy uslovima ograničenja (12). Pošto nepoznate promenljive $\widetilde{x}_j$ nemaju ograničenja u znaku, a kompjuterski programi koji se koriste za rešavanje zadataka linearnog programiranja prema simpleks algoritmu su najčešće razvijeni za nenegativne vrednosti $\widetilde{x}_j \geq 0\ (j=1,2,\ldots,\alpha)$, to se ove promenljive izražavaju kao razlike dveju nenegativnih promenljivih

$$\tilde{x}_j = \tilde{x}_j^+ - \tilde{x}_j^- \; ; \; \tilde{x}_j^+ \geq 0, \; \tilde{x}_j^- \geq 0; \; \tilde{x}_j^+ \tilde{x}_j^- = 0; \; j = 1,2,...,\alpha. \tag{14}$$

Uslovi ograničenja (12) sada imaju formu

$$\sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij}(\tilde{x}_j^+ - \tilde{x}_j^-) + \tilde{\gamma}\tilde{b}_i^p \leq \tilde{R}_{*i}^+ - \tilde{b}_i^g, \quad -\sum_{j=1}^{\alpha} b_{ij}(\tilde{x}_j^+ - \tilde{x}_j^-) \; \tilde{\gamma}\tilde{b}_i^p \leq \tilde{R}_{*i} + \tilde{b}_i^g,$$

i=1,2,...,m ili pisano u vektorsko-matričnoj formi sa funkcijom cilja i uslovima ograničenje

$$\tilde{z} = \tilde{\gamma} = \max\left[\mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{x}}^+ - \mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{x}}^- + \tilde{\gamma}\right], \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{-B} & \tilde{\mathbf{b}}^p \\ \mathbf{-}\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{-b}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^+ \\ \tilde{\mathbf{x}}^- \\ \tilde{\gamma} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_*^+ - \tilde{\mathbf{b}}^g \\ \tilde{\mathbf{R}}_*^- + \tilde{\mathbf{b}}^g \end{bmatrix}. \tag{15}$$

U daljem postupku rešavanja problema primenom fuzzy linearnog programiranja (FLP) neophodno je da se sve fuzzy veličine: matrice, vektori i skalari predstave prema izrazu (3) sa odgovarajućim nefuzzikovanim (realnim) veličinama i dalje postupak izvršava sa tim veličinama. Tako se dobija

$$\tilde{\mathbf{R}}_*^+ = (\mathbf{R}_{l*}^+, \mathbf{R}_m^+, \mathbf{R}_u^+), \; \tilde{\mathbf{R}}_*^- = (\mathbf{R}_{l*}^-, \mathbf{R}_m^-, \mathbf{R}_{*u}^-), \; \tilde{\mathbf{b}}^g = (\mathbf{b}_l^g, \mathbf{b}_m^g, \mathbf{b}_u^g), \; \tilde{\mathbf{b}}^p = (\mathbf{b}_l^p, \mathbf{b}_m^p, \mathbf{b}_u^p) \tag{16}$$

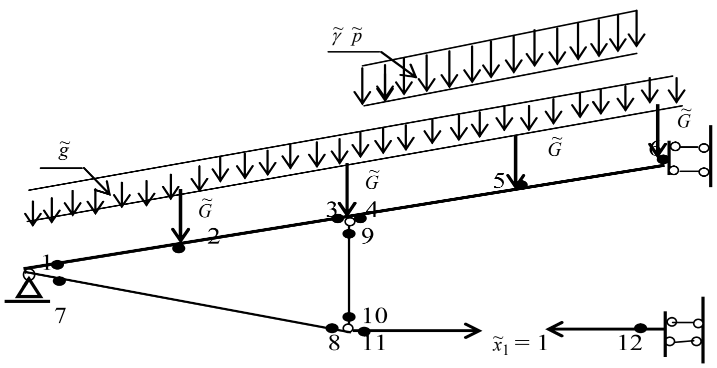
$$\tilde{\mathbf{x}}^+ = (\mathbf{x}_l^+, \mathbf{x}_m^+, \mathbf{x}_u^+), \; \tilde{\mathbf{x}}^- = (\mathbf{x}_l^-, \mathbf{x}_m^-, \mathbf{x}_u^-), \; \tilde{\gamma} = (\gamma_l, \gamma_m, \gamma_u). \tag{17}$$

Kada se primenom odgovarajućeg računarskog programa za fuzzy linearno programiranje, koji je znatno komplikovaniji od pograma za linearno programiranje sa nonfuzzy veličinama, koji su razvili Ž. Praščević i N. Praščević, odrede nepoznate veličine $\tilde{x}_j^+ = (x_{lj}^+, x_{mj}^+, x_{uj}^+) \geq 0$ i $\tilde{x}_j^- = (x_{lj}^-, x_{mj}^-, x_{uj}^-) \geq 0$, $(j = 1,2,...,\alpha)$ i koeficijent graničnog stanja (loma) sistema $\tilde{\gamma} = (\gamma_l, \gamma_m, \gamma_u)$ onda se, prema formuli (17), sračunavaju tražene nepoznate sile $\tilde{x}_j$ $(j = 1,2,...,\alpha)$. Merodavne unutrašnje sile u kritičnim presecima sistema u statičkom stanju granične ravnoteže računaju se prema formuli (14).

ANALIZA DVOPOJASNOG SISTEMA

Pošto su nosač i opterećenje simetričani u odnosu na vertikalnu osu u svim fazama ispitivanja, u daljoj analizi, radi skraćenja proračuna razmatrana je, kako je to uobičajeno u statici konstrukcija, polovina nosača sa odgovarajućim vezama, koja je prikazana na slici 4. Posmatrana polovina nosača je povezana sa osloncima i njegovom drugom polovinom vezama prikazanim na slici 4, tako da se nosač u slemenu (presek 6) može pomerati vertikalno i primati moment savijanja. Na levom osloncu (pored preseka 1 i 2 nosač se može pomerati samo horizontalno i ne može primati momente savijanja (Furtula 2013).

Na posmatranoj polovini nosača izabrano je 12 karakterističnih preseka, koji su na slici 4 označeni punim kružićima. Pošto su u armiranobetonskom delu nosača značajni momenti savijanja i normalne sile, to su fuzzy kapaciteti nošenja R_{mi}^{*+} i R_{mi}^{*-} u presecima i (i=1,2,...,6) toga dela nosača računati kao za ekscentrično pritisnute armiranobetonske preseke uzimajući u obzir moment savijanja M_{mi} i normalnu silu N_{mi}. Kapaciteti nosivosti preseka i (i=7,8,..,12) čeličnih elememenata računati su prema normalnoj sili N_{mi}, pošto je momenat savijanja, kako je već rečeno, zanemarljiv (Furtula, 2013) U presecima armiranobetonskih elemenata se pod dejstvom opterećenja nosač plastifikuje te se pojavljuju fuzzy uglovi obrtanja $\widetilde{\theta}_i$, dok u karakterističnim presecima čeličnih elemenata nastaju plastična izduženja $\widetilde{\varepsilon}_{pl,i}$, koja će biti obeležavana u skladu sa matematičkim formulacijama problema sa $\widetilde{\theta}_i = \widetilde{\varepsilon}_{pl,i.}$. Dvopojasni nosač je jedanput statički neodređen. Isključivanjem elementa sa presecima (11) – (12), sistem postaje statički određen, kako je to prikazano na slici 4. Umesto isključenog štapa, kao što je to poznato iz metode sila, uključuju se sile biakcije $\widetilde{x}_i = (1,1,1)$. Ove sile izazivaju u karakterističnim presecima sistema normalne sile $\widetilde{N}_i = (\overline{N}_i, \overline{N}_i, \overline{N}_i)$ i momente savijanja $\widetilde{M}_i = (\overline{M}_i, \overline{M}_i, \overline{M}_i)$ (i = 1,2,...,12). Na osnovu ovih veličina i u zavisnosti da li je u kritičnom preseku merodavan moment savijanja ili normalna sila birane su vrednosti b_{i1} (i = 1,2,...,12). Ove vrednosti su elementi matrice $\widetilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B})$, koja se u ovom slučaju kada je samo jedna nepoznata statička veličina x_1, sastoji iz vektora $\mathbf{b}_1$. Opterećenje dvopojasnog nosača (Slika 5) je vršeno u sedam faza i detaljno je opisano sa rezultatima merenja u pomenutoj doktorskoj disertaciji (Furtula 2013) i radu (Furtula, Praščević, 2015). Opterećenje prve faze se odnosi na sopstvenu težinu nosača g_m = 7.50 kN/m'. U drugoj fazi opterećenja su pored stalne težine naneti tegovi obešeni o gornjem pojasu od po 50 kN, a u trećoj fazi opterećenja su dodati tegovi od još 50 kN. Konačno računsko opterećenje od sopstvene težine g i težine tegova iznosi G_m : g_m = 7.50 kN/m' i G_m = 10,00 + 10.00 = 20.00 kN.



Slika 4. Statička šema sistema
Figure 4. Statical scheme of the system

Slika 5 - Opterećenje VI faze na levoj polovini nosača (Furtula, 2015).
Figure 5. Loading of VI phase on the left side of the system (Furtula, 2015)

Uticaji ovog opterećenja su označeni sa gornjim indeksom g. U sledećim fazama ispitivanja ovo se opterećenje nije menjalo, pa su za njega određivani momenti M_{mi}^{g} i normalne sile N_{mi}^{g} u karakterističnim presecima osnovnog sistema i u zavisnosti da li je u kritičnom preseku merodavan momenat ili normalna sila, birane vrednosti b_{mi}^{g} (i=1,2,…,12), koji su elementi vektora $\mathbf{b}_{m}^{g}$. U četvrtoj fazi opterećenja su na delu gornjeg pojasa dodavane po dve armiranobetonske ploče težine $p_m = 9.00$ *kN/m'*. Uticaji ovog opterećenja su označeni sa gornjim indeksom p. Za ovo opterećenje, kao bazično promenljivo opterećenje sračunate su normalne sile N_{mi}^{p} i momenti savijanja M_{mi}^{p} u kritičnim presecima i (i = 1,2,…,12), a zatim izabrane vrednosti b_{mi}^{p}, koje su elementi vektora $\mathbf{b}_{m}^{p}$. U sledećim fazama je ovo opterećenje povećavano i iznosilo je 26.50 *kN/m'* u petoj fazi, 35.30 *kN/m'* u šestoj fazi i 53.0 *kN/m'* u sedmoj fazi. Međutim, ni pod ovim opterećenjem nije došlo to loma nosača, pa je u osmoj fazi pored opterećenja iz sedme faze izvršeno udar tegom od 5.00 *kN* sa visine od 6.00 *m*. Pošto je opterećenje p_m bilo promenljivo, to se ono množi sa faktorom loma γ_m, koji treba odrediti, kao i odgovarajuću silu zatezanja u elementu donjeg pojasa (11) – (12).

Fuzzy sila $\widetilde{x}_1$ i fuzzy faktor loma $\widetilde{\gamma}$ u odnosu na promenljivo opterećenje p_m=9.00*kN/m'*, određuju se, kako je to već rečeno, rešavanjem fuzzy linearnog programa (15). Elementi karakterističnih fuzzy vektora i matrice **B**, označenih sa indeksom m za koje je funkcija pripadnosti $\mu_m = 1$, pisani u transponovanoj formi su:

$\mathbf{B}^T = \mathbf{b}_1^T$= [0, -0.78, -1.55, -1.55, -1.93, -2.30, 1.012, 1.012, -0.16, -0.16, 1.00, 1.00],

$\mathbf{b}_m^{g,T}$ = [0, 369.81, 642.39, 642.39, 811.80, 874.79, 0, 0, 0, 0, 0, 0],

$\mathbf{b}_m^{p,T}$ = [0, 91.29, 182.55, 182.55, 255.49, 273.71, 0, 0, 0, 0, 0, 0],

$\mathbf{R}_m^{*+,T} = \mathbf{R}_m^{*-,T}$ =[0, 41.52, 19.0, 19.0, 230.25, 96.18, 1360, 1360, 1360, 1360, 1360, 1360].

Donje i gornje karakteristične vrednosti fuzzy vektora, koje su označene sa l i u, za koje je $\mu_l = \mu_u = 0$ su određivane prema obrascima

$$\mathbf{b}_l^g = \mathbf{b}_m^g(1-\beta_l),\ \mathbf{b}_u^g = \mathbf{b}_u^g(1+\beta_u),\ \mathbf{R}_l^{*-} = \mathbf{R}_l^{*+} = \mathbf{R}_m^{*+}(1-\beta_u),$$

$$\mathbf{R}_l^{*-} = \mathbf{R}_l^{*+} = \mathbf{R}_m^{*+}(1-\beta_u),\ \mathbf{R}_u^{*-} = \mathbf{R}_u^{+} = \mathbf{R}_m^{*+}(1+\beta_u).$$

Tražene nepoznate promenljive su

$$\widetilde{\mathbf{x}}^- = (x_{l1}^-, x_{m1}^-, x_{u1}^-),\ \widetilde{\mathbf{x}}^+ = (x_{l1}^+, x_{m1}^+, x_{u1}^+),\ \widetilde{\gamma} = (\gamma_l, \gamma_m, \gamma_u).$$

Funkcija cilja je $\mathbf{c}$ = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1].

Koeficijenti β_l i β_u predstavljaju meru rasplinutosti (fuzzy meru) ulaznih podataka, tj. njihovog mogućeg odstupanja od vrednosti označenih sa indeksom m, za koje je funkcija pripadnosti $\mu_m = 1$. U ovom radu su te vrednosti $\beta_l = \beta_u$ = [0, 0.1, 0.2, 0.03, 0.05].

Rešavanjem problema FLP (15) primenom napisanog kompjuterskog programa dobijeni su rezultati koji su prikazani u sledećoj tabeli. Iz ove tabele se može zaključiti da se sa promenom mere rasplinutosti (fazifikacije), odnosno nepreciznosti, β_l i β_u ulaznih podataka, menjaju intervali u kojima se nalaze sile u karakterističnim poprečnim presecima i faktori loma sistema kao tražene izlazne veličine. Što su ovi stepeni fuzifikacije veći, to su veći ovi intervali izraženi sa Δx_1 i $\Delta\gamma$ koji prestavljaju osnove fuzzy brojeva $\widetilde{x}_1$ i $\widetilde{\gamma}$.

Tabela 1 - Fuzzy faktori loma $\widetilde{\gamma} = (\gamma_l, \gamma_m, \gamma_u)$ i fuzzy sile u horizontalnoj zatezi

Table 1. –Fuzy factors of the failure $\widetilde{\gamma} = (\gamma_l, \gamma_m, \gamma_u)$ and fuzzy forces in tensile hor. elem.

$\beta_l = \beta_u$	γ_l	γ_m	γ_u	$\gamma_{\exp}$	$\Delta\gamma = \gamma_u - \gamma_l$	x_{1l} kN	x_{1m} kN	x_{1u} kN	$x_{1\exp}$ kN	$\Delta x_1 = x_u - x_l$ kN
0.00	7.876	7.876	7.876	7.876	0.000	13.44	13.44	13.44	13.44	0.00
0.01	7.741	7.834	8.037	7.875	0.296	13.31	13.40	13.55	13.41	0.24
0.02	7.551	7.880	8.186	7.875	0.635	13.14	13.43	13.70	13.42	0.56
0.03	7.426	7.840	8.360	7.867	0.934	13.02	13.44	13.85	13.44	0.83
0.04	7.270	7.876	8.450	7.867	1.180	12.90	13.44	13.98	13.44	1.08
0.05	7.119	7.823	8.697	7.866	1.578	12.70	13.45	14.10	13.43	1.40
0.08	6.649	7.981	8.749	7.840	2.100	12.44	13.58	13.95	13.38	1.51
0.10	6.381	7.794	8.774	7.686	2.393	12.24	13.32	14.06	13.23	1.82

Izmerena sila u stanju granične ravnoteže iznosila je $x^* = 13.44\,kN$ i bliska je po vrednosti x_{1m} i $x_{1\exp}$ za sve mere fazifikacije. Plastični zglob se pojavio u AB preseku 5, a veliko izduženje (plastifikacija) u čeličnom elementu 1 – 8.

ZAKLJUČAK

U analizi konstrukcijskih sistema mnoge ulazne veličine: dimenzije sistema i njegovih elemenata, svojstva materijala, opterećenje i ostali uticaji na sistem ne mogu se precizno odrediti i ostvariti, tako da su uvek moguća odstupanja od nekih projektovanih veličina. Zbog ovoga, traženo ponašanje konstrukcijskog sistema, koje se izražava kroz stanja napona i deformacija, koja se stalno menjaju tokom vremena ne mogu se, takođe, precizno odrediti. Za izražavanje ovih ulaznih i izlaznih veličina i realnijeg ponašanja sistema mogu se uspešno primeniti teorija fuzzy (rasplinutih) skupova i brojeva. Na ovaj način se mogu proceniti intervali u kojima se nalaze tražene karakteristične vrednosti i izvršiti potpunija analiza ponašanja sistema. U ovom radu je primenjeno fuzzy linearno programiranje za analizu ponašanja dvopojasnih AB nosača u oblasti granične ravnoteže koje je ranije eksperimentalno i teorijski ispitivao prvi autor ovog rada primenjujući teoriju granične ravnoteže konstrukcijskih sitema i linearnog programiranja sa nerasplinutim (običnim) veličinama. Dobijeni teorijski rezultati sa pretpostavljenim granicama fazifikacije se slažu sa rezultatima dobijenim na osnovu eksperimenta.

LITERATURA

Aćić, M., Zejak, R., Furtula, B.: *Analiza graničnih stanja dvopojasnih AB nosača od betona velike čvrstoće*, Drugi internacionalni naučno-stručni skup GNP, Žabljak, 2008.

Charmers, A., Lemke, C. E. and Zienkiewicz, O. C., "Wirtual work, linear programmingand plastic limit analysis", Proc. of the Royal Society of London, Vol. 251, **164,** 1959, pp. 110-116.

Furtula, B.: "Granična stanja armiranobetonskih montažnih dvopojasnih nosača od betona velikih čvrstoća". *Doktorska disertacija*,Građevinski fakultet, Beograd, 2013.

Furtula, B., Praščević, Ž.:"Određivanje fakora loma dvopoasnih sistema primenom linearnog programiranja", *Zbornik radova 13. Kongresa Društva građevinskih konstruktera Srbije*, Novi Sad 2014, 12 str.

Furtula, B., Praščević, Ž.,"Neki problemi sanacije i određivanja nosivosti dvopojasnih sistema", *Ocena stanja, održavanje i sanacija građevinskih objekata i naselja*, Editor R. Folić, 2015, str. 31-37.

Heilpeirn, S.""The expected value of fuzzy numbers", *Fuzzy Sets and Systems*, **24**, 1992, 81-86.

Munro J. and Lloyd Smith, D., "Linear Programming in Plastic Analysis and Synthesis", *Proc. of Int. Symposium on Computer Aided Design*, Univesity of Warwick, England, 1972.

Zadeh, L., "Fuzzy sets", *Informatin and Control*, **8**,1956, pp. 338-353.