

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Дејан Д. Васић

**МОДЕЛОВАЊЕ ЕТВЕШЕВОГ ТЕНЗОРА  
ПРИМЈЕНОМ НОРМАЛНОГ ПОЉА  
ПОТЕНЦИЈАЛА ТЕЖЕ И ДИГИТАЛНИХ  
МОДЕЛА ТЕРЕНА**

докторска дисертација

Београд, 2023.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Dejan D. Vasić

**MODELLING OF EÖTVÖS TENSOR BY USING  
NORMAL GRAVITY FIELD AND DIGITAL  
TERRAIN MODELS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2023.

## ИНФОРМАЦИЈЕ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ

### **Ментор:**

Др Олег Одаловић, дипл. инж. геод, ванредни професор  
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

### **Чланови комисије:**

Др Драган Благојевић, дипл. инж. геод, редовни професор  
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Др Сања Грекуловић, дипл. инж. геод, доцент  
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Др Владимир Булатовић, дипл. инж. геод, редовни професор  
Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду

Датум одбране: \_\_\_\_\_, Београд.

*Посвећено успомени на моју тетку,*

*Анђелку Васић*

*(1962 – 2016)*



## ЗАХВАЛНИЦА

Израда ове дисертације не би била могућа без помоћи и подршке одређеног броја људи, којима овом приликом желим да се захвалим.

Прије свега, захваљујем се свом ментору, проф. др Олегу Одаловићу, за несебичну помоћ, стрпљење, подијељено знање, вођење кроз научно истраживање и израду дисертације, те пажљив преглед рукописа.

Захвалност дугујем и неколицини професора Грађевинског факултета у Београду и Архитектонско-грађевинско-геодетског факултета у Бањој Луци, од којих сам током година имао прилике да учим. Прије свега то су проф. др Драган Благојевић, од кога сам о геодезији научио много, и др Раденко И. Вишњић, од кога сам учио о геодезији али и о животу, и без чијег пресудног утицаја вјероватно не бих ни кренуо овим путем. Захвалан сам и проф. др Зорици Цветковић и проф. др Луки Поповићу са Астрономске опсерваторије у Београду, са којима сам такође имао прилике да сарађујем и да од њих учим.

Руководству Студијског програма Геодезија и Архитектонско-грађевинско-геодетског факултета, као и радним колегама, захваљујем се за разумијевање и свијест о времену које је било потребно уложити у писање ове дисертације.

Професору Лајошу Велћешију са Техничко-економског универзитета у Будимпешти, захваљујем се за предусретљивост и уступљене податке за практични дио истраживања.

Колеги Мирославу Вујасиновићу, ма инж. геод, захваљујем се за помоћ у визуелизацији геопросторних података.

На крају, највећу захвалност дугујем породици, родитељима и сестри, за вишегодишњу подршку, стрпљење и разумијевање.

# МОДЕЛОВАЊЕ ЕТВЕШЕВОГ ТЕНЗОРА ПРИМЈЕНОМ НОРМАЛНОГ ПОЉА ПОТЕНЦИЈАЛА ТЕЖЕ И ДИГИТАЛНИХ МОДЕЛА ТЕРЕНА

## Сажетак

Предмет овог рада је истраживање могућности моделовања градијената убрзања теже Земље, елемената тзв. Етвешевог тензора. Анализирани концепт подразумијева моделовање које се врши без коришћења било каквих резултата гравиметријских или сличних мјерења. Умјесто тога, модел се искључиво ослања на директно моделовање утицаја маса тијела Земље. Масе су подијелене на три дијела, масу нормалне Земље, топографске масе и масе између геоида и елипсоида. Утицај масе нормалне Земље срачунат је на основу нормалног поља и других извода нормалног потенцијала теже, док су друга два сегмента моделована њиховом дискретизацијом и апроксимацијом помоћу призма као правилних геометријских тијела. У ту сврху коришћени су дигитални модели терена и званични модел квазигеоида, као и глобални геопотенцијални модели.

Практично истраживање спроведено је за територију Србије. У директној провјери модела, срачунати градијенти су упоређени са резултатима мјерења торзионом вагом у полигону код Новог Сада. За стандардно одступање градијената добијене су вриједности од 15 E – 20 E, односно 1.5  $\mu\text{Gal}/\text{m}$  - 2  $\mu\text{Gal}/\text{m}$ . Вертикални градијенти су тестирани на основу мјерења широм Србије, те је утврђено стандардно одступање од око 230 E. За све градијенте срачунате су и вриједности из глобалног геопотенцијалног модела, те је утврђено да на изразито равничарском терену имају исту или бољу сагласност са мјерењима у односу на вриједности из модела.

Модел је тестиран и посредно, у оквиру гравиметријског полигона у Бору, рачунањем компоненти одступања вертикала из моделованих градијената. Ове вриједности упоређене су са компонентама оцијењеним из званичног модела квазигеоида. Установљена је врло добра сагласност оцијењених компоненти са познатим, уз стандардно одступање мање од једне лучне секунде по компоненти. На основу ових резултата извшена је оцјена тачности градијената, те су за њихова стандардна одступања добијене вриједности од 30 E – 40 E.

Добијени резултати су показали да је примјеном предложеног концепта могуће остварити тачност моделовања градијената на нивоу тачности мјерења, или за један ред величине мању. На крају су дата додатна запажања о оствареној тачности и потенцијалним изворима грешака, као и препоруке за даља истраживања и унапређење модела.

**Кључне ријечи:** поље теже Земље, потенцијал убрзања теже, градијенти, Етвешев тензор, градиометрија, дигитални модели терена, одступања вертикала

Научна област: Геодезија

Ужа научна област: Теоријска и физичка геодезија

УДК број:

# MODELLING OF EÖTVÖS TENSOR BY USING NORMAL GRAVITY FIELD AND DIGITAL TERRAIN MODELS

## Abstract

The subject of this thesis is research into the possibility of modeling Earth's gravity gradients, the elements of the so-called of the Eötvös tensor. The analyzed concept implies modeling that is performed without using any results of gravimetric or similar measurements. Instead, the model relies exclusively on forward modeling of the effects of the Earth's masses. The masses are divided into three parts, the mass of the normal Earth, the topographic masses and the masses between the geoid and the ellipsoid. The influence of the mass of the normal Earth was calculated on the basis of the normal gravity field and second derivatives of the normal gravity potential, while the other two segments were modeled by their discretization and approximation using prisms as regular geometric bodies. For this purpose, digital terrain models and the official quasigeoid model, as well as global geopotential models, were used.

Practical research was conducted for the territory of Serbia. In the direct verification of the model, the calculated gradients were compared with the results of torsion balance measurements in the polygon near Novi Sad. For the standard deviation of the gradients, values of 15 E - 20 E were obtained, that is,  $1.5 \mu\text{Gal/m} - 2 \mu\text{Gal/m}$ . Vertical gravity gradients were tested based on measurements across Serbia, and a standard deviation of about 230 E was determined. For all gradients, values from the global geopotential model were also calculated, and it was determined that on extremely flat terrain they have the same or better agreement with measurements compared to modeled values.

The model was also tested indirectly, within the gravimetric polygon in Bor, by calculating the vertical deflections components based on modeled gradients. These values were compared with the components estimated from the official quasigeoid model. A very good agreement of the evaluated components with the known ones was established, with a standard deviation of less than one arcsecond per component. Based on these results, the accuracy of the gradients was evaluated, and values of 30 E - 40 E were obtained for their standard deviations.

The obtained results showed that by applying the proposed concept, it is possible to achieve the accuracy of modeling gradients at the level of measurement accuracy, or one order of magnitude lower. At the end, additional observations are given about the achieved accuracy and potential sources of errors, as well as recommendations for further research and improvement of the model.

**Key words:** Earth's gravity field, gravity acceleration potential, gradients, Eötvös tensor, gradiometry, digital terrain models, vertical deflections

Scientific field: Geodesy

Scientific subfield: Theoretical and physical geodesy

UDC number:

## СПИСАК СКРАЋЕНИЦА

ACVGG	Arms Control Verification Gravity Gradiometer
CHAMP	Challenging Minisatellite Payload
eFTG	Enhanced Full-Tensor Gradiometer
EGM2008	Earth Gravitational Model 2008
EPF	Eötvös-Pekar-Fekete (experiment)
ESA	European Space Agency
FFT	Fast Fourier Transform
FGG	Floated Gravity Gradiometer
FTG	Full-Tensor Gravity Gradiometer
GBVP	Geodetic Boundary Value Problem
GGBVP	Geodetic-Geodynamic Boundary Value Problem
GGI	Gravity Gradient Instrument
GLQ	Gauss-Legendre Quadrature
GOCE	Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer
GPS	Global Positioning System
GRACE	Gravity Recovery and Climate Experiment
GRACE-FO	GRACE Follow-On
GRF	Gradiometer Reference Frame
GRS80	Geodetic Reference System 1980
HL	High-Low (constellation)
IUGG	International Union of Geodesy and Geophysics
LL	Low-Low (constellation)
LOO	Leave One Out
LSC	Least Squares Collocation
NASA	National Aeronautics and Space Administration

ppm	Part Per Million
RMGG	Resonant Modulating Gravity Gradiometer
RRGG	Resonant Rotating Gravity Gradiometer
SRTM	Shuttle Radar Topography Mission
SST	Satellite-to-Satellite Tracking
ВГИ	Војногеографски институт
ГГМ	Глобални Геопотенцијални Модели
ГНСС	Глобални Навигациони Сателитски Системи
ДМТ	Дигитални Модели Терена
ЗПГ	Закон Преноса Грешака
МНК	Метод Најмањих Квадрата
ФПЗ	Физичка Површ Земље

## СПИСАК СЛИКА

Слика 2.1. Вектор силе привлачења.....	9
Слика 2.2. Сила привлачења као брзина промјене потенцијала.....	13
Слика 2.3. Потенцијал и убрзање силе привлачења као функције растојања .....	14
Слика 2.4. Привлачење масе пуног тијела .....	14
Слика 2.5. Привлачење масе пуне лопте .....	16
Слика 2.6. Границе интеграције за тачку изван лопте.....	18
Слика 2.7. Границе интеграције за тачку унутар лопте .....	19
Слика 2.8. Привлачење масе призме .....	20
Слика 2.9. Флукс векторског поља кроз површ .....	22
Слика 3.1. Убрзање привлачне силе и теже Земље .....	26
Слика 3.2. Однос ниво површи и вектора убрзања теже .....	29
Слика 3.3. Ниво површи и вертикале.....	30
Слика 3.4. Астрономске координате .....	32
Слика 3.5. Елементи елипсе .....	33
Слика 3.6. Геодетске координате.....	34
Слика 3.7. Нивоски елипсоид и нормално поље теже .....	37
Слика 3.8. Однос геоида и елипсоида .....	39
Слика 3.9. Ундулација геоида и отклон вертикале.....	40
Слика 3.10. Квазигеоид и телуроид .....	44
Слика 4.1. Компоненте убрзања теже и њихови градијенти.....	46
Слика 4.2. Локални астрономски систем.....	47
Слика 4.3. Градијенти и закривљеност ниво површи .....	50
Слика 4.4. Градијенти и закривљеност вертикале .....	52
Слика 4.5. Торзија ниво површи.....	53
Слика 4.6. Оригинална Етвешева торзиона вага.....	59
Слика 4.7. Принцип рада торзионе ваге .....	59
Слика 4.8. Апсолутни гравиметар FG5X, Micro-g LaCoste .....	64
Слика 4.9. Релативни гравиметар CG-6 Autograv, Scintrex.....	65
Слика 4.10. Градиометар састављен од два FG5 гравиметра, Micro-g LaCoste.....	68
Слика 4.11. Шема FTG градиометра .....	70
Слика 4.12. Побољшани FTG градиометар, Lockheed Martin .....	71

Слика 4.13. GOCE градиометар.....	73
Слика 5.1. Основни концепт моделовања тензора .....	76
Слика 5.2. Елипсоид и једнопараметарске координате.....	78
Слика 5.3. Систем једнопараметарских координата .....	79
Слика 5.4. Привлачење масе тесероида .....	92
Слика 5.5. Привлачење масе полиедра .....	93
Слика 5.6. Подјела терена на призме .....	95
Слика 5.7. Подјела на зоне.....	96
Слика 5.8. Призме на границама зона .....	97
Слика 5.9. Трансформација координатног система призме .....	98

## СПИСАК ТАБЕЛА

Табела 3. 1. Параметри система GRS80 .....	35
Табела 4.1. Физичко и геометријско значење елемената Етвешевог тензора.....	54
Табела 6. 1. Корелација градијената и терена .....	101
Табела 6.2. Тачност моделованих торзионих мјерења .....	102
Табела 6.3. Тачност моделованих градијената .....	102
Табела 6.4. Удио одступања моделованих градијената унутар граница тачности ..	104
Табела 6.5. Одступање ГГМ градијената од мјерења .....	107
Табела 6.6. Тачност моделованих вертикалних градијената .....	109
Табела 6.7. Удио одступања моделованих вертикалних градијената унутар граница тачности.....	110
Табела 6.8. Тачност вертикалних градијената из ГГМ .....	111
Табела 6.9. Тачност градијената у Војводини .....	111
Табела 6.10. Тачност оцијењених компоненти одступања вертикала на Лапласовим тачкама.....	114
Табела 6.11. Карактеристике одступања вертикала и аномалија висина у полигону Бор.....	115
Табела 6.12. Карактеристике астро-тензорских мрежа у полигону Бор.....	118
Табела 6.13. Тачност оцијењених одступања вертикала у астро-тензорским мрежама .....	119
Табела 6.14. Удио одступања моделованих компоненти одступања вертикала унутар граница тачности – јединствено изравнање .....	121
Табела 6.15. Удио одступања моделованих компоненти одступања вертикала унутар граница тачности – сукцесивно изравнање .....	121
Табела 6.16. Тачност оцијењених аномалија висина у астро-тензорским мрежама..	122
Табела 6.17. Тачност градијената [E] добијена анализом астро-тензорских мрежа .	124
Табела 6.18. Одступање ГГМ градијената од моделованих (Бор) .....	125



# САДРЖАЈ

СПИСАК СКРАЋЕНИЦА.....	iii
СПИСАК СЛИКА .....	v
СПИСАК ТАБЕЛА .....	vii
САДРЖАЈ.....	viii
1. УВОДНА РАЗМАТРАЊА.....	1
1.1. ПРЕДМЕТ И ЦИЉ ИСТРАЖИВАЊА.....	4
1.2. ХИПОТЕЗЕ СА ОБРАЗЛОЖЕЊЕМ .....	5
1.3. ГЕОГРАФСКО ПОДРУЧЈЕ ИСТРАЖИВАЊА .....	5
1.4. МЕТОДЕ ИСТРАЖИВАЊА .....	6
1.5. СТРУКТУРА ДИСЕРТАЦИЈЕ .....	6
2. ОСНОВЕ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА .....	8
2.1. УНИВЕРЗАЛНИ ЗАКОН ПРИВЛАЧЕЊА.....	8
2.2. ПОТЕНЦИЈАЛ УБРЗАЊА СИЛЕ ПРИВЛАЧЕЊА .....	10
2.2.1. Физичко значење потенцијала привлачења .....	12
2.3. ПОТЕНЦИЈАЛ ПРИВЛАЧЕЊА ПУНОГ ТИЈЕЛА .....	14
2.3.1. Потенцијал привлачења правилних тијела .....	15
2.3.1.1. Потенцијал масе лопте .....	15
2.3.1.2. Потенцијал масе призме .....	20
2.4. ЛАПЛАСОВА ЈЕДНАЧИНА.....	21
3. ПОЉЕ ТЕЖЕ ЗЕМЉЕ.....	25
3.1. ПОТЕНЦИЈАЛ УБРЗАЊА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ.....	25
3.2. НИВОСКЕ ПОВРШИ И ВЕРТИКАЛЕ .....	28
3.2.1. Геоид.....	31
3.3. НОРМАЛНО ПОЉЕ ТЕЖЕ .....	32
3.3.1. Геометрија обртног елипсоида.....	33
3.3.2. Потенцијал и убрзање нормалне теже .....	35
3.4. АНОМАЛИЈСКИ ПОТЕНЦИЈАЛ.....	39
3.4.1. Однос геоида и елипсоида.....	39
3.4.2. Функционали аномалијског потенцијала.....	41
3.4.2.1. Ундулација геоида.....	41
3.4.2.2. Поремећај убрзања теже .....	42

3.4.2.3. Аномалија убрзања теже .....	42
3.4.2.4. Одступања вертикала .....	43
3.4.3. Квазигеоид и телуроид.....	43
4. ГРАДИЈЕНТИ УБРЗАЊА ТЕЖЕ ЗЕМЉЕ .....	46
4.1. ЕТВЕШЕВ ТЕНЗОР .....	48
4.1.1. Математичке особине тензора.....	48
4.1.2. Геометријска интерпретација градијената.....	50
4.2. ЗНАЧАЈ ГРАДИЈЕНАТА У ГЕОНАУКАМА.....	55
4.3. МЈЕРЕЊЕ ГРАДИЈЕНАТА – ГРАДИОМЕТРИЈА.....	57
4.3.1. Терестричка градиометрија .....	58
4.3.1.1. Торзиона вага .....	58
4.3.1.2. Гравиметри .....	62
4.3.2. Ваздухопловна и поморска градиометрија .....	68
4.3.3. Сателитска градиометрија.....	72
4.4. ДОСАДАШЊИ ПРИСТУПИ У МОДЕЛОВАЊУ ГРАДИЈЕНАТА .....	74
5. ПРЕДЛОЖЕНИ МОДЕЛ ЕТВЕШЕВОВОГ ТЕНЗОРА .....	76
5.1. ОСНОВНИ КОНЦЕПТ .....	76
5.2. ГРАДИЈЕНТИ НОРМАЛНОГ ПОЉА.....	78
5.2.1. Контрола рачунања.....	84
5.3. МОДЕЛОВАЊЕ УТИЦАЈА ТОПОГРАФСКИХ МАСА.....	85
5.3.1. Гравитационо поље хомогене призме .....	86
5.3.1.1. Теоријски аспект проблема сингуларитета.....	89
5.3.1.2. Питање координатног система .....	90
5.3.1.3. Контрола рачунања.....	91
5.3.2. Друга геометријска тијела .....	91
5.3.2.1. Тесероид .....	92
5.3.2.2. Полиедар.....	93
5.4. ПОДЈЕЛА НА ЗОНЕ И ДИСКРЕТИЗАЦИЈА ТЕРЕНА .....	94
5.4.1. Практично рјешавање проблема сингуларитета .....	98
5.5. МАСЕ ИЗМЕЂУ ГЕОИДА И ЕЛИПСОИДА.....	99
6. НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА .....	100
6.1. ДИРЕКТНА ПРОВЈЕРА МОДЕЛА.....	101
6.1.1. Мјерења торзионом вагом .....	101
6.1.1.1. Полигон Нови Сад.....	101

6.1.1.2. Статистичка анализа.....	101
6.1.1.3. Поређење са геопотенцијалним моделом.....	105
6.1.1.4. Утицај Фрушке горе.....	107
6.1.2. Вертикални градијенти.....	108
6.1.2.1. Метода мјерења.....	108
6.1.2.2. Статистичка анализа.....	109
6.1.2.3. Поређење са геопотенцијалним моделом.....	110
6.1.2.4. Анализа резултата у Војводини.....	111
6.2. ПОСРЕДНА ПРОВЈЕРА МОДЕЛА.....	112
6.2.1. Полигон Бор.....	112
6.2.2. Оцјена компоненти одступања вертикала.....	112
6.2.2.1. Тестирање модела на Лапласовим тачкама у Србији.....	114
6.2.2.2. Одступања вертикала у полигону Бор.....	115
6.2.3. Изравнање астро-тензорске мреже.....	115
6.2.4. Статистичка анализа.....	118
6.2.4.1. Одступања вертикала.....	119
6.2.4.2. Аномалије висина.....	122
6.2.4.3. Тачност градијената.....	123
6.2.5. Поређење са геопотенцијалним моделом.....	125
7. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА.....	127
7.1. ОСТВАРЕНИ РЕЗУЛТАТИ.....	128
7.2. ПРОВЈЕРА ТАЧНОСТИ ХИПОТЕЗА.....	131
7.3. ПРЕПОРУКЕ ЗА БУДУЋА ИСТРАЖИВАЊА.....	131
ЛИТЕРАТУРА.....	133
ПРИЛОЗИ.....	146
БИОГРАФИЈА АУТОРА.....	206

## 1. УВОДНА РАЗМАТРАЊА

Геодезија је наука која се бави одређивањем геометријских и физичких својстава тијела Земље, конкретно њене величине и облика, спољашњег гравитационог поља, те Земљине ротације и оријентације у инерцијалном простору. Наведени феномени и параметри који их описују посматрају се као функције времена, а информације о њима добијају се на основу мјерења на физичкој површи Земље или изван ње. Рјешавањем ових научних задатака, стварају се и предуслови за дефинисање геодетских референтних система и реализацију референтних оквира. На тај начин се остварује спона са другим геонаукама, јер спознаје о особинама тијела Земље, заједно са практично примјењивим геодетским референтним оквирима, имају велику примјену у дисциплинама као што су премјер, картографија, географија, геофизика или океанографија.

У описаној структури и задацима геодезије, централно мјесто заузима одређивање њеног спољашњег гравитационог поља. Прије свега, и остали задаци, тј. особине Земље, зависе од гравитационог поља и могу се довести у везу с њим. Општи облик Земље директно је условљен њеном гравитацијом, а феномени који утичу на њену ротацију, као што су геодинамичке прерасподјеле маса на Земљи, манифестују се и кроз промјене у гравитационом пољу. Стога се праћењем гравитационог поља и његових промјена добијају информације и о осталим важним процесима на Земљи. Даље, сва терестричка геодетска мјерења суштински зависе од гравитације, тачније од поља теже, јер је геометрија простора у коме се изводе мјерења дефинисана пољем теже. Мјерења која укључују вјештачке сателите такође су посредно условљена гравитационим пољем, јер је гравитација сила која управља кретањем сателита. Осим тога, дефинисање висинских референтних система и површи, који се користе како у геодезији тако и у другим геонаукама, могуће је само узимањем у обзир физичких особина тијела Земље осликаних у пољу теже. За друге геонауке нарочито је значајна чињеница да се све аномалије у распореду маса унутар Земље очитују у њеном гравитационом пољу, иако је директно одређивање ових аномалија из мјерења гравитације немогуће, пошто се ради о инверзном проблему (Rummel, 2002). Област геодезије која се бави проучавањем гравитационог поља назива се физичком, односно теоријском геодезијом. Поље њеног проучавања јесте теоријско разумијевање гравитационог поља, његово одређивање и утврђивање везе са геометријским мјерењима. У склопу одређивања гравитационог поља, важну улогу има његово моделовање. Резултати моделовања омогућавају да се резултати мјерења упореде са моделованим параметрима, те да се тако добију информације о одступањима модела од реалности. Будући да су модели засновани на теоријским поставкама и поједностављеним приказима реалности, ова одступања заправо указују колико стварне Земљине особине попут распореда густина масе одступају од теоријских, правилних вриједности. Моделовани параметри се такође користе за потребе различитих рачунања, као приближне вриједности које могу у одређеним случајевима да замијене мјерења.

Гравитациона сила је, према Њутновој механици, привлачна сила која дјелује између свих тијела, и која зависи од њихове масе и међусобног растојања. Гравитациона сила Земље је према томе генерисана масом тијела Земље, и као векторска величина може се представити векторским пољем. Сила се карактерише правцем и смјером

дјеловања, као и интензитетом који се представља убрзањем (интензитет привлачења јединичне масе). Сва тијела на површини Земље, или близу ње, која ротирају заједно са Земљом, подлијежу утицају и центрифугалне силе, изазване управо ротацијом. Збир гравитационе и центрифугалне силе представља Земљину тежу. То је сила у чијем пољу се, између осталог, врше и геодетска мјерења. Готово сви резултати ових мјерења зависе од теже, пошто се вертикалне осе геодетских инструмената подудару са локалним правцем вектора теже. Иако је, дакле, Земљина тежа та која дефинише физичку реалност у контексту геодетских радова, проблем одређивања овог поља је у ствари проблем одређивања његове гравитационе компоненте, будући да је центрифугални дио једноставна функција положаја. Насупрот томе, гравитационо поље се не може једноставно одредити. Разлог је непознат распоред густина маса у Земљиној унутрашњости, што представља један кључних проблема у геонаукама уопште, као и њен неправилан облик.

У поступку одређивања поља теже, уводи се појам потенцијала силе. То је скаларна величина изражена физичком јединицом рада, и представљена скаларним пољем. Математичка веза између два поља, векторског и скаларног, у том је случају успостављена дефинисањем силе као градијента потенцијала. Поједностављено, сила је брзина промјене (извод) потенцијала са растојањем. Овакво скаларно поље чини проблем одређивања силе лакшим утолико што садржи све информације о векторском пољу силе, а скаларне величине су по својој природи једноставније за проучавање од векторских. Други важан концепт који се уводи јесте аномалијски потенцијал. Наиме, стварни потенцијал Земљине теже (и центрифугална и гравитациона сила имају одговарајуће скаларно поље потенцијала, па збир два скаларна поља даје потенцијал теже) раздваја се на два дијела, нормални и аномалијски потенцијал. Поље нормалног потенцијала дефинисано је хипотетичким тијелом, обртним елипсоидом са правилним распоредом густине масе. То је правилно, моделско поље које стварну тежу апроксимира са релативном тачношћу од  $10^{-4}$  до  $10^{-5}$ . Све величине које карактеришу ово поље могу се једноставно срачунати као функција положаја и четири основне компоненте којима се дефинише облик и величина елипсоида, његова маса и угаона брзина ротације. Тако се проблем одређивања стварног поља теже своди на одређивање његовог одступања од правилног, нормалног поља. Ово одступање представљено је аномалијским потенцијалом, а приступ подразумева да се величине које се могу мјерити на површи Земље (или изван ње, коришћењем вјештачких сателита) изразе у функцији поремећајног потенцијала.

Као што је већ речено, тежа је векторска величина и као таква у тродимензионалном простору има три компоненте. Свака од ових компоненти има своје изводе у три правца, што даје укупно девет градијената силе. Ови градијенти чине тзв. Етвешев тензор, назван по мађарском геофизичару Лорану Етвешу, пиониру у области истраживања градијената. Елементи тензора су очигледно функционали потенцијала, и представљају у ствари његове друге изводе. Због специфичних математичких особина поља потенцијала, тензор има само пет независних елемената.

Градијенти силе су математички повезани са осталим функционалима потенцијала, и као такви представљају величине од интереса у геодезији. Међутим, подједнако је важан њихов значај у геофизичким и геолошким истраживањима. Ту до изражаја долази њихов локални карактер, односно чињеница да је сигнал градијената

прилично локализован, и највише зависи од густине плитких структура унутар Земљине коре. Ово их чини једним од кључних појмова у поменутих дисциплинама које се баве проучавањем земљине унутрашњости. Одлике које градијент чине засебним физичким феноменом могу се наћи и у геодезији, будући да у концепту описивања поља потенцијала преко ниво површи (површи константног потенцијала), градијенти заправо представљају закривљеност ових површи. Стога је у данашње вријеме њихово мјерење и моделовање актуелна тема у геодезији и геофизици.

Почетак интензивних истраживања и употребе градијената теже датира у прву половину 20. вијека. Поменути геофизичар Етвеш је конструисао торзиону вагу, инструмент за мјерење градијената, и са својим сарадницима вршио мјерења у Мађарској. Градијенти су на овај начин одређивани у наредних неколико деценија, а резултати су махом коришћени у геофизичке сврхе, за откривање рудних лежишта и фосилних горива. Половином вијека, са развојем теренских гравиметара који су прецизно мјерили убрзање теже, мјерења градијената падају у други план. Разлог томе је био релативно сложен поступак мјерења градијената у односу на убрзања, а и сама њихова интерпретација није била једноставна. Остали су у употреби у војној индустрији за вријеме Хладног рата, као метода подводне навигације у подморницама.

Од 80-их година, са напретком технологије, развија се ваздухопловна и сателитска градиометрија, метода мјерења градијената помоћу инструмената (акцелерометара) и платформи монтираних на авионе и вјештачке сателите. Нови начини прикупљања података о градијентима враћају их у фокус геодетских и геофизичких истраживања. У геодезији се од тада редовно користе у креирању модела гравитационог поља и за потребе побољшаног одређивања сателитских орбита. Проблем њиховог моделовања постао је нарочито актуелан, не само у геодезији, пошто се поређем моделованих и мјерених вриједности могу добити информације о геолошким карактеристикама Земљине коре.

У геодезији се градијенти убрзања теже користе и у бројним другим радовима у физичкој геодезији, као што су редукције мјерених убрзања теже зарад одређивања геоида, или у рачунању физичких висина. Мјерење свих градијената за ове потребе практично је немогуће, пошто се редовно ради о великом броју тачака. Стога се често као апроксимација користе вриједности из нормалног поља, за чију тачност је упитно да ли је увијек dostatна за поменуте радове. Као компромисно рјешење, намећу се моделовани градијенти који би у обзир узимали и локалне карактеристике Земље, за разлику од нормалног поља које садржи само глобалне карактеристике. Тиме би се потенцијално превазишао проблем апроксимације градијената нормалним пољем, јер би се користиле тачније вриједности, притом и даље елиминишући потребу за масовним мјерењем градијената. Осим тога, градијенти су математички повезани са бројним другим величинама и параметрима поља теже. Из довољно добро моделованих градијената, потенцијално је могуће срачунати различите параметре и на тај начин такође смањити потребу за њиховим мјерењем.

Приступ у моделовању градијената који се предлаже подразумијева њихово моделовање на основу нормалног поља потенцијала теже и дигиталних модела терена. Нормално поље, представљено нормалним потенцијалом, осликава глобалну, дуготаласну, „углачану“ карактеристику стварног поља. Таква је и карактеристика градијената нормалног поља. Аномалијски дио градијената потиче од неправилне

расподјеле густина унутар Земље и неправилног облика (топографија). Ефекат топографских маса ће се моделовати коришћењем дигиталних модела терена (ДМТ), тј. њиховом апроксимацијом правилним геометријским тијелима, и он представља краткоталасну компоненту. При том, утицај маса између геоида и елипсоида (ДМТ дају висине терена изнад геоида, основне ниво површи потенцијала и референтне површи за физичке висине) биће моделован на исти начин, уз рачунање геоидних висина примјеном званичних модела геоида и глобалних геопотенцијалних модела. Централно мјесто предложеног моделовања јесу савремени ДМТ високе резолуције, који врло добро описују топографију, тј. масе изнад геоида. Њиховим коришћењем се ефекти неправилне топографије могу поуздано оцјењивати, што би у коначници требало дати градијенте теже чија је тачност блиска измјереним вриједностима. Други ефекат који производи аномалијску компоненту поља потенцијала, неправилне густине, требало би да много мање утиче на моделовање градијената него нпр. на сличан начин срачуната убрзања теже. Објашњење је у самој природи градијената, који практично представљају разлике убрзања у неком правцу. У тој разлици, ефекат дубоких извора (и уопште било којег тренда) бива највећим дијелом елиминисан, што значи да је и грешка усљед апроксимације густине Земљине коре великим дијелом редукована. Ове особине градијената, уз могућност њиховог потенцијалног рачунања са високом тачношћу и резолуцијом, чине их важним елементом моделовања локалног гравитационог поља у годинама које долазе.

### 1.1. ПРЕДМЕТ И ЦИЉ ИСТРАЖИВАЊА

Истраживање има за циљ дефинисање математичког модела који ће омогућити рачунање градијената убрзања теже (елемената Етвешевог тензора) са високом тачношћу, на нивоу тачности мјерења или близу те тачности. Очекује се да ће резултати моделовања, тестирани кроз поређење са мјереним вриједностима (примарна валидација модела) и рачунање функционала потенцијала теже помоћу моделованих градијената на тест-подручју са њиховим познатим вриједностима (секундарна валидација) потврдити квалитет предложеног модела. На овај начин ће се прије свега дати допринос рјешавању научних задатака геодезије, конкретно моделовању гравитационог поља на локалном нивоу. Бенефити су у том смислу вишеструки. Превенствено се огледају у потенцијалном смањењу обима теренских геодетских мјерења (гравиметрија), што доноси значајну уштеду времена и материјалних средстава. Ово ће бити могуће захваљујући оптималном коришћењу квалитетних, јавно доступних ДМТ. Осим тога, постојећи модели гравитационог поља биће додатно унапријеђени, а самим тим прошириће се и могућности њихове примјене у разним геодетским пословима.

Значајна је и могућност примјене предвиђеног модела у области геофизике. Као што је већ речено, дисциплине које се баве проучавањем Земљине унутрашњости, конкретно њене коре, у великој мјери се ослањају управо на градијенте теже. Квалитетан модел за рачунање очекиваних вриједности градијената може донијети напредак у областима истраживања налазишта фосилних горива и руда, хидрологије (геотермални извори и подземне воде), вертикалних помјерања Земљине коре (уско скопчана са ризицима од природних катастрофа), истраживања различитих подземних структура (градијенти омогућавају одређивање њихових граница са бољом резолуцијом у односу на убрзања), геоморфолошких облика, и сл.

Модификовани модел би могао наћи примјену и у одређивању топографије морског дна, што је од суштинске важности у подводној навигацији и океанографији. Посебно треба истакнути значај градијената у геодинамичким истраживањима, као што су вертикална помјерања Земљине коре. Ово је посебно важно за подручја са израженим геодинамичким помјерањима, као што су Србија и Босна и Херцеговина (Vulic & Vladojevic, 2008), (Vasić et al., 2018).

## 1.2. ХИПОТЕЗЕ СА ОБРАЗЛОЖЕЊЕМ

Полазне хипотезе које су постављене у овом истраживању гласе:

- 1) примјеном савремених дигиталних модела терена високе резолуције, могуће је моделовати градијенте убрзања теже са тачношћу блиском тачности мјерења;
- 2) ефекат резидуалних густина Земљине коре бива у краткоталасним функционалима потенцијала (други изводи) редукован у довољној мјери, тако да је грешка њиховог моделовања изазвана овим утицајем занемарљива;
- 3) у локалном моделовању гравитационог поља преовлађујући утицај имају топографски ефекти, тј. дигитални модели терена као извор података.

Прва хипотеза заснована је на чињеници да нормално боље садржи глобалне карактеристике стварног поља теже, те да га уопште узевши добро апроксимира, пошто је његова основа општи Земљин елипсоид. Одступања стварног од нормалног поља посљедица су регионалних и локалних карактеристика. Локалне особине условљене су постојањем топографских маса, и њиховим правилним моделовањем у виду дигиталних модела терена требало би се постићи значајно приближење вриједностима стварног поља теже.

У другој хипотези се полази од локалне природе градијената, захваљујући којој на градијенте јако мало утичу дуготаласне карактеристике поља. Штавише, на варијације у градијентима доминантно утичу густине масе унутар првих неколико стотина метара Земљине коре (Jekeli, 2021). Другим ријечима, одступања распореда густина од теоријског модела у градијентима не би требало да се манифестују на начин да доведу до значајних разлика између моделованих и измјерених вриједности.

У вези са локалном природом градијената је и трећа хипотеза, будући да је заснована на претпоставци да познавање геометрије локалних маса, одлучујуће дјелује на тачност моделованих краткоталасних параметара поља теже. Ова хипотеза се такође ослања на претходне двије, и на чињеницу да нормално поље теже апроксимира стварно поље са уједначеном глобалном тачношћу, као и да се утицај непознавања тачног распореда густина маса не би требао значајније испољити у градијентима.

## 1.3. ГЕОГРАФСКО ПОДРУЧЈЕ ИСТРАЖИВАЊА

Истраживање је спроведено за подручје Србије. Градијенти су рачунати за тачке у Војводини, код Новог Сада, како би се упоредили са градијентима који су на том подручју мјереним торзионом вагом почетком 20. вијека. Друго подручје за које су рачунати модели Етвешевог тензора јесте околина Бора, гдје се налази гравиметријски полигон. Ово је рађено у склопу индиректне провјере модела. За тачке у полигону су познате вриједности одступања вертикала (добијене из модела квазигеоида), а затим је на основу везе градијената са компонентама одступања



вертикала вршено оцјењивање компоненти и поређење са познатим вриједностима. На тај начин је посредно утврђен квалитет моделованих градијената.

#### 1.4. МЕТОДЕ ИСТРАЖИВАЊА

У поступку истраживања и израде дисертације коришћено је више научних метода. То су прије свега метода анализе и синтезе постојећих резултата, затим математичко моделовање, метода експеримента, метода компарације добијених резултата и статистичка метода. За математичко моделовање физичких величина коришћене су методе из области теорије потенцијала, диференцијалног и интегралног рачуна, сферно-хармонијског развоја функција и диференцијалне геометрије. Анализа добијених резултата вршена је примјеном метода математичке статистике, уз начело независне провјере. Такође, анализирана је и доступна научна и стручна литература која се односи на тему и методе истраживања, као и на релевантне повезане теме.

#### 1.5. СТРУКТУРА ДИСЕРТАЦИЈЕ

Дисертација је подијељена на седам поглавља, гдје је *прво поглавље* уводно. У њему је дефинисан предмет и циљ истраживања, дате су основне хипотезе са образложењем, као и методе истраживања. Такође, описан је и значај градијената убрзања теже и њиховог моделовања.

У *другом поглављу* дате су основе теорије потенцијала, која представља најважнији математички апарат за изучавање поља теже. Описан је Њутнов универзални закон привлачења, као и физички смисао потенцијала Земљине теже. Приказан је и поступак рјешавања интеграла потенцијала и силе за нека правилна геометријска тијела која се често користе у физичкој геодезији.

*Треће поглавље* описује поље Земљине теже. Дате су основне једначине и релације које карактеришу тежу и њен потенцијал. Приказан је приступ описивања поља теже кроз концепт нивоских површи и вертикала, а затим је дат и опис нормалног поља и његових главних карактеристика. Дефинисан је аномалијски потенцијал и његови функционали, те су описани и појмови геоида и квазигеоида.

*Четврто поглавље* посвећено је самим градијентима убрзања теже. Описан је Етвешев тензор, и то кроз његове математичке, али и физичке особине, односно геометријску интерпретацију. Тиме је стављен нагласак на чињеницу да тензор градијената убрзања има физички и геометријски смисао независан од координатног система, и да није пуки математички конструкт. Приказан је детаљније и практични значај градијената у геонаукама, који превазилази опис геометрије поља теже. Затим, приказане су методе мјерења градијената, тј. терестричке, ваздухопловне и сателитске градиометријске методе. На крају, дат је преглед досадашњих приступа у моделовању градијената.

*Поглавље пет* описује предложени модел Етвешевог тензора. Представљен је основни концепт, те су дати изрази и детаљно објашњен поступак рачунања градијената. Најприје су дати прегледни изрази за рачунање градијената нормалног поља. Гравитационо поље масе призме, које се користи у апроксимацији привлачења топографских маса, детаљно је представљено у виду аналитичких рјешења за интеграле потенцијала убрзања и његових извода. Анализирана су и питања

сингуларитета који се могу јавити у рачунању и координатних система који се користе. За сва теоријски представљена рачунања дати су и нумерички примјери са описаним контролама рачунања. На крају су описани детаљи практичног рачунања утицаја топографских маса, кроз подјелу терена на зоне и практично рјешавање проблема сингуларитета.

На почетку *шестог поглавља* дат је визуелни приказ градијената моделованих описаним поступком, на примјеру различитих терена у Србији са израженом топографијом. Затим, приказани су резултати нумеричких истраживања, тј. директне и посредне провјере модела Етвешевог тензора. У директној провјери, дати су статистички показатељи тачности моделованих градијената, добијени њиховим поређењем са измјереним вриједностима. Представљени су резултати рачунања одступања вертикала из моделованих градијената, што представља основу посредне провјере модела, као и оцјена тачности самих градијената из ових рачунања. Резултати су поткријешљени графичким прилозима, картама и различитим графиконима који су дати на крају дисертације, у Прилозима.

У *седмом поглављу* сумирани су добијени резултати и закључци о предложеном приступу моделовању градијената. Испуњеност хипотеза анализирана је у контексту добијених резултата. Истакнута су питања која су се наметнула у току истраживања, а на која тренутно није могуће дати одговор, те су у том смислу дате и препоруке за даља истраживања.

## 2. ОСНОВЕ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА

За теорију потенцијала се с правом може рећи да почетак њеног проучавања датира из 1782. године, када је француски математичар Лаплас (*Pierre-Simon, marquis de Laplace, 1749-1827*) открио да потенцијална функција сваког коначног тијела задовољава одређену парцијалну диференцијалну једначину, која се данас назива Лапласовом једначином (MacMillan, 1930). Од тада се теорија потенцијала интензивно развијала, нарочито кроз 19. вијек, и данас је незаобилазни алат у рјешавању проблема у различитим гранама примјењене физике, као што су физичка геодезија, електростатика, термодинамика или механика флуида (Kreyszig et al., 2011). У физичкој геодезији теорија потенцијала се користи за дефинисање и проучавање потенцијала убрзања силе привлачења. Да би се разумио појам потенцијала привлачења, прво се мора дефинисати сама сила привлачења.

### 2.1. УНИВЕРЗАЛНИ ЗАКОН ПРИВЛАЧЕЊА

Енглески математичар и физичар Исак Њутн (*Isaac Newton, 1642-1727*) дефинисао је у свом дјелу Математички принципи филозофије природе (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, или краће, *Principia*) из 1687, универзални закон привлачења, према којем се сваке двије материјалне тачке у универзуму међусобно привлаче силом која је директно пропорционална њиховим масама, а обрнуто пропорционална квадрату њиховог међусобног растојања. Правац дјеловања силе је дуж праве линије између тачака. Ваља примјетити да закон у овом облику вриједи само за материјалне тачке, а не за тијела. Њутнов универзални закон привлачења може се приказати као:

$$f \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

при чему је:  $f$  - сила привлачења,  $m_{1,2}$  - масе материјалних тачака,  $r$  - растојање између тачака. Сила привлачења узрокована масом тијела, тј. материјалних честица, назива се још и гравитацијом, односно гравитационом силом (лат. *gravis* - тежак). Коначни математички облик израза за гравитационо привлачење дао је Хенри Кевендиш (*Henry Cavendish, 1731-1810*), и он гласи:

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.2)$$

Кевендиш је први експериментално одредио вриједност универзалне гравитационе константе  $G$ , која представља фактор пропорционалности и дефинише интензитет силе којом се привлаче двије јединичне масе (1 kg) на јединичном растојању (1 m) (Одаловић, 2010). Ова константа је специфична по томе што представља једну од најважнијих константи у физици, а истовремено је и једна од најслабије одређених, тј. са најмањом тачношћу. Данашња најбоље одређена вриједност константе, у јединицама SI система, износи (Petit & Luzum, 2010):

$$G = 6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \pm 6.7 \cdot 10^{-15} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}. \quad (2.3)$$

Јединица мјере за силу привлачења названа је по Њутну,  $N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ .

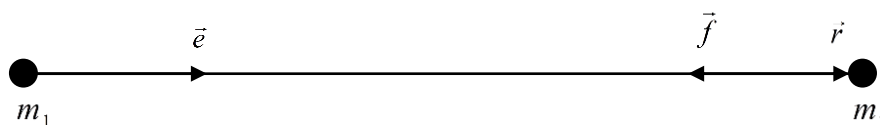
Једначина (2.2) представља интензитет силе. Али сила привлачења, као и свака друга сила, векторска је величина, која мора имати дефинисан и правац и смјер. За извођење израза за силу привлачења у векторском облику користи се ситуација на слици 2.1. Дате су двије материјалне тачке, чије су масе  $m_1$  и  $m_2$ , на растојању  $r$ . Иако се масе привлаче потпуно симетрично, једноставности ради може се посматрати само сила којом маса  $m_1$  привлачи масу  $m_2$ . Вектор положаја масе  $m_2$  у односу на  $m_1$  дат је са  $\vec{r}$ , док  $\vec{e}$  представља јединични вектор истог правца и смјера. Сила се сада може изразити у векторском облику као:

$$\vec{f} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}, \quad (2.4)$$

гдје негативан предзнак стоји због супротне оријентације вектора положаја и вектора силе. Пошто се сваки вектор може представити као производ одговарајућег јединичног вектора и интензитета, слиједи да је:

$$\vec{f} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \cdot \vec{r}, \quad (2.5)$$

што је и коначни облик једначине.



Слика 2.1. Вектор силе привлачења

Као што је већ речено, двије масе привлаче се потпуно симетрично, али је једноставније посматрати само привлачење једне од њих. Додатно поједностављење слиједи из другог Њутновог закона механике, који каже да се свака сила може представити у виду производа масе тијела на које сила дјелује, и његовог убрзања,  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ . Ако је маса тијела јединична, тада је векторско поље убрзања  $\vec{a}$  једнако пољу силе  $\vec{F}$ . Тако се проучавање поља силе своди на проучавање поља убрзања силе, а на основу чињенице да су у питању векторска поља са истом геометријом, гдје су правци и смјерови вектора исти, док маса има улогу фактора пропорционалности, тј. скалира интензитет векторског поља убрзања. Кад се овај принцип примјени на једначину (2.2), слиједи да је  $m_2 = 1$ , а ако се и маса  $m_1$  означи са  $m$ , добија се израз:

$$f' = G \frac{m}{r^2}, \quad (2.6)$$

који представља интензитет убрзања силе привлачења. Векторски облик убрзања слиједи из (2.5):

$$\vec{f}' = -G \frac{m}{r^3} \cdot \vec{r}. \quad (2.7)$$

Јединица мјере за убрзање је  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Обично се маса  $m$  назива привлачућом, док се јединична маса назива привлаченом. Овај концепт омогућава једноставније одређивање гравитационог поља привлачуће масе, гдје је довољно одредити поље убрзања привлачења, а гравитационо поље се онда једноставно добија придруживањем одговарајуће вриједности, различите од 1, привлаченој маси.

## 2.2. ПОТЕНЦИЈАЛ УБРЗАЊА СИЛЕ ПРИВЛАЧЕЊА

Одређивање гравитационог поља у три димензије, својствено физичкој геодезији, изискује коришћење три скаларне функције за описивање векторског поља у свакој тачки простора. Ово је последица чињенице да тродимензионални вектор има три компоненте, и да је свака задана скаларном функцијом:

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}, \quad (2.8)$$

гдје су  $P$ ,  $Q$  и  $R$  скаларне функције (Stewart, 2016). Усљед обима рачунских операција, манипулисање овим функцијама може бити захтјевно, те се поставља питање постоји ли начин да се векторско поље опише скаларном функцијом, тј. једним параметром у свакој тачки. Начин постоји, и подразумејева дефинисање скаларне функције која је са векторским пољем повезана строгим математичким релацијама. Прије описивања датих релација, потребно је дефинисати одређене појмове из области векторске анализе.

Ако свакој тачки  $M$  области  $\Phi$  (простора или неког његовог дијела) одговара величина  $V$ , каже се да је  $\Phi$  поље величине  $V$ , и пише се  $V = V(M)$ ,  $M \in \Phi$ . Поље  $\Phi$  је скаларно ако је  $V$  скаларна величина, тј. ако је у свакој тачки  $M \in \Phi$  њена вриједност реалан број. Поље  $\Phi$  је векторско ако је  $V$  векторска величина, тј. ако је у свакој тачки  $M \in \Phi$  задан вектор који представља ту величину. У анализи скаларних и векторских поља користе се три оператора: градијент, дивергенција и ротор. Сва три ова оператора могу се дефинисати помоћу Хамилтоновог диференцијалног оператора, који се још назива и набла<sup>1</sup> оператор:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle. \quad (2.9)$$

Из израза (2.9) видљиво је да Хамилтонов оператор подразумејева рачунање извода величине на коју се примјењује. Тачан облик тих извода зависи од симбола који слиједи последије оператора (Fleisch, 2011). Кад се овај оператор примјени на скаларно поље добија се градијент:

<sup>1</sup> Овај назив потиче од старогрчке ријечи за харфу,  $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ , и дат је због облика математичког симбола оператора.

$$\nabla V = \text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = \langle F_x, F_y, F_z \rangle. \quad (2.10)$$

Другим ријечима, градијент скаларног поља  $V$  је векторско поље  $\vec{F}$ , при чему се каже да је поље  $\vec{F}$  градијент поља  $V$ , а да је  $V$  потенцијал поља  $\vec{F}$  (Briggs et al., 2019). Сљедећи оператор је дивергенција, која се може представити као скаларни производ набла оператора и вектора:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \text{div}\vec{F} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle F_x, F_y, F_z \rangle = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (2.11)$$

Према томе, дивергенција векторског поља је скаларно поље. Векторски производ набла оператора и вектора даје ротор:

$$\nabla \times \vec{F} = \text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (2.12)$$

Посљедњи израз показује да је ротор векторског поља векторска величина.

Да би векторско поље имало одговарајуће скаларно поље које представља његов потенцијал, оно мора бити безвртложно, тј. мора бити задовољен услов да је ротор тог поља једнак нули,  $\text{rot}\vec{F} = 0$  (Zill, 2018). Гравитационо поље припада групи безвртложних поља, тако да постоји скаларно поље потенцијала гравитационе силе, чији је сила градијент. Користећи нотацију из претходног потпоглавља, као и појам убрзања силе, може се дефинисати поље потенцијала убрзања силе привлачења  $V$ :

$$\vec{f}' = \text{grad}V = \nabla V. \quad (2.13)$$

Поље потенцијала је скаларно и свакој тачки је придружен један параметар, али може се користити за описивање убрзања силе привлачења будући да садржи све информације о векторском пољу које је његов градијент. Конкретно, градијент је вектор чији је правац једнак правцу најбрже промјене скаларног поља, а интензитет је пропорционалан брзини те промјене. Због тога се компоненте градијента рачунају као парцијални изводи скаларне функције потенцијала у правцу координатних оса (Hass et al., 2020). Потенцијално поље је такође конзервативно, што значи да рад који је потребно уложити за премјештање из једне у другу тачку поља не зависи од путање којом се кретање врши, већ искључиво од положаја крајњих тачака путање. Тачније, рад је тада једнак разлици потенцијала крајње и почетне тачке. Из тога слиједи да је приликом кретања по затвореној путањи унутар поља, укупан механички рад који је извршен једнак нули. Ова особина се користи у физичкој геодезији приликом одређивања висина тачака у оквиру затворених нивелманских полигона. Преглед свих претходно набројаних математичких особина конзервативних поља дат је кроз сљедеће изразе (Briggs et al., 2019):

$$\vec{f}' = \nabla V,$$

$$\int_A^B \vec{f}' \cdot d\vec{r} = V(B) - V(A), \quad (2.14)$$

$$\int_A^A \vec{f}' \cdot d\vec{r} = V(A) - V(A) = 0,$$

$$\nabla \times \vec{f}' = 0.$$

Математички однос вектора убрзања силе привлачења и његовог потенцијала јасно је дефинисан, и дат је првом једначином у (2.14). Међутим, зарад потпунијег разумијевања, инструктивно је објаснити и физички смисао потенцијала.

### 2.2.1. Физичко значење потенцијала привлачења

Из претходног излагања јасно је да, најједноставније речено, убрзање силе представља извод потенцијала у одговарајућем правцу, а потенцијал је, аналогно, интеграл силе дуж тог истог правца. Ако је интензитет убрзања силе дат једначином (2.6), тада одговарајућа потенцијална функција мора имати облик:

$$V = \frac{Gm}{r}, \quad (2.15)$$

да би био задовољен услов да је:

$$f' = -\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (2.16)$$

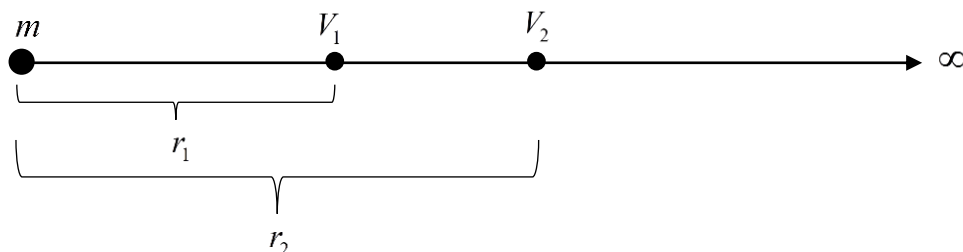
Негативан предзнак у (2.16) је из разлога што потенцијална функција опада са растојањем, па је њен извод по  $r$  негативан. Стога се позитиван интензитет убрзања добија увођењем овог предзнака, док је правац дјеловања силе код материјалних тачака дефинисан вектором положаја привлачене масе, као на слици 2.1.

Потенцијална функција (2.15) може се добити и рјешавањем сљедећег интеграла:

$$V = \int_r^\infty f' dr = \int_r^\infty G \frac{m}{r^2} dr = Gm \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = Gm \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_r^\infty = Gm \left( 0 + \frac{1}{r} \right) = \frac{Gm}{r}. \quad (2.17)$$

Интеграл  $\int_r^\infty f' dr$  представља збир производа диференцијално малих елемената растојања  $dr$  и убрзања силе привлачења  $f'$  која дјелују дуж тих растојања, од положаја  $r$  до (теоријског) положаја на бесконачном растојању од привлачуће масе. Како је производ силе и пута једнак раду, то се може рећи да је потенцијал убрзања силе привлачења заправо рад, и то рад који треба уложити да би се тијело јединичне масе премјестило из посматране тачке поља у бесконачност. Овај рад је еквивалентан кинетичкој енергији коју би тијело утрошило падајући под дејством привлачне силе

из бесконачности у тачку поља. Јединица мјере за потенцијал убрзања гравитационе силе је рад по јединици масе,  $\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ . Како извод функције представља брзину промјене те функције, то је и убрзање силе привлачења једнако брзини промјене потенцијала убрзања. Овај однос може се разумјети и посматрањем слике 2.2.



Слика 2.2. Сила привлачења као брзина промјене потенцијала

На слици је приказана привлачућа маса  $m$  и привлачена јединична маса у два положаја,  $r_1$  и  $r_2$ . Потенцијали убрзања привлачења у овим положајима износе  $V_1$  и  $V_2$ . Према дефиницији извода, убрзање је једнако количнику промјене потенцијала дуж бесконачно малог растојања, и тог истог растојања:

$$f' = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} - \frac{\Delta V}{\Delta r} = - \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (2.18)$$

На коначно малом растојању, ова релација је описана једначином:

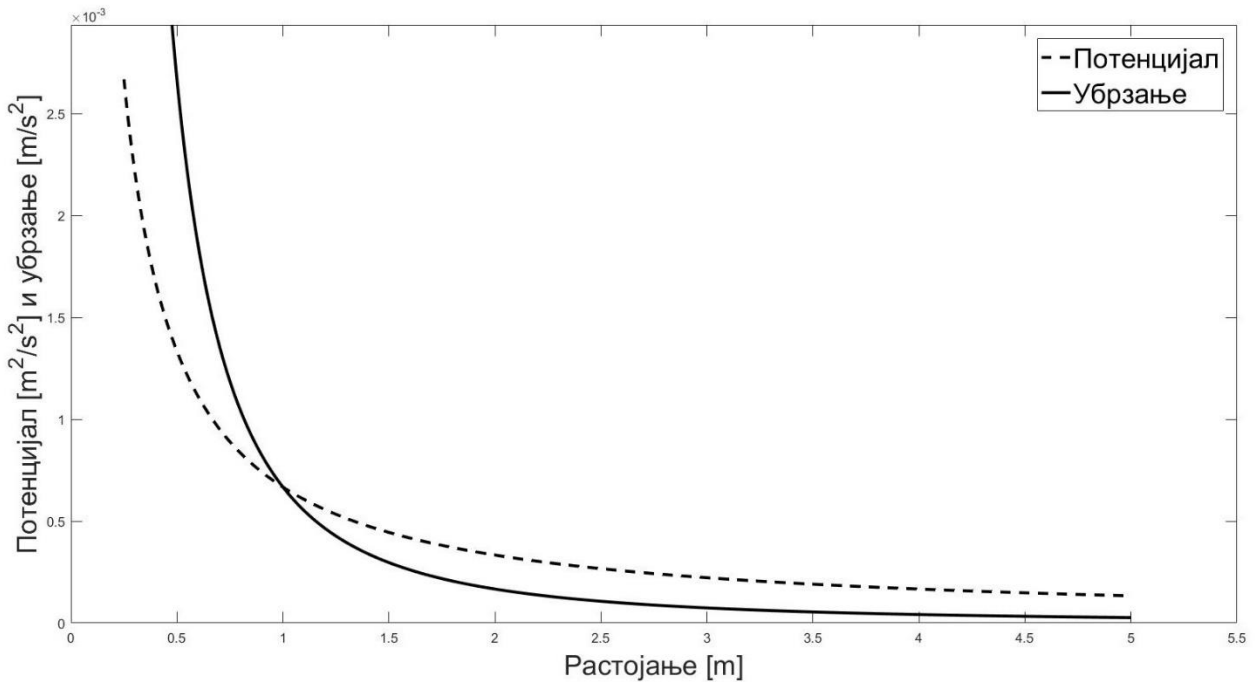
$$\Delta V = -\bar{f}' \cdot \Delta r, \quad (2.19)$$

гдје је  $\bar{f}'$  средња вриједност убрзања гравитационе силе која дјелује дуж одсјечка  $\Delta r$ . Слиједи да је:

$$\bar{f}' = - \frac{\Delta V}{\Delta r} = - \frac{V_2 - V_1}{r_2 - r_1}. \quad (2.20)$$

Ако је  $V_2$  рад који је потребно уложити за премјештање јединичне масе из положаја  $r_2$  у бесконачност, а  $V_1$  рад потребан за премјештање из положаја  $r_1$ , тада је разлика ова два потенцијала једнака раду потребном да се савлада сила на одсјечку  $\Delta r$ . Што је разлика потенцијала већа, већи је и рад који је потребно уложити за кретање дуж одсјечка, односно већи је интензитет убрзања силе. Другим ријечима, бржа промјена потенцијала значи да је сила коју треба савладати јача. Када растојање  $\Delta r$  тежи нули, добија се интензитет убрзања у тачки. Тиме једначина (2.20) добија потпуни смисао, као и дефиниција убрзања силе привлачења као извода потенцијала. Однос убрзања привлачења и потенцијала приказан је и на слици 2.3, као график функција у респективним јединицама мјере. График је дат за масу материјалне тачке  $m = 10^7 \text{ kg}$ .

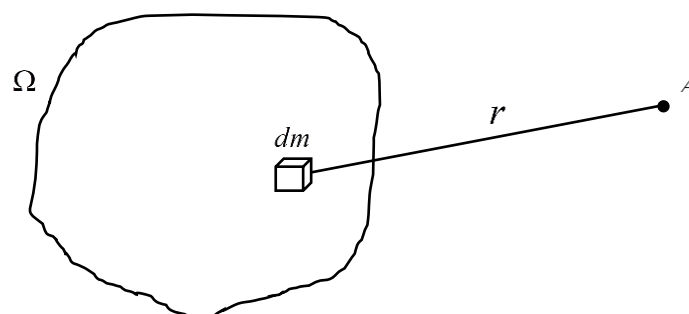




Слика 2.3. Потенцијал и убрзање силе привлачења као функције растојања

### 2.3. ПОТЕНЦИЈАЛ ПРИВЛАЧЕЊА ПУНОГ ТИЈЕЛА

Претходно је Њутнов закон привлачења изнесен у контексту материјалних тачака. Но, обично је случај да се реална гравитациона поља одређују за тијела са континуално распоређеном материјом. Пошто је гравитациона сила адитивна, природно је да се за рјешавање оваквих проблема користи приступ из интегралног рачуна, гдје се тијела рачунски дијеле на бесконачно много елемената инфинитезималне величине (Kellogg, 1953). Коначан резултат се добија као збир доприноса свих елемената. Ова ситуација приказана је на слици 2.4.



Слика 2.4. Привлачење масе пуног тијела

У тачки  $A$  потребно је одредити потенцијал убрзања гравитационог привлачења тијела  $\Omega$ . У ту сврху тијело се дијели на диференцијалне елементе масе  $dm$ , те се рачуна и сабира привлачење сваког од њих. Математички се то може представити као:

$$V(A) = G \frac{m_1}{r_{A,1}} + G \frac{m_2}{r_{A,2}} + \dots + G \frac{m_n}{r_{A,n}} = \sum_{i=1}^n V_i = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_{A,i}}. \quad (2.21)$$

Сума прелази у интеграл када димензије елемената теже нули:

$$V(A) = G \iiint_{\Omega} \frac{dm}{r_A}, \quad (2.22)$$

гдје је:  $\Omega$  - запремина (тијело);  $dm$  [kg] - елемент масе. Увођењем и слједећих ознака:  $\rho$  [kg·m<sup>-3</sup>] - густина;  $d\Omega$  [m<sup>3</sup>] - елемент запремине, и узимајући у обзир да је  $dm = \rho \cdot d\Omega$  и  $d\Omega = dx dy dz$ , слиједи да је:

$$\begin{aligned} V(A) &= G \iiint_{\Omega} \frac{dm}{r_A} = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho \cdot d\Omega}{r_A} = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{r_A} dx dy dz, \\ V(A) &= G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{\sqrt{(X_A - X)^2 + (Y_A - Y)^2 + (Z_A - Z)^2}} dx dy dz. \end{aligned} \quad (2.23)$$

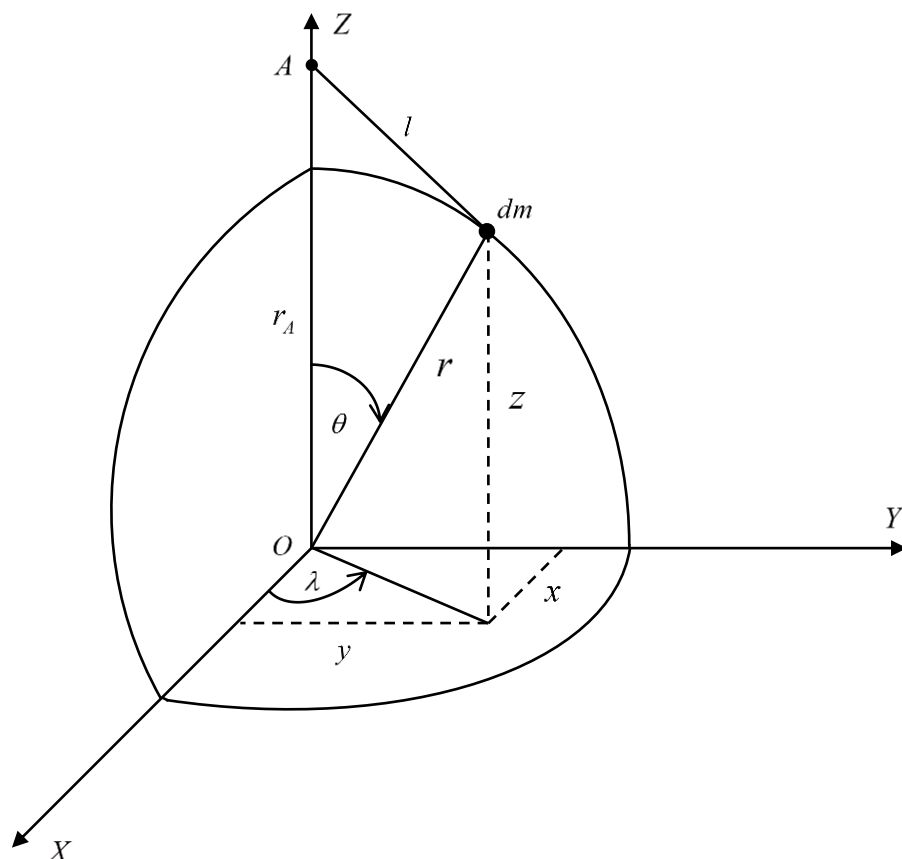
Ово је коначни израз за потенцијал привлачења пуног тијела у правоуглим координатама, при чему су  $X_A, Y_A, Z_A$  - координате привлачене тачке, и  $X, Y, Z$  - варијабилне координате елемената масе. Проблем одређивања потенцијала се тако практично своди на рјешавање интеграла који описују потенцијал привлачења различитих тијела. У физичкој геодезији је нарочито важно одређивање потенцијала правилних геометријских тијела.

### 2.3.1. Потенцијал привлачења правилних тијела

Гравитационо поље реалних тијела, као што су Земља, њени дијелови или друге планете, није једноставно моделовати будући да стварни облик тих тијела или није познат, или га није могуће адекватно математички описати. Стога се редовно прибјегава апроксимацијама, гдје се поменуте масе апроксимирају геометријски правилним тијелима. За оваква тијела је могуће ријешити интеграле који описују њихово гравитационо поље, те срачунати потенцијал или силу привлачења у произвољној тачки. Међу најчешће коришћеним тијелима за апроксимацију јесу лопта и правоугаона призма.

#### 2.3.1.1. Потенцијал масе лопте

Пуна лопта и њен потенцијал користе се за апроксимацију гравитационог поља тијела приближно сферног облика, као што су Земља, Мјесећ, Сунце, те бројна друга небеска тијела. За извођење израза за потенцијал пуне лопте, као и за било које друго тијело, полази се од општих израза датих са (2.23). На почетку је потребно дефинисати и положај координатног система. Теоретски, овај положај може бити произвољан, али инструктивно је координатни систем поставити тако да се његово исходиште подударара са геометријским средиштем лопте, а да  $Z$  оса пролази кроз привлачену тачку  $A$ , као што је приказано на слици 2.5.



Слика 2.5. Привлачење масе пуне лопте

Нека је полупречник лопте  $R$ . Вектор положаја тачке  $A$  у односу на координатни почетак (центар лопте) је  $\vec{r}_A$ , који се овдје може посматрати само као растојање  $r_A$ . Растојање између диференцијално малог елемента масе  $dm$  и привлачене тачке  $A$  означено је са  $l$ . Да би се дошло до рјешења, потребно је координатни систем прилагодити ситуацији, тј. геометрији тијела. У овом случају логичан избор је систем сферних координата. У сферном координатном систему, једна од координата је  $r$ , које представља растојање елемента  $dm$  од координатног почетка  $O$ . У векторској нотацији увијек је испуњен услов да је:

$$\vec{r}_A = \vec{r} + \vec{l}. \quad (2.24)$$

Друге двије координате у сферном систему су лонгитуда  $\lambda$  и колатитуда  $\theta$  (комплемент латитуде). Веза између правоуглих и сферних координата гласи:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \lambda, \\ y &= r \sin \theta \sin \lambda, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Растојање  $l$  се може изразити помоћу косинусне теореме, из троугла  $O - A - dm$ :

$$l^2 = r_A^2 + r^2 - 2r_A r \cos \theta. \quad (2.26)$$

Ако се са  $\rho$  означи густина лопте, елемент масе  $dm$  се тада може представити као производ густине и диференцијално мале запремине  $dxdydz$ . Пошто је густина константна, сада израз за потенцијал привлачења лопте гласи:

$$V(A) = G \cdot \rho \cdot \iiint \frac{1}{l} dxdydz. \quad (2.27)$$

Прелазак на сферне координате може се вршити примјеном Јакобијана (Urwin, 1966):

$$J = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \lambda & r \cos \theta \cos \lambda & -r \sin \theta \sin \lambda \\ \sin \theta \sin \lambda & r \cos \theta \sin \lambda & r \sin \theta \cos \lambda \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta, \quad (2.28)$$

или изражавањем елемента запремине  $dxdydz$  преко величина у сферном систему. У том случају, дужине страница инфинитезималне коцке су  $dr$  у радијалном смјеру,  $r d\theta$  у смјеру колатитуде и  $r \sin \theta d\lambda$  у смјеру лонгитуде. Производ овако дефинисаних дужина даје исти резултат, елемент запремине у сферним координатама,  $r^2 \sin \theta d\lambda d\theta dr$ . За интеграл потенцијалне функције се добија:

$$V(A) = G\rho \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \frac{1}{l} r^2 \sin \theta d\lambda d\theta dr = G\rho \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{r_A^2 + r^2 - 2r_A r \cos \theta}} d\lambda d\theta dr. \quad (2.29)$$

Интеграција по  $d\lambda$  је једноставна и даје:

$$V(A) = 2\pi G\rho \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{r_A^2 + r^2 - 2r_A r \cos \theta}} d\theta dr. \quad (2.30)$$

Сљедећи корак је увођење смјене, за шта се користи израз за дужину  $l$ :

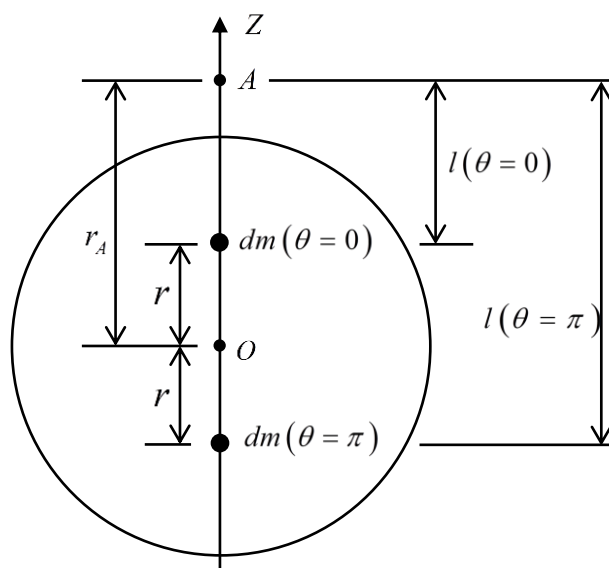
$$\begin{aligned} l &= \sqrt{r_A^2 + r^2 - 2r_A r \cos \theta}, \\ dl &= \frac{1}{2l} 2r_A r \sin \theta d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{ldl}{r_A r \sin \theta}, \\ \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{r_A^2 + r^2 - 2r_A r \cos \theta}} d\theta dr &= \frac{r^2 \sin \theta}{l} \cdot \frac{ldl}{r_A r \sin \theta} dr = \frac{r}{r_A} dl dr. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Након смјене, добија се:

$$V(A) = 2\pi G\rho \int_{r=0}^R \int_{l(\theta=0)}^{l(\theta=\pi)} \frac{r}{r_A} dl dr. \quad (2.32)$$

Даље рјешавање се раздваја на два случаја: када се привлачена тачка налази изван масе лопте и када је унутар масе.

У случају кад је привлачена тачка изван лопте ( $r_A > R$ ), границе интеграције за  $l$  одређују се на основу угла  $\theta$ , што је илустровано на слици 2.6.



Слика 2.6. Границе интеграције за тачку изван лопте

За границе варијабле  $l$ , зависно од граничних вриједности угла  $\theta$ , добија се:

$$\begin{aligned} \theta = 0 &\Rightarrow l = r_A - r, \\ \theta = \pi &\Rightarrow l = r_A + r. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Слиједи да је:

$$\begin{aligned} V(A) &= 2\pi G\rho \int_{r=0}^R \int_{l=r_A-r}^{l=r_A+r} \frac{r}{r_A} dl dr = 2\pi G\rho \int_{r=0}^R \frac{r}{r_A} dr \cdot l \Big|_{r_A-r}^{r_A+r} = 2\pi G\rho \int_{r=0}^R \frac{2r^2}{r_A} dr = \frac{4\pi G\rho}{r_A} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \\ &= \frac{4}{3} R^3 \pi G\rho \cdot \frac{1}{r_A}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

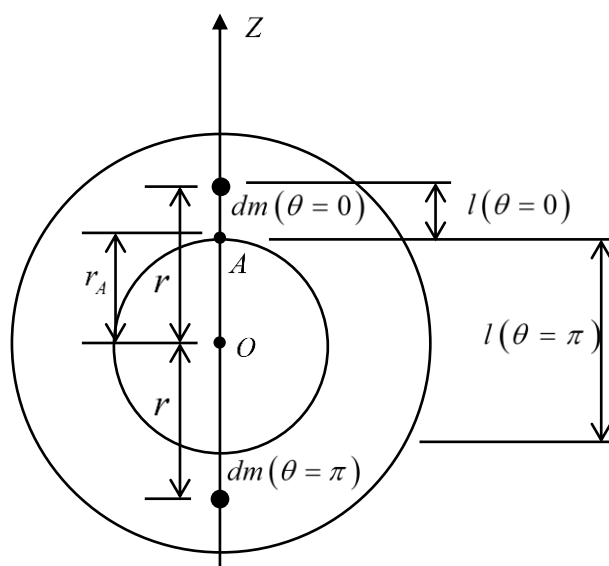
Рјешење интеграла показује да је потенцијал привлачења пуне лопте једнак потенцијалу материјалне тачке која је смјештена у центру лопте и има масу једнаку маси лопте. Исто се може доказати за сва хомогена тијела са сферном симетријом, попут сферне материјалне површи или шупље лопте. Ово је важан закључак који олакшава рачунање и апроксимацију гравитационих поља у физичкој геодезији и небеској механици. Примјеном једначине (2.16) добија се израз за интензитет привлачне силе лопте, који је такође једнак изразу за интензитет силе коју генерише материјална тачка:

$$f' = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{4}{3} R^3 \pi G\rho \cdot \frac{1}{r_A^2}. \quad (2.35)$$

У случају када се привлачена тачка налази унутар масе лопте ( $r_A < R$ ), лопта се дијели на два дијела, на масу испод/унутар привлачене тачке ( $r < r_A$ ) и масу изнад/изван тачке  $A$  ( $r > r_A$ ). У складу са претходно изведеним изразима, потенцијал унутрашње масе рачуна се као:

$$V_1(A) = \frac{4}{3} R^3 \pi G \rho \cdot \frac{1}{r_A} = \frac{4}{3} \pi G \rho r_A^2, \quad (2.36)$$

будући да се ово може третирати као гранични случај када је привлачена тачка на сфери ( $r_A = R$ ). За спољашњу масу поново је потребно одредити границе интеграције (слика 2.7).



Слика 2.7. Границе интеграције за тачку унутар лопте

За границе варијабле  $l$  добија се:

$$\begin{aligned} \theta = 0 &\Rightarrow l = r - r_A, \\ \theta = \pi &\Rightarrow l = r + r_A. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Границе интеграције за  $r$  су такође промијењене, тј.  $r$  се мијења од  $r_A$  до  $R$ , будући да се разматра само спољашњи прстен. Сада је потенцијал спољашње масе:

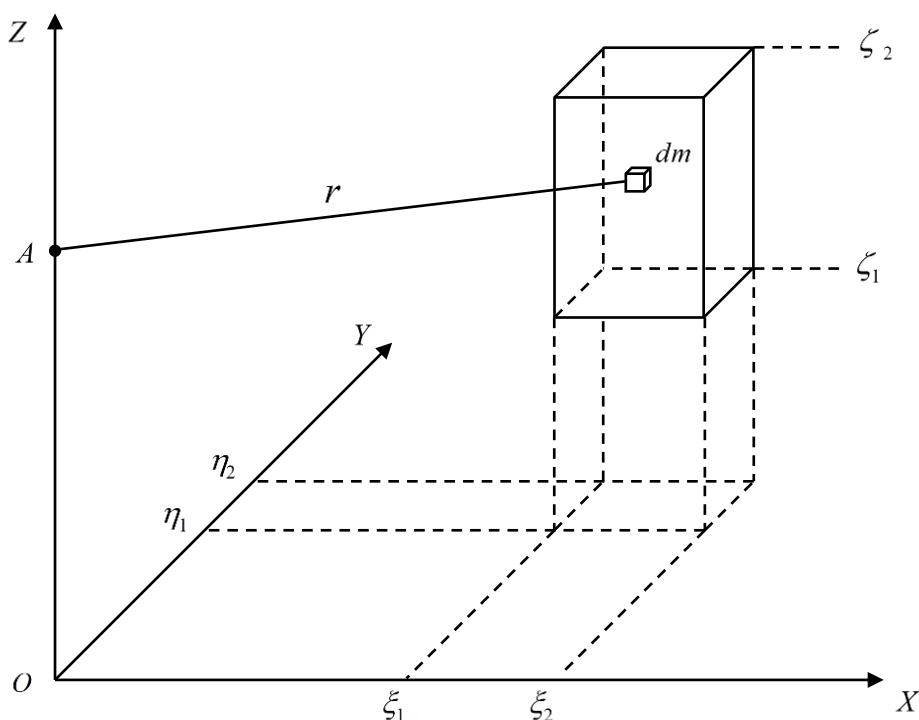
$$\begin{aligned} V_2(A) &= 2\pi G \rho \int_{r=r_A}^R \int_{l=r-r_A}^{l=r+r_A} \frac{r}{r_A} dl dr = 2\pi G \rho \int_{r=r_A}^R 2r dr = 4\pi G \rho \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_{r_A}^R \\ &= 2\pi G \rho (R^2 - r_A^2). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Укупан потенцијал се добија сабирањем два потенцијала:

$$\begin{aligned}
 V(A) &= V_1(A) + V_2(A) = \frac{4}{3}\pi G\rho r_A^2 + 2\pi G\rho(R^2 - r_A^2) \\
 &= 2\pi G\rho\left(\frac{2}{3}r_A^2 + R^2 - r_A^2\right) = 2\pi G\rho\left(R^2 - \frac{1}{3}r_A^2\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

### 2.3.1.2. Потенцијал масе призме

Друго важно тијело чије се гравитационо поље често користи јесте усправна правоугаона призма. Најчешћа примјена призме је за потребе апроксимације различитих морфолошких облика на физичкој површи Земље и унутар ње, и њиховог гравитационог привлачења. Природан избор координатног система за описивање привлачења масе призме је правоугли координатни систем (слика 2.8).



Слика 2.8. Привлачење масе призме

На слици је приказан координатни систем чије су осе паралелне страницама призме, а  $Z$  оса пролази кроз привлачену тачку. Ако су координате привлачене тачке  $X_A$ ,  $Y_A$  и  $Z_A$ , а координате страница призме  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , потенцијал привлачења се може изразити интегралом:

$$V(A) = G \cdot \rho \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = G \cdot \rho \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2}}. \tag{2.40}$$

Интензитет убрзања силе привлачења се добија као:

$$\begin{aligned}
f' &= -\frac{\partial V}{\partial r} = -G\rho \cdot (-1) \cdot \iiint \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^2} \\
&= G\rho \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{(X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Важна величина у физичкој геодезији је и вертикална компонента убрзања силе привлачења која се добија из израза:

$$\begin{aligned}
f'_z &= -\frac{\partial V(A)}{\partial Z_A} = G\rho \iiint \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^2} \cdot \frac{1}{2r} \cdot 2(Z_A - \zeta) \\
&= G\rho \iiint \frac{Z_A - \zeta}{\left(\sqrt{(X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2}\right)^3} d\xi d\eta d\zeta.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Коначна рјешења ових интеграла постоје и позната су у геодетској литератури, а пошто је коришћење гравитационог поља призме важан сегмент практичног дијела истраживања, биће детаљно размотрена у поглављу бр. 5.

## 2.4. ЛАПЛАСОВА ЈЕДНАЧИНА

Већ је споменут допринос француског математичара Лапласа у развоју теорије потенцијала. Овај допринос је најконцизније садржан у Лапласовој једначини. Прије извођења једначине потребно је дефинисати Лапласов оператор, тзв. „Лапласијан“. Овај диференцијални оператор означава се са  $\Delta$  и дефинисан је као:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.43}$$

Лапласов делта оператор очигледно даје збир других парцијалних извода функције. С обзиром на претходне дефиниције диференцијалних оператора, може се рећи да је Лапласијан дивергенција градијента, односно да примјењен на скаларно поље потенцијала даје скалар, тј. дивергенцију векторског поља убрзања силе. Математички се то може представити као:

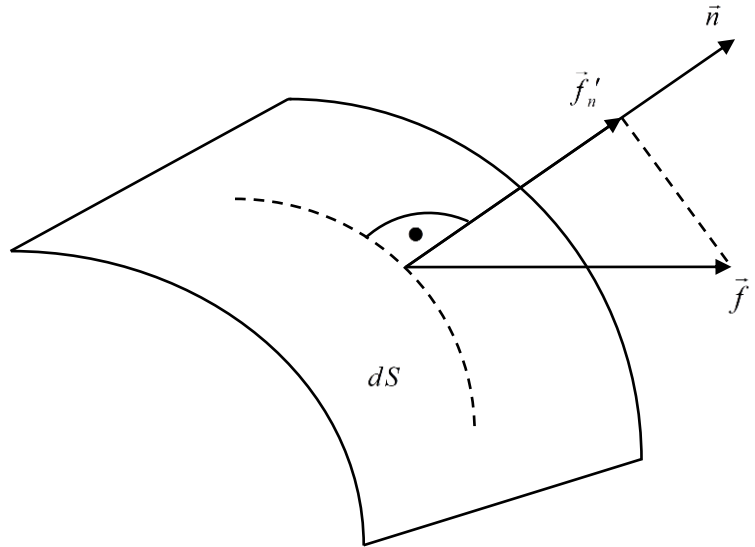
$$\Delta V = \operatorname{div}(\operatorname{grad}V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{2.44}$$

За одређивање дивергенције гравитационог поља може послужити теорема о дивергенцији, позната и као Гаусова теорема (*Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855*), која каже да је укупан флукс векторског поља кроз затворену површ једнак троструком интегралу дивергенције унутар простора којег та површ затвара (Anton et al., 2016). Ако се пусти да запремина поменутог простора тежи нули, добија се израз за дивергенцију у тачки, који у случају гравитационе силе има облик:



$$\nabla \vec{f}' = \text{div} \vec{f}' = \lim_{V_0 \rightarrow 0} \frac{\oiint_S f'_n ds}{V_0}. \quad (2.45)$$

У претходном изразу  $V_0$  је запремина коју обухвата површ  $S$ , док је  $f_n$  интензитет вектора  $\vec{f}'_n$ , који пак представља пројекцију вектора убрзања на нормалу  $\vec{n}$  (слика 2.9).



Слика 2.9. Флукс векторског поља кроз површ

Управо је производ  $f'_n dS$  флукс поља  $\vec{f}'$  кроз површ  $S$ . Величина  $f'_n$  добија се као скаларни производ вектора убрзања силе  $\vec{f}'$  и вектора нормале  $\vec{n}$ , који се може посматрати као векторизовани елемент површи  $dS$ . Интеграција у изразу (2.45) врши се по цијелој површи  $S$ . За потребе извођења, за површ  $S$  је најједноставније узети сферу. При том се може показати да крајњи резултат не зависи од облика површи (Vaniček, 1976). Маса обухваћена површи  $S$  биће  $m = \rho V_0$ . Ова маса ће генерисати гравитационо поље дато једначином (2.7), кад се  $S$  постави у средиште координатног система, поново због једноставности. Вектори силе ће у том случају очигледно у свакој тачки бити управни на површ  $S$ . То значи да ће се проток поља кроз површ одвијати у пуном износу, тј.  $f'_n = -G \frac{\rho V_0}{r^2}$ . Из (2.45) слиједи:

$$\oiint_S f'_n ds = -G \frac{\rho \cdot V_0}{r^2} \oiint_S ds = -G \frac{\rho \cdot V_0}{r^2} \cdot 4r^2 \Pi = -4\Pi G \rho V_0. \quad (2.46)$$

За дивергенцију се коначно добија:

$$\Delta V = \nabla \vec{f}' = -4\Pi G \rho. \quad (2.47)$$

Израз (2.47) назива се Поасоновом једначином (Simeon Denis Poisson, 1781-1840), и даје дивергенцију гравитационе силе у свакој тачки простора. У Поасоновој једначини

ваља примјетити двије ствари. Прво, негативан предзнак је посљедица математичке конвенције, према којој  $\text{div}\vec{f}' > 0$  значи да је укупан проток поља кроз диференцијално малу површ око тачке позитиван, односно да се у датој тачки ствара „вишак“ силе. Ово је случај када су вектори силе усмјерени према вани, од тачке. Таква тачка се онда назива извором поља (Rogawski et al., 2019). Ако је  $\text{div}\vec{f}' < 0$ , може се рећи да у посматраној тачки поље нестаје, односно да настаје „мањак“ силе, па је та тачка понор поља. Негативан знак једначине (2.47) је усљед чињенице да су вектори гравитационе силе усмјерени ка маси, што у датом математичком тумачењу масу чини понором поља, мада је она у суштини његов извор, јер генерише привлачну силу. Други закључак везан за Поасонову једначину јесте да она суштински зависи од густине. Може се дакле рећи да се варијације у снази извора векторског поља гравитационе силе мјере управо густином генеришуће масе (Hassani, 2009).

Посебан случај Поасонове једначине добија се када је гуситна  $\rho = 0$ , тј. када се тачка налази изван масе, у спољашњем простору. Тада је и дивергенција једнака нули, односно:

$$\Delta V = 0. \quad (2.48)$$

Израз (2.48) назива се Лапласовом једначином. Иако врло једноставног и елегантног математичког записа, ово је једна од најважнијих једначина у математичкој физици. Штавише, читава теорија потенцијала се понекад дефинише као теорија Лапласове једначине, тј. област која се бави тражењем њених рјешења (Kellogg, 1953). Разлог томе је што ова парцијална диференцијална једначина другог реда између осталог описује пренос топлоте кроз хомогене материјале, течење идеалних флуида, ток електричних струја, равнотежна стања деформабилних тијела, али и дјеловање Њутнове привлачне силе. Рјешења Лапласове једначине називају се хармонијским функцијама. Потенцијал гравитационе силе у спољашњем простору је хармонијска функција. Ова чињеница је од изузетне важности у физичкој геодезији, јер имплицира да се гравитациони потенцијал може изразити у виду бесконачних редова сферних хармоника (Одаловић, 2010). Тражење рјешења за потенцијалну функцију врши се постављањем извјесних услова који представљају граничне услове теорије потенцијала, и назива се геодетским проблемом граничних вриједности (*Geodetic Boundary Value Problem - GBVP*). Значајан дио истраживања у теоријској геодезији посвећен је управо рјешавању ових проблема.

Претходно излагање представља класични, или Њутновски приступ у проучавању гравитације. Тај приступ се ослања на начела класичне физике, према којима је гравитација једна од четири фундаменталне силе у универзуму (Serway & Jewett, 2018). Други, савременији приступ, не сматра гравитацију силом, већ подразумејева третирање гравитације као ефекта закривљености простор-времена, изазваног присуством масе (Soffel & Han, 2019). Овај концепт заснива се на постулатима теорије релативности, коју је почетком 20. вијека развио чувени њемачко-амерички физичар Алберт Ајнштајн (*Albert Einstein, 1879-1955*). Релативистичка теорија представља унапређење Њутновог рада и потпунији опис закона природе у макро-свијету, укључујући и гравитацију, те је у данашњој физици општеприхваћена. Анализе физичких процеса у екстремним условима који подразумејевају јако велике брзине кретања или присуство тијела великих маса, неизоставно укључују и теорију

релативности, а присутна је и у мјерењима која достижу ниво тачности гдје релативистички ефекти имају видљив утицај. Као таква, она све више налази мјесто и у савременој геодезији (Puetzfeld & Lämmerzahl, 2019). Но, у условима терестричких геодетских мјерења, класични приступ је и даље сасвим довољан да са адекватном тачношћу опише гравитационе ефекте. Стога су класични приступ и Њутнова механика коришћени и у оквиру овог истраживања.

### 3. ПОЉЕ ТЕЖЕ ЗЕМЉЕ

Сва тијела која се налазе на Земљи и ротирају заједно с њом, изложена су дејству двију сила које ротирајућа Земља генерише: гравитационе силе изазване масом тијела Земље, и центрифугалне силе узроковане њеном ротацијом. У савременој физици се ни једна ни друга сила заправо не сматрају силама. То се посебно односи на центрифугалну, која се посматра као својеврсна фиктивна сила, чији би ефекат нестао ако би престала ротација Земље. Гравитација се, како је већ речено, у релативистичком поимању космоса тумачи као посљедица закривљености простора, која условљава кретање објеката у близини маса које закривљеност изазивају. Но, за потребе изучавања њиховог утицаја на терестричка геодетска мјерења, обје појаве се могу посматрати као силе у контексту класичне механике и тако математички третирају.

Збир гравитационе и центрифугалне силе даје Земљину тежу, или краће, тежу. Иако се појмови гравитације и теже у лаичком говору често користе као синоними, у физичкој геодезији се између њих прави јасна разлика. У енглеском говорном подручју се за гравитацију користи термин „gravitation“, а за тежу „gravity“ (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005). За обје силе се такође дефинишу одговарајућа убрзања и њихови потенцијали, чијим сабирањем се добија потенцијал убрзања теже.

#### 3.1. ПОТЕНЦИЈАЛ УБРЗАЊА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Узимајући у обзир излагање у претходном поглављу, и напосе једначину (2.7), може се написати да је гравитациона сила којом Земља привлачи тијело масе  $m$  једнака:

$$\vec{F}_E = -Gm \iiint_E \frac{\rho}{r^3} \vec{r} dE, \quad (3.1)$$

при чему се интеграција спроводи по цијелом тијелу Земље ( $E$ ). У претходној једначини важно је запазити да густина  $\rho$  није испред интеграла, а то је из разлога што није константна. Густина масе Земље се неправилно мијења и по положају и по дубини, и позната је само приближно, тј.  $\rho = \rho(\vec{r})$ . Непознавање распореда густина маса у унутрашњости Земље један је од главних проблема, не само у геодезји, већ и у геонаукама уопште.

Земљина ротација ствара ефекат који се назива центрифугалном силом, а чији интензитет зависи од брзине ротације и од удаљености од осе ротације. Тако је центрифугална сила која дјелује на тијело масе  $m$  једнака:

$$\vec{z} = \vec{p}\omega^2 m, \quad (3.2)$$

при чему је:  $\vec{p}$  - растојање од Земљине осе ротације, дато као вектор;  $\omega$  - угаона брзина ротације Земље. Збир гравитационе и центрифугалне силе даје Земљину тежу, и то је сила која дјелује на сва тијела на Земљи, тј. тијела која су везана за Земљу и ротирају заједно с њом. Математички, тежа је једнака:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_E + \vec{z} = -Gm \iiint_E \frac{\rho}{r^3} \vec{r} dE + \vec{p} \omega^2 m. \quad (3.3)$$

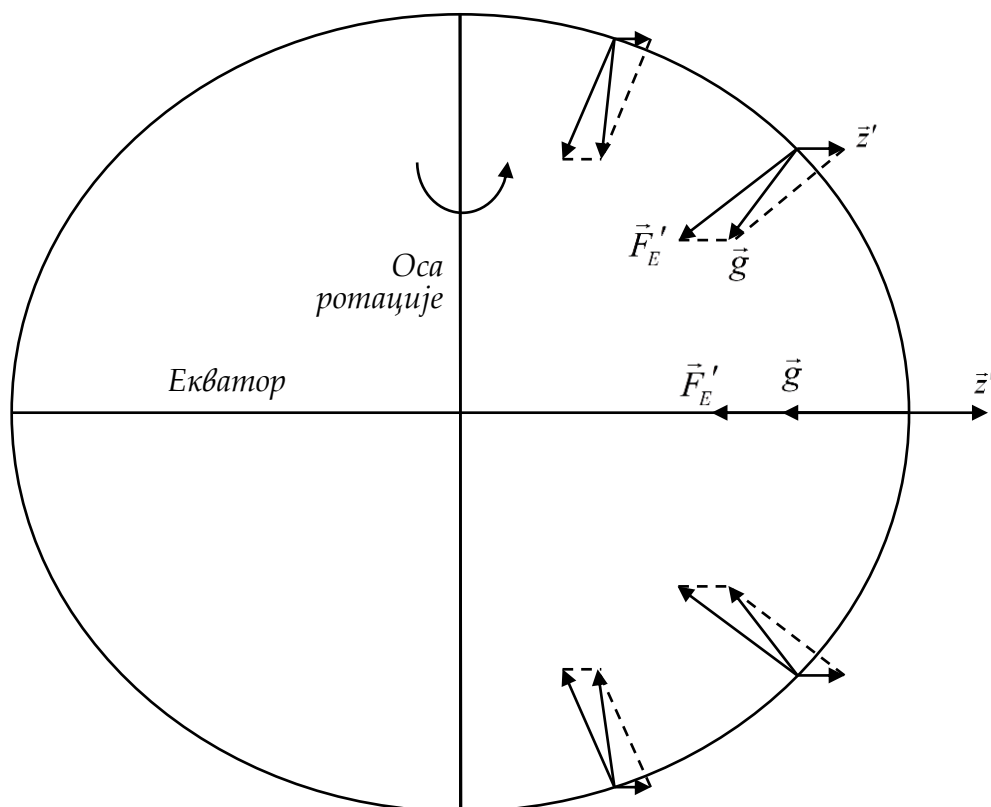
Сукладно приступу из претходног поглавља, тежа се може представити као производ масе тијела на које сила дјелује, и његовог убрзања изазваног дејством силе:

$$\vec{F}_g = \left( -G \iiint_E \frac{\rho}{r^3} \vec{r} dE + \vec{p} \omega^2 \right) m = \vec{F}_g' \cdot m = \vec{g} \cdot m. \quad (3.4)$$

На овај начин је дефинисано векторско поље убрзања теже:

$$\vec{g} = -G \iiint_E \frac{\rho}{r^3} \vec{r} dE + \vec{p} \omega^2. \quad (3.5)$$

Ово поље убрзања осликава поље теже на исти начин као што поље убрзања привлачне силе репрезентује саму привлачну силу, и може се представити као збир векторских поља убрзања привлачне и центрифугалне силе,  $\vec{g} = \vec{F}_E' + \vec{z}'$ . Правци вектора убрзања теже помјерени су за мале углове у односу на векторе убрзања гравитације (слика 3.1.). Центрифугална сила има такав правац и смјер да у општем случају смањује интензитет теже у односу на интензитет привлачне силе. Овај ефекат је најизраженији на екватору, док је на половима непостојећи, због положаја који се подударе са осом ротације.



Слика 3.1. Убрзање привлачне силе и теже Земље

Приближне вриједности гравитације, теже и центрифугалне силе на површи Земље, могу се одредити на основу познатих константи које описују њена физичка и геометријска својства, а то су геоцентрична гравитациона константа (производ универзалне гравитационе константе и масе Земље), средњи полупречник Земље и њена угаона брзина ротације (Petit & Luzum, 2010). Једноставним рачунањем, примјеном једначина (2.6) и (2.35), добија се да је у сферној апроксимацији приближна вриједност убрзања гравитационе силе  $F_E' = 9.82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . На половима је центрифугална сила једнака нули, док на екватору, на основу (3.2), износи  $z' = 0.03 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , што је тек око 0.34% вриједности гравитационог убрзања. Ротација Земље изазива њену спљоштеност на половима, и то тако да је поларни полупречник за 0.34% краћи од екваторског. Услед спљоштености и дјеловања центрифугалне силе, интензитет убрзања теже варира на физичкој површи Земље од приближно  $9.78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  на екватору, до  $9.83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  на половима (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005). Просјечна вриједност од екватора до пола износи  $9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , што се обично и узима као просјек за цијелу Земљину површ. Вриједности убрзања теже такође се мијењају и због присуства топографије, тј. топографских маса, као и због латералних промјена у густинама маса унутар Земље. У мањем обиму јављају се и временске варијације изазване геодинамичким процесима и промјенама у брзини Земљине ротације. Осим тога, присутне су и промјене које изазивају плиматски ефекти гравитационог привлачења небеских тијела, прије свега Мјесеца и Сунца, али и планета попут Венере и Јупитера (Agnew, 2015).

У геодезији се, поред јединица SI система, за изражавање убрзања теже користи и „гал“, јединица названа по Галилеу Галилеју (*Galileo Galilei, 1564-1642*), при чему је  $1 \text{ Gal} = 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Тако се може рећи да приближне вриједности убрзања теже на половима и екватору износе 983 Gal и 978 Gal, а њихова разлика 5 Gal, односно 5 000 mGal. С обзиром на то да су опажане варијације у интензитету теже на физичкој површи Земље реда величине  $10^{-6}$  до  $10^{-4}$  од самих вриједности теже, најподеснија и најчешће коришћена јединица за изражавање величина везаних за убрзање теже јесте управо „милигал“ ( $1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

Поље теже је конзервативно, будући да су и поља гравитационе и центрифугалне силе конзервативна, и његов потенцијал добија се као збир гравитационог и центрифугалног потенцијала:

$$W = \Phi + Z = G \iiint_E \frac{\rho(\vec{r})}{r} dE + \frac{1}{2} \omega^2 p^2. \quad (3.6)$$

Као и у случају силе привлачења и њеног потенцијала, ово скаларно поље садржи све информације о векторском пољу теже Земље. Но, у односу на гравитациони потенцијал, постоји једна битна разлика. Кад се на поље (3.6) примјени Лапласов оператор (2.44), добија се да је:

$$\Delta W = 2\omega^2, \quad (3.7)$$

што значи да потенцијал убрзања теже није хармонијска функција. Разлог томе је центрифугални дио његовог потенцијала који, за разлику од гравитационог, не

задовољава Лапласову једначину. Посљедишно се ни центрифугални потенцијал не може изразити у виду сферних хармоника, али то у одређивању поља теже не представља проблем, будући да је потенцијал центрифугалне силе једноставна функција положаја. Ипак, ваља напоменути да је Лапласијан поља потенцијала теже, иако различит од нуле, независан од положаја у односу на осу ротације, као и од избора координатног система (Hotine, 1969).

Потенцијал привлачења центрифугалне силе је једноставна функција положаја, али потенцијал убрзања теже  $w$  то није, због гравитационог дијела. Као и у једначини (3.1), поново треба истакнути да рачунање потенцијала (3.6) захтијева познавање распореда густине маса унутар тијела Земље, што није могуће.

### 3.2. НИВОСКЕ ПОВРШИ И ВЕРТИКАЛЕ

Иако је потенцијал убрзања теже скаларна величина, постоји могућност да се у оквиру поља потенцијала и његових параметара опише геометрија векторског поља теже, и то на интуитивно врло јасан начин. У ту сврху користи се концепт нивоских површи потенцијала и вертикала. Површи константог потенцијала убрзања теже називају се нивоским, ниво или еквипотенцијалним површима (Torge & Müller, 2012). Њихова једначина гласи:

$$W = W_i = \text{const} . \quad (3.8)$$

Да би се разумјело на који начин нивоске површи описују геометрију поља теже, потребно је утврдити њихов однос са векторима убрзања теже. Ако је потенцијал убрзања на ниво површи константан, његова промјена је очигледно једнака нули приликом кретања дуж ниво површи, односно  $dW = 0$ . Промјена потенцијала између тачака поља је рад који је потребно уложити за премјештање јединичне масе из једне тачке у другу. Тај рад једнак је производу убрзања силе и пређеног пута, и за кретање дуж ниво површи вриједи:

$$dW = \vec{g} \cdot d\vec{s} = 0 , \quad (3.9)$$

гдје је  $d\vec{s}$  диференцијално растојање дуж ниво површи. Пошто се уложени рад рачуна као скаларни производ вектора убрзања и вектора растојања, може се записати да је:

$$\vec{g} \cdot d\vec{s} = g \cdot ds \cdot \cos \alpha = 0 , \quad (3.10)$$

при чему је  $\alpha$  угао којег граде два вектора. Како су и убрзање теже и диференцијални елемент растојања величине различите од нуле, јасно је да је у претходној једначини  $\cos \alpha = 0$ , из чега слиједи да је  $\alpha = 90^\circ$ . Другим ријечима, вектори убрзања теже су у свакој тачки управни на нивоске површи (слика 3.2).

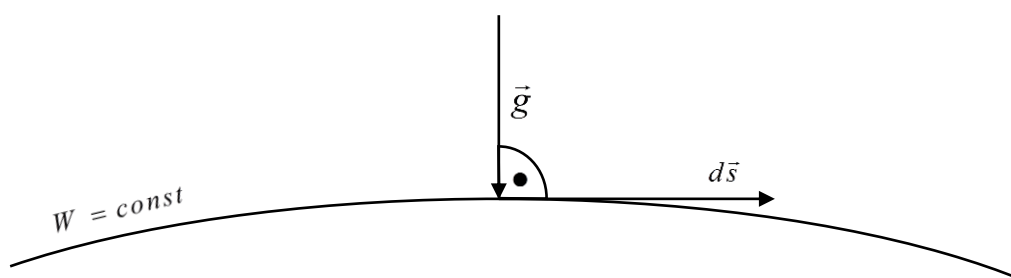
Кад се претходно разматрање примјени на промјену потенцијала у правцу супротном од вектора убрзања, добија се да је:

$$dW = \vec{g} \cdot d\vec{h} = g \cdot dh \cdot \cos \alpha . \quad (3.11)$$

Како је у овом случају  $\alpha = 180^\circ$ , слиједи да је  $dW = -g \cdot dh$ , односно:

$$g = -\frac{dW}{dh}. \quad (3.12)$$

Узевши у обзир претходну констатацију о управности вектора убрзања теже и ниво површи, израз (3.12) показује да се убрзање може тумачити као однос разлике потенцијала и међусобног растојања двије бесконачно блиске ниво површи. Овај закључак се намеће већ на основу поглавља 1 и самог концепта ниво површи, али његов главни значај је што једначина (3.12) служи као теоријска основа за дефинисање система висина у пољу теже. Она показује да се разлике потенцијала између тачака могу добити комбиновањем инкременталних прираштаја висинских разлика измјерених дуж неког пута, и вриједности убрзања теже дуж истог тог пута.



Слика 3.2. Однос ниво површи и вектора убрзања теже

Због претходно наведене везе са пољем теже и чињенице да су међусобно управне са векторима убрзања, ниво површи су свуда хоризонталне и дају физички смисао појму хоризонталног, а самим тим и вертикалног. У основи, поље теже дефинише шта је хоризонтално а шта вертикално на физичкој површи Земље, и то управо кроз потенцијал и његове еквипотенцијалне површи. Тиме је обликован и условљен свакодневни живот на Земљи, укључујући и геодетска мјерења у пољу теже. Сви терестрички геодетски инструменти се приликом мјерења хоризонтирају, што у ствари представља довођење вертикалне осе инструмента у правац локалног вектора убрзања теже. То се постиже коришћењем либела које су испуњене течномшћу. Површ хомогеног флуида, у стању мировања, поклапа се са нивоском површи поља потенцијала теже. Чим се површ флуида изведе из овог равнотежног стања, јавља се компонета силе која дјелује дуж површи док је не врати у стање равнотеже и подударана са ниво површи. Резултат поступка хоризонтирања је да се сва мјерења извршена у пољу теже односе на правце локалних вектора убрзања. Такође, поменута особина воде да не тече дуж нивоских површи објашњава и њихову претходно констатовану суштинску везу са појмом физички дефинисаних висина. Јасно је да су, у физичком смислу, тачке са истом висином на површи Земље заправо тачке које се налазе на истој ниво површи, тј. имају исту вриједност потенцијала убрзања теже. Зато је потенцијал природна мјера за висину у пољу теже Земље. Уређаји за директно мјерење потенцијала још увијек не постоје, али једначина (3.12) даје теоријску основу за његово посредно одређивање, тј. одређивање његових разлика.

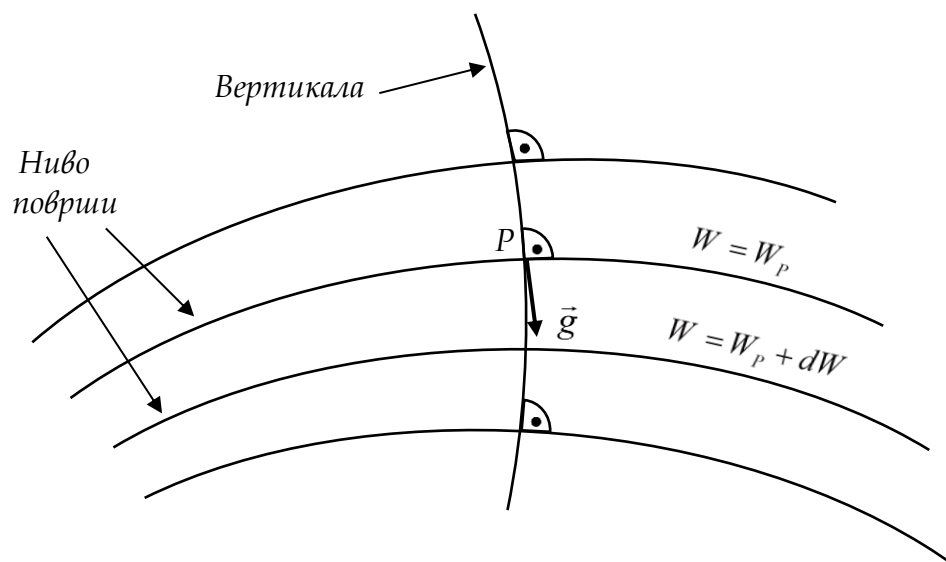


Особине нивоских површи изван масе Земље могу се сажети на сљедећи начин (Krakiwsky & Vaniček, 1986):

- то су затворене површи које у потпуности обухватају једна другу; не додирују се и не пресијецају;
- локални полупречници кривина имају исти предзнак; ниво површи су свуда конвексне;
- непрекидне су и међусобно конвергирају.

Посљедња особина ниво површи, о конвергенцији, везана је за питање да ли је убрзање теже на ниво површима константно. Наиме, убрзање није константно, већ се неправилно мијења у простору због претходно наведених особина тијела Земље, као што су спљоштеност и неправилан распоред густина. Ниво површи имају константан потенцијал, па су и разлике потенцијала између њих константне. Кад се у обзир узме израз (3.12), јасно је да је растојање између њих промјенљиво, и да управо зависи од промјенљивог интензитета убрзања теже. Тамо гдје је убрзање веће, ниво површи су ближе једна другој, и обрнуто. Другим ријечима, ниво површи нису међусобно паралелне и конвергирају у одређеним правцима. Посматрано глобално, главна конвергенција је од екуатора ка половима, због претходно споменутог ефекта центрифугалне силе и јачег убрзања на половима.

Непаралелност ниво површи повлачи за собом још једну посљедицу. Линије силе Земљиног поља теже, које су везане за правце вектора убрзања и у свакој тачки управне на нивоске површи, нису праве већ криве линије (слика 3.3). Ове линије називају се вертикалама, а правци вектора теже су у свакој тачки тангенте на вертикалу. Према томе, фраза која се често користи у гедоезији, „правац вертикале“, очигледно није исправна, будући да су вертикале криве линије. Правци вектора убрзања су тангенте вертикале, и као што је већ речено, са овим правцима се поклапају вертикалне осе инструмената приликом хоризонтирања.



Слика 3.3. Ниво површи и вертикале

Ниво површи потенцијала по природи ствари садрже информације о пољу теже, и њихова непаралелност осликава варијације у интензитету теже, које су пак последица неправилног распореда маса. Да је Земља хомогено тијело, и нивоске површи биле би паралелне. Но, са повећањем растојања од физичке површи Земље, све више се губи гравитациони сигнал, тако да и поље теже (тачније, гравитационо поље, будући да објекти на великим висинама нису везани за Земљу, па тако ни центрифугално поље не игра више улогу) постаје практично радијално поље чији интензитет зависи само од растојања од центра масе Земље, а ниво површи постају концентричне кружнице.

### 3.2.1. Геоид

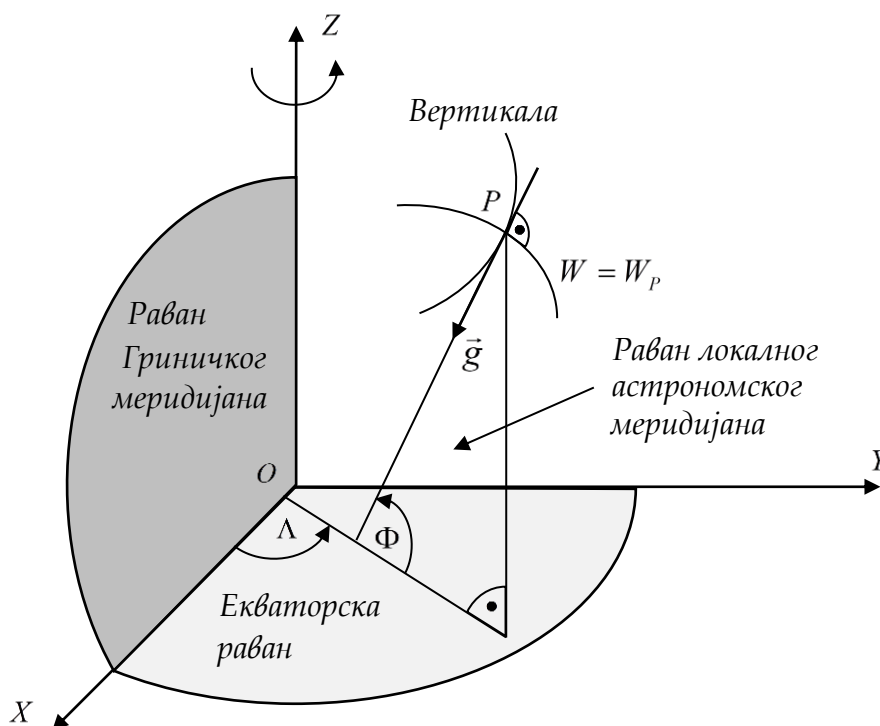
Од бесконачно много нивоских површи, једна је нарочито важна. У питању је „геоид“, који представља екипотенцијалну површ поља потенцијала Земљине теже која најбоље глобално апроксимира средњи ниво мора. Једначина геоида је у основи једноставна и гласи:

$$W = W_0 = const. \quad (3.13)$$

Одређивање геоида је од суштинске важности у геодезији, океанографији и геофизици. Као нивоска површ он репрезентује поље теже и дистрибуцију масе унутар Земље, а служи и као референтна површ за физичке висине. Ваља напоменути да геоид никако не представља „стварни облик Земље“, што је формулација која се често може чути. У питању је ниво површ потенцијала која представља поље теже и посредно карактерише масу Земље која то поље генерише. Може се рећи и да геоид осликава физичку стварност дефинисану гравитационом и центрифугалном силом, у смислу његове хоризонталности и улоге референтног нивоа, али то је све различито од дефиниције стварног облика Земље. Иако преко 70% Земљине површине чине мора и океани, чак ни то не имплицира поменуто улогу геоида као стварног облика Земље, будући да се геоид не подударе са средњим нивоом мора, иако је нивоска површ. Разлог томе је што сам средњи ниво мора, чак и када се уклоне периодични поремећаји, не представља ниво површ јер на његов облик не утиче само сила теже. Феномени попут морских струја и атмосферског притиска мијењају физичка својства океанске водене масе доприносећи тако одступању површи средњег нивоа мора од геоида, тј. од ниво површи. Ово одступање је метарског нивоа и у литератури се обично назива средњом динамичком топографијом морске површи (Pugh & Woodworth, 2014).

На геоид се начелно односе и тзв. астрономске, или природне координате на физичкој површи Земље. У питању су астрономска ширина  $\Phi$ , астрономска дужина  $\Lambda$  и потенцијал убрзања теже  $w$  (слика 3.4). Астрономска ширина и дужина описују правац вектора убрзања теже (или условно речено, правац вертикале) у тачки  $P$ , док потенцијал даје њен положај у систему ниво површи  $W = const$ . Ширина  $\Phi$  је угао у равни астрономског меридијана тачке, између равни екватора и правца вектора убрзања у тачки  $P$ . Може имати вриједности од  $0^\circ$  до  $+90^\circ$  сјеверно од екватора, и од  $0^\circ$  до  $-90^\circ$  јужно од екватора. Дужина  $\Lambda$  је угао у равни екватора, између равни меридијана тачке и равни почетног меридијана, за шта се обично узима меридијан у Гриничу. Узима вриједности од  $0^\circ$  до  $+180^\circ$  источно од Гринича, и од  $0^\circ$  до  $-180^\circ$

западно од Гриничког меридијана, мада постоје и обрнуте конвенције (Karttunen et al., 2017).



Слика 3.4. Астрономске координате

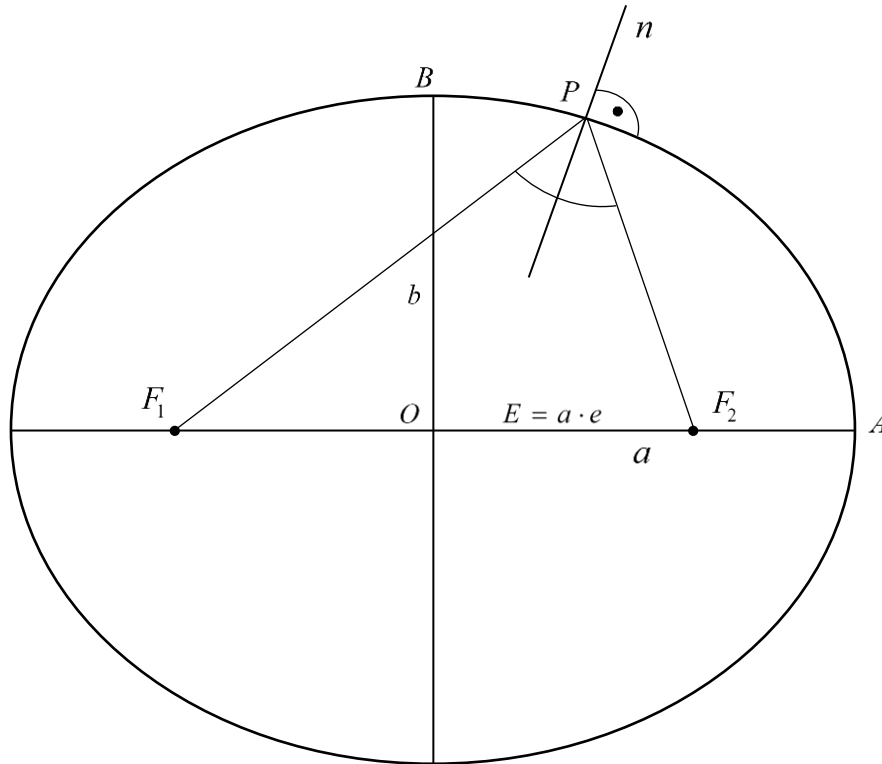
Иако је теоријски потпуно дефинисан физичким параметром, својим потенцијалом  $W_0$  као скаларном величином, пуни смисао геоид добија кад се дефинише његова геометрија, тј. његов геометријски положај у простору. Да би то било могуће, потребно је прво увести концепт нивоског елипсоида, те нормалног и аномалијског поља теже.

### 3.3. НОРМАЛНО ПОЉЕ ТЕЖЕ

У савременој геодезији опште је прихваћено коришћење двоосног обртног елипсоида као референтног геометријског модела Земље. Елипсоид као геометријска површ је довољно близак општем облику Земље да се може користити за изражавање положаја, а да се при том редукације мјерења са физичке површи Земље на елипсоид у већини случајева могу занемарити, или су пак једноставне. Истовремено, рачунања на елипсоиду нису одвећ компликована због његове релативне математичке једноставности. Но, елипсоид се користи и као физички модел Земље, тј. за потребе апроксимације њеног поља теже. То се постиже дефинисањем одговарајућих параметара, првенствено масе елипсоида и његове угаоне брзине ротације, као и његовог положаја у односу на тијело Земље. На тај начин добија се нормално поље теже, а у том концепту и сам елипсоид представља једну од нивоских површи потенцијала нормалне теже. Овако дефинисано нормално поље апроксимира стварно поље теже са релативном тачношћу од  $10^{-4}$  до  $10^{-5}$  (Sansò & Sideris, 2013).

### 3.3.1. Геометрија обртног елипсоида

Теоријски, површ двосног обртног елипсоида настаје ротацијом елипсе око њене мале осе. Тако је сам елипсоид математички дефинисан преко параметара који дефинишу елипсу, а то су велика полуоса  $a = OA$  и мала полуоса  $b = OB$  (слика 3.5).

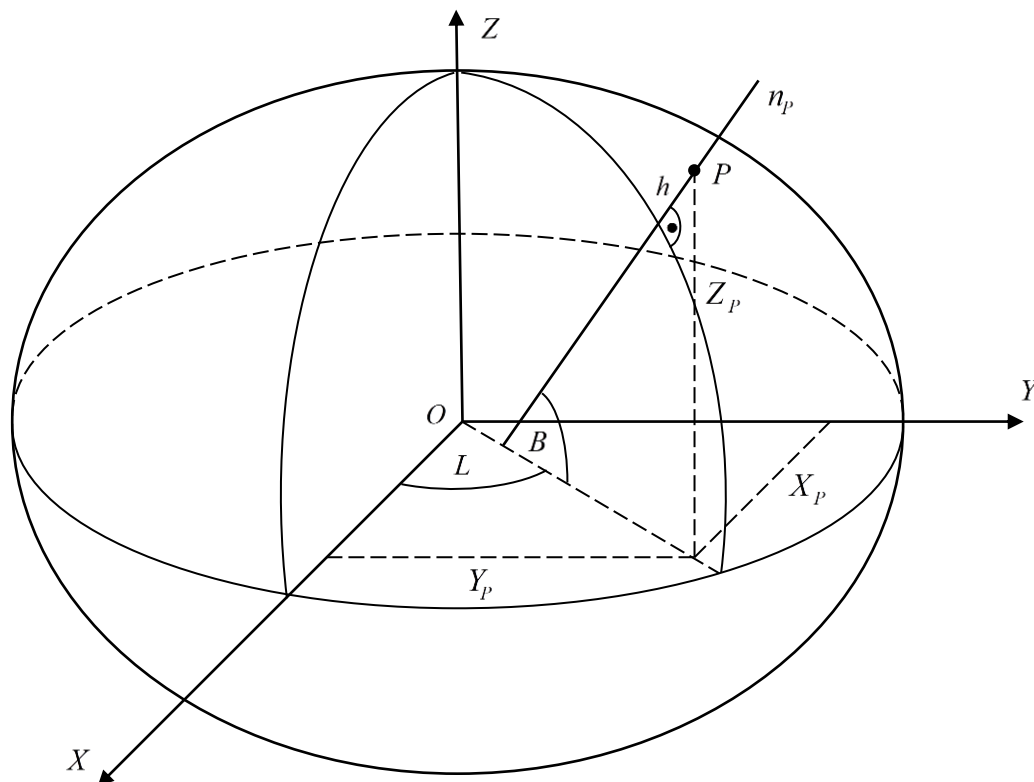


Слика 3.5. Елементи елипсе

За елипсу су карактеристичне двије фокалне тачке (жиже),  $F_1$  и  $F_2$ . Вриједи да је збир растојања до ове двије тачке константан за све тачке елипсе и једнак дужини велике осе, односно  $F_1P + F_2P = 2a$  (Карр, 1991). Такође, симетрала угла којег заклапају линије које тачку елипсе спајају са жижама, уједно је и линија управна на елипсу у датој тачки. Преостали важни геометријски параметри јесу:

- први нумерички ексцентрицитет,  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ ,
- други нумерички ексцентрицитет,  $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ ,
- поларна спљоштеност,  $\frac{a - b}{a}$ ,
- линеарни ексцентрицитет,  $E = OF = a \cdot e$ .

Да би се описао тродимензионални положај тачака у односу на елипсоид, користи се неколико врста координата. Најчешће су то тзв. геодетске или елипсоидне координате. У питању су геодетска ширина, дужина и елипсоидна висина (слика 3.6).



Слика 3.6. Геодетске координате

Геодетска ширина тачке  $P$  је угао мјерен у меридијанској равни тачке, између екваторске равни елипсоида и елипсоидне нормале  $n_p$  кроз посматрану тачку. Узима вриједности од  $0^\circ$  до  $+90^\circ$  сјеверно од екватора, и од  $0^\circ$  до  $-90^\circ$  јужно од екватора. Ширина се обично означава са  $B$  или  $\varphi$ . Геодетска дужина је угао мјерен у равни екватора, између почетног меридијана (садржи  $X$  осу правоуглог система) и меридијанске равни тачке  $P$ . Њене вриједности су од  $0^\circ$  до  $+180^\circ$  источно од нултог меридијана, и од  $0^\circ$  до  $-180^\circ$  западно од почетног меридијана. Дужина се означава са  $L$  или  $\lambda$ . Елипсоидна висина  $h$  је растојање дуж елипсоидне нормале од елипсоида до тачке  $P$ . Може бити позитивна (тачка изнад елипсоида) или негативна (тачка испод елипсоида).

Геодетске координате су геометријски пандан природним координатама. Као што астрономска ширина и дужина описују правац вектора убрзања теже, тако геодетска ширина и дужина дају правац елипсоидне нормале. Притом је нормала управна на елипсоид, као што је вертикала управна на геоид. Тродимензионални геометријски положај се еквивалентно може описати координатама у просторном праволинијском правоугаоном систему, означеним са  $X_p$ ,  $Y_p$  и  $Z_p$ . Под условом да је координатни систем на одговарајући начин придружен елипсоиду (координатни почетак у геометријском средишту елипсоида,  $Z$  оса подударна са малом осом елипсоида,  $X$  оса садржи почетни меридијан), између геодетских и правоуглих координата постоји егзактна математичка веза и координате се могу међусобно прерачунавати, односно  $(B, L, h) \Leftrightarrow (X, Y, Z)$  (Vermeer & Rasila, 2020).

### 3.3.2. Потенцијал и убрзање нормалне теже

Обртни елипсоид не представља само геометријску апроксимацију Земље неопходну за изражавање положаја, већ чини и основу за апроксимирање њеног поља теже. Ако се елипсоид дефинише као тијело које има масу, и које има одговарајући положај спрам тијела Земље, могуће је дефинисати поље теже елипсоида које се назива нормалним пољем. Постоји неколико математичких услова који дефинишу карактеристике оваквог елипсоида. Његова маса треба да је једнака маси Земље, а центар масе да се подудара са центром масе Земље. Осим тога, елипсоид се око мале осе ротира угаоном брзином једнаком брзини ротације Земље, а сама мала оса се подудара са средњом осом Земљине ротације. Овако дефинисано тијело често се назива и нормалном Земљом (Одаловић, 2010). Распоред масе нормалне Земље дефинише поље потенцијала убрзања нормалне теже. У овом концепту, сам елипсоид је једна од ниво површи нормалног потенцијала. Такође, ниво елипсоид се дефинише тако да најбоље апроксимира површ геоида у геометријском смислу.

За потпуно геометријско и физичко описивање нивоског елипсоида потребна су четири параметра. Уобичајено је да се узимају велика полуоса елипсоида, геоцентрична гравитациона константа, динамички фактор облика и угаона брзина ротације. У табели 3.1 дате су дефинишуће константе геодетског референтног система из 1980. године (*Geodetic Reference System 1980 – GRS80*), који је усвојен и препоручен за коришћење од стране Међународне уније за геодезију и геофизику (*International Union of Geodesy and Geophysics – IUGG*) на њиховој 17. генералној скупштини, децембра 1979. године (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).

**Табела 3. 1.** Параметри система GRS80

Параметар и вриједност	Опис
$a = 6\,378\,137\text{ m}$	Велика полуоса елипсоида.
$GM = 3\,986\,005 \cdot 10^8\text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$	Геоцентрична гравитациона константа Земље.
$J_2 = 108\,263 \cdot 10^{-8}$	Динамички фактор облика.
$\omega = 7\,292\,115 \cdot 10^{-11}\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Угаона брзина ротације Земље.

На основу задата четири параметра могу се срачунати сви остали геометријски и физички параметри елипсоида и његовог нормалног поља теже. Тако се нпр. први нумерички ексцентрицитет рачуна итеративно, при чему је информација о облику елипсоида иницијално задана динамичким фактором облика. Наиме, фактор  $J_2$  дефинише се као:

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2}, \quad (3.14)$$

гдје су  $C$  и  $A$  поларни и екваторски момент инерције ниво елипсоида, респективно. Из табеле 3.1. и структуре параметара видљиво је да је поље теже нивоског елипсоида

потпуно одређено његовим обликом и величином, његовом масом, као и угаоном брзином обртања.

Поље убрзања нормалне теже карактеришу све величине које описују и стварно поље, као што су нормални потенцијал, нормално убрзање теже, нормалне вертикале и нормалне еквипотенцијалне површи<sup>2</sup>. Разлика је у томе што се код нормалног поља све ове величине могу једноставно срачунати, будући да је у питању правилно, моделско поље. Сам нормални потенцијал означава се са  $U$ , и у складу са претходно реченим, функција је положаја у спољашњем простору изван елипсоида, односно:

$$U = U(X, Y, Z). \quad (3.15)$$

Потенцијал унутар елипсоида није дефинисан, као ни његови изводи, из разлога што није дефинисан распоред густине његове масе. За овај распоред се сматра да је правилан, и то је довољно да нормално поље буде једнозначно дефинисано. Ово је могуће захваљујући Стоксовој теорему и Дирихлеовом принципу, који кажу да се функција која је хармонијска изван неке површи, може једнозначно одредити из њених вриједности познатих на тој површи (Одаловић, 2010). Конкретно, та површ је сам елипсоид који, како је већ речено, представља нивоску површ нормалног потенцијала. Потенцијал на елипсоиду рачуна се на основу израза:

$$U_0 = \frac{GM}{E} \arctan e' + \frac{1}{3} \omega^2 a^2. \quad (3.16)$$

Потоњи израз јасно раздваја гравитациони и центрифугални дио потенцијала, и потврђује претходно изнесену тезу да је потенцијал одређен обликом и величином елипсоида, његовом масом и угаоном брзином обртања. Такође, вриједи да је нормални потенцијал елипсоида једнак стварном потенцијалу геоида, односно:

$$U_0 = W_0. \quad (3.17)$$

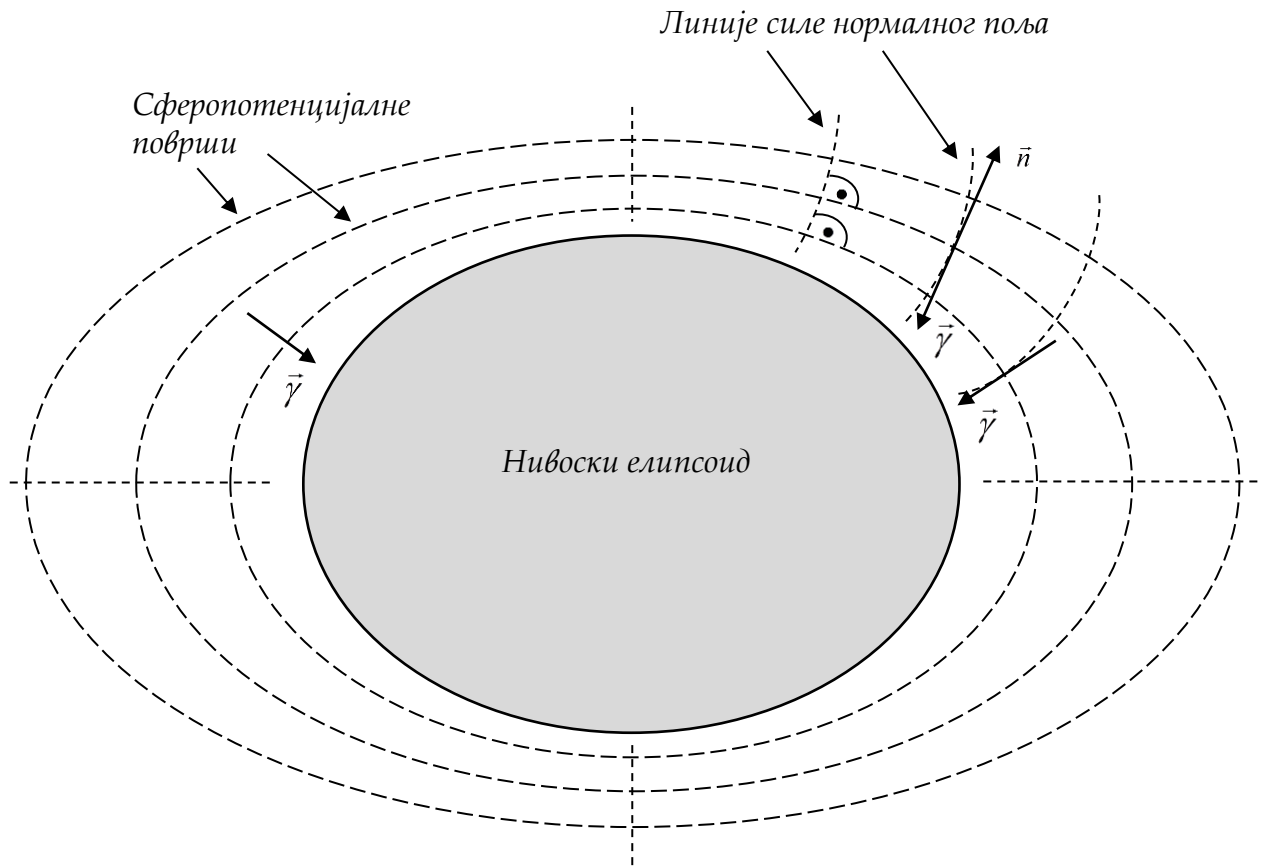
Аналогно изразу (3.12), убрзање нормалне теже дефинише се као градијент нормалног потенцијала, и може се представити као:

$$\gamma(X, Y, Z) = -\frac{\partial U}{\partial n}, \quad (3.18)$$

гдје је  $\frac{\partial}{\partial n}$  извод у правцу спољашње нормале  $n$  на ниво површ нормалног потенцијала (Vermeer, 2020). Овај правац се разликује од правца елипсоидне нормале у датој тачки, због непаралелности ниво површи нормалног потенцијала и закривљености линија силе. Наиме, нормално поље осликава глобалне карактеристике стварног поља теже, а једна од основних карактеристика јесте спљоштеност елипсоида и веће вриједности убрзања нормалне теже на половима у односу на екватор. То последично доводи до конвергенције ниво површи ка половима и до закривљености нормалних вертикала, као што је илустровано на слици

<sup>2</sup> У литератури се повремено користи терминологија гдје се ниво површи нормалног потенцијала називају сферопотенцијалним, а ниво површи стварног потенцијала геопотенцијалним површима.

3.7. Ваља напоменути да су, за разлику од стварних, нормалне вертикале закривљене само у меридијанској равни.



Слика 3.7. Нивоски елипсоид и нормално поље теже

Да би се срачунала вриједност убрзања нормалне теже у произвољној тачки, обично се почиње од рачунања убрзања у тачки на елипсоиду, тј. у тачки која се налази у подножју елипсоидне нормале кроз дату тачку. Након тога се у обзир узима висина посматране тачке изнад елипсоида. Комплетно рачунање обавља се у геодетским координатама, будући да оне адекватно описују геометријски положај тачке у односу на елипсоида и унутар његовог поља теже. Први корак је рачунање помоћних величина:

- $m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$ ,
- $2q_0 = \left(1 + \frac{3}{(e')^2}\right) \arctan e' - \frac{3}{e'}$ ,
- $q'_0 = 3 \left(1 + \frac{1}{(e')^2}\right) \left(1 - \frac{1}{e'} \arctan e'\right) - 1$ .

Сада се могу срачунати нормална убрзања на екватору:



$$\gamma_a = \frac{GM}{ab} \left( 1 - m - \frac{m}{6} \cdot \frac{e'q'_0}{q_0} \right), \quad (3.19)$$

и на половима:

$$\gamma_b = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{m}{3} \cdot \frac{e'q'_0}{q_0} \right). \quad (3.20)$$

Нормално убрзање у тачки на елипсоиду добија се из чувене формуле Сомиглианија (*Carlo Somigliana, 1860-1955*):

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a \cos^2 B + b\gamma_b \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}. \quad (3.21)$$

Важно је примјетити да нормално убрзање не зависи од лонгитуде  $L$ . Разлог томе је ротациона симетрија елипсоида, тј. његова спљоштеност на половима. Убрзање у тачки на висини  $h$  рачуна се као:

$$\gamma_h = \gamma_0 \left( 1 - 2 \cdot (1 + f + m - 2f \sin^2 B) \cdot \frac{h}{a} + 3 \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right). \quad (3.22)$$

Једна од важнијих величина у нормалном пољу је и вертикални градијент убрзања нормалне теже на елипсоиду, дефинисан као други извод нормалног потенцијала. Овај градијент се често користи као апроксимација градијента стварне теже на физичкој површи Земље, и рачуна се из израза:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\gamma_0 \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) - 2\omega^2 = -2\gamma_0 \cdot J - 2\omega^2. \quad (3.23)$$

Величине  $M$ ,  $N$  и  $J$  описују закривљеност елипсоида у датој тачки. Полупречници закривљености у правцу меридијана  $M$  и у правцу првог вертикала  $N$  рачунају се као:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 B)^3}}, \quad (3.24)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}.$$

Величина  $J$  је средња закривљеност елипсоида:

$$J = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right). \quad (3.25)$$

### 3.4. АНОМАЛИЈСКИ ПОТЕНЦИЈАЛ

Нормално поље потенцијала теже репрезентује идеализовани случај, поље какво би постојало да је Земља тијело правилног геометријског облика и хомогеног унутрашњег распореда густина маса. Као такво, оно представља теоријску основу са којом се може поредити стварно поље. Управо то је концепт одређивања стварног поља. Оно се одређује тако што се одређују његова одступања од нормалног поља. То прије свега подразумева раздвајање стварног потенцијала на нормални и поремећајни дио:

$$W = U + T. \quad (3.26)$$

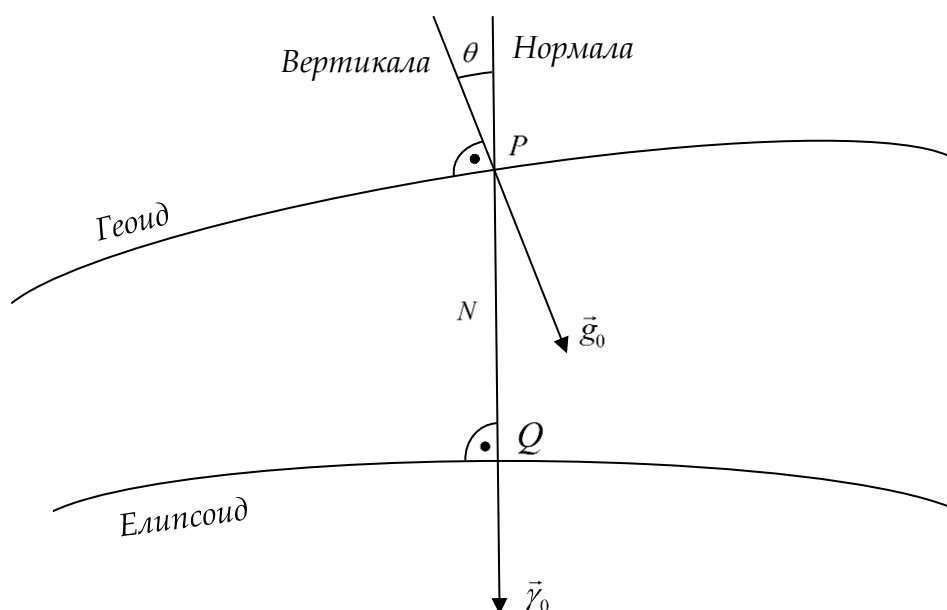
На овај начин дефинисан је поремећајни или аномалијски потенцијал  $T$ . Како нормално потенцијално поље  $U$ , посматрајући глобално, представља одличну апроксимацију стварног поља  $W$ , вриједи да је:

$$O(T) \sim 10^{-5} O(W), \quad (3.27)$$

гдје је  $O$  ред величине потенцијала. Другим ријечима,  $T$  је идеално непознато поље за третман његових нелинеарних функционала, с обзиром на то да су релативне грешке линеаризације реда величине  $10^{-10}$  (Sansò & Sideris, 2013). Прије анализе функционала аномалијског потенцијала, инструктивно је упознати се са општим односом геоида и елипсоида као референтних површи стварног и нормалног поља.

#### 3.4.1. Однос геоида и елипсоида

Геометријски однос геоида и елипсоида, и повезаних величина, илустрован је на слици 3.8. Дат је геоид са тачком  $P$  и вектором стварног убрзања теже  $\vec{g}_0$ , и елипсоид са тачком  $Q$  и вектором убрзања нормалне теже  $\vec{\gamma}_0$ . Сходно претходним дефиницијама, вриједи да је  $W_P = U_Q$ .



Слика 3.8. Однос геоида и елипсоида

Растојање  $PQ$  између геоида и елипсоида, рачунато дуж елипсоидне нормале, назива се ундулацијом геоида или геоидном висином, и означава се са  $N$ . Иако је у начелу геоид одређен својим потенцијалом  $W_0$ , у практичном смислу далеко је важније његово геометријско одређивање у односу на елипсоид, а оно подразумејева познавање ундулације у свакој тачки. Са познатим ундулацијама, могуће је између осталог успоставити геометријску везу између елипсоидних и физичких висина, будући да се ове потоње односе на геоид као референтну површ. Претходно изнесен услов једнакости запремине геоида и елипсоида сада се може математички изразити као:

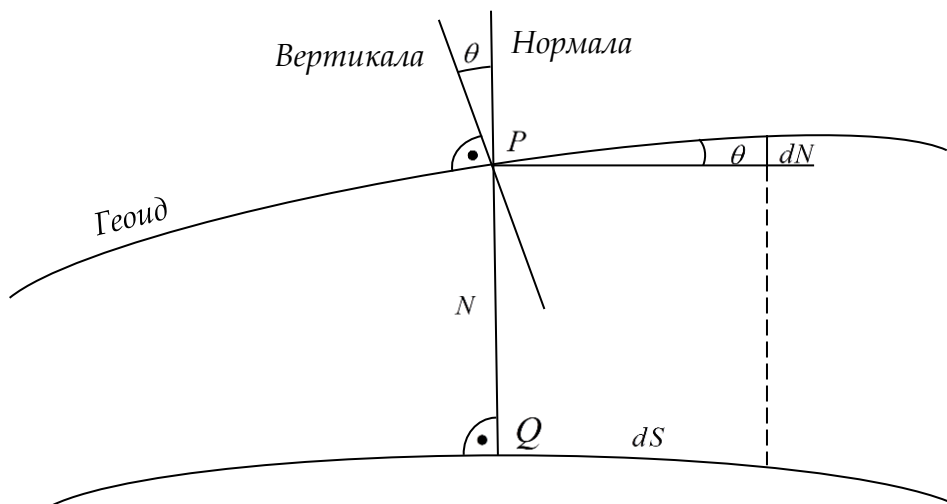
$$\iint_{\rho} N^2 d\rho = \min, \tag{3.28}$$

при чему се интеграција врши по цијелој површи елипсоида  $\rho$ . Ундулације геоида у односу на општи Земљин елипсоид (нормалну Земљу) крећу се у распону од приближно  $\pm 100$  m (Vermeer, 2020).

Вектори стварног и нормалног убрзања разликују се и по интензитету и по правцу. Разлика у интензитетима назива се аномалијом убрзања теже:

$$\Delta g = |\vec{g}_0| - |\vec{\gamma}_0| = g_0 - \gamma_0. \tag{3.29}$$

Разлика у правцима је угао  $\theta$ , и назива се одступањем, или отклоном вертикале. Отклони вертикале су мали углови, реда величине неколико лучних секунди, или евентуално десетина секунди, али имају велики концептуални значај. Они практично представљају нагиб геоида у односу на елипсоид. Ово постаје јасно када се погледа слика 3.9.



Слика 3.9. Ундулација геоида и отклон вертикале

Анализом геометријских односа на слици 3.9. постаје јасно да се мали угао  $\theta$ , односно отклон вертикале, може представити као:

$$\theta = -\frac{dN}{dS}. \quad (3.30)$$

Другим ријечима, отклон вертикале представља брзину промјене ундулације  $N$  по дужини  $S$ , тј. њен извод по дужини. Негативан предзнак у (3.30) ствар је конвенције. Отклон вертикале се обично разлаже на двије ортогоналне компоненте. То су компонента у правцу меридијана  $\xi$  (пројекција отклона на меридијанску раван) и компонента у правцу првог вертикала  $\eta$  (пројекција на раван првог вертикала). Компоненте се сматрају позитивним ако је вертикала „сјевернија“ и „источнија“ од нормале, односно ако се ундулација смањује у правцу сјевера и истока (Krakiwsky & Vaníček, 1986). Ове двије компоненте такође повезују астрономске и геодетске координате:

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi - B, \\ \eta &= (\Lambda - L) \cos B. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ако су познате компоненте, укупно одступање се рачуна као:  $\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ . Вриједност одступања у произвољном азимуту  $\alpha$  биће:  $\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$ .

Још једна величина од значаја јесте поремећај убрзања теже. То је разлика стварног и нормалног убрзања у истој тачки  $P$  (слика 3.8):

$$\delta g = |\vec{g}_P| - |\vec{\gamma}_P| = g_P - \gamma_P. \quad (3.32)$$

### 3.4.2. Функционали аномалијског потенцијала

Како још увијек не постоје уређаји за директно мјерење вриједности потенцијала, то се ни поремећајни потенцијал не може мјерити. Умјесто тога, за описивање одступања стварног од нормалног поља користе се величине које се могу мјерити на физичкој површи Земље, или пак из других мјерења срачунати, и које су истовремено математички повезане са поремећајним потенцијалом  $T$ . Пошто се могу представити као функције аномалијског потенцијала, називају се његовим функционалима. Функционали су управо претходно дефинисане величине: ундулација геоида, поремећај убрзања теже, аномалија убрзања и одступања вертикала. У том концепту, кључно је извести и разумјети њихову везу са аномалијским потенцијалом.

#### 3.4.2.1. Ундулација геоида

За извођење релација између поремећајног потенцијала и његових функционала, послужиће слика 3.8. На њој су приказани геоид  $W_0$  и елипсоид  $U_0$ , заједно са векторима стварног и нормалног убрзања, који су везани за вертикалу и нормалу. Нормално убрзање у тачки геоида  $P$  може се добити као:

$$U_P = U_Q + \left( \frac{\partial U}{\partial h} \right)_Q \cdot N. \quad (3.33)$$

С обзиром на однос убрзања и потенцијала, слиједи:

$$U_P = U_Q - \gamma_Q \cdot N \Rightarrow N = \frac{U_Q - U_P}{\gamma_Q}. \quad (3.34)$$

Како је  $U_Q = U_0 = W_0$  и  $W_0 = W_P$ , за ундулацију се добија:

$$N = \frac{W_P - U_P}{\gamma_Q} = \frac{T_P}{\gamma_Q}. \quad (3.35)$$

Израз (3.35) назива се Брунсовом једначином (*Ernst Heinrich Bruns, 1848-1919*) и повезује поремећајни потенцијал и геоидну висину.

#### 3.4.2.2. Поремећај убрзања теже

За стварно и нормално убрзање теже у тачки геоида може се написати:

$$\begin{aligned} g_P &= |\text{grad } W_P| = -\left(\frac{\partial W}{\partial h}\right)_P, \\ \gamma_P &= |\text{grad } U_P| = -\left(\frac{\partial U}{\partial h}\right)_P. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Сада се за поремећај убрзања теже добија:

$$\delta g_P = g_P - \gamma_P = |\text{grad } (W_P - U_P)| = |\text{grad } T_P| = -\frac{\partial T_P}{\partial h}, \quad (3.37)$$

што представља његову везу са аномалијским потенцијалом.

#### 3.4.2.3. Аномалија убрзања теже

Аномалија убрзања представља разлику убрзања стварне теже на геоиду и нормалне на елипсоиду:

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q. \quad (3.38)$$

Овај израз се може трансформисати једноставном математичком манипулацијом, и узимајући у обзир (3.37) добија се:

$$\Delta g = g_P - \gamma_P + \gamma_P - \gamma_Q = \delta g_P + (\gamma_P - \gamma_Q). \quad (3.39)$$

Нормално убрзање у тачки геоида може се добити као:

$$\gamma_P = \gamma_Q + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_Q \cdot N, \quad (3.40)$$

из чега слиједи да је:

$$\gamma_P - \gamma_Q = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_Q \cdot N. \quad (3.41)$$

Сада се (3.39) може записати у облику:

$$\Delta g = \delta g_p + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_q \cdot N. \quad (3.42)$$

Када се укључе једначине (3.35) и (3.37), коначно се добија:

$$\Delta g = -\frac{\partial T_p}{\partial h} + \frac{1}{\gamma_q} \cdot \left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_q \cdot T_p. \quad (3.43)$$

Израз (3.43) назива се фундаменталном једначином физичке геодезије. Повезује аномалију убрзања теже  $\Delta g$  са поремећајним потенцијалом. То је значајно из разлога што се аномалије могу релативно једноставно одредити из резултата мјерења убрзања теже на физичкој површи Земље. Може се рећи да фундаментална једначина представља полазну основу за извођење Стоксове једначине (*George Gabriel Stokes, 1819-1903*), која пак омогућава одређивање геоида на основу аномалија теже (Одаловић, 2010).

#### 3.4.2.4. Одступања вертикала

На основу израза (3.30), компоненте одступања вертикала у главним правцима могу се представити као:

$$\xi = -\frac{dN}{dS_\Phi} \quad \eta = -\frac{dN}{dS_\Lambda}. \quad (3.44)$$

Ако се са  $R$  означи средњи полупречник Земље, прираштаји растојања су:

$$dS_\Phi = R \cdot d\Phi \quad dS_\Lambda = R \cdot d\Lambda \cdot \cos \Phi. \quad (3.45)$$

Узимајући у обзир Брунсову формулу (3.35) слиједи:

$$\xi = -\frac{1}{R} \frac{dN}{d\Phi} = -\frac{1}{R\gamma} \frac{dT}{d\Phi} \quad \eta = -\frac{1}{R \cos \Phi} \frac{dN}{d\Lambda} = -\frac{1}{R\gamma \cos \Phi} \frac{dT}{d\Lambda}. \quad (3.46)$$

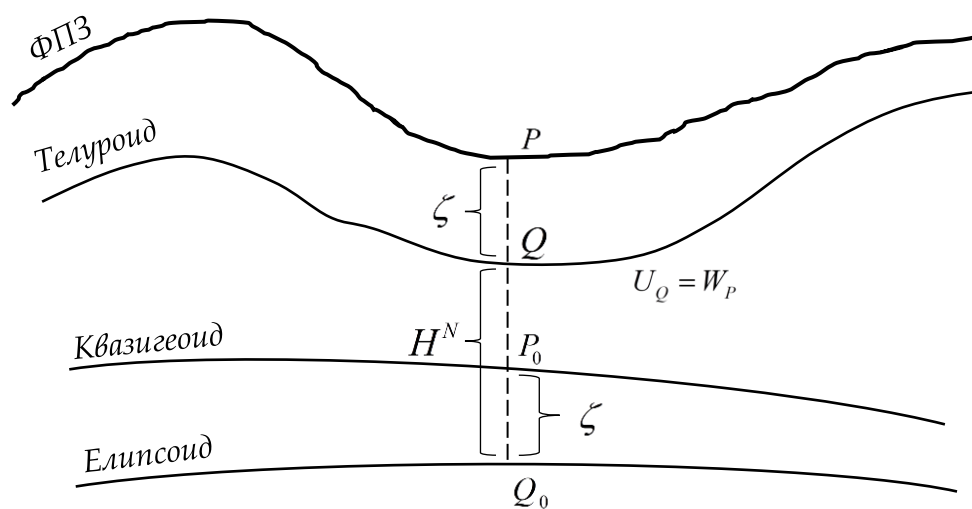
Посљедњи изрази се могу комбиновати са поменутом Стоксовом једначином, и тако добити једначине Венинг-Мајнеса (*Felix Andries Vening-Meinesz, 1887-1966*), које омогућавају рачунање компонената отклона вертикала из вриједности аномалија убрзања.

#### 3.4.3. Квазигеоид и телуроид

Геоид је ниво површ стварног потенцијала и референтна површ за физичке системе висина, као што су ортометријске висине, које представљају растојање рачунато дуж вертикале од геоида до посматране тачке. За његово одређивање, као и за одређивање ортометријских висина, потребно је познавати убрзање теже унутар Земље, како би се извршило свођење мјерених убрзања теже. А убрзања унутар Земље се не могу тачно срачунати, због непознатог распореда густина маса. Ово повлачи потребу увођења хипотеза о унутрашњој грађи Земље, зарад одређивања висина. У покушају да то превазиђе, руски геодета Молоденски (*Михаил Сергеевич Молоденскии, 1909-1991*)

је 1960. предложио да се ортометријске висине замијене нормалним висинама. Суштина његове идеје је да се физичка површина Земље представи преко помоћне површи, користећи особине нормалног поља. У том концепту, важну улогу игра површ квазигеоида. Да би се дефинисао квазигеоид, прво је потребно објаснити појам телуроида.

Свака тачка на физичкој површи Земље (ФПЗ) има стварни потенцијал  $W$  у реалном пољу теже. За сваку тачку  $P$  Земљине површи, постоји одговарајућа тачка  $Q$  која се налази на њеној нормали на елипсоид, и у којој је вриједност нормалног потенцијала  $U_Q$  једнака вриједности стварног потенцијала  $W_P$  у тачки  $P$ . Ако се све тачке Земљине површи „спусте“ на описани начин добија се скуп тачака  $Q_i$  чије геометријско мјесто представља површ звану телуроид (слика 3.10).



Слика 3.10. Квазигеоид и телуроид

Растојање  $\overline{QQ_0}$  између телуроида и елипсоида, рачунато дуж нормале на елипсоид (тачније, дуж нормалне вертикале), представља нормалну висину тачке,  $H^N$ . Растојање између тачака  $P$  и  $Q$  означава се са  $\zeta$  и назива се аномалијом висине. Пошто није уобичајено да се висина тачке означава као дужина линијског сегмента који не завршава у тој тачки, нормална висина се преноси дуж нормалне вертикале на начин да се из тачке  $Q$  прелази у тачку  $P$ , а из тачке  $Q_0$  у  $P_0$ . Геометријско мјесто тачака  $P_0$  добијених описаним поступком назива се квазигеоидом. Према томе, може се рећи да ова површ представља пресликавање елипсоида када се телуроид преслика на ФПЗ.

Аналогно Брунсовој једначини (3.35), за аномалију висине се може написати (Krakiwsky & Vaniček, 1986):

$$\zeta = \frac{T_P}{\gamma_Q}, \quad (3.47)$$

што представља њену везу са аномалијским потенцијалом. Ипак, квазигеоид није нивоска површ ни стварног ни нормалног потенцијал, као ни телуроид. И управо то је његов главни недостатак. Нормалне висине су испуниле своју улогу да се могу одредити искључиво на основу мјерења на физичкој површи Земље, без хипотеза о њеној унутрашњој грађи. То их је у другој половини прошлог вијека учинило првим избором многих држава када је у питању референтни систем висина, поготово тамо гдје нису постојала довољно обимна мјерења убрзања теже. Али у крајњој линији, оне се не односе у потпуности на стварно поље теже и њихова референтна површ нема прави физички смисао. Као такве, ипак нису замијениле ортометријске висине, будући да данас преовладава мишљење да је потребно познавати геоид као референтну површ и користити физички јасно дефинисане висине (Vaniček, 2009), (Vaniček et al., 2012). Стога се квазигеоид може посматрати као апроксимација геоида. Њихово међусобно одступање обично је центиметарског нивоа, док у планинским подручјима може достићи и неколико метара. На мору се геоид и квазигеоид подударaju.



#### 4. ГРАДИЈЕНТИ УБРЗАЊА ТЕЖЕ ЗЕМЉЕ

У тродимензионалном простору, вектор убрзања теже  $\vec{g}$  има три компоненте, чији се интензитети добијају као парцијални изводи потенцијала убрзања у правцу координатних оса просторног правоугаоног координатног система:

$$\vec{g} = grad W = [W_x \ W_y \ W_z]^T, \quad W_x = \frac{\partial W}{\partial X}, \quad W_y = \frac{\partial W}{\partial Y}, \quad W_z = \frac{\partial W}{\partial Z}. \quad (4.1)$$

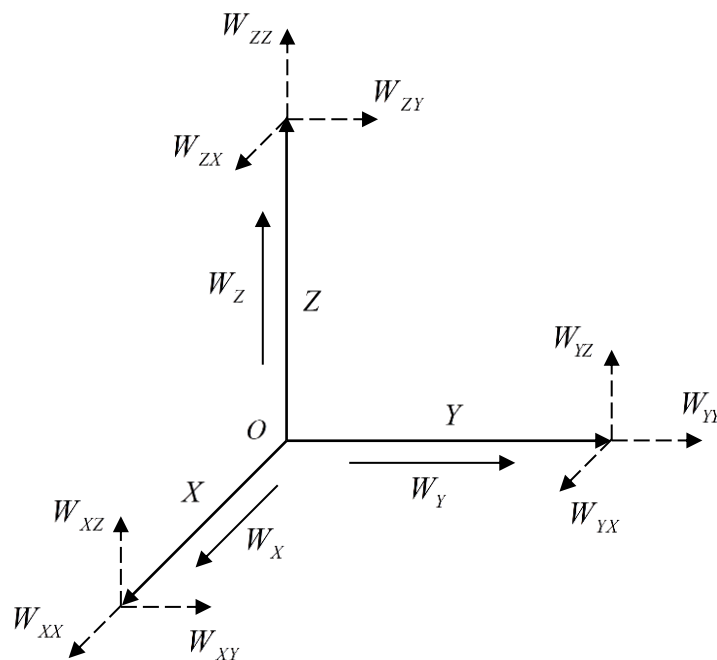
Ако је у питању локални астрономски систем, дефинисан тако да се његова  $Z$  оса подударара са правцем локалног вектора убрзања теже и да је усмјерена навише, те да су  $X$  и  $Y$  оса у равни локалног хоризонта, добија се да је (Torge & Müller, 2012):

$$W_x = W_y = 0, \quad W_z = -g. \quad (4.2)$$

Три компоненте вектора убрзања такође могу да се диференцирају и да се добију брзине промјена њихових интензитета у правцима три координатне осе. Ако се у правоуглим координатама усвоји да  $X_i (i = 1, 2, 3)$  одговара  $(X, Y, Z)$  може се написати математичка дефиниција:

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial X_i \partial X_j}. \quad (4.3)$$

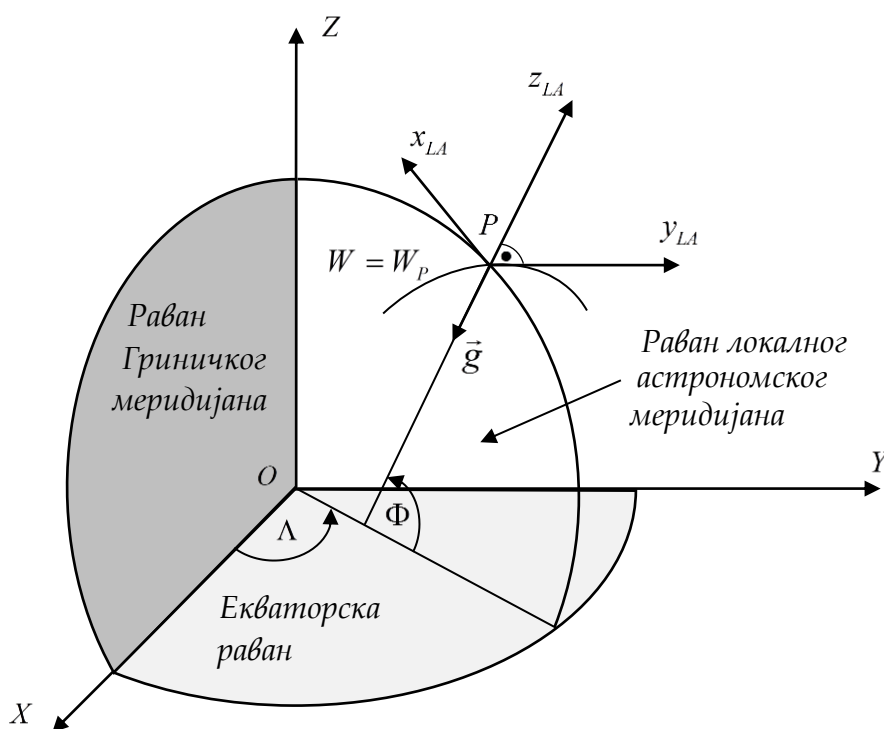
Ови изводи називају се градијентима убрзања теже, и има их укупно девет. На слици 4.1 дат је графички приказ компонената убрзања и њихових градијената.



Слика 4.1. Компоненте убрзања теже и њихови градијенти

Строго гледано, сам термин „градијенти“ није исправан због векторске природе теже, али је оправдан у смислу да се  $g$  посматра као интензитет од  $\vec{g}$  (Johannes & Smilde, 2009). Основна јединица мјере за градијенте убрзања јесте  $\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}} = \text{s}^{-2}$ .

Иако је избор координатног система у основи произвољан, градијенти се по правилу изражавају у већ поменутом локалном астрономском систему, у којем се врше терестричка геодетска мјерења (слика 4.2).



Слика 4.2. Локални астрономски систем

Систем је топоцентричан и везан за вертикалу, тј. правац локалног вектора убрзања којем одговара његова  $Z$  оса ( $z_{LA}$  на слици 4.2). Оса  $X$  ( $x_{LA}$ ) је у равни локалног астрономског меридијана и усмјерена је ка сјеверу, док је  $Y$  оса ( $y_{LA}$ ) усмјерена ка истоку и допуњује лијево оријентисан систем. Астрономски меридијан се дефинише као равна која садржи обртну осу Земље и зенит посматране тачке (Green, 1985).

Геодетски еквивалент локалног астрономског система је локални елипсоидни систем, који је везан за елипсоидну нормалу и равна геодетског меридијана тачке. У овом систему се не врше мјерења али је он једноставним релацијама повезан са елипсоидом, и самим тим са геоцентричним системом придруженим елипсоиду. Иако се односе на различите просторне линије и засновани су на различитим концептима, астрономски и елипсоидни систем су довољно блиски да су разлике координата у ова два система најчешће занемарљиве. Разлог томе су мале вриједности одступања вертикала на глобалном нивоу, што је резултат апроксимације геоида оптималним елипсоидом. Ово омогућава једноставно повезивање терестричких и мјерења глобалним навигационим сателитским системима (ГНСС).

#### 4.1. ЕТВЕШЕВ ТЕНЗОР

Девет градијената убрзања теже заједно чине јединствену математичку величину, тзв. Етвешев тензор, представљен симетричном  $3 \times 3$  матрицом:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{XX} & W_{XY} & W_{XZ} \\ W_{YX} & W_{YY} & W_{YZ} \\ W_{ZX} & W_{ZY} & W_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial Y \partial X} & \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial Y \partial Z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial Z \partial X} & \frac{\partial^2 W}{\partial Z \partial Y} & \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Назив „Етвешев тензор“ потиче од имена чувеног мађарског геофизичара Лорана Етвеша (*Lorand Eötvös, 1848-1919*)<sup>3</sup>, који се интензивно бавио проучавањем градијената и изумио први инструмент за њихово мјерење, торзиону вагу, о чему ће у наставку бити ријечи. „Етвеш“, у ознаци [E], такође је и често коришћена јединица мјере за градијенте убрзања, при чему је  $1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ . Неријетко се користе и јединице засноване на галу, нпр.  $1 \frac{\text{mGal}}{\text{m}} = 10^{-5} \text{ s}^{-2}$  и  $1 \frac{\mu\text{Gal}}{\text{m}} = 10^{-8} \text{ s}^{-2}$ .

Сам Етвешев тензор је тензор другог реда, јединствено одређен са девет реалних бројева (компоненте тензора), који се услед промјене координатног система трансформишу по стриктно одређеном закону (Borisenko et al., 1979). Закон трансформације његових компоненти из једног у други систем кључно је својство тензора, и последица је физичког или геометријског значења самог тензора. Посљедично, тензор није само скуп компоненти, тј. градијената, већ величина која има сопствене математичке особине.

##### 4.1.1. Математичке особине тензора

Прва важна особина тензора јесте збир његових дијагоналних елемената, који је, у складу са (3.7), у спољашњем простору једнак:

$$W_{XX} + W_{YY} + W_{ZZ} = \Delta W = 2\omega^2. \quad (4.5)$$

Очигледно, због утицаја центрифугалног дијела потенцијала убрзања, траг матрице (4.4) није нула и потенцијал  $w$  није хармонијска функција у простору изван масе. Унутар масе, вриједи да је (Moritz, 1990):

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2. \quad (4.6)$$

Даље, сви одговарајући мјешовити изводи су једнаки, односно:

$$W_{ij} = W_{ji}. \quad (4.7)$$

<sup>3</sup> У међународној, тачније англосаксонској литератури, име се јавља у облику „Roland“, умјесто „Lorand“.

Ово је последица чињенице да су градијенти убрзања теже непрекидне функције у спољашњем простору, и да су мјешовити изводи непрекидних функција увијек једнаки (Stewart, 2016). С обзиром на (4.5) и (4.7), јасно је да Етвешев тензор има само пет независних елемената.

Будући да је (4.4) тензор другог реда, промјена градијената услед ротације правоуглог координатног система, од система  $s$  до система  $t$ , одвија се по закону:

$$\Gamma^t = C_s^t \Gamma^s C_t^s, \quad (4.8)$$

гдје је  $C_s^t$  матрица која садржи косинусе одговарајућих углова (Jekeli, 2021). За било који произвољни правоугли систем  $s$ , увијек постоји ротација која ће тензор  $\Gamma^s$  учинити дијагоналним:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \Gamma^t = C_s^t \Gamma^s C_t^s. \quad (4.9)$$

Дијагонални елементи  $\lambda_j$  су сопствене вриједности тензора  $\Gamma^s$ , као и сваког тензора насталог његовом ротацијом. Сопствене вриједности су инваријантне у односу на ротације координатног система. За  $n$ -димензионални тензор  $m$ -тог реда, број инваријанти се одређује као функција  $m$  и  $n$ , односно  $d = d(m, n)$ . За тензор другог реда вриједи да је  $d(2, n) = n$ , па тако Етвешев тензор, с обзиром на димензије, има три сопствене вриједности (Qi, 2007). Оне су реални бројеви пошто је и сам тензор реалан и симетричан. Такође, инваријантне су и све комбинације сопствених вриједности.

За дати тензор  $\Gamma$  у неком координатном систему, сопствене вриједности се одређују као коријенови слџедеће карактеристичне једначине:

$$\det(\lambda I - \Gamma) = \lambda^3 - I_0 \lambda^2 + I_1 \lambda - I_2 = 0. \quad (4.10)$$

Величине  $I_0$ ,  $I_1$  и  $I_2$  такође остају очуване под било којом координатном трансформацијом тензора  $\Gamma$ , и представљају инваријанте. Рачунају се на основу израза (Klokočník et al., 2014):

$$\begin{aligned} I_0 &= \text{tr}(\Gamma) = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} + \Gamma_{33}, \\ I_1 &= \Gamma_{11}\Gamma_{22} + \Gamma_{22}\Gamma_{33} + \Gamma_{33}\Gamma_{11} - \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{13}^2, \\ I_2 &= \det(\Gamma) = \Gamma_{11}(\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2) + \Gamma_{12}(\Gamma_{23}\Gamma_{13} - \Gamma_{12}\Gamma_{33}) + \Gamma_{13}(\Gamma_{12}\Gamma_{23} - \Gamma_{13}\Gamma_{22}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

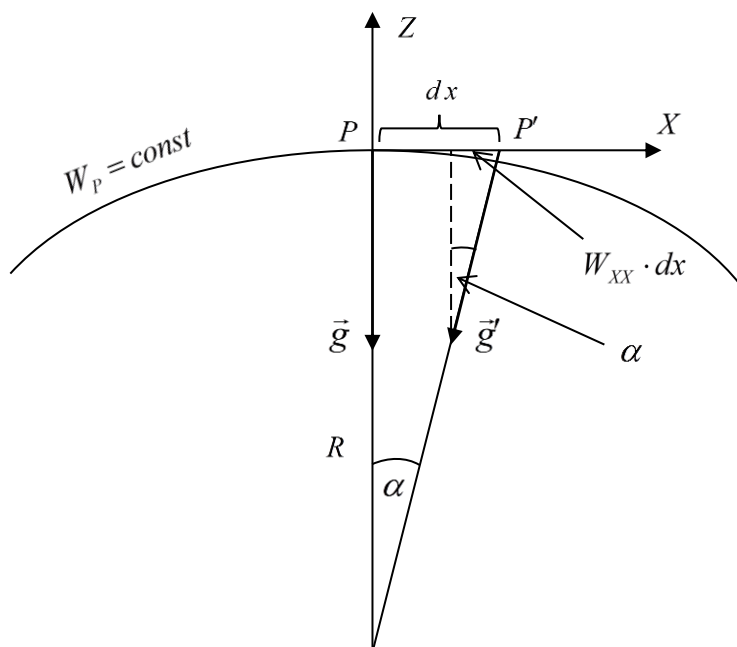
Очигледно је  $I_0$  једнако Лапласијану потенцијалног поља (4.5). На основу инваријанти (4.11) може се срачунати  $I$ , тзв. индикатор дводимензионалности извора поља:

$$0 \leq I = -\left(\frac{I_2}{2}\right)^2 / \left(\frac{I_1}{3}\right)^3 \leq 1. \quad (4.12)$$

Ако је  $I = 0$ , то сугерише да је маса која генерише поље теже и градијенте дводимензионална, мада услов није довољан, пошто постоје случајеви тродимензионално распоређене масе која даје вриједност индикатора нула (Cevallos, 2017). Случај  $I = 1$  имплицира да се извор градијената понаша као монопол, односно да је поље радијално.

#### 4.1.2. Геометријска интерпретација градијената

Градијенти убрзања теже, као други изводи потенцијала, уско су везани са ниво површима и вертикалама и њиховим обликом. Конкретно, из елемената Етвешевог тензора се могу срачунати закривљености ниво површи и вертикала. На тај начин градијенти описују локалну геометрију поља теже. Као примјер, веза градијента  $W_{xx}$  и закривљености ниво површи у  $XZ$  равни илустрована је на слици 4.3.



Слика 4.3. Градијенти и закривљеност ниво површи

На слици је дат локални астрономски систем, са  $Z$  осом која се подударе са правцем локалног вектора убрзања теже  $\vec{g}$  у тачки  $P$ . Оса  $X$  је у равни астрономског меридијана тачке и усмјерена је према сјеверу. Слика приказује пресјек ниво површи са  $XZ$  равни, тј. са равни меридијана. Закривљеност ниво површи у овој равни добиће се као реципрочна вриједност полупречника кривине  $R$ . Пошто је управан на ниво површ, у посматраној тачки  $P$  вектор убрзања има само компоненту у правцу  $Z$  осе. Компоненте  $W_x$  и  $W_y$  једнаке су нули. За анализу геометријског значења градијента  $W_{xx}$ , кључно је разматрање диференцијалног помјерања по оси  $X$ , означеног са  $dx$ , између тачке  $P$  и  $P'$ . У том помјереном положају посматра се одговарајући вектор

убрзања теже  $\vec{g}'$ . Због бесконачно малог прираштаја положаја, овај вектор управан је практично на исту нивоску површ, али због њене закривљености у тачки  $P$  није паралелан вектору  $\vec{g}$  и  $Z$  оси. Градијент  $W_{xx}$  представља количник прираштаја  $W_x$  компоненте вектора убрзања, и прираштаја  $dx$ , односно  $W_{xx} = dW_x / dx$ . Како у тачки  $P$  вриједи да је  $W_x = 0$ , то је градијент једнак количнику  $W_x$  компоненте у  $P'$  и  $dx$ . Другим ријечима,  $W_x$  компонента у  $P'$  једнака је производу  $W_{xx} \cdot dx$ , као што је и означено на слици. Већ је интуитивно јасно да је закривљеност ниво површи директно пропорционална интензитету  $W_x$  компоненте у  $P'$ , јер што је већа компонента, тј. пројекција вектора  $\vec{g}'$  на  $X$  осу, већа је и закривљеност. Како би се добио конкретан израза за закривљеност, потребно је одредити угао  $\alpha$ . То је угао у великом правоуглом троуглу са тјеменима у  $P$  и  $P'$ , али истовремено и угао у мањем троуглу који такође има тјеме у  $P'$ . Из већег троугла слиједи да је:

$$R = \frac{dx}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\alpha}{dx} = k_x. \quad (4.13)$$

У претходном изразу, прираштај  $dx$  се због диференцијално малих величина може сматрати једнаким кружном исјечку над углом  $\alpha$ . Из истог разлога се може сматрати и да је  $g = g'$ , па, узевши у обзир да је  $\alpha$  мали угао, из мањег троугла слиједи:

$$\alpha \approx \tan \alpha = -\frac{W_{xx} \cdot dx}{g}. \quad (4.14)$$

Сада се за закривљеност коначно добија:

$$k_x = \frac{1}{R} = \frac{-\frac{W_{xx} \cdot dx}{g}}{dx} = \frac{-W_{xx} \cdot dx}{g \cdot dx} = -\frac{W_{xx}}{g}. \quad (4.15)$$

Закривљеност у  $XZ$  равни једнака је дакле количнику градијента  $W_{xx}$  и убрзања теже  $g$  у посматраној тачки. Аналогно се за закривљеност у правцу исток-запад, тј. у  $YZ$  равни може добити:

$$k_y = -\frac{W_{yy}}{g}. \quad (4.16)$$

Негативан предзнак у претходне двије једначине ствар је конвенције. Како је већ речено у поглављу бр. 3, ниво површи су у спољашњем простору свуда конвексне, тј. њихови полупречници кривина имају исти предзнак. Како су  $W_{xx}$  и  $W_{yy}$  градијенти негативни, што је видљиво и са слике 4.3, то је додатни минус уведен како би се елиминисале негативне вриједности закривљености.

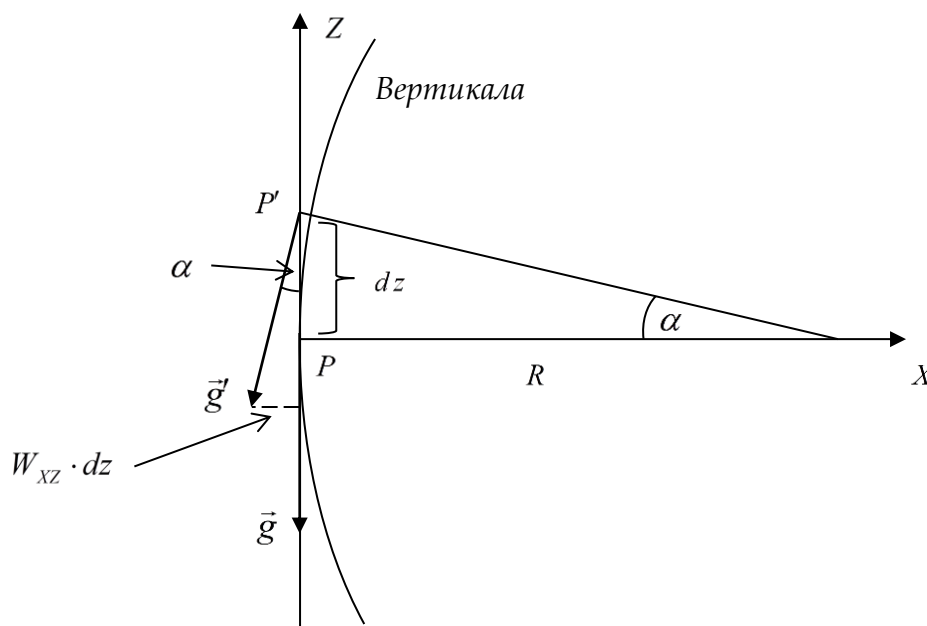
Градијент  $W_{zz}$  просто представља вертикални градијент убрзања теже, тј. промјену интензитета убрзања са висином, или математички:

$$W_{zz} = \frac{\partial g}{\partial H}. \quad (4.17)$$

Ваља напоменути да је, посматрано у контексту овдје предочене геометријске ситуације и координатног система, градијент  $W_{zz}$  позитиван, будући да се са прираштајем висине смањује интензитет вектора  $\vec{g}$  који је усмјерен супротно од позитивног смјера  $Z$  осе. Но, како је убрзање теже  $g$  кључна величина у физичкој геодезији и њена вриједност се узима као позитиван број независно од познатог и јасног усмјерења вектора, то се сам вертикални градијент у пракси редовно задаје као негативан број. Множењем прираштаја висине овим бројем, добија се умањење интензитета убрзања теже на промијењеној висини. У практичним примјенама, за резултате на физичкој површи Земље, често се користи вертикални градијент нормалног убрзања теже на елипсоиду, чија вриједност на средњим ширинама приближно износи:

$$U_{zz} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} \approx 0.3086 \frac{\text{mGal}}{\text{m}}. \quad (4.18)$$

Градијенти  $W_{xz}$  и  $W_{yz}$  представљају промјене убрзања са промјеном хоризонталног положаја, тј. промјену вертикалне компоненте у посматраној тачки. Ова компонента садржи комплетан вектор убрзања у почетној тачки  $P$ , и на диференцијалном нивоу се може рећи да њена промјена даје убрзање у сусједној тачки  $P'$ . Ипак, строго гледано то није тако, пошто сусједна тачка  $P'$  има свој локални координатни систем и вектор убрзања који се са вертикалном компонентом у систему почетне тачке  $P$  не подударани по правцу ни по интензитету, иако су разлике диференцијално мале. У геометријском смислу  $W_{xz}$  и  $W_{yz}$  описују закривљеност вертикале у  $XZ$  и  $YZ$  равни, респективно. Ова ситуација приказана је на слици 4.4.



Слика 4.4. Градијенти и закривљеност вертикале

Закривљеност вертикале у  $XZ$  равни очигледно зависи од величине прираштаја  $W_x$  компоненте убрзања са промјеном висине, а прираштај пак зависи од вриједности градијента  $W_{xz}$ . Поново се посматра угао  $\alpha$  који се налази у два троугла који имају углове са паралелним крацима. Већи троугао има тјемена у  $P$  и  $P'$  и страницу једнаку полупречнику кривине  $R$ , док мањи има тјеме у  $P'$  и вектор  $\vec{g}'$  као страницу. Опет се закривљеност може изразити у функцији угла  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{dz}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\alpha}{dz}. \quad (4.19)$$

Из мањег троугла слиједи:

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{W_{xz} \cdot dz}{g}. \quad (4.20)$$

Уважавајући конвенцију за предзнак у (4.15), сада је:

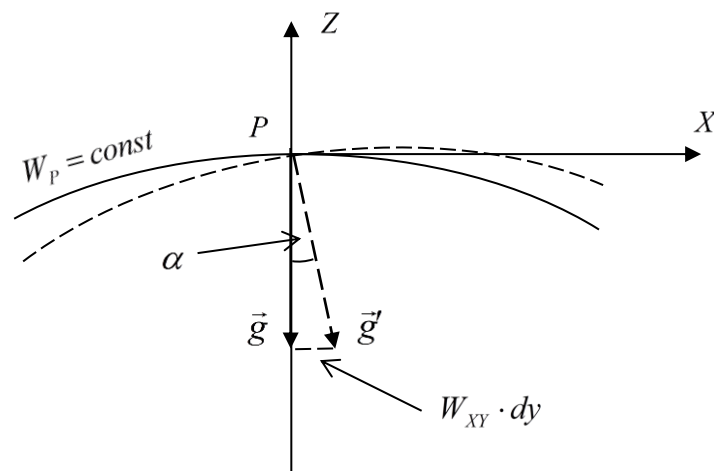
$$\kappa_x = \frac{1}{R} = -\frac{W_{xz} \cdot dz}{g \cdot dz} = -\frac{W_{xz}}{g}. \quad (4.21)$$

На исти начин се за закривљеност вертикале у  $YZ$  равни добија:

$$\kappa_y = -\frac{W_{yz}}{g}. \quad (4.22)$$

Закривљеност вертикале може имати различите предзнаке. У ситуацији на слици 4.4, и узимајући у обзир (4.21), закривљеност је позитивног предзнака пошто је сам градијент  $W_{xz}$  негативан.

Мјешовити градијенти  $W_{xy}$  такође говоре о геометрији поља теже, и представљају торзију ниво површи у правцу  $X$  и  $Y$  осе (слика 4.5).



Слика 4.5. Торзија ниво површи



Торзија ниво површи представља њено „увијање“ у одређеном правцу, и последица је дефекта копланарности вектора силе (Marussi, 1985). То је фундаментално својство поља теже, да услед његове неправилне геометрије вектори убрзања не леже у истој равни. Код сферносиметричног радијалног поља торзија је једнака нули, као и закривљеност вертикала (Grafarend, 1997). На слици 4.5 приказана је пројекција ниво површи на  $XZ$  раван у тачки  $P$ , као и вектор убрзања  $\vec{g}$ . Испрекиданом линијом дата је пројекција ниво површи у тачки  $P'$  удаљеној по  $Y$  оси за инфинитезималну вредност  $dy$  (не може да се прикаже на слици) и вектор  $\vec{g}'$ . Угао  $\alpha$  између два вектора последица је управо торзије нивоске површи у односу на осу  $Y$ . Величина торзије зависи од интензитета компоненте  $W_x$  у тачки  $P'$ , а овај је једнак  $W_{xy} \cdot dy$ , тј. зависи директно од градијента  $W_{xy}$ . Слиједећи претходне конвенције за закривљеност, торзија се такође изражава у јединицама реципрочног растојања и рачуна се као (Torge & Müller, 2012):

$$t_x = t_y = -\frac{W_{xy}}{g}. \tag{4.23}$$

У табели 4.1 прегледно је приказано физичко и геометријско значење свих градијената.

**Табела 4.1.** Физичко и геометријско значење елемената Етвешевог тензора

Градијент	Физичко-геометријски смисао
$W_{xx}$	Закривљеност ниво површи у правцу $X$ осе.
$W_{yy}$	Закривљеност ниво површи у правцу $Y$ осе.
$W_{zz}$	Вертикални градијент убрзања, $\partial g / \partial H$ .
$W_{xy}$	Торзија ниво површи у правцу $X$ и $Y$ осе.
$W_{xz}$	Закривљеност вертикале у $XZ$ равни.
$W_{yz}$	Закривљеност вертикале у $YZ$ равни.

Претходно излагање показује на који начин градијенти у потпуности описују геометрију поља теже. Пошто је јасно да се параметри закривљености и торзије махом добијају дијелењем градијената убрзањем теже  $g$ , може се дефинисати тензор:

$$M = -\frac{1}{g} \Gamma = \begin{bmatrix} k_x & t_x & \kappa_x \\ t_y & k_y & \kappa_y \\ \kappa_x & \kappa_y & \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial H} \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

Тензор (4.24) назива се Марусијевим тензором (Moritz & Hofmann-Wellenhof, 1993). Назив је у част чувеног италијанског геодете и геофизичара Антонија Марусија (*Antonio Marussi, 1908-1984*), који се бавио проучавањем дате проблематике и дао огроман допринос развоју диференцијалне геодезије. Иако су други изводи потенцијала и раније разматрани у физичкој геодезији, тек је Маруси спознао да се они могу посматрати као коваријантне компоненте симетричног тензора другог реда у произвољном просторном криволинијском координатном систему (J. Zund, 1994). Уопште узевши, ако је скаларно поље релевантан физички параметар за оређени проблем, геометријска структура тог поља је потпуно одређена уопштавањем Марусијевог тензора (Voschio, 1974). Сам Маруси је поменути тензор скромно називао Етвешевим тензором, али захваљујући прије свега раду његовог пријатеља, британског геодете Мартина Хотинеа (*Martin Hotine, 1898-1968*), данас се тензор закривљености и торзије назива Марусијевим, док је за тензор градијената устаљен назив Етвешев тензор.

#### 4.2. ЗНАЧАЈ ГРАДИЈЕНАТА У ГЕОНАУКАМА

Било да су мјерени или моделовани, елементи Етвешевог тензора као функционали потенцијала убрзања теже имају велики значај у геонаукама, прије свега у геодезији и геофизици. Тај значај је у прошлости варирао и по правилу растао са протоком времена, будући да је у великој мјери зависио од развоја технологије која би омогућила довољно ефикасна и прецизна мјерења. Технолошки напредак је био кључан и у смислу рачунарских капацитета потребних за моделовање елемената тензора.

У геодезији се вертикални градијент убрзања редовно користи за редукцију мјерених вриједности, било на висину мјерне тачке у гравиметријским и нивелманским мрежама, било на геодид у поступку његовог одређивања. У нешто другачијем приступу, поремећајни потенцијал  $T$ , потребан за одређивање геоида, може се реконструисати из његових градијената (Novák et al., 2021). Исто тако је могуће дефинисати прецизну везу између градијената аномалије и убрзања теже с једне, и хоризонталних градијената одступања вертикала и ундулације с друге стране (Boiman, 2012). Затим, општи концепт данашњег одређивања физичких висина подразумијева коришћење ГНСС технологије, како би се максимално искористиле њене предности у виду брзог и ефикасног одређивања елипсоидних висина. За потребе прецизне трансформације геометријских у физичке висине, један од важних фактора може бити познавање закривљености вертикале, гдје градијенти очигледно имају кључну улогу (Grafarend, 1997). На основу измјерених вриједности градијената, може се вршити и предикција различитих функционала аномалијског потенцијала, као што су аномалије убрзања теже (Tóth, 2002), (Völgyesi et al., 2005), или одступања вертикала (Völgyesi, 1995). Из познатих компоненти одступања вертикала, могуће је даље одредити ундулације геоида примјеном астро-геодетског нивелмана (Völgyesi, 1999), (Völgyesi, 2001). У питању је рачунска техника која у основи користи везу између ундулације и отклона вертикале дату једначином (3.30). Назив потиче од чињенице да се одступања вертикале традиционално најтачније одређују астро-геодетским методама. А на основу измјерених градијената и претходно познатих одступања вертикала, могуће је реконструисати практично цијело поље потенцијала и затим рачунати његове произвољне функционале и изводе. Предност ове методе је у томе што је проблем теоретски изузетно преодређен (Dobróka & Völgyesi, 2008).

Посљедњих деценија развијено је и теоријско рјешење геодетског проблема граничних вриједности (GBVP), које подразумејева употребу градијената (Van Gelderen & Rummel, 2001). Рјешење се тражи у сферној апроксимацији за велики број мјерења и укључује комбинације градијената који се користе за рјешавање GBVP и проналажење одговарајућих функција језгара. Ове се даље могу користити у површинским интегралима преко којих се добија рјешење, слично Стоксовом интегралу за аномалије убрзања. Понављање геодетских мјерења на деформишућој граничној површи зарад утврђивања деформација и промјена потенцијала назива се геодетско-геодинамичким проблемом граничних вриједности (*Geodetic-Geodynamic Boundary Value Problem - GGBVP*). У том концепту, за одређивање варијација поља потенцијала градијенти могу бити кориснији од самих убрзања, јер су неке њихове комбинације прилично неосјетљиве на промјене положаја станице, за разлику од убрзања. Ова чињеница градијентима даје предност јер смањује потребу за теренским мјерењима (нпр. нивелање да се утврди промјена положаја) и омогућава лакше раздвајање просторних и временских варијација поља теже (Tóth, 2005). Градијенти могу послужити и као улазни подаци за рачунање коефицијената сфернохармонијског развоја потенцијала (Sebera et al., 2013).

Уопште узевши, градијенти се могу довести у везу не само са геодетским, већ и са величинама значајним у геофизици и геологији (Eshagh & Hussain, 2015). Стога имају вишедеценијску историју проучавања и примјене у овим дисциплинама. Као и остали функционали поља потенцијала, и они су продукт генеришуће масе, и самим тим представљају прозор у унутрашњост Земље. Због својих специфичних особина, прије свега израженог локалног карактера и чињенице да представљају краткоталасне карактеристике поља теже, пружају информације које се не могу добити из других величина, нпр. из мјерених убрзања. Највећи изазов у тумачењу градијената у сврху одређивања унутрашње грађе Земље лежи у томе што је то, као и у случају убрзања, у суштини инверзни проблем, који нема јединствено рјешење. Рјешавању инверзног проблема градијената посвећена су многа истраживања.

Градијенти се могу користити за тражење подземних структура литосфере као што су расједи (Cordell, 1979). У ту сврху се често употребљавају у комбинацији са магнетним подацима (Cordell & Grauch, 1982). У одређивању карактеристика расједа, конкретно њиховог угла у односу на хоризонт, користе се и претходно споменуте сопствене вриједности тензора (Kusumoto, 2017). Чак и кад се примјењују искључиво градијенти из геопотенцијалних модела, утврђено је код расједа слагање са претходно прикупљеним гравиметријским подацима (Uzun et al., 2020). У правилу, инверзија градијената се користи да се добију расподјеле густина, линеарне или нелинеарне, и то најчешће као допуна гравиметријских података (Vasco, 1989). Кад се посматрају само елементи Етвешевог тензора, неки од њих су појединачно тешки за интерпретацију, попут  $W_{xz}$  и  $W_{yz}$ . Стога се увијек тежи да се процесирају заједно, јер у том случају могу дати више информација о промјенама подземних густина чак и од вертикалног градијента, који се најчешће користи (Veryaskin & McRae, 2008). За интерпретацију података о потенцијалном пољу и откривање дубине и облика подземних геолошких структура, користе се различите математичке технике, попут Ојлерове деконволуције градијената (C. Zhang et al., 2000), паралелних алгоритама (Hou et al., 2015), или пак Хилбертове трансформације (Beiki, 2010). Притом је утврђено да модели који користе све елементе тензора углавном дају боље резултате

од модела који нпр. користе само вертикални градијент. Инваријанте цијелог тензора тако су успјешно коришћене за откривање комплексних структура повезаних са силовитим избацавањем магме (Mataragio & Kieley, 2009). Значај градијената у геофизици, који превазилази чисто научне сврхе, види се на примјеру њиховог коришћења, заједно са магнетним подацима, зарад утврђивања тектонских структура које утичу на ток и акумулацију подземних вода у сушним подручјима попут Саудијске Арабије (Elawadi et al., 2012).

Чланови тензора се и овдје могу посматрати као параметри закривљености ниво површи, будући да се и на тај начин може доћи до информација о подземним структурама, конкретно рачунањем величина попут диференцијалне и максималне закривљености (Cevallos et al., 2012). Градијенти добијени из резултата опажања вјештачких сателита могу послужити за моделовање литосфере, коришћењем приступа моделовања регионалног гравитационог поља. Осјетљивост ових градијената довољна је за проучавање горњих слојева омотача језгра, тачније до половине његове дубине (Panet et al., 2014), а у комбинацији са гравиметријским и сеизмичким подацима и за одређивање дебљине Земљине коре (Bouman et al., 2015). Ова комбинација, заједно са геодинамичким подацима, могла би потенцијално да пружи интегрисани динамички модел Земље. Гридови ових градијената могу да се користе и за проучавање глобалних структура, тј. за добијање тродимензионалних модела литосфере на глобалном нивоу (Bouman et al., 2016). У поређењу са вриједностима убрзања, утврђено је да градијенти могу да дају исту резолуцију као и гравиметрија, али са мање тачака. Притом, ако се не користе сви елементи тензора, ово вриједи без обзира који се елемент инвертује (Paoletti et al., 2016). Занимљив примјер примјене градијената је и утврђивање постојања кратера насталог ударом астероида у давној прошлости, гдје су градијенти коришћени у комбинацији са другим функционалима геопотенцијалног модела (Klokočník et al., 2020).

На крају, ваља споменути да интерес за проучавање градијената убрзања теже не постоји само у цивилним, већ и увојним круговима. Штавише, у развој технологије за мјерење градијената највише је улагано од стране војски најразвијенијих држава свијета. Један од најочигледнијих примјера њихове примјене у војне сврхе јесте аутономна навигација подморница (Cevallos, 2015). Топографија морског дна се одређује и у научне сврхе, такође коришћењем градијената (Yang et al., 2018).

### 4.3. МЈЕРЕЊЕ ГРАДИЈЕНАТА - ГРАДИОМЕТРИЈА

Поступак мјерења градијената убрзања теже назива се градиометријом. У ширем смислу обухвата и технике за развој и примјену модела градијената, како аналитичких тако и нумеричких, с циљем провјере мјерних уређаја. Градиометрија има дугу историју примјене копнених, поморских, ваздухопловних и сателитских мјерних система. Иако различити у смислу конструкције и технолошких рјешења, сви ови системи у основи функционишу на истом принципу. Док гравиметар, или било који други акцелерометар, региструје инерцијалну реакцију једне тест-маса на силу која дјелује, градиометри опажају разлику реакција двију тест-маса. Сви тренутно оперативни градиометри врше мјерења опажајући, на овај или онај начин, разлику инерцијалних убрзања опажаних од стране линеарних или угаоних акцелерометара. У суштини, градиометар се може посматрати као комбинација два акцелерометра, при чему је резултат који даје добијен као количник њихових опажаних убрзања и

међусобног растојања (Jekeli, 2021). Као такав, градиометар мјери само апроксимацију градијента у тачки, под претпоставком да је базна линија довољно мала. Мјерење комплетног тензора захтијева минимум од 12 акцелерометара, при чему се међу резултатима неминовно јавља корелација, будући да ће неки градијенти увијек дијелити заједнички акцелерометар без обзира на конфигурацију. За потпуно независна мјерења свих девет елемената тензора, потребно је 18 акцелерометара. С друге стране, уз коришћење математичких особина тензора, попут симетричности и Лапласијана, могуће је добити све градијенте са само пет акцелерометара.

#### 4.3.1. Терестричка градиометрија

У терестричку градиометрију спадају сва мјерења извршена на физичкој површи Земље, и то прије свега копнена, статичка мјерења, која се врше примјеном торзионих вага и гравиметара. У ширем смислу, у терестричку градиометрију могу се убројати и ваздухопловна и поморска мјерења, с обзиром да се у смислу окружења фундаментално разликују од мјерења извршених путем вјештачких сателита. Ипак, због различите технологије и донекле различитог концепта, овај вид мјерења може се сврстати у засебну категорију. Стога ће се овдје под терестричким мјерењима третирати само мјерења торзионим вагама и гравиметрима.

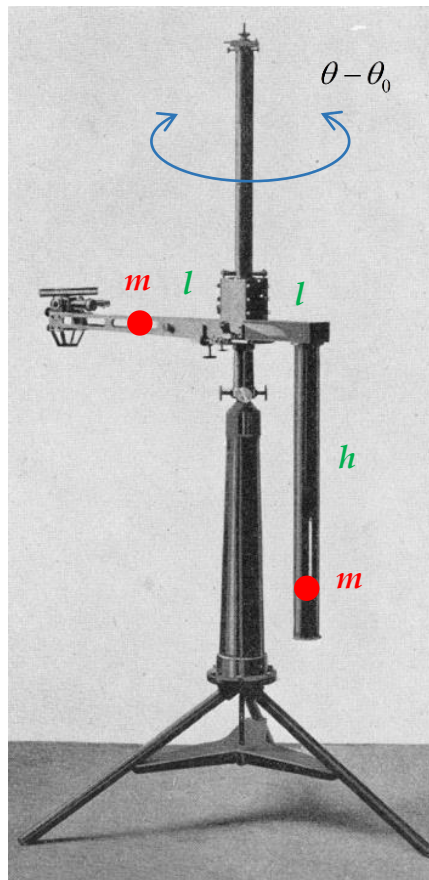
##### 4.3.1.1. Торзиона вага

Први инструмент намјенски осмишљен за мјерење градијената убрзања теже била је торзиона вага. Конструисао га је Лоран Етвеш са својим сарадницима у Будимпешти. Како је сам Етвешев објашњавао, у дизајну инструмента водио се принципима Кулонове (*Charles-Augustin de Coulomb, 1736-1806*) и дјелимично Кевендишове ваге (*v. Eötvös, 1896*). Шарл Кулон, француски физичар и војни инжењер, конструисао је 1785. године вагу како би експериментално доказао универзални закон електростатике, касније назван по њему. Кевендиш је, како је већ напоменуто у подпоглављу 2.1, свој инструмент користио за одређивање вриједности универзалне гравитационе константе. Изглед и концепт оригиналног Етвешевог инструмента приказан је на слици 4.6.

Торзиона вага ради на сљедећем принципу: двије једнаке масе  $m$ , постављене су на крајеве хоризонталне шипке дужине  $2l$ . Шипка је окачена о жицу сачињену од легуре платине и иридијума, која се под утицајем поља теже уврће око вертикалне осе. Масе су постављене на различитим висинама. Једна је фиксирана на једном крају шипке, док је друга окачена испод другог краја, на жици дужине  $h$ . Да су обје масе на истој висини ( $h = 0$  на слици 4.6), инструмент би радио као вариометар закривљености нивоских површи. Са вертикалним растојањем између маса, инструмент је осјетљив и на хоризонталне градијенте. Управо то је главна разлика у односу на Кевендишову вагу, која је имала обје масе на крајевима шипке. Хоризонтални градијент између маса узрокује торзију и хоризонтална шипка се ротира све док жица о коју је окачена не дође у стање равнотеже. У равнотежном положају читање на линеарној скали (лењиру) је  $n$ , док је читање у нултом положају шипке  $n_0$ . Основна једначина Етвешеве торзионе ваге гласи (Völgyesi, 2015):

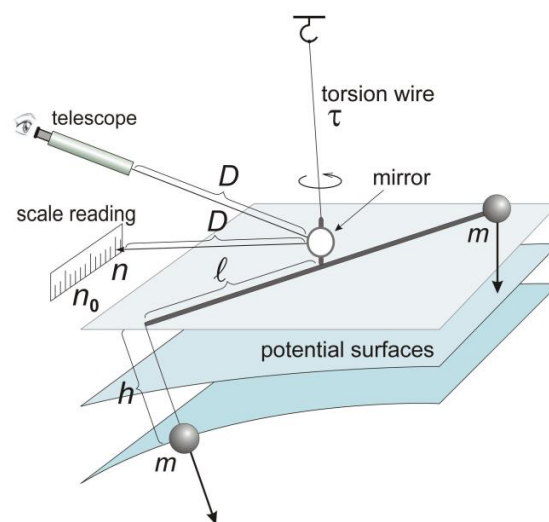
$$n - n_0 = \frac{DK}{\tau} (W_{\Delta} \sin 2\alpha + 2W_{XY} \cos 2\alpha) + \frac{2lDhm}{\tau} (W_{ZY} \cos \alpha - W_{ZX} \sin \alpha), \quad (4.25)$$

гдје је:  $D$  - растојање између торзионе жице и лењира;  $K$  - момент инерције шипке;  $\tau$  - коефицијент торзије жице;  $\alpha$  - азимут шипке;  $W_{\Delta} = W_{YY} - W_{XX}$ . Однос разлике читања лењира и растојања  $D$  даје ротацију шипке изражену као угловну разлику  $\theta - \theta_0$ .



Слика 4.6. Оригинална Етвешева торзиона вага (Szabó, 2016)

На слици 4.7 шематски је приказан основни принцип рада торзионе ваге.



Слика 4.7. Принцип рада торзионе ваге (Völgyesi, 2015)

Из једначине (4.25), јасно је да у резултату једног мјерења фигурише пет непознатих величина – градијенти  $W_{\Delta}$ ,  $W_{xy}$ ,  $W_{zx}$  и  $W_{zy}$ , као и равнотежни положај жице  $n_0$ . Зато је било неопходно вршити мјерења у пет азимута. Такође, очигледно је да инструмент не може дати вриједности градијената  $W_{xx}$  и  $W_{yy}$  понаособ, већ само њихову разлику, тзв. диференцијалну закривљеност  $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$ . Претпоставка да је ово физичко ограничење узроковано коришћењем торзионе ваге, није тачна. Методама тензорског рачуна може се показати да је ово ограничење заправо геометријског поријекла, и да је проистекло из геометрије самих геопотенцијалних површи (J. D. Zund, 1989). Ови градијенти би се вјероватно могли раздвојити када би се мјерио обртни момент око хоризонталне осе, или када би се користила тзв. нагнута вага (Hotine, 1991). Осим тога, јасно је и да вага не мјери вертикални градијент  $W_{zz}$ , иако постоје методе за његову посредну оцјену из торзионих мјерења. Суштина је у томе да се срачунају релативне промјене вертикалног градијента, тако што се формира полигон тачака са торзионим мјерењима. Изводи вертикалног градијента се тада оцјењују на основу резултата мјерења и познатих релација између елемената тензора, које служе као датумски услови (Tóth et al., 2004). Ове и сличне методе су ипак само приближне. У основи, вага мјери четири градијента, тј. њихове комбинације. Притом је уобичајено да се  $W_{\Delta}$  и  $W_{xy}$  називају компонентама закривљености, а  $W_{zx}$  и  $W_{zy}$  компонентама градијената (Tóth, 2002). Пошто је код сфере  $W_{yy} = W_{xx}$ , може се рећи да диференцијална закривљеност  $W_{\Delta}$  заправо представља мјеру одступања геопотенцијалне површи од савршеног сферног облика (J. D. Zund, 1989). С друге стране, на основу излагања у подпоглављима 3.2 и 4.1, за компоненте закривљености може се рећи да описују непаралелност геопотенцијалних површи.

Мјерења торзионом вагом била су врло сложена, и захтијевала су много времена. За једно комплетно мјерење на станици било је потребно минимално  $1^h 40^{min}$ . Варирањем параметара  $K$  и  $\tau$  могла се повећати осјетљивост инструмента, али је то за посљедицу имало и дуже вријеме опажања, будући да је период умирења био знанто продужен. Тако су мјерења на једној станици могла трајати и до  $8^h$ . Године 1902. Етвеш је изумио двоструку вагу, са двије управне шипке. Ово је омогућило смањење броја мјерења, јер се умјесто у пет, сада могло мјерити у три азимута. Тако су за сваку шипку могле да се напишу по три једначине и да се одреди шест непознатих величина, пет изворних и равнотежно стање друге шипке. Вријеме опажања на станици такође је скраћено на  $1^h$  (Szabó, 2016). Током времена, дизајн ваге је додатно усавршаван. У почетку коришћени платинасти тегови, временом су замијењени златним. Побољшана је структурна стабилност инструмента и додатно скраћено вријеме мјерења.

Прва теренска мјерења торзионом вагом извршена су у Мађарској 1891. године, и настављена су у наредним деценијама, све до Другог свјетског рата. Главни организатор мјерних кампања био је сам Етвеш. Позната су његова пробна мјерења на залеђеном језеру Балатон у зиму 1901. и 1903. године. Након његове смрти 1919. године, активности су наставили његови сарадници. У првим деценијама 20. вијека, торзиона вага је већ била у широкој употреби у Европи и Сјеверној Америци, гдје је коришћена у геолошке и геофизичке сврхе, за тражење рудних и лежишта фосилних горива. У Њемачкој су прва мјерења рађена 1917, затим у Египту 1921. у организацији холандских и британских нафтних компанија, а 1922. и у Сједињеним Америчким

Државама. До почетка 30-их година, више од 125 торзионих вага је било у употреби у Сједињеном Државама, а до 1938. само у подручју Мексичког залива откривено је помоћу вага 79 лежишта фосилних горива. Ипак, крајем 1930-их, вагу замјењују прецизни гравиметри, инструменти за мјерење убрзања теже, који су били знатно једноставнији за коришћење. Недостаци торзионе ваге били су сложена процедура мјерења, велика осјетљивост на утицаје локалне топографије и на температурне варијације у току мјерења. Да би се из резултата мјерења елиминисао топографски сигнал, било је потребно нивелати око станице у кругу од 100 m, како би се тај ефекат што боље моделовао. Савремена истраживања су показала да је за температурну аклиматизацију инструмента било потребно и 90 минута (Völgyesi & Ultmann, 2012). Осјетљивост на промјене температуре условила је потребу да се добар дио мјерења обавља ноћу, кад нема значајних варијација. Све су ово били разлози и што вага, изузев самог Етвеша и његових истраживања, никад није ушла у ширу употребу у геодетске сврхе (Hotine, 1969).

Друго „златно доба“ торзионе ваге дешава се 60-их година 20. вијека, поново у Мађарској. Разлог томе била је прије свега политичка ситуација у тој земљи. Као комунистичка држава, Мађарска није могла да увози гравиметре који су се производили у западним, капиталистичким земљама. То је довело до обновљеног интереса за торзионе ваге, те су се оне вратиле у ширу употребу. Од 1952. радило се на развоју савремене верзије торзионе ваге. Инструмент је значајно унапријеђен. Главно побољшање овај пут односило се на увођење електронског читавања. Ово је било битно јер се на тај начин могло избјећи повремено приближавање оператера инструменту за вријеме мјерења, зарад читавања. Због изузетне осјетљивости инструмента, маса оператера је утицала на резултате мјерења. У савременим истраживањима је утврђено да маса опажаача код торзионе ваге у року од двије минуте ствара ефекат од око 0.5 E (Csaró et al., 2009). Поред аутоматизованог процеса мјерења, максимално је скраћен период мјерења, побољшана отпорност на термалне ефекте и повећана прецизност читавања. Вриједност најмањег подиока скале доведена је на ниво 2.5 - 3 E. У Мађарској је од краја 19. вијека укупно произведено преко 300 инструмената, у различитим серијама и моделима. Посљедња вага произведена је 1969. године, будући да су се ускоро стекли услови за увоз и коришћење гравиметара. Укупно је у Мађарској у периоду 1901 - 1969 извршено мјерење на око 60 000 станица, од чега је око 5 000 изван данашњих граница државе. У та мјерења спадају и мјерења у Србији, на почетку 20. вијека, извршена сјеверно од Фрушке горе, у близини Новог Сада (Szabó, 2016). Пошто је добар дио ових мјерења изводила мађарско-америчка нафтна компанија у сарадњи са мађарским геофизичким институтом, на одређеном броју тачака мјерене су само компоненте градијената које су важне за геофизичка истраживања (Völgyesi & Ultmann, 2012). Другим ријечима, компоненте закривљености, врло корисне у геодезији, нису мјерене на свим тачкама. Од свих ових мјерења, сачуван је само дио, и данас их у бази података има око 36 500.

Сматра се да је тачност ових мјерења веома велика. Поједини извори чак наводе тачност одређених градијената од  $\pm 1$  E. Испитивања у склопу калибрације инструмената дала су тачност од  $\pm 1 - 2$  E за компоненте градијената и  $\pm 2 - 4$  E за компоненте закривљености (Völgyesi, 1999). Друга истраживања базирала су се на предикцији градијената колокацијом по методи најмањих квадрата (МНК), и њиховом поређењу са мјереним вриједностима у оквиру заједничког полигона.



Примјењена је методологија сукцесивног искључивања и моделовања једне по једне тачке (*Leave One Out - LOO*). Добијени су слични резултати, на нивоу  $\pm 4 - 5 E$  просјечне тачности за све компоненте (Tóth & Völgyesi, 2005). Према томе, може се узети да је тачност мјерења торзионом вагом реда величине неколико [E], или  $0.1 \mu\text{Gal/m}$ .

У новије вријеме, торзиона вага се још увијек користи у лабораторијским условима, за експерименте у области фундаменталне физике. Главни циљеви су напредак у одређивању универзалне гравитационе константе, тестирање постојања пете силе и провјера принципа еквиваленције (Rummel, 2002). Принцип еквиваленције тестирао је још сам Етвеш са својим сарадницима Дешо Пекаром (*Dezso Pekar, 1873-1953*) и Јено Фекетеом (*Jeno Fekete, 1880-1943*), у периоду 1906 – 1908 (Völgyesi et al., 2018). По томе је овај експеримент добио име EPF експеримент (Eötvös-Pekar-Fekete - EPF). Принцип еквиваленције постулира једнакост гравитационе и инерцијалне масе, и представља темељни аксиом Ајнштајнове теорије релативности. У изворним резултатима EPF експеримента пронађена су 1986. извјесна систематска одступања која су подстакла расправе у научним круговима и довела до понављања експеримента током посљедњих година (Tóth et al., 2019). Утврђено је да су одступања посљедица временских варијација градијената убрзања, ваздушног притиска, као и различитог облика тест-маса на које дјелује нехомогено поље теже, те да принцип еквиваленције није нарушен (Tóth, 2020).

#### 4.3.1.2. Гравиметри

Вертикални градијенти одређују се посредно, на основу резултата мјерења убрзања теже на различитим висинама. Основни концепт одређивања описан је једначином (4.17), при чему се узимају коначне вриједности промјене убрзања и висине. Инструменти за мјерење убрзања називају се гравиметрима, а област која се тиме бави гравиметријом. Прва гравиметријска мјерења вршена су у 17. и 18. вијеку, и била су подстакнута развојем механике чврстих и деформабилних тијела (Torge, 1989). Данас су вриједности убрзања теже једна од основних мјерних величина у геодезији и геофизици. Мјерењем  $g$ , рјешава се један од основних задатака геодезије, одређивање спољашњег гравитационог поља Земље. Конкретно, мјерена убрзања користе се за рачунање аномалија и одређивање геоида, као и за трансформацију нивеланих висинских разлика у физичке системе висина, тј. у разлику потенцијала. Због тога су гравиметријска мјерења неизоставни дио реализације вертикалних референтних мрежа. Осим тога, убрзања су кроз историју коришћена за редукацију геодетских и астрономских мјерења, интерполацију одступања вертикала и одређивање општег облика Земље. Заједно са геофизицом, геодезија има интерес у одређивању геодинамичких помјерања, попут пост-гласијалног издизања, гдје праћење временских промјена убрзања теже има велику улогу. У геофизици, гравиметрија се користи за мапирање подземних геолошких структура, рачунање рудних резерви као и проналажење лежишта фосилних горива (Nabighian et al., 2005). Осим тога, промјене убрзања теже рефлектују промјене у разним феноменима који доводе до прерасподјеле маса унутар тијела Земље, као што су Земљина ротација, климатско привлачење других небеских тијела, топљење глечера, промјена нивоа подземних вода, итд. Узевши све то у обзир, може се рећи да су гравиметријска мјерења један од основних извора информација о промјенљивом и динамичном тијелу Земље (Van Camp et al., 2017). Различите технике обраде и анализе података су развијене зависно

од намјене гравиметријских мјерења, врсте структура које се одређују, њихове дубине и сл. Саставни дио тих процедура су и директни и инверзни модели поља теже различитих тијела. Инверзно моделовање обухвата креирање аутоматских алгоритама који конструишу модел подземних физичких карактеристика (варијација густина) на основу резултата гравиметријских мјерења и осталих доступних података. Такође, у савременој гравиметрији су широко заступљене и напредне рачунске технике попут спектралне анализе и различитих нумеричких метода (Swain & Kirby, 2021).

Геодети и геофизичари су традиционално захтијевали висок ниво тачности за податке убрзања теже, што је њихово мјерење кроз историју, а и данас, учинило врло тешким, јер је потребно регистровати јако мале просторно-временске варијације убрзања. У пољу теже које глобално варира од 978 000 mGal на екватору до 983 000 mGal на половима, рутински се тражи тачност боља од 1 mGal, што значи резолуцију од 1 ppm (Part Per Million,  $10^{-6}$ ) у односу на вриједност убрзања. За поједине сврхе потребна је и боља тачност, све до 1  $\mu$ Gal (Chapin, 1998).

Мјерење убрзања теже у основи подразумева мјерење дужине и времена, као основних величина од којих убрзање зависи. Постоје различите методе како то може да се оствари, али само неке од њих испуњавају захтјеве тачности у геодезији и геофизици. Двије најчешће коришћене подразумевају слободни пад тијела и систем тијела окаченог на опругу. Физичко клатно је трећа метода која је коришћена у прошлости, али данас не задовољава савремене захтјеве у погледу тачности. Но, клатно је цијелих 150 година, од краја 18. вијека, било основни вид мјерења убрзања и довело је до раста интересовања за гравиметрију. Тачност која се могла остварити била је реда величине  $10^{-5} g$ , односно 10 mGal (Krynski, 2012).

Данашњи гравиметри подијелени су у двије категорије: апсолутне и релативне. Апсолутни (слика 4.8) обухватају све уређаје који директно мјере убрзање теже у смислу стандардних јединица дужине и времена ( $m \cdot s^{-2}$ ). Некадашња клатна су претече савремених апсолутних гравиметара који раде на принципу слободног пада и користе ласерске и атомске стандарде времена (Niebauer, 2015). Притом тест-маса могу бити макроскопске и микроскопске. Макроскопске су смјештене унутар механичког система који садржи вакуумску комору, а сама маса има ретро-рефлектујуће призме које одбијају ласерску свјетлост. Фотодетектори региструју одбијену свјетлост и генеришу електричне сигнале, чијом анализом се утврђује кретање тест-маса. Маса обично прелази растојање од 10 – 20 cm. Уз одговарајуће мјерење времена, могуће је одредити убрзање (Zumberge, 2021). Коришћење тзв. микроскопских маса заправо подразумева примјену атомске интерферометрије. Атоми су затворени у магнето-оптичку цијев, ласерски охлађени на врло ниске температуре и такође ласером покренути навише или наниже. Пошто фаза атомске таласне функције зависи од теже, анализом интерференције атома који се крећу различитим путањама кроз поље теже може се добити интензитет убрзања. Ови гравиметри називају се и квантним, и њихова употреба је због сложености принципа рада и осјетљивости на спољашње утицаје дуго била ограничена на лабораторијске услове. Ипак, у посљедњих неколико година развијена је технологија која омогућава конструкцију лако преносивих квантних гравиметара и њихово коришћење у теренским условима (Ménoret et al., 2018).



Слика 4.8. Апсолутни гравиметар FG5X, Micro-g LaCoste (Niebauer, 2015)

Релативни гравиметри (слика 4.9) могу широко да варирају у конструкцији и типу материјала који се користе, али у основи представљају систем масе окачене о опругу. Основна разлика у односу на апсолутне је у томе што убрзање мјере индиректно, мјерећи истезање опруге. Другим ријечима, релативним гравиметрима се одређују разлике убрзања између тачака. Ово је уједно и главна предност релативних гравиметара. За разлику од апсолутних, гдје је потребно измјерити дужину и вријеме, код релативних је мјерење теоретски могуће извршити мјерећи само истезање механичке или електромагнетне опруге која носи масу (Marson, 2012). Такође, у разлици мјерења елиминише се велики број заједничких извора грешака. Све то доприноси знатно лакшем постизању тражене тачности у односу на апсолутне гравиметре. Само мјерење може да се изврши на неколико начина: мјерећи (најчешће механички) одступање од равнотежног положаја опруге, мјерећи интензитет силе потребне да опругу врати у равнотежно стање (мјери се електрична струја или магнетно поље) и мјерећи силу потребну да опругу одржи у равотежи (најчешће електрично мјерење) (Nabighian et al., 2005). У посљедње вријеме развијена је и технологија микроелектро-механичког опажања промјене положаја тест-масе. Овакви релативни гравиметри требали би бити лаганији, јефтинији и лакши за теренску

употребу. То би их учинило компатибилним са новим квантним гравиметрима у смислу примјене за континуирана детаљна гравиметријска мјерења на већим подручјима (Carbone et al., 2020).



Слика 4.9. Релативни гравиметар CG-6 Autograv, Scintrex (Van Camp et al., 2017)

Посебан модел релативних гравиметара јесу суперпроводни гравиметри, развијени како би се превазишао проблем истезања опруге, односно хода гравиметра приликом континуираних мјерења у дужем временском периоду, будући да га је тешко отклонити у обради података. Суперпроводни гравиметар скоро у потпуности отклања овај проблем замјењујући механичку опругу тест-масом у виду суперпроводне сфере која лебди у магнетном пољу. Промјене убрзања теже региструју се на основу варијација силе потребне да тест-масу одржи у равнотежном стању унутар поља. Неколико фактора, попут цијене, сложености опреме, осјетљивости на помјерања и захтјевности у руковању, условили су да се ови гравиметри користе за стационарна мјерења унутар намјенских опајачких објеката, гдје врше прецизно континуирано регистровање врло деликатних промјена убрзања теже током дугих временских периода. Зато је кључан избор локација за њихово постављање, гдје треба да се максимизира гравитациони сигнал од интереса, а минимизирају сви остали утицаји (Hinderer et al., 2015). Типичан примјер њихове употребе јесте мјерење Земљиног климатског дисања.

Тачност убрзања одређених апсолутним гравиметрима износи 1 - 2  $\mu\text{Gal}$  (Niebauer, 2015). Главни ограничавајући фактори њихове тачности јесу околни извори гравитације и позадински шум Земље. Код релативних гравиметара, главни извори грешака јесу: промјена размјере инструмента, унутрашњи шум, дугопериодични ход, помјерање инструмента током мјерења (различите вибрације), те утицај температуре,

ваздушног притиска и магнетног поља (Hugill, 2021). Такође, ефекти транспорта инструмента могу се манифестовати као промјене читавања и хода гравиметра. Због велике осјетљивости, чак је инструктивно да се води рачуна да код појединих инструмената нагиб у возилу током транспорта не пређе одређене вриједности (Reudink et al., 2014). Због свега наведеног, тачност релативних гравиметара у теренским условима, у најбољем случају износи 6 - 11  $\mu\text{Gal}$  (Lederer, 2009), односно неколико стотих дијелова од  $\text{mGal}$ . Ово вриједи за класичне, стационарне гравиметре на копну. У поморској гравиметрији тачност мјерења се креће око 0.1 - 0.5  $\text{mGal}$ , а у ваздухопловној у распону 3 - 10  $\text{mGal}$  (Bezvesilna et al., 2017). Тачност суперпроводних гравиметара је око 1  $\text{nGal}$  (Hinderer et al., 2015). С обзиром да функционишу на принципу магнетизације, веома су осјетљиви на Земљино магнетно поље.

Треба напоменути да се код гравиметара, као и код осталих мјерних инструмената, разликују прецизност, поновљивост и тачност мјерења. Прецизност се односи на релативну несигурност резултата мјерења и може се тумачити као резолуција најмање значајне цифре у резултату којег инструмент даје. Зависи од неколико фактора, а то су: квалитет инструмента, шум на локацији мјерења, временски интервал мјерења и фреквенција шума и сигнала. Најједноставнији тип шума је „бијели шум“, и карактерише га раван спектар фреквенција. Шум ће имати овакав спектар ако су сва индивидуална мјерења некорелисана. У том случају, прецизност на било којој фреквенцији повећава се са квадратним коријеном времена опажања (Niebauer, 2015). Други вид изражавања ове зависности од времена опажања јесте дефинисање спектралне густине шума, која за убрзање теже има јединице мјере убрзања по квадратном коријену фреквенције, нпр.  $\mu\text{Gal}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Ово је важно из разлога што се исти принцип може примјенити и на савремене градиометре о којима ће бити ријечи у наставку. Зависност њихове прецизности од времена изражава се у јединицама  $\text{E}/\sqrt{\text{Hz}}$ , те се у тим јединицама најчешће описују и перформансе инструмента. Што се тиче поновљивости гравиметријских мјерења, она описује оно што се може очекивати у типичним реалним условима мјерења. Поновљивост не подразумеива апсолутну тачност, али обухвата и друге изворе варијација који нису садржани у прецизности. Тачност је најједноставнија за дефинисање и представља исправност мјерења у апсолутном смислу.

Како је претходно наведено, вертикални градијент одређује се мјерењем промјене убрзања теже дуж неке висинске разлике, односно коришћењем релације (4.17) уз замјену диференцијала коначним вриједностима. Једначина опажања има облик:

$$W_{zz} = \frac{g(h_2) - g(h_1)}{h_2 - h_1} = \frac{g(h_2) - g(h_1)}{\Delta h}. \quad (4.26)$$

У претходном изразу претпоставља се линеарна промјена убрзања између положаја  $h_1$  и  $h_2$ , а резултат се теоретски односи на тачку на половини растојања између два положаја. Такође, примјена (4.26) даће негативну вриједност градијента, супротно конвенционалном математичком посматрању елемената Етвешевог тензора. Али, како је већ објашњено у подпоглављу 4.1.2, ова неусаглашеност губи значај јер се тежа у овом контексту превасходно посматра кроз њен интензитет  $g$ , а не као вектор строго дефинисаног правца и смјера.

У пракси се вертикални градијент одређује коришћењем релативних гравиметара, тако што се убрзање мјери у двије позиције изнад тачке, обично удаљене око 1 m висинске разлике. Процедура обично подразумијева вишеструка мјерења у свакој позицији, при чему се у почетној позицији обави једно мјерење више, тј. у почетној тачки се и завршава. Ово се ради да би се елиминисао ефекат хода гравиметра у току мјерења и повећала тачност. Коначне вриједности у свакој позицији добијају се као аритметичке средине свих мјерења. Могуће је и додавање додатних позиција и урачунавање нелинеарне промјене убрзања (Dykowski, 2012).

Тачност овако одређеног вертикалног градијента може да се срачуна примјеном закона преноса грешака (ЗПГ). Добија се да је:

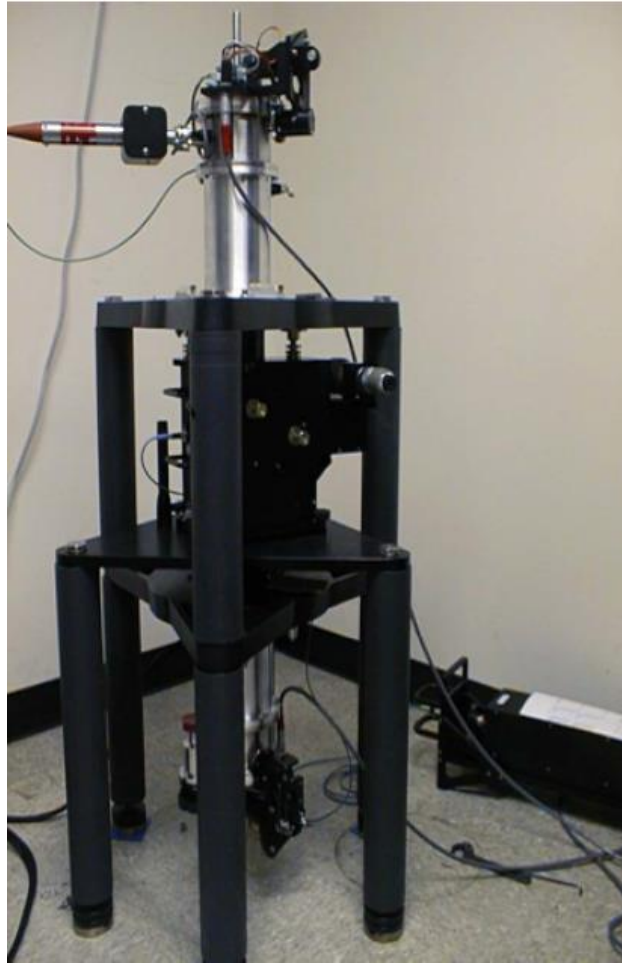
$$(\sigma W_{zz})^2 = \frac{2}{\Delta h^2} (\sigma g)^2 + \left( \frac{g(h_2) - g(h_1)}{\Delta h^2} \right)^2 (\sigma \Delta h)^2. \quad (4.27)$$

Ако се усвоје стандардне вриједности за тачност висинске разлике и убрзања,  $\sigma \Delta h = 1 \text{ mm}$  и  $\sigma g = 0.01 \text{ mGal}$ , тада се за тачност вертикалног градијента добија  $\sigma W_{zz} = 140 \text{ E}$ . Ова тачност много више зависи од грешака у мјерењу убрзања него висинске разлике, будући да се грешке убрзања директно преносе у грешку градијента. Значајна разлика добија се тек ако се тачност висинске разлике спусти на центиметарски ниво, па је тако за  $\sigma \Delta h = 5 \text{ cm}$  тачност градијента  $\sigma W_{zz} = 210 \text{ E}$ , а за  $\sigma \Delta h = 10 \text{ cm}$  добија се  $\sigma W_{zz} = 340 \text{ E}$ . С друге стране, смањивање тачности убрзања са  $\sigma g = 0.01 \text{ mGal}$  на  $\sigma g = 0.02 \text{ mGal}$ , доводи до двоструко веће грешке градијента,  $\sigma W_{zz} = 280 \text{ E}$ . Наравно, у изразу (4.26) суштински фигурише разлика мјерених убрзања, а већина извора грешака се у таквој разлици поништи. Ипак, важно је имати на уму изражену зависност тачности градијента од тачности разлике убрзања. У лабораторијским условима, уз одговарајуће процедуре и тачност убрзања од неколико  $\mu\text{Gal}$ , може се остварити тачност градијента и од 50 - 60 E (Dykowski, 2012). Ипак, с обзиром на све речено, за очекивану тачност одређивања вертикалног градијента помоћу релативних гравиметара може се усвојити вриједност од  $\sigma W_{zz} = 150 \text{ E}$ .

Иако нису у широј употреби, постоје и намјенски, конвенционални апсолутни градиометри који се састоје од два апсолутна гравиметра и мјере вертикални градијент (слика 4.10). Основни концепт је исти као код одређивања  $W_{zz}$  помоћу релативног гравиметра, с тим што су уређаји већ спојени у један инструмент. Са тачношћу мјерених убрзања од  $3 \mu\text{Gal}$ , добијена је тачност градијента од 20 E.

Крајем 90-их испитивана је могућност одређивања вертикалног градијента помоћу само једног апсолутног гравиметра. Коришћен је FG5 апсолутни гравиметар. Суштина је да се убрзање одређује на два сегмента путање тест-месе, и да се из тога добије градијент. Остварена тачност износила је око 30 E, чиме је показано да се за  $W_{zz}$  могу добити задовољавајући резултати са само једним гравиметром, и без његовог помјерања. Ово је подстакло додатне експерименте, те су у посљедњих десетак година конструисани гравиметри са продуженом комором, како би се дужина

слободног пада повећала са 20 cm на 25 cm и тако добили поузданији резултати. Експерименти су потврдили ефикасност овог приступа (Veryaskin, 2018).



Слика 4.10. Градиометар састављен од два FG5 гравиметра, Micro-g LaCoste (Veryaskin, 2018)

#### 4.3.2. Ваздухопловна и поморска градиометрија

Статична копнена мјерења градијената, која се изводе торзионом вагом, дају велику прецизност, али су врло захтјевна у смислу утрошеног времена и сложености поступка мјерења. Мјерења су се вршила по тачкама, и у најбољем случају, са модернизованим вагама, могуће је измјерити градијенте на неколико тачака у току дана. Такав приступ захтијевао би огромно вријеме за градиометријски премјер већих подручја, у потрази нпр. за нафтним лежиштима. Стога су у другој половини прошлог вијека покренута истраживања у циљу развоја савремених градиометара који би се користили на покретним платформама, попут авиона, хеликоптера или бродова. Уређаји су требали да омогуће ефикасна мјерења, покривање већих подручја у релативно кратком времену и задовољавајућу тачност. Поред геодезије, геофизике и геологије, један од мотива за истраживање био је и развој система за аутономну навигацију у подморницама. Иако је примјена градиометара за аутономну навигацију изгубила донекле на значају са развојем ГНСС и прецизних жироскопа, у



војним круговима је тај концепт препознат као резервна, сигурносна варијанта, тако да су поуздани градиометри који мјере све компоненте  $\Gamma$  ипак били потребни (Evstifeev, 2017).

Зачетник развоја практичних градиометара била је корпорација Lockheed Martin (некадашњи Bell Aerospace), крајем 60-их и почетком 70-их година прошлог вијека. Lockheed Martin је био ангажован од стране министарства одбране Сједињених Држава, и њихов фокус је био на примјени градиометара у војне сврхе. Производ њиховог рада је градиометар који мјери све компоненте тензора (*Full-Tensor Gravity Gradiometer - FTG*), назван Falcon, који се и данас сматра стандардом у овој области. Америчка морнарица одобрила је 1994. коришћење својих градиометара у цивилне сврхе и од тада креће њихова комерцијална употреба (Veryaskin, 2018).

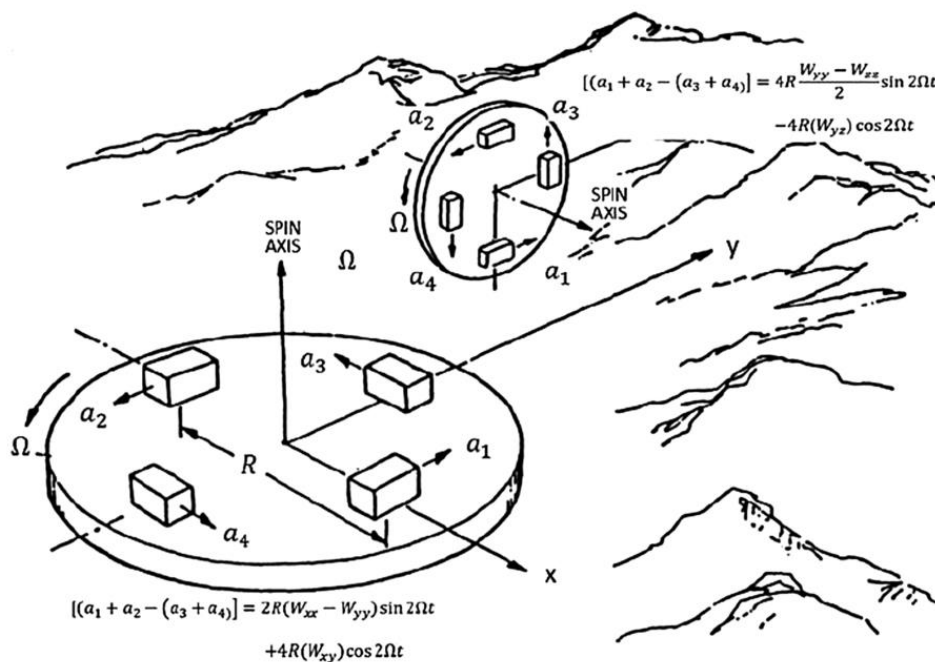
Постоји неколико проблема који су се морали ријешити приликом конструкције покретних градиометара. Прво, компоненте тензора помијешане су са значајним позадинским динамичким градијентима који су продукт инерцијалних сила које дјелују на инструмент. Даље, потребно је минимизирати динамичке грешке усљед структурне нестабилности носеће платформе. Неопходно је обезбиједити и синхронизацију парова акцелерометара, ефикасну топлотну изолацију и константну брзину ротације. На крају, треба омогућити калибрацију инструмената уз одговарајућу метролошку опрему, а пожељна је и обрада података у реалном времену. Све ово учинило је израду покретних градиометара великим научно-технолошким изазовом. Такође, компоненте које такав градиометар мјери, оригинално се односе на координатни систем везан за линију лета, тј. кретања, тако да их је потребно трансформисати у стандардне компоненте (Martinez & Li, 2012).

Паралелно са истраживањима у корпорацији Lockheed Martin, градиометри су развијани и у цивилним лабораторијама. Први прототипи уређаја за покретне платформе направљени су 1970-их у Сједињеним Државама, и припадају групи резонантних ротирајућих градиометара (*Resonant Rotating Gravity Gradiometer - RRG*). Инструмент је мјерио разлику торзије на двије шипке причвршћене у заједничком центру, са тест-масама на крајевима. Шипке су се ротирале око центра и ова покретна структура је имала механичку фреквенцију од 35 Hz, док је цијели склоп ротирао са половином те фреквенције. Ови инструменти још се називају и резонантним модулационим градиометрима (*Resonant Modulating Gravity Gradiometer - RMGG*), пошто је излазни сигнал резултат модулације основне фреквенције. Циљ пројекта је био да се направе уређаји за ваздухопловне и сателитске мисије и да се постигне спектрална густина шума од  $0.3 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$  на основној фреквенцији. На крају је у лабораторијским условима остварено  $3 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$ , и уређај никада није ни упућен на теренска испитивања. Почетком 80-их направљен је тзв. плутајући градиометар (*Floated Gravity Gradiometer - FGG*), који је користио технологију плутајућег жироскопа окаченог у течности мале вискозности. Намјера је била да се користи и у авионима и у сателитима. Први FTG цивилни систем креиран је такође током 80-их, а половином 90-их, како је већ речено, декласификован је и програм под покровитељством америчке војске. Прва комерцијална примјена овог система монтираног на авион забиљежена је 1987 (Vasco & Taylor, 1991).

FTG градиометар чини конфигурација од три ротирајућа диска. Сваки диск, назван градиометријски инструмент (*Gravity Gradient Instrument - GGI*), фиксиран је на жиро-



стабилизовану платформи. На дисковима се налазе по четири акцелерометра, у паровима од по два дијаметрално постављена сензора (слика 4.11). Акцелерометри су међусобно удаљени по 15 cm, а њихова прецизност је на нивоу  $10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Збир сигнала два акцелерометра даје градијент у центру диска, елиминишући заједничко линеарно убрзање платформе. Разлика суме са другим управно постављеним паром елиминисаће и кружно убрзање око обртне осе. Читав уређај има три таква диска. Прецизност овог градиометра у лабораторији оцијењена је као  $6 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$ , а у тестирању на отвореном 1987. добијено је  $30 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$ . Унапријеђеним дизајном FTG градиометра добијен је уређај за контролу наоружања (*Arms Control Verification Gravity Gradiometer - ACVGG*), који је на удаљености од 3 m могао да разликује конвенционалне и нуклеарне бојеве главе смјештене у идентична кућишта. Сви оперативни ваздухопловни градиометри базирани су на GGI технологији (Dransfield, 2007).



Слика 4.11. Шема FTG градиометра (Veryaskin, 2018)

Крајем 90-их, Lockheed Martin је направио поједностављену верзију свог војног градиометра, посебно намијењену за ваздухопловну примјену. Био је то уређај из серије Falcon, сачињен од осам акцелерометара постављених око заједничке осе ротације. Први комерцијални ваздухопловни градиометријски премјер помоћу овог инструмента одиграо се у октобру 1999. У исто вријеме направљени су и први квантни градиометри. Ови уређаји користе технологију магнето-оптичког затварања атома помоћу ласера, како би истовремено мјерили апсолутно убрзање двију тест маса у слободном паду. Градијент се добија као количник разлике њихових убрзања и међусобног растојања, које износи неколико метара. Тачност мјерења од неколико [E] постиже се за једну секунду. Стандардни модели мјере само вертикални градијент, иако би се могли модификовати да одређују и остале елементе тензора. Принцип рада градиометра неосјетљив је на кинематичке поремећаје док су атоми у слободном паду, тако да би могао да се користи и на покретној платформи. Ипак, њихов развој

до сада је углавном ишао у смјеру научних истраживања у области фундаменталне физике. У посљедњих неколико година развијени су стационарни модели ових градиометара који мјере компоненте закривљености вертикале, а могу да послуже и за одређивање универзалне гравитационе константе (Rosi et al., 2015).

Новији модели Lockheed Martin градиометара представљају побољшане FTG градиометре (*Enhanced Full-Tensor Gradiometer – eFTG*, слика 4.12). Главни напредак је у стабилности инструмента и минимизирању резидуалних ротација. Њихове иницијалне перформансе су  $2.5 - 4 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$ , али се очекују даља унапређења. Циљ је да се постигне прецизност од  $0.5 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$ .



Слика 4.12. Побољшани FTG градиометар, Lockheed Martin (Veryaskin, 2018)

Посебна класа градиометара јесу суперпроводни градиометри, чији је развој почео 1980-их. Ови инструменти имају неколико значајних предности, као што су смањен термални шум, практично идеална магнетна изолација, висок ниво механичке и електричне стабилности и елиминација топлотних градијената. Први модели имали су прецизност од  $0.7 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$ , док су касније верзије биле на нивоу  $0.02 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$ . Њихов развој посљедњих деценија усмјерен је на конструкцију модела за ваздухопловну примјену, гдје је циљ да се оствари прецизност од  $1 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$ .

Вриједи споменути и тзв. жичане градиометре. Они нису засновани на уобичајеним концептима торзије или акцелерометара. Умјесто тога, користи се жица без икаквих тест-маса, и она сама представља сензор који реагује на силу теже. У суштини, читава дужина жице представља континуум просторно распоређене масе по јединици дужине. Будући да је тежа по јединици дужине једина сила која дјелује на жицу, из

промјена њених особина могу се добити вриједности градијената. Најбоља до сада остварена прецизност износи  $30 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$ .

### 4.3.3. Сателитска градиометрија

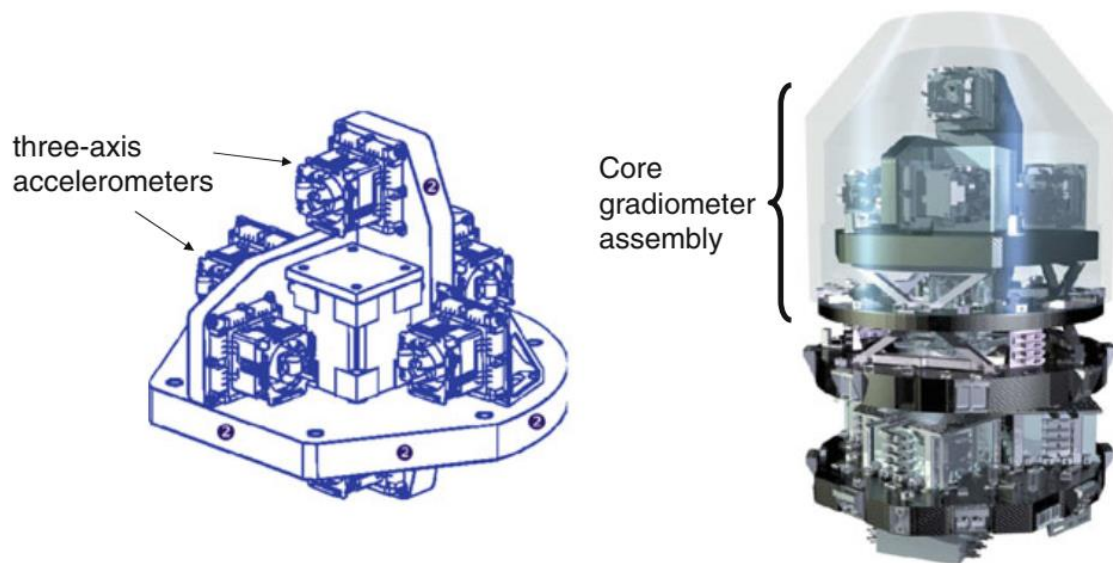
Осим високе прецизности, савремена геодезија захтијева и глобалну покривеност у одређивању поља теже. Из практичних разлога, то никада неће бити могуће постићи само помоћу терестричких мјерења. Покривање цијеле планете хомогеним мјерењима у рационалном временском року могуће је само помоћу вјештачких сателита. Наравно, главни недостатак оваквог приступа је велика удаљеност између сензора и аномалија густине услед висина лета сателита. Тако се сателитска градиометрија наметнула као пожељан компромис. Слабљење гравитационог сигнала због висине сателита компензовано је високом осјетљивошћу мјерне методе. Као и код торзионе ваге, ефекат саме теже је елиминисан, у овом случају бестежинским стањем инструмента унутар сателита који је практично у сталном слободном паду око Земље (Rummel, 2002).

Још 1980-их је америчка свемирска агенција (*National Aeronautics and Space Administration - NASA*) радила на развоју градиометара за вјештачке Земљине сателите. Ови инструменти су такође били засновани на акцелерометрима (Paik & Morgan, 1988). Прије тога, почетком исте деценије, развијен је градиометар за лунарни орбитер, базиран на торзионом принципу. Био је то један од првих савремених градиометара, али никада није ушао у оперативну употребу (Jekeli, 2021). Током 90-их настављена су истраживања у смјеру поузданог одређивања гравитационог поља помоћу вјештачких сателита, да би почетком 2000-их биле покренуте двије врло успјешне сателитске гравиметријске мисије. Њемачка мисија CHAMP (*Challenging Minisatellite Payload*) имала је један сателит који је праћен од стране GPS (*Global Positioning System*) сателита. Био је то систем праћења сателита сателитом (*Satellite-to-Satellite Tracking - SST*) у високо-ниској констелацији (*High-Low - HL*). Варијације у његовој орбити давале су информације о гравитационом пољу. Мисија је трајала од 2000. до 2010. Друга је била GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*), заједничка мисија америчке и њемачке свемирске агенције. Лансирана су два сателита која су константно мјерила међусобно растојање на заједничкој орбити. Промјене растојања такође су пружале информације о аномалијама гравитационог поља. Ово је такође био SST систем али у ниској констелацији (*Low-Low - LL*). Ова мисија је трајала од 2002. до 2017. Већ 2018. лансирана је практично идентична мисија GRACE-FO (*GRACE Follow-On*).

Коначно је 2009, од стране Европске свемирске агенције (*European Space Agency - ESA*) покренута прва градиометријска сателитска мисија, GOCE (*Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer*). Сателит опремљен градиометром лансиран је у орбиту на висини од 255 km и праћен у HL констелацији. Циљ мисије било је одређивање геоида са тачношћу од 1 cm, аномалија убрзања са тачношћу од 1 mGal и постизање просторне резолуције од 70 km. Мисија је успјешно окончана 2013. У посљедњој години, висина лета сателита је снижавана четири пута, све до коначних 224 km, што је омогућило још већу резолуцију у одређивању гравитационог поља.

И у овој мисији искоришћена је чињеница да је, осим атмосферског и притиска Сунчеве радијације, сателит у орбити око Земље у слободном паду. Акцелерометар у центру масе сателита осјећа само негравитационе ефекте, али градиометар, као и на било којој другој покретној платформи, региструје градијенте гравитације. GOCE

градиометар састојао се од три полуге постављене међусобно управно (слика 4.13). Свака полука је имала дужину од 50 cm и два тродимензионална акцелерометра на својим крајевима. Сваки акцелерометар имао је тест масу затворену у кутију. Маса се унутар кутије одржавала у стању лебдења помоћу електростатичког система, тј. релативно убрзање масе у односу на кутију је поништавано и било је нула. Информацију о убрзању давао је електрични импулс који му је био пропорционалан и који је је масу држао у одговарајућем положају. Разлике убрзања дијаметралних акцелерометара, подијелене дужином полуге, давале су компоненте Етвешевог тензора.



Слика 4.13. GOCE градиометар (Jekeli, 2021)

Стандардна прецизност градиометра била је  $0.004 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$  (DiFrancesco et al., 2009). Међутим, због оријентације сателита у орбити и чињенице да је калибрација инструмената вршена у терестричким условима, градијенти су одређивани са различитим квалитетом. Најбоље су одређени дијагонални елементи тензора и  $V_{xz}$ , изражени у референтном систему градиометра. Њихова прецизност износила је  $0.005 - 0.008 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$ , и то у ограниченом фреквенцијском опсегу. Градијенти  $V_{xy}$  и  $V_{yz}$  имали су прецизност  $0.6 - 0.8 \text{ E} / \sqrt{\text{Hz}}$  (Rummel et al., 2011). Анализе су показале да је GOCE испунио очекивања у смислу тачности одређивања гравитационог поља. Геоид добијен из геопотенцијалних модела (*Глобални Геопотенцијални Модел - ГГМ*) креираних на основу резултата мјерења GOCE и GRACE мисија центиметарске је тачности (Bruinsma et al., 2014). Овакав GGM може да послужи не само за глобално и регионално моделовање поља теже, већ и за повезивање висинских система и побољшавање сателитских орбита. Свакако, могућности примјене су широке, те обухватају и дисциплине попут океанографије и геофизике (van der Meijde et al., 2015).

#### 4.4. ДОСАДАШЊИ ПРИСТУПИ У МОДЕЛОВАЊУ ГРАДИЈЕНАТА

Значај и примјена градијената у геонаукама јасно указују и на велики интерес за њиховим што прецизнијим моделовањем. Већ је утврђено да коришћење моделованих вертикалних градијената за редукцију убрзања теже, умјесто вриједности нормалног градијента, даје боље резултате у одређивању геоида (Hsiao et al., 2017). Ово није изненађујуће, пошто нормални градијент у планинским подручјима може да се разликује од стварног, измјереног градијента, и до 60% (Dykowski, 2012). Очигледна је примјена моделованих градијената и у поступку обраде резултата ваздухопловних градиометријских мјерења у геофизичке сврхе, како би се уклонио сигнал топографије (Pedersen et al., 2020). Из сличног разлога су модели потребни и у сателитској градиометрији, за редукцију резултата мјерења (Lenczuk et al., 2019). Инверзија података о градијентима зарад предикције густина у дубини може се вршити у различитим координатама, као што су нпр. сферне координате, те је и у ту сврху потребно развити адекватне директне моделе (Y. Zhang et al., 2018). Директно моделовање је потребно и како би се утврдило који су градијенти најпогоднији за рјешавање појединих инверзних проблема, што је повезано са оптималним планирањем градиометријских мјерења (Pilkington, 2012).

Један правац у истраживању модела Етвешевог тензора јесте моделовање на основу резултата мјерења других функционала потенцијала убрзања. Тако се комплетан тензор може добити из резултата гравиметријских мјерења примјеном брзих Фуријеових трансформација (*Fast Fourier Transform - FFT*) (Mickus & Hinojosa, 2001). Тестирањем је добијена сагласност са генеричким моделима на нивоу од неколико Е, али је код поређења са реалним резултатима констатован низак однос сигнала и шума, тако да детаљна анализа тачности није ни рађена. Сличан приступ коришћен је и за моделовање тензора за потребе калибрације сателитских градиометара (Kem & Naagmans, 2005). Градијенти су рачунати из аномалија убрзања примјеном Стоксове и Хотинеове једначине, а тестирања су рађена само у оквиру геопотенцијалних модела, гдје су потврђени задовољавајући резултати.

Често коришћен приступ у моделовању јесте комбиновање гравиметријских података, тј. аномалија убрзања теже, и дигиталних модела терена (ДМТ) (Zhu, 2007). Градијенти су одређивани на висинама лета авиона и поређени са резултатима ваздухопловне градиометрије. Да би се из аномалија добио тензор, поготово на некој висини изнад Земље, потребно је нумерички ријешити проблем граничних вриједности теорије потенцијала, примјењујући Стоксов интеграл, колокацију по методи најмањих квадрата (*Least Squares Collocation - LSC*) или неки метод Фуријеових трансформација. Најбољи резултати добијени су примјеном Стоксовог интеграла и LSC, око 3 Е на висини 1 200 m, док су просјечна одступања за све компоненте на нивоу од 10 - 20 Е (Zhu & Jekeli, 2009). У овом концепту важно мјесто заузима моделовање утицаја топографских маса, представљених ДМТ-ом. Ове масе се најчешће представљају у виду призми или тијела добијених триангулацијом, док се за рачунање неријетко користе и нумеричке методе, попут методе коначних елемената, нумеричке интеграције или FFT (Jekeli & Zhu, 2006). За потребе различитих инверзних модела, ако се сумња на постојање извора специфичног облика, развијани су директни модели градијената и за друге геометријске облике, попут цилиндара (Rim & Li, 2016).

Један од интересантнијих приступа у моделовању јесте раздвајање маса тијела Земље на три дијела: маса нормалне Земље изражена нормалним пољем, масе између геоида и елипсоида, и топографске масе, тј. масе изнад геоида. До сада је овај концепт реализован тако што је утицај маса између геоида и елипсоида рачунат на основу аномалија убрзања теже, ослањајући се дакле на резултате гравиметријских мјерења (Rózsa & Tóth, 2005). Теоретски овај приступ дјелује исправно јер се користе стварни сигнали поља теже, али у пракси лош просторни распоред аномалија ствара проблеме у рачунању.

Иако не спада у класичне проблеме моделовања Етвешевог тензора, вриједи споменути и рачунање градијената из ГГМ. Овако добијени градијенти се користе у предикцији кретања свемирских летјелица, терестричкој навигацији, те одређивању сателитских орбита. Иако су утврђене стандардне формуле за рачунање, својеврсни изазов у овој области представља проналажење ефикасних и једноставних алгоритама за рачунање градијената из великог броја коефицијената. До сада су развијени рекурентни алгоритми који омогућавају рачунање извода ГГМ потенцијала произвољног реда, са нагласком на прве и друге изводе (Petrovskaya & Vershkov, 2010). Изрази за потенцијално корисне треће изводе такође су пронађени, а успјешно је ријешен и проблем сингуларности на половима (Hamáčková et al., 2016).

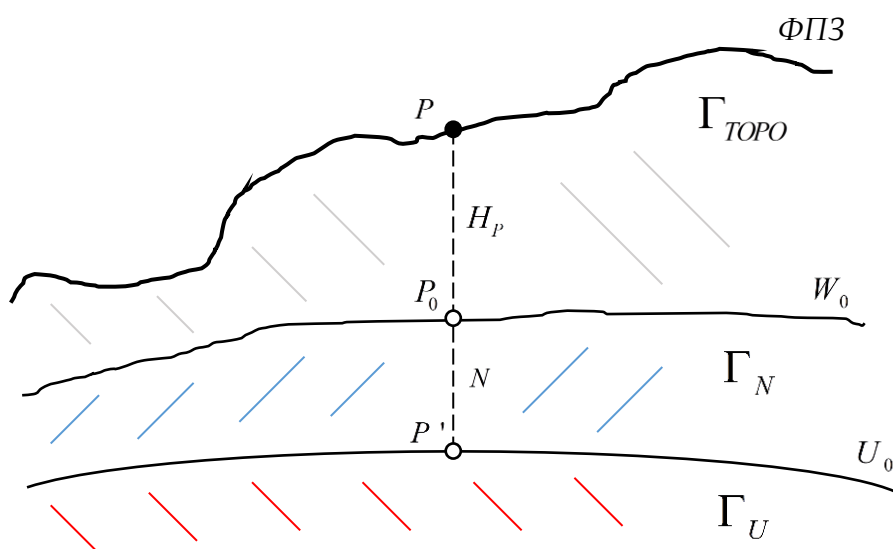
## 5. ПРЕДЛОЖЕНИ МОДЕЛ ЕТВЕШЕВОГ ТЕНЗОРА

Проблем моделовања поља теже Земље, тј. поља потенцијала  $W$  и његових извода, своди се на моделовање гравитационог потенцијала, будући да је центрифугални потенцијал лако одредив на основу положаја. У било којем моделовању гравитационих ефеката, два су кључна аспекта – геометријски и физички. Геометријски аспект подразумева апроксимацију облика маса чији се утицај моделује, док физички захтијева дефинисање распореда густина маса унутар изабраног облика. Ово представља тзв. директни проблем моделовања гравитационог поља. Инверзни проблем подразумева одређивање облика и распореда густина на основу познатих вриједности потенцијала или његових извода. Неријетко се у рјешавању директног проблема, за одређени дио маса (или комплетну масу тијела Земље) и рачунање њиховог ефекта, користе резултати мјерења фунционала потенцијала  $W$  или  $T$ , и њихова веза са утицајем поменутих маса. Такав приступ примјењен је у већини досадашњих истраживања, наведених у претходном потпоглављу, нпр. (Mickus & Hinojosa, 2001), (Kem & Haagmans, 2005), (Rózsa & Tóth, 2005) или (Zhu, 2007).

За разлику од праксе у већини досадашњих радова, у овом истраживању усвојен је приступ теоријског моделовања масе комплетног тијела Земље. Другим ријечима, нису коришћени подаци било каквих гравиметријских или сличних мјерења. Тијело Земље подијелено је на неколико дијелова, те је сваки засебно моделован и збир доприноса ових сегмената дао је коначан резултат у виду градијената. На овај начин избјегава се зависност од појединих резултата мјерења који често нису јавно доступни.

### 5.1. ОСНОВНИ КОНЦЕПТ

За потребе моделовања Етвешевог тензора  $\Gamma$ , тијело Земље подијелено је на три дијела: масе унутар нивоског елипсоида, масе између елипсоида и геоида, и масе изнад геоида (слика 5.1).



Слика 5.1. Основни концепт моделовања тензора



У основи, подјела маса и њиховог утицаја је на масу нормалне Земље, која је описана нормалним пољем и његовим тензором  $\Gamma_U$ , и на масе изван елипсоида које се могу третирају као поремећајни ефекат. Утицај ових маса се моделује тако што се масе дискретизују и апроксимирају коначним бројем геометријских тијела, чије је гравитационо поље могуће аналитички одредити. При том се засебно третирају масе између елипсоида и геоида, и масе од геоида до физичке површи Земље. Разлог томе су извори података о облику површинских маса. Терен се задаје ДМТ-ом, а он се изражава у форми физичких висина тачака,  $H_p$ , које се односе на геоид. Да би се обухватиле све поремећајне масе, узима се у обзир и дио од елипсоида до геоида, а подаци о тим масама заправо су подаци о геоиду и његовој висини изнад елипсоида, тј. ундулацији  $N$ . Ради термилошке јасноће и конзистентности, потоње масе називаће се у наставку међумасама, а масе изнад геоида топографским, тј. топографијом, како је то и уобичајено у физичкој геодезији.

Ако се са  $\Gamma_N$  означи тензор градијената које генеришу међумасе, а са  $\Gamma_{ТОРО}$  ефекат топографских маса, моделовани Етвешев тензор може се приказати као:

$$\Gamma = \Gamma_U + \Gamma_N + \Gamma_{ТОРО}. \quad (5.1)$$

Овај приступ у моделовању досад је примјењен само на вертикалне градијенте (Odalovic et al., 2022). Осим тога, најсличнији метод коришћен је у (Rózsa & Tóth, 2005), гдје су масе раздвојене по истом принципу, али су за рачунање ефекта међумаса коришћене аномалије убрзања теже, односно резултати мјерења. Осим тога, како је већ наглашено у претходном поглављу, овај метод показао се веома зависним од просторног распореда аномалија, који је често неповољан.

Осим чињенице да се не користе никакви резултати мјерења, постоје још двије важне карактеристике предложеног модела, и односе се на физички и геометријски аспект моделовања. У физичком смислу, густина топографских и међумаса сматрана је константном, и усвојена је средња вриједност густине Земљине коре, од  $2\,670\text{ kg/m}^3$  (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005). Нису дакле коришћени никакви модели густина литосфере. Оправдање за овакав приступ је суштинска природа градијената, који представљају краткоталасне функционале потенцијала. Због чињенице да њихова вриједност опада са трећим степеном растојања, спектар густине снаге сигнала градијената практично је нула за таласне дужине веће од 200 km. Штавише, утврђено је да 99.995% снаге спектра поремећајних градијената (други изводи поремећајног потенцијала) отпада на варијације густина у горњих 150 m Земљине коре (Jekeli, 2021). Другим ријечима, градијенти представљају скалиране разлике убрзања, као што се види и на примјеру једначине (4.26). Због тога се дуготаласни и средњеталасни ефекти као што је тренд изазван резидуалним густинама (разлика од средње густине Земљине коре) у највећој мјери у поменутој разлици пониште. Стога се избор константне вриједности густине Земљине коре може сматрати оправданим.

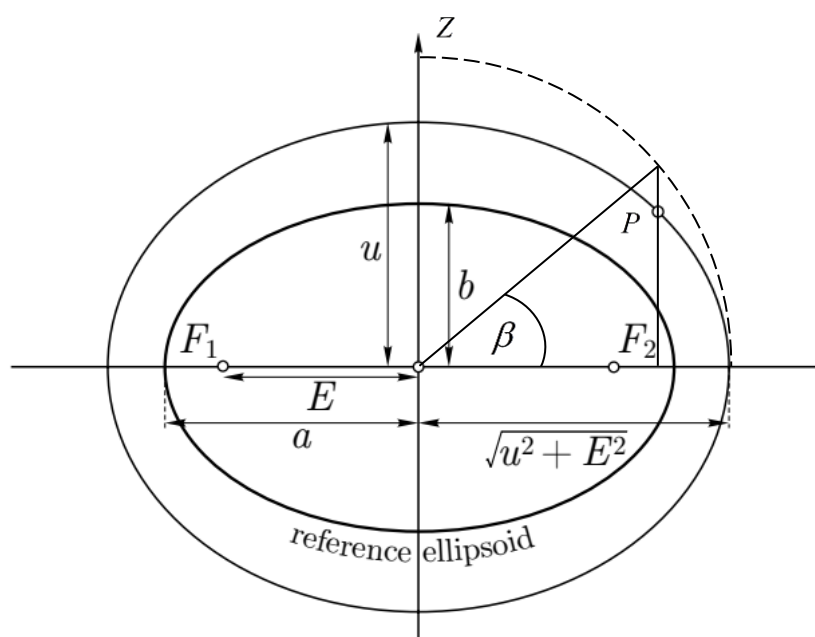
Друга важна карактеристика јесте рачунање гравитационог поља апроксимирајућих геометријских тијела. Иако постоји мноштво нумеричких, апроксимативних метода за рјешавање интеграла којима је задан потенцијал ових тијела и његови изводи, изабран је аналитички, егзактни модел рачунања. Овај начин је захтјевнији јер изискује програмирање понекад врло сложених израза за рачунање, при чему за



нумеричке методе постоји мноштво расположивих софтвера и модела рачунања. Но, циљ је био елиминисати у овом домену било каква потенцијална одступања изазвана апроксимацијом и грешкама које уз то иду. Ово је важно из разлога што постоје извори грешака на које се не може утицати, попут ограничене тачности ДМТ, који ће неминовно унијети грешке у резултате. Иако су коришћени аналитички изрази, и нумеричке методе су у наставку споменуте уз упућивање на одговарајућу литературу. Може се дакле рећи да је у физичком аспекту моделовања изабран најједноставнији, а у геометријском најсложенији приступ.

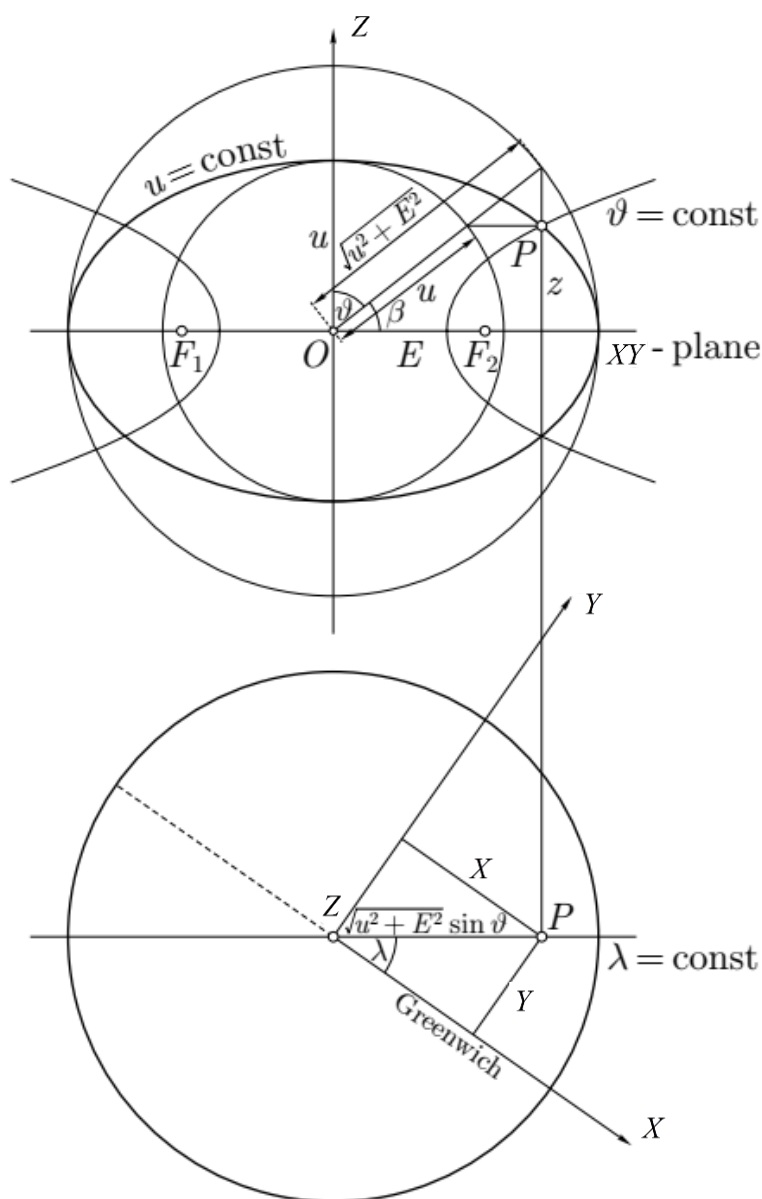
## 5.2. ГРАДИЈЕНТИ НОРМАЛНОГ ПОЉА

Пошто је нормално поље правилно, моделско поље, у свакој тачки простора може да се срачуна нормални потенцијал  $U$ , као и сви његови функционали, на основу положаја тачке. Да би се ове величине срачунале, прво је потребно увести систем једнопараметарских елипсоидних координата. Овај систем описује положај тачке у три димензије, слично као и систем правоуглих и геодетских координата на елипсоиду. Стога се прво дефинише правоугли координатни систем и елипсоид (слика 3.6). У правоуглом систему тачка  $P$  има координате  $(X, Y, Z)$ , док је у геодетском њен положај изражен са  $(B, L, h)$ . Сада се кроз тачку  $P$  провлачи површ обртног елипсоида који има геометријски центар у координатном почетку  $O$ , мала полуоса му се подударе са осом  $Z$ , и има линеарни ексцентрицитет  $E$  једнак ексцентрицитету референтног елипсоида. Према томе, положај и оријентација елипсоида који пролази кроз тачку  $P$  одговарају положају и оријентацији изворног референтног елипсоида. Једнопараметарске координате су  $u$ ,  $\vartheta$  и  $\lambda$ , при чему је једино параметар  $u$  нова величина која се рачуна на основу параметара референтног елипсоида, те се због њега координате називају једнопараметарским.



Слика 5.2. Елипсоид и једнопараметарске координате (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005)

У овом систему,  $u$  је мала полуоса новог елипсоида,  $\vartheta$  је комплемент редуковане ширине  $\beta$  у односу на овај елипсоид, а  $\lambda$  је једнако класичној геодетској дужини у ознаци  $L$  на слици 3.6. Редукована ширина је угао који се добија када се из геометријског средишта меридијанске елипсе посматране тачке опише кружница полупречника једнаког великој полуоси елипсе, а затим се ордината тачке продужи до ове кружнице. Редукована ширина је угао којег полупречник од геометријског центра елипсе до пројекције тачке на кружницу заклапа са великом полуосом (слика 5.2). Дужина полупречника једнака је великој полуоси новог елипсоида и износи  $\sqrt{u^2 + E^2}$ . Очигледно, вриједи да је  $\vartheta = 90^\circ - \beta$ . Комплетан систем једнопараметарских координата приказан је на слици 5.3.



Слика 5.3. Систем једнопараметарских координата (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005)

Ако су познате једнопараметарске координате, правоугле се рачунају као:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \cos \lambda, \\ Y &= \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \sin \lambda, \\ Z &= u \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ако се умјесто колатитуде  $\vartheta$  користи њен комплемент, што је чешћи случај, једначине (5.2) имају облик:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \cos \lambda, \\ Y &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \sin \lambda, \\ Z &= u \sin \beta. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Неке од помоћних величина које се користе у рачунању, већ су споменуте у подпоглављу 3.3. У питању су величине повезане са Лежандровим функцијама друге врсте и рачунају се као (Claessens, 2021), (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} \left( \left( 1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \operatorname{atan} \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right), \\ q_0 &= \frac{1}{2} \left( \left( 1 + 3 \frac{b^2}{E^2} \right) \operatorname{atan} \frac{E}{b} - 3 \frac{b}{E} \right), \\ q' &= 3 \left( 1 + \frac{u^2}{E^2} \right) \left( 1 - \frac{u}{E} \operatorname{atan} \frac{E}{u} \right) - 1, \\ q'_0 &= 3 \left( 1 + \frac{b^2}{E^2} \right) \left( 1 - \frac{b}{E} \operatorname{atan} \frac{E}{b} \right) - 1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

У претходним изразима је  $q_0$  вриједност параметра  $q$  на површи референтног нивоског елипсоида, када је  $u = b$ .

Ако је нивоски елипсоид задат параметрима у табели 3.1, прво се рачуна вриједност првог нумеричког ексцентрицитета  $e$ , итеративно (Moritz, 1980). Једначина која повезује ексцентрицитет са четири основна параметра гласи:

$$e^2 = 3J_2 + \frac{4}{15} \cdot \frac{\omega^2 a^3}{GM} \cdot \frac{e^3}{2q_0}. \quad (5.5)$$

Итеративно рачунање подразумијева да се у нултој итерацији за  $e$  усвоји нека почетна вриједност, између 0 и 1. Затим се срачуна други нумерички ексцентрицитет:

$$e' = \frac{E}{b} = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (5.6)$$

На основу  $e'$  рачуна се параметар  $q_0$  према (5.4). Са том вриједношћу  $q_0$  и са ексцентрицитетом  $e$  из претходне итерације, рачуна се нова вриједност за  $e$ , у складу са (5.5). Затим се поново рачунају  $e'$  и  $q_0$ , и поново  $e$ . Рачунање се понавља док се не постигне одговарајућа тачност.

Када је положај тачке задат правоуглим координатама, да би се срачунале једнопараметарске, прво се може написати:

$$X^2 + Y^2 = (u^2 + E^2) \cos^2 \beta, \quad Z^2 = u^2 \sin^2 \beta. \quad (5.7)$$

Елиминисањем  $\beta$  из претходне двије једначине добија се рјешење за  $u$ :

$$u^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2 - E^2) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4E^2 Z^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2 - E^2)^2}} \right). \quad (5.8)$$

Тада је  $\beta$ :

$$\tan \beta = \frac{Z \sqrt{u^2 + E^2}}{u \sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad (5.9)$$

док се лонгитуда добија једноставно као:

$$\tan \lambda = \frac{Y}{X}. \quad (5.10)$$

Са познатим једнопараметарским координатама, могуће је у произвољној тачки срачунати нормални потенцијал:

$$U(u, \beta) = \frac{GM}{E} \operatorname{atan} \frac{E}{u} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left( \sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta. \quad (5.11)$$

За тачку на елипсоиду, може се извршити контрола поредећи вриједност са изразом (3.16). На основу израза (5.11) може се извршити и провјера рачунања нормалног убрзања које се добија из (3.22). Приближна вриједност овог убрзања добиће се из промјене потенцијала на коначно малом растојању дуж нормале:

$$\gamma_h \approx -\frac{U(h+dh) - U(h)}{dh}. \quad (5.12)$$

Провјера за GRS80 на средњим ширинама и близу елипсоида, даје разлике два убрзања на нивоу  $10^{-1}$  mGal. Ова разлика је очекивана с обзиром на апроксимацију у (5.12), али је рачунање добра контрола за евентуалне грешке у програмирању израза за потенцијал.

За тачно рачунање нормалног убрзања на основу једнопараметарских координата, прво се срачуна помоћна величина:

$$\varpi = \sqrt{\frac{u^2 + E^2 \sin^2 \beta}{u^2 + E^2}}. \quad (5.13)$$

Затим се рачунају компоненте нормалног убрзања у једнопараметарским координатама (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\begin{aligned} \gamma_u &= -\frac{1}{\varpi} \left( \frac{GM}{u^2 + E^2} + \frac{\omega^2 a^2 E}{u^2 + E^2} \frac{q'}{q_0} \left( \frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) - \omega^2 u \cos^2 \beta \right), \\ \gamma_\beta &= -\frac{1}{\varpi} \left( -\frac{\omega^2 a^2}{\sqrt{u^2 + E^2}} \frac{q}{q_0} + \omega^2 \sqrt{u^2 + E^2} \right) \sin \beta \cos \beta, \\ \gamma_\lambda &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Компоненте у правоуглим координатама геоцентричног система добијају се као:

$$\begin{aligned} \gamma_X &= \frac{u}{\varpi \sqrt{u^2 + E^2}} \cos \beta \cos \lambda \cdot \gamma_u - \frac{1}{\varpi} \sin \beta \cos \lambda \cdot \gamma_\beta - \sin \lambda \cdot \gamma_\lambda, \\ \gamma_Y &= \frac{u}{\varpi \sqrt{u^2 + E^2}} \cos \beta \sin \lambda \cdot \gamma_u - \frac{1}{\varpi} \sin \beta \sin \lambda \cdot \gamma_\beta + \cos \lambda \cdot \gamma_\lambda, \\ \gamma_Z &= \frac{1}{\varpi} \sin \beta \cdot \gamma_u + \frac{u}{\varpi \sqrt{u^2 + E^2}} \cos \beta \cdot \gamma_\beta. \end{aligned} \quad (5.15)$$

На основу ове три компоненте рачуна се укупно нормално убрзање у тачки. Поново је могуће урадити поређење са вриједношћу убрзања срачунатог из (3.22). Овдје се, за описани случај средње ширине и мале елипсоидне висине, добијају разлике реда величине [ $\mu\text{Gal}$ ], које су последица линеаризације у извођењу израза (3.22).

Компоненте (5.15) чине вектор  $\vec{\gamma}_G$  и могу се трансформисати у локални елипсоидни систем  $\vec{\gamma}_L$ , помоћу матрице ротација:

$$R = \begin{bmatrix} -\sin B \cos L & -\sin L & \cos B \cos L \\ -\sin B \sin L & \cos L & \cos B \sin L \\ \cos B & 0 & \sin B \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma_X^L \\ \gamma_Y^L \\ \gamma_Z^L \end{bmatrix} = R^T \cdot \begin{bmatrix} \gamma_X^G \\ \gamma_Y^G \\ \gamma_Z^G \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Пошто је локални елипсоидни систем везан за нормалу, која се не подудара са правцем вектора нормалног убрзања (тангента на линију силе нормалног поља, тј. нормалну вертикалу), након трансформације се за хоризонталну компоненту у правцу меридијана ( $\vec{\gamma}_X^L$ ) не добија нула, већ вриједност на нивоу  $10^{-1}$  mGal. Притом је разлика вертикалне компоненте и укупног убрзања  $10^{-5}$   $\mu\text{Gal}$ . Оса локалног елипсоидног система може се приближити правцу тангенте на нормалну вертикалу ако се за трансформацију умјесто геодетске ширине  $B$  користи нормална ширина  $B^N$ , која се управо дефинише као угао у равни геодетског меридијана што га правац нормалне вертикале (тангента) заклапа са равни екватора. Подударане је приближно

из разлога што се и нормална ширина рачуна из приближног израза (Torge & Müller, 2012):

$$B^N = B + 0,00017'' \cdot \sin 2B \cdot h. \quad (5.17)$$

Када се унесе поменута корекција, хоризонтална компонента постаје реда величине [ $\mu\text{Gal}$ ], што је на нивоу разлике укупног убрзања од вриједности добијене из стандардних израза у подпоглављу 3.3.2. За вертикалну компоненту у локалном систему и укупно убрзање се у том случају добија да су потпуно сагласни, до нивоа значајних цифара.

Да би се добили други изводи нормалног потенцијала у локалном правоуглом систему, рачунају се први и други изводи параметра  $q$  (Claessens, 2021):

$$q_u = \frac{E}{u^2 + E^2} - \frac{3}{E} \left( 1 - \frac{u}{E} \operatorname{atan} \frac{E}{u} \right), \quad q_{uu} = \frac{2}{u^2 + E^2} (3q - uq_u). \quad (5.18)$$

Затим се рачунају први изводи једнопараметарских координата:

$$\begin{aligned} U_u &= -\frac{GM}{u^2 + E^2} + \frac{\omega^2 a^2 q_u}{2q_0} \left( \sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \omega^2 u \cos^2 \beta, \\ U_\beta &= \left( a^2 \frac{q}{q_0} - u^2 - E^2 \right) \omega^2 \sin \beta \cos \beta, \end{aligned} \quad (5.19)$$

а потом и њихови други изводи:

$$\begin{aligned} U_{uu} &= \frac{2GMu}{(u^2 + E^2)^2} + \frac{\omega^2 a^2 q_{uu}}{2q_0} \left( \sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \omega^2 \cos^2 \beta, \\ U_{\beta\beta} &= \left( a^2 \frac{q}{q_0} - u^2 - E^2 \right) \omega^2 (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta), \\ U_{u\beta} &= \left( a^2 \frac{q_u}{q_0} - 2u \right) \omega^2 \sin \beta \cos \beta. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Сада се коначно може срачунати Етвешев тензор нормалног потенцијала у локалном елипсоидном ситему који је облика:

$$\Gamma_U = \begin{bmatrix} U_{xx} & 0 & U_{xz} \\ 0 & U_{yy} & 0 \\ U_{zx} & 0 & U_{zz} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Елементи тензора добијају се на основу израза:

$$\begin{aligned}
U_{xx} &= \frac{1}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta} \times \left( U_{\beta\beta} + \frac{u(u^2 + E^2)}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta} U_u - \frac{E^2 \sin \beta \cos \beta}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta} U_\beta \right), \\
U_{yy} &= \frac{1}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta} (uU_u - \tan \beta \cdot U_\beta), \\
U_{zz} &= \frac{1}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta} \times \left( (u^2 + E^2) U_{uu} - \frac{uE^2 \cos^2 \beta}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta} U_u + \frac{E^2 \sin \beta \cos \beta}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta} U_\beta \right), \\
U_{xz} = U_{zx} &= \frac{\sqrt{u^2 + E^2}}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta} \times \left( U_{u\beta} - \frac{u}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta} U_\beta - \frac{E^2 \sin \beta \cos \beta}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta} U_u \right).
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Градијенти  $U_{xy}$  и  $U_{yz}$  очигледно су једнаки нули, што је последица геометрије нормалног поља, тачније чињенице да сферопотенцијалне површи немају торзију и да су нормалне вертикале закривљене само у меридијанској равни. Као примјер, срачунат је тензор за тачку са геодетским координатама  $B = 44^\circ$  и  $h = 200$  m :

$$\Gamma_U \text{ [E]} = \begin{bmatrix} -1\,540.1 & 0.0 & -8.1 \\ 0.0 & -1\,534.7 & 0.0 \\ -8.1 & 0.0 & 3\,085.4 \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Поред егзактног модела приказаног овдје, који је коришћен у моделовању Етвешевог тензора, вриједи споменути да постоје и приближни алгоритми за рачунање градијената нормалног поља. Могуће је нпр. искористити чињеницу да се закривљеност елипсоида, као геометријска величина, врло једноставно рачуна из (3.24). Како су параметри закривљености уразмјерени градијенти, из релација (4.15) и (4.16) лако се добијају градијенти на нивоу елипсоида. Ако су познати трећи изводи нормалног потенцијала, тј. промјена других извода са висином, из поменутих градијената на елипсоиду лако се добијају градијенти на некој висини  $h$  изнад елипсоида (Manoussakis, 2013). Трећи изводи се, захваљујући особинама нормалног поља и познатим релацијама између геометријских и физичких величина, такође једноставно рачунају. Модел је апроксимативан јер претпоставља паралелност сферопотенцијалних површи и ослања се на приближно линеарну промјену других извода близу површине елипсоида, те стога вриједи само на малим висинама  $h$ .

### 5.2.1. Контрола рачунања

Коначна контрола рачунања тензора нормалног поља врши се на основу математичких особина тензора датих у 4.1.1. и особина нормалног поља, описаних у подпоглављу 3.3. Прва контрола је рачунање дивергенције нормалног поља, аналогно изразу (4.5):

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 2\omega^2 = 10.63 \text{ E}. \tag{5.24}$$

Вриједност је сагласна са теоријском вриједношћу срачунатом на основу угаоне брзине до нивоа  $10^{-12}$  E, односно до нивоа  $10^{-21}$  у основним јединицама мјере, што одговара прецизности софтвера за рачунање.

Сљедећа контрола односи се на вертикални градијент. За тачку на елипсоиду, када је  $h = 0$ , добија се да је  $U_{zz}$  сагласно са градијентом срачунатим на основу израза (3.23). Слагање је такође егзактно.

Закривљеност елипсоида, срачуната из градијената на висини  $h = 0$  као:

$$k_x = -\frac{U_{xx}}{\gamma_0}, \quad k_y = -\frac{U_{yy}}{\gamma_0}, \quad (5.25)$$

потпуно је сагласна са закривљеностима добијеним као реципрочним вриједностима полупречника кривина (3.24).

Додатна контрола рачунања може се извршити поређењем тензора са тензором добијеним из коначно малих прираштаја координата. Када се у геоцентричном систему срачунају компоненте (5.15) у тачки са координатама  $(X, Y, Z)$ , а затим се исте компоненте срачунају у три тачке које су у односу на почетну помјерене свака по једној оси, и чије су координате по тим осама  $X + dX$ ,  $Y + dY$  и  $Z + dZ$ , могу се у почетној тачки срачунати елементи тензора као количници прираштаја убрзања и координата. Такав тензор односи се на геоцентрични систем, и потребно је трансформисати га у локални систем ради поређења. Као што је већ речено у 4.1, тензор се може трансформисати из једног у други систем, и то се практично ради помоћу матрица ротације (Yao & Changli, 2007):

$$\Gamma_U^L = R \cdot \Gamma_U^G \cdot R^T, \quad (5.26)$$

при чему је  $R$  матрица ротације из геоцентричног у локални систем, и облика је:

$$R = \begin{bmatrix} -\sin B \cos L & -\sin B \sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

У практичном примјеру, разлике узмеђу градијената из тачног тензора и тензора добијеног из прираштаја биле су на нивоу  $10^{-3} - 10^{-2}$  Е. Спроведно је рачунање за још неколико примјера са различитим координатама, и ни уједном случају разлике између било која два градијента нису прелазиле вриједност од  $2 \cdot 10^{-2}$  Е, што потврђује генералну исправност рачунања.

У контексту подјеле поља теже на гравитациони и центрифугални дио, нормални потенцијал садржи и центрифугални удио стварног потенцијала, тако да након рачунања градијената нормалног поља преостаје још моделовање гравитационог утицаја маса изван елипсоида, тј. топографских и међумаса.

### 5.3. МОДЕЛОВАЊЕ УТИЦАЈА ТОПОГРАФСКИХ МАСА

У моделовању локалног гравитационог поља, кључну улогу имају ДМТ који репрезентују топографске масе, пошто на локалном нивоу краткоталасни утицај ових маса долази до изражаја. У основи, масе представљене ДМТ-ом се дискретизују подјелом на коначни број правилних геометријских тијела чије се гравитационо поље



може одредити. Привлачење масе пуног тијела дато је једначином (2.23), и овај интеграл као и његови изводи ријешени су за већину тијела која се користе у физичкој гедезији. Нека тијела пак немају аналитичко рјешење интеграла (2.23), те се за рачунање њиховог гравитационог утицаја користе нумеричке методе. У том смислу, потребно је пронаћи равнотежу између захтјеване тачности и комплексности једначина које се користе, што се одражава на програмирање софтвера за рачунање. Нека тијела својом геометријом боље репрезентују дијелове Земљине коре или поједине рељефне облике, али немају рјешење интеграла гравитационог поља у затвореном облику. Најчешће коришћено тијело у моделовању топографије јесте призма. Геометрија топографских маса изражена призмама се у локланом подручју лако описује помоћу правоуглих координата у пројекцији и физичких висина. С друге стране, топографске масе, поготово на већим подручјима, боље од призме описује тесероид, тзв. сферна призма, али за његово поље не постоје аналитичка рјешења. Поред призме и тесероида, често коришћено тијело за гравитационо моделовање је полиедар, али његова најчешћа употреба је за апроксимацију маса унутар Земљине коре, тј. извора аномалијског привлачења специфичног облика за чије је представљање тесероид прикладан. Узевши у обзир све наведено, за описивање топографије у овом истраживању коришћена је подјела ДМТ-а на призме. Поред једноставног математичког дефинисања кроз правоугле координате, предност призме је и у томе што има аналитичка рјешења за потенцијал и изводе, упркос чињеници да су поједине једначине прилично обимне и могу узети релативно много времена у извршавању програма. Иако су нека претходна истраживања утврдила да између нумеричких метода и призме нема значајних разлика (Jekeli & Zhu, 2006), примјењен је егзактни приступ, како би се елиминисао утицај грешака апроксимације у рачунању. На тај начин се у смислу тачности дјелимично надокнађује чињеница да су коришћени ДМТ ограничене тачности и резолуције, и да нису примјењивани модели густина топографских маса већ је усвојена константна вриједност.

### 5.3.1. Гравитационо поље хомогене призме

Потенцијал масе правоугаоне призме дат је једначином (2.40). Геометријска ситуација се описује правоуглим координатама и приказана је на слици 2.8. Први изводи потенцијала представљају компоненте убрзања гравитационе силе по координатним осама, и могу се представити као:

$$\begin{aligned}
 V_x &= \frac{\partial V(A)}{\partial X_A} = G\rho \iiint \frac{\xi - X_A}{\left(\sqrt{(X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2}\right)^3} d\xi d\eta d\zeta, \\
 V_y &= \frac{\partial V(A)}{\partial Y_A} = G\rho \iiint \frac{\eta - Y_A}{\left(\sqrt{(X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2}\right)^3} d\xi d\eta d\zeta, \\
 V_z &= \frac{\partial V(A)}{\partial Z_A} = G\rho \iiint \frac{\zeta - Z_A}{\left(\sqrt{(X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2}\right)^3} d\xi d\eta d\zeta.
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Све границе интеграције у претходним изразима дефинисане су координатним равнима које омеђавају тијело призме, како је то дефинисано у подпоглављу 2.3.1.2.

Треба обратити пажњу на израз за компоненту у правцу  $Z$  осе,  $V_Z$ , и разлику у односу на вертикалну компоненту  $f'_Z$  у (2.42). Наиме,  $f'_Z$  је добијено са додатним негативним предзнаком испред извода, а то је из разлога да би се смјер вертикалне компоненте силе привлачења ускладио са смјером гравитационог привлачења Земље, које је усмјерено наниже. Овај смјер је супротан од позитивног усмјерења  $Z$  осе у локалном правоуглом систему, гдје су  $Z$  координате представљене висинама у односу на локалну хоризонталну раван. Међутим, у општем случају, интензитет вертикалне и сваке друге компоненте представљен је изводом потенцијала, без додатних предзнака. О овоме се мора водити рачуна како би се остварила математичка конзистентност и омогућила провјера рачунања примјеном нпр. Лапласове једначине.

Други изводи потенцијала призме, тј. градијенти убрзања, добијају се диференцирањем једначина (5.28). Имајући у виду једнакост мјешовитих извода, градијенти су дати са:

$$\begin{aligned}
 V_{xx} &= -G\rho \iiint \frac{(Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2 - 2(X_A - \xi)^2}{\left( (X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2 \right)^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta, \\
 V_{yy} &= -G\rho \iiint \frac{(X_A - \xi)^2 + (Z_A - \zeta)^2 - 2(Y_A - \eta)^2}{\left( (X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2 \right)^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta, \\
 V_{zz} &= -G\rho \iiint \frac{(X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 - 2(Z_A - \zeta)^2}{\left( (X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2 \right)^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta, \\
 V_{xy} &= 3G\rho \iiint \frac{(X_A - \xi)(Y_A - \eta)}{\left( (X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2 \right)^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta, \\
 V_{xz} &= 3G\rho \iiint \frac{(X_A - \xi)(Z_A - \zeta)}{\left( (X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2 \right)^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta, \\
 V_{yz} &= 3G\rho \iiint \frac{(Y_A - \eta)(Z_A - \zeta)}{\left( (X_A - \xi)^2 + (Y_A - \eta)^2 + (Z_A - \zeta)^2 \right)^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Рјешења интеграла (5.28) и (5.29), као и интеграла (2.40) којим је задат потенцијал призме, била су деценијама уназад предмет истраживања у геодезији (MacMillan, 1930). Рјешавање је било сложено јер интегрирање сферно-симетричне функције као што је  $1/r$ , на интервалу са правоугаоном симетријом, неизбежно доноси компликоване интеграле (Forsberg, 1984). Често је у фокусу било искључиво проналажење рјешења за вертикалну компоненту силе привлачења (Nagy, 1966), (Banerjee & Das Gupta, 1977), чије је рачунање било важно за редукују измјерених вриједности убрзања теже. Аналитичка рјешења одређена су временом за све

претходно наведене интеграле. Ако се, једноставности ради, координатни почетак на слици 2.8 помјери у тачку рачунања  $A$ , интеграл (2.40) добија облик:

$$V(A) = G \cdot \rho \cdot \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (5.30)$$

гдје је  $x_1 = \xi_1 - X_A$ ,  $x_2 = \xi_2 - X_A$ , итд. Аналитичко рјешење овог интеграла је (Tsoulis, 1999), (Nagy et al., 2000):

$$V = G\rho \left\| \left\| \left\| \begin{aligned} &xy \ln(z+r) + xz \ln(y+r) + yz \ln(x+r) \\ &-\frac{x^2}{2} \arctan \frac{yz}{xr} - \frac{y^2}{2} \arctan \frac{xz}{yr} - \frac{z^2}{2} \arctan \frac{xy}{zr} \end{aligned} \right. \right. \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{y_1}^{y_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2}, \quad (5.31)$$

док се компоненте убрзања рачунају према једначинама:

$$\begin{aligned} V_x &= G\rho \left\| \left\| \left\| y \ln(z+r) + z \ln(y+r) - x \arctan \frac{yz}{xr} \right. \right. \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{y_1}^{y_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2}, \\ V_y &= G\rho \left\| \left\| \left\| x \ln(z+r) + z \ln(x+r) - y \arctan \frac{xz}{yr} \right. \right. \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{y_1}^{y_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2}, \\ V_z &= G\rho \left\| \left\| \left\| x \ln(y+r) + y \ln(x+r) - z \arctan \frac{xy}{zr} \right. \right. \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{y_1}^{y_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

За градијенте убрзања који чине дијагоналне елементе тензора утврђени су слједећи затворени изрази (Tsoulis, 1999):

$$\begin{aligned} V_{xx} &= G\rho \left\| \left\| \left\| -\arctan \frac{yz}{xr} \right. \right. \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{y_1}^{y_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2}, \\ V_{yy} &= G\rho \left\| \left\| \left\| -\arctan \frac{xz}{yr} \right. \right. \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{y_1}^{y_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2}, \\ V_{zz} &= G\rho \left\| \left\| \left\| -\arctan \frac{xy}{zr} \right. \right. \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{y_1}^{y_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

а за мјешовите изводе:

$$\begin{aligned}
 V_{XY} &= G\rho \left\| \left\| \ln(z+r) \right\|_{x_1}^{x_2} \right\|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2}, \\
 V_{XZ} &= G\rho \left\| \left\| \ln(y+r) \right\|_{x_1}^{x_2} \right\|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2}, \\
 V_{YZ} &= G\rho \left\| \left\| \ln(x+r) \right\|_{x_1}^{x_2} \right\|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2}.
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Управо ове једначине коришћене су за рачунање утицаја топографије на Етвешев тензор. Уврштавањем граница у претходне једначине, добијају се потпуно развијени аналитички изрази за рачунање потенцијала, компонената убрзања силе и градијената призме. Ови изрази могу бити непрактични за рачунање, односно захтјевни у смислу програмирања и извршавања програма. Примјера ради, израз (5.31) за потенцијал, састоји се од 48 сабирака, од којих је сваки производ два или три фактора, а ови су опет неријетко тригонометријске или логаритамске функције. Стога и не чуди да су многи аутори још од почетка указивали на проблем сложености и времена рачунања, предлажући различите апроксимације (Sharma, 1967). Крајње једноставан приступ јесте подјела масе призме на довољно мале дијелове, тако да се њихово привлачење може третирати као привлачење тачкасте масе, тј. материјалне тачке (Kuhn & Hirt, 2016). Овај метод дискретних елемената може се искористити и за провјеру аналитичких израза, при чему очигледно вриједи да се са мањим елементима постиже боља апроксимација (Han & Shen, 2010). Временом су развијена и различита нумеричка рјешења која данас имају широку примјену. Један од најчешћих приступа јесте трансформација интеграла који описују потенцијал и његове изводе у површинске интеграле (Montana et al., 1992), (Smith, 2000), при чему теоријску основу представља Гаусова теорема. Даље унапређење ове методе јесте трансформација површинских у линијске интеграле, што омогућава брже и ефикасније рачунање (D'Urso & Trotta, 2015). У овом поступку могу се користити и конјуговане комплексне варијабле (Y. -K Kwok, 1991). Ипак, све ове методе практично се заснивају на нумеричкој интеграцији, будући да поменути површински и линијски интеграл не мају аналитичко рјешење. Разматране су и друге варијанте аналитичких рјешења, али у ограниченом обиму, нпр. само за моделовање вертикалних градијената (Kim & Wessel, 2016). Посебну област чини истраживање гравитационог привлачења призми са промјенљивом густином, гдје се густина обично задаје полиномом произвољног степена (Jiang et al., 2018), (Karcol, 2018).

### 5.3.1.1. Теоријски аспект проблема сингуларитета

Једно од важнијих питања у теоријском разматрању гравитационог поља призме јесте питање сингуларитета. Штавише, овај проблем је био један од мотива за развој појединих нумеричких рјешења за интеграле (5.31) – (5.34) (D'Urso, 2012). Наиме, већ на први поглед лако се уочава да се у једначинама (5.31) - (5.34) могу појавити сингуларитети у специјалним случајевима када се тачка рачунања налази у равни једне од страница призме (нпр.  $x = 0$ ), на линији неке од њених изводница (нпр.  $x = 0$  и  $z = 0$ ) или се подударе са тјемомом призме (случај када је  $x = 0$ ,  $y = 0$  и  $z = 0$ ). У том случају јавља се у једначинама дијељење нулом и ситуација када је нумерус логаритма

једнак нули. Конкретно, у једначинама (5.31) - (5.33) јавља се облик  $(0/0)$ , док се у (5.34) појављује недефинисан облик  $\ln 0$ . Природа ових сингуларитета може се утврдити испитивањем лимеса:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} &= \arctan \frac{yz}{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} &= \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right).\end{aligned}\tag{5.35}$$

За први лимес у (5.35) може се показати да има коначну вриједност (нула), те се у случају једначина (5.31) - (5.33) ради о уклоњивим сингуларитетима (Tsoulis, 1999). Пошто други лимес тежи у бесконачност, у (5.34) се сви сингуларитети не могу уклонити. Конкретно, гдје год се у изразима (5.31) - (5.33) појављују недефинисани облици, треба их у рачунању просто замијенити нулом и добиће се исправни резултати. Према томе, у случају да се тачка налази у равни странице призме, сви други изводи су дефинисани. Ако је на изводници призме, један од мјешовитих извода неће бити дефинисан, и то извод одеређен самом изводницом. Примјера ради, ако је  $x = 0$  и  $z = 0$ , извод  $V_{xz}$  није дефинисан. Очигледно је да у случају тачке у тјемени призме ниједан мјешовити извод није дефинисан, будући да се у тјеменима сустичу изводнице по све три осе.

Други важан детаљ односи се на дивергенцију  $\Delta V$  када се тачка налази на граници тијела призме и спољашњег простора. То су случајеви припадања тачке странице, изводници и тјемени призме. Дивергенција се у тим случајевима може добити примјеном једначине (2.46) и интегрирањем по сегментима, прво у дијелу простора гдје је густина једнака нули, а затим гдје је једнака  $\rho$ . С обзиром на то да одговарајуће дијагоналне компоненте тензора у правцу нормале на површ имају скоковиту промјену од  $-2\pi G\rho$  при преласку из спољашњег простора на површ, и још толико при преласку са површи у унутрашњост масе (Y. -K Kwok, 1991), добија се за дивергенцију:

$$\Delta V = \begin{cases} -2\pi G\rho, & \text{за тачку у равни,} \\ -\pi G\rho, & \text{за тачку на линији,} \\ -\frac{1}{2}\pi G\rho, & \text{за тачку на тјемени.} \end{cases}\tag{5.36}$$

Ове релације могу се искористити и за контролу рачунања градијената призме.

### 5.3.1.2. Питање координатног система

Тензор се може срачунати у било којем правоуглом координатном систему, независно од његове поларности или оријентације. Важно је само да се положај масе и привлачене тачке у систему правилно опише координатама. Ако су градијенти срачунати у једном ситему, а онда се нешто промијени у дефиницији система, градијенти се у новом ситему рачунају новим описивањем положаја тачке и масе, тј. промјеном координата и граница интеграције. Могуће је и искористити већ

срчунате градијенте који се односе на први систем, и трансформисати их тако да се односе на нови систем. Трансформација се врши на основу израза (5.26), узимајући у обзир разлику у оријентацији система. Но, овај поступак се, као и промјена градијената усљед промјене поларности ситема, може обавити и на једноставнији начин:

- ако се обрће једна оса (мијења се поларност система), онда њеним мјешовитим изводима треба промијенити предзнак;
- ако се пак жели обрнути оса, а задржати стари систем задавања координата (нпр. код вертикалног градијента и висине), онда треба обрнути предзнаке у тензору у врсти која представља ту осу (нпр. трећа врста за вертикални градијент); ваља имати на уму да се у том случају губи математичка конзистентност, тј. у наведеном примјеру је  $\Delta V \neq 0$ ;
- ако се мијења и оријентација и поларност система на начин да осе мијењају мјеста, тада је довољно претходно срчунатим градијентима промијенити индексе (мјешовити остају исти) и пресложити их на нова мјеста у тензору.

Иако је софтвер за рачунање моделованих градијената из практичних разлога радио са координатама у десно оријентисаном ситему, ради усклађености са до сада изнесеном теоријом и са подацима мјерења, подаци су трансформисани у лијево оријентисани локални правоугли систем. Његова  $z$  оса усмјерена је нагоре, позитивни смјер  $y$  осе је ка истоку, а  $x$  осе ка сјеверу. Сви резултати приказани у наредном поглављу односе се на овај систем.

### 5.3.1.3. Контрола рачунања

Да би се провјерио описани алгоритам рачунања, тестирани су резултати за неколико практичних примјера, укључујући и положаје тачке са уклоњивим и неуклоњивим сингуларитетима. Тако се нпр. за случај привлачене тачке са координатама  $X_A = 0 \text{ m}$ ,  $Y_A = 0 \text{ m}$  и  $Z_A = 20 \text{ m}$ , те за призму дефинисану страницама  $\xi_1 = 10 \text{ m}$ ,  $\xi_2 = 110 \text{ m}$ ,  $\eta_1 = 50 \text{ m}$ ,  $\eta_2 = 150 \text{ m}$ ,  $\zeta_1 = 0 \text{ m}$ ,  $\zeta_2 = 200 \text{ m}$  и густином  $\rho = 2\,670 \text{ kg/m}^3$ , добија тензор:

$$\Gamma_p \text{ [E]} = \begin{bmatrix} -56.54 & 146.43 & 58.93 \\ 146.43 & 117.95 & 102.42 \\ 58.93 & 102.42 & -61.41 \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

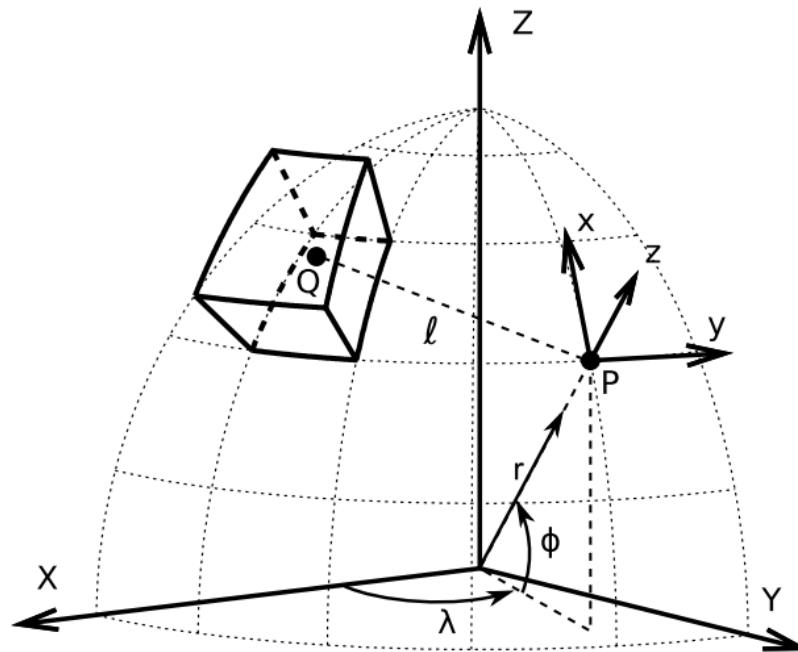
С обзиром на то да је тачка изван масе, за дивергенцију се добија да је једнака нули до нивоа прецизности софтвера за рачунање. У ситуацијама када је тачка постављена на граници тијела призме дивергенција је добијена у складу са (5.36), такође до нивоа прецизности софтвера. У примјерима који су представљали сингуларне случајеве, потврђена је могућност рачунања извода са уклоњивим сингуларитетима.

### 5.3.2. Друга геометријска тијела

Поред призме, у моделовању утицаја топографије користе се и друга геометријска тијела. Тако су нпр. рјешења вертикалне компоненте привлачења и вертикалног градијента тражена за полигоналну призму, тј. призму чији је попречни пресјек полигон са  $n$  страна (X. Li & Chouteau, 1997). Ипак, најчешће коришћене алтернативе призми су тесероид и полиедар.

## 5.3.2.1. Тесероид

Тијело омеђено координатним линијама ширине, дужине и радијалног растојања у сферном координатном систему назива се тесероидом (слика 5.4).



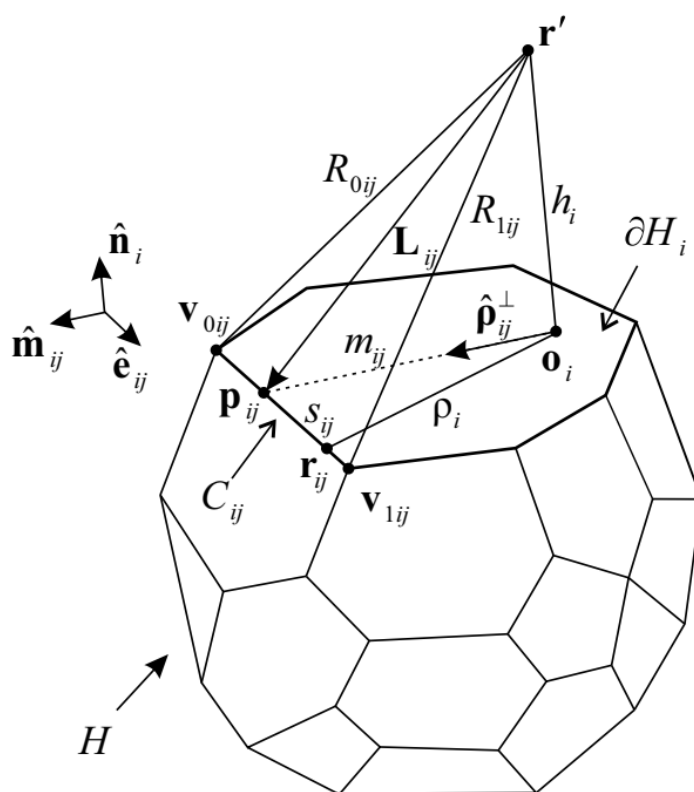
Слика 5.4. Привлачење масе тесероида (Uieda et al., 2016)

Тесероид се још назива и сферном призмом и користи се за апроксимацију Земљине коре у случајевима када је потребно узети у обзир њену закривљеност. Ово је нарочито корисно због тога што се, за разлику од призме, за удаљене зоне не мора вршити трансформација тензора у локални систем рачунске тачке (Heck & Seitz, 2007). Трансформација је потребна због непаралелности нормала узроковане закривљеношћу Земље. Тесероиди овај ефекат обухватају већ самом својом геометријском дефиницијом.

Главни недостатак тесероида је у томе што за њихов тензор нема аналитичких рјешења (Wild-Pfeiffer, 2008). Стога су двије главне методе за рачунање тензора тесероида Гаус-Лежандрова квадратура (*Gauss-Legendre Quadrature - GLQ*) и развој у Тејлоров ред, при чему потоња није прикладна за тесероиде са варијабилном густином (Soler et al., 2019). Такође, када се развој у ред примјењује у близини тачке рачунања, препоручује се замјена тесероида призмама (Grombein et al., 2013). С друге стране, предност им је што у рачунању нема сингуларитета ван тијела тесероида или на његовој површи (Asgharzadeh et al., 2007). С обзиром на све речено, тесероиди и њихови модели тензора се најчешће користе за анализу резултата сателитских градиометријских мјерења (Uieda et al., 2011), а нешто рјеђе у комбинацији са терестричким мјерењима, попут рачунања утицаја топографије за редукацију убрзања теже (Smith et al., 2001). Своју примјену налазе и у геофизици, гдје се могу користити за комбиновање гравиметријских података и резултата томографије (Z. Li et al., 2011).

## 5.3.2.2. Полиедар

Геометријско тијело омеђено полигонима којих има најмање четири, назива се полиедром. Полиедри се често користе за моделовање гравитационог ефекта различитих маса (слика 5.5). Њихова предност у односу на призме је што су много флексибилнији и самим тим погоднији за представљање тродимензионалних маса сложене геометрије. У поређењу са призмама, дискретизација помоћу полиедара захтијева мањи број елемената за апроксимацију сложених облика (Ren et al., 2018). С друге стране, такву сложену геометрију није једноставно математички описати, па су и методе рачунања сложеније у односу на призму. Ипак, у случају нехомогених тијела, полиедар такође има особину да се функције које описују сложену расподелу густине лакше примјењују код полиедра него код призме (D'Urso & Trotta, 2017).



Слика 5.5. Привлачење масе полиедра (Ren et al., 2018)

Рјешења за гравитационо поље полиедра траже се нумеричким или аналитичким путем, трансформацијом просторних интеграла у површинске и линијске и рачунањем њихових вриједности. Рачунски једноставније варијанте подразумевају ограничавање облика полигона нпр. на троуглове, и коришћење само површинских интеграла (Paul, 1974). И у овом случају користи се теорема о дивергенцији, а у сљедећем кораку могуће је прећи на линијске интеграле, што је инструктивно ако се користе полиедри чији су полигони са више од три угла (Okabe, 1979). Даље оптимизације рачунања могуће су увођењем комбинација појединих чланова у изразима (Pohánka, 1988), (Werner, 2017) или коришћењем комплексних варијабли (Y. Kwok, 1991). У рачунању првих и других извода потенцијала полиедра такође се јављају сингуларитети, који постају очигледни при прелазу са површинских на



линијске интеграле (Tsoulis & Petrović, 2001). Притом су сингуларитети за прве изводе уклоњиви, док за друге нису. Слично као и код призме, сингуларитети се јаљају кад је тачка ван тијела на линији, тј. изводници тијела, а при прелазу из спољашњости у унутрашњи простор јављају се скоковите промјене појединих градијената (Holstein, 2002). Неотклоњиве сингуларитете имају само мјешовити изводи кад је тачка на линији, тј. изводници полиедра (D'Urso, 2014a). Одређени други изводи такође нису дефинисани на границама тијела (Tsoulis, 2012). У случају појаве сингуларитета јер се тачка налази унутар тијела, ради се подјела простора на два дијела, на малу сферу чији радијус тежи нули и која окружује рачунску тачку, и остатак тијела (Petrović, 1996). У том случају се утицај дијела омеђеног диференцијалном сфером рачуна као гранична вриједност израза за потенцијал или извод тако дефинисаног сегмента. Једна од могућности третирања сингуларитета јесте коришћење теорије расподјеле и диференцијалног рачуна, гдје се у изразе на самом почетку уносе додатни чланови који регулишу сингуларитете (D'Urso, 2013). На тај начин елиминише се потреба за накнадним корекцијама формула, иако тјемена полиедра остају као мјеста недефинисаности, због сингуларности на изводницама.

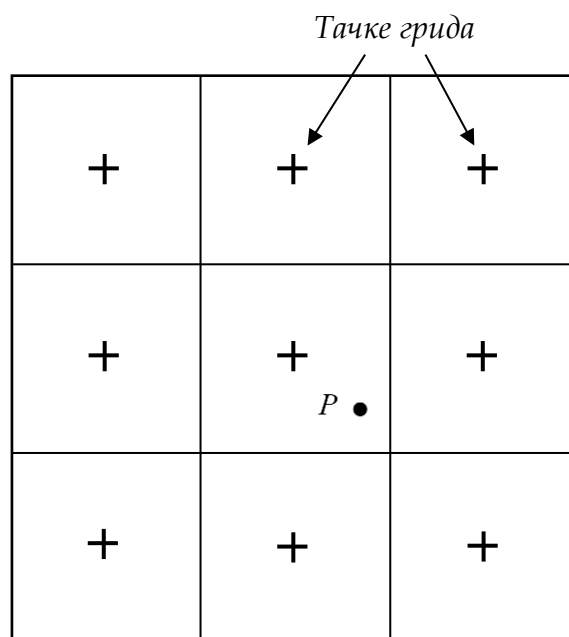
Велика пажња посвећује се и проучавању полиедара са промјенљивом густином, како линеарном (D'Urso, 2014b), тако и полиномском (Ren et al., 2017), (D'Urso & Trotta, 2017), (Ren et al., 2020). Овако дефинисани полиедри, користе се најчешће за апроксимацију сложених расподјела густина унутар Земљине коре. Једна од занимљивијих њихових примјена свакако је у астрономији и небеској механици, гдје се користе за апроксимацију гравитационог поља тијела сложеног облика, као што су астероиди (Wu, 2021). Ту такође до изражаја долази њихова предност у односу на призме и тесероиде, а то је да дају континуалну површ, с обзиром на то да површ генерисана призмама и тесероидима може имати дисконтинуитете. Ипак, карактеристичне конфигурације терена дају са полиедром рјешење које није робусно. Тачније, карактеристични распореди тачака у вертикалном смислу дају рјешење које зависи од оријентације полиедра. То је такође један од разлога што је у моделовању утицаја топографије у овом истраживању предност дата призмама.

#### 5.4. ПОДЈЕЛА НА ЗОНЕ И ДИСКРЕТИЗАЦИЈА ТЕРЕНА

Практични дио истраживања спроведен је у потпуности на територији Србије, те је у рачунању коришћен ДМТ креиран од стране Војногеографског института (ВГИ) у Београду, у склопу пројекта „Дигитални модел терена Србије и Црне Горе за војне потребе“, започетог 2002. У оквиру пројекта, висине дате на картама размјере 1:25 000 претворене су у дигитални облик, и љубазношћу ВГИ-ја уступљене за потребе овог истраживања. Резолуција модела је 25 m. Прелиминарном анализом спроведеном у ВГИ-ју установљено је да је тачност модела у планинским подручјима слабија од 10 m, док је у накнадним истраживањима, поређем висна из модела са висинама одређеним на терену, утврђено просјечно стандардно одступање висина од око 5 m (Odalovic et al., 2022). С обзиром на дефинисани концепт одређивања тензора и на осјетљивост других извода потенцијала на утицај блиских маса, грешке ДМТ-а се могу сматрати главним извором грешака у моделовању. Исто је утврђено и код примјене ДМТ-а у обради података гравиметрије, тј. у рачунању теренских корекција за потребе редукције убрзања. У овом случају, грешке ДМТ-а на нивоу од неколико десетина метара доводе до разлика у убрзањима које могу износити и до 10 mGal (Zahorec et al.,

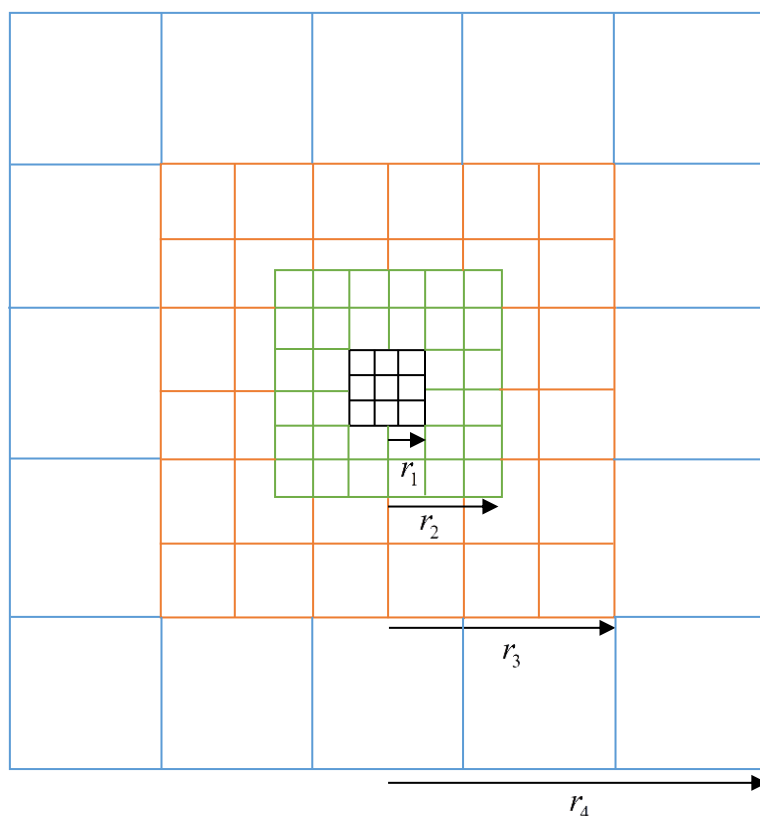
2010). У контексту извора грешака представљања терена ДМТ-ом, у ову тачност ДМТ улазе грешке положаја дискретних тачака на основу којих је модел креиран и грешке њихове геометријске регуларизације, тј. интерполације (Benedek et al., 2018). Грешка геометријске дискретизације зависи од избора геометријских тијела за апроксимацију (призма, полиедар, тесероид), и у овом случају директно је скопчана са резолуцијом ДМТ-а.

Приликом рачунања других извода потенцијала топографских маса, терен се иницијално посматра подијељеним на призме димензија  $25\text{ m} \times 25\text{ m}$ , што одговара резолуцији модела. Призме су распоређене тако да се свака тачка грида ДМТ-а налази у геометријском средишту призме у хоризонталном смислу, а висина призме дефинисана је висином тачке грида (слика 5.6).



Слика 5.6. Подјела терена на призме

Рачунска тачка  $P$ , с обзиром на своје координате, наћи ће се на једној од дефинисаних призми. Та призма је централна призма система који се потом креира. У рачунање затим улазе само топографске масе које се налазе унутар референтног радијуса  $r$ , за који је усвојена вриједност од  $166.74\text{ km}$ . На основу досадашњих истраживања утврђено је да се масе изван овог радијуса могу искључити без да то утиче на тачност срачунатих градијената (Tsoulis, 1999). Притом је дио ДМТ-а који се укључује омеђен правоуглим координатама, па  $r$  заправо представља половину странице квадрата у чијем се средишту налази централна призма. Да би се убрзало рачунање, топографија унутар референтног радијуса такође се дијели на зоне, при чему се пуна резолуција ДМТ-а од  $25\text{ m} \times 25\text{ m}$  користи само у првој, најближој зони. Укупно се дефинишу четири зоне, а ДМТ-ови који се користе у преостале три изводе се из оригиналног ДМТ-а и имају различите резолуције. Резолуција се смањује идући од рачунске тачке ка вањској зони која има најмању резолуцију (слика 5.7).



Слика 5.7. Подјела на зоне

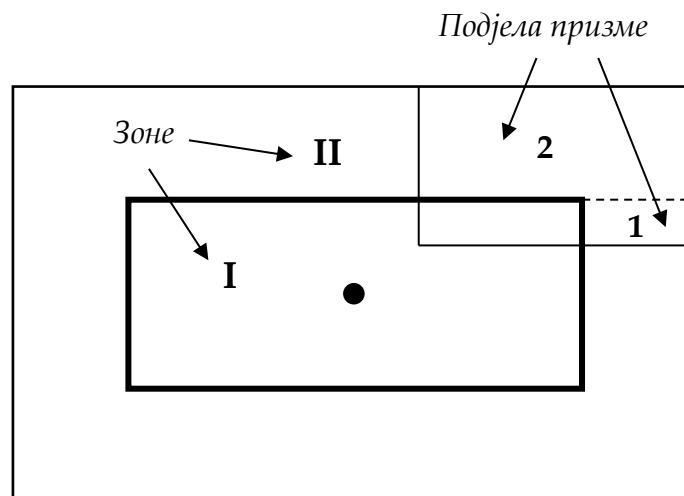
Висине призми у вањским зонама добијају се као аритметичка средина висина оригиналних призми од којих су сачињене. Вриједности референтних радијуса за сваку од зона дате су у табели 5.1, као и резолуције одговарајућих ДМТ. Радијуси зона усвојени су такође на основу досадашњих истраживања (Zahorec et al., 2017), и могу се сматрати оптималним избором за распоред зона у рјешавању проблема локалног моделовања гравитационог поља.

Табела 5.1. Радијуси и резолуције ДМТ у зонама

Зона	Радијус $r$ [km]	Резолуција ДМТ [m]
I	0.25	25
II	5.24	50
III	28.80	1 000
IV	166.74	2 000

На границама зона могу се десити случајеви да сегмент једне зоне узме дио подјеле у другој зони, у којој тада остаје некомплетна призма (слика 5.8). Проблем се рјешава тако што се преостали дио призме подијели на правилне дијелове чији се ефекат засебно обрачуна, а затим се срачуна и допринос осталих регуларних призми у тој

зони. На тај начин остаје очуван концепт саме подјеле на зоне, и, што је још важније, нема преклапања маса, тј. ниједан сегмент топографије није обрачунат два пута.

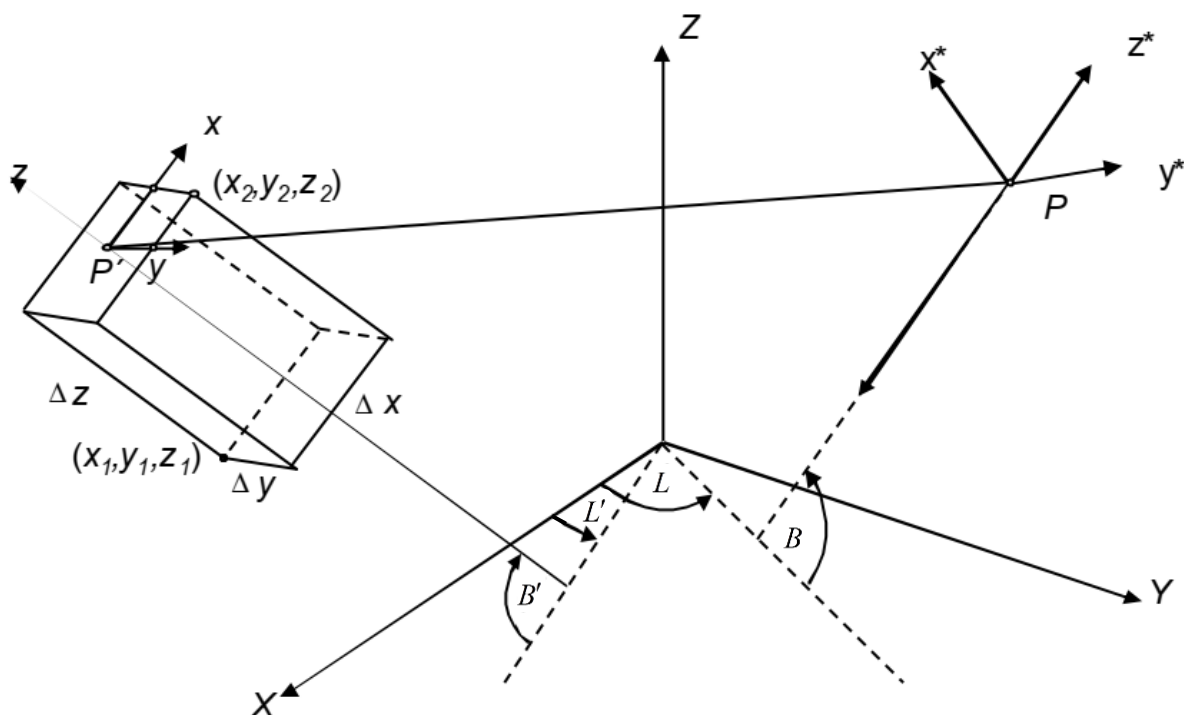


Слика 5.8. Призме на границама зона

Због грешака ДМТ-а, неминовно се јављају разлике између висина рачунских тачака које су одређене на терену, и висина из ДМТ. Како би се обезбиједила конзистентност, могуће је или промијенити висину призме и прилагодити је висини тачке, или обрнуто, промијенити висину тачке и усвојити вриједност из ДМТ. У практичном дијелу рада усвојен је први приступ, пошто су теренске висине појединачних тачака поузданије од висина ДМТ добијених дигитализацијом карата.

За тачке чије рачунско подручје превазилази границе Србије, референтни ДМТ је проширен SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission - SRTM*) моделом чија је резолуција 30 m (једна лучна секунда) и апсолутна висинска тачност боља од 9 m (Farr et al., 2007). Свакако, ваља имати на уму да је SRTM модел површи, а не висина. Утврђено је да овакви модели и њихово одступање од модела висина могу значајно утицати на моделовање других извода гравитационог потенцијала, за разлику од рачунања ундулација геоида и аномалија убрзања теже гдје утицај није значајан (Papp & Szűcs, 2011). Конкретно, градијенти усљед овог утицаја могу варирати и до  $\pm 10 \text{ E}$ .

С обзиром на обим подручја рачунања око тачака, и приступ у коме се тежи да се минимизира ефекат свих извора грешака на које се може утицати, закривљеност Земље је такође узета у обзир. За све призме на растојањима већим од 10 km (растојање од тачке рачунања до геометријског средишта призме), обрачунат је ефекат непаралелности  $Z$  осе локалног елипсоидног система тачке и осе призме. Ефекат се обрачунава трансформацијом тензора призме тако да се оријентација њеног координатног система промијени и осе доведу до паралелности са осамом системом тачке. Ово се начелно ради помоћу израза (5.26) и (5.27), али геометрија ове ситуације приказана на слици 5.9 не чини углове ротације на први поглед очигледним.



Слика 5.9. Трансформација координатног система призме (Makhloof, 2019)

Матрица ротације  $R$  зависи од праваца једне и друге нормале, задатих геодетским координатама, и има облик (Makhloof, 2019):

$$R(B, L, B', L') = \begin{bmatrix} s_1 s'_1 (c_2 c'_2 + s_2 s'_2) + c_1 c'_1 & s_1 (-c_2 s'_2 - s_2 c'_2) & -s_1 c'_1 (c_2 c'_2 + s_2 s'_2) + c_1 c'_1 \\ s'_1 (s_2 c'_2 + c_2 s'_2) & s_2 s'_2 + c_2 c'_2 & c'_1 (-s_2 c'_2 + c_2 s'_2) \\ -c_1 s'_1 (c_2 c'_2 + s_2 s'_2) + s_1 c'_1 & c_1 (-c_2 s'_2 + s_2 c'_2) & c_1 c'_1 (c_2 c'_2 + s_2 s'_2) + s_1 s'_1 \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

при чему је:  $s_1 = \sin B$ ,  $s_2 = \sin L$ ,  $c_1 = \cos B$ ,  $c_2 = \cos L$ ,  $s'_1 = \sin B'$ ,  $s'_2 = \sin L'$ ,  $c'_1 = \cos B'$ ,  $c'_2 = \cos L'$ .

#### 5.4.1. Практично рјешавање проблема сингуларитета

У подпоглављу 5.3.1.1. разматрано је питање сингуларитета у рачунању других извода потенцијала призме, са теоријског становишта. Практично, ово питање може да се ријеш и на друге начине, као што је нпр. промјена положаја тачке рачунања за коначно малу вриједност. У овом истраживању одабран је приступ елиминисања ефекта сингуларне призме, дефинисањем граничног подручја око тачке  $\varepsilon = 1 \text{ mm}$ . Ако би се сингуларан положај нашао унутар ове околине, призма на коју се положај односи била би искључена из рачунања. У свим практичним прорачунима који су спроведени, није се десио овакав случај. У висинском смислу, сингуларност се елиминише дефинисањем положаја тачке који је увијек 1 cm изнад призме.

## 5.5. МАСЕ ИЗМЕЂУ ГЕОИДА И ЕЛИПСОИДА

Међумасе су у рачунању третиране на исти начин као и топографске масе, при чему су улогу висина терена  $H$  имале геоидне висине  $N$ . Креирана је дискретна представа међумаса у виду призми, по истом принципу подјеле на зоне као и код топографских маса. За геоидне висине коришћен је званични модел квазигеоида за Србију (Agren et al., 2012), чија је тачност у односу на нивелманску мрежу Србије 3 cm. Све аномалије висина претходно су трансформисане у геоидне висине (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005). Резолуција модела износи  $0.01^{\circ} \times 0.01^{\circ}$ , односно у линеарним јединицама мјере приближно  $1\,100\text{ m} \times 800\text{ m}$  у правцу латитуде и лонгитуде, респективно.

За подручја изван Србије, геоидне висине срачунате су из геопотенцијалног модела GOCO05c (Pail et al., 2016). Ундулација из ГГМ рачуна се на основу израза (Gruber et al., 2014):

$$N(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r\gamma_0} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (5.39)$$

У претходном изразу, поједине величине имају следеће значење:

- $r, \theta, \lambda$  - сферне координате тачке: радијално растојање, колатидуда, лонгитуда;
- $GM$  - универзална гравитациона константа за потенцијал референтног елипсоида;
- $\gamma_0$  - убрзање нормалне теже на референтном елипсоиду;
- $n, m$  - степен и ред сфернохармонијског развоја;
- $n_{\max}$  - максимални степен сфернохармонијског развоја;
- $a$  - екваторијални полупречник (велика полуоса) референтног елипсоида;
- $\Delta\bar{C}_{nm}, \Delta\bar{S}_{nm}$  - нормализовани резидуални коефицијенти сфернохармонијског развоја, добијени одузимањем коефицијената нормалног од коефицијената стварног потенцијала;
- $\bar{P}_{nm}$  - нормализоване придружене Лежандрове функције степена  $n$  и реда  $m$ .

## 6. НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА

На почетку нумеричких истраживања, ради визуелизације моделованих градијената, разумијевања њихових својстава и њихове корелације са топографијом, срачунати су градијенти за два подручја у Србији, подручје Фрушке горе и подручје планине Ртањ. Обухваћено је подручје двију планина и околног нижег терена, како би се приказао контраст висина терена и његова веза са градијентима. Пошто модел топографских маса подразумејева константну густину, очекивано је да моделовани градијенти имају велику корелацију са топографијом, будући да на њихов релативни распоред утиче само висина терена, тј. геометријски аспект моделовања.

У Прилогу 1 дата је висинска представа Фрушке горе и околине. За креирање овог приказа коришћен је ДМТ на основу којег је рађено и моделовање. Укупно је висина из ДМТ одређена за 88 872 тачке распоређене у форми грида  $3'' \times 3''$ , односно приближно  $60 \text{ m} \times 90 \text{ m}$  у правцу лонгитуде и латитуде, респективно. За ове тачке су потом срачунати и градијенти. У наставку Прилога 1 дат је и приказ градијената, редом  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$ ,  $W_{zz}$ ,  $W_{xy}$ ,  $W_{xz}$  и  $W_{yz}$ . У Прилогу 2, истим редом, дата је топографија планине Ртањ и срачунати градијенти. У ово рачунање биле су укључене 83 402 тачке. Градијенти на картама дати су у јединицама [ $\mu\text{Gal/m}$ ], док су изохипсе терена приказане у метрима.

Карте градијената јасно показују очекивано високу корелацију са тереном вертикалног градијента, али исто тако и  $W_{xx}$  градијента. Разлог томе је чињеница да су обје планине издужене у правцу исток-запад, а  $x$  оса правоуглог система је управна на тај правац, тако да се са промјеном положаја по  $x$  оси догађа и велика промјена  $x$  компоненте убрзања. Ово је нарочито изражено у случају Фрушке горе која има облик значајно издужен у правцу лонгитуде, тако да  $W_{xx}$  ту чак има већу корелацију (у апсолутном смислу) са тереном од  $W_{zz}$ . Мјешовити градијенти генерално имају мању корелацију од дијагоналних компоненти тензора, а најмања је код  $W_{yz}$ . И ово је очекивано, будући да планине имају речено лонгитудинално простирање, тако да кретање по  $y$  оси не доноси велику промјену висине, а самим тим ни вертикалне компоненте убрзања. Једина мјеста гдје се истичу компоненте градијената  $W_{xz}$  и  $W_{yz}$  јесу појасеви око планина са великим висинским градијентом. Тако  $W_{xz}$  има веће вриједности тамо гдје висина терена најбрже расте у правцу сјевер-југ, а  $W_{yz}$  на мјестима гдје је велики прираштај висине терена у правцу исток-запад. Кретање у датим правцима у овом појасу доводи до великих промјена висине што повлачи и промјену вертикалне компоненте убрзања. Но, у смислу корелације са апсолутном вриједношћу висине, компоненте градијената  $W_{xz}$  и  $W_{yz}$  посљедично показују мале вриједности. Градијент  $W_{xy}$  махом има веће вриједности на мјестима дијагонално распоређеним у односу на правац пружања планина, тамо гдје кретање по једној хоризонталној оси доноси веће промјене компоненти убрзања по другој. Вриједности коефицијената корелације терена и градијената дате су у табели 6.1.

Табела 6. 1. Корелација градијената и терена

Градијент	Фрушка гора	Ртањ	Заједно
$W_{xx}$	-0.48	-0.48	-0.48
$W_{yy}$	-0.24	-0.29	-0.26
$W_{zz}$	0.44	0.48	0.46
$W_{xy}$	-0.06	-0.12	-0.09
$W_{xz}$	0.06	0.15	0.10
$W_{yz}$	0.01	0.03	0.02

## 6.1. ДИРЕКТНА ПРОВЈЕРА МОДЕЛА

Модел Етвешевог тензора тестиран је директним поређењем са резултатима мјерења градијената на територији Србије. Због различите методе мјерења, временске епохе и остварене тачности, засебно су анализирана два скупа тачака. Први скуп обухвата тачке на којима су вршена мјерења торзионом вагом, док другу групу чине тачке на којима су мјерени вертикални градијенти.

### 6.1.1. Мјерења торзионом вагом

Директна провјера модела спроведена је на основу резултата мјерења градијената торзионом вагом у близини Новог Сада. Ова мјерења су вршена 1918. године, у вријеме док је територија Војводине још увијек била под влашћу Аустро-Угарске монархије. Резултати ових мјерења власништво су мађарског министарства рударства, и добијени су љубазношћу и посредовањем професора Лајоша Велђешија (Lajos Völgyesi) са Техничко-економског универзитета у Будимпешти, како би се спровело заједничко научно истраживање.

#### 6.1.1.1. Полигон Нови Сад

Подручје на којем су распоређене тачке налази се источно од Новог Сада, и приближних је димензија 26.4 km x 25.9 km. У Прилогу 3 дат је географски распоред тачака. Просјечна висина свих тачака износи 79 m, са амплитудом висина од 10 m. Мјерења су извршена на 102 тачке, и добијени су резултати за све четири компоненте које се уобичајено мјере торзионом вагом,  $W_{\Delta}$ ,  $W_{xy}$ ,  $W_{xz}$  и  $W_{yz}$ . У Прилогу 4 дати су резултати мјерења на свим тачкама.

#### 6.1.1.2. Статистичка анализа

У Прилогу 5 дате су вриједности моделованих градијената и њихових одступања (мјерено-моделовано) од измјерених вриједности. У табели 6.2 дати су основни статистички показатељи тачности моделованих градијената. На основу одступања од резултата мјерења, срачуната је тачност моделованих компоненти. Параметри у табели су редом: максимално и минимално одступање за сваку моделовану компоненту, распон одступања, њихова средња вриједност и стандардно одступање моделованих мјерења срачунато као:



$$\sigma(W'_{ii}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta W'_{ii})^2}{n}}. \quad (6.1)$$

Табела 6.2. Тачност моделованих торзионих мјерења

Статистички параметар	Моделована компонента			
	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
$\Delta_{\max}$ [E]	65.2	50.1	49.3	33.3
$\Delta_{\min}$ [E]	-59.2	-40.7	-73.6	-75.5
$\Delta_{\text{amp}}$ [E]	124.4	90.8	122.9	108.7
$\bar{\Delta}$ [E]	0.9	7.8	4.8	-2.0
$\sigma(W'_{ii})$ [E]	22.9	17.8	19.5	20.7

Добијена тачност моделованих компоненти прилично је хомогена, и износи приближно око 20 Е. Тачније, кад се срачуна просјечна тачност све четири компоненте као:

$$\bar{\sigma}(W'_{ii}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sigma^2(W'_{ii})}{n}}, \quad (6.2)$$

при чему је  $n = 4$ , добија се вриједност од 20.3 Е. Компоненте закривљености,  $W_{\Delta}$  и  $2W_{XY}$ , функција су моделованих градијената, тако да се примјеном ЗПГ може добити тачност појединих градијената  $\sigma(W'_{ii})$ . Резултати су приказани у табели 6.3.

Табела 6.3. Тачност моделованих градијената

Тачност	Градијент				
	$W_{XX}$	$W_{YY}$	$W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
$\sigma$ [E]	16.2	16.2	8.9	19.5	20.7

Примјеном израза (6.2) такође се може срачунати и просјечна тачност појединог моделованог градијента, и она износи  $\bar{\sigma} = 16.8$  Е.

Стандардно одступање моделованих градијената од 15 – 20 Е може се сматрати врло добрим резултатом, с обзиром на то да имплицира тачност моделовања која је само за ред величине слабија од тачности мјерења. Ипак, ради потпунијег тумачења резултата, ваља указати на неповољан однос сигнал/шум, који у просјеку за све мјерене компоненте износи 0.6. Другим ријечима, саме апсолутне вриједности градијената су у доброј мјери „утопљене“ унутар остварене тачности моделовања. Поједине вриједности моделованих градијената имају супротан предзнак од мјерених, иако само одступање износи тек неколико Етвеша. Примјер за то је тачка 5 300 и компонента  $2W_{xy}$ , чија је мјерена вриједност -3.8 Е, а моделована 3.4 Е, што даје одступање од само 7.2 Е (Прилог 4 и Прилог 5). Ово је посљедица врло малих вриједности промјене убрзања које се опажају торзионом вагом, а што је условљено њеном специфичном конструкцијом (подпоглавље 4.3.1.1) и чињеницом да не мјери (директно) вертикални градијент, као и да региструје разлику друга два дијагонална елемента тензора. Оваква конструкција торзионе ваге омогућава да се из опажања у потпуности елиминише ефекат укупне теже, и у суштини је предуслов за врло велику прецизност мјерења, на нивоу неколико Етвеша, али очигледно донекле отежава провјеру тачности моделовања тензора.

Да би се додатно илустровала тачност остварених резултата, направљено је поређење са границама тачности дефинисаним самом тачношћу мјерења. За тачност мјерења је у 4.3.1.1. констатовано да износи од 1 - 2 Е, до 5 Е, зависно од методе испитивања и компоненти на које се односи (компоненте закривљености имају нешто слабију тачност у односу на компоненте градијената). С обзиром на то да су анализирана мјерења вршена почетком 20. вијека, уз коришћење првих модела торзионе ваге који нису имали аутоматизована читавања и били су подложни утицајима промјене температуре, за тачност торзионих мјерења код Новог Сада може се усвојити горња граница од 5 Е. Даље, додатни извор грешака представља непознавање прецизног положаја тачака на којима су вршена мјерења. У подацима које је проф. Велћешки првобитно доставио положаји су били дати геодетским координатама у односу на елипсоид Красовског<sup>4</sup>, са резолуцијом угловних координата од једне лучне секунде. С обзиром на то да геоцентрични угао од једне секунде на физичкој површи Земље износи око 30 m, и узевши у обзир и геодетску ширину на којој се подручје налази, добија се да је грешка хоризонталног положаја усљед грешке заокруживања координата око 20 m. Осим тога, сами положаји су одређени читавањем са карата у Гаус-Кригеровој пројекцији, што само по себи производи додатну грешку. Узевши у обзир све наведено, може се са сигурношћу констатовати да је тачност резултата мјерења у полигону Нови Сад, у контексту тестирања моделованих вриједности, слабија од наведених 5 Е. Колико слабија, није једноставно утврдити, првенствено зато што нису познати хоризонтални градијенти мјерених компоненти. Ипак, с обзиром на усвојени концепт моделовања са констатном густином, гдје геометријски аспект посљедично има доминантну улогу, и чињеницу да је у питању равничарски терен у Војводини, може се претпоставити да непознавање хоризонталних положаја на нивоу неколико десетина метара не би требало драматично да утиче на тачност резултата

---

<sup>4</sup> Координате у Прилогу 4 односе се на општи Земљин елипсоид и геоцентрични датум, а трансформацију је љубазно извршио сам проф. Велћешки. Увид у оригиналне податке могућ је у комуникацији са аутором.

мјерења. Стога је у коначници за тачност мјерених компоненти усвојена приближна вриједност од 8 Е.

На основу усвојене вриједности за тачност мјерења, срачунато је колики проценат одступања моделованих градијената се налази унутар граница  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  и  $3\sigma$  од тачности мјерења. Резултати су приказани у табели 6.4.

**Табела 6.4.** Удио одступања моделованих градијената унутар граница тачности

Статус	Мјерење / удио [%]				
	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$	Све
$\Delta W_{ii} < 1\sigma$	31	40	29	34	34
$1\sigma < \Delta W_{ii} < 2\sigma$	28	25	28	22	26
$2\sigma < \Delta W_{ii} < 3\sigma$	14	14	20	22	17
$3\sigma < \Delta W_{ii}$	26	21	23	23	23

Из потоње табеле видљиво је да се, збирно посматрано, унутар граница  $1\sigma$  налази једна трећина резултата, док је унутар  $2\sigma$  укупно 60% вриједности. Одступања мања од  $3\sigma$  има 77% резултата, док је 23% са разликама већим од  $3\sigma$ . Овакав распоред одступања у односу на граничне вриједности тачности мјерења није повољан, али може се сматрати да је посљедица наведеног односа интензитета самих градијената и њихових одступања. Висока тачност мјерења торзионом вагом такође има удјела у томе.

У Прилогу 6 дате су расподјеле одступања за сваку мјерену компоненту, заједно са густином нормалне расподјеле. Такође су дати и графици одступања (апсолутне вриједности) са границама тачности, који илуструју податке из табеле 6.4. Графици расподјела одступања показују да резидуали за сваку компоненту доста добро прате нормалну расподјелу, при чему је њихово стандардно одступање око  $2 \mu\text{Gal/m}$ , односно 20 Е. Математичко очекивање за  $W_{\Delta}$  и  $W_{YZ}$  компоненте је блиско нули, док за  $2W_{XY}$  и  $W_{XZ}$  то није случај. Ово би могло указивати на потенцијални систематски утицај у резултатима моделовања, иако није познато шта би такав утицај могло изазвати. Ако се проблем моделовања поново разложи на геометријски и физички аспект, јасно је да узроци грешака могу бити слаб квалитет ДМТ-а и погрешна претпоставка о густини топографских маса. Распоред тачака на терену и релативна близина Фрушке горе (Прилог 3), као и чињеница да су одступања помјерена код компоненти  $2W_{XY}$  и  $W_{XZ}$ , наводе на закључак да би управо утицај масе ове планине, тј. грешака у моделовању њеног утицаја, могао бити извор помјерених одступања. Наиме, на почетку поглавља је објашњено да прва компонента, чија су одступања највише помјерена, долази до изражаја на мјестима дијагонално распоређеним у односу на правац пружања планине, а већина тачака у полигону има такав положај. Компонента  $W_{XZ}$  зависи од висинског градијента који је на датом подручју мали, али

је осјетљива на промјену положаја у правцу сјевер-југ, при чему су тачке добрим дијелом такође распоређене сјеверно од планине. Систематски ефекат је последица извора грешке који управо тако дјелује, подједнако на све резултате, што пак указује да је грешка у моделовању густине масе вјероватнија. Ипак, удаљеност планинског масива и брзина опадања градијената са растојањем указују да овај утицај не би требало да буде значајан. Свакако, ово отвара неколико питања о проширивању концепта моделовања градијената, но та питања су изван обухвата ове дисертације и требало би да буду предмет додатних истраживања.

### 6.1.1.3. Поређење са геопотенцијалним моделом

Резултати мјерења торзионом вагом упоређени су и са градијентима срачунатим из геопотенцијалног модела EGM2008 (*Earth Gravitational Model 2008* – EGM2008). Да би се градијенти срачунали из глобалног геопотенцијалног модела (ГГМ), прво се рачунају први изводи потенцијала у сферним координатама (Casotto & Fantino, 2009):

$$\begin{aligned} V_r &= -\frac{GM}{a^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \\ V_\theta &= -\frac{GM}{a} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}^{(1)}(\cos \theta) (\sin \theta), \\ V_\lambda &= \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m (-\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \end{aligned} \quad (6.3)$$

гдје је  $\bar{P}_{nm}^{(i)}$   $i$ -ти извод нормализоване Лежандрове функције (Ilk, 1983). Након тога рачунају се и други изводи у сферним координатама (Novák & Grafarend, 2006):

$$\begin{aligned} V_{rr} &= \frac{GM}{a^3} \sum_{n=0}^{n_{\max}} (n+1)(n+2) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \\ V_{r\theta} &= \frac{GM}{a^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}^{(1)}(\cos \theta) (\sin \theta), \\ V_{r\lambda} &= -\frac{GM}{a^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n m (-\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \\ V_{\theta\theta} &= -\frac{GM}{a} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \begin{pmatrix} \bar{C}_{nm} \cos m\lambda \\ +\bar{S}_{nm} \sin m\lambda \end{pmatrix} \left( -\bar{P}_{nm}^{(2)}(\cos \theta) \sin^2(\theta) + \bar{P}_{nm}^{(1)}(\cos \theta) \cos^2(\theta) \right), \\ V_{\theta\lambda} &= -\frac{GM}{a} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m (-\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}^{(1)}(\cos \theta) (\sin \theta), \\ V_{\lambda\lambda} &= -\frac{GM}{a} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m^2 (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Претходни изрази дају друге изводе гравитационог потенцијала. Да би се добили изводи потенцијала теже, треба им додати изводе центрифугалног потенцијала који је у сферним координатама задат једначином:

$$Z = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \cdot \omega^2. \quad (6.5)$$

Сада се рачунају градијенти у правоуглом координатном систему, тзв. референтном оквиру градиометра (*Gradiometer Reference Frame - GRF*):

$$\begin{aligned} V_{XX} &= \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta}, \\ V_{XY} &= \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} V_\lambda - \frac{1}{r^2 \sin \theta} V_{\lambda\theta}, \\ V_{XZ} &= \frac{1}{r^2} V_\theta - \frac{1}{r} V_{r\theta}, \\ V_{YY} &= \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2 \tan \theta} V_\theta + \frac{1}{r^2 \sin \theta} V_{\lambda\lambda}, \\ V_{YZ} &= \frac{1}{r \sin \theta} V_{r\lambda} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} V_\lambda, \\ V_{ZZ} &= V_{rr}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Први изводи у GRF рачунају се као:

$$\begin{aligned} V_X &= -\frac{1}{r} V_\theta, \\ V_Y &= \frac{1}{r \sin \theta} V_\lambda, \\ V_Z &= V_r. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Систем GRF има приближно исту оријентацију као и локални елипсоидни систем, и другачију поларност, тј. оса  $X$  је обрнуто усмјерена, ка југу. Градијенти у локалном систему се коначно могу израчунати на основу везе градијената у два система у контексту промијењене поларности, као што је објашњено у 5.3.1.2.

Вриједности свих градијената срачунатих из ГТМ дате су у Прилогу 7. Основни статистички показатељи њиховог поређења са резултатима мјерења дати су у табели 6.5. Резултати показују да је одступање ГТМ градијената од резултата мјерења на истом нивоу као и одступање моделованих градијената, тј. да је чак и мање. Разлог за ово лежи у чињеници да на равничарском терену Панонске низије, доминантну улогу у градијентима има дуготаласна компонента, која чини и ГТМ, те отуда њихово добро слагање. Овдје се види да је за тестирање квалитета моделованих градијената пожељно користити резултате мјерења која су спроведена на подручју са значајније израженом топографијом. Тиме би се дјелимично превазишао и проблем генерално неповољног односа сигнала и шума код моделованих градијената. Такође, ваља примјетити да математичко очекивање одступања ГТМ градијената такође није нула, поготово код  $W_{XZ}$  компоненте. Ово је вјероватно последица разлике два поља, дуготаласног које карактерише ГТМ и стварног које садржи и локалне и регионалне карактеристике.

Табела 6.5. Одступање ГГМ градијената од мјерења

Статистички параметар	Компонента			
	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
$\Delta_{\max}$ [E]	34.9	26.5	51.8	63.8
$\Delta_{\min}$ [E]	-28.9	-31.1	-60.3	-38.7
$\Delta_{\text{amp}}$ [E]	63.8	57.6	112.1	102.5
$\bar{\Delta}$ [E]	2.9	4.8	-13.2	-2.3
$\sigma(W'_{ii})$ [E]	12.8	10.3	20.6	16.7

#### 6.1.1.4. Утицај Фрушке горе

У контексту претходно наведених потенцијалних систематских утицаја у резултатима моделовања, као и поменутог односа мјерених и градијената из ГГМ, срачуната је зависност укупних одступања моделованих градијената на тачкама и удаљености тачака од Фрушке горе. Укупна средња одступања за све четири моделоване компоненте мјерења срачуната су као:

$$\sigma_{SUM}(W'_{ii}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta W'_{ii})^2}{n}}, \quad (6.8)$$

гдје је  $\Delta W'_{ii}$  одступање  $i$ -те компоненте, а  $n = 4$ . График ове зависности приказан је у Прилогу 8, заједно са коефицијентом корелације  $k$  и индексом криволинијске корелације  $R^2$ . Растојања до Фрушке горе срачуната су тако што је њен масив дискретизован коначним бројем призми, а растојање добијено као просјечна вриједност растојања тачке до свих призми. Утврђена је корелација од  $k = -0.31$ , за коју се може рећи да није занемарљива. Нарочито је занимљив њен негативни предзнак, односно чињеница да вриједности укупних одступања опадају са удаљавањем од Фрушке горе. С обзиром да је добијено боље слагање ГГМ градијената са мјерењима неголи моделованих, и да је утврђено да се без значајног сигнала топографије моделовани градијенти утапају у дуготаласној компоненти и лошем односу сигнал/шум, логична је претпоставка да ситуација буде обрнута, тј. да тачке ближе планини имају мања одступања јер у складу са концептом моделовања успјешно обухватају утицај топографије. Одступање у овом смислу указује на могућу већ споменуто систематску грешку у виду апроксимације густине, гдје близина масе негативно дјелује на тачност моделовања.

Да би се добили додатни увиди и индикатори потенцијалног ефекта фрушкогорског масива, срачунат је утицај претпостављене резидуалне густине од  $1\,000\text{ kg/m}^3$ , а затим и његова корелација са растојањем. За рачунање утицаја на мјерене компоненте

коришћена је иста подјела Фрушке горе на призме. Зависност од растојања такође је дата у Прилогу 8 (график  $\Delta W_{SUM(FG)}$ ). Добија се слична корелација од -0.23, међутим једна тачка очигледно одступа од осталих. У питању је тачка 5 350 која се налази у Сремским Карловцима и на чије  $W_{\Delta}$  и  $2W_{XY}$  Фрушка гора утиче у значајној мјери. Кад се ова тачка искључи из рачунања, добија се зависност резидуалне густине и растојања идентична зависности одступања,  $k = -0.31$  (Прилог 8, означено са Нови Сад (-1)). Ове нумеричке показатеље никако не треба сматрати дефинитивним доказима утицаја грешака густине на тачност моделовања, већ их искључиво треба посматрати као индикаторе потенцијалне везе и као смјернице за даља истраживања. Разлога за то је неколико. Поред саме природе срачунатих коефицијената, која је чисто статистичка и нумеричка без директног физичког утемељења, сама резидуална густина је изабрана приближно и произвољно. Осим тога, тачка која представља „аутлајер“ је искључена (иако је и са овом тачком корелација доста блиска почетној), а масив Фрушке горе је ради једноставности и приближног рачунања апроксимиран малим бројем призми. Даље, удаљеност од планине износи неколико десетина километра, и величине самих утицаја на градијенте су далеко мање од њихових одступања. Ипак, подударане је индикативно. Такође, у контексту претходно наведене особине градијената да резидуалне густине не утичу значајно на њих, ваља имати на уму да се то првенствено односи на вертикални градијент, гдје је привлачење сусједних топографских маса у смјеру који се не подудара са смјером овог градијента. С друге стране, торзиона вага практично мјери хоризонталне градијенте, који су далеко више осјетљиви на латералне масе у виду сусједних планина, пошто је њихов утицај директно у смјеру ових градијената. Стога је свакако потребно спровести даља истраживања чији ће фокус бити на разјашњавању ових односа.

### 6.1.2. Вертикални градијенти

Мјерења вертикалних градијената извршена су у периоду 2020-2021, на укупно 76 тачака на територији Србије (Прилог 9). Резултати моделовања вертикалног градијента за ове тачке и статистичка анализа већ су представљени у (Odalovic et al., 2022), али овдје ће такође бити приказани ради употпуњавања слике о моделовању Етвешевог тензора према предложеној методологији.

#### 6.1.2.1. Метода мјерења

Мјерења су спроведена релативним гравиметром Scintrex CG-5, према методологији описаној у 4.3.1.2. Гравиметром је одређено убрзање на двије висине изнад тачке,  $h_1$  и  $h_2$ , и тако је добијена разлика убрзања дуж вертикалног растојања. Мјерења су поновљена неколико пута. Гравиметар је на нижу тачку постављан  $n$  пута, а на вишу  $n - 1$ , пошто овакав сет мјерења почиње и завршава на нижој тачки. За све тачке број мјерења  $n$  је износио најмање четири. У сваком положају гравиметар је радио шест минута, а вриједност резултата мјерења за сваки минут добијена је као средња вриједност 60 читавања. Коначни резултат за сваки положај срачунат је као средина свих шест резултата. Поновљена мјерења су рађена ради елиминисања хода гравиметра у току мјерења. Финална вриједност убрзања на свакој од двије висине срачуната је као аритметичка средина свих поновљених опажања. Ортометријске висине тачака добијене су нивелањем до репера државне нивелманске мреже, док су њихове положајне координате одређене ГНСС мјерењима, ослањањем на државну мрежу перманентних станица.

У склопу обраде података, срачунате су одговарајуће поправке и редукције на свакој тачки. У реалном времену, урачунате су поправке за дугопериодични ход гравиметра, његову нехоризонталност, поправке због промјена температуре, климатског дисања чврсте Земљине коре и свођење резултата за фактор калибрације. Накнадном обрадом додате су и поправке за свођење резултата на ниво тачке (поправка због висине инструмента), поправка за атмосферски притисак, кретање Земљиних полова и редукција опажања због резидуалног хода гравиметра (Torge, 1989). Након уношења свих поправака, градијент се на крају добија на основу израза (4.26).

#### 6.1.2.2. Статистичка анализа

У Прилогу 10 дате су вриједности свих измјерених вертикалних градијената. У Прилогу 11 приказани су моделовани градијенти и њихове разлике (моделовано-мјерено) од резултата мјерења. На основу ових одступања, срачунати су параметри тачности који су дати у табели 6.6.

**Табела 6.6.** Тачност моделованих вертикалних градијената

Статистички параметар	Вриједност
$\Delta_{\max}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]	55.44
$\Delta_{\min}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]	-50.86
$\Delta_{\text{amp}}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]	106.3
$\bar{\Delta}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]	8.23
$\sigma(W'_{zz})$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]	22.72

Резултати показују да је тачност моделованих вертикалних градијената око 230 E, односно да је за ред величине слабија од тачности градијената који се мјере торзионом вагом. Ово је највјероватније узроковано разликом у интензитету величина које се мјере, пошто је вертикални градијент за два реда величине већи у апсолутном смислу од торзионих мјерења. Однос сигнал/шум код вертикалног градијента је такође доста повољнији, и износи 12.6. Такође, и овдје се као и код торзионих мјерења запажа да математичко очекивање одступања није нула, већ износи око 80 E, што је још једна индикација потенцијалног систематског утицаја густине у моделовању.

Да би се утврдило постоји ли корелација тачности моделованих градијената са географском локацијом, срачунати су коефицијенти корелације одступања са геодетском ширином, дужином и висином (Прилог 12). Графици и вриједности коефицијената јасно показују да географски положај не утиче на тачност. Тек је код геодетске дужине утврђена незнатно већа корелација од -0.15.

Да би се приказао однос одступања моделованих вертикалних градијената спрам граница тачности дефинисаних тачношћу мјерења, прво је потребно утврдити саму



тачност мјерења. За разлику од градијената мјерених торзионом вагом у полигону код Новог Сада, ова тачност се за вертикалне градијенте може утврдити доста поузданије. Тачност вертикалног градијента одређеног гравиметром може се добити на основу закона преноса грешака и једначине (4.27), ако су познате грешке величина које фигуришу у (4.26) и њихове приближне вриједности. За тачност релативног гравиметра Scintrex CG-5 у теренским условима, може се усвојити  $10 \mu\text{Gal}$  (Crossley et al., 2013), (Reudink et al., 2014). Висинска разлика два положаја на свакој тачки измјерена је са тачношћу од 1 mm, док је просјечна вриједност висинске разлике износила 0.83 m. Са овим вриједностима и на основу (4.27), добија се да је очекивана тачност овако одређеног вертикалног градијента 170 E, односно  $17 \mu\text{Gal/m}$ . У односу на ову тачност, срачунати су проценти одступања унутар  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  и  $3\sigma$ . Резултати су приказани у табели 6.7.

**Табела 6.7.** Удио одступања моделованих вертикалних градијената унутар граница тачности

Статус	Удио одступања [%]
$\Delta W_{ii} < 1\sigma$	59
$1\sigma < \Delta W_{ii} < 2\sigma$	28
$2\sigma < \Delta W_{ii} < 3\sigma$	9
$3\sigma < \Delta W_{ii}$	4

Јасно је да су одступања вертикалних градијената много боље распоређена унутар граница тачности неголи код торзионих мјерења, тј. у релативном смислу су значајно мања. Скоро 60% резултата је унутар  $1\sigma$ , а унутар  $2\sigma$  их је укупно 87%. Одступања мања од  $3\sigma$  има 96% свих резултата, тј. само је 4% изван ове границе. Ови односи приказани су и графички, у Прилогу 13, заједно са расподјелом одступања и пратећом густином нормалне расподјеле. График расподјеле показује добро слагање резидуала са нормалном расподјелом. Њихово расипање описано је стандардним одступањем од око 210 E, уз већ поменуто математичко очекивање од 80 E.

#### 6.1.2.3. Поређење са геопотенцијалним моделом

Као и код торзионих мјерења, направљено је поређење са градијентима срачунатим из геопотенцијалног модела EGM2008. Вриједности срачунатих вертикалних градијената дате су у Прилогу 14, као и њихова одступања (мјерено-модел) од резултата мјерења. Статистика ових резултата дата је у табели 6.8. ГГМ градијенти показују мању тачност у односу на моделоване, са стандардним одступањем од 460 E. Такође је присутно помјерање математичког очекивања резидуала, и то веће од 200 E. Ако се претпостави да су локални ефекти поља теже рандомизовани, ово указује на регионалну карактеристику стварног поља на нивоу Србије која ствара разлику у односу на дуготласно поље геопотенцијалног модела.

**Табела 6.8.** Тачност вертикалних градијената из ГГМ

Статистички параметар	Вриједност
$\Delta_{\max}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	138.02
$\Delta_{\min}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	-69.31
$\Delta_{\text{amp}}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	207.33
$\bar{\Delta}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	20.97
$\sigma(W'_{zz})$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	46.37

#### 6.1.2.4. Анализа резултата у Војводини

Како је претходно утврђено да ГГМ градијенти имају јако добро слагање са торзионим мјерењима код Новог Сада, због одсуства изражених топографских облика у равничарском терену и доминантног ефекта дугораласних карактеристика поља, исто је провјерено и за измјерене вертикалне градијенте. Како се рељеф у Србији упечатљиво мијења са промјеном геодетске ширине, са брдовитим подручјима у средишњем и јужном дијелу, и равницом на сјеверу, прво је испитана корелација одступања ГГМ градијената са геодетском ширином. График је дат у Прилогу 15, и показује велику негативну корелацију ( $k = -0.43$ ), која је и очекивана. Тачност градијената срачунатих из ГГМ је значајно боља у сјеверном дијелу, у Војводини. Да би се утврдило тачно колико, анализирани су резултати свих мјерења вертикалног градијента сјеверно од Саве и Дунава. У ову категорију улази 21 тачка, а статистички параметри дати су у табели 6.9, за одступања ГГМ и моделованих градијената.

**Табела 6.9.** Тачност градијената у Војводини

Статистички параметар	ГГМ-мјерења	Модел-мјерења
$\Delta_{\max}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	23.39	27.99
$\Delta_{\min}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	-17.99	-50.86
$\Delta_{\text{amp}}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	41.38	78.85
$\bar{\Delta}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	-1.61	1.30
$\sigma(W'_{zz})$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	9.89	16.19

Из табеле је видљиво да на подручју Војводине и моделовани и градијенти срачунати из ГГМ показују бољу сагласност са мјереним вертикалним градијентом, у односу на просјек за цијелу Србију. Ово нарочито вриједи за ГГМ градијенте, који, као и у случају торзионих мјерења у равници, боље прате резултате мјерења од моделованих

вриједности. Обје групе показују и извјесно систематско помјерање резидуала, које се ипак може сматрати безначајним с обзиром на утврђену тачност.

## 6.2. ПОСРЕДНА ПРОВЈЕРА МОДЕЛА

Торзиона мјерења у полигону код Новог Сада омогућила су директну провјеру тачности моделованих градијената. Међутим, у питању је релативно мало подручје, без израженог утицаја топографије. С обзиром на концепт моделовања, који нагласак ставља на коришћење прецизног ДМТ и подразумијева константну густину топографских маса, такав терен није најбољи избор за тестирање модела градијената. Но, избор је ограничен врло ријетким торзионим мјерењима. Узевши у обзир да и сама мјерења код Новог Сада датирају из периода од прије више од једног вијека, као и да је положај тачака у полигону познат тек са ограниченом тачношћу, зарад потпунијег сагледавања модела приступило се његовој додатној, посредној провјери. Посредна провјера је вршена пошто није више било доступних торзионих мјерења, и она подразумијева да се из моделованих градијената срачунају неки функционали поремећајног потенцијала чије су вриједности познате (мјерене или срачунате), те да се тестирањем њиховог квалитета посредно добије увид у квалитет моделованих градијената. Коришћена је веза елемената Етвешевог тензора са одступањима вертикала, и посредно са ундулацијама геоида/аномалијама висине, а рачунања су вршена у гравиметријском полигону у Бору.

### 6.2.1. Полигон Бор

Подручје гравиметријског полигона налази се у Бору, у источној Србији, и његове приближне димензије износе 3.27 km x 2.52 km. Географски положај полигона дат је у Прилогу 16. Садржи укупно 777 тачака на којима су извршена гравиметријска мјерења у склопу локалног гравиметријског премјера. Тачке су распоређене у 33 врсте, са 20 до 27 тачака у свакој врсти, на међусобном растојању од око 100 m. У односу на полигон код Новог Сада, ово је подручје много израженије топографије, са просјечном висином тачака од 526 m и значајном амплитудом висина за овако мало подручје, која износи 214 m. Оно што такође карактерише ово подручје, и што га чини погодним за овакву врсту истраживања, јесу велике промјене аномалија висине и компоненти одступања вертикала. Распон аномалија висине износи 15.1 cm, док се одступања вертикала мијењају 1.57" у правцу меридијана и 0.69" у правцу првог вертикала.

### 6.2.2. Оцјена компоненти одступања вертикала

Одступања вертикала на тачкама полигона у Бору нису позната, већ су морала бити оцијењена из званичног модела квазигеоида Србије (Agren et al., 2012). Чињеница да су одступања вертикала изводи ундулације, а не аномалије висине, не представља проблем, будући да се на овако малом подручју геоид и квазигеоид могу сматрати паралелним. Стога није било неопходно да се прије рачунања аномалије висина трансформишу у ундулације.

Основне релације које дефинишу математички модел рачунања одступања вертикала из аномалија висине дате су са (3.30) и једначином која описује одступање у произвољном азимуту,  $\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$ . Потребно је дакле око тачке рачунања имати распоређене тачке у којима је позната аномалија, као и у тачки рачунања, те растојања и азимуте између тачке рачунања и тачака мреже. Дискретизујући проблем

и користећи коначне величине, за сваку комбинацију рачунске и тачке мреже може се написати једначина:

$$-\frac{\Delta\zeta_i}{S_i} = \xi \cos \alpha_i + \eta \sin \alpha_i, \quad (6.9)$$

гдје је:  $\Delta\zeta = \zeta_2 - \zeta_1$  - разлика аномалија  $i$ -те тачке мреже и рачунске тачке;  $S_i$  - њихово међусобно растојање;  $\alpha_i$  - азимут са тачке рачунања на тачку мреже. Ово је функција везе непознатих параметара (компоненте одступања вертикале) и „мјерених“ величина (количник разлике аномалија и дужине). За потребе МНК претпостављају се поправке мјерења и дефинишу једначине поправака облика:

$$v_i = \xi \cos \alpha_i + \eta \sin \alpha_i + \frac{\Delta\zeta_i}{S_i}. \quad (6.10)$$

Сада за  $n$  тачака мреже матрица дизајна и вектор слободних чланова имају облик:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \dots & \dots \\ \cos \alpha_n & \sin \alpha_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \frac{\Delta\zeta_1}{S_1} \\ \dots \\ \frac{\Delta\zeta_n}{S_n} \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Стохастички модел рачунања дефинише се на основу варијација тачности мјерених величина. У овом моделу, та тачност зависи од тачности аномалија, а утицај ових грешака је обрнуто пропорционалан растојању, тј. вриједи да је:

$$\sigma^2(\varepsilon_i) = \frac{1}{S_i^2} \sigma^2(\Delta\zeta_i). \quad (6.12)$$

Како је сама тежина у стохастичком моделу обрнуто сразмјерна квадрату тачности  $\sigma$ , то се за тежине може усвојити:

$$P_i = S_i^2. \quad (6.13)$$

Овакав приступ је на први поглед супротан интуитивној логици оцјене координата у геодетским мрежама, али је математички оправдан док год је мрежа за рачунање компоненти одступања вертикала довољно мала да су грешке усљед апроксимације нелинеарних промјена аномалије занемарљиве. Ово се постиже ограничавањем радијуса око тачке рачунања унутар којег се налазе тачке мреже, и у пракси је то најчешће око 3 km (Ceulan, 2009). Матрица тежина ће дакле бити облика:

$$P = \text{diag} [S_1^2 \quad \dots \quad S_n^2]. \quad (6.14)$$

Када су креиране све потребне матрице, МНК рјешење за непознате параметре се добија као:

$$N = A^T P A \quad n = A^T P f \quad Q_x = N^{-1} \quad x = -Q_x \cdot n \quad v = Ax + f, \quad (6.15)$$

гдје је  $x$  вектор непознатих параметара и садржи компоненте  $\xi$  и  $\eta$ . Поправке мјерења дате вектором  $v$  омогућавају и оцјену тачности непознатих параметара.

#### 6.2.2.1. Тестирање модела на Лапласовим тачкама у Србији

Да би се овај модел оцјене компоненти одступања испитао и утврдила његова тачност, спроведено је тестирање коришћењем Лапласових тачака у Србији, њих укупно 46. Ово су тачке на којима су позната астро-геодетска одступања вертикала и астрономски азимути ка другим тачкама. Распоред тачака на територији Србије дат је у Прилогу 17.

За све тачке одређене су аномалије висина из модела квазигеоида. За сваку тачку је затим креиран грид тачака мреже у којима су такође одређене аномалије. За радијус мреже узете је вриједност од 1.5 km, тј. грид чини четвороугаона мрежа чије су димензије 3 km x 3 km, са тачком рачунања у средишту. Сваки грид је укупно имао 324 тачке (програм за креирање грида функционише тако да на основу приближног броја тачака дефинише први паран број који је већи од приближног и уједно је квадрат цијелог броја; за приближно 300 тачака добија се овим алгоритмом 324 тачке).

Примјеном претходно описаног модела срачуната су одступања вертикала из модела квазигеоида и упоређена са вриједностима астро-геодетских одступања. Статистика овог поређења дата је у табели 6.10. Расподјеле одступања дате су у Прилогу 18.

**Табела 6.10.** Тачност оцијењених компоненти одступања вертикала на Лапласовим тачкама

Статистички параметар	Компонента $\xi$	Компонента $\eta$
$\Delta_{\max}$ ["]	2.09	1.37
$\Delta_{\min}$ ["]	-2.57	-2.50
$\Delta_{\text{amp}}$ ["]	4.66	3.87
$\bar{\Delta}$ ["]	0.17	0.04
$\sigma(\theta)$ ["]	0.83	0.72

Параметри јасно показују да је остварена висока тачност рачунања компоненти, практично на нивоу астро-геодетског одређивања другог реда, које даје компоненте са тачношћу од 0.5"–0.7" (Mueller, 1969). Графици у Прилогу 18 такође потврђују да је расподјела одступања блиска нормалној. Тестирани су и други стохастички модели, са тежинама обрнуто сразмјерним различитим степенима растојања, али су дали већа, иако због малих растојања блиска, стандардна одступања компоненти.

### 6.2.2.2. Одступања вертикала у полигону Бор

Према претходно описаној методологији оцијењене су компоненте одступања вертикала за све тачке полигона Бор. Због великог броја тачака и ради рационализације рачунања, полигон је подијељен на 16 приближно једнаких дијелова, од којих је сваки просјечно садржао 49 тачака. Гридови су креирани за сваку од ових 16 група, и компоненте су оцијењене за сваку тачку на основу заједничког грида. Број тачака у гриду поново је био 324, а димензије дефинисане као распон координата по свакој оси, плус 1 km. Како су приближне димензије сваког од 16 подручја 0.73 km x 0.49 km (ово нису распони по координатним осама, пошто је цијели полигон, као и издвојена подручја, у облику правоугаоника оријентисаних у правцу сјеверозапад-југоисток), на овај начин је обезбијењено да растојања тачака мреже у односу на сваку тачку рачунања буду у претходно дефинисаним границама, као и да геометрија тачака грида буде задовољавајућа. Карактеристичне вриједности за компоненте одступања у полигону, као и за аномалије висина, дате су у табели 6.11.

**Табела 6.11.** Карактеристике одступања вертикала и аномалија висина у полигону Бор

Параметар	Компонента $\xi$ ["]	Компонента $\eta$ ["]	Аномалија $\zeta$ [m]
Максимално	-1.62	8.48	44.507
Минимално	-3.19	7.80	44.356
Амплитуда	1.57	0.69	0.151
Просјечно	-2.41	8.10	44.430

### 6.2.3. Изравнање астро-тензорске мреже

Прва истраживања везе између елемената Етвешевог тензора и одступања вертикала вршена су 60-их година прошлог вијека (Badekas & Mueller, 1968). Временом су у потпуности разрађени модели рачунања компоненти одступања из градијената. Основна веза ових величина дата је једначином (Völgyesi, 2005):

$$\begin{aligned}
 & (\xi_j - \xi_i) \sin \alpha_{ij} - (\eta_j - \eta_i) \cos \alpha_{ij} = \\
 & \frac{S_{ij}}{4g_{ij}} \left( (\Delta W_{\Delta i} + \Delta W_{\Delta j}) \sin 2\alpha_{ij} + (\Delta W_{XYi} + \Delta W_{XYj}) \cos 2\alpha_{ij} \right), \tag{6.16}
 \end{aligned}$$

при чему је:  $\Delta W_{\Delta} = W_{\Delta} - U_{\Delta}$ ;  $\Delta W_{XY} = W_{XY} - U_{XY}$ ;  $g_{ij}$  - средња вриједност убрзања теже између тачака. Досадашњи модели рачунања углавном су били засновани на интерполацији, или колокацији, и користили су ланац троуглова или правоугаону мрежу (Völgyesi, 1993). У том концепту, вриједности одступања вертикала добијају се интерполацијом из тачака правоугаоног грида, на основу торзионих мјерења и тачака са познатим компонентама (Völgyesi, 1998).

За потребе посредне провјере модела градијената, изабран је приступ класичне МНК оцјене непознатих параметара. Прво су за све тачке полигона срачунати Етвешеве тензори. Једначина (6.16) је функција везе непознатих параметара и мјерења. Овдје се мјерењем сматра десна страна једначине, гдје фигуришу и моделовани градијенти. Ако се десна страна означи са  $m_{ij}$ , једначине поправака имаће облик:

$$v_{ij} = (\xi_j - \xi_i) \sin \alpha_{ij} - (\eta_j - \eta_i) \cos \alpha_{ij} - m_{ij}. \quad (6.17)$$

Сада се могу формирати матрица дизајна и вектор слободних чланова:

$$A = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} & \dots & 0 & 0 & \dots & \sin \alpha_{ij} & -\cos \alpha_{ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin \alpha_{ki} & -\cos \alpha_{ki} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

$$f = \begin{bmatrix} -m_{ij} \\ \dots \\ -m_{ki} - \xi_k \sin \alpha_{ki} + \eta_k \cos \alpha_{ki} \end{bmatrix}.$$

У (6.18), прва једначина повезује тачке  $i$  и  $j$  које су обје непознате, док се посљедња односи на везу познате тачке  $k$  и непознате  $i$ . Будући да у (6.16) фигуришу разлике разлика компоненти између тачака, за рјешавање система једначина потребно је у мрежи имати барем двије тачке са познатим одступањима вертикала. Једначине су формиране у свим комбинацијама између познатих и непознатих тачака, и у том случају матрица дизајна има  $m \cdot n + (0.5 \cdot n \cdot (n-1))$  врста и  $2 \cdot n$  колона, гдје је  $m$  број познатих а  $n$  број непознатих тачака. Вектор слободних чланова има  $m \cdot n + (0.5 \cdot n \cdot (n-1))$  елемената. Стохастички модел је, на основу (6.16), дефинисан као:

$$P_{ij} = \frac{1}{S_{ij}^2}, \quad (6.19)$$

са дијагоналном матрицом тежина. Вектор непознатих параметара има облик:

$$x = [\xi_i \quad \eta_i \quad \dots \quad \xi_j \quad \eta_j]^T. \quad (6.20)$$

Мрежа тачака повезаних једначином (6.16), гдје одређен број тачака (најмање двије) има позната одступања вертикала, а на осталим тачкама се она могу срачунати примјеном моделованих елемената Етвешевог тензора и МНК оцјене непознатих параметара на основу израза (6.18) до (6.20), може се назвати астро-тензорском мрежом<sup>5</sup>. У практичном истраживању зарад посредне провјере модела градијената,

<sup>5</sup> У доступној литератури није пронађено да је до сада коришћен овај начин оцјене одступања вертикала, односно овако конципирана мрежа. С обзиром на то, овај назив представља приједлог аутора за такву врсту мреже.

полигон Бор је третиран као астро-тензорска мрежа. Програм за изравнање мреже писан је у MATLAB-у. Пошто се једначине између тачака формирају у свим комбинацијама, захтјеви за рачунарским капацитетима расту експоненцијално са бројем тачака, те због ограничења у доступној меморији рачунара није било могуће изравнати мрежу као цјелину, са свим тачкама. У рачунању је коришћен приступ минималног броја познатих тачака, тј. само двије тачке. У том случају било је могуће оцијенити компоненте за 302 непознате тачке. На основу броја врста и колона, добија се да матрица дизајна за овај број тачака има  $27.8 \cdot 10^6$  елемената. Потенцијално рјешење овог проблема могло би бити рјешавање система нормалних једначина неком другом методом, умјесто класичном инверзијом матрица као у (6.15).

У полигону Бор, проблем ограниченог броја тачака превазиђен је подјелом полигона на више дијелова, тј. више мањих мрежа, и њиховим засебним изравнањем. У свакој мрежи узете су по двије тачке као познате, а за остале тачке оцијењене су компоненте одступања вертикала. Тако је полигон подијељен на 16, 8 и 4 дијела, а за сваку подјелу статистичка анализа је рађена обједињујући све сегменте, тј. користећи све тачке. Астро-тензорска мрежа је изравната и као цјелина на цијелом подручју полигона, елиминисањем за рачунање сувишног броја тачака и свођењем мреже на 304 тачке, двије познате и 302 непознате. Тачке које су изабране да репрезентују мрежу биле су равномерно распоређене на цијелом подручју, на приближно једнаким међусобним растојањима. По истом принципу, са 302 непознате тачке, мрежа је подијељена и на два дијела који су затим изравнати и заједно анализирани.

Да би се ипак извршило рачунање коришћењем свих тачака полигона у оквиру једне астро-тензорске мреже, полигон је дијељен на 16 и 32 дијела, а затим је вршено сукцесивно изравнање мреже, дио по дио. У једном од централних сегмената мреже узете су двије тачке као познате, и тај сегмент је изравнат. Затим су за сусједне сегменте као познате узете најближе новодређене тачке из првог сегмента. Из ових новоодређених сегмената узете су пак по двије тачке за њихове сусједне непознате сегменте, све док нису срачунате компоненте на свим тачкама. У Прилогу 19, као илустрација дата је подјела полигона на 16 дијелова, која је пак произашла из подјеле на четири дијела, означена римским бројевима.

На основу срачунатих одступања вертикала, методом астро-геодетског нивелмана одређене су и аномалије висине у непознатим тачкама. Ова метода такође у основи има једначину (3.30), која повезује одступања вертикала и промјене аномалија. Поново је примјењена МНК оцјена параметара са матрицом дизајна и вектором непознатих параметара облика:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\xi_i + \xi_j}{2} \cos \alpha_{ij} + \frac{\eta_i + \eta_j}{2} \sin \alpha_{ij}\right) \cdot S_{ij} \\ \dots \\ -\left(\frac{\xi_i + \xi_k}{2} \cos \alpha_{ik} + \frac{\eta_i + \eta_k}{2} \sin \alpha_{ik}\right) \cdot S_{ik} - \zeta_k \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Прва једначина повезује тачке  $i$  и  $j$  које имају непознате аномалије висине, док посљедња повезује тачку  $k$  са познатом аномалијом и непознату  $i$ . Број колона матрице



дизајна једнак је броју непознатих тачака, а број врста рачуна се као и у изравнању астро-тензорске мреже. Тежине у стохастичком моделу рачунате су као реципрочне вриједности квадрата растојања, а вектор непознатих параметара садржи редом аномалије висине непознатих тачака:

$$x = [\zeta_i \quad \dots \quad \zeta_j]^T. \tag{6.22}$$

#### 6.2.4. Статистичка анализа

Полигон Бор је дијељен по различитим шемама, и креиране су астро-тензорске мреже, унутар којих су оцјењивана одступања вертикала. Основне карактеристике подјела и из њих насталих мрежа дате су у табели 6.12. Значење појединих колона је сљедеће: Подјела – начин подјеле полигона (1/16 је полигон подијељен на 16 засебних мрежа, 1/8 је 8 засебних мрежа, 1/1 је цијели полигон као једна мрежа која се тако и изравнава, 16/1 је цијели полигон као једна мрежа која се изравнава сукцесивно из 16 дијелова); Димензије – просјечне димензије сегмената који чине мрежу (за подјелу 1/1 једнако димензијама полигона); Број тачака – број тачака мреже у сваком сегменту, просјечан или тачан;  $\bar{S}_p$  – просјечно растојање између познатих и непознатих тачака у мрежи;  $\bar{S}$  – просјечно растојање између свих тачака у мрежи;  $\bar{\xi}_{amp}$  – просјечна амплитуда  $\xi$  компоненте одступања у мрежама дате подјеле;  $\max \xi_{amp}$  – максимална амплитуда  $\xi$  компоненте одступања у мрежама дате подјеле;  $\bar{\eta}_{amp}$  – просјечна амплитуда  $\eta$  компоненте одступања у мрежама дате подјеле;  $\max \eta_{amp}$  – максимална амплитуда  $\eta$  компоненте одступања у мрежама дате подјеле;  $\bar{\zeta}_{amp}$  – просјечна амплитуда аномалије висине у мрежама дате подјеле;  $\max \zeta_{amp}$  – максимална амплитуда аномалије висине у мрежама дате подјеле.

Табела 6.12. Карактеристике астро-тензорских мрежа у полигону Бор

Подјела	Димензије [km x km]	Број тачака	$\bar{S}_p$ [km]	$\bar{S}$ [km]	$\bar{\xi}_{amp}$ ["]	$\max \xi_{amp}$ ["]	$\bar{\eta}_{amp}$ ["]	$\max \eta_{amp}$ ["]	$\bar{\zeta}_{amp}$ [cm]	$\max \zeta_{amp}$ [cm]
1/16	0.73 x 0.49	48.7	0.32	0.38	0.11	0.19	0.13	0.20	3.4	3.9
1/8	1.24 x 0.82	99.1	0.49	0.53	0.25	0.34	0.24	0.29	5.3	5.8
1/4	1.65 x 1.24	196.3	0.69	0.75	0.62	0.77	0.33	0.41	7.4	7.7
1/2	2.50 x 1.63	304	0.95	1.07	0.86	0.88	0.51	0.59	11.1	11.3
1/1	3.27 x 2.52	304	1.28	1.51	/	1.57	/	0.69	/	15.1
16/1	0.73 x 0.49	777	1.19	0.39	/	1.57	/	0.69	/	15.1
32/1	0.61 x 0.41	777	1.13	0.28	/	1.57	/	0.69	/	15.1

Вриједности параметара за одступања вертикала у табели 6.12. описују условно тачне вриједности, тј. ситуацију са компонентама оцијењеним из модела квазигеоида. У првој врсти табеле 6.12. налазе се дакле подаци за случај када је полигон подијељен на 16 мањих мрежа, и њихови статистички параметри. Свака од ових мрежа је изравната засебно, користећи по двије познате тачке (у колони Број тачака дат укупан број, познате и непознате), и оцијењене су компоненте одступања вертикала на непознатим тачкама. Све разлике од познатих вриједности одступања (резидуали), из свих 16 мрежа, обрађене су заједно и добијени су статистички показатељи тачности оцјене одступања вертикала у астро-тензорској мрежи карактеристика датих у врсти 1/16. Исти принцип примјењен је и за остале подјеле. Код 1/1 мрежа је једноставно изравната као цјелина, са 302 непознате тачке.

#### 6.2.4.1. Одступања вертикала

Статистика оцијењених компоненти вертикалских отклона дата је у табели 6.13. Приказано је стандардно одступање за обје компоненте, просјечно стандардно одступање по компоненти ( $\sigma(\varepsilon)$ ), као и максималне и минималне вриједности одступања за обје компоненте и њихови распони.

**Табела 6.13.** Тачност оцијењених одступања вертикала у астро-тензорским мрежама

Подјела	$\sigma(\xi)$ ["]	$\sigma(\eta)$ ["]	$\sigma(\varepsilon)$ ["]	$\Delta\xi_{max}$ ["]	$\Delta\xi_{min}$ ["]	$\Delta\xi_{amp}$ ["]	$\Delta\eta_{max}$ ["]	$\Delta\eta_{min}$ ["]	$\Delta\eta_{amp}$ ["]
1/16	0.20	0.36	0.29	0.70	-1.12	1.83	1.19	-1.81	3.00
1/8	0.25	0.33	0.30	0.77	-1.07	1.84	1.33	-1.46	2.79
1/4	0.26	0.39	0.33	1.33	-0.59	1.92	1.05	-1.13	2.18
1/2	0.34	0.49	0.42	1.57	-0.69	2.27	1.74	-1.25	2.99
1/1	0.72	0.38	0.57	2.45	-1.53	3.98	1.34	-1.17	2.52
16/1	1.36	0.82	1.12	3.61	-1.15	4.76	1.68	-3.03	4.70
32/1	1.03	0.80	0.92	0.78	-2.65	3.42	3.04	-1.07	4.10

Анализом резултата у табели, закључује се да се у најмањим мрежама (подјеле 1/16 и 1/8) добија висока тачност компоненти, али да је стандардно одступање веће или на нивоу њихове амплитуде, као што се да видјети поређењем са вриједностима у табели 6.12. Разлог овоме је првенствено врло мало подручје и томе следствена мала промјена компоненти. У већим мрежама, ситуација је повољнија, тачност је и даље боља од тачности компоненти из модела квазигеоида, а притом стандардно одступање не превазилази амплитуде. Разлог за ово је већи број тачака у мрежи и самим тим већи број једначина у изравнању. У мрежи која је изравната као цјелина (1/1) остварена је

тачност на нивоу тачности познатих компоненти, па чак и нешто боља. У цијелој мрежи срачунатој сукцесивно (16/1 и 32/1), резултати су тек нешто слабији, али ипак бољи у подјели мреже на више дијелова (32/1). И овдје је остварена тачност практично на нивоу тачности познатих компоненти. Ово показује да је у случају сукцесивног рачунања мрежу боље подијелити на више дијелова, а потврђује и оправданост одлуке да се у сваком сљедећем сегменту као познате узимају двије најближе тачке из сусједног претходно изравнатог сегмента, умјесто коришћења истих датумских тачака за све сегменте. Разлог за овакав резултат највјероватније лежи у растојањима између познатих и непознатих тачака, и уопште између тачака мреже. Наиме, читав концепт рачунања астро-тензорске мреже заснован је на апроксимацији, тј. на претпоставци линеарне промјене градијената у једначини (6.16). Ова претпоставка је оправдана на малим растојањима, али са њиховим повећањем неминовно расту и одступања. Колика треба да буду растојања у мрежи, зависи добрим дијелом од топографије, као и од распореда исподповршинских густина масе. У повољним условима, који подразумевају равничарски терен без изражене топографије и без великих варијација густине, растојања између станица могу се кретати од 500 m па све до 4 km (Völgyesi, 2015). Но, чак и у том случају, додавање нових станица и смањивање растојања на ниво 150 m – 300 m, побољшава линеарност и квалитет коначних резултата. У брдовитим подручјима може бити потребно да растојања буду још и мања.

Вриједи напоменути да је тачност добијена у изравнању мреже као цјелине (1/1) и из више дијелова (32/1) практично на нивоу тачности која се добија коришћењем градијената мјерених торзионом вагом и примјеном методе интерполације, а која износи око 0.6"–0.7" (Völgyesi, 2005). Подручје на коме је сроведено рачунање у овом истраживању вишеструко је веће од полигона у Бору, али је исто тако и однос броја познатих и непознатих тачака био вишеструко повољнији, тако да се може сматрати да се та два ефекта компензују. Може се дакле констатовати да се примјеном моделованих градијената у астро-тензорским мрежама постиже иста тачност оцјењивања одступања вертикала, као и примјеном мјерених градијената у мрежама интерполације. Додатно побољшање тачности могло би се потенцијално постићи коришћењем колокације за оцјену компоненти одступања (Tóth & Völgyesi, 2002).

У Прилогу 20 дате су расподјеле резидуала компоненти одступања вертикала са густином нормалне расподјеле, за све астро-тензорске мреже, тј. све подјеле полигона. Такође, дати су и графици резидуала (апсолутне вриједности) са границама тачности  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  и  $3\sigma$ . Тачност је дефинисана вриједностима стандардних одступања компоненти оцијењених у тестирању мреже Лапласових тачака у Србији, 0.83" за  $\xi$  и 0.72" за  $\eta$ . Расподјела резидуала унутар граница тачности дата је и нумерички у табелама 6.14 и 6.15. У табели 6.14 дати су подаци за јединствено изравнате мреже (подјеле 1/n и цијела мрежа 1/1), а у 6.15 за мреже добијене сукцесивним изравнањем дијелова (16/1 и 32/1). Из табела се види да су резидуали код јединствено изравнатих мрежа највећим дијелом унутар  $1\sigma$  границе, преко 90%. Код већих мрежа тај удио опада на око 80%, због мањег броја тачака и једначина у изравнању. Одступања већих од  $2\sigma$  има јако мало, док их преко  $3\sigma$  нема уопште. Код мрежа добијених сукцесивним изравнањем ситуација је другачија, и ту је приближно 60% одступања унутар  $1\sigma$ , док их је укупно отприлике 85% испод  $2\sigma$ . Резидуала већих од  $3\sigma$  има неколико процената, при чему су израженији у мрежи са подјелом 1/16, вјероватно

због већих растојања између тачака. Уопште узевши, овакав распоред резидуала наликује оном код вертикалног градијента у директној провјери модела, док је значајно бољи у односу на торзиона мјерења.

**Табела 6.14.** Удио одступања моделованих компоненти одступања вертикала унутар граница тачности – јединствено изравнање

Статус	Удио одступања [%] (подјела/компонента)									
	1/16		1/8		1/4		1/2		1/1	
	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$
$\Delta\varepsilon < 1\sigma$	99.7	94.1	99.1	96.1	99.2	93.9	97.2	81.5	79.5	94.0
$1\sigma < \Delta\varepsilon < 2\sigma$	0.3	5.6	0.9	3.8	0.8	6.1	2.8	18.2	18.5	6.0
$2\sigma < \Delta\varepsilon < 3\sigma$	0.0	0.3	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.3	2.0	0.0
$3\sigma < \Delta\varepsilon$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

**Табела 6.15.** Удио одступања моделованих компоненти одступања вертикала унутар граница тачности – сукцесивно изравнање

Статус	Удио одступања [%] (подјела/компонента)			
	16/1		32/1	
	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$
$\Delta\varepsilon < 1\sigma$	61.0	63.4	55.5	67.2
$1\sigma < \Delta\varepsilon < 2\sigma$	15.2	30.6	31.2	23.5
$2\sigma < \Delta\varepsilon < 3\sigma$	12.0	4.9	12.9	8.3
$3\sigma < \Delta\varepsilon$	11.7	1.2	0.4	1.0

Кад се анализирају графици расподјела резидуала у Прилогу 20, види се да код јединствено изравнатих мрежа расподјеле генерално доста добро прате нормалну расподјелу. Поготово је то случај код мањих мрежа (1/16, 1/8, 1/4) због малих растојања и боље апроксимације линеарне промјене градијената. Код сукцесивно изравнатих мрежа то није случај, пошто расподјеле не одговарају нормалној, а и математичко очекивање је значајно помјерено у односу на нулу. Ваља имати на уму да геометријски распоред тачака у овим мрежама има улогу у њиховом квалитету, као што се види и из структуре матрице коефицијената у (6.18). Геометрија утиче на тачност мрежа, односно на величину и расподјелу резидуала. Код ових мрежа геометријски положај познатих тачака у односу на непознате није добар, пошто се познате тачке налазе на рубовима сегмената, преузете из сусједног, већ изравнатог сегмента. Овим приступом се смањује ефекат нелинеарне промјене градијената кроз

мања растојања, али ефекат геометрије је очигледно негативан. Ефекат геометрије видљив је и у јединственим мрежама, на њиховим графицима одступања са границама тачности, али на други начин. Најбољи примјер је график одступања  $\eta$  компоненте за подјелу  $1/2$ , гдје се јасно виде разлике у одступањима двију мрежа, једне коју чини 18 врста полигона (лијева страна графика), и друге коју чини 15 врста. Видљиво је и да све врсте унутар сегмента имају сличне сопствене резидуале, при чему су одступања у једном сегменту упечатљиво већа од оних у другом. Иако су познате тачке у сваком сегменту биране тако да буду приближно у геометријском средишту и равномерно распоређене, очигледно је да у појави резидуала постоје правилности које зависе од геометријског положаја тачака у мрежама и у њиховим врстама.

#### 6.2.4.2. Аномалије висина

На основу оцијењених одступања вертикала, према моделу (6.21) и (6.22), срачунате су вриједности аномалија висина у непознатим тачкама. У мрежама су коришћене исте двије познате тачке као и код оцјене компоненти одступања вертикала. Статистика остварених резултата за аномалије приказана је у табели 6.16. Дата је тачност аномалија срачунатих из оцијењених одступања вертикала ( $\sigma(\zeta)$ ), као и тачност аномалија добијених из познатих компоненти одступања ( $\sigma(\zeta_p)$ ), те вриједности максималних и минималних одступања у оба случаја и њихових амплитуда.

**Табела 6.16.** Тачност оцијењених аномалија висина у астро-тензорским мрежама

Подјела	$\sigma(\zeta)$ [cm]	$\sigma(\zeta_p)$ [cm]	$\Delta\zeta_{max}$ [cm]	$\Delta\zeta_{min}$ [cm]	$\Delta\zeta_{amp}$ [cm]	$\Delta(\zeta_p)_{max}$ [cm]	$\Delta(\zeta_p)_{min}$ [cm]	$\Delta(\zeta_p)_{amp}$ [cm]
1/16	1.7	1.7	4.3	-4.0	8.3	4.2	-4.1	8.3
1/8	2.5	2.5	5.6	-5.9	11.5	5.6	-5.8	11.5
1/4	3.3	3.3	7.7	-8.2	15.9	7.6	-8.1	15.7
1/2	5.2	5.2	11.3	-13.2	24.5	10.9	-13.2	24.1
1/1	6.2	6.2	14.9	-15.4	30.2	15.0	-15.2	30.2
16/1	6.8	7.0	11.7	-17.6	29.2	11.5	-18.7	30.2
32/1	6.8	6.5	13.8	-18.5	32.3	13.0	-17.3	30.3

У претходним истраживањима, утврђено је да је тачност аномалија/ундулација срачунатих из мјерених градијената, те интерполације и одступања вертикала, на нивоу 1 cm – 3 cm (Völgyesi, 2005). Из табеле 6.16 јасно је да је тачност добијена у астро-тензорским мрежама на овом нивоу само код малих мрежа (1/16, 1/8 и 1/4). За цијели полигон или подијелен на два дијела, добија се тачност аномалија висине која не

може да задовољи савремене геодетске потребе, поготово кад се узму у обзир максимална одступања. Стога су аномалије срачунате и са познатим вриједностима одступања вертикала, и добијена је практично иста тачност у свим мрежама. То показује да постоји проблем у реконструкцији аномалија висине из одступања вертикала по моделу (6.21), за који није јасно одакле потиче. Потенцијални узрок могао би бити геометријски распоред тачака, што је свакако тема за додатна истраживања. И овдје би евентуално могло бити од користи коришћење колокације за оцјену непознатих параметара (Tóth & Völgyesi, 2002). У контексту посредне провјере модела градијената, очигледно је потребно сконцентрисати се на остварену тачност одређивања одступања вертикала, и из тих података доћи до тачности моделованог тензора.

#### 6.2.4.3. Тачност градијената

На једначину (6.16) може се примјенити закон преноса грешака, те је на основу оцијењене тачности одступања вертикала у мрежама (табела 6.13) могуће одредити тачност градијената који фигуришу у једначини. Средње вриједности растојања између познатих и непознатих тачака дате су у табели 6.12, а убрзања теже у тачкама су позната пошто је у питању гравиметријски полигон. Може се показати да, с обзиром на (6.16), грешке непознавања тачног убрзања у тачкама не утичу значајно на овај прорачун тачности, али свеједно су коришћене измјерене вриједности убрзања.

Ако се једна тачка сматра познатом, што и јесте основни концепт, лијева страна израза (6.16) има тачност зависну од грешака компоненти одступања на непознатој тачки:

$$\sigma_L^2 = \sin^2 \alpha \cdot \sigma_\xi^2 + \cos^2 \alpha \cdot \sigma_\eta^2. \quad (6.23)$$

Кад се у обзир узме десна страна једначине, за исту тачност изражену у функцији тачности градијената се добија:

$$\begin{aligned} \sigma_L^2 = & \left( \frac{S}{4g} \sin 2\alpha \right)^2 \sigma_{W_{\Delta 1}}^2 + \left( \frac{S}{4g} \sin 2\alpha \right)^2 \sigma_{W_{\Delta 2}}^2 \\ & + \left( \frac{S}{4g} \cos 2\alpha \right)^2 \sigma_{W_{XY1}}^2 + \left( \frac{S}{4g} \cos 2\alpha \right)^2 \sigma_{W_{XY2}}^2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Сређивањем потоњег израза, и претпостављајући једнаку тачност за исте градијенте, добија се:

$$\sigma_L^2 = 2 \left( \frac{S}{4g} \sin 2\alpha \right)^2 \sigma_{W_\Delta}^2 + 2 \left( \frac{S}{4g} \cos 2\alpha \right)^2 \sigma_{W_{XY}}^2, \quad (6.25)$$

односно:

$$\frac{\sigma_L^2}{2} = \left( \frac{S}{4g} \sin 2\alpha \right)^2 \sigma_{W_\Delta}^2 + \left( \frac{S}{4g} \cos 2\alpha \right)^2 \sigma_{W_{XY}}^2 . \quad (6.26)$$

Ако се усвоји принцип једнаких утицаја:

$$\left( \frac{S}{4g} \sin 2\alpha \right)^2 \sigma_{W_\Delta}^2 = \left( \frac{S}{4g} \cos 2\alpha \right)^2 \sigma_{W_{XY}}^2 = \Delta , \quad (6.27)$$

добија се да је:

$$\frac{\sigma_L^2}{2} = 2\Delta \Rightarrow \Delta = \frac{\sigma_L^2}{4} . \quad (6.28)$$

За тачност компоненти се коначно добија:

$$\sigma_{W_\Delta}^2 = \frac{\frac{\sigma_L^2}{4}}{\left( \frac{S}{4g} \sin 2\alpha \right)^2} \quad \sigma_{W_{XY}}^2 = \frac{\frac{\sigma_L^2}{4}}{\left( \frac{S}{4g} \cos 2\alpha \right)^2} \quad \sigma_{W_{XX}} = \sigma_{W_{YY}} = \frac{\sigma_{W_\Delta}}{\sqrt{2}} . \quad (6.29)$$

Због математичке конзистентности, тачност дефинисана посљедњом једначином срачуната је коришћењем параметара за јединствено изравнате мреже, а за вриједност азимута усвојено је  $22.5^\circ$ , како би резултати за  $W_{XX}$  и  $W_{YY}$  били уједначени. Добијена тачност приказана је у табели 6.17.

**Табела 6.17.** Тачност градијената [Е] добијена анализом астро-тензорских мрежа

Подјела	Градијент		
	$W_{XX}$	$W_{YY}$	$W_{XY}$
1/16	102.8	102.8	145.4
1/8	62.1	62.1	87.9
1/4	52.2	52.2	73.9
1/2	47.2	47.2	66.8
1/1	33.2	33.2	46.9

Из добијених резултата се види да стандардна одступања градијената опадају са повећањем растојања између тачака, које значајно утиче на срачунату тачност.

Између различитих подјела, добијене су вриједности стандардних одступања у распону 30 E – 150 E. Ови резултати су свакако у сагласности са вриједностима добијеним у директној провјери модела, за торзиона мјерења и вертикалне градијенте. Ипак, да би се распон добијене тачности сузио, потребно је на неки начин утврдити која мрежа даје резултате поузданије од осталих. С обзиром да покрива највећу површину и има највише тачака, репрезентативним се може сматрати случај када је коришћена мрежа на цијелом полигону (подјела 1/1). У том случају, може се рећи даје утврђена тачност моделованих градијената 30 E – 40 E, што је у потпуној сагласности са вриједностима добијеним из анализе торзионих мјерења. Просјечна тачност градијента по компоненти износи 38.3 E. Овим је, на основу доступних података, потврђено да се изложеним поступком моделовања градијенти (компоненте закривљености и градијената) могу срачунати са тачношћу реда величине неколико [ $\mu\text{Gal/m}$ ].

### 6.2.5. Поређење са геопотенцијалним моделом

Слично као што је урађено за вертикалне градијенте и торзиона мјерења, и за тачке у полигону Бор срачунати су градијенти из геопотенцијалног модела, и упоређени са моделованим градијентима. За разлику од рачунања у директној провјери модела, у полигону Бор није било мјерених градијената, тако да добијена одступања моделованих од ГГМ градијената не дају директну информацију ни о једним ни о другим градијентима, и служе за илустрацију. Статистика резултата дата је у табели 6.18.

Табела 6.18. Одступање ГГМ градијената од моделованих (Бор)

Статистички параметар	Компонента					
	$W_{xx}$	$W_{yy}$	$W_{zz}$	$W_{xy}$	$W_{xz}$	$W_{yz}$
$\Delta_{\max}$ [E]	614.4	649.7	944.2	163.2	223.0	207.9
$\Delta_{\min}$ [E]	-513.7	-549.2	-1 023.4	-272.0	-266.2	-287.4
$\Delta_{\text{amp}}$ [E]	1 128.1	1 198.9	1 967.6	435.2	489.2	495.4
$\bar{\Delta}$ [E]	57.8	-5.1	-52.7	-32.7	-27.8	-7.8
$\sigma(W'_{ii})$ [E]	193.8	182.0	331.7	74.6	70.2	56.2

Параметри тачности показују извјесне варијације у стандардним одступањима по компонентама, као и у математичком очекивању резидуала. Тачност градијената је на нивоу неколико стотина [E], а просјечна тачност по компоненти износи 150 E. Ово је на нивоу одступања мјерених од ГГМ вертикалних градијената, а истовремено је знатно веће одступање у односу на разлику ГГМ и торзионих мјерења. Ако се усвоји да је тачност моделованих градијената на нивоу срачунате, неколико десетина [E], може се закључити да су ГГМ градијенти овдје слабије тачности у односу на оне у



полигону Нови Сад. Узрок би најприје била изражена топографија, тј. присутност краткоталасне компоненте поља у полигону Бор. Не треба искључити ни ефекат апсолутних вриједности величина које се мјере, тј. претходно дискутовани однос сигнал/шум.

## 7. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Градијенти убрзања Земљине теже, као други изводи потенцијала убрзања, представљају параметре поља који су постали предметом значајнијег геодетског интересовања прије отприлике једног вијека, када се створила могућност њиховог прецизног мјерења помоћу торзионих вага. Ипак, сложена процедура мјерења, условила да је да се то интересовање махом прелије у области геологије и геофизике. За разлику од провјере теоријских хипотеза у физичкој геодезији и одређивања додатних параметара поља теже, примјена торзионих мјерења у сврху тражења лежишта фосилних горива била је оправдана у смислу потребног времена и финансија. Развојем савремене гравиметрије половином 20. вијека, градијенти и торзиона мјерења нису више били у фокусу геонаука, будући да су гравиметри омогућили мјерење убрзања теже које је било знатно једноставније у односу на рад са торзионом вагом. Интерес за градијенте као мјерну величину одржао се током Хладног рата у војној индустрији Запада, и у Мађарској, која као земља Источног блока није могла да набавља гравиметре, а притом је имала снажну традицију производње и употребе торзионих вага.

Ствари су се промијениле током 80-их и 90-их година, када је динамичан технолошки напредак довео до развоја ваздухопловне и сателитске градиометрије. Ове технике користе савремене градиометре базиране на акцелерометрима. Заједно са савременим, лако преносивим гравиметрима помоћу којих се једноставно мјере вертикални градијенти, ове дисциплине отовриле су нову еру у проучавању и коришћењу градијената. Поред даљег ширења њихове примјене у геофизици, градијенти се данас редовно користе за моделовање поља теже, не само на локалном, већ и на регионалном и глобалном нивоу. Томе су највише допринијеле намјенске сателитске мисије попут GOCE, које су омогућиле одређивање гравитационог поља са високом резолуцијом и креирање глобалних геопотенцијалних модела високог степена и реда развоја. И терестричка градиометрија је пронашла нове примјене у геодезији. Задаци као што је прецизно одређивање геоида и реализација вертикалних референтних мрежа, наметнули су потребу познавања градијената убрзања са високом тачношћу, прије свега вертикалног. Ипак, чак и са савременим мјерним инструментима, у мрежама са великим бројем тачака, мјерење свих потребних градијената захтијева знатно вријеме и средства. Стога је посљедњих деценија акценат добрим дијелом стављен на моделовање Етвешевог тензора, као компромисно рјешење. Осим тога, градијенти су математички повезани са другим параметрима поља теже, као што су функционали аномалијског потенцијала. У том смислу, моделовани елементи Етвешевог тензора могу послужити и за локално моделовање поља теже, било да се користе независно или у комбинацији са мјерењима. У геофизици је њихов значај такође дошао до изражаја, будући да је за успјешно рјешавање инверзних проблема гравитационог моделовања, прво потребно наћи оптимална рјешења директног проблема. Моделовани градијенти се такође користе и у обради резултата мјерења ваздухопловне градиометрије, како би се уклонио сигнал топографије.

Сви досадашњи правци истраживања у моделовању градијената подразумијевају коришћење, у мањој или већој мјери, резултата гравиметријских и сличних мјерења. Примјери за то су рачунање Етвешевог тензора из резултата гравиметрије примјеном

брзих Фуријеових трансформација, или пак на основу аномалија убрзања, коришћењем Стоксове и Хотинеове једначине. Примјена ДМТ за моделовање топографије такође је до сада подразумијевала комбиновање са гравиметријским мјерењима. Приступ у коме се маса Земље раздваја на три дијела, на масу нормалне Земље, масу између елипсоида и геоида, те масу топографије, анализиран је током протеклих неколико деценија, али поново користећи мјерена убрзања, будући да је утицај међумаса између геоида и елипсоида рачунат на основу аномалија убрзања теже.

У оквиру ове дисертације, истражен је модел Етвешевог тензора заснован на нормалном пољу и дигиталним моделима терена. Масе су такође подијељене на три дијела, према описаном принципу, али без коришћења гравиметријских мјерења. Утицај међумаса, моделован је на исти начин као и утицај топографије, директним моделовањем, тј. њиховом апроксимацијом у виду коначног броја призми, и уз претпоставку константне густине. На овај начин је избјегнуто коришћење података било каквих масовних мјерења, чија доступност неријетко може бити упитна. Умјесто тога, користе се искључиво јавно доступни подаци, дигитални модели терена и глобални геопотенцијални модели. У овом приступу, главни ресурс јесу савремени, квалитетни ДМТ високе резолуције. Њиховом примјеном, у највећој мјери би требало да се ријешу геометријски проблем моделовања, тј. геометријска апроксимација облика топографије, што у моделовању градијената представља централно мјесто, усљед њихове изражене локалне природе.

## 7.1. ОСТВАРЕНИ РЕЗУЛТАТИ

Модел Етвешевог тензора тестиран је на два начина. Директна провјера подразумијевала је поређење са вриједностима мјерених градијената, док је у склопу посредне провјере анализирана тачност функционала поремећајног потенцијала срачунатих из моделованих градијената. На овај начин је не само надокнађен мањак мјерења која би послужила за директну провјеру, већ је и анализирана једна од могућности примјене моделованих градијената у одређивању других параметара поља. У склопу посредне провјере, креиране су астро-тензорске мреже и дефинисан модел оцјене непознатих параметара у овим мрежама, што до сада није рађено, барем на основу доступне литературе.

Директна провјера модела такође је раздвојена на два дијела. Већи дио елемената тензора анализиран је поређењем са резултатима мјерења торзионом вагом, док су вертикални градијенти анализирани засебно. Торзиона мјерења вршена су на полигону код Новог Сада 1918. године, на 102 тачке. Полигон је приближних димензија 26 km x 26 km, у равничарском подручју. Ваља нагласити да је положај тачака полигона познат тек са тачношћу од неколико десетина метара. Статистичком анализом резултата утврђена је тачност појединих градијената у распону од 9 Е до 21 Е, односно средња тачност градијента од 17 Е. Ово стандардно одступање сугерише јако добру тачност моделованих градијената, будући да је она само за ред величине мања од тачности мјерења, која износи 2 – 5 Е. Ипак, однос сигнала и шума у овим вриједностима је неповољан и мањи од један, што је првенствено посљедица малих апсолутних вриједности компоненти које се мјере торзионом вагом. У односу на границе тачности дефинисане тачношћу мјерења, 34% резултата је унутар тачности  $1\sigma$ , док је око 60% унутар граница  $2\sigma$ . Одступање веће од  $3\sigma$  има 23% резултата. За

двје од четири моделоване компоненте опажа се помјерање математичког очекивања резидуала у односу на нулу, што би могло сугерисати присуство некаквог систематског утицаја, али није утврђено шта би могло бити узрок томе. Сасвим је могуће да су и ова помјерања заправо случајног карактера, када се посматрају одступања свих резултата у цјелини, те да и овдје слаб однос сигнал/шум и мала апсолутна вриједност моделованих величина ствара погрешан утисак помјерености резидуала. Ипак, потенцијални утицај масе Фрушке горе је анализиран на начин да је срачуната корелација укупних одступања на тачкама и њихове удаљености од планине. Утврђена је негативна корелација од око 0.3, што значи да су одступања углавном већа на тачкама ближим Фрушкој гори. Након тога, срачунат је утицај на тачке произвољно изабране резидуалне густине Фрушке горе у односу на моделовану и њена веза са растојањима, и добијена је практично иста корелација. Ово може бити показатељ потенцијалног утицаја разлике густина, али сама удаљеност планине и брзина опадања градијената сугеришу да такав ефекат не би требало да има утицаја. С друге стране, постоји теоретска могућност да одступања не изазива сама маса Фрушке горе, већ масе на локацијама тачака чија густина зависи од удаљености од планине, што би био вид својеврсне изостатичке компензације на локалном нивоу. Ипак, ово су промишљања у домену теоријских могућности, и свакако заслужују додатна истраживања која превазилазе оквире ове дисертације. Додатно је направљено и поређење градијената срачунатих из ГГМ са резултатима торзионих мјерења, и утврђена је сагласност на истом нивоу као у случају моделованих вриједности. Ово показује да се у чисто равничарским подручјима, гдје нема израженог утицаја топографије и гдје доминира дуготаласни сигнал поља теже, градијенти могу са врло добром тачношћу срачунати и из ГГМ, што је логично са становишта усвојеног концепта моделовања. Истовремено су овакви резултати изискивали и додатну провјеру модела у подручју са израженијом топографијом.

Моделовани вертикални градијенти упоређени су са резултатима мјерења на 76 тачака, распоређених широм Србије. Мјерења су вршена реалативним гравиметром, са очекиваном тачношћу од 170 Е. За моделоване вриједности утврђено је стандардно одступање од 230 Е, што је за ред величине веће од одступања компоненти поређених са торзионим мјерењима. Разлог ове неусаглашености свакако је раније поменута особина величина које се мјере торзионом вагом, да имају мале апсолутне вриједности и слаб омјер сигнал/шум. То потврђује и чињеница да је овај однос код вертикалних градијената знатно бољи (преко 12), као и да су резидуали знатно боље распоређени унутар граница тачности мјерења. Њих скоро 60% је мање од  $1\sigma$ , а 87% је унутар  $2\sigma$ . Троструку вриједност стандарда мјерења прекорачује само 4% резултата. Као и код торзионих мјерења, и за вертикалне градијенте је урађена анализа вриједности добијених из ГГМ. Установљено је да на подручју Србије они имају мању тачност од моделованих, уз стандардно одступање од 460 Е. Ипак, поново је утврђена њихова зависност од топографије, тј. бољи резултати на равничарском терену Војводине. Анализом само тачака сјеверно од Саве и Дунава (21 тачка), добијена је сагласност ГГМ градијената са мјереним од око 100 Е. За исте тачке анализирана је и тачност моделованих вриједности и утврђено стандардно одступање од 160 Е. Овим је потврђено да су ГГМ градијенти добар избор за рачунање у изражено равничарском подручју, док је код моделованих вриједности додатно наглашено питање потенцијалних систематских грешака у моделовању густина, будући да су бољи резултати добијени у равничарском него у подручјима изражене топографије.

Како је директна провјера на основу торзионих мјерења вршена на ограниченом подручју и у равничарском терену, и с обзиром на непостојање других мјерења ове врсте у Србији, извршена је додатна, посредна провјера модела. У ту сврху изабрано је подручје израженије топографије и у њему на основу моделованих градијената срачунати функционали аномалијског потенцијала чије су вриједности биле познате. Конкретно, рачунање је извршено у гравиметријском полигону у Бору, гдје су из градијената срачунате компоненте одступања вертикала. Претходно су ове компоненте срачунате у свим тачкама полигона из модела квазигеоида Србије. Тестирање модела оцјене компоненти из аномалија висина, спроведено на 46 тачака у Србији, показало је високу тачност оцијењених одступања од 0.7"–0.8" по компоненти, што је блиско тачности астро-геодетских мјерења. У поступку рачунања одступања вертикала из градијената, формиране су у полигону астро-тензорске мреже различитог обима и броја тачака. Ово су мреже у којима функције везе чине једначине које повезују компоненте одступања вертикала и елементе Етвешевог тензора, а у којима још фигуришу азимути и растојања између тачака. Примјењен је модел посредног изравнања и добијене компоненте одступања вертикала које су упоређене са познатим вриједностима. Утврђена је њихова јако добра сагласност, која је у случају јединствено изравнате мреже са мањим бројем тачака (због ограничених рачунарских капацитета) на нивоу тачности познатих компоненти, око 0.6"–0.7". За мрежу са свим тачкама полигона, подијељену на више дијелова који су сукцесивно изравнати, добијена је тек нешто мања тачност од 0.8"–1.0". Код јединствено изравнатих мрежа 80% - 95% резидуала је мање од граничне тачности  $1\sigma$ , зависно од величине мреже. Унутар  $2\sigma$  су скоро сви резултати. Код мрежа подијељених на дијелове услов од  $1\sigma$  задовољава око 60% вриједности, а мање од  $2\sigma$  је око 85%. Ови резултати би потенцијално могли бити и бољи ако би се спровела анализа и оптимално планирање дизајна астро-тензорске мреже, пошто је утврђено да геометрија мреже игра значајну улогу у тачности оцијењених параметара. Важно је напоменути да је тачност добијена из овако конципираног рачунања једнака тачности добијеној у претходним истраживањима која су користила мјерене градијенте и интерполацију као метод рачунања. Из оцијењених компоненти одступања вертикала срачунате су и аномалије висина у тачкама полигона. Добијена тачност није била високог нивоа, и износила је 6 cm – 7 cm за мреже које су покривале цијели полигон, било са свим тачкама или само са једним дијелом. Затим су провјерене аномалије које се добијају из познатих компоненти и утврђена је иста тачност, што указује на проблем у реконструкцији аномалија из одступања вертикала, независно које компоненте се користе.

С обзиром на добијене резултате за аномалије висина, тачност моделованих градијената је посредно оцијењена из тачности одступања вертикала, примјеном закона преноса грешака. Утврђена је тачност од неколико десетина Етвеша, за цијелу мрежу 30 E – 40 E. Тиме је на основу доступних података потврђено да се предложеним моделом градијенти могу срачунати са тачношћу од неколико десетина Етвеша за компоненте градијената и закривљености, односно неколико стотина Етвеша за вертикалне градијенте. Ово је тачност на нивоу тачности мјерења за вертикалне градијенте и за ред величине мања од тачности мјерења торзионим вагом. Притом треба имати у виду однос сигнал/шум који код моделовања торзионих мјерења није повољан, што се свакако мора узети у обзир приликом тумачења резултата и остварене тачности.

## 7.2. ПРОВЈЕРА ТАЧНОСТИ ХИПОТЕЗА

На почетку истраживања постављене су три хипотезе:

- 1) да је примјеном савремених дигиталних модела терена високе резолуције могуће моделовати градијенте убрзања теже са тачношћу блиском тачности мјерења;
- 2) да је ефекат резидуалних густина Земљине коре у највећој мјери редукован у краткоталасним функционалима потенцијала као што су градијенти убрзања, те да је грешка њиховог моделовања изазвана овим утицајем занемарљива;
- 3) да у локалном моделовању гравитационог поља преовлађујући утицај имају топографски ефекти, тј. дигитални модели терена као извор података.

Прва хипотеза је потврђена као тачна, с обзиром да је стандардно одступање моделованих вертикалних градијената на нивоу тачности мјерења, док је код осталих градијената мјерених торзионим вагом тачност за ред величине мања. Притом ваља имати на уму јако велику осјетљивост и прецизност торзионих вага, али и апсолутне вриједности величина које се њоме мјере. Ако се ова тачност моделовања упореди са другим, мање прецизним методама мјерења као што је ваздухопловна градиометрија, може се видјети да је у питању исти ниво тачности.

С обзиром на остварену тачност, друга хипотеза је такође потврђена. Овдје ипак треба скренути пажњу на неколико нумеричких показатеља који сугеришу зависност резидуала од топографије, као што је удаљеност од планинских масива попут Фрушке горе, и самим тим на потенцијални систематски утицај грешака густине. Ова зависност, ако постоји, није пресудан фактор у смислу квалитета моделовања, будући да је основна претпоставка о тачности потврђена, већ је показатељ потенцијалних могућности за даље унапређење модела.

И за трећу хипотезу се може рећи да је потврђена, с обзиром на то да резултати тестирања показују да модел у брдским подручјима даје боље резултате од глобалних геопотенцијалних модела. Према томе, утицај топографије се у највећој мјери може обухватити коришћењем ДМТ, и на тај начин је могуће срачунати локалне параметре поља. Ваља напоменути да су у равничарским подручјима одступања модела и ГГМ градијената од резултата мјерења на истом нивоу, усљед одсуства израженог сигнала топографије.

## 7.3. ПРЕПОРУКЕ ЗА БУДУЋА ИСТРАЖИВАЊА

Резултати приказани у овој дисертацији свакако потврђују да је моделовање градијената убрзања теже примјеном описаног концепта изазовна, те потенцијално плодна и пажње вриједна област истраживања. Даљи радови требало би да се фокусирају на даље унапређење модела, нова подручја његове примјене и интеграцију са другим скуповима података. Тренутни модел би било пожељно испитати поређењем са торзионим мјерењима која су спроведена у брдовитијим подручјима. То би дало могућност поузданије директне провјере остварене тачности и квалитета моделовања топографских маса.

У смислу побољшања постојећег модела, свакако је потребно тестирати резултате са бољим ДМТ, како у погледу резолуције, тако и у погледу тачности висина. Треба размотрити и моделе који умјесто константне густине претпостављају њене

варијације. У ту сврху могу послужити различити изостатички и геолошки модели густина. Модел би се потенцијално могао побољшати и укључивањем у рачунање трећих извода потенцијала, што би била његова значајна надградња али и корак ка моделовању још финије структуре локалног поља теже.

Практична примјена моделованих градијената може даље да се истражује у оквиру астро-тензорских мрежа. Правци истраживања су бројни, попут повећања обима мрежа, детаљније анализе њихове геометрије или побољшања рачунања аномалија висине и ундулација геоида из оцијењених одступања вертикала. Елементи Етвешевог тензора се могу испитати и у условима предикције убрзања теже, тј. у гравиметријским мрежама. Овдје би вјероватно у рачунање било потребно укључити и методе спектралне анализе. Друга рачунска техника коју свакако треба размотрити јесте колокација. У том случају би се могло радити на креирању јединствених мрежа које би објединиле различите врсте података, како мјерених тако и моделованих.

Интеграција моделованих градијената са другим подацима прије свега треба да обухвати комбиновање са различитим врстама мјерења, као што су торзиона мјерења. Астро-тензорске мреже у којима су на одређеном броју тачака извршена торзиона мјерења, пружиле би могућност боље контроле резултата, примјене метода интерполације и анализе различитих варијанти рачунања непознатих параметара. Додатни извор података могу бити геопотенцијални модели, који су се показали врло поузданим у равничарским подручјима. Подаци из ГГМ потенцијално се могу укључити и у комбиноване астро-тензорске мреже, али и у мреже за предикцију убрзања, како би се добили почетни приближни подаци о геометрији и особинама поља теже на датом терену.

## ЛИТЕРАТУРА

- Agnew, D. C. (2015). Earth Tides. In G. Schubert (Ed.), *Treatise on Geophysics: Second Edition* (Second Edi, Vol. 3, pp. 151–178). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00058-0>
- Agren, J., Đalović, S., & Škrnjug, J. (2012). *Plan for the future determination of a national geoid model for Serbia*.
- Anton, H., Bivens, I. C., & Davis, S. (2016). *Calculus: Early Transcendental, 11th Edition*. John Wiley & Sons, inc. <https://www.wiley.com/en-us/Calculus%3A+Early+Transcendental+Single+Variable%2C+11th+Edition-p-00056014>
- Asgharzadeh, M. F., Von Frese, R. R. B., Kim, H. R., Leftwich, T. E., & Kim, J. W. (2007). Spherical prism gravity effects by Gauss-Legendre quadrature integration. *Geophysical Journal International*, 169(1), 1–11.
- Badekas, J., & Mueller, I. I. (1968). Interpolation of the vertical deflection from horizontal gravity gradients. *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, 73(22), 6869–6878. <https://doi.org/https://doi.org/10.1029/JB073i022p06869>
- Banerjee, B., & Das Gupta, S. P. (1977). Gravitational Attraction of a Rectangular Parallelepiped. *Geophysics*, 42(5), 1053–1055. <https://doi.org/10.1190/1.1440766>
- Beiki, M. (2010). Analytic signals of gravity gradient tensor and their application to estimate source location. *Geophysics*, 75(6), 159–174. <https://doi.org/10.1190/1.3493639>
- Benedek, J., Papp, G., & Kalmár, J. (2018). Generalization techniques to reduce the number of volume elements for terrain effect calculations in fully analytical gravitational modelling. *Journal of Geodesy*, 92(4), 361–381. <https://doi.org/10.1007/s00190-017-1067-1>
- Bezvesilna, O., Chepyuk, L., Tkachuk, A., Nechai, S., & Khylychenko, T. (2017). Analysis of modern gravimeters of the aviation gravimetric system. *Technology Audit and Production Reserves*, 3(1 (35)), 53–59.
- Bocchio, F. (1974). From Differential Geodesy to Differential Geophysics. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 39(1), 1–10. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1974.tb05435.x>
- Borisenko, A. I., Tarapov, I. E., & Silverman, R. A. (1979). *Vector and Tensor Analysis with Applications*. Dover Publicationc, Inc. New York. <https://doi.org/10.1063/1.3035427>
- Bouman, J. (2012). Relation between geoidal undulation, deflection of the vertical and vertical gravity gradient revisited. *Journal of Geodesy*, 86(4), 287–304. <https://doi.org/10.1007/s00190-011-0520-9>
- Bouman, J., Ebbing, J., Fuchs, M., Sebera, J., Lieb, V., Szwillus, W., Haagmans, R., & Novak, P. (2016). Satellite gravity gradient grids for geophysics. *Scientific Reports*, 6(1), 1–11. <https://doi.org/10.1038/srep21050>
- Bouman, J., Ebbing, J., Meekes, S., Fattah, R. A., Fuchs, M., Gradmann, S., Haagmans, R., Lieb, V., Schmidt, M., Dettmering, D., & Bosch, W. (2015). GOCE gravity gradient data for lithospheric modeling. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 35(PA), 16–30. <https://doi.org/10.1016/j.jag.2013.11.001>



- Briggs, W., Cochran, L., Gillett, B., & Schulz, E. (2019). *Calculus: Early Transcendentals*, 3rd Ed. Pearson.
- Bruinsma, S. L., Förste, C., Abrikosov, O., Lemoine, J. M., Marty, J. C., Mulet, S., Rio, M. H., & Bonvalot, S. (2014). ESA's satellite-only gravity field model via the direct approach based on all GOCE data. *Geophysical Research Letters*, 41(21), 7508–7514. <https://doi.org/10.1002/2014GL062045>
- Carbone, D., Antoni-Micollier, L., Hammond, G., de Zeeuw - van Dalssen, E., Rivalta, E., Bonadonna, C., Messina, A., Lautier-Gaud, J., Toland, K., Koymans, M., Anastasiou, K., Bramsiepe, S., Cannavò, F., Contrafatto, D., Frischknecht, C., Greco, F., Marocco, G., Middlemiss, R., Ménoret, V., ... Vermeulen, P. (2020). The NEWTON-g Gravity Imager: Toward New Paradigms for Terrain Gravimetry. *Frontiers in Earth Science*, 8, 573396. <https://doi.org/10.3389/feart.2020.573396>
- Casotto, S., & Fantino, E. (2009). Gravitational gradients by tensor analysis with application to spherical coordinates. *Journal of Geodesy*, 83(7), 621–634. <https://doi.org/10.1007/s00190-008-0276-z>
- Cevallos, C. (2015). How do submarines use gravity gradients to avoid collisions with underwater mountains? *Leading Edge*, 34(12), 1498–1501. <https://doi.org/10.1190/tle34121498.1>
- Cevallos, C. (2017). Mathematical properties and physical meaning of the gravity gradient tensor eigenvalues. *Geophysics*, 82(6), G115–G124. <https://doi.org/10.1190/GEO2016-0418.1>
- Cevallos, C., Dransfield, M., Hope, J., & Carey, H. (2012). Application of curvatures to airborne gravity gradients. *ASEG Extended Abstracts*, 2012(1), 1–6.
- Ceylan, A. (2009). Determination of the deflection of vertical components via GPS and leveling measurement: A case study of a GPS test network in Konya, Turkey. *Scientific Research and Essays*, 4(12), 1438–1444.
- Chapin, D. (1998). Gravity instruments: Past, present, future. *The Leading Edge*, 17(1), 100.
- Claessens, S. (2021). Second- and Third-Order Derivatives of the Somigliana-Pizzetti Reference Gravity Field. *International Association of Geodesy Symposia*, 151, 19–23. [https://doi.org/10.1007/1345\\_2019\\_70](https://doi.org/10.1007/1345_2019_70)
- Cordell, L. (1979). Gravimetric Expression of Graben Faulting in Santa Fe Country and the Espanola Basin, New Mexico. *Santa Fe Country*, Ingersoll, R. V.; Woodward, L. A.; James, H. L.; [Eds.], *New Mexico Geological Society 30th Annual Fall Field Conference Guidebook*, 310 P., 59–64.
- Cordell, L., & Grauch, V. I. S. (1982). Mapping basement magnetization zones from aeromagnetic data in the San Juan basin, New Mexico. In *1982 SEG Annual Meeting, SEG 1982* (pp. 246–247). Society of Exploration Geophysicists. <https://doi.org/10.1190/1.0931830346.ch16>
- Crossley, D., Hinderer, J., & Riccardi, U. (2013). The measurement of surface gravity. *Reports on Progress in Physics*, 76(4), 46101. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/76/4/046101>
- Csapó, G., Laky, S., Égeto, C., Ultman, Z., Tóth, G., & Völgyesi, L. (2009). Test measurements by Eötvös Torsion balance and gravimeters. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*,

53(2), 75–80. <https://doi.org/10.3311/pp.ci.2009-2.03>

D'Urso, M. G. (2012). New Expressions of the Gravitational Potential and Its Derivatives for the Prism. *International Association of Geodesy Symposia*, 137, 251–256. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-22078-4\\_38](https://doi.org/10.1007/978-3-642-22078-4_38)

D'Urso, M. G. (2013). On the evaluation of the gravity effects of polyhedral bodies and a consistent treatment of related singularities. *Journal of Geodesy*, 87(3), 239–252. <https://doi.org/10.1007/s00190-012-0592-1>

D'Urso, M. G. (2014a). Analytical computation of gravity effects for polyhedral bodies. *Journal of Geodesy*, 88(1), 13–29. <https://doi.org/10.1007/s00190-013-0664-x>

D'Urso, M. G. (2014b). Gravity effects of polyhedral bodies with linearly varying density. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 120(4), 349–372. <https://doi.org/10.1007/s10569-014-9578-z>

D'Urso, M. G., & Trotta, S. (2015). Comparative assessment of linear and bilinear prism-based strategies for terrain correction computations. *Journal of Geodesy*, 89(3), 199–215. <https://doi.org/10.1007/s00190-014-0770-4>

D'Urso, M. G., & Trotta, S. (2017). Gravity Anomaly of Polyhedral Bodies Having a Polynomial Density Contrast. *Surveys in Geophysics*, 38(4), 781–832. <https://doi.org/10.1007/s10712-017-9411-9>

DiFrancesco, D., Grierson, A., Kaputa, D., & Meyer, T. (2009). Gravity gradiometer systems -advances and challenges. *Geophysical Prospecting*, 57(4), 615–623. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2008.00764.x>

Dobróka, M., & Völgyesi, L. (2008). Inversion reconstruction of gravity potential based on gravity gradients. *Mathematical Geosciences*, 40(3), 299–311. <https://doi.org/10.1007/s11004-007-9139-z>

Dransfield, M. (2007). Airborne gravity gradiometry in the search for mineral deposits. *Proceedings of Exploration 07, Fifth Decennial International Conference on Mineral Exploration, Toronto Canada*, 341–354. <http://dmec.ca/ex07-dvd/E07/pdfs/20.pdf>

Dykowski, P. (2012). Vertical gravity gradient determination for the needs of contemporary absolute gravity measurements - first results. *Reports on Geodesy*, z. 1/92(1), 23–36.

Elawadi, E., Mogren, S., Ibrahim, E., Batayneh, A., & Al-Bassam, A. (2012). Utilizing potential field data to support delineation of groundwater aquifers in the southern Red Sea coast, Saudi Arabia. *Journal of Geophysics and Engineering*, 9(3), 327–335. <https://doi.org/10.1088/1742-2132/9/3/327>

Eshagh, M., & Hussain, M. (2015). Relationship amongst gravity gradients, deflection of vertical, Moho deflection and the stresses derived by mantle convections : a case study over Indo-Pak and surroundings. *Geodynamics Research International Bulletin*, 3(4), I–XIII. <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hv:diva-8954>

Evstifeev, M. I. (2017). The state of the art in the development of onboard gravity gradiometers. *Gyroscopy and Navigation*, 8(1), 68–79. <https://doi.org/10.1134/S2075108717010047>

Farr, T. G., Rosen, P. A., Caro, E., Crippen, R., Duren, R., Hensley, S., Kobrick, M., Paller, M., Rodriguez, E., Roth, L., Seal, D., Shaffer, S., Shimada, J., Umland, J., Werner, M.,

- Oskin, M., Burbank, D., & Alsdorf, D. E. (2007). The shuttle radar topography mission. *Reviews of Geophysics*, 45(2). <https://doi.org/10.1029/2005RG000183>
- Fleisch, D. A. (2011). *A student's guide to vectors and tensors*. Cambridge University Press. <https://doi.org/25>
- Forsberg, R. (1984). *A Study of Terrain Reductions, Density Anomalies and Geophysical Inversion Methods in Gravity Field Modelling*. Department of Geodetic Science and Surveying, OSU, Columbus, Ohio.
- Grafarend, E. W. (1997). Field lines of gravity, their curvature and torsion, the Lagrange and the Hamilton equations of the plumbline. *Annals of Geophysics*, 40(5).
- Green, R. M. (1985). *Spherical astronomy*. Cambridge University Press.
- Grombein, T., Seitz, K., & Heck, B. (2013). Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroid. *Journal of Geodesy*, 87(7), 645–660. <https://doi.org/10.1007/s00190-013-0636-1>
- Gruber, T., Rummel, R., Abrikosov, O., & van Hees, R. (2014). *GOCE High Level Processing Facility*. Citeseer.
- Hamáčková, E., Šprlák, M., Pitoňák, M., & Novák, P. (2016). Non-singular expressions for the spherical harmonic synthesis of gravitational curvatures in a local north-oriented reference frame. *Computers and Geosciences*, 88, 152–162. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2015.12.011>
- Han, J., & Shen, W. (2010). Comparative study on two methods for calculating the gravitational potential of a prism. *Geo-Spatial Information Science*, 13(1), 60–64. <https://doi.org/10.1007/s11806-010-0129-9>
- Hass, J. R., Hell, C., Bogacki, P., Weir, M. D., & Thomas Jr, G. B. (2020). *University Calculus: Early Transcendentals, 4th Ed*. Pearson Higher Ed.
- Hassani, S. (2009). *Mathematical methods: For students of physics and related fields (Vol. 2)*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09504-2>
- Heck, B., & Seitz, K. (2007). A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy*, 81(2), 121–136. <https://doi.org/10.1007/s00190-006-0094-0>
- Hinderer, J., Crossley, D., & Warburton, R. J. (2015). Superconducting Gravimetry. In *Treatise on Geophysics: Second Edition (Vol. 3, pp. 59–115)*. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00062-2>
- Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2005). *Physical geodesy*. Springer-Verlag Wien. <https://doi.org/10.1007/b139113>
- Holstein, H. (2002). Gravimagnetic similarity in anomaly formulas for uniform polyhedra. *Geophysics*, 67(4), 1126–1133. <https://doi.org/10.1190/1.1500373>
- Hotine, M. (1969). *Mathematical geodesy (Vol. 2)*. US Government Printing Office.
- Hotine, M. (1991). *Differential Geodesy*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-76496-7>
- Hou, Z. L., Wei, X. H., Huang, D. N., & Sun, X. (2015). Full tensor gravity gradiometry data

- inversion: Performance analysis of parallel computing algorithms. *Applied Geophysics*, 12(3), 292–302. <https://doi.org/10.1007/s11770-015-0495-z>
- Hsiao, Y.-S., Hwang, C., Wu, M.-L., & Chang, J.-C. (2017). Improved Geoid Modeling Using Observed and Modeled Gravity Gradients in Taiwan. *Journal of Surveying Engineering*, 143(2), 04016027. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)su.1943-5428.0000212](https://doi.org/10.1061/(asce)su.1943-5428.0000212)
- Hugill, A. (2021). Gravimeters. In H. Gupta (Ed.), *Encyclopedia of Solid Earth Geophysics* (2nd ed., pp. 578–585). Springer.
- Ilk, K. H. (1983). Ein Beitrag zur Dynamik ausgedehnter Körper: Gravitationswechselwirkung. *Deutsche Geodaetische Kommission Bayer. Akad. Wiss.*, 288.
- Jekeli, C. (2021). Gravity, gradiometry. In H. K. Gupta (Ed.), *Encyclopedia of Earth Geophysics* (2nd ed., pp. 692–708). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-90-481-8702-7\\_80](https://doi.org/10.1007/978-90-481-8702-7_80)
- Jekeli, C., & Zhu, L. (2006). Comparison of methods to model the gravitational gradients from topographic data bases. *Geophysical Journal International*, 166(3), 999–1014. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03063.x>
- Jiang, L., Liu, J., Zhang, J., & Feng, Z. (2018). Analytic Expressions for the Gravity Gradient Tensor of 3D Prisms with Depth-Dependent Density. *Surveys in Geophysics*, 39(3), 337–363. <https://doi.org/10.1007/s10712-017-9455-x>
- Johannes, W. J., & Smilde, P. L. (2009). *Gravity interpretation: Fundamentals and application of gravity inversion and geological interpretation*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-85329-9>
- Karcol, R. (2018). The gravitational potential and its derivatives of a right rectangular prism with depth-dependent density following an n-th degree polynomial. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 62(3), 427–449. <https://doi.org/10.1007/s11200-017-0365-7>
- Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (2017). *Fundamental astronomy*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/9783662530450>
- Kellogg, O. D. (1953). *Foundations of potential theory*. Courier Corporation.
- Kem, M., & Haagmans, R. (2005). Determination of gravity gradients from terrestrial gravity data for calibration and validation of gradiometric GOCE data. In *International Association of Geodesy Symposia* (Vol. 129, pp. 95–100). Springer. [https://doi.org/10.1007/3-540-26932-0\\_17](https://doi.org/10.1007/3-540-26932-0_17)
- Kim, S. S., & Wessel, P. (2016). New analytic solutions for modeling vertical gravity gradient anomalies. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 17(5), 1915–1924. <https://doi.org/10.1002/2016GC006263>
- Klokočník, J., Kostelecký, J., Bezděk, A., Kletetschka, G., & Staňková, H. (2020). A 200 km suspected impact crater Kotuykanskaya near Popigai, Siberia, in the light of new gravity aspects from EIGEN 6C4, and other data. *Scientific Reports*, 10(1), 1–8. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-62998-6>
- Klokočník, J., Kostelecký, J., Kalvoda, J., Eppelbaum, L. V., & Bezděk, A. (2014). Gravity Disturbances, Marussi Tensor, Invariants and Other Functions of the Geopotential Represented by EGM 2008. *Journal of Earth Science Research*, 2(3), 88–101. <https://doi.org/10.18005/jesr0203003>

- Krakiwsky, E. J., & Vaniček, P. (1986). *Geodesy, the Concepts*. Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland.
- Kreyszig, E., Kreyszig, H., & Norminton, E. J. (2011). *Advanced engineering mathematics* (10th ed.). John Wiley & Sons, inc.
- Krynski, J. (2012). Gravimetry for geodesy and geodynamics - brief historical review. *Reports on Geodesy and Geoinformatics*, 92(0), 69–86.
- Kuhn, M., & Hirt, C. (2016). Topographic gravitational potential up to second-order derivatives: an examination of approximation errors caused by rock-equivalent topography (RET). *Journal of Geodesy*, 90(9), 883–902. <https://doi.org/10.1007/s00190-016-0917-6>
- Kusumoto, S. (2017). Eigenvector of gravity gradient tensor for estimating fault dips considering fault type. *Progress in Earth and Planetary Science*, 4(1), 1–10. <https://doi.org/10.1186/s40645-017-0130-0>
- Kwok, Y. (1991). Gravity Gradient Tensors Due To a Polyhedron With Polygonal Facets. *Geophysical Prospecting*, 39(3), 435–443. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1991.tb00320.x>
- Kwok, Y. -K. (1991). Singularities In Gravity Computation For Vertical Cylinders and Prisms. *Geophysical Journal International*, 104(1), 1–10. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1991.tb02490.x>
- Lederer, M. (2009). Accuracy of the relative gravity measurement. *Acta Geodynamica et Geomaterialia*, 6(3), 383–390.
- Lenczuk, A., Bogusz, J., Olszak, T., & Barlik, M. (2019). Studying the sensitivity of GOCE gravity gradients to the crustal structure: case study of Central Europe. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 54(1), 19–34. <https://doi.org/10.1007/s40328-019-00250-y>
- Li, X., & Chouteau, M. (1997). Three-dimensional gravity modeling in all space. *1997 SEG Annual Meeting*, 19(4), 474–477. <https://doi.org/10.1190/1.1885936>
- Li, Z., Hao, T., Xu, Y., & Xu, Y. (2011). An efficient and adaptive approach for modeling gravity effects in spherical coordinates. *Journal of Applied Geophysics*, 73(3), 221–231. <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2011.01.004>
- MacMillan, W. D. (1930). *The theory of the potential*. McGraw-Hill Book Company, Incorporated.
- Makhloof, A. A. E. (2019). *The Use of Topographic Isostatic Mass Information in Geodetic Applications*. Universitäts- und Landesbibliothek Bonn.
- Manoussakis, G. (2013). Estimation of the normal Eötvös matrix for low geometric heights. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 48(2), 179–189. <https://doi.org/10.1007/s40328-013-0014-8>
- Marson, I. (2012). A short walk along the gravimeters path. *International Journal of Geophysics*, 2012. <https://doi.org/10.1155/2012/687813>
- Martinez, C., & Li, Y. (2012). Understanding gravity gradiometry processing and interpretation through the Kauring test site data. *ASEG Extended Abstracts*, 2012(1), 1–4.

- Marussi, A. (1985). *Intrinsic Geodesy*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-70243-3>
- Mataragio, J., & Kieley, J. (2009). Application of full tensor gradient invariants in detection of intrusion-hosted sulphide mineralization: Implications for deposition mechanisms. *Conference: 11th International Congress of the Brazilian Geophysical Society & EXPOGEF 2009, Salvador, Bahia, Brazil, 24-28 August 2009, 27, 723-726*. <https://doi.org/10.3997/1365-2397.27.1301.29032>
- Ménoret, V., Vermeulen, P., Le Moigne, N., Bonvalot, S., Bouyer, P., Landragin, A., & Desruelle, B. (2018). Gravity measurements below 10<sup>-9</sup> g with a transportable absolute quantum gravimeter. *Scientific Reports, 8*(1), 1-11. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-30608-1>
- Mickus, K. L., & Hinojosa, J. H. (2001). The complete gravity gradient tensor derived from the vertical component of gravity: A Fourier transform technique. *Journal of Applied Geophysics, 46*(3), 159-174. [https://doi.org/10.1016/S0926-9851\(01\)00031-3](https://doi.org/10.1016/S0926-9851(01)00031-3)
- Montana, C. J., Mickus, K. L., & Peeples, W. J. (1992). Program to calculate the gravitational field and gravity gradient tensor resulting from a system of right rectangular prisms. *Computers and Geosciences, 18*(5), 587-602. [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(92\)90096-A](https://doi.org/10.1016/0098-3004(92)90096-A)
- Moritz, H. (1980). Geodetic reference system 1980. *Bulletin Géodésique, 54*(3), 395-405. <https://doi.org/10.1007/BF02521480>
- Moritz, H. (1990). *The figure of the Earth: theoretical geodesy and the Earth's interior*. Wichmann Karlsruhe.
- Moritz, H., & Hofmann-Wellenhof, B. (1993). *Geometry, relativity, geodesy*. Wichmann Karlsruhe.
- Mueller, I. I. (1969). *Spherical and Practical Astronomy as applied to Geodesy*. Frederick Ungar Publishing.
- Nabighian, M. N., Ander, M. E., Grauch, V. J. S., Hansen, R. O., LaFehr, T. R., Li, Y., Pearson, W. C., Peirce, J. W., Phillips, J. D., & Ruder, M. E. (2005). Historical development of the gravity method in exploration. *Geophysics, 70*(6). <https://doi.org/10.1190/1.2133785>
- Nagy, D. (1966). The gravitational attraction of a right rectangular prism. *Geophysics, 31*(2), 362-371. <https://doi.org/10.1190/1.1439779>
- Nagy, D., Papp, G., & Benedek, J. (2000). The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy, 74*(7-8), 552-560. <https://doi.org/10.1007/s001900000116>
- Niebauer, T. (2015). Gravimetric Methods - Absolute and Relative Gravity Meter: Instruments Concepts and Implementation. In *Treatise on Geophysics: Second Edition* (Vol. 3, pp. 37-57). <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00057-9>
- Novák, P., & Grafarend, E. W. (2006). The effect of topographical and atmospheric masses on spaceborne gravimetric and gradiometric data. *Studia Geophysica et Geodaetica, 50*(4), 549-582. <https://doi.org/10.1007/s11200-006-0035-7>
- Novák, P., Šprlák, M., & Pitoňák, M. (2021). On determination of the geoid from measured gradients of the Earth's gravity field potential. *Earth-Science Reviews, 221*, 103773. <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2021.103773>

- Odalovic, O., Medved, K., & Naod, S. (2022). Modeling of vertical gravity gradient by normal gravity field and digital terrain models. *Journal of Geodesy*, 96(10), 1–18. <https://doi.org/10.1007/s00190-022-01669-y>
- Okabe, M. (1979). Analytical Expressions for Gravity Anomalies Due To Homogeneous Polyhedral Bodies and Translations Into Magnetic Anomalies. *Geophysics*, 44(4), 730–741. <https://doi.org/10.1190/1.1440973>
- Paik, H. J., & Morgan, S. H. (1988). *Superconducting gravity gradiometer mission*. Scientific and Technical Information Division, NASA.
- Pail, R., Gruber, T., & Fecher, T. (2016). *The Combined Gravity Model GOCO05c*.
- Panet, I., Pajot-Métivier, G., Greff-Lefftz, M., Métivier, L., Diament, M., & Mandea, M. (2014). Mapping the mass distribution of Earth's mantle using satellite-derived gravity gradients. *Nature Geoscience*, 7(2), 131–135. <https://doi.org/10.1038/ngeo2063>
- Paoletti, V., Fedi, M., Italiano, F., Florio, G., & Ialongo, S. (2016). Inversion of gravity gradient tensor data: Does it provide better resolution? *Geophysical Journal International*, 205(1), 192–202. <https://doi.org/10.1093/gji/ggw003>
- Papp, G., & Szűcs, E. (2011). Effect of the difference between surface and terrain models on gravity field related quantities. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 46(4), 441–456. <https://doi.org/10.1556/AGeod.46.2011.4.6>
- Paul, M. K. (1974). The gravity effect of a homogeneous polyhedron for three-dimensional interpretation. *Pure and Applied Geophysics PAGEOPH*, 112(3), 553–561. <https://doi.org/10.1007/BF00877292>
- Pedersen, L. B., Kamm, J., & Bastani, M. (2020). A priori models and inversion of gravity gradient data in hilly terrain. *Geophysical Prospecting*, 68(3), 1072–1085. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12897>
- Petit, G., & Luzum, B. (2010). 2010 IERS Conventions: IERS Technical note 36. *International Earth Rotation and Reference Systems Service: Frankfurt, Germany*, 179.
- Petrović, S. (1996). Determination of the potential of homogeneous polyhedral bodies using line integrals. *Journal of Geodesy*, 71(1), 44–52. <https://doi.org/10.1007/s001900050074>
- Petrovskaya, M. S., & Vershkov, A. N. (2010). Construction of spherical harmonic series for the potential derivatives of arbitrary orders in the geocentric Earth-fixed reference frame. *Journal of Geodesy*, 84(3), 165–178. <https://doi.org/10.1007/s00190-009-0353-y>
- Pilkington, M. (2012). Analysis of gravity gradiometer inverse problems using optimal design measures. *Geophysics*, 77(2), G25–G31. <https://doi.org/10.1190/geo2011-0317.1>
- Pohánka, V. (1988). Optimum expression for computation of the gravity field of a homogeneous polyhedral body. *Geophysical Prospecting*, 36(7), 733–751.
- Puetzfeld, D., & Lämmerzahl, C. (2019). *Relativistic geodesy: Foundations and applications* (Vol. 196). Springer.
- Pugh, D., & Woodworth, P. (2014). *Sea-level science: Understanding tides, surges, tsunamis and mean sea-level changes* (2nd ed.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139235778>
- Qi, L. (2007). Eigenvalues and invariants of tensors. *Journal of Mathematical Analysis and*

- Applications*, 325(2), 1363–1377. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.02.071>
- Rapp, R. (1991). *Geometric geodesy: Part I*. Ohio State University Department of Geodetic Science and Surveying.
- Ren, Z., Chen, C., Pan, K., Kalscheuer, T., Maurer, H., & Tang, J. (2017). Gravity anomalies of arbitrary 3D polyhedral bodies with horizontal and vertical mass contrasts. *Surveys in Geophysics*, 38(2), 479–502.
- Ren, Z., Chen, C., Zhong, Y., Chen, H., Kalscheuer, T., Maurer, H., Tang, J., & Hu, X. (2020). Recursive Analytical Formulae of Gravitational Fields and Gradient Tensors for Polyhedral Bodies with Polynomial Density Contrasts of Arbitrary Non-negative Integer Orders. *Surveys in Geophysics*, 41(4), 695–722. <https://doi.org/10.1007/s10712-020-09587-4>
- Ren, Z., Zhong, Y., Chen, C., Tang, J., Kalscheuer, T., Maurer, H., & Li, Y. (2018). Gravity Gradient Tensor of Arbitrary 3D Polyhedral Bodies with up to Third-Order Polynomial Horizontal and Vertical Mass Contrasts. *Surveys in Geophysics*, 39(5), 901–935. <https://doi.org/10.1007/s10712-018-9467-1>
- Reudink, R., Klees, R., Francis, O., Kusche, J., Schlesinger, R., Shabanloui, A., Sneeuw, N., & Timmen, L. (2014). High tilt susceptibility of the Scintrex CG-5 relative gravimeters. *Journal of Geodesy*, 88(6), 617–622. <https://doi.org/10.1007/s00190-014-0705-0>
- Rim, H., & Li, Y. (2016). Gravity gradient tensor due to a cylinder. *Geophysics*, 81(4), G59–G66. <https://doi.org/10.1190/GEO2015-0699.1>
- Rogawski, J., Adams, C., & Franzosa, R. (2019). *Calculus: Early Transcendentals* (4th ed.). Mackmillan Learning.
- Rosi, G., Cacciapuoti, L., Sorrentino, F., Menchetti, M., Prevedelli, M., & Tino, G. M. (2015). Measurement of the gravity-field curvature by atom interferometry. *Physical Review Letters*, 114(1), 13001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.013001>
- Rózsa, S., & Tóth, G. (2005). Prediction of vertical gravity gradients using gravity and elevation data. In *International Association of Geodesy Symposia* (Vol. 128, pp. 344–349). Springer. [https://doi.org/10.1007/3-540-27432-4\\_59](https://doi.org/10.1007/3-540-27432-4_59)
- Rummel, R. (2002). Gravity gradiometry: From Loránd eötvös to modern space age. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 37(4), 435–444. <https://doi.org/10.1556/AGEod.37.2002.4.7>
- Rummel, R., Yi, W., & Stummer, C. (2011). GOCE gravitational gradiometry. *Journal of Geodesy*, 85(11), 777–790. <https://doi.org/10.1007/s00190-011-0500-0>
- Sansò, F., & Sideris, M. G. (2013). *Geoid determination: theory and methods*. Springer Science & Business Media.
- Sebera, J., Wagner, C. A., Bezděk, A., & Klokočník, J. (2013). Short guide to direct gravitational field modelling with Hotine's equations. *Journal of Geodesy*, 87(3), 223–238. <https://doi.org/10.1007/s00190-012-0591-2>
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2018). *Physics for scientists and engineers*. Cengage learning.
- Sharma, P. V. (1967). On: "The Gravitational Attraction of a Right Rectangular Prism" by Dezsö Nagy (G EOPHYSICS , April 1966, p. 362–371). *Geophysics*, 32(5), 920–920.



<https://doi.org/10.1190/1.1439901>

- Smith, D. A. (2000). The gravitational attraction of any polygonally shaped vertical prism with inclined top and bottom faces. *Journal of Geodesy*, 74(5), 414–420. <https://doi.org/10.1007/s001900000102>
- Smith, D. A., Robertson, D. S., & Milbert, D. G. (2001). Gravitational attraction of local crustal masses in spherical coordinates. *Journal of Geodesy*, 74(11–12), 783–795. <https://doi.org/10.1007/s001900000142>
- Soffel, M. H., & Han, W.-B. (2019). *Applied General Relativity*. Astronomy and Astrophysics Library, Springer Nature Switzerland. <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-19673-8>
- Soler, S. R., Pesce, A., Gimenez, M. E., & Uieda, L. (2019). Gravitational field calculation in spherical coordinates using variable densities in depth. *Geophysical Journal International*, 218(3), 2150–2164. <https://doi.org/10.1093/gji/ggz277>
- Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals, 8th Ed.* Cengage Learning.
- Swain, C. J., & Kirby, J. F. (2021). Gravity Data, Advanced Processing. In H. K. Gupta (Ed.), *Encyclopedia of Solid Earth Geophysics* (2nd ed., pp. 591–596). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-58631-7\\_89](https://doi.org/10.1007/978-3-030-58631-7_89)
- Szabó, Z. (2016). The history of the 125 year old Eötvös torsion balance. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 51(2), 273–293. <https://doi.org/10.1007/s40328-015-0126-4>
- Torge, W. (1989). *Gravimetry* (1st ed.). Walter de Gruyter, Berlin - New York.
- Torge, W., & Müller, J. (2012). *Geodesy*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston.
- Tóth, G. (2002). Prediction by Eötvös' torsion balance data in Hungary. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 46(2), 221–229.
- Tóth, G. (2005). The gradiometric-geodynamic boundary value problem. In *Gravity, geoid and space missions* (pp. 352–357). Springer.
- Tóth, G. (2020). Gravity gradient bias in the EPF experiment. *European Physical Journal Plus*, 135(2), 222. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00242-w>
- Tóth, G., & Völgyesi, L. (2002). Comparison of interpolation and collocation techniques using torsion balance data. *Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology*, 61(1), 171–182.
- Tóth, G., & Völgyesi, L. (2005). Investigation of Hungarian torsion balance measurements by prediction. *Geomatikai Közlemények*, 8, 217–222.
- Tóth, G., Völgyesi, L., & Csapó, G. (2004). Determination of vertical gradients from torsion balance measurements. *IAG Symposia*, 129, 292–297.
- Tóth, G., Völgyesi, L., Szondy, G., Péter, G., Kiss, B., Barnaföldi, G., Deák, L., Égető, C., Fenyvesi, E., Gróf, G., Somlai, L., Harangozó, P., Lévai, P., & Ván, P. (2019). Remeasurement of the Eötvös-experiment, status and first results. *Proceedings of Science*, 353, 42. <https://doi.org/10.22323/1.353.0042>
- Tsoulis, D. (1999). *Analytical and numerical methods in gravity field modelling of ideal and real masses*. Institute of Astronomical and Physical Geodesy, Technical University of

Munich, Germany.

- Tsoulis, D. (2012). Analytical computation of the full gravity tensor of a homogeneous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals. *Geophysics*, 77(2), F1–F11. <https://doi.org/10.1190/geo2010-0334.1>
- Tsoulis, D., & Petrović, S. (2001). On the singularities of the gravity field of a homogeneous polyhedral body. *Geophysics*, 66(2), 535–539. <https://doi.org/10.1190/1.1444944>
- Uieda, L., Barbosa, V. C. F., & Braitenberg, C. (2016). Tesseroids: Forward-modeling gravitational fields in spherical coordinates. *Geophysics*, 81(5), F41–F48. <https://doi.org/10.1190/GEO2015-0204.1>
- Uieda, L., Bomfim, E. P., Braitenberg, C., & Molina, E. (2011). Optimal forward calculation method of the Marussi tensor due to a geologic structure at GOCE height. *Proc. of "4th International GOCE User Workshop,"* 1, 1–5.
- Urwin, K. M. (1966). *Advanced Calculus and Vector Field Theory*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/c2013-0-06692-3>
- Uzun, S., Erkan, K., & Jekeli, C. (2020). Using gravity gradients to estimate fault parameters in the Wichita Uplift region. *Geophysical Journal International*, 222(3), 1704–1716. <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa267>
- v. Eötvös, R. (1896). Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus. *Annalen Der Physik*, 295(10), 354–400. <https://doi.org/10.1002/andp.18962951013>
- Van Camp, M., de Viron, O., Watlet, A., Meurers, B., Francis, O., & Caudron, C. (2017). Geophysics From Terrestrial Time-Variable Gravity Measurements. *Reviews of Geophysics*, 55(4), 938–992. <https://doi.org/10.1002/2017RG000566>
- van der Meijde, M., Pail, R., Bingham, R., & Floberghagen, R. (2015). GOCE data, models, and applications: A review. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 35(PA), 4–15. <https://doi.org/10.1016/j.jag.2013.10.001>
- Van Gelderen, M., & Rummel, R. (2001). The solution of the general geodetic boundary value problem by least squares. *Journal of Geodesy*, 75(1), 1–11. <https://doi.org/10.1007/s001900000146>
- Vaniček, P. (1976). *Physical geodesy. Lecture notes, No. 43*. University of New Brunswick Canada.
- Vaniček, P. (2009). Why Do We Need a Proper Geoid? *FIG Working Week 2009 - TS3C-GEOID-Modelling, May 2009*, 3–8.
- Vaniček, P., Kingdon, R., & Santos, M. (2012). Geoid versus quasigeoid: A case of physics versus geometry. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, 42(1), 101–118. <https://doi.org/10.2478/v10126-012-0004-9>
- Vasco, D. W. (1989). Resolution and variance operators of gravity and gravity gradiometry. *Geophysics*, 54(7), 889–899. <https://doi.org/10.1190/1.1442717>
- Vasco, D. W., & Taylor, C. (1991). Inversion of airborne gravity gradient data, southwestern Oklahoma. *Geophysics*, 56(1), 90–101. <https://doi.org/10.1190/1.1442961>
- Vasić, D. D., Todorčić, G. Z., & Višnjić, R. I. (2018). Geostatistical determination of recent vertical movements of the Earth's crust on the territory of the Republic of Srpska. *Survey*

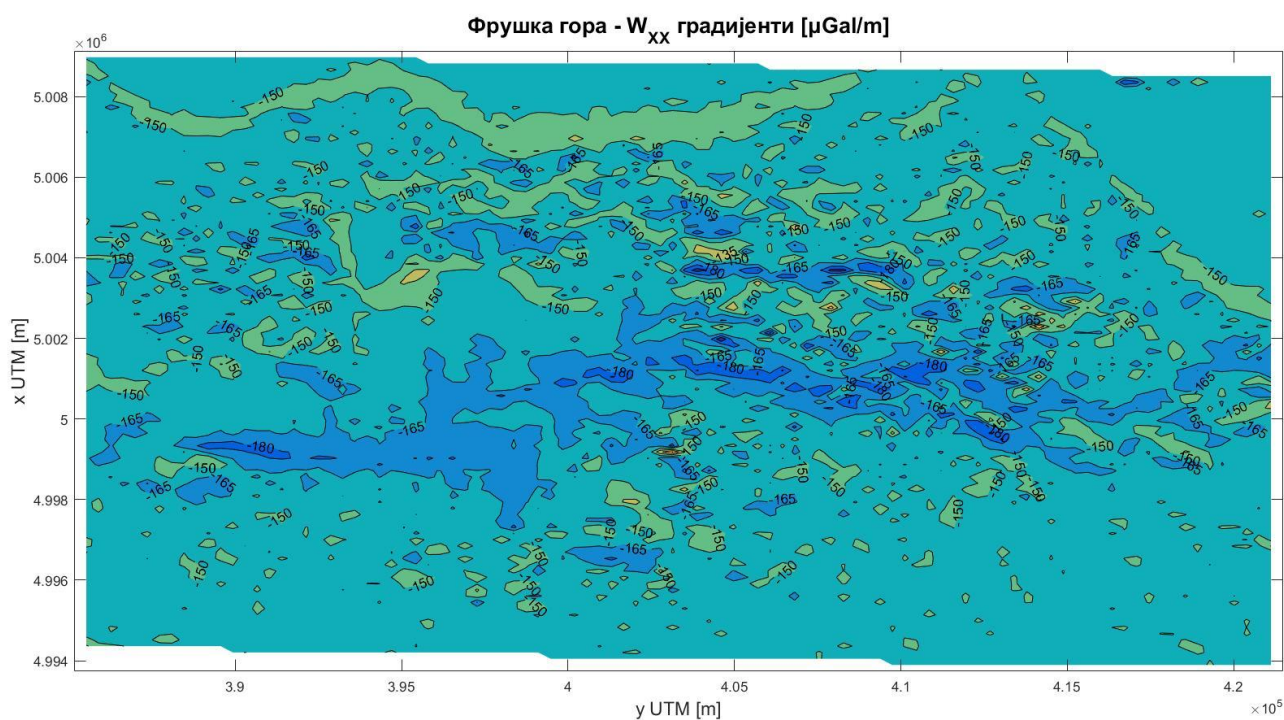
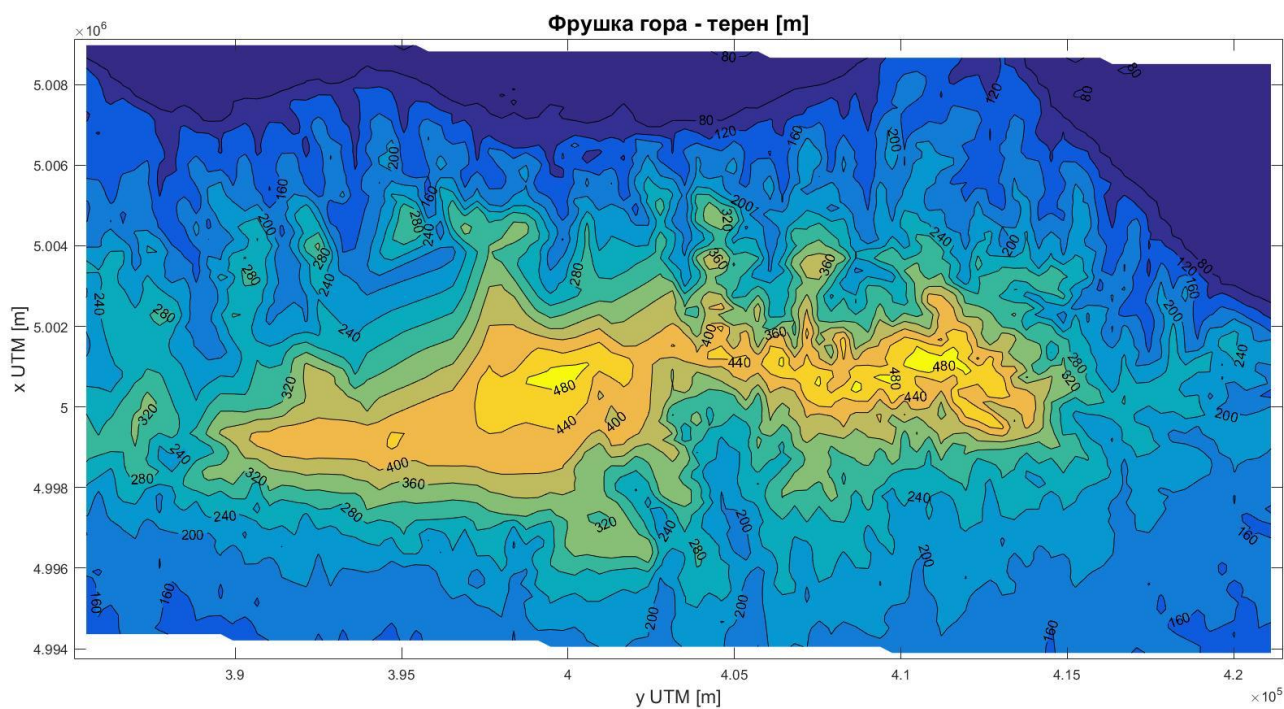
- Review*, 50(362), 447–453. <https://doi.org/10.1080/00396265.2017.1308911>
- Vermeer, M. (2020). *Physical geodesy*. Aalto University, School of Engineering.
- Vermeer, M., & Rasila, A. (2020). *Map of the world. An Introduction to Mathematical Geodesy*. CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Veryaskin, A., & McRae, W. (2008). On combined gravity gradient components modelling for applied geophysics. *Journal of Geophysics and Engineering*, 5(3), 348–356. <https://doi.org/10.1088/1742-2132/5/3/010>
- Veryaskin, A. V. (2018). *Gravity, Magnetic and Electromagnetic Gradiometry: Strategic Technologies in the 21st Century*. Morgan & Claypool Publishers.
- Völgyesi, L. (1993). Interpolation of deflection of the vertical based on gravity gradients. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 37(2), 137–166.
- Völgyesi, L. (1995). Test interpolation of deflection of the vertical in Hungary based on gravity gradients. *Periodica Polytechnica: Civil Engineering*, 39(1), 37–75.
- Völgyesi, L. (1998). Geoid computations based on torsion balance measurements. *Reports of the Finnish Geodetic Institute*, 98(4), 145–151.
- Völgyesi, L. (1999). Geodetic Applications of Torsion Balance Measurements in Hungary. *Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology*, 57(2), 203–212.
- Völgyesi, L. (2001). Local geoid determination based on gravity gradients. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 36(2), 153–162.
- Völgyesi, L. (2005). Deflections of the vertical and geoid heights from gravity gradients. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 40(2 SPEC. ISS.), 147–159. <https://doi.org/10.1556/AGeod.40.2005.2.3>
- Völgyesi, L. (2015). Renaissance of torsion balance measurements in Hungary. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 59(4), 459–464. <https://doi.org/10.3311/PPci.7990>
- Völgyesi, L., Szondy, G., Tóth, G., Péter, G., Kiss, B., Deák, L., Égető, C., Fenyvesi, E., Gróf, G., & Ván, P. (2018). Preparations for the remeasurement of the Eötvös experiment. *Magyar Geofizika*, 59(4), 165–179. <https://doi.org/10.22323/1.353.0041>
- Völgyesi, L., Tóth, G., & Csapó, G. (2005). Determination of gravity anomalies from torsion balance measurements. In *International Association of Geodesy Symposia* (Vol. 129, pp. 292–297). Springer. [https://doi.org/10.1007/3-540-26932-0\\_51](https://doi.org/10.1007/3-540-26932-0_51)
- Völgyesi, L., & Ulmann, Z. (2012). Reconstruction of a torsion balance and the results of the test measurements. In *International Association of Geodesy Symposia* (Vol. 136, pp. 281–289). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-20338-1\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20338-1_34)
- Vulic, M., & Blagojevic, D. (2008). Recent vertical crustal movements of a part of the Balkan Peninsula derived from levelling data. *Survey Review*, 40(309), 235–243. <https://doi.org/10.1179/003962608X291022>
- Werner, R. A. (2017). The solid angle hidden in polyhedron gravitation formulations. *Journal of Geodesy*, 91(3), 307–328. <https://doi.org/10.1007/s00190-016-0964-z>
- Wild-Pfeiffer, F. (2008). A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry. *Journal of Geodesy*, 82(10), 637–653. <https://doi.org/10.1007/s00190-008->

0219-8

- Wu, L. (2021). Modified Parker's Method for Gravitational Forward and Inverse Modeling Using General Polyhedral Models. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 126(10), e2021JB022553. <https://doi.org/10.1029/2021JB022553>
- Yang, J., Jekeli, C., & Liu, L. (2018). Seafloor topography estimation from gravity gradients using simulated annealing. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 123(8), 6958–6975.
- Yao, L., & Changli, Y. (2007). Forward Modeling of Gravity, Gravity Gradients, and Magnetic Anomalies due to Complex Bodies. *Journal of China University of Geosciences*, 18(3), 280–286. [https://doi.org/10.1016/S1002-0705\(08\)60008-4](https://doi.org/10.1016/S1002-0705(08)60008-4)
- Zahorec, P., Marušiak, I., Mikuška, J., Pašteka, R., & Papčo, J. (2017). Numerical Calculation of Terrain Correction Within the Bouguer Anomaly Evaluation (Program Toposk). In R. Pašteka, J. Mikuška, & B. Meurers (Eds.), *Understanding the Bouguer Anomaly: A Gravimetry Puzzle* (pp. 79–92). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812913-5.00004-X>
- Zahorec, P., Pašteka, R., & Papčo, J. (2010). The estimation of errors in calculated terrain corrections in the Tatra Mountains. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, 40(4), 323–350. <https://doi.org/10.2478/v10126-010-0014-4>
- Zhang, C., Mushayandevu, M. F., Reid, A. B., Fairhead, J. D., & Odegard, M. E. (2000). Euler deconvolution of gravity tensor gradient data. *Geophysics*, 65(2), 512–520.
- Zhang, Y., Wu, Y., Yan, J., Wang, H., Rodriguez, J. A. P., & Qiu, Y. (2018). 3D inversion of full gravity gradient tensor data in spherical coordinate system using local north-oriented frame. *Earth, Planets and Space*, 70(1), 1–23. <https://doi.org/10.1186/s40623-018-0825-5>
- Zhu, L. (2007). *Gradient Modelling With Gravity and DEM*. The Ohio State University.
- Zhu, L., & Jekeli, C. (2009). Gravity gradient modeling using gravity and DEM. *Journal of Geodesy*, 83(6), 557–567. <https://doi.org/10.1007/s00190-008-0273-2>
- Zill, D. G. (2018). *Advanced engineering mathematics* (6th ed.). Jones & Bartlett Publishers.
- Zumberge, M. A. (2021). Gravity Measurements, Absolute. In H. Gupta (Ed.), *Encyclopedia of Solid Earth Geophysics* (2nd ed., pp. 633–637). Springer.
- Zund, J. (1994). *Foundations of Differential Geodesy*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-79187-1>
- Zund, J. D. (1989). Differential geodesy of the Eotvos torsion balance. In *Manuscripta Geodaetica* (Vol. 14, Issue 1).
- Одаловић, О. (2010). *Физичка геодезија*. Грађевински факултет Универзитета у Београду.

## **ПРИЛОЗИ**

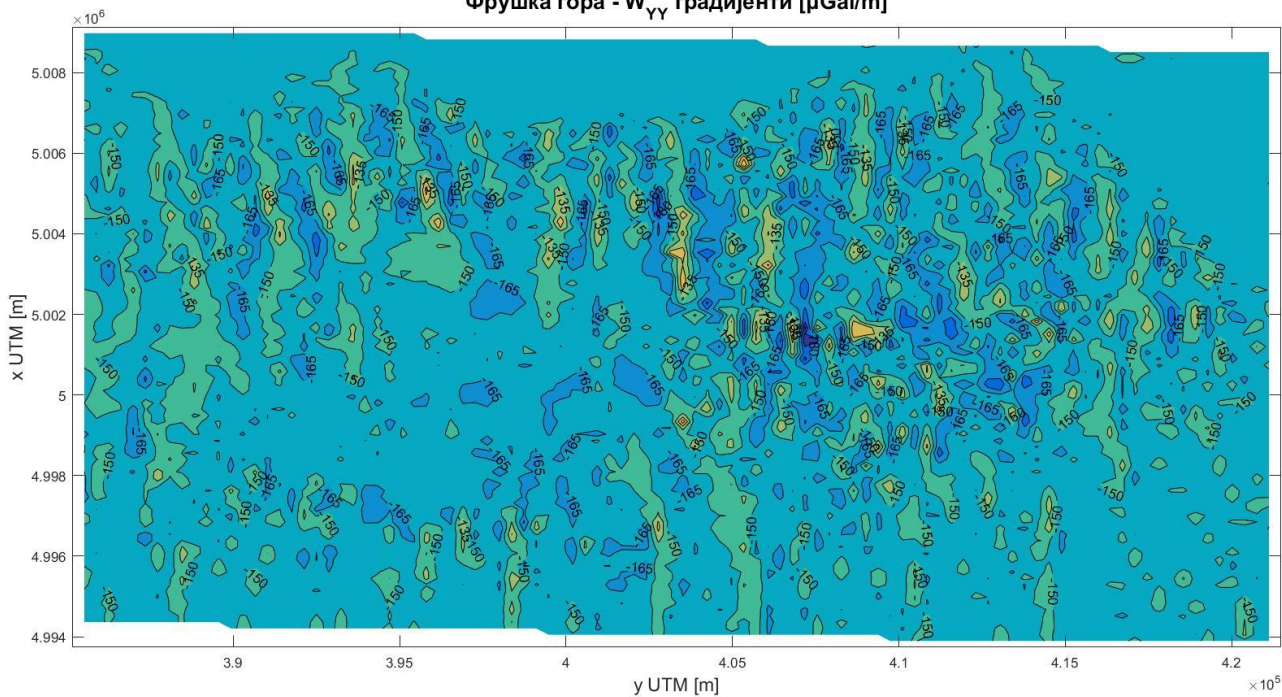
ПРИЛОГ 1



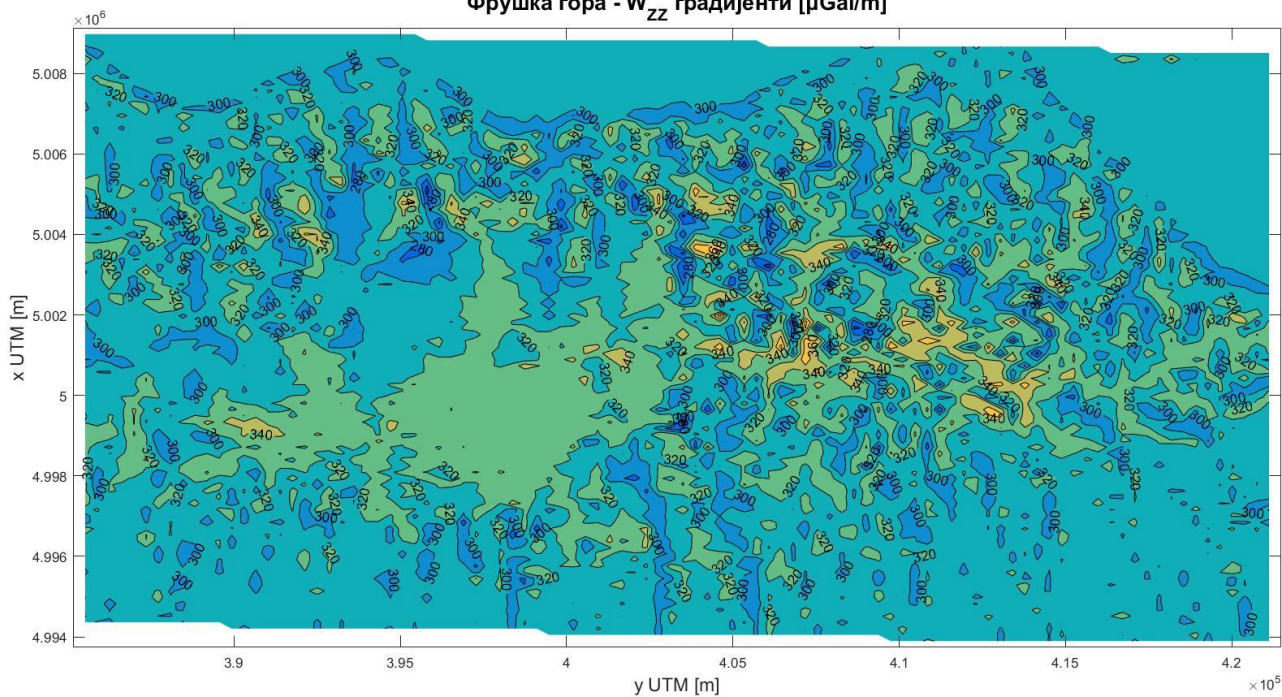


ПРИЛОГ 1

Фрушка гора -  $W_{YY}$  градијенти [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]



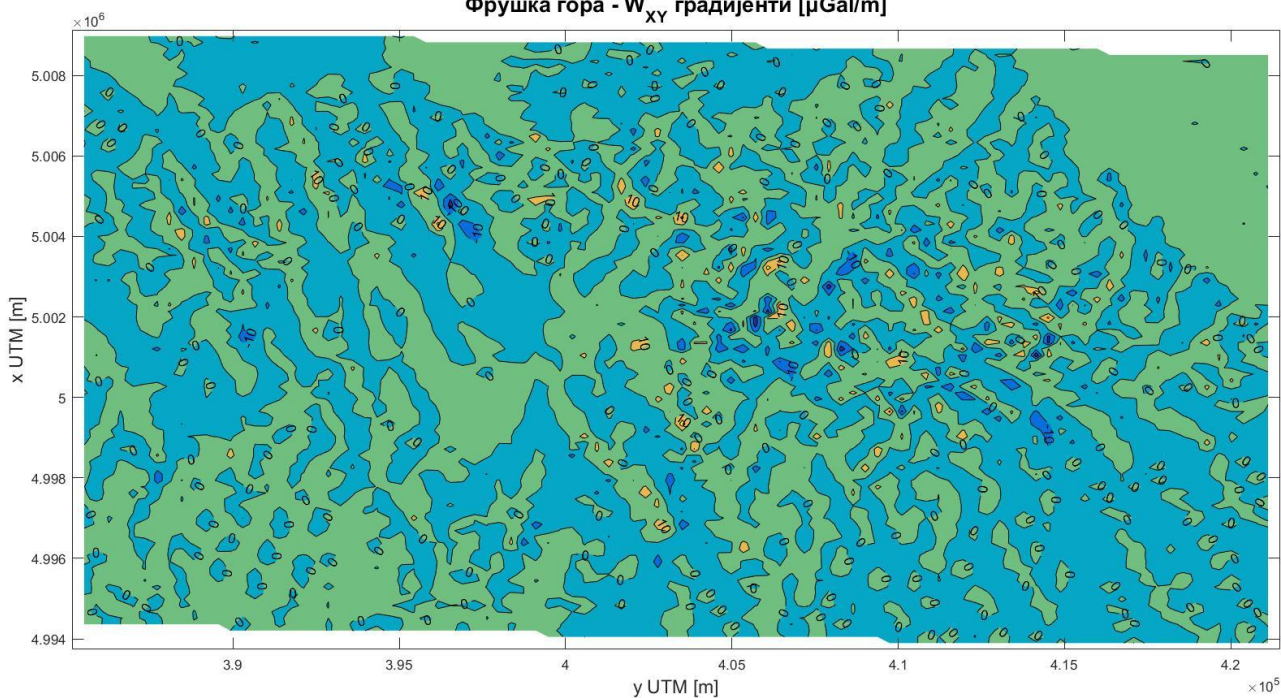
Фрушка гора -  $W_{ZZ}$  градијенти [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]



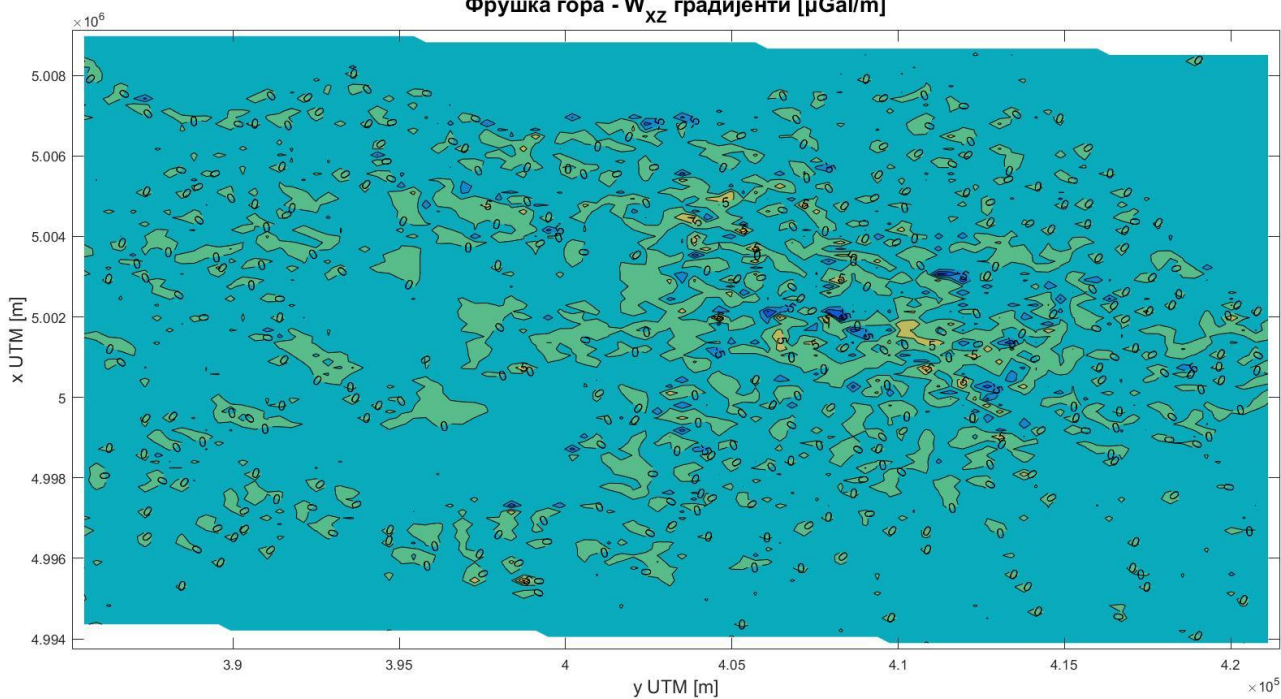


**ПРИЛОГ 1**

**Фрушка гора -  $W_{xy}$  градијенти [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]**

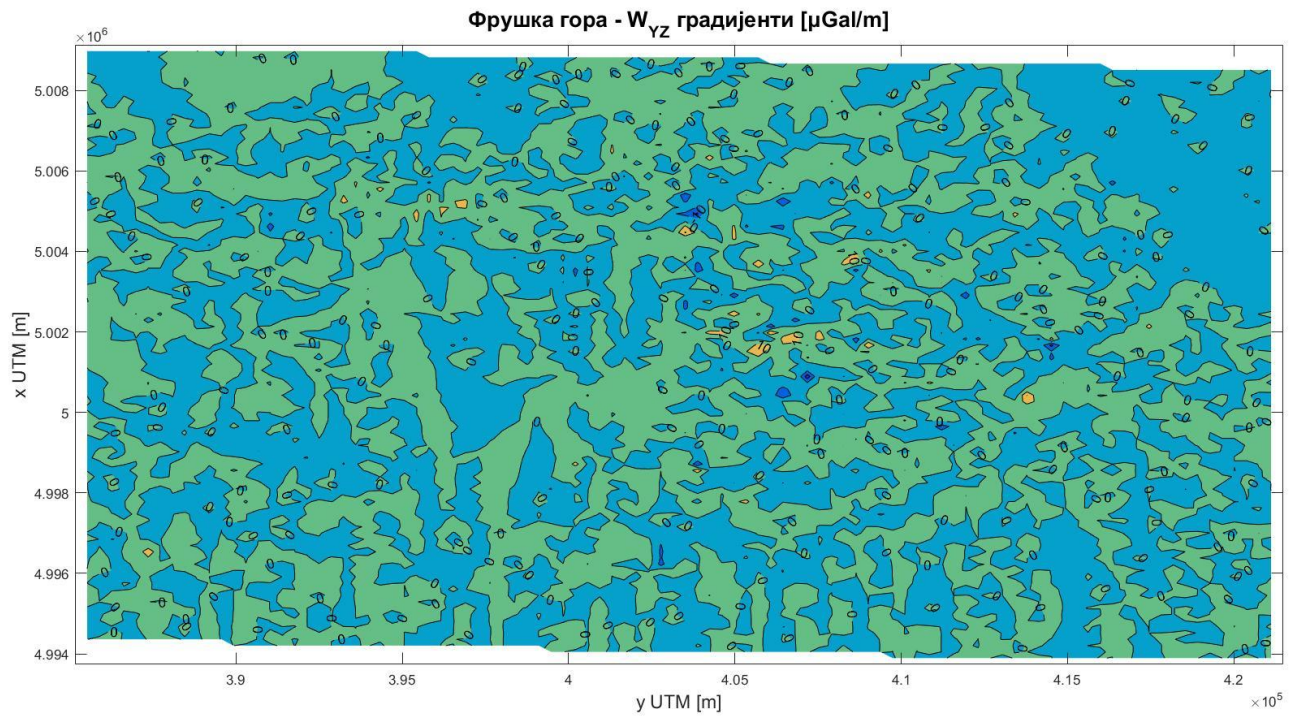


**Фрушка гора -  $W_{xz}$  градијенти [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]**

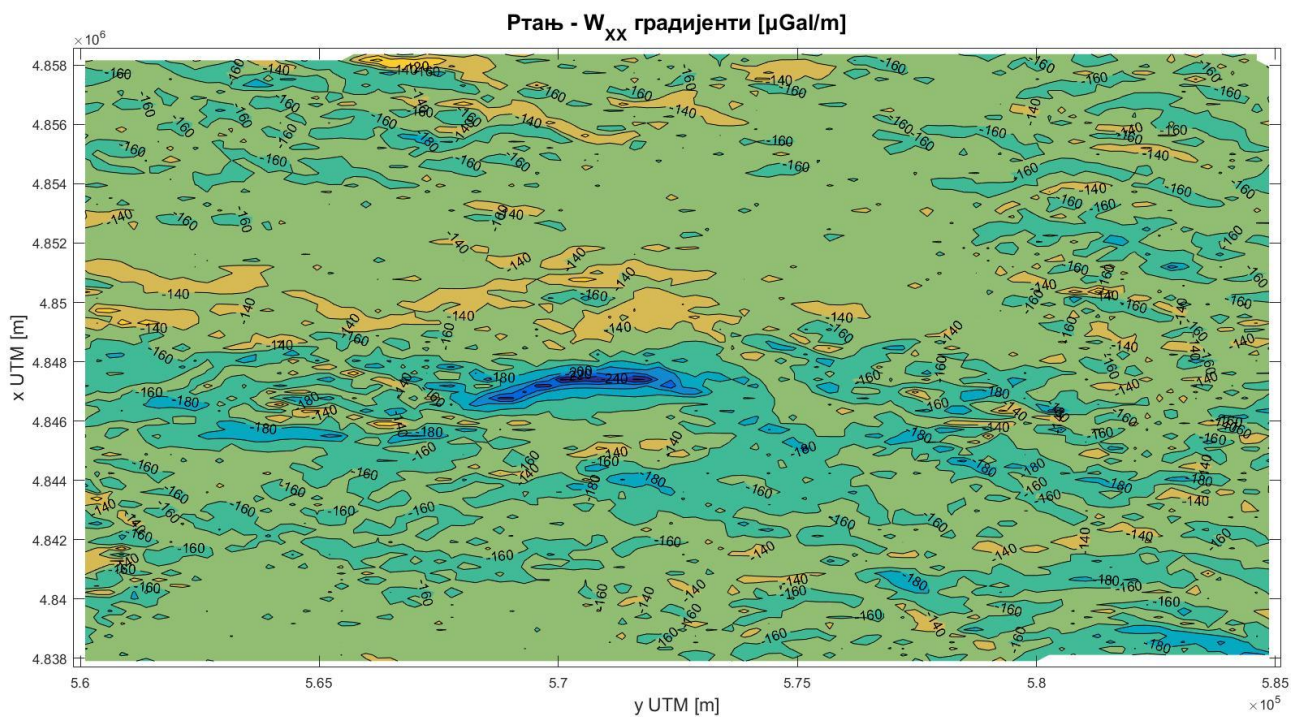
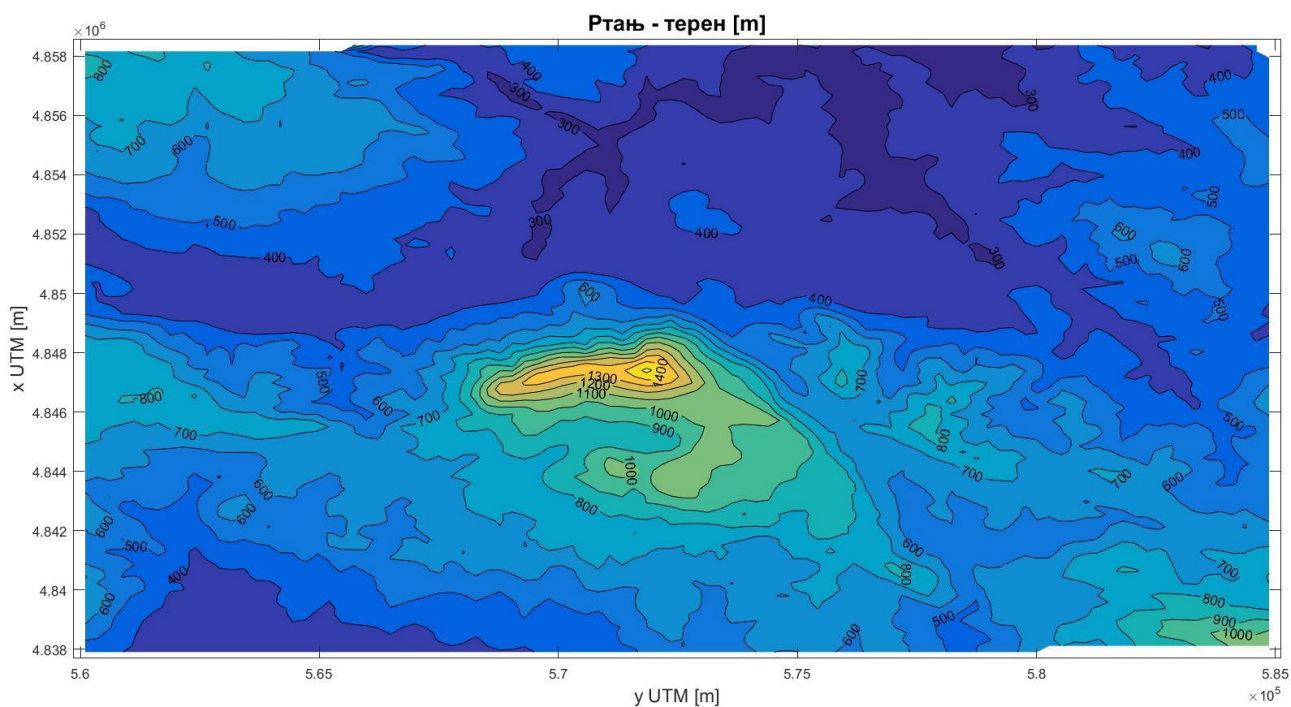




**ПРИЛОГ 1**



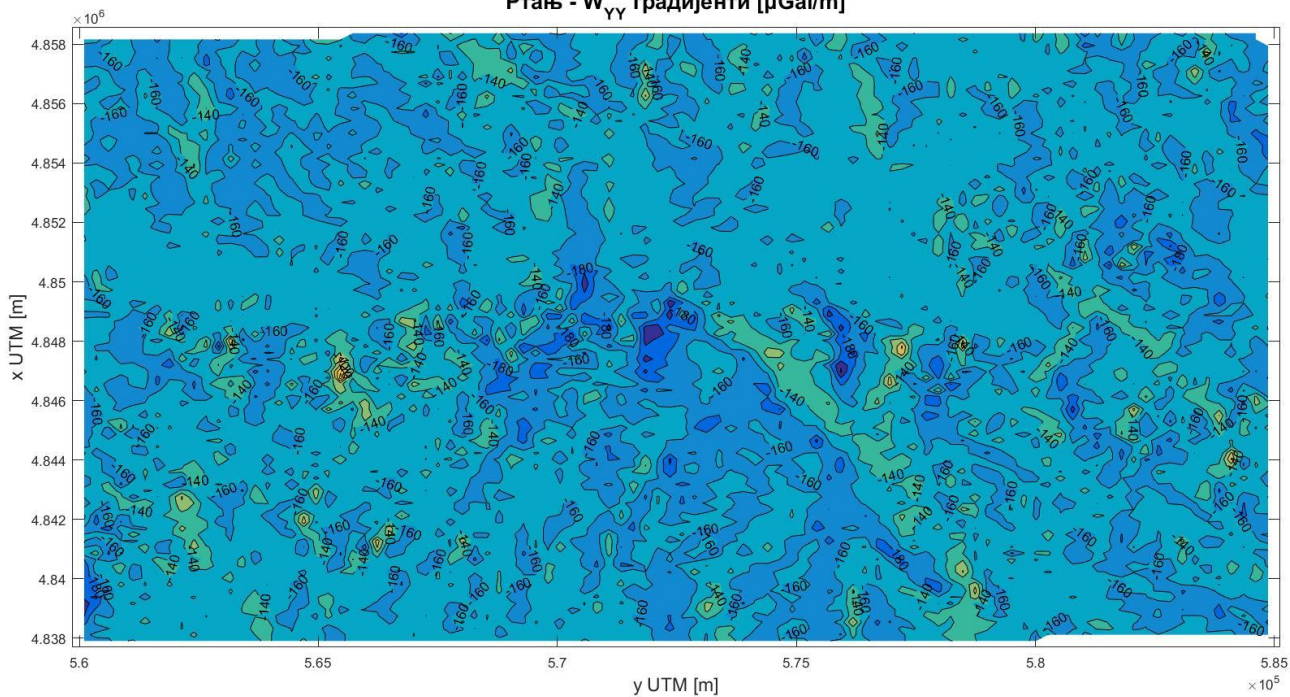
**ПРИЛОГ 2**



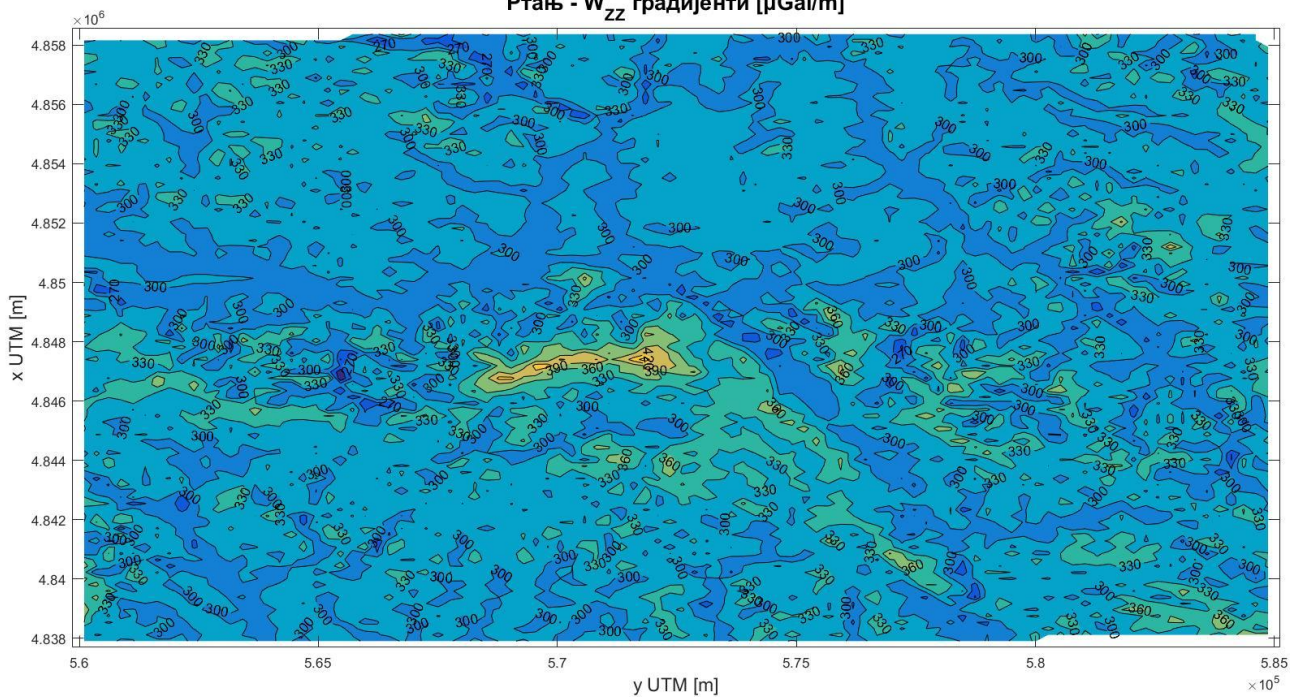


**ПРИЛОГ 2**

**Ртањ -  $W_{YY}$  градијенти [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]**

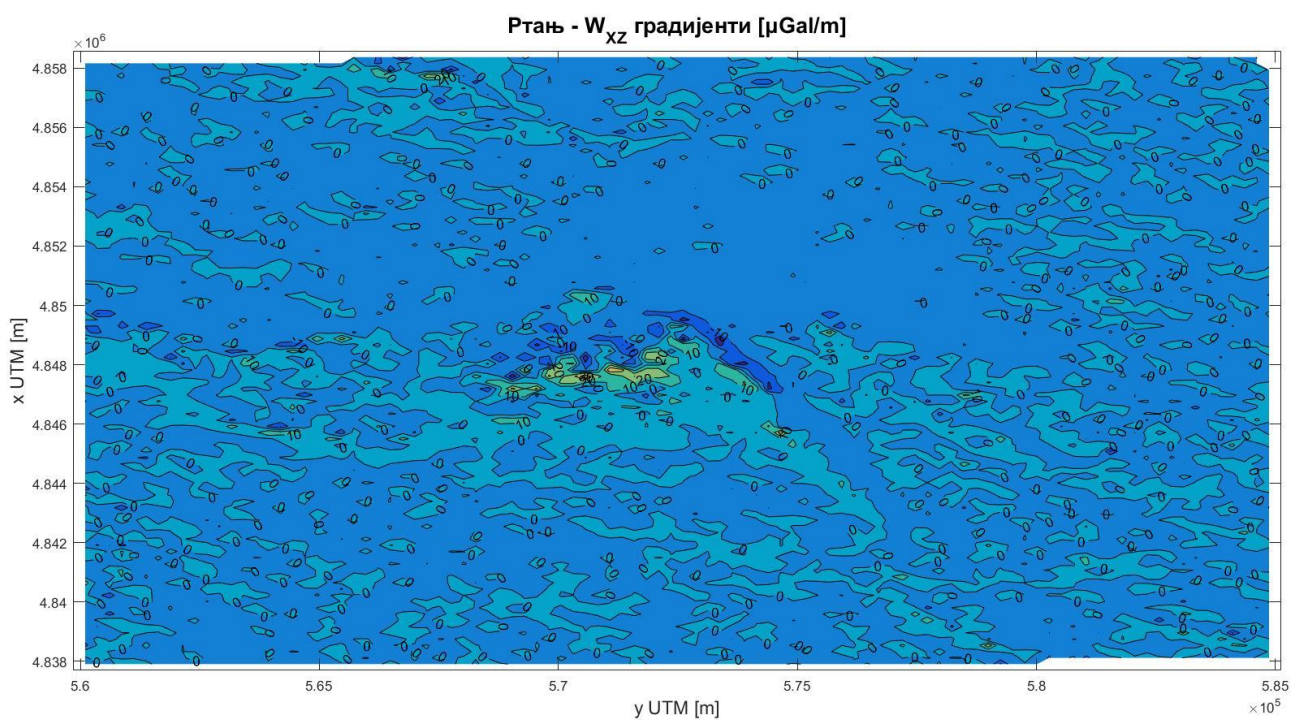
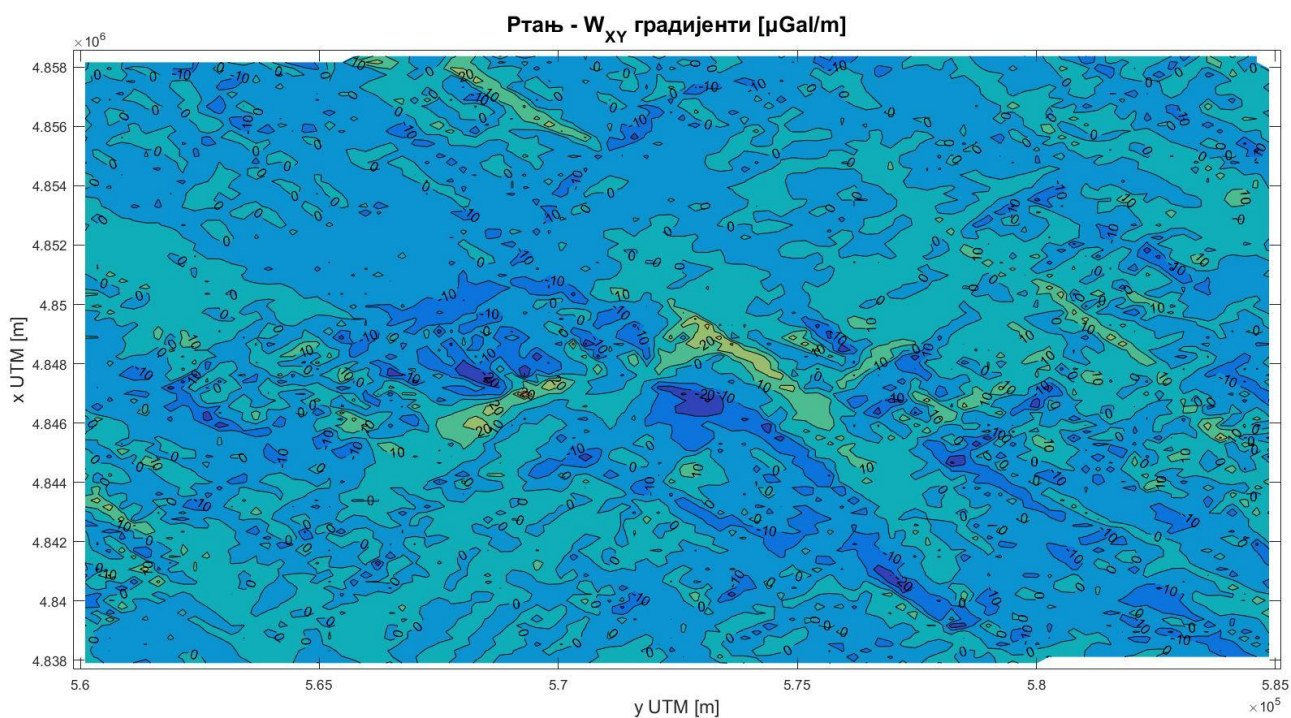


**Ртањ -  $W_{ZZ}$  градијенти [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]**

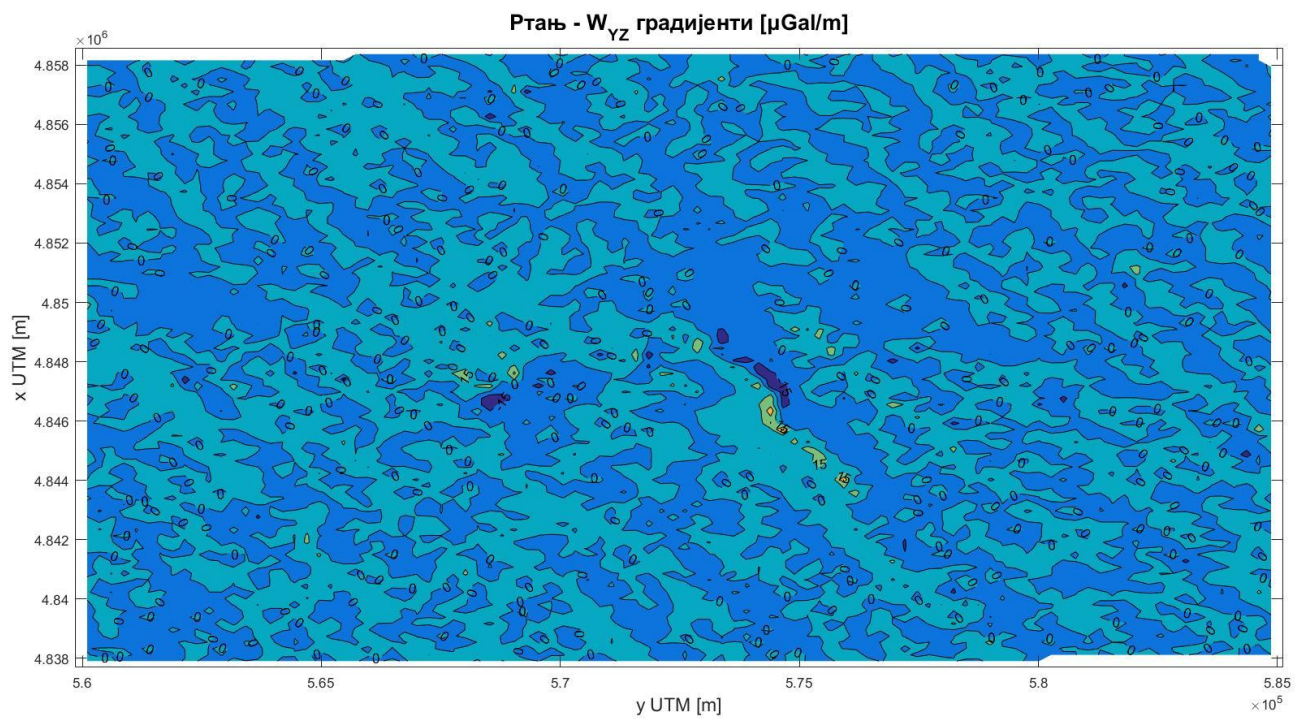




ПРИЛОГ 2



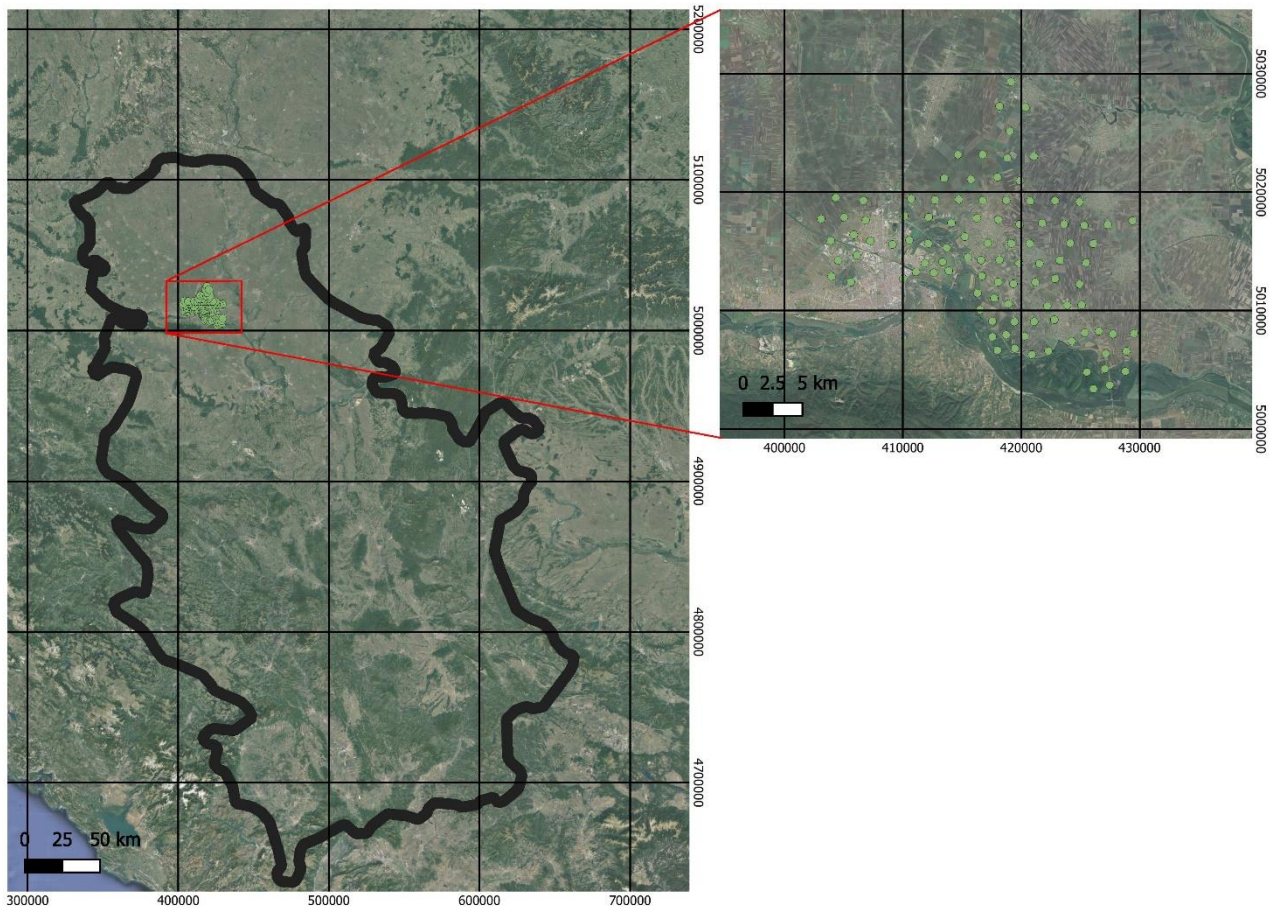
ПРИЛОГ 2





### ПРИЛОГ 3

Распоред тачака са торзионим мјерењима у полигону код Новог Сада



## ПРИЛОГ 4

Резултати торзионих мјерења у полигону код Новог Сада

Тачка	Координате						Висина $H$ [m]	Резултати мјерења [E]			
	$B$ [° ' "]			$L$ [° ' "]				$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5300	45	15	32.6	19	47	49.3	77.15	-32.6	-3.8	-7.6	15.4
5301	45	15	46.6	19	46	33.3	82.08	-4	0.5	-3.1	24.3
5302	45	16	30.6	19	46	58.3	82.05	0.9	-4.5	-3.5	33.4
5303	45	17	24.6	19	46	29.3	82.06	-7.1	-12.7	2.1	25.1
5304	45	16	45.6	19	48	10.3	82.06	-18.4	-9	-12.6	12.3
5305	45	17	41.6	19	47	57.3	82.06	-11.8	-12.7	-22.7	7.1
5306	45	17	25.6	19	49	2.3	81.06	-16.9	-6.9	-17.1	1.7
5307	45	17	16.6	19	50	28.3	75.06	-58.7	-6.1	-13.3	-18.3
5308	45	15	43.6	19	51	11.3	75.92	-25.4	-15.6	-81.2	8.5
5309	45	16	2.6	19	52	1.3	78.70	-56.1	1.3	-42.6	-22.5
5310	45	16	6.6	19	54	8.3	76.05	-7.3	11.4	-14.4	-61.1
5311	45	16	0.6	19	53	9.3	78.05	-8	10.9	-32.1	-75.2
5312	45	17	20.6	19	52	47.3	75.06	-26.6	14.5	-29	-36.7
5313	45	17	9.6	19	53	58.3	73.59	-11.8	13	-5.6	-35.5
5314	45	16	26.6	19	52	34.3	74.95	-28.3	18.5	-50.6	-32.5
5315	45	16	30.6	19	53	43.3	74.45	-26.9	7.9	-25.9	-64.6
5316	45	17	28.6	19	51	33.3	75.06	-49.4	7.2	-21	-31.7
5317	45	17	40.6	19	55	8.3	76.06	2.6	20.4	0.6	-23.8
5318	45	16	44.6	19	55	21.3	75.82	4.7	16.2	-3	-28.8
5319	45	16	37.6	19	56	12.3	75.06	-17.3	9.1	1.2	-22.3
5320	45	17	23.6	19	56	37.3	75.06	-11.4	13.6	3.3	-12.1
5321	45	16	38.6	19	57	24.3	74.06	-5.6	6.7	2.2	-6.8
5322	45	17	23.6	19	58	9.3	81.07	12.1	-1.1	9.6	9.7
5323	45	16	29.6	19	58	40.3	75.07	3.2	6	-7.3	6.6
5324	45	17	24.6	19	59	20.3	80.07	13.2	-3.9	10.1	7.9
5325	45	16	29.6	19	59	59.3	80.07	11.8	0	-6.3	14.9
5326	45	16	39.6	20	1	18.3	81.07	15.1	5.8	-5.6	21.9

## ПРИЛОГ 4

Резултати торзионих мјерења у полигону код Новог Сада - наставак

Тачка	Координате						Висина $H [m]$	Резултати мјерења [E]			
	$B [^{\circ} \ ' \ '']$			$L [^{\circ} \ ' \ '']$				$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5327	45	17	26.6	20	1	57.3	79.61	6.5	-0.8	-0.6	25.2
5328	45	17	25.6	20	3	27.3	79.63	-3.7	-0.9	-3.3	22.8
5329	45	16	33.6	20	3	0.3	81.32	6.7	3.4	-4.5	27.7
5330	45	15	34.6	20	2	35.3	81.07	-3.4	1.2	-7.3	24.9
5331	45	14	37.6	20	2	44.3	80.55	-6.1	-0.9	-22.8	20.8
5332	45	14	36.6	20	1	48.3	81.07	13	6.5	-18.1	30.8
5333	45	14	33.6	20	0	31.3	74.06	29.1	10.9	-8.9	24.5
5334	45	15	48.6	20	1	0.3	81.08	16.3	4.1	-2	18.1
5335	45	15	38.6	19	59	44.3	79.88	14.8	5.1	-7.7	19.4
5336	45	15	33.6	19	58	19.3	74.06	18.7	11.7	-3.5	5.4
5337	45	15	37.6	19	57	20.3	75.06	35.8	15.7	-2.6	-5
5338	45	15	53.6	19	56	16.3	75.35	-16.9	7.8	-7.6	-19.6
5339	45	15	6.6	19	56	0.3	75.05	21.3	13.6	-11.3	-29.1
5340	45	14	21.6	19	56	11.3	74.05	23.4	16.5	-27.1	-30.2
5341	45	13	50.6	19	56	59.3	74.05	26.1	19.7	-26.4	-21
5342	45	14	53.6	19	57	5.3	74.06	26	14.7	-11.7	-8.5
5343	45	14	38.6	19	58	1.3	75.06	31.7	15.4	-10.6	4.1
5344	45	13	49.6	19	58	25.3	74.06	29.4	19.3	-6.6	-2.6
5345	45	13	50.6	19	59	41.3	74.57	38.5	17.9	-7.2	13.2
5346	45	13	56.6	20	0	59.3	74.09	41.4	9.4	-2.5	32.3
5347	45	13	10.6	19	59	4.3	74.78	33.2	22.4	-17.8	-6.2
5348	45	13	13.6	19	57	53.3	74.64	37	21.9	-15.5	-24.2
5349	45	13	7.6	19	57	0.3	75.94	16.5	16.2	-28.2	-25.9
5350	45	12	30.6	19	57	20.3	75.05	22	2.3	-30.7	-27.4
5351	45	12	36.6	19	58	28.3	75.05	30.3	15.2	-32.2	-18.1
5352	45	12	20.6	19	59	34.3	75.05	29.5	25.7	-17	-10.8
5353	45	12	30.6	20	0	38.3	74.11	16.3	42.7	8.7	14.4



## ПРИЛОГ 4

Резултати торзионих мјерења у полигону код Новог Сада - наставак

Тачка	Координате						Висина $H$ [m]	Резултати мјерења [E]			
	$B$ [° ' "]			$L$ [° ' "]				$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5354	45	12	58.6	20	2	7.3	78.48	9.2	16.2	23.8	16.8
5355	45	13	21.6	20	2	57.3	77.05	5.8	10.8	41.2	11.8
5356	45	13	26.6	20	3	52.3	79.06	10.1	0.3	33.4	-6.4
5357	45	13	19.6	20	4	47.3	80.89	5.4	-5	10	-0.1
5358	45	12	25.6	20	4	20.3	80.06	-1.7	-0.3	16.5	11.3
5359	45	11	34.6	20	3	8.3	74.06	16.1	7	1.9	9.4
5360	45	10	48.6	20	3	34.3	73.05	22.4	2.9	-17.5	3.6
5361	45	10	59.6	20	4	37.3	77.03	15.9	1.9	-12	9
5362	45	11	43.6	20	4	17.3	79.05	-7.4	4.1	-3.9	11.3
5363	45	11	37.6	20	5	37.3	73.06	-1.3	0	-12	21.9
5364	45	12	32.6	20	5	40.3	81.98	2.2	-4.8	8.1	1.1
5365	45	13	21.6	20	6	9.3	80.06	-5.7	1.6	4.6	0.4
5366	45	18	29.6	20	5	58.3	78.21	10.1	-3.3	5.5	20.6
5367	45	18	18.6	20	4	22.3	79.98	-2.5	-1	2.6	20.1
5368	45	18	15.6	20	2	51.3	80.08	0.2	-2.2	1.9	16.7
5369	45	18	18.6	20	1	33.3	80.08	8.9	-0.7	8.6	13.3
5370	45	18	20.6	20	0	7.3	82.07	7.7	0.8	10.7	7.3
5371	45	18	16.6	19	58	40.3	81.00	13.5	3.5	12.4	4
5372	45	18	28.6	19	57	17.3	80.07	10.5	6.3	12.2	-10.4
5373	45	18	31.6	19	55	54.3	79.63	9.1	9.3	15.7	-13.2
5374	45	18	17.6	19	54	15.3	74.07	-5.5	19.1	3.8	-25
5375	45	18	32.6	19	52	47.3	81.04	-20.3	21.5	-9.3	-19.5
5376	45	18	34.6	19	51	12.3	76.28	-32.7	15.4	-21.8	-25.2
5377	45	18	21.6	19	48	43.3	81.92	-21.8	-3.6	-27.1	5
5378	45	18	28.6	19	47	19.3	82.06	-13.9	-8.8	-24.4	-7.7
5379	45	18	23.6	19	45	50.3	83.06	1.4	-17.5	1.3	18.4
5380	45	19	22.6	19	46	45.3	83.06	-13.6	-7	-16.7	-7.6

## ПРИЛОГ 4

Резултати торзионих мјерења у полигону код Новог Сада - наставак

Тачка	Координате						Висина $H$ [m]	Резултати мјерења [E]			
	$B$ [° ' "]			$L$ [° ' "]				$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5381	45	19	15.6	19	48	33.3	83.06	-11	-1.5	-19.1	-0.9
5382	45	19	22.6	19	51	38.3	82.12	-23.2	15.9	-18.7	-19.6
5383	45	19	20.6	19	53	11.3	82.99	-12.7	18.4	1.9	-23.7
5384	45	19	22.6	19	54	43.3	82.05	-14.2	12.2	18.3	-8.3
5385	45	19	20.6	19	56	15.3	81.06	-2.5	12.1	19.5	-8
5386	45	19	21.6	19	57	47.3	81.07	9	7.8	21.2	-4.6
5387	45	19	20.6	19	59	20.3	81.70	15.4	0.6	18.1	6.6
5388	45	19	19.6	20	2	31.3	81.08	5.2	-6	9.2	22
5389	45	19	22.6	20	0	56.3	80.08	9	0.9	14.7	8.9
5390	45	20	15.6	19	58	39.3	80.46	10	0.7	22.8	9.2
5391	45	20	24.6	19	57	11.3	80.07	0.2	5.2	16.3	-3
5392	45	20	17.6	19	55	29.3	81.03	0	6.3	14.9	-4.1
5393	45	20	19.6	19	53	45.3	82.22	-8.9	15.2	14.7	-5
5394	45	21	24.6	19	54	37.3	82.06	-5.9	7	21.4	-2.3
5395	45	21	25.6	19	56	13.3	82.07	2.7	5.9	19	-2.5
5396	45	21	17.6	19	57	49.3	82.07	6	1.2	22.6	0.5
5397	45	21	22.6	19	59	32.3	81.07	2.2	1	13.3	1
5398	45	22	30.6	19	57	57.3	81.14	7.9	-2.3	21	-3.8
5399	45	23	38.7	19	57	16.3	82.07	0.9	-0.5	19.1	-1.1
5400	45	24	45.7	19	58	0.3	81.07	7.1	-0.4	18.6	-5
5401	45	23	36.7	19	58	57.3	82.21	7.8	-3.2	19.5	6.2

## ПРИЛОГ 5

Моделована торзиона мјерења код Новог Сада и одступања од мјерења

Тачка	Моделоване вриједности [E]				Одступања [E]			
	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5300	-13.6	3.4	-8.2	0.6	-19.0	-7.2	0.6	14.8
5301	18.4	-8.2	-8.1	-3.4	-22.4	8.7	5.0	27.7
5302	-2.5	-2.4	-8.1	0.1	3.4	-2.1	4.6	33.3
5303	5.3	0.4	-8.1	0.0	-12.4	-13.1	10.2	25.1
5304	-1.9	-3.3	-8.2	0.1	-16.5	-5.7	-4.4	12.2
5305	0.6	-2.2	-8.2	0.2	-12.4	-10.5	-14.5	6.9
5306	-14.4	-8.4	-8.6	0.3	-2.5	1.5	-8.5	1.4
5307	0.5	0.6	-8.2	0.1	-59.2	-6.7	-5.1	-18.4
5308	-39.9	5.9	-7.6	0.8	14.5	-21.5	-73.6	7.7
5309	-6.1	-16.5	-7.6	-1.2	-50.0	17.8	-35.0	-21.3
5310	-13.9	-6.2	-8.2	0.1	6.6	17.6	-6.2	-61.2
5311	-0.2	-8.2	-8.3	0.3	-7.8	19.1	-23.9	-75.5
5312	-2.7	-5.9	-8.2	0.1	-23.9	20.4	-20.8	-36.8
5313	-3.1	27.9	-6.6	1.6	-8.7	-14.9	1.0	-37.1
5314	10.5	-0.5	-8.1	0.7	-38.8	19.0	-42.5	-33.2
5315	11.2	-19.2	-10.0	-1.4	-38.1	27.1	-15.9	-63.2
5316	-2.4	-5.8	-8.1	0.0	-47.0	13.0	-12.9	-31.7
5317	-1.9	-3.2	-8.2	0.1	4.5	23.6	8.8	-23.9
5318	-3.4	-19.2	-6.3	-1.3	8.1	35.4	3.3	-27.5
5319	-3.4	-2.0	-8.3	0.0	-13.9	11.1	9.5	-22.3
5320	1.8	-6.7	-8.2	0.0	-13.2	20.3	11.5	-12.1
5321	6.3	-8.7	-8.2	0.1	-11.9	15.4	10.4	-6.9
5322	6.1	-1.4	-8.2	0.0	6.0	0.3	17.8	9.7
5323	1.6	2.3	-6.8	1.8	1.6	3.7	-0.5	4.8
5324	5.7	-7.6	-8.1	0.0	7.5	3.7	18.2	7.9
5325	-10.3	-4.2	-6.8	0.1	22.1	4.2	0.5	14.8
5326	1.7	-4.8	-8.1	0.0	13.4	10.6	2.5	21.9

## ПРИЛОГ 5

Моделована торзиона мјерења код Новог Сада и одступања од мјерења - наставак

Тачка	Моделоване вриједности [Е]				Одступања [Е]			
	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5327	20.0	-1.5	-10.7	-0.2	-13.5	0.7	10.1	25.4
5328	11.5	-7.0	-5.9	0.4	-15.2	6.1	2.6	22.4
5329	-4.9	5.0	-9.5	-1.5	11.6	-1.6	5.0	29.2
5330	2.7	-2.8	-8.1	0.0	-6.1	4.0	0.8	24.9
5331	19.2	6.1	-8.2	-1.8	-25.3	-7.0	-14.6	22.6
5332	-2.6	-11.7	-5.4	2.9	15.6	18.2	-12.7	27.9
5333	-1.8	-18.8	-8.2	-0.1	30.9	29.7	-0.7	24.6
5334	-3.2	-2.9	-8.1	0.0	19.5	7.0	6.1	18.1
5335	-28.7	10.9	5.1	9.3	43.5	-5.8	-12.8	10.1
5336	-9.5	-4.3	-8.2	-0.3	28.2	16.0	4.7	5.7
5337	0.7	-8.3	-8.2	0.1	35.1	24.0	5.6	-5.1
5338	2.9	-1.4	-7.3	-0.1	-19.8	9.2	-0.3	-19.5
5339	5.8	-10.8	-8.3	0.2	15.5	24.4	-3.0	-29.3
5340	0.0	-16.4	-8.1	0.2	23.4	32.9	-19.0	-30.4
5341	0.9	-12.2	-8.1	0.2	25.2	31.9	-18.3	-21.2
5342	6.7	-14.3	-8.3	0.1	19.3	29.0	-3.4	-8.6
5343	1.9	-10.2	-8.1	0.1	29.8	25.6	-2.5	4.0
5344	2.9	-11.5	-8.1	0.1	26.5	30.8	1.5	-2.7
5345	-8.8	-8.2	-6.5	1.7	47.3	26.1	-0.7	11.6
5346	-23.8	-14.8	-8.8	-0.3	65.2	24.2	6.3	32.6
5347	13.8	-15.5	-8.4	-2.6	19.4	37.9	-9.4	-3.6
5348	-26.2	32.6	-8.9	-1.9	63.2	-10.7	-6.6	-22.3
5349	16.5	-16.7	-7.7	1.2	0.0	32.9	-20.5	-27.1
5350	1.5	32.1	-7.9	0.5	20.5	-29.8	-22.8	-27.9
5351	3.0	-15.6	-8.1	0.2	27.3	30.8	-24.1	-18.3
5352	2.6	-13.7	-8.1	0.2	26.9	39.4	-8.9	-11.0
5353	-25.0	-7.4	-9.2	0.5	41.3	50.1	17.9	13.9

## ПРИЛОГ 5

Моделована торзиона мјерења код Новог Сада и одступања од мјерења - наставак

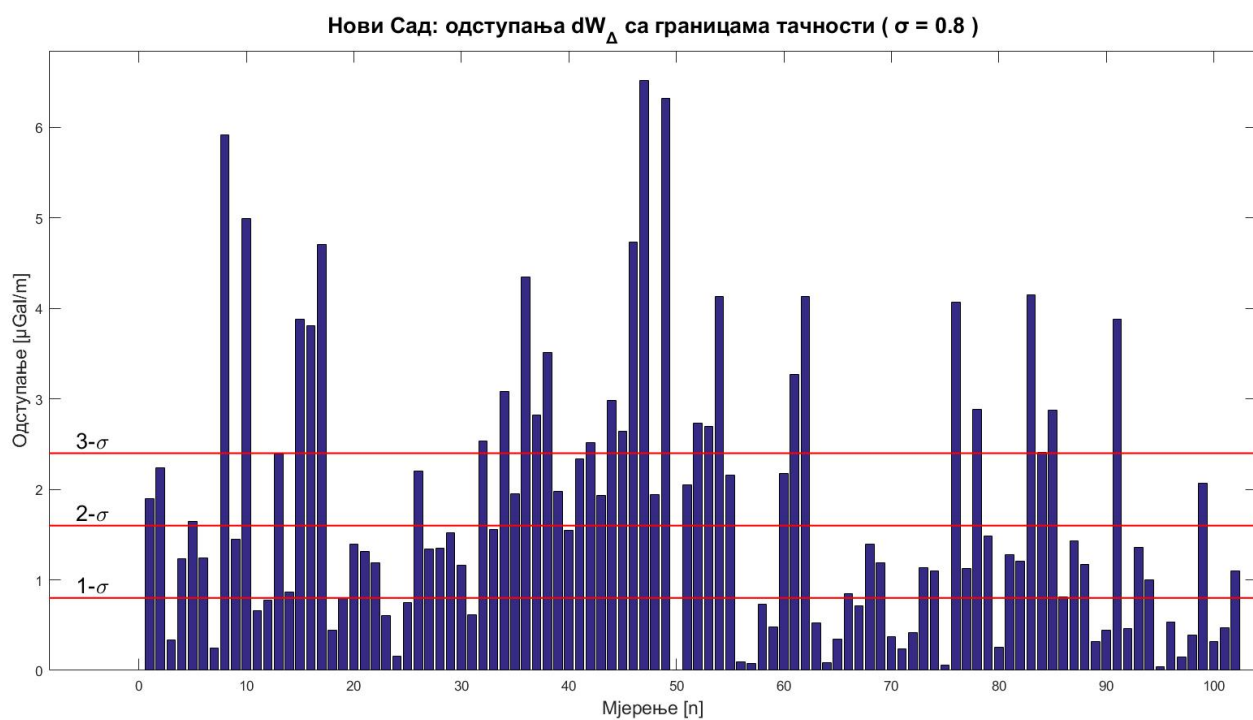
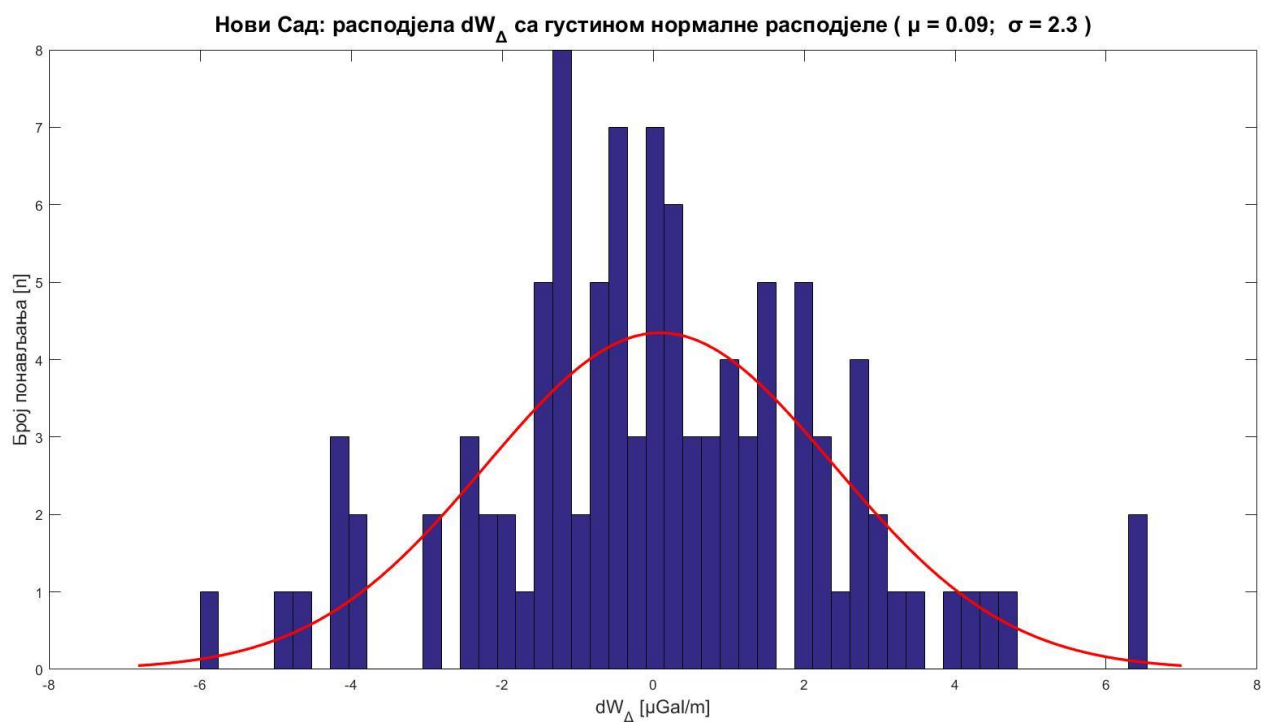
Тачка	Моделоване вриједности [Е]				Одступања [Е]			
	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5354	30.8	-1.2	-6.1	-0.2	-21.6	17.4	29.9	17.0
5355	4.9	9.9	-8.1	-0.1	0.9	0.9	49.3	11.9
5356	9.3	-9.1	-8.0	-0.1	0.8	9.4	41.4	-6.3
5357	12.7	4.3	-7.6	1.6	-7.3	-9.3	17.6	-1.7
5358	3.1	-7.7	-8.1	0.1	-4.8	7.4	24.6	11.2
5359	-5.7	28.7	-10.3	-0.7	21.8	-21.7	12.2	10.1
5360	-10.3	-5.1	-8.1	0.2	32.7	8.0	-9.4	3.4
5361	57.2	42.6	-8.0	15.9	-41.3	-40.7	-4.0	-6.9
5362	-2.2	-10.3	-8.2	0.2	-5.2	14.4	4.3	11.1
5363	-2.2	-8.9	-8.0	0.1	0.9	8.9	-4.0	21.8
5364	-1.3	22.3	-7.1	-0.8	3.5	-27.1	15.2	1.9
5365	2.8	-6.6	-8.1	-0.1	-8.5	8.2	12.7	0.5
5366	17.3	-10.9	-8.1	-0.9	-7.2	7.6	13.6	21.5
5367	-16.4	-2.9	-6.9	0.0	13.9	1.9	9.5	20.1
5368	12.1	-4.6	-8.2	-0.1	-11.9	2.4	10.1	16.8
5369	5.2	-2.8	-8.1	0.0	3.7	2.1	16.7	13.3
5370	5.4	-2.2	-8.2	0.1	2.3	3.0	18.9	7.2
5371	17.7	-3.5	-7.4	3.0	-4.2	7.0	19.8	1.0
5372	-0.8	-1.6	-8.2	0.0	11.3	7.9	20.4	-10.4
5373	-1.9	-6.8	-9.8	-2.2	11.0	16.1	25.5	-11.0
5374	-6.1	5.3	-8.0	-0.2	0.6	13.8	11.8	-24.8
5375	20.4	-13.2	-9.0	1.8	-40.7	34.7	-0.4	-21.3
5376	-21.4	5.9	-8.8	-2.3	-11.3	9.5	-13.0	-22.9
5377	7.1	11.7	-10.9	2.8	-28.9	-15.3	-16.2	2.2
5378	0.9	-1.4	-8.1	0.0	-14.8	-7.4	-16.3	-7.7
5379	4.0	-2.0	-8.1	0.1	-2.6	-15.5	9.4	18.3
5380	-0.8	1.9	-8.2	0.0	-12.8	-8.9	-8.5	-7.6

## ПРИЛОГ 5

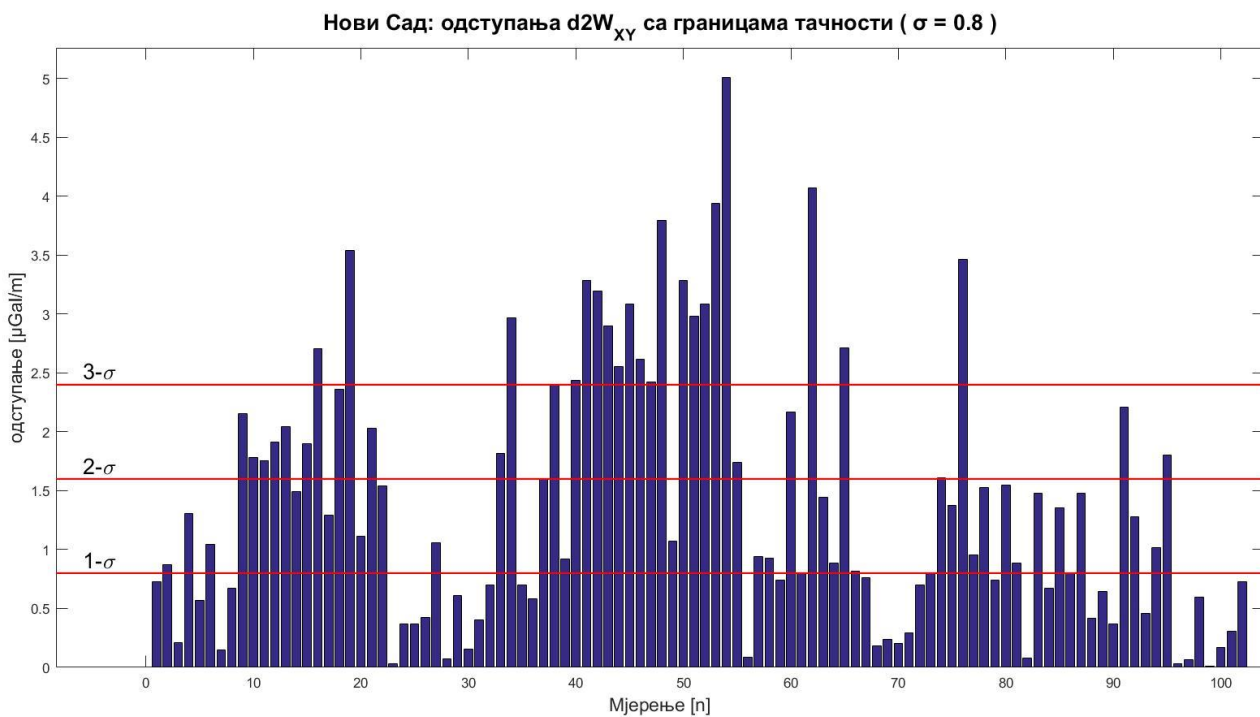
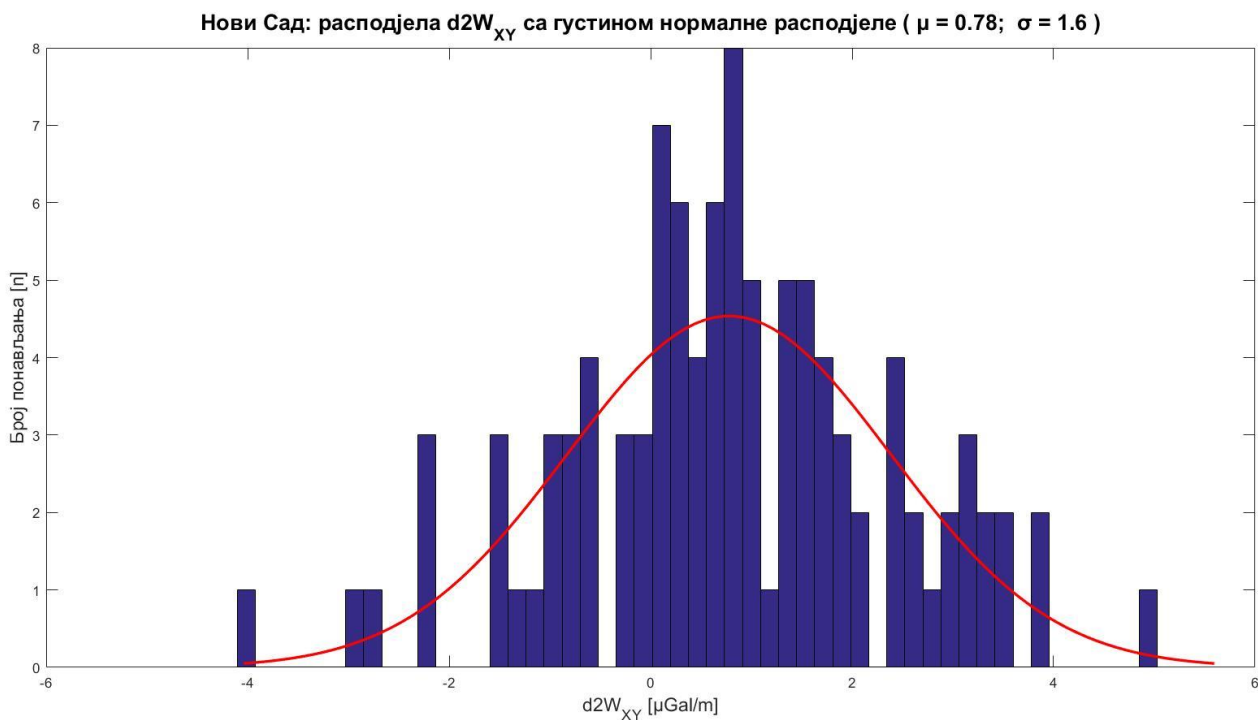
Моделована торзиона мјерења код Новог Сада и одступања од мјерења - наставак

Тачка	Моделоване вриједности [E]				Одступања [E]			
	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5381	1.1	-2.3	-8.2	0.1	-12.1	0.8	-10.9	-1.0
5382	18.3	1.1	-7.4	0.0	-41.5	14.8	-11.3	-19.6
5383	11.4	11.7	-9.2	2.6	-24.1	6.7	11.1	-26.3
5384	14.6	-1.3	-8.1	-0.1	-28.8	13.5	26.4	-8.2
5385	5.6	4.1	-8.1	0.2	-8.1	8.0	27.6	-8.2
5386	-5.3	-7.0	-7.9	-0.1	14.3	14.8	29.1	-4.6
5387	3.7	-3.6	-10.6	-2.4	11.7	4.2	28.7	9.0
5388	2.0	0.4	-8.1	0.0	3.2	-6.4	17.3	22.0
5389	4.6	-2.8	-8.1	0.1	4.4	3.7	22.8	8.9
5390	-28.8	22.8	-14.4	0.0	38.8	-22.1	37.2	9.2
5391	4.8	-7.6	-8.3	0.0	-4.6	12.8	24.6	-3.0
5392	13.6	1.7	-8.8	-1.6	-13.6	4.6	23.7	-2.6
5393	-18.9	5.1	-9.7	0.1	10.0	10.1	24.4	-5.1
5394	-6.3	-11.0	-8.6	0.2	0.4	18.0	30.0	-2.5
5395	8.1	6.2	-8.0	-0.1	-5.4	-0.3	27.0	-2.5
5396	4.5	0.5	-8.1	0.1	1.5	0.7	30.7	0.4
5397	6.1	-4.9	-8.2	0.0	-3.9	5.9	21.5	1.0
5398	-12.8	-2.4	-8.1	0.6	20.7	0.1	29.1	-4.4
5399	4.1	1.2	-8.2	0.0	-3.2	-1.7	27.3	-1.1
5400	11.8	2.7	-8.2	-0.2	-4.7	-3.1	26.8	-4.8
5401	-3.2	-10.5	-11.3	2.0	11.0	7.3	30.8	4.2

**ПРИЛОГ 6**

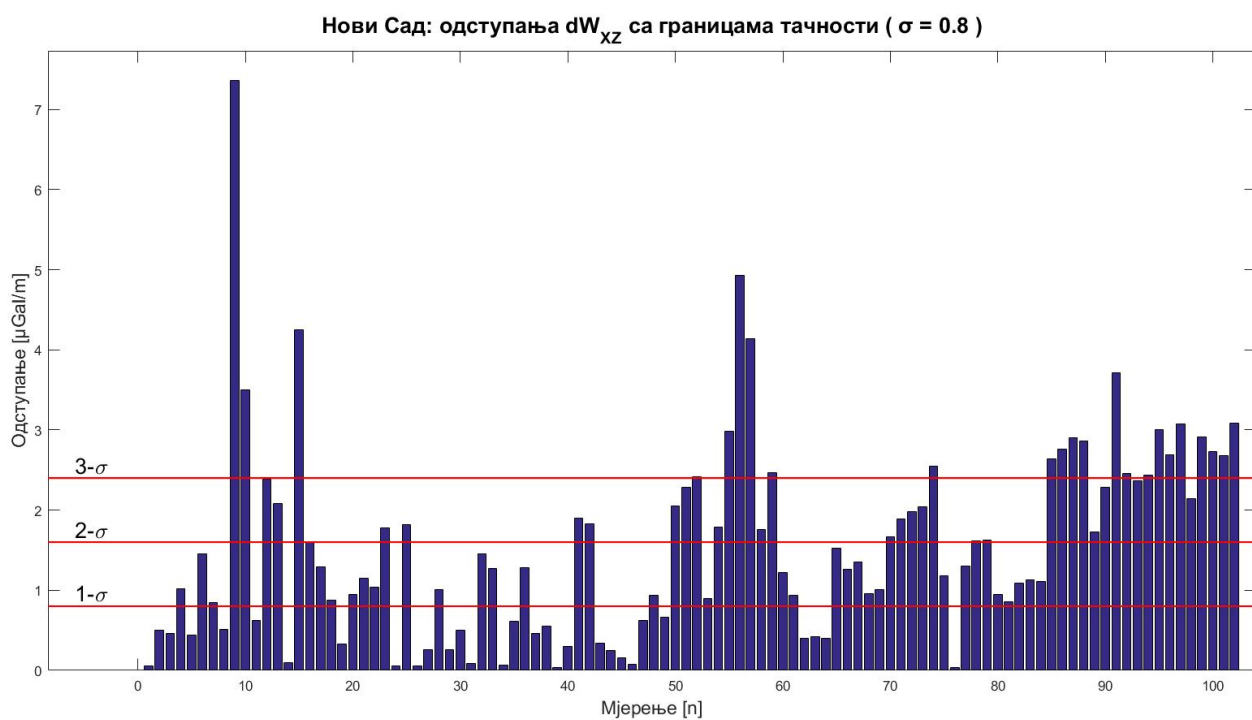
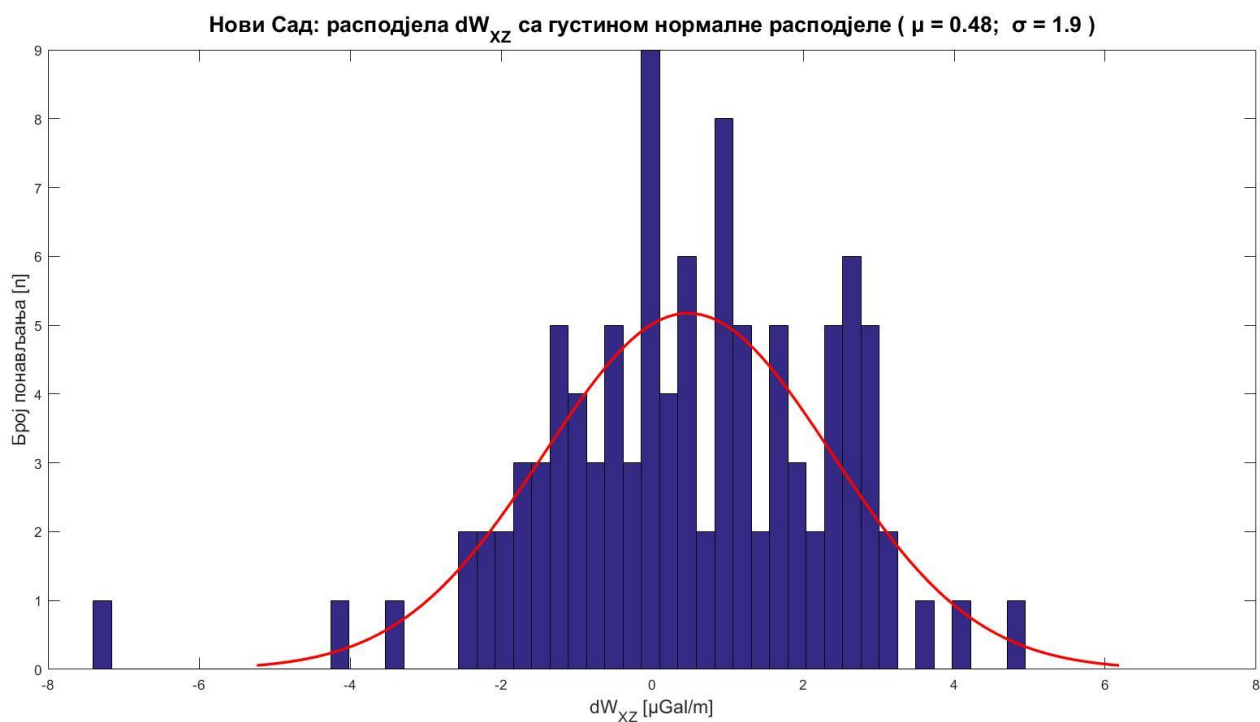


**ПРИЛОГ 6**

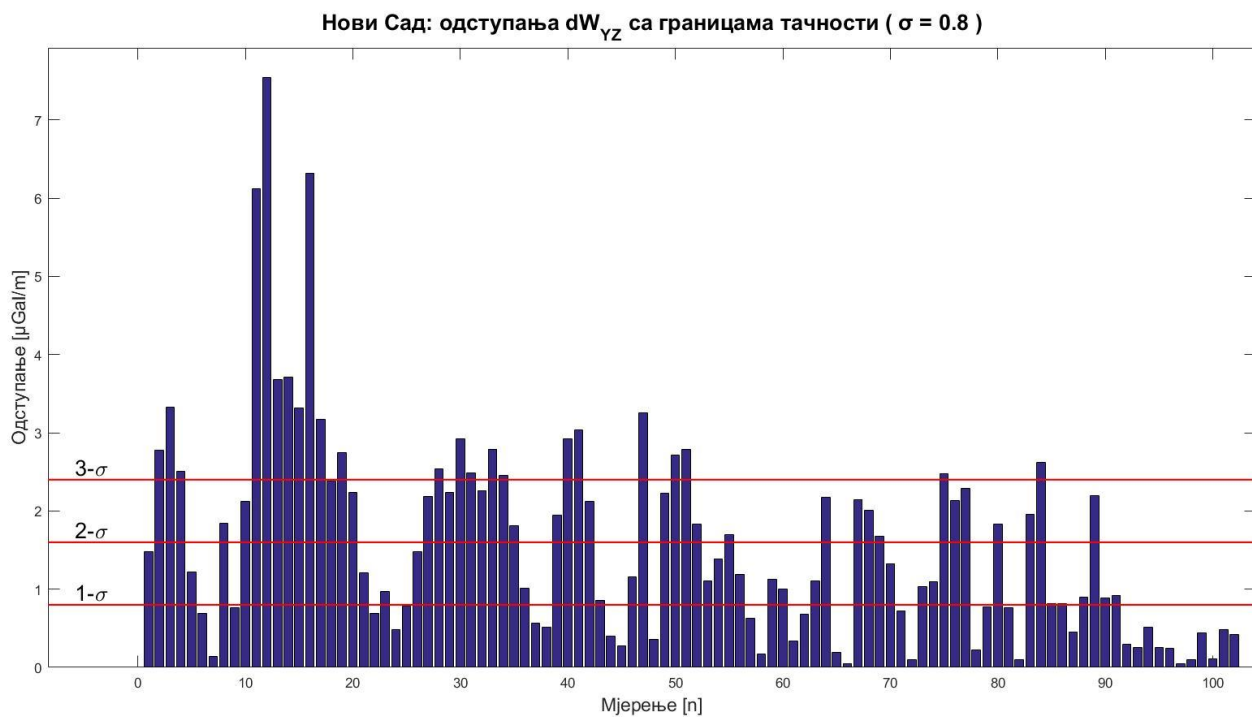
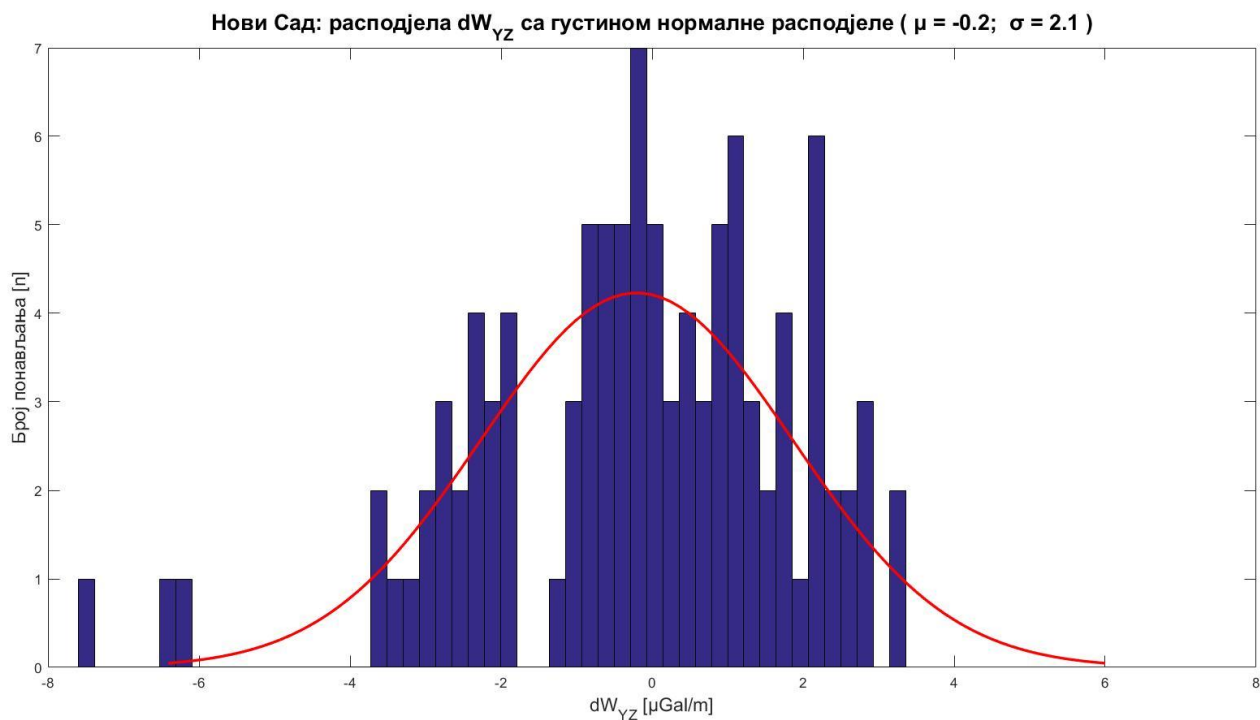




**ПРИЛОГ 6**



**ПРИЛОГ 6**



## ПРИЛОГ 7

Нови Сад: градијенти из ГГМ и одступања од мјерења

Тачка	ГГМ градијенти [E]				Одступања [E]			
	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5300	-25.3	6.4	-34.3	7.5	7.3	10.2	-26.7	-7.9
5301	-23.4	2.7	-31.9	8.9	-19.4	2.2	-28.8	-15.4
5302	-23.2	1.8	-22.9	8.9	-24.1	6.3	-19.4	-24.5
5303	-17.9	-0.5	-14.3	8.8	-10.8	12.2	-16.4	-16.3
5304	-24.5	2.6	-20.4	7.4	-6.1	11.6	-7.8	-4.9
5305	-19.8	-0.1	-13.2	7.2	-8.0	12.6	9.5	0.1
5306	-22.9	1.3	-15.5	4.9	-6.0	8.2	1.6	3.2
5307	-23.8	3.2	-17.4	0.0	34.9	9.3	-4.1	18.3
5308	-24.7	10.9	-29.4	-3.2	0.7	26.5	51.8	-11.7
5309	-22.8	10.2	-26.1	-6.5	33.3	8.9	16.5	16.0
5310	-13.4	12.2	-24.4	-14.8	-6.1	0.8	-10.0	46.3
5311	-18.3	11.6	-25.7	-11.4	-10.3	0.7	6.4	63.8
5312	-18.4	6.1	-18.4	-9.8	8.2	-8.4	10.6	26.9
5313	-13.6	8.6	-19.4	-13.9	-1.8	-4.4	-13.8	21.6
5314	-20.9	9.0	-23.1	-8.7	7.4	-9.5	27.5	23.8
5315	-15.7	10.3	-22.5	-13.2	11.2	2.4	3.4	51.4
5316	-21.5	3.8	-17.1	-4.8	27.9	-3.4	3.9	26.9
5317	-6.3	9.9	-17.6	-16.2	-8.9	-10.5	-18.2	7.6
5318	-6.3	12.0	-20.7	-17.0	-11.0	-4.2	-17.7	11.8
5319	-1.1	13.4	-20.5	-17.5	16.2	4.3	-21.7	4.8
5320	1.7	12.8	-17.6	-16.3	13.1	-0.8	-20.9	-4.2
5321	6.1	14.9	-19.2	-16.0	11.7	8.2	-21.4	-9.2
5322	9.9	14.6	-15.9	-12.3	-2.2	15.7	-25.5	-22.0
5323	12.8	16.1	-17.9	-12.0	9.6	10.1	-10.6	-18.6
5324	14.8	14.9	-14.0	-6.6	1.6	18.8	-24.1	-14.5
5325	17.7	16.3	-15.6	-5.2	5.9	16.3	-9.3	-20.1
5326	19.7	15.2	-12.6	3.5	4.6	9.4	-7.0	-18.4

## ПРИЛОГ 7

Нови Сад: градијенти из ГГМ и одступања од мјерења - наставак

Тачка	ГГМ градијенти [E]				Одступања [E]			
	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5327	18.6	12.0	-9.6	9.6	12.1	12.8	-9.0	-15.6
5328	16.1	8.5	-7.7	18.1	19.8	9.4	-4.4	-4.7
5329	18.6	12.9	-9.8	14.0	11.9	9.5	-5.3	-13.7
5330	20.6	16.1	-13.1	8.8	24.0	14.9	-5.8	-16.1
5331	21.8	16.9	-15.6	6.8	27.9	17.8	7.2	-14.0
5332	23.1	17.2	-17.7	0.8	10.1	10.7	0.4	-30.0
5333	22.7	17.3	-20.6	-7.5	-6.4	6.4	-11.7	-32.0
5334	20.6	16.9	-15.7	-0.8	4.3	12.8	-13.7	-18.9
5335	18.2	17.2	-18.7	-8.9	3.4	12.1	-11.0	-28.3
5336	12.5	16.9	-21.6	-15.6	-6.2	5.2	-18.1	-21.0
5337	6.9	16.3	-23.0	-18.1	-28.9	0.6	-20.4	-13.1
5338	-0.1	15.0	-23.4	-18.6	16.8	7.2	-15.8	1.0
5339	0.3	16.5	-27.1	-20.1	-21.0	2.9	-15.8	9.0
5340	5.3	17.5	-29.7	-22.1	-18.1	1.0	-2.6	8.1
5341	13.1	17.1	-29.6	-23.2	-13.0	-2.6	-3.2	-2.2
5342	7.8	17.1	-26.1	-20.2	-18.2	2.4	-14.4	-11.7
5343	13.9	17.2	-25.3	-18.9	-17.8	1.8	-14.7	-23.0
5344	19.8	16.4	-26.7	-19.8	-9.6	-2.9	-20.1	-17.2
5345	23.7	16.3	-24.3	-14.2	-14.8	-1.6	-17.1	-27.4
5346	25.1	16.5	-21.5	-6.4	-16.3	7.1	-19.0	-38.7
5347	25.9	14.5	-26.7	-18.9	-7.3	-7.9	-8.9	-12.7
5348	21.7	15.3	-28.8	-23.1	-15.3	-6.6	-13.3	1.1
5349	18.9	15.8	-30.6	-25.2	2.4	-0.4	-2.4	0.7
5350	25.8	13.1	-29.8	-26.3	3.8	10.8	0.9	1.1
5351	28.3	12.5	-28.0	-22.7	-2.0	-2.7	4.2	-4.6
5352	32.1	10.6	-26.3	-18.3	2.6	-15.1	-9.3	-7.5
5353	31.4	11.6	-24.9	-12.1	15.1	-31.1	-33.6	-26.5

## ПРИЛОГ 7

Нови Сад: градијенти из ГГМ и одступања од мјерења - наставак

Тачка	ГГМ градијенти [E]				Одступања [E]			
	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5354	27.5	14.2	-21.7	-1.9	18.3	-2.0	-45.5	-18.7
5355	24.1	15.7	-19.1	4.2	18.3	4.9	-60.3	-7.6
5356	20.5	15.9	-16.9	9.6	10.4	15.6	-50.3	16.0
5357	16.5	15.7	-15.2	13.5	11.1	20.7	-25.2	13.6
5358	20.8	14.0	-19.0	8.9	22.5	14.3	-35.5	-2.4
5359	29.2	9.2	-22.5	1.0	13.1	2.2	-24.4	-8.4
5360	29.8	5.9	-22.3	2.1	7.4	3.0	-4.8	-1.5
5361	23.6	9.1	-21.2	6.7	7.7	7.2	-9.2	-2.3
5362	23.1	11.6	-20.7	6.9	30.5	7.5	-16.8	-4.4
5363	16.0	13.0	-18.6	11.3	17.3	13.0	-6.6	-10.6
5364	13.4	14.9	-15.9	14.1	11.2	19.7	-24.0	13.0
5365	9.2	15.0	-12.1	17.8	14.9	13.4	-16.7	17.4
5366	5.0	-4.4	-7.5	24.3	-5.1	-1.1	-13.0	3.7
5367	11.4	1.4	-6.5	22.3	13.9	2.4	-9.1	2.2
5368	15.7	6.5	-7.1	16.1	15.5	8.7	-9.0	-0.6
5369	17.0	10.0	-8.3	8.8	8.1	10.7	-16.9	-4.5
5370	15.8	12.7	-10.3	0.0	8.1	11.9	-21.0	-7.3
5371	11.9	13.8	-12.7	-8.2	-1.6	10.3	-25.1	-12.2
5372	6.0	13.0	-14.1	-13.3	-4.5	6.7	-26.3	-2.9
5373	-0.8	11.0	-15.3	-15.9	-9.9	1.7	-31.0	-2.7
5374	-9.4	7.5	-16.1	-14.9	-3.9	-11.6	-19.9	10.1
5375	-14.3	4.2	-15.0	-10.9	6.0	-17.3	-5.7	8.6
5376	-17.5	1.3	-13.4	-4.8	15.2	-14.1	8.4	20.4
5377	-17.6	-0.8	-11.1	4.7	4.2	2.8	16.0	-0.3
5378	-13.8	-1.4	-9.6	7.4	0.1	7.4	14.8	15.1
5379	-10.0	-1.5	-9.0	8.1	-11.4	16.0	-10.3	-10.3
5380	-7.5	-1.6	-8.6	7.2	6.1	5.4	8.1	14.8

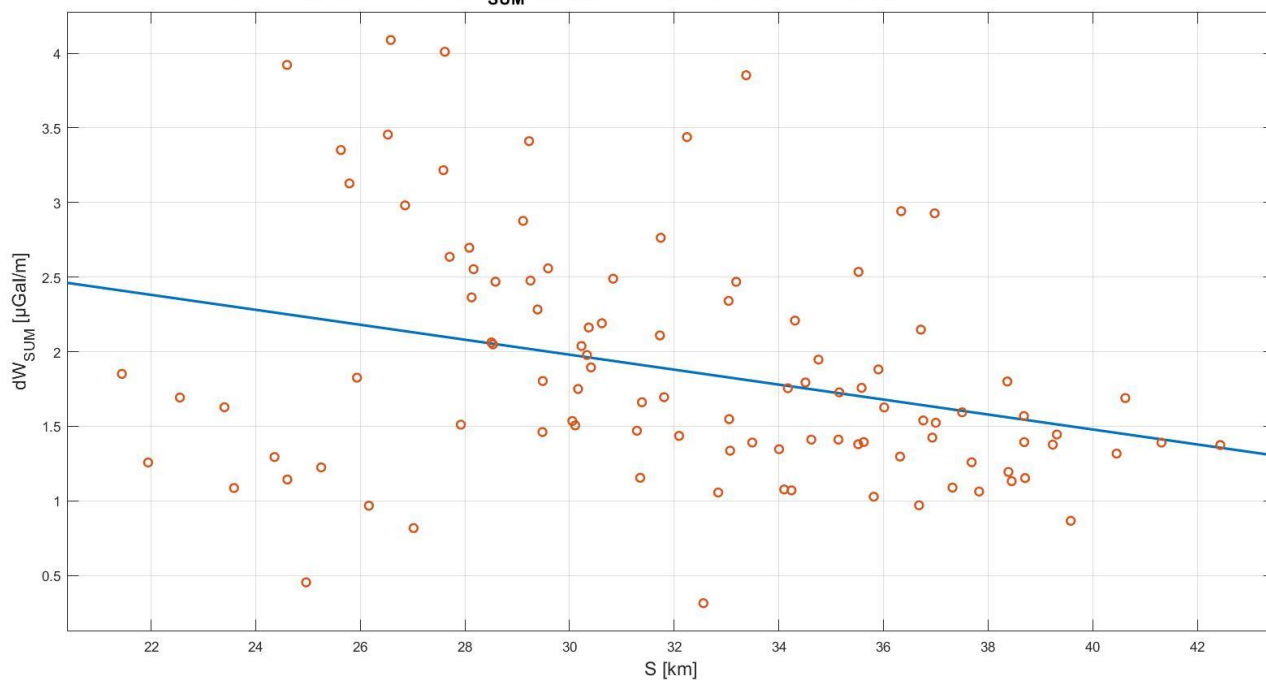
## ПРИЛОГ 7

Нови Сад: градијенти из ГГМ и одступања од мјерења - наставак

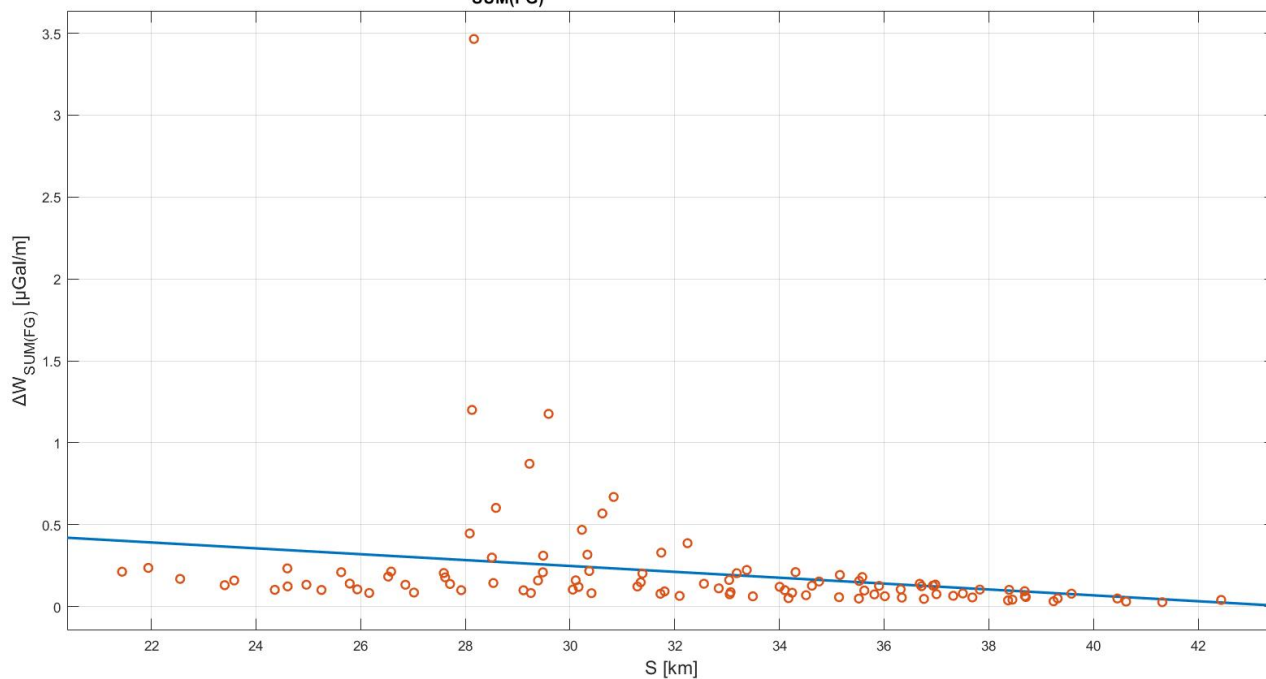
Тачка	ГГМ градијенти [E]				Одступања [E]			
	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$	$W_{\Delta}$	$2W_{XY}$	$W_{XZ}$	$W_{YZ}$
5381	-12.9	-1.4	-10.1	3.8	-1.9	0.1	9.0	4.7
5382	-13.9	2.1	-13.4	-7.7	9.3	-13.8	5.3	11.9
5383	-10.6	5.5	-14.5	-12.8	2.1	-12.9	-16.4	10.9
5384	-4.9	9.2	-14.4	-15.4	9.3	-3.0	-32.7	-7.1
5385	1.8	12.0	-13.3	-14.5	4.3	-0.1	-32.8	-6.5
5386	8.0	13.2	-11.2	-9.9	-1.0	5.4	-32.4	-5.3
5387	12.5	12.1	-8.8	-2.3	-2.9	11.5	-26.9	-8.9
5388	13.2	2.9	-5.5	15.3	8.0	8.9	-14.7	-6.7
5389	14.3	8.2	-6.5	6.9	5.3	7.3	-21.2	-2.0
5390	9.4	12.2	-7.2	-3.8	-0.6	11.5	-30.0	-13.0
5391	5.2	13.6	-9.4	-9.7	5.0	8.4	-25.7	-6.7
5392	-0.8	12.2	-12.4	-14.1	-0.8	5.9	-27.3	-10.0
5393	-6.9	8.8	-14.0	-13.9	2.0	-6.4	-28.7	-8.9
5394	-3.5	13.2	-11.5	-12.5	2.4	6.2	-32.9	-10.2
5395	1.4	14.6	-8.3	-9.8	-1.3	8.7	-27.3	-7.3
5396	5.7	13.1	-5.3	-4.7	-0.3	11.9	-27.9	-5.2
5397	7.9	8.1	-1.9	3.0	5.7	7.1	-15.2	2.0
5398	4.0	11.7	-0.3	-0.6	-3.9	14.0	-21.3	3.2
5399	2.4	11.7	2.6	0.7	1.5	12.2	-16.5	1.8
5400	3.6	5.9	7.0	5.0	-3.5	6.3	-11.6	10.0
5401	3.5	5.2	5.3	5.0	-4.3	8.4	-14.2	-1.2

**ПРИЛОГ 8**

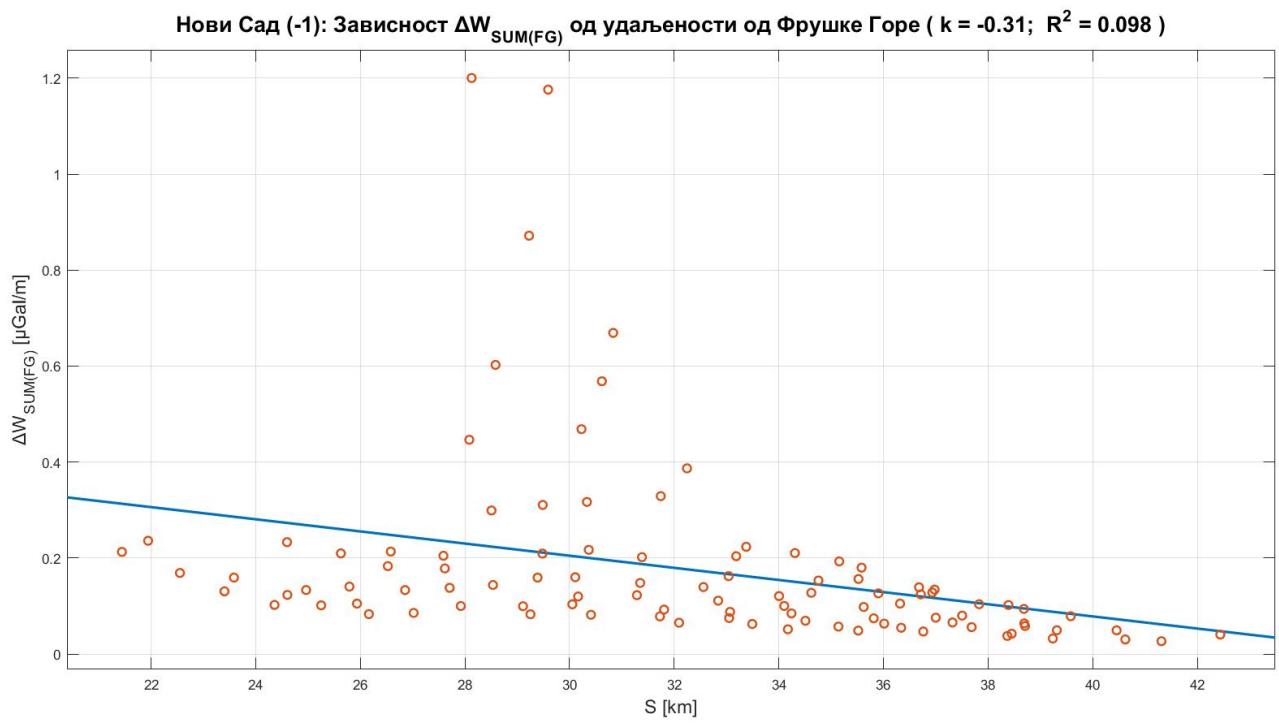
Нови Сад: зависност  $dW_{SUM}$  од удаљености од Фрушке горе (  $k = -0.31$ ;  $R^2 = 0.097$  )



Нови Сад: Зависност  $\Delta W_{SUM(FG)}$  од удаљености од Фрушке Горе (  $k = -0.23$ ;  $R^2 = 0.053$  )



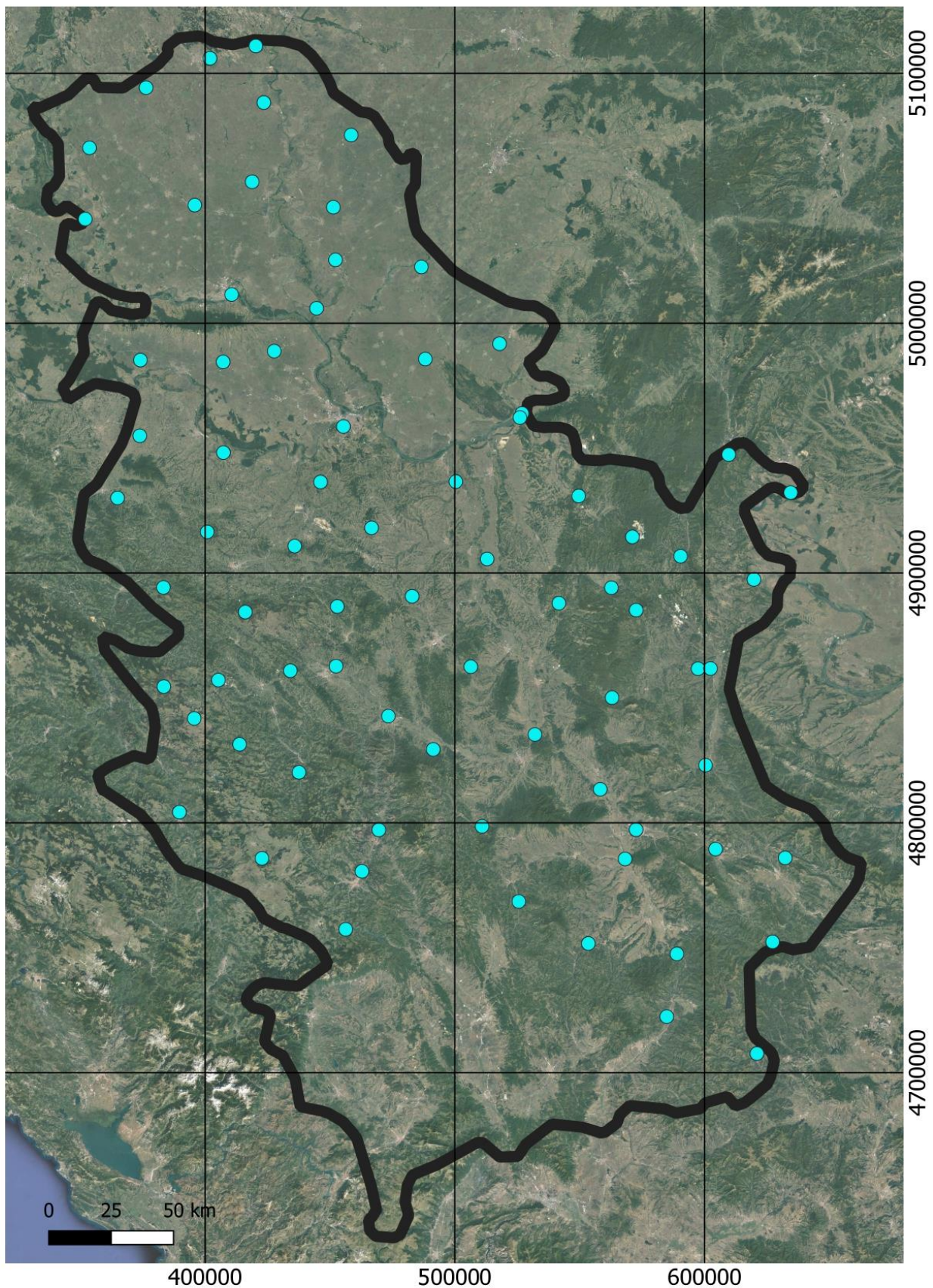
**ПРИЛОГ 8**





**ПРИЛОГ 9**

Распоред тачака са мјереним вертикалним градијентима у Србији



## ПРИЛОГ 10

Србија: измјерени вертикални градијенти

Тачка	Координате						Висина $H$ [m]	Градијент $W_{zz}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]
	$B$ [ $^{\circ}$ ' " ]			$L$ [ $^{\circ}$ ' " ]				
FR0001	44	49	42.085	21	20	27.347	71.948	318.8
FR0002	45	15	6.528	19	51	39.413	92.367	285.5
FR0003	45	34	18.603	19	39	53.831	86.836	306.3
FR0004	45	12	19.688	20	17	41.829	89.036	309.8
FR0005	43	10	38.202	20	32	33.815	476.150	200.9
FR1088	43	23	0.385	19	38	16.750	451.391	196.6
FR1105	44	46	49.361	20	26	10.505	84.447	257.3
FR1107	44	20	52.594	20	11	43.151	130.199	265.9
FR1109	43	54	58.072	20	24	28.006	250.662	258.9
FR1110	43	53	54.267	20	10	47.980	295.170	218.1
FR1111	43	51	41.695	19	49	17.320	498.555	291.4
FR1112	43	50	5.997	19	33	0.477	784.613	205.6
FR1122	44	48	48.609	21	19	49.029	76.228	328.1
FR1126	44	31	46.044	21	37	29.786	136.518	196.3
FR1127	44	22	48.639	21	53	36.523	287.733	169.1
FR1128	44	18	31.030	22	8	4.500	141.866	208.6
FR1131	43	54	7.893	22	12	49.543	153.188	306.5
FR1132	43	33	14.524	22	14	38.346	223.174	225.9
FR1135	43	37	3.670	20	53	35.683	230.376	233.7
FR1139	43	13	10.855	21	50	25.468	194.183	214.2
FR1140	42	52	30.977	22	5	22.409	280.409	249.5
FR1141	42	38	58.564	22	2	10.053	350.511	230.4
FR2134	43	40	15.053	21	23	53.943	135.967	188
FR3103	45	0	30.378	19	49	20.095	111.034	286.8
FR3104	45	2	58.749	20	4	53.404	113.714	308.3
FR3106	44	34	46.744	20	19	20.558	203.079	314.5
FR3114	45	46	13.733	19	7	3.724	87.876	301.2

## ПРИЛОГ 10

Србија: измјерени вертикални градијенти - наставак

Тачка	Координате						Висина $H$ [m]	Градијент $W_{zz}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]
	$B$ [ $^{\circ}$ ' " ]			$L$ [ $^{\circ}$ ' " ]				
FR3116	46	8	53.688	19	58	4.198	85.390	308
FR3117	45	56	41.097	20	0	46.326	96.843	319
FR3118	45	49	50.782	20	27	55.299	80.671	307.2
FR3119	45	22	50.581	20	23	22.483	81.277	310
FR3120	45	21	24.286	20	49	45.233	78.136	306.2
FR3124	44	34	59.208	21	0	19.207	82.329	292
FR3130	43	54	8.186	22	16	33.765	129.037	294.7
FR3133	43	19	29.693	21	53	45.242	201.005	313.1
GT251	44	11	52.733	21	47	6.857	311.489	271.4
NM1400	43	44	14.261	20	40	10.689	205.841	291.2
R011	43	54	56.392	21	4	48.352	366.633	332.4
R058	44	24	56.461	20	34	52.736	180.326	305.5
R102	44	10	9.995	20	47	10.730	334.871	307.7
R121	44	8	36.941	21	31	18.508	399.731	318.7
R123	44	18	14.289	21	9	45.574	93.581	300.3
R145	44	6	58.037	21	54	29.455	725.921	313
R211	43	20	25.352	21	8	6.240	344.281	275.6
R216	43	19	37.125	20	37	28.759	397.717	304.1
R245	42	58	4.617	20	27	51.117	691.219	244.3
R249	43	4	8.991	21	18	53.973	385.358	292.6
R261	43	13	15.886	20	2	56.350	1083.452	319.7
R289	43	31	57.102	20	13	39.047	541.174	295.7
R302	43	37	51.746	19	55	52.240	889.967	377.3
R352	44	7	53.214	20	24	42.118	276.218	289.1
R357	44	6	29.455	19	57	4.366	873.571	367.7
R377	44	23	41.839	19	45	17.515	324.452	311.9
R386	44	40	53.737	19	49	48.882	145.483	312.6

## ПРИЛОГ 10

Србија: измјерени вертикални градијенти - наставак

Тачка	Координате						Висина $H$ [m]	Градијент $W_{ZZ}$ [ $\mu$ Gal/m]
	$B$ [ $^{\circ}$ ' " ]			$L$ [ $^{\circ}$ ' " ]				
R398	44	44	13.479	19	24	22.013	92.004	306.4
R404	44	30	41.260	19	18	0.773	191.086	287.2
R411	44	11	32.403	19	32	22.077	758.689	341.9
R430	45	0	35.602	19	24	6.363	80.766	313.1
R485	45	30	48.462	19	6	16.273	86.702	320.8
R495	45	39	31.479	19	57	28.818	80.749	310.5
R526	45	59	29.693	19	24	11.198	118.710	313.3
R531	46	6	5.390	19	43	53.120	110.271	323.6
R534	44	40	19.369	22	23	5.257	86.435	325.3
R542	44	31	50.821	22	41	38.887	54.210	303.8
R561	44	13	13.622	22	30	2.686	49.936	287.8
R584	43	48	5.643	21	47	1.034	354.461	298.7
R616	43	28	17.982	21	43	14.820	170.442	310.5
R634	43	15	4.148	22	17	15.881	356.662	297.4
R647	43	12	54.457	22	37	48.173	606.237	247.9
R672	42	54	57.514	21	39	22.130	498.459	309
R679	42	54	47.700	22	33	36.459	765.411	246
R716	42	30	41.913	22	28	24.943	784.872	240.8
R766A	45	1	29.039	20	51	1.157	139.713	313.4
R789A	45	4	46.554	21	13	41.089	84.481	317.2
R804	45	34	12.768	20	22	36.260	79.111	307.7
VGGRAV	43	43	18.881	19	42	14.309	977.748	282.6

## ПРИЛОГ 11

Србија: моделовани вертикални градијенти и одступања од мјерења

Тачка	Моделовани градијент	Одступање
	$W_{zz}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	$\Delta W_{zz}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]
FR0001	315.99	-2.81
FR0002	278.82	-6.68
FR0003	316	9.7
FR0004	305.82	-3.98
FR0005	227.24	26.34
FR1088	196.22	-0.38
FR1105	287.73	30.43
FR1107	290.97	25.07
FR1109	311.95	53.05
FR1110	170.59	-47.51
FR1111	342.38	50.98
FR1112	259.73	54.13
FR1122	277.24	-50.86
FR1126	225.69	29.39
FR1127	200.82	31.72
FR1128	236.57	27.97
FR1131	319.1	12.6
FR1132	251.88	25.98
FR1135	289.14	55.44
FR1139	218.59	4.39
FR1140	213.15	-36.35
FR1141	228.05	-2.35
FR2134	235.31	47.31
FR3103	310.19	23.39
FR3104	307.76	-0.54
FR3106	339.13	24.63
FR3114	315.08	13.88

## ПРИЛОГ 11

Србија: моделовани вертикални градијенти и одступања од мјерења - наставак

Тачка	Моделовани градијент	Одступање
	$W_{zz}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	$\Delta W_{zz}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]
FR3116	312.97	4.97
FR3117	346.99	27.99
FR3118	292.34	-14.86
FR3119	315.06	5.06
FR3120	302.85	-3.35
FR3124	307.86	15.86
FR3130	299.11	4.41
FR3133	321.04	7.94
GT251	292.31	20.91
NM1400	315.97	24.77
R011	344.55	12.15
R058	320.47	14.97
R102	332.14	24.44
R121	323.45	4.75
R123	319.8	19.5
R145	309.4	-3.6
R211	268.45	-7.15
R216	299.92	-4.18
R245	203.56	-40.74
R249	302.31	9.71
R261	325.7	6
R289	289.68	-6.02
R302	380.82	3.52
R352	314.73	25.63
R357	349.61	-18.09
R377	333.13	21.23
R386	324.69	12.09



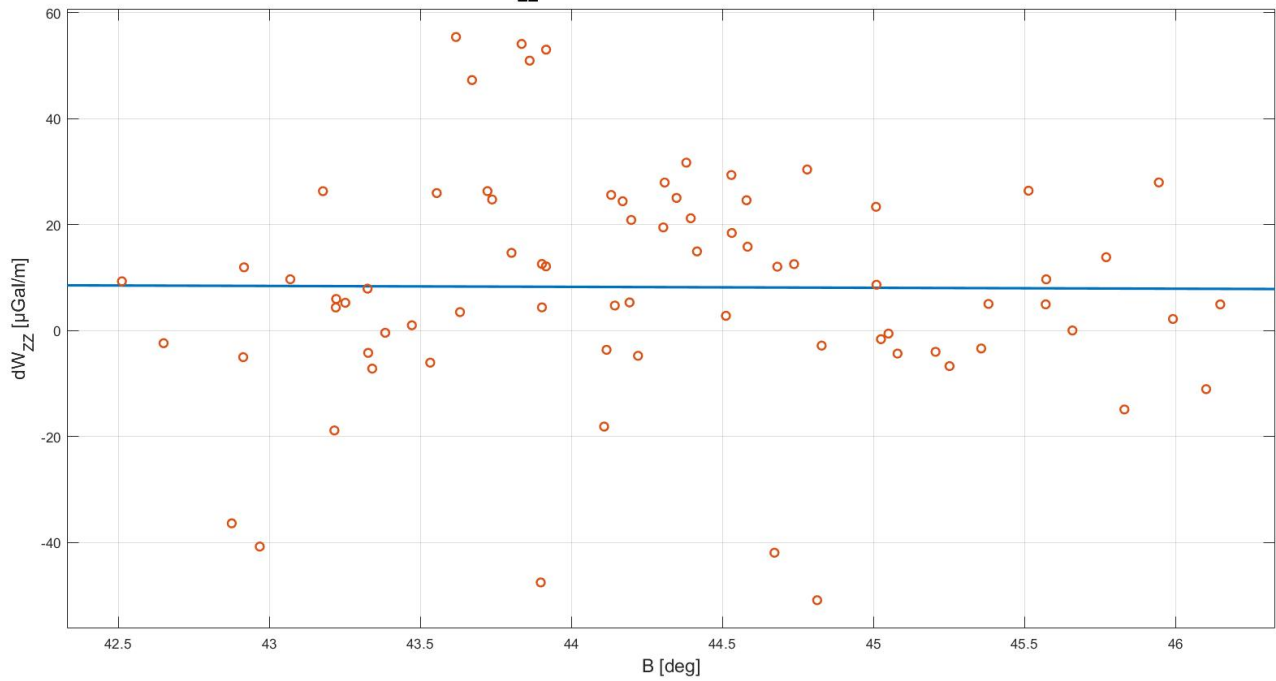
## ПРИЛОГ 11

Србија: моделовани вертикални градијенти и одступања од мјерења - наставак

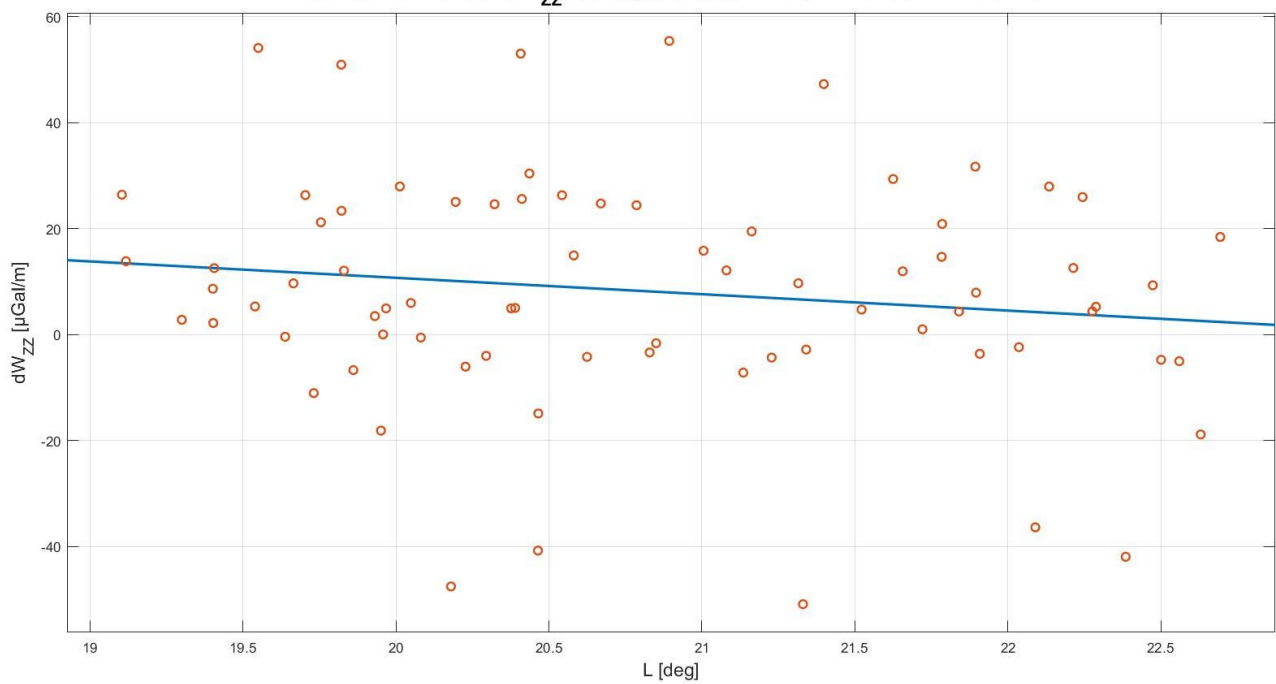
Тачка	Моделовани градијент	Одступање
	$W_{zz}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]	$\Delta W_{zz}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]
R398	318.97	12.57
R404	290.02	2.82
R411	347.24	5.34
R430	321.78	8.68
R485	347.23	26.43
R495	310.55	0.05
R526	315.52	2.22
R531	312.58	-11.02
R534	283.4	-41.9
R542	322.25	18.45
R561	283.07	-4.73
R584	313.4	14.7
R616	311.53	1.03
R634	302.68	5.28
R647	229.08	-18.82
R672	320.97	11.97
R679	241.01	-4.99
R716	250.13	9.33
R766A	311.8	-1.6
R789A	312.89	-4.31
R804	312.68	4.98
VGGRAV	308.95	26.35

**ПРИЛОГ 12**

Србија: зависност  $dW_{ZZ}$  од геодетске ширине (  $k = -0.0074$ ;  $R^2 = 5.5e-05$  )

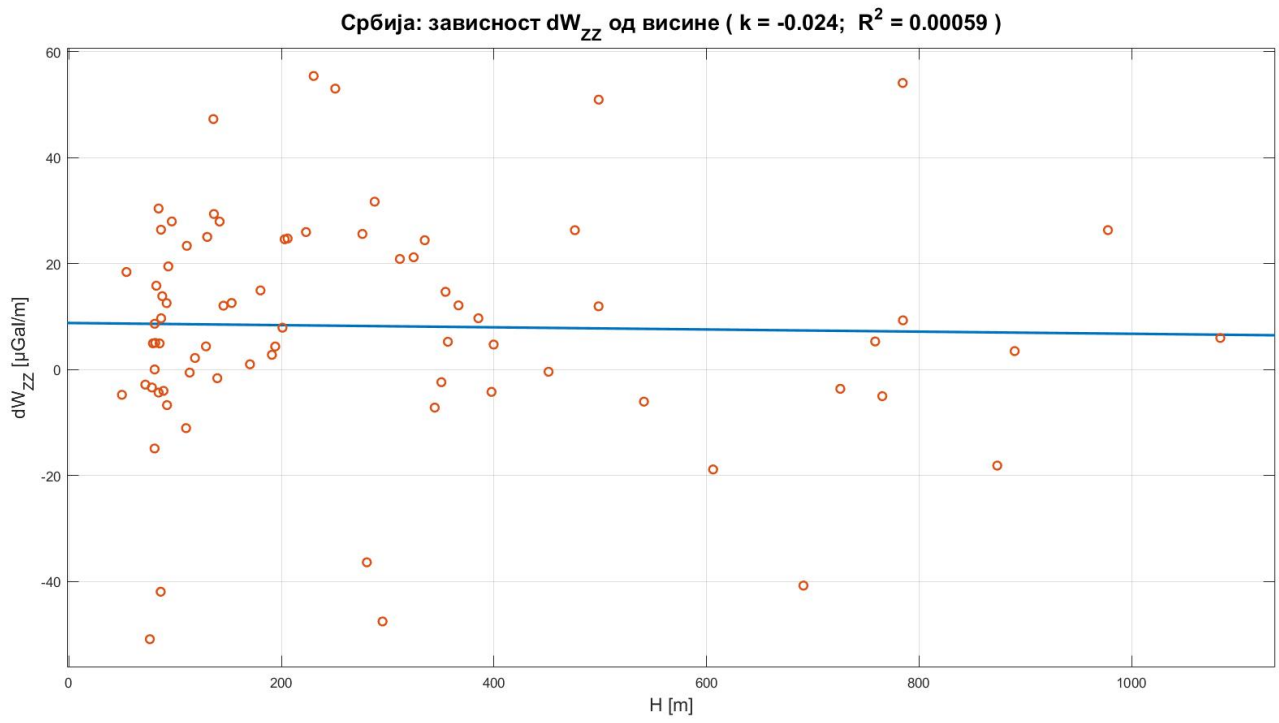


Србија: зависност  $dW_{ZZ}$  од геодетске дужине (  $k = -0.15$ ;  $R^2 = 0.022$  )

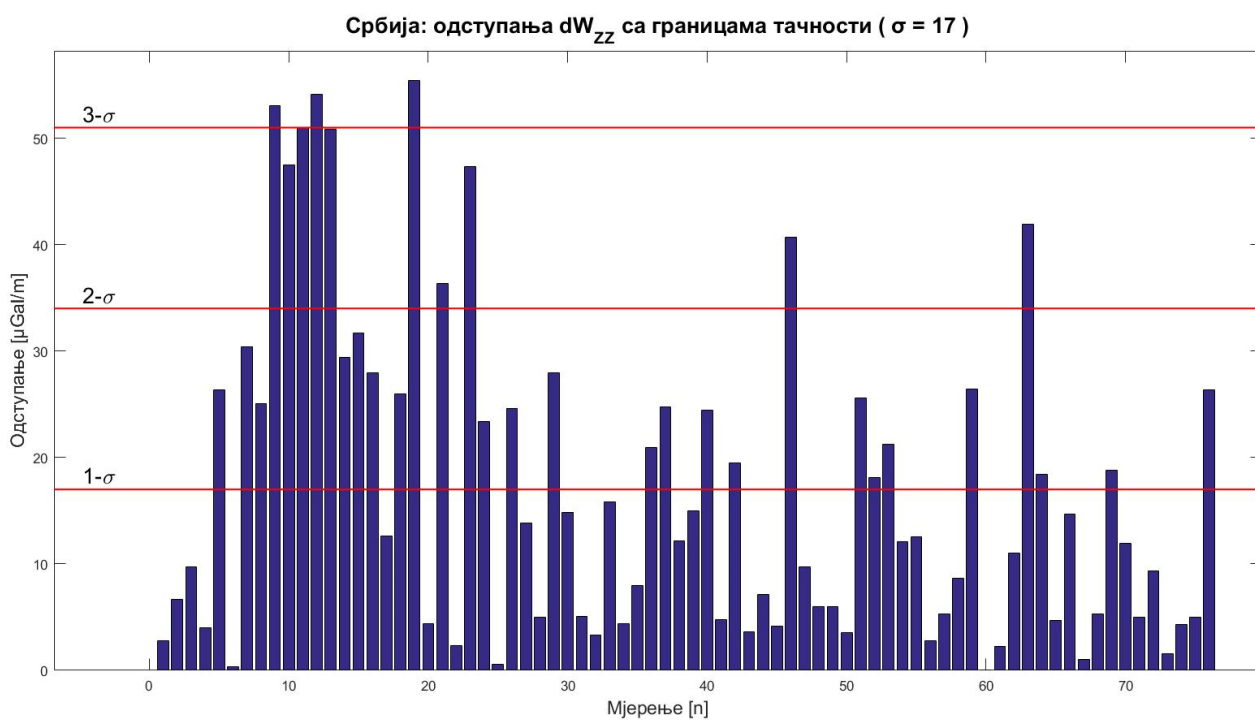
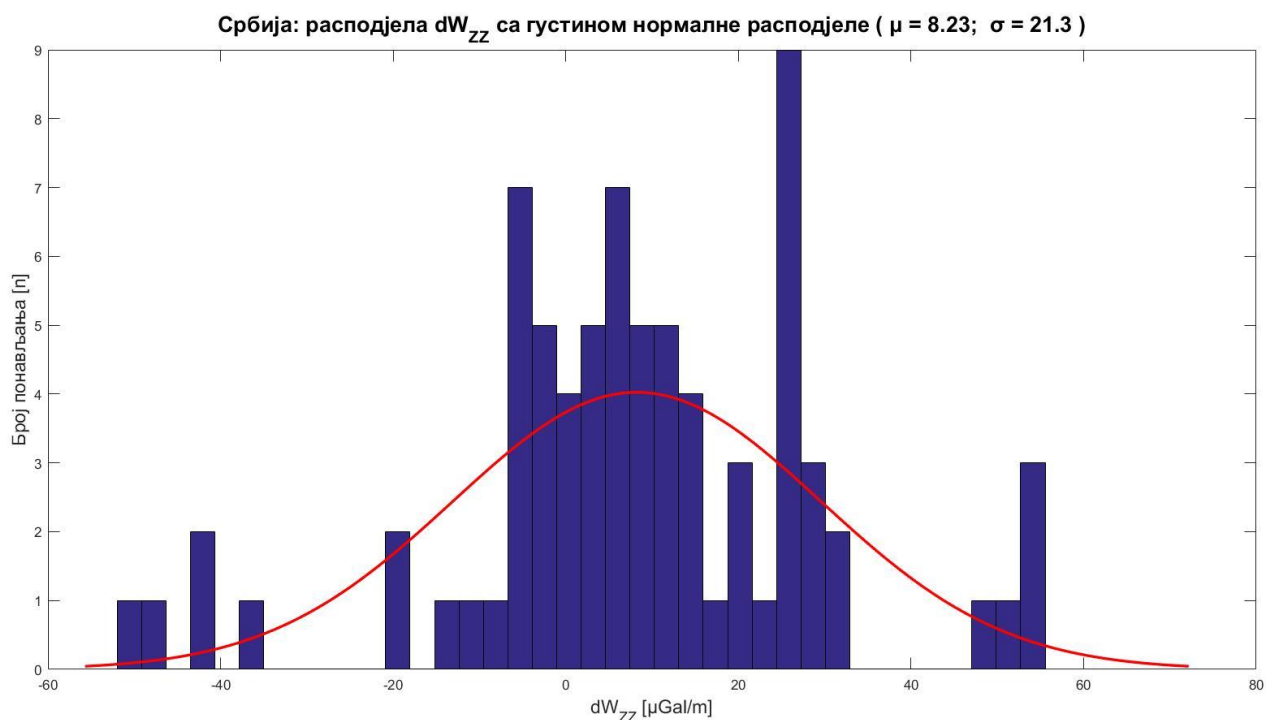




**ПРИЛОГ 12**



**ПРИЛОГ 13**



## ПРИЛОГ 14

Србија: вертикални градијенти из ГГМ и одступања од мјерења

Тачка	ГГМ градијент	Одступање
	$W_{ZZ}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]	$\Delta W_{ZZ}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]
FR0001	310.61	8.19
FR0002	308.89	-23.39
FR0003	308.74	-2.44
FR0004	309.16	0.64
FR0005	304.45	-103.55
FR1088	296.01	-99.41
FR1105	309.51	-52.21
FR1107	308.32	-42.42
FR1109	306.09	-47.19
FR1110	310.09	-91.99
FR1111	307.94	-16.54
FR1112	312.71	-107.11
FR1122	310.11	17.99
FR1126	307.98	-111.68
FR1127	307.12	-138.02
FR1128	304.79	-96.19
FR1131	307.10	-0.60
FR1132	305.05	-79.15
FR1135	301.33	-67.63
FR1139	307.71	-93.51
FR1140	302.75	-53.25
FR1141	299.37	-68.97
FR2134	306.12	-118.12
FR3103	304.56	-17.76
FR3104	309.36	-1.06
FR3106	308.17	6.33
FR3114	310.63	-9.43

## ПРИЛОГ 14

Србија: вертикални градијенти из ГГМ и одступања од мјерења - наставак

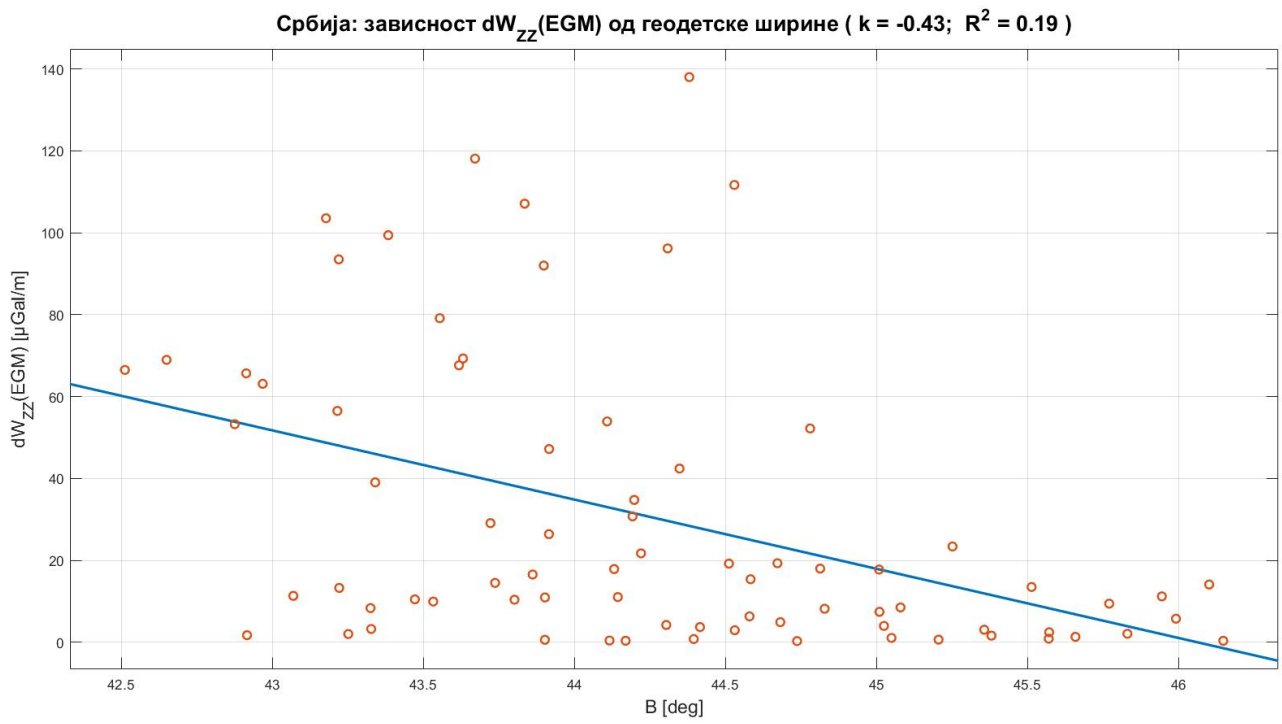
Тачка	ГГМ градијент	Одступање
	$W_{ZZ}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]	$\Delta W_{ZZ}$ [ $\mu\text{Gal}/\text{m}$ ]
FR3116	308.36	-0.36
FR3117	307.80	11.20
FR3118	309.28	-2.08
FR3119	308.39	1.61
FR3120	309.27	-3.07
FR3124	307.40	-15.40
FR3130	305.64	-10.94
FR3133	304.75	8.35
GT251	306.16	-34.76
NM1400	305.70	-14.50
R011	305.99	26.41
R058	309.21	-3.71
R102	308.07	-0.37
R121	307.67	11.03
R123	304.53	-4.23
R145	313.43	-0.43
R211	314.65	-39.05
R216	300.85	3.25
R245	307.42	-63.12
R249	303.94	-11.34
R261	306.43	13.27
R289	305.64	-9.94
R302	307.99	69.31
R352	306.98	-17.88
R357	313.77	53.93
R377	311.11	0.79
R386	307.69	4.91

## ПРИЛОГ 14

Србија: вертикални градијенти из ГГМ и одступања од мјерења - наставак

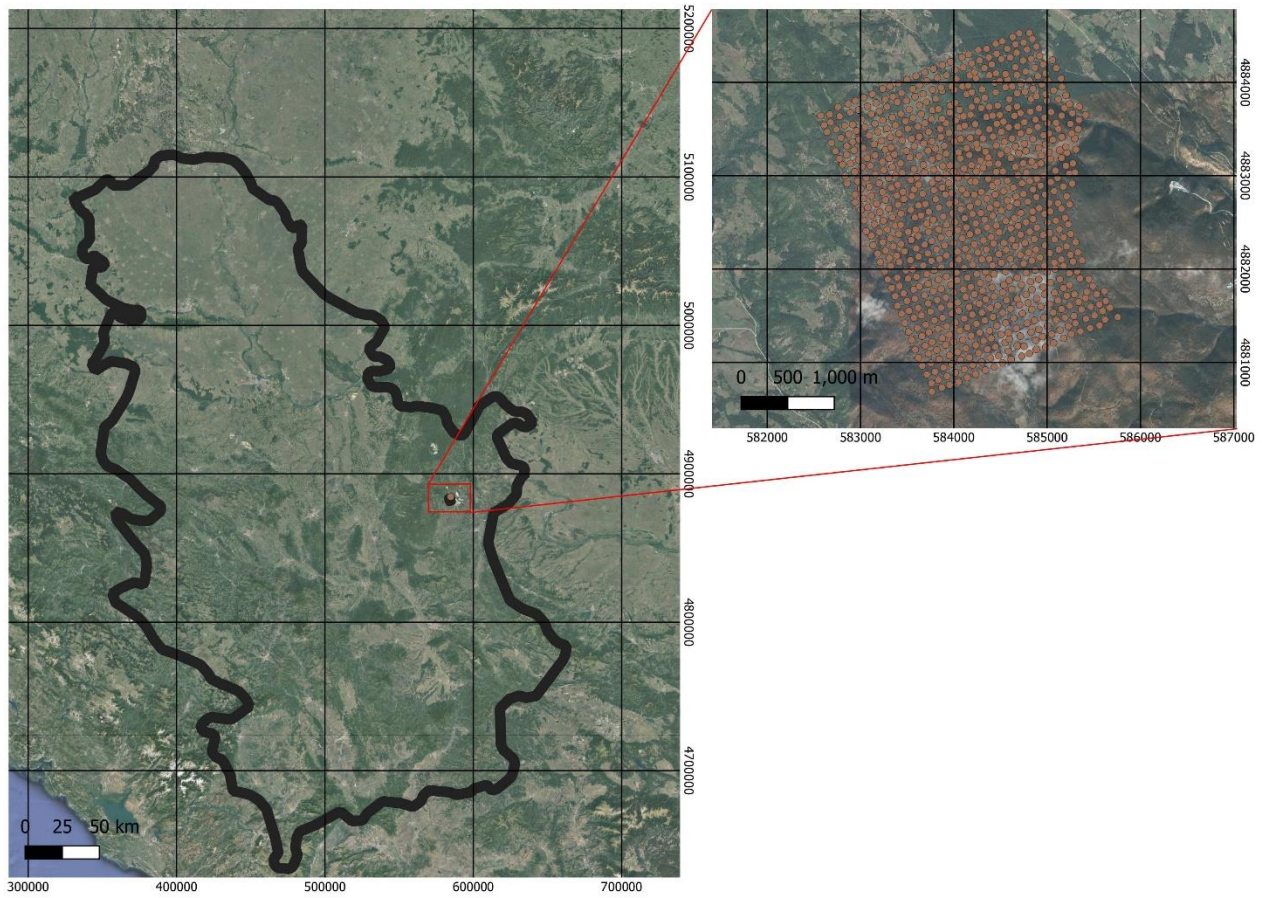
Тачка	ГГМ градијент	Одступање
	$W_{zz}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]	$\Delta W_{zz}$ [ $\mu\text{Gal/m}$ ]
R398	306.70	-0.30
R404	306.41	-19.21
R411	311.16	30.74
R430	305.66	7.44
R485	307.29	13.51
R495	309.17	1.33
R526	307.55	5.75
R531	309.49	14.11
R534	306.00	19.30
R542	306.74	-2.94
R561	309.52	-21.72
R584	309.10	-10.40
R616	300.02	10.48
R634	299.41	-2.01
R647	304.40	-56.50
R672	307.27	1.73
R679	311.67	-65.67
R716	307.31	-66.51
R766A	309.41	3.99
R789A	308.70	8.50
R804	308.58	-0.88
VGGRAV	311.70	-29.10

**ПРИЛОГ 15**



### ПРИЛОГ 16

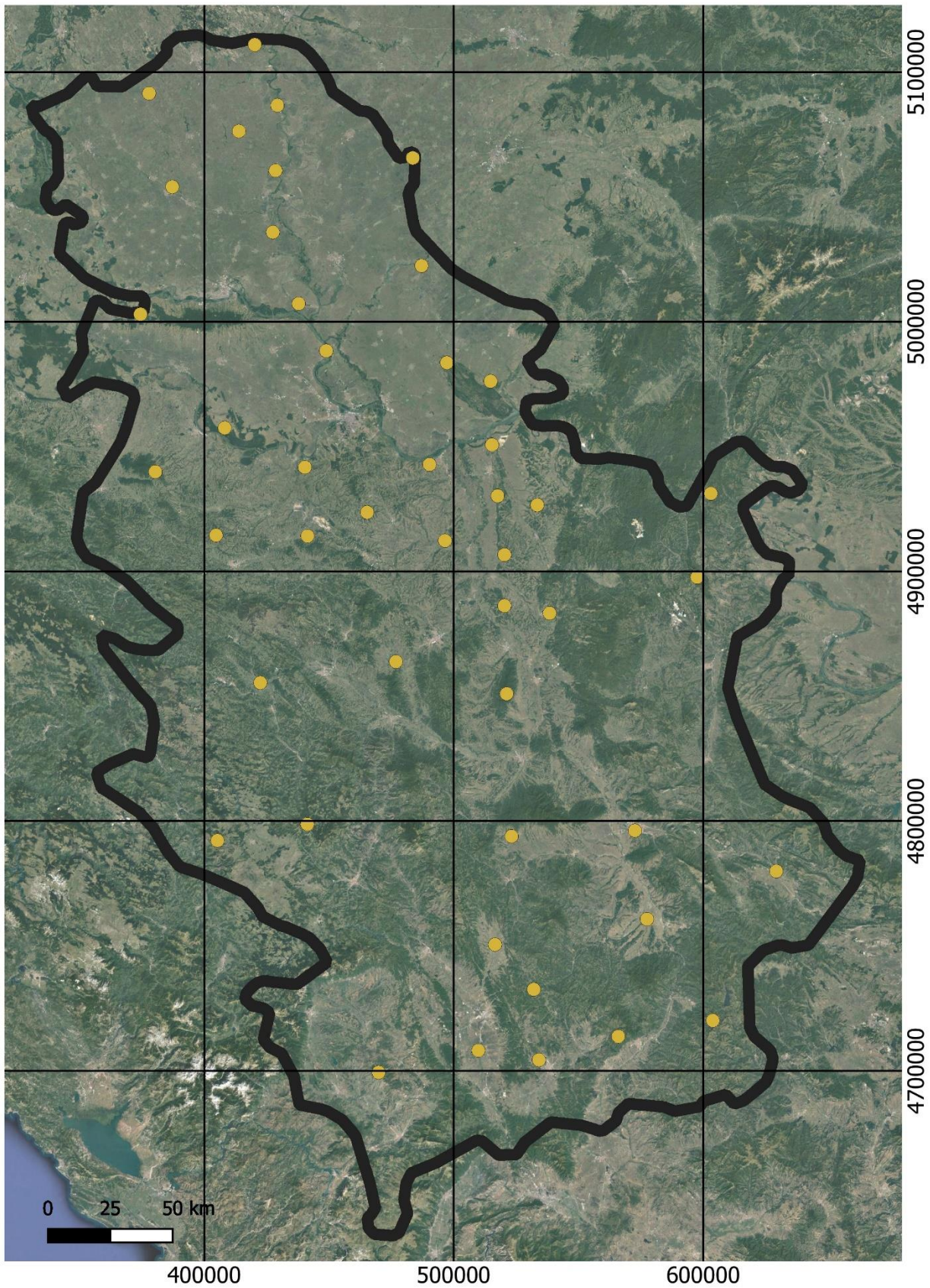
Географски положај гравиметријског полигона у Бору и распоред тачака





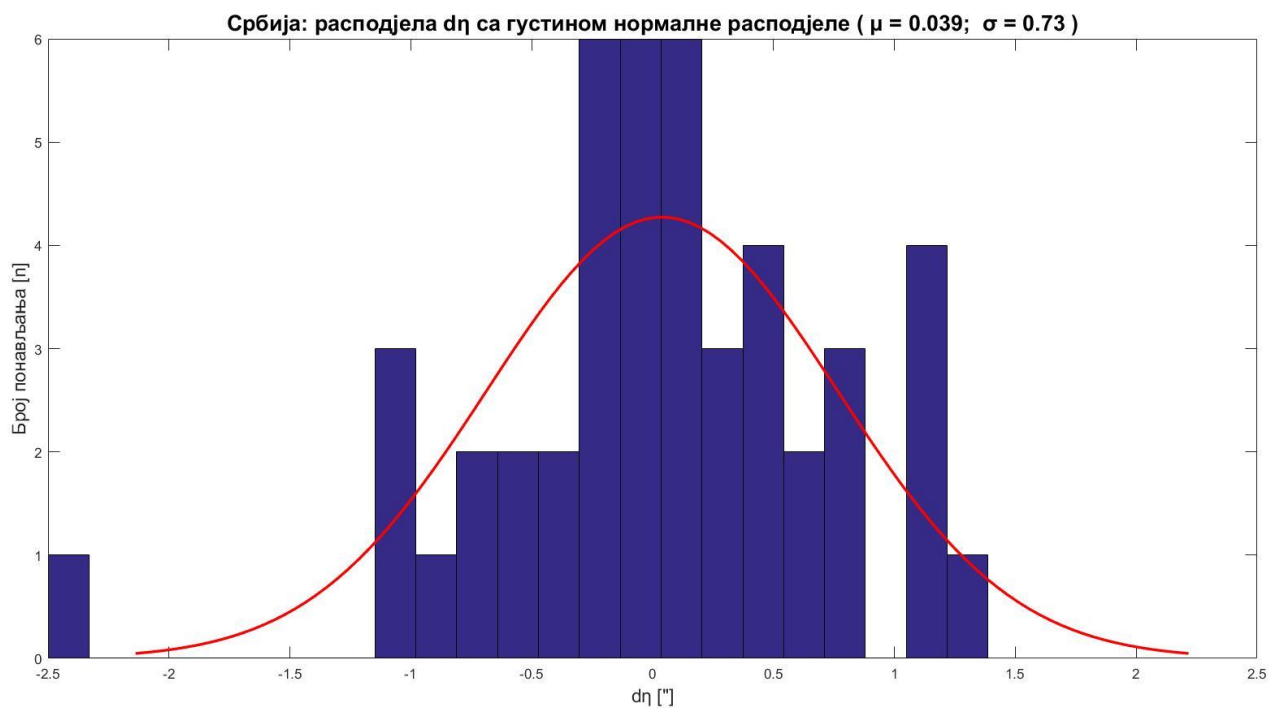
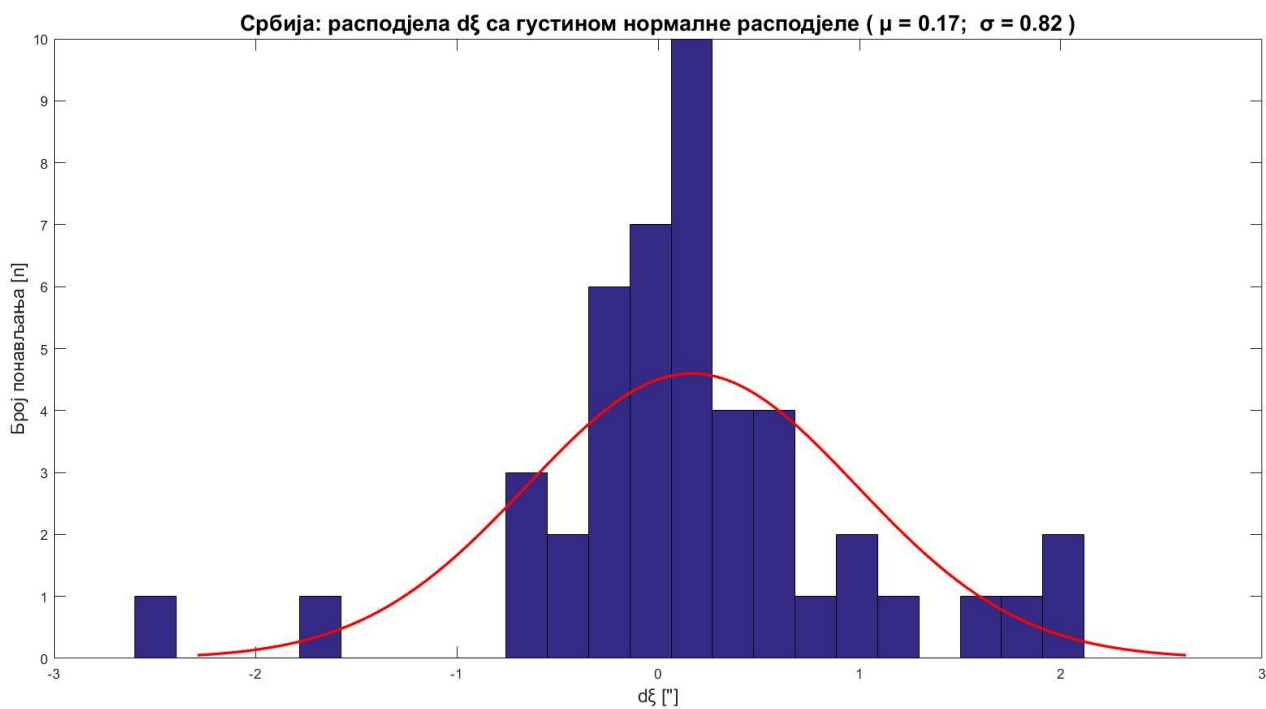
**ПРИЛОГ 17**

Распоред Лапласових тачака у Србији



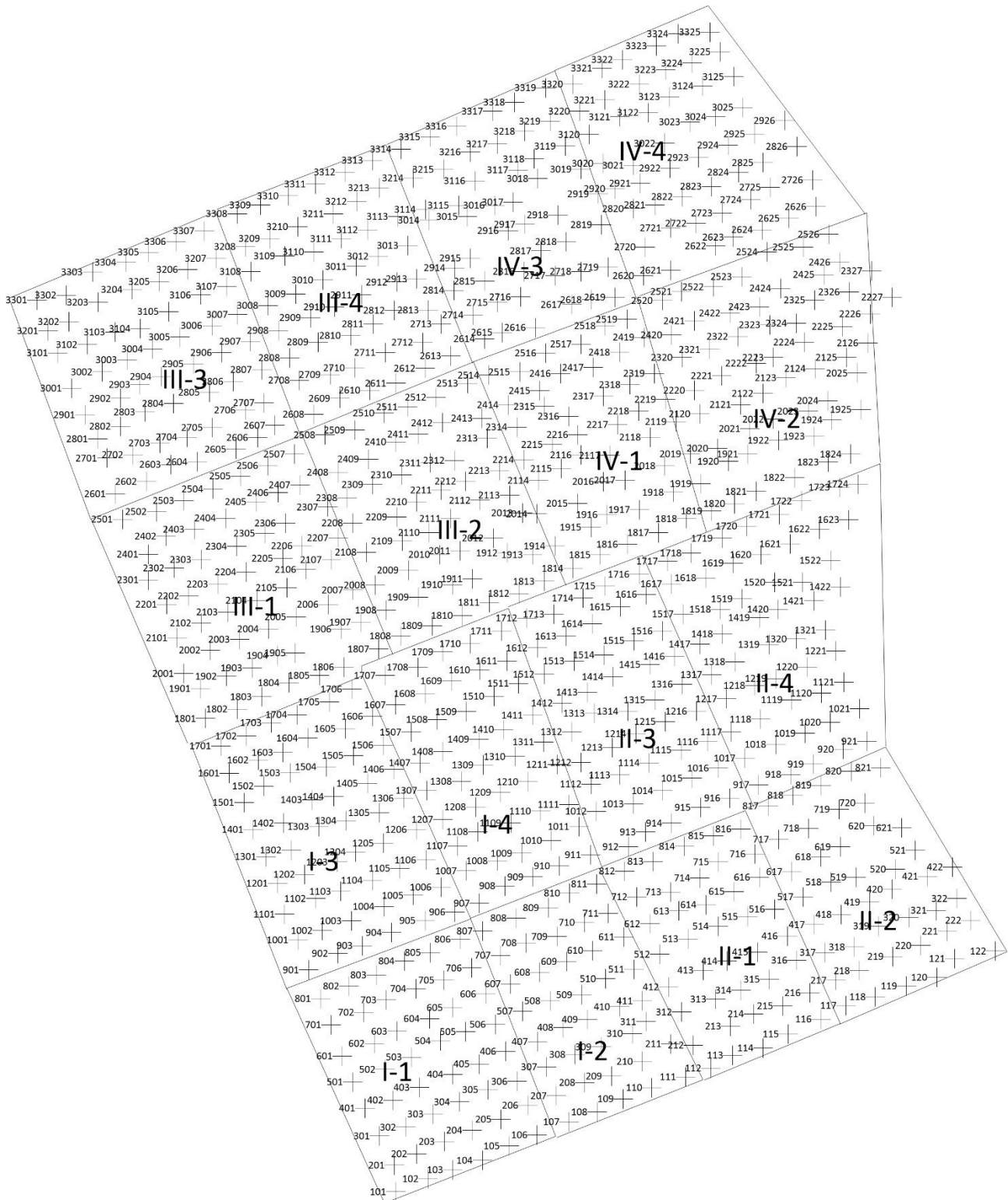


**ПРИЛОГ 18**

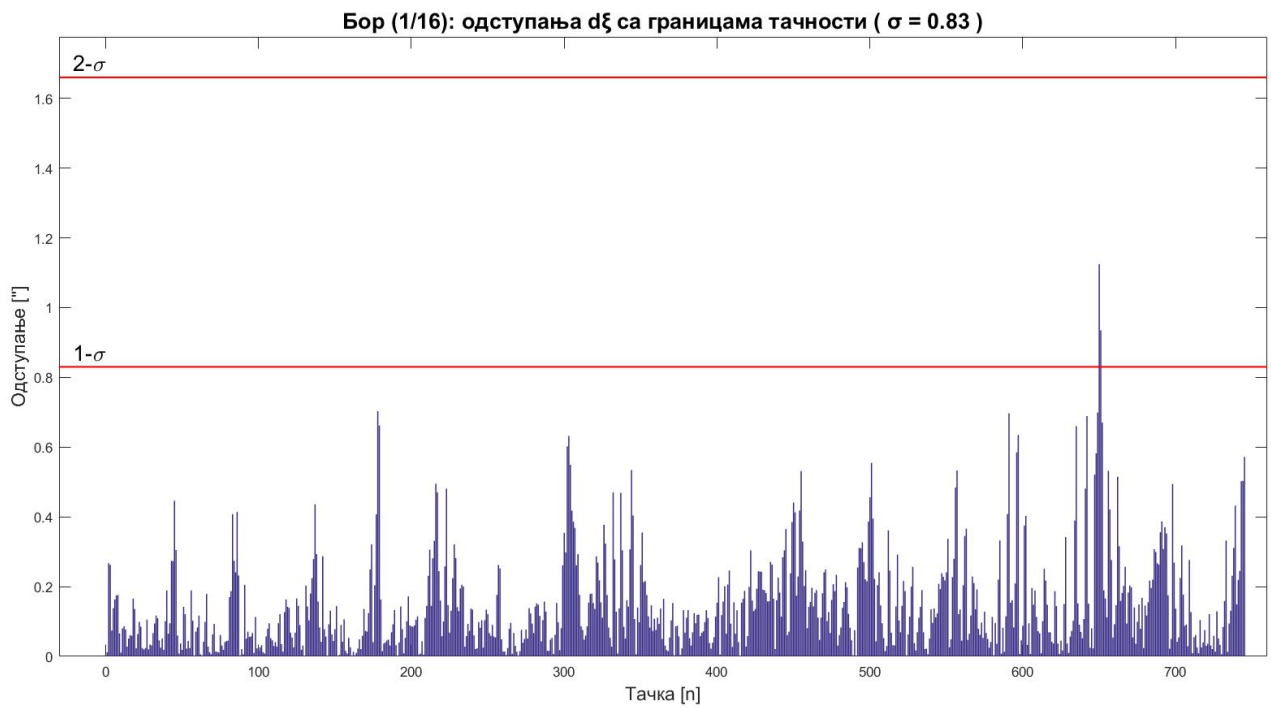
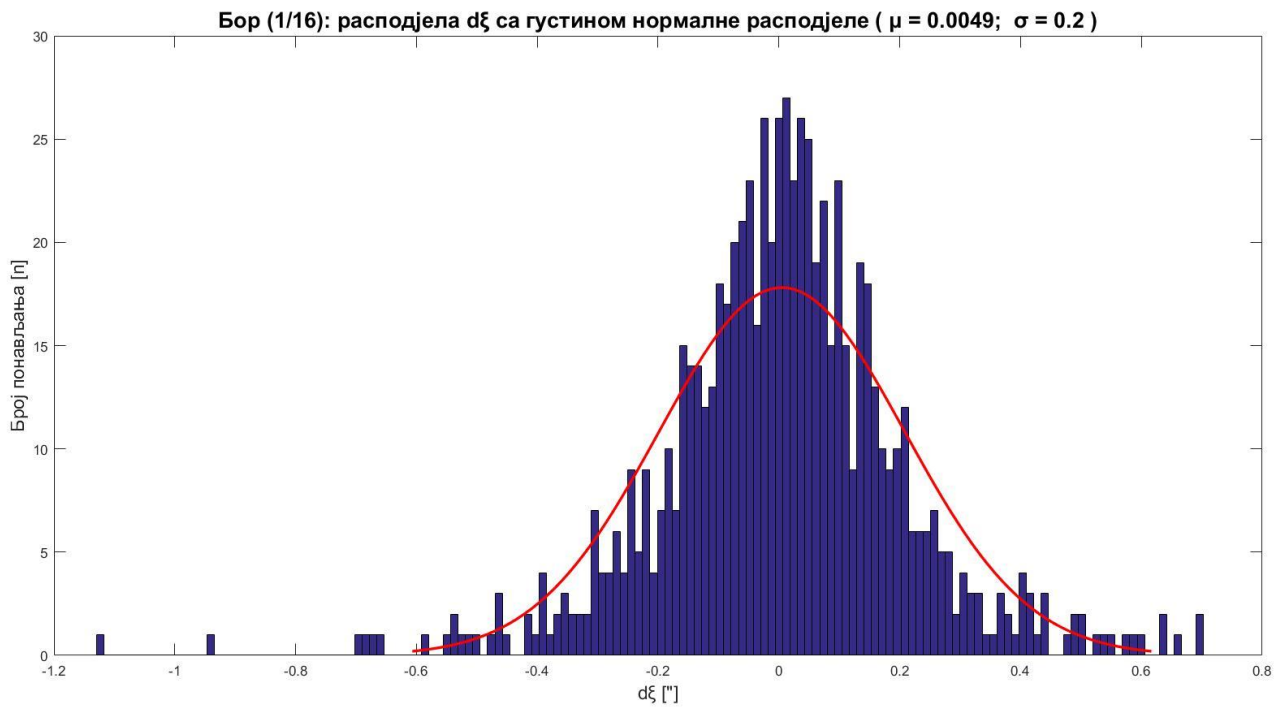


**ПРИЛОГ 19**

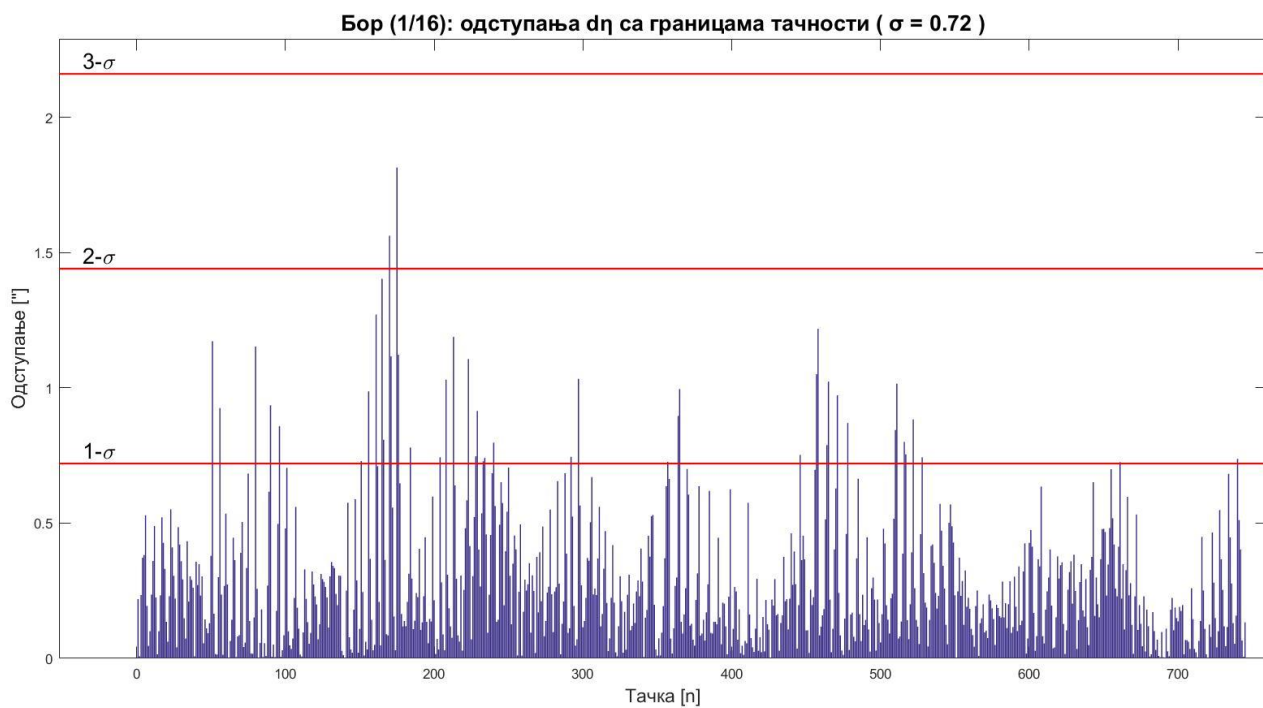
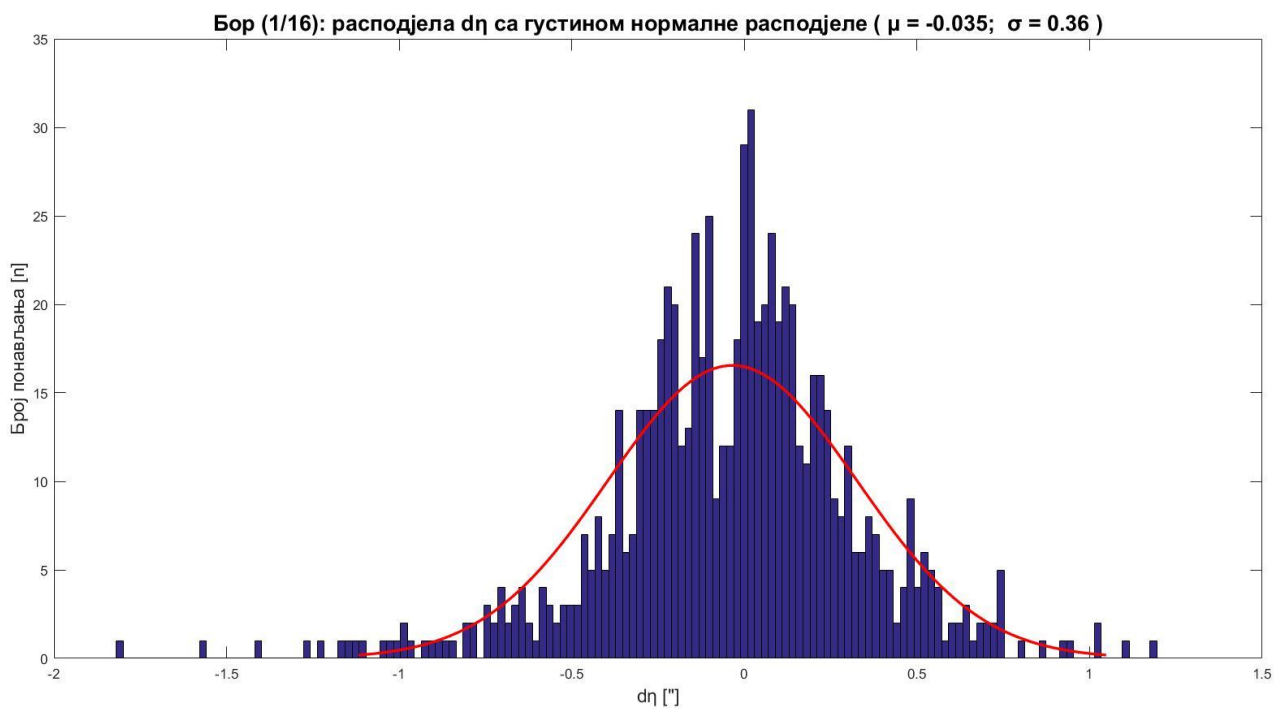
Подјела полигона у Бору на сегменте



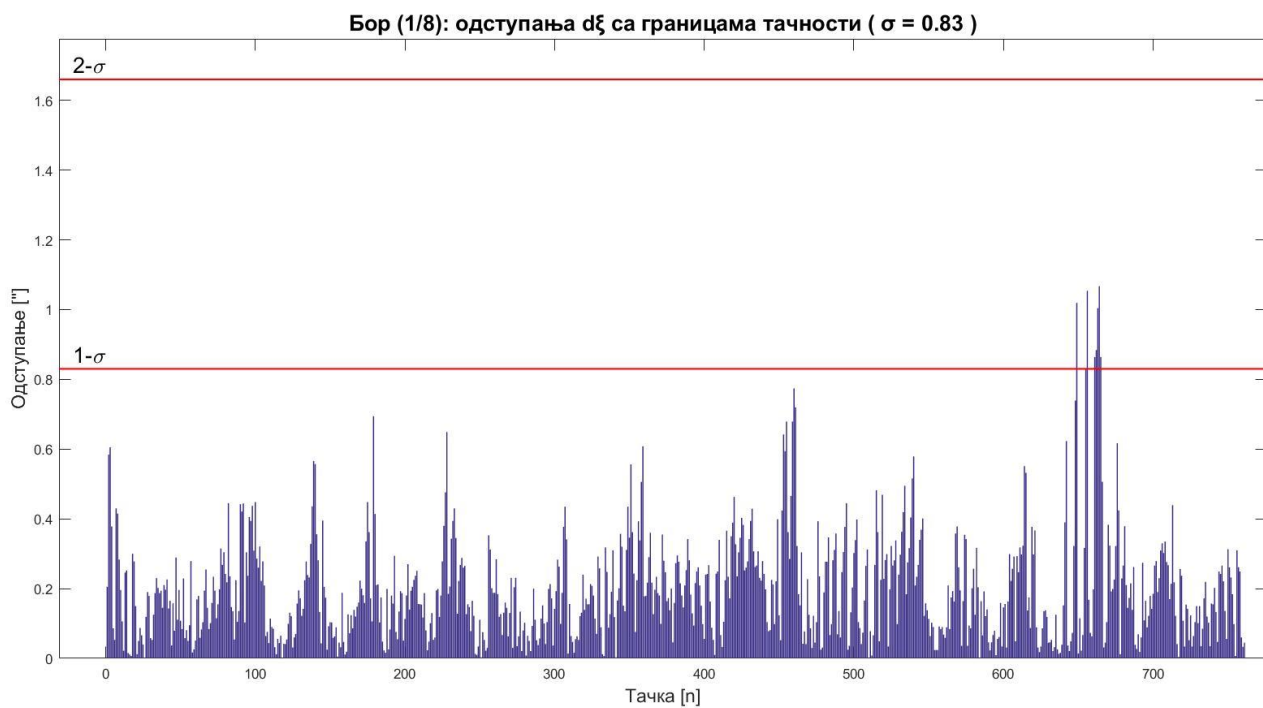
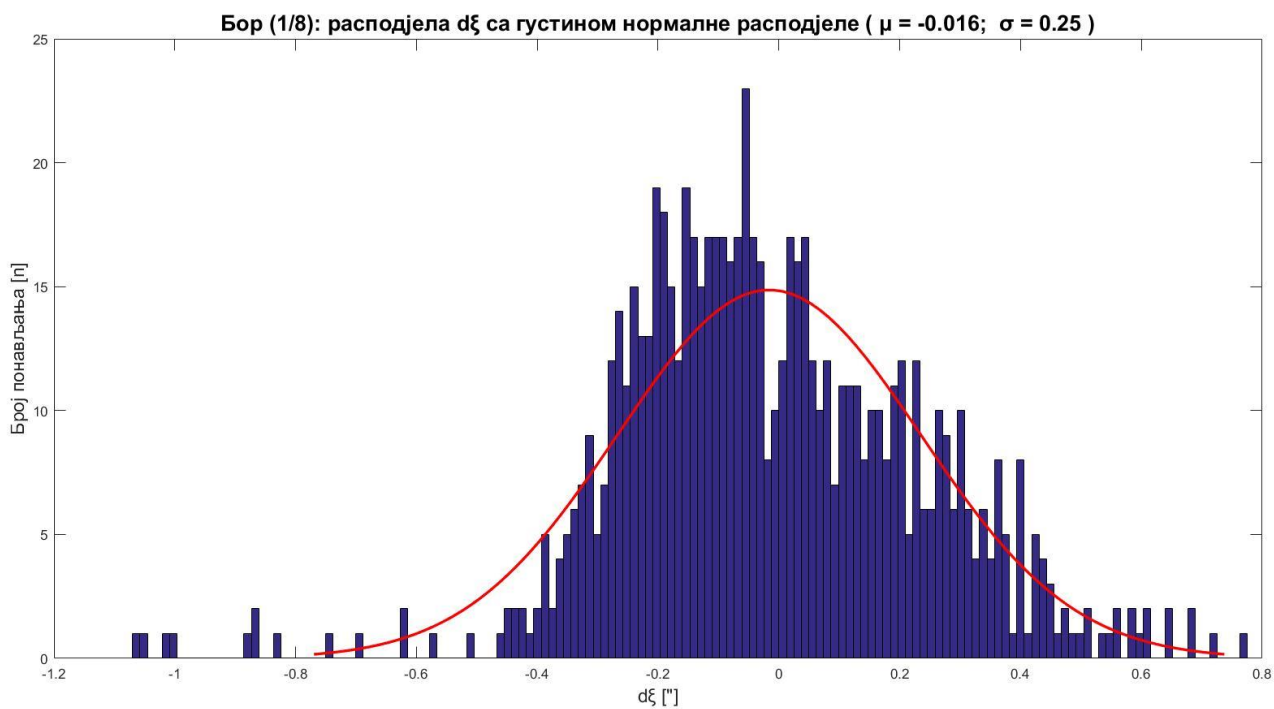
**ПРИЛОГ 20**



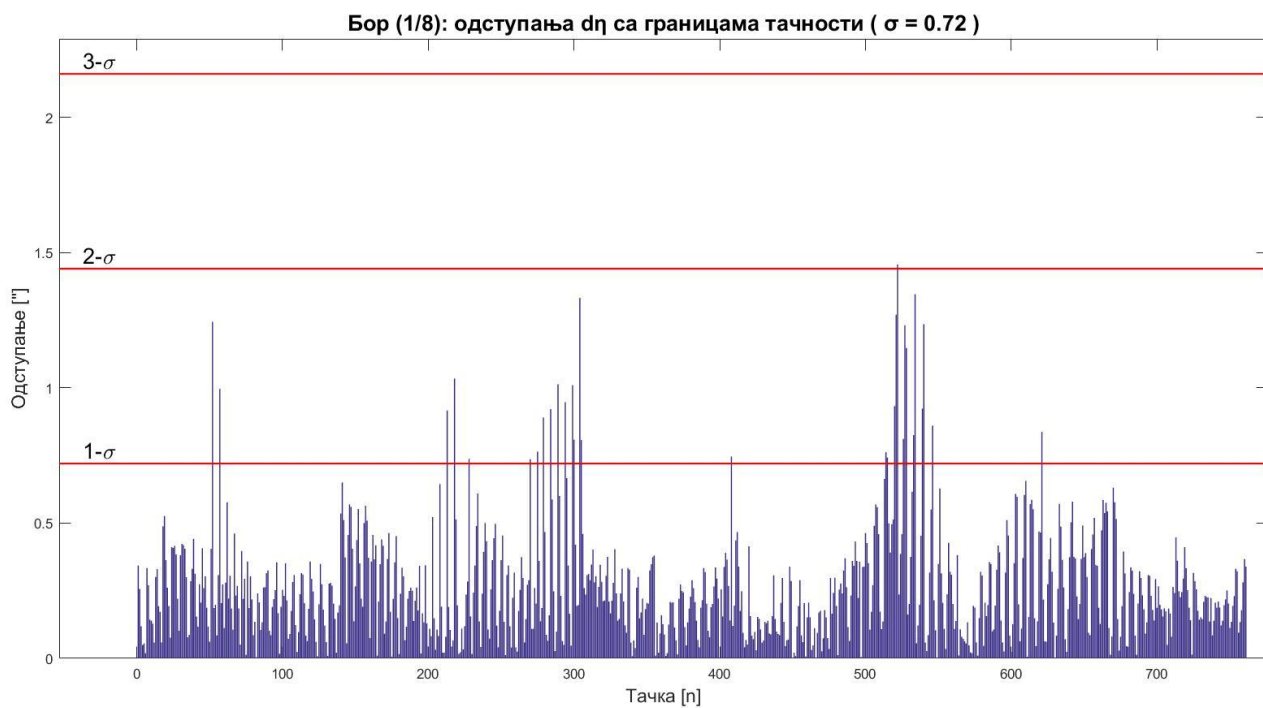
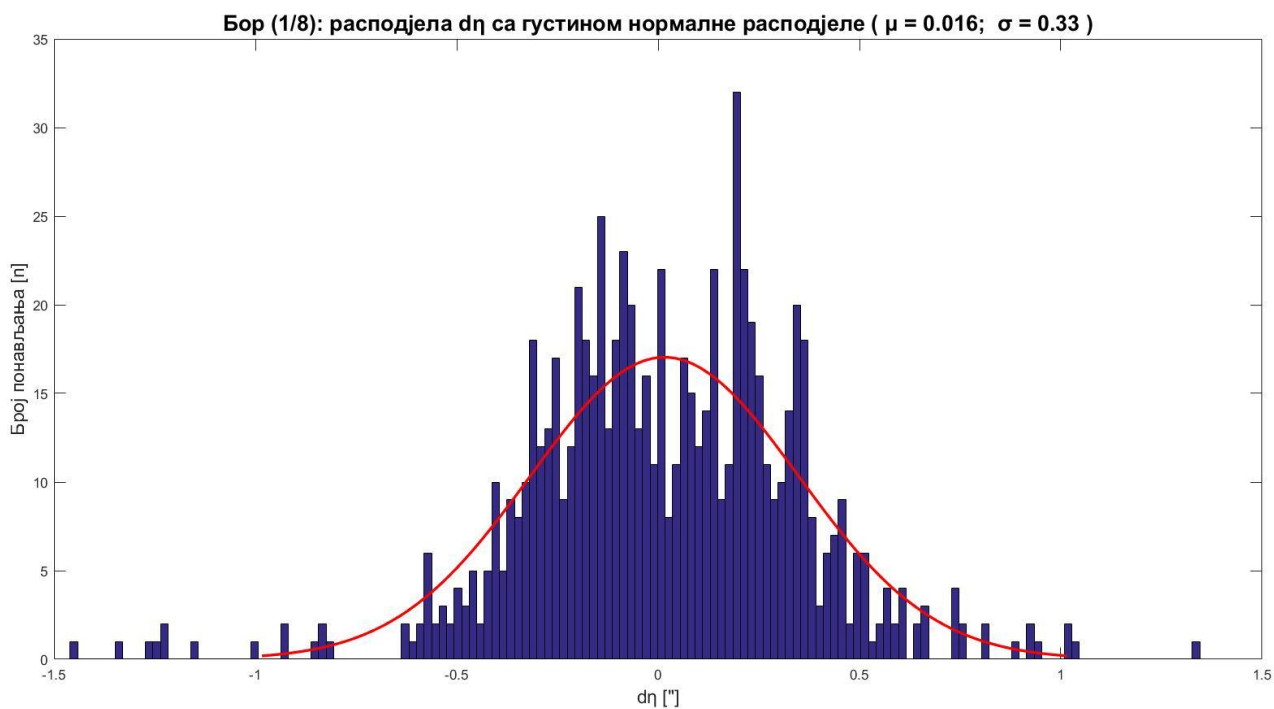
**ПРИЛОГ 20**



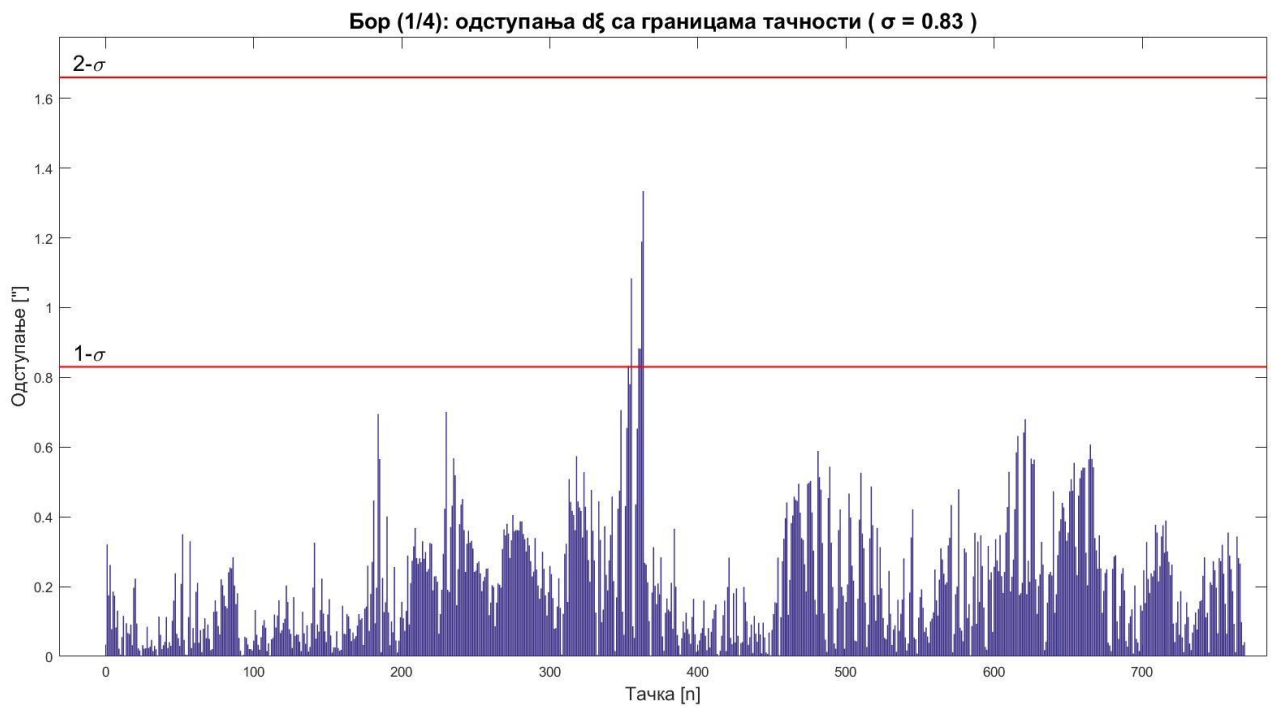
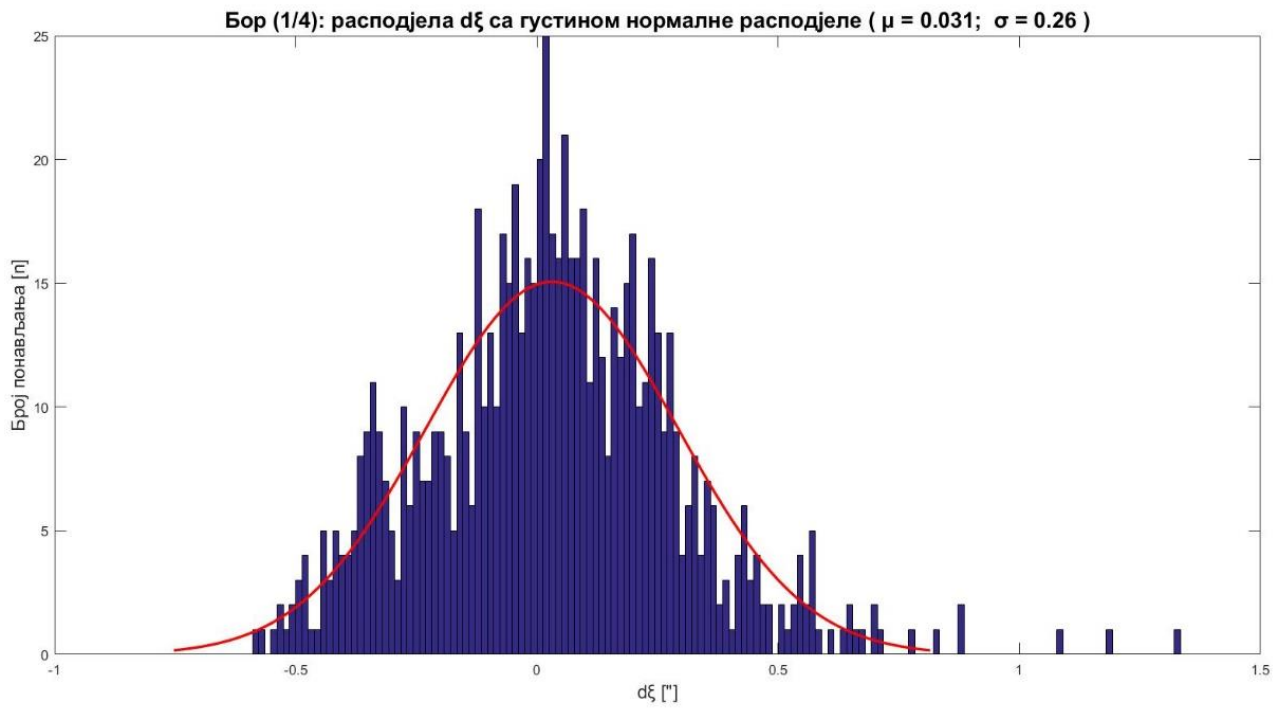
**ПРИЛОГ 20**



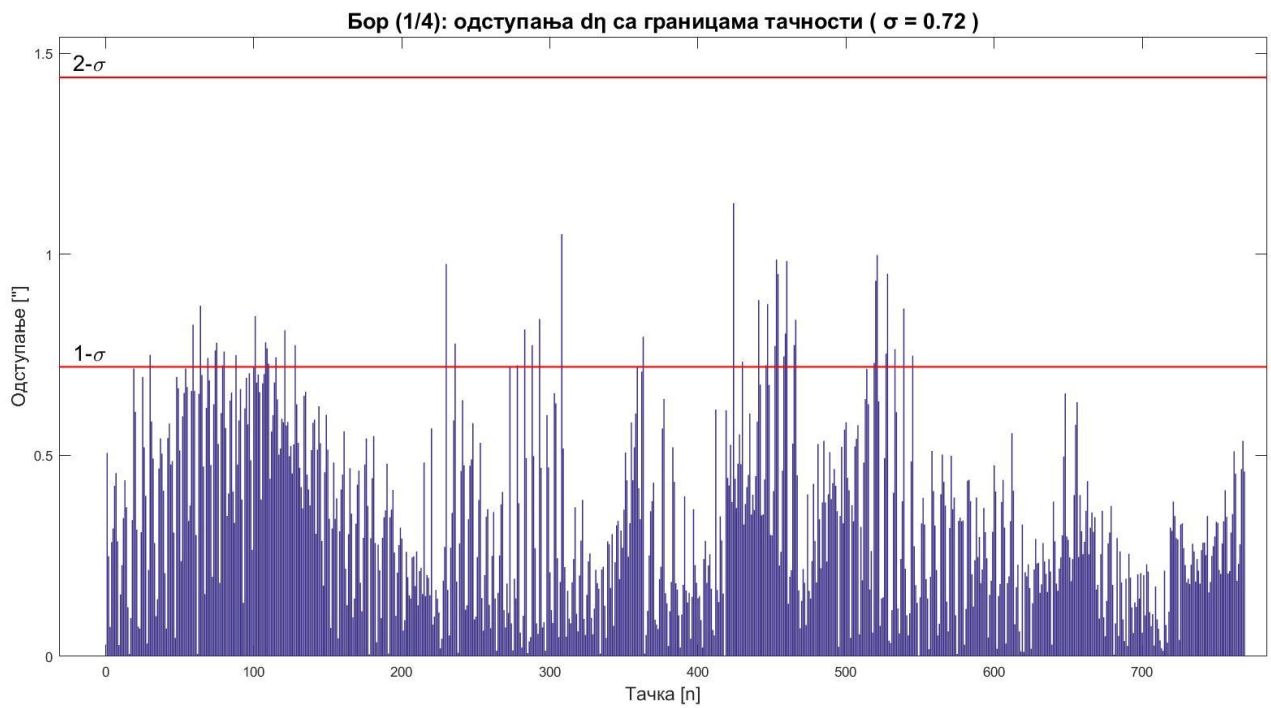
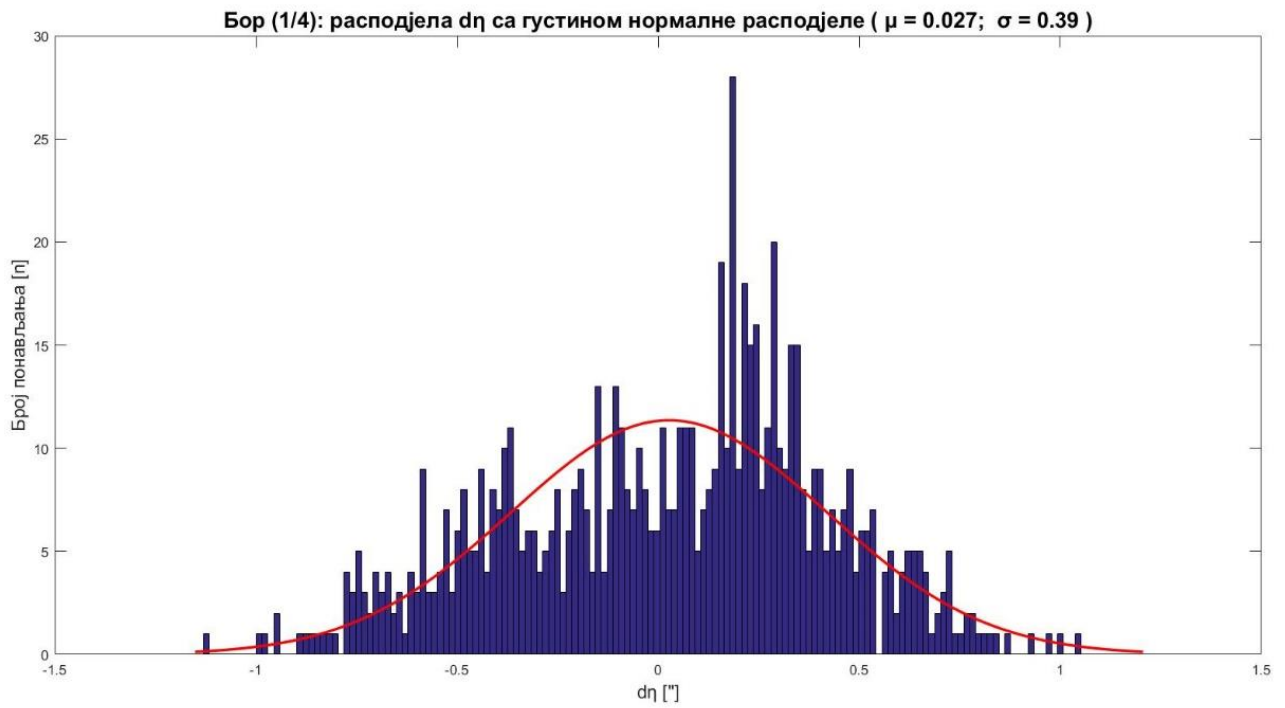
**ПРИЛОГ 20**



**ПРИЛОГ 20**

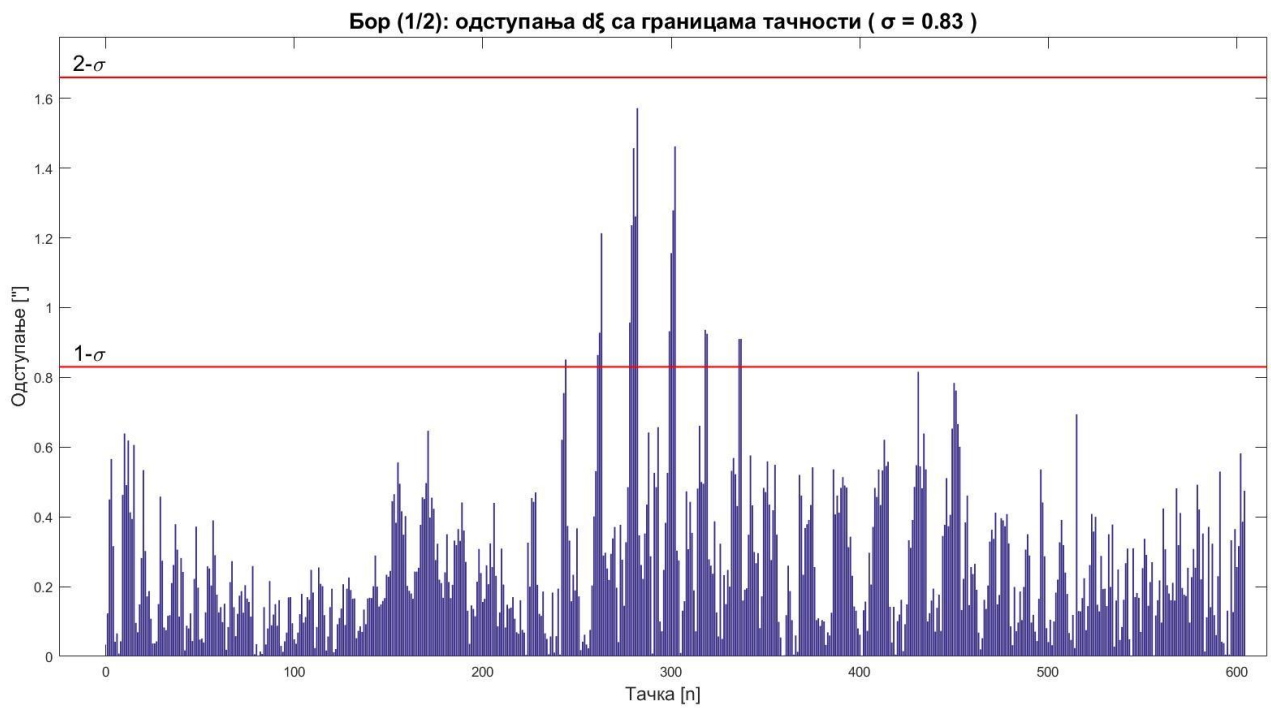
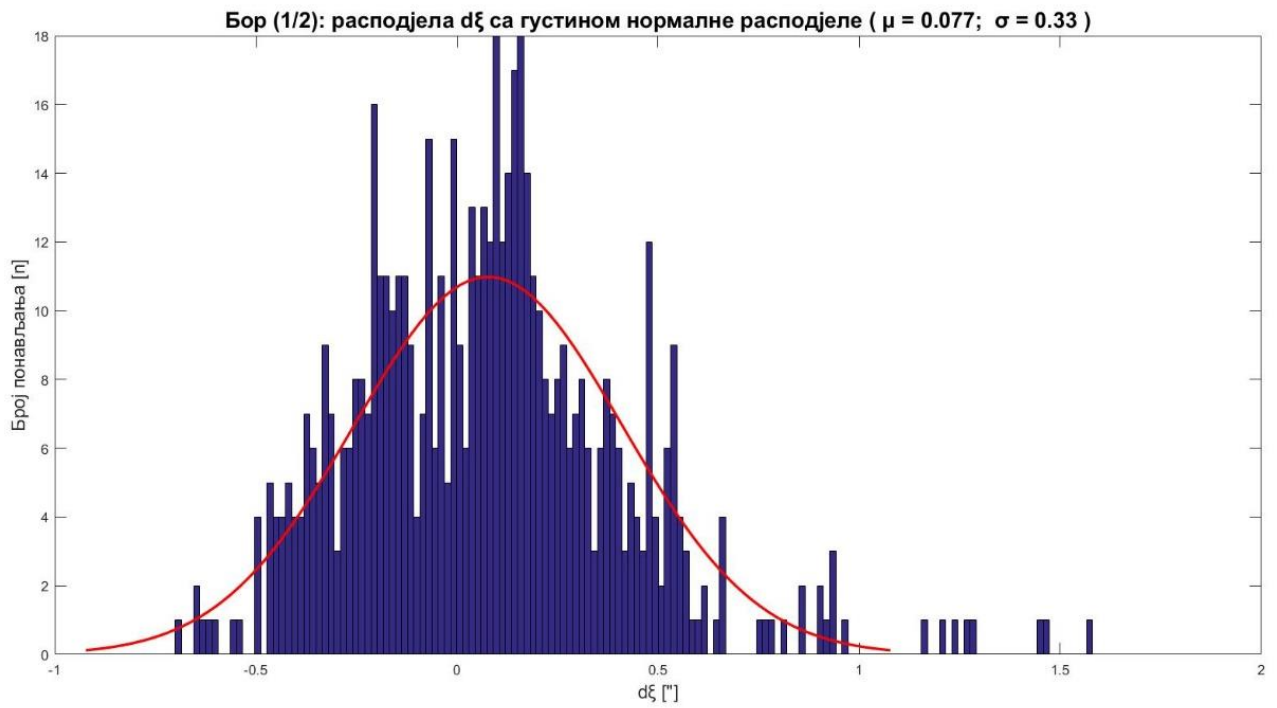


**ПРИЛОГ 20**

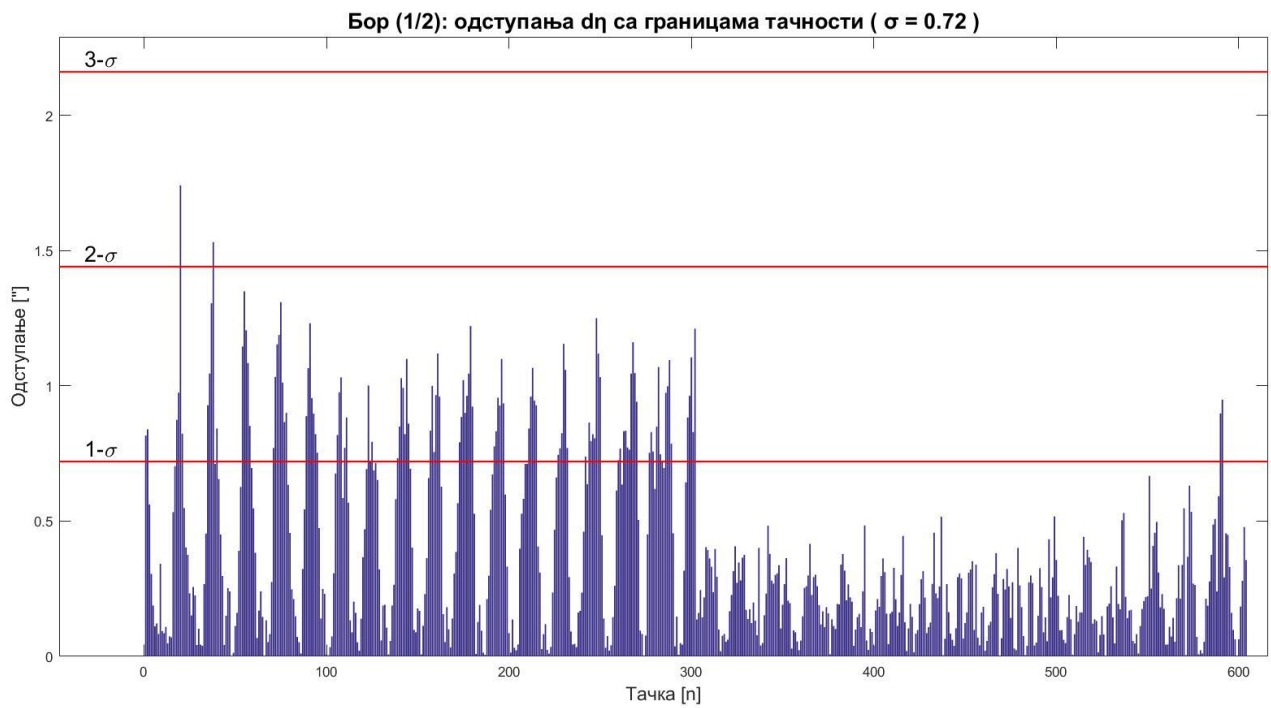
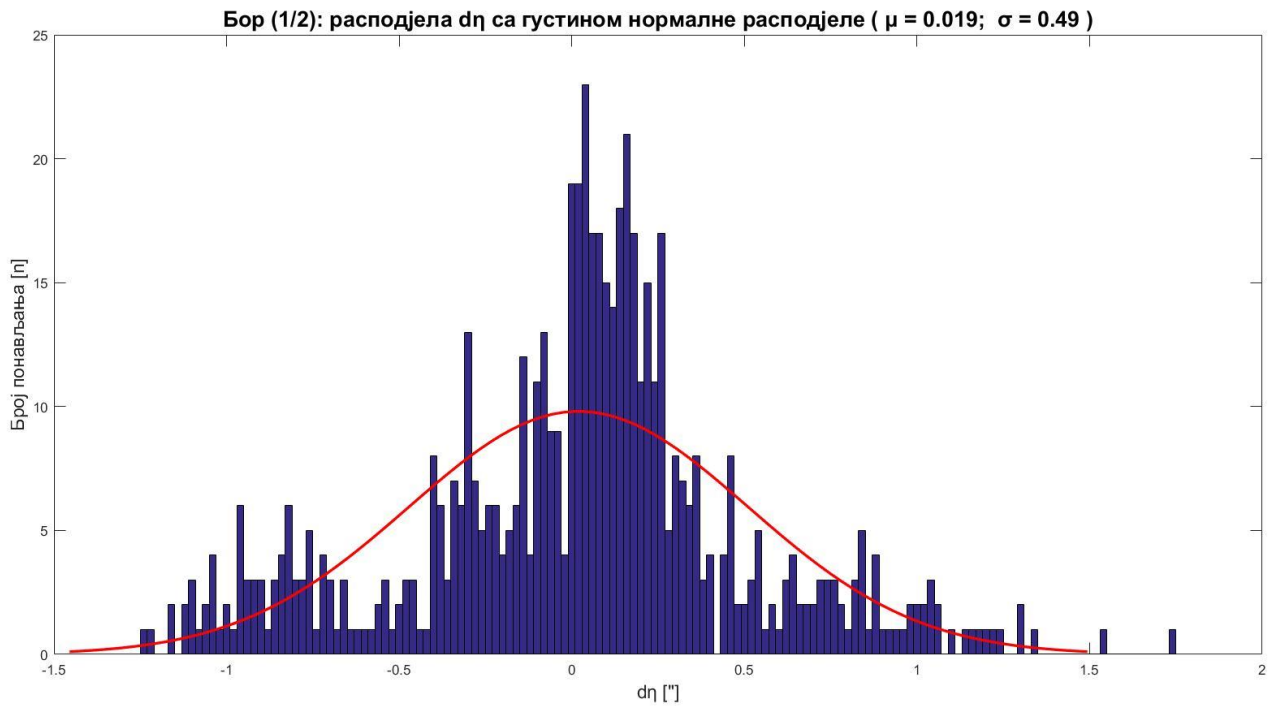




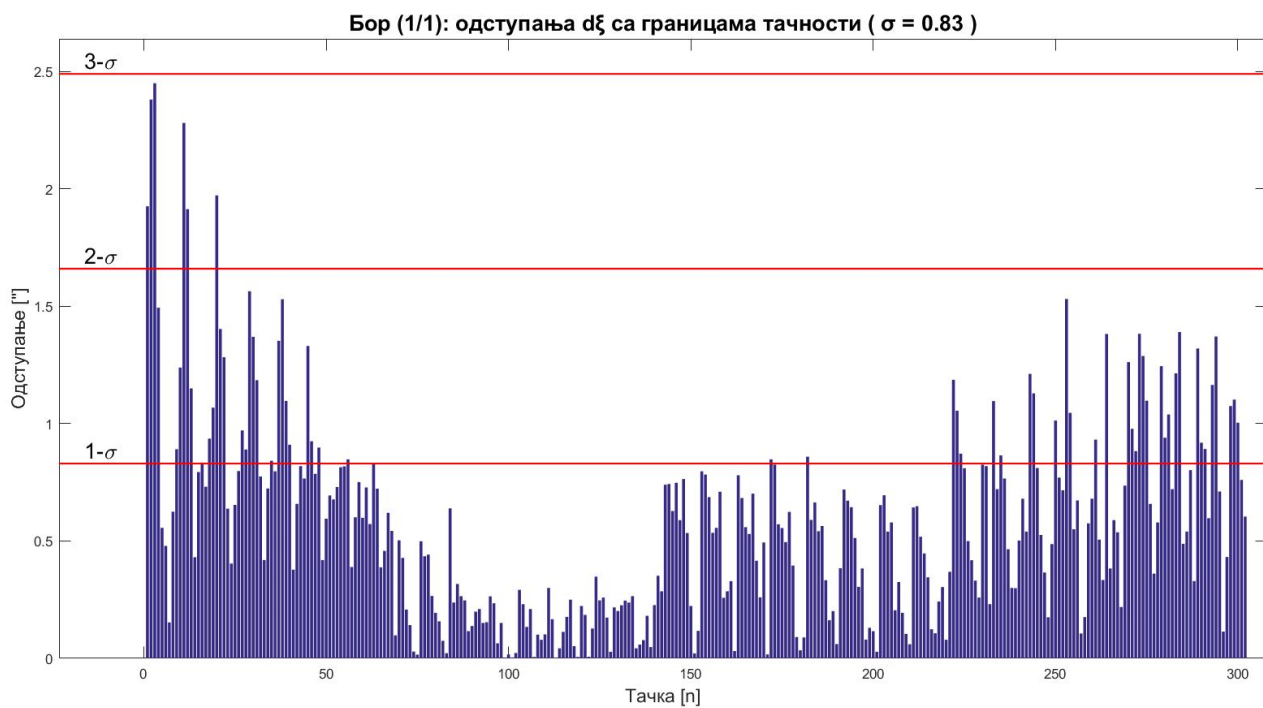
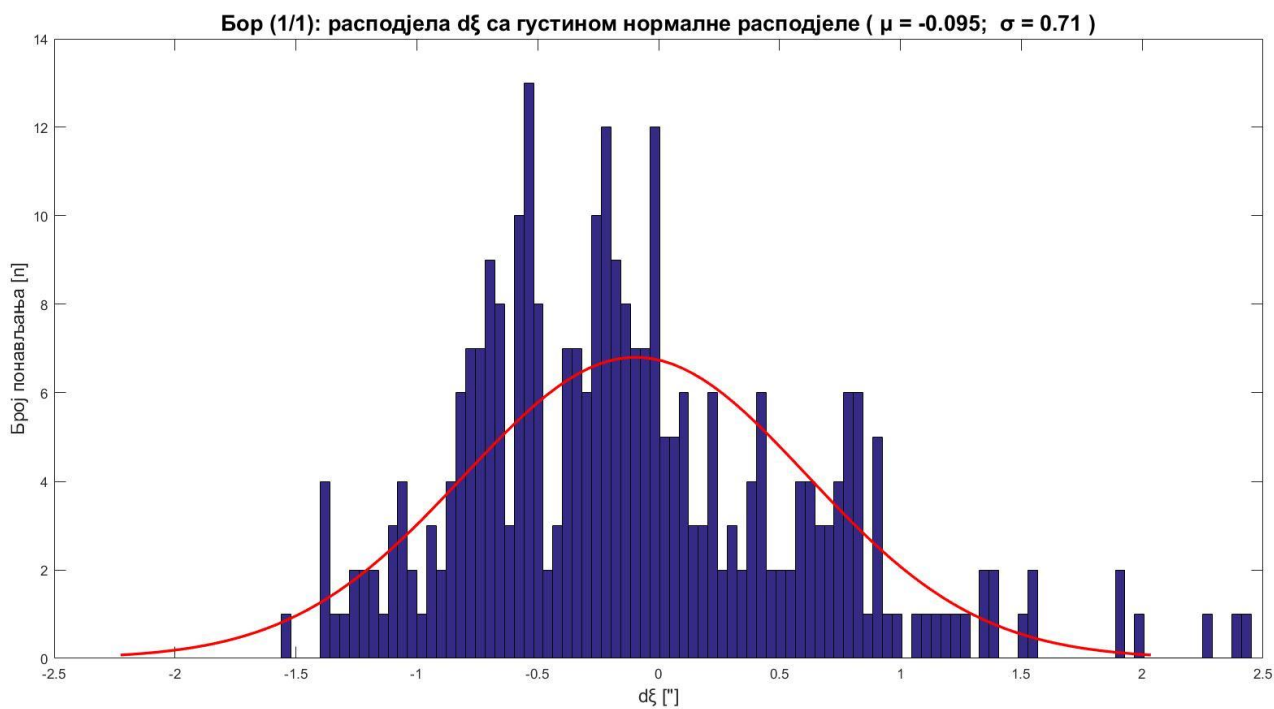
**ПРИЛОГ 20**



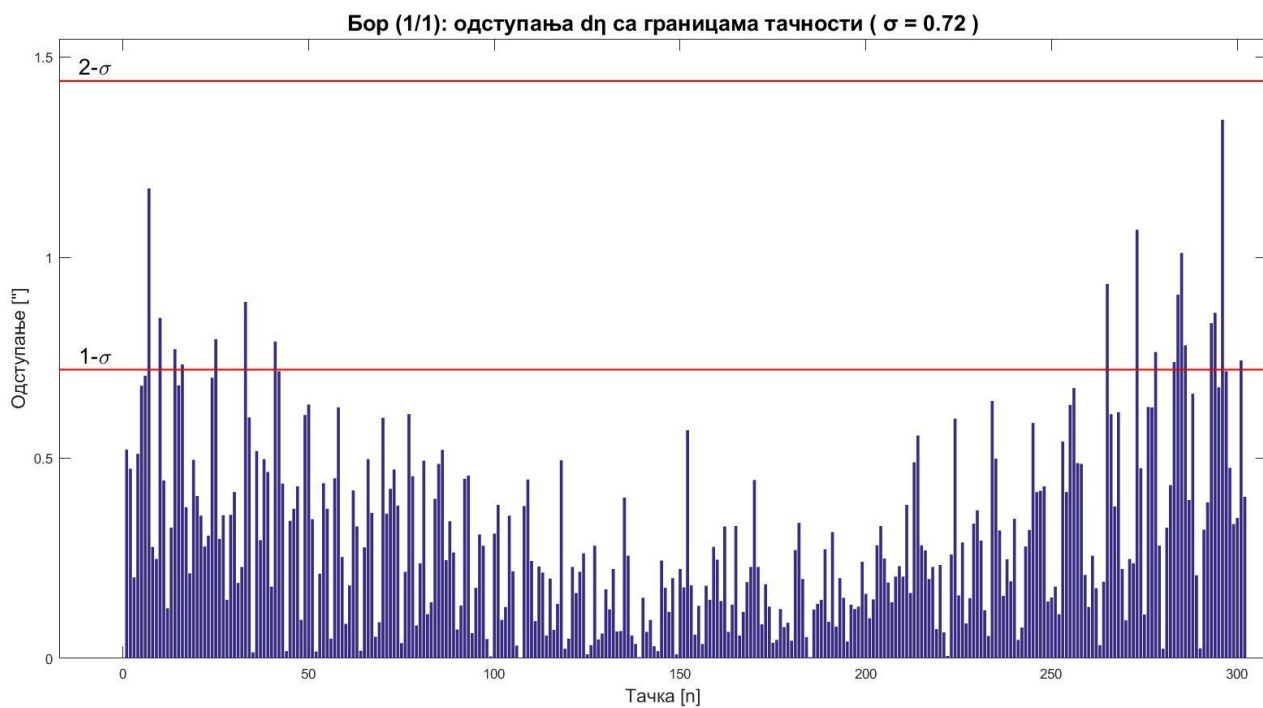
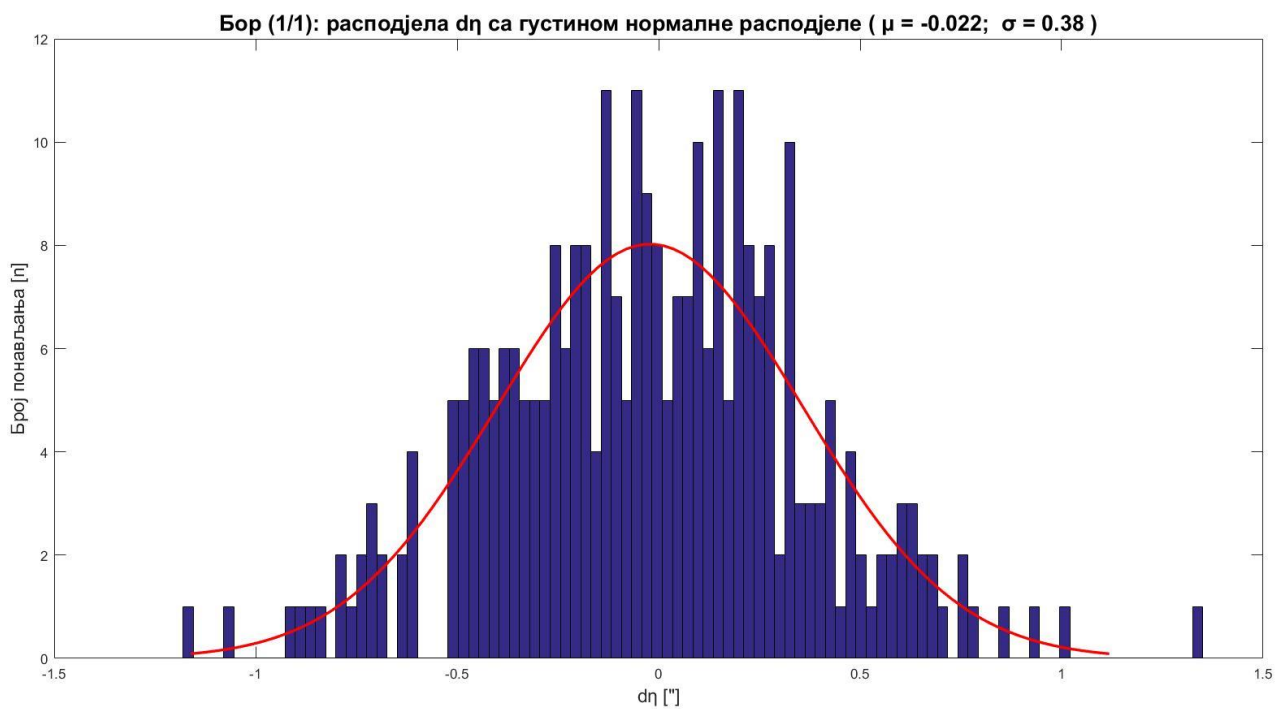
**ПРИЛОГ 20**



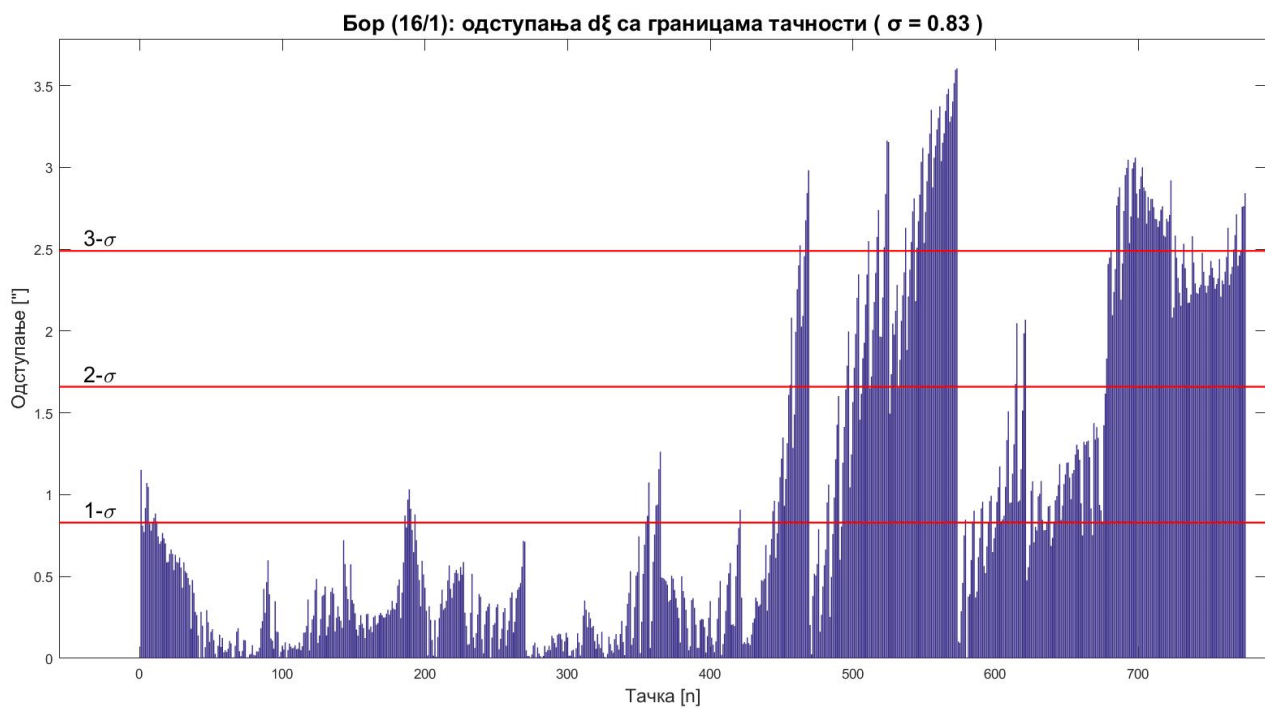
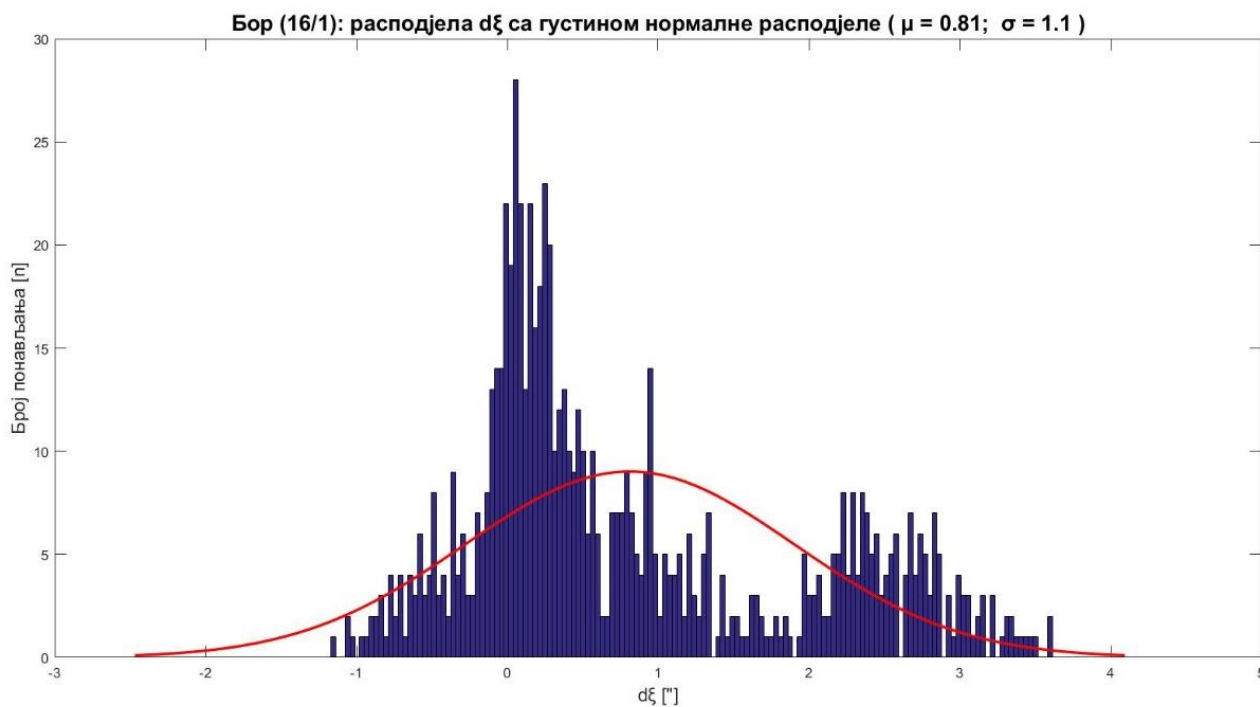
**ПРИЛОГ 20**



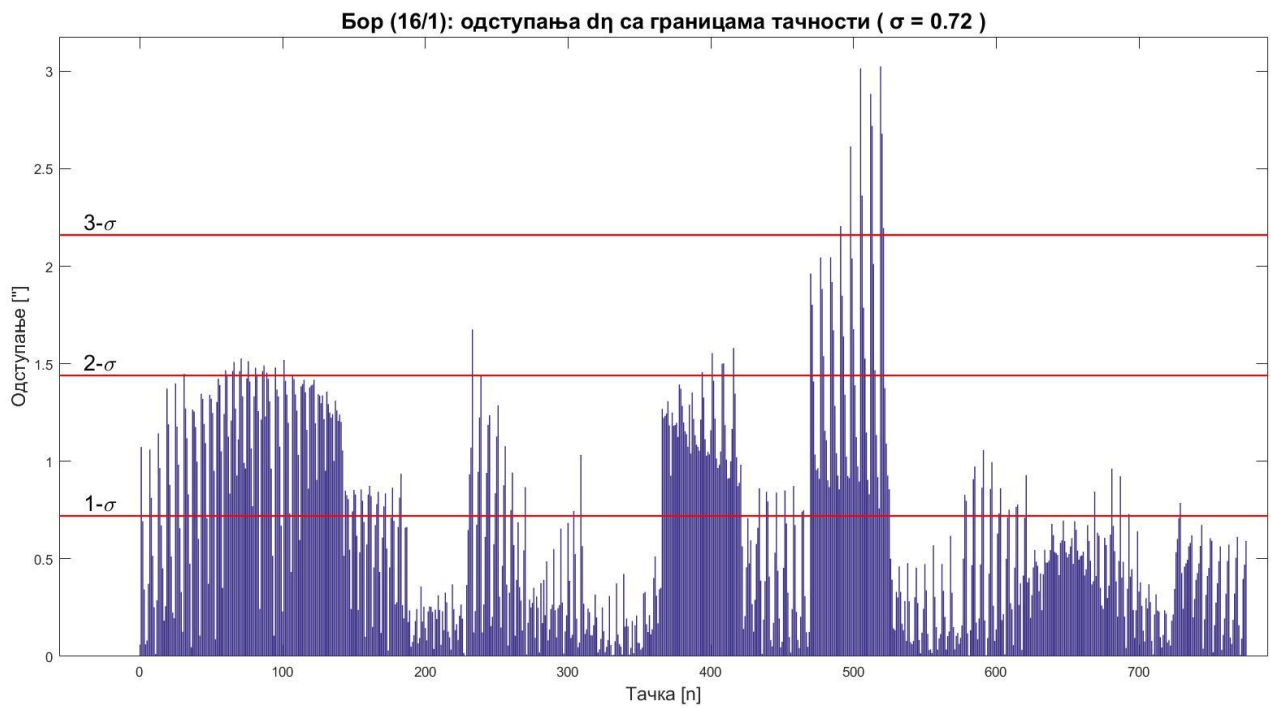
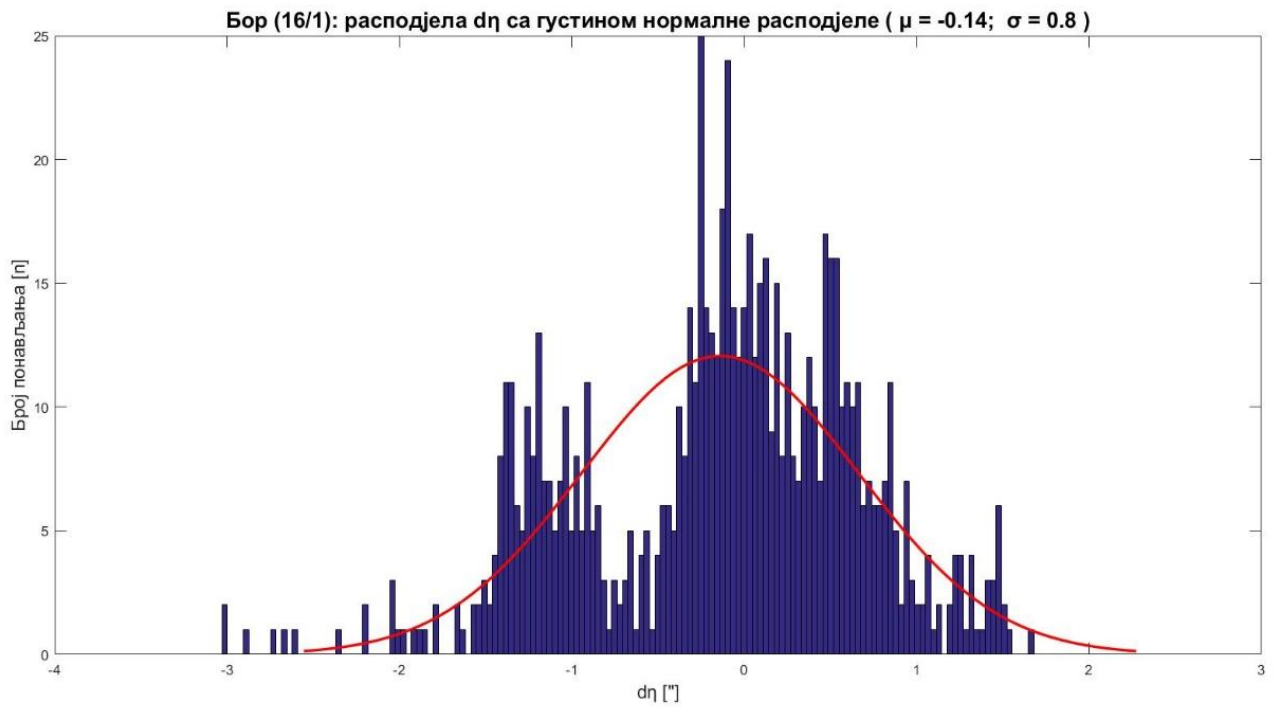
**ПРИЛОГ 20**



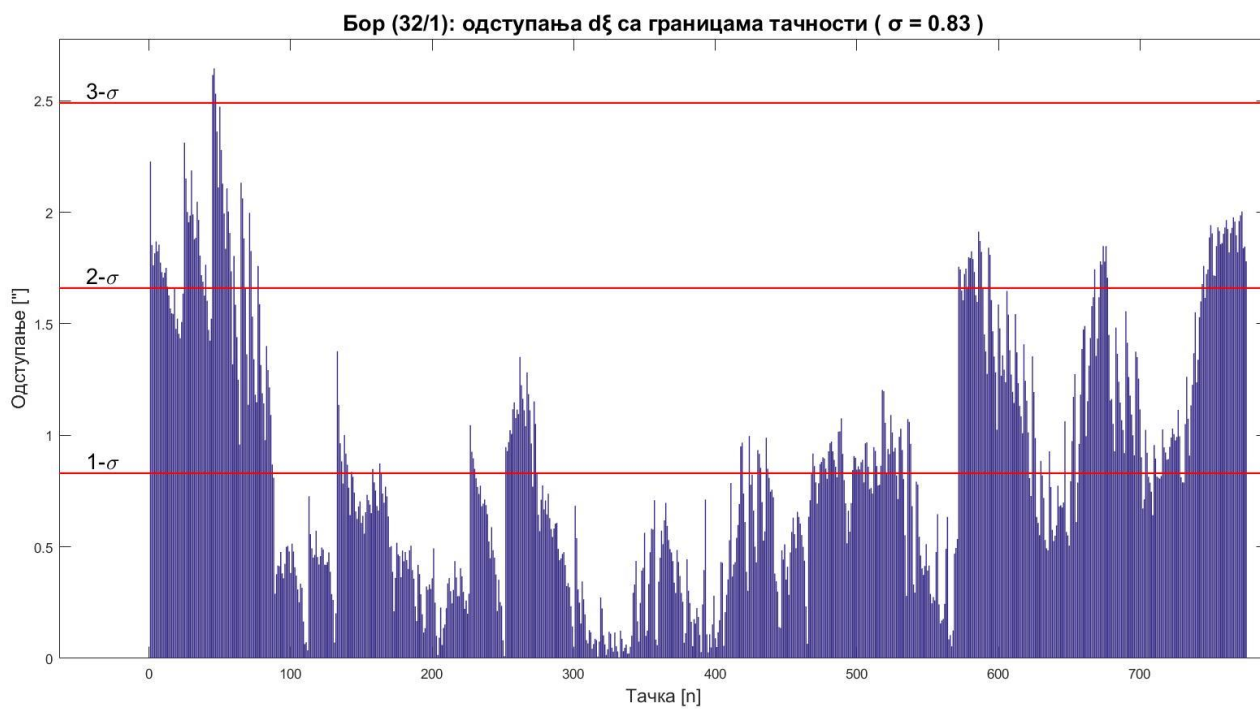
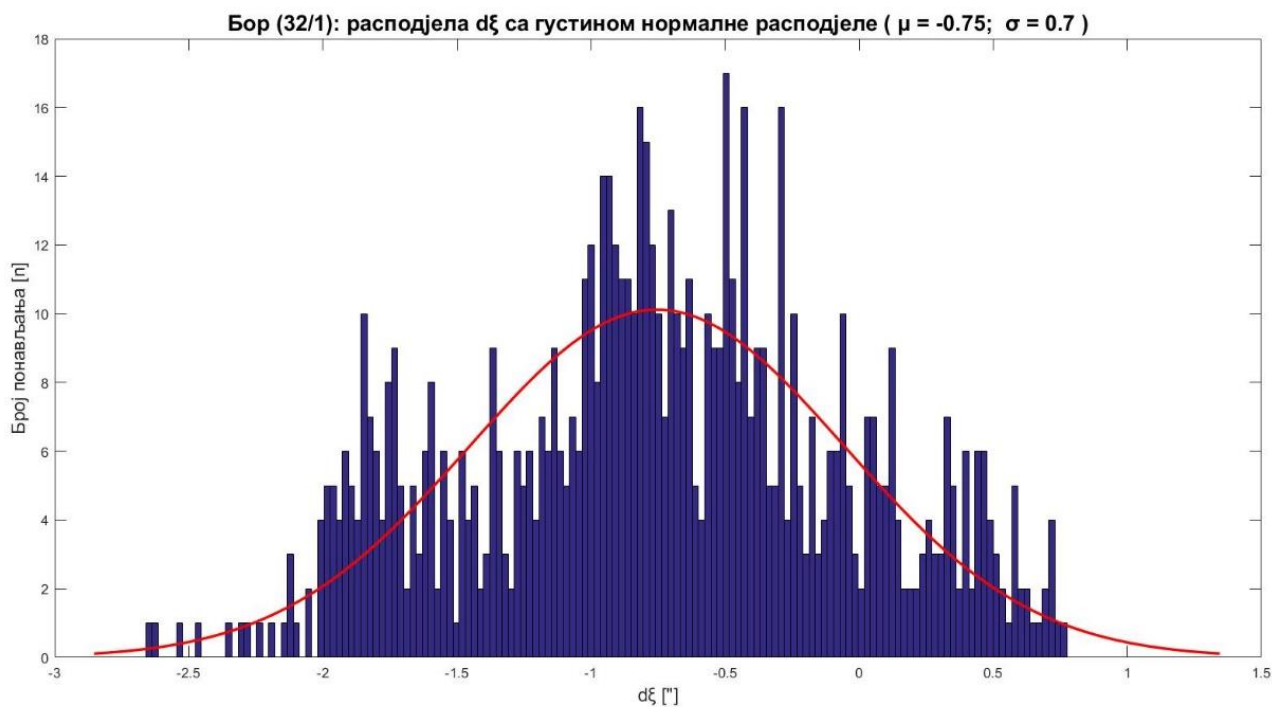
**ПРИЛОГ 20**



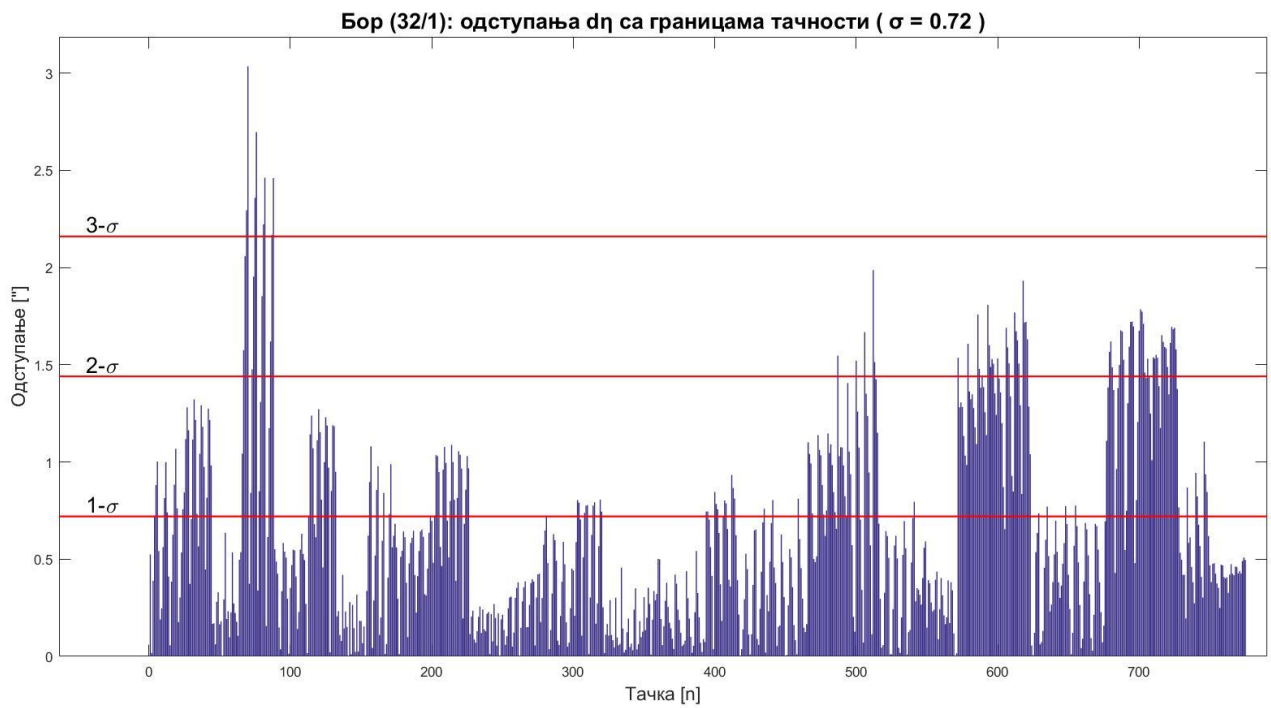
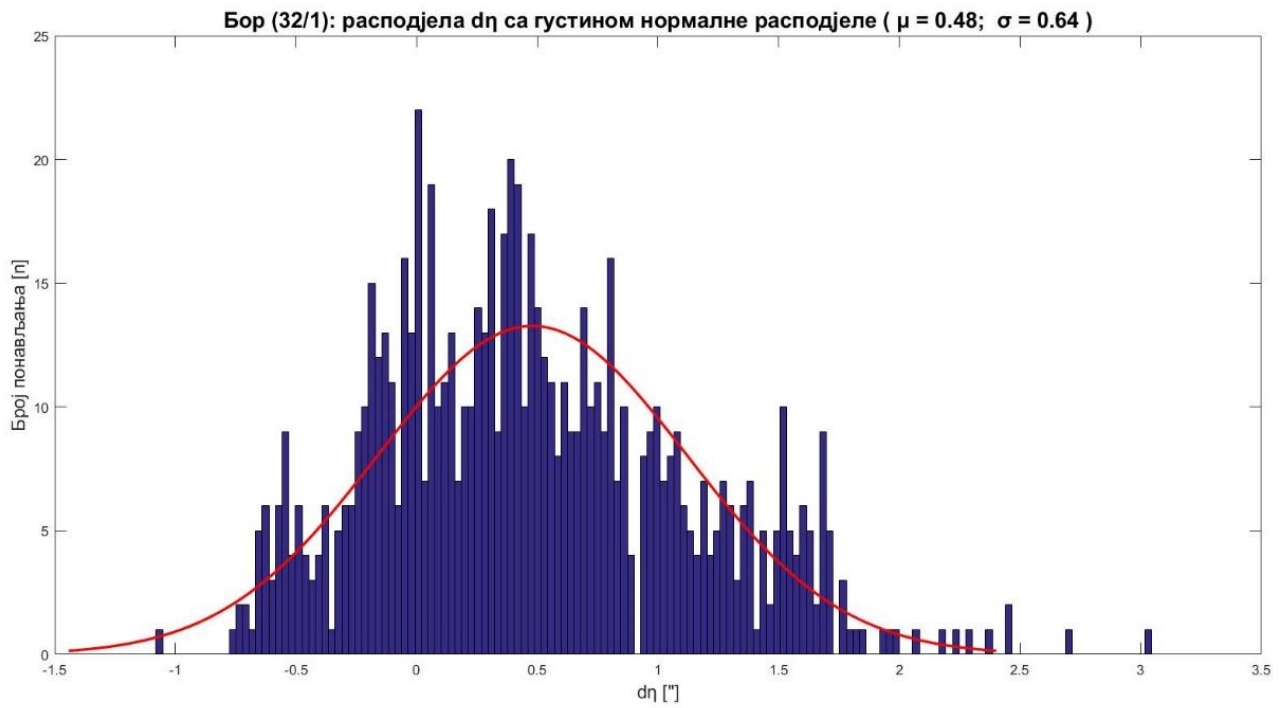
**ПРИЛОГ 20**



**ПРИЛОГ 20**



**ПРИЛОГ 20**





## БИОГРАФИЈА АУТОРА

Дејан Васић рођен је 03.10.1990. године у Бањој Луци, од оца Васић Драге и мајке Васић (рођ. Алексић) Весне, као старије од двоје дјеце. Основну и средњу школу (гимназија, општи смјер) завршио је у Прњавору, као одличан ученик.

Основне студије Геодезије завршио је 2013. године на Архитектонско-грађевинско-геодетском факултету Универзитета у Бањој Луци. У школској 2011/2012. и 2012/2013. години био студент демонстратор у извођењу вјежби из наставних предмета Геодетски премјер 1 и 2 и Практична настава из геодетског премјера. Завршни рад „Одређивање дугопериодичних компоненти геоида“ одбранио је 21.10.2013. год.

Мастер академске студије, модул Геодезија, завршио 2014. на Одсјеку за геодезију и геоинформатику Грађевинског факултета Универзитета у Београду. Мастер рад „Испитивање утицаја висина тачака на одређивање датумских трансформационих параметара“ одбранио је 01.10.2014. год. Добитник је награде фонда „Проф. др Наталија Братуљевић-Машановић“, за успјех на студијама и најбољи мастер рад из области Геодетских референтних мрежа у школској 2013/2014. години.

Од маја до августа 2015. год. радио као геодета у ГД Гранит а.д. Скопље, ПЈ Бања Лука, на изградњи дионице аутопута Прњавор-Добој.

Од октобра 2015. год. запослен на Архитектонско-грађевинско-геодетском факултету у Бањој Луци, као асистент на студијском програму Геодезија на групи предмета из уже научне области Геодетски референтни системи. У септембру 2018. изабран у звање вишег асистента у истој области.

Аутор је више научних и стручних радова из области геодезије, укључујући и два научна рада у часописима на SCI листи. Коаутор универзитетског уџбеника „Практикум за физичку геодезију“.

Од октобра 2017. год. студент докторских академских студија Геодезије (ужа научна област Теоријска и физичка геодезија) на Грађевинском факултету Универзитета у Београду.

Неожењен и тренутно живи у Бањој Луци.

## Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Дејан Д. Васић

Број индекса 912/17

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**МОДЕЛОВАЊЕ ЕТВЕШЕВОГ ТЕНЗОРА ПРИМЈЕНОМ НОРМАЛНОГ ПОЉА**

**ПОТЕНЦИЈАЛА ТЕЖЕ И ДИГИТАЛНИХ МОДЕЛА ТЕРЕНА**

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

**Потпис аутора**

У Београду, 05.06.2023.

\_\_\_\_\_

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Дејан Д. Васић

Број индекса 912/17

Студијски програм Геодезија и геоинформатика

Наслов рада МОДЕЛОВАЊЕ ЕТВЕШЕВОВОГ ТЕНЗОРА ПРИМЈЕНОМ  
НОРМАЛНОГ ПОЉА ПОТЕНЦИЈАЛА ТЕЖЕ И ДИГИТАЛНИХ МОДЕЛА ТЕРЕНА

Ментор Проф. др Олег Одаловић, дипл.инж.геод.

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис аутора**

У Београду, 05.06.2023.

\_\_\_\_\_

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

МОДЕЛОВАЊЕ ЕТВЕШЕВОВОГ ТЕНЗОРА ПРИМЈЕНОМ НОРМАЛНОГ ПОЉА

---

ПОТЕНЦИЈАЛА ТЕЖЕ И ДИГИТАЛНИХ МОДЕЛА ТЕРЕНА

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

③ Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.

Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

**Потпис аутора**

У Београду, 05.06.2023.