



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ – ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ
UNIVERSITY OF BELGRADE – FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

МАТЕРИЈАЛИ И КОНСТРУКЦИЈЕ У САВРЕМЕНОМ ГРАЂЕВИНАРСТВУ

*Монографија
посвећена 85-ом рођендану
професора Михаила Мурављова*

Уредници

Проф. др Драгица Јевтић
Проф. др Бошко Стевановић
Проф. др Димитрије Закић

Београд, новембар 2022.

Издавач

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ – ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

За издавача

Проф. др Владан Кузмановић, декан Факултета

Уредници

Проф. др Драгица Јевтић

Проф. др Бошко Стевановић

Проф. др Димитрије Закић

Рецензенти

Проф. др Бранко Божић

Проф. др Душан Продановић

Техничка припрема

Стоја Годоровић - Сашка

Дизајн корица

Александра Ђорђевић

Штампа

Planeta print, Београд

Тираж: 200 примерака

ISBN 978-86-7518-232-0

Горан ТОДОРОВИЋ, Радован ГОСПАВИЋ

ФИЗИЧКО МОДЕЛОВАЊЕ И IN-SITU МЕРЕЊА ТРАНСПОРТА ТОПЛОТЕ КРОЗ ВИШЕСЛОЈНЕ СПОЉАШЊЕ ГРАЂЕВИНСКЕ ЗИДОВЕ

PHYSICAL MODELLING AND IN-SITU MEASUREMENTS OF THE HEAT TRANSFER THROUGH EXTERNAL MULTI-LAYER BUILDING WALLS

др Горан Тодоровић, дипл.ел.инж. електротехнике
вандредни професор Грађевинског факултета Универзитета у Београду

др Радован Госпавић, мастер инж.ел.
доцент Грађевинског факултета Универзитета у Београду

Резиме

Анализиран је нестационарни транспорт топлоте у вишеслојним равним грађевинским зидовима коришћењем in-situ мерења и физичког моделовања у фреквентном и временском домену. За одређивање динамичких термичких параметара вишеслојних зидова коришћена је анализа у фреквентном домену и in-situ мерења температуре ваздуха са унутрашње и спољашње стране зида. Дневне варијације температуре (фреквенција и амплитуда) су издвојене из мерних података коришћењем технике усредњавања и филтрирања. Добијени динамички параметри играју важну улогу при оцени летњег комфора и енергетске ефикасности грађевинских објеката. Такође је анализирана нестационарна расподела температурског поља и транспорта топлоте у вишеслојном равном зиду коришћењем Грин-ових (Green) функција у временском домену. Аналитички изрази за просторну расподелу и временску варијацију температурског поља у динамичким условима су приказани у општем облику помоћу конволуционих интеграла. Приказани су нумерички резултати за динамичке параметре зида, као и просторне расподеле и временске варијације температурског поља и густине термалног флукса унутар посматраног вишеслојног зида.

Кључне речи: транспорт топлоте, вишеслојни зид, температурско поље, Грине функције, конволуција

Summary

The unsteady heat conduction inside multi-layer planar building wall using in-situ measurement and physical modelling in frequent and time domain has been analyzed. The analysis in the frequent domain and in-situ measurements of inside and outside air temperatures are used to determine the dynamical thermal parameters of the wall. The daily temperature variations (frequency and amplitude) are extracted from the measurement data using the averaging and filtering techniques. These dynamical thermal parameters play important role in estimation of daily thermal comfort and building energy efficiency. The unsteady temperature and flux distribution inside the multi-layer wall has been analyzed using the Green functions in the time domain as well. The analytical expressions for spatial and temporal temperature distributions under unsteady conditions are given in the general form using convolution integrals. The numerical results related to dynamical wall parameters, spatial and temporal temperature and flux distributions inside the wall are presented.

Keywords: heat transfer, multilayer wall, temperature distribution, Green's function, convolution

1. УВОД

Физичке и термалне особине вишеслојних планарних зидова који су саставни део термалног омотача грађевинских објеката имају кључну улогу приликом пројектовања и одређивања енергетских и термичких перформанси објеката. Транспорт топлоте у нестационарним условима кроз вишеслојне структуре у термалном омотачу зграде у великој мери одређује енергетску ефикасност грађевинског објекта као целине [1-4]. Проблеми везани за транспорт топлоте и дифузије кроз вишеслојне и композитне планарне структуре су интензивно проучавани и анализирани теоретски и експериментално у разним областима индустрије, грађевинарства, електротехнике и технологије [5-8].

Све аналитичке методе решавања и анализе проблема провођења топлоте у нестационарном режиму кроз вишеслојне структуре се генерално могу поделити на методе код којих се анализа врши у фреквентном или временском домену [5, 7, 9-12].

Аналитичке методе у фреквентном домену се заснивају на коришћењу Лаплас-ове (Laplace) или Фурије-ове (Fourie) трансформације којима се полазни проблем са одговарајућим почетним и граничним условима трансформише у еквивалентни проблем у фреквентном домену, при чему се трансформација може вршити и по временским и по просторним координатама [13-15].

Аналитичке методе у фреквентном домену су погодне за одређивање динамичких термалних параметара вишеслојне структуре/зида на једној карактеристичној фреквенцији. За карактеристичну фреквенцију се обично узимају дневне или сезонске варијације спољашње температуре [12, 16].

Аналитичке методе у фреквентном домену нису погодне за проналажење нестационарних температурских расподела унутар вишеслојних структура због тога што гранични услови на раздвојним површинама (matching conditions) између појединих материјала морају бити задовољени за све фреквенције у посматраном фреквентном опсегу, што значајно успорава рачунарску симулацију и повећава захтеве за процесорским временом и меморијом [17]. Овај проблем се често решава коришћењем инверзне брзе Фурије-ове трансформације, којом се нумерички проналази решење у временском домену [15]. У одређеним једноставнијим случајевима, у зависности од типа и геометрије проблема који обично не укључују вишеслојне

структуре, инверзна Фурије-ова трансформација може да се изрази у аналитичком облику тако да се коначно решење за температурску расподелу добије у временском домену [14].

У групи аналитичких метода у временском домену врло често се користе методе базиране на Грин-овој (Green) функцији и конволуционом интегралу [9-11]. У овом случају просторна расподела температурског поља се добија као конволуција спољашње температурске промене и Грин-ових функција [18]. Предност ових метода при проналажењу температурске расподеле унутар вишеслојне структуре у нестационарним условима, у односу на методе у фреквентном домену код којих се инверзна Фурије-ова трансформација не може изразити експлицитно, огледа се у томе да Грин-ова функција зависи само од физичких параметара материјала и димензија посматране структуре и може да се користи за различите спољашње температурске побуде у динамичком режиму. Ово значајно олакшава практични прорачун при проналажењу топлотних губитака за реалне варијације спољашње температуре [18].

Поред наведених метода за решавање проблема транспорта топлоте кроз вишеслојне структуре користе се и методе базиране на термалним одзивним факторима (Thermal Response Factors TRF) и кондукционим преносним функцијама KPF (Conduction Transfer Functions CTF) [19, 20]. Ове методе користе особину линеарности и принцип суперпозиције који важе у моделовању провођења топлоте. Предност овог приступа се састоји у томе што TRF и CTF коефицијенти такође зависе само од физичких карактеристика посматране структуре [19, 20].

Важно је напоменути да се Грин-ове функције могу користити и за израчунавање нумеричких коефицијената у TRF методи што је још једна компаративна предност овог приступа [18].

За решавање наведених проблема транспорта топлоте користе се и нумерички методи као што је метод коначних запремина (Finite Volume Method FVM) [21].

Слично као и код поређења са методама у фреквентном домену компаративна предност аналитичких метода у временском домену у односу на нумеричке методе састоји се у томе што се нумеричка симулација мора да покреће изнова за сваку нову спољашњу температурску побуду.

Додатна предност аналитичких метода у временском домену у односу на нумеричке метода

састоји се у знатно краћем процесорском времену потребном за симулацију у случајевима веома дугачких временске интервала у којима се посматра спољашња температурска побуда (побуде које трају неколико недеља или неколико месеци) [18]. У раду су представљене две аналитичке методе за моделовање и анализу транспорта топлоте кроз спољашњи вишеслојни равански зид који је део термалног омотача зграде.

Метода анализе и моделовања у фреквентном домену базирана на ISO стандарду 13786, која користи термалне матричне трансфер функције (heat transfer matrix) за температуру и густину флукса, је коришћена за прорачун динамичких термичких параметара зида [16]. Фреквенција и амплитуда дневних варијација спољашње и унутрашње температуре, које су неопходне у прорачуну, су одређене из in-situ температурских мерења коришћењем технике усредњавања и филтрирања. Такође је представљена и нова техника одређивања Грин-ове функције за посматрани вишеслојни зид која омогућава одређивање расподеле температуре и густине термичког флукса у нестационарном режиму у временском домену за произвољан број слојева у раванском зиду [18]. Представљени метод базиран на Грин-овим функцијама је коришћен за одређивање топлотних губитака кроз посматрани вишеслојни зид на основу in-situ температурских мерења у реалним условима. У ову сврху је коришћен нумерички софтвер развијен у програмском језику Python.

2. МЕРНА АПАРАТУРА

In-situ мерења температуре ваздуха су вршена са унутрашње и спољашње стране фасадног зида оријентисаног ка југу у стану на трећем спрату петоспратне стамбене зграде у насељу “ Степа Степановић “. На слици 1 је приказан спољашњи изглед фасаде зграде, позиција стана у коме су вршена мерења је означена црвеним правоугаоником, док је на слици 2 приказана просторија (дневна соба) у којој су вршена температурска мерења са унутрашње стране.

На слици 3 је приказан OM-EL-USB-2-PLUS data logger којим су вршена температурска мерења. Мерни опсег коришћеног уређаја је од -35°C до 85°C док је одзив на јединачну степ побуду 20 s [22]. Мерне вредности температура су читаване у временским интервалима од 5 min.



Слика 1. Спољашњи изглед фасаде зграде, позиција стана у коме су вршена мерења је означена црвеним правоугаоником.

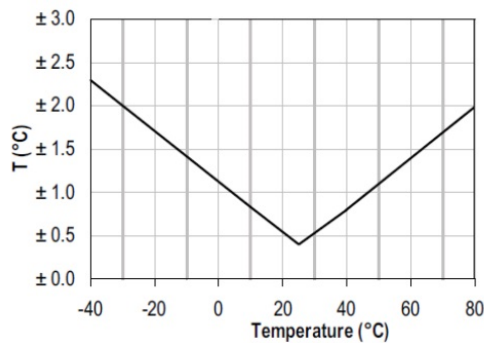


Слика 2. Изглед просторије (дневна соба) у којој су вршена температурска мерења са унутрашње стране.



Слика 3. USB data logger којим су вршена температурска мерења

На слици 4 је дата крива тачности мерења температуре. Са слике се види да апсолутна максимална грешка мерења температуре у мерном опсегу $5-40^{\circ}\text{C}$ износи $\pm 1^{\circ}\text{C}$, док је минимална апсолутна грешка на 25°C и износи $\pm 0.5^{\circ}\text{C}$ [22].



Слика 4. Крива тачности мерења у зависности од мерене температуре

Фасадни зид се састојао од четири слоја, физички параметри појединих слојева су дати у табели 1.

Табела 1. Физичке параметри појединих слојева у спољашњем фасадном зиду

материјал	d [cm]	λ [W/m·K]	ρ [kg/m ³]	c [J/kg·K]
малтер	2	1.4	2100	1050
гитер блок	20	0.61	1400	920
камена вуна	10	0.034	80	840
завршни слој	0.5	0.7	1850	1050

3. ФИЗИЧКИ МОДЕЛ

У општем случају нестационарно провођење топлоте кроз вишеслојни равански зид, који се састоји од N слојева, се моделује временски зависном Фурије-овом једначином провођења топлоте за сваки слој која је дата следећом релацијом:

$$\frac{\partial T_n(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho_n \cdot c_n} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_n \cdot \frac{\partial T_n(x,t)}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$x \in [x_{n-1}, x_n], \quad n = 1, 2, \dots, N;$$

при чему су слојеви распоређени дуж x осе, појединачни слојеви су означени са индексима n , почетак првог слоја се налази у координатном почетку док су координате спојева између слојева дате са x_n (спој n -тог и $n+1$ слоја). Температурска расподела у сваком појединачном слоју је дата са $T_n(x, t)$ где су x и t просторна и временска координата респективно

а величине λ_n , ρ_n и c_n представљају термалну проводност, густину, и специфичну топлоту n -тог слоја респективно. Уз претпоставку да су термални контакти између појединих слојева у разматраној вишеслојној структури идеални, одговарајући почетни и гранични услови на границама домена (у граничним слојевима) и на спојевима појединих слојева су датим следећим релацијама:

$$T_n(x, t = 0) = T_0(x),$$

$$\alpha_1 \cdot (T_u(t) - T_1(x, t)|_{x=0}) = -\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0},$$

$$\alpha_2 \cdot (T_N(x, t)|_{x=L} - T_s(t)) = -\lambda_N \cdot \frac{\partial T_N(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L},$$

$$T_n(x, t)|_{x=x_n} = T_{n+1}(x, t)|_{x=x_n}, \quad (2)$$

$$\lambda_n \cdot \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_n} = \lambda_{n+1} \cdot \frac{\partial T_{n+1}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_n},$$

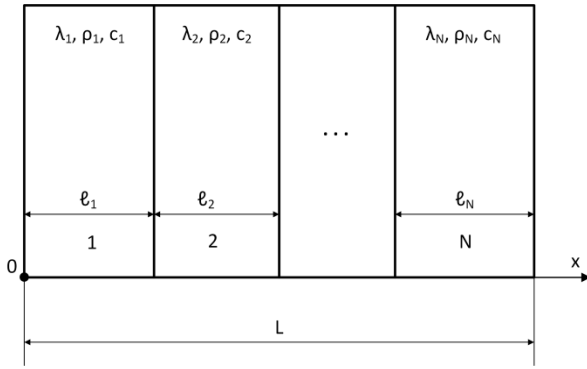
$$x_0 = 0, x_1 = \ell_1, \dots, x_N = \sum_{i=1}^N \ell_i = L, t \geq 0,$$

где су: $T_0(x)$, $T_u(t)$, $T_s(t)$, ℓ_n и L почетна температурска расподела у зиду, временске температурске варијације у ваздуху са унутрашње и спољашње стране зида, дебљина n -тог слоја и укупна дебљина зида респективно.

У горњим релацијама првом једначином су дефинисани почетни услови, другом и трећом једначином су дефинисани гранични услови на границама домена са унутрашње и спољашње стране (boundary conditions BC) и четвртог и петом једначином су дефинисани услови на спојевима појединих слојева (matching conditions MC). Услови везани за MC произилазе из услова непрекидности температуре и густине флукса на спојевима различитих материјала унутар зида.

Гранични услови на границама домена у релацијама (2) (једначине два и три) спадају у групу мешовитих граничних услова или граничних услова Робин-овог (Robin) типа.

Параметри α_1 и α_2 су коефицијенти прелаза топлоте у граничном слоју (boundary layer) са унутрашње и спољашње стране зида респективно и они укључују транспорт топлоте кроз гранични слој кондукцијом, конвекцијом и радијацијом. На основу домаћег стандарда SRPS EN ISO 6946 [23] усвојено је да су нумеричке вредности параметара α_1 и α_2 једнаке 7,69 и 25 [W/m²·K] респективно. Геометрија целе планарне N -слојне структуре са ознакама и димензијама појединих слојева је приказана на слици 5.



Слика 5. Геометрија посматране N-слојне планарне структуре

Презентовани физички модел важи под претпоставком да су латералне диманзије посматране структуре много веће од њене дебљине. У овом случају компонента густине термалног флукса у нормалном правцу на вишеслојну структуру је много већа од бочних компоненти и транспорт топлоте се може моделовати једнодимензионом једначином провођења. Такође презентовани модел важи само у случају када се могу занемарити линијски губици унутар посматране грађевинске структуре.

4. АНАЛИЗА У ФРЕКВЕНТНОМ ДОМЕНУ

Применом Фурије-ове трансформације на полазну једначину транспорта топлоте дату релацијом (1) добија се диференцијална једначина другог реда у фреквентном домену у следећем облику :

$$j\omega \cdot \hat{T}_n(j\omega, x) - T_0(x) = k_n \cdot \frac{\partial^2 \hat{T}_n(j\omega, x)}{\partial x^2},$$

$$x \in [x_{n-1}, x_n] \quad k_n = \frac{\lambda_n}{\rho_n \cdot c_n}, \quad (3)$$

где је ω кружна фреквенција температурских варијација, параметар k_n представља термалну дифузивност n -тог слоја, $\hat{T}_n(j\omega, x)$ је Фурије-ова трансформација температурске расподеле у n -тог слоју и j је имагинарна јединица ($j = \sqrt{-1}$). Из горње релације се види да почетни услови $T_0(x)$ фигуришу као нехомогени члан.

У даљем разматрању за све величине које имају ознаку "hat" изнад симбола којим су означене подразумева се да су дате у фреквентном домену односно да представљају Фурије-ову трансформацију оригиналне величине.

Утицај почетне температурске расподеле на укупно температурско поље у зиду се може

занемарити ако се разматрање врши довољно дуго после почетног тренутка, пошто удео почетне температурске расподеле у укупној расподели експоненцијално опада са временом [18].

Уз наведене претпоставке решење одговарајуће хомогене једначине, без члана $T_0(x)$, у општем облику је дато следећом релацијом:

$$\hat{T}_n(j\omega, x) = C_1 \cdot e^{h_n \Delta x} + C_2 \cdot e^{-h_n \Delta x},$$

$$\Delta x = x - x_{n-1}; \quad h_n = \sqrt{j\omega \cdot k_n} \quad (4)$$

где су C_1 и C_2 су константе које се могу експлицитно изразити преко температуре и густине флукса на почетку слоја ($x=0$) у следећем облику:

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \hat{T}_{n0} - \frac{\hat{q}_{n0}}{2 \cdot \lambda_n \cdot \sqrt{j\omega \cdot k_n}},$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \hat{T}_{n0} + \frac{\hat{q}_{n0}}{2 \cdot \lambda_n \cdot \sqrt{j\omega \cdot k_n}}, \quad (5)$$

где су \hat{T}_{n0} и \hat{q}_{n0} температура и густина термичког флукса у фреквентном домену на почетку n -тог слоја дате следећим релацијама:

$$\hat{T}_{n0} = \hat{T}_n(j\omega, x_{n-1}),$$

$$\hat{q}_{n0} = \hat{q}_n(j\omega, x_{n-1}) = -\lambda_n \cdot \left. \frac{\partial \hat{T}_n(j\omega, x)}{\partial x} \right|_{x=x_{n-1}}. \quad (6)$$

На основу израза (4)-(6) температурска расподела у n -тог слоју је дата следећом релацијом:

$$\hat{T}_n(j\omega, x) = \hat{T}_{n0} \cdot ch(h_n \cdot \Delta x) - \frac{\hat{q}_{n0}}{\lambda_n h_n} \cdot sh(h_n \cdot \Delta x) \quad (7)$$

На основу горњих релација, веза између температуре и густине флукса на почетку и крају n -тог слоја дата је следећом једнакошћу у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} \hat{T}_{n1} \\ \hat{q}_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(h_n \ell_n) & -sh(h_n \ell_n) \\ -\lambda_n h_n sh(h_n \ell_n) & ch(h_n \ell_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_{n0} \\ \hat{q}_{n0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

где су где су \hat{T}_{n1} и \hat{q}_{n1} температура и густина термичког флукса на крају n -тог слоја и дати су на начин аналоган релацијама (6). Матрица у горњој релацији представља термалну матричну преносну функцију за температуру и густину флукса у фреквентном домену за један слој (heat transfer matrix) [16]

Користећи граничне услове на спојевима слојева, односно услове непрекидности темпе-

ратуре и густине термичког флуksа на спојевима материјала и матричну релацију (8), могуће је повезати површинске температуре и густине флуksа са спољашње и унутрашње стране, матричним множењем преносних функција из релације (8) за сваки слој, идући од спољашњег до унутрашњег слоја. На овај начин се добија преносна функција за цео зид у фреквентном домену. Израз који повезује површинске температуре и густине флуksа са унутрашње и спољашње стране у матричном облику је дат следећом релацијом:

$$\begin{bmatrix} \hat{T}_{zs} \\ \hat{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_{zu} \\ \hat{q}_u \end{bmatrix} = Z \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_{zu} \\ \hat{q}_u \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$Z = Z_N \cdot Z_{N-1} \cdots Z_2 \cdot Z_1,$$

где су $Z_N, Z_{N-1}, \dots, Z_2, Z_1$ термалне матричне преносне функције у фреквентном домену за поједине слојеве зида од спољашњој ка унутрашњој страни, Z је термална матрична преносна функција за целу грађевинску структуру (вишеслојни зид) од спољашње до унутрашње површине зида.

Величине \hat{T}_{zu} и \hat{T}_{zs} су површинске температуре зида са унутрашње и спољашње стране респективно, док су \hat{q}_u и \hat{q}_s густине термичких флуksа на површинама зида са унутрашње и спољашње стране респективно и дефинисане су следећим релацијама:

$$\hat{T}_{zu} = \hat{T}_1(j\omega, x=0); \quad \hat{T}_{zs} = \hat{T}_N(j\omega, x=L);$$

$$\hat{q}_u = -\lambda_1 \cdot \left. \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial x} \right|_{x=0}; \quad \hat{q}_s = -\lambda_N \cdot \left. \frac{\partial \hat{T}_N}{\partial x} \right|_{x=L}. \quad (10)$$

Потребно је нагласити да су слојеви у горњим релацијама индексирани од унутрашње ка спољашњој страни као и да је координатни систем оријентисан на исти начин.

Такође је неопходно истаћи да су матрични елементи Z_{11}, \dots, Z_{22} сложене функције фреквенције које у општем случају нису дате у експлицитној форми и управо због тога прелазак у временски домен директним коришћењем инверзне Фурије-ове трансформације и аналитичких израза није могућ у општем случају.

Да би се узео у обзир и транспорт топлоте кроз граничне слојеве у ваздуху неопходно је у разматрање укључити и граничне услове дате другом и трећом једначином у релацији (2). Примењујући Фурије-ову трансформацију на ове граничне услове добијамо следеће релације између површинских температура и флуksа и

температура ваздуха са унутрашње и спољашње стране зида у следећем матричном облику:

$$\begin{bmatrix} \hat{T}_{zu} \\ \hat{q}_u \end{bmatrix} = Z_u \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_u \\ \hat{q}_u \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \hat{T}_s \\ \hat{q}_s \end{bmatrix} = Z_s \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_{zs} \\ \hat{q}_s \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где су \hat{T}_u и \hat{T}_s Фурије-ове трансформације временских варијација унутрашње и спољашње температуре, а матрице Z_u и Z_s произилазе из граничних услова и дате су следећим релацијама:

$$Z_u = \begin{bmatrix} 1 & -1/\alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Z_s = \begin{bmatrix} 1 & -1/\alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Укупна термална матрична трансфер функција која описује транспорт топлоте кроз граничне слојеве и вишеслојни зид сада је дата следећом матричном релацијом:

$$\begin{bmatrix} \hat{T}_u \\ \hat{q}_u \end{bmatrix} = Z_{aa} \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_s \\ \hat{q}_s \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$Z_{aa} = Z_s \cdot Z \cdot Z_u.$$

На овај начин у горњим релацијама су елиминисане површинске температуре и фигуришу само амбијенталне температуре са унутрашње и спољашње стране зида, у том смислу величина Z_{aa} представља матрицу преноса са једног амбијента (спољашњег) на други амбијент (унутрашњи).

Из горње релације се може закључити да се вишеслојни зид при анализи транспорта топлоте у фреквентном домену може посматрати као систем са два улаза (побуде) и два излаза (одзива). У горњем случају улази и излази су спољашња и унутрашња температура и густина флуksа респективно [12].

У случају да термални контакти између појединих слојева нису идеални, односно да постоје термалне отпорности између слојева, у матричном производу којим је дата термална преносна матрица Z у релацији (9) између појединих чланова производа се умећу матрице преноса које одговарају термалним отпорностима између слојева. Ове матрице имају исту структуру као и матрице Z_u и Z_s са том разликом да уместо реципрочне вредности коефицијента прелаза топлоте фигурише термална отпорност између слојева.

Из горњих релација (8), (9), (12) и (13) се види да је детерминанта матричних преносних функција како за појединачне слојеве тако и за укупну преносну матрицу целе структуре

једнака један. Ова особина преносних матрица произилази из особине симетрије, односно из чињенице да густина термалног флукса мења знак при промени смера x осе односно када побуде и одзиви замене места па стога производ две матрице преноса за исти слој које описују провођење топлоте у супротним смеровима мора бити идентична матрица.

5. АНАЛИЗА У ВРЕМЕНСКОМ ДОМЕНУ

У полазном проблему датом са релацијама (1) и (2) парцијална диференцијална једначина која описује провођење топлоте је хомогене док су гранични услови нехомогени и зависни од времена. Увођењем погодне трансформације за температурску расподелу могуће је добити хомогене граничне услове, док полазна једначина у том случају постаје нехомогена.

Нестационарну температурску расподелу у n -том слоју ћемо приказати као збир две функције уводећи следећу смену:

$$\begin{aligned} T_n(x,t) &= T_n^*(x,t) + U(x,t), \\ U(x,t) &= T_u(t) \cdot f_1(x) + T_s(t) \cdot f_2(x), \end{aligned} \quad (14)$$

где су $f_1(x)$ и $f_2(x)$ две бездимензионе помоћне функције чије особине произилазе из граничних услова и које зависе само од просторних координата, док су $T_u(t)$ и $T_s(t)$ температураске варијације ваздуха са унутрашње и спољашње стране зида које фигуришу у полазном проблему у релацији (2), $T_n^*(x,t)$ је нова трансформисана температурска расподела за n -ти слој коју је потребно одредити. Функција $U(x,t)$ у (14) има димензију температуре.

Користећи граничне услове са спољашње и унутрашње стране зида дате у релацији (2) долазимо до следеће групе граничних услова на унутрашњој површини које морају сепаратно да задовоље трансформисана температурска расподела и помоћне функције $f_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot T_1^*(x,t) \Big|_{x=0} &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1^*(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ \alpha_1 \cdot (1 - f_1(x)) \Big|_{x=0} &= -\lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ \alpha_1 \cdot f_2(x) \Big|_{x=0} &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогне релације важе и на спољашњој површини:

$$\begin{aligned} \alpha_2 \cdot T_N^*(x,t) \Big|_{x=L} &= -\lambda_N \cdot \frac{\partial T_N^*(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L}, \\ \alpha_2 \cdot f_1(x) \Big|_{x=L} &= -\lambda_N \cdot \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \Big|_{x=L}, \\ \alpha_2 \cdot (f_2(x) \Big|_{x=L} - 1) &= \lambda_N \cdot \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \Big|_{x=L}, \end{aligned} \quad (16)$$

Као што се из горњих релација види постављањем граничних услова сепаратно за трансформисану температуру и помоћне функције елиминисане су спољашње температурске варијације и сви гранични услови су сада хомогени. Такође релацијама (15) и (16) дефинисани су услови које морају да задовоље помоћне функције на границама домена.

Парцијална диференцијална једначина коју задовољава трансформисана температура за n -ти слој сада је нехомогена и дата је следећом релацијом са одговарајућим почетним условима:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_n^*(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho_n \cdot c_n} \cdot \left(\lambda_n \cdot \frac{\partial T_n^*(x,t)}{\partial x} \right) &= F_n(x,t), \\ F_n(x,t) &= -\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{\rho_n \cdot c_n} \left(\lambda_n \cdot \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right), \\ T_n^*(x,t=0) &= T_0(x) - U(x,0) = T_0^*(x), \\ x &\in [x_{n-1}, x_n] \end{aligned} \quad (17)$$

где функција $F_n(x,t)$ представља нехомогени члан чија је димензије [K/s], функција $T_0^*(x)$ представља почетне услове за трансформисану температуру T_n^* . Из горње једначине уочавамо да спољашње температурске варијације сада уместо у граничним условима фигуришу у нехомогеном члану у једначини (17).

Услови непрекидности на спојевима материјала који су дефинисани четвртом и петом једначином у релацији (2) и даље важе за трансформисану температуру и дати су следећим релацијама на споју између n -тог и $n+1$ слоја:

$$\begin{aligned} T_n^*(x,t) \Big|_{x=x_n} &= T_{n+1}^*(x,t) \Big|_{x=x_n}, \\ \lambda_n \cdot \frac{\partial T_n^*(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_n} &= \lambda_{n+1} \cdot \frac{\partial T_{n+1}^*(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_n}. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогне релације непрекидности важе и за помоћне функције:

$$f_{1,2}(x)\Big|_{x=x_n+\varepsilon} = f_{1,2}(x)\Big|_{x=x_n-\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\lambda_n \cdot \frac{\partial f_{1,2}(x)}{\partial x}\Big|_{x=x_n-\varepsilon} = \lambda_{n+1} \cdot \frac{\partial f_{1,2}(x)}{\partial x}\Big|_{x=x_n+\varepsilon}. \quad (19)$$

Оште решење парцијалне диференцијалне једначине са одговарајућим граничним условима и условима непрекидности датим са (15-19) се може приказати као збир решења одговарајућег хомогеног и решења нехомогеног проблема.

Пошто се из горњих релација види да су гранични услови и услови непрекидности за трансформисане температуре $T_n^*(x,t)$ и даље временски зависни да би се ова зависност елиминисала користимо метод раздвајања променљивих, односно претпоставимо да се једно партикуларно решење одговарајућег хомогеног проблема који одговара нехомогеном проблему (17) може приказати као производ две функције које зависе само од временске и просторне координате у следећем облику:

$$u_{ph} = \exp(-\beta^2 \cdot t) \cdot \varphi_n(x),$$

$$x \in [x_{n-1}, x_n] \quad (20)$$

где је β константа раздвајања и β^2 има димензију $[1/s^2]$, док су функције $\varphi_n(x)$ решења следећег регуларног Штурм-Луивил-овог (Sturm-Liouville) проблема, у n -том слоју, датог следећом релацијом [24, 25]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_n \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) + \beta^2 \cdot \rho_n \cdot c_n \cdot \varphi_n(x) = 0$$

$$x \in [x_{n-1}, x_n] \quad (21)$$

Одговарајући гранични услови и услови непрекидности су:

$$\alpha_1 \cdot \varphi_1(x)\Big|_{x=0} = \lambda_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x}\Big|_{x=0},$$

$$\alpha_2 \cdot \varphi_N(x)\Big|_{x=L} = -\lambda_N \cdot \frac{\partial \varphi_N(x)}{\partial x}\Big|_{x=L},$$

$$\varphi_n(x)\Big|_{x=x_n} = \varphi_{n+1}(x)\Big|_{x=x_n},$$

$$\lambda_n \cdot \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x}\Big|_{x=x_n} = \lambda_{n+1} \cdot \frac{\partial \varphi_{n+1}(x)}{\partial x}\Big|_{x=x_n}, \quad (22)$$

У даљем тексту функцију $u_{ph}(x,t)$, дату релацијом (20), ћемо звати партикуларно решење. У једначини (20), због једноставности записа, изостављен је индекс n на десној страни

једнакости, који означава слој на који се односи просторна координата, и у даљем тексту ћемо подразумевати да су све величине дефинисане за сваки слој појединачно и представљају континуалне функције просторне координате.

Из релација (22) се види да је раздвајањем променљивих елиминисана временска зависност граничних услова и услова непрекидности за партикуларно решење одговарајућег хомогеног проблема.

Важно је напоменути да је диференцијална једначина (21), добијена поступком раздвајања променљивих и заменом претпостављеног партикуларног решења у одговарајућу хомогену парцијалну диференцијалну једначину, одговара проблему датом у релацији (17).

Решење диференцијалне једначине у (21) за n -ти слој је дато следећом релацијом:

$$\varphi_n(x) = A_n \cdot \sin\left(\frac{\beta}{\sqrt{k_n}} \cdot x\right) + B_n \cdot \cos\left(\frac{\beta}{\sqrt{k_n}} \cdot x\right), \quad (23)$$

$$x \in [x_{n-1}, x_n]$$

где k_n има исто значење као и у релацији (3), а константе A_n и B_n одређују се из услова датих у релацијама (22). Примењујући ове услове на функцију (23) добија се хомогени систем од $2 \cdot N$ алгебарских линеарних једначина који је дат следећом релацијом:

$$C(\beta) \cdot X = 0$$

$$X^T = [A_1 \quad B_1 \quad \dots \quad A_N \quad B_N] \quad (24)$$

где је C матрица димензија $2N \times 2N$ која је функција параметра β и чији су матрични елементи дати следећим релацијама:

$$c_{11} = \frac{\lambda \cdot \beta}{\sqrt{k_1}}, \quad c_{12} = -\alpha_1,$$

$$\vdots$$

$$c_{m,m-1} = \sin(\theta_{n,n}), \quad c_{m,m} = \cos(\theta_{n,n}),$$

$$c_{m,m+1} = -\sin(\theta_{n,n+1}), \quad c_{m,m} = -\cos(\theta_{n,n+1}),$$

$$c_{m+1,m-1} = d_n \cdot \cos(\theta_{n,n}), \quad c_{m+1,m} = -d_n \cdot \sin(\theta_{n,n}), \quad (25)$$

$$c_{m+1,m+1} = -d_{n+1} \cdot \cos(\theta_{n,n+1}),$$

$$c_{m+1,m+2} = d_{n+1} \cdot \sin(\theta_{n,n+1}),$$

$$\vdots$$

$$c_{2N,2N-1} = d_N \cdot \beta \cdot \cos(\theta_{N,N}) + \alpha_2 \cdot \sin(\theta_{N,N})$$

$$c_{2N,2N} = -d_N \cdot \beta \cdot \sin(\theta_{N,N}) + \alpha_2 \cdot \cos(\theta_{N,N})$$

где су:

$$\theta_{n,n} = \frac{\beta \cdot x_n}{\sqrt{k_n}}, \theta_{n,n+1} = \frac{\beta \cdot x_n}{\sqrt{k_{n+1}}}, d_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{k_n}}, \quad (26)$$

$$m = 2 \cdot n - 2, n = 2, \dots, N.$$

Сви матрични елементи који нису наведени у реалцијама (25) су идентички једнаки нули.

Да би хомогени систем једначина дат са (24) имао нетривијално решење неопходно је да детерминанта система буде једнака нули односно да је:

$$\det(C(\beta)) = 0 \quad (27)$$

Горња трансцедентна једначина представља карактеристичну једначину Штурм-Луивил-овог проблема и квадрати њених корена су својствене вредности посматраног проблема датог релацијама (21) и (22).

Ако је производ $\rho_n \cdot c_n$ реалан и већи од нуле (у свим слојевима) све својствене вредности β^2 проблема датог са (21) и (22) су реалне односно оператор који одговара посматраном Штурм-Луивил-овом проблему је Хермитски (Hermitian operator) [26]. Пошто је овај услов увек задовољен, јер су сви физички параметри увек реалне и позитивне величине, закључујемо да су све својствене вредности β^2 реалне. Ако је поред овога задовољен и услов $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_n > 0$ посматрани оператор је и позитивно дефинитан из чега следи да су све својствене вредности веће од нуле [27]. Пошто је и овај услов задовољен закључујемо да су све својствене вредности β^2 реалне и позитивне из чега следи да су сва решења карактеристичне једначине дате са (27) реална. Из овога следи да су сва партикуларна решења експоненцијално опадајуће функције у времену. Пошто ће и опште решење бити линеарна комбинација партикуларних решења исти закључак ће важити и за њега.

Ово има веома важну физичку импликацију, јер из ње следи да све температурске варијације унутар посматране структуре остају коначне и после престанка спољашњих побуде и експоненцијално опадају у времену.

Пошто је карактеристична једначина (27) трансцедентна број њених корена је бесконачан, посматрани скуп решења означаћемо са β_i и због погодности у даљој анализи, њихове

квдрате ћемо индексирати у растућем редоследу: $\beta_1^2 < \beta_2^2 < \beta_3^2 < \dots$.

Димензија својствених вредности β_i^2 је [1/s].

Када се реши карактеристична једначина и пронађу вредности β_i за сваку од њих могу се пронаћи коефицијенти $A_{n,i}$, $B_{n,i}$ у релацији (23), који су одређени до на мултипликативну константу, и добијају се решавањем једначина датих са (24).

Свакој вредности β_i одговара и једна својствена функција дата следећом релацијом:

$$\varphi_{n,i}(x) = A_{n,i} \cdot \sin\left(\frac{\beta_i}{\sqrt{k_n}} \cdot x\right) + B_{n,i} \cdot \cos\left(\frac{\beta_i}{\sqrt{k_n}} \cdot x\right), \quad (28)$$

$$x \in [x_{n-1}, x_n]; \quad n = 1, \dots, N; \quad i = 1, 2, \dots$$

У горњој релацији индексом n су индексирани поједини слојеви у зиди а индексом i својствене функције. Пошто су сада својствене функције једнозначно одређене у сваком слоју као континуалне функције од просторне координате при њиховом даљем означавању можемо изоставити индекс n који означава број слоја. Из претходне процедуре се види да вредности β_i и својствене функције $\varphi_i(x)$ зависе само од термичких својстава материјала у појединим слојевима.

Ако се гранични услови на границама домена у (22) (прва и друга једначина), који важе за све својствене функције, посматрају за две различите својствене функције са индексима i и j ($i \neq j$) добија се хомогени линеарни систем од две једначине по физичким параметрима (по параметрима α_1 и λ_l за $x=0$ или по параметрима α_2 и λ_N за $x=L$). Пошто решења овог система морају бити нетривијална, његова детерминанта је идентички једнака нули, односно важи следећа релација:

$$\left(\frac{d\varphi_i(x)}{dx} \cdot \varphi_j(x) - \frac{d\varphi_j(x)}{dx} \cdot \varphi_i(x) \right) \Big|_{x=0,L} = 0; \quad i \neq j \quad (29)$$

Као што је већ напоменуто у претходној једначини је изостављен индекс n , такође наведене релације важе на границама домена

($n=1$ за $x=0$ и $n=N$ када је $x=L$). Неопходно је напоменути да горњи услов важи само за једнодимензиони случај (случај када фигурише само једна просторна координата).

Услов у претходној једначини важи и за друге типове граничних услова (нпр за Dirichlet-ове или Neumann-ове граничне услове). Важност услова датих у претходној релацији огледа се у томе што из њих следи особина ортогоналности својствених функција, такође ови услови се користе у доказивању да је оператор који одговара проблему датом у (21) и (22) Хермитски и позитивно дефинитан [26].

На основу горњих разматрања произилази да су својствене функције ортонормиране односно важи следећа релација [26]:

$$\sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_{n,i}(x) \cdot \rho_n \cdot c_n \cdot \varphi_{n,i}(x) \cdot dx = \delta_{ij},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (30)$$

где је δ_{ij} Кронекеров (Kronecker) делта симбол.

Из претходне релације произилази да је димензија својствених функција $[m \cdot (K/J)^{0.5}]$

Како су коефицијенти $A_{n,i}$, $B_{n,i}$ одређени до на мултипликативну константу нормирање својствених функција се врши простим скалирањем свих коефицијената одређеном константом.

Из услова ортогоналности следи да се свака регуларна функција на интервалу $[0, L]$ може развити у Фурије-ов ред по својственим функцијама што ће бити коришћено у проналажењу општег решења.

Неопходно је напоменути да свака линеарна комбинација партикуларних решења датих у (20) задовољава одговарајући хомогени проблем (који одговара проблему дефинисаном у (17)), граничне услове дате са првом једначином у релацијама (15) и (16), услове непрекидности дате са (18) као и услов (29) које задовољавају својствене функције управо због тога што су временска у просторна координата раздвојене.

Фундаментално решење или Гринова функција одговарајућег хомогеног проблема дефинише се следећом релацијом [24, 28]

$$H(x, y, t, s) = \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\beta_i^2(t-s)} \cdot \varphi_{n,i}(x) \cdot c_m \cdot \rho_m \cdot \varphi_{m,i}(y),$$

$$x \in [x_{n-1}, x_n], y \in [x_{m-1}, x_m], n, m = 1, \dots, N. \quad (31)$$

У претходној релацији индекси n и m су изостављени на десној страни релације због једноставније нотације, на левој страни релације ови индекси су неопходни и они одређују у ком слоју су променљиве x и y респективно. Димензија фундаменталног решења је $[1/m]$.

Ако се променљиве y и s у претходној релацији сматрају за параметре онда је фундаментално решење линеарна комбинација партикуларних решења и оно задовољава граничне услове у (15), (16), услове непрекидности (18), релацију (29) као и договарајући хомогени проблем.

Поред тога фундаментално решење дато у (31) задовољава и следећу релацију [28]:

$$\lim_{t \rightarrow s} H(x, y, t, s) = \delta(x - y) \quad (32)$$

где $\delta(x-y)$ означава Дирак-ову (Dirac) делта функцију. Претходна релација је директна последица ортогоналности својствених функција.

Како што смо напоменули опште решење проблема датог са (15-19) може се приказати као збир решења одговарајућег хомогеног и нехомогеног проблема. Поред тога претпоставићемо да се обе компоненте решења могу приказати као линеарне комбинације партикуларних решења.

Трансформисана температура дефинисана у релацији (14) представља тражено опште решење које задовољава полазни нехомогени проблем са одговарајућим почетним и граничним условима датим у релацијама (15-19).

Ако обе стране у једначини (17) помножимо са фундаменталним решењем датим са (31) и обе стране интегралимо по времену и просторној координати у целом домену добијамо следећу релацију [29]:

$$\int_0^t \int_0^L \{ \hat{G} T^*(y, s) \} \cdot H(x, y, t - s) \cdot ds \cdot dy =$$

$$\int_0^t \int_0^L F(y, s) \cdot H(x, y, t - s) \cdot ds \cdot dy. \quad (33)$$

У горњој релацији је изостављен индекс n због једноставнијег записа али се претпоставља да се све функције и просторна координата континуално мењају идући из слоја у слој док се сви физички параметри скоковито мењају при чему су задовољени услови непрекидности дати у (18) и (19). Такође је због компактније нотације уведен диференцијални оператор \hat{G} нестационарне Фурије-ове једначине провођења топлоте дат следећом релацијом :

$$\hat{G} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\rho_n \cdot c_n} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_n \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (34)$$

После низа трансформација, парцијалних интеграција и коришћења особине (32) добија се следећа релација за трансформисану температуру [29] :

$$T^*(x,t) = \int_0^t \left[\left(\frac{dH}{dy} \cdot T^* - H \cdot \frac{dT^*}{dy} \right) \Big|_{y=0} \right] \cdot ds + \int_0^L H(x,y,t) \cdot T_0^*(y) \cdot dy + \int_0^t \int_0^L H(x,y,t-s) \cdot F(y,s) \cdot dy \cdot ds \quad (35)$$

У претходној релацији су, као и у релацијама (33,34), због једноставнијег записа изостављени индекси који се односе на слој у коме се налазе тренутне просторне координате. Добијена релација представља тражено опште решење полазног проблема.

Важно је истаћи да подинтегрална функција у првом члану у претходној релацији је идентички једнак нули. Због тога што су обе функције у овом члану (трансформисан температура и фундаментално решење) линеарне комбинације партикуларних решења, односно својствених функција. Из овога директно следи да је и подинтегрална функција линеарна комбинација израза датих у (29) који су сви идентички једнак нули.

Пошто представљена процедура у релацијама од (33) до (35) важи и за општи дводимензионални или тродимензионални случај, овај члан неће бити идентички једнак нули у општем случају већ ће представљати интеграл (линиски или површински) по граници домена [29]. Други и трећи члан представљају решења хомогеног и нехомогеног проблема респективно што се лако проверава директно заменом у полазну једначину (17), што је у сагласности са почетном претпоставком. Пошто оба члана представљају линеарне комбинације партикуларних решења онда и опште решење дато са (35) задовољава све граничне услове и услове непрекидности дате у релацијама (15, 16), и (18, 19). Други члан у нултом (почетном) временском тренутку представља Фурије-ов развој почетне расподеле трансформисане температуре по својственим функцијама. У почетном временском тренутку трећи члан у горњој релацији је идентички једнак нули. Из наведеног следи да опште решење дато са (35) задовољава и почетне услове.

Као што је напоменуто опште решење за трансформисану температуру може да се напише у скраћеном облику као сума решења хомогеног и нехомогеног проблема:

$$T^*(x,t) = T_{ho}^*(x,t) + T_{nh}^*(x,t) \quad (36)$$

Облик решења представљен релацијом (35) се назива Духамел-ов (Duchamel) принцип [24, 28]. Тражена нестационарна температурска расподела унутар вишеслојног зида у n -том слоју $T_n(x,t)$ се добија коришћењем релације (14).

Трећи израз у релацији (35) се може трансформисати на следећи начин:

$$\int_0^t \int_0^L H(x,y,t-s) \cdot F(y,s) \cdot dy \cdot ds = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\varphi_i(x) \cdot e^{-\beta_i^2 t} \cdot \int_0^t \langle F, \varphi_i \rangle \cdot e^{\beta_i^2 s} \cdot ds \right), \quad (37)$$

где величине $\langle F, \varphi_i \rangle$ представљају коефицијенте у Фурије-овом развоју функције $F(y,s)$ по својственим функцијама $\varphi_i(x)$ и дате су следећом релацијом:

$$\langle F, \varphi_i \rangle = \sum_{i=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} F(y,s) \cdot \rho_n \cdot c_n \cdot \varphi_i(y) \cdot dy. \quad (38)$$

У претходном изразу Фурије-ови коефицијенти зависе од варијабле (параметра) s која ће у конволуционом интегралу представљати временску променљиву по којој се врши интеграција.

Даљим трансформисањем и упрошћавањем релације (35) и (38) и коришћењем релације (14) добија се следећи општи израз за температурску расподелу [18]:

$$T(x,t) = T_{ic} + \delta U + \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i(x) \int_0^t e^{-\beta_i^2(t-s)} \cdot D(s) \cdot ds$$

$$D(s) = \left(\lambda \frac{\partial U(x,s)}{\partial x} \cdot \varphi_i(x) - \lambda U(x,s) \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \right) \Big|_0^L \quad (39)$$

$$\lambda|_{x=0} = \lambda_1, \lambda|_{x=L} = \lambda_N.$$

У претходној релацији назначено је да је термална проводност на границама домена λ_1 ($x=0$) и λ_N ($x=L$). Први и трећи члан представљају решења одговарајућег хомогеног и нехомогеног проблема респективно.

Величине које које фигуришу у претходном изразу су дефинисане следећим релацијама:

$$\begin{aligned}
T_{ic}(x) &= \sum_{i=1}^N \exp(-\beta_i^2 \cdot t) \cdot \varphi_i(x) \cdot \langle T_0, \varphi_i \rangle \\
\langle T_0, \varphi_i \rangle &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} T_0(x) \cdot \rho_n \cdot c_n \cdot \varphi_i(x) \cdot dx \\
\delta U(x,t) &= U(x,t) - \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \cdot \langle U, \varphi_i \rangle, \\
\langle U, \varphi_i \rangle &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} U(x,t) \cdot \rho_n \cdot c_n \cdot \varphi_i(x) \cdot dx
\end{aligned} \tag{40}$$

Уочавамо да у претходној релацији Фурије-ови коефицијенти за функцију $U(x,t)$, означени са $\langle U, \varphi_i \rangle$, зависе од времена као параметра слично као и код коефицијената $\langle F, \varphi_i \rangle$. Такође је ради јасноће коришћено експлицитно означавање физичких параметара у појединим слојева са индексом n док је претпостављено да су својствене функције дефинисане за сваки слој релацијама (28) и третиране су као континуалне функције просторне координате у интервалу $[0, L]$ без индекса који означава број слоја. Такође се уочава да у почетном временском тренутку за $t=0$ величина T_{ic} представља Фурије-ов развој почетне температурске расподеле по својственим функцијама тако да решење хомогеног проблема задовољава почетне услове. Трећи члан (решење нехомогеног проблема) је у почетном временском тренутку идентички једнак нули чиме се гарантује да опште решење задовољава почетне услове. Члан T_{ic} са протоком времена експоненцијално опада, тако да утицај почетне температурске расподеле на укупну нестационарну температурску расподелу током времена ишчезава. Брзина којом овај члан опада у времену доминантно зависи од вредности првог члана β_i^2 у растућем низу својствених вредности која зависи од комбинације физичких параметара материјала од којих се састоји зид. За материјале веће густине и специфичне топлоте као и мање термичке проводности процес опадања утицаја почетне температурске расподеле је спорији. Други члан у релацији (39) $\delta U(x,t)$ представља разлику између функције $U(x,t)$ и њеног Фурије-овог развоја и он тежи нули у целом домену како расте број чланова у Фурије-овом развоју осим на границама домена, тако да је улога овог члан у општем решењу да обезбеди задовољавање граничних услова. За практичну примену релације (39) неопходно је дефинисати помоћне функције $f_{i,2}$ у целом домену а не само на границама домена и спојева између слојева као

што је дато релацијама (15,16) и (18, 19). Ако уведемо додатни услов за функције $f_{i,2}$ дат слеђом релацијом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda_n \frac{\partial f_{i,2}}{\partial x} \right) = 0, \tag{41}$$

која важи у сваком појединачном слоју функције $f_{i,2}$ бројно одговарају стационарним температурским расподелама у зиду за јединичне спољашње температуре. То значи да је f_1 бројно једнака стационарној температурској расподели у зиду када је унутрашња температура $1 [^{\circ}C]$ а спољашња $0 [^{\circ}C]$, обрнуто важи за f_2 (унутрашња температура је $0 [^{\circ}C]$ а спољашња $1 [^{\circ}C]$). Уз ову претпоставку израз дат у (39) може даље да се трансформише и добија се следећа релација за нестационарну температурску расподелу:

$$\begin{aligned}
T(x,t) &= T_{ic} + \delta U + \\
&\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^2 \cdot \varphi_i(x) \int_0^t e^{-\beta_i^2 \cdot (t-s)} (T_u(s) \cdot w_{1,i} + T_s(s) \cdot w_{2,i}) \cdot ds \tag{42} \\
w_{1,i} &= \langle f_1, \varphi_i \rangle; \quad w_{2,i} = \langle f_2, \varphi_i \rangle,
\end{aligned}$$

где су $w_{1,i}$ и $w_{2,i}$ Фурије-ови коефицијенти у развоју функција f_1 и f_2 .

На основу релације (14), (40) и (42) величина $\delta U(x,t)$ се може изразити у следећем компактном облику:

$$\begin{aligned}
\delta U(x,t) &= \Delta_1(x) \cdot T_u(t) + \Delta_2(x) \cdot T_s(t), \\
\Delta_1(x) &= f_1(x) - \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \cdot w_{1,i} \\
\Delta_2(x) &= f_2(x) - \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \cdot w_{2,i}
\end{aligned} \tag{43}$$

На основу претходног израза се види да величине $\Delta_{1,2}$ представљају разлику између помоћних функција и њихових Фурије-ових развоја по својственим функцијама.

Интеграл у трећем члану (42) представља конволуциони интеграл по унутрашњој и спољашњој температури тако да финални израз за температурску расподелу може да се прикаже помоћу две Грин-ове функције у следећем компактном облику:

$$\begin{aligned}
T(x,t) &= T_{ic} + g_1 * T_u + g_2 * T_s, \\
g_1 * T_u &= \int_0^t g_1(x,t-s) \cdot T_u(s) \cdot ds, \\
g_2 * T_s &= \int_0^t g_2(x,t-s) \cdot T_s(s) \cdot ds,
\end{aligned} \tag{44}$$

где су Грин-ове функције дате следећим изразима:

$$\begin{aligned} g_1(x,t) &= \Delta_1(x) \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^2 \cdot w_{1,i} \cdot \varphi_i(x) \cdot e^{-\beta_i^2 \cdot t} \\ g_2(x,t) &= \Delta_2(x) \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^2 \cdot w_{2,i} \cdot \varphi_i(x) \cdot e^{-\beta_i^2 \cdot t}. \end{aligned} \quad (45)$$

Звездице у изразу (44) представљају конволуционе интеграле. Из израза (45) се види да Грин-ове функције експоненцијално опадају у времену и да зависе само од термичких особина појединих слојева унутар зида и имају димензију [1/s]. Ове функције физички представљају одзиве на Дирак-ову температурску побуду. Ово теоретски значу да функција $g_1(x,t)$ бројно претставља нестационарну температурску расподелу у зиду када са унутрашње стране зида у ваздуху делује веома кратак интензиван температурски импулс у времену (теоретски бесконачно кратак и бесконачно великог интензитета) а са спољашње стране температура ваздуха је константна и једнака нули. На аналоган начин се дефинише $g_2(x,t)$. Важно је истаћи да се у пракси немогу реализовати Греен-ове функције али се могу користити у нумеричким прорачунима.

Уочавамо да први члан у изразу (43), који зависи од почетне температурске расподеле, не улази у конволуционе интеграле, али пошто овај члан експоненцијално опада са временом он се после довољно дугог времена (много већег од $1/\beta_1^2$) може занемарити, тако да нестационарна температурска расподела после довољно дугог времена зависи само од спољашњих температурских варијација и Грин-ових функција, односно термичких особина материјала од којих је изграђен зид. Релацијама (42) односно (44) су дате нестационарне температурске расподеле унутар вишеслојног планарног зида. Нестационарне густине термичких флукса на произвољном места унутар зида је могуће пронаћи коришћењем следеће релације:

$$q(x,t) = -\lambda_n \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = -\lambda_n \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} * T_u + \frac{\partial g_2}{\partial x} * T_u \right). \quad (46)$$

Из претходне релације се види да је и нестационарна густина термалног флукса дата конволуционим интегралом али уместо Грин-ових функција фигуришу њихови парцијални изводи по просторним координатама.

6. НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ И ДИСКУСИЈА

6.1. Одређивање динамичких термалних параметара вишеслојног зида

Полазна релација за анализу у фреквентном домену је релација (13) која повезује температуре ваздуха и густине флукса са унутрашње и спољашње стране зида коришћењем термалне матричне преносне функције Z_{aa} . Ово је неопходно пошто се у већини практичних случајева мере амбијенталне температуре. За одређивање динамичких термалних параметара погодне су термалне адмитансе Y_{11} , Y_{22} и термална трансмитанса Y_{12} које су дефинисане на следећи начин [16]:

$$Y_{11} = -\frac{Z_{11}}{Z_{12}}; \quad Y_{22} = -\frac{Z_{22}}{Z_{12}}; \quad Y_{12} = -\frac{1}{Z_{12}}, \quad (47)$$

где су Z_{11}, \dots, Z_{22} матрични елементи матрице Z_{aa} дефинисане у релацији (13).

Термалне адмитансе и трансмитанса повезују спољашње и унутрашње температуре ваздуха и густине флукса на следећи начин [12, 16]:

$$\begin{bmatrix} \hat{q}_u \\ \hat{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} \\ Y_{21} & -Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{T}_u \\ \hat{T}_s \end{bmatrix}. \quad (48)$$

У претходном изразу је узето у обзир да је детерминанта Z_{aa} једнака 1.

На основу стандарда ISO 13786; 2007 [16] помоћу термалних адмитанси и трансмитанси, на одређеној карактеристичној кружној фреквенцији ω , дефинисано је следећих шест динамичких термалних параметара зида: декременет фактор f , фазно кашњење термичких адмитанси (Δt_{11} и Δt_{22}), фазно кашњење термичке трансмитансе Δt_f и површински топлотни капацитети са унутрашње и спољашње стране зида (κ_1 и κ_2). Ове величине се дате следећим релацијама [16]:

$$\begin{aligned} f &= \frac{|Y_{12}|}{U}, \quad \Delta t_{11} = \frac{1}{\omega} \arg(Y_{11}), \quad \Delta t_{22} = \frac{1}{\omega} \arg(Y_{11}), \\ \Delta t_f &= \frac{1}{\omega} \arg(Z_{12}), \quad \kappa_1 = \frac{|Y_{11} - Y_{12}|}{\omega}, \quad \kappa_2 = \frac{|Y_{22} - Y_{12}|}{\omega}, \end{aligned} \quad (49)$$

где је U трансмитанса или U вредност зида, дефинисана у домаћем стандарду SRPS EN ISO 6946:2017 [23]. У претходним изразима аргументи термалних адмитанси се узимају у опсегу од 0 до 2π , док се аргументи термалних трансмитанси узимају у опсегу од -2π до 0 [23].

Декремент фактор представља меру пригушења амплитуде термалног флукса на површини зида, на одређеној фреквенцији, услед спољашњих температурских варијација (на истој фреквенцији) са супротне стране зида која је нормирана (подељена) са U вредношћу зида. Код структуре које имају декремент фактор близак 0 зид има веће пригушење и оне спадају у тзв. масивне конструкције. Фазно кашњење термичке трансмитансе представља време за које амплитуда густине флукса касни у односу на варијацију спољашње температуре са супротне стране зида, на истој фреквенцији, док фазна кашњења термичких адмитанси претстављују времена кашњења густине флукса за спољашњим простопериодичним температурским варијацијама са исте стране зида. Топлотни капацитети са унутрашње и спољашње стране зида представљају топлотни капацитет по јединици површине конструкције (са унутрашње и спољашње стране) на одређеној фреквенцији и њихова јединица је $[J/m^2 \cdot K]$.

Да бисмо одредили динамичке термалне параметре неопходно је познавати не само термичке параметре материјала и коефицијенте прелазна топлоте у граничном слоју већ и карактеристичну фреквенцију односно период температурских варијација за коју се одређују динамички параметри зида.

Компонента у спектру температурских варијација ваздуха, са унутрашње и спољашње стране зида, која има највећи утицај на термалне динамичке параметре, топлотне губитке и уопште на енергетску ефикасност је на фреквенцији која одговара дневним варијацијама температуре. Ово је последица чињенице да температурске варијације спољашње температуре имају максималну амплитуду управо на овој фреквенцији. Због тога се термални динамички параметри зида рачунају на овој фреквенцији [30].

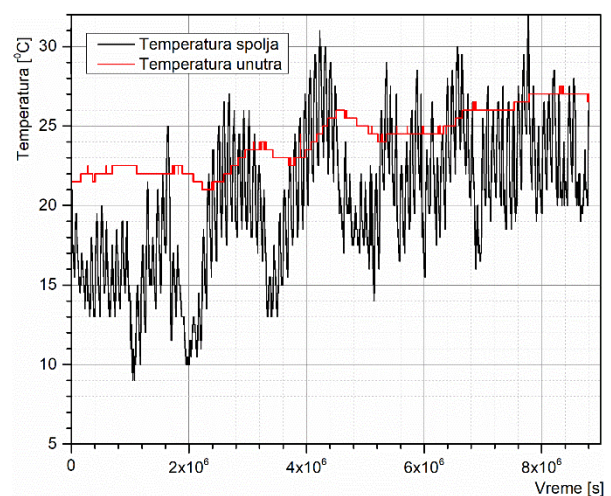
Из експерименталних података се уочава да карактеристични период дневних варијација није нужно 24h већ може да варира током времена. Када се посматрају спољашње температурске варијације на подручју Београда у последњих педесет година онда се у њиховом спектру, добијеном брзом Фурие-овом трансформацијом, издвајају максимуми (пикови) који одговарају дневним, сезонским и годишњим променама [30]. Такође неке компоненте у спектру могу одговарати наглим захлађењима или отопљавањима. Све ово утиче да карактеристична дневна варијација одступа од периода који је 24h. Из овога произилази да на спектар

утиче дужина мерења, годишње доба као и тренутни временски услови у току мерења. Да би из мерних података издвојили карактеристичну фреквенцију која одговара дневним варијацијама температуре (на којима је по претпоставци амплитуда спољашње температуре највећа) користи се поступак усредњавања и филтрирања [31].

У овом раду је за одређивање карактеристичне дневне фреквенције температурских варијација коришћен филтер пропусник опсега (band pass filter). На тај начин пропуштене су само промене у одређеном опсегу фреквенција које одговарају дневним варијацијама. Све остале варијације на нижим и вишим фреквенцијама су уклоњене из спектра. Да би се одредила ширина опсега, промене које одговарају периодима од једног дана су уклоњене из оригиналних мерних података LOESS методом (методом усредњавања).

Овако усредњени мерни податци су сабрани са излазом из band pass филтера. Добијене температурске варијације су поређене са оригиналним мерењима и за коришћене мерне податке најбоље слагање је добијено за ширине опсега band pass филтера које одговарају периодима варијације између 20 и 28 h [31].

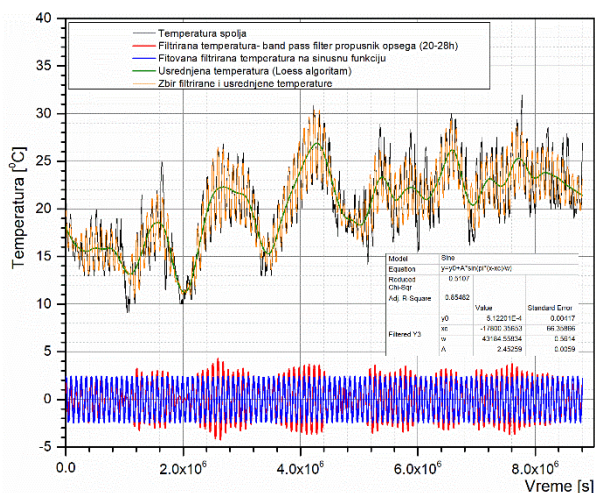
На слици 6 су приказана мерења спољашње и унутрашње температуре ваздуха вршена у периоду од 22.04.2014 до 02.08.2014. У овом периоду мерење је вршено на сваких 5 min и прикупљено је 29364 температурских читавања [31]. Температуре ваздуха са унутрашње стране су мерене на средини собе, док су data logger са спољашње стране били заклоњени од утицаја соларне радијације и атмосферских појава и мерили су само спољашњу амбијенталну темпе-



Слика 6. Мерни подаци за спољашњу и унутрашњу температуру ваздуха

ратуру. Са слике се види да су амплитуде варијације спољашње температуре много веће од варијација унутрашње температуре. Такође се види да доминирају амплитуде дневних варијација у спољашњој температури али постоји и компонента варијације чији је период неколико дана до неколико недеља који одговара промени временских прилика током мерења. Ова компонента је присутна и у варијацијама унутрашње температуре.

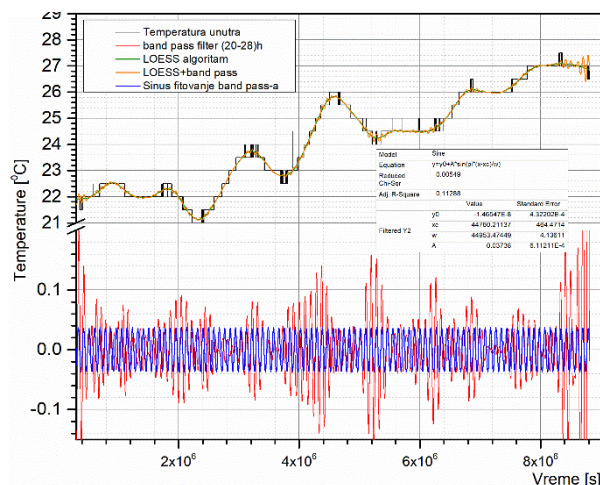
На сликама 7 и 8 су приказани резултати добијени поступком усредњавања и филтрирања спољашње и унутрашње температуре ваздуха. На оба графика црном бојом су приказани оргинални мерни подаци (криве у горњем делу графика).



Слика 7. Спољашње температуре мерења (црна), филтер пропусник опсега (црвена), LOESS (зелена), LOESS+исфилтрирана температура (наранџаста), исфилтрирана температура фитована на синусну функцију (плава)

У доњем делу графика црвеном бојом су приказане варијације добијене на излазу филтера пропусника опсега, ове компоненте представљају део спектра који одговара периодима варијација у опсегу од 20–28 h. Са слике се види да су максималне амплитуде ових компоненти спектра нешто мање од 5 °C за спољашњу температуру и нешто веће од 0.2 °C за унутрашњу температуру. Из овога се види да су амплитуде дневних варијација спољашње температуре за један ред величине веће од унутрашњих варијација, тако да све термичке варијације унутар зида, (температуре и густине флуksа) превасходно потичу од варијација спољашње температуре. После усредњавања LOESS методом оргиналних мерних података

елиминисане су варијације које одговарају периодима од једног дана и добијене криве су приказане на оба графика зеленом бојом.

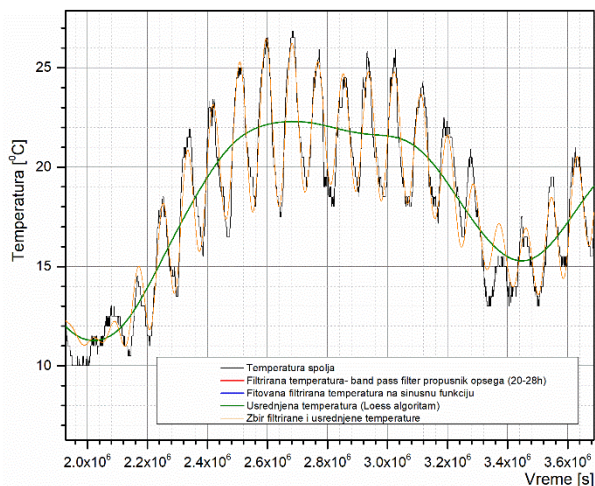


Слика 8. Унутрашња мерена температура (црна), филтер пропусник опсега (црвена), LOESS (зелена), LOESS+исфилтрирана температура (наранџаста), исфилтрирана температура фитована на синусну функцију (плава)

На ове криве, добијене после усредњавања су додате компоненте варијација добијене из филтера пропусника опсега и тако добијене криве су приказане наранџастом бојом на оба графика. Најбоље слагање између оргиналних мерних података и кривих добијених сабирањем усредњених и исфилтрираних података добијено је за ширине опсега band pass филтера које одговарају периодима варијације 20–28 h [31].

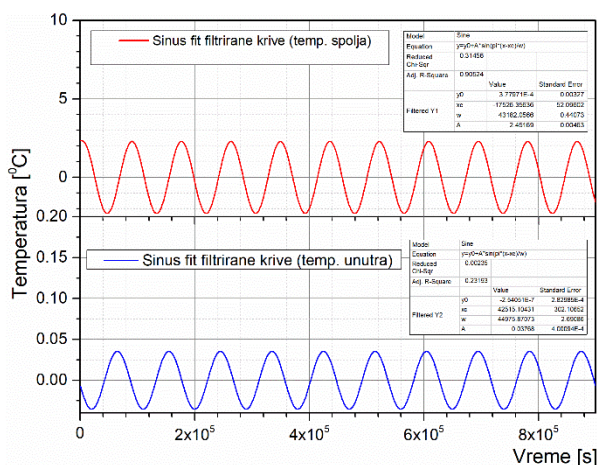
На слици 9 приказан је увећани горњи део графика са слике 7 где се виде оргинални мерни подаци (црна), крива добијена после усредњавања и елиминисања дневних варијација (зелена) и крива добијена сабирањем усредњених и исфилтрираних података (наранџаста). Са графика се види да су у усредњеној кривој скоро потпуно елиминисане дневне варијације, док је слагање између оргиналних мерења и криве добијене после поступка усредњавања и филтрирања доста добра што имплицира да је опсег band pass филтера добро изабран. Да би смо одредили тражени период дневних варијација потребно је филтриране температуре фитовати на синусну функцију која је у општем случају следећег облика:

$$y_0 + A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{w} \cdot (t - t_0)\right), \quad (50)$$



Слика 9. Увећани део графика са слике 7 спољашња температурска мерења (црна), LOESS (зелена), LOESS+исфилтрирана температура (наранџаста)

где су: y_0 , A , w и t_0 параметри које је потребно одредити фитовањем. На сликама 7 и 8 фитоване синусне функције су приказане на истом графику плавом бојом ради лакшег поређења са исфилтрираним температурама. Ради прегледности исти резултати су издвојени и приказани на слици 10 заједно са вредностима параметара фитовања. Тражени периоди дневних варијација за спољашње и унутрашње температуре су $T_{ds} = 86367,38$ [s] и $T_{du} = 89906,95$ [s] респективно. За одређивање динамичких параметара је усвојена средња вредност $T_{dsr} = 88137,16$ [s] док је период који одговара једном дану (24 [h]) $T_{24h} = 86400$ [s]. Одступање добијеног периода дневних варијација од T_{24h} је око 2%.



Слика 10. Исфилтрирана температура фитована на синусну функцију споља (црвена) и унутра (плава)

У табели 2 су дати динамички параметри зида који се састоји од четири слоја, који је део термалног омотача зграде и чији су термички параметри дати у табели 1. Такође су упоређени динамички параметри за два периода дневних варијација: T_{dsr} који је добијен процедуром усредњавања и филтрирања и T_{24h} који одговара периоду од једног дана. Из табеле се види да одступање у периоду дневних варијација од 2% доводи до одступања у динамичким параметрима до 5.9%.

Табела 2 Динамички параметри спољашњег зида за две вредности периода дневних варијација T_{dsr} и T_{24h}

T_d [s]	T_{dsr}	T_{24h}	2%
f	0,28	0,27	3,7%
Δt_f [h]	-2,87	-2,71	5,9%
Δt_{22} [h]	4,09	4,13	0,9%
Δt_{11} [h]	2,54	2,58	1,55%
k_1 [kJ/m ² K]	13,474	13,38	0,7%
k_2 [kJ/m ² K]	106,61	105,29	1,25%

Бројна вредност параметра пригушења који је ближи нули него јединици говори да је посматрани зид у термичком омотачу зграде термички масиван.

6.2. Резултати анализе у временском домену

Температурска мерења спољашње и унутрашње температуре ваздуха приказана на слици 6 су коришћена као улазне величине за одређивање нестационарне расподеле температуре и густине флуksа унутар четворослојног спољашњег зида у временском домену. Термички параметри зида су дати у табели 1. Посматрани зид је моделован као вишеслојна планарна структура, ова апроксимација је валидна ако су латералне диманзије структуре много веће од њене дебљине и ако се могу занемарити линиски губитци. За посматрани проблем је примењен мешовити тип граничних услова које дат у релацијама (2).

Коришћен је нумерички софтвер развијен у програмском језику *Python* базиран на нумеричкој процедури приказаној у другом поглављу овог рада [18]. У сумама којима су дефинисане Грин-ове функције је коришћено првих 178 чланова. Даље повећавање броја чланова не утиче значајније на тачност симулације [18].

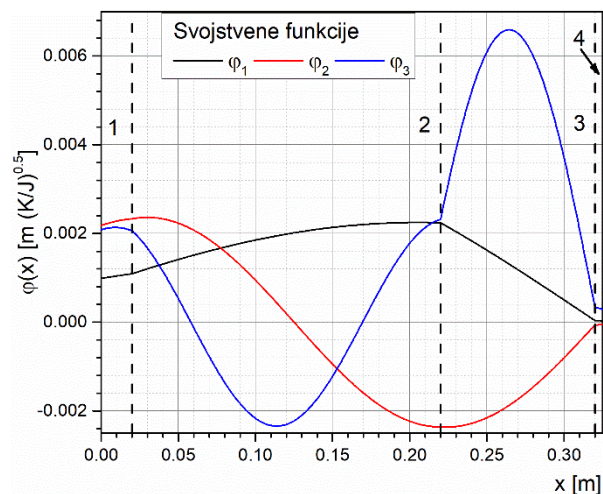
У табели 3 приказано је првих девет вредности β_i за посматрани вишеслојни зид, које представљају корене карактеристичне једначине

(27). У случају четворослојне планарне структуре димензија хомогнеог система датог релацијом (24) је 8×8 .

Табела 3. Првих девет вредности β_i [$s^{-0.5}$] за разматрани четворослојни зид

	1	2	3
β_i	0.00395207	0.01135997	0.01942557
	4	5	6
β_i	0.02225286	0.02934978	0.03895038
	7	8	9
β_i	0.04247856	0.04927355	0.05146682

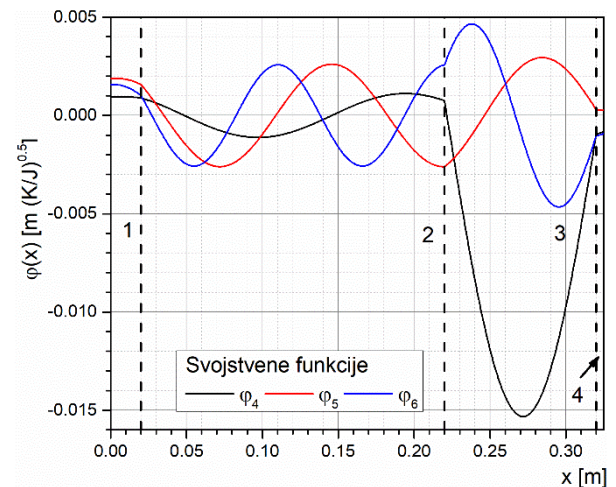
На сликама 11-13 је приказано првих девет својствених функција φ_i које одговарају вредностима из табеле 3 за разматрану четворослојну структуру. Својствене функције су ортонормиране и одређене на основу процедуре дате у другом поглављу овог рада. На сликама су означени спојеви између слојева, док су поједини слојеви нумерисани. Претпостављено је да су термални контакти између слојева идеални. Као последица ове претпоставке својствене функције су непрекидне на контактима слојева. Такође на крајевима домена својствене функције задовољавају граничне услове који су дефинисане у релацијама (22).



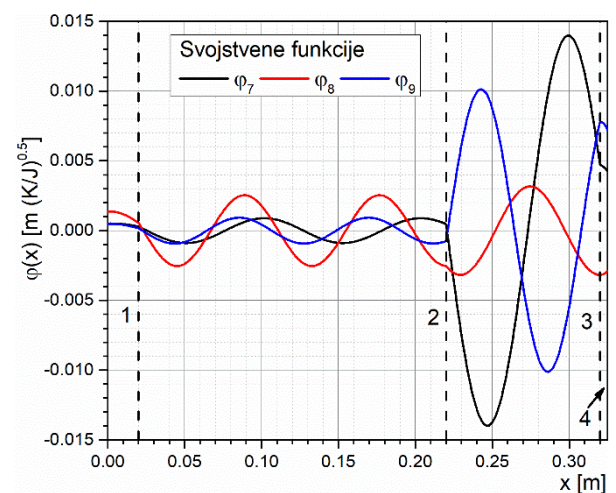
Слика 11. Прве три својствене функција за разматрани четворослојни зид

На основу ових релација знак својствене функције је једнак њеном изводу на унутрашњој површини зида док са спољашње површине важи обрнуто. Исти услов важи и за Грин-ове функције. Такође како индекс својствених функција расте повећава се косинусна а смањује

синусна компонента у својственим функцијама са унутрашње стране зида што се такође уочава на предходим графицима.



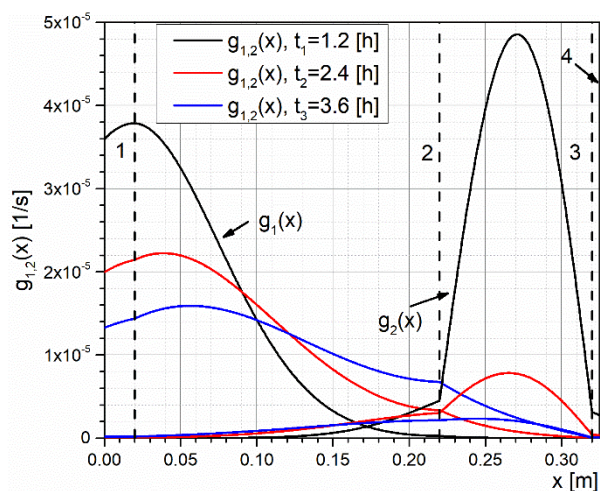
Слика 12. Својствене функције $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ за разматрани четворослојни зид



Слика 13. Својствене функције $\varphi_7, \varphi_8, \varphi_9$ за разматрани четворослојни зид

Пошто Грин-ове функције зависе и од просторних и од временских координата, на слици 14 је приказана просторна расподела Грин-ових функција $g_{1,2}$ унутар зида за три различита временска тренутка: $t_1 = 1,2$ [h], $t_2 = 2,4$ [h] и $t_3 = 3,6$ [h]. На слици су означени поједини слојеви и спојеви између њих.

Физички смисао резултата приказаних на слици 14 је да Грин-ове функције $g_i(x)$ у назначеним временским тренуцима бројно одговарају температурској расподели унутар посматраног зида после деловања Дирак-овог температурског импулса у ваздуху са унутрашње стране зида, док је температура ваздуха са спољашње стране једнака нули. Аналогно објашњење важи и за функцију $g_2(x)$.



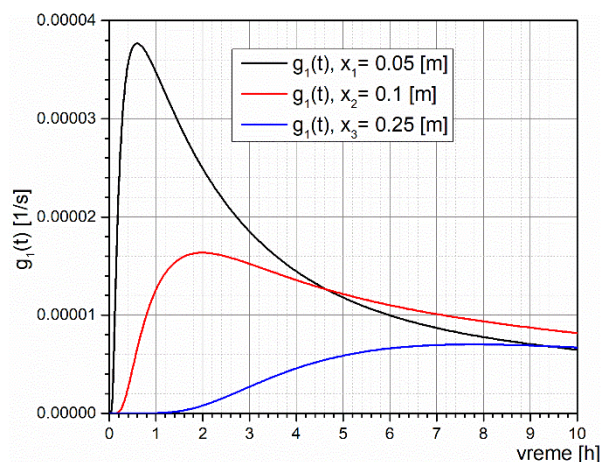
Слика 14. Просторна расподела Грин-ових функција $g_{1,2}$ унутар посматраног домена за три различита временска тренутка ($t_1 = 1,2$ [h], $t_2 = 2,4$ [h], $t_3 = 3,6$ [h])

При овоме је претпостављено да је иницијална температурна расподела унутар зида у оба случаја била нула. Из овога следи да обе функције приказане на предходној слици морају бити позитивне. Поред тога, као што је напоменуто, предзнак обе Грин-ове функције са унутрашње стране зида мора бити једнак предзнаку њиховог извода и обрнуто са спољашње стране. Са графика на слици 14 се види да су сви ови услови испуњени.

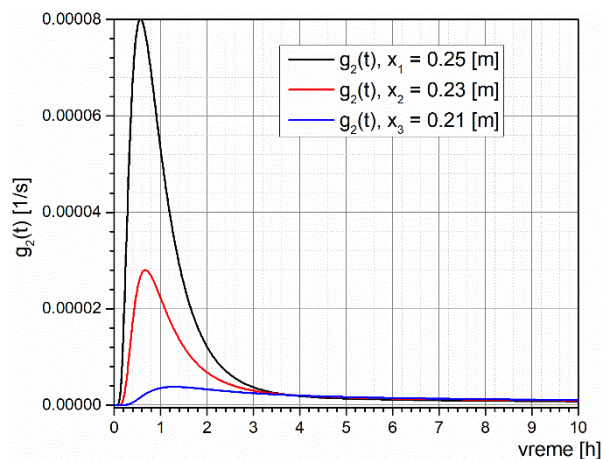
Графици на предходној слици приказују продирање „топлотног таласа“ током времена са унутрашње - $g_1(x)$ и спољашње - $g_2(x)$ стране зида после деловања Дирак-ове температурске побуде у ваздуху са одговарајуће стране зида.

На сликама 15 и 16 је приказана временска зависност Грин-ових функција $g_{1,2}$ за три различите позиције унутар зида.

Грин-ове функције приказане на овим сликама бројно одговарају променама температуре током времена на одређеним фиксним позицијама у зиду после деловања одговарајуће Дирак-ове температурске побуде у ваздуху са одговарајуће стране. И у овом случају добијене криве морају да буду позитивне и да експоненцијално опадају у времену. Максимуми кривих одговарају тренуцима када је максимум „топлотног таласа“ стигао у посматрану тачку. Са слике 15 се види да максимум „топлотног таласа“ са унутрашње стране зида стиже за приближно 2 h у тачку која је на растојању 0,1 m од унутрашње површине (максимум црвене криве).



Слика 15. Временска зависност Грин-ове функција g_1 за три различите позиције унутар посматране структуре (0,05; 0,1 и 0,25 [m])



Слика 16. Временска зависност Грин-ове функција g_2 за три различите позиције унутар посматране структуре (0,25; 0,23 и 0,21 [m])

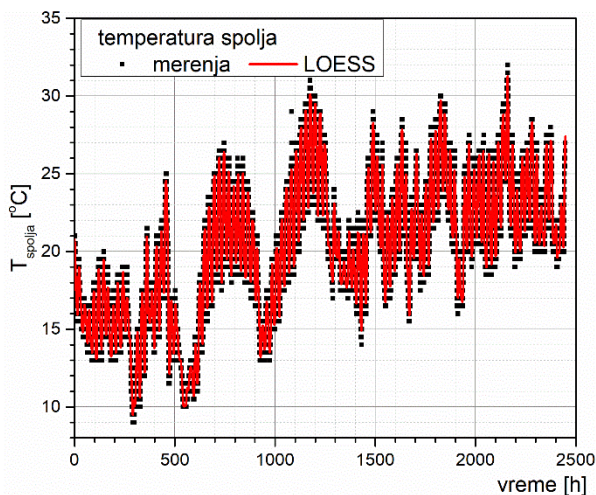
Слична анализа важи и за графике на слици 16. Тако да максимум „топлотног таласа“ до тачке која се налази на растојању од 0,095m (0,325-0,23) спољашње стране зида (црвена крива) стиже за 0,7h.

Из овога следи да је температурски пораст кроз изолациони слој бржи него кроз унутрашње слојеве, што је последица релативно мале густине изолациони слоја [80 kg/m^3].

Из ове анализе и облика амплитуда Грин-ових функција на сликама 15 и 16 се јасно уочава утицај термалне изолације на понашање посматране структуре у динамичким условима. За исту размеру на временској оси Грин-ове функције g_2 на слици 16 имају израженије максимуме и веће амплитуде од одговарајућих кривих на слици 15, које спорије опадају и имају мање изражене амплитуде. Ово је последица чињенице да је коефицијент прелаза топлоте са

спољашње стране више од три пута већи од коефицијент прелаза са унутрашње стране (3,25 пута), присуства термалне изолације, већег термалног капацитета и густине унутрашњих слојева као и мале термалне проводности спољашњег изолационог слоја. Због свега наведеног топлота споро напушта унутрашњост објекта а амплитуде термалних варијација унутрашњих слојева су мање него спољашњег слоја за исту термалну побуду.

При експоненцијалном опадању Грин-ових функције са временом доминантан је први члан који опада као $\approx \exp(-\beta_1^2 \cdot t)$, величина $1/\beta_1^2$ [s] представља карактеристично време за све релаксационе процесе у разматраној структури. Што је ово време веће то је и „термална инерција“ посматране структуре већа. У нашем случају карактеристично време је 17,78 [h]. Овај параметар има важна импликацију при организовању и планирању мерења. Да би мерни резултати могли да се користе у нумеричким симулацијама, које користе развијени нумерички метод базиран на Грин-овим функцијама, мерења морају да трају много дуже од овог карактеристичног времена. Због тога што при прорачуну термичких величина (температуре и густине флуksа) помоћу Грин-ове функције сви временски периоди у конволуционим интегралима морају бити много дужи од овог карактеристичног времена.

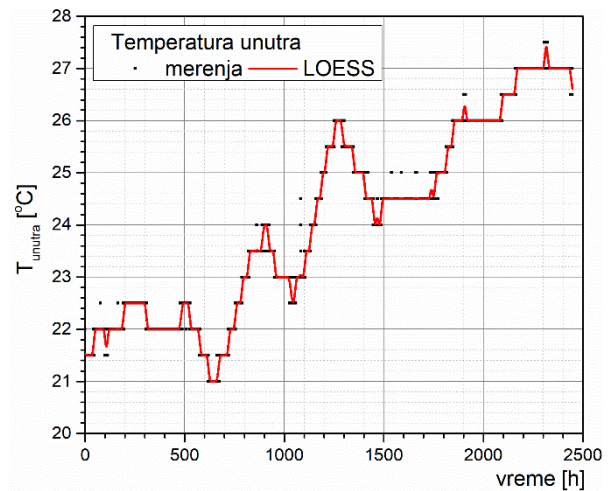


Слика 17. Температурска мерења ваздуха са спољашње стране зида и усредњене вредности температуре (LOESS)

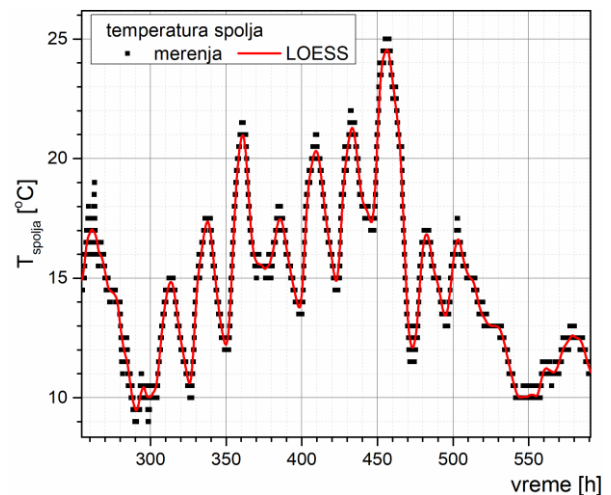
Да би се искључио утицај шума и системских грешака у мерним подацима на улазне податке примењен је LOESS-ов метод усредњавања („смутовања“). Тако да су у нумеричкој симулацији коришћене усредњене или смутоване

вредности спољашње и унутрашње температуре. На сликама 17 и 18 су приказани мерни и усредњени подаци (LOESS) за температуре ваздуха са спољашње и унутрашње стране зида респективно.

Мерења су континуално вршена у периоду од 2447 h, са читавањем на сваких 5 min (29364 временска одбирка). На слици 19 је приказан увећани детаљ спољашњих температурских мерења и одговарајуће усредњене температуре.



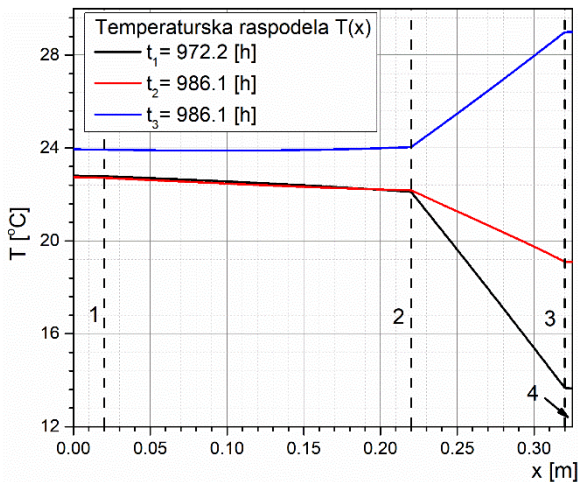
Слика 18. Температурска мерења ваздуха са спољашње стране зида и усредњене вредности температуре (LOESS)



Слика 19. Увећани детаљ спољашњих температурских мерења и одговарајуће усредњене температуре (LOESS)

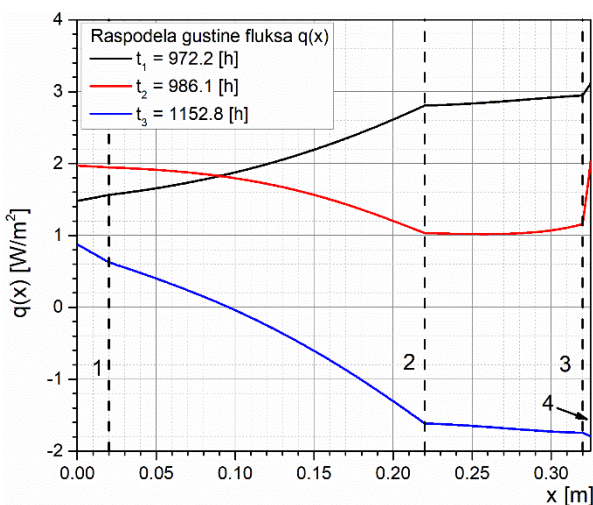
На сликама 20 и 21 су приказане нестационарне расподеле температуре и густине флуksа унутар зида у три различита временска тренутка ($t_1 = 972.2$; $t_2 = 986.1$ и $t_3 = 1152.8$ h) добијене нумеричком симулацијом на основу израза (42) односно (46).

Као температурске варијација у ваздуху са спољашње и унутрашње стране зида коришћене су усредњене температуре дате на сликама 17 и 18 респективно.



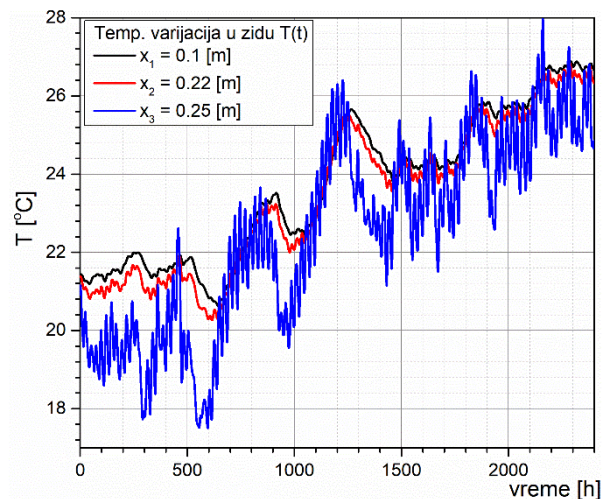
Слика 20. Нестационарна расподела температуре унутар посматраног зида у три различита временска тренутка (972.2; 986.1 и 1152.8 h)

Са слике 21 се види да расподела густине флукса унутар зида није хомогена што имплицира да се ради о нестационарном процесу. Као спољашње побуде у симулацији је коришћено 2400h усредњених (LOESS) температурских варијација, што је еквивалентно са 28800 мерних читавања. Времена у којима су дате расподеле температуре и густине флукса односе се на почетак симулације. Почетни температурски подаци који одговарају првих 47h мерења (564 одбирака) су коришћени у симулацији да би се надоместио недостатак почетних услова.



Слика 21. Нестационарна расподела густине флукса унутар посматраног зида у три различита временска тренутка (972.2; 986.1 и 1152.8 h)

Пошто је ово време за 2,64 пута веће од карактеристичног времена (17,78h) за посматрану структуру, овим се обезбеђује да су сви прелазни процеси који потичу од почетних услова завршени. На слици 22 су приказане временске варијације температуре на три различите позиције унутар посматраног зида (0,1; 0,22; 0,25 m). Временска варијација температуре унутар зида у нестационарним условима игра веома важну улогу у прорачуну транспорта влаге кроз грађевинске структуре [32, 33]. Позиција температурских варијација на месту $x_2 = 0,22$ m (плава крива на графику) одговара споју између другог и трећег слоја (између гитер блока и камене вуне) односно споју унутрашњег дела термалног омотача и термалне изолације.

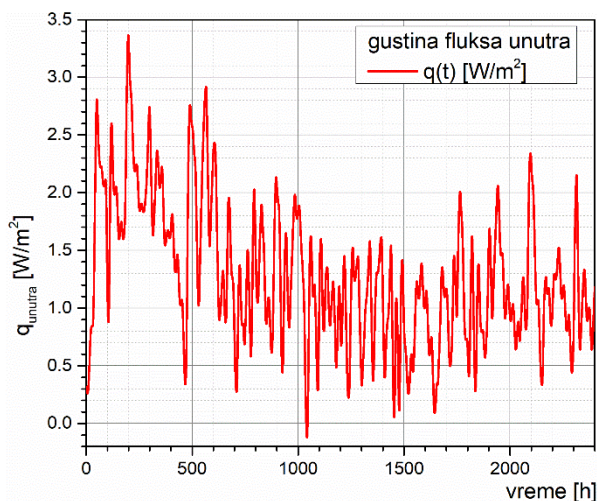


Слика 22. Временске варијације температуре на три различите позиције унутар посматраног вишеслојног зида (0,1; 0,22; 0,25 m)

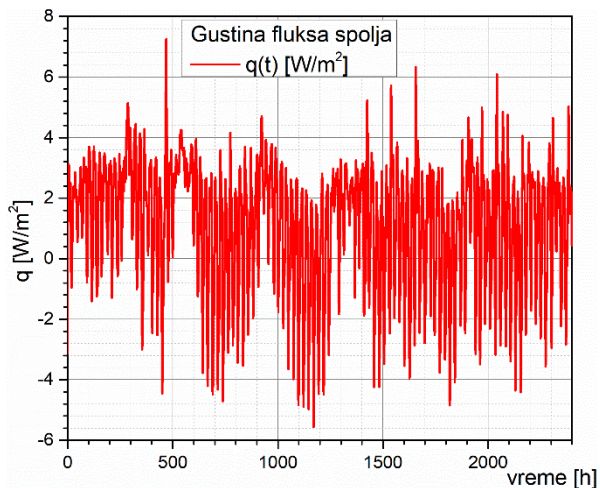
Ово је место где најчешће долази до кондензације влаге у равни [32, 33]. Да би се избегла кондензација у зимском периоду потребно је да ова температура буде већа од температуре на којој актуелни парцијални притисак водене паре на овом месту постаје мањи од притиска засићене водене паре [32, 33].

Као један од најважнијих показатеља топлотних губитака и укупних термичких перформанси зграде, са становишта енергетске ефикасности, на сликама 23 и 24 су приказане временске варијације густине топлотног флукса са унутрашње и спољашње стране термичког омотача зграде респективно, добијене анализом у временском домену применом Грин-ових функција. Густина површинског топлотног флукса је рачуната у односу на референтну оријентацију координатног система приказану на слици 5, од унутрашње стране ка споља. Позитивне вредности

густине флукса на сликама 23 и 24 одговарају транспорту топлоте усмереној ка спољашности објекта. Са графика се види да су амплитуде спољашње густине флукса веће од амплитуда са унутрашње стране зида. Највећи максимуми (пикови) густине глукса са спољашње стране су у периодима значајнијег пада спољашње температуре и одговарају дневним варијацијама спољашње температуре.



Слика 23. Временска варијација густине топлотног флукса са унутрашње стране термичког омотача зграде

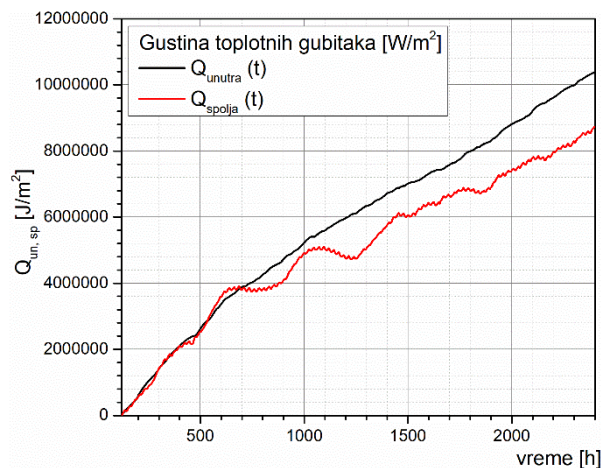


Слика 24. Временска варијација густине топлотног флукса са спољашње стране термичког омотача зграде

На слици 25 је приказана временска зависност густине топлотних губитака са спољашње и унутрашње стране термичког омотача зграде.

Густина топлотних губитака представља кумулативне топлотне губитке по јединици површине током времена. Са графика се вид да је густина топлотних губитака са унутрашње стране (crни график) већа од густине губитака са

спољашње стране (crвени график) што значи да се један део топлоте, који напушта објекат, акумулира у самом омотачу зграде што је случај када је унутрашња амбијентална температура већа од спољашње. Са графика приказаних на слици 25 се могу проценити укупни кумулативни топлотни губици у дужем временском периоду.



Слика 25. Временска зависност густине топлотних губитака са спољашње и унутрашње стране термичког омотача зграде

7. ЗАКЉУЧАК

У раду је презентована анализа транспорта топлоте у планарним вишеслојним структурама у фреквентном и временском домену од интереса у грађевинарству. Представљен је физички модел транспорта топлоте кроз вишеслојне планарне структуре који укључује граничне услове на крајевима домена као и услове непрекидности на спојевима појединих слојева. Дискутовани су случајеви када су термални контакти између спојева идеални, такође је указано на начине како је могуће у модел укључити и термалне опторности на спојевима материјала. Представљени модел је могуће уз одређене апроксимације користити за моделовање транспорта топлоте кроз термални омотач зграде. Анализа у фреквентном домену је базирана на стандарду ISO 13786; 2007 и коришћена је за прорачун динамичких параметара термалног омотача зграде. За одређивање ефективног периода дневних температурних варијација, које су неопходне у прорачуну, коришћена су in-situ мерења спољашње и унутрашње амбијенталне температуре и метод филтрирања и усредњавања. На овај начин је одређена фреквенција (период) доминантног хармоника дневних температурских варијација

са унутрашње и спољашње стране термалног омотача зграде. У прорачуну димамичких параметара зида је коришћена средња вредност периода дневних варијација. Добијени резултати су упоређени са динамичким параметрима добијеним за случај да је за период дневних варијација усвојена вредност од једног дана (24h) и добијена су максимална одступања од 5,9%. У анализи у временском домену су коришћене Грин-ове функције. Презентован је иновативни поступак проналажења општег решења нестационарне једначине провођења топлоте у вишеслојној планарној структури са граничним условима мешовитог типа уз претпоставку да су термални контакти између слојева идеални. Коришћена је техника раздвајања променљивих и трансформисања почетног хомогеног проблема са нехомогеним и временски зависним граничним условима у нехомогени проблем са одговарајућим хомогеним и временски независним граничним условима. Развијена нумеричка метода је имплементирана и нумеричком софтверу који је развијен у програмском језику *Python*. У презентованој анализи у временском домену разматран је транспорт топлоте у динамичким условима кроз вишеслојни спољашњи зид. Коришћена су in-situ мерења унутрашње и спољашње температуре ваздуха као улазни подаци за нумеричку симулацију и одређивање нестационарне температурске расподеле и расподеле густине флукса унутар посматраног вишеслојног зида. Нумеричком симулацијом такође су одређене и површинске густине термалног флукса са унутрашње и спољашње стране као и кумулативни термали губици на спољашњој и унутрашњој површини термалног омотача зграде у функцији времена.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] K. Arendt, M. Krzaczek, Co-simulation strategy of transient CFD and heat transfer in building thermal envelope based on calibrated heat transfer coefficients, *International Journal of Thermal Sciences* 85 (2014) 1-11, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2014.06.011>
- [2] G. Oliveti, N. Arcuri, D. Mazzeo, M. De Simone, A new parameter for the dynamic analysis of building walls using the harmonic method, *International Journal of Thermal Sciences* 88 (2015) 96-109, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2014.09.006>
- [3] Qiuyuan Zhu, Xinhua Xu, Jiajia Gao, Fu Xiao, A semi-dynamic model of active pipe-embedded building envelope for thermal performance evaluation, *International Journal of Thermal Sciences* 88 (2015) 170-179, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2014.09.014>
- [4] Yuming Liu, Tingting Liu, Sudong Ye, Yisheng Liu, Cost-benefit analysis for Energy Efficiency Retrofit of existing buildings: A case study in China, *Journal of Cleaner Production*, 177 (2018) 493-506, <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.12.225>
- [5] Haibo Zhang, Wenzhong Wang, Shengguang Zhang, Ziqiang Zhao, Semi-analytic solution of three-dimensional temperature distribution in multilayered materials based on explicit frequency response functions, *Int. J. Heat Mass Transf.* 118 (2018) 208–222, <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.10.118>
- [6] Jia-meng Tian, Bin Chen, Zhi-fu Zhou, Methodology of surface heat flux estimation for 2D multi-layer mediums, *Int. J. Heat Mass Transf.* 114 (2017) 675–687, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.06.053>
- [7] C. Serra, A. Tadeu, N. Simões, Heat transfer modeling using analytical solutions for infrared thermography applications in multilayered buildings systems, *Int. J. Heat Mass Transf.* 115 (2017) 471–478, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.08.042>
- [8] Jose Manuel Pinazo Ojer, Victor Manuel Soto Frances, Emilio Sarabia Escriva, Laura Soto Frances, Thermal response factors to a 2nd order shaping function for the calculation of the 1D heat conduction in a multi-layered slab, *Int. J. Heat Mass Transf.* 88 (2015) 579-590, [doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.04.110](http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.04.110)
- [9] Selçuk Erol, Bertrand François, Multilayer analytical model for vertical ground heat exchanger with groundwater flow, *Geothermics* 71 (2018) 294–305, <http://dx.doi.org/10.1016/j.geothermics.2017.09.008>
- [10] Hengliang Zhang, Weimin Kan, Xuejiao Hu, Green's function approach to the nonlinear transient heat transfer analysis of functionally graded materials, *International Journal of Thermal Sciences* 71 (2013) 292-301, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2013.04.025>
- [11] Babak Dehghan B., Ergin Kukrer, A new 1D analytical model for investigating the long term heat transfer rate of a borehole ground heat exchanger by Green's function method, *Renewable Energy*, 108 (2017) 615-621, <https://doi.org/10.1016/j.renene.2016.11.002>

- [12] Zorana Petojević, Radovan Gospavić, Goran Todorović, Estimation of thermal impulse response of a multi-layer building wall through in-situ experimental measurements in a dynamic regime with applications, *Applied Energy* 228 (2018) 468–486, <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.06.083>
- [13] N. Simões, I. Simões, A. Tadeu, C.A.B. Vasconcellos, W.J. Mansur, 3D transient heat conduction in multilayer systems e Experimental validation of semi-analytical solution, *International Journal of Thermal Sciences* 57 (2012) 192–203, doi:10.1016/j.ijthermalsci.2012.02.007
- [14] Radovan Gospavic, Milesa Sreckovic, Viktor Popov, Goran Todorovic, 3D modeling of material heating with the laser beam for cylindrical geometry, *Mathematical and Computer Modelling* 43 (2006) 620–631 <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2005.11.011>
- [15] N. Simoes, A. Tadeu, Fundamental solutions for transient heat transfer by conduction and convection in an unbounded, half-space, slab and layered media in the frequency domain, *Eng. Anal. Bound Elem.* 29 (12) (2005) 1130–1142, doi:10.1016/j.enganabound.2005.06.002
- [16] Thermal performance of building components: dynamic thermal characteristics and calculation methods, ISO 13786; 2007.
- [17] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, second ed., Oxford University Press, London, 1959.
- [18] Milica Mirković Marjanović, Radovan Gospavić, Goran Todorović, An analytical approach based on Green's function to thermal response factors for composite planar structure with experimental validation, *International Journal of Thermal Sciences* 139 (2019) 129–143, <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2019.01.020>
- [19] Jose Manuel Pinazo Ojer, Victor Manuel Soto Frances, Emilio Sarabia Escriva, Laura Soto Frances, Thermal response factors to a 2nd order shaping function for the calculation of the 1D heat conduction in a multi-layered slab, *Int. J. Heat Mass Transf.* 88 (2015) 579–590, doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.04.110
- [20] Ismael R. Maestre, Paloma R. Cubillas, Luis Pe'rez-Lombard, Transient heat conduction in multi-layer walls: An efficient strategy for Laplace's method, *Energy and Buildings* 42 (2010) 541–546, doi:10.1016/j.enbuild.2009.10.023
- [21] C. Luo, B. Moghtaderi, A. Page, Modelling of wall heat transfer using modified conduction transfer function, finite volume and complex Fourier analysis methods, *Energy and Buildings*, 42 (2010) 605–617, doi.org/10.1016/j.enbuild.2009.10.031.
- [22] User's Guide OM-EL-USB-2-PLUS; <https://www.omega.com/en-us/temperature-measurement/temperature-and-humidity-data-loggers/om-el-usb-1-series/p/OM-EL-USB-2-PLUS>
- [23] SRPS EN ISO 6946:2017, Компоненте и елементи зграде - Топлотна отпорност и коефицијент пролаза топлоте - Методе прорачуна, <https://iss.rs/sr/Cyrl/project/show/iss:proj:65445>
- [24] M.N. Ozisik, *Heat Conduction*, second ed., John Wiley & Sons, United States, 1993.
- [25] G. P. Mulholland, M. H. Cobble, Diffusion through composite media, *Int. J. Heat Mass Transf.* 15, 1 (1972) 147–160, [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(72\)90172-X](https://doi.org/10.1016/0017-9310(72)90172-X).
- [26] Nicolas Young, *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Press 1988, Cambridge, New York, Melbourne.
- [27] Gilbert Strang, Massachusetts Institute of Technology, *Linear Algebra and Its Applications*, 4th Edition 4th Edition
- [28] Lawrence C. Evans *Partial Differential Equations* (Graduate Studies in Mathematics vol. 19): 2nd Edition, American Mathematical Society
- [29] Brebbia CA, Tolls JC, Worbel LC. *Boundary element techniques*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer; 1984
- [30] Z. Petojević, M. Mirković, Ž. Jovanović, R. Gospavić, G. Todorović, "Determination of a temperature transfer function of building constructions based on measurement data", XVII International YUCOMAT conference, H. Novi, Montenegro, August 31- September 5, 2015., Book conference pp.16
- [31] Z. Petojević, M. Mirković, Ž. Jovanović, R. Gospavić, G. Todorović, Determination of dynamic thermal characteristic of a building wall, *Proceedings of 17th Symposium on Thermal Science and Engineering of Serbia, SIMTERM, 2015, Sokobanja, Serbia, ISBN 978-86-6055-076-9*
- [32] EN ISO 13788, *Hygrothermal performance of building components and building elements – Internal surface temperature to avoid critical surface humidity and interstitial condensation – Calculation methods* (ISO 13788:2001)
- [33] EN ISO 15026, *Hygrothermal performance of building components and building elements* (ISO 15026:2007)