

Крста Врачарић, *

Стеван Марошан,**

ПОДЕЛА ДУЖИ У ДАТОЈ СРАЗМЕРИ ПРИМЕЊЕНА НА ДИГИТАЛИЗАЦИЈУ КООРДИНАТА ТАЧАКА

РЕЗИМЕ

У раду се предлаже примена математичких израза помоћу којих се дата дуж дели у датој сразмери. При томе се теоријски приказује да је у основи ових једноставних формула присутно условно изравнање.

ABSTRACT

An application of mathematical terms for dividing a given line at a given scale is suggested in the paper. Besides this, it is theoretically shown that a conditional adjustment is present in these simple formulas.

УВОД

У последње време веома је изражена потреба за дигитализацијом геодетских планова како би се велико богатство рада ранијих генерација геодета из графичког превело у дигитални облик. Највећа срећа би била када би се до координата тачака детаља долазило на основу података непосредног снимања детаља поларном или ортогоналном методом. И поред неоспорно најтачнијих координата детаљних тачака које би се добиле рачунским путем најчешће се до координата детаљних тачака долази путем дигитализације планова. Овај поступак добијања координата задовољавајући је ако је потребно добити подлоге за разна урбанистичко-техничка пројектовања. Међутим, за формирање дигиталног плана за потребе катастра једино се може прихватити рачунски поступак добијања координата.

У жељи да се остваре финансијски ефекти разни аутори нуде поступке и програме помоћу којих би се од координата тачака читаних у координатном систему екрана дошло до координата у државном

систему путем трансформација. При томе се за трансформације нуде разни поступци: афина трансформација, Хелмертова, пројективна, са колокацијом и др. Када је број ослоних тачака једнак неопходном броју тачака тада нема изравнања па се на ослоним тачкама не појављује никакво одступање. Ако је број ослоних тачака већи од броја који је неопходан, тада се за рачунање параметара трансформације примењује метода најмањих квадрата. Битно је код свих метода трансформације, да ослоне тачке, чије координате служе за рачунање параметара трансформације, после трансформације не задржавају своје координате него добијају нове координате које се разликују од задатих координата. Када се користи пројективна трансформација тада се могу за сваки квадрат мреже срачунати параметри трансформације тако да је број тачака (4) једнак неопходном броју па се на теменима квадрата неће појавити одступања.

Овде се предлаже поступак који у суштини не садржи поступак трансформације него се примењује поступак изравнања. Овај једноставан поступак читавања координата у поређењу са сложеним поступцима, даје, резултате који су идентични са најбољим резултатима код којих је збир квадрата одступања дигитализованих и задатих координата минимум.

* Проф. др -Институт за геодезију Грађевинског факултета
Универзитета, Београд, Булевар краља Александра бр. 73

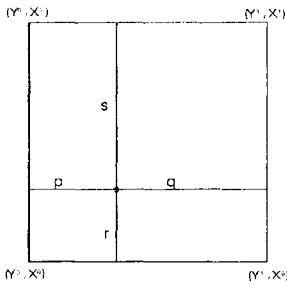
** Асист. мр -Институт за геодезију Грађевинског
факултета

ГРАФИЧКО ОЧИТАВАЊЕ КООРДИНАТА ПОМОЋУ РАЗМЕРНИКА

Координате неке тачке на плану са панетом квадратном координатном мрежом читавају се тако што се испртају странице квадрата па се затим читају растојања (p , q , r и s) од страница квадрата до тачке по линијама паралелним са страницама квадрата. Када се прочитана растојања помноже размером плана добијају се њихове вредности у природи (p , q , r и s). Јасно је да су вредности (p , q , r и s) оптерећене деформацијом хартије за коју се у оквиру дециметаског квадрата може претпоставити да има линеарну вредност како по правцу Y -осе тако и по правцу X -осе. За вредности растојања (p , q , r и s) може се поставити по један математички услов

$$\begin{aligned} f_Y &= Y_1 - Y_0 - (p + q) \\ f_X &= X_1 - X_0 - (r + s) \end{aligned} \quad (1)$$

Ради краткоће излагања разматраће се даље одређивање координата само по Y оси док се за X осу може применити аналогија.



Слика 1: Квадрат координатне мреже

Пошто је утврђено одступање f_Y могу се за прочитана растојања (p и q) одредити вредности поправака тако што ће се од-

ступање f_Y расподелити сразмерно прочитаним одсечцима (p и q)

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{(Y_1 - Y_0) - (p + q)}{p + q} \cdot p \\ v_q &= \frac{(Y_1 - Y_0) - (p + q)}{p + q} \cdot q \end{aligned} \quad (2)$$

Координате непознате тачке добиће се када се на координате почетка темена квадрата дода поправљена вредност

$$\begin{aligned} Y &= Y_0 + p + v_p = Y_0 + \\ &+ p + \frac{(Y_1 - Y_0) - (p + q)}{p + q} \cdot p \end{aligned} \quad (3)$$

После сређивања једначине (3) добија се једноставна формула за рачунање координата непознате тачке

$$\begin{aligned} Y &= \frac{Y_0 \cdot q + Y_1 \cdot p}{p + q} \\ X &= \frac{X_0 \cdot s + X_1 \cdot r}{r + s} \end{aligned} \quad (4)$$

која је из аналитичке геометрије позната као координате тачке која дели дуж у датој сразмери.

Вредности (p , q , r и s) са својим димензијама појављују се и у бројиоцу и у имениоцу па се димензије крате. Стога је свеједно у којим ће димензијама бити приказане (милиметри или метри или нешто друго).

Према томе, у формули (4) присутно је условно изравнање.

На потпуно исти начин може се одредити надморска висина неке тачке која се налази између две изохипсе или између две тачке са задатим висинама.

ДИГИТАЛИЗАЦИЈА ПО ЕКРАНУ ПС РАЧУНАРА

Координате тачака са планова по правилу се читавају у координатном систему екрана који може почети од пуле или се померањем цртеж може довести тако да координате почетка одговарају координатама које су на почетку листа назначене.

Планови се по правилу скенирају на се меморишу као *.tif* или *.jpg* фајлови а затим се "увлаче" у неки од *cad* алата као подлога. Подлога се може померати тако да координате почетка листа које се читају на екрану буду усаглашене са координатама које одговарају државном координатном систему. Подлога се такође може ротирати све док се дужа вивца листа подлоге не доведе у паралелан положај с координатним системом екрана и то са задовољавајућом тачношћу. Сада је могуће читавати координате тачака квадратне координатне мреже и детаљних тачака у координатном систему листа. Овако очитане координате биће блиске стварним координатама које ће се после обављених трансформација добити као дефинитивне координате.

За трансформацију координата очитаних са екрана постоји више поступака од којих зависи тачност дефинитивно добијених координата, односно колико ће дефинитивне координате одступати од стварних (идеалних) координата које нису познате. За сада је у употреби већи број поступака трансформације као што су: Хелмертова, афина, полиномска, пројективна и др. Сви поступци трансформација дају различите вредности коначних координата па се поставља питање који поступак даје најбоље резултате. Када је број ослоних тачака једнак неопходном броју тачака тада нема изравњања па се на ослоним тачкама не појављује никакво одступање. Ако је број ослоних тачака већи од броја који је неопходан, тада се за рачунање параметара трансформације примењује метода најмањих квадрата. Витно је код свих метода трансформације, да ослоне тачке, чије координате служе за рачунање параметара

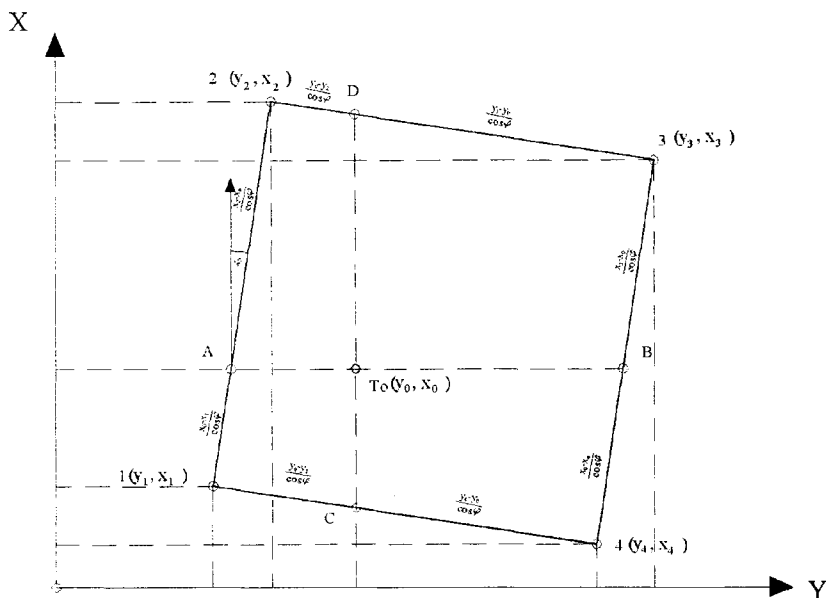
трансформације, после трансформације не задржавају своје координате него добијају нове координате које се разликују од датих. Када се користи пројективна трансформација тада се могу за сваки квадрат мреже срачунати параметри трансформације тако да је број тачака (4) једнак неопходном броју па се на теменима квадрата неће појавити одступања.

Овде предложени поступак у суштини не садржи поступак трансформације него се примењује поступак изравњања. Поступак изравњања примењује се посебно за сваки дециметарски квадрат.

Координате темена сваког дециметарског квадрата очитане су у координатном систему екрана који је претходно померен и уразмерен тако да је близак координатном систему цртежа. Ипак између координатног система скенираног листа и екрана постоји неко закошење под углом φ .

У даљим разматрањима координате тачака очитане са екрана биће означене малим словима док ће координате које се одnose на државни координатни систем бити означене великим словима. Приликом одређивања координата свака детаљна тачка унутар једног дециметарског квадрата биће посматрана као појединачна тачка независно од осталих детаљних тачака.

За сва четири темена квадрата и детаљну тачку очитане су координате по екрану. На основу њих могуће је срачунати координатне разлике између појединих темена квадрата као и између њих и саме детаљне тачке. Рачунању координата детаљне тачке у државном координатном систему претходи рачунање координата тачака А, В, С и D у државном координатном систему као тачака које се добијају у пресеку апсцисне и ординатне линије тачке То са правцима темена квадрата. За те потребе неопходно је, да се са координатних разлика које су добијене из очитаних координата тачака у систему екрана, одреде колике су вредности одсецака између тачака А, В, С и D и суседних темена.



Слика 2. Квадрат координатне мреже

Ради краткоће писања уведемо ознаке

$$\begin{aligned}
 dy_1 &= y_0 - y_1; & dx_1 &= x_0 - x_1 \\
 dy_2 &= y_0 - y_2; & dx_2 &= x_0 - x_2 \\
 dy_3 &= y_3 - y_0; & dx_3 &= x_3 - x_0 \\
 dy_4 &= y_4 - y_0; & dx_4 &= x_4 - x_0
 \end{aligned} \quad (5)$$

Растојања од тачака 1, 2, 3 и 4 до тачака А, В, С и D износе

$$\begin{aligned}
 \overline{A1} &= \frac{dx_1}{\cos\varphi}; & \overline{A2} &= \frac{dx_2}{\cos\varphi}; & \overline{B3} &= \frac{dx_3}{\cos\varphi}; & \overline{B4} &= \frac{dx_4}{\cos\varphi} \\
 \overline{C1} &= \frac{dy_1}{\cos\varphi}; & \overline{C4} &= \frac{dy_4}{\cos\varphi}; & \overline{D2} &= \frac{dy_2}{\cos\varphi}; & \overline{D3} &= \frac{dy_3}{\cos\varphi}
 \end{aligned} \quad (6)$$

Када се вредности из формуле (6) уврсте у изразе (4) добијају се координате тачака

$$\begin{aligned}
 Y_A &= \frac{Y_1 \cdot dx_2 + Y_2 \cdot dx_1}{dx_1 + dx_2}; \\
 Y_B &= \frac{Y_3 \cdot dx_4 + Y_4 \cdot dx_3}{dx_3 + dx_4}; \\
 X_C &= \frac{X_1 \cdot dy_4 + X_4 \cdot dy_1}{dx_1 + dx_2}; \\
 X_D &= \frac{X_2 \cdot dy_3 + X_3 \cdot dy_2}{dx_2 + dx_3};
 \end{aligned} \quad (7)$$

које ће бити интересантне за даља рачунања.

Због закошености система треба даље кориговати растојања од тачака А, В, С и D до тачке То која су добијена у систему екрана

$$\begin{aligned}
 dy'_1 &= dy_1 - dx_1 \cdot \tan \varphi; \\
 dx'_2 &= dx_2 - dy_2 \cdot \tan \varphi; \\
 dy'_3 &= dy_3 - dx_3 \cdot \tan \varphi \\
 dx'_4 &= dx_4 - dy_4 \cdot \tan \varphi
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

На крају се могу срачунати координате тражене тачке То у државном координатном систему, као

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{Y_A \cdot dy'_3 + Y_B \cdot dy'_1}{dy'_1 + dy'_3}; \\
 X &= \frac{X_C \cdot dx'_4 + X_D \cdot dx'_3}{dx'_3 + dx'_4}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

У случају да је лист плана приликом скенирања добро оријентисан, те да се утицај закошености листа (угла φ) може занемарити тада није потребно рачунати вредности (8) јер се вредности координата (9) могу срачунати по формулама

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{Y_A \cdot dy_3 + Y_B \cdot dy_1}{dy_1 + dy_3}; \\
 X &= \frac{X_C \cdot dx_4 + X_D \cdot dx_3}{dx_3 + dx_4}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Проблем закошености листа може се лако превазићи ако се непосредно очитане координате трансформишу тако да почетак листа задржи своје координате. Зато је претходно потребно одредити угао закошености листа на основу упоређења датих и очитаних координата крајњих дециметарских квадрата листа. За трансформацију би се користиле познате формуле

$$\begin{aligned}
 y'_i &= y_o + (y_i - y_o) \cdot \\
 &\cdot \cos \varphi + (x_i - x_o) \cdot \sin \varphi \\
 x'_i &= x_o + (x_i - x_o) \cdot \\
 &\cdot \cos \varphi - (y_i - y_o) \cdot \sin \varphi
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где су: (y_o и x_o) очитане координате почетка листа а φ угао закошености

Овако трансформисане координате ни-су међусобно постале зависне па се даљу обраду могу користити без резерве.

У неком дециметарском квадрату може се наћи једна или више полигонских или других тачака чије су координате познате. Дате координате тих тачака неће бити усаглашене са дигитализованим координатама околних детаљних тачака. Усаглашавање датих координата са координатама детаљних тачака добијених дигитализацијом може се постићи следећим поступком.

- да се за дате тачке такође одреде координате дигитализацијом,
- да се одреде вектори померања помоћу којих би се од дигитализованих координата датих тачака могло доћи до датих координата,
- и да се искористе нула вектори који се односе на темена квадрата.

Користећи ове податке, уз примену поступка који је приказан у раду [4], могу се одредити вектори померања тачака детаља тако да прате померања датих тачака.

Да би се резултати добијени предложеним поступком упоредили са резултатима који су добијени постојећим поступцима трансформације приступило се једном експерименту. Експеримент се састојао у следећем: задат је списак координата темена мреже квадрата плана димензије 900 x 600 mm. У сваком квадрату dato је по 9 тачака својим координатама. Ово су били улазни подаци да се тачке нанесу у размери 1:1000

на план плотером на папиру који може да упија воду. Затим је план премазан четком и водом и осушен тако да је при сушењу дошло до неравномерне деформације. Овако осушен план је скениран и "узучен" као подлога у *autocadu*. Подлога је затим уразмерена и ротирана тако да цртеж одговара размери и да је дужа ивица листа паралелна са Y-осом на рачунару.

Сада су за сва темена квадрата и све детаљне тачке очитане координате у систему рачунара. Све координате су унете у фајл из којег су коришћене за даљу обраду. Затим су били замољени аутори чији се комерцијални програми користи за дигитализацију координата тачака да обраде податке из фајла и дођу до коначних вредности координата детаљних тачака које би се даље користиле. Сви замољени аутори су се одазвали позиву и доставили су коначне вредности дигитализованих координата. Пошто су аутори овог рада располагали улазним (датим) координатама како темена квадрата тако и детаљних тачака било је могуће да се одреди степен слагања координата добијених различитим поступцима трансформације са задатим координатама. Као крајњи резултат истраживања добијене су средње грешке дигитализованих координата детаљних тачака. Добијени резултати приказани су у наредној табели

Модел трансформације	Средња грешка $m_y [m]$	Средња грешка $m_x [m]$
Предложени поступак (изравњањем)	0.09	0.08
Афина	0.29	0.23
Полиномска 3. степена	0.11	0.10
Пројективна	0.10	0.08
Колокација без филтрације	0.09	0.08
Колокација са филтрацијом	0.10	0.09

Интересантно је запажање да су се координате свих детаљних тачака добијене овде предложеним поступком биле идентичне са координатама добијеним колокацијом без филтрације. Уједно су добијене најмање вредности средњих грешака координата.

Осим вредности средњих грешака координата срачунале су и максималне разлике између координата добијених методом изравњања и осталих модела

Модел трансформације	$d_y [mas]$	$d_x [mas]$
Изравњање-афина	0.80	0.55
Изравњање-полиномска 3. степена	0.22	0.17
Изравњање-пројективна	0.08	0.14
Изравњање-колокација без филтрације	0.00	0.00
Изравњање-колокација са филтрацијом	0.09	0.15

Треба истаћи недостатке постојећих поступака превођења аналогних планова у дигитални облик. Сви постојећи поступци састоје се у томе да координате које се очитавају непосредно на рачунару одмах, према неким поступцима трансформације, преводе се у дигитални облик, а да се при томе не сачувају изворни подаци који би се касније могли трансформисати према неким новим за сада непознатим идејама и формулама. Боље би било када би се сачувале и изворно очитане координате.

ЗАКЉУЧАК

Прва корист која се може из овог рада добити јесте у томе што је показано да у основи врло сложених поступака дигитализације, као што је примена колокације, стоји врло једноставан поступак који се у колокацији не види. До овог закључка долази се на основу идентичности координата свих детаљних тачака на које је примењен предложени поступак и колокација без филтрације. Такође је у датом примеру показано да примена филтрације не побољшава резултате примене колокације него их, напротив, погоршава.

У свим уџбеницима где се говори о графичком очитвању координата тачака користе се гламазни изрази и спори поступци помоћу којих се коначно добијају координате тачака. Прво се говори о дефор-

мацији хартије на основу мерења све четири странице квадрата координатне мреже, затим о рачунању поправака прочитаних растојања (некада и према некоректним формулама) да би се на крају дошло до координата. Дакле аутори уџбеника убудуће треба да користе изразе изведене у овом раду помоћу којих се на једноставан

начин добијају графички прочитане координате тачака на плановима.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Крунислав Михаиловић, Крста Врачарић, Математички модел за дигитализацију тачака. Геодетска служба број 64, Београд 1992. године