**Prof . dr Gligor Radenković, dipl. inž. građ.**[1]

# TEHNIČKA TEORIJA PROSTORNOG ŠTAPA - PROSTORNI SISTEMI

0352-2733,42 (2009),,p. 1-54 UDK: 624.073
IZVORNI NAUČNI ČLANAK

**Rezime**

U ovom radu prikazana je tehnička teorija prostornog pravolinijskog štapa za slučaj Bernouli-Eulerove i Timošenkove hipoteze o ravnim presecima. Integralne statičke i kinematičke jednačine štapa konačne dužine za model sila i deformacioni model teorije štapa date su u poglavljima 2 i 3. Centralno mesto u radu čine jednačine ravnoteže i jednačine apsolutnih i relativnih uslova kompatibilnosti pomeranja i obrtanja čvorova sistema, na osnovu kojih dobijamo uvid u njegovu statičku određenost i kinematičku stabilnost. Kinematički aspekt statički određenih nosača formiranih od jednog i dva kruta tela analiziran je u poglavlju 6.

**Kljune reči:** teorija prostornog štapa, statičke i kinematčke nezavisne veličine, jenačine ravnoteže, uslovi kompatibilnosti, generalisane koordinate, kruto telo, prostorni sistemi.

[1] Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu
Rad primljen oktobra 2009.



# THREE - DIMENSIONAL BEAM THEORY - SPACE STRUCTURES

**Abstract**

Three-dimesional beam theory based on Bernouli-Euler and Timosenko assamptoins is presented in this paper. The staticaly and kinamaticaly integral eqations of the finite beam element are developed in chapther 2 and 3.The key point is given by the equalibrium eqations as well as the displacements and rotations nodes compatibility conditions of the space beam structures. Kinematical aspect of the staticaly deteminated structures is examinated in chapther 6.

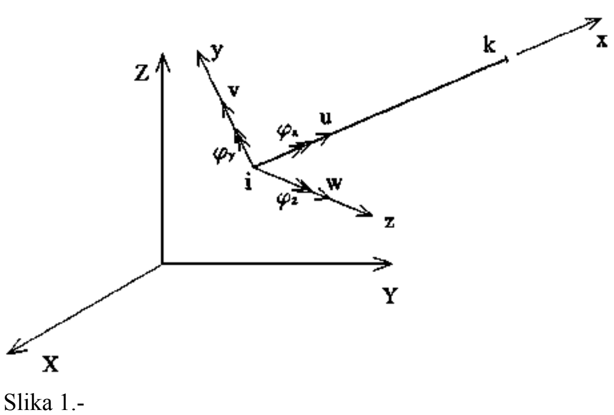
**Key words:** three-dimesional beam theory, equalibrium eqations,compatibility conditions, degrees of freedom, rigid body, space structures.

## 1. TEHNIČKA TEORIJA SAVIJANJA ŠTAPA

Na *slici 1* prikazan je pravolinijski gredni štap ik koji zauzima proizvoljan položaj u prostoru.Položaj štapa određen je u odnosu na neki izabrani globalni desni Decartes-ov koordinatni sistem sa *XYZ* koordinatama. *x* osa koja se poklapa sa osom štapa zajedno sa glavnim osama inercije poprečnog presjeka *y*, *z* definiše lokalni koordinatni sistem štapa, takođe desne orijentacije. Za naše



analize, sve kinematičke, deformacijske i statičke veličine štapa biće izmerene u odnosu na jedan od ova dva koordinatna sistema ili oba.




Slika 1.-

Sledeći Bernouli-Euler-ov koncept teorije savijanja štapa, koji pretpostavlja ravne preseke pre i posle deformacije za komponentalne deformacije u ma kojoj tački štapa, dobijamo

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0 \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$



Iz jednačina $(1.1)_1$ i $(1.1)_2$ sledi da je

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow u(y) = -y\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow u(z) = -z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.2}$$

Što sa preostalim jednačinama (1.1) navodi na zaključak

$$u = u(x,y,z) \qquad v = v(x) \qquad w = w(x)\,. \tag{1.3}$$

Uključivanjem aksijalnog naprezanja prethodne relacije postaju

$$u(y,z) = u_0 - y\varphi_z + z\varphi_y$$
$$v(y,z) = const. \qquad w(y,z) = const. \tag{1.4}$$

pri čemu

$$\varphi_z = \frac{dv}{dx} \qquad i \qquad \varphi_y = -\frac{dw}{dx} \tag{1.5}$$

predstavljaju Bernouli-jeve rotacije oko z i y ose respektivno i pozitivne su ako su usmerene u pravcu pozitivne z i y ose, dok je $u_0$ podužno pomeranje u težištu poprečnog preseka.

Timošenkovim grednim pristupom možemo uvesti i konstantno smicanje u ravnima *xy* i *xz*, odnosno $\gamma_{xy} = \varphi_{Tz}$, $\gamma_{xz} = \varphi_{Ty}$.

U tom slučaju rotacije poprečnog preseka oko *y* i *z* osa postaju

$$\varphi_z - \gamma_{xy} = \varphi_z - \varphi_{Tz}$$
$$\varphi_y - \gamma_{xz} = \varphi_y - \varphi_{Ty} \tag{1.6}$$

Koristeći relacije (1.6) pomeranje i dilataciju u pravcu ose štapa na y,z odstojanju od težišta poprečnog preseka izrazićemo kao

$$u(y,z) = u_0 - y(\varphi_z - \varphi_{Tz}) + z(\varphi_y - \varphi_{Ty}) \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_x(y,z) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du(y,z)}{dx} = \frac{du_0}{dx} - y\frac{d(\varphi_z - \varphi_{Tz})}{dx} + z\frac{d(\varphi_y - \varphi_{Ty})}{dx} \tag{1.8}$$

Relaciju (1.8) zapisaćemo i u obliku

$$\varepsilon_x(y,z) = \varepsilon_0 + y\kappa_z + z\kappa_y$$

gde su

$$\kappa_z = -\frac{d(\varphi_z - \varphi_{Tz})}{dx} \qquad \kappa_z = -\frac{d\varphi_z}{dx}$$
$$\kappa_y = -\frac{d(\varphi_y - \varphi_{Ty})}{dx} \qquad \kappa_y = -\frac{d\varphi_y}{dx} \tag{1.9}$$

Timošenkove i Bernouli-Euler-ove promene krivina u lokalnim ravnima savijanja *xy* i *xz*, respektivno.

Nadalje, pretpostavićemo da pri torzionom naprezanju ne dolazi do deplanacije (krivljenja) poprečnog preseka, što ima za posledicu da, i pri torziji, poprečni preseci ostaju ravni i nepromenjenog oblika, odnosno podužno pomjeranje i pri torziji jednako je nuli. Pomeranja u ravni poprečnog preseka usled obrtanja oko podužne ose jednaka su

$$v = -\varphi_x z \qquad w = \varphi_x y \tag{1.10}$$



## 2. JEDNAČINE TEORIJE ŠTAPA

Generalizacijom ravanskog problema (gredni element u ravni) [1], odgovarajuće kinematičke, statičke i deformacijske jednačine prostornog štapa napisaćemo u obliku (*slika 2*)

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \qquad \varphi_z = \frac{dv}{dx} \qquad \varphi_y = -\frac{dw}{dx}$$
$$\kappa_y = -\frac{d(\varphi_y - \varphi_{Ty})}{dx} \qquad \kappa_z = -\frac{d(\varphi_z - \varphi_{Tz})}{dx} \qquad \kappa_x = -\frac{d\varphi_x}{dx} \qquad (K) \tag{2.1}$$

$$dN + p_x dx = 0 \qquad dT_y + p_y dx = 0 \qquad dT_z + p_z dx = 0$$
$$dM_z - T_y dx = 0 \qquad dM_y - T_z dx = 0 \qquad dM_x - m_x dx = 0 \qquad (S) \tag{2.2}$$

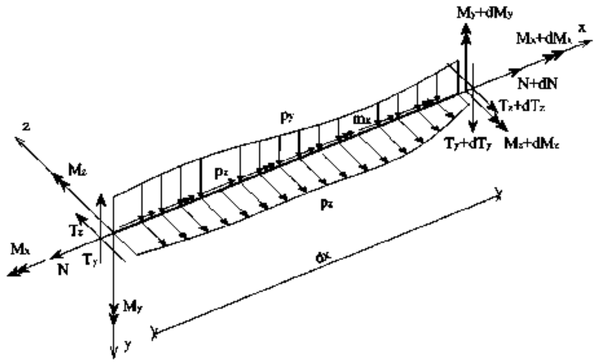
$$\varepsilon_x = \frac{N}{EF} + \alpha_t t^0 \qquad \varphi_{Ty} = \gamma_{xz} = \frac{kT_z}{GF} \qquad \varphi_{Tz} = \gamma_{xy} = \frac{kT_y}{GF}$$
$$\kappa_y = \frac{M_y}{EI_y} + \alpha_t\frac{\Delta t}{h} \qquad \kappa_z = \frac{M_z}{EI_z} + \alpha_t\frac{\Delta t}{h} \qquad \kappa_x = \frac{M_x}{GI_t} \qquad (D) \tag{2.3}$$

Nepoznate veličine teorije štapa su

$$u, v, w, \varphi_x, (\varphi_y - \gamma_{xz}), (\varphi_z - \gamma_{xy}) \qquad (K)$$
$$N, T_y, M_y, T_z, M_z, M_x \qquad (S) \tag{2.4}$$
$$\varepsilon_x, \kappa_z, \kappa_y, \kappa_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz} \qquad (D)$$

Teorija prostornog grednog pravolinijskog štapa definisana je sa 18 veličina, 6 kinematičkih, 6 deformaci-






Slika 2.-

jskih i 6 statičkih. Problem je rešen sa 18 jednačina od kojih su 12 obične linearne diferencijalne a 6 algebarske jednačine.

Jednačine (K) i (S) obzirom na linearan karakter zahtevaju po jednu integracionu konstantu odakle sledi da je za njihovu integraciju (rešenje) na štapu konačne dužine potrebno i dovoljno poznavati 12 integracionih konstanti od kojih je 6 kinematičkog a 6 statičkog karaktera. Ove veličine su međusobno linearno nezavisne obzirom da su i pomenute jednačine linearno nezavisne odakle zaključujemo da je problem teorije grednog prostornog štapa rešen sa 6 statički i 6 kinematički nezavisnih veličina.

Za statički nezavisne veličine usvojićemo aksijalnu silu $S_{ik}$ i moment torzije $\mathrm{M}_{ik}$ štapa kao i momente savi-



janja na krajevima štapa $M_{yik}$, $M_{yki}$, $M_{zik}$, $M_{zki}$ pri čemu su aksijalna sila i moment torzije štapa definisani kao poluzbir normalnih sila i torzionih momenata na krajevima štapa, respektivno, tj.

$$2S_{ik} = N_{ik} + N_{ki} \qquad 2\mathrm{M}_{ik} = M_{xik} + M_{xki}.$$

Integracijom statičkih jednačina (2. 2) na štapu konačne dužine $l_{ik}$, za presečne sile na krajevima štapa i u proizvoljnom preseku *c* dobijamo

$$N_{ik} = S_{ik} + \frac{R_x}{2} \qquad N_{ki} = S_{ik} - \frac{R_x}{2} \qquad N_c = S_{ik} + N_{co} \qquad (R_x = \int_0^l p_x dx)$$
$$M_{xik} = \mathrm{M}_{ik} + \frac{R_{mx}}{2} \quad M_{xki} = \mathrm{M}_{ik} + \frac{R_{mx}}{2} \quad M_{xc} = \mathrm{M}_{ik} + M_{xco} \quad (R_{mx} = \int_0^l m_x dx) \tag{2.5}$$

gde je

$$N_{co} = \frac{1}{2}R_x - \int_i^c p_x dx \qquad M_{xco} = \frac{1}{2}R_{mx} - \int_i^c m_x dx,$$

odnosno

$$T_{yik} = R_y\xi'_{Ry} + \frac{1}{l}(M_{zki} - M_{zik}) \qquad T_{yki} = -R_y\xi_{Ry} + \frac{1}{l}(M_{zki} - M_{zik})$$
$$T_{yc} = \frac{1}{l}(M_{zki} - M_{zik}) + T_{yco} \qquad T_{yco} = R_y\xi'_{Ry} - \int_i^c p_y dx \tag{2.6}$$
$$T_{zik} = R_z\xi'_{Rz} + \frac{1}{l}(M_{yki} - M_{yik}) \qquad T_{zki} = -R_z\xi_{Rz} + \frac{1}{l}(M_{yki} - M_{yik})$$
$$T_{zc} = \frac{1}{l}(M_{yki} - M_{yik}) + T_{zco} \qquad T_{zco} = R_z\xi'_{Rz} - \int_i^c p_z dx$$

i

$$M_{zc} = M_{zik}\xi'_c + M_{zki}\xi_c + M_{zco} \quad M_{zco} = R_y\xi'_{Ry}(x_c - x_i) - \int_i^c (x_c - x)p_y dx$$
$$M_{yc} = M_{yik}\xi'_c + M_{yki}\xi_c + M_{yco} \quad M_{zco} = R_z\xi'_{Rz}(x_c - x_i) - \int_i^c (x_c - x)p_z dx \tag{2.7}$$

Sva tri komponentalna pomeranja $u_i$, $v_i$, $w_i$ i obrtanje oko podužne ose $\varphi_{xi}$ na levom kraju, kao i oba poprečna pomeranja $v_k$, $w_k$ na desnom kraju predstavljaju potreban i dovoljan broj kinematički nezavisnih veličina za određivanje komponentalnih pomeranja i rotacija u proizvoljnoj tački ose štapa.

Integracijom kinematičkih jednačina (2.1) lako se može pokazati da je

$$u_c = u_i + u_{co} \quad v_c = \xi_c' v_i + \xi_c v_k + v_{co} \quad w_c = w_c' v_i + w_c v_k + w_{co} \quad u_{co} = \int_i^c \varepsilon_x dx$$

$$v_{co} = \xi_c l_{ik} \tau_{zik} - \int_i^c \left[(x_c - x)\kappa_z - \varphi_{Tz}\right]dx \quad w_{co} = \xi_c l_{ik} \tau_{yik} - \int_i^c \left[(x_c - x)\kappa_y - \varphi_{Ty}\right]dx \tag{2.8}$$

odnosno

$$(\varphi_z - \varphi_{Tz})_c = \psi_{zik} + (\varphi_z - \varphi_{Tz})_{co} \qquad (\varphi_y - \varphi_{Ty})_c = \psi_{yik} + (\varphi_y - \varphi_{Ty})_{co}$$

$$\varphi_{xc} = \varphi_{xi} + \int_i^c \kappa_x dx = \varphi_{xi} + \varphi_{xco} \tag{2.9}$$

$$(\varphi_z - \varphi_{Tz})_{co} = \tau_{zik} - \int_i^c \kappa_z dx \quad (\varphi_y - \varphi_{Ty})_{co} = \tau_{yik} - \int_i^c \kappa_y dx \quad \varphi_{xco} = \varphi_{xi} - \int_i^c \kappa_x dx$$

gde su

$$\tau_{zik} = (\varphi_z - \varphi_{Tz})_i - \psi_{zik} \quad \tau_{zki} = (\varphi_z - \varphi_{Tz})_k - \psi_{zik}$$

$$\tau_{yik} = (\varphi_y - \varphi_{Ty})_i - \psi_{yik} \quad \tau_{yki} = (\varphi_y - \varphi_{Ty})_k - \psi_{yik}$$

deformacioni uglovi na krajevima štapa u lokalnim ravnima savijanja, dok veličine

$$\psi_{zik} = \frac{1}{l_{ik}}(v_k - v_i) \qquad \psi_{yik} = -\frac{1}{l_{ik}}(w_k - w_i) = \frac{1}{l_{ik}}(v_k - v_i) \tag{2.10}$$

predstavljaju krute rotacije štapa u istim ravnima.



## 3. DEFORMACIONI MODEL TEORIJE PROSTORNOG PRAVOLINIJSKOG ŠTAPA

U deformacijskom modelu teorije pravolinijskog štapa za njegove nezavisne veličine usvajamo samo veličine kinematičkog karaktera.

Kombinacijom kinematičkih (K), statičkih (S) i deformacijskih (D) jednačina sve diferencijalne jednačine teorije štapa možemo redukovati na manji broj jednačina ali višeg reda. Naime kombinacijom jednačina $(K)_1$, $(S)_1$ i $(D)_1$ membransko naprezanje štapa opisano je diferencijalnom jednačinom oblika

$$EF\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\alpha_t F t^0) - p_x \tag{3.1}$$

Na isti način, iz $(K)_6$, $(S)_6$ i $(D)_6$ nalazimo diferencijalnu jednačinu torzije

$$GI_t\frac{d^2\varphi_x}{dx^2} = -m_x \tag{3.2}$$

Savijanje u ravni *xz* i *yz* opisujemo diferencijalnim jednačinama koje nalazimo kobinacijom izraza $(S)_4$, $(S)_3$, $(D)_2$, i $(K)_2$, odnosno

$$EI_y\frac{d^4w}{dx^4} = EI_y\frac{d^3\varphi_{Tz}}{dx^3} - \frac{d^2(\alpha_t\Delta t)}{dx^2} + p_z \tag{3.3}$$

ili $(S)_5$, $(S)_3$, $(D)_3$, i $(K)_3$



$$EI_z\frac{d^4w}{dx^4} = EI_z\frac{d^3\varphi_{Ty}}{dx^3} - \frac{d^2(\alpha_t\Delta t)}{dx^2} + p_y \tag{3.4}$$

Ako pretpostavimo konstantno ili linearno promenljivo smicanje $\varphi_{Tz}$ i $\varphi_{Ty}$ duž štapa (što je i najčešći slučaj u grednim teorijama) pa čak i kvadratnu promenu pomenutih smicanja, članovi $EI_y\frac{d^3\varphi_{Tz}}{dx^3}$ i $EI_z\frac{d^3\varphi_{Ty}}{dx^3}$ u jednačinama i iščezavaju pa jednačine postaju

$$EI_y\frac{d^4w}{dx^4} = p_z - \frac{d^2(\alpha_t\nabla t)}{dx^2} \qquad EI_z\frac{d^4w}{dx^4} = p_y - \frac{d^2(\alpha_t\nabla t)}{dx^2} \tag{3.5}$$

pri čemu $\Delta t$ predstavlja temperaturni gradijent za koji pretpostavljamo da je isti u svim pravcima.

Lako se da uočiti da su diferencijalne jednačine (3.1) i (3.2) drugog a (3.3) i (3.4) četvrtog reda. Takođe možemo primetiti da su u svim jednačinama nepoznate funkcije kinematičke veličine $u$, $\varphi_x$, $v$ i $w$. Drugim rečima, ako su nam poznate promene podužnog pomeranja, obrtanja oko ose štapa i ugiba u $y$ i $z$ pravcu onda su nam poznate i statičke funkcije aksijalnog $N_x$, torzionog $M_x$ naprezanja kao i savijanja oko obe ose $M_y$ i $M_z$, respektivno.

Tako na primer, ako znamo funkciju ugiba *v(x)* onda nam je poznata i funkcija $\varphi_z(x)$ odnosno $k_z(x)$. Onda iz jednačine $(D)_3$ nalazimo funkciju promene momenta savijanja $M_z(x)$.

Za određivanje rešenja diferencijalnih jednačina (3.1), (3.2), (3.3) i (3.4) potrebno je poznavati ukupno 12 integracionih konstanti, od kojih su dva podužna pomeranja (3.1), dva obrtanja oko ose $x$ (3.2), po dva ugiba u $y$ i $z$ pravcu kao i po dva obrtanja oko $y$ i $z$ ose.



Shodno tome, možemo zaključiti da je polje statičkih, kinematičkih i deformacijskih veličina štapa jednoznačno određeno ako su poznate samo kinematičke veličine na krajevima štapa, odnosno

$$U_1 = u_i, \quad U_2 = v_i, \quad U_3 = w_i, \quad U_4 = \varphi_{xi}, \quad U_5 = \varphi_{yi}, \quad U_6 = \varphi_{zi}$$

$$U_7 = u_k, \quad U_8 = v_k, \quad U_9 = w_k, \quad U_{10} = \varphi_{xk}, \quad U_{11} = \varphi_{yk}, \quad U_{12} = \varphi_{zk} \tag{3.6}$$

Za usvojene veličine lako nalazimo deformacijske nezavisne veličine štapa, odnosno

$$\Delta l_{ik} = U_7 - U_1 \qquad \Delta\varphi_{xik} = U_{10} - U_4$$

$$\tau_{yik} = U_5 - \frac{1}{l_{ik}}(U_3 - U_9) \qquad \tau_{zik} = U_6 - \frac{1}{l_{ik}}(U_8 - U_2)$$

$$\tau_{yki} = U_{11} - \frac{1}{l_{ik}}(U_3 - U_9) \qquad \tau_{zki} = U_{12} - \frac{1}{l_{ik}}(U_8 - U_2) \tag{3.7}$$

S druge strane, poznata nam je veza između deformacijski nezavisnih veličina štapa i njegovog statičkog polja, odnosno

$$\Delta l_{ik} = \int_0^l \varepsilon_x dx = \delta_{ik}S_{ik} + \delta_{ik,o} + \delta_{ik,t} \qquad \Delta\varphi_{xik} = \int_0^l \kappa_x dx = t_{ik}M_{ik} + t_{ik,o}$$

$$\tau_{yik} = \frac{1}{l_{ik}}\int_0^l (\xi' l_{ik}\kappa_y - \varphi_{Ty})dx = \alpha^y_{ik}M_{yik} - \beta^y_{ik}M_{yki} + \alpha^y_{ik,o} + \alpha^y_{ik,\nabla t}$$

$$\tau_{zik} = \frac{1}{l_{ik}}\int_0^l (\xi' l_{ik}\kappa_z - \varphi_{Tz})dx = \alpha^z_{ik}M_{zik} - \beta^z_{ik}M_{zki} + \alpha^z_{ik,o} + \alpha^z_{ik,\nabla t} \tag{3.8}$$

$$\tau_{yki} = -\frac{1}{l_{ik}}\int_0^l (\xi l_{ik}\kappa_y + \varphi_{Ty})dx = -\beta^y_{ik}M_{yik} + \alpha^y_{ki}M_{yki} - \alpha^y_{ki,o} - \alpha^y_{ki,\nabla t}$$

$$\tau_{zki} = -\frac{1}{l_{ik}}\int_0^l (\xi l_{ik}\kappa_z + \varphi_{Tz})dx = -\beta^z_{ik}M_{zik} + \alpha^z_{ki}M_{zki} - \alpha^z_{ki,o} - \alpha^z_{ki,\nabla t}$$

pri čemu su uvedene sledeće oznake

$$\delta_k=\int_0^l \frac{dx}{EF} \qquad \delta_{k,o}=\int_0^l \frac{N_x}{EF}dx \qquad \delta_{k,t}=\int_0^l \alpha_t t^o dx \qquad (3.9)$$
$$t_k=\int_0^l \frac{dx}{GI_t} \qquad t_{k,o}=\int_0^l \frac{M_{xo}}{GI_t}dx$$

odnosno

$$\alpha_{ik}^y=\int_0^l\left(\frac{\xi'^2}{EI_y}-\frac{k}{l_k^2GF}\right)dx \qquad \beta_{ik}^y=\int_0^l\left(\frac{\xi\xi'}{EI_y}-\frac{k}{l_k^2GF}\right)dx=\beta_{ki}^y$$
$$\alpha_{ik}^z=\int_0^l\left(\frac{\xi'^2}{EI_z}-\frac{k}{l_k^2GF}\right)dx \qquad \beta_{ik}^z=\int_0^l\left(\frac{\xi\xi'}{EI_z}-\frac{k}{l_k^2GF}\right)dx=\beta_{ki}^z$$
$$\alpha_{ki}^y=\int_0^l\left(\frac{\xi^2}{EI_y}+\frac{k}{l_k^2GF}\right)dx \qquad \alpha_{ki}^z=\int_0^l\left(\frac{\xi^2}{EI_z}+\frac{k}{l_k^2GF}\right)dx$$
$$\alpha_{ik,o}^y=\int_0^l\left(\frac{\xi' M_{yo}}{EI_y}-\frac{kT_{zo}}{l_kGF}\right)dx \qquad \alpha_{ki,o}^y=\int_0^l\left(\frac{\xi M_{yo}}{EI_y}+\frac{kT_{zo}}{l_kGF}\right)dx \qquad (3.10)$$
$$\alpha_{ik,o}^z=\int_0^l\left(\frac{\xi' M_{zo}}{EI_z}-\frac{kT_{yo}}{l_kGF}\right)dx \qquad \alpha_{ki,o}^z=\int_0^l\left(\frac{\xi M_{zo}}{EI_z}+\frac{kT_{yo}}{l_kGF}\right)dx$$
$$\alpha_{ik,\nabla t}^y=\int_0^l \xi'\alpha_t\nabla t dx=\alpha_{ik,\nabla t}^z \qquad \alpha_{ki,\nabla t}^y=\int_0^l \xi\alpha_t\nabla t dx=\alpha_{ki,\nabla t}^z$$

Ako pretpostavimo da na štapu nema nikakvih uticaja (opterećenje i temperaturni uticaji) zavisnost između deformacijskih i statički nezavisnih veličina uspostavljena je na sledeći način,

$$\begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{yik} \\ \tau_{yki} \\ \tau_{zik} \\ \tau_{zki} \\ \Delta\varphi_{xik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ik} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{ik}^y & -\beta_{ik}^y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{ki}^y & \alpha_{ki}^y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{ik}^z & -\beta_{ik}^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_{ki}^z & \alpha_{ki}^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{ik} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_{yik} \\ M_{yki} \\ M_{zik} \\ M_{zki} \\ M_{ik} \end{bmatrix}$$

odnosno $\delta = f_0 S$ (3.11)



gde su

$$\delta^T=\left[\Delta l_{ik},\tau_{yik},\tau_{yki},\tau_{zik},\tau_{zki},\Delta\varphi_{xik}\right] \text{ i } S^T=\left[S_{ik},M_{yik},M_{yki},M_{zik},M_{zki},M_{ik}\right] \qquad (3.12)$$

vektori deformacijskih i statički nezavisnih veličina štapa, dok je matrica $f_0$ tzv. bazna matrica fleksibilnosti štapa. Lako možemo uočiti da su blokovi membranskog, torzionog kao i naprezanja savijanja u obe ravni međusobno razdvojeni kao logična posledica pravolinijske ose štapa.

Inverzijom izraza dobijamo

$$S = K_0\delta \qquad (3.13)$$

gde je

$$K_0=f_0^{-1}=\begin{bmatrix} 1/\delta_{ik} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{ik}^y & b_{ik}^y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{ki}^y & a_{ki}^y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ik}^z & b_{ik}^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{ki}^z & a_{ki}^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/t_{ik} \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

bazna matrica krutosti štapa.

Ako saopštimo sada štapu spoljašnje terete i temperaturne uticaje, njegove statički nezavisne veličine određene su kao

$$S_{ik}=\frac{1}{\delta_{ik}}\left[(u_k-u_i)-\delta_{ik,o}-\delta_{ik,t}\right] \qquad M_{ik}=\frac{1}{t_{ik}}\left[(\varphi_{xk}-\varphi_{xi})-t_{ik,o}\right] \qquad (3.15)$$
$$M_{yik}=a_{ik}^y\varphi_{yi}-b_{ik}^y\varphi_{yk}-c_{ik}^y\psi_{yik}+\bar{M}_{yik} \qquad M_{yki}=b_{ki}^y\varphi_{yi}+a_{ki}^y\varphi_{yk}-c_{ki}^y\psi_{yik}+\bar{M}_{yki}$$
$$M_{zik}=a_{ik}^z\varphi_{zi}-b_{ik}^z\varphi_{zk}-c_{ik}^z\psi_{zik}+\bar{M}_{zik} \qquad M_{zki}=b_{ki}^z\varphi_{zi}+a_{ki}^z\varphi_{zk}-c_{ki}^z\psi_{zik}+\bar{M}_{zki}$$



pri čemu veličine

$$\bar{M}_{yik}=-\left(a_{ik}^y\alpha_{ik,(o,\nabla t)}^y-b_{ik}^y\alpha_{ki,(o,\nabla t)}^y\right) \qquad \bar{M}_{yki}=a_{ki}^y\alpha_{ik,(o,\nabla t)}^y-b_{ki}^y\alpha_{ki,(o,\nabla t)}^y$$
$$\bar{M}_{zik}=-\left(a_{ik}^z\alpha_{ik,(o,\nabla t)}^z-b_{ik}^z\alpha_{ki,(o,\nabla t)}^z\right) \qquad \bar{M}_{zki}=a_{ki}^z\alpha_{ik,(o,\nabla t)}^z-b_{ki}^z\alpha_{ki,(o,\nabla t)}^z$$

predstavljaju tzv. gotske momente od opterećenja i temperaturnog gradijenta u lokalnim ravnima savijanja *xz* i *yz*, respektivno.

Korišćenjem prethodnog izraza i jednačina (2.5) i (2.6) sile na krajevima štapa izrazićemo u sledećem obliku

$$N_{ik}=\frac{1}{\delta_{ik}}\left[(u_k-u_i)-\delta_{ik,o}-\delta_{ik,t}\right]+\frac{R_x}{2} \qquad N_{ki}=\frac{1}{\delta_{ik}}\left[(u_k-u_i)-\delta_{ik,o}-\delta_{ik,t}\right]-\frac{R_x}{2}$$
$$T_{yik}=\frac{1}{l_k^2}(c_{ik}^z+c_{ki}^z)(v_i-v_k)+\frac{1}{l_k}(c_{ik}^z\varphi_{zi}+c_{ki}^z\varphi_{zk})+\frac{1}{l_k}(\bar{M}_{zki}-\bar{M}_{zik})+R_y\xi'_{R_y}$$
$$T_{yki}=\frac{1}{l_k^2}(c_{ik}^z+c_{ki}^z)(v_i-v_k)+\frac{1}{l_k}(c_{ik}^z\varphi_{zi}+c_{ki}^z\varphi_{zk})+\frac{1}{l_k}(\bar{M}_{zki}-\bar{M}_{zik})-R_y\xi_{R_y} \qquad .6)$$
$$T_{zik}=\frac{1}{l_k^2}(c_{ik}^y+c_{ki}^y)(w_k-w_i)+\frac{1}{l_k}(c_{ik}^y\varphi_{yi}+c_{ki}^y\varphi_{yk})+\frac{1}{l_k}(\bar{M}_{yki}-\bar{M}_{yik})+R_z\xi'_{R_z}$$
$$T_{zki}=\frac{1}{l_k^2}(c_{ik}^y+c_{ki}^y)(w_k-w_i)+\frac{1}{l_k}(c_{ik}^y\varphi_{yi}+c_{ki}^y\varphi_{yk})+\frac{1}{l_k}(\bar{M}_{yki}-\bar{M}_{yik})-R_z\xi_{R_z}$$
$$M_{xik}=\frac{1}{t_k}\left[(\varphi_{xk}-\varphi_{xi})-t_{k,o}\right]+\frac{R_{mx}}{2} \qquad M_{xki}=\frac{1}{t_k}\left[(\varphi_{xk}-\varphi_{xi})-t_{k,o}\right]-\frac{R_{mx}}{2}$$

Vratimo se sada statičkom modelu teorije štapa i nekim specijalnim vrstama štapova.

*Štap tipa g*

Prostorni štap koji je na jednom kraju kruto vezan a na drugom zglavkasto sfernim zglobom predstavlja štap



tipa *g*. Obzirom da su sva obrtanja neposredno pored zgloba slobodna sledi i da su momenti savijanja u ravni *xz* i *yz* kao i moment torzije jednaki nuli,

$$M_{ygi}=M_{zgi}=M_{xgi}=0.$$

Uvrštavanjem ovih statičkih konturnih uslova u jednačine i dobijamo

$$b_{gi}^y\varphi_{yi}+a_{gi}^y\varphi_{yg}-c_{gi}^y\psi_{yig}+\bar{M}_{ygi}=0 \qquad b_{gi}^z\varphi_{zi}+a_{gi}^z\varphi_{zg}-c_{gi}^z\psi_{zig}+\bar{M}_{zgi}=0 \qquad (3.17)$$
$$\frac{1}{t_{ig}}\left[(\varphi_{xg}-\varphi_{xi})-t_{ig,o}\right]-\frac{1}{2}R_{mx}=0$$

odakle nalazimo da je

$$\varphi_{yg}=\frac{1}{a_{gi}^y}(c_{gi}^y\psi_{yig}-b_{gi}^y\varphi_{yi}-\bar{M}_{ygi})=\frac{c_{gi}^y}{l_k a_{gi}^y}(w_i-w_g)-\frac{b_{gi}^y}{a_{gi}^y}\varphi_{yi}-\frac{\bar{M}_{ygi}}{a_{gi}^y}$$
$$\varphi_{zg}=\frac{c_{gi}^z}{l_k a_{gi}^z}(v_i-v_g)-\frac{b_{gi}^z}{a_{gi}^z}\varphi_{zi}-\frac{\bar{M}_{zgi}}{a_{gi}^z} \qquad \varphi_{xg}=t_{ig}\frac{R_{mx}}{2}+\varphi_{xi}+t_{ig,o} \qquad (3.18)$$

Na osnovu prethodnih jednačina lako možemo zaključiti da su kod štapa tipa *g* uglovi obrtanja neposredno pored zgloba poznati ako su poznati ugibi u *y* i *z* pravcu na oba kraja i ako su poznata obrtanja na kruto vezanom kraju. Shodno tome zaključujemo da veličine $\varphi_{yg}$, $\varphi_{zg}$ i $\varphi_{xg}$ nisu nezavisne kinematičke veličine štapa tipa *g* već su linearna kombinacija obrtanja $\varphi_{xi}$, $\varphi_{yi}$ i $\varphi_{zi}$ i ugiba $v_i$, $w_i$, $v_g$ i $w_g$. Jasno je onda da štap tipa *g* ima samo 9 kinematički nezavisnih veličina.

U pogledu modela sila teorije štapa, štap tipa *g* ima samo tri statičke nezavisne veličine $S_{ig}$, $M_{yig}$, i $M_{zig}$. Drugim rečima, poznavanjem ovih veličina za zadato opterećenje jednoznačno su određene unutrašnje sile u svim presecima.

*Konzolni štap*

Kod konzolnog štapa sve presečne sile u preseku prepusta jednake su nuli ili odgovarajućem koncentrisanom opterećenju. U slučaju homogenih statičkih konturnih uslova, odnosno

$$N_{si} = T_{ysi} = T_{zsi} = M_{xsi} = M_{ysi} = M_{zsi} = 0$$

iz relacija sledi

$$\begin{aligned} u_s &= u_i + \delta_{is,o} + \delta_{is,t} + \delta_{is}\frac{R_x}{2} & \varphi_{xs} &= \varphi_{xi} + t_{is,o} + \frac{1}{2}t_{is}R_{mx} \\ v_s &= v_i + \frac{A_{z1}}{A_z}\varphi_{zi} + \frac{A_{zo}}{A_z} & w_s &= w_i - \frac{A_{y1}}{A_y}\varphi_{yi} - \frac{A_{yo}}{A_y} \end{aligned} \tag{3.19}$$

uvodeći pri tome sledeće oznake:

$$A_z = \frac{1}{l_{is}}\left[\frac{c_{si}^z}{l_{is}a_{si}^z} - (c_{is}^z + c_{si}^z)\right] \quad A_{z1} = \frac{1}{l_{is}}\left(\frac{b_{si}^z}{a_{si}^z} - c_{is}^z\right) \quad A_{zo} = R_y\xi_{Ry}\frac{1}{l_{is}}\left(M_{zis} - M_{zsi}b_{is}\right)$$

$$A_y = \frac{1}{l_{is}}\left[\frac{c_{si}^y}{l_{is}a_{si}^y} - (c_{is}^y + c_{si}^y)\right] \quad A_{y1} = \frac{1}{l_{is}}\left(\frac{b_{si}^y}{a_{si}^y} - c_{is}^y\right) \quad A_{yo} = R_z\xi_{Rz}\frac{1}{l_{is}}\left(M_{yis} - M_{ysi}b_{is}\right)$$

Uvrštavanjem izraza $(3.19)_{3,4}$ u izraze $(3.18)_{1,2}$ obrtanja na prepustu postaju fukcija obrtanja i ugiba na kruto vezanom kraju. Na taj način možemo zaključiti da su generalisane koordinate prepusta (pomeranja i obrtanja) linearna kombinacija generalisanih koordinata kruto vezanog kraja i opterećenja na štapu. Shodno tome sledi da ove veličine nisu nezavisne i nepoznate te ih i ne ubrajamo u generalisane koordinate grednog sistema. Sa praktičnog stanovišta ovi štapovi se mogu ukloniti iz sistema a opterećenje sa takvih štapova redukovati na kruto vezani kraj (čvor).



Sa stanovišta modela sila teorije štapa, konzolni štap je statički određen iz statičkih konturnih uslova prepusta. Jasno je da ovakvi štapovi nemaju nijednu nepoznatu statički nezavisnu veličinu obzirom da se generalisane sile na kruto vezanom kraju za zadata raspodeljena opterećenja mogu odrediti iz ravnoteže konzolnog štapa, tj.

$$S_{ik} = \frac{N_{ik}}{2} = \frac{R_x}{2} \qquad M_{ik} = \frac{M_{xik}}{2} = \frac{R_{mx}}{2} \qquad M_{yik} = -l_{ik}R_z\xi_{Rz} \qquad M_{zik} = -l_{ik}R_y\xi_{Ry}$$

$$M_{ysi} = M_{zsi} = 0$$

Za slučaj štapa koji je na jednom kraju kruto vezan a na drugom vezan cilindričnim ležištem broj generalisanih koordinata takvog štapa jednak je deset. Naime, cilindrična veza dozvoljava pomeranje u pravcu cilindra kao i rotaciju oko ose cilindra dok su ostala dva pomeranja i obrtanja sprečena.

*Napomena*

U izrazima $(3.15)_4$ i $(3.15)_6$ momenti savijanja na kraju $k$ su pozitivni ako je njihov smer obrtanja u smeru kazaljke na satu. U odnosu na klasičnu konvenciju sila ovi momenti savijanja su negativni pa se u klasičnim razmatranjima teorije štapa (model sila) moraju tako i tretirati.



## 4. STATIČKA KLASIFIKACIJA PROSTORNIH LINIJSKIH SISTEMA

Svaki spoljašnji element nosača unosi u sistem reaktivno koncentrisano opterećenje koje predstavlja reakciju oslonca ili ukleštenja usled spoljašnjih uticaja. Njihov ukupan broj u nosaču jednak je

$$\begin{aligned} &C_o \ldots\ldots\ldots\ldots z_o \\ &C_u \ldots\ldots\ldots\ldots z_u \end{aligned} \tag{4.1}$$

Za poznate reakcije spoljašnjih elemenata naš sistem ne predstavlja ništa drugo do sistem štapova i krutih uglova. U takvom sistemu nepoznate statičke veličine su zapravo statički nezavisne veličine štapova.

Aksijalnih nepoznatih sila štapova kao i nepoznatih torzionih momenata ima onoliko koliko ima aksijalno i torziono krutih štapova, odnosno

$$\begin{aligned} &S_a \ldots\ldots\ldots\ldots z_{aš} \\ &M_t \ldots\ldots\ldots z_{tš} \end{aligned} \tag{4.2}$$

U aksijalno krute štapove ubrajamo one kod kojih je aksijalna sila kao statički nezavisna veličina nepoznatog karaktera, odnosno ne može se odrediti iz ravnoteže štapa. Na potpuno analogan način prebrojavamo i torziono krute štapove, odnosno to su štapovi gde se statički nezavisni torzioni moment ne može odrediti iz njegove ravnoteže. Jasno je odavde da konzolni štapovi nisu ni aksijalno ni torziono kruti. Takođe i štapove koji su na jednom kraju kruto vezani a na drugom zglavkasto, sfernim ili cilindričnim zglobom, ne ubrajamo u grupu torziono krutih štapova obzirom da se kod takvih štapova torzioni moment $M_{ig}$ može odrediti iz ravnoteže štapa.



Broj preostalih statički nezavisnih veličina štapova jednak je broju momenata savijanja na krajevima kruto vezanih štapova. Ove momente savijanja u celokupnom nosaču prebrojaćemo preko krutih uglova i grupa krutih uglova sistema. Kako je broj krutih uglova za jedan manji od broja kruto vezanih štapova u posmatranom čvoru, sledi da je ukupan broj nepoznatih momenata savijanja za posmatrani čvor jednak dvostrukom broju krutih uglova uvećan za dva. Imajući na umu da u jednom čvoru može postojati više grupa krutih uglova koje su međusobno povezane sfernim zglobom prethodno prebrojavanje momenata savijanja treba proširiti na broj grupa krutih uglova.

U skladu sa prethodnom analizom, ukupan broj nepoznatih momenata na krajevima štapova u celokupnom nosaču određen je sa

$$\begin{aligned} &M_{yik}, M_{yki} \\ &M_{zik}, M_{zki} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2z_k + 2m \end{aligned} \tag{4.3}$$

gde su $z_k$ i $m$ broj krutih uglova i grupa krutih uglova u nosaču.

Na osnovu izraza (4.1) - (4.3) ukupan broj statički nepoznatih veličina odredićemo zbirom

$$\Sigma_{sn} = z_o + z_u + z_{aš} + z_{tš} + 2z_k + 2m \tag{4.4}$$

Sve ove veličine su međusobno linearno nezavisne i predstavljaju reaktivna koncentrisana opterećenja na nosaču kao i statički nezavisne veličine štapova. Za njihovo određivanje na raspolaganju su nam uslovi ravnoteže. Iz mehanike krutog tela poznato nam je da se za jedno kruto telo u prostoru može ispisati beskonačno mnogo uslova ravnoteže od kojih su samo šest međusobno linearno nezavisni, dok su svi ostali njihova linearna kombinacija. Obzirom da su statički nepoznate veličine linearno nezavisne to se za njihovo određivanje zahtevaju takođe nezavisni uslovi ravnoteže. Naš zadatak je stoga da prebrojimo ukupan broj nezavisnih uslovnih ravnotežnih jednačina u nosaču.

Dekompozicija sistema na kruta tela u prostoru i prebrojavanje nezavisnih uslova ravnoteže u skladu sa brojem krutih tela svakako nije dobar način. Razlog leži u tome što se pri takvom načinu kao statički nepoznate veličine javljaju reakcije veza u zglobovima vezanih krutih tela a što nije u skladu sa izloženom teorijom štapa i sistema. Osim toga, pojedina kruta tela mogu biti unutrašnje višestruko stabilna odakle sledi da je poznavanje reakcija veza sa drugim krutim telima nedovoljno za njihovo rešavanje. S druge strane i celokupan sistem zadovoljava uslove ravnoteže krutog tela u prostoru što unosi višak jednačina u odnosu na broj krutih tela sistema, pri čemu se onda postavlja problem koje su od ovih jednačina nezavisne.

Iz tih razloga dekompoziciju našega sistema izvršićemo na sledeći način. Naime, kružnim presecima be-



skonačno malog poluprečnika isećićemo sve čvorove sistema. Takvim isecanjem iz sistema izdvajamo čvor kao materijalnu tačku i diferencijalne elemente svih štapova vezanih u tom čvoru. Ovakvom dekompozicijom od celokupnog sistema preostaju samo štapovi konačne dužine čije je dejstvo u nosaču već preneseno u čvorove sistema te se stoga mogu i odbaciti.

Kako svaki čvor sa svojom diferencijalnom okolinom u kinematičkom pogledu predstavlja kruto telo u prostoru, sledi da i za njega moraju važiti njegovi uslovi ravnoteže. Ovi uslovi ravnoteže su međusobno linearno nezavisni obzirom da se ispisuju za svaki čvor ponaosob.

U svakom čvoru možemo postaviti tri skalarna uslova ravnoteže o nultoj vrednosti komponenata glavnog vektora sila u čvoru u tri nekolinearna pravca (najčešće globalnim *XYZ*) u cilju eliminacije njegovih krutih translacija. Takođe za svaku grupu krutih uglova moramo postaviti tri uslova ravnoteže o nultoj vrednosti komponenata glavnog momenta vektora sila čvora oko tri nekolinearna pravca kojima se sprečavaju njihove krute rotacije. Ove uslove treba postaviti i na ukleštenim krajevima pojedinačnih štapova.

Za čvor u kome su samo zglavkasto vezani štapovi uslov o nultoj vrednosti momenata identički je zadovoljen. Naime, ako je koordinatni početak sistema u čvoru onda su ovi uslovi trivijalni (0=0) dok za drugačije koordinatne sisteme ovi uslovi predstavljaju linearnu kombinaciju uslova po silama. Odavde sledi da su za takve



čvorove krute rotacije sprečene ako su im sprečene krute translacije.

Na osnovu prethodne analize zaključujemo da je ukupan broj nezavisnih uslova ravnoteže sistema jednak

$$\Sigma_{ur} = 3_k + 3_m + z_u \tag{4.5}$$

Upoređivanjem izraza (4.4) i (4.5), odnosno

$$\Sigma_{sn} = z_o + z_u + z_{aš} + z_{tš} + 2z_k + 2_m \square \; 3k + 3m + = \Sigma_{ur}$$

ili

$$z_o + z_u + z_{aš} + z_{tš} + 2z_k \square \; 3k + m \tag{4.6}$$

možemo konstatovati sledeće:

Ako je broj statički nepoznatih veličina sistema jednak broju njegovih uslova ravnoteže onda je sistem statički određen. U slučaju kada imamo više nepoznatih nego uslova ravnoteže na raspolaganju sistem je statički neodređen dok je u protivnom statički preodređen.

## 5. KINEMATIČKA KLASIFIKACIJA NOSAČA

### *5.1 Uslovi kompatibilnosti pomeranja i obrtanja čvorova*

Na osnovu znanja iz kinematike sistema materijalnih tačaka [2,3] lako možemo zaključiti da linijski nosači ne predstavljaju ništa drugo do sistem materijalnih tačaka sa holonomnim vezama. Holonomne veze materijalnih

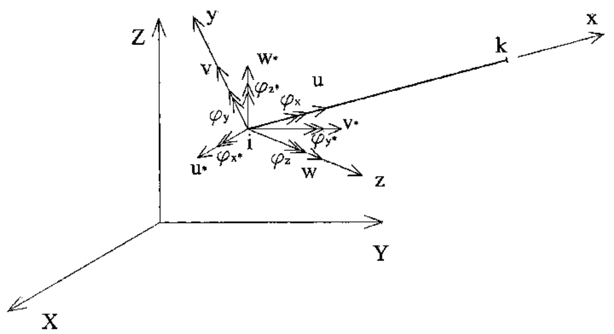


tačaka predstavljaju štapovi i kruti uglovi a materijalne tačke čvorovi sistema. Štapovi su nestacionarne holonomne veze obzirom da se mogu skraćivati i izduživati usled aksijalnog naprezanja, dok su kruti uglovi njihove stacionarne veze. Naime uglovi između kruto vezanih štapova u čvoru ostaju nepromenjeni sa vremenom (deformacijom).

Za razliku od ravanskih linijskih nosača gde su samo dve generalisane koordinate materijalne tačke (čvora) koje predstavljaju dva nezavisna pomeranja čvora (najčešće horizontalno i vertikalno pomeranje) dovoljne da opišu njegovu kinematiku, kod prostornih nosača to nije slučaj.

Zapravo, kod prostornih linijskih sistema tri komponentalna pomeranja su dovoljna da opišu samo kinematiku čvora kao materijalne tačke ali ne i kinematiku diferencijalne okoline oko čvora. Iz tih razloga potrebno je uvesti i vektor rotacije čvora kao njegovu generalisanu koordinatu. Možemo sada postaviti krajnje jednostavno pitanje: ‘Zašto rotacija čvora ne predstavlja generalisanu koordinatu u slučaju ravanskih linijskih nosača?’ Odgovor nalazimo u činjenici da su sve rotacije čvorova takvih sistema kolinearni vektori u pravcu normale na ravan nosača. Drugim rečima, diferencijalni elementi štapova neposredno pored čvora deformišu se u ravni nosača.

Za razliku od njih kod prostorni nosača ostaje neodređena osa oko koje se obrću diferencijalni elementi štapova vezanih u posmatranom čvoru. Položaj ose određen je poznavanjem pravca ali ne i intenziteta vektora rotacije. S druge strane, poznavanjem komponenti vektora rotacije u odnosu na neki globalni Decartes-ov trijedar poznat je i pravac vektora a samim tim i osa oko koje se vrši rotacija čvora. U skladu sa tim broj generalisanih koordinata čvora sistema možemo proširiti na šest pri čemu su sve one skalarne veličine.




Slika 3.-

Kako je promena dužine ose štapa jednaka

$$\Delta l_{ik} = \int_0^l \varepsilon_x dx = u_k - u_i$$

sledi da svakom štapu možemo pridružiti uslov kompatibilnosti oblika

$$a_{11}(u_k^* - u_i^*) + a_{12}(v_k^* - v_i^*) + a_{13}(w_k^* - w_i^*) = \Delta l_{ik} \ldots\ldots\ldots\ldots z_{st} \qquad (5.1)$$



pri čemu oznake $u^*$, $v^*$ i $w^*$ predstavljaju komponentalna pomeranja krajeva štapa izražena u odnosu na globalni koordinatni sistem *XYZ*.

Razliku obrtanja krajeva štapa oko podužne (lokalne $x$) ose takođe možemo izraziti kao

$$\Delta\varphi_{xik} = \int_0^l \kappa_x dx = \varphi_{xk} - \varphi_{xi}$$

ili u globalnom sistemu zapisano

$$a_{11}(\varphi_{Xk} - \varphi_{Xi}) + a_{12}(\varphi_{Yk} - \varphi_{Yi}) + a_{13}(\varphi_{Zk} - \varphi_{Zi}) = \Delta\varphi_{xik} \ldots\ldots\ldots\ldots z_{st} \qquad (5.2)$$

Očuvanje krutih uglova između štapova obezbeđeno je istim vektorom rotacije svih štapova kruto vezanih u posmatranom čvoru. Ovaj uslov zadovoljen je izražavanjem deformacionih uglova na krajevima takvih štapova preko istog vektora rotacije u čvoru, odnosno

$$\tau_{yik} = (\varphi_y - \varphi_{Dy})_i - \psi_{yik} \qquad \tau_{zik} = (\varphi_z - \varphi_{Dz})_i - \psi_{zik}$$

ili

$$a_{31}\varphi_{Xi} + a_{32}\varphi_{Yi} + a_{33}\varphi_{Zi} - \frac{1}{l_k}\left[a_{21}(u_i^* - u_k^*) + a_{22}(v_i^* - v_k^*) + a_{23}(w_i^* - w_k^*)\right] =$$
$$= \tau_{yik} + \varphi_{Dyik}$$
$$a_{21}\varphi_{Xi} + a_{22}\varphi_{Yi} + a_{23}\varphi_{Zi} - \frac{1}{l_k}\left[a_{31}(u_k^* - u_i^*) + a_{32}(v_k^* - v_i^*) + a_{33}(w_k^* - w_i^*)\right] = \qquad (5.3)$$
$$= \tau_{zik} + \varphi_{Dzik} \;\ldots\ldots\; (2z_k + 2m)$$

Skalari $a_{ij}$ ($i,j=1,2,3$ ) u izrazima (5.1)-(5.3) predstavljaju komponente matrice transformacije lokalnog vektora pomeranja $q^T = (u,v,w)$ i obrtanja $\varphi^T = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ na globalni sistem koordinata $q^{*T} = (u^*, v^*, w^*)$ i $\varphi^{*T} = (\varphi_X, \varphi_Y, \varphi_Z)$,



respektivno i ne predstavljaju ništa drugo do kosinuse uglova između lokalnih $x,y,z$ i globalnih $X,Y,Z$ koordinata, odnosno

$$q = t\cdot q^* \quad \varphi = t\cdot\varphi^* \qquad (5.5)$$

gde je

$$t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x,X) & \cos(x,Y) & \cos(x,Z) \\ \cos(y,X) & \cos(y,Y) & \cos(y,Z) \\ \cos(z,X) & \cos(z,Y) & \cos(z,Z) \end{bmatrix}$$

matrica transformacije.

U čvorovima gde postoji više od jedne grupe krutih uglova za svaki štap iz svake grupe krutih uglova možemo ispisati uslove (5.2) i (5.3). Pri tome treba imati na umu da svaka grupa krutih uglova nezavisno rotira od prestalih što ima za posledicu da svakoj grupi krutih uglova odgovara različit vektor rotacije. Na taj način u takvim čvorovima osim tri komponentalna pomeranja potrebno je poznavati i po tri komponente vektora rotacije svake grupe krutih uglova. Kao rezultat toga ukupan broj generalisanih koordinata takvih čvorova jednak je trostrukom broju grupa krutih uglova uvećan za tri. Obzirom da je ukupan broj kruto vezanih štapova u takvim čvorovima jednak broju krutih uglova i grupa krutih uglova sledi da je njihov dvostruki broj ukupan broj uslova kompatibilnosti (5.3) koje možemo ispisati za ceo nosač.

Za konzolne štapove na slobodnom kraju kao i krajevima zglavkasto vezanih štapova takođe možemo napi-



sati uslove kompatibilnosti (5.2) i (5.3). Iz tih jednačina mogu se odrediti uglovi obrtanja na prepustu i zglavkasto vezanim krajevima štapa. Međutim nije teško pokazati da ova obrtanja ne predstavljaju generalisane koordinate čvorova grednih nosača obzirom da se mogu odrediti iz statičkih konturnih uslova da su moment torzije i momenti savijanja jednaki nuli. Drugim rečima ova obrtanja nisu nezavisne veličine (koordinate) obzirom da se iz pomenutih konturnih statičkih uslova mogu predstaviti kao linearna kombinacija preostalih koordinata štapa. Saglasno tome takve vektore (linearno zavisne) i ne ubrajamo u generalisane koordinate čvorova sistema. Takođe i komponentalna pomeranja prepusta konzolnih štapova mogu biti eliminisana i izražena u funkciji generalisanih koordinata kruto vezanog kraja. Na taj način, a što je već pokazano ranije, konzolni štapovi mogu biti uklonjeni iz sistema i sa stanovišta statičke i kinematičke analize.

Spoljašnji elementi nosača, oslonci i ukleštenja, uspostavljaju veze između sistema i sredine u kojoj se sistem nalazi. Svaki spoljašnji element unosi reaktivno koncentrisano opterećenje na sistem, a sa kinematičkog stanovišta odgovarajući kinematički homogen ili nehomogen granični uslov. Svaki od ovih uslova određuje vrednost odgovarajuće generalisane koordinate linijskog nosača,

$$u_i^* \cos\alpha_0 + v_i^* \cos\beta_0 + w_i^* \cos\gamma_0 = c_{oi} \ldots\ldots\ldots z_o \qquad (5.4)$$

gde su $\alpha_0$, $\beta_0$ i $\gamma_0$ uglovi koje pravac oslanjanja zaklapa sa osama globalnog trijedra, dok je $c_{oi}$ zadato pomeranje oslonca. U slučaju homogenih graničnih uslova $c_{oi} = 0$. Svakom osloncu nosača možemo pridružiti uslov (5.4) pa je njihov ukupan broj jednak broju oslonaca. Što se tiče ukleštenja, uslov kompatibilnosti ima oblik

$$\varphi_{xi}\cos\alpha_u + \varphi_{yi}\cos\beta_u + \varphi_{zi}\cos\gamma_u = c_{ui} \ldots\ldots z_u \tag{5.5}$$

pri čemu $\alpha_u$, $\beta_u$, $\gamma_u$ predstavljaju uglove koje ukleštenje, odnosno vektorski pravac sprečene ili dozvoljene rotacije zaklapa sa globalnim *X, Y, Z* osama. $c_{ui}$ je zadato obrtanje poprečnog preseka. Broj takvih uslova kompatibilnosti (5.5) u celokupnom nosaču jednak je broju ukleštenja.

Uslove kompatibilnosti po osnovu uklještenja (uklješteni preseci na krajevima štapova) (5.5) u skladu sa definicijama relativne promene torzionog obrtanja štapa i deformacionih uglova u lokalnim ravnima savijanja izrazićemo u obliku

$$\begin{aligned}
&a_{11}\varphi_{xi} + a_{12}\varphi_{yi} + a_{13}\varphi_{zi} = c_{ui} + \Delta\varphi_{xik} \ldots z_{ut} \\
&\frac{1}{l_{ik}}\left[a_{31}(u_k^* - u_i^*) + a_{32}(v_i^* - v_k^*) + a_{33}(w_i^* - w_k^*)\right] = c_{yui} - \tau_{yik} \\
&\frac{1}{l_{ik}}\left[a_{21}(u_k^* - u_i^*) + a_{22}(v_k^* - v_i^*) + a_{23}(w_k^* - w_i^*)\right] = c_{zui} - \tau_{zik} \ldots z_{us}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

pri čemu $z_{ut}$ i $z_{us}$ predstavljaju ukupan broj torzionih i uklještenja savijanja u nosaču tako da je $z_{ut} + z_{us} = z_u$.

Jednostavnim uvidom u izraz (5.6) lako se da uočiti da on izražava isti torzioni uslov kompatibilnosti kao i (5.2) pri čemu je obrtanje na kraju *i* štapa *ik* jednako.



Kao rezultat toga ukupan broj uslova kompatibilnosti (5.2) koji se mogu ispisati za nosač jednak je razlici broja štapova nosača i zbira torzionih uklještenja, štapova tipa *g* $z_{gs}$ i konzolnih štapova $z_{ps}$, tj.,

$$z_{tš} = z_{š} - (z_{ut} + z_{gš} + z_{pš})$$

Nije teško primetiti da su jednačine (5.1)-(5.6) linearne algebarske jednačine po nepoznatim pomeranjima i obrtanjima čvorova sistema. Desne strane, odnosno njihovi slobodni članovi, predstavljaju deformacije štapova kao i zadata pomeranja oslonaca obrtanja ukleštenja. Sumiranjem ovih jednačina sa jedne, i broja nezavisnih pomeranja i obrtanja čvorova sistema sa druge strane, odnosno

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{uk} = z_o + z_s + z_{sd} + z_g + 2z_t + 2m \\
&\Sigma_{gk} = 3k + 3m
\end{aligned} \tag{5.7}$$

možemo izvesti odgovarajuće zaključke o sistemu.

Naime, ako su sve jednačine - međusobno linearno nezavisne i ako je njihov broj jednak broju generalisanih koordinata sistema, tj.

$$z_o + z_s + z_{sd} + z_g + 2z_t = 3k + m \qquad \det D \neq 0$$

onda je sistem kinematički prosto stabilan. Za takve sisteme ako su poznate deformacije štapova, a ona je poznata ako je poznata njihova statika, iz jednačina - jednoznačno se mogu odrediti komponentalna pomeranja svih čvorova kao i njihova obrtanja. Uslov da su jednačine uslova kompatibilnosti međusobno linearno nezavisne



obezbeđen je regularnom matricom sistema jednačina čija je det D ≠ 0.

Ako je broj nezavisnih uslova kompatibilnosti veći od broja nezavisnih generalisanih koordinata sistema onda je nosač kinematički višestruko stabilan. Iz takvog sistema možemo ukloniti *n* elemenata, i spoljašnjih i unutrašnjih, tj.

$$n = z_o + z_s + z_{sd} + z_g + 2z_t - (3k + m)$$

a da sistem i dalje bude nosač, odnosno prosto stabilan. U suprotnom, kada je

$$z_o + z_s + z_{sd} + z_g + 2z_t < (3k + m)$$

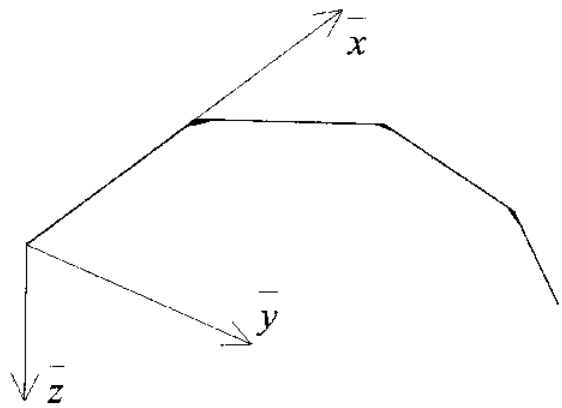
reč je o kinematički labilnom sistemu, odnosno mehanizmu.

Na kraju ovog odeljka možemo primetiti da za prostorne sisteme u pogledu statičke i kinematičke klasifikacije važe isti zaključci kao i za ravanske linijske. Naime, kinematički prosto stabilni sistemi su statički određeni, višestruko stabilni statički neodređeni dok mehanizmi čine grupu statički preodređenih sistema. Značajnu razliku u odnosu na ravnske nosače čini podjednak broj statički nepoznatih veličina i uslova kompatibilnosti sa jedne i jednačina ravnoteže čvorova i generalisnih koordinata sistema sa druge strane. Ovakav odnos statičkih i kinematičkih veličina i jednačina prostornih sistema rezultat je svrstavanja i komponentalnih rotacija grupa krutih uglova u njihove generalisane koordinate.



## *5.2 Relativni uslovi kompatibilnosti – pojam krutog tela u prostoru*

Uslove kompatibilnosti (5.1)-(5.6) možemo zvati i apsolutni uslovi kompatibilnosti, obzirom da se iz tih jednačina za poznate deformacije štapova jednoznačno određuju apsolutna pomeranja i obrtanja čvorova sistema. Vrednosti apsolutnih pomeranja i obrtanja, odnosno vrednosti generalisanih koordinata nosača izmerene su u odnosu na fiksni globalni Decartes-ov koordinatni sistem.




Slika 4.-

Ako uklonimo iz nosača sve njegove spoljašnje elemente (oslonce i ukleštenja) onda od sistema ostaju samo njegovi unutrašnji elementi, štapovi i kruti uglovi. Postavlja se sada pitanje da li uslove kompatibilnosti vezane za štapove i krute uglove možemo izraziti preko komponentalnih pomeranja i obrtanja čvorova. Imajući na umu da su takvom sistemu, bez oslonaca i ukleštenja, slobodne sve krute translacije i rotacije, jasno je onda da nije moguće odrediti apsolutna pomeranja i obrtanja njegovih čvorova, obzirom da ne poznajemo vrednosti krutih translacija i rotacija.

Pri tome treba naglasiti da svaki sistem štapova i krutih uglova bez spoljašnjih elemenata predstavlja labilnu konfiguraciju čvorova. To znači da se čvorovi takvog sistema mogu pomerati i obrtati bez deformacije štapova. Međutim, naš zadatak jeste da deformacijski nezavisne veličine štapova ($\Delta l_{ik}$, $\Delta\varphi_{xik}$, $\tau_{yik}$, $\tau_{zik}$, $\tau_{yki}$, $\tau_{zki}$), stabilnog nosača usled zadatih spoljašnjih uticaja izrazimo preko generalisanih koordinata sistema u odsustvu njegovih spoljašnjih elemenata.

Nepoznavanje krutih translacija i rotacija eliminisaćemo usvajanjem nekog relativnog koordinatnog sistema referencije. Za definisanje prostornog relativnog trijedra potrebna su nam dva štapa sistema (*slika 4*). Lokalnu osu bilo kojeg štapa, pretpostavićemo štapa 1-2, usvojićemo za $\bar{x}$ osu relativnog trijedra. Kako čvorovi 1, 2 i 3 leže u istoj ravni za $\bar{y}$ osu usvajamo osu koja je upravna na $\bar{x}$ i leži u ravni čvorova 1, 2 i 3. $\bar{z}$ osa je upravna na



ravan $\bar{x}, \bar{y}$ i usmerena u skladu sa desnom orijentacijom trijedra.

Pri tome treba naglasiti da je osa $\bar{x}$ vezana za štap 1-2 i kreće se zajedno sa njim, dok je $\bar{y}$ osa uvek u ravni čvorova 1, 2 i 3 nezavisno od kinematike ovih čvorova. Jasno je sada da su pomeranja i obrtanja čvorova posmatranog sistema u odnosu na ovakav koordinatni sistem relativnog karaktera, pa se tako i zovu. Naš koordinatni sistem je vezan za čvor 1 (koordinatni početak) i pomera se zajedno sa njim.

U skladu sa ovakvim sistemom referencije neka komponentalna pomeranja su poznata, tj. jednaka su nuli

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \qquad v_2 = w_2 = 0 \qquad w_3 = 0$$

Imajući na umu prethodnu konstataciju odmah možemo zaključiti da je ukupan broj nepoznatih relativnih komponenti pomeranja i obrtanja jednak

$$\Sigma_{rgk} = 3k + 3m - 6$$

S druge strane, broj relativnih uslova kompatibilnosti oblika - koji se mogu ispisati za sistem jednak je

$$\Sigma_{ruk} = z_{st} + z_{g} + 2z_k + 2m$$

Ako je $\Sigma_{ruk}$ jednaka $\Sigma_{rgk}$, tj.

$$\begin{aligned} z_{st} + z_{g} + 2z_k &= 3k + m - 6 \\ \det D_1 &\neq 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

onda za takav sistem kažemo da je unutrašnje kinematički prosto stabilan. det $D_1 \neq 0$ obezbeđuje uslov da



su svi relativni uslovi kompatibilnosti međusobno linearno nezavisni.

Relaciju možemo zapisati i u obliku

$$\Sigma_{rgk} - \Sigma_{ruk} = 3k + m - (z_{st} + z_{g} + 2z_k) = 6 \tag{5.9}$$

odakle sledi da je razlika između broja relativnih generalisanih koordinata i uslova kompatibilnosti jednaka šest. Kako svaki uslov kompatibilnosti ukida po jednu relativnu generalisanu koordinatu sistema štapova i krutih uglova zaključujemo da su šest generalisanih koordinata ostale slobodne.

Ovih šest generalisanih koordinata različitih od nule mogu se ostvarivati samo u formi celine i ne predstavljaju ništa drugo do stepene slobode pomeranja krutog tela u prostoru. Stoga, definitivno možemo zaključiti da svaki sistem štapova i krutih uglova koji je unutrašnje kinematički prosto stabilan u kinematičkom pogledu predstavlja kruto telo u prostoru.Ovaj zaključak je od posebnog značaja u teoriji prostornih linijskih sistema jer omogućava njegovu dekompoziciju na kruta tela pri čemu za svako od njih možemo napisati šest nezavisnih uslova ravnoteže.

Ako je u relaciji (5.8) znak *veće* onda je takav sistem unutrašnje višestruko stabilan dok je u protivnom (znak *manje*) reč o unutrašnje labilnom sistemu. Kao i kod ravanskih linijskih nosača unutrašnje labilni prostorni sistemi mogu biti nosači ako su opšte bar kinematički prosto stabilni. Kada je reč o statički određenim prostornim



nosačima, koji ne predstavljaju ništa drugo do skup zglavkasto vezanih krutih tela, jasno je da su takvi sistemi unutrašnje kinematički labilni.

### *5.3 Spoljašnja kinematička stabilnost*

U sistemu sastavljenom od $z_t$ krutih tela egzistira $6z_t$ krutih stepeni slobode pomeranja, odnosno $6z_t$ generalisanih koordinata krutih tela u prostoru. Pretpostavimo sada da su sva kruta tela međusobno vezana sfernim zglobovima i da u svakom čvoru u kome je zglavkasto vezano *n* krutih tela postoji *n-1* zglobova.

Kako svaki zglob ukida tri relativne krute translacije iz uslova zajedničkog pomeranja čvorne tačke zgloba i kako svaki oslonac i ukleštenje eliminišu po jednu krutu translaciju i rotaciju, za sistem možemo reći da je stabilan ako su sprečena sva kruta pomeranja njegovih krutih tela, odnosno

$$z_o + z_k + 3z_z = 6z_t \tag{5.10}$$

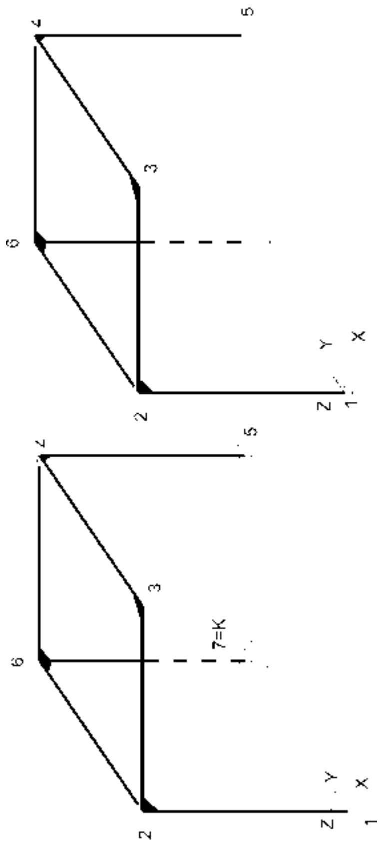
Znak jednakosti u relaciji obezbeđuje spoljašnju kinematičku prostu stabilnost dok veće i manje beleže višestruku spoljašnju stabilnost i labilnost, respektivno. Spoljašnje kinematički labilni sistemi ne mogu biti nosači bez obzira na njihovu opštu prostu ili višestruku stabilnost. Kod takvih sistema nema dovoljno spoljašnjih elemenata koji bi ukinuli sva njihova kruta pomeranja pa se sva ili pojedina njihova kruta tela pomeraju bez deformacije štapova, a što je odlika mehanizma. Višak unutrašnjih elemenata čiji je broj jednak razlici $6z_t - (z_o + z_u + 3z_z)$ čini pojedina kruta tela sistema unutrašnje višestruko stabilnim. Saglasno tome možemo izvršiti redefiniciju krutog tela u prostoru kao sistem štapova i krutih uglova koji su ne samo prosto već i višestruko unutrašnje stabilni.

Zadovoljena relacija ne garantuje uvek i stabilan sistem, odnosno nosač. Naime, dovoljan broj spoljašnjih elemenata (oslonaca i ukleštenja) nije i dovoljan uslov za stabilnost nosača. Oslonci i ukleštenja moraju biti i pravilno raspoređeni kako bi se sprečila kruta pomeranja svih krutih tela sistema. Višak od potrebnog broja spoljašnjih elemenata na jednom krutom telu, saglasno izrazu , povlači manjak potrebnog broja spoljašnjih elemenata na nekom ili nekim krutim telima što ih odmah čini labilnim delovima sistema, odnosno mehanizmom.

Na *slici 5* prikazan je prostorni sistem sastavljen od sedam štapova, pet krutih uglova, sedam oslonaca i tri uklještenja. Štapovi 6-2 i 6-4 sfernim zglbovima vezani su preko čvorova 2 i 4 sa ostatkom nosača.

Torzione uslovi kompatibilnosti (5.2) možemo ispisati samo za štapove 2-3 i 3-4 obzirom da su svi preostali štapovi sistema štapovi tipa *g* dok je štap 1-2 u čvoru 1 torziono uklješten. Kao rezultat toga $z_{ts} = 2$. U statičkom pogledu ovaj zaključak izražava činjenicu da su momenti torzije štapa nepoznati samo u štapovima 2-3 i 3-4 dok su u preostalim štapovima poznati iz njihovih ravnoteža uključujući i štap 1-2 za poznatu vrednost reakcije uklje-





Slika 5



štenja u čvoru 1 oko *Z* ose. Uslov kompatibilnosti (5.1) pridružićemo svim štapovima sistema pa je $z_{as} = z_s$. Na osnovu izraza (4.6), odnosno (5.7) zaključujemo da je

$$z_o + z_u + z_a + z_t + 2z_k = 7+3+7+2+2\times5 = 29$$
$$3K + m = 3\times7+4 = 25 \qquad n = 29-25 = 4$$

posmatrani nosač četiri puta kinematički višestruko stabilan, odnosno statički neodređen.

Uvažavajući kritrerijum unutrašnje kinematičke stabilnosti (5.8), odnosno

$$z_t + z_a + 2z_k = 2+7+2\times5 = 3\times7+4-6 = 3K+m-6$$

sledi da je nosač sa *slike 5*. a unutrašnje kinematički prosto stabilan odakle zaključujemo da u kinematičkom pogledu on predstavlja jedno kruto telo. Saglasno tome kriterijum spoljašnje kinematičke stabilnosti (5.10)

$$n_s = z_o + z_u - 6z_t = 7+3-6\times1 = 4 \qquad (z_z = 0)$$

navodi na zaključak da je naš sistem četiri puta spoljašnje višestruko stabilan, odnosno statički neodređen.

S druge strane lako se da uočiti da štapovi 1-2, 2-3, 3-4 i 4-5 zajedno sa krutim uglovima u čvorovima 2, 3 i 4 takođe zadovoljavaju kriterijum unutrašnje kinematičke proste stabilnosti što znači da oni čine jedno kruto telo. Isti zaključak možemo doneti i u pogledu štapova 6-2, 6-4 i 6-7 koji su kruto vezani u čvoru 6 odakle sledi da oni definišu drugo kruto telo. Jasno je onda da je celokupni nosač posmatran kao jedno složeno kruto telo sastavljen od dva koja su međusobno zglavkasto povezana u čvorovima 2 i 4. Bez obzira na broj krutih tela kriterijum (5.10) dovodi do istih zaključaka, tj.,



$$n_s = z_o + z_u + 3z_z - 6z_t = 7+3+3\times2-6\times2 = 4 \qquad (z_z = 2,\ z_t = 2)$$

Prethodne analize upućuju na to da se prosto stabilan, odnosno statički određen sistem iz datog nosača može formirati uklanjanjem isključivo njegovih spoljašnjih elemenata (oslonaca i uklještenja). Tako na primer uklanjanjem oba oslonca u čvoru 5, jednog od oslonaca u čvoru 7 (oslonac u pravcu globalne *X* ose) i uklještenja oko *X* ose u čvoru 1 formira se statički određen nosač, *slika 5.b*. Pri tome je značajno napomenuti i sledeće. Bez obzira na broj spoljašnjih elemenata na delu nosača 1-2-3-4-5 (na primer višestruko stabilan sistem sam za sebe) na preostalom delu koji smo naznačili kao drugo kruto telo potreban je bar jedan spoljašnji element u cilju eliminacije njegove krute rotacije oko trenutne ose koja prolazi kroz čvorove 2 i 4. Drugim rečima nedostatak spoljašnjih elemenata na tom delu čini taj deo nestabilnim bez obzira na ostatak sistema.

## 6. STATIČKI ODREĐENI PROSTORNI SISTEMI

### *6.1 Sistemi sastavljeni od jednog krutog tela*

Sistem koji je sastavljan samo od jednog krutog tela ne poseduje zglavkaste veze, odnosno zglobove, u smislu povezivanja više krutih tela. Da bi jedan takav sistem bio i spoljašnje kinematički prosto stabilan potrebno i dovoljno je da je broj spoljašnjih elemenata u skladu sa izrazom , jednak šest, odnosno

$$z_o + z_u = 6$$

Šest spoljašnjih elemenata eliminiše sve krute stepene slobode pomeranja takvog sistema.

Iz kinematike slobodnog krutog tela (telo bez spoljašnjih veza) je poznato da je njegovo kretanje određeno pomoću šest nezavisnih generalisanih koordinata koje se mogu grupisati u dva vektora. Prvi vektor predstavlja translaciju krutog tela koja se izražava vektorom pomeranja referentne tačke, dok drugi vektor sadrži sferno kretanje ili rotaciju oko referentne (nepokretne) tačke.

Izrečeni stav možemo zapisati u obliku

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{r_A} + \delta\vec{\theta} \times \delta\vec{\rho} \tag{6.1}$$

ili

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r_A} + tg\frac{\theta}{2}\vec{s_0} \times (\vec{\rho} + \vec{\rho'}) \tag{6.2}$$

gde je $\delta\vec{r}$ virtualno a $\Delta\vec{r}$ konačno pomeranje proizvoljne tačke krutog tela sa vektorom položaja $\vec{\rho}$ u odnosu na referentnu tačku A. Vektor $\vec{\rho'}$ u jednačini (6.2) predstavlja vektor položaja posmatrane tačke posle izvršene konačne rotacije oko referentne tačke A, dok je $\vec{s_0}$ jedinični vektor ose ekvivalentnog obrtanja. $\theta$ predstavlja ugao obrtanja u ravni sa normalom $\vec{s_0}$ tako da je $tg\frac{\theta}{2}\vec{s_0}$ vektor konačne rotacije krutog tela za razliku od vektora virtuelne rotacije $\delta\vec{\theta}$ oko iste tačke A. $\delta\vec{r_A}$ i $\Delta\vec{r_A}$ su vektori virtualne i konačne translacije tela, respektivno.



Naš posmatrani sistem bez spoljašnjih elemenata u kinematičkom pogledu definiše slobodno kruto telo čija su pomeranja izražena jednačinama (6.1) i (6.2). Dodavanjem potrebnog broja spoljašnjih elemenata slobodno kruto telo prevodimo u stabilan sistem, odnosno nosač, samo ako su eliminisani svi njegovi stepeni slobode pomeranja kao krutog tela. Drugim rečima, stabilnom sistemu ne mogu se dopustiti ni virtualna beskonačno mala kruta pomeranja, odakle sledi da je

$$\delta\vec{r_A} = 0 \quad i \quad \delta\vec{\theta} = 0 \tag{6.3}$$

Vektorske relacije (6.3) u odnosu na globalni Dekartov koordinatni sistem nosača izrazićemo u skalarnom obliku kao

$$\begin{aligned} \delta X_A &= \delta Y_A = \delta Z_A = 0 \\ \delta\theta_X &= \delta\theta_Y = \delta\theta_Z = 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

gde je

$$\delta\vec{r_A} = [\delta X_A, \delta Y_A, \delta Z_A] \qquad \delta\vec{\theta} = [\delta\theta_X, \delta\theta_Y, \delta\theta_Z]$$

Na osnovu izraza (6.1), (6.3) i (6.4) lako možemo zaključiti da stepeni slobode pomeranja krutog tela predstavljaju translacije $\delta X$, $\delta Y$ *i* $\delta Z$ u pravcima koordinatnih osa kao i rotacije $\delta\theta_X$, $\delta\theta_Y$ *i* $\delta\theta_Z$ oko koordinatnih osa.

Imajući na umu da se eliminacija i krutih rotacija sistema štapova i krutih uglova može izvršiti osloncima dok se ukleštenjima ne mogu sprečavati njegove krute

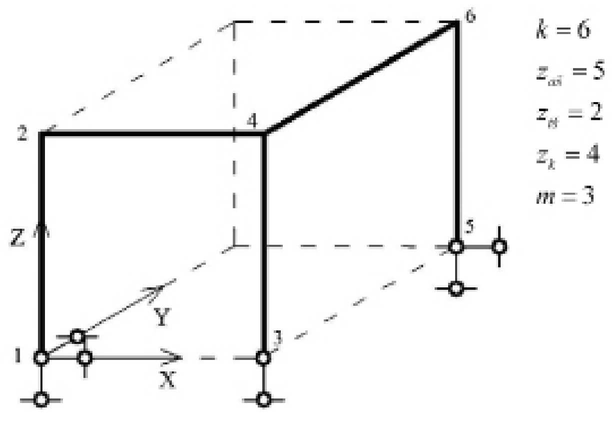


translacije, jasno je onda da tri nezavisne krute translacije i tri nezavisne krute rotacije definišu minimalan broj potrebnih oslonaca i maksimalan broj dopuštenih ukleštenja. Saglasno ovom zaključku moguće su sledeće kombinacije spoljašnjih elemenata takvog nosača

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $z_o$ | 6 | 5 | 4 | 3 |
| $z_u$ | 0 | 1 | 2 | 3 |

Na *slici 6* je prikazana njegova varijacija samo sa osloncima kao spoljašnjim elementima.

Lako se može proveriti da je ovakav sistem štapova i krutih uglova, saglasno izrazu , unutrašnje kinematički




Slika 6.-



prosto stabilan, tj. $5 + 2 + 2 \times 4 = 3 \times 6 - 6$ odakle sledi da u kinematičkom pogledu definiše kruto telo.

Tri oslonca u čvoru 1 čiji su pravci oslanjanja usmereni u pravcu globalnih osa sistema ukidaju sve tri njegove krute translacije. Dodavanjem vertikalnog oslonca (u pravcu globalne Z ose) u čvoru 5 ukidaju se i krute rotacije oko globalne X i Y ose. Oslonac u pravcu globalne X ose u čvoru 5 eliminiše i krutu rotaciju oko globalne Z ose.

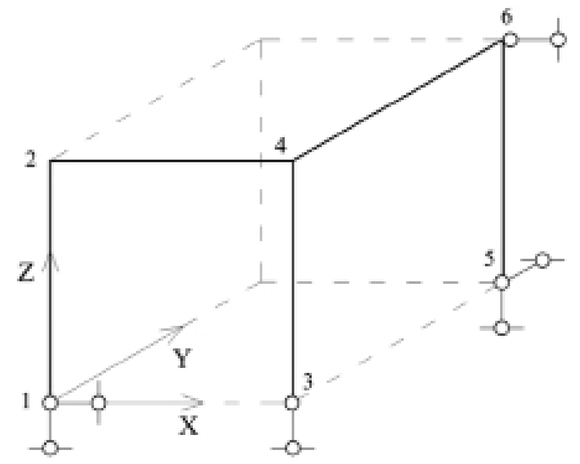
Tri oslonca u jednom čvoru sa nekolinearnim pravcima oslanjanja koji ne leže u istoj ravni čine taj čvor nepomerljivim. Jasno je onda, na osnovu izraza (6.1) i (6.2), da u tom slučaju sistem štapova i krutih uglova posmatran kao kruto telo može da se pomera samo rotacijom oko nepokretnog čvora. Takođe je jasno da su te rotacije dopustive u svim mogućim, beskonačno mnogo, ravnima koje sadrže nepokretan čvor. Za slučaj sistema sa *slike 6* još dva oslonca u čvoru 5 čine i taj čvor nepomerljivim. Naime, treći oslonac u pravcu Y ose u čvoru 5 nije potreban iz prostog razloga što nije moguće kruto pomeranje tog čvora u Y pravcu. Dopustivost takvog pomeranja narušilo bi osnovni postulat krutog tela o nepromenljivosti rastojanja između dve ma koje njegove tačke, u uvom slučaju između čvorova 1 i 5. Dve nepokretne tačke na krutom telu od svih mogućih rotacija oko nepokretne tačke dopuštaju samo onu koja se odvija u ravni čija je normala na pravcu nepokretnih tačaka. Odnosno, samo rotaciju oko ose koja prolazi kroz nepokretne tačke. Konačno, dodavanjem vertikalnog oslonca u čvoru 3 sprečava se rotacija oko ose na pravcu čvorova 1-5 čime sistem postaje prosto stabilan nosač. Rotacija sistema oko ose 1-5 može se ukinuti dodavanjem samo jednog oslonca u ravni X-Y u čvorovima 2 ili 6 ili proizvoljnog oslonca u čvoru 4 uz uslov da njegov pravac oslanjanja nije kolinearan sa pravcem ose obrtanja 1-5.

Na osnovu ovoga primera možemo zaključiti da za slučaj sistema koji je sastavljen od jednog krutog tela i ima samo oslonce od spoljašnjih elemenata, oslonce treba rasporediti bar u tri nekolinearne čvorne tačke. Ovaj zaključak je saglasan sa činjenicom da je kruto telo u prostoru nepomerljivo ako su nepomerljive bar tri njegove nekolinearne tačke.

Na *slici 7* prikazan je isti sistem štapova i krutih uglova pri čemu u nijednom čvoru ne postoje tri oslonca koji bi učinili taj čvor nepomerljivim. Dva oslonca u čvoru 1 i oslonac u Y pravcu u čvoru 5 sprečavaju virtuelno translatorno pomeranje posmatranog sistema kao krutog tela. Oslonac u Z pravcu u čvoru 5 ukida krute rotacije oko globalne X i Y ose. Dodavanjem vertikalnog oslonca u čvoru 3, čvor 3 postaje nepokretna tačka oko koje sistem može da rotira pri čemu trenutna osa rotacije prolazi kroz 3 i ima pravac globalne Z ose. Na kraju, dodavanjem oslonca u X pravcu u čvoru 6 eliminiše se i ova rotacija što navodi na zaključak da je sistem sa *slike 7* nepomerljiv, odnosno prosto stabilan nosač.

Uklanjanjem vertikalnog oslonca u čvoru 3, nosač sa *slika 7* postaje prinudni mehanizam, odnosno mehanizam



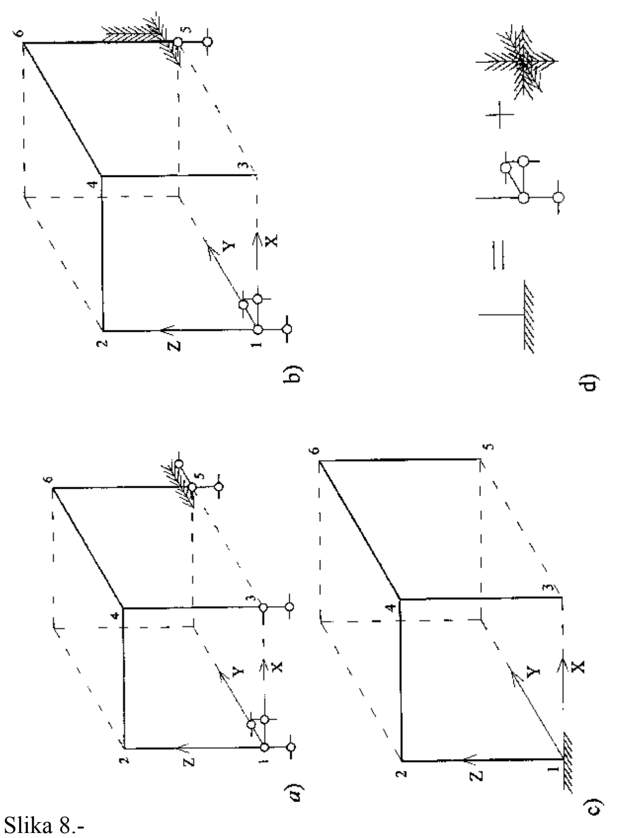



Slika 7.-

sa jednim stepenom slobode pomeranja. Jasno je da je stepen slobode, tj. generalisana koordinata takvog sistema virtuelna rotacija oko trenutne ose. Međutim, u ovom kao i sličnim slučajevima, problem nalaženja nepokretne tačke i trenutne ose rotacije nije više trivijalan i zahteva korišćenje izraza (6.1) uz poštovanje graničnih uslova na mestu oslonačkih veza.

Broj oslonaca u nosaču može se smanjiti u odnosu na 6 uvođenjem istog broja uklještenja. Pod uklještenjem kao spoljašnjim elementom nosača podrazumevamo






Slika 8.-



uklješten presek štapa koji sprečava njegovo obrtanje samo u jednoj globalnoj, lokalnoj ili bilo kojoj drugoj ravni štapa. U kinematičkom pogledu nosača koji posmatramo kao kruto telo u prostoru svako uklještenje ukida po jednu virtuelnu krutu rotaciju.

Za razliku od sistema čiji su spoljšnji elementi isključivo oslonci, nosači sa osloncima i uklještenjima dopuštaju mogućnost da svi spoljašnji elementi budu skoncentrisani samo u dva (*slika 8a,b*) a u graničnom slučaju i u jednom čvoru (*slika 8c*).

Za sistem sa 5 oslonaca (*slika 8a*) dovoljno je samo jedno uklještenje koje sprečava obrtanje uklještenog preseka u globalnoj XZ ili YZ (ili ma kojoj drugoj izuzev globalnoj XY) ravni za formiranje prosto stabilnog nosača. Kako trenutna osa rotacije leži u XY ravni i prolazi kroz čvorove 1 i 5 eliminacija virtuelne krute rotacije postiže se ukidanjem ma koje njene vektorske komponente u ravni XY koja nije kolinearna sa trenutnom osom rotacije. Sistem sa 4 oslonca (*slika 8b*) dopušta dve nezavisne virtuelne krute rotacije čije trenutne ose prolaze kroz čvor 1 i imaju pravac globalne Z ose i pravac čvorova 1 i 5. Dva uklještenja u čvoru 5 su dovoljna da ukinu obe pomenute rotacije i prevedu sistem u prosto stabilan nosač. Jedno uklještenje ima isti karakter kao i u prethodnom slučaju dok drugo sprečava obrtanje štapa oko svoje ose u čvoru 5. Konačno, slučaj nosača sa *slike 7c* poznat je i kao prostorna konzola.

### *6.2 Sistemi sastavljeni od dva kruta tela*

Sistemi koji su formirani zglavkastim spajanjem dva kruta tela samo u jednom čvoru imaju jedan zglob krutih tela, odakle sledi da je njihova spoljašnja kinematička prosta stabilnost obezbeđena ako je ukupan broj oslonaca i uklještenja jednak

$$z_o + z_u = 6 \times 2 \times 3 - 1 = 9$$

Uvažavajući analize iz prethodnoh odeljka nije teško pokazati da su moguće sledeće kombinacije broja oslonaca i uklještenja

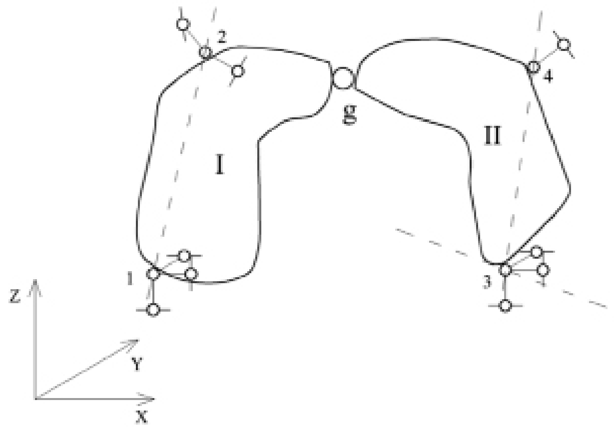
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_o$ | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| $z_u$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

pri čemu su prvi i poslednji slučaj granični sa maksimalnim brojem oslonaca i maksimalnim brojem uklještenja.

Minimalan broj oslonačkih tačaka za slučaj varijante sistema samo sa osloncima je četiri, pri čemu dve oslonačke tačke pripadaju prvom a dve drugom telu. Na jednom telu broj oslonaca je pet a na drugom četiri, ili šest na jednom i tri na drugom. Analizirajmo najpre prvi pomenuti slučaj.

Ono kruto telo kome je pridruženo pet oslonaca ima jasno definisanu nepokretnu tačku obzirom da je u jednoj oslonačkoj tački broj oslonaca tri a u drugoj dva. Izolovano posmatrano, takvo telo u kinematičkom pogledu predstavlja prinudni mehanizam sa slobodnom krutom rota-






Slika 9.-

cijom koja prolazi kroz oslonačke čvorove 1 i 2. Drugo kruto telo ima četiri oslonca koja mogu biti raspoređena: tri u jednoj i jedan u drugoj oslonačkoj tački ili po dva oslonca u obe oslonačke tačke. I u jednom i u drugom slučaju ovakvo telo samo za sebe predstavlja mehanizam sa dva parametra pomeranja koji nisu ništa drugo do nezavisne rotacije oko trenutnih osa. U prvom slučaju telo II ima nepokretnu tačku (čvor 3) što ima za posledicu da trenutne ose prolaze kroz čvor 3 i imaju pravac 3-4, odnosno pravac oslonca u čvoru 4 (*slika* 9). Kako obe trenutne ose prolaze kroz čvor 3 jasno je da njiho-



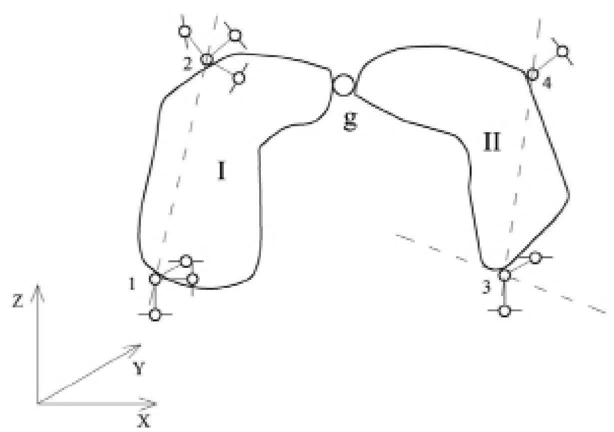
vi pravci formiraju jednu ravan. Stoga je značajno istaći da svaka prava koja prolazi kroz čvor 3 i leži u toj ravni takođe predstavlja trenutni osu rotacije tela II. Međutim sve takve virtualne krute rotacije kojih ima beskonačno mnogo nisu ništa drugo do linearna kombinacija prve dve (ma koje dve nekolinearne) koje su linearno neyavisne. Varijantno rešenje sa po dva oslonca takođe za jednu trenutnu osu ima pravac 3-4 dok se druga nalazi u preseku ravni koje formiraju oslonački pravci u čvorovima 3 i 4.

Rotacije tela I i II oko njihovih trenutnih osa su moguće samo onda ako obezbeđuju isto pomeranje zajedničke čvorne tačke, odnosno zgloba *g*. Ovaj uslov je ispunjen ako su ravni koje formiraju trenutne ose tela i zglob *g* međusobno paralelne. U tom slučaju sistema sa *slika 9* nalazi se u kritičnoj konfiguraciji, dok za sve druge konfiguracije predstavlja prosto stabilan nosač.

Šest oslonaca na jednom telu sa dve oslonačke tačke čini obe tačke nepokretne kroz koje ujedno prolazi i moguća trenutna osa rotacije (*slika 10*). Za tri oslonca na drugom telu koji su raspoređeni u dve oslonačke tačke pretpostavljamo da leže na nekolinearnim pravcima pri čemu se ti pravci ne seku u istoj tački. Ako se oslonački pravci sva tri oslonca seku u jednoj tački onda je u kinematičkom pogledu telo II identično telu sa jednom oslonačkom nepokretnom tačkom koja može biti realnog (pripada telu kao čvorna tačka) ili imaginarnog (ne pripada telu) karaktera. Za slučaj tri oslonca u istom čvoru, telo II ima tri nezavisne virtuelne krute rotacije čije trenu-



tne ose prolaze kroz nepokretni čvor. Takav sistem ulazi u kritičnu konfiguraciju ako je ravan trenutne ose rotacije tela I i zloba *g* paralelna sa ravni koja nastaje od beskonačno mnogo mogućih osa rotacije tela II i zgloba *g*.




Slika 10.-

Ako se oslonački pravci ne seku u jednoj tački telo II takođe ima beskonačno mnogo rotacija od kojih su samo tri međusobno linearno nezavisne. Prve dve leže u ravni koju definišu pravci čvorova 3-4 i oslonca u čvoru 4. Trenutna osa treće nezavisne virtualne rotacije leži u ravni oslonačkih pravaca čvora 3 i prolazi kroz tačku prodora oslonačkog pravca čvora 4 i te ravni. Kao i u prethodnim slučajevima i ovakav sistem ulazi u kritičnu konfiguracju na potpuno isti način. Za sitem koji ima šest oslonaca raspoređenih u tri nekolinearne tačke na telu I i tri oslonca u jednoj tački na telu II možemo reći da je uvek nestabilan. U tom slučaju telo I je stabilno samo za sebe što ima za posledicu da se u odsustvu spoljašnjih uticaja nijedan njegov čvor ne pomera uključujući i zglob *g*. Kao rezultat toga toga telo II ima dve nepokretne tačke (oslonački čvor i zglob *g*) čiji se pravac poklapa sa njegovom trenutnom osom oko koje može slobodno da rotira nezavisno od spoljašnjih uticaja. Drugim rečima telo I je uvek stabilno doke je telo II uvek prinudni mehanizam pa stoga celokupni sistem ne može da bude nosač. Devet oslonaca sa pet i više oslonačkih tačaka na sistemu pri čemu je minimalan broj oslonačkih čvorova na jednom telu dva predstavlja uvek stabilno rešenje. Varijante sa ukliještenjima definišu stabilne sisteme sa manjim brojem čvorova u kojima su raspoređeni spoljašnji elementi koji u graničnom slučaju može da bude dva. Takav sistem na jednom telu ima tri oslonca i tri ukliještenja dok na drugom ima dva oslonca i jedno ukliještenje.

Reakcije oslonaca i ukliještenja prostornog sistema sastavljenog od dva tela određujemo njegovom dekompozicijom ispisujući po šest uslova ravnoteže za svako telo ponaosob. Takvih dvanaest jednačina koje su međusbno linearno nezavisne su potrebne i dovoljne da odrede devet nepoznatih reakcija spoljašnjih elemenata kao i tri



nepoznate reakcije veza u sfernom zglobu *g*. Presečne sile u svim presecima svih štapova moge se odrediti na već poznati način u skladu sa teorijom prostornog štapa.

Na osnovu prethodnih analiza na kraju želimo da istaknemo činjenicu da nije moguće formiranje prostornog nosača od jednog ili dva kruta tela koji za spoljašnje elemente ima samo oslonce raspoređenih u dva oslonačka čvora. Drugim rečima nije moguća prostorna generalizacija ravankih nosača sistema proste grede i luka na tri zgloba.

## 7. LITERATURA


[1] Gligor Radenković, *Statika linijskih nosača u ravni*, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd, 2007

[2] Natalija Naerlović-Veljković, *Mehanika II*, Naučna knjiga, Beograd,1986

[3] Anton Bilimović, *Racionalna mehanika*, Naučna knjiga, Beograd,1951




**Prof. dr Nebojša Đuranović, dipl.ing.građ.**[1]

# ANALIZA TEHNIČKE REGULATIVE U OBLASTI ISPITIVANJA KONSTRUKCIJA

0352-2733,42 (2009),,p. 55-103 UDK: 006.44 : 624.04
I DEO / PREGLEDNI NAUČNI ČLANAK


### Rezime

Cilj ovog teksta je da sistematično prikaže i analizira trenutno stanje regulative po kojoj se vrše ispitivanja konstrukcija u našoj zemlji i bliskom okruženju. Rad, sem toga, daje i upoređenja naših sa vodećim propisima iz ove oblasti u Velikoj Britaniji i SAD.

Na ovom mjestu neće se obrađivati tehnička regulativa koja se tiče defektoskopije konstrukcija, tj. procedure i postupci ispitivanja stanja materijala u konstrukciji.

Člankom je napravljen pokušaj da se izdvoje glavne karakteristike postupaka, bez obzira da li se traže (ili preporučuju) samo u jednom ili u više citiranih dokumenta iz ove oblasti.


**Ključne riječi:** ispitivanje konstrukcija, procedure, postupci, oprema, tehnička regulativa

[1] Građevinski fakultet u Podgorici
Rad primljen septembra 2009.



# ANALYSIS OF THE STANDARDS IN THE FIELD OF STRUCTURAL TESTING AND INVESTIGATION


### Abstract

This article aims to impartially review and analyze current state of the technical standards and recommendations used for testing and experimental investigation of the civil engineering structures, in this and neighboring countries. Also, it compares domestic with leading British and American standards from this field.

This paper does not treat technical standards used for the examination of the constituent materials of the structures, including the state of the material in the structure itself.

The paper aims to point out the main features of the relevant testing procedures, regardless weather they have been prescribed by one or more standards from this area.


**Key words:** structural testing, procedures, practice, instrumentation, technical standards

## 1. UVOD

Ispitivanje novih i postojećih konstrukcija u našoj i zemljama neposrednog okruženja (bivša SFRJ) se vrši