



PD 9755



003079423

COBISS

UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

BRANISLAV ČORIĆ

TEORIJSKA I EKSPERIMENTALNA
ANALIZA LOKALNOG I BOČNOG IZVIJANJA
ČELIČNOG I NOSAČA DEFORMABILNOG
POPREČNOG PRESEKA

— DOKTORSKA DISERTACIJA —

BEOGRAD, MARTA 1982.

92 9455

110 2850.58 77

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

GRADJEVINSKI FAKULTET

Teorijska i eksperimentalna analiza
lokalnog i bočnog izvijanja čeličnog I nosača
deformabilnog poprečnog preseka

- doktorska disertacija -

MR. Branislav Ćorić, dipl. inž.

BEOGRAD, marta 1982. god.

RA
1745
1943



Zahvaljujem se akademiku profesoru Nikoli Hajdinu na pomoći i podršci pri izradi ovoga rada.

Eksperimentalni deo disertacije urađjen je u Velikoj Britaniji, na Univerzitetu u Kardifu - University of Wales, University College Cardiff, Faculty of Applied Science, Department of Civil and Structural Engineering. Dugujem zahvalnost pok. Profesoru K.C.Rockey-u i Dr. T.M.Roberts-u na svestranoj pomoći koju su mi ukazali prilikom boravka u njihovoj sredini.

Takodje se zahvaljujem članovima Zavoda za tehničku mehaniku i teoriju konstrukcija koji su preuzeli obaveze u procesu nastave za vreme mog boravka u Kardifu.

Na kraju želim da se zahvalim i osoblju Inženjerskog računskog centra u kome sam obavio proračun na elektronskom računaru.

S A D R Ž A J

Strana br.

PRVI DEO - B O Č N O I Z V I J A N J E N O S A Č A

1. UVOD	1
2. EKSPERIMENTALNA ANALIZA	
2.1. Uredjaji za ispitivanje	7
2.2. Dimenzije nosača i mehaničke karakteristike materijala	10
2.3. Eksperimentalni rezultati	13
3. TEORIJSKA ANALIZA	
3.1. Proračun bočnog izvijanja nosača nedeformabilnog poprečnog preseka	
3.1.1 Uvod	26
3.1.2 Matrica krutosti i geometrijska matrica krutosti	27
3.1.3 Problem stabilnosti	32
3.1.4 Numerički proračun	33
3.1.5 Uporedjenje rezultata prema teoriji nedeformabilnog poprečnog preseka sa eksperimentalnim rezultatima	42
3.2. Nelinearna analiza bočnog izvijanja nosača deformabilnog poprečnog preseka	
3.2.1 Postupak za nelinearnu analizu	44
3.2.2 Program za elektronski računar	49
3.2.3 Rezultati nelinearne analize i uporedjenje sa eksperimentalnim rezultatima	57
3.2.4 Uticaj koncentracije napona pri bočnom izvijanju nosača	90

3.3 Postupak za određivanje kritičnog opterećenje pri bočnom izvijanju nosača deformabilnog pop- rečnog preseka	95
4. ZAKLJUČCI	109
DRUGI DEO - L O K A L N O I Z B O Č A V A N J E V E R T I K A L N O G L I M A	
1. UVOD	111
2. EKSPERIMENTALNA ANALIZA	
2.1 Uredjaj za ispitivanje	117
2.2 Dimenzije nosača i mehaničke karakteristike materijala	118
2.3 Eksperimentalni rezultati	120
3. TEORIJSKA ANALIZA	
3.1 Uporedjenje eksperimentalnih rezultata sa postojećim teorijskim rešenjima i propisima pojedinih zemalja	141
3.2 Postupak za proračun lokalnog izbočavanja vertikalnog lima usled dejstva koncentri- sanog opterećenja	
3.2.1 Nosači bez ukrućenja	148
3.2.2 Nosači sa vertikalnim ukrućenjima	159
4. ZAKLJUČCI	170
LITERATURA	172

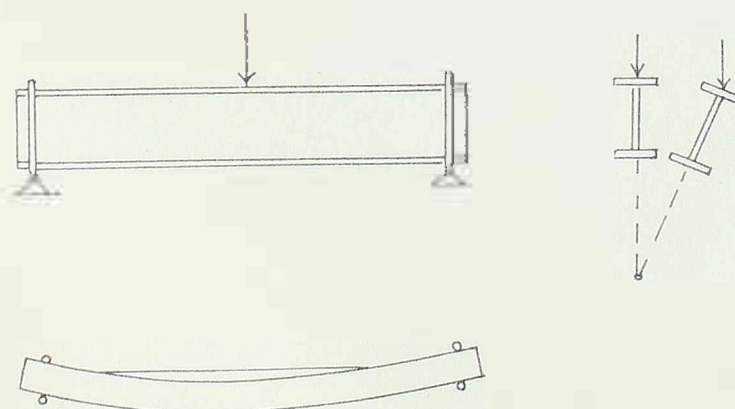
PRVI DEO

BOČNO IZVIJANJE NOSAČA

1. U V O D

Gradjevinski inženjeri često se u praksi sreću sa proračunom tankozidnih čeličnih nosača koji su opterećeni koncentrisanim opterećenjem u ravni rebra. To je slučaj, na primer, na mestima oslanjanja sekundarnih nosača na glavne nosače kao i kod oslonaca glavnih nosača, zatim pri montaži nosača i njihovom prenosu, pri dejstvu teških točkova po pojasu kranske staze i td. Razumljivo je zato da je i problem odredjivanja kritičnog opterećenja kod izvijanja ovakvih nosača već dugi niz godina predmet intenzivnih proučavanja, a da i dan danas zaokuplja pažnju mnogih istraživača.

Istorijski gledano odredjivanje kritičnog opterećenja za tankozidne nosače odvijalo se u dva pravca. Posebno je posmatrana pojava izbočavanja nosača kao celine, takozvano bočno izvijanje nosača, a posebno je posmatrana pojava lokalnog izbočavanja rebra nosača što je i predmet drugog dela ovog rada.



Slika br. 1.

Sve do početka pedesetih godina tankozidni nosači su pri proračunu na bočno izvijanje tretirani kao jednodimenzionalni, odnosno linijski elementi. Ovaj proračun sastoji se u postavljanju odgovarajućih diferencijalnih jednačina problema i njihovom rešavanju u cilju odredjivanja kritičnog opterećenja. Medjutim, numerička rešenja ovih jednačina moguća su samo za jednostavnije slučajeve opterećenja, načina oslanjanja i oblika poprečnog preseka nosača. U knjizi Timoshenka i Gere-a [1] detaljno su prikazana ta rešenja, kao naprimer, slučaj bočnog izvijanja tankozidnog nosača opterećenog koncentrisanim opterećenjem u sredini raspona (slika br. 1.).

Veliki je broj radova uradjen u oblasti izvijanja tankozidnih nosača. Tako na primer Lee [13] dajući pregled radova koji se bave ovom problematikom navodi preko sto radova iz ove oblasti. Medjutim, u većini ovih radova jedan značajan faktor kao što je promena oblika poprečnog preseka pri bočnom izvijanju nosača nije uzet u obzir. Tek je početkom pedesetih godina Bleich [2] sproveo tačniji proračun uzimajući u obzir deformaciju rebra pri proračunu izvijanja tankozidnog nosača T preseka. Kasnije su Goldner, Bogdanov i Glama [18] dali sistematsku analizu izvijanja tankozidnog nosača proizvoljnog poprečnog preseka uzimajući u obzir promenu oblika poprečnog preseka. Nedavno su Kollbruner i Hajdin [19] dali približno rešenje koristeći teoriju poliedarske ljuske.

Mogućnost matričnog pristupa analizi konstrukcija koja se bazira na takozvanoj metodi konačnih elemenata (finite element method) pokazana je prvi put jasno u radu Turner-a, Clough-a, Martin-a i Topp-a iz 1956.godine [28]. Od tada pa tokom ovih dvadeset i pet godina načinjen je veliki progres u primeni ove metode na najrazličitije probleme građevinske tehnike. Do toga je došlo zbog brzog razvoja digitalnih kompjutera velikih kapaciteta i brzine kao i zbog potencijalnih mogućnosti metode konačnih elemenata za rešavanje veoma kompleksnih problema.

Prvi značajan rad vezan za primenu metode konačnih elemenata na problem stabilnosti i velikih deformacija dali su Turner, Dill, Martin i Melosh 1960.godine [29]. U tom radu uveden je i pojam takozvane geometrijske matrice krutosti koja je od bitne važnosti pri proračunu kritičnog opterećenja. Kasnije je Martin [30], 1965.godine, koristeći jednodimenzionalne konačne elemente pokazao kako se može rešiti problem stabilnosti rešetkastih nosača, stubova i greda. Kapur i Hartz su 1966.godine [23] prikazali primenu dvodimenzionalnih konačnih elemenata pri rešavanju problema

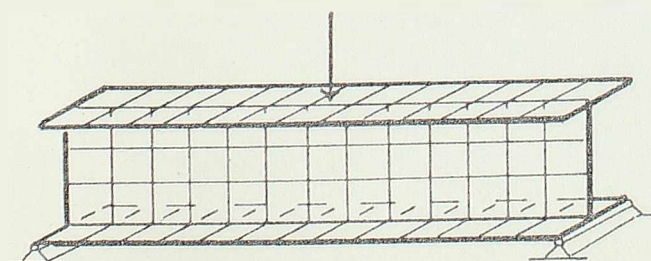
stabilnosti ploča. Godinu dana kasnije Gallagher [32] je isto prikazao za ljsuske.

Tek početkom sedamdesetih godina dolazi i do prve primene metode konačnih elemenata na problem bočnog izvijanja nosača. Prvu potpuniju studiju o izvijanju tankozidnih nosača primenom ove metode dali su Barsoum i Gallagher 1970 godine [6]. Oni su prikazali i rešenje za nosač i opterećenje sa slike br.1., i izvršili ocenu tačnosti ove metode u zavisnosti od broja elemenata. Iste godine Powell i Klingner prikazali su primenu metode konačnih elemenata kod bočnog izvijanja kontinualnih nosača, [5], a nešto kasnije, 1972.godine, Reilly [7] je pokazao i proračun uticaja kod krivolinijskih tankozidnih nosača.

U svim ovim radovima za analizu bočnog izvijanja nosača korišćeni su jednodimenzionalni, linijski elementi. Važno je napomenuti da je pri tome zadržana pretpostavka da oblik poprečnog preseka ostaje nepromenjen pri bočnom izvijanju nosača. I pored ovog ograničenja navedeni radovi su pokazali veliku prednost primene metode konačnih elemenata u odnosu na klasičan postupak proračuna, posebno ako se teži numeričkom rešenju složenih problema bočnog izvijanja nosača.

Prva primena metode konačnih elemenata na problem bočnog izvijanja nosača pri čemu je uzeta u obzir promena oblika poprečnog preseka vezana je za rad Rajasekaran-a i Murray-a iz 1973.godine [33]. Oni su dali studiju o izvijanju I nosača sa širokim pojasevima tako što su koristili metod analize koji važi za linijske tankozidne elemente, ali uvodeći pri tome i deformaciju vezanu za promenu oblika poprečnog preseka.

Johnson i Will [34] su nešto kasnije (1974.god.) prikazali studiju o izvijanju I nosača koja bazira na prostornom skupu pravougaonih konačnih elemenata, kako je to pokazano na slici br. 2.

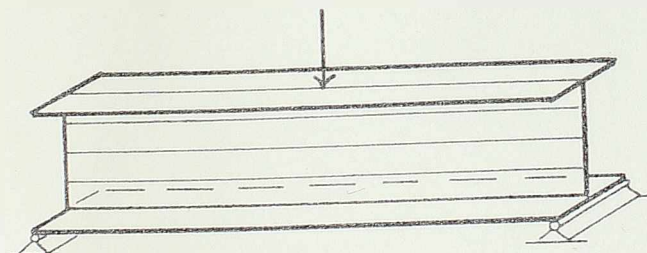


Slika br.2.

Nedavni rad Akay-a, Johnson-a i Will-a [35] uprošćava rešenje za bočno izvijanje nosača u odnosu na predhodni rad [34]. Ovde je razdvojen na naponsko-deformacijska analiza u ravni nosača od analize izvijanja van ravni nosača. Time je smanjen broj jednačina, a metod je proširen i na analizu izbočavanja ramovskih nosača.

Sredinom sedamdesetih godina dolazi do primene takozvane "metode traka" (strip method) za izučavanje problema izvijanja nosača deformabilnog poprečnog preseka. Za razliku od metode konačnih elemenata gde se nosač deli na pojedine elemente (na primer na pravougaone elemente na slici br. 2) u metodi traka nosač se deli na podužne trake, kako je to prikazano na slici br. 3.

Prvi značajniji rad iz ove oblasti je rad Plank-a i Wittrick-a iz 1974. godine [36] u kome su koristeći metodu traka ispitivali izvijanje [preseka opterećenog na savijanje.



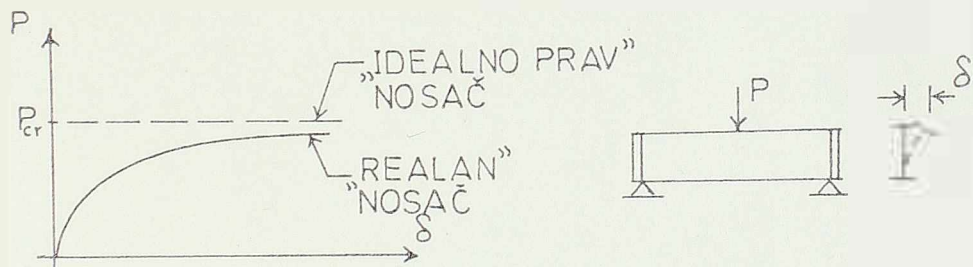
Slika br. 3.

Kasnije su Smith i Sridharan [37] prikazali primenu ove metode i za slučaj sandučastog preseka, a krajem 1978. godine Hancock [27] je dao studiju o bočnom izvijanju I nosača opterećenog na čisto savijanje za slučaj deformabilnog poprečnog preseka.

Treba napomenuti da za razliku od metode konačnih elemenata koja za funkcije pomeranja koristi polinome, kod metode traka za funkcije pomeranja u podužnom pravcu koriste se Furijeovi redovi koji moraju zadovoljiti granične uslove na krajevima traka. Usled toga, iako se metoda traka pokazala kao efikasno sredstvo za proračun odredjenih problema ona nije dovoljno opšta, kao što je to metoda konačnih elemenata, kada se primenjuje za proračun stabilnosti tankozidnih nosača.

Svi napred navedeni radovi, pa i ovi najnoviji, koji se bave izučavanjem bočnog izvijanja nosača sa slike br.1. odnose se na nosače koji su "idealno pravi" i kod kojih dolazi do pojave bifurkacije pri njihovom izvijanju. Reč je dakle o teoriji elastične stabilnosti gde se kritično opterećenje nalazi rešavanjem problema svojstvenih vrednosti. Medjutim, kako su to pokazali eksperimenti prikazani u ovom radu, u jednoj realnoj konstrukciji neće doći do pojave bifurkacije pri bočnom izvijanju tankozidnog nosača, pa će se i kritično opterećenje za ovakve nosače razlikovati od kritičnog opterećenja za "idealne prave" nosače.

Usled neizbežnih početnih nepravilnosti (imperfekcija) u geometriji nosača i načina opterećenja, odmah po nanošenju opterećenja dolazi i do malog bočnog pomeranja nosača koje se sa povećanjem vertikalnog opterećenja sve više uvećava (slika br. 4.).



Slika br.4.

Time i problem bočnog izvijanja nosača postaje geometrijski nelinearan problem. Do sada, koliko je autoru ove teze poznato, problem bočnog izvijanja nosača deformabilnog poprečnog preseka nije obradjivan na ovaj način. Medjutim, mišljenja sam da je to i najispravniji put za analizu bočnog izvijanja nosača. Jedino analiza na bazi velikih pomeranja, odnosno teorije drugog reda, koja uzima u obzir početne imperfekcije može da da realnu sliku o stvarnoj nosivosti ovakvih nosača pri njihovom bočnom izvijanju.

Upravo je i cilj ove teze da se izvrši jedna ovakva nelinearna, teorijska analiza kao i detaljna eksperimentalna analiza i tim putem dođe do novih saznanja u oblasti bočnog izvijanja nosača.

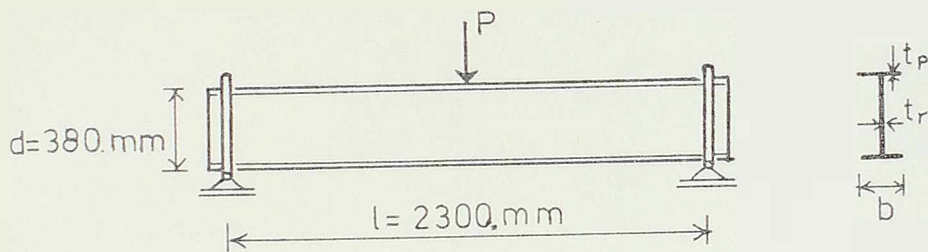
Naime, i pored velikog broja radova iz ove oblasti može se konstatovati da ona nije još dovoljno proučena ni sa teorijskog ni sa eksperimentalnog stanovišta. Potrebno je naći odgovore još na veći broj pitanja vezanih za ponašanje tankozidnih nosača deformabilnog poprečnog preseka gde postoji mogućnost njihovog bočnog izvijanja da bi se sa sigurnošću prišlo njihovom racionalnom projektovanju.

2. EKSPERIMENTALNA ANALIZA

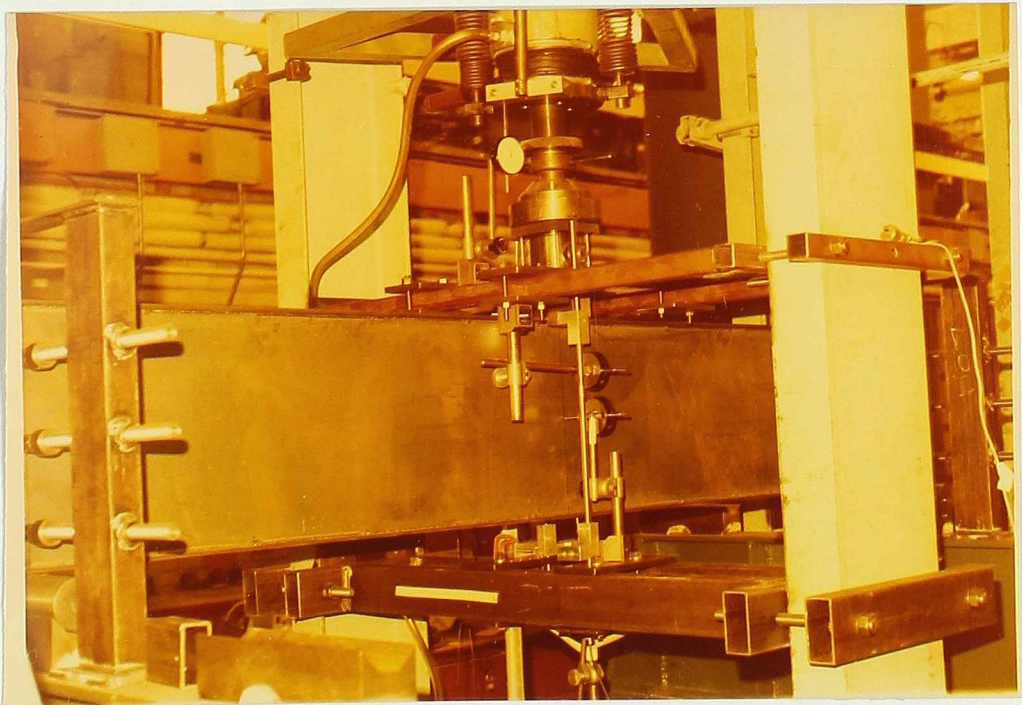
2.1 UREDJAJ ZA ISPITIVANJE

Nosači koji su ispitivani predstavljaju u statičkom smislu gredu viljuškasto oslonjenu na oba kraja i opterećenu silom po gornjem pojasi u sredini raspona grede.

Statička šema nosača prikazana je na slici br. 5 a izgled nosača u toku eksperimenta na slici br. 6.



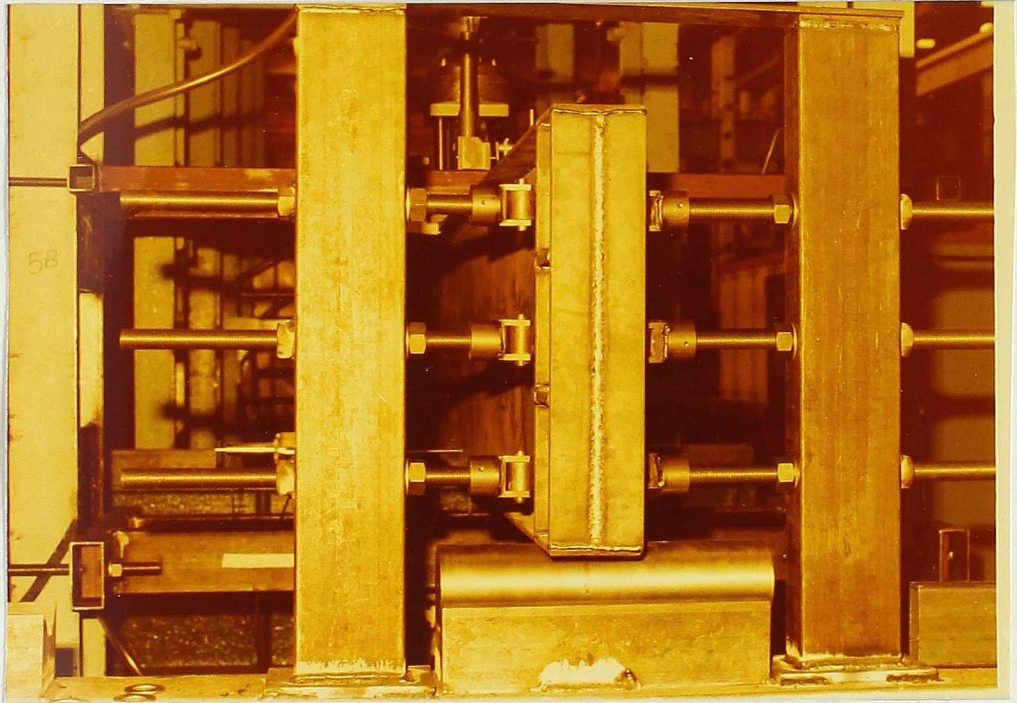
Slika br. 5.



Slika br. 6.



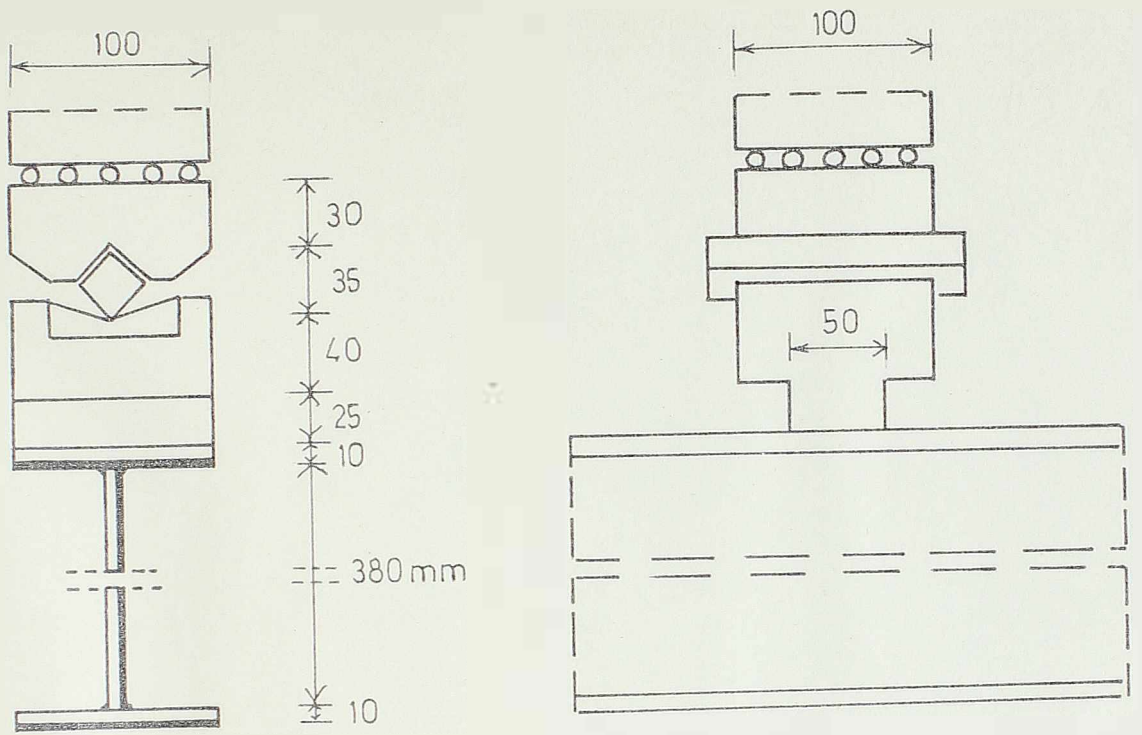
Da bi se realizovalo viljuškasto oslanjanje na krajevima grede, konstruisan je uređaj prikazan na slici br. 7. Uređaj je onemogućavao okretanje poprečnih preseka iznad oslonaca u njihovoj ravni, a omogućavao je nesmetano krivljenje ovih preseka i njihovo okretanje u ravni nosača i u horizontalnoj ravni.



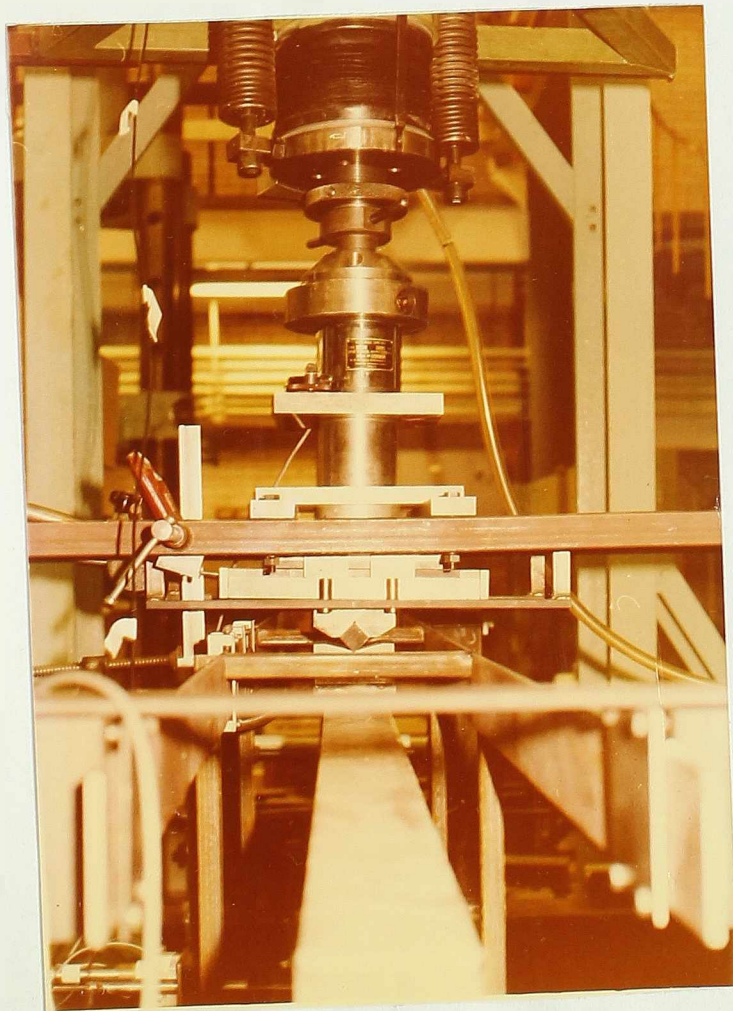
Slika br. 7

Uređaj za opterećenje je tako konstruisan da se presek neposredno ispod opterećenja može nesmetano pomerati i obrtati. Opterećenje se prenosi na gornji pojas preko ploče (dimenzije 5,0 x 10,0 cm) da bi se omogućilo centrično delovanje sile u odnosu na ravan vertikalnog lima.

Šema uređaja prikazana je na slici br. 8, dok je izgled uređaja u toku eksperimenta prikazan na slici br. 9.



Slika br. 8.

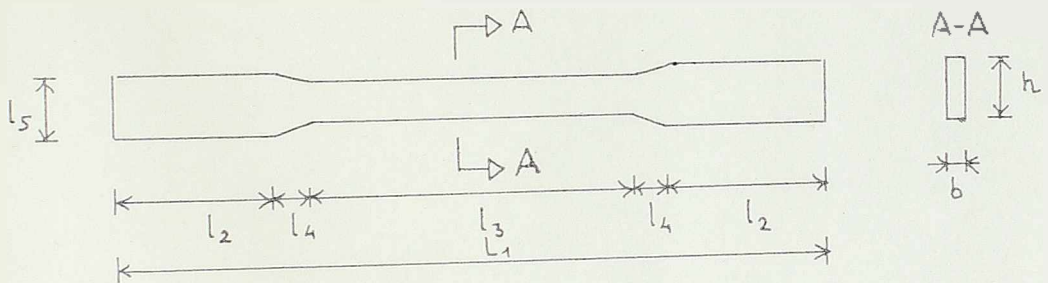


Slika br. 9.

2.2 DIMENZIJA NOSAČA I MEHANIČKE KARAKTERISTIKE MATERIJALA

Dimenzije nosača koji su ispitivani na bočno izvijanje prikazane su na slici br. 11.

Od svake table lima koja je upotrebljena za formiranje rebra i pojaseva nosača napravljene su i dve epruvete za određivanje mehaničkih karakteristika materijala. Oblik epruveta prikazan je na slici br. 10.



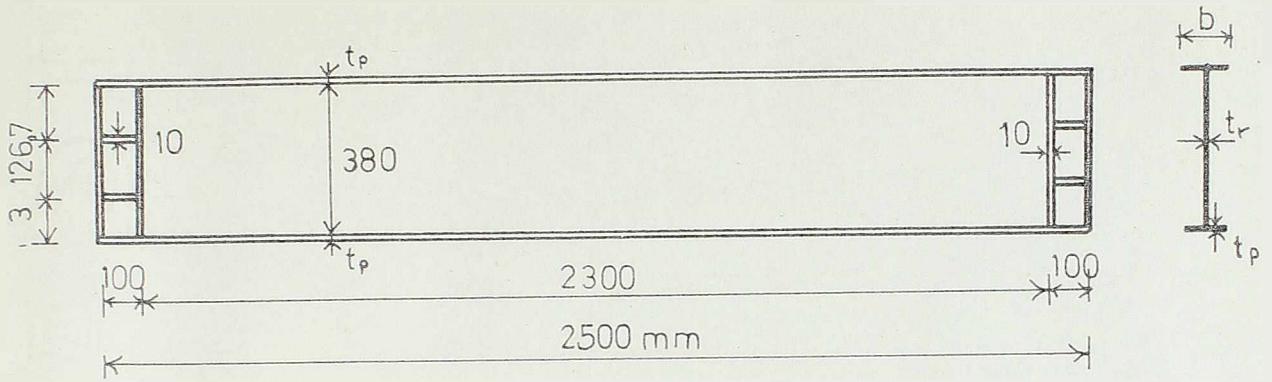
Slika br. 10.

Dimenzije epruveta u zavisnosti od debljine lima date su u tabeli br. 1, s tim što su dimenzije poprečnih preseka u sredini epruvete prikazane u tabeli br. 2.

TABELA BR. 1

DEBLJINA LIMA	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
mm	mm	mm	mm	mm	mm
2 i 3	200	40	90	15	25
5,6 i 10	280	75	95	17,5	32

Epruvete su ispitivane na zatezanje. Cilj ispitivanja bio je određivanje: modula elastičnosti E , granice razvlačenja σ_t , zatezne čvrstoće σ_n i relativnog izduženja δ .



OZNAKA NOSAČA	t_r	t_p	b
	mm	mm	mm
C/1/2	1,96	3,06	80,0
C/1/3	1,96	3,05	79,8
C/2/1	2,99	6,16	80,0
C/2/3	3,00	6,46	79,8
C/3/3	4,94	9,99	100,2

Slika br. 11

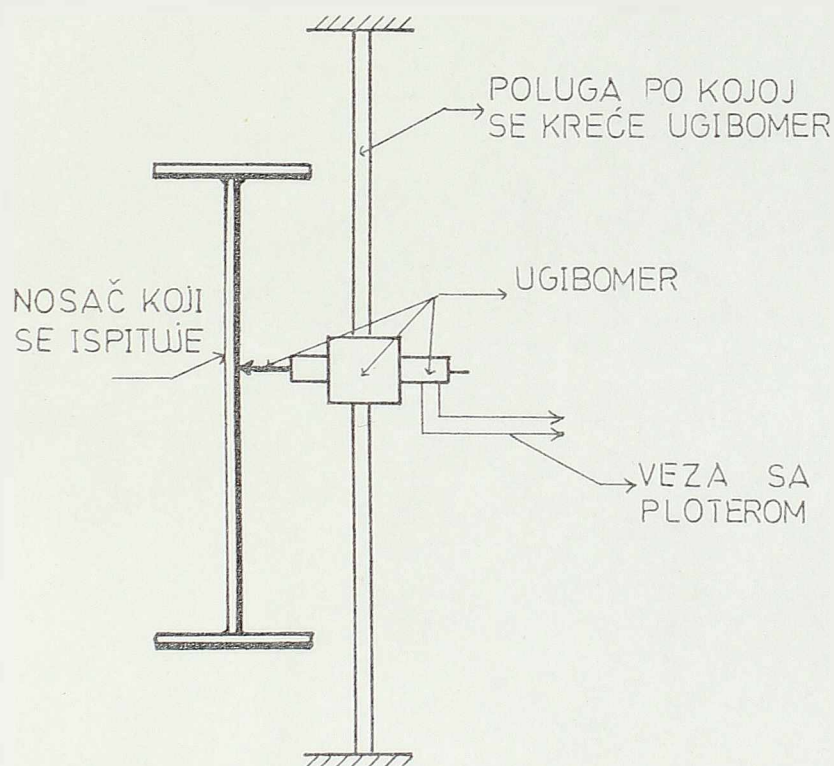


TABELA br. 2

Oznaka epruvete	Visina p. preseka h (mm)	Širina p. preseka b (mm)	Modul elastičnosti E (KN/mm ²)	Granica razvlač. σ_t (N/mm ²)	Zatezna čvrstoća σ_w (N/mm ²)	Relativno izduženje δ (%)
C/1/1/p	12,50	3,03	221,4	279,9	379,5	38,16
C/1/2/p	12,48	3,06	214,4	274,9	379,0	39,00
C/2/1/r	12,54	2,99	223,5	244,7	356,1	39,40
C/2/2/r	12,37	2,98	219,3	254,4	356,7	37,00
C/2/1/p	12,59	6,17	204,1	300,5	431,7	37,90
C/2/2/p	12,57	6,39	224,3	305,8	437,8	35,00
C/1/1/r	12,52	1,96	191,8	174,5	299,1	49,40
C/1/2/r	12,52	1,98	194,7	201,5	324,8	41,40
C/3/2/r	12,55	4,95	227,0	305,2	474,2	34,40
C/3/3/r	12,55	4,95	222,0	310,1	482,4	32,80
C/3/2/p	12,53	10,02	211,5	294,7	430,3	40,80
C/3/3/p	12,55	9,94	204,2	324,4	451,1	40,60

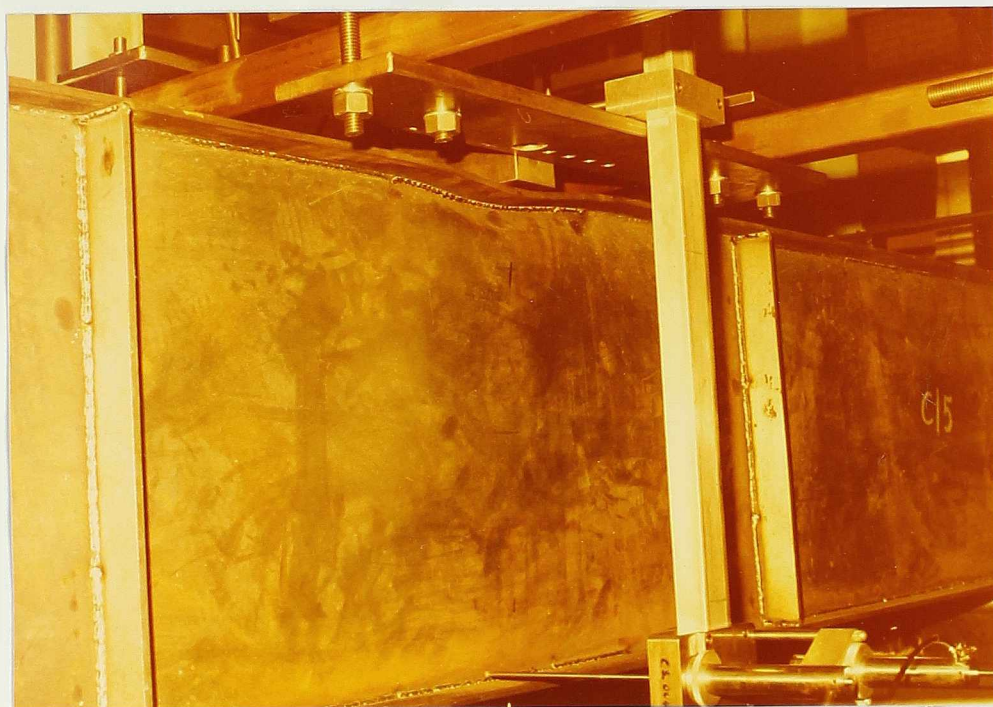
2.3 EKSPERIMENTALNI REZULTATI

Pri ispitivanju nosača na bočno izvijanje ispitano je ukupno pet nosača. Pomoću uređaja "transducer" praćena je u toku eksperimenta deformacija vertikalnog lima u sredini raspona ispod sile P. Šema ovog uređaja prikazana je na slici br. 12.



Slika br. 12.

Vidi se da je reć o pokretnom elektronskom ugibomeru koji se kreće po vertikalnoj osovini dodirujući pri tome vertikalni lim. Ugibomer je spojen sa "ploterom" koji u toku eksperimenta direktno crta deformaciju vertikalnog lima kada se po njemu pomera ugibomer (vidi na primer stranu br.16). Na slici br. 13 prikazan je "transducer" sa ugibomerom koji se nalazi u visini donjeg pojasa nosača C/5 (rezultati za ovaj nosač prikazani su u poglavlju II-2.



Slika br. 13

Od posebne važnosti pri ispitivanju nosača bilo je određivanje kritičnog opterećenja. U tom cilju korišćen je poseban "ploter" koji je pratio i crtao povećanje sile sve do kritičnog opterećenja. Kada je ono bilo dostignuto, primećeno je da sa povećanjem deformacije nosača dolazi do pada sile. Na slici br. 14, prikazano je određivanje kritičnog opterećenja za nosač C/2/2, čiji su rezultati dati u poglavlju II.2.

Kako se vidi iz eksperimentalnih rezultata kritično opterećenje određeno je za nosače čija je debljina vertikalnog lima 5mm i 3mm. Za nosače čija je debljina vertikalnog lima 2mm kritično opterećenje nije dostignuto. Naime, usled značajne deformacije gornjeg pojasa na mestu nanošenja opterećenja (vidi sliku br. 17.), nije se moglo u toku eksperimenta ići do kritičnog opterećenja. Međutim, kako je to pokazano u poglavlju I.3.3, koristeći eksperimentalne rezultate koji se odnose na ponašanje ovih nosača pri opterećenjima koja su manja od kritičnog, može se sa dovoljnom sigurnošću odrediti i njihovo stvarno kritično opterećenje.

Iz istih razloga i nosač C/2/3 ispitan je samo do približno 70% vrednosti njegovog kritičnog opterećenja.



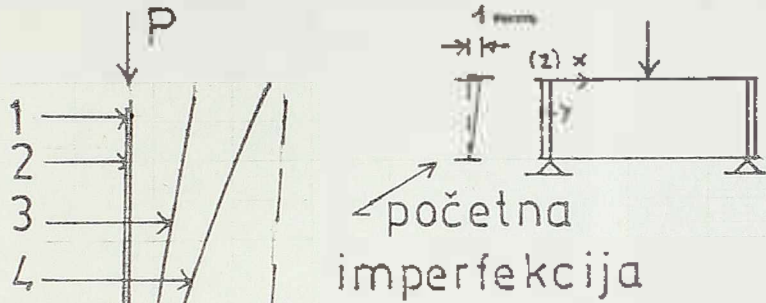
Slika br. 14

Ekperimentalni rezultati za nosače koji su ispitivani na bočno izvijanje prikazani su na stranama 16 do 25 .

N O S A Ć C/3/3
=====

NOSAČ C/3/3

deformacija poprečnog preseka
ispod sile P



1	0 kN
2	60. kN
3	80. kN
4	90. kN
5	0. kN (-----)

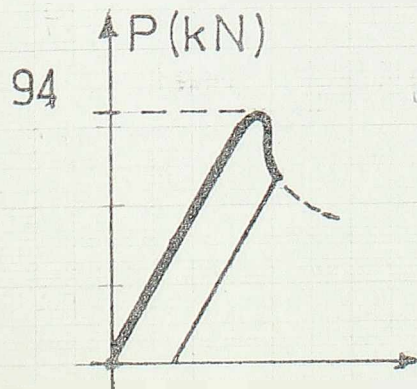
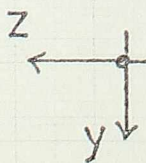
↙ rasterećenje

max P 94.kN

razmera:

z = 2:1

y = 1:2,5



Na slici br. 15, prikazan je izgled nosača posle dostignutog kritičnog opterećenja i izvršenog rasterećenja.

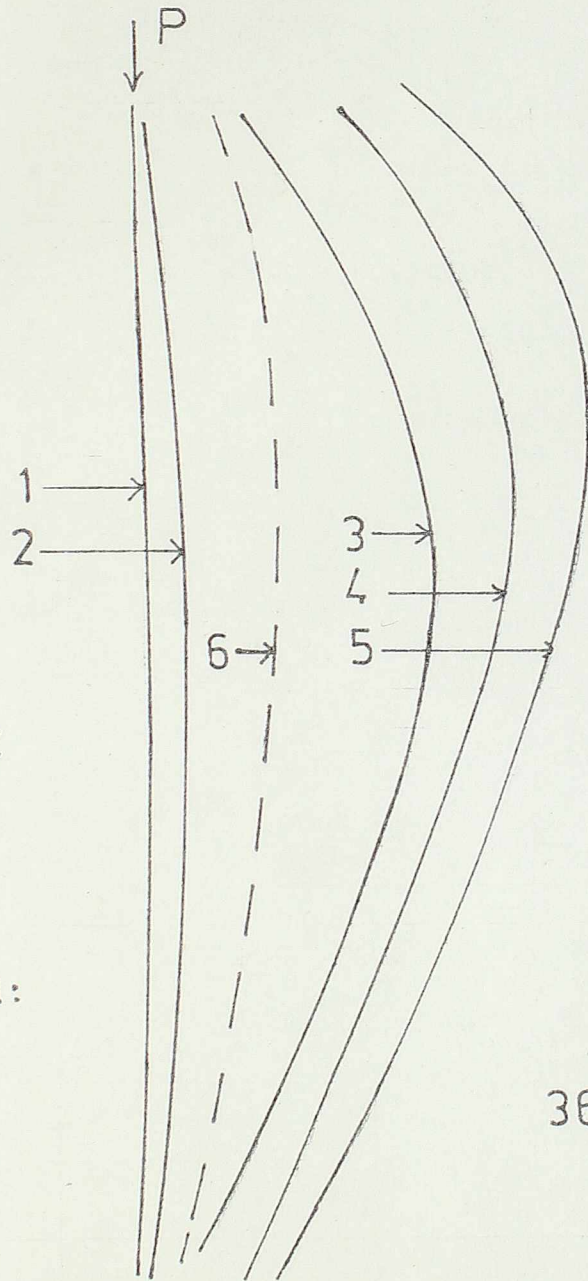
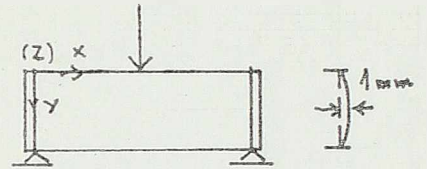


Slika broj 15.

N O S A Ć C / 2 / 1

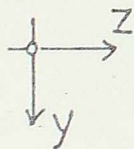
NOSAČ C/2/1

deformacija poprečnog preseka
ispod sile P

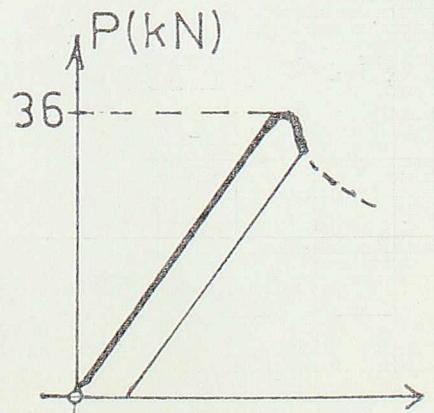


1	0. kN
2	20. kN
3	36. kN
4	34. kN
5	33. kN
6	0. kN (---) rasterećenje

max P 36.kN

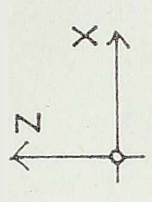
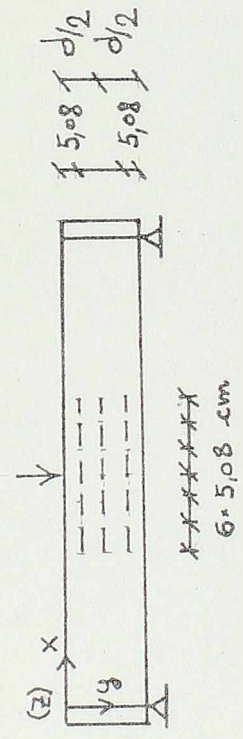
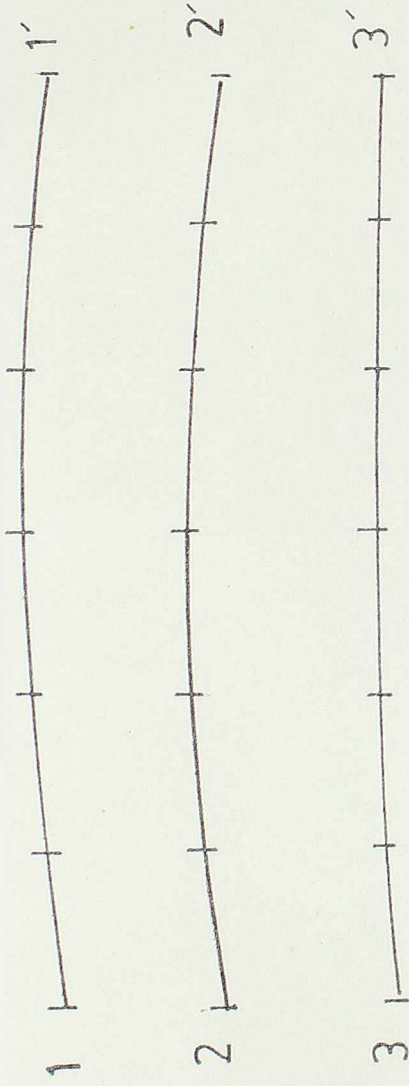


razmera:
z = 2:1
y = 1:2,5



NOSAČ C/2/1

zaostale deformacije poduznih preseka



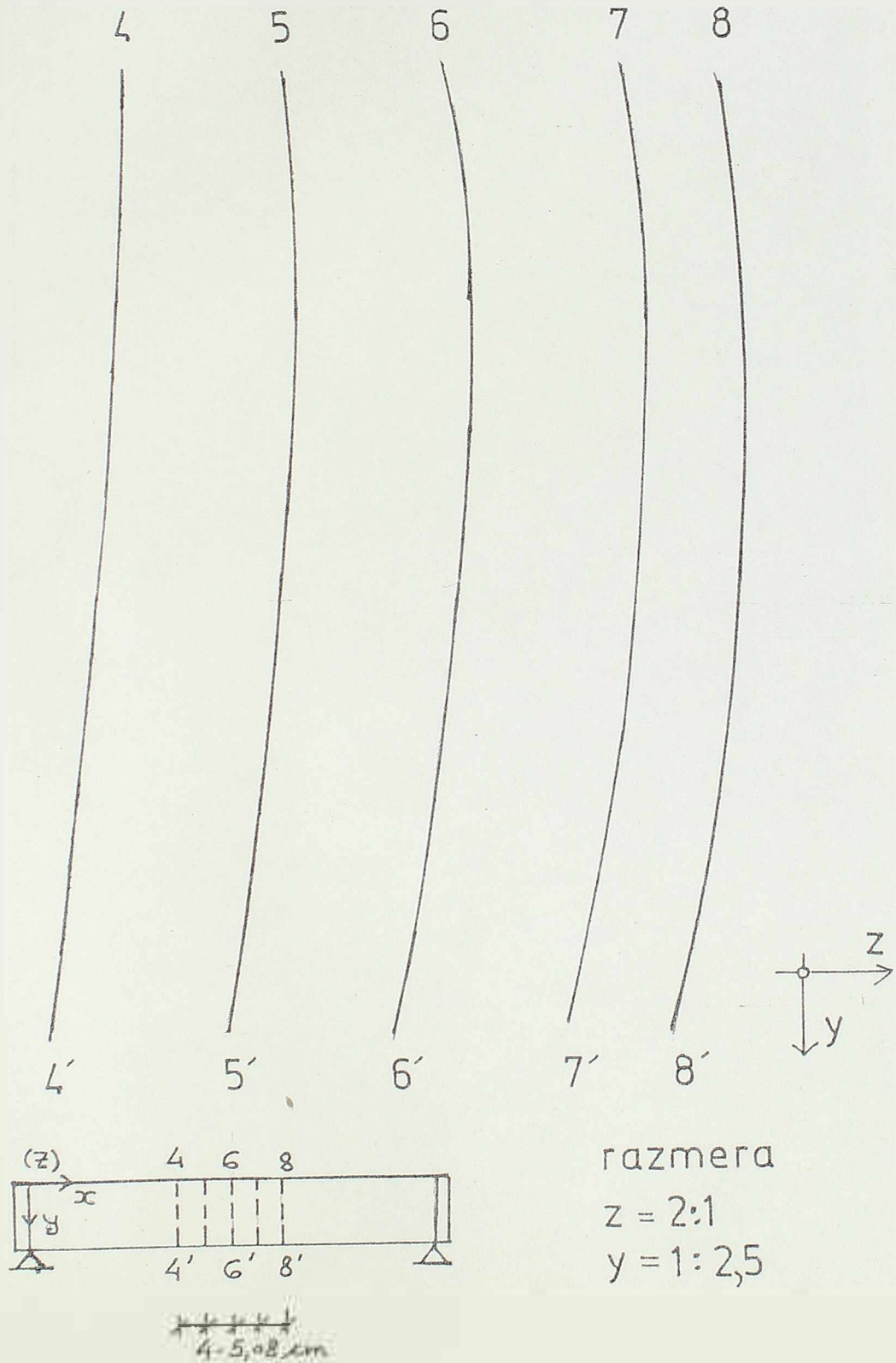
razmera:

$x = 1:2,5$

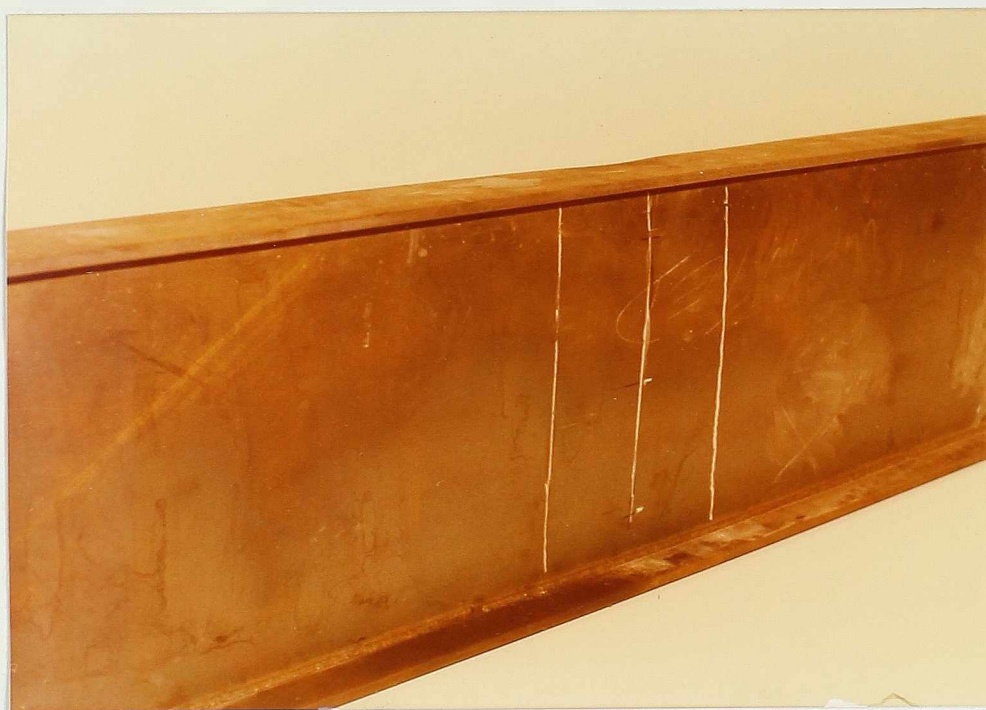
$z = 2:1$

NOSAČ C/2/1

zaostale deformacije poprečnih preseka



Zaostala bočna deformacija u sredini nosača posle dostignutog kritičnog opterećenja i rasterećenja prikazana je na slici br. 16.

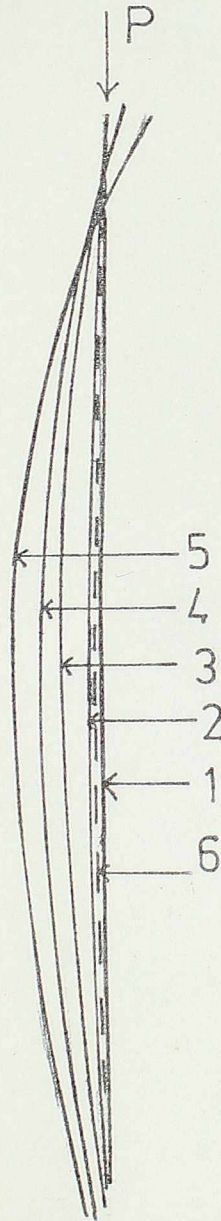
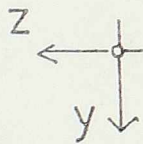
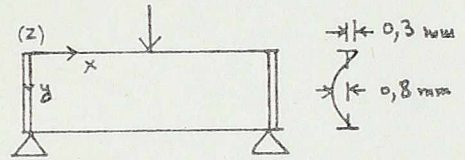


Slika br. 16.

N O S A Ć C / 2 / 3

NOSAČ C/2/3

deformacija poprečnog preseka ispod
sile P

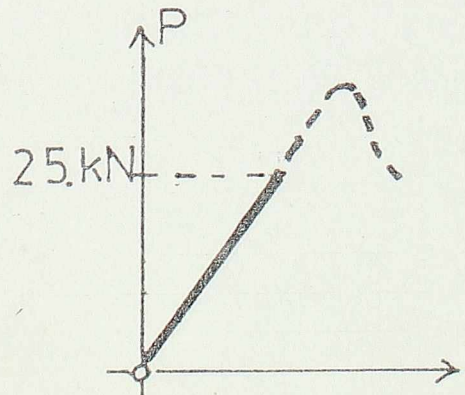


1	0. kN
2	10. kN
3	15. kN
4	20. kN
5	25. kN
6	0. kN (---) rasterećenje

razmera:

$$z = 2:1$$

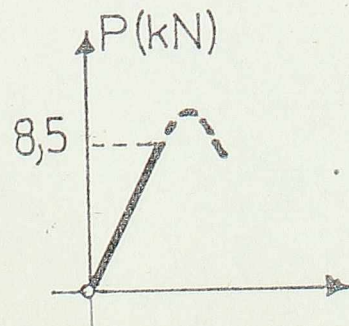
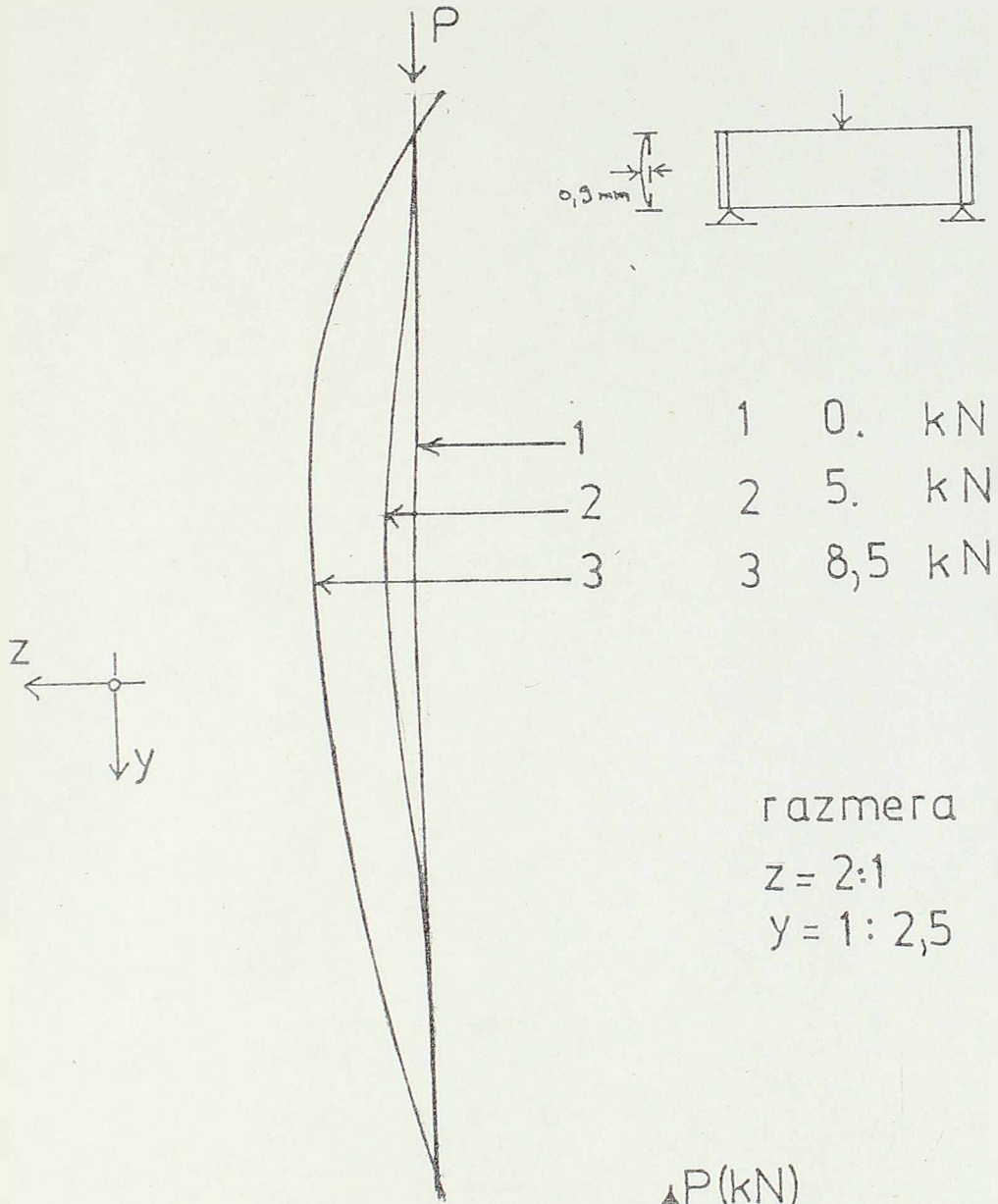
$$y = 1:2,5$$



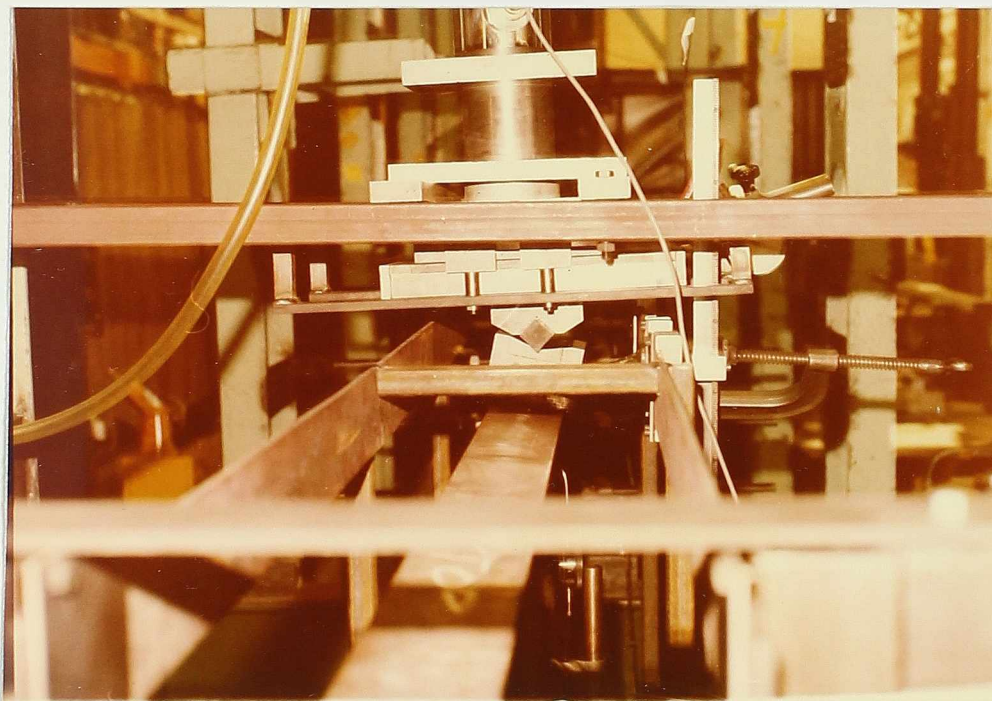
N O S A Ć C/1/3
=====

NOSAČ C/1/3

deformacija poprečnog preseka
ispod sile P



Na slici br. 17 , prikazan je nosač pri maksimalnom opterećenju kada je došlo do značajne deformacije gornjeg pojasa na mestu nanošenja opterećenja.

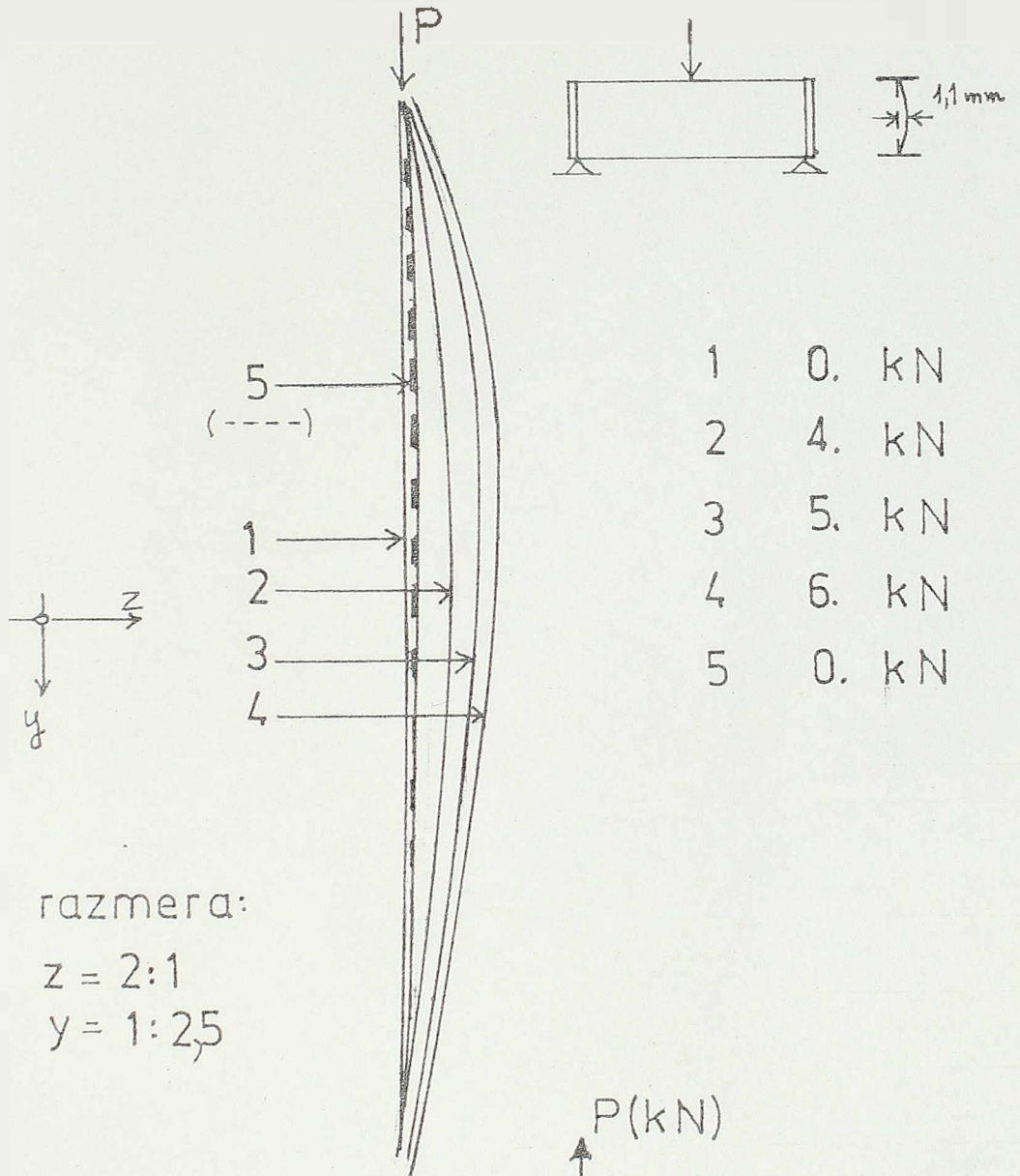


Slika br. 17

N O S A Ć C/1/2

NOSAČ C/1/2

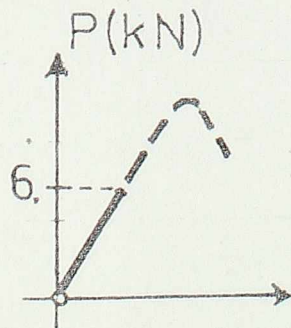
deformacija poprečnog preseka
ispod sile P



razmera:

$z = 2:1$

$y = 1:25$



3. TEORIJSKA ANALIZA

3.1 PRORAČUN BOČNOG IZVIJANJA NOSAČA NEDEFORMABILNOG POPREČNOG PRESEKA PRIMENOM METODE KONAČNIH ELEMENATA.

3.1.1 Uvod

Klasičan pristup problemu bočnog izvijanja nosača dao je Timošenko [1] i on se sastoji u rešavanju odgovarajućih diferencijalnih jednačina problema. Kasnije je Moell [3] dao rešenje ovog problema koristeći Ritz-ov postupak, a Hartmann [4] je primenio postupak numeričke integracije.

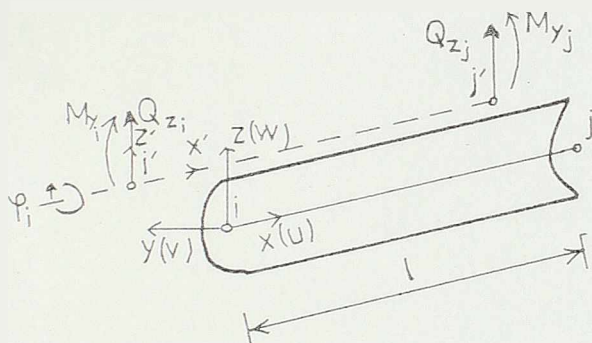
Sve ove metode nisu dovoljno opšte da reše mnoge probleme koji se mogu javiti u praksi. Tek sa primenom metode konačnih elemenata došlo se do jedne efikasne metode pomoću koje se mogu rešiti problemi koji ranije, koristeći klasične metode proračuna, praktično nisu imali rešenja.

U ovom poglavlju prikazana je primena metode konačnih elemenata na proračun bočnog izvijanja tankozidnog nosača nedeformabilnog poprečnog preseka. Izvedeni su izrazi za matricu krutosti i geometrijsku matricu krutosti, pa je na osnovu njih napravljen program za elektronski računar pomoću kojeg se mogu rešavati složeni problemi bočnog izvijanja nosača. Za razliku od ranijih radova [5], [6] i [7], ovde su matrica krutosti i geometrijska matrica krutosti izvedene varijacionim postupkom, odnosno koristeći uslov da je kada dolazi do bočnog izvijanja štapa druga varijacija potencijalne energije jednaka nuli.

Za ugao obrtanja poprečnog preseka usvojena je kubna varijacija, jer se može pokazati da ona daje bolje rešenje u odnosu na linearnu varijaciju.

3.1.2 Matrica krutosti i geometrijska matrica krutosti

U cilju odredjivanja elemenata matrice krutosti i geometrijske matrice krutosti, štap je podeljen na elemente konačne dužine. Jedan od tih elemenata prikazan je na sl. 18.



Slika br. 18.

Koordinatne ose pravouglog koordinatnog sistema $xOyz$ tako su izabrane da se y i z osa poklapaju sa glavnim osama poprečnog preseka elementa pre izvijanja, a x osa se poklapa sa težišnom osom štapa $i - j$ pre izvijanja.

Sile i momenti na krajevima elementa $Q_{zi}, Q_{yi}, M_{xi}, \varphi_i$ deluju duž osa koje prolaze kroz centar smicanja i' , j' , a paralelne su osama x, y i z . Spoljašnje opterećenje koje izaziva ove uticaje deluje u vertikalnoj ravni xOz' . Za ovako definisan slučaj bočnog izvijanja nosača može se zaključiti da pre dostizanja kritičnog opterećenja neće doći do bočnog pomeranja nosača i njegove torzije.

Otpornost nosača na bočno izvijanje zavisi od njegove krutosti na bočno savijanje i od njegove krutosti na torziju. Za nepoznate veličine u čvorovima i i j usvajamo pomeranje v u pravcu y ose i njegov prvi izvod v' , obrtanje φ i njegov prvi izvod φ' .

Uobičajene pretpostavke vezane za deformaciju tankozidnog nosača pri bočnom izvijanju i ovde će biti zadržane. One govore o tome da oblik poprečnog preseka štapa ostaje nepromenjen u toku deformacije i da se klizanje u srednjoj površini štapa može zanemariti.

Pri pojavi izvijanja nosača potencijalna energija štapa data je izrazom:

$$\begin{aligned} \overline{II} &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[I_z \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + EI_w \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 + GK \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right] dx - \\ &- \frac{1}{2} Q_z \int_0^l \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx^2} \right) \varphi + \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{dv}{dx^2} \right) \right] x dx - \\ &- \frac{1}{2} Q_{xz} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx^2} \right) \varphi + \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{dv}{dx^2} \right) \right] (l-x) dx - \\ &- \frac{1}{2} N_{y1} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx^2} \right) \varphi + \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{dv}{dx^2} \right) \right] dx + \\ &+ \frac{1}{2} M_{y3} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx^2} \right) \varphi + \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{dv}{dx^2} \right) \right] dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Prvi integral u jednačini (1) predstavlja deformacionu energiju pri izvijanju štapa, a ostali integrali predstavljaju potencijalnu energiju spoljašnjih sila na krajevima štapa. Pri tome je E modul elastičnosti, I_z momenat inercije oko vertikalne ose, I_w sektorski momenat inercije, G modul klizanja i K torziona konstanta.

Za odredjivanje kritičnog opterećenja koristimo stav da je kada dolazi do bočnog izvijanja štapa druga varijacija potencijalne energije jednaka nuli. Tako dobijamo:

$$\delta^2 \bar{\Pi} = \int_0^1 \left[EI_y \left(\frac{d^2 \delta v}{dx^2} \right)^2 + EI_\omega \left(\frac{d^2 \delta \varphi}{dx^2} \right)^2 + GK \left(\frac{d \delta \varphi}{dx} \right)^2 \right] dx -$$

$$- \frac{Q_z}{2} \int_0^1 \left[\frac{d \delta v}{dx} \delta \varphi + \delta \varphi \frac{d \delta v}{dx} \right] dx - \frac{Q_z}{2} \int_0^1 \left[\frac{d^2 \delta v}{dx^2} \delta \varphi + \delta \varphi \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \right] (1-x) dx - \quad (2)$$

$$- \frac{M_z}{2} \int_0^1 \left[\frac{d^2 \delta v}{dx^2} \delta \varphi + \delta \varphi \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \right] dx + \frac{M_z}{2} \int_0^1 \left[\frac{d^2 \delta v}{dx^2} \delta \varphi + \delta \varphi \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \right] dx = 0$$

Da odredimo koeficijente matrice krutosti i geometrijske matrice krutosti štapa usvojićemo kubnu varijaciju pomeranja v i ugla obrtanja φ duž ose štapa:

$$v = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (3)$$

$$\varphi = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$$

"Pomeranje $q(x)$ " proizvoljnog preseka x elementa i -j dato je izrazom:

$$[q^c] = \begin{bmatrix} v \\ v' \\ \varphi \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = [H] [\delta] \quad (4)$$

Za preseke $x=0$ i $x=1$, dobijamo:

$$[q^c] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \\ \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = [A] [\delta] \quad (5)$$

Sada možemo pisati:

$$\begin{aligned}
 [\delta] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/l^2-2/l & 3/l^2-1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{2/l^3-1/l^2} & \underline{-2/l^3} & \underline{1/l^2} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/l^2-2/l & 3/l^2-1/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{2/l^3-1/l^2} & \underline{-2/l^3} & \underline{1/l^2} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_3 \\ v_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{bmatrix} = [A^{-1}] [q^c] \quad (6)
 \end{aligned}$$

$[A^{-1}]$

tako da su funkcije v i φ i njihovi izvodi dati izrazima:

$$\begin{aligned}
 v &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \underline{x^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\delta] = [V_0] [\delta] = [V_0] [A^{-1}] [q^c] \\
 &\quad \quad \quad [V_0] \\
 \frac{dv}{dx} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & \underline{3x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\delta] = [V_1] [\delta] = [V_1] [A^{-1}] [q^c] \\
 &\quad \quad \quad [V_1] \\
 \frac{d^2v}{dx^2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & \underline{6x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\delta] = [V_2] [\delta] = [V_2] [A^{-1}] [q^c] \quad (7) \\
 &\quad \quad \quad [V_2] \\
 \varphi &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} [\delta] = [F_0] [\delta] = [F_0] [A^{-1}] [q^c] \\
 &\quad \quad \quad [F_0] \\
 \frac{d\varphi}{dx} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{0} & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [\delta] = [F_1] [\delta] = [F_1] [A^{-1}] [q^c] \\
 &\quad \quad \quad [F_1] \\
 \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{0} & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} [\delta] = [F_2] [\delta] = [F_2] [A^{-1}] [q^c] \\
 &\quad \quad \quad [F_2]
 \end{aligned}$$

Kada izraze iz jednačine (7) zamenimo u jednačinu (2) dobijamo:

$$\begin{aligned}
 & \int_L \left[\delta q^c \right]^T \cdot \left\{ \left[A^1 \right]^T \left[V_2 \right]^T E I_z \left[V_2 \right] \left[A^1 \right] + \left[A^1 \right]^T \left[F_2 \right]^T E I_w \left[F_2 \right] \left[A^1 \right] + \right. \\
 & \left. + \left[A^1 \right]^T \left[F_1 \right]^T G K \left[F_1 \right] \left[A^1 \right] \right\} \left[\delta q^c \right] dx + \\
 & + \int_L \left[\delta q^c \right] \left\{ - \frac{Q_{z_1}}{2} \left[A^1 \right]^T \left[V_2 \right]^T \left[F_0 \right] \left[A^1 \right] x - \frac{Q_{z_1}}{2} \left[A^1 \right]^T \left[F_0 \right]^T \left[V_2 \right] \left[A^1 \right] x - \right. \\
 & - \frac{Q_{z_2}}{2} \left[A^1 \right]^T \left[V_2 \right]^T \left[F_0 \right] \left[A^1 \right] (1-x) - \frac{Q_{z_2}}{2} \left[A^1 \right]^T \left[F_0 \right]^T \left[V_2 \right] \left[A^1 \right] (1-x) - \\
 & - \frac{M_{y_1}}{2} \left[A^1 \right]^T \left[V_2 \right]^T \left[F_0 \right] \left[A^1 \right] - \frac{M_{y_1}}{2} \left[A^1 \right]^T \left[F_0 \right]^T \left[V_2 \right] \left[A^1 \right] + \\
 & \left. + \frac{M_{y_2}}{2} \left[A^1 \right]^T \left[V_2 \right]^T \left[F_0 \right] \left[A^1 \right] + \frac{M_{y_2}}{2} \left[A^1 \right]^T \left[F_0 \right]^T \left[V_2 \right] \left[A^1 \right] \right\} \left[\delta q^c \right] dx = 0,
 \end{aligned} \tag{8}$$

odnosno:

$$\left\{ \left[K \right] + \left[G \right] \right\} \left[\delta q^c \right] = 0, \tag{9}$$

gde je $\left[K \right]$ matrica krutosti oblika:

$$\begin{aligned}
 \left[K \right] = & \int_L \left\{ \left[A^1 \right]^T \left[V_2 \right]^T E I_z \left[V_2 \right] \left[A^1 \right] + \left[A^1 \right]^T \left[F_2 \right]^T E I_w \left[F_2 \right] \left[A^1 \right] + \right. \\
 & \left. + \left[A^1 \right]^T \left[F_1 \right]^T G K \left[F_1 \right] \left[A^1 \right] \right\} dx,
 \end{aligned} \tag{10}$$

a $[G]$ geometrijska matrica krutosti oblika:

$$\begin{aligned}
 [G] = \int_0^1 & \left\{ -\frac{Q_z}{2} [A^T] [V_2]^T [F_0] [A] x - \frac{Q_z}{2} [A^T] [F_0]^T [V_2] [A] x - \right. \\
 & - \frac{Q_{zj}}{2} [A^T] [V_2]^T [F_0] [A] (1-x) - \frac{Q_{zj}}{2} [A^T] [F_0]^T [V_2] [A] (1-x) - \\
 & - \frac{M_y}{2} [A^T] [V_2]^T [F_0] [A] - \frac{M_{yj}}{2} [A^T] [F_0]^T [V_2] [A] + \\
 & \left. + \frac{M_{xj}}{2} [A^T] [V_2]^T [F_0] [A] + \frac{M_{xj}}{2} [A^T] [F_0]^T [V_2] [A] \right\} dx.
 \end{aligned} \tag{11}$$

3.1.3. Problem stabilnosti

Sile Q_z i momenti M_y mogu se prikazati u funkciji opterećenja koje izaziva bočno izvijanje nosača. To se najčešće čini uvođenjem faktora opterećenja λ . Sada jednačinu (9) možemo napisati u obliku:

$$\{ [K] + \lambda [G'] \} \{ \delta \underline{q} \} = 0, \tag{12}$$

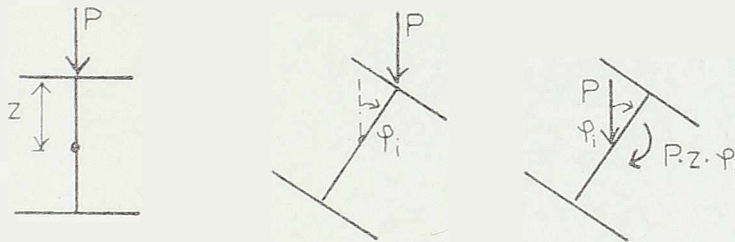
gde je $[G']$ geometrijska matrica krutosti elementa štapa za slučaj da je $\lambda = 1$.

Najmanja vrednost parametra opterećenja $\lambda = \lambda_{cr}$ za koju jednačina (12) ima ma i jedno rešenje osim trivijalnog određuje kritično opterećenje posmatranog problema. Kako jednačina (12) predstavlja sistem homogenih algebarskih jednačina, matematički uslov iz koga određujemo λ_{cr} , glasi:

$$\text{DET} \left| [K] + \lambda [G'] \right| = 0 \tag{13}$$

3.1.4 Numerički proračun

Koristeći izvedene izraze za matricu krutosti K i geometrijsku matricu krutosti G sračunati su svi koeficijenti ovih matrica i prikazani na slikama 20 i 21. Tada je napravljen program za elektronski računar koji primenjuje metodu proračuna koja je ovde opisana. Algoritam programa dat je na strani br. 36. Razmatrane su tri varijante opterećenja: a) sila P deluje u težištu preseka, b) sila P deluje po gornjem pojasu i c) sila P deluje po donjem pojasu. Za slučaj opterećenja pod b) i c) potrebno je u izrazu za potencijalnu energiju spoljašnjih sila dodati član $1/2 \cdot P \cdot z \cdot \varphi_i^2$, gde je z vertikalno odstojanje sile P od centra smicanja, a φ_i ugao obrtanja preseka i u kome deluje sila P (Slika br. 19).



Slika br. 19.

Kako se sa slike br. 22 vidi konvergencija ka tačnom rešenju sa povećanjem broja elemenata je veoma brza.

Treba napomenuti da program osim kritičnog opterećenja računa i oblik izvijanja nosača (Slika br. 23).

MATRICA KRUTOSTI [K]

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & V_i \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & V_i' \\ & & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & V_j \\ & & & K_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & V_j' \\ & & & & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} & \varphi_i \\ & & & & & K_{66} & K_{67} & K_{68} & \varphi_i' \\ & & & & & & K_{77} & K_{78} & \varphi_j \\ & & & & & & & K_{88} & \varphi_j' \end{bmatrix}$$

SIMETRIČNO

$$K_{11} = K_{33} = -K_{13} = \frac{12EI_z}{l^3}$$

$$K_{22} = K_{44} = \frac{4EI_z}{l}$$

$$K_{12} = K_{14} = -K_{23} = -K_{34} = \frac{6EI_z}{l^2}$$

$$K_{24} = \frac{2EI_z}{l}$$

Slika br. 20.

$$K_{55} = K_{77} = -K_{57} = \frac{12EI_\omega}{l^3} + \frac{1,2 GK}{l}$$

$$K_{66} = K_{88} = \frac{4EI_\omega}{l} + \frac{2 GKl}{15}$$

$$K_{56} = K_{58} = -K_{67} = -K_{78} = \frac{6EI_\omega}{l^2} + \frac{GK}{10}$$

$$K_{68} = \frac{2EI_\omega}{l} - \frac{GKl}{30}$$

GEOMETRIJSKA MATRICA KRUTOSTI [G]

[G] =

	v_i	v_j	v_j'	φ_i	φ_i'	φ_j	φ_j'	
0	0	0	0	G_{15}	G_{16}	G_{17}	G_{18}	v_i
	0	0	0	G_{25}	G_{26}	G_{27}	G_{28}	v_i'
		0	0	G_{35}	G_{36}	G_{37}	G_{38}	v_j
			0	G_{45}	G_{46}	G_{47}	G_{48}	v_j'
				0	0	0	0	φ_i
					0	0	0	φ_i'
						0	0	φ_j
							0	φ_j'

SIMETRIČNO

obeležavanje.

$$Q_{z_i} = Q_i, \quad Q_{z_j} = Q_j,$$

$$M_{z_i} = M_i, \quad M_{z_j} = M_j$$

$$G_{15} = -G_{35} = 0,6(M_i - M_j)/l + 0,05Q_i + 0,55Q_j$$

$$G_{16} = -G_{36} = 0,05(M_i - M_j) + 0,05Q_i l$$

$$G_{17} = -G_{37} = -0,6(M_i - M_j)/l - 0,55Q_i - 0,05Q_j$$

$$G_{18} = G_{38} = 0,05(M_j - M_i) + 0,05Q_i l$$

$$G_{25} = 0,55(M_i - M_j) + 0,10Q_i l + 0,45Q_j l$$

$$G_{26} = \frac{1}{15}(M_i - M_j) + \frac{1}{60}Q_i l^2 + 0,05Q_j l^2$$

$$G_{27} = -0,05(M_i - M_j) - 0,1Q_i l + 0,05Q_j l$$

$$G_{28} = -\frac{1}{60}(M_i - M_j) - \frac{l^2}{60}Q_j$$

$$G_{35} = 0,05(M_j - M_i) - 0,05Q_i l + 0,1Q_j l$$

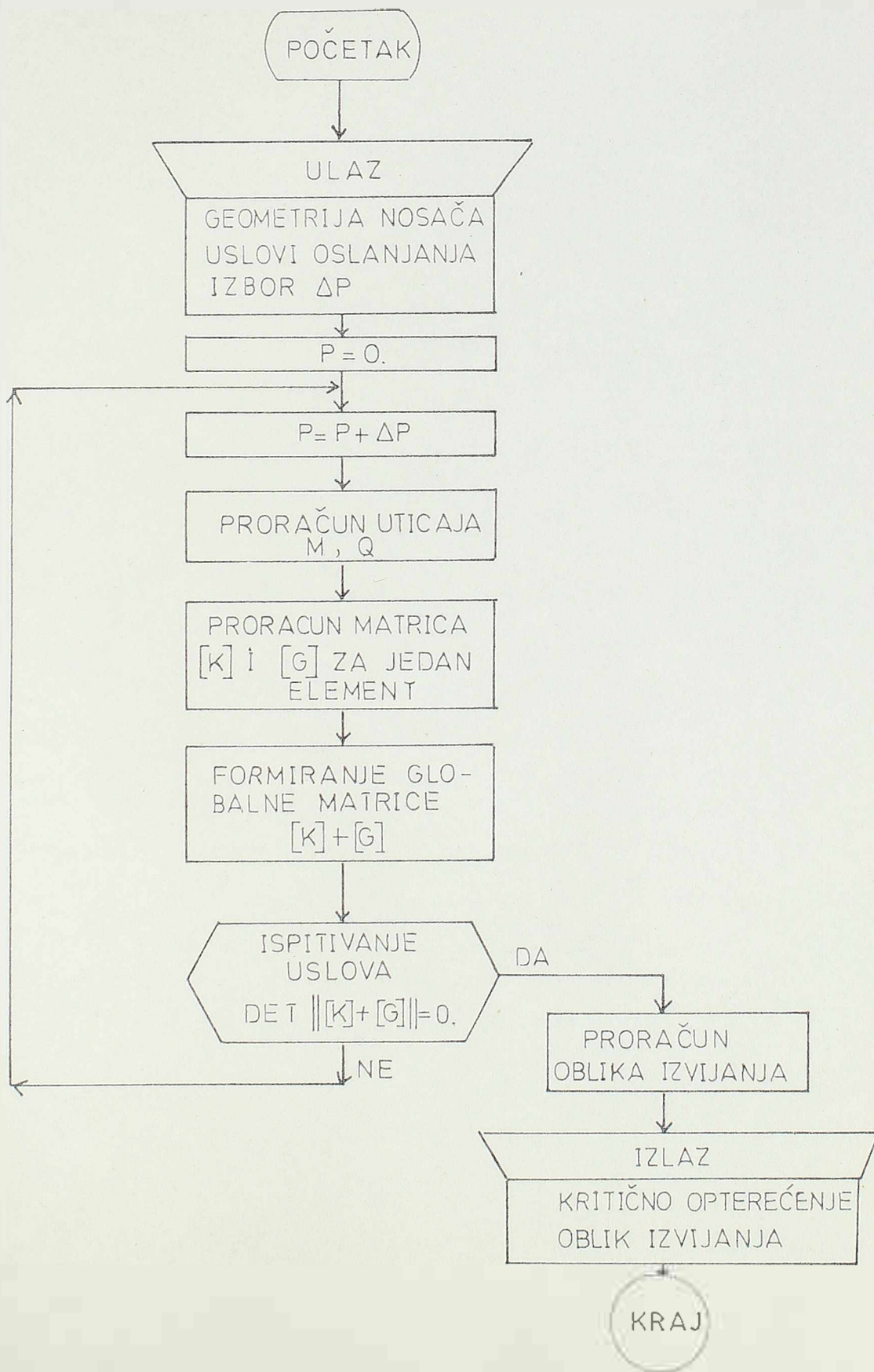
$$G_{36} = -\frac{1}{60}(M_i - M_j) - \frac{l^2}{60}Q_i$$

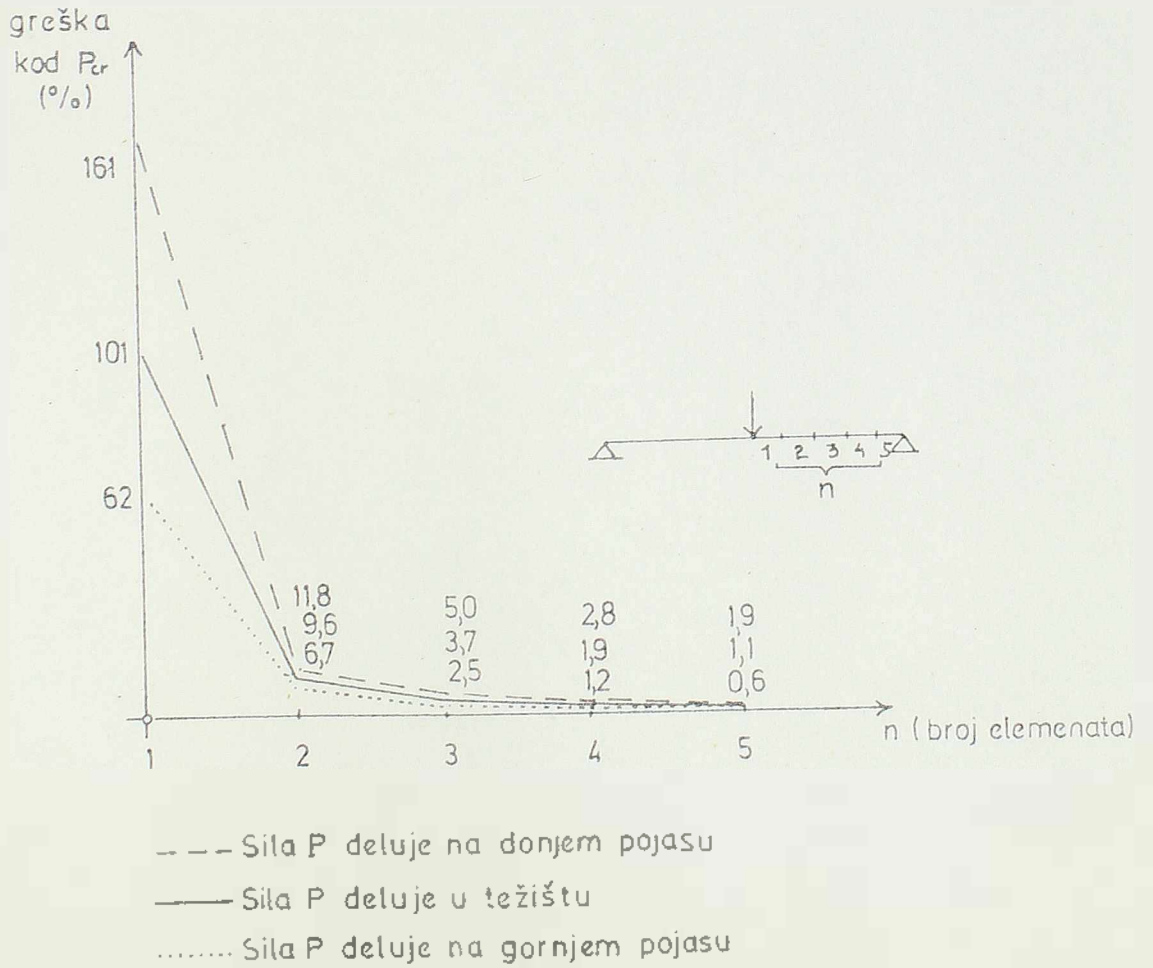
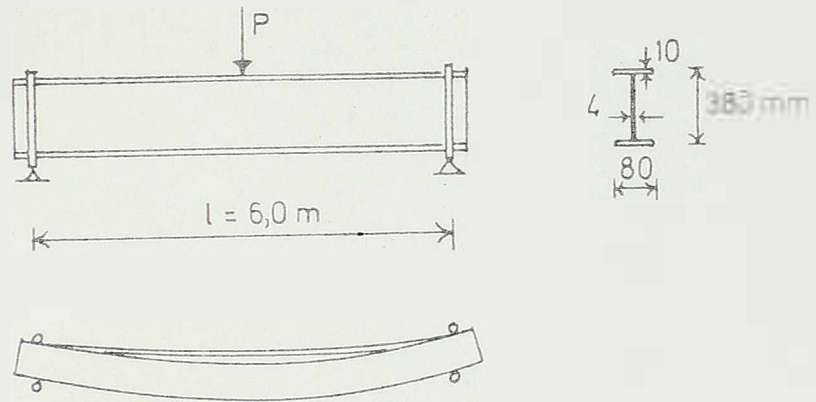
$$G_{37} = -0,55(M_i - M_j) - 0,45Q_i l - 0,10Q_j l$$

$$G_{38} = \frac{1}{15}(M_i - M_j) + 0,05Q_i l^2 + \frac{l^2}{60}Q_j$$

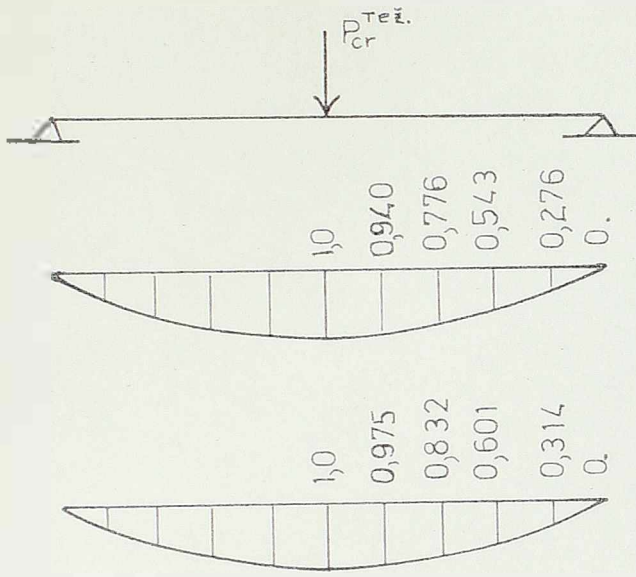
Slika br. 21.

ALGORITAM PROGRAMA ZA BOČNO IZVIJANJE NOSAČA
NEDEFORMABILNOG POPREČNOG PRESEKA





Slika br. 22.



bočno pomeranje v

ugao obrtanja

Slika br. 23

44 11
 1 0.00
 2 0.23
 3 0.46
 4 0.69
 5 0.92
 6 1.15
 7 1.38
 8 1.51
 9 1.84
 10 2.07
 11 2.30
 1 2 0.210E+08 0.250E-06 0.613E-08 0.806E+07 0.247E-08
 2 3 0.210E+08 0.260E-06 0.613E-08 0.806E+07 0.247E-08
 3 4 0.210E+08 0.250E-06 0.613E-08 0.806E+07 0.247E-08
 4 5 0.210E+08 0.260E-06 0.613E-08 0.806E+07 0.247E-08
 5 6 0.210E+08 0.250E-06 0.613E-08 0.806E+07 0.247E-08
 6 7 0.210E+08 0.260E-06 0.613E-08 0.806E+07 0.247E-08
 7 8 0.210E+08 0.250E-06 0.613E-08 0.806E+07 0.247E-08
 8 9 0.210E+08 0.260E-06 0.613E-08 0.806E+07 0.247E-08
 9 10 0.210E+08 0.250E-06 0.613E-08 0.806E+07 0.247E-08
 10 11 0.210E+08 0.260E-06 0.613E-08 0.806E+07 0.247E-08
 0.20E+02 0.0010 -0.1910
 4 1 3 41 43
 21 6

NOŠAČI C/M2 I C/M3

KRITICNO OPTEREČENJE= 0.207295E+01

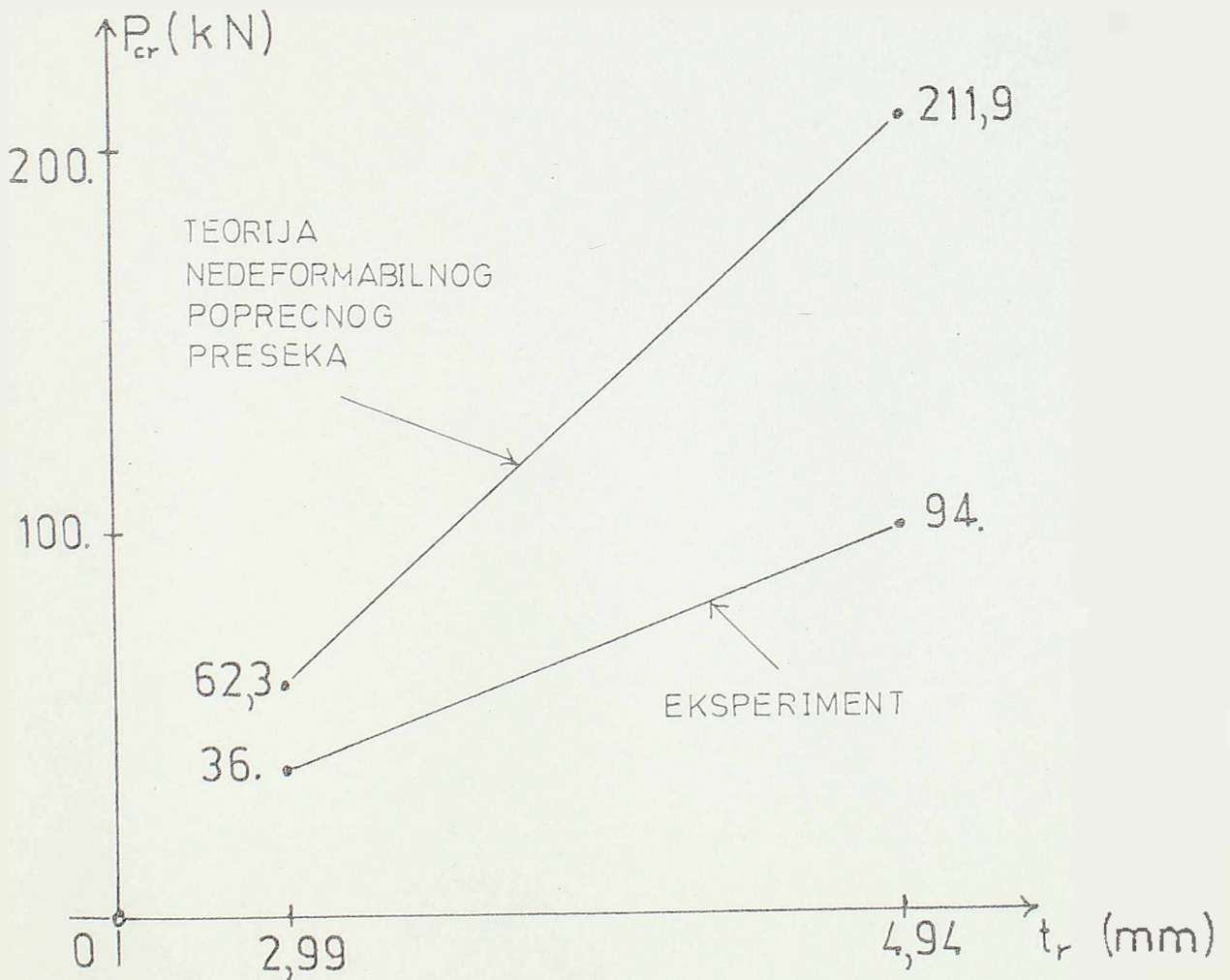
SOPSTVEVI VEKTORI

0.1211E-26 -0.1201E+01 -0.2714E-21 0.1592E+02 0.2754E+00 -0.194E+01 -0.3612E+01 0.1527E+02
 0.5412E+00 -0.1117E+01 -0.6927E+01 0.1334E+02 0.7741E+00 -0.103E+00 -0.9649E+01 0.1012E+02
 0.0399E+00 -0.5378E+00 -0.1148E+02 0.5637E+01 0.1000E+01 0.188E-06 -0.1215E+02 0.5443E-05
 0.0399E+00 0.5378E+00 -0.1148E+02 -0.5637E+01 0.7741E+00 0.103E+00 -0.9649E+01 -0.1012E+02
 0.5412E+00 0.1117E+01 -0.6927E+01 0.1334E+02 0.2754E+00 -0.194E+01 -0.3612E+01 -0.1527E+02
 0.1212E-26 0.1201E+01 -0.2714E-21 -0.1592E+02

3.1.5. Uporedjenje rezultata prema teoriji nedeformabilnog poprečnog preseka sa eksperimentalnim rezultatima.

Primenom napravljenog programa za elektronski računar sračunate su teorijske vrednosti kritičnog opterećenja za sve nosače koji su eksperimentalno ispitivani. Rezultati proračuna dati su na stranama 39,40,i 41.

Na slici br.24. izvršeno je uporedjenje eksperimentalnih i teorijskih rezultata.



Slika br 24.

Važno je napomenuti da se problem bočnog izvijanja nosača detaljno razmatra u propisima o stabilnosti čeličnih konstrukcija. Medjutim, kako se to može videti iz propisa raznih zemalja (Švajcarski, Britanski, Jugoslovenski i.t.d.), ovi propisi odnose se samo na nosače kod kojih pri bočnom izvijanju nosača poprečni presek ostaje nedeformabilan u svojoj ravni. Zato se proračun prema ovim propisima ne može primeniti na nosače koji se ispituju u ovoj tezi. Naime, sobzirom na velike razlike koje su dobijene u vrednostima za kritične sile (Slika br.24.) očigledno je da za ove nosače teorija o nedeformabilnom poprečnom preseku ne daje prihvatljiva rešenja. Pri proračunu ovih nosača potrebno je voditi računa o deformabilnosti poprečnog preseka i to će upravo biti i predmet razmatranja u sledećem poglavlju.

3.2 NELINEARNA ANALIZA BOČNOG IZVIJANJA NOSAČA DEFORMABILNOG POPREČNOG PRESEKA

3.2.1 Postupak za nelinearnu analizu

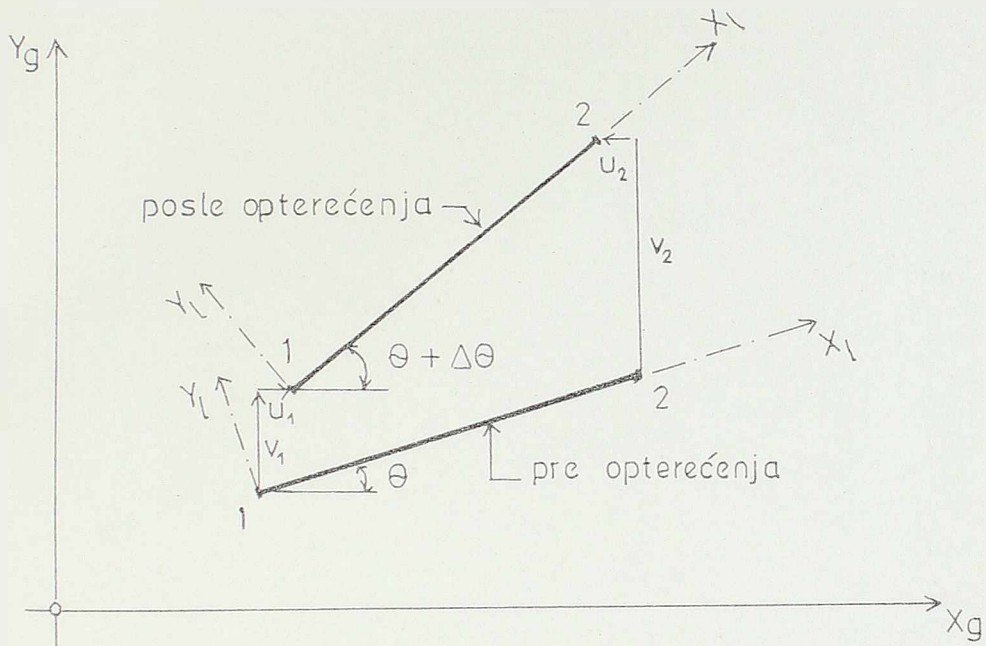
U prethodnom poglavlju pokazano je da je problem bočnog izvijanja nosača u elastičnoj oblasti nedeformabilnog poprečnog preseka uglavnom rešen kako sa teorijskog tako i sa praktičnog, numeričkog stanovišta.

Medjutim, kod izvijanja nosača deformabilnog poprečnog preseka to nije slučaj. Ovaj problem je znatno kompleksniji i na njemu se poslednjih godina, a i dan danas intenzivno radi. Kako je to istaknuto i u Uvodu, i pored značajnog broja radova iz ove oblasti može se konstatovati da problem bočnog izvijanja nosača deformabilnog poprečnog preseka još nije dovoljno proučen kako sa teorijskog tako i sa eksperimentalnog aspekta.

Razvoj moćnih savremenih elektronskih računara omogućio je inženjerima da primene različite numeričke metode za rešavanje složenih nelinearnih problema. Metod konačnih elemenata pokazao se kao jedno od najdragocenijih sredstava za složene nelinearne analize, pa je takav korišćen i u ovom radu.

Kao što je već rečeno, problem bočnog izvijanja nosača (u elastičnoj oblasti) deformabilnog poprečnog preseka je geometrijski nelinearan problem. Pri rešavanju ovog problema može se uvesti pretpostavka da su pomeranja velika i konačne veličine, dok se deformacije usvajaju kao male veličine tako da se njihovi kvadrati i viši stepeni mogu zanemariti.

Glavna posledica velikih pomeranja je da se više ne mogu zanemariti promene u geometriji nosača izazvane opterećenjem. To se može ilustrovati jednostavnim primerom za prost štap sa slike br. 25.



Slika br. 25

Promena u geometriji elementa koja se u ovom slučaju ne može zanemariti je $\Delta\theta$, pri čemu je:

$$\Delta\theta = f(u_1, u_2, v_1, v_2) \quad (14)$$

Poznato je iz teorije konačnih elemenata da se jednačine ravnoteže u globalnom koordinatnom sistemu X_g, Y_g za štap sa slike 25 mogu prikazati u obliku:

$$[K_g] \cdot \{q_g\} = \{Q_g\} \quad (15)$$

gde je $[K_g]$ matrica krutosti, $\{q_g\}$ vektor pomeranja i $\{Q_g\}$ vektor opterećenja, sve za globalni koordinatni sistem. Ove veličine mogu se izraziti preko odgovarajućih veličina za lokalni koordinatni sistem X_l, Y_l koristeći matricu transformacija $[T]$:

$$\begin{aligned}
 \{q_g\} &= [T] \{q_l\} \\
 [K_g] &= [T]^T [K_l] [T] \\
 \{Q_g\} &= [T]^T \{Q_l\}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

U slučaju velikih pomeranja matrica $[T]$ postaje funkcija pomeranja:

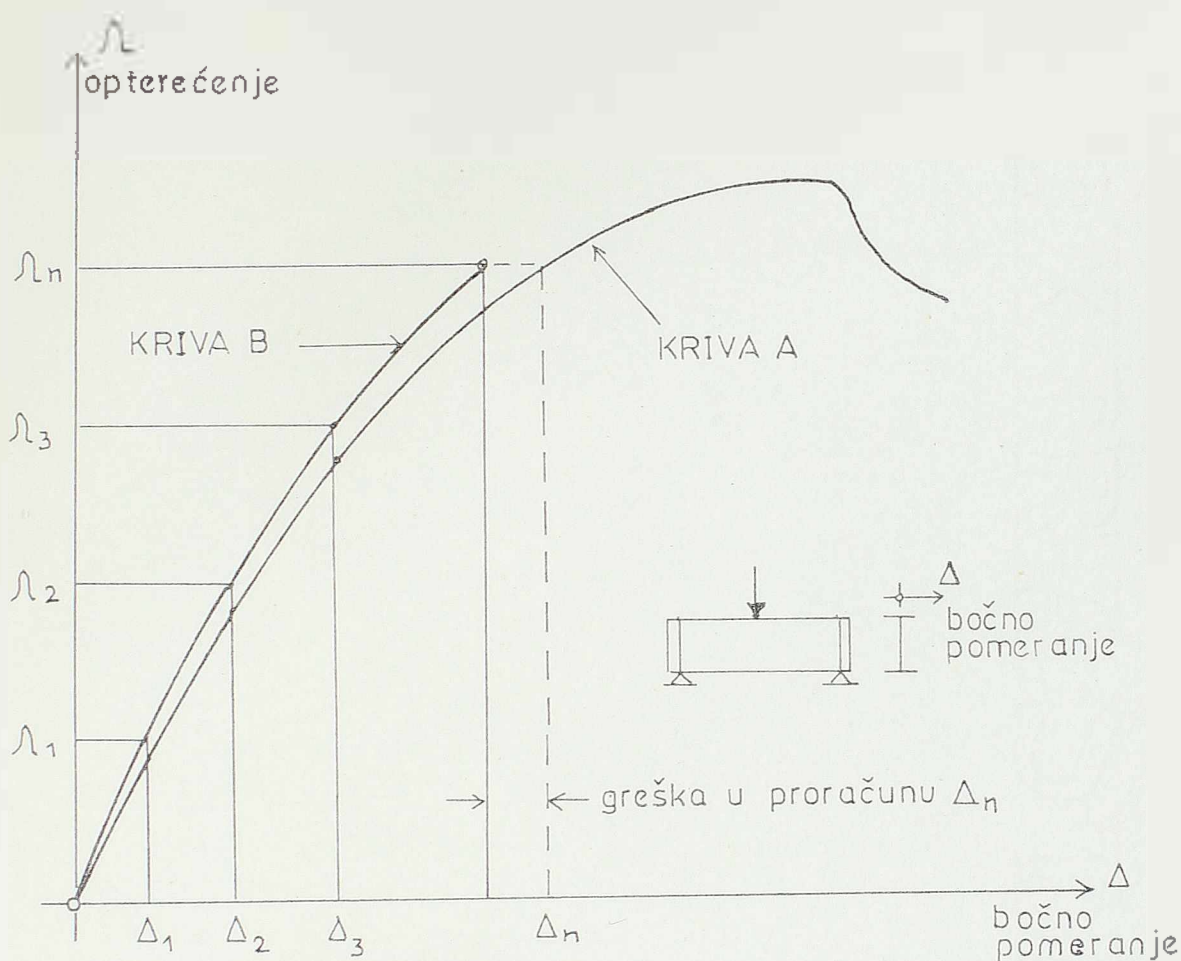
$$[T] = [T(q)]
 \tag{17}$$

što ima za posledicu pojavu nelinearnosti u jednačinama ravnoteže.

Treba napomenuti da je u slučaju malih deformacija matrica krutosti u lokalnom koordinatnom sistemu $[K_l]$ linearna i nije funkcija pomeranja. Ali zbog nelinearnosti jednačina (16) matrica krutosti u globalnom koordinatnom sistemu $[K_g]$ menja se sa promenom stanja pomeranja.

Nelinearna analiza koja vodi računa o promeni geometrije nosača izazvane opterećenjem uredjena je u ovom radu koristeći postupak koji je izložen u knjizi Abela i Desaja [38]. Reč je o takozvanom inkrementalnom postupku koji je ilustrovan na slici 26.

Predpostavimo da nam je poznato (na primer iz eksperimenata kao što je to slučaj u ovom radu) stvarno ponašanje nosača pri njegovom bočnom izvijanju i da je ono prikazano krivom A. Da bi do ove krive došli računskim putem koristimo metod sukcesivne linearne analize. Usvajajući inkrement opterećenja λ_1 , može se koristeći linearnu analizu sračunati stanje pomeranja Δ_1 . Sada se linearna analiza ponavlja uzimajući u obzir promenu geometrije (Δ_1) i računa se novo stanje Δ_2 koje odgovara opterećenju λ_2 i.t.d.

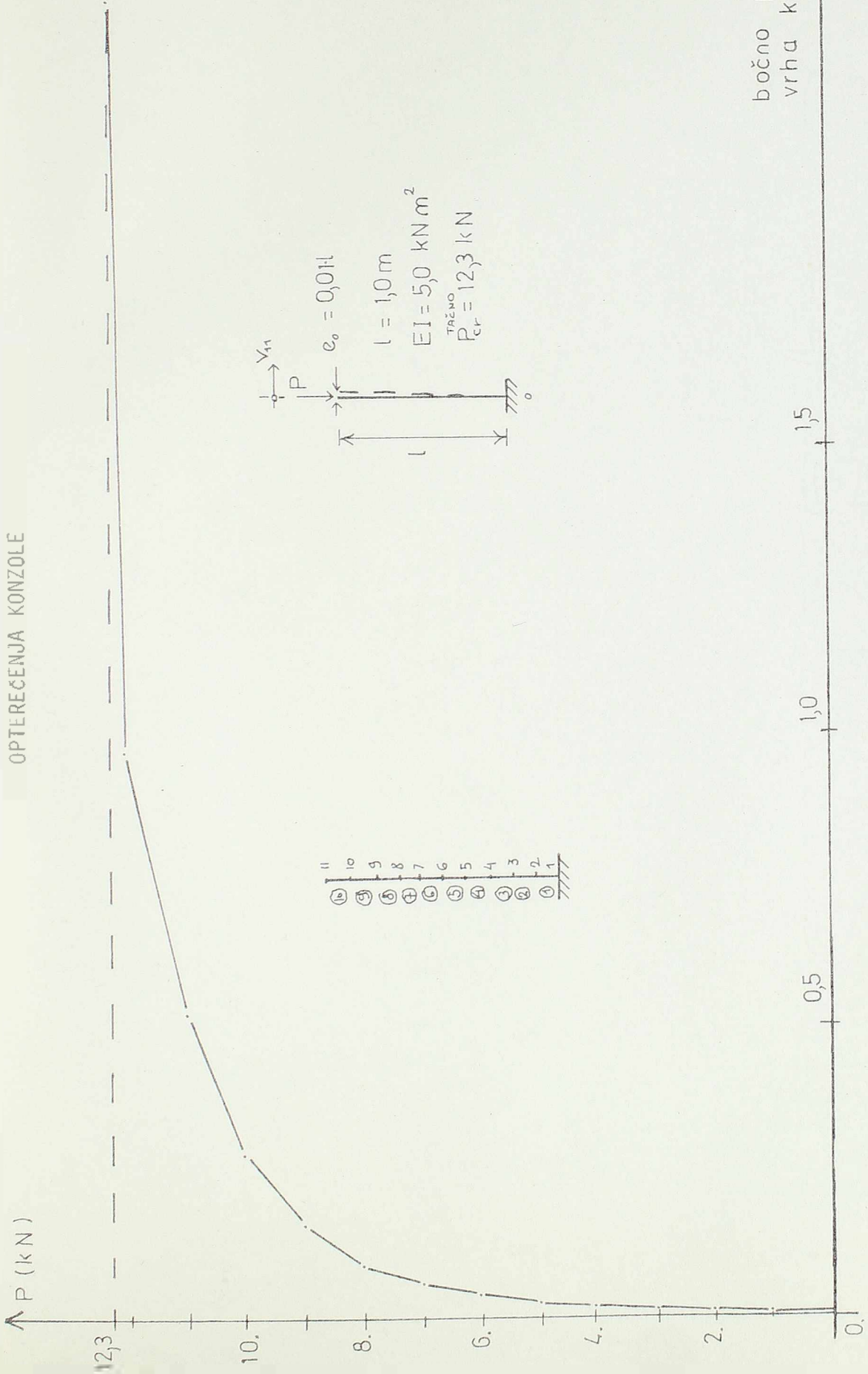


Slika br. 26.

Ovakav inkrementalni pristup omogućava nam da dobijemo približno (kriva B), deformacije i napone prema teoriji drugog reda do željenog nivoa opterećenja. Tačnost postupka zavisi od usvojenog inkrementa opterećenja. Jasno je da što je inkrement opterećenja manji ovaj postupak daje tačnije rešenje i kriva B se sve više "priljubljuje" krivoj A.

Treba napomenuti da se ovim postupkom ne može dobiti deo krive koji je u padu, jer bi to zahtevalo rad sa negativnim modulom elastičnosti. Međutim, kada se koristeći krivu B dodje do opterećenja za koje kriva ima približno horizontalnu tangentu može se smatrati da je dostignuto kritično opterećenje.

PRIMENA INKREMENTALNOG POSTUPKA ZA PRORAČUN KRITIČNOG
OPTEREĆENJA KONZOLE



Slika broj 27.

Radi ilustracije, koristeći opisani postupak sprovedena je nelinearna analiza konzolnog nosača opterećenog aksijalnom silom i sa malom početnom imperfekcijom u geometriji. Rezultat proračuna prikazan je na slici broj 27.

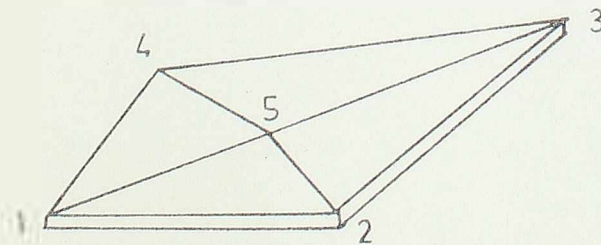
3.2.2 Program za elektronski računar

Za rešavanje problema bočnog izvijanja nosača napravljen je program za elektronski računar čiji je algoritam prikazan na strani br.51 Program je napisan u programskom jeziku FORTRAN IV.

Ovaj program rešava primenom inkrementalnog postupka nelinearan problem bočnog izvijanja nosača kao niz linearnih problema. A za proračun linearnih problema korišćen je metod konačnih elemenata i to primenom gotovog programa za linearnu analizu SAP 4 [41]. To je predstavljalo značajnu olakšicu za rešavanje ovako složenog numeričkog zadatka.

Program za nelinearnu analizu tako je napravljen da se samo početna geometrija nosača mora zadati. Formiranje nove geometrije potrebne za svaki novi ciklus opterećenja, sve do dostizanja kritičnog opterećenja, potpuno je automatizovano.

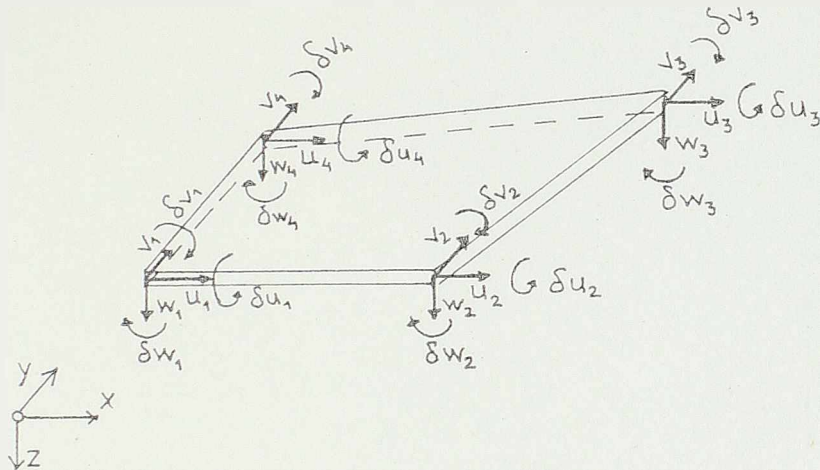
Pri proračunu metodom konačnih elemenata (SAP 4) korišćen je takozvani "thin shell element" koji opisuje kako membransko ponašanje tanke ljuske tako i njeno ponašanje na savijanje. To je četvorougao element koji se sastoji od četiri trougaona elementa (slika br. 28).



Slika br. 28

Koordinate srednjeg čvora 5 određuju se kao srednje vrednosti koordinata čvorova u uglovima elementa.

Element ima šest unutrašnjih stepeni slobode koji se eliminišu pre formiranja ukupne matrice sistema, tako da rezultujući četvorougoni element ima dvadeset i četiri stepena slobode, t.j. šest stepeni slobode po čvoru u globalnom koordinatnom sistemu x, y, z (slika br. 29).

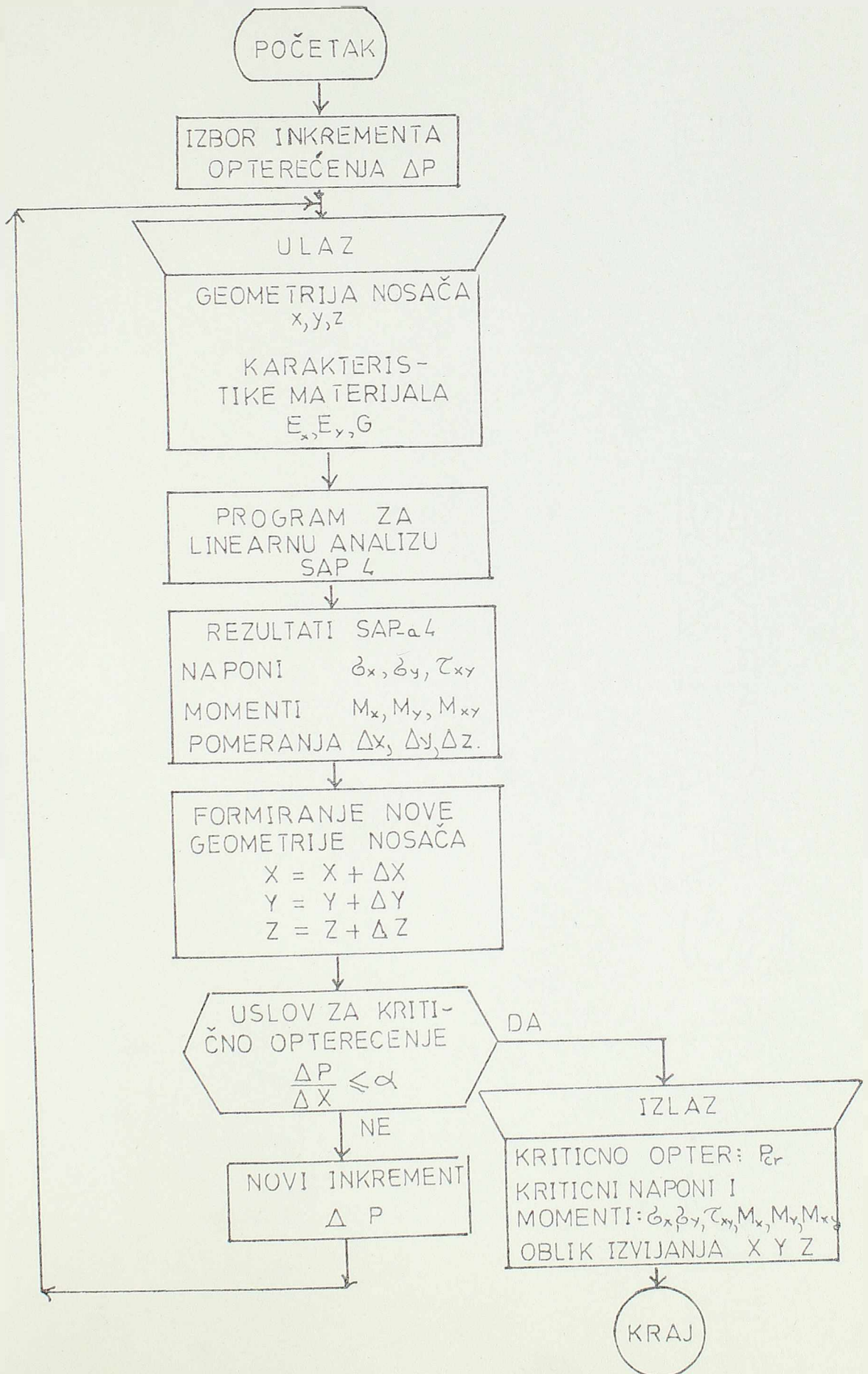


Slika br. 29

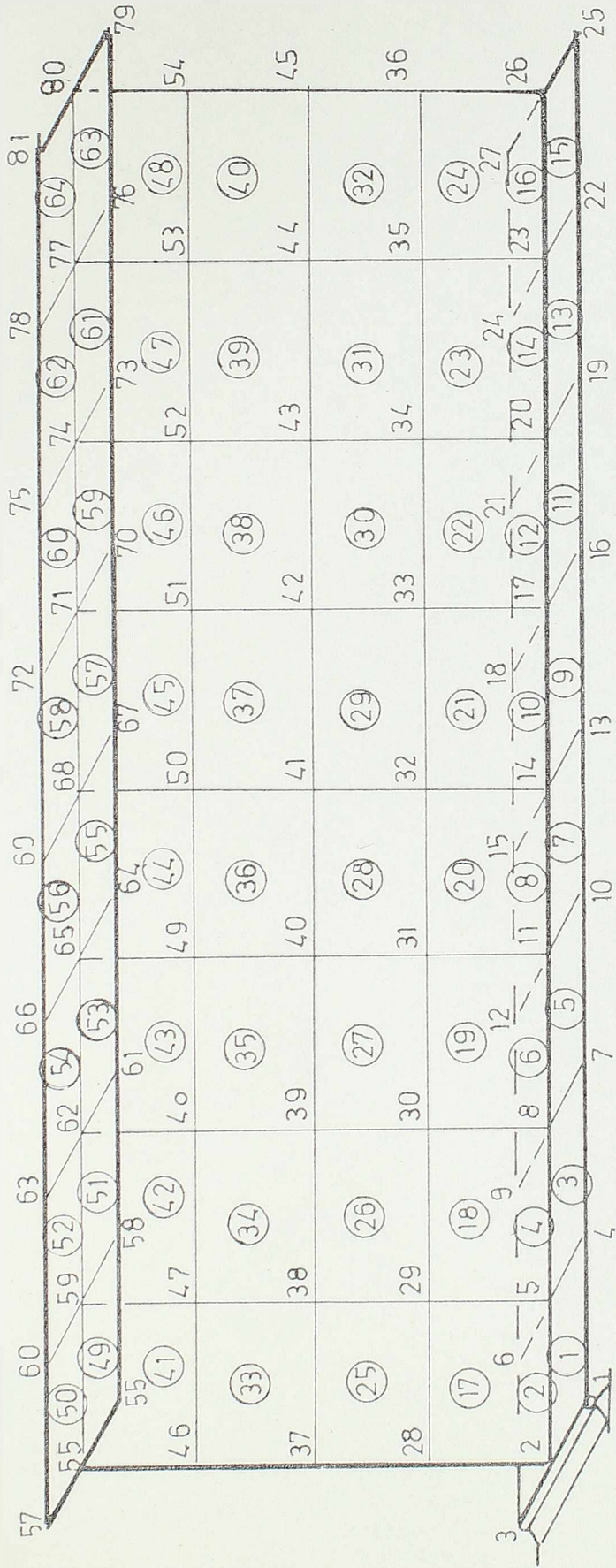
Pre nego što se prišlo nelinearnoj analizi izvršena je ocena tačnosti programa za linearnu analizu. To je učinjeno na taj način što je izvršen proračun I nosača opterećenog na savijanje usled koncentrisane sile u sredini raspona. Nosač, odnosno jedna njegova polovina (zbog simetrije) zamenjena je prostornim skupom od 24,64, 128 i 192 pravougaona elementa (strana 52. do 55.). Zatim je na slici br. 30, analizirana konvergencija ka tačnom rešenju u zavisnosti od broja elemenata. Vidi se da je željena tačnost postignuta sa 128 elemenata. Međutim, pri nelinearnoj analizi bočnog izvijanja nosača doći će i do bočnog savijanja vertikalnog lima. Zato je potrebno, da bi se postigla veća tačnost usvojiti i veći broj elemenata po visini vertikalnog lima. Usled toga je za dalju nelinearnu analizu korišćena šema sa 192 elementa.

O jednoj detaljnijoj šemi sa 489 elemenata biće kasnije reči u poglavlju I.3.2.4.

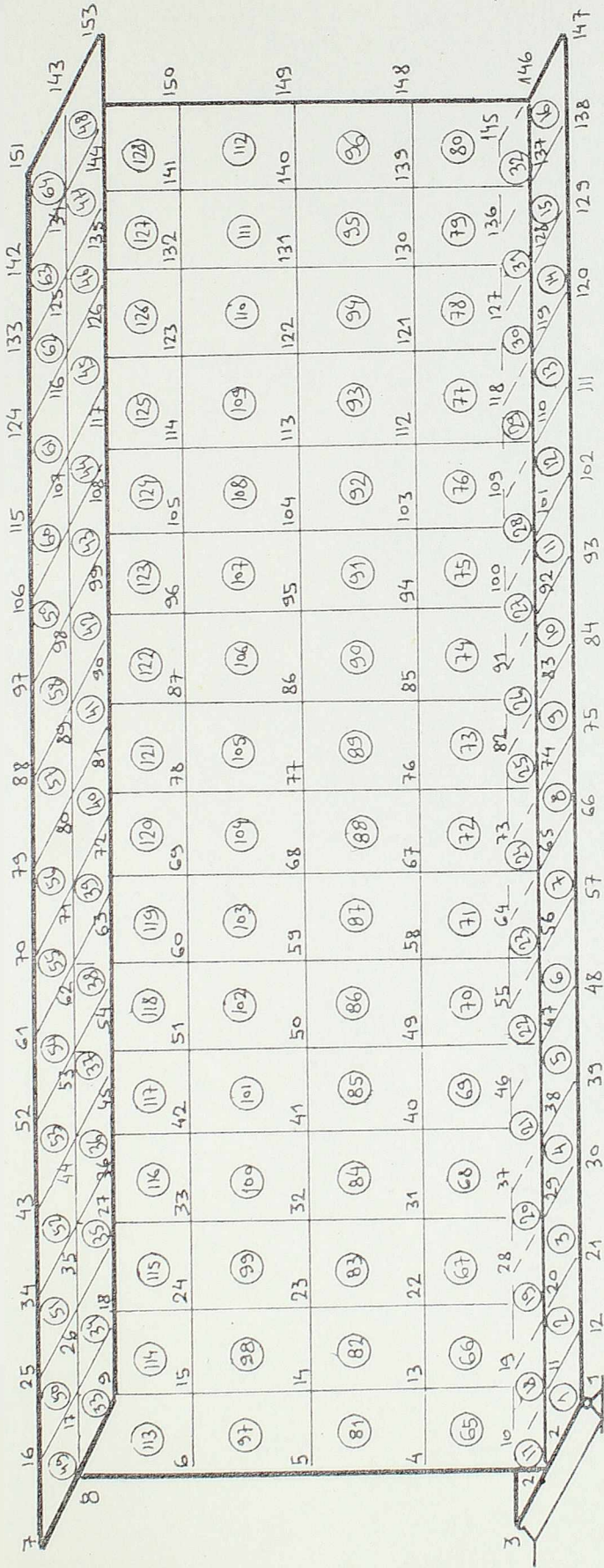
ŠEMA PROGRAMA ZA NELINEARNU ANALIZU BOČNOG IZVIJANJA NOSAČA



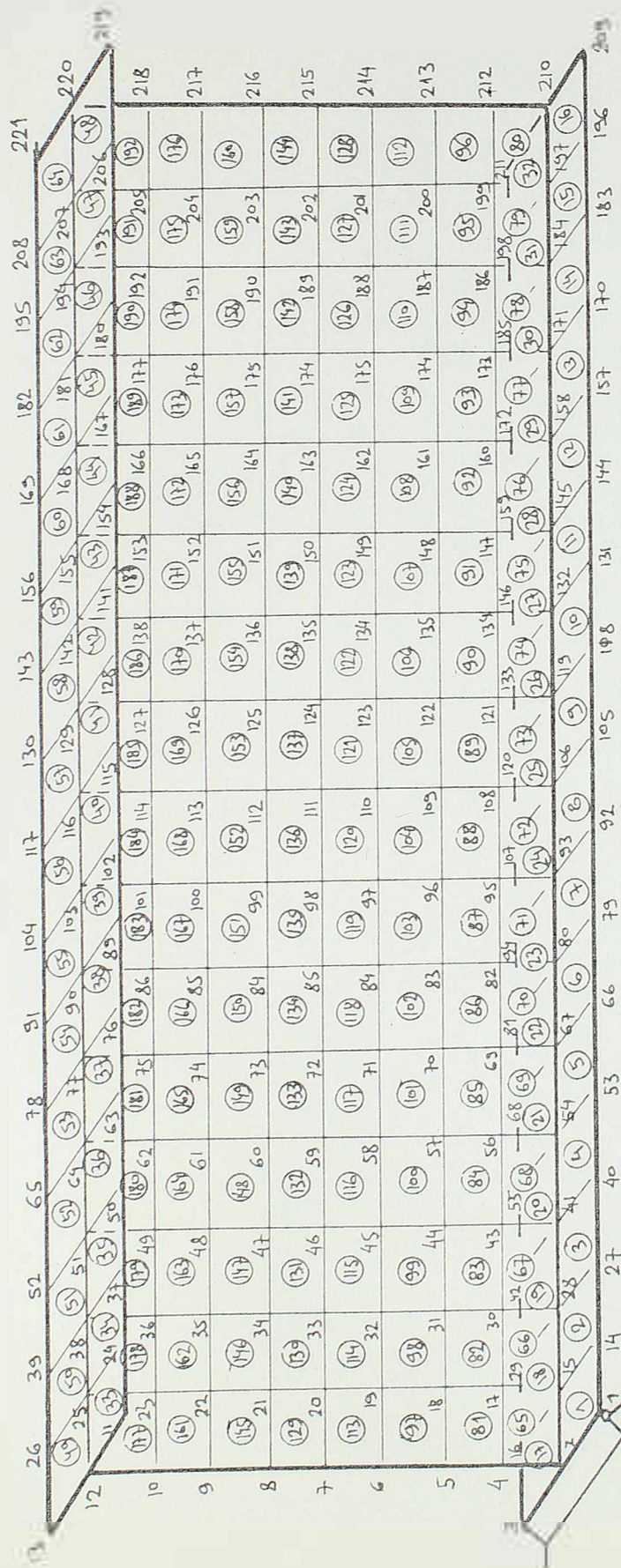
64 ELEMENTA



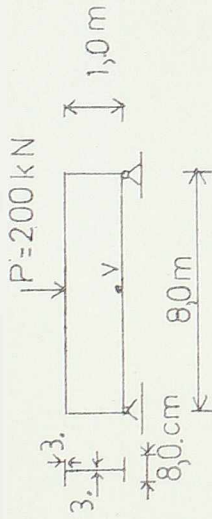
128 ELEMENATA



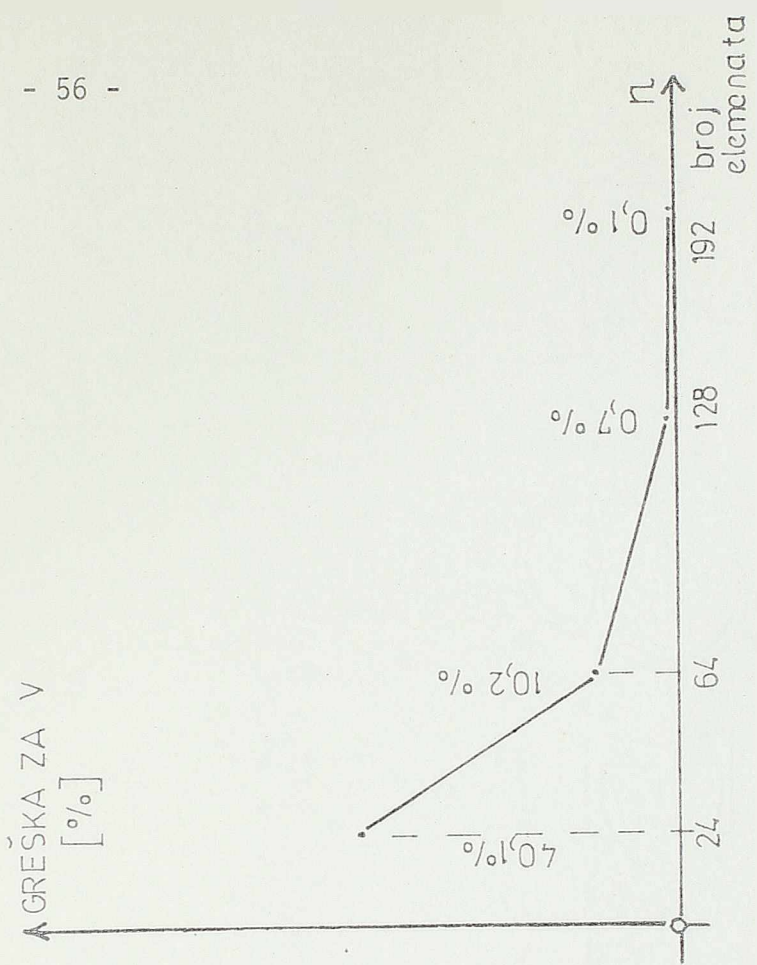
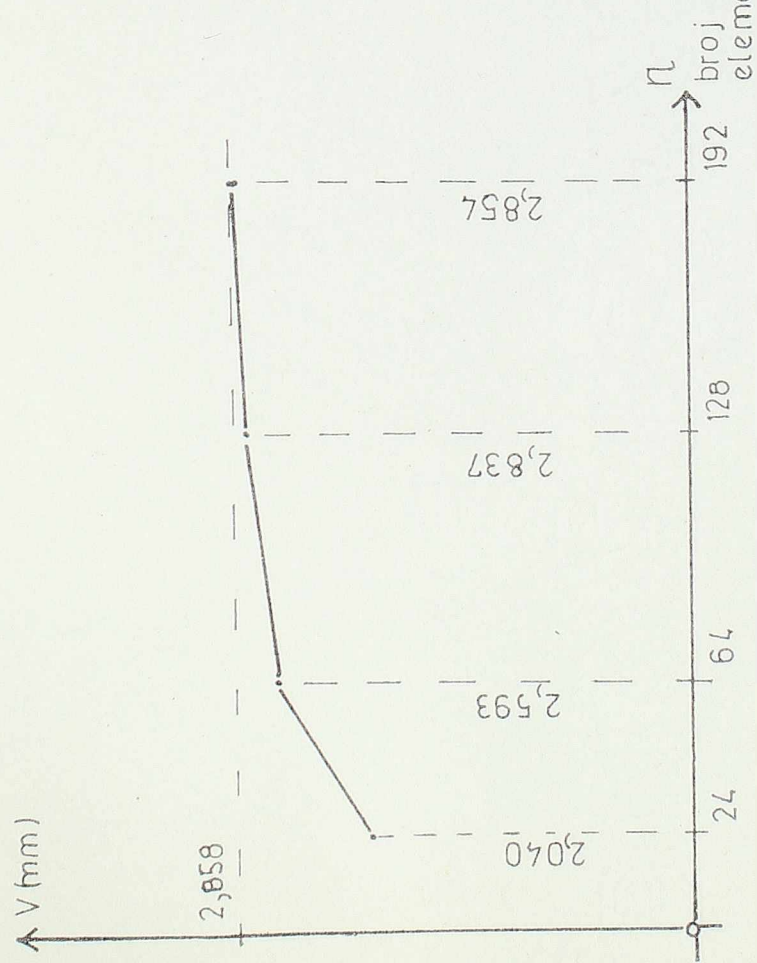
192 ELEMENTA



UTICAJ BROJA ELEMENAT NA TAČNOST REŠENJA



$E = 214,4 \text{ kN/mm}^2$
 $I = 348,204 \text{ cm}^4$
 $v = 2,858 \text{ mm}$



Slika br. 30.

3.2.3. Rezultati nelinearne analize i uporedjenje sa eksperimentalnim rezultatima.

U ovom poglavlju prikazani su rezultati nelinearne analize za pet nosača koji su eksperimentalno ispitivani na bočno izvijanje.

Za svaki nosač vodeći računa o njegovoj početnoj geometrijskoj imperfekciji, a i materijalnoj utoliko što su pri proračunu uzete različite mehaničke karakteristike za rebro i pojas (vidi stranu br. 12), određeno je kritično opterećenje. Ovo opterećenje je računato tako što je postepeno smanjivan inkrement opterećenja sve dok se nisu dobile male razlike u rezultatima između dva inkrementa. Smatrano je da je kritično opterećenje dostignuto kada je tangenta krive $P=P(v)$ postala približno horizontalna.

Za svaki nosač, kada je dostignuto kritično opterećenje, prikazani su teorijski rezultati za:

- bočno pomeranje nosača,
- dijagram normalnih napona u oba pravca za karakteristične preseke.

Takodje su prikazani dijagrami za:

- promenu normalnog napona u sredini nosača sa promenom opterećenja,
- obrtanje gornjeg pojasa u sredini nosača sa promenom opterećenja i
- ugib donjeg pojasa u sredini nosača sa promenom opterećenja.

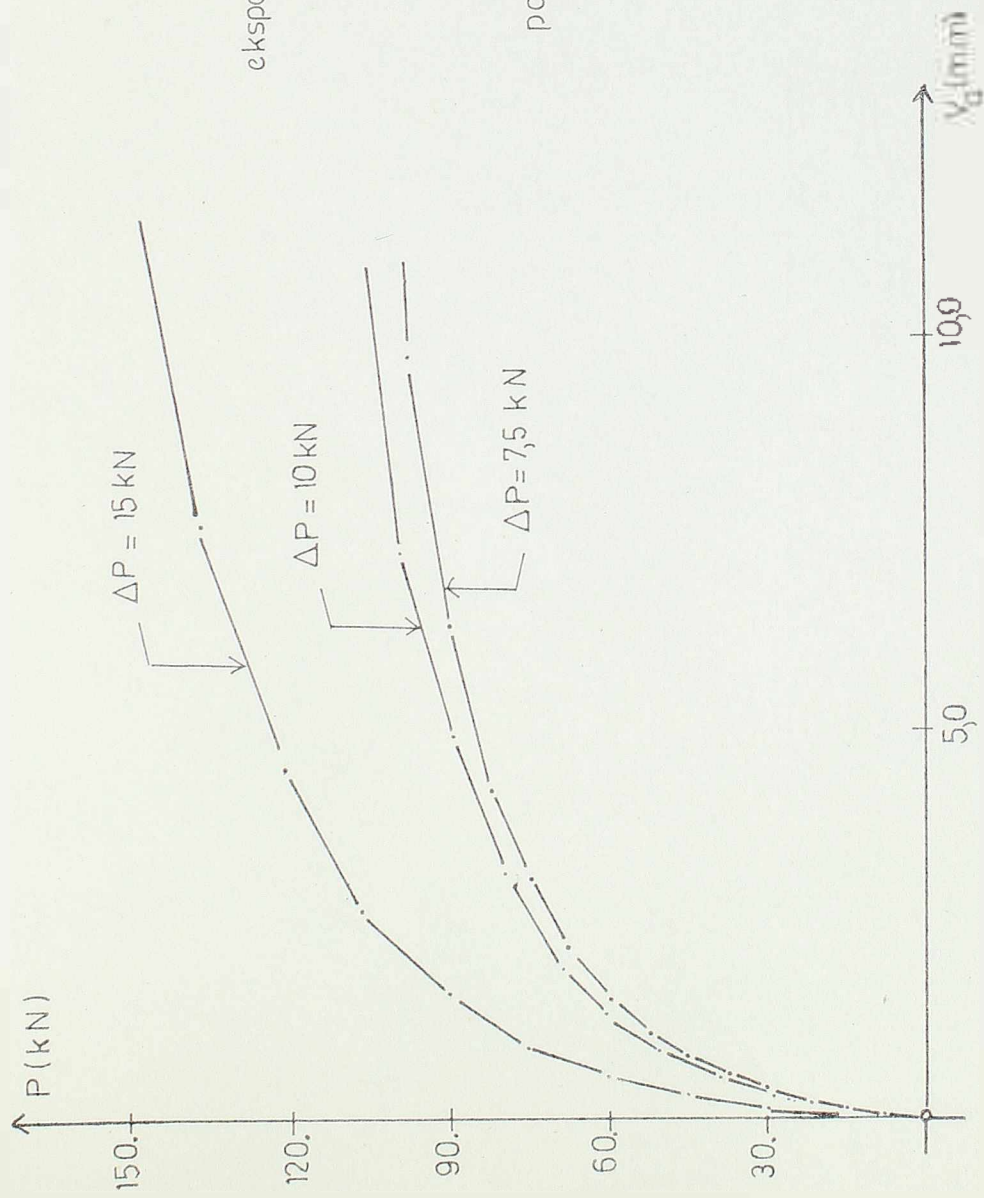
Pored toga izvršeno je i uporedjenje eksperimentalnih i teorijskih rezultata, što je zajedno sa navedenim dijagramima prikazano od 58. strane do 89. strane.

Kompletni rezultati za sve nosače, kada je dostignuto kritično opterećenje, dati su u PRILOGU.

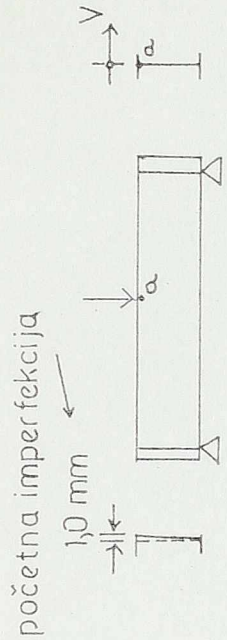
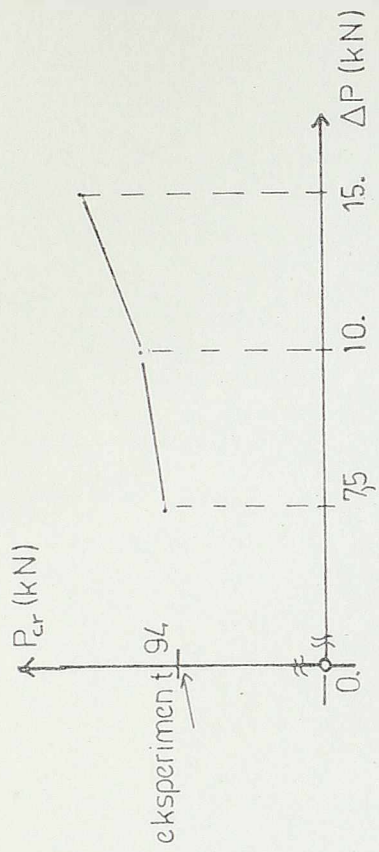
N O S A Ć C / 3 / 3

=====

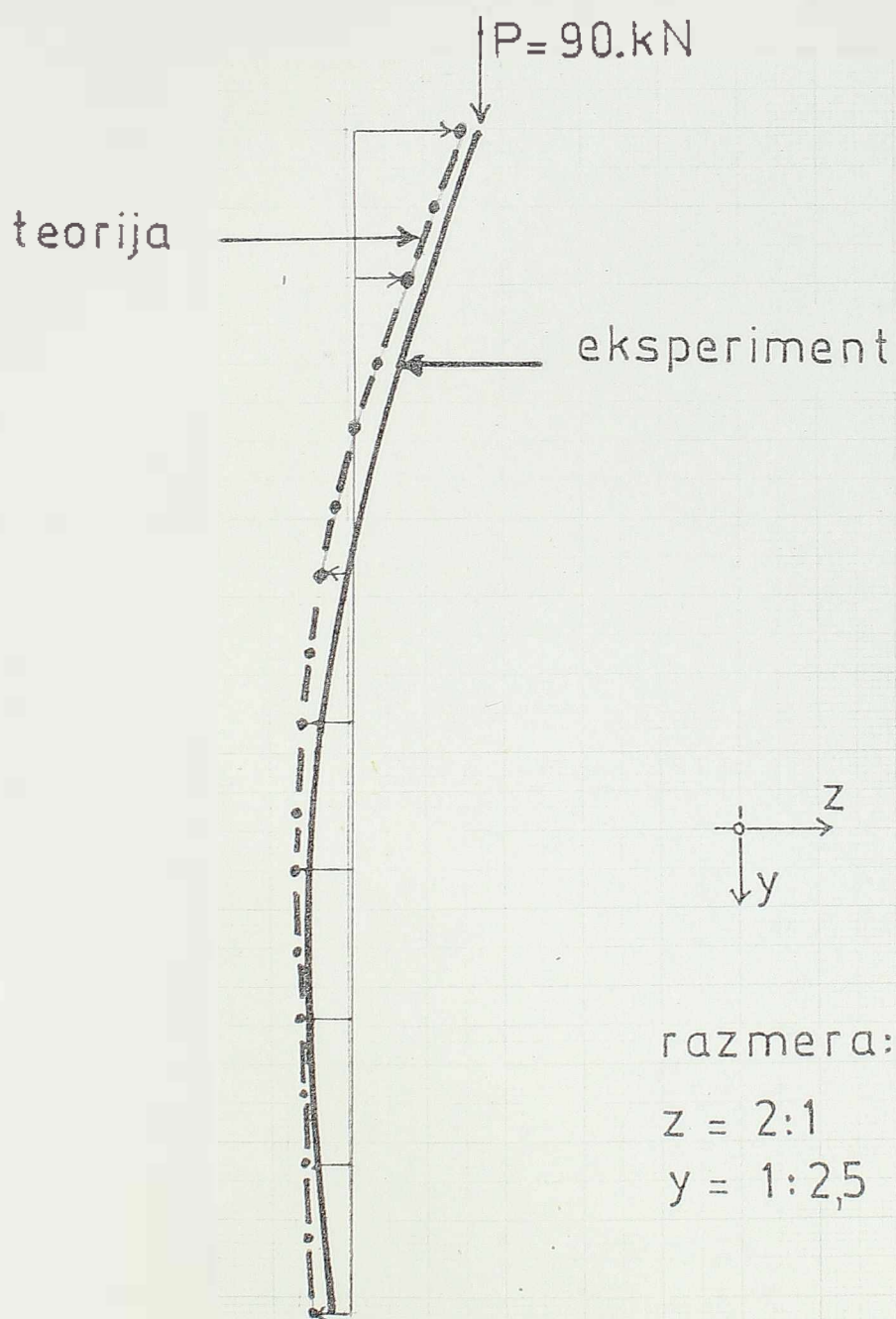
NOSAČ C/3/3 Određivanje kritičnog opterećenja



UTICAJ INKREMENTA ΔP NA P_{cr}

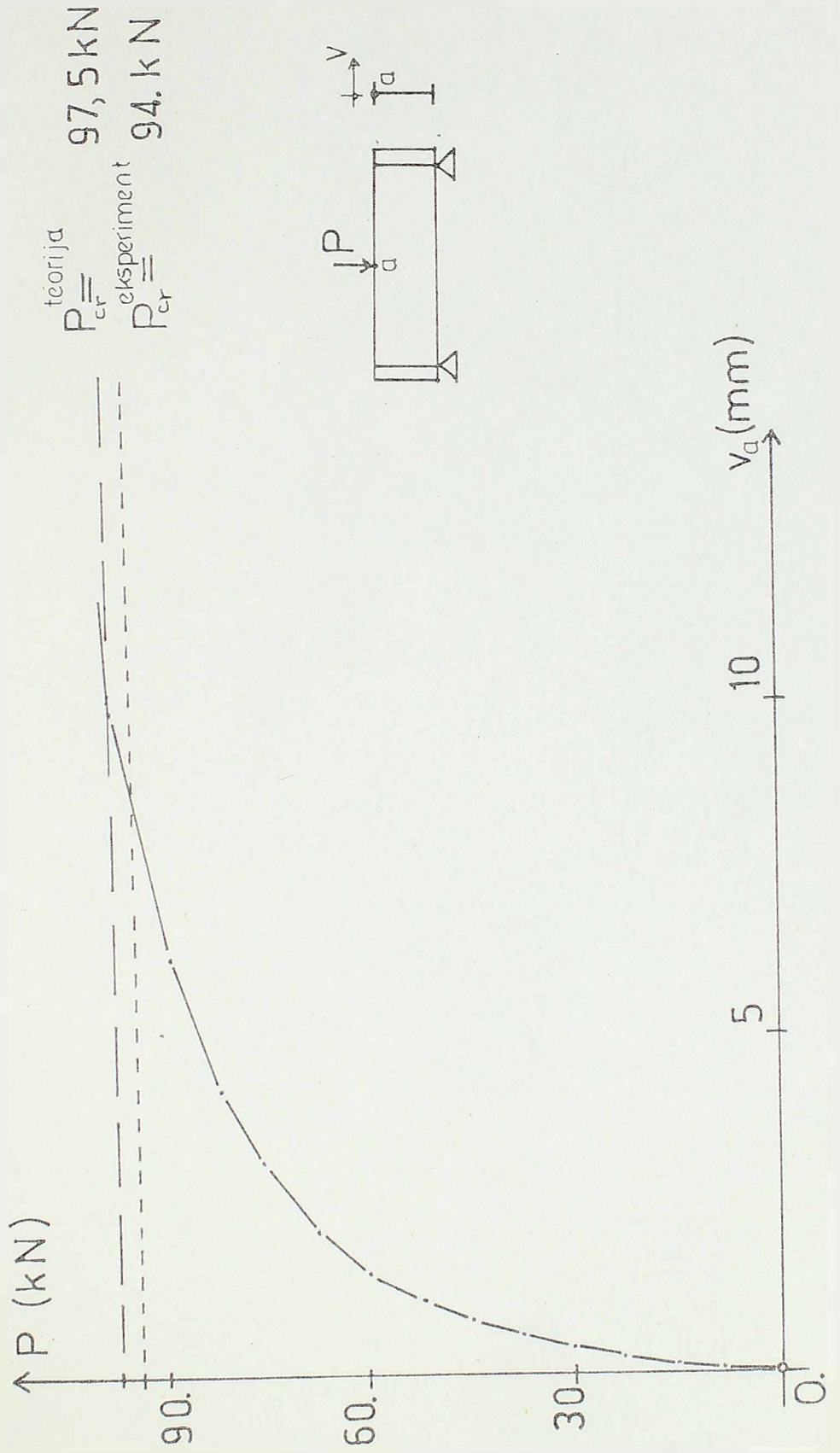


NOSAČ C/3/3

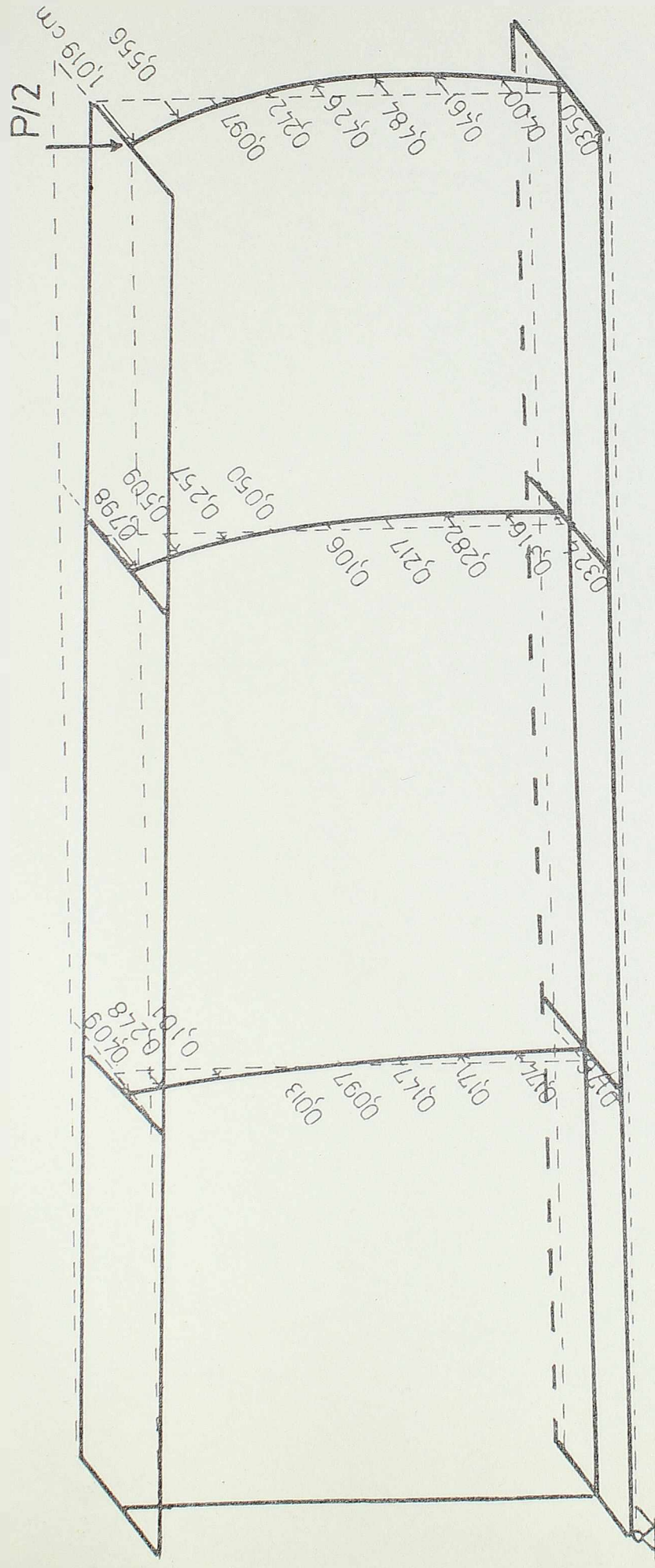


upoređenje eksperimentalnih
i teorijskih rezultata

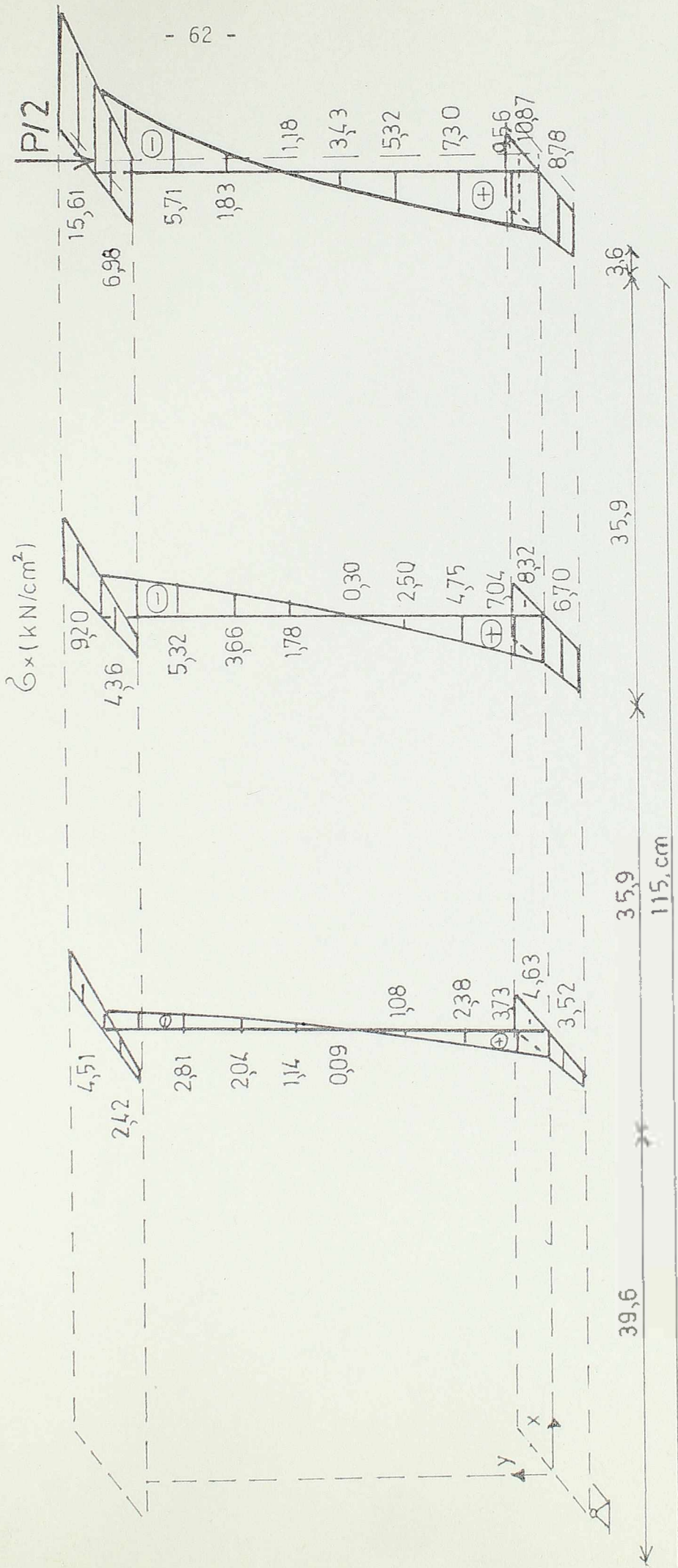
NOSAČ C/3/3 Bočno pomeranje gornjeg pojasa ispod sile P



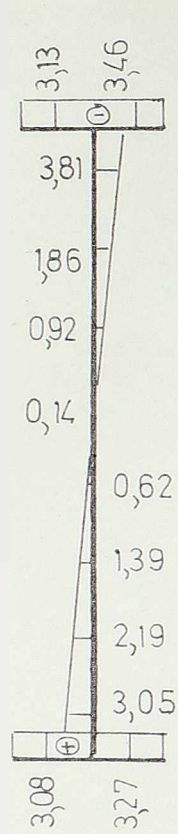
Bočno pomeranje nosača C/3/3 pri P=97,5 kN



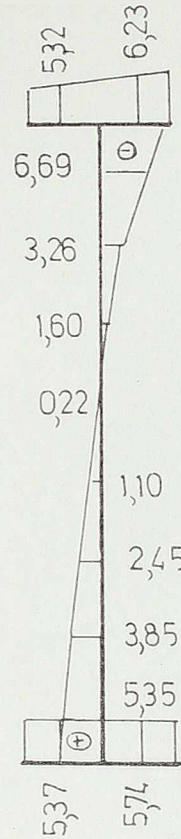
NOSAČ C/3/3 Dijagram σ_x napona
 pri $P=97,5$ kN



NOSAČ C/3/3 - DIJAGRAM NORMALNIH NAPONA U
PRESEKU X=3,6 cm

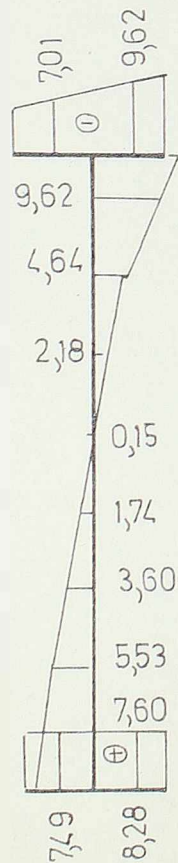


$P = 30 \text{ kN}$

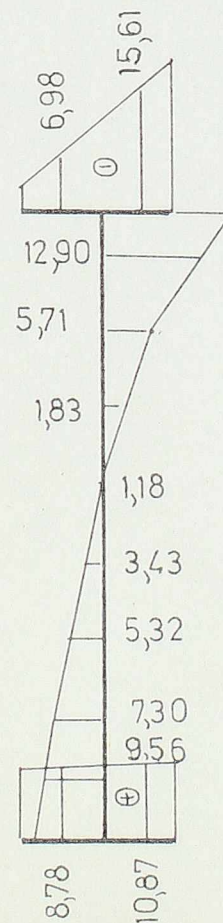


$P = 52,5 \text{ kN}$

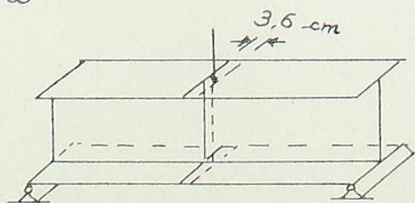
$\sigma_x \text{ (kN/cm}^2\text{)}$



$P = 75,0 \text{ kN}$

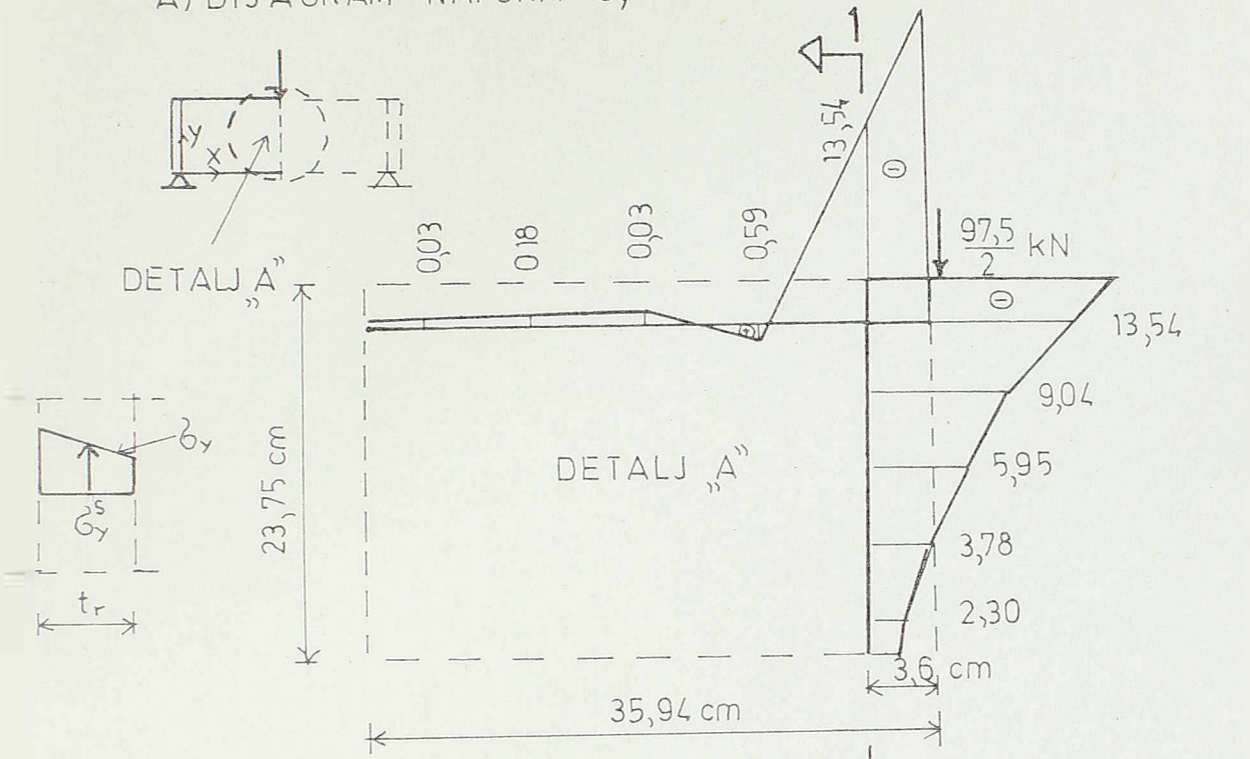


$P = 97,5 \text{ kN}$

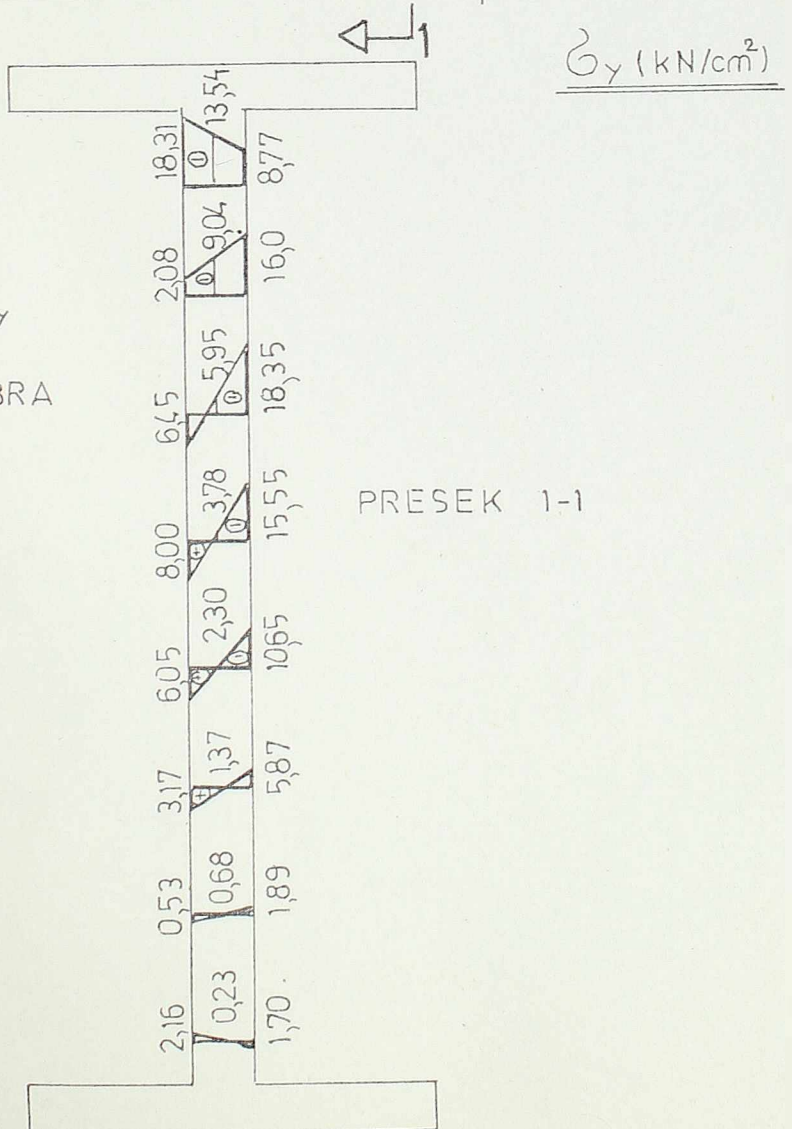


NOSAČ C/3/3

A) DIJAGRAM NAPONA σ_y

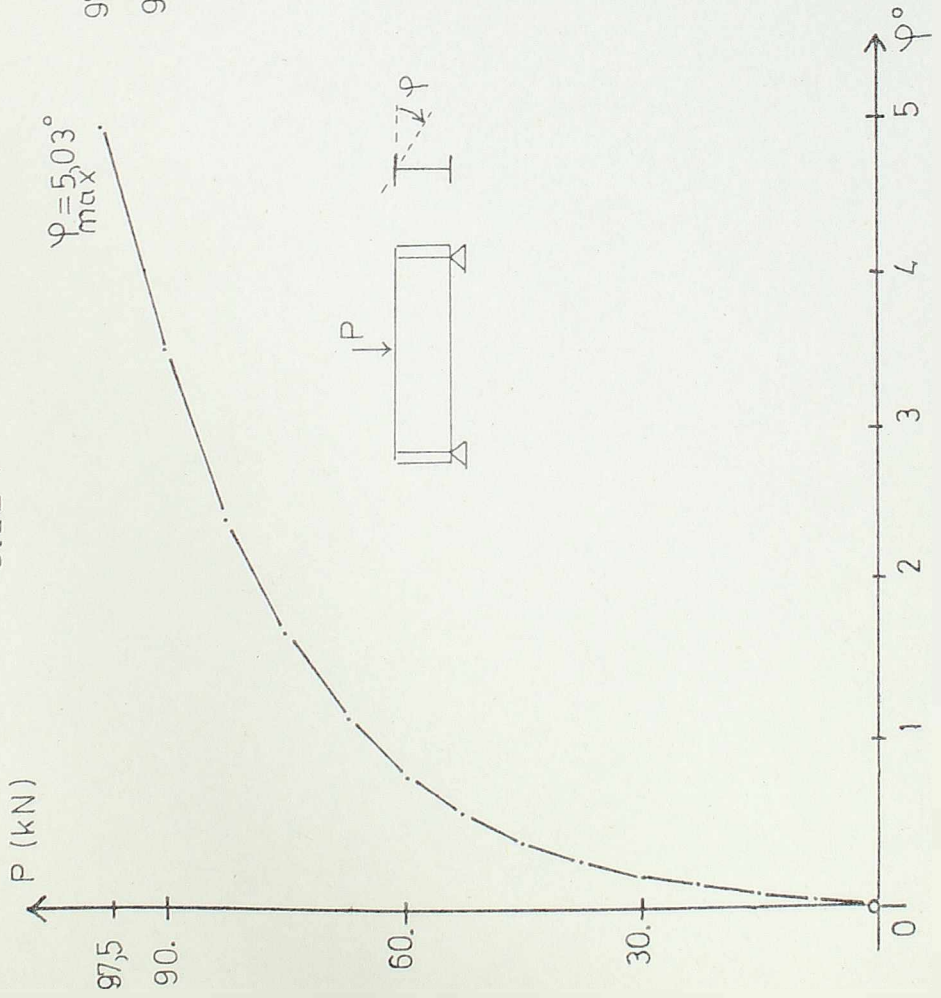


B) PROMENA σ_y
NAPONA PO
DEBLJINI REBRA

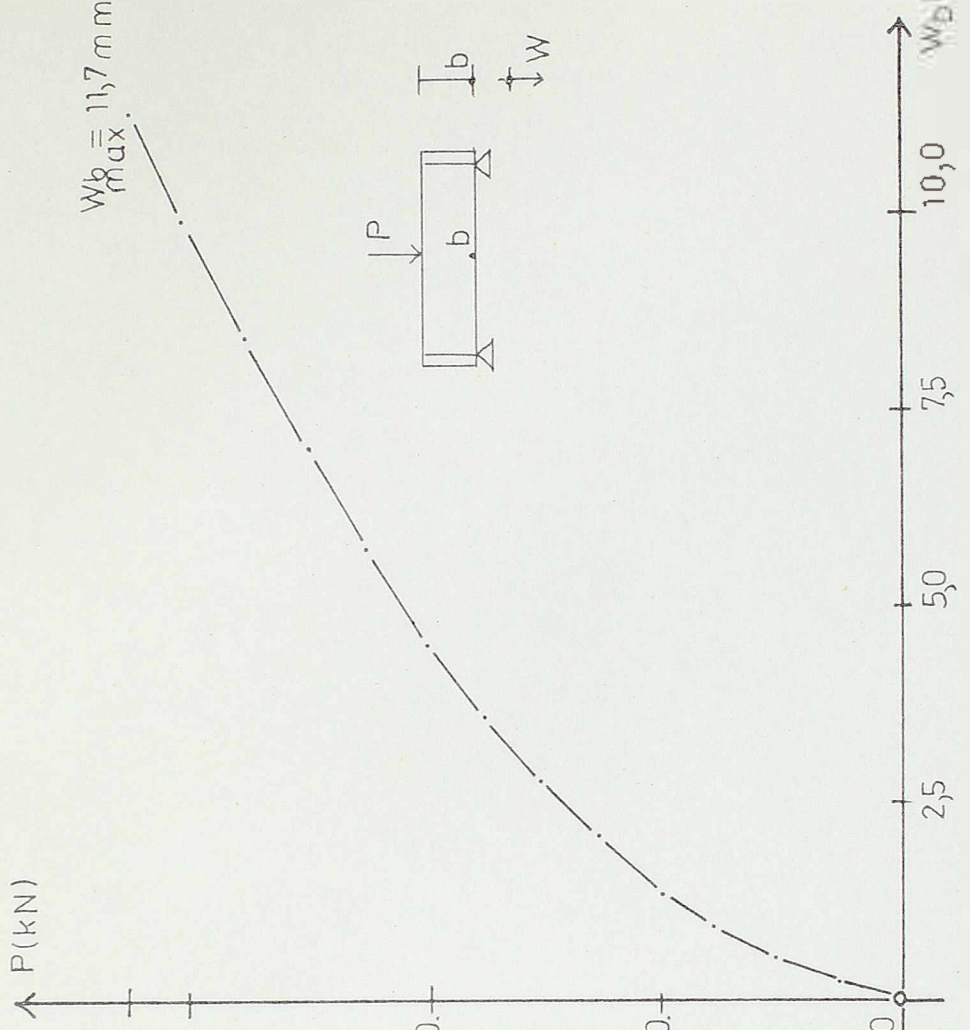


NOSAČ C/313

OBRRTANJE GORNJEG POJASA ISPOD SILE P



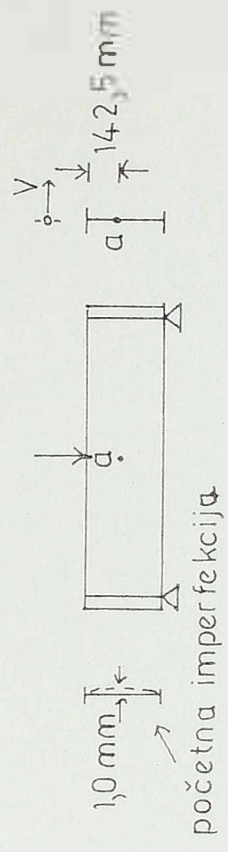
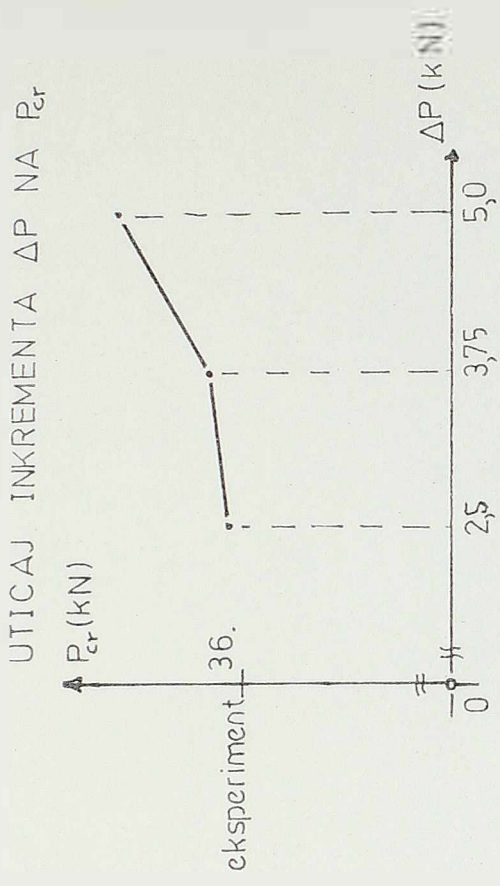
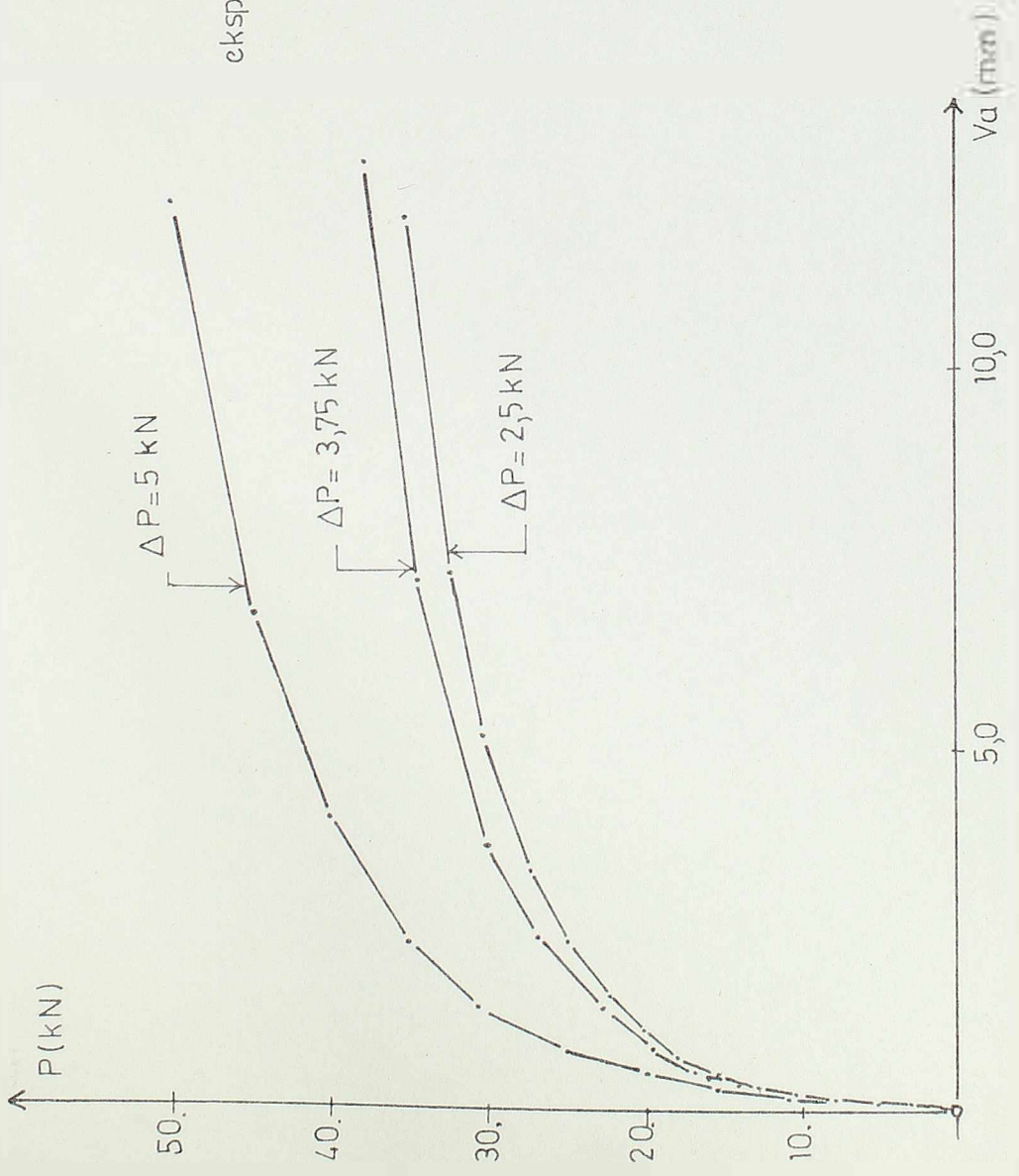
UGIB DONJEG POJASA ISPOD SILE P



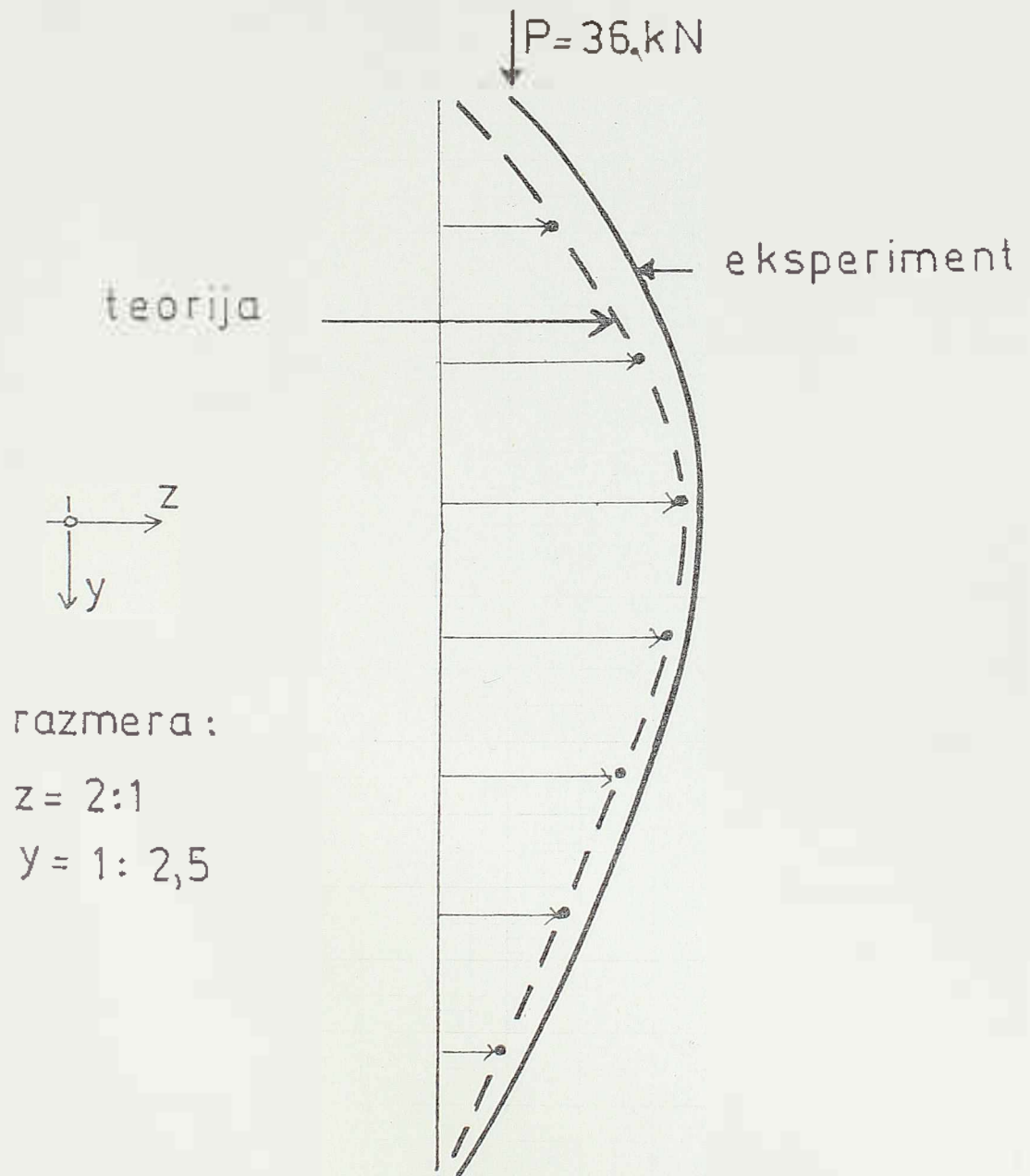
N O S A Ć C / 2 / 1

=====

NOSAČ C/2/1 Odrđivanje kritiĉnog opterećenja

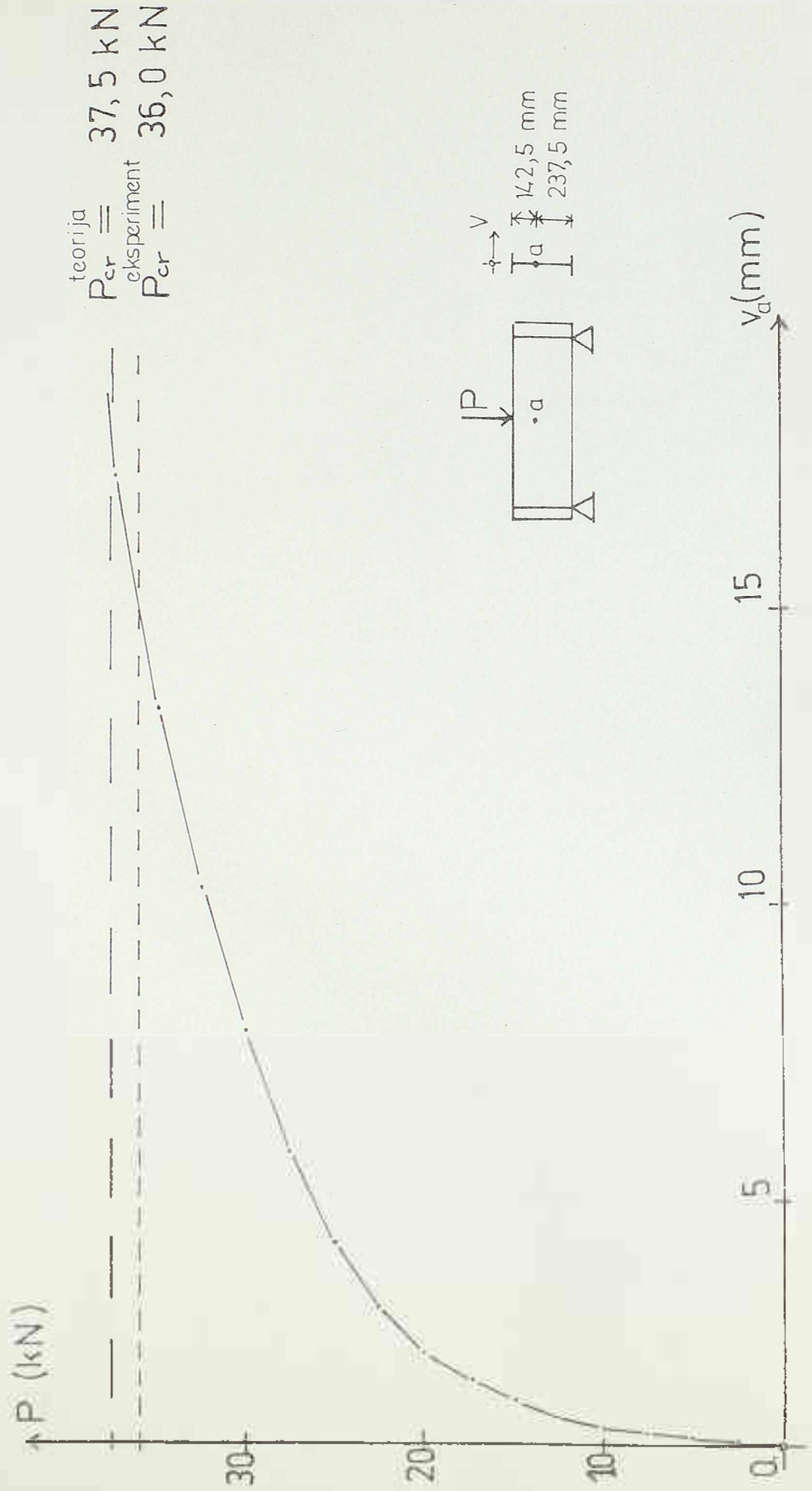


NOSAČ C/2/1

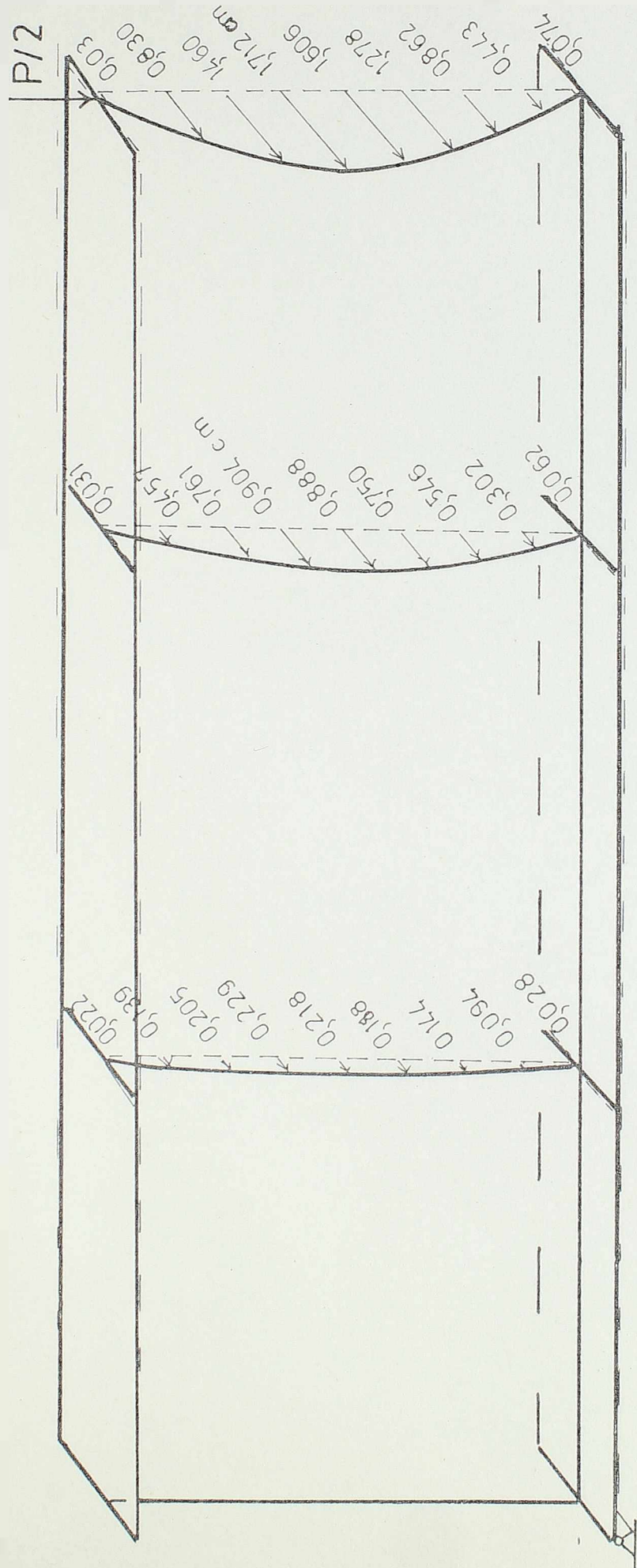


upoređenje eksperimentalnih
i teorijskih rezultata

NOSAČ C/2/1 - Bočno pomeranje vertikalnog lima u tački a



Bočno pomeranje nosača C/2/1 pri $P = 37,5 \text{ kN}$



$3 \times 38,33 = 115 \text{ cm}$

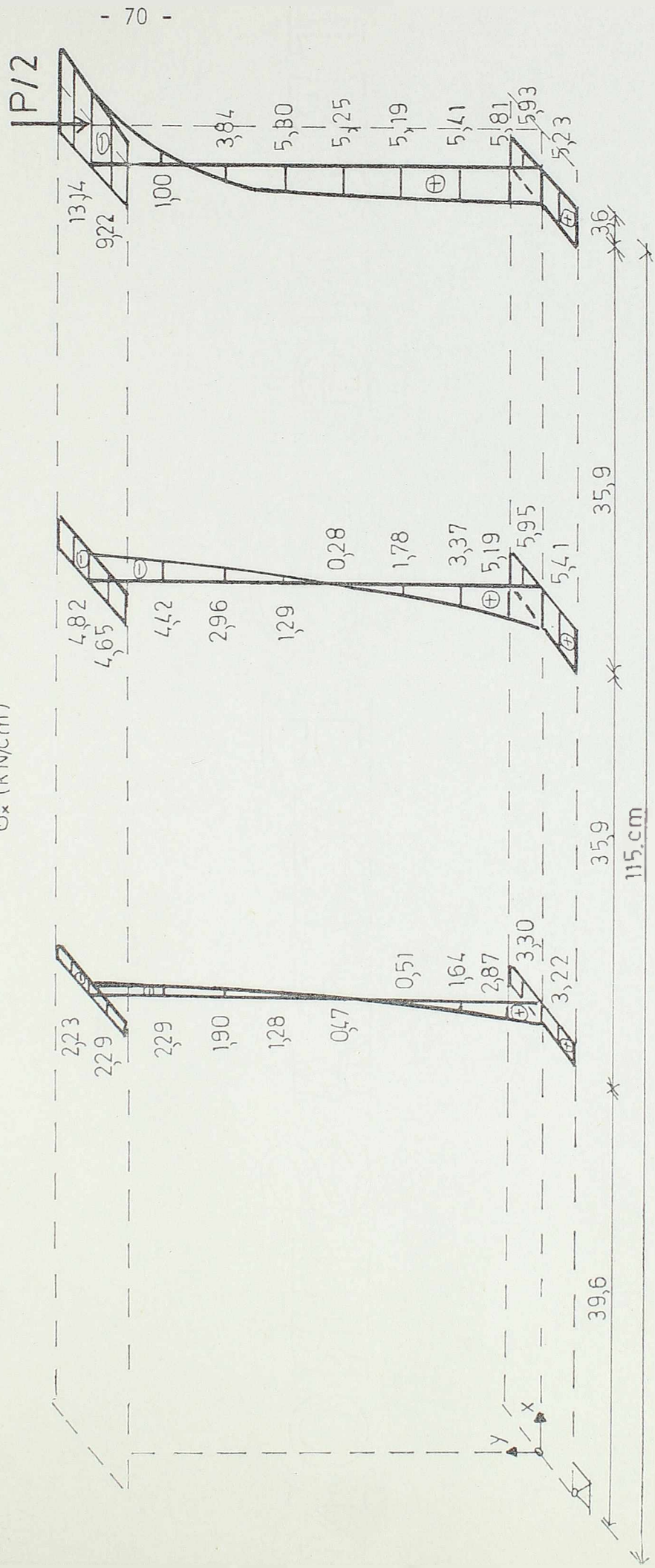
RAZMERA:

za duzine 1:5

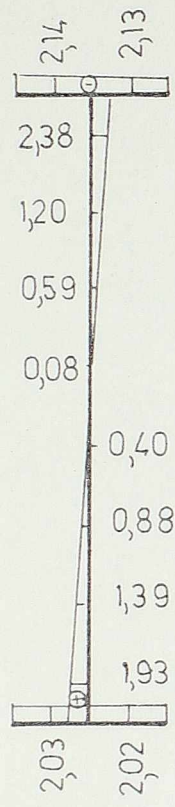
za bocna pomeranja 1:1

NOSAČ C/2/1 Dijagram σ_x napona pri $P = 37,5 \text{ kN}$

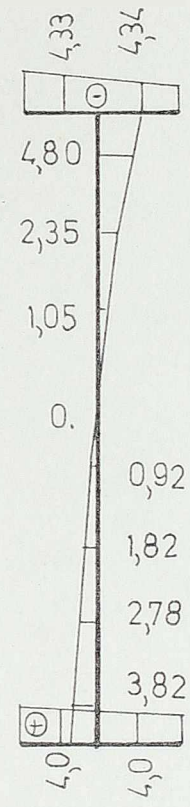
$\sigma_x \text{ (kN/cm}^2\text{)}$



NOSAČ C/2/1 DIJAGRAM NORMALNIH NAPONA U
PRESEKU X = 3,6 cm

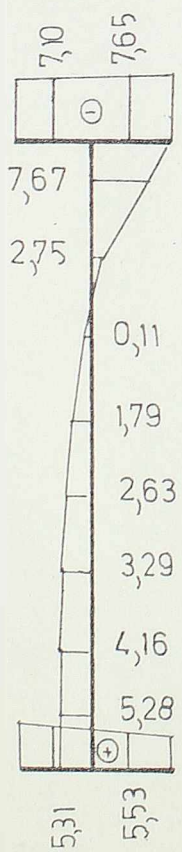


P = 10. kN

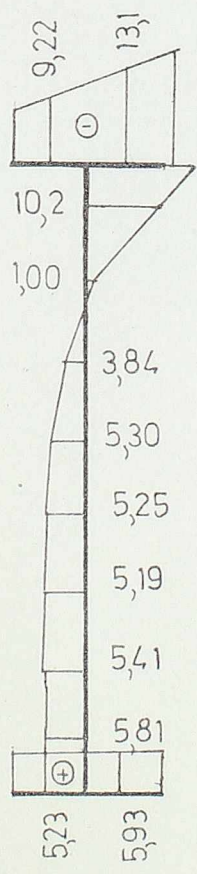


P = 20. kN

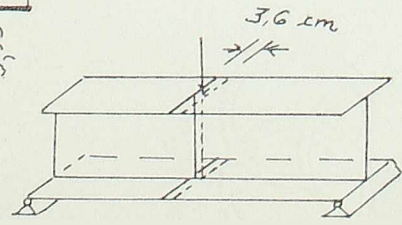
σ_x (kN/cm²)



P = 30 kN

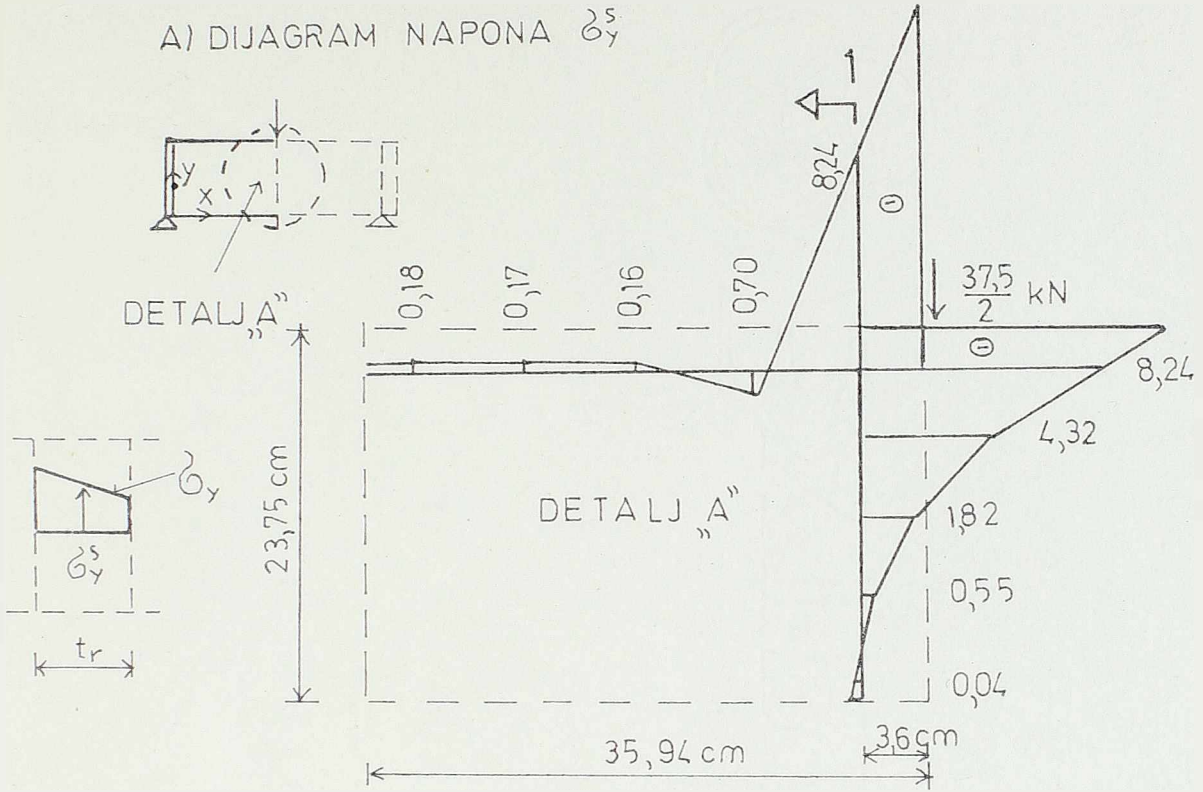


P = 37,5 kN



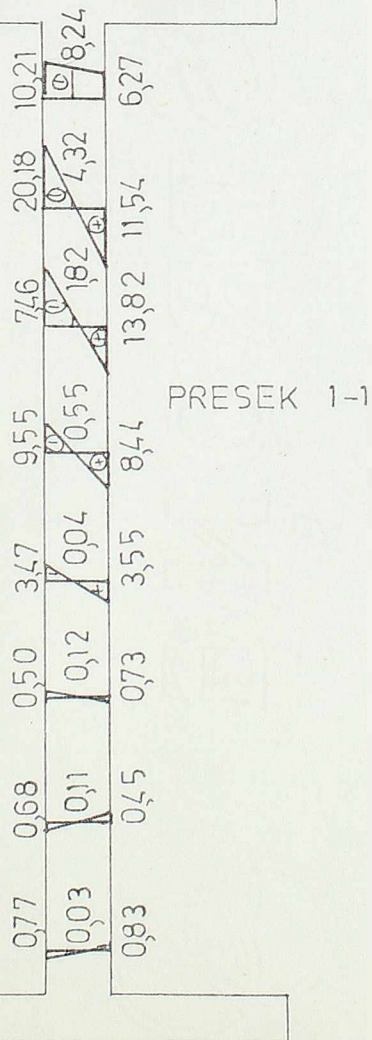
NOSAČ C/2/1

A) DIJAGRAM NAPONA σ_y

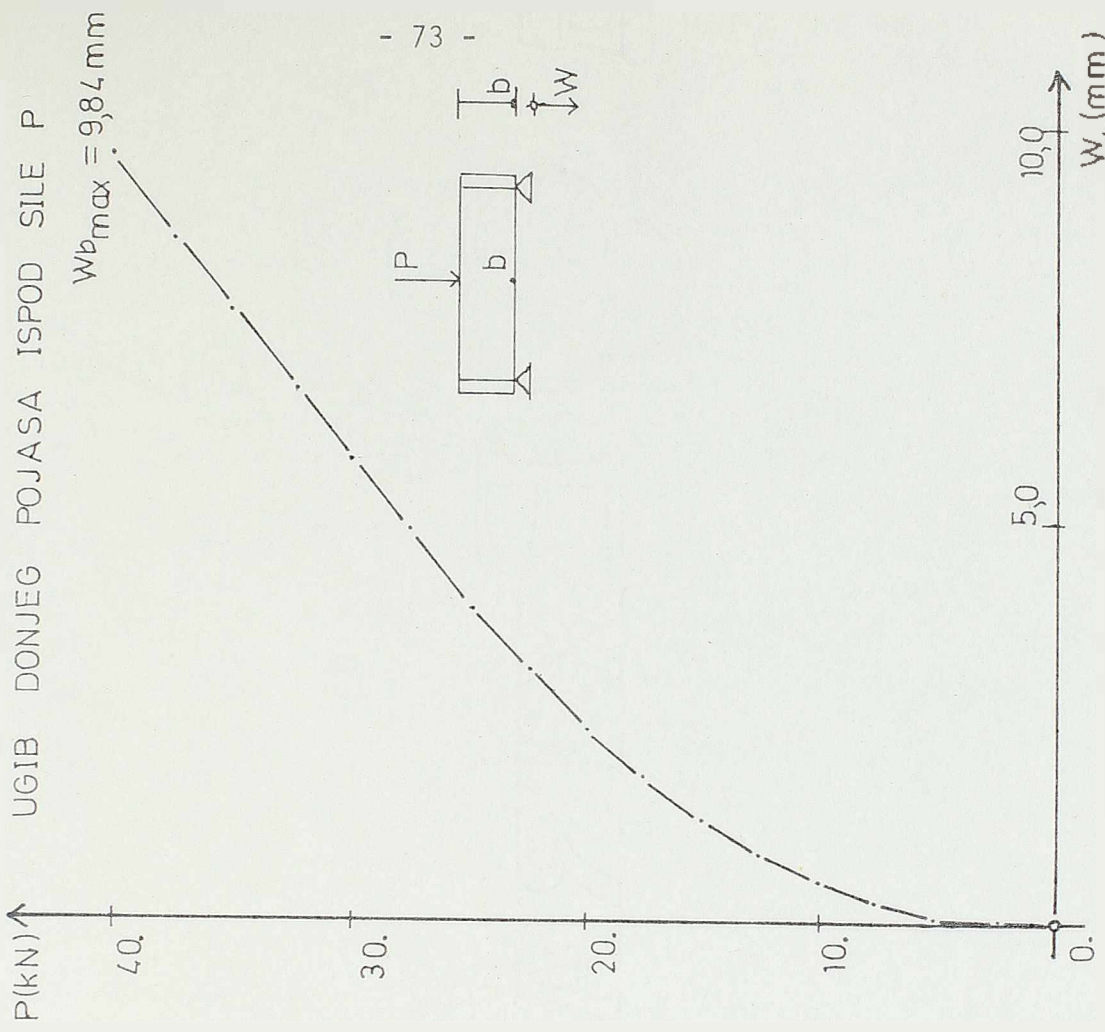
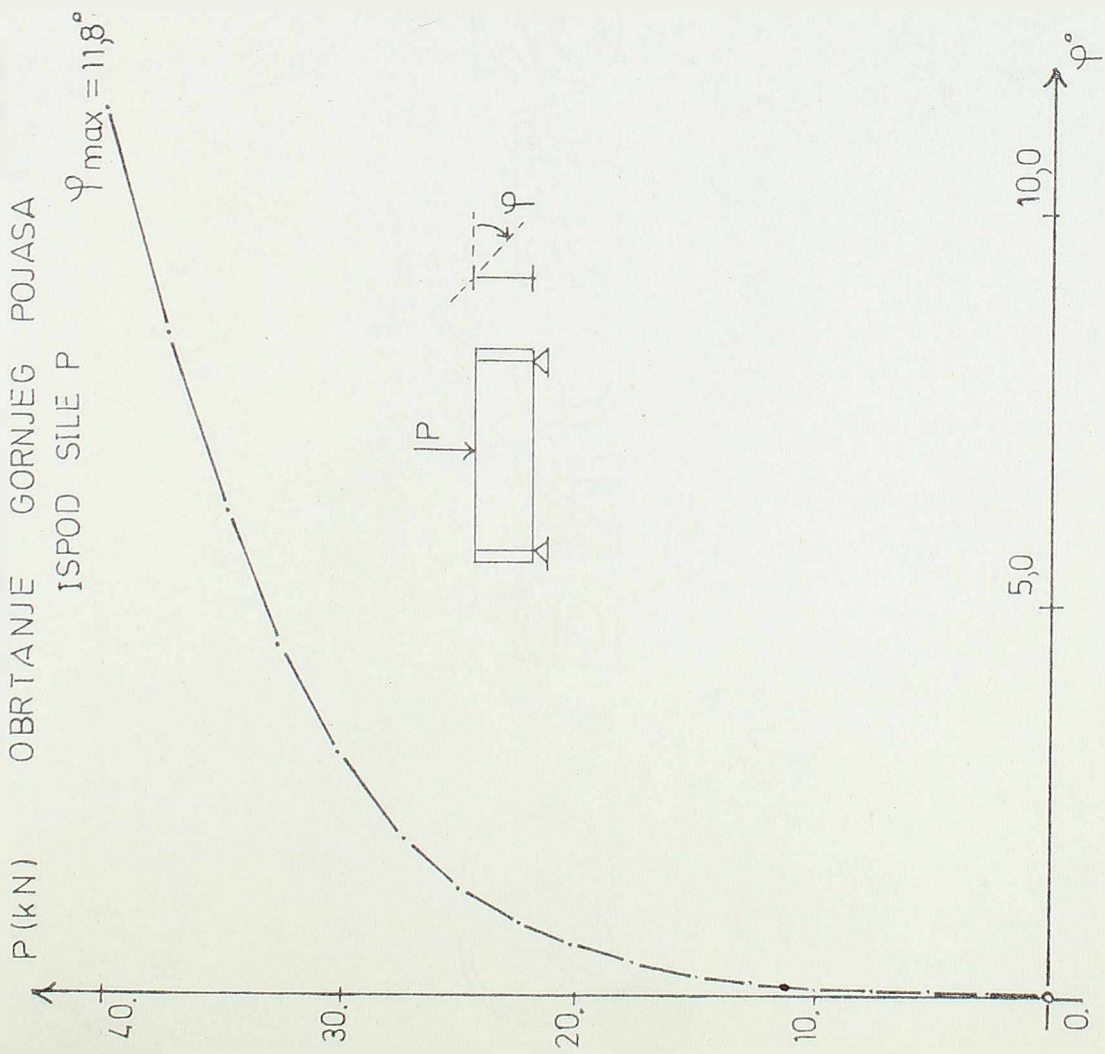


σ_y (kN/cm²)

B) PROMENA σ_y
NAPONA PO
DEBLJINI REBRA



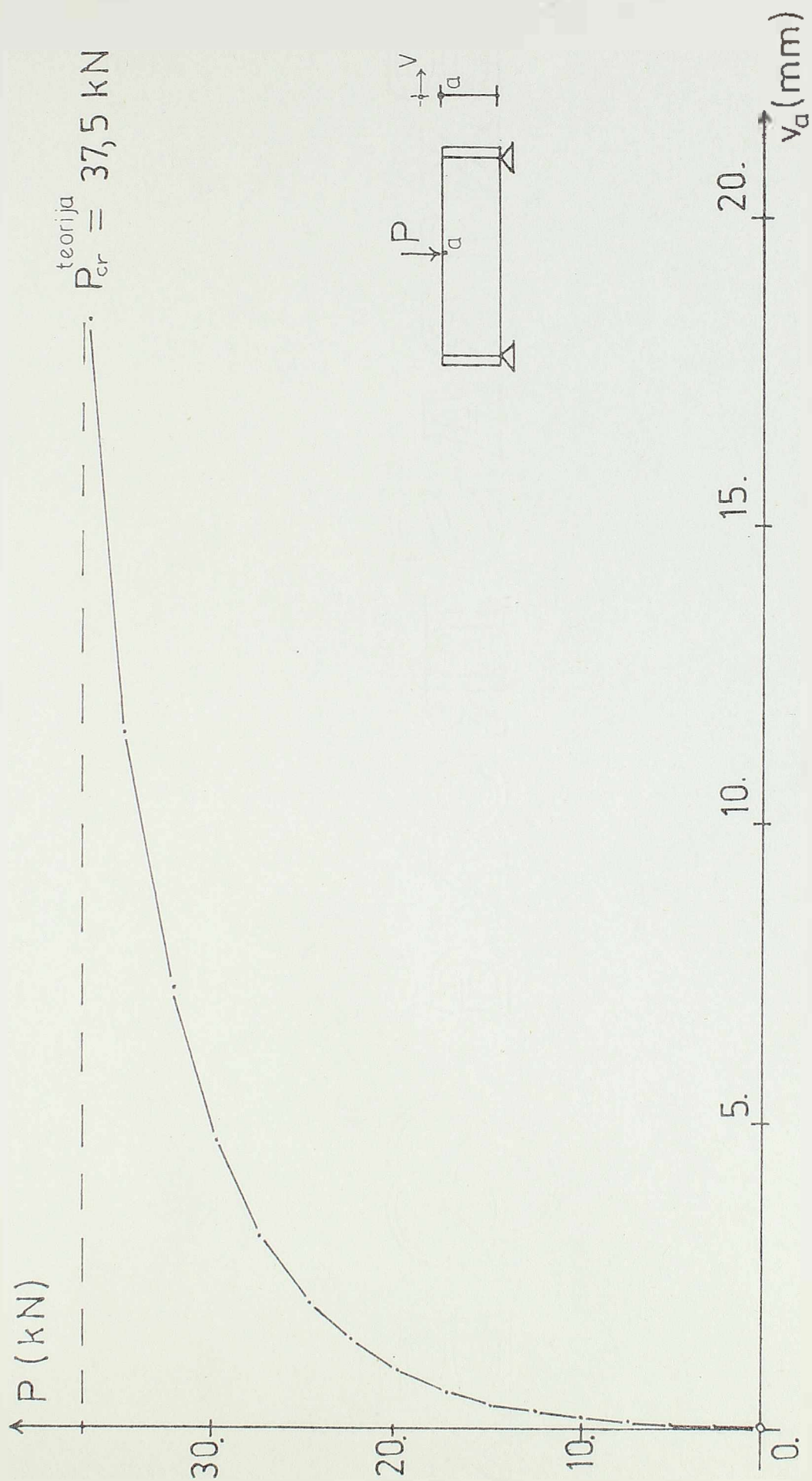
NOSAČ C/2/1



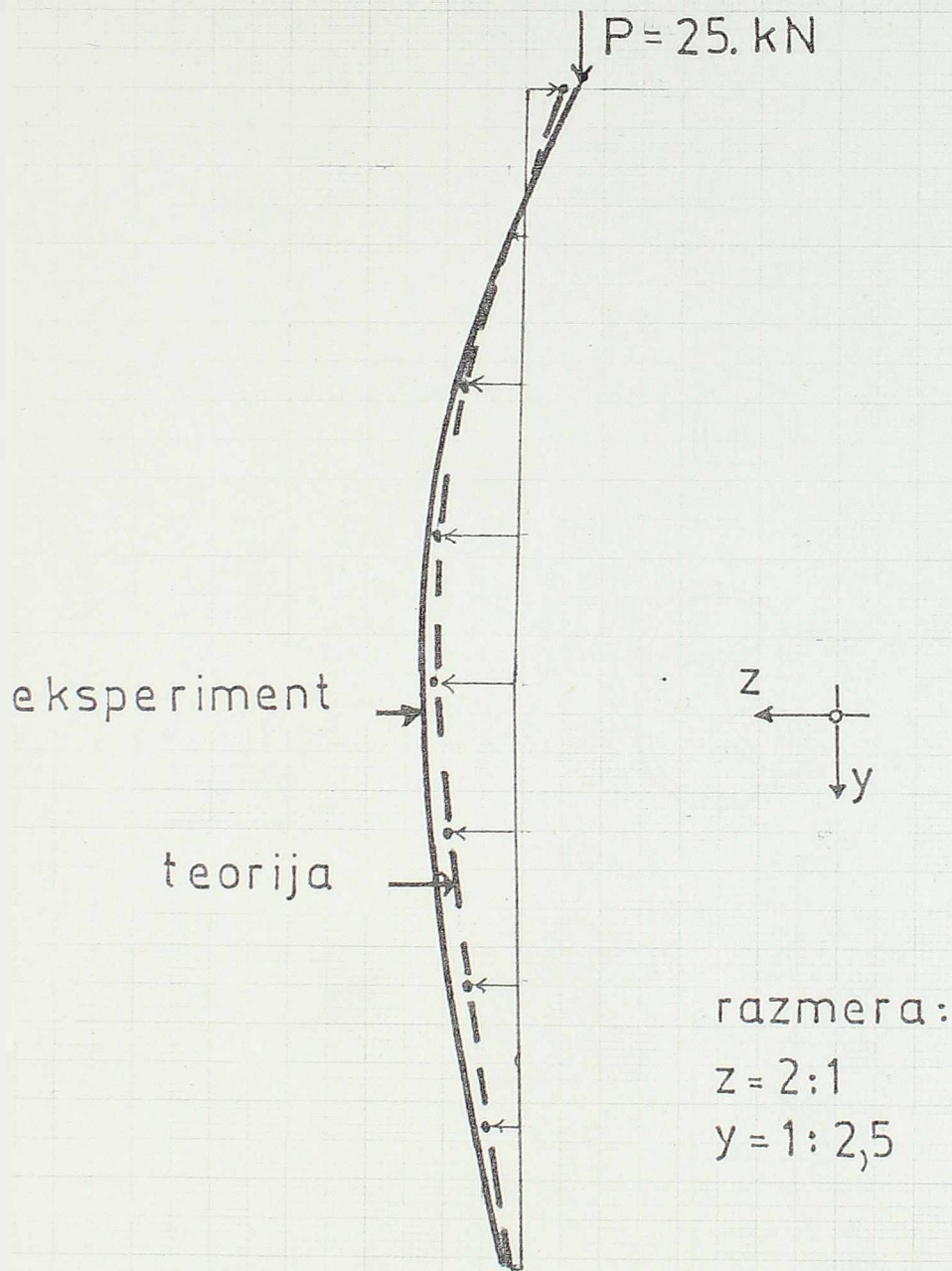
N O S A Ć C/2/3

=====

NOSAČ C/2/3 - Bočno pomeranje gornjeg pojasa ispod sile P

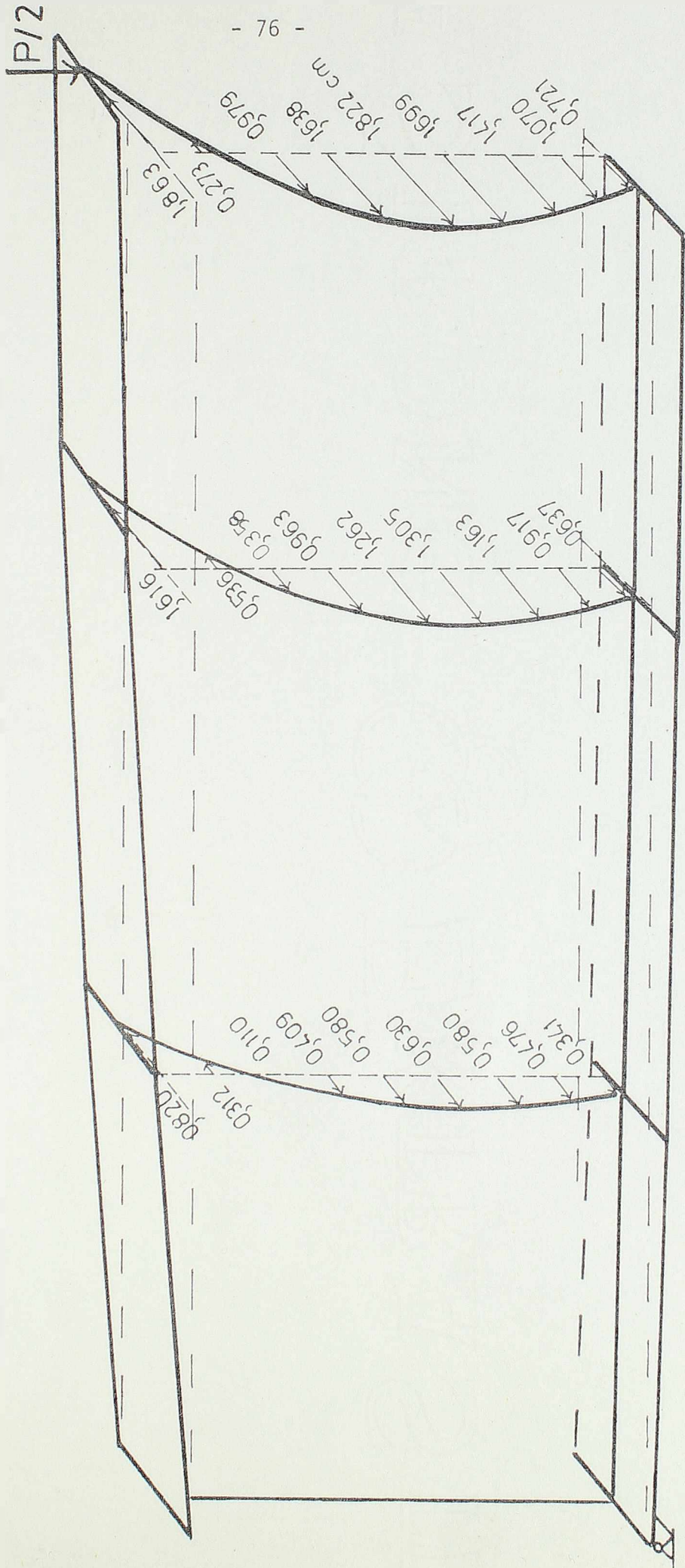


NOSAČ C/2/3



upoređenje eksperimentalnih
i teorijskih rezultata

Bočno pomehanje nosača C/2/3 pri $P = 37,5 \text{ kN}$

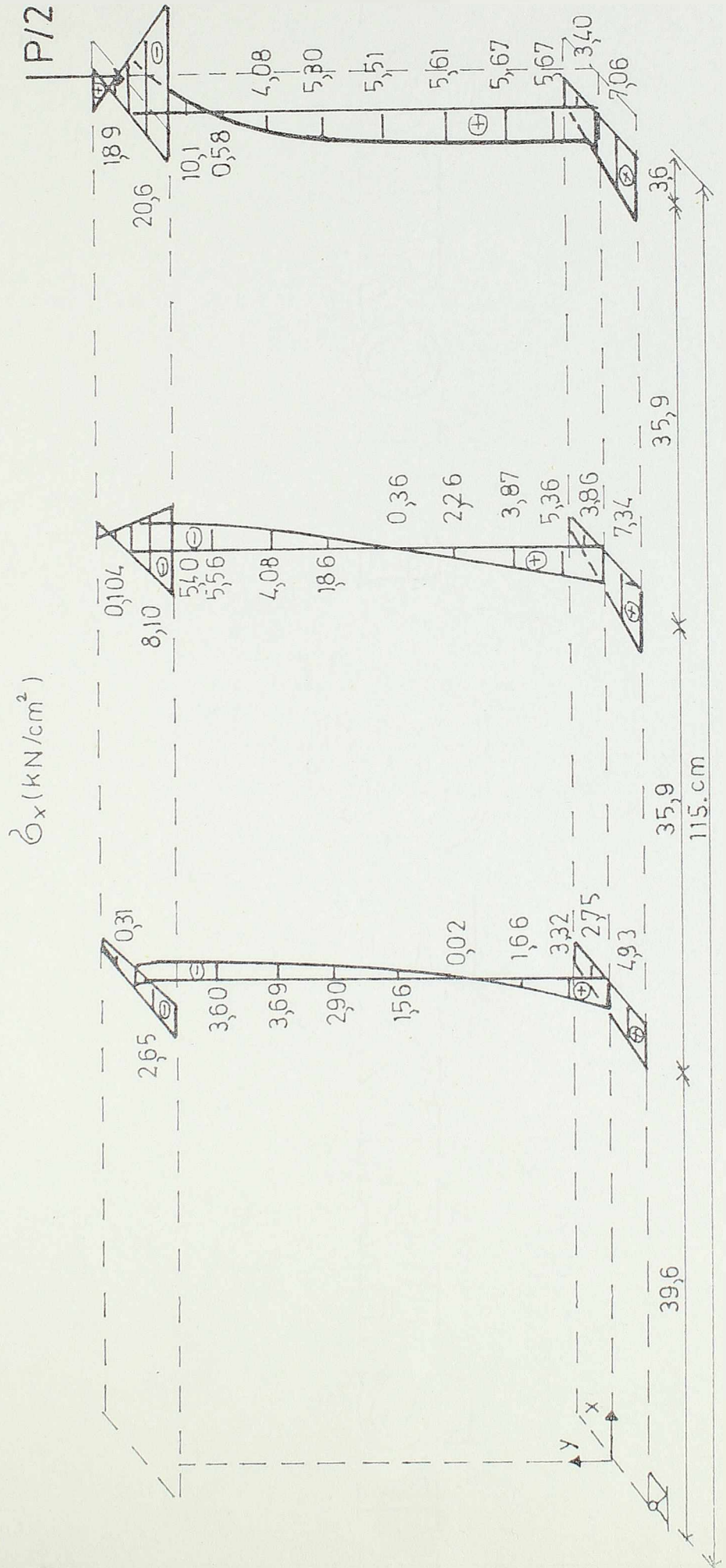


- 76 -

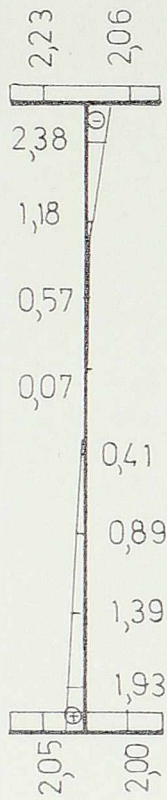
$3 \times 38,33 = 115 \text{ cm}$

RAZMERA:
za dužine 1:5
za bočna
pomehanja 1:1

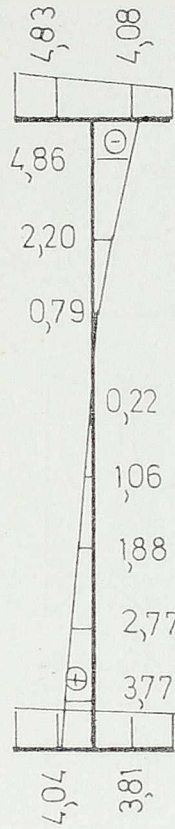
NOSAČ C12/3 - Dijagram σ_x napona pri $P=37,5$ kN



NOSAC C/2/3 DIJAGRAM NORMALNIH NAPONA U PRESEKU X = 3,6 cm

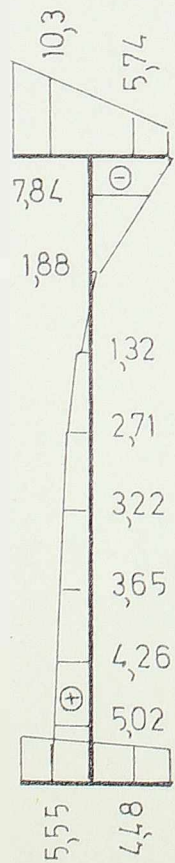


$P = 10. \text{ kN}$

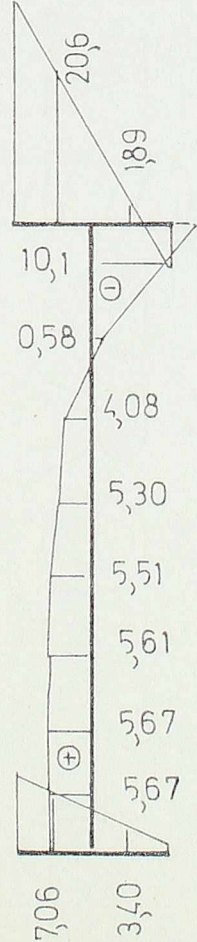


$P = 20. \text{ kN}$

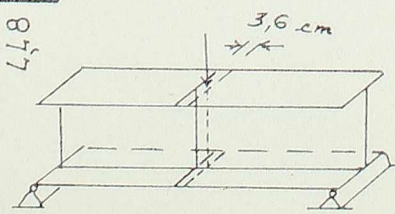
$\sigma_x \text{ (kN/cm}^2\text{)}$



$P = 30. \text{ kN}$

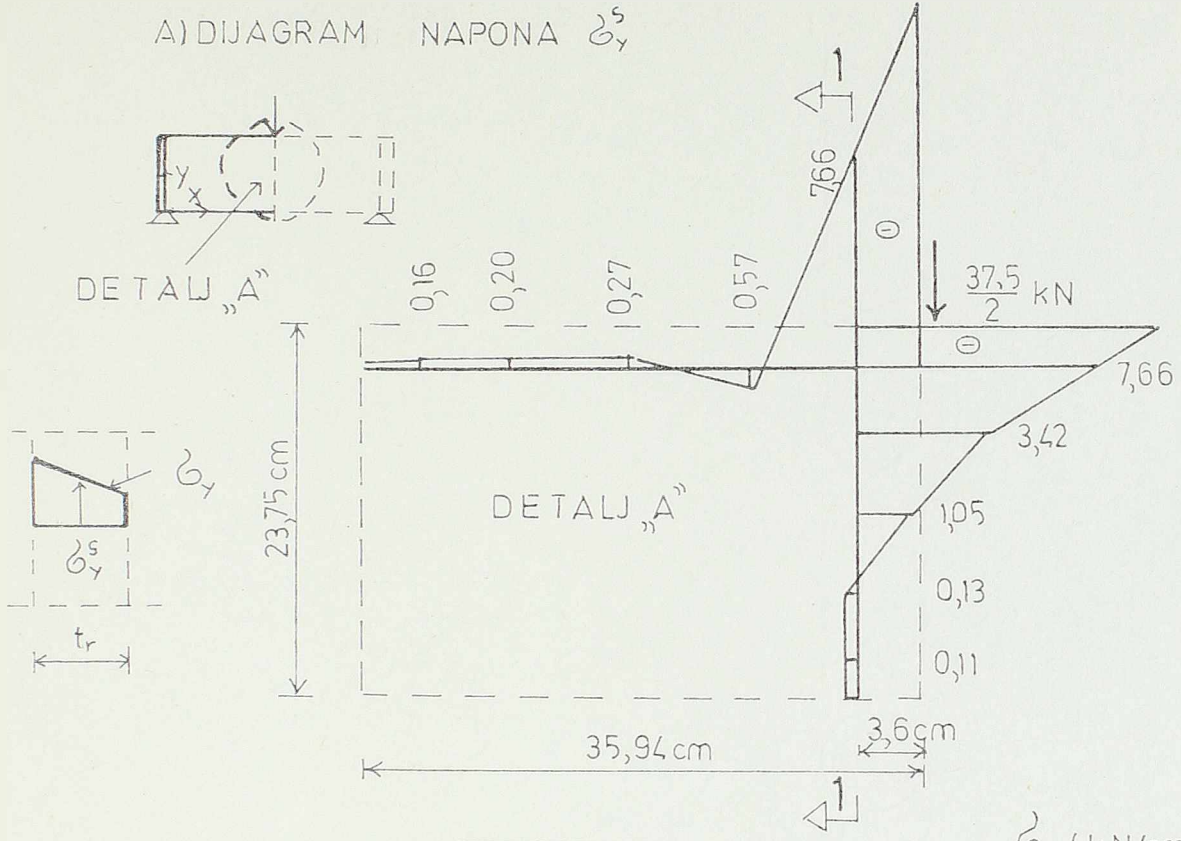


$P = 37,5 \text{ kN}$



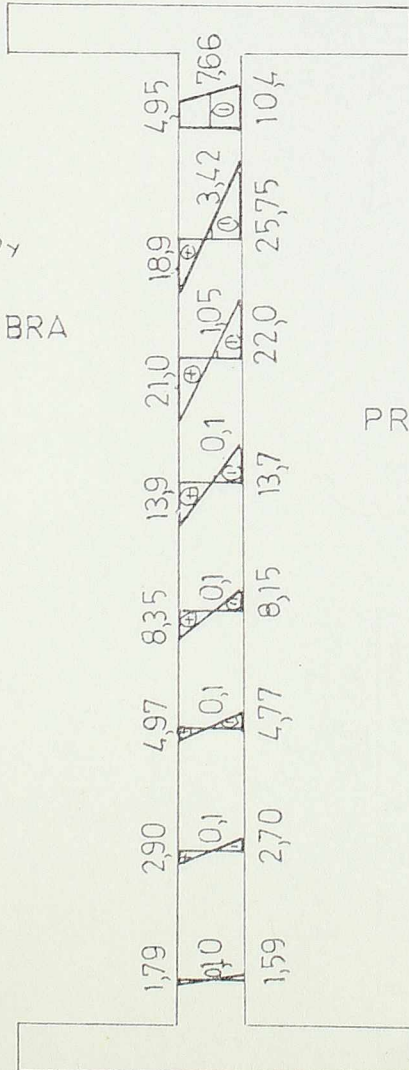
NOSAČ C/2/3

A) DIJAGRAM NAPONA σ_y^s



σ_y (kN/cm²)

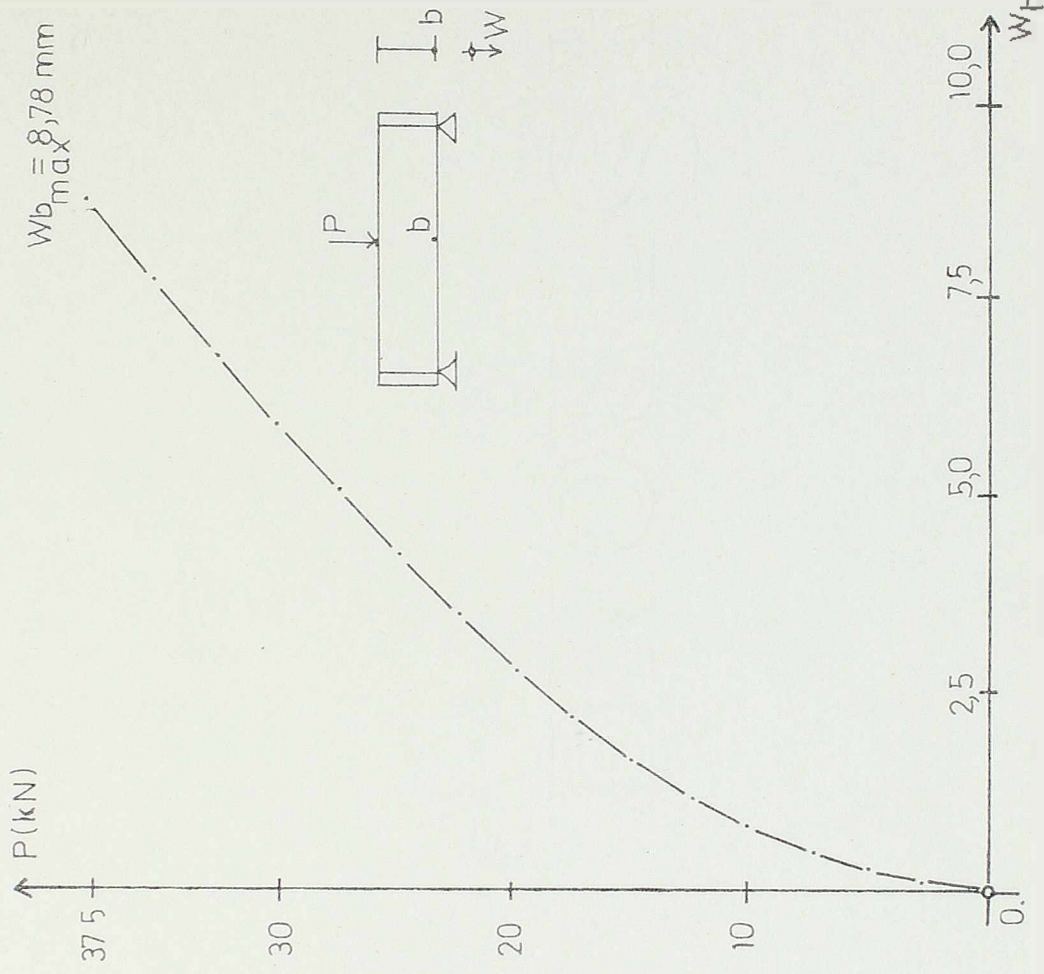
B) PROMENA σ_y
NAPONA PO
DEBLJINI REBRA



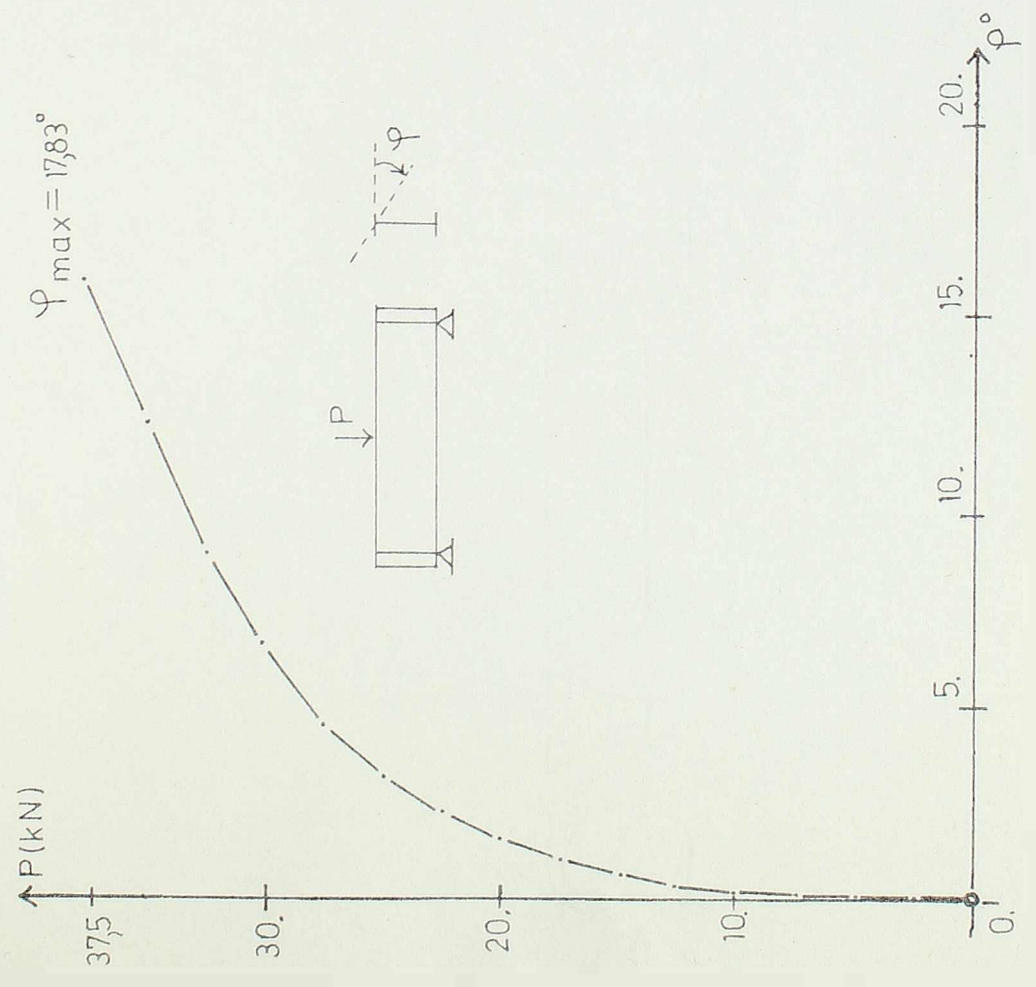
PRESEK 1-1

NOSAČ C/2/3

UGIB DONJEG POJASA ISPOD SILE P



OBRITANJE GORNJEG POJASA ISPOD SILE P

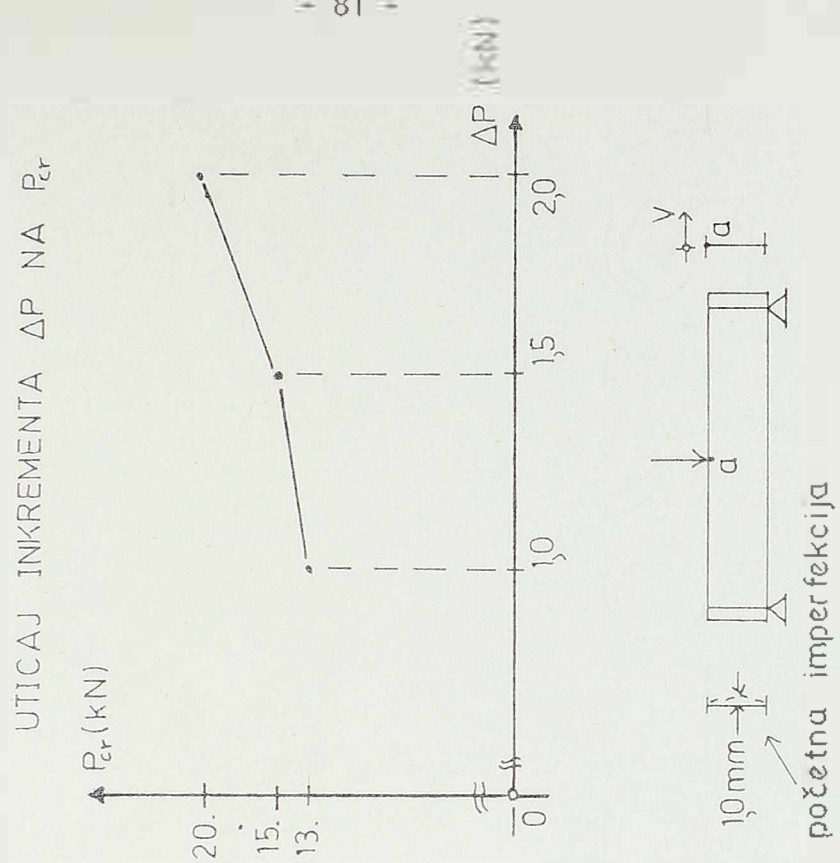
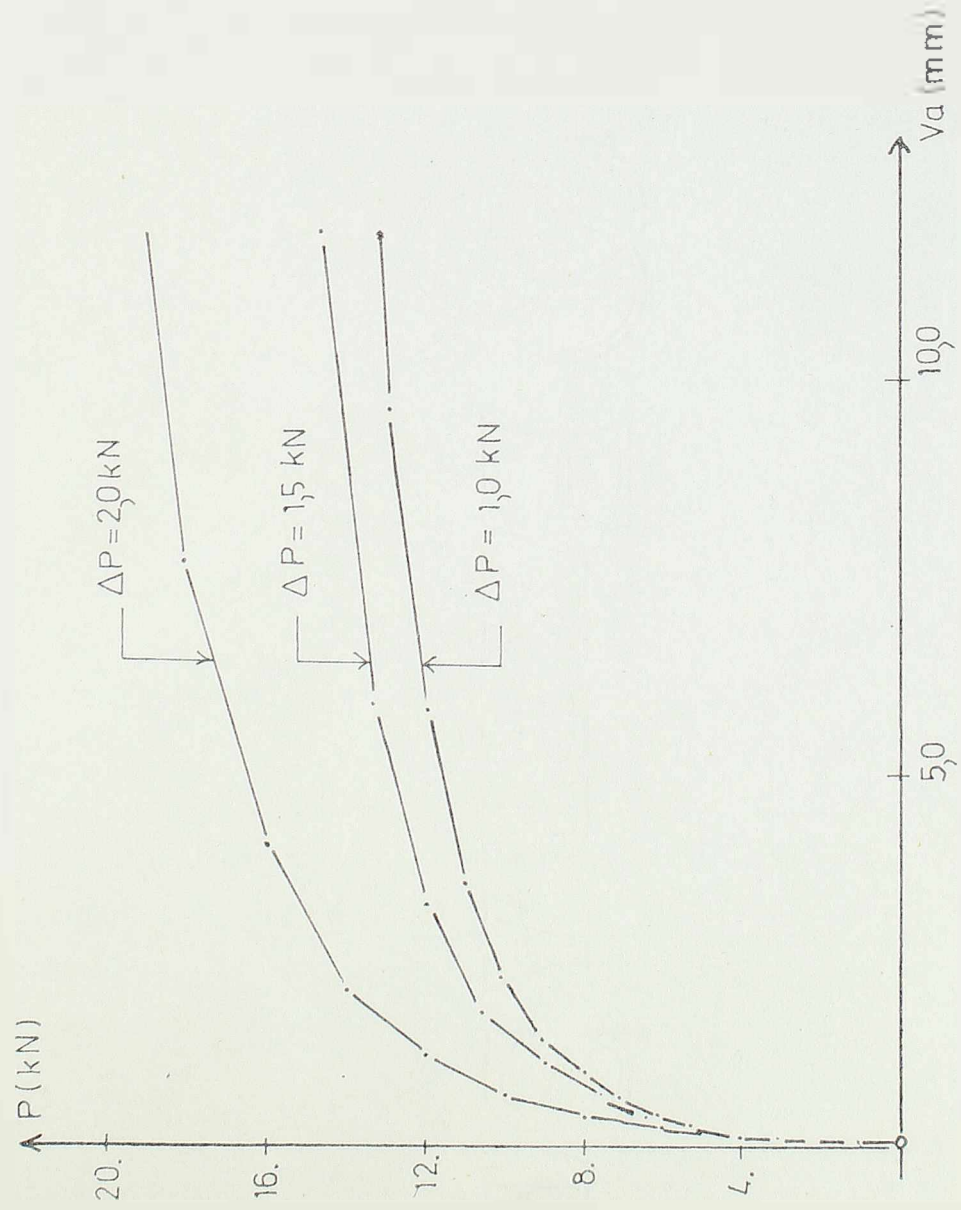


N O S A Ć I C/1/2 i C/1/3

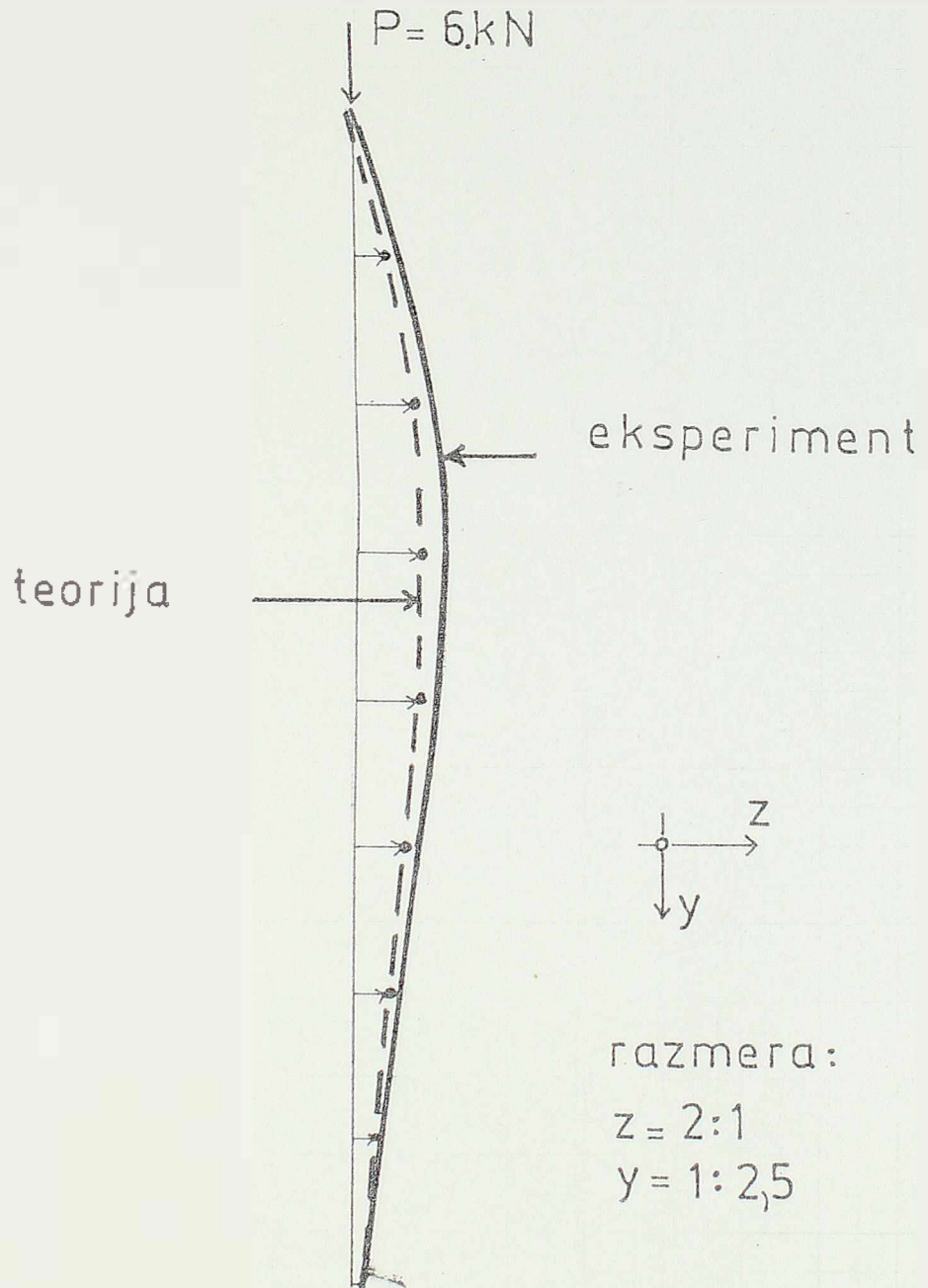
=====

NOSAČI C/1/2 I C/1/3

Određivanje kritičnog opterećenja

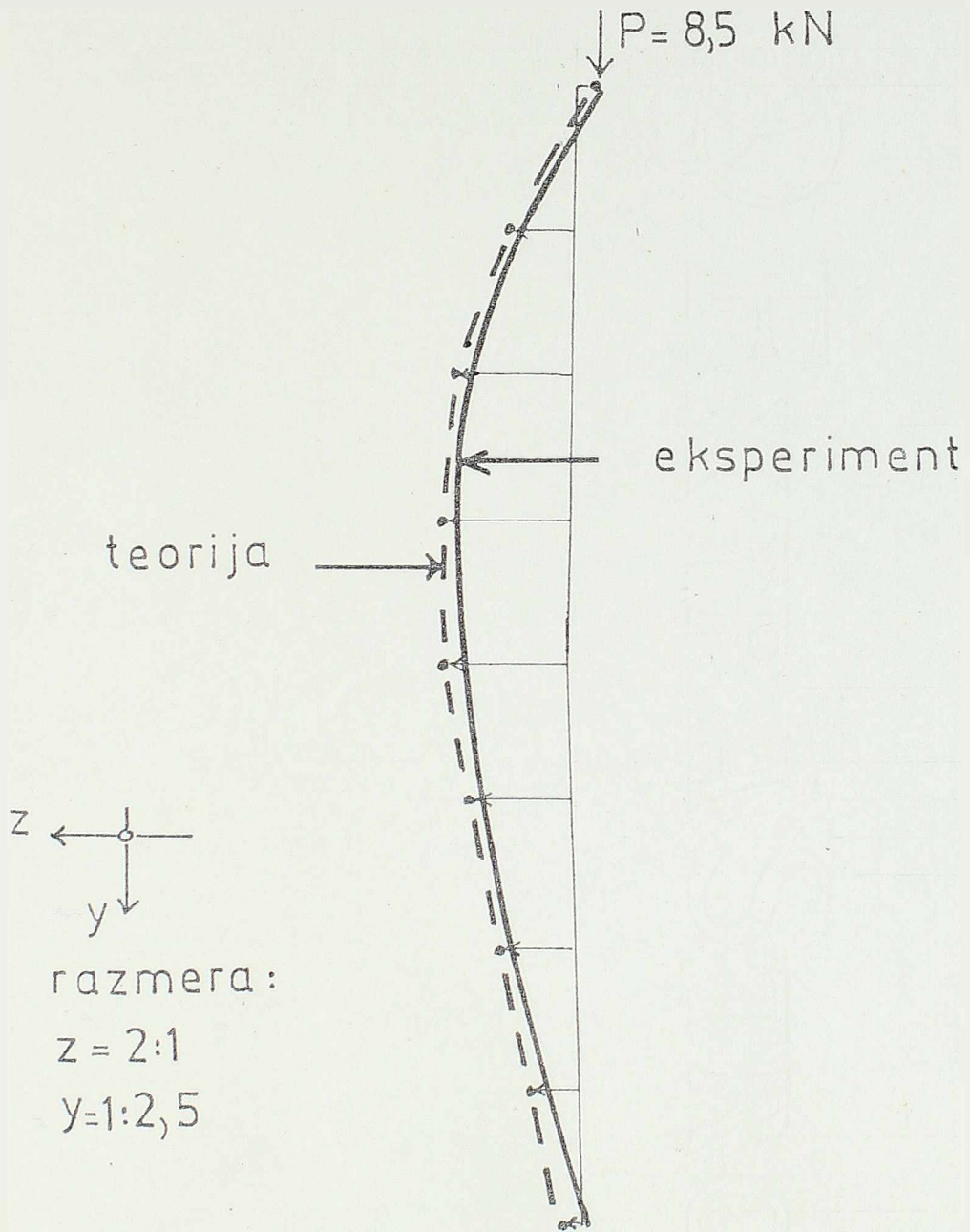


NOSAČ C/1/2



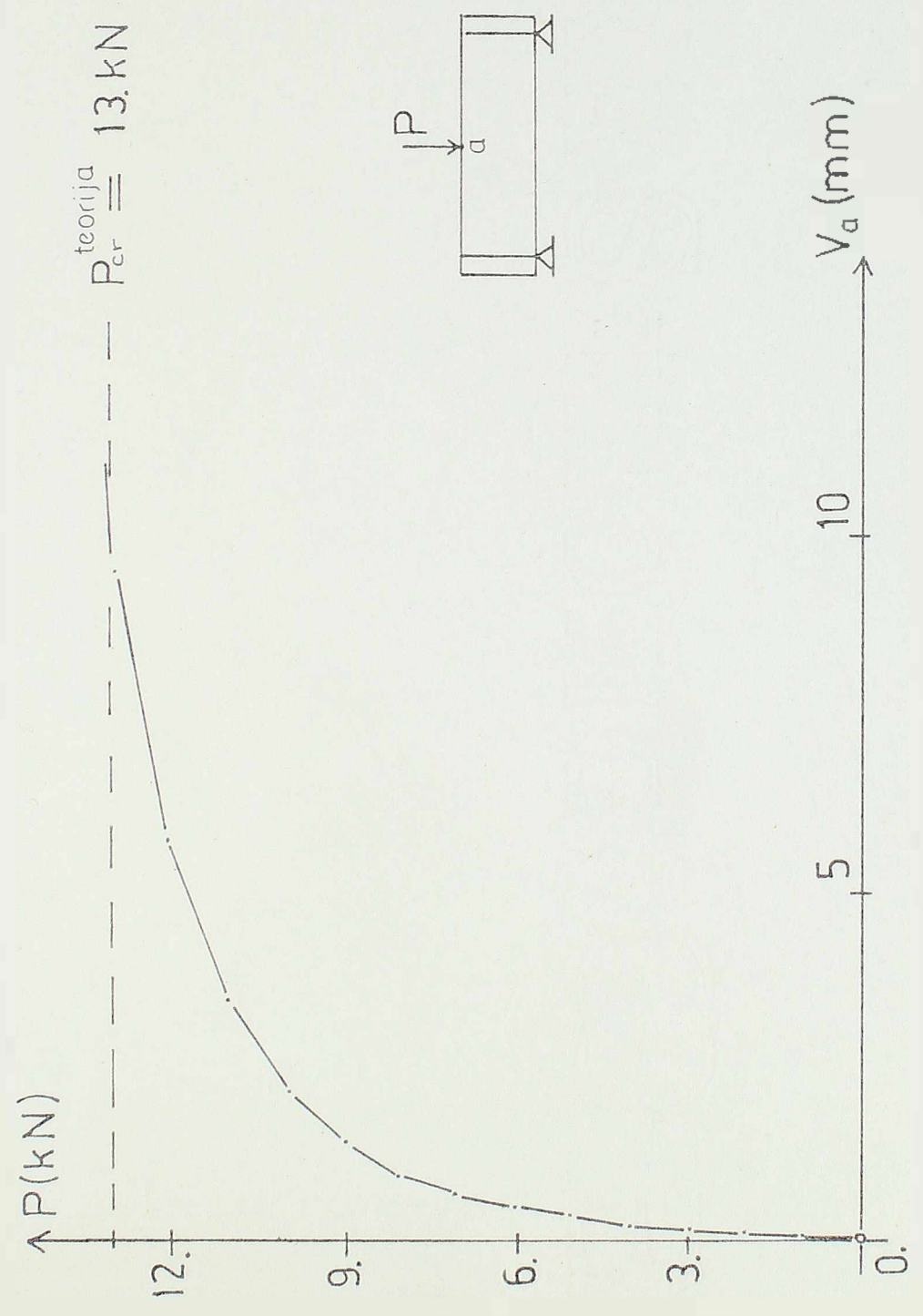
upoređenje eksperimentalnih
i teorijskih rezultata

NOSAČ C/1/3

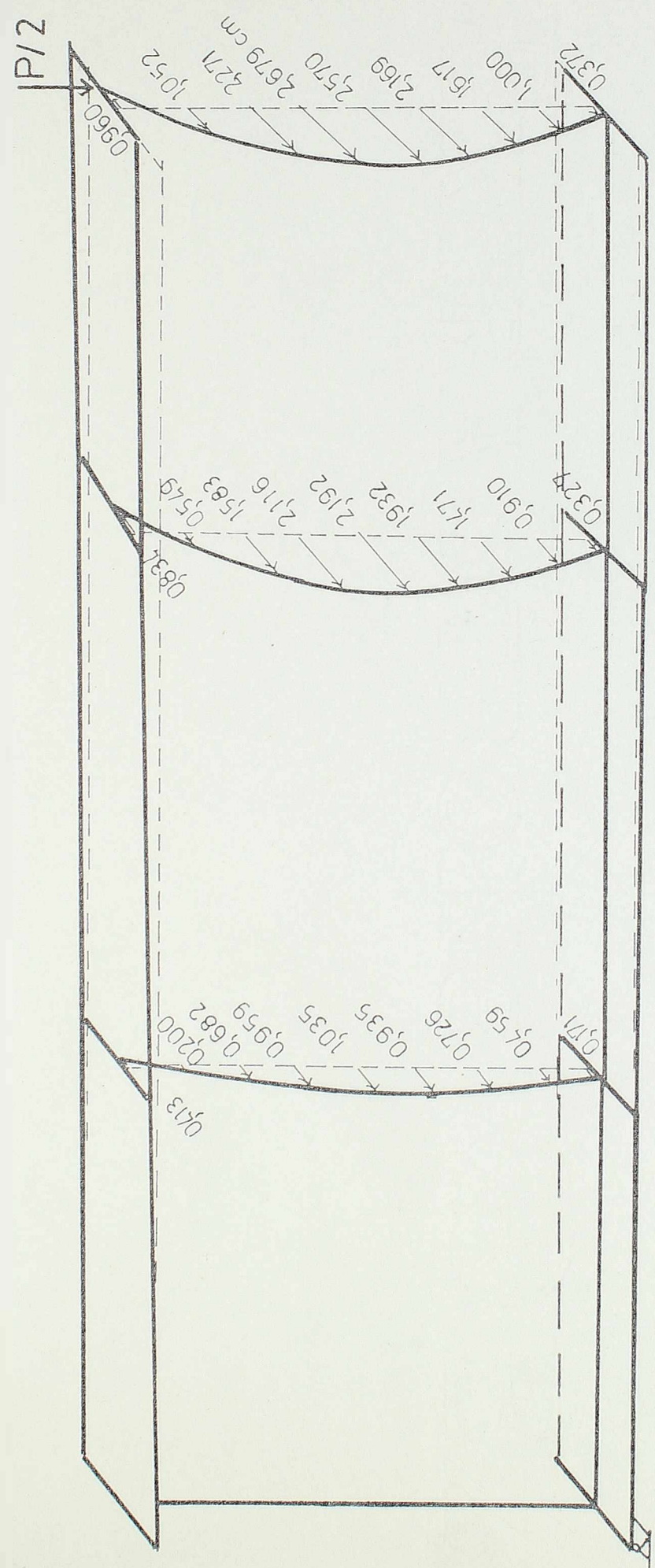


upoređenje eksperimentalnih
i teorijskih rezultata

NOSAČI C/12 I C/13 - Bočno pomeranje gornjeg pojasa
ispod sile P



Bočno pomeranje nosača C/1/2 i C/1/3 pri $P = 13 \text{ kN}$

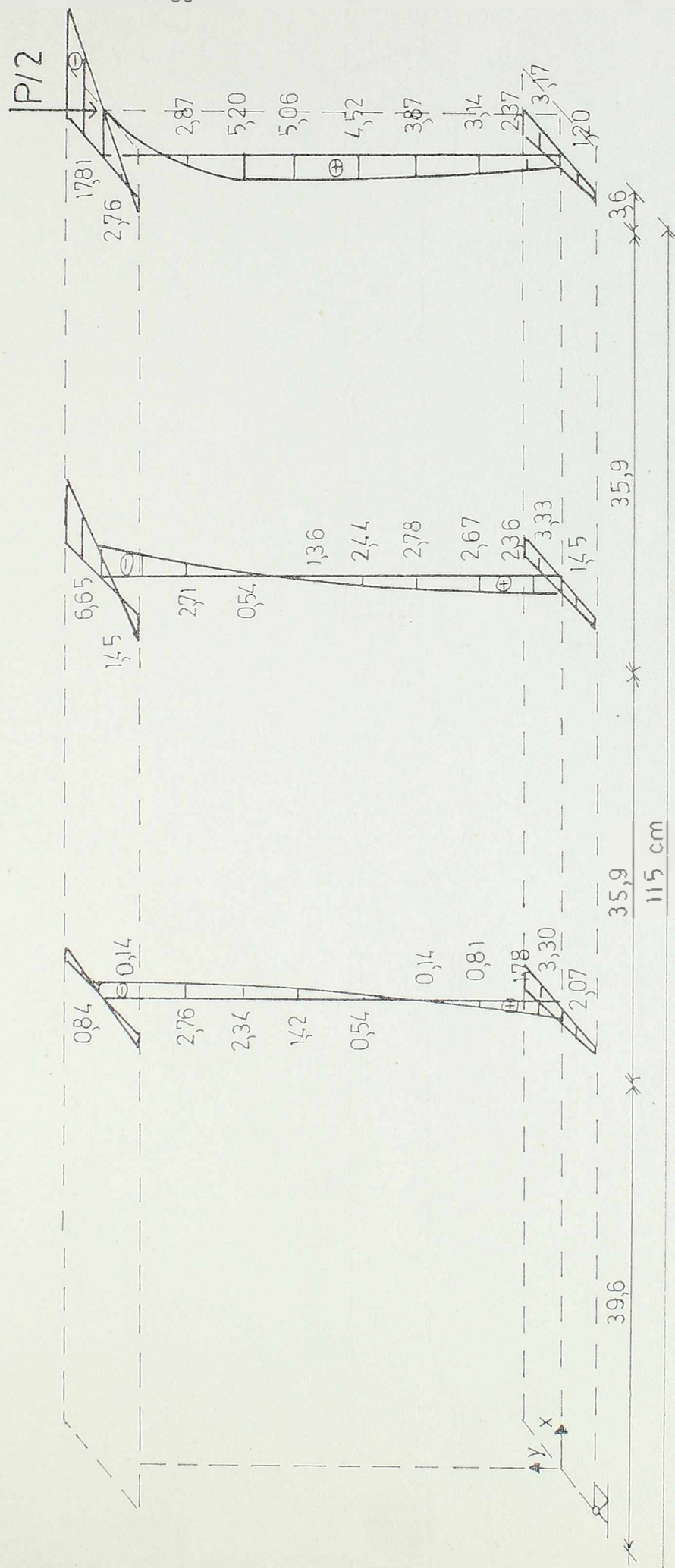


$3 \times 38,33 = 115 \text{ cm}$

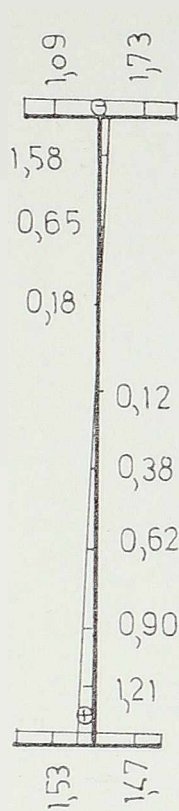
RAZMERA:
za dužine 1:5
za bočna pomeranja 1:1

NOSAČI C/1/2 I C/1/3 Dijagram σ_x napona pri $P = 13 \text{ kN}$

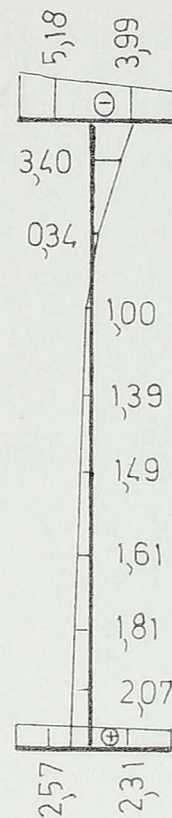
$\sigma_x \text{ (kN/cm}^2\text{)}$



NOSAČI C/1/2 I C/1/3 - DIJAGRAM NORMALNIH NAPONA
U PRESEKU $X' = 3,6 \text{ cm}$

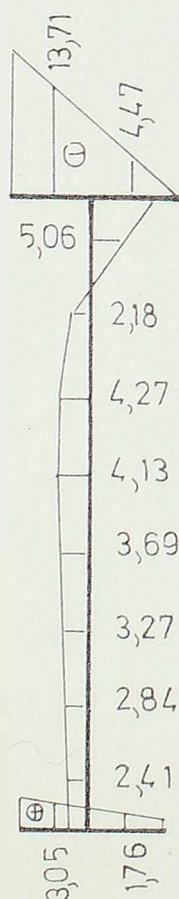


$P = 4. \text{ kN}$

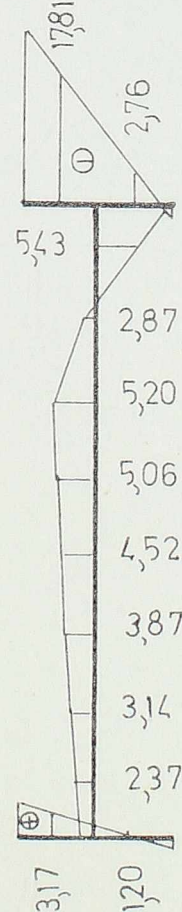


$P = 8. \text{ kN}$

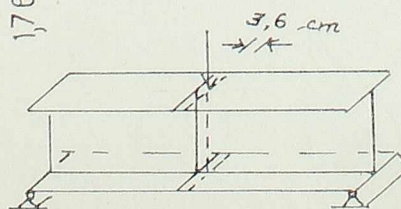
$\sigma_x \text{ (kN/cm}^2\text{)}$



$P = 12. \text{ kN}$

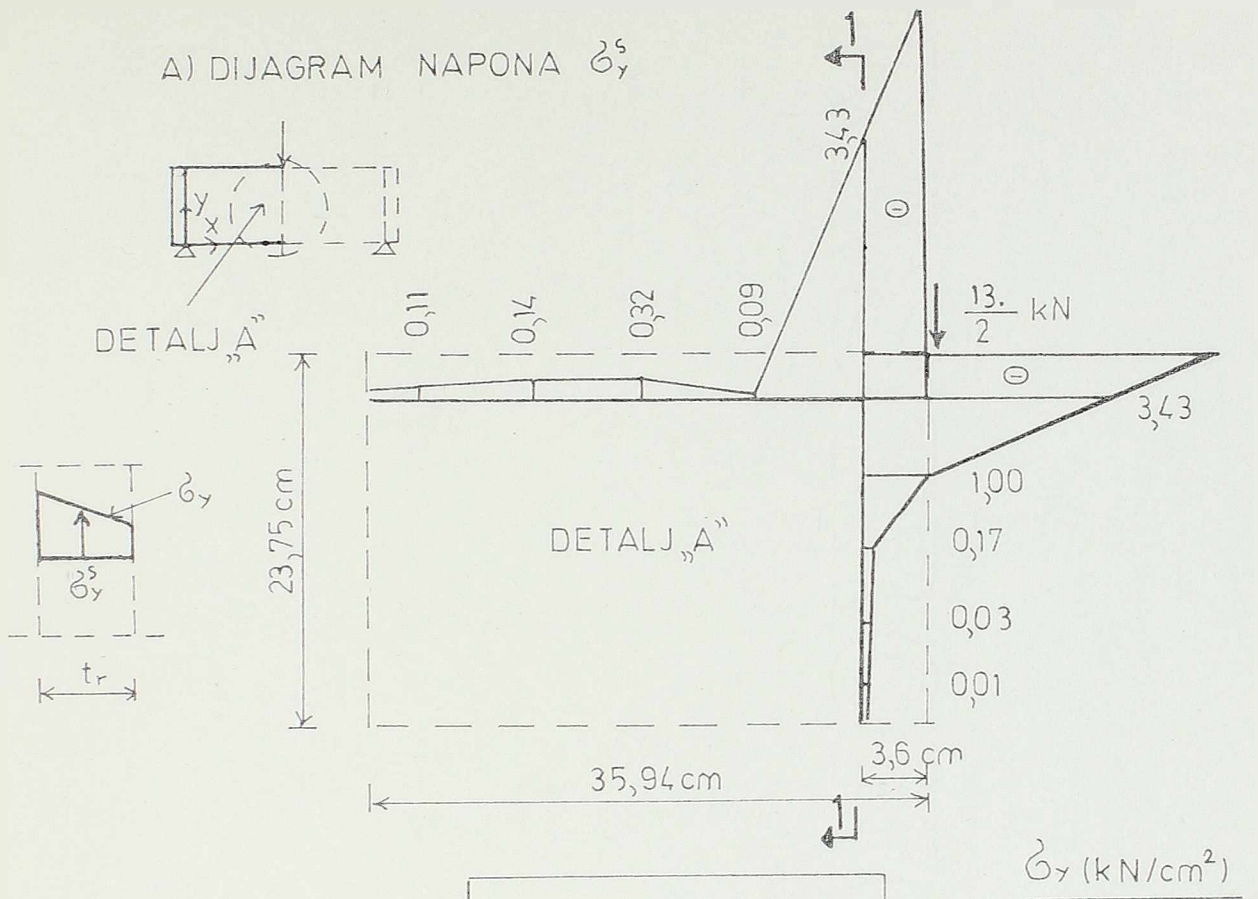


$P = 13. \text{ kN}$

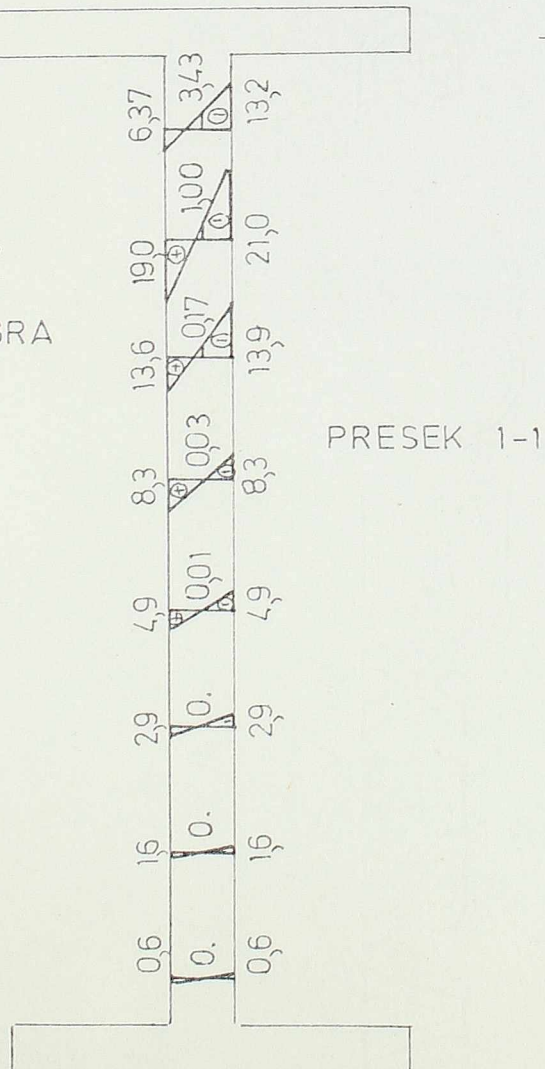


NOSAČI C/1/2 i C/1/3

A) DIJAGRAM NAPONA σ_y

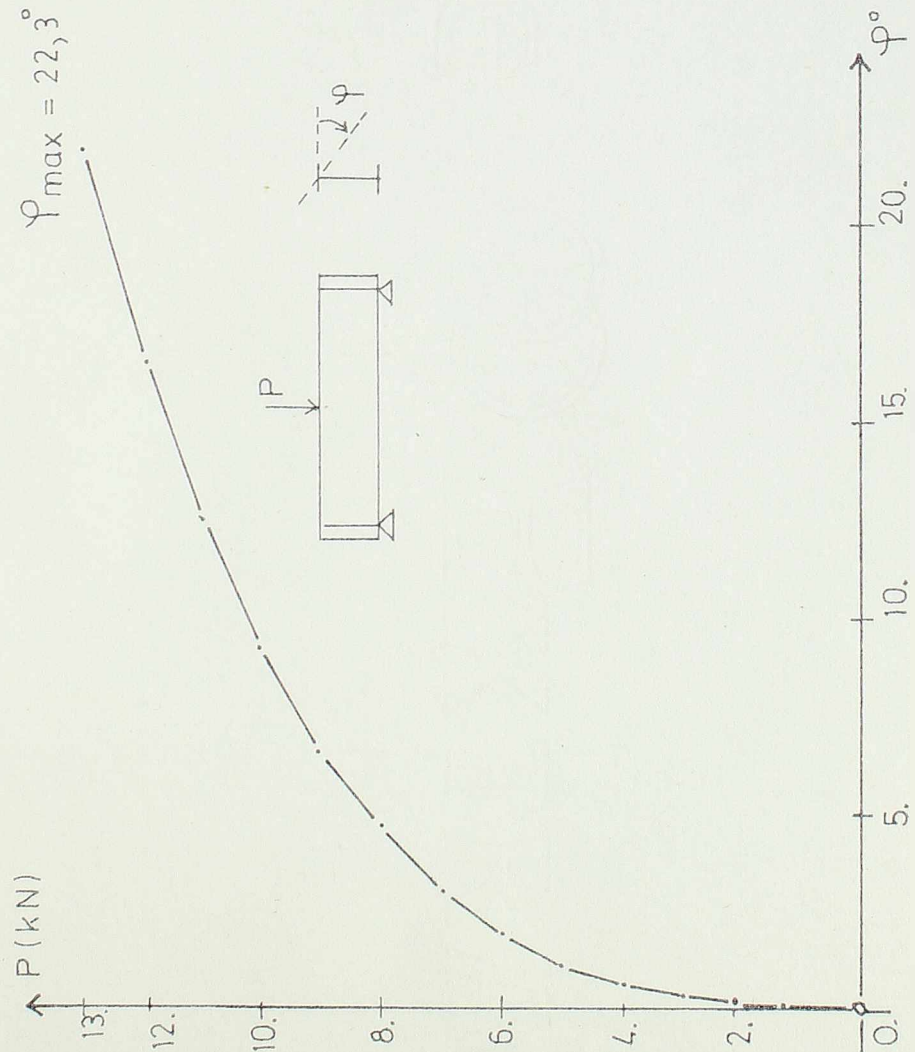


B) PROMENA σ_y
NAPONA PO
DEBLJINI REBRA

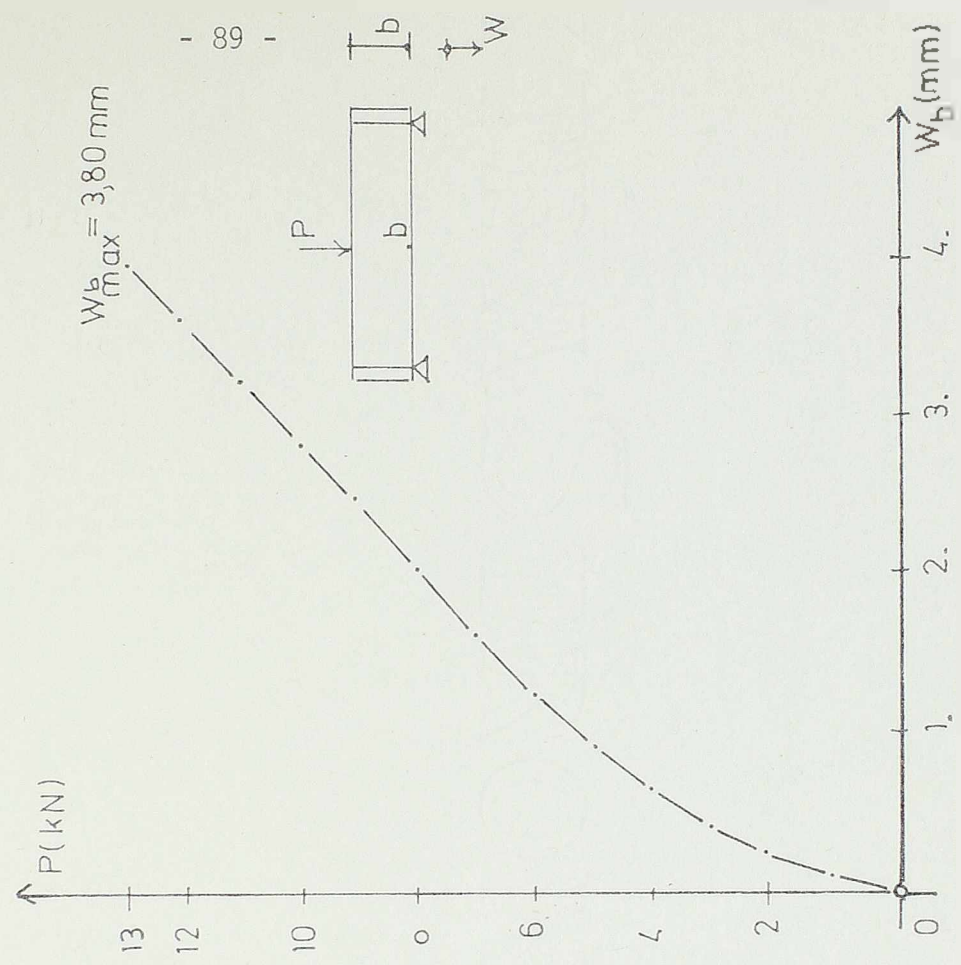


NOSAČI C11/2 I C11/3

OBRITANJE GORNJEG POJASA ISPOD SILE P



UGIB DONJEG POJASA ISPOD SILE P



3.2.4 Uticaj koncentracije napona pri bočnom izvijanju nosača

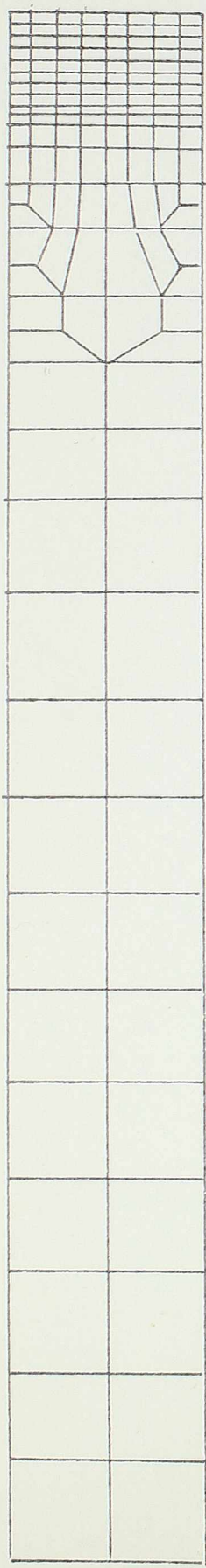
Može se postaviti pitanje da li se pomoću mreže od 192 elementa dobijaju rezultati koji dovoljno tačno prikazuju naponsko-deformacijsko stanje u nosaču, posebno u sredini raspona ispod opterećenja gde se očekuje pojava koncentracije napona.

Zato je napravljena mreža od 489 elemenata tako što je posebno "progušćena" na gornjem pojasu i na rebro u neposrednoj blizini opterećenja (strana 91.).

Na osnovu izvršenog proračuna za nosač C/3/3, može se zaključiti da su naponi i deformacije koristeći jednu i drugu mrežu praktično identični za ceo nosač izuzev u uzanoj zoni u sredini nosača ispod opterećenja. U ovoj zoni primenom gušće mreže konstatovana je koncentracija napona kako je to dato na slici br. 33. Medjutim, ova koncentracija napona nije od značaja na ukupno ponašanje nosača, na veličinu kritičnog opterećenja i ostvarenih deformacija u nosaču, kako se to vidi sa slika br. 31 i 32.

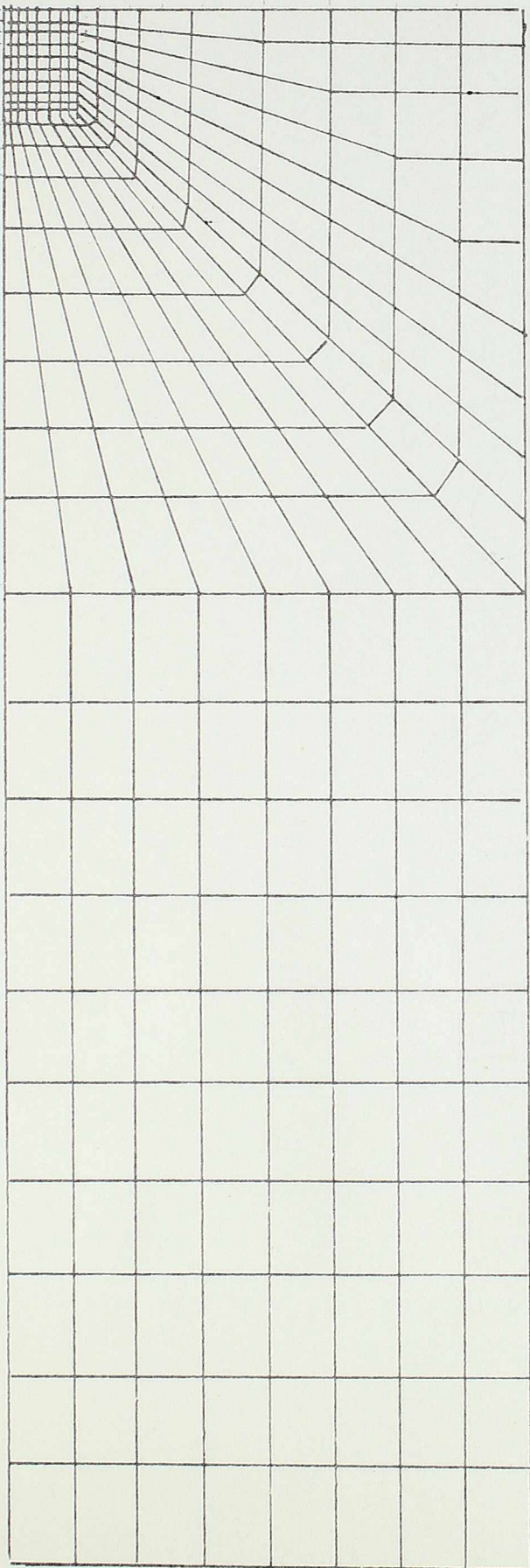
Ovaj zaključak izveden je na bazi proračuna pri kome su naponi sve vreme bili u elastičnoj oblasti, ispod granice tečenja. Ako bi, medjutim, predmet proračuna bila elasto-plastična analiza gušća mreža bi nam omogućila da bolje pratimo nastajanje zone plastifikacije u preseku što bi omogućilo i tačniji proračun nosača.

GORNJI
POJAS

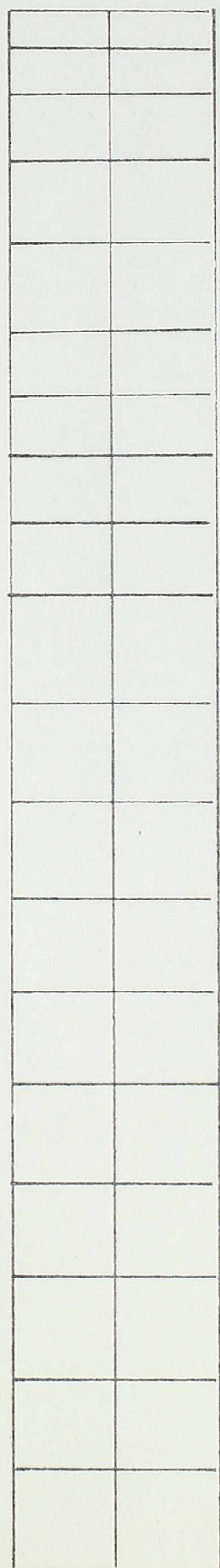


REBRO

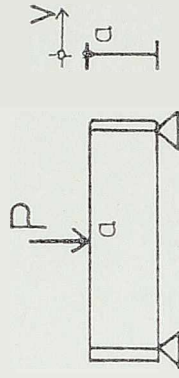
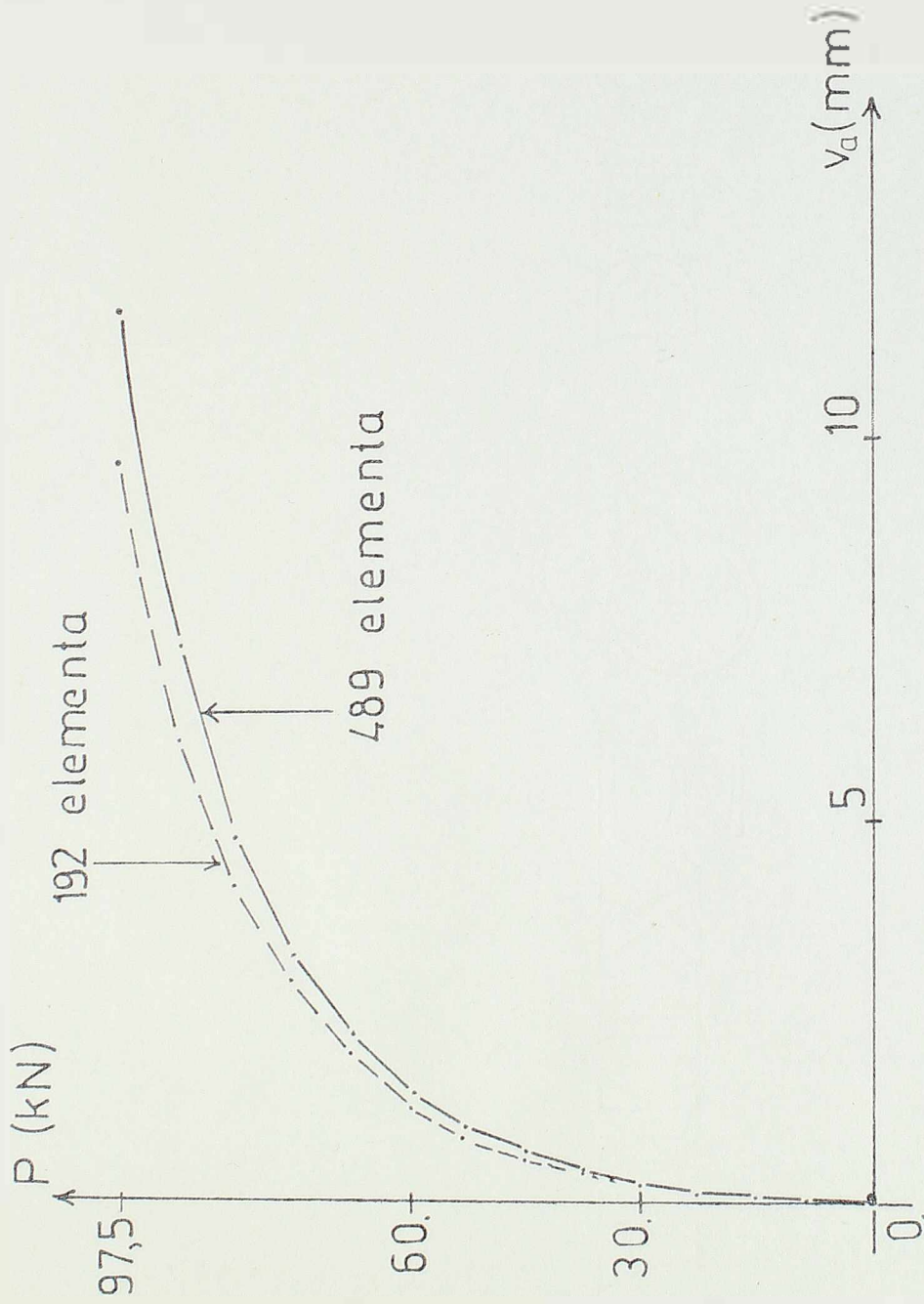
P/2



DONJI
POJAS



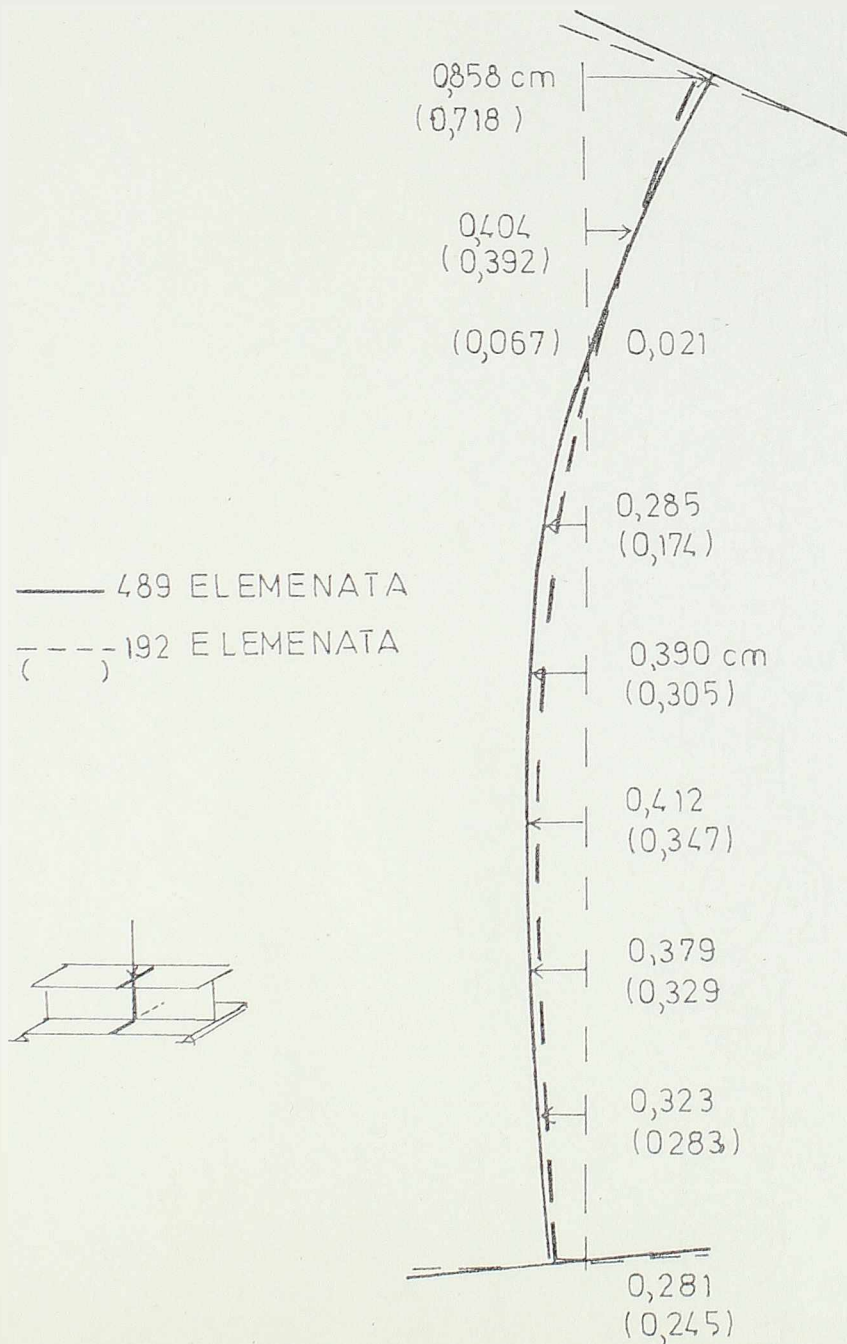
NOSAC C/3/3 Bočno pomeranje gornjeg pojasa ispod sile P



Slika br. 31.

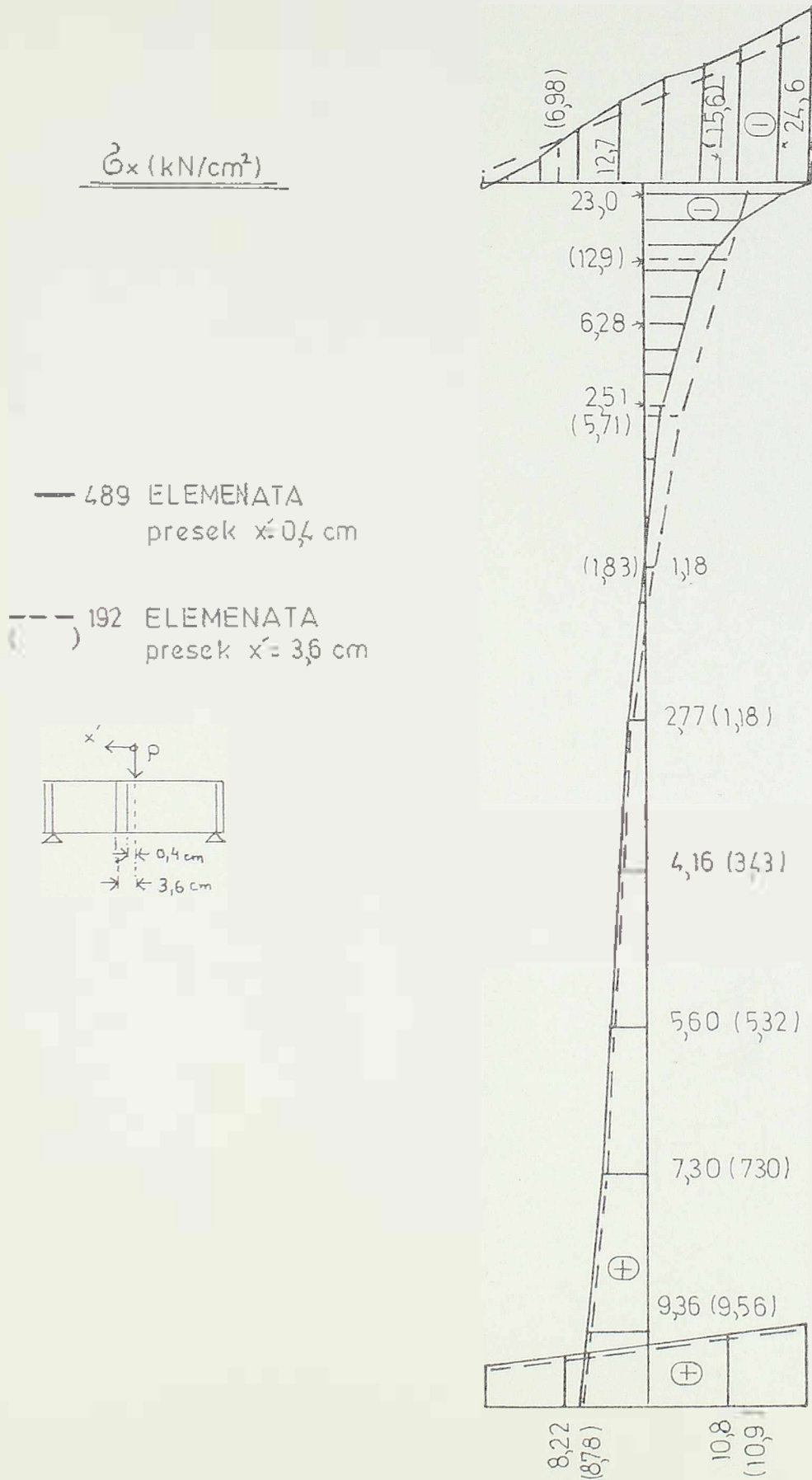
NOSAČ C/3/3

bočno pomeranje preseka u
sredini nosača pri $P=90. \text{kN}$



SLIKA BR. 32.

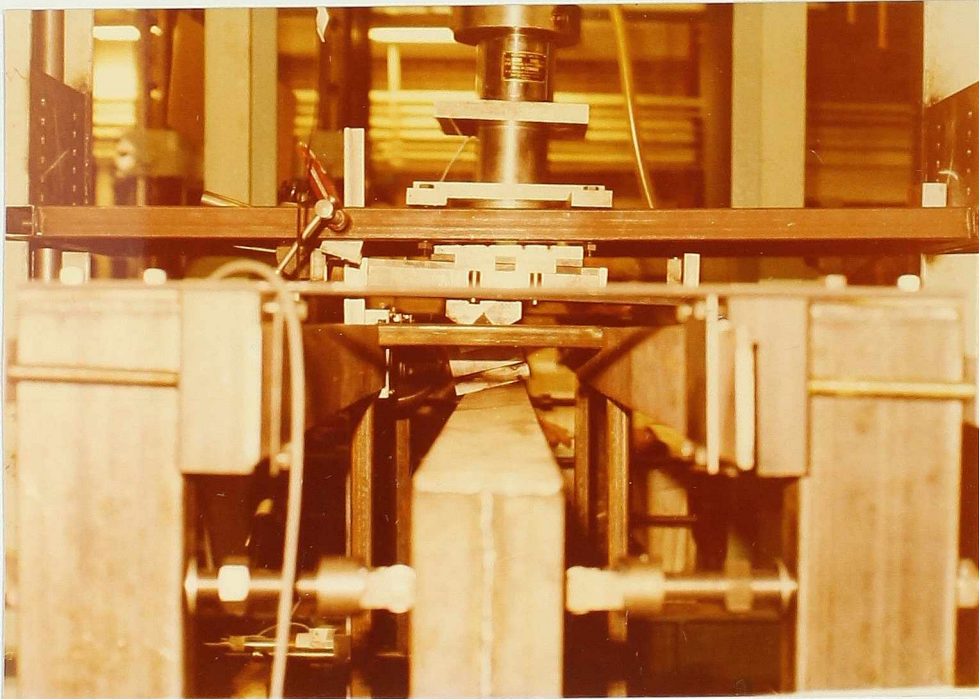
NOSAČ C/3/3 - Dijagram σ_x napona pri $P = 97,5 \text{ kN}$



SLIKA BR. 33

3.3 POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE KRITIČNOG OPTEREĆENJA PRI BOČNOM IZVIJANJU NOSAČA DEFORMABILNOG POPREČNOG PRESEKA

Tok eksperimenata pokazao je da pri bočnom izvijanju I nosača sa tankim vertikalnim limom neće doći do pojave bifurkacije. Naime, odmah po nanošenju vertikalnog opterećenja dolazi i do bočnog pomeranja nosača (slika br. 34).



Slika br. 34

Ovo pomeranje imalo je u sredini raspona oblik koji je prikazan na slici br. 35. Sa prirastom opterećenja bočno pomeranje se sve više uvećalo, da bi pri dostizanju stvarne vrednosti kritičnog opterećenja dostiglo ekcesne vrednosti.

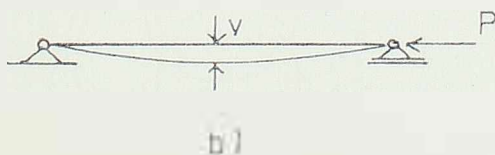
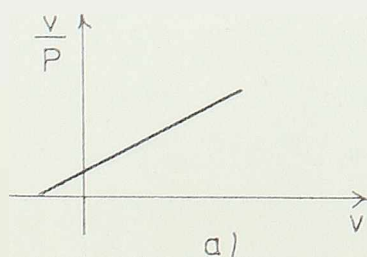
Kako su pokazali eksperimentalni rezultati stvarno kritično opterećenje nosača definisano je maksimalnom vrednošću opterećenja koje konstrukcija može da nosi. Od trenutka kada je ova vrednost opterećenja dostiguta, pri daljem povećanju deformacije nosača dolazi do opadanja intenziteta sile koja tu deformaciju izaziva.



Slika br. 35

Medjutim, često pri eksperimentu usled pojave znatnih deformacija nosača nismo u stanju da dostignemo ovo kritično opterećenje. Zato će se sada prikazati jedan postupak za određivanje kritičnog opterećenja, a koji se bazira na poznavanju deformacija nosača pri opterećenjima koja su manja od kritičnog.

Ovaj postupak prvi je predložio Soutwell u svom radu [45] koji se odnosi na proračun kritičnog opterećenja aksijalno opterećenih greda koje imaju početnu krivinu. On je pokazao da ako se tokom eksperimenta meri ugib grede v (Slika br. 36.b), i ako se grafički prikaže odnos v/P u funkciji merenog ugiba v , onda će sve tačke biti na pravoj liniji, a inverzna vrednost koeficijenta pravca ove prave određuje kritično opterećenje (slika br. 36.a).



Slika br. 36

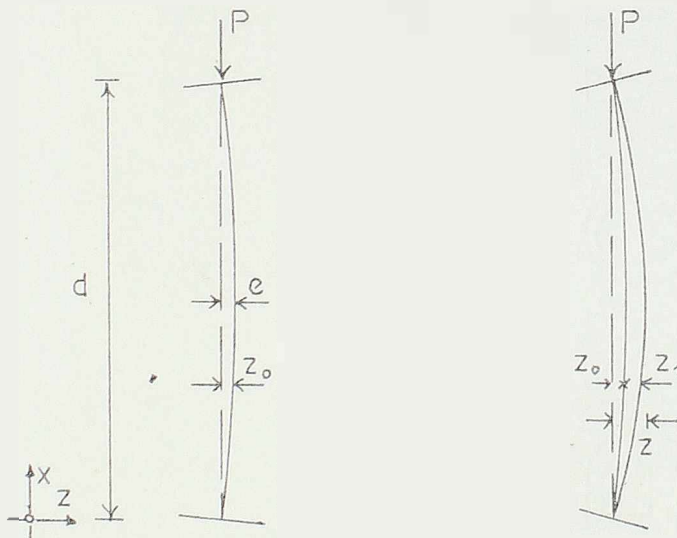
Ovaj postupak korišćen je kasnije, 1972.godine, u radu [22] Khan-a i Walker-a za određivanje kritičnog opterećenja ploča koje su opterećene u svojoj ravni.

Ovde će, po prvi put, biti prikazano kako se ovaj postupak može koristiti i za određivanje kritičnog opterećenja pri bočnom izvicanju nosača deformabilnog poprečnog preseka.

Za računski model usvojićemo traku vertikalnog lima izdvojenu iz srednjeg preseka neposredno ispod sile. S obzirom na dobijene eksperimentalne rezultate (slika br. 35), možemo usvojiti da je početna imperfekcija data jednačinom:

$$z_0 = e \cdot \sin \frac{\pi x}{d}, \quad (18)$$

tj. da osovina lima ima oblik sinusne krive sa maksimalnom ordinatom e . (slika br. 37).



Slika br. 37

Kad se nanese opterećenje P , bočna deformacija usled ove sile zavisí i od vrednosti početne deformacije z_0 . Izraz za momenat savijanja u ma kom preseku može se prikazati u obliku:

$$M = P \cdot z, \quad (19)$$

gde je:

$$z = z_0 + z_1, \quad (20)$$

Da bi odredili bočno pomeranje z_1 , koristićemo se uobičajenim izrazom za momenat savijanja koji je izražen preko drugog izvoda pomeranja:

$$EI \frac{d^2 z_1}{dx^2} = -P(z_0 + z_1), \quad (21)$$

gde je EI krutost na savijanje usvojenog računskog modela.

Ako izraz (18) zamenimo u izraz (21), dobijamo:

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} + k^2 z_1 = -k^2 e \sin \frac{\bar{u} x}{d}, \quad (22)$$

gde je:

$$k^2 = \frac{P}{EI}. \quad (23)$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (22) ima sada oblik:

$$z_1 = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{k^2 d^2}{\bar{u}^2 - k^2 d^2} \cdot e \cdot \sin \frac{\bar{u} x}{d}. \quad (24)$$

Nepoznate konstante C_1 i C_2 možemo odrediti iz graničnih uslova:

$$\begin{aligned} x=0, \quad z_1=0, & \Rightarrow C_2=0 \\ x=d, \quad z_1=0, & \Rightarrow C_1=0. \end{aligned} \quad (25)$$

Ordinate elastične linije možemo sada prikazati u obliku:

$$z = z_0 + z_1 = e \cdot \sin \frac{\bar{u} x}{d} + \frac{1}{\frac{\bar{u}^2}{k^2 d^2} - 1} \cdot e \cdot \sin \frac{\bar{u} x}{d}, \quad (26)$$

odnosno u obliku:

$$z = \frac{e}{1 - \alpha} \sin \frac{\bar{u} x}{d}, \quad (27)$$

gde je:

$$\alpha = \frac{k^2 d^2}{u^2} \quad (28)$$

Na osnovu jednačine (27), vidi se da se usled dejstva sile P početno bočno pomeranje z_0 uvećava za veličinu $\frac{1}{1-\alpha}$. Ova pomeranja rastu kako se povećava sila P, da bi za slučaj kada je $\alpha = 1$ teorijski postala beskonačno velika.

Treba napomenuti da se do izraza za z_0 može doći i kada bi uveli pretpostavku da je početna imperfekcija vertikalnog lima data preko reda:

$$z_0 = z_{0,1} \sin \frac{u x}{d} + z_{0,2} \sin \frac{2u x}{d} + \dots \quad (29)$$

Ako ovaj izraz stavimo u jednačinu (21), i potražimo rešenje, dobijamo:

$$z_1 = \alpha \left(\frac{z_{0,1}}{1-\alpha} \sin \frac{u x}{d} + \frac{z_{0,2}}{2^2-\alpha} \sin \frac{2u x}{d} + \dots \right) \quad (30)$$

Kako je α uvek manje od jedinice, a približava se vrednosti 1 kada se sila P približava vrednosti $\frac{u^2 EI}{d^2}$, to u blizini ove sile prvi član izraza (30) postaje znatno veći od ostalih članova, pa i ovaj izraz odgovara izrazu (24).

Bočno pomeranje u sredini visine vertikalnog lima z_s možemo sada napisati u obliku:

$$z_s = z_1(d/2) = \alpha \frac{z_{0,1}}{1-\alpha} = \frac{k^2 d^2}{u^2} \frac{z_{0,1}}{1 - \frac{k^2 d^2}{u^2}} = \frac{P d^3}{EI u^2} \frac{z_{0,1}}{1 - \frac{P d^2}{EI u^2}} \quad (31)$$

odnosno:

$$z_s = \frac{z_{0,1}}{\frac{P'}{P} - 1} \quad (32)$$

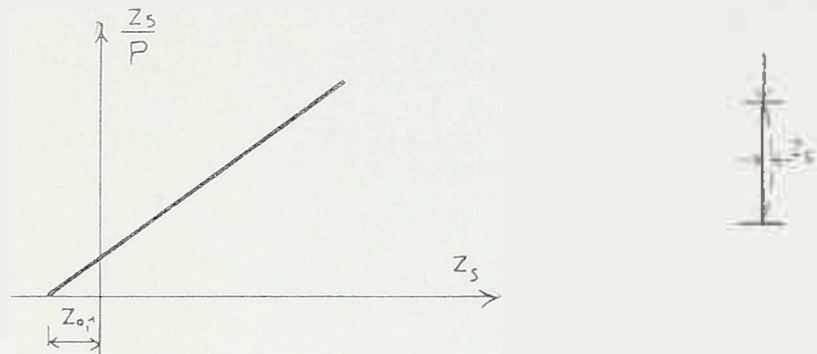
gde je:

$$P' = \frac{\bar{u}^2 EI}{d^2} \quad (33)$$

Jednačina (32) daje veličinu bočnog pomeranja u sredini vertikalnog lima u funkciji od poprečnog opterećenja P . Na osnovu nje dobijamo:

$$\frac{z_s}{P} \cdot P - z_s = z_{0,1} \quad (34)$$

odakle vidimo da će, kada grafički pretstavimo odnos $\frac{z_s}{P}$ u funkciji merenog pomeranja z_s , sve tačke biti na pravoj liniji (slika br. 38).



Slika br. 38

Ova linija seče horizontalnu osu na odstojanju $z_{0,1}$ od koordinatnog početka, gde je $z_{0,1}$ početna deformacija koja odgovara prvom članu reda (30). Inverzna vrednost koeficijenta pravca ove prave određuje kritično opterećenje posmatranog nosača.

Korišćenjem napred izloženog postupka određena je vrednost kritičnog opterećenja kod nosača C/3/3 i C/2/1. Kako je kod ovih nosača kritično opterećenje dostignuto i eksperimentalnim putem, izvršeno je njihovo upoređenje. Rezultati koji su dati u tabeli 3, pokazuju da se postupak pokazao dovoljno tačnim. Zatim su i za ostale nosače primenom ovog postupka sračunata kritična opterećenja i prikazana u tabeli 4.

Proračun za sve nosače korišćenjem dijagrama sa slike br.38 prikazan je 104. strane do 108. strane.

NOSAČ	C/3/3	C/2/1
EKSPERIMENT	94.	36.
PREDLOŽENI POSTUPAK	101.	39,8.

Tabela 3

NOSAČ	C/2/3	C/1/2	C/1/3
PREDLOŽENI POSTUPAK	38,6.	14.	13,6.

Tabela 4

U novijim radovima vezanim za postkritično ponašanje ploča [22], do izraza za kritičan napon dolazi se korišćenjem dijagrama sa slike br. 38 i postavljenjem parametarskih veza izmedju teorijske vrednosti kritičnog napona, stvarne vrednosti napona tečenja materijala i stvarne vrednosti kritičnog napona. Sada će se ovde, po prvi put, slična parametarska veza postaviti i za slučaj bočnog izvijanja nosača deformabilnog poprečnog preseka. Pogodan izraz za ovu vezu usvojićemo u obliku:

$$P_{cr} = A \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_u} P_{cr}^T \right)^\eta \quad (35)$$

gde je σ_t napon tečenja materijala, σ_u uporedni napon usvojen u ovom radu kao $\sigma_u = 300 \cdot 10^3 \text{ kN/mm}^2$, a P_{cr}^T teorijska vrednost kritičnog opterećenja za slučaj nedeformabilnog poprečnog preseka.

Da bi odredjili veličine A i η prikazaćemo eksperimentalne rezultate za kritično opterećenje u logaritamskoj razmeri nanoseći na ordinatu veličinu $\log P_{cr}$ dok će se na apcisu naneti veličine $\log \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_u} P_{cr}^T \right)$. Ako se izmedju dobijenih tačaka povuče prava linija (slika br. 39), nagib ove prave odredjuje veličinu η , a odsečak na ordinati veličinu A:

$$\eta = \text{tg} \alpha \quad A = 10^y$$

Za pravu koja je određena iz uslova da daje najpovoljniju standardnu devijaciju za zadate podatke, dobijeno je da je $\eta = 0,70$, a $A = 2,20$. Jednačina na osnovu koje sada primenom predloženog postupka određujemo kritično opterećenje, glasi:

$$P_{cr} = 2,20 \left(\frac{\sum G_i}{G_u} \cdot P_{cr}^* \right)^{0,70} \quad (36)$$

Numerički proračun

Koristeći jednačinu (36), za kritična opterećenja dobijamo:

- Nosači C/1/2 i C/1/3

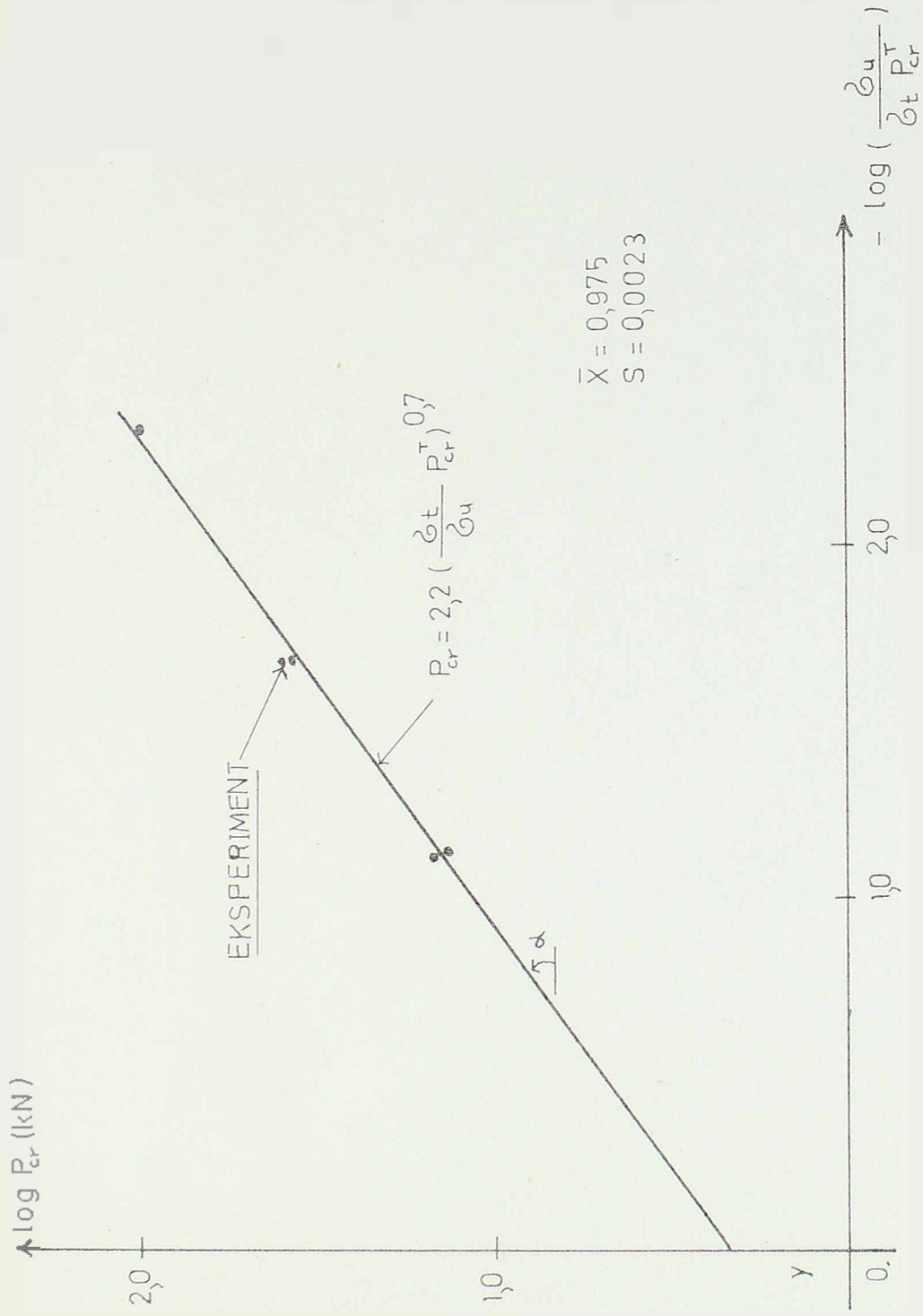
$$P_{cr} = 2,20 \left(\frac{201,5}{300} \cdot 20,7 \right)^{0,70} = 13,9 \text{ kN}$$

- Nosači C/2/1 i C/2/3

$$P_{cr} = 2,20 \left(\frac{244,7}{300} \cdot 62,3 \right)^{0,70} = 34,4 \text{ kN}$$

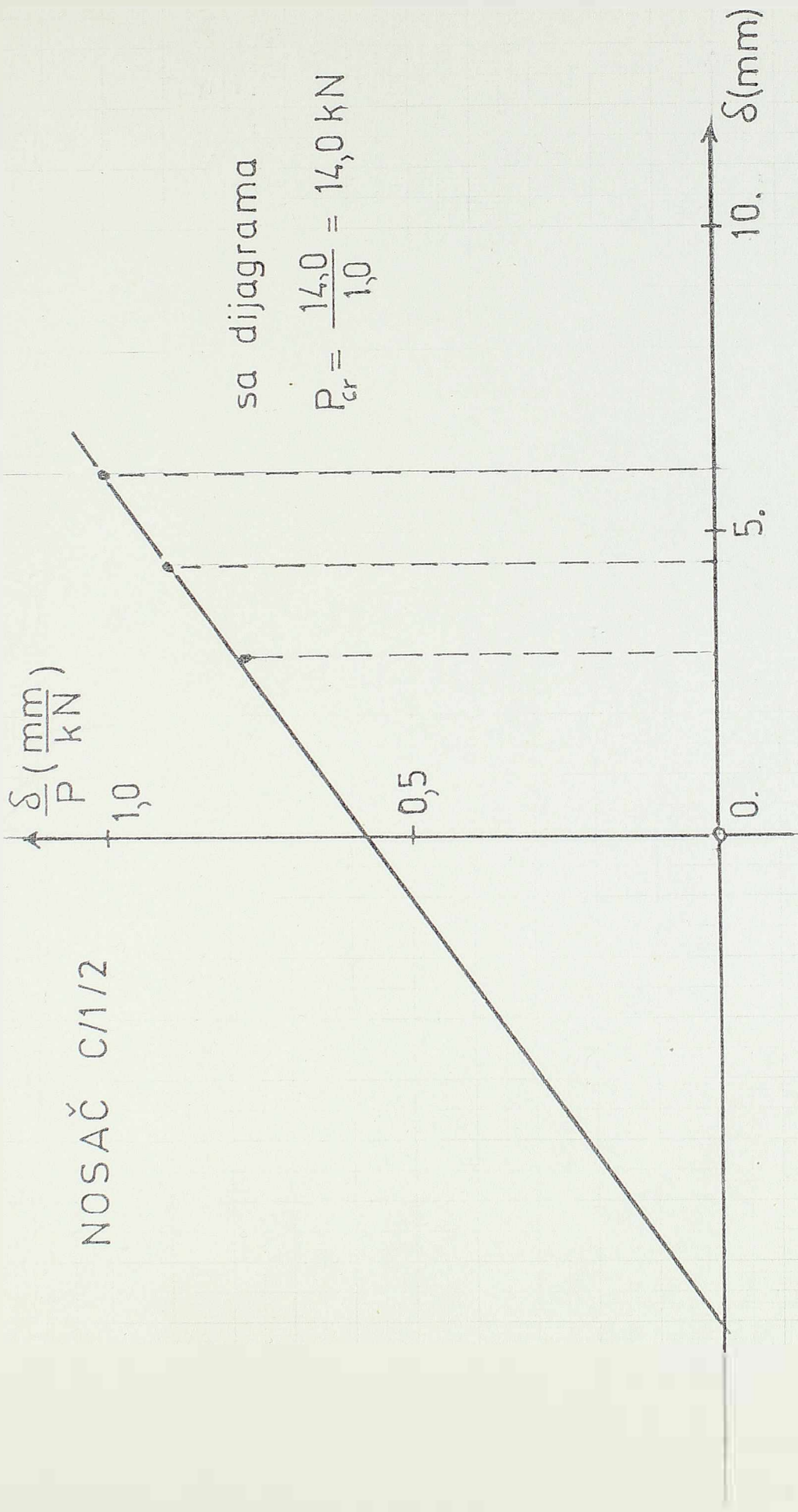
- Nosač C/3/3

$$P_{cr} = 2,20 \left(\frac{310}{300} \cdot 211,9 \right)^{0,70} = 95,5 \text{ kN}$$

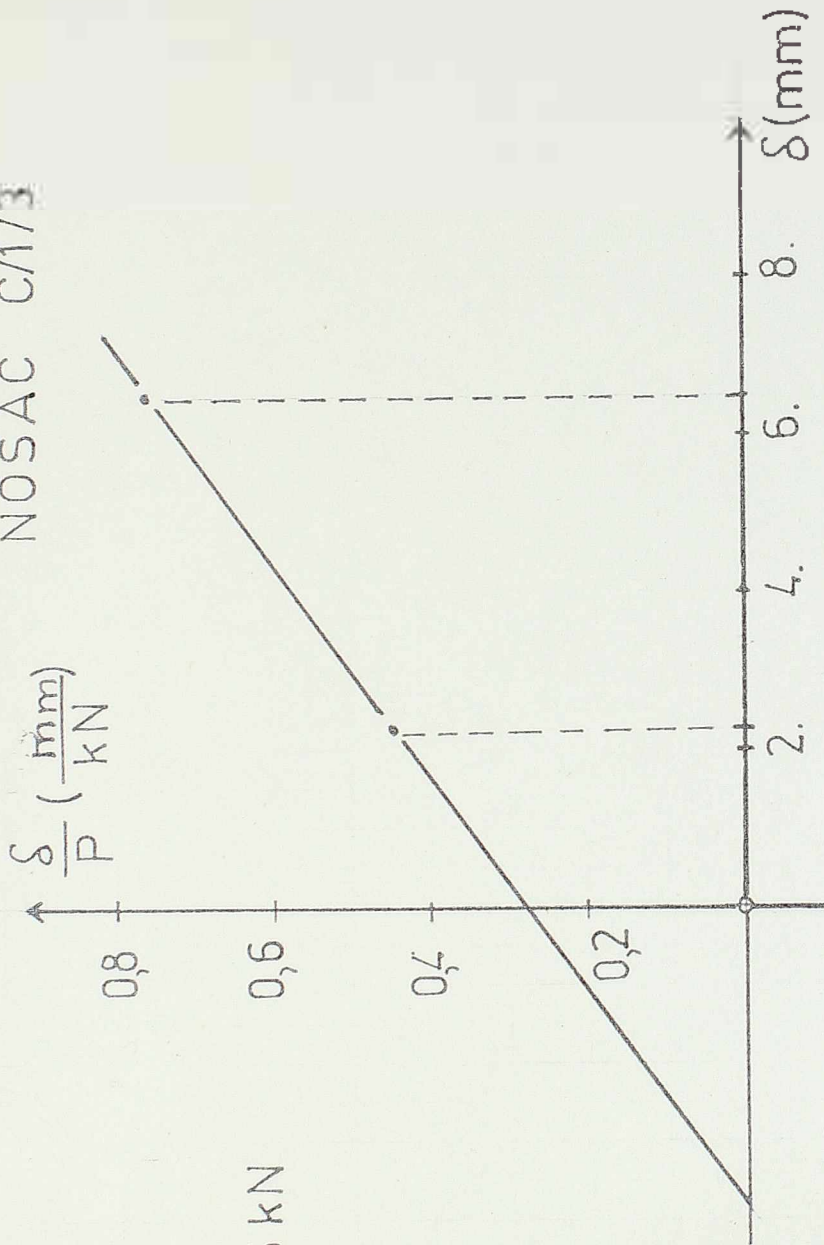


SLIKA BR 39.

NOSAČ C/11/2



NOSAČ C/1/3

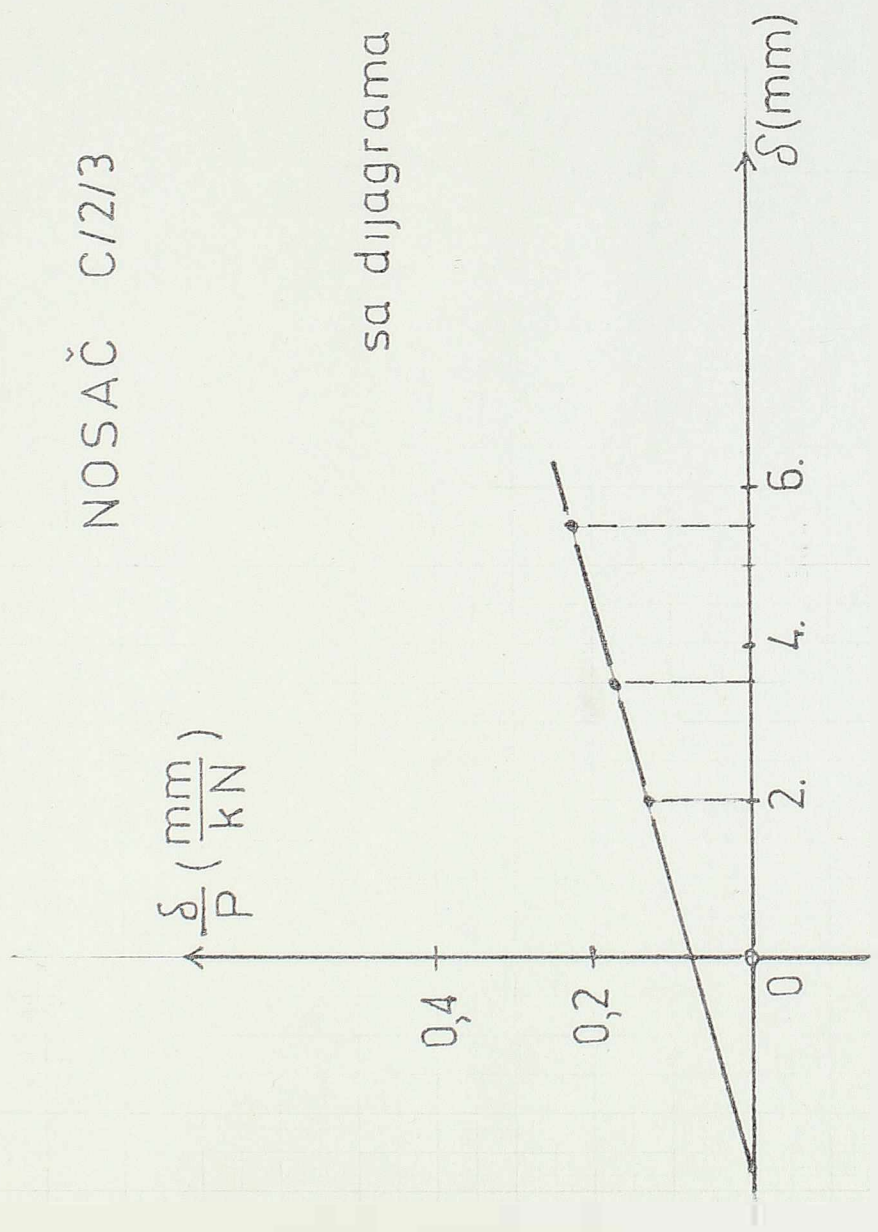


sa dijagrama

$$P_{cr} = \frac{104}{0,765} = 13,6 \text{ kN}$$

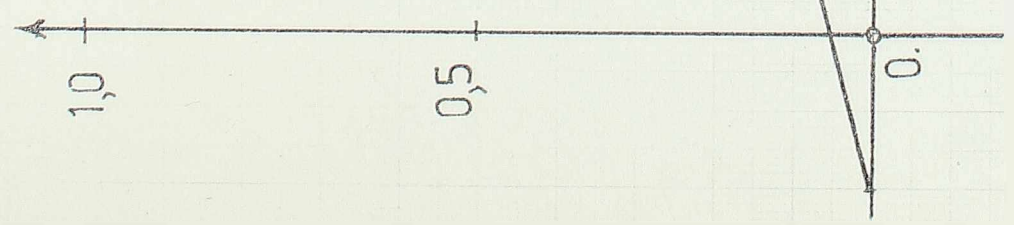
NOSAČ C12/3

sa dijagrama $P_{cr} = \frac{8,2}{0,22} = 38,6 \text{ kN}$



NOSAČ C/2/1

$\frac{\delta}{P}$ (mm/kN)



iz eksperimenta $R_r = 36 \text{ kN}$
 sa dijagrama $R_r = \frac{20,5}{0,514} = 39,8 \text{ kN}$

NOSAČ C/3/3



iz eksperimenta $P_r = 94 \text{ kN}$

sa dijagrama $P_r = \frac{10.1}{0.1} = 101.1 \text{ kN}$

4. ZAKLJUČCI

- Kako su pokazala teorijska i eksperimentalna istraživanja u ovom radu, pri proračunu bočnog izvijanja nosača sa tankim vertikalnim limom dolazi do značajne deformacije poprečnog preseka. Međutim, u literaturi (vidi naprimer [1]) mogu se naći tablice koje i za ovakve nosače daju vrednosti za kritične sile usvajajući teoriju o nedeformabilnom poprečnom preseku. Takva rešenja se ne mogu koristiti za proračun limenih zavarenih nosača deformabilnog poprečnog preseka jer znatno precenjuju njihovu nosivost.

- Proračun na bazi linearne teorije elastične stabilnosti koji uzima u obzir i promenu oblika poprečnog preseka od velike je važnosti za tačno sagledavanje problema bočnog izvijanja nosača sa tankim vertikalnim limom. Međutim, i ovim proračunom ne možemo biti u potpunosti zadovoljni. On se odnosi na "idealno prave štapove" kod kojih pri izvijanju dolazi do pojave bifurkacije što u najvećem broju slučajeva ne odgovara stvarnosti.

- Pravi put za rešavanje problema bočnog izvijanja nosača sa tankim vertikalnim limom je primena nelinearne analize koja vodi računa o promeni oblika poprečnog preseka i uzima u obzir početne imperfekcije vezane za geometriju nosača, način nanošenja opterećenja i td. U odredjenim slučajevima može biti od važnosti i proširenje ove nelinearne analize na problem elasto-plastičnog ponašanja nosača.

- Eksperimentalna istraživanja i rezultati u ovoj oblasti od bitne su važnosti za sagledavanje stvarnog ponašanja nosača pri bočnom izvijanju i za kontrolu dobijenih teorijskih rešenja.

- Kod nosača sa tankim vertikalnim limom gde je odnos $\frac{t_r}{D} \leq 190$. (vidi rezultate za nosače C/1/2 i C/1/3) nosivost može biti iscrpana i pre dostizanja kritičnog opterećenja usled značajnih deformacija na nosaču, posebno usled velikog obrtanja gornjeg pojasa na mestu nanošenja opterećenja.

- Različit oblik početne geometrijske imperfekcije nosača (vidi rezultate za nosače C/2/1 i C/2/3) vodi do različitog oblika izvijanja nosača, ali kritično opterećenje se praktično ne menja već zavisi prvenstveno od apsolutne vrednosti početne imperfekcije.

- Uticaj koncentracije napona u blizini nanetog opterećenja nije se pokazao kao značajan za bočno izvijanje nosača u elastičnoj oblasti.

- Pri dostizanju kritičnog opterećenja normalni naponi usled bočnog savijanja vertikalnog lima veći su od normalnih napona usled savijanja nosača u ravni vertikalnog lima.

- Postupak proračuna koji bazira na takozvanom Southwell-ovom dijagramu pokazao se kao pogodan i za određivanje kritičnog opterećenja kod bočnog izvijanja nosača deformabilnog poprečnog preseka.

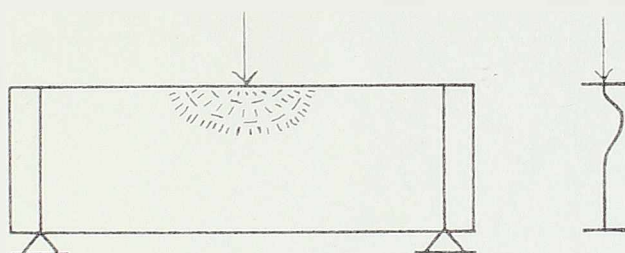
- Iako se ova studija odnosi na analizu u elastičnoj oblasti, može se zaključiti da pri dostizanju kritičnog opterećenja dolazi do velikog priraštaja deformacija u nosaču i do njegove brze plastifikacije.

DRUGI DEO

LOKALNO IZBOČAVANJE VERTIKALNOG LIMA

1. UVOD

Sve do nedavno proračun lokalnog izbočavanja vertikalnih limova (slika br.1.) bazirao se na proračunu izbočavanja pravougaonih ploča sa odgovarajućim graničnim uslovima.

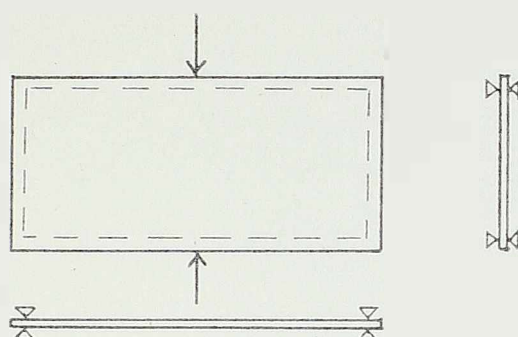


Slika br.1.

Do prvih značajnih radova vezanih za izbočavanje ploča dolazi još početkom ovoga veka. Od tada je problem izbočavanja pravougaonih ploča usled podeljenog normalnog i smičućeg opterećenja i njihove kombinacije intenzivno ispitivan i rezultati su poznati i detaljno prikazani u radovima [1] i [2].

Medjutim, izbočavanje ploča usled koncentrisanog ili diskretnog opterećenja znatno je manje ispitivano. Razlog za to nesumnjivo leži u složenosti matematičkog problema koji treba rešiti da bi se došlo do tačnog rešenja za izbočavanje ploča. Naime, kad se diskretno opterećenje nanese na ploču raspored napona duž ploče značajno varira i to je faktor koji znatno otežava proračun i dobijanje kritičnog opterećenja.

Prvo približno rešenje problema izbočavanja slobodno oslonjene ploče koja je pritiskuta sa dve iste sile P suprotnog smera (Slika br.2) dali su Sommerfield 1906.godine [8] i Timoshenko 1910.godine [9].



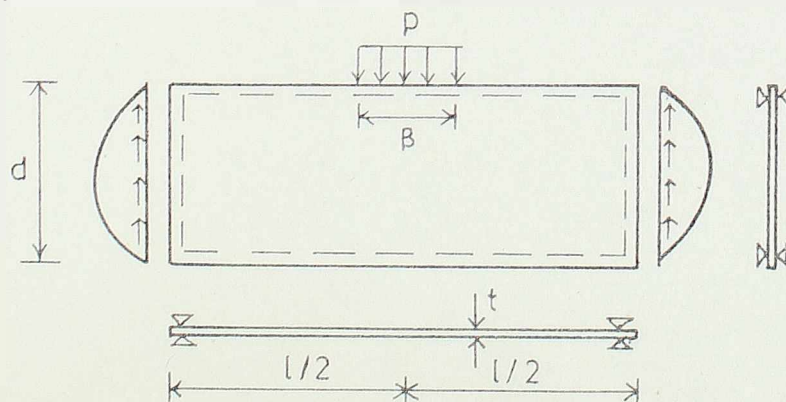
Slika br. 2.

Kasnije je Girkman, 1936.godine [10], dao jednu studiju problema izbočavanja pravougaone ploče usled diskretnog ivičnog opterećenja, ali njegovi rezultati nisu bili u formi koja je bila upotrebljiva za inženjere.

Prvu potpuniju studiju ovog problema (Slika br.3.) dao je Zetlin 1955 godine [11]. Diferencijalne jednačine iz kojih se određuje kritično opterećenje izvedene su primenom teorije elastične stabilnosti, a rešenje je traženo koristeći Rayleigh-Ritz-ov postupak. Izraz za kritično opterećenje dobija se u obliku:

$$P_{kr} = K \frac{11 \cdot D}{L^2} \quad (1)$$

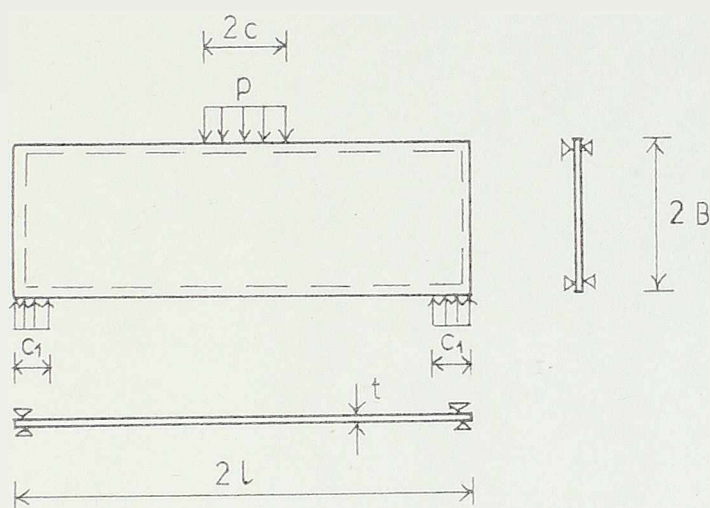
gde je D krutost ploče, a K koeficijent koji zavisi od odnosa dimenzija ploče d/L i od odnosa dužine na kojoj deluje opterećenje prema dužini ploče β/L . Koeficijent K očitava se direktno iz dijagrama datog u radu [11].



Slika br. 3.

Koristeći diferencnu metodu White i Cottinham su 1962.godine rešavali problem izbočavanja slobodno oslonjene pravougaone ploče za različite slučajeve diskretnog opterećenja [12].

Nešto kasnije, 1972. godine, Khan i Walker [22] su tražili kritično opterećenje i oblik izvijanja tanke ploče opterećene kako je to pokazano na slici br. 4.



Slika br. 4.

Odgovarajuće diferencijalne jednačine problema stabilnosti izvedene su u ovom radu primenom energetskog kriterijuma stabilnosti, a rešenje je traženo korišćenjem Galerkinovog postupka. Tako se došlo do izraza za kritično opterećenje oblika:

$$P_{cr} = p \cdot 2c = K \cdot \frac{\pi^2 D}{2 \cdot B} \quad (2)$$

gde je D krutost ploče, a K koeficijent koji zavisi od dimenzija ploče l/B i od odnosa dužine na kojoj deluje opterećenje prema visini ploče c/B .

Šezdesetih godina dolazi do burnog razvoja metode konačnih elemenata, pa i do njene primene na problem stabilnosti ploča. U radu [22] prikazani su rezultati ovog numeričkog postupka za problem sa slike 4. Ako se oni uporede sa rešenjima iz jednačine (2) vidi se da su razlike praktično beznačajne. Reč je o tome da su i u metodi konačnih elemenata zadržane osnovne pretpostavke teorije elastične stabilnosti.

Mada su napred navedeni radovi bili od značajne pomoći projektantima oni nisu mogli dati tačan odgovor o stvarnom ponašanju vertikalnog lima, kao dela jednog tankozidnog nosača, pri pojavi lokalnog izbočavanja. Ova rešenja davala su rezultate samo za pravougaone ploče sa odgovarajućim graničnim uslovima ne vodeći pri tome računa o nekim bitnim uticajima kao što su pojava postkritičnog ponašanja ovakvih nosača, sadejstvo rebra i pojasa pri prenošenju opterećenja i.t.d. Zato se tokom šezdesetih i sedamdesetih godina prišlo daljem intenzivnom teorijskom i eksperimentalnom istraživanju ovog problema.

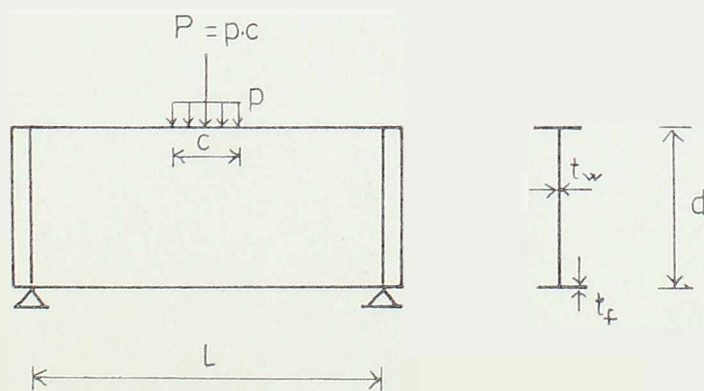
Jednu od prvih studija sa solidnom eksperimentalnom bazom dao je Granholm 1960.godine [24]. Na osnovu nje, kao i studije Bergfelta i Hovicka [25] potekao je predlog za određivanje kritične sile koja dovodi do lokalnog izbočavanja vertikalnog lima:

$$P_{cr} = 90 \cdot t_w \quad (3)$$

gde je P_{cr} sila u tonama, a t_w debljina rebra u santimetrima.

Jednačina (3) čini osnovu švedskih propisa u delu koji se odnosi na stabilnost rebra usled koncentrisane sile. Iako je ova jednačina proizišla iz čitave serije eksperimenata koji su obavljani sa nosačima sa tankim rebrom, ona u sebi ne sadrži uticaj dimenzija pojasa, širine zone opterećenja, modula elastičnosti i granice velikih izduženja materijala rebra i pojaseva, kao i dimenzije rebra na veličinu kritičnog opterećenja. Medjutim, sigurno je da su ovi efekti od uticaja na stvarno ponašanje rebra pri njegovom izbočavanju.

Škaloud i Novak [14] su 1975.godine publikovali rezultate svojih eksperimenata vezanih takodje za određivanje kritičnog opterećenja nosača čija je šema data na slici br. 5.



Slika br. 5.

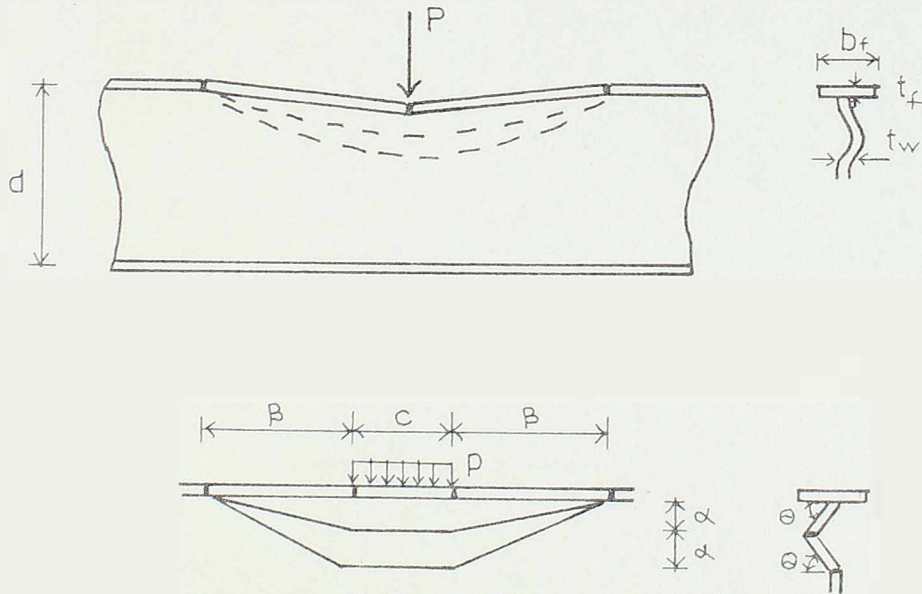
Na bazi ovih rezultata formulisan je predlog koji čini i osnovu novih čehoslovačkih propisa:

$$P = 0,55 \cdot t_w (0,9 \cdot t_w + 1,5 \cdot c \cdot \Lambda) \sqrt{E \cdot \sigma_w} \cdot \sqrt{t_f / t_w} \quad (4)$$

gde je $\Lambda = \frac{d}{t_w}$, a σ_w granica tečenja materijala od koga je načinjeno rebro.

Poslednjih godina čine se pokušaji da se do izraza za kritično opterećenje dodje primenom teorije plastičnosti, a na bazi mehanizma loma. Ovakav pristup može se oceniti kao do sada najbolji put u istraživanju lokalnog izbočavanja vertikalnih limova jer najrealnije održava prirodu posmatranog problema.

Vredan prilog u ovoj oblasti pretstavlja rad Rocke-y i Roberts-a [15] iz 1978. godine. Oni su na osnovu raspoloživih eksperimentalnih rezultata došli do zaključka da mehanizam loma ima oblik koji je prikazan na slici br. 6.



Slika br. 6.

Sa ovako usvojenim mehanizmom loma i koristeći teoremu o gornjoj vrednosti kritičnog opterećenja pri plastičnom kolapsu, došlo se do izraza za kritično opterećenje u obliku:

$$P_{cr} = \frac{4 \cdot M_f}{\beta} + \frac{4 \cdot \beta \cdot M_w}{\alpha \cos \theta} + \frac{2 \cdot c \cdot M_w}{\alpha \cos \theta} = \frac{2 \cdot \eta \cdot M_w}{\alpha \cos \theta}, \quad (5)$$

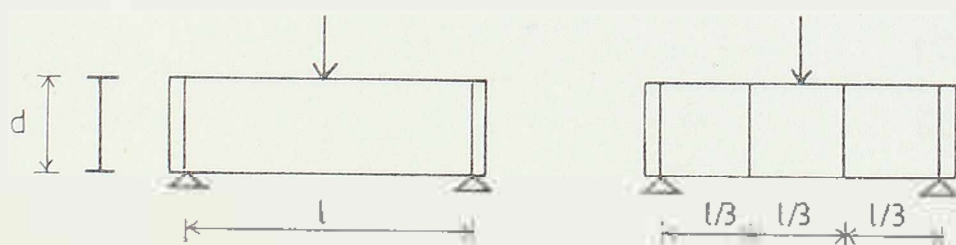
gde je M_w momenat pune plastičnosti rebra, a M_f momenat pune plastičnosti pojasa. Veličina α određuje se iz izraza:

$$\alpha = \frac{d}{16} \cdot \frac{t_w}{t^*} \cdot \frac{\sigma^*}{\sigma_f}, \quad (5.1)$$

gde je t^* referentna debljina koja se usvaja da je 25 mm, a σ^* referentni napon tečenja koja se usvaja da je 300 N/mm². Veličine β i η određuju se iz izraza:

$$\beta = \sqrt{\frac{M_f \cdot \alpha \cdot \cos \theta}{M_w}}, \quad \eta = \frac{(4 \cdot \beta + 2 \cdot c) \cdot M_w}{\left(\frac{2 M_w}{\alpha \cos \theta} + \alpha \cdot t_w \right) \alpha \cdot \cos \theta} \quad (5.2)$$

Na kraju može se konstatovati da su se dosadašnja teorijska i eksperimentalna istraživanja prvenstveno odnosila na nosače manjih raspona gde je odnos l/d varirao od 0,5 do 2. Cilj ove teze je da ispita pojavu lokalnog izbočavanja vertikalnih limova kod nosača većeg raspona gde je odnos $l/d = 6$ (Slika br.7.). Cilj eksperimentalnog dela teze je da ukaže na oblik mehanizma loma koji nastaje pri izbočavanju vertikalnih limova. To bi poslužilo kao osnova teorijskog proračuna koji se bazirao na konceptu teorije plastičnosti i granične ravnoteže.



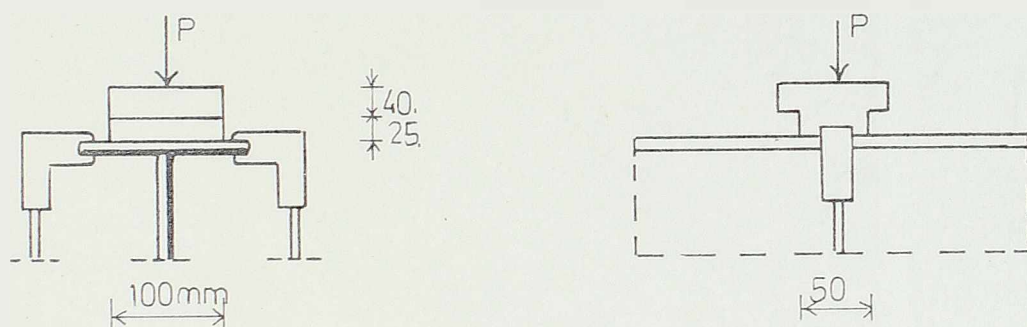
Slika br.7.

Osim toga, ispitivaće se i nosači sa vertikalnim ukrućenjima postavljenim u trećinama raspona (Slika 7.) da bi se ocenio uticaj ovih ukrućenja na veličinu kritičnog opterećenja.

2. EKSPERIMENTALNA ANALIZA

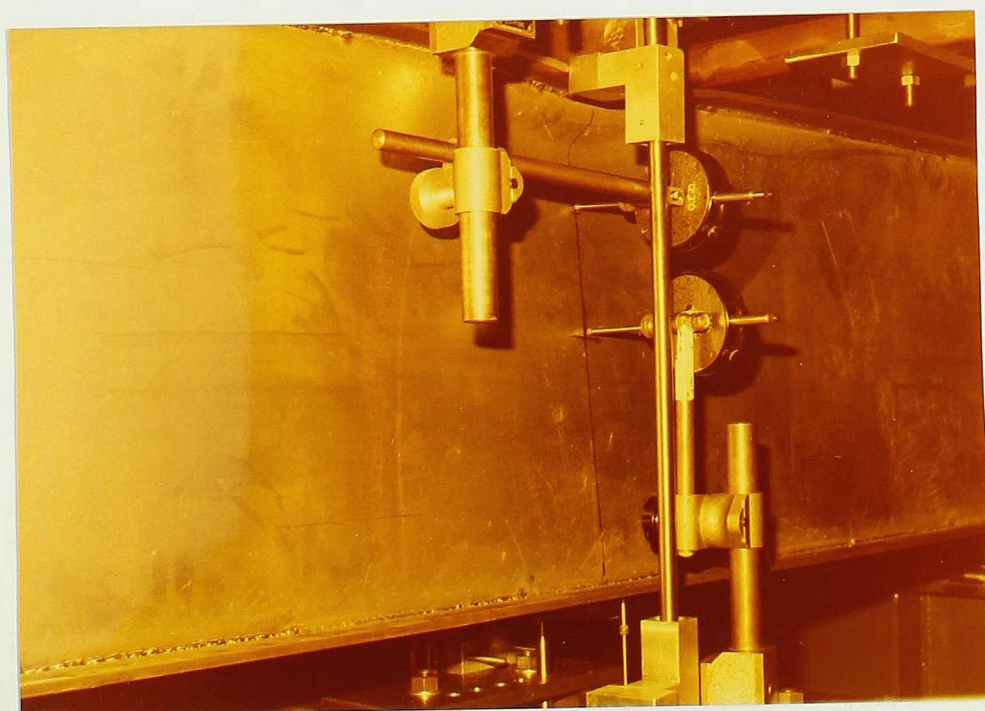
2.1 UREDJAJ ZA ISPITIVANJE

Uredjaj za ispitivanje u ovom slučaju indentičan je uređaju koji je korišćen pri ispitivanju nosača na bočno izvijanje (Poglavlje 1.2.1.) Jedina razlika postoji u ponašanju gornjeg pojasa neposredno ispod opterećenja. Naime, uređaj za opterećenje je tako konstruisan da je na mestu nanošenja opterećenja sprečavao bočno pomeranje i rotaciju gornjeg pojasa. To je postignuto time što su sa obe strane gornjeg pojasa postavljeni ugaoni delovi. (slika br.8). Pri tome su ovi delovi bili pomerljivi u vertikalnom pravcu prateći pri opterećenju ugib nosača.



Slika br. 8

Izgled jednog od nosača u toku eksperimenta zajedno sa uređajem za ispitivanje prikazan je na slici br. 9

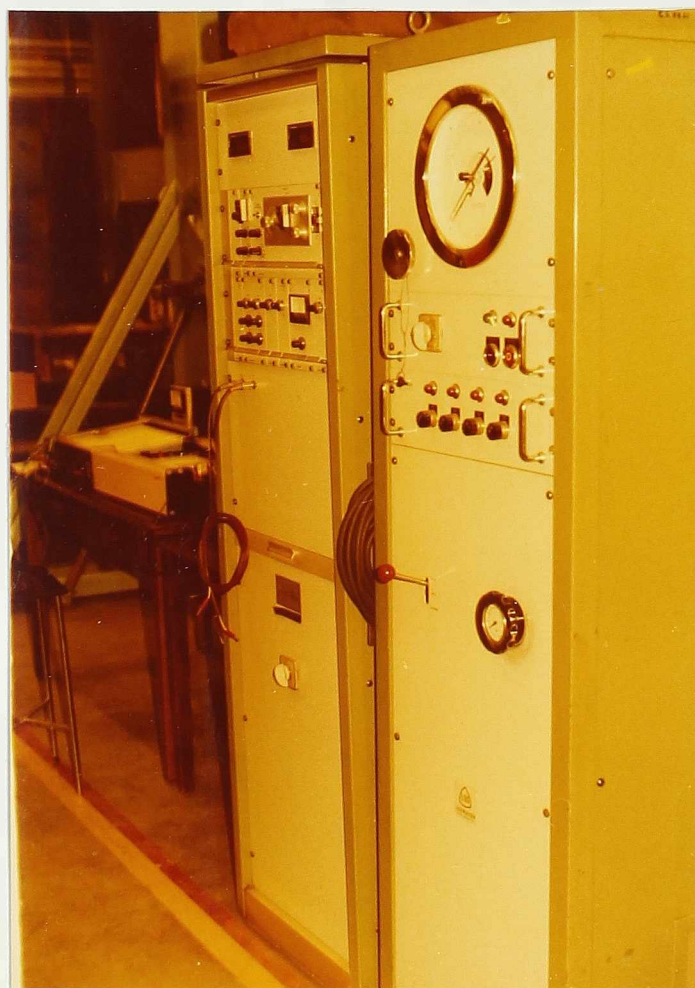


Slika br.9

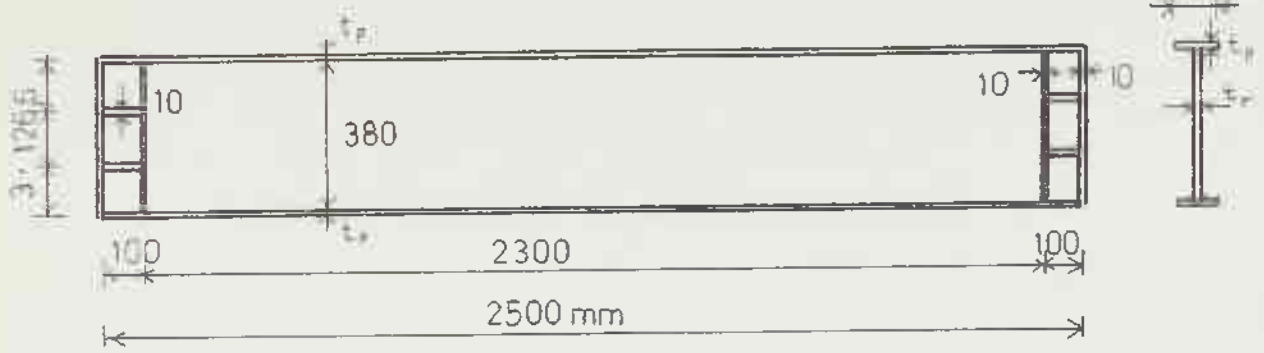
2.2 DIMENZIJE NOSAČA I MEHANIČKE KARAKTERISTIKE MATERIJALA

Ukupno je ispitano šest nosača od kojih su tri nosača bila bez vertikalnih ukrućenja a tri sa vertikalnim ukrućenjima u trećinama raspona grede. Izgled i dimenzije ovih nosača prikazani su na strani br. 119.

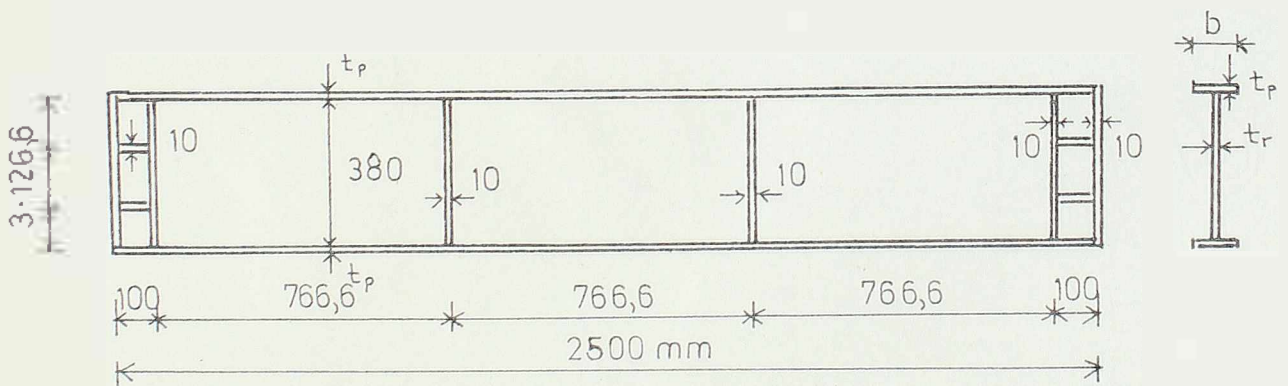
Limovi koji su korišćeni za formiranje rebra i pojaseva nosača isti su kao za nosače koji su ispitivani na bočno izvijanje. Mehaničke karakteristike ovih limova prikazane su u poglavlju I,2,2.



Slika br.10



OZNAKA NOSAČA	t_r (mm)	t_p (mm)	b (mm)
C/1/1	1,96	3,05	79,9
C/2/2	2,97	6,16	80,0
C/3/2	4,94	10,01	100,0



OZNAKA NOSAČA	t_r (mm)	t_p (mm)	b (mm)
C/4	1,96	3,05	80,0
C/5	2,99	6,25	80,0
C/6	4,94	9,97	99,6

2.3 EKSPERIMENTALNI REZULTATI

Kao i u slučaju bočnog izvijanja nosača posebna pažnja pri izvođenju eksperimenata vodjena je o ponašanju poprečnog preseka nosača ispod koncentrisane sile. I ovde je korišćen uredjaj "transducer" za praćenje deformacije poprečnog preseka, a pomoću "plotera" dobijao se i grafički prikaz ove deformacije. Pomoću posebnih ugibomera mereno je vertikalno pomeranje gornjeg i donjeg pojasa.

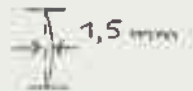
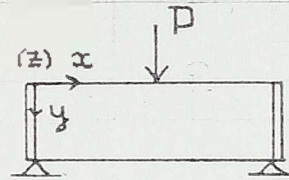
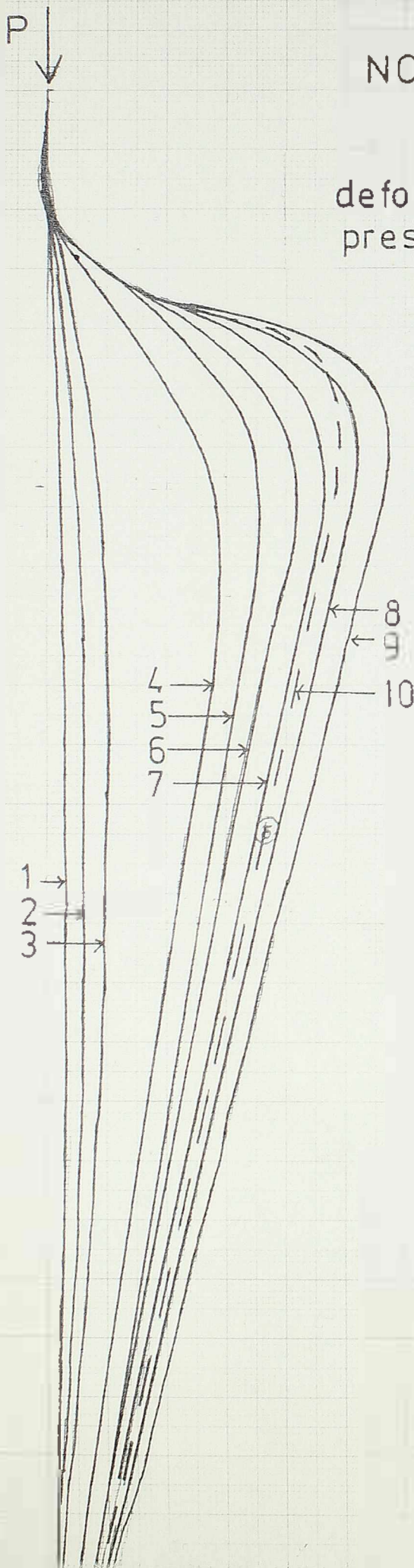
Na slici br.10, prikazan je hidraulički uredjaj koji je korišćen u svim eksperimentima za nanošenje opterećenja.

Rezultati eksperimenata prikazani su od 121. strane do 140. strane.

N O S A Ć C / 1 / 1

NOSAČ C/1/1

deformacija poprečnog preseka ispod sile P



početna imperfekcija

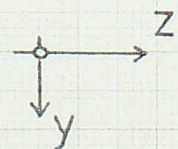
1	0. kN
2	10. kN
3	20. kN
4	23,4 kN
5	20,6 kN
6	18,6 kN
7	16,8 kN
8	14,7 kN
9	11,7 kN
10	0. rasterećenje (---)

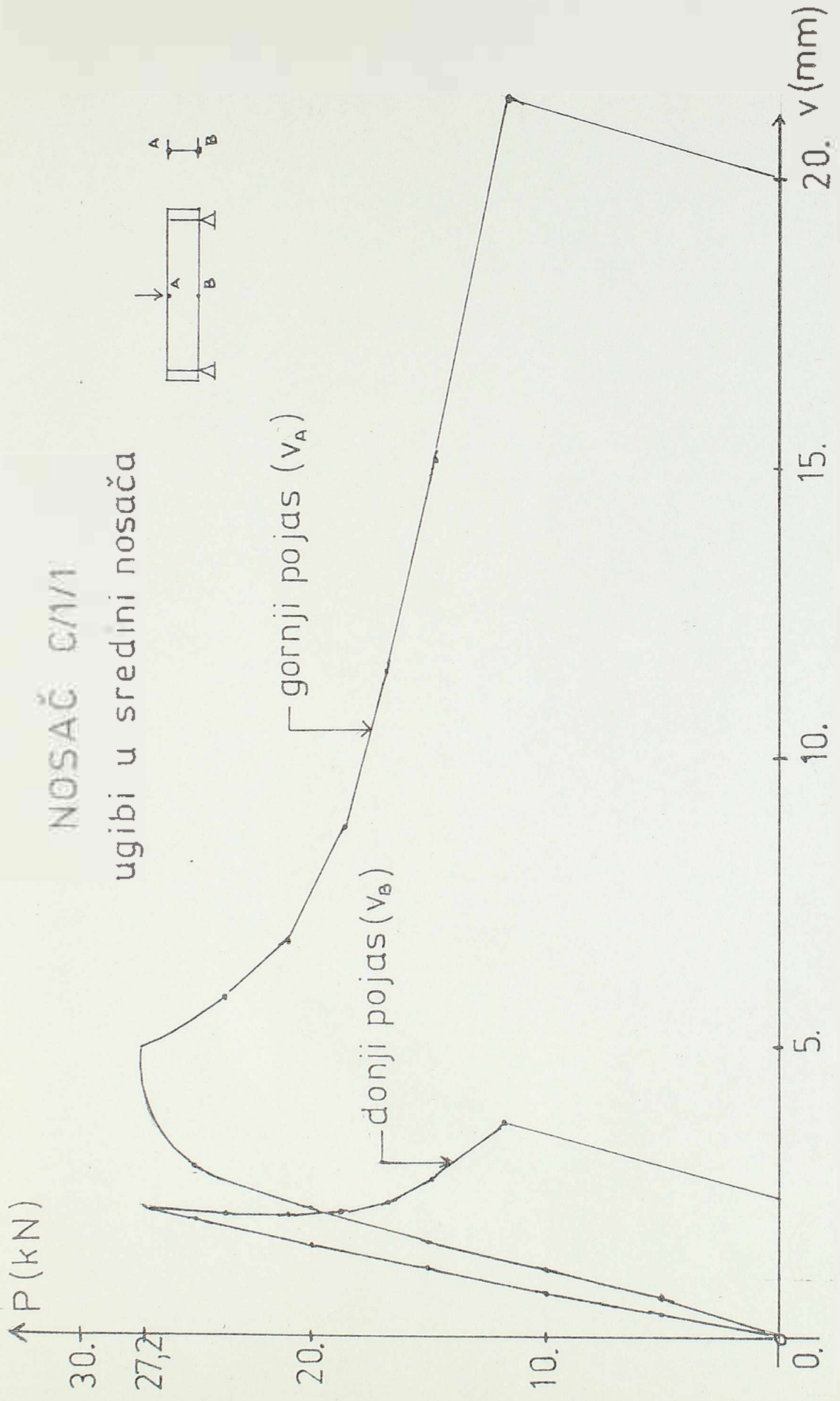
max P = 27,2 kN

razmera:

z = 2:1

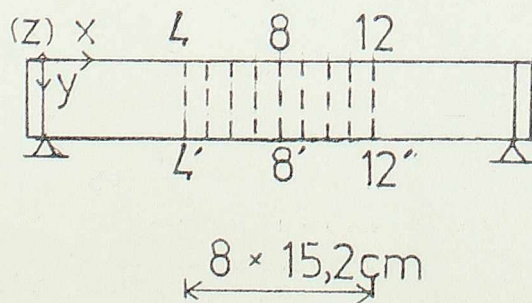
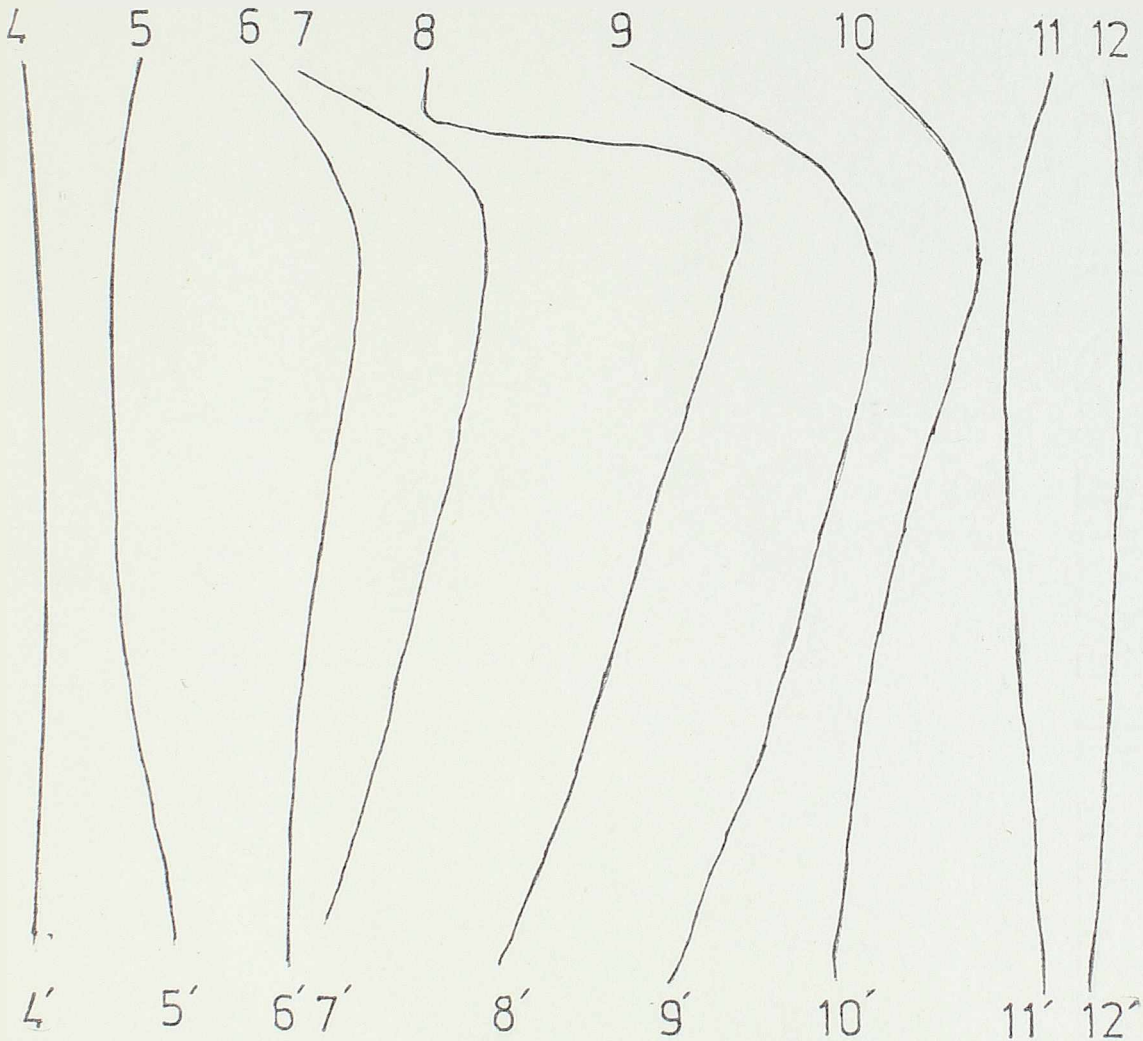
y = 1:1,25





NOSAČ C/1/1

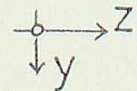
zaostale deformacije poprečnih
preseka



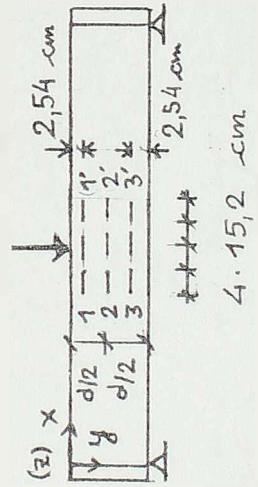
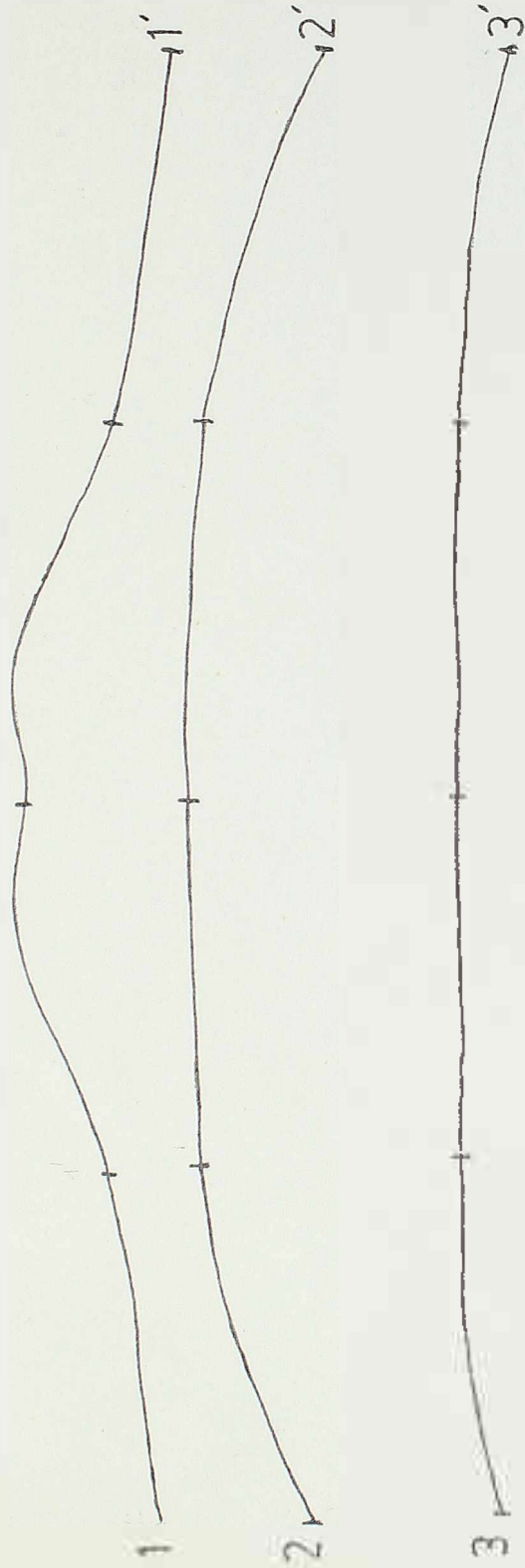
razmera

$z = 2:1$

$y = 1:2,5$



NOSAČ C/1/1 zaostale deformacije podužnih preseka

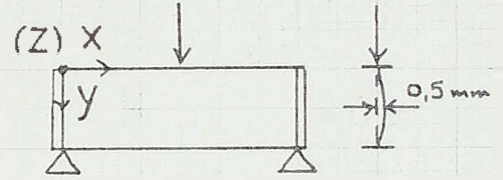
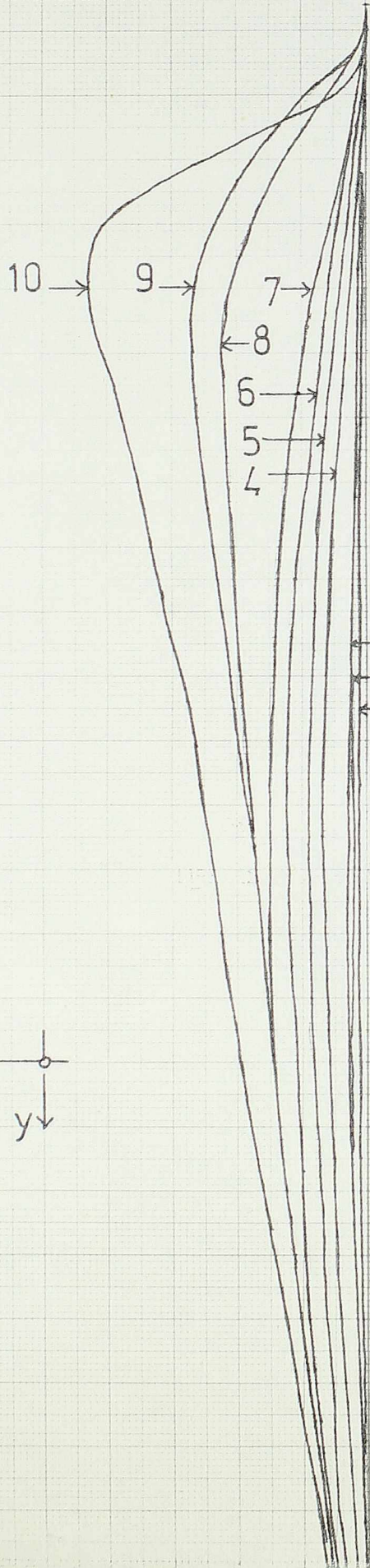


razmera
 $x = 1 : 2,5$
 $z = 2 : 1$

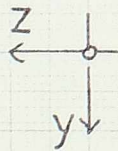
N O S A Ć C / 2 / 2

NOSAČ C/2/2, P

deformacija
poprečnog preseka
ispod sile P



1	0. kN
2	20. kN
3	30. kN
4	40. kN
5	50. kN
6	60. kN
7	70. kN
8	75. kN
9	64. kN
10	49. kN

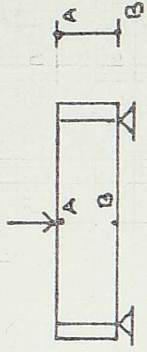


max P = 75. kN

razmera:
z = 2:1
y = 1:1,25

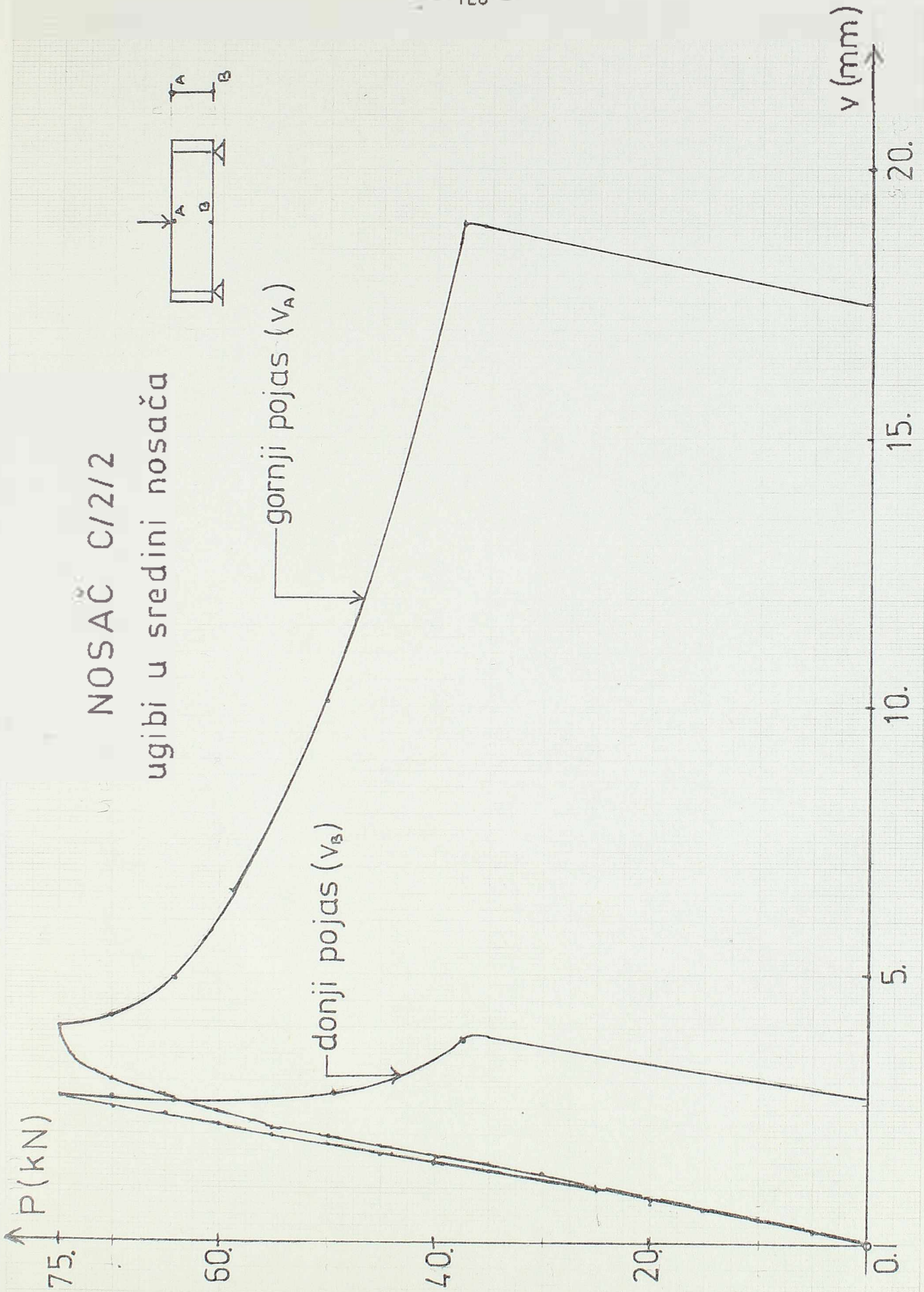
NOSAČ C12/12

ugibi u sredini nosača



gornji pojas (v_A)

donji pojas (v_B)

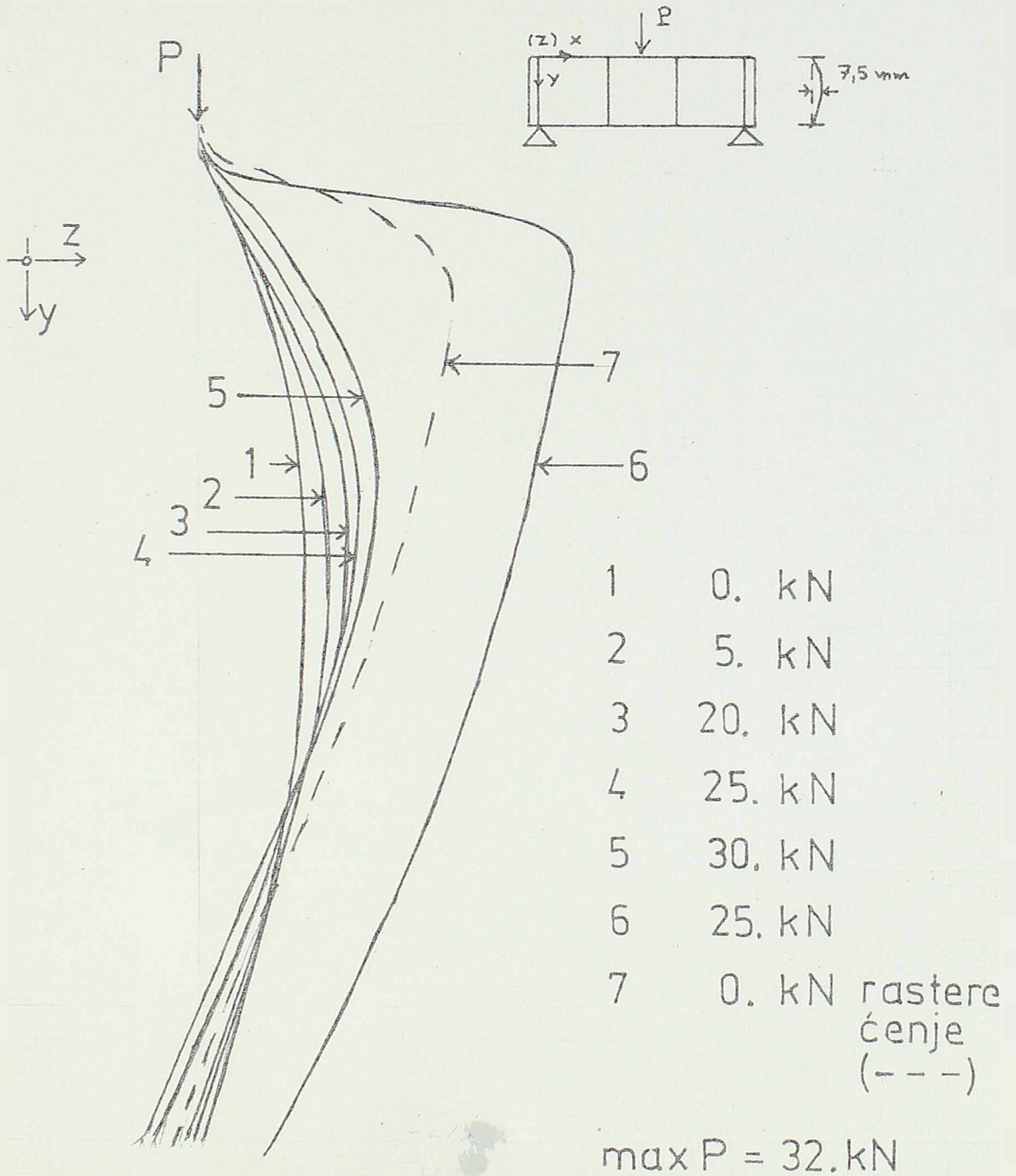


N O S A Ć C / 4

=====

NOSAČ C/I

deformacija poprečnog preseka
ispod sile P



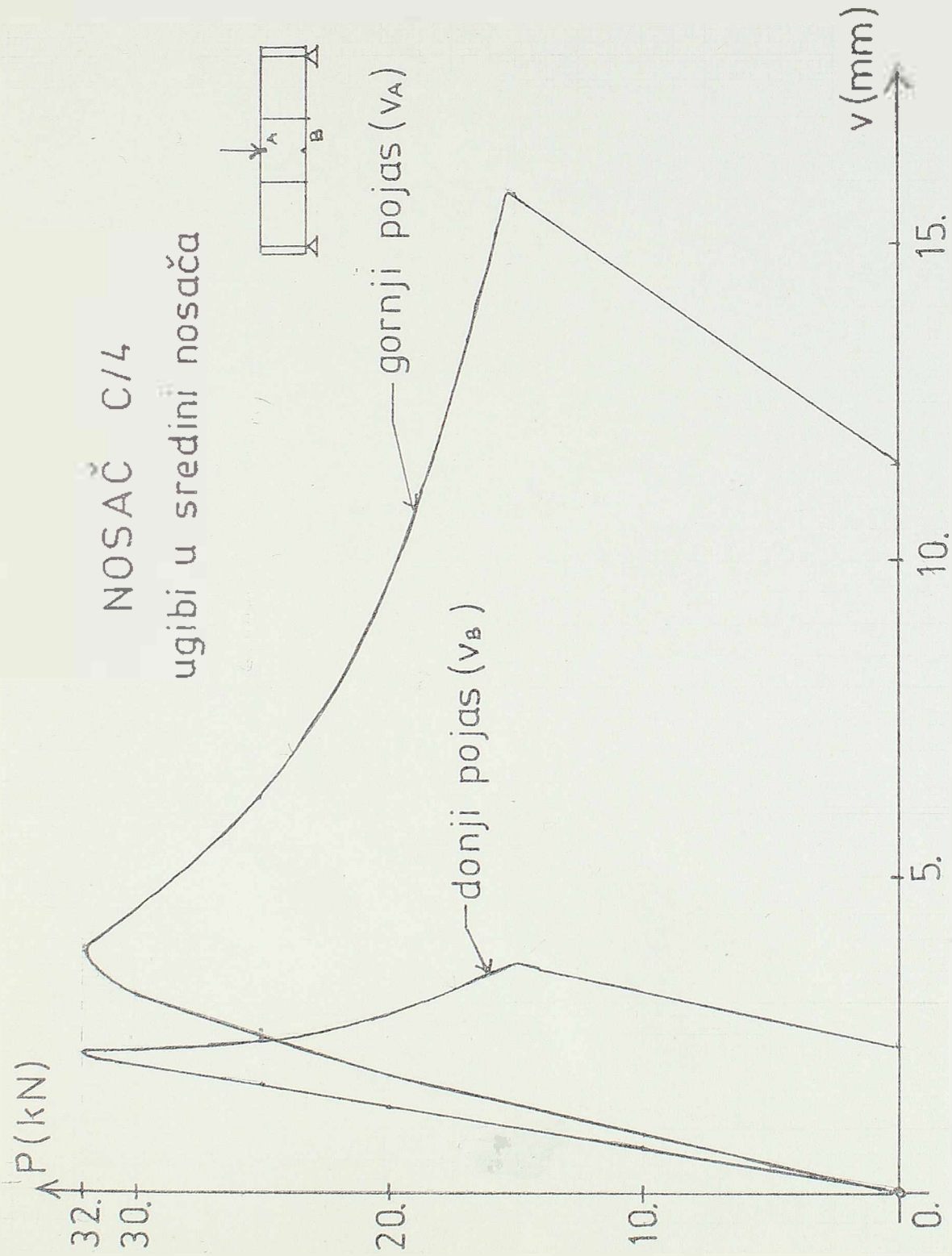
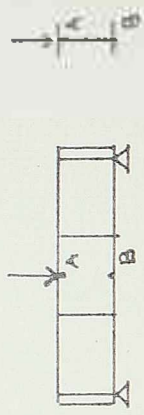
razmera:

$z = 2:1$

$y = 1:2,5$

NOSAČ C/L

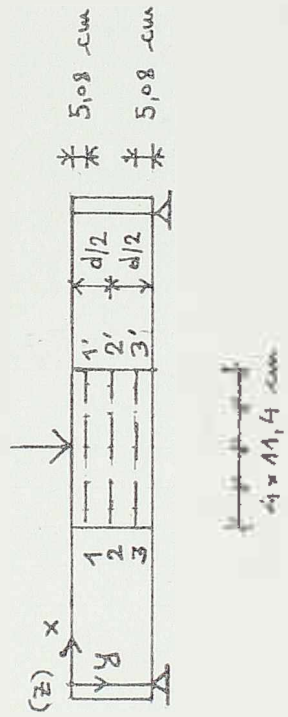
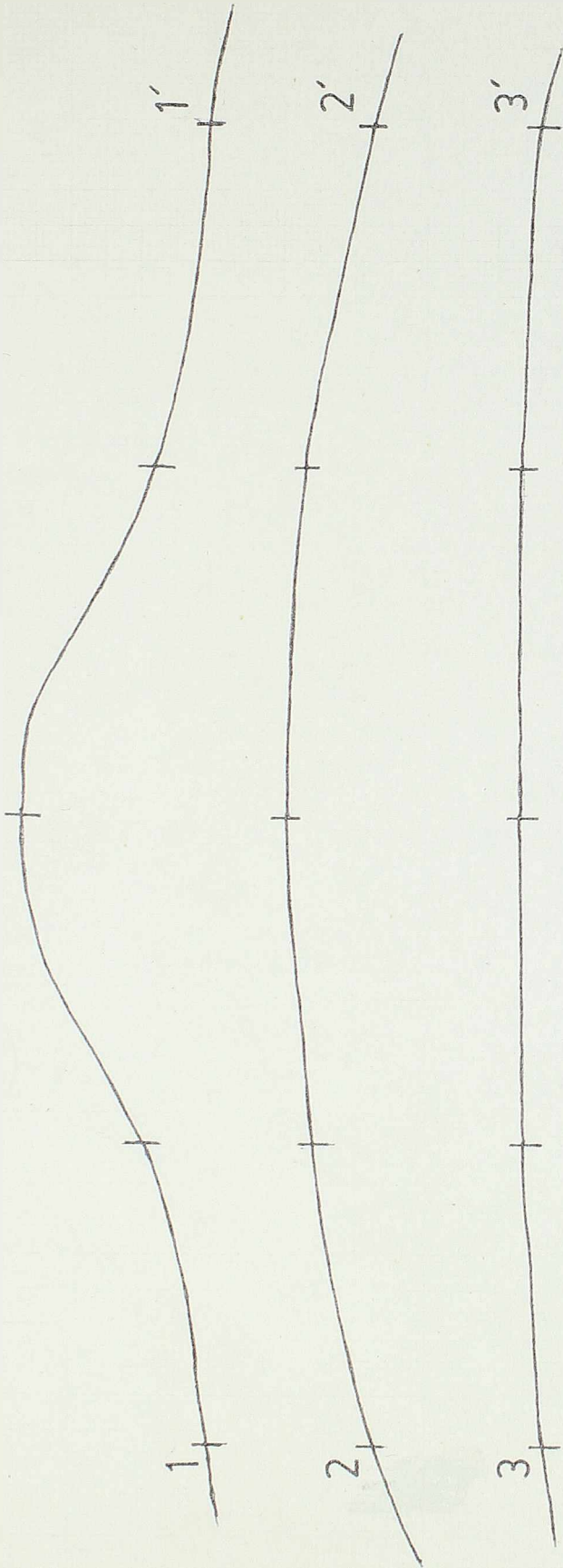
ugibi u sredini nosača



gornji pojas (v_A)

donji pojas (v_B)

NOSAČ C/4
 zaostale deformacije podužnih preseka



razmera

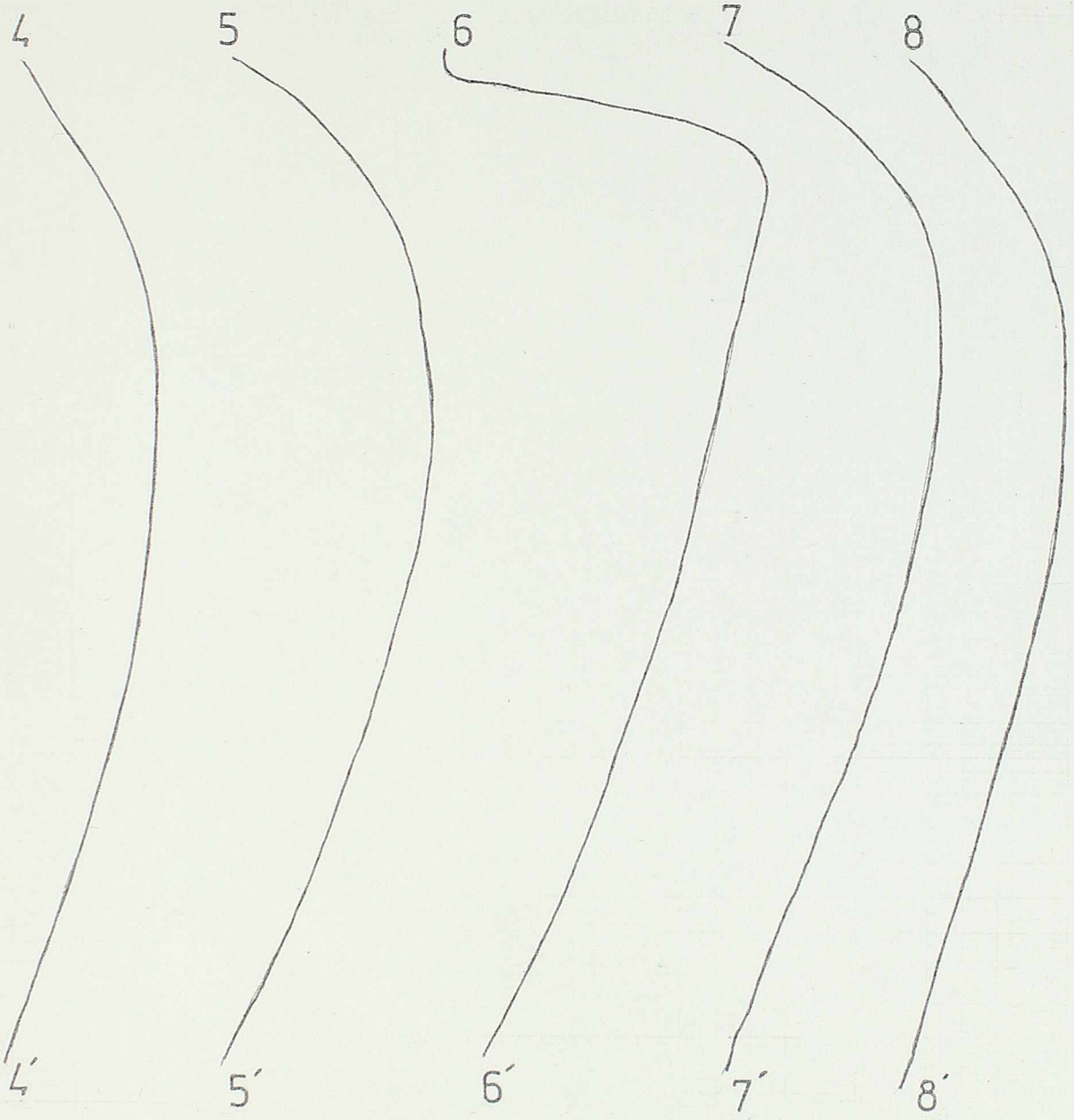
$X = 1:2,5$

$Z = 2:1$



NOSAČ C/4

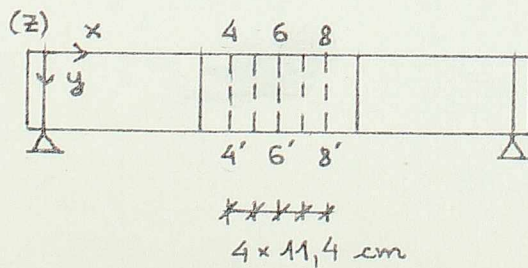
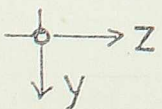
zaostale deformacije poprečných preseka



razmera

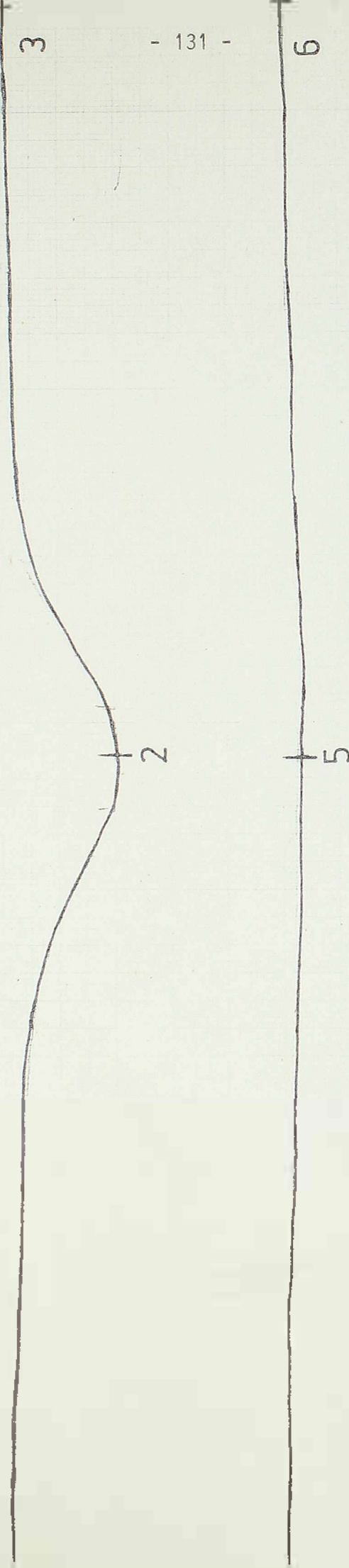
$z = 2:1$

$y = 1:2,5$



NOSAČ C/4

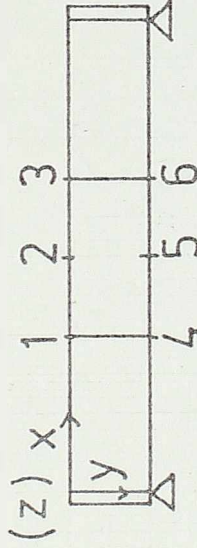
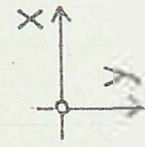
zaostala vertikalna pomeranja gornjeg i donjeg pojasa



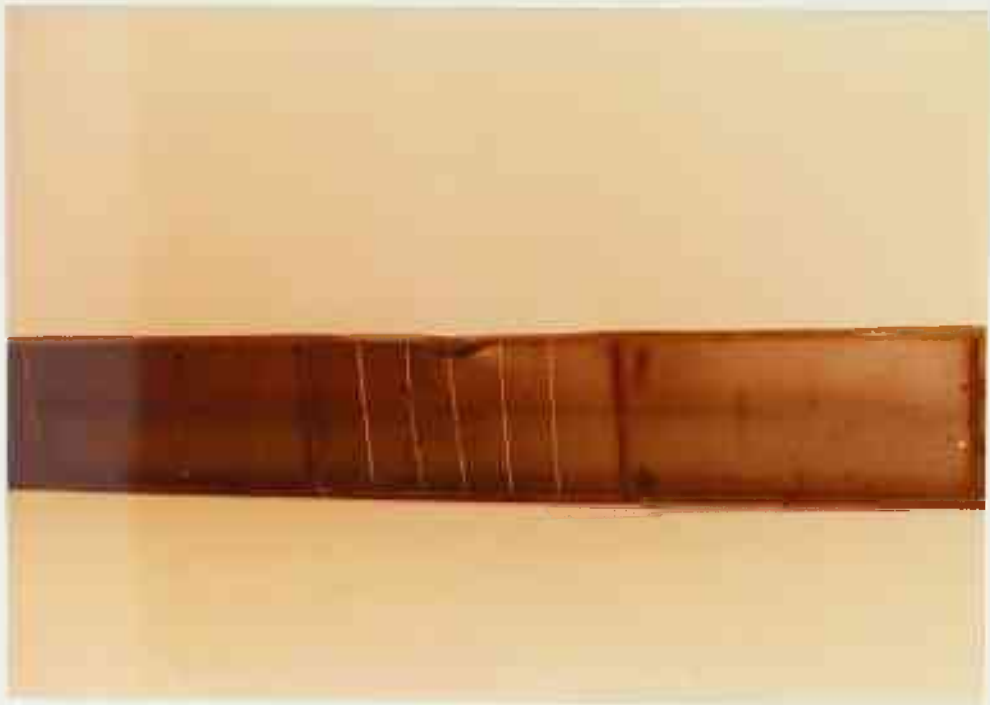
razmera

$$x = 1:2,5$$

$$y = 2:1$$



Na slici br. 11 prikazan je nosač C/4 posle dostignutog kritičnog opterećenja i izvršenog rasterećenja.



Slika br. 11.

N O S A Ć C/5
=====

NOSAČ C/5

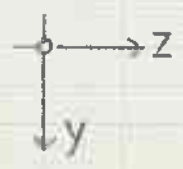


deformacija poprečnog preseka ispod sile P

1	0. kN
2	50. kN
3	70. kN
4	80. kN
5	70. kN
6	60. kN
7	50. kN
8	44. kN
9	0. kN rasterećenje (---)

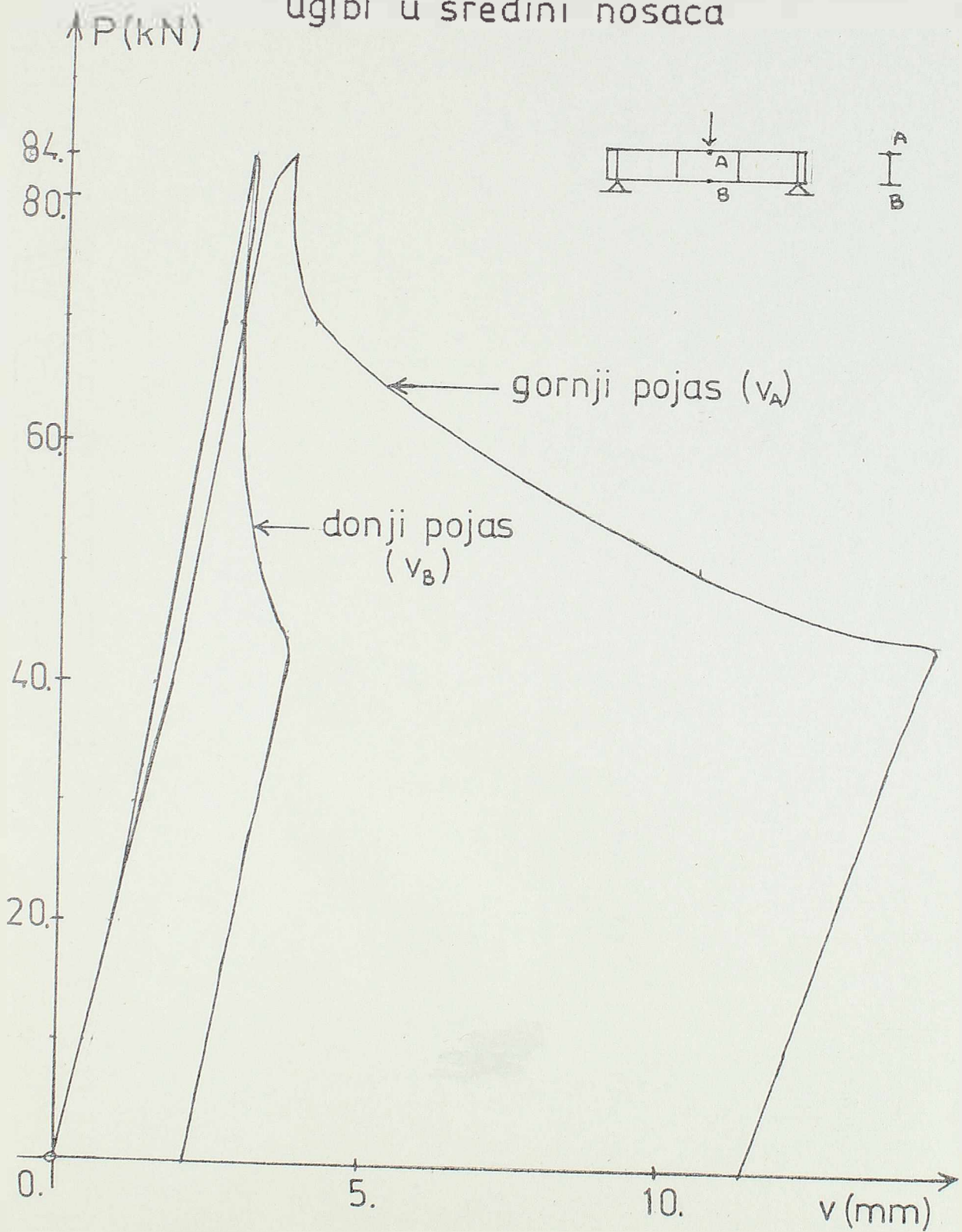
max P = 84. kN

razmera
 z = 2:1
 y = 1:1,25



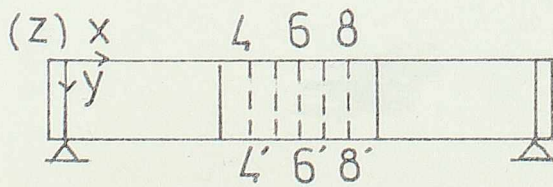
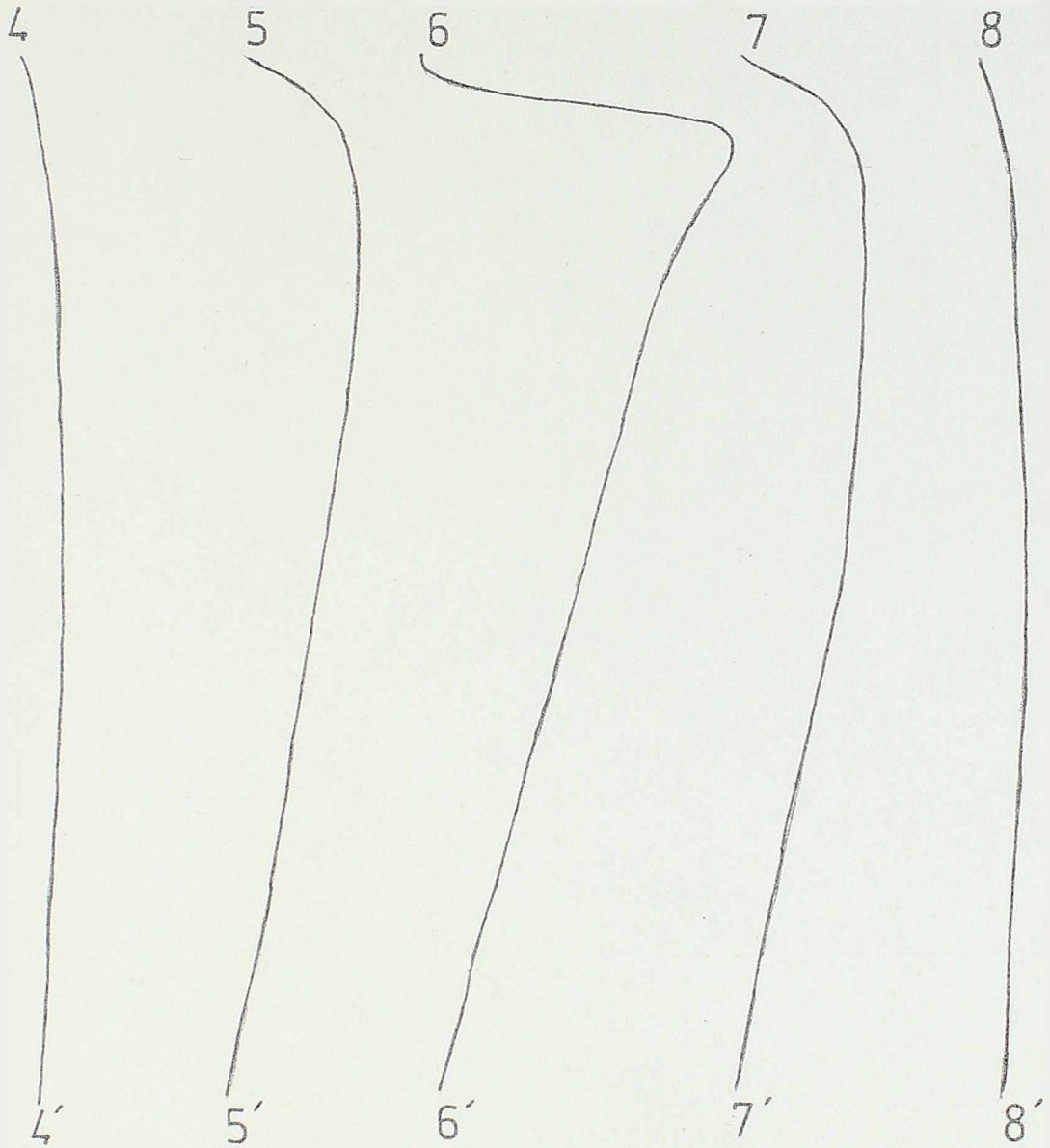
NOSAČ C/5

ugibi u sredini nosača



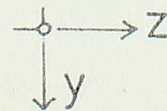
NOSAČ C/5

zaostale deformacije poprečných preseka



razmera
 $z = 2:1$
 $y = 1:2,5$

$4 = 11,4 \text{ cm}$
xxxxx



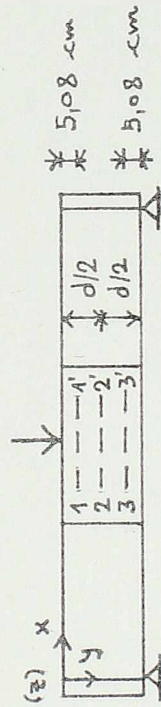
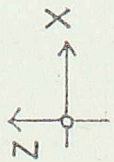
NOSAC C/5 zaostale deformacije podužnih preseka



razmera

$$X = 1:2,5$$

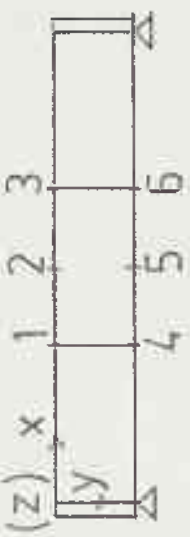
$$Z = 2:1$$



$$4 = 11,4 \text{ cm}$$

NOSAČ C/5

zaostala vertikalna pomeranja gornjeg i donjeg pojasa



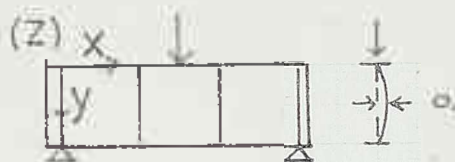
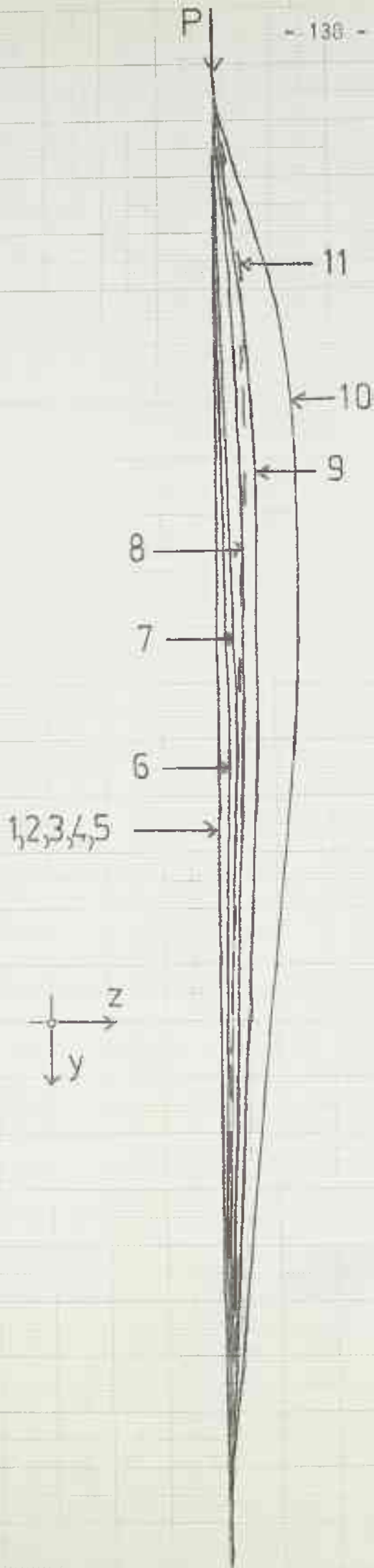
razmera
 $x = 1 : 2,5$
 $z = 2 : 1$

N O S A Ć I C / 6 i C / 3 / 2

=====

NOSAČ C/6

deformacija
poprečnog preseka
ispod sile P



1	0.
2	30. kN
3	60. kN
4	90. kN
5	120. kN
6	150. kN
7	170. kN
8	190. kN
9	200. kN
10	174. kN
11	0. kN

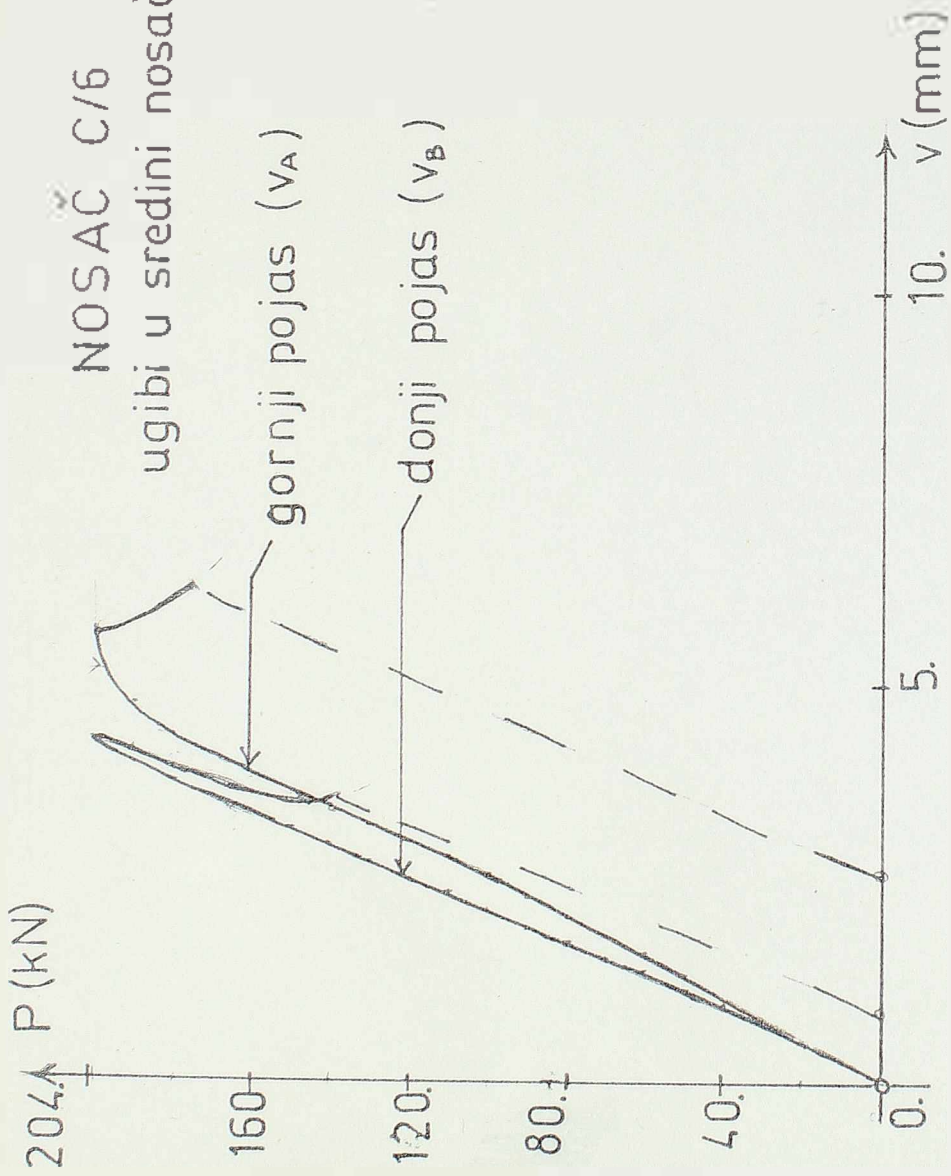
max $P = 204. \text{ kN}$

razmera:

$z = 2:1$

$y = 1:1,25$

NOSAČ C/6
 ugibi u sredini nosača

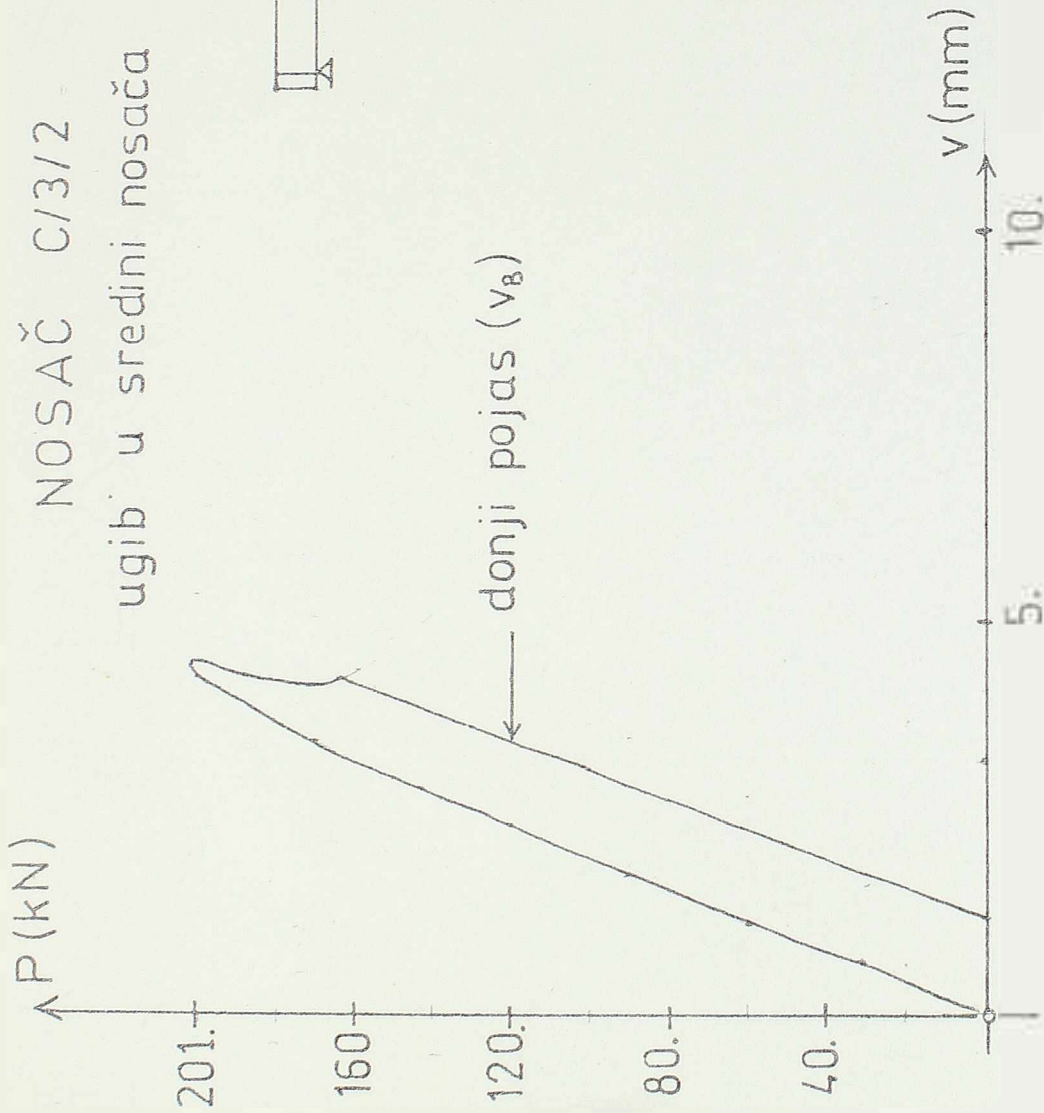
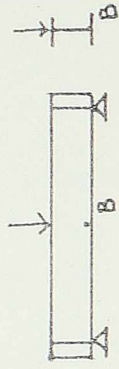


gornji pojas (v_A)

donji pojas (v_B)



NOSAČ C/3/2
ugib u sredini nosača



3. TEORIJSKA ANALIZA

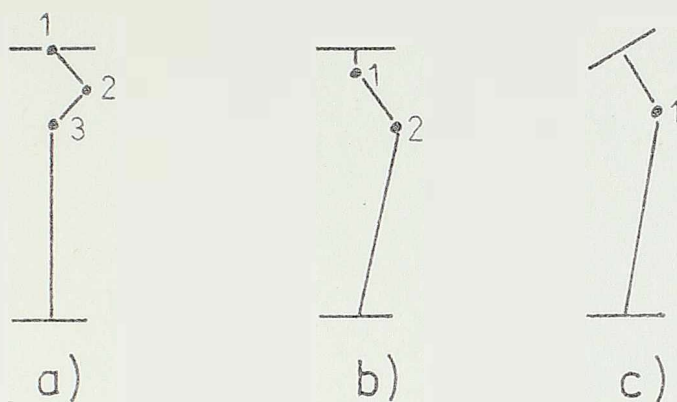
3.1 UPOREDJENJE EKSPERIMENTALNIH REZULTATA SA POSTOJEĆIM TEORIJSKIM REŠENJIMA I PROPISIMA POJEDINIH ZEMALJA

Koristeći jednačine od (1) do (5), sračunate su teorijske vrednosti kritičnog opterećenja za sve nosače i prikazane u Tabeli br. 1. zajedno sa eksperimentalnim rezultatima. Na slikama br. 14 i 15. izvršena je grafička interpretacija ovih rezultata.

Radi ilustracije stanja napona i deformacija u posmatranim nosačima, izvršena je linearna analiza nosača C/2/2 kao ravnog problema. Analiza je obavljena primenom metode konačnih elemenata korišćenjem programa SAP4. Upotrebljena je mreža od 128 elemenata (strana br.54), a rezultati su prikazani na slici broj 13. Ovi rezultati se odnose na opterećenje $P=18.0$ kN koje predstavlja kritično opterećenje za dati nosač sračunat prema teoriji elastične stabilnosti (jednačina br. 2). Maksimalna vrednost normalnog napona iznosi u ovom slučaju 15% od granice razvlačenja.

Prema slici broj 14, može se konstatovati da teorija elastične stabilnosti u ovom slučaju daje isuviše konzervativno rešenje. Ostala rešenja koja baziraju na eksperimentalnim istraživanjima daju znatno bolje rezultate, s tim što je rešenje prema čehoslovačkim propisima najviše na strani sigurnosti.

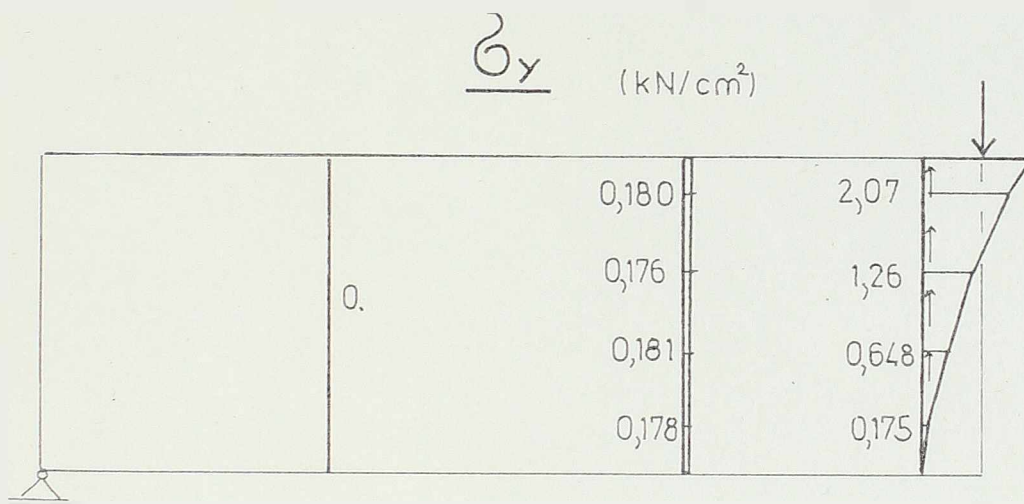
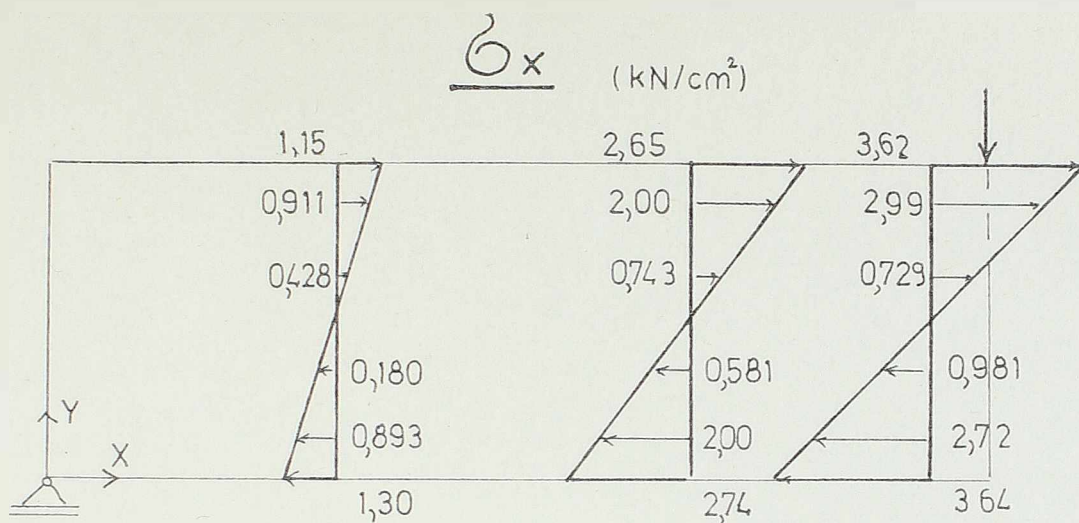
Važno je uočiti da se mehanizam loma koji je dobijen ovim eksperimentima razlikuje od mehanizma loma koji su predložili raniji autori. Dok je prema radu [15] mehanizam loma koncentrisan samo neposredno ispod opterećenja i u poprečnom preseku ima tri plastična zgloba (slika br.12a), ovde je dobijen mehanizam loma sa dva plastična zgloba, kako je to prikazano na slici br. 12.b.



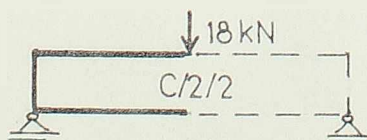
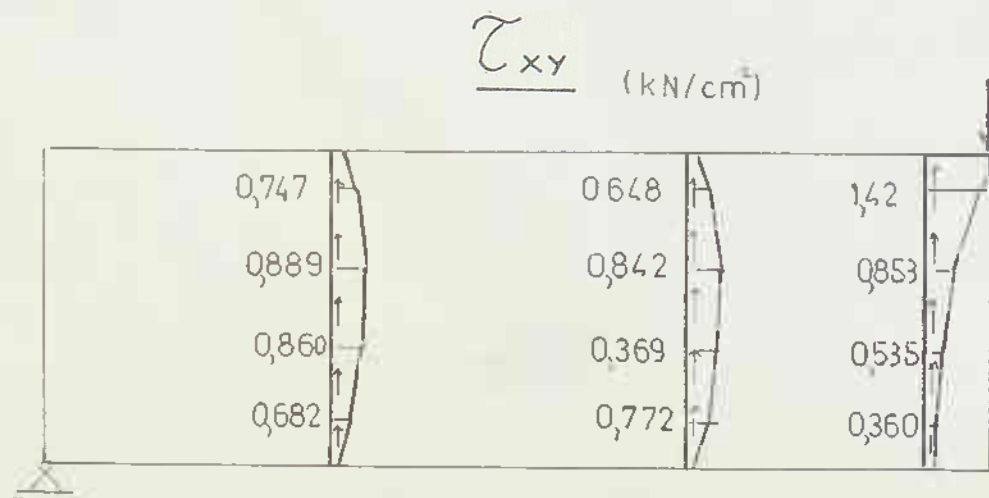
Slika br.12

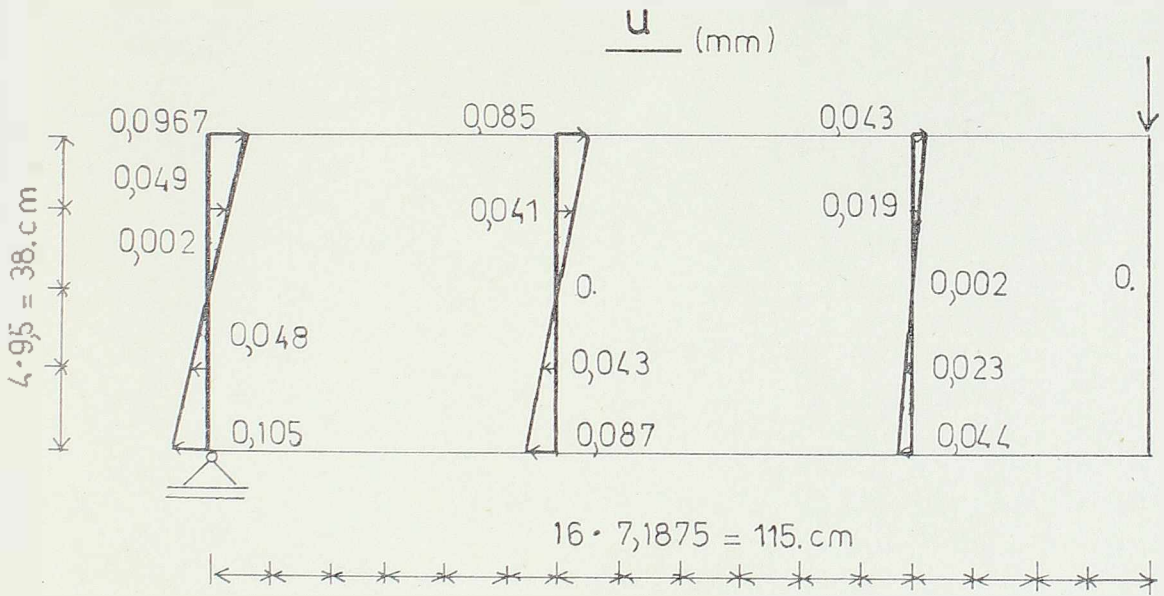
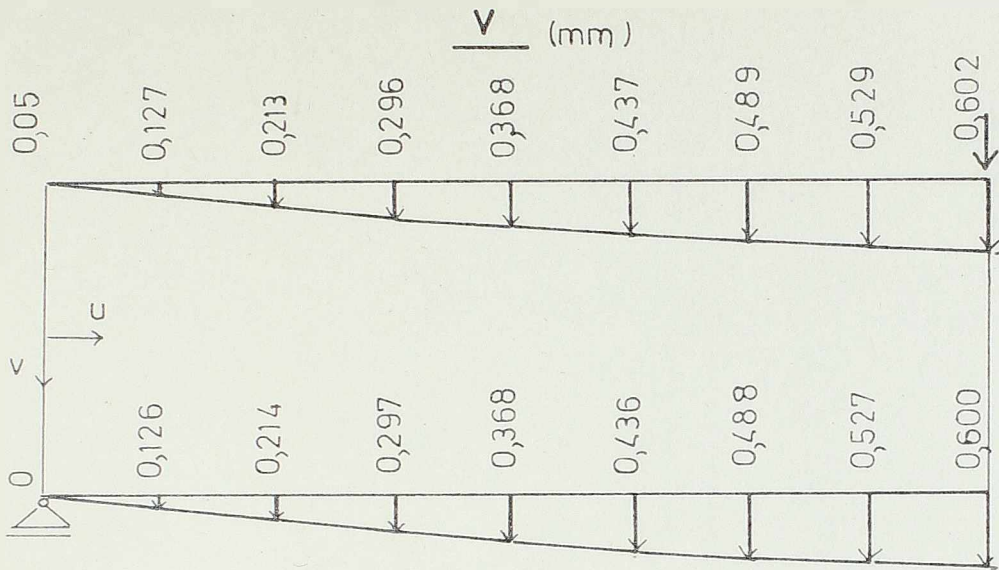
Sem toga uočeno je da sa obe strane opterećenja postoji zona gde dolazi do rotacije gornjeg pojasa i do formiranja mehanizma loma koji ima samo jedan plastični zglob u poprečnom preseku (Slika br.12.c). Ova zona nije uočena pri eksperimentalnim istraživanjima drugih autora, jer su bili u pitanju nosača malih raspona.

Predmet sledećeg poglavlja biće formulisanje sopstvenog postupka za proračun kritičnog opterećenja koristeći ovako dobijen nov mehanizam loma.



Slika 13.a)



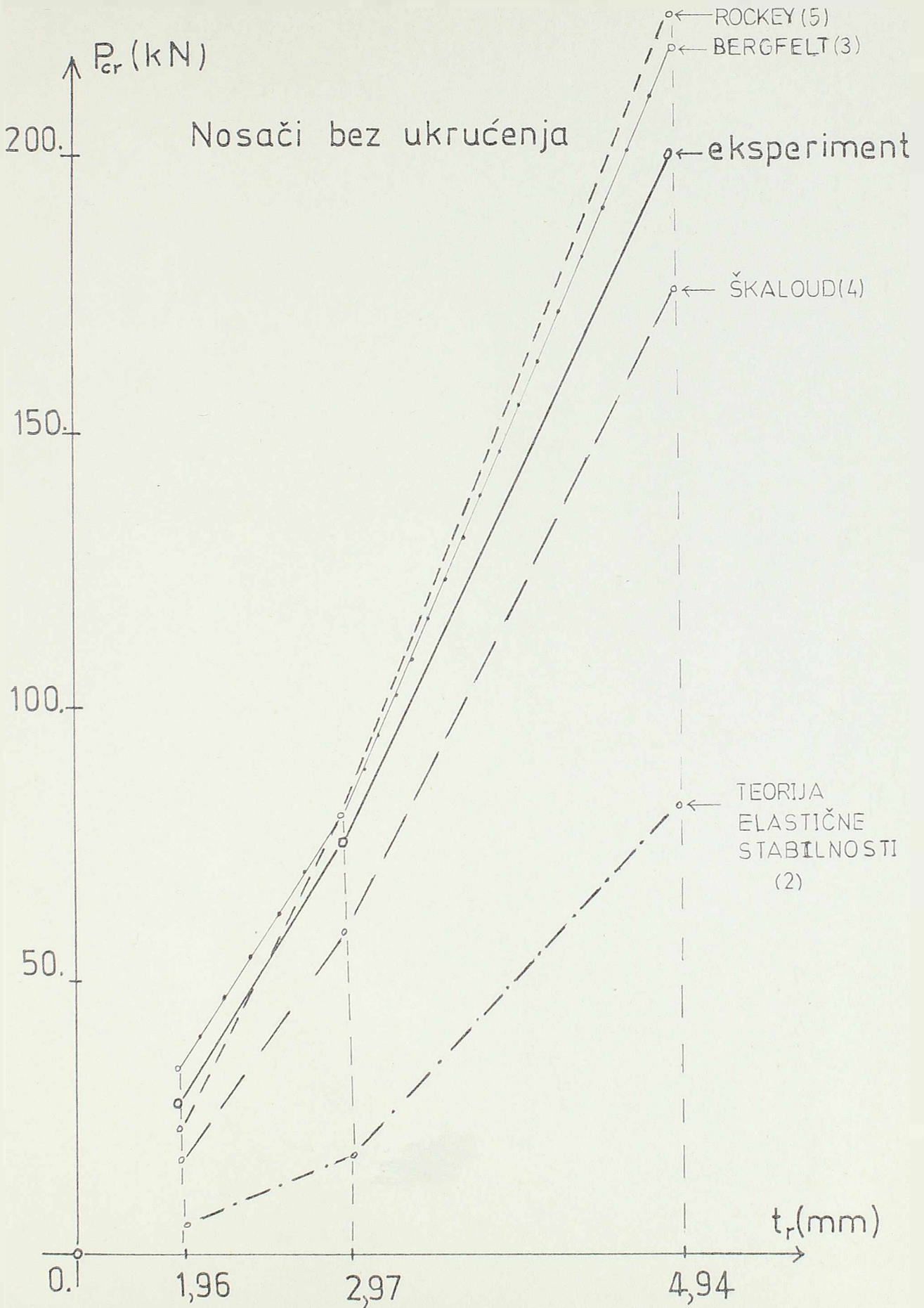


Slika 13.b)

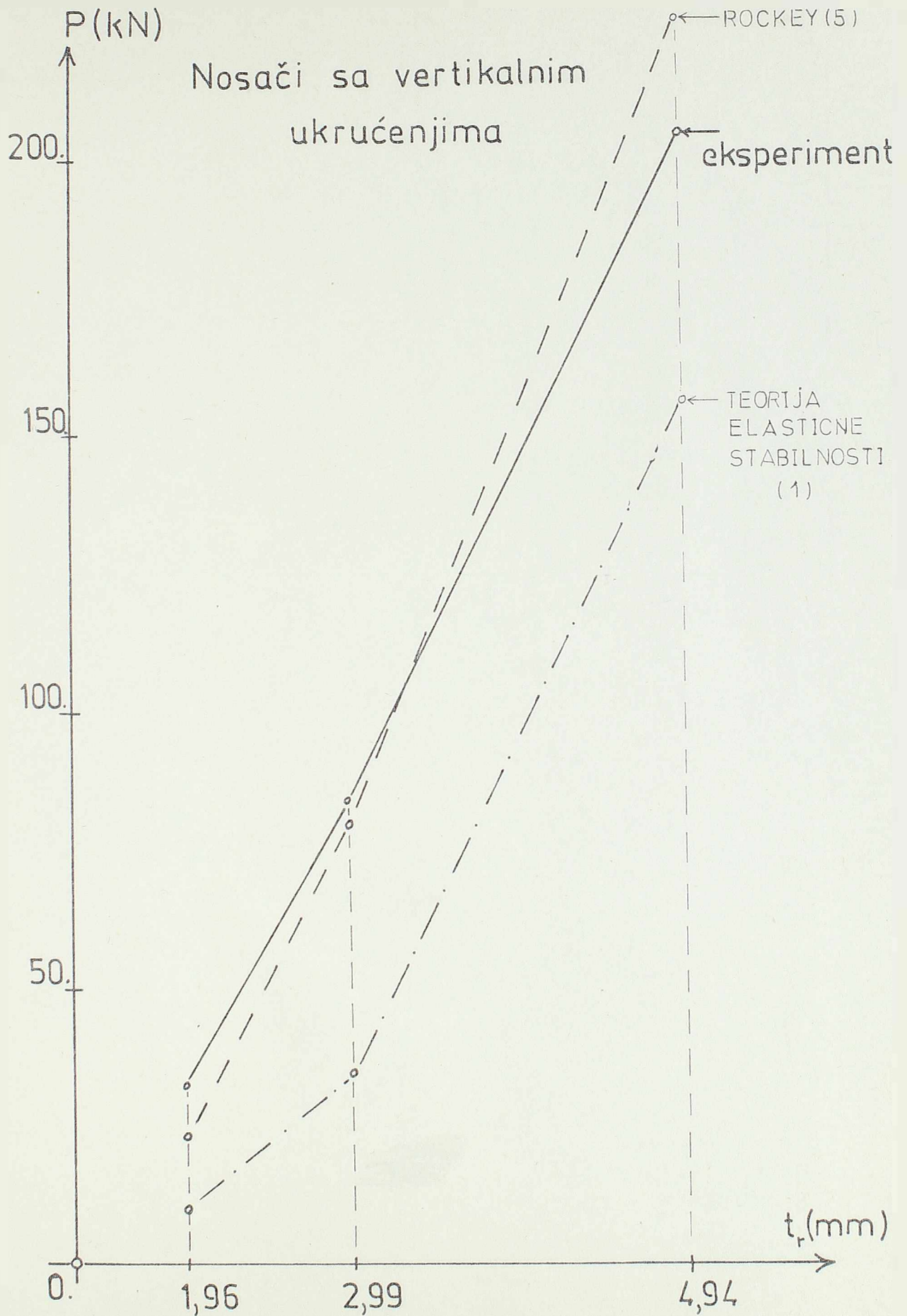
KRITIČNA OPTEREĆENJA U kN

TABELA br. 1

nosač	C/1/1	C/2/2	C/3/2	C/4	C/5	C/6
eksperiment	27,2	75,0	201.	32,0	84,0	204.
teorija elast. stab. (1),(2)	5,5	18,0	82,0	9,9	33,7	156.
Bergfelt (3)	34,6	79,4	220.	/	/	/
Škaloud (4)	16,7	58,7	175.	/	/	/
Rockey Roberts (5)	22,8	79,4	225.	22,8	79,4	225.



Slika br. 14.

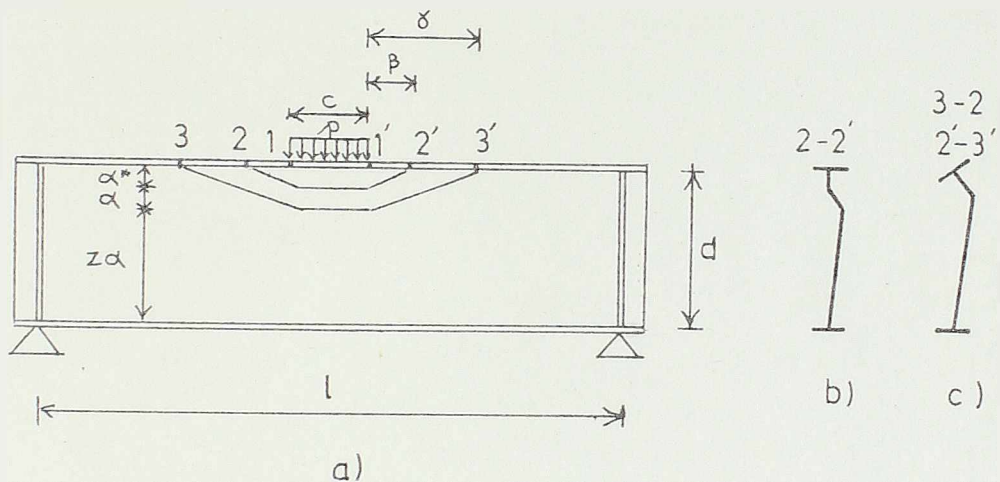


Slika br. 15

3.2 POSTUPAK ZA PRORAČUN LOKALNOG IZBOČAVANJA VERTIKALNOG LIMA USLED DEJSTVA KONCENTRISANOG OPTEREĆENJA

3.2.1 Nosači bez ukrućenja

Izgled mehanizma loma, koji je dobijen na osnovu izvršenih eksperimenata, prikazan je na slici br. 16.



Slika br. 16

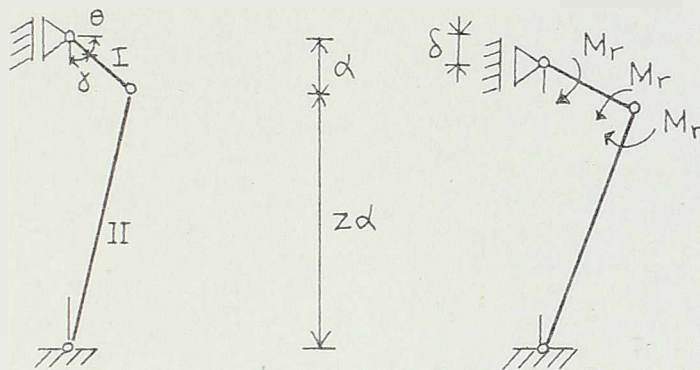
Plastični zglobovi formirali su se u rebru duž linija 2 - 2' i 3 - 3', kao i u pojasu na odstojanju $c/2$ i $c/2 + b$ od sredine nosača (tačke 1, 1' i 2, 2'). Na delu između tačaka 2 i 2' usled opterećenja koje sprečava pomeranje i rotaciju gornjeg pojasa, mehanizam loma ima oblik prikazan na slici 16.b. Na delu između tačaka 2 - 3 i 2' - 3' došlo je do rotacije gornjeg pojasa i oblik mehanizma loma prikazan je na slici 16.c.

Kao što je poznato iz teorije granične ravnoteže, ako je poznat stvarni mehanizam loma, kritično opterećenje P_{cr} nalazimo izjednačujući rad spoljnih sila, za mala pomeranja mehanizma loma, sa radom apsorbovanim u plastičnim zglobovima.

Trenutak koji neposredno predhodi pomeranju već ostvarenog mehanizma označava se kao trenutak granične ravnoteže sistema. Moguće pomeranje tog mehanizma prikazano je na slici. br. 17.

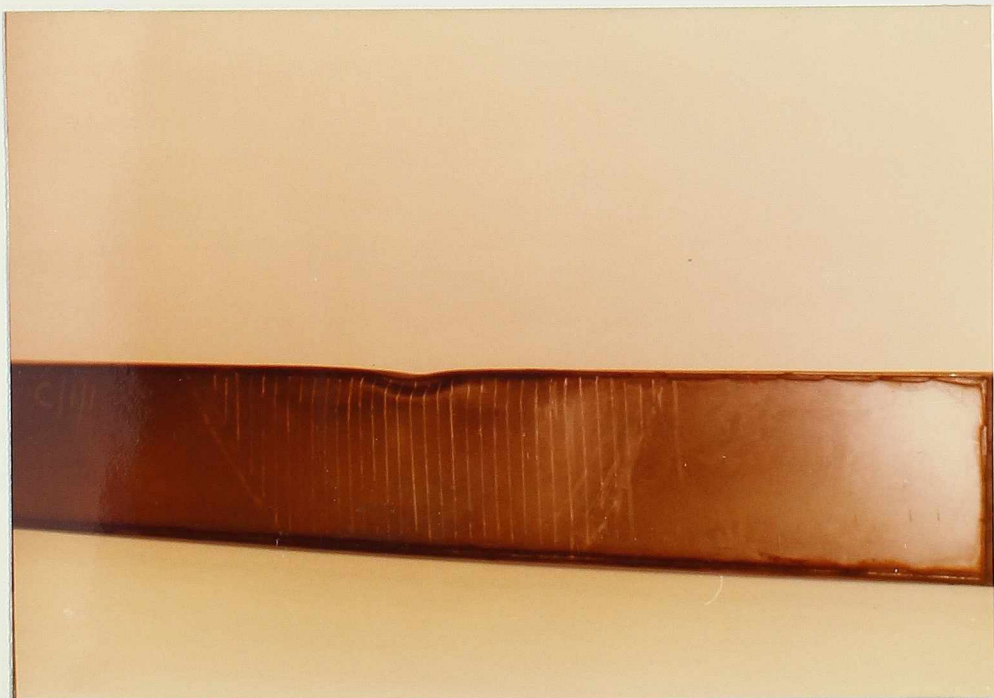
Za slučaj malo vertikalnog pomeranja δ , obrtanja "ploča" I i II data su izrazima:

$$\delta p_{II} = \frac{\delta \operatorname{tg} \theta}{\alpha \left(1 + \frac{1}{z}\right)}, \quad \delta p_{I} = \frac{\delta \operatorname{tg} \theta}{z \cdot \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right)}$$



Slika br. 17

Na slici br. 18, prikazan je mehanizam loma koji je dobijen pri eksperimentu kod nosača sa debljinom vertikalnog lima $t_r = 1,96$ mm.



Slika br. 18

Izjednačujući rad spoljašnjeg opterećenja $P_{cr} = p \cdot c$ pri pomeranju mehanizma loma za δ sa radom apsorbovanim u plastičnim zglobovima, dobijamo izraz za kritično opterećenje u obliku:

$$P_{cr} = \frac{4 \cdot M_f}{\beta} + 2 \cdot M_f \cdot \beta \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta}{\alpha \cdot (1 + \frac{1}{2})} + M_r \cdot \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta}{\alpha \cdot (1 + \frac{1}{2})} \cdot (2 + \frac{1}{2}) + 2 \cdot M_r \cdot \delta \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta}{\alpha} \quad (6)$$

U gornjem izrazu sa M_f obeležen je momenat pune plastičnosti pojasa:

$$M_f = \frac{1}{4} \cdot \sigma_f \cdot b \cdot t_f^2$$

a sa M_r momenat pune plastičnosti rebra:

$$M_r = \frac{1}{4} \cdot \sigma_r \cdot t_r^2$$

Veličinu β odredićemo iz uslova da kritično opterećenje P_{cr} ima svoju minimalnu vrednost s obzirom na β . Tako dobijamo:

$$\frac{\partial P_{cr}}{\partial \beta} = - \frac{4 \cdot M_f}{\beta^2} + 2 \cdot M_f \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta}{\alpha \cdot (1 + \frac{1}{2})} = 0,$$

odnosno:

$$\beta = \sqrt{\frac{2 \cdot M_f \cdot \alpha \cdot (1 + \frac{1}{2})}{M_f \cdot \operatorname{tg} \theta}} \quad (7)$$

Da bi odredili pomeranje mehanizma loma neposredno pre "kolapsa" koristićemo uslov da je ugib pojasa ispod opterećenja kompatibilan sa deformacijom rebra. Iz ovog uslova sledi jednačina:

$$l \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{z}{\cos \frac{(90-\theta)}{z}} \right) - (1+z) = \frac{M_f^+}{6 \cdot M_f \cdot E I_f} \cdot \left(1 + \frac{1}{z} \right) \cdot \frac{l}{\tan \theta} \quad (8)$$

Desna strana gornje jednačine odnosi se na ugib pojasa za slučaj da su se u tačkama 1,1' i 2,2' javili plastični momenti M_f , a sa I_f obeležen je momenat inercije pojasa:

$$I_f = \frac{1}{12} \cdot b \cdot t_p^3$$

Kako su pokazali eksperimenti, veličine α^* , γ i z koje definišu mehanizam loma mogu se prikazati preko sledećih izraza:

$$\alpha^* = \frac{c}{1,25 \cdot t_r}, \Rightarrow \alpha = \frac{d - \alpha^*}{(1+z)} \quad (9)$$

$$\gamma = \frac{t^*}{t_r} \cdot \frac{\sigma^*}{\sigma_r} \cdot \frac{l}{10}, \quad (10)$$

$$z = \frac{\gamma}{d} \left(-0,32 \frac{d}{\gamma} - 10 \frac{\gamma}{d} + 16,8 \right). \quad (11)$$

U jednačini (10) t^* je referentna debljina lima usvojena u ovom radu da iznosi 2,0 mm, a σ^* je referentni napon tečenja koji u ovom radu iznosi 300 N/mm².

Tako se, koristeći eksperimentalne rezultate koji nam daju izgled stvarnog mehanizma loma i uvodeći geometrijske veličina koje definišu taj mehanizam, došlo do sistema od šest jednačina (Jednačine (6)-(11)) sa šest nepoznatih veličina: R_r , β , θ , γ , α i z . Rešenjem ovog sistema jednačina nalazi se vrednost kritičnog opterećenja kao i sve veličine koje definišu mehanizam loma.

Na bazi predloženog postupka izvršen je numerički proračun nosača u sledećem poglavlju. Zatim je na slici br. 22, izvršeno uporedjenje ovako dobijenih teorijskih rezultata sa eksperimentalnim rezultatima.

Numerički proračun

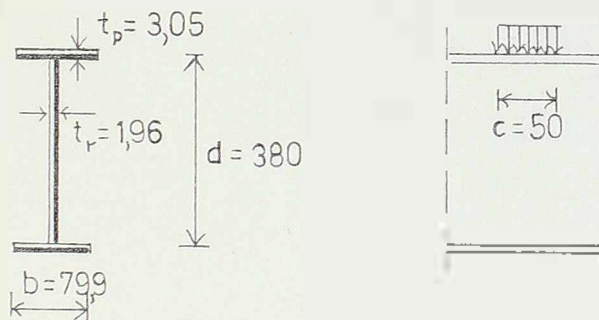
Nosač C/1/1

Mehaničke karakteristike materijala za ovaj nosač su:

$$\sigma_f = 275. \text{N/mm}^2 \quad \sigma_w = 171. \text{N/mm}^2$$

$$E = 202,7 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$$

Geometrijske karakteristike poprečnog preseka date su na slici br. 19.



Slika br. 19

Momenti pune plastičnosti rebra i pojasa su:

$$M_F = \frac{279 \cdot 79,9 \cdot 3,05^2}{4} = 51,1 \cdot 10^3 \text{ N.mm},$$

$$M_w = \frac{171 \cdot 1,96^2}{4} = 164,2 \text{ N.mm/mm},$$

a momenat inercije pojasa:

$$i_F = \frac{79,9 \cdot 3,05^3}{12} = 188,9 \text{ mm}^4$$

Iz jednačine (10) dobijamo:

$$\delta = \frac{2,0}{1,96} = \frac{300}{171} \cdot \frac{2300}{10} = 411,7 \text{ mm}$$

a iz jednačine⁽¹¹⁾ nalazimo:

$$z = \frac{411,7}{380} \left(-0,32 \frac{380}{411,7} - 10,0 \frac{411,7}{380} + 16,8 \right) = 6,15$$

Kako je:

$$\alpha_1^* = \frac{50}{1,25 \cdot 1,96} = 20,4 \text{ mm}$$

Koristeći izraz (9) sledi:

$$\alpha = \frac{380 - 20,4}{1 + 6,15} = 50,29 \text{ mm}$$

Veličinu ugla Θ dobijamo sada iz izraza:

$$\frac{1}{\sin} + \frac{6,15}{\cos\left(\frac{90-\Theta}{6,15}\right)} - (1+6,15) = \frac{(51,1 \cdot 10^3)^2 \left(1 + \frac{1}{6,15}\right)}{6.164,2 \cdot 2.202,7 \cdot 10^3 \cdot 188,9 \cdot \text{tg} \Theta},$$

odakle nalazimo da je: $\Theta = 82,1^\circ$

Prema jednačini (7) dobijamo:

$$\beta = \sqrt{\frac{2 \cdot 51,1 \cdot 10^3 \cdot 50,29 \left(1 + \frac{1}{6,15}\right)}{164,2 \cdot 7,207}}$$
$$= 71,06 \text{ mm.}$$

Konačno, koristeći jednačinu (6), možemo sračunati i veličinu kritičnog opterećenja:

$$P_{cr} = \frac{4.51,1 \cdot 10^3}{71,06} + \frac{2.164,2.71,06.7,207}{50,29 \left(1 + \frac{1}{6,15}\right)} + \frac{164,2.50,00.7,207 \left(2 + \frac{1}{6,15}\right)}{50,29 \left(1 + \frac{1}{6,15}\right)} + \frac{2.164,2.411,7.7,207}{50,29}$$

$$P_{cr} = 2,88 + 2,88 + 2,20 + 19,38 = 27,34 \text{ KN}$$

Nosač C/2/2



Slika br. 20

$$\sigma_t = 300 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_w = 250 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 217,5 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$I_f = \frac{80 \cdot 0,6,16^3}{12} = 1558 \text{ mm}^4$$

$$M_f = \frac{300 \cdot 80 \cdot 0,6,16^2}{4} = 227,67 \cdot 10^3 \text{ N.mm}$$

$$M_w = \frac{250 \cdot 2,97^2}{4} = 551,3 \text{ N mm/mm}$$

$$\gamma = \frac{2,0}{2,97} \cdot \frac{300}{250} \cdot \frac{2300}{10} = 185,8 \text{ mm}$$

$$z = \frac{185,8}{380} \left(-0,32 \frac{380}{185,8} - 10,0 \frac{185,8}{380} + 16,8 \right) = 5,50$$

$$z^* = \frac{50}{1,25 \cdot 2,97} = 13,5 \text{ mm}$$

$$z = \frac{380 - 13,5}{1 + 5,50} = 56,38 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{5,50}{\cos \left(\frac{90 - \theta}{5,50} \right)} - (1 + 5,50) = \frac{(227,67 \cdot 10^3)^2 \left(1 + \frac{1}{5,50} \right)}{6 \cdot 551,3 \cdot 217,5 \cdot 10^3 \cdot 1558 \cdot \text{tg} \theta}$$

$$\theta = 85^\circ$$

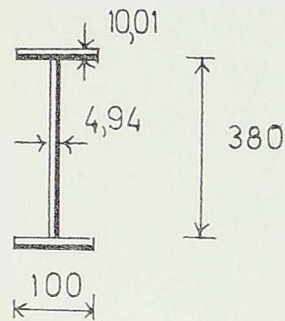
$$\beta = \sqrt{\frac{2 \cdot 227,67 \cdot 10^3 \cdot 56,38 \left(1 + \frac{1}{5,50} \right)}{551,3 \cdot 11,43}} = 69,39 \text{ mm}$$

$$P_{cr} = \frac{4 \cdot 227,67 \cdot 10^3}{69,39} + \frac{2 \cdot 551,3 \cdot 69,39 \cdot 11,43}{56,38 \left(1 + \frac{1}{5,50} \right)}$$

$$+ \frac{551,3 \cdot 50 \cdot 11,43 \left(2 + \frac{1}{5,50} \right)}{56,38 \cdot \left(1 + \frac{1}{5,50} \right)} + \frac{2 \cdot 551,3 \cdot 185,8 \cdot 11,43}{56,38}$$

$$P_{cr} = 13,12 + 13,12 + 10,32 + 41,53 = 78,09 \text{ KN}$$

Nosač C/3/2



Slika br. 21

$$\sigma_f = 289 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_w = 299 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 215 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$I_f = \frac{100 \cdot 10,01^3}{12} = 8,358 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$M_f = \frac{289 \cdot 100 \cdot 10,01^2}{4} = 723,9 \cdot 10^3 \text{ N.mm}$$

$$M_w = \frac{299 \cdot 4,94^2}{4} = 1,824 \cdot 10^3 \text{ N.mm/mm}$$

$$\delta = \frac{2,0}{4,94} \cdot \frac{300}{299} \cdot \frac{2300}{10} = 93,4 \text{ mm}$$

$$z = \frac{93,4}{380} \cdot \left(-0,32 \cdot \frac{380}{93,4} - 10,0 \cdot \frac{93,4}{380} + 16,8 \right) = 3,20$$

$$\alpha^* = \frac{50}{1,25 \cdot 4,94} = 8,10 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{380 - 8,10}{1 + 3,20} = 88,5 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{3,20}{\cos\left(\frac{90-\theta}{3,2}\right)} - (1+3,20) = \frac{(723,9 \cdot 10^3)^2 \left(1 + \frac{1}{3,20}\right)}{6 \cdot 1,824 \cdot 10^3 \cdot 215 \cdot 10^3 \cdot 8,358 \cdot 10^3 \operatorname{tg} \theta}$$

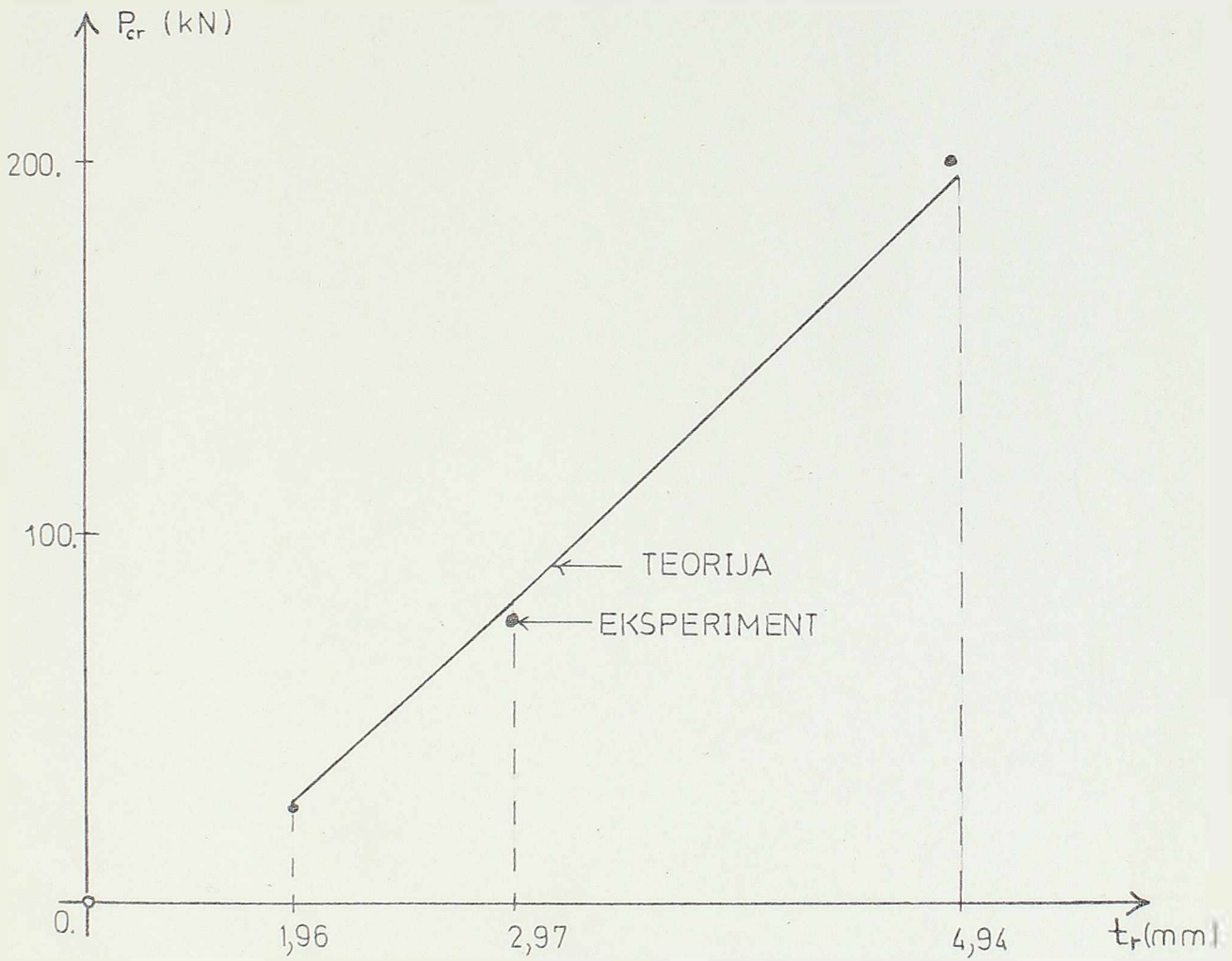
$$\theta = 87^\circ$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2 \cdot 723,9 \cdot 10^3 \cdot 88,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{3,20}\right)}{1,824 \cdot 10^3 \cdot 19,08}} = 69,5 \text{ mm}$$

$$P_{cr} = \frac{4 \cdot 723,9 \cdot 10^3}{69,5} + \frac{2 \cdot 1,824 \cdot 10^3 \cdot 69,5 \cdot 19,08}{88,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{3,20}\right)} +$$
$$+ \frac{1,824 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 19,08 \cdot \left(2 + \frac{1}{3,20}\right)}{88,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{3,20}\right)} + \frac{2 \cdot 1,824 \cdot 10^3 \cdot 93,4 \cdot 19,08}{88,5}$$

$$P_{cr} = 41,6 + 41,6 + 34,6 + 73,4 = 191,2 \text{ KN}$$

Uporedjenje eksperimentalnih i teorijskih rezultata
 - nosači bez ukrucenja -



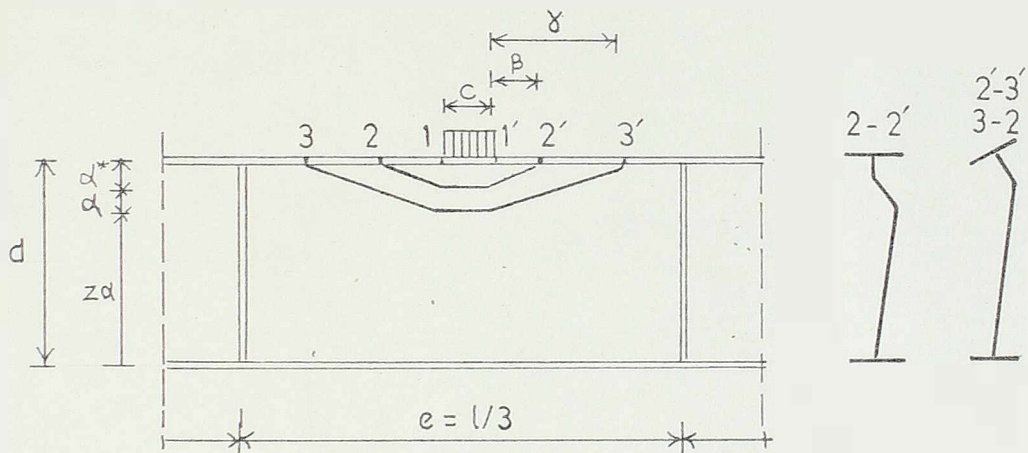
Slika br. 22

NOSAČ	C/1/1	C/2/2	C/3/2
TEORIJA	27,34	78,09	191,2
EKSPER.	27,2	75,0	201.

3.2.2 Nosači sa vertikalnim ukrućenjima

Posle ispitivanja nosača bez vertikalnih ukrućenja prišlo se ispitivanju tri nosača koja su imala vertikalna ukrućenja u trećinama raspona.

Plastični zglobovi koji su se formirali kod ovih nosača bili su isti po obliku kao i kod nosača bez vertikalnih ukrućenja (slika br.23).



Slika br. 23

Medjutim pokazalo se da je zona širenja plastičnog zgloba u ovom slučaju bila ograničena rastojanjem između vertikalnih ukrućenja. To se pokazalo od značaja kod nosača sa malom debljinom vertikalnog lima (nosač C/4, $t_v = 1,96$ mm). Naime, kod ovog nosača da nema vertikalnih ukrućenja širina plastičnog zgloba (rastojanje 3 - 3') bila bi veća od trećine raspona. Ali, kako se to vidi sa slike br. 24, vertikalna ukrućenja su sprečila dalje širenje plastičnog zgloba što ima za posledicu i promenu dimenzija čitavog zgloba, a samim tim i promenu kritične sile.



Slika br. 24

Kod nosača sa većom debljinom vertikalnog lima (nosači C/5 i C/6) može se smatrati da nije došlo do značajnijeg "aktiviranja" vertikalnih ukrućenja pri pojavi plastičnog zgloba. Naime, ovaj zglob se formirao neposredno ispod opterećenja, kao što je to slučaj i kad smo imali nosače bez vertikalnih ukrućenja, i nije se proširio do vertikalnih ukrućenja. Usled toga dimenzije plastičnog zgloba a i kritično opterećenje nisu bili uslovljeni postojanjem ovih ukrućenja.

Slika br. 25 na kojoj je pokazan nosač C/4 posle izvršenih eksperimenata ilustruje činjenicu da pri lokalnom izvijanju nosača ne dolazi do bočnog pomeranja gornjeg pojasa ako se koristi uređaj za opterećenje o kome je u ovom radu reč.



Slika br. 25

Na bazi izvršenih eksperimenata i dobijenih rezultata može se usvojiti sledeći postupak za proračun lokalnog izbočavanja vertikalnih limova sa vertikalnim ukrućenjima. Prvo se računaju karakteristike preseka M_w , M_x, I_x , a zatim se koristeći jednačinu (10) određuju χ . Ukoliko je ova sračunata širina plastičnog zgloba $2\cdot\chi + c$ manja od rastojanja između vertikalnih ukrućenja koristi se postupak proračuna dat jednačinama (6) - (11), dakle kao da nema vertikalnih ukrućenja. U suprotnom slučaju, odnosno ako je:

$$2\cdot\chi > e - c, \quad (12)$$

treba usvojiti da je:

$$\delta = \frac{e-c}{2}, \quad (13)$$

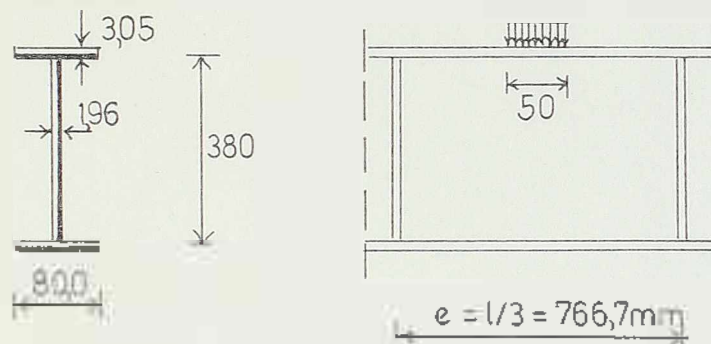
a veličinu z sračunati iz izraza:

$$z = \frac{\delta}{d} (-0,38 \frac{d}{\delta} - 12,0 \frac{\delta}{d} + 20,2) \quad (14)$$

Dalje je postupak proračuna isti kao i kod nosača bez vertikalnih ukrućenja, kako je to pokazano u sledećem poglavlju.

Numerički proračun

Nosač C/4



Slika br. 26

$$\sigma_c = 275. \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_w = 171. \text{ N/mm}^2$$

$$E = 202,7 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$M_f = \frac{275 \cdot 80,0 \cdot 3,05^2}{4} = 51,16 \cdot 10^3 \text{ N.mm}$$

$$M_w = \frac{171 \cdot 1,96^2}{4} = 164,2 \text{ N.mm/mm}$$

$$\gamma = \frac{2,0}{1,96} \cdot \frac{300}{171} \cdot \frac{2300}{10} = 411,7 \text{ mm}$$

$$I_f = \frac{80,0 \cdot 3,05^3}{12} = 189,15 \text{ mm}^4$$

Kako je:

$$\chi = 411,7 > \frac{766,7 - 50}{2} = 358,3 \text{ mm}$$

usvajamo da je:

$$\chi = 358,3 \text{ mm,}$$

a veličinu z određujemo prema jednačini(14):

$$z = \frac{358,3}{380} \left(-0,38 \frac{380}{358,3} - 12,0 \frac{358,3}{380} + 20,2 \right) = 8,00$$

Dalje dobijamo:

$$\alpha^* = \frac{50}{1,25 \cdot 1,96} = 20,4 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{380 - 20,4}{1 + 8,00} = 39,96 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{8,00}{\cos\left(\frac{90 - \theta}{8,00}\right)} - (1 + 8,00) = \frac{(51,16 \cdot 10^3)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{8,00}\right)}{6 \cdot 164,2 \cdot 202,7 \cdot 10^3 \cdot 189,15 \cdot \text{tg} \theta} \Rightarrow$$

$$\theta = 82^\circ$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2 \cdot 51,16 \cdot 10^3 \cdot 39,96 \cdot \left(1 + \frac{1}{8,00}\right)}{164,2 \cdot 7,115}}$$

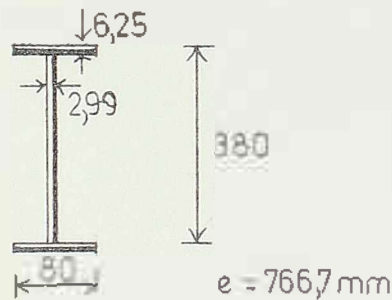
$$\beta = 62,75 \text{ mm}$$

$$P_{cr} = \frac{4 \cdot 51,16 \cdot 10^3}{62,75} + \frac{2 \cdot 164,2 \cdot 62,75 \cdot 7,115}{39,96 \left(1 + \frac{1}{8}\right)} +$$

$$+ \frac{164,2 \cdot 50 \cdot 7,115 \cdot \left(2 + \frac{1}{8,00}\right)}{39,96 \left(1 + \frac{1}{8,00}\right)} + \frac{2 \cdot 164,2 \cdot 358,3 \cdot 7,115}{39,96}$$

$$P_{cr} = 3,26 + 3,26 + 2,76 + 20,95 = 30,23 \text{ KN}$$

Nosač C/5



Slika br. 27

$$\sigma_z = 300 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_w = 250 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 217,5 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$I_f = \frac{80,0 \cdot 6,25^3}{12} = 1628, \text{ mm}^4$$

$$M_f = \frac{300 \cdot 80,0 \cdot 25^2}{4} = 234,38 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_w = \frac{250 \cdot 2,99^2}{4} = 558,8 \text{ N.mm/mm}$$

$$\delta = \frac{2,0}{2,99} \cdot \frac{300}{250} \cdot \frac{2300}{10} = 184,6 \text{ mm} < 358,3 \text{ mm}$$

$$z = \frac{184,6}{380} \cdot \left(-0,32 \cdot \frac{380}{184,6} - 10,0 \cdot \frac{184,6}{380} + 16,8 \right) = 5,48$$

$$\alpha' = \frac{50}{1,25 \cdot 2,99} = 13,4 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{380 - 13,4}{1 + 5,48} = 56,57 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{5,48}{\cos \left(\frac{90 - \theta}{5,48} \right)} - (1 + 5,48) = \frac{(234,38 \cdot 10^3)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{5,48} \right)}{6 \cdot 558,8 \cdot 217,5 \cdot 10^3 \cdot 1628 \text{ tg } \theta} \Rightarrow$$

$$\theta = 85^\circ$$

$$B = \sqrt{\frac{2 \cdot 234,38 \cdot 10^3 \cdot 56,57 \cdot \left(1 + \frac{1}{5,48} \right)}{558,8 \cdot 11,43}}$$

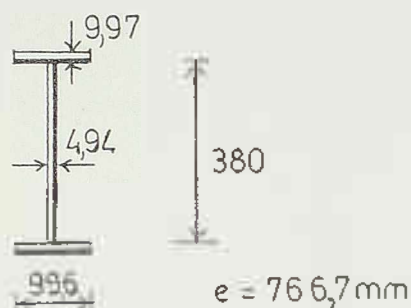
$$B = 70,07 \text{ mm}$$

$$P_{cr} = \frac{4 \cdot 234,38}{70,07} + \frac{2 \cdot 558,8 \cdot 70,07 \cdot 11,43}{56,57 \left(1 + \frac{1}{5,48} \right)} +$$

$$+ \frac{558,8 \cdot 50 \cdot 11,43 \cdot \left(2 + \frac{1}{5,48} \right)}{56,57 \cdot \left(1 + \frac{1}{5,48} \right)} + \frac{2 \cdot 558,8 \cdot 184,6 \cdot 11,43}{56,57}$$

$$P_{cr} = 13,38 + 13,38 + 10,41 + 41,68 = 78,85 \text{ KN}$$

Nosač C/6



Slika br. 28

$$\sigma_t = 289 \text{ N/mm}^2 \qquad \sigma_w = 299 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 215 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$I_f = \frac{99,6 \cdot 9,97^3}{12} = 8,226 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$M_f = \frac{289 \cdot 99,6 \cdot 9,97^2}{4} = 715,3 \cdot 10^3 \text{ N.mm}$$

$$M_w = \frac{299 \cdot 4,94^2}{4} = 1,824 \cdot 10^3 \text{ N.mm/mm}$$

$$\xi = \frac{2,0}{4,94} \cdot \frac{300}{299} \cdot \frac{2300}{10} = 93,4 \text{ mm} < 358,3 \text{ mm}$$

$$z = \frac{93,4}{380} \left(-0,32 \cdot \frac{380}{93,4} - 10,0 \frac{93,4}{380} + 16,8 \right) = 3,20$$

$$\alpha^* = \frac{50}{1,25 \cdot 4,94} = 8,10 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{380 - 8,10}{1 + 3,20} = 88,5 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{3,20}{\cos\left(\frac{90-\theta}{3,2}\right)} - (1 + 3,20) = \frac{(715,3 \cdot 10^3)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3,20}\right)}{6 \cdot 1,824 \cdot 215 \cdot 10^3 \cdot 8,226 \cdot 10^3 \cdot \text{tg} \theta} \Rightarrow$$

$$\theta = 87^\circ$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2 \cdot 715 \cdot 10^3 \cdot 88,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{3,20}\right)}{1,824 \cdot 10^3 \cdot 19,08}}$$

$$\beta = 69,2 \text{ mm}$$

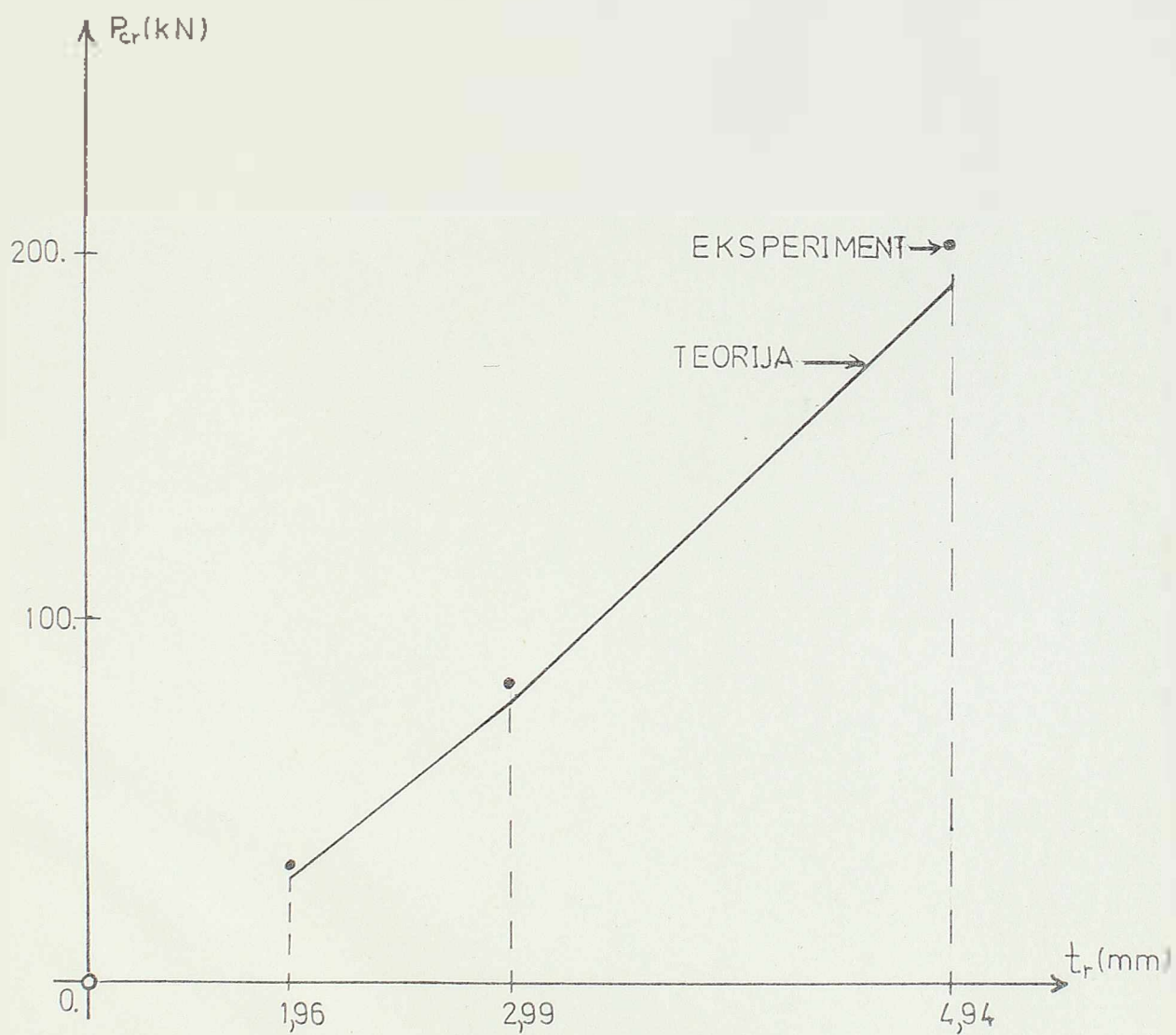
$$P_{cr} = \frac{4 \cdot 715,3 \cdot 10^3}{69,2} + \frac{2 \cdot 1,824 \cdot 10^3 \cdot 69,2 \cdot 19,08}{88,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{3,20}\right)}$$

$$= \frac{1,824 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 19,08 \cdot \left(2 + \frac{1}{3,20}\right)}{88,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{3,20}\right)} + \frac{2 \cdot 1,824 \cdot 10^3 \cdot 93,4 \cdot 19,08}{88,5}$$

$$P_{cr} = 41,3 + 41,3 + 34,6 + 73,4 = 190,6 \text{ KN}$$

Usporedjenje eksperimentalnih i teorijskih
rezultata

- nosači sa vertikalnim ukrućenjima -



Slika broj 29

NOSAČ	C/4	C/5	C/6
TEORIJA	30,2	78,8	191.
EKSPERIM.	32,0	84,0	204.

4. ZAKLJUČCI

- Rešenja za lokalno izbočavanje vertikalnih limova koja baziraju na predpostavkama klasične teorije elastične stabilnosti pokazala su se u ovom radu kao nedovoljno tačna, jer daju znatno manje vrednosti za kritičnu silu od onih koje su dobijene eksperimentalnim putem.

- I ovi eksperimenti pokazali su da je pojava bifurkacije pri lokalnom izbočavanju vertikalnih limova samo jedna idealizacija vezana za idealno ravne nosače. Medjutim, u stvarnoj konstrukciji usled neizbežnih početnih imperfekcija odmah po nanošenju opterećenja dolazi i do bočnog pomeranja vertikalnog lima, da bi po dostizanju kritičnog opterećenja ova pomeranja dostigla ekcesne vrednosti.

- Novija rešenja (Granholm, Bergfelt, Hovik, Škaloud, Novak) koja baziraju na eksperimentalnim istraživanjima daju relativno dobre rezultate za proračun lokalnog izbočavanja vertikalnih limova. Ipak, ni ovim rešenjima ne možemo biti u potpunosti zadovoljni jer su to rešenja empirijskog karaktera i ne sadrže u sebi uticaj svih faktora koji su od značaja za veličinu kritičnog opterećenja.

- Radovi iz poslednjih godina (Rockey, Škaloud) koji baziraju na konceptu teorije plastičnosti i granične ravnoteže dosad najpotpunije rešavaju posmatrani problem. Medjutim, ova rešenja odnose se prvenstveno na nosače manjeg raspona gde se odnos raspona prema visini nosača kreće u granicama: $\frac{l}{d} = 0,5 - 2$.

- Kako su pokazali eksperimenti u ovom radu mehanizam loma za nosače većeg raspona ($\frac{l}{d} = 6$.) znatno se razlikuje od mehanizma loma za nosače manjeg raspona ($\frac{l}{d} = 0,5 - 2$).

Primenom ovog novog mehanizma loma u ovom radu izveden je i jedan nov postupak za proračun lokalnog izbočavanja vertikalnih limova. On bazira na konceptu teorije plastičnosti i granične ravnoteže, i za posmatrane nosače većeg raspona daje i najbolje rezultate.

- Eksperimenti u ovom radu pokazali su i da vertikalna ukrućenja postavljena u trećinama raspona nisu od značaja pri lokalnom izbočavanju kada su u pitanju deblji vertikalni limovi ($t_r = 5 \text{ mm}$). Medjutim, kod nosača sa tanjim vertikalnim limovima ($t_r = 2 \text{ mm}$) ova ukrućenja povećavaju kritičnu silu za oko 20%.

Treba napomenuti da u ovom slučaju teorija elastične stabilnosti znatno precenjuje uticaj vertikalnih ukrućenja na veličinu kritične sile.

L I T E R A T U R A

- [1] Timoshenko, S.P., and Gere, J.M., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Co., New York, 1961.
- [2] Bleich, F., Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Co., New York, 1952.
- [3] Moell, R., Der Stahlbau, Berlin 1967.
- [4] Hartman, A.J., Journal of Struc.Div., ASCE, August 1974.
- [5] Powell, G., and Klinger, R., Journal of Struc.Div., ASCE, September 1970.
- [6] Barsoum, R.S., and Callagher, R.H., Int.Journal for Numerical Methods in Engineering, 1970.
- [7] Reilly, R., Journal of Struc.Div., ASCE, July 1972.
- [8] A.Z.Sommerfeld, Z.Math, Phys 54 (1906).
- [9] S.P.Timoshenko, Z.Math. Phys 58 (1910).
- [10] K.Girkmann, Int.Assoc.for Bridge and Struct.Engg., Final Report (1936).
- [11] L.Zetlin, Proc.Am.Soc.Civ.Engrs. 81 (1955).
- [12] R.M.White and W.Cottingham, J.Emd, Div, Proc, ASCE 85 (1962).
- [13] G.C.Lee, Walding Res.Council Bull.1960.
- [14] Škaloud and Novak, Academy of science report, 85, Prague 1975.
- [15] Roberts, T.M. and Rockey, K.C., The Structural Engineering, 1979.
- [16] Bergfelt, A., IABSE Colloquium, London 1971.
- [17] M.Z.Khan, K.C.Johns, B.Hayman, Journal of Struc.Div., ASCE, vol 103, Mart 1977.
- [18] Goldbert J.E., Bogdenoff J.I., and Glanz, W.D., Intern.Assoc. of Bridge and Struct.Engin.Publication, Vol. 24., 1964.
- [19] Kollbrunner, F., and Hajdin N., Intern.Assoc. of Bridge and Struc. Engin. Publication, Vol 28-II, 1968.
- [20] Johnson P., Will.K., Journal of Struc.Division, ASCE, Vol 100, March 1974.

- [21] Akay.H, Johnson,P., Will,K., Journal of Struc.Division, ASCE, Vol 103, Septembre 1977.
- [22] M.Z.Khan, A.C.Walker, The Structural Engineering, June 1972,No.6.
- [23] Kapur K., Hratz.B., Journal of the Engin.Mechanics Divis., Vol.92, ASCE, April 1966.
- [24] Granholm, C.A., Inst. fur Byggnadsteknik, Raport 202,Gothenberg 1960.
- [25] Bergfelt, a., and Hovik.j., Final Report, 8-th Congress, IABSE, New York, 1968.
- [26] K.C.Rockey and D.K.Bagchi,Int.J.Mech.Sci, Pergamon Press.Vol.12., 1970.
- [27] Hancock,G.,J., Journal of Struc.Division, ASCE, Vol 104, Novembre 1978.
- [28] Turner M.J., Clough R., W., Martin H., C., Topp L., J., Journal of Aero Science, Vol 23, No. 9, Septembre 1956.
- [29] Turner M.,J., Dill E., H., Martin H., C., Melosh R., J., Journal of Aero Science, Vol 27, February 1960.
- [30] Martin H.,C., Proc. Conf. Matrix Methods of Structural Mechanics, Air force Inst. of Tech., Wright -Paterson A.F.B. Ohio, October, 1965.
- [31] Cheung Y., K., Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, Oxford, New, York, Toronto, 1976.
- [32] Gallagher R., H., Journal American Institute for Aeronautic and Astronomic, Vol 5, No.1. January 1967.
- [33] Rajasekaran S., Murray D.W., Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST6, June 1973.
- [34] Johnson, C.P., Will K. M., Journal of Structural Division, ASCE, Vol 100, No. ST3, Martc 1974.
- [35] Akay, H.V., Johnson, C.P., Will, K.M., Journal of Structural Division, ASCE, Vol 103, No.ST9, Septembre 1977.
- [36] Plank, R.J., Wittrick, W. H., International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.8., 1974.
- [37] Graves Smith, T.R., Sridharah, S., International Journal of Mech. Science, Vol.20, 1978.
- [38] Desai, C.S., Abel, J.F., Introduction to The Finite Element Method, Van Nostrand, New York, 1972.

- [39] Rockey, K.C., Evans, H.R., Griffiths, D.W., Nethercot, D.A., The Finite Element Method, Crosby Lockwood Staples, London, 1975.
- [40] Rockey, K.C. at all, Advanced Applications of Finite Element Techniques to Structural Mechanics, University College, Cardiff, 1972.
- [41] SAP4, Program for linear static analysis, Berkley, 1974.
- [42] Hajdin N., časopis Izgradnja, posebno izdanje - čelične konstrukcije, Beograd, 1977.
- [43] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science, Mc.Grow-Hill, 1971.
- [44] Bradford M.A., Trahiri N.S., Reasearch Report No.353, University of Sydney, October 1971.
- [45] Southwell R.V. Proc.Roy.Soc., London, 1932.
- [46] Ćorić B., Studija o izbočavanju I nosača sa tankim vertikalnim limom, Za Republičku zajednicu nauke SR Srbije, Beograd, decembra 1979.
- [47] Ćorić B., Proračun bočnog izvijanja nosača nedeformabilnog poprečnog preseka primenom metode konačnih elemenata, Referat na simpozijumu o savremenim problemima nelinearne mehanike kontinuuma. Tara, februara, 1980.
- [48] Ćorić B., Postupak za proračun izbočavanja vertikalnih limova usled dejstva koncentrisanog opterećenja, Referat na simpozijumu o inovaciji jugoslovenskih propisa za betonske, metalne i spreg.konstrukcije, Trogir, maja 1980.
- [49] Ćorić B., Primena teorije plastičnosti pri proračunu izbočavanja vertikalnih limova sa vertikalnim ukrućenjima. Referat na prvom jugoslovenskom simpozijumu o teoriji plastičnosti. Plitvička Jezera, april 1981.
- [50] Hajdin N., Novija istraživanja stabilnosti limova i njihov uticaj na izmenu postojećih i budućih propisa, uvodni referat na 15.jugoslovenskom kongresu za rac. i prim. mehaniku, Kupari, juna 1981.
- [51] Ćorić, B., Roberts, T.M., Stabilnost tankozidnog nosača nedeformabilnog poprečnog preseka primenom metode konačnih elemenata, Referat na 15. jugoslovenskom kongresu za rac. i prim.mehaniku, Kupari, juna 1981.
- [52] Roberts T.M., Ćorić B., Collapse of plate girders subjected to localised edge loading, referat na 15.jugoslovenskom kongresu za rac. i prim.mehaniku, Kupari, juna 1981.
- [53] Ćorić B., Prilog analizi bočnog izvijanja nosača deformabilnog poprečnog preseka, Referat na simpozijum iz stabilnosti konstrukcije, Tara, februar 1982.godine.





